ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ «ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ & ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ» ΜΕ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ ΣΤΗ «ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ & ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ»

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

ΘΕΜΑ:ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΟΥ ΣΤΑΘΕΡΟΥ ΓΑΜΟΥ (STABLE MATCHING AND THE MARRIAGE PROBLEM)

ΤΖΙΡΑΚΗ ΑΝΑΣΤΑΣΙΑ
ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: MXRH2022
ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: ΒΟΛΙΩΤΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ, ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ: ΒΟΛΙΩΤΗΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ, ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΠΙΤΤΗΣ ΝΙΚΗΤΑΣ, ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

ΣΤΕΦΑΝΑΔΗΣ ΧΡΙΣΤΟΔΟΥΛΟΣ, ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ

(Πειραιάς, Σεπτέμβριος 2022)

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα έρευνα παρουσιάζεται το πρόβλημα σταθερού γάμου (stable marriage problem) το οποίο διερευνά την εύρεση της κατάλληλης αντιστοίχισης μεταξύ ανδρών και γυναικών, λαμβάνοντας όμως υπόψη την λίστα προτιμήσεων που κάθε άτομο εκφράζει στα μέλη του αντίθετου φύλου. Η αντιστοίχιση αυτή γίνεται με κριτήριο την σταθερότητα της λύσης, δηλαδή για κάποιο ήδη αντιστοιχημένο ζευγάρι να μην υπάρχει το κίνητρο να φύγει από την υπάρχουσα επιλογή του. Συγχρόνως παρουσιάζονται πληροφορίες σχετικά με τον τερματισμό και την σταθερότητα της λύσης. Παράλληλα επισημαίνεται η μοναδικότητα της λύσης μαζί με την έλλειψη δικαιοσύνης της λύσης για τα μέλη εκείνου του συνόλου που δεν προτείνουν αλλά βρίσκονται στην θέση της αποδοχής των προτάσεων των μελών του άλλου συνόλου. Επιπρόσθετα, αναφέρονται σε θεωρητικό επίπεδο αλλά και μέσω παραδειγμάτων διάφορες παραλλαγές του αλγορίθμου των Gale & Shapley όπως οι μη πλήρεις λίστες προτίμησης, οι λίστες προτίμησης με ισότητες, ο συνδυασμός προβλημάτων με μη πλήρεις λίστες προτίμησης και λίστες ισότητας, το πρόβλημα αντιστοίχισης νοσοκομείων και ειδικευόμενων νοσοκομείων και το πρόβλημα αντιστοίχισης φοιτητών σε δωμάτια των δύο ατόμων.

ABSTRACT

In this investigation the Stable Marriage Problem is presented which seeks to find the appropriate match between men and women, but taking into account the preference list that each person express his preference to members of the opposite sex. This match is based on the stability of the solution, that is, an already matched couple does not have the incentive to leave its existing choice. At the same time, information on the termination and stability of the solution is presented. Furthermore, the uniqueness of the solution is highlighted along with the lack of justice of the solution to the members of the set I that they do not propose but are in place to accept the proposals of the members of the other set. Additionally, various variations of the Gale & Shapley algorithm are presented, such as non-full preference lists, preference lists, the combination of problems with non-complete preference lists and equality lists, hospital and residence problem and the student's pairing problem in two-person rooms.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Το πρόβλημα σταθερού γάμου (stable marriage problem) αναζητά μια αντιστοίχιση μεταξύ ανδρών και γυναικών, λαμβάνοντας υπόψη την λίστα προτιμήσεων που κάθε άτομο έχει στα μέλη του αντίθετου φύλου. Η αντιστοίχιση αυτή μεταξύ των μελών των δύο φύλων με βάση τις προτιμήσεις τους πρέπει να είναι σταθερή, το οποίο σημαίνει διαισθητικά ότι δεν υπάρχει κάποιο ζευγάρι άνδρα / γυναίκας που έχει κίνητρο να αποκλίνει από την αρχική επιλογή / αντιστοίχιση. Αυτό το πρόβλημα εισήχθη το 1962 στο άρθρο των Gale και Shapley, και έχει προσελκύσει ερευνητές σε πολλές ερευνητικές περιοχές, συμπεριλαμβανομένων των μαθηματικών, των οικονομικών, της θεωρίας παιγνίων, της πληροφορικής κ.λ.π.

Πιο συγκεκριμένα το πρόβλημα σταθερού γάμου αναφέρει δεδομένου ότι έχουμε Ν άνδρες και Ν γυναίκες, όπου κάθε άτομο έχει κατατάξει όλα τα μέλη του αντίθετου φύλου κατά σειρά προτίμησης, να παντρευτούν οι άνδρες και τις γυναίκες μαζί έτσι ώστε να μην υπάρχουν δύο άτομα του αντίθετου φύλου που θα προτιμούσαν ο ένας τον άλλο από τους σημερινούς συντρόφους τους. Εάν δεν υπάρχουν τέτοιοι άνθρωποι, όλοι οι γάμοι είναι "σταθεροί".

Ας μελετήσουμε το επόμενο παράδειγμα που αφορά δύο άνδρες μ1 και μ2 και δύο γυναίκες γ1 και γ2:

Έστω για τον άνδρα μ1 ότι η λίστα προτίμησης του είναι η {γ1, γ2}

Έστω για τον άνδρα μ2 ότι η λίστα προτίμησης του είναι η {γ1, γ2}

Έστω για την γυναίκα γ1 ότι η λίστα προτίμησης της είναι η {μ1, μ2}

Έστω για την γυναίκα γ2 ότι η λίστα προτίμησης της είναι η {μ1, μ2}

Στην περίπτωση που κάνουμε την ακόλουθη αντιστοίχιση { {μ1, γ2}, {μ1, γβ2} } θα έχουμε έναν μη σταθερό γάμο καθώς ο άνδρας μ1 και η γυναίκα γ1 προτιμούν ο ένας τον άλλον έναντι των συντρόφων τους. Όμως, το ταίριασμα / η αντιστοίχιση {μ1, γ1} και {μ2, γ2} είναι μια σταθερή λύση καθώς δεν υπάρχουν δύο άνθρωποι του αντίθετου φύλου που προτιμάει ο ένας τον άλλον έναντι των συντρόφων που έχουν τώρα.

Είναι πάντα δυνατό να δημιουργηθούν σταθεροί γάμοι από λίστες προτιμήσεων. Για παράδειγμα η λογική του αλγόριθμου Gale-Shapley (την οποία θα δούμε περισσότερο αναλυτικά σε επόμενη ενότητα) για να βρεθεί μια σταθερή αντιστοίχιση είναι η εξής: το σκεπτικό είναι για όλους τους ελεύθερους άνδρες να επαναλαμβάνετε η ίδια διαδικασία. Κάθε ελεύθερος άνδρας αντιστοιχείται στις γυναίκες σύμφωνα με την λίστα προτιμήσεων. Σε κάθε γυναίκα που αντιστοιχείται εξετάζεται αρχικά αν είναι ελεύθερη. Αν είναι ελεύθερη τότε πραγματοποιείται η αντιστοίχιση μεταξύ τους. Στην περίπτωση που δεν ελεύθερη τότε η γυναίκα επιλέγει να λέει είτε όχι σε αυτόν ή απορρίπτει την τρέχουσα δέσμευσή της σύμφωνα με τη λίστα προτιμήσεών της. Έτσι μια δέσμευση που γίνεται μία φορά μπορεί να σπάσει αν μια γυναίκα έχει καλύτερη επιλογή. Το άνω όριο της πολυπλοκότητας του αλγορίθμου Gale-Shapley είναι τάξης $O(n^2)$.

Κοντά στην λογική του προβλήματος σταθερού γάμου είναι και ο τομέας της θεωρίας παιγνίων ο οποίος αφορά την μελέτη μαθηματικών μοντέλων για τις στρατηγικές αλληλεπιδράσεις μεταξύ λογικών παικτών (Myerson, 1991). Μέσω της θεωρίας παιγνίων έχει διατυπωθεί η έννοια του σταθερού σημείου ισορροπίας κατά Nash (stable Nash equilibrium). Η λογική της σταθερότητας σε ένα πρόβλημα της θεωρίας παιγνίων μπορεί να κατανοηθεί μέσω μιας χημικής ισορροπίας. Δηλαδή, όπως η χημική ισορροπία είναι η κατάσταση στην οποία τόσο τα αντιδραστήρια όσο και τα προϊόντα δεν έχουν περαιτέρω τάση να αλλάζουν με το χρόνο, ένα σύνολο ενεργειών θεωρείται σταθερό όταν δεν υπάρχει παίκτης -ρια, στην περίπτωση των συνεργατικών παιχνιδιών, το σύνολο των παικτών να αλλάξει την δράση τους (τις επιλογές τους) αν είχαν την ευκαιρία. Ένα παράδειγμα που αφορά το σταθερό σημείο ισορροπίας είναι το ακόλουθο παιχνίδι δύο παικτών: Υποθέτουμε ότι και οι δύο παίκτες επιλέγουν ταυτόχρονα έναν ολόκληρο αριθμό από το 0 έως το 3. Και οι δύο παίκτες κερδίζουν τότε το ελάχιστο των δύο αριθμών σε σημεία. Επιπλέον, εάν ένας παίκτης επιλέξει μεγαλύτερο αριθμό από τον άλλο, τότε πρέπει να παραιτηθεί από δύο σημεία στον άλλο παίκτη. Αυτό το παιχνίδι έχει μια μοναδική ισορροπία Nash: Και οι δύο παίκτες επιλέγουν 0, οποιαδήποτε άλλη επιλογή στρατηγικών δίνει την δυνατότητα να βελτιωθούν εάν ένας από τους παίκτες μειώνει τον αριθμό του σε έναν λιγότερο από τον αριθμό του άλλου παίκτη. Στον πίνακα 1 προς τα αριστερά, για παράδειγμα, όταν κοιτάξουμε το πράσινο κελί, είναι στο ενδιαφέρον του παίκτη 1 να μετακινηθεί στο πορφυρό τετράγωνο επιλέγοντας έναν μικρότερο αριθμό και είναι στο ενδιαφέρον του παίκτη 2 να μετακινηθεί στο μπλε τετράγωνο επιλέγοντας ένα μικρότερο αριθμό. Στην περίπτωση που το παιχνίδι τροποποιηθεί έτσι ώστε οι δύο παίκτες να κερδίζουν το όνομα του ποσού εάν και οι δύο επιλέγουν τον ίδιο αριθμό και να κερδίζουν διαφορετικά τίποτα, τότε υπάρχουν 3 ισορροπίες Nash.

Πίνακας 1. Παίγνιο επιλογής αριθμών από το 0 – 3 για δύο παίκτες

	Ο παίκτης 2 επιλέγει '0'	**Ο παίκτης 2 επιλέγει '1'**	**Ο παίκτης 2 επιλέγει '2'**	**Ο παίκτης 2 επιλέγει '3'**
Ο παίκτης 1 επιλέγει '0'	*0, 0*	*2, -2*	*2, -2*	*2, -2*
Ο παίκτης 1 επιλέγει '1'	*-2, 2*	*1, 1*	*3, -1*	*3, -1*
Ο παίκτης 1 επιλέγει '2'	*-2, 2*	*-1, 3*	*2, 2*	*4, 0*
Ο παίκτης 1 επιλέγει '3'	*-2, 2*	*-1, 3*	*0, 4*	*3, 3*

Όσον αφορά την εφαρμογή του προβλήματος σταθερού γάμου στην καθημερινή ζωή οι εφαρμογές είναι αμέτρητες. Για παράδειγμα μια εφαρμογή του προβλήματος αυτού είναι η αναζήτηση δωρητών νεφρών από άτομα που είναι στη ζωή. Παλιότερα στις ΗΠΑ μόνο είκοσι άτομα ανά έτος δέχονταν μόσχευμα νεφρού από μη συγγενικό τους πρόσωπο το οποίο βρισκόταν στην ζωή. Λόγω του ότι υπήρχε ενδιαφέρον από ένα σημαντικό ποσοστό πολιτών να δωρίσουν ένα μόσχευμα σε έναν δικό τους άνθρωπο αλλά δεν ήταν δυνατόν να υλοποιηθεί αυτό λόγω τεχνικών προβλημάτων (δεν ταίριαζαν για παράδειγμα η ομάδα αίματος ή υπήρχε ιστολογική ασυμβατότητα) προέκυψε η ιδέα να δώσουν αυτοί οι άνθρωποι το μόσχευμα σε κάποιον που δεν ήταν συγγενής τους με την προϋπόθεση ότι ο συγγενής τους θα λάμβανε το απαραίτητο για τον ίδιο μόσχευμα. Η εφαρμογή του προβλήματος σταθερού γάμου στην αντίστοιχη ασθενών και δωρητών οργάνων αύξησε ραγδαία τον αριθμό μεταμοσχεύσεων νεφρών στις ΗΠΑ (“Organ Donation and Transplantation Statistics", 2022).

Ένα ακόμα πρόβλημα της καθημερινότητας που αφορά το πρόβλημα σταθερού γάμου είναι η ανάθεση μαθητών σε σχολεία της Νέα Υόρκης. Επιπλέον, η αντιστοίχιση (matching) αφορούσε και το πρόγραμμα απόφοιτων ιατρικών σχολών σε διάφορα νοσοκομεία των ΗΠΑ. Ένας παρόμοιος σχετικά αλγόριθμος σε σχέση με τον κλασσικό των Gale και Shapley είχε αρχικά υιοθετηθεί από το 1952 αλλά είχε παρατηρηθεί κλίμα δυσαρέσκειας όχι μόνο των αποφοίτων αλλά και των νοσοκομείων στα οποία είχαν αντιστοιχηθεί. Η εφαρμογή του αλγόριθμού των Gale και Shapley βελτίωσε τον βαθμό κατάλληλης αντιστοίχισης των δύο συνόλων (μαθητών με πανεπιστήμια και αποφοίτων με τα νοσοκομεία) με αποτέλεσμα να είναι ικανοποιημένες και οι δύο πλευρές και έτσι να υπάρχει μεγαλύτερη σταθερότητα στη λύση που δόθηκε ("NRMP", 2022).

