ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

στην

«ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ»

ΜΕΤΡΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΥΣΤΕΡΗΣΗ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ

RUIN MEASURES FOR RISK MODELS WITH DELAYED BY-CLAIMS

ΜΠΑΚΑΣΕΤΑΣ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ

Διπλωματική Εργασία

η οποία υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς 2021.

Η παρούσα διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:
-Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)
-Τζαβελάς Γεώργιος
-Ψαρράκος Γεώργιος

Η έγκριση της διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

RUIN MEASURES FOR RISK MODELS WITH DELAYED BY-CLAIMS

BAKASETAS KONSTANTINOS

MCs Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece 2021.

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την συνεχή υποστήριξη καθ΄ όλη την διάρκεια των εκπαιδευτικών μου χρόνων. Επίσης, θερμές ευχαριστίες στον καθηγητή και επιβλέποντα μου , κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη για την πολύτιμη βοήθεια του καθ΄ όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής μου εργασίας. Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ.Τζαβελά Γεώργιο, καθώς και τον κ.Ψαρράκο Γεώργιο για την συμμετοχή τους στην επιτροπή.

Περίληψη

Η διπλωματική αυτή εργασία πραγματεύεται τα μέτρα χρεοκοπίας και τα μοντέλα της θεωρίας κινδύνου με υστέρηση των απαιτήσεων. Πιο συγκεκριμένα, το ερευνητικό θέμα της παρούσης εστιάζει κυρίως στις απαιτήσεις οι οποίες απορρέουν από άλλες απαιτήσεις και στην επίδραση που αυτές έχουν στα κλασσικά μοντέλα της θεωρίας κινδύνου. Σημαντική θεώρηση στην οποία βασίζεται η παρούσα διπλωματική είναι αυτή της χρονικής υστέρησης μεταξύ της εμφάνισης μίας απαίτησης η οποία προκαλείται από μία άλλη απαίτηση. Επιπλέον, σημειώνεται ότι στην παρούσα αναλύονται διάφορες διαδικασίες πλεονάσματος σε συνεχή χρόνο.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται η εισαγωγή στο ερευνητικό θέμα και παρουσιάζονται συνοπτικά τα ευρήματα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης στο πεδίο των μοντέλων κινδύνου και στο πεδίο των εφαρμοζόμενων μαθηματικών μοντέλων και μεθόδων για την υποστήριξη της σχετική θεωρίας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται αναλυτικά διάφορα μέτρα χρεοκοπίας συναρτήσει των απαιτήσεων και παρουσιάζεται το κλασσικό μοντέλο κινδύνου.

Στο τρίτο κεφάλαιο προτείνεται ένα μοντέλο κινδύνου συνεχούς χρόνου το οποίο ισχύει για απαιτήσεις οι οποίες εμφανίζουν χρονική υστέρηση.

Στο τέταρτο κεφάλαιο παρατίθενται τα συμπεράσματα τα οποία εξήχθησαν από τη συγγραφή της παρούσης και δίδονται προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

Abstract

This thesis addresses the ruin measures under the risk theory classic model under the context of by-claims. More specifically, the research topic focuses mainly on the by-claims and on their effect on the classical model of risk theory. This thesis sits on the fact that claims arise from precedent claims after a lag time. Moreover, it is noted that the ruin measures are examined under the context of creating surplus strategies, which are thoroughly analyzed.

The first chapter serves as an introduction to the research topic, where the literature review findings on the field of risk models and on the field of applied mathematical models and methods supporting the relevant theory are briefly presented.

Various ruin measures are presented in detail in the second chapter along with the classic risk model.

A continuous time risk model for delayed claims is proposed in the third chapter.

Finally, conclusions are drawn and suggestions for future research are provided in the fourth chapter.

Κατάλογος εικόνων

Εικόνα 1: Διεργασία πλεονάσματος σύμφωνα με το κλασσικό μοντέλο κινδύνου (Cramer και Lundberg) (Jiang, 2015) 12

Εικόνα 2: Διεργασία πλεονάσματος με προσθήκη κεφαλαίου (Dickson & Qazvini, 2016) 17

Εικόνα 3: Γραφική αναπαράσταση ανανεωτικής συνάρτησης (Pandey & van der Weide, 2017) 31

Κατάλογος πινάκων

Πίνακας 1: Η έννοια των πρωτογενών και δευτερογενών απαιτήσεων (Yuen & Guo, 2001) 18

Πίνακας περιεχομένων

Abstract 5

Κατάλογος εικόνων 6

Κατάλογος πινάκων 7

Πίνακας περιεχομένων 8

1. Εισαγωγή 10

 1.1. Θεωρία Κινδύνου και μοντέλα κινδύνου 12

 1.2. Απαιτήσεις 18

 1.3. Ανασκόπηση μαθηματικών μοντέλων 19

 1.4. Πιθανότητα χρεοκοπίας 23

2. Μέτρα χρεοκοπίας 27

 2.1. Εισαγωγή 27

 2.2. Κλασσικό μοντέλο κινδύνου 28

 2.3. Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu 36

3. Προτεινόμενο μοντέλο 50

 3.1. Εισαγωγή 50

 3.2. Περιγραφή μοντέλου 52

 3.3. Σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων 56

 3.4. Μετασχηματισμός LaPlace 59

3.5. Ελαττωματική ανανεωτική συνάρτηση 60

3.6. Υπολογισμοί για εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις 62

Συμπεράσματα 65

Βιβλιογραφία 68

1. Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό πραγματοποιείται μία εισαγωγή στο ερευνητικό θέμα και παρουσιάζονται συνοπτικά τα ευρήματα της βιβλιογραφικής ανασκόπησης στα πεδία από τα οποία αποτελείται το ερευνητικό θέμα.

Η θεωρία χρεοκοπίας είναι ένα από τα πιο ενεργά ερευνητικά θέματα στην αναλογιστική επιστήμη για τις τελευταίες πολλές δεκαετίες. Λαμβάνοντας υπόψη την ώρα εκπλήρωσης των απαιτήσεων και το ύψος αυτών σε σχέση με το διαθέσιμο εισόδημα, μπορεί να προσδιοριστεί ο κίνδυνος καθώς και το επίπεδο πλεονάσματος (Schmeiser & Luca, 2017). Μάλιστα, η θεωρία χρεοκοπίας υπό το πρίσμα των πλεονασμάτων βρίσκει μεγάλη εφαρμογή στο πεδίο των χαρτοφυλακίων ασφαλιστικών προϊόντων, στο ευρύτερο πεδίο της αντιστάθμισης κινδύνου (Xie & Zou, 2011).

Σημαντική συνιστώσα της θεωρίας χρεοκοπίας αποτελεί η πιθανότητα χρεοκοπίας. Μία απλή προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας μπορεί να είναι η ακόλουθη· με την πιθανότητα χρεοκοπίας μετράτε η πιθανότητα το πλεόνασμα να λάβει αρνητική τιμή (Wat, et al., 2018). Στόχος της θεωρίας κινδύνου είναι να ελαχιστοποιηθεί η πιθανότητα αυτή, μέσα από διάφορες διαδικασίες, οι οποίες εστιάζουν στη συνιστώσα της πιθανότητας χρεοκοπίας, ήτοι στη μεγιστοποίηση των πλεονασμάτων. Επιπλέον, σημαντική συνιστώσα της θεωρίας κινδύνου, για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας, αποτελεί ο χρόνος, ο οποίος μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτός, ανάλογα με την εφαρμογή και την πολυπλοκότητα κάθε προβλήματος (Gerber & Shiu, 1998). Σημαντική είναι η συνεισφορά της προεξοφλημένης συνάρτηση ποινής των Gerber και Shiu (Gerber & Shiu, 1998).

Προκειμένου να διατυπωθεί μαθηματικά μια τέτοια διαδικασία διαχείρισης κινδύνου, το κλασικό μοντέλο κινδύνου περιγράφει το πλεόνασμα, κάνοντας την υπόθεση ότι αυτό εκκινεί από μία θετική τιμή και αυξομειώνεται μέσα από την καταβολή απαιτήσεων και μέσα από την είσπραξη δικαιωμάτων ή ασφαλίστρων. Ως εκ τούτου, το αρχικό πλεόνασμα, τα εισπραχθέντα δικαιώματα και οι καταβαλλόμενες απαιτήσεις αποτελούν τις τρεις βασικές συνιστώσες του κλασσικού μοντέλου κινδύνου μιας διαδικασίας δημιουργίας πλεονασμάτων. Σημειώνεται δε και πάλι ότι όταν το πλεόνασμα μειωθεί και φτάσει σε αρνητικές τιμές, τότε επέρχεται η χρεοκοπία (Cossette, et al., 2010).

Λόγω της περίπλοκης φύσης της χρηματοπιστωτικής αγοράς, τα μοντέλα κινδύνου προσαρμόζονται διαρκώς στη συνεχώς μεταβαλλόμενη χρηματοπιστωτική αγορά παρά τις ακραίες προκλήσεις. Εντούτοις, αν και τα μοντέλα κινδύνου έχουν αναπτυχθεί και επεκταθεί σημαντικά τις τελευταίες δεκαετίες, εξακολουθούν να χρήζουν περαιτέρω βελτιώσεων (Trufin, et al., 2011).

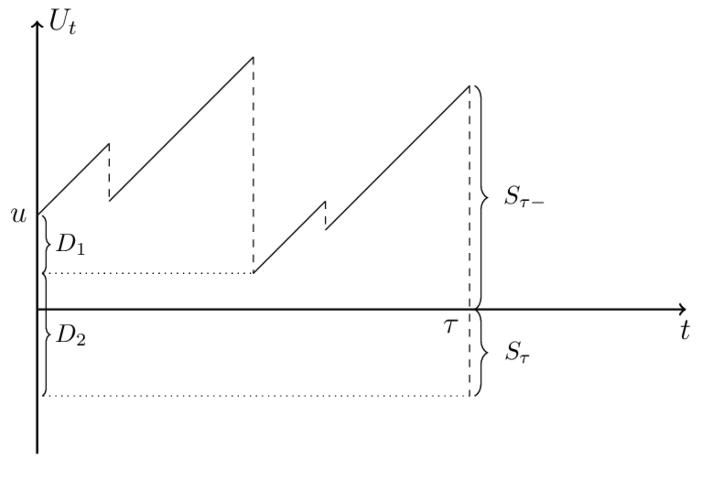
Η παρούσα διπλωματική εργασία επικεντρώνεται στην εξέταση και μοντελοποίηση των μέτρων χρεοκοπίας. Μελετώνται ορισμένες διαδικασίες πλεονάσματος σε συνεχή χρόνο στη θεωρία κινδύνου, θεωρώντας ότι κάθε απαίτηση μπορεί να προκαλεί την εμφάνιση και μιας άλλης απαίτησης (Klüppelberg & Mikosch, 1995; Kwan & Yang, 2007; Liu, et al., 2005). Μελετάται το κλασσικό μοντέλο κινδύνου με ή χωρίς την ύπαρξη ενός όρου διάχυσης που περιγράφεται από την κίνηση Brown, το κλασσικό μοντέλο κινδύνου σε Μαρκοβιανό περιβάλλον, ενώ θεωρείται ότι τα ασφάλιστρα (δικαιώματα) που εισπράττονται δεν είναι ντετερμινιστικά.

Για όλα τα παραπάνω μοντέλα μελετώνται και δίδονται αναλυτικά αποτελέσματα (όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων ανήκουν στις κλασματικές οικογένειες κατανομών) για διάφορα μέτρα χρεοκοπίας μέσω της της μελέτης των αντίστοιχων αναμενόμενων προ εξοφλημένων συναρτήσεων ποινής.

1.1. Θεωρία Κινδύνου και μοντέλα κινδύνου

Η θεωρία κινδύνου βασίζεται στο κλασσικό σύνθετο μοντέλο Poisson με σταθερή ένταση λ. Στο μοντέλο Poisson το πλεόνασμα περιγράφεται από το άθροισμα του αρχικού κεφαλαίου και των συλλεγόμενων ασφαλίστρων, τα οποία συλλέγονται και αθροίζονται σωρευτικά. Σύμφωνα με την παραδοχή της ανεξαρτησίας του χρόνου και του ύψους των απαιτήσεων, ο χρόνος μεταξύ της εμφάνισης δύο απαιτήσεων είναι ανεξάρτητος από το μέγεθος των δύο αυτών απαιτήσεων.

Παρακάτω, στην Εικόνα 1 παρατίθεται γραφικά η διεργασία πλεονάσματος όπως αυτή περιγράφεται στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, το μοντέλο Cramer και Lundberg:



Εικόνα 1: Διεργασία πλεονάσματος σύμφωνα με το κλασσικό μοντέλο κινδύνου (Cramer και Lundberg) (Jiang, 2015)

Σύμφωνα με την παραπάνω διεργασία, ένα προαπαιτούμενο προκειμένου η διεργασία να καταλήγει σε θετικό αποτέλεσμα, δηλαδή να αποφεύγεται η χρεοκοπία, είναι η διασφάλιση ότι το μέσο επιτόκιο των εισπραττόμενων ασφαλίστρων είναι μεγαλύτερο από το μέσο επιτόκιο των προς εκπλήρωση απαιτήσεων. Το μοντέλο αυτό προέκυψε από τους Cramer και Lundberg στις αρχές του 20ου αιώνα (Cramer, 1930).

Το μοντέλο αυτό εισάγει μία αντίστροφη διεργασία κινδύνου U_t, όπου με ένα αρχικό κεφάλαιο U_0=u και ένα σταθερό επιτόκιο υπέρ το άρτιο (premium) c:

$$U_t = u + c \cdot t - S_t$$

Στην παραπάνω εξίσωση, με S_t συμβολίζεται η σωρευτική διαδικασία άθροισης των απαιτήσεων, με την οποία εισάγεται στην εξίσωση το άθροισμα των απαιτήσεων μέχρι το χρόνο t.

Η διαδικασία αυτή ορίζεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

Με X_i συμβολίζονται οι απαιτήσεις οι οποίες αθροίζονται μέχρι και τον όρο N_t ο οποίος υπολογίζεται από μία σημειακή διεργασία Poisson με ένταση λ. Οι απαιτήσεις X_i είναι ανεξάρτητες από τον όρο N_t με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x)$, αθροιστική συνάρτηση κατανομής $F_X(x)$ και μέση τιμή μ=E[X_i] η οποία προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση:

$$\mu = \int_0^{\infty} x \cdot dF_x(x)$$

Αν και αρχικά η θεωρία κινδύνου εστίασε στο μέγεθος των απαιτήσεων και στην κατανομή τους, αργότερα γενικεύθηκε με την εισαγωγή της ανεξαρτησίας του μεγέθους και του χρόνου μεταξύ των απαιτήσεων (Cramer, 1930; Klüppelberg &

Mikosch, 1995). Πλέον, το μέγεθος και ο χρόνος κατά τον οποίο εμφανίζονται οι απαιτήσεις δεν είναι κύριες συνιστώσες για τον προσδιορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Το 1988 ο Gerber πρότεινε ένα σύνθετο διωνυμικό μοντέλο κινδύνου, για εφαρμογή σε προβλήματα διακριτού χρόνου και διακριτών διεργασιών κινδύνου (Gerber, 1988). Το μοντέλο συνοψίζει στην παρακάτω σχέση:

$$U_t = u + t - \sum_{i=1}^{t} \xi_i X_i$$

όπου U_t είναι το επίπεδο του πλεονάσματος σε χρόνο t όπου

$$U_t \in \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

και

$$t \in \mathbb{N} = \{0,1,2, \dots\}$$

και u είναι το αρχικό πλεόνασμα για t=0, όπου

$$u = U_0 \in \mathbb{N}_0$$

και

ξi μία τυχαία μεταβλητή Bernoulli η οποία εισάγεται στο μοντέλο για να εισάγει την εμφάνιση απαιτήσεων i σε χρόνο ti, όπου με το δείκτη i συμβολίζεται εκάστη απαίτηση και Xi είναι το ύψος εκάστη απαίτησης σε χρόνο i κατά τον οποίο εμφανίζεται αυτή η απαίτηση.

Σημειώνεται ότι το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο κινδύνου αποτελεί ειδική περίπτωση η οποία περιλαμβάνει τυχαίους περιπάτους και μπορεί να βρει εφαρμογή σε πολλά πραγματικά προβλήματα όπως στην ανάλυση του κινδύνου για ασφαλιστικά και επενδυτικά προϊόντα (Wat, et al., 2018).

