ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΔΕΣΜΩΝ (COPULAS) ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Νικόλαος Κ. Παϊβανάς

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Φεβρουάριος 2007

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- ……………………………….. (Επιβλέπων)
- ………………………………..
- ………………………………..

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

THEORY AND APPLICATIONS OF COPULAS IN FINANCE

By

Nikolaos K. Paivanas

MSc Dissertation
submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
February 2007

Στους γονείς μου
Κώστα και Ζωή
και στον αδερφό
μου Γιώργο

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμοσύνη μου στην τριμελή εξεταστική επιτροπή και κυρίως στον επιβλέποντα Επίκουρο Καθηγητή κ. Πολίτη Κωσταντίνο, χωρίς την πρωτοβουλία, τα πολύτιμα σχόλια και τις εποικοδομητικές παρατηρήσεις του οποίου, η ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας δεν θα είχε επιτευχθεί. Επίσης, ευχαριστώ θερμά την οικογένειά μου για την συμπαράσταση και τη βοήθεια που μου προσέφερε. Επίσης, ευχαριστώ θερμά την κοπέλα μου και τους φίλους μου για την κατανόηση και την βοήθεια που μου προσέφεραν, καθώς και τους ανώτερούς μου στο Πολεμικό Ναυτικό για την κατανόηση και την βοήθειά τους που μου προσέφεραν ώστε να καταφέρω να φέρω σε πέρας το Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών και την Διπλωματική αυτή εργασία, παράλληλα με τις στρατιωτικές μου υποχρεώσεις.

Περίληψη

Τα τελευταία χρόνια, η ανάπτυξη νέων χρηματοοικονομικών προϊόντων έχει ως αποτέλεσμα την χρήση των συνδέσμων στα χρηματοοικονομικά. Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μία σύντομη ιστορική αναδρομή στην εξέλιξη των συνδέσμων και παρουσιάζονται οι ορισμοί και οι βασικές ιδιότητες των συνδέσμων. Επίσης, αναλύεται η κατηγορία των Αρχιμήδειων συνδέσμων, καθώς είναι ίσως η σημαντικότερη κατηγορία. Τέλος, παρουσιάζονται μερικές εφαρμογές των συνδέσμων στα χρηματοοικονομικά, καθώς και η προσομοίωση κάποιων σημαντικών συνδέσμων και μελετάμε τα αποτελέσματά της.

Abstract

Over the last years, the development of new financial products has been responsible for the use of copulas in finance. In this dissertation, we present a brief review of the history of copulas and we present the definitions and basic properties of copulas. Furthermore, we analyse the Archimedean copulas, as this is maybe the most important category of copulas. Finally, we present some applications of copulas in finance, and the simulation of some important copulas and we study the results of this simulation.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η μελέτη των συνδέσμων (copulas) και των εφαρμογών τους είναι ένα μοντέρνο φαινόμενο. Μέχρι προσφάτως, δεν μπορούσαμε να συναντήσουμε τον όρο “copula” ούτε σε “στατιστικές εγκυκλοπαίδιες”. Το αντικείμενο αυτό είναι ακόμα σε πολύ πρώιμο, αλλά συνεχώς αναπτυσόμενο, στάδιο και οι πληροφορίες που μπορούμε να πάρουμε είναι από διάφορα συνέδρια με κύριο άξονα τους συνδέσμους και από τις δημοσιευμένες ενέργειες των συνεδρίων αυτών. Μόλις τα τελευταία χρόνια δημοσιεύτηκαν βιβλία στα οποία το βασικό θέμα που πραγματεύονται είναι οι σύνδεσμοι και οι εφαρμογές τους.

Τί είναι οι σύνδεσμοι και γιατί έχουν ενδιαφέρον για την στατιστική και τις πιθανότητες; Οι σύνδεσμοι είναι συναρτήσεις που “ζευγαρώνουν” πολυδιάστατες συναρτήσεις κατανομών με τις μονοδιάστατες περιθώριες συναρτήσεις κατανομών τους. Εναλλακτικά, οι σύνδεσμοι είναι πολυδιάστατες συναρτήσεις κατανομών των οποίων οι μονοδιάστατες περιθώριες είναι ομοιόμορφες στο διάστημα (0,1). Η απάντηση στο γιατί οι σύνδεσμοι έχουν ενδιαφέρον, δίνεται από τον Fischer (1997) : ”Οι σύνδεσμοι ενδιαφέρουν τους στατιστικούς για δύο λόγους : 1) ως ένας τρόπος μελέτης μέτρων εξάρτησης, χωρίς να μας ενδιαφέρει η κλίμακα, 2) ως ένα αρχικό σημείο για την κατασκευή οικογενειών από διδιάστατες κατανομές, με προοπτική την προσομοίωση.”

Οι σύνδεσμοι πήραν το όνομά τους από το λατινικό ουσιαστικό “copula” που σημαίνει “δεσμός, σύνδεσμος “ και το χρησιμοποίησε για πρώτη φορά στα μαθηματικά ο Sklar (1959) στο ομώνυμο θεώρημα, για να περιγράψει τις συναρτήσεις που “ενώνουν μαζί” μονοδιάστατες συναρτήσεις κατανομών για να σχηματίσουν πολυδιάστατες συναρτήσεις κατανομών.

Πολλά βασικά αποτελέσματα των συνδέσμων μπορούν να βρεθούν σε αρχικά στάδια δουλειάς του Hoeffding. Στον Hoeffding (1940) βρίσκουμε διδιάστατες “τυποποιημένες κατανομές” των οποίων το στήριγμα περιέχεται στο τετράγωνο $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^2$ και των οποίων οι περιθώριες είναι ομοιόμορφες στο $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$. Ο Schweizer παρατηρεί ότι αν ο Hoeffding είχε διαλέξει το μοναδιαίο τετράγωνο $[0,1]^2$ αντί για το $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]^2$ για την κανονικοποίηση θα είχε ανακαλύψει τους συνδέσμους. Ο Hoeffding πέτυχε επίσης, τα καλύτερα δυνατά φράγματα ανισότητας γι'αυτές τις συναρτήσεις. Η δουλειά του όμως είχε δημοσιευτεί σε ασήμαντα γερμανικά περιοδικά κατά την διάρκεια του πολέμου, και γι'αυτό το λόγο δεν μας ήταν γνωστή. Μεταφράστηκαν όμως στα αγγλικά και δημοσιεύτηκαν από τους Fisher και Sen (1994). Την ίδια περίπου περίοδο, και μη γνωρίζοντας την δουλειά του Hoeffding, ο Fréchet (1951) κατέληξε στα ίδια αποτελέσματα και μας οδήγησε στους όρους "φράγματα Frechet " και "κλάσεις Fréchet". Σε αναγνώριση της συνεισφοράς και των δύο, τώρα ονομάζονται "φράγματα Fréchet - Hoeffding " και "κλάσεις Fréchet - Hoeffding ".

Ο Sklar δημοσίευσε τον όρο "copula" (1959) όταν μελετούσαν με τον Schweizer την ανάπτυξη της θεωρίας των πιθανοτικών μετρικών χώρων (probabilistic metric spaces (PMS)). Πολλά από τα σημαντικά αποτελέσματα που αφορούσαν τους συνδέσμους ήταν αποτέλεσμα της μελέτης των PM χώρων. Ο μετρικός χώρος αποτελείται από ένα σύνολο S, ένα μέτρο d που μετράει αποστάσεις μεταξύ σημείων, έστω p και q στο S. Στους PM χώρους αντικαθιστούμε την απόσταση $d(p,q)$ από μία συνάρτηση κατανομής $F_{p,q}$ η τιμή της οποίας $F_{p,q}(x)$ για κάθε πραγματικό x είναι η πιθανότητα η απόσταση μεταξύ του p και του q να είναι μικρότερη του x. Το πρόβλημα είναι ότι στους PM χώρους δεν υπάρχει κάτι αντίστοιχο της τριγωνικής ανισότητας $d(p,r) \le d(p,q) + d(q,r)$. Υπάρχει αντίστοιχη σχέση για τις συναρτήσεις κατανομών $F_{p,q}$, $F_{p,r}$, $F_{q,r}$ για κάθε p, q, r στο S; Προτάθηκε η σχέση $F_{pr}(x+y) \ge T(F_{pq}(x), F_{qr}(y))$, όπου T είναι η τριγωνική νόρμα (triangle norm). Όπως ένας σύνδεσμος, έτσι και η t-νόρμα (t-norm) απεικονίζει το $[0,1]^2$ στο [0,1] και συνδέει συναρτήσεις κατανομών. Δεν υπάρχει μια σταθερή σχέση ανάμεσα στους συνδέσμους και τις t-νόρμες. Μερικές t-νόρμες είναι σύνδεσμοι και μερικοί σύνδεσμοι είναι t-νόρμες. Αυτό όμως είχε ως αποτέλεσμα την συχνή εμφάνιση των συνδέσμων στην μελέτη των PM χώρων.

Ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα των PM χώρων, για έναν στατιστικό, είναι η κλάση των Αρχιμήδειων t-νόρμων (Archimedean t-norms). Αυτές οι t-νόρμες T ικανοποιούν την σχέση T (u,u) < u για κάθε u στο (0,1). Οι Αρχιμήδειες t-νόρμες είναι και σύνδεσμοι και ονομάζονται Αρχιμήδειοι σύνδεσμοι (Archimedean copulas). Λόγω της απλής τους μορφής, της ευκολίας με την οποία κατασκευάζονται και τις καλές τους ιδιότητες, οι Αρχιμήδειοι σύνδεσμοι εμφανίζονται συχνά σε συζητήσεις για πολυδιάστατες κατανομές.

Επίσης, μπορούμε να δούμε την σχέση των συνδέσμων με την εξάρτηση.Το 1981 δημοσιεύτηκε για πρώτη φορά εργασία [Schweizer and Wolff] που να σχετίζει τους συνδέσμους με την μελέτη της εξάρτησης μεταξύ τυχαίων μεταβλητών. Στην εργασία αυτή αναφέρθηκαν και τροποποιήθηκαν τα κριτήρια για μετρήσεις εξάρτησης μεταξύ ζευγαριών τυχαίων μεταβλητών και παρουσιάστηκαν οι βασικές ομοιότητες ιδιοτήτων των συνδέσμων κάτω από αυστηρά μονότονους μετασχηματισμούς τυχαίων μεταβλητών καθώς και παρουσιάστηκε το γνωστό ως Schweizer και Wolff's σ.

Πάντως πρέπει να αναφερουμε ότι η μελέτη των συνδέσμων και ο ρόλος τους στη στατιστική και τις στοχαστκές διαδικασίες αλλά και σε διάφορους τομείς της εφαρμοσμένης έρευνας, όπως η χρηματοοικονομική ανάλυση, είναι ένα αντικείμενο το οποίο βρίσκεται ακόμα σε ένα πρόωρο στάδιο και χρειάζονται να γίνουν ακόμα πολλά βήματα.

Όπως σε κάθε νέα τεχνική που εφαρμόζεται, έτσι και με τους συνδέσμους, υπάρχουν και διαφορετικές απόψεις. Τα άρθρα του Mikosch, [23] και [24], μας δίνουν έναν αντίλογο στη χρήση των συνδέσμων, αναφέροντας προβλήματα που μπορούν να προκύψουν στην χρήση τους, τόσο ως προς το ποιόν σύνδεσμο να επιλέξουμε, όσο και στο αν όντως οι σύνδεσμοι μπορούν να λύσουν πολυδιάστατα προβλήματα εξάρτησης. Με την πάροδο του χρόνου θα μπορούμε να πούμε με σιγουριά αν οι αμφιβολίες αυτές ευσταθούν ή αν όντως οι σύνδεσμοι μπορούν να λύσουν πολλά από τα προβλήματα που αντιμετωπίζαμε μέχρι σήμερα.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΟΡΙΣΜΟΙ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

Στην εισαγωγή αναφερθήκαμε στους συνδέσμους ως “συναρτήσεις που ενώνουν ή ζευγαρώνουν πολυδιάστατες συναρτήσεις κατανομών στις μονοδιάστατες περιθώριες συναρτήσεις κατανομών τους” και ως “συναρτήσεις κατανομών των οποίων οι μονοδιάστατες περιθώριες είναι ομοιόμορφες”. Κανείς όμως από τους παραπάνω δεν είναι ορισμός του τί είναι ο σύνδεσμος. Άρα σε αυτό το σημείο θα προσπαθήσουμε να δώσουμε έναν πιο ακριβή ορισμό, καθώς και να αναφέρουμε μερικές βασικές τους ιδιότητες.

Να δούμε όμως που περίπου θέλουμε να καταλήξουμε. Έστω ένα ζευγάρι τυχαίων μεταβλητών X και Y με συναρτήσεις κατανομών $F(x)=P[X\leq x]$ και $G(y)=P[Y\leq y]$, αντίστοιχα, και η από κοινού συνάρτηση κατανομής $H(x,y)=P[X\leq x, Y\leq y]$. Σε κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών (x,y) μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τρείς αριθμούς, F(x), G(y), H(x,y), οι οποίοι και οι τρείς ανήκουν στο [0,1]. Δηλαδή κάθε ζευγάρι πραγματικών αριθμών (x,y) μας οδηγεί σ’ένα σημείο (F(x), G(y)) στο μοναδιαίο τετράγωνο $[0,1]\times[0,1]$ και αυτό το ζευγάρι αντιστοιχεί σ’έναν αριθμό H(x,y) στο [0,1]. Θα δείξουμε ότι η αντιστοίχηση που προσδιορίζει την τιμή της από κοινού συνάρτησης κατανομής για κάθε διατεταγμένο ζεύγος τιμών των επιμέρους συναρτήσεων κατανομών είναι όντως συνάρτηση. Τέτοιες συναρτήσεις είναι οι σύνδεσμοι.

2.1 Προκαταρκτικές έννοιες

Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε στην έννοια της 2-αύξουσας συνάρτησης (2-increasing function), το διδιάστατο αντίστοιχο της αύξουσας συνάρτησης μίας μεταβλητής. Θα συμβολίζουμε με R την πραγματική ευθεία $(-\infty,\infty)$, με $\overline{\mathrm{R}}$ την προεκταμένη πραγματική ευθεία $[-\infty,\infty]$ και με $\overline{\mathrm{R}}^2$ το προεκταμένο πραγματικό επίπεδο $\overline{\mathrm{R}}\times\overline{\mathrm{R}}$. Ένα παραλληλόγραμμο στο $\overline{\mathrm{R}}^2$ είναι το καρτεσιανό γινόμενο B δύο κλειστών περιοχών: $B=[x_1,x_2]\times[y_1\times y_2]$. Άρα είναι το παραλληλόγραμμο με κορυφές τα (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_1, y_2), (x_2, y_2). Το μοναδιαίο τετράγωνο I^2 είναι το γινόμενο I×I, όπου I=[0,1]. Μία 2-θέσια (2-place) πραγματική συνάρτηση είναι μία συνάρτηση της οποίας το πεδίο ορισμού, DomH, είναι υποσύνολο του $\overline{\mathrm{R}}^2$ και το σύνολο τιμών της οποίας, RanH, είναι υποσύνολο του R.

Ορισμός 2.1: Έστω S_1 και S_2, μη κενά υποσύνολα του $\overline{\mathrm{R}}$, και έστω H συνάρτηση με πεδίο ορισμού DomH=$S_1 \times S_2$. Έστω $B=[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$ το παραλληλόγραμμο του οποίου όλες οι κορυφές ανήκουν στο πεδίο ορισμού της H. Τότε ο H-όγκος (H-volume) του B δίνεται από την παρακάτω σχέση :

$$V_H(B)=H(x_2,y_2)-H(x_2,y_1)-H(x_1,y_2)+H(x_1,y_1).$$

Σημειώνουμε ότι $V_H(B)$ είναι επίσης η H-μάζα (H-mass) του παραλληλογράμμου B.

Ορισμός 2.2: Μία 2-θέσια πραγματική συνάρτηση H είναι 2-αύξουσα, αν $V_H(B)\geq 0$ για όλα τα παραλληλόγραμμα B των οποίων οι κορυφές βρίσκονται στο πεδίο ορισμού της H.

Όταν η H είναι 2-αύξουσα μπορεί να αναφερόμαστε στον H-όγκο του παραλληλογράμμου B ως το H-μέτρο (H-Measure) του B. Οι 2-αύξουσες συναρτήσεις αναφέρονται συχνά και ως δήθεν-αντίστροφες (quasi-inverse).

Να σημειώσουμε εδώ ότι ο όρος "η H είναι 2-αύξουσα" δεν συνεπάγεται ότι "η H είναι αύξουσα ως προς κάθε μεταβλητή" και το αντίστροφο. Για παράδειγμα, αν η H είναι συνάρτηση ορισμένη στο I^2, με τύπο $\mathrm{H(x,y)=max(x,y)}$, τότε η H είναι αύξουσα συνάρτηση του x και του y. Αλλά $\mathrm{V_H(I^2)}=-1$, άρα η H δεν είναι 2-αύξουσα. Επίσης, αν η H είναι συνάρτηση ορισμένη στο I^2, με τύπο $\mathrm{H(x,y)=(2x-1)(2y-1)}$, τότε η συνάρτηση H είναι 2-αύξουσα, όμως είναι φθίνουσα συνάρτηση του x για κάθε y στο (0,1/2) και είναι φθίνουσα συνάρτηση του y για κάθε x στο (0,1/2).

Λήμμα 2.3: Έστω S_1 και S_2, μη κενά υποσύνολα του $\overline{\mathrm{R}}$ και έστω Η μια 2-αύξουσα συνάρτηση στο $S_1 \times S_2$. Εστω x_1, x_2 στο S_1 με $x_1 \le x_2$ και y_1, y_2 στο S_2 με $y_1 \le y_2$. Τότε η συνάρτηση $t \mapsto H(t, y_2) - H(t, y_1)$ είναι αύξουσα στο S_1 και η συνάρτηση $t \mapsto H(x_2, t) - H(x_1, t)$ είναι αύξουσα στο S_2.

Υποθέτουμε ότι το S_1 έχει ελάχιστο στοιχείο το a_1 και το S_2 έχει ελάχιστο στοιχείο το a_2. Θα λέμε ότι η συνάρτηση Η από το $S_1 \times S_2$ στο R είναι γειωμένη (grounded) αν ισχύει $H(x, a_2) = 0 = H(a_1, y)$ για κάθε (x,y) στο $S_1 \times S_2$.

Άρα έχουμε :

Λήμμα 2.4: Έστω S_1 και S_2, μη κενά υποσύνολα του $\overline{\mathrm{R}}$ και έστω Η μια γειωμένη 2-αύξουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $S_1 \times S_2$. Τότε η Η είναι αύξουσα σε κάθε περίπτωση.

Αποδειξη: αν a_1, a_2 τα ελάχιστα στοιχεία των S_1 και S_2, αντίστοιχα, και θέσουμε $a_1 = x_1$ και $a_2 = y_1$ στο Λήμμα 2.3.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι το S_1 έχει μέγιστο στοιχείο το b_1 και ότι το S_2 έχει μέγιστο στοιχείο το b_2. Τότε λέμε ότι η συνάρτηση Η από το $S_1 \times S_2$ στο R έχει περιθώρια (margins) και οι περιθώριες της Η είναι οι συναρτήσεις F και G που δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$DomF = S_1$, και $F(x) = H(x, b_2)$ για κάθε x στο S_1.

$DomG = S_2$, και $G(x) = H(b_1, y)$ για κάθε y στο S_2.

Παράδειγμα

Έστω Η συνάρτηση με πεδίο ορισμού $[-1,1]\times[0,+\infty]$ που δίνεται από τον τύπο

$$H(x,y)=\frac{(x+1)(e^{y}-1)}{x+2e^{y}-1}.$$

Τότε η Η είναι γειωμένη, αφού $H(x,0)=0$ και $H(-1,y)=0$. Επίσης η Η έχει περιθώριες τις $F(x)$ και $G(y)$ που δίνονται από τους τύπους :

$$F(x)=H(x,\infty)=\frac{x+1}{2} \quad \text{και} \quad G(y)=H(1,y)=1-e^{y}.$$

Τέλος, ένα σημαντικό λήμμα που αφορά τις γειωμένες 2-αύξουσες συναρτήσεις με περιθώριες είναι το ακόλουθο :

Λήμμα 2.5: Έστω S_1 και S_2 μη κενά υποσύνολα του $\overline{\mathrm{R}}$, και έστω *H* μια γειωμένη 2-αύξουσα συνάρτηση, με περιθώριες *F* και *G*, με πεδίο ορισμού το $S_1\times S_2$. Έστω (x_1,y_1) και (x_2,y_2) δύο οποιαδήποτε σημεία στο $S_1\times S_2$. Τότε

$$\left|H(x_2,y_2)-H(x_1,y_1)\right|\le\left|F(x_2)-F(x_1)\right|+\left|G(y_2)-G(y_1)\right|$$

Αποδειξη:

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\left|H(x_2,y_2)-H(x_1,y_1)\right|\le\left|H(x_2,y_2)-H(x_1,y_2)\right|+\left|H(x_1,y_2)-H(x_1,y_1)\right|.$$

Θεωρούμε ότι $x_1\le x_2$. Αφού η Η είναι γειωμένη, 2-αύξουσα, και έχει περιθώριες, από τα παραπάνω λήμματα έχουμε $0\le H(x_2,y_2)-H(x_1,y_2)\le F(x_2)-F(x_1)$. Ανάλογα ισχύει και για $x_1\ge x_2$, άρα για κάθε x_1,x_2 στο S_1 έχουμε $\left|H(x_2,y_2)-H(x_1,y_2)\right|\le\left|F(x_2)-F(x_1)\right|$. Όμοια, για κάθε y_1,y_2 στο S_2 έχουμε $\left|H(x_1,y_2)-H(x_1,y_1)\right|\le\left|G(y_2)-G(x_1)\right|$, άρα αποδείχτηκε.

2.2 Σύνδεσμοι

Στο σημείο αυτό θα ορίσουμε πρώτα τους υπόσυνδέσμους (subcopulas) και στην συνέχεια θα δώσουμε τον ορισμό των συνδέσμων ως υποσυνδέσμων με πεδίο ορισμού το I^2.

Ορισμός 2.6: Ένας 2-διάστατος υποσύνδεσμος είναι μία συνάρτηση C' με τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. Dom $C' = S_1 \times S_2$, όπου S_1 και S_2 είναι υποσύνολα του I που περιέχουν τα στοιχεία 0,1.

2. C' είναι γειωμένη και 2-αύξουσα.

3. Για κάθε u στο S_1 και για κάθε v στο S_2, $C'(u,1) = u$ και $C'(1,v) = v$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε (u,v) στο Dom C', $0 \le C'(u,v) \le 1$, άρα το Ran C' είναι και αυτό υποσύνολο του I.

Ορισμός 2.7: Ένας 2-διάστατος σύνδεσμος είναι ένας 2-διάστατος υποσύνδεσμος C με πεδίο ορισμού το I^2.

Ισοδύναμα, ένας σύνδεσμος είναι μία συνάρτηση C από το I^2 στο I με τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. Για κάθε u,v στο I : $C(u, 0) = 0 = C(0, v)$
   και $C(u, 1) = u$ και $C(1, v) = v$.

2. Για κάθε u_1, u_2, v_1, v_2 στο I με $u_1 \le u_2$ και $v_1 \le v_2$ ισχύει
   $C(u_2,v_2) - C(u_2,v_1) - C(u_1,v_2) + C(u_1,v_1) \ge 0$.

Οι διαφορές μεταξύ συνδέσμων και υποσυνδέσμων μπορεί να είναι μικρές αλλά είναι πολύ σημαντικές. Πολλές από τις ιδιότητες των συνδέσμων είναι στην πραγματικότητα ιδιότητες των υποσυνδέσμων.