Κεφάλαιο 1 – Κατηγορίες Προβλημάτων Αντιστοίχισης

Βασικά προβλήματα αντιστοίχισης είναι τα προβλήματα αντιστοίχισης δύο συνόλων, ενός συνόλου, κυκλικών προτιμήσεων, διχοτομικών προτιμήσεων, σταθερών αντιστοιχίσεων και στρατηγικής απόδειξης. Πιο συγκεκριμένα παραδείγματα προβλημάτων αντιστοίχισης διπλών συνόλων (two sided problems matching) και των αγορών είναι πάρα πολλά (Mindruta, Moeen & Agarwal, 2015). Για παράδειγμα οι άνδρες και οι γυναίκες επιλέγουν ανάμεσα σε μια ομάδα υποψηφίων για να βγουν ραντεβού και να παντρευτούν. Ένα άλλο παράδειγμα είναι οι εργαζόμενοι που επιλέγουν να εργαστούν για διαφορετικές επιχειρήσεις οι οποίες προσλαμβάνουν διαφορετικού τύπου / κατηγοριών εργαζόμενους ανάλογα με τις ανάγκες τους. Επιπλέον, οι πανεπιστημιακές σχολές σε πολλές ξένες χώρες αποφασίζουν ποιους φοιτητές να προσελκύσουν και να δεχτούν και παράλληλα οι φοιτητές υποβάλλουν αίτηση σε διαφορετικά κολλέγια. Ακόμα, ο προγραμματισμός μαθημάτων είναι ένα άλλο παράδειγμα όπου κάθε σπουδαστής μπορεί να θέλει να πάρει τρία ή τέσσερα μαθήματα και παράλληλα κάθε μάθημα από αυτά που επιλέγονται μπορεί να δεχτεί ένα συγκεκριμένο / σταθερό αριθμό ατόμων / σπουδαστών. Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα υπάρχουν αρκετά κοινά χαρακτηριστικά μεταξύ τους. Τα πιο σημαντικά είναι τρία. Το πρώτο χαρακτηριστικό είναι ότι είναι διπλής όψης, δηλαδή υπάρχουν δύο σύνολα: άνδρες και γυναίκες, εργαζόμενοι και επιχειρήσεις, φοιτητές και κολλέγια, φοιτητές και τάξεις. Το δεύτερο χαρακτηριστικό είναι ότι και τα δύο σύνολα έχουν έναν περιορισμό (ποσόστωση) στον αριθμό των ατόμων του άλλου συνόλου. Οι άντρες μπορούν να έχουν μόνο μία σύζυγο και κάθε γυναίκα παντρεύεται μόνο έναν σύζυγο. Οι μαθητές μπορούν να παρακολουθήσουν μόνο ένα πανεπιστήμιο και κάθε πανεπιστήμιο έχει μια φυσική ή διοικητική ικανότητα για το πόσους μαθητές να πάρουν. Τρίτον, τα άτομα του κάθε συνόλου συνήθως έχουν ετερογενείς προτιμήσεις έναντι των πιθανών συντρόφων τους. Οι άνδρες και οι γυναίκες έχουν διαφορετικά κριτήρια για τους συντρόφους τους στο γάμο. Ακόμα, στους φοιτητές μπορεί να αρέσουν διαφορετικά πανεπιστήμια και τα πανεπιστήμια μπορεί να θέλουν διαφορετικές συνθέσεις φοιτητών. Για παράδειγμα το Α πανεπιστήμιο μπορεί να θέλει φοιτητές προσανατολισμένους στην επιστήμη, αλλά το Β πανεπιστήμιο μπορεί να θέλει εκείνους που έχουν επιδείξει ηγετικές ικανότητες. Αυτές οι ομοιότητες μας οδηγούν σε μια γενική ρύθμιση αυτών των αντίστοιχων αγορών / προβλημάτων. Δηλώνουμε συμβολικά τα δύο σύνολα των προβλημάτων αντιστοίχισης διπλής όψης με M και W. Έστω, $m \in M$ και $w \in W$ ένα άτομο από κάθε πλευρά / σύνολο της αγοράς. Επιπλέον, κάθε άτομο έχει μια ατομική ποσόστωση q στον μέγιστο αριθμό συντρόφων / αντιστοιχιών που μπορεί να έχει. Εάν όλοι έχουν ποσόστωση 1 τότε έχουν έχουμε μια αγορά μια προς μια αντιστοίχισης όπως στο πρόβλημα του γάμου. Εάν όμως από την μια πλευρά της αγοράς όλοι έχουν ποσόστωση 1 και όλοι οι άλλοι στην άλλη πλευρά της αγοράς έχουν ποσόστωση μεγαλύτερη του 1 τότε έχουμε μια αγορά με αντιστοίχιση πολλών σε έναν, όπως ο προγραμματισμός των μαθημάτων. Τέλος, υπάρχει η αντιστοίχιση της αγοράς πολλών σε πολλούς, ένα παράδειγμα είναι πάλι ο προγραμματισμός πολλών φοιτητών σε πολλά μαθήματα. Επιπρόσθετα, κάθε άτομο έχει μια σχέση προτίμησης P με τα άτομα του άλλου συνόλου.

Όσον αφορά τα προβλήματα μονής αντιστοίχισης (one sided matching) ένα κλασσικό παράδειγμα είναι η αγορά σπιτιών (Amanatidis, 2021). Το πρόβλημα αυτό είναι μια απλή οικονομία ανταλλαγών στην οποία κάθε ένας από τους n παίκτες / άτομα κατέχουν ένα αδιαίρετο αγαθό (το οποίο αποκαλούν σπίτι) και έχουν προτιμήσεις σε όλα τα σπίτια της οικονομίας. Κάθε άτομο έχει χρήση μόνο για ένα σπίτι και το εμπόριο είναι εφικτό μόνο σε σπίτια (δηλαδή δεν υπάρχουν χρήματα στο πρόβλημα). Μια κατανομή μ σε αυτό το πλαίσιο είναι μια αντιστοίχιση σπιτιών και ατόμων, έτσι ώστε κάθε άτομο να λαμβάνει ένα και μοναδικό σπίτι. Μια ανταλλαγή σε αυτή την αγορά δεν χρειάζεται να είναι διμερής. Μια κατανομή μ βρίσκεται στον πυρήνα εάν κανένας συνασπισμός (συμπεριλαμβανομένων των συνασπισμών ενός παράγοντα) ατόμων δεν μπορεί να βελτιωθεί σε αυτό (με την έννοια ότι όλοι είναι ασθενώς καλύτεροι και τουλάχιστον ένας είναι αυστηρά καλύτερος) με την ανταλλαγή των σπιτιών τους.

Επιπλέον, υπάρχουν οι διχοτομημένες προτιμήσεις ατόμων όπως στην περίπτωση με την μεταμόσχευση νεφρού. Για παράδειγμα σε αυτή την περίπτωση οι ασθενείς που χρειάζονται μεταμόσχευση νεφρού μπορεί να έχουν δωρητές οργάνων οι οποίοι να είναι ασύμβατοι λόγω είτε διαφορετικής ομάδες αίματος ή ασυμβατότητας ιστών. Στην περίπτωση μη συμβατών ζευγαριών ασθενών – δωρητών μπορούν να λάβουν νεφρό με άλλους δωρητές / ζευγάρια μόνο όταν υπάρχει διπλή σύμπτωση από «θέλω». Η διπλή σύμπτωση από «θέλω» έχει σχέση με την ομάδα αίματος των δωρητών και των ασθενών έτσι ώστε να είναι επιτυχής η αντιστοίχιση (Roth, Sönmez, and Ünver. M. 2007).

Ένα άλλο πρόβλημα αντιστοίχισης είναι τα προβλήματα αντιστοίχισης με κυκλικές προτιμήσεις. Μάλιστα οι κυκλικές αυτές προτιμήσεις μπορεί να αφορούν παραπάνω από δύο σύνολα. Για παράδειγμα σε μια τρισδιάστατη (3D) αντιστοίχιση δίνονται τρία σύνολα A, B και C, που αντιπροσωπεύουν για παράδειγμα χρήστες, προελεύσεις δεδομένων και διακομιστές ή όπως αναφέρεται συνήθως στη βιβλιογραφία, άνδρες, γυναίκες και σκύλοι. Κάθε άτομο / αντικείμενο / ζώο στα A, B και Γ δηλώνει ένα υποσύνολο των παραγόντων σε B, C και A, αντίστοιχα, αποδεκτό. Μια αντιστοιχία M αποτελείται από μια (α, β, γ) ∈ A × B × C τριάδα έτσι ώστε ο (α) να βρίσκει τον b αποδεκτό, ο b να βρίσκει τον c αποδεκτό και τέλος ο c να βρίσκει τον α αποδεκτό. Επιπλέον, κάθε στοιχείο (π.χ άτομο, ζώο, αντικείμενο) εμφανίζεται το πολύ σε μια τριάδα στο M (Cseh, & Peters, 2021).

Ένα άλλο σημαντικό θέμα στα παραπάνω προβλήματα είναι η σταθερότητα (stability) τους και η στρατηγική απόδειξη τους (strategy proofness). Τα χαρακτηριστικά αυτά παρατηρούνται σε μια σειρά από αγορές εργασίας και προγράμματα εισδοχής στα σχολεία, μπορούν να θεωρηθούν ως αγορές αντιστοίχισης διπλής όψης, και χρησιμοποιούν κεντρικούς μηχανισμούς για να αντιστοιχηθούν με παράγοντες και στις δύο πλευρές της αγοράς (ή άτομα στη μία πλευρά της αγοράς και αντικείμενα στην άλλη πλευρά της αγοράς). Ένα σημαντικό κριτήριο για τον σχεδιασμό τέτοιων μηχανισμών είναι η σταθερότητα (Roth, 2002), που απαιτεί να μην υπάρχουν δύο παράγοντες, ένας από κάθε πλευρά της αγοράς που να προτιμούν ο ένας τον άλλον έναντι των εταίρων με τους οποίους ταιριάζουν. Μια άλλη ιδιαίτερα επιθυμητή ιδιότητα είναι η στρατηγική-απόδειξη, η οποία μειώνει / μαλακώνει τα κίνητρα των πρακτόρων να συμπεριφέρονται στρατηγικά. Επιπλέον, πολλά εργοστάσια εκκαθάρισης έχουν υιοθετήσει τα τελευταία χρόνια τον αξιοσημείωτο μηχανισμό αναβαλλόμενης αποδοχής (DA) (Gale and Shapley, 1962), ο οποίος βρίσκει μια σταθερή αντιστοιχία και έχει την ιδιότητα της στρατηγικής-απόδειξη για τη μία πλευρά της αγοράς, δηλαδή την πρόταση πλευράς στον αλγόριθμο DA (Dubins και Freedman, 1981). Είναι ενδιαφέρον ότι, αν και οι συμμετέχοντες ενημερώνονται ότι είναι προς το συμφέρον τους να δηλώσουν τις πραγματικές προτιμήσεις τους, εμπειρικά στοιχεία δείχνουν ότι ένα σημαντικό μέρος αυτών προσπαθεί να παραποιήσει στρατηγικά τις πραγματικές προτιμήσεις τους (Hassidim et al., 2017). Αυτό παρατηρήθηκε σε διάφορες έρευνες (Rees-Jones, 2016).

Κεφάλαιο 2 – Ο αλγόριθμος των Gale και Shapley

2.1 Ορισμός προβλήματος & Εφαρμογή

Υποθέτουμε ότι έχουμε Ν άνδρες και Ν γυναίκες. Κάθε άνδρας (Α) έχει ένα σύνολο διατάξιμων προτιμήσεων στο σύνολο των γυναικών και αντίστοιχα οι γυναίκες (Γ) έχουν ένα παρόμοιο σύνολο προτιμήσεων για τους άνδρες. Ο συμβολισμός p < a q εάν για το άτομο α αν η επιλογή / προτίμηση του p είναι λιγότερο προτιμητέα έναντι της επιλογής / προτίμησης q. Επιπλέον, για να μην είναι σύνθετο το πρόβλημα υποθέτουμε ότι δεν υπάρχουν ίδιου βαθμού προτιμήσεις, δηλαδή δεν υπάρχουν ίσες προτιμήσεις για τους άνδρες και για τις γυναίκες. Ο αλγόριθμος που δίνει την λύση στο πρόβλημα του ταιριάσματος είναι ο παρακάτω:

Αλγόριθμός των Gale & Shapley: οι άνδρες προτείνουν και οι γυναίκες αποδέχονται ή απορρίπτουν

Βήμα 1ο: όλοι οι άνδρες και οι γυναίκες είναι ελεύθεροι

Βήμα 2ο: όσο υπάρχει κάποιος άνδρας (Α) που είναι ελεύθερος κάνε το παρακάτω

3: Γ=η πρώτη γυναίκα στην λίστα του (Α) στην οποία δεν έχει ακόμα προτείνει

4: **Εάν** η Γ είναι ελεύθερη τότε κάνε το παρακάτω

5: κάνε ζευγάρι τους (Α;Γ)

6: διαφορετικά αν ο (Α) είναι καλύτερος για την Γ σε σχέση με τον τρέχοντα σύντροφο (Α') κάνε

7: κάνε ζευγάρι τους (Α;Γ) και ελευθέρωσε τον (Α')

8: διαφορετικά

9: η Γ απορρίπτει τον Α και ο Α είναι ελεύθερος reject m and m is free.

10: τέλος του **εάν**

11: τέλος του βήματος 2

12: βγάλε τα παραγόμενα ζευγάρια

2.1.1 Παράδειγμα εφαρμογής

Στο παράδειγμα αυτό υπάρχουν 4 άνδρες (N = 4) και 4 γυναίκες. Οι προτιμήσεις των δύο φύλων παρουσιάζονται παρακάτω:

(a) **Προτιμήσεις ανδρών** (N = 4)

1 2 4 1 3

2 3 1 4 2

3 2 3 1 4

4 4 1 3 2

(b) Προτιμήσεις γυναικών (N = 4)

1 2 1 4 3

2 4 3 1 2

3 1 4 3 2

4 2 1 4 3

Πρώτος γύρος

ο άνδρας με τον αριθμό 1 κάνει πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 2 η οποία εκείνη την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση εκείνη τη στιγμή (ο αλγόριθμος ξεκίνησε αυθαίρετα από τον άνδρα με αριθμό 1).

Άνδρες	Προτιμήσεις				Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	4	1	3	**1**	2	1	4	3
2	3	1	4	2	**2**	4	3	1	2

3	2	3	1	4	**3**	1	4	3	2
4	4	1	3	2	**4**	2	1	4	3

Οπότε το πρώτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (1, 2).

Δεύτερος γύρος

ο άνδρας με τον αριθμό 2 κάνει πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 3 η οποία εκείνη την αποδέχεται καθώς ο άνδρας με τον αριθμό 1 είναι δεσμευμένος και ο άνδρας με τον αριθμό 4 δεν έχει κάνει ακόμα πρόταση.

Άνδρες	Προτιμήσεις				Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	4	1	3	**1**	2	1	4	3
2	3	1	4	2	**2**	4	3	1	2
3	2	3	1	4	**3**	1	4	3	2
4	4	1	3	2	**4**	2	1	4	3

Οπότε το δεύτερο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (2, 3) και έχει δημιουργηθεί από πριν το (1, 2).

