



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ  
Σχολή Ναυτιλίας και Βιομηχανίας  
Τμήμα Βιομηχανικής Διοίκησης και Τεχνολογίας

**ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΣΕ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΑ ΚΕΛΙΑ  
ΚΑΙ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΩΝ  
ΜΕΤΑΜΟΡΦΩΤΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΕΛΙΩΝ**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΠΑΠΑΔΗΜΑΣ ΜΙΧΑΗΛ**

**Επιβλέπουσα:** Σοφianoπούλου Στυλιανή  
Καθηγήτρια Πανεπιστημίου Πειραιώς

Πειραιεύς, Ιούλιος 2022



Copyright © Παπαδήμας Μιχαήλ, 2022.

Με επιφύλαξη παντός δικαιώματος. All rights reserved.

Απαγορεύεται η αντιγραφή, αποθήκευση και διανομή της παρούσας εργασίας, εξ ολοκλήρου ή τμήματος αυτής, για εμπορικό σκοπό. Επιτρέπεται η ανατύπωση, αποθήκευση και διανομή για σκοπό μη κερδοσκοπικό, εκπαιδευτικής ή ερευνητικής φύσης, υπό την προϋπόθεση να αναφέρεται η πηγή προέλευσης και να διατηρείται το παρόν μήνυμα. Ερωτήματα που αφορούν τη χρήση της εργασίας για κερδοσκοπικό σκοπό πρέπει να απευθύνονται προς τον συγγραφέα.

Οι απόψεις και τα συμπεράσματα που περιέχονται σε αυτό το έγγραφο εκφράζουν τον συγγραφέα και δεν πρέπει να ερμηνευθεί ότι αντιπροσωπεύουν τις επίσημες θέσεις του Πανεπιστημίου Πειραιώς.



*Στην οικογένειά μου.*



## Περίληψη

Στο πλαίσιο αυτής της προπτυχιακής διατριβής αναδεικνύονται οι επωφελείς πτυχές των Παραγωγικών Συστημάτων με Βιομηχανικά Κελιά (ΣΠΒΚ), καθώς παρουσιάζεται η εννοιολογική βάση των συστημάτων και η μαθηματική έκφραση αυτής. Επίσης, στην εργασία παρουσιάζεται η έννοια των μεταμορφωτικών κελιών, η οποία αποτελεί νεωτερικό στοιχείο στην σχετική βιβλιογραφία.

Αρχικώς, αναφέρονται θεμελιώδεις αρχές που διέπουν τα προαναφερθέντα συστήματα και τα πλεονεκτήματα που χαρακτηρίζουν αυτά έναντι των κλασικότερων συστημάτων παραγωγής. Εν συνεχεία, δομείται εννοιολογικά η πράξη της εφαρμογής των παραγωγικών συστημάτων με βιομηχανικά κελιά. Τα δομικά στοιχεία της υλοποίησης των ΣΠΒΚ αποτελούν ο σχεδιασμός των κελιών, η μορφοποίηση, η διασφάλιση της ποιότητάς τους και η αξιοπιστία τους κατά την περίοδο λειτουργίας τους. Αφού γίνει εκτενής περιγραφή της υπάρχουσας βιβλιογραφίας, έπειτα παρουσιάζεται ένα μαθηματικό μοντέλο, το οποίο δημιουργήθηκε στο πλαίσιο της παρούσης διατριβής και λαμβάνει υπόψιν μεταβλητές σχετικές με την Διαμόρφωση των Κελιών (CF), την Διάταξη των Ομαδοποιημένων Μερών (GL) και τον Χρονοπρογραμματισμό Αποπεράτωσης των Λειτουργιών των Εξαρτημάτων (GS), ενώ μερικά αριθμητικά παραδείγματα μικρής κλίμακας συμβάλλουν στην πληρότητα της παρουσίασης του μοντέλου.

Τελικώς, η εργασία κλείνει με την παρουσίαση των μεταμορφωτικών κελιών. Τα κελιά αυτά χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα του δαπέδου, στο οποίο βρίσκονται, να μετασχηματίζεται και να υιοθετεί γεωμετρικές ορθογωνίου παραλληλογράμμου και τριγώνου, μέσω των κατάλληλων εσωτερικών τομών που πραγματοποιούνται στην αρχική γεωμετρία του δαπέδου των εκάστοτε εγκαταστάσεων. Επιπλέον, τα Θεωρήματα 5.2 και 5.3, τα οποία αναπτύχθηκαν στην παρούσα εργασία αποτελούν την επεξηγηματική βάση των γεωμετρικών μετασχηματισμών που παρουσιάζονται.





## Abstract

In the context of this undergraduate thesis, the beneficial aspects of Cellular Manufacturing Systems (CMS) are highlighted, as the conceptual basis of the CMSs and its mathematical expression are presented. Also, the work introduces the concept of Metamorphic Cells, which is a new element in the relevant literature.

Initially, the fundamental principles that dominate the aforementioned systems and the advantages that characterize them, over the classic production systems, are mentioned. Subsequently, the act of implementing CMS is conceptually structured. The structural elements of the implementation of CMSs are the design of the cells, their formation, their quality assurance and their reliability during their operation period. After an extensive description of the existing literature, a mathematical model, which takes into account variables related to Cell Formation (CF), Group Layout (GL) and Group Scheduling (GS) is presented, while some small-scale numerical examples contribute to the completeness of the model's presentation.

Finally, the dissertation ends with the presentation of the metamorphic cells. These cells are characterized by the property of the floor, on which they are located, to be transformed and adopt rectangular and triangular geometries. These geometric transformations are achieved because of appropriate internal cuts of initial floor's geometry. In addition, Theorems 5.2 and 5.3, which were developed in this work, form the explanatory basis of the geometric transformations presented.



## Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω την επιβλέπουσα καθηγήτρια αυτής της εργασίας Στυλιανή Σοφianoπούλου για την καθοδήγησή της καθώς και για την υποστήριξή της καθ' όλη την διάρκεια εκπόνησης της παρούσης προσπάθειας. Οι συμβουλές της και η εμπιστοσύνη της αποτέλεσαν πηγή αυτοπεποίθησης ώστε να συνεχίσω απτόητος την διαδικασία περάτωσης της εργασίας. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω την ξαδέλφη μου Αλεξάνδρα Χρονοπούλου, της οποίας η τεχνική κατάρτιση με βοήθησε να ξεπεράσω πολλά εμπόδια κατά την διάρκεια υλοποίησης της εργασίας.

Με την παρουσίαση αυτής της διπλωματικής εργασίας, κλείνει επίσημα ένας σημαντικός κύκλος της ζωής μου και ανοίγει ένας νέος. Ευχαριστώ βαθιά τους γονείς μου, οι οποίοι πάντα με υποστήριζαν και με βοηθούσαν σε όλες τις αποφάσεις μου.

Θέλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή Ευάγγελο Φούντα για όλες τις συζητήσεις που έχουμε κάνει γύρω από τα μαθηματικά και την φιλοσοφία. Ακόμα τον ευχαριστώ γιατί αποτέλεσε πηγή έμπνευσης για εμένα η προσήνειά του και η τάση του να αναζητά λύσεις σκεπτόμενος “έξω από το κουτί”.

Τέλος, ευχαριστώ τους εγκάρδιους φίλους μου που έχουμε μοιραστεί στιγμές χαράς, λύπης, ψυχαγωγίας και προβληματισμού.



# ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

### ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1	Ορισμός Παραγωγής σε Βιομηχανικά Κελιά .....	3
1.2	Σύγκριση των ΣΠΒΚ σε σχέση με άλλα παραγωγικά συστήματα .....	5

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΕΛΙΩΝ

2.1	Ο σχεδιασμός των ΣΠΒΚ .....	11
2.2	Η μορφοποίηση των ΣΠΒΚ .....	12
2.3	Η ποιότητα στην υλοποίηση της διαδικασίας σχεδίασης βιομηχανικών κελιών .....	14
2.4	Η αξιοπιστία των ΣΠΒΚ .....	17

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

3.1	Εισαγωγή στο πρόβλημα .....	23
3.2	Αναδρομή στην επιστημονική βιβλιογραφία .....	24
3.2.1	Η Δρομολόγηση Εξαρτημάτων .....	24
3.2.2	Ευρετικοί και Μεταευρετικοί Αλγόριθμοι .....	27
3.2.3	Εναλλακτικές-Πολλαπλές Δρομολογήσεις .....	29

3.2.4	Το Μέγεθος της Παραγόμενης Παρτίδας .....	30
3.2.5	Η Δυναμικότητα του ΣΠΒΚ .....	31
3.2.6	Μηχανές Συμφόρησης .....	33
3.2.7	Χρονοπρογραμματισμός Εξαρτημάτων .....	35
3.2.8	Ολιστική Προσέγγιση στα ΣΠΒΚ .....	37
3.3	Σύνοψη Βιβλιογραφικής Ανασκόπησης .....	38

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΠΒΚ

4.1	Σύνοψη Προβλήματος .....	45
4.2	Μαθηματική Έκφραση Προβλήματος .....	46
4.2.1	Δείκτες .....	47
4.2.2	Παράμετροι .....	47
4.2.3	Μεταβλητές Απόφασης .....	48
4.2.4	Μαθηματικό Μοντέλο .....	49
4.2.5	Επεξήγηση Μαθηματικού Μοντέλου .....	51
4.3	Αποτελέσματα Εφαρμογής Μοντέλου .....	66
4.3.1	Πρόβλημα 1 .....	67
4.3.2	Πρόβλημα 2 .....	73
4.3.3	Πρόβλημα 3 .....	78
4.3.4	Πρόβλημα 4 .....	82
4.3.5	Πρόβλημα 5 .....	86
4.4	Συμπεράσματα για το Μοντέλο .....	90
4.5	Προεκτάσεις για Μελλοντική Έρευνα .....	93

## ΚΕΦΑΛΙΑΟ 5

### ΜΕΤΑΜΟΡΦΩΤΙΚΑ ΚΕΛΙΑ

5.1	Εισαγωγή στα Μεταμορφωτικά Κελιά .....	97
5.2	Η Γεωμετρία των Μεταμορφωτικών Κελιών .....	99
5.3	Πεδία Εφαρμογής Μεταμορφωτικών Κελιών .....	109
Βιβλιογραφία .....		115
Παράρτημα .....		121
Παράρτημα 1 .....		121
Παράρτημα 2 .....		123

## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

3.1	Σύνοψη Βιβλιογραφικής Ανασκόπησης.....	38
3.2	Επεξήγηση Συντομογραφιών των Μεθόδων.....	39
4.1	Περιεχόμενο Δείκτη $\Delta_{\mu}$ .....	60
4.2	Περιεχόμενο Δείκτη $\Delta_{\varepsilon}$ .....	64
4.3	Παράμετροι Προβλήματος 1.....	67
4.4	Λύση Προβλήματος 1.....	68
4.5	Δρομολόγηση Εξαρτημάτων σε Μηχανές.....	68
4.6	Παράμετροι Προβλήματος 2.....	73
4.7	Λύση Προβλήματος 2.....	74
4.8	Δρομολόγηση Εξαρτημάτων σε Μηχανές.....	74
4.9	Παράμετροι Προβλήματος 3.....	78
4.10	Λύση Προβλήματος 3.....	79
4.11	Δρομολόγηση Εξαρτημάτων σε Μηχανές.....	79
4.12	Παράμετροι Προβλήματος 4.....	82
4.13	Λύση Προβλήματος 4.....	83
4.14	Δρομολόγηση Εξαρτημάτων σε Μηχανές.....	83
4.15	Παράμετροι Προβλήματος 5.....	86
4.16	Λύση Προβλήματος 5.....	87
4.17	Δρομολόγηση Εξαρτημάτων σε Μηχανές.....	87
5.1	Προϊόντα και Δρομολογήσεις.....	111
5.2	Κόστος Περάτωσης Εξαρτημάτων σε Όρους Διανυόμενου Μήκους.....	113



## ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

1.1	Σύνοψη Συστήματος Παραγωγής σε Βιομηχανικά Κελιά.....	4
1.2	Διάγραμμα μεθόδου γραμμής παραγωγής.....	6
1.3	Διάγραμμα μεθόδου παραγωγής κατά παραγγελία.....	7
1.4	Διάγραμμα μεθόδου παραγωγής σε βιομηχανικά κελιά.....	8
2.1	Διάγραμμα κύκλου ΠΥΕΑ.....	16
2.2	Διάγραμμα κύκλου ΕΑΠΥ.....	16
2.3	Η αξιοπιστία του παραγωγικού συστήματος ως χωρίο τομής των τριών παραγόντων αξιοπιστίας.....	17
2.4	Σύστημα υποστήριξης λήψης αποφάσεων(DSS) για ΣΠΒΚ ...	19
4.1	Απεικόνιση της χρησιμότητας των περιορισμών (5.α-5.β) ...	52
4.2	Απεικόνιση των περιορισμών (6.α), (6.β), (7.α), (7.β).....	53
4.3	Απεικόνιση των περιορισμών (8), (9), (10), (11).....	54
4.4	Βιομηχανικό κελί σύνθετης γεωμετρίας.....	55
4.5	Απεικόνιση του περιορισμού (17).....	61
4.6	Διάταξη Βιομηχανικών Κελιών Προβλήματος 1.....	68
4.7	Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων Προβλήματος 1 του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.....	69
4.8	Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων.....	70
4.9	Διάταξη Βιομηχανικών Κελιών Προβλήματος 2.....	71
4.10	Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων Προβλήματος 2 του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.....	75
4.11	Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων.....	75
4.12	Διάταξη Βιομηχανικών Κελιών Προβλήματος 3.....	79

4.13	Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων Προβλήματος 3 του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.....	80
4.14	Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων.....	80
4.15	Διάταξη Βιομηχανικών Κελιών Προβλήματος 4.....	83
4.16	Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων Προβλήματος 4 του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.....	84
4.17	Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων.....	84
4.18	Διάταξη Βιομηχανικών Κελιών Προβλήματος 5.....	87
4.19	Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων Προβλήματος 5 του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.....	88
4.20	Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων.....	88
5.1	Κατηγορίες Σημείων (α) ΣΚ, (β) ΠΣ, (γ) ΤΑ.....	100
5.2	Στάδια Μετασχηματισμών Μεταμορφωτικών Κελιών .....	111
5.3	Στάδια Μετασχηματισμών Μεταμορφωτικών Κελιών.....	112

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί η εννοιολογική δομή της Μεθόδου Παραγωγής με Βιομηχανικά Κελιά (Cellular Manufacturing). Αρχικώς θα αναφερθούμε στις θεμελιώδεις αρχές που διέπουν την μέθοδο της παραγωγής με βιομηχανικά κελιά, καθώς και στα χαρακτηριστικά αυτής. Εν συνεχεία θα παρουσιαστούν τα συγκριτικά πλεονεκτήματά της σε σχέση με άλλες στρατηγικές παραγωγής και τα οφέλη που αποκομίζει ο εκάστοτε οργανισμός μέσω της υιοθέτησης της προαναφερθείσας μεθόδου.

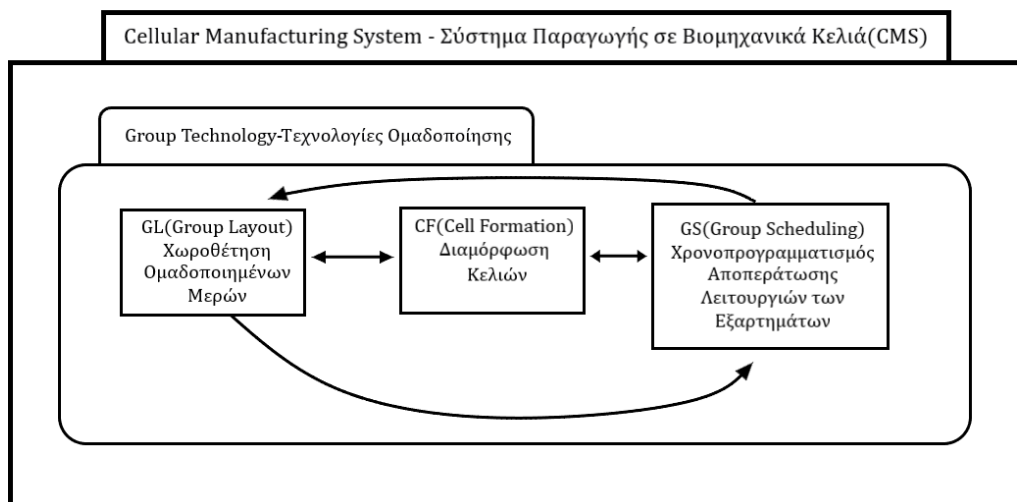


## 1.1 Ορισμός Παραγωγής με Βιομηχανικά Κελιά

Η Παραγωγή με Βιομηχανικά Κελιά ή με Κύτταρα Παραγωγής (CM) είναι μία τακτική κατασκευής βιομηχανικών προϊόντων, η οποία είναι άρρηκτα συνδεδεμένη με τις έννοιες της Επακριβούς Χρονικά Ζητηθείσας Παραγωγής (Just - In - Time Manufacturing) και της Λιτής Παραγωγής (Lean Manufacturing). Αυτό έχει επιτευχθεί λόγω του ότι ο σκοπός των Συστημάτων Παραγωγής με Βιομηχανικά Κελιά (CMS - ΣΠΒΚ) είναι να βελτιώσουν όσο το δυνατόν την ευελιξία και την αποδοτικότητα του εκάστοτε συστήματος, μέσω αρχών και τεχνικών που θα επεξηγηθούν στην συνέχεια. Η εννοιολογική και σχεδιαστική πληρότητα ενός ΣΠΒΚ έγκειται στην μελέτη τριών κύριων λειτουργιών, της Διαμόρφωσης Κελιών (CF), της Χωροθέτησης - Διάταξης Ομαδοποιημένων Μερών (GL), και του Χρονοπρογραμματισμού Αποπεράτωσης των Λειτουργιών των Εξαρτημάτων (GS).

Η διαμόρφωση των κελιών του συστήματος περιλαμβάνει την αναγνώριση των κελιών και των συγγενικών εξαρτημάτων, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθούν οι μετακινήσεις εξαρτημάτων από ένα βιομηχανικό κελί σε άλλο. Η χωροθέτηση - διάταξη ομαδοποιημένων μερών του συστήματος περιλαμβάνει την διαδικασία χωροθέτησης των κελιών στον διαθέσιμο βιομηχανικό χώρο και συνάμα την διάταξη των μηχανών εντός του κάθε διαθέσιμου κελιού. Τέλος, ο χρονοπρογραμματισμός αποπεράτωσης των λειτουργιών των εξαρτημάτων συνοψίζει τις διαδικασίες αντιστοίχισης των εξαρτημάτων στα βιομηχανικά κελιά που διαθέτει το σύστημα. Επομένως, ένα σύστημα παραγωγής με βιομηχανικά κελιά μπορεί να θεωρηθεί ένα σύστημα παραγωγής βασισμένο στην ιδέα της

τεχνολογίας ομαδοποίησης (Group Technology), όπου οι λειτουργικές ομοιότητες των εξαρτημάτων και των μηχανών παρέχουν οφέλη στην παραγωγική διαδικασία [1].



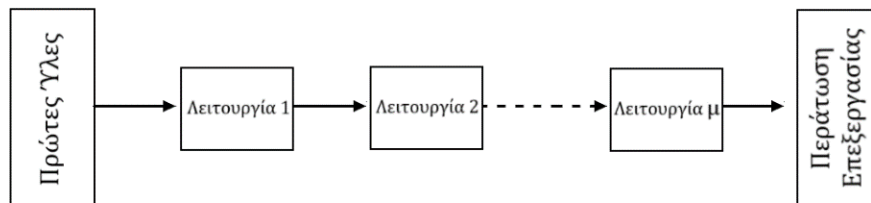
Σχήμα 1.1: Σύνοψη Συστήματος Παραγωγής σε Βιομηχανικά Κελιά.

## 1.2 Σύγκριση των ΣΠΒΚ σε σχέση με άλλα παραγωγικά συστήματα

Η πηγή των πλεονεκτημάτων της παραγωγής με βιομηχανικά κελιά βρίσκεται κυρίως στη ιδιότητα αυτής της μεθόδου να κατηγοριοποιεί τις μηχανές και τα εξαρτήματα, βάσει των λειτουργιών τους και των τεχνικών χαρακτηριστικών τους αντιστοίχως. Αυτό σημαίνει ότι διαφορετικά εξαρτήματα με παρόμοια γεωμετρία ή όμοιες απαιτούμενες διεργασίες, θα αποτελούν μία οικογένεια εξαρτημάτων (Part Family), η οποία θα ομαδοποιηθεί με σκοπό την επεξεργασία της στα βιομηχανικά κελιά. Ανάλογες είναι και οι αρχές που διέπουν την ομαδοποίηση των μηχανών στις οποίες θα επεξεργαστούν τα εξαρτήματα. Επομένως, ένα ΣΠΒΚ περιλαμβάνει την ταυτοποίηση των οικογενειών των εξαρτημάτων και των βιομηχανικών κελιών, με απώτερο σκοπό την ελαχιστοποίηση των πραγματοποιημένων μετακινήσεων μεταξύ των κελιών, επιτυγχάνοντας παράλληλα μεγιστοποίηση της αξιοποίησης των μηχανών στα κελιά [2].

Εν συνεχεία θα συγκρίνουμε το σύστημα παραγωγής σε βιομηχανικά κελιά με τα συστήματα γραμμής παραγωγής ή συνεχούς ροής (Production Line | Flow Shop) και κατά παραγγελίας (Job Shop). Στο σύστημα γραμμής παραγωγής τα εξαρτήματα κινούνται και επεξεργάζονται διαδοχικά κατά μήκος της γραμμής παραγωγής. Είναι ευκατανόητο λοιπόν ότι η συγκεκριμένη μέθοδος στερείται ευελιξίας, εξαιτίας της ύπαρξης ενός μόνο μονοπατιού επεξεργασίας στο παραγωγικό μας σύστημα. Εντούτοις, είναι αρκετά αποδοτικό για την παραγωγή τυποποιημένων προϊόντων μεγάλης κλίμακας, ενώ

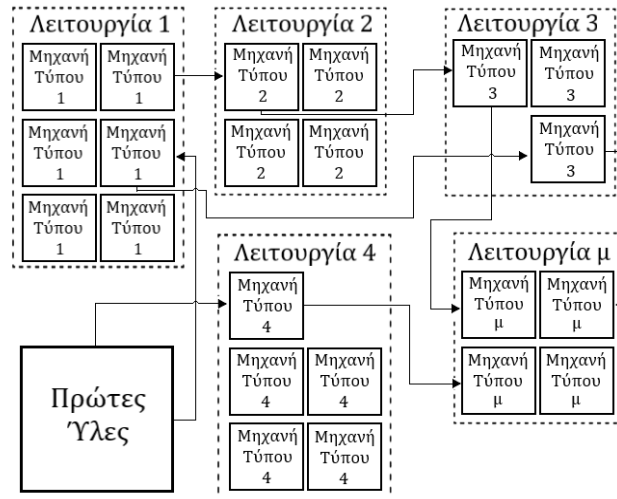
παράλληλα μειώνει σημαντικά το παραγωγικό ρίσκο και παρέχει ακριβέστερη εικόνα για την κατανομή και δαπάνη των παραγωγικών πόρων ανά στάδιο επεξεργασίας.



**Σχήμα 1.2:** Διάγραμμα μεθόδου γραμμής παραγωγής.

Το σύστημα παραγωγής κατά παραγγελία έχει μεγάλη ευελιξία, αλλά δεν δύναται να παράγει μεγάλες ποσότητες. Τα συστήματα αυτά συνήθως παράγουν μεγάλη ποικιλία προϊόντων και σε όχι μεγάλες ποσότητες. Ο εξοπλισμός τους δεν είναι εξειδικευμένος και κάθε παρτίδα ακολουθεί διαφορετικό μονοπάτι επεξεργασίας στο παραγωγικό μας σύστημα [3]. Έτσι η διαχείριση των υλικών παρουσιάζει προβλήματα λόγω του ότι ένα εξάρτημα μετά την επεξεργασία του σε μια μηχανή πιθανόν να χρειάζεται να διανύσει κάποια μεγάλη απόσταση ώστε να περατωθεί ολοκληρωτικά η επεξεργασία του.

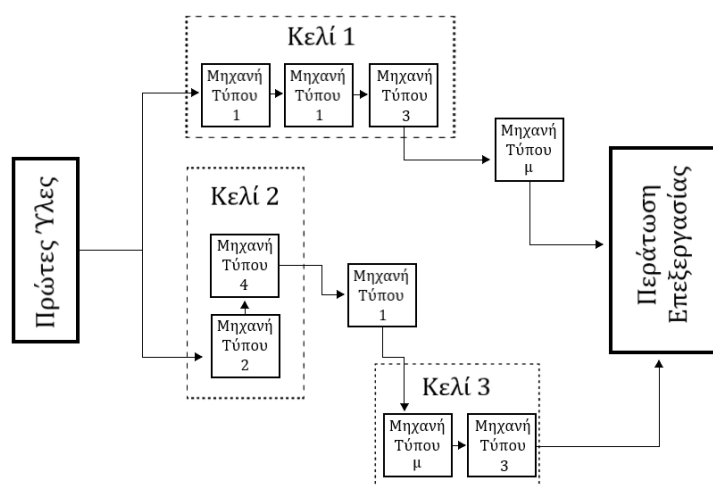




**Σχήμα 1.3:** Διάγραμμα μεθόδου παραγωγής κατά παραγγελία.

Προς ανάγκη αξιοποίησης των πλεονεκτημάτων των προαναφερθεισών μεθόδων παραγωγής έρχονται να συμβάλλουν τα συστήματα παραγωγής με την χρήση βιομηχανικών κελιών. Τα ΣΠΒΚ συνδυάζουν την ευελιξία των συστημάτων παραγωγής κατά παραγγελία με την αυξημένη, όσο το δυνατόν γίνεται, παραγωγική δυναμικότητα που έχουν τα συστήματα γραμμής παραγωγής. Επιτυγχάνουν συντομότερους χρόνους διεκπεραίωσης, βελτιωμένη ποιότητα προϊόντων, χαμηλότερα επίπεδα εργασιών εν εξελίξει (WIP-Work in Progress) και μειωμένους χρόνους προετοιμασίας των μηχανών [4]. Οι συνέργειες των μηχανών-λειτουργιών, οι οποίες δημιουργούνται εντός του βιομηχανικού κελιού συνδράμουν ενεργά στην μείωση των χρόνων προετοιμασίας των μηχανών, καθώς όπως αναφέραμε οι μηχανές κατανέμονται στα κελιά βάσει κάποιων κοινών ιδιοτήτων που τις χαρακτηρίζει. Επιπλέον πραγματοποιούνται μικρότεροι χρόνοι παράδοσης και λιγότερες διεργασίες εν εξελίξει, αφού τα εξαρτήματα δεν χρειάζονται να διανύουν μεγάλες αποστάσεις από λειτουργία-σε-λειτουργία εξαιτίας των τεχνικών ομαδοποίησης που εφαρμόζονται σε αυτή την μέθοδο παραγωγής.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η παραγωγή σε βιομηχανικά κελιά δεν διακρίνεται μόνο από πλεονεκτήματα και οφέλη για το παραγωγικό σύστημα. Για να επιτευχθεί ένα αρκετά χαμηλό κόστος παραγωγής ανά εξάρτημα και για να θεωρείται μη-επιβλαβής για το σύστημα η ύπαρξη ενός κελιού, πρέπει να επεξεργαστούν από το εκάστοτε βιομηχανικό κελί μεγάλος αριθμός εξαρτημάτων. Επιπρόσθετα, η εμφάνιση βλάβης σε μια μηχανή είναι πιθανό να δημιουργήσει διακοπή της λειτουργίας του κελιού, στο οποίο ανήκει η μηχανή, επιφέροντας σημαντικές μεταβολές στον χρόνο περάτωσης της επεξεργασίας ενός εξαρτήματος και κατά προέκταση στο κόστος ανά παραγόμενη μονάδα του συστήματος. Διαφαίνεται ότι υπάρχουν διαστάσεις των συστημάτων παραγωγής σε βιομηχανικά κελιά, τα οποία χρίζουν ιδιαίτερης προσοχής από τα διοικητικά στελέχη που θα επιχειρήσουν να υιοθετήσουν αυτό το σύστημα παραγωγής. Επομένως θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψιν όλες οι διαστάσεις της μεθόδου από τα αρμόδια στελέχη και να μην αντιλαμβάνονται την εφαρμογή της ομφαλοσκοπικά, διότι θα οδηγηθούν σε μη-αναμενόμενα οφέλη για το παραγωγικό σύστημα.



**Σχήμα 1.4:** Διάγραμμα μεθόδου παραγωγής σε βιομηχανικά κελιά.

## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2**

### **ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΚΕΛΙΩΝ**

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστούν οι πτυχές που καθορίζουν την ορθή υλοποίηση της μεθόδου των βιομηχανικών κελιών σε ένα παραγωγικό σύστημα. Θα περιγραφούν τέσσερις πτυχές, ο σχεδιασμός των κελιών, η μορφοποίηση, η διασφάλιση της ποιότητάς τους και η αξιοπιστία τους. Επιπλέον, θα παρουσιαστεί και η γεφύρωση των προαναφερθεισών εννοιών με την έννοια της τεχνολογίας ομαδοποίησης (group technology-GT).



## 2.1 Ο σχεδιασμός των ΣΠΒΚ

Η προσέγγιση GT είναι μια φιλοσοφία συσχετισμένη με τα παραγωγικά συστήματα, όπου οργανώνει και χρησιμοποιεί πληροφορίες για να ομαδοποιηθούν διάφορα εξαρτήματα, με παρόμοιες τεχνικές ιδιότητες [5], σε οικογένειες εξαρτημάτων και οργανώνει τις αντίστοιχες μηχανές σε βιομηχανικά κελιά. Τα βιομηχανικά κελιά εισάγονται στο σύστημα έτσι ώστε να πραγματοποιθούν τα οφέλη της προσέγγισης GT, εκ των οποίων μερικά είναι οι μειωμένοι χρόνοι προετοιμασίας των μηχανών, τα μειωμένα αποθέματα, το μειωμένο μέγεθος παραγόμενων παρτίδων και η βέλτιστη αξιοποίηση του εξοπλισμού που διαθέτει το σύστημα.

Το στάδιο του σχεδιασμού ενός ΣΠΒΚ μπορεί να θεωρηθεί αποτελούμενο από δύο επιμέρους ενότητες, την αποσαφήνιση των σχέσεων μεταξύ των οικογενειών των εξαρτημάτων και έπειτα την λήψη της αντίστοιχης απόφασης. Έχουν διεξαχθεί ποικίλες μελέτες σχετικά με μεθόδους εκμαίευσης των συνδετικών πληροφοριών και ομαδοποίησης των εξαρτημάτων και των μηχανών. Στις περισσότερες εργασίες έχουν χρησιμοποιηθεί διάφοροι αλγόριθμοι ομαδοποίησης (clustering algorithms), παρόλα αυτά έχουν υπάρξει και άλλες, οι οποίες μέσω της χρήσης υβριδικών μεθόδων είχαν εξίσου ή και καλύτερα αποτελέσματα. Οι Mohammadi και Forghani [6], χρησιμοποιούν μία μαθηματική έκφραση του προβλήματος με δύο αντικειμενικές συναρτήσεις, για να επιτύχουν ελαχιστοποίηση του κόστους διαχείρισης και μεγιστοποίηση της ομοιότητας μεταξύ των μηχανών. Η μέθοδος επίλυσης είναι υβριδική, συνδυάζοντας μεθόδους επίλυσης δυναμικού προγραμματισμού και προσομοίωσης. Ενδιαφέρουσα θεματολογία μελλοντικής μελέτης ίσως αποτελέσει η

συνδυαστική βελτιστοποίηση της δρομολόγησης των διεργασιών σε σχέση με την δυναμικότητα των μηχανών [7].

## 2.2 Η μορφοποίηση των ΣΠΒΚ

Στην σχεδίαση ενός παραγωγικού συστήματος ένα από τα βασικότερα προβλήματα είναι η μορφοποίηση των οικογενειών των εξαρτημάτων και των βιομηχανικών κελιών. Σε αυτό το στάδιο πραγματοποιείται η ταυτοποίηση των κελιών και των οικογενειών των εξαρτημάτων, υπό όρους ελαχιστοποίησης των μετακινήσεων των εξαρτημάτων μεταξύ των κελιών. Έχουν αναπτυχθεί και σε αυτό το στάδιο ποικίλοι αλγόριθμοι, οι οποίοι δεν θα περιγραφούν λεπτομερώς, καθώς δεν αποτελούν την κύρια θεματολογία στην παρούσα εργασία. Εντούτοις, αξίζει να σημειωθεί ότι έχουν αναπτυχθεί διάφοροι γενετικοί (Genetic) και B&B (Branch and bound) αλγόριθμοι.

Σε πραγματικές συνθήκες, για να βρεθεί η βέλτιστη μορφοποίηση των κελιών πρέπει να ληφθούν υπόψιν μεγάλοι όγκοι δεδομένων. Άρα γίνεται εμφανές ότι οι στρατηγικές επίλυσης που δύνανται να αξιοποιηθούν οι επιστήμονες χωρίζονται σε δύο κύριες κατηγορίες. Η πρώτη αφορά την επίλυση με υπάρχοντα υπολογιστικά εργαλεία σε κάποια περιβάλλοντα βελτιστοποίησης. Αυτή η πρακτική επιβάλλει την εννοιολογική απλοποίηση στο μαθηματικό μοντέλο, ώστε να ικανοποιούνται οι τεχνικοί περιορισμοί του εκάστοτε περιβάλλοντος βελτιστοποίησης. Με αυτήν την μέθοδο αν και απλοποιούμε την μαθηματική έκφραση του μοντέλου τελικώς λαμβάνουμε την βέλτιστη λύση του. Η δεύτερη κατηγορία μεθόδων επίλυσης

σχετίζεται με την χρήση κάποιων οικογενειών αλγορίθμων. Η συχνότερη μέθοδος είναι η δημιουργία μεταευρετικών αλγορίθμων και κυρίως γενετικών. Οι γενετικοί αλγόριθμοι είναι εμπνευσμένοι από την εξελικτική θεωρία του Κάρολου Δαρβίνου και χαρακτηρίζονται αρκετά αποτελεσματικοί στην διερεύνηση διάφορων τμημάτων της εφικτής περιοχής λύσεων [8]. Σε σχέση με την προηγούμενη κατηγορία έχουν πολύ καλύτερο χρόνο εύρεσης λύσης. Όμως δεν βρίσκουν την βέλτιστη λύση, αλλά την καλύτερη δυνατή εφικτή λύση που μπορούν να προσεγγίσουν. Με αυτόν τον τρόπο προβλήματα που χρειάζονται ακόμα και ώρες για να βρεθεί η βέλτιστη λύση λύνονται προσεγγιστικά σε μερικά λεπτά μέσω της χρήσης γενετικών αλγορίθμων. Στην παρούσα εργασία θα γίνει χρήση της πρώτης μεθόδου.

## 2.3 Η ποιότητα στην υλοποίηση της διαδικασίας σχεδίασης βιομηχανικών κελιών

Πρωτεύουσας σημασίας για τα διοικητικά στελέχη είναι οι μέθοδοι που θα εφαρμοστούν ώστε να υλοποιηθεί ορθώς ο σχεδιασμός ενός συστήματος παραγωγής με βιομηχανικά κελιά. Για να πραγματοποιηθεί η σωστή εφαρμογή των βιομηχανικών κελιών στο εκάστοτε παραγωγικό σύστημα, πρέπει να βρεθούν και να αξιολογηθούν τα κριτήρια που επηρεάζουν άμεσα την φύση της υλοποίησης. Οι Sharma κ.ά. [9] προέβησαν σε μια ιεράρχηση των κριτηρίων που καθορίζουν την ορθή ή φαύλη υλοποίηση συστημάτων παραγωγής με βιομηχανικά κελιά, χρησιμοποιώντας μια αναλυτική ιεραρχική διαδικασία της κατηγορίας Fuzzy AHP (Analytical Hierarchy Process).

