

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ CHAIN LADDER
ΣΤΙΣ ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΦΑΛΙΣΕΙΣ**

Ελένη Μάντζαρη

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και
Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς
ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση
Διπλώματος Μεταπτυχιακών Σπουδών
στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Δεκέμβριος 2021

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)
- Βερροπούλου Γεωργία
- Τζαβελάς Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTICS AND
INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK
MANAGEMENT**

**Stochastic Chain Ladder
Models in Non-life Insurance**

By

Eleni Mantzari

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and
Insurance Science of the University of Piraeus
in partial fulfilment of the requirements for
the degree of Master of Science
in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus
December 2021

*This present Master thesis is dedicated to my loving family
and my supportive friends*

ACKNOWLEDGEMENTS

I would like to acknowledge the encouragement, support and devotion I have received from a number of people during my master studies at Department of Statistics and Insurance Science, University of Piraeus. Firstly, I would like to express my gratitude to my master thesis supervisor Professor Efstathios Chadjikonstantinidis. I appreciate all his support and guidance to make my master thesis experience productive. I would also like to thank all the faculty members of the department for their time and advices during lectures. My postgraduate studies have been quite pleasurable. A significant factor to that was the support I received from my colleagues that I have had the pleasure to work with. I am also especially grateful to the staff for their kindness and contribution in everything I needed. Finally, I am deeply thankful to my parents and my friends for all their love, tolerance and encouragement. They are always by my side to all of my steps. This is why the present master thesis is dedicated to them.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ελένη Μάντζαρη

Στοχαστικά Μοντέλα Chain Ladder στις Γενικές ασφαλίσεις

Δεκέμβριος 2021

Είναι γεγονός πως ζούμε σε ένα κόσμο γεμάτο αβεβαιότητα. Συνεπώς, είναι κρίσιμο για τις ασφαλιστικές εταιρείες να εκτιμούν διαρκώς το απαραίτητο κεφάλαιο ώστε να είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν τις ζημίες από γεγονότα που έχουν συμβεί. Προκειμένου να προστατέψουν τους ασφαλισμένους αλλά και τις ίδιες τις ασφαλιστικές εταιρείες από χρεωκοπία, η Ευρωπαϊκή Ένωση έχει θεσπίσει ένα πλαίσιο που ονομάζεται Φερεγγυότητα II.

Έτσι, η διαδικασία εκτίμησης των απαραίτητων αποθεμάτων θα πρέπει να ακολουθεί συγκεκριμένες οδηγίες και να ελέγχεται από τις αρμόδιες αρχές. Στην παρούσα διατριβή, παρουσιάζονται ορισμένες από τις βασικές μεθόδους αποθεματοποίησης για τον κλάδο των γενικών ασφαλίσεων. Οι μέθοδοι θα καλυφθούν τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά με αριθμητικά παραδείγματα.

ABSTRACT

Eleni Mantzari

Stochastic Chain Ladder models in Non-life Insurance

December 2021

It is a fact that life is full of uncertainties. Subsequently, it is crucial for insurance companies to continuously estimate the capital required to face losses from events that have transpired. In order to protect policyholders and the insurance companies themselves from bankruptcy, the EU has established a framework called Solvency II.

Thus, the prediction process of the required reserves has to follow some specific guidelines and it is supervised by the authorities. In this thesis, we present some of the basic claim reserving methods concerning the non-life insurance. The methods are covered both theoretically and practically with numeric examples.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Περιεχόμενα

1. Εισαγωγή	1
2. Κεφαλαιακές απαιτήσεις στον ασφαλιστικό κλάδο	3
3. Μέθοδοι αποθεματοποίησης.....	16
3.1 Κλασικές μέθοδοι αποθεματοποίησης	18
3.1.1 Chain Ladder	18
3.1.2 Bornhuetter-Ferguson	34
3.1.3 Μέθοδος Διαχωρισμού	41
3.2 Στοχαστικές μέθοδοι αποθεματοποίησης	45
3.2.1 Το μοντέλο του Mack.....	45
3.2.2 Bootstrapping	62
3.2.3 Stochastic Bornhuetter-Ferguson.....	68
3.2.4 Το μοντέλο Poisson	71
3.2.5 Το μοντέλο Negative Binomial	81
4. Εφαρμογή των μεθόδων σε αληθινά δεδομένα	89
5. Συμπεράσματα	96
Βιβλιογραφία	98

ΛΙΣΤΑ ΠΙΝΑΚΩΝ

Πίνακας	Σελίδα
ΠΙΝΑΚΑΣ 1: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ	23
ΠΙΝΑΚΑΣ 2: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΕΝΟΣ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΣΥΣΣΩΡΕΥΜΕΝΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ	28
ΠΙΝΑΚΑΣ 3: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΟΝΤΩΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΠΕΡΙΟΔΩΝ	28
ΠΙΝΑΚΑΣ 4: ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ ΤΩΝ ΜΕΛΛΟΝΤΙΚΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ CL.....	29
ΠΙΝΑΚΑΣ 5: ΕΚΤΙΜΩΜΕΝΕΣ ΖΗΜΙΕΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ CL.....	30
ΠΙΝΑΚΑΣ 6: ΕΚΤΙΜΩΜΕΝΕΣ ΧΡΗΜΑΤΟΡΕΣ	31
ΠΙΝΑΚΑΣ 7: ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΤΙΚΟΙ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΚΑΙ ΑΠΟΘΕΜΑΤΙΚΑ	33
ΠΙΝΑΚΑΣ 8: ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΣΤΟΥΣ ΤΕΛΙΚΟΥΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΕΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ	37
ΠΙΝΑΚΑΣ 9: ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΜΕ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΤΟΣΟ ΤΙΣ ΣΥΣΣΩΡΕΥΜΕΝΕΣ ΖΗΜΙΕΣ ΟΣΟ ΚΑΙ ΤΑ ΚΕΡΔΙΣΜΕΝΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ	38
ΠΙΝΑΚΑΣ 10: ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΑΠΟΘΕΜΑΤΙΚΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ BF	39
ΠΙΝΑΚΑΣ 11: ΤΡΙΓΩΝΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΜΕ ΤΟ ΜΕΣΟ ΚΟΣΤΟΣ ΑΠΑΙΤΗΣΗΣ	42
ΠΙΝΑΚΑΣ 12: ΤΡΙΓΩΝΟ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΜΕ ΤΙΣ ΣΥΣΣΩΡΕΥΜΕΝΕΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΤΗΣ ΑΣΦΑΛΙΣΗΣ ΑΣΤΙΚΗΣ ΕΥΘΥΝΗΣ.....	90
ΠΙΝΑΚΑΣ 13: ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ IBNR ΜΕ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ MACK	92
ΠΙΝΑΚΑΣ 14: ΕΚΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ IBNR ΜΕ BOOTSTRAP	94

ΛΙΣΤΑ ΕΙΚΟΝΩΝ

Εικόνα	Σελίδα
ΕΙΚΟΝΑ 1: ΣΥΓΚΡΙΣΗ SOLVENCY I ΜΕ SOLVENCY II	9
ΕΙΚΟΝΑ 2: ΟΙ ΤΡΕΙΣ ΠΥΛΩΝΕΣ ΤΟΥ SOLVENCY II	11
ΕΙΚΟΝΑ 3: ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ SCR	12
ΕΙΚΟΝΑ 4: ΧΡΟΝΙΚΗ ΣΕΙΡΑ ΤΗΣ ΕΞΕΛΙΞΗΣ ΜΙΑΣ ΑΠΑΙΤΗΣΗΣ	16
ΕΙΚΟΝΑ 5: ΔΟΜΗ ΤΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ.....	20
ΕΙΚΟΝΑ 6: Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΟΛΩΝ ΤΩΝ ΣΥΣΣΩΡΕΥΜΕΝΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ	91
ΕΙΚΟΝΑ 7: Η ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΤΩΝ ΣΥΣΣΩΡΕΥΜΕΝΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΑΝΑ ΕΤΟΣ ΑΤΥΧΗΜΑΤΟΣ	91

1. Εισαγωγή

Ο σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η εξερεύνηση διάφορων μεθοδολογιών προκειμένου να εξασφαλίσουμε την οικονομική ασφάλεια μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Πιο συγκεκριμένα, η εργασία αυτή πραγματεύεται την εκτίμηση και τον υπολογισμό των απαραίτητων αποθεματικών της ασφαλιστικής εταιρείας, σύμφωνα με τις κατευθυντήριες γραμμές της Φερεγγυότητας II, στις γενικές ασφαλίσεις.

Η Φερεγγυότητα II (Solvency II Directive) είναι η τρέχουσα ευρωπαϊκή νομοθεσία για τα ασφαλιστικά ζητήματα. Ξεκίνησε να εφαρμόζεται την 1^η Ιανουαρίου του 2016 και το βασικό στοιχείο που εστιάζει είναι το ποσό που θα πρέπει οι ασφαλιστικές εταιρείες να διατηρούν προκειμένου να ελαχιστοποιήσουν τον κίνδυνο της χρεοκοπίας.

Οι ασφαλίσεις κατά ζημιών ή, αλλιώς, γενικές ασφαλίσεις αφορούν ουσιαστικά την ασφαλιστική πολιτική για την προστασία ενός ιδιώτη ή οργανισμού από απώλειες και ζημιές που δεν ανήκουν στις ασφαλίσεις ζωής και υγείας. Για παράδειγμα, οι γενικές ασφαλίσεις παρέχουν οικονομική προστασία στα κτίσματα, τον εξοπλισμό, τα έπιπλα, τα οχήματα και τα εμπορεύματα από τον κίνδυνο της πυρκαγιάς, του σεισμού, της κλοπής ή ενός ατυχήματος.

Σύμφωνα με αυτό το πλαίσιο, η παρούσα διπλωματική θα εξετάσει διαφορετικές τεχνικές προκειμένου να βρει την πιο κατάλληλη μέθοδο εκτίμησης του αποθεματικού. Οι διαφορετικές προσεγγίσεις θα καλυφθούν τόσο θεωρητικά όσο και πρακτικά, χρησιμοποιώντας παραδείγματα με αληθινά δεδομένα και πραγματοποιώντας συγκρίσεις μεταξύ των εναλλακτικών αποτελεσμάτων.

2. Κεφαλαιακές απαιτήσεις στον ασφαλιστικό κλάδο

Αρχικά, ο σκοπός της ύπαρξης ενός ορίου φερεγγυότητας σε μια ασφαλιστική είναι η ελαχιστοποίηση της πιθανότητας να καταστεί η ίδια ανίκανη να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις έναντι των πελατών της, εάν προκύψουν απρόβλεπτες οικονομικές συνθήκες. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο πρέπει να καθοριστεί από τις αρχές ένα συγκεκριμένο ελάχιστο κεφάλαιο το οποίο εταιρεία θα πρέπει να διατηρεί για ασφάλεια, προκειμένου να αποφευχθεί το παραπάνω σενάριο.

Όπως προαναφέρθηκε, η προσέγγιση για την εκτίμηση των αποθεματικών γίνεται υπό το πρίσμα των οδηγιών της Φερεγγυότητας II. Ωστόσο, οι πρώτες επίσημες ευρωπαϊκές κατευθυντήριες γραμμές σχετικά με την ασφαλιστική εποπτεία εισήχθησαν το 1973 για την ασφάλιση ζημιών και το 1979 για την ασφάλιση ζωής.

Η προσέγγιση που παρουσιάστηκε αρχικά ήταν αρκετά απλή και εύκολη να εφαρμοστεί. Η αξιολόγηση της φερεγγυότητας έκανε κυρίως χρήση απλών παραγόντων – μεταβλητών που εφαρμόστηκαν στα αποτελέσματα των λογιστικών βιβλίων. Για τον υπολογισμό του Ελάχιστου Περιθωρίου Φερεγγυότητας (ή αλλιώς Απαιτούμενο Περιθώριο Φερεγγυότητας) απαιτείται η πρόσθεση των ακόλουθων δύο τιμών:

- μια τιμή που εκφράζει τον Επενδυτικό Κίνδυνο (όπως διαμορφώνεται από τις μαθηματικές προβλέψεις)
- μια τιμή που εκφράζει τον Τεχνικό Κίνδυνο

Επιπρόσθετα, έχει οριστεί ένα σταθερό ποσό ως Κεφάλαιο Εγγύησης. Το 1979, το ταμείο ορίστηκε σε 800.000 ECU (Ευρωπαϊκή Λογιστική Μονάδα).

Έτσι, το Ελάχιστο Περιθώριο Φερεγγυότητας ορίστηκε ως:

$$\begin{aligned} \text{Ελάχιστο Περιθώριο Φερεγγυότητας} &= \\ &= 4\% \cdot \text{Μαθηματικά Αποθεματικά} + 0,3\% \cdot \text{Κεφάλαιο σε Κίνδυνο} \end{aligned} \quad (2.1)$$

όπου το 4% αντιστοιχούσε σε 95% διάστημα εμπιστοσύνης.

Στη συνέχεια, το Ελάχιστο Κεφάλαιο Εγγύησης ορίστηκε ως η μέγιστη ποσότητα μεταξύ των 800.000 ECU και του $\frac{1}{3}$ του Ελάχιστου Περιθωρίου Φερεγγυότητας.

Τους παραπάνω υπολογισμούς ήρθε να αντικαταστήσει η Φερεγγυότητα I (Solvency I). Εισήχθη στην Ευρωπαϊκή Ένωση το 2002 και παρείχε κάποιες πρόσθετες παραμέτρους στον υπολογισμό του περιθωρίου φερεγγυότητας. Η Φερεγγυότητα I σίγουρα αποτελούνταν από βελτιωμένες οδηγίες συγκριτικά με τις προηγούμενες, αλλά η διαδικασία υπολογισμού ακόμα βασιζόταν σε απλούς και εύκολους υπολογισμούς.

Η Φερεγγυότητα Ι πρότεινε την επανεξέταση του Ελάχιστου Κεφαλαίου Εγγύησης κάθε πέντε χρόνια. Το Εγγυημένο Κεφάλαιο αυξήθηκε στα 3.000.000 ευρώ. Επίσης, πρότεινε να λαμβάνεται υπόψη η σύνθεση του Ελάχιστου Περιθωρίου Φερεγγυότητας και του Κεφαλαίου Εγγύησης, και όχι μόνο το περιθώριο φερεγγυότητας.

Επιπλέον, ταξινόμησε τον κίνδυνο σε τρεις διαφορετικές κατηγορίες:

- Τεχνικός κίνδυνος όπως θνησιμότητα ή ανεπαρκή ασφάλιστρα
- Επενδυτικός κίνδυνος όπως υποτίμηση ή ρευστότητα
- Μη τεχνικός κίνδυνος όπως διοικητικές αποφάσεις ή κανονισμοί

Επιπρόσθετα, οι απαιτήσεις φερεγγυότητας της Φερεγγυότητας Ι καθορίστηκαν για να πληρούνται πάντα, σε κάθε χρονική στιγμή, σε αντίθεση με τις προηγούμενες οδηγίες που σχετίζονταν με το κεφάλαιο που έχουν οι ασφαλιστικές σε μια δεδομένη χρονική στιγμή.

Συμπερασματικά, η Φερεγγυότητα Ι δημιούργησε πιο ρεαλιστικές κεφαλαιακές απαιτήσεις σε σύγκριση με το παρελθόν. Ωστόσο, με την πάροδο των ετών έγινε προφανές ότι υπάρχει ανάγκη για μια διαδικασία που θα λαμβάνει υπόψη την ποικιλομορφία των χαρακτηριστικών του κινδύνου που αντιμετωπίζουν οι διάφορες ασφαλιστικές εταιρείες.

Έτσι, το Solvency I αντικαταστάθηκε από το Solvency II, με το τελευταίο να αποτελεί ένα σύστημα πιο ευαίσθητο στον κίνδυνο και να παρέχει τόσο καλύτερη οικονομική σταθερότητα στις εταιρείες όσο και καλύτερη πληροφόρηση στους ασφαλιστικούς επόπτες.

Μερικές από τις βασικές διαφορές μεταξύ Solvency I και Solvency II παρουσιάζονται παρακάτω:

- Αντί για το Ελάχιστο Περιθώριο Φερεγγυότητας, το Solvency II έχει ένα κεφάλαιο που ονομάζεται «Ελάχιστη Κεφαλαιακή Απαίτηση» ή αλλιώς Minimum Capital Requirement (MCR).
- Η Ελάχιστη Κεφαλαιακή Απαίτηση πρέπει να εκτιμάται και να δημοσιεύεται στις αρχές τουλάχιστον τέσσερις φορές το χρόνο
- Υπάρχει επίσης μια επιπλέον κεφαλαιακή απαίτηση που αντιπροσωπεύει το κεφάλαιο-στόχο. Ονομάζεται Κεφαλαιακή Απαίτηση Φερεγγυότητας, ή αλλιώς Solvency Capital Requirement (SCR), και μπορεί να υπολογιστεί είτε χρησιμοποιώντας έναν τυποποιημένο τύπο είτε με εσωτερικές διαδικασίες.
- Η SCR πρέπει να υπολογίζεται και να δημοσιεύεται τουλάχιστον μία φορά το χρόνο.

Σε αντίθεση με το Solvency I, το Solvency II δεν υποχρεώνει τις εταιρείες να χρησιμοποιούν ένα μοναδικό – συγκεκριμένο μοντέλο για τον υπολογισμό του περιθωρίου φερεγγυότητας. Απεναντίας, τους παρέχει την ελευθερία να επιλέξουν τη μέθοδο εκτίμησης που αντιπροσωπεύει καλύτερα το εταιρικό τους προφίλ. Αυτή είναι η κεντρική ιδέα πίσω από τις νέες κατευθυντήριες γραμμές: ότι εάν οι εταιρείες έχουν τη δυνατότητα να υπολογίσουν το περιθώριο φερεγγυότητας με τα δικά τους εσωτερικά μοντέλα, ο κίνδυνος θα μπορεί μετρηθεί πλέον με πιο ολιστικό τρόπο.

Ωστόσο, είναι ρητά γραμμένο στις οδηγίες ότι, ανεξάρτητα από το επιλεγμένο μοντέλο κινδύνου, πρέπει πάντα οι υπολογισμοί να γίνονται σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99,5%. Οι ασφαλιστικές εταιρείες πρέπει να είναι σε θέση να αποδείξουν πως ότι το μοντέλο τους βασίζεται σε ένα σύστημα διαχείρισης κινδύνων αλλά και το ίδιο το μοντέλο θα πρέπει να λάβει έγκριση από τις εποπτικές αρχές.

Το Solvency II εφαρμόζεται σε όλες τις ευρωπαϊκές ασφαλιστικές εταιρείες που έχουν ακαθάριστο εισόδημα από ασφάλιστρα άνω των 5.000.000 € ή μεικτές προβλέψεις μεγαλύτερες από 25.000.000 €.

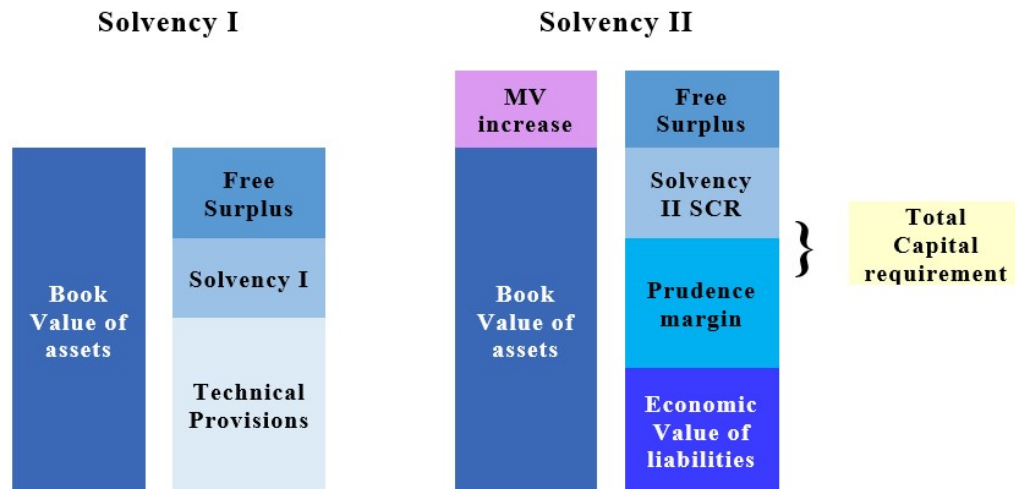
Όσον αφορά τη δομή της οδηγίας, το Solvency II συχνά συγκρίνεται με τη Βασιλεία II (Basel II), που αφορά τα τραπεζικά ιδρύματα, καθώς βασίζεται και αυτή σε τρεις βασικούς πυλώνες:

- Ο Πυλώνας 1 επισημαίνει τις ποσοτικές κεφαλαιακές απαιτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν δύο διαφορετικές ποσότητες που πρέπει να κατέχει μια εταιρεία για να είναι προστατευμένη από την πτώχευση. Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η πρώτη ποσότητα είναι η Ελάχιστη Κεφαλαιακή Απαίτηση (MCR). Αυτό είναι το ελάχιστο ποσό που πρέπει να διατηρούν οι ασφαλιστικές εταιρείες ανά πάσα στιγμή. Εάν τα αποθεματικά μειωθούν σε αυτόν τον αριθμό, οι εποπτικές αρχές πρέπει να παρέμβουν, καθώς οι αντισυμβαλλόμενοι εκτίθενται σε σημαντικό επίπεδο κινδύνου.

Η δεύτερη ποσότητα είναι η Κεφαλαιακή Απαίτηση Φερεγγυότητας (SCR) που αναφέρθηκε προηγουμένως. Αυτό είναι το επίπεδο κεφαλαίου-στόχου που οι εταιρείες πρέπει να έχουν για να αντιμετωπίζουν τους κινδύνους. Αυτό το ποσό υπολογίζεται υποθέτοντας ότι η ασφαλιστική εταιρεία θα μπορεί να έρθει αντιμέτωπη με μια οικονομική καταστροφή στα 200 χρόνια και να καλύψει τις υποχρεώσεις της έναντι των αντισυμβαλλομένων. Το SCR μπορεί να υπολογιστεί είτε με την τυπική διαδικασία που έχει καθοριστεί επίσημα στη Φερεγγυότητα II είτε από μια εσωτερική διαδικασία που έχει λάβει προηγουμένως έγκριση από τις εποπτικές αρχές.

Η προσέγγιση του Πυλώνα I βασίζεται στον ισολογισμό. Συσχετίζει την MCR και την SCR με άλλες ποσότητες, όπως περιουσιακά στοιχεία και υποχρεώσεις.

Στο παρακάτω σχήμα, μπορεί κανείς να παρατηρήσει τις διαφορές κεφαλαιακών απαιτήσεων μεταξύ Solvency I και Solvency II.



