ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Μελέτη τροποποιημένων ανανεωτικών στοχαστικών διαδικασιών πλεονάσματος στη θεωρία κινδύνου

ΛΟΥΚΟΠΟΥΛΟΣ ΙΩΑΝΝΗΣ

ΜΑΕ 18017

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην Αναλογιστική Επιστήμη και την Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς

Νοέμβριος 2021

Η παρούσα διπλωματική εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Γ.Σ.Ε.Σ. του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν …….. συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τριμελής επιτροπή:

1. Αναπληρωτής Καθηγητής, Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)
2. Αναπληρωτής Καθηγητής, Αντζουλάκος Δημήτριος
3. Αναπληρωτής Καθηγητής, Μπούτσικας Μιχαήλ

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE
AND RISK MANAGEMENT

Study of modified renewal stochastic surplus processes in risk theory

LOUKOPOULOS IOANNIS

MSc Dissertation submitted to the Department of Statistics and
Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for
the degree of Master of Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

November 2021

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, επιβλέποντα καθηγητή μου σε αυτήν τη διπλωματική εργασία, για την υπομονή του και τη σημαντική καθοδήγηση που μου παρείχε μέχρι την περάτωση της εργασίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την πολύπλευρη στήριξη τους καθ΄ όλη την διάρκεια των σπουδών μου.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην θεωρία κινδύνου, ορισμένα από τα σημαντικότερα μέτρα που μελετιούνται είναι ο χρόνος χρεοκοπίας, η πιθανότητα χρεοκοπίας το πλεόνασμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας αλλά και το έλλειμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας. Στην παρούσα διπλωματική εργασία, θα μελετηθούν τα παραπάνω μέτρα χρεοκοπίας μέσω διαφόρων αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής (συναρτήσεων Gerber-Shiu) θεωρώντας ανανεωτικές τροποποιημένες στοχαστικές διαδικασίες. Έτσι, στο πρώτο κεφάλαιο θα αναλυθούν κάποιες εισαγωγικές έννοιες καθώς και θα ορισθεί η συνάρτηση των Gerber-Shiu.

Στο κεφάλαιο 2, θα αναφερθούν δύο βασικές εξισώσεις για την συνέχεια της εργασίας, οι οποίες προκύπτουν από το κλασσικό ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου. Η πρώτη προκύπτει δεσμεύοντας ως προς την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό επίπεδο και η δεύτερη δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο αλλά και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης. Στην συνέχεια, στο τρίτο κεφάλαιο μελετάται το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία σύμφωνα με το τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο και θα δοθούν κάποια χρήσιμα αποτελέσματα.

Στο κεφάλαιο 4, λαμβάνοντας κάποιες υποθέσεις για την κατανομή των απαιτήσεων, θα δοθούν κλειστές φόρμουλες για την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu.

Τέλος, στο κεφάλαιο 5, θα ληφθούν υποθέσεις για την κατανομή του χρόνου μέχρι την πρώτη απαίτηση και θα γίνει ανάλυση της πιθανότητας χρεοκοπίας για τις διάφορες κατανομές.

ABSTRACT

In risk theory, the analysis of quantities such as the deficit at ruin, the time of ruin, the surplus immediately prior to ruin and the ruin probability is very important. The main focus of this thesis is to study the abovementioned quantitates through the delayed renewal risk model and the Gerber-Shiu function. Thus, in the first chapter, some background is introduced regarding the ruin theory and the modified renewal risk processes.

In the second chapter, two important equations that are used as framework for the rest of the thesis are derived. The first equation is obtained by conditioning on the first drop below the initial surplus level, and the second one by conditioning on the amount and the time of the first claim. Then, in chapter 3, we consider the deficit at ruin with the general delayed model and some main results are given.

Lastly, in chapters 4 and 5, we explore how the Gerber-Shiu expected discounted penalty function can be expressed in closed forms when distributional assumptions are given for claim sizes or the time until the first claim.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ
ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

1.1 Εισαγωγή

Μία από τις βασικότερες εργασίες σε έναν ασφαλιστικό οργανισμό είναι η παρακολούθηση των αποθεματικών του κεφαλαίων. Με τον όρο «αποθεματικά κεφάλαια» αναφερόμαστε στο πλεόνασμα που διαθέτει ένας ασφαλιστικός οργανισμός και αυτό ισούται με την διαφορά του ενεργητικού του από το παθητικό του. Η μελέτη του πλεονάσματος είναι σημαντική, καθώς ο οργανισμός θα πρέπει να διασφαλίσει πως θα μπορέσει να ανταπεξέλθει σε απρόσμενες δυσμενείς εξελίξεις που πιθανώς να προκύψουν.

Τα τελευταία χρόνια έχουν αναπτυχθεί αρκετά μοντέλα για τη μελέτη του πλεονάσματος. Η κυριότερη διαφορά μεταξύ των μοντέλων διακρίνεται στην παραδοχή που αφορά τις κατανομές των χρόνων μεταξύ δύο διαδοχικών κινδύνων που εμφανίζονται. Στην παρούσα διπλωματική εργασία μελετάμε την τροποποιημένη ανανεωτική στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος μέσα από το μοντέλο των Sparre Andersen και κάποιες τροποποιήσεις του, καθώς και μέσω διάφορων αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής, θα μελετηθούν κάποια βασικά μέτρα κινδύνου όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, το πλεόνασμα τη στιγμή της χρεοκοπίας, του χρόνου χρεοκοπίας κ.α..

Το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της τροποποιημένης ανανεωτικής στοχαστικής διαδικασίας πλεονάσματος είναι πως το πλήθος των κινδύνων του χαρτοφυλακίου περιγράφεται από μία ανανεωτική διαδικασία και όχι από μία στοχαστική διαδικασία Poisson. Επιπροσθέτως, ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση του πρώτου κινδύνου ακολουθεί διαφορετική κατανομή από τον χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών κινδύνων.

1.2 Ανανεωτικές διαδικασίες

Μία σημαντική κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών στην θεωρία κινδύνων είναι οι ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες, οι οποίες αποτελούν μια γενίκευση της διαδικασίας Poisson. Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η διαφορά των δύο αυτών έγκειται στους ενδιάμεσους χρόνους εμφάνισης κινδύνων.

Ορισμός Μία ανανεωτική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μία απαριθμήτρια ανέλιξη στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι (χρόνοι αναμονής) είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν ίδια κατανομή (όχι όμως απαραίτητα την εκθετική).

Έστω για παράδειγμα οι τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) V_1, V_2, … ανεξάρτητες ισόνομες και μη αρνητικές με συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) G(t). Έστω ακόμα η τ.μ. S με

- $S_0 = 0$
- $S_n = \sum_{i=1}^{n} V_i, n \geq 1$.

Τότε η $\{S_n : n \geq 0\}$ λέγεται ανανεωτική ακολουθία και η $N(t) = \max\{n : S_n \leq t\}$ λέγεται ανανεωτική διαδικασία.

Η ανίσωση “$N(t) \geq n$” σημαίνει την εμφάνιση τουλάχιστον n γεγονότων έως το χρόνο t. Αντίστοιχα, η σχέση $S_n \leq t$ υποδηλώνει ότι ο χρόνος αναμονής μέχρι να συμβούν n γεγονότα είναι το πολύ t. Λόγω του ότι οι δύο παραπάνω εκφράσεις είναι ισοδύναμες, μπορεί να ισχυριστεί και πως

$$N(t) \geq n \text{ όταν και μόνο όταν } S_n \leq t.$$

Εκφράζοντας την παραπάνω ισοδυναμία με πιθανότητες, προκύπτει πως:

$$\begin{aligned} P[N(t) = n] &= P[N(t) \geq n] - P[N(t) \geq n + 1] \\ &= P[S_n \leq t] - P[S_{n+1} \leq t] \end{aligned}$$

Επομένως, καθώς οι τ.μ. $V_i, i \geq 1$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με σ.κ. G, συνεπάγεται πως η τ.μ. $S_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$ ακολουθεί κατανομή με σ.κ. F^{*n}, δηλαδή αποτελεί την n-οστή συνέλιξη των τ.μ. V_i. Συνεπώς,

$$P[N(t) = n] = F^{*n}(t) - F^{*(n+1)}(t)$$

Έστω,

$$m(t) = E[N(t)].$$

Η m(t) καλείται συνάρτηση ανανεώσεων και είναι μία πολύ σημαντική συνάρτηση για την θεωρία των ανανεώσεων.

Θεώρημα Έστω $\{N(t) : t \geq 0\}$ μία ανανεωτική διαδικασία. Ισχύει ότι,

$$P[lim_{t\to\infty}N(t) = \infty] = 1.$$

Απόδειξη

Είναι:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}[lim_{t\to\infty}N(t) < \infty] &= P[\mathrm{V}_n = \infty \; για \; κάποιο \; n \\ &= P[\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathrm{V}_n = \infty] \\ &=\leq \sum_{n=1}^{\infty} P[\mathrm{V}_n = \infty] \\ &= 0\end{aligned}$$

Επομένως,

$$P[lim_{t\to\infty}N(t) = \infty] = 1$$

Συνεπώς, παρατηρείται πως η N(t) τείνει προς το άπειρο καθώς το t τείνει στο άπειρο. Ωστόσο, θα είχε ενδιαφέρον να μελετηθεί ο ρυθμός με τον οποίο η N(t) τείνει στο άπειρο.

Πρόταση Με πιθανότητα 1 ισχύει πως

$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$$

καθώς το t → ∞ , όπου μ η μέση τιμή της αντίστοιχης ανανεωτικής ακολουθίας S.

Απόδειξη

Ισχύει πως $S_{N(t)} \leq t < S_{N(t)+1}$. Αυτό συνεπάγεται πως

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{N(t)}$$

Καθώς ποσότητα $\frac{S_{N(t)}}{N(t)}$ ισούται με την μέση τιμή των πρώτων N(t) από τους ενδιάμεσους χρόνους, προκύπτει από τον νόμο των μεγάλων αριθμών πως $\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu$ καθώς $N(t) \to \infty$. Επειδή όμως το $N(t) \to \infty$ όταν το t→ ∞ , ισχύει πως

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \to \mu \; καθώς \; t \to \infty$$

Επιπλέον, γράφοντας

$$\frac{\mathrm{S}_{\mathrm{N(t)+1}}}{\mathrm{N(t)}} = \left[\frac{\mathrm{S}_{\mathrm{N(t)+1}}}{\mathrm{N(t)+1}}\right]\left[\frac{\mathrm{N(t)+1}}{\mathrm{N(t)}}\right]$$

και με την ίδια επιχειρηματολογία, προκύπτει,

$$\frac{\mathrm{S}_{\mathrm{N(t)+1}}}{\mathrm{N(t)}} \to \mu \text{ καθώς } t \to \infty$$

Επομένως, από την τριγωνική ανισότητα γίνεται προφανές πως $\frac{t}{N(t)} \to \mu$ καθώς το t→∞ και συνεπώς,

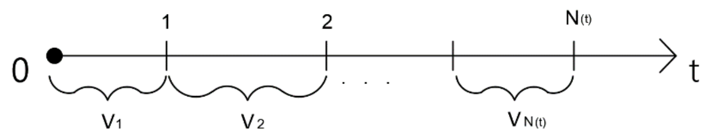
$$\frac{N(t)}{t} \to \frac{1}{\mu}$$

καθώς το t → ∞.

1.3 Οι συνολικές αποζημιώσεις

Για να μοντελοποιηθεί το συνολικό ύψος των αποζημιώσεων, πρέπει πρώτα να αποφασιστεί με ποιον τρόπο θα μοντελοποιηθεί το πλήθος των κινδύνων που θα εμφανιστούν, ή αλλιώς ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο διαδοχικών εμφανίσεων κινδύνου. Στα πλαίσια της παρούσας διπλωματικής εργασίας θα πρόκειται πάντα για (τροποποιημένες) ανανεωτικές διαδικασίες.

Έστω λοιπόν {N(t) : t ≥ 0} μια απαριθμήτρια ανέλιξη στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι (χρόνοι αναμονής) $\{V_i, i \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν ίδια κατανομή. Δηλαδή, έστω πως στο χρονικό διάστημα [0,t] εμφανίζονται N(t) το πλήθος κίνδυνοι (απαιτήσεις).



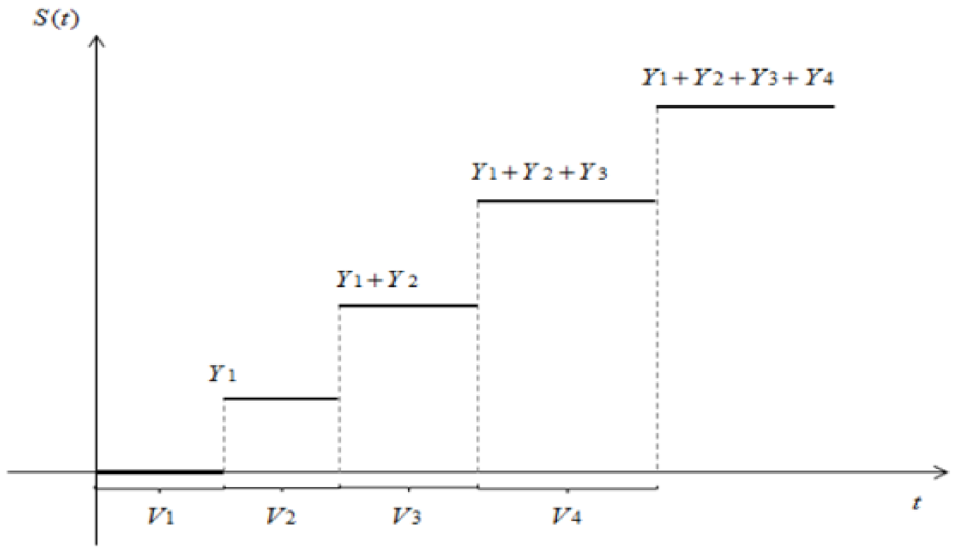
Σχήμα 1: Εμφάνιση κινδύνων στο χρόνο

Ορισμός Το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων που απαιτούνται για το στο χρονικό διάστημα [0,t] ορίζεται η στοχαστική διαδικασία

$$S(t) = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{N(t)}$$

όπου $\{Y_n, n \geq 1\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών, με την Y_i να εκφράζει το ύψος της i-οστής ζημίας που εμφανίζεται. Εάν N(t)=0 τότε S(t)=0.

Συνήθως, θεωρείται πως οι $\{Y_n, n \geq 1\}$, με σ.π.π. $p(y)$ και σ.κ. $P(y) = 1 - \bar{P}(y)$, και $\{V_i, i \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητες ακολουθίες και η κάθε μία από αυτές αποτελείται από ισόνομες, ανεξάρτητες και μη αρνητικές τυχαίες μεταβλητές.

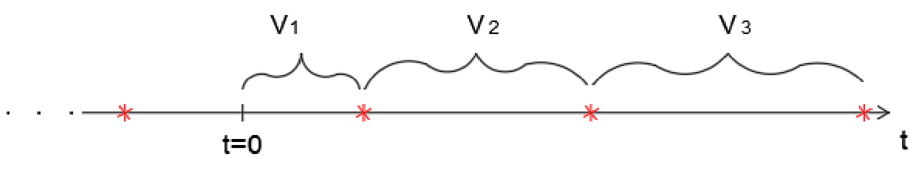


Σχήμα 2: Γραφική παράσταση της S(t)

1.4 Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος – Τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο

Στο τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο, η διαδικασία του πλήθους των κινδύνων που εμφανίζονται $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι τροποποιημένη ανανεωτική. Η τροποποιημένη ανανεωτική διαδικασία διαφοροποιείται από την ανανεωτική στον χρόνο εμφάνισης του πρώτου κινδύνου. Έστω λοιπόν V_1 ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι την εμφάνιση του πρώτου κινδύνου, και V_i ο χρόνος μεταξύ του (i-1)-οστού και του i-οστού κινδύνου με $i = 2,3,4,\ldots$. Οι $\{V_2, V_3, \ldots\}$ είναι μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων θετικών τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $K(t) = 1 - \bar{K}(t) = P[V \leq t]$, συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) $k(t)$ και μέση τιμή $E(V) = \int_0^\infty v dK(v) < \infty$, όπου V ισόνομη με τις V_i με i=2,3,4,.... Η τ.μ. V_1 είναι μία επίσης θετική αλλά ανεξάρτητη από τις $\{V_2, V_3, \ldots\}$ και πιθανόν διαφορετική σ.κ. $K_1(t)$ και σ.π.π. $k_1(t)$.