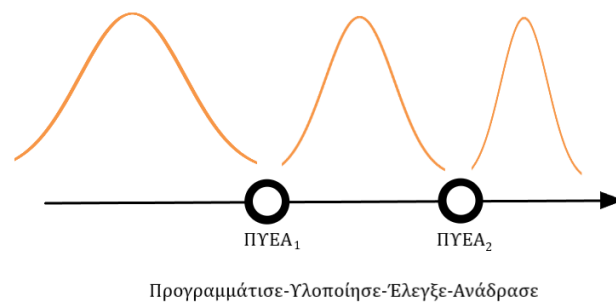
Το απαύγασμα της μελέτης ανέδειξε την εκπαίδευση του προσωπικού (employee training) και το προσωπικό με πολυσχιδείς ικανότητες (multi-skill employee) ως τα δύο κυρίως επιδραστικότερα κριτήρια. Αυτό μοιάζει λογικό, διότι στα σύγχρονα εργασιακά περιβάλλοντα οι ικανότητες αναστοχασμού σε ζητήματα διαδικασιών, δημιουργικής σκέψης, γρήγορης επίλυσης προβλημάτων και αυτοπροσανατολισμού εντός ενός περίπλοκου βιομηχανικού τοπίου λειτουργούν ως κριτήρια οδηγοί στην υλοποίηση οιασδήποτε επιχειρησιακής απόφασης. Έπειτα, στην ιεράρχηση των κριτηρίων την τρίτη θέση κατέχουν οι τεχνολογίες αυτοματοποίησης (robotics), με την συμβολή των οποίων επιτυγχάνεται η παραγωγή ποικίλων παρόμοιων προϊόντων. Την επόμενη θέση κατέχουν οι χρόνοι προετοιμασίας των μηχανών



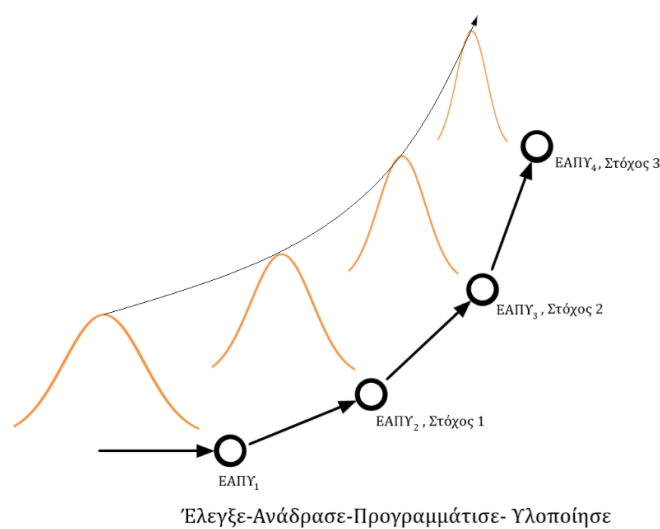
(setup time), καθώς η μείωσή τους διευκολύνει την διαμεταγωγή των παραγόμενων προϊόντων. Την πέμπτη θέση κατέχουν οι τεχνολογίες ομαδοποίησης (group technology), οι οποίες συνδράμουν στην ευελιξία του συστήματος και στην ταχεία προσαρμογή της παραγωγής στις ανάγκες των πελατών. Τα κριτήρια που σχετίζονται με την λιτή παραγωγή (lean manufacturing) έρχονται στην έκτη θέση. Ακολουθούν τα κριτήρια που σχετίζονται με την ανάλυση προστιθέμενης αξίας (value-added analysis), ολική παραγωγική συντήρηση (total productive maintenance) και με τον χρονοπρογραμματισμό (scheduling). Επομένως για να υλοποιήσει ένας οργανισμός μια παραγωγική διαδικασία με βιομηχανικά κελιά θα πρέπει να αξιολογήσει το επίπεδο που ικανοποιεί τα παραπάνω κριτήρια, τα οποία όπως διαφάνηκε έχουν στο επίκεντρό τους τον ανθρώπινο παράγοντα και τις τεχνολογίες πληροφορικής [9, 10].

Σημαντική πτυχή, εκτός της απόφασης υλοποίησης ή μη ενός παραγωγικού συστήματος με την χρήση βιομηχανικών κελιών, είναι η βελτίωση και η ορθή επίβλεψή του κατά την διάρκεια λειτουργίας του. Σε αυτό το στάδιο εισέρχονται κάποιες έννοιες ελέγχου και διασφάλισης ποιότητας. Χρησιμοποιούνται οι κύκλοι ΠΥΕΑ (Προγραμματίσε - Υλοποίησε - Έλεγε - Ανάδρασε) και ΕΑΠΥ (Έλεγε - Ανάδρασε - Προγραμματίσε - Υλοποίησε) ή PDCA (Plan - Design - Check - Act) και CAPD (Check - Act - Plan - Design) [4, 11], αντιστοίχως. Η πρώτη μεθοδολογία προσφέρει παραπάνω ωφέλειες σε διαδικασίες ήδη υπάρχουσες, όπου οι λειτουργίες εκτελούνται επαναλαμβανόμενα, επιτυγχάνοντας μικρότερη διακύμανση στην απόδοση της εκάστοτε λειτουργίας. Η δεύτερη μεθοδολογία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε συστήματα όπου οι στόχοι μεταβάλλονται από περίοδο-σε-περίοδο. Ο κύκλος ΕΑΠΥ προσφέρεται για την επίτευξη

πιο ριζικών αλλαγών, καθώς απαιτεί στην πραγματικότητα να δούμε τη μεγάλη εικόνα και να επανεξετάσουμε τους στόχους και τις διαδικασίες του συστήματός μας [4]. Επιπλέον, ακολουθώντας το μοντέλο ΕΑΠΥ, υπάρχει περιθώριο για την διόρθωση της διαδικασίας και τον καθορισμό νέων στόχων, αντί απλώς για την βελτίωσή τους. Επομένως, ο κύκλος ΕΑΠΥ είναι ωφέλιμος όταν ένας οργανισμός μετασχηματίσει το παραγωγικό του σύστημα, από ένα γραμμής παραγωγής ή κατά παραγγελίας, σε παραγωγικό σύστημα με βιομηχανικά κελιά.



**Σχήμα 2.1:** Διάγραμμα κύκλου ΠΥΕΑ.



**Σχήμα 2.2:** Διάγραμμα κύκλου ΕΑΠΥ.

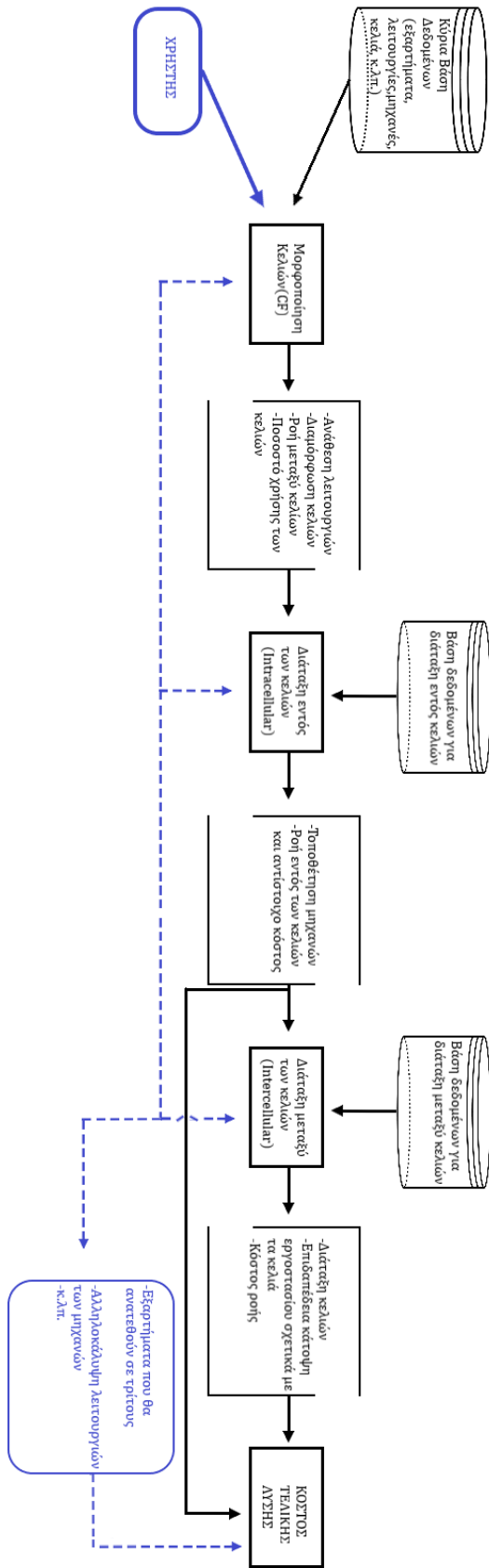
## 2.4 Η αξιοπιστία των ΣΠΒΚ

Ως βασικό στόχο της αξιοπιστίας σε ένα παραγωγικό περιβάλλον μπορούμε να θεωρήσουμε την μεγιστοποίηση των παραγόμενων εκροών με την χρήση των διαθέσιμων πόρων, ενώ παράλληλα επιτυγχάνουμε μείωση των απωλειών σε όρους εξοπλισμού και διαδικασίας. Επομένως η παράλειψη αυτού του παράγοντα μπορεί να προκαλέσει σημαντικές αστοχίες στην λειτουργία του παραγωγικού μας συστήματος, όπως για παράδειγμα καθυστερήσεις στους χρόνους παράδοσης ή και καθυστερήσεις στους ρυθμούς παραγωγής. Επισταμένως, η αξιοπιστία σε συστήματα παραγωγής με βιομηχανικά κελιά, μελετάται από τις αρχές του 2000. Οι περισσότερες ερευνητικές εργασίες δημιουργούν μαθηματικά μοντέλα για τα ΣΠΒΚ και τα λύνουν με γνώμονα την βελτιστοποίηση της αξιοπιστίας, παρουσιάζοντας επίσης και αριθμητικά παραδείγματα έτσι ώστε να επικυρώσουν σε κάποιον βαθμό και την πραγματιστική εφαρμογή των μοντέλων τους.



**Σχήμα 2.3:** Η αξιοπιστία του παραγωγικού συστήματος ως χωρίο τομής των τριών παραγόντων αξιοπιστίας.

Η πιο σύγχρονη τάση είναι η δημιουργία πληροφοριακών συστημάτων υποστήριξης λήψης αποφάσεων (Decision Support System – DSS). Μία από τις πρώτες ερευνητικές προσπάθειες για την παρουσίαση ενός τέτοιου συστήματος ήταν των Xambre κ.ά. [12, 7]. Το μοντέλο τους αποτελεί μια πιο θεωρητική προσέγγιση στο ζήτημα σε σχέση με την περίπτωση δημιουργίας ενός μαθηματικού μοντέλου. Εντούτοις, αποτελεί μια αρκετά πιο προσιτή μέθοδο για τα διοικητικά στελέχη, ώστε να κατανοήσουν καλύτερα πώς η έννοια της αξιοπιστίας μπορεί να τους βοηθήσει στον σχεδιασμό και την υλοποίηση ενός παραγωγικού συστήματος με βιομηχανικά κελιά. Επίσης, βοηθούν στην λήψη αποφάσεων σχετικά με διοικητικές αποφάσεις που αφορούν την ανάθεση τμήματος παραγωγής σε τρίτους, την ανάγκη ύπαρξης υβριδικών διατάξεων των κελιών και αποφάσεις σχετικές με την αλληλοκάλυψη των λειτουργιών που εκτελούν κάποιες μηχανές μεταξύ τους. Ένας παράγοντας, ο οποίος δυσχεραίνει τις συνθήκες υλοποίησης αυτών των συστημάτων, εκ μέρους των εταιρειών, είναι το υψηλό κόστος εγκατάστασης αλλά και λειτουργίας τους, καθώς απαιτούν ισχυρές βάσεις δεδομένων και εξειδικευμένο προσωπικό που θα δομήσει εννοιολογικά και πρακτικά αυτά τα συστήματα. Παρόλα αυτά, τα συστήματα υποστήριξης αποφάσεων εν δυνάμει πληρούν τις προϋποθέσεις για να λύσουν ζητήματα σχετιζόμενα με την μορφοποίηση των βιομηχανικών κελιών, την διάταξη των κελιών και την διάταξη των μηχανών εντός αυτών. Τέλος, πρέπει η αρχιτεκτονική των συστημάτων υποστήριξης λήψης αποφάσεων να παρέχει την δυνατότητα στον εκάστοτε λήπτη αποφάσεων να προσθέτει επιπλέον δεδομένα στο σύστημα, ώστε μέσω της σύγκρισης των περισσότερων λύσεων να επιτυγχάνεται η καλύτερη εφικτή λύση.



Σχήμα 2.4: Σύστημα υποστήριξης λήψης αποφάσεων(DSS) για ΣΠΒΚ.



## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**

### **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ**

Σε αυτό το κεφάλαιο θα περιγραφεί η εξέλιξη της επιστημονικής μελέτης ανά τα έτη, εις ό,τι αφορά το πρόβλημα του σχεδιασμού των εγκαταστάσεων ενός συστήματος παραγωγής με βιομηχανικά κελιά (ΣΠΒΚ). Εν ολίγοις, οι έρευνες ασχολούνται με την εύρεση της βέλτιστης διάταξης του παραγωγικού εξοπλισμού, όπου σε αυτόν υπάγονται τα βιομηχανικά κελιά και κατά προέκταση οι μηχανές. Για την επίτευξη της εύρεσης μιας βέλτιστης λύσης λαμβάνονται υπόψιν και οικονομοτεχνικά κριτήρια, όπως οι διαθέσιμες λειτουργίες των μηχανών, το κόστος μετακίνησης των εξαρτημάτων εντός ενός κελιού αλλά και μεταξύ αυτών.





### 3.1 Εισαγωγή στο πρόβλημα

Η ορθώς σχεδιαζόμενη διάταξη του εξοπλισμού σε ένα βιομηχανικό περιβάλλον είναι πρωτίστης σημασίας, καθώς μέσω αυτής εμφανίζονται σημαντικά επιχειρησιακά και οικονομικά οφέλη. Ενδεικτικά, στο κράτος των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής (Η.Π.Α) δαπανούνται ετησίως 250 δισεκατομμύρια δολάρια για τον σχεδιασμό βιομηχανικών εγκαταστάσεων, τον προγραμματισμό και τον επαναπρογραμματισμό τους. Ένα 20% με 50% του συνολικού κόστους αντιστοιχεί στις εργασίες που αφορούν την διαχείριση των υλικών [13]. Προς την επίλυση της προαναφερθείσας παθογένειας συμβάλλει η εισχώρηση της φιλοσοφίας των τεχνολογιών ομαδοποίησης (group technology) στα σύγχρονα παραγωγικά συστήματα. Οι τεχνολογίες ομαδοποίησης χαρακτηρίζονται από την ιδιότητα αναγνώρισης τεχνικών ομοιοτήτων των εξαρτημάτων και εκμείωσης ανταγωνιστικού πλεονεκτήματος μέσω της ομαδοποίησης αυτών στην παραγωγική διαδικασία. Η χρήση ενός αποδοτικού παραγωγικού προγραμματισμού σε συνδυασμό με την ύπαρξη ενός εξίσου αποδοτικού σχεδιασμού των βιομηχανικών κελιών μπορούν να επιτύχουν αξιοσημείωτες μειώσεις του συνολικού κόστους παραγωγής, επιδρώντας στα κόστη προετοιμασίας των μηχανών, λειτουργίας, μεταφοράς και συντήρησης. Επομένως, τα ΣΠΒΚ θεωρούνται ένας αποτελεσματικός τρόπος εφαρμογής των τεχνολογιών ομαδοποίησης, διότι αποτελούν υβριδικά συστήματα παραγωγής που σε αυτά ενσωματώνονται οφέλη των συστημάτων παραγωγής κατά παραγγελία και των συστημάτων συνεχούς ροής.

Ένας από τους βασικούς λόγους εφαρμογής ενός συστήματος παραγωγής με βιομηχανικά κελιά είναι η ελαχιστοποίηση των μετακινήσεων που πραγματοποιούν τα εξαρτήματα έως το πέρας της επεξεργασία τους. Υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες μετακινήσεων, αυτές που εκτελούνται μεταξύ των κελιών (intercellular) και εντός των κελιών (intracellular). Παράλληλα με αυτόν τον αντικειμενικό σκοπό οι ερευνητικές εργασίες υπόσχονται να λύσουν κάποια ή και όλα από τα προβλήματα της Διαμόρφωσης Κελιών (CF), της Χωροθέτησης - Διάταξης Ομαδοποιημένων Μερών (GL) και του Χρονοπρογραμματισμού Αποπεράτωσης των Λειτουργιών των Εξαρτημάτων (GS), τα οποία έχουν περιγραφεί στο Κεφάλαιο 1. Στην συνέχεια θα γίνει μια εκτενής περιγραφή του ιστορικού των επιστημονικών εργασιών που έχουν εκπονηθεί σχετικά με τα συστήματα παραγωγής με βιομηχανικά κελιά.

## **3.2 Αναδρομή στην επιστημονική βιβλιογραφία**

### **3.2.1 Η Δρομολόγηση Εξαρτημάτων**

Το πρόβλημα δρομολόγησης εξαρτημάτων (part routing problem) έχει ως κύριο στόχο τον προσδιορισμό του καλύτερου συνδυασμού μηχανών από τις οποίες θα επεξεργαστεί ένα εξάρτημα ώστε να περατωθούν οι λειτουργίες του. Συνήθως κάθε εξάρτημα μπορεί να ολοκληρωθεί με περισσότερους από έναν τρόπους, λόγω της ύπαρξης μηχανών με αλληλοκαλυπτόμενες λειτουργίες. Απόρροια αυτής της συνθήκης είναι η δημιουργία ποικίλων μετακινήσεων μεταξύ των κελιών και εντός αυτών, δημιουργώντας έτσι και τις ανάλογες

μεταβολές στο κόστος μετακίνησης των εξαρτημάτων κατά την διαδικασία ολοκλήρωσής τους.

Έχουν αναπτυχθεί δύο βασικές στρατηγικές από την επιστημονική κοινότητα, ώστε να επιλυθεί το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του κόστους μετακίνησης. Η πρώτη προσέγγιση αναθέτει τις μηχανές στα εξαρτήματα, με σκοπό να δημιουργηθούν οικογένειες εξαρτημάτων, ενώ στην δεύτερη προσέγγιση αναθέτουμε τα εξαρτήματα στις μηχανές για να ομαδοποιηθούν τα πρώτα, ανάλογα με τα κοινά λειτουργικά και τεχνικά χαρακτηριστικά τους. Οι Wemmerlön και Hyer [14] προτείνουν ένα μοντέλο για την επίλυση του προβλήματος δρομολόγησης. Στην εργασία τους εξετάζονται τέσσερις κατηγορίες προσεγγίσεων. Η πρώτη προσέγγιση ξεκινά με τον άμεσο προσδιορισμό των οικογενειών των εξαρτημάτων, χρησιμοποιώντας ορισμένα κριτήρια, χωρίς όμως να βασίζεται σε δρομολογήσεις στις μηχανές. Επομένως πρώτα βρίσκονται οι οικογένειες των εξαρτημάτων και μετά προσδιορίζονται οι δρομολογήσεις. Η δεύτερη και τέταρτη προσέγγιση είναι παρόμοιες, καθώς και οι δύο δομούνται σε ήδη προκαθορισμένες δρομολογήσεις. Στην δεύτερη προσέγγιση έπειτα, από την ταυτοποίηση των ομάδων των μηχανών, τα εξαρτήματα κατανέμονται στις αντίστοιχες ομάδες. Η τρίτη προσέγγιση ακολουθεί την αντίστροφη διαδικασία σε σχέση με την δεύτερη και εστιάζει στον προσδιορισμό των οικογενειών των εξαρτημάτων μέσω των πληροφοριών που είναι αποθηκευμένες για τις δρομολογήσεις. Η τέταρτη προσέγγιση βασίζεται στον ταυτόχρονο προσδιορισμό ορισμένων ομάδων εξαρτημάτων και μηχανών, κατάλληλων για την κατασκευή βιομηχανικών κελιών και των σχετικών δρομολογήσεών τους. Οι Gupta κ.ά. [15] εξετάζουν το πρόβλημα σε όρους ελαχιστοποίησης των μετακινήσεων μεταξύ των

κελιών και μεγιστοποίησης της χρησιμοποίησης των μηχανών κατά την διαδικασία ομαδοποίησης των μηχανών σε κελιά. Οι Wei και Gaither [16] είχαν μελετήσει το πρόβλημα της μορφοποίησης των βιομηχανικών κελιών με αντικειμενικό στόχο την ελαχιστοποίηση του κόστους ευκαιρίας. Επισημαίνουν ότι το μαθηματικό μοντέλο τους μπορεί να υιοθετηθεί και για την ελαχιστοποίηση άλλων αντικειμενικών στόχων. Όμως, επέλεξαν αυτόν τον στόχο διότι τους επέτρεπε να συγκρίνουν τα αποτελέσματά τους με άλλες προηγούμενες μελέτες, οι οποίες είχαν θέσει τον ίδιο αντικειμενικό στόχο. Οι Bagheri και Bashiri [17] εξέτασαν το πρόβλημα της μορφοποίησης των βιομηχανικών κελιών, θέτοντας ως αντικειμενικό στόχο την ελαχιστοποίηση των μετακινήσεων των εξαρτημάτων μεταξύ και εντός των κελιών.

Ο Heragu [18] σχεδίασε μία μεθοδολογία τριών σταδίων. Στο πρώτο στάδιο μέσω ενός αλγορίθμου συσταδοποίησης (clustering algorithm) δημιουργούσε τις οικογένειες εξαρτημάτων και τις ομάδες των μηχανών. Στο επόμενο στάδιο υπολογίζονται οι κατάλληλοι χώροι για να τοποθετηθούν οι ομάδες των μηχανών. Στο τελικό στάδιο μορφοποιείται η τελική διάταξη των κελιών, δηλαδή το σχήμα και το μέγεθός τους, λαμβάνοντας υπόψιν τα μονοπάτια των εξαρτημάτων που θα ακολουθηθούν εντός των βιομηχανικών κελιών.

### 3.2.2 Ευρετικοί και Μεταευρετικοί Αλγόριθμοι

Αξίζει να σημειωθεί ότι έχουν αναπτυχθεί πολλοί ευρετικοί και μεταευρετικού αλγόριθμοι, εξαιτίας της NP-πληρότητας που παρουσιάζουν κάποια προβλήματα. Αυτό σημαίνει ότι όσο αυξάνεται το μέγεθος ενός προβλήματος καθίσταται αδύνατη η επίλυσή του με έναν ακριβή αλγόριθμο [19]. Οι Gravel, Nsakanda και Price [20] ανέπτυξαν έναν γενετικό αλγόριθμο για την ταυτόχρονη επίλυση των προβλημάτων ομαδοποίησης των μηχανών και ανάθεσης των εξαρτημάτων, προσπαθώντας να προσδιορίσουν την βέλτιστη δρομολόγηση των εξαρτημάτων. Οι Chen και Cao [21] παρουσίασαν ένα μοντέλο, το οποίο γεφύρωνε τις διαδικασίες διαχείρισης υλικών μεταξύ των κελιών με τις διαδικασίες προγραμματισμού του πλάνου παραγωγής, αναπτύσσοντας έναν αλγόριθμο για την επίλυση αυτού του προβλήματος. Οι Vin, De Lit και Delchambre [22] μελέτησαν το πρόβλημα της μορφοποίησης κελιών και της κυκλοφορίας των εξαρτημάτων, χρησιμοποιώντας έναν γενετικό αλγόριθμο ομαδοποίησης (genetic grouping algorithm - GGA). Σχεδίασαν ένα υβριδικό ΣΠΒΚ. Το πρόβλημα το χώρισαν σε τρία στάδια. Το πρώτο ήταν η ταυτοποίηση της ζήτησης των εξαρτημάτων και την ποικιλομορφία αυτής. Δεύτερο στάδιο ήταν η ομαδοποίηση των μηχανών και τρίτο η κατανομή του εξοπλισμού. Οι Yu και Sarker [23] προτείνουν ένα μοντέλο της κατηγορίας προβλημάτων της τετραγωνικής ανάθεσης (quadratic assignment problem-QAP) για να ελαχιστοποιήσουν την ροή των μετακινήσεων μεταξύ των κελιών. Οι Filho και Tiberti [24] πρότειναν επίσης έναν γενετικό αλγόριθμο, ώστε να ελαχιστοποιήσουν τις μετακινήσεις των υλικών ανά τα κελιά και το φορτίο που δέχεται κάθε βιομηχανικό κελί.

Οι Paydar και Saidi-Mehrabad [25] έχουν μελετήσει το πρόβλημα της μορφοποίησης των βιομηχανικών κελιών από την οπτική της μεγιστοποίησης της αποτελεσματικότητας της ομαδοποίησης. Για να φανεί η αποτελεσματικότητα του προτεινόμενου γραμμικού μαθηματικού μοντέλου, εφαρμόστηκαν δύο δοκιμαστικά προβλήματα. Στη συνέχεια, για να λυθεί το μοντέλο για εφαρμογές πραγματικού μεγέθους, αναπτύχθηκε ένας υβριδικός μεταερευτικός αλγόριθμος στον οποίο συνδυάζονται οι τεχνικές του γενετικού αλγορίθμου και της αναζήτησης μεταβλητής γειτονίας (variable neighborhood search). Οι Mehdizadeh, Shamradifar και Niaki [26] έχουν προτείνει ένα μη-γραμμικό μαθηματικό πρόγραμμα, το οποίο γεφυρώνει το πρόβλημα της μορφοποίησης κελιών με το πρόβλημα του πλάνου παραγωγής σε ένα δυναμικό ΣΠΒΚ, με περιορισμένους πόρους για τη ρύθμιση των κελιών και την προμήθεια των μηχανημάτων.

Οι Ghezavati & Saidi-Mehrabad [27] ανέπτυξαν ένα μαθηματικό μοντέλο μεικτού ακέραιου προγραμματισμού, όπου οι χρόνοι άφιξης και επεξεργασίας των εξαρτημάτων λαμβάνονται υπόψιν στοχαστικά. Επιχειρούν να λύσουν το μοντέλο μέσω συνδυασμού ενός υβριδικού γενετικού αλγορίθμου και προσομοιωμένης απόδοσης ενώ έπειτα συγκρίνουν τα αποτελέσματα της μεθόδου τους με αυτά ενός B&B και ενός ευρετικού αλγορίθμου. Οι Solimanpur, Saeedi και Mahdavi [28] εφαρμόζουν την αλγοριθμική μέθοδο βελτιστοποίησης της αποικίας μυρμηγκιών (Ant Colony Optimization Method-ACO) για την επίλυση του προβλήματος της μορφοποίησης, όπου λαμβάνονται υπόψιν ο όγκος της παραγωγής και η σειρά επεξεργασίας των εξαρτημάτων.

### 3.2.3 Εναλλακτικές-Πολλαπλές Δρομολογήσεις

Στα περισσότερα από τα προηγούμενα μοντέλα λαμβάνεται υπόψιν μία μόνο διαδρομή δρομολόγησης για κάθε εξάρτημα. Ένα από τα πρώτα και χαρακτηριστικότερα παραδείγματα είναι η εργασία του Kusiak [29]. Όταν υπάρχουν πάνω από μία μηχανές του ίδιου τύπου, τότε το πρόβλημα της αντιστοιχίας των εξαρτημάτων στις μηχανές και κατά συνέπεια της μορφοποίησης βιομηχανικών κελιών γίνεται πιο περίπλοκο. Οι Heragu και Chen [30] ισχυρίστηκαν ότι για να επιτευχθεί η ελαχιστοποίηση του κόστους μετακίνησης των υλικών μεταξύ των κελιών και της συστηματικής υποχρησιμοποίησης του εξοπλισμού, πρέπει να υπάρχει στον προγραμματισμό η δυνατότητα εναλλακτικών δρομολογήσεων (alternate part routings). Αυτή η μέθοδος βοηθάει τόσο στην βελτίωση της χρησιμοποίησης του εξοπλισμού όσο και στον ρυθμό διεκπεραίωσης των λειτουργιών των εξαρτημάτων. Η Sofianopoulou [5] πρότεινε μια μαθηματική μέθοδο για την κατανομή των μηχανών σε μια κατανομή εξαρτημάτων πολλαπλών δρομολογήσεων (multi-routing part allocation), χρησιμοποιώντας μια ευρετική μέθοδο προσομοιωμένης απόπτωσης (Simulated Annealing-SA) για την επίλυση του προβλήματος. Οι Nsakanda, Diaby και Price [31] προσπάθησαν να προσδιορίσουν την καλύτερη δρομολόγηση εξαρτημάτων των αντίστοιχων πλάνων διεργασιών (process plan), μέσω ενός προβλήματος πλάνων πολλαπλών διεργασιών. Στην μέθοδο επίλυσής τους χρησιμοποιούν και το σενάριο της ανάθεσης παραγωγής εξαρτημάτων σε εξωτερικούς συνεργάτες, έτσι ώστε η παραγωγική στρατηγική να ικανοποιεί την αντίστοιχη ζήτηση. Οι Karthikeyan, Saravanan και Ganesh [32] πρότειναν έναν αλγόριθμο δύο σταδίων για την

μορφοποίηση και τον χρονοπρογραμματισμό των βιομηχανικών κελιών. Στο πρώτο στάδιο ταυτοποιούνται διαφορετικοί τύποι εξαρτημάτων, οι οποίοι υπάρχουν σε ένα παραγωγικό περιβάλλον κατά παραγγελία (job shop), και ομαδοποιούνται σε κελιά μέσω ενός ROC (Rank Order Clustering) αλγορίθμου. Στο δεύτερο στάδιο αναπτύχθηκε μια διαδικασία βελτιστοποίησης συσχετισμένη με το πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού των μηχανών, που υπάγονται στα εκάστοτε βιομηχανικά κελιά. Στο τελευταίο στάδιο χρησιμοποιούνται συνδυαστικά οι μέθοδοι της προσομοιωμένης ανόπτησης. Όλη η προαναφερθείσα διαδικασία πραγματοποιείται με αντικειμενικό στόχο την ελαχιστοποίηση των κοστολογικών ποινών.

### 3.2.4 Το Μέγεθος της Παραγόμενης Παρτίδας

Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η εστίαση κάποιων ερευνητών στον προσδιορισμό του βέλτιστου μεγέθους παρτίδας, ώστε να επιλύσουν το πρόβλημα ελαχιστοποίησης του κόστους μετακίνησης των υλικών. Οι Karmakar, Kekrer και Kekrer [33] εστίασαν στην ανάλυση της δυναμικότητας ενός ΣΠΒΚ, λαμβάνοντας υπόψιν το μέγεθος του εξοπλισμού, πολλαπλές βάρδιες, και την στρατηγική εις ό,τι αφορά το μέγεθος των παρτίδων. Οι συγγραφείς επισήμαναν βελτιώσεις στον χρόνο παράδοσης και στα αποθέματα εργασιών εν εξελίξει (WIP), ως αποτέλεσμα μεταβολών που πραγματοποιήθηκαν στα μεγέθη των παρτίδων, της δυναμικότητας του συστήματος και στις βάρδιες κατά την περίοδο του προγραμματισμού. Οι Jang κ.ά. [34] επικέντρωσαν την εργασία τους στην εύρεση εύρωστων (robust) λύσεων για το πρόβλημα μετακίνησης των υλικών. Οι Spiliopoulos και Sofianopoulou [35] εστίασαν στην ελαχιστοποίηση των



μετακινήσεων των υλικών λαμβάνοντας υπόψιν προκαθορισμένα μεγέθη παρτίδων.

Σε ορισμένες μελέτες χρησιμοποιήθηκαν περιορισμοί, οι οποίοι σχετίζονται με το μέγεθος και τις διαστάσεις των κελιών. Μέσω των κατάλληλων διαστάσεων αρκετοί επιστήμονες προσπαθούν να επιτύχουν τις καλύτερες τιμές των μεγεθών που συνδέονται με τις μετακινήσεις των υλικών μεταξύ και εντός των κελιών. Οι Ballakur και Steudel [36] πρότειναν μία μέθοδο συσταδοποίησης των μηχανών εντός των κελιών στην οποία οι μηχανές τοποθετούνται στα κελιά βάσει του φόρτου εργασίας που καλούνται να διεκπεραιώσουν και των διαστάσεων των βιομηχανικών κελιών. Αυτή η μέθοδος λειτουργεί ιδιαιτέρως βοηθητικά στην διαδικασία εντοπισμού ανάγκης για την ύπαρξη περισσότερων μηχανών στον παραγωγικό σύστημα.

### **3.2.5 Η Δυναμικότητα του ΣΠΒΚ**

Η παράβλεψη της δυναμικότητας των μηχανών κατά το στάδιο του χρονοπρογραμματισμού των παραγωγικών διαδικασιών δημιουργεί συχνά προβλήματα υποχρησιμοποίησης του εξοπλισμού και δυσανάλογης κατανομής του φόρτου εργασιών στις διαθέσιμες μηχανές. Οι Grznar, Mehrez και Offodile [37] πρότειναν μία μέθοδο ελαχιστοποίησης του κόστους μετακίνησης των υλικών, ενώ οι μετακινήσεις των υλικών και η δυναμικότητα των μηχανών είναι περιορισμένα. Οι Zhou και Askin [38] υποστήριξαν ότι οι περιορισμοί που σχετίζονται με τον οικονομικό προϋπολογισμό και την δυναμικότητα των μηχανών δεν θα πρέπει να παραλείπονται. Οι

Moussa και Kamel [39] έλαβαν υπόψιν την δυναμικότητα των μηχανών στο πρόβλημα της ανάθεσης εξαρτημάτων σε μηχανές, έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουν τις μετακινήσεις που πραγματοποιούνται μεταξύ των βιομηχανικών κελιών. Οι Ahkioon, Bulgak και Bektas [40] μελέτησαν ένα ΣΠΒΚ στο οποίο οι διαδικασίες συντήρησης μπορούν να μεταβάλλουν την δυναμικότητα των μηχανών. Προς επίλυση αυτής της αδυναμίας του παραγωγικού συστήματος σκέφτηκαν να χρησιμοποιήσουν στρατηγικές ανάθεσης σε τρίτους συνεργάτες και τακτικές ανατοποθέτησης των μηχανών. Αξίζει όμως να σημειωθεί ότι το μοντέλο που δόμησαν απέτυχε να λύσει προβλήματα μεγάλης κλίμακας. Οι R. Zhang, κ.ά. [41] ανέπτυξαν ένα μοντέλο μεικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (MILP), το οποίο έλυσαν μέσω ενός ευρετικού αλγορίθμου. Κλήθηκαν να λύσουν ένα πρόβλημα συγκεντρωτικού πλάνου παραγωγής (Aggregate Production Planning-APP) με επέκταση της δυναμικότητας (capacity expansion) στο παραγωγικό σύστημα. Οι Sayadi, Hafezalkotobb και Naini [42] έδειξαν ότι η καλή εκπαίδευση του προσωπικού και η αναδιάρθρωση στον προγραμματισμό παραγωγής πολλαπλών περιόδων, μπορούν να βελτιώσουν την αποτελεσματικότητα του προγραμματισμού παραγωγής. Οι Saidi- Mehrabada, Paydar, Aalaei [43] πρότειναν ένα μοντέλο το οποίο γεφυρώνει το πρόβλημα του πλάνου παραγωγής με την εκπαίδευση του προσωπικού, λαμβάνοντας υπόψιν τον διαθέσιμο χρόνο των μηχανών και των εργαζομένων. Αντικειμενικός στόχος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους της συντήρησης, των γενικών εξόδων των μηχανών, του αποθέματος, του κόστους εκπαίδευσης και μισθών των εργαζομένων. Με αυτόν τον τρόπο δείχνουν ότι η εκπαίδευση του προσωπικού διαδραματίζει θετικό ρόλο στην λειτουργία του παραγωγικού συστήματος, αφού αυξάνεται η ευελιξία

και η αποδοτικότητα των υπαλλήλων, το οποίο με την σειρά του αυξάνει την παραγωγικότητα και μειώνει τα συνολικά κόστη.