Θεώρημα 2.8 Έστω C' ένας υποσύνδεσμος. Τότε για κάθε (u,v) στο DomC',

$$\max(u+v-1,0) \le C'(u,v) \le \min(u,v) .$$

Αφού κάθε σύνδεσμος είναι και υποσύνδεσμος, το παραπάνω θεώρημα ισχύει και για τους συνδέσμους. Τα όρια της ανισότητας του θεωρήματος είναι και αυτά σύνδεσμοι και από εδώ και στο εξής θα συμβολίζονται M(u,v)=min(u,v) και W(u,v)=max(u+v-1,0). Άρα για κάθε σύνδεσμο C και για κάθε (u,v) στο I^2 έχουμε

$$W(u,v) \le C(u,v) \le M(u,v).$$

Η τελευταία ανισότητα είναι η διατύπωση των φραγμάτων ανισότητας Fréchet-Hoeffding για τους συνδέσμους. Θα λέμε ότι το M είναι το Fréchet-Hoeffding άνω φράγμα και το W είναι το Fréchet-Hoeffding κάτω φράγμα. Ένας ακόμη πολύ σημαντικός σύνδεσμος που θα συναντούμε συχνά είναι ο σύνδεσμος γινομένου Π(u,v) = uv.

Το παρακάτω θεώρημα αποδεικνύει την συνέχεια των υποσυνδέσμων, και κατ'επέκταση των συνδέσμων, μέσω μίας Lipschitz συνθήκης στο I^2.

Θεώρημα 2.9 Έστω C' ένας υποσύνδεσμος. Τότε για κάθε u_1, u_2, v_1, v_2 στο DomC',

$$\left|C'(u_2,v_2) - C'(u_1,v_1)\right| \le |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| .$$

Συνεπώς η C' είναι ομοιόμορφα συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

Ορισμός 2.10: Έστω C ένας σύνδεσμος και α ένας αριθμός στο I. Η οριζόντια συνιστώσα (horizontal section) του C στο α είναι η συνάρτηση από το I στο I που δίνεται από τον τύπο $t \mapsto C(t,a)$, η κάθετη συνιστώσα (vertical section) του C στο α είναι η συνάρτηση από το I στο I που δίνεται από τον τύπο $t \mapsto C(a,t)$, και η διαγώνια συνιστώσα (diagonal section) του C είναι η συνάρτηση δ_c από το I στο I που ορίζεται από τον τύπο $\delta_c(t) = C(t,t)$.

Πόρισμα

Οι οριζόντιες, κάθετες και διαγώνιες συνιστώσες του συνδέσμου C είναι όλες αύξουσες και ομοιόμορφα συνεχείς στο I.

Από τον ορισμό **2.7** και το θεώρημα **2.9** προκύπτει ότι το γράφημα ενός οποιουδήποτε συνδέσμου είναι μία συνεχής επιφάνεια μέσα στον μοναδιαίο κύβο I^3 το σύνορο της οποίας είναι το λοξό τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία (0,0,0), (1,0,0), (1,1,1), (0,1,0). Προφανώς, αφού τα Fréchet-Hoeffding φράγματα είναι φράγματα για όλους τους συνδέσμους, το γράφημα ενός οποιουδήποτε συνδέσμου θα βρίσκεται μεταξύ των επιφανειών z= M(u,v) και z= W(u,v).

Θεώρημα 2.11 Έστω C ένας σύνδεσμος. Για κάθε v στο I, η μερική παράγωγος $\frac{\partial C}{\partial u}$ υπάρχει σχεδόν για κάθε u, και για τέτοια u και v, έχουμε

$$0 \le \frac{\partial}{\partial u} C(u,v) \le 1.$$

Όμοια, για κάθε u στο I, η μερική παράγωγος $\frac{\partial C}{\partial v}$ υπάρχει σχεδόν για κάθε v, και για τέτοια u και v, έχουμε

$$0 \le \frac{\partial}{\partial v} C(u,v) \le 1.$$

Επιπλέον, οι συναρτήσεις $u \mapsto \frac{\partial C(u,v)}{\partial v}$ και $v \mapsto \frac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ ορίζονται και είναι αύξουσες σχεδόν παντού στο I.

Απόδειξη : Η ύπαρξη των μερικών παραγώγων $\frac{\partial C}{\partial u}$ και $\frac{\partial C}{\partial v}$ είναι άμεση λόγω του ότι οι μονότονες συναρτήσεις είναι διαφορίσιμες σχεδόν παντού. Οι ανισότητες του θεωρήματος προκύπτουν από την $\left|C'(u_2,v_2) - C'(u_1,v_1)\right| \le |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$ θέτοντας $u_1 = u_2$ και $v_1 = v_2$, αντίστοιχα. Αν $v_1 \le v_2$, τότε, από το Λήμμα 1, η συνάρτηση

$u \mapsto C(u,v_2) - C(u,v_1)$ είναι αύξουσα. Επιπλέον η $\dfrac{\partial(C(u,v_2) - C(u,v_1))}{\partial u}$ ορίζεται και είναι μη αρνητική σχεδόν παντού στο I, από το οποίο προκύπτει ότι $t \mapsto \dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u}$ ορίζεται και είναι μη αρνητική σχεδόν παντού στο I. Ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για την u$\mapsto$ $\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial v}$.

2.3 Το Θεώρημα του Sklar

Το θεώρημα αυτό είναι το κεντρικό θεώρημα στην θεωρία των συνδέσμων, και αποτελεί το θεμέλιο των περισσότερων εφαρμογών των συνδέσμων σε όλους τους τομείς εφαρμογής τους, καθώς και στην στατιστική. Ας δώσουμε τώρα κάποιους από τους ορισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια.

Ορισμός 2.12: Η συνάρτηση κατανομής είναι μία συνάρτηση F με πεδίο ορισμού το $\overline{R}$ τέτοια ώστε:

1. Η F είναι αύξουσα.

2. F(-∞)=0 και F(+∞)=1.

Ορισμός 2.13: Μία από κοινού συνάρτηση κατανομής είναι μία συνάρτηση H με πεδίο ορισμού το $\overline{R}^2$ τέτοια ώστε:

1. η H είναι 2-αύξουσα.

2. H(x,-∞)= H(-∞,y)= 0 και H(-∞,+∞)= 1.

Συνεπώς η H είναι γειωμένη, και αφού DomH=$\overline{R}^2$, η H έχει περιθώριες F και G οι οποίες δίνονται από τους τύπους F(x)= H(x,∞) και G(y)= H(∞,y), και οι οποίες είναι συναρτήσεις κατανομών.

Ας προχωρήσουμε τώρα στην διατύπωση του εν λόγω θεωρήματος.

Θεώρημα 2.14 (Το Θεώρημα του Sklar)
Έστω H μία από κοινού συνάρτηση κατανομής με περιθώριες τις F και G. Τότε υπάρχει ένας σύνδεσμος C τέτοιος ώστε για κάθε x, y στο $\overline{R}$,

$$H(x,y) = C(F(x),G(y)).$$

Άν οι F και G είναι συνεχείς, τότε ο C είναι μοναδικός, αλλιώς ο C είναι μοναδικά ορισμένος στο $RanF \times RanG$. Αντίστροφα, αν C είναι ένας σύνδεσμος και οι F και G είναι συναρτήσεις κατανομών, τότε η συνάρτηση H που ορίζεται από τον παραπάνω τύπο είναι μία από κοινού συνάρτηση κατανομής με περιθώριες τις F και G.

Λήμμα 2.15: Έστω H μία από κοινού συνάρτηση κατανομής με περιθώριες τις F και G. Τότε υπάρχει ένας μοναδικός υποσύνδεσμος C' τέτοιος ώστε:

1. $DomC' = RanF \times RanG$.

2. Για κάθε x,y στο $\overline{R}$, $H(x,y) = C'(F(x),G(y))$.

Απόδειξη: Η από κοινού συνάρτηση κατανομής H ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος **2.5** με $S_1 = S_2 = \overline{R}$. Συνεπώς για κάθε σημείο (x_1, y_1) και (x_2, y_2) στο $\overline{R}^2$ ισχύει:

$$\left|H(x_2,y_2) - H(x_1,y_1)\right| \leq \left|F(x_2) - F(x_1)\right| + \left|G(y_2) - G(y_1)\right|.$$

Συνεπάγεται ότι αν $F(x_1) = F(x_2)$ και $G(y_1) = G(y_2)$, τότε $H(x_1,y_1) = H(x_2,y_2)$. Άρα το σύνολο των διατεταγμένων ζευγαριών $\{((F(x),G(y)),H(x,y)) \mid x,y \in \overline{R}\}$ ορίζει μία 2-θέσια πραγματική συνάρτηση C' της οποίας το πεδίο ορισμού είναι το $RanF \times RanG$. Το ότι η συνάρτηση αυτή είναι υποσύνδεσμος προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες της H.

Λήμμα 2.16: Έστω $C^{'}$ ένας υποσύνδεσμος. Τότε υπάρχει ένας σύνδεσμος C τέτοιος ώστε:

$$C(u,v)=C^{'}(u,v)\text{, για κάθε } (u,v) \text{ στο } DomC^{'},$$

δηλαδή κάθε υποσύνδεσμος μπορεί να αναχθεί σε σύνδεσμο, χωρίς όμως η προέκταση αυτή να είναι μοναδική.

Τώρα, με τα δύο αυτά λήμματα είμαστε έτοιμοι να δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος του Sklar.

Απόδειξη Θεωρήματος του Sklar: Η ύπαρξη ενός συνδέσμου C τέτοιου ώστε η $H(x,y)=C(F(x),G(y))$ να διατηρείται για όλα τα *x,y* στο $\overline{R}$ προκύπτει από τα δύο παραπάνω Λήμματα. Αν οι F και G είναι συνεχείς, τότε $RanF=RanG=I$, έτσι ώστε ο μοναδικός υποσύνδεσμος του Λήμματος **2.15** να είναι και σύνδεσμος. Το αντίστροφο είναι θέμα απευθείας αντικατάστασης.

Ο τύπος του παραπάνω θεωρήματος μας δίνει μία έκφραση της από κοινού συνάρτησης κατανομής μέσω του συνδέσμου και δύο μονοδιάστατων συναρτήσεων κατανομών. Ομοίως, ένας σύνδεσμος μπορεί να εκφραστεί μέσω της παραπάνω σχέσης συναρτήσει της από κοινού συνάρτησης κατανομής και των αντίστροφων των δύο περιθωρίων. Αν όμως η περιθώρια δεν είναι γνησίως αύξουσα, τότε δεν θα έχει την κλασσική αντίστροφη. Γι'αυτό το λόγο θα δώσουμε τον ορισμό της "δήθεν-αντίστροφης".

Ορισμός 2.17: Έστω F μία συνάρτηση κατανομής. Τότε μία δήθεν–αντίστροφη της F είναι κάθε συνάρτηση $F^{(-1)}$ με πεδίο ορισμού I για την οποία ισχύει:

1. αν t βρίσκεται στο $RanF$, τότε $F^{(-1)}(t)$ είναι ένας αριθμός x στο $\overline{R}$ τέτοιος ώστε $F(x)=t$, π.χ. για όλα τα t στο $RanF$, $F\,(F^{(-1)}(t))=t$.

2. αν το t δεν βρίσκεται στο $RanF$, τότε $F^{(-1)}(t)=\inf\{x \mid F(x)\geq t\}=$ $=\sup\{x \mid F(x)\leq t\}$.

Προφανώς, αν η F είναι γνησίως αύξουσα τότε έχει μόνο μία δήθεν–αντίστροφη, δηλαδή την κλασσική αντίστροφη που γνωρίζουμε και θα την συμβολίζουμε F^{-1}.

Πόρισμα Έστω H, F, G και $C^{'}$ όπως ορίζονται στο Λήμμα **2.15**, και έστω $F^{(-1)}$ και $G^{(-1)}$ να είναι οι δήθεν–αντίστροφες των F και G, αντίστοιχα. Τότε για οποιοδήποτε (u,v) στο $\mathrm{Dom}\, C^{'}$, έχουμε:

$$C^{'}(u,v) = H(F^{(-1)}(u), G^{(-1)}(v)).$$

Όταν οι F και G είναι συνεχείς, το παραπάνω πόρισμα ισχύει και για τους συνδέσμους και μάλιστα μας παρέχει έναν τρόπο κατασκευής συνδέσμων μέσω από κοινού συναρτήσεων κατανομών.

Στο σημείο αυτό πρέπει να επισημάνουμε ότι με την κατάλληλη προέκταση του πεδίου ορισμού στο $\overline{R}^2$, κάθε σύνδεσμος είναι μία από κοινού συνάρτηση κατανομής με περιθώριες οι οποίες είναι ομοιόμορφες στο I. Το παραπάνω μπορούμε να το επιτύχουμε αν έχουμε ένα σύνδεσμο C και ορίσουμε την συνάρτηση H_c στο $\overline{R}^2$ με τον εξής τύπο :

$$H_c(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{x<0 ή y<0} \\ \mathrm{C(x,y)}, & \mathrm{(x,y)} \in \mathrm{I}^2 \\ \mathrm{x}, & \mathrm{y>1,\ x} \in \mathrm{I} \\ \mathrm{y}, & \mathrm{x>1,\ y} \in \mathrm{I} \\ 1, & \text{x>1 και y>1.} \end{cases}$$

Τότε η H_c είναι συνάρτηση κατανομής της οποίας και οι δύο περιθώριες είναι ομοιόμορφες στο (0,1).

2.4 Σύνδεσμοι και Τυχαίες Μεταβλητές

Σε αυτά που θα συζητήσουμε παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο "τυχαία μεταβλητή" με τη στατιστική του έννοια, δηλαδή μία τυχαία μεταβλητή είναι μία ποσότητα της οποίας οι τιμές περιγράφονται από μία (γνωστή ή άγνωστη) συνάρτηση πιθανότητας κατανομής. Θα χρησιμοποιούμε κεφαλαία γράμματα, όπως X και Y, για τις τυχαίες μεταβλητές και μικρά γράμματα x, y για τις τιμές τους. Θα λέμε ότι F είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής X όταν για όλα τα x στο $\overline{R}$, $F(x)=P[X\leq x]$. Ορίζουμε οι συναρτήσεις κατανομών τυχαίων μεταβλητών να είναι δεξιά-συνεχείς.

Στο σημείο αυτό θα επαναδιατυπώσουμε το θεώρημα του Sklar βασιζόμενοι στις τυχαίες μεταβλητές και στις συναρτήσεις κατανομών τους:

Θεώρημα 2.18 Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομών F και G αντίστοιχα, και από κοινού συνάρτηση κατανομής H. Τότε υπάρχει σύνδεσμος C τέτοιος ώστε να ισχύει

$$H(x,y) = C(F(x),G(y)).$$

Αν οι F και G είναι συνεχείς, τότε ο C είναι μοναδικός. Αλλιώς ο C είναι μοναδικά ορισμένος στο $\mathrm{Ran}F\times\mathrm{Ran}G$.

Ο παραπάνω σύνδεσμος C θα λέγεται σύνδεσμος των X και Y και θα συμβολίζεται με C_{XY}.

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει ότι ο πολλαπλασιαστικός σύνδεσμος $\Pi(u,v)=uv$ χαρακτηρίζει ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές όταν οι συναρτήσεις κατανομών είναι συνεχείς.

Θεώρημα 2.19 Έστω X και Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Τότε οι X και Y είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν $C_{XY}=\Pi$.

Θεώρημα 2.20 Έστω X και Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με σύνδεσμο C_{XY}. Αν α και β είναι γνησίως αύξουσες στο RanX και RanY αντίστοιχα, τότε

$$C_{a(X)\beta(Y)}=C_{XY}.$$

Έτσι ο C_{XY} είναι αναλλοίωτος κάτω από γνησίως αύξοντες μετασχηματισμούς των Χ και Υ.

Απόδειξη: Έστω ότι με F_1, G_1, F_2 και G_2 συμβολίζουμε τις συναρτήσεις κατανομών των Χ, Υ, α(Χ) και β(Υ) αντίστοιχα. Αφού οι α και β είναι γνησίως αύξουσες, $F_2(x) = P[a(X) \le x] = P[X \le a^{-1}(x)] = F_1(a^{-1}(x))$ και όμοια $G_2(y) = G_1(\beta^{-1}(y))$. Έτσι για κάθε x, y στο $\overline{R}$ έχουμε:

$$C_{a(X)\beta(\mathrm{Y})}(F_2(x), G_2(y)) = P[a(X) \le x, \beta(Y) \le y] = P[X \le a^{-1}(x), Y \le \beta^{-1}(y)]$$
$$= C_{XY}(F_1(a^{-1}(x)), G_1(\beta^{-1}(y))) = C_{XY}(F_2(x), G_2(y)).$$

Αφού οι Χ και Υ είναι συνεχής, RanF_2=RanG_2=I απ'όπου προκύπτει ότι $C_{a(X)\beta(\mathrm{Y})} = C_{XY}$ στο I^2.

Άν μία εκ των α και β είναι γνησίως φθίνουσα, τότε επιτυγχάνουμε αποτελέσματα στα οποία ο σύνδεσμος των α(Χ) και β(Υ) είναι απλώς μετασχηματισμός του C_{XY}. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.21 Έστω Χ και Υ συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με σύνδεσμο C_{XY}. Έστω α και β είναι γνησίως μονότονες στο RanX και RanY αντίστοιχα. Τότε έχουμε:

1. Αν η α είναι γνησίως αύξουσα και η β γνησίως φθίνουσα τότε:
   $C_{a(X)\beta(\mathrm{Y})}(u,v) = u - C_{XY}(u,1-v)$.

2. Αν η α είναι γνησίως φθίνουσα και η β γνησίως αύξουσα τότε:
   $C_{a(X)\beta(\mathrm{Y})}(u,v) = v - C_{XY}(1-u,v)$.

3. Αν α και β είναι γνησίως φθίνουσες τότε:
   $C_{a(X)\beta(\mathrm{Y})}(u,v) = u+v-1+C_{XY}(1-u,1-v)$.

2.5 Τα Φράγματα Fréchet-Hoeffding για από κοινού Συναρτήσεις Κατανομών Τυχαίων Μεταβλητών

Έχουμε δει ότι τα φράγματα Fréchet-Hoeffding ισχύουν για όλους τους συνδέσμους, δηλαδή για ένα σύνδεσμο C και για όλα τα u, v στο I, ισχύει:

$$W(u,v) = \max(u+v-1,0) \leq C(u,v) \leq \min(u,v) = M(u,v).$$

Ως αποτέλεσμα του θεωρήματος του Sklar, αν X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση κατανομής H και περιθώριες F και G, αντίστοιχα, τότε για κάθε x, y στο $\overline{R}$ έχουμε:

$$\max(F(x)+G(y)-1,0) \leq H(x,y) \leq \min(F(x),G(y)).$$

Επειδή οι M και W είναι σύνδεσμοι, τα παραπάνω φράγματα είναι από κοινού συναρτήσεις κατανομών και καλούνται Fréchet-Hoeffding φράγματα για από κοινού συναρτήσεις κατανομών H με περιθώριες F και G. Θέλουμε να δούμε ποια είναι η σχέση των τυχαίων μεταβλητών X και Y όταν η H είναι ίση με ένα από τα φράγματα Fréchet-Hoeffding.

Ορισμός 2.22: Ένα υποσύνολο S του $\overline{R}^2$ είναι αύξον (nondecreasing subset) αν για κάθε (x,y) και (u,v) στο S, το ότι το $x<u$ συνεπάγεται ότι $y \leq v$. Όμοια , ένα υποσύνολο S του $\overline{R}^2$ είναι φθίνον (nondincreasing subset) αν για κάθε (x,y) και (u,v) στο S, το ότι το $x<u$ συνεπάγεται ότι $y \geq v$.

Τώρα θα δείξουμε ότι η από κοινού συνάρτηση κατανομής H για ένα ζευγάρι τυχαίων μεταβλητών (X,Y) ταυτίζεται με το σύνδεσμο M αν και μόνο αν το στήριγμα της H βρίσκεται μέσα σε ένα αύξον σύνολο. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε τα δύο ακόλουθα λήμματα:

Λήμμα 2.23: Έστω S ένα υποσύνολο του $\overline{R}^2$. Τότε το S είναι αύξον αν και μόνο αν για κάθε (x,y) στο $\overline{R}^2$ είτε

1. για κάθε (x,y) στο S, αν $u \leq x$ συνεπάγεται ότι $v \leq y$ ή

2. για κάθε (x,y) στο S, αν $v \leq y$ συνεπάγεται ότι $u \leq x$.

Λήμμα 2.24: Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση κατανομής H. Τότε η H ισούται με το Fréchet-Hoeffding ανω φράγμα αν και μόνο αν για κάθε (x,y) στο $\overline{R}^2$, είτε P[X>x,Y$\leq$y] = 0 ή P[X$\leq$x,Y>y] = 0.

Θεώρημα 2.25 Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση κατανομής H. Τότε η H ταυτίζεται με το Fréchet-Hoeffding ανω φράγμα αν και μόνο αν το στήριγμα της H είναι ένα αύξον υποσύνολο του $\overline{R}^2$.

Απόδειξη: Έστω ότι με S συμβολίζουμε το στήριγμα της H και έστω (x,y) ένα οποιοδήποτε σημείο στο $\overline{R}^2$. Τότε η πρώτη σχέση του Λήμματος **2.23** ισχύει αν και μόνο αν $\{(u,v) \mid u \leq x \text{ και } v > y\} \cap S = \varnothing$, ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν P[X$\leq$x,Y>y]=0. Ομοίως, η δεύτερη σχέση του Λήμματος **2.23** ισχύει αν και μόνο αν $\{(u,v) \mid u > x \text{ και } v \leq y\} \cap S = \varnothing$, ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν P[X>x,Y$\leq$y]=0.

Θεώρημα 2.26 Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση κατανομής H. Τότε η H ταυτίζεται με το Fréchet-Hoeffding κάτω φράγμα αν και μόνο αν το στήριγμα της H είναι ένα φθίνον υποσύνολο του $\overline{R}^2$.

2.6 Σύνδεσμοι επιβίωσης

Συχνά στην στατιστική έχουμε να κάνουμε με μεταβλητές που φανερώνουν χρόνους ζωής ατόμων ή αντικειμένων. Η συνάρτηση επιβίωσης

$$\overline{F}(x) = P[X > x] = 1 - F(x),$$

όπου η F είναι η συνάρτηση κατανομής της X, δείχνει ποιά είναι η πιθανότητα ένα άτομο X να ζει πέρα από το χρόνο x. Το λογικό εύρος ενός χρόνου ζωής είναι το

$[0,\infty)$, όμως θα κάνουμε τη σύμβαση να χρησιμοποιούμε τον όρο συνάρτηση επιβίωσης ακόμα και αν το σύνολο τιμών είναι το $\overline{R}$.

Για ένα ζεύγος τυχαίων μεταβλητών (X,Y) με από κοινού συνάρτηση κατανομής H, η από κοινού συνάρτηση επιβίωσης θα δίνεται από τον τύπο $\overline{H}(x,y) = P[X > x, Y > y]$. Οι περιθώριες της $\overline{H}$ είναι οι $\overline{H}(x,-\infty)$ και $\overline{H}(-\infty, y)$, οι οποίες είναι οι μονοδιάστατες συναρτήσεις $\overline{F}$ και $\overline{G}$ αντίστοιχα. Ισχύει όμως κάτι αντίστοιχο με το θεώρημα του Sklar και για αυτές τις συναρτήσεις; Αν θεωρήσουμε ότι ο σύνδεσμος των X και Y είναι ο C τότε θα έχουμε:

$$\begin{aligned}\overline{H}(x,y) &= P[X > x, Y > y] \\ &= 1 - F(x) - G(y) + H(x,y) \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(y) - 1 + C(F(x), G(y)) \\ &= \overline{F}(x) + \overline{G}(x) - 1 + C(1-\overline{F}(x), 1-\overline{G}(y)),\end{aligned}$$

έτσι ώστε αν ορίσουμε την συνάρτηση $\widehat{C}$ από το I^2 στο I ως

$$\widehat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v),$$

θα έχουμε

$$\overline{H}(x,y) = \widehat{C}(\overline{F}(x), \overline{G}(y)).$$

Ο $\widehat{C}$ είναι σύνδεσμος και θα τον αποκαλούμε σύνδεσμο επιβίωσης των X και Y. Ο $\widehat{C}$ ζευγαρώνει την από κοινού συνάρτηση επιβίωσης στις μονοδιάστατες περιθώριές της, όπως ακριβώς ένας σύνδεσμος ζευγαρώνει την από κοινού συνάρτηση κατανομής με τις περιθώριες.