Τρίτος γύρος

ο άνδρας με τον αριθμό 3 κάνει πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 2 η οποία εκείνη την αποδέχεται καθώς ο άνδρας με τον αριθμό 1 είναι σε χαμηλότερη προτίμηση από τον 3 και ο 4 δεν έχει κάνει ακόμα πρόταση.

Άνδρες	Προτιμήσεις				Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	4	1	3	**1**	2	1	4	3
2	3	1	4	2	**2**	4	3	1	2
3	2	3	1	4	**3**	1	4	3	2
4	4	1	3	2	**4**	2	1	4	3

Οπότε το επόμενο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (4, 2) και έχει δημιουργηθεί από πριν το ζευγάρι (2, 3), το (1, 2) σβήστηκε.

Τέταρτος γύρος

ο άνδρας με τον αριθμό 1 κάνει πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 2 η οποία εκείνη δεν την αποδέχεται καθώς ο άνδρας με τον αριθμό 3 της έχει ήδη κάνει πρόταση και είναι υψηλότερα στην λίστα προτίμησης. Στη συνέχεια ο άνδρας με τον αριθμό 1 κάνει πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 4 η οποία εκείνη την αποδέχεται.

Άνδρες	Προτιμήσεις				Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	4	1	3	**1**	2	1	4	3
2	3	1	4	2	**2**	4	3	1	2
3	2	3	1	4	**3**	1	4	3	2
4	4	1	3	2	**4**	2	1	4	3

Οπότε το επόμενο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (1, 4) και έχουν δημιουργηθεί από πριν τα ζευγάρια (2, 3) και (4, 2)

Πέμπτος γύρος

ο άνδρας με τον αριθμό 4 κάνει πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 4 η οποία εκείνη δεν την αποδέχεται καθώς ο άνδρας με τον αριθμό 1 είναι ήδη δεσμευμένος με εκείνη. Οπότε, κάνει στη συνέχει πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 1.

Άνδρες	Προτιμήσεις				Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	4	1	3	**1**	2	1	4	3
2	3	1	4	2	**2**	4	3	1	2
3	2	3	1	4	**3**	1	4	3	2
4	4	1	3	2	**4**	2	1	4	3

Οπότε το επόμενο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (4, 1) και έχουν δημιουργηθεί από πριν τα ζευγάρια (2, 3), (1, 4) και (4, 2). Τα ζευγάρια που έχουν προκύψει πλέον είναι τα (4, 1) (2, 3), (1, 4) και (3, 2).

2.2 Τερματισμός και σταθερότητα

Για να παρουσιάσουμε την έννοια της σταθερότητας της λύσης παραθέτουμε αρχικά δύο ορισμούς. Αυτοί είναι οι παρακάτω:

Ορισμός 1

Ζευγάρι μπλοκαρίσματος – Blocking pair

Δεδομένου του συνόλου ζευγαρώματος Μ ένα ζευγάρι (Α, Γ) είναι ένα ζευγάρι μπλοκαρίσματος για τον Α εάν το ζευγάρι (Α, Γ) δεν ανήκει στο σύνολο Μ και ο Α προτιμάει την Γ' σε σχέση με την τρέχουσα σύντροφο του στο σύνολο Μ (ή ο Α δεν έχει ζευγαρωθεί στο σύνολο Μ) και η Γ προτιμάει τον Α' έναντι του τρέχοντα συντρόφου της στο σύνολο Μ (ή η Γ δεν έχει ζευγαρωθεί στο σύνολο Μ)

Στο παράδειγμα που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα το ζευγάρι (1, 4) είναι ένα ζευγάρι μπλοκαρίσματος καθώς ο άνδρας με τον αριθμό 1 θα ήθελε να ζευγαρώσει με την γυναίκα με τον αριθμό 2 και η γυναίκα με τον αριθμό 4 θα ήθελε να ζευγαρώσει με τον άνδρα με τον αριθμό 2. Οπότε, και οι δύο θέλουν να ζευγαρώσουν μεταξύ τους αλλά με άλλα άτομα.

Ορισμός 2

Σταθερή αντιστοίχιση (Stable Matching)

Ένα σύνολο αντιστοίχισης Μ είναι σταθερό εάν δεν υπάρχει κανένα ζευγάρι μπλοκαρίσματος για το Μ

Στο παράδειγμα που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη ενότητα βρέθηκε η λύση (4, 1) (2, 3), (1, 4) και (3, 2). Η λύση αυτή είναι σταθερή. Όμως, αν είχαμε την λύση (1, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 4) το ζευγάρι (1, 4) είναι ζευγάρι μπλοκαρίσματος όπως είδαμε πιο πριν και η λύση δεν είναι σταθερή.

Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι ο αλγόριθμος δεν είναι ντετερμινιστικός καθώς κάποιος μπορεί να επιλέξει ελεύθερα άνδρες με οποιαδήποτε σειρά. Μάλιστα, θα μπορούσαν ταυτόχρονα να επιλέξουν όλοι οι άνδρες σε κάθε γύρο. Όμως, δεν είναι προφανές ότι ο αλγόριθμος θα τερματίσει και ότι θα καταλήξει σε σταθερή αντιστοίχιση. Βέβαια δεν είναι πολύ δύσκολο να καταλήξει σε ένα τέλος καθώς ένας άνδρας δεν προτείνει σε μια γυναίκα παραπάνω από μια αφορά καθώς κατεβαίνει προς τα κάτω την λίστα του.

Θα αποδείξουμε ότι ο αλγόριθμος που παρουσιάστηκε παραπάνω ζευγαρώνει όλα τα άτομα και καταλήγει σε μια σταθερή αντιστοίχιση.

Ισχυρισμός

Στο τέλος του αλγόριθμου όλα τα άτομα έχουν αντιστοιχηθεί

Απόδειξη

Πρώτα πρέπει να αναφερθεί η ακόλουθη παρατήρηση: αν μια γυναίκα γίνει ταίρι με κάποιον άνδρα θα παραμείνει ταίρι του και ο σύντροφος της μπορεί μόνο να βελτιωθεί μονότονα.

Για να δούμε γιατί κάθε άνδρας αντιστοιχείται σε μια γυναίκα ας υποθέσουμε ότι όλες οι γυναίκες τον απορρίπτουν. Εάν μια γυναίκα (Γ) απορρίψει τον (Α) τότε η (Γ) ζευγαρώνεται με κάποιον άλλο οι οποίοι στο τέλος θα μείνουν ζευγάρι. Αλλά υπάρχουν N άνδρες και N γυναίκες το οποίο σημαίνει πως δεν μπορούν όλες οι γυναίκες να απορρίψουν τον Α καθώς θα πρέπει ζευγαρωθούν, αντιστοιχηθούν με N – 1 άνδρες. Αυτό δείχνει ότι όλοι οι άνδρες αντιστοιχούνται και επομένως όλες οι γυναίκες αντιστοιχούνται με τους άνδρες.

Λήμμα

Το σύνολο αντιστοίχισης Μ από τον αλγόριθμο που παρουσιάστηκε είναι σταθερό

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι το ζευγάρι (Α, Γ) είναι ένα ζευγάρι μπλοκαρίσματος για το σύνολο Μ. Καθώς ο (Α) προτείνει με φθίνουσα σειρά προτίμησης με βάση την λίστα του, ο Α προτείνει στην Γ προτού προτείνει στην $P_{M(A)}$ ($P_{M(A)}$ είναι ο σύντροφος του Α στο σύνολο αντιστοίχισης Μ). Αλλά η Γ απέρριψε τον Α το οποίο σημαίνει ότι η Γ είχε καλύτερο σύντροφο έναντι του Α την στιγμή της απόρριψης. Καθώς ο βαθμός προτίμησης της Γ μπορεί μόνο να βελτιωθεί η Γ έχει καλύτερο σύντροφο από τον Α στο τέλος του αλγόριθμου, οπότε $A <_{Γ} P_{M(Γ)}$. Οπότε, το ζευγάρι (Α, Γ) δεν είναι ένα ζευγάρι μπλοκαρίσματος για το σύνολο Μ.

Παρόλο που ο αλγόριθμος φαίνεται να εννοεί ότι οι γυναίκες απορρίπτουν η αντιστοίχιση γίνεται περισσότερο με βάση τις προτιμήσεις των ανδρών και καταλήγει στην βέλτιστη αντιστοίχιση με βάση τις προτιμήσεις των ανδρών και όχι των γυναικών.

Θεώρημα

Στον αλγόριθμο αντιστοίχισης κάθε άνδρας αντιστοιχείται στην γυναίκα με την καλύτερη ιεράρχηση με την οποία θα μπορούσε να αντιστοιχηθεί σε μια σταθερή αντιστοίχιση και κάθε γυναίκα αντιστοιχείται στον λιγότερο προτιμητέο άνδρα με τον οποίο θα μπορούσε να αντιστοιχηθεί σε μια οποιαδήποτε σταθερή αντιστοίχιση.

Απόδειξη

Για κάθε άνδρα Α ορίζουμε το καλύτερο (Α) να είναι η γυναίκα με την καλύτερη ιεράρχηση με την οποία ο Α μπορεί να αντιστοιχηθεί σε κάποια σταθερή αντιστοίχιση. Ισχυριζόμαστε ότι οποιοδήποτε τρέξιμο του αλγόριθμου το καλύτερο(Α) θα είναι ο σύντροφος Γ.

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με την εις άτοπο απαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι ένα τρέξιμο του αλγόριθμου έβαζε ως πρώτο το ζευγάρι (Α, Γ) το οποίο απορρίφθηκε και Γ = καλύτερο (Α). Αυτό σημαίνει ότι η Γ απορρίπτει τον Α επειδή υπάρχει κάποιος άνδρας Α’ με Α$<_{Γ}$Α’ και η Γ έχει ήδη αντιστοιχηθεί στον Α’ όταν ο Α πρότεινε στην Γ. Έστω S μια σταθερή αντιστοίχιση με (Α, Γ) να ανήκει στο S, εξ ορισμού το καλύτερο (Α) υπάρχει σε μια σταθερή αντιστοίχιση. Έστω Γ’ ο σύντροφος του Α’ στο S. Παρατηρούμε ότι Γ’ προτιμάει τον Α’ έναντι του Α, διαφορετικά το ζευγάρι (Α’, Γ) είναι ένα ζευγάρι μπλοκαρίσματος για το S. Αλλά όταν ο Α είχε απορριφθεί από την Γ κατά τη διάρκεια του αλγόριθμου ο Α’ είχε αντιστοιχηθεί στην Γ’. Αυτό σημαίνει ότι κανένας άνδρας Α’ δεν έχει ήδη σκεφτεί την Γ’ πριν την Γ και πρέπει να έχει απορριφθεί. Επομένως, ο Α’ απορρίφθηκε από την Γ’ πριν η Γ απορρίψει τον Α. Να σημειωθεί ότι το καλύτερο (Α’) είναι τουλάχιστον καλό όπως της Γ’ και επομένως αν η Γ’ απέρριψε τον Α’ πριν (Α, Γ) είναι καλύτερο (Α’) (το οποίο θα μπορούσε να είναι Γ’) τότε πρέπει να έχει απορρίψει τον Α’ πριν ο Α’ είχε προτείνει στην Γ. Αυτό σημαίνει (Α, Γ = καλύτερο(Α)) δεν είναι το πρώτο ζευγάρι που απορρίπτεται στην εκτέλεση του αλγορίθμου. Αυτό καταλήγει σε αντίφαση. Επομένως, (Α, καλύτερο(Α)) είναι το αποτέλεσμα οποιασδήποτε εκτέλεσης του αλγορίθμου.

Θεώρημα

Η σταθερή αντιστοίχιση υπάρχει και οι κόμβοι διαμερίζονται σε δύο σύνολα, το ένα σετ αφορά εκείνους τους κόμβους που παρουσιάζονται σε όλες τις σταθερές αντιστοιχήσεις και το άλλο σύνολο περιλαμβάνει εκείνους που είναι μοναδικοί σε κάθε σταθερή αντιστοίχιση.

2.3 Μοναδικότητα & Ιδιότητες δικαιοσύνης παραγόμενου ταιριάσματος

Σχετικά με την μοναδικότητα της λύσης που προσφέρει ο αλγόριθμός αυτή είναι μοναδική. Δηλαδή, δεν υπάρχει πάνω από μια λύση αν ξεκινήσουμε από άλλον άνδρα. Ας υποθέσουμε ότι M_o ότι είναι ένα σύνολο βέλτιστης αντιστοίχισης για τους άνδρες. Έστω Γ μια γυναίκα και έστω ότι το ζευγάρι (Α, Γ) ανήκει στο Μ'. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια άλλη σταθερή αντιστοίχιση έτσι ώστε το ζευγάρι (Α', Γ) να ανήκει στο Μ και η Γ προτιμάει τον Α έναντι του Α'. Να τονιστεί ότι Γ=καλύτερο(Α) και επομένως αν το ζευγάρι (Α, Γ') ανήκει στο Μ γνωρίζουμε ότι ο Α προτιμάει την Γ έναντι της Γ'. Αλλά τότε το ζευγάρι (Α, Γ) είναι ένα ζευγάρι μπλοκαρίσματος του Μ.

Το αποτέλεσμα της μοναδικότητας της λύσης προσφέρει την αίσθηση δικαιοσύνης στο σύνολο των ατόμων που προτείνουν, στη συγκεκριμένη περίπτωση στους άνδρες, καθώς δεν μπορεί να επωφεληθεί κάποιος άνδρας αν εσκεμμένα ξεκινήσει κάποιος να εκτελεί τον αλγόριθμο από κάποιον συγκεκριμένο. Όμως, η λύση δεν είναι δίκαιη για το σύνολο που δεν προτείνει, δηλαδή για τις γυναίκες καθώς εκείνες επιλέγουν από ένα μικρότερο σύνολο έναντι των ανδρών. Ας υποθέσουμε ότι λύναμε το προηγούμενο πρόβλημα από την πλευρά των γυναικών.

2.3.1 Παράδειγμα Εφαρμογής

Πρώτος γύρος

Η γυναίκα με τον αριθμό 1 κάνει πρόταση στον άνδρα με τον αριθμό 2 την οποία εκείνος την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση εκείνη τη στιγμή (ο αλγόριθμος ξεκίνησε αυθαίρετα από την γυναίκα με τον αριθμό 1).

Άνδρες	Προτιμήσεις				Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	4	1	3	**1**	2	1	4	3
2	3	1	4	2	**2**	4	3	1	2

3	2	3	1	4	**3**	1	4	3	2
4	4	1	3	2	**4**	2	1	4	3

Οπότε το πρώτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (2, 1).

