Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο   Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ
Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΥΣΗ

ΓΕΩΡΓΙΟΣ Α. ΑΝΑΓΝΩΣΤΑΡΑΣ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

ΠΕΙΡΑΙΑΣ,

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2022

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- ΕυστάθιοςΧατζηκωνσταντινίδης,Αναπληρωτής Καθηγητής(Επιβλέπων)

-Γ.Βερροπούλου,Καθηγήτρια

-Γ. Τζαβελάς, Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

U N I V E R S I T Y O F P I R A E U S

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUADE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

STOCHASTIC MODELS IN RISK THEORY WITH DEPENDENCE AND PERTUBATION

MSc Dissertation Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus,Greece
SEPTEMBER 2022

Στους γονείς μου,
Αντώνη και Μαρία
για την δύναμη,την υπομονή
και το θάρρος.

Ευχαριστίες

Με το πέρας της παρούσας διπλωματίκης εργασίας δράττομαι της ευκαρίας να ευχαριστήσω θερμά τον καθηγητή μου κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη,Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστήμιου Πειραιώς και διευθυντή του ΠΜΣ «ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ» ο οποίος υπήρξε πέραν από επιβλέπων Καθηγητής αυτής της εργασίας, μέντοράς μου από τα Προπτυχιακά μου χρόνια.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη

Στη θεωρία χρεοκοπίας, για πόλλα χρόνια, ήταν σύνηθες για την μοντελοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας του πλεονάσματος να χρησιμοποίειται το μοντέλο Cramer-Lundberg (κλασσικό μοντέλο) ή το ανανεωτικό μοντέλο (μοντέλο Sparre-Andersen).Απαραίτητη προϋπόθεση για την χρήση των παραπάνω μοντέλων είναι η ύπαρξη ανεξαρτησίας μεταξύ του ύψους των ζημιών (ατομικών απαιτήσεων) και των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης ζημιογόνων ενδεχομένων.Στην πραγματικότητα όμως κάτι τέτειο δεν υφίσταται πάντα, έτσι τα τελευταία χρόνια η έρευνα έχει επικεντρωθεί στη μελέτη και ανάπτυξη μοντέλων με εξάρτηση.Στην παρούσα διπλωματική θα αναπτυχθεί ένα μοντέλο στο οποίο η κατανομή του χρόνου μέχρι την επόμενη απαίτηση εξαρτάται από το ύψος της προηγούμενης απαίτησης, δηλαδή η κατανομή του ενδιάμεσου χρόνου μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων εξαρτάται από το ύψος της απαίτησης που προηγείται χρονικά.Στα πρώτα δύο κεφάλαια παρουσιάζοντε βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών, της θεωρίας χρεοκοπίας κάθως και χρήσιμες έννοιες για τα επόμενα κεφάλαια.Στο τρίτο κεφάλαιο εισάγεται ένα μοντέλο με την παραπάνω δομή εξάρτησης ενώ αναπτύσεται για το μοντέλο αυτό η γενικευμένη εξίσωση Lundberg καθώς και η συνάρτηση των Gerber-Shiu αλλά και χρήσιμες ποσότητες όπως ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,ενώ παρατίθενται και αριθμητικά παραδείγματα. Στο τέταρτο κεφάλαιο στο μοντέλο με εξάρτηση εισάγεται ένας όρος διάχυσης και η εργασία επικεντρώνεται στην εξίσωση Lundberg, στη συνάρτηση Gerber-Shiu (με σκοπό την εξαγωγή μέτρων χρεοκοπίας) στο μετασχηματισμό Laplace για το χρόνο χρεοκοπίας (όπως και στο τρίτο κεφάλαιο) αλλά και στην μελέτη ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων για το συγκεκριμένο μοντέλο. Στο πέμπτο κεφάλαιο εισάγεται και αναλύεται ένα δυϊκό μοντέλο με εξάρτηση αλλά και παράγοντα διάχυσης και παρουσιάζεται ο μετασχηματισμός Laplace για τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Abstract

In ruin theory, for many years, it was a common practice for modeling the stochastic process of surplus to use the Cramer-Lundberg model (classic model) or the renewal model (Sparre-Andersen model). For the aforementioned, it was necessary the independence hypothesis between the amount of the claims and the intermediate times of two successively claims. The reality is different, so in recent years the research has focused in finding and developing models with dependence structure. In this thesis, we will focus in a model, whose distribution of time until the next claim depends on the amount of the previous claim, more specifically the distribution of the intermediate time between two successively claims depends on the amount of the claim that precedes in time. In the first two chapters, basic results of the stochastic process theory, ruin theory and necessary information for the following chapters are presented. In the third chapter, a model with a dependence structure is presented. We analyze the generalized Lundbergs' equation, the Gerber-Shiu function, and the important results such as the Laplace transform of the time at ruin, examples are given in order to illustrate this structure. In the fourth chapter in the model with the dependence structure with add a diffusion factor and we focus on the Lundbergs' equation, the Gerber-Shiu function (in order to extract ruin measures such as the probability of ruin or the surplus at the exact time before the ruin) and some integrodifferential equations for this specific model. In the fifth chapter , a dual model with a dependence structure is introduced and analyzed. Further discussion for the Laplace transform of the time at ruin is given.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

1.1 Η στοχαστική διαδικασία του αριθμού των κινδύνων

Προκειμένου να μοντελοποιηθεί αλλά και να μπορέσει να μελετηθεί ένα χαρτοφυλάκιο ενός ασφαλιστικού οργανισμού ως προς το πλεόνασμα αλλά και τα διάφορα μέτρα κινδύνου είναι απαραίτητη η χρήση των στοχαστικών διαδικασιών (ανελίξεων) καθώς πρέπει να λάβουμε υπόψη την τυχαία εξέλιξη φαινομένων στο χρόνο.

Ορισμός 1.1 *Στοχαστική διαδικασία (ή ανέλιξη) είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών* $\{X(t): t \in T\}$*.Το σύνολο* T *καλείται σύνολο δεικτών της ανέλιξης και το σύνολο των τιμών* I *των τυχαίων μεταβλητών* $\{X(t): t \in T\}$ *καλείται χώρος καταστάσεων της στοχαστικής ανέλιξης. Συνήθως το t συμβολίζει χρόνο.*

Ορισμός 1.2 *Μια στοχαστική διαδικασία* $\{N(t), t \geq 0\}$*ονομάζεται απαριθμήτρια διαδικασία αν και μόνο αν*

$i.N(t) > 0$ *με* $N(0) = 0$

$ii.$ $N(t)$ *είναι διακριτή*

$iii.$ *Αν* $s \leq t$ *τότε* $N(s) \leq N(t)$.

1.2 Η στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων

Μια πολύ σημαντική διαδικασία για ένα χαρτοφυλάκιο ενός ασφαλιστικού οργανισμού είναι η μοντελοποίηση του ύψους των συνολικών αποζημιώσεων,προκειμένου η εταιρεία να παρακολουθεί την εξέλιξη των συνολικών ζημιών και να μπορεί να καταβάλλει τις απαιτούμενες αποζημιώσεις στους δικαιούχους κατά την έλευση ζημιογόνων ενδεχομένων.Οι συνολικές αποζημιώσεις που εμφανίζονται εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος εξαρτώνται από :

$i.$Το πλήθος των κινδύνων

$ii.$Το ύψος των απαιτήσεων

ενώ η στοχαστική διαδικασία μέσω της οποίας καταβάλλονται στον χρόνο t στο εξής θα συμβολίζεται με $\mathrm{S(t)}$.

Έστω $\{\mathrm{W_n}, \mathrm{n} \geq 1\}$ μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών που εκφράζει τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων και $\mathrm{T_n}$ ο χρόνος εμφάνισης του n-οστού ζημιογόνου ενδεχομένου για τον οποίο ισχύει,

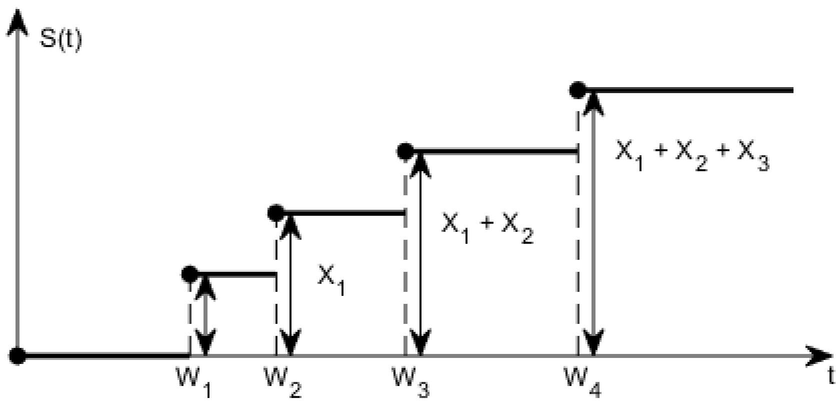
$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i.$$

Επίσης ορίζεται ως, $N(t) = sup\{n: T_n < t\}$η στοχαστική διαδικασία του πλήθους των ζημιογόνων ενδεχομένων που εμφανίζονται στο χρονικό διάστημα $[0, t]$.

Ορισμός 1.3 *Για το ύψος των συνολικών απαιτήσεων που καταβάλλονται έως το χρόνο* t, *ορίζεται η παρακάτω στοχαστική διαδικασία*

$$S(t) = X_1 + X_2 + \ldots + X_{N(t)} \text{ ή } S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i , & N(t) > 0 \\ 0 , & N(t) = 0 \end{cases}$$

όπου $\{X_n, n \geq 1\}$ *και* $\{W_n , n \geq 1\}$ *ανεξάρτητες ακολουθίες οι οποίες αποτελούνται από ανεξάρτητες και ισόνομες θετικά ορισμένες τυχαίες μεταβλητές.*



Σχ.1.1: Η στοχαστική διαδικασία αποζημιώσεων S(t).

Στο γράφημα της S(t) απεικονίζεται μια δυνατή εξέλιξη τιμών της διαδικασίας των συνολικών αποζημιώσεων. Έτσι η δειγματοσυνάρτηση S(t) είναι μια δεξιά συνεχής κλιμακωτή συνάρτηση. Τα σημεία ασυνέχειας (σημεία στα οποία εμφανίζονται άλματα) είναι τα σημεία όπου εμφανίζονται οι απαιτήσεις και το ύψος των αλμάτων αντιστοιχεί στο ύψος της εκάστοτε αποζημίωσης. Τα οριζόντια μήκη αντιστοιχούν στους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης διαδοχικών απαιτήσεων.

1.3 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Οι ασφαλιστικοί οργανισμοί για τα διάφορα χαρτοφυλάκια που έχουν υπό την κατοχή τους , οφείλουν βάση νόμου να έχουν τα αντίστοιχα πλεονάσματα, κατά τη χρονική στιγμή t=0 (έναρξη κύκλου εργασιών), προκειμένου να μπορούν να ανταποκρίνονται στις υποχρεώσεις τους. Έστω , $u = U(0)$το αρχικό κεφάλαιο ή αρχικό αποθεματικό, P(t) η συνάρτηση που δηλώνει το σύνολο των ασφαλίστρων που καταβάλλονται στην εταιρεία κατά το χρονικό διάστημα [0,t], c το ασφάλιστρο που εισπράττει η εταιρεία στην μονάδα του χρόνου και S(t) είναι η στοχαστική διαδικασία για το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων.
Συνεπώς για τα συνολικά ασφάλιστρα ισχύει ότι:

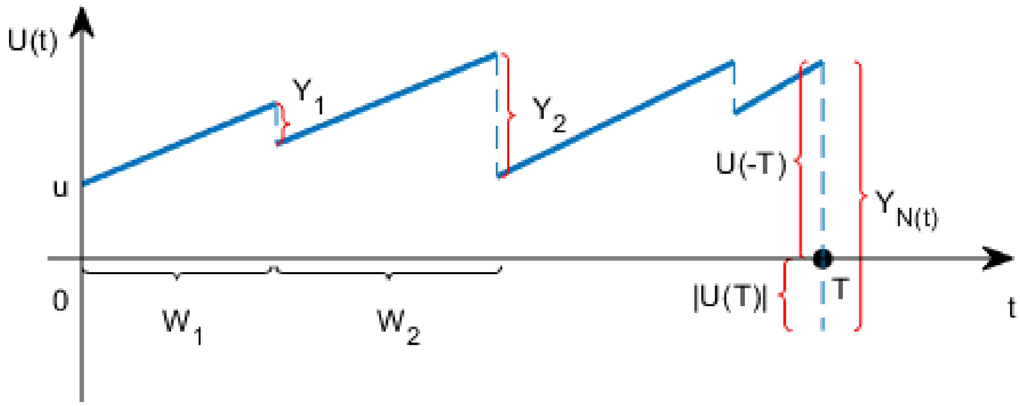
$$P(t) = ct.$$

Ορισμός 1.4 *Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος* $\{U(t): t \geq 0\}$ *ορίζεται από την παρακάτω σχέση*

$$U(t) = u + P(t) - S(t), \qquad (1.1)$$

όπου U(t) το πλεόνασμα ή αποθεματικό τη χρονική στιγμή t.

Σημαίνοντα ρόλο κατά τη μελέτη της χρεοκοπίας, διαδραματίζουν οι τυχαίες μεταβλητές U(T-) και |U(T)| οι οποίες αφορούν το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας αντίστοιχα.



Σχ.1.2: Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος U(t).

Οι δειγματοσυναρτήσεις της U(T) εμφανίζουν άλματα προς τα κάτω τις χρονικές στιγμές επέλευσης των ζημιογόνων ενδεχομένων $(W_1, W_2, W_3, \dots)$, ίδιου μεγέθους με τα αντίστοιχα προς τα πάνω της $S(t)$.

Συνεπώς, μεταξύ δύο διαδοχικών χρονικών στιγμών (W_i, W_{i+1}) η δειγματοσυναρτηση $U(t)$ είναι ευθύγραμμο τμήμα με συντελεστή διεύθυνσης c, ενώ η $S(t)$ είναι κλιμακωτή (σταθερή τιμή σε κάθε διάστημα).

Σε περίπτωση που επέλθει χρεοκοπία από κάποια απαίτηση, έστω $X_{N(t)}$,το ύψος αυτής δίνεται από τη σχέση $|U(T)| + U(T-)$.

Σε αυτό το σημείο σημειώνεται πως η $U(t)$ (διαδικασία πλεονάσματος) ενδέχεται να σημειώσει και πτώση κάτω του μηδέν κατά την έλευση κάποιου ζημιογόνου ενδεχομένου, δηλαδή σε κάποια χρονική στιγμή W_i.

Το ενδεχόμενο αυτό ονομάζεται πιθανότητα χρεοκοπίας και με αυτή θα ασχοληθούμε εκτενέστερα παρακάτω.

1.4 Μέτρα χρεοκοπίας

Για την καλύτερη κατανόηση των μοντέλων χρεοκοπίας που θα μελετηθούν παρακάτω είναι χρήσιμο στο σημείο αυτό να οριστούν δύο βασικά μέτρα χρεοκοπίας, ο χρόνος χρεοκοπίας και η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ορισμός 1.5(Χρόνος Χρεοκοπίας) *Για $t \geq 0$ ορίζουμε,*

$$T = inf\{t \geq 0: U(t) < 0\} \text{ με } inf\ \emptyset = \infty \quad (1.2)$$

το χρόνο κατά τον οποίο η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται για πρώτη φορά αρνητική.

Προτού οριστεί η πιθανότητα χρεοκοπίας πρέπει να είναι σαφές πως με την μαθηματική χρεοκοπία δεν συνεπάγεται και πραγματική χρεοκοπία καθώς η πρώτη αφορά την στιγμή (στιγμιαία) κατά την οποία η διαδικασία πλεονάσματος γίνεται αρνητική ενώ στην πράξη οι ασφαλιστικοί οργανισμοί έχουν και άλλα έσοδα και η καταβολή αποζημιώσεων δεν είναι ένα στιγμιαίο γεγονός. Η κλασσική θεωρία κινδύνων επικεντρώνεται στην μελέτη της χρεοκοπίας που προκύπτει εξαιτίας των αποζημιώσεων και δεν μελετά την χρεοκοπία που προκύπτει λόγω κάποιας άλλης αιτίας. Μέσω της πιθανότητας χρεοκοπίας η ασφαλιστική εταιρεία μπορεί να υπολογίσει το κατάλληλο αρχικό αποθεματικό, το κατάλληλο ασφάλιστρο c και να προβεί σε όποιες ενέργειες κρίνει αναγκαίες (αύξηση περιθωρίου ασφαλείας ή αύξηση αρχικού αποθέματος) ώστε η διαδικασία πλεονάσματος να παραμένει θετική ($\mathrm{U(t)} > 0$).

Ορισμός 1.6 (Πιθανότητα Χρεοκοπίας) *Για $u \geq 0$ και πεπερασμένο χρόνο χρεοκοπίας $T < \infty$, ορίζεται η παρακάτω σχέση για την πιθανότητα χρεοκοπίας*

$$\psi(u) := P_r\,(T < \infty | U(0) = u) = P_r(U(T) < 0 | U(0) = u)\ , t \geq 0 \quad (1.3).$$

Ορισμός 1.7 (Πιθανότητα Μη Χρεοκοπίας) *Για $u \geq 0$ και πεπερασμένο χρόνο χρεοκοπίας $T < \infty$ ορίζεται η παρακάτω σχέση για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας*

$$\delta(u) = P_r\,(T < \infty | U(0) = 0) = P_r\ (U(t) \geq 0 | U(0) = u)\ \ , t \geq 0 \quad (1.4)\,.$$

1.5 Το μοντέλο Cramer-Lundberg (Κλασσικό μοντέλο)

Το 1903 με την δημοσίευση της διδακτορικής του διατριβής ο Lundberg έβαλε τα θεμέλια για την ανάπτυξη της θεωρίας κινδύνου.Το 1930 ο Cramer ενσωμάτωσε στην διδακτορική διατριβή του Lundberg τη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών και έτσι δημιουργήθηκε το μοντέλο Cramer-Lundberg-το πρώτο μοντέλο που περιγράφει την δυναμική εξέλιξη του πλεονάσματος συναρτήσει του χρόνου.

Το κλασσικό μοντέλο ουσιαστικά αφορά τα έσοδα (ασφάλιστρα) μιας ασφαλιστικής τα οποία εισρέουν με σταθερό ρυθμό c και τις απαιτήσεις (έξοδα) το πλήθος των οποίων περιγράφεται από μια στοχαστική διαδικασία Poisson $N(t)$ με παράμετρο λ, με πιθανότητα εμφάνισης ενός ενδεχομένου εντός ενός διαστήματος να είναι ανάλογη του μήκους του διαστήματος αυτού με

$$P_r(N(t) = n) = \frac{e^{-\lambda\chi}\,(\lambda t)}{n!}\ \ , x, \lambda > 0$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές $X_1\,, X_2, X_3, \ldots$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες ενώ οι $X_1\,, X_2, X_3, \ldots$ και $N(t)$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Οι χρόνοι που μεσολαβούν μεταξύ της εμφάνισης των απαιτήσεων (ενδιάμεσοι χρόνοι) είναι εκθετικά κατανεμημένοι, δηλαδή για τις τυχαίες μεταβλητές $\{W_n, n \geq 1\}$ ισχύει ότι:

$$W \sim Exp(\lambda)$$

με συνάρτηση κατανομής,

$$P_r\ (W \leq x) = 1 - e^{-\lambda\chi}\,, για\ \chi, \lambda > 0.$$

Στο κλασσικό μοντέλο θεωρούμε πως τα ασφάλιστρα που εισπράττονται από τους ασφαλισμένους είναι η μοναδική πηγή εσόδων για την ασφαλιστική εταιρεία και καταβάλλονται με σταθερό ρυθμό c ενώ η στοχαστική διαδικασία εσόδων P(t) αφορά τα ασφάλιστρα (ct) που εισπράττονται στο χρονικό διάστημα [0,t].Ακόμα θεωρούμε πάντα πως τα ασφάλιστρα που εισπράττονται στο χρονικό διάστημα [0,t] καλύπτουν πλήρως τις αναμενόμενες συνολικές ζημιές δηλαδή ικανοποιείται η παρακάτω συνθήκη $ct > E(S)$ και αφού $E(S) = E(N)E(X)$ και στο κλασσικό μοντέλο $N \sim P(\lambda t)$ προκύπτει η σχέση $ct > \lambda t E(X) \rightarrow c > \lambda E(X)$.
Από την τελευταία συνθήκη προκύπτει πως τα έσοδα πρέπει να υπερβαίνουν τα έξοδα κατά μέσο όρο στη μονάδα του χρόνου, πολλές φορές αναφέρεται και σαν συνθήκη καθαρού κέρδους (net profit).

Ορισμός 1.8 *Για $t > 0$ και αρχικό κεφάλαιο $u(0) = u$ ορίζουμε την παρακάτω σχέση για την πιθανότητα χρεοκοπίας*

$$\psi(u) = P_r[\,U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0 | U(0) = 0] \quad (1.5).$$

Συχνά όταν είναι σαφές πως η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι συνάρτηση του αρχικού αποθεματικού (αρχικού κεφαλαίου) η δέσμευση παραλείπεται και γράφουμε

$$\psi(u) = P_r[\,U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0].$$

Ομοίως ορίζουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας.

Ορισμός 1.9 *Για $t > 0$ και αρχικό κεφάλαιο $u(0) = u$ ορίζουμε την παρακάτω σχέση για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας*

$$\delta(u) = P_r[\,U(t) > 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0 | U(0) = 0] \quad (1.6)$$

ή απλούστερα $\delta(u) = P_r[\,U(t) > 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0]$.

Προφανώς $\delta(u) = 1 - \psi(u)$.

Παρακάτω αποδεικνύονται δύο ολοκληρό-διαφορικές εξισώσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας και την πιθανότητα μη χρεοκοπίας αντίστοιχα.

