



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Ευθέα και Αντίστροφα Προβλήματα Σκέδασης
Επιπέδων και Σφαιρικών Ελαστικών Κυμάτων

Αγγελική Καϊάφα
ΔΙΔΑΚΤΟΡΙΚΗ ΔΙΑΤΡΙΒΗ

Υποβλήθηκε στο
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
του Πανεπιστημίου Πειραιώς
Πειραιάς
Μάϊος 2022



UNIVERSITY OF PIRAEUS
DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

Direct and Inverse Scattering Problems
of
Plane and Spherical Elastic Waves

Angeliki Kaiafa
PhD Thesis

Submitted to
Department of Statistics and Insurance Science
of University of Piraeus
Piraeus
May 2022

Πανεπιστήμιο Πειραιώς
Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

Ευθέα και Αντίστροφα Προβλήματα Σκέδασης
Επιπέδων και Σφαιρικών Ελαστικών Κυμάτων

Διδακτορική Διατριβή
Αγγελική Καϊάφα

Επταμελής επιτροπή:

Π. Βαφέας, Αναπληρωτής Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Πατρών

Ε. Κόττα Αθανασιάδου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια, Εθνικό και
Καποδιστριακό Πανεπιστήμιο Αθηνών (Ε.Κ.Π.Α.)

Γ. Πελεκάνος, Καθηγητής, Southern Illinois University at Edwardsville,
Illinois USA

Κ. Πολίτης, Αναπληρωτής Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Μ. Ρασιτιάς, Αναπληρωτής Καθηγητής, Στρατιωτική Σχολή Ευελπίδων
(Σ.Σ.Α.)

Β. Σεβρόγλου, Αναπληρωτής Καθηγητής (επιβλέπων καθηγητής),
Πανεπιστήμιο Πειραιώς

Αλ. Χροναίος, Καθηγητής, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας.

Αφιέρωση

Αφιερώνω την παρούσα διατριβή στην πολυαγαπημένη μου μητέρα, Δώρα, στον πολυαγαπημένο μου πατέρα, Κυριάκο, και στον πολυαγαπημένο μου αδερφό, Χρήστο για την ύπαρξη και την μοναδικότητά τους. Επιπλέον, την αφιερώνω στον λατρεμένο μου σκύλο, τον Παντέλο, για την διατήρηση της αθωότητας και της ευαισθησίας. Αποτελούν όλοι τους την αρχή των πάντων μου.

Ευχαριστίες

Ευχαριστώ κάθε άνθρωπο που πίστεψε σ'εμένα και τους φίλους μου, οι οποίοι (σχεδόν) πάντα έδειχναν κατανόηση και έκαναν όμορφη αυτή την μακρόχρονη ενεργή ενασχόλησή μου με τα Μαθηματικά.

Ευχαριστώ τους ιδεολογικούς μου συντρόφους, οι οποίοι αποτέλεσαν σταθερά έναν από τους λόγους για τους οποίους παλεύω με το ήθος που χαρακτηρίζει την αριστερά από το δικό μου μετερύζι για έναν κόσμο άλλο.

Ευχαριστώ τα μέλη της επταμελούς επιτροπής: Π. Βαφέας, Ε. Κόττα Αθανασιάδου, Γ. Πελεκάνος, Κ. Πολίτης, Μ. Ρασισιάς, Β. Σεβρόγλου, Αλ. Χροναίος, για την τιμή που μου έκαναν να συμμετάσχουν σε αυτή.

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα αναπληρωτή καθηγητή Δρ. Βασίλειο Σεβρόγλου τόσο για την ευκαρία που μου έδωσε να συνεχίσω τις σπουδές μου, όσο και για τις γνώσεις με τις οποίες με εφοδίασε με τον τρόπο του. Τον ευχαριστώ ακόμη, διότι, ήταν η αφορμή να συμμετάσχω σε διεθνή συνέδρια, τα οποία αποτελούν για εμένα εμπειρία ζωής κυρίως διότι ήταν η αφορμή για να γνωρίσω αληθινά υπέροχους ανθρώπους.

Ευχαριστώ τους Δασκάλους μου από την Πάτρα μέχρι την Αθήνα για την διαμόρφωση της μαθηματικής μου κουλτούρας και διαίσθησης. Ιδιαίτερος ευχαριστώ τους Δασκάλους μου από το Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών, οι οποίοι με έκαναν, μέσω της ποιότητας και του ήθους τους, να καταλάβω ότι δεν μπορείς να διεκδικείς να είσαι μέλος της μαθηματικής κοινότητας αν πρωτίστως δεν παλεύεις να είσαι ηθικός άνθρωπος. Οι Δάσκαλοι μου στη Πάτρα μου έδειξαν την τεράστια αξία που έχει να είσαι ένας ταπεινός εργάτης των Μαθηματικών.

Ευχαριστώ από καρδιάς τη συνάδελφο και επιστήθια φίλη Δρ. Σωτηρία Δημητρούλα για την καθολική στήριξη και φιλία της.

Ευχαριστώ τα αδέρφια της μητέρας μου και τις οικογένειες αυτών γιατί η αγάπη τους και η πίστη τους σε εμένα αποτέλεσαι έναν από τους βασικούς λόγους για να συνεχίζω.

Τέλος και πάνω από όλ@ ευχαριστώ την οικογένειά μου που στήριξε άνευ όρων και με όλες τις δυνάμεις της, κάθε επιλογή μου αδιαφορώντας για το κόστος.

Περίληψη

Στην παρούσα διατριβή μελετάμε ευθέα και αντίστροφα προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων από ένα μη-διαπερατό μερικώς επικαλυμμένο αντικείμενο που βρίσκεται σε ένα ομογενές και ισότροπο ελαστικό μέσο. Μοντελοποιούμε μαθηματικά το πρόβλημα σκέδασης μέσω της φασματικής εξίσωσης Navier, θεωρώντας προσπίπτοντα κυματικά πεδία από σημειακές πηγές, με αντίστοιχα σκεδασμένα κυματικά πεδία, τα οποία λαμβάνονται σε μία κλειστή, λεία καμπύλη στο εσωτερικό του αντικειμένου-σκεδαστή. Ιδιαίτερα, από μαθηματικής άποψης, το μοντέλο μας περιγράφεται από ένα εσωτερικό, μεικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών στο οποίο το σκεδασμένο πεδίο ικανοποιεί τη μεικτή συνοριακή συνθήκη τύπου Dirichlet-Robin στο λείο σύνορο του σκεδαστή. Αποδεικνύουμε για το ευθύ πρόβλημα σκέδασης την καλή τοποθέτηση του σε κατάλληλο συναρτησιακό πλαίσιο χρησιμοποιώντας χώρους Sobolev και συγκεκριμένα θεμελιώνουμε αποτελέσματα μοναδικότητας, ύπαρξης και ευστάθειας λύσης. Αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάζουμε επίσης για το ευθύ πρόβλημα σκέδασης από ένα μη-ομογενές ελαστικό μέσο με άγνωστα θαμμένα αντικείμενα στο εσωτερικό του. Επίσης, μελετάμε τα αντίστοιχα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης και χρησιμοποιώντας κατάλληλους βοηθητικούς ολοκληρωτικούς τελεστές, μορφής δυναμικών απλού και διπλού στρώματος, θεμελιώνουμε μία τροποποιημένη μέθοδος παραγοντοποίησης για την επίλυσή του. Επιπλέον, παρουσιάζουμε και αποδεικνύουμε όλο το θεωρητικό πλαίσιο μέσω του οποίου προτείνεται αλγόριθμος αντιστροφής για την ανακατασκευή του συνόρου, του μερικώς επικαλυμμένου σκεδαστή. Τέλος, παραθέτουμε χρήσιμες παρατηρήσεις, συμπεράσματα και εφαρμογές σχετικά με το ευθύ πρόβλημα σκέδασης και τη σύνδεσή του με το αντίστροφο.

Abstract

In this dissertation, we study direct and inverse scattering problems of elastic waves by a non-penetrable partially coated object located in a homogeneous and isotropic elastic medium. We formulate the scattering problem via the Navier equation by considering the incident waves due to point sources where the corresponding scattered waves are measured on a closed, smooth curve inside the scatterer-object. From a mathematical point of view, our model is described by a mixed boundary value problem where the scattered field satisfies a Dirichlet-Robin mixed boundary condition on the boundary of the scatterer. We prove, for the direct scattering problem, well posedness in an appropriate Sobolev space setting and in particular we prove uniqueness, existence and stability of the solution as well. We also present similar results for the direct scattering problem by a non-homogeneous elastic medium with unknown buried obstacles. We also study the corresponding inverse scattering problems by introducing appropriate auxiliary integral operators in the form of single and double-layer potential from which a modified factorization method is established. In addition, we present and prove an inversion algorithm for the reconstruction of the boundary of the partially coated scatterer. Finally, we state useful remarks, conclusions and applications.

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	8
1.1	Κυματικά Προβλήματα	8
1.2	Θεωρία Σκέδασης	9
1.3	Περιγραφή Βασικών Μεθόδων Επίλυσης Προβλημάτων Σκέδασης	10
2	Βασικές Μαθηματικές Έννοιες της Γραμμικής Ελαστικότητας	14
2.1	Η Εξίσωση Navier της Δισδιάστατης Γραμμικής Ελαστικότητας	14
2.2	Η Θεμελιώδης Λύση και ο Επιφανειακός Τελεστής Τάσεων	17
2.3	Τα Προβλήματα Συνοριακών Τιμών της Γραμμικής Ελαστικότητας	19
2.4	Τα Προβλήματα Σκέδασης και η Καλή Τοποθέτηση αυτών	21
2.5	Οι Ολοκληρωτικές Αναπαραστάσεις, τα Πλάτη Σκέδασης και τα Δυναμικά Απλού και Διπλού Στρώματος	24
3	Το Μεικτό Πρόβλημα Σκέδασης	29
3.1	Βασικές Έννοιες	29
3.2	Η Καλή Τοποθέτηση του Προβλήματος	32
3.3	Η Τροποποιημένη Μεταβολική Μέθοδος στο Μεικτό Πρόβλημα Σκέδασης	35
4	Το Αντίστροφο Μεικτό Πρόβλημα Σκέδασης	45
4.1	Διατύπωση Αντίστροφου Μεικτού Προβλήματος Σκέδασης	45
4.2	Ολοκληρωτικοί Τελεστές - Δυναμικά Απλού και Διπλού Στρώματος	51
4.3	Η Τροποποιημένη Μέθοδος Παραγοντοποίησης	55
4.4	Ο Αλγόριθμος της Αντιστροφής	67

4.5	Εφαρμογές και Συμπεράσματα	80
-----	--------------------------------------	----

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Κυματικά Προβλήματα

Υπάρχουν τρεις βασικές κατηγορίες κυματικών προβλημάτων σε μη-φραγμένα ακουστικά, ηλεκτρομαγνητικά και ελαστικά μέσα [20], [79], [93]. Αυτά αφορούν τη διάδοση, την ακτινοβολία και τη σκέδαση ενός διαδιδόμενου κυματικού πεδίου. Ως κύμα ή *κυματικό πεδίο* ορίζουμε τη διαταραχή που διαδίδεται στο χώρο εντός ενός υλικού μέσου. Τα διάφορα είδη κυμάτων διαθέτουν ως κοινό χαρακτηριστικό τη μεταφορά ενέργειας κατά τη διάδοσή τους.

Όπως αναφέραμε, τα κυματικά προβλήματα απαντούν σε περιοχές της ακουστικής, του ηλεκτρομαγνητισμού και της ελαστικότητας. Αξίζει να σημειωθεί η συνεισφορά των D'Alembert (1746) και Euler (1766). Ο D'Alembert ανακάλυψε τη μονοδιάστατη εξίσωση του κύματος που αφορούσε την ταλαντούμενη χορδή. Ο Euler ασχολήθηκε εκτενώς με την τρισδιάστατη κυματική εξίσωση.

Η θεωρία της κυματικής διάδοσης μελετά το είδος και τη μορφή των κυμάτων που διαδίδονται σε ένα μέσο και τον τρόπο που αυτά διαμορφώνονται από τις φυσικές και γεωμετρικές ιδιότητες του χώρου στον οποίο διαδίδονται. Στην κυματική διάδοση δεν αποτελεί αντίκειμενο μελέτης η πηγή από την οποία δημιουργήθηκε το διαδιδόμενο κυματικό πεδίο. Αντίθετα, αυτό δεν ισχύει στη θεωρία ακτινοβολίας της οποίας αντικείμενο μελέτης είναι όχι μόνο η συμπεριφορά και η μορφή των κυμάτων αλλά και η πηγή από την οποία παράγονται κάθε φορά.

Ενδεικτικά παραδείγματα της θεωρίας ακτινοβολίας αποτελούν η μετακίνηση δύο τεκτονικών πλακών και η τροφοδοσία μίας κεραίας, εκπομπής, στα οποία έχουμε σεισμικά

και ηλεκτρομαγνητικά κύματα αντίστοιχα.

1.2 Θεωρία Σκέδασης

Στην ενότητα αυτή αναφέρουμε τα προβλήματα σκέδασης, για τα οποία ο χώρος διάδοσης παρουσιάζει ορισμένες ανομοιογένειες. Το φαινόμενο της σκέδασης κυματικών πεδίων παρατηρείται όταν μέσα σε ένα υλικό μέσο που αποτελεί το χώρο διάδοσης, διαδίδεται ένα εκ των προτέρων γνωστό κυματικό πεδίο, το οποίο ονομάζεται *προσπίπτον κυματικό πεδίο* και το οποίο συναντά ένα εμπόδιο, γνωστό ως *σκεδαστή*. Ο σκεδαστής μπορεί να είναι είτε κάποια χωρική ασυνέχεια είτε κάποια μεταβολή στις φυσικές ιδιότητες του χώρου. Ο σκεδαστής προκαλεί τη δημιουργία ενός νέου κυματικού πεδίου, το οποίο ονομάζεται *σκεδασμένο* και εκτροπή μέρους της ενέργειας που αρχικά εξέπεμψε το προσπίπτον κυματικό πεδίο.

Τα προβλήματα σκέδασης διακρίνονται σε *ευθέα* και *αντίστροφα*. Ως ευθύ πρόβλημα σκέδασης ορίζεται ο καθορισμός του σκεδασμένου κυματικού πεδίου μέσω της εκ των προτέρων γνώσης που έχουμε για το προσπίπτον κυματικό πεδίο και τις φυσικές και γεωμετρικές ιδιότητες του σκεδαστή. Ως αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης ορίζεται ο καθορισμός των γεωμετρικών ή/και φυσικών ιδιοτήτων του σκεδαστή μέσω της εκ των προτέρων γνώσης που έχουμε για το προσπίπτον και το σκεδασμένο κυματικό πεδίο.

Τα αντίστροφα προβλήματα σκέδασης παίζουν σημαντικό ρόλο σε διάφορες εφαρμογές και βρίσκονται στην αιχμή της σύγχρονης τεχνολογίας, όπως ο μη-καταστρεπτικός έλεγχος, η αξονική τομογραφία, τα ραντάρ, ο εντοπισμός και καθορισμός υπερήχων, η γεωφυσική και πολλά άλλα. Επιπλέον, εφαρμογές των αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης χρησιμοποιούνται ευρέως σε μελέτες που αφορούν τον τομέα της γεωφυσικής.

Στη συνέχεια, αναφέρουμε τη μελέτη του προβλήματος σκέδασης, αρχικά του ευθέως και έπειτα του αντίστροφου. Αρχικά το ευθύ πρόβλημα σκέδασης είναι ορίζεται ως καλά τοποθετημένο κατά Hadamard, όταν έχουμε *ύπαρξη* μίας τουλάχιστον λύσης, *μοναδικότητα* λύσης και όταν η λύση εξαρτάται συνεχώς από τα αρχικά δεδομένα του προβλήματος. Μία τέτοια λύση χαρακτηρίζεται *ευσταθής*. Η συνεχής εξάρτηση της λύσης από τα δεδομένα είναι πολύ σημαντική γιατί σε εφαρμοσμένα προβλήματα υπάρχουν αρχικές και συνοριακά δεδομένα τα οποία υπολογίζονται χρησιμοποιώντας μετρήσεις, με αποτέλεσμα να περιέχουν σφάλματα. Τα σφάλματα αυτά μεταφέρονται στη λύση και επομένως, η απαιτούμενη ευστάθεια μας εξασφαλίζει ότι μικρές τιμές σφάλματων των δεδομένων επιφέρουν αντίστοιχα μικρές τιμές στα σφάλματα της λύσης. Η καλή το-

ποθέτηση κατά Hadamard ενός ευθέως προβλήματος σκέδασης εξασφαλίζεται από τη συνθήκη ακτινοβολίας του A. Sommerfeld [92] η οποία δηλώνει ότι το σκεδασμένο πεδίο πολύ μακριά από το σκεδαστή έχει τη μορφή ενός αποκλίνοντος σφαιρικού κύματος. Στη σκέδαση ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων οι S. Silver, C. Müller [78] θεμελίωσαν μαθηματικά τη συνθήκη ακτινοβολίας ενώ στη σκέδαση ελαστικών κυμάτων, συνθήκες ακτινοβολίας για τα διαμήκη και τα εγκάρσια κύματα διατυπώθηκαν από τον V. Kupradze [71] για τις τρεις διαστάσεις και από τον T. Arens [5], [4] στις δύο διαστάσεις αντίστοιχα.

Η επίλυση του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης συνδέεται άμεσα με τον καθορισμό των φυσικών ή/και γεωμετρικών ιδιοτήτων του σκεδαστή. Αρχικά μελετάται η μοναδικότητα του αντίστροφου προβλήματος και στη συνέχεια ο προσδιορισμός/ανακατασκευή του σκεδαστή, η οποία επιτυγχάνεται με κατάλληλο αλγόριθμο αντιστροφής. Ενδεικτικά αναφέρουμε βιβλιογραφία σχετικά με ευθέα και αντίστροφα προβλήματα σκέδασης στην ακουστική [9], [10], τον ηλεκτρομαγνητισμό [11], [12], [18], [19] και ελαστικότητα [14], [15], [16], [17].

Πληθώρα μαθηματικών όπως οι N. Logan [75], X. Pao και C. Mow [79] έχουν περιγράψει εκτενώς την εξέλιξη της θεωρίας της σκέδασης ελαστικών κυμάτων. Ωστόσο, στην περιοχή της ελαστικότητας καθοριστική ήταν η συνεισφορά του V. Kupradze [70], [73]. Ο V. Kupradze απέδειξε τις ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις και την καλή τοποθέτηση του προβλήματος, επιπλέον, διατύπωσε τις συνθήκες ακτινοβολίας που χαρακτηρίζουν τα συγκεκριμένα προβλήματα. Πρώτοι από όλους οι C. Ying και R. Truell [98] μελέτησαν τη σκέδαση ελαστικών κυμάτων και έλυσαν πρόβλημα που αφορούσε τη σκέδαση επίπεδου διαμήκους κύματος το οποίο είχε προκληθεί από σκεδαστή σφαιρικού τύπου. Έπειτα, επιλύθηκε το αντίστοιχο πρόβλημα για το εγκάρσιο κυματικό πεδίο από τους N. Einspruch, E. Witterholt και R. Truell [38].

1.3 Περιγραφή Βασικών Μεθόδων Επίλυσης Προβλημάτων Σκέδασης

Σε αυτή την ενότητα θα περιγράψουμε βασικές μεθόδους επίλυσης προβλημάτων σκέδασης. Αρχικά γίνεται σύντομη αναφορά σε τέσσερις ιστορικές μεθόδους και έπειτα παραθέτουμε μία εκτενή αναφορά στη μέθοδο της παραγοντοποίησης, *factorization method*, η οποία αποτελεί σημαντικό μέρος της παρούσας διατριβής.

1. Η μέθοδος των Angell, Kleinman και Roach

Σε αυτή τη μέθοδο δημιουργείται ένα ισοδύναμο σύστημα ολοκληρωτικών εξισώσεων του αρχικού προβλήματος σκέδασης. Η εφαρμογή της μεθόδου απαιτεί την επίλυση του συστήματος από όλες τις συχνότητες. Έχει αποδειχθεί ότι είναι δυνατή η εφαρμογή της μεθόδου αυτής στην ακουστική για τα προβλήματα συνοριακών τιμών Dirichlet [29], Neumann [29] και διαπερατού σκεδαστή [3].

2. Η μέθοδος των Kirsch και Kress

Σε αυτή τη μέθοδο το σκεδασμένο κυματικό πεδίο αναπαρίσταται ως δυναμικό απλού στρώματος. Η ολοκλήρωση γίνεται στην ομαλή επιφάνεια πυκνότητας του εσωτερικού χωρίου που ορίζει το σύνορο του σκεδαστή. Υπολογίζεται το πλάτος σκέδασης ως ολοκλήρωμα έκφρασης, στην οποία συμμετέχει η πυκνότητα μέσω του δυναμικού απλού στρώματος. Η φιλοσοφία της μεθόδου είναι να ανακατασκευαστεί η πυκνότητα επι της εσωτερικής επιφάνειας μέσω της υπέρθεσης των τιμών του πλάτους σκέδασης. Έτσι, επιλύεται προσεγγιστικά μία μη καλώς τοποθετημένη ολοκληρωτική εξίσωση Fredholm πρώτου είδους.

3. Η μέθοδος των Colton και Monk

Η μέθοδος αυτή κυρίως χρησιμοποιείται για την επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης. Γίνεται χρήση των συναρτήσεων Herglotz [46], [47] και [94]-[97]. Σημαντική είναι η συμβολή του Γ. Δάσιου και Ζ. Ρήγου [35]-[37] στην ανάπτυξη της μεθόδου αυτής στη σκέδαση ελαστικών κυμάτων για τις τρεις διαστάσεις. Οι τελευταίοι επίλυσαν το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης ενός πλήρους τρισδιάστατου δυαδικού, τανιστικού, η οποία προκλήθηκε από ένα φραγμένο, σκληρό ελαστικά σώμα, το οποίο χαρακτηριζόταν από επιφανειακή συνοριακή συνθήκη μηδενισμού των μετατοπίσεων.

4. Η μέθοδος των Colton και Kirsch

Η μέθοδος των Colton και Kirsch [28] χρησιμοποιείται για την επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης. Κατασκεύασαν αλγόριθμο ανακατασκευής μη-διαπερατού σκεδαστή σε ομογενές και μη-ομογενές μέσο. Αυτό επιτεύχθηκε μέσω της εκ των προτέρων γνώσης που είχαν για τα πλάτη σκέδασης.

Σημαντική είναι η συμβολή του Δ. Γκιντίδη και Κ. Κυριάκη [42] όπου επέκτειναν την εφαρμογή της μεθόδου αυτής για τις περιπτώσεις του σκληρού σκεδαστή και της κοιλότητας στην τρισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα.

5. Η Μέθοδος της Παραγοντοποίησης

Η μέθοδος της παραγοντοποίησης έχει ως κύριο στόχο τον προσδιορισμό/την ανακατασκευή της άγνωστης επιφάνειας του σκεδαστή. Τα προβλήματα σκέδασης κατά την

μελέτη των οποίων γίνεται εντοπισμός και ταυτοποίηση άγνωστων αντικειμένων μέσω της θεωρίας των ακουστικών, ηλεκτρομαγνητικών και ελαστικών κυμάτων εντάσσονται στην κατηγορία των αντίστροφων προβλημάτων.

Τα σύνθετα μοντέλα στη θεωρία της σκέδασης περιλαμβάνουν προβλήματα συνοριακών τιμών για ειδικές διαφορικές εξισώσεις (*MAE*), όπως η εξίσωση Helmholtz στην ακουστική, οι εξισώσεις Maxwell στον ηλεκτρομαγνητισμό και η εξίσωση Navier στην ελαστικότητα. Ένα από τα πιο ενδιαφέροντα θέματα των αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης είναι ο καθορισμός της ανομοιογένειας του μέσου διάδοσης από τις μετρήσεις του πεδίου. Η μελέτη τέτοιου τύπου προβλημάτων βρίσκει εφαρμογή στην ιατρική απεικόνιση, στην επιστήμη των υλικών, στον μη καταστρεπτικό έλεγχο, στην παρακολούθηση της σεισμικής δραστηριότητας και στην τομογραφία. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις εργασίες [30], [54], [84] για τη σεισμική δραστηριότητα και τις [26], [48] στην τομογραφία.

Τα προβλήματα ανακατασκευής του σκεδαστή είναι εν γένει μη-γραμμικά, δηλαδή οι τιμές των μετρούμενων μεγεθών δεν εξαρτώνται γραμμικά από το προς ανακατασκευή αντικείμενο. Αυτό είναι αναμενόμενο αν λάβουμε υπόψη τα διάφορα φυσικά προβλήματα που συναντάμε. Ο πιο διαδεδομένος και επιτυχημένος τρόπος μελέτης αυτών των προβλημάτων είναι μέσω της χρήσης παραμετρικοποιήσεων προκειμένου να περιγραφούν προσεγγιστικά τα διάφορα εμπόδια (που συναντούν τα κυματικά πεδία). Οι παράμετροι που χρησιμοποιούνται υπολογίζονται αριθμητικά μέσω κατάλληλων επαναληπτικών σχημάτων. Μία τέτοιου είδους μέθοδος που είναι ίσως και η πιο διαδεδομένη είναι η μέθοδος τύπου Newton.

Οι μέθοδοι αυτού του τύπου ενώ πετυχαίνουν γρήγορη σύγκλιση, έχει τοπικό χαρακτήρα. Το κυριότερο μειονέκτημά τους είναι ότι απαιτείται η εκ των προτέρων γνώση σημαντικών πληροφοριών για το άγνωστο αντικείμενο, όπως οι συνθήκες διαπήδησης και ο τύπος των συνοριακών συνθηκών του προβλήματος σκέδασης.

Οι δυσκολίες και τα προβλήματα που παρουσιάζονται στις επαναληπτικές μεθόδους δημιούργησαν την ανάγκη να μελετηθούν και να αναπτυχθούν διαφορετικές μη-επαναληπτικές μέθοδοι των οποίων η λύση εξαρτάται αποκλειστικά από το ευθύ πρόβλημα και την καλή τοποθέτησή του. Μία τέτοια μέθοδος είναι αυτή της παραγοντοποίησης η οποία για να εφαρμοστεί απαιτείται να οριστούν ολοκληρωτικοί τελεστές που θα ικανοποιούν το θεμελιώδες θεώρημα των Kirsch και Grinberg (Θεώρημα 2.15 [66]). Συνήθως αυτό επιτυγχάνεται με την κατάλληλη παραγοντοποίηση των ολοκληρωτικών τελεστών μέσω των οποίων εκφράζεται το αρχικό πρόβλημα σκέδασης. Αναφέρουμε ότι υπάρχει

μεγάλος αριθμός εργασιών και βιβλίων για τη μελέτη της μεθόδου παραγοντοποίησης [31], [32], [33], [34], [39],[67], [68], [69].

Αξίζει να σημειωθεί ότι μέχρι να αναπτυχθούν οι σχετικά πιο σύγχρονες μελέτες ([43], [44], [58], [59]), όλες οι προγενέστερες μέθοδοι, εκτός της μεθόδου που αναφέρεται στην [53], προέβαιναν στη θέσπιση εξαιρετικά περιοριστικών και μη χρήσιμων συνθηκών προκειμένου να επιλύσουν τα διάφορα προβλήματα. Στον αντίποδα αυτού η γραμμική δειγματοληπτική μέθοδος (*linear sampling method*) και η μέθοδος της παραγοντοποίησης θεωρούνται ισάξιες σε απλότητα και ταχύτητα από αριθμητικής άποψης. Επιπλέον, οι δύο αυτές μέθοδοι δεν απαιτούν την εκ των προτέρων γνώση των συνθηκών συνθηκών ή τη θέσπιση περιττών συνθηκών. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εργασίες [6] και [8] στις οποίες πραγματοποιείται μία πολύ εποικοδομητική σύγκριση και συσχέτιση μεταξύ της δειγματοληπτικής μεθόδου και της μεθόδου της παραγοντοποίησης. Είναι σαφές ότι η γραμμική δειγματοληπτική μέθοδος μπορεί να επιλύσει έναν μεγαλύτερο αριθμό προβλημάτων συγκριτικά με τη μέθοδο παραγοντοποίησης.

Υπάρχουν αρκετές τροποποιήσεις της μεθόδου της παραγοντοποίησης κάποιες από αυτές συναντάμε με τη μορφή που παρουσιάστηκε αρχικά κατά τη μελέτη του προβλήματος με εφαρμογή στην τομογραφία ([22]-[25],[48]) και αργότερα από τις εργασίες [50]-[52]. Για γενικότερα ελλειπτικά προβλήματα αναπτύχθηκε στις εργασίες [41] και [60] ενώ πληθώρα εργασιών για την επίλυση αντιστρόφων προβλημάτων σκέδασης όπως [7], [44] και [60]-[65].

Στο επόμενο κεφάλαιο θα διατυπώσουμε βασικές μαθηματικές έννοιες και εξισώσεις της γραμμικής ελαστικότητας, θα παρουσιάσουμε βασικά προβλήματα σκέδασης ελαστικών κυμάτων, θα δοθούν τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος καθώς και οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις των λύσεων.

Κεφάλαιο 2

Βασικές Μαθηματικές Έννοιες της Γραμμικής Ελαστικότητας

2.1 Η Εξίσωση Navier της Δισδιάστατης Γραμμικής Ελαστικότητας

Ομογενές ελαστικό μέσο ορίζεται το υλικό του οποίου κάθε σημείο χαρακτηρίζεται από τις ίδιες (ελαστικές) ιδιότητες. Οι ιδιότητες ενός ελαστικού μέσου εκφράζονται μέσω των σταθερών Lamé, λ , μ . *Ισότροπο* καλείται το υλικό μέσο το οποίο διατηρεί τις ίδιες ιδιότητες σε όλες τις διευθύνσεις, διαφορετικά καλείται ανισότροπο. Ένα ελαστικό μέσο καλείται γραμμικό όταν οι παραμορφώσεις που υφίσταται μεταβάλλονται ανάλογα με τις δυνάμεις που του ασκούνται. Προσδιορίζεται πειραματικά ότι οι τιμές των ελαστικών σταθερών Lamé ικανοποιούν τις *ισχυρές συνθήκες ελλειπτικότητας (strong elasticity conditions)*, δηλαδή

$$\mu > 0 \text{ και } \lambda + 2\mu > 0 \quad (2.1)$$

Οι συνθήκες (2.1) μας εξασφαλίζουν την διάδοση διαμήκων και εγκάρσιων κυματικών πεδίων στο ελαστικό μας μέσο. Το πρώτο μέγεθος είναι η τοπική μετατόπιση του σημείου \mathbf{r} του ελαστικού μέσου τη χρονική στιγμή t από την αρχική θέση ισορροπίας και συμβολίζεται με $\mathbf{U}(\mathbf{r}(t))$ όπου $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ και $t \in [0, +\infty)$. Το δεύτερο μέγεθος είναι το τανυστικό πεδίο $\tilde{\mathbf{J}}$ που εκφράζει την κατάσταση της τάσης στο σημείο \mathbf{r} του ελαστικού μέσου.