Δεύτερος γύρος

Η γυναίκα με τον αριθμό 2 κάνει πρόταση στον άνδρα με τον αριθμό 4 την οποία εκείνος την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση εκείνη τη στιγμή.

Άνδρες	Προτιμήσεις				Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	4	1	3	**1**	2	1	4	3
2	3	1	4	2	**2**	4	3	1	2
3	2	3	1	4	**3**	1	4	3	2
4	4	1	3	2	**4**	2	1	4	3

Οπότε το επόμενο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (4,2) και από πριν έχουμε το (2, 1).

Τρίτος γύρος

Η γυναίκα με τον αριθμό 3 κάνει πρόταση στον άνδρα με τον αριθμό 1 την οποία εκείνος την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση εκείνη τη στιγμή.

Άνδρες	Προτιμήσεις				Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	4	1	3	**1**	2	1	4	3
2	3	1	4	2	**2**	4	3	1	2
3	2	3	1	4	**3**	1	4	3	2
4	4	1	3	2	**4**	2	1	4	3

Οπότε το επόμενο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (1, 3) και από πριν έχουμε (4,2) και (2, 1).

Τέταρτος γύρος

Η γυναίκα με τον αριθμό 4 κάνει πρόταση στον άνδρα με τον αριθμό 2 την οποία εκείνος δεν την αποδέχεται καθώς η γυναίκα 1 είναι σε καλύτερη προτίμηση για τον άνδρα 2 έναντι της γυναίκας με τον αριθμό 4. Οπότε, η γυναίκα με τον αριθμό 4 προτείνει στον άνδρα με τον αριθμό 1 την οποία εκείνος αποδέχεται καθώς έχει υψηλότερη προτίμηση έναντι της γυναίκας με τον αριθμό 3.

Άνδρες	Προτιμήσεις				Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	4	1	3	**1**	2	1	4	3
2	3	1	4	2	**2**	4	3	1	2
3	2	3	1	4	**3**	1	4	3	2
4	4	1	3	2	**4**	2	1	4	3

Οπότε το επόμενο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (1, 4) και από πριν έχουμε (4,2) και (2, 1).

Πέμπτος γύρος

Η γυναίκα με τον αριθμό 3 κάνει πρόταση στον άνδρα με τον αριθμό 1 την οποία εκείνος δεν την αποδέχεται καθώς η γυναίκα με τον αριθμό 3 είναι χαμηλότερης προτίμησης έναντι της γυναίκας με τον αριθμό 5. Στη συνέχεια κάνει πρόταση στον άνδρα με τον αριθμό 4 την οποία εκείνος αποδέχεται έναντι της γυναίκας 2.

Άνδρες	Προτιμήσεις				Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	4	1	3	**1**	2	1	4	3
2	3	1	4	2	**2**	4	3	1	2
3	2	3	1	4	**3**	1	4	3	2
4	4	1	3	2	**4**	2	1	4	3

Οπότε το επόμενο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (4, 3) και από πριν έχουμε (1,4) και (2, 1).

Έκτος γύρος

Η γυναίκα με τον αριθμό 2 κάνει πρόταση στον άνδρα με τον αριθμό 4 την οποία εκείνος δεν την αποδέχεται καθώς η γυναίκα με τον αριθμό 2 είναι χαμηλότερης προτίμησης έναντι της γυναίκας με τον αριθμό 3. Στη συνέχεια κάνει πρόταση στον άνδρα με τον αριθμό 3 η οποία εκείνος.

Άνδρες	Προτιμήσεις				Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	4	1	3	**1**	2	1	4	3
2	3	1	4	2	**2**	4	3	1	2
3	2	3	1	4	**3**	1	4	3	2
4	4	1	3	2	**4**	2	1	4	3

Οπότε το επόμενο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (3,2) και από πριν έχουμε (1,4), (4, 3) και (2, 1).

Παρατηρούμε ότι η λύση αυτή από την πλευρά των γυναικών είναι διαφορετική έναντι της λύσης που δόθηκε από την πλευρά των ανδρών (4, 1) (2, 3), (1, 4) και (3, 2).

Κεφάλαιο 3 – Παραλλαγές του αλγορίθμου των Gale και Shapley

3.1 Μη πλήρεις λίστες προτίμησης

Μια περίπτωση / γενίκευση του αλγορίθμου των Gale & Shapley είναι η περίπτωση εκείνη που η λίστα προτιμήσεων του ενός ή και των δύο συνόλων δεν είναι πλήρεις. Σε αυτή την περίπτωση τουλάχιστον ένας άνδρας (Α) ή μια γυναίκα (Γ) δεν εμφανίζει κάποιου είδους προτίμηση για κάποιο άλλο μέλος της άλλης ομάδας / του συνόλου. Πιο συγκεκριμένα θεωρούμε ότι ένα άτομο p είναι αποδεκτό από το άτομο q αν το άτομο p εμφανίζεται στην λίστα προτιμήσεων του ατόμου q. Διαφορετικά αν δεν εμφανίζεται στην λίστα προτιμήσεων τότε το άτομο p δεν είναι αποδεκτό από το άτομο q. Ένα ταίριασμα / ζευγάρωμα στο σύνολο Μ των αντιστοιχίσεων είναι μια προς μια αντιστοίχιση μεταξύ ενός υποσυνόλου των ανδρών με ένα υποσύνολο των γυναικών τέτοιο ώστε κάθε δυνατό ζευγάρι (Α, Γ) που ανήκει στο σύνολο Μ σημαίνει ότι ο Α και η Γ είναι αποδεκτοί ο ένας στον άλλον. Ο ορισμός πλέον της σταθερότητας στην παραλλαγή του αλγορίθμου που εξετάζουμε πλέον είναι ο εξής: το σύνολο αντιστοίχισης Μ είναι σταθερό εάν δεν υπάρχει ζευγάρι άνδρα και γυναίκας (Α, Γ) από τους οποίους ο καθένας είναι είτε είναι μη αντιστοιχισμένος στο σύνολο Μ και ο άλλος είναι αποδεκτός ή προτιμάει τον τρέχοντα σύντροφο του στο σύνολο Μ. Από τον ορισμό αυτόν απορρέει χωρίς απώλεια της γενίκευσης ότι το μέλος p είναι αποδεκτός από τον q αν και μόνο αν ο q είναι αποδεκτός από τον p. Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι όλα τα σταθερά ζευγαρώματα (αντιστοιχήσεις) που ανήκουν στο σύνολο των ζευγαρωμάτων μη πλήρης λίστας προτιμήσεων έχουν το ίδιο μέγεθος και περιλαμβάνουν ακριβώς τους ίδιους άνδρες και γυναίκες. Ο συγκεκριμένος αλγόριθμός επίλυσης είναι σημαντικός σε προβλήματα όπως στην αντιστοίχιση απόφοιτων ιατρικών σχολών σε νοσοκομεία (Manlove, Irving, Iwama, Miyazaki & Morita, 2002). Στο συγκεκριμένο πρόβλημα υπάρχει ένας αριθμός αποφοίτων και ένας αριθμός νοσοκομείων. Κάθε απόφοιτος αναζητά μια θέση σε κάποιο από τα νοσοκομεία με κάθε νοσοκομείο να έχει c σε αριθμό θέσεις. Κάθε απόφοιτος ιεραρχεί αυστηρά τις προτιμήσεις του σε ένα υποσύνολο των νοσοκομείων που υπάρχουν και κάθε νοσοκομείο ιεραρχεί τους απόφοιτους. Ένα σύνολο αντιστοίχισης M μη πλήρης λίστας προτίμησης είναι μια αντιστοίχιση κάθε απόφοιτου σε πολύ ένα νοσοκομείο έτσι ώστε για κάθε i το πολύ ci απόφοιτοι θα αντιστοιχηθούν στο i νοσοκομείο. Η αντιστοίχιση M είναι σταθερή αν δεν υπάρχει ζευγάρι (απόφοιτος (r), νοσοκομείο (h)) έτσι ώστε να συμβαίνουν τα εξής: i) τα μέλη r & h βρίσκουν το ένα το άλλο αποδεκτά, ii) ο r είναι είτε χωρίς ζευγάρι ή προτιμάει το h ως το νοσοκομείο επιλογής του και iii) το h νοσοκομείο είναι είτε χωρίς να έχει κάποιον απόφοιτο στην εργασία του ή προτιμάει τον r ως έναν τουλάχιστον από τους απόφοιτους που να αντιστοιχεί στο h νοσοκομείο. Ο αλγόριθμός Gale & Shapley μπορεί να επεκταθεί για να βρεθεί μια σταθερή λύση αντιστοίχισης στο πρόβλημα αντιστοίχισης φοιτητών και νοσοκομείων. Παρακάτω παρατίθεται ένα πρόβλημα αντιστοίχισης μεταξύ ανδρών και ανδρών και γυναικών όπου και τα δύο φύλα έχουν μη πλήρεις λίστες προτίμησης.

3.1.1Παράδειγμα εφαρμογής

Στο παράδειγμα αυτό υπάρχουν 5 άνδρες (N = 5) και 5 γυναίκες (N = 5). Οι προτιμήσεις των δύο φύλων παρουσιάζονται παρακάτω:

(a) **Προτιμήσεις ανδρών** (N = 5)

1 1 3 4

2 4 1 2

3 1 5 2

4 3 1 4

5 5 4 1

(b) Προτιμήσεις γυναικών (N = 5)

1 2 3 4

2 4 2 5

3 5 1 4

4 3 2 1

5 5 3 1

Πρώτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 1 κάνει πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 1 η οποία εκείνη την απορρίπτει καθώς δεν είναι στην λίστα προτιμήσεων της. Συνέχεια ο άνδρας με τον αριθμό 1 κάνει πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 3 η οποία εκείνη την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση εκείνη τη στιγμή.

Άνδρες	Προτιμήσεις			Γυναίκες	Προτιμήσεις		
1	1	3	4	**1**	2	3	4
2	4	1	2	**2**	4	2	5
3	1	5	2	**3**	5	1	4
4	3	1	4	**4**	3	2	1
5	5	4	1	**5**	5	3	1

Οπότε το πρώτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (1, 3)

Δεύτερος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 2 κάνει πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 4 η οποία εκείνη αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση εκείνη τη στιγμή.

Άνδρες	Προτιμήσεις			Γυναίκες	Προτιμήσεις		
1	1	3	4	**1**	2	3	4
2	4	1	2	**2**	4	2	5
3	1	5	2	**3**	5	1	4
4	3	1	4	**4**	3	2	1
5	5	4	1	**5**	5	3	1

Οπότε το δεύτερο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (2, 4). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (2, 4) & (1, 3).

Τρίτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 3 κάνει πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 1 η οποία εκείνη αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση εκείνη τη στιγμή.

Άνδρες	Προτιμήσεις			Γυναίκες	Προτιμήσεις		
1	1	3	4	**1**	2	3	4
2	4	1	2	**2**	4	2	5
3	1	5	2	**3**	5	1	4
4	3	1	4	**4**	3	2	1
5	5	4	1	**5**	5	3	1

Οπότε το τρίτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (3, 1). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (3, 1), (2, 4) & (1, 3).

Τέταρτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 4 κάνει αρχικά πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 3 η οποία εκείνη απορρίπτει καθώς ο άνδρας με τον αριθμό 1 (με τον οποίο έχει ήδη αντιστοιχηθεί) είναι σε καλύτερη θέσης προτίμησης έναντι του άνδρα με τον αριθμό 4. Στη συνέχεια ο άνδρας με τον αριθμό 4 κάνει πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 1 η οποία εκείνη τον απορρίπτει καθώς ο άνδρας με τον αριθμό 3 (με τον οποίο έχει ήδη αντιστοιχηθεί) είναι σε καλύτερη θέση προτίμησης έναντι του άνδρα με τον αριθμό 4. Τέλος, ο άνδρας με τον αριθμό 4 κάνει πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 4 η οποία εκείνη απορρίπτει καθώς δεν είναι στην λίστα προτίμησης της.

Άνδρες	Προτιμήσεις			Γυναίκες	Προτιμήσεις		
1	1	3	4	**1**	2	3	4
2	4	1	2	**2**	4	2	5
3	1	5	2	**3**	5	1	4
4	3	1	4	**4**	3	2	1
5	5	4	1	**5**	5	3	1

Παραμένουμε με τα ζευγάρια (3, 1), (2, 4) & (1, 3) και προς το παρόν ο άνδρας με τον αριθμό 4 μένει χωρίς αντιστοίχιση.

Πέμπτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 5 κάνει αρχικά πρόταση στην γυναίκα με τον αριθμό 5 η οποία εκείνη την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη αντιστοίχιση και είναι πρώτος στην λίστα προτιμήσεων της.

Άνδρες	Προτιμήσεις			Γυναίκες	Προτιμήσεις		
1	1	3	4	**1**	2	3	4
2	4	1	2	**2**	4	2	5
3	1	5	2	**3**	5	1	4
4	3	1	4	**4**	3	2	1
5	5	4	1	**5**	5	3	1

Οπότε το τέταρτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (5, 5). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (5, 5), (3, 1), (2, 4) & (1, 3).

Ο άνδρας με τον αριθμό 1 δεν μπορεί να αντιστοιχηθεί σε άλλη γυναίκα καθώς η γυναίκα με την καλύτερη προτίμηση είναι ήδη αντιστοιχημένη. Οι άνδρες 2 , 3 και 5 είναι ήδη αντιστοιχημένοι στις πρώτες προτιμήσεις τους και επομένως δεν μπορούν να αλλάξουν προτιμήσεις. Επομένως, ο άνδρας με τον αριθμό 4 και η γυναίκα με τον αριθμό 2 δεν έχουν αντιστοιχηθεί. Όμως, η παρούσα αντιστοίχιση [(5, 5), (3, 1), (2, 4) & (1, 3)] δεν είναι σταθερή. Εφόσον, είναι γνωστό ότι υπάρχουν σταθερές λύσεις για τις πλήρεις λίστες εισαγάγουμε τις επιλογές Κ και Ω για τους άνδρες και τις γυναίκες αντίστοιχα ("Stable Marriage Problem Introductory talk Yosuke KIKUCHI Dept", 2022).

6ος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 4 κάνει πρόταση στην γυναίκα φανταστική γυναίκα Κ και η γυναίκα με τον αριθμό 2 αποδέχεται την πρόταση του άνδρα Ω.