### 3.2.6 Μηχανές Συμφόρησης

Κατά την διαδικασία μορφοποίησης των βιομηχανικών κελιών και στο στάδιο της αντιστοίχισης των εξαρτημάτων στις εκάστοτε μηχανές είναι πιθανό να εντοπιστούν μηχανές συμφόρησης (bottleneck machines) στο ΣΠΒΚ που μελετάμε. Ως μηχανές συμφόρησης θεωρούνται οι μηχανές που επιφορτώνονται την επεξεργασία εξαρτημάτων από ποικίλες οικογένειες εξαρτημάτων [13]. Η ύπαρξή τους δημιουργεί σοβαρές επιβραδύνσεις στους χρόνους περάτωσης ενός παραγωγικού συστήματος και κατά προέκταση το σύστημα χαρακτηρίζεται αρκετά πιο δαπανηρό σε σχέση με την συνθήκη ανυπαρξίας αυτών των μηχανών. Η συχνότερη αιτία ύπαρξης μηχανών συμφόρησης αποτελεί κυρίως ο λανθασμένος προγραμματισμός των δρομολογήσεων των εξαρτημάτων. Επιπρόσθετα, προβληματική συνθήκη αποτελεί και η τοποθέτηση μίας ή λίγων μηχανών που εκτελούν κάποιες πολυζήτητες, εκ των εξαρτημάτων, λειτουργίες. Συνοπτικώς, η εμφάνιση μηχανών συμφόρησης σε ένα ΣΠΒΚ ή οιοδήποτε άλλο παραγωγικό σύστημα, δύναται να αυξήσει τις διεργασίες εν εξελίξει και την εντροπία του συστήματος.

Η επιστημονική έρευνα σε αρκετές περιπτώσεις λαμβάνει την οντότητα των μηχανών συμφόρησης ως εισροή του μαθηματικού μοντέλου. Η παραπάνω συνθήκη μπορεί να πραγματοποιηθεί όταν ο αριθμός αυτών των μηχανών είναι γνωστός εκ των προτέρων, το

οποίο συμβαίνει όταν εξαρτήματα από περισσότερες από μία συστάδες-ομάδες πρέπει είτε να επισκεφτούν μία ή πολύ λίγες μηχανές είτε να επισκεφτούν μηχανές που είναι αδύνατη η μετακίνησή τους για λόγους ασφάλειας ή γεωμετρίας των μηχανών. Ο King [44] πρότεινε έναν ROC αλγόριθμο για να δημιουργήσει συστάδες εξαρτημάτων, με την παρουσία μηχανών συμφόρησης στο παραγωγικό σύστημα. Οι Malané και Ramachandran [45] εφήρμοσαν μία μέθοδο σχεδίασης παραγωγικών συστημάτων με βιομηχανικά κελιά, βασισμένη στην σχεδίαση ενός νευρωνικού δικτύου ανταγωνιστικής μάθησης (competitive learning). Οι νευρώνες που δημιουργήθηκαν χαρακτηρίζονται από διαφορετικά σταθμισμένα διανύσματα, τα οποία δημιουργούν σχέσεις ισχυρής επικάλυψης με σύνολα παρόμοιων μοτίβων. Αυτή η ιδιότητα λειτουργεί βοηθητικά στην αναγνώριση των οικογενειών των εξαρτημάτων, των κελιών και των μηχανών συμφόρησης. Οι Lee, Malané και Ramachandran [46] ανέπτυξαν ένα SOM (self – organizing - map) νευρωνικό δίκτυο, το οποίο αναγνώριζε τις μηχανές συμφόρησης ενός συστήματος παραγωγής με βιομηχανικά κελιά. Οι συγγραφείς επισημαίνουν ακόμα ότι η γενίκευση του νευρωνικού δικτύου που μελέτησαν καθιστά δυνατή την εισαγωγή καινούριων εξαρτημάτων χωρίς να είναι απαραίτητη η επανάληψη ολόκληρης της υπολογιστικής διαδικασίας.

### 3.2.7 Χρονοπρογραμματισμός Εξαρτημάτων

Ο χρονοπρογραμματισμός αποπεράτωσης των λειτουργιών των εξαρτημάτων (GS) αποτελεί ένα πρόβλημα που είθισται να λύνεται σε δευτερεύον στάδιο, έπειτα από την επίλυση της μορφοποίησης των βιομηχανικών κελιών (CF). Στις προηγούμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου περιγράφηκαν οι διαδικασίες αντιστοίχισης εξαρτημάτων σε μηχανές. Η προαναφερθείσα κατηγορία διαδικασιών αποτελεί και την κύρια δραστηριότητα του σταδίου GS. Όμως στην παρούσα ενότητα θα ασχοληθούμε με αυτό το στάδιο ολιστικά, χωρίς να επικεντρωνόμαστε απαραίτητα μόνο στην κύρια δραστηριότητα του σταδίου.

Οι Chandrasekharan και Rajagopalan [47] προσεγγίζουν το πρόβλημα με την μέθοδο της πολυδιάστατης κλιμάκωσης (multidimensional scaling – MDS). Η συγκεκριμένη τεχνική αποτελεί ένα ισχυρό μαθηματικό εργαλείο, το οποίο ποσοτικοποιεί και οπτικοποιεί την ομοιότητα που παρουσιάζουν κάποια δεδομένα βάσει κάποιων κριτηρίων. Συγκρίνοντάς την με την λύση που δίνει ένας ευρετικός αλγόριθμος, καταλήγουν ότι η μέθοδος MDS παρουσιάζει καλύτερη λύση. Οι Tavakkoli - Moghaddam, Gholipour-Kanani, Cheraghalizadeh [48] παρουσίασαν ένα πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού αποπεράτωσης των λειτουργιών των εξαρτημάτων, στο οποίο τα εξαρτήματα έχουν την δυνατότητα να μετακινούνται σε διαφορετικά κελιά, αν κριθεί απαραίτητο. Παρουσιάζονται επίσης ένας γενετικός αλγόριθμος (GA) και ένας μιμητικός αλγόριθμος (MA), οι οποίοι συγκρίνονται με έναν εμπειρικό αλγόριθμο. Τελικώς, διαφαίνεται ότι ο μιμητικός αλγόριθμος υπερτερεί έναντι του γενετικού και του εμπειρικού αλγορίθμου. Οι

Ghezavati και Saidi-Mehrabad [49] ανέπτυξαν ένα μαθηματικό μοντέλο που βελτιστοποιεί, ταυτοχρόνως, μεταβλητές απόφασης συσχετισμένες με το πρόβλημα της μορφοποίησης των κελιών (CF) και με το πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού αποπεράτωσης (GS), υπό όρους ελαχιστοποίησης του συνολικού αναμενόμενου κόστους.

Οι Goli, Tirkolaee, Aydin [50] σχεδίασαν ένα ασαφές μοντέλο μεικτού αέριου προγραμματισμού (fuzzy MILP model) για να επιλύσουν το πρόβλημα μορφοποίησης των βιομηχανικών κελιών, συμπεριλαμβανομένου και του προβλήματος χρονοπρογραμματισμού των εξαρτημάτων. Ως αντικειμενικούς στόχους όρισαν την ελαχιστοποίηση της διαδικασίας περάτωσης όλων των εργασιών και των μετακινήσεων των εξαρτημάτων μεταξύ των κελιών. Οι Feng, Li και Sethi [51] εξέτασαν ένα πρόβλημα χρονοπρογραμματισμού δυναμικού συστήματος παραγωγής σε βιομηχανικά κελιά, στο οποίο υπάρχουν ευέλικτες διαδρομές και διαμοιρασμός μηχανών. Οι Neufeld, Teucher και Buscher [52] μελετούν τα χαρακτηριστικά που καθιστούν δύσκολη την ορθή προσέγγιση στο πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού σε ένα ΣΠΒΚ, καθώς επισημαίνουν ότι η δημιουργία ανεξάρτητων κελιών είναι ιδιαίτερα δύσκολο και σπάνιο.

### 3.2.8 Ολιστική Προσέγγιση στα ΣΠΒΚ

Σε αυτήν την ενότητα θα παρατεθούν κάποιες εργασίες που προσέγγισαν το θέμα των ΣΠΒΚ ολιστικά. Αυτό σημαίνει ότι στο περιεχόμενο της μελέτης τους συμπεριλήφθηκαν μέθοδοι επίλυσης και των τριών προβλημάτων, δηλαδή της Διάταξης Ομαδοποιημένων Μερών (GL), της Διαμόρφωσης Κελιών (CF) και του Χρονοπρογραμματισμού Αποπεράτωσης των Λειτουργιών των Εξαρτημάτων (GS). Οι Wu, Chu, Wang και Yue [53] προτείνουν έναν ιεραρχικό γενετικό αλγόριθμο (hierarchical genetic algorithm – HGA) ώστε να εκμαιεύσουν εφικτές τιμές για τις μεταβλητές απόφασης και των τριών προβλημάτων. Το απαύγασμα της έρευνάς τους ήταν ότι ο ιεραρχικός γενετικός αλγόριθμος παρέχει καλύτερες λύσεις από την σειριακή λύση των τριών προβλημάτων ξεχωριστά. Οι Arkat, Farahani και Ahmadizar [54] παρουσίασαν ένα μοντέλο στο οποίο επιλύονται ταυτόχρονα τα προβλήματα GL, CF και GS. Προσέγγισαν το ζήτημα δημιουργώντας ένα πολυ – αντικειμενικό γενετικό αλγόριθμο (Multi-Objective Genetic Algorithm - MOGA), ο οποίος παρήγαγε λύσεις για την ελαχιστοποίηση τόσο του κόστους μεταφοράς όσο και του χρόνου περάτωσης των διεργασιών. Επίσης, οι Arkat, Farahani και Hosseini [55] παρουσίασαν ένα ολοκληρωμένο μοντέλο μεικτού ακέραιου γραμμικού προγραμματισμού (MILP), καταλήγοντας και αυτοί ότι η επίλυση των τριών προβλημάτων ταυτοχρόνως παράγει καλύτερες λύσεις σε σχέση με της ξεχωριστή μελέτη του καθενός και δημιουργεί πιο αποδοτικά ΣΠΒΚ. Οι Rahimi, Arkat και Farughi [56] παρουσιάζουν ένα ολοκληρωμένο μοντέλο μεικτού ακέραιου προγραμματισμού (MIP) στο οποίο ελαχιστοποιούν το κόστος ολοκλήρωσης των διεργασιών.

### 3.3 Σύνοψη Βιβλιογραφικής Ανασκόπησης

**Πίνακας 3.1** Σύνοψη Βιβλιογραφικής Ανασκόπησης

Έτος	Συγγραφείς	Προβλήματα			Στόχος (Min Κόστους ή Χρόνου)		Μέθοδος
		CF	GL	GS	Μετακινήσεων	Ολοκλήρωσης	
1986	Wemmerlön, Hyer [14]	●					Προσεγγ. 4-σταδίων
1987	Kusiak [29]	●			●	●	P-MEDIAN
1989	Heragu [18]	●	●		●		Προσεγγ. 3-σταδίων
1990	Wei, Gaither [16]	●			●	●	Ακριβής Λύση
1993	Chandrasekharan, Rajagopalan [47]	●	●		●	●	MDS
1994	Grznar κ.ά. [37]	●	●		●		EYPETIKH
1995	Y. Gupta κ.ά. [15]	●		●	●		GA
1998	Heragu, Chen [30]	●		●	●		BDA
1998	Gravel κ.ά. [20]	●		●	●		GA
1998	Spiliopoulos, Sofianopoulou [35]	●		●	●	●	QAP QTP
1999	Sofianopoulou [5]	●		●	●		SA-based Heuristic
2005	Vin κ.ά. [22]	●		●	●		MOGGA
2006	Yu, Sarker [23]	●		●	●		MDDH
2006	Nsakanda κ.ά. [31]	●		●	●		GA
2006	Filho, Tiberti [24]	●		●	●		GA
2007	Wu κ.ά. [53]	●	●	●		●	HGA
2008	Tavakkoli-Moghaddam κ.ά. [48]	●		●	●	●	GA MA

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΙΝΑΚΑ 3.1 →



**Πίνακας 3.1 ( ΣΥΝΕΧΕΙΑ)**

Έτος	Συγγραφείς	Προβλήματα			Στόχος (Min Κόστους ή Χρόνου)		Μέθοδος
		CF	GL	GS	Μετακινήσεων	Ολοκλήρωσης	
2010	Solimanpur κ.ά. [28]	●	●	●			ACO
2011	Ghezavati, Saidi- Mehrabad [27]	●	●		●	●	GA SA
2012	Arkat κ.ά. [54]	●	●	●	●	●	MOGA
2012	Karthikeyan κ.ά. [32]	●		●	●	●	ROC TS SA
2013	Paydar, Saidi- Mehrabad [25]	●			●	●	GA VNS
2014	Bagheri, Bashiri [17]	●	●		●		B&B
2018	Feng κ.ά. [51]	●		●	●	●	TCGA
2019	Neufeld κ.ά. [52]	●		●		●	ΕΥΡΕΤΙΚΟΣ  SA
2020	Mehdizadeh κ.ά. [26]	●			●		B&B GA
2020	Rahimi κ.ά. [56]	●	●	●		●	GA ALO
2020	Forghani, Ghomi [1]	●	●	●	●	●	SA GA MA
2021	Goli κ.ά. [50]	●		●	●		CPLEX SA
<b>2022</b>	<b>Παρούσα Εργασία</b>	●	●	●	●	●	<b>CPLEX</b>

**Πίνακας 3.2** Επεξήγηση Συντομογραφιών των Μεθόδων

MDS	Multi-Dimensional Scaling
GA	Genetic Algorithm
BDA	Benders' Decomposition Approach
QAP	Quadratic Assignment Problem
QTP	Quadratic Transportation Problem
SA	Simulated Annealing
MOGGA	Multi-Objective Grouping Genetic Algorithm
MDDH	Modified Directional Decomposition Heuristic
HGA	Hierarchical Genetic Algorithm

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΙΝΑΚΑ 3.2 →

**Πίνακας 3.2 (ΣΥΝΕΧΕΙΑ)**

MA	Memetic Algorithm
ACO	Ant Colony Optimization
MOGA	Multi-Objective Genetic Algorithm
ROC	Rank Order Clustering
TS	Tabu Search
VNS	Variable Neighborhood Search
B&B	Branch and Bound
TCGA	Three-layer Chromosome Genetic Algorithm
ALO	Ant Lion Optimizer

Στον Πίνακα 3.1 ενσωματώθηκαν οι περισσότερες εργασίες που αναφέρθηκαν στο υπόλοιπο κεφάλαιο της βιβλιογραφικής ανασκόπησης. Επιλέχθηκαν τελικώς να μπούνε στον πίνακα αυτές που σχετίζονται σε μεγαλύτερο βαθμό με την εννοιολογική προσέγγιση που θα ακολουθηθεί και στο Κεφάλαιο 4, ώστε να δομηθεί το μαθηματικό μοντέλο ενός ΣΠΒΚ της παρούσης εργασίας. Η εννοιολογική δομή του μαθηματικού μοντέλου που αναπτύχθηκε στα πλαίσια της εκπόνησης της πτυχιακής εργασίας παρουσιάζονται στην τελευταία σειρά του Πίνακα 3.1.

Πρέπει να επισημανθεί ότι το κόκκινο σύμβολο ● στον Πίνακα 3.1 εκχωρήθηκε στις εργασίες που ο αντικειμενικός τους στόχος δεν σχετιζόταν άμεσα με την ελαχιστοποίηση είτε του κόστους ή χρόνου των μετακινήσεων των εξαρτημάτων είτε του χρόνου ολοκλήρωσης των λειτουργιών των εξαρτημάτων. Για παράδειγμα οι Wei και Gaither [16] αναφέρουν ότι το μοντέλο τους μπορεί να υιοθετήσει ποικίλους αντικειμενικούς στόχους, συμπεριλαμβανομένης και της ελαχιστοποίησης των μετακινήσεων των εξαρτημάτων. Παρόλα αυτά επιλέχθηκε να εκχωρηθεί το σύμβολο ● εξαιτίας της μη επισταμένης μελέτης στον συγκεκριμένο αντικειμενικό στόχο. Επίσης ο λόγος που επιλέχθηκαν να συμπεριληφθούν στον πίνακα οι μελέτες που έχουν το σύμβολο ● είναι ότι θεωρήθηκαν εννοιολογικά συγγενικές με το

μοντέλο που θα παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 4, ανεξαρτήτως του αντικειμενικού στόχου που έθεσαν οι συγγραφείς.

Μέσω της βιβλιογραφικής ανασκόπησης μπορούν να εξαχθούν χρήσιμες πληροφορίες τόσο για τις απαρχές της δόμησης των προβλημάτων που σχετίζονται με τα ΣΠΒΚ, όσο και για τις μεθόδους επίλυσης. Διαφαίνεται ότι αρχικά μελετήθηκε το πρόβλημα της μορφοποίησης των βιομηχανικών κελιών (CF), δηλαδή της δημιουργίας οικογενειών εξαρτημάτων και μηχανημάτων. Έπειτα, οι ερευνητές ασχολήθηκαν με το πρόβλημα της διάταξης των μηχανών ή των οικογενειών μηχανών (GL) στις εγκαταστάσεις του εκάστοτε παραγωγικού συστήματος. Στην συνέχεια υπεισήλθε και το ζήτημα του χρονοπρογραμματισμού των εξαρτημάτων (GS), το οποίο αποσαφηνίζει τον τρόπο με τον οποίο θα επεξεργαστούν τα εξαρτήματα. Στις περισσότερες εργασίες εξετάζονται τα δύο από τα τρία ζητήματα με επικρατέστερα τα CF και GS, διότι αυτά συνδέονται με διοικητικά προβλήματα που η εφαρμογή των ειλημμένων αποφάσεων για αυτά είναι ευκολότερη καθώς οι αποφάσεις δεν συνδέονται με ζητήματα τοπολογίας του εξοπλισμού, τα οποία είναι άμεσα συνυφασμένα με υψηλότατα κόστη αλλά και με πρακτικές δυσκολίες εφαρμογής. Όμως, τα τελευταία χρόνια δημιουργούνται μαθηματικά μοντέλα τα οποία επιχειρούν να δώσουν λύσεις σε διοικητικά προβλήματα, λαμβάνοντας υπόψιν και τα τρία κύρια ζητήματα που συνδέονται με τα παραγωγικά συστήματα με βιομηχανικά κελιά. Τέτοιου είδους μοντέλο αποτελεί αυτό που θα παρουσιαστεί στο Κεφάλαιο 4 της παρούσης πτυχιακής εργασίας.



## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**

### **ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΠΒΚ**

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιαστεί το μαθηματικό μοντέλο που δημιουργήθηκε στα πλαίσια της συγκεκριμένης πτυχιακής εργασίας. Θα γίνει αναφορά των ζητημάτων που καλύπτει το μοντέλο, καθώς θα επεξηγηθεί η συλλογιστική που υπάρχει πίσω από το κάθε τμήμα της μαθηματικής μορφοποίησης. Επίσης θα παρουσιαστούν και κάποια αριθμητικά παραδείγματα μικρής κλίμακας, ώστε να εξεταστεί η ορθότητα των παραγόμενων λύσεων του μοντέλου.



## 4.1 Σύνοψη Προβλήματος

Στο παρόν κεφάλαιο επιχειρούμε να λύσουμε ένα ολοκληρωμένο πρόβλημα ενός συστήματος παραγωγής σε βιομηχανικά κελιά. Αυτό σημαίνει ότι το μαθηματικό μας μοντέλο θα παράγει λύσεις λαμβάνοντας υπόψιν ότι πρέπει να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις των τριών κύριων προβλημάτων, ταυτοχρόνως. Τα τρία κύρια διοικητικά προβλήματα στα συστήματα παραγωγής με βιομηχανικά κελιά είναι της Διαμόρφωσης - Μορφοποίησης των κελιών (CF), της Χωροθέτησης - Διάταξης Ομαδοποιημένων Μερών (GL) και του Χρονοπρογραμματισμού Αποπεράτωσης των Λειτουργιών των Εξαρτημάτων (GS).

Το πρόβλημα της μορφοποίησης των βιομηχανικών κελιών περιλαμβάνει την ταυτοποίηση των οικογενειών εξαρτημάτων και μηχανών, δηλαδή των εξαρτημάτων ή μηχανών με πανομοιότυπα τεχνικά ή λειτουργικά χαρακτηριστικά. Με αυτόν τον τρόπο τα εξαρτήματα κατανέμονται σε συστάδες και οι μηχανές σε βιομηχανικά κελιά. Στην συνέχεια, το πρόβλημα της διάταξης των βιομηχανικών κελιών περιλαμβάνει την εύρεση των κατάλληλων συντεταγμένων στο δάπεδο των εγκαταστάσεων παραγωγής. Βασικός σκοπός μελέτης του προβλήματος της διάταξης των μηχανών είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μετακίνησης των εξαρτημάτων. Τέλος, το πρόβλημα του χρονοπρογραμματισμού αποπεράτωσης των λειτουργιών των εξαρτημάτων, περιλαμβάνει την ανάθεση των εξαρτημάτων στις κατάλληλες μηχανές και κατά προέκταση στα αντιστοίχως αρμόδια βιομηχανικά κελιά.

## 4.2 Μαθηματική Έκφραση Προβλήματος

Το μαθηματικό μοντέλο που θα παρουσιαστεί παρακάτω έχει ως σκοπό να προσδιορίσει, ταυτοχρόνως, την διαμόρφωση των κελιών, την διάταξη αυτών στον χώρο και τον χρονοπρογραμματισμό των εξαρτημάτων.

Λαμβάνονται οι παρακάτω υποθέσεις:

- ⇒ Κάθε κατηγορία εξαρτημάτων χρειάζεται να επεξεργασθεί από μία ή περισσότερες λειτουργίες σε συγκεκριμένη σειρά.
- ⇒ Στο ΣΠΒΚ οι μηχανές μπορούν να εκτελέσουν μία ή περισσότερες λειτουργίες.
- ⇒ Οι μηχανές έχουν ίδιες διαστάσεις και γνωστές εκ των προτέρων.
- ⇒ Ο αριθμός των απαιτούμενων βιομηχανικών κελιών είναι γνωστός εκ των προτέρων.
- ⇒ Τα βιομηχανικά κελιά έχουν ορθογώνιες διαστάσεις.
- ⇒ Για να έχει λογική υπόσταση η ύπαρξη ενός βιομηχανικού κελιού πρέπει να έχει τουλάχιστο μία μηχανή στο εσωτερικό του.



## 4.2.1 Δείκτες

$i, u, v$  : Δείκτης για τύπο μηχανών  $i, u, v = 1, \dots, \mu$

$j$  Δείκτης για τύπο εξαρτημάτων  $j = 1, \dots, \nu$

$k$  : Δείκτης για τύπο κελιών  $k = 1, \dots, c$

$o$  : Δείκτης για τύπο λειτουργιών  $o = 1, \dots, N_j$

$\Delta_\mu$  : Δείκτης αντιστοίχισης λειτουργιών σε μηχανές

$\Delta_\varepsilon$  : Δείκτης αντιστοίχισης εξαρτημάτων σε λειτουργίες

## 4.2.2 Παράμετροι

$\mu$  : Αριθμός μηχανών

$\nu$  : Αριθμός εξαρτημάτων

$c$  : Αριθμός βιομηχανικών κελιών

$N_j$  : Αριθμός λειτουργιών του εξαρτήματος  $j$

$S_i$  : Σύνολο λειτουργιών που εκτελούνται από μηχανή  $i$

$\Gamma$  : Μέγιστος αριθμός μηχανών σε ένα βιομηχανικό κελί

$H$  : Οριζόντια διάσταση κάτοψης εγκαταστάσεων (Μήκος)

$V$  : Κατακόρυφη διάσταση κάτοψης εγκαταστάσεων (Πλάτος)

$E_i$  : Οριζόντια διάσταση κάτοψης μηχανής  $i$  (Μήκος)

$\Psi_i$  : Κατακόρυφη διάσταση κάτοψης μηχανής  $i$  (Πλάτος)

$CA_{j(iu)}$  : Μοναδιαίο κόστος μεταφοράς εξαρτήματος  $j$  εντός κελιού, από μηχανή  $i$  σε μηχανή  $u$

$CE_{j(iu)}$  : Μοναδιαίο κόστος μεταφοράς εξαρτήματος  $j$  εκτός κελιού, από μηχανή  $i$  σε μηχανή  $u$

$\tau_{jo}$  : Χρόνος επεξεργασίας του εξαρτήματος  $j$  στην λειτουργία  $o$

$G$  : Δείκτης μετατροπής χρόνου ολοκλήρωσης σε κόστος

$M$  : Ένας πολύ μεγάλος αριθμός

$TA_j$  : Μοναδιαίος χρόνος μεταφοράς εξαρτήματος  $j$  εντός κελιού, από μηχανή  $i$  σε μηχανή  $u$

$TE_j$  : Μοναδιαίος χρόνος μεταφοράς εξαρτήματος  $j$  εκτός κελιού, από μηχανή  $i$  σε μηχανή  $u$

## 4.2.3 Μεταβλητές Απόφασης

$C_{j(o,o')}$  : Κόστος μεταφοράς εξαρτήματος  $j$  από λειτουργία  $o$  σε  $o'$

$C_{j(o,o')}^k$  : Κόστος μεταφοράς εξαρτήματος  $j$  από λειτουργία  $o$  σε  $o'$ , δεδομένου ότι βρίσκεται στο κελί  $k$  για την περάτωση της λειτουργίας  $o$

$T_{j(o,o')}$  : Χρόνος μεταφοράς εξαρτήματος  $j$  από λειτουργία  $o$  σε  $o'$

$T_{j(o,o')}^k$  : Χρόνος μεταφοράς εξαρτήματος  $j$  από λειτουργία  $o$  σε  $o'$ , δεδομένου ότι βρίσκεται στο κελί  $k$  για την περάτωση της λειτουργίας  $o$

$x_i$  : Οριζόντια απόσταση μεταξύ κέντρου μηχανής  $i$  και κατακόρυφης γραμμής αναφοράς

$y_i$  : Κατακόρυφη απόσταση μεταξύ κέντρου μηχανής  $i$  και οριζόντιας γραμμής αναφοράς

$\theta_{joi}$  : 1 αν η λειτουργία  $o$  του εξαρτήματος  $j$  εκτελείτε στην μηχανή  $i$ , αλλιώς 0

$\zeta_{ik}$  : 1 αν η μηχανή  $i$  ανατεθεί στο κελί  $k$ , αλλιώς 0

$\rho_{ivu}$  : 1 αν  $x_i \leq x_v \leq x_u$  ή  $x_u \leq x_v \leq x_i$ , αλλιώς 0

$\omega_{ivu}$  : 1 αν  $y_i \leq y_v \leq y_u$  ή  $y_u \leq y_v \leq y_i$ , αλλιώς 0

$\lambda_{jo}$  : Χρόνος ολοκλήρωσης λειτουργίας  $o$  του εξαρτήματος  $j$

$\lambda_j$  : Χρόνος ολοκλήρωσης του εξαρτήματος  $j$

$\lambda_{total}$  : Συνολικός χρόνος ολοκλήρωσης εξαρτημάτων

## 4.2.4 Μαθηματικό Μοντέλο

$$\text{Min } \sum_{j=1}^y \sum_{o=1}^{N_j-1} C_{j(o,o+1)} + \sum_{j=1}^y \lambda_j \cdot G \dots \dots \dots (1)$$

(ω) ~ ~ ~ ~ ~ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ~ ~ ~ ~ ~

$$\sum_{k=1}^c \zeta_{ik} = 1, \forall i \dots \dots \dots (2)$$

$$\sum_{i=1}^{\mu} \zeta_{ik} \geq 1, \forall k \dots \dots \dots (3)$$

$$\sum_{i=1}^{\mu} \zeta_{ik} \leq \Gamma, \forall k \dots \dots \dots (4)$$

$$|x_i - x_u| \geq \frac{\xi_i + \xi_u}{2}, \forall i \leq u \dots \dots \dots (5.\alpha)$$

$$|y_i - y_u| \geq \frac{\psi_i + \psi_u}{2}, \forall i \leq u \dots \dots \dots (5.\beta)$$

$$x_i \leq H - \frac{\xi_i}{2}, \forall i \dots \dots \dots (6.\alpha)$$

$$x_i \geq \frac{\xi_i}{2}, \forall i \dots \dots \dots (6.\beta)$$

$$y_i \leq V - \frac{\psi_i}{2}, \forall i \dots \dots \dots (7.\alpha)$$

$$y_i \geq \frac{\psi_i}{2}, \forall i \dots \dots \dots (7.\beta)$$

$$(x_v - x_i)(x_u - x_v) < M \cdot \rho_{ivu}, \forall i, u, v \dots \dots \dots (8)$$

$$-(x_v - x_i)(x_u - x_v) \leq M \cdot (1 - \rho_{ivu}), \forall i, u, v \dots \dots \dots (9)$$

$$(y_v - y_i)(y_u - y_v) < M \cdot \omega_{ivu}, \forall i, u, v \dots \dots \dots (10)$$

$$-(y_v - y_i)(y_u - y_v) \leq M \cdot (1 - \omega_{ivu}), \forall i, u, v \dots \dots \dots (11)$$

$$\zeta_{ik} + \zeta_{uk} + \rho_{ivu} + \omega_{ivu} - 3 \leq \zeta_{vk}, \forall i, u, v \dots \dots \dots (12)$$

$$C_{j(oo')} = \sum_{k=1}^c C_{j(oo')}^k, \quad \forall j, o \rightarrow o'$$

$$\mu \varepsilon \quad o = 1, \dots, N_j - 1, \quad o' = o + 1 \dots \dots \dots (13)$$

$$C_{j(oo')}^k = \sum_{o, o', i, u \in \Delta_\mu} [\Theta_{joi} \cdot \Theta_{jo'i} \cdot \zeta_{ik} \cdot \zeta_{uk} \cdot (|x_i - x_u| + |y_i - y_u|) \cdot CA_{j(iu)} \\ + \Theta_{joi} \cdot \Theta_{jo'i} \cdot \zeta_{ik} \cdot (1 - \zeta_{uk}) \cdot (|x_i - x_u| + |y_i - y_u|) \cdot CE_{j(iu)}]$$

$$\forall k, j, o \rightarrow o' \quad \mu \varepsilon \quad o = 1, \dots, N_j - 1, \quad o' = o + 1 \dots \dots \dots (14)$$

$$T_{j(oo')} = \sum_{k=1}^c T_{j(oo')}^k, \quad \forall j, o \rightarrow o'$$

$$\mu \varepsilon \quad o = 1, \dots, N_j - 1, \quad o' = o + 1 \dots \dots \dots (15)$$

$$T_{j(oo')}^k = \sum_{o, o', i, u \in \Delta_\mu} [\Theta_{joi} \cdot \Theta_{jo'i} \cdot \zeta_{ik} \cdot \zeta_{uk} \cdot (|x_i - x_u| + |y_i - y_u|) \cdot TA_{j(iu)} \\ + \Theta_{joi} \cdot \Theta_{jo'i} \cdot \zeta_{ik} \cdot (1 - \zeta_{uk}) \cdot (|x_i - x_u| + |y_i - y_u|) \cdot TE_{j(iu)}]$$

$$\forall k, j, o \rightarrow o', \quad \mu \varepsilon \quad o = 1, \dots, N_j - 1, \quad o' = o + 1 \dots \dots \dots (16)$$

$$\lambda_{jo'} - \lambda_{jo} \geq \tau_{jo'} + T_{j(oo')}, \quad \forall j \quad \mu \varepsilon \quad o = 1, \dots, N_j - 1, \quad o' = o + 1 \dots \dots \dots (17)$$

$$\lambda_{jo} \geq \tau_{jo}, \quad \forall j, o \dots \dots \dots (18)$$

$$\lambda_j \geq \lambda_{jo}, \quad \forall j, o \quad \mu \varepsilon \quad \lambda_j = \sum_{o=1}^\mu \lambda_{jo} \dots \dots \dots (19)$$

$$\lambda_{total} \geq \lambda_j, \quad \forall j \quad \mu \varepsilon \quad \lambda_{total} = \sum_{j=1}^v \lambda_j \dots \dots \dots (20)$$

$$\sum_i \Theta_{joi} = 1, \quad \forall j, o \in \Delta_\varepsilon \quad \mu \varepsilon \quad o \in S_i \dots \dots \dots (21)$$

$$\sum_{\substack{j \in \Delta_\varepsilon \\ o \in S_i}} \Theta_{joi} \geq 1, \quad \forall i \dots \dots \dots (22)$$

$$\zeta_{ik}, \rho_{ivu}, \omega_{ivu}, \Theta_{joi} = 0 \text{ ή } 1, \quad \forall i, k, v, u, j, o$$

$$C_{j(oo')}, C_{j(o,o')}^k, T_{j(oo')}, T_{j(o,o')}^k, x_i, y_i, \lambda_{jo}, \lambda_j, \lambda_{total} \geq 0$$

## 4.2.5 Επεξήγηση Μαθηματικού Μοντέλου

Αφού παρουσιάστηκε το μαθηματικό μοντέλο, το οποίο δομήθηκε στα πλαίσια της παρούσης πτυχιακής εργασίας, κρίνεται απαραίτητη η επεξήγησή του. Αξίζει να σημειωθεί ότι στα πλαίσια της μελέτης που πραγματοποιήθηκε σε ερευνητικές εργασίες που ασχολούνται με το ίδιο ζήτημα, παρατηρήθηκε ότι οι συγγραφείς συχνά δεν ήταν επαρκώς επεξηγηματικοί εις ό,τι αφορά την παρουσίαση των νοημάτων πίσω από τους μαθηματικούς συμβολισμούς. Εντούτοις, στην παρούσα εργασία θα γίνει όσο το δυνατόν εις βάθος ανάλυση των συμβολισμών και της συλλογιστικής που ακολουθήθηκε.

Η μαθηματική έκφραση (1) συνοψίζει τον αντικειμενικό στόχο του προβλήματος, ο οποίος είναι η ελαχιστοποίηση του κόστους μετακίνησης των εξαρτημάτων και του κόστους που σχετίζεται με τον χρόνο ολοκλήρωσης των διεργασιών των εξαρτημάτων. Το πρώτο σκέλος  $\sum_{j=1}^n \sum_{o=1}^{N_j-1} C_{j(o,o+1)}$  περιγράφει το κόστος του εξαρτήματος  $j$  που δημιουργείται από τις μετακινήσεις του εξαρτήματος, λόγω της επεξεργασίας του από τις λειτουργίες  $o, o+1$  έως την τελευταία λειτουργία του κάθε εξαρτήματος. Επί παραδείγματι για ένα εξάρτημα που πρέπει να περάσει από τις λειτουργίες  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  μπορούμε να γράψουμε το αριστερό μέλος της αντικειμενικής συνάρτησης ως,  $C_{j(1,2)} + C_{j(2,3)} + C_{j(3,4)}$ . Το δεύτερο σκέλος  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \cdot G$  περιγράφει το κόστος που επωμίζεται το παραγωγικό σύστημα εξαιτίας του χρόνου ολοκλήρωσης του κάθε εξαρτήματος. Δηλαδή αν θεωρήσουμε ότι υπάρχουν τέσσερις κατηγορίες εξαρτημάτων, έστω  $j=1, 2, 3, 4$ , το δεξί μέλος της αντικειμενικής συνάρτησης θα πάρει την μορφή  $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) \cdot G$ .

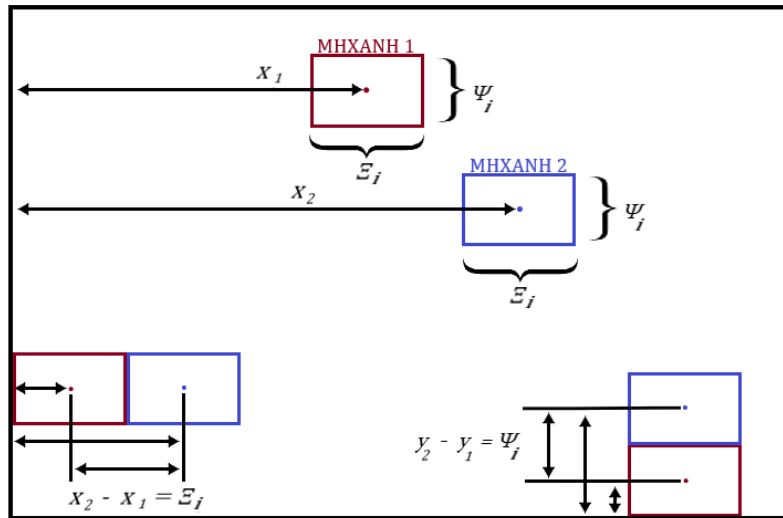
Η μαθηματική έκφραση (2) δηλώνει ότι κάθε μηχανή πρέπει να τοποθετηθεί σε ένα βιομηχανικό κελί. Αποτελεί έναν φυσικό περιορισμό, ο οποίος αποτρέπει την ανάθεση της ίδια μηχανής σε περισσότερες από μία θέσεις στο χώρο. Έστω ότι εξετάζουμε την μηχανή  $i = 1$  και υπάρχουν πέντε διαθέσιμα κελιά  $k = 1, 2, 3, 4, 5$ , τότε ο περιορισμός για την συγκεκριμένη μηχανή θα λάβει την μορφή ως εξής,  $z_{11} + z_{12} + z_{13} + z_{14} + z_{15} = 1$ .