Εάν ισχύει ότι $K_1(t) = K(t)$, δηλαδή ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι την πρώτη εμφάνιση του κινδύνου ακολουθεί την ίδια κατανομή με τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ δύο άλλων διαδοχικών κινδύνων, τότε το μοντέλο γίνεται το σύνηθες (ή ισοδύναμα Sparre-Andersen) ανανεωτικό μοντέλο. Το μοντέλο αυτό συνήθως δεν χρησιμοποιείται διότι δεν είναι τόσο ρεαλιστικό. Η στοχαστική μελέτη των συνολικών απαιτήσεων ή του πλεονάσματος μπορεί να γίνει οποιαδήποτε στιγμή και όχι απαραίτητα την χρονική στιγμή εμφάνισης κάποιας απαίτησης. Επομένως, τη στιγμή που πραγματοποιείται η μελέτη, έχει ήδη περάσει κάποιο χρονικό διάστημα από την προηγούμενη απαίτηση. Έτσι, ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση του πρώτου κινδύνου μετά την μελέτη (δηλαδή ο χρόνος που απομένει μέχρι την εμφάνιση ενός ακόμα κινδύνου για τον οργανισμό) δεν θα ήταν ιδανικό να θεωρηθεί πως ακολουθεί την ίδια κατανομή με τον χρόνο μεταξύ δύο διαδοχικών κινδύνων μεταγενέστερα της μελέτης.



Σχήμα 3: Διαφοροποίηση του χρόνου που αφορά την εμφάνιση του πρώτου κινδύνου

Μία επιλογή για την κατανομή του V_1 που συνηθίζεται, είναι να ισχύει πως

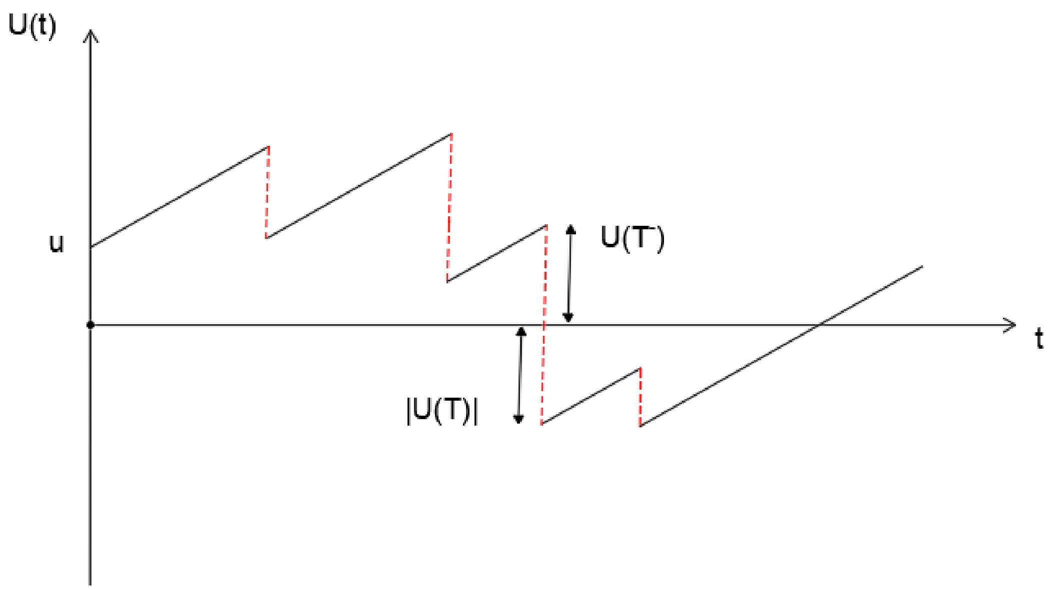
$k_1(t) = k_e(t) = \frac{\bar{K}(t)}{E(V)}$. *Τότε, το μοντέλο καλείται equilibrium ή stationary ανανεωτικό μοντέλο.*

Ορισμός Διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$, καλείται η στοχαστική διαδικασία

$$U(t) = u + ct - S(t)$$

όπου:

$u = U(0) \geq 0$ το αρχικό απόθεμα, c>0 η ένταση ασφαλίστρου (δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο εισπράττονται τα ασφάλιστρα ανά μονάδα χρόνου) και $\{S(t), t \geq 0\}$ η στοχαστική διαδικασία των συνολικών απαιτήσεων.



Σχήμα 4: Διαδικασία πλεονάσματος

Όσον αφορά την ένταση ασφαλίστρου, σταθερά c, θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να διασφαλιστεί πως στο διάστημα $[0, t]$, τα έσοδα (εισπραχθέντα ασφάλιστρα) θα υπερβαίνουν τα έξοδα (κίνδυνοι που εμφανίζονται). Για τον λόγο αυτό, κάθε οργανισμός θέλει κατά μέσο όρο να λαμβάνει περισσότερα από τα αναμενόμενα έξοδα που θα προκύψουν.

Ορισμός Μία παράμετρος $\theta > 0$ καλείται περιθώριο ασφαλείας εάν ισχύει πως:

$$\theta = \frac{cE(T)}{\mu_1} - 1.$$

Με αυτόν τον τρόπο, τα αναμενόμενα έσοδα προκύπτουν να είναι μεγαλύτερα από τα αναμενόμενα έξοδα κατά θ τις εκατό.

1.5 Μέτρα κινδύνου

Πολλά είναι τα μέτρα κινδύνου τα οποία είναι σημαντικό να παρακολουθεί κάποιος ώστε να αντιλαμβάνεται την πορεία ενός ασφαλιστικού οργανισμού. Ένα από τα βασικότερα είναι ο χρόνος χρεοκοπίας.

Ορισμός Χρόνος χρεοκοπίας είναι ο χρόνος κατά τον οποίο η διαδικασία πλεονάσματος θα γίνει για πρώτη φορά αρνητική και ορίζεται ως:

$$T = \inf\{t \geq 0: U(t) < 0\}\, \mu\varepsilon \inf\{\emptyset\} = \infty.$$

Με την βοήθεια του χρόνου χρεοκοπίας μπορεί να οριστεί και η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ορισμός Για $u \geq 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως:

$$\psi(u) = P[T < \infty | U(0) = u] = P[U(T) < 0 | U(0) = u].$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση ως προς u, δηλαδή όσο μεγαλύτερο είναι το αρχικό απόθεμα τόσο μικρότερη είναι η πιθανότητα να συμβεί η χρεοκοπία. Συγκεκριμένα, ισχύει ότι $\lim_{u\to\infty} \psi(u) = 0$.

Σε αυτό το σημείο θα πρέπει να διευκρινιστεί πως εάν εμφανιστεί χρεοκοπία σε έναν ασφαλιστικό οργανισμό με την παραπάνω έννοια, δεν προκύπτει και χρεοκοπία και με την οικονομική έννοια του όρου. Αυτό συμβαίνει καθώς τα ασφάλιστρα δεν είναι τα μόνα έσοδα μιας ασφαλιστικής εταιρείας, καθώς και επειδή οι αποζημιώσεις δεν καταβάλλονται στιγμιαία και εξ ολοκλήρου την στιγμή της απαίτησης. Ωστόσο, η μαθηματική «χρεοκοπία» είναι μία ένδειξη που αν παρατηρήσει μια ασφαλιστική θα πρέπει να κάνει κάποιες ενέργειες, όπως για παράδειγμα να αυξήσει τα ασφάλιστρα.

Εκτός από την πιθανότητα χρεοκοπίας, υπάρχουν και άλλα σημαντικά μέτρα κινδύνου που σχετίζονται με την τυχαία μεταβλητή T. Δύο από αυτά είναι η $U(T^-)$ και η $|U(T)|$. Η τ.μ. $U(T^-)$ εκφράζει το μέγεθος του πλεονάσματος την αμέσως προηγούμενη χρονική στιγμή από την T, τη χρονική στιγμή δηλαδή που -θεωρητικά- καταβάλλεται η αποζημίωση που οδηγεί τον οργανισμό σε χρεοκοπία. Πρόκειται για το $\lim_{t\to T^-} U(t)$. Αντίστοιχα, η τ.μ. $|U(T)|$ συμβολίζει την πτώση του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν, ακριβώς την χρονική στιγμή T. Δηλαδή υποδηλώνει το μέγεθος του ελλείματος την κρίσιμη αυτή χρονική στιγμή.

Είναι προφανές πως οι δύο αυτές ποσότητες δίνουν σημαντικές πληροφορίες για την συμπεριφορά της διαδικασίας του πλεονάσματος $\mathrm{U(t)}$, τις οποίες δεν θα μπορούσε κάποιος να αντλήσει από τη μελέτη απλώς της τ.μ. T ή της $\psi(\mathrm{u})$. Για τον λόγο αυτό, στη συνέχεια θα μελετηθούν και οι σ.κ. των παραπάνω τ.μ..

Μία ακόμα τ.μ. που έχει ενδιαφέρον για τη μελέτη της διαδικασίας πλεονάσματος, είναι η τ.μ. L_1 που εκφράζει το μέγεθος πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό απόθεμα u. Αυτή η τ.μ. δίνει σημαντικές πληροφορίες που αφορούν την πτώση του πλεονάσματος κατά απόλυτη τιμή και λαμβάνει μη αρνητικές τιμές. Για να ισχύει πως $L_1 = 0$, θα πρέπει να μην υπάρχει πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό απόθεμα u.

Έστω λοιπόν t_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία η διαδικασία του πλεονάσματος παίρνει μικρότερη τιμή από αυτή του αρχικού αποθέματος u. Θέτοντας $u_1 = U(t_1)$ μπορεί να ισχυριστεί πως $L_1 = u - u_1$. Με εντελώς αντίστοιχο τρόπο μπορεί να ορισθεί η τ.μ. L_2, η οποία θα εκφράζει την πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u_1. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, προκύπτει μια ακολουθία τ.μ. $L_1, L_2, \dots$, η οποία θεωρείται πεπερασμένη καθώς από ένα σημείο και έπειτα θα παίρνει μόνο μηδενικές τιμές. Οι τ.μ. αυτές καλούνται και κλιμακωτά ύψη και απεικονίζουν τη σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από την τιμή του αρχικού αποθέματος u μέχρι και την στιγμή της χρεοκοπίας T. Εφόσον η χρεοκοπία δεν συμβεί, οι τ.μ. $L_1, L_2, \dots$ απεικονίζουν την σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από την τιμή του αρχικού αποθέματος u έως και την ελάχιστη τιμή της στοχαστικής διαδικασίας του πλεονάσματος.

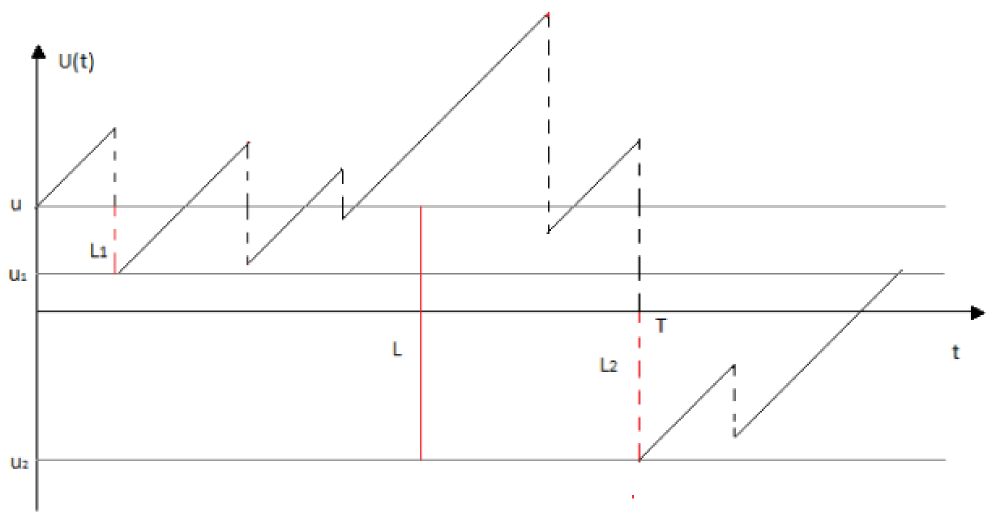
Έστω τώρα μία διακριτή τ.μ. K, η οποία θα απεικονίζει το συνολικό πλήθος των κλιμακωτών αυτών υψών, και ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή.

Ορισμός Έστω L μία τυχαία μεταβλητή για την οποία ισχύει:

$$L = \begin{cases} 0, & K = 0 \\ L_1 + L_2 + \cdots + L_K, & K \geq 1 \end{cases}$$

Τότε η L καλείται μέγιστη σωρευτική απώλεια.

Η τ.μ. L εκφράζει την συνολική πτώση του πλεονάσματος από την τιμή του αρχικού αποθέματος έως την ελάχιστη τιμή της διαδικασίας του πλεονάσματος. Από τον τρόπο που έχει ορισθεί, μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι πρόκειται για μία μικτή, και μάλιστα σύνθετη γεωμετρική κατανομή.



Σχήμα 5: Γραφική παράσταση μέγιστης σωρευτικής απώλειας

Είναι πολύ εύκολο κάποιος να καταλάβει την αξία που θα είχε η μελέτη της παραπάνω συνάρτησης, αν παρατηρήσει πως η δεξιά ουρά της L είναι και η πιθανότητα χρεοκοπίας. Πιο συγκεκριμένα,

$$P[L > u] = \psi(u).$$

1.6 Μετασχηματισμός Dickson-Hipp

Σε αυτό το σημείο θα ορισθεί ο μετασχηματισμός Dickson-Hipp, κάτι που θα χρησιμοποιηθεί αρκετά στην συνέχεια της παρούσας εργασίας. Έστω λοιπόν $h(x)$ μία πραγματική συνεχής συνάρτηση και ο μετασχηματισμός Laplace (LT) αυτής

$$\tilde{h}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} h(x) dx.$$

Ορισμός Ως μετασχηματισμός Dickson-Hipp μιας πραγματικής, ολοκληρώσιμης, συνεχούς συνάρτησης $h(t)$, ορίζεται το

$$\begin{aligned} h_r(x) = T_r h(x) &= e^{rx} \int_x^\infty e^{-rt} h(t) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-rt} h(x+t) dt \,, x \geq 0 \end{aligned}$$

για όλα τα $r \geq 0$ για τα οποία ισχύει ότι $\left|\tilde{h}(r)\right| < \infty$.

Για $x = 0$, προκύπτει $h_r(0) = T_r h(0) = \int_0^\infty e^{-rt} h(t) dt = \tilde{h}(r)$. Επομένως μπορούμε να πούμε πως ο μετασχηματισμός Dickson-Hipp είναι μία γενίκευση του μετασχηματισμού Laplace. Επίσης, η ουρά της συνάρτησης h μπορεί να γραφεί ως $\overline{H}(x) = \int_x^\infty h(t) dt = T_0 h(x)$.

Πρόταση Ο μετασχηματισμός Laplace μιας Dickson-Hipp συνάρτησης $h_r(x)$ δίνεται από τη σχέση:

$$\tilde{h}_r(s) = \int_0^\infty e^{-sx} h_r(x) dx = \frac{\tilde{h}(r) - \tilde{h}(s)}{s - r}.$$

Απόδειξη Είναι:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_r(s) &= \int_0^\infty e^{-st} T_r h(t) dt = \int_0^\infty e^{-(s-r)t} \int_t^\infty e^{-ry} h(y) dy dt \\ &= \int_0^\infty e^{-ry} (\int_0^y e^{-(s-r)t} dt) \, h(y) \, dy \\ &= \int_0^\infty e^{-ry} \frac{1 - e^{-(s-r)y}}{s - r} h(y) dy \end{aligned}$$

$$= \frac{\int_0^\infty e^{-ry}h(y)dy - \int_0^\infty e^{-sy}h(y)dy}{s-r}$$
$$= \frac{\tilde{h}(r) - \tilde{h}(s)}{s-r},$$

για $s \neq r$.

Επιπροσθέτως, μπορεί να ορισθεί και μία γενίκευση του μετασχηματισμού Dickson-Hipp και για μη συνεχής συναρτήσεις. Εάν λοιπόν η $H(x) = 1 - \overline{H}(x)$ είναι μία συνάρτηση κατανομής, όχι απαραίτητα συνεχούς, τ.μ. με σ.π. (ή σ.π.π.) h, τότε ορίζεται ο μετασχηματισμός Dickson-Hipp για την h ως

$$h_r(x) = T_r h(x) = e^{rx} \int_x^\infty e^{-rt} dH(t)\,, x \geq 0,$$

και ομοίως γενικεύεται και ο μετασχηματισμός Laplace ως

$$\tilde{h}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dH(x).$$

1.7 Η συνάρτηση Gerber-Shiu

Το 1998, οι Hans Gerber και Elias Shiu δημοσίευσαν μία εργασία στην οποία παρουσίαζαν την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής. Πρόκειται για μία συνάρτηση μέσω της οποίας μπορεί να γίνει η μελέτη πολλών μέτρων κινδύνου ταυτόχρονα, ενώ μέχρι τότε τα προσέγγιζαν ξεχωριστά.