Άνδρες	Προτιμήσεις					Γυναίκες	Προτιμήσεις				
1	1	3	4	Κ	Κ	**1**	2	3	4	Ω	Ω
2	4	1	2	Κ	Κ	**2**	4	2	5	Ω	Ω
3	1	5	2	Κ	Κ	**3**	5	1	4	Ω	Ω
4	3	1	4	Κ	Κ	**4**	3	2	1	Ω	Ω
5	5	4	1	Κ	Κ	**5**	5	3	1	Ω	Ω

Οπότε τα επόμενα δύο ζευγάρια είναι τα (4, Κ) και (Ω, 2). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (4, Κ), (Ω, 2) (5, 5), (3, 1), (2, 4) & (1, 3). Η αντιστοίχιση αυτή είναι σταθερή καθώς δεν υπάρχει κάποιο ζευγάρι (Α, Γ) που i) να αποδέχεται το ένα μέλος το άλλο, ii) ο Α είναι χωρίς ζευγάρι ή προτιμάει μια γυναίκα Γ, iii) η Γ είναι είτε χωρίς άνδρα (Α) ή προτιμάει έναν άλλον άνδρα (Α) που να αντιστοιχεί σε άλλη γυναίκα (Γ).

3.2 Ισότητες στις λίστες προτιμήσεων

Μια εναλλακτική περίπτωση του κλασσικού προβλήματος των Gale & Shapley είναι η περίπτωση στην οποία το πρωτότυπο πρόβλημα σταθερού γάμου κάθε μέλους δεν ιεραρχεί το αντίθετο φύλο με αυστηρή σειρά. Κάποια άτομα από αυτά που βρίσκονται στην λίστα προτιμήσεων των μελών μπορεί να είναι αδιάφορα, δηλαδή οι λίστες προτιμήσεων μπορεί να περιλαμβάνουν ισότητες για κάποια μέλη του αντίθετου φύλου. Σε αυτή την περίπτωση μια σταθερή αντιστοίχιση στο σύνολο Μ είναι σταθερή εάν δεν υπάρχει ζευγάρι άνδρα και γυναίκας (Α, Γ) εκ των οποίων ο ένας προτιμάει τον άλλον έναντι του τρέχοντα συντρόφου του στο Μ. Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι αυτό το κριτήριο αναφέρεται ως αδύναμη σταθερότητα (Irving, 1994). Σε αυτό το σημείο θα ήταν καλό να παρουσιάσουμε τους ορισμούς όχι για μόνο για το πρόβλημα ασθενής σταθερής αντιστοίχισης αλλά και για δύο ακόμα προβλήματα, το πρόβλημα ισχυρής σταθερής αντιστοίχισης και το πρόβλημα υπέρ – σταθερής αντιστοίχισης. Οι ορισμοί αυτοί φαίνονται παρακάτω:

Ορισμός Ασθενής Σταθερής Αντιστοίχισης (Weakly Stable Matching)

Ασθενής σταθερή αντιστοίχιση έχουμε εάν δεν υπάρχει ζευγάρι άνδρα και γυναίκας (Α, Γ) που δεν είναι ζευγάρι στο Μ εκ των οποίων ο ένας προτιμάει τον άλλον έναντι του τρέχοντα συντρόφου του στο Μ. Υπάρχει η περίπτωση ο Α να προτιμάει μια άλλη γυναίκα εξίσου με την υπάρχουσα σύντροφο του ενώ το ίδιο μπορεί να συμβαίνει και για την γυναίκα.

Ορισμός Ισχυρής Σταθερής Αντιστοίχισης (Strongly Stable Matching)

Ισχυρή σταθερή αντιστοίχιση έχουμε εάν δεν υπάρχει ζευγάρι άνδρα και γυναίκας (Α, Γ) που δεν είναι ζευγάρι στο Μ εκ των οποίων ο ένας από τους δύο προτιμάει τον άλλον αυστηρά έναντι του τρέχοντα συντρόφου του στο Μ και παράλληλα ο άλλος τον προτιμάει αυστηρά ή στον ίδιο βαθμό με τον τρέχοντα σύντροφο του. Υπάρχει η περίπτωση ο Α να προτιμάει μια άλλη γυναίκα εξίσου με την υπάρχουσα σύντροφο του ενώ το ίδιο μπορεί να συμβαίνει και για την γυναίκα.

Ορισμός Υπερ -Ισχυρής Σταθερής Αντιστοίχισης (Super Stable Matching)

Υπέρ -ισχυρή σταθερή αντιστοίχιση έχουμε εάν δεν υπάρχει ζευγάρι άνδρα και γυναίκας (Α, Γ) που δεν είναι ζευγάρι στο Μ εκ των οποίων και οι δύο προτιμούν τον άλλον αυστηρά έναντι των συντρόφων που έχουν στο Μ ή προτιμούν τον άλλον εξίσου σε σχέση με τους συντρόφους που έχουν στο Μ.

Ένα παράδειγμα ασθενής σταθερής αντιστοίχισης είναι ένας άνδρας (Α) και η γυναίκα (Γ) που δεν είναι ζευγάρι στο σύνολο αντιστοιχίσεων Μ. Υποθέτουμε ότι ο Α είναι δεσμευμένος με την Γ' και η Γ με τον Α' και παράλληλα οι άνδρες Α, Α' έχουν την ίδια ιεράρχηση στην λίστα προτιμήσεως της Γ και οι γυναίκες Γ, Γ' έχουν την ίδια ιεράρχηση στην λίστα προτιμήσεως του Α. Βάση της ασθενής σταθερής αντιστοίχισης το ζευγάρι (Α, Γ) δεν αποτελεί ζευγάρι αποκλεισμού καθώς η προτίμηση μεταξύ τους δεν είναι αυστηρή έναντι των τρέχοντων συντρόφων τους. Γενικεύοντας ότι αυτό ισχύει για όλα τα πιθανά ζευγάρια που δεν είναι αντιστοιχημένα στο σύνολο Μ καταλήγουμε ότι έχουμε ασθενή σταθερή αντιστοίχιση. Προφανώς, δεν έχουμε ισχυρή ή υπέρ σταθερή αντιστοίχιση καθώς δεν έχουμε κάποιου είδους αυστηρή ιεράρχηση προτίμησης.

Ένα παράδειγμα ισχυρής σταθερής αντιστοίχισης είναι ένας άνδρας (Α) και η γυναίκα (Γ) που δεν είναι ζευγάρι στο σύνολο αντιστοιχίσεων Μ. Υποθέτουμε ότι ο Α είναι δεσμευμένος με την Γ' και η Γ με τον Α' και παράλληλα οι άνδρες Α, Α' έχουν την ίδια ιεράρχηση στην λίστα προτιμήσεως της Γ. Όμως, οι γυναίκες Γ, Γ' δεν έχουν την ίδια ιεράρχηση στην λίστα προτιμήσεως του Α και η Γ' είναι περισσότερο προτιμητέα έναντι της Γ. Βάση της ισχυρής σταθερής αντιστοίχισης το ζευγάρι (Α, Γ) δεν αποτελεί ζευγάρι αποκλεισμού καθώς η προτίμηση μεταξύ τους είναι αυστηρή για τον άνδρα Α έναντι της Γ' και της Γ ενώ για την Γ δεν είναι αυστηρή η προτίμηση της έναντι των Α και Α'. Γενικεύοντας ότι αυτό ισχύει για όλα τα πιθανά ζευγάρια που δεν είναι αντιστοιχημένα στο σύνολο Μ καταλήγουμε ότι έχουμε ισχυρή σταθερή αντιστοίχιση. Προφανώς, δεν έχουμε υπέρ σταθερή αντιστοίχιση καθώς δεν έχουμε αυστηρή ιεράρχηση προτίμησης και για τα δύο μέλη. Οπότε, η ισχυρή σταθερή αντιστοίχιση δεν μπορεί να είναι υπέρ σταθερή αντιστοίχιση.

Ένα παράδειγμα υπέρ σταθερής αντιστοίχισης είναι ένας άνδρας (Α) και η γυναίκα (Γ) που δεν είναι ζευγάρι στο σύνολο αντιστοιχίσεων Μ. Υποθέτουμε ότι ο Α είναι δεσμευμένος με την Γ' και η Γ με τον Α' και παράλληλα οι άνδρες Α, Α' δεν έχουν την ίδια ιεράρχηση στην λίστα προτιμήσεως της Γ, ο Α' είναι περισσότερο προτιμητέος έναντι του Α. Ομοίως, οι γυναίκες Γ, Γ' δεν έχουν την ίδια ιεράρχηση στην λίστα προτιμήσεως του Α, η Γ' είναι περισσότερο προτιμητέα έναντι της Γ. Βάση της υπέρ σταθερής αντιστοίχισης το ζευγάρι (Α, Γ) δεν αποτελεί ζευγάρι αποκλεισμού καθώς η προτίμηση μεταξύ τους είναι αυστηρή για τον άνδρα Α έναντι της Γ' και Γ. Το ίδιο ισχύει και για την προτίμηση της Γ ς έναντι των Α και Α'. Γενικεύοντας ότι αυτό ισχύει για όλα τα πιθανά ζευγάρια που δεν είναι αντιστοιχημένα στο σύνολο Μ καταλήγουμε ότι έχουμε υπέρ σταθερή αντιστοίχιση. Προφανώς, η αντιστοίχιση αυτή θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ισχυρά σταθερή αντιστοίχιση ή ασθενής σταθερή αντιστοίχιση.

3.2.1 Παράδειγμα εφαρμογής

Στο παράδειγμα αυτό παρουσιάζεται η εφαρμογή του αλγορίθμου Galey & Shapley στην περίπτωση που έχουμε ίσες προτιμήσεις. Επίσης, παρουσιάζεται πως γίνεται η επιλογή ανάμεσα σε δύο ίδιου επιπέδου προτιμήσεις (αλφαβητικά, τυχαία, κ.λ.π). Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχει επιλεχθεί η τυχαία επιλογή. Εδώ πρέπει να τονιστεί ότι ο τρόπος επιλογής δύο επιλογών ίδιας προτίμησης δεν επηρεάζει την εφαρμογή του αλγορίθμου αλλά το αποτέλεσμα του αλγορίθμου.

Στο παράδειγμα αυτό υπάρχουν 4 άνδρες (N = 4) και 4 γυναίκες (N = 4). Οι προτιμήσεις των δύο φύλων παρουσιάζονται παρακάτω (όπου υπάρχουν παρενθέσεις σημαίνει ότι τα μέλη του αντίθετου φύλου ιεραρχούνται ως προς τις προτιμήσεις στο ίδιο επίπεδο):

(a) **Προτιμήσεις ανδρών** (N = 4)

1 1 (2 3) 4

2 (2 3) 4, 1

3 2 4 3 1

4 1 (2 3, 4)

(b) Προτιμήσεις γυναικών (N = 4)

1 3 (2 4) 1

2 (2 3) 1, 4

3 2 4 3 1

4 1 2 3, 4

Πρώτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 1 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 1 η οποία στη συνέχεια την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

Άνδρες	Προτιμήσεις	Γυναίκες	Προτιμήσεις
1	1 (2 3) 4	**1**	3 (2 4) 1
2	(2 3) 4 1	**2**	(2 3) 1 4
3	2 4 3 1	**3**	2 4 3 1
4	1 (2 3 4)	**4**	1 2 3 4

Οπότε το πρώτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (1, 1).

Δεύτερος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 2 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 2 (ανάμεσα στις επιλογές 2 και 3 επιλέξαμε στην τύχη την 2) η οποία στη συνέχεια την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

Άνδρες	Προτιμήσεις	Γυναίκες	Προτιμήσεις
1	1 (2 3) 4	**1**	3 (2 4) 1
2	(2 3) 4 1	**2**	(2 3) 1 4
3	2 4 3 1	**3**	2 4 3 1
4	1 (2 3 4)	**4**	1 2 3 4

Οπότε το δεύτερο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (2, 2). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (2, 2) και (1, 1).

Τρίτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 3 επιλέγει αρχικά την γυναίκα με τον αριθμό 2 η οποία στη συνέχεια απορρίπτει την πρόταση του καθώς ο υπάρχον σύντροφος της έχει του ίδιου επιπέδου προτίμηση από τον άνδρα με τον αριθμό 3. Στη συνέχεια ο άνδρας με τον αριθμό 3 (ανάμεσα στις επιλογές 4 και 3 επιλέξαμε στην τύχη την 3) επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 3 και η οποία εκείνη την αποδέχεται.

Άνδρες	Προτιμήσεις	Γυναίκες	Προτιμήσεις
1	1 (2 3) 4	**1**	3 (2 4) 1
2	(2 3) 4 1	**2**	(2 3) 1 4
3	2 4 3 1	**3**	2 4 3 1
4	1 (2 3 4)	**4**	1 2 3 4

Οπότε το τρίτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (3, 3). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (3, 3), (2, 2) και (1, 1).

Τέταρτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 4 επιλέγει αρχικά την γυναίκα με τον αριθμό 1 η οποία στη συνέχεια δέχεται την πρόταση του καθώς ο υπάρχον σύντροφος της έχει χαμηλότερη προτίμηση από τον άνδρα με τον αριθμό 4.

Άνδρες	Προτιμήσεις	Γυναίκες	Προτιμήσεις
1	1 (2 3) 4	**1**	3 (2 4) 1
2	(2 3) 4 1	**2**	(2 3) 1 4
3	2 4 3 1	**3**	2 4 3 1
4	1 (2 3 4)	**4**	1 2 3 4

Οπότε το τρίτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (4, 1) σε αντικατάσταση του (1, 1). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (3, 3) (2, 2) και (4, 1).

Πέμπτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 1 επιλέγει αρχικά την γυναίκα με τον αριθμό 1 η οποία τον απορρίπτει καθώς ο υπάρχον σύντροφος της (4) είναι περισσότερο προτιμητέος. Στη συνέχεια ο άνδρας με τον αριθμό 1 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 3 η οποία τον απορρίπτει καθώς ο υπάρχον σύντροφος της (3) είναι περισσότερο προτιμητέος. Στη συνέχεια ο άνδρας με τον αριθμό 1 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 2 η οποία τον απορρίπτει καθώς ο υπάρχον σύντροφος της (2) είναι περισσότερο προτιμητέος. Στη συνέχεια ο άνδρας με τον αριθμό 1 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 4 η οποία τον δέχεται καθώς δεν έχει σύντροφο.

Άνδρες	Προτιμήσεις	Γυναίκες	Προτιμήσεις
1	1 (2 3) 4	**1**	3 (2 4) 1

2	(2 3) 4 1	**2**	(2 3) 1 4
3	2 4 3 1	**3**	2 4 3 1
4	1 (2 3 4)	**4**	1 2 3 4

Οπότε το τέταρτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (1, 4). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (1, 4), (3, 3) (2, 2) και (4, 1).