Πρέπει να διακρίνουμε την διαφορά του συνδέσμου $\widehat{C}$ με την από κοινού συνάρτηση επιβίωσης $\overline{C}$ για δύο ομοιόμορφες (0,1) τυχαίες μεταβλητές των οποίων η από κοινού συνάρτηση κατανομής είναι η C. Η σχέση που τους συνδέει είναι η εξής :

$$\overline{C}(u,v) = P[U > u, V > v] = 1 - u - v + C(u,v) = \widehat{C}(1-u, 1-v).$$

Τέλος, θα αναφέρουμε δύο ακόμα συναρτήσεις, οι οποίες δεν είναι σύνδεσμοι, αλλά σχετίζονται με τους συνδέσμους επιβίωσης. Τον δυαδικό ενός συνδέσμου (dual of a copula) και τον συν-σύνδεσμο (co-copula). Το δυαδικό ενός συνδέσμου C είναι η

$\widetilde{C}$ που ορίζεται από την σχέση $\widetilde{C}(u,v) = u + v - C(u,v)$ και ο συν-σύνδεσμος C^* ορίζεται από την σχέση $C^*(u,v) = 1 - C(1-u,1-v)$. Οι δύο παραπάνω συναρτήσεις εκφράζουν πιθανότητες των X και Y, και δεν είναι σύνδεσμοι.

2.7 Συμμετρία

Γνωρίζουμε ότι μία τυχαία μεταβλητή του X είναι συμμετρική γύρω από το k αν οι συναρτήσεις κατανομών των X-k και k-X είναι ίδιες. Όταν η X είναι συνεχείς τότε F(α+x) = $\overline{\mathrm{F}}$(α- x). Τώρα θα ορίσουμε την έννοια της συμμετρίας ενός ζευγαριού (X,Y) τυχαίων μεταβλητών γύρω από το σημείο (k,m).

Ορισμός 2.27: Έστω X και Y είναι τυχαίες μεταβλητές και έστω (k,m) σημείο του R^2.

1. Οι (X,Y) είναι περιθώρια συμμετρικές (marginally symmetric) γύρω από το (k,m), αν οι X και Y είναι συμμετρικές γύρω από τα k και m, αντίστοιχα.

2. Οι (X,Y) είναι ακτινικά συμμετρικές (radially symmetric) γύρω από το (k,m) αν η από κοινού συνάρτηση κατανομής των X-k και Y-m είναι ίδια με την από κοινού συνάρτηση κατανομής των k-X και m-Y.

3. Οι (X,Y) είναι από κοινού συμμετρικές (jointly symmetric) γύρω από το (k,m) αν τα 4 ακόλουθα ζεύγη τυχαίων μεταβλητών έχουν κοινή από κοινού κατανομή: (X-k,Y-m), (X-k,m-Y), (k-X,Y-m), (k-X,m-Y).

Όταν οι X και Y είναι συνεχείς έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.28 Έστω X και Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση κατανομής H και περιθώριες F και G αντίστοιχα. Έστω (k,m) σημείο του R^2. Τότε οι (X,Y) είναι ακτινικά συμμετρικές γύρω από το (k,m) αν και μόνο αν ισχύει:

$$H(k+x,m+y)=\overline{H}(k-x,m-y) \text{ για κάθε } (x,y) \text{ στο } R^2.$$

Είναι άμεσο ότι η από κοινού συμμετρία συνεπάγεται την ακτινική συμμετρία και η ακτινική συμμετρία συνεπάγεται την περιθώρια συμμετρία. Εμείς θα επικεντρωθούμε στην ακτινική συμμετρία.

Θεώρημα 2.29 Έστω X και Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση κατανομής H και περιθώριες F και G αντίστοιχα και σύνδεσμο C. Τότε οι (X,Y) είναι ακτινικά συμμετρικές γύρω από το (k,m) αν και μόνο αν ισχύει C = $\widehat{C}$, δηλαδή αν και μόνο αν ο C ικανοποιεί την σχέση:

$$C(u,v)=u+v-1+C(1-u,1-v) \text{ για κάθε } (u,v) \text{ στο } I^2.$$

Γεωμετρικά η παραπάνω σχέση μας λέει ότι τα παραλληλόγραμμα $[0,u]\times[0,v]$ και $[1-u,1]\times[1-v,1]$ έχουν ίσο C-όγκο για κάθε (u,v) στο I^2.

Θεώρημα 2.30 Έστω X και Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση κατανομής H και περιθώριες F και G αντίστοιχα και σύνδεσμο C. Τότε οι X και Y είναι ανταλλάξιμες (exchangeable) αν και μόνο αν F=G και *C(u,v)=C(v,u)* για όλα τα (u,v) στο I^2.

Όταν ισχύει *C(u,v)=C(v,u)* για όλα τα *(u,v)* στο I^2, θα λέμε ότι ο *C* είναι συμμετρικός.

2.8 Διάταξη Συνδέσμων

Η ανισότητα των φραγμάτων Frechet-Hoeffding μας οδηγεί σε μερική διάταξη ενός συνόλου των συνδέσμων.

Ορισμός 2.31: Αν έχουμε δύο συνδέσμους C_1 και C_2, θα λέμε ότι ο C_1 είναι μικρότερος του C_2, και θα το γράφουμε $C_1 \prec C_2$, αν $C_1(u,v) \leq C_2(u,v)$ για όλα τα *(u,v)* στο *I*.

Αυτό που μπορούμε να πούμε με σιγουριά για τη διάταξη των συνδέσμων είναι ότι ο M είναι μεγαλύτερος από όλους τους άλλους συνδέσμους και ο W είναι μικρότερος από όλους τους άλλους συνδέσμους. Επισημαίνουμε ότι αυτή είναι μία μερική διάταξη αφού δεν μπορούμε να διατάξουμε όλα τα ζεύγη συνδέσμων.

2.9 Παραγωγή Τιμών Τυχαίων Μεταβλητών (Random Variate Generation)

Πολλές φορές θέλουμε να παράγουμε δείγμα από μία συνάρτηση κατανομής μέσω προσομοίωσης. Ένας συχνός τρόπος με τον οποίο παράγουμε τέτοιους αριθμούς είναι με την μέθοδο της αντίστροφης συνάρτησης κατανομής. Τα βήματα που ακολουθούμε σε αυτή τη μέθοδο είναι τα εξής:

1. Παράγουμε τυχαία τιμή (variate) u από μία ομοιόμορφη στο (0,1).

2. Θέτουμε x = $F^{(-1)}$(u), όπου $F^{(-1)}$ είναι μία δήθεν-αντίστροφη της F.

Θα παράγουμε παρατηρήσεις (x,y) από ένα ζευγάρι τυχαίων μεταβλητών (X,Y) με από κοινού συνάρτηση κατανομής H, χρησιμοποιώντας τους συνδέσμους. Θα παράγουμε δηλαδή ένα ζεύγος τιμών (u,v) από τις ομοιόμορφες στο (0,1) τυχαίες μεταβλητές (U,V) οι οποίες έχουν ως από κοινού συνάρτηση κατανομής τον C, και μετά θα μετασχηματίσουμε τις τιμές αυτές. Αυτό θα το επιτύχουμε με την μέθοδο της δεσμευμένης κατανομής (conditional distribution method). Θα χρειαστούμε δηλαδή την κατά συνθήκη συνάρτηση κατανομής για την V δοθέντος ότι U= u, δηλαδή την

$$c_u(v) = P[V \leq v \mid U = u] = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{C(u + \Delta u, v) - C(u,v)}{\Delta u} = \frac{\partial}{\partial u} C(u,v)$$

οπότε τα βήματα είναι τα ακόλουθα:

1. Παράγουμε δύο ανεξάρτητες ομοιόμορφες στο (0,1) τιμές μεταβλητών u και t.

2. Θέτουμε v = $c_u^{(-1)}(t)$, όπου $c_u^{(-1)}$ είναι μία δήθεν-αντίστροφη της c_u.

3. Το ζητούμενο ζευγάρι είναι το *(u,v)*.

Στην παραπάνω μέθοδο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και τους συνδέσμους επιβίωσης όταν θέλουμε οι τιμές των τυχαίων μεταβλητών που θα παράγουμε να προέρχονται από μία κατανομή με δοσμένη συνάρτηση επιβίωσης. Ένας τέτοιος αλγόριθμος παράγει ένα ζευγάρι (U,V) που έχουν από κοινού συνάρτηση κατανομής C, δοθέντος της $\hat{C}$, η οποία

$$\hat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u,1-v)$$

είναι η συνάρτηση κατανομής του ζεύγους (1-U,1-V), και έχει τα ακόλουθα βήματα:

1. Παράγουμε δύο ανεξάρτητες ομοιόμορφες (0,1) τιμές μεταβλητών u και t.

2. Θέτουμε v = $\hat{c}_u^{(-1)}(t)$, όπου $\hat{c}_u^{(-1)}$ είναι μία δήθεν-αντίστροφη της $\hat{c}_u(v) = \dfrac{\partial}{\partial u}\hat{C}(u,v)$.

3. Το ζητούμενο ζευγάρι είναι το *(u,v)*.

2.10 Πολυμεταβλητοί σύνδεσμοι

Στην πολυμεταβλητή περίπτωση πολλά από τα αποτελέσματα και τα θεωρήματα που είδαμε προηγουμένως είναι ακριβώς ανάλογα. Θα δώσουμε και μερικούς νέους συμβολισμούς. Θα συμβολίζουμε με $\overline{R}^n$ τον προεκταμένο πραγματικό n-χώρο $\overline{R} \times \overline{R} \times \ldots \times \overline{R}$. Τα σημεία του $\overline{R}^n$ θα τα συμβολίζουμε με διανύσματα της μορφής **α**=($a_1, \ldots, a_n$) και **β**=($\beta_1, \ldots, \beta_n$) και όταν γράφουμε $\boldsymbol{\alpha} \le \boldsymbol{\beta}$

όταν $a_k \le \beta_k$ για όλα τα k. Με $\mathbf{I}^n$ θα εννοούμε το I×I×...×I. Μία n-θέσια πραγματική συνάρτηση H είναι μία συνάρτηση με πεδίο ορισμού DomH το οποίο είναι υποσύνολο του $\overline{R}^n$ και το σύνολο τιμών RanH είναι υποσύνολο του R.

Ορισμός 2.32: Έστω $S_1, S_2, ..., S_n$ μη κενά υποσύνολα του $\overline{R}$ και έστω η H να είναι μία n-θέσια πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού DomH=$S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$. Έστω B=[**α**,**β**] ένα n-κουτί (n-box) του οποίου οι κορυφές βρίσκονται στο DomH. Τότε ο H-όγκος του B δίνεται από τον τύπο $V_H(B) = \sum \mathrm{sgn}(\mathbf{c})\mathrm{H}(\mathbf{c})$, όπου το άθροισμα υπολογίζεται πάνω σε όλες τις κορυφές του **c** στο B και το sgn(**c**) δίνεται από τον τύπο :

$$\mathrm{sgn}(\mathbf{c}) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \mathrm{c_k} = a_{\mathrm{k}} \text{ για ζυγό αριθμό από k} \\ -1, & \text{αν } \mathrm{c_k} = a_{\mathrm{k}} \text{ για μονό αριθμό από k.} \end{cases}$$

Ορισμός 2.33: Μία n-θέσια πραγματική συνάρτηση H είναι n-αύξουσα αν $V_H(B) \ge 0$ για όλα τα n-κουτιά B των οποίων οι κορυφές βρίσκονται στο DomH.

Λήμμα 2.34: Έστω $S_1, S_2, ..., S_n$ μη κενά υποσύνολα του $\overline{R}$ και έστω η H μία γειωμένη n-αύξουσα συνάρτηση με πεδίο ορισμού $S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$. Τότε η H είναι αύξουσα σε κάθε περίπτωση, δηλαδή, αν $(t_1, ..., t_{k-1}, x, t_{k+1}, ..., t_n)$ και $(t_1, ..., t_{k-1}, y, t_{k+1}, ..., t_n)$ ανήκουν στο DomH και x<y, τότε $H(t_1, ..., t_{k-1}, x, t_{k+1}, ..., t_n) \le H(t_1, ..., t_{k-1}, y, t_{k+1}, ..., t_n)$.

Λήμμα 2.35: Έστω $S_1, S_2, ..., S_n$ μη κενά υποσύνολα του $\overline{R}$ και έστω η H μία γειωμένη n-αύξουσα συνάρτηση με περιθώριες των οποίων το πεδίο ορισμού είναι το $S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$. Έστω **x**=$(x_1, x_2, ..., x_n)$ και **y**=$(y_1, y_2, ..., y_n)$ κάποια σημεία στο $S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$. Τότε

$$\left| H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{y}) \right| \le \sum_{k=1}^{n} \left| H_k(x_k) - H_k(y_k) \right|.$$

Οι αντίστοιχοι ορισμοί των συνδέσμων και υποσυνδέσμων στην πολυδιάστατη περίπτωση είναι οι ακόλουθοι :

Ορισμός 2.36: Ένας n-διάστατος υποσύνδεσμος είναι μία συνάρτηση C' με τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. Dom $C' = S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$, όπου κάθε S_k είναι υποσύνολο του **I** που περιέχει τα 0,1.

2. C' είναι γειωμένη και n-αύξουσα.

3. C' έχει μονοδιάστατες περιθώριες C_k', για k=1,2,...,n οι οποίες ικανοποιούν την σχέση C_k'(u) = u για όλα τα u στο S_k.

Παρατηρούμε ότι για κάθε **u** στο Dom C', $0 \leq C'(\mathbf{u}) \leq 1$, άρα το σύνολο τιμών Ran C' είναι και αυτό υποσύνολο του **I**.

Ορισμός 2.37: Ένας n-διάστατος σύνδεσμος είναι ένας n-διάστατος υποσύνδεσμος C με πεδίο ορισμού το $\mathbf{I}^n$.

Ισοδύναμα, ένας σύνδεσμος είναι μία συνάρτηση C από το $\mathbf{I}^n$ στο **I** με τις ακόλουθες ιδιότητες :

1. Για κάθε **u** στο $\mathbf{I}^n$: C(**u**)=0 αν έστω και μία συντεταγμένη είναι 0, και αν όλες οι συντεταγμένες είναι 1 εκτός από την u_k τότε C (**u**)= u_k.

2. Για κάθε **α** και **β** στο $\mathbf{I}^n$ τέτοια ώστε **α** ≤ **β**, έχουμε $V_C([\,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\,]) \geq 0$.

Πρέπει να επισημάνουμε ότι για όλους τους n-συνδέσμους, με n ≥ 3, κάθε k-περιθώρια του C είναι k-σύνδεσμος, 2 ≤ k < n.

Από το Λήμμα **2.35** προκύπτει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.38 Έστω C' ένας n-υποσύνδεσμος. Τότε για κάθε **u** και **v** στο Dom C',

$$\left|C^{'}(v)-C^{'}(u)\right| \le \sum_{k=1}^{n}\left|v_k-u_k\right|.$$

Συνεπώς ο $C^{'}$ είναι ομοιόμορφα συνεχής στο πεδίο ορισμού του.

Ορισμός 2.39: Μία n-διάστατη συνάρτηση κατανομής είναι μία συνάρτηση H με πεδίο ορισμού το $\overline{R}^n$ τέτοια ώστε :

1. η H είναι n-αύξουσα.

2. H(**t**) = 0 για όλα τα t στο $\overline{R}^n$ για τα οποία t_k = -∞ για τουλάχιστον ένα k και H($\infty, \infty, \ldots, \infty$)=1.

H διατύπωση του θεωρήματος του Sklar για τις n-διαστάσεις είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 2.40 Έστω H μια n-διάστατη συνάρτηση κατανομής με περιθώριες $F_1, F_2, ..., F_n$. Τότε υπάρχει ένας n-σύνδεσμος C τέτοιος ώστε για όλα τα **x** στο $\overline{R}^n$,

$$\mathrm{H}(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathrm{C}\,(F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_n(x_n)).$$

Αν οι F_1, F_2, ..., F_n είναι όλες συνεχείς, τότε ο C είναι μοναδικός. Αλλιώς, ο C είναι μοναδικά ορισμένος στο $\mathrm{Ran}\,F_1 \times \mathrm{Ran}\,F_2 \times \ldots \times \mathrm{Ran}\,F_n$.

Αντίστροφα, αν ο C είναι n-σύνδεσμος και οι F_1, F_2, ..., F_n είναι συναρτήσεις κατανομών, τότε η H ορίζεται από την H($x_1, x_2, ..., x_n$)= C($F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_n(x_n)$) και είναι n-διάστατη συνάρτηση κατανομής με περιθώριες F_1, F_2, ..., F_n.

Πόρισμα Έστω H, C, F_1, F_2, ..., F_n όπως ορίστηκαν στο παραπάνω θεώρημα και έστω $F_1^{(-1)}, F_2^{(-1)}, ..., F_n^{(-1)}$ να είναι οι δήθεν-αντίστροφες των $F_1, F_2, ..., F_n$, αντίστοιχα. Τότε για κάθε **u** στο $\mathbf{I}^n$ έχουμε:

$$C(u_1, u_2, ..., u_n) = H(F_1^{(-1)}(u_1), F_2^{(-1)}(u_2), ..., F_n^{(-1)}(u_n)).$$

Η αντίστοιχη διατύπωση του θεωρήματος του Sklar για τυχαίες μεταβλητές για τις n-διαστάσεις είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 2.41 Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ να είναι τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομών $F_1, F_2, ..., F_n$, αντίστοιχα, και από κοινού συνάρτηση κατανομής H. Τότε υπάρχει ένας n-σύνδεσμος C τέτοιος ώστε να ισχύει η σχέση:

$$\mathrm{H}(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathrm{C}\,(F_1(x_1), F_2(x_2), ..., F_n(x_n)).$$

Αν οι $F_1, F_2, ..., F_n$ είναι όλες συνεχείς , τότε ο C είναι μοναδικός. Αλλιώς, ο C είναι μοναδικά ορισμένος στο $\mathrm{Ran}\,F_1 \times \mathrm{Ran}\,F_2 \times \ldots \times \ \times \mathrm{Ran}\,F_n$.

Οι αντίστοιχοι τύποι για τους γνωστούς μας συνδέσμους W, M, Π στις n-διαστάσεις δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις :

$$\mathrm{M}^n(\mathbf{u}) = \min\,(u_1, u_2, ..., u_n).$$

$$\Pi^n(\mathbf{u}) = u_1 u_2 ... u_n .$$

$$\mathrm{W}^n(\mathbf{u}) = \max\,(u_1 + u_2 + ... + u_n - n + 1, 0\,).$$

Πρέπει να σημειώσουμε ότι οι $\mathrm{M}^n(\mathbf{u})$ και $\Pi^n(\mathbf{u})$ είναι σύνδεσμοι για όλα τα $n \geq 2$, ενώ ο $\mathrm{W}^n(\mathbf{u})$ δεν είναι σύνδεσμος για $n > 2$.

Θεώρημα 2.42 Έστω C' ένας n-υποσύνδεσμος, τότε για κάθε **u** στο $\mathrm{Dom}\,C'$ ισχύει:

$$\mathrm{W}^n(\mathbf{u}) \leq C'\ (\mathbf{u}) \leq \mathrm{M}^n(\mathbf{u}) .$$

Πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ενώ το Fréchet-Hoeffding κάτω φράγμα W^n δεν είναι σύνδεσμος, παρ'όλα αυτά η αριστερή ανισότητα είναι η καλύτερη δυνατή που μπορούμε να επιτύχουμε.

Θεώρημα 2.43 Για κάθε $n \geq 3$ και για κάθε **u** στο $\mathbf{I}^n$, υπάρχει ένας n-σύνδεσμος C τέτοιος ώστε:

$$\mathrm{C}(\mathbf{u}) = \mathrm{W}^n(\mathbf{u}).$$

Θεώρημα 2.44 Για n ≥ 2, έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Τότε:

1. Οι $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν ο n-σύνδεσμος των $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ο Π^n.

2. Κάθε μία από τις τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι γνησίως αύξουσες σχεδόν βεβαίως, ως προς οποιαδήποτε άλλη, αν και μόνο αν ο n-σύνδεσμος των $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ο M^n.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΔΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Ένας από τους πρώτους συνδέσμους που χρησιμοποιήθηκαν, ήταν ο σύνδεσμος των Marshall και Olkin, οι οποίοι βασίστηκαν στην διδιάστατη εκθετική κατανομή, για την κατασκευή του. Στις πρώτες παραγράφους του κεφαλαίου αυτού, θα δουμε πώς μπορούμε να παράγουμε την διδιάστατη εκθετική κατανομή, βασιζόμενοι στην διδιάστατη διαδικασία Poisson, και στο τελευταίο κομμάτι του κεφαλαίου θα δούμε τον τρόπο εφαρμογής της διδιάστατης εκθετικής κατανομής στους συνδέσμους.

3.1 Εισαγωγή

Συχνά σε εφαρμογές της θεωρίας πιθανοτήτων συναντάμε τυχαία διανύσματα τα στοιχεία των οποίων είναι εξαρτημένα και ενώ οι περιθώριες κατανομές είναι γνωστές, αυτές δεν καθορίζουν από μόνες τους την από κοινού συνάρτηση κατανομής και αυτό γιατί η από κοινού συνάρτηση κατανομής μπορεί να πάρει πολλές μορφές. Γι'αυτό η από κοινού συνάρτηση κατανομής επιτυγχάνεται μέσω της μελέτης του μηχανισμού που οφείλεται για την εξάρτηση.

Στην περίπτωση των εκθετικών περιθώριων, έχουν παρουσιασθεί (Marshall and Olkin (1966)) τρόποι εξαγωγής της διδιάστατης κατανομής που δίνονται από τον τύπο

$$P\{X > x, Y > y\} \equiv \bar{F}(x, y) = \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max(x, y)\}, \text{ για } x, y \geq 0. \tag{3.1}$$

Αν X και Y οι χρόνοι ζωής μηχανημάτων που μπορεί να προσβληθούν από πλήγματα (shocks), τότε η κατανομή αυτή προκύπτει όταν η εμφάνιση του πλήγματος οφείλεται σε μία ή περισσότερες διαδικασίες Poisson.

Επιπρόσθετα, η (3.1) είναι η μοναδική διδιάστατη κατανομή (με εκθετικές περιθώριες) που ικανοποιεί την απαίτηση ότι η υπολοιπόμενη ζωή δοθείσας της επιβίωσης σε ένα χρόνο t, έχει κατανομή ανεξάρτητη του t.

Γενικά, η μονοδιάστατη εκθετική κατανομή καθορίζει τους χρόνους αναμονής σε μία διαδικασία Poisson. Δηλαδή αν $\{Z(t), t \geq 0\}$ μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ και s είναι ένα συγκεκριμένο σημείο, τότε ο χρόνος αναμονής X από το s μέχρι το επόμενο συμβάν της διαδικασίας έχει εκθετική κατανομή με παράμετρο λ. Ομοίως, αν το s το αντικαταστήσουμε με την τυχαία μεταβλητή S, που είναι ο χρόνος που θα συμβεί το i-οστό γεγονός, τότε ο χρόνος αναμονής X από το S μέχρι την εμφάνιση του (i+1)-οστού γεγονότος είναι και πάλι εκθετικά κατανεμημένος με παράμετρο λ.