Ορισμός Για $u \geq 0, \delta \geq 0$ η συνάρτηση Gerber-Shiu για το τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο ορίζεται ως

$$m_\delta^d(u) = E\{e^{-\delta T_d} w\left(U_{T_d^-}, \left|U_{T_d}\right|\right) I(T_d < \infty) | U_0 = u\}, u \geq 0$$

όπου $w(x_1, x_2)$ μία μη αρνητική δισδιάστατη συνάρτηση με $x_1 > 0$ και $x_2 > 0$ η οποία καλείται συνάρτηση ποινής, και I μία δείκτρια συνάρτηση με $I(A) = 1$ αν ισχύει το A και 0 διαφορετικά. Ακόμα, με T_d συμβολίζεται τ.μ. του χρόνου χρεοκοπίας στο τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο. Η παράμετρος δ, μπορεί να θεωρηθεί πως είναι είτε το στοιχείο του μετασχηματισμού Laplace, είτε ο συντελεστής προεξόφλησης.

Η συνάρτηση αυτή, ορίζεται ξεχωριστά σε δύο συγκεκριμένες περιπτώσεις. Συγκεκριμένα, εάν η κατανομή του χρόνου μέχρι την εμφάνιση του πρώτου κινδύνου (V_1) είναι ίδια με την κατανομή των χρόνων μεταξύ δύο διαδοχικών άλλων εμφανίσεων κινδύνων ($V_i, i \geq 2$), δηλαδή έχουμε το κλασικό ανανεωτικό μοντέλο, τότε η συνάρτηση εμφανίζεται ως:

$$m_\delta(u) = E\{e^{-\delta T} w(U_{T^-}, |U_T|) I(T < \infty) | U_0 = u\}, u \geq 0.$$

Επιπλέον, για το stationary ανανεωτικό μοντέλο, δηλαδή στην περίπτωση που η τ.μ. V_1 έχει μεταβλητή που προκύπτει από τις τ.μ. $V_2, V_3, \ldots$ και με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $k_1(t) = k_e(t) = \frac{\bar{K}(t)}{E(V)}$, η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι η εξής:

$$m_\delta^e(u) = E\{e^{-\delta T_e} w\left(U_{T_e^-}, \left|U_{T_e}\right|\right) I(T_e < \infty) | U_0 = u\}, u \geq 0.$$

Στις δύο παραπάνω σχέσεις, με T και T_e συμβολίζουμε τον χρόνο χρεοκοπίας στο κλασικό και το stationary ανανεωτικό μοντέλο αντίστοιχα.

Μία ακόμα ειδική περίπτωση που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια, ειδικά όταν θα υπάρχει πληροφορία για την κατανομή του ύψους των απαιτήσεων, προκύπτει αν η συνάρτηση ποινής είναι της μορφής $w(x, y) = e^{-sx} w_2(y)$. Σε αυτή την περίπτωση η συνάρτηση των Gerber-Shiu στο τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο θα συμβολίζεται με $m_{\delta,s}^d(u)$. Ομοίως, στο κλασικό και το stationary ανανεωτικό μοντέλο θα συμβολίζεται με $m_{\delta,s}(u)$ και $m_{\delta,s}^e(u)$ αντίστοιχα.

Διαισθητικά, την συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί κάποιος να την ερμηνεύσει ως την προεξοφλημένη ποινή που προκύπτει όταν η χρεοκοπία σε έναν οργανισμό είναι γεγονός. Ωστόσο, για συγκεκριμένες τιμές του δ αλλά και κατάλληλες μορφές της συνάρτησης ποινής w, προκύπτουν διάφορα χρήσιμα αποτελέσματα για τα μέτρα χρεοκοπίας με πολύ ενδιαφέρον. Αναλυτικότερα, και για το κλασικό ανανεωτικό μοντέλο, μπορούν να προκύψουν τα εξής:

- Συναρτήσεις κατανομών

  - Για $w(U(T^-), |U(T)|) = I(U(T^-) \leq x)I(|U(T)| \leq y)$ και $\delta > 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής των $U(T^-), |U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα,
$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} I(U(T^-) \leq x)I(|U(T)| \leq y)I(T < \infty)\middle|U(0) = u\right]$$
$$= F_\delta(x, y|u).$$

  - Για $w(U(T^-), |U(T)|) = I(U(T^-) \leq x)I(|U(T)| \leq y)$ και $\delta = 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T^-), |U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή με την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό απόθεμα u και το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ x ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας το πολύ y. Συγκεκριμένα,
$$m_0(u) = E[I(U(T^-) \leq x)I(|U(T)| \leq y)I(T < \infty)|U(0) = u]$$
$$= P[U(T^-) \leq x, |U(T)| \leq y, T < \infty|U(0) = u]$$
$$= F_0(x, y|u).$$

  - Για $w(U(T^-), |U(T)|) = I(U(T^-) \leq x)I(|U(T)| \leq \infty)$ και $\delta > 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U(T^-)$ τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα,
$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} I(U(T^-) \leq x)I(|U(T)| \leq \infty)I(T < \infty)\middle|U(0) = u\right]$$
$$= F_{\delta(x|u)}.$$

  - Για $w(U(T^-), |U(T)|) = I(U(T^-) \leq x)I(|U(T)| \leq \infty)$ και $\delta = 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $U(T^-)$ τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό απόθεμα u και το μέγεθος του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ x. Συγκεκριμένα,
$$m_0(u) = E[I(U(T^-) \leq x)I(|U(T)| \leq \infty)I(T < \infty)|U(0) = u]$$
$$= P[U(T^-) \leq x, |U(T)| \leq \infty, T < \infty|U(0) = u]$$
$$= F_0(x|u).$$

  - Για $w(U(T^-), |U(T)|) = I(U(T^-) \leq \infty)I(|U(T)| \leq y)$ και $\delta > 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα,
$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} I(U(T^-) \leq \infty)I(|U(T)| \leq y)I(T < \infty)\middle|U(0) = u\right]$$

$$= F_\delta(y|u).$$

- Για $w(U(T^-),|U(T)|) = I(U(T^-) \le \infty)I(|U(T)| \le y)$ και $\delta = 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την περιθώρια συνάρτηση κατανομής της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή με την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό απόθεμα u και το έλλειμμα τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ y. Συγκεκριμένα,
$$\begin{aligned} m_0(u) &= E[I(U(T^-) \le \infty)I(|U(T)| \le y)I(T < \infty)|U(0) = u] \\ &= P[U(T^-) \le \infty, |U(T)| \le y, T < \infty|U(0) = u] \\ &= F_0(y|u). \end{aligned}$$
- Για $w(U(T^-),|U(T)|) = I(U(T^-) + |U(T)| \le z)$ και $\delta > 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία. Συγκεκριμένα,
$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= E\left[e^{-\delta T} I(U(T^-) + |U(T)| \le z)(T < \infty)\middle|U(0) = u\right] \\ &= F_\delta(x + y|u). \end{aligned}$$

- Για $w(U(T^-),|U(T)|) = I(U(T^-) + |U(T)| \le z)$ και $\delta = 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την συνάρτηση κατανομής της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία. Συγκεκριμένα,
$$\begin{aligned} m_0(u) &= E[I(U(T^-) + |U(T)| \le z)(T < \infty)|U(0) = u] \\ &= F_0(x + y|u). \end{aligned}$$

❖ Συναρτήσεις πυκνότητας

- Για $w(U(T^-),|U(T)|) = I(U(T^-) = x)I(|U(T)| = y)$ και $\delta > 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την από κοινού προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανοτήτων των $U(T^-), |U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα,
$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= E\left[e^{-\delta T} I(U(T^-) = x)I(|U(T)| = y)I(T < \infty)\middle|U(0) = u\right] \\ &= f_\delta(x, y|u). \end{aligned}$$

- Για $w(U(T^-),|U(T)|) = I(U(T^-) = x)I(|U(T)| = y)$ και $\delta = 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των $U(T^-), |U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή με την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό απόθεμα u και το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία να είναι ίσο με x, ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι ίσο με y. Συγκεκριμένα,
$$\begin{aligned} m_0(u) &= E[I(U(T^-) = x)I(|U(T)| = y)I(T < \infty)|U(0) = u] \\ &= P[U(T^-) = x, |U(T)| = y, T < \infty|U(0) = u] \\ &= f_0(x, y|u). \end{aligned}$$

- Για $w(U(T^-),|U(T)|) = I(U(T^-) = x)$ και $\delta > 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= E\left[e^{-\delta T} I(U(T^-) = x) I(T < \infty) \middle| U(0) = u\right] \\ &= f_\delta(x|u). \end{aligned}$$

- Για $w(U(T^-),|U(T)|) = I(U(T^-) = x)$ και $\delta = 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $U(T^-)$ τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα η χρεοκοπία στον οργανισμό να είναι γεγονός με αρχικό απόθεμα u και το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία να είναι ίσο με x. Συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E[I(U(T^-) = x) I(T < \infty) | U(0) = u] \\ &= P[U(T^-) = x, T < \infty | U(0) = u) \\ &= f_0(x|u). \end{aligned}$$

- Για $w(U(T^-),|U(T)|) = I(|U(T)| = y)$ και $\delta > 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= E\left[e^{-\delta T} I(|U(T)| = y) I(T < \infty) \middle| U(0) = u\right] \\ &= f_\delta(y|u). \end{aligned}$$

- Για $w(U(T^-),|U(T)|) = I(|U(T)| = y)$ και $\delta = 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $|U(T)|$ τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα η χρεοκοπία στον οργανισμό να είναι γεγονός με αρχικό απόθεμα u και έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι ίσο με y. Συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E[I(|U(T)| = y) I(T < \infty) | U(0) = u] \\ &= P[U(T) = y, T < \infty | U(0) = u) \\ &= f_0(y|u). \end{aligned}$$

- Πιθανότητα χρεοκοπίας

    - Για $w(U(T^-),|U(T)|) = 1$ και $\delta = 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα,

    $$\begin{aligned} m_0(u) &= E[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u] = P[T < \infty | U(0) = u] \\ &= \psi(u). \end{aligned}$$

- Μετασχηματισμοί Laplace

- Για $w(U(T^-), |U(T)|) = 1$ και $\delta > 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με τον μετασχηματισμό Laplace της σ.π. του χρόνου χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα,
$$m_\delta(u) = E\big[e^{-\delta T} I(T < \infty)|U(0) = u)\big].$$

- Για $w(U(T^-), |U(T)|) = e^{-s_1 U(T^-) - s_2 |U(T)|}$ και $\delta > 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με τον μετασχηματισμό Laplace της σ.π.π. του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος και του ελλείμματος. Συγκεκριμένα,
$$m_\delta(u) = E\big[e^{-\delta T - s_1 U(T^-) - s_2 |U(T)|} I(T < \infty)|U(0) = u)\big].$$

- Για $w(U(T^-), |U(T)|) = e^{-s(U(T^-) - |U(T)|)}$ και $\delta = 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με τον μετασχηματισμό Laplace της σ.π. της απαίτησης που προκαλεί την χρεοκοπία. Συγκεκριμένα,
$$m_\delta(u) = E\big[e^{-\delta T - s_1 U(T^-) - s_2 |U(T)|} I(T < \infty)|U(0) = u)\big].$$

- Ροπές j, k τάξης

  - Για $w(U(T^-), |U(T)|) = U(T^-)^k$ και $\delta = 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την ροπή k-τάξης του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία. Συγκεκριμένα,
$$m_0(u) = E[U(T^-)^k I(T < \infty)|U(0) = u].$$

  - Για $w(U(T^-), |U(T)|) = |U(T)|^k$ και $\delta = 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την ροπή k-τάξης του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπία. Συγκεκριμένα,
$$m_0(u) = E[|U(T)|^k I(T < \infty)|U(0) = u].$$

  - Για $w(U(T^-), |U(T)|) = U(T^-)^j |U(T)|^k$ και $\delta = 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την ροπή j-τάξης του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και k-τάξης ελλείμματος όταν συμβαίνει η χρεοκοπία. Συγκεκριμένα,
$$m_0(u) = E[U(T^-)^j (|U(T)|)^k I(T < \infty)|U(0) = u]$$

  - Για $w(U(T^-), |U(T)|) = |U(T)|^k$ και $\delta > 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την προεξοφλημένη ροπή k-τάξης του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπία. Συγκεκριμένα,
$$m_\delta(u) = E\big[e^{-\delta T}(|U(T)|)^k I(T < \infty)\big|U(0) = u\big].$$

  - Για $w(U(T^-), |U(T)|) = (U(T^-) + |U(T)|)^j$ και $\delta = 0$, η συνάρτηση Gerber-Shiu ισούται με την ροπή j-τάξης της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία. Συγκεκριμένα,

$$m_0(u) = E[(U(T^-) + |U(T)|)^j I(T < \infty)|U(0) = u]$$

Φυσικά, κατά πλήρη αντιστοιχία, όλα τα παραπάνω μπορούν να δειχθούν και για το τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο αλλά και για το stationary ανανεωτικό μοντέλο.

1.8 Συντελεστής Προσαρμογής Lundberg

-

Έστω $-R_\delta$ η αρνητική ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg (ορισμένη στο κλασσικό ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου), δηλαδή το R_δ ικανοποιεί την

$$\tilde{k}(\delta + cR_\delta)\tilde{p}(-R_\delta) = 1$$

ή

$$\tilde{b}_\delta(-R_\delta) = \frac{1}{\phi_\delta}$$

όπου $b_\delta(u)$ είναι η σ.π.π. της προεξοφλημένης κατανομής του ύψους της σκάλας (discounted ladder-height random variable) και $\phi_\delta = \bar{G}_\delta(0) = E\{e^{-\delta T} I(T < \infty) \big| U_0 = 0\}$, στο κλασσικό ανανεωτικό μοντέλο.

Έχει αποδειχθεί (Rolski et al., 1999, pp.255-9) ότι οι δύο αυτές εξισώσεις είναι ισοδύναμες όταν $\delta = 0$. Συγκεκριμένα, όταν $\delta = 0$, έστω ότι $\kappa = R_0$. Οι Landriault an Willmot (2007) έδειξαν την ισοδυναμία των δύο σχέσεων για κάθε μη αρνητική τιμή του δ στην ενότητα 3.2 της εργασίας τους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ
ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

2.1 Η προσαρμοσμένη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

Για την ανάλυση της διαδικασίας πλεονάσματος στο τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, έχουν ευρέως χρησιμοποιηθεί οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις.

Λήμμα Η γενική μορφή της τροποποιημένης ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης στο τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου είναι

$$m_\delta^d(u) = \phi_\delta^d \int_0^u m_\delta(u-y)\, b_\delta^d(y)dy + \int_u^\infty \int_0^\infty w(x+u, y-u) p_x(y) f_\delta^d(x|0)dxdy. \tag{1}$$

Όπου,

$$\phi_\delta^d = \int_0^\infty f_\delta^d(x|0)dx \tag{2}$$

και

$$b_\delta^d(y) = \int_0^\infty p_x(y) \frac{f_\delta^d(x|0)}{\phi_\delta^d} dx \tag{3}$$

με

$$f_\delta^d(x|0) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} f^d(x, y, t|0)dtdy \tag{4}$$

όπου $f_\delta^d(x, y, t|0)$ είναι η ελλειμματική από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος τη χρονική στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία x, το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας y και το χρόνο χρεοκοπίας t, δοθέντος ότι το αρχικό απόθεμα είναι $U(0) = 0$.