Η μαθηματική έκφραση (3) δηλώνει ότι σε κάθε βιομηχανικό κελί πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία μηχανή. Αποτελεί έναν λογικό περιορισμό, στο περιεχόμενο του οποίου ενυπάρχει η συνθήκη της χρησιμοποίησης όλων των βιομηχανικών κελιών, αποτρέποντας την ύπαρξη άδειων κελιών. Έστω ότι εξετάζουμε το βιομηχανικό κελί  $k = 2$  και υπάρχουν τρεις διαθέσιμες μηχανές  $i = 1, 2, 3$ , τότε ο περιορισμός για το συγκεκριμένο βιομηχανικό κελί λαμβάνει την μορφή ως εξής,  $z_{12} + z_{22} + z_{32} \geq 1$ . Με αυτόν τον τρόπο δημιουργείται ουσιαστικά ένα κάτω όριο λειτουργίας των κελιών. Με αντίστοιχη λογική κατασκευάστηκε και η μαθηματική έκφραση (4), η οποία δημιουργεί ένα άνω όριο χωρητικότητας των βιομηχανικών κελιών.

Οι μαθηματικές εκφράσεις (5.α) και (5.β) αποτρέπουν την γεωμετρική αλληλοκάλυψη των μηχανών. Με αυτόν τον τρόπο αποφεύγεται η ύπαρξη κοινών σημείων των κύριων σωμάτων των μηχανών στον δισδιάστατο κατοπτικό χώρο. Στο Σχήμα 4.1 γίνεται η γεωμετρική απεικόνιση του περιορισμού.

Οι μαθηματικές εκφράσεις (6.α) έως (7.β) δηλώνουν ότι οι μηχανές πρέπει να είναι εντός των ορίων του δαπέδου των εγκαταστάσεων. Περιορίζουν αυστηρά τις συντεταγμένες των μηχανών τόσο στην

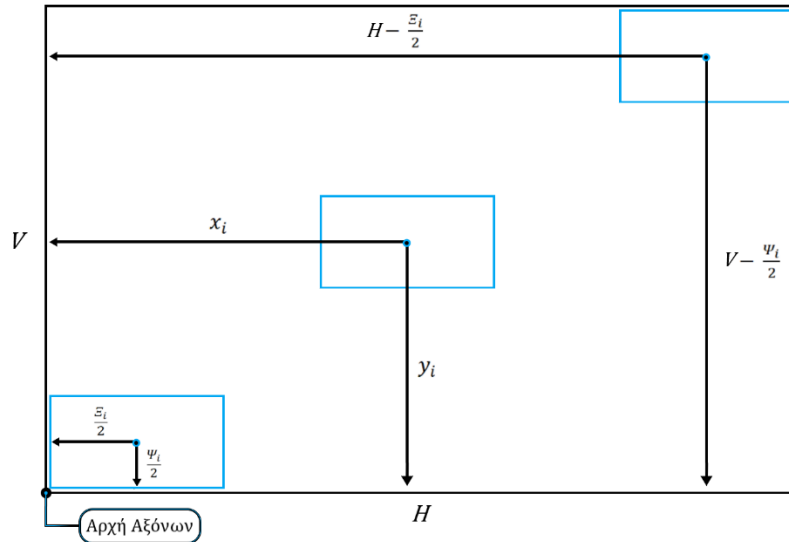
οριζόντια διάσταση (τετμημένη), όσο και στην κάθετη διάσταση (τεταγμένη). Πιο συγκεκριμένα οι περιορισμοί (6.α), (6.β) σχετίζονται



**Σχήμα 4.1:** Απεικόνιση της χρησιμότητας των περιορισμών (5.α - 5.β).

με την οριζόντια διάσταση του επιπέδου την κάτοψης των εγκαταστάσεων, ενώ οι (7.α), (7.β) σχετίζονται με την κάθετη διάσταση του αντίστοιχου επιπέδου. Θα μπορούσαμε να συνοψίσουμε τους προαναφερθέντες περιορισμούς σε μαθηματικές εκφράσεις διπλής ανισότητας, ώστε να γίνουν ακόμα πιο ευκατανόητα τα γεωμετρικά όρια, τα οποία θέτονται από αυτούς. Ομαδοποιώντας τους περιορισμούς (6.α) και (6.β) καταλήγουμε να έχουμε την εξής μορφή,  $\frac{\xi_i}{2} \leq x_i \leq H - \frac{\xi_i}{2}$ , ενώ μέσω της ομαδοποίησης των περιορισμών (7.α) και (7.β) έχουμε την εξής μορφή,  $\frac{\psi_i}{2} \leq y_i \leq V - \frac{\psi_i}{2}$ . Στο Σχήμα 4.2 γίνεται μία γεωμετρική απεικόνιση αυτών των περιορισμών, στην οποία συμπυκνώνονται και οι δύο οικογένειες περιορισμών. Σε αυτό το σημείο υπενθυμίζεται

ότι οι περιορισμοί αναφέρονται στις συντεταγμένες του κέντρου της κάτοψης των μηχανών.

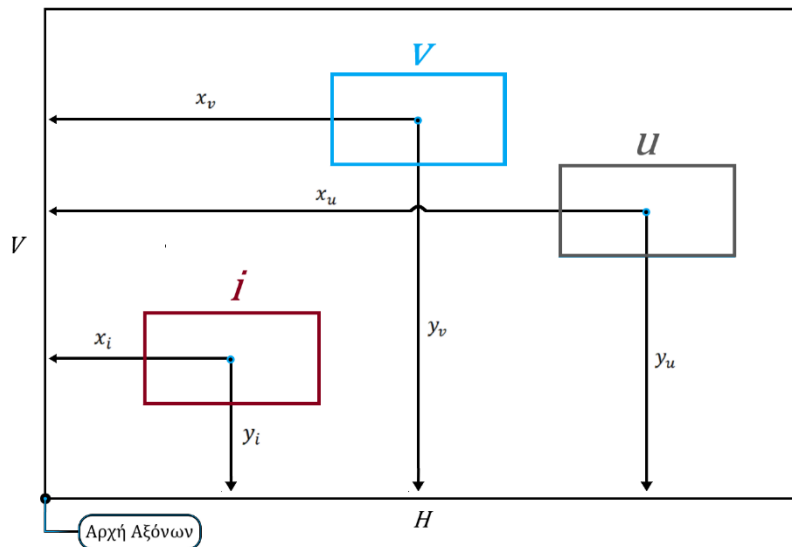


**Σχήμα 4.2:** Απεικόνιση των περιορισμών (6.α), (6.β), (7.α), (7.β).

Οι μαθηματικές εκφράσεις (8), (9) εξασφαλίζουν και αυτές με την σειρά τους την συνθήκη αποφυγής γεωμετρικών αλληλοκαλύψεων μεταξύ των μηχανών, εις ό,τι αφορά την οριζόντια διάσταση. Σε αυτούς του περιορισμούς έχει εισαχθεί η δυαδική μεταβλητή  $\rho_{ivu}$ , η οποία λαμβάνει τις τιμές 0 ή 1. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση στην οποία η μεταβλητή λάβει την τιμή 1. Τότε μέσω των περιορισμών επιβάλλεται η συνθήκη  $x_i \leq x_v \leq x_u$  ή  $x_u \leq x_v \leq x_i$ , δηλαδή η μηχανή  $v$  είναι μεταξύ των μηχανών  $i$  και  $u$ , εις ό,τι αφορά την οριζόντια διάσταση. Αν η μεταβλητή λάβει την τιμή 0 τότε η παραπάνω ιεραρχία αποδομείται. Ομοσήμως λειτουργούν και οι μαθηματικές εκφράσεις (10) και (11), αναφερόμενες όμως στην κάθετη διάσταση του επιπέδου ανάλυσης. Παρακάτω παρουσιάζεται το Σχήμα 4.3, το οποίο απεικονίζει μία εφαρμογή, πιθανής



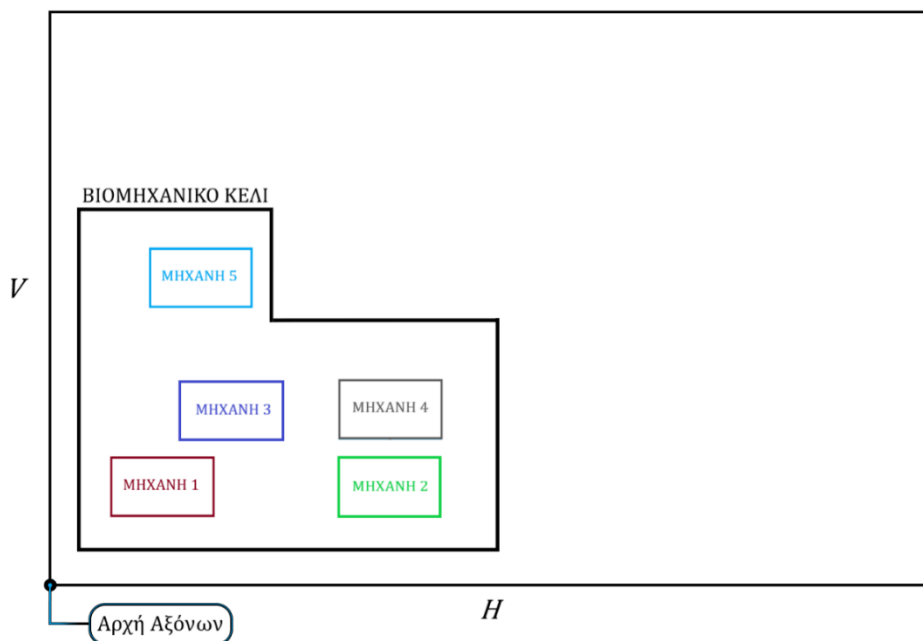
περίπτωσης, των περιορισμών (8), (9), (10), (11). Στο συγκεκριμένο σχήμα έχει θεωρηθεί δεδομένη η συνθήκη  $\rho_{ivu} = 1$  και  $\omega_{ivu} = 0$ . Φαίνεται ότι οι σχέσεις των οριζόντιων και κάθετων αποστάσεων είναι,  $x_i \leq x_v \leq x_u$  και  $y_i \leq y_u \leq y_v$ .



Σχήμα 4.3: Απεικόνιση των περιορισμών (8), (9), (10), (11).

Η μαθηματική έκφραση (12) γεφυρώνει τους περιορισμούς (8) έως (11), μέσω της αλληλεπίδρασης των μεταβλητών  $\rho_{ivu}$  και  $\omega_{ivu}$  σε μία κοινή μαθηματική περιοριστική συνθήκη. Με τον συγκεκριμένο μαθηματικό περιορισμό διασφαλίζεται η δισδιάστατη γεωμετρική ορθογωνικότητα των βιομηχανικών κελιών. Η συλλογιστική πίσω απ' τον περιορισμό  $\zeta_{ik} + \zeta_{uk} + \rho_{ivu} + \omega_{ivu} - 3 \leq \zeta_{vk}$ , μπορεί ευκολότερα να κατανοηθεί αν τροποποιήσουμε τον τρόπο που παρουσιάζεται στην σχετική βιβλιογραφία αλλά και στην συγκεκριμένη εργασία. Επομένως, για χάριν ευκολίας της επεξήγησής του, δίνουμε την μορφή στην μαθηματική ανισότητα ως εξής,  $\zeta_{ik} + \zeta_{uk} + \rho_{ivu} + \omega_{ivu} - \zeta_{vk} \leq 3$ . Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι αν έχει τοποθετηθεί η μηχανή  $i$  στο κελί  $k$  και η μηχανή  $u$  στο κελί  $k$  και επιπλέον ισχύει  $\rho_{ivu} = \omega_{ivu} = 1$ , τότε

αναγκαστικά έχουμε  $z_{vk} = 1$ , δηλαδή η μηχανή  $v$  θα τοποθετηθεί στο κελί  $k$ . Αν πάλι έχει τοποθετηθεί η μηχανή  $i$  στο κελί  $k$  και η μηχανή  $u$  στο κελί  $k$  και επιπλέον έστω ότι ισχύει  $\rho_{ivu} = 1$  και  $\omega_{ivu} = 0$ , τότε ο περιορισμός θα ικανοποιείται αν και μόνο αν  $z_{vk} = 0$ . Με τον προαναφερθέντα μηχανισμό ο περιορισμός είτε δέχεται μια μηχανή στο βιομηχανικό κελί είτε της αποτρέπει την είσοδο σε αυτό, δημιουργώντας έτσι τετράπλευρα βιομηχανικά κελιά ορθογώνιου σχήματος. Σε περίπτωση που δεν υπήρχε αυτός ο περιορισμός θα ήταν αποδεκτή η κατασκευή βιομηχανικών κελιών πιο σύνθετων γεωμετριών. Μια πιθανή εκδοχή δημιουργίας βιομηχανικού κελιού πιο σύνθετης γεωμετρίας παρουσιάζεται παρακάτω στο Σχήμα 4.4.



**Σχήμα 4.4:** Βιομηχανικό κελί σύνθετης γεωμετρίας.

Οι μαθηματικές εκφράσεις (13) και (14) ορίζουν την έννοια του κόστους μεταφοράς, το οποίο συνδέεται με την γεωμετρική απόσταση των μηχανών. Έστω ότι έχουμε τρία κελιά,  $k = 1, 2, 3$ , ένα εξάρτημα προς παραγωγή  $j = 1$  και το εξάρτημα πρέπει να περάσει από τις λειτουργίες  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ . Τότε η μαθηματική έκφραση (13)  $C_{j(oo')} = \sum_{k=1}^c C_{j(oo')}^k$ , λαμβάνει την παρακάτω μορφή, εις ό,τι αφορά την διεκπεραίωση του σταδίου  $1 \rightarrow 2$  και  $2 \rightarrow 3$ .

$$C_{1(12)} = C_{1(12)}^1 + C_{1(12)}^2 + C_{1(12)}^3$$

$$C_{1(23)} = C_{1(23)}^1 + C_{1(23)}^2 + C_{1(23)}^3$$

Ο περιορισμός (14) επεξηγεί τους όρους που δημιουργούνται από τον (13). Ουσιαστικά, δηλώνει το κόστος μεταφοράς του εκάστοτε εξαρτήματος κατά την μεταφορά του, ώστε να επεξεργασθεί στην λειτουργία  $o'$  ερχόμενο έπειτα από την περάτωση της λειτουργίας  $o$ , με προϋπόθεση ότι η λειτουργία  $o$  περατώθηκε εντός τους κελιού  $k$ . Στην μακροσκελή αυτή μαθηματική έκφραση χρησιμοποιείται το σύνολο δεικτών  $\Delta_\mu$ , το οποίο αντιστοιχίζει τις λειτουργίες με τις μηχανές που δύνανται να τις περατώσουν. Εντός αυτού του συνόλου δεικτών αλληλεπιδρούν οι δείκτες  $o, o', i, u$ , με τους δύο πρώτους να συμβολίζουν ένα ζεύγος λειτουργιών με  $o' = o + 1$  και με τους δύο τελευταίους να συμβολίζουν ένα ζεύγος μηχανών. Ο παραπάνω συμβολισμός δηλώνει ότι η λειτουργία  $o$  θα εκτελεσθεί από την μηχανή  $i$  ενώ η επόμενη λειτουργία  $o'$  θα εκτελεσθεί από την μηχανή  $u$ . Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε δύο κελιά,  $k = 1, 2$  ένα εξάρτημα προς παραγωγή  $j = 1$  και πρέπει να περάσει από τις λειτουργίες  $1 \rightarrow 2$ . Για να υπολογιστεί το  $C_{1(12)}$  πρέπει να οριστούν τα  $C_{1(12)}^1, C_{1(12)}^2$ , αφού στην προκειμένη ισχύει  $C_{1(12)} = C_{1(12)}^1 + C_{1(12)}^2$ . Επιπλέον, θεωρούμε ότι ισχύει η συνθήκη κατά την οποία οι μηχανές  $i = 1, 2$

εκτελούν την λειτουργία  $o = 1$  και οι μηχανές  $i = 3, 4$  εκτελούν την λειτουργία  $o = 2$ . Έτσι μπορούμε να ορίσουμε τους όρους  $C_{1(12)}^1$  και  $C_{1(12)}^2$ . Επομένως έχουμε,

$$\begin{aligned}
C_{1(12)}^1 = & \theta_{111} \cdot \theta_{123} \cdot \zeta_{11} \cdot \zeta_{31} \cdot (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) \cdot CA_{1(13)} \\
& + \theta_{111} \cdot \theta_{123} \cdot \zeta_{11} \cdot (1 - \zeta_{31}) \cdot (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) \cdot CE_{1(13)} + \\
& \theta_{111} \cdot \theta_{124} \cdot \zeta_{11} \cdot \zeta_{41} \cdot (|x_1 - x_4| + |y_1 - y_4|) \cdot CA_{1(14)} \\
& + \theta_{111} \cdot \theta_{124} \cdot \zeta_{11} \cdot (1 - \zeta_{41}) \cdot (|x_1 - x_4| + |y_1 - y_4|) \cdot CE_{1(14)} + \\
& \theta_{112} \cdot \theta_{123} \cdot \zeta_{21} \cdot \zeta_{31} \cdot (|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|) \cdot CA_{1(23)} \\
& + \theta_{112} \cdot \theta_{123} \cdot \zeta_{21} \cdot (1 - \zeta_{31}) \cdot (|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|) \cdot CE_{1(23)} + \\
& \theta_{112} \cdot \theta_{124} \cdot \zeta_{21} \cdot \zeta_{41} \cdot (|x_2 - x_4| + |y_2 - y_4|) \cdot CA_{1(24)} \\
& + \theta_{112} \cdot \theta_{124} \cdot \zeta_{21} \cdot (1 - \zeta_{41}) \cdot (|x_2 - x_4| + |y_2 - y_4|) \cdot CE_{1(24)}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{1(12)}^2 = & \theta_{111} \cdot \theta_{123} \cdot \zeta_{12} \cdot \zeta_{32} \cdot (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) \cdot CA_{1(13)} \\
& + \theta_{111} \cdot \theta_{123} \cdot \zeta_{12} \cdot (1 - \zeta_{32}) \cdot (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) \cdot CE_{1(13)} + \\
& \theta_{111} \cdot \theta_{124} \cdot \zeta_{12} \cdot \zeta_{42} \cdot (|x_1 - x_4| + |y_1 - y_4|) \cdot CA_{1(14)} \\
& + \theta_{111} \cdot \theta_{124} \cdot \zeta_{12} \cdot (1 - \zeta_{42}) \cdot (|x_1 - x_4| + |y_1 - y_4|) \cdot CE_{1(14)} + \\
& \theta_{112} \cdot \theta_{123} \cdot \zeta_{22} \cdot \zeta_{32} \cdot (|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|) \cdot CA_{1(23)} \\
& + \theta_{112} \cdot \theta_{123} \cdot \zeta_{22} \cdot (1 - \zeta_{32}) \cdot (|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|) \cdot CE_{1(23)} + \\
& \theta_{112} \cdot \theta_{124} \cdot \zeta_{22} \cdot \zeta_{42} \cdot (|x_2 - x_4| + |y_2 - y_4|) \cdot CA_{1(24)} \\
& + \theta_{112} \cdot \theta_{124} \cdot \zeta_{22} \cdot (1 - \zeta_{42}) \cdot (|x_2 - x_4| + |y_2 - y_4|) \cdot CE_{1(24)}.
\end{aligned}$$

Παρατηρώντας αρχικά την πρώτη εξίσωση βλέπουμε ότι οι δύο πρώτες γραμμές σχετίζονται με την περίπτωση κατά την οποία η λειτουργία  $o = 1$  εκτελείται από την μηχανή  $i = 1$ , η οποία τοποθετείται στο κελί  $k = 1$  και η λειτουργία  $o = 2$  εκτελείται από την

μηχανή  $i = 3$ , η οποία τοποθετείται ή όχι στο κελί  $k = 1$ . Το δεύτερο ζεύγος γραμμών σχετίζεται με την περίπτωση κατά την οποία η λειτουργία  $o = 1$  εκτελείται από την μηχανή  $i = 1$ , η οποία τοποθετείται στο κελί  $k = 1$  και η λειτουργία  $o = 2$  εκτελείται από την μηχανή  $i = 4$ , η οποία τοποθετείται ή όχι στο κελί  $k = 1$ . Το τρίτο ζεύγος γραμμών σχετίζεται με την περίπτωση κατά την οποία η λειτουργία  $o = 1$  εκτελείται από την μηχανή  $i = 2$ , η οποία τοποθετείται στο κελί  $k = 1$  και η λειτουργία  $o = 2$  εκτελείται από την μηχανή  $i = 3$ , η οποία τοποθετείται ή όχι στο κελί  $k = 1$ . Το τελευταίο ζεύγος γραμμών σχετίζεται με την περίπτωση κατά την οποία η λειτουργία  $o = 1$  εκτελείται από την μηχανή  $i = 2$ , η οποία τοποθετείται στο κελί  $k = 1$  και η λειτουργία  $o = 2$  εκτελείται από την μηχανή  $i = 4$ , η οποία τοποθετείται ή όχι στο κελί  $k = 1$ . Πανομοιότυπα ερμηνεύεται και το άθροισμα του όρου  $C_{1(12)}^2$ , με μόνη διαφορά ότι σε αυτό το άθροισμα υπάρχει η υπόθεση που δηλώνει ότι η λειτουργία  $o$  ολοκληρώνεται στο βιομηχανικό κελί  $k = 2$ .

Οι μαθηματικές εκφράσεις (15) και (16) ορίζουν την έννοια του χρόνου μεταφοράς από την μηχανή που περατώνει μία λειτουργία στην μηχανή που θα περατώσει την επόμενη. Κατά την μεταφορά των εξαρτημάτων πέραν του κόστους μεταφοράς που συνδέεται με την φθορά των εγκαταστάσεων και γενικότερα με την υλική φθορά, υπάρχει και το κόστος που συνδέεται με τον χρόνο μεταφοράς των εξαρτημάτων από μηχανή-σε-μηχανή. Ο χρόνος σε αυτήν την περίπτωση λειτουργεί ως κοστοβόρος παράγοντας στην παραγωγική διαδικασία. Οι μεγάλοι χρόνοι μεταφοράς των εξαρτημάτων οδηγούν σε υποχρησιμοποίηση των συντελεστών παραγωγής, αφού οι μεγάλοι χρόνοι μεταφοράς συντελούν στην επίτευξη μικρότερων επιπέδων παραγωγικότητας του συστήματος.

Σε αυτό το σημείο κρίνεται απαραίτητη η επεξήγηση του περιεχομένου του δείκτη  $\Delta_\mu$ , ο οποίος συνδέει τις λειτουργίες των εξαρτημάτων που πρέπει να περατωθούν με τις εν δυνάμει μηχανές που δύνανται να εκτελέσουν τις εκάστοτε λειτουργίες. Θεωρώντας λοιπόν ότι υπάρχει ένα παραγωγικό σύστημα στο οποίο υπάρχουν, δύο βιομηχανικά κελιά  $k = 1, 2$ , έξι κατηγορίες μηχανών  $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  και τρία είδη λειτουργιών που πρέπει να εκτελεσθούν σειριακά  $o = 1, 2, 3$ . Επιπρόσθετα έχουμε και την συνθήκη, η οποία ορίζει ότι οι μηχανές  $i = 1, 2$  εκτελούν την λειτουργία  $o = 1$ , οι μηχανές  $i = 3, 4$  εκτελούν την λειτουργία  $o = 2$  και οι μηχανές  $i = 5, 6$  εκτελούν την λειτουργία  $o = 3$ . Στον Πίνακα 4.1 θα παρουσιαστούν όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί αυτών των δεικτών, οι οποίοι δομούν και το περιεχόμενο του δείκτη  $\Delta_\mu$  για την συγκεκριμένη εφαρμογή.

**Πίνακας 4.1** Περιεχόμενο Δείκτη  $\Delta_\mu$

$\Delta_\mu$	$o \rightarrow$	$i$	$o' \rightarrow$	$u$
$o, i, o', u$	1	1	2	3
$o, i, o', u$	1	1	2	4
$o, i, o', u$	1	2	2	3
$o, i, o', u$	1	2	2	4
$o, i, o', u$	2	3	3	5
$o, i, o', u$	2	3	3	6
$o, i, o', u$	2	4	3	5
$o, i, o', u$	2	4	3	6

Άρα, θεωρώντας  $j = 1$  και θέλοντας να υπολογίσουμε το κόστος μεταφοράς του εξαρτήματος  $\sum_{o=1}^{N_j-1} C_{j(o,o+1)}$  έχουμε τα παρακάτω,

$$\sum_{o=1}^2 C_{1(o,o+1)} = C_{1(1,2)} + C_{1(2,3)}$$

$$\text{με} \quad C_{1(1,2)} = C_{1(12)}^1 + C_{1(12)}^2 \quad \text{και} \quad C_{1(2,3)} = C_{1(23)}^1 + C_{1(23)}^2$$

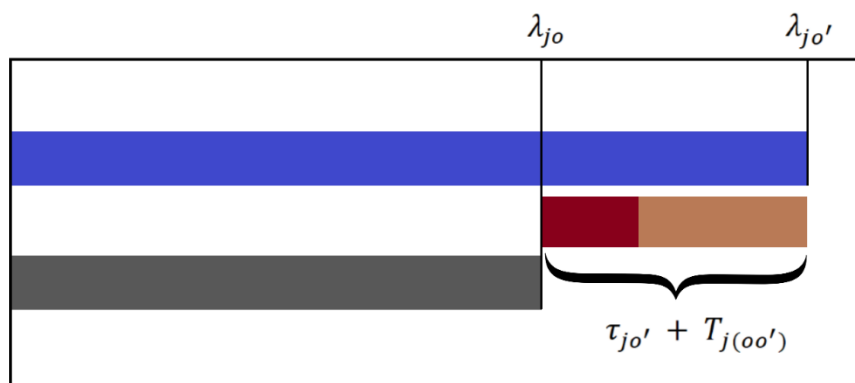
και επιπλέον,

$$\begin{aligned} C_{1(12)}^1 = & \theta_{111} \cdot \theta_{123} \cdot \zeta_{11} \cdot \zeta_{31} \cdot (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) \cdot CA_{1(13)} \\ & + \theta_{111} \cdot \theta_{123} \cdot \zeta_{11} \cdot (1 - \zeta_{31}) \cdot (|x_1 - x_3| + |y_1 - y_3|) \cdot CE_{1(13)} + \\ & \theta_{111} \cdot \theta_{124} \cdot \zeta_{11} \cdot \zeta_{41} \cdot (|x_1 - x_4| + |y_1 - y_4|) \cdot CA_{1(14)} \\ & + \theta_{111} \cdot \theta_{124} \cdot \zeta_{11} \cdot (1 - \zeta_{41}) \cdot (|x_1 - x_4| + |y_1 - y_4|) \cdot CE_{1(14)} + \\ & \theta_{112} \cdot \theta_{123} \cdot \zeta_{21} \cdot \zeta_{31} \cdot (|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|) \cdot CA_{1(23)} \\ & + \theta_{112} \cdot \theta_{123} \cdot \zeta_{21} \cdot (1 - \zeta_{31}) \cdot (|x_2 - x_3| + |y_2 - y_3|) \cdot CE_{1(23)} + \\ & \theta_{112} \cdot \theta_{124} \cdot \zeta_{21} \cdot \zeta_{41} \cdot (|x_2 - x_4| + |y_2 - y_4|) \cdot CA_{1(24)} \\ & + \theta_{112} \cdot \theta_{124} \cdot \zeta_{21} \cdot (1 - \zeta_{41}) \cdot (|x_2 - x_4| + |y_2 - y_4|) \cdot CE_{1(24)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1(23)}^1 = & \theta_{123} \cdot \theta_{135} \cdot \zeta_{31} \cdot \zeta_{51} \cdot (|x_3 - x_5| + |y_3 - y_5|) \cdot CA_{1(35)} \\ & + \theta_{123} \cdot \theta_{135} \cdot \zeta_{31} \cdot (1 - \zeta_{51}) \cdot (|x_3 - x_5| + |y_3 - y_5|) \cdot CE_{1(35)} + \\ & \theta_{123} \cdot \theta_{136} \cdot \zeta_{31} \cdot \zeta_{61} \cdot (|x_3 - x_6| + |y_3 - y_6|) \cdot CA_{1(36)} \\ & + \theta_{123} \cdot \theta_{136} \cdot \zeta_{31} \cdot (1 - \zeta_{61}) \cdot (|x_3 - x_6| + |y_3 - y_6|) \cdot CE_{1(36)} + \\ & \theta_{124} \cdot \theta_{135} \cdot \zeta_{41} \cdot \zeta_{51} \cdot (|x_4 - x_5| + |y_4 - y_5|) \cdot CA_{1(45)} \\ & + \theta_{124} \cdot \theta_{135} \cdot \zeta_{41} \cdot (1 - \zeta_{51}) \cdot (|x_4 - x_5| + |y_4 - y_5|) \cdot CE_{1(45)} + \\ & \theta_{124} \cdot \theta_{136} \cdot \zeta_{41} \cdot \zeta_{61} \cdot (|x_4 - x_6| + |y_4 - y_6|) \cdot CA_{1(46)} \\ & + \theta_{124} \cdot \theta_{136} \cdot \zeta_{41} \cdot (1 - \zeta_{61}) \cdot (|x_4 - x_6| + |y_4 - y_6|) \cdot CE_{1(46)}. \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο υπολογίζονται τα  $C_{1(12)}^2$  και  $C_{1(23)}^2$ , εκχωρώντας στην τιμή του  $k$  την τιμή  $k = 2$ . Επομένως, ο δείκτης  $\Delta_\mu$  ουσιαστικά αποτελεί ένα σύνολο πολλών δεικτών, από το οποίο κάθε φορά χρησιμοποιείται ένα τμήμα του συνόλου, ανάλογα με τις ανάγκες των μεταβλητών  $C_{j(oo')}^k$  και  $T_{j(oo')}^k$ .

Η μαθηματική έκφραση (17) δηλώνει την χρονική σχέση που πρέπει να υφίσταται μεταξύ του χρόνου ολοκλήρωσης της λειτουργίας  $o$  και του αντίστοιχου χρόνου της  $o = o + 1$ . Το ενδιάμεσο διάστημα μεταξύ των χρόνων ολοκλήρωσης των, ανά δύο, αλληπάληλων λειτουργιών  $\lambda_{jo'} - \lambda_{jo}$  πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσο με το άθροισμα του χρόνου αποπεράτωσης της τελευταίας λειτουργίας  $\tau_{jo'}$  και του απαιτούμενου χρόνου για την μετακίνηση από την μια λειτουργία στην άλλη  $T_{j(oo')}$ . Συνειδητοποιούμε λοιπόν ότι αποτελεί έναν λογικό περιορισμό, του οποίου η αθέτηση θα οδηγούσε σε μη εφαρμόσιμες λύσεις. Στο Σχήμα 4.5 παρουσιάζεται γραφικά το εννοιολογικό περιεχόμενο της συγκεκριμένης μαθηματικής έκφρασης.



**Σχήμα 4.5:** Απεικόνιση του περιορισμού (17).



Στην ίδια λογική βάση στηρίζονται και οι μαθηματικές εκφράσεις (18), (19) και (20). Ο περιορισμός (18) δηλώνει ότι ο χρόνος ολοκλήρωσης της λειτουργίας  $o$  του εξαρτήματος  $j$  πρέπει να ισούται τουλάχιστον με τον χρόνο επεξεργασίας του εξαρτήματος στην αντίστοιχη λειτουργία. Ο περιορισμός (19) δηλώνει ότι ο χρόνος ολοκλήρωσης του κάθε εξαρτήματος πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσος με τον χρόνο περάτωσης της κάθε λειτουργίας του εξαρτήματος. Τέλος, ο περιορισμός (20) δηλώνει ότι ο χρόνος ολοκλήρωσης όλων των εξαρτημάτων πρέπει να είναι τουλάχιστον ίσος με τον χρόνο ολοκλήρωσης του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι μαθηματικές εκφράσεις (21) και (22). Η μαθηματική έκφραση (22) δεν εντοπίστηκε όμοιά της σε οιαδήποτε εργασία που μελετήθηκε στα πλαίσια εκπόνησης της παρούσης εργασίας. Εισήχθη στο πρόβλημα έτσι ώστε να συμβάλλει όσο το δυνατόν στην εννοιολογική πληρότητα του μορφοποιημένου προβλήματος. Ο περιορισμός (21) δηλώνει την ανάγκη η κάθε λειτουργία  $o$ , του εκάστοτε εξαρτήματος, να εκτελείται μία φορά. Ευκόλως εννοούμενο είναι ότι σε περίπτωση εκτέλεσης της κάθε λειτουργίας πάνω από μία φορές οδηγούμαστε σε υπερχρησιμοποίηση του παραγωγικού εξοπλισμού. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση κατά την οποία έχουμε ένα εξάρτημα  $j = 1$ , το οποίο πρέπει να επεξεργασθεί από την λειτουργία  $o = 1$ , η οποία δύναται να περατωθεί από τις μηχανές  $i = 1, 2, 3$ . Η μορφή του περιορισμού για αυτήν την συνθήκη λαμβάνει την εξής μορφή,  $\theta_{111} + \theta_{112} + \theta_{113} = 1$ , το οποίο σημαίνει ότι η συγκεκριμένη λειτουργία του εξαρτήματος θα εκτελεσθεί μία μόνο φορά.

Ο περιορισμός (22) εκφράζει την ανάγκη να τίθεται τουλάχιστον μία λειτουργία σε κάθε μηχανή, ώστε να έχει νόημα ύπαρξης η εκάστοτε μηχανή στο παραγωγικό σύστημα. Ας θεωρήσουμε δύο εξαρτήματα  $j = 1, 2$ , δύο μηχανές  $i = 1, 2$  και τέσσερις λειτουργίες  $o = 1, 2, 3, 4$ , οι οποίες πρέπει να εκτελεστούν σειριακά. Έστω ότι η μηχανή  $i = 1$  εκτελεί τις λειτουργίες  $o = 1, 2$  και η μηχανή  $i = 2$  εκτελεί τις λειτουργίες  $o = 3, 4$ , δηλαδή ισχύει  $S_1 = \{1, 2\}$  και  $S_2 = \{3, 4\}$ . Τότε, ο περιορισμός λαμβάνει την παρακάτω μορφή,

$$\theta_{111} + \theta_{121} + \theta_{211} + \theta_{221} \geq 1$$

$$\theta_{132} + \theta_{142} + \theta_{232} + \theta_{242} \geq 1$$

με αυτόν τον τρόπο εκφράζεται σε μαθηματικούς όρους η κατάσταση κατά την οποία κάθε μηχανή πρέπει να περατώνει τουλάχιστον μία λειτουργία από αυτές που εν δυνάμει μπορεί να εκτελέσει.

Επίσης, ο δείκτης  $\Delta_\varepsilon$  έχει παρόμοια λογική με τον δείκτη  $\Delta_\mu$ , αντιστοιχίζοντας αυτήν την φορά τα εξαρτήματα με τις λειτουργίες που πρέπει να εκτελεστούν σε αυτά. Παρακάτω παρουσιάζεται σε μορφή πίνακα το περιεχόμενο του δείκτη  $\Delta_\varepsilon$  για το παράδειγμα επεξήγησης του περιορισμού (22).