Εικόνα 1: Σύγκριση Solvency I με Solvency II

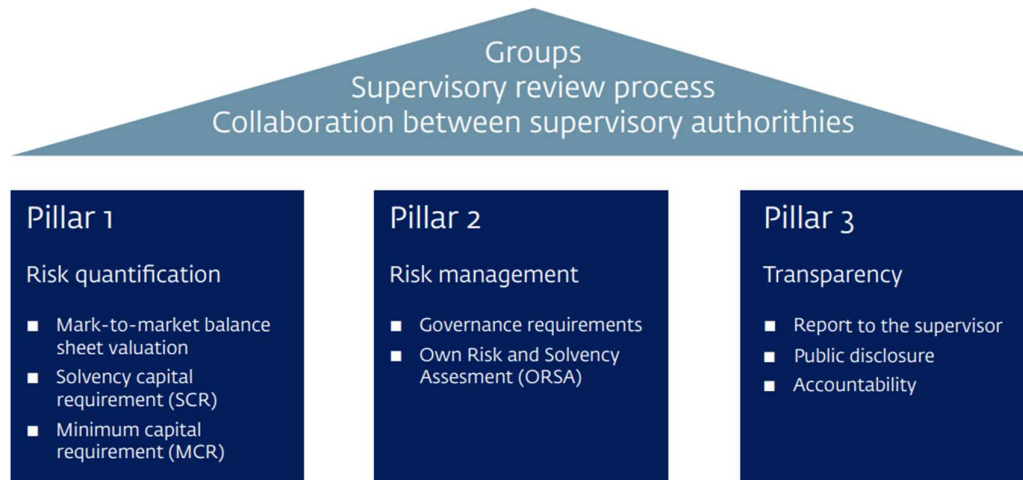
Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από το παραπάνω σχήμα, τα περιουσιακά στοιχεία αποτιμώνται πλέον στην αγοραία αξία τους αντί της λογιστικής τους αξίας (όπως στο παρελθόν σύμφωνα με τις οδηγίες του Solvency I).

- Ο Πυλώνας 2 εστιάζει στη διαδικασία ποιοτικής αξιολόγησης. Οι ασφαλιστικές εταιρείες πρέπει να αναπτύξουν συγκεκριμένα συστήματα διαχείρισης κινδύνου τα οποία θα αποτελούν μια εσωτερική διαδικασία αξιολόγησης που ονομάζεται Own Risk and Solvency Assessment (ORSA).

Η ORSA πρέπει να είναι σε θέση να αποδείξει ότι τα συστήματα είναι αποτελεσματικά στην εκτίμηση του κινδύνου και στον υπολογισμό των απαραίτητων αποθεματικών, μαζί με τη διατήρησή τους. Η εκτίμηση επικινδυνότητας πρέπει να πραγματοποιείται μέσα σε ένα πλαίσιο σωστής πρόβλεψης των μελλοντικών ζημιών. Σε περίπτωση που η ORSA που παρουσιαστεί δεν αφήσει ικανοποιημένες τις αρχές, το Solvency II τους δίνει τη δυνατότητα να αμφισβητήσουν το σύστημα της εταιρείας και ως συνέπεια τη γενικότερη αξιοπιστία της.

- Ο Πυλώνας 3 εστιάζει στις απαιτήσεις γνωστοποίησης και διαφάνειας. Οι ασφαλιστικές εταιρείες υποχρεούνται να δημοσιεύσουν μια έκθεση (ουσιαστικά αναλύοντας τους Πυλώνες 1 και 2) που να αντικατοπτρίζει το επίπεδο της φερεγγυότητάς τους. Αυτή η έκθεση θα πρέπει να περιλαμβάνει ποσοτικές πληροφορίες σχετικά με την οικονομική τους κατάσταση καθώς και περιγραφή της εκτίμησης κινδύνων με στόχο την απόλυτη διαφάνεια. Στη συνέχεια, οι εποπτικές αρχές θα ελέγξουν για τυχόν απόκλιση από τις οδηγίες του κανονισμού.

Το περιεχόμενο των τριών πυλώνων του Solvency II μπορεί να συνοψιστεί στο ακόλουθο διάγραμμα.

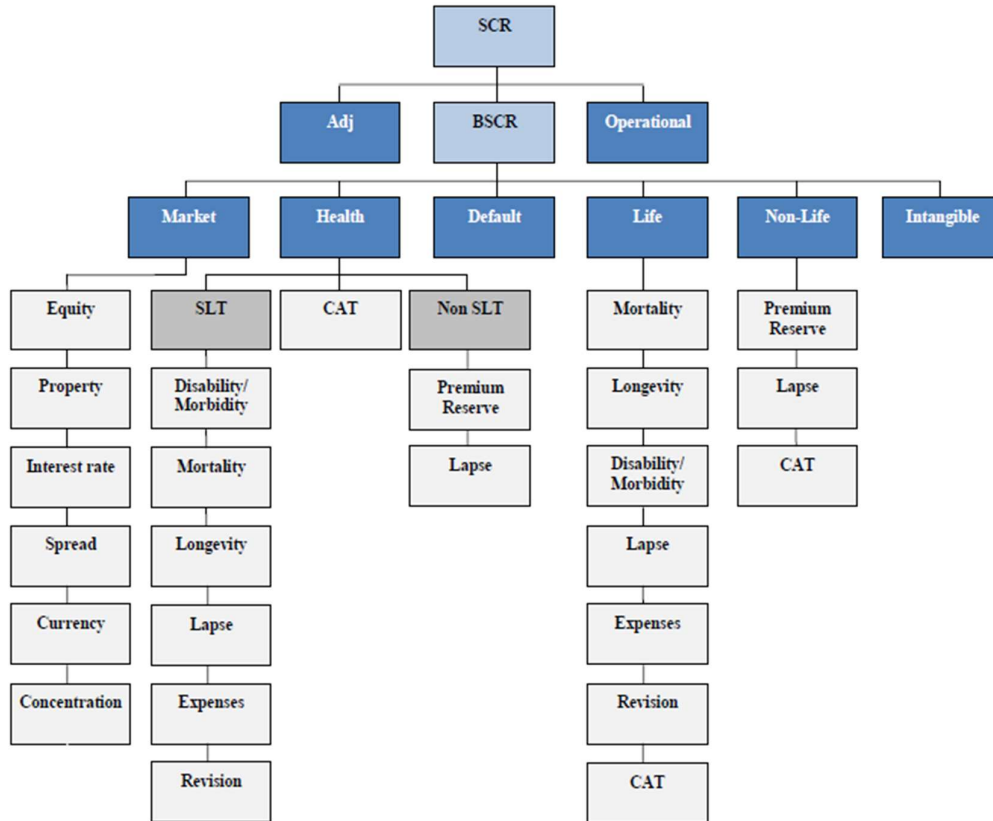


Εικόνα 2: Οι τρεις Πυλώνες του Solvency II

Πιο συγκεκριμένα, το SCR αντιπροσωπεύει πραγματικά το Value at Risk υπολογισμένο σε διάστημα εμπιστοσύνης 99,5% σε χρονικό ορίζοντα ενός έτους. Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, μπορεί να υπολογιστεί είτε με έναν τυποποιημένο τύπο είτε με εσωτερικές διαδικασίες.

Σύμφωνα με τον τυποποιημένο τύπο, μπορεί να προσδιοριστεί χρησιμοποιώντας απλές συγκεκριμένες παραμέτρους οι οποίες αργότερα θα αθροιστούν μέσω ειδικών πινάκων συσχέτισης. Αντί των προκαθορισμένων παραμέτρων, οι εταιρείες θα μπορούσαν εναλλακτικά να χρησιμοποιούν ειδικές παραμέτρους γνωστές ως «undertaking specific parameters» (UPS).

Η δομή του SCR (χρησιμοποιώντας τον τυπικό τύπο) μπορεί να απεικονιστεί στο παρακάτω διάγραμμα:



Εικόνα 3: Υπολογισμός του SCR

Το Βασικό SCR (BSCR) καθορίζεται λαμβάνοντας υπόψη παράγοντες διαφορετικού κινδύνου. Αυτοί οι κίνδυνοι είναι:

- Προκαθορισμένος κίνδυνος: Αναφέρεται στον κίνδυνο αντισυμβαλλομένου, ο οποίος εκφράζει την πιθανότητα ένα από τα μέλη που εμπλέκονται στη συναλλαγή να αθετήσει τη σύμβαση.

- Κίνδυνος αγοράς: Συνδέεται με την αστάθεια των τιμών αγοράς των περιουσιακών στοιχείων και περιλαμβάνει την έκθεση σε κίνδυνο λόγω μεταβολών στα επιτόκια, στα ίδια κεφάλαια, στις τιμές των ακινήτων και στις συναλλαγματικές ισοτιμίες. Αποτελείται από τις ακόλουθες έξι υποκατηγορίες κινδύνου: τον κίνδυνο ιδίων κεφαλαίων, τον κίνδυνο ακίνητης περιουσίας, τον κίνδυνο επιτοκίων, τον κίνδυνο των spread, τον συναλλαγματικό κίνδυνο και τον κίνδυνο συγκέντρωσης.
- Ασφαλιστικός κίνδυνος: Συνδέεται κυρίως με τους υπολογισμούς των ασφαλιστρών, τις απαιτήσεις αποθεματικών και την αξιολόγηση της συνολικής ικανότητας της επιχείρησης να διατηρεί τις ασφαλιστικές πολιτικές της. Θα πρέπει να γίνουν ξεχωριστοί υπολογισμοί για τον κίνδυνο στις ασφάλειες ζωής, τις ασφάλειες υγείας και τις γενικές ασφαλίσσεις.
- Άλλα περιουσιακά στοιχεία

Η πρόβλεψη του λειτουργικού κινδύνου προστίθεται στη συνέχεια στο Βασικό SCR. Ο λειτουργικός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος δημιουργίας ζημιών λόγω προβλημάτων στα λειτουργικά συστήματα της εταιρείας, προβλημάτων προσωπικού, απάτης ή προβλημάτων στη διαδικασία εσωτερικής διαχείρισης.

Τέλος, για να ληφθεί το συνολικό SCR, πρέπει να προβλεφθεί η ικανότητα της εταιρείας να απορροφά τις απώλειες από προβλέψεις ή αναβαλλόμενους

φόρους. Αυτή η πρόβλεψη μαζί με την πρόβλεψη του λειτουργικού κινδύνου και το Βασικό SCR οδηγούν στο συνολικό SCR.

Από την άλλη πλευρά, το MCR έχει έναν γραμμικό τύπο που βασίζεται στο Value at Risk υπολογισμένο σε διάστημα εμπιστοσύνης 85% σε χρονικό ορίζοντα ενός έτους. Το ελάχιστο MCR είναι 25% του SCR και το μέγιστο MCR είναι 45% του SCR.

Τέλος, υπάρχουν ορισμένες κατηγορίες κεφαλαίου με βάση την ποιότητά τους. Ο πρώτος διαχωρισμός των «ιδίων κεφαλαίων» είναι σε βασικά ίδια κεφάλαια και βοηθητικά ίδια κεφάλαια. Στη συνέχεια, χωρίζονται σε τρεις κατηγορίες με βάση την απορρόφηση των ζημιών και τη «μονιμότητά» τους:

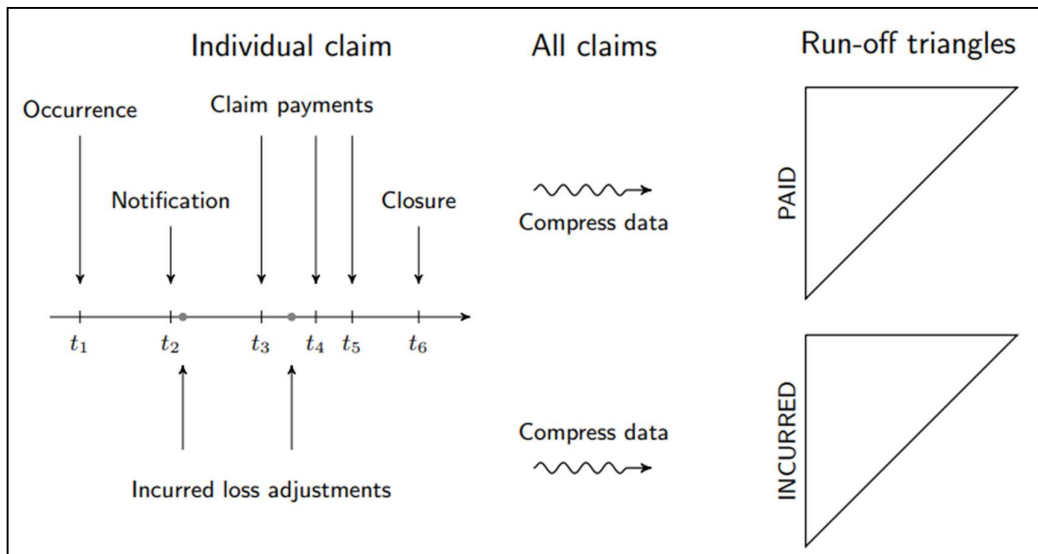
- Κατηγορία 1: το υψηλότερο κεφάλαιο ποιοτικά. Αυτό το κεφάλαιο θεωρείται το καλύτερο στην απορρόφηση ζημιών και μία από τις πιο μόνιμες μορφές κεφαλαίου.
- Κατηγορία 2: κεφάλαιο μεσαίας ποιότητας
- Κατηγορία 3: το χαμηλότερο κεφάλαιο ποιοτικά

Το Solvency II έχει θέσει συγκεκριμένο περιορισμό στην ποιότητα του κεφαλαίου που μπορούν να διατηρούν οι ασφαλιστικές εταιρείες για να καλύψουν τα MCR και SCR.

Πιο συγκεκριμένα, το SCR πρέπει να καλύπτεται από τουλάχιστον 50% του κεφαλαίου Κατηγορίας 1 και δεν πρέπει να χρησιμοποιεί περισσότερο από το 15% του κεφαλαίου Κατηγορίας 3. Ομοίως, το MCR θα πρέπει να καλύπτεται από τουλάχιστον 80% της Κατηγορίας 1 και η χρήση κεφαλαίου Κατηγορίας 3 δεν είναι αποδεκτή.

3. Μέθοδοι αποθεματοποίησης

Η πλειοψηφία των μεθόδων αποθεματοποίησης ζημιών τείνει να μαζεύει τα δεδομένα για την εξέλιξη των απαιτήσεων και να τα αναπαριστά σε «τρίγωνα ανάπτυξης» (run-off triangles), όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Εικόνα 4: Χρονική σειρά της εξέλιξης μιας απαίτησης

Για την εκτίμηση των αποθεμάτων, μπορούν να εφαρμοστούν διάφορες κατηγορίες μεθόδων όπως:

- χρήση μόνο των πληρωμένων απαιτήσεων σε ένα τρίγωνο ανάπτυξης ή
- χρήση των υφιστάμενων απαιτήσεων (απαιτήσεις που έχουν δημιουργηθεί) σε ένα τρίγωνο ανάπτυξης ή

- χρήση του μέσου όρου των πληρωμένων απαιτήσεων σε ένα τρίγωνο ανάπτυξης ή
- χρήση του μέσου όρου των υφιστάμενων απαιτήσεων σε ένα τρίγωνο ανάπτυξης.

Οι αναλογιστές, κατά τον υπολογισμό των αποθεμάτων, συνήθως αναλύουν τις ζημιές και τις διακρίνουν σε δύο περιπτώσεις:

- Incurred But Not Reported (IBNR): απαιτήσεις που έχουν δημιουργηθεί αλλά δεν έχει γίνει αναφορά – καταγγελία και
- Reported But Not Settled (RBNS): απαιτήσεις που έχουν αναφερθεί – καταγγελθεί αλλά δεν έχουν διευθετηθεί

Οι τελευταίες καλούνται επίσης Incurred But Not Enough Reported (IBNER), δηλαδή απαιτήσεις που έχουν πραγματοποιηθεί αλλά δεν έχουν αναφερθεί αρκετά (IBNER).

Με την πάροδο των ετών, έχουν προκύψει διάφορες μεθοδολογίες σχετικά με την εκτίμηση των απαιτήσεων, τόσο ντετερμινιστικές (κλασικές) όσο και στοχαστικές, οι οποίες θα παρουσιαστούν στη συνέχεια.

3.1 Κλασικές μέθοδοι αποθεματοποίησης

Ένα από τα κύρια πλεονεκτήματα των κλασικών μεθόδων είναι ότι οδηγούν σε ένα αποτέλεσμα που είναι εύκολο να κατανοηθεί και, στη συνέχεια, να παρουσιαστεί στη διοίκηση.

3.1.1 Chain Ladder

Η πιο δημοφιλής τεχνική αποθεματοποίησης ζημιών είναι η μέθοδος Chain Ladder. Στόχος της είναι να υπολογίσει τις απαιτήσεις χρησιμοποιώντας τρίγωνα με τις ζημιές που έχουν προκύψει ή εξοφληθεί. Ο βασικός λόγος της δημοτικότητάς της είναι η ευκολία στη χρήση της και το γεγονός ότι θυμίζει περισσότερο υπολογιστική διαδικασία παρά μοντέλο πρόβλεψης με έντονο θεωρητικό υπόβαθρο.

Το γεγονός ότι λειτουργεί περισσότερο ως αλγόριθμος παρά σαν μοντέλο κάνει τη μέθοδο να λειτουργεί σχεδόν χωρίς καμία υπόθεση. Ωστόσο, υπάρχουν ορισμένα σημεία που θα πρέπει να επισημανθούν.

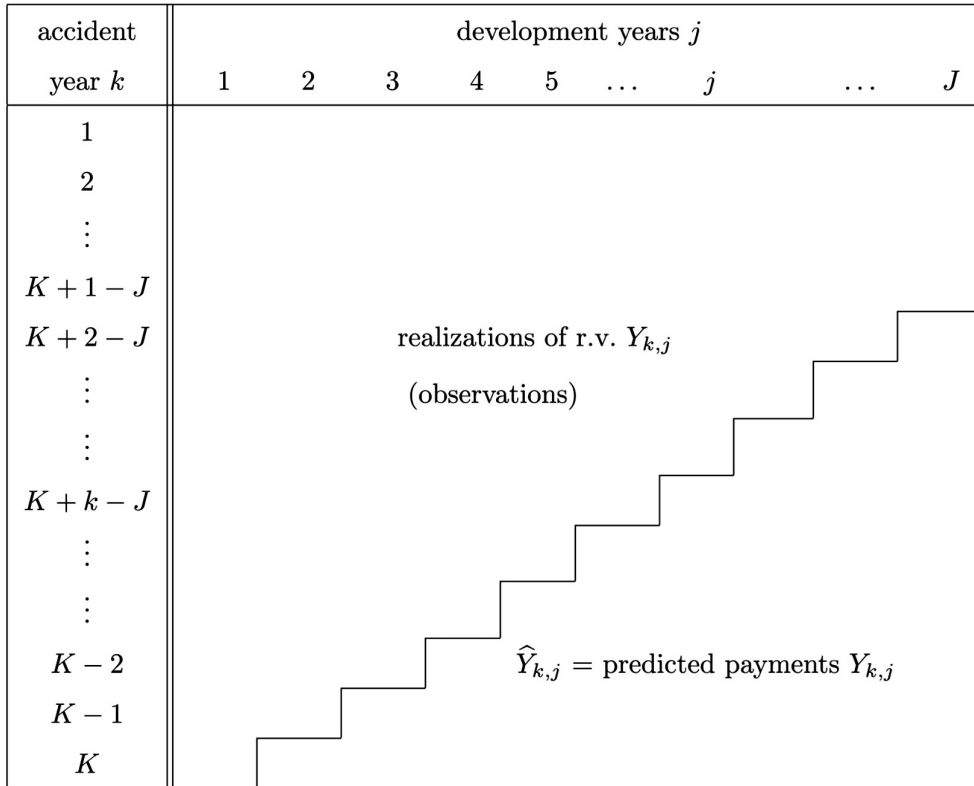
Πρώτα απ' όλα, η μέθοδος Chain Ladder προϋποθέτει ότι «η ιστορία επαναλαμβάνεται». Με άλλα λόγια, υποθέτει ότι τα μοτίβα των απαιτήσεων που παρατηρήθηκαν τα προηγούμενα χρόνια θα παρατηρηθούν ξανά στο μέλλον.

Παρ' όλα αυτά, για να γίνει αυτή η υπόθεση πρέπει να είμαστε σίγουροι για την ακρίβεια των δεδομένων και ότι αυτά δεν περιέχουν λάθη.

Επιπλέον, συνήθως γίνεται η υπόθεση ότι η εκτίμηση θα είναι πιο ακριβής εάν χρησιμοποιηθούν όλα τα δεδομένα. Για παράδειγμα, προτιμάται η χρήση όλων των ετών εμφάνισης απαιτήσεων που δίνονται, για τον υπολογισμό των απαιτήσεων, παρά η χρήση μόνο του τελευταίου έτους εμφάνισης.

Ωστόσο, αυτή η τελευταία υπόθεση δεν πρέπει να γίνει χωρίς να προηγηθεί ο κατάλληλος έλεγχος. Εάν προέκυψε μια σημαντική αλλαγή στο νομοθετικό πλαίσιο του ασφαλιστικού τομέα ή μια αλλαγή στον τρόπο διοίκησης της εταιρείας τα τελευταία χρόνια, θα πρέπει να γίνει προσεκτική επιλογή των ετών που θα συμμετέχουν στον υπολογισμό των απαιτήσεων, καθώς ένα υποσύνολο πιθανόν να έδινε μια εκτίμηση πιο κατάλληλη από την εκτίμηση με χρήση όλων των ετών.

Όσον αφορά την αναπαράσταση των δεδομένων, οι Buchwalder, Böhlmann, Merz και Wóthrich (2006) χρησιμοποιούν ένα ορθογώνιο $K \times J$ με τις παρατηρήσεις των απαιτήσεων Y_{kj} όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 5: Δομή του τριγώνου ανάπτυξης

Σε αυτό το σχήμα:

- οι σειρές αντιπροσωπεύουν τις περιόδους ατυχημάτων (accident periods), για τις οποίες χρησιμοποιείται ο δείκτης $k = 1, 2, \dots, K$
- οι στήλες αντιπροσωπεύουν τις περιόδους ανάπτυξης (development periods), για τις οποίες χρησιμοποιείται ο δείκτης $j = 1, 2, \dots, J \leq K$

Συνήθως, μέσα στο ορθογώνιο μας δίνεται ένα τραπέζιο ανάπτυξης των παρελθόντων παρατηρήσεων:

$$D_K = \{Y_{kj} \mid 1 \leq k \leq K \text{ and } 1 \leq j \leq \min(J, K - k + 1)\} \quad (3.1.1)$$

και υπάρχει ανάγκη για εκτίμηση των μελλοντικών παρατηρήσεων (που αποτελούν το συμπληρωματικό σύνολο):

$$\begin{aligned} D_K^c &= \{Y_{kj} \mid 1 \leq k \leq K \text{ and } \min(J, K - k + 1) < j \leq J\} \\ &= \{Y_{kj} \mid K - J + 1 < k \leq K \text{ and } K - k + 1 < j \leq J\} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

Επίσης, κάθε διαγώνιος περιέχει τις τελικές απαιτήσεις για μια συγκεκριμένη περίοδο d , όπου $d = k + j - 1$. Έτσι, οι διαγώνιες ονομάζονται και «experience periods». Επίσης, συνήθως ισχύει ότι $J = K$ και, συνεπώς, το τραπέζιο είναι ένα τρίγωνο.