Τα μοντέλα κινδύνου διακριτού χρόνου είναι πιο πολύπλοκα από τα αντίστοιχα μοντέλα συνεχούς χρόνου, στα οποία δίδεται έμφαση στα επόμενα κεφάλαια. Εντούτοις, το μοντέλο του Gerber (1988) αποτέλεσε τη βάση για περαιτέρω έρευνα σε ό,τι αφορά στην πιθανότητα χρεοκοπίας, αρχικά από τους Shiu (1989) και Willmot (1993) (Shiue, 1989; Willmot, 1993).

Ακολούθως, ο Dickson (1994) επιχείρησε να προσεγγίσει την πιθανότητα χρεοκοπίας βασιζόμενος στο μοντέλο του Gerber και κατέληξε ότι το κλασσικό μοντέλο κινδύνου συνεχούς χρόνου του Poisson μπορεί να προσεγγιστεί μέσα από το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο κινδύνου διακριτού χρόνου του Gerber (Dickson, 1994). Επιπλέον, οι Cheng et al. (2000) μελέτησαν την πιθανότητα χρεοκοπίας στη βάση της πρότασης του Dickson (1994), ενώ οι Lefevre και Loisel (2008) μελέτησαν διάφορες προσεγγίσεις της πιθανότητας χρεοκοπίας για πεπερασμένο χρόνο, τόσο για το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο του Gerber όσο και για το κλασσικό μοντέλο Poisson (Lefèvre & Stéphane, 2008).

Ο Andersen (1957) πρότεινε μία ανανεωμένη εκδοχή του κλασσικού μοντέλου κινδύνου των Cramer και Lundberg, στο οποίο διατηρήθηκαν οι υποθέσεις του αρχικού μοντέλου αναφορικά με το μέγεθος των απαιτήσεων αλλά εισήχθη η παραδοχή ότι οι χρόνοι εμφάνισης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητοι μεταξύ τους, επιτρέποντας την εισαγωγή μη εκθετικών χρονικών διαστημάτων για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας (Gerber & Shiu, 2005).

Με την εισαγωγή του μοντέλου του Andersen αποδείχθηκε ότι για οποιοδήποτε διάστημα μεταξύ της εμφάνισης δύο απαιτήσεων, η πιθανότητα χρεοκοπίας εξακολουθεί να έχει ένα όριο εκθετικής μορφής (Gerber & Shiu, 2005). Εφαρμόζοντας το μοντέλο του Andersen, οι Borovkov και Dickson (2008) και οι Gerber και Shiu (2005) εξέτασαν την ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας για συγκεκριμένες κατανομές των διαστημάτων μεταξύ των απαιτήσεων (Gerber και Shiu, 2005; Borovkov και Dickson, 2008).

O Jesper (2002) επιχείρησε να εξετάσει την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι απαιτήσεις περιγράφονται από μία στοχαστική διαδικασία Cox, όπου το πρόβλημα της χρεοκοπίας περιγράφεται από μία γενική στοχαστική διαδικασία Poisson. Για το σκοπό αυτό προσέγγισε την ένταση λ ως αποτέλεσμα της επίδρασης εξωγενών γεγονότων και του χρόνου εμφάνισής αυτών των εξωγενών γεγονότων, σύμφωνα με την παρακάτω εξίσωση, η οποία προέρχεται από την εξίσωση θορύβου της στοχαστικής διαδικασίας Cox:

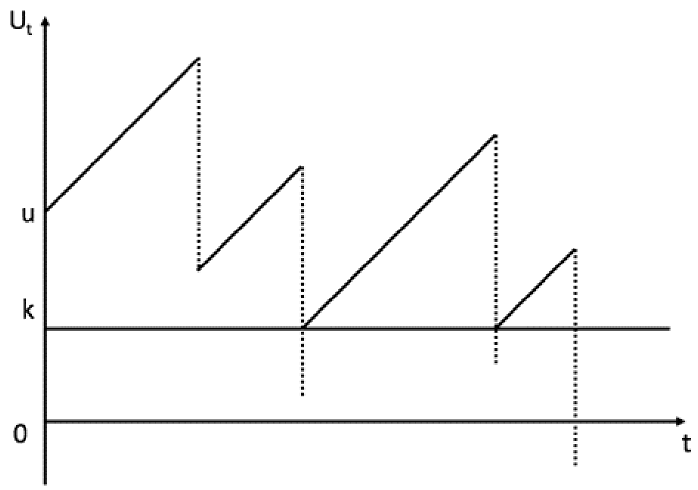
$$\lambda_t = \lambda_0 + \sum_{n=1}^{N_p(t)} h(t - T_{n,} Y_n)$$

Σε Μαρκοβιανό περιβάλλον μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά η πιθανότητα χρεοκοπίας με χρήση ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων. Σύμφωνα με τους Asmussen και Albercher (2010) οι παραδοχές για την ανεξαρτησία του μεγέθους και του χρόνου εμφάνισης των απαιτήσεων περιορίζουν την εφαρμοσιμότητα του κλασσικού μοντέλο κινδύνου σε πραγματικά προβλήματα, ειδικά όταν διάφοροι παράγοντες που εισάγουν κίνδυνο εξαρτώνται μεταξύ τους (Asmussen & Albrecher, 2010).

Στην κατεύθυνση αυτή, προτάθηκαν διάφορες συσχετίσεις μεταξύ των απαιτήσεων οι οποίες οδήγησαν στη δημιουργία μοντέλων συνεχούς χρόνου τα οποία βρίσκουν εφαρμογή σε περιπτώσεις όπου οι απαιτήσεις, δηλαδή οι κίνδυνοι σχετίζονται μεταξύ τους. Ακολούθως, προτάθηκαν σύνθετα διωνυμικά μοντέλα κινδύνου τα οποία βρίσκουν εφαρμογή για απαιτήσεις οι οποίες ακολουθούν κατανομές Pareto και Weibull, με την μεταξύ τους συσχέτιση να μην είναι σταθερή (Constantinescu, et al., 2019).

Αργότερα, οι Breuer και Badescu (2014), Nie et al. (2011) και Nie et al. (2015) εξέτασαν το αναθεωρημένο μοντέλο κινδύνου όπου επανεισάγονται κεφάλαια ορμώμενοι από το σύγχρονο χρηματοπιστωτικό περιβάλλον τόσο για πεπερασμένους όσο και για άπειρους χρονικούς ορίζοντες (Breuer & Badescu, 2014; Nie, et al., 2011; Nie, et al., 2015). Υπό το μοντέλο αυτό, γίνεται η υπόθεση ότι ο κάτοχος ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων μπορεί να αξιοποιήσει ένα μέρος του αρχικού κεφαλαίου προκειμένου να αγοράσει ένα καινούριο ασφαλιστικό προϊόν. Με τον τρόπο αυτό, το πλεόνασμα επανέρχεται σε ένα θετικό επίπεδο k όταν πέφτει κάτω από το επίπεδο αυτό και πάνω από το 0. Το πρόβλημα στο οποίο απαντά το μοντέλο αυτό είναι η επιλογή μεταξύ της συγκέντρωσης περισσότερων κεφαλαίων και της επαναγοράς ενός ασφαλιστικού προϊόντος προκειμένου να μειωθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελεσματικά (Dickson & Qazvini, 2016).

Το μοντέλο αυτό περιγράφεται παρακάτω στην Εικόνα 2:



Εικόνα 2: Διεργασία πλεονάσματος με προσθήκη κεφαλαίου (Dickson & Qazvini, 2016)

1.2. Απαιτήσεις

Οι Yuen και Guo (2001) εξέτασαν τη χρονική συσχέτιση μεταξύ των απαιτήσεων και πρότειναν ότι οι απαιτήσεις αποτελούνται από δύο τύπους, τις πρωτογενείς απαιτήσεις και τις δευτερογενείς απαιτήσεις, οι οποίες προκαλούνται από την εμφάνιση άλλων πρότερων ή ταυτόχρονων απαιτήσεων. Υπέθεσαν ότι μία κύρια απαίτηση, η οποία έχει πιθανότητα εμφάνισης ρ μπορεί να οδηγήσει στην εμφάνιση μίας άλλης απαίτησης, δηλαδή μίας δευτερογενούς απαίτησης, η οποία μπορεί να εμφανίζεται ταυτόχρονα ή με χρονική υστέρηση, με πιθανότητα εμφάνισης θ. και πιθανότητα εμφάνισης 1-θ αντίστοιχα (Yuen & Guo, 2001).

Οι προτάσεις των Yuen και Guo (2001) συνοψίζουν στον παρακάτω πίνακα για τις πρωτογενείς και δευτερογενείς απαιτήσεις. Αξίζει να σημειωθεί ότι οι πρωτογενείς και δευτερογενείς απαιτήσεις ακολουθούν διάφορες κατανομές δριμύτητας, σύμφωνα με τη θεωρία κινδύνου. Αυτό γίνεται εύκολα αντιληπτό σε πλειάδα προβλημάτων στο πεδίο της ασφάλισης έναντι κινδύνου. Για παράδειγμα, ένα αρνητικό γεγονός μπορεί να πυροδοτήσει μία σειρά απαιτήσεων, ενώ χαρακτηριστικό παράδειγμα της διαφοράς των κατανομών δριμύτητας είναι το παράδειγμα της διαχείρισης καταστροφών όπου η διαχείριση της απώλειας της ζωής, της καταστροφής της περιουσίας κ.ο.κ. γίνεται σε διαφορετική βάση, με διαφορετική σειρά και σε διαφορετικό χρόνο.

Πίνακας 1: Η έννοια των πρωτογενών και δευτερογενών απαιτήσεων (Yuen & Guo, 2001)

Πιθανότητα εμφάνισης (q)	Τρέχουσα περίοδος	Επίδραση στην αμέσως επόμενη περίοδο
1-ρ	Καμία απαίτηση	Καμία

$\rho \cdot \theta$	Πρωτογενής και δευτερογενής απαίτηση	Καμία
$\rho \cdot (1-\theta)$	Πρωτογενής απαίτηση	Δευτερογενής απαίτηση

1.3. Ανασκόπηση μαθηματικών μοντέλων

Υπό μία απλή μαθηματική προσέγγιση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου το ύψος των απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Σύμφωνα με τους Gómez-Déniz, et al. (2019), καθώς το ύψος των απαιτήσεων κατανέμεται εκθετικά, η προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας έχει εκθετική μορφή και μπορεί να αναχθεί σε ένα πρόβλημα στατιστικής (Gómez-Déniz, et al., 2019). Εναλλακτικές προσεγγίσεις για τον ορισμό μοντέλων κινδύνου είναι η αριθμητική προσέγγιση των απαιτήσεων για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας, και η ασυμπτωτική ανάλυση των απαιτήσεων.

Σύμφωνα με τον Cramer (1930), η πιθανότητα μη χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί με χρήση διαφορικών εξισώσεων βασιζόμενος στην υπόθεση ότι το μέγεθος της απαίτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή, οδηγώντας σε μία εκθετική επίλυση (Cramer, 1930).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον συγκεντρώνει ο διαχωρισμός των απαιτήσεων σε απαιτήσεις με βαριές και ελαφριές ουρές, με τις τελευταίες να αποτελούν σχετικά νέο μέρος της έρευνας καθώς οι απαιτήσεις με βαριές ουρές βρίσκουν μεγάλη εφαρμογή στο πεδίο της ασφάλισης. Σύμφωνα με τον Cramer (1955) και τον Feller (1968), ο υπολογισμός της πιθανότητας μη χρεοκοπίας, για απαιτήσεις με ελαφριές ουρές, μπορεί να γίνει αναλυτικά μέσω διαφορικών εξισώσεων εφαρμόζοντας είτε τον μετασχηματισμό

LaPlace, και τον αντίστροφο μετασχηματισμό LaPlace, είτε διαφορίζοντας και τα δύο μέλη των εξισώσεων, με κοινή προϋπόθεση οι απαιτήσεις να ακολουθούν την εκθετική κατανομή (Cramer, 1955; Feller, 1968).

Ο Pakes (1975) εισήγαγε τη θεωρία ουρών και τις στοχαστικές διαδικασίες για τον υπολογισμό της συσχέτισης μεταξύ της πιθανότητας χρεοκοπίας και της κατανομής της ουράς της δριμύτητας των απαιτήσεων προτείνοντας την εισαγωγή οριακών κατανομών χρόνων αναμονής ουρών τύπου GI|G|1 (Pakes, 1975).

Επιπλέον, σε ό,τι αφορά σε ειδικά μοντέλα κινδύνου και σε ειδικές διαδικασίες κινδύνου, εντοπίζονται διάφορα μαθηματικά μοντέλα, όπως αυτό του Gerber (1973), ο οποίος ανέλυσε τη διαδικασία κινδύνου με ανεξάρτητες και σταθερές αυξήσεις βασιζόμενος στο θεώρημα Martingale. Αργότερα, ο Thorin (1973) πρότεινε μία ολοκληρωτική έκφραση για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας, η οποία προέκυψε από το κλασσικό μοντέλο κινδύνου για απαιτήσεις οι οποίες ακολουθούν την κατανομή γ (Thorin, 1973), θεωρία την οποία εξέτασαν και πρότειναν εκ νέου οι Constantinescu et al. (2017) (Constantinescu, et al., 2019).

Ο Ramsay (2003) εφάρμοσε το κλασσικό μοντέλο κινδύνου για απαιτήσεις οι οποίες ακολουθούν κατανομή Pareto, εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό LaPlace, προκειμένου να προτείνει μία μέθοδο υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας (Ramsay, 2003).

Σε ό,τι αφορά ειδικά σε απαιτήσεις με βαριές ουρές ή σε απαιτήσεις οι οποίες ακολουθούν υποεκθετικές κατανομές, εντοπίζονται στη βιβλιογραφία μόνον ασυμπτωτικά αποτελέσματα σε ό,τι αφορά στον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας (Embrechts, et al., 2017; Rolski et al. 1999).

Σε ό,τι αφορά τον υπολογισμό της ρητής πιθανότητας χρεοκοπίας πεπερασμένου χρόνου, ο Asmussen (1984) πρότεινε μία μέθοδο υπολογισμού βασισμένη στο κλασικό μοντέλο κινδύνου, για απαιτήσεις οι οποίες κατανέμονται εκθετικά, ενώ αργότερα οι Dickson και Willmot (2005) εφάρμοσαν τον αντίστροφο μετασχηματισμό LaPlace στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου και πρότειναν μία σχέση για τον υπολογισμό της πυκνότητας του χρόνου μέχρι τη χρεοκοπία (Asmussen, 1984; Dickson & Willmot, 2005).

Καθώς στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάζεται η εφαρμογή στοχαστικών διαδικασιών, ιδιαίτερα σημασία έχει η αναφορά της χρήσης της εξίσωσης Pollaczeck - Khinchine η οποία εφαρμόστηκε από τους Asmussen και Albrecher (2010) για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας (Asmussen & Albrecher, 2010), . Η εξίσωση Pollaczeck – Khinchine εισήχθη στη θεωρία κινδύνου προκειμένου να συσχετιστεί το μέγεθος των απαιτήσεων και ο χρόνος μέχρι τη χρεοκοπία και να προσεγγιστεί η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Εντούτοις, η ίδια η πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει από την εξίσωση Pollaczeck – Khinchine, ενώ οι Albrecher και Vatamidou (2019) πρόσφατα χρησιμοποίησαν την εξίσωση Pollaczeck – Khinchine για τον προσδιορισμό ορίων σφάλματος για την πιθανότητα χρεοκοπίας, για μονότονες απαιτήσεις οι οποίες ακολουθούν συνδυασμό κατανομών, συμπεριλαμβανομένων της Weibull και Pareto (Albrecher & Vatamidou, 2019).

Προσδιόρισαν το σφάλμα μεταξύ της πιθανότητας χρεοκοπίας και της προσέγγισης αυτής με χρήση της παρακάτω εξίσωσης η οποία προέρχεται από την εξίσωση Pollaczeck – Khinchine:

$$|\psi(u) - \hat{\psi}(u)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varphi)\varphi^n |\overline{H}^{*}(u) - \hat{\overline{H}}^{*n}(u)|$$

όπου ψ(u) η πιθανότητα χρεοκοπίας:

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty | R(0) = u)$$

Στην παραπάνω σχέση εισάγεται για τον υπολογισμού του σφάλματος προσέγγισης η εξίσωση Pollaczeck – Khinchine και προκύπτει η γεωμετρικά σύνθετη ουρά των απαιτήσεων με γεωμετρική παράμετρο φ:

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varphi)\varphi^n \overline{H}^{*n}(u)$$

1.4. Πιθανότητα χρεοκοπίας

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται σε έναν συνεχή χώρο πιθανοτήτων Ω:

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \{\mathcal{F}_t\}: t \geq 0)$$

όπου με $\mathcal{F}_t$ συμβολίζεται μία συνάρτηση φιλτραρίσματος των ενδεχομένων.