Απόδειξη

Δεσμεύοντας ως προς την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό πλεόνασμα u, προκύπτει η παρακάτω εξίσωση. Το πρώτο μέρος της εξίσωσης εξηγεί την περίπτωση κατά την οποία δεν συμβαίνει χρεοκοπία κατά την πρώτη εμφάνιση κινδύνου, ενώ το δεύτερο μέρος της εξίσωσης εξηγεί την εκδοχή του να συμβεί χρεοκοπία στην εμφάνιση του πρώτου κιόλας κινδύνου. Αν ο πρώτος κίνδυνος είναι μικρότερος από u, τότε η χρεοκοπία δεν συμβαίνει και έτσι η διαδικασία συνεχίζεται, ξεκινώντας ουσιαστικά από την αρχή, αυτή τη φορά με σύμφωνα με το κλασικό ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου αφού μόλις εμφανίστηκε κίνδυνος, με αρχικό όμως πλεόνασμα $u-y$, όπου y το μέγεθος του πρώτου κινδύνου. Εάν ο πρώτος κίνδυνος είναι μεγαλύτερος από το αρχικό απόθεμα u, η χρεοκοπία συμβαίνει και το έλλειμμα κατά τη στιγμή αυτή της χρεοκοπίας ισούται με $y-u$ και το πλεόνασμα την στιγμή ακριβώς πριν τη χρεοκοπία ισούται με $u+x$, όπου το πλεόνασμα που αποκτήθηκε επιπλέον του αρχικού αποθέματος μέχρι την εμφάνιση του πρώτου κινδύνου.

$$\begin{aligned} m_\delta^d(u) &= \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} m_\delta(u-y) f^d(x,y,t|0)\,dt dx dy \\ &+ \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} w(x+u, y-u) f^d(x,y,t|0)\,dt dx dy \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty m_\delta(u-y) f_\delta^d(x,y|0)\,dx dy \\ &+ \int_u^\infty \int_0^\infty w(x+u, y-u) f_\delta^d(x,y|0)\,dx dy. \end{aligned}$$

όπου

$$f_\delta^d(x,y|0) = \int_0^\infty e^{-\delta t} f^d(x,y,t|0)\,dt.$$

Έτσι, η $m_\delta^d(u)$ μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$m_\delta^d(u) = \phi_\delta^d \int_0^u m_\delta(u-y) b_b^d dyx + \int_u^\infty \int_0^\infty w(x+u, y-u) f_\delta^d(x,y|0)\,dx dy \quad (5)$$

όπου

$$\phi_\delta^d = \int_0^\infty \int_0^\infty f_\delta^d(x,y|0)\,dx dy \quad (6)$$

και

$$b_\delta^d(y) = \frac{1}{\phi_\delta^d} \int_0^\infty f_\delta^d(x, y|0)dx. \quad (7)$$

Η επιλογή του ϕ_δ^d είναι τέτοια που το $b_\delta^d(y)$ να είναι η σ.π.π. μιας τ.μ. αφού $\int_0^\infty b_\delta^d(y)dy = 1$.

Οι ποσότητες ϕ_δ^d και $b_\delta^d(y)$ μπορούν να ορισθούν και διαφορετικά χρησιμοποιώντας δεσμευμένες πιθανότητες και συγκεκριμένα τον τύπο του Bayes

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

Σύμφωνα με αυτό, η από κοινού σ.π.π. των $U(T_d^-), |U(T_d)|$ και T_d στο σημείο (x, y, t) μπορεί να εκφραστεί ως το γινόμενο της από κοινού σ.π.π. των $U(T_d^-)$ και T_d στο σημείο (x, t) με την δεσμευμένη σ.π.π. της $|U(T_d)|$ στο σημείο y, δοθέντος ότι $U(T_d^-) = x$ και $T_d = t$. Το έλλειμμα τη χρονική στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T_d)|$, εξαρτάται από το μέγεθος της απαίτησης τη στιγμή της χρεοκοπίας, $T_d = t$, η οποία εξαρτάται από τους ενδιάμεσους χρόνους μεταξύ των απαιτήσεων. Ωστόσο, επειδή οι τυχαίες μεταβλητές που περιγράφουν τα μεγέθη των απαιτήσεων που εμφανίζονται είναι ανεξάρτητες των τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν τους ενδιάμεσους χρόνους, συνεπάγεται πως το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T_d)|$ θα είναι ανεξάρτητο από την χρονική στιγμή της χρεοκοπίας $T_d = t$. Έτσι, η δεσμευμένη σ.π.π. του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $|U(T_d)|$ στο σημείο y, δοθέντος ότι το πλεόνασμα ακριβώς πριν συμβεί η χρεοκοπία $U(T_d^-) = x$ είναι:

$$\frac{p(x+y)}{\int_0^\infty p(x+y)dy} = \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}.$$

Έτσι,

$$f^d(x, y, t|0) = f_1^d(x, t, |0)p_x(y)$$

όπου $f_1^d(x, t|0)$ είναι η από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και του χρόνου που θα συμβεί αυτή, και $p_x(y) = \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}$.

Η προεξοφλημένη από κοινού σ.π.π. του πλεονάσματος ακριβώς πριν και του ελλείμματος κατά τη στιγμή ακριβώς της χρεοκοπίας γίνεται:

$$f_\delta^d(x, y|0) = \int_0^\infty e^{-\delta t} f^d(x, y, t|0)dt = p_x(y) f_\delta^d(x|0)$$

όπου,

$$f_\delta^d(x|0) = \int_0^\infty e^{-\delta t} f_1^d(x, t|0)dt$$

είναι η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος, δοθέντος μηδενικού πλεονάσματος. Τότε,

$$\phi_\delta^d = \int_0^\infty \int_0^\infty p_x(y) f_\delta^d(x|0)dxdy = \int_0^\infty f_\delta^d(x|0) \int_0^\infty p_x(y)dydx = \int_0^\infty f_\delta^d(x|0)dx,$$

$$b_\delta^d(y) = \frac{\int_0^\infty p_x(y) f_\delta^d(x|0)dx}{\phi_\delta^d} = \int_0^\infty p_x(y)\{\frac{f_\delta^d(x|0)}{\phi_\delta^d}\}dx$$

και η σχέση (5) για την $m_\delta^d(u)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$m_\delta^d(u) = \phi_\delta^d \int_0^\infty m_\delta(u-y) b_\delta^d(y) + \int_u^\infty \int_0^\infty w(x+u, y-u) p_x(y) f_\delta^d(x|0)dxdy.$$

Αξίζει εδώ να σημειωθεί πως $\phi_\delta^d \leq \phi_0^d = \psi^d(0)$.

Παράδειγμα: Απαιτήσεις με εκθετική κατανομή

Στην ειδική περίπτωση όπου $p(y) = \beta e^{-\beta y}$, παρατηρείτε πως

$$p_x(y) = \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)} = \frac{\beta e^{-\beta(x+y)}}{e^{-\beta x}} = \beta e^{-\beta y}$$

και

$$b_\delta^d(y) = \int_0^\infty p_x(y) \left\{\frac{f_\delta^d(x|0)}{\phi_\delta^d}\right\} dx = \beta e^{-\beta y} \int_0^\infty \left\{\frac{f_\delta^d(x|0)}{\phi_\delta^d}\right\} dx = \beta e^{-\beta y}.$$

Έτσι, $p_x(y) = b_\delta^d(y) = p(y)$.

2.2 Δέσμευση ως προς την πρώτη απαίτηση

Μία ακόμα μορφή της $m_\delta^d(u)$ με πολύ ενδιαφέρον και πολύ χρήσιμη για την μελέτη της διαδικασίας πλεονάσματος στο τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο, προκύπτει δεσμεύοντας ως προς την πρώτη εμφάνιση κινδύνου.

Δεσμεύοντας λοιπόν ως προς τον χρόνο t και το μέγεθος y της πρώτης απαίτησης, η $m_\delta^d(u)$ μπορεί να γραφεί ως ακολούθως. Έστω ότι η χρονική στιγμή της πρώτης απαίτησης είναι η t. Τότε, το συνολικό ποσό που έχει συσσωρευτεί ως απόθεμα έως εκείνη τη στιγμή θα είναι $u + ct$. Έτσι, για να συμβεί χρεοκοπία λόγω της πρώτης απαίτησης, θα πρέπει αυτή να είναι υψηλότερη από $u + ct$, και τότε το έλλειμμα θα ανέλθει σε $y - u - ct$. Η προεξοφλημένη συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται $e^{-\delta t}w(u + ct, y - u - ct)$. Σε διαφορετική περίπτωση, η πρώτη απαίτηση δεν συνεπάγεται χρεοκοπία, και η διαδικασία μελετάται εκ νέου σύμφωνα με το κλασικό ανανεωτικό μοντέλο και με αρχικό απόθεμα που ανέρχεται σε $u + ct - y$. Έτσι, η προεξοφλημένη συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται $e^{-\delta t}m_\delta(u + ct - y)$. Επομένως,

$$m_\delta^d(u) = \int_0^\infty e^{\delta t}\{\int_0^{u+ct} m_\delta(u + ct - y)p(y)dy + \int_{u+ct}^\infty w(u + ct, y - u - ct)p(y)dy\}k_1(t)dt,$$

Δηλαδή,

$$m_\delta^d(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_\delta(u + ct)k_1(t)dt \tag{8}$$

όπου

$$\sigma_\delta(t) = \int_0^t m_\delta(t - y)p(y)dy + \int_t^\infty w(t, y - t)p(y)dy. \tag{9}$$

Η ποσότητα $\sigma_\delta(t)$ θα ήταν η ίδια και στο κλασικό ανανεωτικό μοντέλο διότι δεν εξαρτάται από την συνάρτηση $k_1(t)$, δηλαδή είναι ανεξάρτητη του χρόνου μέχρι την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης.

Εν συνεχεία, η ποσότητα $\sigma_\delta(t)$ μπορεί να γραφεί ως:

$$\sigma_\delta(t) = \int_0^t m_\delta(t-y)p(y)dy \ + \alpha(t)$$

Όπου

$$\alpha(t) = \int_t^\infty w(t, y-t)p(y)dy.$$

Με αυτόν τον τρόπο η ποσότητα $\alpha(t)$ είναι μία συνάρτηση που δεν εξαρτάται από το δ.

Εάν τώρα γίνει αλλαγή μεταβλητής, βάζοντας όπου t το $r = u + ct$, η $m_\delta^d(u)$ μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$m_\delta^d(u) = \int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{r-u}{c}\right)}\sigma_\delta(r)k_1\left(\frac{r-u}{c}\right)\frac{dr}{c}$$

$$= \frac{1}{c}\int_u^\infty e^{-\delta\left(\frac{t-u}{c}\right)}\sigma_\delta(t)k_1(\frac{t-u}{c})dt$$

Στο stationary ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, χρησιμοποιώντας την σχέση (21), οι Wilmot και Dickson (2003) έδειξαν πως η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu m_δ^e μπορεί να πάρει τη μορφή:

$$m_\delta^e(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u m_\delta(u-t)dP_1(t) + q(u)$$

όπου

$$q(u) = e^{\left(\frac{\delta}{c}\right)u}\int_0^u e^{-\left(\frac{\delta}{c}\right)t}\{\,\tau(t) - \frac{\delta}{c(1+\theta)}\int_0^t m_\delta(t-y)dP_1(y)\}dt$$

και

$$\tau(t) = \frac{1}{(1+\theta)E(Y)}\int_t^\infty w(t, y-t)p(y)dy.$$

Ακόμα, για $\delta = 0$, η συνάρτηση των Gerber-Shiu απλοποιείται ακόμα περισσότερο και γίνεται:

$$m_0^e(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u m_0(u-t)dP_1(t) + \frac{1}{(1+\theta)E(Y)}\int_u^\infty\int_t^\infty w(t, y-t)p(y)dydt.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ
ΤΟ ΕΛΛΕΙΜΑ ΚΑΤΑ ΤΗ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΣΤΟ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Στην ενότητα 1.7, έγινε η εισαγωγή διαφόρων ποσοτήτων που σχετίζονται με τη χρεοκοπία. Το έλλειμα κατά τη χρεοκοπία θα είναι στο επίκεντρο αυτού του κεφαλαίου. Ο Willmot (2007) μελέτησε τις προεξοφλημένες ροπές του ελλείματος στο Sparre Andersen μοντέλο, και στο Willmot et al (2004) μελέτησε την proper κατανομή του ελλείματος, την στοχαστική αποσύνθεση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής συνδυάζοντας το έλλειμα και την ασυμπτωτική κατανομή του proper deficit στην περίπτωση του stationary ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου. Έπειτα τα αποτελέσματα βγήκαν και για το τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο.

Όταν $w(x,y) = w_2(y)$, δηλαδή συνάρτηση μόνο του ελλείματος, η $m_\delta^d(u)$ απλοποιείται σε:

$$m_\delta^d(u) = \phi_\delta^d \int_0^u m_\delta(u-y) b_\delta^d(y) dy + \int_u^\infty w_2(y-u) \int_0^\infty f_\delta^d(x,y|0) dx\, dy$$

$$= \phi_\delta^d \int_0^u m_\delta(u-y) b_\delta^d(y) dy + \phi_\delta^d \int_u^\infty w_2(y-u) b_\delta^d(y) dy \qquad (10)$$

3.1 Ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας

Όπως αναφέρθηκε και νωρίτερα, μία πολύ ενδιαφέρουσα ποσότητα στη μελέτη της διαδικασίας του πλεονάσματος είναι ο χρόνος χρεοκοπίας. Έστω $\bar{G}_\delta^d(u)$ ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας στην τροποποιημένη ανανεωτική διαδικασία, δηλαδή

$$\bar{G}_\delta^d(u) = E\{e^{-\delta T_d} I(T_d < \infty) \big| U_0 = u\}.$$

Θέτοντας $w(x,y) = 1$ στην συνάρτηση των Gerber-Shiu για το τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο προκύπτει:

$$m_\delta^d(u) = \bar{G}_\delta^d(u) = E\{e^{-\delta T_d} I(T_d < \infty) \big| U_0 = u\}$$

επομένως ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας ικανοποιεί την σχεση (1) και

$$\bar{G}_\delta^d(u) = \phi_\delta^d \int_o^\infty \bar{G}_\delta(u-y) b_\delta^d(y)dy + \phi_\delta^d \bar{B}_\delta^d(u) \tag{11}$$

Η σχέση (11), μπορεί στην συνέχεια να γραφεί ως

$$\bar{G}_\delta^d(u) = \phi_\delta^d \,\overline{\Lambda}_\delta(u) \tag{12}$$

όπου

$$\overline{\Lambda}_\delta(u) = \int_0^u \bar{G}_\delta(u-y) b_\delta^d(y)dy + \bar{B}_\delta^d(u) \tag{13}$$

είναι η ουρά μιας σύνθετη γεωμετρική συνέλιξη.

Να σημειωθεί αυτή η ποσότητα μπορεί να γραφεί και ως

$$\overline{\Lambda}_\delta(u) = P[L_\delta + X_\delta^d > u]$$

όπου η X_δ^d έχει συνάρτηση κατανομής $B_\delta^d = P[X_\delta^d \le x]$ και είναι ανεξάρτητη της τ.μ. L_δ, όπου η L_δ ικανοποιεί την $P[L_\delta > x] = \bar{G}_\delta(x)$.

Επομένως, η αναπαράσταση του μετασχηματισμού Laplace, σε μορφή συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της (13), είναι

$$\bar{\lambda}_\delta(s) = \bar{b}_\delta^d(s) E(e^{-sL_\delta}).$$

Εάν στην σχέση (13), $\delta = 0$, η σχέση αυτή απλοποιείται σε:

$$\overline{\Lambda}_0(u) = \int_o^u \psi(u-t) b_0^d(t)dt + \bar{B}_0^d(u) = P[L + X^d > u]$$

όπου η X^d έχει σ.κ. $B_0^d(x) = P[X^d \le x]$ και είναι ανεξάρτητη του μέγιστου συνολικού κόστους L στο κλασικό ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου.

Όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα, οι Wilmot και Lin (2001) έδειξαν πως η ουρά μίας σύνθετης γεωμετρικής συνέλιξης ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Αυτό με τη σειρά του σημαίνει πως και η $\bar{G}_\delta^d(u)$ ικανοποιεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, αφού πρόκειται για την $\overline{\Lambda}_\delta(u)$ απλώς πολλαπλασιασμένη με την σταθερά $\phi_\delta^d = \bar{G}_\delta^d(0)$ η οποία είναι και μικρότερη από 1.