Αν ρ είναι η πυκνότητα μάζας του ελαστικού μέσου στο οποίο διαδίδεται το ελαστικό

κύμα, αποδεικνύεται ότι το πεδίο των μετατοπίσεων ικανοποιεί την εξίσωση

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{J}} + \rho \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}(t)) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}(t))}{\partial t^2}, \quad (2.2)$$

όπου $\tilde{\mathbf{F}}$ είναι η μοναδιαία δύναμη τάσης. Θεωρούμε ότι ο χώρος είναι εφοδιασμένος με ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων Oxy . Το πεδίο $\tilde{\mathbf{F}}$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες, $\tilde{\mathbf{F}} = (\mathbf{F}_x, \mathbf{F}_y)$, όπου \mathbf{F}_x είναι παράλληλη συνιστώσα στον άξονα Ox και \mathbf{F}_y είναι παράλληλη συνιστώσα στον άξονα Oy .

Υποθέτουμε ότι ένα ελαστικό κύμα διαδίδεται σε ένα ισότροπο και ομογενές μέσο, το οποίο περιγράφεται από τις τιμές των σταθερών Lamé λ , μ και της πυκνότητας ρ . Αποδεικνύεται ότι η εξίσωση (2.2) λαμβάνει την ακόλουθη μορφή

$$\mu \Delta \mathbf{U}(\mathbf{r}(t)) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{U}(\mathbf{r}(t)) + \rho \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{r}(t)) = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{U}(\mathbf{r}(t))}{\partial t^2}. \quad (2.3)$$

Η σχέση (2.3) είναι γνωστή στη βιβλιογραφία [99] ως *δυναμική εξίσωση Navier*.

Στη συνέχεια υποθέτουμε αρμονική χρονική εξάρτηση του πεδίου μετατοπίσεων \mathbf{U} ,

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}(t)) = \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t},$$

όπου ω είναι η κυκλική συχνότητα. Εάν δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις στο ελαστικό μέσο η σχέση (2.3) γίνεται

$$\mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \rho \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (2.4)$$

Η σχέση (2.4) είναι γνωστή ως *εξίσωση Navier* [73], [76] και περιγράφει φαινόμενα της γραμμικής ελαστικότητας, τα οποία εξελίσσονται γραμμικά.

Εάν υποθέσουμε ότι η κυκλική συχνότητα είναι μηδενική, η (2.4) γίνεται

$$\mu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (\lambda + \mu) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (2.5)$$

Η σχέση (2.5) είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως *στατική εξίσωση Navier* και περιγράφει φαινόμενα της γραμμικής ελαστικότητας που παραμένουν αμετάβλητα στο χρόνο.

Χρησιμοποιώντας την ανάλυση κατά Helmholtz το πεδίο $\mathbf{u} \in C^2$, όπου με C^2 ο χώρος των συναρτήσεων που διαθέτουν συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης, ως υπέρθεση μιας αστρόβιλης κίνησης \mathbf{u}^p (διαμήκες μέρος) και της σωληνοειδούς \mathbf{u}^s (εγκάρσιο μέρος) έτσι ώστε

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^p + \mathbf{u}^s, \quad (2.6)$$

με

$$\nabla \times \mathbf{u}^p = \mathbf{0}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u}^s = 0, \quad (2.7)$$

όπου $\nabla \cdot$ και $\nabla \times$ είναι οι γνωστοί διαφορικοί τελεστές της απόκλισης και του στροβιλισμού αντίστοιχα.

Οι φασικές ταχύτητες του διαμήκους και εγκάρσιου τμήματος του διαδιδόμενου κύματος δίνονται από τις σχέσεις

$$c_p = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad \text{και} \quad c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}. \quad (2.8)$$

Με την βοήθεια της ταυτότητας

$$\nabla \times (\nabla \times) = \nabla(\nabla \cdot) - \Delta \quad (2.9)$$

και των φασικών ταχυτήτων (2.8) λαμβάνουμε την ακόλουθη ισοδύναμη μορφή της εξίσωσης Navier (2.4)

$$c_s^2 \Delta \mathbf{u}(\mathbf{r}) + (c_p^2 - c_s^2) \nabla \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}. \quad (2.10)$$

Οι κυματικοί αριθμοί k_p και k_s του διαμήκους και εγκάρσιου τμήματος του κύματος ικανοποιούν τις σχέσεις $k_p > 0$, $k_s > 0$ και συνδέονται μέσω των σχέσεων

$$\omega = k_p c_p = k_s c_s. \quad (2.11)$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (2.6)-(2.10) λαμβάνουμε

$$c_p^2 (\Delta + k_p^2) \mathbf{u}^p + c_s^2 (\Delta + k_s^2) \mathbf{u}^s = \mathbf{0}. \quad (2.12)$$

Η σχέση (2.12) ισχύει όταν

$$(\Delta + k_p^2) \mathbf{u}^p = \mathbf{0} \quad (2.13)$$

και

$$(\Delta + k_s^2) \mathbf{u}^s = \mathbf{0}. \quad (2.14)$$

Στα ομογενή ισότροπα ελαστικά μέσα τα διαμηκή και εγκάρσια κύματα διαδίδονται ταυτόχρονα και ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Τα διαμηκή κύματα διαδίδονται με μεγαλύτερη ταχύτητα από αυτήν των εγκάρσιων, με τα μεν διαμηκή να ικανοποιούν την

διανυσματική εξίσωση Helmholtz (2.13) με κυματικό αριθμό k_p και φασική ταχύτητα c_p , τα δε εγκάρσια να ικανοποιούν την διανυσματική εξίσωση Helmholtz (2.14) με κυματικό αριθμό k_s και φασική ταχύτητα c_s .

Η εξίσωση της γραμμικής ελαστικότητας γράφεται στη μορφή [73]

$$(\Delta^* + \rho\omega^2)\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \quad (2.15)$$

όπου Δ^* ο τελεστής Kupradze που δίνεται στη μορφή

$$\Delta^* = \mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla\cdot). \quad (2.16)$$

2.2 Η Θεμελιώδης Λύση και ο Επιφανειακός Τελεστής Τάσεων

Η τασική δύναμη $\tilde{\mathbf{F}}$ που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο εφαρμόζεται σε ένα σημείο $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}$ του ελαστικού μέσου. Η τασική δύναμη $\tilde{\mathbf{F}}$ (αίτιο) αναλύεται στις δύο συνιστώσες \mathbf{F}_i , $i = x, y$, παράλληλες στους άξονες Ox_j , $j = 1, 2$ αντίστοιχα. Εφόσον \mathbf{r}_0 είναι το σημείο εφαρμογής της $\tilde{\mathbf{F}}$, τότε κάθε συνιστώσα \mathbf{F}_j προκαλεί μία μετατόπιση Γ_j σε ένα άλλο σημείο \mathbf{r} , η οποία αναλύεται σε δύο συνιστώσες $(\Gamma_{x_j}, \Gamma_{y_j})$. Δηλαδή, $(\Gamma_{x_j}$ είναι η x -συνιστώσα της μετατόπισης στη θέση \mathbf{r} , που προκαλείται από τη δύναμη που εφαρμόστηκε στη θέση \mathbf{r}_0 , με συνιστώσα τη j -διεύθυνση του συστήματος συντεταγμένων (βλέπε σχήμα Γ).

Το σύνολο όλων των παραπάνω μετατοπίσεων στη θέση \mathbf{r} εκφράζεται μέσω του πίνακα [60], [63]

$$\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = [\Gamma_{i,j}]_{\substack{i=x,y \\ j=1,2}} = \tilde{\mathbf{\Gamma}}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \tilde{\mathbf{\Gamma}}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0). \quad (2.17)$$

ο οποίος ονομάζεται πίνακας Kupradze και αποτελεί τη θεμελιώδη λύση της φασματικής εξίσωσης Navier. Η θεμελιώδης λύση $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$(\Delta^* + \rho\omega^2)\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = -I\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (2.18)$$

$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ είναι το συναρτησιακό του Dirac και I ο μοναδιαίος ταυτοτικός πίνακας.

Το δυαδικό $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ διέπεται από τη συνθήκη της αμοιβαιότητας, δηλαδή, $\tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \tilde{\mathbf{\Gamma}}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$ (συμμετρικός πίνακας) και εκφράζει όλες τις μετατοπίσεις που προκαλούνται στη θέση \mathbf{r} εξαιτίας της δύναμης που ασκείται στη θέση \mathbf{r}_0 .

Η θεμελιώδης λύση της εξίσωσης (2.18) δίνεται από [86]

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= \frac{i}{4} \left\{ \frac{1}{\mu} I H_0^{(1)}(k^s |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\rho \omega^2} \nabla_{\mathbf{r}} \otimes \nabla_{\mathbf{r}} [H_0^{(1)}(k^p |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) - H_0^{(1)}(k^s |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)] \right\},\end{aligned}\quad (2.19)$$

όπου $H_0^{(1)}$ είναι οι συναρτήσεις Hankel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης και το σύμβολο \otimes συμβολίζει το τανυστικό γινόμενο (*juxtaposition*) μεταξύ δύο διανυσμάτων το οποίο παράγει τη δυαδική μορφή της θεμελιώδους λύσης.

Σημαντικό ρόλο στη θεωρία της ελαστικότητας καθώς και στα *προβλήματα συνοριακών τιμών* (ΠΣΤ) που θα μελετηθούν παρακάτω, κατέχει ο επιφανειακός τελεστής τάσεων [99], ο οποίος δίνεται από τη σχέση

$$T^{(\hat{\eta})} = 2\mu \hat{\eta}_{\mathbf{r}} \cdot \nabla + \lambda \hat{\eta}_{\mathbf{r}} \nabla \cdot + \mu \hat{\eta}_{\mathbf{r}} \times \nabla \times \quad (2.20)$$

Στη σχέση (2.20) $\hat{\eta}$ είναι το κανονικοποιημένο, εξωτερικό διάνυσμα που ορίζεται σε κάθε σημείο \mathbf{r} μίας στοιχειώδους επιφάνειας του συνόρου στο οποίο ασκείται η τάση. Είναι προφανές ότι ο $T^{(\hat{\eta})}$ είναι γραμμικός διαφορικός τελεστής και εκφράζει την τάση που εξασφαλίζει την ισορροπία του στοιχειώδους όγκου μέσα σε ένα ελαστικό μέσο.

Ο τελεστής Δ^* του Kupradze και ο επιφανειακός τελεστής $T^{(\hat{\eta})}$ συνδέονται μεταξύ τους με τους παρακάτω τύπους, γνωστοί ως *τύποι Betti* της γραμμικής ελαστικότητας:

$$\int_{B_i} \mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{v} dv = \int_{\partial B} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \mathbf{v} ds - \int_{B_i} \mathcal{E}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) dv \quad (2.21)$$

$$\int_{B_i} \mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{u} dv = \int_{\partial B} \mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \mathbf{u} ds - \int_{B_i} \mathcal{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) dv \quad (2.22)$$

και

$$\int_{B_i} (\mathbf{u} \cdot \Delta^* \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot \Delta^* \mathbf{u}) dv = \int_{\partial B} (\mathbf{u} \cdot T^{(\hat{\eta})} \mathbf{v} - \mathbf{v} \cdot T^{(\hat{\eta})} \mathbf{u}) ds. \quad (2.23)$$

Στις σχέσεις (2.21) και (2.22) το \mathcal{E} είναι ένα ενεργειακό συναρτησοειδές που εκφράζει την ενέργεια που μεταφέρεται μεταξύ των σημείων του υλικού μέσου όταν αυτά συμπίεζονται και για τα διανυσματικά πεδία $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ και $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ δίνεται από τον

τύπο

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = & (2\lambda + \mu) \left(\frac{\partial u_1}{\partial r_1} \frac{\partial v_1}{\partial r_1} + \frac{\partial u_2}{\partial r_2} \frac{\partial v_2}{\partial r_2} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial r_2} \frac{\partial v_1}{\partial r_2} + \frac{\partial u_2}{\partial r_1} \frac{\partial v_2}{\partial r_1} \right) \\ & + \lambda \left(\frac{\partial u_1}{\partial r_1} \frac{\partial v_2}{\partial r_2} + \frac{\partial u_2}{\partial r_2} \frac{\partial v_1}{\partial r_1} \right) + \mu \left(\frac{\partial u_1}{\partial r_2} \frac{\partial v_2}{\partial r_1} + \frac{\partial u_2}{\partial r_1} \frac{\partial v_1}{\partial r_2} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Αν στην (2.24) θέσουμε $\mathbf{v} = \mathbf{u}$, τότε μετά από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = & \mu \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial r_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial r_1} \right)^2 \right] + 2\lambda \frac{\partial u_1}{\partial r_2} \frac{\partial u_2}{\partial r_1} \\ & + (\lambda + \mu) \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial r_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial r_2} \right)^2 \right] + \mu (\operatorname{div} \mathbf{u})^2. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το συναρτησιακό \mathcal{E} είναι ένα διγραμμικό και φραγμένο, διαφορικό ενεργειακό συναρτησιακό [4].

2.3 Τα Προβλήματα Συνοριακών Τιμών της Γραμμικής Ελαστικότητας

Σε αυτήν την ενότητα αρχικά δίνουμε τους ορισμούς της εσωτερικής και εξωτερικής ομαλής λύσης της φασματικής εξίσωσης Navier. Έπειτα περιγράφουμε τα βασικά είδη προβλημάτων συνοριακών τιμών, παρουσιάζουμε τη μαθηματική μοντελοποίηση των προβλημάτων σκέδασης από αυτά και τέλος ορίζουμε την έννοια της καλής τοποθέτησης.

Σε ό,τι ακολουθεί θα θεωρήσουμε ότι η επαφή του σκεδαστή με το ελαστικό μέσο που τον περιβάλλει είναι συνεχής σε κάθε χρονική στιγμή, καθώς και ότι το πεδίο μετατοπίσεων \mathbf{u} με το πεδίο των τάσεων $T\mathbf{u}$ συνδέονται συνεχώς δια μέσου του συνόρου.

Θεωρούμε ένα ανοιχτό, συνεκτικό υποσύνολο B_i του \mathbb{R}^2 με λείο σύνορο Γ κλάσης C^2 το οποίο θα καλείται εσωτερικό. Επίσης, ορίζουμε ως εξωτερικό σύνολο B_e , όταν το σύμπληρωμα του $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_i$ είναι φραγμένο με $\bar{B}_i = B_i \cup \Gamma$. Το σύνορο Γ του πεδίου θα θεωρείται ότι αποτελεί μία επιφάνεια Lyapunov. Δίνουμε τον κάτωθι ορισμό.

Ορισμός 2.3.1 *Επιφάνεια Lyapunov.*

Θεωρούμε μία λεία επιφάνεια $Y \subseteq \mathbb{R}^2$. Θα την καλούμε Lyapunov αν και μόνον αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες.

1. HY είναι πεπερασμένη.

2. Η Y είναι κλειστό υποσύνολο του \mathbb{R}^2 .
3. Σε κάθε σημείο της Y ορίζεται μοναδικό εφαπτομενικό επίπεδο.
4. Για κάθε $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in Y$ υπάρχουν σταθερές α και β που ικανοποιούν την

$$\omega < \alpha |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^\beta, \quad 0 < \beta \leq 1 \quad (2.26)$$

με ω να είναι η γωνία που σχηματίζουν τα κάθετα διανύσματα στα \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 της Y .

5. Για κάθε παράλληλη ευθεία (ε) στη κάθετη ευθεία της Y σε κάθε $\mathbf{r} \in Y$ ορίζεται $\rho > 0$, σταθερό για κάθε $\mathbf{r} \in Y$, έτσι, ώστε η (ε) να τέμνει το πολύ σε ένα σημείο το υποσύνολο της Y , όπου $\mathbf{r} \in Y$ και περιέχεται στον άπειρο κύλινδρο με ακτίνα ρ και άξονα παράλληλο στο κάθετο διάνυσμα της Y στο σημείο $\mathbf{r} \in Y$.

Επίσης, παραθέτουμε τους παρακάτω ορισμούς.

Ορισμός 2.3.2 Κάθε διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u} \in C^2(B_k) \cap C^1(\bar{B}_k)$ $k = i, e$ που ικανοποιεί σημειακά τη σχέση (2.15) στο B_k θα λέγεται εσωτερική ομαλή λύση της φασματικής εξίσωσης Navier, αν $k = i$, και εξωτερική ομαλή λύση αν $k = e$. Επιπλέον, η εξωτερική λύση ικανοποιεί τις λεγόμενες συνθήκες ακτινοβολίας

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{\mathbf{u}^\ell(\mathbf{r})}{r} - ik_p \mathbf{u}^\ell(\mathbf{r}) \right] = \mathbf{0}, \quad (2.27)$$

όπου $\ell = p, s$ και $r = |\mathbf{r}|$.

Τα όρια στην (2.27) θεωρούνται ομοιόμορφα ως προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ και $\mathbf{u}^p, \mathbf{u}^s$ το διαμήκες και το εγκάρσιο μέρος του πεδίου μετατοπίσεων \mathbf{u} αντίστοιχα. Οι συνθήκες ακτινοβολίας (2.27) γεωμετρικά εκφράζουν την εξασθένιση του σκεδασμένου πεδίου όταν $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$ (αποκλίνων χαρακτήρας σκεδασμένου κύματος).

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τα βασικά προβλήματα συνοριακών τιμών της γραμμικής ελαστικότητας που αφορούν την εξίσωση Navier (2.15) σε χωρία όπως αυτά που περιγράψαμε παραπάνω.

1. Πρόβλημα Dirichlet

Αναζητούμε ομαλή λύση \mathbf{u} εσωτερική ή εξωτερική της (2.15) τέτοια ώστε

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad \text{στο } \Gamma, \quad (2.28)$$

όπου $\mathbf{f} \in C^1(\Gamma)$ δοθείσα διανυσματική συνάρτηση και σύνορο Γ μία επιφάνεια Lyapunov.

2. Πρόβλημα Neumann

Αναζητούμε ομαλή λύση \mathbf{u} της (2.15) τέτοια ώστε

$$T\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}(\mathbf{r}), \quad \text{στο } \Gamma, \quad (2.29)$$

όπου T είναι ο γνωστός επιφανειακός τελεστής τάσεων και $\mathbf{g} \in C^1(\Gamma)$ μία εκ των προτέρων γνωστή συνάρτηση.

3. Πρόβλημα Διαπερατού σώματος

Αναζητούμε διανυσματικές συναρτήσεις \mathbf{u}_e και \mathbf{u}_i , οι οποίες ικανοποιούν το κάτωθι πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta_k^* \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) + \rho_k \omega^2 \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \text{ στο } B_k, k = i, e \quad (2.30)$$

$$\mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_i(\mathbf{r}), \text{ στο } \Gamma \quad (2.31)$$

$$T_e \mathbf{u}_e(\mathbf{r}) = T_i \mathbf{u}_i(\mathbf{r}), \text{ στο } \Gamma \quad (2.32)$$

όπου οι δείκτες i, e δηλώνουν εσωτερικό και εξωτερικό πεδίο μετατοπίσεων αντίστοιχα για τα χωρία B_i και B_e . και σύνορο Γ να είναι μία επιφάνεια Lyapunov.

4. Εσωτερικό Μεικτό Πρόβλημα

Αναζητούμε διανυσματική συνάρτηση \mathbf{u} τέτοια ώστε

$$(\Delta^* + \rho \omega^2) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \text{ στο } B, \quad (2.33)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \text{ στο } \Gamma_D \quad (2.34)$$

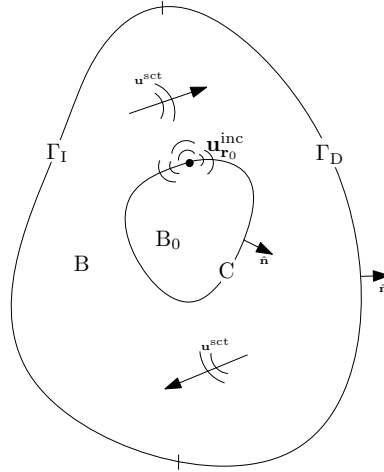
$$T \mathbf{u}(\mathbf{r}) + i \omega c \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \text{ στο } \Gamma_I, \quad (2.35)$$

όπου Δ^* είναι ο τελεστής Kupradze, ρ η πυκνότητα μάζας, ω η γωνιακή ταχύτητα και c η σταθερά εμπέδησης του υλικού. Τα Γ_D, Γ_I είναι ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του συνόρου $\Gamma = \Gamma_I \cup \Pi \cup \Gamma_D$ όπου Π είναι τα κοινά σημεία συσσώρευσης των Γ_D, Γ_I (βλέπε σχήμα).

Προβλήματα που συνδυάζουν παραπάνω από μία συνοριακές συνθήκες, όπως το πρόβλημα (2.33)-(2.35) ονομάζονται *μεικτά προβλήματα συνοριακών τιμών*. Αντικείμενο μελέτης της παρούσας διδακτορικής διατριβής θα αποτελέσει ένα τέτοιο μεικτό πρόβλημα σε χωρίο B_i του οποίου το σύνορο διέπεται από μία συνθήκη Dirichlet και μία συνθήκη εμπέδησης (*impedance*).

2.4 Τα Προβλήματα Σκέδασης και η Καλή Τοποθέτηση αυτών

Μία από τις σημαντικότερες κατηγορίες κυματικής είναι τα προβλήματα σκέδασης τα οποία μελετούν την ανομοιογένεια ή/και την ασυνέχεια του μέσου στο οποίο διαδίδονται τα κυματικά πεδία. Η ασυνέχεια δημιουργείται από την ύπαρξη εμποδίου, το οποίο



Σχήμα 2.1: Το μεικτό πρόβλημα σκέδασης

καλούμε *σκεδαστή*, εντός του μέσου διάδοσης.

Σε ό,τι ακολουθεί θεωρούμε ότι ένα ομογενές, ισότροπο μέσο καταλαμβάνει τον \mathbb{R}^2 . Για το υλικό αυτό θεωρούμε, ακόμα, ότι δεν εμποδίζει τα εγκάρσια και διαμήκη ελαστικά πεδία να διαδοθούν στο εσωτερικό του ανεξάρτητα, με διακεκριμένη φασική ταχύτητα. Τα εγκάρσια και τα διαμήκη ελαστικά πεδία παύουν να διαδίδονται ανεξάρτητα όταν τοποθετηθεί σκεδαστής εντός του μέσου διάδοσης, με διαφορετικές σταθερές Lamé από αυτές του μέσου διάδοσης. Όποια και αν είναι η σύνθεση του προσπίπτοντος κυματικού πεδίου το σκεδασμένο κυματικό πεδίο που προκύπτει αποτελεί γραμμικό συνδυασμό εγκάρσιου και διαμήκους κυματικού πεδίου.

Ακριβώς, όπως και στην προηγούμενη ενότητα, θεωρούμε $B_i \subseteq \mathbb{R}^2$ εσωτερικό, φραγμένο και συνεκτικό χωρίο με φραγμένο, κλειστό σύνορο $\Gamma = \partial B$, το οποίο αποτελεί επιφάνεια Lyapunov. Θεωρούμε ακόμα το εξωτερικό χωρίο $B_e = \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_i$, και συμβολίζουμε την κλειστή θήκη $\bar{B}_i = B_i \cup \partial B$. Θεωρούμε ότι το B_e περιέχεται σε ένα άπειρο, ισότροπο και ομογενές ελαστικό μέσο, με σταθερές Lamé λ_e, μ_e και πυκνότητα ρ_e , ενώ το B_i καταλαμβάνεται από ελαστικό μέσο με σταθερές Lamé λ_i, μ_i και πυκνότητα ρ_i . Θεωρούμε ότι ισχύουν οι *ισχυρές συνθήκες ελλειπτικότητας*:

$$\mu_\ell > 0 \text{ και } \lambda_\ell + 2\mu_\ell > 0, \text{ για } \ell = i, e. \quad (2.36)$$

Οι συνθήκες (2.36) είναι απαραίτητο να ικανοποιούνται προκειμένου να είναι δυνατή η ταυτόχρονη διάδοση διαμήκων και εγκάρσιων κυματικών πεδίων.

Εφαρμόζουμε το *θεώρημα αναπαράστασης Helmholtz* για το κυματικό πεδίο των μετα-

τοπίσεων $\mathbf{u}(\mathbf{r})$

$$(\Delta_\ell^* + \rho_k \omega^2) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \text{ όπου } \ell = i, e. \quad (2.37)$$

Εκφράζουμε το προσπίπτον διαμήκες κυματικό πεδίο στην ακόλουθη μορφή

$$\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc,\rho}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{d}} e^{ik_e^s \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} \in B_e \quad (2.38)$$

όπου \mathbf{r}_0 η θέση της πηγής και $\hat{\mathbf{d}} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\mathbf{r} = (r \cos \phi, r \sin \phi)$.

Στην περίπτωση όπου το προσπίπτον κυματικό πεδίο είναι εγκάρσιο (S), θα είναι της μορφής SV ή SH. Εάν το προσπίπτον κυματικό πεδίο είναι SV-εγκάρσιο, θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc,s}(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{\mathbf{d}}} e^{ik_e^s \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} \in B_e, \quad (2.39)$$

όπου με $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{\mathbf{d}}}$ συμβολίζουμε το μοναδιαίο διάνυσμα πόλωσης (δηλαδή, $\hat{\boldsymbol{\theta}}_{\hat{\mathbf{d}}} \cdot \hat{\mathbf{d}} = 0$).

Εάν το προσπίπτον κυματικό πεδίο είναι SH-εγκάρσιο θα έχει τη μορφή

$$\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc}(\mathbf{r}) = \hat{\boldsymbol{\alpha}} e^{ik_e^s \hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{r}}, \quad \mathbf{r} \in B_e, \quad (2.40)$$

όπου με $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ συμβολίζουμε το μοναδιαίο, κάθετο στην αρχή των αξόνων διάνυσμα. Αξίζει να σημειωθεί ότι το προσπίπτον, διαδιδόμενο SH-εγκάρσιο κυματικό πεδίο αποτελεί βαθμωτό μέγεθος και η διάδοσή του γίνεται παράλληλα στο $\hat{\boldsymbol{\alpha}}$ διάνυσμα.

Μόλις το διαδιδόμενο κυματικό πεδίο προσκρούσει στο σκεδαστή δημιουργείται το σκεδασμένο κυματικό πεδίο \mathbf{u}^{sct} , τότε το πεδίο των ολικών μετατοπίσεων \mathbf{u}^{tot} είναι μία υπέρθεση του προσπίπτοντος και του σκεδασμένου πεδίου

$$\mathbf{u}_k^{tot} = \mathbf{u}_{\mathbf{r}_0,k}^{inc} + \mathbf{u}_k^{sct}, \quad k = i, e. \quad (2.41)$$

Σε όλα τα προβλήματα σκέδασης που αφορούν την ακουστική, τον ηλεκτρομαγνητισμό ή την ελαστικότητα κάνουμε την παραδοχή ότι υπάρχει συνεχής και άμεση επαφή του σκεδαστή με το περιβάλλον του ελαστικού μέσου σε κάθε χρονική στιγμή, προκειμένου διά μέσου του συνόρου τα πεδία των μετατοπίσεων και των τάσεων να χαρακτηρίζονται από συνέχεια. Εν συνεχεία παραθέτουμε ορισμένες από τις πιο γνωστές συνοριακές συνθήκες.

1. Σκληρός σκεδαστής (rigid body)

$$\mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma. \quad (2.42)$$

2. Κοιλότητα (cavity)

$$T_e^{(\mathbf{r})} \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma. \quad (2.43)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι στις περιπτώσεις του σκληρού σκεδαστή και της κοιλότητας δεν είναι δυνατή η διάδοση του κυματικού πεδίου στο εσωτερικό του σκεδαστή.

3. Διαπερατός σκεδαστής (transmission problem)

$$\mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_i^{tot}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (2.44)$$

$$T_e \mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}) = T_i \mathbf{u}_i(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Gamma \quad (2.45)$$

4. Μεικτός σκεδαστής

$$\Delta^* + \rho(\mathbf{r})\omega^2 \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in B$$

$$\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_D$$

$$T \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r} \in \Gamma_I,$$

όπου Δ^* ο τελεστής Kupradze, T ο φυσικός τελεστής τάσεων, ρ είναι η πυκνότητα μάζας του υλικού, ω είναι η γωνιακή ταχύτητα, c είναι η σταθερά εμπέδησης του υλικού και $\Gamma = \Gamma_D \cup \Pi \cup \Gamma_I$ ακριβώς όπως και στην προηγούμενη ενότητα. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι Kupradze [70] και Agens [5] διατύπωσαν τις ακόλουθες συνθήκες ακτινοβολίας.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{u}^\ell(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\mathbf{u}^\ell(\mathbf{r})}{\partial r} - ik_\ell \mathbf{u}^\ell(\mathbf{r}) \right) = \mathbf{0},$$

όπου $\ell = p, s$, $r = |\mathbf{r}|$ για το διαμήκες και το εγκάρσιο κυματικό πεδίο, οι οποίες ικανοποιούνται ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις του r .

Τα επίπεδα και τα σφαιρικά κύματα υπό την μορφή γραμμικού τους συνδυασμού μπορούν να εκφράσουν οποιαδήποτε άλλη κυματική μορφή. Όλα τα προβλήματα που διατυπώσαμε παραπάνω μπορούν να εκφραστούν με ισοδύναμες ολοκληρωτικές μορφές όπως περιγράφουμε στην ακόλουθη ενότητα.

2.5 Οι Ολοκληρωτικές Αναπαραστάσεις, τα Πλάτη Σκέδασης και τα Δυναμικά Απλού και Διπλού Στρώματος

Η ολοκληρωτική αναπαράσταση της εσωτερικής και εξωτερικής ομαλής λύσης της εξίσωσης (2.15) είναι

$$\ell(\mathbf{r}) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} [\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot T^{(\mathbf{r}_0)} \mathbf{u}(\mathbf{r}_0) - T^{(\mathbf{r}_0)} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}_0)] ds(\mathbf{r}_0), \quad (2.46)$$

όπου για την εσωτερική λύση έχουμε

$$\ell(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{r} \in B_i, \\ \frac{1}{2}, & \mathbf{r} \in \Gamma, \\ 0, & \mathbf{r} \in B_e \end{cases} \quad (2.47)$$

ενώ για την εξωτερική λύση έχουμε

$$\ell(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{r} \in B_i, \\ -\frac{1}{2}, & \mathbf{r} \in \Gamma, \\ -1, & \mathbf{r} \in B_e. \end{cases} \quad (2.48)$$

Στη σχέση (2.46) η $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ είναι η θεμελιώδης λύση της (2.15) και $T^{(\mathbf{r}_0)}$ η δράση του επιφανειακού τελεστή τάσεων που δίνεται από την (2.20) και προέκυψε με την εφαρμογή του τρίτου τύπου Betti, που δίνεται από την (2.23) για τις συναρτήσεις $\tilde{\Gamma}$ και \mathbf{u} . Οι ολοκληρωτικές αναπαραστάσεις αποτελούν ένα εξαιρετικά χρήσιμο εργαλείο για την θεωρητική μελέτη και την προσεγγιστική επίλυση των προβλημάτων σκέδασης.