Με την πιθανότητα χρεοκοπίας προσεγγίζεται το ύψους του πλεονάσματος U_t ενός χαρτοφυλακίου κατά το χρόνο t. Η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u,T) εκφράζεται από την πιθανότητα ελαχιστοποίησης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν στο ανοιχτό χρονικό διάστημα (0,T).

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(\inf_{0 \leq 0 < T} U_t < 0 \mid U_0 = u) = \mathbb{P}(\tau_u < T)$$

για u≥0 και $t \in [0, T)$

όπου τ_u η πρώτη χρονική στιγμή κατά την οποία ελαχιστοποιείται το πλεόνασμα, ήτοι η πρώτη χρονική στιγμή κατά την οποία σημειώνεται χρεοκοπία ως εξής:

$$\tau_u = \inf\,(t \geq 0: U_t < 0)$$

Η δε απόλυτη πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να προσδιοριστεί από την παρακάτω σχέση αν ο χρόνος Τ αντικατασταθεί με το ∞:

$$\lim_{T \to \infty} \psi(u, T) = \psi(u)$$

για $u \in [0, \infty)$.

Αντίστροφα, η πιθανότητα μη χρεοκοπίας προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση:

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u)$$

για u∈[0,∞).

Για την περαιτέρω ανάλυση της πιθανότητας χρεοκοπίας λαμβάνεται υπόψη η πρόταση του Grandell (1991), ο οποίος προσέγγισε μία διαδικασία κινδύνου U_t σε ένα απειροελάχιστο χρονικό διάστημα Δ_t το οποίο ορίζεται ως (0, Δ] και προσδιόρισε τις τέσσερις δυνατές καταστάσεις τις οποίες μπορεί να λάβει αυτή η διαδικασία κινδύνου ως εξής:

- δεν υπάρχει καμία απαίτηση
- υπάρχει μία απαίτηση και δεν σημειώνεται χρεοκοπία
- υπάρχει μία απαίτηση και σημειώνεται χρεοκοπία
- περισσότερες από μία απαιτήσεις

Επιπλέον, ο Grandell (1991) εισήγαγε τον τελεστή λ ο οποίος είναι η σταθερή παράμετρος δριμύτητας μιας ομογενούς διαδικασίας Poisson στην οποία βασίζεται το μοντέλο κινδύνου των Cramer και Lundberg, όπως αυτό παρουσιάστηκε στην παράγραφο 1.1.. Τότε, σύμφωνα με τον Grandell (1991), η πιθανότητα μη χρεοκοπίας προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση (Grandell, 1991):

$$\varphi(u) = (1 - \lambda\Delta)\varphi(u + c\Delta) + \lambda\Delta \int_{0}^{u+c\Delta} \varphi(u + c\Delta - x) dF_X(x) + o(\Delta)$$

για $u \in [0,\infty)$.

Όπως προαναφέρεται, το χρονικό διάστημα Δ_t είναι απειροελάχιστο, ως εκ τούτου, αν το Δ τείνει στο άπειρο, και αν εισαχθεί η σωρευτική κατανομή των απαιτήσεων τότε από την παραπάνω εξίσωση προκύπτει μία ολοκληροδιαφορική εξίσωση για τον υπολογισμό της πιθανότητας μη χρεοκοπίας:

$$\frac{d\varphi(u)}{du} = \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_{0}^{u} \varphi(u - x) dF_X(x)$$

για u∈[0,∞).

Από την παραπάνω εξίσωση μπορεί να προκύψει η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με την εφαρμογή μετασχηματισμού LaPlace από την οποία η παραπάνω εξίσωση μετατρέπεται στην:

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{c\varphi(0)}{cs - \lambda + \lambda \hat{f}_X(s)}$$

όπου $\hat{f}_X(s)$ η συνάρτηση πυκνότητας του μεγέθους των απαιτήσεων.

Αν οι απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή με συντελεστή β, τότε από την εφαρμογή μετασχηματισμού LaPlace $\mathcal{L}(s)$ στη συνάρτηση πυκνότητας του μεγέθους των απαιτήσεων προκύπτει η παρακάτω σχέση:

$$\hat{f}_X(s) = \frac{\beta}{s + \beta}$$

όπου $\Re(s) > -a$.

Με την αντικατάσταση της συνάρτησης πυκνότητας του μεγέθους των απαιτήσεων στην πιο πάνω σχέση και κατόπιν εφαρμογής αντίστροφου μετασχηματισμού LaPlace, προκύπτει η παρακάτω εξίσωση για τον υπολογισμό της πιθανότητας μη χρεοκοπίας:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\lambda}{\beta c} e^{-\left(\beta - \frac{\lambda}{c}\right)u}$$

για u∈[0,∞).

Επιπλέον, η παραπάνω σχέση μπορεί να μεταβάλλεται ανάλογα με την κατανομή την οποία ακολουθούν οι απαιτήσεις προκειμένου να διευκολύνεται η διαδικασία υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας ανάλογα με τον τύπο των εκάστοτε απαιτήσεων.

Σε κάθε περίπτωση, ο προσδιορισμός της πιθανότητας μη χρεοκοπίας και αντίστροφα της πιθανότητας χρεοκοπίας μπορεί να γίνεται με τον αντίστροφο μετασχηματισμό LaPlace της παραπάνω σχέσης.

2. Μέτρα χρεοκοπίας

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται αναλυτικά διάφορα μέτρα χρεοκοπίας συναρτήσει των απαιτήσεων καθώς και η θεωρία κινδύνου υπό το πρίσμα των απαιτήσεων.

2.1. Εισαγωγή

Ο σκοπός της μελέτης της κατανομής των απαιτήσεων είναι η προσέγγιση μοντέλων συσχέτισης μεταξύ των απαιτήσεων από τα οποία μπορούν να προκύψουν διαφορετικές μορφές της πιθανότητας χρεοκοπίας (Asmussen & Albrecher, 2010). Για τη μελέτη της κατανομής των απαιτήσεων και της επίδρασής τους στην πιθανότητα χρεοκοπίας εξετάζονται στο κεφάλαιο αυτό διάφορες εκφράσεις για την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας παράλληλα με διάφορες παραμέτρους που χαρακτηρίζουν τις απαιτήσεις.

Προτείνεται ένα μοντέλο για τον προσδιορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας συναρτήσει των αξιώσεων αρχής γενομένης. Το μοντέλο αυτό προσεγγίζεται αρχικά για διακριτό χρόνο, προκειμένου να διευκολυνθεί η κατανόησή και μαθηματική περιγραφή του, και ακολούθως προσεγγίζεται για συνεχή χρόνο.

Το προτεινόμενο μοντέλο εδράζεται σε μία σύνθετη διωνυμική διαδικασία διακριτού χρόνου, βασιζόμενο στο γεγονός ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων X_i είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και κατανέμονται σε μία γεωμετρική κατανομή. Με τον τρόπο αυτό, η πιθανότητα επιτυχίας προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση:

$$\rho = 1 - e^{-\theta}$$

όπου με το γράμμα θ συμβολίζεται μία τυχαία μεταβλητή η οποία αναπαριστά τον συνδυασμό των μεγεθών των απαιτήσεων.

Για τον υπολογισμό της τυχαίας μεταβλητής θ, χρησιμοποιείται η παρακάτω εξίσωση:

$$P(X = k) = q\delta_{k0} + (1 - \delta_{k0})(1 - q)\{\widehat{f_\theta}(k - 1) - \widehat{f_\theta}(k)\} \; \mu\varepsilon \; k \in N$$

όπου $\widehat{f_\theta}$ ο μετασχηματισμός LaPlace της τυχαίας μεταβλητής Θ, F_Θ η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής Θ και f_θ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

2.2. Κλασσικό μοντέλο κινδύνου

Το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου στοχεύει στον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας. Όπως έχει ήδη μάλιστα αναφερθεί παραπάνω, η χρεοκοπία επέρχεται όταν τα αποθεματικά δεν επαρκούν για την κάλυψη όλων των απαιτήσεων. Μάλιστα, καθώς το μοντέλο αυτό βρίσκει ιδιαίτερη εφαρμογή στο πεδίο της ασφάλισης, λέγεται ότι η χρεοκοπία επέρχεται όταν τα αποθεματικά δεν επαρκούν για την καταβολή όλων των αποζημιώσεων που απαιτούν οι ασφαλισμένοι.

Το κλασσικό μοντέλο των Cramer και Lunberg παρουσιάστηκε συνοπτικά στο προηγούμενο κεφάλαιο, ενώ αξίζει να σημειωθεί πως βασίζεται στη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών, η εισαγωγή της οποίας επέτρεψε τη διαμόρφωση του μοντέλου. Πρόκειται για ένα μοντέλο το οποίο στοχεύει στην προσέγγιση του ύψους των αποθεματικών, όπως αυτά εξελίσσονται με την πάροδο του χρόνου.

Υπό το μοντέλο των Cramer και Lunberg οι απαιτήσεις και συγκεκριμένα το πλήθος αυτών προέρχεται από μία στοχαστική διαδικασία Poisson Nt με σταθερά δριμύτητας λ. Αυτό σημαίνει ότι υπό το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, οι απαιτήσεις εμφανίζονται σε χρονικές στιγμές τέτοιες όπου τα μεσοδιαστήματα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, ισόνομα τυχαία και ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε μία συνοπτική ανασκόπηση των μοντέλων κινδύνου και των μαθηματικών μοντέλων τα οποία αναπτύχθηκαν στη βάση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου για διαφορετικές κατανομές απαιτήσεων και υπό διαφορετικές παραδοχές.

Σημαντική είναι η συνεισφορά του Anderson ο οποίος πρότεινε ότι οι κίνδυνοι στους οποίους εκτίθεται ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλιστικών προϊόντων μπορεί να περιγραφεί από μία ανανεωτική συνάρτηση, η οποία περιγράφεται από μία ανανεωτική στοχαστική διεργασία (Anderson, 1957). Ως εκ τούτου, ο Anderson πρότεινε μία επέκταση του κλασσικού μοντέλου των Cramer και Lunberg, στην οποία οι απαιτήσεις δεν ακολουθούν κατ' ανάγκη την εκθετική κατανομή (Anderson, 1957).

Αργότερα, οι Rebello και Thampi (2017) επέκτειναν περαιτέρω το μοντέλο του Anderson για την εξέταση του πλεονάσματος και της κατανομής του χρόνου αμέσως πριν από τη χρεοκοπία (Rebello & Thampi, 2017).

Για την περιγραφή του κλασσικού μοντέλου και εν γένει για την εξέταση της δυναμικής εξέλιξης του πλεονάσματος απαιτείται αρχικά η μοντελοποίηση του πλήθους των απαιτήσεων και ακολούθως η μοντελοποίηση του μεγέθους αυτών.

Για την μοντελοποίηση και την περιγραφή μιας στοχαστικής διεργασίας για τον προσδιορισμό του πλεονάσματος απαιτείται η γνώση του αριθμού των κινδύνων στους οποίους εκτίθεται ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Το πλήθος των κινδύνων μπορεί να προσδιοριστεί από μία απαριθμήτρια συνάρτηση, όπως η ανανεωτική συνάρτηση.

Για τον υπολογισμό του πλήθους N των κινδύνων στους οποίους εκτίθεται ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, θεωρείται μία στοχαστική διεργασία $\{N(t)\colon t \in [0, t]\}$ η οποία έχει ισχύ υπό τις παρακάτω ικανές και αναγκαίες προϋποθέσεις:

- $H\ N(t)\ είναι\ μία\ διακριτή\ συνάρτηση$
- $N(t) > 0\ και\ N(0) = 0$
- Το πλήθος των κινδύνων αυξάνεται με την πάροδο του χρόνου:

$$N(t_1) < N(t_2) για\ t_1 < t_2$$

Η δε ανανεωτική συνάρτηση ανήκει σε μία οικογένεια ανανεωτικών συναρτήσεων οι οποίες βρίσκουν ευρεία εφαρμογή στο πεδίο των στοχαστικών διεργασιών και οι οποίες βασίζονται στην προσέγγιση των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ δύο κινδύνων, δηλαδή μεταξύ δύο απαιτήσεων (Ross, 2010).

Καθώς τα ενδιάμεσα χρονικά διαστήματα μεταξύ δύο απαιτήσεων είναι τυχαίες μεταβλητές, τότε και οι χρόνοι εμφάνισης δύο απαιτήσεων είναι τυχαίες μεταβλητές. Τότε, για t_i χρόνους εμφάνισης μίας απαίτησης μπορεί να οριστεί μία τυχαία μεταβλητή S_i:

$$W_i = t_i - t_{i-1}, για\ i \geq 1, δηλαδή\ για\ τουλάχιστον\ δύο\ απαιτήσεις$$

Από τη μεταβλητή S_i διακρίνεται ο χρόνος S_1 κατά τον οποίο εμφανίζεται μία απαίτηση, ο χρόνος S_2 κατά τον οποίο εμφανίζεται η δεύτερη κατά σειρά απαίτηση, … και ο χρόνος S_n κατά τον οποίο εμφανίζεται η νιοστή απαίτηση. Ακολούθως, για n=0, τότε ορίζεται ο χρόνος T_0 κατά τον οποίο S_0=0. Τότε για δύο απαιτήσεις, οι χρόνοι T_n σε συνδυασμό με τις μεταβλητές S_n δίδουν μία ακολουθία ανανεώσεων η οποία προκύπτει από την παρακάτω σχέση για n≥0:

$$T_n = W_1 + W_2 + \cdots + W_n$$

Η δε παραπάνω απαριθμήτρια συνάρτηση για t_0=0 και T_i διακριτές χρονικές στιγμές ορίζεται μία ανανεωτική συνάρτηση $N(t)_{t\in[0,T_i]}$:

$$\{N(t), n \geq 0\ και\ t \geq 0: \{T_n, n \in N\}$$

Για το δε ορισμό της ανανεωτικής στοχαστικής διεργασίας εισάγεται η μεταβλητή X_i η οποία εκφράζει το μέγεθος της i-οστής απαίτησης:

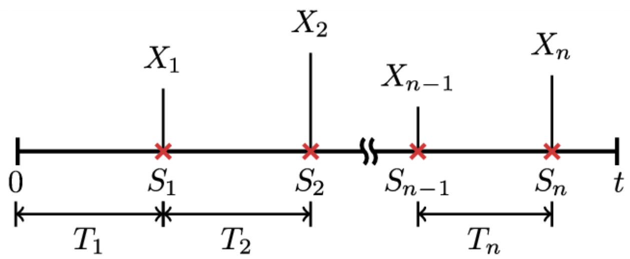
$$\{X_i, i \in \mathbb{N}\}$$

Γίνεται αντιληπτό ότι η παραπάνω στοχαστική ανανεωτική διαδικασία περιγράφει ταυτόχρονα τους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων, τα μεσοδιαστήματα της άφιξης δύο και παραπάνω απαιτήσεων, αλλά και το μέγεθος των απαιτήσεων αυτών.

Ο δε αριθμός των ανανεώσεων στο χρονικό διάστημα [0,t) προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$N(t) = \int_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}T_n \ \gamma\iota\alpha \ T_n < t$$

Οι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων (εμφάνισης των κινδύνων), τα μεγέθη αυτών και τα μεσοδιαστήματα δύο και παραπάνω απαιτήσεων αναπαρίστανται γραφικά ως εξής:



Εικόνα 3: Γραφική αναπαράσταση ανανεωτικής συνάρτησης (Pandey & van der Weide, 2017)

Η παραπάνω ανανεωτική στοχαστική διαδικασία διέπεται από το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα (Rolski, et al., 2008):

$$\lim_{t\to\infty} \frac{E(N(t))}{t} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{E(S_1)}$$

Γίνεται κατανοητό ότι η στοχαστική διαδικασία Poisson από την οποία προκύπτουν τα ενδιάμεσα των απαιτήσεων χρονικά διαστήματα είναι μία ειδική περίπτωση της στοχαστικής ανανεωτικής διαδικασίας για απαιτήσεις οι οποίες εμφανίζονται σε ισόνομα τυχαία και ανεξάρτητα μεταξύ τους χρονικά διαστήματα τα οποία ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Ακολούθως, η μοντελοποίηση του συνολικού μεγέθους S(t) του συνόλου N(t) των απαιτήσεων γίνεται ως εξής:

Αν X_i το μέγεθος της i-οστής απαίτησης, όπως αναφέρεται παραπάνω, και αν N(t) το πλήθος των απαιτήσεων σε ένα χρονικό διάστημα [0,t), τότε το συνολικό μέγεθος S(t) των απαιτήσεων προκύπτει ως εξής:

$$S(t) = \begin{cases} 0, & N(t) = 0 \\ \sum_{i=1}^{N(t)} X_i\,, & N(t) \geq 1 \end{cases}$$

Το συνολικό μέγεθος των απαιτήσεων ορίζεται για i ∈ [1,N(t)] στο διάστημα [0,t) για X_i ανεξάρτητες και ισόνομα τυχαίες μεταβλητές, μέχρι και το χρόνο t.