Όσον αφορά τη φύση των παρατηρήσεων, τα δεδομένα Y_{kj} θα μπορούσαν να είναι είτε εξοφλημένες απαιτήσεις είτε υφιστάμενες απαιτήσεις. Σε κάθε περίπτωση η δομή της μεθόδου chain ladder παραμένει ίδια και η φύση των δεδομένων Y_{kj} δεν απαιτεί κάποια περαιτέρω διευκρίνιση.

Ενώ τα δεδομένα Y_{kj} αντιπροσωπεύουν τις μεμονωμένες απαιτήσεις, χρησιμοποιούμε το X_{kj} για να αντιπροσωπεύσουμε τις συσσωρευμένες απαιτήσεις.

Έτσι:

$$X_{kj} = \sum_{i=1}^j Y_{ki} \quad (3.1.3)$$

Επιπλέον, το συνολικό ποσό των ζημιών σε μια συγκεκριμένη περίοδο ατυχήματος k ορίζεται ως:

$$R_k = \sum_{j=K-k+2}^J Y_{kj} = X_{kJ} - X_{k,K-k+1} \quad (3.1.4)$$

Έτσι, το πρόβλημα που αντιμετωπίζει η κάθε ασφαλιστική εταιρεία σε κάθε χρονική περίοδο είναι η σωστή εκτίμηση των αποθεμάτων R_k σύμφωνα με τις αντίστοιχες απαιτήσεις.

Θα ακολουθήσει ένα αριθμητικό παράδειγμα για να παρουσιαστούν οπτικά τα δεδομένα και να γίνει η διαδικασία πιο κατανοητή.

Ο παρακάτω πίνακας παρουσιάζει ορισμένες απαιτήσεις στην ασφάλιση αστικής ευθύνης.

Πίνακας 1: Παράδειγμα ενός τριγώνου απαιτήσεων

Accident Year	Incremental Losses in Development Year																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0	5.200	5.400	6.700	3.833	5.992	2.700	779	340	952	1.487	584	100	941	351	1.285	-2	750	1
2	700	5.300	11.100	4.457	6.423	3.000	3.256	4.559	4.756	3.769	1.487	2.074	615	1.309	-159	49	0	4	
3	2.000	5.700	5.954	12.680	12.400	9.758	4.193	4.992	3.987	982	1.558	2.550	1.739	1.077	848	-201	245		
4	2.500	6.958	16.200	13.343	11.044	13.061	8.615	7.497	6.021	4.013	1.458	1.849	1.256	2.568	1.598	71			
5	2.688	9.270	13.283	13.321	15.274	16.771	12.719	8.920	8.538	3.377	3.630	3.751	2.483	2.661	382				
6	2.560	6.888	11.589	17.417	11.421	17.521	9.554	4.992	5.592	3.391	5.113	919	1.164	1.942					
7	2.795	7.425	17.032	27.516	26.302	19.353	14.936	3.258	3.110	4.383	5.958	-380	113						
8	3.778	7.294	17.031	23.257	22.004	22.039	13.043	9.536	3.360	3.635	7.345	4.216							
9	5.083	10.154	20.251	30.229	27.206	13.789	9.572	16.517	13.836	2.868	1.530								
10	3.996	8.768	15.877	25.010	22.075	14.418	19.212	5.876	5.234	2.444									
11	5.451	12.057	22.327	27.915	21.260	23.122	10.883	11.494	8.446										
12	5.146	12.750	15.139	16.052	19.706	15.361	23.331	7.111											
13	8.264	11.417	9.479	15.705	18.850	17.116	12.914												
14	8.569	15.291	21.909	23.935	31.685	20.839													
15	7.088	14.743	11.423	22.050	19.828														
16	9.580	16.954	19.266	24.965															
17	9.172	23.223	15.963																
18	6.393	15.808																	
19	6.423																		

Το παραπάνω τρίγωνο ονομάζεται «τρίγωνο ζημιών» και περιέχει τις παρατηρήσεις των απαιτήσεων Y_{kj} .

Ακολουθεί μια περιγραφή του αλγορίθμου Chain ladder. Αρχικά, θα ορίσουμε τους παράγοντες ανάπτυξης (development factors) χρησιμοποιώντας τις συσσωρευμένες απαιτήσεις X_{kj} :

$$\hat{f}_{kj} = \frac{X_{k,j+1}}{X_{kj}}, k = 1, 2, \dots, K-1; j = 1, 2, \dots, \min(J-1, K-k) \quad (3.1.5)$$

και τους σταθμισμένους μέσους παράγοντες ανάπτυξης:

$$\hat{f}_j = \sum_{k=1}^{K-j} w_{kj} \hat{f}_{kj}, j = 1, 2, \dots, J-1 \quad (3.1.6)$$

όπου το w_{kj} αντιπροσωπεύει ένα σύνολο βαρών με $\sum_{k=1}^{K-j} w_{kj} = 1$ και $w_{kj} \geq 0$ για κάθε (k, j) .

Υποθέτουμε ότι η διαδικασία στάθμισης γίνεται χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο:

$$w_{kj} = \frac{X_{kj}}{\sum_{k=1}^{K-j} X_{kj}} \quad (3.1.7)$$

Επομένως, οι σταθμισμένοι μέσοι παράγοντες ανάπτυξης θα γίνουν:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{k=1}^{K-j} X_{k,j+1}}{\sum_{k=1}^{K-j} X_{kj}} \quad (3.1.8)$$

Έχοντας υπολογίσει τις παραπάνω τιμές, μπορούμε να προχωρήσουμε στην εκτίμηση των μελλοντικών συσσωρευμένων απαιτήσεων X_{kj} που αντιστοιχούν στα $Y_{kj} \in D_K^c$:

$$\hat{X}_{kj} = X_{k,K-k+1} \hat{f}_{K-k+1} \cdots \hat{f}_{j-1} \quad (3.1.9)$$

Έτσι, οι εκτιμήσεις των Y_{kj} θα είναι:

$$\hat{Y}_{kj} = X_{k,K-k+1} \hat{f}_{K-k+1} \cdots \hat{f}_{j-2} (\hat{f}_{j-1} - 1) \quad (3.1.10)$$

Ως αποτέλεσμα, το συνολικό ποσό των ζημιών σε μια συγκεκριμένη περίοδο ατυχήματος k θα είναι:

$$\hat{R}_k = \hat{X}_{kj} - X_{k,K-k+1} = X_{k,K-k+1} (\hat{f}_{K-k+1} \cdots \hat{f}_{j-1} - 1) \quad (3.1.11)$$

και οι εκτιμώμενες συνολικές απαιτήσεις σε όλες τις περιόδους ατυχημάτων θα είναι:

$$\hat{R} = \sum_{k=1}^{K-1} \hat{R}_k \quad (3.1.12)$$

Επιπλέον, μια λεπτομέρεια που είναι σκόπιμο να επισημανθεί είναι η πρόβλεψη για τις απαιτήσεις που προκύπτουν μετά τις εκτιμήσεις του τελευταίου έτους

ανάπτυξης. Οι εκτιμήσεις των συσσωρευμένων απαιτήσεων του έτους ανάπτυξης J με τη μέθοδο chain ladder είναι:

$$\hat{X}_{kJ} = X_{k,K-k+1} \hat{f}_{K-k+1} \cdots \hat{f}_{J-1} \quad (3.1.13)$$

Ωστόσο, η εξέλιξη των ζημιών δεν θα πρέπει απαραίτητα να τελειώνει στο έτος J . Έτσι, οι αναλογιστές μερικές φορές χρησιμοποιούν έναν παράγοντα ουράς (tail factor) $\hat{f}_{ult} > 1$ στην προσπάθειά τους να εκτιμήσουν τις συνολικές απώλειες $X_{k,ult}$ του έτους ατυχήματος k .

Έτσι, οι τελικές απώλειες δίνονται πολλαπλασιάζοντας τις αθροιστικές απώλειες του έτους ανάπτυξης J με τον παράγοντα ουράς \hat{f}_{ult} , όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\hat{X}_{k,ult} = \hat{X}_{kJ} \cdot \hat{f}_{ult} \quad (3.1.14)$$

Σύμφωνα με τον Mack (1999), μια πιθανή προσέγγιση για την εκτίμηση του παράγοντα ουράς θα ήταν η εξαγωγή του παράγοντα $\ln(\hat{f}_t - 1)$ από μια ευθεία $a \cdot t + b, a < 0$, σε συνδυασμό με τη σχέση:

$$\hat{f}_{ult} = \prod_{t=J}^{\infty} \hat{f}_t \quad (3.1.15)$$

Ωστόσο, ο τελικός παράγοντας ουράς θα πρέπει πάντα να αναθεωρείται και να επιλέγεται σύμφωνα με την προσωπική κρίση του αναλογιστή.

Συνοψίζοντας, το κύριο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι είναι πολύ εύκολη στην εφαρμογή και πολύ απλή στην κατανόηση. Αυτά τα στοιχεία αποτελούν τους λόγους για τη δημοτικότητά της.

Όμως, υπάρχουν και ορισμένα μειονεκτήματα. Αρχικά, δεν παρέχει πληροφορίες σχετικά με το σφάλμα της πρόβλεψης. Επιπρόσθετα, τα αποτελέσματά της δεν είναι αξιόπιστα όταν υπάρχουν διαφορετικοί παράγοντες που επηρεάζουν τις απαιτήσεις από περίοδο σε περίοδο (π.χ. πληθωρισμός).

Στη συνέχεια, θα εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο chain ladder στο αριθμητικό μας παράδειγμα. Πρώτα απ' όλα, ο πίνακας που ακολουθεί αντιπροσωπεύει το « τρίγωνο συσσωρευμένων ζημιών » και περιέχει τις παρατηρήσεις απαιτήσεων X_{kj} :

Πίνακας 2: Παράδειγμα ενός τριγώνου συσσωρευμένων απαιτήσεων

Accident Year	Cumulative Losses in Development Year																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0	5.200	10.600	17.300	21.133	27.125	29.825	30.604	30.944	31.896	33.383	33.967	34.067	35.008	35.359	36.644	36.642	37.392	37.393
2	700	6.000	17.100	21.557	27.980	30.980	34.236	38.795	43.551	47.320	48.807	50.881	51.496	52.805	52.646	52.695	52.695	52.699	
3	2.000	7.700	13.654	26.334	38.734	48.492	52.685	57.677	61.664	62.646	64.204	66.754	68.493	69.570	70.418	70.217	70.462		
4	2.500	9.458	25.658	39.001	50.045	63.106	71.721	79.218	85.239	89.252	90.710	92.559	93.815	96.383	97.981	98.052			
5	2.688	11.958	25.241	38.562	53.836	70.607	83.326	92.246	100.784	104.161	107.791	111.542	114.025	116.686	117.068				
6	2.560	9.448	21.037	38.454	49.875	67.396	76.950	81.942	87.534	90.925	96.038	96.957	98.121	100.063					
7	2.795	10.220	27.252	54.768	81.070	100.423	115.359	118.617	121.727	126.110	132.068	131.688	131.801						
8	3.778	11.072	28.103	51.360	73.364	95.403	108.446	117.982	121.342	124.977	132.322	136.538							
9	5.083	15.237	35.488	65.717	92.923	106.712	116.284	132.801	146.637	149.505	151.035								
10	3.996	12.764	28.641	53.651	75.726	90.144	109.356	115.232	120.466	122.910									
11	5.451	17.508	39.835	67.750	89.010	112.132	123.015	134.509	142.955										
12	5.146	17.896	33.035	49.087	68.793	84.154	107.485	114.596											
13	8.264	19.681	29.160	44.865	63.715	80.831	93.745												
14	8.569	23.860	45.769	69.704	101.389	122.228													
15	7.088	21.831	33.254	55.304	75.132														
16	9.580	26.534	45.800	70.765															
17	9.172	32.395	48.358																
18	6.393	22.201																	
19	6.423																		

Στη συνέχεια, θα υπολογίσουμε τους σταθμισμένους μέσους παράγοντες ανάπτυξης:

Πίνακας 3: Υπολογισμός των παραγόντων ανάπτυξης μεταξύ των περιόδων

Development Year	Average development factors	Development Year	Average development factors
1 - 2	3,2760	10 - 11	1,0358
2 - 3	1,9631	11 - 12	1,0221
3 - 4	1,6626	12 - 13	1,0128
4 - 5	1,3884	13 - 14	1,0228
5 - 6	1,2390	14 - 15	1,0082
6 - 7	1,1483	15 - 16	1,0047
7 - 8	1,0831	16 - 17	1,0015
8 - 9	1,0632	17 - 18	1,0084
9 - 10	1,0324	18 - 19	1,00003

Έχοντας υπολογίσει τους παράγοντες ανάπτυξης, μπορούμε τώρα να εκτιμήσουμε τις μελλοντικές συσσωρευμένες απαιτήσεις. Οι εκτιμώμενες τιμές \hat{X}_{kj} παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα στην γκριζα περιοχή

Πίνακας 4: Προβλέψεις των μελλοντικών απαιτήσεων με τη μέθοδο CL

Accident Year	Forecast Cumulative Losses in Development Year																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0	5.200	10.600	17.300	21.133	27.125	29.825	30.604	30.944	31.896	33.383	33.967	34.067	35.008	35.359	36.644	36.642	37.392	37.393
2	700	6.000	17.100	21.557	27.980	30.980	34.236	38.795	43.551	47.320	48.807	50.881	51.496	52.805	52.646	52.695	52.695	52.699	52.700
3	2.000	7.700	13.654	26.334	38.734	48.492	52.685	57.677	61.664	62.646	64.204	66.754	68.493	69.570	70.418	70.217	70.462	71.057	71.059
4	2.500	9.458	25.658	39.001	50.045	63.106	71.721	79.218	85.239	89.252	90.710	92.559	93.815	96.383	97.981	98.052	98.201	99.030	99.033
5	2.688	11.958	25.241	38.562	53.836	70.607	83.326	92.246	100.784	104.161	107.791	111.542	114.025	116.686	117.068	117.618	117.797	118.791	118.794
6	2.560	9.448	21.037	38.454	49.875	67.396	76.950	81.942	87.534	90.925	96.038	96.957	98.121	100.063	100.879	101.352	101.507	102.364	102.366
7	2.795	10.220	27.252	54.768	81.070	100.423	115.359	118.617	121.727	126.110	132.068	131.688	131.801	134.809	135.908	136.546	136.754	137.908	137.912
8	3.778	11.072	28.103	51.360	73.364	95.403	108.446	117.982	121.342	124.977	132.322	136.538	138.283	141.439	142.592	143.262	143.480	144.691	144.695
9	5.083	15.237	35.488	65.717	92.923	106.712	116.284	132.801	146.637	149.505	151.035	154.368	156.341	159.909	161.212	161.969	162.216	163.585	163.590
10	3.996	12.764	28.641	53.651	75.726	90.144	109.356	115.232	120.466	122.910	127.305	130.114	131.778	134.785	135.884	136.522	136.730	137.884	137.887
11	5.451	17.508	39.835	67.750	89.010	112.132	123.015	134.509	142.955	147.588	152.866	156.239	158.236	161.847	163.167	163.933	164.183	165.568	165.573
12	5.146	17.896	33.035	49.087	68.793	84.154	107.485	114.596	121.844	125.793	130.291	133.166	134.868	137.946	139.070	139.723	139.936	141.117	141.121
13	8.264	19.681	29.160	44.865	63.715	80.831	93.745	101.540	107.961	111.460	115.446	117.994	119.502	122.229	123.225	123.804	123.993	125.039	125.042
14	8.569	23.860	45.769	69.704	101.389	122.228	140.350	152.019	161.634	166.872	172.840	176.653	178.912	182.995	184.486	185.353	185.635	187.202	187.207
15	7.088	21.831	33.254	55.304	75.132	93.089	106.891	115.778	123.100	127.090	131.635	134.539	136.259	139.369	140.505	141.165	141.380	142.573	142.577
16	9.580	26.534	45.800	70.765	98.249	121.731	139.779	151.401	160.977	166.194	172.137	175.935	178.184	182.251	183.736	184.599	184.880	186.441	186.446
17	9.172	32.395	48.358	80.400	111.627	138.306	158.812	172.016	182.895	188.823	195.575	199.891	202.446	207.066	208.754	209.734	210.054	211.826	211.832
18	6.393	22.201	43.584	72.462	100.606	124.651	143.132	155.033	164.838	170.180	176.266	180.155	182.458	186.622	188.143	189.027	189.315	190.913	190.918
19	6.423	21.042	41.308	68.679	95.354	118.144	135.660	146.939	156.233	161.296	167.064	170.750	172.933	176.880	178.322	179.159	179.432	180.946	180.951

Χρησιμοποιώντας τις εκτιμώμενες μελλοντικές συσσωρευμένες απαιτήσεις, μπορούμε εύκολα πλέον να εξαγάγουμε τις εκτιμώμενες απώλειες που παραμένουν σε εκκρεμότητα αφαιρώντας από την τελευταία στήλη τις παρατηρήσεις της 19ης experience period (τα στοιχεία της διαγωνίου που αντιστοιχούν στην περίοδο 19).

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα:

Πίνακας 5: Εκτιμώμενες ζημιές με τη μέθοδο CL

Estimated Accident Year Outstanding Claims		Estimated Accident Year Outstanding Claims	
1	0	11	22.618
2	1	12	26.525
3	597	13	31.297
4	981	14	64.979
5	1.726	15	67.445
6	2.303	16	115.681
7	6.111	17	163.474
8	8.157	18	168.717
9	12.555	19	174.528
10	14.977	Total	882.671

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί, οι εκτιμώμενες απαιτήσεις αυξάνονται με την πάροδο των ετών. Το γεγονός αυτό είναι εύλογο, δεδομένου ότι οι αναμενόμενες απαιτήσεις για κάθε επόμενο έτος είναι υψηλότερες από τις εξοφλημένες (ή τις υφιστάμενες) μέχρι σήμερα.

Έτσι, η εφαρμογή του βασικού αλγόριθμου της Chain ladder στο αριθμητικό μας παράδειγμα υπολογίζει τα αποθεματικά ίσα με 882.671 . Αυτό το ποσό αντιπροσωπεύει τα απαραίτητα αποθεματικά που η ασφαλιστική εταιρεία θα έπρεπε να έχει συγκεντρώσει προκειμένου να εκπληρώσει τις υποχρεώσεις έναντι των πελατών της.

Ωστόσο, όπως θα πρέπει να επισημανθεί, το ποσό αυτό δεν πρέπει να διατηρηθεί ως αποθεματικό ξαφνικά, αλλά σταδιακά με τα χρόνια. Έτσι, είναι σημαντικό να τηρούνται τα αποθέματα που απαιτούνται για κάθε έτος ξεχωριστά, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 6: Εκτιμώμενες χρηματοροές

		Forecast Cumulative Losses in Development Year																		
Accident Year		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1																				
2																				1
3																		595		2
4																	149	829		3
5																550	179	994		3
6															816	474	154	857		3
7														3.008	1.099	638	208	1.154		4
8													1.745	3.156	1.153	670	218	1.211		4
9													3.333	1.973	3.568	1.304	757	247	1.369	4
10												4.395	2.809	1.663	3.007	1.099	638	208	1.154	4
11											4.633	5.278	3.373	1.997	3.611	1.320	766	250	1.386	4
12									7.248	3.949	4.488	2.875	1.702	3.078	1.125	653	213	1.181		4
13								7.795	6.422	3.499	3.986	2.547	1.508	2.727	996	579	189	1.047		3
14							18.122	11.670	9.614	5.239	5.967	3.814	2.258	4.083	1.492	866	282	1.567		5
15					17.957	13.802	8.888	7.322	3.990	4.545	2.905	1.720	3.110	1.136	660	215	1.193		4	
16				27.484	23.482	18.048	11.622	9.575	5.217	5.943	3.798	2.249	4.066	1.486	863	281	1.560		5	
17			32.042	31.226	26.679	20.506	13.205	10.879	5.928	6.752	4.315	2.555	4.620	1.688	980	319	1.773		6	
18		21.383	28.879	28.143	24.045	18.481	11.901	9.805	5.342	6.086	3.889	2.303	4.164	1.521	884	288	1.598		5	
19	14.619	20.266	27.371	26.674	22.790	17.516	11.280	9.293	5.064	5.768	3.686	2.183	3.947	1.442	837	273	1.514		5	
	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	Total	
	165.874	155.494	138.288	110.314	85.100	61.877	44.317	34.046	24.496	19.655	14.087	10.683	7.928	4.209	2.903	1.876	1.520	5	882.671	

Επομένως, έχουμε υπολογίσει τα απαιτούμενα αποθεματικά για κάθε έτος ξεχωριστά. Ωστόσο, είναι αφελές να πιστεύουμε ότι η ασφαλιστική εταιρεία διατηρεί τα αποθεματικά χωρίς να τα επενδύει. Αυτό σχεδόν ποτέ δεν συμβαίνει. Οι ασφαλιστικές εταιρείες μπορούν να επενδύσουν σε διάφορα επενδυτικά προϊόντα όπως ομόλογα, δικαιώματα προαίρεσης, παράγωγα προϊόντα, γερós και άλλα.

Έτσι, ο αναλογιστής θα πρέπει να έχει καλή γνώση του επενδυτικού χαρτοφυλακίου και της στρατηγικής της εταιρείας προκειμένου να χρησιμοποιήσει την κατάλληλη καμπύλη απόδοσης. Χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα επιτόκια, ο αναλογιστής μπορεί να υπολογίσει τους προεξοφλητικούς παράγοντες και, κατά συνέπεια, τα αποθεματικά που απαιτούνται για κάθε έτος. Για λόγους σαφήνειας και απλοποίησης, στο παράδειγμά μας θα χρησιμοποιήσουμε ένα σταθερό μέσο επιτόκιο 1,5%.

Πίνακας 7: Προεξοφλητικοί παράγοντες και αποθεματικά

Year	Reserves before discounting	Discounting factors	Reserves after discounting
20	165.874	0,985	163.423
21	155.494	0,971	150.932
22	138.288	0,956	132.247
23	110.314	0,942	103.936
24	85.100	0,928	78.995
25	61.877	0,915	56.589
26	44.317	0,901	39.931
27	34.046	0,888	30.223
28	24.496	0,875	21.424
29	19.655	0,862	16.936
30	14.087	0,849	11.959
31	10.683	0,836	8.935
32	7.928	0,824	6.532
33	4.209	0,812	3.417
34	2.903	0,800	2.322
35	1.876	0,788	1.479
36	1.520	0,776	1.180
37	5	0,765	4
Total	882.671	-	830.463

Ως εκ τούτου, η εφαρμογή της κλασικής μεθόδου Chain ladder στο αριθμητικό μας παράδειγμα υπολογίζει ότι τα προεξοφλημένα αποθεματικά είναι ίσα με 830.463 αντί για 882.671, δηλαδή εκφράζουν το χρηματικό ποσό που θα χρειαζόταν η εταιρεία να διατηρήσει δεδομένου ότι δεν έχει επενδύσει τα κεφάλαιά της.