Πρόταση 1.1 *Υπό το κλασσικό μοντέλο(Cramer-Lundberg) οι πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi(u)$ και μη χρεοκοπίας $\delta(u)$ ικανοποιούν τις παρακάτω ολοκληρο-διαφορικές εξισώσεις αντίστοιχα*

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-\chi)\, f(x)dx - \frac{\lambda}{c}\ \bar{F}(u), u \geq 0 \quad (1.7)\,,$$

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\ \delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x) f(x)dx \ \ u \geq 0 \qquad (1.8)$$

Απόδειξη*Αν η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος έχει την ανανεωτική ιδιότητα τότε η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u)$,μπορεί να εκφρασθεί ως η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας όταν επέλθει το πρώτο ζημιογόνο ενδεχόμενο και μη-χρεοκοπίας στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψιν το πλεόνασμα που απομένει μετά το 1ο ζημιογόνο ενδεχόμενο.*
Έστω t η χρονική στιγμή εμφάνισης του πρώτου ζημιογόνου ενδεχομένου, και X το ύψος της αντίστοιχης αποζημίωσης. Για να μην συμβεί χρεοκοπία θα πρέπει να μην συμβεί χρεοκοπία από το πρώτο ζημιογόνο ενδεχόμενο (δηλαδή το πλεόνασμα $u + ct$ τη χρονική στιγμή t πρέπει να είναι

μεγαλύτερο του X).Έπειτα θέλουμε να μη συμβεί χρεοκοπία όταν η διαδικασία πλεονάσματος ξεκινά με αρχικό αποθεματικό $u + ct - x$.
Επομένως από νόμο ολικής πιθανότητας έπεται ότι,

$$\delta(u) = \int_0^\infty f_T(t)(\int_0^{u+ct} \delta(u + ct - x)f(x)dx)\, dt \quad (1.9)$$

όπου η $f_T(t)$ είναι η πυκνότητα των ενδιάμεσων χρόνων και αφού στο κλασσικό μοντέλο η διαδικασία αποζημιώσεων είναι μια σύνθετη Poisson, είναι

$$f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t} \text{ άρα η (1.9) γίνεται,}$$

$$\delta(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}[\int_0^{u+ct} \delta(u + ct - x)f(x)dx]\, dt \quad (1.10).$$

Θέτοντας στην άνω σχέση $u + ct = s \rightarrow cdt = ds \rightarrow dt = \frac{1}{c}ds$ και άκρα ολοκλήρωσης $0 \le t \le \infty \rightarrow u \le s \le \infty$ προκύπτει

$$\delta(u) = \int_u^\infty \lambda\, e^{-\lambda\,(\frac{s-u}{c})} \int_0^s \delta(s - x)f(x)dx \frac{1}{c} ds$$

$$= \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)}[\int_0^s \delta(s - x)f(x)dx]ds \quad (1.11).$$

Για την παραγώγιση της (1.11) ως προς u θα χρησιμοποιήσω τον παρακάτω κανόνα του Leibnitz που αφορά την παραγώγιση υπό ολοκλήρωμα.

$$\frac{d}{du}\int_{\varphi_{1(u)}}^{\varphi_{2(u)}} g(u,s)ds = g\big(u, \varphi_2(u)\big)\varphi_2'(u) - g\big(u, \varphi_1(u)\big)\varphi_1'(u) + \int_{\varphi_{1(u)}}^{\varphi_{2(u)}} \frac{dg(u,s)}{du} ds \quad (1.12)$$

Παρατηρούμε ότι η (1.11) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$\delta(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty g(u,s)ds \text{ όπου } g(u,s) = e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)}\int_0^s \delta(s - x)f(x)dx$$

με $\varphi_{1(u)} = u$, $\varphi_{2(u)} = \infty$,
επομένως, $\varphi_{1(u)} = 1$, $\varphi_{2(u)} = 0$ και με αντικατάσταση οι ποσότητες της (1.12) γίνονται

$$g\big(u, \varphi_2(u)\big)\varphi_2'(u) - g\big(u, \varphi_1(u)\big)\varphi_1'(u) = -g(u,u) = -\int_0^u \delta(u - x)f(x)dx$$

και $$\frac{d\, g\big(u,s\big)}{du} = \frac{\lambda}{c}\ e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)} \int_0^s \delta\big(s - x\big)f\big(x\big)dx.$$

Τελικά, $$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\{-\int_0^u \delta(u - x)f(x)dx + \int_u^\infty \frac{\lambda}{c}\ e^{-\lambda\left(\frac{s-u}{c}\right)}[\int_0^s \delta(s - x)f(x)dx]ds\}$$

$$= -\frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u - x)f(x)dx + \frac{\lambda}{c}\ \delta(u), \text{ λόγω (1.11)}$$

δηλαδή, $$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u - x)f(x)dx\, , u \ge 0 \ (1.13).$$

Επειδή $\delta(u) = 1 - \psi(u) \rightarrow \delta'(u) = -\psi(u)$ για την (1.13)

έπεται ότι , $$-\psi(u) = \frac{\lambda}{c}(1 - \psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u[1 - \psi(u - x)]f(x)dx$$

$$= \frac{\lambda}{c} - \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}F(u) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u - x)f(x)dx,$$

δηλαδή $$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u(u - x)f(x)dx - \frac{\lambda}{c}\bar{F}(u), u \ge 0 \ (1.14)$$

Πρόταση 1.2 *Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας,για την πιθανότητα χρεοκοπίας και την πιθανότητα μη χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό μηδέν ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις αντίστοιχα*

$$\psi(0) = \frac{1}{1+\theta} \ \kappa\alpha\iota \ \delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}.$$

Απόδειξη *Ολοκλήρωνοντας και τα δύο μέλη της* (1.14)
έπεται ότι

$$\int_0^\infty \psi'(s)ds = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_0^s \psi(s-x)\, f(x)dxds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

$$\psi(\infty) - \psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_0^s \psi(s-x)\, f(x)dxds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

$$-\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_0^s \psi(s-x)\, f(x)dxds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds \text{ αφού } \psi(\infty) = 0$$

Με εναλλαγή στη σειρά ολοκλήρωσης,

$$0 \le s \le \infty \to 0 \le x \le \infty$$
$$0 \le x \le \infty \to x \le s \le \infty$$

προκύπτει,

$$-\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \int_x^\infty \psi(s-x) f(x)dsdx - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

$$-\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty f(x)(\int_x^\infty \psi(s-x)ds)\, dx - \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds.$$

Θέτω $s - x = u$ με $ds = du$ και $x \le s \le \infty \to 0 \le s - x \le \infty \to 0 \le u \le \infty$ οπότε προκύπτει,

$$\psi(0) = -\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty f(x)(\int_x^\infty \psi(u)du)\, dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

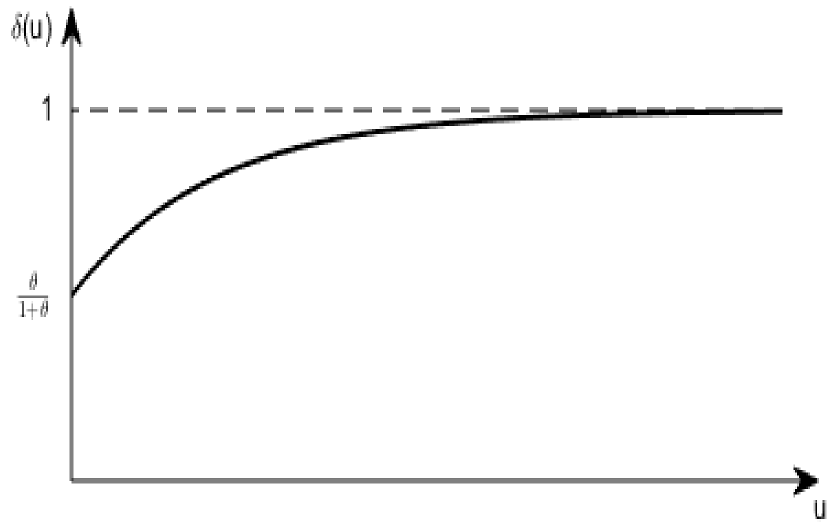
$$= -\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(u)du \int_0^\infty f(x)dx + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

$$= -\frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(u)du + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds$$

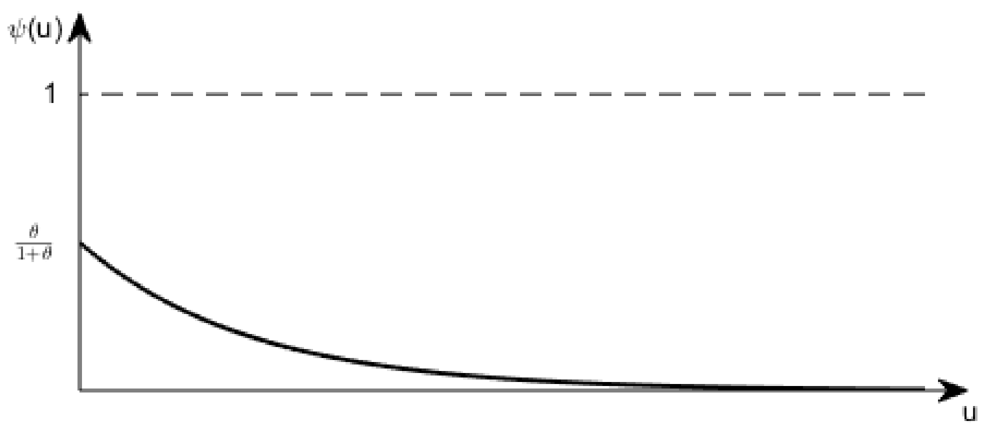
δηλαδή, $\psi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \bar{F}(s)ds \to \psi(0) = \frac{\lambda}{c}E(x)$

ισχύει ότι, $c = (1+\theta)\lambda E(x) \to \frac{\lambda}{c}E(x) = \frac{1}{1+\theta}$.

Τελικά από τα άνω έπεται ότι, $\psi(0)=\frac{1}{1+\theta}$ και $\delta(0)=\frac{\theta}{1+\theta}$ αφού $\psi(0)+\delta(0)=1$.



Σχ:1.3 Πιθανότητα μη χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u αρχικό.



Σχ:1.4: Πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u αρχικό.

Κατανομή Ισορροπίας (Equilibrium Distribution)

Έστω Χ μια συνεχής τυχαία μεταβλητή ορισμένη στο $[0,+\infty)$ με αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F(x)=P_r(X\leq x)$ και συνάρτηση δεξιάς ουράς $\bar{F}(x)=1-F(x)$.Τότε η κατανομή της ισορροπίας της Χ ορίζεται ως:

$$H(x)=F_e(x)=P_r(X_e\leq x)=\frac{\int_0^x \bar{F}(y)dy}{\mu},$$

όπου $\mu=E(\chi)=\int_0^\infty \bar{F}(y)dy=\int_0^\infty xf(x)\,dx$ *το* αναμενόμενο ύψος ζημιάς.

Άρα, $h'(x)=f_e(x)=\frac{\bar{F}(x)}{\mu}$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Επίσης ισχύει η εξής ισότητα, $\overline{H}(x) = \overline{F}_e(x) = P_r(X_e > x) = \frac{\int_x^\infty \overline{F}(y)dy}{\mu}$.

Παρατήρηση 1.1. *Για την κατανομή της ισορροπίας της Χ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις* $H(0) = 0,\ H(\infty) = 1$,*ενώ για την δεξία ουρά της κατανομής ισορροπίας της Χ είναι,* $\overline{H}(0) = 1$ και $\overline{H}(\infty) = 0$.

Μία σημαντική τυχαία μεταβλητή η οποία συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι το μέγεθος της κάθετης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό.

Ορισμός 1.10 Μέγιστη σωρευτική απώλεια (maximal aggregate loss) *ονομάζεται η σύνθετη τυχαία μεταβλητή η οποία εκφράζει τη συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό* u *και ορίζεται ως*

$$L = \max_{t\geq 0}\{s(t) - ct\} = \max_{t\geq 0}\{u - U(t)\} = L_1 + L_2 + \cdots + L_k = \sum_{i=1}^{k} L_i,$$

όπου $s(t)$ *είναι το κεφάλαιο που απαιτείται στο [0,t] και* ct *το χρηματικό ποσό που εισπράττεται στο [0,t].*

Άρα η L είναι η μεγαλύτερη δυνατή συνολική ζημιά (απώλεια) από όλες τις δυνατές στο $[0, t]$.

Οι τυχαίες μεταβλητές L_i για $i = 1,2, \ldots, k$ καλούνται κλιμακωτά ύψη (ladder heights) και εκφράζουν τη σταδιακή πτώση του πλεονάσματος σε σχέση με το αρχικό απόθεμα u, δηλαδή:

- η τυχαία μεταβλητή L_1 παριστά το μέγεθος της πτώσης της $U(t)$ κάτω από το αρχικό αποθεματικό u (όταν αυτό συμβεί για 1η φορά,αν συμβεί τέτοια πτώση)
- η τυχαία μεταβλητή L_2 παριστά το μέγεθος της πτώσης της $U(t)$ κάτω από το $u - L_1$
- η τυχαία μεταβλητή L_3 παριστά το μέγεθος της πτώσης της $U(t)$ κάτω από το $u - L_1 - L_2$,κ.ο.κ

ή διαφορετικά η L_1 είναι η τιμή της διαφοράς $s(t) - ct$ όταν αυτή γίνει για πρώτη φορά θετική.

Όπως ήδη αναφέρθηκε η $U(T)$ είναι η τιμή που παίρνει η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $u(t)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας και προφανώς με βάση τον ορισμό της πιθανότητας χρεοπίας (βλ. ορσ (1.8)) $U(T) < 0$,δηλαδή η τιμή του πλεονάσματος τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας είναι αρνητική.

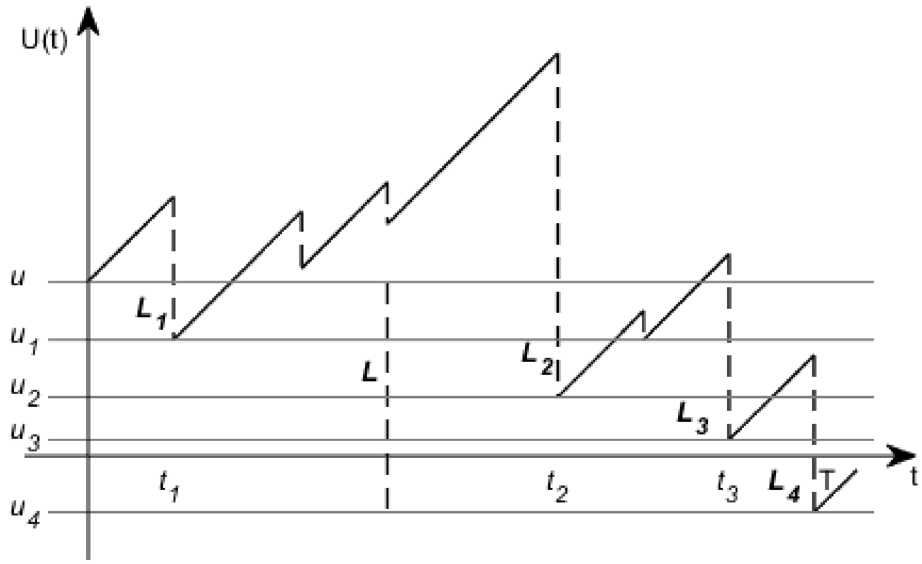
Άρα $-U(T)$ θα είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν όταν επέλθει χρεοκοπία με αρχικό κεφάλαιο uγια πρώτη φορά.

Αν $u = 0$, η $-U(T)$ εκφράζει την πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό κεφάλαιο (όταν συμβεί αυτό για πρώτη φορά με πιθανότητα για το συγκεκριμένο ενδεχόμενο $\psi(0)$).

Έτσι δεδομένου, όπως αναφέρθηκε παραπάνω, ότι η L_1

εκφράζει την πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό κεφάλαιο για *πρώτη* φορά προκύπτει πως για $u = 0$,

οι L_1 και $-U(T)$ είναι ισόνομες.



Σχ1.5:Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος,τα κλιμακωτά ύψη και η μέγιστη σωρευτική απώλεια.

Πρόταση 1.3 *Στο κλασσικό μοντέλο, τα κλιμακωτά ύψη είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές η οποίες ακολουθούν μία συνεχή κατανομή με πυκνότητα* $f_e = \frac{1}{\mu_1}[1 - F(x)]$ *και συνάρτηση κατανομής*

$$F_e(x) = P_r(L_1 \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\mu_1}[1 - F(y)]dy.$$

Ορισμός 1.11 *Το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους της ασφαλιστικής εταιρείας στη μονάδα χρόνου ονομάζεται περιθώριο ασφαλείας και δίνεται από τη σχέση*

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1 \ , \quad \theta > 0 \quad (1.7)\ .$$

Για να μην είναι βέβαιη η χρεοκοπία πρέπει το θ να είναι πάντα θετικό. Όσο μεγαλύτερο είναι το θ τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.
Το περιθώριο ασφαλείας είναι το ποσοστό κέρδους του ασφαλιστή και στην πράξη $\theta \in (0,1)$ ή από 0% έως 100% αν εκφραστεί σαν ποσοστό.
Μία ιδιαίτερα σημαντική έννοια,η οποία είναι χρήσιμη για την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας όπως και κατά την κατασκευή φραγμάτων και ασυμπτωτικών αποτελεσμάτων είναι ο συντελεστής προσαρμογής.

Ορισμός 1.12 *Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ,ο συντελεστής προσαρμογής συμβολίζεται με R και ορίζεται ως η θετική ρίζα της εξίσωσης*

$$1 + (1 + \theta)E(x)r = Mx(r) \quad (1.8)$$

όπου θ το περιθώριο ασφαλείας και

$$M_x(r) = E(e^{rX}) = \int_0^\infty e^{rX} f(x)dx$$

η ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής X στο σημείο r.

Στην τελευταία σχέση γίνεται φανερό πως η εύρεση του συντελεστή προσαρμογής δεν είναι εφικτή πάντοτε και εξαρτάται άμεσα από την ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X. H ροπογεννήτρια μπορεί να μην υπάρχει καθόλου, δηλαδή να απειρίζεται ή να υπάρχει για ορισμένες μόνο τιμές. Για παράδειγμα στην περίπτωση κατανομών με βαριά (Pareto,Weibull,Lognormal) η ροπογεννήτρια συνάρτηση απειρίζεται οπότε δεν είναι δυνατή η εύρεση του συντελεστή προσαρμογής.

Επίσης γίνεται φανερό από την (1.8) πως ο συντελεστής προσαρμογής είναι ανεξάρτητος της παραμέτρου λ (συχνότητα του κινδύνου) και εξαρτάται από το περιθώριο ασφαλείας αλλά και τα χαρακτηριστικά του ύψους της αποζημίωσης ($E(x), M_x(r)$).

Πολλές φορές, δεν είναι εφικτό να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας με αναλυτικό τρόπο (π.χ. μέσω κάποιου κλειστού τύπου) και έτσι καταφεύγουμε σε προσεγγιστικές μεθόδους. Μία από αυτές είναι και η ανισότητα Lundberg η οποία είναι μια πολύ σημαντική ανίσωση στο κλασσικό μοντέλο καθώς στην ουσία αποτελεί ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας συναρτήσει του συντελεστή προσαρμογής και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξετασθεί η αλληλεπίδραση μεταξύ του αρχικού αποθεματικού u και του περιθωρίου ασφαλείας θ.

Θεώρημα 1.1 *Εφόσον υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R, ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru} \qquad (1.9)$$

όπου $u \geq 0$ *το αρχικό κεφάλαιο.*

Επίσης,

i. Για δεδομένο (γνωστό) συντελεστή προσαρμογής R, όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό κεφάλαιο τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.
ii. Για δεδομένο (γνωστό) αρχικό κεφάλαιο u, όσο μεγαλύτερος είναι ο συντελεστής προσαρμογής, τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ένα επίσης ιδιαίτερα σημαντικό αποτέλεσμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο μοντέλο Cramer-Lundberg είναι ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer-Lundberg ο οποίος για πολύ μεγάλες τιμές του u δίνει μια προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Θεώρημα 1.2 *Υποθέτουμε ότι υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R>0. Τότε,*

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru} \text{ για u} \to \infty, \text{ δηλαδή } c = \lim_{u \to \infty} e^{Ru}\, \psi(u) \quad (1.10)$$

όπου C μία θετική σταθερά η οποία υπολογίζεται από τη σχέση

$$C = \frac{\theta E(x)}{\mathrm{R}\int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x)dx} = \frac{\theta E(x)}{E[Xe^{RX}] - (1+\Theta)E(X)}$$

με $\int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x)dx < \infty$ *και* $E[Xe^{RX}] = M_X'(R)$.

Αν τώρα στη ροπογεννήτρια συνάρτηση αντικαταστήσουμε t = −s μπορούμε υπό προϋποθέσεις να πάρουμε τον μετασχηματισμό Laplace.

Ορισμός 1.13 *Έστω f ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο* $(0,\infty]$ *τότε ο μετασχηματισμός Laplace(Laplace Transform) της f συμβολίζεται με* $\hat{f}(s)$ *και ορίζεται από τη σχέση*

$$\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx\,, s \geq 0\,.$$

Ορισμός 1.14 *Ορίζουμε ως θεμελιώδη εξίσωση Lundberg,την εξίσωση της μορφής*

$$cs + \lambda\hat{f}(s) - (\lambda+\delta) = 0 \quad (1.11)$$

όπου $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx$ *τότε ο μετασχηματισμός Laplace (Laplace Transform) της συνάρτησης πυκνότητας f(s).*

Αποδεικνύεται πως η (1.11) *για δ>0 έχει μια θετική ρίζα που τη συμβολίζουμε με* $\rho = \rho(\delta)$.

Παρατήρηση 1.2 *Αν* $\delta = 0$ *τότε ,*
για $\theta < 0$ *οι ρίζες της (1.11) είναι θετικές ενώ,*
για $\theta > 0$ *οι ρίζες της (1.11) είναι μηδέν.*

1.6 Το μοντέλο Sparre Andersen(ανανεωτικό μοντέλο)

Ορισμός 1.15*(Ανανεωτικές ανελίξεις) Μία ανανεωτική ανέλιξη* $\{N(t), t \geq 0\}$ *είναι μία απαριθμήτρια ανέλιξη στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι(χρόνοι αναμονής) είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολοθούν την ίδια κατανομή.*

Αν $N(t), t \geq 0$ *μία ανανεωτική ανέλιξη τότε η τυχαία μεταβλητή* $N(t)$ *παριστά τον αριθμό των ανανεώσεων στο διάστημα* $[0,t]$ *και ικανοποιεί τη σχέση*

$$N(t) = max\{n: Y_n \leq t\}$$

Κατά τη μελέτη των ανανεωτικών ανελίξεων ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ανανεωτική συνάρτηση

$$m(t) = E[N(t)].$$

Το ανανεωτικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου αποτελεί μία γενίκευση του κλασσικού μοντέλου. Το 1957 ο νορβηγός Sparre Andersen υπέθεσε πως ο αριθμός των κινδύνων ενός χαρτοφυλακίου περιγράφεται από μία ανανεωτική διαδικασία και όχι συγκεκριμένα από μία στοχαστική διαδικασία Poisson.

Έστω $T_1, T_2, T_3, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που δηλώνουν την χρονική στιγμή άφιξης του i-κινδύνου

Έστω $W_i = T_i - T_{i-1}$ ο ενδιάμεσος χρόνος άφιξης των κινδύνων.

Πχ $W_2 =$ ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ 1ου και 2ου κινδύνου.

$T_n = W_1 + W_2 + W_3 + \cdots + W_n$ ακολουθία ανανεώσεων.

Έστω $X_1 + X_2 + X_3 + \cdots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που

δηλώνουν το ύψος των απαιτήσεων. Τα ύψη των απαιτήσεων και οι χρόνοι άφιξης είναι τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες μεταξύ τους.
Με B συμβολίζεται η κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων T_i (η οποία μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτή) ενώ με F συμβολίζεται η κατανομή του ύψος των απαιτήσεων X_i.

$$B(t) = Pr(T_i < t), \text{για } t \geq 0.$$

Κατά το ανανεωτικό μοντέλο ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων c και το αναμενόμενο ύψος αποζημίωσης μ δεν αλλάζουν εννοιολογικά συγκριτικά με το κλασσικό μοντέλο.
Το αναμενόμενο πλήθος των αποζημιώσεων στη μονάδα του χρόνου εκφράζεται από την ένταση λ.
Το αναμενόμενο πλήθος των αποζημιώσεων στη μονάδα του χρόνου είναι $\frac{1}{E(t_i)}$ αφού για τις ανανεωτικές ανελίξεις η αναμενόμενη χρονική απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών γεγονότων ισούται με την μέση τιμή των ενδιάμεσων χρόνων ($E(t_i)$).

Ορισμός 1.16 *Το περιθώριο ασφαλείας όπου ορίσθηκε παραπάνω για το κλασσικό μοντέλο (Ορισμός 1.10) στο ανανεωτικό μοντέλο δίνεται από την παρακάτω σχέση*

$$\theta = \frac{cE(t_1)}{\mu_1} - 1 \qquad (1.12) .$$

Το καθαρό κέρδος στο ανανεωτικό μοντέλο ορίζεται με όμοιο τρόπο με το κλασσικό, δηλαδή πρέπει να ισχύει πως τα έσοδα καλύπτουν τα αναμενόμενα έξοδα ($cE(T_1) > \mu_1$).

Ορίζουμε $Z_i = cT_i - X_i$ για $i = 1,2,3 \ldots$.
την τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το καθαρό κέρδος για την εταιρεία στο χρονικό διάστημα $[0, T_i]$.Κατά τη χρονική στιγμή μετά την καταβολή της πρώτης αποζημίωσης η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος στο ανανεωτικό μοντέλο διαμορφώνεται ως εξής,

$$U(T_1) = u + cT_1 - X_1 = u + Z_1.$$

Ορισμός 1.17 *Έστω $F_z(x)$ η συνάρτηση κατανομής και $M_z(r)$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής Z_i για $i = 1,2,3, \ldots$ τότε η θετική λύση της παρακάτω εξίσωσης αποτελεί τον συντελεστή προσαρμογής R στο ανανεωτικό μοντέλο*

$$M_z(-r) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-rX} f_z(x)dx = 1 \quad (1.13) \text{ (εξίσωση Lundberg).}$$

Παρατήρηση 1.3 *Η (1.13) έχει το πολύ μία θετική ρίζα και λόγω ανεξαρτησίας ικανοποιείται η σχέση*

$$M_z(R) = M_r(-cR)M_x(R) = 1.$$

Παρατήρηση 1.4 *Αν για τις τυχαίες μεταβλητές T_i (ενδιάμεσοι χρόνοι) ισχύει ότι* $T_i \sim Exp(\lambda)$ τότε (1.13) *ανάγεται στην* (1.8) .