Στη συνέχεια ψάχνουμε να βρούμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά του σκεδασμένου πεδίου για την εξωτερική ομαλή λύση \mathbf{u} , που δίνεται από τη σχέση (2.46). Για να το επιτύχουμε αυτό υπολογίζουμε πρώτα την ασυμπτωτική μορφή της θεμελιώδους λύσης $\tilde{\Gamma}$ και της $\tilde{\Gamma}$, όταν $r \rightarrow \infty$, όπου το πρώτο όρισμα αφορά το διάνυσμα στο σημείο παρατήρησης και το δεύτερο το διάνυσμα της θέσης της πηγής.

Με τη βοήθεια της σχέσης (2.17) και χρησιμοποιώντας ασυμπτωτικές εκφράσεις για τις συναρτήσεις Hankel $H_{(0)}^{(1)}$ προκύπτουν οι [57]

$$\tilde{\Gamma}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_p}} e^{-ik_p \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \frac{e^{ik_p r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty \quad (2.49)$$

και

$$\tilde{\Gamma}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_s}} e^{-ik_s \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}_0} (\tilde{I} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \frac{e^{ik_s r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty \quad (2.50)$$

όπου $\tilde{I} = \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}}$ το ταυτοτικό δυαδικό. Μέσω του πίνακα $(\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})$ εκφράζεται η ακτινική συμπεριφορά του διαμήκους τμήματος $\tilde{\Gamma}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ μακριά από τον σκεδαστή, ενώ ο πίνακας $(\tilde{I} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}})$ εκφράζει τον εφαπτομενικό χαρακτήρα του εγκάρσιου τμήματος $\tilde{\Gamma}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ στην περιοχή της ακτινοβολίας. Υπολογίζοντας πρώτα τις ασυμπτωτικές

μορφές των τις ασυμπτωτικές μορφές των $\nabla_{\mathbf{r}_0} \times \tilde{\Gamma}$ και $T^{(\mathbf{r}_0)}\tilde{\Gamma}$ [99] και χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \tilde{\Gamma}^p(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \tilde{\Gamma}^s(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0), \text{ καθώς } r \rightarrow \infty$$

βρίσκουμε ότι [99]

$$\begin{aligned} T^{(\mathbf{r}_0)}\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= 2\mu\hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \nabla_{\mathbf{r}_0}\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \lambda\hat{\boldsymbol{\eta}}\nabla_{\mathbf{r}_0} \cdot \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \mu\hat{\boldsymbol{\eta}} \times \nabla_{\mathbf{r}_0} \times \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \\ &= -\hat{\boldsymbol{\eta}}' \cdot (\lambda\tilde{I} + 2\mu\hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \times \hat{\mathbf{r}} \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_p}} i k_p e^{-ik_p\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_0} \frac{e^{ik_p r}}{\sqrt{r}} \\ &\quad - \mu[2(\hat{\boldsymbol{\eta}}' \cdot \hat{\mathbf{r}})\hat{\boldsymbol{\theta}} + \hat{\boldsymbol{\eta}}' \times (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})] \otimes \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_s}} i k_s e^{-ik_s\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_0} \frac{e^{ik_s r}}{\sqrt{r}} \\ &\quad + O(r^{-3/2}), \quad r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Αν στη σχέση (2.51) πάρουμε συστολή από αριστερά με ολικό πεδίο μετατοπίσεων \mathbf{u}^{tot} , τότε μετά από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}_0) \cdot T^{(\mathbf{r}_0)}\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) &= k_p(\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}_0) \otimes \hat{\boldsymbol{\eta}}') : \left(\frac{\lambda\tilde{I} + 2\mu\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}}}{4\mu} \right) e^{-ik_p\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_0} H_{(0)}^{(1)}(k_p r) \hat{\mathbf{r}} \\ &\quad + k_s[2(\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}_0) \times \hat{\boldsymbol{\eta}}') \cdot (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}})] e^{-ik_s\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}_0} H_{(0)}^{(1)}(k_s r) \hat{\boldsymbol{\theta}} \\ &\quad + O(r^{-3/2}), \text{ καθώς } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Με αντικατάσταση των (2.49), (2.50) και (2.52) στην ολοκληρωτική αναπαράσταση (2.46) καταλήγουμε στην ακόλουθη ασυμπτωτική μορφή

$$\mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}; \hat{\mathbf{d}}, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{u}_{\infty}^p(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \boldsymbol{\alpha}) \frac{e^{ik_p r}}{\sqrt{r}} + \mathbf{u}_{\infty}^s(\mathbf{r}; \mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha}) \frac{e^{ik_s r}}{\sqrt{r}} + O(r^{-3/2}), \text{ καθώς } r \rightarrow \infty, \quad (2.53)$$

όπου $\boldsymbol{\alpha} = \hat{\mathbf{d}}$ ή $\hat{\boldsymbol{\theta}}_d$. Στη σχέση (2.53) τα $\mathbf{u}_{\infty}^p(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \boldsymbol{\alpha})$, $\mathbf{u}_{\infty}^s(\mathbf{r}; \mathbf{d}, \boldsymbol{\alpha})$ καλούνται *πλάτη σκέδασης*, όπου το πρώτο όρισμά τους είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στο σημείο παρατήρησης, το δεύτερο είναι το διάνυσμα διάδοσης και το τρίτο το διάνυσμα πόλωσης που δηλώνει την εξάρτηση των πλατών σκέδασης από αυτές τις διευθύνσεις. Τα πλάτη σκέδασης είναι εξαιρετικά σημαντικές συναρτήσεις, διότι, μας παρέχουν χρήσιμες πληροφορίες που αφορούν τον σκεδαστή στην περιοχή της ακτινοβολίας.

Ενδεικτικά, δίνουμε τις σχέσεις των πλατών σκέδασης για το πρόβλημα Dirichlet [99]

$$\mathbf{u}_{\infty}^p(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_e^p}} \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}} \cdot \int_{\partial B} e^{-ik_e^p \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0} T_e^{(\mathbf{r}_0)} \mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0) \quad (2.54)$$

και

$$\mathbf{u}_\infty^s(\hat{\mathbf{r}}; \hat{\mathbf{d}}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{i+1}{4\mu\sqrt{\pi k_e^s}} (\tilde{I} - \hat{\mathbf{r}} \otimes \hat{\mathbf{r}}) \cdot \int_{\partial B} e^{-ik_e^s \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_0} T_e^{(\mathbf{r}_0)} \mathbf{u}_e^{tot}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0). \quad (2.55)$$

Στο τέλος αυτής της ενότητας θα περιγράψουμε τα προβλήματα σκέδασης μέσω ολοκληρωτικών εξισώσεων. Για να το επιτύχουμε αυτό θα ορίσουμε κάποιους συνοριακούς ολοκληρωτικούς τελεστές που είναι γνωστοί ως δυναμικά απλού και διπλού στρώματος. Θεωρούμε μία Hölder συνεχής διανυσματική συνάρτηση πυκνότητας \mathbf{g} ορισμένη στο Γ και ορίζουμε τον συνοριακό ολοκληρωτικό τελεστή

$$(S_k \mathbf{g})(\mathbf{r}) := \int_{\Gamma} \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, \quad k = i, e \quad (2.56)$$

Η σχέση (2.56) μας δίνει το καλείται *δυναμικό απλού στρώματος*, το οποίο αποτελεί μία συνεχή παντού λύση της φασματικής εξίσωσης Navier που ικανοποιεί τις συνθήκες ακτινοβολίας (2.27). Επίσης ορίζουμε ανάλογα το *δυναμικό διπλού στρώματος* ως εξής

$$(D_k \mathbf{g})(\mathbf{r}) := \int_{\Gamma} T_k^{(\mathbf{r}_0)} \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2, \quad k = i, e. \quad (2.57)$$

Η συνάρτηση $(D_k \mathbf{g})$ είναι και αυτή μία συνεχής παντού λύση της φασματικής εξίσωσης Navier, ικανοποιεί τις συνθήκες ακτινοβολίας και δεν είναι συνεχής στο σύνορο.

Ακολουθούν κάποιοι βοηθητικοί, συνοριακοί, ολοκληρωτικοί τελεστές ως κάτωθι,

$$(K_k \mathbf{g})(\mathbf{r}) := \int_{\Gamma} T_k^{(\mathbf{r})} \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \quad k = i, e \quad (2.58)$$

και

$$(K_k^* \mathbf{g})(\mathbf{r}) := \int_{\Gamma} T_k^{(\mathbf{r})} \tilde{\Gamma}_k(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \overline{\mathbf{g}(\mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \quad k = i, e, \quad (2.59)$$

οι οποίοι είναι ανώμαλοι σύμφωνα με την *πρωτεύουσα κατά Cauchy τιμή* (Cauchy principal value, CPV).

Ο K^* συμβολίζει τον L^2 -συζυγή τελεστή του K . Με από υπολογισμούς προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις

$$[T_k^{(\mathbf{r})}(S_k \mathbf{g})]_{\pm}(\mathbf{r}) = [(K_k \mp I) \mathbf{g}](\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \quad (2.60)$$

$$[(D_k \mathbf{g})]_{\pm}(\mathbf{r}) = [(\bar{K}_k^* \pm I) \mathbf{g}](\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \quad (2.61)$$

$$(D_k \mathbf{g})(\mathbf{r}) = (\bar{K}_k^* \mathbf{g})(\mathbf{r}) \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \quad (2.62)$$

$$[T(D \mathbf{g})]_- = [T(D \mathbf{g})]_+ \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \quad (2.63)$$

με $k = e, i$, όπου ο δείκτης “+” αντιστοιχεί σε όριο όταν $\mathbf{r} \rightarrow \Gamma$ από το B_e , ενώ αντίστοιχα ο δείκτης “-” αντιστοιχεί σε όριο όταν $\mathbf{r} \rightarrow \Gamma$ από το B_i . Σημειώνουμε ότι ο συνοριακός ολοκληρωτικός τελεστής \overline{K}^* στις σχέσεις (2.61) και (2.62) συμβολίζει το συζυγή μιγαδικό του K^* . Οι σχέσεις (2.60)-(2.63) συναντώνται στη διεθνή βιβλιογραφία ως *συνθήκες διαπήδησης απλού και διπλού στρώματος*. Ειδικότερα η συνθήκη (2.63) αποτελεί το *θεώρημα Lyapunov-Tauber* [70].

Τα δυναμικά απλού και διπλού-στρώματος βοηθούν σημαντικά στην απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης των προβλημάτων σκέδασης που περιγράψαμε στην ενότητα 2.4, αν εκφράσουμε τα πεδία μετατόπισης ως γραμμικό συνδυασμό δυναμικών απλού και διπλού-στρώματος. Επίσης, αναφέρουμε ότι τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος χρησιμοποιήθηκαν στο τέταρτο κεφάλαιο της παρούσας διδακτορικής διατριβής για το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης.

Κεφάλαιο 3

Το Μεικτό Πρόβλημα Σκέδασης

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε ένα ευθύ μεικτό εσωτερικό πρόβλημα σκέδασης και αποδεικνύουμε την καλή τοποθέτησή του χρησιμοποιώντας την *μεταβολική μορφή* (*variational formulation*) του προβλήματος. Για να κατασκευάσουμε την μεταβολική μορφή απαιτείται να εκφράσουμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών σε μία ισοδύναμη ολοκληρωτική. Η μέθοδος αυτή βασίζεται σε κατάλληλους συναρτησιακούς χώρους Sobolev (βλέπετε ενότητα 3.2), με στόχο την απόδειξη της ύπαρξης, της μοναδικότητας και της ευστάθειας ασθενούς λύσης.

3.1 Βασικές Έννοιες

Για να μελετήσουμε την μεταβολική μέθοδο χρειαζόμαστε βασικές έννοιες και ορισμούς, τους οποίους και παραθέτουμε. Θεωρούμε έναν διανυσματικό χώρο Hilbert $X \subseteq \mathbb{R}^2$ εφοδιασμένο με μία νόρμα $\|\cdot\|$ και ένα εσωτερικό γινόμενο (\cdot, \cdot) .

Ορισμός 3.1.1 Μια απεικόνιση $a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται $\frac{2}{3}$ γραμμική μορφή (*sesquilinear form*) αν και μόνον αν για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ και $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in X$ ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

- $a(\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2, \mathbf{v}) = \lambda_1 a(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}) + \lambda_2 a(\mathbf{u}_2, \mathbf{v})$ και
- $a(\mathbf{v}, \lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2) = \bar{\lambda}_1 a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1) + \bar{\lambda}_2 a(\mathbf{v}, \mathbf{u}_2)$

όπου με την υπεργράμμιση “ $\bar{\cdot}$ ” συμβολίζουμε τον μιγαδικό συζυγή.

Ορισμός 3.1.2 Μία απεικόνιση $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ καλείται $\frac{2}{3}$ γραμμικό συναρτησιακό (conjugate linear functional) αν και μόνον αν για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ και $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in X$ ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$F(\lambda_1 \mathbf{u}_1 + \lambda_2 \mathbf{u}_2) = \bar{\lambda}_1 F(\mathbf{u}_1) + \bar{\lambda}_2 F(\mathbf{u}_2).$$

Δοθέντος ενός $\frac{2}{3}$ γραμμικού συναρτησιακού $F : X \rightarrow \mathbb{C}$, με $X \subseteq \mathbb{R}$ και μίας $\frac{2}{3}$ γραμμικής μορφής $a(\cdot, \cdot)$ στο $X \times X$, αναζητούμε $\mathbf{u} \in X$ έτσι ώστε

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}), \text{ για κάθε } \mathbf{v} \in X. \quad (3.1)$$

Η μοναδική και ευσταθής λύση του παραπάνω προβλήματος αποδεικνύεται από το ακόλουθο θεώρημα το οποίο είναι γνωστό στη βιβλιογραφία ως Lax-Milgram [27] λήμμα. Η ύπαρξη μοναδικής και ευσταθούς λύσης της (3.1) αποδεικνύεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.1 Υποθέτουμε ότι η απεικόνιση $a : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ είναι $\frac{2}{3}$ γραμμική μορφή για την οποία ορίζονται σταθερές $c_1, c_2 > 0$ έτσι ώστε

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq c_1 \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \text{ για κάθε } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X \quad (3.2)$$

και

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq c_2 \|\mathbf{u}\|^2 \text{ για κάθε } \mathbf{u} \in X. \quad (3.3)$$

Τότε για κάθε φραγμένο $\frac{2}{3}$ γραμμικό συναρτησιακό $F : X \rightarrow \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\mathbf{u} \in X$ έτσι ώστε

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \text{ για κάθε } \mathbf{v} \in X. \quad (3.4)$$

Επιπλέον,

$$\|\mathbf{u}\| \leq C \|F\|,$$

όπου $C > 0$ είναι μία σταθερά ανεξάρτητη του συναρτησιακού F .

Επιπλέον είναι απαραίτητο να ορίσουμε κάποιους χώρους λύσεων. Ως $H^1(B)$ και $H_{loc}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B})$ συμβολίζουμε τους γνωστούς χώρους Sobolev και $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ ορίζουμε το χώρο του ίχνους. Για κάποιο $\Gamma_0 \subset \Gamma$ ορίζουμε τους χώρους ίχνους Sobolev

$$H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) := \{\mathbf{u}|_{\Gamma_0} : \mathbf{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\}$$

$$\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma) := \{\mathbf{u} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) : \text{supp}(\mathbf{u}) \subseteq \Gamma_0\},$$

με $\text{supp}(\mathbf{u}) = \{\mathbf{x} \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) : \mathbf{u}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}\}$ και τον αντίστοιχο δυϊκό χώρο $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0) = [\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)]'$ του $\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$.

Επιπλέον, ορίζουμε

$$H_0^1(B, \Gamma_D) := \{\mathbf{u} \in H^1(B) : \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ στο } \Gamma_D\}.$$

Όλοι οι παραπάνω χώροι είναι εφοδιασμένοι με τη νόρμα που επάγεται από τον $H^1(B)$ και έχει τύπο

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(B)}^2 := \|\mathbf{u}\|_{L^2(B)}^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|_{L^2(B)}^2.$$

Θεώρημα 3.1.2 *Θεώρημα Αναπαράστασης Riesz.*

Έστω $\pi : H \rightarrow \mathbb{C}$, με $H \subseteq \mathbb{R}^2$ χώρο Hilbert, φραγμένο γραμμικό συναρτησιακό. Τότε υπάρχει μοναδικό στοιχείο $y \in H$ τέτοιο, ώστε $\pi(x) = \langle x, y \rangle$, για κάθε $x \in H$. Επιπλέον, $\|\pi\| = \|y\|$.

Ορισμός 3.1.3 *Τελεστής Lipschitz συνεχής.*

Θεωρούμε ότι οι διανυσματικοί χώροι A, B είναι εφοδιασμένοι με τις μετρικές d_A, d_B αντίστοιχα. Θεωρούμε τελεστή $T : A \rightarrow B$. Ο τελεστής T θα καλείται συνεχής κατά Lipschitz αν και μόνον αν υπάρχει θετική σταθερά M ώστε να ισχύει

$$d_B(Tx, Ty) \leq M d_A(x, y), \text{ για κάθε } x, y \in A.$$

Θεώρημα 3.1.3 *Θεώρημα Lax-Milgram ([27], Θεώρημα 5.11)*

Υποθέτουμε ότι η μορφή $\alpha : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$, όπου $X \subseteq \mathbb{R}^2$ είναι ένας χώρος Hilbert, είναι ήμιγραμμική (sesquilinear) για την οποία ορίζονται θετικές σταθερές c_1, c_2 έτσι, ώστε

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq c_1 \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\|, \text{ για κάθε } \mathbf{u}, \mathbf{v} \in X \quad (3.5)$$

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \leq c_2 \|\mathbf{u}\|^2, \text{ για κάθε } \mathbf{u} \in X. \quad (3.6)$$

Τότε για κάθε φραγμένο, συζυγές, γραμμικό συναρτησιακό $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ υπάρχει μοναδικό στοιχείο $\mathbf{u} \in X$ τέτοιο, ώστε

$$\alpha(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{v}), \text{ για κάθε } \mathbf{v} \in X.$$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\|\mathbf{u}\| \leq c \|f\|,$$

όπου c είναι μία θετική σταθερά ανεξάρτητη του f .

Θεώρημα 3.1.4 (Θεώρημα Ίχνους (trace theorem) [27], theorem 1.36).

Θεωρούμε απλό, συνεκτικό και φραγμένο χωρίο $B \subseteq \mathbb{R}^2$, με σύνορο ∂B κλάσης C^2 . Τότε θα υπάρξει θετική σταθερά c τέτοια, ώστε

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B)} \leq c\|\mathbf{u}\|_{H^1(B)}$$

για κάθε $\mathbf{u} \in H^1(B)$.

Θεώρημα 3.1.5 Ανισότητα Cauchy-Schwartz ([27] theorem 1.9).

Κάθε εσωτερικό γινόμενο (\cdot, \cdot) του διανυσματικού χώρου $X \subseteq \mathbb{R}^2$, ικανοποιεί την ακόλουθη ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})|^2 \leq (\mathbf{u}, \mathbf{u})(\mathbf{v}, \mathbf{v}),$$

για κάθε $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in X$.

Ορισμός 3.1.4 Αν μία ημιγραμμική μορφή $\alpha(\cdot, \cdot)$ (sesquilinear form) ικανοποιεί την (3.5) θα λέγεται συνεχής (continuous) ενώ αν ικανοποιεί την (3.6) θα λέγεται αυστηρά ελλειπτική (strictly coercive).

3.2 Η Καλή Τοποθέτηση του Προβλήματος

Θεωρούμε χωρίο $B \subseteq \mathbb{R}^2$ φραγμένο και απλά συνεκτικό με Lipschitz σύνορο $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_I \cup \Pi = \partial B$ όπου Γ_D και Γ_I είναι ξένα μεταξύ τους και ανοιχτά υποσύνολα του Γ και έχουν το Π ως το κοινό τους σύνορο. Το Γ_D διέπεται από μία συνθήκη Dirichlet, ενώ το Γ_I από μία συνθήκη εμπέδησης (Robin).

Ευθύ πρόβλημα σκέδασης εκφρασμένο ως προς το ολικό πεδίο $\mathbf{u}^{tot} = \mathbf{u}^{inc} + \mathbf{u}^{sct}$ που περιγράφεται από το ακόλουθο μεικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών (πστ):

Για δοθέν ελαστικό προσπίπτον σφαιρικό κυματικό πεδίο $\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc}$, ζητείται το ολικό κυματικό πεδίο

$$\mathbf{u}^{tot} = \mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc} + \mathbf{u}^{sct} \quad (3.7)$$

έτσι ώστε,

$$(\Delta^* + \rho(\mathbf{r})\omega^2)\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } B \quad (3.8)$$

$$\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } \Gamma_D \quad (3.9)$$

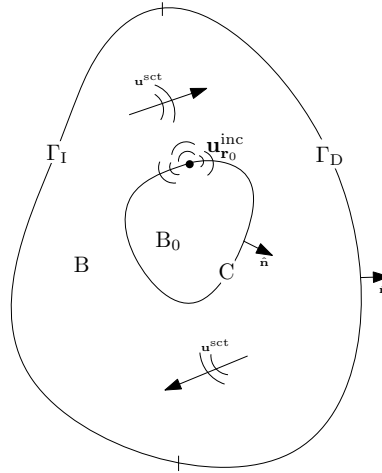
$$T\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) + i\omega c\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } \Gamma_I, \quad (3.10)$$

όπου Δ^* είναι ο διαφορικός τελεστής του Kupradze (2.16) και T ο φυσικός επιφανειακός τελεστής τάσεων (2.20). Η σταθερά c στη σχέση (3.10) είναι μία θετική σταθερά εμπέδησης του υλικού και με $\rho(\mathbf{r})$ στη σχέση (3.8) συμβολίζουμε την πυκνότητα μάζας που δίνεται από τη σχέση

$$\rho(\mathbf{r}) = \begin{cases} \rho_0, & \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B} \\ \rho_1, & \mathbf{r} \in B. \end{cases} \quad (3.11)$$

Για τη μελέτη του προβλήματος είναι απαραίτητο να κάνουμε τις παρακάτω υποθέσεις:

- (1) Υποθέτουμε ότι η C είναι μία κλειστή καμπύλη Lipschitz που περιέχεται στο B και ως B_0 ορίζεται το εσωτερικό χωρίο που περικλείεται από την καμπύλη C .
- (2) Το προσπίπτον κυματικό πεδίο $\mathbf{u}^{inc}(\mathbf{r})$ είναι μία σημειακή πηγή τοποθετημένη στο εσωτερικό του B , η οποία έχει τη μορφή $\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc}(\mathbf{r}) = \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2$ και $\mathbf{r}_0 \in C$.



Σχήμα 3.1: Το μεικτό πρόβλημα σκέδασης

Στη συνέχεια ορίζουμε το ακόλουθο μεικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(\Delta^* + \rho_1 \omega^2) \mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ στο } B \quad (3.12)$$

$$\mathbf{u}^{sct} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \text{ στο } \Gamma_D \quad (3.13)$$

$$T \mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{sct}(\mathbf{r}) + i\omega c \mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{sct}(\mathbf{r}) = \mathbf{h}(\mathbf{r}) \text{ στο } \Gamma_I, \quad (3.14)$$

όπου

Λήμμα 3.2.1 Το πρόβλημα (3.12)-(3.14) είναι μία ειδική περίπτωση του προβλήματος (3.8)-(3.10) θεωρώντας

$$\mathbf{f} = -\mathbf{u}^{inc} \text{ στο } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D) \quad (3.15)$$

και

$$\mathbf{h} = -(T\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc} + i\omega c\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc}) \text{ στο } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I). \quad (3.16)$$

Απόδειξη.

Ισχύει ότι $\mathbf{u}^{tot} = \mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc} + \mathbf{u}^{sct}$. Επομένως,

Η σχέση (3.8) γίνεται

$$\begin{aligned} (\Delta^* + \rho_1\omega^2)(\mathbf{u}^{sct} + \mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc}) &= \mathbf{0} \text{ στο } B \text{ ή} \\ (\Delta^* + \rho_1\omega^2)\mathbf{u}^{sct} + (\Delta^* + \rho_1\omega^2)\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc} &= \mathbf{0} \text{ στο } B \text{ ή} \\ (\Delta^* + \rho_1\omega^2)\mathbf{u}^{sct} &= \mathbf{0} \text{ στο } B. \end{aligned}$$

Η (3.9) γίνεται

$$\mathbf{u}^{sct} = -\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc} \text{ στο } \Gamma_D$$

και λόγω της σχέσης (3.15) προκύπτει άμεσα η (3.13).

Η (3.10) λόγω της γραμμικότητας του τελεστή T γίνεται

$$T\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{sct} + i\omega c\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{sct} = -(T\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc} + i\omega c\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc}) \text{ στο } \Gamma_I.$$

Από την τελευταία σχέση μέσω της (3.16) προκύπτει άμεσα η σχέση (2.4). \square

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την μεταβολική μορφή του προβλήματος (3.12)-(3.14).

Θεωρούμε μία διανυσματική συνάρτηση δοκιμής (test function) $\bar{\phi} \in H_0^1(B, \Gamma_D)$. Εφαρμόζουμε τον πρώτο τύπο Betti για τις συναρτήσεις \mathbf{u}^{sct} και $\bar{\phi}$

$$\int_B \bar{\phi} \cdot \Delta^* \mathbf{u}^{sct} d\mathbf{r} = \int_{\partial B} \bar{\phi} \cdot T\mathbf{u}^{sct} ds - \int_B \mathcal{E}(\bar{\phi}, \mathbf{u}^{sct}) d\mathbf{r}, \quad (3.17)$$

όπου $\mathcal{E}(\bar{\phi}, \mathbf{u}^{sct})$ το ενεργειακό συναρτησιακό όπως ορίστηκε στη (2.24).

Πολλαπλασιάζοντας τις εξισώσεις (3.12)-(3.14) με τη συζυγή συνάρτηση της ϕ , $\bar{\phi}$, λαμβάνουμε τις εξισώσεις:

$$\bar{\phi} \cdot \Delta^* \mathbf{u}^{sct} = -\rho_1\omega^2 \bar{\phi} \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{sct} \text{ στο } B \quad (3.18)$$

$$\bar{\phi} \cdot \mathbf{u}^{sct} = \bar{\phi} \cdot \mathbf{f} \text{ στο } \Gamma_D \quad (3.19)$$

$$\bar{\phi} \cdot T\mathbf{u}^{sct} = -i\omega c \bar{\phi} \cdot \mathbf{u}^{sct} + \bar{\phi} \cdot \mathbf{h} \text{ στο } \Gamma_I, \quad (3.20)$$

και θεωρώντας ότι $\partial B = \Gamma_D \cup \Pi \cup \Gamma_I$, το Π αποτελεί το κοινό σύνορο των Γ_D και Γ_I , αποτελείται από όλα τα σημεία συσσώρευσης των Γ_D και Γ_I , τα οποία δεν ανήκουν ούτε στο Γ_D ούτε στο Γ_I και με $\bar{\boldsymbol{\phi}}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}$, έχουμε ότι

$$\int_{\Gamma_D} \bar{\boldsymbol{\phi}} \cdot T \mathbf{u}^{sct} ds = \int_{\Pi} \bar{\boldsymbol{\phi}} \cdot T \mathbf{u}^{sct} ds = 0.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι i, ω, c είναι σταθερές, ανεξάρτητες της μεταβλητής ολοκλήρωσης, η εξίσωση (3.17) μέσω των (3.18)-(3.20), γίνεται

$$\int_B \mathcal{E}[(\bar{\boldsymbol{\phi}}, \mathbf{u}^{sct} - \rho_1 \omega^2 \bar{\boldsymbol{\phi}} \cdot \mathbf{u}^{sct}] d\mathbf{r} + i\omega c \int_{\Gamma_I} \mathbf{u}^{sct} \cdot \bar{\boldsymbol{\phi}} ds = \langle \mathbf{h}, \boldsymbol{\phi} \rangle. \quad (3.21)$$

Έτσι, αποδείξαμε ότι το πρόβλημα (3.12)-(3.14) είναι ισοδύναμο με την εύρεση ενός $\mathbf{u}^{sct} \in H^1(B)$ που θα ικανοποιεί την εξίσωση (3.21). Ως $\langle \mathbf{h}, \boldsymbol{\phi} \rangle$ συμβολίζουμε την απεικόνιση $\langle \mathbf{h}, \boldsymbol{\phi} \rangle = \int_{\Gamma_I} \mathbf{h} \cdot \boldsymbol{\phi} ds$ η οποία είναι εσωτερικό γινόμενο (η απόδειξη παραλείπεται διότι είναι τετριμμένη).

Στην ενότητα που ακολουθεί κατασκευάζουμε και χρησιμοποιούμε μία παραλλαγή της (3.21) προκειμένου να αποδείξουμε το κεντρικό μας θεώρημα, το οποίο αφορά την καλή τοποθέτηση του ευθέως μεικτού προβλήματος σκέδασης, σχετικά με την ύπαρξη και ευστάθεια λύσης.

3.3 Η Τροποποιημένη Μεταβολική Μέθοδος στο Μεικτό Πρόβλημα Σκέδασης

Θα εισάγουμε κάποιους βοηθητικούς τελεστές και θα αποδείξουμε πολύ χρήσιμα λήμματα τα οποία αφορούν ιδιότητες των τελεστών αυτών. Το θεώρημα αυτό αφορά την ύπαρξη, μοναδικότητα και συνεχή εξάρτηση από τα αρχικά δεδομένα της ασθενούς λύσης του ευθέως, εσωτερικού μεικτού προβλήματος συνοριακών τιμών (3.12)-(3.14).