3.1.2 Bornhuetter-Ferguson

Η μέθοδος Bornhuetter – Ferguson (BF) δημοσιεύθηκε το 1972 από τους Bornhuetter και Ferguson. Χρησιμοποιείται παγκοσμίως και συνήθως προτιμάται σε νέους τομείς δραστηριοτήτων λόγω της έλλειψης εμπειρίας και γνώσης των ιστορικών δεδομένων.

Η βασική ιδέα της μεθόδου είναι ο υπολογισμός των αποθεματικών ως ποσοστό των τελικών ζημιών που εκτιμήθηκαν προηγουμένως. Οι αναλογίες που χρησιμοποιούνται ευρέως είναι αυτές που προκύπτουν από τους παράγοντες ανάπτυξης που υπολογίστηκαν με τη μέθοδο Chain Ladder, αν και αυτό δεν είναι πάντα απαραίτητο για να λειτουργήσει η μέθοδος.

Αυτή η μέθοδος έχει πολλά πλεονεκτήματα. Πρώτα απ' όλα, η εκτίμηση των αποθεματικών είναι αρκετά εύκολη ως προς τον υπολογισμό της. Επιπλέον, όπως και η μέθοδος Chain ladder, έτσι και η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson μπορεί να χρησιμοποιηθεί τόσο με δεδομένα που έχουν πραγματοποιηθεί όσο και με δεδομένα που έχουν εξοφληθεί.

Όπως φαίνεται, οι διακυμάνσεις που συμβαίνουν τυχαία σε ασταθείς περιόδους δεν διαστρεβλώνουν τις εκτιμώμενες απώλειες σε σημαντικό επίπεδο, ενώ στην ίδια περίπτωση η μέθοδος Chain ladder αποτυγχάνει. Έτσι, είναι πραγματικά χρήσιμη μέθοδος σε περιπτώσεις που υπάρχει ασυμμετρία (όταν παρατηρούνται long-tailed κατανομές).

Από την άλλη πλευρά, δεν είναι πραγματικά αποτελεσματική όταν η κατανομή είναι short-tailed. Επιπλέον, εάν ένας παράγοντας ανάπτυξης είναι μικρότερος από 1, τότε η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson δεν θα είναι αποτελεσματική.

Ενώ η μέθοδος Chain ladder υποστηρίζει ότι οι απαιτήσεις είναι ανάλογες με το ποσό των απαιτήσεων που είναι γνωστό μέχρι σήμερα, η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson υποθέτει ότι οι απαιτήσεις θα αναπτυχθούν σύμφωνα με τις αναμενόμενες απώλειες: γεγονός που δίνει ένα είδος ανεξαρτησίας στη μέθοδο BF.

Για να εκτιμήσουμε τις απώλειες, πρέπει να κάνουμε χρήση εξωτερικών πληροφοριών. Είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τα κέρδη που έχει κατακτήσει (Earned Premiums) η εταιρεία που μελετάμε. Για το λόγο αυτό, η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson θεωρείται από πολλούς ως Μπεϋζιανή μεθοδολογία.

Στην πράξη, για να εφαρμοστεί η μέθοδος Bornhuetter-Ferguson πρέπει να ακολουθηθούν τα ακόλουθα βήματα. Πρώτα απ' όλα, θα πρέπει να υπολογιστεί ο Αναμενόμενος Λόγος Ζημιών (Expected Loss Ratio), εκτός αν δοθεί ως σταθερό ποσοστό εκ των προτέρων.

Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο:

$$(Expected\ Loss\ Ratio)_i = \frac{(Losses)_i}{(Earned\ Premium)_i} \quad (3.1.16)$$

Θα εκτιμήσουμε πρώτα τον λόγο απώλειας για την πρώτη χρονική περίοδο $(Expected Loss Ratio)_1$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την πρώτη εκτίμηση ως σημείο αναφοράς, θα προχωρήσουμε τώρα στην εκτίμηση των Συνολικών Ζημιών (Ultimate Losses):

$$(Expected Ultimate Losses)_i = (Earned Premium)_i \cdot (Expected Loss Ratio)_1 \quad (3.1.17)$$

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τους παράγοντες ανάπτυξης που έχουν ήδη υπολογιστεί στη μέθοδο Chain Ladder. Θα υπολογίσουμε το γινόμενο των παραπάνω παραγόντων ανάπτυξης για κάθε περίοδο, προκειμένου να λάβουμε τους τελικούς παράγοντες ανάπτυξης (f_{ult_i}) που προβάλλουν την ανάπτυξη των απαιτήσεων μέσα στο υπόλοιπο χρονικό διάστημα.

Έτσι, έχουμε:

$$f_{ult_i} = \left(\prod_j f_j \right)_i \quad (3.1.18)$$

όπου j αντιπροσωπεύει την περίοδο ανάπτυξης (development period).

Για παράδειγμα, στο αριθμητικό παράδειγμα που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως στη μέθοδο Chain Ladder, με δεδομένα από ασφάλιση αστικής ευθύνης, θα λάβουμε τον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 8: Από τους παράγοντες ανάπτυξης στους τελικούς παράγοντες ανάπτυξης

Development Year	Development factors	Ultimate development factors
1 - 2	3,2760	28,1723
2 - 3	1,9631	8,5995
3 - 4	1,6626	4,3810
4 - 5	1,3884	2,6347
5 - 6	1,2390	1,8977
6 - 7	1,1483	1,5316
7 - 8	1,0831	1,3339
8 - 9	1,0632	1,2315
9 - 10	1,0324	1,1582
10 - 11	1,0358	1,1219
11 - 12	1,0221	1,0831
12 - 13	1,0128	1,0597
13 - 14	1,0228	1,0464
14 - 15	1,0082	1,0230
15 - 16	1,0047	1,0147
16 - 17	1,0015	1,0100
17 - 18	1,0084	1,0085
18 - 19	1,00003	1,00003

Έχοντας υπολογίσει τις παραπάνω τιμές, μπορούμε πλέον να βρούμε τα εκτιμώμενα αποθεματικά ζημιών χρησιμοποιώντας τον παρακάτω τύπο:

$$(\text{Estimated Loss Reserves})_i = (\text{Estimated Ultimate Losses})_i \cdot \left(1 - \frac{1}{f_{ult_i}}\right) \quad (3.1.19)$$

Έτσι, το σύνολο των αποθεματικών που μια ασφαλιστική εταιρεία θα χρειαστεί εκτιμάται παίρνοντας το άθροισμα των εκτιμώμενων αποθεματικών ζημιών:

$$Total\ Estimated\ Loss\ Reserves = \sum_i (Estimated\ Loss\ Reserves)_i \quad (3.1.20)$$

Για παράδειγμα, θα υποθέσουμε ότι τα ασφάλιστρα που αποκτήθηκαν στο παράδειγμα ασφάλισης αστικής ευθύνης είναι αυτά που παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα (δίπλα στις συσσωρευμένες ζημιές):

Πίνακας 9: Παράδειγμα με δεδομένα τόσο τις συσσωρευμένες ζημιές όσο και τα κερδισμένα ασφάλιστρα

Accident Year	Cumulative Losses	Earned Premiums
1	37.393	25.000
2	52.699	28.000
3	70.462	30.000
4	98.052	32.000
5	117.068	45.000
6	100.063	49.000
7	131.801	51.000
8	136.538	53.000
9	151.035	59.000
10	122.910	62.000
11	142.955	76.000
12	114.596	79.000
13	93.745	92.000
14	122.228	95.000
15	75.132	97.000
16	70.765	102.000
17	48.358	118.000
18	22.201	125.000
19	6.423	140.000

Έτσι, ο Αναμενόμενος Λόγος Ζημιών της πρώτης περιόδου από την εξίσωση (3.1.16) θα είναι:

$$(Expected\ Loss\ Ratio)_1 = \frac{(Losses)_1}{(Earned\ Premium)_1} = \frac{37.393}{25.000} = 1,4957$$

Έχοντας 1,4959 ως αρχική εκτίμηση του λόγου ζημιών, θα εκτιμήσουμε τις αναμενόμενες τελικές απώλειες. Επομένως, θα εκτιμήσουμε τα αποθεματικά ζημιών χρησιμοποιώντας τους τελικούς παράγοντες ανάπτυξης όπως φαίνεται παρακάτω:

Πίνακας 10: Εκτίμηση αποθεματικών με τη μέθοδο BF

Accident Year	Expected Ultimate Losses	$\left(1 - \frac{1}{f_{ulti}}\right)$	Estimated Loss Reserves
1	37.393	0,0000	0
2	41.880	0,00003	1
3	44.872	0,0084	378
4	47.863	0,0099	474
5	67.307	0,0145	975
6	73.290	0,0225	1.648
7	76.282	0,0443	3.383
8	79.273	0,0563	4.466
9	88.247	0,0767	6.771
10	92.735	0,1087	10.076
11	113.675	0,1366	15.527
12	118.162	0,1880	22.212
13	137.606	0,2503	34.445
14	142.093	0,3471	49.319
15	145.085	0,4730	68.631
16	152.563	0,6205	94.658
17	176.495	0,7717	136.208
18	186.965	0,8837	165.224
19	209.401	0,9645	201.968
			816.358

Έτσι, η εφαρμογή της μεθόδου Bornhuetter – Ferguson στο αριθμητικό μας παράδειγμα υπολογίζει τα αποθεματικά ίσα με 816.358 . Το ποσό αυτό αντιπροσωπεύει τα απαραίτητα αποθεματικά που έπρεπε να έχει συγκεντρώσει η ασφαλιστική εταιρεία προκειμένου να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις των πελατών της.

3.1.3 Μέθοδος Διαχωρισμού

Η μέθοδος chain ladder ενσωματώνει τον πληθωρισμό των παρελθοντικών απαιτήσεων στις προβλέψεις της για το μέλλον. Έτσι, δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα μόνο όταν ο ρυθμός πληθωρισμού είναι σταθερός.

Όταν ο ρυθμός πληθωρισμού μεταβάλλεται από περίοδο σε περίοδο, τότε θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια εναλλακτική μέθοδος που θα είναι ικανή να ενσωματώσει τις αλλαγές στον πληθωρισμό κατά τη διάρκεια των ετών.

Η Μέθοδος Διαχωρισμού ή αλλιώς Separation Method αναπτύχθηκε στη δεκαετία του '70 ως λύση στην παραπάνω ανάγκη. Σε αντίθεση με τη μέθοδο chain ladder, αυτή η μέθοδος περιλαμβάνει ξεχωριστή μελέτη για τον πληθωρισμό.

Σύμφωνα με τους Taylor (1977) και Björkwall (2010) μπορούμε να λάβουμε την ακόλουθη εξίσωση για τη δεσμευμένη (conditional) εκτίμηση των μέσων απωλειών ανά απαίτηση, δεδομένου ότι δίνεται ο συνολικός αριθμός των απαιτήσεων:

$$E\left(\frac{C_{ij}}{N_i} \mid N_i\right) = r_j \cdot \lambda_k \quad (3.1.21)$$

όπου το C_{ij} αντιπροσωπεύει τις συσσωρευμένες απαιτήσεις για το έτος ατυχήματος i και το έτος ανάπτυξης j , το N_i αντιπροσωπεύει τον συνολικό αριθμό απαιτήσεων για το έτος ατυχήματος i , το r_j αντιπροσωπεύει το ποσοστό των απαιτήσεων που θα εμφανιστούν στο έτος ανάπτυξης j ($\sum_{j=0}^t r_j = 1$) και το λ_k αντιπροσωπεύει τον παράγοντα του ημερολογιακού έτους (ενσωματώνοντας τον πληθωρισμό).

Η παραπάνω εξίσωση αποτελεί τη βασική υπόθεση αυτής της μεθόδου και, ως εκ τούτου, μπορούμε να δημιουργήσουμε τον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 11: Τρίγωνο ανάπτυξης με το μέσο κόστος απαίτησης

Accident Year	Development Year					
	0	1	2	...	$t-1$	t
0	$r_0 \cdot \lambda_0$	$r_1 \cdot \lambda_0$	$r_2 \cdot \lambda_0$...	$r_{t-1} \cdot \lambda_0$	$r_t \cdot \lambda_0$
1	$r_0 \cdot \lambda_1$	$r_1 \cdot \lambda_1$	$r_2 \cdot \lambda_1$...	$r_{t-1} \cdot \lambda_1$	
2	$r_0 \cdot \lambda_2$	$r_1 \cdot \lambda_2$	$r_2 \cdot \lambda_2$...		
⋮	⋮	⋮	⋮			
$t-1$	$r_0 \cdot \lambda_{t-1}$	$r_1 \cdot \lambda_{t-1}$				
t	$r_0 \cdot \lambda_t$					

Υποθέτοντας ότι έχουμε στη διάθεσή μας τις κατάλληλες πληροφορίες (π.χ. ένα τρίγωνο ζημιών), το N_i μπορεί να υπολογιστεί και, επομένως, να θεωρηθεί γνωστό.

Κατά συνέπεια, μπορούμε να εκτιμήσουμε τα \hat{r}_j και $\hat{\lambda}_k$ χρησιμοποιώντας:

- τις παρατηρούμενες τιμές:

$$s_{ij} = \frac{c_{ij}}{\hat{N}_i} \quad (3.1.22)$$

- τις οριακές εξισώσεις αθροίσματος για τις διαγώνιες του άνω τριγώνου (upper triangle):

$$s_{k0} + s_{k-1,1} + \dots + s_{0k} = (\hat{r}_0 + \dots + \hat{r}_k) \cdot \hat{\lambda}_k, \quad k = 0, \dots, t \quad (3.1.23)$$

- τις οριακές εξισώσεις αθροίσματος για τις στήλες του άνω τριγώνου (upper triangle):

$$s_{0j} + s_{1j} + \dots + s_{t-j,j} = (\hat{\lambda}_j + \dots + \hat{\lambda}_t) \cdot \hat{r}_j, \quad j = 0, \dots, t \quad (3.1.24)$$

Ο Taylor αποδεικνύει ότι υπάρχει μια μοναδική λύση στις παραπάνω εξισώσεις:

$$\hat{\lambda}_k = \frac{\sum_{i=0}^k s_{i,k-i}}{1 - \sum_{j=k+1}^t \hat{r}_j}, \quad k = 0, \dots, t \quad (3.1.25)$$

και

$$\hat{r}_j = \frac{\sum_{i=0}^{t-j} s_{ij}}{\sum_{k=j}^t \hat{\lambda}_k}, \quad j = 0, \dots, t \quad (3.1.26)$$

όπου το άθροισμα $\sum_{j=k+1}^t \hat{r}_j$ θεωρείται μηδέν όταν $k = t$.

Επομένως, οι συσσωρευμένες απαιτήσεις του άνω τριγώνου μπορούν τώρα να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας την ακόλουθη εξίσωση:

$$\hat{C}_{ij} = \hat{N}_i \cdot \hat{r}_j \cdot \hat{\lambda}_k \quad (3.1.27)$$

Ωστόσο, για να εκτιμηθούν οι απαιτήσεις του κάτω τριγώνου (lower triangle), πρέπει να έχει προηγηθεί η πρόβλεψη του λ_k για $t + 1 \leq k \leq 2t$.

Συνοψίζοντας, η Μέθοδος Διαχωρισμού είναι μια αξιόλογη μέθοδος αποθεματοποίησης που μπορεί να απομονώσει την επίδραση που έχουν οι διάφοροι παράγοντες (όπως ο πληθωρισμός) ανά ημερολογιακό έτος. Ωστόσο, συγκριτικά με τις δύο προηγούμενες μεθόδους παραμένει η λιγότερο δημοφιλής.

3.2 Στοχαστικές μέθοδοι αποθεματοποίησης

Η κύρια αδυναμία των μεθόδων που αναφέρθηκαν προηγουμένως είναι ότι δεν παρέχουν επαρκείς πληροφορίες σχετικά με την αβεβαιότητα που υπάρχει όσον αφορά την τελική εκτίμηση. Για την ενσωμάτωση αυτής της αβεβαιότητας στα δεδομένα μας, απαιτείται η χρήση μιας στοχαστικής διαδικασίας.

3.2.1 Το μοντέλο του Mack

Ένας από τους πρώτους ανθρώπους που κατάφεραν να αξιοποιήσουν επιτυχώς τις εκτιμήσεις του αποθεματικού μέσω της μεθόδου chain ladder ήταν ο Mack (το 1993). Πρότεινε ένα στοχαστικό (χωρίς συγκεκριμένη κατανομή) μοντέλο το οποίο δεν χρειαζόταν να πληροί συγκεκριμένες υποθέσεις. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο το μοντέλο του Mack είναι μια από τις πιο γνωστές στοχαστικές μεθόδους αποθεματοποίησης.

Σε αυτό το μοντέλο, ο Mack προτείνει έναν συγκεκριμένο τύπο για τον υπολογισμό του μέσου τετραγωνικού σφάλματος των εκτιμώμενων αποθεμάτων. Το μοντέλο του μας παρέχει αμερόληπτους εκτιμητές για τους παράγοντες ανάπτυξης (development factors) της μεθόδου chain ladder. Έχοντας υπολογίσει τους παράγοντες ανάπτυξης, μπορούμε στη συνέχεια να προχωρήσουμε στην

εκτίμηση των τελικών απαιτήσεων, με το αποτέλεσμα που προκύπτει να είναι μια αμερόληπτη εκτίμηση.

Για την ακρίβεια, ο Mach χρησιμοποιεί τον σταθμισμένο μέσο όρο των παραγόντων ανάπτυξης για να εκτιμήσει τις «fitted» απαιτήσεις της εταιρείας, ενώ χρησιμοποιεί τις πραγματικές απαιτήσεις ως τις παρατηρούμενες τιμές. Έτσι, καταφέρνει να υποστηρίξει επιστημονικά τους υπολογισμούς που η βασική chain ladder έχει ήδη κάνει με τη λογική αλλά χωρίς να έχει ενσωματώσει κάποιο θεωρητικό υπόβαθρο.

Για να κατανοήσουμε το μοντέλο, μπορούμε να δηλώσουμε ως D_{ij} τις αθροιστικές απαιτήσεις για το έτος ατυχήματος i και το έτος ανάπτυξης j .

Στη συνέχεια, ο Mach έκανε τις ακόλουθες υποθέσεις:

- Για κάθε $j = 1, \dots, n - 1$, υπάρχουν παράγοντες ανάπτυξης f_j για τους οποίους ισχύει:

$$E[D_{i,j+1}|D_{i1}, \dots, D_{ij}] = D_{ij} \cdot f_j \quad (3.2.1)$$

- Για κάθε $j = 1, \dots, n - 1$, υπάρχουν παράμετροι σ_j^2 για τις οποίες ισχύει:

$$Var[D_{i,j+1}|D_{i1}, \dots, D_{ij}] = D_{ij} \cdot \sigma_j^2 \quad (3.2.2)$$

- Τα έτη ατυχήματος i είναι ανεξάρτητα. Για παράδειγμα, για κάθε $s \neq t$, οι τιμές $\{D_{s1}, \dots, D_{sn}\}, \{D_{t1}, \dots, D_{tn}\}$ είναι ανεξάρτητες.

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί, ο Mack κάνει χρήση των δεσμευμένων εκτιμήσεων. Αυτό δίνει λύση σε ένα αρκετά θεμελιώδες πρόβλημα: το γεγονός ότι τόσο οι ανεξάρτητες όσο και οι εξαρτημένες μεταβλητές είναι στοχαστικές. Δεδομένου ότι η γραμμική παλινδρόμηση υποθέτει ότι μόνο οι εξαρτημένες μεταβλητές είναι στοχαστικές (οι ανεξάρτητες θεωρούνται πάντα γνωστές), θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν δεσμευμένες εκτιμήσεις στον τύπο για να ξεπεραστεί αυτό το εμπόδιο.

Επιπλέον, ο Mack υπολόγισε τους ακόλουθους εκτιμητές για τις άγνωστες παραμέτρους f_j και σ_j^2 :

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j} D_{i,j+1}}{\sum_{i=1}^{n-j} D_{ij}} \quad (3.2.3)$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{1}{n-j-1} \sum_{i=1}^{n-j} D_{ij} \cdot (f_{ij} - \hat{f}_j)^2 \quad (3.2.4)$$

όπου $f_{ij} = \frac{D_{i,j+1}}{D_{ij}}$ και $\hat{\sigma}_{n-1}^2 = \min\left(\frac{\hat{\sigma}_{n-2}^4}{\hat{\sigma}_{n-3}^2}, \min(\hat{\sigma}_{n-3}^2, \hat{\sigma}_{n-2}^2)\right)$.

Στο μοντέλο του Mack, ο εκτιμητής \hat{f}_j είναι ο ίδιος με τον παράγοντα ανάπτυξης που έχουμε ήδη συναντήσει στη μέθοδο chain ladder. Σύμφωνα με τον Mack, οι εκτιμητές \hat{f}_j είναι αμερόληπτοι εκτιμητές των παραγόντων ανάπτυξης f_j και δεν υπάρχει μεταξύ τους συσχέτιση. Αυτό σημαίνει ότι εάν παρατηρηθούν εξαιρετικά χαμηλές απαιτήσεις σε ένα έτος ατυχήματος, ο συντελεστής ανάπτυξης της μεθόδου chain ladder δεν θα προβλέψει με ακρίβεια τις μελλοντικές απαιτήσεις, καθώς υποθέτει ότι η ιστορία θα επαναληφθεί, χωρίς αυτό να συμβαίνει πάντα.