Ορισμός 1.18 : *Η πιθανότητα χρεοκοπίας στο ανανεωτικό μοντέλο για* $u \geq 0$ *δίνεται από τη σχέση*

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[\, e^{-RU(T)}|T<\infty]} ,$$

όπου R ο συντελεστής προσαρμογής, U(T) η τιμή της στοχαστικής διαδικασίας του πλεονάσματος τη στιγμή της χρεοκοπίας και T ο χρόνος χρεοκοπίας.Δηλαδή για κάθε $u > 0$ ικανοποιείται η παρακάτω σχέση για την πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi(u) < e^{-Ru}.$$

Ορισμός 1.19 *Έστω R ο συντελεστής προσαρμογής και C μία θετική σταθερά. Τότε για τον ασυμπτωτικό τύπο Cramer-Lundberg στο ανανεωτικό μοντέλο έχουμε*

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C\,.$$

1.7 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu

Η πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελεί ένα σπουδαίο μέτρο κινδύνου δεν είναι όμως το μοναδικό. Ιδιαίτερα σημαντικές είναι και οι μεταβλητές $U(T-)$ και $|U(T)|$ οι οποίες αφορούν το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας αντίστοιχα όπως ορίσθηκαν παραπάνω. Το 1998 οι Hans U. Gerber και Elias S. W. Shiu με την δημοσίευση της εργασίας τους “On the time value of ruin” κατάφεραν να μελετήσουν (μοντελοποιήσουν σε μία μόνο συνάρτηση) για πρώτη φορά ταυτόχρονα το χρόνο χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία και το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, μέσω της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής(expected discounted penalty function).Τα παραπάνω μέτρα μέχρι τότε μπορούσαν να προσεγγιστούν μόνο μεμονωμένα. Επίσης απέδειξαν πως η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Ορισμός 1.20 *Αν A είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, συμβολίζουμε με* I_A *την δείκτρια συνάρτηση του A για την οποία ισχύει ότι:*

$$I_A(x) = \begin{cases} 1, αν\ X \in A \\ 0, αν\ X\ \notin\ A \end{cases}.$$

Ορισμός 1.21 *Έστω w(x,y) μια μη αρνητική συνάρτηση ορισμένη στο* R^2 *και* $\delta \geq 0$ *η ένταση επιτοκίου ή παράγων προεξόφλησης (discount factor) ή η μεταβλητή μετασχηματισμού Laplace . Θεωρούμε την διαδικασία πλεονάσματος* $\{U(t): t \geq 0\}$ *στο κλασσικό μοντέλο.Η τυχαία μεταβλητή T εκφράζει το χρόνο της χρεοκοπίας (δηλαδή τη χρονική στιγμή κατά την οποία το πλεόνασμα γίνεται αρνητικό ή μηδέν για πρώτη φορά),η τυχαία μεταβλητή* $U(T-)$ *εκφράζει το πλεόνασμα τη στιγμή της χρεοκοπίας και η τυχαία μεταβλητή* $|U(T)|$ *εκφράζει το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας. Η συνάρτηση των Gerber-Shiu ή αλλιώς η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ορίζεται ως εξής:*

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u] \quad (1.14)$$

όπου , $I(.)$ μία δείκτρια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι:

$$I(T<\infty|U(0)=u)=\begin{cases} 1, & \text{αν συμβαίνει χρεοκοπία} \\ 0, & \text{αν δεν συμβαίνει χρεοκοπία} \end{cases}$$

Προφανώς, ισχύει :

$$m_\delta(u)=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}w(x,y)f(x,y,t|u)dtdxdy \quad (1.15)$$

όπου $w(x,y)$ η συνάρτηση ποινής (penalty function) και $f(x,y,t|u)$ η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu μπορεί να ερμηνευθεί ως προεξοφλημένη ποινή όταν συμβεί η χρεοκοπία.

Η $m_\delta(u)$ είναι μια πολύ γενική συνάρτηση ,διότι περιέχει σαν γενικές περιπτώσεις αρκετά από τα μέτρα κινδύνου που είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος στην θεωρία χρεοκοπίας. Πράγματι με αντικατάσταση στην (1.14) προκύπτει

i)για $\delta=0, w(x,y)=1$ είναι, $m_\delta(u)=E[I(T<\infty)|U(0)=u]$

$=P_r(T<\infty|U(0)=u)$

$=\psi(u)$ που είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.

ii) για $w(x,y)=1$ είναι,$m_\delta(u)=E[e^{-\delta T}I(T<\infty)|U(0)=u]$

δηλαδή η $m_\delta(u)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας (δοθέντος ότι εμφανίζεται χρεοκοπία).

iii) για $w(x_1,x_2)=I(x_1\le x)I(x_2\le y)$ τότε, η $m_\delta(u)=F_\delta(x,y|u)$ που είναι η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-)$ και $|U(T)|$.

iv) για $w(x_1,x_2)=I(x_1\le x)I(x_2\le y)$ και $\delta=0$ είναι,

$m_0(u)=E[I(x_1\le x)I(x_2\le y)I(T<\infty)|U(0)=u)]$

$=P_r(x_1\le x, x_2\le y, T<\infty|U(0)=u)$

$=F_0(x,y|u)$ που είναι η από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-)$ και $|U(T)|$,δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία για αρχικό κεφάλαιο $U(0)=u$**,** με πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία το πολύ x και έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας το πολύ y.

v) για $w(x,y)=I(x_1=x)I(x_2=y)$ και $\delta>0$ είναι,

$m_d(u)=E\left[e^{-\delta T}I(x_1=x)I(x_2=y)I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right]$

$=f_\delta(x,y|u)$ η οποία είναι η από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας των $U(T-)$ και $|U(T)|$.

vi) για $w(x_1,x_2)=I(x_1=x)$ προκύπτει,η $m_\delta(u)=h_\delta(x|u)$ που είναι η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $U(T-)$.

vii) για $w(x_1,x_2)=I(x_2=y)$ προκύπτει,η $m_\delta(u)=g_\delta(y|u)$ που είναι η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $|U(T)|$.

viii) για $w(x_1, x_2) = I(x_1 = x)I(x_2 = y)$ και $\delta > 0$ είναι,
$m_d(u) = E\left[e^{-\delta T} I(x_1 = x)I(x_2 = y)I(T < \infty)\middle|U(0) = u\right]$

$= f_0(x, y|u)$ που είναι η οποία είναι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $U(T-)$ και $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας.

ix)για $w(x_1, x_2) = \chi^{\kappa}$ και $\delta = 0$ προκύπτει η ροπή κ-τάξης του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $m_0(u) = E[x^k I(T < \infty)|U(0) = u]$.

χ)για $w(x_1, x_2) = y^{\kappa}$ και $\delta = 0$ προκύπτει η ροπή κ-τάξης του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας.
$m_0(u) = E[y^k I(T < \infty)|U(0) = u)]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

2.1 Ο τελεστής Dickson-Hipp

Ορισμός 2.1 *Έστω ολοκληρώσιμη συνάρτηση f και $r \in R$, τότε ορίζουμε τον παρακάτω τελεστή*

$$T_r f(x) = \int_x^{\infty} e^{-r(y-x)} f(y)dy \quad (2.1)$$

όπου για $x = 0$ και $r = 0$ προκύπτει αντίστοιχα,

$$T_r f(0) = \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y)dy = \widehat{f}\,(r) \; (2.1\alpha)$$

και

$$T_0 f(x) = \int_x^{\infty} f(y)dy = \bar{F}(x) \; (2.1\ \beta) .$$

Για τον μετασχηματισμό Laplace του τελεστή είναι,

$$\widehat{T_r f(s)} = \int_0^{\infty} e^{-sx} T_r f(x)dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \int_x^{\infty} e^{-r(y-x)} f(y)dydx$$

Με αλλαγή στα άκρα ολοκλήρωσης έχουμε,

$0 \le \chi \le \infty, \chi \le y \le \infty \; \rightarrow 0 \le y \le \infty, 0 \le x \le y$

Έπεται ότι,

$$\widehat{T_r f(s)} = \int_0^{\infty} (\int_0^{y} e^{-sx} e^{-r(y-x)} f(y)dx)dy$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y)\, (\int_x^{\infty} e^{(r-s)x} dx)dy = \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y)(\int_0^{y} e^{-(s-r)x} dx)\, dy$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y)\;\, (\frac{1}{(s-r)} \int_0^{y} (s-r) e^{-(s-r)} dx)dy = \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y)\;\; \frac{1 - e^{-(s-r)y}}{s-r} dy$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y)\;\, \frac{e^{(r-s)y} - 1}{r-s} dy$$

$$= \frac{1}{r-s} \{\int_0^{\infty} e^{-sy} f(y)dy - \int_0^{\infty} e^{-ry} f(y)dy\}$$

$$= \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r-s} \quad (2.2).$$

2.2 Ανανεωτικές εξισώσεις

Οι εξισώσεις της μορφής

$$Z(x) = g(x) + \varphi \int_0^{x} Z(x-y)dF(y) \;\; (2.3)$$

όπου g(x), F(y) γνωστές συναρτήσεις με g(x) τοπικά φραγμένη συνάρτηση,F(y) μία συνάρτηση κατανομής κάποιας συνάρτησης πυκνότητας και φ μία σταθερά για την οποία ισχύει $0 < \varphi < 1$.

Οι ανανεωτικές εξισώσεις διακρίνονται σε τρεις κατηγόριες ανάλογα την τιμή της σταθεράς φ,

i. Αν $\varphi < 1$ η (2.3) ονομάζεται ελλειματική ανανεωτική εξίσωση (defective renewal equation).
ii. Αν $\varphi = 1$ *η (2.3)* ονομάζεται κανονική ανανεωτική εξίσωση (proper renewal equation).
iii. *Αν* $\varphi > 1$ η (2.3) ονομάζεται υπερβολική ανανεωτική εξίσωση (excessive renewal equation).

Με τις ελλειματικές ανανεωτικές εξισώσεις θα ασχοληθούμε εκτενέστερα διότι διαδραματίζουν σημαίνοντα ρόλο στη θεωρία κινδύνου.

2.2.1 Ελλειμματικές Ανανεωτικές εξισώσεις(defective renewal equation)

Θεώρημα 2.1 *Η συνάρτηση* $\varphi(u)$ *των Gerber-Shiu ικανοποίει την defective (ελλειμματική) ανανεωτική εξίσωση ,*

$$\varphi(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u \varphi_\delta(u-x) g_\delta(\chi) d\chi + \frac{1}{1+\xi_\delta} H_\delta(u), u \geq 0 \ (2.4)$$

$$\text{όπου } \frac{1}{1+\xi_\delta} = \frac{\lambda}{c}\frac{1-\hat{f}(\rho)}{\rho} = 1 - \frac{\delta}{c\rho} \ \text{ με } \ \rho = \rho(\delta) \text{ η θετική ρίζα της εξίσωσης Lundberg}$$

$$\lambda + \delta - c\rho = \lambda \hat{f}(\rho) \text{ με } \ \xi_0 = \theta,$$

$$g_\delta(\chi) = \frac{\lambda}{c(1+\xi_\delta)^{-1}} T_\rho f(x) \quad \text{και} \ \ H_\delta(u) = \frac{\lambda}{c(1+\xi_\delta)^{-1}} T_\rho \gamma(u).$$

Απόδειξη Για να δειχθεί το παραπάνω θεώρημα θα ξεκινήσουμε δεσμεύοντας της συνάρτηση φ(u) των Gerber-Shiu ως προς το χρόνο t και το μέγεθος της πρώτης αποζημίωσης X , τότε από το νόμο ολικής πιθανότητας είναι,

$$\varphi(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(u|t,x) f_{x1}(x) f_{T1}(x) dx dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \varphi(u|t,x) f_{x1}(x) dx dt$$

$$= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \{\int_0^\infty \varphi(u|t,x) f(x) dx\} dt \quad (2.5)$$

Κατά την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης (χρονική στιγμή t) για το πλεόνασμα ισχύει ότι $U(t) = u + ct - x$ οπότε,

- Αν $0 \leq \chi \leq u + ct$, δεν εμφανίζεται χρεοκοπία.
- *Αν* $\chi > u + ct$, εμφανίζεται χρεοκοπία.

Επομένως ,στην περίπτωση όπου ισχύει :

$0 \leq \chi \leq u + ct$, δηλαδή δεν εμφανίζεται χρεοκοπία,η διαδικασία ανανεώνεται με αρχικό κεφάλαιο $u + ct - x$ στην περίπτωση όμως όπου ισχύει :

$x > u + ct$,τότε $I(T < \infty) = 1$ γιατί εμφανίζεται σίγουρα χρεοκοπία και $U(T-) = u + ct, |U(T)| = x - u - ct$ οπότε από (2.5) προκύπτει :

$$\varphi(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\{\int_0^{u+ct} e^{-\delta t}\varphi(u+ct-x)f(x)dx + \int_{u+ct}^\infty e^{-\delta t} w(u+ct, x-u-ct)f(x)dx\}dt$$
$$= \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t}\{\int_0^{u+ct} \varphi(u+ct-x)f(x)dx + \int_{u+ct}^\infty w(u+ct, x-u-ct)f(x)dx\}dt \quad (2.6)$$

όπου όπως έχει ήδη αναφερφθεί για $\delta = 0, w(x,y) = 1$ η $\varphi(u)$ γίνεται $\varphi(u) = \psi(u)$ οπότε με αντικατάσταση η τελευταία σχέση γίνεται :

$$\psi(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t}\{\int_0^{u+ct} \psi(u+ct-x)f(x)dx + \int_{u+ct}^\infty f(x)dx\}dt$$
$$= \int_0^{u+ct} \psi(u+ct-x)f(x)dx + \bar{F}(u+ct)\}dt$$

Έστω τώρα,

$s = u + ct \to t = \frac{s-u}{c}$ με $dt = \frac{1}{c}ds$ και $0 \le t < \infty \to u \le s < \infty$

Άρα η (2.6) γίνεται :

$$\varphi(u) = \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x)f(x)dx \frac{1}{c}ds + \lambda \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_s^\infty w(s.x-s)f(x)dx\frac{1}{c}ds$$

Θέτοντας τώρα , $\gamma(\chi) = \int_x^\infty w(x, y-x)f(y)dy$, η τελευταία σχέση γράφεται :

$$c\varphi(u) = \lambda\{\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x)f(x)dxds + \int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s)ds\} \quad (2.7)$$

Παραγωγίζοντας τώρα την (2.7) προκύπτει:

$$c\varphi'(u) = \lambda\{-\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx + \frac{(\lambda+\delta)}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x)\, f(x)dxds - \gamma(u) +$$
$$\frac{(\lambda+\delta)}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \gamma(s)ds\} \quad (2.8)$$

αφού αν $g(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x)f(x)dx \ \textit{τότε}$,

$$\frac{\partial}{\partial u}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}} \int_0^s \varphi(s-x)f(x)dxds = \frac{\partial}{\partial u}\int_u^\infty g(u,s)ds$$
$$= -g(u,u) + \int_u^\infty \frac{\partial g(u,s)}{du}ds$$
$$= -\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx + \frac{(\lambda+\delta)}{c}\int_u^\infty g(u,s)ds$$

και αν $g(u,s) = e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)$ τότε,

$$\frac{\partial}{\partial u}\int_u^\infty e^{-\frac{(\lambda+\delta)(s-u)}{c}}\gamma(s)ds = \frac{\partial}{\partial u}\int_u^\infty g(u,s)ds = -g(u,u) + \int_u^\infty \frac{\partial g(u,s)}{\partial u} d$$
$$= -\gamma(u) + \frac{(\lambda+\delta)}{c}\int_u^\infty g(u,s)ds$$

οπότε η (2.8) μέσω της (2.7) γράφεται:

$c\varphi'(u) = (\lambda+\delta)\varphi(u) - \lambda\int_0^u \varphi(u-x)f(x)dx - \lambda\gamma(u), u \geq 0$ (2.9)

όπου η τελευταία αποτελεί την ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η φ(u).

Αν τώρα , $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx,\ \ \hat{\gamma}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\gamma(\chi)dx$ και

$$\widehat{\varphi}\,'(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\varphi'(\chi)dx = [e^{-sx}\varphi(\chi)]_{\chi=0}^\infty - \int_0^\infty (e^{-sx})'\varphi(\chi)dx$$
$$= -\varphi(0) + \int_0^\infty se^{-sx}\varphi(x)dx$$
$$= s\,\hat{\varphi}(s) - \varphi(0)$$

οι μετασχηματισμοί Laplace των ποσοτήτων f(x),γ(χ) και φ'(χ) αντίστοιχα, παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace στην (2.9) προκύπτει:

$$c[s\,\hat{\varphi}(s) - \varphi(0)] = (\lambda+\delta)\hat{\varphi}(s) - \lambda\,\hat{\varphi}(s)\hat{f}(s) - \lambda\hat{\gamma}(s)$$
$$\{cs - (\lambda+\delta) + \lambda\,\hat{f}(s)\}\hat{\varphi}(s) = c\varphi(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)$$
$$\hat{\varphi}(s) = \frac{c\varphi(0) - \lambda\hat{\gamma}(s)}{cs - (\lambda+\delta) + \lambda\,\hat{f}(s)} \quad (2.10)$$

ή

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\lambda\,\hat{\gamma}(s) - c\varphi(0)}{(\lambda+\delta) - cs - \lambda\,\hat{f}(s)} \quad (2.10\ α)$$

ο παρονομαστής της (2.10α) καλείται γενικευμένη εξίσωση Lundberg (generalized Lundberg's equation) αφού $1 + (1+\theta)E(X)r = M_x(r)$ και επειδή $c = (1+\theta)\lambda E(X)$ προκύπτει

$$1 + \frac{c}{\lambda}\,r = M_x(r)$$
$$\lambda + cr = \lambda M_x(r)$$

για $r = -s,\ s > 0$ η τελευταία σχέση γίνεται

$$\lambda - cs = \lambda M_x(-s)$$
$$\lambda - cs = \lambda\,\hat{f}(s)$$

που είναι ο παρονομαστής της (2.10 α) για *δ=0.*

Η εξίσωση Lundberg έχει μοναδική θετική ρίζα ρ>0 ,επομένως η (2.10) γράφεται στην εξής μορφή,

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{A(S)}{B(S)}$$

όμως $\hat{\varphi}(s) < \infty$ άρα $B(\rho) = 0$ και αναγκαστικά $A(\rho) = 0$ γιατί αν $A(\rho) \neq 0$ τότε $\hat{\varphi}(\rho) = \infty$, που δεν ισχύει.

Είναι,

$$B(s) = B(s) - B(\rho)$$
$$= cs - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{f}(s) - [c\rho - (\lambda + \delta) + \lambda \hat{f}(\rho)]$$
$$= c(s - \rho) - \lambda\left[\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)\right]$$
$$= (s - \rho)[c - \lambda \frac{\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)}{s - \rho}]$$

και $A(\rho) = 0 \Rightarrow c\varphi(0) = \lambda \hat{\gamma}(\rho)$ και αφού $A(s) = c\varphi(0) - \lambda \hat{\gamma}(s)$ προκύπτει ,

$$A(s) = c\varphi(0) - \lambda \hat{\gamma}(s) = \lambda \hat{\gamma}(\rho) - \lambda \hat{\gamma}(s) = \lambda(s - \rho) \frac{\hat{\gamma}(\rho) - \hat{\gamma}(s)}{s - \rho}$$

οπότε η (2.10) γίνεται ,

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\lambda(s - \rho) \ \frac{\hat{\gamma}(\rho) - \hat{\gamma}(s)}{s - \rho}}{(s - \rho)[c - \frac{\lambda\left(\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)\right)}{s - \rho}]}$$

δηλαδή,

$$\hat{\varphi}(s) = \hat{\varphi}(s) = \frac{\lambda \frac{\hat{\gamma}(\rho) - \hat{\gamma}(s)}{s - \rho}}{c - \frac{\lambda\left(\hat{f}(\rho) - \hat{f}(s)\right)}{s - \rho}} \quad (2.11)$$

Επομένως η (2.11) μέσω της *(2.2)* ως εξής:

$$\hat{\varphi}(s) = \lambda \frac{\widehat{T_\rho \gamma(s)}}{c - \lambda \widehat{T_\rho f(s)}} \quad (2.12)$$

ή

$$c\hat{\varphi}(s) = \lambda\hat{\varphi}(s)\widehat{T_\rho f(s)} + \lambda\widehat{T_\rho \gamma(s)}$$

οπότε παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace προκύπτει:

$$\varphi(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u \varphi(u - x) T_\rho \varphi(\chi) dx + \frac{\lambda}{c} T_\rho \gamma(u), u \geq 0 \ (2.13).$$

Από γενικευμένη εξίσωση Lundberg είναι,

$$\lambda + \delta - c\rho = \lambda\hat{f}(\rho) \Rightarrow \lambda - \lambda\hat{f}(\rho) = c\rho - \delta \Rightarrow \lambda\left(1 - \hat{f}(\rho)\right) = c\rho - \delta \ \ (2.14).$$

Θέτω, $\frac{\lambda}{c} T_\rho f(x) dx = z(x)$ τότε ολοκληρώνοντας την άνω σχέση είναι,

$$\int_0^\infty z(x) dx = \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty T_\rho f(x) dx = \frac{\lambda}{c} \widehat{T_\rho f(0)} = \frac{\lambda}{c} \frac{\hat{f}(0) - \hat{f}(\rho)}{\rho - 0} = \frac{\lambda}{c} \ \frac{(1 - \hat{f}(\rho))}{\rho} = \frac{c\rho - \delta}{c\rho} = 1 - \frac{\delta}{c\rho} < 1$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει αφού από το μετασχηματισμό Laplace του Dickson-Hipp για *r=ρ* και *s=0* έχω:

$$\widehat{T_r f(s)} = \int_0^\infty e^{-sx} T_r f(x) dx \Rightarrow \widehat{T_\rho f(0)} = \int_0^\infty T_\rho f(x) dx$$

η τρίτη ισότητα λόγω (2.2) και η πέμπτη λόγω (2.14).

Αν θέσουμε τώρα $\frac{1}{1+\xi_\delta} = \int_0^\infty z(x)dx$ και έστω $G_\delta(u) = \frac{\int_0^u z(x)dx}{\int_0^\infty z(x)dx}$ συνάρτηση κατανομής με $g_\delta(u) = G'_\delta(u) = \frac{z(u)}{\int_0^\infty z(x)dx}$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,τότε αν $H_\delta(u) = (1+\xi_\delta)\frac{\lambda}{c}T_\rho\gamma(u)$ για την (2.13) έπεται ότι :

$$\varphi(u) = \int_0^u \varphi(u-x)g_\delta(x)dx + \frac{\lambda}{c}\, T_\rho\gamma(u)$$

δηλαδή,

$$\varphi(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u \varphi(u-x)g_\delta(\chi)\, dx + \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta \quad (2.15)$$

αφού $\frac{1}{1+\xi_\delta} = \int_0^\infty z(x)dx \ \ \textit{και}\ g_\delta(u) = G'_\delta(u) = \frac{z(u)}{\int_0^\infty z(x)dx}$.

Η (2.15) είναι μια defective renewal equation (ελλειματική ανανεωτική εξίσωση) επειδή $\frac{1}{1+\xi_\delta} < 1$

Λήμμα 2.1: *Ισχύει ότι ,*

$$\frac{1}{1+\xi_0} = \frac{1}{1+\theta}$$

Απόδεξη: Έστω ρ=ρ(δ) ,

τότε $\frac{1}{1+\xi_0} = \lim_{\delta\to 0}\frac{1}{1+\xi_\delta} = \lim_{\delta\to 0}(1-\frac{\delta}{c\rho(\delta)}) = 1 - \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta}{c\rho(\delta)} = 1 - \frac{1}{c\lim_{\delta\to 0}\rho'(\delta)}$

$$= 1 - \frac{1}{c\rho'(0)} \quad (2.16)$$

έτσι ο παρονομαστής της (2.10α, γενικευμενή εξίσωση Lundberg) για $s = \rho(\delta)$ και παραγώγιση ως προς δ γίνεται:

$1 - c\rho'(\delta) = \rho'(\delta)\lambda\, \hat{f}(\rho'(\delta))$, οπότε για $\delta = 0$,επειδή $\rho(0) = 0$ προκύπτει:

$$1 - c\rho'(0) = \lambda\rho'(0)\, \hat{f}'(0)$$

άρα,

$$1 - c\rho'(0) = -\lambda\rho'(0)E(\chi)$$

$$\rho'(0) = \frac{1}{c-\lambda E(\chi)} \text{ αφού } \hat{f}'(0) = -E(X)$$

τότε, από (2.16) προκύπτει :

$$\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \frac{c-\lambda E(X)}{c} = \frac{\lambda E(X)}{c} \text{ και επειδή } c = (1+\theta)\lambda E(X),$$

έπεται ότι :

$$\frac{1}{1+\xi_0} = \frac{1}{1+\theta}.$$

Ακόμα,αφού $g_\delta(u) = \frac{z(u)}{\int_0^\infty z(x)dx} = (1+\xi_\delta)z(x)$ για $\delta = 0$ έχουμε :

$$g_0(x) = (1+\xi_0)z(x)$$
$$= (1+\theta)\frac{\lambda}{c}T_0 f(x)$$
$$= (1+\theta)\frac{\lambda}{c}\, \bar{F}(x) = \frac{\bar{F}(x)}{E(X)} = f_e(x)$$

ενώ για $w(x,y)=1$

$$H_0(u)=(1+\xi_0)\frac{\lambda}{c}T_0\gamma(u)=(1+\theta)\frac{\lambda}{c}\int_u^{\infty}\bar{F}(x)dx$$
$$=\frac{\int_u^{\infty}\bar{F}(x)dx}{E(x)}$$
$$=\bar{F}_e(u)\,.$$

Επομένως, η (2.15) για $\delta=0$ και $w(x,y)=1$ γίνεται :

$$\psi(u)=\frac{1}{(1+\theta)}\int_0^u\psi(u-x)f_e(x)dx+\ \frac{1}{(1+\theta)}\bar{F}_e(u)$$

που ουσιαστικά είναι το ζητούμενο,οπότε αποδείχτηκε και το θεώρημα (2.1) .

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα θεώρημα το οποίο αφορά τη λύση της ανανεωτικής εξίσωσης του θεωρήματος (2.1).