Ο κλειστός τύπος για την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση μπορεί να προκύψει παίρνοντας τον μετασχηματισμό Laplace και στα μέλη της εξίσωσης (11). Τότε:

$$\int_o^{\infty} e^{-su}\bar{G}_\delta^d(u)du = \phi_\delta^d \left\{\frac{1-\dfrac{1-\phi_\delta}{1-\phi_\delta b_\delta(s)}}{s}\right\}\tilde{b}_\delta^d(s) + \phi_\delta^d\frac{1-\tilde{b}_\delta^d(s)}{s}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τώρα και τα δύο μέλη με $1-\phi_\delta\tilde{b}_\delta(s)$ παίρνουμε:

$$\{1-\phi_\delta\tilde{b}(s)\}\int_o^{\infty} e^{-su}\bar{G}_\delta^d(u)du = \phi_\delta^d\frac{1-\phi_\delta\tilde{b}_\delta(s)-\tilde{b}_\delta^d(s)+\phi_\delta\tilde{b}_\delta^d(s)}{s}$$

$$= \phi_\delta^d\left\{\phi_\delta\frac{1-\tilde{b}_\delta(s)}{s} + (1-\phi_\delta)\frac{1-\tilde{b}_\delta^d(s)}{s}\right\},$$

και επομένως,

$$\int_o^{\infty} e^{-su}\bar{G}_\delta^d(u)du$$

$$= \phi_\delta\tilde{b}_\delta(s)\int_o^{\infty} e^{-su}\,\bar{G}_\delta^d(u)du$$

$$+ \phi_\delta^d\left\{\phi_\delta\frac{1-\tilde{b}_\delta(s)}{s} + (1-\phi_\delta)\frac{1-\tilde{b}_\delta^d(s)}{s}\right\}.$$

Αντιστρέφοντας τώρα τον μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε:

$$\bar{G}_\delta^d(u) = \phi_\delta\int_o^u \bar{G}_\delta^d(u-y)b_\delta(y)dy + \phi_\delta^d\{\phi_\delta\bar{B}_\delta(u) + (1-\phi_\delta)\,\bar{B}_\delta^d(u)\}. \quad (14)$$

Για την ανανεωτική αυτή εξίσωση έχουν βρεθεί και ασυμπτωτικές σχέσεις αλλά και άνω και κάτω φράγματα. Αν το $\kappa > 0$ ικανοποιεί την γενικευμένη συνθήκη του Lundberg, ορισμένη για το κλασικό ανανεωτικό μοντέλο, $\tilde{b}_\delta(-\kappa) = \frac{1}{\phi_\delta}$, τότε η Cramer-Lundberg ασυμπτωτική σχέση που προκύπτει είναι η εξής:

$$\bar{G}_\delta^d(u) \sim \frac{\phi_\delta^d\int_0^{\infty} e^{ky}\left\{\bar{B}_\delta(y) + \left(\dfrac{1}{\phi_\delta}-1\right)\bar{B}_\delta^d(y)\right\}dy}{\int_0^{\infty} ye^{ky}b_\delta(y)dy}e^{-ku}, u \to \infty.$$

Ακόμα, τα φράγματα είναι τα εξής:

$$\sigma_L(u)\psi_L(u)e^{-ku} \leq \bar{G}_\delta^d(u) \leq \sigma_U(u)\psi_U(u)e^{-ku}$$

όπου,

$$\psi_U(u) = \phi_\delta^d\{1 + \left(\frac{1}{\phi_\delta}-1\right)\sup_{0\leq z\leq u,\bar{B}_\delta(z)>0}\frac{\bar{B}_\delta^d(z)}{\bar{B}_\delta(z)}\}, u \geq 0,$$

$$\psi_L(u) = \phi_\delta^d\{1 + \left(\frac{1}{\phi_\delta}-1\right)\inf_{0\leq z\leq u,\bar{B}_\delta(z)>0}\frac{\bar{B}_\delta^d(z)}{\bar{B}_\delta(z)}\}, u \geq 0,$$

$$\sigma_U(u) = \sup_{0 \le z \le u, \bar{B}_\delta(z) > 0} \frac{e^{kz}\ \bar{B}_\delta(z)}{\int_z^\infty e^{kz} b_\delta(y)dy}, u \ge 0,$$

$$\sigma_U(u) = \inf_{0 \le z \le u, \bar{B}_\delta(z) > 0} \frac{e^{kz}\ \bar{B}_\delta(z)}{\int_z^\infty e^{kz} b_\delta(y)dy}, u \ge 0.$$

Η ασυμπτωτική σχέση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για την μελέτη της συμπεριφοράς της $\bar{G}_\delta^d(u)$ για μεγάλες τιμές του u, ενώ τα φράγματα δίνουν πληροφορίες όταν η μελέτη γίνεται για μικρά u.

Στην περίπτωση που οι κίνδυνοι ακολουθούν την εκθετική κατανομή, η $\bar{G}_\delta^d(u)$ μπορεί να υπολογισθεί επακριβώς.

3.2 Η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής του Proper deficit

Όταν η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής παίρνει την μορφή $w(x,y) = w_2(x_2) = I(x_2 > y)$, τότε η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu γίνεται η προεξοφλημένη ελλειμματική συνάρτηση επιβίωσης του ελλείμματος.

Έτσι, η $m_\delta^d(u) = \overline{G}_\delta^d(u,y) = E\{e^{-\delta T_\delta} I(|U_{T_\delta}| > y) I(T_\delta < \infty) | U_0 = u\}$ ικανοποιεί την

$$\overline{G}_\delta^d(u,y) = \phi_\delta^d \int_0^u \overline{G}_\delta(u-t,y) b_\delta^d(t)dt + \phi_\delta^d \int_u^\infty I(t-u > y) b_\delta^d(t)dt$$
$$= \phi_\delta^d \int_0^u \overline{G}_\delta(u-t,y) b_\delta^d(t)dt + \phi_\delta^d \int_{u+y}^\infty b_\delta^d(t)dt,$$

δηλαδή,

$$\overline{G}_\delta^d(u,y) = \phi_\delta^d \int_0^u \overline{G}_\delta(u-t,y) b_\delta^d(t)dt + \phi_\delta^d \overline{B}_\delta^d(u+y). \tag{15}$$

Επιπλέον, θέτοντας $\delta = 0$, η

$$m_0^d(u) = \overline{G}^d(u,y) = E\{I(|U_{T_d}| > y) I(T_d < \infty) | U_0 = u\}$$

ικανοποιεί την

$$\overline{G}^d(u,y) = \psi^d(0) \int_0^u \overline{G}(u-t,y) b_0^d(t)dt + \psi^d(0) \overline{B}_0^d(u+y) \tag{16}$$

όπου $\psi^d(0) = \phi_0^d$ η πιθανότητα χρεοκοπίας στο τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο με αρχικό απόθεμα 0.

Η τελευταία σχέση, μπορεί επίσης να προκύψει με τη χρήση πιθανοτήτων. Όταν λοιπόν συμβεί μία απαίτηση που θα οδηγήσει το απόθεμα σε επίπεδο χαμηλότερο από το αρχικό, είναι πιθανόν να συμβεί χρεοκοπία. Διαφορετικά, δεν μπορεί να συμβεί χρεοκοπία και η διαδικασία πλεονάσματος μπορεί να θεωρηθεί πως ξεκινάει από την αρχή σαν μία κλασική ανανεωτική διαδικασία με αρχικό απόθεμα $u - t$ όπου το $t < u$. Αν η χρεοκοπία συμβεί, για να είναι το έλλειμμα κατά τη στιγμή χρεοκοπίας μεγαλύτερο από y, ενώ το αρχικό απόθεμα ήταν u, θα πρέπει η απαίτηση που οδήγησε σε χρεοκοπία να είναι μεγαλύτερη από $u + y$. Ο πρώτος όρος της παραπάνω εξίσωσης λοιπόν, εξηγεί το ενδεχόμενο να μην συμβεί χρεοκοπία στην πρώτη πτώση, ενώ ο δεύτερος όρος ερμηνεύει το ενδεχόμενο να συμβεί. Καθώς το επιχείρημα δεσμεύει ως προς την πρώτη πτώση κάτω από το αρχικό απόθεμα, η πιθανότητα αυτό να συμβεί πολλαπλασιάζεται με τους δύο όρους.

Θεώρημα Η προεξοφλημένη proper συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος, $\overline{G}^{d}_{\delta,u}(y)$, μπορεί να εκφραστεί ως

$$\overline{G}^{d}_{\delta,u}(y) = \frac{\overline{G}^{d}_{\delta}(u,y)}{\overline{G}^{d}_{\delta}(u)}$$
$$= \frac{\overline{G}_{\delta}(0)\int_0^u \overline{B}_{\delta,u-t}(y)\overline{B}_{\delta}(u-t)d\Lambda_{\delta}(t) + \left(1-\overline{G}_{\delta}(0)\right)\overline{B}^{d}_{\delta,u}(y)\overline{B}^{d}_{\delta}(u)}{\overline{G}_{\delta}(0)\int_0^u \overline{B}_{\delta}(u-t)d\Lambda(t) + \left(1-\overline{G}_{\delta}(0)\right)\overline{B}^{d}_{\delta}(u)}$$

όπου $B_{\delta,t}(x) = 1 - \overline{B}_{\delta,t}(x)$ είναι η συνάρτηση επιβίωσης της $B_{\delta}(x)$, δηλαδή,

$\overline{B}_{\delta,t}(x) = \frac{\overline{B}_{\delta}(t+x)}{\overline{B}_{\delta}(t)}$.

Όταν $\delta = 0$, η αντίστοιχη συνάρτηση για το έλλειμμα, $\overline{G}^{d}_{u}(y)$ είναι

$$\overline{G}^{d}_{u}(y) = \frac{\overline{G}^{d}(u,y)}{\psi^{d}(u)}$$
$$= \frac{\psi(0)\int_0^u \overline{B}_{0,u-t}(y)\overline{B}_{0}(u-t)d\Lambda_{0}(t) + \left(1-\psi(0)\right)\overline{B}^{d}_{0,u}(y)\overline{B}^{d}_{0}(u)}{\psi(0)\int_0^u \overline{B}_{0}(u-t)d\Lambda_{0}(t) + \left(1-\psi(0)\right)\overline{B}^{d}_{0}(u)}.$$

Απόδειξη:

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\overline{G}_{\delta}(u)$, υπό την μορφή σ.π.π., μπορεί να γραφεί ως

$$\tilde{g}_{\delta}(s) = E(e^{-sL_{\delta}}) = \frac{1-\phi_{\delta}}{1-\phi_{\delta}\tilde{b}_{\delta}(s)}$$

όπου $\phi_{\delta} = \overline{G}_{\delta}(0)$ και χρησιμοποιώντας την πρόταση 2.1 από τον Willmot (2002a) παίρνουμε

$$\overline{G}_{\delta}(u,y) = \frac{\phi_{\delta}}{1-\phi_{\delta}} \int_{0^-}^{u} \overline{B}_{\delta}(u+y-t)dG_{\delta}(t) \qquad (17)$$

όπου $G_{\delta}(t) = 1 - \overline{G}_{\delta}(t) = P(L_{\delta} \le t)$.

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση (17), η (15) μπορεί να γραφεί σε απλούστερη μορφή.

Ο μετασχηματισμός Laplace της $\int_0^u \overline{G}_{\delta}(u-t,y)b^{d}_{\delta}(t)dt$ στην σχέση (15) είναι

$$\int_0^{\infty} e^{-su} \int_0^{u} \overline{G}_{\delta}(u-t,y)b^{d}_{\delta}(t)dtdu = \tilde{b}^{d}_{\delta}(s) \int_0^{\infty} e^{-su}\overline{G}_{\delta}(u,y)du.$$

Χρησιμοποιώντας την (17)

$$\int_0^\infty e^{-su}\overline{G}_\delta(u,y)du = \frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\int_0^\infty e^{-su}\overline{B_\delta}(u+y)du\int_0^\infty e^{-su}\,dG_\delta(u)$$

$$= \frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}E(e^{-sL_\delta})\int_0^\infty e^{-su}\overline{B_\delta}(u+y)du.$$

Επομένως,

$$\int_0^\infty e^{-su}\int_0^u \overline{G}_\delta(u-t,y)b_\delta^d(t)dtdu = \tilde{b}_\delta^d(s)\frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}E(e^{-sL_\delta})\int_0^\infty e^{-su}\overline{B_\delta}(u+y)du$$

$$= \tilde{\lambda}_\delta(s)\frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\int_0^\infty e^{-su}\overline{B_\delta}(u+y)du.$$

Αντιστρέφοντας τώρα τον μετασχηματισμό Laplace,

$$\int_0^u \overline{G}_\delta(u-t,y)b_\delta^d(t)dt = \frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\int_0^u \overline{B}_\delta(u+y-t)d\Lambda_\delta(t)$$

και επομένως, η σχέση (15) γίνεται

$$\overline{G}_\delta^d(u,y) = \phi_\delta^d\,\frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\int_0^u \overline{B}_\delta(u+y-t)d\Lambda_\delta(t) + \phi_\delta^d\overline{B_\delta^d}(u+y). \tag{18}$$

Η προεξοφλημένη πιθανότητα χρεοκοπίας προκύπτει θέτοντας $y=0$,

$$\overline{G}_\delta^d(u) = \overline{G}_\delta^d(u,0) = \phi_\delta^d\frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\int_0^u \overline{B}_\delta(u-t)d\Lambda_\delta(t) + \phi_\delta^d\overline{B_\delta^d}(u).$$

Αν τώρα θέλουμε να ορίσουμε την προεξοφλημένη proper συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος με την $\overline{G}_{\delta,u}^d(y)$, είναι,

$$\begin{aligned}\overline{G}_{\delta,u}^d(y) &= \frac{\overline{G}_\delta^d(u,y)}{\overline{G}_\delta^d(u)}\\ &= \frac{\phi_\delta\int_0^u \overline{B}_\delta(u+y-t)d\Lambda_\delta(t) + (1-\phi_\delta)\,\overline{B}_\delta^d(u+y)}{\phi_\delta\int_0^u \overline{B}_\delta(u-t)d\Lambda_\delta(t) + (1-\phi_\delta)\,\overline{B}_\delta^d(u)}\\ &= \frac{\phi_\delta\int_0^u \overline{B}_{\delta,u-t}(y)\overline{B_\delta}(u-t)\,d\Lambda_\delta(t) + (1-\phi_\delta)\,\overline{B}_{\delta,u}^d(y)\overline{B}_\delta^d(u)}{\phi_\delta\int_0^u \overline{B}_\delta(u-t)d\Lambda_\delta(t) + (1-\phi_\delta)\,\overline{B}_\delta^d(u)}.\end{aligned}$$

Αξίζει να σημειωθεί σε αυτό το σημείο πως η προεξοφλημένη proper συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος $\overline{G}_{\delta,u}^d(y)$ είναι μίξη της συνάρτησης κατανομής του υπολειπόμενου χρόνου ζωής $B_{\delta,t}(y)$ για $0<t<u$ και της $B_{\delta,u}^d(y)$. Η proper συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος στο τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο

κινδύνου έχει την ίδια μορφή και στο stationary ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου, με την διαφορά της ladder-height σ.κ. του stationary μοντέλο, που είναι η equilibrium σ.κ. του μεγέθους του κινδύνου $(P_1(y))$, να αντικαθίσταται από αυτήν του τροποποιημένου μοντέλου.

Η σχετική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να προκύψει παραγωγίζοντας την $\overline{G}^d_{\delta,u}(y)$ ως προς y.

Λήμμα: Η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του proper deficit είναι:

$$g^d_{\delta,u}(y) = \frac{\phi_\delta \int_0^u b_{\delta,u-t}(y)\overline{B}_\delta(u-t)d\Lambda_\delta(t) + (1-\phi_\delta)b^d_{\delta,u}(y)\overline{B}^d_\delta(u)}{\phi_\delta \int_0^u \overline{B}_\delta(u-t)d\Lambda_\delta(t) + (1-\phi_\delta)\overline{B}^d_\delta(u)},$$

και πρόκειται για μία μίξη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας του υπολειπόμενου χρόνου ζωής $b_{\delta,u-t}(y)$ με την $b^d_{\delta,u}(y)$.

Η proper συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος μπορεί εύκολα να εντοπιστεί σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις μέσω του παραπάνω ελλείμματος.

Παράδειγμα: Μέγεθος απαιτήσεων με εκθετική κατανομή.

Όταν οι απαιτήσεις ακολουθούν την εκθετική κατανομή, δηλαδή $p(y) = \beta e^{-\beta y}$, όπως έχει δειχθεί και σε προηγούμενο παράδειγμα, η $b^d_\delta(y)$ ακολουθεί επίσης εκθετική κατανομή και είναι πλέον εύκολο να φανεί πως

$$\begin{aligned}
\overline{G}^d_{\delta,u}(y) &= \frac{\phi_\delta \int_0^u \overline{B}_\delta(u+y-t)d\Lambda_\delta(t) + (1-\phi_\delta)\overline{B}^d_\delta(u+y)}{\phi_\delta \int_0^u \overline{B}_\delta(u-t)d\Lambda_\delta(t) + (1-\phi_\delta)\overline{B}^d_\delta(u)} \\
&= \frac{\phi_\delta \int_0^u e^{-\beta(u+y-t)}d\Lambda_\delta(t) + (1-\phi_\delta)e^{-\beta(u+y)}}{\phi_\delta \int_0^u e^{-\beta(u-t)}d\Lambda_\delta(t) + (1-\phi_\delta)e^{-\beta u}} \\
&= e^{-\beta y}.
\end{aligned}$$

Έτσι, η προεξοφλημένη proper συνάρτηση κατανομής του ελλείμματος αυτού του παραδείγματος ακολουθεί την ίδια εκθετική κατανομή με αυτή του μεγέθους των απαιτήσεων, ανεξαρτήτως του χρόνου έως την πρώτη εμφάνιση απαίτησης.