Έτσι, οι εκτιμώμενες μελλοντικές απαιτήσεις \hat{D}_{ik} θα υπολογιστούν με τον ίδιο τρόπο όπως υπολογίστηκαν στη μέθοδο της chain ladder, πολλαπλασιάζοντας δηλαδή τις παρατηρήσεις της νιοστής experience period με τους μελλοντικούς παράγοντες ανάπτυξης. Έτσι, έχουμε:

$$\hat{D}_{ik} = D_{i,n-i+1} \prod_{j=n-i+1}^n \hat{f}_j \quad (3.2.5)$$

ενώ η εκτίμηση των απαιτήσεων σε κάθε έτος ατυχήματος προκύπτει από την ακόλουθη σχέση:

$$\hat{R}_i = \hat{D}_{i,k} - D_{i,n-i+1} \quad (3.2.6)$$

Τέλος, τα συνολικά αποθεματικά απαιτήσεων προκύπτουν από την εξίσωση:

$$\hat{R} = \hat{R}_1 + \hat{R}_2 + \dots + \hat{R}_n \quad (3.2.7)$$

Υποθέτοντας την ανεξαρτησία μεταξύ των ετών ατυχήματος, μπορούμε να υπολογίσουμε το τυπικό σφάλμα της πρόβλεψης των απαιτήσεων σε ένα συγκεκριμένο έτος. Έτσι, το μέσο τετράγωνο σφάλμα πρόβλεψης δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$MSEP[\widehat{D}_{ij}] = E[(D_{ij} - \widehat{D}_{ij})^2] = E[D_{ij} - E[D_{ij}]]^2 + E[\widehat{D}_{ij} - E[\widehat{D}_{ij}]]^2 \quad (3.2.8)$$

που μπορεί να θεωρηθεί περίπου παρόμοιο με:

$$MSEP[\widehat{D}_{ij}] = Var[D_{ij}] + Var[\widehat{D}_{ij}] \quad (3.2.9)$$

όπου $Var[D_{ij}]$ αντιπροσωπεύει το τυπικό σφάλμα και $Var[\widehat{D}_{ij}]$ το σφάλμα εκτίμησης.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο Mack υπολόγισε το τυπικό σφάλμα των αποθεμάτων

R_i για το έτος ατυχήματος i ως:

$$Var[R_i] = \widehat{D}_{in}^2 \cdot \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_{k+1}^2}{\widehat{f}_{k+1}^2 \cdot \widehat{D}_{ik}} \quad (3.2.10)$$

και το σφάλμα εκτίμησης των αποθεμάτων R_i για το έτος ατυχήματος i ως:

$$Var[\widehat{R}_i] = \widehat{D}_{in}^2 \cdot \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\widehat{\sigma}_{k+1}^2}{\widehat{f}_{k+1}^2 \cdot \sum_{q=1}^{n-k} D_{qk}} \quad (3.2.11)$$

Έτσι, το τυπικό σφάλμα για την εκτίμηση του αποθεματικού για το έτος ατυχήματος i δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$MSEP[\hat{R}_i] = E \left[(D_{ij} - \hat{D}_{ij})^2 \right] = \hat{D}_{in}^2 \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2} \left(\frac{1}{\hat{D}_{ik}} + \frac{1}{\sum_{q=1}^{n-k} D_{qk}} \right) \quad (3.2.12)$$

Τέλος, το τυπικό σφάλμα για την εκτίμηση των συνολικών αποθεμάτων δίνεται από την ακόλουθη εξίσωση:

$$MSEP[\hat{R}] = \sum_{i=2}^n \left\{ MSEP[\hat{R}_i] + \hat{D}_{in} \left(\sum_{q=i+1}^n D_{qn} \right) \sum_{k=n-i+1}^{n-1} \frac{2 \cdot \hat{\sigma}_k^2}{\hat{f}_k^2 \cdot \sum_{q=1}^{n-k} D_{qk}} \right\} \quad (3.2.13)$$

Έχοντας ήδη αναφέρει τις βασικές εξισώσεις που χρησιμοποιεί το μοντέλο του Mack, θέλουμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη πως το MSE των αποθεμάτων είναι το ίδιο με το MSE των τελικών απαιτήσεων \hat{D}_{in} , δηλαδή:

$$MSE(\hat{R}_i | k) = MSE(\hat{D}_{in} | k) \quad (3.2.14)$$

Η πρόβλεψη της διακύμανσης των τελικών απαιτήσεων είναι:

$$MSE(\hat{D}_{in} | k) = Var(D_{in} | k) + (E(D_{in} | k) - \hat{D}_{in})^2 \quad (3.2.15)$$

Με την τρίτη υπόθεση του Mack είναι αρκετό να δεσμεύσουμε τις παρατηρήσεις μέσα στο έτος ατυχήματος i . Είναι απαραίτητο μόνο να βρούμε το $Var(D_{in}|k_{i,n-i+1})$ και το $(E(D_{in}|k_{i,n-i+1}) - \widehat{D}_{in})^2$.

Ο όρος $Var(D_{in}|k_{i,n-i+1})$ θα μελετηθεί πρώτος. Αυτό μπορεί να γραφτεί ως:

$$Var(D_{in}|k_{i,n-i+1}) = E\left(\left(D_{in}\right)^2|k_{i,n-i+1}\right) - \left(E\left(D_{in}|k_{i,n-i+1}\right)\right)^2 \quad (3.2.16)$$

Ας δούμε τώρα το δεύτερο όρο. Χρησιμοποιώντας τον κανόνα των αναμενόμενων τιμών, μπορούμε να καθορίσουμε τις αναμενόμενες τιμές στην κάτω δεξιά πλευρά του τριγώνου ανάπτυξης ($j \geq n - i + 1$). Οι αναμενόμενες απαιτήσεις των δύο τελευταίων ετών ανάπτυξης στο έτος ατυχήματος i είναι:

$$\begin{aligned} E(D_{in}|k_{i,n-i+1}) &= E\left(E(D_{in}|D_{i,n-1})|k_{i,n-i+1}\right) = f_n E(D_{i,n-1}|k_{i,n-i+1}) \\ E(D_{i,n-1}|k_{i,n-i+1}) &= E\left(E(D_{i,n-1}|D_{i,n-2})|k_{i,n-i+1}\right) = f_{n-1} E(D_{i,n-2}|k_{i,n-i+1}) \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

Εισάγοντας την πρώτη έκφραση από την (3.2.17) στην επόμενη, μια νέα σχέση προκύπτει:

$$E(D_{in}|k_{i,n-i+1}) = f_{n-1} f_n E(D_{i,n-2}|k_{i,n-i+1})$$

Εκτελώντας αυτό το βήμα αρκετές φορές, γίνεται δυνατή η εύρεση του $E(D_{in}|k_{i,n-i+1})$ ή η αναμενόμενη τιμή οποιασδήποτε απαίτησης στην κάτω δεξιά πλευρά του τριγώνου ανάπτυξης. Γενικότερα για τα έτη ατυχήματος $i = 2, \dots, n$ και τα έτη ανάπτυξης $j \geq n - i + 2$ η σχέση είναι:

$$E(D_{ij}|k_{i,n-i+1}) = f_{n-i+2} \dots f_{j-1} f_j E(D_{i,n-i+1}|k_{i,n-i+1}) = f_{n-i+2} \dots f_{j-1} f_j d_{i,n-i+1} \quad (3.2.18)$$

Έτσι, αποκτούμε την γενικευμένη σχέση για το $E(D_{ij}|k_{i,n-i+1})$ και είναι πολύ απλό να καθορίσουμε το $E(D_{in}|k_{i,n-i+1})$ ή το $(E(D_{in}|k_{i,n-i+1}))^2$. Επομένως, έχουμε βρει το δεύτερο σκέλος της (3.2.15).

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε το $E((D_{in})^2|k_{i,n-i+1})$. Για να υπολογιστεί αυτό, θα πρέπει πρώτα να γίνει χρήση του κανόνα της διπλής αναμενόμενης τιμής και των πρώτων δύο υποθέσεων του Mack στο $E((D_{ij})^2|k_{i,n-i+1})$.

$$\begin{aligned} E(D_{ij}^2|k_{i,n-i+1}) &= E\left(E(D_{ij}^2|D_{i,j-1})|k_{i,n-i+1}\right) \\ &= E\left\{\left(\text{Var}(D_{ij}|D_{i,j-1})\right) + \left(E(D_{ij}|D_{i,j-1})\right)^2 \middle| k_{i,n-i+1}\right\} \\ &= E\left\{g_j D_{i,j-1} + (f_j D_{i,j-1})^2 \middle| k_{i,n-i+1}\right\} \\ &= g_j E(D_{i,j-1}|k_{i,n-i+1}) + f_j^2 E(D_{i,j-1}^2|k_{i,n-i+1}) \end{aligned} \quad (3.2.19)$$

Το $E(D_{ij}^2 | k_{i,n-i+1})$ μπορεί να καθοριστεί χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.19) και (3.2.17). Οι υπολογισμοί παρουσιάζονται παρακάτω και οι σχέσεις που χρησιμοποιούνται αναφέρονται στη δεξιά πλευρά:

$$E(D_{in}^2 | k_{i,n-i+1}) = g_n E(D_{i,n-1} | k_{i,n-i+1}) + f_n^2 E(D_{i,n-1}^2 | k_{i,n-i+1}) \quad (3.2.19)$$

$$= g_n (f_{n-i+2} f_{n-i+3} \dots f_{n-1} d_{i,n-i+1}) + \quad (3.2.17)$$

$$= g_{n-1} E(D_{i,n-2} | k_{i,n-i+1}) f_n^2 + E(D_{i,n-2}^2 | k_{i,n-i+1}) f_{n-1}^2 f_n^2 \quad (3.2.19)$$

$$= g_n (f_{n-i+2} f_{n-i+3} \dots f_{n-1} d_{i,n-i+1}) + g_{n-1} d_{i,n-i+1} f_{n-i+2} f_{n-i+3} \dots f_{n-2} f_n^2 \quad (3.2.17)$$

$$+ g_{n-2} E(D_{i,n-3} | k_{i,n-i+1}) f_{n-1}^2 f_n^2 + E(D_{i,n-3}^2 | k_{i,n-i+1}) f_{n-2}^2 f_{n-1}^2 f_n^2 \quad (3.2.19)$$

$$= g_n (f_{n-i+2} f_{n-i+3} \dots f_{n-1} d_{i,n-i+1}) + g_{n-1} d_{i,n-i+1} f_{n-i+2} f_{n-i+3} \dots f_{n-2} f_n^2 \quad (3.2.17)$$

$$+ g_{n-2} d_{i,n-i+1} f_{n-i+2} f_{n-i+3} \dots f_{n-3} f_{n-1}^2 f_n^2 \quad (3.2.17)$$

$$+ g_{n-3} E(D_{i,n-4} | k_{i,n-i+1}) f_{n-2}^2 f_{n-1}^2 f_n^2 \quad (3.2.19)$$

$$+ E(D_{i,n-4}^2 | k_{i,n-i+1}) f_{n-3}^2 f_{n-2}^2 f_{n-1}^2 f_n^2 \quad \text{κ.ο.κ.}$$

Τα αποτελέσματα από τις (3.2.19) και (3.2.17) χρησιμοποιούνται μέχρι το τελευταίο βήμα όπου είναι ξεκάθαρο ότι ισχύει $E(D_{i,n-i+1}^2 | k_{i,n-i+1}) = d_{i,n-i+1}^2$ εφόσον το $k_{i,n-i+1}$ είναι γνωστό. Αυτό μπορεί να γραφτεί ως:

$$E\left(D_{in}^2 | k_{i,n-i+1}\right) = d_{i,n-i+1} \sum_{j=n-i+2}^n \left(f_{n-i+2} f_{n-i+3} \dots f_{j-1} g_j f_{j+1}^2 \dots f_n^2\right) + d_{i,n-i+1}^2 f_{n-i+2}^2 \dots f_n^2 \quad (3.2.20)$$

Έχουμε δημιουργήσει εκτιμητές για τα $E(D_{in}^2 | k_{i,n-i+1})$ και $E(D_{in} | k_{i,n-i+1})$ και η σχέση (3.2.16) μπορεί να γραφτεί ως:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(D_{in} | k_{i,n-i+1}\right) &= E\left(D_{in}^2 | k_{i,n-i+1}\right) - \left(E\left(D_{in} | k_{i,n-i+1}\right)\right)^2 \\ &= d_{i,n-i+1} \sum_{j=n-i+2}^n \left(f_{n-i+2} \dots f_{j-1} g_j f_{j+1}^2 \dots f_n^2\right) \\ &\quad + d_{i,n-i+1}^2 f_{n-i+2}^2 \dots f_n^2 - \left(d_{i,n-i+1} f_{n-i+2} \dots f_n\right)^2 \\ &= d_{i,n-i+1} \sum_{j=n-i+2}^n f_{n-i+2} \dots f_{j-1} g_j f_{j+1}^2 \dots f_n^2 \end{aligned} \quad (3.2.21)$$

Ξαναγράφοντας την (3.2.21) πρώτα και μετά αντικαθιστώντας τις παραμέτρους g_j και f_j με τα \hat{g}_j και \hat{f}_j , η διακύμανση της διαδικασίας είναι:

$$\begin{aligned} \text{Var}\left(D_{in} | k_{i,n-i+1}\right) &= d_{i,n-i+1}^2 \hat{f}_{n-i+2}^2 \hat{f}_{n-i+3}^2 \dots \hat{f}_n^2 \sum_{j=n-i+2}^n \frac{f_{n-i+2} \dots f_{j-1} g_j f_{j+1}^2 \dots f_n^2}{d_{i,n-i+1} \hat{f}_{n-i+2}^2 \hat{f}_{n-i+3}^2 \dots \hat{f}_n^2} \\ &= d_{i,n-i+1}^2 \hat{f}_{n-i+2}^2 \hat{f}_{n-i+3}^2 \dots \hat{f}_n^2 \sum_{j=n-i+2}^n \frac{\hat{g}_j}{d_{i,n-i+1} \hat{f}_{n-i+2} \hat{f}_{n-i+3} \dots \hat{f}_{j-1} \hat{f}_j^2} \\ &= \hat{D}_{in}^2 \sum_{j=n-i+2}^n \frac{\left(\frac{\hat{g}_j}{\hat{f}_j^2}\right)}{\hat{D}_{i,j-1}} \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

Για να φτάσουμε στην τελευταία έκφραση, (3.2.22), χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι ισχύει $\widehat{D}_{in} = D_{i,j-1}\hat{f}_j \cdots \hat{f}_n$, όπου εκτιμάμε το $D_{i,j-1}$, και $\widehat{D}_{in} = d_{i,n-i+1}\hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_n$, όπου το $d_{i,n-i+1}$ θεωρείται γνωστό.

Έτσι, βρήκαμε το πρώτο μέρος της (3.2.14) και, στη συνέχεια, μας ενδιαφέρει να βρούμε το $(E(D_{in}|k_{i,n-i+1}) - \widehat{D}_{in})^2$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.2.18) έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} \left(E(D_{in}|k_{i,n-i+1}) - \widehat{D}_{in}\right)^2 &= \left((d_{i,n-i+1}f_{n-i+2} \cdots f_n) - (d_{i,n-i+1}\hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_n)\right)^2 \\ &= d_{i,n-i+1}^2 \left(f_{n-i+2} \cdots f_n - \hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_n\right)^2 \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Σε αντίθεση με ότι έγινε από τη σχέση (3.2.21) έως την (3.2.22), δεν είναι καλή ιδέα να αντικαταστήσουμε την παράμετρο f_j με την \hat{f}_j . Εάν αυτό είχε γίνει, υπονοείται σιωπηρά ότι ο εκτιμητής \hat{f}_j στην πραγματικότητα είναι ίδιος με την πραγματική τιμή f_j αλλά είναι πιο ρεαλιστικό πως υπάρχει διαφορά μεταξύ εκτιμητή και παραμέτρου. Για να λύσει το πρόβλημα αυτό ο Mack (1994) εισήγαγε μια νέα ταυτότητα, F . Αυτή η F δεν έχει καμία σχέση με τους μεμονωμένους παράγοντες ανάπτυξης. Ορίζεται ως:

$$F = f_{n-i+2} \cdots f_n - \hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_n = S_{n-i+2} + \dots + S_n \quad (3.2.24)$$

όπου

$$\begin{aligned}
S_j &= \hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_{j-1} f_j f_{j+1} \cdots f_n - \hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_{j-1} \hat{f}_j f_{j+1} \cdots f_n \\
&= \hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_{j-1} (f_j - \hat{f}_j) f_{j+1} \cdots f_n
\end{aligned}$$

Η νέα σχέση F υψωμένη στο τετράγωνο μπορεί να γραφτεί ως:

$$F^2 = (S_{n-i+2} + \dots + S_n)^2 = \sum_{j=n-i+2}^n S_j^2 + 2 \sum_{\substack{j,k=n-i+2 \\ k < j}}^n S_k S_j \quad (3.2.25)$$

Τα S_j^2 και $S_j S_k$ μπορούν να προσεγγιστούν με τα $E(S_j^2 | k_{j-1})$ και $E(S_j S_k | k_{j-1})$ αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας αυτή την προσέγγιση οι παρατηρήσεις λαμβάνονται υπόψη, ενώ αυτό δεν θα ίσχυε στην περίπτωση που γίνει προσέγγιση του $E(\hat{f}_j)$ με το f_j . Εφόσον το \hat{f}_j είναι αμερόληπτος εκτιμητής, ισχύει πως $E((f_j - \hat{f}_j)^2 | k_{j-1}) = 0$ και επίσης $E(S_j S_l | k_{l-1}) = 0$. Για να γίνει πιο ξεκάθαρο, παρακάτω παρουσιάζουμε αναλυτικά τους υπολογισμούς (για $j < l$):

$$\begin{aligned}
E(S_j S_l | k_{l-1}) &= E\left(\left(\hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_{j-1} (f_j - \hat{f}_j) f_{j+1} \cdots f_n\right) \left(\hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_{l-1} (f_l - \hat{f}_l) f_{l+1} \cdots f_n\right) \middle| k_{l-1}\right) \\
&= \left(\hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_{j-1} (f_j - \hat{f}_j) f_{j+1} \cdots f_n\right) E\left(\left(\hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_{l-1} (f_l - \hat{f}_l) f_{l+1} \cdots f_n\right) \middle| k_{l-1}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Η ποσότητα $E(S_j^2 | k_{l-1})$ μπορεί να βρεθεί εξετάζοντας το $E((f_j - \hat{f}_j)^2 | k_{j-1})$:

$$E\left(\left(f_j - \hat{f}_j\right)^2 \middle| k_{j-1}\right) = \text{Var}\left(\hat{f}_j \middle| k_{j-1}\right) = \text{Var}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{i,j-1}} \middle| k_{j-1}\right) \quad (3.2.26)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{i,j-1}\right)^2} \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n-j+1} D_{ij} \middle| k_{j-1}\right) \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{i,j-1}\right)^2} \sum_{i=1}^{n-j+1} d_{i,j-1} g_j \\ &= \frac{g_j}{\left(\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{i,j-1}\right)} \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Η έκφραση στην σχέση (3.2.27) ήταν μόνο ένα μέρος από αυτό που χρειάζεται για να βρούμε το $E(S_j^2 | k_{l-1})$, αλλά χρησιμοποιώντας αυτή την σχέση είναι προφανές πως μπορεί να εκφραστεί ως:

$$E\left(S_j^2 \middle| k_{j-1}\right) = \hat{f}_{n-i+2}^2 \dots \hat{f}_{j-1}^2 E\left(\left(f_j - \hat{f}_j\right)^2 \middle| k_{j-1}\right) f_{j+1}^2 \dots f_n^2 = \hat{f}_{n-i+2}^2 \dots \hat{f}_{j-1}^2 \frac{g_j}{\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{i,j-1}} f_{j+1}^2 \dots f_n^2$$

Αντικαθιστώντας τις παραμέτρους g_j και f_j με τα \widehat{g}_j και \widehat{f}_j στην παραπάνω

έκφραση, μπορούμε να πάρουμε έναν εκτιμητή για το $(E(D_{in} | k_{i,n-i+1}) - \widehat{D}_{in})^2$:

$$\left(E\left(D_{in} \mid k_{i,n-i+1}\right) - \hat{D}_{in}\right)^2 = d_{i,n-i+1}^2 F^2 = d_{i,n-i+1}^2 \sum_{j=n-i+2}^n E\left(S_j^2 \mid k_{j-1}\right) \quad (3.2.28)$$

$$\begin{aligned} &= d_{i,n-i+1}^2 \hat{f}_{n-i+2}^2 \cdots \hat{f}_n^2 \sum_{j=n-i+2}^n \frac{\left(\frac{\hat{g}_j}{\hat{f}_j^2}\right)}{\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{i,j-1}} \\ &= \hat{D}_{in}^2 \sum_{j=n-i+2}^n \frac{\left(\frac{\hat{g}_j}{\hat{f}_j^2}\right)}{\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{i,j-1}} \end{aligned}$$

Έτσι, καταλήγουμε να έχουμε έναν εκτιμητή της διακύμανσης πρόβλεψης.

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.13), (3.2.21) και (3.2.28) μπορεί κανείς να

υπολογίσει τη διακύμανση πρόβλεψης των \hat{D}_{in} :

$$\begin{aligned} MSE\left(\hat{R}_i\right) &= Var\left(D_{in} \mid K\right) + \left(E\left(D_{in} \mid K\right) - \hat{D}_{in}\right)^2 \\ &= \hat{D}_{in}^2 \sum_{j=n-i+2}^n \frac{\left(\frac{\hat{g}_j}{\hat{f}_j^2}\right)}{\hat{D}_{i,j-1}} + \hat{D}_{in}^2 \sum_{j=n-i+2}^n \frac{\left(\frac{\hat{g}_j}{\hat{f}_j^2}\right)}{\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{i,j-1}} \\ &= \hat{D}_{in}^2 \sum_{j=n-i+2}^n \frac{\hat{g}_j}{\hat{f}_j^2} \left(\frac{1}{\hat{D}_{i,j-1}} + \frac{1}{\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{i,j-1}} \right) \end{aligned} \quad (3.2.29)$$

Επιπρόσθετα, πέρα από την διακύμανση πρόβλεψης των \hat{D}_{in} , είναι απαραίτητο να βρούμε την εκτίμηση της διακύμανσης πρόβλεψης της εκτίμησης των συνολικών αποθεμάτων.