Θεώρημα 2.2 *Έστω η συνάρτηση κατανομής* $K_\delta(u)=1-K_\delta(u)$ *όπου,*

$$\bar{K}_\delta(u)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\left(\frac{1}{1+\xi_\delta}\right)\ \bar{G}_\delta^{*n}(u),u\geq 0\ \ ,$$

τότε η $\varphi_\delta(u)$ *δίνεται από την,*

$$\varphi_\delta(u)=\frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u H_\delta(\,u-x)\;dK_\delta(\chi)+\ \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u)\,,u\geq 0$$

ή από την ,

$$\varphi_\delta(u)=-\frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u\bar{K}_\delta(u-x)H_\delta'(\chi)dx-\frac{1}{\xi_\delta}H_\delta(0)\bar{K}_{\ \delta}(u)+\frac{1}{\xi_\delta}H_\delta(u),$$

για $u\geq 0$ *όπου ,* $\frac{1}{1+\xi_\delta}=\frac{\lambda}{c}\ \ \frac{1-\hat{f}(\rho)}{\rho}=\frac{\lambda}{c}\ \hat{\bar{F}}(\rho)=1-\frac{\delta}{c\rho}=\frac{1}{1+\theta}\quad\hat{f}_e(\rho)$

με $dG_\delta(\chi)=G_\delta'(\chi)dx=g_\delta(\chi)dx$ *και* $g_\delta(\chi)=\frac{T_\rho f(x)}{\hat{\bar{F}}(\rho)}$, $\bar{G}_\delta(\chi)=1-G_\delta(\chi)=\frac{T_\rho\,\bar{F}(x)}{\hat{\bar{F}}(\rho)}$

ενώ $H_\delta(u)=\frac{\lambda}{c}(1+\xi_\delta)T_\rho\gamma(u)=\frac{\lambda}{c}\frac{c}{\lambda}\frac{1}{\hat{\bar{F}}(\rho)}T_\rho\gamma(u)=\frac{T_\rho\gamma(u)}{\hat{\bar{F}}(\rho)}$.

Αρχικά παραθέτουμε τα παρακάτω χρήσιμα αποτελέσματα που αφορούν τη λύση μιας defective renewal equation (ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση).

Έστω $0<\varphi<1$,F μία συνάρτηση κατανομής κάποιας τυχαίας μεταβλητής ορισμένης στο $[0,+\infty)$ με F(0)=0.και $m(x)=\varphi\int_0^x m(x-y)dF(y)+r(x),x\geq 0$ όπου η r(x) είναι συνεχής συνάρτηση στο $[0,+\infty)$.

Έστω τώρα G(x) η συνάρτηση κατανομής μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με

$$\bar{G}(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi)\varphi^n\ \bar{F}^{*n}(x),x\geq 0$$

οπότε αν $s=X_1+X_2+\cdots+X_N$ με $P_r(N=n)=(1-\varphi)\varphi^n\ \ ,n=0,1,2,\ldots.$

άρα $G(0)=1-\varphi$, η G(x) δεν περιέχει την r(x).

Πρόταση 2.1 *Ισχύει ότι:* $m(x) = \frac{1}{1-\varphi}\int_{0^+}^{x} r(x-y)dG(y) + r(x)$ (2.17).

Απόδειξη:
Αν $N \sim G_0(P)$ $\mu\varepsilon$ $P_n = P_r(N=n) = pq^n, n = 0,1,2, \ldots.$ και $P_N(u) = \frac{p}{1-qu}, q = 1-p$
ισχύει ότι:

$$M_s(t) = P_N\big(M_X(t)\big)\ \gamma\iota\alpha\ t = -s \Rightarrow \hat{g}(s) = \frac{p}{1 - q\,\hat{f}(s)}$$

όπου $\hat{g}(s) = \int_{0^+}^{\infty} e^{-sx} dG(x) + G(0)$, επομένως με την βοήθεια του μετασχηματισμού Laplace έχουμε,

$$\widehat{m}(s) = \varphi\widehat{m}(s)\hat{f}(s) + \hat{r}(s)$$
$$\Rightarrow \widehat{m}(s) - \varphi\widehat{m}(s)\hat{f}(s) = \hat{r}(s)$$
$$\Rightarrow \widehat{m}(s) = \frac{\hat{r}(s)}{1 - \varphi\hat{f}(s)}$$
$$\Rightarrow \widehat{m}(s) = \frac{(1-\varphi)\hat{f}(s)}{(1-\varphi)(1-\varphi\hat{f}(s))}$$
$$\Rightarrow \widehat{m}(s) = \frac{\hat{g}(s)\hat{r}(s)}{(1-\varphi)}$$
$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-sx} m(x)dx = \frac{1}{1-\varphi}\{\int_{0^+}^{\infty} e^{-sx} dG(x) + (1-\varphi)\}\hat{r}(s)$$
$$= \{\frac{1}{1-\varphi}\int_{0^+}^{\infty} e^{-sx} dG(y) + 1\}\hat{r}(s)$$

έτσι παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace (Laplace Transform) στην τελευταία σχέση προκύπτει το ζητούμενο της πρότασης.
Αν τώρα στο αποτέλεσμα του θεωρημάτος (2.1) θέσουμε :

$$\varphi = \frac{1}{1+\xi_\delta} < 1\,, dF(x) = dG_\delta(\chi) \text{ και } r(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u)$$

μπορεί να ορισθεί η παρακάτω δεξιά ουρά , $\overline{K}_\delta(u)$, σύνθετης γεωμετρικής κατανομής ως εξής:

$$\overline{K}_\delta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\left(\frac{1}{1+\xi_\delta}\right)^n \bar{G}_\delta^{*n}(u), u \geq 0$$

έτσι για, $\frac{1}{1-\varphi} = \frac{1}{1-\frac{1}{1+\xi_\delta}} = \frac{1}{\frac{1+\xi_\delta-1}{1+\xi_\delta}} = \frac{1}{\frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}} = \frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}$ η λύση της φ(u) είναι :

$$\varphi(u) = \frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\int_0^u r(u-x)dK_\delta(\chi) + r(u)$$
$$= \frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\int_0^u \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u-x)dK_\delta(\chi) + \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u)$$
$$\Rightarrow \varphi(u) = \frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u H_\delta(u-x)\,dK_\delta(\chi) + \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u).$$

Εστιάζοντας τώρα στο ολοκλήρωμα της (2.17) παίρνουμε:

$$\int_{0^+}^{x} r(x-y)dG(y) = \int_{0^+}^{x} r(x-y)g(y)dy$$
$$= -\int_{0^+}^{x} r(x-y)\ \bar{G}'(y)dy$$
$$= -\{[r(x-y)\bar{G}(y)]_{y=0}^{y=x} -$$
$$-\int_{0^+}^{x} \frac{d}{dy} r(x-y)\ \bar{G}(y)dy\}$$
$$= -\{r(0)\bar{G}(x) - r(x)\bar{G}(0) +$$
$$+\int_{0^+}^{x} r'(x-y)\bar{G}(y)dy\}$$
$$= r(x)\bar{G}(0) - r(0)\bar{G}(x) - \int_{0^+}^{x} r'(x-y)\bar{G}(y)dy\}$$

και αφού $G(0) = 1-\varphi \Rightarrow \bar{G}(0) = \varphi$, σύμφωνα με την τελευταία σχέση η (2.17) γίνεται:

$$m(x) = \frac{1}{1-\varphi}\{\varphi r(x) - r(0)\bar{G}(x) - \int_{0^+}^{x} r'(x-y)\bar{G}(y)dy + r(x)$$
$$= \frac{\varphi r(x)}{1-\varphi} - \frac{r(0)\bar{G}(x)}{1-\varphi} - \frac{1}{1-\varphi}\int_{0^+}^{x} r'(x-y)\bar{G}(y)dy + r(x)$$
$$= \frac{\varphi r(x)}{1-\varphi} - \frac{r(0)\bar{G}(x)}{1-\varphi} - \frac{1}{1-\varphi}\int_{0^+}^{x} r'(x-y)\bar{G}(y)dy + \frac{r(x)-\varphi r(x)}{1-\varphi}$$
$$\Rightarrow m(x) = \frac{r(x)}{1-\varphi} - \frac{r(0)\bar{G}(x)}{1-\varphi} - \frac{1}{1-\varphi}\int_{0^+}^{x} r'(x-y)\bar{G}(y)dy$$

ή

$$\Rightarrow m(x) = \frac{1}{1-\varphi} r(x) - \frac{r(0)}{1-\varphi}\bar{G}(x) - \frac{1}{1-\varphi}\int_{0^+}^{x} r'(x-y)\bar{G}(y)dy$$

οπότε αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση και με δεδομένο ότι,

$$\varphi = \frac{1}{1+\xi_\delta} < 1\ , dF(x) = dG_\delta(\chi)\ \kappa\alpha\iota\ r(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta} H_\delta(u)$$

μπορούμε να πούμε πως η φ(u) δίνεται και από την παρακάτω σχέση:

$$\varphi(u) = \frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u) - \frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(0)\bar{K}_\delta(u) - \frac{1+\xi_\delta}{\xi_\delta}\int_0^u \frac{1}{1+\xi_\delta}H'_\delta(u-x)\bar{K}_\delta(x)dx$$
$$= -\frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u \frac{1}{1+\xi_\delta}H'_\delta(u-x)\bar{K}_\delta(x)dx - -\frac{1}{\xi_\delta}H_\delta(0)\bar{K}_\delta(u) + \frac{1}{\xi_\delta}H_\delta(u)$$

και με αυτό το αποτέλεσμα στην ουσία δείχτηκε και το θεώρημα (2.2).

Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί το εξής, αν στη σχέση $\gamma(\chi) = \int_x^\infty w(x, y-x)f(y)dy$ θέσουμε $w(x,y) = 1$ παίρνουμε : $\gamma(\chi) = \int_x^\infty f(y)dy = \bar{F}(x)$, δηλαδή η $H_\delta(u) = \frac{T_\rho \gamma(u)}{\hat{\bar{F}}(\rho)}$ γίνεται:

$$H_\delta(u) = \frac{T_\rho \bar{F}(u)}{\hat{\bar{F}}(\rho)} = \bar{G}_\delta(u)$$

έτσι από το θεώρημα *(2.1) έχω*

$$\varphi(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u \varphi_\delta(u-x)g_\delta(\chi)d\chi + \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u), u \geq 0$$

$$\Rightarrow \varphi(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u \varphi_\delta(u-x)g_\delta(\chi)d\chi + \frac{1}{1+\xi_\delta}\bar{G}_\delta(u), u \geq 0 \quad (2.18).$$

Επίσης , η $\overline{K}_\delta(u)$ είναι η δεξιά ουρά σύνθετης γεωμετρικής για την ,

$$S = R_1 + R_2 + \cdots + R_M$$

με $M \sim G(\frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta})$ και συνάρτηση κατανομής G_δ για την R.

Επομένως ισχύει ότι:

$$\widehat{\overline{K}_\delta}(s) = \frac{1}{1+\xi_\delta}\widehat{\overline{K}_\delta}(s)\,\hat{g}_\delta(s) + \frac{1}{1+\xi_\delta}\,\widehat{\bar{G}_\delta}(s)$$

$$\Rightarrow \overline{K}_\delta(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u \overline{K}_\delta(u-x)\,g_\delta(x)dx + \frac{1}{1+\xi_\delta}\,\bar{G}_\delta(u), u \geq 0 \quad (2.19)$$

συνεπώς από (2.18) και (2.19) έπεται ότι:

$$\varphi(u) = \overline{K}_\delta(u) \ \text{, όταν } w(x,y) = 1$$

δηλαδή,

$$\overline{K}_\delta(u) = E[e^{-\delta t}I(T < \infty)|U(0) = U]$$

η τελευταία σχέση αποτελεί ένα σπουδαίο αποτέλεσμα καθώς φανερώνει πως η δεξιά ουρά $\overline{K}_\delta(u)$ σύνθετης γεωμετρικής ισούται με τον μετασχηματισμό Laplace (Laplace Transform) του χρόνου χρεοκοπίας.

Άρα, αντί για τον υπολογισμό της $\varphi(u)$ αρκεί να υπολογίσουμε την $\overline{K}_\delta(u)$ η οποία εξαρτάται κυρίως από τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής $G_\delta(u)$.

Ακόμα από τα παραπάνω για δ=0 (αφού ήδη $w(x,y) = 1$) προκύπτει ότι:

$$\overline{K}_0(u) = \psi(u).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

3.1 Ένα μοντέλο με δομή εξάρτησης

Στη θεωρία κινδύνου, για την μοντελοποίηση της διαδικασίας του πλεονάσματος συνιθίζεται να γίνεται χρήση του κλασσικού μοντέλου ή του ανανεωτικού μοντέλου (μοντέλο Sparre-Andersen). Είναι σύνηθες στα δύο παραπάνω μοντέλα, τα ύψη των ατομικών απαιτήσεων και οι ενδιάμεσοι χρόνοι να θεωρούνται μεταξύ τους ανεξάρτητοι.Στην πραγματικότητα κάτι τέτειο δεν συμβαίνει πάντοτε για αυτό το λόγο τα τελευταία χρόνια το ενδιαφέρον έχει στραφεί στην ανάπτυξη μοντέλων στα οποία άρεται η παραπάνω υπόθεση ανεξαρτησίας.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με ένα μοντέλο με δομή εξάρτησης στο οποίο η κατανομή του ενδιάμεσου χρόνου (interclaim time) αλλά και η ένταση του ασφαλίστρου εξαρτώντε από το ύψος της προηγούμενης ατομικής απαίτησης .

Έστω ότι η διαδικασία πλεονάσματος μοντελοποιείται ως εξής:

$$U(t) = u + A(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

$$= u + a_1 \int_0^t I_{\{j(s)=1\}} ds + a_2 \int_0^t I_{\{j(s)=2\}} ds - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \ , t \geq 0 \ , \quad (3.1)$$

όπου,$u = U(0) \geq 0$ παριστά το αρχικό αποθεματικό,η A(t) παριστά τα έσοδα από ασφάλιστρα έως τη χρονική στιγμή t, η N(t) είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία που αφορά το πλήθος των ατομικών απαιτήσεων $X_i \geq 0, i = 1,2,3, \ldots$ οι οποίες είναι μεταξύ τους i.i.d τυχαίες μεταβλητές με αθροιστική συνάρτηση κατανομής G(.),συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας g(.) και μέσο μ, ενώ με την δείκτρια συνάρτηση $I_{\{j(s)\}}$ δηλώνουμε την κλάση κινδύνου στην οποία ανήκει ο ασφαλισμένος.

Θεωρούμε τώρα πως η κατανομή του χρόνου αναμονής μέχρι την επόμενη αποζημίωση εξαρτάται από το ύψος της προηγούμενης αποζημίωσης συγκρίνοντας το με ένα τυχαίο κατώφλι (random threshold) $R_j, j = 1,2,3, \ldots.$ όπου R_j είναι i.i.d και ανεξάρτητες από τα ύψη των απαιτήσεων με αθροιστική συνάρτηση κατανομής K(.).

Αν τα ύψη των απαιτήσεων είναι μεγαλύτερα από τα R_j($X_i > R_j$) τότε ο χρόνος μέχρι την επόμενη απαίτηση ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο έστω $\frac{1}{\lambda_1} > 0$,ενώ σε περίπτωση όπου τα ύψη των απαιτήσεων είναι μικρότερα από τα R_j ($X_i < R_j$) ο χρόνος μέχρι την επόμενη απαίτηση ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο έστω $\frac{1}{\lambda_2} > 0$, (Albrecher and Boxma,2004).

Ακόμα κάνουμε τον εξής διαχωρισμό,αν $X_i > R_j$ κατατάσουμε τον ασφαλισμένο στην κλάση 1 στην οποία αντιστοιχεί συνεχές ασφάλιστρο α_1 στην αντίθετη περίπτωση όπου $X_i < R_j$ κατατάσουμε τον ασφαλισμένο στην κλάση 2 στην οποία αντιστοιχεί συνεχές ασφάλιστρο α_2.

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους τότε έχουμε,

$$\frac{a_1}{\lambda_1} P_r(X > R) + \frac{a_2}{\lambda_2} P_r(X < R) > \mu \quad (3.2)$$

όπου η τελευταία σχέση δηλώνει πως η εταιρεία χρεώνει ένα ασφάλιστρο το οποίο είναι μεγαλύτερο από το αναμενόμενο ύψος των αποζημιώσεων.

3.2 Γενικευμένη εξίσωση Lundberg σε μοντέλο με δομή εξάρτησης

Με δεδομένο ότι ο ασφαλισμένος μπορεί να καταταχθεί σε δύο κλάσεις κινδύνου για $i = 1{,}2$ και πως το αρχικό κεφάλαιο είναι u θα μελετήσουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu προκειμένου να αντλήσουμε ορισμένα αποτελέσματα.

Από το παρακάτω σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων,με βάση την κλάση κινδύνου στην οποία ταξινομείται ο κάθε ασφαλισμένος για την συνάρτηση Gerber-Shiu $(\varphi_i(u)\ για\ i = 1{,}2)$ παίρνουμε ,

$$\varphi_1(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\,\lambda_1 e^{-(\lambda_1)t}\{\int_0^{u+c_1t}[\,P_r\{x > R_1\}\varphi_1(u + c_1t - x) + P_r\{x < R_1\}\varphi_2(u + c_1t - x)]g(x)dx + \int_{u+c_1t}^\infty w(u + c_1t, x - u - c_1t)g(x)dx\}dt \quad (3.3)$$

$$\varphi_2(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\,\lambda_2 e^{-(\lambda_2)t}\{\int_0^{u+c_2t}[\,P_r\{x > R_1\}\varphi_1(u + c_2t - x) + P_r\{x < R_1\}\varphi_2(u + c_2t - x)]g(x)dx + \int_{u+c_2t}^\infty w(u + c_2t, x - u - c_2t)g(x)dx\}dt \quad (3.4)$$

όπου,

$$P_r\{x > R_1\} = K(x)$$
$$P_r\{x < R_1\} = 1 - K(x) = \overline{K}(x)\ .$$

Προς διευκόλυνση των πράξεων που ακολουθούν ορίζουμε τις παρακάτω ποσότητες,

$$c(x) := \overline{K}(x)g(x) \quad (3.5)$$
$$b(x) \coloneqq K(x)g(x) = g(x) - c(x) \quad (3.6)$$
$$\zeta(u) := \int_u^\infty w(u, y - u)g(y)dy \quad (3.7)$$

Θέτοντας $s = u + ct \Rightarrow t = \frac{s-u}{c}$ $με\ dt = \frac{1}{c}ds$ και για $0 < t < \infty \Rightarrow u < s < \infty$

οπότε από τα παραπάνω και από τις (3.5),(3.6) η (3.3) γίνεται,

$$\varphi_1(u) = \int_u^\infty \frac{\lambda_1}{\alpha_1} e^{-\frac{(\lambda_1+\delta)(s-u)}{\alpha_1}}\left\{\int_0^s[\varphi_1(s - x)\,b(x) + \varphi_2(s - x)c(x)\right]dx + +\zeta(s)\}ds \quad (3.8)$$

τότε για $\gamma(t) := \int_0^t \varphi_1(t - x)b(x) + \varphi_2(t - x)c(x)]dx + \zeta(t)$ η (3.8) μπορεί να γραφεί στην παρακάτω απλούστερη μορφή,

$$\varphi_1(u) = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}T_{\frac{(\lambda_1+\delta)}{\alpha_1}}\gamma(u)\,, u \geq 0 \quad (3.9)$$

όπου για $u = 0$ γίνεται ,

$$\varphi_1(0) = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}T_{\frac{(\lambda_1+\delta)}{\alpha_1}}\gamma(0).$$

Επειδή $T_s f(0) = \hat{f}(0)$, τότε παίρνουμε

$$\varphi_1(0) = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\ \hat{\gamma}(\frac{(\lambda_1+\delta)}{\alpha_1})$$

ακόμα, εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην (3.9) παίρνουμε $\hat{\varphi}_1(s) = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} T_{\frac{(\lambda_1+\delta)}{\alpha_1}}\, \hat{\gamma}(s)$ *και* μέσω *(2.1α)* προκύπτει,

$$\hat{\varphi}_1(s) = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} T_{\frac{(\lambda_1+\delta)}{\alpha_1}}\, T_s\, \gamma(0)$$

και αφού $T_{s_1} T_{s_2} f(0) = \frac{\hat{f}(s_1) - \hat{f}(s_2)}{s_2 - s_1}$ $, s_1 \neq s_2, s_1, s_2 \geq 0$ παίρνουμε,

$$\hat{\varphi}_1(s) = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} \frac{\hat{\gamma}\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\right) - \hat{\gamma}(s)}{s - \frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}}$$

$$= \frac{\lambda_1}{\alpha_1} \frac{\hat{\gamma}\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\right) - \hat{b}(s)\hat{\varphi}_1(s) - \hat{c}(s)\,\hat{\varphi}_2(s) - \hat{\zeta}(s)}{s - \frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}}$$

$$= \frac{\varphi_1(0) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\hat{b}(s)\hat{\varphi}_1(s) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\hat{c}(s)\,\hat{\varphi}_2(s) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\hat{\zeta}(s)}{s - \frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}}$$

έπειτα από πράξεις,

$$\left[s - \frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1} + \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\, \hat{b}(s)\right] \hat{\varphi}_1(s) + \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\, \hat{c}(s)\, \hat{\varphi}_2(s) = \varphi_1(0) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\, \hat{\zeta}(s) \text{ 3.10)}$$

όμοια από την (3.4),

$$\varphi_2(u) = \frac{\lambda_2}{\alpha_2} T_{\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}}\, \gamma(u), u \geq 0$$

και εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace

$$\left[s - \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{c}(s)\right] \hat{\varphi}_2(s) + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{b}(s)\, \hat{\varphi}_1(s) = \varphi_2(0) - \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{\zeta}(s) \text{ (3.11)}$$

αν πολλαπλασίασουμε την (3.10) με $[s - \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{c}(s)]$ προκύπτει,

$$\left[s - \frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1} + \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\, \hat{b}(s)\right]\left[s - \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{c}(s)\right] \hat{\varphi}_1(s) + \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\, \hat{c}(s)\, \hat{\varphi}_2(s) \left[s - \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{c}(s)\right]$$
$$= \varphi_1(0)[s - \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{c}(s)] - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\, \hat{\zeta}(s)[s - \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{c}(s)]$$

και αφού από (3.11)

$$\left[s - \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{c}(s)\right] \hat{\varphi}_2(s) = \varphi_2(0) - \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{\zeta}(s) - \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{b}(s)\, \hat{\varphi}_1(s)$$

έχουμε ,

$$\left[s - \frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1} + \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\, \hat{b}(s)\right]\left[s - \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{c}(s)\right] \hat{\varphi}_1(s) + \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\, \hat{c}(s)[\varphi_2(0) - \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{\zeta}(s) - \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{b}(s)\, \hat{\varphi}_1(s)]$$
$$= \varphi_1(0)[s - \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{c}(s)] - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\, \hat{\zeta}(s)[s - \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\, \hat{c}(s)]$$

βγάζοντας κοινό παράγοντα το $\hat{\varphi}_1(s)$ στο αριστερό μέλος, έπειτα από πράξεις παίρνουμε ,

$$\left\{\left[s-\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}+\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\ \hat{b}(s)\right]\left[s-\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}+\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\ \hat{c}(s)\right]-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\alpha_1\alpha_2}\hat{c}(s)\hat{b}(s)\right\}\hat{\varphi}_1(s)=\varphi_1(0)\left[s-\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}+\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\ \hat{c}(s)\right]-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\hat{c}(s)\varphi_2(0)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\hat{\zeta}(s)\left(s-\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\right)(3.12)$$

όμοια, πολλαπλασιάζουμε την (3.11) με $[s-\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}+\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\ \hat{b}(s)$, αντικαθιστώντας από την (3.10)

$$\left[s-\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}+\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\ \hat{b}(s)\right]\hat{\varphi}_1(s)=\varphi_1(0)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\ \hat{\zeta}(s)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\ \hat{c}(s)\ \hat{\varphi}_1(s),$$

βγάζοντας κοινό παράγοντα το $\varphi_2(s)$ στο αριστερό μέλος και έπειτα από πράξεις παίρνουμε ,

$$\left\{\left[s-\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}+\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\hat{b}(s)\right]\left[s-\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}+\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\hat{c}(s)\right]-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\alpha_1\alpha_2}\hat{c}(s)\hat{b}(s)\right\}\hat{\varphi}_2(s)=\left[s-\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}+\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\hat{b}(s)\right]\varphi_2(0)-\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\hat{b}(s)\varphi_1(0)-\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\hat{\zeta}(s)\left(s-\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\right)\ (3.13)$$

οι παραστάσεις με τις οποίες πολλαπλασιάζοντε τα $\hat{\varphi}_1(s),\hat{\varphi}_2(s)$ στις (3.12) και (3.13) είναι πανομοιότυπες.