Το S μπορεί να είναι οποιοσδήποτε χρόνος ανακοπής (stopping time), π.χ. μία μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή για την οποία μπορούμε να ελέγξουμε αν S<s, παρατηρώντας την $X(t)$ μόνο για $t < s$. Από το σημείο αυτό θα θεωρούμε ότι όλες οι συναρτήσεις διαδικασιών Poisson είναι δεξιά συνεχείς με πιθανότητα 1.

Στο σημείο αυτό θα ορίσουμε μία διδιάστατη διαδικασία Poisson,

$$\{Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t)), t \geq 0\},$$

όπου $Z_1(t)$ και $Z_2(t)$ είναι συσχετισμένες διαδικασίες Poisson.

Υπάρχουν πολλοί τρόποι για να οριστεί ο ¨από κοινού χρόνος αναμονής¨ για την διαδικασία αυτή :

(i) Μπορούμε να επιλέξουμε ένα σταθερό χρόνο s, και να θεωρούμε το χρόνο αναμονής X μέχρι το επόμενο συμβάν της διαδικασίας Z_1 μαζί με το χρόνο Y μέχρι το επόμενο συμβάν της διαδικασίας Z_2.

(ii) Στη θέση του σταθερού χρόνου s στο (i), μπορούμε να ξεκινήσουμε να περιμένουμε από έναν τυχαίο χρόνο S, ο οποίος είναι χρόνος ανακοπής (stopping time).

(iii) Μπορούμε να θεωρήσουμε το χρόνο αναμονής X από ένα σταθερό σημείο s μέχρι το επόμενο συμβάν στη διαδικασία Z_1 μαζί με το χρόνο αναμονής

Y από ένα σταθερό σημείο s+δ μέχρι το επόμενο συμβάν στη διαδικασία Z_2. Εναλλακτικά, μπορούμε να αντικαταστήσουμε το s με κάποιον χρόνο ανακοπής.

(iv) Περαιτέρω γενίκευση επιτυγχάνεται αν στο (iii) και το s και το s+δ είναι χρόνοι ανακοπής.

Στις 2 πρώτες περιπτώσεις η από κοινού συνάρτηση κατανομής των X και Y δίνεται από την (3.1). Η τρίτη περίπτωση μας οδηγεί στην παρακάτω γενίκευση:

$$P\{X > x, Y > y\} \equiv \bar{F}(x, y; \delta) = \begin{cases} \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max[x, y + \min(x, \delta)]\}, & \delta \geq 0 \\ \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} \max[y, x + \min(y, -\delta)]\}, & \delta \leq 0, \ x, y \geq 0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Προφανώς, για δ=0 η (3.2) ταυτίζεται με την (3.1).
Εμείς θα ασχοληθούμε σχεδόν αποκλειστικά με κατανομές που δίνονται από την σχέση (3.2).

Θα λέμε ότι οι X και Y ακολουθούν μία διδιάστατη εκθετική κατανομή, $BVE(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}; \delta)$ αν ισχύει η (3.2), και θα αναφερόμαστε στην κατανομή της (3.2) ως $BVE(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}; \delta)$ κατανομή. Όταν η δ είναι η μόνη σημαντική παράμετρος θα γράφουμε BVE(δ). Θα αναφερόμαστε στην $\bar{F}(x, y; \delta) \equiv P\{X > x, Y > y\}$ ως από κοινού συνάρτηση επιβίωσης, καθώς έχει απλούστερη μορφή από τη συνάρτηση κατανομής $F(x, y; \delta) \equiv P\{X \leq x, Y \leq y\}$.

Η πιθανότητα επιβίωσης $\bar{F}(x, y; \delta)$ είναι φθίνουσα για $\delta \geq 0$ και αύξουσα για $\delta \leq 0$. Αφού η $\bar{F}(x, y; \delta)$ έχει περιθώριες πιθανότητες επιβίωσης

$$P\{X > x\} = \bar{F}(x, 0; \delta) = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x\},$$

$$P\{Y > y\} = \bar{F}(0, y; \delta) = \exp\{-(\lambda_2 + \lambda_{12})y\}$$

που είναι ανεξάρτητες από το δ, τότε έχουμε ότι:

$$\bar{F}(x,y;\delta_1) - \bar{F}(x,y;\delta_2) = F(x,y;\delta_1) - F(x,y;\delta_2).$$

Συνεπώς, η $F(x,y;\delta_1)$ είναι φθίνουσα (αύξουσα) για $\delta \ge 0$ ($\delta \le 0$). Αν $\bar{F}(x,y;\delta)$ είναι η πιθανότητα επιβίωσης ενός ζεύγους αντικειμένων, έπεται ότι η πιθανότητα και τα δύο αντικείμενα να επιβιώσουν και η πιθανότητα κανένα αντικείμενο να επιβιώσει, μεγιστοποιούνται για δ=0, και ελαχιστοποιούνται για $\delta = \pm\infty$ (περίπτωση ανεξαρτησίας).

3.2 Διδιάστατη Διαδικασία Poisson

Είναι γνωστό ότι η μονοδιάστατη κατανομή Poisson μπορεί να επιτευχθεί ως το όριο της διωνυμικής κατανομής. Κάτι αντίστοιχο μπορούμε να γενικεύσουμε και στην διδιάστατη περίπτωση, να επιτύχουμε δηλαδή διδιάστατη κατανομή Poisson, και αυτό γιατί υπάρχει μοναδική διδιάστατη κατανομή με περιθώριες Bernoulli. Η κατανομή αυτή κατανέμεται μόνο στα σημεία (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), με αντίστοιχες πιθανότητες $P\{(i,j)=(0,0)\} = q_{00}$, $P\{(i,j)=(0,1)\} = q_{01}$, $P\{(i,j)=(1,0)\} = q_{10}$, $P\{(i,j)=(1,1)\} = q_{11}$, οπότε καταλήγουμε στην διδιάστατη κατανομή Poisson:

$$P\{Z_1 = x, Z_2 = y\} = e^{-\lambda(q_{11}+q_{01}+q_{10})} \sum_{\alpha=0}^{\min(x,y)} \frac{(\lambda q_{11})^{\alpha} (\lambda q_{10})^{x-\alpha} (\lambda q_{01})^{y-\alpha}}{\alpha!(x-\alpha)!(y-\alpha)!}. \tag{3.3}$$

Τώρα αν η $\{Z_1(t), t \ge 0\}$ και η $\{Z_2(t), t \ge 0\}$ είναι διαδικασίες Poisson και αν η $\{(Z_1(t), Z_2(t)), t \ge 0\}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις (increments), τότε οι προσαυξήσεις αυτές πρέπει να έχουν μία απείρως διαιρετή (infinitely divisible) κατανομή, δηλαδή την κατανομή που δίνεται από την (3.3).

Οι Dwass και Teicher (1957) κατάφεραν να παράγουν την διδιάστατη διαδικασία Poisson

$$\{(Z_1(t), Z_2(t)), t \ge 0\}$$

απ'ευθείας από μία μονοδιάστατη διαδικασία Poisson $\{Z^*(t), t \ge 0\}$ ως εξής :

αν η $Z^*(t)$ παρουσιάζει άλμα στο χρόνο τ, τότε η $Z(t) = (Z_1(t), Z_2(t))$ παρουσιάζει στο χρόνο τ, άλμα από το $Z(\tau-)$ στο $Z(\tau-) + (i,j)$, όπου $P\{(i,j)=(0,0)\} = q_{00}$,

$P\{(i,j)=(0,1)\}=q_{01}$, $P\{(i,j)=(1,0)\}=q_{10}$, $P\{(i,j)=(1,1)\}=q_{11}$. Οι αυξήσεις (i,j) σε κάθε άλμα είναι ανεξάρτητες και η $\{Z^*(t), t\geq 0\}$ έχει παράμετρο λ, τέτοια ώστε :

$$P\{Z_1(t)=x, Z_2(t)=y\}=$$
$$=\sum_{\alpha=0}^{\min(x,y)}\sum_{k=x+y-\alpha}^{\infty}\left(\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}\right)\left(\frac{k!q_{11}^{\alpha}q_{10}^{x-\alpha}q_{01}^{y-\alpha}q_{00}^{k-x-y+\alpha}}{\alpha!(x-\alpha)!(y-\alpha)!(k-x-y+\alpha)!}\right)$$
$$=e^{-\lambda t(q_{11}+q_{01}+q_{10})}\sum_{\alpha=0}^{\min(x,y)}\frac{(\lambda tq_{11})^{\alpha}(\lambda tq_{10})^{x-\alpha}(\lambda tq_{01})^{y-\alpha}}{\alpha!(x-\alpha)!(y-\alpha)!}.$$

Από το μοντέλο αυτό προκύπτει ότι :

$$P\{Z_1(t)=x\}=\frac{e^{-\lambda t(q_{11}+q_{10})}}{x!}[\lambda t(q_{11}+q_{10})]^x.$$

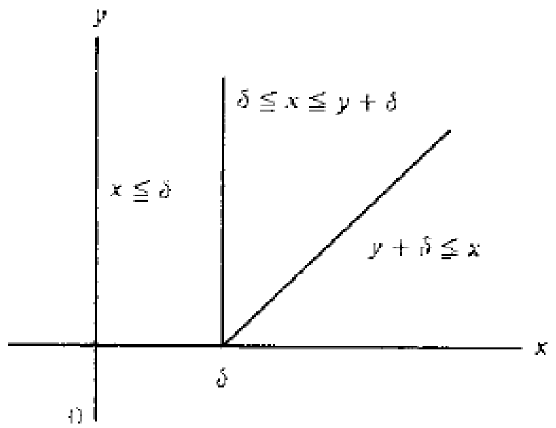
(οι Dwass και Teicher (1957) θεωρήσαν, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $q_{00}=0$).

Η διδιάστατη διαδικασία Poisson μπορεί επίσης να παραχθεί από τρείς ανεξάρτητες μονοδιάστατες διαδικασίες Poisson $\{Z_1^*(t), t\geq 0\}$, $\{Z_2^*(t), t\geq 0\}$ και $\{Z_{12}^*(t), t\geq 0\}$ με αντίστοιχες παραμέτρους λ_1, λ_2 και λ_{12}. Τότε,η διδιάστατη διαδικασία Poisson θα είναι η:

$$\{(Z_1^*(t)+Z_{12}^*(t), Z_2^*(t)+Z_{12}^*(t)), t\geq 0\}.$$

3.3 Από Κοινού Χρόνος Αναμονής

Επιλέγουμε s_1 και s_2, και θεωρούμε το χρόνο X από το s_1 μέχρι το επόμενο συμβάν της διαδικασίας Z_1 μαζί με το χρόνο Y από το s_2 μέχρι το επόμενο συμβάν της διαδικασίας Z_2. Για να βρούμε την από κοινού πιθανότητα επιβίωσης $P\{X>x, Y>y\}$, είναι προτιμότερο να υποθέσουμε ότι $\delta=s_2-s_1\geq 0$. Θεωρούμε τότε τα $t_1-s_1=x\geq 0$ και $t_2-s_2=y\geq 0$. Θα χρειαστούμε να εξετάσουμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις (i) $x\leq\delta$ (ii) $\delta\leq x\leq y+\delta$ και (iii) $y+\delta\leq x$, οι οποίες φαίνονται και στο σχήμα:



(Πηγή : «a generalized bivariate exponential distribution», Marshall and Olkin, Aug. 1967).

(i) για $x \le \delta$ ($s_1 \le t_1 \le s_2 \le t_2$) έχουμε:

$$P\{X > x, Y > y\} = e^{-\lambda(q_{11}+q_{10})x-\lambda(q_{11}+q_{01})y}.$$

(ii) για $\delta \le x \le y + \delta$ ($s_1 \le s_2 \le t_1 \le t_2$) έχουμε:

$$P\{X > x, Y > y\} = e^{-\lambda q_{11}\delta-\lambda q_{10}x-\lambda(q_{11}+q_{01})y}.$$

(iii) για $y + \delta \le x$ ($s_1 \le s_2 \le t_2 \le t_1$) έχουμε:

$$P\{X > x, Y > y\} = e^{-\lambda(q_{11}+q_{10})x-\lambda q_{01}y}.$$

Θέτοντας τώρα $\lambda_1 = \lambda q_{10}$, $\lambda_2 = \lambda q_{01}$ και $\lambda_{12} = \lambda q_{11}$, από τις τρείς παραπάνω περιπτώσεις παίρνουμε την πιθανότητα επιβίωσης για $\delta \ge 0$. Αν είναι $\delta \le 0$, τότε όπου λ_1, x, δ τα αντικαθιστούμε με τα λ_2, y και –δ αντίστοιχα, και παίρνουμε το αποτέλεσμα. Για $x, y \ge 0$ παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα :

$$P\{X > x, Y > y\} = \begin{cases} \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12}(x+y)\}, & \delta \le -y \\ \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12}(x-\delta)\}, & -y \le \delta \le \min(x-y,0) \\ \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} y\}, & \min(x-y,0) < \delta \le 0 \\ \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} x\}, & 0 \le \delta < \max(x-y,0) \\ \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12}(y+\delta)\}, & \max(x-y,0) \le \delta \le x \\ \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12}(x+y)\}, & x \le \delta \end{cases}$$

(3.4)

Η τελευταία σχέση μπορεί να γραφτεί στην μορφή της (3.2).

3.4 Το Μοντέλο Των Μοιραίων Πληγμάτων (fatal shock model)

Όταν αναφερόμαστε σε μοντέλα πληγμάτων, υπάρχουν δύο τέτοια είδη. Τα μοντέλα μοιραίων πληγμάτων, όπου αν μία συσκευή υποστεί τέτοιο πλήγμα τότε είναι σίγουρο ότι θα καταστραφεί, και τα μοντέλα μη-μοιραίων πληγμάτων, όπου αν μία συσκευή υποστεί τέτοιο πλήγμα τότε δεν είναι σίγουρο ότι θα καταστραφεί. Εμείς εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση του μοιραίου πλήγματος.

Θεωρούμε ότι μία συσκευή βρίσκεται σε ένα περιβάλλον, όπου μπορεί να υποστεί μοιραίο πλήγμα από δύο πηγές οι οποίες ακολουθούν διαδικασίες Poisson $Z_1^*(t)$, $Z_{12}^*(t)$ με παραμέτρους λ_1, λ_{12}. Έστω ότι μετά από χρόνο δ, μία δεύτερη συσκευή τοποθετείται σε αντίστοιχο περιβάλλον, όπου μπορεί να υποστεί μοιραίο πλήγμα από δύο πηγές οι οποίες ακολουθούν διαδικασίες $Z_2^*(t)$, $Z_{12}^*(t)$ με παραμέτρους λ_2, λ_{12}. Υποθέτουμε ότι οι τρείς αυτές διαδικασίες είναι ανεξάρτητες.

Η διαδικασία $(Z_1^*(t) + Z_{12}^*(t), Z_2^*(t) + Z_{12}^*(t))$, από άποψη κατανομής, είναι αντίστοιχη με την διδιάστατη διαδικασία Poisson $(Z_1(t), Z_2(t))$. Συνεπώς, αν θεωρήσουμε ως X (Y) τον χρόνο, ή το μήκος της επισκευής, της πρώτης (δεύτερης) συσκευής στο χρόνο καταστροφής, είναι άμεσο ότι η από κοινού κατανομή των (X,Y) θα δίνεται από την σχέση (3.2). Αυτό φαίνεται αν εξετάσουμε τις τρεις περιπτώσεις που είδαμε προηγουμένως.

(i) $x \le \delta$

$$P\{X > x, Y > y\} = \exp\{-(\lambda_1 + \lambda_{12})x - (\lambda_2 + \lambda_{12})y\}.$$

(ii) $\delta \le x \le y+\delta$

$$P\{X>x, Y>y\} = \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12}(y+\delta)\}.$$

(iii) $y+\delta \le x$

$$P\{X>x, Y>y\} = \exp\{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12} x\}.$$

Άρα οι (X,Y) έχουν από κοινού κατανομή που δίνεται από την σχέση (3.2).

Τα μοντέλα αυτά μπορούν να γενικευτούν και για τις περιπτώσεις όπου έχουμε περισσότερες συσκευές. Ας δούμε τι συμβαίνει όταν έχουμε τρείς συσκευές.

Θεωρούμε τρείς ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson $Z_1^*(t)$, $Z_2^*(t)$, $Z_3^*(t)$, με παραμέτρους λ_1, λ_2, λ_3 αντίστοιχα, οι οποίες μπορούν να προκαλέσουν μοιραία πλήγματα στις συσκευές 1, 2, 3 αντίστοιχα. Οι διαδικασίες $Z_{12}^*(t)$, $Z_{13}^*(t)$, $Z_{23}^*(t)$ έχουν παραμέτρους λ_{12}, λ_{13}, λ_{23} αντίστοιχα, και μπορούν να προκαλέσουν μοιραία πλήγματα στα ζεύγη συσκευών 1 και 2, 1και 3, 2 και 3, αντίστοιχα. Η διαδικασία Poisson $Z_{123}^*(t)$ έχει παράμετρο λ_{123}, και μπορεί να προκαλέσει μοιραίο πλήγμα και στις τρείς συσκευές ταυτόχρονα. Αν οι αντίστοιχοι χρόνοι ζωής των τριών συσκευών συμβολίζονται με X_1, X_2 και X_3 αντίστοιχα. Οπότε έχουμε :

$$\begin{aligned}
\bar{F}(x_1,x_2,x_3) &= P\{X_1>x_1, X_2>x_2, X_3>x_3\} \\
&= P\{Z_1(x_1)=0, Z_2(x_2)=0, Z_3(x_3)=0, \\
&\qquad Z_{12}(\max(x_1,x_2))=0, Z_{13}(\max(x_1,x_3))=0, Z_{23}(\max(x_2,x_3))=0, \\
&\qquad Z_{123}(\max(x_1,x_2,x_3))=0\} \\
&= \exp[-\lambda_1 x_1 - \lambda_2 x_2 - \lambda_3 x_3 - \lambda_{12}\max(x_1,x_2) - \lambda_{13}\max(x_1,x_3) \\
&\qquad - \lambda_{23}\max(x_2,x_3) - \lambda_{123}\max(x_1,x_2,x_3)].
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Όλα τα παραπάνω οι Marshall και Olkin (Mar, 1967) τα γενίκευσαν και για τις n-διαστάσεις ως εξής :

$$\bar{F}(x_1,x_2,...,x_n)=\exp[-\sum_{1}^{n}\lambda_i x_i-\sum_{i<j}\lambda_{ij}\max(x_i,x_j)-\sum_{i<j<k}\lambda_{ijk}\max(x_i,x_j,x_k) -$$

$$-...-\lambda_{12...n}\max(x_1,x_2,...,x_n)].$$

3.5 Η Συνάρτηση Κατανομής

Η διδιάστατη εκθετική κατανομή BVE (δ=0) έχει ένα απολύτως συνεχές και ένα διακριτό μέρος, με θετική μάζα στην ευθεία $x = y$. Έχουμε δει ότι αν οι (X,Y) είναι BVE(δ), τότε ένα συμβάν της διαδικασίας $Z_{12}(t)$ καταστρέφει και τις δύο συσκευές, X=Y+δ. Έτσι η κατανομή BVE(δ) έχει ένα διακριτό μέρος, με θετική μάζα στην ευθεία $x = y + \delta$.

Θεώρημα 3.1

Άν η $F(x,y)$ είναι BVE($\lambda_1,\lambda_2,\lambda_{12};\delta$), $\delta \geq 0$, και $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_{12}$, τότε

$$\bar{F}(x,y) = \alpha\,\bar{F}_\alpha(x,y) + \bar{\alpha}\,\bar{F}_s(x,y),$$

όπου

$$\alpha = 1 - \frac{\lambda_{12}}{\lambda}e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\delta},\ \bar{\alpha} = 1 - \alpha$$

και η $\quad \alpha\,\bar{F}_\alpha(x,y) = e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 y - \lambda_{12}\max[x,y+\min(x,\delta)]} - \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda}e^{\lambda_2\delta - \lambda\max(x,y+\delta)}$

είναι απολύτως συνεχής, και

$$\bar{F}_s(x,y) = \exp\{-\lambda[\max(x,y+\delta) - \delta]\}$$

είναι μία διακριτή κατανομή.

3.6 Διδιάστατη Εκθετική Κατανομή και Σύνδεσμοι

Θεωρούμε ένα μοντέλο μοιραίων πληγμάτων, δύο συσκευών, όπως στην παράγραφο 3.4. Θεωρούμε ότι οι χρόνοι ζωής των συσκευών 1 και 2 συμβολίζονται με X και Y, αντίστοιχα. Η συνάρτηση επιβίωσης, την οποία θέλουμε να υπολογίσουμε, είναι η

$$\bar{H}(x,y)=P[X>x,Y>y].$$

Τα πλήγματα μπορούν να προκληθούν από τρείς ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με παραμέτρους λ_1, λ_2 και λ_{12} αντίστοιχα, ανάλογα με το αν καταστρέφεται μόνο η συσκευή 1, μόνο η συσκευή 2 ή και οι δύο ταυτόχρονα. Οι χρόνοι Z_1, Z_2 και Z_{12} που συμβαίνουν τα πλήγματα είναι ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με παραμέτρους λ_1, λ_2 και λ_{12} αντίστοιχα. Άρα ισχύει :

$$X=\min(Z_1,Z_{12}) \qquad Y=\min(Z_2,Z_{12}).$$

Οπότε για κάθε $x,y \geq 0$ έχουμε :

$$\bar{H}(x,y)=P[Z_1>x]P[Z_2>y]P[Z_{12}>\max(x,y)]=\exp[-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max(x,y)]$$

Οι περιθώριες συναρτήσεις επιβίωσης είναι οι :

$$\bar{F}(x,y)=\exp(-(\lambda_1+\lambda_{12})x) \qquad \bar{G}(x,y)=\exp(-(\lambda_2+\lambda_{12})y)$$

Άρα οι X και Y είναι εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με παραμέτρους $\lambda_1+\lambda_{12}$ και $\lambda_2+\lambda_{12}$, αντίστοιχα.

Για να βρούμε τον σύνδεσμο επιβίωσης $\hat{C}(u,v)$ της κατανομής αυτής, θα εκφράσουμε την $\bar{H}(x,y)$ συναρτήσει των $\bar{F}(x)$ και $\bar{G}(y)$, και της σχέσης

$$\bar{H}(x,y)=\hat{C}(\bar{F}(x),\bar{G}(y))$$

και αντικαθιστώντας το $\max(x,y)$ με το $x+y-\min(x,y)$, άρα έχουμε ;

$$\bar{H}(x,y)=\exp(-(\lambda_1+\lambda_{12})x-(\lambda_2+\lambda_{12})y+\lambda_{12}\min(x,y))$$
$$=\bar{F}(x)\bar{G}(y)\min\{\exp(\lambda_{12}x),\exp(\lambda_{12}y)\}.$$

Θέτοντας $u=\bar{F}(x)$ και $v=\bar{G}(y)$, και $\alpha=\frac{\lambda_{12}}{\lambda_1+\lambda_{12}}$, $\beta=\frac{\lambda_{12}}{\lambda_2+\lambda_{12}}$, άρα $0<\alpha,\beta<1$, ώστε να έχουμε $\exp(\lambda_{12}x)=u^{-\alpha}$ και $\exp(\lambda_{12}y)=v^{-\beta}$, οπότε ο σύνδεσμος επιβίωσης δίνεται από τον τύπο :

$$\hat{C}(u,v) = uv\min(u^{-\alpha}, v^{-\beta})= \min(u^{1-\alpha}v, uv^{1-\beta}).$$

Ο σύνδεσμος επιβίωσης για την διδιάστατη εκθετική κατανομή των Marshall και Olkin, παράγει μία οικογένεια συνδέσμων δύο παραμέτρων που δίνεται από τον τύπο :

$$C_{\alpha,\beta}(u,v)=\min(u^{1-\alpha}v,uv^{1-\beta})=\begin{cases} u^{1-\alpha}v, & u^{\alpha}\geq v^{\beta} \\ uv^{1-\beta}, & u^{\alpha}\leq v^{\beta}. \end{cases}$$

Η παραπάνω οικογένεια είναι γνωστή ως οικογένεια Marshall-Olkin και ως γενικευμένη οικογένεια Cuadras-Auge.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΑΡΧΙΜΗΔΕΙΟΙ ΣΥΝΔΕΣΜΟΙ

Στο κεφάλαιο αυτό θα συζητήσουμε για μια σημαντική, ίσως την σημαντικότερη, κατηγορία συνδέσμων, τους Αρχιμήδειους συνδέσμους. Οι σύνδεσμοι αυτοί έχουν πολύ μεγάλο ενδιαφέρον, τόσο θεωρητικό όσο και πρακτικό, λόγω των πολλών εφαρμογών τους. Το μεγάλο εύρος εφαρμογών τους οφείλεται σε τρεις βασικούς λόγους, (1) στην μεγάλη ευκολία με την οποία μπορούν να κατασκευαστούν, (2) στην μεγάλη ποικιλία οικογενειών που ανήκουν σ'αυτή την κατηγορία και (3) στις καλές ιδιότητες που έχουν τα μέλη αυτής της κατηγορίας.