3.3 Ασυμπτωτική κατανομή του Proper deficit.

Σε αυτή την ενότητα θα μελετηθεί η συμπεριφορά της σ.κ. του proper deficit όταν το αρχικό απόθεμα u τείνει στο άπειρο. Θα μπορούσε κάποιος να ¨μαντέψει¨ πως θα είναι μία μίξη κατανομών όπως στην προηγούμενη ενότητα με απλούστερα βάρη, καθώς τα βάρη στην προηγούμενη ενότητα ήταν συναρτήσει του u και θα έπρεπε να συγκλίνουν για να υπάρχει ασυμπτωτική σχέση. Δεν θα ήταν ορθό απλώς να υπολογιζόντουσαν τα όρια από την κατανομή που προέκυψε στην προηγούμενη ενότητα και έτσι η μελέτη θα γίνει διαφορετικά.

Θεώρημα Η ασυμπτωτική κατανομή του proper deficit είναι:

$$\lim_{u\to\infty} \bar{G}_u^d(y) = \lim_{u\to\infty} \bar{G}_u(y) = \frac{\int_0^\infty e^{\kappa t} \bar{B}_0(y+t)dt}{\int_0^\infty e^{\kappa t}\, \bar{B}_0(t)dt} = \frac{\int_0^\infty e^{\kappa t}\, \bar{B}_{0,t}(y)\, \bar{B}_0(t)dt}{\int_0^\infty e^{\kappa t}\, \bar{B}_0(t)dt}.$$

Απόδειξη

Πολλαπλασιάζοντας με $e^{\kappa u}$ όπου κ ο συντελεστής προσαρμογής όπως αυτός ορίστηκε στο πρώτο κεφάλαιο, και παίρνοντας το όριο όταν το $u \to \infty$ και στα δύο μέλη της εξίσωσης (16), παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u} \bar{G}^d(u,y) \\ &\qquad = \psi^d(0) \lim_{u\to\infty} e^{\kappa u} \int_0^u \bar{G}(u-t,y) dB_0^d(t) \\ &\qquad + \psi^d(0) \lim_{u\to\infty} e^{\kappa u} \bar{B}_0^d(u+y). \end{aligned} \tag{19}$$

Από την ανισότητα του Lundberg στο κλασικό ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου,

$$e^{\kappa u} \bar{G}(u,y) \le e^{\kappa u} \psi(u) \le 1,$$

και έτσι η (19) μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} &\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u} \bar{G}^d(u,y) \\ &\qquad = \psi^d(0) \int_0^\infty \left\{ \lim_{u\to\infty} e^{\kappa u} \bar{G}(u,y) \right\} e^{\kappa t} dB_0^d(t) \\ &\qquad + \psi^d(0) \lim_{u\to\infty} e^{\kappa u} \bar{B}_0^d(u+y). \end{aligned} \tag{20}$$

Τώρα, αποδεικνύεται πως,

$$\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\bar{B}_0^d(u) = \lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\frac{\psi(0)\overline{B_0}(u) - \dfrac{\psi^d(u)}{\psi^d(0)} + \psi(0)\displaystyle\int_0^u \frac{\psi^d(u-t)}{\psi^d(0)}dB_0(t)}{\psi(0)-1} \tag{21}$$

και αφού ισχύει και η 1.18,

$$\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\bar{B}_0(u) \le \lim_{u\to\infty}\int_u^\infty e^{\kappa y}d\bar{B}_0(y) = 0,$$

το πρώτο μέλος της εξίσωσης (21) εξαφανίζεται και η ισότητα γίνεται

$$\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\bar{B}_0(u) = \frac{\psi(0)}{\{\psi(0)-1\}\psi^d(0)}\int_0^\infty \left\{\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\psi^d(u)\right\}e^{\kappa t}dB_0(t) - \frac{1}{\{\psi(0)-1\}\psi^d(0)}\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\psi^d(u).$$

Ο συντελεστής προσαρμογής του Lundberg, κ ικανοποιεί την σχέση $\tilde{b}_0(-\kappa) = \frac{1}{\psi(0)}$ και $\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\psi^d(u)$ είναι σταθερά (Willmot and Lin (2001), θεώρημα 11.4.3). Αυτό οδηγεί στο

$$\begin{aligned}\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\bar{B}_0^d(u) &= \frac{\psi(0)}{\{\psi(0)-1\}\psi^d(0)}\frac{1}{\psi(0)}\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\,\psi^d(u) \\ &\quad - \frac{1}{\{\psi(0)-1\}\psi^d(0)}\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\psi^d(u) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Επίσης,

$$0 \le \lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\bar{B}_0^d(u+y) \le \lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\bar{B}_0^d(u) = 0$$

οδηγεί στο ότι

$$\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\bar{B}_0^d(u+y) = 0.$$

Τώρα, η σχέση (20) γίνεται

$$\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\bar{G}^d(u,y) = \psi^d(0)\tilde{b}_0^d(-\kappa)\{\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\,\bar{G}(u,y)\}$$

και εφόσον

$$\bar{G}_u^d(y) = \frac{\bar{G}^d(u,y)}{\bar{G}^d(u,0)},$$

$$\lim_{u\to\infty}\bar{G}_u^d(y) = \frac{\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\bar{G}^d(u,y)}{\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\bar{G}^d(u,0)} = \frac{\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\bar{G}(u,y)}{\lim_{u\to\infty} e^{\kappa u}\bar{G}(u,0)} = \lim_{u\to\infty}\bar{G}_u(y).$$

Το θεώρημα αυτό δείχνει πως η ασυμπτωτική κατανομή του proper deficit καθώς το αρχικό απόθεμα u τείνει στο άπειρο στο τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου είναι μία μίξη ίδιας μορφής όπως και στο κλασσικό ή το stationary ανανεωτικό μοντέλο, ανεξαρτήτως της κατανομής του χρόνου μέχρι την εμφάνιση του πρώτου κινδύνου. Αυτό συμβαίνει διότι μεγάλες τιμές του u υποδηλώνει και μεγάλες τιμές του t, και καθώς το u γίνεται μεγάλο, η υπόθεση για την κατανομή του χρόνου μέχρι την εμφάνιση του πρώτου κινδύνου γίνεται όλο και λιγότερο σημαντική. Επίσης, αξίζει να σημειωθεί ότι η ασυμπτωτική σ.κ. του proper deficit είναι μία μίξη των σ.κ. υπολειπόμενου χρόνου ζωής $B_{0,t}(y)$ για $t \geq 0$ όπως στην προηγούμενη ενότητα αλλά με απλούστερα βάρη μίξης.

3.4 Στοχαστική αποσύνθεση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής της $\boldsymbol{L_\delta^d}$

Έστω L^d η μέγιστη σωρευτική απώλεια στο τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο και $\phi^d(u) = 1 - \psi^d(u)$ η συνάρτηση κατανομής της L^d. Ας το διευρύνουμε αυτό στην περίπτωση που το $\delta > 0$ και να ορίσουμε την L_δ^d να είναι μία τυχαία μεταβλητή με σ.κ. $G_\delta^d(u) = 1 - \bar{G}_\delta^d$(u).

Θεώρημα Η δεσμευμένη συνάρτηση επιβίωσης L_δ^d ικανοποιεί τη σχέση

$$P\big[L_\delta^d > u + y \big| L_\delta^d > u\big) = P\big[L_\delta + X_{\delta,u}^d > y\big] \tag{22}$$

για $y \geq 0$, όπου $X_{\delta,u}^d$ είναι μία τυχαία μεταβλητή στατιστικά ανεξάρτητη από την L_δ με συνάρτηση κατανομής $G_{\delta,u}^d(y)$.

Απόδειξη

Πρώτα θα δοθεί μια πιθανοθεωρητική απόδειξη στην περίπτωση που $\delta = 0$ για καλύτερη κατανόηση της ισότητας, εκεί που ερμηνεία είναι πιο ξεκάθαρη. Ας υποθέσουμε ότι το αρχικό απόθεμα είναι $u + y$. Το ενδεχόμενο $\{L^d \leq u + y\}$ μπορεί να χωριστεί σε δύο ξένα μεταξύ τους ενδεχόμενα $\{L^d \leq u\}$ και $\{u \leq L^d \leq u + y\}$. Η πιθανότητα του πρώτου ενδεχομένου είναι $\phi^d(u)$ και το πλεόνασμα πάντα παραμένει μεγαλύτερο από y. Για να συμβεί το δεύτερο ενδεχόμενο, το επίπεδο του αποθέματος θα πρέπει να πέσει κάτω από y σε κάποια χρονική στιγμή στο σημείο $y - t \geq 0$ με πιθανότητα $dG^d(u,t)$ αλλά μετά, η χρεοκοπία δεν θα συμβεί με πιθανότητα $\phi(y - t)$. Επομένως,

$$\phi^d(u + y) = \phi^d(u) + \int_0^y \phi(y - t)\,dG^d(u,t),$$

και ισοδύναμα,

$$1 - \psi^d(u + y) = 1 - \psi^d(u) + \int_0^y \big(1 - \psi(y - t)\big)\,dG^d(u,t),$$

και

$$\psi^d(u + y) = \psi^d(u) - \int_0^y dG^d(u,t) + \int_0^y \psi(y - t)\,dG^d(u,t).$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της παραπάνω ισότητας με $\psi^d(u)$ παίρνουμε

$$\frac{\psi^d(u + y)}{\psi^d(u)} = 1 - \int_0^y dG_u^d(t) + \int_0^y \psi(y - t)\,dG_u^d(t))$$

$$= \bar{G}_u^d(y) + \int_0^y \psi(y-t)dG_u^d(t),$$

το οποίο είναι η (22) όταν το $\delta = 0$.

Τώρα, θα δοθεί μία πιο αναλυτική απόδειξη η οποία μπορεί να εφαρμοστεί για όλες τις μη αρνητικές τιμές του δ.

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της της σχέσης (18) με ϕ_d^d παίρνουμε:

$$\frac{\bar{G}_\delta^d(u,y)}{\phi_\delta^d} = \frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\int_0^u \bar{B}_\delta(u+y-t)d\Lambda_\delta(t) + \bar{B}_\delta^d(u+y)$$
$$= \bar{B}_\delta^d(u+y) + \frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\bar{B}_\delta(y)\{\int_0^u \bar{B}_{\delta,y}(u-t)d\Lambda_\delta(t)\}$$

όπου $\bar{B}_{\delta,y}(t)$ είναι ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής της ουράς της $\bar{B}_\delta(t)$ που ορίζεται ως

$$\bar{B}_{\delta,y}(t) = \frac{\bar{B}_\delta(y+t)}{\bar{B}_\delta(y)}.$$

Ανταλλάσσοντας τώρα τον ρόλο της $B_{\delta,y}$ και της Λ_δ στην συνέλιξη,

$$\frac{\bar{G}_\delta^d(u,y)}{\phi_\delta^d} = \bar{B}_\delta^d(u+y) + \frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\bar{B}_\delta(y)\left\{\int_0^u \overline{\Lambda}_\delta(u-t)d\mathrm{B}_{\delta,y}(t) + \bar{B}_{\delta,y}(u) - \overline{\Lambda}_\delta(u)\right\}$$
$$= \bar{B}_\delta^d(u+y)$$
$$+ \frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\left\{\int_0^u \overline{\Lambda}_\delta(u-t)d\mathrm{B}_\delta(y+t) + \bar{B}_\delta(u+y) - \overline{\Lambda}_\delta(u)\,\bar{B}_\delta(y)\right\}$$
$$= \bar{B}_\delta^d(u+y)$$
$$+ \frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\left\{\int_0^{u+y} \overline{\Lambda}_\delta(u+y-t)d\mathrm{B}_\delta(t) + \bar{B}_\delta(u+y) - \overline{\Lambda}_\delta(u)\,\bar{B}_\delta(y)\right\}.$$

Επειδή η σχέση (12) ισχύει, η (14) είναι ισοδύναμη με

$$\overline{\Lambda}_\delta(u) = \phi_\delta\int_0^u \overline{\Lambda}_\delta(u-y)b_\delta(y)dy + \phi_\delta\bar{B}_\delta(u) - (1-\phi_\delta)\overline{B_\delta^d}(u). \qquad (23)$$

και χρησιμοποιώντας την (23) με το u να αντικαθιστά το $u+y$ οδηγούμαστε στο

$$\phi_\delta\left\{\int_y^{u+y} \overline{\Lambda}_\delta(u+y-t)dB_\delta(t) + \bar{B}_\delta(u+y)\right\}$$

$$= \phi_\delta \left\{ \int_0^{u+y} \overline{\Lambda}_\delta(u+y-t)dB_\delta(t) + \bar{B}_\delta(u+y) \right\} - \phi_\delta \int_0^{y} \overline{\Lambda}_\delta(u+y-t)d\mathrm{B}_\delta(t).$$

Έτσι,

$$\frac{\bar{G}_\delta^d(u,y)}{\phi_\delta^d} = \bar{B}_\delta^d(u+y) + \frac{1}{1-\phi_\delta}\{\overline{\Lambda}_\delta(u+y) - (1-\phi_\delta)\bar{B}_\delta^d(u+y)\}$$
$$- \frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\left\{\int_0^y \overline{\Lambda}_\delta(u+y-t)d\mathrm{B}_\delta(t) + \overline{\Lambda_\delta}(\mathrm{u})\,\bar{B}_\delta(\mathrm{y})\right\} \quad (24)$$

$$= \frac{1}{1-\phi_\delta}\,\overline{\Lambda}_\delta(\mathrm{u}+\mathrm{y})$$
$$- \frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\left\{\int_0^y \overline{\Lambda}_\delta(u+y-t)d\mathrm{B}_\delta(t) + \overline{\Lambda_\delta}(\mathrm{u})\,\bar{B}_\delta(\mathrm{y})\right\} \quad (25)$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη της (25) με $\overline{\Lambda}_\delta(u)$ παίρνουμε

$$\bar{G}_{\delta,u}^d(y) = \frac{1}{1-\phi_\delta}\frac{\bar{G}_\delta^d(u+y)}{\bar{G}_\delta^d(u)} - \frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\left\{\int_0^y \frac{\bar{G}_\delta^d(u+y-t)}{\bar{G}_\delta^d(u)}dB_\delta(t) + \bar{B}_\delta(y)\right\}. \quad (26)$$

Παίρνοντας τώρα τον Laplace μετασχηματισμό, έχουμε

$$\frac{1-E(e^{-sX_{\delta,u}^d})}{s}$$
$$= \left\{\frac{1}{1-\phi_\delta} - \frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\,\tilde{b}_\delta(s)\right\}\int_0^\infty e^{-sy}\,\frac{\bar{G}_\delta^d(u+y)}{\bar{G}_\delta^d(u)}dy$$
$$- \frac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\frac{1-\tilde{b}_\delta(s)}{s},$$

και αναδιατάσσοντας:

$$\int_0^\infty e^{-sy}\,\frac{\bar{G}_\delta^d(u+y)}{\bar{G}_\delta^d(u)}dy = \frac{\dfrac{1-E\left(e^{-sX_{\delta,u}^d}\right)}{s} + \dfrac{\phi_\delta}{1-\phi_\delta}\dfrac{1-\tilde{b}_\delta(s)}{s}}{\dfrac{1-\phi_\delta\tilde{b}_\delta(s)}{1-\phi_\delta}}$$
$$= \frac{1-\phi_\delta-(1-\phi_\delta)E\left(e^{-sX_{\delta,u}^d}\right)+\phi_\delta-\phi_\delta\tilde{b}_\delta(s)}{s(1-\phi_\delta\tilde{b}_\delta(s))}$$
$$= \frac{1-\tilde{g}_\delta(s)E\left(e^{-sX_{\delta,u}^d}\right)}{s}.$$

Από την μοναδικότητα του μετασχηματισμού Laplace, το θεώρημα αποδείχθηκε.

Ως αποτέλεσμα της ισότητας (22), η μέση τιμή και οι ροπές της προεξοφλημένης συνάρτησης proper ελλείματος μπορεί να υπολογιστούν όπως στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα Η μέση τιμή της προεξοφλημένης συνάρτησης proper ελλείματος είναι

$$E\left(X_{\delta,u}^{d}\right) = E\left(L_{\delta} + X_{\delta,u}^{d}\right) - E(L_{\delta}) = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\bar{G}_{\delta}^{d}(u+y)}{\bar{G}_{\delta}^{d}(u)} - \bar{G}_{\delta}(y) \right) dy. \qquad (27)$$

Όταν $\delta = 0$, η σχέση αυτή απλοποιείται σε

$$E(X_{u}^{d}) = E(L + X_{u}^{d}) - E(L) = \int_{0}^{\infty} \left(\frac{\psi^{d}(u+y)}{\psi^{d}(u)} - \psi^{d}(y) \right) dy.$$

όπως και στο κλασικό ή το stationary ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου.