Τελικά αν τις θέσουμε ίσες με το μηδέν παίρνουμε ,

$$\left[s-\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}+\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\hat{b}(s)\right]\left[s-\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}+\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\hat{c}(s)\right]-\frac{\lambda_1\lambda_2}{\alpha_1\alpha_2}\hat{c}(s)\hat{b}(s)=0\ \ (3.14)$$

ή ισοδύναμα

$$\left(s-\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\right)\left(s-\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\right)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}-s\right)\ \hat{b}(s)-\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}-s\right)\ \hat{c}(s)=0\ , (3.14α)$$

όπου είναι η γενικευμένη εξίσωση Lundberg (generalized Lundberg's equation) για το μοντέλο (3.1).

3.3 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με εξάρτηση

Προκειμένου να αντιστρέψουμε τους μετασχηματισμούς Laplace, για να πάρουμε τις $\varphi_1(u)$ και $\varphi_2(u)$**,** των εξισώσεων (3.12) και (3.13) πρέπει πρώτα να εξετάσουμε την περίπτωση όπου $\varphi_1(0)$και $\varphi_2(0)$.

Είναι γνωστό (Λήμμα 2.1 και Λήμμα 2.2 Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova) πως η εξίσωση του Lundberg στο παραπάνω μοντέλο με εξάρτηση έχει ακριβώς δύο μη αρνητικές ρίζες για κάθε $\delta \geq 0$.

Έστω ρ και r η πρώτη και η δεύτερη ρίζα αντίστοιχα,τότε για $\rho = s\ και\ r = s$ τα δεξία μέλη των (3.12) και (3.13) θα είναι ίσα με μηδέν.

Έτσι για $\rho = s$ και $r = s$ από την (3.14) τα δεξία μέλη των (3.12) και (3.13) είναι πανομοιότυπα,οπότε πολλαπλασιάζοντας με $\alpha_1\alpha_2$ (τις 3.12 και 3.13) παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις,

$$a_1[a_2 r-\lambda_2-\delta+\lambda_2\ \hat{c}(r)]\varphi_1(0)-\lambda_1 c_2\varphi_2(0)\hat{c}(r)-\lambda_1(a_2 r-a_2-\delta)\ \hat{\zeta}(r)=0$$

$$a_1[a_2\rho-\lambda_2-\delta+\lambda_2\ \hat{c}(\rho)]\varphi_1(0)-\lambda_1 c_2\varphi_2(0)\hat{c}(\rho)-\lambda_1(a_2\rho-a_2-\delta)\ \hat{\zeta}(\rho)=0$$

λύνοντας τις άνω σχέσεις ως προς $\varphi_1(0)$ και $\varphi_2(0)$ αντίστοιχα παίρνουμε τις παρακάτω εξισώσεις,

$$r = s$$

$$\varphi_1(0) = \frac{\left[\lambda_1\hat{c}(\rho)(\alpha_2 r-\lambda_2-\delta)\hat{\zeta}(r)-\lambda_1\hat{c}(r)(\alpha_2\rho-\lambda_2-\delta)\hat{\zeta}(\rho)\right]}{\alpha_1[(\alpha_2 r-\lambda_2-\delta)\hat{c}(\rho)-(\alpha_2\rho-\lambda_2-\delta)\hat{c}(r)} \quad (3.15)$$

$$\varphi_2(0) = \frac{[\alpha_2\rho-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(\rho)](\alpha_2 r-\lambda_2-\delta)\hat{\zeta}(r)-[\alpha_2 r-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(r)](\alpha_2\rho-\lambda_2-\delta)\hat{\zeta}(\rho)}{\alpha_2\left[\left((\alpha_2 r-\lambda_2-\delta)\hat{c}(\rho)-(\alpha_2\rho-\lambda_2-\delta)\hat{c}(r)\right)\right]} \quad (3.16)$$

η (3.16) έπειτα από πράξεις μπορεί να γραφεί ,

$$\varphi_2(0) = \frac{(\alpha_2\rho-\lambda_2-\delta)(\alpha_2 r-\lambda_2-\delta)\left[\hat{\zeta}(\rho)-\hat{\zeta}(r)\right]}{\alpha_2\left[\left((\alpha_2 r-\lambda_2-\delta)\hat{c}(\rho)-(\alpha_2\rho-\lambda_2-\delta)\hat{c}(r)\right)\right]} + \frac{\alpha_1\lambda_2}{\alpha_2\lambda_1}\varphi_1(0)$$

πολαπλασιάζοντας την τελευταία σχέση με $\frac{\lambda_1}{\alpha_1}$, έπειτα από πράξεις καταλήγουμε στην εξής σχέση η οποία θα φανεί χρήσιμη παρακάτω,

$$\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\varphi_1(0) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\varphi_2(0) = \frac{\lambda_1(\alpha_2\rho-\lambda_2-\delta)(\alpha_2 r-\lambda_2-\delta)\left[\hat{\zeta}(\rho)-\hat{\zeta}(r)\right]}{\alpha_1\alpha_2\left[\left((\alpha_2 r-\lambda_2-\delta)\hat{c}(\rho)-(\alpha_2\rho-\lambda_2-\delta)\hat{c}(r)\right)\right]} \quad (3.17)$$

αντικαθιστώντας τώρα τις λύσεις για τα $\varphi_1(0)$ και $\varphi_2(0)$ στις (3.12),(3.13) αντίστοιχα και παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace (inverse Laplace transform) ως προς s προκύπτει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.1 *Η προεξοφλημενή συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu όπως ορίζεται παρακάτω,*

$$\varphi_i(u) = E\left\{e^{-d\tau_i}w(U(\tau_i-),|U(\tau_i)|)I_{\{\tau_i<\infty\}}\middle|U(0)=u\right\}, u \geq 0,$$
$$i = 1,2 \quad (3.18)$$

όπου κατά τα γνωστά, δ≥0 είναι ο προεξοφλητικός παράγων, $w(x_1,x_2), x_1, x_2 \geq 0$ είναι μια συνάρτηση ποινής και $\tau_i, i = 1,2$ είναι η τυχαία μεταβλητή για την στιγμή της χρεοκοπίας για την κλάση i, ικανοποιεί το παρακάτω σύστημα ελλειματικών ανανεωτικών εξισώσεων,

$$\varphi_1(u) = \kappa_\delta \int_0^u \varphi_1(u-y)\eta(y)dy + \sigma_1(u) \quad \textit{(3.19)}$$
$$\varphi_2(u) = \kappa_\delta \int_0^u \varphi_2(u-y)\eta(y)dy + \sigma_2(u) \quad \textit{(3.20)}$$

όπου

$$\kappa_\delta = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\frac{(\lambda_2+\delta)}{\alpha_2}T_0T_rT_\rho b(0) + \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\frac{r}{r-\rho}T_0T_r b(0) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\frac{\rho}{r-\rho}T_0T_\rho b(0) + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}T_0T_rT_\rho c(0) + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\frac{r}{r-\rho}T_0T_r c(0) - \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\frac{\rho}{r-\rho}T_0T_\rho c(0) \quad (3.21)$$

$$q_1 = \frac{\left[\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}T_0T_rT\rho b(0)\right]}{\kappa_\delta},\ q_2 = \frac{\left[\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\frac{r}{r-\rho}T_0T_r b(0)\right]}{\kappa_\delta},$$

$$q_3 = \frac{\left[-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\frac{\rho}{r-\rho}T_0T_\rho b(0)\right]}{\kappa_\delta}, \quad q_4 = \frac{\left[\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}T_0T_rT_\rho c(0)\right]}{\kappa_\delta},$$

$$q_5 = \frac{\left[\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\frac{r}{r-\rho}T_0T_r c(0)\right]}{\kappa_\delta}, \qquad q_6 = \frac{\left[-\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\frac{\rho}{r-\rho}T_0T_\rho c(0)\right]}{\kappa_\delta},$$

$$\eta(y) = q_1\frac{[T_rT_\rho b(0)]}{T_0T_rT_\rho b(0)} + q_2\frac{T_r b(y)}{T_0T_r b(0)} + q_3\frac{T_\rho b(y)}{T_0T_\rho b(0)} + q_4\frac{T_rT_\rho c(y)}{T_0T_rT_\rho c(0)} + q_5\frac{T_r c(y)}{T_0T_r c(0)} + q_6\frac{T_\rho c(y)}{T_0T_\rho c(0)} \quad (3.21)$$

και r,ρ οι μη αρνητικές ρίζες της εξίσωσης Lundberg(3.14), $0 < \kappa_\delta < 1$ και $\eta(y)$ συνάρτηση πιθανότητας ενώ ,

$$\sigma_1(u) = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\left[\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}T_rT_\rho\zeta(u) + \frac{rT_r\zeta(u)-\rho T_\rho\zeta(u)}{r-\rho}\right] + \left[\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\varphi_1(0) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\varphi_2(0)\right]T_rT_\rho c(u) (3.22)$$

$$\sigma_2(u) = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\left[\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\,T_rT_\rho\zeta(u) + \frac{rT_r\zeta(u)-\rho T_\rho\zeta(u)}{r-\rho}\right] - [\left[\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\varphi_1(0) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\varphi_2(0)\right]T_rT_\rho b(x) \quad (3.23)$$

η απόδειξη παραλείπεται (βλ. Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova).

Παρατήρηση 3.1:*Όταν $\alpha_1 = \alpha_2$, το μοντέλο (3.1) μετατρέπεται στο μοντέλο των Albrecher&Boxma (2004).*

Παρατήρηση 3.2: *Εαν τα α_1, α_2 πάρουν τιμές, τέτειες ώστε $\frac{\lambda_1}{\alpha_1} = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}$ τότε από τις (3.15),(3.16), (3.19), (3.20) προκύπτει ότι $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$ και $\varphi_1(u) = \varphi_2(u)$ που όπως φαίνεται απο τις τελευταίες εξισώσεις στην περίπτωση αυτή η δομή εξάρτησης μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων και του ύψους των αποζημιώσεων παύει να ισχύει και το μοντέλο μετατρέπεται σε ένα κλασσικό μοντέλο σύνθετης Poisson.*

3.4 Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Στη θεωρία χρεοκοπίας, ένα από τα πλέον σημαντικά μέτρα κινδύνου είναι ο χρόνος της χρεοκοπίας με το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου της χρεοκοπίας να εμφανίζει ιδιαίτερο ερευνητικό ενδιαφέρον.

Η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu,όπως ήδη αναφέρθηκε (βλ.παράγραφος 1.8), για $w(x,y) = 1$ δίνει το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας (δοθέντος ότι εμφανίζεται χρεοκοπία) επομένως αν λάβουμε υπόψιν και την κλάση στην οποία ανήκει ένας ασφαλισμένος (κάτι το οποίο διαδραμάτισε καθοριστικό ρόλο στην διαμόρφωση του μοντέλου του κεφαλαίου αυτού) παίρνουμε την παρακάτω σχέση,

$$m_i(u) = E\left[e^{-\delta\tau_i}I_{\{\tau_i<\infty\}}\middle|U(0) = u\right], u \geq 0, i = 1,2$$

όπου i = 1,2 η κλάση στην οποία ανήκει ο κάθε ασφαλισμένος και u το αρχικό κεφάλαιο.

Ο μετασχηματισμός Laplace των $m_i(u)$ για $i = 1,2$ μπορει να φανεί χρήσιμος κατά τον υπολογισμό των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας για τις τυχαίες μεταβλητές $\tau_i, i = 1,2$ ενώ για $\delta = 0$ η $m_i(u)$ για $i = 1,2$ δίνει τη συνάρτηση χρεοκοπίας $\psi_i(u)$ *για* $i = 1,2$.

Αν υποθέσουμε πως τα ύψη των ζημιών $\{X_i\}$ ακολουθούν την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ,

$\xi(y) = ke^{-ky}$, $y \geq 0$, μέση τιμή $E(X_1) = \frac{1}{k}$ και μετασχηματισμό Laplace $\hat{\xi}(s) = \frac{1}{s+k}$.

Από (3.7) είδαμε ότι,

$$\zeta(u) = \int_u^\infty w(u, y-u)\, g(y) dy$$

οπότε για $w(x,y) = 1$ και $g(y) = \xi(y) = ke^{-ky}$, $y \geq 0$ παίρνουμε,

$$\zeta(u) = \int_u^\infty \xi(y) dy = e^{-ku}$$

τότε, για $s \geq 0$ είναι,

$$T_s\zeta(0) = \hat{\zeta}(s) = \frac{1}{s+k} \quad (3.24)$$

ενώ από τις (3.5),(3.6) παίρνουμε,

$$\hat{\mathrm{c}}(\mathrm{s}) = \frac{\mathrm{k}}{\mathrm{s+k+\nu}} , \quad (3.25)$$

και

$$\hat{b}(s) = \hat{\xi}(s) - \hat{c}(s) = \frac{k\nu}{(s+k)(s+\nu+k)} \quad (3.26) .$$

Αξιοποιώντας την παρακάτω σχέση ,

$$T_{s_1}T_{s_2}f(0) = \frac{\hat{f}(s_1) - \hat{f}(s_2)}{s_2 - s_1}$$

παίρνουμε

$$T_sT_\rho T_r c(0) = \frac{k}{(s+k+\nu)(\rho+\kappa+\nu)(r+k+\nu)} , \quad (3.27)$$

και αντίστοιχα

$$T_sT_\rho T_r\xi(0) = \frac{k}{(s+k)(\rho+k)(r+k)} - \frac{k}{(s+k+\nu)(\rho+k+\nu)(r+k+\nu)} , \quad (3.28)$$

$$T_sT_\rho T_r\zeta(0) = \frac{1}{(s+k)(\rho+k)(r+k)} , \quad (3.29)$$

$$\frac{rT_sT_rc(0) - \rho T_sT_\rho c(0)}{r-\rho} = \frac{k(k+\nu)}{(s+k+\nu)(\rho+k+\nu)(r+k+\nu)} , \quad (3.30).$$

Εφαρμόζοντας τις (3.25),(3.26) στην εξίσωση Lundberg (3.14α) παίρνουμε ,

$$\left(s - \frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\right)\left(s - \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\right) + \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\left(s - \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\right) \frac{k\nu}{(s+k)(s+\nu+\kappa)} + \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\left(s - \frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\right) \frac{k}{s+k+\nu} = 0$$

όπου αν πολλαπλασιάσουμε την τελευταία σχέση με $(s+k)(s+k+\nu)$ παίρνουμε ,

$\left(s-\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\right)\left(s-\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\right)(s+k)(s+k+\nu)+k\nu\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\left(s-\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\right)+k\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\left(s-\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\right)(s+k)=0$ *(3.31)*
η (3.31) είναι ένα πολυώνυμο 4ου βαθμού με 4 ρίζες στο C (Σύνολο Μιγαδικών).Οι δύο από αυτές είναι η ρ και η r οι οποίες θα είναι μη αρνητικές (βλ. Λήμμα 2.1 και Λήμμα 2.2 Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova) .
Έτσι, η (3.31) θα έχει ακριβώς δύο άλλες ρίζες,έστω , $\mathcal{R}_1$ και $\mathcal{R}_2$, με αρνητικό πραγματικό μέρος. Ο συντελεστής του πρώτου όρου στο αριστερό μέλος της (3.3.1) ισούται με ένα,επομένως ισχύει η παρακάτω σχέση,

$(s+k)(s+k+\nu)[\,\widehat{\omega}_1(s)-\widehat{\omega}_2(s)]=(s-r)(s-\rho)(s-R_1)(s-R_2)$, (3.32)
Ισχύει (βλ. Λήμμα 2.1 και Λήμμα 2.2 Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova) ,

$$T_sT_\rho T_r\iota_1(0)=\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\left[\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}T_sT_\rho T_r\zeta(0)+\frac{rT_sT_r-\rho T_sT_\rho\zeta(0)}{r-\rho}\right]+[\frac{\lambda_2}{\alpha_2}m_1(0)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}m_2(0)]T_sT_\rho T_rc(0) \text{ (3.33)}$$

$$T_sT_\rho T_r\iota_2(0)=\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\left[\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_1}T_sT_\rho T_r\zeta(0)+\frac{rT_sT_r-\rho T_sT_\rho\zeta(0)}{r-\rho}\right]-[\frac{\lambda_2}{\alpha_2}m_1(0)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}m_2(0)]T_sT_\rho T_rb(0) \text{ (3.34) .}$$

Επίσης η γενικευμένη εξίσωση Lundberg (generalized Lundberg’s equation) για το μοντέλο (3.1) όπως εκφράζεται από την (3.14 α) γράφεται ως εξής

$$\widehat{\omega}_1(s)-\widehat{\omega}_2(s)=0 \text{ (3.35)}$$

όπου

$$\widehat{\omega}_1(s)=\left(s-\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\right)\left(s-\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\right) \text{ (3.36)}$$

$$\widehat{\omega}_2(s)=\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}-s\right)\hat{b}(s)-\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}-s\right)\hat{c}(s)=0 \text{ (3.37)}$$

Εφαρμόζοντας παρεμβολή Lagrange οδηγούμαστε στα παρακάτω αποτελέσματα,

$$\hat{\pi}_1(s)+\hat{\iota}_1(s)=(s-r)(s-\rho)T_sT_\rho T_r\iota_1(0) \text{ (3.38)}$$

Επίσης από (3.12) και (3.13) παίρνουμε

$$\widehat{m}_1(s)=\frac{\hat{\pi}_1(s)+\hat{\iota}_1(s)}{\widehat{\omega}_1(s)-\widehat{\omega}_2(s)} \text{ (3.39)}$$

και

$$\widehat{m}_2(s)=\frac{\hat{\pi}_2(s)+\hat{\iota}_2(s)}{\widehat{\omega}_1(s)-\widehat{\omega}_2(s)} \text{ (3.40)}$$

όπου

$$\hat{\pi}_1(s)=\left(s-\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\right)m_1(0) \text{ (3.41)}$$

$$\hat{\iota}_1(s)=\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}-s\right)\hat{\zeta}(s)+\left[\frac{\lambda_2}{\alpha_2}m_1(0)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}m_2(0)\right]\hat{c}(s) \text{ (3.42)}$$

$$\hat{\pi}_2(s) = \left(s - \frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\right) m_2(0) \quad (3.43)$$

$$\hat{\iota}_2(s) = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1} - s\right)\hat{\zeta}(s) + \left[\frac{\lambda_2}{\alpha_2} m_1(0) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1} m_2(0)\right]\hat{b}(s) \quad (3.44)$$

από τις (3.32) , (3.38) , (3.39) για κάθε $s > 0$ (εκτός των τιμών των ρ και r) παίρνουμε ότι,

$$\hat{\varphi}_1(s) = \frac{\hat{\pi}_1(s)+\hat{\iota}_1(s)}{\widehat{\omega}_1(s) - \widehat{\omega}_2(s)}$$

$$= \frac{[\hat{\pi}_1(s)+\hat{\iota}_1(s)](s+k)(s+v+k)}{[\widehat{\omega}_1(s) - \widehat{\omega}_2(s)](s+k)(s+v+k)}$$

$$= \frac{(s+k)(s+v+k)(s-r)(s-\rho)T_s T_\rho T_r \iota_1(0)}{(s-r)(s-\rho)(s-R_1)(s-R_2)}$$

$$= \frac{(s+k)(s+v+k)T_s T_\rho T_r \iota_1(0)}{(s-R_1)(s-R_2)} \quad (3.45)$$

έστω τώρα $\Sigma(s) \coloneqq (s+k)(s+v+k)T_s T_\rho T_r \iota_1(0)$ όποτε η (3.45) γίνεται

$$\hat{\varphi}_1(s) = \frac{\Sigma(s)}{(s-R_1)(s-R_2)} \quad (3.46)$$

με χρήση των (3.33),(3.27) και (3.30) η $\Sigma(s)$ γίνεται

$$\Sigma(s) = (s+k)(s+v+k)T_s T_\rho T_r \iota_1(0)$$

$$= (s+k)(s+v+k)\{\frac{\lambda_1}{\alpha_1}(\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2})T_s T_\rho T_r \zeta(0) + (\frac{\lambda_1}{\alpha_1})\frac{rT_s T_r \zeta(0) - \rho T_s T_\rho \zeta(0)}{r-\rho} + [\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\varphi_1(0) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\varphi_2(0)]T_s T_\rho T_r c(0)\}$$

$$= (s+k)(s+v+k)\{\frac{\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\right)}{(\rho+k)(r+k)(s+k)} + \frac{\left(\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\right)k}{(\rho+k)(r+k)(s+k)} + \frac{\left[\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\varphi_1(0) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\varphi_2(0)\right]k}{(\rho+k+v)(r+k+v)(s+k+v)}\}$$

$$= \frac{\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}+k\right)}{(\rho+k)(r+k)}(s+k+v) + \frac{\left[\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\varphi_1(0) - \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\varphi_2(0)\right]k}{(\rho+k+v)(r+k+v)}(s+k) \quad (3.47)$$

που η (3.47) είναι ένα πολυώνυμο $1^{ου}$ βαθμού ως προς s.Με χρήση των (3.24),(3.25) στην (3.17) παίρνουμε

$$\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\varphi_1(0)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\varphi_2(0)=\frac{\lambda_1((\rho+k+v)(r+k+v)(\alpha_2\rho-\lambda_2-\delta)(\alpha_2 r-\lambda_2-\delta)}{\alpha_1\alpha_2 k(\rho+k)(r+k)(\alpha_2 r+\alpha_2\rho+\alpha_2 k+\alpha_2 v-\lambda_2-\delta)}\ .\ (3.48)$$

Επειδή η $\Sigma(s)$ είναι ένα πολυώνυμο 1ου βαθμού ως προς s οι $\mathcal{R}_1$ και $\mathcal{R}_2$ βρίσκονται στον αριστερό άξονα του μιγαδικού συστήματος , έτσι εφαρμόζοντας ανάλυση σε απλά κλάσματα στην (3.46) και παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace τελικά παίρνουμε

$$\varphi_1(u)=\frac{\Sigma(R_1)}{R_1-R_2}e^{R_1u}+\frac{\Sigma(R_2)}{R_2-R_1}e^{R_2u}\ ,u>0\ \ (3.49)$$

όπου η γενική μορφή της Σ(.) δίνεται στην (3.47) και $\mathcal{R}_1$ και $\mathcal{R}_2$ είναι οι δύο ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg με αρνητικό πραγματικό μέρος.

Ομοίως , για $\hat{\varphi}_2(s)$ ισχύει ότι

$$T(s):=\ (s+k)(s+v+k)T_sT_\rho T_r\iota_2(0)$$

που λόγω (3.40) έχουμε $\hat{\varphi}_2(s)=\frac{T(s)}{(s-R_1)(s-R_2)}$ (3.50)

από (3.34),(3.27) και (3.30) και επειδή η $T(s)$ είναι και αυτή πολυώνυμο 1ου βαθμού ως προς s παίρνουμε

$$T(s):=\ (s+k)(s+v+k)T_sT_\rho T_r\iota_2(0)$$

$$=(s+k)(s+v+k)\{\frac{\lambda_2}{\alpha_2}[(\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1})T_sT_\rho T_r\zeta(0)+\frac{rT_sT_r\zeta(0)-\rho T_sT_\rho\zeta(0)}{r-\rho}-[\frac{\lambda_2}{\alpha_2}m_1(0)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}m_2(0)]T_sT_\rho T_r b(0)\}$$

$$=\frac{\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}+k\right)-\left[\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\varphi_1(0)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\varphi_2(0)\right]k}{(\rho+k)(r+k)}(s+k+v)+\frac{\left[\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\varphi_1(0)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\varphi_2(0)\right]k}{(\rho+k+v)(r+k+v)}(s+k)\ (3.51)$$

όπου $\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\varphi_1(0)-\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\varphi_2(0)=\frac{\lambda_1((\rho+k+v)(r+k+v)(\alpha_2\rho-\lambda_2-\delta)(\alpha_2 r-\lambda_2-\delta)}{\alpha_1\alpha_2 k(\rho+k)(r+k)(\alpha_2 r+\alpha_2\rho+\alpha_2 k+\alpha_2 v-\lambda_2-\delta)}$ από (3.48).

Εφαρμόζοντας ανάλυση σε απλά κλάσματα προκύπτει στην (3.50) και παίρνοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace τελικά παίρνουμε

$$\varphi_2(u)=\frac{T(R_1)}{R_1-R_2}e^{R_1u}+\frac{T(R_2)}{R_2-R_1}e^{R_2u}\ ,u>0\ \ (3.52)$$

όπου η γενική μορφή της T(.) δίνεται στην (3.51) και $\mathcal{R}_1$ και $\mathcal{R}_2$ είναι οι δύο ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg με αρνητικό πραγματικό μέρος.

Οι σχέσεις (3.49) και (3.52) αντιστοιχούν στον μετασχηματισμός Laplace για το χρόνο χρεοκοπίας ($\varphi_i(u)\ ,i=1{,}2$) υπό την υπόθεση της εκθετικής κατανομής.Ιδιαίτερα σπουδαία παρατήρηση είναι πώς για δ=0, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας ($\psi_i(u), i = 1,2$).

Εν συνεχεία για το χρόνο χρεοκοπίας αποδυκνύεται (βλ. Λήμμα 2.1 και Λήμμα 2.2 Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova) ότι,

$$E\{\tau_i|\tau_i < \infty, U(0) = u\} = \frac{E\{\tau_i I_{\{T_i<\infty\}}|U(0) = u\}}{P_r\{\tau_i<\infty|U(0)=u\}} = -\frac{\frac{\partial}{\partial\delta}\varphi_i(u)|_{\delta=0}}{\psi_i(u)}, i = 1,2 \quad (3.53)$$

όπου $\tau_i, i = 1,2$ είναι η στιγμή της χρεοκοπίας όταν ο ασφαλισμένος κατανέμεται στην $i = 1,2$ κλάση και u το αρχικό κεφάλαιο.