Οι εξηγήσεις είναι συντομότερες κατά την απόδειξη αυτού του τύπου, καθώς οι ίδιοι υπολογισμοί έχουν γίνει για να βρεθεί η διακύμανση πρόβλεψης κάθε έτους ατυχήματος. Η σχέση που πρέπει να αποδειχθεί είναι:

$$MSE(\hat{R}|k) = \sum_{i=1}^n \left\{ MSE(\hat{R}_i|k) + \hat{D}_{in} \left(\sum_{l=i+1}^n \hat{D}_{ln} \right) \left(\sum_{k=n-i+2}^n \frac{2\hat{g}_k}{\hat{f}_j^2 \sum_{l=1}^{n-k+1} d_{lk}} \right) \right\}$$

Απόδειξη:

$$MSE(\hat{R}|k) = MSE\left(\sum_{i=2}^n \hat{R}_i | k\right) \quad (3.2.30)$$

$$= E\left(\left(\sum_{i=2}^n \hat{R}_i - \sum_{i=2}^n R_i\right)^2 | k\right)$$

$$= E\left(\left(\sum_{i=2}^n \hat{D}_{in} - \sum_{i=2}^n D_{in}\right)^2 | k\right)$$

$$= Var\left(\sum_{i=2}^n D_{in} | k\right) + \left(E\left(\sum_{i=2}^n D_{in} | k\right) - \sum_{i=2}^n \hat{D}_{in}\right)^2$$

$$= (1) + (2)$$

Οι εκφράσεις (1) και (2) θα προσδιοριστούν ξεχωριστά.

$$(1) = \text{Var} \left(\sum_{i=2}^n D_{in} | k \right) \stackrel{\text{independence}}{=} \sum_{i=2}^n \text{Var} (D_{in} | k) \quad (3.2.22)$$

$$\begin{aligned} (2) &= \left(E \left(\sum_{i=2}^n D_{in} | k \right) - \sum_{i=2}^n \hat{D}_{in} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n (E(D_{in} | k) - \hat{D}_{in}) \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=2}^n (d_{i,n-i+1} f_{n-i+2} \cdots f_n - d_{i,n-i+1} \hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_n) \right)^2 \quad (3.2.23) \\ &= \left(\sum_{i=2}^n d_{i,n-i+1} (f_{n-i+2} \cdots f_n - \hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_n) \right)^2 \\ &= \left(\sum_{i=2}^n d_{i,n-i+1} F_i \right)^2 \\ &= \sum_{i=2}^n d_{i,n-i+1}^2 F_i^2 + 2 \sum_{i=2}^n \sum_{\substack{l=2 \\ i < l}}^n d_{i,n-i+1} d_{l,n-l+1} F_i F_l \end{aligned}$$

Η μεταβλητή F εμφανίστηκε στη σχέση (3.2.24). Σε αυτή την περίπτωση αυτή η μεταβλητή είναι απαραίτητη για $i = 2, \dots, n$, οπότε συμπεριλαμβάνουμε ένα δείκτη i και η μεταβλητή γίνεται:

$$F_i = (f_{n-i+2} \cdots f_n - \hat{f}_{n-i+2} \cdots \hat{f}_n)$$

Για να βρεθεί μια απλούστερη έκφραση για το (2), θα πρέπει να προσδιοριστεί ένας εκτιμητής για το $F_i F_l$. Αυτό γίνεται χρησιμοποιώντας την ίδια διαδικασία όπως στις (3.2.23 - 3.2.27). Ο εκτιμητής για το $F_i F_l$ είναι:

$$\sum_{q=n-i+1}^n \hat{f}_{n-l+2} \cdots \hat{f}_{n-l+1} \hat{f}_{n-l+2}^2 \cdots \hat{f}_{q-1}^2 \frac{\hat{g}_q \hat{f}_{q+1}^2 \cdots \hat{f}_n^2}{\sum_{i=1}^{n-q+1} d_{i,q-1}} \quad (3.2.23 - 3.2.27)$$

Προστίθενται οι δύο ταυτότητες (1) και (2) και χρησιμοποιείται ο παραπάνω εκτιμητής. Αν θυμηθούμε την έκφραση του $MSE(\hat{R}_i | k)$ είναι σαφές ότι:

$$\begin{aligned} MSE(\hat{R} | k) &= (1) + (2) = \sum_{i=2}^n Var(D_{in} | k) + \sum_{i=2}^n d_{i,n-i+1}^2 F_i^2 + 2 \sum_{i=2}^n \sum_{\substack{l=2 \\ i < l}}^n d_{i,n-i+1} d_{l,n-l+1} F_i F_l \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ MSE(\hat{R}_i | k) + \hat{D}_{in} \left(\sum_{l=i+1}^n \hat{D}_{ln} \right) \left(\sum_{k=n-i+2}^n \frac{2\hat{g}_k}{\hat{f}_j^2 \sum_{l=1}^{n-k+1} d_{lk}} \right) \right\} \end{aligned}$$

Συνοψίζοντας, ο Mack παρουσίασε αναλυτικά τα βήματα για τον υπολογισμό του σφάλματος πρόβλεψης στη μέθοδο Chain Ladder. Έτσι, ολοκληρώνει τον αλγόριθμο της βασικής chain ladder προσθέτοντας με μια στοχαστική προσέγγιση.

3.2.2 Bootstrapping

Σύμφωνα με τον England και τον Verall, οι απαιτήσεις μπορούν να διαμορφωθούν με μια over-dispersed Poisson κατανομή. Λαμβάνοντας υπόψη τις εξοφλημένες απαιτήσεις ως C_{ij} , με i το έτος ατυχήματος και j το έτος ανάπτυξης, πρότειναν τις ακόλουθες σχέσεις:

$$E[C_{ij}] = m_{ij} \quad \text{και} \quad \text{Var}[C_{ij}] = \varphi \cdot E[C_{ij}] = \varphi \cdot m_{ij} \quad (3.2.31)$$

$$\log(m_{ij}) = n_{ij} \quad (3.2.32)$$

$$n_{ij} = c + a_i + \beta_j, \quad a_1 = \beta_1 = 0 \quad (3.2.33)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις ορίζουν ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο στο οποίο οι απαιτήσεις C_{ij} διαμορφώνονται με μια λογαριθμική συνάρτηση σύνδεσης (link function) και η διακύμανση είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή. Η συνάρτηση λογαριθμικής σύνδεσης χρησιμοποιείται για την αλλαγή των παραμέτρων του μοντέλου, έτσι ώστε ο λογάριθμος της μέσης τιμής να έχει γραμμική μορφή.

Έτσι, το μοντέλο έχει μια μορφή παρόμοια με τη μέθοδο της chain ladder, αφού υπάρχει μια παράμετρος που αντιστοιχεί σε κάθε γραμμή i και μια παράμετρος

που αντιστοιχεί σε κάθε στήλη j . Το φ είναι μια άγνωστη παράμετρος κλίμακας που πρόκειται να εκτιμηθεί.

Το μοντέλο είναι ανθεκτικό για έναν μικρό αριθμό αρνητικών απαιτήσεων, υπό τον όρο ότι το άθροισμα των απαιτήσεων κάθε γραμμής και στήλης του τριγώνου ανάπτυξης θα δίνει πάντα ένα θετικό πρόσημο. Λόγω της λογαριθμικής συνάρτησης σύνδεσης, οι προσαρμοσμένες τιμές που θα προκύψουν θα είναι πάντα θετικοί αριθμοί.

Επιπλέον, τα κατάλοιπα θα πρέπει να έχουν μια συγκεκριμένη μορφή για να είναι κατάλληλα για το γενικευμένο γραμμικό μοντέλο. Τα πιο κοινά κατάλοιπα που δοκιμάζονται είναι τα Deviance κατάλοιπα και τα κατάλοιπα του Pearson, ενώ υπάρχουν και τα κατάλοιπα Anscombe που δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμα για τη διαδικασία Bootstrap.

Πιο συγκεκριμένα, οι εξισώσεις που μας ενδιαφέρουν είναι:

- Unscaled Deviance Residual:

$$r_D = \text{sign}(C - m) \sqrt{2(C \log(C/m) - C + m)}$$

(3.2.34)

- Unscaled Pearson Residual:

$$r_P = \frac{C - m}{\sqrt{m}}$$

(3.2.35)

– Unscaled Anscombe Residual:

$$r_A = \frac{\frac{3}{2} \left(C^{\frac{2}{3}} - m^{\frac{2}{3}} \right)}{m^{1/6}} \quad (3.2.36)$$

Στη διαδικασία Bootstrap, χρησιμοποιείται η δειγματοληψία με αντικατάσταση από τα κατάλοιπα. Δημιουργείται ένα νέο δείγμα δεδομένων χρησιμοποιώντας τον ανεστραμμένο τύπο και τα κατάλοιπα του νέου δείγματος. Δεδομένου ότι τα υπολείμματα Anscombe δεν χρησιμοποιούνται τόσο ευρέως, η προσοχή μας θα δοθεί στην επίλυση των Deviance καταλοίπων και των καταλοίπων του Pearson ως προς C. Βλέποντας ότι τα κατάλοιπα του Pearson μπορούν να λυθούν ευκολότερα ως προς C, προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$C^* = r_p^* \sqrt{m} + m \quad (3.2.37)$$

όπου το r_p^* αντιπροσωπεύει τα κατάλοιπα του Pearson που προκύπτουν από τα δείγματα, το m τις fitted τιμές και το C^* την απαίτηση bootstrap.

Επομένως, έχοντας λάβει ένα νέο δείγμα bootstrap με απαιτήσεις, μπορούμε να προσαρμόσουμε τα δεδομένα μας στο τρίγωνο ανάπτυξης και να πάρουμε ένα νέο δείγμα bootstrap με τις συσσωρευμένες απαιτήσεις και νέους παράγοντες ανάπτυξης. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε τη μέθοδο Chain ladder στα δεδομένα Bootstrap. Έτσι, οι μελλοντικές απαιτήσεις που θα προκύψουν και ο υπολογισμός των αποθεμάτων θα υπολογιστεί με τον τρόπο που αναφέρθηκε προηγουμένως.

Η όλη διαδικασία ολοκληρώνεται χρησιμοποιώντας επαναλαμβανόμενη δειγματοληψία από τα κατάλοιπα πολλές φορές (N φορές). Κάθε φορά δημιουργείται ένα νέο δείγμα bootstrap και, ως αποτέλεσμα, ένα νέο bootstrap κατάλοιπο. Το τυπικό σφάλμα του Bootstrap είναι η τυπική απόκλιση της εκτίμησης των N bootstrap αποθεμάτων.

Ένα άλλο σημαντικό σημείο που πρέπει να επισημανθεί είναι η scale παράμετρος φ . Παρόλο που δεν χρησιμοποιείται στη διαδικασία bootstrap, είναι απαραίτητη για τον υπολογισμό του σφάλματος της διαδικασίας.

Επομένως, η scale παράμετρος του Pearson δίνεται από:

$$\varphi_P = \frac{\sum r_P^2}{n-p} \quad (3.2.38)$$

όπου n είναι ο αριθμός των δεδομένων στο δείγμα και p είναι ο αριθμός των εκτιμώμενων παραμέτρων.

Για να υπολογίσουμε το σφάλμα πρόβλεψης bootstrap, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιήσουμε μια εκτίμηση της διακύμανσης. Αυτή μπορεί εύκολα να υπολογιστεί αφού δίνεται από τις εκτιμήσεις αποθεματικού πολλαπλασιασμένες με την scale παράμετρο. Στη συνέχεια, το σφάλμα πρόβλεψης δίνεται από:

$$PE_{bs} = \sqrt{\varphi_p R + \frac{n}{n-p} (SE_{bs}(R))^2}$$

(3.2.39)

όπου R είναι τα συνολικά αποθέματα ενός έτους ατυχήματος και $SE_{bs}(R)$ είναι το τυπικό σφάλμα των εκτιμώμενων bootstrap αποθεμάτων.

Συνοψίζοντας, για να αξιοποιηθεί η διαδικασία του bootstrap θα πρέπει να ακολουθηθούν ορισμένα βήματα. Πρώτον, τοποθετούμε τις συσσωρευμένες απαιτήσεις σε ένα τρίγωνο ανάπτυξης και υπολογίζουμε τους παράγοντες ανάπτυξης. Στη συνέχεια, εκτιμούμε τις μελλοντικές συσσωρευμένες απαιτήσεις και υπολογίζουμε τις μεμονωμένες απαιτήσεις (m) λαμβάνοντας τις διαφορές μεταξύ δύο ετών ανάπτυξης. Έτσι, μπορούμε να υπολογίσουμε τα κατάλοιπα του Pearson και την scale παράμετρο του Pearson.

Στη συνέχεια, ξεκινάμε μια επανάληψη (loop) την οποία πρόκειται να επαναλάβουμε N φορές. Στα unscaled κατάλοιπα του Pearson, εφαρμόζουμε μια τυχαία δειγματοληψία με αντικατάσταση, δημιουργώντας έτσι ένα νέο τρίγωνο καταλοίπων. Λύνοντας ως προς C , λαμβάνουμε ένα νέο σύνολο απαιτήσεων C^* . Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τη μέθοδο Chain ladder στις απαιτήσεις bootstrap που προέκυψαν και εκτιμούμε τις μελλοντικές απαιτήσεις. Στη συνέχεια, για κάθε κελί (i,j) βρίσκουμε τις μεμονωμένες απαιτήσεις παίρνοντας τις διαφορές, οι οποίες πρόκειται να χρησιμοποιηθούν ως μέση τιμή κατά την

προσομοίωση. Για κάθε κελί του τριγώνου προσομοιώνουμε μια απαίτηση χρησιμοποιώντας την Over-Dispersed Poisson. Τέλος, προσθέτοντας τις μελλοντικές πληρωμές και βρίσκοντας τα αποθεματικά κάθε έτους οδηγούμαστε στα συνολικά αποθέματα. Αποθηκεύουμε τα αποτελέσματα και επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία.

Στο τέλος, τα αποτελέσματα που συλλέξαμε θα μας δώσουν την εκτιμώμενη κατανομή των μελλοντικών απαιτήσεων. Στη συνέχεια, πρέπει να γίνει σύγκριση μεταξύ της μέσης τιμής των αποθεμάτων bootstrap και των αποθεμάτων που υπολογίζονται με τη μέθοδο της απλής chain ladder. Η τυπική απόκλιση των αποτελεσμάτων θα μας δώσει μια εκτίμηση του σφάλματος πρόβλεψης.

3.2.3 Stochastic Bornhuetter-Ferguson

Η μέθοδος Bornhuetter – Ferguson έχει ήδη αναφερθεί προηγουμένως. Δεδομένου ότι αυτή η μέθοδος κάνει χρήση κάποιων εξωτερικών πληροφοριών, γνωστών εκ των προτέρων (prior), για να κάνει την πρόβλεψη, δείχνει ομοιότητες με τη Μπεϋζιανή μέθοδο. Το 2004, αυτή η μέθοδος Bornhuetter - Ferguson μελετήθηκε ως Μπεϋζιανή από τον Verrall υπό το πρίσμα των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, οι απαιτήσεις μπορούν να μοντελοποιηθούν με μια over-dispersed Poisson κατανομή. Έτσι, αυτή τη φορά ο Verrall αναλύει τη σύνδεση μεταξύ της τεχνικής της chain-ladder (οι απαιτήσεις ακολουθούν ODP) και των εξωτερικών πληροφοριών σχετικά με τα κέρδη της εταιρείας που χρησιμοποιήθηκαν στη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson (που χρησιμοποιείται ως prior κατανομή).

Έτσι, ο Verrall υποθέτει το ακόλουθο μοντέλο:

$$C_{ij}|x, y, \varphi \sim \text{independent over } - \text{dispersed Poisson}$$

$$\text{με μέση τιμή } x_i \cdot y_i \text{ και } \sum_{k=1}^n y_k = 1$$

και

$$x_i | \alpha_i, \beta_i \cdot \sim \text{independent } \Gamma(\alpha_i, \beta_i)$$

και improper prior κατανομές χρησιμοποιούνται για τα y_j

Στη συνέχεια, αντλεί δεδομένα από την κατανομή $C_{ij} | C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{i,j-1}, y, \varphi$.

Αποδεικνύεται ότι πρόκειται για αρνητική διωνυμική κατανομή (negative binomial). Ο μέσος όρος της κατανομής σε μια Bayesian μέθοδο θα μπορούσε να γραφτεί ως εξής:

$$\left[Z_{ij} \cdot \frac{D_{i,j-1}}{S_{j-1}} + (1 - Z_{ij}) \frac{\alpha_i}{\beta_i} \right] y_i$$

(3.2.40)

όπου $Z_{ij} = \frac{S_{j-1}}{\beta_i \cdot \varphi + S_{j-1}}$, ο λόγος $\frac{\alpha_i}{\beta_i}$ είναι ο prior μέσος όρος των συσσωρευμένων απαιτήσεων (μέθοδος BF) και $\frac{D_{i,j-1}}{S_{j-1}}$ είναι η εκτίμηση των συσσωρευμένων απαιτήσεων από τα δεδομένα (μέθοδος CL).

Έτσι, έχουμε το συνδυασμό δύο ακραίων καταστάσεων:

- τη μέθοδο της Chain-ladder που χρησιμοποιεί τα δεδομένα και υποθέτει ότι δεν υπάρχει κάποια πρότερη πληροφόρηση

- τη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson που βασίζεται αποκλειστικά στην εκ των προτέρων πληροφόρηση και δεν κάνει χρήση των δεδομένων

Ο Verrall χρησιμοποιεί δύο προσεγγίσεις. Στην πρώτη προσέγγιση, οι prior κατανομές εφαρμόζονται στις σειρές εκ των προτέρων και, ως αποτέλεσμα, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων των στηλών (παράγοντες ανάπτυξης) από την chain-ladder θα έχουν επηρεαστεί.

Στη δεύτερη προσέγγιση, πρώτα υπολογίζονται οι παράγοντες ανάπτυξης και, στη συνέχεια, οι prior κατανομές εφαρμόζονται στις παραμέτρους των σειρών. Μεταξύ των δύο προσεγγίσεων, αυτή που προσεγγίζει καλύτερα τη μέθοδο Bornhuetter-Ferguson είναι η δεύτερη.

Για την εφαρμογή των δύο μοντέλων, χρησιμοποιείται η προσέγγιση Markov Chain Monte Carlo. Έτσι, τα σφάλματα πρόβλεψης προέρχονται από τις επαναλήψεις και όχι από έναν συγκεκριμένο τύπο.

Η μελέτη του Verrall πάνω στοχαστικό μοντέλο Bornhuetter-Ferguson είναι μια ενδιαφέρουσα προσέγγιση που συνδυάζει δύο από τις πιο διάσημες μεθόδους αποθεματοποίησης των απαιτήσεων μέσω στοχαστικής διαδικασίας. Ένα μειονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι ενδέχεται να μην αποδώσει εάν εμφανιστούν αρνητικές απαιτήσεις.

3.2.4 Το μοντέλο Poisson

Κατά την διερεύνηση ενός στοχαστικού μοντέλου που αναπαράγει εκτιμήσεις της chain ladder, είναι απαραίτητο να γίνουν κάποιες υποθέσεις σχετικά με τις ασφαλιστικές απαιτήσεις. Είναι λοιπόν εφικτό είτε να προσδιοριστεί συγκεκριμένη κατανομή των απαιτήσεων είτε απλώς να προσδιοριστούν οι δύο πρώτες ροπές (όπως με το μοντέλο του Mack), δηλαδή η μέση τιμή και η διακύμανση.

Έτσι, η κατανομή Poisson πιθανόν να είναι κατάλληλη και ιδιαίτερα όταν μας ενδιαφέρει η μέτρηση των συμβάντων μιας περιόδου. Κατά τη διάρκεια μιας ασφαλιστικής περιόδου, συμβαίνουν ατυχήματα και, ως συνέπεια, δημιουργούνται απαιτήσεις. Πολλοί λοιπόν είναι συγγραφείς που προτείνουν τη χρήση ενός μοντέλου Poisson σε αυτή την περίπτωση.

Πιο συγκεκριμένα, ο Verral (2000) ισχυρίστηκε ότι το μοντέλο Poisson θα εξάγει ακριβώς τις ίδιες εκτιμήσεις αποθεμάτων με τη μέθοδο της chain-ladder. Αυτό ισχύει όταν χρησιμοποιούνται maximum likelihood εκτιμητές (MLE), το οποίο και θα αποδείξουμε.

Τα C_{ij} είναι οι μεμονωμένες απαιτήσεις και ακολουθούν Poisson κατανομή με $E(C_{ij}) = x_i y_j$ και $\sum_{j=1}^n y_j = 1$. Ορίζουμε την παράμετρο x ως:

$$x_i = E(D_{in}) \quad (3.2.41)$$

όπου x_i είναι η εκτιμώμενη τιμή των συσσωρευμένων απαιτήσεων έως και το τελευταίο έτος ανάπτυξης που έχει παρατηρηθεί ως τώρα.

Η πρώτη ροπή μπορεί να παραμετροποιηθεί ως:

$$E(C_{ij}) = x_i y_j = E(D_{in}) y_j = \frac{E(D_{i,n-i+1}) y_j}{\sum_{j=1}^{n-i+1} y_j} = \frac{z_i y_j}{S_{n-i+1}} \quad (3.2.42)$$

όπου $Z_i = E(D_{i,n-i+1})$ και $S_k = \sum_{j=1}^k y_j$.

Εφόσον το y_j μπορεί να ερμηνευτεί ως η αναλογία των τελικών απαιτήσεων στο έτος ανάπτυξης j , είναι λογικό ότι το $E(D_{i,n-i+1})$ διαιρεμένο με την αναλογία των απαιτήσεων έως το έτος $j = n - i + 1$ ισούται με $E(D_{in})$.

Η εξίσωση (3.2.25) μπορεί να γραφτεί έτσι ώστε να αποτελεί τον τύπο – φόρμουλα για την πρόβλεψη της εκτίμησης των τελικών απαιτήσεων $E(D_{in})$.

Προσεγγίζοντας το $E(D_{in})$ με τις εκτιμήσεις \widehat{D}_{in} , η εξίσωση είναι:

$$\widehat{D}_{in} = ED_{in} = x_i = \frac{z_i}{\sum_{k=1}^{n-i+1} y_k} = \frac{z_i}{1 - \sum_{k=n-i+2}^n y_k}. \quad (3.2.43)$$

Ο Verral (2000) ισχυρίστηκε ότι αυτό είναι ίσο με τον εκτιμητή από τη μέθοδο Chain ladder:

$$\widehat{D}_{n-j+1,n} = d_{n-j+1,j} \hat{f}_{j+1} \hat{f}_{j+2} \cdots \hat{f}_n \quad (3.2.44)$$

$$\text{όπου } \hat{f}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{i,j-1}}.$$

Παρατηρώντας ότι οι σχέσεις (3.2.43) και (3.2.44) είναι ισάξιες, είναι λογικό να αναζητήσουμε τους εκτιμητές των άγνωστων παραμέτρων της εξίσωσης (3.2.43). Για την εκτίμηση αυτών θα χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση της μέγιστης πιθανοφάνειας. Σε αυτή την περίπτωση οι παρατηρήσεις C_{ij} θεωρούνται γνωστές και οι παράμετροι αντιμετωπίζονται ως μεταβλητές. Η συνάρτηση της μέγιστης πιθανοφάνειας μπορεί να γραφτεί ως:

$$L = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^{n-i+1} \left(\frac{(z_i y_j / s_{n-i+1})^{c_{ij}} e^{-z_i y_j / s_{n-i+1}}}{c_{ij}!} \right) \quad (3.2.45)$$

Αυτή είναι η συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας μιας μεταβλητής που ακολουθεί Poisson κατανομή με παράμετρο $\frac{z_i y_j}{s_{n-i+1}}$. Επιπλέον υπολογισμοί δείχνουν πως η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί και ως:

$$L = \prod_{i=1}^n \left(\frac{z_i^{d_{i,n-i+1}} e^{-z_i}}{d_{i,n-i+1}!} \left(\frac{d_{i,n-i+1}!}{\prod_{j=1}^{n-i+1} c_{ij}!} \prod_{j=1}^{n-i+1} \left(\frac{y_j}{s_{n-i+1}} \right)^{c_{ij}} \right) \right) = L_c L_d \quad (3.2.46)$$

$$\text{όπου } L_c = \prod_{i=1}^n \left(\frac{d_{i,n-i+1}!}{\sum_{j=1}^{n-i+1} c_{ij}!} \prod_{j=1}^{n-i+1} \left(\frac{y_j}{s_{n-i+1}} \right)^{c_{ij}} \right) \text{ και } L_d = \prod_{i=1}^n \left(\frac{z_i^{d_{i,n-i+1}} e^{-z_i}}{d_{i,n-i+1}!} \right). \quad (3.2.47)$$

Το L_c είναι η δεσμευμένη (conditional) συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας όπου τα C_{ij} , εξαρτώμενα από τα $d_{i,n-i+1}$, κατανέμονται πολυωνυμικά με πιθανότητες $\frac{y_j}{s_{n-i+1}}$. Η πολυωνυμική κατανομή σωστά έχει θεωρήσει την πιθανότητα μια απαίτησης να δημιουργείται – αναγγέλλεται σταδιακά (i, j) . Η πολυωνυμική κατανομή αντιπροσωπεύει την πιθανότητα των απαιτήσεων C_{ij} , οι οποίες συνέβησαν το έτος ατυχήματος i , να αναγγελθούν το έτος ανάπτυξης j .