Οι Αρχιμήδειοι σύνδεσμοι πρωτοεμφανίστηκαν στην μελέτη των πιθανοθεωρητικών μετρικών χώρων, όπου μελετήθηκαν ως κομμάτι της ανάπτυξης της πιθανοθεωρητικής εκδοχής της τριγωνικής ανισότητας, Schweizer (1991).

4.1 Ορισμοί

Στην ενότητα αυτή θα δούμε κάποιους βασικούς ορισμούς για τους Αρχιμήδειους συνδέσμους, καθώς και κάποια βασικά θεωρήματα.

Έστω X και Y συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση κατανομής H και περιθώριες συναρτήσεις κατανομών F και G, αντίστοιχα. Όταν οι μεταβλητές X και Y είναι ανεξάρτητες, τότε για την από κοινού συνάρτηση κατανομής ισχύει $H(x,y)=F(x)G(y)$, για κάθε x,y στο $\bar{R}$, και αυτή είναι η μοναδική περίπτωση, ως τώρα, που η από κοινού συνάρτηση κατανομής παραγοντοποιείται σε γινόμενο μιας συνάρτησης της F με μια συνάρτηση της G. Για την οικογένεια κατανομών Ali-Mikhail-Haq, ο τύπος της οποίας είναι $C_\theta(u,v)=\dfrac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}$, η σχέση που συνδέει την από κοινού συνάρτηση κατανομής με τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομής είναι η εξής:

$$\frac{1-H(x,y)}{H(x,y)}=\frac{1-F(x)}{F(x)}+\frac{1-G(y)}{G(y)}+(1-\theta)\frac{1-F(x)}{F(x)}\cdot\frac{1-G(y)}{G(y)},$$

όπου θ κάποια σταθερά.

Η παραπάνω σχέση, μπορεί να γραφτεί, με αλγεβρικές πράξεις, στην μορφή:

$$1+(1-\theta)\frac{1-H(x,y)}{H(x,y)}=\left[1+(1-\theta)\frac{1-F(x)}{F(x)}\right]\left[1+(1-\theta)\frac{1-G(y)}{G(y)}\right]$$

Δηλαδή καταλήξαμε σε τύπο της μορφής $\lambda\big(H(x,y)\big)=\lambda\big(F(x)\big)\cdot\lambda\big(G(y)\big)$, όπου $\lambda(t)=1+(1-\theta)\cdot\dfrac{(1-t)}{t}$.

Συνεπώς, όποτε μπορούμε να καταλήξουμε σε σχέση της μορφής $\lambda\big(H(x,y)\big)=\lambda\big(F(x)\big)\cdot\lambda\big(G(y)\big)$, για κάποια συνάρτηση λ, η οποία πρέπει να είναι θετική στο διάστημα (0,1), τότε θέτοντας $\varphi(t)=-\ln\lambda(t)$ μπορούμε να γράψουμε την Η ως άθροισμα των περιθώρειων συναρτήσεων F και G, π.χ.

$$\varphi\big(H(x,y)\big)=\varphi\big(F(x)\big)+\varphi\big(G(y)\big) \quad \text{ή}$$

$$\varphi(C(u,v))=\varphi(u)+\varphi(v), \tag{4.1}$$

όταν μιλάμε για συνδέσμους.

Επειδή εμάς μας ενδιαφέρουν σχέσεις μέσω των οποίων μπορούμε να κατασκευάσουμε συνδέσμους, μπορούμε να λύσουμε την $\varphi\big(C(u,v)\big)=\varphi(u)+\varphi(v)$ ως προς $C(u,v)$. Οπότε, καταλήγουμε στην σχέση

$$C(u,v)=\varphi^{[-1]}\big(\varphi(u)+\varphi(v)\big),$$

όπου $\varphi^{[-1]}$ μια κατάλληλη «αντίστροφη». Άρα μπορούμε να δώσουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 4.1

Έστω φ μια συνεχής, γνησίως φθίνουσα συνάρτηση από το I στο $\left[0,\infty\right]$τέτοια ώστε φ(1)=0. Η ψευδο-αντίστροφη (pseudo-inverse) της φ είναι η συνάρτηση $\varphi^{[-1]}$ με Dom$\varphi^{[-1]}$=$\left[0,\infty\right]$ και Ran$\varphi^{[-1]}$=I, που δίνεται από τον τύπο:

$$\varphi^{[-1]}(t)=\begin{cases}\varphi^{-1}(\mathrm{t}), & 0\le t\le\varphi(0)\\ 0, & \varphi(0)\le t\le\infty.\end{cases} \tag{4.2}$$

Σημειώνουμε εδώ ότι η $\varphi^{[-1]}$ είναι συνεχής και μη αύξουσα στο $\left[0,\infty\right]$, και γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\varphi(0)\right]$. Επιπλέον, $\varphi^{[-1]}\left(\varphi(u)\right)=u$ στο I, και

$$\varphi\left(\varphi^{[-1]}(t)\right)=\begin{cases}\mathrm{t} & , \quad 0\le t\le\varphi(0)\\ \varphi(0), & \varphi(0)\le t\le\infty\end{cases}=\min\left(t,\varphi(0)\right).$$

Τέλος, αν $\varphi(0)=\infty$ τότε $\varphi^{[-1]}=\varphi^{-1}$.

Λήμμα 4.2

Έστω φ μια συνεχής, γνησίως φθίνουσα συνάρτηση από το I=[0,1] στο $\left[0,\infty\right]$ τέτοια ώστε φ(1)=0, και έστω $\varphi^{[-1]}$ να είναι η ψευδο-αντίστροφη της φ, που ορίζεται από την (4.2). Έστω C μια συνάρτηση από το I^2 στο I που δίνεται από την σχέση

$$C(u,v)=\varphi^{[-1]}(\varphi(u)+\varphi(v)). \tag{4.3}$$

Τότε η συνάρτηση C ικανοποιεί τις συνθήκες *C(u,0)=C(0,v)=0* και *C(u,1)=u*, *C(1,v)=v* των συνδέσμων.

Το ακόλουθο λήμμα, μας δίνει τις προϋποθέσεις ώστε η παραπάνω συνάρτηση C να είναι 2-αύξουσα.

Λήμμα 4.3

Έστω φ, $\varphi^{[-1]}$ και C όπως στο Λήμμα 4.2. Τότε η C είναι 2-αύξουσα αν και μόνο αν όποτε $u_1 \le u_2$, έχουμε

$$C(u_2, v) - C(u_1, v) \le u_2 - u_1. \tag{4.4}$$

Με βάση τον παραπάνω ορισμό, και τα παραπάνω λήμματα, είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου.

Θεώρημα 4.4

Έστω φ μια συνεχής, γνησίως φθίνουσα συνάρτηση από το I στο $[0,\infty]$, τέτοια ώστε *φ(1)=0*, και έστω $\varphi^{[-1]}$ η ψευδο-αντίστροφη της *φ*, όπως αυτή ορίζεται από την σχέση (4.2). Τότε η συνάρτηση C από το I^2 στο I, όπως αυτή δίνεται από τη σχέση (4.3), είναι σύνδεσμος αν και μόνο αν η συνάρτηση φ είναι κυρτή.

Ορισμός

Οι σύνδεσμοι της μορφής (4.3) καλούνται Αρχιμήδειοι σύνδεσμοι και η συνάρτηση *φ* καλείται γεννήτρια του συνδέσμου. Αν *φ(0)*= ∞, τότε η συνάρτηση *φ* καλείται αυστηρή γεννήτρια (strict generator), και τότε η ψευδο-αντίστροφη της φ ταυτίζεται με την αντίστροφη της *φ*, δηλαδή έχουμε $\varphi^{[-1]} = \varphi^{-1}$και συνεπώς ο σύνδεσμος

$$C(u,v) = \varphi^{-1}\left(\varphi(u) + \varphi(v)\right)$$

καλείται Αρχιμήδειος σύνδεσμος.

Παράδειγμα

(α) Έστω φ(t)=-lnt, για t στο $[0,1]$. Αφού φ(0)= ∞, η φ είναι αυστηρή γεννήτρια. Συνεπώς, $\varphi^{[-1]}(t) = \varphi^{-1}(t) = \exp(-t)$ και με βάση την σχέση (4.3) ο σύνδεσμος που παράγεται είναι:

$$\exp\left(-\left[(-\ln u) + (-\ln v)\right]\right) = uv = \Pi(u,v).$$

Συνεπώς, ο σύνδεσμος Π είναι αυστηρός Αρχιμήδειος σύνδεσμος.

(β) Έστω φ(t)=1-t, για t στο $[0,1]$. Τότε $\varphi^{[-1]}(t) = 1-t$ για t στο $[0,1]$ και 0 για t>1, άρα $\varphi^{[-1]}(t) = \max(1-t,0)$. Με βάση την σχέση (4.3) ο σύνδεσμος που παράγεται είναι:

$$C(u,v) = \max(u+v-1,0) = W(u,v).$$

Συνεπώς, ο σύνδεσμος W είναι Αρχιμήδειος σύνδεσμος, όχι όμως αυστηρός.

Τελειώνοντας την παράγραφο αυτή, θα δώσουμε ένα θεώρημα που μας δείχνει τις αλγεβρικές ιδιότητες των Αρχιμήδειων συνδέσμων.

Θεώρημα 4.5

Έστω C ένας Αρχιμήδειος σύνδεσμος με γεννήτρια φ. Τότε:

1. Ο C είναι συμμετρικός, δηλαδή C(u,v)=C(v,u) για κάθε u,v στο I.

2. Ο C είναι προσεταιριστικός, δηλαδή C(C(u,v),w)=C(u,C(v,w)) για κάθε u,v,w στο I.

3. Αν c>0 μια σταθερά, τότε η συνάρτηση cφ είναι επίσης γεννήτρια του C.

Απόδειξη

1. $C(u,v) = \varphi^{[-1]}\left(\varphi(u) + \varphi(v)\right) = \varphi^{[-1]}\left(\varphi(v) + \varphi(u)\right) = C(v,u)$

2. Γνωρίζουμε ότι φ(C(u,v))=φ(u)+φ(v), οπότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
C(C(u,v),w) &= \varphi^{[-1]}\left[\varphi(C(u,v)+\varphi(w))\right] \\
&= \varphi^{[-1]}\left[\varphi(u)+\varphi(v)+\varphi(w)\right] \\
&= \varphi^{[-1]}\left[\varphi(u)+\varphi(C(v,w))\right] \\
&= \mathrm{C(u,C(v,w))}
\end{aligned}
$$

3. $c\varphi(C(u,v)) = c(\varphi(u)+\varphi(v)) = c\varphi(u)+c\varphi(v)$ για κάθε $c>0$.

4.2 Μονοπαραμετρικές οικογένειες (One-parameter families)

Στην προηγούμενη παράγραφο, είδαμε ότι για να κατασκευάσουμε έναν Αρχιμήδειο σύνδεσμο, αρκεί να βρούμε μια κατάλληλη γεννήτρια συνάρτηση φ, αν υπάρχει, η οποία πρέπει να είναι συνεχής, γνησίως φθίνουσα, κυρτή συνάρτηση, ορισμένη από το I στο $\left[0,\infty\right]$ και για την οποία να ισχύει $\varphi(1)=0$. Αν υπάρχει τέτοια συνάρτηση φ, τότε από τον τύπο (4.3), μπορούμε να κατασκευάσουμε έναν Αρχιμήδειο σύνδεσμο.

Στο σημείο αυτό ας δούμε τι ισχύει για μερικούς από τους πιο γνωστούς μας συνδέσμους.

- Το κάτω φράγμα Fréchet-Hoeffding, W(u,v)=max(u+v,0), είναι Αρχιμήδειος σύνδεσμος με φ(t)=1-t.
- Το άνω φράγμα Fréchet-Hoeffding, M(u,v)=min(u,v), δεν είναι Αρχιμήδειος σύνδεσμος.
- Ο σύνδεσμος γινομένου, Π(u,v)=uv, είναι αυστηρός Αρχιμήδειος σύνδεσμος με φ(t)=-ln(t).
- Ένας ακόμη σύνδεσμος που πρέπει να αναφερθεί, καθώς ανήκει σε πολλές από τις οικογένειες που θα δούμε ακολούθως, είναι ο παρακάτω $C(u,v) = \dfrac{uv}{u+v-uv} = \dfrac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$, ο οποίος έχει $\phi(t) = \dfrac{1}{t}-1$.

Τώρα ας δούμε μερικές από τις σημαντικότερες μονοπαραμετρικές οικογένειες Αρχιμήδειων συνδέσμων, ενώ σε κάθε οικογένεια θα δούμε και κάποιες οριακές και ειδικές περιπτώσεις, όπως αναφέρονται στο βιβλίο του Nelsen, οι οποίες θα αναλυθούν αργότερα στο κεφάλαιο.

Οικογένεια Clayton

- $C_\theta(u,v) = \max([u^{-\theta} + v^{-\theta} - 1]^{-1/\theta}, 0).$
- Γεννήτρια συνάρτηση : $\varphi_\theta(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1).$
- Πρέπει $\theta \in [-1,\infty)\backslash\{0\}$.
- Είναι αυστηρός σύνδεσμος για $\theta \geq 0$.
- Οριακές και Ειδικές περιπτώσεις : $C_{-1} = W$, $C_0 = \Pi$, $C_1 = \frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$, $C_\infty = M$.

Οικογένεια Ali-Mikhail-Haq

- $C_\theta(u,v) = \frac{uv}{1-\theta(1-u)(1-v)}.$
- Γεννήτρια συνάρτηση : $\varphi_\theta(t) = \ln\frac{1-\theta(1-t)}{t}.$
- Πρέπει $\theta \in [-1,1)$.
- Είναι αυστηρός σύνδεσμος για κάθε *θ*.
- Οριακές και Ειδικές περιπτώσεις : $C_0 = \Pi$, $C_1 = \frac{\Pi}{\Sigma - \Pi}$.

Οικογένεια Gumbel-Hougaard

- $C_\theta(u,v) = \exp\left(-\left[(-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\right]^{1/\theta}\right).$
- Γεννήτρια συνάρτηση : $\varphi_\theta(t) = (-\ln t)^\theta$.
- Πρέπει $\theta \in [1,\infty)$.
- Είναι αυστηρός σύνδεσμος για κάθε *θ*.

- Οριακές και Ειδικές περιπτώσεις : $C_1 = \Pi$, $C_\infty = M$.

Οικογένεια Frank

- $C_\theta(u,v) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1 + \frac{\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)}{e^{-\theta}-1}\right).$
- Γεννήτρια συνάρτηση : $\varphi_\theta(t) = -\ln\frac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}.$
- Πρέπει $\theta \in (-\infty,\infty)\setminus\{0\}$.
- Είναι αυστηρός σύνδεσμος για κάθε *θ*.
- Οριακές και Ειδικές περιπτώσεις : $C_{-\infty} = W$, $C_0 = \Pi$, $C_\infty = M$.

Οικογένεια Gumbel-Barnett

- $C_\theta(u,v) = uv\exp\left(-\theta\ln u\ln v\right).$
- Γεννήτρια συνάρτηση : $\varphi_\theta(t) = \ln\left(1-\theta\ln t\right).$
- Πρέπει $\theta \in (0,1]$.
- Είναι αυστηρός σύνδεσμος για κάθε *θ*.
- Οριακές και Ειδικές περιπτώσεις : $C_0 = \Pi$.

4.3 Θεμελιώδεις Ιδιότητες

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε μερικές από τις θεμελιώδεις ιδιότητες των Αρχιμήδειων συνδέσμων. Να επισημάνουμε ότι με Ω θα συμβολίσουμε το σύνολο των συνεχών, γνησίως φθινουσών, κυρτών συναρτήσεων φ από το I στο $\left(0,\infty\right]$ με φ(1)=0.

Ας δούμε τώρα πως οι σύνδεσμοι αυτοί ονομάστηκαν Αρχιμήδειοι. Το Αρχιμήδειο αξίωμα για θετικούς πραγματικούς αριθμούς είναι το εξής: Αν οι a,b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, τότε υπάρχει ακέραιος αριθμός n τέτοιος ώστε na>b.

Ένας Αρχιμήδειος σύνδεσμος C αντιστοιχεί σε κάθε ζευγάρι u,v του I έναν αριθμό C(u,v) στο I. Από το θεώρημα (4.3) προκύπτει ότι αν $u_1 \le u_2$ και $v_1 \le v_2$ τότε $C(u_1, v_1) \le C(u_2, v_2)$. Για κάθε u στο I , μπορούμε να ορίσουμε τις C-δυνάμεις u_c^n του u επαγωγικά: $u_c^1 = u$ και $u_c^{n+1} = C(u, u_c^n)$.

Η αντίστοιχη διατύπωση του Αρχιμήδειου αξιώματος για (I,C) είναι:

Για δύο οποιουσδήποτε αριθμούς u,v στο (0,1), υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $u_c^n < v$.

Το παρακάτω θεώρημα δείχνει ότι οι Αρχιμήδειοι σύνδεσμοι ικανοποιούν την εκδοχή του Αρχιμήδειου αξιώματος, και έτσι πήραν το όνομά τους, το οποίο πρώτη φορά αναφέρθηκε σε άρθρο του Ling [1965].

4.6 Θεώρημα

Έστω C ένας Αρχιμήδειος σύνδεσμος με γεννήτρια φ στο Φ. Τότε για κάθε u,v στο I, υπάρχει θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $u_c^n < v$.

4.4 Διάταξη και Οριακές Περιπτώσεις

Από το κεφάλαιο 2 είδαμε ότι υπάρχει μερική διάταξη των συνδέσμων. Λέμε μερική διότι δεν μπορούμε να διατάξουμε όλα τα ζεύγη συνδέσμων, η οποία είναι :ο C_1 είναι μικρότερος του C_2 ($C_1 \prec C_2$) αν $C_1(u,v) \le C_2(u,v)$ για όλα τα u,v στο I. Επίσης, μια οικογένεια $\{C_\theta\}$ συνδέσμων είναι θετικά διατεταγμένη αν $C_\alpha \prec C_\beta$ όποτε α≤β. Ως θετικά διατεταγμένη οικογένεια συνδέσμων μπορούμε να αναφέρουμε την οικογένεια Ali-Mikhail-Haq, ενώ ως αρνητικά διατεταγμένη οικογένεια συνδέσμων μπορούμε να αναφέρουμε την οικογένεια Gumbel-Barnett. Έστω ότι οι σύνδεσμοι C_1 και C_2 ανήκουν στην οικογένεια Gumbel-Barnett με παραμέτρους θ_1 και θ_2, αντίστοιχα. Αν $\theta_1 \le \theta_2$, τότε $-\theta_1 \ln u \ln v \ge -\theta_2 \ln u \ln v$, για u,v στο (0,1), άρα $C_1 \succ C_2$, άρα όντως η οικογένεια Gumbel-Barnett είναι αρνητικά διατεταγμένη.

Είναι συχνό το φαινόμενο να μην μπορούμε να διατάξουμε ένα ζεύγος συνδέσμων μέσω του ορισμού που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω. Βέβαια, στους Αρχιμήδειους συνδέσμους τα πράγματα είναι συνήθως πιο απλά, καθώς μπορούμε να προχωρήσουμε σε αρμονική διάταξη μέσω ιδιοτήτων των γεννητριών.

Ας δούμε τώρα έναν ορισμό που θα μας χρειαστεί.

Ορισμός 4.7

Μια συνάρτηση f στο $[0,\infty)$ είναι υποπροσθετική (subadditive) αν για όλα τα x,y στο $[0,\infty)$ ισχύει:

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y) \tag{4.5}$$

Θεώρημα 4.8

Έστω C_1 και C_2 δύο Αρχιμήδειοι σύνδεσμοι, με αντίστοιχες γεννήτριες φ_1 και φ_2 από το Ω. Τότε $C_1 \prec C_2$ αν και μόνο αν η $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ είναι υποπροσθετική.

Όμως, το να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ είναι υποπροσθετική, είναι αρκετά πολύπλοκο, οπότε θα παραθέσουμε κάποια πορίσματα ώστε να είναι ευκολότερο να βρούμε αν η συνάρτηση $f = \varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ είναι υποπροσθετική.

Για το πρώτο πόρισμα θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα από τους Schweizer και Sklar (1983).

Λήμμα 4.9

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $[0, \infty)$. Άν η f είναι κοίλη και $f(0)=0$, τότε η f είναι υποπροσθετική.

Πόρισμα 4.10

Όταν ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.8, και αν η $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ είναι κοίλη, τότε $C_1 \prec C_2$.

Εφαρμογή

Έστω ότι οι σύνδεσμοι C_1 και C_2 είναι μέλη της οικογένειας Gumbel-Hougaard με παραμέτρους θ_1 και θ_2, τέτοιες ώστε οι γεννήτριες των συνδέσμων C_1 και C_2, να είναι οι φ_1 και φ_2, αντίστοιχα, όπου $\varphi_k(t) = (-\ln t)^{\theta_k}$, για $k=1,2$. Τότε $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}(t) = t^{\theta_1/\theta_2}$. Οπότε, αν $\theta_1 \le \theta_2$ τότε η $\varphi_1 \circ \varphi_2^{[-1]}$ είναι κοίλη και άρα $C_1 \prec C_2$, συνεπώς η οικογένεια αυτή είναι θετικά διατεταγμένη.

Άλλο ένα πόρισμα που είναι χρήσιμο είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα από τους Genest and MacKay [1986].

Πόρισμα 4.11

Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.8, τότε αν το πηλίκο φ_1 / φ_2 είναι μη φθίνουσα συνάρτηση στο (0,1), τότε $C_1 \prec C_2$.

Τέλος, ένα ακόμη πόρισμα που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε, και είναι το ευκολότερο να ελέγξουμε, είναι το ακόλουθο :

Πόρισμα 4.12

Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.8.Τότε αν οι φ_1 και φ_2 είναι συνεχώς διαφορίσιμες στο (0,1) και αν η $\varphi_1^{'} / \varphi_2^{'}$ είναι αύξουσα στο (0,1), τότε ισχύει $C_1 \prec C_2$.