**Πίνακας 4.2** Περιεχόμενο Δείκτη  $\Delta_\varepsilon$

$\Delta_\varepsilon$	$j$	$o$
$j, o$	1	1
$j, o$	1	2
$j, o$	1	3

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΙΝΑΚΑ 4.2 →

Πίνακας 4.2(ΣΥΝΕΧΕΙΑ)

$\Delta_\varepsilon$	$j$	$o$
$j, o$	1	4
$j, o$	2	1
$j, o$	2	2
$j, o$	2	3
$j, o$	2	4

Πιο αναλυτικά, για να κατασκευαστεί ο περιορισμός (22) ακολουθήθηκε η παρακάτω συλλογιστική. Έστω ότι θέλουμε να δομήσουμε τον περιορισμό για  $i = 1$ . Λαμβάνοντας επιπλέον υπόψιν ότι  $S_1 = \{1,2\}$ , τότε στον πρώτο περιορισμό όπως φάνηκε παραπάνω έχουμε τα εξής ζεύγη για τα  $j, o$ ,

$$(j, o) = \{ (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2) \} \text{ με } S_1 = \{1,2\}$$

$$\theta_{111} + \theta_{121} + \theta_{211} + \theta_{221} \geq 1$$

Ομοίως και για την δεύτερη γραμμή του περιορισμού για  $i = 2$  έχουμε,

$$(j, o) = \{ (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4) \} \text{ με } S_2 = \{3,4\}$$

$$\theta_{132} + \theta_{142} + \theta_{232} + \theta_{242} \geq 1$$

Τέλος, στην μορφοποίηση του προβλήματος παρουσιάζονται και οι περιορισμοί προσήμου των μεταβλητών απόφασης. Η πρώτη κατηγορία αφορά τις δυαδικές μεταβλητές, ενώ η δεύτερη σχετίζεται με τις θετικού προσήμου μεταβλητές. Δυαδικές μεταβλητές αποτελούν οι  $\zeta_{ik}, \rho_{ivu}, \omega_{ivu}, \theta_{joi}$  και θετικού προσήμου οι  $C_{j(o,o')}, C_{j(o,o')}^k, T_{j(o,o')}, T_{j(o,o')}^k, x_i, y_i, \lambda_{jo}, \lambda_j, \lambda_{total}$ .

## 4.3 Αποτελέσματα Εφαρμογής Μοντέλου

Έπειτα από την εκτενή επεξήγηση του μαθηματικού μοντέλου, το οποίο δομήθηκε στα πλαίσια της παρούσης πτυχιακής εργασίας, κρίνεται απαραίτητη η εφαρμογή του και η ερμηνεία των λύσεων που παράγει. Το μοντέλο μορφοποιήθηκε σε Python και παράγαγε βέλτιστες λύσεις στο περιβάλλον βελτιστοποίησης IBM – CPLEX. Στην παρούσα ενότητα θα παρουσιαστούν προβλήματα μικρής κλίμακας, καθώς ο αλγόριθμος επίλυσης CPLEX απαιτεί αρκετά λεπτά ή και ώρες, ώστε να παράγει μία βέλτιστη λύση σε μεγαλύτερης κλίμακας προβλήματα. Εν συνεχεία, θα δοθούν πίνακες με αριθμητικές τιμές για τις παραμέτρους του προβλήματος, ενώ έπειτα θα παρουσιαστούν και θα επεξηγηθούν οι παραγόμενες λύσεις. Επισημαίνεται ότι τα πειράματα έλαβαν χώρα σε Η/Υ 2.50 GHz με 8.00 GB RAM.

Σε όλα τα προβλήματα που θα παρουσιαστούν στην συνέχεια υπάρχουν κάποιες κοινές υποθέσεις. Αυτές αναφέρονται παρακάτω,

- ⇒ Υπάρχουν τέσσερις κατηγορίες εξαρτημάτων.
- ⇒ Οι μηχανές του παραγωγικού συστήματος είναι τέσσερις.
- ⇒ Τα διαθέσιμα βιομηχανικά κελιά είναι δύο.
- ⇒ Κάθε εξάρτημα πρέπει να περάσει από δύο λειτουργίες (1 → 2) σειριακά.
- ⇒ Οι μηχανές  $i = 1,2$  δύνανται να εκτελέσουν την λειτουργία  $o = 1$  και οι μηχανές  $i = 3,4$  την λειτουργία  $o = 2$ , αντίστοιχα.

Σε κάθε πρόβλημα θα υπάρχει το στάδιο παρουσίασης των αριθμητικών τιμών των παραμέτρων, της παρουσίασης της βέλτιστης λύσης και τέλος το στάδιο της ερμηνείας και απεικόνισης της λύσης.

### 4.3.1 Πρόβλημα 1

Πίνακας 4.3 Παράμετροι Προβλήματος 1

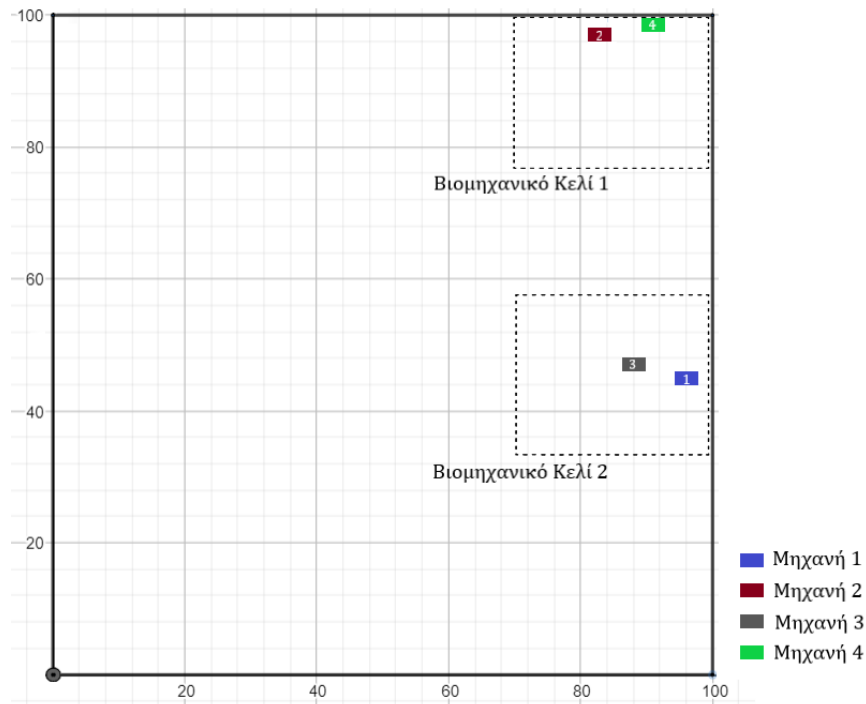
Παράμετροι Προβλήματος	Αριθμητικές Τιμές
$\mu$	4
$\nu$	4
$c$	2
$\Gamma$	2
$H$	100
$V$	100
$CA_{j(iu)}$	0,1 € / μέτρο
$CE_{j(iu)}$	0,2 € / μέτρο
$\tau_{11}$	3 λεπτά
$\tau_{21}$	4 λεπτά
$\tau_{31}$	5 λεπτά
$\tau_{41}$	6 λεπτά
$\tau_{12}$	4 λεπτά
$\tau_{22}$	3 λεπτά
$\tau_{32}$	6 λεπτά
$\tau_{42}$	5 λεπτά
$S_i$	2 λειτουργίες / μηχανή
$G$	0,5 € /λεπτό
$\Xi$	3 μέτρα
$\Psi$	1,8 μέτρα
$TA_{j(iu)}$	0,1 λεπτά / μέτρο
$TE_{j(iu)}$	0,2 λεπτά / μέτρο
$M$	1.000.000

Πίνακας 4.4 Λύση Προβλήματος 1

$C_{1(12)}$	$C_{2(12)}$	$C_{3(12)}$	$C_{4(12)}$	$T_{1(12)}$	$T_{2(12)}$	$T_{3(12)}$	$T_{4(12)}$
1 €	1 €	1 €	1 €	1 λεπτό	1 λεπτό	1 λεπτό	1 λεπτό
$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{31}$	$\lambda_{32}$	$\lambda_{41}$	$\lambda_{42}$
3 λεπτά	8 λεπτά	4 λεπτά	8 λεπτά	5 λεπτά	12 λεπτά	6 λεπτά	12 λεπτά
$\rho_{123}$	$\rho_{124}$	$\rho_{132}$	$\rho_{134}$	$\rho_{142}$	$\rho_{143}$	$\rho_{213}$	$\rho_{214}$
0	0	1	0	1	1	0	0
$\rho_{234}$	$\rho_{243}$	$\rho_{314}$	$\rho_{324}$	$\omega_{123}$	$\omega_{124}$	$\omega_{132}$	$\omega_{134}$
1	0	0	0	0	1	1	1
$\omega_{142}$	$\omega_{143}$	$\omega_{213}$	$\omega_{214}$	$\omega_{234}$	$\omega_{243}$	$\omega_{314}$	$\omega_{324}$
0	0	0	0	0	0	0	0
$\theta_{111}$	$\theta_{112}$	$\theta_{123}$	$\theta_{124}$	$\theta_{211}$	$\theta_{212}$	$\theta_{223}$	$\theta_{224}$
0	1	0	1	1	0	1	0
$\theta_{311}$	$\theta_{312}$	$\theta_{323}$	$\theta_{324}$	$\theta_{411}$	$\theta_{412}$	$\theta_{423}$	$\theta_{424}$
0	1	0	1	1	0	1	0
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
96	83	88	91	45	97	47	99
$\zeta_{11}$	$\zeta_{12}$	$\zeta_{21}$	$\zeta_{22}$	$\zeta_{31}$	$\zeta_{32}$	$\zeta_{41}$	$\zeta_{42}$
1	0	0	1	1	0	0	1
Min Αντικ. Συναρτ.		33 €		Χρόνος Επίλυσης		3 λεπτά	

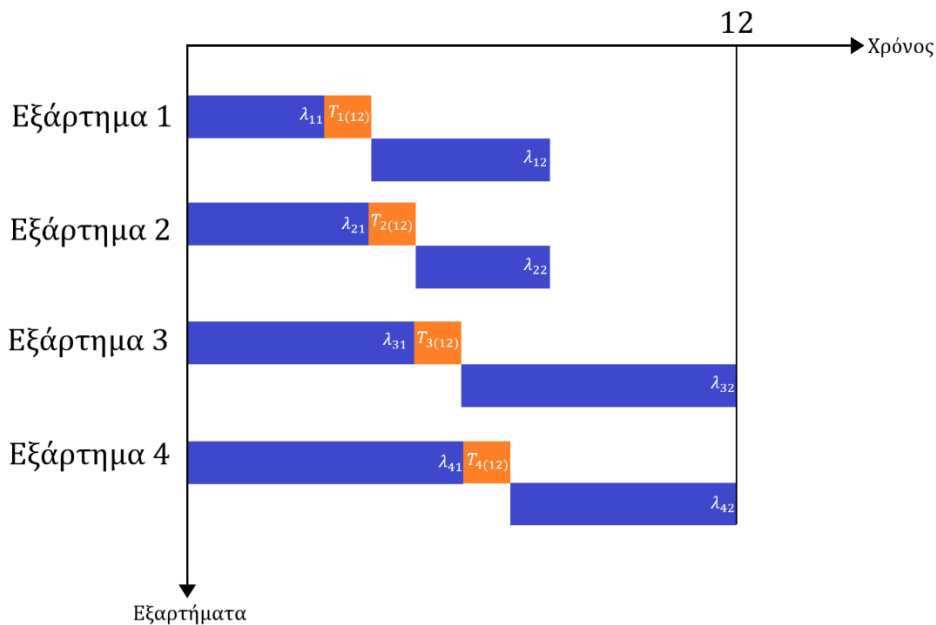
Πίνακας 4.5 Δρομολόγηση Εξαρτημάτων σε Μηχανές

	Λειτουργία 1 ( $o=1$ )	Λειτουργία 2 ( $o=2$ )
Εξάρτημα 1 ( $j=1$ )	Μηχανή 2 ( $i=2$ )	Μηχανή 4 ( $i=4$ )
Εξάρτημα 2 ( $j=2$ )	Μηχανή 1 ( $i=1$ )	Μηχανή 3 ( $i=3$ )
Εξάρτημα 3 ( $j=3$ )	Μηχανή 2 ( $i=2$ )	Μηχανή 4 ( $i=4$ )
Εξάρτημα 4 ( $j=4$ )	Μηχανή 1 ( $i=1$ )	Μηχανή 3 ( $i=3$ )



**Σχήμα 4.6:** Διάταξη Βιομηχανικών Κελιών Προβλήματος 1.

Προτού ερμηνεύσουμε την λύση πρέπει να σημειωθεί ότι ο αλγόριθμος της CPLEX που κλήθηκε να λύσει το πρόβλημα παράγει μόνο ακέραιες λύσεις. Στον Πίνακα 4.4 περιέχονται οι τιμές της λύσης του προβλήματος 1, του οποίου τα δεδομένα περιέχονται στον Πίνακα 4.3. Οι δρομολογήσεις των εξαρτημάτων για την εκτέλεση των απαραίτητων διεργασιών περιγράφονται στον Πίνακα 4.5. Στο Σχήμα 4.6 απεικονίζεται η διάταξη των μηχανών στον δισδιάστατο χώρο, καθώς και η προσέγγιση των χωρίων των βιομηχανικών κελιών. Παρακάτω, παρουσιάζεται το Σχήμα 4.7, το οποίο απεικονίζει γραφικά τον χρονοπρογραμματισμό του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.

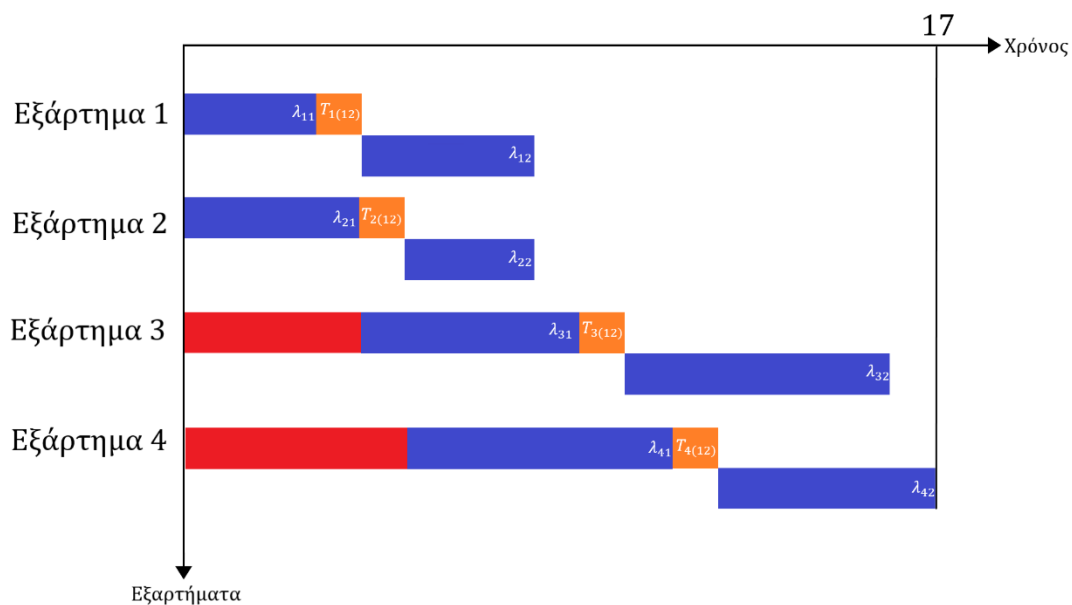


**Σχήμα 4.7:** Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων Προβλήματος 1 του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά .

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει το σκέλος της ερμηνείας του χρονοπρογραμματισμού. Η μαθηματική μορφοποίηση παρέχει τους χρόνους ολοκλήρωσης των εξαρτημάτων και την αντιστοίχιση των εξαρτημάτων με τις μηχανές, χωρίς όμως να εξακριβώνει την σειρά επεξεργασίας κάποιων διαφορετικών εξαρτημάτων στην ίδια μηχανή και χωρίς να λαμβάνονται υπόψιν οι ενδιάμεσοι νεκροί χρόνοι. Οι νεκροί χρόνοι δεν λαμβάνονται υπόψιν λόγω του ότι τελικώς καθορίζονται από την ειλημμένη απόφαση του εκάστοτε στελέχους σχετικά με την σειρά επεξεργασίας των εξαρτημάτων, όταν αυτά πρέπει να περάσουν από την ίδια μηχανή. Έτσι τα εξαρτήματα  $j = 1$  και  $j = 3$  όπως φαίνεται και στον Πίνακα 4.5 επεξεργάζονται στις ίδιες μηχανές ( $i = 2$  και  $i = 4$ ). Στην περίπτωση όπου πάνω από ένα εξαρτήματα μπορούν να επεξεργασθούν ταυτόχρονα από την ίδια



μηχανή ο συνολικός χρονοπρογραμματισμός θα ήταν όμοιος με τον απεικονιζόμενο στο Σχήμα 4.7, με χρόνο περάτωσης όλων των λειτουργιών ίσο με 12 λεπτά. Στην περίπτωση που δεν μπορεί να εφαρμοστεί αυτή η συνθήκη χρονικής παραλληλίας τότε θα πρέπει να ληφθούν κάποιες αποφάσεις από το εκάστοτε διοικητικό στέλεχος. Δηλαδή, γνωρίζοντας μέσα από την παραχθείσα λύση τους χρόνους ολοκλήρωσης, μεταφοράς και την αντιστοιχία των εξαρτημάτων με τις μηχανές, τότε είναι εφικτό να ληφθεί εξωτερική απόφαση σχετικά με την ακριβή σειρά εκτέλεσης κάποιων λειτουργιών. Επομένως, αν δεν επιτρέπεται η παράλληλη επεξεργασία εξαρτημάτων στην ίδια μηχανή τότε ο συνολικός χρονοπρογραμματισμός, μίας πιθανής περίπτωσης, είναι όμοιος του απεικονιζόμενου στο Σχήμα 4.8, με τις κόκκινες ράβδους να συμβολίζουν τους νεκρούς χρόνους.



**Σχήμα 4.8:** Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων.

Επισημαίνεται ότι οι μεταβλητές των χρόνων ολοκλήρωσης των πρώτων σειριακά λειτουργιών ( π.χ.  $\sigma_{αρχ} = 1$  ) αρχίζουν να μετράνε από την στιγμή που το εξάρτημα εισέρχεται σε κάποια από τις απαιτούμενες μηχανές και χωρίς να λαμβάνουν υπόψιν τους νεκρούς χρόνους, αφού όπως αναφέραμε αυτοί μεταβάλλονται ανάλογα με την τελική σειρά επεξεργασίας των εξαρτημάτων. Ουσιαστικά, οι τιμές των μεταβλητών των χρόνων ολοκλήρωσης μας παρέχουν μία ιδανική εικόνα, η οποία στην πραγματικότητα δεν εφαρμόζεται πλήρως.

## 4.3.2 Πρόβλημα 2

Πίνακας 4.6 Παράμετροι Προβλήματος 2

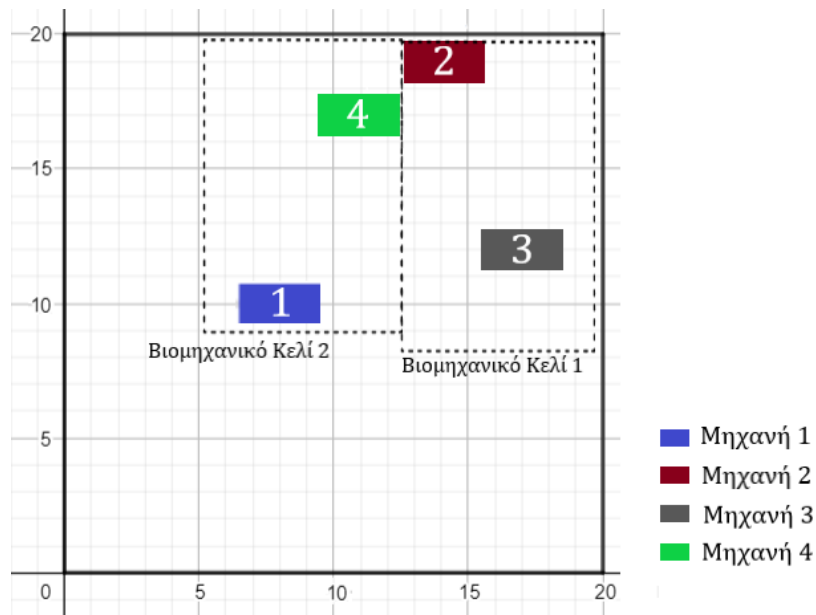
Παράμετροι Προβλήματος	Αριθμητικές Τιμές
$\mu$	4
$\nu$	4
$c$	2
$\Gamma$	2
$H$	20
$V$	20
$CA_{j(iu)}$	0,1 € / μέτρο
$CE_{j(iu)}$	0,2 € / μέτρο
$\tau_{11}$	3 λεπτά
$\tau_{21}$	4 λεπτά
$\tau_{31}$	5 λεπτά
$\tau_{41}$	6 λεπτά
$\tau_{12}$	4 λεπτά
$\tau_{22}$	3 λεπτά
$\tau_{32}$	6 λεπτά
$\tau_{42}$	5 λεπτά
$S_i$	2 λειτουργίες / μηχανή
$G$	0,5 € /λεπτό
$\Xi$	3 μέτρα
$\Psi$	1,8 μέτρα
$TA_{j(iu)}$	0,1 λεπτά / μέτρο
$TE_{j(iu)}$	0,2 λεπτά / μέτρο
$M$	1.000.000

Πίνακας 4.7 Λύση Προβλήματος 2

$C_{1(12)}$	$C_{2(12)}$	$C_{3(12)}$	$C_{4(12)}$	$T_{1(12)}$	$T_{2(12)}$	$T_{3(12)}$	$T_{4(12)}$
1 €	1 €	1 €	1 €	1 λεπτό	1 λεπτό	1 λεπτό	1 λεπτό
$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{31}$	$\lambda_{32}$	$\lambda_{41}$	$\lambda_{42}$
3 λεπτά	8 λεπτά	4 λεπτά	8 λεπτά	5 λεπτά	12 λεπτά	6 λεπτά	12 λεπτά
$\rho_{123}$	$\rho_{124}$	$\rho_{132}$	$\rho_{134}$	$\rho_{142}$	$\rho_{143}$	$\rho_{213}$	$\rho_{214}$
1	0	0	0	1	1	0	0
$\rho_{234}$	$\rho_{243}$	$\rho_{314}$	$\rho_{324}$	$\omega_{123}$	$\omega_{124}$	$\omega_{132}$	$\omega_{134}$
0	0	0	1	0	0	1	1
$\omega_{142}$	$\omega_{143}$	$\omega_{213}$	$\omega_{214}$	$\omega_{234}$	$\omega_{243}$	$\omega_{314}$	$\omega_{324}$
1	0	0	0	0	1	0	0
$\theta_{111}$	$\theta_{112}$	$\theta_{123}$	$\theta_{124}$	$\theta_{211}$	$\theta_{212}$	$\theta_{223}$	$\theta_{224}$
1	0	0	1	0	1	0	1
$\theta_{311}$	$\theta_{312}$	$\theta_{323}$	$\theta_{324}$	$\theta_{411}$	$\theta_{412}$	$\theta_{423}$	$\theta_{424}$
0	1	0	1	0	1	1	0
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
8	14	17	11	10	19	12	17
$\zeta_{11}$	$\zeta_{12}$	$\zeta_{21}$	$\zeta_{22}$	$\zeta_{31}$	$\zeta_{32}$	$\zeta_{41}$	$\zeta_{42}$
0	1	1	0	1	0	0	1
Min Αντικ. Συναρτ.		33 €		Χρόνος Επίλυσης		0,2 λεπτά	

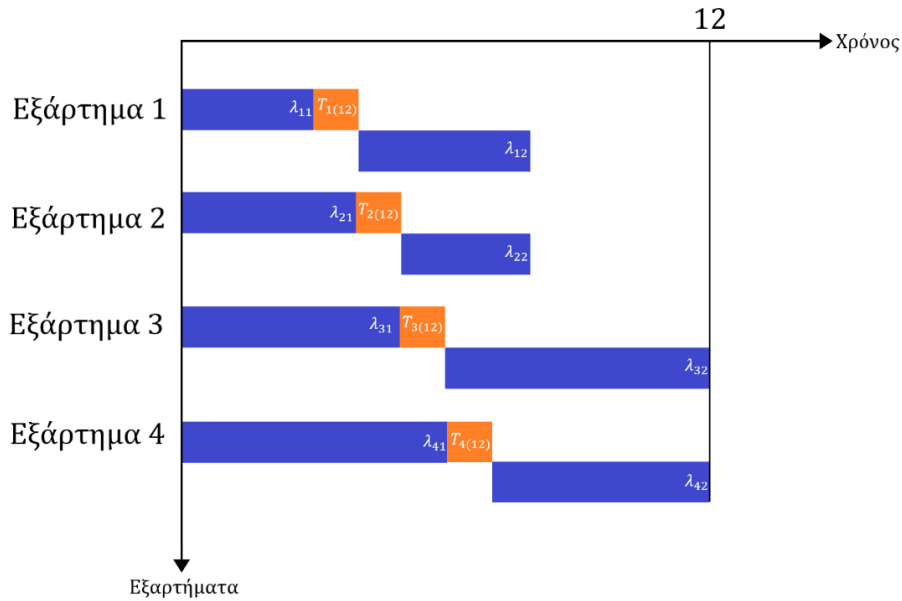
Πίνακας 4.8 Δρομολόγηση Εξαρτημάτων σε Μηχανές

	Λειτουργία 1 ( $o = 1$ )	Λειτουργία 2 ( $o = 2$ )
Εξάρτημα 1 ( $j = 1$ )	Μηχανή 1 ( $i = 1$ )	Μηχανή 4 ( $i = 4$ )
Εξάρτημα 2 ( $j = 2$ )	Μηχανή 2 ( $i = 2$ )	Μηχανή 4 ( $i = 4$ )
Εξάρτημα 3 ( $j = 3$ )	Μηχανή 2 ( $i = 2$ )	Μηχανή 4 ( $i = 4$ )
Εξάρτημα 4 ( $j = 4$ )	Μηχανή 2 ( $i = 2$ )	Μηχανή 3 ( $i = 3$ )



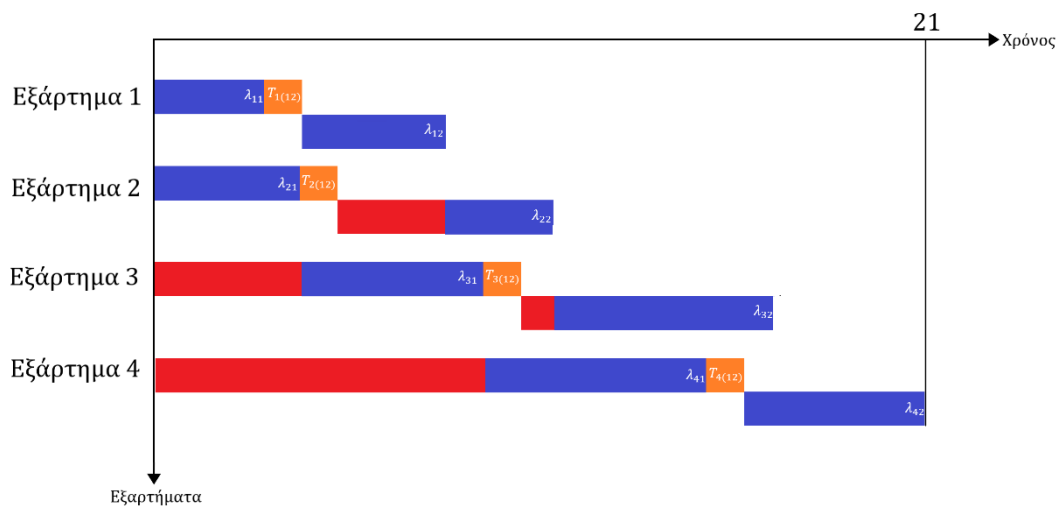
**Σχήμα 4.9:** Διάταξη Βιομηχανικών Κελιών Προβλήματος 2.

Παρατηρούμε ότι το Πρόβλημα 2 χρειάστηκε 0,2 λεπτά για να επιλυθεί, χρόνο αρκετά μικρότερο από τον αντίστοιχο του Προβλήματος 1. Στον Πίνακα 4.7 περιέχονται οι τιμές της λύσης του προβλήματος 2, του οποίου τα δεδομένα περιέχονται στον Πίνακα 4.6. Οι δρομολογήσεις των εξαρτημάτων για την εκτέλεση των απαραίτητων διεργασιών περιγράφονται στον Πίνακα 4.8. Στο Σχήμα 4.9 απεικονίζεται η διάταξη των μηχανών στον δισδιάστατο χώρο, καθώς και η προσέγγιση των χωρίων των βιομηχανικών κελιών. Παρακάτω, παρουσιάζεται το Σχήμα 4.10, το οποίο απεικονίζει γραφικά τον χρονοπρογραμματισμό του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.



**Σχήμα 4.10:** Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων Προβλήματος 2 του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.

Επομένως, στην ρεαλιστικότερη συνθήκη όπου δεν επιτρέπεται η ταυτόχρονη επεξεργασία εξαρτημάτων στην ίδια μηχανή τότε ο συνολικός χρονοπρογραμματισμός, μίας πιθανής περίπτωσης, είναι όμοιος του απεικονιζόμενου στο Σχήμα 4.8.



**Σχήμα 4.11:** Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων.

Επισημαίνεται ότι οι μεταβλητές των χρόνων ολοκλήρωσης των πρώτων σειριακά λειτουργιών ( π.χ.  $\sigma_{αρχ} = 1$  ) αρχίζουν να μετράνε από την στιγμή που το εξάρτημα εισέρχεται σε κάποια από τις απαιτούμενες μηχανές και χωρίς να λαμβάνουν υπόψιν τους νεκρούς χρόνους, αφού όπως αναφέραμε αυτοί μεταβάλλονται ανάλογα με την τελική σειρά επεξεργασίας των εξαρτημάτων. Ουσιαστικά, οι τιμές των μεταβλητών των χρόνων ολοκλήρωσης μας παρέχουν μία ιδανική εικόνα, η οποία στην πραγματικότητα δεν εφαρμόζεται πλήρως.

### 4.3.3 Πρόβλημα 3

Πίνακας 4.9 Παράμετροι Προβλήματος 3

Παράμετροι Προβλήματος	Αριθμητικές Τιμές
$\mu$	4
$\nu$	4
$c$	2
$\Gamma$	2
$H$	30
$V$	30
$CA_{j(iu)}$	0,2 € / μέτρο
$CE_{j(iu)}$	0,3 € / μέτρο
$\tau_{11}$	7 λεπτά
$\tau_{21}$	4 λεπτά
$\tau_{31}$	9 λεπτά
$\tau_{41}$	5 λεπτά
$\tau_{12}$	3 λεπτά
$\tau_{22}$	5 λεπτά
$\tau_{32}$	2 λεπτά
$\tau_{42}$	5 λεπτά
$S_i$	2 λειτουργίες / μηχανή
$G$	0,5 € /λεπτό
$\Xi$	5 μέτρα
$\Psi$	3 μέτρα
$TA_{j(iu)}$	0,1 λεπτά / μέτρο
$TE_{j(iu)}$	0,2 λεπτά / μέτρο
$M$	1.000.000

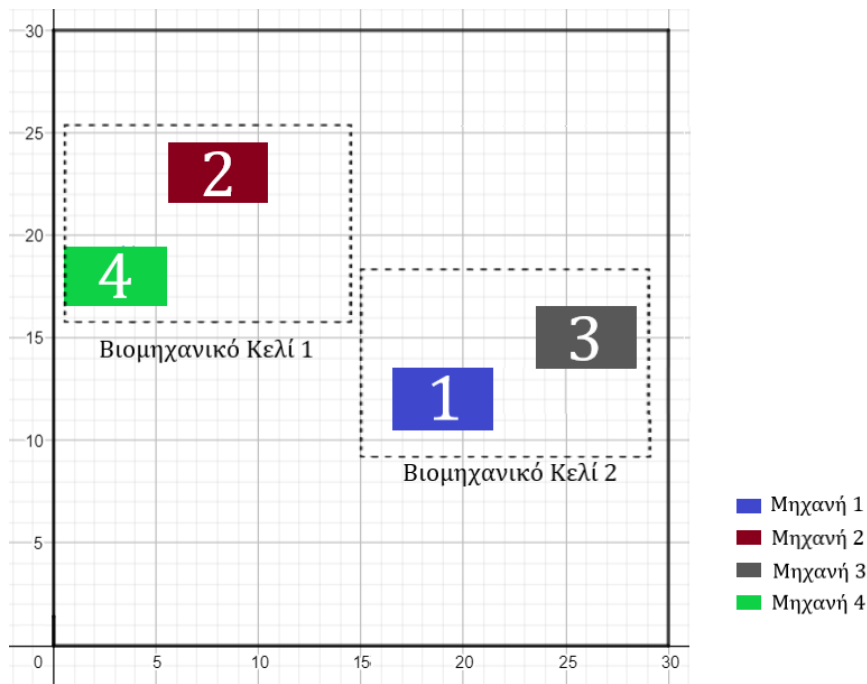


Πίνακας 4.10 Λύση Προβλήματος 3

$C_{1(12)}$	$C_{2(12)}$	$C_{3(12)}$	$C_{4(12)}$	$T_{1(12)}$	$T_{2(12)}$	$T_{3(12)}$	$T_{4(12)}$
2 €	2 €	2 €	2 €	1 λεπτό	1 λεπτό	1 λεπτό	1 λεπτό
$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{31}$	$\lambda_{32}$	$\lambda_{41}$	$\lambda_{42}$
7 λεπτά	11 λεπτά	4 λεπτά	10 λεπτά	9 λεπτά	12 λεπτά	5 λεπτά	11 λεπτά
$\rho_{123}$	$\rho_{124}$	$\rho_{132}$	$\rho_{134}$	$\rho_{142}$	$\rho_{143}$	$\rho_{213}$	$\rho_{214}$
0	1	0	0	0	0	1	0
$\rho_{234}$	$\rho_{243}$	$\rho_{314}$	$\rho_{324}$	$\omega_{123}$	$\omega_{124}$	$\omega_{132}$	$\omega_{134}$
0	0	1	1	0	0	1	1
$\omega_{142}$	$\omega_{143}$	$\omega_{213}$	$\omega_{214}$	$\omega_{234}$	$\omega_{243}$	$\omega_{314}$	$\omega_{324}$
1	0	0	0	0	1	0	0
$\theta_{111}$	$\theta_{112}$	$\theta_{123}$	$\theta_{124}$	$\theta_{211}$	$\theta_{212}$	$\theta_{223}$	$\theta_{224}$
1	0	1	0	0	1	0	1
$\theta_{311}$	$\theta_{312}$	$\theta_{323}$	$\theta_{324}$	$\theta_{411}$	$\theta_{412}$	$\theta_{423}$	$\theta_{424}$
0	1	0	1	0	1	0	1
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
19	8	26	3	12	23	15	18
$\zeta_{11}$	$\zeta_{12}$	$\zeta_{21}$	$\zeta_{22}$	$\zeta_{31}$	$\zeta_{32}$	$\zeta_{41}$	$\zeta_{42}$
0	1	1	0	0	1	1	0
Min Αντικ. Συναρτ.		42,5 €		Χρόνος Επίλυσης		0,73 λεπτά	

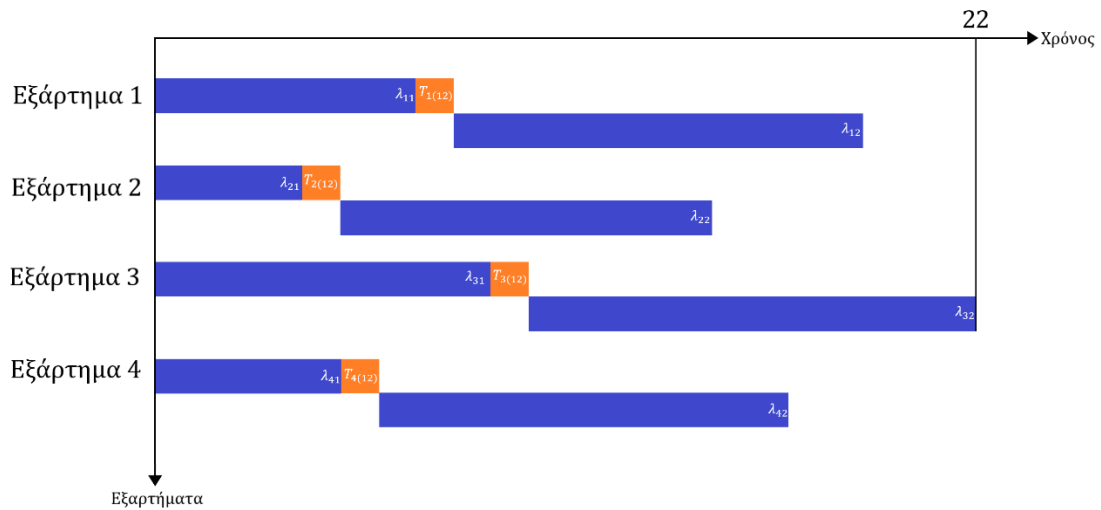
Πίνακας 4.11 Δρομολόγηση Εξαρτημάτων σε Μηχανές

	Λειτουργία 1 ( $o=1$ )	Λειτουργία 2 ( $o=2$ )
Εξάρτημα 1 ( $j=1$ )	Μηχανή 1 ( $i=1$ )	Μηχανή 3 ( $i=3$ )
Εξάρτημα 2 ( $j=2$ )	Μηχανή 2 ( $i=2$ )	Μηχανή 4 ( $i=4$ )
Εξάρτημα 3 ( $j=3$ )	Μηχανή 2 ( $i=2$ )	Μηχανή 4 ( $i=4$ )
Εξάρτημα 4 ( $j=4$ )	Μηχανή 2 ( $i=2$ )	Μηχανή 4 ( $i=4$ )



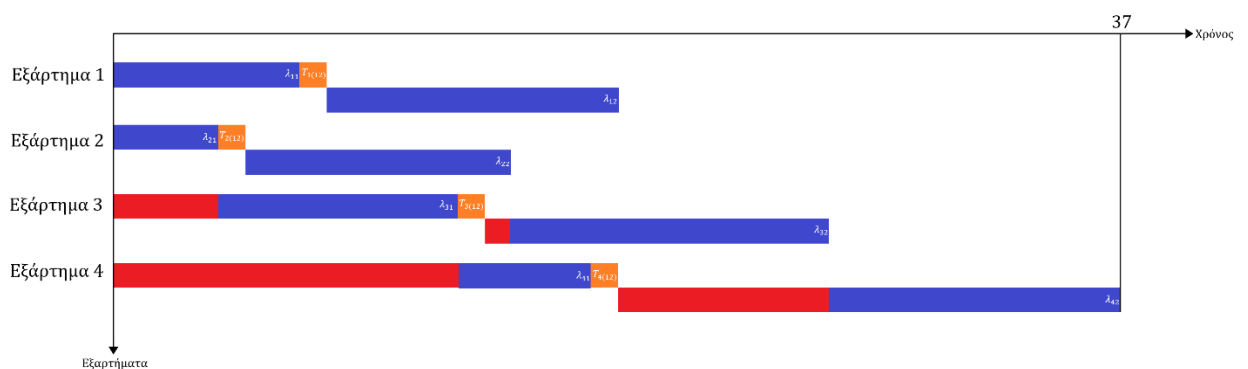
**Σχήμα 4.12:** Διάταξη Βιομηχανικών Κελιών Προβλήματος 3.