Το L_d είναι η συνάρτηση μέγιστης πιθανοφάνειας όπου τα $D_{i,n-i+1}$ ακολουθούν την Poisson κατανομή με μέση τιμή z_i και, έτσι, μπορούμε με αυτή την έκφραση

να βρούμε τον maximum likelihood εκτιμητή (MLE) των z_i . Ο MLE των z_i είναι $d_{i,n-i+1}$ εφόσον τα $D_{i,n-i+1}$ ακολουθούν κατανομή Poisson.

Χρησιμοποιώντας τον MLE των z_i , ο εκτιμητής των τελικών απαιτήσεων γίνεται:

$$\hat{D}_{in} = \frac{d_{i,n-i+1}}{1 - \sum_{k=n-i+2}^n y_k} \quad (3.2.48)$$

Για το έτος ατυχήματος $n - j + 1$ η σχέση γίνεται:

$$\hat{D}_{n-j+1,n} = \frac{d_{n-j+1,j}}{1 - \sum_{k=j+1}^n y_k} \quad (3.2.49)$$

Στην έκφραση (3.2.49) η μόνη άγνωστη παράμετρος είναι το y_i . Αυτό μπορεί να προσδιοριστεί βρίσκοντας τον MLE χρησιμοποιώντας το L , αλλά θα μπορούσε εναλλακτικά να χρησιμοποιηθεί και το L_c . Υπολογίζουμε το λογάριθμο του L_c και παραγωγίζουμε τη σχέση που βρήκαμε ως προς y_k , για $k = 1, \dots, n$. Αυτό θα πρέπει να γίνει αναδρομικά με μια διαδικασία που περιγράφει ο Renshaw (1998). Η παράμετρος \hat{y}_n υπολογίζεται πρώτα, έπειτα η \hat{y}_{n-1} και ούτω καθεξής.

Οι υπολογισμοί για να βρεθούν τα \hat{y}_n και η γενικευμένη φόρμουλα για τα \hat{y}_j παρουσιάζονται παρακάτω:

$$\ln(L_c) = l_c \propto \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-i+1} c_{ij} \log \left(\frac{y_j}{\sum_{k=1}^{n-i+1} y_k} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n-i+1} c_{ij} \left(\log y_j - \log \left(\sum_{k=1}^{n-i+1} y_k \right) \right)$$

$$\frac{\partial l_c}{\partial y_n} = 0 \Rightarrow \frac{c_{1n}}{\hat{y}_n} - \sum_{j=1}^n \frac{c_{1j}}{\sum_{k=1}^n \hat{y}_k} = \frac{c_{1n}}{\hat{y}_n} - \sum_{j=1}^n \frac{c_{1j}}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \hat{y}_n = \frac{c_{1n}}{\sum_{j=1}^n c_{1j}} = \frac{c_{1n}}{d_{1n}}$$

(3.2.50)

$$\frac{\partial l_c}{\partial y_j} = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n-j+1} \left(\frac{c_{ij}}{\hat{y}_j} - \sum_{j=1}^{n-j+1} \frac{c_{ij}}{\sum_{k=1}^{n-i+1} \hat{y}_k} \right) = \frac{\sum_{k=1}^{n-i+1} c_{ij}}{\hat{y}_j} - \sum_{i=1}^{n-j+1} \left(\frac{d_{i,n-i+1}}{\sum_{k=1}^{n-i+1} \hat{y}_k} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{y}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} c_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} \left(\frac{d_{i,n-i+1}}{\sum_{k=1}^{n-i+1} \hat{y}_k} \right)} = \frac{c_{1j} + \dots + c_{n-j+1,j}}{d_{1n} + \frac{d_{2,n-1}}{1 - \hat{y}_n} + \dots + \frac{d_{n-j+1,j}}{1 - \hat{y}_{j+1} - \dots - \hat{y}_n}}$$

(3.2.51)

Ένας εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας του y_j , για $j = 1, \dots, n$, παρουσιάζεται στη σχέση (3.2.51). Το επόμενο βήμα είναι να βρεθεί μια σχέση για τον

παράγοντα ανάπτυξης \hat{f}_j , χρησιμοποιώντας τον MLE \hat{y}_j . Αναδιατάσσοντας την σχέση (3.2.44) της chain ladder, δημιουργούμε μια σχέση με το γινόμενο των παραγόντων ανάπτυξης:

$$\hat{f}_{j+1}\hat{f}_{j+2}\cdots\hat{f}_n = \frac{\hat{D}_{n-j+1,n}}{d_{n-j+1,j}}$$

Αντικαθιστώντας τα $D_{n-j+1,n}$ από τη σχέση (3.2.49) και χρησιμοποιώντας τις εκτιμήσεις \hat{y}_j αντί για τα y_j , το γινόμενο των παραγόντων ανάπτυξης γίνεται:

$$\hat{f}_{j+1}\hat{f}_{j+2}\cdots\hat{f}_n = \frac{1}{1 - \hat{y}_{j+1} - \hat{y}_{j+2} - \cdots - \hat{y}_n} \quad (3.2.52)$$

Και

$$\hat{f}_j\hat{f}_{j+1}\cdots\hat{f}_n = \frac{1}{1 - \hat{y}_j - \hat{y}_{j+1} - \cdots - \hat{y}_n} \quad (3.2.53)$$

Τέλος, ο εκτιμητής του παράγοντα ανάπτυξης \hat{f}_j υπολογίζεται:

$$\hat{f}_j = \frac{1}{1 - \hat{y}_j\hat{f}_{j+1}\hat{f}_{j+2}\cdots\hat{f}_n} \quad (3.2.54)$$

Χρησιμοποιώντας τον MLE του y_n από την (3.2.50), η σχέση γίνεται:

$$\hat{f}_n = \frac{1}{1 - \hat{y}_n} = \frac{1}{1 - \frac{c_{1n}}{d_{1n}}} = \frac{d_{1n}}{d_{1n} - c_{1n}} = \frac{d_{1n}}{d_{1,n-1}} \quad (3.2.55)$$

Ο εκτιμητής που παίρνουμε από τη σχέση (3.2.55) είναι ίδιος με τον εκτιμητή της chain ladder για $j = n$. Για να δείξουμε πως οι υπόλοιποι παράγοντες ανάπτυξης στο μοντέλο του Poisson είναι ίδιοι με τους παράγοντες ανάπτυξης της chain ladder, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Εφόσον έχει αποδειχτεί για $j = n$, το πρώτο σκέλος της επαγωγής έχει ολοκληρωθεί. Το επόμενο βήμα είναι να βρεθεί μια γενικευμένη σχέση για τα \hat{f}_j . Για να γίνει αυτό, η έκφραση για τα \hat{y}_j χρειάζεται να απλοποιηθεί. Η εξίσωση (3.2.51) δίνει μια σχέση για τα \hat{y}_j και τα κλάσματα του παρονομαστή μπορούν να γραφτούν χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (3.2.52), (3.2.53) και ούτω καθεξής. Έτσι,

$$\hat{y}_j = \frac{c_{1j} + c_{2j} + \dots + c_{n-j+1,j}}{d_{1n} + d_{1,n-1}\hat{f}_n \dots + d_{n-j+1,j}\hat{f}_{j+1}\hat{f}_{j+2} \dots \hat{f}_n} \quad (3.2.56)$$

Εξετάζοντας τη σχέση για τα \hat{y}_j , μπορεί κανείς να παρατηρήσει πως αυτή είναι η αναλογία των τελικών απαιτήσεων. Ο αριθμητής αθροίζει τις μεμονωμένες απαιτήσεις που παρατηρήθηκαν κατά τα έτη ανάπτυξης j και ο παρονομαστής αθροίζει τις εκτιμήσεις των τελικών απαιτήσεων κατά τα ίδια έτη ανάπτυξης. Η

εξίσωση (3.2.54) είναι μια γενικευμένη σχέση για τα \hat{f}_j . Εισάγοντας τη νέα σχέση (3.2.56) στην (3.2.54), προκύπτει η ακόλουθη εξίσωση:

$$\hat{f}_j = \frac{1}{1 - \frac{c_{1j} + c_{2j} + \dots + c_{n-j+1,j}}{d_{1n} + d_{2,n-1}\hat{f}_n + \dots + d_{n-j+1,j}\hat{f}_{j+1}\hat{f}_{j+2}\dots\hat{f}_n}} \hat{f}_{j+1}\hat{f}_{j+2}\dots\hat{f}_n \quad (3.2.57)$$

Αυτή είναι η γενικευμένη εξίσωση. Έχει ήδη αποδειχθεί πως ο εκτιμητής \hat{f}_n είναι παράγοντας ανάπτυξης της chain ladder.

Ως μέρος της επαγωγικής διαδικασίας υποθέσαμε πως, για $k = j + 1, \dots, n$, το \hat{f}_k ισούται με τον παράγοντα ανάπτυξης της chain ladder. Το τελευταίο βήμα είναι να αποδείξουμε πως το \hat{f}_k ισούται με τον παράγοντα ανάπτυξης της chain ladder για $k = j$.

Ο παρονομαστής της σχέσης (3.2.57) πρέπει να απλοποιηθεί, το οποίο μπορεί να γίνει δείχνοντας ότι:

$$d_{1n} + d_{2,n-1}\hat{f}_n + \dots + d_{n-j+1,j}\hat{f}_{j+1}\hat{f}_{j+2}\dots\hat{f}_n = \hat{f}_{j+1}\hat{f}_{j+2}\dots\hat{f}_n \sum_{i=1}^{n-j+1} d_{ij} \quad (3.2.58)$$

Αυτό είναι αληθές για $j = n - 1$.

$$d_{1n} + d_{2,n-1} \hat{f}_n = d_{1n} + d_{2,n-1} \frac{d_{1,n}}{d_{1,n-1}} = \frac{d_{1,n}}{d_{1,n-1}} (d_{1,n-1} + d_{2,n-1}) = \hat{f}_n (d_{1,n-1} + d_{2,n-1})$$

Ομοίως για $j = n - 2$ ισχύει η ίδια σχέση:

$$\begin{aligned} d_{1n} + d_{2,n-1} \hat{f}_n + d_{3,n-2} \hat{f}_{n-1} \hat{f}_n &= \hat{f}_n (d_{1,n-1} + d_{2,n-1} + d_{3,n-2} \hat{f}_{n-1}) \\ &= \hat{f}_n (d_{1,n-1} + d_{2,n-1}) \frac{d_{1,n-1} + d_{2,n-1}}{d_{1,n-2} + d_{2,n-2}} + d_{3,n-2} \hat{f}_{n-1} \\ &= \hat{f}_{n-1} \hat{f}_n (d_{1,n-2} + d_{2,n-2} + d_{3,n-2}) \end{aligned}$$

Εκτελώντας την παραπάνω διαδικασία $n - j$ φορές αποδεικνύεται

η σχέση (3.2.58) και η εξίσωση (3.2.57) για τα \hat{f}_j μπορεί να μειωθεί ως εξής:

$$\begin{aligned} \hat{f}_j &= \frac{1}{1 - \frac{c_{1j} + c_{2j} + \dots + c_{n-j+1,j}}{\hat{f}_{j+1} \hat{f}_{j+2} \dots \hat{f}_n} \frac{1}{\hat{f}_{j+1} \hat{f}_{j+2} \dots \hat{f}_n \sum_{i=1}^{n-j+1} d_{ij}}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{ij} - \sum_{i=1}^{n-j+1} c_{ij}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{ij}}{\sum_{i=1}^{n-j+1} d_{i,j-1}} \end{aligned} \tag{3.2.59}$$

Η επαγωγική απόδειξη ολοκληρώνεται εφόσον τα \hat{f}_j ισούνται με τους παράγοντες ανάπτυξης της chain ladder. Αποδείξαμε λοιπόν πως χρησιμοποιώντας τον MLE

σε ένα μοντέλο Poisson θα παραχθούν ακριβώς τα ίδια αποτελέσματα με τη μέθοδο chain ladder.

3.2.5 Το μοντέλο Negative Binomial

Στην προηγούμενη ενότητα θεωρήσαμε τις απαιτήσεις C_{ij} ως τυχαίες μεταβλητές της Poisson. Προχωράμε διερευνώντας την αρνητική διωνυμική κατανομή καθώς ο Verral (2000) έφτιαξε ένα αναδρομικό μοντέλο που συνδέει το μοντέλο Poisson με το μοντέλο της negative binomial.

Οι απαιτήσεις C_{ij} δεσμευμένες με τη σχέση $Z_{ij} = z_{ij}$ ακολουθούν την κατανομή Poisson με μέση τιμή $\frac{z_{ij}y_j}{s_j}$ όπου $z_{ij} = E(D_{ij})$ και $s_j = \sum_{k=1}^j y_k$.

Η μεταβλητή Z_{ij} συμβολίζεται με το δείκτη j (επιπλέον του δείκτη i) καθώς έχουμε ένα δεσμευμένο μοντέλο στο οποίο το $z_{ij} = E(D_{ij})$ αλλάζει με έτος ανάπτυξης j . Πριν γίνει κάποια υπόθεση για τα Z_{ij} , θα δείξουμε τη σχέση μεταξύ

$$Z_{ij} = E(D_{ij}) = E(D_{i,j-1}) + E(C_{ij}) = Z_{i,j-1} + \frac{Z_{ij}y_j}{s_j}$$

$$Z_{ij} \text{ και } Z_{i,j-1} : \Rightarrow Z_{ij} = \frac{Z_{i,j-1}s_j}{s_{j-1}} \quad (3.2.60)$$

Με δεδομένη την παραπάνω σχέση, η κατανομή των C_{ij} είναι:

$$(C_{ij}|Z_{i,j-1}) \sim \text{Poisson}\left(\frac{Z_{i,j-1}Y_j}{S_{j-1}}\right) \quad (3.2.61)$$

Η παράμετρος y_j μπορεί πάλι να χρησιμοποιηθεί ως παράμετρος στήλης και εκφράζει την πιθανότητα μιας απαίτησης να αναγγελθεί στο έτος ανάπτυξης j .

Ο παράγοντας $\frac{Z_{i,j-1}}{S_{j-1}}$ μας δίνει την αναμενόμενη τελική απαίτηση.

Ο στόχος είναι να ελέγξουμε εάν τα C_{ij} δεσμευμένα στις απαιτήσεις που έχουν παρατηρηθεί από πριν ακολουθούν την αρνητική διωνυμική κατανομή. Για να το πετύχουμε αυτό, είναι απαραίτητο να κάνουμε κάποιες υποθέσεις σχετικά με τα $Z_{i,j-1}$. Έτσι, υποθέτουμε πως η κατανομή των $Z_{i,j-1}$ είναι γνωστή ώστε αυτό το μοντέλο να προσεγγιστεί κατά τον Bayes (Bayesian approach). Στο έτος ανάπτυξης j , υπάρχουν παρατηρήσεις έως και το έτος ανάπτυξης $j - 1$.

Γίνεται η υπόθεση ότι:

$$(Z_{i,j-1}|c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}) \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) \quad (3.2.62)$$

Χρησιμοποιώντας την καθιερωμένη ανάλυση κατά Bayes μπορεί κανείς να βρει την κατανομή των $Z_{i,j-1}$ δεσμευμένα στα $c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}$. Σε αυτή την περίπτωση, η prior κατανομή $\pi_{Z_{i,j-1}|c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}}(Z_{i,j-1}|c_{i1}, \dots, c_{i,j-1})$ είναι μια κατανομή Γάμμα και η

δεσμευμένη κατανομή $f_{c_{ij}|Z_{i,j-1}}(c_{ij}|z_{i,j-1})$ είναι μια κατανομή Poisson.

Η Μπεϋζιανή εξίσωση θα χρησιμοποιηθεί για να λυθεί αυτό το πρόβλημα:

$$\begin{aligned}
 \pi_{Z_{i,j-1}|c_{i1}, \dots, c_{ij}}(z_{i,j-1}|c_{i1}, \dots, c_{ij}) &= \frac{f_{c_{ij}|Z_{i,j-1}}(c_{ij}|z_{i,j-1})\pi_{Z_{i,j-1}|c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}}(z_{i,j-1}|c_{i1}, \dots, c_{i,j-1})}{\int_0^{\infty} f_{c_{ij}|Z_{i,j-1}}(c_{ij}|z_{i,j-1})\pi_{Z_{i,j-1}|c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}}(z_{i,j-1}|c_{i1}, \dots, c_{i,j-1})dz_{i,j-1}} \\
 &= \frac{\left(\left(z_{i,j-1}y_j / s_{j-1}\right)^{c_{ij}} / c_{ij}!\right) e^{z_{i,j-1}y_j / s_{j-1}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} (z_{i,j-1})^{\alpha-1} e^{z_{i,j-1}\beta}}{\int_0^{\infty} \left(\left(z_{i,j-1}y_j / s_{j-1}\right)^{c_{ij}} / c_{ij}!\right) e^{z_{i,j-1}y_j / s_{j-1}} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} (z_{i,j-1})^{\alpha-1} e^{z_{i,j-1}\beta} dz_{i,j-1}} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + c_{ij})} \left(\frac{y_j}{s_{j-1}} + \beta\right)^{\alpha + c_{ij}} (z_{i,j-1})^{\alpha + c_{ij} - 1} e^{-z_{i,j-1}\left(\frac{y_j}{s_{j-1}} + \beta\right)} \\
 &= \Gamma\left(\alpha + c_{ij}, \frac{y_j}{s_{j-1}} + \beta\right)
 \end{aligned} \tag{3.2.63}$$

Έτσι, ο Verral (2000) βρίσκει την κατανομή των $Z_{i,j-1}$ δεσμευμένα στα $c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}$. Η σχέση μεταξύ Z_{ij} και $Z_{i,j-1}$ δίνεται από την (3.2.60). Με έναν απλό μετασχηματισμό, μπορεί κανείς να βρει:

$$\begin{aligned}
\pi_{Z_{ij}|C_{i1}, \dots, C_{ij}}(z_{ij} | c_{i1}, \dots, c_{ij}) &= \pi_{Z_{i,j-1}|C_{i1}, \dots, C_{ij}}\left(z_{i,j-1} = \frac{s_{j-1}}{s_j} z_j | c_{i1}, \dots, c_{ij}\right) \frac{dz_{i,j-1}}{dz_{ij}} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha + c_{ij})} \left(\frac{s_{j-1}}{s_j} \left(\frac{y_j}{s_{j-1}} + \beta \right) \right)^{\alpha + c_{ij}} (z_{ij})^{\alpha + c_{ij} - 1} e^{-z_{ij} \left(\frac{y_j}{s_{j-1}} + \beta \right)} \\
&= \Gamma\left(\alpha + c_{ij}, \frac{s_{j-1}}{s_j} \left(\frac{y_j}{s_{j-1}} + \beta \right)\right)
\end{aligned} \tag{3.2.64}$$

Οι παραπάνω υπολογισμοί δίνουν την κατανομή των $Z_{i,j-1}$ δεσμευμένα στα $c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}$. Έπειτα, έχει ενδιαφέρον να βρούμε την κατανομή για κάθε j , όπου $j = 1, \dots, n$. Είναι επόμενο να ξεκινήσουμε με την εύρεση της κατανομής για $j = 1$. Για να γίνει αυτό είναι απαραίτητο να υποθέσουμε μια prior κατανομή για τα Z_n .