Ακολούθως, έχοντας προσεγγίσει τόσο το πλήθος όσο και το συνολικό μέγεθος των απαιτήσεων, μοντελοποιείται το αποθεματικό προκειμένου να μπορεί να οριστεί μία στοχαστική διαδικασία για τη μοντελοποίηση της δυναμικής του εξέλιξης με την πάροδο του χρόνου.

Η θεωρία κινδύνου βασίζεται στην παραδοχή ότι τα έσοδα P(t) του κατόχου ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου αυξάνεται διαρκώς με την πάροδο του χρόνου, δηλαδή η συνάρτηση P(t) είναι μία αύξουσα συνάρτηση του χρόνου. Για την ευκολότερη μοντελοποίηση των εσόδων, θεωρείται ότι αυτά αυξάνονται με έναν σταθερό ρυθμό c, δηλαδή θεωρείται ότι υπάρχει ένας σταθερός ρυθμός κατά τον οποίο εισπράττονται τα ασφάλιστρα (έσοδα). Ως εκ τούτου, προκύπτει ότι:

$$P(t) = c \cdot t$$

Επιπλέον, όπως προαναφέρεται, για τον προσδιορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας συμμετέχει το πλεόνασμα ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, το οποίο μπορεί να μοντελοποιηθεί ως εξής:

$$\{U(t)\ \gamma\iota\alpha\ t \geq 0\}$$

$$U(t) = u_0 + P(t) - S(t)$$

όπου u_0 ένα αρχικό αποθεματικό.

Τότε η παραπάνω σχέση μετασχηματίζεται με αντικαταστάσεις ως εξής:

$$U(t) = u_0 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

για:

$$N(t) \geq 1$$

$$c \geq 0$$

$$t \in [0, t)$$

Στην παραπάνω σχέση συνοψίζει το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, όπου η χρεοκοπία επέρχεται την πρώτη φορά όπου το αποθεματικό γίνεται μηδέν ή λαμβάνει αρνητικές τιμές.

Ο δε χρόνος χρεοκοπίας Τ προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση:

$$T = \begin{cases} \inf(t \geq 0), & U(t) < 0 \\ \infty, & U(t) \geq 0 \end{cases}$$

Συχνά στη θεωρία κινδύνου υπολογίζεται το ύψους του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία $U(T^{-})$ και το μέγεθος κατά το οποίο το αποθεματικό γίνεται αρνητικό U(T). Αυτά τα δύο μέτρα χρεοκοπίας είναι σημαντικά καθώς από αυτά προκύπτει η ποσότητα |U(T)|, η οποία είναι μέτρο της δριμύτητας της χρεοκοπίας.

Η δε πιθανότητα χρεοκοπίας, υπό το κλασσικό μοντέλο κινδύνου προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T < \infty | U(0) = u)$$

για αρχικό απόθεμα $u_0 \geq 0$.

Αντίστροφα, η πιθανότητα επιβίωσης ή πιθανότητα μη χρεοκοπίας προκύπτει από την παρακάτω σχέση, καθώς το ενδεχόμενο της επιβίωσης είναι συμπληρωματικό του ενδεχομένου της χρεοκοπίας:

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u)$$

Στην παράγραφο 1.1 δόθηκε το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο κινδύνου των Gerber και Shiu, το οποίο βρίσκει εφαρμογή σε προβλήματα διακριτού χρόνου και διακριτών διαδικασιών κινδύνου (Gerber, 1988). Σημαντική είναι η συνεισφορά των μοντέλων κινδύνου για διαφορετικές στρατηγικές μερισμάτων, τα οποία αποτελούν επέκταση της συνάρτησης των Gerber και Shiu. Τα μοντέλα αυτά βρίσκουν καλύτερη εφαρμογή σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου, καθώς η παραδοχή ότι μία ασφαλιστική εταιρεία έχει έξοδα μόνον από την καταβολή αποζημιώσεων αποκλίνει από την πραγματικότητα.

Διακρίνονται τρία διαφορετικά μοντέλα τα οποία αντικατοπτρίζουν τρεις διαφορετικές στρατηγικές πληρωμής μερισμάτων· πληρωμή σταθερού μερίσματος, πληρωμή ελάχιστου μερίσματος, πληρωμή μερίσματος με πολλαπλά κατώτατα όρια.

Υπό την πρώτη στρατηγική, καταβάλλονται μερίσματα ύψους c όταν το αποθεματικό ξεπεράσει ένα όριο b και μέχρι να εμφανιστεί ένας κίνδυνος. Τότε το αποθεματικό μοντελοποιείται από την παρακάτω σχέση:

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t), U_b(t) < b \\ -dS(t), U_b(t) = b \end{cases}$$

Αντίστοιχα, η πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$\psi_b(u) = \mathbb{P}(T_b < \infty | u \leq b)$$

Ακολούθως, μία προσέγγιση η οποία βρίσκει εφαρμογή στην πραγματικότητα είναι αυτή της καταβολής μερισμάτων όταν το αποθεματικό ξεπεράσει ένα κάτω όριο b και καταβολής μερισμάτων ύψους a, το οποίο είναι πάντα μικρότερο από τον σταθερό ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων. Ως εκ τούτου, για το διάστημα κατά το οποίο καταβάλλονται μερίσματα, ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων είναι μειωμένος κατά a.

Τότε το αποθεματικό μοντελοποιείται από την παρακάτω σχέση:

$$dU_b(t) = \begin{cases} cdt - dS(t), U_b(t) \leq b \\ (c-a)dS(t), U_b(t) > b \end{cases}$$

Αντίστοιχα, η πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$\psi_b(u) = \mathbb{P}(T_b < \infty | u \leq b)$$

Τέλος, μία ακόμη προσέγγιση είναι αυτή της καταβολής μερισμάτων υπό n διαφορετικά όρια. Η προσέγγιση αυτή αποτελεί μία γενικευμένη εκδοχή του κλασσικού μοντέλου κινδύνου.

Το ύψος του μερίσματος το οποίο καταβάλλεται εξαρτάται από τα όρια ανάμεσα στα οποία κυμαίνεται το αποθεματικό. Πιο συγκεκριμένα, καταβάλλεται μέρισμα με ρυθμό d_i όταν το αποθεματικό κυμαίνεται ανάμεσα σε δύο όρια b_i και b_{i+1}, ενώ ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλίστρων είναι πάντα μεγαλύτερο από το ρυθμό καταβολής μερισμάτων d_i.

Τότε, το αποθεματικό μοντελοποιείται από την παρακάτω σχέση:

$$dU_b(t) = c_i dt - dS(t)$$

και

$$b_i \leq U_b(t) \leq b_{i+1}$$

Αντίστοιχα, η πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$\psi_b(u) = \mathbb{P}\left(T_{b_i} < \infty \middle| u \leq b_i\right)$$

2.3. Η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

Η συνάρτηση Gerber Shiu της μορφής φ(u) ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, όπως αποδεικνύεται στην παρούσα παράγραφο. Η δε ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση χρησιμοποιείται και στο προτεινόμενο μοντέλο των Xie και Zou (2011) στο επόμενο κεφάλαιο.

Μία εξίσωση της παρακάτω μορφής είναι μία ανανεωτική εξίσωση:

$$Z(t) = \varphi \int_0^t Z(t-x) dF(x) + g(t)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, η F(x) είναι μία αθροιστική συνάρτηση κατανομής, η g(t) είναι μια φραγμένη συνάρτηση και φ είναι μια σταθερά τ.ω. 0 < φ ≤ 1. Μία ανανεωτική εξίσωση είναι ελλειμματική για 0<φ<1 και μη ελλειμματική για φ=1.

Στην παρακάτω ανάλυση χρησιμοποιείται ο συντελεστής T_r των Dickson-Hipp ο οποίος προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση για μια πραγματική ολοκληρώσιμη συνάρτηση f:

$$T_r f(x) = \int_x^{\propto} e^{-r(y-x)} f(y)dy = e^{rx} \int_x^{\infty} e^{-ry} f(y)dy \; για \; x \geq 0, Re(r) > 0$$

Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης φ(u) Gerber Shiu παρατίθεται παρακάτω:

Πρόταση:

Για Re(s)>0, ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{\varphi}$(s) της φ(u) ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση:

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{T_{r1} T_{r2} T_s p_2(0)}{c^2} \hat{\varphi}(s) - \frac{T_s T_{r1} T_{r2} h_2(0)}{c^2}$$

Η παραπάνω πρόταση αποδεικνύεται ως εξής:

Αρχικά, μία εναλλακτική μορφή για την $\hat{\varphi}$(s) είναι η $\hat{\varphi}(s) = \frac{\hat{B}(s)}{-l(s)}$

Όπου, η χαρακτηριστική εξίσωση l(s) ισούται με 0 για δ≥0 και προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση:

$$l(s) = (cs - \lambda - \delta)^2 + (cs - \lambda - \delta) l \hat{f}_2$$

και

$$\hat{p}_1(s) = (cs - \lambda - \delta)^2$$

$$\hat{p}_2(s) = -(cs - \lambda - \delta) l \hat{f}_2$$

οπότε:

$$l(s) = -(\hat{p}_1(s) - \hat{p}_2(s))$$

Επιπλέον, η $\hat{B}(s)$ μετασχηματίζεται στην παρακάτω:

$$\begin{aligned}
\hat{B}(s) &= \left[cs - \lambda - \delta + \lambda(1-\theta)\hat{f}_2(s)\right][\widehat{w}(s) - c\varphi(0)] \\
&\quad - \lambda(1-\theta)\hat{f}_1(s)[\widehat{w}^*(s) - c\varphi_1(0)] \\
&= (cs - \lambda - \delta)\widehat{w}(s) - (cs - \lambda - \delta)c\varphi(0) + \lambda(1-\theta)\hat{f}_2(s)\widehat{w}(s) \\
&\quad - \lambda(1-\theta)\hat{f}_2(s)c\varphi(0) - \lambda(1-\theta)\hat{f}_1(s)\widehat{w}^*(s) \\
&\quad + \lambda(1-\theta)\hat{f}_1(s)c\varphi_1(0) \\
&= -(cs - \lambda - \delta)c\varphi(0) + (cs - \lambda - \delta)\widehat{w}(s) + \lambda(1-\theta)(\hat{f}_2(s)\widehat{w}(s) \\
&\quad - \hat{f}_1(s)\widehat{w}^*(s)) + \lambda c(1-\theta)(\hat{f}_1(s)\varphi_1(0) - \hat{f}_2(s)\varphi(s)) \\
&= -(cs - \lambda - \delta)c\varphi(0) + (cs - \lambda - \delta)\widehat{w}(s) + \lambda(1-\theta)(\hat{A}_2(s) \\
&\quad - \hat{A}_1(s)) + \lambda c(1-\theta)(\hat{f}_1(s)\varphi_1(0) - \hat{f}_2(s)\varphi(s))
\end{aligned}$$

όπου

$$\hat{A}_1(s) = \hat{f}_1(s)\widehat{w}^*(s)$$

$$\hat{A}_2(s) = \hat{f}_2(s)\widehat{w}^*(s)$$

Έπειτα, η $\hat{B}(s)$ μετασχηματίζεται θέτοντας:

$$\hat{h}_1(s) = -(cs - \lambda - \delta)c\varphi(0)$$

$$\begin{aligned}
\hat{h}_2(s) &= (cs - \lambda - \delta)\widehat{w}(s) + \lambda(1-\theta)\left(\hat{A}_2(s) - \hat{A}_1(s)\right) + \lambda c(1-\theta)(\hat{f}_1(s)\varphi_1(0) \\
&\quad - \hat{f}_2(s)\varphi(0))
\end{aligned}$$

$$\hat{B}(s) = \hat{h}_1(s) + \hat{h}_2(s)$$

Οπότε για τον μετασχηματισμό Laplace $\hat{\varphi}(s)$ προκύπτει:

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\hat{B}(s)}{-l(s)} = \frac{\hat{h}_1(s) + \hat{h}_2(s)}{-[\hat{p}_1(s) - \hat{p}_2(s)]}$$

Εν συνεχεία για την απόδειξη της ελλειμματικής εξίσωση εξετάζεται περαιτέρω ο αριθμητής και ο παρονομαστής.

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{T_{r1}T_{r2}T_s p_2(0)}{c^2}\hat{\varphi}(s) - \frac{T_s T_{r1} T_{r2} h_2(0)}{c^2}$$

Όπως αναφέρεται παραπάνω, $\hat{\varphi}(s) < \infty$ και αφού υπάρχουν δύο τουλάχιστον ρίζες για τον παρονομαστή s=r_1 και s=r_2, υποχρεωτικά και ο αριθμητής έχει τις ίδιες ρίζες. Συνεπώς ισχύει ότι:

$$\hat{h}_1(r_i) + \hat{h}_2(r_i) = 0 \text{ ή } \hat{h}_1(r_i) = -\hat{h}_2(r_i) \; για \; i = 1{,}2$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα παρεμβολής του Lagrange στο ζεύγος σημείων $\left(r_1, \hat{h}_1(r_1)\right)$ και $\left(r_2, \hat{h}_1(r_2)\right)$ προκύπτει ότι:

$$\hat{h}_1(s) = \frac{s - r_2}{r_1 - r_2}\hat{h}_1(r_1) + \frac{s - r_1}{r_2 - r_1}\hat{h}_1(r_2) = \frac{(s - r_2)\hat{h}_1(r_1) - (s - r_1)\hat{h}_1(r_2)}{r_1 - r_2}$$
$$= \frac{(s - r_2)\hat{h}_2(r_1) - (s - r_1)\hat{h}_2(r_2)}{r_1 - r_2}$$

τότε για τον αριθμητή:

$$\hat{h}_1(s) + \hat{h}_2(s) = \frac{(s-r_2)\hat{h}_2(r_1) - (s-r_1)\hat{h}_2(r_2)}{r_1 - r_2} + \hat{h}_2(s)$$

$$= \frac{-(s-r_2)\hat{h}_2(r_1) + (s-r_1)\hat{h}_2(r_2) + r_1\hat{h}_2(s) - r_2\hat{h}_2(s)}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{-(s-r_2)\hat{h}_2(r_1) + (s-r_1)\hat{h}_2(r_2) + r_1\hat{h}_2(s) - r_2\hat{h}_2(s) + s\hat{h}_2(s) - s\hat{h}_2(s)}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{-(s-r_2)\hat{h}_2(r_1) + (s-r_1)\hat{h}_2(r_2) - (s-r_1)\hat{h}_2(s) + (s-r_2)\hat{h}_2(s)}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{(s-r_2)\left[\hat{h}_2(s) - \hat{h}_2(r_1)\right] - (s-r_1)\left[\hat{h}_2(s) - \hat{h}_2(r_2)\right]}{r_1 - r_2}$$

$$= (s-r_1)(s-r_2)\frac{\dfrac{\hat{h}_2(s) - \hat{h}_2(r_1)}{s-r_1} - \dfrac{\hat{h}_2(s) - \hat{h}_2(r_2)}{s-r_2}}{r_1 - r_2}$$

$$= (s-r_1)(s-r_2)\frac{-\dfrac{\hat{h}_2(s) - \hat{h}_2(r_1)}{r_1-s} + \dfrac{\hat{h}_2(s) - \hat{h}_2(r_2)}{r_2-s}}{r_1 - r_2}$$

$$= (s-r_1)(s-r_2)\frac{-T_sT_{r1}h_2(0) + T_sT_{r2}h_2(0)}{r_1 - r_2} = (s-r_1)(s-r_2)T_sT_{r2}T_{r1}h_2(0)$$