Στο σημείο αυτό τίθεται το ερώτημα αν το σύνολο αντιστοίχισης που προέκυψε με την τυχαία επιλογή παραπάνω θα ήταν διαφορετικό αν χρησιμοποιούσαμε για επιλογή την αλφαβητική επιλογή (Με πρώτο γράμμα το Ω και τελευταίο το Α, ανάποδα ως σειρά επιλογής). Ας υποθέσουμε για ευκολία ότι η σειρά αρίθμησης των μελών κάθε ομάδας είναι ίδια με την αλφαβητική τους σειρά. Το πρώτο βήμα του αλγόριθμου είναι ίδιο και παραθέτουμε από το 2^{ο} και κάτω.

Δεύτερος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 2 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 3 η οποία στη συνέχεια την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

Άνδρες	Προτιμήσεις	Γυναίκες	Προτιμήσεις
1	1 (2 3) 4	**1**	3 (2 4) 1
2	(2 3) 4 1	**2**	(2 3) 1 4
3	2 4 3 1	**3**	2 4 3 1
4	1 (2 3 4)	**4**	1 2 3 4

Οπότε το δεύτερο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (2, 3). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (2, 3) και (1, 1).

Τρίτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 3 επιλέγει αρχικά την γυναίκα με τον αριθμό 2 η οποία στη συνέχεια αποδέχεται την πρόταση του καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

Άνδρες	Προτιμήσεις	Γυναίκες	Προτιμήσεις
1	1 (2 3) 4	**1**	3 (2 4) 1
2	(2 3) 4 1	**2**	(2 3) 1 4

3	2	4 3	1	**3**	2	4 3	1
4	1	(2 3	4)	**4**	1	2 3	4

Οπότε το τρίτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (3, 2). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (3, 2) (2, 3) και (1, 1).

Τέταρτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 4 επιλέγει αρχικά την γυναίκα με τον αριθμό 1 η οποία στη συνέχεια δέχεται την πρόταση του καθώς ο υπάρχον σύντροφος της έχει χαμηλότερη προτίμηση από τον άνδρα με τον αριθμό 4.

Άνδρες	Προτιμήσεις			Γυναίκες	Προτιμήσεις		
1	1	(2 3)	4	**1**	3	(2 4)	1
2	(2 3)	4	1	**2**	(2 3)	1	4
3	2	4 3	1	**3**	2	4 3	1
4	1	(2 3	4)	**4**	1	2 3	4

Οπότε το τρίτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (4, 1) σε αντικατάσταση του (1, 1). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (3, 2) (2, 3) και (4, 1).

Πέμπτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 1 επιλέγει αρχικά την γυναίκα με τον αριθμό 1 η οποία τον απορρίπτει καθώς ο υπάρχον σύντροφος της (4) είναι περισσότερο προτιμητέος. Στη συνέχεια ο άνδρας με τον αριθμό 1 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 3 η οποία τον απορρίπτει καθώς ο υπάρχον σύντροφος της (3) είναι περισσότερο προτιμητέος. Στη συνέχεια ο άνδρας με τον αριθμό 1 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 2 η οποία τον απορρίπτει καθώς ο υπάρχον σύντροφος της (2) είναι εξίσου προτιμητέος. Στη συνέχεια ο άνδρας με τον αριθμό 1 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 4 η οποία τον δέχεται καθώς δεν έχει σύντροφο.

Άνδρες	Προτιμήσεις			Γυναίκες	Προτιμήσεις		
1	1	(2 3)	4	**1**	3	(2 4)	1
2	(2 3)	4	1	**2**	(2 3)	1	4
3	2	4 3	1	**3**	2	4 3	1

4	1	(2 3	4)		**4**	1	2 3	4	

Οπότε το τέταρτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (1, 4). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (1, 4), (3, 2) (2, 3) και (4, 1).

Βλέπουμε ότι η λύση που προέκυψε παραπάνω είναι διαφορετική από την προηγούμενη. Φαίνεται μάλιστα ότι είναι καλύτερη της προηγούμενης γιατί οι άνδρες 2 και 3 μαζί με τις γυναίκες 2 και 3 παίρνουν ως ζευγάρια τις πρώτες επιλογές όλοι ενώ πριν αυτό δεν ίσχυε για όλους. Τέλος, να τονίσουμε ότι και στις δύο περιπτώσεις λύσεων που καταλήξαμε οι λύσεις είναι ασθενείς σταθερές καθώς κάποια μέλη προτιμούν άλλα μέλη στον ίδιο βαθμό με τους συντρόφους τους.

3.3 Μη πλήρεις λίστες προτίμησης & Ισότητες στις λίστες προτιμήσεων

Στις προηγούμενες δύο ενότητες είδαμε προβλήματα με πλήρεις λίστες προτίμησης και με ισότητες στις λίστες προτιμήσεων. Συνήθως όμως τα προβλήματα που καλούμαστε να επιλύσουμε αφορούν πιο σύνθετες καταστάσεις. Είναι πιο σύνηθες να κληθούμε να επιλύσουμε προβλήματα στα οποία οι λίστες προτίμησης των μελών είτε για το ένα σύνολο ή και για τα δύο σύνολα είναι μη πλήρεις και ταυτόχρονα παρουσιάζουν ισότητες στις λίστες προτιμήσεων. Συνοπτικά είδαμε αρχικά τα προβλήματα σταθερής αντιστοίχισης (SM: stable marriage), κατόπιν είδαμε τα προβλήματα με τις μη πλήρεις λίστες προτίμησης (SMI: stable marriage with incomplete lists) και ως τρίτη περίπτωση είδαμε τα προβλήματα με τις ισότητες στις λίστες προτίμησης (SMT: stable marriage with ties). Οπότε, η περίπτωση που μελετάται σε αυτή την ενότητα είναι προβλήματα με μη πλήρεις λίστες προτίμησης και ισότητες στις προτιμήσεις των μελών στα δύο σύνολα (SMTI: stable marriage with ties and incomplete lists). Ένα παράδειγμα με πλήρεις λίστες και με ισότητες στις λίστες προτίμησης φαίνεται παρακάτω για έξι άνδρες και έξι γυναίκες (Gent & Prosser, 2002).

3.3.1 Παράδειγμα εφαρμογής

Στο παράδειγμα αυτό υπάρχουν 6 άνδρες (N = 4) και 6 γυναίκες (N = 4). Για την επίλυση χρησιμοποιήθηκε η τυχαία επιλογή στην περίπτωση προτιμήσεων ίδιου επιπέδου. Οι προτιμήσεις των δύο φύλων παρουσιάζονται παρακάτω (όπου υπάρχουν παρενθέσεις σημαίνει ότι τα μέλη του αντίθετου φύλου ιεραρχούνται ως προς τις προτιμήσεις στο ίδιο επίπεδο):

(a) **Προτιμήσεις ανδρών** (N = 6)

1 2 (6 4)
2 (2 5) 6
3 1 3 6
4 6 3
5 2 1 5
6 6 (4 2) 5 1

(b) Προτιμήσεις γυναικών (N = 6)

1 (5 3) 6
2 2 5 1 6
3 (3 4)
4 6 1
5 5 2 6
6 1 (4 6) 2 3

Πρώτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 1 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 2 η οποία στη συνέχεια την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

Άνδρες	Προτιμήσεις			Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	(6 4)		**1**	(5 3)	6		
2	(2 5)	6		**2**	2 5	1		
3	1	3 6		**3**	(3 4)			
4	6	3		**4**	6	1		
5	2	1 5		**5**	5	2	6	
6	6	(4 2)	5 1	**6**	1	(4 6)	2	3

Οπότε το πρώτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (1, 2).

Δεύτερος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 2 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 2 η οποία στη συνέχεια την αποδέχεται καθώς ο τρέχον σύντροφος της είναι χαμηλότερης προτίμησης.

Άνδρες	Προτιμήσεις			Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	(6 4)		**1**	(5 3)	6		
2	(2 5)	6		**2**	2 5	1		
3	1	3 6		**3**	(3 4)			
4	6	3		**4**	6	1		
5	2	1 5		**5**	5	2	6	
6	6	(4 2)	5 1	**6**	1	(4 6)	2	3

Οπότε το πρώτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (2, 2) σε αντικατάσταση του ζευγαριού (1, 2).

Τρίτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 1 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 6 η οποία στη συνέχεια την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

Άνδρες	Προτιμήσεις			Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	(6 4)		**1**	(5 3)	6		
2	(2 5)	6		**2**	2 5	1		
3	1	3 6		**3**	(3 4)			
4	6	3		**4**	6	1		
5	2	1 5		**5**	5	2	6	
6	6	(4 2)	5 1	**6**	1	(4 6)	2	3

Οπότε το δεύτερο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (1, 6). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (1, 6) και (2, 2).

Τέταρτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 3 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 1 η οποία την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

Άνδρες	Προτιμήσεις			Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	(6 4)		**1**	(5 3)	6		
2	(2 5)	6		**2**	2 5	1		
3	1	3 6		**3**	(3 4)			
4	6	3		**4**	6	1		
5	2	1 5		**5**	5	2	6	
6	6	(4 2)	5 1	**6**	1	(4 6)	2	3

Οπότε το τρίτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (3, 1). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (3, 1), (1, 6) και (2, 2).

Πέμπτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 4 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 6 η οποία δεν την αποδέχεται καθώς ο τρέχον σύντροφος της έχει καλύτερη επίπεδο προτίμησης έναντι του άνδρα με τον αριθμό 4. Στη συνέχεια ο άνδρας με τον αριθμό 4 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 3 η οποία την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

Άνδρες	Προτιμήσεις			Γυναίκες	Προτιμήσεις			
1	2	(6 4)		**1**	(5 3)	6		
2	(2 5)	6		**2**	2 5	1		
3	1	3 6		**3**	(3 4)			
4	6	3		**4**	6	1		
5	2	1 5		**5**	5	2	6	
6	6	(4 2)	5 1	**6**	1	(4 6)	2	3

Οπότε το τέταρτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (4, 3). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (4, 3), (3, 1), (1, 6) και (2, 2).

Έκτος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 5 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 2 η οποία δεν την αποδέχεται καθώς ο τρέχον σύντροφος της έχει ίδιο επίπεδο προτίμησης έναντι του άνδρα με τον αριθμό 5. Ανάλογη κατάσταση έχουμε και με την γυναίκα με τον αριθμό 1. Στη συνέχεια ο άνδρας με τον αριθμό 5 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 5 η οποία την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

Άνδρες	Προτιμήσεις	Γυναίκες	Προτιμήσεις
1	2 (6 4)	**1**	(5 3) 6
2	(2 5) 6	**2**	2 5 1
3	1 3 6	**3**	(3 4)
4	6 3	**4**	6 1
5	2 1 5	**5**	5 2 6
6	6 (4 2) 5 1	**6**	1 (4 6) 2 3

Οπότε το πέμπτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (5, 5). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (5, 5), (4, 3), (3, 1), (1, 6) και (2, 2).

Έβδομος γύρος

Ο άνδρας με τον αριθμό 6 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 6 η οποία δεν την αποδέχεται καθώς ο τρέχον σύντροφος της έχει καλύτερο επίπεδο προτίμησης έναντι του άνδρα με τον αριθμό 1. Ανάλογη κατάσταση έχουμε και με την γυναίκα με τον αριθμό 2 (τον απορρίπτει γιατί δεν είναι στην λίστα προτιμήσεων της). Στη συνέχεια ο άνδρας με τον αριθμό 6 επιλέγει την γυναίκα με τον αριθμό 4 η οποία την αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

Άνδρες	Προτιμήσεις	Γυναίκες	Προτιμήσεις
1	2 (6 4)	**1**	(5 3) 6
2	(2 5) 6	**2**	2 5 1
3	1 3 6	**3**	(3 4)
4	6 3	**4**	6 1
5	2 1 5	**5**	5 2 6
6	6 (4 2) 5 1	**6**	1 (4 6) 2 3

Οπότε το έκτο ζευγάρι που δημιουργείται είναι το (6, 4). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (6, 4), (5, 5), (4, 3), (3, 1), (1, 6) και (2, 2). Η σταθερή αυτή αντιστοίχιση που βρέθηκε είναι μια ασθενής σταθερή αντιστοίχιση καθώς κάποια μέλη προτιμούν άλλα μέλη ίδιου επιπέδου προτίμησης με τον σύντροφο τους.

Κεφάλαιο 4 – Γνωστά Παραδείγματα Εφαρμογής

4.1 Το Πρόβλημα Αντιστοίχισης Νοσοκομείων & Ειδικευόμενων Ιατρικών σχολών

Εκτός από τις παραπάνω παραλλαγές που είδαμε στις προηγούμενες ενότητες υπάρχει μια ακόμα που είναι πολύ ενδιαφέρουσα στην οποία δεν αντιστοιχεί ένα μέλος του ενός συνόλου σε ένα μέλος του άλλου συνόλου αλλά αντιστοιχεί ένα μέλος του ενός συνόλου σε πολλά μέλη του άλλου συνόλου. Η συγκεκριμένη παραλλαγή είναι γνωστή ως το *Hospital / Residents Problem* (*HRP*) και έγινε για πρώτη φορά αναφορά στην πρώτη εργασία των Gale & Shapley (1962). Το πρόβλημα αυτό προήλθε από ένα αληθινό πρόβλημα που αντιστοιχούσε στην αντιστοίχιση ειδικευόμενων ιατρών σε νοσοκομεία εκ των οποίων το καθένα μπορεί να απορροφήσει συγκεκριμένο αριθμό ειδικευόμενων. Αυτός ο αριθμός ειδικευόμενων που μπορεί να απασχολήσει το κάθε νοσοκομείο ενδεχομένως να είναι άνω του ενός.

Σχετικά με τα δεδομένα που χρειάζονται να εισαχθούν στον αλγόριθμο για την επίλυση του προβλήματος είναι παρόμοια με αυτά του κλασικού προβλήματος SMP. Πιο συγκεκριμένα χρειάζονται τα εξής:

1. Το πλήθος των νοσοκομείων (n)
2. Η λίστα με τις κενές θέσεις ανά νοσοκομείο.
3. Το πλήθος των ειδικευόμενων ιατρών (κ)

4. Την διατεταγμένη λίστα προτιμήσεων κάθε νοσοκομείου για το σύνολο των ειδικευόμενων νοσοκομείων. Η λίστα αυτή προτίμησης είναι σε φθίνουσα σειρά και συνήθως δεν είναι πάντα πλήρης καθώς το πλήθος των ειδικευόμενων είναι μεγάλο και επομένως ιεραρχούνται οι προτιμήσεις των νοσοκομείων σε ένα υποσύνολο των ειδικευόμενων.
5. Την διατεταγμένη λίστα των ειδικευόμενων ιατρών για όλα τα νοσοκομεία με ανάλογα χαρακτηριστικά με την λίστα των νοσοκομείων.