Ο Verral (2000) υποθέτει πως $\pi_{Z_n}(z_{i1}) \propto (z_{i1})^{-1}$. Όμοια με την (3.2.63) μπορούμε να βρούμε την κατανομή των z_{i1} εξαρτώμενα από τα c_{i1} :

$$\pi_{Z_{i1}|C_{i1}}(z_{i1} | c_{i1}) \propto \frac{\pi_{Z_{i1}}(z_{i1}) f_{C_{i1}|Z_{i1}}(c_{i1} | z_{i1})}{\int_0^{\infty} \pi_{Z_{i1}}(z_{i1}) f_{C_{i1}|Z_{i1}}(c_{i1} | z_{i1}) dz_{i1}} = \frac{\frac{1}{z_{i1}} \frac{z_{i1}^{-c_{i1}} e^{-z_{i1}}}{c_{i1}!}}{\int_0^{\infty} \frac{1}{z_{i1}} \frac{z_{i1}^{-c_{i1}} e^{-z_{i1}}}{c_{i1}!} dz_{i1}} = \Gamma(c_{i1}, 1) \tag{3.2.65}$$

Η γενικευμένη σχέση βρέθηκε στην (3.2.64) και η τώρα βρήκαμε την εξειδικευμένη σχέση για την πρώτη περίπτωση που εξετάσαμε, (3.2.65). Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε την κατανομή για $j = 2$ όπου $a = c_{i1}$ και $\beta = 1$. Όταν τα

α και β είναι γνωστά, εφόσον η σχέση (3.2.64) θα μας δώσει την κατανομή για $j = 3$, το μόνο που χρειάζεται είναι να τοποθετήσουμε τις αξίες στην εξίσωση.

$$\pi_{Z_{i2}|C_{i1}, C_{i2}}(z_{i2} | c_{i1}, c_{i2}) = \Gamma\left(c_{i1} + c_{i2}, \left(1 + \frac{y_j}{s_{j-1}}\right) \frac{s_{j-1}}{s_j}\right) = \Gamma(d_{i2}, 1) \quad (3.2.66)$$

Για να αποδείξουμε πως αυτό ισχύει για κάθε j , μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Υποθέτουμε πως για $k = j - 1$ η εξίσωση είναι $\pi_{Z_{i,j-1}|C_{i1}, \dots, C_{i,j-1}}(z_{i,j-1} | c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}) = \Gamma(d_{i,j-1}, 1)$. Όπως έχει ήδη εφαρμοστεί παραπάνω, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (3.2.64) για να το αποδείξουμε όταν $k = j$.

$$\pi_{Z_{ij}|C_{i1}, \dots, C_{ij}}(z_{ij} | c_{i1}, \dots, c_{ij}) = \Gamma\left(d_{i,j-1} + c_{ij}, \left(1 + \frac{y_j}{s_{j-1}}\right) \frac{s_{j-1}}{s_j}\right) = \Gamma(d_{ij}, 1) \quad (3.2.67)$$

Το τρίγωνο ανάπτυξη έχει αξίες μόνο στην πάνω αριστερά γωνία και, για να προβλέψουμε τις υπόλοιπες τιμές των C_{ij} , είναι επιθυμητό να βρούμε την κατανομή των C_{ij} δεσμευμένα στα $c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}$. Αυτό μπορεί να γίνει με τον παρακάτω υπολογισμό:

$$f_{C_{ij}|C_{i1}, \dots, C_{i,j-1}}(c_{ij} | c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}) = \int f_{C_{ij}|Z_{i,j-1}}(c_{ij} | z_{i,j-1}) f_{Z_{i,j-1}|C_{i1}, \dots, C_{i,j-1}}(z_{i,j-1} | c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}) dz_{i,j-1}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{z_{i,j-1} y_j}{s_{j-1}}\right)^{c_{ij}} e^{-\left(\frac{z_{i,j-1} y_j}{s_{j-1}}\right)}}{c_{ij}!} \frac{1}{\Gamma(d_{i,j-1})} \left(z_{i,j-1}\right)^{d_{i,j-1}-1} e^{-z_{i,j-1}} dz_{i,j-1} \\
&= \frac{\left(y_j / s_{j-1}\right)^{c_{ij}}}{c_{ij}!} \frac{\Gamma(d_{i,j-1} + c_{ij})}{\Gamma(d_{i,j-1}) (y_j / s_{j-1} + 1)^{d_{i,j-1} + c_{ij}}} *
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\infty} \frac{1}{\Gamma(d_{i,j-1} + c_{ij})} \left(y_j / s_{j-1} + 1\right)^{d_{i,j-1} + c_{ij}} \left(z_{i,j-1}\right)^{d_{i,j-1} + c_{ij} - 1} e^{-z_{i,j-1} (y_j / s_{j-1} + 1)} dz_{i,j-1} \\
&= \frac{\Gamma(d_{ij})}{c_{ij}! \Gamma(d_{i,j-1})} \frac{\left(y_j / s_{j-1}\right)^{c_{ij}}}{\left(s_j / s_{j-1}\right)^{d_{i,j-1} + c_{ij}}} \\
&= \frac{\Gamma(d_{ij})}{c_{ij}! \Gamma(d_{i,j-1})} \left(\frac{s_{j-1}}{s_j}\right)^{d_{i,j-1}} \left(\frac{s_{j-1}}{s_j}\right)^{c_{ij}} \left(\frac{y_j}{s_{j-1}}\right)^{c_{ij}} \\
&= \frac{\Gamma(d_{ij})}{c_{ij}! \Gamma(d_{i,j-1})} \left(\frac{s_{j-1}}{s_j}\right)^{d_{i,j-1}} \left(\frac{y_j}{s_j}\right)^{c_{ij}} \\
&= \frac{\left(c_{i,j-1} + c_{ij} - 1\right)!}{c_{ij}! (d_{i,j-1} - 1)!} \left(\frac{s_{j-1}}{s_j}\right)^{d_{i,j-1}} \left(1 - \frac{s_{j-1}}{s_j}\right)^{c_{ij}}
\end{aligned} \tag{3.2.68}$$

Έτσι,

$(C_{ij} | c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}) \sim \text{Negative Binomial}$

$$\text{με μέση τιμή } \frac{d_{i,j-1} y_j}{s_{j-1}} \text{ και διακύμανση } \frac{d_{i,j-1} s_j}{(s_{j-1})^2} \tag{3.2.69}$$

Οι παράγοντες ανάπτυξης της chain ladder θα μπορούσαν επίσης να εκφραστούν ως μια συνάρτηση των παραγόντων στήλης y_j , όπου:

$$f_j = \frac{\sum_{k=1}^j y_k}{\sum_{k=1}^{j-1} y_k} = \frac{s_j}{s_{j-1}} \quad (3.2.70)$$

Αποδεχόμενοι τον ορισμό στην (3.2.70), αποκαλύπτεται πως η κατανομή των C_{ij} δεσμευμένα στα $c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}$ μπορεί να γραφτεί μόνο ως συνάρτηση των συσσωρευμένων απαιτήσεων που παρατηρήθηκαν και των παραγόντων ανάπτυξης. Η κατανομή των C_{ij} δεσμευμένα στα $c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}$ είναι:

$$\frac{(d_{i,j-1} + c_{ij} - 1)!}{c_{ij}!(d_{i,j-1} - 1)!} \left(\frac{1}{f_j}\right)^{d_{i,j-1}} \left(1 - \frac{1}{f_j}\right)^{c_{ij}} \quad (3.2.71)$$

με μέση τιμή $(f_j - 1)d_{i,j-1}$ και διακύμανση $f_j(f_j - 1)d_{i,j-1}$.

Εφόσον $D_{ij} = D_{i,j-1} + C_{ij}$, η κατανομή των D_{ij} δεσμευμένα στα $c_{i1}, \dots, c_{i,j-1}$ είναι επίσης αρνητική διωνυμική και είναι:

$$\frac{(d_{i,j-1} + c_{ij} - 1)!}{c_{ij}!(d_{i,j-1} - 1)!} \left(\frac{1}{1 + f_j}\right)^{d_{i,j-1}} \left(1 - \frac{1}{1 + f_j}\right)^{c_{ij}} \quad (3.2.72)$$

όπου μπορεί να γραφτεί και ως:

$$\frac{(d_{ij} - 1)!}{(d_{ij} - d_{i,j-1})!(d_{i,j-1} - 1)!} \left(\frac{1}{1 + f_j} \right)^{d_{i,j-1}} \left(1 - \frac{1}{1 + f_j} \right)^{d_{ij} - d_{i,j-1}}$$

με μέση τιμή $f_j d_{i,j-1}$ και διακύμανση $f_j(f_j - 1)d_{i,j-1}$.

Οι σχέσεις (3.2.71) και (3.2.72) δείχνουν πως είναι περιττό να χρησιμοποιήσουμε εξαρτήσεις για όλες τις προηγούμενες μεμονωμένες απαιτήσεις $(c_{i1}, \dots, c_{i,j-1})$ αφού η κατανομή των D_{ij} δεσμευμένη στα $d_{i,j-1}$ είναι πανομοιότυπη με την (3.2.72).

4. Εφαρμογή των μεθόδων σε αληθινά δεδομένα

Οι μέθοδοι αποθεματοποίησης που αναφέρθηκαν προηγουμένως έχουν παρουσιαστεί ως επί το πλείστον με θεωρητικό τρόπο. Επομένως, είναι σκόπιμο να τις εφαρμόσουμε και σε ένα παράδειγμα με πραγματικά δεδομένα. Έτσι, για κάθε διαφορετική μέθοδο θα προκύψουν άλλα αποτελέσματα και εδώ προκύπτει το βασικό πρόβλημα που έχουν να αντιμετωπίσουν κάθε φορά οι αναλογιστές: να επιλέξουν τη μέθοδο που ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα τους.

Έτσι, επιλέξαμε ένα τρίγωνο ανάπτυξης IBNR που περιέχει δεδομένα πραγματικής ζωής από μια ασφάλιση αστικής ευθύνης.

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τις προηγούμενες μεθοδολογίες και θα σχολιάσουμε τα διαφορετικά αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, πρόκειται να εφαρμόσουμε τη βασική μέθοδο Chain Ladder και το μοντέλο του Mack. Αυτές οι δύο μέθοδοι μας δίνουν τα ίδια αποτελέσματα με τη διαφορά ότι το μοντέλο του Mack μας παρέχει πληροφορίες σχετικά με το τυπικό σφάλμα. Έπειτα, θα χρησιμοποιήσουμε την Bootstrap Chain Ladder πραγματοποιώντας 1.000 επαναλήψεις και υποθέτοντας ότι οι απαιτήσεις ακολουθούν over-dispersed Poisson κατανομή.

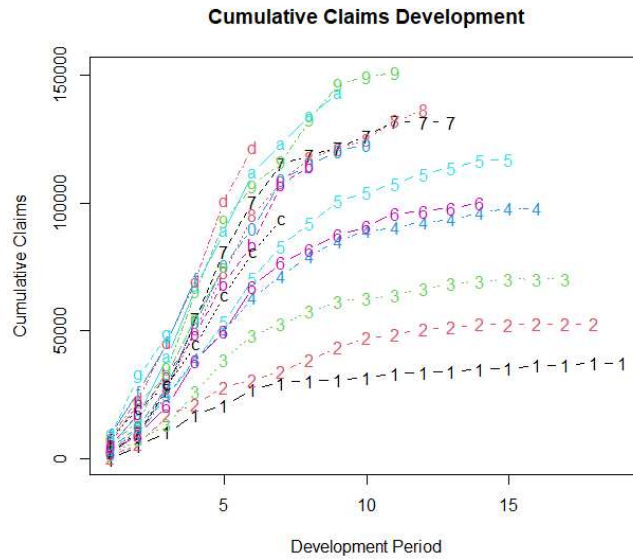
Τα αποτελέσματα που ακολουθούν έχουν υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τη στατιστική γλώσσα προγραμματισμού R.

Αρχικά, οι παρατηρήσεις των συσσωρευμένων απαιτήσεων παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 12: Τρίγωνο ανάπτυξης με τις συσσωρευμένες απαιτήσεις της ασφάλισης αστικής ευθύνης

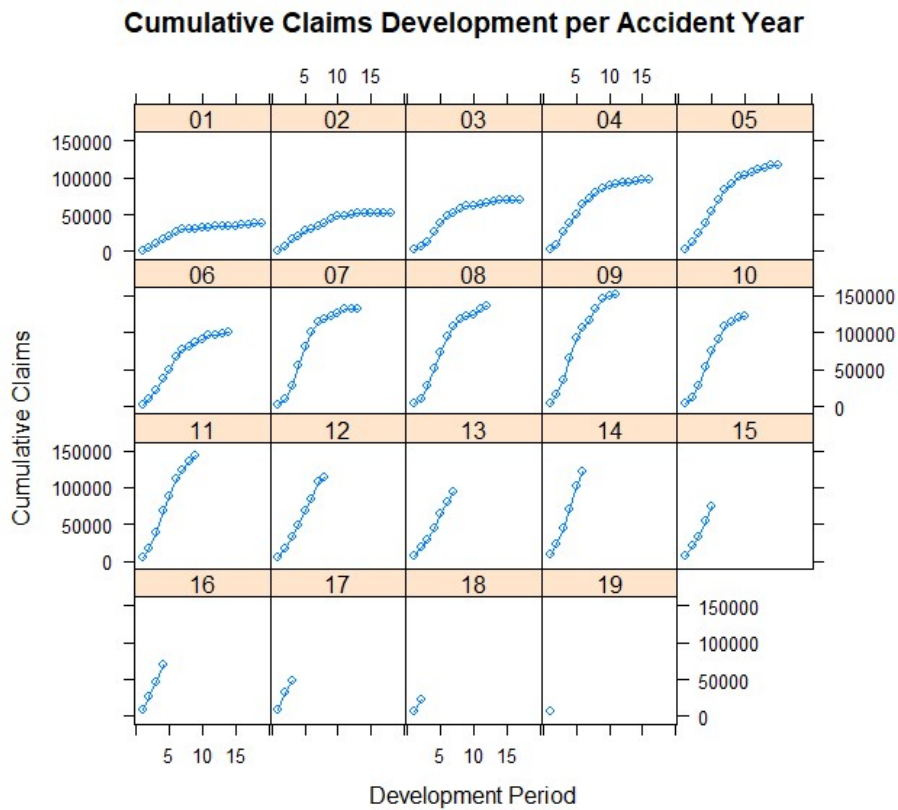
Accident Year	Cumulative Losses in Development Year																		
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	0	5.200	10.600	17.300	21.133	27.125	29.825	30.604	30.944	31.896	33.383	33.967	34.067	35.008	35.359	36.644	36.642	37.392	37.393
2	700	6.000	17.100	21.557	27.980	30.980	34.236	38.795	43.551	47.320	48.807	50.881	51.496	52.805	52.646	52.695	52.695	52.699	
3	2.000	7.700	13.654	26.334	38.734	48.492	52.685	57.677	61.664	62.646	64.204	66.754	68.493	69.570	70.418	70.217	70.462		
4	2.500	9.458	25.658	39.001	50.045	63.106	71.721	79.218	85.239	89.252	90.710	92.559	93.815	96.383	97.981	98.052			
5	2.688	11.958	25.241	38.562	53.836	70.607	83.326	92.246	100.784	104.161	107.791	111.542	114.025	116.686	117.068				
6	2.560	9.448	21.037	38.454	49.875	67.396	76.950	81.942	87.534	90.925	96.038	96.957	98.121	100.063					
7	2.795	10.220	27.252	54.768	81.070	100.423	115.359	118.617	121.727	126.110	132.068	131.688	131.801						
8	3.778	11.072	28.103	51.360	73.364	95.403	108.446	117.982	121.342	124.977	132.322	136.538							
9	5.083	15.237	35.488	65.717	92.923	106.712	116.284	132.801	146.637	149.505	151.035								
10	3.996	12.764	28.641	53.651	75.726	90.144	109.356	115.232	120.466	122.910									
11	5.451	17.508	39.835	67.750	89.010	112.132	123.015	134.509	142.955										
12	5.146	17.896	33.035	49.087	68.793	84.154	107.485	114.596											
13	8.264	19.681	29.160	44.865	63.715	80.831	93.745												
14	8.569	23.860	45.769	69.704	101.389	122.228													
15	7.088	21.831	33.254	55.304	75.132														
16	9.580	26.534	45.800	70.765															
17	9.172	32.395	48.358																
18	6.393	22.201																	
19	6.423																		

Ο παραπάνω πίνακας που περιέχει συσσωρευμένες απαιτήσεις μπορεί να απεικονιστεί με την ακόλουθη γραφική παράσταση:



Εικόνα 6: Η ανάπτυξη όλων των συσσωρευμένων απαιτήσεων

Ωστόσο, είναι σκόπιμο να αναπαραστήσουμε και την ανάπτυξη των απαιτήσεων για κάθε έτος ατυχήματος ξεχωριστά:



Εικόνα 7: Η ανάπτυξη των συσσωρευμένων απαιτήσεων ανά έτος ατυχήματος

Αρχικά, από τα δεδομένα μας προκύπτει πως το συνολικό ποσό των εξοφλημένων απαιτήσεων είναι 1.714.424 και αντιπροσωπεύει το άθροισμα των τιμών της παραπάνω διαγωνίου. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Chain Ladder στα παραπάνω δεδομένα, μπορούμε να υπολογίσουμε τις τελικές εκτιμώμενες ζημιές στα 2.597.095. Έτσι, το συνολικό ποσό των αποθεμάτων που πρέπει να διατηρεί η ασφαλιστική εταιρεία, για να είναι ικανή να ανταποκριθεί στις υποχρεώσεις έναντι των πελατών της, είναι ίσο με 882.671 .

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Mack, μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το τυπικό σφάλμα των εκτιμήσεων για κάθε έτος ατυχήματος.

Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στον ακόλουθο πίνακα.

Πίνακας 163: Εκτίμηση των IBNR με το μοντέλο του Mack

Accident Year	IBNR	Mack S.E.
1	0	-
2	1	680
3	597	1.110
4	981	1.460
5	1.726	1.800
6	2.303	1.760
7	6.111	2.280
8	8.157	2.620
9	12.555	3.640
10	14.977	3.980
11	22.618	5.000
12	26.525	5.830
13	31.297	6.700
14	64.979	11.350
15	67.445	11.690
16	115.681	15.340
17	163.474	25.330
18	168.717	42.420
19	174.528	53.110
	882.671	89.860

Έτσι, τα αποθέματα IBNR μέσω του μοντέλου του Mack είναι επίσης ίσα με 882.671 . Αυτή τη φορά όμως έχουμε την πρόσθετη πληροφορία πως το τυπικό σφάλμα αυτής της τιμής είναι 89.860 και, ως επακόλουθο, ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι 10,2%.

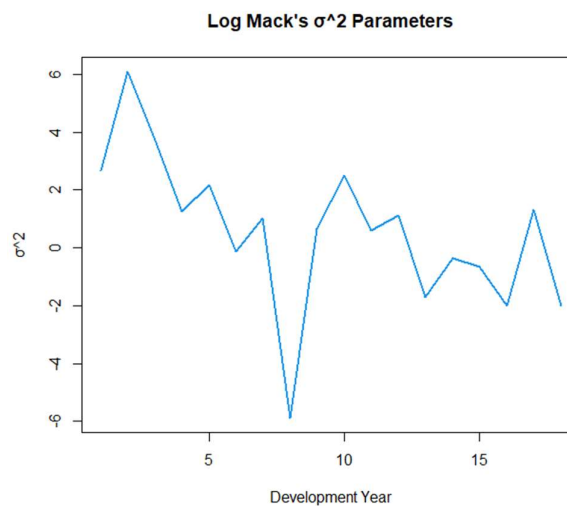
Ένα συμμετρικό διάστημα εμπιστοσύνης 95% για τα αποθέματα δίνεται από την σχέση:

$$\hat{R} - 1,96 \cdot s.e.(\hat{R}) < R < \hat{R} + 1,96 \cdot s.e.(\hat{R}) \quad (4.1)$$

Άρα, από την (4.1) παίρνουμε ότι:

$$706.545 < R < 1.058.797$$

Επιπλέον, στο επόμενο διάγραμμα μπορούμε να παρατηρήσουμε τη μεταβολή των Mack εκτιμητών $\hat{\sigma}_j^2$ (λογαριθμικά) ανά τα έτη:



Εικόνα 8: Ο λογάριθμος της διακύμανσης της παραμέτρου του Mack

Στη συνέχεια, θα προχωρήσουμε στην εφαρμογή της διαδικασίας Bootstrap. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, επιλέξαμε να πραγματοποιήσουμε 1000 επαναλήψεις και υποθέσαμε πως οι απαιτήσεις ακολουθούν over-dispersed Poisson κατανομή.

Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στον ακόλουθο πίνακα:

Πίνακας 17: Εκτίμηση των IBNR με Bootstrap

Accident Year	IBNR	Bootstrap S.E.
1	0	-
2	2	783
3	691	1.285
4	1.056	1.572
5	1.858	.1938
6	2.240	1.712
7	5.946	2.218
8	8.290	2.663
9	12.756	3.698
10	14.986	3.982
11	22.641	5.005
12	27.085	5.953
13	31.958	6.842
14	66.152	11.555
15	68.659	11.900
16	114.078	15.127
17	161.185	24.975
18	168.291	42.313
19	174.004	52.951
	881.878	112.298

Έτσι, οι IBNR απαιτήσεις μέσω της διαδικασίας Bootstrap είναι ίσες με 881.878. Το τυπικό σφάλμα του παραπάνω υπολογισμού ισούται με 112.298.

Το συμμετρικό 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τα αποθέματα που προκύπτει από τη σχέση (4.1) είναι:

$$\Rightarrow 661.774 < R < 1.101.982$$

Ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι 12,7%, δηλαδή υψηλότερος από τον συντελεστή που προέκυψε από το μοντέλο του Mack.

Όπως προκύπτει, και οι δύο στοχαστικές διαδικασίες δίνουν παρόμοια αποτελέσματα με τη διαδικασία Bootstrap να έχει λίγο χαμηλότερα IBNR και κατά 2,5% μεγαλύτερο συντελεστή μεταβλητότητας CV.

5. Συμπεράσματα

Σκοπός των παραπάνω εφαρμογών ήταν ο υπολογισμός και η σωστή εκτίμηση των απαραίτητων αποθεμάτων που χρειάζεται να κατέχει η ασφαλιστική εταιρεία, σύμφωνα με το πλαίσιο του Solvency II.

Για να γίνει αυτό, διερευνήσαμε διάφορες μεθοδολογίες όπως την παραδοσιακή Chain Ladder, το μοντέλο του Mack και τη διαδικασία Bootstrap. Στη συνέχεια, συγκρίναμε τα αποτελέσματα που παρήγαγε το κάθε μοντέλο για να ανακαλύψουμε τις μεταξύ τους διαφορές.

Εξετάσαμε ένα σύνολο πραγματικών δεδομένων που αντιπροσώπευαν απαιτήσεις από ασφάλιση αστικής ευθύνης. Όπως αποδείχθηκε, οι διαφορές μεταξύ των μεθόδων φαίνονται να είναι σχεδόν αμελητέες καθώς τα διαφορετικά αποτελέσματα είχαν αρκετά μικρές αποκλίσεις.

Εν κατακλείδι, αν και εφαρμόσαμε επιτυχώς μόνο μερικές από τις μεθόδους στα δεδομένα μας, δεν μπορούμε ακόμα να βγάλουμε επίσημα συμπεράσματα σχετικά με το ποια μέθοδος εκτίμησης είναι η καλύτερη συνολικά. Σίγουρα, η παραδοσιακή Chain Ladder είναι η πιο δημοφιλής μέθοδος λόγω της απλότητάς της και προτιμάται ευρέως από πολλούς.

Ωστόσο, μια ασφαλής προσέγγιση θα ήταν να εξετάσουμε πρώτα τα δεδομένα ενδελεχώς και, στη συνέχεια, να προσπαθήσουμε να βρούμε το μοντέλο που

ταιριάζει καλύτερα στα δεδομένα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε, αντί να χρησιμοποιούμε ασυλλόγιστα και μηχανικά την ίδια μέθοδο σε όλες τις περιπτώσεις. Αυτή η προσέγγιση είναι σκόπιμο να εφαρμοστεί τόσο στα ντετερμινιστικά όσο και στα στοχαστικά μοντέλα αποθεματοποίησης.

Βιβλιογραφία

- ❖ Björkwall Susanna, Hössjer Ola and Ohlsson Esbjörn (2010). *Bootstrapping the Separation Method in Claims Reserving*. ASTIN Bulletin, **40**: 845 – 869
- ❖ Buchwalder, M., H. Bühlmann, M. Merz, and M. V. Wüthrich. 2006. *The Mean Square Error of Prediction in the Chain Ladder Reserving Method (Mack and Murphy Revisited)*. ASTIN Bulletin **36**: 521–542.
- ❖ Carrato A., McGuire G., Scarth R. (2016). *A Practitioner's Introduction to Stochastic Reserving*.
- ❖ England. P.D., Verrall. R.J.. (1999). *Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving*. Insurance: Mathematics and Economics. **25**. 281-293.
- ❖ Mack. T.. (1993). *Distribution-free calculation of the standard error of the chain-ladder reserve estimates*. ASTIN Bulletin. **23**.213-225.
- ❖ Mack, T. (1994) *Measuring the variability of chain ladder reserve estimates*. Casualty Actuarial Society Forum Spring 1994, vol. 1, 101–182.

- ❖ Mack, T. (1999). *The Standard Error of Chain Ladder Reserve Estimates: Recursive Calculation and Inclusion of a Tail Factor*. ASTIN Bulletin, **29**(2), 361-366.

- ❖ Pigeon Mathieu, Antonio Katrien, Denuit Michel. (2014) *Individual Loss Reserving Using Paid-Incurred Data*. Insurance: Mathematics and Economics, 2014, **58**, 121-131.

- ❖ Preeti Chandra Shekhar, Nandha Kumar and S. R. Warriar. (2008). *Journey of Insures Solvency regulations – 2007 and beyond*.
https://www.actuaires.org/Boston2008/Papers/IPM5_Preeti_Nandha_Warrier.pdf

- ❖ Taylor G., McGuire G. (2016). *Stochastic Loss Reserving Using Generalized Linear Models*.

- ❖ Verrall, R. J. (2004). *A Bayesian Generalized Linear Model for the Bornhuetter-Ferguson Method of Claims Reserving*. North American Actuarial Journal **8**(3): 67–89.