Εν συνεχεία για τον παρονομαστή:

$$l(r_i) = 0 \; \gamma\iota\alpha \; i = 1,2$$

και

$$-[\hat{p}_1(r_i) - \hat{p}_2(r_i)] = 0$$

$$\hat{p}_1(r_i) = \hat{p}_2(r_i) \; \gamma\iota\alpha \; i = 1,2$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα παρεμβολής του Lagrange στα σημεία $\left(0, \hat{p}_1(0)\right), \left(r_1, \hat{p}_1(r_1)\right)$ και $\left(r_2, \hat{p}_1(r_2)\right)$ προκύπτει ότι:

$$\hat{p}_1(s) = \frac{(s-r_1)(s-r_2)}{(0-r_1)(0-r_2)}\hat{p}_1(0) + \frac{(s-0)(s-r_2)}{(r_1-0)(r_1-r_2)}\hat{p}_1(r_1)$$

$$+ \frac{(s-0)(s-r_1)}{(r_2-0)(r_2-r_1)}\hat{p}_1(r_2)$$

$$= \frac{(s-r_1)(s-r_2)}{r_1 r_2}\hat{p}_1(0) + \frac{s(s-r_2)}{r_1(r_1-r_2)}\hat{p}_1(r_1) + \frac{s(s-r_1)}{r_2(r_2-r_1)}\hat{p}_1(r_2)$$

$$= \frac{(s-r_1)(s-r_2)}{r_1 r_2}\hat{p}_1(0) + s\frac{s-r_2}{r_1-r_2}\frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1} + s\frac{s-r_1}{r_2-r_1}\frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2}$$

$$= \frac{(s-r_1)(s-r_2)}{r_1 r_2}\hat{p}_1(0) + s\frac{s-r_2}{r_1-r_2}\frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1} - r_1\frac{s-r_2}{r_1-r_2}\frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1}$$

$$+ \frac{s-r_2}{r_1-r_2}\hat{p}_2(r_1) + s\frac{s-r_1}{r_2-r_1}\frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2} - r_2\frac{s-r_1}{r_2-r_1}\frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2} + \frac{s-r_1}{r_2-r_1}\hat{p}_2(r_2)$$

$$= \frac{(s-r_1)(s-r_2)}{r_1 r_2}\hat{p}_1(0) + (s-r_1)\frac{s-r_2}{r_1-r_2}\frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1} - \frac{s-r_2}{r_1-r_2}\hat{p}_2(r_1)$$

$$+ (s-r_2)\frac{s-r_1}{r_2-r_1}\frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2} + \frac{s-r_1}{r_2-r_1}\hat{p}_2(r_2)$$

$$= \frac{(s-r_1)(s-r_2)}{r_1 r_2}\hat{p}_1(0)$$

$$+ (s-r_1)(s-r_2)\left[\frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1(r_1-r_2)} + \frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2(r_2-r_1)}\right] + \frac{s-r_2}{r_1-r_2}\hat{p}_2(r_1)$$

$$+ \frac{s-r_1}{r_2-r_1}\hat{p}_2(r_2)$$

Επιπλέον:

$$\hat{p}_1(s) - \hat{p}_2(s) = \frac{(s-r_1)(s-r_2)}{r_1 r_2}\hat{p}_1(0)$$

$$+ (s-r_1)(s-r_2)\left[\frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1(r_1-r_2)} + \frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2(r_2-r_1)}\right]$$

$$-\left[\hat{p}_2(s) - \frac{s-r_2}{r_1-r_2}\hat{p}_2(r_1) - \frac{s-r_1}{r_2-r_1}\hat{p}_2(r_2)\right]$$

$$= (s-r_1)(s-r_2)\left[\frac{\hat{p}_1(0)}{r_1 r_2} + \frac{\hat{p}_2(r_1)}{r_1(r_1-r_2)} + \frac{\hat{p}_2(r_2)}{r_2(r_2-r_1)}\right]$$

$$- [\frac{\hat{p}_2(s)}{(s-r_1)(s-r_2)} - \frac{\hat{p}_2(r_1)}{(s-r_1)(r_1-r_2)}$$

$$+ \frac{\hat{p}_2(r_2)}{(s-r_2)(r_2-r_1)}]$$

$$= (s-r_1)(s-r_2)\left[\frac{\hat{p}_1(0)}{(0-r_1)(0-r_2)} + \frac{\hat{p}_1(r_1)}{(r_1-0)(r_1-r_2)}\right.$$

$$\left. + \frac{\hat{p}_1(r_2)}{(r_2-0)(r_2-r_1)}\right]$$

$$-\left[\frac{\hat{p}_2(s)}{(s-r_1)(s-r_2)} + \frac{\hat{p}_2(r_1)}{(r_1-s)(r_1-r_2)} + \frac{\hat{p}_2(r_2)}{(r_2-s)(r_2-r_1)}\right]$$

Για τον τελεστή Dickson-Hipp είναι γνωστό ότι:

$$\frac{\hat{p}_1(0)}{(0-r_1)(0-r_2)} + \frac{\hat{p}_1(r_1)}{(r_1-0)(r_1-r_2)} + \frac{\hat{p}_1(r_2)}{(r_2-0)(r_2-r_1)} = T_0 T_{r2} T_{r1} p_1(0)$$

$$\frac{\hat{p}_2(s)}{(s-r_1)(s-r_2)} + \frac{\hat{p}_2(r_1)}{(r_1-s)(r_1-r_2)} + \frac{\hat{p}_2(r_2)}{(r_2-s)(r_2-r_1)} = T_s T_{r2} T_{r1} p_2(0)$$

άρα

$$\hat{p}_1(s) - \hat{p}_2(s) = (s-r_1)(s-r_2)[T_0 T_{r2} T_{r1} p_1(0) - T_s T_{r2} T_{r1} p_2(0)]$$

Επιπλέον ισχύει ότι:

$$T_0 T_{r2} T_{r1} p_1(0) = T_0 T_{r1} T_{r2} p_1(0) = c^2$$

$$T_0 T_{r2} T_{r1} p_1(0) = \frac{\hat{p}_1(0)}{(0-r_1)(0-r_2)} + \frac{\hat{p}_1(r_1)}{(r_1-0)(r_1-r_2)} + \frac{\hat{p}_1(r_2)}{(r_2-0)(r_2-r_1)}$$

Αφού:

$\hat{p}_1(s) = (cs-\lambda-\delta)^2$ *για s=0, s=r_1 και* $s = r_2 = \frac{\lambda+\delta}{c}$ *προκύπτει ότι:*

$$\hat{p}_1(0) = (-\lambda-\delta)^2 = (\lambda+\delta)^2 = (cr_2)^2$$

$$\hat{p}_1(r_1) = (cr_1-\lambda-\delta)^2 = (cr_1-cr_2)^2 = c^2(r_1-r_2)^2$$

$$\hat{p}_1(r_2) = (cr_2-\lambda-\delta)^2 = (cr_2-cr_2)^2 = 0$$

άρα

$$T_0 T_{r2} T_{r1} p_1(0) = \frac{(cr_2)^2}{r_1 r_2} + \frac{c^2(r_1-r_2)^2}{r_1(r_1-r_2)} = \frac{c^2 {r_2}^2}{r_1 r_2} + \frac{c^2(r_1-r_2)}{r_1}$$
$$= \frac{c^2 r_2}{r_1} + \frac{c^2 r_1 - c^2 r_2)}{r_1} = c^2$$

άρα:

$$\hat{p}_1(s) - \hat{p}_2(s) = (s-r_1)(s-r_2)[c^2 - T_s T_{r2} T_{r1} p_2(0)]$$

Οπότε για τον μετασχηματισμό Laplace η σχέση για το $\hat{\varphi}(s)$ γίνεται:

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{\hat{h}_1(s) - \hat{h}_2(s)}{-[\hat{p}_1(s) - \hat{p}_2(s)]} = \frac{(s-r_1)(s-r_2) T_s T_{r2} T_{r1} h_2(0)}{-(s-r_1)(s-r_2)[c^2 - T_s T_{r2} T_{r1} p_2(0)]}$$
$$= \frac{-T_s T_{r2} T_{r1} h_2(0)}{c^2 - T_s T_{r2} T_{r1} p_2(0)}$$

ή

$$c^2 \hat{\varphi}(s) - \hat{\varphi}(s) T_s T_{r2} T_{r1} p_2(0) = -T_s T_{r2} T_{r1} h_2(0)$$

ή

$$c^2\hat{\varphi}(s) = T_sT_{r2}T_{r1}p_2(0)\hat{\varphi}(s) - T_sT_{r2}T_{r1}h_2(0)$$

ή

$$\hat{\varphi}(s) = \frac{T_sT_{r2}T_{r1}p_2(0)}{c^2}\hat{\varphi}(s) - \frac{T_sT_{r2}T_{r1}h_2(0)}{c^2}$$

δηλαδή η παραπάνω προς απόδειξη πρόταση.

Στη συνέχεια εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση αποδεικνύεται η παρακάτω πρόταση για την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση την οποία ικανοποιεί τη συνάρτηση Gerber – Shiu:

$$\varphi(u) = \kappa_\delta \int_0^u \varphi(u-y)\zeta(y)dy + \theta(u)$$

όπου

$$\kappa_\delta = \frac{\lambda}{c}T_0T_{r1}f_2(0)$$

$$\zeta(y) = \frac{T_{r1}f_2(y)}{T_0T_{r1}f_2(0)}$$

$$\theta(u) = -\frac{1}{c^2}\{\lambda(1-\theta)[T_{r2}T_{r1}A_2(u) - T_{r2}T_{r1}A_1(u)] \\ + \lambda c(1-\theta)[\varphi_1(0)T_{r2}T_{r1}f_1(u) - \varphi_0(0)T_{r2}T_{r1}f_2(u)] - cT_{r1}w(u)\}$$

όπου:

$$A_1(u) = ({f_1}^{*}w^{*})(u)$$

$$A_2(u) = ({f_1}^{*}w)(u)$$

όπου με * συμβολίζεται η συνέλιξη

Απόδειξη:

Αρχικά υπολογίζονται τα $T_s T_{r2} T_{r1} p_2(0)$ και $T_s T_{r2} T_{r1} h_2(0)$:

$$\hat{p}_2(s) = -(cs - \lambda - \delta)\lambda \hat{f}_2(s) = -\lambda cs \hat{f}_2(s) + (\lambda + \delta)\lambda \hat{f}_2(s)$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$L^{-1}\{\hat{p}_2(s)\} = L^{-1}\{-\lambda cs \hat{f}_2(s) + (\lambda + \delta)\lambda \hat{f}_2(s)\}$$

με εφαρμογή της ιδιότητας της γραμμικότητας προκύπτει ότι:

$$L^{-1}\{\hat{p}_2(s)\} = -c\lambda L^{-1}\{s\hat{f}_2(s)\} + (\lambda + \delta)\lambda L^{-1}\{\hat{f}_2(s)\}$$

$$p_2(\mathrm{u}) = -c\lambda t(u) + \lambda(\lambda + \delta) f_2(u)$$

τότε:

$$p_2(0) = -c\lambda t(0) + \lambda(\lambda + \delta) f_2(0)$$

πολλαπλασιάζοντας το πρώτο και το δεύτερο μέλος της παραπάνω με $T_s T_{r2} T_{r1}$προκύπτει ότι:

$$T_sT_{r2}T_{r1}p_2(0) = T_sT_{r2}T_{r1}[-c\lambda t(0) + \lambda(\lambda+\delta)f_2(0)]$$

$$= \lambda(\lambda+\delta)T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0) - \lambda c T_sT_{r2}T_{r1}t(0)$$

$$= \lambda(\lambda+\delta)T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0) - \lambda c \frac{\frac{T_st(0) - T_{r2}t(0)}{r_2 - s} - \frac{T_st(0) - T_{r1}t(0)}{r_1 - s}}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta)T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0) - \lambda c \frac{\frac{s\hat{f}_2(s) - r_2\hat{f}_2(r_2)}{r_2 - s} - \frac{s\hat{f}_2(s) - r_1\hat{f}_2(r_1)}{r_1 - s}}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta)T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0) + \lambda c \frac{\frac{s\hat{f}_2(s) - r_2\hat{f}_2(r_2)}{s - r_2} - \frac{s\hat{f}_2(s) - r_1\hat{f}_2(r_1)}{s - r_1}}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta)T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0)$$

$$+ \lambda c \frac{\frac{s\hat{f}_2(s) - r_2\hat{f}_2(r_2) + r_2\hat{f}_2(s) - r_2\hat{f}_2(s)}{s - r_2} - \frac{s\hat{f}_2(s) - r_1\hat{f}_2(r_1) + r_1\hat{f}_2(s) - r_1\hat{f}_2(s)}{s - r_1}}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta)T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0)$$

$$+ \lambda c \frac{\hat{f}_2(s) + r_2\frac{\hat{f}_2(s) - \hat{f}_2(r_2)}{s - r_2} - \hat{f}_2(s) + r_1\frac{\hat{f}_2(r_1) - \hat{f}_2(s)}{s - r_1} -}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta)T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0) + \lambda c \frac{-r_2T_sT_{r2}f_2(0) + r_1T_sT_{r1}f_2(0)}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta)T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0)$$

$$+ \lambda c \frac{-r_2T_sT_{r2}f_2(0) + r_1T_sT_{r1}f_2(0) + r_2T_sT_{r1}f_2(0) - r_2T_sT_{r1}f_2(0)}{r_1 - r_2}$$

$$= \lambda(\lambda+\delta)T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0)$$

$$+ \lambda c \left[\frac{r_1T_sT_{r1}f_2(0) - r_2T_sT_{r1}f_2(0)}{r_1 - r_2} + \frac{r_2T_sT_{r1}f_2(0) - r_2T_sT_{r2}f_2(0)}{r_1 - r_2}\right]$$

$$= \lambda(\lambda+\delta)T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0) + \lambda c \left[T_sT_{r1}f_2(0) - r_2\frac{T_sT_{r1}f_2(0) - T_sT_{r2}f_2(0)}{r_2 - r_1}\right]$$

$$= \lambda(\lambda+\delta)T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0) + \lambda c[T_sT_{r1}f_2(0) - r_2T_sT_{r1}T_{r2}f_2(0)]$$

κατόπιν αντικατάστασης του r_2 με (λ+δ)/c προκύπτει:

$$T_sT_{r2}T_{r1}p_2(0) = \lambda cr_2T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0) + \lambda cT_sT_{r1}f_2(0) - \lambda cr_2T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0) \Rightarrow$$

$$T_sT_{r2}T_{r1}p_2(0) = \lambda cT_sT_{r1}f_2(0)$$

Ακολούθως για το $T_sT_{r2}T_{r1}h_2(0)$:

$$\begin{aligned}\hat{h}_2(s) = (cs - \lambda - \delta)\widehat{w}(s) + \lambda(1+\theta)\left(\hat{A}_2(s) - \hat{A}_1(s)\right) \\ + \lambda c(1-\theta)\left(\hat{f}_1(s)\varphi_1(0) - \hat{f}_2(s)\varphi(0)\right) \\ = cs\widehat{w}(s) - (\lambda+\delta)\widehat{w}(s) + \lambda c(1-\theta)\hat{f}_1(s)\varphi_1(0) \\ - \lambda c(1-\theta)\hat{f}_2(s)\varphi(0) + \lambda(1-\theta)\hat{A}_2(s) - \lambda(1-\theta)\hat{A}_1(s)\end{aligned}$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει:

$$\begin{aligned}L^{-1}\{\hat{h}_2(s)\} = L^{-1}\{cs\widehat{w}(s) - (\lambda+\delta)\widehat{w}(s) + \lambda c(1-\theta)\hat{f}_1(s)\varphi_1(0) \\ - \lambda c(1-\theta)\hat{f}_2(s)\varphi(0) + \lambda(1-\theta)\hat{A}_2(s) - \lambda(1-\theta)\hat{A}_1(s)\} \\ = cL^{-1}\{s\widehat{w}(s)\} - (\lambda+\delta)L^{-1}\{\widehat{w}(s)\} + \lambda c(1-\theta)\varphi_1(0)L^{-1}\{\hat{f}_1(s)\} \\ - \lambda c(1-\theta)\varphi(0)L^{-1}\{\hat{f}_2(s)\} + \lambda(1-\theta)L^{-1}\{\hat{A}_2(s)\} \\ - \lambda(1-\theta)L^{-1}\{\hat{A}_1(s)\}\end{aligned}$$