Όσον αφορά την λύση του προβλήματος HRP με τα δεδομένα που αναφέρθηκαν προηγουμένως πρέπει να έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. Κάθε νοσοκομείο να έχει αντιστοίχιση σε ειδικευόμενους ιατρούς το πολύ σε όσες θέσεις έχει κενές.
2. Κάθε ειδικευόμενος να έχει αντιστοιχηθεί το πολύ σε ένα νοσοκομείο
3. Η αντιστοίχιση που θα έχει γίνει σε κάθε νοσοκομείο με τους ειδικευόμενους ιατρούς θα πρέπει να έχει το μεγαλύτερο βαθμό προτίμησης για κάθε ειδικευόμενο ιατρό. Επίσης, ταυτόχρονα δεν μπορεί κάποιος ειδικευόμενος να ανατεθεί σε νοσοκομείο με μεγαλύτερη προτίμηση προς αυτόν καθώς αυτός δεν δείχνει υψηλότερο επίπεδο προτίμησης από το νοσοκομείο που του έχει ήδη ανατεθεί.
4. Σε κάθε ειδικευόμενο ιατρό θα πρέπει να έχει γίνει αντιστοίχιση με κάποιο νοσοκομείο το οποίο να αφορά την μικρότερη από τις καλύτερες προτιμήσεις της λίστας του. Επίσης, ταυτόχρονα δεν μπορεί κάποιος ειδικευόμενος να ανατεθεί σε νοσοκομείο με μεγαλύτερη προτίμηση προς αυτό καθώς το νοσοκομείο αυτό δεν δείχνει υψηλότερη προτίμηση προς αυτόν σε σχέση με τις υφιστάμενες συνδέσεις του με άλλους ειδικευόμενους.

Σχετικά με την σταθερότητα και τον τερματισμό του συγκεκριμένου προβλήματος η συμπεριφορά του αλγορίθμου ακολουθεί την συμπεριφορά του κλασικού προβλήματος σταθερότητας γάμου, SMP (Gusfield & Irving, 1989).

4.1.1 Παράδειγμα εφαρμογής

Ένα παράδειγμα του προβλήματος HRP είναι η ανάθεση ειδικευόμενων ιατρών σε τέσσερα νοσοκομεία, έστω U = {1, 2, 3, 4} το σύνολο των νοσοκομείων και $U_{Θέσεις}$ = {2, 1, 3, 2} οι θέσεις που θέλει να καλύψει το κάθε νοσοκομείο, δηλαδή το πρώτο θέλει να καλύψει δύο, το δεύτερο θέλει να καλύψει μια θέση, το τρίτο θέλει να καλύψει τρεις θέσεις και το τέταρτο θέλει να καλύψει δύο θέσεις. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι οι λίστες προτιμήσεων των νοσοκομείων για το καθένα είναι οι παρακάτω:

R1 =	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
R2 =	{2, 8, 4, 7, 5, 3, 6, 1}
R3 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}
R4 =	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}

Για να μπορέσουμε να λύσουμε το πρόβλημα θα πρέπει να το μετασχηματίσουμε σε μια μορφή που είναι κοντά σε αυτή που χρειάζεται ο αλγόριθμός Galey & Shapley. Με βάση αυτό σκεπτικό δημιουργούμε τόσα αντίγραφα για τα νοσοκομεία όσες είναι και οι κενές θέσεις που χρειάζεται να καλύψει. Με βάση αυτό το σκεπτικό θα έχουμε την παρακάτω μορφή (οι αριθμοί δίπλα στο γράμμα R δείχνουν τον αριθμό του νοσοκομείου και τον αριθμό της θέσης, για παράδειγμα το R12 σημαίνει η δεύτερη θέση του πρώτου νοσοκομείου):

R11=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
R12=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}
R21 =	{2, 8, 4, 7, 5, 3, 6, 1}
R31 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}
R32 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}
R33 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}
R41=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}
R42=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}

Σε αυτό το σημείο μπορεί να εφαρμοστεί ο αλγόριθμός των Gale & Shapley. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα σύνολο οχτώ ειδικευόμενων ιατρών με τις ακόλουθες προτιμήσεις νοσοκομείων (θα μπορούσαμε να είχαμε μικρότερο αριθμό ειδικευόμενων από τις οχτώ θέσεις, σε αυτή την περίπτωση θα καλυπτόταν μικρότερος αριθμός θέσεων από τον διαθέσιμο. Σε αυτήν την περίπτωση σε κάθε σταθερή αντιστοίχιση κάθε νοσοκομείο θα λάμβανε τον ίδιο αριθμό ειδικευόμενων. Το αποτέλεσμα αυτό εξηγείται λόγω του θεωρήματος Rural Hospital (Klijn & Yazıcı, 2014)):

E1 =	{ (1, 2), 3, (4, 5, 6), (7, 8)}
E2 =	{ 3, (1, 2), (4, 5, 6), (7, 8)}
E3 =	{ (1, 2), (4, 5, 6), 3, (7, 8)}
E4 =	{ (1, 2), (4, 5, 6), (7, 8), 3}
E5 =	{ (4, 5, 6), (1, 2), (7, 8), 3}
E6 =	{ (4, 5, 6), (7, 8), 3, (1, 2)}
E7 =	{ (4, 5, 6), 3, (7, 8), (1, 2)}
E8 =	{ 3, (4, 5, 6), (7, 8), (1, 2)}

Στην παραπάνω λίστα προτιμήσεων των ειδικευόμενων νοσοκομείων οι θέσεις στο ίδιο νοσοκομείο εμφανίζονται στην ίδια σειρά προτίμησης, 1^{o} νοσοκομείο θέσεις (1, 2), 2^{o} νοσοκομείο θέση 3, 3^{o} νοσοκομείο θέσεις (4, 5, 6) και 4^{o} νοσοκομείο (7, 8).

Πρώτος γύρος

Το νοσοκομείο με αριθμό R11 επιλέγει τον ειδικευόμενο ιατρό E1 και εκείνος αποδέχεται την πρόταση καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

R1 1=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E1	{ (1, 2}, 3, (4, 5, 6), (7, 8)}
R1 2=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E2	{ 3, (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8)}
R21 =	{2, 8, 4, 7, 5, 3, 6, 1}	E3	{ (1, 2}, (4, 5, 6), 3, (7, 8)}
R31 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E4	{ (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8), 3}
R32 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E5	{ (4, 5, 6), (1, 2}, (7, 8), 3}
R33 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E6	{ (4, 5, 6), (7, 8), 3, (1, 2}}

R4 1=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E7	{ (4, 5, 6), 3, (7, 8), (1, 2}}
R4 2=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E8	{ 3, (4, 5, 6), (7, 8), (1, 2}}

Οπότε έχουμε το ζευγάρι (R11, E1).

Δεύτερος γύρος

Το νοσοκομείο με αριθμό R12 επιλέγει τον ειδικευόμενο ιατρό E2 και εκείνος αποδέχεται την πρόταση καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

R1 1=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E1	{ (1, 2}, 3, (4, 5, 6), (7, 8)}
R1 2=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E2	{ 3, (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8)}
R21 =	{2, 8, 4, 7, 5, 3, 6, 1}	E3	{ (1, 2}, (4, 5, 6), 3, (7, 8)}
R31 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E4	{ (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8), 3}
R32 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E5	{ (4, 5, 6), (1, 2}, (7, 8), 3}
R33 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E6	{ (4, 5, 6), (7, 8), 3, (1, 2}}
R4 1=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E7	{ (4, 5, 6), 3, (7, 8), (1, 2}}
R4 2=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E8	{ 3, (4, 5, 6), (7, 8), (1, 2}}

Οπότε έχουμε το ζευγάρι (R12, E2). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (R12, E2) & (R11, E1).

Τρίτος γύρος

Το νοσοκομείο με αριθμό R21 επιλέγει τον ειδικευόμενο ιατρό E2 και εκείνος αποδέχεται την πρόταση καθώς το νοσοκομείο R21 είναι περισσότερο προτιμητέο έναντι του R12.

R1 1=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E1	{ (1, 2}, 3, (4, 5, 6), (7, 8)}
R1 2=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E2	{ 3, (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8)}
R21 =	{2, 8, 4, 7, 5, 3, 6, 1}	E3	{ (1, 2}, (4, 5, 6), 3, (7, 8)}
R31 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E4	{ (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8), 3}
R32 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E5	{ (4, 5, 6), (1, 2}, (7, 8), 3}
R33 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E6	{ (4, 5, 6), (7, 8), 3, (1, 2}}
R4 1=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E7	{ (4, 5, 6), 3, (7, 8), (1, 2}}
R4 2=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E8	{ 3, (4, 5, 6), (7, 8), (1, 2}}

Οπότε έχουμε το ζευγάρι (R21, E2) σε αντικατάσταση του (R12, E2). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (R21, E2) & (R11, E1).

Τέταρτος γύρος

Το νοσοκομείο με αριθμό R12 επιλέγει τον ειδικευόμενο ιατρό E3 και εκείνος αποδέχεται την πρόταση καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

R1 1=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E1	{ (1, 2}, 3, (4, 5, 6), (7, 8)}
R1 2=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E2	{ 3, (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8)}
R21 =	{2, 8, 4, 7, 5, 3, 6, 1}	E3	{ (1, 2}, (4, 5, 6), 3, (7, 8)}
R31 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E4	{ (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8), 3}
R32 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E5	{ (4, 5, 6), (1, 2}, (7, 8), 3}
R33 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E6	{ (4, 5, 6), (7, 8), 3, (1, 2}}
R4 1=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E7	{ (4, 5, 6), 3, (7, 8), (1, 2}}
R4 2=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E8	{ 3, (4, 5, 6), (7, 8), (1, 2}}

Οπότε έχουμε το ζευγάρι (R12, E3). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (R12, E3), (R21, E2) & (R11, E1).

Πέμπτος γύρος

Το νοσοκομείο με αριθμό R31 επιλέγει τον ειδικευόμενο ιατρό E5 και εκείνος αποδέχεται την πρόταση καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

R1 1=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E1	{ (1, 2}, 3, (4, 5, 6), (7, 8)}
R1 2=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E2	{ 3, (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8)}
R21 =	{2, 8, 4, 7, 5, 3, 6, 1}	E3	{ (1, 2}, (4, 5, 6), 3, (7, 8)}
R31 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E4	{ (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8), 3}
R32 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E5	{ (4, 5, 6), (1, 2}, (7, 8), 3}
R33 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E6	{ (4, 5, 6), (7, 8), 3, (1, 2}}
R4 1=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E7	{ (4, 5, 6), 3, (7, 8), (1, 2}}
R4 2=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E8	{ 3, (4, 5, 6), (7, 8), (1, 2}}

Οπότε έχουμε το ζευγάρι (R31, E5). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (R31, E5), (R12, E3), (R21, E2) & (R11, E1).

Έκτος γύρος

Το νοσοκομείο με αριθμό R32 επιλέγει τον ειδικευόμενο ιατρό E7 και εκείνος αποδέχεται την πρόταση καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

R1 1=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E1	{ (1, 2}, 3, (4, 5, 6), (7, 8)}
R1 2=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E2	{ 3, (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8)}
R21 =	{2, 8, 4, 7, 5, 3, 6, 1}	E3	{ (1, 2}, (4, 5, 6), 3, (7, 8)}
R31 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E4	{ (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8), 3}
R32 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E5	{ (4, 5, 6), (1, 2}, (7, 8), 3}
R33 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E6	{ (4, 5, 6), (7, 8), 3, (1, 2}}
R4 1=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E7	{ (4, 5, 6), 3, (7, 8), (1, 2}}
R4 2=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E8	{ 3, (4, 5, 6), (7, 8), (1, 2}}

Οπότε έχουμε το ζευγάρι (R32, E7). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (R32, E7), (R31, E5), (R12, E3), (R21, E2) & (R11, E1).

Έβδομος γύρος

Το νοσοκομείο με αριθμό R33 επιλέγει τον ειδικευόμενο ιατρό E3 και εκείνος απορρίπτει την πρόταση καθώς το νοσοκομείο R12 είναι υψηλότερα στην λίστα προτίμησης του. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για τους ειδικευόμενους 1 και 2. Στη συνέχεια το νοσοκομείο με αριθμό R33 επιλέγει τον ειδικευόμενο ιατρό E4 και εκείνος αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

R1 1=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E1	{ (1, 2}, 3, (4, 5, 6), (7, 8)}
R1 2=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E2	{ 3, (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8)}
R21 =	{2, 8, 4, 7, 5, 3, 6, 1}	E3	{ (1, 2}, (4, 5, 6), 3, (7, 8)}
R31 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E4	{ (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8), 3}
R32 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E5	{ (4, 5, 6), (1, 2}, (7, 8), 3}
R33 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E6	{ (4, 5, 6), (7, 8), 3, (1, 2}}
R4 1=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E7	{ (4, 5, 6), 3, (7, 8), (1, 2}}
R4 2=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E8	{ 3, (4, 5, 6), (7, 8), (1, 2}}

Οπότε έχουμε το ζευγάρι (R33, E4). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (R33, E4), (R32, E7), (R31, E5), (R12, E3), (R21, E2) & (R11, E1).

Όγδοος γύρος

Το νοσοκομείο με αριθμό R41 επιλέγει τον ειδικευόμενο ιατρό E1 και εκείνος απορρίπτει την πρόταση καθώς το νοσοκομείο R11 είναι υψηλότερα στην λίστα προτίμησης του. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για τον ειδικευόμενο E7. Στη συνέχεια το νοσοκομείο με αριθμό R41 επιλέγει τον ειδικευόμενο ιατρό E6 και εκείνος αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

R1 1=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E1	{ (1, 2}, 3, (4, 5, 6), (7, 8)}
R1 2=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E2	{ 3, (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8)}
R21 =	{2, 8, 4, 7, 5, 3, 6, 1}	E3	{ (1, 2}, (4, 5, 6), 3, (7, 8)}
R31 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E4	{ (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8), 3}
R32 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E5	{ (4, 5, 6), (1, 2}, (7, 8), 3}
R33 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E6	{ (4, 5, 6), (7, 8), 3, (1, 2}}
R4 1=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E7	{ (4, 5, 6), 3, (7, 8), (1, 2}}
R4 2=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E8	{ 3, (4, 5, 6), (7, 8), (1, 2}}

Οπότε έχουμε το ζευγάρι (R41, E6). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (R41, E6), (R33, E4), (R32, E7), (R31, E5), (R12, E3), (R21, E2) & (R11, E1).

Ένατος γύρος

Το νοσοκομείο με αριθμό R42 επιλέγει σειριακά τους ειδικευόμενους E1, E7 και E5 και εκείνη απορρίπτουν την πρόταση καθώς οι υπάρχουσες αντιστοιχίσεις τους είναι καλύτερες με βάση την λίστα προτιμήσεων τους. Στη συνέχεια το νοσοκομείο με αριθμό R42 επιλέγει τον ειδικευόμενο ιατρό E8 και εκείνος αποδέχεται καθώς δεν έχει άλλη πρόταση.