Παρατηρούμε ότι το Πρόβλημα 3 χρειάστηκε 0,73 λεπτά για να επιλυθεί, χρόνο αρκετά μικρότερο από τον αντίστοιχο του Προβλήματος 1 αλλά και μεγαλύτερο του Προβλήματος 2. Στον Πίνακα 4.10 περιέχονται οι τιμές της λύσης του Προβλήματος 2, του οποίου τα δεδομένα περιέχονται στον Πίνακα 4.9. Οι δρομολογήσεις των εξαρτημάτων για την εκτέλεση των απαραίτητων διεργασιών περιγράφονται στον Πίνακα 4.11. Στο Σχήμα 4.12 απεικονίζεται η διάταξη των μηχανών στον δισδιάστατο χώρο, καθώς και η προσέγγιση των χωρίων των βιομηχανικών κελιών. Παρακάτω, παρουσιάζεται το Σχήμα 4.13, το οποίο απεικονίζει γραφικά τον χρονοπρογραμματισμό του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.



**Σχήμα 4.13:** Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων Προβλήματος 3 του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.

Επομένως, στην ρεαλιστικότερη συνθήκη όπου δεν επιτρέπεται η ταυτόχρονη επεξεργασία εξαρτημάτων στην ίδια μηχανή τότε ο συνολικός χρονοπρογραμματισμός, μίας πιθανής περίπτωσης, είναι όμοιος του απεικονιζόμενου στο Σχήμα 4.14.



**Σχήμα 4.14:** Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων.

Επισημαίνεται ότι οι μεταβλητές των χρόνων ολοκλήρωσης ακολουθούν και σε αυτό το πρόβλημα τις ίδιες ιδιότητες που έχουμε αναφέρει στις περιγραφές των Προβλημάτων 1 και 2.

### 4.3.4 Πρόβλημα 4

Πίνακας 4.12 Παράμετροι Προβλήματος 4

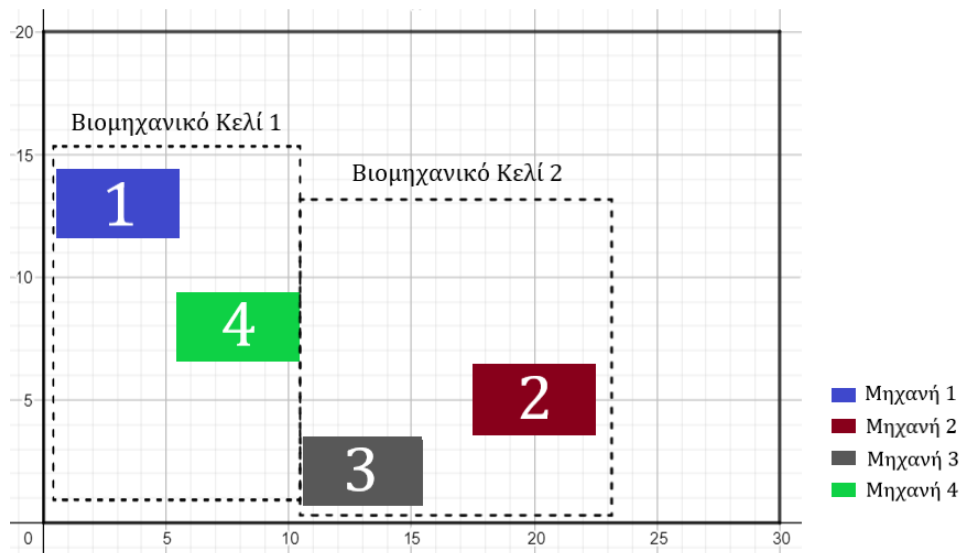
Παράμετροι Προβλήματος	Αριθμητικές Τιμές
$\mu$	4
$\nu$	4
$c$	2
$\Gamma$	2
$H$	30
$V$	20
$CA_{j(iu)}$	0,1 € / μέτρο
$CE_{j(iu)}$	0,2 € / μέτρο
$\tau_{11}$	3 λεπτά
$\tau_{21}$	4 λεπτά
$\tau_{31}$	5 λεπτά
$\tau_{41}$	6 λεπτά
$\tau_{12}$	4 λεπτά
$\tau_{22}$	3 λεπτά
$\tau_{32}$	6 λεπτά
$\tau_{42}$	5 λεπτά
$S_i$	2 λειτουργίες / μηχανή
$G$	0,5 € /λεπτό
$\Xi$	5 μέτρα
$\Psi$	3 μέτρα
$TA_{j(iu)}$	0,2 λεπτά / μέτρο
$TE_{j(iu)}$	0,3 λεπτά / μέτρο
$M$	1.000.000

Πίνακας 4.13 Λύση Προβλήματος 4

$C_{1(12)}$	$C_{2(12)}$	$C_{3(12)}$	$C_{4(12)}$	$T_{1(12)}$	$T_{2(12)}$	$T_{3(12)}$	$T_{4(12)}$
1 €	1 €	1 €	1 €	2 λεπτό	2 λεπτό	2 λεπτό	2 λεπτό
$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{31}$	$\lambda_{32}$	$\lambda_{41}$	$\lambda_{42}$
3 λεπτά	9 λεπτά	4 λεπτά	9 λεπτά	5 λεπτά	13 λεπτά	6 λεπτά	13 λεπτά
$\rho_{123}$	$\rho_{124}$	$\rho_{132}$	$\rho_{134}$	$\rho_{142}$	$\rho_{143}$	$\rho_{213}$	$\rho_{214}$
0	0	1	0	1	1	0	0
$\rho_{234}$	$\rho_{243}$	$\rho_{314}$	$\rho_{324}$	$\omega_{123}$	$\omega_{124}$	$\omega_{132}$	$\omega_{134}$
1	0	0	0	1	0	0	0
$\omega_{142}$	$\omega_{143}$	$\omega_{213}$	$\omega_{214}$	$\omega_{234}$	$\omega_{243}$	$\omega_{314}$	$\omega_{324}$
1	1	0	0	0	0	0	1
$\theta_{111}$	$\theta_{112}$	$\theta_{123}$	$\theta_{124}$	$\theta_{211}$	$\theta_{212}$	$\theta_{223}$	$\theta_{224}$
1	0	0	1	1	0	0	1
$\theta_{311}$	$\theta_{312}$	$\theta_{323}$	$\theta_{324}$	$\theta_{411}$	$\theta_{412}$	$\theta_{423}$	$\theta_{424}$
0	1	1	0	0	1	1	0
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
3	20	13	8	13	5	2	8
$\zeta_{11}$	$\zeta_{12}$	$\zeta_{21}$	$\zeta_{22}$	$\zeta_{31}$	$\zeta_{32}$	$\zeta_{41}$	$\zeta_{42}$
1	0	0	1	0	1	1	0
Min Αντικ. Συναρτ.		35 €		Χρόνος Επίλυσης		0,36 λεπτά	

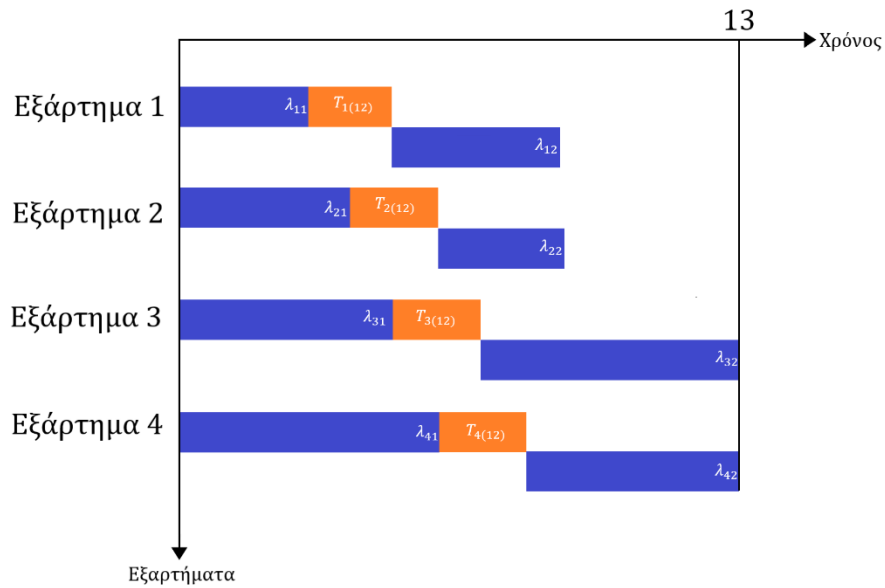
Πίνακας 4.14 Δρομολόγηση Εξαρτημάτων σε Μηχανές

	Λειτουργία 1 ( $o=1$ )	Λειτουργία 2 ( $o=2$ )
Εξάρτημα 1 ( $j=1$ )	Μηχανή 1 ( $i=1$ )	Μηχανή 4 ( $i=4$ )
Εξάρτημα 2 ( $j=2$ )	Μηχανή 1 ( $i=1$ )	Μηχανή 4 ( $i=4$ )
Εξάρτημα 3 ( $j=3$ )	Μηχανή 2 ( $i=2$ )	Μηχανή 3 ( $i=3$ )
Εξάρτημα 4 ( $j=4$ )	Μηχανή 2 ( $i=2$ )	Μηχανή 3 ( $i=3$ )



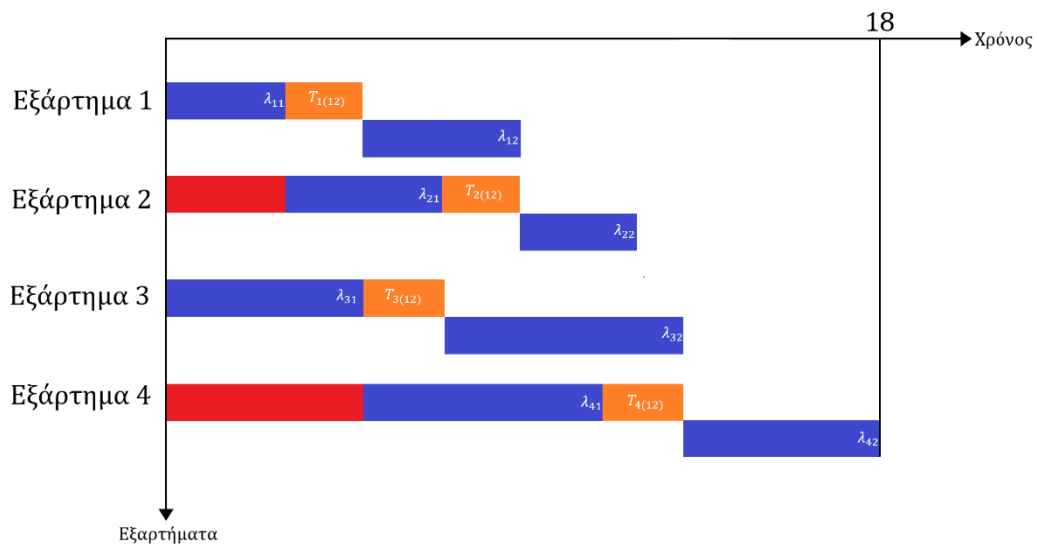
**Σχήμα 4.15:** Διάταξη Βιομηχανικών Κελιών Προβλήματος 4.

Παρατηρούμε ότι το Πρόβλημα 4 χρειάστηκε 0,36 λεπτά για να επιλυθεί, χρόνο αρκετά μικρότερο από τον αντίστοιχο του Προβλήματος 1. Στον Πίνακα 4.13 περιέχονται οι τιμές της λύσης του προβλήματος 4, του οποίου τα δεδομένα περιέχονται στον Πίνακα 4.12. Οι δρομολογήσεις των εξαρτημάτων για την εκτέλεση των απαραίτητων διεργασιών περιγράφονται στον Πίνακα 4.14. Στο Σχήμα 4.15 απεικονίζεται η διάταξη των μηχανών στον διδιάστατο χώρο, καθώς και η προσέγγιση των χωρίων των βιομηχανικών κελιών. Παρακάτω, παρουσιάζεται το Σχήμα 4.16, το οποίο απεικονίζει γραφικά τον χρονοπρογραμματισμό του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.



**Σχήμα 4.16:** Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων Προβλήματος 4 του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.

Επομένως, στην ρεαλιστικότερη συνθήκη όπου δεν επιτρέπεται η ταυτόχρονη επεξεργασία εξαρτημάτων στην ίδια μηχανή τότε ο συνολικός χρονοπρογραμματισμός, μίας πιθανής περίπτωσης, είναι όμοιος του απεικονιζόμενου στο Σχήμα 4.17.



**Σχήμα 4.17:** Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων.

## 4.3.5 Πρόβλημα 5

Πίνακας 4.15 Παράμετροι Προβλήματος 5

Παράμετροι Προβλήματος	Αριθμητικές Τιμές
$\mu$	4
$\nu$	4
$c$	2
$\Gamma$	3
$H$	15
$V$	25
$CA_{j(iu)}$	0,1 € / μέτρο
$CE_{j(iu)}$	0,2 € / μέτρο
$\tau_{11}$	3 λεπτά
$\tau_{21}$	4 λεπτά
$\tau_{31}$	5 λεπτά
$\tau_{41}$	6 λεπτά
$\tau_{12}$	4 λεπτά
$\tau_{22}$	3 λεπτά
$\tau_{32}$	6 λεπτά
$\tau_{42}$	5 λεπτά
$S_i$	2 λειτουργίες / μηχανή
$G$	0,5 € /λεπτό
$\Xi$	3 μέτρα
$\Psi$	1.8 μέτρα
$TA_{j(iu)}$	0,2 λεπτά / μέτρο
$TE_{j(iu)}$	0,4 λεπτά / μέτρο
$M$	1.000.000

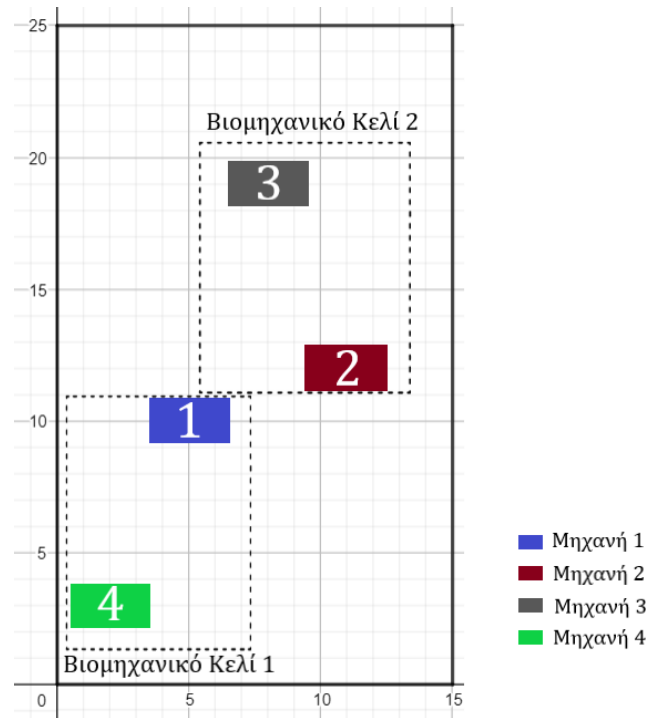


Πίνακας 4.16 Λύση Προβλήματος 5

$C_{1(12)}$	$C_{2(12)}$	$C_{3(12)}$	$C_{4(12)}$	$T_{1(12)}$	$T_{2(12)}$	$T_{3(12)}$	$T_{4(12)}$
1 €	1 €	1 €	1 €	2 λεπτό	2 λεπτό	2 λεπτό	2 λεπτό
$\lambda_{11}$	$\lambda_{12}$	$\lambda_{21}$	$\lambda_{22}$	$\lambda_{31}$	$\lambda_{32}$	$\lambda_{41}$	$\lambda_{42}$
3 λεπτά	9 λεπτά	4 λεπτά	9 λεπτά	5 λεπτά	13 λεπτά	6 λεπτά	13 λεπτά
$\rho_{123}$	$\rho_{124}$	$\rho_{132}$	$\rho_{134}$	$\rho_{142}$	$\rho_{143}$	$\rho_{213}$	$\rho_{214}$
0	0	1	0	0	0	0	1
$\rho_{234}$	$\rho_{243}$	$\rho_{314}$	$\rho_{324}$	$\omega_{123}$	$\omega_{124}$	$\omega_{132}$	$\omega_{134}$
1	0	1	0	1	0	0	0
$\omega_{142}$	$\omega_{143}$	$\omega_{213}$	$\omega_{214}$	$\omega_{234}$	$\omega_{243}$	$\omega_{314}$	$\omega_{324}$
0	0	0	1	0	0	1	1
$\theta_{111}$	$\theta_{112}$	$\theta_{123}$	$\theta_{124}$	$\theta_{211}$	$\theta_{212}$	$\theta_{223}$	$\theta_{224}$
1	0	0	1	0	1	1	0
$\theta_{311}$	$\theta_{312}$	$\theta_{323}$	$\theta_{324}$	$\theta_{411}$	$\theta_{412}$	$\theta_{423}$	$\theta_{424}$
1	0	0	1	0	1	1	0
$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$	$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_4$
5	11	8	2	10	12	19	3
$\zeta_{11}$	$\zeta_{12}$	$\zeta_{21}$	$\zeta_{22}$	$\zeta_{31}$	$\zeta_{32}$	$\zeta_{41}$	$\zeta_{42}$
1	0	0	1	0	1	1	0
Min Αντικ. Συναρτ.		35 €		Χρόνος Επίλυσης		0,18 λεπτά	

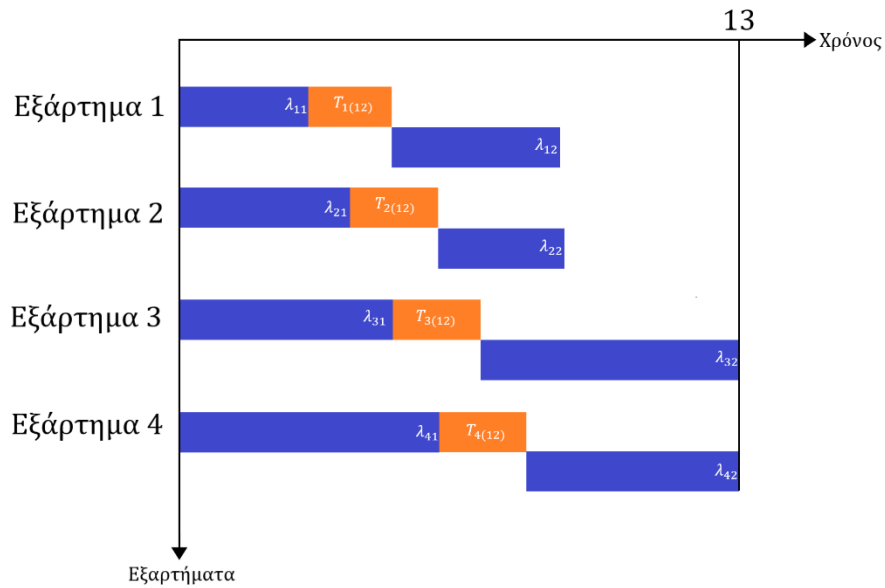
Πίνακας 4.17 Δρομολόγηση Εξαρτημάτων σε Μηχανές

	Λειτουργία 1 ( $o=1$ )	Λειτουργία 2 ( $o=2$ )
Εξάρτημα 1 ( $j=1$ )	Μηχανή 1 ( $i=1$ )	Μηχανή 4 ( $i=4$ )
Εξάρτημα 2 ( $j=2$ )	Μηχανή 2 ( $i=2$ )	Μηχανή 3 ( $i=3$ )
Εξάρτημα 3 ( $j=3$ )	Μηχανή 1 ( $i=1$ )	Μηχανή 4 ( $i=4$ )
Εξάρτημα 4 ( $j=4$ )	Μηχανή 2 ( $i=2$ )	Μηχανή 3 ( $i=3$ )



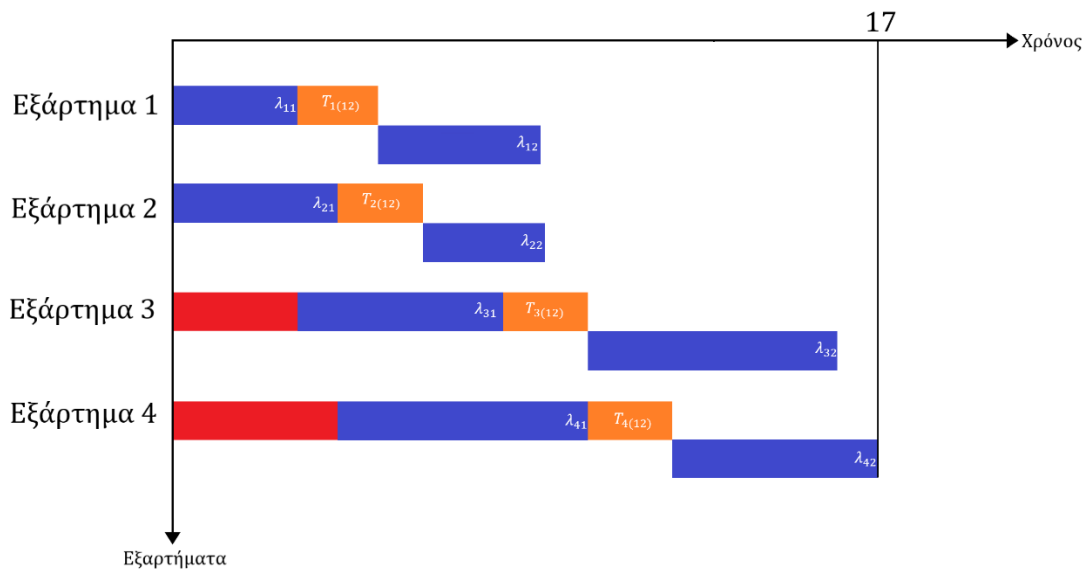
**Σχήμα 4.18:** Διάταξη Βιομηχανικών Κελιών Προβλήματος 5.

Παρατηρούμε ότι το Πρόβλημα 5 χρειάστηκε τον λιγότερο χρόνο σε σχέση με τα άλλα προβλήματα, ώστε να βρεθεί η βέλτιστη λύση. Στον Πίνακα 4.16 περιέχονται οι τιμές της λύσης του προβλήματος 5, του οποίου τα δεδομένα περιέχονται στον Πίνακα 4.15. Οι δρομολογήσεις των εξαρτημάτων για την εκτέλεση των απαραίτητων διεργασιών περιγράφονται στον Πίνακα 4.17. Στο Σχήμα 4.18 απεικονίζεται η διάταξη των μηχανών στον δισδιάστατο χώρο, καθώς και η προσέγγιση των χωρίων των βιομηχανικών κελιών. Παρακάτω, παρουσιάζεται το Σχήμα 4.19, το οποίο απεικονίζει γραφικά τον χρονοπρογραμματισμό του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.



**Σχήμα 4.19:** Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων Προβλήματος 5 του κάθε εξαρτήματος ξεχωριστά.

Επομένως, στην ρεαλιστικότερη συνθήκη όπου δεν επιτρέπεται η ταυτόχρονη επεξεργασία εξαρτημάτων στην ίδια μηχανή τότε ο συνολικός χρονοπρογραμματισμός, μίας πιθανής περίπτωσης, είναι όμοιος του απεικονιζόμενου στο Σχήμα 4.20.



**Σχήμα 4.20:** Χρονοπρογραμματισμός εξαρτημάτων.

## 4.4 Συμπεράσματα για το Μοντέλο

Στην προηγούμενη ενότητα παρουσιάστηκαν πέντε εφαρμογές του μαθηματικού μοντέλου. Σκοπός των εφαρμογών ήταν να αναδείξουν πτυχές του μοντέλου, οι οποίες είναι δυσδιάκριτες στα στάδια δημιουργίας της μαθηματικής έκφρασης αυτού. Με αυτό το σκεπτικό δημιουργήθηκαν και παρουσιάστηκαν πέντε εφαρμογές μικρής κλίμακας, οι οποίες επιλύθηκαν μέσω του βελτιστοποιητή CPLEX.

Αρχικά όσο μεγαλύτερες είναι οι γεωμετρικές διαστάσεις του δαπέδου των εγκαταστάσεων, ο χρόνος εύρεσης βέλτιστης λύσης είναι μεγαλύτερος. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η τάση του μοντέλου να δημιουργεί λύσεις όπου σε κάθε κελί εκτελούνται όλες οι απαιτούμενες λειτουργίες ( $i = 1, 2, 3, 4$ ), κάτι το οποίο προφανώς μειώνει τις μετακινήσεις εκτός των βιομηχανικών κελιών μειώνοντας παράλληλα τα αντίστοιχα κόστη. Αυτή η τάση φαίνεται από το γεγονός ότι σε όλες τις παραπάνω εφαρμογές κάθε κελί περιέχει είτε το ζεύγος μηχανών (1, 3), (1, 4), είτε το ζεύγος (2, 3), (2,4). Επομένως, φαίνεται η βέλτιστη διάταξη να τείνει προς την δημιουργία κελιών στα οποία τα προϊόντα θα ολοκληρώνουν τις διεργασίες τους εντός αυτών, χωρίς να χρειάζονται την μετακίνηση σε άλλα κελιά. Στο Πρόβλημα 2 υπάρχει μετακίνηση ενός εξαρτήματος εκτός κελιού, διότι η μηχανή  $i = 4$  είναι αρκετά πιο κοντά από την μηχανή  $i = 3$ .

Στο στάδιο του χρονοπρογραμματισμού οι μεταβλητές του προβλήματος εξάγουν τις τιμές των χρόνων ολοκλήρωσης των εξαρτημάτων συμπεριλαμβάνοντας τους χρόνους επεξεργασίας και μεταφοράς αυτών από λειτουργία-σε-λειτουργία. Σε αυτήν την ιδιότητα ελλοχεύει η αδυναμία υπολογισμού του πραγματικού χρόνου ολοκλήρωσης του εξαρτήματος. Στον πραγματικό χρόνο

ολοκλήρωσης προστίθεται και οι χρόνοι αναμονής του εξαρτήματος έως ότου να περατωθεί το αμέσως προηγούμενο. Αυτό συμβαίνει στην περίπτωση που πρέπει τα εξαρτήματα να επεξεργασθούν από την ίδια μηχανή και η μηχανή δεν έχει την ιδιότητα ταυτόχρονης επεξεργασίας εξαρτημάτων. Παρά ταύτα, αυτή η αδυναμία δεν αποτελεί σοβαρό μειονέκτημα της μεθόδου, αφού το μοντέλο καταφέρνει να ομαδοποιεί τα εξαρτήματα και τις μηχανές με έναν λογικό τρόπο και να διατάσσει τις δεύτερες στο επίπεδο, ικανοποιώντας όλους τους γεωμετρικούς περιορισμούς.

Αξίζει να σημειωθεί ότι το παρόν μαθηματικό μοντέλο έχει δύο κύρια προτερήματα σε σχέση με ένα μεγάλο κομμάτι της υπάρχουσας βιβλιογραφίας. Πρώτον, περιέχει μαθηματικούς περιορισμούς όπου όμοιοί τους υπάρχουν στην βιβλιογραφία με την βασική διαφορά ότι στην προκειμένη επεξηγούνται λεπτομερέστατα, δίνοντας στον αναγνώστη την δυνατότητα να κατανοήσει την συλλογιστική συνοχή του μοντέλου καλύτερα. Δεύτερον, στο μοντέλο εισάγεται ο περιορισμός (22), ο οποίος εκφράζει την ανάγκη να τίθεται τουλάχιστον μία λειτουργία σε κάθε μηχανή, ώστε να έχει νόημα ύπαρξης η εκάστοτε μηχανή στο παραγωγικό σύστημα. Με την αγνόηση αυτού του περιορισμού πιθανόν να παραγόntonταν λύσεις που θα ικανοποιούσαν το περιεχόμενό του. Όμως, η εισαγωγή του, εξασφαλίζει την ικανοποίηση της συνθήκης που δηλώνει ο περιορισμός και εμπλουτίζει την εννοιολογική πληρότητα του μαθηματικού μοντέλου.

Εν κατακλείδι, η μαθηματική μορφοποίηση που παρουσιάστηκε δείχνει να παρέχει λύσεις στα κύρια προβλήματα που αντιμετωπίζει ένα ΣΠΒΚ. Αυτά τα προβλήματα όπως έχουμε επισημάνει σχετίζονται με την Διαμόρφωση - Μορφοποίηση των κελιών (CF), την

Χωροθέτηση - Διάταξη Ομαδοποιημένων Μερών (GL) και τον Χρονοπρογραμματισμό Αποπεράτωσης των Λειτουργιών των Εξαρτημάτων (GS). Η πλήρη εικόνα της αποτελεσματικότητας του μοντέλου θα φαινόταν αν πραγματοποιούνταν και δοκιμές σε προβλήματα μεσαίας και μεγάλης κλίμακας, κάτι το οποίο θα απαιτούσε την δημιουργία κάποιου γενετικού αλγορίθμου που είναι εκτός του περιεχομένου της παρούσης εργασίας. Με αυτόν τον τρόπο το μαθηματικό μοντέλο μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρες εννοιολογικά, αλλά όχι επαρκέστατα δοκιμασμένο.

## 4.5 Προεκτάσεις για Μελλοντική Έρευνα

Βασιζόμενοι στο μαθηματικό μοντέλο που δημιουργήθηκε μπορούμε να παραθέσουμε κάποιες ιδέες, οι οποίες μελλοντικά ίσως να ήταν άξιες περαιτέρω μελέτης. Στο δημιουργηθέν μοντέλο η γεωμετρία του σχήματος των εγκαταστάσεων και των μηχανών είναι αυστηρά καθορισμένη, περιλαμβάνοντας ορθογώνια παραλληλόγραμμα σχήματα. Επομένως, μελλοντικά θα μπορούσαν να εξεταστούν συστήματα παραγωγής με βιομηχανικά κελιά με πιο σύνθετες γεωμετρίες του επιπέδου των εγκαταστάσεων. Επίσης, θα αποτελούσε ενδιαφέρον πεδίο μελέτης ένα ΣΠΒΚ στο οποίο οι μηχανές δεν εκτελούν μόνο λειτουργίες επεξεργασίας αλλά και συναρμολόγησης. Ακόμα, η συνιστώσα της συντήρησης του παραγωγικού συστήματος θα μπορούσε να εισέλθει στο μοντέλο. Επιπλέον κάτι το οποίο θίχτηκε στην παρουσίαση των Προβλημάτων 1- 5 ήταν και η δυνατότητα παράλληλης επεξεργασίας εξαρτημάτων από την ίδια μηχανή. Εξαιτίας της ανάπτυξης της τεχνολογίας υπάρχουν πλέον μηχανές που δύνανται να επεξεργάζονται πάνω από ένα εξαρτήματα, ταυτοχρόνως. Δεδομένου αυτού θα μπορούσε να αποτελέσει πηγή έρευνας ένα ΣΠΒΚ το οποίο αποτελείται, μερικώς ή εξ ολοκλήρου, από τέτοιες ομοιότυπες μηχανές.





## **ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5**

### **ΜΕΤΑΜΟΡΦΩΤΙΚΑ ΚΕΛΙΑ**

Αυτό το κεφάλαιο αποτελεί την δεύτερη κύρια θεματική ενότητα της εργασίας και σχετίζεται με τα Μεταμορφωτικά Κελιά. Θα γίνει εισαγωγή της έννοιας των Μεταμορφωτικών Κελιών, καθώς θα περιγραφούν οι γεωμετρικές αρχές που τα διέπουν και τα πιθανά περιβάλλοντα εφαρμογής τους. Επιπλέον, θα υπάρξουν αριθμητικά παραδείγματα ώστε να φανούν τα οφέλη των παραγωγικών συστημάτων που χρησιμοποιούν Μεταμορφωτικά Κελιά.



## 5.1 Εισαγωγή στα Μεταμορφωτικά Κελιά

Έως τώρα σε όλη την επιστημονική βιβλιογραφία τα βιομηχανικά κελιά τελικώς μορφοποιούνται υπό σταθερούς γεωμετρικούς όρους. Δηλαδή, άπαξ και λάβουν την τελική διάταξη οι μηχανές του παραγωγικού συστήματος, τότε τα κελιά που περικλείουν αυτές έχουν σταθερές διαστάσεις καθώς εσωτερικά των κελιών υπάρχουν συγκεκριμένες μηχανές. Στο παρόν κεφάλαιο η συνθήκη αυτής της γεωμετρικής σταθερότητας αίρεται και έρχεται να αντικατασταθεί με την έννοια των Μεταμορφωτικών (Βιομηχανικών) Κελιών. Επομένως, σε ένα σύστημα παραγωγής, το οποίο χρησιμοποιεί μεταμορφωτικά κελιά, κάθε μηχανή αντιστοιχεί σε τουλάχιστον δύο σημεία του επιπέδου, ενώ παράλληλα το κατοπτικό επίπεδο των εγκαταστάσεων δύναται να λαμβάνει την μορφή παραπάνω εκ του ενός γεωμετρικού σχήματος.