Οι ροπές δευτέρου αλλά και μεγαλύτερου βαθμού μπορούν να υπολογισθούν αναδρομικά

$$E\{(X_{u}^{d})^{n}\} = E\{(L + X_{u}^{d})^{n}\} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E\{(X_{u}^{d})^{k}\} E(L^{n-k}),$$

αφού $E\{(X_{u}^{d})^{k} L^{n-k}\} = E\{(X_{u}^{d})^{k}\} E(L^{n-k})$ λόγω της ανεξαρτησίας των X_{u}^{d} και L.

3.5 Η από κοινού κατανομή του πλεονάσματος και του ελλείμματος

Έστω δ να είναι μη αρνητικό και $w(x,y)=e^{-sx-zy}$. Τότε, η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu $m_\delta^d(u)$ μπορεί να γραφτεί συναρτήσει της προεξοφλημένης από κοινού κατανομής του πλεονάσματος και του ελλείμματος. Θα είναι δηλαδή:

$$m_\delta^d(u) = E\left\{e^{-\delta T_d - sU_{T_d^-} - z\left|U_{T_d}\right|} I(T_d<\infty)\middle|U_0=u\right\}$$
$$= \int_0^\infty e^{-sx}\int_0^\infty e^{-zy} f_\delta^d(x,y|u)dy\,dx$$

όπου $f_\delta^d(x,y|u)$ είναι η προεξοφλημένη από κοινού κατανομή του πλεονάσματος και του ελλείμματος στην τροποποιημένη ανανεωτική διαδικασία κινδύνου.

Από την άλλη, μπορεί να προκύψει εναλλακτική σχέση για την $m_\delta^d(u)$ χρησιμοποιώντας τη σχέση (9). Είναι:

$$\sigma_\delta(u+ct) = \int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-y)p(y)dy + \int_{u+ct}^\infty w(u+ct, y-u-ct)p(y)dy$$
$$= \int_0^{u+ct} m_\delta(v)p(u+ct-v)dv + \int_{u+ct}^\infty e^{-s(u+ct)}e^{-z(y-u-ct)}\,p(y)dy$$
$$= \int_0^{u+ct}\int_0^\infty e^{-sx}\int_0^\infty e^{-zy} f_\delta(x,y|v)dydxp(u+ct-v)dv$$
$$+ e^{-s(u+ct)}\int_0^\infty e^{-zy}p(y+u+ct)dy$$
$$= \int_0^\infty e^{-sx}\int_0^\infty e^{-zy}\{\int_0^{u+ct} f_\delta(x,y|v)p(u+ct-v)dv\}\,dy\,dx$$
$$+ e^{-s(u+ct)}\int_0^\infty e^{-zy}p(y+u+ct)dy,$$

και έτσι, από τη σχέση (8),

$$m_\delta^d(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_\delta(u+ct)k_1(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^\infty e^{-zy} \{ \int_0^{u+ct} f_\delta(x,y|v) p(u+ct-v) dv \} \, dy \, dx \, k_1(t) dt$$

$$+ e^{-su} \int_0^\infty e^{-\delta t} e^{-sct} \int_0^\infty e^{-zy} p(y+u+ct) dy \, k_1(t) dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^\infty e^{-zy} \{ \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} f_\delta(x,y|v) p(u+ct-v) dv \, k_1(t) dt \} \, dy \, dx$$

$$+ e^{-su} \int_0^\infty e^{-\delta \frac{x}{c}} e^{-sx} \int_0^\infty e^{-zy} p(y+u+x) k_1\left(\frac{x}{c}\right) \frac{1}{c} dy \, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-sx} \int_0^\infty e^{-zy} \{ \int_0^\infty e^{-\delta t} \int_0^{u+ct} f_\delta(x,y|v) p(u+ct-v) dv \, k_1(t) dt \} \, dy \, dx$$

$$+ \int_u^\infty e^{-sx} \int_0^\infty e^{-zy} p(x+y) k_1\left(\frac{x-u}{c}\right) e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)} \frac{1}{c} dy dx.$$

$$f_\delta^d(x,y|u) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \int_0^{u+ct} f_\delta(x,y|u) p(u+ct-v) dv \, k_1(t) e^{-\delta t} dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{για } 0 \le x < u \\ \displaystyle\int_0^\infty \int_0^{u+ct} f_\delta(x,y|u) p(u+ct-v) dv \, k_1(t) e^{-\delta t} dt + \frac{1}{c} p(x+y) e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)} k_1\left(\frac{x-u}{c}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{για } x \ge u \end{cases}$$

Καθώς έχουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος και ελλείμματος στο κλασσικό ανανεωτικό μοντέλο, μπορεί να βρεθεί η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος και ελλείμματος στο τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο.

Η προεξοφλημένη περιθώρια defective πυκνότητα του πλεονάσματος μπορεί να υπολογισθεί μέσω της παραπάνω σχέσης ολοκληρώνοντας ως προς y. Είναι:

$$f_\delta^d(x|u) = \int_0^\infty f_\delta(x,y|u)dy$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \int_0^{u+ct} f_\delta(x|u)p(u+ct-v)dv\, k_1(t)e^{-\delta t}dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \gamma\iota\alpha\ 0 \le x < u \\ \displaystyle\int_0^\infty \int_0^{u+ct} f_\delta(x|u)p(u+ct-v)dv\, k_1(t)e^{-\delta t}dt + \frac{1}{c}\ \bar{P}(x)e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)}k_1\left(\frac{x-u}{c}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \gamma\iota\alpha\ x \ge u \end{cases}$$

Από Gerber και Shiu (1998, p.53) γνωρίζουμε ότι στο κλασσικό ανανεωτικό μοντέλο ισχύει

$$f_\delta(x,y|u) = f_\delta(x|u)\frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}$$

και έτσι

$$f_\delta^d(x|u)$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty \int_0^{u+ct} f_\delta(x,y|u)\frac{\bar{P}(x)}{p(x+y)}p(u+ct-v)dv\, k_1(t)e^{-\delta t}dt \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \gamma\iota\alpha\ 0 \le x < u \\ \displaystyle\int_0^\infty \int_0^{u+ct} f_\delta(x,y|u)\frac{\bar{P}(x)}{p(x+y)}p(u+ct-v)dv\, k_1(t)e^{-\delta t}dt + \frac{1}{c}\ \bar{P}(x)e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)}k_1\left(\frac{x-u}{c}\right) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \gamma\iota\alpha\ x \ge u \end{cases}$$

δηλαδή,

$$f_\delta^d(x|u) = f_\delta^d(x,y|u)\frac{\bar{P}(x)}{p(x+y)} \text{ ή } f_\delta^d(x,y|u) = f_\delta^d(x|u)\frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ
ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΓΙΑ ΤΑ ΜΕΓΕΘΗ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ

4.1 Απαιτήσεις που ακολουθούν εκθετική κατανομή

4.1.1 Τροποποιημένη ανανεωτική διαδικασία κινδύνου

Όταν τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή, τότε, όπως αποδείκνύεται στο ότι, $b_\delta^d(y) = p(y) = \beta e^{-\beta y}$ για $y > 0$.

Επιπλέον, όταν $w(x, y) = w_2(y)$, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (10) , η $m_\delta^d(u)$ γράφεται:

$$\begin{aligned} m_{\delta,0}^d &= \phi_\delta^d \int_0^u m_{\delta,0}^d(u-y)\left(\beta e^{-\beta y}\right)dy + \phi_\delta^d \int_u^\infty w_2(y-u)\left(\beta e^{-\beta y}\right)dy \\ &= \phi_\delta^d \int_0^u m_{\delta,0}^d(u-y)\left(\beta e^{-\beta y}\right)dy + \phi_\delta^d \int_0^\infty w_2(t)\left(\beta e^{-\beta(t+u)}\right)dt \\ &= \phi_\delta^d \int_0^u m_{\delta,0}^d(u-y)\left(\beta e^{-\beta y}\right)dy + \phi_\delta^d e^{-\beta u} E\{w_2(Y)\} \end{aligned}$$

όπου $E\{w_2(Y)\} = \int_0^\infty w_2(y)p(y)dy$.

Στην κλασσική ανανεωτική διαδικασία κινδύνου, Willmot (2007), αποδεικνύεται πως

$$m_{\delta,0}(u) = \phi_\delta E\{w_2(Y)\}e^{-\beta(1-\phi_\delta)u}$$

ή

$$m_{\delta,0}(u) = \left(1 - \frac{R_\delta}{\beta}\right)E\{w_2(Y)\}e^{-R_\delta u}$$

όπου $-R_\delta$ είναι η αρνητική ρίζα της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση

$$\tilde{k}(\delta + cR_\delta) = \frac{1}{\tilde{p}\,(-R_\delta)} = 1 - \frac{R_\delta}{\beta},$$

και $R_\delta = \beta(1 - \phi_\delta)$.

Έτσι, η $m_{\delta,0}^d(u)$ γίνεται:

$$m_{\delta,0}^{d}(u) = \phi_{\delta}^{d}\left(1-\frac{R_{\delta}}{\beta}\right)E\{w_2(Y)\}\int_0^u e^{-R_{\delta}(u-y)}\beta e^{-\beta y}dy + \phi_{\delta}^{d}e^{-\beta u}E\{w_2(Y)\}$$
$$= \phi_{\delta}^{d}e^{-R_{\delta}u}E\{w_2(Y)\}\int_0^u (\beta - R_{\delta})e^{-(\beta-R_{\delta})y}dy + \phi_{\delta}^{d}e^{-\beta u}E\{w_2(Y)\}$$
$$= \phi_{\delta}^{d}e^{-R_{\delta}u}E\{w_2(Y)\}\left[1-e^{-(\beta-R_{\delta})u}\right] + \phi_{\delta}^{d}e^{-\beta u}E\{w_2(Y)\}$$

δηλαδή,

$$m_{\delta,0}^{d}(u) = \phi_{\delta}^{d}E\{w_2(Y)\}e^{-R_{\delta}u}. \tag{28}$$

Δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο αλλά και το μέγεθος της πρώτης απαίτησης, προκύπτει:

$$m_{\delta,0}^{d}(u) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\sigma_{\delta}(u+ct)k_1(t)dt \tag{29}$$

όπου

$$\sigma_{\delta}(t) = \int_0^t m_{\delta,0}(t-y)dP(y) + \int_t^{\infty} w_2(y-t)dP(y) = E\{w_2(Y)\}e^{-R_{\delta}t} \tag{30}$$

μετά από μερικές πράξεις.

Αντικαθιστώντας τώρα τις σχέσεις (28) και (30) στην (29) προκύπτει:

$$\phi_{\delta}^{d}E\{w_2(Y)\}e^{-R_{\delta}u} = \int_0^{\infty} e^{-\delta t}E\{w_2(Y)\}e^{-R_{\delta}(u+ct)}k_1(t)dt$$

και αυτό οδηγεί στο ότι

$$\phi_{\delta}^{d} = \int_0^{\infty} e^{-(\delta+cR_{\delta})t}k_1(t)dt = \tilde{k}_1(\delta+cR_{\delta})$$

δηλαδή

$$m_{\delta,0}^{d}(u) = \tilde{k}_1(\delta+cR_{\delta})E\{w_2(Y)\}e^{-R_{\delta}u}. \tag{31}$$

Βέβαια, όταν το ύψος των απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή, στην κλασσική ανανεωτική διαδικασία κινδύνου είναι

$$m_{\delta,0}(u) = \phi_{\delta}E\{w_2(Y)\}we^{-R_{\delta}u}$$

ενώ στην τροποποιημένη ανανεωτική διαδικασία κινδύνου είναι

$$m_{\delta,0}^{d}(u) = \phi_{\delta}^{d} E\{w_2(Y)\} w e^{-R_\delta u}$$

και έτσι, ο λόγος των δύο συναρτήσεων δεν εξαρτάται από το u αλλά είναι μία σταθερά:

$$\frac{m_{\delta,0}^{d}(u)}{m_{\delta,0}(u)} = \frac{\phi_{\delta}^{d}}{\phi_{\delta}} = \frac{\tilde{k}_1(\delta + cR_\delta)}{\tilde{k}(\delta + cR_\delta)}.$$

Όταν $w_2(Y) = 1$, τότε η (31) γίνεται

$$\bar{G}_{\delta}^{d}(u) = \tilde{k}_1(\delta + cR_\delta) e^{-R_\delta u}. \tag{32}$$

Να σημειωθεί ότι η (32) ικανοποιεί το λήμμα της ενότητας (3.2) και εξισώνοντας του μετασχηματισμούς Laplace των (32) με αυτό το λήμμα προκύπτει:

$$\frac{\phi_{\delta}^{d}}{s + R_\delta} = \frac{\phi_{\delta}^{d}\phi_\delta}{s + R_\delta} \tilde{b}_{\delta}^{d}(s) + \phi_{\delta}^{d} \frac{1 - \tilde{b}_{\delta}^{d}(s)}{s}$$

από την οποία προκύπτει:

$$\tilde{b}_{\delta}^{d}(s) \left(\frac{1}{s} - \frac{\phi_\delta}{s + R_\delta}\right) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + R_\delta}$$

και χρησιμοποιώντας το ότι $\phi_\delta = 1 - \frac{R_\delta}{\beta}$, το $\tilde{b}_{\delta}^{d}(s)$ γίνεται:

$$\tilde{b}_{\delta}^{d}(s) = \frac{\beta}{s + \beta}$$

το οποίο μας οδηγεί άμεσα στο ότι

$$b_{\delta}^{d}(y) = \beta e^{-\beta y}.$$

Ορίζοντας τώρα

$$\mathrm{G^d(u,y) = Pr\left(\left|U_{T_d}\right| \leq y, T_d < \infty \middle| U_0 = u\right)},$$

και θέτοντας $w_2(x) = I(x \leq y)$,

$$E\{w_2(Y)\} = \int_0^\infty I(x \leq y) dP(x) = P(y)$$

και για $\delta = 0$, από την (31) προκύπτει $m_{0,0}^{d}(u) = G^d(u,y)$ άρα

$$G^d(u,y) = P(y)\psi^d(u)$$

όπου

$$\psi^d(u) = \bar{G}_0^d(u) = \tilde{k}_1(cR_0)e^{-R_0 u}.$$

Να σημειωθεί επίσης ότι η Proper distribution function του ελλείμματος είναι επίσης εκθετική, δηλαδή,

$$\frac{G^d(u,y)}{\psi^d(u)} = P(y).$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συνάρτηση $w(x,y)$ έχει τη μορφή $w(x,y) = e^{-sx}w_2(y)$. Τότε η Gerber-Shiu αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής ορίζεται ως

$$m_{\delta,s}^d(u) = E\left\{e^{-\delta T_d - sU_{T_d^-}} w_2\left(\left|U_{T_d}\right|\right) I(T_d < \infty)\middle| U_0 = u\right\}$$

και η λύση σε αυτήν μπορεί να προκύψει ως ακολούθως.

Δεσμεύοντας ως προς τον χρόνο (t) και το ύψος της πρώτης απαίτησης (y), παίρνουμε

$$m_{\delta,s}^d(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_{\delta,s}(u+ct)k_1(t)dt \tag{33}$$

όπου

$$\sigma_{\delta,s}(t) = \int_t^\infty w(t, y-t)p(y)dy + \int_0^t m_{\delta,s}(t-y)p(y)dy.$$

Επειδή το $\sigma_{\delta,s}(t)$ είναι το ίδιο στο κλασσικό και το τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το αποτέλεσμα από Wilmot (2007),

$$\sigma_{\delta,s}(t) = \left(E\{w_2(Y)\} - \beta\tilde{\rho}_\delta(s)\right)e^{-(\beta+s)t} + \frac{\beta}{\phi_\delta}\tilde{\rho}_\delta(s)\bar{G}_\delta(t) \tag{34}$$

όπου

$$\tilde{\rho}_\delta(s) = \frac{E\{w_2(Y)\tilde{k}\{\delta + c(\beta+s)\}}{s + \beta\tilde{k}\{\delta + c(\beta+s)\}}$$

Αντικαθιστώντας την (34) στην (33) προκύπτει,

$$m_{\delta,s}^d(u) = \left(E\{w_2(Y)\} - \beta\tilde{\rho}_\delta(s)\right)\int_0^\infty e^{-\delta t}e^{(-\beta+s)(u+ct)}dK_1(t)$$
$$+ \frac{\beta}{\phi_\delta}\tilde{\rho}_\delta(s)\int_0^\infty e^{-\delta t}\,\overline{G_\delta}(u+ct)dK_1(t)$$

$$= \big(E\{w_2(Y)\} - \beta\tilde{\rho}_\delta(s)\big)e^{-(\beta+s)u}\tilde{k}_1\{\delta + c(\beta+s)\} + \beta\tilde{\rho}_\delta(s)\tilde{k}_1(\delta + cR_\delta)e^{-R_\delta u}$$

$$= \frac{E\{w_2(Y)\}s\tilde{k}_1\{\delta + c(\beta+s)\}}{s + \beta\tilde{k}\{\delta + c(\beta+s)\}}e^{-(\beta+s)u} + \frac{E\{w_2(Y)\}\beta\tilde{k}\{\delta + c(\beta+s)\}}{s + \beta\tilde{k}\{\delta + c(\beta+s)\}}\tilde{k}_1(\delta + cR_\delta)e^{-R_\delta u}$$

δηλαδή

$$m^d_{\delta,s}(u) = E\{w_2(Y)\}[\alpha(\delta,s)\tilde{k}_1\{\delta + c(\beta+s)\}e^{-(\beta+s)u} + (1 - \alpha(\delta,s)\tilde{k}_1\{\delta + c\beta(1-\phi_\delta)\}e^{-\beta(1-\phi_\delta)u}] \tag{35}$$

όπου

$$\alpha(\delta,s) = \frac{s}{s + \beta\tilde{k}\{\delta + c(\beta+s)\}}. \tag{36}$$

Η ποσότητα $m^d_{\delta,s}(u)$ μπορεί να αντιμετωπισθεί και ως ένας σταθμισμένος μέσος των $E\{w_2(Y)\}\tilde{k}_1\{\delta + c(\beta+s)\}e^{-(\beta+s)u}$ και $E\{w_2(Y)\}\tilde{k}_1\{\delta + c\beta(1-\phi_\delta)\}e^{-\beta(1-\phi_\delta)u}$.