R1 1=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E1	{ (1, 2}, 3, (4, 5, 6), (7, 8)}
R1 2=	{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}	E2	{ 3, (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8)}
R21 =	{2, 8, 4, 7, 5, 3, 6, 1}	E3	{ (1, 2}, (4, 5, 6), 3, (7, 8)}
R31 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E4	{ (1, 2}, (4, 5, 6), (7, 8), 3}
R32 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E5	{ (4, 5, 6), (1, 2}, (7, 8), 3}
R33 =	{5, 7, 3, 1, 2, 4, 8, 6}	E6	{ (4, 5, 6), (7, 8), 3, (1, 2}}
R4 1=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E7	{ (4, 5, 6), 3, (7, 8), (1, 2}}
R4 2=	{1, 7, 6, 5, 8, 2, 3, 4}	E8	{ 3, (4, 5, 6), (7, 8), (1, 2}}

Οπότε έχουμε το ζευγάρι (R42, E8). Συνολικά έχουμε τα ζευγάρια (R42, E8), (R41, E6), (R33, E4), (R32, E7), (R31, E5), (R12, E3), (R21, E2) & (R11, E1).

Με βάση το τελικό βήμα του αλγορίθμου καταλήξαμε στο τέταρτο νοσοκομείο να παίρνει τους ειδικευόμενους 8 και 6, το τρίτο νοσοκομείο λαμβάνει τους ειδικευόμενους 4, 5 και 7, το δεύτερο νοσοκομείο λαμβάνει τον ειδικευόμενο 2 και το πρώτο νοσοκομείο λαμβάνει τους ειδικευόμενους 1 και 3.

4.2 Το Πρόβλημα Αντιστοίχισης Φοιτητών σε δωμάτια των δύο ατόμων

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η διαφορά σε σχέση με το κλασικό πρόβλημα των Gale & Shapley είναι ότι αντί να έχουμε δύο διαφορετικά σύνολα για τα οποία αναζητούμε αντιστοίχιση έχουμε μόνο ένα. Πρόκειται για το γνωστό πρόβλημα αντιστοίχισης φοιτητών σε δωμάτια δύο ατόμων (Stable Roommate Problem, SRP) (Gusfield & Irving, 1989).

Όσον αφορά τα δεδομένα εισόδου για να υλοποιηθεί ο αλγόριθμος αυτά είναι τα εξής:

1. Έχουμε ένα σύνολο με 2n στο πλήθος άτομα. Χρειάζεται ζυγός αριθμός για μην περισσέψει άτομο κατά την υλοποίηση του αλγορίθμου.
2. Κάθε άτομο του συνόλου έχει ιεραρχήσει ως προς την προτίμηση του όλα τα υπόλοιπα άτομα, 2n -1. Οι προτιμήσεις του κάθε ατόμου εκφράζονται σε φθίνουσα σειρά. Για παράδειγμα εάν έχουμε 4 άτομα τότε η λίστα προτίμησης του πρώτου μέλους μπορεί να είναι $R_1 = \{3, 2, 4\}$. Αυτό σημαίνει ότι στη λίστα προτίμησης του 1^{ου} ατόμου το 3^{ο} άτομο έρχεται πρώτο, δεύτερο έρχεται το δεύτερο άτομο και τρίτο έρχεται το τέταρτο άτομο.

Όσον αφορά την λύση του προβλήματος SRP με τα δεδομένα που αναφέρθηκαν προηγουμένως πρέπει να έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. Κάθε άτομο πρέπει να συνδέεται μόνο με ένα άλλο άτομο
2. Στο τέλος του αλγορίθμου κάθε άτομο έχει αντιστοιχηθεί με το άτομο εκείνο που είναι όσο το δυνατόν υψηλότερα στην λίστα προτίμησης του. Επιπλέον, το άτομο αυτό δεν μπορεί να αντιστοιχηθεί με άτομο

υψηλότερα στην λίστα του καθώς αυτό το δυνητικό αυτό άτομο προτιμάει τον τρέχοντα συγκάτοικο του.

Το συγκεκριμένο πρόβλημα λύνεται από τον αλγόριθμο του Irving (1985) ο οποίος πρότεινε την λύση του καθώς ο αλγόριθμος των Gale & Shapley για το πρόβλημα SMP δεν δίνει πάντα τέλεια αντιστοίχιση στην περίπτωση του προβλήματος SRP. Για παράδειγμα ο αλγόριθμός SMP δεν δίνει τέλεια αντιστοίχιση στο παρακάτω παράδειγμα.

4.2.1 Παράδειγμα Εφαρμογής

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τέσσερις συνολικά συγκάτοικους {1, 2, 3, 4} με τον καθένα να έχει τις παρακάτω λίστες προτίμησης έναντι των άλλων:

R1	{2, 3, 4}
R2	{3, 1, 4}
R3	{1, 2, 4}
R4	{1, 2, 3}

Με βάση τους πιθανούς συνδυασμούς που υπάρχουν μπορούμε να καταλήξουμε στις παρακάτω αντιστοιχήσεις:

1η αντιστοίχιση
{(1, 2), (3, 4})
2η αντιστοίχιση
{(1, 3), (2, 4})
3η αντιστοίχιση
{(1, 4), (2, 3})

Όμως, καμία από τις παραπάνω αντιστοιχίσεις δεν είναι σταθερή. Στην πρώτη αντιστοίχιση για παράδειγμα το ζευγάρι (2, 3) είναι ζευγάρι αποκλεισμού (blocking pair) διότι το άτομο με τον αριθμό 3 προτιμάει περισσότερο το άτομο με τον αριθμό 2 έναντι του συγκατοίκου του με τον αριθμό 4. Για την δεύτερη αντιστοίχιση παρατηρείται το ζευγάρι (1, 2) να είναι ζευγάρι αποκλεισμού (blocking pair) διότι το άτομο με τον αριθμό 2 προτιμάει περισσότερο το άτομο με τον αριθμό 1 έναντι του συγκατοίκου του με τον αριθμό 4. Τέλος, για την τρίτη αντιστοίχιση παρατηρείται το ζευγάρι (1, 3) είναι ζευγάρι αποκλεισμού (blocking pair) διότι το άτομο με τον αριθμό 3 προτιμάει περισσότερο το άτομο με τον αριθμό 1 έναντι του συγκατοίκου του με τον αριθμό 2.

Κεφάλαιο 5 – Σύνοψη - Συμπεράσματα

Στην παρούσα έρευνα είδαμε το πρόβλημα σταθερού γάμου (stable marriage problem) το οποίο διερευνά την εύρεση της κατάλληλης αντιστοίχισης μεταξύ ανδρών και γυναικών, ικανοποιώντας την λίστα προτιμήσεων που κάθε άτομο εκφράζει στα μέλη του αντίθετου φύλου. Κάποιες βασικές κατηγορίες προβλημάτων αντιστοίχισης ήταν τα προβλήματα αντιστοίχισης δύο συνόλων, ενός συνόλου, κυκλικών προτιμήσεων, διχοτομικών προτιμήσεων, σταθερών αντιστοιχίσεων και στρατηγικής απόδειξης. Μελετήθηκε ακόμα η αντιστοίχιση αυτή να γίνεται με το κριτήριο της σταθερότητα της λύσης, δηλαδή για κάποιο ήδη αντιστοιχημένο ζευγάρι να μην υπάρχει το κίνητρο να φύγει από την υπάρχουσα επιλογή του. Είδαμε ακόμα προβλήματα διπλής αντιστοίχισης, δηλαδή αντιστοίχισης δύο συνόλων σύμφωνα με τις προτιμήσεις τους όπως μεταξύ ανδρών και γυναικών και παράλληλα είδαμε τις αντιστοιχήσεις ενός μόνο συνόλου όπως το παράδειγμα με την αντιστοίχιση των σπιτιών. Επιπλέον, είδαμε ότι η λύση του αλγορίθμου είναι μοναδική χωρίς να είναι ίδιο πάντα το αποτέλεσμα καθώς το ξεκίνημα του αλγορίθμου γίνεται αυθαίρετα. Μάλιστα το αποτέλεσμα του αλγορίθμου εύρεσης αντιστοίχισης μεταξύ δύο συνόλων δεν ήταν δίκαιο καθώς «προηγούνται» οι άνδρες έναντι των γυναικών με βάση τις προτιμήσεις τους. Η λύση από την πλευρά των ανδρών διέφερε σε σχέση με την λύση από την πλευρά των γυναικών. Παρουσιάστηκαν ακόμα αναλυτικά προβλήματα με μη πλήρεις λίστες προτίμησης, ή λίστες προτίμησης με ισότητες, ή συνδυασμός προβλημάτων με μη πλήρεις λίστες προτίμησης και λίστες ισότητας.

Επιπρόσθετα, αναφέρθηκαν αναλυτικά παραδείγματα για την ασθενή σταθερή αντιστοίχιση, για έναν άνδρα (Α) και την γυναίκα (Γ) που δεν είναι ζευγάρι στο σύνολο αντιστοιχίσεων Μ υποθέσαμε ότι ο Α είναι δεσμευμένος με την Γ', βάση της ασθενής σταθερής αντιστοίχισης το ζευγάρι (Α, Γ) δεν αποτέλεσε ζευγάρι αποκλεισμού καθώς η προτίμηση μεταξύ τους δεν είναι αυστηρή έναντι των τρεχόντων συντρόφων τους. Παρουσιάστηκε ακόμα ένα παράδειγμα ισχυρής σταθερής αντιστοίχισης για έναν άνδρα (Α) και την γυναίκα (Γ) που δεν είναι ζευγάρι στο σύνολο αντιστοιχίσεων Μ. Βάση της ισχυρής σταθερής αντιστοίχισης το ζευγάρι (Α, Γ) δεν αποτέλεσε ζευγάρι αποκλεισμού καθώς η προτίμηση μεταξύ τους ήταν αυστηρή για τον άνδρα Α έναντι της Γ' και της Γ ενώ για την Γ δεν είναι αυστηρή η προτίμηση της έναντι των Α και Α'. Ακόμα, για την περίπτωση της υπέρ σταθερής αντιστοίχισης για έναν άνδρα (Α) και την γυναίκα (Γ) που δεν είναι ζευγάρι στο σύνολο αντιστοιχίσεων είδαμε το ζευγάρι (Α, Γ) να μην αποτελεί ζευγάρι αποκλεισμού καθώς η προτίμηση μεταξύ τους είναι αυστηρή για τον άνδρα Α έναντι των γυναικών Γ' και Γ. Το ίδιο ίσχυε και για την προτίμηση της Γ έναντι των Α και Α'. Τέλος, είδαμε δύο πολύ γνωστά παραδείγματα αντιστοίχισης, το πρόβλημα αντιστοίχισης νοσοκομείων και ειδικευόμενων νοσοκομείων αλλά και το πρόβλημα αντιστοίχισης φοιτητών σε δωμάτια των δύο ατόμων.

Βιβλιογραφία

Amanatidis, G. Birmpas, G. Filos-Ratsikas, A and Voudouris, A. (2021). A few queries go a long way: Informationdistortion tradeoffs in matching. In Proceedings of AAAI-2021, 2021.

Cseh, Á., & Peters, J. (2021). Three-Dimensional Popular Matching with Cyclic Preferences. *ArXiv, abs/2105.09115*.

Dubins. L and Freedman. D (1981). Machiavelli and the Gale-Shapley algorithm. American Mathematical Monthly, 88(7):485–494.

Gale, D. and L. S. Shapley (1962), "College admissions and the stability of marriage," *Amer. Math. Monthly*, Vol.69, pp. 9–15.

Gent, Ian & Prosser, Patrick. (2002). An Empirical Study of the Stable Marriage Problem with Ties and Incomplete Lists. 141-145.

Gusfield. D and Irving R.W. (1989), The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms. *MIT Press*.

Hassidim. A, Romm. A, and Shorrer. R (2016). 'Strategic' behavior in a strategy-proof environment. Mimeo

Klijn, F., & Yazıcı, A. (2014). A many-to-many 'rural hospital theorem'. *Journal Of Mathematical Economics*, *54*, 63-73. doi: 10.1016/j.jmateco.2014.09.003

Manlove, D., Irving, R., Iwama, K., Miyazaki, S., & Morita, Y. (2002). Hard variants of stable marriage. *Theoretical Computer Science*, *276*(1-2), 261-279. doi: 10.1016/s0304-3975(01)00206-7

Mindruta, D., Moeen, M., & Agarwal, R. (2015). A two-sided matching approach for partner selection and assessing complementarities in partners' attributes in inter-firm alliances. Strategic Management Journal, 37(1), 206-231. doi: 10.1002/smj.2448

Myerson, Roger B. (1991). *Game Theory: Analysis of Conflict,* Harvard University Press, p. 1. Chapter-preview links, pp. vii–xi. NRMP. (2022). Retrieved 7 January 2022, from https://www.nrmp.org/.

Irving. R (1985), An Efficient Algorithm for the Stable Roommates Problem, *Journal of Algorithms*, 6 (4), (1985), 577-595

Irving. R.W.(1994), Stable marriage and indi@erence, Discrete Appl. Math. 48, 261–272.

Organ Donation and Transplantation Statistics. (2022). Retrieved 5 January 2022, from https://www.kidney.org/news/newsroom/factsheets/Organ-Donation-and-Transplantation-Stats

Rees-Jones, A(2016). Suboptimal behavior in strategy-proof mechanisms: Evidence from the residency match. Mimeo.

Roth. A, Sönmez. T, and Ünver. M. (2007). Efficient kidney exchange: Coincidence of wants in a market with compatibility-based preferences. American Economic Review, 97(3):828–851.

Stable Marriage Problem Introductory talk Yosuke KIKUCHI Dept. (2022). Retrieved 21 January 2022, from https://present5.com/stable-marriage-problem-introductory-talk-yosuke-kikuchi-dept/

Two-Sided Matching A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis Cambridge University Press, January 2013. https://doi.org/10.1017/CCOL052139015X

Felix Brandt, Vincent Conitzer, Ulle Endriss, Jérôme Lang, Ariel D. Procaccia (eds.) - Handbook of Computational Social Choice-Cambridge University Press (2016)

Alvin E. Roth - Who Gets What — and Why_ The New Economics of Matchmaking and Market Design-Eamon Dolan_Houghton Mifflin Harcourt (2015)

Two-Sided Matching A Study in Game-Theoretic Modeling and Analysis Cambridge University Press, January 2013. https://doi.org/10.1017/CCOL052139015X