θεωρούμε μία διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{u}_0 \in H^1(B)$ λύση της στατικής εξίσωσης Navier $\Delta^* \mathbf{u} = \mathbf{0}$ στο B , με $\mathbf{u}_0 = \mathbf{f}$ στο Γ όπου

$$\mathbf{f}_{ext}|_{\Gamma} = \begin{cases} \mathbf{f}, & \text{στο } \Gamma_D \\ \mathbf{0}, & \text{αλλού στο } \Gamma \end{cases},$$

δηλαδή η \mathbf{f}_{ext} είναι μία μηδενική συνεχής επέκταση της \mathbf{f} στο Γ με την ιδιότητα

$$\|\mathbf{f}_{ext}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_1 \|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)},$$

για κάποια θετική σταθερά c_1 . Από την τελευταία ανισότητα καταλήγουμε στην σχέση

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^1(B)} \leq c'_1 \|\mathbf{u}_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = c_1 \|\mathbf{f}_{ext}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_2 \|\mathbf{f}_{ext}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)} = c_2 \|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)},$$

όπου c'_1, c_1, c_2 είναι θετικές σταθερές, δηλαδή,

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^1(B)} \leq c_2 \|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)}. \quad (3.22)$$

Θεωρούμε τώρα μία νέα διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{w} \in H^1(B)$ έτσι ώστε $\mathbf{w} = \mathbf{u}^{sct} - \mathbf{u}_0$. Μετά από υπολογισμούς και χρησιμοποιώντας ότι $\Delta^* \mathbf{u}_0 = \mathbf{0}$ στο B βρίσκουμε ότι η \mathbf{w} ικανοποιεί το κάτωθι πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(\Delta^* + \rho_1 \omega^2) \mathbf{w} = -\rho_1 \omega^2 \mathbf{u}_0 \text{ στο } B \quad (3.23)$$

$$T^{(r)} \mathbf{w} + i\omega c \mathbf{w} = \mathbf{h} - (T \mathbf{u}_0 + i\omega c \mathbf{u}_0) \text{ στο } \Gamma_I \quad (3.24)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ στο } \Gamma_D. \quad (3.25)$$

Με τη χρήση της \mathbf{w} θα κατασκευάσουμε την τροποποιημένη μεταβολική μορφή της (3.21). Από τον ορισμό της \mathbf{w} προκύπτει άμεσα ότι $\mathbf{u}^{sct} = \mathbf{w} + \mathbf{u}_0$, αντικαθιστώντας το σκεδασμένο πεδίο στην (3.21) και λαμβάνοντας υπόψη ότι το συναρτησιακό \mathcal{E} είναι μία διγραμμική μορφή καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} & \int_B [\mathcal{E}(\bar{\phi}, \mathbf{w}) - \rho_1 \omega^2 \bar{\phi} \cdot \mathbf{w}] d\mathbf{r} + i\omega c \int_{\Gamma_I} \mathbf{w} \cdot \bar{\phi} ds \\ & = \langle \mathbf{h}, \phi \rangle - \int_B \mathcal{E}(\bar{\phi}, \mathbf{u}_0) d\mathbf{r} + \int_B \rho_1 \omega^2 \bar{\phi} \cdot \mathbf{u}_0 d\mathbf{r} - i\omega c \int_{\Gamma_I} \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\phi} ds \end{aligned} \quad (3.26)$$

Με την βοήθεια του πρώτου τύπου Betti για τα πεδία $\bar{\phi}$ και \mathbf{w} στο χωρίο B , έπειτα από κάποιες πράξεις [49] προκύπτει ότι

$$\int_B \mathcal{E}(\bar{\phi}, \mathbf{u}_0) d\mathbf{r} = \int_{\Gamma_I} \bar{\phi} \cdot T \mathbf{u}_0 ds. \quad (3.27)$$

Η σχέση (3.26) μέσω της (3.27) δίνει

$$\begin{aligned} & \int_B [\mathcal{E}(\bar{\phi}, \mathbf{w}) - \rho_1 \omega^2 \bar{\phi} \cdot \mathbf{w}] d\mathbf{r} + i\omega c \int_{\Gamma_I} \mathbf{w} \cdot \bar{\phi} ds \\ & = \langle \mathbf{h}, \phi \rangle - \int_{\Gamma_I} (T \mathbf{u}_0 + i\omega c \mathbf{u}_0) \cdot \bar{\phi} ds + \int_B \rho_1 \omega^2 \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\phi} d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Η εξίσωση (3.28) είναι η τροποποιημένη μορφή της μεταβολικής εξίσωσης (3.21). Ορίζουμε τώρα τους ακόλουθους τελεστές:

$$a(\mathbf{w}, \phi) := \int_B [\mathcal{E}(\bar{\phi}, \mathbf{w}) - \rho_1 \omega^2 \bar{\phi} \cdot \mathbf{w}] d\mathbf{r} + i\omega c \int_{\Gamma_I} \mathbf{w} \cdot \bar{\phi} ds \quad (3.29)$$

$$\ell(\phi) := \langle \mathbf{h}, \phi \rangle - \int_{\Gamma_I} (T\mathbf{u}_0 + i\omega c\mathbf{u}_0) \cdot \bar{\phi} ds + \int_B \rho_1 \omega^2 \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\phi} d\mathbf{r} \quad (3.30)$$

$$a_1(\mathbf{w}, \phi) := \int_B [\mathcal{E}(\bar{\phi}, \mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot \bar{\phi}] d\mathbf{r} + i\omega c \int_{\Gamma_I} \mathbf{w} \cdot \bar{\phi} ds \quad (3.31)$$

$$a_2(\mathbf{w}, \phi) := \int_B (-\rho_1 \omega^2 - 1) \mathbf{w} \cdot \bar{\phi} d\mathbf{r}. \quad (3.32)$$

Εύκολα φαίνεται ότι για το αριστερό μέλος της (3.28) έχουμε,

$$a(\mathbf{w}, \phi) = a_1(\mathbf{w}, \phi) + a_2(\mathbf{w}, \phi).$$

Από τις σχέσεις (3.29)-(3.30) είναι φανερό ότι

$$a(\mathbf{w}, \phi) = \ell(\phi),$$

όπου $\ell(\phi)$ μία γραμμική, φραγμένη και συζυγής συνάρτηση.

Θα αποδείξουμε ότι ο τελεστής a είναι $\frac{2}{3}$ -γραμμική μορφή (*sesquilinear form*). Πράγματι, αν θεωρούμε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in H^1(B)$, $\xi, \mu \in \mathbb{C}$ και τις συναρτήσεις δοκιμής $\phi, \phi_1, \phi_2 \in H_0^1(B, \Gamma_D)$, τότε [21]

$$\begin{aligned} a(\xi \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}, \phi) &= \xi \left\{ \int_B [\mathcal{E}(\bar{\phi}, \mathbf{x}) - \rho_1 \omega^2 \mathbf{x} \cdot \bar{\phi}] d\mathbf{r} + i\omega c \int_{\Gamma_I} \mathbf{x} \cdot \bar{\phi} ds \right\} \\ &\quad + \mu \left\{ \int_B [\mathcal{E}(\bar{\phi}, \mathbf{y}) - \rho_1 \omega^2 \mathbf{y} \cdot \bar{\phi}] d\mathbf{r} + i\omega c \int_{\Gamma_I} \mathbf{y} \cdot \bar{\phi} ds \right\} = \xi a(\xi, \phi) + \mu a(\mathbf{y}, \phi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a(\mathbf{w}, \xi \phi_1 + \mu \phi_2) &= \bar{\xi} \left\{ \int_B [\mathcal{E}(\bar{\phi}_1, \mathbf{w}) - \rho_1 \omega^2 \mathbf{w} \cdot \bar{\phi}_1] d\mathbf{r} + i\omega c \int_{\Gamma_I} \mathbf{w} \cdot \bar{\phi}_1 ds \right\} \\ &\quad + \bar{\mu} \left\{ \int_B [\mathcal{E}(\bar{\phi}_2, \mathbf{w}) - \rho_1 \omega^2 \mathbf{w} \cdot \bar{\phi}_2] d\mathbf{r} + i\omega c \int_{\Gamma_I} \mathbf{w} \cdot \bar{\phi}_2 ds \right\} = \bar{\xi} a(\mathbf{w}, \phi_1) + \bar{\mu} a(\mathbf{w}, \phi_2). \end{aligned}$$

Επομένως, το συναρτησιακό a είναι $\frac{2}{3}$ -γραμμική μορφή (*sesquilinear form*) άρα και το ℓ επίσης. Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι τα συναρτησιακά a_1, a_2 είναι $\frac{2}{3}$ -γραμμική μορφή (*sesquilinear forms*).

Το συναρτησιακό a_2 είναι φραγμένο, έχουμε

$$|a_2(\mathbf{w}, \phi)| = \left| \int_B (-\rho_1 \omega^2 - 1) \mathbf{w} \cdot \bar{\phi} d\mathbf{r} \right|.$$

Μέσω της ανισότητας Cauchy-Schwartz η τελευταία σχέση γίνεται:

$$|a_2(\mathbf{w}, \phi)| \leq C' \|\mathbf{w}\|_{L^2(B)} \cdot \|\phi\|_{L^2(B)},$$

όπου $C' = |-\rho_1\omega^2 - 1| \in \mathbb{R}$ μία θετική σταθερά. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε το κάτωθι λήμμα.

Λήμμα 3.3.1 *Το συναρτησιακό a_1 που δίνεται από τη σχέση (3.31) είναι φραγμένο, δηλαδή υπάρχει θετική σταθερά C τέτοια, ώστε*

$$|a_1(\mathbf{w}, \phi)| \leq C \|\mathbf{w}\|_{H^1(B)} \|\phi\|_{H^1(B)}.$$

Απόδειξη.

Από τη σχέση (3.31) έχουμε:

$$|a_1(\mathbf{w}, \phi)| = \left| \int_B [\mathcal{E}(\bar{\phi}, \mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot \bar{\phi}] d\mathbf{r} + i\omega c \int_{\Gamma_I} \mathbf{w} \cdot \bar{\phi} ds \right|.$$

Στην τελευταία σχέση εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwartz, λαμβάνοντας υπόψη ότι το \mathcal{E} είναι ένα διγραμμικό, φραγμένο συναρτησιακό και ότι ισχύει η νορμική σχέση $\|\cdot\|_{L^2(B)} \leq \|\cdot\|_{H^1(B)}$, έχουμε

$$a_1(\mathbf{w}, \phi) \leq c_1 \|\mathbf{w}\|_{H^1(B)} \|\phi\|_{H^1(B)} + \|\mathbf{w}\|_{L^2(B)} \cdot \|\phi\|_{L^2(\Gamma_I)} \quad (3.33)$$

όπου c_1, c_2 είναι κάποιες θετικές σταθερές.

Επίσης, υπάρχουν σταθερές $c_{21} > 0, c_{22} > 0$ τέτοιες, ώστε

$$\|\mathbf{w}\|_{L^2(\Gamma_I)} \leq c_{21} \|\mathbf{w}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)}$$

$$\|\phi\|_{L^2(\Gamma_I)} \leq c_{22} \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)}.$$

Εφόσον $\phi \in H_0^1(B, \Gamma_D)$ ισχύει ότι $\phi = \mathbf{0}$ στο $\Gamma_D \cup \Pi$, επομένως

$$c_{21} \|\mathbf{w}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} c_{22} \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} = c_{21} c_{22} \|\mathbf{w}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Μέσω της τελευταίας σχέσης, η (3.33) γίνεται

$$|a_1(\mathbf{w}, \phi)| \leq \tilde{C} (\|\mathbf{w}\|_{H^1(B)} \|\phi\|_{H^1(B)} + \|\mathbf{w}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}) \quad (3.34)$$

όπου $\tilde{C} = \max\{c_1, c_{21}, c_{22}\}$ είναι κάποια θετική πραγματική σταθερά. Το trace theorem (θεώρημα ίχνους) εξασφαλίζει την ύπαρξη θετικών πραγματικών σταθερών c_{31}, c_{32} τέτοιων ώστε

$$\|\mathbf{w}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_{31} \|\mathbf{w}\|_{H^1(B)}$$

$$\|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c_{32} \|\phi\|_{H^1(B)}.$$

Συνεπώς, η σχέση (3.34) γίνεται

$$|a_1(\mathbf{w}, \phi)| \leq C \|\mathbf{w}\|_{H^1(B)} \|\phi\|_{H^1(B)},$$

όπου $C = \tilde{C} + \tilde{C}c_{31}c_{32}$ είναι κάποια θετική σταθερά. \square

Λήμμα 3.3.2 Το συναρτησιακό a_1 που δίνεται από την (3.31) είναι ελλειπτικό (strictly coercive), δηλαδή, υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$|a_1(\mathbf{w}, \mathbf{w})| \geq c \|\mathbf{w}\|_{H^1(B)}^2.$$

Απόδειξη.

Παίρνοντας τον ολοκληρωτικό τελεστή $a_1(\mathbf{w}, \phi)$ που δίνεται από την (3.31) και θέτοντας $\phi = \mathbf{w}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{w}, \mathbf{w}) &= \int_B (\mathcal{E}(\mathbf{w}, \mathbf{w}) + \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{w}}) d\mathbf{r} + i\omega c \int_{\Gamma_I} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{w}} ds \\ &= \int_B \left\{ \lambda |\nabla \cdot \mathbf{w}|^2 + \mu \left(\frac{\partial w_1}{\partial r_2} + \frac{\partial w_2}{\partial r_1} \right)^2 + (\lambda + \mu) \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial r_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial r_2} \right)^2 \right] + \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{w}} \right\} d\mathbf{r} \\ &\quad + i\omega c \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Gamma_I)}^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

όπου στις πράξεις μας έχουμε θεωρήσει ότι $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$. Τελικά, και επειδή το $\mathcal{E}(\mathbf{w}, \mathbf{w})$ είναι μη-αρνητικό από την παραπάνω καταλήγουμε στην

$$|a_1(\mathbf{w}, \mathbf{w})| = \left| \int_B [\lambda |\nabla \cdot \mathbf{w}|^2 + |\mathbf{w}|^2] d\mathbf{r} + M + i\omega c \|\mathbf{w}\|_{L^2(\Gamma_I)}^2 \right|, \quad (3.36)$$

όπου

$$M = \int_B \left\{ \mu \left(\frac{\partial w_1}{\partial r_2} + \frac{\partial w_2}{\partial r_1} \right)^2 + (\lambda + \mu) \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial r_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial r_2} \right)^2 \right] \right\} d\mathbf{r}. \quad (3.37)$$

Από τον ορισμό του μιγαδικού μέτρου και επειδή το δεξί μέλος της σχέσης (3.36) έχει θετικές ποσότητες, καταλήγουμε στην

$$|a_1(\mathbf{w}, \mathbf{w})| \geq \left| \lambda \int_B |\nabla \cdot \mathbf{w}|^2 d\mathbf{r} + \int_B |\mathbf{w}|^2 d\mathbf{r} \right|.$$

Αν συμβολίσουμε ως $c = \min\{\lambda, 1\}$ (που είναι μία θετική σταθερά) λαμβάνουμε

$$|a_1(\mathbf{w}, \mathbf{w})| \geq c \left\{ \|\nabla \cdot \mathbf{w}\|_{L^2(B)}^2 + \|\mathbf{w}\|_{L^2(B)}^2 \right\}.$$

Από τον ορισμό της νόρμας $\|\mathbf{w}\|_{H^1(B)}^2$ η τελευταία σχέση γίνεται

$$|a_1(\mathbf{w}, \mathbf{w})| \geq c\|\mathbf{w}\|_{H^1(B)}^2, \text{ για κάποια θετική σταθερά } c.$$

□

Λήμμα 3.3.3 *Το συναρτησιακό $\ell(\phi)$ είναι φραγμένο.*

Απόδειξη.

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.30) έχουμε:

$$|\ell(\phi)| = | \langle \mathbf{h}, \phi \rangle - \int_{\Gamma_I} (T\mathbf{u}_0 + i\omega c\mathbf{u}_0) \cdot \bar{\phi} ds + \int_B \rho_1 \omega^2 \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\phi} d\mathbf{r} |.$$

Λόγω της τριγωνικής ανισότητας και της ανισότητας Cauchy-Schwartz έχουμε

$$\begin{aligned} |\ell(\phi)| &\leq \left(\int_{\Gamma_I} \mathbf{h} \cdot \bar{\mathbf{h}} ds \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_I} \bar{\phi} \cdot \bar{\phi} ds \right)^{1/2} \\ &+ \left(\int_{\Gamma_I} T\mathbf{u}_0 \cdot \bar{T}\mathbf{u}_0 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_I} \bar{\phi} \cdot \bar{\phi} ds \right)^{1/2} + |i\omega c| \left(\int_{\Gamma_I} \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_I} \bar{\phi} \cdot \bar{\phi} ds \right)^{1/2} \\ &\quad + |\rho_1 \omega^2| \left(\int_B \mathbf{u}_0 \cdot \bar{\mathbf{u}}_0 ds \right)^{1/2} \left(\int_B \bar{\phi} \cdot \bar{\phi} ds \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα μέσω της ιδιότητας των νορμών $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{H^p}$ μας δίνει

$$\begin{aligned} |\ell(\phi)| &\leq \|\mathbf{h}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\phi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \|T\mathbf{u}_0\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\phi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \\ &\quad + |i\omega c| \|\mathbf{u}_0\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\phi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + |\rho_1 \omega^2| \|\mathbf{u}_0\|_{H^1(B)} \|\phi\|_{H^1(B)}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Από την υπόθεση μας $\phi \in H_0^1(B, \Gamma_D)$ και επομένως, $\phi = \mathbf{0}$ στο Γ_D . Συνεπώς, έχουμε

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\phi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \|\mathbf{u}_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} \quad (3.39)$$

και

$$\|T\mathbf{u}_0\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \|\phi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \|T\mathbf{u}_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)}. \quad (3.40)$$

Επειδή ο τελεστής T είναι φραγμένος, η σχέση (3.38) παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned} |\ell(\phi)| &\leq c_1 \|\mathbf{h}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} \|\phi\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} + c_2 (\tilde{c} + |i\omega c|) \|\mathbf{u}_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} \|\phi\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} \\ &\quad + c_3 |\rho_1 \omega^2| \|\mathbf{u}_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)} \|\phi\|_{H^1(B)} \end{aligned} \quad (3.41)$$

για κάποιες θετικές σταθερές c_1, c_2, c_3 .

Μετά από πράξεις στην σχέση (3.41) και λαμβάνοντας υπόψη το θεώρημα ίχνους (*trace theorem*) [27] το οποίο εξασφαλίζει ότι

$$\|\phi\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} \leq c'_1 \|\phi\|_{H^1(B)}, \quad (3.42)$$

για κάποια σταθερά c'_1 και λόγω $\mathbf{u}_0 = \mathbf{f}$ στο Γ_D έχουμε

$$|\ell(\phi)| \leq C(\|\mathbf{h}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} + \|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)}) \|\phi\|_{H^1(B)} \quad (3.43)$$

όπου $C = \max\{c_1 c'_2, c'_1 c_2 (\tilde{c} + |\omega c|) + c_3 |\rho_1 \omega^2|\}$ θετική σταθερά. \square

Στη συνέχεια διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε την καλή τοποθέτηση του εσωτερικού μεικτού προβλήματος σκέδασης (3.12)-(3.14).

Θεώρημα 3.3.1 *Το εσωτερικό πρόβλημα σκέδασης (3.12)-(3.14) έχει μοναδική λύση $\mathbf{u}^{sct} \in H^1(B)$ η οποία ικανοποιεί την μεταβολική εξίσωση (3.21) και επιπλέον ισχύει*

$$\|\mathbf{u}^{sct}\|_{H^1(B)} \leq C[\|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)} + \|\mathbf{h}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)}] \quad (3.44)$$

για κάποια θετική σταθερά C .

Απόδειξη.

◇ *Μοναδικότητα.*

Δείχνουμε πρώτα ότι το αντίστοιχο ομογενές πρόβλημα του (3.12)-(3.14)

($\mathbf{f} = \mathbf{h} = \mathbf{0}$) έχει μοναδική τετριμμένη λύση $\mathbf{u}^{sct} = \mathbf{0}$ στο B . Στην μεταβολική εξίσωση (3.21) θεωρώντας $\phi = \mathbf{u}^{sct}$ για το ομογενές πρόβλημα λαμβάνουμε

$$\int_B [\mathcal{E}(\bar{\mathbf{u}}^{sct}, \mathbf{u}^{sct}) - \rho_1 \omega^2 |\mathbf{u}^{sct}|^2] d\mathbf{r} + i\omega c \int_{\Gamma_I} |\mathbf{u}^{sct}|^2 ds = 0. \quad (3.45)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι ποσότητες $\rho_1 \omega^2 |\mathbf{u}^{sct}|$, $\mathcal{E}(\bar{\mathbf{u}}^{sct}, \mathbf{u}^{sct})$ είναι πραγματικές και παίρνοντας το φανταστικό μέρος της (3.45) παίρνουμε

$$Im\{i\omega c \int_{\Gamma_I} |\mathbf{u}^{sct}|^2 ds\} = 0.$$

Η ποσότητα $\omega c \int_{\Gamma_I} |\mathbf{u}^{sct}|^2 ds$ είναι πραγματική και επομένως, $\int_{\Gamma_I} |\mathbf{u}^{sct}|^2 ds = 0$. Εφόσον $\omega, c > 0$ η τελευταία σχέση εξασφαλίζει ότι

$$\mathbf{u}^{sct} = \mathbf{0} \text{ στο } \Gamma_I. \quad (3.46)$$

Χρησιμοποιώντας την (3.46) στη συνοριακή συνθήκη (3.14) λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$T\mathbf{u}^{sct} = \mathbf{0} \text{ στο } \Gamma_I. \quad (3.47)$$

Μέσω των σχέσεων (3.46) και (3.47), σε συνδυασμό με το θεώρημα μοναδικότητας του Holmgren [49] εξασφαλίζει $\mathbf{u}^{sct} = \mathbf{0}$ στο B .

Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη της μοναδικότητας της λύσης.

◇ *Ύπαρξη και ευστάθεια λύσης.*

Είδαμε στα προηγούμενα ότι το πρόβλημα σκέδασης (3.12)-(3.14) γράφεται ισοδύναμα στην μεταβολική μορφή (3.28), με $\mathbf{w} = \mathbf{u}^{sct} - \mathbf{u}_0$. Η μοναδικότητα του προβλήματος (3.12)-(3.14) είναι ισοδύναμη με την μοναδικότητα της λύσης \mathbf{w} της $a(\mathbf{w}, \phi) = \ell(\phi)$. Συνεπώς, από την ανισότητα (3.43), λόγω της $a(\mathbf{w}, \phi) = \ell(\phi)$ παίρνουμε ότι $\|a\|_{H^1(B)} \leq C(\|\mathbf{h}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} + \|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)})$, όπου C κάποια θετική σταθερά και εφαρμόζοντας το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz φτάνουμε στην

$$\|\mathbf{w}\|_{H^1(B)} \leq C(\|\mathbf{h}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} + \|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)}). \quad (3.48)$$

Επιπλέον είναι $\mathbf{w} = \mathbf{u}^{sct} - \mathbf{u}_0$ στο \bar{B} ή $\mathbf{u}^{sct} = \mathbf{w} + \mathbf{u}_0$ στο \bar{B} και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\|\mathbf{u}^{sct}\|_{H^1(B)} \leq \|\mathbf{w}\|_{H^1(B)} + \|\mathbf{u}_0\|_{H^1(B)}. \quad (3.49)$$

Η (3.49) μέσω της (3.48) γίνεται

$$\|\mathbf{u}^{sct}\|_{H^1(B)} \leq C_1(\|\mathbf{h}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} + \|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)}) + \|\mathbf{u}_0\|_{H^1(B)} \quad (3.50)$$

για κάποια θετική σταθερά C_1 .

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα ίχνους (*trace theorem*) [27] (θεώρημα 1.36) εξασφαλίζεται η ύπαρξη θετικής σταθεράς C_2 έτσι, ώστε

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^1(B)} \leq C_2\|\mathbf{u}_0\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial B)}. \quad (3.51)$$

Αφού ισχύει $\mathbf{u}_0 = \mathbf{f}$ στο $\Gamma = \partial B$, η (3.51) γίνεται

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^1(B)} \leq C_2\|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$\mathbf{f}_{ext} = \begin{cases} \mathbf{f}, & \text{στο } \Gamma_D \\ \mathbf{0}, & \text{αλλού στο } \Gamma \end{cases} \quad (3.52)$$

η ανισότητα γίνεται

$$\|\mathbf{u}_0\|_{H^1(B)} \leq C_2 \|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)}. \quad (3.53)$$

Η σχέση (3.50) μέσω της (3.53) γίνεται

$$\|\mathbf{u}^{sct}\|_{H^1(B)} \leq C(\|\mathbf{h}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} + \|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)}) + C_2 \|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)}, \quad (3.54)$$

ή ισοδύναμα

$$\|\mathbf{u}^{sct}\|_{H^1(B)} \leq C\|\mathbf{h}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} + (C + C_2)\|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)} \quad (3.55)$$

για κάποιες θετικές σταθερές C, C_2 . Τελικά συμπεραίνουμε

$$\|\mathbf{u}^{sct}\|_{H^1(B)} \leq C'(\|\mathbf{h}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)} + \|\mathbf{f}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)}) \quad (3.56)$$

όπου $C' = \max\{C, C + C_2\}$ κάποια θετική σταθερά. Συνδυάζοντας τις προηγούμενες σχέσεις με την τελευταία ανισότητα και εφαρμόζοντας το θεώρημα Lax-Milgram [27] (σελ.90) ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος. \square

Παρατήρηση.

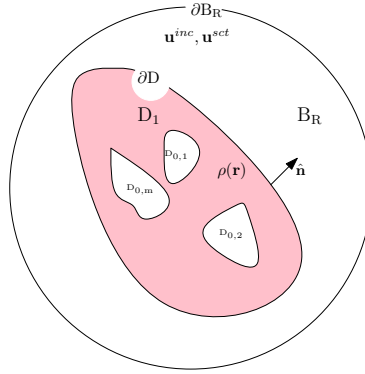
Αναφέρουμε επίσης, ότι παράλληλα με το ευθύ μεικτό πρόβλημα σκέδασης (3.12)-(3.14) μελετήθηκε με ανάλογο τρόπο όπως στο [40] για την ακουστική ένα άλλο πρόβλημα σκέδασης για ανοιχτό, συνεκτικό και φραγμένο χωρίο $D \subseteq \mathbb{R}^2$, με ομαλό C^2 -σύνορο ∂D . Στην περίπτωση αυτή θεωρήσαμε ότι το D είναι μη-ομογενές μέσο, το οποίο ένα πεπερασμένο στον αντικειμένων $D_0^k, k = 1, 2, \dots, n$ βυθισμένα στο εσωτερικό του. Συμβολίζουμε ως $D_0 = \cup_{k=1}^n D_0^k$, υποθέτουμε ότι $D_0^{k_1} \cap D_0^{k_2} = \emptyset$, για $k_1 \neq k_2$ και θεωρούμε χωρίο $D_1 := D \setminus \bar{D}_0$.

Από μαθηματικής απόψης, το πρόβλημα μας μοντελοποιείται από το ακόλουθο εξωτερικό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\Delta^* \mathbf{u}(\mathbf{r}) + \rho(\mathbf{r})\omega^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}_0 \quad (3.57)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \text{ στο } \partial D_0 \quad (3.58)$$

$$\lim_{|\mathbf{r}| \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left[\frac{\partial \mathbf{u}_0^{sct}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} - ik_a \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) \right] = \mathbf{0}, \quad a = p, s, r := |\mathbf{r}| \quad (3.59)$$



Σχήμα 3.2: Το πρόβλημα σκέδασης (Dirichlet) για μη-ομογενές ελαστικό μέσο με θαμμένο αντικείμενο

Η συνθήκη ακτινοβολίας Kupradze (3.59) ισχύει ομοιόμορφα προς όλες τις διευθύνσεις $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$ και k_p, k_s είναι οι κυματαριθμοί για το εγκάρσιο και το διαμήκες τμήμα του κυματικού πεδίου, αντίστοιχα. Στο πρόβλημα σκέδασης (3.57)-(3.59) χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\mathbf{u}^{tot} = \mathbf{u} = \mathbf{u}^{inc} + \mathbf{u}^{sct},$$

όπου \mathbf{u} είναι το ολικό κυματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}_0$, \mathbf{u}^{inc} είναι το προσπίπτον επίπεδο κυματικό πεδίο και \mathbf{u}^{sct} συμβολίζει το αντίστοιχο σκεδασμένο πεδίο.

Έχει αποδειχθεί η καλή τοποθέτηση του προβλήματος (3.57)-(3.59) με ανάλογο τρόπο όπως αποδείχθηκε στο ευθύ μεικτό πρόβλημα σκέδασης (3.12)-(3.14) την ύπαρξη, μοναδικότητα και ευστάθεια λύσης (αναφορά). Η καλή τοποθέτηση του παραπάνω προβλήματος (3.57)-(3.59) ισχύει και στην περίπτωση που αντί της συνοριακής συνθήκης (3.58) στο θαμμένο αντικείμενο ισχύει μία συνοριακή συνθήκη Neumann ή εμπέδησης (Robin) ή μία μεικτή συνθήκη.

Κεφάλαιο 4

Το Αντίστροφο Μεικτό Πρόβλημα Σκέδασης

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε το αντίστοιχο αντίστροφο μεικτό πρόβλημα σκέδασης από μερικώς επικαλυμμένο αντικείμενο (*partially coated cavity*), το οποίο είναι απλό, συνεκτικό και φραγμένο χωρίο του \mathbb{R}^2 . Ειδικότερα θα επεκτείνουμε τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο [85] για την περιοχή της ακουστικής στη πιο σύνθετη και απαιτητική περιοχή της δισδιάστατης γραμμικής ελαστικότητας. Ο στόχος μας είναι ο προσδιορισμός/ανακατασκευή του συνόρου του μερικώς επικαλυμμένου αντικειμένου (σκεδαστή B) χρησιμοποιώντας τη γνώση των κοντινών σκεδασμένων πεδίων $\mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in C$, που δημιουργούνται από σημειακή πηγή $\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc}(\mathbf{r}) = \tilde{\Gamma}(\cdot, \mathbf{r}_0)$, $\mathbf{r}_0 \in C$.

4.1 Διατύπωση Αντίστροφου Μεικτού Προβλήματος Σκέδασης

Από μαθηματικής άποψης το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης μοντελοποιείται από το ακόλουθο εσωτερικό μεικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(\Delta^* + \rho_1 \omega^2) \mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in B \quad (4.1)$$

$$\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \Gamma_D \quad (4.2)$$

$$T\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) + i\omega c\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \Gamma_I, \quad (4.3)$$

όπου $\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc}(\mathbf{r}) + \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r})$, ρ_1 είναι η πυκνότητα μάζας στο B και c είναι η σταθερά εμπέδησης του υλικού.

Το πρόβλημα (4.1)-(4.3) είναι κατ'ουσίαν το πρόβλημα (3.8)-(3.10) συναρτήσεως του ολικού πεδίου μετατοπίσεων \mathbf{u}^{tot} . Η μοναδικότητα του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης (4.1)-(4.3) για το μερικώς επικαλυμμένο αντικείμενο B και το σύνορο του Γ έχει αποδειχθεί στο [16].