3.5 Αριθμητικές Εφαρμογές

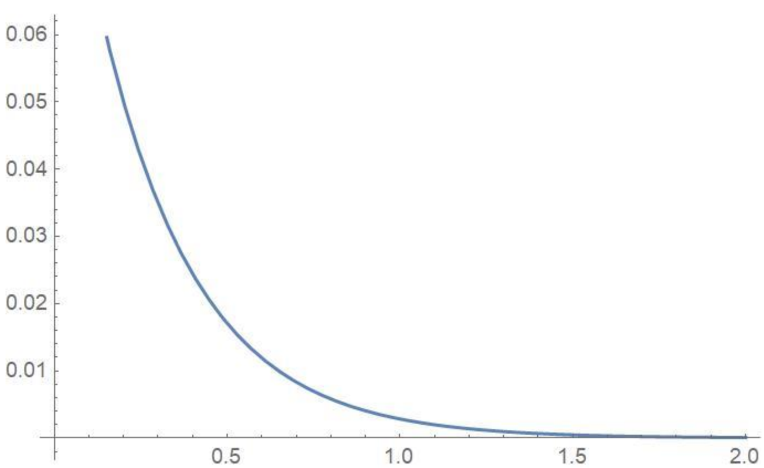
Αριθμητική εφαρμογή 3.1: Υποθέτουμε πως για το κατώφλι ισχύει, $R_i \sim exp(7)$, για τα ύψη των αποζημιώσεων $X_i \sim exp$ (4), για τα έσοδα από ασφάλιστρα $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$, για τις παραμέτρους της κατανομής του χρόνου μέχρι την επόμενη αποζημίωση $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$ (εκθετική κατανομή σε αυτό το μοντέλο) και $\delta = 0$. Τότε, για την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg από τις άνω παραμέτρους και την (3.14α) έχουμε

$$\left(s - \frac{3}{5}\right)\left(s - \frac{2}{5}\right) - \frac{12}{5}\frac{\left(s-\frac{2}{5}\right)}{(s+11)} - \frac{56}{5}\frac{\left(s-\frac{3}{5}\right)}{(s+4)(s+11)} = 0 ,$$

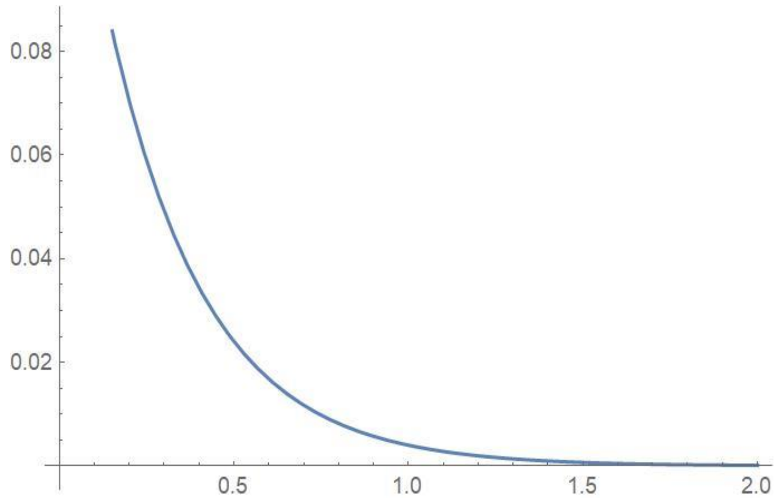
με $\rho = 0$, $r = 0.523845$, $R_1 = -10.9344$, $R_2 = -3.58942$ να αποτελούν τις τέσσερις λύσεις της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg.

Επειδή δ=0 (σε αυτη την περίπτωση $\varphi_i(u) = \psi_i(u)$) μπορούν να υπολογισθούν οι πιθανότητες χρεοκοπίας από τις (3.49) και (3.52) αντίστοιχα. Είναι,

$$\psi_1(u) = -0.000558637e^{-10.9344u} + 0.102612e^{-3.58942u}$$
$$\psi_2(u) = -0.000930207e^{-10.9344u} + 0.144603e^{-3.58942u}$$



Σχ.1.5 : Γραφική απεικόνιση της $\psi_1(u)$.



Σχ.1.6 : Γραφική απεικόνιση της $\psi_2(u)$.

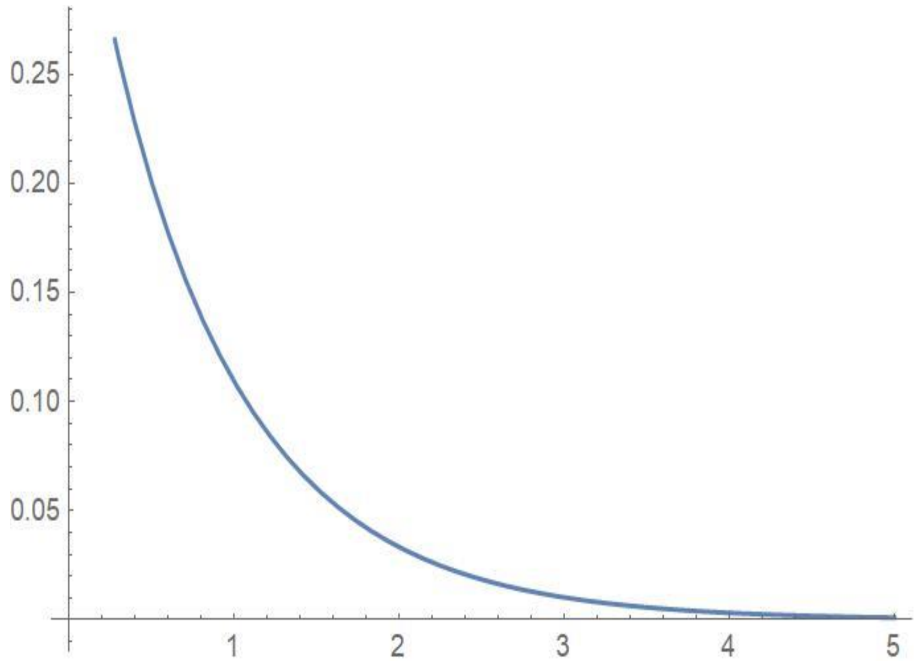
Αριθμητική εφαρμογή 3.2: Υποθέτουμε πως για το κατώφλι ισχύει, $R_i \sim exp(1.5)$, για τα ύψη των αποζημιώσεων $X_i \sim exp\ (1.8)$, για τα έσοδα από ασφάλιστρα $\alpha_1 = 8, \alpha_2 = 5$, για τις παραμέτρους της κατανομής του χρόνου μέχρι την επόμενη αποζημίωση (εκθετική κατανομή σε αυτό το μοντέλο) $\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 1$ και $\delta = 0$. Τότε, για την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg από τις άνω παραμέτρους και την (3.14α) έχουμε

$$(s - \tfrac{7}{8})\left(s - \tfrac{1}{5}\right) - 0.36\frac{\left(s-\frac{7}{8}\right)}{(s+3.3)} - 2.3625\frac{\left(s-\frac{1}{5}\right)}{(s+1.8)(s+3.3)} = 0\ ,$$

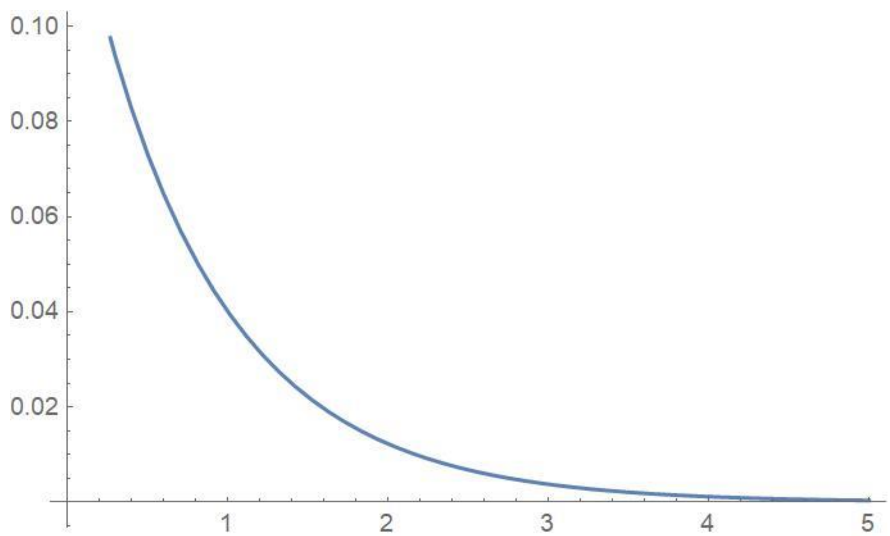
με $\rho = 0$, $r = 0.673217$, $R_1 = -3.51654$, $R_2 = -1.18168$ να αποτελούν τις τέσσερις λύσεις της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg.

Επειδή δ=0 (σε αυτη την περίπτωση $\varphi_i(u) = \psi_i(u)$) μπορούν να υπολογισθούν οι πιθανότητες χρεοκοπίας από τις (3.49) και (3.52) αντίστοιχα. Είναι,

$$\psi_1(u) = 0.0299326e^{-3.51654u} + 0.354294e^{-1.18168u}$$
$$\psi_2(u) = 0.00704518e^{-3.51654u} + 0.130393e^{-1.18168u}$$



Σχ.1.7 : Γραφική απεικόνιση της $\psi_1(u)$.



Σχ.1.8 : Γραφική απεικόνιση της $\psi_2(u)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

4.0 Βασικές Ένοιες Κεφαλαίου

Χώρος καταστάσεων (state space), είναι το σύνολο στο οποίο ανήκουν οι τιμές που παίρνει μια στοχαστική διαδικασία.
Μία στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ με τιμές σε ένα χώρο καταστάσεων S έχει την Μαρκοβιανή ιδιότητα αν, για κάθε ενδεχόμενο A ∊ S ισχύει ότι ,

$$P_r\left(X_{y+n} \in A \middle| X_y = x_y, X_s = x_s, s < y\right) = P_r(X_{y+n} \in A | X_y = x_y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{N}, y + n \in \mathbb{N}\ \mu\varepsilon\ n \geq 0$.

Η παραπάνω διαδικασία καλείται και Μαρκοβιανή αλυσίδα (Markov Chain) καθώς οι πιθανότητα η στοχαστική διαδικασία να πάρει τιμές σε ένα οποιοδήποτε σύνολο A στο χρόνο $\mathrm{y} + \mathrm{n}$ δεδομένου ότι είμαστε στο χρόνο y εξαρτάται μόνο από την παρούσα τιμή της X_y και όχι από τις παρελθούσες τιμές της $X_s,\ s < y.$

Το 1827 ο άγγλος βοτανολόγος Brown παρατήρησε πως ένα μόριο όταν βυθιστεί σε κάποιο υγρό κίνειται άτακτα.Η μαθηματική μοντελοποίηση της κίνησης αυτής αποτέλεσε την αρχή για έναν ιδιαίτερα σημαντικό κλάδο των πιθανοτήτων και των στοχαστικών διαδικασίων που ονομάστηκε κίνηση Brown ή Wiener.Ακολουθεί συνοπτικός ορισμός ο οποίος βασίζεται στην γενίκευση της εργασίας του Einstein από τον Wiener.

Ορισμός 4.0*.Μια στοχαστική διαδικασία* $\{X_t, t \geq 0\}$ *είναι στοχαστική διαδικασία Brown ή Wiener αν,*

1. *Οι προσαυξήσεις της στοχαστικής διαδικασίας είναι ανεξάρτητες και ομογενείς*
2. *Για κάθε t>0 η* X_t *έχει κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας*

   $$f(x,t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}}, \sigma > 0$$ *, δηλαδή κατανέμεται κανονικά.*
3. $E[X_t] = 0$ *για κάθε* $t > 0$
4. $X(0) = 0$ *και η* X_t *είναι συνεχής στο μηδέν.*

Γενικότερα η κίνηση Brown μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε σε φαινόμενα που περιγράφουν μία κίνηση που διαμορφώνεται από το άθροισμα ενός μεγάλου αριθμού παραγόντων (με ελάχιστη συνεισφορά ο καθενάς), για παράδειγμα μπορεί να εκφράζει την κίνηση του λογαρίθμου μιας μετοχής.Διάχυση είναι μια διαδικασία Markov συνεχούς χρόνου με συνεχή sample paths ή διάχυση είναι μια διαδικασία η οποία ικανοποιεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση.

4.1 Ένα μοντέλο με εξάρτηση και διάχυση

Πολλές φορές επιθυμούμε τη γενίκευση του κλασσικού μοντέλου της θεωρίας χρεοκοπίας ,με σκοπό να μπορεί να υπολογίζει τις διακυμάνσεις συσσωρευμένων απαιτήσεων(aggregate claims) και συσσωρευμένων ασφαλίστρων (aggregate premiums).

Αυτό,επιτυγχάνεται συνήθως προσθέτοντας έναν παράγοντα διάχυσης.Στην αναλογιστική επιστήμη και πιο συγκεκριμένα σε μοντέλα κινδύνου ως παράγων διάχυσης χρησιμοποίειται κυρίως η κίνηση Brown.

Έστω ότι η διαδικασία πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής εταιρείας περιγράφεται από τη σχέση,

$$U_D(t) = u + \alpha t - \sum_i^{N(t)} x_i + \sigma W(t), t \geq 0 \ (4.1)$$

όπου $u \geq 0$ και α σταθερό ασφάλιστρο.

Οι απαιτήσεις ακολουθούν την δομή εξάρτησης που εξετάστηκε πρώτη φορά από τους Albrecher&Boxma (2004).Τα ύψη των ζημιών είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με αθροιστική συνάρτηση κατανομής G(.), συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας g(.) και μέσω μ.Εαν μία απαίτηση είναι μεγαλύτερη από κάποιο τυχαίο κατώφλι (random threshold) $R_j, j = 1,2,3, \ldots$ δηλαδή $(X_i > R_j)$ όπου R_jείναι i.i.d και ανεξάρτητες από τα ύψη των απαιτήσεων με αθροιστική συνάρτηση κατανομής K(.) τότε η διαδικασία πλεονάσματοςταξινομείται στην κλάση 1 και ο χρόνος μέχρι την επόμενη αποζημίωση ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_1.Σε περίπτωση όπου μία απαίτηση είναι μικρότερη από κάποιο τυχαίο κατώφλι(random threshold) R_j,δηλαδή $(X_i < R_j)$,τότε ο χρόνος μέχρι την επόμενη αποζημιώση ακολουθεί εκθετική κατανομή με παράμετρο λ_2.

Επίσης, *W(t)* είναι η τυπική κίνηση Brown με *W(0)=0* και $W(t) \sim N(0,t)$ για κάθε $t > 0$ ενώ ο συντελεστής σ της κίνησης Brown είναι μία παράμετρος η οποία αφορά το πως ριψοκίνδυνες επενδύσεις μπορεί να επηρεάζουν την διαδικασία πλεονάσματος.

Η διάχυση στο παραπάνω μοντέλο μπορεί να εκφράζει την επένδυση της ασφαλιστικής εταιρείας.

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους τότε έχουμε,

$$\frac{a_1}{\lambda_1} P_r(X > R) + \frac{a_2}{\lambda_2} P_r(X < R) > \mu \ (4.2)$$

τότε δεδομένου πως η αρχική απαίτηση συμβαίνει με ένταση λ_i, η γενικευμένη αναμενόμενη συνάρτηση ποινής θα ορίζεται ως εξής (Tsai and Willmot, 2002),

$$m_{D,i}(u) = w_0 \Phi_{d,i}(u) + \Phi_{w,i}(u), u > 0 \,, i = 1,2 \ (4.3)$$

όπου w_0 μία σταθερά που αντιστοιχεί στην ποινή κατά τη χρεοκοπία λόγω «μεταβολών» (oscillation) και

$$\Phi_{d,i}(u) = E\{e^{-\delta \tau_i} I_{\{\tau_i < \infty, U(\tau) = 0\}} \big| U(0) = u\} \,, i = 1,2$$

$$\Phi_{w_i}(u) = E\{e^{-\delta \tau_i} w(U(\tau -), |U(\tau)|) I_{\{\tau < \infty, U(\tau) < 0\}} \big| U(0) = u\} \,, i = 1,2$$

η ποσότητα $\Phi_d(u)$ αντιστοιχεί στο μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας της τυχαίας μεταβλητής τ στην περίπτωση όπου η χρεοκοπία επέλθει λόγω oscillation, ενώ η ποσότητα $\Phi_w(u)$ στην ποινή κατά τη χρεοκοπία εαν αυτή επέλθει από κάποια απαίτηση.
Επίσης δ≥0 είναι ο προεξοφλητικός παράγων, $w(x_1, x_2), x_1, x_2 \geq 0$ είναι μια συνάρτηση ποινής για την χρεοκοπία σε περίπτωση που αυτή επέλθει από κάποια απαίτηση με $w(0,0) = w_0$.
Στην περίπτωση που έχουμε αρχικό κεφάλαιο $u = 0$,
τότε ισχύει

$$\Phi_w(0) = 0 \; και \; \Phi_d(0) = 1 \; .$$

4.2 Ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις και εξίσωση Lundberg σε ένα μοντέλο με εξάρτηση και διάχυση

Πρόταση 4.1*(Απόδειξη βλ. Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova).*

Οι συναρτήσεις

$$\Phi_{d,i}(u) = E\left\{e^{-\delta\tau_i} I_{\{\tau_i<\infty, U(\tau)=0\}} \middle| U(0) = u\right\}, i = 1,2$$

$$\Phi_{w_i}(u) = E\left\{e^{-\delta\tau_i} w(U(\tau -), |U(\tau)|) I_{\{\tau<\infty, U(\tau)<0\}} \middle| U(0) = u\right\}, i = 1,2$$

που ορίσθηκαν παραπάνω ικανοποιούν τα παρακάτω συστήματα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων αντίστοιχα.

$$(\lambda_1 + \delta)\Phi_{d,1}(u) = a\Phi'_{d,1}(u) + D\Phi''_{d,1}(u) + \lambda_1 \int_0^u \Phi_{d,1}(u-y)b(y) + \Phi_{d,2}(u-y)c(y)]dy \quad (4.4)$$

$$(\lambda_2 + \delta)\Phi_{d,2}(u) = a\Phi'_{d,1}(u) + D\Phi''_{d,2}(u) + \lambda_2 \int_0^u \Phi_{d,1}(u-y)b(y) + \Phi_{d,2}(u-y)c(y)]dy \quad (4.5)$$

$$(\lambda_1 + \delta)\Phi_{w,1}(u) = a\Phi'_{w,1}(u) + D\Phi''_{w,1}(u) + \lambda_1 \int_0^u \left[\Phi_{w,1}(u-y)b(y) + \Phi_{w,2}(u-y)c(y)\right]dy + \lambda_1\zeta(u) \quad (4.6)$$

$$(\lambda_2 + \delta)\Phi_{w,2}(u) = a\Phi'_{w,2}(u) + D\Phi''_{W,2}(u) + \lambda_2 \int_0^u \left[\Phi_{w,1}(u-y)b(y) + \Phi_{w,2}(u-y)c(y)\right]dy + \lambda_2\zeta(u) \quad (4.7)$$

όπου $D = \frac{1}{2}\sigma^2$ και b(y),c(y),ζ(u) όπως έχουν ορισθεί από τις (3.5),(3.6),(3.7) αντίστοιχα.
Με χρήση μετασχηματισμού Laplace στις (4.4),(4.5),(4.6),(4.7) καταλήγουμε στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.2 *(Απόδειξη βλ. Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova)*
Οι μετασχηματισμοί Laplace των $\widehat{\Phi}_{w,i}(s), \widehat{\Phi}_{d,i}(s)$ *για* $i = 1{,}2$ *ικανοποιούν τις παρακάτω εξισώσεις αντίστοιχα,*

για $\widehat{\Phi}_{w,i}(s)$, $i = 1{,}2$

$$\left\{\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_1+\delta}{D}+\frac{\lambda_1}{D}\,\hat{b}(s)\right]\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_2+\delta}{D}+\frac{\lambda_2}{D}\,\hat{c}(s)\right]-\frac{\lambda_1\lambda_2}{D^2}\hat{b}(s)\hat{c}(s)\right\}\widehat{\Phi}_{w,1}(s)=$$
$$\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_2+\delta}{D}+\frac{\lambda_2}{D}\,\hat{c}(s)\right]\Phi'_{w,1}(0)-\frac{\lambda_1}{D}\,\hat{c}(s)\Phi'_{w,2}(0)-\frac{\lambda_1}{D}\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_2+\delta}{D}\right]\hat{\zeta}(s) \quad (4.8)$$

$$\left\{\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_1+\delta}{D}+\frac{\lambda_1}{D}\,\hat{b}(s)\right]\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_2+\delta}{D}+\frac{\lambda_2}{D}\,\hat{c}(s)\right]-\frac{\lambda_1\lambda_2}{D^2}\hat{b}(s)\hat{c}(s)\right\}\widehat{\Phi}_{w,2}(s)=$$
$$\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_1+\delta}{D}+\frac{\lambda_1}{D}\,\hat{b}(s)\right]\Phi'_{w,2}(0)-\frac{\lambda_2}{D}\,\hat{b}(s)\Phi'_{w,1}(0)-\frac{\lambda_2}{D}\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_1+\delta}{D}\right]\hat{\zeta}(s) \quad (4.9)$$

για $\widehat{\Phi}_{d,i}(s)$, $i = 1{,}2$

$$\left\{\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_1+\delta}{D}+\frac{\lambda_1}{D}\,\hat{b}(s)\right]\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_2+\delta}{D}+\frac{\lambda_2}{D}\,\hat{c}(s)\right]-\frac{\lambda_1\lambda_2}{D^2}\hat{b}(s)\hat{c}(s)\right\}\widehat{\Phi}_{d,1}(s)=$$
$$\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_2+\delta}{D}\right]\left[s+\frac{a}{D}+\Phi'_{d,1}(0)\right]+\left[\frac{\lambda_2}{D}\Phi'_{d,1}(0)-\frac{\lambda_1}{D}\Phi'_{d,2}(0)+\frac{a}{D}\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{D}\right]\hat{c}(s)+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{D}s\hat{c}(s) \quad (4.10)$$

$$\left\{\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_1+\delta}{D}+\frac{\lambda_1}{D}\,\hat{b}(s)\right]\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_2+\delta}{D}+\frac{\lambda_2}{D}\,\hat{c}(s)\right]-\frac{\lambda_1\lambda_2}{D^2}\hat{b}(s)\hat{c}(s)\right\}\widehat{\Phi}_{d,2}(s)=$$
$$\left[s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_2+\delta}{D}\right]\left[s+\frac{a}{D}+\Phi'_{d,2}(0)\right]+\left[\frac{\lambda_2}{D}\Phi'_{d,1}(0)-\frac{\lambda_1}{D}\Phi'_{d,2}(0)+\frac{a}{D}\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{D}\right]\hat{b}(s)+\frac{\lambda_2-\lambda_1}{D}s\hat{b}(s) \quad (4.11)\,.$$

Παρατηρώ ότι οι συντελεστές των $\widehat{\Phi}_{w,i}(s), \widehat{\Phi}_{d,i}(s)$ στο πρώτο μέλος των εξισώσεων (4.8),(4.9),(4.10),(4.11) είναι πανομοιότυποι,επομένως αν θέσουμε αυτή την παράσταση ίση με μηδέν έπειτα από κατάλληλες πράξεις καταλήγουμε στην εξής σχέση,

$$\left(s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_1+\delta}{D}\right)\left(s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_2+\delta}{D}\right)+\frac{\lambda_1}{D}\hat{b}(s)\left(s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_2+\delta}{D}\right)+\frac{\lambda_2}{D}\hat{c}(s)\left(s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_1+\delta}{D}\right) \quad (4.12)$$

η οποία αποτελεί μια γενικευμένη εξίσωση Lundberg.Αποδεικνύεται (βλ. Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova) πως οι ρίζες της άνω εξίσωσης είναι δύο ακριβώς, διακριτές και πραγματικές.Η μία τείνει στο μηδέν όταν δ→0.
Επίσης,οι ρίζες αυτές,διαδραματιζούν σημαίνοντα ρόλο κατά την εξαγωγή αποτελεσμάτων για την συνάρτηση των Gerber-Shiu και από για τη συνέχεια του κεφαλαίου θα δηλώνοντε σαν r και ρ.