Εφαρμογή

Έστω C_1 και C_2 σύνδεσμοι από την οικογένεια Clayton, με παραμέτρους θ_1 και θ_2, και με γεννήτριες φ_1 και φ_2, αντίστοιχα, όπου $\varphi_k(t) = \dfrac{(t^{-\theta_k} - 1)}{\theta_k}$, για k =1,2. Τότε, $\varphi_1^{'}(t) / \varphi_2^{'}(t) = t^{\theta_2 - \theta_1}$. Ά΄ρα αν $\theta_1 \le \theta_2$, τότε η $\varphi_1^{'} / \varphi_2^{'}$ είναι αύξουσα στο (0,1), οπότε $C_1 \prec C_2$. Άρα και η οικογένεια Clayton είναι θετικά διατεταγμένη.

Τέλος, θα δούμε δύο θεωρήματα τα οποία χρησιμοποιούνται για να διαπιστώσουμε αν οι σύνδεσμοι M, Π ή W είναι οριακά μέλη (limiting members) μίας Αρχιμήδειας οικογένειας συνδέσμων. Το πρώτο θεώρημα είναι για τους συνδέσμους W ή Π, ενώ το δεύτερο θεώρημα είναι για τον σύνδεσμο M, καθώς αυτός δεν είναι Αρχιμήδειος.

Θεώρημα 4.13

Έστω $\{C_\theta \mid \theta \in \Theta\}$ μία οικογένεια Αρχιμήδειων συνδέσμων, με παραγωγίσιμες γεννήτριες φ_θ στο Ω. Τότε $C = \lim C_\theta$ είναι ένας Αρχιμήδειος σύνδεσμος αν και μόνο αν υπάρχει μια συνάρτηση φ στο Ω, τέτοια ώστε για όλα τα s,t στο (0,1) να ισχύει

$$\lim \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = \frac{\varphi(s)}{\varphi'(t)},$$

όπου "lim" δηλώνει το κατάλληλο μονόπλευρο όριο καθώς το θ πλησιάζει τα άκρα του Θ.

Αφού η γεννήτρια του W είναι *φ(t)=1-t*, τότε ο W θα είναι όριο μίας οικογένειας $\{C_\theta \left| \theta \in \Theta \right.\}$ αν το $\lim \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = s-1$. Η γεννήτρια του Π είναι η *φ(t)*=-ln*t*, άρα ο Π θα είναι όριο μιας οικογένειας $\{C_\theta \left| \theta \in \Theta \right.\}$ αν $\lim \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = t\ln s$.

Παράδειγμα:

(α) Έχουμε μια οικογένεια Αρχιμήδειων συνδέσμων με τύπο $C_\theta(u,v) = \max(\theta uv + (1-\theta)(u+v-1), 0)$, η οποία έχει γεννήτρια $\varphi_\theta(t) = -\ln[\theta t + (1-\theta)]$ για $\theta \in (0,1]$. Από τον κανόνα l'Hopital έχουμε

$$\lim_{\theta \to 1^-} \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{\ln[\theta s + (1-\theta)]}{\frac{\theta}{[\theta t + (1-\theta)]}} = \lim_{\theta \to 0^+} \frac{[\theta t + (1-\theta)]^2 (s-1)}{\theta s + (1-\theta)} = s-1$$

για s,t στο (0,1). Συνεπώς $C_0 = W$.

(β) Για την ίδια οικογένεια παίρνουμε: $\lim_{\theta \to 1^-} \frac{\varphi_\theta(s)}{\varphi'_\theta(t)} = \lim_{\theta \to 1^-} \frac{\ln[\theta s + (1-\theta)]}{\frac{\theta}{[\theta t + (1-\theta)]}} = t\ln s$

για s,t στο (0,1). Συνεπώς $C_1 = \Pi$.

Θεώρημα 4.14

Έστω $\{C_\theta \left| \theta \in \Theta \right.\}$ μία οικογένεια Αρχιμήδειων συνδέσμων με παραγωγίσιμες γεννήτριες φ_θ στο Ω. Τότε έχουμε

$$\lim C_\theta(u,v) = M(u,v)$$

αν και μόνο αν

$$\lim \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = 0, \text{ για t στο } (0,1),$$

όπου "lim" δηλώνει το κατάλληλο μονόπλευρο όριο καθώς το θ πλησιάζει τα άκρα του Θ.

Ας δούμε τώρα ένα παράδειγμα από το βιβλίο του Nelsen.

Παράδειγμα:

Έχουμε μια οικογένεια Αρχιμήδειων συνδέσμων με τύπο $C_\theta(u,v) = \left(1 + [(u^{-1}-1)^\theta + (v^{-1}-1)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}\right)^{-1}$, η οποία έχει γεννήτρια $\varphi_\theta(t) = ((\frac{1}{t}) - 1)^\theta$, για θ στο $[1, \infty)$. Άρα έχουμε $\frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = \frac{t^2 - t}{\theta}$ για όλα τα t στο (0,1) και συνεπώς έχουμε $\lim_{\theta \to \infty} \frac{\varphi_\theta(t)}{\varphi'_\theta(t)} = 0$. Συνεπώς $C_\infty = M$.

4.5 Οικογένειες Δύο Παραμέτρων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε οικογένειες Αρχιμήδειων συνδέσμων δύο παραμέτρων. Στο πρώτο κομμάτι θα δούμε πως μπορούμε να συνθέτουμε γεννήτριες του Ω, και στο δεύτερο κομμάτι της παραγράφου θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μία οικογένεια Αρχιμήδειων συνδέσμων δύο παραμέτρων, η οποία έχει ρητή μορφή.

4.5.1 Οικογένειες Γεννητριών

Στο σημείο αυτό θα δούμε μεθόδους κατασκευής οικογενειών γεννητριών Αρχιμήδειων συνδέσμων από μια απλή γεννήτρια φ από το Ω. Έστω ότι η φ είναι μια γεννήτρια από το Ω, έστω ότι $\varphi(t) = \left(\frac{1}{t}\right) - 1$ ή $\varphi(t) = -\ln t$. Με το παρακάτω θεώρημα, μπορούμε με αυτή την απλή γεννήτρια φ να δημιουργήσουμε παραμετρικές οικογένειες γεννητριών, οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν για να κατασκευάσουν οικογένειες Αρχιμήδειων συνδέσμων.

Θεώρημα 4.15

Έστω φ από το Ω, και έστω α και β θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε τις σχέσεις:

$$\varphi_{\alpha,1}(t) = \varphi(t^{a}) \ \text{ και } \ \varphi_{1,\beta}(t) = [\varphi(t)]^{\beta} \tag{4.6}$$

Τότε διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. Αν $\beta \geq 1$, τότε η $\varphi_{1,\beta}$ είναι στοιχείο του Ω.
2. Αν $\alpha \in (0,1]$, τότε η $\varphi_{\alpha,1}$ είναι στοιχείο του Ω.
3. Αν η φ είναι δύο φορές διαφορίσιμη και η $t\varphi'(t)$ είναι όχι φθίνουσα στο (0,1), τότε η $\varphi_{\alpha,1}$ είναι στοιχείο του Ω για όλα τα $\alpha > 0$.

Στη συνέχεια, θα αναφερόμαστε στην οικογένεια γεννητριών $\left\{\varphi_{\alpha,1} \in \Omega \middle| \varphi_{\alpha,1}(t) = \varphi(t^{a})\right\}$ ως μια άλφα οικογένεια (alpha family) που σχετίζεται με την φ, και στην οικογένεια $\left\{\varphi_{1,\beta} \in \Omega \middle| \varphi_{1,\beta}(t) = [\varphi(t)]^{\beta}\right\}$ ως μια βήτα οικογένεια (beta family) που σχετίζεται με την φ.

Θεώρημα 4.16

Έστω φ από το Ω, και έστω $\varphi_{\alpha,1}$ και $\varphi_{1,\beta}$ όπως στην (4.6). Θεωρούμε ότι οι $\varphi_{\alpha,1}$ και $\varphi_{1,\beta}$ είναι γεννήτριες των συνδέσμων $C_{a,1}$ και $C_{1,\beta}$, αντίστοιχα. Τότε

1. Αν $1 \leq \beta_1 \leq \beta_2$, τότε $C_{1,\beta_1} < C_{2,\beta_2}$.

2. Αν η $\varphi([\varphi^{[-1]}(t)]^{\theta})$ είναι υποπροσθετική για όλα τα θ στο (0,1), και αν α_1, α_2 είναι στο Α, τότε για $\alpha_1 \le \alpha_2$ έχουμε $C_{a_1,1} \prec C_{a_2,1}$.

Στο σημείο αυτό να σημειώσουμε ότι κάθε βήτα-παραγώμενη οικογένεια Αρχιμήδειων συνδέσμων είναι θετικά διατεταγμένη. Δεν μπορούμε, όμως, να πούμε κάτι ανάλογο για τις άλφα-παραγώμενες οικογένειες.

Πόρισμα 4.17

Έστω ότι ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος 4.16. Άν η φ_a' / φ_a είναι όχι αύξουσα στο α, τότε με $\alpha_1 \le \alpha_2$ έχουμε $C_{a_1,1} \prec C_{a_2,1}$.

Θεώρημα 4.18

Έστω φ από το Ω, και έστω $\varphi_{\alpha,1}$ και $\varphi_{1,\beta}$ όπως στην (4.6). Υποθέτουμε ότι οι $\varphi_{a,1}$ και $\varphi_{1,\beta}$ παράγουν τους συνδέσμους $C_{a,1}$ και $C_{1,\beta}$, αντίστοιχα, όπου $\beta \ge 1$ και το α είναι στοιχείο ενός υποσυνόλου του $(0,\infty)$, που περιέχει το διάστημα (0,1].

Αν η φ είναι συνεχώς διαφορίσιμη και $\varphi'(1) \ne 0$, τότε

1. $C_{0,1}(u,v) = \lim_{a \to 0^+} C_{a,1}(u,v) = \Pi(u,v)$.
2. $C_{1,\infty}(u,v) = \lim_{\beta \to \infty} C_{1,\beta}(u,v) = \mathrm{M}(u,v)$.

Δηλαδή, μπορούμε να πούμε ότι όλες οι άλφα-παραγώμενες οικογένειες έχουν ως οριακή περίπτωση τον Π, ενώ όλες οι βήτα-παραγώμενες οικογένειες έχουν ως οριακή περίπτωση τον Μ.

Τώρα είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε οικογένειες Αρχιμήδειων συνδέσμων δύο-παραμέτρων , χρησιμοποιώντας ως γεννήτριες συναρτήσεις της μορφής της παρακάτω σύνθεσης :

$$\varphi_{a,\beta}(t) = \varphi_{a,1} \circ \varphi_{1,\beta}(t) = \left[\varphi(t^a)\right]^{\beta}. \tag{4.7}$$

Παράδειγμα

Έστω η $\varphi(t) = 1 - t$, η γεννήτρια του W. Θέτουμε $\varphi_{a,\beta}(t) = (1 - t^a)^\beta$ για α στο (0,1] και $\beta \geq 1$. Η συνάρτηση αυτή είναι γεννήτρια της οικογένειας Αρχιμήδειων συνδέσμων δύο-παραμέτρων :

$$C_{a,\beta}(u,v) = \max\left(\left\{1 - \left[\left(1-u^a\right)^\beta + \left(1-v^a\right)^\beta\right]^{1/\beta}\right\}^{1/a}, 0\right)$$

Να σημειώσουμε ότι η οικογένεια αυτή έχει $C_{1,1} = W$, $C_{0,1} = \Pi$ και $C_{a,\infty} = \mathrm{M}$.

4.5.2 Ρητοί Αρχιμήδειοι Σύνδεσμοι

Το να βρούμε οικογένειες Αρχιμήδειων συνδέσμων που είναι ρητές συναρτήσεις, δηλαδή συνδέσμους $C(u,v)$ που όταν $C(u,v) > 0$, τότε $C(u,v) = \dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$, όπου P και Q είναι πολυώνυμα, είναι σχετικά απλό. Ήδη έχουμε δει μία τέτοια περίπτωση, την οικογένεια Ali-Mikhail-Haq. Το ζητούμενο είναι να βρούμε έναν τρόπο ώστε να μπορούμε να βρούμε όλους τους ρητούς Αρχιμήδειους συνδέσμους. Θα προσπαθήσουμε, λοιπόν, να κατασκευάσουμε μία οικογένεια δύο-παραμέτρων, που να περιέχει όλους τους ρητούς Αρχιμήδειους συνδέσμους.

Έχουμε δει στο θεώρημα 4.5 ότι οι Αρχιμήδειοι σύνδεσμοι πρέπει να είναι συμμετρικοί και προσεταιριστικοί. Οπότε, θα χρειαστούμε το ακόλουθο Θεώρημα :

Θεώρημα 4.19

Έστω T μία ρητή 2-θέσια πραγματική συνάρτηση, έστω $T(u,v) = \dfrac{P(u,v)}{Q(u,v)}$ όπου P και Q είναι μη μηδενικά πολυώνυμα, πρώτα μεταξύ τους. Τότε η T είναι συμμετρική και προσεταιριστική αν και μόνο αν

$$T(u,v)=\frac{a_1uv+b_1(u+v)+c_1}{a_2+b_2(u+v)+c_2uv}, \tag{4.8}$$

όπου

$$\begin{aligned} b_1b_2 &= c_1c_2 \\ b_1^2+b_2c_1 &= a_1c_1+a_2b_1 \\ b_2^2+b_1c_2 &= a_2c_2+a_1b_2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Λαμβάνοντας υπ'όψιν μας τους περιορισμούς που απαιτούνται ώστε η συνάρτηση T να είναι ρητός Αρχιμήδειος σύνδεσμος, καταλήγουμε στην μορφή :

$$C_{a,\beta}(u,v)=\frac{uv-\beta(1-u)(1-v)}{1-a(1-u)(1-v)}$$

για κάποιες τιμές των *α* και *β*.

Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει τις τιμές των *α* και *β,* άρα με βάση αυτό μπορούμε να γνωρίζουμε όλους τους ρητούς Αρχιμήδειους συνδέσμους δύο-παραμέτρων.

Θεώρημα 4.20

Η συνάρτηση $C_{a,\beta}$ που ορίζεται στο I^2 από τον τύπο

$$C_{a,\beta}(u,v)=\max\left(\frac{uv-\beta(1-u)(1-v)}{1-a(1-u)(1-v)},0\right) \tag{4.10}$$

είναι ένας ρητός Αρχιμήδειος σύνδεσμος αν και μόνο αν $0\le\beta\le 1-|a|$.

Σημειώνουμε ότι $C_{0,0}=\Pi$, $C_{0,1}=W$ και $C_{1,0}=\dfrac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$.

Τελειώνοντας, έχουμε το ακόλουθο πόρισμα :

Πόρισμα 4.21

Ένας ρητός Αρχιμήδειος σύνδεσμος είναι αυστηρός αν και μόνο αν στη σχέση (4.10) έχουμε $\beta=0$, π.χ. αν και μόνο αν αυτός είναι μέλος της οικογένειας Ali-Mikhail-Haq.

4.6 Πολυμεταβλητοί Αρχιμήδειοι Σύνδεσμοι

Στην παράγραφο αυτή θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε Αρχιμήδειους n-συνδέσμους. Ο γνωστός σύνδεσμος Π μπορεί να γραφτεί στη μορφή

$$\Pi(u,v) = uv = \exp\left(-\left[\left(-\ln u\right)+\left(-\ln v\right)\right]\right).$$

Μεταφέροντας την παραπάνω σχέση στις n-διαστάσεις με $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ παίρνουμε την εξής μορφή του Π^n:

$$\Pi^n(\boldsymbol{u}) = u_1 u_2 ... u_n = \exp\left(-\left[\left(-\ln u_1\right)+\left(-\ln u_2\right)+...+\left(-\ln u_n\right)\right]\right).$$

Δηλαδή καταλήγουμε στην εξής γενίκευση της σχέσης (4.3) :

$$C^n(\boldsymbol{u}) = \varphi^{[-1]}\left(\varphi\left(u_1\right)+\varphi\left(u_2\right)+...+\varphi\left(u_n\right)\right). \tag{4.11}$$

Γενικά, η παραπάνω τεχνική συνήθως αποτυγχάνει. Για να το εξακριβώσουμε μπορούμε να πάρουμε την $\varphi(t) = 1-t$, η οποία στην (4.11) είναι η γεννήτρια του W^n. Όμως ο W^n δε είναι σύνδεσμος για $n > 2$. Γενικά, υπάρχουν πολλά προβλήματα για $n \geq 3$. Οπότε, πρέπει να βρούμε κάποιον άλλο τρόπο κατασκευής n-συνδέσμων. Γι'αυτό το λόγο θα χρειαστούμε τον ακόλουθο ορισμό :

Ορισμός 4.22

Μία συνάρτηση $g(t)$ είναι πλήρως μονότονη (completely monotone) σ'ένα διάστημα J, αν είναι συνεχής στο διάστημα αυτό και έχει παραγώγους όλων των τάξεων, οι οποίες εναλλάσουν πρόσημο, δηλαδή είναι της μορφής :

$$\left(-1\right)^k \frac{d^k}{dt^k} g(t) \geq 0$$

για όλα τα t στο εσωτερικό του J και για $k = 0,1,2,...$.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $g(t)=e^{-t}$, $t\in\mathbb{R}$ είναι πλήρως μονότονη, καθώς $g^{'}(t)=-e^{-t}, g^{''}(t)=e^{-t},...$

Να σημειώσουμε εδώ, ότι άμεσες συνέπειες αυτού του ορισμού είναι οι εξής:

1. Αν η $g(t)$ είναι πλήρως μονότονη στο $[0,\infty)$ και $g(c)=0$ για κάποιο $c>0 \Rightarrow g\equiv 0$ στο $[0,\infty)$.
2. Αν η $\varphi^{[-1]}$ μίας Αρχιμήδειας γεννήτριας φ είναι πλήρως μονότονη, τότε πρέπει να είναι θετική στο $[0,\infty) \Rightarrow$ η φ είναι αυστηρή και $\varphi^{[-1]}=\varphi^{-1}$.

Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει τις συνθήκες ώστε μία αυστηρή γεννήτρια φ να παράγει Αρχιμήδειους n-συνδέσμους για κάθε $n\geq 2$.

Θεώρημα 4.23

Έστω φ μία συνεχής, γνησίως φθίνουσα συνάρτηση από το I στο $[0,\infty]$ τέτοια ώστε $\varphi(0)=\infty$ και $\varphi(1)=0$, και έστω φ^{-1} η αντίστροφη της φ. Άν C^n μία συνάρτηση από το I^n στο I, που δίνεται από την σχέση (4.11), τότε η C^n είναι n-σύνδεσμος για κάθε $n\geq 2$ αν και μόνο αν η φ^{-1} είναι πλήρως μονότονη στο $[0,\infty)$.

Παράδειγμα

Έστω η $\varphi_\theta(t)=t^{-\theta}-1$ για $\theta>0$. Τότε έχουμε $\varphi_\theta^{-1}(t)=\left(1+t\right)^{-1/\theta}$, η οποία είναι απολύτως μονότονη στο $[0,\infty)$. Άρα μπορούμε να γενικεύσουμε την οικογένεια Clayton των 2-συνδέσμων στην οικογένεια των n-συνδέσμων για $\theta>0$ και για κάθε $n\geq 2$:

$$C_\theta^n(\boldsymbol{u})=\left(u_1^{-\theta}+u_2^{-\theta}+...+u_n^{-\theta}-n+1\right)^{-1/\theta}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Η ΧΡΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΝΔΕΣΜΩΝ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Άν και η έννοια των συνδέσμων είναι γνωστή από το 1959, δεν είναι μέχρι τα τελευταία χρόνια που βρήκαν πρακτική εφαρμογή. Οι σύνδεσμοι χρησιμοποιήθηκαν, αρχικά, σε ασφαλιστικά δεδομένα και στην συνέχεια αναπτύχθηκαν μέθοδοι των συνδέσμων για τα χρηματοοικονομικά. Στα λίγα αυτά χρόνια που οι σύνδεσμοι έχουν αρχίσει να χρησιμοποιούνται, έχει υπάρξει τεράστια ανάπτυξη των μεθόδων τους στα χρηματοοικονομικά ώστε ήδη να έχει δημιουργηθεί βιβλιογραφία.

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιούνται οι σύνδεσμοι και γιατί αυτοί είναι χρήσιμοι σε εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά. Πρώτα όμως θα παρουσιάσουμε τρία πολύ βασικά ζητήματα των χρηματοοικονομικών. Το πρώτο είναι η μη-κανονικότητα των αποδόσεων, το οποίο έχει ως συνέπεια η προσέγγιση μέσω της κλασσικής μεθόδου των Black και Scholes να δίνει πολύ διαφορετικά αποτελέσματα από αυτά που παρατηρούμε στην πράξη και η εφαρμογή της να αντιμετωπίζεται πλέον με μεγάλο σκεπτικισμό. Το δεύτερο είναι το θέμα της μη τέλειας αγοράς (incomplete market), το οποίο φέρνει στην επιφάνεια μία νέα διάσταση στο πρόβλημα της τιμολόγησης ενός περιουσιακού στοιχείου. Το τρίτο είναι ο πιστωτικός κίνδυνος (credit risk), λόγω του οποίου έχουν αναπτυχθεί πολλά προιόντα και τεχνικές για την τιμολόγηση περιουσιακών στοιχείων.

Το ζητούμενο είναι να δούμε πώς οι συναρτήσεις συνδέσμων μπορούν να αντιμετωπίσουν τέτοια ζητήματα. Οι τεχνικές για την τιμολόγηση περιουσιακών στοιχείων και για την μέτρηση του κινδύνου βασίζονται σε εργαλεία της θεωρίας πιθανοτήτων. Οι συναρτήσεις συνδέσμων μας δίνουν έναν εύχρηστο τρόπο για να παρουσιάσουμε πολυδιάστατες συναρτήσεις κατανομών, οι οποίες έχουν μεγάλη εφαρμογή στα οικονομικά. Το ερώτημα είναι γιατί δεν είχαν χρησιμοποιηθεί και εφαρμοστεί νωρίτερα οι συναρτήσεις συνδέσμων στα χρηματοοικονομικά. Αυτό οφείλεται στα χρηματοοικονομικά προιόντα τα οποία μετά το 1990 αναπτύχθηκαν πάρα πολύ και άρχισαν να χρησιμοποιούνται μαζικά, με συνέπεια να γίνονται όλο και πιο πολύπλοκα στο να υπολογιστούν.

Η βασική αλλαγή, στην οποία οφείλεται η ανακάλυψη των μεθόδων συνδέσμων στα χρηματοοικονομικά έχει να κάνει με την υπόθεση των αποδόσεων των χρηματοοικονομικών προιόντων. Μέχρι τότε η κανονική κατανομή ήταν μία σωστή υπόθεση για τις αποδόσεις. Μάλιστα, το γεγονός ότι οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή είναι ένα από τα κύρια χαρακτηριστικά στο οποίο βασίστηκε η σύγχρονη χρηματοοικονομική θεωρία. Στον τομέα της τιμολόγησης, η υπόθεση αυτή οδήγησε στο υπόδειγμα των Black και Scholes και η ίδια υπόθεση είναι αυτή πάνω στην οποία βασίστηκαν οι περισσότερες μέθοδοι της διοίκησης κινδύνου. Τα τελευταία χρόνια η υπόθεση της κανονικότητας αμφισβητείται πάρα πολύ έντονα και από τα δεδομένα που υπάρχουν αλλά και από την πραγματικότητα της αγοράς. Αυτός είναι ένας λόγος για τον οποίο τα τελευταία χρόνια βλέπουμε να αναπτύσσονται προιόντα τα οποία θεωρούν μη κανονικές αποδόσεις, με πιο γνωστό από αυτά τα δικαιώματα vanilla (vanilla options). Το γεγονός της μη κανονικότητας θα ήταν πολύ δύσκολο να αντιμετωπιστεί χωρίς τη χρήση των συναρτήσεων συνδέσμων.