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μία τροποποιημένη μέθοδο παραγοντοποίησης (*modified factorization method*) με στόχο την ανακατασκευή του συνόρου του μη-διαπερατού μερικώς επικαλυμμένου αντικειμένου B . Η μέθοδος της παραγοντοποίησης [27], [29] έχει χρησιμοποιηθεί σε διάφορα αντίστροφα ακουστικά και ηλεκτρομαγνητικά προβλήματα σκέδασης. Όσον αφορά την ελαστικότητα η μέθοδος παραγοντοποίησης έχει χρησιμοποιηθεί σε διάφορες εργασίες [16], [72] και στην παρούσα διδακτορική διατριβή θα αναπτύξουμε και θα θεμελιώσουμε μία τροποποιημένη μορφή της μεθόδου παραγοντοποίησης και θα παρουσιάσουμε νέα αποτελέσματα με την ανακατασκευή του σχήματος του B .

Αρχικά, μέσω των σκεδασμένων κοντινών πεδίων $\mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r})$, ορίζουμε τον ακόλουθο τελεστή κοντινού πεδίου

$$\mathcal{N} : [L^2(C)]^2 \rightarrow L^2(C)$$

που δίνεται από

$$(\mathcal{N}\mathbf{g})(\mathbf{r}) := \int_C \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0), \mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in C. \quad (4.4)$$

Υπενθυμίζουμε ότι με C συμβολίζουμε μία κλειστή, λεία καμπύλη που βρίσκεται στο εσωτερικό του B (βλέπε σχήμα (3.1)). Στη μέθοδο παραγοντοποίησης έχουμε την ακόλουθη σχέση

$$\mathcal{N} = \mathcal{H}^* \mathcal{M} \mathcal{H}, \quad (4.5)$$

όπου ο τελεστής $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2) : [L^2(C)]^2 \rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)$ που δίνεται από

$$\mathcal{H}_1(\mathbf{g}) = \mathbf{v}_{\mathbf{g}}|_{\Gamma_D} \quad (4.6)$$

$$\mathcal{H}_2(\mathbf{g}) = (T + i\omega c)\mathbf{v}_{\mathbf{g}}|_{\Gamma_I} \quad (4.7)$$

και το $\mathbf{v}_{\mathbf{g}}$ είναι το δυναμικό απλού-στρώματος που δίνεται ως

$$\mathbf{v}_{\mathbf{g}} = \int_C \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0) \quad (4.8)$$

για κάθε $\mathbf{g} \in [L^2(C)]^2$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus C$.

Οι τελεστές \mathcal{H} και \mathcal{N} είναι διακεκριμένοι. Ο τελεστής \mathcal{H}^* είναι ο αντίστοιχος (*adjoint*)

συζυγής τελεστής του \mathcal{H} . Έχει αποδειχθεί ότι ο τελεστής \mathcal{H} είναι συμπαγής (*compact*), με πυκνή εικόνα (*dense range*) και ότι ο τελεστής \mathcal{M} είναι ισομορφισμός (*isomorphism*). Έπειτα, θα ελέγξουμε αν με τους προαναφερθέντες τελεστές μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα των Kirsch και Grinberg (Theorem 2.15, [66]).

Σημείωση. Όπως θα διαπιστώσουμε στη συνέχεια, δεν θα μπορεί να εφαρμοστεί άμεσα το θεώρημα των Kirsch και Grinberg για τον βασικό τελεστή \mathcal{N} οπότε θα χρειαστεί να οριστούν βοηθητικοί τελεστές για να προχωρήσει η μελέτη μας. Η μέθοδος της παραγοντοποίησης βασίζεται στο ακόλουθο θεμελιώδες θεώρημα των Kirsch και Grinberg (Theorem 2.15 [66]).

Θεώρημα 4.1.1 Έστω $X \subset U \subset X^*$ η τριπλέτα του Gelfand (*Gelfand triple*), με U ένα χώρος Hilbert και X ένας ανακλαστικός (*reflexive*) χώρος Banach ώστε η εμφύτευση να είναι πυκνή (*the imbedding is dense*). Επιπλέον υποθέτουμε ότι ο χώρος Y είναι ένας δεύτερος χώρος Hilbert και θεωρούμε τους τελεστές

$N : Y \rightarrow Y, G : X \rightarrow Y, \Lambda : X^* \rightarrow X$ για τους οποίους υποθέτουμε ότι είναι γραμμικοί, φραγμένοι και ικανοποιούν τη σχέση $N = G\Lambda G^*$. Κάνουμε τις επόμενες παραδοχές:

- (1) Ο G είναι συμπαγής με πυκνή εικόνα.
- (2) Υπάρχουν $t \in [0, 2\pi]$ τέτοια ώστε $Re[e^{it}\Lambda] = C + K$, για κάποιον συμπαγή τελεστή K και για κάποιον αυτοσυζυγή και ελλειπτικό τελεστή $C : X^* \rightarrow X$, δηλαδή, υπάρχει $c_0 > 0$ σταθερά τέτοια ώστε

$$\langle \mathbf{g}, C\mathbf{g} \rangle \geq c_0 \|\mathbf{g}\|^2, \text{ για κάθε } \mathbf{g} \in X^*.$$

- (3) Το $Im(\Lambda)$ είναι μη-αρνητικό ή μη-θετικό στον X^* , $\langle \mathbf{g}, Im(\Lambda) \rangle \geq 0$ ή $\langle \mathbf{g}, Im(\Lambda) \rangle \leq 0$ για κάθε $\mathbf{g} \in X^*$.
- (4) Το $Re(e^{it}\Lambda)$ είναι αμφί ή το $Im(\Lambda)$ είναι αυστηρά θετικό ή αυστηρά αρνητικό για κάθε $\mathbf{g} \in Range(G^*)$ και $\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$.

Τότε ο τελεστής $N_{\#} := |Re(e^{it}\Lambda)| + |Im(N)|$ είναι θετικός και η εικόνα του G συμπίπτει με την εικόνα του $N_{\#}^{1/2}$.

Για την μορφή της παραγοντοποίησης (4.5) χρειαζόμαστε να ορίσουμε έναν συνοριακό (*data-to-data*) *near field*

$$\mathcal{G} : [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)]^2 \times [H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)]^2 \rightarrow [L^2(C)]^2,$$

ο οποίος απεικονίζει τα δεδομένα του συνόρου \mathbf{f}, \mathbf{h} στα κοντινά πεδία $\mathbf{u}^{sct}|_C$ και έχει τύπο

$$\mathcal{G}(\mathbf{f}(\mathbf{r}), \mathbf{h}(\mathbf{r})) = \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r})|_C, \quad (4.9)$$

όπου \mathbf{u}^{sct} είναι το σκεδασμένο πεδίο του προβλήματος (3.12)-(3.14). Χρησιμοποιώντας το δυναμικό απλού-στρώματος που δίνεται στη σχέση (4.8) λαμβάνουμε το ακόλουθο λήμμα

Λήμμα 4.1.1 *Ο τελεστής κοντινού πεδίου $\mathcal{N} : [L^2(C)]^2 \rightarrow L^2(C)$, που δίνεται από τη σχέση (4.4) γράφεται ως*

$$\mathcal{N} = -\mathcal{GH} \quad (4.10)$$

Απόδειξη.

Λαμβάνοντας υπόψη τον τελεστή \mathcal{H} έχουμε ότι

$$\mathcal{G}(\mathcal{H}\mathbf{g}) = (\mathcal{G}\mathbf{v}_{\mathbf{g}}|_{\Gamma_D}, (T^{(r)} + i\omega c)\mathbf{v}_{\mathbf{g}}|_{\Gamma_I}), \quad (4.11)$$

όπου με τον άνω δείκτη στον επιφανειακό τελεστή τάσεων T συμβολίζουμε την δράση του διαφορικού τελεστή ως προς την αντίστοιχη χωρική μεταβλητή.

Χρησιμοποιώντας το δυναμικό απλού στρώματος (4.8) παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\mathcal{G}(\mathcal{H}\mathbf{g}) &= -\mathcal{G}(\mathcal{H}_1\mathbf{g}, \mathcal{H}_2\mathbf{g}) \\ &= (-\mathcal{G} \int_C \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \mathbf{p}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0), (T^{(r)} + i\omega c) \int_C \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \mathbf{p}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)) \\ &= (-\mathcal{G}(-\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma_D}, -\int_C \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma_I}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} &(-\mathcal{GH})\mathbf{g} \\ &= -\mathcal{G} \left[\int_C (\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma_D}, \int_C (T^{(r)} + i\omega c)(\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma_I} \right], \end{aligned} \quad (4.13)$$

όπου \mathbf{p} είναι το διάνυσμα πόλωσης που το έχουμε εισάγει στον ορισμό 4.2.1. Μέσω των σχέσεων (3.9) και (3.13) παίρνουμε ότι

$$\int_C (\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0) = -\int_C \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0). \quad (4.14)$$

Συνεχίζοντας τους υπολογισμούς των ολοκληρωμάτων που περιέχονται στην (4.13) έχουμε

$$\begin{aligned} & \int_C (T(\mathbf{r}) + i\omega c)(\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma_I} \\ &= \int_C (T(\mathbf{r}) + i\omega c)\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma_I} - \int_C (T(\mathbf{r}) + i\omega c)\mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma_I} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Ακολουθώντας από τις σχέσεις (3.10) και (3.14) καταλήγουμε στην

$$\int_C (T(\mathbf{r}) + i\omega c)(\mathbf{u}^{tot}(\mathbf{r}) - \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma_I} = - \int_C \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma_I} \quad (4.16)$$

Η (4.13) μέσω των (4.14) και (4.16) γίνεται

$$-(\mathcal{GH})(\mathbf{g}(\mathbf{r})) = -\mathcal{G}\left(- \int_C \mathbf{f}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma_D}, - \int_C \mathbf{h}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma_I}\right). \quad (4.17)$$

Στη συνέχεια θεωρούμε τις συνεχείς μηδενικές επεκτάσεις \mathbf{f}_{ext} , \mathbf{h}_{ext} των \mathbf{f} , \mathbf{h} αντίστοιχα στο σύνορο Γ με

$$\mathbf{f}_{ext} = \begin{cases} \mathbf{f}, & \text{στο } \Gamma_D \\ \mathbf{0}, & \text{αλλού στο } \Gamma \end{cases} \quad \text{και} \quad \mathbf{h}_{ext} = \begin{cases} \mathbf{h}, & \text{στο } \Gamma_I \\ \mathbf{0}, & \text{αλλού στο } \Gamma \end{cases},$$

τότε από την (4.17) έχουμε

$$\mathbf{f}_{ext}(\mathbf{r})|_{\Gamma_D} = \mathbf{f}(\mathbf{r}) \quad (4.18)$$

και

$$\mathbf{h}_{ext}(\mathbf{r})|_{\Gamma_I} = \mathbf{h}(\mathbf{r}). \quad (4.19)$$

Η σχέση (4.17) μέσω των (4.18) και (4.19) γίνεται

$$-(\mathcal{GH})\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\mathcal{G}\left(- \int_C \mathbf{f}_{ext}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma}, - \int_C \mathbf{h}_{ext}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma}\right). \quad (4.20)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι οι $\mathbf{f}_{ext}(\mathbf{r})$, $\mathbf{h}_{ext}(\mathbf{r})$ εξαρτώνται μόνο από τη θέση παρατήρησης \mathbf{r} ενώ είναι ανεξάρτητες της θέσης της πηγής \mathbf{r}_0 , η τελευταία σχέση γίνεται

$$-(\mathcal{GH})\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\mathcal{G}\left(- (\mathbf{f}_{ext}(\mathbf{r}), \mathbf{h}_{ext}(\mathbf{r})) \cdot \int_C \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma}\right). \quad (4.21)$$

Ο τελεστής \mathcal{G} είναι γραμμικός, συνεπώς η σχέση δίνει

$$-(\mathcal{GH})\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathcal{G}\left((\mathbf{f}_{ext}(\mathbf{r}), \mathbf{h}_{ext}(\mathbf{r})) \cdot \int_C \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)|_{\Gamma}\right). \quad (4.22)$$

Ο παράγοντας $\int_C \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0)$ εξαρτάται μόνο από τη θέση της πηγής \mathbf{r}_0 , επομένως ο \mathcal{G} δεν δρα πάνω σε αυτόν και τότε έχουμε

$$-(\mathcal{GH})\mathbf{g}(\mathbf{r}) = (\mathcal{G}(\mathbf{f}_{ext}(\mathbf{r}), \mathbf{h}_{ext}(\mathbf{r}))) \cdot \int_C \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0). \quad (4.23)$$

Με τη βοήθεια της σχέσης (4.9) έχουμε

$$-(\mathcal{GH})\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{sct}(\mathbf{r})|_C \cdot \int_C \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0). \quad (4.24)$$

Το σκεδασμένο πεδίο δεν παρουσιάζει ανωμαλία διότι εξαρτάται μόνο από τη θέση παρατήρησης \mathbf{r} και είναι ανεξάρτητο της θέσης της πηγής \mathbf{r}_0 . Έτσι, έχουμε

$$-(\mathcal{GH})\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \int_C \mathbf{u}^{sct}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0), \quad (4.25)$$

και από τον ορισμό του τελεστή \mathcal{N} της (4.4) έχουμε

$$-(\mathcal{GH})\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathcal{N}\mathbf{g}(\mathbf{r}). \quad (4.26)$$

□

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τον συζυγή τελεστή του \mathcal{H} . Θεωρούμε διατεταγμένο ζεύγος διανυσμάτων

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in [\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D)]^2 \times [\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)]^2$$

και τη διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{g} = \mathbf{g}(\mathbf{r}) \in [L^2(C)]^2$. Τότε μετά από επίπονες πράξεις έχουμε

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{H}\mathbf{g}, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle = \langle (\mathcal{H}_1\mathbf{g}, \mathcal{H}_2\mathbf{g}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle \\ & = \langle (\mathbf{v}_{\mathbf{g}}|_{\Gamma_D}, (T^{(\mathbf{r})} + i\omega c)\mathbf{v}_{\mathbf{g}}|_{\Gamma_I}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle = \int_{\Gamma_D} \overline{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})} \cdot \int_C \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}) \\ & \quad + \int_{\Gamma_I} \overline{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})} \cdot (T^{(\mathbf{r})} + i\omega c) \int_C \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}) \\ & = \int_C \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) \cdot \left[\int_{\Gamma_D} \overline{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r})} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma_I} \overline{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r})} (T^{(\mathbf{r})} + i\omega c) \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}) \right] ds(\mathbf{r}_0) \\ & = \int_C \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) \left[\int_{\Gamma_D} \overline{\boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma_I} \overline{\boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) (T^{(\mathbf{r})} + i\omega c) \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}) \right] ds(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (4.27)$$

όπου ο άνω δείκτης στον επιφανειακό τελεστή τάσεων συμβολίζει την παραγωγή του τελεστή ως προς την αναφερόμενη μεταβλητή. Παρατηρούμε ότι $\overline{(T^{(\mathbf{r})} + i\omega c)} = T^{(\mathbf{r})} - i\omega c$, διότι $\overline{T^{(\mathbf{r})}} = T^{(\mathbf{r})}$ και αφού $\omega c \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{H}\mathbf{g}, (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle &= \int_C \mathbf{g}(\mathbf{r}_0) \left[\int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) (T^{(\mathbf{r})} - i\omega c) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}) \right] ds(\mathbf{r}_0) = \langle \mathbf{g}, \mathcal{H}^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle. \end{aligned}$$

Μετά από πράξεις ο συζυγής τελεστής του \mathcal{H} , ο \mathcal{H}^* έχει τύπο

$$\mathcal{H}^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) (T^{(\mathbf{r})} - i\omega c) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}). \quad (4.28)$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι η θεμελιώδης λύση ικανοποιεί τη συνθηκή αμοιβαιότητας $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}_0, \mathbf{r})$, η τελευταία σχέση γίνεται

$$\mathcal{H}^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}) (T^{(\mathbf{r}_0)} - i\omega c) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0). \quad (4.29)$$

4.2 Ολοκληρωτικοί Τελεστές - Δυναμικά Απλού και Διπλού Στρώματος

Σε αυτήν την ενότητα θα ορίσουμε κάποιους βοηθητικούς ολοκληρωτικούς τελεστές με σκοπό την θεμελίωση της τροποποιημένης μεθόδου παραγοντοποίησης για το αντίστροφο πρόβλημα. Στο εξής για ευκολία του αναγνώστη θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό “ $(\cdot)_{\pm}$ ” για να εκφράσουμε την οριακή προσέγγιση της θέσης παρατήρησης \mathbf{r} προς το συνόρο Γ από το εξωτερικό του $\mathbb{R}^2 \setminus B$ (+) και από το εσωτερικό του B (-) αντίστοιχα. Εισάγουμε τον συμβολισμό $(\boldsymbol{\alpha}_{ext}, \boldsymbol{\beta}_{ext})$ για να ορίσουμε τη μηδενική συνεχή επέκταση του $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ στο σύνορο Γ ,

$$\boldsymbol{\alpha}_{ext} = \begin{cases} \boldsymbol{\alpha}, & \text{στο } \Gamma_D \\ \mathbf{0}, & \text{αλλού στο } \Gamma \end{cases} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\beta}_{ext} = \begin{cases} \boldsymbol{\beta}, & \text{στο } \Gamma_I \\ \mathbf{0}, & \text{αλλού στο } \Gamma \end{cases}. \quad (4.30)$$

όπου $(\boldsymbol{\alpha}_{ext}, \boldsymbol{\beta}_{ext}) \in [\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2 \times [\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2$.

Ορίζουμε το ακόλουθο δυναμικό που αποτελεί γραμμικό συνδυασμό απλού και διπλού στρώματος

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}) := \int_{\Gamma} \boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}_0) (T^{(\mathbf{r}_0)} - i\omega c) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0), \quad (4.31)$$

για όλα τα $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\Gamma}$. Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες διαπήδησης για τα δυναμικά απλού και διπλού στρώματος [72]

$$T^{(\mathbf{r})} \left(\int_{\Gamma} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \phi(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0) \right)_{\pm} = T^{(\mathbf{r})} \int_{\Gamma} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \phi(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0) \mp \phi(\mathbf{r}), \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} (D\phi)_{\pm}(\mathbf{r}) \\ = T^{(\mathbf{r})} \left(\int_{\Gamma} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \phi(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0) \right)_{\pm} = \int_{\Gamma} T^{(\mathbf{r}_0)} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \phi(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0) \pm \phi(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4.33)$$

και

$$T^{(\mathbf{r})} (D\phi)_{+}(\mathbf{r}) = (T^{(\mathbf{r})} D\phi)_{-}(\mathbf{r}), \quad (4.34)$$

διατυπώνουμε το κάτωθι λήμμα

Λήμμα 4.2.1 Για το δυναμικό \mathbf{W} της σχέσης (4.31) ισχύουν οι επόμενες σχέσεις

$$\mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}_0) (T^{(\mathbf{r}_0)} - i\omega c) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) - \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}) \quad (4.35)$$

και

$$\begin{aligned} (T^{(\mathbf{r})} + i\omega c) \mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma} \\ = T^{(\mathbf{r})} \left[\int_{\Gamma} \boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}_0) (T^{(\mathbf{r}_0)} - i\omega c) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) \right] \\ + i\omega c \left[\int_{\Gamma} \boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}_0) (T^{(\mathbf{r}_0)} - i\omega c) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) \right] \\ + \boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}) - 2i\omega c \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (4.36)$$

Απόδειξη.

Η σχέση (4.35) καθώς $\mathbf{r} \rightarrow \Gamma$ μας δίνει το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma} = \int_{\Gamma} \boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}_0) \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0), \text{ για όλα τα } \mathbf{r} \in B.$$

Η τελευταία σχέση λόγω της συνθήκης διαπήδησης (4.33) οδηγεί απευθείας στη σχέση (4.35).

Εφαρμόζοντας τον τελεστή $(T^{(\mathbf{r})} + i\omega c)$ στη σχέση (4.35) καθώς $\mathbf{r} \rightarrow \Gamma$, λαμβάνουμε

την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
& (T^{(\mathbf{r})} + i\omega c)\mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma} \\
&= T^{(\mathbf{r})} \int_{\Gamma} \boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma} + i\omega c \int_{\Gamma} \boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma} \\
&+ T^{(\mathbf{r})} \int_{\Gamma} \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}_0) T^{(\mathbf{r}_0)} \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma} - i\omega c T^{(\mathbf{r})} \int_{\Gamma} \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma} \\
&+ i\omega c \int_{\Gamma} \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}_0) T^{(\mathbf{r}_0)} \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma} + \omega^2 c^2 \int_{\Gamma} \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma}
\end{aligned} \tag{4.37}$$

για όλα τα $\mathbf{r} \in B$. Μέσω των συνθηκών διαπήδησης (4.33), (4.32) και (4.34) στην παραπάνω σχέση λαμβάνουμε την (4.36). \square

Για την περαταίρω ανάλυση της μεθόδου μας είναι χρήσιμο να εισάγουμε τους ακόλουθους συνοριακούς τελεστές S , K , K' και Λ ως εξής (ιδιότητες αυτών μπορούν να βρεθούν αναλυτικά στο [56]).

Ορισμός 4.2.1 *Ορίζουμε τους παρακάτω συνοριακούς τελεστές*

$$S\phi(\mathbf{r}) := \int_{\Gamma} \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \mathbf{p}) \cdot \phi(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \tag{4.38}$$

$$K\phi(\mathbf{r}) := \int_{\Gamma} T^{(\mathbf{r}_0)} \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \mathbf{p})} \cdot \phi(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \tag{4.39}$$

$$K'\phi(\mathbf{r}) := \int_{\Gamma} T^{(\mathbf{r})} \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \mathbf{p})} \cdot \phi(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in \Gamma, \tag{4.40}$$

και

$$\Lambda\phi(\mathbf{r}) := T^{(\mathbf{r})} \int_{\Gamma} T^{(\mathbf{r}_0)} \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \mathbf{p})} \cdot \phi(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in \Gamma. \tag{4.41}$$

όπου $\mathbf{p} \in S^1 = \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^2 : |\mathbf{d}| = 1\}$ συμβολίζει το διάνυσμα πόλωσης μίας ελαστικής, σημειακής πηγής σε κάθε $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^2$ [15], και συγκεκριμένα θεωρούμε $\mathbf{u}_{\mathbf{r}_0}^{inc}(\mathbf{r}) = \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{p} = \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0; \mathbf{p})$. Με τον τρόπο αυτό αποφεύγουμε την δυαδική φύση της θεμελιώδους λύσης.

Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό S_{Γ_D} , S_{Γ_I} για να συμβολίσουμε τον περιορισμό του S στα τμήματα Γ_D και Γ_I του συνόρου αντίστοιχα. Αντίστοιχους περιορισμούς των τελεστών K , K' και Λ στα τμήματα Γ_I και Γ_D του συνόρου Γ συμβολίζονται ως K_{Γ_D} , K'_{Γ_D} , K_{Γ_I} , K'_{Γ_I} και Λ_{Γ_I} .

Σημείωση.

(1). Είναι ευρέως γνωστό ότι οι τελεστές [77]

$$S : [H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)]^2 \rightarrow H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma)$$

$$K : [H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma)]^2 \rightarrow H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma)$$

$$K' : [H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)]^2 \rightarrow H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)$$

$$\Lambda : [H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma)]^2 \rightarrow H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma)$$

και

(2) οι περιορισμοί των παραπάνω τελεστών

$$S_{\Gamma_i|\Gamma_j} : [\tilde{H}^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma_i)]^2 \rightarrow H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma_j)$$

$$K_{\Gamma_i|\Gamma_j} : [\tilde{H}^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma_i)]^2 \rightarrow H^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma_j)$$

$$K'_{\Gamma_i|\Gamma_j} : [\tilde{H}^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma_i)]^2 \rightarrow H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma_j)$$

$$\Lambda_{\Gamma_i|\Gamma_j} : [\tilde{H}^{\frac{1}{2}+s}(\Gamma_i)]^2 \rightarrow H^{-\frac{1}{2}+s}(\Gamma_j)$$

είναι φραγμένοι για $s \in (-1, 1)$ με $i, j = D$ ή I .

Λήμμα 4.2.2 Για το γραμμικό συνδυασμό απλού και διπλού στρώματος (4.31) καθώς και για το $(\alpha, \beta) \in [\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D)]^2 \times [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)]^2$. Ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις διαπήδησης

$$\alpha(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}(T\mathbf{W}^+ - T\mathbf{W}^-)|_{\Gamma_D} \quad (4.42)$$

$$(\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-)|_{\Gamma_D} = \mathbf{0} \quad (4.43)$$

$$\beta(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}(\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-)|_{\Gamma_I} \quad (4.44)$$

$$2i\omega c\beta(\mathbf{r}) = (T\mathbf{W}^+ - T\mathbf{W}^-)|_{\Gamma_I} \quad (4.45)$$

Απόδειξη.

Καταρχάς υπολογίζουμε την ποσότητα $\mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma}$. Η σχέση (4.31) καθώς $\mathbf{r} \rightarrow \Gamma$ γίνεται:

$$\mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma} = \int_{\Gamma} \alpha_{ext}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma} + \int_{\Gamma} \beta_{ext}(\mathbf{r}_0) T^{(\mathbf{r}_0)} \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma}.$$

Η τελευταία σχέση λόγω της συνθήκης διαπήδησης (4.33) γίνεται:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \overset{\pm}{\rightarrow} \Gamma} &= \int_{\Gamma} \boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}_0) \overline{\widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}_0) (T^{(\mathbf{r}_0)} - i\omega c) \overline{\widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4.46)$$

για όλα τα $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$. Η σχέση (4.35), καθώς $\mathbf{r} \overset{-}{\rightarrow} \Gamma$, λόγω των συνθηκών διαπήδησης (4.32)-(4.34) γίνεται:

$$\begin{aligned} T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \overset{-}{\rightarrow} \Gamma} &= T^{(\mathbf{r})} \left[\int_{\Gamma} \boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}_0) \overline{\widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}_0) (T^{(\mathbf{r}_0)} - i\omega c) \overline{\widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) \right] \\ &+ \boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}) - i\omega c \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4.47)$$

για όλα τα $\mathbf{r} \in B$. Η σχέση (4.46) λόγω των συνθηκών διαπήδησης (4.32)-(4.34) γίνεται:

$$\begin{aligned} T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \overset{\pm}{\rightarrow} \Gamma} &= T^{(\mathbf{r})} \left[\int_{\Gamma} \boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}_0) \overline{\widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \int_{\Gamma} \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}_0) (T^{(\mathbf{r}_0)} - i\omega c) \overline{\widetilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) \right] \\ &- \boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}) + i\omega c \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (4.48)$$

για όλα τα $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$. Εκ των σχέσεων (4.47) και (4.48) λαμβάνουμε το αποτέλεσμα

$$T \mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \overset{\pm}{\rightarrow} \Gamma} - T \mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \overset{-}{\rightarrow} \Gamma} = -2\boldsymbol{\alpha}_{ext}(\mathbf{r}) + 2i\omega c \boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}). \quad (4.49)$$

Λόγω των σχέσεων (4.35) και (4.46) προκύπτει

$$\mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \overset{\pm}{\rightarrow} \Gamma} - \mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \overset{-}{\rightarrow} \Gamma} = 2\boldsymbol{\beta}_{ext}(\mathbf{r}). \quad (4.50)$$

Περιορίζοντας τη σχέση (4.49) στο Γ_D (υπό την έννοια ότι $\mathbf{r} \overset{\pm}{\rightarrow} \Gamma_D$) λαμβάνουμε τη σχέση (4.42), ενώ αν περιορίσουμε τη σχέση (4.50) στο Γ_D (υπό την έννοια ότι $\mathbf{r} \overset{\pm}{\rightarrow} \Gamma_D$) λαμβάνουμε τη σχέση (4.43).

Αν πάλι περιορίσουμε τη σχέση (4.50) στο Γ_I (υπό την έννοια ότι $\mathbf{r} \overset{\pm}{\rightarrow} \Gamma_I$) λαμβάνουμε τη σχέση (4.44), ενώ αν περιορίσουμε τη σχέση (4.49) στο Γ_I (υπό την έννοια ότι $\mathbf{r} \overset{\pm}{\rightarrow} \Gamma_I$) λαμβάνουμε τη σχέση (4.45).

Η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώθηκε. \square

4.3 Η Τροποποιημένη Μέθοδος Παραγοντοποίησης

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε την κατάλληλη τροποποιημένη μέθοδο παραγοντοποίησης σχετικά με το αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης, η οποία θα μας επιτρέψει

να χρησιμοποιήσουμε το θεμελιώδες θεώρημα των Kirsch και Grinberg (Theorem 2.15, [66]). Η θεμελίωση της τροποποιημένης μορφής της μεθόδου παραγοντοποίησης μας βοήθησε σημαντικά, αφού η αρχική παραγοντοποίηση που μελετούσαμε αποτύγχανε να ικανοποιήσει τις απαιτήσεις του θεμελιώδους θεωρήματος των Kirsch και Grinberg. Η μελέτη μας αρχίζει με το ακόλουθο λήμμα που εκφράζει τη σύνδεση του δυναμικού \mathbf{W} όπως ορίστηκε από την (4.31) και των συνοριακών ολοκληρωτικών τελεστών που ορίστηκαν στις σχέσεις (4.38)-(4.41) καθώς επίσης και τη σύνδεση αυτών με τα συναρτησιακά \mathcal{H} , \mathcal{G} .

Λήμμα 4.3.1 *Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες διαπήδησης (4.35) και (4.36) στα τμήματα Γ_D και Γ_I του συνόρου αντίστοιχα, ισχύει ότι:*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma_D} \\ (T^{(\mathbf{r})} + i\omega c)\mathbf{W}(\mathbf{r})|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma_I} \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

όπου \mathcal{M} ο κάτωθι ολοκληρωτικός τελεστής

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} S_{\Gamma_D|\Gamma_D} & (K - i\omega c S)_{\Gamma_I|\Gamma_D} \\ (K' + i\omega c S)_{\Gamma_D|\Gamma_I} & (\Lambda - i\omega c K' + i\omega c K + \omega^2 c^2 S - i\omega c I)_{\Gamma_I|\Gamma_I} \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\mathcal{G}\mathcal{M} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \mathcal{H}^*(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), \quad (4.53)$$

όπου \mathcal{G} ορίζεται στην σχέση (4.9).

Απόδειξη.