Αν $t_1(u) = L^{-1}\{s\widehat{w}(s)\}$ όπου $\widehat{t_1}(s) = L\{t_1(u)\} = s\widehat{w}(s)$

Η παραπάνω εξίσωση μετασχηματίζεται ως εξής:

$$\begin{aligned}h_2(u) = ct_1(u) - (\lambda+\delta)w(u) + \lambda c(1-\theta)\varphi_1(0)f_1(u) - \lambda c(1-\theta)\varphi(0)f_2(u) \\ + \lambda(1-\theta)A_2(u) - \lambda(1-\theta)A_1(u)\end{aligned}$$

και υπολογίζεται ότι:

$$\begin{aligned}h_2(0) = ct_1(0) - (\lambda+\delta)w(0) + \lambda c(1-\theta)\varphi_1(0)f_1(0) - \lambda c(1-\theta)\varphi(0)f_2(0) \\ + \lambda(1-\theta)A_2(0) - \lambda(1-\theta)A_1(0)\end{aligned}$$

πολλαπλασιάζοντας το πρώτο και το δεύτερο μέλος της παραπάνω με $T_s T_{r2} T_{r1}$προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} T_s T_{r2} T_{r1} h_2(0) &= T_s T_{r2} T_{r1} [c t_1(0) - (\lambda + \delta) w(0) + \lambda c (1-\theta) \varphi_1(0) f_1(0) \\ &\quad - \lambda c (1-\theta) \varphi(0) f_2(0) + \lambda (1-\theta) A_2(0) - \lambda (1-\theta) A_1(0)] \\ &= c T_s T_{r2} T_{r1} t_1(0) - (\lambda + \delta) T_s T_{r2} T_{r1} w(0) \\ &\quad + \lambda c (1-\theta) \varphi_1(0) T_s T_{r2} T_{r1} f_1(0) - \lambda c (1-\theta) \varphi(0) T_s T_{r2} T_{r1} f_2(0) \\ &\quad + \lambda (1-\theta) T_s T_{r2} T_{r1} A_2(0) - \lambda (1-\theta) T_s T_{r2} T_{r1} A_1(0) \\ &= \lambda (1-\theta) [T_s T_{r2} T_{r1} A_2(0) - T_s T_{r2} T_{r1} A_1(0)] \\ &\quad + \lambda c (1-\theta) [\varphi_1(0) T_s T_{r2} T_{r1} f_1(0) - \varphi(0) T_s T_{r2} T_{r1} f_2(0)] \\ &\quad - (\lambda + \delta) T_s T_{r2} T_{r1} w(0) + c T_s T_{r2} T_{r1} t_1(0) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$T_s T_{r2} T_{r1} t_1(0) = \frac{\dfrac{T_s t_1(0) - T_{r2} t_1(0)}{r_2 - s} - \dfrac{T_s t_2(0) - T_{r1} t_1(0)}{r_1 - s}}{r_1 - r_2}$$

αλλά $T_r t_1(0) = \hat{t}_1(r) = r\widehat{w}(r)$, άρα:

$$\begin{aligned} T_s T_{r2} T_{r1} t_1(0) &= \frac{\dfrac{s\widehat{w}(s) - r_2 \widehat{w}(r_2)}{r_2 - s} - \dfrac{s\widehat{w}(s) - r_1 \widehat{w}(r_1)}{r_1 - s}}{r_1 - r_2} \\ &= \frac{r_2 T_s T_{r2} w(0) - r_1 T_s T_{r1} w(0)}{r_1 - r_2} \end{aligned}$$

Άρα, αντικαθιστώντας στην πιο πάνω σχέση για το $T_s T_{r2} T_{r1} h_2(0)$ προκύπτει:

$$\begin{aligned} T_s T_{r2} T_{r1} h_2(0) &= \lambda (1-\theta) [T_s T_{r2} T_{r1} A_2(0) - T_s T_{r2} T_{r1} A_1(0)] \\ &\quad + \lambda c (1-\theta) [\varphi_1(0) T_s T_{r2} T_{r1} f_1(0) - \varphi(0) T_s T_{r2} T_{r1} f_2(0)] \\ &\quad - (\lambda + \delta) T_s T_{r2} T_{r1} w(0) + c \frac{r_2 T_s T_{r2} w(0) - r_1 T_s T_{r1} w(0)}{r_1 - r_2} \end{aligned}$$

και αφού $r_2=(\lambda+\delta)/c$, τότε:

$$
\begin{aligned}
T_sT_{r2}T_{r1}h_2(0) &= \lambda(1-\theta)[T_sT_{r2}T_{r1}A_2(0) - T_sT_{r2}T_{r1}A_1(0)] \\
&+ \lambda c(1-\theta)[\varphi_1(0)T_sT_{r2}T_{r1}f_1(0) - \varphi(0)T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0)] \\
&- cr_2T_sT_{r2}T_{r1}w(0) + c\,\frac{r_2T_sT_{r2}w(0) - r_1T_sT_{r1}w(0)}{r_1 - r_2} \\
&= \lambda(1-\theta)[T_sT_{r2}T_{r1}A_2(0) - T_sT_{r2}T_{r1}A_1(0)] \\
&+ \lambda c(1-\theta)[\varphi_1(0)T_sT_{r2}T_{r1}f_1(0) - \varphi(0)T_sT_{r2}T_{r1}f_2(0)] \\
&- cT_sT_{r1}w(0)
\end{aligned}
$$

3. Προτεινόμενο μοντέλο

Στο κεφάλαιο αυτό προτείνεται ένα μοντέλο κινδύνου το οποίο αποτελεί επέκταση του κλασσικού σύνθετου μοντέλου Poisson όπως αυτό παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Το προτεινόμενο σε αυτό το κεφάλαιο μοντέλο βρίσκει εφαρμογή στην περίπτωση όπου μπορεί να υπάρχει χρονική υστέρηση στην εμφάνιση των απαιτήσεων και βασίζεται σε ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις. Επιπλέον, το μοντέλο το οποίο παρουσιάζεται στο παρόν κεφάλαιο βρίσκει εφαρμογή για πρωτογενείς και δευτερογενείς απαιτήσεις οι οποίες μπορούν αμφότερες να έχουν χρονική καθυστέρηση. Το προτεινόμενο μοντέλο έχει προταθεί στο άρθρο “On the expected discounted penalty function for the compound Poisson risk model with delayed claims” των Xie και Zou (2011) και μεταξύ άλλων βασίζεται σε άρθρο των Gerber και Shiu (1998) με τίτλο “ On the time value of ruin” (Gerber & Shiu, 1998; Xie & Zou, 2011).

3.1. Εισαγωγή

Από τα προαναφερόμενα γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι το κλασσικό μοντέλο κινδύνου, οι επεκτάσεις αυτού καθώς και άλλα μοντέλα για διαφορετικές θεωρήσεις σε ό,τι αφορά στις απαιτήσεις έχουν συγκεντρώσει μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον οδηγώντας στην προσέγγιση διαφόρων μέτρων χρεοκοπίας όπως το απόθεμα πριν τη χρεοκοπία, το έλλειμα μετά τη χρεοκοπία κ.α..

Οι Gerber και Shiu (1998) έκαναν την πρώτη προσπάθεια αναλυτικής ανασκόπησης των πρότερων μοντέλων κινδύνου και πρότασης ενός μοντέλου το οποίο συγκεράζει τα διάφορα μέτρα χρεοκοπίας τα οποία έχουν ήδη προταθεί (Ruan, et al., 2019). Οι Gerber και Shiu πρότειναν την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου (Gerber & Shiu, 1998).

Στη βάση της συνάρτησης των Gerber και Shiu ακολούθησε περαιτέρω εντατική έρευνα, η ανασκόπηση της οποία έχει ήδη γίνει στις παραγράφους 1.1 και 1.4 (Huang, et al., 2019). Στον πραγματικό κόσμο, η πιθανότητα μία απαίτηση να εμφανίζει χρονική υστέρηση μπορεί να οφείλεται σε διάφορους λόγους (Ma & Liu, 2011). Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει σε απαιτήσεις οι οποίες εμφανίζουν χρονική υστέρηση και πιο συγκεκριμένα σε δευτερογενείς απαιτήσεις οι οποίες εξετάζονται στο πεδίο του συνεχούς χρόνου. Το ερευνητικό αυτό θέμα έχει ομοίως εξεταστεί ενδελεχώς από πολλούς ερευνητές όπως οι Yuen και Guo (2001), οι οποίοι πρότειναν αναδρομικές εξισώσεις για τον υπολογισμό της πεπερασμένης πιθανότητας χρεοκοπίας βασισμένοι στο σύνθετο διωνυμικό μοντέλο κινδύνου (Yuen & Guo, 2001). Ακολούθως, οι Xiao και Guo (2007) πρότειναν ένα αναδρομικό μοντέλο για την προσέγγιση της κατανομής του πλεονάσματος αμέσως πριν από τη χρεοκοπία και για την προσέγγιση του ελλείματος μετά τη χρεοκοπία ((Xiao & Guo, 2007), ενώ οι Xie και Zou (2011) μελέτησαν την αναμενόμενη παρούσα αξία των συνολικά καταβαλλόμενων μερισμάτων σε ένα μοντέλο κινδύνου με καθυστερημένες απαιτήσεις και με στοχαστικά επιτόκια (Xie & Zou, 2011).

Το κοινό χαρακτηριστικό όλων των παραπάνω μοντέλων είναι ότι αν και εισήχθη η έννοια των απαιτήσεων με χρονική υστέρηση, εντούτοις όλα αυτά τα μοντέλα είναι μοντέλα διακριτού χρόνου. Αντίθετα, το προτεινόμενο μοντέλο στο παρόν κεφάλαιο είναι ένα μοντέλο κινδύνου συνεχούς χρόνου.

Το προτεινόμενο μοντέλο όπως αυτό παρουσιάζεται στις επόμενες παραγράφους βασίζεται στο σύνθετο μοντέλο κινδύνου Poisson για απαιτήσεις με χρονική υστέρηση. Το προτεινόμενο μοντέλο έχει ισχύ για πρωτογενείς (κύριες) και δευτερογενείς (δευτερεύουσες) απαιτήσεις οι οποίες είναι πιθανόν να εμφανίζονται με χρονική υστέρηση.

Ως εκ τούτου, το εξεταζόμενο μοντέλο βρίσκει ιδιαίτερα ευρεία εφαρμογή σε πραγματικά προβλήματα, καθώς στον πραγματικό κόσμο μετά από ένα αρνητικό συμβάν μία ασφαλιστική καλείται να καταβάλει αποζημιώσεις διαφορετικού μεγέθους σε διαφορετικούς χρόνους και σε διαφορετική σειρά ανάλογα με τη ζημία την οποία καλείται κάθε αποζημίωση να αντισταθμίσει.

Εντούτοις, στον πραγματικό κόσμο διαφορετικές ζημίες πρέπει να αποζημιωθούν άμεσα, ενώ για την αποζημίωση άλλων ζημιών απαιτείται μεγάλο χρονικό διάστημα. Ως εκ τούτου, στο εξεταζόμενο μοντέλο κινδύνου εισάγεται και μελετάται η επίδραση των προεξοφλημένων ποινών με αποτέλεσμα τον υπολογισμό διαφορετικών μέτρων χρεοκοπίας.

Επιπλέον, καθώς, όπως προαναφέρεται, το εξεταζόμενο μοντέλο αποτελεί μία επέκταση του σύνθετου μοντέλου κινδύνου του Poisson τα αποτελέσματά του μπορούν να αποτελέσουν επέκταση και συμπλήρωμα των αποτελεσμάτων των μοντέλων των Yuen και Guo (2001) και Xiao και Guo (2007).

Η δε εισαγωγή του φαινομένου των απαιτήσεων με χρονική υστέρηση είναι καίρια σε ό,τι αφορά στην εφαρμογή του εξεταζόμενου μοντέλου σε πραγματικά προβλήματα και έχει αντίκτυπο στην πολυπλοκότητα προσέγγισης της συνάρτησης προεξοφλημένης ποινής, η οποία ωστόσο προσεγγίζεται με μεγάλη ακρίβεια.

3.2. Περιγραφή μοντέλου

Το εξεταζόμενο μοντέλο είναι ένα μοντέλο συνεχούς χρόνου και έχει εφαρμογή για πρωτογενείς και δευτερογενείς απαιτήσεις. Το σύνολο των πρωτογενών απαιτήσεων (χρόνος άφιξης και ενδιάμεσα χρονικά διαστήματα) προέρχεται από μία στοχαστική διαδικασία Poisson N_t με ένταση ανέλιξης Poisson λ. Οι χρόνοι αλμάτων συμβολίζονται με T_i για $i \geq 1$ με το πρώτο άλμα να λαμβάνει χώρα σε χρόνο 0: $T_0=0$.

Σε ό,τι αφορά στο μέγεθος των πρωτογενών απαιτήσεων, αυτό συμβολίζεται με Y_i για $i \geq 1$, τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και είναι ισόνομα τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν μία κοινή κατανομή F.

Σε ό,τι αφορά στις δευτερογενείς απαιτήσεις, τα μεγέθη τους συμβολίζονται με X_i για $i \geq 1$, τα οποία είναι και αυτά ανεξάρτητα μεταξύ τους και είναι ισόνομα τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν μία κοινή κατανομή G. Σε ό,τι αφορά στη σχέση μεταξύ των πρωτογενών και δευτερογενών απαιτήσεων, τα μεγέθη τους είναι ανεξάρτητα, ενώ τα μέσα μεγέθη τους συμβολίζονται με μ_F και μ_G αντίστοιχα.

Η άφιξη των απαιτήσεων, τόσο των πρωτογενών όσο και των δευτερογενών περιγράφεται από την παρακάτω διαδικασία:

Μία πρωτογενής απαίτηση Y_i αφικνείται σε κάθε περίοδο T_i της στοχαστικής διαδικασίας Poisson και το μέγεθος Y_i της απαίτησης προκαλεί μία δευτερογενή απαίτηση ύψους X_i. Επιπλέον, υπάρχει πιθανότητα θ οι πρωτογενείς και δευτερογενείς απαιτήσεις να αφικνούνται ταυτόχρονα και πιθανότητα 1-θ οι δευτερογενείς απαιτήσεις να αφικνούνται με χρονική υστέρηση T_{i+1} σε σχέση με τις πρωτογενείς απαιτήσεις. Ως εκ τούτου, όταν η πιθανότητα θ ισούται με ένα, τότε μία πρωτογενής και μία δευτερογενής απαίτηση αφικνούνται ταυτόχρονα σε κάθε περίοδο της στοχαστικής διαδικασίας Poisson. Σε περίπτωση όπου μία δευτερογενής απαίτηση αφικνείται με χρονική υστέρηση T_{i+1}, η χρονική αυτή υστέρηση είναι ανεξάρτητη της επόμενης πρωτογενούς απαίτησης.

Η παραπάνω διαδικασία στην οποία βασίζεται το προτεινόμενο μοντέλο δεν αποκλίνει σημαντικά από τη διαδικασία άφιξης των απαιτήσεων στην οποία βασίζεται το σύνθετο μοντέλο κινδύνου Poisson. Εντούτοις, το προτεινόμενο μοντέλο αποτελεί επέκταση του σύνθετου μοντέλου κινδύνου Poisson καθώς οι απαιτήσεις διακρίνονται σε πρωτογενείς (Y) και δευτερογενείς (X).

Σύμφωνα με το προτεινόμενο μοντέλο, το αποθεματικό προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση:

$$U(t) = u_0 + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i - R(t)$$

όπου

u_0 το αρχικό αποθεματικό

c ο ρυθμός είσπραξης ασφαλίστρων

Y_i το σύνολο των πρωτογενών απαιτήσεων

R(t) το σύνολο των δευτερογενών απαιτήσεων οι οποίες έχουν αφιχθεί πριν από τη χρονική στιγμή t

Σε ό,τι αφορά στο σύνολο των δευτερογενών απαιτήσεων οι οποίες έχουν αφιχθεί πριν από τη χρονική στιγμή t, λαμβάνεται υπόψη ότι το πλήθος των πρωτογενών απαιτήσεων που αφικνούνται πριν από τη χρονική στιγμή t ισούται με N(t), ενώ η τελευταία πρωτογενής απαίτηση η οποία αφικνείται πριν από τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με $Y_{N(t)}$.