### Ορισμός 5.1

#### **Σύστημα Παραγωγής σε Μεταμορφωτικά Κελιά (ΣΠΜΚ)**

Είναι ένα σύστημα παραγωγής με βιομηχανικά κελιά (ΣΠΒΚ), στο οποίο το κέντρο κάθε μηχανής δύναται να αντιστοιχεί σε παραπάνω εκ του ενός σημείου του επιπέδου και το κατοπτικό επίπεδο των βιομηχανικών εγκαταστάσεων δύναται να λαμβάνει την μορφή παραπάνω εκ του ενός γεωμετρικού σχήματος.

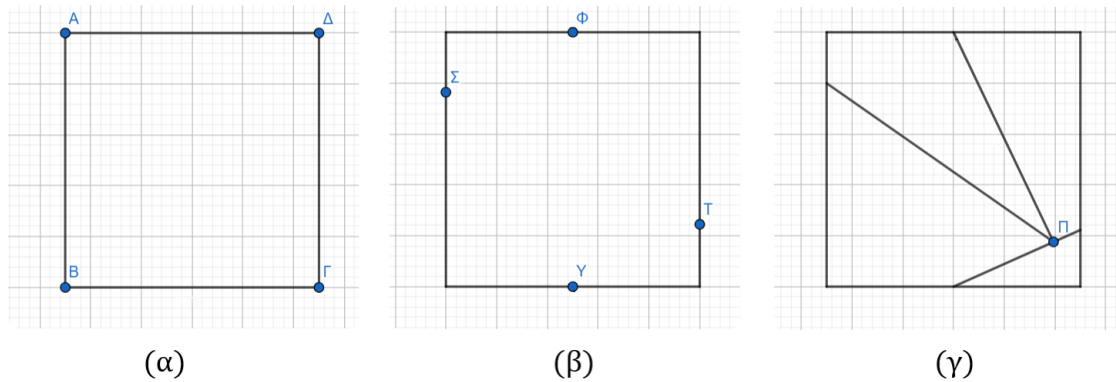
Θεωρώντας ως αρχικό σχήμα της κάτοψης των εγκαταστάσεων ένα οιοδήποτε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, θα δείξουμε στην συνέχεια ότι δημιουργώντας τις κατάλληλες τομές στο σχήμα μπορούμε να μετατρέψουμε το αρχικό σχήμα είτε σε όμοιό του με διαφορετικές συντεταγμένες των κέντρων των μηχανών, είτε σε ένα τρίγωνο. Ένας τέτοιος μετασχηματισμός έχει νόημα όταν θα επιφέρει τέτοιες αλλαγές στις συντεταγμένες των μηχανών που θα οδηγήσουν και αυτές με την σειρά του σε μείωση του κόστους των μετακινήσεων των εξαρτημάτων. Επίσης, η γεωμετρική δυαδικότητα του δαπέδου των εγκαταστάσεων που περιγράψαμε θα φαινόταν χρήσιμη σε παραγωγικά συστήματα που κάποιες περιόδους του χρόνου κατασκευάζουν ελαφρώς διαφορετικά προϊόντα, δηλαδή η ζήτηση των ελαφρώς διαφοροποιημένων προϊόντων χαρακτηρίζεται από εποχικότητα. Μία επιπλέον συνθήκη, εκτός της εποχικότητας της ζήτησης ορισμένων προϊόντων, η οποία θα προσκόμιζε οφέλη σε ένα παραγωγικό σύστημα είναι η συσχέτιση των λειτουργιών των παραγόμενων προϊόντων του εκάστοτε οργανισμού. Δηλαδή, για να θεωρείται χρήσιμος ο γεωμετρικός μετασχηματισμός θα πρέπει τα προϊόντα που παράγονται σε κάθε περίοδο να επεξεργάζονται από όμοιες λειτουργίες, αλλά με διαφορετική σειρά. Ακόμα ένα προτέρημα της μεθόδου είναι ότι μειώνονται οι αποστάσεις μεταξύ κάποιων μηχανών χωρίς να χρειάζεται να μετακινηθούν οι μηχανές επί του δαπέδου των εγκαταστάσεων, διότι μετακινείται το ίδιο το δάπεδο, ακολουθώντας κάποιες γεωμετρικές αρχές που θα εισαχθούν στην επόμενη ενότητα.

## 5.2 Η Γεωμετρία των Μεταμορφωτικών Κελιών

Σε αυτήν την ενότητα θα περιγραφεί η γεωμετρική διάσταση των μεταμορφωτικών κελιών. Θα επεξηγηθούν οι ιδιότητες των τομών που πρέπει να γίνονται στο δάπεδο ώστε να έχουμε μία όσο το δυνατόν απλή μεταμόρφωση του δαπέδου των εγκαταστάσεων, η οποία συνάμα θα δημιουργεί οφέλη στο παραγωγικό σύστημα. Όλη η παραπάνω μέθοδος επεξήγησης θα συνοδεύεται και από σχεδιαγραμματικές απεικονίσεις.

Επισημαίνεται ότι όλοι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί που θα παρουσιαστούν σχετίζονται με την δυσδιάστατη γεωμετρία του δαπέδου των εγκαταστάσεων και όχι των μηχανών. Θα θεωρήσουμε από εδώ και στο εξής ότι το δάπεδο θα είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Πιο συγκεκριμένα θα το θεωρήσουμε είτε ένα κλασικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, είτε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που είναι και ρόμβος ( τετράγωνο ).

Θα θεωρήσουμε ότι υπάρχουν τρεις κατηγορίες σημείων στο επίπεδο, τα σημεία των κορυφών, τα περιμετρικά σημεία και το τέμνον σημείο. Τα σημεία κορυφών (ΣΚ) είναι αυτά που βρίσκονται στις κορυφές των ορθογωνίων παραλληλογράμμων. Τα περιμετρικά σημεία (ΠΣ) είναι αυτά που ανήκουν στα ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία σχηματίζουν την περίμετρο του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Τέλος, το τέμνον σημείο (ΤΣ) είναι το σημείο τομής μεταξύ των ευθύγραμμων τμημάτων που τέμνουν εσωτερικά το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. Στο Σχήμα 5.1 απεικονίζονται οι κατηγορίες των σημείων.



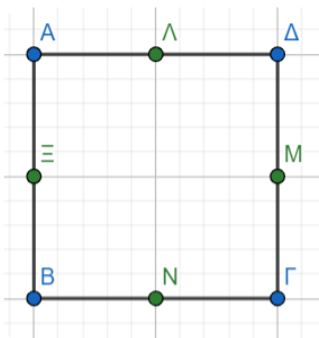
**Σχήμα 5.1:** Κατηγορίες Σημείων (α) ΣΚ, (β) ΠΣ, (γ) ΤΣ.

Αφού περιγράψαμε τις γενικές γεωμετρικές έννοιες που υπάρχουν πίσω από τα μεταμορφωτικά κελιά, παρακάτω θα παρουσιαστούν τα θεωρήματα που αποτελούν τον πυρήνα της ιδέας των μεταμορφωτικών κελιών. Αρχικά, το Θεώρημα 5.1 αποτελεί την γενίκευση της τετριμμένης ιδιότητας κάθε ορθογώνιο παραλληλογράμμου να μετασχηματίζεται σε ένα νέο ίδιων διαστάσεων, αν αυτό τμηθεί συμμετρικά οριζοντίως και καθέτως. Το Θεώρημα 5.2 γενικεύει την ουσιαστικότερη ιδιότητα που θα περιγραφεί σε αυτό το κεφάλαιο και σχετίζεται με την δυνατότητα μετασχηματισμού κάθε ορθογώνιου παραλληλογράμμου σε τρίγωνο, αν εφαρμοστούν οι κατάλληλες εσωτερικές τομές στο αρχικό σχήμα.

#### **ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1 (Ορθογωνική Μεταμόρφωση)**

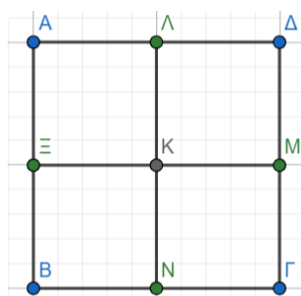
Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\Xi$  να είναι περιμετρικά σημεία και τα οποία αποτελούν την αρχή και το πέρας των μεσοκαθέτων των πλευρών του ορθογώνιου παραλληλογράμμου  $(\Lambda N)$ ,  $(M\Xi)$  και  $K$  το σημείο τομής των δύο αυτών ευθύγραμμων τμημάτων, τότε τα εσωτερικά σχήματα του παραλληλογράμμου μπορούν να μετατοπιστούν και να δημιουργήσουν ένα νέο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ίδιων διαστάσεων.

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ 5.1



Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που είναι και ρόμβος  $AB\Gamma\Delta$  με  $\Lambda, M, N, \Xi$  να είναι περιμετρικά σημεία.

Εν συνεχεία, σχεδιάζουμε τις μεσοκαθέτους  $(\Lambda N)$  και  $(M\Xi)$  των πλευρών  $(A\Delta)$ ,  $(B\Gamma)$  και  $(\Delta\Gamma)$ ,  $(AB)$  αντίστοιχα.



Έπειτα σχεδιάζοντας το σημείο τομής των μεσοκαθέτων έχουμε την μορφή του παραλληλογράμμου όπως φαίνεται στο δεύτερο σχήμα.

Με αυτόν τον τρόπο έχουν δημιουργηθεί τέσσερα υποτετράγωνα τα  $(A\Xi K\Lambda)$ ,  $(\Lambda K M \Delta)$ ,  $(\Xi B N K)$  και  $(K N \Gamma M)$ .

Είναι εμφανές ότι μπορούν να δημιουργηθούν ποικίλα νέα τετράγωνα αποτελούμενα από τα αρχικά υποτετράγωνα. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι διότι κάθε γωνία που έχει δημιουργηθεί, έπειτα από τις τομές των μεσοκαθέτων, είναι ίση με  $90^\circ$ .

Επομένως, αφού κάθε παραλληλόγραμμο που δημιουργείται έχει τουλάχιστον μία ορθή γωνία, τότε θα είναι και ορθογώνιο και ρόμβος, εξαιτίας της ισότητας όλων των πλευρών των υποτετραγώνων μεταξύ τους.

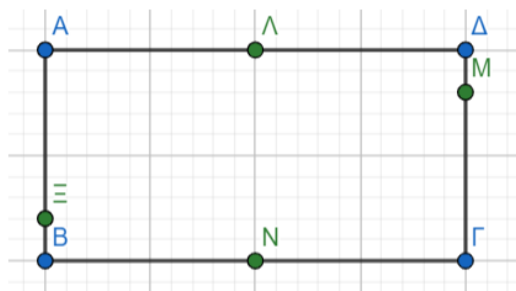
Τελικώς, καταλήγουμε ότι τα εσωτερικά σχήματα του αρχικού ορθογωνίου παραλληλογράμμου μπορούν να μετατοπιστούν και να δημιουργήσουν ένα νέο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ίδιων διαστάσεων. ■

### ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2 (Τριγωνική Μεταμόρφωση)

Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Λ, Μ, Ν, Ξ να είναι περιμετρικά σημεία, και γειτονικά ανά δύο, και Κ το τέμνον σημείο των τριών ευθύγραμμων τμημάτων (ΛΚ), (ΞΚ), (ΝΜ), τότε τα εσωτερικά σχήματα του παραλληλογράμμου μπορούν να μετατοπιστούν και να δημιουργήσουν ένα τρίγωνο ίσου εμβαδού, αν ισχύουν τα παρακάτω:

- Τα δύο γειτονικά περιμετρικά σημεία είναι τα μέσα των αντίστοιχων γειτονικών πλευρών που ανήκουν.
- Τα άλλα δύο γειτονικά περιμετρικά σημεία να απέχουν το καθένα αντιστρόφως ανάλογα από τα άκρα της πλευράς που ανήκουν σε σχέση με το άλλο.
- Το τέμνον σημείο να ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα δύο διαδοχικά περιμετρικά σημεία.

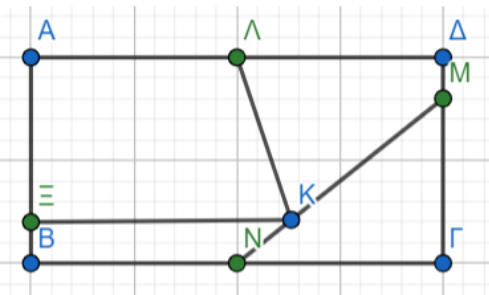
### ΑΠΟΔΕΙΞΗ 5.2



Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με Λ, Μ, Ν, Ξ να είναι περιμετρικά σημεία. Για τα περιμετρικά σημεία ισχύουν:

- $(ΑΛ) = (ΒΝ) = \frac{(ΑΔ)}{2} = \frac{(ΒΓ)}{2} \dots (1)$
- $(ΞΒ) = (ΜΔ) \dots (2)$

Εν συνεχεία, σχεδιάζουμε τα ευθύγραμμο τμήματα (ΛΚ) και (ΞΚ) και (ΝΜ), έχοντας ορίσει το σημείο Κ να ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα (ΝΜ).



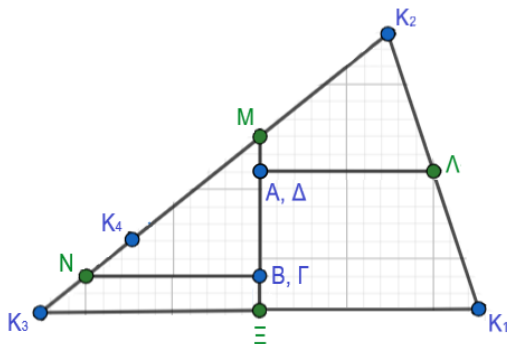
Με αυτόν τον τρόπο έχουν δημιουργηθεί τα τρία σχήματα (ΑΞΚΛ), (ΛΚΜΔ), (ΞΒΝΚ) και το τρίγωνο (ΝΜΓ).

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ 5.2 →



(ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ 5.2)

Αν θεωρήσουμε ότι περιστρέφουμε το σχήμα  $(\Lambda\text{K}\text{M}\Delta)$  γύρω από το σημείο  $\Lambda$  έως ότου να εφάπτονται τα ευθύγραμμο τμήματα  $(\Lambda\text{L})$  και  $(\Lambda\Delta)$ , το σχήμα  $(\Xi\text{B}\text{N}\text{K})$  γύρω από το σημείο  $\Xi$  έως ότου να εφάπτονται τα ευθύγραμμο τμήματα  $(\Lambda\Xi)$  και  $(\Xi\text{B})$  και μεταφέρουμε το τρίγωνο  $(\text{N}\text{M}\Gamma)$  στην θέση κατά την οποία το ευθύγραμμο τμήμα  $(\text{N}\Gamma)$  θα εφάπτεται με το  $(\text{B}\text{N})$ , ενώ ταυτοχρόνως θα εφάπτεται το  $(\text{M}\Gamma)$  με το  $(\Delta\text{M})$ , τότε παρατηρούμε ότι δημιουργείται ένα τρίγωνο αποτελούμενο από τα εσωτερικά σχήματα του αρχικού σχήματος. Το τρίγωνο παρουσιάζεται παρακάτω.



Το νέο σχήμα είναι τρίγωνο, διότι:

- Οι γωνίες  $\angle\text{K}_1$ ,  $\angle\text{K}_2$ ,  $\angle\text{K}_3$  είναι παραπληρωματικές μεταξύ τους, εξυποθέσεως.
- Τα σημεία  $\text{K}_2$ ,  $\text{M}$ ,  $\text{K}_3$  είναι συνευθειακά, επειδή  $(\text{M}\Delta) + (\Lambda\Xi) = (\text{M}\Gamma) + (\text{B}\Xi)$ , εξυποθέσεως, και οι γωνίες

$\angle\text{K}_2\text{M}\Delta$ ,  $\angle\text{N}\text{M}\Gamma$  και οι  $\angle\text{M}\text{N}\Gamma$ ,  $\angle\text{B}\text{N}\text{K}_3$  είναι παραπληρωματικές ανά δύο, αντίστοιχα.

- Οι γωνίες  $\angle\text{K}_2\Lambda\Delta$ ,  $\angle\Lambda\text{L}\text{K}_1$  και  $\angle\text{B}\Xi\text{K}_3$ ,  $\angle\Lambda\Xi\text{K}_1$  είναι παραπληρωματικές ανά δύο, αντίστοιχα.
- Ισχύουν ακόμα,  $(\Lambda\text{L}) = (\Delta\Lambda)$  και  $(\text{N}\text{B}) = (\text{N}\Gamma)$ .

Επομένως, τα εσωτερικά σχήματα του παραλληλογράμμου μπορούν να μετατοπιστούν και να δημιουργήσουν ένα τρίγωνο ίσου εμβαδού, όταν η αρχή σχηματισμού των εσωτερικών σχημάτων ακολουθεί τις υποθέσεις (1), (2) και επιπλέον το τέμνον σημεία των εσωτερικών ευθύγραμμων τμημάτων ανήκει στο ευθύγραμμο τμήμα  $(\text{M}\text{N})$ , το οποίο ενώνει τα δύο διαδοχικά περιμετρικά σημεία. ■

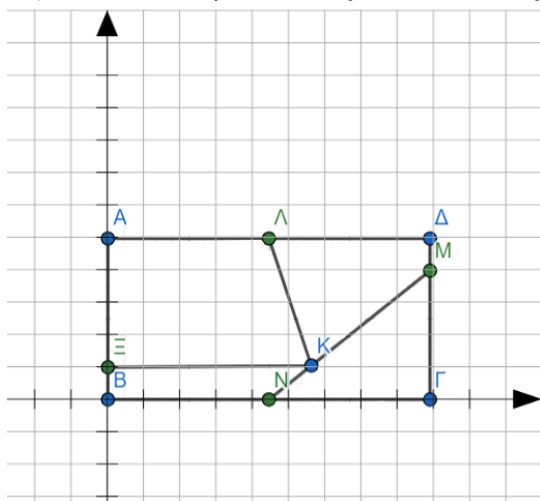
Παρακάτω θα ακολουθήσει ένα πόρισμα, το οποίο βασίζεται στο Θεώρημα 5.2 και μία δεύτερη περιγραφή του περιεχομένου του Θεωρήματος 5.2, η οποία θα πραγματοποιηθεί σε όρους αλγεβρικών γεωμετρικών μετασχηματισμών.

### Πόρισμα 5.1 (Ισοσκελισμένη Τριγωνική Μεταμόρφωση)

Αν στην περίπτωση τριγωνικής μεταμόρφωσης ενός τετραγώνου τα περιμετρικά σημεία είναι τα μέσα των αντίστοιχων πλευρών και το τέμνον σημείο είναι το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος που ενώνει τα δύο διαδοχικά περιμετρικά σημεία, τότε το τρίγωνο που προκύπτει είναι ισοσκελές.

### Περιγραφή Γεωμετρικών Μετασχηματισμών Θεωρήματος 5.2

Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$ ,  $\Xi$  να είναι περιμετρικά σημεία. Θεωρούμε ότι το αρχικό σχήμα έχει τμηθεί εσωτερικά βάσει των υποθέσεων του Θεωρήματος 5.2. Μεταφέροντας το σχήμα σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και με το σημείο  $B$  να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων έχουμε το παρακάτω σχήμα:



Οι μετασχηματισμοί που θα ακολουθήσουν είναι οι εξής:

- Μεταφορά του  $(A\Xi K\Lambda)$ , ώστε το σημείο  $A$  να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων.
- Περιστροφή  $180^\circ$  του  $(\Lambda K M \Delta)$  γύρω από το  $\Lambda$  και μεταφορά του σε θέση που το σημείο  $\Delta$  θα συμπίπτει με την αρχή των αξόνων.
- Περιστροφή του τριγώνου  $(N M \Gamma)$  κατά  $360^\circ$  γύρω από το  $N$  και μεταφορά του σε θέση όπου τα σημεία  $N$ ,  $M$  θα είναι συνευθειακά με την νέα θέση του σημείου  $K$  που αντιστοιχεί στο μετασχηματισμένο  $(\Lambda K M \Delta)$ .
- Περιστροφή του  $(\Xi B N K)$  κατά  $180^\circ$  γύρω από το  $B$  και μεταφορά του σε θέση όπου τα σημεία  $N$ ,  $K$  θα είναι συνευθειακά με τα  $N$ ,  $M$ .

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 5.2 →

(ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 5.2)

Οι συντεταγμένες των σημείων είναι οι παρακάτω:

$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), \Gamma(x_\Gamma, y_\Gamma), \Delta(x_\Delta, y_\Delta), \Lambda(x_\Lambda, y_\Lambda), M(x_M, y_M),$   
 $N(x_N, y_N), \Xi(x_\Xi, y_\Xi), K(x_K, y_K)$

με  $x_A = x_\Xi = x_B, x_\Delta = x_M = x_\Gamma = X_T,$

$x_\Lambda = x_N = \frac{x_T}{2}, y_A = y_\Lambda = y_\Delta = Y_T, y_B = y_N = y_\Gamma$

$y_A - y_\Xi = y_M, y_\Delta - y_M = y_\Xi.$

○ Για το 1<sup>ο</sup> σχήμα (ΑΕΚΛ)

Μετατόπιση

$$\begin{bmatrix} x_A^{1\tau\epsilon\lambda} & y_A^{1\tau\epsilon\lambda} \\ x_\Xi^{1\tau\epsilon\lambda} & y_\Xi^{1\tau\epsilon\lambda} \\ x_K^{1\tau\epsilon\lambda} & y_K^{1\tau\epsilon\lambda} \\ x_\Lambda^{1\tau\epsilon\lambda} & y_\Lambda^{1\tau\epsilon\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A & y_A \\ x_\Xi & y_\Xi \\ x_K & y_K \\ x_\Lambda & y_\Lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -Y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A & y_A - Y_T \\ x_\Xi & y_\Xi - Y_T \\ x_K & y_K - Y_T \\ x_\Lambda & y_\Lambda - Y_T \end{bmatrix}$$

○ Για το 2<sup>ο</sup> σχήμα (ΛΚΜΔ)

Μετατόπιση

$$\begin{bmatrix} x_\Lambda^2 & y_\Lambda^2 \\ x_K^2 & y_K^2 \\ x_M^2 & y_M^2 \\ x_\Delta^2 & y_\Delta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\Lambda & y_\Lambda \\ x_K & y_K \\ x_M & y_M \\ x_\Delta & y_\Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{-x_T}{2} & -Y_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x_\Lambda - x_T}{2} & y_\Lambda - Y_T \\ \frac{2x_K - x_T}{2} & y_K - Y_T \\ \frac{2x_M - x_T}{2} & y_M - Y_T \\ \frac{2x_\Delta - x_T}{2} & y_\Delta - Y_T \end{bmatrix}$$

Περιστροφή

$$\begin{bmatrix} x_\Lambda^{2'} & y_\Lambda^{2'} \\ x_K^{2'} & y_K^{2'} \\ x_M^{2'} & y_M^{2'} \\ x_\Delta^{2'} & y_\Delta^{2'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_\Lambda^2 & y_\Lambda^2 \\ x_K^2 & y_K^2 \\ x_M^2 & y_M^2 \\ x_\Delta^2 & y_\Delta^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_\Lambda^2 & -y_\Lambda^2 \\ -x_K^2 & -y_K^2 \\ -x_M^2 & -y_M^2 \\ -x_\Delta^2 & -y_\Delta^2 \end{bmatrix}$$

Μετατόπιση

$$\begin{bmatrix} x_A^{2\tau\epsilon\lambda} & y_A^{2\tau\epsilon\lambda} \\ x_K^{2\tau\epsilon\lambda} & y_K^{2\tau\epsilon\lambda} \\ x_M^{2\tau\epsilon\lambda} & y_M^{2\tau\epsilon\lambda} \\ x_\Delta^{2\tau\epsilon\lambda'} & y_\Delta^{2\tau\epsilon\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A^{2'} & y_A^{2'} \\ x_K^{2'} & y_K^{2'} \\ x_M^{2'} & y_M^{2'} \\ x_\Delta^{2'} & y_\Delta^{2'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x_A^{2'} + X_T}{2} & y_A^{2'} \\ \frac{2x_K^{2'} + X_T}{2} & y_K^{2'} \\ \frac{2x_M^{2'} + X_T}{2} & y_M^{2'} \\ \frac{2x_\Delta^{2'} + X_T}{2} & y_\Delta^{2'} \end{bmatrix}$$

- Για το 3<sup>ο</sup> σχήμα (NMG)

Μετατόπιση

$$\begin{bmatrix} x_N^3 & y_N^3 \\ x_M^3 & y_M^3 \\ x_\Gamma^3 & y_\Gamma^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_N & y_N \\ x_M & y_M \\ x_\Gamma & y_\Gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -X_T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x_N - X_T}{2} & y_N \\ \frac{2x_M - X_T}{2} & y_M \\ \frac{2x_\Gamma - X_T}{2} & y_\Gamma \end{bmatrix}$$

Περιστροφή

$$\begin{bmatrix} x_N^{3'} & y_N^{3'} \\ x_M^{3'} & y_M^{3'} \\ x_\Gamma^{3'} & y_\Gamma^{3'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_N^3 & y_N^3 \\ x_M^3 & y_M^3 \\ x_\Gamma^3 & y_\Gamma^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_N^3 & y_N^3 \\ x_M^3 & y_M^3 \\ x_\Gamma^3 & y_\Gamma^3 \end{bmatrix}$$

Μετατόπιση

$$\begin{bmatrix} x_N^{3\tau\epsilon\lambda} & y_N^{3\tau\epsilon\lambda} \\ x_M^{3\tau\epsilon\lambda} & y_M^{3\tau\epsilon\lambda} \\ x_\Gamma^{3\tau\epsilon\lambda} & y_\Gamma^{3\tau\epsilon\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_N^{3'} & y_N^{3'} \\ x_M^{3'} & y_M^{3'} \\ x_\Gamma^{3'} & y_\Gamma^{3'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -X_T & -\Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2x_N^{3'} - X_T}{2} & y_N - \Psi \\ \frac{2x_M^{3'} - X_T}{2} & y_M - \Psi \\ \frac{2x_\Gamma^{3'} - X_T}{2} & y_\Gamma - \Psi \end{bmatrix}$$

$$\text{με } \Psi = |y_\Xi - y_M|$$

○ Για το 4<sup>ο</sup> σχήμα (ΞΒΝΚ)

Περιστροφή

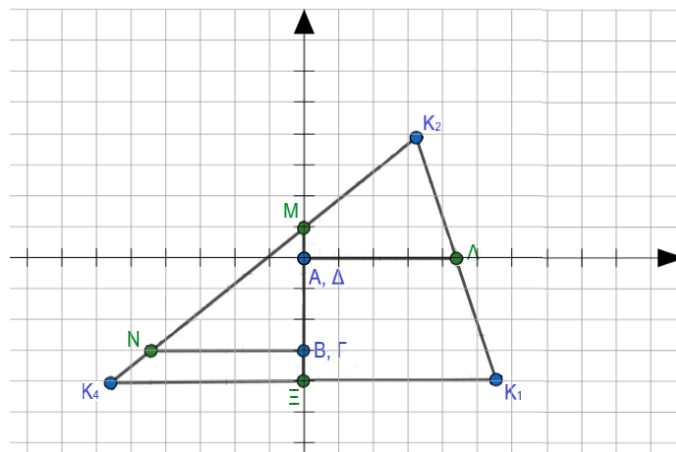
$$\begin{bmatrix} x_{\Xi}^4 & y_{\Xi}^4 \\ x_B^4 & y_B^4 \\ x_N^4 & y_N^4 \\ x_K^4 & y_K^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\Xi} & y_{\Xi} \\ x_B & y_B \\ x_N & y_N \\ x_K & y_K \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{\Xi} & -y_{\Xi} \\ -x_B & -y_B \\ -x_N & -y_N \\ -x_K & -y_K \end{bmatrix}$$

Μετατόπιση

$$\begin{bmatrix} x_{\Xi}^{4\tau\epsilon\lambda} & y_{\Xi}^{4\tau\epsilon\lambda} \\ x_B^{4\tau\epsilon\lambda} & y_B^{4\tau\epsilon\lambda} \\ x_N^{4\tau\epsilon\lambda} & y_N^{4\tau\epsilon\lambda} \\ x_K^{4\tau\epsilon\lambda} & y_K^{4\tau\epsilon\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\Xi}^4 & y_{\Xi}^4 \\ x_B^4 & y_B^4 \\ x_N^4 & y_N^4 \\ x_K^4 & y_K^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\Psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{\Xi}^4 & y_{\Xi}^4 - \Psi \\ x_B^4 & y_B^4 - \Psi \\ x_N^4 & y_N^4 - \Psi \\ x_K^4 & y_K^4 - \Psi \end{bmatrix}$$

με  $\Psi = |y_{\Xi} - y_M|$

Έχοντας περιγράψει τους μετασχηματισμούς που θα πραγματοποιηθούν ώστε να μεταμορφωθεί το αρχικό σχήμα σε τρίγωνο, μπορούμε πλέον να απεικονίσουμε το σχήμα που προκύπτει.



(ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΩΝ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΩΝ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ 5.2)

Τέλος, για λόγους πληρότητας θα παραθέσουμε και τις συνθήκες που θα πρέπει να ισχύουν ώστε τα σημεία του τελικού τριγώνου  $K_2, M, K_4$  και  $K_2, \Lambda, K_1$  και  $K_1, \Xi, K_4$  να είναι συνευθειακά ανά τρία κάθε φορά.

Έχουμε,  $K_1(x_K^{1τελ}, y_K^{1τελ}), K_2(x_K^{2τελ}, y_K^{2τελ}), K_4(x_K^{4τελ}, y_K^{4τελ}),$   
 $M(x_M^{2τελ}, y_M^{2τελ})$  ή  $M(x_M^{3τελ}, y_M^{3τελ}), \Lambda(x_\Lambda^{1τελ}, y_\Lambda^{1τελ})$  ή  $\Lambda(x_\Lambda^{2τελ}, y_\Lambda^{2τελ}),$   
 $\Xi(x_\Xi^{1τελ}, y_\Xi^{1τελ})$  ή  $\Xi(x_\Xi^{3τελ}, y_\Xi^{3τελ}).$

Οι συνθήκες παρουσιάζονται παρακάτω,

$$\det(\overrightarrow{K_2M}, \overrightarrow{K_2K_4}) = 0$$

$$\det(\overrightarrow{K_2\Lambda}, \overrightarrow{K_2K_1}) = 0$$

$$\det(\overrightarrow{K_1\Xi}, \overrightarrow{K_1K_4}) = 0$$

Με τον συνολικό γεωμετρικό μετασχηματισμό των μεταμορφωτικών κελιών επιτυγχάνεται η διαδικασία της μεταφοράς των σημείων των κορυφών του αρχικού παραλληλογράμμου σε νέες θέσεις, που η απόσταση των σημείων αυτών μεταξύ τους μειώνεται αρκετά.

Επομένως, αφού περιγράψαμε τα θεωρήματα και κυρίως το Θεώρημα 5.2, το οποίο αποτελεί και στοιχείο πρωτοπορίας της παρούσης εργασίας, στην συνέχεια θα ακολουθήσει η ενότητα που σχετίζεται με τα πεδία εφαρμογής, καθώς και θα παρατεθεί ένα αριθμητικό παράδειγμα εφαρμογής της ιδέας των μεταμορφωτικών κελιών.

## 5.3 Πεδία Εφαρμογής Μεταμορφωτικών Κελιών

Σε αυτήν την ενότητα θα αναφερθούμε σε δύο μεγάλες κατηγορίες εφαρμογών των μεταμορφωτικών κελιών. Αρχικά, στο γενικό πλαίσιο εφαρμογής των μεταμορφωτικών κελιών στα κλασικά παραγωγικά συστήματα και δευτερευόντως στις εφαρμογές που σχετίζονται με παραγωγικά συστήματα που βρίσκονται εκτός Γης ( Off-Earth Manufacturing ).

Στα κλασικά παραγωγικά συστήματα η υιοθέτηση των μεταμορφωτικών κελιών μπορεί να επιφέρει σημαντικά αποτελέσματα. Αν υποθέσουμε ότι το παραγωγικό σύστημα χαρακτηρίζεται από μια δυαδικότητα στην κατηγορία προϊόντων που παράγει, τότε τα μεταμορφωτικά κελιά δύνανται να μειώσουν αρκετά τα κόστη μετακίνησης των εξαρτημάτων του συστήματος. Αυτό συμβαίνει διότι όπως περιγράψαμε στην προηγούμενη ενότητα, η βασική γεωμετρική αρχή των μεταμορφωτικών κελιών είναι να τοποθετούν κοντύτερα τα εξαρχής απομακρυσμένα σημεία του επιπέδου, ενώ τοποθετούν μακρινότερα τα εξαρχής κοντινά σημεία του επιπέδου. Επομένως, με αυτόν τον τρόπο είναι δυνατές οι μειώσεις του κόστους των μετακινήσεων, αυξάνοντας δυνητικά την ευελιξία του συστήματος και επιπλέον χωρίς να μετακινούνται οι μηχανές αφού οι μετασχηματισμοί πραγματοποιούνται μεταμορφώνοντας το δάπεδο. Παρόλα αυτά, για να πραγματοποιηθούν οι απαραίτητοι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί του δαπέδου των παραγωγικών εγκαταστάσεων χρειάζεται δάπεδο μεγαλύτερου εμβαδού από αυτό που θα απαιτούνταν αν είχαμε ένα δάπεδο σταθερής γεωμετρίας. Ο λόγος που συμβαίνει αυτό είναι ότι απαιτούνται κάποιοι επιπλέον χώροι, ώστε να επιτευχθούν ορθά οι μετασχηματισμοί του δαπέδου. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι δημιουργεί επιπλέον σταθερά κόστη στο σύστημα, η υιοθέτηση των μεταμορφωτικών κελιών, σχετιζόμενα με το πιθανό κόστος ενοικίασης του χώρου των εγκαταστάσεων και με το κόστος συντήρησής του. Για αυτόν τον λόγο θα πρέπει να εξετασθεί από τα εκάστοτε διοικητικά στελέχη, αν το κόστος εγκατάστασης και συντήρησης που εισέρχεται στο σύστημα από την υιοθέτηση των μεταμορφωτικών κελιών είναι μικρότερο από το όφελος που

αποκομίζει το παραγωγικό σύστημα. Αν η προαναφερθείσα συνθήκη είναι αληθής, τότε θα πρέπει το σύστημα να ενστερνιστεί τα μεταμορφωτικά κελιά.

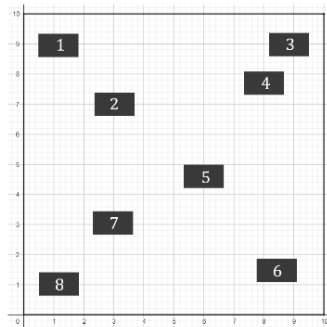
Το δεύτερο σκέλος του πεδίου εφαρμογής των μεταμορφωτικών κελιών σχετίζεται με την έννοια των παραγωγικών συστημάτων που βρίσκονται εκτός Γης ( Off-Earth Manufacturing ). Η προαναφερθείσα έννοια συνδέεται άμεσα με αυτήν της παραγωγής στο διάστημα ( In-Space Manufacturing ) [ 57, 58 ]. Αιτία για την ανάπτυξη αυτών των εννοιών αποτέλεσε η αναγνώριση της μελλοντικής ανάγκης για μακροχρόνιες διαστημικές αποστολές οι οποίες θα έχουν την ανάγκη κατασκευής έργων υποδομών και παραγωγής πιο αναλώσιμων αγαθών. Επιπλέον, τα έργα αυτά πρέπει να είναι όσο το δυνατόν περισσότερο από πρώτες ύλες που βρίσκονται κοντά στο εκάστοτε διαστημικό περιβάλλον, διότι η μεταφορά υλικών από την Γη είναι κάτι ιδιαίτερα κοστοβόρο και όχι βιώσιμο. Επομένως, τα μεταμορφωτικά κελιά σε ένα διαστημικό περιβάλλον μπορούν να φανούν ιδιαίτερα χρήσιμα για τους ίδιους λόγους, όπου μπορούν και στα κλασικά παραγωγικά συστήματα, με την μόνη διαφορά ότι στο διαστημικό περιβάλλον μπορούν να επιτυγχάνονται οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί του δαπέδου των εγκαταστάσεων χωρίς να λειτουργεί ως σημαντικός περιοριστικός παράγοντας η επιπλέον επιφάνεια που χρειάζεται ώστε να επιτευχθούν οι μετασχηματισμοί του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Για αυτούς τους λόγους τα μεταμορφωτικά κελιά θα μπορούσαν να αποτελέσουν και λύση για μελλοντικά ζητήματα που σχετίζονται με την παραγωγή εξαρτημάτων εκτός του περιβάλλοντος της Γης.