Εκ του ορισμού των $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\alpha}_{ext}$, $\boldsymbol{\beta}_{ext}$ προκύπτουν άμεσα οι κάτωθι σχέσεις:

$$\boldsymbol{\alpha}_{ext}|_{\Gamma_I} = \mathbf{0}, \quad (4.54)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{ext}|_{\Gamma_D} = \boldsymbol{\alpha}|_{\Gamma_D} = \boldsymbol{\alpha}, \quad (4.55)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{ext}|_{\Gamma_D} = \mathbf{0}, \quad (4.56)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{ext}|_{\Gamma_I} = \boldsymbol{\beta}|_{\Gamma_I} = \boldsymbol{\beta}, \quad (4.57)$$

Περιορίζοντας την σχέση (4.35) στο Γ_D μέσω των σχέσεων (4.54)-(4.57) λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\mathbf{W}(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma_D} = S_{\Gamma_D|\Gamma_D} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) + (K - i\omega c S)_{\Gamma_I|\Gamma_D} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}). \quad (4.58)$$

Επίσης, αν περιορίσουμε την σχέση (4.36) στο Γ_I μέσω των σχέσεων (4.54)-(4.57) καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} & (T^{(\mathbf{r})} + i\omega c) \mathbf{W}(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma_I} \\ &= T^{(\mathbf{r})} \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)\big|_{\mathbf{r} \in \Gamma_I} + T^{(\mathbf{r})} \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}_0) T^{(\mathbf{r}_0)} \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)\big|_{\mathbf{r} \in \Gamma_I} \\ & \quad - i\omega c T^{(\mathbf{r})} \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)\big|_{\mathbf{r} \in \Gamma_I} + i\omega c \int_{\Gamma_D} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)\big|_{\mathbf{r} \in \Gamma_I} \\ & \quad + i\omega c \left[\int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}_0) T^{(\mathbf{r}_0)} \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)\big|_{\mathbf{r} \in \Gamma_I} - i\omega c \int_{\Gamma_I} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0)\big|_{\mathbf{r} \in \Gamma_I} \right]. \end{aligned}$$

Η τελευταία μέσω των ορισμών (4.38)-(4.41) γίνεται:

$$\begin{aligned} & (T^{(\mathbf{r})} + i\omega c) \mathbf{W}(\mathbf{r})\big|_{\mathbf{r} \rightarrow \Gamma_I} \\ &= (K' + i\omega c S)_{\Gamma_D|\Gamma_I} \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{r}) + (\Lambda - i\omega c K' + i\omega c K + \omega^2 c^2 S - i\omega c I)_{\Gamma_I|\Gamma_I} \boldsymbol{\beta}(\mathbf{r}). \quad (4.59) \end{aligned}$$

Εκ των σχέσεων (4.58) και (4.59) προκύπτουν οι σχέσεις (4.51) και (4.52). Συνδυάζοντας τη σχέση (4.52) με τον ορισμό του \mathcal{H}^* στη σχέση (4.29) και τον ορισμό του \mathcal{G} στη σχέση (4.9) προκύπτει η σχέση (4.53). \square

Στη συνέχεια διατυπώνουμε το επόμενο λήμμα το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε ότι κάποιος από τους βοηθητικούς τελεστές είναι *τελεστής Fredholm μηδενικής τάξης* (βλέπε λήμμα 1.14 και θεώρημα 1.26, [66]).

Λήμμα 4.3.2 *Θεωρούμε ότι οι τελεστές $S_0, K_0, K'_0, \Lambda_0$ είναι οι τελεστές που προκύπτουν από τους αντίστοιχους τελεστές S, K, K', Λ εάν ο πυρήνας $\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ αντικατασταθεί με τον πυρήνα $\tilde{\Gamma}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ ([4] σελ. 27), με*

$$\tilde{\Gamma}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = \frac{3\mu + \lambda}{4\pi\mu(2\mu + \lambda)} \log \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \tilde{I} + \frac{\mu + \lambda}{4\pi\mu(2\mu + \lambda)} J(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

όπου $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^2$, με $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_0$, $J(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}^\perp}{|\mathbf{r}|^2}$ και $\tilde{\Gamma}_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ η θεμελιώδης λύση που αντιστοιχεί στην περίπτωση στατικής ελαστικότητας. Εισάγουμε τον συμβολισμό $L_s = S - S_0$, $L_k = K - K_0$, $L_{k'} = K - K'_0$, $L_\Lambda = \Lambda - \Lambda_0$. Ισχύουν τα παρακάτω:

- (1) Οι τελεστές $L_s, L_k, L_{k'}, L_\Lambda$ είναι συμπαγείς.
- (2) Οι τελεστές K, K'_0 είναι συζυγείς τελεστές.
- (3) Ο τελεστής S_0 είναι αυτοσυζυγής.
- (4) Οι τελεστές S_0 και $-\Lambda_0$ είναι ελλειπτικοί, υπάρχει θετική σταθερά c_0 τέτοια ώστε $\langle S_0\phi, \phi \rangle \geq c_0 \|\phi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2$ και $\langle -\Lambda_0\phi, \phi \rangle \geq c_0 \|\phi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το κάτωθι θεώρημα.

Θεώρημα 4.3.1 Υποθέτουμε ότι το ω^2 δεν είναι ιδιοτιμή του τελεστή $-\Delta^*$ στο B_0 , τότε ισχύουν τα παρακάτω

- (1) Το φανταστικό μέρος του ολοκληρωτικού τελεστή \mathcal{M} είναι αυστηρά αρνητικό, δηλαδή, $\text{Im}\{\langle \mathcal{M}(\alpha, \beta), (\alpha, \beta) \rangle\} < 0$, για κάθε $(\alpha, \beta) \in [\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D)]^2 \times [\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)]^2$ και $(\alpha, \beta) \neq (\mathbf{0}, \mathbf{0})$.
- (2) Ο διγραμμικός (bilinear) ολοκληρωτικός τελεστής είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη.

- (1). Από τη σχέση (4.51) έχουμε ότι

$$\langle \mathcal{M}(\alpha, \beta), (\alpha, \beta) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \mathbf{W}|_{\Gamma_D}^- \\ (T(\mathbf{r}) + i\omega c)\mathbf{W}|_{\Gamma_I}^- \end{pmatrix}, (\alpha, \beta) \right\rangle. \quad (4.60)$$

Άρα,

$$\langle \mathcal{M}(\alpha, \beta), (\alpha, \beta) \rangle = \int_{\Gamma_D} \mathbf{W} \cdot \bar{\alpha} ds(\mathbf{r}) + \int_{\Gamma_I} [(T(\mathbf{r}) + i\omega c)\mathbf{W}] \cdot \bar{\beta} ds(\mathbf{r}). \quad (4.61)$$

Αντικαθιστώντας τα $\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ από τις σχέσεις (4.42) και (4.43) αντίστοιχα, στην σχέση (4.61) έχουμε

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{M}(\alpha, \beta), (\alpha, \beta) \rangle = \\ & -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_D} \mathbf{W}^- \cdot \overline{(T(\mathbf{r})\mathbf{W}^+ - T(\mathbf{r})\mathbf{W}^-)} ds(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_I} (T(\mathbf{r}) + i\omega c)\mathbf{W}^- \cdot \overline{(\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-)} ds(\mathbf{r}_0), \end{aligned} \quad (4.62)$$

ή

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle = \\ & -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_D} \mathbf{W}^- \cdot (T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^+ - T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^-) ds(\mathbf{r}_0) + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_I} (\overline{\mathbf{W}}^+ - \overline{\mathbf{W}}^-) \cdot (T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^- + i\omega c \mathbf{W}^-) ds(\mathbf{r}_0), \end{aligned} \quad (4.63)$$

ή ισοδύναμα

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_D} (\mathbf{W}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^+ - \mathbf{W}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^-) ds(\mathbf{r}_0) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_I} [\overline{\mathbf{W}}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^- - \overline{\mathbf{W}}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^- + \overline{(\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-)} \cdot i\omega c \mathbf{W}^-] ds(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (4.64)$$

Η σχέση (4.43) γίνεται $\mathbf{W}|_{\Gamma_D}^- = \mathbf{W}|_{\Gamma_D}^+$, συνεπώς η σχέση (4.64) γίνεται:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_D} (\mathbf{W}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^+ - \mathbf{W}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^-) ds(\mathbf{r}_0) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_I} [\overline{\mathbf{W}}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^- - \overline{\mathbf{W}}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^- - (\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-) \cdot i\omega c \mathbf{W}^-] ds(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (4.65)$$

Στη συνέχεια η σχέση (4.45) λόγω της (4.44) γίνεται

$$T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^-|_{\Gamma_I} = T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^+|_{\Gamma_I} - i\omega c (\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-)|_{\Gamma_I}, \quad (4.66)$$

και επομένως

$$\int_{\Gamma_I} \overline{\mathbf{W}}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^- ds(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma_I} [\mathbf{W}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W} + i\omega c (\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-) \cdot \mathbf{W}^+] ds(\mathbf{r}_0). \quad (4.67)$$

Η σχέση (4.65) λόγω της (4.67) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma_D} (\mathbf{W}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^- - \mathbf{W}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^+) ds(\mathbf{r}_0) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_I} (\overline{\mathbf{W}}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^+ - \overline{\mathbf{W}}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^-) ds(\mathbf{r}_0) \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_I} [-i\omega c (\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-) \cdot \overline{\mathbf{W}}^+ + i\omega c \overline{(\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-)} \cdot \mathbf{W}^-] ds(\mathbf{r}_0) \end{aligned} \quad (4.68)$$

Παίρνοντας το φανταστικό μέρος της (4.68) καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned}
& \text{Im}\{ \langle \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle \} \\
&= \frac{1}{2} \text{Im}\{ \int_{\Gamma_D} (\mathbf{W}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^- - \mathbf{W}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^+) ds(\mathbf{r}_0) \\
&\quad + \int_{\Gamma_I} (\overline{\mathbf{W}}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^+ - \overline{\mathbf{W}}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^-) ds(\mathbf{r}) \} \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Im}\{ \int_{\Gamma_I} [-i\omega c (\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-) \cdot \overline{\mathbf{W}}^+ + i\omega c (\overline{\mathbf{W}}^+ - \overline{\mathbf{W}}^-) \cdot \mathbf{W}^-] ds(\mathbf{r}_0) \} \quad (4.69)
\end{aligned}$$

Επίσης, μετά από πράξεις, έχουμε τις ακόλουθες δύο σχέσεις

$$\text{Im}\{ \int_{\Gamma_I} (\overline{\mathbf{W}}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^+ - \overline{\mathbf{W}}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \mathbf{W}^-) ds(\mathbf{r}_0) \} = \text{Im}\{ \int_{\Gamma_I} (\mathbf{W}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^- - \mathbf{W}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^+) ds(\mathbf{r}_0) \} \quad (4.70)$$

και

$$\text{Im}\{ \int_{\Gamma_I} -i\omega c (\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-) \cdot \overline{\mathbf{W}}^+ ds(\mathbf{r}_0) \} = \text{Im}\{ \int_{\Gamma_I} -i\omega c (\overline{\mathbf{W}}^+ - \overline{\mathbf{W}}^-) \cdot \mathbf{W}^+ ds(\mathbf{r}_0) \}. \quad (4.71)$$

Η σχέση (4.69) μέσω των σχέσεων (4.70) και (4.71) γίνεται

$$\begin{aligned}
& \text{Im}\{ \langle \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle \} = \frac{1}{2} \text{Im}\{ \int_{\Gamma_I} (\mathbf{W}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^- - \mathbf{W}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^+) ds(\mathbf{r}_0) \} \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Im}\{ \int_{\Gamma_I} [-i\omega c (\overline{\mathbf{W}}^+ - \overline{\mathbf{W}}^-) \cdot \overline{\mathbf{W}}^+ + i\omega c (\overline{\mathbf{W}}^+ - \overline{\mathbf{W}}^-) \cdot \mathbf{W}^-] ds(\mathbf{r}_0) \} \quad (4.72)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\begin{aligned}
& \text{Im}\{ \int_{\Gamma_I} [-i\omega c (\overline{\mathbf{W}}^+ - \overline{\mathbf{W}}^-) \cdot \overline{\mathbf{W}}^+ + i\omega c (\overline{\mathbf{W}}^+ - \overline{\mathbf{W}}^-) \cdot \mathbf{W}^-] ds(\mathbf{r}_0) \} \\
&= -\omega c \int_{\Gamma_I} |\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-|^2 ds(\mathbf{r}_0), \quad (4.73)
\end{aligned}$$

η σχέση (4.72) γίνεται

$$\begin{aligned}
& \text{Im}\{ \langle \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle \} \\
&= \frac{1}{2} \text{Im}\{ \int_{\Gamma_I} (\mathbf{W}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^- - \mathbf{W}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}}^+) ds(\mathbf{r}_0) \} \\
&\quad - \frac{1}{2} \omega c \int_{\Gamma_I} |\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-|^2 ds(\mathbf{r}_0). \quad (4.74)
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τον πρώτο τύπο του Betti για τα διανυσματικά πεδία $\bar{\mathbf{W}}^-$, \mathbf{W}^- στο χωρίο B και λαμβάνοντας υπόψη ότι το \mathbf{W} είναι γραμμικός συνδυασμός δυναμικού απλού και διπλού στρώματος, τότε έχουμε

$$\Delta^* \bar{\mathbf{W}}^- = -\rho_1 \omega^2 \bar{\mathbf{W}}^- \text{ στο } B \quad (4.75)$$

και καταλήγουμε στη σχέση

$$\int_{\Gamma} \mathbf{W}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \bar{\mathbf{W}}^- ds(\mathbf{r}_0) = -\rho_1 \omega^2 \int_B |\mathbf{W}^-|^2 d\mathbf{r}_0 + \int_B \mathcal{E}(\mathbf{W}^-, \bar{\mathbf{W}}^-) d\mathbf{r}_0. \quad (4.76)$$

Θεωρούμε έναν κύκλο C_R με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακουόντως μεγάλη ακτίνα $R > 0$, ώστε να περιέχει το B και ορίζουμε το χωρίο $B_R := C_R \setminus B$, με σύνορο $\partial B_R = \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^2; |\mathbf{r}| = R\} \cup \Gamma = C_R \cup \Gamma$. Με παρόμοιο τρόπο όπως και πριν εφαρμόζουμε τον πρώτο τύπο του Betti για τα $\bar{\mathbf{W}}^+$, \mathbf{W}^+ στο χωρίο B_R και λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \mathbf{W}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \bar{\mathbf{W}}^+ ds(\mathbf{r}_0) \\ &= \int_{|\mathbf{r}|=R} \mathbf{W}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \bar{\mathbf{W}}^+ ds(\mathbf{r}_0) + \rho_0 \omega^2 \int_{B_R} |\mathbf{W}^+|^2 d\mathbf{r}_0 + \int_{B_R} \mathcal{E}(\mathbf{W}^+, \bar{\mathbf{W}}^+) d\mathbf{r}_0. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Μέσω των σχέσεων (4.76) και (4.77) έχουμε:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} (\mathbf{W}^- \cdot T^{(\mathbf{r})} \bar{\mathbf{W}}^- - \mathbf{W}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \bar{\mathbf{W}}^+) ds(\mathbf{r}_0) \\ &= -[\rho_1 \omega^2 \int_B |\mathbf{W}^-|^2 d\mathbf{r}_0 + \rho_0 \omega^2 \int_{B_R} |\mathbf{W}^+|^2 d\mathbf{r}_0] - \int_{|\mathbf{r}|=R} \mathbf{W}^+ \cdot T^{(\mathbf{r})} \bar{\mathbf{W}}^+ ds(\mathbf{r}_0) \\ & \quad - [\int_B \mathcal{E}(\mathbf{W}^-, \bar{\mathbf{W}}^-) d\mathbf{r}_0 + \int_{B_R} \mathcal{E}(\mathbf{W}^+, \bar{\mathbf{W}}^+) d\mathbf{r}_0]. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Εισάγοντας τον συμβολισμό

$$\mathbf{W}' = \begin{cases} \mathbf{W}^-, & \text{στο } \bar{B} \\ \mathbf{W}^+, & \text{στο } \bar{B}_R \end{cases}, \quad (4.79)$$

η σχέση (4.78) γίνεται:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \mathbf{W}' \cdot T^{(\mathbf{r})} \bar{\mathbf{W}}' ds(\mathbf{r}_0) \\ &= -\rho \omega^2 \int_{B_R \cup B} |\mathbf{W}'|^2 d\mathbf{r}_0 - \int_{|\mathbf{r}|=R} \mathbf{W}' \cdot T^{(\mathbf{r})} \bar{\mathbf{W}}' ds(\mathbf{r}_0) - \int_{B_R \cup B} \mathcal{E}(\mathbf{W}', \bar{\mathbf{W}}') d\mathbf{r}_0. \end{aligned} \quad (4.80)$$

Η σχέση (4.74) μέσω της (4.80) γίνεται:

$$\begin{aligned} & \text{Im}\{\langle \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle\} \\ &= -\frac{1}{2} \text{Im}\left\{ \int_{|\mathbf{r}|=R} \mathbf{W}' \cdot T^{(\mathbf{r})} \overline{\mathbf{W}'} ds(\mathbf{r}_0) \right\} - \frac{1}{2} \omega c \int_{\Gamma_I} |\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-|^2 ds(\mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Οι συνθήκες ακτινοβολίας που διέπουν την δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα για τα πεδία $\mathbf{W}^{(p)}$, $\mathbf{W}^{(s)}$ [72] διαμορφώνονται ως εξής:

$$T\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{r}) - ik_p(\lambda + 2\mu)\mathbf{W}^{(p)}(\mathbf{r}) = O(r^{-2}) \quad (4.82)$$

και

$$T\mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{r}) - ik_s\mu\mathbf{W}^{(s)}(\mathbf{r}) = O(r^{-2}) \quad (4.83)$$

όπου $\mathbf{W}^{(p)}$ και $\mathbf{W}^{(s)}$ η διαμήκης και η εγκάρσια συνιστώσα του \mathbf{W} αντίστοιχα και το $r = |\mathbf{r}|$ τείνει στο άπειρο ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις του $\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$. Θεωρώντας ότι $r \rightarrow \infty$, με την βοήθεια των σχέσεων (4.82) και (4.83) οδηγούμαστε στο ακόλουθο αποτέλεσμα [72]

$$T^{(\mathbf{r})}(\overline{\mathbf{W}}^{(p)}(\mathbf{r}) + \overline{\mathbf{W}}^{(s)}(\mathbf{r})) = 2O(r^{-2}) + ik_p(\lambda + 2\mu)\overline{\mathbf{W}}^{(p)}(\mathbf{r}) + ik_s\mu\overline{\mathbf{W}}^{(s)}(\mathbf{r}).$$

Θεωρώντας $\xi = \frac{1}{2} \max\{k_p(\lambda + 2\mu), k_s\mu\} \in \mathbb{R}$ η σχέση (4.81) γίνεται

$$\begin{aligned} \text{Im}\{\langle \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle\} &\leq -\xi \int_{|\mathbf{r}|=R} |\mathbf{W}'|^2 ds(\mathbf{r}_0) \\ &\quad - \frac{1}{2} \omega c \int_{\Gamma_I} |\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-|^2 ds(\mathbf{r}_0) + O(R^{-1}). \end{aligned} \quad (4.84)$$

Αφήνουμε την ακτίνα $R \rightarrow \infty$ και αφού $\xi, \omega c > 0$ από τη σχέση (4.84) συμπεραίνουμε ότι

$$\text{Im}\{\langle \mathcal{M}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}), (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \rangle\} \leq 0, \text{ για κάθε } (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \in [\tilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)]^2 \times [\tilde{H}^{1/2}(\Gamma_I)]^2. \quad (4.85)$$

Η ισότητα στην (4.85) ισχύει όταν

$$\int_{|\mathbf{r}|=R} |\mathbf{W}'|^2 ds(\mathbf{r}) = \mathbf{0} \text{ και } \int_{\Gamma_I} |\mathbf{W}^+ - \mathbf{W}^-|^2 ds(\mathbf{r}) = \mathbf{0}.$$

Από το λήμμα Rellich και την αναλυτική συνέχεια [27] εξασφαλίζεται ότι $\mathbf{W}' = \mathbf{0}$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$ και λόγω της σχέσης (4.79) $\mathbf{W} = \mathbf{0}$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$, καθώς επίσης $\mathbf{W}^-|_{\Gamma_I} = \mathbf{W}^+|_{\Gamma_I} =$

0. Συνεπώς, η ισότητα στην σχέση (4.85) ισχύει όταν $\alpha(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$ και $\beta(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, που έρχεται σε αντίθεση με τις υποθέσεις του θεωρήματός μας. Άρα, το φανταστικό μέτρο του ολοκληρωτικού τελεστή \mathcal{M} είναι αυστηρά αρνητικό (*strictly negative*), δηλαδή, ισχύει ότι

$$Im\{\langle \mathcal{M}(\alpha, \beta), (\alpha, \beta) \rangle\} < 0. \quad (4.86)$$

(2) Αν $\mathcal{M}(\alpha, \beta) = 0$, μέσω της ανάλυσης που κάναμε στο (1) προκύπτει απευθείας ότι $\alpha = \beta = \mathbf{0}$, επομένως ο \mathcal{M} είναι αντιστρέψιμος.

Με απλές γραμμοπράξεις πινάκων προκύπτει ότι ο τελεστής \mathcal{M} μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathcal{M} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \widetilde{\mathcal{M}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad (4.87)$$

όπου

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} S_{\Gamma_D|\Gamma_D} & (K - i\omega cS)_{\Gamma_I|\Gamma_D} \\ (-K' - i\omega cS)_{\Gamma_D|\Gamma_I} & (-\Lambda - i\omega cK' - \omega^2 c^2 S + 2i\omega cI)_{\Gamma_I|\Gamma_I} \end{pmatrix}. \quad (4.88)$$

Είναι προφανές ότι οι αντιστρεψιμότητες των \mathcal{M} και $\widetilde{\mathcal{M}}$ είναι ισοδύναμες. Επομένως, ο $\widetilde{\mathcal{M}}$ είναι αντιστρέψιμος. Στην συνέχεια, θα δείξουμε ότι ο \mathcal{M} είναι τελεστής Fredholm (*fredholm operator with zero index*) χρησιμοποιώντας θεωρία Fredholm. Έτσι, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ο τελεστής $\widetilde{\mathcal{M}}$ διαθέτει φραγμένο αντίστροφο και συνεπώς ότι ο \mathcal{M} είναι φραγμένος. Θα αποδείξουμε ότι ο $\widetilde{\mathcal{M}}$ είναι Fredholm operator with zero index μέσω του λήμματος 4.3.2.

Ορίζουμε τους τελεστές πίνακες

$$A_0 = \begin{pmatrix} S_0|_{\Gamma_D} & (K_0 - i\omega cS_0)|_{\Gamma_D} \\ (-K'_0 - i\omega cS_0)|_{\Gamma_I} & -(\Lambda_0 - 2i\omega cI)|_{\Gamma_I} \end{pmatrix}$$

και

$$A_c = \begin{pmatrix} L_s|_{\Gamma_D} & (L_k - i\omega cL_s)|_{\Gamma_D} \\ (-L_{k'} - i\omega cL_s)|_{\Gamma_I} & -(L_k + i\omega cK' + i\omega cK + \omega^2 c^2 S)|_{\Gamma_I} \end{pmatrix}.$$

Με απλές πράξεις αποδεικνύουμε ότι

$$\widetilde{\mathcal{M}} = A_0 + A_c. \quad (4.89)$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ο τελεστής

$A_c : [H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2 \times [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2 \rightarrow [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2 \times [H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)]^2$ είναι συμπαγής και ότι ο τελεστής

$A_0 : [H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2 \times [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)]^2 \rightarrow [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)]^2 \times [H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)]^2$ ορίζει μία διγραμμική μορφή. Θεωρούμε τον συμβολισμό $\psi_{ext} = (\alpha_{ext}, \beta_{ext})$ ως την μηδενική συνεχή επέκταση του $\psi = (\alpha, \beta)$ στο σύνορο Γ . Τότε

$$\langle A_0 \psi_{ext}, \psi_{ext} \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} S_0 \alpha_{ext}|_{\Gamma_D} & (K_0 - i\omega c S_0) \beta_{ext}|_{\Gamma_D} \\ (-K'_0 - i\omega c S_0) \alpha_{ext}|_{\Gamma_I} & -(\Lambda_0 - 2i\omega c I) \beta_{ext}|_{\Gamma_I} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_{ext} \\ \beta_{ext} \end{pmatrix} \right\rangle$$

και μέσω του ορισμού των $\alpha_{ext}, \beta_{ext}$ προκύπτει ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} \langle A_0 \psi_{ext}, \psi_{ext} \rangle &= \langle S_0 \alpha_{ext}, \alpha_{ext} \rangle + \langle (K_0 - i\omega c S_0) \beta_{ext}, \alpha_{ext} \rangle \\ &+ \langle (-K'_0 - i\omega c S_0) \alpha_{ext}, \beta_{ext} \rangle - \langle (\Lambda_0 - 2i\omega c I) \beta_{ext}, \beta_{ext} \rangle. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Οι τελεστές K_0, K'_0 είναι συζυγείς και ο S_0 είναι αυτοσυζυγής οπότε η σχέση (4.90) γίνεται

$$\begin{aligned} \langle A_0 \psi_{ext}, \psi_{ext} \rangle &= \langle S_0 \alpha_{ext}, \alpha_{ext} \rangle - \langle \Lambda_0 \beta_{ext}, \beta_{ext} \rangle \\ &+ \langle (K_0 - i\omega c S_0) \beta_{ext}, \alpha_{ext} \rangle - \langle \alpha_{ext}, (-K_0 - i\omega c S_0) \beta_{ext} \rangle \\ &+ 2i\omega c \|\beta_{ext}\|_{H^{1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Ο τελεστής A_0 αποτελεί μία διγραμμική μορφή και κάνοντας πράξεις λαμβάνουμε την σχέση

$$\begin{aligned} \langle A_0 \psi_{ext}, \psi_{ext} \rangle &= \langle S_0 \alpha_{ext}, \alpha_{ext} \rangle - \langle \Lambda_0 \beta_{ext}, \beta_{ext} \rangle \\ &+ 2Im\{\langle (K_0 - i\omega c S_0) \beta_{ext}, \alpha_{ext} \rangle\}i + 2i\omega c \|\beta_{ext}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Αν πάρουμε το πραγματικό μέρος της (4.92) γίνεται

$$\begin{aligned} Re\{\langle A_0 \psi_{ext}, \psi_{ext} \rangle\} &= Re\{\langle S_0 \alpha_{ext}, \alpha_{ext} \rangle\} - 2Re\{\langle \Lambda_0 \beta_{ext}, \beta_{ext} \rangle\} \\ &+ 2Re\{Im[\langle (K_0 - i\omega c S_0) \beta_{ext}, \alpha_{ext} \rangle]i\} + Re\{i\omega c \|\beta_{ext}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2\}. \end{aligned} \quad (4.93)$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι $Im[\langle (K_0 - i\omega c S_0) \beta_{ext}, \alpha_{ext} \rangle], \omega c \|\beta_{ext}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2$ είναι πραγματικοί, συνεπώς, η (4.93) γίνεται

$$Re\{\langle A_0 \psi_{ext}, \psi_{ext} \rangle\} = Re\{\langle S_0 \alpha_{ext}, \alpha_{ext} \rangle - \langle \Lambda_0 \beta_{ext}, \beta_{ext} \rangle\}. \quad (4.94)$$

Μέσω του λήμματος 4.3.2 εξασφαλίζεται η ύπαρξη θετικής, πραγματικής σταθεράς $C_0 > 0$ τέτοιας ώστε

$$\langle S_0 \boldsymbol{\alpha}_{ext}, \boldsymbol{\alpha}_{ext} \rangle \geq C_0 \|\boldsymbol{\alpha}_{ext}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 \quad (4.95)$$

και

$$\langle -\Lambda_0 \boldsymbol{\beta}_{ext}, \boldsymbol{\beta}_{ext} \rangle \geq C_0 \|\boldsymbol{\beta}_{ext}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2. \quad (4.96)$$

Η σχέση (4.94) μέσω των σχέσεων (4.95) και (4.96) γίνεται:

$$Re\{\langle A_0 \boldsymbol{\psi}_{ext}, \boldsymbol{\psi}_{ext} \rangle\} \geq C_0 [\|\boldsymbol{\alpha}_{ext}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 + \|\boldsymbol{\beta}_{ext}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2].$$

Μέσω των ορισμών των $\boldsymbol{\alpha}_{ext}, \boldsymbol{\beta}_{ext}$ (4.30) έχουμε:

$$A_0 \boldsymbol{\psi}_{ext} = A_0(\boldsymbol{\alpha}_{ext}, \boldsymbol{\beta}_{ext}) = \begin{pmatrix} S_0 \boldsymbol{\alpha}|_{\Gamma_D} + (K_0 - i\omega c S_0) \boldsymbol{\beta}|_{\Gamma_D} \\ (-K'_0 - i\omega c S_0) \boldsymbol{\alpha}|_{\Gamma_I} - (\Lambda_0 - 2i\omega c I) \boldsymbol{\beta}|_{\Gamma_I} \end{pmatrix},$$

ή

$$A_0 \boldsymbol{\psi}_{ext} = A_0 \boldsymbol{\psi}. \quad (4.97)$$

Χρησιμοποιώντας την (4.97), έπειτα από κάποιους υπολογισμούς, λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση

$$\langle A_0 \boldsymbol{\psi}_{ext}, \boldsymbol{\psi}_{ext} \rangle = \langle A_0 \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi} \rangle. \quad (4.98)$$

Η σχέση (4.94) μέσω του ορισμού των $\boldsymbol{\alpha}_{ext}, \boldsymbol{\beta}_{ext}$ (4.30) και της σχέσης (4.98) γίνεται:

$$Re\{\langle A_0 \boldsymbol{\psi}, \boldsymbol{\psi} \rangle\} \geq C_0 [\|\boldsymbol{\alpha}\|_{\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D)}^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)}^2] = C_0 \|\boldsymbol{\psi}\|_{\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2. \quad (4.99)$$

Συνεπώς, ο τελεστής $\widetilde{\mathcal{M}}$ είναι τελεστής Fredholm μηδενικής τάξης. Λαμβάνοντας υπόψη ότι ο \mathcal{M} είναι αντιστρέψιμος συμπεραίνουμε ότι οι $\widetilde{\mathcal{M}}, \mathcal{M}$ είναι μεταξύ τους αντίστροφοι τελεστές.

Η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώθηκε. \square

Θεώρημα 4.3.2 (1) Ο τελεστής κωντινού πεδίου $\mathcal{N} : [L^2(C)]^2 \rightarrow L^2(C)$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathcal{N} = -\mathcal{H}^* \mathcal{M}^{-1} \mathcal{H}. \quad (4.100)$$

(2) Ο $\mathcal{H} : [L^2(C)]^2 \rightarrow \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D) \times \tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)$ είναι συμπαγής και έχει πυκνή εικόνα στον $[L^2(C)]^2$.