Με τη σειρά της, η τελευταία πρωτογενής απαίτηση η οποία αφικνείται πριν από τη χρονική στιγμή t οδηγεί στην άφιξη μίας δευτερογενούς απαίτησης $X_{N(t)}$ πριν από τη χρονική στιγμή t ή μετά από τη χρονική στιγμή t. Υπάρχει ως εκ τούτου πιθανότητα θ η τελευταία πρωτογενής απαίτηση η οποία αφικνείται πριν από τη χρονική στιγμή t και η τελευταία δευτερογενής απαίτηση η οποία αφικνείται πριν από τη χρονική στιγμή t να αφιχθούν ταυτόχρονα, οπότε και το πλήθος των απαιτήσεων πριν από τη χρονική στιγμή t είναι N(t).

Το συμπληρωματικό ενδεχόμενο είναι η τελευταία πρωτογενής απαίτηση η οποία αφικνείται πριν από τη χρονική στιγμή t να οδηγήσει σε μία δευτερογενή απαίτηση η οποία αφικνείται με χρονική υστέρηση, οπότε και το πλήθος των απαιτήσεων πριν από τη χρονική στιγμή t είναι N(t)-1. Η πιθανότητα του συμπληρωματικού αυτού ενδεχομένου είναι 1-θ.

Η μαθηματική περιγραφή του προτεινόμενου μοντέλου παρατίθεται παρακάτω:

$$E[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i + R(t)] = E[\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i] + E[R(t)] = \lambda t\mu_F + \theta\lambda t\mu_G + (1-\theta)e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}(n-1)\mu_G =$$

$$= \lambda t\mu_F + \theta\lambda t\mu_G + (1-\theta)e^{-\lambda t}\left(\lambda t e^{\lambda t} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n}{n!}\right)\mu_G =$$

$$= \lambda t\mu_F + \theta\lambda t\mu_G + (1-\theta)e^{-\lambda t}\left(\lambda t e^{\lambda t} - \left(e^{\lambda t} - 1\right)\right)\mu_G = \lambda t\mu_F + \lambda t\mu_G - (1-\theta)\mu_G(1 - e^{-\lambda t})$$

Για να πληρείται η συνθήκη θετικότητας του ρυθμού είσπραξης των ασφαλίστρων πρέπει να ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\lambda(\mu_F + \mu_G) < c$$

Ο χρόνος κατά τον οποίο σημειώνεται η χρεοκοπία προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$$

Ομοίως, το έλλειμα αμέσως μετά τη χρεοκοπία ισούται με |U(t)| και το απόθεμα ακριβώς πριν από τη χρεοκοπία ισούται με U(T-).

Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ισούται με:

$$F(u) = E[e^{-\delta T}w(U(T-), |U(T)|)I(T < \infty | U(0) = u]$$

για u≥0

και όπου

I(A) η χαρακτηριστική συνάρτηση για ένα σύνολο A

$w(x_1,x_2)$, με $0\leq x_1,x_2<\infty$ η συνάρτηση ποινής

δ μία μη αρνητική σταθερά

Ιδιαίτερη σημασία έχει η επιλογή της μορφής της συνάρτησης ποινής, καθώς για διαφορετικές μορφές συναρτήσεων ποινής μπορούν να προκύπτουν διαφορετικά μέτρα χρεοκοπίας. Επιπλέον, μία ειδική περίπτωση της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής προκύπτει για δ=0 και $w(x_1,x_2)=1$ όπου προκύπτει η οριακή πιθανότητα χρεοκοπίας:

$$\varphi(u) = \mathbb{P}(T < \infty | U(0) = u), \gamma\iota\alpha\ u \geq 0$$

3.3. Σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων

Ο υπολογισμός της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής με μηδενικό αρχικό απόθεμα και ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής βασίζεται στην κατασκευή ενός συστήματος ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων. Το σύστημα αυτό προκύπτει από την εισαγωγή ενός δεύτερου βοηθητικού μοντέλου κινδύνου με την αλλαγή του πλήθους των απαιτήσεων στην πρώτη περίοδο της στοχαστικής διαδικασίας Poisson, καθώς θεωρείται πως υπάρχει μία πρωτογενής και μία δευτερογενής απαίτηση κατά την πρώτη αυτή περίοδο. Ο υπολογισμός της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής γίνεται για την πρώτη περίοδο.

Αν στην πρώτη περίοδο αφιχθούν δύο απαιτήσεις Y_1 και X_1, ενδεχόμενο το οποίο έχει πιθανότητα θ, η διαδικασία U(t) από την οποία ανανεώνεται το απόθεμα ανανεώνεται κατά την πρώτη περίοδο, ενώ αν η δευτερογενής απαίτηση X_1 αφιχθεί με χρονική υστέρηση στη δεύτερη περίοδο, τότε η ανανέωση του αποθέματος γίνεται στο βοηθητικό μοντέλο το οποίο εισήχθη, ενδεχόμενο το οποίο έχει πιθανότητα 1-θ. Η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτησης ποινής για το κύριο μοντέλο είναι η Φ(u) και αυτή για το βοηθητικό μοντέλο είναι η $Φ_1(u)$. Παρακάτω παρατίθεται το σύστημα ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων[1]:

Κύριο μοντέλο κινδύνου (Φ(u)):

$$\begin{aligned}\Phi(u) = \theta \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} (\int_0^{u+ct} & \Phi(u+ct-y) dF * G(y) \\ & + \int_{u+ct}^\infty w(u+ct, y-u-ct) dF * G(y)) dt + (1 \\ & - \theta) \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} (\int_0^{u+ct} \Phi_1(u+ct-y) dF(y) \\ & + \int_{u+ct}^\infty w(u+ct, y-u-ct) dF(y)) dt\end{aligned}$$

Βοηθητικό μοντέλο κινδύνου ($Φ_1(u)$):

[1] με * συμβολίζεται η συνέλιξη των εξισώσεων κατανομής

$$\Phi_1(u) = \theta \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \left(\int_0^{u+ct} \Phi(u + ct - y) dF * G * G(y) \right.$$

$$\left. + \int_{u+ct}^\infty w(u + ct, y - u - ct) dF * G * G(y) \right) dt + (1$$

$$- \theta) \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\delta)t} \left(\int_0^{u+ct} \Phi_1(u + ct - y) dF * G(y) \right.$$

$$\left. + \int_{u+ct}^\infty w(u + ct, y - u - ct) dF * G(y) \right) dt$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις με s=u+ct και εν συνεχεία, οι δύο παραπάνω σχέσεις παραγωγίζονται ως προς u δίνοντας αντίστοιχα τις δύο παρακάτω σχέσεις για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής:

$$c\Phi'(u) = (\lambda + \delta)\Phi(u)$$

$$- \lambda\theta\left(\int_0^u \Phi(u - y) dF * G(y) + w_2(u) \right) - \lambda(1$$

$$- \theta) \int_0^u \Phi_1(u - y) dF(y) + w_1(u)$$

και

$$c\Phi_1'(u) = (\lambda + \delta)\Phi_1(u)$$

$$- \lambda\theta\left(\int_0^u \Phi(u - y) dF * G * G(y) + w_3(u) \right) - \lambda(1$$

$$- \theta) \int_0^u \Phi_1(u - y) dF * G(y) + w_2(u)$$

όπου:

$$w_1(u) = \int_0^{\infty} w(u, y-u)dF(y)$$

$$w_2(u) = \int_u^{\infty} w(u, y-u)dF * G(y)$$

$$w_3(u) = \int_0^{\infty} w(u, y-u)dF * G * G(y)$$

3.4. Μετασχηματισμός LaPlace

Εν συνεχεία υπολογίζεται ο μετασχηματισμός LaPlace για τις συναρτήσεις αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής Φ(u) και $Φ_1$(u) για τα δύο παραπάνω μοντέλα:

$$\widetilde{\Phi}(s) = \frac{\left(cs-\delta-\lambda+\lambda(1-\theta)\tilde{b}_{F*G}(s)\right)\left(\widetilde{w}(s)-c\Phi(0)\right)-\lambda(1-\theta)\tilde{b}_{F*G}(s)\left(\widetilde{w}^*(s)-c\Phi_1(0)\right)}{-(cs-\delta-\lambda)^2-\lambda\tilde{b}_{F*G}(s)(cs-\delta-\lambda)}$$

και

$$\widetilde{\Phi}_1(s) = \frac{\left(cs-\delta-\lambda+\lambda\theta\tilde{b}_{F*G}(s)\right)\left(\widetilde{w}^*(s)-c\Phi_1(0)\right)-\lambda\theta\tilde{b}_{F*G*G}(s)\left(\widetilde{w}(s)-c\Phi(0)\right)}{-(cs-\delta-\lambda)^2-\lambda\tilde{b}_{F*G}(s)(cs-\delta-\lambda)}$$

όπου:

$$\widetilde{w}(s) = \lambda\left(\theta\widetilde{w}_2(s)+(1-\theta)\widetilde{w}_1(s)\right)$$

$$\widetilde{w}^*(s) = \lambda\left(\theta\widetilde{w}_3(s)+(1-\theta)\widetilde{w}_2(s)\right)$$

Κατόπιν, για τον υπολογισμό των συναρτήσεων αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής για το κύριο (Φ(u)) και για το βοηθητικό μοντέλο ($Φ_1$(u)) επαρκεί να υπολογιστούν οι αρχικές τιμές των δύο συναρτήσεων δηλαδή τα Φ(0) και $Φ_1$(0). Για το λόγο αυτό προσδιορίζονται οι λύσεις του χαρακτηριστικού πολυωνύμου στον παρονομαστή των δύο παραπάνω εξισώσεων:

$$(cs-\delta-\lambda)^2+\lambda\tilde{b}_{F*G}(s)(cs-\delta-\lambda)=0$$

Κατόπιν θεώρησης του δ ως μία αυστηρά θετική μεταβλητή σύμφωνα με τους Xie και Zou (2011), το παραπάνω χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πρώτο τεταρτημόριο, τις $\rho_1(\delta)$ και $\rho_2(\delta)$ οι οποίες ισούνται με (λ+δ)/c (Xie & Zou, 2011).

Οι Xie και Zou (2011) καταλήγουν ότι:

$$\Phi(0)=\frac{\tilde{b}_F(\rho_1)[-\widetilde{w}(\rho_2)g(\rho_2)+\lambda(-1+\theta)\tilde{b}_F(\rho_2)\widetilde{w}^*(\rho_2)]-\tilde{b}_F(\rho_2)[-\widetilde{w}(\rho_1)g(\rho_1)+\lambda(-1+\theta)\tilde{b}_F(\rho_1)\widetilde{w}^*(\rho_2)}{-c(\tilde{b}_F(\rho_2)g(\rho_1)-\tilde{b}_F(\rho_1)g(\rho_2))}$$

και

$$\Phi_1(0)=\frac{\widetilde{w}^*(\rho_2)}{C}+\frac{g(\rho_2)(\widetilde{w}(\rho_2)-c\Phi(0))}{\lambda c(1-\theta)\tilde{b}_F(\rho_2)}$$

όπου:

$$g(s)=\lambda+\delta-\lambda\tilde{b}_{F*G}(s)+\lambda\theta\tilde{b}_{F*G}(s)-cs$$

3.5. Ελαττωματική ανανεωτική συνάρτηση

Στο προτεινόμενο μοντέλο, η συνάρτηση της αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής ικανοποιεί μία ελαττωματική ανανεωτική συνάρτηση για τη στοχαστική διαδικασία Poisson. Η προσέγγιση αυτής της ανανεωτικής συνάρτησης γίνεται μέσω ανάλυσης του μετασχηματισμού LaPlace της συνάρτησης αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής Φ(u).

Η συνάρτηση αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής Φ(u) μπορεί να μετασχηματιστεί στην παρακάτω:

$$\widetilde{\Phi}(s) = \frac{\tilde{f}_1(s) + \tilde{f}_2(s)}{-(\tilde{h}_1(s) - \tilde{h}_2(s))}$$

όπου

$$\tilde{f}_1(s) = -c\Phi(0)(cs - \lambda - \delta)$$

$$\tilde{f}_2(s) = \widetilde{w}(s)(cs - \lambda - \delta) + \lambda(1-\theta)\left(\tilde{b}_F(s)\widetilde{w}^*(s)\right) + \lambda c(1-\theta)\left(\Phi_1(0)\tilde{b}_F(s) - \Phi(0)\tilde{b}_{F*G}(s)\right)$$

$$\tilde{h}_1(s) = (cs - \delta - \lambda)^2$$

$$\tilde{h}_2(s) = -\lambda\tilde{b}_{F*G}(s)(cs - \delta - \lambda)$$

και οι συναρτήσεις $f_1(u)$, $f_2(u)$, $h_1(u)$ και $h_2(u)$ είναι οι αντίστροφες συναρτήσεις απεικόνισης των αντίστοιχων $\tilde{f}_1(s), \tilde{f}_2(s), \tilde{h}_1(s)\ \kappa\alpha\iota\ \tilde{h}_2(s)$. Η ελαττωματική ανανεωτική συνάρτηση προκύπτει με εφαρμογή του θεωρήματος παρεμβολής του Lagrange.

Μετά από υπολογισμούς, η ελαττωματική ανανεωτική συνάρτηση προκύπτει από την παρακάτω εξίσωση:

$$\Phi(u) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \Phi(u - x)\int_x^\infty e^{-\rho_1(y-x)} dF * G(y)dx + \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\rho_1(x-u)}\int_x^\infty w(x, y-x)dF * G(y)dx$$

Στο σημείο αυτό τονίζεται εκ νέου ότι η παραπάνω συνάρτηση είναι όμοια με αυτή των Gerber και Shiu (1998), με τη διαφορά ότι η τυχαία μεταβλητή που υποδηλώνει το ύψος των απαιτήσεων είναι η X+Y αντί της X, στην οποία βασίζεται η συνάρτηση των Gerber και Shiu (Gerber & Shiu, 1998).

3.6. Υπολογισμοί για εκθετικά κατανεμημένες απαιτήσεις

Αν οι απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή, ήτοι:

$$F \sim Exp(v) \ και \ G \sim Exp(\omega)$$

$$F \sim Exp\left(\frac{1}{\mu_F}\right) \ και \ G \sim Exp(\frac{1}{\mu_G})$$

τότε οι $\tilde{b}_F$ και $\tilde{b}_G$ γίνονται:

$$\tilde{b}_F\ (s) = \frac{v}{v+s}$$

$$\tilde{b}_G\ (s) = \frac{\omega}{\omega+s}$$

Για ν≠ω, η συνάρτηση της αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής μετασχηματίζεται στην παρακάτω:

$$\tilde{\Phi}(s) = \frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)\Gamma_s\Gamma_{\rho_2}\Gamma_{\rho_1}f_2(0)}{-(cs-\delta-\lambda)^2 - \lambda\tilde{b}_{F*G}(s)(cs-\delta-\lambda)}$$

κατόπιν απλοποιήσεων, η παραπάνω σχέση από την οποία μπορεί να υπολογιστεί η συνάρτηση αναμενόμενης προεξοφλημένης ποινής από την παρακάτω:

$$\Phi(u)=\lambda c(1-\theta)\{\frac{\nu\omega\Phi(0)}{(\rho_1+\omega)(\rho_2+\omega)}\sum_{i=1}^{2}a_i e^{-R_i u}+\sum_{i=1}^{2}b_i e^{-R_i u}[\frac{\nu\Phi_1(0)}{(\rho_1+v)(\rho_2+v)}$$

$$-\frac{\nu\omega\Phi(0)}{(\rho_1+\omega)(\rho_2+v)(\rho_2+\omega)}-\frac{\nu\omega\Phi(0)}{(\rho_1+v)(\rho_2+v)(\rho_1+\omega)}]\}+\lambda(1$$

$$-\theta)(\Gamma_{\rho_1}\Gamma_{\rho_2}A_2(u)-\Gamma_{\rho_1}\Gamma_{\rho_2}A_1(u))-c\Gamma_{\rho_1}w(u)$$

$$+\sum_{i=1}^{2}c_i e^{-R_i u}\underline{*}[\lambda(1-\theta)(\Gamma_{\rho_1}\Gamma_{\rho_2}A_2(u)-\Gamma_{\rho_1}\Gamma_{\rho_2}A_1(u)-c\Gamma_{\rho_1}w(u)]$$

όπου στην παραπάνω με $\underline{*}$ συμβολίζεται η συνέλιξη η οποία διαφέρει από τη συνέλιξη των κατανομών των απαιτήσεων.