Ένα από τα βασικά σημεία στο οποίο χρησιμοποιούνται οι σύνδεσμοι είναι η τιμολόγηση των παραγώγων. Τα βασικά προβλήματα που πρέπει να αντιμετωπίσουμε είναι η μη κανονικότητα και η μη τέλεια αγορά, η οποία οδηγεί σε πιστωτικό κίνδυνο και σε λάθη ισοστάθμισης (hedging error). Οι σύνδεσμοι είναι το εργαλείο με το οποίο μπορούν να αντιμετωπιστούν αυτά τα προβλήματα. Το κύριο πλεονέκτημα των συναρτήσεων των συνδέσμων είναι ότι μας δίνει τη δυνατότητα να ξεπεράσουμε το πρόβλημα του προσδιορισμού των μονοδιάστατων περιθώριων κατανομών ξεχωριστά από τον προσδιορισμό της κίνησης αγοράς (market comovement) και της εξάρτησης.

Εφαρμογή 1

Για να δώσουμε ένα διαισθητικό παράδειγμα της χρήσης των συνδέσμων στα οικονομικά θα θεωρήσουμε ένα διδιάστατο αριθμητικό δικαίωμα (bivariate digital option). Το δικαίωμα αυτό αποφέρει μία νομισματική μονάδα αν δύο μετοχές ή δείκτες είναι ταυτόχρονα πάνω ή κάτω από τα επίπεδα του ζεύγους των τιμών εξάσκησης. Θα θεωρήσουμε το προιόν αυτό να αναφέρεται στους δείκτες Nikkei 225 και S&P 500 το οποίο αποφέρει, σε χρόνο εξάσκησης T, μία μονάδα αν και οι δύο δείκτες είναι κάτω από δύο δοσμένα επίπεδα K_{NKY} και K_{SP}. Η αξία αυτού του δικαιώματος πώλησης σε μία τέλεια αγορά είναι

$$\mathrm{DP} = \exp[\,-\,r\,(\,T\text{-}t\,)]\;Q\,(\,K_{NKY}, K_{SP}\,),$$

όπου $Q\,(\,K_{NKY}, K_{SP})$ είναι η από κοινού πιθανότητα μηδενικού κινδύνου ώστε και οι δύο δείκτες να είναι χαμηλότερα από τις αντίστοιχες τιμές εξάσκησης. Αν θεωρήσουμε ότι Q_{NKY} είναι η πιθανότητα μηδενικού κινδύνου ο δείκτης Nikkei τον χρόνο T είναι κάτω από το επίπεδο K_{NKY} και ότι Q_{SP} είναι η πιθανότητα μηδενικού κινδύνου ο δείκτης S&P 500 τον χρόνο T είναι κάτω από το επίπεδο K_{SP}, τότε η παραπάνω σχέση της αξίας δικαιώματος πώλησης γίνεται

$$\mathrm{DP} = \exp[\,-\,r\,(\,T\text{-}t\,)]\;C\,(\,Q_{NKY}, Q_{SP}\,),$$

όπου $C(x,y)$ μία διδιάστατη συνάρτηση.

Η παραπάνω συνάρτηση είναι σύνδεσμος, κάτι το οποίο είναι εύκολο να το δει κάποιος χρησιμοποιώντας απλά μαθηματικά ώστε να επαληθεύσει τον ορισμό των συνδέσμων. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα η συνάρτηση συνδέσμου μας έδωσε τη δυνατότητα να εκφράσουμε την από κοινού πιθανότητα κατανομής ως συνάρτηση των περιθώριων. Δηλαδή η τιμολόγηση του διδιάστατου αυτού προιόντος μπορεί να γίνει λαμβάνοντας υπόψη τις πληροφορίες που παίρνουμε από τις μονοδιάστατες περιπτώσεις.

Θεωρούμε τώρα το διδιάστατο δικαίωμα αγοράς. Το δικαίωμα αυτό αποφέρει, σε χρόνο εξάσκησης T, μία μονάδα αν και οι δύο δείκτες Nikkei 225 και S&P 500 είναι πάνω από δύο δοσμένα επίπεδα K_{NKY} και K_{SP}. Στην περίπτωση αυτή η αντίστοιχη πιθανότητα είναι

$$DC = \exp[-r(T-t)]\ \bar{Q}\ (K_{NKY}, K_{SP}).$$

Όπως και πριν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση $\bar{C}(v,z)$, οπότε η παραπάνω σχέση παίρνει την μορφή

$$DC = \exp[-r(T-t)]\ \bar{C}\ [\bar{Q}(K_{NKY}), \bar{Q}(K_{SP})],$$

όπου η συνάρτηση συνδέσμων $\bar{C}(v,z)$ είναι ο σύνδεσμος επιβίωσης.

Η σχέση που συνδέει τον σύνδεσμο επιβίωσης με την συνάρτηση συνδέσμου είναι η ακόλουθη :

$$\overline{C}[\overline{Q}(K_{NKY}),\overline{Q}(K_{SP})]=1-Q(K_{NKY})-Q(K_{SP})+C[Q(K_{NKY}),Q(K_{SP})].$$

Ας δούμε τώρα ποιοί σύνδεσμοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν στις δύο παραπάνω περιπτώσεις :

(i) άν οι δύο αγορές είναι ανεξάρτητες, τότε στην περίπτωση του δικαιώματος πώλησης έχουμε :

$$DP = \exp[-r(T-t)]\ Q\ (K_{NKY}, K_{SP}) = \exp[-r(T-t)] Q_{NKY} Q_{SP}.$$

Συνεπώς, η πρώτη και πιό απλή περίπτωση που είδαμε στην πράξη είναι ο σύνδεσμος του γινομένου, $C(x,y)= xy$.

Ας δούμε τώρα τι συμβαίνει στις δύο ακραίες περιπτώσεις, δηλαδή σε αυτές που οι αγορές είναι τέλεια θετικά ή αρνητικά συσχετισμένες.

(ii) άν οι δύο αγορές έχουν τέλεια θετική συσχέτιση τότε έχουμε :

$$DP = \exp[-r(T-t)]\ Q\ (K_{NKY}, K_{SP}) = \exp[-r(T-t)] \min(Q_{NKY}, Q_{SP}).$$

Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τον σύνδεσμο $C(x,y)= \min(x,y)$, ο οποίος είναι το άνω Fréchet φράγμα.

(iii) άν οι δύο αγορές έχουν τέλεια θετική συσχέτιση τότε έχουμε :

$$\mathrm{DP} = \exp[-r(T-t)]\, Q(K_{NKY}, K_{SP}) = \exp[-r(T-t)]\max(Q_{NKY}+Q_{SP}-1,0).$$

Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε τον σύνδεσμο $C(x,y)=\max(x+y-1,0)$, ο οποίος είναι το κάτω Fréchet φράγμα.

(iv) μπορούμε να δημιουργήσουμε συνδέσμους για την περίπτωση της μη-τέλειας εξάρτησης των δύο αγορών, θεωρώντας μια γραμμική σχέση των τριών περιπτώσεων, ως εξής :

$$C(Q_{NKY},Q_{SP}) = \beta\max(Q_{NKY}+Q_{SP}-1,0)+(1-\alpha-\beta)Q_{NKY}Q_{SP}+\alpha\min(Q_{NKY},Q_{SP}),$$

με $0\le\alpha,\beta\le1$ και $\alpha+\beta=1$. Τέτοιοι σύνδεσμοι ορίζουν την οικογένεια Fréchet των συναρτήσεων συνδέσμων.

Το πιο βασικό θεώρημα των συνδέσμων είναι το θεώρημα του Sklar. Το θεώρημα αυτό βρίσκει άμεση εφαρμογή στην τιμολόγηση διδιάστατων παραγώγων, στη μέτρηση πιστωτικού κινδύνου καθώς και στον υπολογισμό του VaR ενός χαρτοφυλακίου. Ο βασικότερος λόγος είναι ότι μας δίνει το δικαίωμα θεωρώντας δύο οποιεσδήποτε περιθώριες συναρτήσεις κατανομών $F_1(x)$ και $F_2(y)$ να γνωρίζουμε την από κοινού συνάρτηση κατανομής τους η οποία είναι η $C(F_1(x),F_2(y))$. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να μπορούμε να χειριστούμε σχετικά εύκολα αρκετά πολύπλοκες περιπτώσεις, καθώς οι συνδυασμοί που μπορούν να γίνουν στις τρεις παραπάνω συναρτήσεις είναι σχεδόν άπειροι.

Εφαρμογή 2

Ας δούμε τώρα μία εφαρμογή, από το βιβλίο «Copula methods in finance» για το που μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι σύνδεσμοι, η οποία έχει άμεση σχέση με όσα είδαμε στο Κεφάλαιο 3. Θεωρούμε δύο εταιρίες οι οποίες έχουν χρόνους ζωής X και Y αντίστοιχα. Οι δύο εταιρίες είναι εκτεθημένες σε τριών ειδών πλήγματα, ένα που επηρεάζει ταυτόχρονα και τις δύο εταιρίες και άλλα δύο τα οποία επηρεάζουν την κάθε εταιρία ξεχωριστά. Όπως και στο κεφάλαιο 3, έτσι και εδώ θα θεωρήσουμε ότι τα πλήγματα ακολουθούν τρείς ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με παραμέτρους λ_1, λ_2 και λ_{12}, όπου οι δείκτες αντιστοιχούν στην εταιρία που το κάθε πλήγμα μπορεί να επηρεάσει. Άρα οι χρόνοι στους οποίους μπορεί να συμβεί ένα πλήγμα συμβολίζονται με Z_1, Z_2 και Z_{12}, και οι οποίοι είναι ανεξάρτητοι και εκθετικοί χρόνοι με παραμέτρους λ_1, λ_2 και λ_{12} αντίστοιχα. Οι συναρτήσεις κατανομών τους είναι της μορφής :

$$G_i(z_i)=1-\exp(-\lambda_i z_i)\text{, για } i=1,2,12.$$

Όταν συμβεί ένα πλήγμα, οι εταιρίες τότε θα έχουν χρόνο ζωής :

$$X=\min(Z_1,Z_{12}) \quad , \quad Y=\min(Z_2,Z_{12}).$$

Η πιθανότητα η εταιρία X να έχει επιζήσει πάνω από το x, δηλαδή η συνάρτηση επιβίωσης της εταιρίας X , $\overline{F}_1(x)$, είναι :

$$\begin{aligned}\overline{F}_1(x)&=P(X>x)=P(Z_1>x,Z_{12}>x)\\&=\overline{G}_1(x)\overline{G}_{12}(x)=\exp(-(\lambda_1+\lambda_{12})x).\end{aligned} \tag{5.1}$$

Ομοίως, για την εταιρία Y έχουμε :

$$\overline{F}_2(y)=\exp(-(\lambda_2+\lambda_{12})y). \tag{5.2}$$

Η πιθανότητα και οι δύο εταιρίες να επιζήσουν πάνω από το x και το y αντίστοιχα, είναι η συνάρτηση επιβίωσης $\overline{F}_{12}(x,y)$, είναι, όπως είδαμε στην ενότητα 3.6 :

$$\begin{aligned}\overline{F}(x,y)&=P(X>x,Y>y)=P(\min(Z_1,Z_{12})>x,\min(Z_2,Z_{12})>y)\\&=P(Z_1>x)P(Z_2>y)P(Z_{12}>\max(x,y))\\&=\exp(-\lambda_1 x)\exp(-\lambda_2 y)\exp(-\lambda_{12}\max(x,y))\\&=\exp(-(\lambda_1+\lambda_{12})x-(\lambda_2+\lambda_{12})y+\lambda_{12}\min(x,y)).\end{aligned} \tag{5.3}$$

Η τελευταία σχέση, αντικαθιστώντας με τις (5.1) και (5.2), παίρνουμε :

$$\overline{F}(x,y)=\overline{F}_1(x)\overline{F}_2(y)\min(\exp(\lambda_{12}x),\exp(\lambda_{12}y)).$$

Ορίζοντας τώρα,

$$m=\frac{\lambda_{12}}{\lambda_1+\lambda_{12}} \quad , \quad n=\frac{\lambda_{12}}{\lambda_2+\lambda_{12}},$$

έχουμε ότι

$$\exp(\lambda_{12}x)=\overline{F}_1(x)^{-m} \text{ και } \exp(\lambda_{12}y)=\overline{F}_2(y)^{-n}.$$

Συνεπώς η συνάρτηση επιβίωσης είναι :

$$\overline{F}(x,y)=\overline{F}_1(x)\overline{F}_2(y)\min\left\{\left[\overline{F}_1(x)\right]^{-m},\left[\overline{F}_2(y)\right]^{-n}\right\}$$
$$=\min\left\{\left[\overline{F}_2(y)\right]\left[\overline{F}_1(x)\right]^{1-m},\left[\overline{F}_1(x)\right]\left[\overline{F}_2(y)\right]^{1-n}\right\}.$$

Η από κοινού συνάρτηση επιβίωσης που μόλις είδαμε μπορεί να γραφτεί συναρτήσει των X και Y, $\overline{F}(x,y)=\overline{C}(\overline{F}_1(x),\overline{F}_2(y))$, χρησιμοποιώντας τον ακόλουθο σύνδεσμο επιβίωσης, γνωστό από την ενότητα 3.6 και ως Marshall και Olkin σύνδεσμο :

$$\overline{C}^{MO}(v,z)=\min(v^{1-m}z,vz^{1-n})=\begin{cases} v^{1-m}z, & v^m \geq z^n \\ vz^{1-n}, & v^m < z^n. \end{cases}$$

Συνεπώς, η από κοινού συνάρτηση επιβίωσης για χρόνο πάνω από t είναι η εξής :

$$\overline{F}(t,t)=\overline{C}^{MO}(\overline{F}_1(t),\overline{F}_2(t))$$
$$=\min\left\{\left[\overline{F}_2(t)\right]\left[\overline{F}_1(t)\right]^{1-m},\left[\overline{F}_1(t)\right]\left[\overline{F}_2(t)\right]^{1-n}\right\}.$$

Για παράδειγμα, έστω ότι έχουμε μία εταιρία από τον κλάδο των τροφίμων και μία εταιρία από τον κλάδο των τηλεπικοινωνιών. Οι δύο αυτές εταιρίες είναι εκτεθιμένες σε τρία πιθανά πλήγματα, αυτό που έχει επίδραση στον κλάδο των τροφίμων, αυτό που έχει επίδραση στον κλάδο των τηλεπικοινωνιών και ένα το οποίο έχει επίδραση στην οικονομία, γενικότερα. Έστω ότι οι πιθανοί χρόνοι πραγματοποίησης αυτών των πληγμάτων είναι 2, 1 και 4 χρόνια, με αντίστοιχες παραμέτρους λ_1=0.5, λ_2=1 και λ_{12}=0.25. Οι πιθανότητες επιβίωσης των δύο εταιριών πέρα από τους χρόνους x και y, αντίστοιχα, είναι :

$$\overline{F}_1(x)=\exp(-(\lambda_1+\lambda_{12})x)=\exp(-0.75x)$$
$$\overline{F}_2(y)=\exp(-(\lambda_1+\lambda_{12})y)=\exp(-1.25y)$$

Η από κοινού πιθανότητα επιβίωσης, με βάση το μοντέλο Marshall-Olkin, είναι :

$$\overline{C}^{MO}(\overline{F}_1(x),\overline{F}_2(y))=\min\left\{\left[\exp(-1.25y)\right]\left[\exp(-0.5x)\right],\left[\exp(-0.75x)\right]\left[\exp(-y)\right]\right\}\Rightarrow$$

$$\overline{C}^{MO}(\overline{F}_1(x),\overline{F}_2(y))=\begin{cases} \exp(-1.25y-0.5x), & x \leq y \\ \exp(-0.75x-y), & x > y \end{cases},$$

καθώς τα m και n όπως τα ορίσαμε παραπάνω, βρίσκονται m=1/3 και n=1/5.

Η από κοινού πιθανότητα επιβίωσης για χρόνο πάνω από x = y = t = 3 υπολογίζεται :

$$\overline{C}^{MO}(\overline{F}_1(3),\overline{F}_2(3)) = \exp(3(-1.25-0.5)) = 0.5248\% .$$

5.1 Προσομοίωση Συνδέσμων

Η προσομοίωση είναι ένα εργαλείο που χρησιμοποιείται ευρύτατα, με σκοπό την παραγωγή αριθμών από διάφορες κατανομές. Μέσω της προσομοίωσης, λοιπόν, θα προσπαθήσουμε να παράγουμε αριθμούς από κάποιες συναρτήσεις συνδέσμων, βασιζόμενοι στους αλγορίθμους και την μεθοδολογία των Cherubini, Luciano και Vecchiato. Στην συνέχεια θα δώσουμε έναν γενικό αλγόριθμο για την παραγωγή αριθμών από συναρτήσεις Αρχιμήδειων συνδέσμων, και θα δώσουμε και δύο συγκεκριμένα παραδείγματα, διδιάστατων τέτοιων συναρτήσεων.

Μία γενική μέθοδος που χρησιμοποιείται για την παραγωγή αριθμών από μία επιλεγμένη συνάρτηση συνδέσμου είναι η μέθοδος της κατά συνθήκης προσέγγισης (conditional approach). Ας εξηγήσουμε, τώρα, το σκεπτικό της μεθόδου. Έστω ότι έχουμε μία γνωστή συνάρτηση συνδέσμου, δηλαδή δεν υπάρχουν άγνωστες παράμετροι. Το ζητούμενο είναι να παράγουμε ζευγάρια (u, v) από παρατηρήσεις στο [0, 1] ομοιόμορφα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές U και V, των οποίων η από κοινού συνάρτηση κατανομής είναι η ζητούμενη C. Για να το επιτύχουμε αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε την κατά συνθήκη κατανομή

$$c_u(v) = P(V \le v \mid U = u), \tag{5.4}$$

για την τυχαία μεταβλητή V σε μία δοσμένη τιμή u της U.

Δηλαδή έχουμε

$$c_u(v) = P(F_2 \le v \mid F_1 = u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{C(u+\Delta u, v) - C(u,v)}{\Delta u} = \frac{\partial C}{\partial u} = C_u(v), \tag{5.5}$$

όπου $C_u(v)$ η μερική παράγωγος του συνδέσμου. Η $c_u(v)$ είναι αύξουσα συνάρτηση και ορίζεται για σχεδόν όλα τα $v \in [0,1]$.

Συνεπώς, ένας πρώτος τρόπος για να παράγουμε το ζητούμενο ζευγάρι (u,v) είναι :

- Παράγουμε δύο ανεξάρτητες ομοιόμορφες τυχαίες μεταβλητές (u,w) $\in [0,1]$. Το u είναι το πρώτο στοιχείο που ζητάμε.
- Υπολογίζουμε την (δήθεν-) αντίστροφη (quasi inverse) της $c_u(v)$. Θέτουμε $v = c_u^{-1}(w)$, το οποίο είναι το δεύτερο επιθυμητό στοιχείο.

Αντίστοιχα, για πολυδιάστατες περιπτώσεις, μπορούμε να δουλέψουμε ως εξής :

- Ορίζουμε $C_i = C(F_1, F_2, ..., F_i, 1, 1, ..., 1)$ για i=2,3,...,n.
- Θεωρούμε F_1 από την ομοιόμορφη κατανομή U(0,1).
- Θεωρούμε F_2 από την $C_2(F_2 \mid F_1)$.
- Γενικά, θα έχουμε F_n από την $C_n(F_n \mid F_1, ..., F_{n-1})$.

Μπορούμε όμως να δουλέψουμε και ως εξής : θεωρούμε τον n-σύνδεσμο $C = C(u_1, u_2, ..., u_n)$ και με $C_k(u_1, u_2, ..., u_k, 1, ..., 1)$ για k=2,...,n-1 να ορίσουμε τις k-διάστατες περιθώριες του C, με $C_1(u_1) = u_1$ και $C_n(u_1, u_2, ..., u_n) = C(u_1, u_2, ..., u_n)$. Αφού οι $U_1, U_2, ..., U_n$ έχουν από κοινού συνάρτηση κατανομής C, τότε η κατά συνθήκη κατανομή των U_k, δοθέντων των $U_1, U_2, ..., U_{k-1}$ δίνεται από τον τύπο :

$$C_k(u_k | u_1, ..., u_{k-1}) = P(U_k \le u_k \mid U_1 = u_1, ..., U_{k-1} = u_{k-1})$$
$$= \frac{\left[\partial^{k-1} C_k(u_1, u_2, ..., u_k)\right] / \left[\partial u_1 ... \partial u_{k-1}\right]}{\left[\partial^{k-1} C_{k-1}(u_1, u_2, ..., u_{k-1})\right] / \left[\partial u_1 ... \partial u_{k-1}\right]} \tag{5.6}$$

με k=2,...,n. Θεωρούμε ότι το κλάσμα υπάρχει και ότι ο παρονομαστής δεν είναι μηδέν. Τότε έχουμε τον εξής αλγόριθμο :

- Προσομοιώνουμε έναν τυχαίο αριθμό u_1 από την U(0,1).
- Προσομοιώνουμε έναν τυχαίο αριθμό u_2 από την $C_2(\cdot | u_1)$.
- $\vdots$
- Προσομοιώνουμε έναν τυχαίο αριθμό u_n από την $C_n(\cdot | u_1, u_2, ..., u_{n-1})$.

Γενικά, για να προσομοιώσουμε μία τιμή u_k από την $C_k(\cdot | u_1, u_2, ..., u_{k-1})$ πρέπει να πάρουμε ένα v από την U(0,1) για το οποίο θα ισχύει $u_k = C_k^{-1}(v | u_1, u_2, ..., u_{k-1})$ και από εκεί θα πάρουμε το ζητούμενο, λύνοντας την $v = C_k(u_k | u_1, ..., u_{k-1})$.

Η τελευταία διαδικασία είναι αρκετά δύσκολη να επιλυθεί και μερικές φορές αυτό είναι ακατόρθωτο.

Γι'αυτό το λόγο, στην περίπτωση των Αρχιμήδειων συνδέσμων, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα :

Θεώρημα 5.1

Έστω $C(u_1,u_2,...,u_n) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+...+\varphi(u_n))$ να είναι ένας Αρχιμήδειος n-διάστατος σύνδεσμος με γεννήτρια $\varphi(\cdot)$, τότε για k=2,...,n έχουμε :

$$C_k(u_k|u_1,...,u_{k-1})=\frac{\varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+...+\varphi(u_k))}{\varphi^{-1(k-1)}(\varphi(u_1)+\varphi(u_2)+...+\varphi(u_{k-1}))}. \tag{5.7}$$

Τώρα, ας δούμε πως μπορούμε να εφαρμόσουμε όλα τα παραπάνω σε δύο Αρχιμήδειες συναρτήσεις συνδέσμων, την συνάρτηση συνδέσμου Frank και την συνάρτηση συνδέσμου Clayton.

5.1.1 Προσομοίωση Συνδέσμου Frank

Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 4, ο τύπος της οικογένειας Frank είναι

$$C_\theta(u,v)= -\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{\left(e^{-\theta u}-1\right)\left(e^{-\theta v}-1\right)}{e^{-\theta}-1}\right),$$

ο οποίος στην πολυδιάστατη περίπτωση γενικεύεται ως:

$$C_\theta(u_1,u_2,...,u_n)= -\frac{1}{\theta}\ln\left(1+\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(e^{-\theta u_i}-1\right)}{(e^{-\theta}-1)^{n-1}}\right),$$

και έχει γεννήτρια συνάρτηση την $\varphi_\theta(t) = -\ln\dfrac{e^{-\theta t}-1}{e^{-\theta}-1}$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε την $\varphi_\theta^{-1}(t)$, η οποία είναι :

$$\varphi_\theta^{-1}(t) = -\frac{1}{\theta}\ln\left(1+e^t(e^{-\theta}-1)\right)$$

Η πρώτη παράγωγός της είναι :

$$\varphi_\theta^{-1(1)}(t) = -\frac{1}{\theta}\frac{e^t(e^{-\theta}-1)}{1+e^t(e^{-\theta}-1)}.$$

Θέτοντας τώρα $w=\dfrac{e^t(e^{-\theta}-1)}{1+e^t(e^{-\theta}-1)}$ έχουμε :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -w(w-1) \quad \text{και} \quad \varphi_\theta^{-1(1)}(t) = -\frac{1}{\theta}w.$$

Οπότε έχουμε:

$$\varphi_\theta^{-1(2)}(t) = \frac{1}{\theta}w(w-1),$$

και ο γενικός τύπος είναι:

$$\varphi_\theta^{-1(1)}(t) = -\frac{1}{\theta}g_1(w) \quad \text{με} \quad g_1(w)=w,$$

και

$$\varphi_\theta^{-1(k)}(t) = (-1)^k\frac{1}{\theta}g_k(w) \quad \text{με} \quad g_k(w)=w(w-1)g_{k-1}^{(1)}(w),$$

όπου $g_{k-1}^{(1)}(w)=\dfrac{\partial g_{k-1}}{\partial w}$ και $k\geq 2$.