Απόδειξη.

(1) Λόγω της σχέσης (4.53) έχουμε

$$-\mathcal{H}^* \mathcal{M} \mathcal{H} = (-\mathcal{G} \mathcal{M}) \mathcal{M}^{-1} \mathcal{H} = -\mathcal{G} \mathcal{M} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{H}.$$

Όμως, $\mathcal{M} \mathcal{M}^{-1} = I$. Συνεπώς,

$$-\mathcal{H}^* \mathcal{M} \mathcal{H} = -\mathcal{G} I \mathcal{H} = -\mathcal{G} \mathcal{H}.$$

Λόγω της (4.10) ισχύει $-\mathcal{G} \mathcal{H} = \mathcal{N}$. Οπότε, $\mathcal{N} = -\mathcal{H}^* \mathcal{M}^{-1} \mathcal{H}$, που είναι η ζητούμενη σχέση (4.100).

(2) Από την ελλειπτική θεωρία [77] γνωρίζουμε ότι

$$\mathbf{u}^{sct}|_{B_0} \in [H^1(B_0)]^2 \text{ και } \mathbf{u}^{sct}|_C \in [H^{\frac{1}{2}}(C)]^2,$$

και άρα, ο \mathcal{G} είναι συμπαγής και συμπεραίνουμε άμεσα από τη συνέχεια των πυρήνων ότι ο \mathcal{H}^* είναι συμπαγής. Για να αποδείξουμε ότι ο \mathcal{H}^* έχει πυκνή εικόνα πρέπει και αρκεί να αποδείξουμε ότι ο \mathcal{H} είναι αντιστρέψιμος, το οποίο και αποδεικνύουμε στην συνέχεια.

Υποθέτουμε ότι $\mathcal{H} \phi = \mathbf{0}$ και μέσω του ορισμού του \mathcal{H} στις σχέσεις (4.6)-(4.7) παίρνουμε $\mathbf{v}_\phi = \mathbf{0}$ και $(T + i\omega c) \mathbf{v}_\phi|_{\Gamma_I} = \mathbf{0}$. Συνεπώς, η \mathbf{v}_ϕ ικανοποιεί το ακόλουθο εξωτερικό μεικτό πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$(\Delta^* + \rho_0 \omega^2) \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus B \quad (4.101)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ στο } \Gamma_D \quad (4.102)$$

$$T \mathbf{v} + i\omega c \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ στο } \Gamma_I \quad (4.103)$$

$$T \mathbf{v}^{(p)} - ik_p(\lambda + 2\mu) \mathbf{v}^{(p)} = O(r^{-2}) \quad (4.104)$$

$$T \mathbf{v}^{(s)} - ik_s \mu \mathbf{v}^{(s)} = O(r^{-2}). \quad (4.105)$$

Λαμβάνοντας υπόψη το αποτέλεσμα της μοναδικότητας στο πρόβλημα (4.101)-(4.105) συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{v}_\phi = \mathbf{0}$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$. Έπειτα λόγω της αναλυτικής συνέχειας \mathbf{v}_ϕ συμπεραίνουμε ότι $\mathbf{v}_\phi = \mathbf{0}$ στο $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}_0$ (υπενθυμίζουμε ότι $B_0 \subseteq B$). Εφόσον το \mathbf{v}_ϕ είναι δυναμικό απλού-στρώματος, ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη διαπήδησης

$$\mathbf{v}_\phi|_{\bar{C}} = \mathbf{v}_\phi|_C^+ = \mathbf{0},$$

και εξαιτίας του ότι ο ω^2 δεν είναι ιδιοτιμή του $-\Delta^*$ στο B_0 . Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι $\mathbf{v}_\phi = \mathbf{0}$ στο B_0 και άρα, $\phi = T \mathbf{v}_\phi^- - T \mathbf{v}_\phi^+ = \mathbf{0}$ στην C .

Συνεπώς, ο \mathcal{H} είναι αντιστρέψιμος και η επομένως η εικόνα του \mathcal{H}^* είναι πυκνή. \square

Παρατήρηση.

Στην προηγούμενη ανάλυση του ολοκληρωτικού τελεστή \mathcal{M} δεν είναι δυνατόν να εφαρμοστεί το θεώρημα των Kirsch και Grinberg [18]. Συγκεκριμένα, δεν μπορεί να επιτευχθεί ο μετασχηματισμός του πραγματικού μέρους του \mathcal{M} σε έναν συμπαγή και πιεστικό τελεστή, συνεπώς, οδηγούμαστε στην αναζήτηση ενός άλλου κατάλληλου μετασχηματισμού.

4.4 Ο Αλγόριθμος της Αντιστροφής

Στην ενότητα αυτή παρουσιάζουμε μία νέα τροποποιημένη παραγοντοποίηση του τελεστή κοντινού πεδίου \mathcal{N} . Ορίζουμε τους νέους βοηθητικούς τελεστές που συμμετέχουν στην προαναφερθείσα τροποποίηση και αποδεικνύουμε ότι ικανοποιείται το θεώρημα των Kirsch και Grinberg [66]. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε τον αλγόριθμο της ανακατασκευής του συνόρου του τελεστή για κάθε ένα από τα δύο ξένα-μεταξύ τους μέρη του συνόρου του τελεστή.

Κινούμενοι στην κατεύθυνση που περιγράψαμε, εισάγουμε τον τελεστή \mathcal{N}_D , ο οποίος αποτελεί μετασχηματισμό του τελεστή \mathcal{N} και τον αντικαθιστά. Για το σκοπό αυτό, επιλέγουμε ένα χωρίο Ω για το οποίο θεωρούμε ότι είναι εκ των προτέρων γνωστό ότι είναι ανοιχτό και φραγμένο πεδίο με C^2 -σύνορο $\partial\Omega$, έτσι ώστε $\bar{B}_0 \subset \Omega$ και $\bar{\Omega} \subset B$. Επιπλέον, θεωρούμε ότι το σύνορο $\partial\Omega$ του Ω και η καμπύλη C είναι ξένα μεταξύ τους σύνολα, δηλαδή, $\partial\Omega \cap C = \emptyset$.

Ορισμός 4.4.1 Για κάποιες μιγαδικές παραμέτρους $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{C}$, με $Re(\xi_1) > 0, Im(\xi_1) < 0$ και $Re(\xi_2) < 0, Im(\xi_2) > 0$, ορίζουμε τους τελεστές

$$\mathcal{N}_D := \mathcal{N} - \xi_1 \mathbf{U}^* \mathbf{U} \quad (4.106)$$

$$\mathcal{N}_I := \mathcal{N} + \xi_2 \mathbf{U}^* \mathbf{U} \quad (4.107)$$

όπου ο τελεστής $\mathbf{U} : [L^2(C)]^2 \rightarrow [L^2(C)]^2$ δίνεται από τον τύπο

$$\mathbf{U}\phi(\mathbf{x}) = \int_C \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \phi(\mathbf{r}_0) ds(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in \partial\Omega \quad (4.108)$$

για κάθε $\phi(\mathbf{r}) \in [L^2(C)]^2$.

Θεώρημα 4.4.1 Υποθέτουμε ότι ω^2 δεν είναι μία Dirichlet ιδιοτιμή του $-\Delta^*$ στο Ω , ούτε μία Dirichlet ιδιοτιμή του $-\Delta^*$ στο B_0 . Τότε ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

(1)

$$\mathcal{N}_D = - \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}^* \mathcal{M}_1 \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}, \quad (4.109)$$

με

$$\mathcal{M}_1 := \mathcal{M}_{10} + \mathcal{M}_{1C} \quad (4.110)$$

και

$$\mathcal{N}_I = - \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}^* \mathcal{M}_2 \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}, \quad (4.111)$$

με

$$\mathcal{M}_2 := \mathcal{M}_{20} + \mathcal{M}_{2C}, \quad (4.112)$$

όπου οι τελεστές \mathcal{M}_{10} , \mathcal{M}_{20} είναι ελλειπτικοί (coercive) και οι τελεστές \mathcal{M}_{1C} , \mathcal{M}_{2C} είναι συμπαγείς.

(2) Οι τελεστές $Im(\mathcal{M}_1)$, $Im(\mathcal{M}_2)$ είναι αυστηρά αρνητικοί.

(3) Οι τελεστές $\begin{pmatrix} \mathcal{H}_1^* & \mathbf{U}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}^*$, $\begin{pmatrix} \mathbf{U}^* & \mathcal{H}_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}^*$

είναι συμπαγείς και έχουν πυκνή εικόνα στον $[L^2(C)]^2$.

Απόδειξη. (1) Ορίζουμε έναν τελεστή πίνακα

$$\mathcal{R} := \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} : [L^2(C)]^2 \rightarrow [H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_D)]^2 \times [H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)]^2,$$

με τύπο

$$\mathcal{R}_1 \mathbf{f}_1 = \mathbf{w}|_{\Gamma_D} \text{ και } \mathcal{R}_2 \mathbf{f}_1 = (T\mathbf{w} + i\omega c\mathbf{w})|_{\Gamma_I}, \quad (4.113)$$

με $\mathbf{f}_1 \in [L^2(\partial\Omega)]^2$ και $\mathbf{w} = \mathbf{w}(\mathbf{r}) \in [L^2(\partial\Omega)]^2$.

Εισάγουμε το ακόλουθο πρόβλημα συνοριακών τιμών:

$$(\Delta^* + \rho_0\omega^2)\mathbf{w} = \mathbf{0}, \text{ στο } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{B} \quad (4.114)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{f}_1, \text{ και } \partial\Omega \quad (4.115)$$

$$T\mathbf{w}^{(p)} - ik_p(\lambda + 2\mu)\mathbf{w}^{(p)} = O(r^{-2}) \quad (4.116)$$

$$T\mathbf{w}^{(s)} - ik_s\mu\mathbf{w}^{(s)} = O(r^{-2}). \quad (4.117)$$

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της λύσης του προβλήματος συνοριακών τιμών (4.114)-(4.117), με συνοριακά δεδομένα $\mathbf{f}_1 \in [L^2(\partial B)]^2$ αποδεικνύει ότι ο τελεστής \mathcal{R} είναι

συμπαγής [1], [2]. Από τον ορισμό του \mathbf{v}_ϕ στην σχέση (4.8) προκύπτει άμεσα ότι το δυναμικό-απλού-στρώματος \mathbf{v}_ϕ είναι λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών (4.114)-(4.117), με συνοριακά δεδομένα, $\mathbf{f}_1|_{\partial\Omega} = \mathbf{v}_\phi|_{\partial\Omega} = \mathbf{U}_\phi$. Από τον ορισμό του \mathcal{H} στις σχέσεις (4.6), (4.7) και τον ορισμό του \mathcal{R} στη σχέση (4.113) προκύπτουν άμεσα οι ακόλουθες σχέσεις

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{R}_1 \mathbf{U} \quad (4.118)$$

και

$$\mathcal{H}_2 = \mathcal{R}_2 \mathbf{U}. \quad (4.119)$$

Αν αντικαταστήσουμε τον \mathcal{H}_2 από τη σχέση (4.119) στην $\mathcal{H} = (\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}. \quad (4.120)$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει τον συζυγή τελεστή

$$\mathcal{H}^* = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix}. \quad (4.121)$$

Εάν στον ορισμό του \mathcal{N}_D στη σχέση (4.106) αντικαταστήσουμε τον \mathcal{N} με την βοήθεια της σχέσης (4.100), λαμβάνουμε τη σχέση

$$\mathcal{N}_D = -\mathcal{H}^* \mathcal{M}^{-1} \mathcal{H} - \xi_1 \mathbf{U}^* \mathbf{U}. \quad (4.122)$$

Με χρήση των σχέσεων (4.120) και (4.121) λαμβάνουμε τη σχέση

$$-\mathcal{H}^* \mathcal{M}^{-1} \mathcal{H} = - \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}. \quad (4.123)$$

Η σχέση (4.122) μέσω της σχέσης (4.123) γίνεται

$$\mathcal{N}_D = - \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} - \xi_1 \mathbf{U}^* \mathbf{U}. \quad (4.124)$$

Μετά από πράξεις καταλήγουμε στη σχέση

$$\xi_1 \mathbf{U}^* \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}. \quad (4.125)$$

Η σχέση (4.124) μέσω της (4.125) γίνεται

$$\mathcal{N}_D = - \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}^* \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 I \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix}. \quad (4.126)$$

Αν ορίσουμε ως

$$\mathcal{M}_1 := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 I \end{pmatrix}, \quad (4.127)$$

με αντικατάσταση στην (4.126) ολοκληρώνεται η απόδειξη της σχέσης (4.109). Στη συνέχεια γράφουμε τον τελεστή \mathcal{M} (βλέπε σχέση (4.52)) ως εξής

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0 & 0 \\ 0 & \Lambda_0 \end{pmatrix} + \mathcal{M}^c,$$

όπου

$$\mathcal{M}^c = \begin{pmatrix} L_s|_{\Gamma_D|\Gamma_D} & 0 \\ 0 & (L_\Lambda - i\omega cK + \omega^2 c\mathcal{S} - 2i\omega cI)|_{\Gamma_I|\Gamma_I} \end{pmatrix}.$$

Προφανώς ο \mathcal{M}^{-1} είναι φραγμένος και επιπλέον, μπορεί να εκφραστεί ως

$$\mathcal{M}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix} - \mathcal{M}^{-1} \mathcal{M}^c \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix}. \quad (4.128)$$

Αντικαθιστώντας τον \mathcal{M}^{-1} από τη σχέση (4.128) στη σχέση (4.127) τότε έχουμε

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix} - \mathcal{M}^{-1} \mathcal{M}^c \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 I \end{pmatrix}.$$

Στην τελευταία σχέση κάνοντας υπολογισμούς λαμβάνουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} \\ &\quad - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{M}^c \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 I \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \Lambda_0^{-1} \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{M}^c \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \Lambda_0^{-1} \mathcal{R}_2 + \xi_1 I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{M}^c \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Τελικά έχουμε

$$\mathcal{M}_1 = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \xi_1 I \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \Lambda_0^{-1} \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{M}^c \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.129)$$

Εισάγουμε τώρα τον συμβολισμό

$$\mathcal{M}_{10} = \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \xi_1 I \end{pmatrix}$$

και

$$\mathcal{M}_{1C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \Lambda_0^{-1} \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{M}^c \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix}$$

και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της σχέσης (4.110).

Θεωρώντας ότι $Re\{\xi_1\} > 0$ προκύπτει ότι ο \mathcal{M}_{10} είναι πιεστικός τελεστής (*coercive operator*) και ο \mathcal{M}_{1C} είναι συμπαγής τελεστής. Στη συνέχεια ακολουθώντας παρόμοια διαδικασία για τον \mathcal{N}_I και αντικαθιστώντας τον \mathcal{H}_1 που δίνεται στην (4.118), στην παρακάτω σχέση μετά από πράξεις

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1 \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}.$$

Τελικά

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.130)$$

Η τελευταία σχέση μας δίνει την ακόλουθη νέα έκφραση του συζυγούς τελεστή:

$$\mathcal{H}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (4.131)$$

Εάν αντικαταστήσουμε τον τελεστή \mathcal{N} που δίνεται στην (4.100) στη σχέση (4.107) λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση

$$\mathcal{N}_I = -\mathcal{H}^* \mathcal{M}^{-1} \mathcal{H} + \xi_2 \mathbf{U}^* \mathbf{U}. \quad (4.132)$$

Μέσω των σχέσεων (4.130) και (4.131) οδηγούμαστε στη σχέση:

$$-\mathcal{H}^* \mathcal{M}^{-1} \mathcal{H} = - \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix} \quad (4.133)$$

Η σχέση (4.132) λόγω της (4.133) γίνεται:

$$\mathcal{N}_I = - \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix} + \xi_2 \mathbf{U}^* \mathbf{U}. \quad (4.134)$$

Μετά από πράξεις λαμβάνουμε τη σχέση

$$\xi_2 \mathbf{U}^* \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} \xi_2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.135)$$

Η σχέση (4.134) μέσω της (4.135) γίνεται:

$$\mathcal{N}_I = - \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}^* \left[\begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathcal{H}_2 \end{pmatrix}. \quad (4.136)$$

Εισάγουμε τον τελεστή

$$\mathcal{M}_2 := \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.137)$$

και αντικαθιστούμε τον \mathcal{M}^{-1} , που δίνεται στην (4.128), στην σχέση (4.137) και έπειτα από πράξεις καταλήγουμε στην επόμενη σχέση

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}_2 \\ &= \begin{pmatrix} -\xi_2 I & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^* \mathcal{S}_0^{-1} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{M}^c \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Επιπλέον, εισάγουμε τους δύο ακόλουθους τελεστές

$$\mathcal{M}_{20} := \begin{pmatrix} -\xi_2 I & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix}$$

και

$$\mathcal{M}_{2C} := \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^* \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \mathcal{M}^c \begin{pmatrix} \mathcal{S}_0^{-1} & 0 \\ 0 & \Lambda_0^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

και έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη της σχέσης (4.112).

Θεωρώντας ότι $Re\{\xi_2\} < 0$ αποδεικνύεται ότι ο \mathcal{M}_{20} είναι πιεστικός τελεστής.

Επιπλέον, εφόσον οι \mathcal{R}_1 και \mathcal{M}^c είναι συμπαγείς τελεστές, εξασφαλίζεται η συμπαγεια

του \mathcal{M}_{2C} .

Ολοκληρώνεται η απόδειξη του (1).

(2) Ξεκινάμε αποδεικνύοντας ότι ο $Im\{\mathcal{M}_1\}$ είναι αυστηρά αρνητικός τελεστής.

Θεωρούμε μη-ταυτοτικά μηδενικό στοιχείο $\phi \in [H^{1/2}(\Gamma_D)]^2 \times [H^{1/2}(\partial\Omega)]^2$. Αντικαθιστούμε τον \mathcal{M}_1 μέσω της σχέσης (4.127), γράφουμε $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ και με υπολογισμούς έχουμε την ακόλουθη σχέση

$$Im\{\langle \mathcal{M}_1\phi, \phi \rangle\} = Im\left\{\left\langle \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} \phi, \phi \right\rangle\right\} \\ + Im\left\{\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \right\rangle\right\}. \quad (4.138)$$

Μετά από υπολογισμούς καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle \xi_1 \phi_2, \phi_2 \rangle \quad (4.139)$$

ή ισοδύναμα

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \xi_1 \langle \phi_2, \phi_2 \rangle \quad (4.140)$$

ή ισοδύναμα

$$\left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \xi_1 I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \right\rangle = \xi_1 \|\phi_2\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \quad (4.141)$$

καθώς επίσης και στην

$$\mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \mathcal{R}_2 \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.142)$$

Ορίζουμε $\hat{\phi} := \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} \phi$ και μέσω της σχέσης (4.142) λαμβάνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα

$$\hat{\phi} := \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} \phi = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \mathcal{R}_2 \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.143)$$

Η σχέση (4.138) μέσω της (4.139) γίνεται

$$Im\{\langle \mathcal{M}_1\phi, \phi \rangle\} = Im\left\{\left\langle \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} \phi, \phi \right\rangle\right\} + Im\{\langle \xi_1 \phi_2, \phi_2 \rangle\}. \quad (4.144)$$

Εφαρμόζουμε τον τελεστή \mathcal{M} στη σχέση (4.143) λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση

$$\mathcal{M}\hat{\phi} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} \phi \quad (4.145)$$

και με τη βοήθεια της σχέσης (4.143) έχουμε:

$$\left\langle \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2^* \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathcal{R}_2 \end{pmatrix} \phi, \phi \right\rangle = \langle \hat{\phi}, \mathcal{M}\hat{\phi} \rangle. \quad (4.146)$$

Η σχέση (4.144) μέσω των σχέσεων (4.141) και (4.146) γίνεται

$$Im\{\langle \mathcal{M}_1\phi, \phi \rangle\} = Im\{\langle \hat{\phi}, \mathcal{M}\hat{\phi} \rangle\} + Im(\xi_1)\|\phi_2\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \quad (4.147)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι

$$Im\{\langle \hat{\phi}, \mathcal{M}\hat{\phi} \rangle\} = -Im\{\langle \mathcal{M}\hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle\},$$

η σχέση (4.147) γίνεται

$$Im\{\langle \mathcal{M}_1\phi, \phi \rangle\} = -Im\{\langle \mathcal{M}\hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle\} + Im(\xi_1)\|\phi_2\|_{L^2(\partial\Omega)}^2. \quad (4.148)$$

Ο τελεστής \mathcal{M} είναι ελλειπτικός, συνεπώς,

$$Im\{\langle \mathcal{M}\hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle\} \geq 0, \text{ ή ισοδύναμα}$$

$$-Im\{\langle \mathcal{M}\hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle\} \leq 0.$$

Συνδυάζουμε το τελευταίο αποτέλεσμα με την αρχική υπόθεσή

$Im(\xi_1) < 0$ και $\|\phi_2\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \geq 0$, μέσω της σχέσης (4.148), προκύπτει άμεσα

$$Im\{\langle \mathcal{M}_1\phi, \phi \rangle\} \leq 0.$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι ο $Im(\mathcal{M}_1)$ είναι αυστηρά αρνητικός. Έστω ότι ισχύει η ισότητα $Im\{\langle \mathcal{M}_1\phi, \phi \rangle\} = 0$, τότε, μέσω της σχέσης (4.148), έχουμε

$$-Im\{\langle \mathcal{M}\hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle\} + Im(\xi_1)\|\phi_2\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = 0. \quad (4.149)$$

Ανακαλώντας ότι

$$-Im\{\langle \mathcal{M}\hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle\} \leq 0 \text{ και } Im(\xi_1)\|\phi_2\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq 0,$$

τότε σε συνδυασμό με την (4.149) θα έχουμε $Im\{\langle \mathcal{M}\hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle\} = Im(\xi_1)\|\phi_2\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = 0$ ή ισοδύναμα $\phi_1 = \mathbf{0}$ και $\phi_2 = \mathbf{0}$ και συνεπώς $\phi = \mathbf{0}$, που είναι αντίφαση. Επομένως, η υπόθεση $Im(\mathcal{M}_1) = 0$ οδηγεί σε άτοπο, οπότε $Im(\mathcal{M}_1) < 0$.

Συνεχίζουμε την μελέτη μας αποδεικνύοντας ότι ο $Im\{\mathcal{M}_2\}$ είναι επίσης αυστηρά αρνητικός τελεστής.

Θεωρούμε μη-ταυτοτικά-μηδενικό στοιχείο $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in [L^2(\partial\Omega)]^2 \times [H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_I)]^2$. Χρησιμοποιώντας τη μορφή του \mathcal{M}_2 όπως αυτή δίνεται στη σχέση (4.137) λαμβάνουμε την ακόλουθη σχέση

$$\begin{aligned} & Im\{\langle \mathcal{M}_2\phi, \phi \rangle\} \\ &= Im\left\{\left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \phi, \phi \right\rangle\right\} - Im\left\{\left\langle \begin{pmatrix} \xi_2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi, \phi \right\rangle\right\}. \end{aligned} \quad (4.150)$$

Κάνοντας μερικούς αλγεβρικούς υπολογισμούς καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις

$$\left\langle \begin{pmatrix} \xi_2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi, \phi \right\rangle = \langle \xi_2 \phi_1, \phi_1 \rangle \quad (4.151)$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \xi_2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi, \phi \right\rangle = \xi_2 \langle \phi_1, \phi_1 \rangle \quad (4.152)$$

ή ισοδύναμα

$$\left\langle \begin{pmatrix} \xi_2 I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \phi, \phi \right\rangle = \xi_2 \|\phi_1\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \quad (4.153)$$

και

$$\mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \phi = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.154)$$

Ορίζουμε

$$\hat{\phi} = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \phi. \quad (4.155)$$

Η σχέση (4.155) μέσω της (4.154) γίνεται

$$\hat{\phi} = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \phi = \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (4.156)$$

Η σχέση (4.150) μέσω της σχέσης (4.151) γίνεται

$$Im\{\langle \mathcal{M}_2\phi, \phi \rangle\} = Im\left\{\left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \phi, \phi \right\rangle\right\} - Im\{\langle \xi_2 \phi_1, \phi_1 \rangle\}. \quad (4.157)$$

Εφαρμόζοντας τον τελεστή \mathcal{M} από αριστερά στη σχέση (4.156) έχουμε

$$\mathcal{M}\hat{\phi} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \phi = \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1\phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad (4.158)$$

και χρησιμοποιώντας τους προηγούμενους υπολογισμούς καταλήγουμε στη σχέση

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1^* & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} \mathcal{R}_1 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \phi, \phi \right\rangle = \langle \hat{\phi}, \mathcal{M}\hat{\phi} \rangle. \quad (4.159)$$

Η σχέση (4.157) μέσω των (4.153) και (4.159) γίνεται

$$Im\{\langle \mathcal{M}_2\phi, \phi \rangle\} = -Im\{\langle \mathcal{M}\hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle\} - Im(\xi_2)\|\phi_1\|_{L^2(\partial\Omega)}^2. \quad (4.160)$$

Ο \mathcal{M} , όπως και πριν, είναι ελλειπτικός τελεστής, συνεπώς, $Im\{\langle \mathcal{M}\hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle\} \geq 0$, ή $-Im\{\langle \mathcal{M}\hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle\} \leq 0$. Συνδυάζοντας το τελευταίο αποτέλεσμα με την αρχική υπόθεση $Im(\xi_2) > 0$ καθώς και λαμβάνοντας υπόψη $\|\phi_1\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \geq 0$ και την (4.160) προκύπτει άμεσα ότι

$$-Im\{\langle \mathcal{M}_2\phi, \phi \rangle\} \leq 0.$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι ο $Im(\mathcal{M}_2)$ είναι αυστηρά αρνητικός. Υποθέτουμε, αντίθετα, ότι $Im\{\langle \mathcal{M}_2\phi, \phi \rangle\} = 0$, τότε, μέσω της σχέσης (4.160), έχουμε:

$$Im\{\langle \mathcal{M}\hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle\} + Im(\xi_2)\|\phi_1\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = 0. \quad (4.161)$$

Υπενθυμίζουμε ότι ισχύουν $-Im\{\langle \mathcal{M}\hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle\} \leq 0$ και $Im(\xi_2)\|\phi_1\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \leq 0$, σε συνδυασμό με την (4.161) θα είναι

$$Im\{\langle \mathcal{M}\hat{\phi}, \hat{\phi} \rangle\} = Im(\xi_2)\|\phi_1\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 = 0$$

ή $\phi_1 = \mathbf{0}$ και $\phi_2 = \mathbf{0}$, ή $\phi = \mathbf{0}$, που είναι αντίφαση. Επομένως, η αρχική μας υπόθεση ότι $Im(\mathcal{M}_2) = 0$ καταλήγει σε άτοπο. Συνεπώς, $Im(\mathcal{M}_2) < 0$.

(3) Από τον ορισμό του \mathbf{U} στη σχέση (4.108), λαμβάνουμε την συζυγή μορφή του \mathbf{U}

$$(\mathbf{U}^*\phi)(\mathbf{r}) = \int_C \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}\phi(\mathbf{r}_0)ds(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in C, \quad (4.162)$$

από την οποία άμεσα προκύπτει ότι ο τελεστής \mathbf{U}^* είναι συμπαγής, διότι, ο πυρήνας $\overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}$ είναι ασθενής ανώμαλος (*weakly singular kernel*).

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι ο \mathbf{U} είναι αντιστρέψιμος τελεστής. Υποθέτουμε ότι ο $\mathbf{U}\phi(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{r} \in \partial\Omega$ τότε από τη σχέση (4.108) έχουμε

$$\int_C \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\phi(\mathbf{r}_0)ds(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \partial\Omega.$$

Συνεπώς, το δυναμικό απλού στρώματος

$$\mathbf{v}_\phi(\mathbf{r}) = \int_C \tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)\phi(\mathbf{r}_0)ds(\mathbf{r}_0) = \mathbf{0}, \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{C}$$

ικανοποιεί την εξίσωση Navier στο Ω , με συνοριακό δεδομένο $\mathbf{v}_\phi|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$. Από την υπόθεση του θεωρήματος 4.4.1 ότι ω^2 δεν αποτελεί Dirichlet ιδιοτιμή του $-\Delta^*$ (διότι $\Omega \subseteq B_0$), η τελευταία σχέση μας εξασφαλίζει ότι $\mathbf{v}_\phi = \mathbf{0}$ στο Ω και μέσω της αρχής αναλυτικής συνέχειας είναι $\mathbf{v}_\phi = \mathbf{0}$ στο \mathbb{R}^2 . Συνεπώς, $\phi = \mathbf{0}$ και επομένως, ο τελεστής \mathbf{U} είναι αντιστρέψιμος. \square

Συνεχίζουμε την μελέτη μας με τον αλγόριθμο αντιστροφής σχετικά με την ανακατασκευή του συνόρου του μερικώς επικαλυμμένου αντικειμένου (σκεδαστής). Πριν προχωρήσουμε, για την ευκολία του αναγνώστη, δίνουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις.

Παρατηρήσεις

Από τα αποτελέσματα του θεωρήματος 4.4.1, προκύπτουν για τους τελεστές \mathcal{N}_D και \mathcal{N}_I τα κάτωθι:

(1) Ο τελεστής \mathcal{N}_D ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του θεωρήματος 4.4.1 των Kirsch και Grinberg [66] και επομένως, για $t = 0$ ισχύει

$$\text{Range}[(\mathcal{N}_D^\#)^{\frac{1}{2}}] = \text{Range}[(\mathcal{H}_1^*, \mathbf{U}^*)],$$

όπου

$$\mathcal{N}_D^\# = |\text{Re}\{\mathcal{N}_D\}| + |\text{Im}\{\mathcal{N}_D\}|.$$

Για κάθε $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in [\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D)]^2 \times [L^2(\partial\Omega)]^2$ είναι

$$(\mathcal{H}_1^*, \mathbf{U}^*)\phi(\mathbf{r}) = (\mathcal{H}_1^*, \mathbf{U}^*)(\phi_1(\mathbf{r}), \phi_2(\mathbf{r})) = \mathcal{H}_1^*\phi_1(\mathbf{r}) + \mathbf{U}^*\phi_2(\mathbf{r}).$$

Συνεπώς,

$$(\mathcal{H}_1^*, \mathbf{U}^*)\phi(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma_D} \phi_1(\mathbf{r}_0)\overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}ds(\mathbf{r}_0) + \int_{\partial\Omega} \phi_2(\mathbf{r}_0)\overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)}ds(\mathbf{r}_0), \mathbf{r} \in C. \quad (4.163)$$

(2) Όπως και πριν, ο τελεστής \mathcal{N}_I ικανοποιεί όλες τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Kirsch και Grinberg [66]. Επομένως, για $t = 0$ ισχύει

$$Range[(\mathcal{N}^\#)^{\frac{1}{2}}] = Range[(\mathbf{U}^*, \mathcal{H}_2^*)],$$

όπου

$$\mathcal{N}^\# = |Re\{\mathcal{N}\}| + |Im\{\mathcal{N}\}|.$$

Παρόμοια για κάθε $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in [L^2(\partial\Omega)]^2 \times [\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_I)]^2$ ισχύει

$$(\mathbf{U}^*, \mathcal{H}_2^*)\phi(\mathbf{r}) = (\mathbf{U}^*, \mathcal{H}_2^*)(\phi_1, \phi_2) = \mathbf{U}^*\phi_1(\mathbf{r}) + \mathcal{H}_2^*\phi_2(\mathbf{r}).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} (\mathbf{U}^*, \mathcal{H}_2^*)\phi(\mathbf{r}) = \\ \int_{\partial\Omega} \phi_1(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \int_{\Gamma_I} [T^{(\mathbf{r})} + i\omega c\phi_2(\mathbf{r})] \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{r} \in C. \end{aligned} \quad (4.164)$$

Είμαστε έτοιμοι, τώρα, να δώσουμε τον αλγόριθμο αντιστροφής για την ανακατασκευή του τμήματος Γ_D του συνόρου Γ του σκεδαστή.