Στην συνέχεια ακολουθεί ένα αριθμητικό παράδειγμα που δείχνει το βασικό προτέρημα της υιοθέτησης των μεταμορφωτικών κελιών, το οποίο είναι η μείωση του κόστους των μετακινήσεων από μηχανή-σε-μηχανή έτσι ώστε να περατωθούν οι απαραίτητες διεργασίες του κάθε εξαρτήματος. Θα θεωρήσουμε μία τετράγωνη κάτοψη του δαπέδου των εγκαταστάσεων, στην οποία θα περιέχονται οκτώ μηχανές και θα πρέπει να περατωθούν οι λειτουργίες τριών διαφορετικών κατηγοριών προϊόντων. Θα συγκριθούν τα κόστη των προϊόντων για τις περιπτώσεις της αρχικής

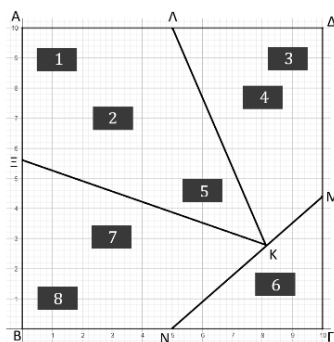


τετραγωνικής κάτοψης, της μεταμορφωτικής τριγωνικής κάτοψης και της μεταμορφωτικής τετραγωνικής κάτοψης.

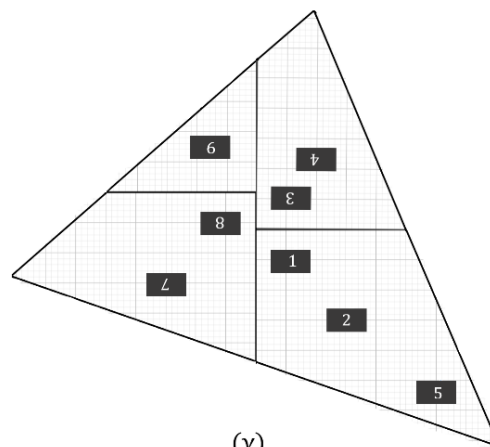
### Αριθμητικό Παράδειγμα Μεταμορφωτικών Κελιών



(α)



(β)



(γ)

**Σχήμα 5.2:** Στάδια Μετασχηματισμών Μεταμορφωτικών Κελιών.

Στο Σχήμα 5.2 απεικονίζεται η κάτοψη του επιπέδου των παραγωγικών εγκαταστάσεων στην περίπτωση είτε της τετραγωνικής κάτοψης, είτε της μεταμορφωτικής τριγωνικής. Η διαδικασία της μεταμόρφωσης έχει επεξηγηθεί λεπτομερώς και δεν θα ασχοληθούμε με την περεταίρω επεξήγηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών σε αυτήν την ενότητα. Θεωρούμε λοιπόν, ότι έχουμε οκτώ μηχανές και τρεις κατηγορίες προϊόντων που πρέπει να επεξεργασθούν σε κάποιες από τις διαθέσιμες μηχανές. Το ΠΡΟΪΟΝ Α πρέπει να περάσει από τις μηχανές  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 3$ , το ΠΡΟΪΟΝ Β από τις  $1 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 4$  και το ΠΡΟΪΟΝ Γ από τις  $4 \rightarrow 3 \rightarrow 8 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 5$ . Συνοψίζοντας τις παραπάνω πληροφορίες στον Πίνακα 5.1 έχουμε,

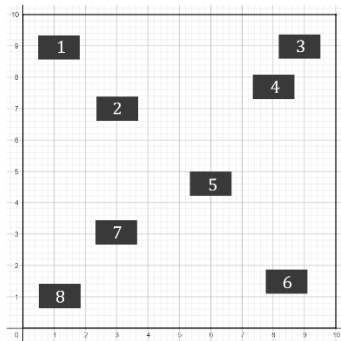
ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑΜΟΡΦΩΤΙΚΩΝ ΚΕΛΙΩΝ →

(ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑΜΟΡΦΩΤΙΚΩΝ ΚΕΛΙΩΝ)

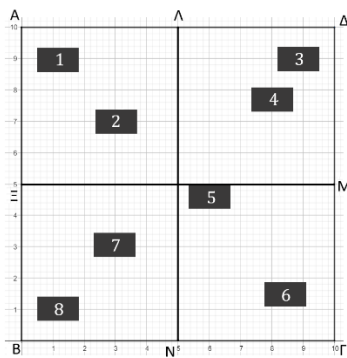
Πίνακας 5.1 Προϊόντα και Δρομολογήσεις

Τύπος Προϊόντος	Δρομολόγηση Προϊόντος
ΠΡΟΪΟΝ Α	1→2→7→5→4→3
ΠΡΟΪΟΝ Β	1→8→6→3→4
ΠΡΟΪΟΝ Γ	4→3→8→1→2→5

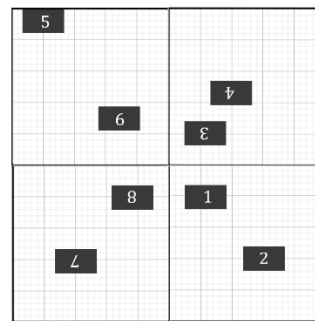
Επισημαίνουμε ότι η τετραγωνική κάτοψη στο Σχήμα 5.2 είναι πλευράς 10, δηλαδή  $(AB) = 10$  και επιπλέον ισχύει ότι  $(AE) = 4,4$ . Στο Σχήμα 5.2 απεικονίζεται η κάτοψη του επιπέδου των παραγωγικών εγκαταστάσεων στην περίπτωση είτε της τετραγωνικής κάτοψης, είτε της μεταμορφωτικής τετραγωνικής.



(α)



(β)



(γ)

Σχήμα 5.3: Στάδια Μετασχηματισμών Μεταμορφωτικών Κελιών.

Θα ακολουθήσει η σύγκριση του κόστους επεξεργασίας των προϊόντων για κάθε μία από τις τρεις περιπτώσεις, δηλαδή της αρχικής τετραγωνικής κάτοψης, της μεταμορφωτικής τριγωνικής και της μεταμορφωτικής τετραγωνικής. Ο υπολογισμός του εκάστοτε κόστους θα γίνει σε όρους μήκους των απαιτούμενων αποστάσεων που πρέπει να πραγματοποιηθούν ώστε να περατωθεί το κάθε προϊόν.

(ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΥ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ ΜΕΤΑΜΟΡΦΩΤΙΚΩΝ ΚΕΛΙΩΝ)

Στον Πίνακα 5.2 ενσωματώνονται οι αποστάσεις που πρέπει να διανύσει κάθε προϊόν ώστε να περατωθούν οι λειτουργίες του σε κάθε μία από τις περιπτώσεις που προαναφέραμε.

Πίνακας 5.2 Κόστος Περάτωσης Εξαρτημάτων σε Όρους Διανυόμενου Μήκους  
Απαιτούμενο Διανυόμενο Μήκος

	Αρχική Διάταξη	Τριγωνική Μεταμόρφωση	Τετραγωνική Μεταμόρφωση
ΠΡΟΪΟΝ Α	15,32*	29,50	24,25
ΠΡΟΪΟΝ Β	24,36	10,03	9,27*
ΠΡΟΪΟΝ Γ	25,68	10,94*	19,99
Άθροισμα	65,36	50,47	53,51

Καταφαίνεται ότι τα μεταμορφωτικά κελιά εξοικονομούν κόστη αξιοσημείωτου μεγέθους. Στον Πίνακα 5.2 βλέπουμε ότι αν μία βιομηχανία επέλεγε να παράγει το ΠΡΟΪΟΝ Α με την αρχική διάταξη και τα υπόλοιπα δύο με την τριγωνική μεταμορφωτική διάταξη, τότε το συνολικό κόστος θα ανερχόταν στο ποσό των 36,29, δηλαδή θα επιτύγχανε μείωση 44% του αρχικού κόστους. Στην πλέον ιδεατή συνθήκη κατά την οποία το δάπεδο των εγκαταστάσεων μπορεί να υιοθετήσει και τις δύο μεταμορφωτικές διατάξεις, τότε θα ήταν βέλτιστο να παράγουμε το ΠΡΟΪΟΝ Α βάσει της αρχικής διάταξης, το ΠΡΟΪΟΝ Β βάσει της τετραγωνικής μεταμόρφωσης και το ΠΡΟΪΟΝ Γ βάσει της τριγωνικής μεταμόρφωσης. Με αυτόν τον τρόπο η βιομηχανία θα επιτύγχανε συνολικά κόστη της τάξης των 35,53, δηλαδή μείωση κόστους κατά 46% του αρχικού κόστους. Σημειώνεται ότι το σύμβολο \* στον Πίνακα 5.2 καταδεικνύει την βέλτιστη επιλογή για την παραγωγή του κάθε τύπου προϊόντος.

Συμπερασματικά, τα συστήματα παραγωγής με μεταμορφωτικά κελιά παρέχουν έναν οικονομικότερο τρόπο παραγωγής των εξαρτημάτων, αν και το κόστος εγκατάστασης ενός τέτοιου συστήματος θα αποτελεί μία πιο δαπανηρή επιλογή έναντι των παραδοσιακών συστημάτων παραγωγής. Παρά ταύτα, τα δυνητικά μακροχρόνια οφέλη της μεθόδου την καθιστούν άξια προσοχής και περαιτέρω μελέτης. Πέραν των οικονομικών πλεονεκτημάτων των μεταμορφωτικών κελιών, ενυπάρχουν επίσης και οφέλη

συσχετισμένα με την ασφάλεια και συντήρηση των μηχανών. Τα οφέλη αυτά πηγάζουν από το γεγονός ότι επιτυγχάνεται ελάττωση του κόστους παραγωγής λόγω της μείωσης των αποστάσεων κάποιων μηχανών μεταξύ τους, με την ιδιότητα ότι μειώνονται οι αποστάσεις χωρίς να μετακινούνται οι μηχανές. Επομένως, αυτή η συνθήκη ακινησίας των μηχανών αποτρέπει τον τραυματισμό των μηχανών κάτι το οποίο δεν θα πραγματωνόταν αν επιδιώκαμε να μειώσουμε την απόσταση των μηχανών μέσω της μετακίνησής τους στον δάπεδο των εγκαταστάσεων. Επίσης αναφέραμε ότι ένα σημαντικό πεδίο εφαρμογής των μεταμορφωτικών κελιών σχετίζεται με παραγωγικές δραστηριότητες εκτός του πλανήτη μας. Υπό αυτήν την συνθήκη μπορούμε να προσδώσουμε στην μέθοδο επιπλέον πλεονεκτήματα καθώς η μείωση των αποστάσεων των μηχανών είναι αρκετά σημαντική σε ένα περιβάλλον μικροβαρύτητας (micro-g). Τελικώς, φαίνεται ότι τα μεταμορφωτικά κελιά εμπεριέχουν στοιχεία που δύνανται να ωφελήσουν ποικίλες παραγωγικές δραστηριότητες του ανθρώπου εντός και εκτός της Γης.

## Βιβλιογραφία

- [1] Forghani K., Fatemi Ghomi S.M.T. (2020). Joint cell formation, cell scheduling, and group layout problem in virtual and classical cellular manufacturing systems. *Applied Soft Computing*, 97, Part B, 106719. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106719>.
- [2] Chang C.-C., Wu T.-H., & Wu C.-W. (2013). An efficient approach to determine cell formation, cell layout and intracellular machine sequence in cellular manufacturing systems. *Computers Industrial Engineering*, 66 (2), 438–450. <https://doi.org/10.1016/J.CIE.2013.07.009>.
- [3] Πάππης Κ. (2008). *Διοίκηση Παραγωγής: Ο σχεδιασμός παραγωγικών συστημάτων*. Εκδόσεις Σταμούλης.
- [4] Alvarez López L. M. (1997). Design and Implementation of Cellular Manufacturing in a Job Shop Environment. [Master's thesis, Massachusetts Institute of Technology].
- [5] Sofianopoulou S. (1999). Manufacturing cells design with alternative process plans and/or replicate machines. *International Journal of Production Research*, 37:3, 707-720. <http://dx.doi.org/10.1080/002075499191742>.
- [6] Mohammadi M., Forghani K. (2016). Designing cellular manufacturing systems considering S-shaped layout. *Computers & Industrial Engineering*, 98, 221-236. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2016.05.041>.
- [7] Hosseinabad E., Uz Zaman M. A. (2020). A Brief review on cellular manufacturing and group technology. *Research Journal of Management Reviews*, 5 (1), 1-20.
- [8] Hillier F. S., Lieberman G. J. (2018). *Εισαγωγή στην Επιχειρησιακή Έρευνα (10<sup>η</sup> Έκδοση) | Introduction to Operations Research (10<sup>th</sup> Edition)*. Επιστημονική Επιμέλεια Διαμαντίδης Α. Εκδόσεις Τζιόλα | McGraw-Hill Companies, Inc.
- [9] Sharma V., Kumar S., Meena M. L. (2022). Key criteria influencing cellular manufacturing system: a fuzzy AHP model. *Journal of Business Economics*, 95, 65-84. <https://doi.org/10.1007/s11573-021-01043-y>.
- [10] Sharma V., Gidwani, B.D., Sharma V., Meena, M.L. (2019). Implementation model for cellular manufacturing system using AHP and ANP approach. *Benchmarking: An International Journal*, 26 (5), 1605-1630. <https://doi.org/10.1108/BIJ-08-2018-0253>.
- [11] Shiba S., Graham A., Walden D. (1993). *A New American TQM. Four practical revolutions in management*. Centre for Quality Management, Productivity Press.

- [12] Xambre A. R., Teixeira L., Vilarinho P. (2016). A Decision Support System for the design of Cellular Manufacturing Systems: database conceptualization. *Procedia Computer Science*, 100, 164-170. <https://doi.org/10.1016/j.procs.2016.09.136>.
- [13] Delgoshaei, A., Ariffin, M.K.A.M., Leman, Z. et al. (2016). Review of evolution of cellular manufacturing system's approaches: Material transferring models. *International Journal of Precision Engineering and Manufacturing*, 17, 131-149. <https://doi.org/10.1007/s12541-016-0017-9>.
- [14] Wemmerlöv U., Hyer N. L., (1986). Procedures for the Part Family/Machine Group Identification Problem in Cellular Manufacturing. *Journal of Operation Management*, 6 (2), 125-147. [https://doi.org/10.1016/0272-6963\(86\)90021-5](https://doi.org/10.1016/0272-6963(86)90021-5).
- [15] Gupta Y. P., Gupta M. C., Kumar A., Sundram C. (1995). Minimizing total intercell and intracell moves in cellular manufacturing: a genetic algorithm approach, *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 8 (2), 92-101. <https://doi.org/10.1080/09511929508944633>.
- [16] Wei J. C., Gaither N. (1990). An Optimal Model for Cell Formation Decisions. *Decision Sciences*, 21 (2), 416-433. <https://doi.org/10.1111/j.1540-5915.1990.tb01694.x>.
- [17] Bagheri M., Bashiri M. (2014). A new mathematical model towards the integration of cell formation with operator assignment and inter-cell layout problems in a dynamic environment. *Applied Mathematical Modelling*, 38 (4), 1237-1254. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2013.08.026>.
- [18] Heragu S. S. (1989). Knowledge based approach to machine cell layout. *Computers & Industrial Engineering*, 17 (1-4), 37-42. [https://doi.org/10.1016/0360-8352\(89\)90033-8](https://doi.org/10.1016/0360-8352(89)90033-8).
- [19] Allahyari M. Z. (2015). Bi-Level Mathematical Modelling and Heuristics for Cellular Manufacturing Facility Layout Problem. [Master's thesis, University of Windsor].
- [20] Gravel M., Nsakanda L., Price W. (1998). Efficient solutions to the cell-formation problem with multiple routings via a double-loop genetic algorithm. *European Journal of Operational Research*, 109 (2), 286-298. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(98\)00057-5](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(98)00057-5).
- [21] Chen M., Cao D. (2004). Coordinating production planning in cellular manufacturing environment using Tabu search. *Computers & Industrial Engineering*, 46 (3), 571-588. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2004.02.002>.

- [22] Vin E., De Lit P., Delchambre A. (2005). A multiple-objective grouping genetic algorithm for the cell formation problem with alternative routings. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 16, 189-205. <https://doi.org/10.1007/s10845-004-5888-4>.
- [23] Yu J., Sarker B. R. (2006). A directional decomposition heuristic for one-dimensional, non-equidistant machine-cell location problems. *Computers & Operational Research*, 33 (1), 64-92. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2004.06.003>.
- [24] Filho E. V. G., Tiberti A. J. (2006). A group genetic algorithm for the machine cell formation problem. *International Journal of Production Economics*, 102 (1), 1-21. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2004.12.029>.
- [25] Paydar M. M., Saidi-Mehrabad M. (2013). A hybrid genetic-variable neighborhood search algorithm for the cell formation problem based on grouping efficacy. *Computers & Operational Research*, 40 (4), 980-990. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2012.10.016>.
- [26] Mehdizadeh E., Shamradifard M., Niaki S. T. A. (2020). An integrated mathematical programming model for a dynamic cellular manufacturing system with limited resources. *International Journal of Services and Operations Management*, 37 (1), 1-23. <https://doi.org/10.1504/IJSOM.2020.109437>.
- [27] Ghezavati V. R., Saidi-Mehrabad M. (2011). An efficient hybrid self-learning method for stochastic cellular manufacturing problem: A queuing-based analysis. *Experts Systems with Applications*, 38 (3), 1326-1335. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.07.012>.
- [28] Solimanpur M., Saeedi S., Mahdavi I. (2010). Solving cell formation problem in cellular manufacturing using ant-colony-based optimization. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 50, 1135-1144. <https://doi.org/10.1007/s00170-010-2587-5>.
- [29] Kusiak A. (1987). The generalized group technology concept. *International Journal of Production Research*, 25 (4), 561-569. <https://doi.org/10.1080/00207548708919861>.
- [30] Heragu S. S., Chen J. (1998). Optimal solution of cellular manufacturing system design: Benders' decomposition approach. *European Journal of Operational Research*, 107 (1), 175-192. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(97\)00256-7](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00256-7).
- [31] Nsakanda A. L., Diaby M., Price W. L. (2006). Hybrid genetic approach for solving large-scale capacitated cell formation problems with multiple routings. *European Journal of Operational Research*, 171 (3), 1051-1070. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2005.01.017>.

- [32] Karthikeyan S., Saravanan M., Ganesh K. (2012). GT Machine Cell Formation Problem in Scheduling for Cellular Manufacturing System Using Meta-Heuristic Method. *Procedia Engineering*, 38, 2537-2547. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2012.06.299>.
- [33] Karmarkar U. S., Kekre Sh., Kekre Su. (1987). Capacity analysis of a manufacturing cell. *Journal of Manufacturing Systems*, 6 (3), 165-175. [https://doi.org/10.1016/0278-6125\(87\)90016-1](https://doi.org/10.1016/0278-6125(87)90016-1).
- [34] Jang, Inho, Rhee, Jongtae. (1997). Generalized machine cell formation considering material flow and plant layout using modified self-organizing feature maps. *Computers & Industrial Engineering*, 33 (3-4), 457-460. [https://doi.org/10.1016/S0360-8352\(97\)00167-8](https://doi.org/10.1016/S0360-8352(97)00167-8).
- [35] Spiliopoulos K., Sofianopoulou S. (1998). An optimal tree search method for the manufacturing systems cell formation problem. *European Journal of Operational Research*, 105 (3), 537-551. [https://doi.org/10.1016/S0377-2217\(97\)00078-7](https://doi.org/10.1016/S0377-2217(97)00078-7).
- [36] Ballakur A., Steudel H. J. (1986). A within-cell utilization based heuristic for designing cellular manufacturing systems. *International Journal of Production Research*, 25 (5), 639-665. <https://doi.org/10.1080/00207548708919868>.
- [37] Grznar J., Mehrez A., Offodile O. E. (1994). Formulation of the machine cell grouping problem with capacity and material movement constraints. *Journal of Manufacturing Systems*, 13 (4), 241-250. [https://doi.org/10.1016/0278-6125\(94\)90032-9](https://doi.org/10.1016/0278-6125(94)90032-9).
- [38] Zhou M., Askin R. G. (1998). Formation of general GT cells: an operation-based approach. *Computers & Industrial Engineering*, 34 (1), 147-157. [https://doi.org/10.1016/S0360-8352\(97\)00157-5](https://doi.org/10.1016/S0360-8352(97)00157-5).
- [39] Moussa S. E., Kamel M. (1998). A part-machine assignment algorithm for cellular manufacturing with machine capacity constraints. *Computers & Industrial Engineering*, 35 (3-4), 483-486. [https://doi.org/10.1016/S0360-8352\(98\)00139-9](https://doi.org/10.1016/S0360-8352(98)00139-9).
- [40] Ahkioon S., Bulgak A. A., Bektas T. (2009). Cellular manufacturing systems design with routing flexibility, machine procurement, production planning and dynamic system reconfiguration. *International Journal of Production Research*, 47 (6), 1573-1600. <https://doi.org/10.1080/00207540701581809>.
- [41] Zhang R., Zhang L., Xiao Y., Kaku I. (2012). The activity-based aggregate production planning with capacity expansion in manufacturing systems. *Computers & Industrial Engineering*, 62 (2), 491-503. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2011.10.016>.



- [42] Sayadi M., Hafezalkotob A., Naini S. G. J. (2013). Firefly-inspired algorithm for discrete optimization problems: An application to manufacturing cell formation. *Journal of Manufacturing Systems*, 32 (1), 78-84. <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2012.06.004>.
- [43] Saidi-Mehrabad M., Paydar M. M., Aalaei A. (2013). Production planning and worker training in dynamic manufacturing systems. *Journal of Manufacturing Systems*, 32 (2), 308-314. <https://doi.org/10.1016/j.jmsy.2012.12.007>.
- [44] King J. R. (1980). Machine-component grouping in production flow analysis: an approach using a rank order clustering algorithm. *International Journal of Production Research*, 18 (2), 213-232. <https://doi.org/10.1080/00207548008919662>.
- [45] Malavé C. O., Ramachandran S. (1991). Neural network-based design of cellular manufacturing systems. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 2, 305-314. <https://doi.org/10.1007/BF01471178>.
- [46] Malavé C. O., Ramachandran S. (1992). A self-organizing neural network approach for the design of cellular manufacturing systems. *Journal of Intelligent Manufacturing*, 3, 325-332. <https://doi.org/10.1007/BF01577273>.
- [47] Chandrasekharan M. P., Rajagopalan R. (1993). A multidimensional scaling algorithm for group layout in cellular manufacturing. *International Journal of Production Economics*, 32 (1), 65-76. [https://doi.org/10.1016/0925-5273\(93\)90008-9](https://doi.org/10.1016/0925-5273(93)90008-9).
- [48] Tavakkoli-Moghaddam R., Gholipour-Kanani Y., Cheraghizadeh R. (2008). A genetic algorithm and memetic algorithm to sequencing and scheduling of cellular manufacturing systems. *International Journal of Management Science and Engineering Management*, 3 (2), 119-130. <https://doi.org/10.1080/17509653.2008.10671040>.
- [49] Ghezavati V. R., Saidi-Mehrabad M. (2010). Designing integrated cellular manufacturing systems with scheduling considering stochastic processing time. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 48, 701-717. <https://doi.org/10.1007/s00170-009-2322-2>.
- [50] Goli A., Tirkolaee E. B., Aydin N. S. (2021). Fuzzy Integrated Cell Formation and Production Scheduling Considering Automated Guided Vehicles and Human Factors. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 29 (12). <https://doi.org/10.1109/TFUZZ.2021.3053838>.

- [51] Feng Y., Li G., Sethi S. P. (2018). A three-layer chromosome genetic algorithm for multi-cell scheduling with flexible routes and machine sharing. *International Journal of Production Economics*, 196, 269-283. <https://doi.org/10.1016/j.ijpe.2017.12.003>.
- [52] Neufeld J. S., Teucher F. F., Buscher U. (2019). Scheduling flowline manufacturing cells with intercellular moves: non-permutation schedules and material flows in the cell scheduling problem. *International Journal of Production Research*, 58 (21), 6568-6584. <https://doi.org/10.1080/00207543.2019.1683251>.
- [53] Wu X., Chu C., Wang Y., Yue D. (2007). Genetic algorithms for integrating cell formation with machine layout and scheduling. *Computers & Industrial Engineering*, 53 (2), 277-289. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2007.06.021>.
- [54] Arkat J., Farahani M. H., Ahmadizar F. (2011). Multi-objective genetic algorithm for cell formation problem considering cellular layout and operations scheduling. *International Journal of Computer Integrated Manufacturing*, 25 (7), 625-635. <https://doi.org/10.1080/0951192X.2012.665182>.
- [55] Arkat J., Farahani M. H. (2012). Integrating cell formation with cellular layout and operations scheduling. *The International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, 61, 637-647. <https://doi.org/10.1007/s00170-011-3733-4>.
- [56] Rahimi V., Arkat J., Farughi. (2020). A vibration damping optimization algorithm for the integrated problem of cell formation, cellular scheduling, and intercellular layout. *Computers & Industrial Engineering*, 143. <https://doi.org/10.1016/j.cie.2020.106439>.
- [57] Prater T., Werkheiser N, Ledbetter F., Wilkerson M., Soohoo H. (2017). NASA's In-Space Manufacturing Project: Materials and Manufacturing Process Development Update. *National Space and Missile Materials Symposium*. <https://ntrs.nasa.gov/citations/20170008145>.
- [58] Prater T., Werkheiser N, Ledbetter F., Morgan K. (2018). In-Space Manufacturing(ISM) at NASA Marshall Space Flight Center. *AIAA SPACE Conference*. <https://ntrs.nasa.gov/citations/20180006405/downloads/20180006405.pdf>.

# ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1: ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

Παρακάτω παρατίθενται οι συντομογραφίες που εμφανίζονται στο κύριο σώμα της εργασίας:

## ΑΓΓΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ

- (ACO): Ant Colony Optimization
- (AHP): Analytical Hierarchy Process
- (ALO): Ant Lion Optimizer
- (B&B): Branch and Bound
- (BDA): Benders' Decomposition Approach
- (CF): Cell Formation
- (CM): Cellular Manufacturing
- (CMS): Cellular Manufacturing System
- (DSS): Decision Support System
- (GA): Genetic Algorithm
- (GL): Group Layout
- (GS): Group Scheduling
- (GT): Group Technology
- (HGA): Hierarchical Genetic Algorithm
- (MA): Memetic Algorithm
- (MDDH): Modified Directional Decomposition Heuristic
- (MDS): Multi-Dimensional Scaling
- (MILP): Mixed Integer Linear Programming
- (MOGA): Multi-Objective Genetic Algorithm
- (MOGGA): Multi-Objective Grouping Genetic Algorithm
- (QAP): Quadratic Assignment Problem
- (QTP): Quadratic Transportation Problem
- (ROC): Rank Order Clustering
- (SA): Simulated Annealing
- (TCGA): Three-layer Chromosome Genetic Algorithm
- (TS): Tabu Search
- (VNS): Variable Neighborhood Search

(WIP): Work in Progress

## **ΕΛΛΗΝΙΚΕΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΕΣ**

(ΣΠΒΚ): Σύστημα Παραγωγής σε Βιομηχανικά Κελιά

(ΣΠΜΚ): Σύστημα Παραγωγής σε Μεταμορφωτικά Κελιά

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2: ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3

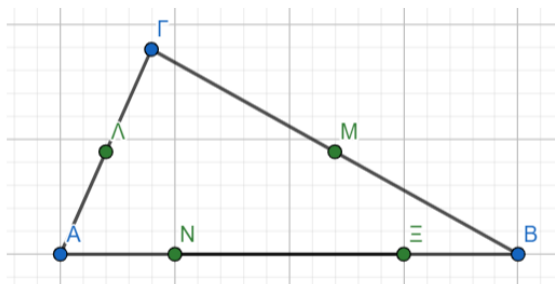
Παρουσιάζεται το Θεώρημα 5.3 το οποίο είναι εννοιολογικά συμπληρωματικό του Θεωρήματος 5.2 που έχει περιγραφεί στο κύριο σώμα της εργασίας και περιγράφει τον μετασχηματισμό ενός τριγώνου σε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο, όταν πραγματοποιούνται οι κατάλληλες τομές στο αρχικό σχήμα.

### ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3 (Ορθογωνική Μεταμόρφωση Τριγώνου)

Έστω ότι έχουμε ένα τυχαίο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\Lambda, M, N, \Xi$  να είναι περιμετρικά σημεία, με τα  $N, \Xi$  να ανήκουν στην ίδια πλευρά του τριγώνου και τα  $\Lambda, M$  να είναι τα μέσα των άλλων δύο εκ των τριών πλευρών του τριγώνου τότε τα εσωτερικά δημιουργημένα σχήματα του τριγώνου μπορούν να μετατοπιστούν και να δημιουργήσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ίσου εμβαδού, αν για τις εσωτερικές τομές του σχήματος ισχύουν τα παρακάτω:

- α) Το ευθύγραμμο τμήμα ( $N\Xi$ ) έχει μήκος ίσο με το ήμισυ του μήκους της πλευράς που ανήκουν τα σημεία της αρχής και του πέρατος του.
- β) Σχεδιάσουμε ευθύγραμμο τμήμα που έχει αρχή το ένα εκ των σημείων  $\Lambda, M$  και πέρας ένα εκ των σημείων  $N, \Xi$ , υπό την συνθήκη ότι τα δύο υπολειπόμενα περιμετρικά σημεία πρέπει να βρίσκονται εκατέρωθεν του ευθύγραμμου τμήματος που σχεδιάζουμε. Αυτό το ευθύγραμμο τμήμα θα αποκαλείται ως βασική εσωτερική τομή.
- γ) Σχεδιάσουμε ευθύγραμμο τμήμα με αρχή ένα σημείο εκ των  $N, \Xi$ , το οποίο δεν αποτελεί σημείο της βασικής εσωτερικής τομής, και πέρας την προβολή του αρχικού σημείου στην βασική εσωτερική τομή.
- δ) Σχεδιάσουμε ευθύγραμμο τμήμα με αρχή το αμέτοχο, στις προαναφερθείσες τομές, περιμετρικό σημείο και πέρας την προβολή αυτού του σημείου στην βασική εσωτερική τομή.

### ΑΠΟΔΕΙΞΗ 5.3

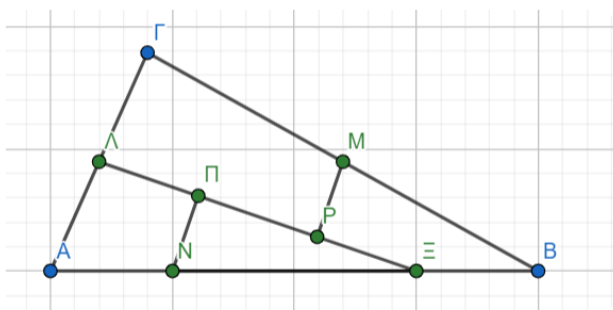


Έστω ότι έχουμε ένα τυχαίο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\Lambda, M, N, \Xi$  να είναι περιμετρικά σημεία, με τα  $N, \Xi$  να ανήκουν στην ίδια πλευρά του τριγώνου και τα  $\Lambda, M$  να είναι τα μέσα των άλλων δύο εκ των τριών πλευρών του τριγώνου.

Επομένως ισχύουν:

- $(N\Xi) = \frac{(AB)}{2} \dots (1)$
- $(A\Lambda) = \frac{(A\Gamma)}{2} \dots (2)$
- $(M\Gamma) = \frac{(M\Gamma)}{2} \dots (3)$

Στην συνέχεια σχεδιάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα που θα έχει αρχή το σημείο  $\Lambda$  και πέρας το σημείο  $\Xi$  και θα το ονομάσουμε βασική εσωτερική τομή. Με αυτόν τον τρόπο εκατέρωθεν του  $(\Lambda\Xi)$  βρίσκονται τα σημεία  $N, M$ .

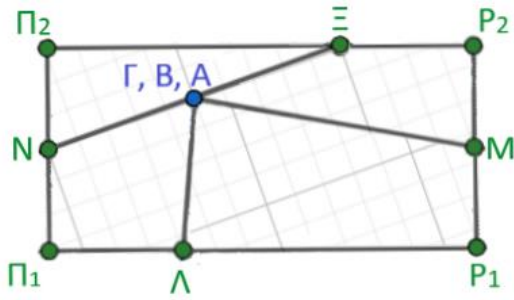


Έπειτα, σχεδιάζουμε τα ευθύγραμμα τμήματα, τα οποία έχουν ως αρχή τα σημεία  $N$  και  $M$  και πέρας τις αντίστοιχες προβολές των σημείων αυτών στο ευθύγραμμο τμήμα  $(\Lambda\Xi)$ .

Αν θεωρήσουμε ότι περιστρέφουμε το σχήμα  $(\Lambda AN\Pi)$  γύρω από το σημείο  $\Lambda$  έως ότου να εφάπτονται τα ευθύγραμμα τμήματα  $(\Lambda\Gamma)$  και  $(A\Lambda)$ , το σχήμα  $(M\beta\epsilon P)$  γύρω από το σημείο  $M$  έως ότου να εφάπτονται τα ευθύγραμμα τμήματα  $(\Gamma M)$  και  $(M\beta)$  και μεταφέρουμε το τρίγωνο  $(\Pi\epsilon N)$  στην θέση κατά την οποία το ευθύγραμμο τμήμα  $(N\epsilon)$  να εφάπτεται με τα ευθύγραμμα τμήματα  $(AN)$  και  $(\epsilon B)$ . Το νέο σχήμα που δημιουργείται παρουσιάζεται παρακάτω.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ 5.3 →

(ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΑΠΟΔΕΙΞΗΣ 5.3)



Το νέο σχήμα είναι τετράπλευρο, διότι:  
○ Τα σημεία  $\Pi_1$ ,  $\Lambda$ ,  $P_1$  είναι συνευθειακά, λόγω ότι οι γωνίες  $\angle \Pi_1 \Lambda A$  και  $\angle P_1 \Lambda A$  είναι παραπληρωματικές. Ομοίως, τα σημεία  $\Pi_1$ ,  $N$ ,  $\Pi_2$  και  $\Pi_2$ ,  $\Xi$ ,  $P_2$  και

$P_2$ ,  $M$ ,  $P_1$  είναι συνευθειακά ανά τριάδες γιατί ισχύει η ίδια συνθήκη παραπληρωματικότητας για τις αντίστοιχες γωνίες. Επιπλέον, τα  $\Pi_1$ ,  $N$ ,  $\Pi_2$  και  $\Pi_2$ ,  $\Xi$ ,  $P_2$  είναι συνευθειακά ανά τρία, λόγω της συνθήκης παραπληρωματικότητας των αντίστοιχων γωνιών, και επειδή ισχύει η συνθήκη (1), η οποία επιβάλλει να εφάπτεται επακριβώς το  $(N\Xi)$  με τα  $(AN)$  και  $(\Xi B)$ .

Το τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο, διότι:

- Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες, αφού οι γωνίες του τετράπλευρου δημιουργήθηκαν από τον σχεδιασμό των προβολών των αντίστοιχων σημείων του τριγώνου.

Τέλος, το παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο, διότι:

- Έχει όλες τις γωνίες του ίσες, εξαιτίας πάλι της σχεδίασης των προβολών των αντίστοιχων σημείων του τριγώνου.

Επομένως, τα εσωτερικά δημιουργημένα σχήματα του τριγώνου μπορούν να μετατοπιστούν και να δημιουργήσουν ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ίσου εμβαδού, αν οι τομές ακολουθούν τις αρχές που περιγράψαμε. ■