Στην ειδική περίπτωση όπου δ=0, τότε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της παραπάνω εξίσωσης είναι το:

$$D(s)=-(cs-\lambda)^2(s+v)(s+\omega)-\lambda v\omega(cs-\lambda)=0$$

Το παραπάνω χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχει ακριβώς τέσσερις ρίζες:

$$s_1=\rho_1=0$$

$$s_2=\rho_2=\frac{\lambda}{c}$$

$$s_3=-R_1=\frac{\lambda-cv-c\omega-\Lambda}{2c}$$

$$s_4=-R_2=\frac{\lambda-cv-c\omega+\Lambda}{2c}$$

όπου Λ ισούται με:

$$\Lambda=\sqrt{(cv+c\omega-\lambda)^2-4c(cv\omega-\lambda v-\lambda\omega)}$$

Προκειμένου να ικανοποιείται η συνθήκη του θετικού ρυθμού είσπραξης των ασφαλίστρων πρέπει να ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$c > \lambda(\frac{1}{\omega} + \frac{1}{v})$$

η οποία ικανοποιείται μόνο όταν η ρίζα s_2 είναι θετική.

Συμπεράσματα

Η θεωρία κινδύνου είναι ένα ερευνητικό πεδίο το οποίο σημειώνει διαχρονικά και για πάνω από έναν αιώνα το ερευνητικό ενδιαφέρον. Μάλιστα, καθώς οι σύγχρονες αγορές γίνονται ολοένα πιο πολύπλοκες, τόσο μεγαλύτερη αξία αποκτά η θεωρία κινδύνου και δη τα μέτρα χρεοκοπίας.

Το κλασσικό μοντέλο κινδύνου των Cramer και Lunberg αποτέλεσε τη βάση για εντατική έρευνα, ωστόσο το μεγαλύτερο μερίδιο των ερευνών εστιάζουν σε μοντέλα διακριτού χρόνου για διακριτές απαιτήσεις. Τα διακριτά αυτά μοντέλα είναι πιο πολύπλοκα στην εφαρμογή, αλλά βρίσκουν σημαντική εφαρμογή σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου. Εντούτοις, τα μοντέλα συνεχούς χρόνου δεν έχουν συγκεντρώσει εξίσου μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον αν και βρίσκουν ομοίως σημαντική εφαρμογή σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου.

Η θεωρία κινδύνου και τόσο τα μοντέλα διακριτού χρόνου όσο και τα μοντέλα συνεχούς χρόνου εφαρμόζονται για προβλήματα όπου εξετάζεται η πιθανότητα ο κάτοχος ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου ο οποίος λαμβάνει ασφάλιστρα και καταβάλει αποζημιώσεις να χρεοκοπήσει. Οι δε αποζημιώσεις, οι οποίες στην παρούσα διπλωματική εργασία αναφέρθηκαν με τον όρο απαιτήσεις μπορούν να είναι πρωτογενείς και δευτερογενείς, με τις δεύτερες να αφικνούνται απόρροια των πρώτων. Επιπλέον, οι δευτερογενείς απαιτήσεις μπορούν να αφικνούνται με χρονική υστέρηση, παρομοιάζοντας τον τρόπο με τον οποίο καλούνται οι ασφαλιστικές να καταβάλλουν αποζημιώσεις στον πραγματικό κόσμο. Εντούτοις, τα μοντέλα κινδύνου συνεχούς χρόνου για απαιτήσεις οι οποίες εμφανίζουν χρονική υστέρηση, όπως το κύριο μοντέλο κινδύνου το οποίο παρουσιάστηκε στην παρούσα έχουν ευρεία εφαρμογή στον πραγματικό κόσμο όπου οι απαιτήσεις πρέπει να καταβληθούν σε διαφορετικούς χρόνους.

Από την παρούσα καταδεικνύεται ότι ο συνδυασμός του μετασχηματισμού Laplace και των ολοκληροδιαφορικών εξισώσεων μπορεί να οδηγήσει στην κατασκευή ενός μοντέλου συνεχούς χρόνου, με το οποίο μάλιστα μπορούν να υπολογίζονται τα μέτρα χρεοκοπίας για διάφορα προβλήματα συνεχούς χρόνου όπου οι απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Εντούτοις, το μοντέλο το οποίο παρουσιάστηκε στην παρούσα βασίζεται στο σύνθετο μοντέλο των Cramer και Lundberg με την προσθήκη μίας επιπλέον απαίτησης σε κάθε χρονική περίοδο, προκειμένου να επιτευχθεί η εξέταση της επίδρασης των δευτερογενών απαιτήσεων στη συνάρτηση προεξοφλημένης αναμενόμενης ποινής.

Τα κυριότερα μέτρα χρεοκοπίας τα οποία παρουσιάστηκαν στην παρούσα περιλαμβάνουν την πιθανότητα χρεοκοπίας και τη συμπληρωματική αυτής πιθανότητα επιβίωσης, τη συνάρτηση της προεξοφλημένης αναμενόμενης ποινής, το έλλειμα αμέσως μετά τη χρεοκοπία, το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και τον χρόνο κατά τον οποίο σημειώνεται η χρεοκοπία.

Επιπλέον, καταδεικνύεται ότι όλα τα μοντέλα τα οποία παρουσιάστηκαν στην παρούσα μπορούν να επεκτείνονται και να εισάγονται σε αυτά τα δεδομένα μεμονωμένων προβλημάτων, καθώς οι παραδοχές στις οποίες αυτά βασίζονται μπορούν να αποκλίνουν σημαντικά από την πραγματικότητα. Μία από τις παραδοχές η οποία χρήζει αναθεώρησης είναι αυτή του ρυθμού με τον οποίο ανανεώνεται το αποθεματικό ή πλεόνασμα, καθώς δεν είναι δυνατό στην πραγματικότητα αυτό να αυξάνεται διαρκώς. Στην πραγματικότητα οι ασφαλιστικές και εν γένει οι κάτοχοι ασφαλιστικών προϊόντων εισπράττουν κέρδη ή καταβάλλουν κέρδη στους μετόχους υπό τη μορφή μερισμάτων, καθώς η κάλυψη των απαιτήσεων δεν είναι ο αυτοσκοπός των ασφαλιστικών.

Τέλος, αξίζει να αναφερθεί η αξία της μελέτης της συσχέτισης μεταξύ των απαιτήσεων και πιο συγκεκριμένα η μελέτη της συσχέτισης του χρόνου κατά τον οποίο αφικνείται κάθε απαίτηση, του ενδιάμεσου δύο απαιτήσεων χρονικού διαστήματος, του μεγέθους δύο απαιτήσεων, συσχετίσεις οι οποίες μελετώνται αναλυτικά με όλα τα μοντέλα τα οποία παρουσιάστηκαν στην παρούσα.

Σε ό,τι αφορά σε περιορισμούς οι οποίοι ανέκυψαν κατά τη συγγραφή της παρούσης αξίζει να σημειωθεί ότι το ερευνητικό πεδίο στο οποίο εντάσσεται το ερευνητικό θέμα της παρούσης είναι πολύ ευρύ. Απόρροια του μεγάλου αυτού εύρους ήταν η δυσκολία αποδοχής και απόρριψης βιβλιογραφικών αναφορών για την ανασκόπηση στην παρούσα και για την πρόταση ενός έγκυρου μοντέλου κινδύνου συνεχούς χρόνου.

Τέλος, σε ό,τι αφορά σε προτάσεις για μελλοντική έρευνα προτείνεται η εφαρμογή των παραπάνω μοντέλων, ήτοι ενός μοντέλου διακριτού χρόνου και ενός μοντέλου συνεχούς χρόνου για την εκτίμηση των μέτρων χρεοκοπίας με χρήση πραγματικών δεδομένων προκειμένου να αξιολογηθεί η δυνατότητα εφαρμογής αλλά και η ακρίβεια των δύο ειδών μοντέλων κινδύνου.

Βιβλιογραφία

Albrecher, H. & Vatamidou, E., 2019. Ruin Probability Approximations in Sparre Andersen Models with Completely Monotone Claims. *Risks,* 7(104), p. 1-14.

Anderson, E., 1957. On the Collective Theory of Risk in Case of Contagion between the Claims. *Transactions on XVth International Congress of Actuaries,* volume 2, p. 219-229.

Asmussen, S., 1984. Approximations for the probability of ruin within finite time. *Scandinavian Actuarial Journal ,* 1(31), p. 31-57.

Asmussen, S. & Albrecher, H., 2010. *Ruin probabilities Advanced Series on Statistical Science & Applied Probability.* 1 επιμ. River Edge, NJ: World Scientific Publishing.

Boikov, A. V., 2003. The Cramer - Lundberg Model with Stochastic Premium Process. *Theory of Probability and Its Applications,* 47(3), p. 489-493.

Borovkov, K. A. & Dickson, D. C. M., 2008. On the ruin time distribution for a Sparre Andersen process with exponential claim sizes. *Insurance: Mathematics & Economics,* 42(3), p. 1104-1108.

Breuer, L. & Badescu, A., 2014. A generalised Gerber-Shiu measure for Markov-additive risk processes with phase-type claims and capital injections. *Scandinavian Actuarial Journal,* 2014(2), p. 93–115.

Constantinescu, C., Kozubowski, T. J. & Qian, H. H., 2019. Probability of ruin in discrete insurance risk model with dependent Pareto claims. *Dependence Modeling,* 7(1), p. 215-233.

Cossette, H., Marceau, E. & Fouad, M., 2010. Analysis of ruin measures for the classical compound Poisson risk model with dependence. *Scandinavian Actuarial Journal,* 2010(3), p. 221-245.

Cramer, H., 1930. On the Mathematical Theory of Risk. *Skandia Jubilee ,* volume 4.

Cramer, H., 1955. *Collective risk theory: A survey of the theory from the point of view of the theory of stochastic processes.* 1 . Stockholm: Nordiska bokhandeln.

Devolder, P. & Lebègue, A., 2016. Risk measures versus ruin theory for the calculation of solvency capital for long-term life insurances. *Dependence Modeling,* 4(1), p. 306-327.

Dickson, D. C. M., 1994. Some comments on the compound binomial model. *ASTIN Bulletin ,* volume 24, p. 33–45.

Dickson, D. C. & Willmot, G. E., 2005. The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model. *ASTIN Bulletin,* 35(1), p. 45-60.

Dickson, D. & Qazvini, M., 2016. Gerber-Shiu analysis of a risk model with capital injections. *European Actuarial Journal,* 6(2), p. 409-440.

Embrechts, P., Kluppelberg, C. & Mikosch, T., 2017. Modelling extremal events: for insurance and finance. *Springer Science & Business Media,* volume 33.

Feller, W., 1968. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* 1. New York–London–Sydney: John Wiley & Sons.

Gerber, H. & Shiu, E., 1998. On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal,* 2(1), p. 48-78.

Gerber, H. U., 1988. Mathematical fun with the compound binomial process. *ASTIN Bulletin,* volume 18, p. 161-168.

Gerber, H. U. & Shiu, E. S. W., 2005. The Time Value of Ruin in a Sparre Andersen Model. *North American Actuarial Journal,* 9(2), p. 49-69.

Gómez-Déniz, E., Sarabia, J. M. & Calderín-Ojeda, E., 2019. Ruin Probability Functions and Severity of Ruin as a Statistical Decision Problem. *Risks,* 7(68), p. 1-16.

Grandell, J., 1991. *Aspects of Risk Theory.* 1. New York: Springer-Verlag .

Huang, Y., Yu, W., Pan, Y. & Cui, C., 2019. Estimating the Gerber-Shiu Expected Discounted Penalty Function for Lévy Risk Model. *Discrete Dynamics in Nature and Society,* p. 1-15.

Jiang, W., 2015. *Bridging Risk Measures and Classical Risk Processes,* Montr´eal, Qu´ebec, Canada: Concordia University.

Klüppelberg, C. & Mikosch, T., 1995. Delay in claim settlement and ruin probability approximations. *Scandinavian Actuarial Journal,* 1995(2), p. 154-168.

Kwan, I. & Yang, H., 2007. Ruin probability in a threshold insurance risk model. *Belgian Actuarial Journal,* 7(1), p. 41–49.

Lefèvre, C. & Stéphane, L., 2008. On finite-time ruin probabilities for classical risk models. *Scandinavian Actuarial Journal,* p. 41–60.

Lin, X. & Willmot, G., 1999. Analysis of a Defective Renewal Equation Arising in Ruin Theory. *Insurance: Mathematics and Economics,* Τόμος 25, p. 63-84.

Liu, G., Wang, Y. & Zhang, B., 2005. Ruin probability in the continuous-time compound binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics,* 36(3), p. 303-316.

Ma, X. & Liu, Z., 2011. The Gerber-Shiu discounted penalty function for classical risk model with a linear dividend barrier. *2011 International Conference on Consumer Electronics, Communications and Networks (CECNet),* p. 1810-1813.

Nie, C., Dickson, D. & Li, S., 2011. Minimizing the ruin probability through capital injections. *Annals of Actuarial Science ,* 5(2), p. 195–209.

Nie, C., Dickson, D. & Li, S., 2015. The finite time ruin probability in a risk model with capital injections. *Scandinavian Actuarial Journal ,* 2015(4), p. 301-318.

Pakes, A., 1975. On the tails of waiting-time distributions. *Journal of Applied Probability,* 12(3), p. 555-564.

Pandey, M. D. & van der Weide, J., 2017. Stochastic renewal process models for estimation of damage cost over the life-cycle of a structure. *Structural Safety,* volume 67, p. 27-38.

Ramsay, C. M., 2003. A solution to the ruin problem for Pareto distributions. *Insurance: Mathematics and Economics,* 33(1), p. 109-116.

Rebello, J. J. & Thampi, K. K., 2017. The Distribution of the Time of Ruin, the Surplus Immediately before Ruin and Deficit at Ruin under Two Sided Risk Renewal Process. *Journal of Mathematical Finance,* 7(3), p. 624-632.

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. & Teugels, J., 2008. *Stochastic processes for insurance and finance.* 2. Chichester: John Wiley and Sons.

Ross, S. M., 2010. CHAPTER 7 - Renewal Theory and Its Applications. Στο: S. M. Ross, επιμ. *Introduction to Probability Models.* s.l.:Academic Press, p. 421-495.

Ruan, J. και συν., 2019. A Note on a Generalized Gerber–Shiu Discounted Penalty Function for a Compound Poisson Risk Model. *Mathematics ,* 7(891), pp. 1-12.

Schmeiser, H. & Luca, D., 2017. The impact of time discretization on solvency measurement. *Journal of Risk Finance,* 18(1), p. 2-20.

Shiu, E. S. W., 1989. The probability of eventual ruin in the compound binomial model. *ASTIN Bulletin ,* volume 19, p. 170-190.

Thorin, O., 1973. The ruin problem in case the tail of the claim distribution is completely monotone. *Scandinavian Actuarial Journal,* volume 2, p. 100-119.

Trufin, J., Albrecher, H. & Denuit, M., 2011. Properties of a Risk Measure Derived from Ruin Theory. *The Geneva Risk and Insurance Review,* volume 36, p. 174–188 .

Waters, H. & Papatriandafylou, A., 1985. Ruin probabilities allowing for delay in claim settlement. *Insurance: Mathematics and Economics,* volume 4, p. 113–122.

Wat, K. P., Yuen, K. C., Li, W. K. & Wu, X., 2018. On the Compound Binomial Risk Model with Delayed Claims and Randomized Dividends. *Risks,* 6(6), p. 1-13.

Wat, K., Yuen, K., Li, W. & Wu, X., 2018. On the Compound Binomial Risk Model with Delayed Claims and Randomized Dividends. *Risks,* 6(6), p. 1-13.

Willmot, G. E., 1993. Ruin probabilities in the compound binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics,* volume 12, p. 133–142.

Willmot, G. E., 2015. On a partial integro-differential equation of Seals type. *Insurance: Mathematics and Economics,* volume 62, p. 54-61.

Xiao, Y. & Guo, J., 2007. The compound binomial risk model with time-correlated claims. *Insurance: Mathematics and Economics ,* volume 41 , p. 124–133.

Xie, J.-h. & Zou, W., 2011. On the expected discounted penalty function for the compound Poisson risk model with delayed claims. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* volume 235, p. 2392-2404.

Yuen, K. C. & Guo, J., 2001. Ruin probabilities for time-correlated claims in the compound binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics,* volume 29, p. 47–57.

Zhu, J. & Yang, H., 2008. Ruin probabilities of a dual markov-modulated risk model. *Communications in Statistics-Theory and Methods,* volume 37, p. 3298-3307.