Οπότε ο αλγόριθμος που θα χρησιμοποιήσουμε για να παράγουμε αριθμούς από την διδιάστατη συνάρτηση συνδέσμου Frank είναι ο ακόλουθος:

- Παράγουμε δύο ανεξάρτητους τυχαίους αριθμούς $U_1, U_2 \sim U(0,1)$.
- Θέτουμε $X_1 = U_1$.
- Θέτουμε $U_2 = C_2(X_2|U_1)$, οπότε

$$U_2 = \frac{\varphi_\theta^{-1(1)}(c_2)}{\varphi_\theta^{-1(1)}(c_1)}$$

με $c_1 = \varphi(X_1) = \ln\left(\dfrac{e^{-\theta X_1}-1}{e^{-\theta}-1}\right)$ και $c_2=\varphi(X_1)+\varphi(X_2)=\ln\left(\dfrac{(e^{-\theta X_1}-1)(e^{-\theta X_2}-1)}{(e^{-\theta}-1)^2}\right)$.

Άρα έχουμε $U_2 = e^{-\theta X_1}\dfrac{e^{-\theta X_2}-1}{e^{-\theta}-1+(e^{-\theta X_1}-1)(e^{-\theta X_2}-1)}$.

Λύνοντας τώρα ως προς το X_2 παίρνουμε το δεύτερο ζητούμενο στοιχείο:

$$X_2 = -\frac{1}{\theta}\ln\left\{1+\frac{U_2(1-e^{-\theta})}{U_2(e^{-\theta X_1}-1)-e^{-\theta X_1}}\right\}.$$

5.1.2 Προσομοίωση Συνδέσμου Clayton

Όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 4, ο τύπος της οικογένειας Clayton είναι $C_\theta(u,v)=\max([u^{-\theta}+v^{-\theta}-1]^{-1/\theta},0)$, και έχει γεννήτρια συνάρτηση την $\varphi_\theta(t)=\frac{1}{\theta}(t^{-\theta}-1)$. Ο σύνδεσμος αυτός στην πολυδιάστατη περίπτωση γενικεύεται ως :

$$C_\theta(u_1,u_2,...,u_n)=\left[\sum_{i=1}^{n}u_i^{-\theta}-n+1\right]^{-\frac{1}{\theta}} \quad \text{με } \theta>0$$

με γεννήτρια συνάρτηση την $\varphi_\theta(t)= t^{-\theta}-1$, η οποία αντιστρέφεται ως εξής :

$$\varphi_\theta^{-1}(t)= (t+1)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

Οι παράγωγοι της τελευταίας συνάρτησης είναι οι εξής:

$$\varphi_\theta^{-1(1)}(t)= -\frac{1}{\theta}(t+1)^{-\frac{1}{\theta}-1}$$

$$\varphi_\theta^{-1(2)}(t)= \frac{1}{\theta}\frac{\theta+1}{\theta}(t+1)^{-\frac{1}{\theta}-2}$$

$$\varphi_\theta^{-1(k)}(t)=(-1)^k \frac{(\theta+1)(\theta+2)...(\theta+k-1)}{\theta^k}(t+1)^{-\frac{1}{\theta}-k}.$$

Συνεπώς, και με βάση το παραπάνω θεώρημα, ο αλγόριθμος που θα χρησιμοποιήσουμε για να παράγουμε αριθμούς από την διδιάστατη συνάρτηση συνδέσμου Clayton είναι ο ακόλουθος :

- Παράγουμε δύο ανεξάρτητους τυχαίους αριθμούς $U_1,U_2 \sim U(0,1)$.
- Θέτουμε $X_1=U_1$.

- Θέτουμε $U_2 = C_2(X_2|U_1)$, οπότε

$$U_2 = \frac{\varphi_\theta^{-1(1)}(c_2)}{\varphi_\theta^{-1(1)}(c_1)}$$

με $c_1=\varphi(X_1)=X_1^{-\theta}-1$ και $c_2=\varphi(X_1)+\varphi(X_2)=X_1^{-\theta}+X_2^{-\theta}-2$.

Άρα έχουμε $U_2 = \left(\frac{X_1^{-\theta}+X_2^{-\theta}-1}{X_1^{-\theta}}\right)^{-\frac{1}{\theta}-1}$.

Οπότε το δεύτερο ζητούμενο στοιχείο είναι :

$$X_2=\left(U_1^{-\theta}\left(U_2^{-\frac{\theta}{\theta+1}}-1\right)+1\right)^{-\frac{1}{\theta}}.$$

5.1.3 Μελέτη Αποτελεσμάτων Προσομοίωσης

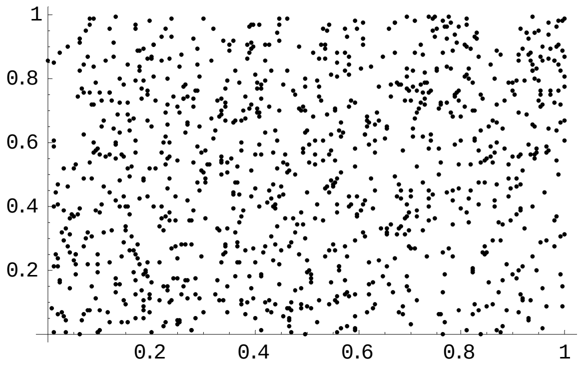
Σε αυτήν την παράγραφο θα δούμε τα αποτελέσματα που δίνουν οι αλγόριθμοι που περιγράψαμε παραπάνω. Προσομοιώνουμε κάθε σύνδεσμο για τρεις διαφορετικές τιμές του θ, (για θ=0.8, για θ=5 και για θ=20) και όπου μπορούμε θα προσομοιώσουμε τις ακραίες περιπτώσεις των συνδέσμων αυτών.

Ας δούμε τώρα τον αλγόριθμο που χρησιμοποιήσαμε για να προσομοιώσουμε τον σύνδεσμο του Frank :

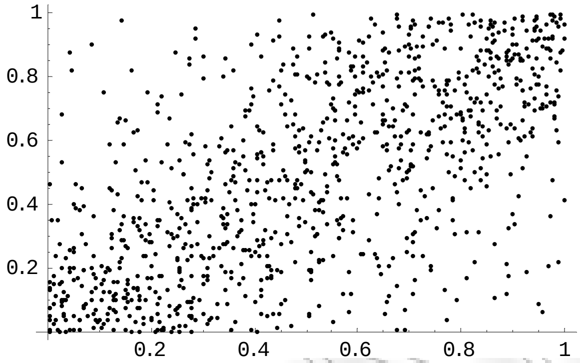
```
θ = 0.8; n = 1000;
Λίστα = {};
Do[
  U1 = Random[];
  U2 = Random[];
  X1 = U1;
  X2 = -(1/θ) * Log[1 + (U2 * (1 - Exp[-θ]) / (U2 * (Exp[-θ * X1] - 1) - Exp[-θ * X1]))];
  AppendTo[Λίστα, {X1, X2}];
  , {n}];

ListPlot[Λίστα]
```

Τα γραφικά αποτελέσματα που πήραμε για τις τρεις διαφορετικές τιμές του θ είναι τα παρακάτω τρία διαγράμματα :

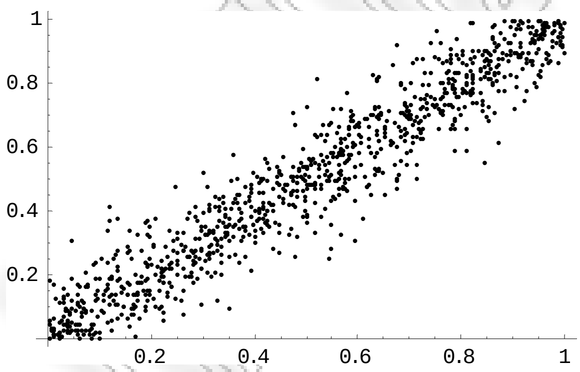
Για θ=0.8



Για θ=5



Για θ=20

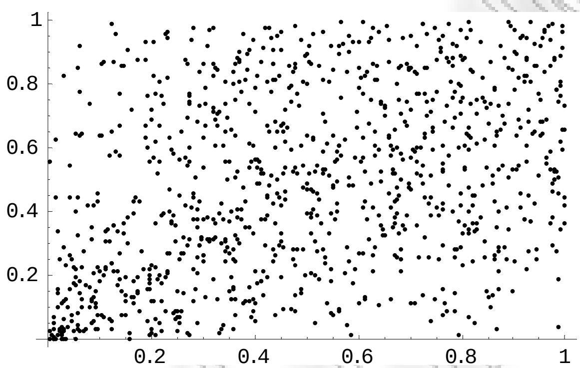


Ο αλγόριθμος που χρησιμοποιήσαμε για την προσομοίωση του συνδέσμου Clayton είναι ο εξής:

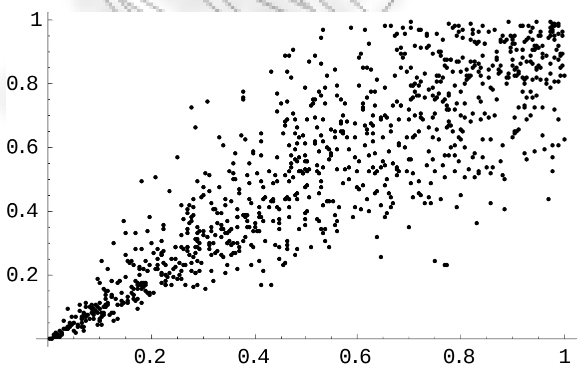
```
θ = 0.8; n = 1000;
Λίστα = {};
Do[
  U1 = Random[];
  U2 = Random[];
  X1 = U1;
  X2 = ((U1^(-θ)) * ((U2^(-θ/(θ+1))) - 1) + 1)^(-1/θ);
  AppendTo[Λίστα, {X1, X2}];
  , {n}];


ListPlot[Λίστα]
```

Τα γραφικά αποτελέσματα που πήραμε για τις τρεις διαφορετικές τιμές του θ είναι τα παρακάτω τρία διαγράμματα:

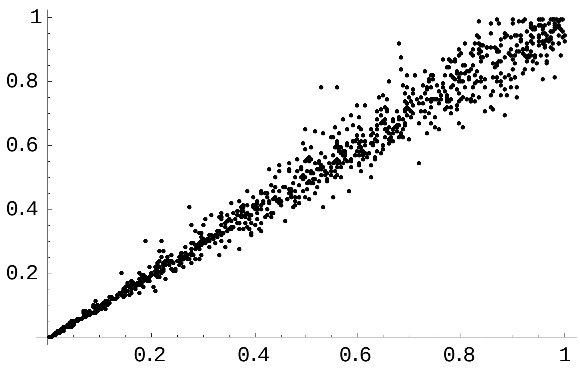
Για θ=0.8



Για θ=5



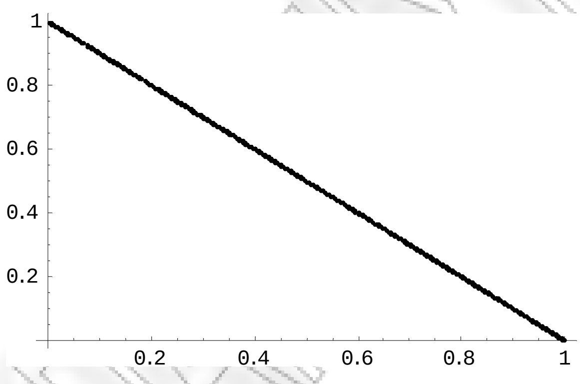
Για θ=20



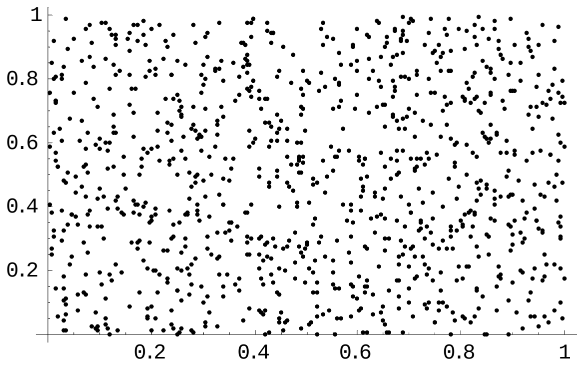
Όπως έχουμε δει στο κεφάλαιο 4, οι ακραίες περιπτώσεις για τον σύνδεσμο Frank είναι οι $C_{-\infty}=W$, $C_0=\Pi$, $C_{\infty}=M$. Οι τρεις αυτές περιπτώσεις δεν είναι εύκολο να προσομοιωθούν καθώς δεν ορίζεται ο σύνδεσμος Frank για τις τιμές αυτές του θ. Για να πάρουμε όμως μία ιδέα με το πως θα είναι οι γραφικές τους παραστάσεις, προσομοιώσαμε τους δύο πρώτους συνδέσμους για τιμές του θ πολύ οριακές. Τα αποτελέσματα που πήραμε είναι τα ακόλουθα:

Ακραίες Περιπτώσεις για τον σύνδεσμο Frank

$\boldsymbol{\theta \to -\infty}$



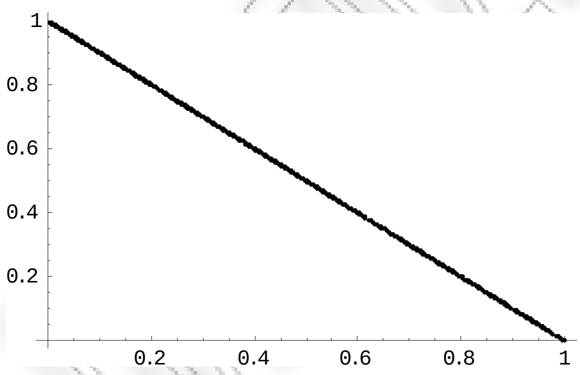
$\boldsymbol{\theta \to 0}$



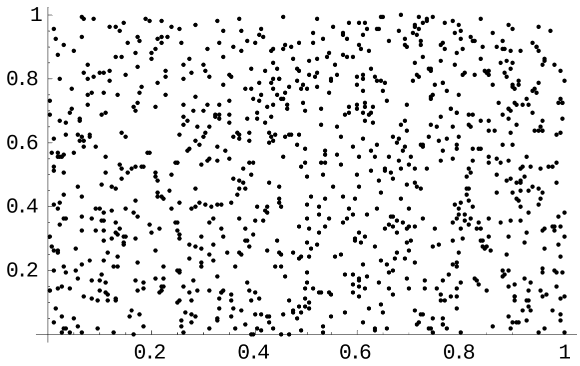
Οι ακραίες περιπτώσεις που είδαμε στο κεφάλαιο 4 για τον σύνδεσμο Clayton είναι οι $C_{-1}=W$, $C_0=\Pi$, $C_1=\dfrac{\Pi}{\Sigma-\Pi}$, $C_\infty=M$. Και εδώ προσπαθήσαμε να προσομοιώσουμε τις ακραίες αυτές περιπτώσεις και πήραμε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Ακραίες Περιπτώσεις για τον σύνδεσμο Clayton

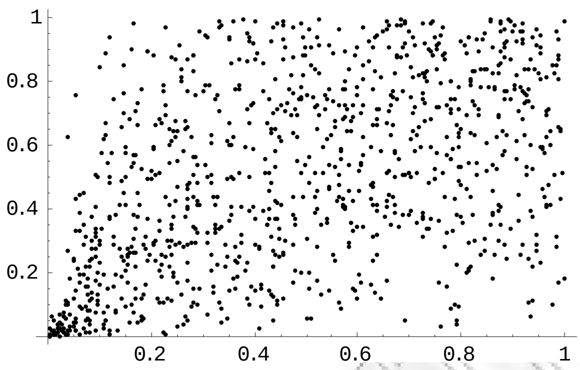
$\theta \to -1$



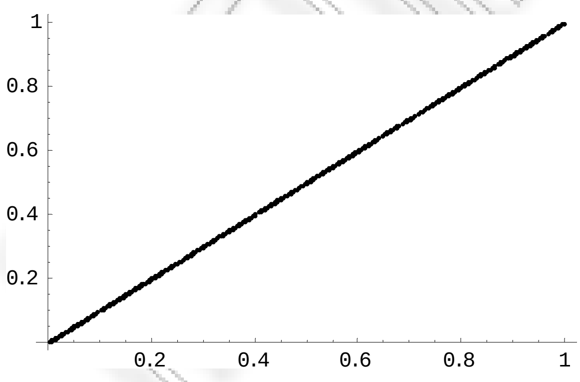
$\theta \to 0$



θ→1



θ→ ∞



Αυτό που μπορούμε να δούμε από τα παραπάνω διαγράμματα είναι ότι όσο μεγαλώνει το θ, τόσο μεγαλύτερη φαίνεται να είναι η συσχέτιση που υπάρχει. Αυτό είναι ακόμα πιο προφανές αν δούμε τους εμπειρικούς τύπους που έχουν δοθεί για τον υπολογισμό μέτρων συσχέτισης, όπως ο συντελεστής συσχέτισης τ του Kendall. (βλ. “An introduction to Copulas”, pp. 130 και “Copula Methods in Finance”, pp. 126.)

Ο τύπος αυτός για την περίπτωση του συνδέσμου Clayton έχει την μορφή

$$\frac{\theta}{\theta+2}.$$

Η συνάρτηση αυτή είναι αύξουσα ως προς θ, άρα είναι λογικό όσο μεγαλώνει το θ, τόσο να μεγαλώνει και η συσχέτιση που υπάρχει.

Ο τύπος υπολογισμού του τ του Kendall στην περίπτωση του συνδέσμου Frank έχει την μορφή

$$1+\frac{4}{\theta}\left(D_1(\theta)-1\right),$$

όπου $D_1(\theta)=\frac{1}{\theta}\int_0^\theta \frac{t}{\exp(t)-1}dt$.

Και η τελευταία συνάρτηση είναι αύξουσα ως προς θ, συνεπώς επιβεβαιώνεται το γεγονός ότι όσο μεγαλύτερο είναι το θ, τόσο μεγαλώνει και η συσχέτιση.

Για να ελέγξουμε πόσο ακριβείς είναι οι τύποι αυτοί σε σχέση με την συσχέτιση που υπάρχει στα δείγματα που πήραμε από την προσομοίωσή μας, μεταφέραμε το δείγμα μας στο SPSS, και τα αποτελέσματα που πήραμε είναι :

Correlations

			X1	X2
Kendall's tau_b	X1	Correlation Coefficient	1,000	,904(**)
		Sig. (2-tailed)	.	,000
		N	1000	1000
	X2	Correlation Coefficient	,904(**)	1,000
		Sig. (2-tailed)	,000	.
		N	1000	1000

** Correlation is significant at the 0.01 level (2-tailed).

Οι υπολογισμοί γίνανε στο δείγμα που είχαμε πάρει από την προσομοίωση του συνδέσμου Clayton για θ=20. Συνεπώς, με βάση τον παραπάνω τύπο, το τ του

Kendall είναι $\frac{20}{22} = 0,909$, το οποίο είναι πάρα πολύ κοντά στο 0,904, που είναι το τ του Kendall που υπολογίστηκε από το δείγμα μας.

Βιβλιογραφία

[1] Nelsen, R. B., (1999), "An Introduction To Copulas", Springer, New York.

[2] Cherubini, U., Luciano, E. and Vecchiato, W., (2004), COPULA METHODS IN FINANCE, John Wiley & Sons, Ltd.

[3] Marshall, A. W. and Olkin, I. (1967a), "A Generalised Bivariate Exponential Distribution", *Journal of Applied Probability*, **4**, p. 291-302.

[4] Marshall, A. W. and Olkin, I. (1967b), "A Multivariate Exponential Distribution", *Journal of the American Statistical Association*, **62**, p. 30-44.

[5] Marshall, A. W. and Olkin, I. (1988), "Families of Multivariate Distributions", *Journal of the American Statistical Association*, **83**, p. 834-841.

[6] Frees, E. W. and Valdez, E. A., "Understanding Relationships Using Copulas", *North American Actuarial Journal*, **2**, p. 1-25.

[7] Bouye, E., Durrleman, V., Nikeghbali, A.,…, "Copulas for Finance. A Reading Guide and Some Applications", GRO, Credit Lyonnais, 2000.

[8] Wu, F., Valdez, E. A. and Sherris, M., "Simulating Exchangeable Multivariate Archimedean Copulas and its Applications", Available at www.google.com and search by the title.

[9] Dias Da Costa, A., "Copula Inference for Finance and Insurance", Doctoral Thesis submitted to the Swiss Federal Institute of Technology Zurich.

[10] Genest, C. and MacKay, J. (1986), "The Joy of Copulas: Bivariate Distributions with Uniform Marginals", *American Statician*, **40**, p.280-283.

[11] Clemen, R. T., Reilly, T., "Correlations and Copulas for Decision and Risk Analysis", *Management Science*, 1999.

[12] Frey, R., McNeil, A. and Nyfeler, M., "Copulas and Credit Models", *RISK*, 2001.

[13] Malevergne, Y. and Sornette, D., (2003), "Testing the Gaussian Copula Hypothesis for Financial Assets Dependences", *Quantitative Finance*, Taylor & Francis.

[14] Romano, C., (2002), "Calibating and Simulating Copula Functions: An Application to the Italian Stock Market", Risk Management Function, Capitalia, Viale U. Tupini.

[15] Aas, K., "Modelling the Dependence Structure of Financial Assets : A Survey of Four Copulas", Norwegian Computing Center.

[16] Fisher, N. I. (1997), "Copulas", *Encyclopedia of Statistical Sciences*, Update Vol. **1**, pp. 159-163.

[17] Sklar, A. (1959), “Fonctions de repartition à n dimensions et leurs marges”, *Publ. Inst. Statist. Univ. Paris* **8**, pp 229-231.

[18] Hoeffding, W. (1940), “Masstabinvariante Korrelationstheorie”, reprinted as “Scale-invariant correlation theory”, *The Collected Work of Wassily Hoeffding*, N. I. Fisher and P. K. Sen, editors (Springer-Verlang, New York), pp.57-107.

[19] Dwass, M. and Teicher, H. (1957), “On infinitely divisible random vectors”, *Ann. Math. Statist.*, **28**, pp 461-470.

[20] Schweizer, B. and Sklar, A., (1983), “Probabilistic Metric Spaces”, North-Holland, New-York.

[21] Ling, C.-H., (1965), “Representation of associative functions”, *Publ. Math. Debrecen,* **12**, pp 189-212.

[22] Schweizer, B., (1991), “Thirty years of copulas”, *Advances in Probability Distributions with Given Marginals,* G. Dall’Aglio, S. Kotz, and G. Salinetti, editors (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht), pp 13-50.

[23] Mikosch, T., (2005), “ How to model multivariate extremes if one must?”, *Statistica Neerlandica*, **59**, pp 324-338.

[24] Mikosch, T., (2006), “**Copulas**: Tales and facts”, *Extremes*, **9**, pp 3-20.