Λήμμα 4.4.1 *Υποθέτουμε ότι ω^2 δεν είναι ούτε Dirichlet ιδιοτιμή του $-\Delta^*$ στο Ω , ούτε Dirichlet ιδιοτιμή του $-\Delta^*$ στο D_0 . Για κάθε κατά τμήμα λεία καμπύλη που δεν διαθέτει σημεία αυτοτομής (nonintersecting) και κοιλότητες (cups) ορίζουμε*

$$\Phi_L^1(\mathbf{r}) := \int_{\Gamma} \phi_1(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \int_{\partial\Omega} \phi_2(\mathbf{r}) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0), \quad (4.165)$$

για κάθε $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in [\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(L)]^2 \times [L^2(\partial\Omega)]^2$ και $\phi_1(\mathbf{r}) \neq 0$, για κάθε $\mathbf{r} \in L$. Τότε

$$L \subseteq \Gamma_D \Leftrightarrow \Phi_L^1 \in Range[(\mathcal{H}_1^*, \mathbf{U}^*)].$$

Απόδειξη.

Ευθύ.

Υποθέτουμε ότι $L \subset \Gamma_D$, τότε θα είναι $\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(L) \subseteq \tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D)$ και συνεπώς προκύπτει άμεσα ότι

$$\Phi_L^1 \in Range[(\mathcal{H}_1^*, \mathbf{U}^*)].$$

Αντίστροφο.

Αντιθέτως, αν υποθέσουμε ότι

$$L \not\subseteq \Gamma_D \quad (4.166)$$

θα εξακολουθεί να ισχύει ότι

$$\Phi_L^1 \in Range[(\mathcal{H}_1^*, \mathbf{U}^*)]. \quad (4.167)$$

Συνδυάζοντας την υπόθεση (4.166), με το συμπέρασμα (4.167) και την (4.165) του λήμματος 4.4.1 εξασφαλίζεται η ύπαρξη

$$\hat{\phi} = (\hat{\phi}_1, \hat{\phi}_2) \in [\tilde{H}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_D)]^2 \times [L^2(\partial\Omega)]^2$$

έτσι, ώστε

$$\Phi_L^1(\mathbf{r}) := \int_{\Gamma_D} \hat{\phi}_1(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \int_{\partial\Omega} \hat{\phi}_2(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0). \quad (4.168)$$

Εφόσον $L \not\subseteq \Gamma_D$ θα υπάρχει σημείο $\mathbf{z}_0 \in L$ τέτοιο ώστε $\mathbf{z}_0 \notin \Gamma_D$, τότε η $\Phi_L^1(\mathbf{r})$ θα διαθέτει ένα *ανώμαλο σημείο (singular point)* $\mathbf{r} = \mathbf{z}_0$. Όμως, το δεξί μέλος της σχέσης (4.168) είναι μία αναλυτική συνάρτηση και συνεπώς, δεν μπορεί να διαθέτει ανώμαλα σημεία. Έτσι, καταλήγουμε σε αντίφαση και η αρχική μας υπόθεση $L \not\subseteq \Gamma_D$ είναι λανθασμένη, άρα, $L \subseteq \Gamma_D$. \square

Από το θεώρημα των Kirsch και Grinberg 4.1.1, το θεώρημα 4.4.1 καθώς και το λήμμα 4.4.1 προκύπτει άμεσα το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.4.2 *Υποθέτουμε ότι ω^2 δεν είναι ούτε Dirichlet ιδιοτιμή του $-\Delta^*$ στο Ω , ούτε Dirichlet ιδιοτιμή του $-\Delta^*$ στο B_0 . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα*

(1)

$$L \subseteq \Gamma_D \Leftrightarrow \Phi_L^1 \in Range[(\mathcal{H}_1^*, \mathbf{U}^*)] \quad (4.169)$$

και

(2) για ένα ιδιοσύστημα (λ_j, ψ_j) του $\mathcal{N}_D^\#$ έχουμε

$$L \subseteq \Gamma_D \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\langle \Phi_L^1, \psi_j \rangle_{L^2(C)}|^2}{|\lambda_j|} < \infty, \quad (4.170)$$

όπου

$$\mathcal{N}_D^\# = |Re\{\mathcal{N}_D\}| + |Im\{\mathcal{N}_D\}|.$$

Χρησιμοποιώντας παρόμοια διαδικασία όπως παραπάνω μπορούμε να πετύχουμε την ανακατασκευή του σχήματος του τμήματος Γ_I του συνόρου Γ . Δίνουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.4.2 Υποθέτουμε ότι ω^2 δεν είναι ούτε *Dirichlet* ιδιοτιμή του $-\Delta^*$ στο Ω , ούτε *Dirichlet* ιδιοτιμή του $-\Delta^*$ στο B_0 . Για κάθε κατά τμήματα λεία καμπύλη που αυτοτέμνεται (*nonintersecting*) ορίζουμε

$$\Phi_L^2(\mathbf{r}) := \int_{\partial\Omega} \phi_1(\mathbf{r}_0) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0) + \int_L \phi_2(\mathbf{r}_0) (T^{(\mathbf{r})} - i\omega c) \overline{\tilde{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)} ds(\mathbf{r}_0), \quad (4.171)$$

για κάθε $\phi = (\phi_1, \phi_2) \in [L^2(\partial\Omega)]^2 \times [\tilde{H}^{\frac{1}{2}}(L)]^2$ και $\phi_2(\mathbf{r}) \neq 0$, για κάθε $\mathbf{r} \in L$. Τότε

$$L \subseteq \Gamma_I \Leftrightarrow \Phi_L^2 \in \text{Range}[(\mathbf{U}^*, \mathcal{H}_2^*)].$$

Όπως και πριν από τα θεωρήματα 4.1.1, 4.4.1 και το λήμμα 4.4.2 έχουμε

Θεώρημα 4.4.3 Υποθέτουμε ότι η ω^2 δεν είναι ούτε *Dirichlet* ιδιοτιμή του $-\Delta^*$ στο Ω , ούτε *Dirichlet* ιδιοτιμή του $-\Delta^*$ στο B_0 . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα

$$(1) \quad L \subseteq \Gamma_I \Leftrightarrow \Phi_L^2 \in \text{Range}[(\mathbf{U}^*, \mathcal{H}_2^*)] \quad (4.172)$$

και

(2) για ένα ιδιοσύστημα (λ_j, ψ_j) του \mathcal{N}_I^\sharp

$$L \subseteq \Gamma_I \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|\langle \Phi_L^2, \psi_j \rangle_{L^2(C)}|^2}{|\lambda_j|} < \infty, \quad (4.173)$$

όπου

$$\mathcal{N}_I^\sharp = |\text{Re}\{\mathcal{N}_I\}| + |\text{Im}\{\mathcal{N}_I\}|.$$

Τέλος, αναφέρουμε ότι έχει γίνει μελέτη του αντίστροφου προβλήματος σκέδασης που αντιστοιχεί στο πρόβλημα (3.57)-(3.59) και ο αναγνώστης για λεπτομέρειες μπορεί να ανατρέξει στο [55].

4.5 Εφαρμογές και Συμπεράσματα

Στην διδακτορική διατριβή μελετήσαμε ένα ελαστικό μεικτό πρόβλημα σκέδασης στην δισδιάστατη γραμμική ελαστικότητα για ένα μη-διαπερατό σκεδαστή και θεμελιώσαμε αποτελέσματα τόσο για το ευθύ πρόβλημα σκέδασης όσο και για το αντίστροφο. Η

μελέτη αυτή βρίσκει εφαρμογή σε ελαστικά υλικά και ελαστικά περιβάλλοντα, ειδικότερα, για τα μερικώς επικαλυμμένα αντικείμενα (σκεδαστές). Προγενέστερες παρόμοιες μελέτες χρησιμοποιούνται σε πληθώρα φυσικών προβλημάτων στους τομείς της μηχανικής, της ιατρικής απεικόνισης, στους μη-καταστρεπτικούς ελέγχους, στην γεωφυσική και της επιστήμης των υλικών που χρησιμοποιούν αποτελέσματα παρεμφερών μελετών. Η παρούσα διατριβή είναι εφικτό να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη αντίστοιχων αντίστροφων προβλημάτων σκέδασης για μερικώς επικαλυμμένα εμπόδια θαμμένα-ή-μή σε πολυστρωματικό ελαστικό μέσο. Επιπλέον, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ανακατασκευή σκεδαστών οι οποίοι αποτελούν ένωση δύο ή περισσότερων διαφορετικών σωμάτων που ενδέχεται να είναι διαφορετικά μεταξύ τους υλικά.

Το σύνορο Γ του σκεδαστή αποτελείται από δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, στο πρώτο Γ_D ισχύει μία συνοριακή συνθήκη Dirichlet και στο δεύτερο Γ_I συνοριακή συνθήκη εμπέδησης. Η μέθοδος μας μπορεί να επεκταθεί και να εξακολουθήσει να ισχύει στην περίπτωση που το σύνορό μας αποτελείται από περισσότερα από δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα, στα οποία να ισχύουν διαφορετικές μεταξύ τους συνοριακές συνθήκες. Η επιλυσιμότητα του ευθέως προβλήματος είναι εξαιρετικά χρήσιμη, διότι οι μετρήσεις των δεδομένων των σκεδασμένων πεδίων στο εσωτερικό του μερικώς επικαλυμμένου σκεδαστή χρησιμοποιούνται στο αντίστοιχο αντίστροφο πρόβλημα.

Όσον αφορά το αντίστοιχο αντίστροφο πρόβλημα σκέδασης, χρησιμοποιήσαμε μία τροποποιημένη μέθοδο παραγοντοποίησης προκειμένου να προσδιορίσουμε την τοποθεσία και το είδος του μερικώς επικαλυμμένου σκεδαστή. Εισάγουμε τους απαραίτητους βοηθητικούς τελεστές προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των Kirsch και Grinberg [66]. Η κεντρική ιδέα της μελέτης μας ήταν να παραγοντοποιήσουμε κατάλληλα αυτούς τους νέους τελεστές, ώστε να είμαστε σε θέση να εφαρμόσουμε το εν λόγω θεώρημα, το οποίο χρησιμοποιούμε για την ανακατασκευή του σκεδαστή. Σε προγενέστερες μελέτες έχουν δοθεί αριθμητικά αποτελέσματα [13], [15], [17], [57], [74], [80]-[83], [86]-[91]. Η μελέτη μας αποτελεί έναυσμα για την επιστημονική κοινότητα σχετικά με αριθμητικές μελέτες σε ελαστικά μεικτά προβλήματα σκέδασης, για τα οποία μέχρι στιγμής δεν έχουν δοθεί αριθμητικά αποτελέσματα.

Βιβλιογραφία

- [1] T. Angell and R. Kleinmann,
“The Helmholtz equation with L^2 boundary values”,
SIAM J. Math. Anal.,
16, pp. 259-278 (1985).
- [2] T. Angell and A. Kirsch,
“Optimization Methods in Electromagnetic Radiation”,
Springer-Verlag, New York, (2004).
- [3] T. S. Angell, R. E. Kleinman and G. F. Roach,
“An Inverse Transmission Problem for the Helmholtz Equation”,
Inverse Problems,
3, no. 2, pp. 149-180, (1987).
- [4] T. Arens,
“The Scattering of Elastic Waves by Rough Surfaces”,
Dissertation, Department of Mathematical Science, Brunel University, Brunel,
UK, (2000).
- [5] T. Arens,
“The scattering of plane elastic waves by a one-dimensional periodic surface”,
Math. Meth. Appl. Sci.,
22, Issue 1, pp. 55-72, (1999).
- [6] T. Arens,
“Why linear sampling works”,
Inverse Problems,
20, no. 1, pp. 163-173, (2004).

- [7] T. Arens,
“Linear sampling methods for 2d inverse elastic wave scattering”,
Inverse Problems,
17, no. 5, pp. 1445-1464, (2001).
- [8] T. Arens and A. Lechleiter,
“The linear sampling method revisited”,
J. Int. Eqn. Appl.,
21, no. 2, pp. 179-202, (2009).
- [9] C. E. Athanasiadis,
“The multi-layered ellipsoid with a soft core in the presence of a low-frequency acoustic wave”,
Quart. Jl. Mech. appl. Math.,
47, no. 3, pp. 441-459, (1994).
- [10] C. E. Athanasiadis,
“The hard-core multi-layered ellipsoid in a low-frequency acoustic field”,
Int. J. Engng. Sci.,
32, no. 9, pp. 1351-1359, (1994).
- [11] C. E. Athanasiadis and I. G. Stratis,
“On a transmission problem for the time-harmonic Maxwell equations”,
Rend. Mat. Appl.,
16, Serie VII, pp. 671-688, (1996).
- [12] C. E. Athanasiadis and I. G. Stratis,
“Uniqueness of the inverse scattering problem for a chiral obstacle”,
Int. J. Appl. Electr. Mech.,
9, no. 2, pp. 123-133, (1998).
- [13] C. E. Athanasiadis, V. Sevroglou and I. G. Stratis,
“Scattering relations for point generated dyadic fields in two-dimensional linear elasticity”,
Quart. Appl. Math.,
64, no. 4, pp. 695-710, (2006).

- [14] C. E. Athanasiadis, V. Sevroglou and I. G. Stratis,
“On the reconstruction of a small elastic sphere in the near field by point-sources”,
Advanced Topics in Scattering and Biomedical Engineering,
Proceedings of the 8th International Workshop on Mathematical Methods in
Scattering Theory and biomedical Engineering,
Chapter 1, pp. 3-12, (2008).
- [15] C. E. Athanasiadis, G. Pelekanos, V. Sevroglou and I. G. Stratis,
“On the scattering of 2D elastic point-sources and related near-field inverse
problems”, *The Royal Society of Edinburgh Proceedings A*, 139, pp. 719-741,
(2009).
- [16] C. E. Athanasiadis, D. Natroshvili, V. Sevroglou and I. G. Stratis,
“An application of the reciprocity gap functional to inverse mixed impedance
problems in elasticity”,
Inverse Problems,
26, (19pp), (2010).
- [17] C. E. Athanasiadis, V. Sevroglou, I. G. Stratis and N. L. Tsitsas,
“Point-source elastic scattering by a nested piecewise homogeneous obstacle in
an elastic environment”,
Mathematics and Mechanics of Solids,
15, no. 4, pp. 419-438, (2010).
- [18] C. E. Athanasiadis, D. Natroshvili, V. Sevroglou and I. G. Stratis,
“A boundary integral equations approach for mixed impedance problems in
elasticity”,
J. Int. Eqn. Appl.,
23, no. 2, pp. 183-222, (2011).
- [19] C. E. Athanasiadis, V. Sevroglou and K. Skourogiannis,
“The direct electromagnetic scattering problem by a mixed impedance screen in
chiral media”,
Appl. Anal.,
91, no. 11, pp 2083-2093, (2012).

- [20] A. Ben-Menahem and S. J. Singh,
 “Seismic Waves and Sources”,
 Springer-Verlag, New York, (1981).
- [21] H. Brezis,
 “Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations”,
 Springer: New York, NY, USA, (2010).
- [22] M. Brühl,
 “Gebietserkennung in der elektrischen Impedanztomographie”,
 Dissertation, University of Karlsruhe, (1999).
- [23] M. Brühl,
 “Explicit characterization of inclusions in electrical impedance tomography”,
SIAM J. Math. Anal.,
32, no. 6, pp. 1327-1341, (2001).
- [24] M. Brühl and M. Hanke,
 “Numerical implementation of two noniterative methods for locating inclusions
 by impedance tomography”,
Inverse Problems, **16**, no. 4, pp. 1029-1042, (2000).
- [25] M. Brühl, M. Hanke and M. Pidcock,
 “Crack detection using electrostatic measurements”,
Math. Model. Numer. Anal.,
35, no. 3, pp. 595-605, (2001).
- [26] L. Borcea,
 “Electrical impedance tomography”,
Inverse Problems,
18, pp. R99-R136, (2002).
- [27] F. Cakoni and D. Colton,
 “Qualitative Methods in Inverse Scattering Theory. An Introduction.”,
 Springer, Berlin, (2006).
- [28] D. Colton and A. Kirsch,
 “A Simple Method for Solving the inverse scattering problems in the resonance

- region”,
Inverse Problems,
12, no. 4, pp. 383-393, (1996).
- [29] D. Colton and R. Kress,
 “Integral Equations Methods in Scattering Theory”,
 John Wiley, New-York, (1983).
- [30] D. Colton and R. Kress,
 “Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory”,
 Springer, second edition (1998).
- [31] D. Colton and R. Kress,
 “Using fundamental solutions in inverse scattering”,
Inverse Problems,
22,no. 3, pp. R49-R66, (2006).
- [32] D. Colton and P. Monk,
 “A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic
 acoustic waves in the resonance region”,
SIAM J. Appl. Math.,
45, no. 6, pp. 1039-1053, (1985).
- [33] D. Colton and P. Monk,
 “A novel method for solving the inverse scattering problem for time-harmonic
 acoustic waves in the resonance region II”,
SIAM J. Appl. Math.,
46, no. 3, pp. 506-523, (1986).
- [34] D. Colton, P. Monk and R. Kress,
 “A new algorithm in electromagnetic inverse scattering theory with an application
 to medical imaging”,
Math. Methods Appl. Sci.,
20, no. 5, pp. 385-401, (1997).
- [35] G. Dassios and Z. Rigou,
 “On the density of traction traces in scattering by elastic waves”,

- SIAM J. Appl. Math.*,
53, no. 1, pp. 141-153, (1993).
- [36] G. Dassios and Z. Rigou,
 “Elastic Herglotz Functions”,
SIAM J. Appl. Math.,
 textbf55, no. 5, pp. 1345-1361, (1995).
- [37] G. Dassios and Z. Rigou,
 “On the reconstruction of a rigid body in the theory of elasticity”,
ZAMM-Angew. Math. Mech.,
77, no. 12, pp. 911-923, (1997).
- [38] N. G. Einspruch, E. J. Witterholt and R. Truell,
 “Scattering of a Plane Transverse Wave by a Spherical Obstacle in an Elastic
 Medium”,
J. Appl. Phys.,
31, pp.806-818, (1960).
- [39] K. Erhard and R. Potthast,
 “A numerical study of the probe method”,
SIAM J. Sci. Comput.,
28, no. 5, pp. 1597-1612, (2006).
- [40] Qu Fenglong, Yang Jiaqing and Zhang Bo,
 “An approximate factorization method for inverse medium scattering with
 unknown buried objects”,
Inverse Problems,
33, no. 3, (2017).
- [41] B. Gebauer,
 “The factorization method for real elliptic systems”,
ZAA-J. Anal.Anwend.,
25, no. 1, pp. 81-102, (2006).
- [42] D. Gintides and K. Kiriaki,
 “The far-field equations in linear elasticity-an inversion scheme”,

- ZAMM-Z. Angew. Math. Mech.*,
81, no. 5, pp. 305-316, (2001).
- [43] N. I. Grinberg,
 “The factorization method in inverse obstacle scattering”,
 Habilitation thesis, University of Karlsruhe, Karlsruhe, (2004).
- [44] N. I. Grinberg and A. Kirsch,
 “The linear sampling method in inverse obstacle scattering for impedance
 boundary conditions”,
J. Inverse Ill-Posed Probl.,
10, no. 2, pp. 171-185, (2002).
- [45] N. I. Grinberg and A. Kirsch,
 “The factorization method for obstacles with a-priori separated sound-soft and
 sound-hard parts”,
Math. Comput. in Simul.,
66, no. 4-5, pp. 267-279, (2004).
- [46] P. Hartman,
 “On the Solutions of $\Delta V + V = 0$ in an exterior region”,
Math. Z.,
71, pp. 139-143, (1959).
- [47] P. Hartman and C. Wilcox,
 “On solutions of the Helmholtz equation in exterior domains”,
Math. Z.,
75, pp. 228-255, (1961).
- [48] M. Hanke and M. Brühl,
 “Recent progress in electrical impedance tomography”,
Inverse Problems,
19, no. 6, pp. 565-590, (2003).
- [49] E. Holmgren,
 “Über systeme von linearen partiellen differentialgleichungen”,
Översigt Vetensk. Akad. Handl.,
58, pp. 91–105, (1901).

- [50] N. Hyvönen,
“Complete electrode models of electrical impedance tomography: approximation properties and characterization of inclusions”,
SIAM J. Appl. Math.,
64, no. 3, pp. 902-931, (2004).
- [51] N. Hyvönen,
“Application of the factorization method to the characterization of weak inclusions in electrical impedance tomography”, *Adv. in Appl. Math.*,
39, pp. 197-221, (2007).
- [52] N. Hyvönen, H. Hakula and S. Pursiainen,
“Numerical implementation of the factorization method within the complete electrode model of electrical impedance tomography”,
Inverse Problems and Imaging,
1, no. 2, pp. 299-317, (2007).
- [53] M. Ikehata,
“Reconstruction of the shape of the inclusion by boundary measurements”,
Commun. Partial Differ. Equations,
23, no. 7-8, pp. 1459-1474, (1998).
- [54] V. Isakov,
“Inverse Problems for Partial Differential Equations”,
Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1998).
- [55] A. Kaiafa, G. Kanakoudis and V. Sevroglou,
“Elastic scattering by an inhomogeneous medium with unknown buried obstacles”,
(accepted)
- [56] A. Kaiafa and V. Sevroglou,
“Interior elastic scattering by a non-penetrable partially coated obstacle and its shape recovering”,
Mathematics,
9, no. 19, (2021).

- [57] K. Kiriaki and V. Sevroglou,
 “Integral equations methods in obstacle elastic scattering”,
Bulletin of the Greek Mathematical Society,
45, pp. 57-69, (2001).
- [58] A. Kirsch,
 “Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator”,
Inverse Problems,
14, no. 6, pp. 1489-1512, (1998).
- [59] A. Kirsch,
 “Factorization of the far field operator for the inhomogeneous medium case and an application in inverse scattering theory”,
Inverse Problems,
15, no. 2, pp. 413-429, (1999).
- [60] A. Kirsch,
 “The factorization method for a class of inverse elliptic problems”,
Math. Nachr.,
278, no. 3, pp. 258-277, (2005).
- [61] A. Kirsch,
 “New characterizations of solutions in inverse scattering theory”,
Appl. Anal.,
76, no. 3-4, pp. 319-350, (2000).
- [62] A. Kirsch,
 “A new class of methods for solving inverse scattering problems”,
 In Alfredo et al. Bermúdez, editor, *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, pages 499-503, Santiago de Compostela, Spain, 2000. Society for Industrial and Applied Mathematics. 5th international conference.
- [63] A. Kirsch,
 “The MUSIC-algorithm and the factorization method in inverse scattering theory for inhomogeneous media”,

- Inverse Problems*,
18, no. 4, pp. 1025-1040, (2002).
- [64] A. Kirsch,
“The factorization method for Maxwell’s equations”,
Inverse Problems,
20, no. 6, pp. S117-S134, (2004).
- [65] A. Kirsch and S. Ritter,
“A linear sampling method for inverse scattering from an open arc”,
Inverse Problems,
16, no. 1, pp. 89-105, (2000).
- [66] A. Kirsch and N. I. Grinberg,
“The Factorization Method for Inverse Problems”,
Oxford University Press, New York, (2008).
- [67] A. Kirsch and R. Kress,
“An optimization method in inverse acoustic scattering”,
In Brebbia et al., editor, *Boundary Elements IX*, Vol **3**, Fluid Flow and Potential
Applications, pages 3-18, Springer, (1987).
- [68] A. Kirsch, R. Kress, P. Monk and A. Zinn,
“Two methods for solving the inverse acoustic scattering problem”,
Inverse Problems,
4, no. 3, pp. 749-769, (1988).
- [69] R. Kress,
“Newton’s method for inverse obstacle scattering meets the method of the least
squares”,
Inverse Problems,
19, no. 6, pp. 91-104, (2003).
- [70] V. D. Kupradze,
“Progress in Solid Mechanics”,
Vol. III. North Holland, New-York, (1963).

- [71] V. D. Kupradze,
 “Potential Methods in the Theory of Elasticity”,
 North-Holland, Amsterdam, **(1963)**.
- [72] V. D. Kupradze,
 “Potential Methods in the Theory of Elasticity”,
 Israel Programm for Scientific Translations: Jerusalem, Israel, **(1965)**.
- [73] V. D. Kupradze,
 “Three-dimensional Problems of the Mathematical Theory of Elasticity and
 Thermoelasticity”,
 North-Holland, Amsterdam, **(1979)**.
- [74] K. H. Leem, G. Pelekanos and V. Sevroglou,
 “A preconditioned linear sampling method in inverse acoustic obstacle
 scattering”,
J. Comp. Anal. Appl.,
10, no. 4, pp. 453-464, **(2008)**.
- [75] N. A. Logan,
 “Survey of some early studies of the scattering of plane waves by a sphere”,
 Proc. IEEE, pp.773-785, **(1965)**.
- [76] J. E. Marsden and T. J. R. Hughes,
 “Mathematical Foundations of Elasticity”, Prentice-Hall, Englewood Cliffs,
(1983).
- [77] W. Mclean,
 “Strongly Elliptic Systems and Boundary Integral Equations”,
 Cambridge University Press, Cambridge, **(2000)**.
- [78] C. Müller,
 “Radiation patterns and radiation fields”,
J. Ration. Mech. Analysis,
4, pp. 235-246, **(1955)**.

- [79] Y. Pao and C. Mow,
 “Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations”,
 Grane Russak, (1973).
- [80] G. Pelekanos and V. Sevroglou,
 “The $(F^*F)^{1/4}$ – method for 2D penetrable elastic bodies”,
In Advances in Scattering and Biomedical Engineeirng, World Scientific, New
 Jersey, pp. 363-369, (2004).
- [81] G. Pelekanos and V. Sevroglou,
 “The $(F^*F)^{1/4}$ – method for the transmission problem in two-dimensional linear
 elasticity”,
Appl. Anal.,
84, no. 3, pp. 311-328, (2005).
- [82] G. Pelekanos and V. Sevroglou,
 “Estimating the regularization parameter for the linear sampling method in
 acoustics”,
In Advances in Scattering and Biomedical Engineering,
4, pp. 455-458, Brill Academic Publishers, (2005).
- [83] G. Pelekanos and V. Sevroglou,
 “Shape reconstruction of a 2D-elastic penetrable object via the *L-Curve* method”,
j. Inverse Ill-Posed Probl.,
14, no. 4, pp. 1-16, (2006).
- [84] R. Pike and P. Sabatier,
 “Scattering. Scattering and Inverse scattering in Pure and Applied science.”,
 Academic Press, New york, London, (2002).
- [85] Qinghua Wu and Guozheng Yan,
 “The factorization method for a partially coated cavity in inverse scattering”,
Inverse Problems and Imaging,
10, no. 1, pp. 263-279, (2016).
- [86] V. Sevroglou,
 “On the scattering of 2D-elastic waves generated by dyadic point-sources”,

Bulletin of the Greek Mathematical Society,
54, pp. 249-256, (2007).

- [87] V. Sevroglou,
“The far-field operator for penetrable and absorbing obstacles in 2D inverse elastic scattering”,
Inverse Problems,
21, pp. 717-738, (2005).
- [88] V. Sevroglou and G. Pelekanos,
“An inversion algorithm in two-dimensional elasticity”,
J. Math. Anal. Appl.,
263, pp. 277-293, (2001).
- [89] V. Sevroglou and G. Pelekanos,
“Two dimensional elastic Herglotz functions and their applications in inverse scattering”,
Journal of Elasticity,
68, pp. 123-144, (2002).
- [90] V. Sevroglou and G. Pelekanos,
“Inverse scattering by penetrable objects in two dimensional elastodynamics”,
J. Comp. Appl. Math.,
68, pp. 123-144, (2002).
- [91] V. Sevroglou and P. Vafeas, “2D elastic scattering of a plane dyadic wave by a small rigid body and cavity”,
ZAMM-Z. Angew. Mth. Mech.,
88, no. 3, pp. 227-238, (2008)
- [92] A. Sommerfeld,
“Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung”,
Jahr. Der. Deut. Mth. Ver.,
21, pp. 309-353, (1912).
- [93] J. A. Stratton,
“Electromagnetic Theory”,
McGraw-Hill, New York, (1941).

- [94] V. Twersky,
“Scattering of Waves by Two Objects in Electromagnetic Waves”,
(R. E. Langer, ed.), U. Wise. Press, Madison, pp. 361-369, **(1962)**.
- [95] V. Twersky,
“Multiple Scattering by Arbitrary Configuration in Three Dimensions”,
J. Math. Phys.,
3, pp. 83-91, **(1962)**.
- [96] V. Twersky,
“Rayleigh Scattering”,
Appi. Opt.,
3, pp. 1150-1162, **(1964)**.
- [97] V. Twersky,
“Multiple Scattering of Electromagnetic Waves by Arbitrary Configurations”,
J. Math. Phys.,
8, pp. 589-610, **(1967)**.
- [98] C. F. Ying and R. Truell,
“Scattering of a Plane Longitudinal Wave by a Spherical Obstacle in an
Isotropically Elastic Solid”,
J. Appl Phys.,
27, pp.1086-1097, **(1956)**.
- [99] Β. Σεβρόγλου,
“Οι συναρτήσεις Herglotz στη δισδιάστατη ελαστικότητα - εφαρμογές στο αντί-
στροφο πρόβλημα σκέδασης”,
Διδακτορική Διατριβή, Ε.Μ.Π., Τμήμα Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσι-
κών Επιστημών (ΤΕΜΦΕ), Αθήνα, **(2000)**.