4.3 Η συνάρτηση των Gerber-Shiu σε ένα μοντέλο με εξάρτηση και διάχυση

Προκειμένου να μπορέσουμε να επιλύσουμε τη συνάρτηση των Gerber-Shiu,πρέπει να αντιστρέψουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των σχέσεων (4.8),(4.9),(4.10),(4.11).
Έτσι,όταν $s = r$ (ή $s = \rho$) τα δεξιά μέλη των (4.8),(4.9) μηδενίζοντε.
Επομένως,αν όπου $s = r \; και \; s = \rho$ στην (4.8) οδηγούμαστε στο παρακάτω γραμμικό σύστημα,

$$\left[\rho^2 + \frac{\alpha}{D}\rho - \frac{\lambda_2 + \delta}{D} + \frac{\lambda_2}{D}\hat{c}(\rho)\right]\Phi'_{w,1}(0) - \frac{\lambda_1}{D}\hat{c}(\rho)\Phi'_{w,2}(0) = \frac{\lambda_1}{D}\left[\rho^2 + \frac{a}{D}\rho - \frac{\lambda_2 + \delta}{D}\right]\hat{\zeta}(\rho)$$

$$\left[r^2 + \frac{\alpha}{D}r - \frac{\lambda_2 + \delta}{D} + \frac{\lambda_2}{D}\hat{c}(r)\right]\Phi'_{w,1}(0) - \frac{\lambda_1}{D}\hat{c}(r)\Phi'_{w,2}(0) = \frac{\lambda_1}{D}\left[r^2 + \frac{a}{D}r - \frac{\lambda_2 + \delta}{D}\right]\hat{\zeta}(r)$$

από την επίλυση του άνω συστήματος παίρνουμε,

$$\Phi'_{w,1}(0) = \frac{\lambda_1(D\rho^2 + a\rho - \lambda_2 - \delta)\hat{\zeta}(\rho)\hat{c}(r) - \lambda_1(Dr^2 + ar - \lambda_2 - \delta)\hat{\zeta}(r)\hat{c}(\rho)}{D(D\rho^2 + a\rho - \lambda_2 - \delta)\hat{c}(r) - D(Dr^2 + ar - \lambda_2 - \delta)\hat{c}(\rho)}, \quad (4.13)$$

$$\Phi'_{W,2}(0) = \frac{(D\rho^2 + a\rho - \lambda_2 - \delta)\hat{\zeta}(\rho)[Dr^2 + ar - \lambda_2 - \delta + \lambda_2\hat{c}(r)]}{D(D\rho^2 + a\rho - \lambda_2 - \delta)\hat{c}(r) - D(Dr^2 + ar - \lambda_2 - \delta)\hat{c}(\rho)} - \frac{(Dr^2 + ar - \lambda_2 - \delta)\hat{\zeta}(r)[D\rho^2 + a\rho - \lambda_2 - \delta + \lambda_2\hat{c}(r)]}{D(D\rho^2 + a\rho - \lambda_2 - \delta)\hat{c}(r) - D(Dr^2 + ar - \lambda_2 - \delta)\hat{c}(\rho)} \quad (4.14)$$

έπειτα από πράξεις η (4.14) γράφεται ως εξής,

$$\Phi'_{W,2}(0) = \frac{(D\rho^2 + a\rho - \lambda_2 - \delta)(Dr^2 + ar - \lambda_2 - \delta)[\hat{\zeta}(\rho) - \hat{\zeta}(r)]}{D(D\rho^2 + a\rho - \lambda_2 - \delta)\hat{c}(r) - D(Dr^2 + ar - \lambda_2 - \delta)\hat{c}(\rho)} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\Phi'_{w,1}(0) \quad (4.15)$$

που μας οδηγεί στην παρακάτω χρήσιμη ποσότητα

$$\left[\frac{\lambda_2}{D}\Phi'_{w,1}(0) - \frac{\lambda_1}{D}\Phi'_{w,2}(0)\right] = -\frac{\lambda_1(D\rho^2 + a\rho - \lambda_2 - \delta)(Dr^2 + ar - \lambda_2 - \delta)[\hat{\zeta}(\rho) - \hat{\zeta}(r)]}{D^2(D\rho^2 + a\rho - \lambda_2 - \delta)\hat{c}(r) - D^2(Dr^2 + ar - \lambda_2 - \delta)\hat{c}(\rho)} \quad (4.16)$$

όμοια, όταν $s = r$ (ή $s = \rho$) τα δεξιά μέλη των (4.10),(4.11) μηδενίζονται.

Επομένως, αν όπου $s = r\ και\ \ s = \rho$ στην (4.10) οδηγούμαστε στο παρακάτω γραμμικό σύστημα,

$$\begin{aligned}
&\left\{\left[\rho^2 + \frac{a}{D}\rho - \frac{\lambda_1+\delta}{D} + \frac{\lambda_1}{D}\,\hat{b}(\rho)\right]\left[\rho^2 + \frac{a}{D}\rho - \frac{\lambda_2+\delta}{D} + \frac{\lambda_2}{D}\,\hat{c}(\rho)\right] - \frac{\lambda_1\lambda_2}{D^2}\hat{b}(\rho)\hat{c}(\rho)\right\}\widehat{\Phi}_{d,1}(\rho) \\
&\quad = \left[\rho^2 + \frac{a}{D}\rho - \frac{\lambda_2+\delta}{D}\right]\left[\rho + \frac{a}{D} + \Phi'_{d,1}(0)\right] \\
&\quad + \left[\frac{\lambda_2}{D}\Phi'_{d,1}(0) - \frac{\lambda_1}{D}\Phi'_{d,2}(0) + \frac{a}{D}\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{D}\right]\hat{c}(\rho) + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{D}\rho\hat{c}(\rho)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left\{\left[r^2 + \frac{a}{D}r - \frac{\lambda_1+\delta}{D} + \frac{\lambda_1}{D}\,\hat{b}(r)\right]\left[r^2 + \frac{a}{D}r - \frac{\lambda_2+\delta}{D} + \frac{\lambda_2}{D}\,\hat{c}(r)\right] - \frac{\lambda_1\lambda_2}{D^2}\hat{b}(r)\hat{c}(r)\right\}\widehat{\Phi}_{d,1}(r) \\
&\quad = \left[r^2 + \frac{a}{D}r - \frac{\lambda_2+\delta}{D}\right]\left[r + \frac{a}{D} + \Phi'_{d,1}(0)\right] \\
&\quad + \left[\frac{\lambda_2}{D}\Phi'_{d,1}(0) - \frac{\lambda_1}{D}\Phi'_{d,2}(0) + \frac{a}{D}\,\frac{\lambda_2-\lambda_1}{D}\right]\hat{c}(r) + \frac{\lambda_2-\lambda_1}{D}r\hat{c}(r)
\end{aligned}$$

από την επίλυση του άνω συστήματος παίρνουμε,

$$\begin{aligned}
\Phi'_{d,1}(0) &= \frac{-\left(\frac{a}{D}+\rho\right)\left[D\rho^2+\alpha\rho-\lambda_2-\delta+(\lambda_2-\lambda_1)\hat{c}(\rho)\right]\lambda_1\hat{c}(r)}{\left[D\rho^2+a\rho-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(\rho)\right]\lambda_1\hat{c}(r)-\left[Dr^2+ar-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(r)\right]\lambda_1\hat{c}(\rho)} + \\
&\frac{\left(\frac{a}{D}+r\right)\left[Dr^2+\alpha r-\lambda_2-\delta+(\lambda_2-\lambda_1)\hat{c}(r)\right]\lambda_1\hat{c}(\rho)}{\left[D\rho^2+a\rho-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(\rho)\right]\lambda_1\hat{c}(r)-\left[Dr^2+ar-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(r)\right]\lambda_1\hat{c}(\rho)} \quad (4.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi'_{d,2}(0) &= -\frac{\left(\frac{a}{D}+\rho\right)\left[D\rho^2+\alpha\rho-\lambda_2-\delta+(\lambda_2-\lambda_1)\hat{c}(\rho)\right]\left[Dr^2+ar-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(r)\right]}{\left[D\rho^2+a\rho-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(\rho)\right]\lambda_1\hat{c}(r)-\left[Dr^2+ar-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(r)\right]\lambda_1\hat{c}(\rho)} + \\
&\frac{\left(\frac{a}{D}+r\right)\left[Dr^2+\alpha\rho-\lambda_2-\delta+(\lambda_2-\lambda_1)\hat{c}(r)\right]\left[D\rho^2+a\rho-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(\rho)\right]}{\left[D\rho^2+a\rho-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(\rho)\right]\lambda_1\hat{c}(r)-\left[Dr^2+ar-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(r)\right]\lambda_1\hat{c}(\rho)} \quad (4.18)
\end{aligned}$$

όμοια,έπειτα από πράξεις η (4.18) μας οδηγεί στην παρακάτω χρήσιμη ποσότητα,

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{\lambda_2}{D}\Phi'_{d,1}(0) - \frac{\lambda_1}{D}\Phi'_{d,2}(0)\right] \\
&= \frac{\left(\frac{a}{D}+\rho\right)\left[D\rho^2+\alpha\rho-\lambda_2-\delta+(\lambda_2-\lambda_1)\hat{c}(\rho)\right](Dr^2+ar-\lambda_2-\delta)}{D\left[D\rho^2+a\rho-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(\rho)\right]\hat{c}(r)-D\left[Dr^2+ar-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(r)\right]\hat{c}(\rho)} \\
&- \frac{\left(\frac{a}{D}+r\right)\left[Dr^2+\alpha\rho-\lambda_2-\delta+(\lambda_2-\lambda_1)\hat{c}(r)\right]\left[D\rho^2+a\rho-\lambda_2-\delta\right]}{D\left[D\rho^2+a\rho-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(\rho)\right]\hat{c}(r)-D\left[Dr^2+ar-\lambda_2-\delta+\lambda_2\hat{c}(r)\right]\hat{c}(\rho)}
\end{aligned}$$

(4.19) .

Θεωρούμε τώρα δύο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης ,
$s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_i+\delta}{D}=0$,έστω $M_i,-m_i$ τέτειες ώστε $M_i,m_i>0$ για $i=1{,}2$ δηλαδή,

$$s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_1+\delta}{D}=(S-M_1)(s+m_1)\ (4.20)$$
$$s^2+\frac{a}{D}s-\frac{\lambda_2+\delta}{D}=(s-M_2)(s+m_2)\ (4.21),\ \text{με}\quad m_i=\frac{a}{D}+M_i$$

διαιρώντας τις (4.8),(4.9) με $(\mathrm{s}+\mathrm{m}_1)(\mathrm{s}+\mathrm{m}_2)$ έπειτα από πράξεις παίρνουμε ,

$$\left[(s-M_1)(s-M_2)+\frac{\lambda_1}{D}\frac{(s-M_2)}{s+m_1}\,\hat{b}(s)+\frac{\lambda_2}{D}\,\frac{(s-M_1)}{s+m_2}\hat{c}(s)\right]\widehat{\Phi}_{w,1}(s)=\frac{(s-M_2)}{s+m_1}\,\widehat{\Phi}'_{w,1}(0)+\left[\frac{\lambda_2}{D}\widehat{\Phi}'_{w,1}(0)-\frac{\lambda_1}{D}\widehat{\Phi}'_{w,2}(0)\right]\frac{\hat{c}(s)}{(s+m_1)(s+m_2)}-\frac{\lambda_1}{D}\frac{(s-M_2)}{(s+m_1)}\,\hat{\zeta}(s)\ (4.22)$$

$$\left[(s-M_1)(s-M_2)+\frac{\lambda_1}{D}\frac{(s-M_2)}{s+m_1}\hat{b}(s)+\frac{\lambda_2}{D}\frac{(s-M_1)}{s+m_2}\hat{c}(s)\right]\widehat{\Phi}'_{w,2}(s)=\frac{(s-M_1)}{s+m_2}\widehat{\Phi}'_{w,2}(0)-\left[\frac{\lambda_2}{D}\widehat{\Phi}'_{w,1}(0)-\frac{\lambda_1}{D}\widehat{\Phi}'_{w,2}(0)\right]\,\frac{\hat{b}(s)}{(s+m_1)(s+m_2)}-\frac{\lambda_2}{D}\frac{(s-M_1)}{s+m_2}\,\hat{\zeta}(s)\ (4.23)$$

οι παραπάνω σχέσεις (4.22),(4.23) για όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει το s με εξαίρεση τις τιμές s=r και s=ρ μπορούν να γραφούν ως εξής,

$$\widehat{\Phi}_{w,1}(s)=\frac{\widehat{\Phi}_{w,1}(0)+\hat{\beta}_1(s)}{\hat{\varepsilon}_{D,1}(s)-\hat{\varepsilon}_{D,2}(s)}\ (4.24)$$

$$\widehat{\Phi}_{w,2}(s)=\frac{\widehat{\Phi}'_{w,2}(0)+\hat{\beta}_2(s)}{\hat{\varepsilon}_{D,1}(s)-\hat{\varepsilon}_{D,2}(s)}\ (4.25)$$

όπου ,

$$\hat{\varepsilon}_{D,1}(s)=(s-M_1)(s-M_2)\ (4.26)$$

$$\hat{\varepsilon}_{D,2}(s)=\frac{\lambda_1}{D}\,\frac{(M_2+m_1)}{s+m_1}\hat{b}(s)-\frac{\lambda_1}{D}\hat{b}(s)+\frac{\lambda_2}{D}\,\frac{(M_1+m_2)}{s+m_2}\hat{c}(s)-\frac{\lambda_2}{D}\hat{c}(s)\ (4.27)$$

$$\hat{\beta}_1(s)=-\frac{(M_2+m_1)}{s+m_1}\,\widehat{\Phi}'_{w,1}(0)+\left[\frac{\lambda_2}{D}\widehat{\Phi}'_{w,1}(0)-\frac{\lambda_1}{D}\widehat{\Phi}'_{w,2}(0)\right]\frac{\hat{c}(s)}{(s+m_1)(s+m_2)}-\frac{\lambda_1}{D}\hat{\zeta}(s)+\frac{\lambda_1}{D}\,\frac{(M_2+m_1)}{s+m_1}\,\hat{\zeta}(s)\quad(4.28)$$

$$\hat{\beta}_2(s)=-\frac{(M_1+m_2)}{s+m_2}\widehat{\Phi}'_{w,2}(0)-\left[\frac{\lambda_2}{D}\widehat{\Phi}'_{w,1}(0)-\frac{\lambda_1}{D}\widehat{\Phi}'_{w,2}(0)\right]\,\frac{\hat{b}(s)}{(s+m_1)(s+m_2)}-\frac{\lambda_2}{D}\,\hat{\zeta}(s)+\frac{\lambda_2}{D}\,\frac{(M_1+m_2)}{s+m_2}\hat{\zeta}(s)\quad(4.29)$$

από τις σχέσεις (4.24) και (4.25) προκύπτει η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.3(*Απόδειξη βλ. Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova)*

$$\widehat{\Phi}_{w,1}(s) = \frac{T_s T_\rho T_r \beta_1(0)}{1 - T_s T_\rho T_r \varepsilon_{D,2}(0)} \quad (4.30)$$

$$\widehat{\Phi}_{w,2}(s) = \frac{T_s T_\rho T_r \beta_2(0)}{1 - T_s T_\rho T_r \varepsilon_{D,2}(0)} \quad (4.31)$$

όπου

$$\varepsilon_{D,2}(u) = \frac{\lambda_1 (M_2 + m_1)}{D} \int_0^u e^{-m_1(u-y)} b(y) dy + \frac{\lambda_2 (M_1 + m_2)}{D} \int_0^u e^{-m_2(u-y)} c(y) dy - \frac{\lambda_1}{D} b(u) - \frac{\lambda_2}{D} c(u) \quad (4.32)$$

και

$$\beta_1(u) = -(M_2 + m_1)\widehat{\Phi}'_{w,1}(0) e^{-m_1 u} + \left[\frac{\lambda_2}{D}\widehat{\Phi}'_{w,1}(0) - \frac{\lambda_1}{D}\widehat{\Phi}'_{w,2}(0)\right] \int_0^u \frac{e^{-m_1(u-y)} - e^{-m_2(u-y)}}{m_2 - m_1} c(y) dy - \frac{\lambda_1}{D}\zeta(u) + \frac{\lambda_1 (M_2 + m_1)}{D} \int_0^u e^{-m_1(u-y)} \zeta(y) dy \quad (4.33)$$

$$\beta_2(u) = -(M_1 + m_2)\widehat{\Phi}'_{w,2}(0) e^{-m_2 u} - \left[\frac{\lambda_2}{D}\widehat{\Phi}'_{w,1}(0) - \frac{\lambda_1}{D}\widehat{\Phi}'_{w,2}(0)\right] \int_0^u \frac{e^{-m_1(u-y)} - e^{-m_2(u-y)}}{m_2 - m_1} b(y) dy - \frac{\lambda_2}{D}\zeta(u) + \frac{\lambda_2 (M_1 + m_2)}{D} \int_0^u e^{-m_2(u-y)} \zeta(y) dy \quad (4.34).$$

Διαιρώντας τις σχέσεις (4.10) και (4.11),οι οποίες περιέχουν τους μετασχηματισμούς Laplace $\widehat{\Phi}_{d,1}(s)$ και $\widehat{\Phi}_{d,2}(s)$ αντίστοιχα, με $(s + m_1)(s + m_2)$ προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\left[(s - M_1)(s - M_2) + \frac{\lambda_1}{D}\frac{(s - M_2)}{(s + m_1)}\hat{b}(s) + \frac{\lambda_2}{D}\frac{(s - M_1)}{(s + m_2)}\hat{c}(s)\right]\widehat{\Phi}_{d,1}(s) = \frac{(s - M_2)}{(s + m_1)}\left[s + \frac{a}{D} + \Phi'_{d,1}(0)\right] + \left[\frac{\lambda_2}{D}\Phi'_{d,1}(0) - \frac{\lambda_1}{D}\Phi'_{d,2}(0) + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{D}\left(\frac{a}{D} + s\right)\right]\frac{\hat{c}(s)}{(s + m_1)(s + m_2)} \quad (4.35)$$

$$\left[(s - M_1)(s - M_2) + \frac{\lambda_1}{D}\frac{(s - M_2)}{(s + m_1)}\hat{b}(s) + \frac{\lambda_2}{D}\frac{(s - M_1)}{(s + m_2)}\hat{c}(s)\right]\widehat{\Phi}_{d,2}(s) = \frac{(s - M_1)}{(s + m_2)}\left[s + \frac{a}{D} + \Phi'_{d,2}(0)\right] - \left[\frac{\lambda_2}{D}\Phi'_{d,1}(0) - \frac{\lambda_1}{D}\Phi'_{d,2}(0) + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{D}\left(\frac{a}{D} + s\right)\right]\frac{\hat{b}(s)}{(s + m_1)(s + m_2)} \quad (4.36)$$

αν στην παρακάτω ποσότητα προσθέσουμε και αφαιρέσουμε τον όρο M_1, και αφού $m_i = \frac{a}{D} + M_i \Rightarrow \frac{a}{D} = m_i - M_i$ με αντικατάσταση προκύπτει ,

$$\frac{(s - M_2)}{(s + m_1)}\left[s + \frac{a}{D} + \Phi'_{d,1}(0)\right] = \frac{(s - M_2)}{s + M_1 + \frac{a}{D}}\left[s + \frac{a}{D} + M_1 - M_1 + \Phi'_{d,1}(0)\right]$$

$$= s - M_2 + \frac{(s - M_2)}{(s + m_1)}\left[\Phi'_{d,1}(0) - M_1\right]$$

$$= s - M_1 - M_2 + \Phi'_{d,1}(0) + \frac{(M_2 + m_1)}{s + m_1}[M_1 - \Phi'_{d,1}(0)$$

δηλαδή,

$$\frac{(s-M_2)}{(s+m_1)}\left[s+\frac{a}{D}+\Phi'_{d,1}(0)\right]=s-M_1-M_2+\Phi'_{d,1}(0)+\frac{(M_2+m_1)}{s+m_1}[M_1-\Phi'_{d,1}(0)] \quad (4.37)$$

και

$$\frac{(s-M_1)}{(s+m_2)}\left[s+\frac{a}{D}+\Phi'_{d,2}(0)\right]=\frac{(s-M_1)}{s+M_2+\frac{a}{D}}\left[s+\frac{a}{D}+M_2-M_2+\Phi'_{d,2}(0)\right]$$

$$=s-M_1+\frac{(s-M_1)}{(s+m_2)}\left[\Phi'_{d,2}(0)-M_2\right]$$

$$=s-M_1-M_2+\Phi'_{d,2}(0)+\frac{(M_1+m_2)}{s+m_2}[M_2-\Phi'_{d,2}(0)]$$

$$=s-M_1-M_2+\Phi'_{d,2}(0)+\frac{(M_1+m_2)}{s+m_2}[M_2-\Phi'_{d,2}(0)]$$

δηλαδή

$$\frac{(s-M_1)}{(s+m_2)}\left[s+\frac{a}{D}+\Phi'_{d,2}(0)\right]=s-M_1-M_2+\Phi'_{d,2}(0)+\frac{(M_1+m_2)}{s+m_2}[M_2-\Phi'_{d,2}(0)] \quad \textit{(4.38)}$$

με αντικατάσταση των (4.37),(4.38) στις (4.35) και (4.36) αντίστοιχα προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\widehat{\Phi}_{d,1}(s)=\frac{\hat{\varsigma}_1(s)+\widehat{\delta}_1(s)}{\hat{\varepsilon}_{D,1}(s)-\hat{\varepsilon}_{D,2}(s)} \quad (4.39)$$

και

$$\widehat{\Phi}_{d,2}(s)=\frac{\hat{\varsigma}_2(s)+\widehat{\delta}_2(s)}{\hat{\varepsilon}_{D,1}(s)-\hat{\varepsilon}_{D,2}(s)} \quad (4.40)$$

που ισχύουν για κάθε s εκτός των τιμών $s=r \; \textit{και} \; s=\rho$,όπου

$$\hat{\varsigma}_1(s)=s-M_1-M_2+\Phi'_{d,1}(0) \quad (4.41)$$

$$\hat{\delta}_1(s)=\frac{(M_2+m_1)}{s+m_1}\left[M_1-\Phi'_{d,1}(0)\right]+\left[\frac{\lambda_2}{D}\Phi'_{d,1}(0)-\frac{\lambda_1}{D}\Phi'_{d,2}(0)+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{D}\left(\frac{a}{D}+s\right)\right]\frac{\hat{c}(s)}{(s+m_1)(s+m_2)} \quad (4.42)$$

$$\hat{\varsigma}_2(s)=s-M_1-M_2+\Phi'_{d,2}(0) \quad (4.43)$$

$$\hat{\delta}_2(s)=\frac{(M_1+m_2)}{s+m_2}[M_2-\Phi'_{d,2}(0)]-\left[\frac{\lambda_2}{D}\Phi'_{d,1}(0)-\frac{\lambda_1}{D}\Phi'_{d,2}(0)+\frac{(\lambda_2-\lambda_1)}{D}\left(\frac{a}{D}+s\right)\right]\frac{\hat{b}(s)}{(s+m_1)(s+m_2)} \quad (4.44)$$

ενώ

$$\hat{\varepsilon}_{D,1}(s)=(s-M_1)(s-M_2)$$

$$\hat{\varepsilon}_{D,2}(s)=\frac{\lambda_1}{D}\,\frac{(M_2+m_1)}{s+m_1}\hat{b}(s)-\frac{\lambda_1}{D}\hat{b}(s)+\frac{\lambda_2}{D}\,\frac{(M_1+m_2)}{s+m_2}\hat{c}(s)-\frac{\lambda_2}{D}\hat{c}(s)$$

όπως έχουν ήδη ορισθεί από τις (4.26),(427).Από τις (4.39),(4.40) οδηγούμαστε στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.4*(Απόδειξη βλ. Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova).*

Όταν η χρεοκοπία προκαλείται από oscillation, οι μετασχηματισμοί Laplace των $\widehat{\Phi}_{d,i}(s), i = 1{,}2$ *ικανοποιούν τις σχέσεις,*

$$\widehat{\Phi}_{d,1}(s) = \frac{T_s T_\rho T_r \delta_1(0)}{1 - T_s T_\rho T_r \varepsilon_{D,2}(u)} \quad (4.45)$$

$$\widehat{\Phi}_{d,2}(s) = \frac{T_s T_\rho T_r \delta_2(0)}{1 - T_s T_\rho T_r \varepsilon_{D,2}(u)} \quad (4.46)$$

όπου $\varepsilon_{D,2}(u)$ *όπως ορίσθηκε παραπάνω και*

$$\delta_1(u) = (M_2 + m_1)\left[M_1 - \Phi'_{d,1}(0)\right]e^{-m_1 u} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{D}\int_0^u \frac{m_2 e^{-m_2(u-y)} - m_1 e^{-m_1(u-y)}}{m_2 - m_1} c(y)dy + \left[\frac{\lambda_2}{D}\Phi'_{d,1}(0) - \frac{\lambda_1}{D}\Phi'_{d,2}(0) + \frac{\alpha(\lambda_2 - \lambda_1)}{D^2}\right]\int_0^u \frac{e^{-m_1(u-y)} - e^{-m_2(u-y)}}{m_2 - m_1} x(y)dy \quad (4.47)$$

$$\delta_2(u) = (M_1 + m_2)\left[M_2 - \Phi'_{d,2}(0)\right]e^{-m_2 u} + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)}{D}\int_0^u \frac{m_2 e^{-m_2(u-y)} - m_1 e^{-m_1(u-y)}}{m_2 - m_1} b(y)dy + \left[\frac{\lambda_2}{D}\Phi'_{d,1}(0) - \frac{\lambda_1}{D}\Phi'_{d,2}(0) + \frac{\alpha(\lambda_2 - \lambda_1)}{D^2}\right]\int_0^u \frac{e^{-m_1(u-y)} - e^{-m_2(u-y)}}{m_2 - m_1} b(y)dy \quad (4.48).$$

Με βάση τις προτάσεις (4.3),(4.4) οδηγούμαστε στο παρακάτω σπουδαίο θεώρημα.

Θεώρημα 4.1 *(Απόδειξη βλ. Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova)*

Η συνάρτηση των Gerber-Shiu $m_{D,i}(u), i = 1{,}2$ *,όπως ορίζεται στην σχέση (4.3) του παρόντος κεφαλαίου ικανοποιεί τις παρακάτω ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις,*

$$m_{D,1}(u) = k_{D,d} \int_0^u m_{D,1}(u-y)\, \xi_D(y)dy + \theta_{D,1}(u) \quad (4.49)$$
$$m_{D,2}(u) = k_{D,d} \int_0^u m_{D,2}(u-y)\, \xi_D(y)dy + \theta_{D,2}(u) \quad (4.50)$$

όπου

$$k_{D,d} = \int_0^\infty T_r T_\rho \varepsilon_{D,2}(y)dy$$

$$\xi_D(y) = \frac{T_r T_\rho \varepsilon_{D,2}(y)}{T_0 T_r T_\rho \varepsilon_{D,2}(0)}$$
$$\theta_{D,1}(u) = T_\rho T_r \beta_1(u) + w_0 T_\rho T_r \delta_1(u)$$

$$\theta_{D,2}(u) = T_\rho T_r \beta_2(u) + w_0 T_\rho T_r \delta_2(u)$$

με ρ,r να αντιστοιχούν στις μη αρνητικές ρίζες τις εξίσωσεις Lundberg , $k_{D,d}$ μία σταθερά που κυμαίνεται $0 < k_{D,d} < 1$, και $\xi_D(y) \geq 0$ πυκνότητα πιθανότητας.

4.4 Ο χρόνος χρεοκοπίας για απαιτήσεις με εκθετική κατανομή

Σε αυτο το σημείο είναι χρήσιμο να αναφέρουμε την παρακάτω γενικευμένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu για μοντέλα με διάχυση (perturbed) η οποία έγινε γνωστή από τους Tsai&Willmot (2002) και ορίζεται ως εξής,

$$m_D(u) = w_0 \Phi_d(u) + \Phi_w(u), u \geq 0 \quad (4.51)$$

όπου w_0 είναι μια σταθερά που αντιστοιχεί στην ποινή κατά τη χρεοκοπία λόγω oscillation και

$$\Phi_d(u) = E\{e^{-\delta\tau} I_{\{\tau<\infty, U(\tau)<0\}} | U(0) = u\}$$

$$\Phi_w(u) = E\{e^{-\delta\tau} w(U(\tau-), |U(\tau)|) I_{\{\tau<\infty, U(\tau)<0\}} | U(0) = u\}$$

όπου $\Phi_d(u)$ ο μετασχηματισμός Laplace της στιγμης της χρεοκοπίας για την τυχαία μεταβλητή τ, εαν η χρεοκοπία οφείλεται σε oscilation ενώ η ποσότητα $\Phi_w(u)$ αντιστοιχεί στην ποινή κατά τη χρεοκοπία εαν αυτή προκληθεί από ζημιά,$w(x_1, x_2), x_1, x_2 > 0$ μια συνάρτηση ποινής για τη χρεοκοπία όταν αυτή προκαλείται από ζημιά με $w(0,0) = w_0$. Για την περίπτωση όπου το αρχικό κεφάλαιο είναι μηδέν *(u(0)=0)* έχουμε $\Phi_d(0) = 1$ και $\Phi_w(0) = 0$.

Έστω ότι η συνάρτηση ποινής είναι $w(x_1, x_2) = 1$ για κάθε $x_1, x_2 > 0$ επομένως και $w_0 = 1$**.**
Τότε η (4.51) γίνεται

$$m(u) = \Phi_d(u) + \Phi_w(u) \quad , \qquad u \geq 0$$

με $\Phi_w(u) = E\{e^{-\delta\tau} I_{\{\tau<\infty, U(\tau<0\}} | U(0) = u\}$.
Ο μετασχηματισμός Laplace για τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι,

$$m_i(u) = \Phi_{d,i}(u) + \Phi_{w,i}(u), u \geq 0, i = 1,2$$

για ένα τυχαίο κατώφλι , $R_j, j = 1,2,3, \ldots$, που ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο ν (y~exp(ν)) με συνάρτηση κατανομής $K(y) = 1 - e^{-\nu y}$ και εκθετικα κατανεμημένα ύψη απαιτήσεων με παράμετρο Ɛ $\{X_i, i = 1,2,3, \ldots\}$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας με $g(y) = \varepsilon e^{-\varepsilon y}$, μετασχηματισμό Laplace $\hat{g}(s) = \frac{\varepsilon}{s+\varepsilon}$ και μέση τιμή $E(x) = \frac{1}{\varepsilon}$.

Με τη βοήθαει των (3.5),(3.6),(3.7) παίρνουμε,

$$\hat{\zeta}(s) = \frac{1}{s + \varepsilon} \, , s \geq 0$$

$$\hat{c}(s) = \frac{\varepsilon}{s + v + \varepsilon} \, , s \geq 0$$

$$\hat{b}(s) = \hat{g}(s) - \hat{c}(s) = \frac{\mathcal{E}}{s+\mathcal{E}} - \frac{\mathcal{E}}{s+\nu+\mathcal{E}} \;\; , s \geq 0$$

Με τη βοήθεια της παρακάτω σχέσης ,

$$T_{s_1}T_{s_2}f(0) = \frac{\hat{f}(s_1) - \hat{f}(s_2)}{s_2 - s_1}$$

όπου ορίσθηκε και χρησιμοποιήθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια προκύπτουν οι εξής βοηθητικές ποσότητες

$$T_sT_\rho T_r g(0) = \frac{\mathcal{E}}{(s+\mathcal{E})(r+\mathcal{E})(\rho+\mathcal{E})}$$

$$T_sT_\rho T_r c(0) = \frac{\mathcal{E}}{(s+\nu+\mathcal{E})(\rho+\nu+\varepsilon)(r+\nu+\varepsilon)}$$

$$T_sT_\rho T_r b(0) = \frac{\mathcal{E}}{(s+\mathcal{E})(r+\mathcal{E})(\rho+\mathcal{E})} - \frac{\mathcal{E}}{(s+\nu+\mathcal{E})(\rho+\nu+\varepsilon)(r+\nu+\varepsilon)}$$

$$T_sT_\rho T_r \zeta(0) = \frac{1}{(s+\mathcal{E})(r+\mathcal{E})(\rho+\mathcal{E})}$$

$$\frac{rT_sT_r c(0) - \rho T_sT_\rho c(0)}{r-\rho} = \frac{\mathcal{E}(\nu+\mathcal{E})}{(s+\nu+\mathcal{E})(\rho+\nu+\varepsilon)(r+\nu+\varepsilon)}$$

$$\frac{rT_sT_r b(0) - \rho T_sT_\rho b(0)}{r-\rho} = \frac{\mathcal{E}^2}{(s+\mathcal{E})(r+\mathcal{E})(\rho+\mathcal{E})} - \frac{\mathcal{E}(\nu+\mathcal{E})}{(s+\nu+\mathcal{E})(\rho+\nu+\varepsilon)(r+\nu+\varepsilon)}$$

$$\frac{rT_sT_r \zeta(0) - \rho T_sT_\rho \zeta(0)}{r-\rho} = \frac{\mathcal{E}}{(s+\mathcal{E})(r+\mathcal{E})(\rho+\mathcal{E})}$$

$$\frac{r^2T_sT_r \zeta(0) - \rho^2 T_sT_\rho \zeta(0)}{r-\rho} - \hat{\zeta}(s) = \frac{-\mathcal{E}^2}{(s+\mathcal{E})(r+\mathcal{E})(\rho+\mathcal{E})}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Τα τελευταία χρόνια η έρευνα στη θεωρία χρεοκοπίας έχει επικεντρωθεί σε μεγάλο βαθμό στη μελέτη δυϊκών μοντέλων τα οποία μπορούν να εφαρμοστούν σε διάφορες περιπτώσεις όπως για παράδειγμα κατά την μοντελοποίηση της διαδικασίας πλεονάσματος.Στο παρόν κεφάλαιο θα εξετάσουμε ένα δυϊκό μοντέλο στο οποίο η κατανομή των κερδών αλλά και των εξόδων εξαρτώντε από το ύψος του προηγούμενου εσόδου,ενώ στην διαδικασία πλεονάσματος υπάρχει κ ένας παράγοντας διάχυσης (κίνηση Brown).

5.1 Ένα δυϊκό μοντέλο με εξάρτηση και διάχυση

Έστω το δυϊκό μοντέλο το οποίο μοντελοποιείται από την παρακάτω σχέση

$$\Delta(t) = u - a_1 \int_0^t I_{\{j(s)=1\}} ds + a_2 \int_0^t I_{\{j(s)=2\}} ds + \sum_{i=1}^{N(t)} X_i + \sigma W(t), t, \sigma > 0 \quad (5.1)$$

Το αντίστοιχο μοντέλο χωρίς τη διάχυση θα ήταν,

$$\Delta(t) = u - a_1 \int_0^t I_{\{j(s)=1\}} ds + a_2 \int_0^t I_{\{j(s)=2\}} ds + \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \, , t > 0 \quad (5.2)$$

για την περίπτωση όπου σ→0,όπου u>0 το αρχικό κεφάλαιο, $a_1, \alpha_2, (a(t))$ ποσοστό εξόδων έως χρόνο t, W(t) τυπική κίνηση Brown, $X_i, i = 1,2,3, \dots$ iid τυχαίες μεταβλητές που δηλώνουν τα ύψη των εσόδων με συναρτηση πυκνότητας πιθανότητας και συνάρτηση κατανομής g(y),G(.) αντίστοιχα.

Η απαριθμήτρια διαδικασία για τα έσοδα N(t) είναι μία ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους $\lambda_i, i = 1,2,3, \dots$.Θεωρούμε τώρα πως η κατανομή του χρόνου αναμονής μέχρι την επόμενη αποζημίωση εξαρτάται από το ύψος της προηγούμενης αποζημίωσης συγκρίνοντας το με ένα τυχαίο κατώφλι (random threshold) $R_j, j = 1,2,3, \dots.$ όπου R_jείναι i.i.d και ανεξάρτητες από τα ύψη των απαιτήσεων με αθροιστική συνάρτηση κατανομής K(.).

Αν τα ύψη των εσόδων είναι μικρότερα από τα $R_j(X_i < R_j)$ τότε ο χρόνος μέχρι το επόμενο έσοδο ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο έστω $\frac{1}{\lambda_1} > 0$ κ ποσοστό εξόδων α_1 ,ενώ σε περίπτωση όπου τα ύψη των απαιτήσεων είναι μεγαλύτερα από τα $R_j(X_i > R_j)$ ο χρόνος μέχρι την επόμενη απαίτηση ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο έστω $\frac{1}{\lambda_2} > 0$ και ποσοστό εξόδων α_2,(Albrecher and Boxma,2004).

Η δείκτρια συνάρτηση, $I_{\{j(s)=i\}}$ $για$ $i = 1,2$ καθορίζει την κλάση στην οποία ανήκει η διαδικασία πλεονάσματος.

Παρακάτω δίνονται χρήσιμοι τύποι και πληροφορίες για τη συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου,δεδομένου πως η αρχική τάξη της διαδικασίας πλεονάσματος για $i = 1,2$ δηλώνεται ο μετασχηματισμός Laplace για την τυχαία μεταβλητή του χρόνου χρεοκοπίας $\tau_i = \inf\{t: \Delta(t)\}$ ως

$$\Phi_i(u) = E[e^{-\delta \tau_i} I(\tau_i < \infty | \Delta(0) = u], i = 1,2 \quad (5.3)$$

με $$\lim_{u\to 0} \Phi_i(u) = 1 \ \gamma\iota\alpha\ i = 1{,}2 \quad (5.4).$$

Ακόμα, έστω πως για την συνθήκη καθαρού κέρδους ισχύει

$$\frac{a_1}{\lambda_1}\int_0^{\infty} g(y)\,\overline{K}(y)dy + \frac{a_2}{\lambda_2}\int_0^{\infty} g(y)K(y)dy < E\{X\} \ (5.5)$$

ενώ όπως και στα κεφάλαια τρία και τέσσερα ορίζουμε τις παρακάτω ποσότητες

$$c(y) = g(y)\overline{K}(y),\ (5.6)$$
$$b(y) = g(y)K(y),\ (5.7)$$
$$D = \frac{1}{2}\sigma^2 \quad (5.8)\ .$$

5.2 Ο μετασχηματισμός Laplace για το χρόνο χρεοκοπίας

Παρακάτω θα δοθούν λύσεις για ορισμένες ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις οι οποίες ικανοποιούν το μετασχηματισμό Laplace για το χρόνο χρεοκοπίας.

Πρόταση 5.1: *Οι μετασχηματισμοί Laplace για το χρόνο χρεοκοπίας $\Phi_1(u)$ και $\Phi_2(u)$ όπως ορίσθηκαν στη σχέση (5.3) ικανοποιούν το παρακάτω σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων,*

$$-\frac{D}{\alpha_1}\Phi_1''(u) + \Phi_1'(u) + \frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\Phi_1(u) = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\int_0^{\infty}[\Phi_1(u+y)c(y) + \Phi_2(u+y)b(y)]dy \quad (5.9)$$
$$-\frac{D}{\alpha_2}\Phi_2''(u) + \Phi_2'(u) + \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\Phi_2(u) = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\int_0^{\infty}[\Phi_1(u+y)c(y) + \Phi_2(u+y)b(y)]dy \quad (5.10),$$
όπου $$\lim_{u\to 0}\Phi_1(u) = \lim_{u\to 0}\Phi_2(u) = 1\ .$$

Απόδειξη 5.1 Η απόδειξη είναι εκτός των εκπαιδευτικών πλαισίων της παρούσας διπλωματικής οπότε και παραλείπεται, (βλ. Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova)

Θεώρημα 5.2 *Οι λύσεις της πρότασης 5.1 είναι ,*

$$\Phi_1^*(u) = \pi_1 e^{-\rho_1 u} + v_1 e^{-\rho_2 u} \ (5.11)$$
$$\Phi_2^*(u) = \pi_2 e^{-\rho_1 u} + v_2 e^{-\rho_2 u} \ (5.12)$$

όπου ρ_1, ρ_2 οι πραγματικές θετικές ρίζες της θεμελιώδης εξίσωσης Lundberg

$$\frac{\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\ \hat{x}(s)}{\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1} - s - \frac{D}{\alpha_1}s^2} + \frac{\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\ \hat{\xi}(s)}{\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2} - s - \frac{D}{\alpha_2}s^2} = 1$$

ενώ π_1, π_2, v_1, v_2 μη μηδενικές σταθερές οι οποίες καθορίζοντε από το παρακάτω σύστημα

$$\pi_1 + v_1 = 1 \quad (5.13)$$
$$\pi_2 + v_2 = 1 \quad (5.14)$$

$$\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\frac{\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}-\rho_1-\frac{D}{a_1}\rho_1^2}{\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}-\rho_1-\frac{D}{a_2}\rho_1^2}\pi_1=\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\pi_2 \quad (5.15)$$

$$\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\frac{\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}-\rho_2-\frac{D}{a_1}\rho_2^2}{\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}-\rho_2-\frac{D}{a_2}\rho_2^2}\nu_1=\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\nu_2 \quad (5.16)\ .$$

Απόδειξη 5.2 Η απόδειξη είναι εκτός των εκπαιδευτικών πλαισίων της παρούσας διπλωματικής οπότε και παραλείπεται (βλ. Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova)

Σε αντιστοιχία με όσα ειπώθηκαν για το πλήθος των ριζών της εξίσωσης Lundberg στα προγούμενα κεφάλαια έχουμε,

***Λήμμα* 5.3** *Για κάθε δ≥0 η γενικευμένη εξίσωση Lundberg όπως ορίσθηκε παραπάνω (5.1 μοντέλο) έχει δύο ακριβώς μη αρνητικές ρίζες*

Απόδειξη 5.3 Η απόδειξη είναι εκτός των εκπαιδευτικών πλαισίων της παρούσας διπλωματικής οπότε και παραλείπεται (βλ. Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova)
Επίσης , δοθέντος ότι ο χρόνος της χρεοκοπίας είναι πεπερασμένος, μέσω του μετασχηματισμού Laplace για το χρόνο της χρεοκοπίας παίρνουμε,

$$E[\tau_i|\tau_i<\infty]=\frac{-\frac{\partial}{\partial\delta}\Phi_i^*(u)|_{\delta=0}}{\Phi_i^*(u)|_{\delta=0}}\ ,i=1,2 \quad (5.17)$$

με

$$\frac{\partial}{\partial\delta}\Phi_i^*(u)|_{\delta=0}=\left(\frac{\partial\pi_i}{\partial\delta}-\pi_i\frac{\partial\rho_1}{\partial\delta}u\right)e^{-\rho_1u}+\left[\frac{\partial\pi_i}{\partial\delta}+(1-\pi_i)\frac{\partial\rho_2}{\partial\rho_2}u\right]e^{-\rho_2u}$$

και

$$\Phi_i^*(u)|_{\delta=0}=\pi_ie^{-\rho_1u}+(1-\pi_i)e^{-\rho_2u}|_{\delta=0}$$

δηλαδή

$$E[\tau_i|\tau_i<\infty]=\frac{-\left(\frac{\partial\pi_i}{\partial\delta}-\pi_i\frac{\partial\rho_1}{\partial\delta}u\right)e^{-\rho_1u}+\left[\frac{\partial\pi_i}{\partial\delta}+(1-\pi_i)\frac{\partial\rho_2}{\partial\rho_2}u\right]e^{-\rho_2u}}{\pi_ie^{-\rho_1u}+(1-\pi_i)e^{-\rho_2u}|_{\delta=0}}\quad i=1,2$$

όπου

$$\frac{\partial\pi_1}{\partial\delta}=\frac{(1-\pi_1)\frac{\partial\Psi(\rho_2)}{\partial\delta}+\pi_1\frac{\partial\Psi(\rho_1)}{\partial\delta}}{\Psi(\rho_2)-\Psi(\rho_1)}\ ,\frac{\partial\pi_2}{\partial\delta}=\frac{\alpha_1\lambda_2}{\alpha_2\lambda_1}[\frac{\partial\pi_1}{\partial\delta}\Psi(\rho_1)+\pi_1\frac{\partial}{\partial\delta}\Psi(\rho_2)]$$

$$,\frac{\partial}{\partial\delta}\Psi(\rho_j)=\frac{\frac{\partial}{\partial\delta}U_1(\rho_j)-[\frac{\partial}{\partial\delta}U_2(\rho_j)]}{U_2(\rho_j)}\ ,j=1,2$$

$$,\frac{\partial}{\partial\delta}U_i\left(\rho_j\right) = \frac{1}{a_i} - \left(1 + \frac{2D}{a_i}\rho_j\right)\frac{\partial}{\partial\delta}\rho_j\ ,\quad j = 1{,}2\ , i = 1{,}2$$

$$\Psi(\rho_i) = \frac{U_1(x)}{U_2(x)},\ U_i(x) = \frac{\lambda_i+\delta}{\alpha_i} - x - \frac{D}{a_i}x^2\ , i = 1{,}2$$

(βλ. Risk models with dependence and perturbation, Zhong Li & Kristina Sendova).

Σχόλιο 5.1: *Όταν $\lambda_1 = \lambda_2$ και $\alpha_1 = \alpha_2$,το μοντέλο (5.1) μετατρέπεται στο δυϊκό μοντέλο σύνθετης Poisson με διάχυση των Avanzi και Gerber (2008).*
Σχόλιο 5.2: *Καθώς το $\sigma \to 0$ το μοντέλο (5.1) μετατρέπεται στο (5.2) .Αξίζει να σημειωθεί πως για $D = 0$,στο μοντέλο (5.2) θα εξακολουθήσουν να ισχύουν η Πρόταση (5.1),το Θεώρημα (5.2),το Λήμμα (5.3) και η πρώτη στιγμή του χρόνου χρεοκοπίας.Η κύρια αιτία για αυτό είναι πως και στις δύο περιπτώσεις των δυϊκών μοντέλων (perturbed και non-perturbed) ισχύουν οι αρχικές συνθήκες $\lim_{u\to 0}\Phi_i(u) = 1$ και $\lim_{u\to\infty}\Phi_i(u) = 0\ , i = 1{,}2.$*
Αναλυτικότερα όσον αφορά το μοντέλο όπως ορίζεται από την (5.2) με $\Phi_i(u), i = 1{,}2$ να αναπαριστά τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και δεδομένου πως η άφιξη του πρώτου εσόδου συμβαίνει με ρυθμό λ_i είναι

$$\Phi_i(u) = \int_0^{\frac{u}{a_1}} \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} e^{-\delta t\ \int_0^\infty \Phi_1(u-a_1t+x)g(x)Pr\,(Q>x))+} \Phi_2(u-a_1t+x)g(x)P(Q<x)dxdt$$
$$+\, e^{-(\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1})u}$$

αλλάζοντας τη μεταβλητή t σε $l = u - a_1 t$ παίρνουμε ,

$$\Phi_1(u) = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\int_0^u e^{-\frac{(\lambda_1+\delta)}{\alpha_1}(u-l)} \int_0^\infty \Phi_1(l+x)g(x)\,\overline{K}(x) + \Phi_2(l+x)g(x)H(x)dydl + e^{-\frac{(\lambda_1+\delta)}{\alpha_1}u}$$
$$= \frac{\lambda_1}{\alpha_1} e^{-\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\right)u} \int_0^u e^{-\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\right)l} \int_0^\infty \Phi_1(l+x)c(x) + \Phi_2(l+x)b(x)dxdl + e^{-\left(\frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\right)u},$$

όμοια, για την περίπτωση που το πρώτο έσοδο εμφανίζεται με ρυθμό λ_2**,** παίρνουμε

$$\Phi_2(u) = \frac{\lambda_2}{\alpha_2} e^{-\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\right)u} \int_0^u e^{-\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\right)l} \int_0^\infty \Phi_1(l+x)c(y) + \Phi_2(l+x)b(x)dxdl + e^{-\left(\frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\right)u}$$

παραγωγίζοντας τις παραπάνω σχέσεις ως προς u,μετά από πράξεις παίρνουμε ότι ,

$$\Phi'_1(u) + \frac{\lambda_1+\delta}{\alpha_1}\Phi_1(u) = \frac{\lambda_1}{\alpha_1}\int_0^\infty \Phi_1(u+x)c(y)dx + \frac{\lambda_1}{a_1}\int_0^\infty \Phi_2(u+x)b(x)dx$$
$$\Phi'_2(u) + \frac{\lambda_2+\delta}{\alpha_2}\Phi_2(u) = \frac{\lambda_2}{\alpha_2}\int_0^\infty \Phi_1(u+x)c(x)dx + \frac{\lambda_2}{a_2}\int_0^\infty \Phi_2(u+x)b(x)dx$$

οι οποίες είναι οι (5.9) και (5.10)για $D = 0$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2019), Θεωρία Κινδύνων Ι, Σημειώσεις Παραδόσεων,ΠΜΣ στην αναλογιστική επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου,Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[2] Χατζηκωνσταντινίδης Ε. ,Θεωρία Χρεοκοπίας, Πανεπιστημιακές Σημειώσεις

[3] Χατζηκωνσταντινίδης Ε.(2016), Αναλογιστικά Μαθηματικα,Σημειώσεις Παραδόσεων,Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

*[4] Zhong Li-Kristina Sendova(2014),*Risk models with dependence and perturbation, The University of Western Ontario

[5] Boutsikas M.(2019), Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις,Σημειώσεις Παραδόσεων,Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης,Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[6] Πολίτης Κ.(2012), Θεωρία Κινδύνων ΙΙ, Σημειώσεις Παραδόσεων, *ΠΜΣ στην αναλογιστική επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου,Πανεπιστήμιο Πειραιώς.*

[7] Χρυσαφίνου Ο. (2012) , Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις Β' Έκδοση , Εκδόσεις Σοφία.

[8] Albrecher, H., Boxma, O.J., 2004. A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals, Insurance: Mathematics and Economics.

[9] Boudreault, M., Cossette, E., Landriault, D., Marceau, E., 2006. On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes, Scandinavian Actuarial Journal.

[10] Ng, A.C.Y., 2009. On a dual model with a dividend threshold, Insurance: Mathematics and Economics.

[11] Dickson D., Hipp C. (2001), On the time to ruin for Erlang (2) risk process, Insurance Mathematics and Economics.

[12] Tsai, C.C.L. and Willmot , G.E. (2002) On the Moments of the Surplus Process Perturbed by Diffusion, Insurance Mathematics and Economics.