Παράδειγμα: Εκθετική κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων

Επιπλέον της υπόθεσης για απαιτήσεις που ακολουθούν εκθετική κατανομή, ας υποθέσουμε πως και οι ενδιάμεσοι χρόνοι μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με $k_1(t) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$ και $k(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Τότε, χρησιμοποιώντας τις (35) και (36), μπορεί σχετικά εύκολα να παρατηρηθεί ότι

$$m^d_{\delta,s} = \lambda_1 E\{w_2(Y)\}[\frac{\beta\lambda}{cs^2 + (\lambda+\delta+c\beta)s + \beta\lambda}\frac{e^{-\beta(1-\phi_\delta)u}}{\lambda_1 + \delta + c\beta(1-\phi_\delta)} + \frac{cs^2 + (\lambda+\delta+c\beta)s}{cs^2 + (\lambda+\delta+c\beta)s + \beta\lambda}\frac{e^{-(\beta+s)u}}{\lambda_1 + \delta + c(\beta+s)}].$$

Όταν $\lambda_1 = \lambda$, το $m^d_{\delta,s}(u)$ μπορεί να απλοποιηθεί περεταίρω σε

$$m^d_{\delta,s}(u) = \frac{\lambda E\{w_2(Y)\}}{cs^2 + (\lambda+\delta+c\beta)s + \beta\lambda}\left[(\beta - R_\delta)we^{-R_\delta u} + se^{-(\beta+s)u}\right]$$

και αυτό συμπίπτει με την φόρμουλα που προκύπτει από το παράδειγμα 3.1 στον Willmot (2007).

Ξέρουμε ότι το έλλειμα και το πλεόνασμα στην χρεοκοπία είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους όταν τα ύψη των απαιτήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Αυτό οδηγεί στο ότι ο Laplace μετασχηματισμός του προεξοφλημένου πλεονάσματος κατά την χρεοκοπία είναι

$$E_\delta\{e^{-sU_{T_\delta^-}}|U_0 = u\} = \frac{\lambda}{cs^2 + (\lambda + \delta + c\beta)s + \beta\lambda}\left[(\beta - R_\delta)e^{-R_\delta u} + se^{-(\beta+s)u}\right] \quad (37)$$

όπου το αναμενόμενο είναι ως προς την ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητα πιθανότητας του προεξοφλημένου πλεονάσματος όταν το αρχικό πλεόνασμα είναι $u, f_\delta^d(x|u)$. Θα δειχθεί αυτό όταν $\delta = 0$ παρακάτω. Από τον Willmot (2005,p.24), the marginal defective density του πλεονάσματος είναι,

$$f(x|u) = \frac{\lambda(1+\theta)}{c\theta}e^{-\beta x}\begin{cases}\{\psi(u-x) - \psi(u)\}, & x < u\\ \{1 - \psi(u)\}, & x > u\end{cases}$$

και από Klugman et al. (2004), η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να βρεθεί με εκθετικές αποζημιώσεις στο κλασσικό μοντέλο Poisson, το οποίο είναι

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\theta}{1+\theta}\beta u}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}E\{e^{-sU_{T_d^-}}|U_0 = u\} &= \int_0^\infty e^{-sx}f(x|u)dx\\
&= \frac{\lambda}{c\theta}\{\int_0^u e^{-(s+\beta)x}(e^{-\frac{\theta}{1+\theta}\beta(u-x)} - e^{\left(-\frac{\theta}{1+\theta}\beta u\right)}dx\\
&+ \int_u^\infty e^{-(s+\beta)x}\left(1+\theta - e^{-\frac{\theta}{1+\theta}\beta u}\right)dx\}\\
&= \frac{\lambda}{c\theta}\{\left(\frac{1+\theta}{(1+\theta)s+\beta} - \frac{1}{s+\beta}\right)e^{-\frac{\theta}{1+\theta}\beta u}\\
&+ \left(\frac{1+\theta}{s+\beta} - \frac{1+\theta}{(1+\theta)s+\beta}\right)e^{-(s+\beta)u}\}\\
&= \frac{\lambda}{c}\{\frac{\beta}{(1+\theta)s^2 + (2+\theta)\beta s + \beta^2}e^{-\frac{\theta}{1+\theta}\beta u}\end{aligned}$$

$$+\frac{(1+\theta)}{(1+\theta)s^2+(2+\theta)\beta s+\beta^2}e^{-(s+\beta)u}\}. \tag{38}$$

Χρησιμοποιώντας το ότι $c=\frac{(1+\theta)\lambda}{\beta}$ και το ότι $R_0=\frac{\theta}{1+\theta}\beta$, η (38) γίνεται

$$E\{e^{-sU_{T_d^-}}\big|U_0=u\}=\frac{\lambda}{cs^2+(\lambda+c\beta)s+\beta\lambda}\left[(\beta-R_0)e^{-R_0u}+se^{-(\beta+s)u}\right]$$

το οποίο ταυτίζεται με την (37) όταν $\delta=0$.

Εναλλακτικά, η $m_{\delta,s}^d(u)$ μπορεί να γραφεί ως

$$m_{\delta,s}^d(u)=\tilde{\rho}_\delta(s)\frac{\tilde{k}_1\big(\delta+c(\beta+s)\big)}{\tilde{k}\big(\delta+c(\beta+s)\big)}se^{-(\beta+s)u}+\tilde{\rho}_\delta(s)\beta\tilde{k}_1(\delta+cR_\delta)e^{-R_\delta u}$$

και χρησιμοποιώντας την (32),

$$m_{\delta,s}^d(u)=\tilde{\rho}_\delta(s)\left\{\frac{\tilde{k}_1\big(\delta+c(\beta+s)\big)}{\tilde{k}\big(\delta+c(\beta+s)\big)}se^{-(\beta+s)u}+\beta\overline{G_\delta^d}(u)\right\}.$$

4.1.2 Ειδική περίπτωση: Stationary ανανεωτική διαδικασία κινδύνου

Χρησιμοποιώντας την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg ο μετασχηματισμός Laplace των equilibrium κατανομών των χρόνων μεταξύ δύο διαδοχικών απαιτήσεων μπορεί να εκφραστεί ως

$$\tilde{k}_e(\delta+cR_\delta)=\frac{1-\tilde{k}(\delta+cR_\delta)}{(\delta+cR_\delta)E(V)}=\frac{R_\delta}{\beta E(V)(\delta+cR_\delta)},$$

και με $\beta E(V)=\frac{1+\theta}{c}$ η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί

$$\tilde{k}_e(\delta+cR_\delta)=\frac{1}{1+\theta}\frac{cR_\delta}{\delta+cR_\delta}$$

Για την stationary διαδικασία, η (31) γίνεται

$$m_{\delta,0}^e(u)=\frac{E\{w_2(Y)\}}{1+\theta}\frac{cR_\delta}{\delta+cR_\delta}e^{-R_\delta u}. \tag{39}$$

Όταν $\delta=0$ η (39) γίνεται

$$m_{0,0}^e(u)=\frac{E\{w_2(Y)\}}{1+\theta}e^{R_0u},$$

όπου όταν $w_2=1$, η (39) γίνεται

$$\bar{G}_\delta^d(u)=\frac{1}{1+\theta}\frac{cR_\delta}{\delta+cR_\delta}e^{-R_\delta u}$$

Η stationary πιθανότητα χρεοκοπίας είναι:

$$\psi^e(u) = \bar{G}_0^e(u) = \frac{1}{1+\theta} e^{-R_0 u}$$

το οποίο συμφωνεί με γνωστό αποτέλεσμα (Willmot and Lin (2001), p.230) αλλά και με την ακριβή πιθανότητα με εκθετικές απαιτήσεις στο κλασσικό μοντέλο Poisson.

Όπως προκύπτει μετά από την ανάλυση σε αυτή την ενότητα, υποθέτοντας ότι τα ύψη των απαιτήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή, πολλές συναρτήσεις που προέρχονται από την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu ακόμα και το στο τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου. Κάνοντας και κάποιες παραδοχές για την κατανομή του χρόνου μέχρι την εμφάνιση του πρώτου κινδύνου αλλά και αυτή των χρόνων που μεσολαβούν μεταξύ την εμφάνιση δύο διαδοχικών κινδύνων, μπορούν να προκύψουν ακριβή αποτελέσματα.

4.2 Μίξη άπειρων Erlang κατανομών με κοινή παράμετρο

Έστω ότι η κατανομή του ύψους των απαιτήσεων ακολουθούν κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$p(y) = \sum_{j=1}^{\infty} q_i \frac{\beta(\beta y)^{j-1} e^{-\beta y}}{(j-1)!}, y \geq 0$$

όπου $\sum_{j=1}^{\infty} q_j = 1$.

4.2.1 Τροποποιημένη ανανεωτική διαδικασία κινδύνου

Από το παράδειγμα της ενότητας 2.1 ξέρουμε ότι $p_x(y) = \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}$ είναι της μορφής

$$p_x(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^*(x) \frac{\beta(\beta y)^{j-1} e^{-\beta y}}{(j-1)!} = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j^*(x)\, \tau_j(y)$$

όπου

$$\eta_j^*(x) = \frac{e^{-\beta x}}{\bar{P}(x)}\ 4.45$$

και

$$\tau_j(y) = \frac{\beta(\beta y)^{j-1} e^{-\beta y}}{(j-1)!}$$

Ακόμα, επειδή $p(x+y) = \bar{P}(x) p_x(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{P}(x) \eta_j^*(x) \tau_j(y)$, θα είναι

$$p(x+y) = \sum_{j=1}^{\infty} \eta_j(x)\, \tau_j(y) \tag{40}$$

όπου $\eta_j(x) = \bar{P}(x) \eta_j^*(x)$.

Όπως και στην προηγούμενη ενότητα, θα υποθέσουμε ότι η συνάρτηση ποινής είναι της μορφής $w(x,y) = e^{-sx} w_2(y)$. Ο Willmot (2007) έδειξε πως στο κλασσικό ανανεωτικό μοντέλο η $m_{\delta,s}(u)$ ικανοποιεί την

$$m_{\delta,s}(u) = e^{-su} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{b}_{j.\delta}(s) \left\{ \tau_j(u) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{\beta}\right)^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n,\delta}}{1-\phi_\delta} \binom{n+k-1}{k} \tau_{n+k+j}(u) \right\}$$

όπου

$$\tilde{b}_{j,\delta}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\frac{f_\delta(x|0)}{\bar{P}(x)}\int_0^\infty w_2(y)\bar{P}(x+y)\eta_j^*(x+y)dy\,dx$$

και η κατανομή πιθανοτήτων $\{c_{0,\delta},c_{1,\delta},c_{2,\delta},\dots\}$ να ορίζεται από την compound γεωμετρική πιθανογεννήτρια

$$\sum_{n=0}^\infty c_{n,\delta}z^n=\frac{1-\phi_\delta}{1-\phi_\delta\sum_{j=1}^\infty\tilde{\eta}_{j,\delta}z^j} \tag{41}$$

με $\tilde{\eta}_{j,\delta}=\int_0^\infty \eta_j^*(x)\frac{f_\delta(x|0)}{\phi_\delta}dx$.

Χρησιμοποιώντας την (1) με $w(x,y)=e^{-sx}w_2(y)$,

$$m_{\delta,s}^d(u)=\phi_\delta^d\int_0^u m_{\delta,s}(u-y)b_\delta^d(y)dy+v_{\delta,s}^d(u)$$

όπου

$$b_\delta^d(y)=\int_0^\infty p_x(y)\left\{\frac{f_\delta^d(x|0)}{\phi_\delta^d}\right\}dx=\int_0^\infty\{\sum_{j=1}^\infty\eta_j^*(x)\tau_j(y)\}\ \left\{\frac{f_\delta^d(x|0)}{\phi_\delta^d}\right\}dx$$
$$=\sum_{j=1}^\infty\{\int_0^\infty\eta_j^*(x)\frac{f_\delta^d(x|0)}{\phi_\delta^d}dx\}\,\tau_j(y)=\sum_{j=1}^\infty\tilde{\eta}_{j,\delta}^d(x)\tau_j(y)$$

με

$$\tilde{\eta}_{j_\delta}^d=\int_0^\infty\eta_j^*\frac{f_\delta^d(x|0)}{\phi_\delta^d}dx$$

και

$$v_{\delta,s}^d(u)=e^{-su}\int_0^\infty e^{-sx}f_\delta^d(x|0)\int_u^\infty w_2(y-u)p_x(y)dy\,dx$$

$$= e^{-su}\int_0^\infty e^{-sx} f_\delta^d(x|0)\int_0^\infty w_2(y)\ \frac{p(x+y+u)}{\bar{P}(x)}dy\,dx$$

$$= e^{-su}\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{b}_{j,\delta}^d(s)\tau_j(u)$$

με $\tilde{b}_{j,\delta}^d(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\frac{f_\delta^d(x|0)}{\bar{P}(x)}\int_0^\infty w_2(y)\eta_j(x+y)dy\,dx.$

Να σημειωθεί εδώ πως οι $b_\delta^d(y)$ και $v_{\delta,s}^d(u)$ είναι αθροίσματα σειρών με εκθετική απόσβεση.

Χρησιμοποιώντας τώρα τις (4.48) και (4.52) έχουμε:

$$\int_0^u m_{\delta,s}(u-y)b_\delta^d(y)dy = \int_0^u e^{-s(u-y)}\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{b}_{j,\delta}(s)\{\tau_j(u-y)$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\beta}\right)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n,\delta}}{1-\phi_\delta}\binom{n+k-1}{k}\tau_{n+k+j}(u-y)\}$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{\eta}_{m,\delta}\,\tau_m(y)dy$$

$$= e^{-su}\sum_{k=0}^{n}\tilde{\mathrm{b}}_{j,\delta}\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{\eta}_{m,\delta}^d\,\{\int_0^u e^{sy}\tau_j(u-y)\tau_m(y)dy$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\beta}\right)^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n,\delta}}{1-\phi_\delta}\binom{n+k-1}{k}$$

$$\int_0^u e^{sy}\tau_{n+k+j}(u-y)\tau_m(y)dy\}$$

Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα της Βήτα κατανομής,

$$\int_0^u e^{sy}\tau_j(u-y)\tau_m(y)dy = \frac{\beta^{j+m}e^{-\beta u}}{(j-1)!\,(m-1)!}\int_0^u e^{sy}(u-y)^{j-1}y^{m-1}dy$$

$$= \frac{\beta^{j+m}e^{-\beta u}}{(j-1)!\,(m-1)!}\sum_{i=0}^{n}\frac{s^i}{i!}\int_0^u e^{sy}(u-y)^{j-1}y^{m+i-1}dy$$

$$= \frac{\beta^{j+m}e^{-\beta u}}{(j-1)!\,(m-1)!}\sum_{i=0}^{n}\frac{s^i}{i!}\frac{(j-1)!\,(m+i-1)!}{(j+m+i-1)!}u^{j+m+i-1}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s}{\beta}\right)^{i} \binom{m+i-1}{i} \tau_{j+m+i}(u) \tag{42}$$

και έτσι,

$$\int_0^u m_{\delta,s}(u-y) b_\delta^d(y) dy = e^{-su} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{b}_{j,\delta}(s) \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\eta}_{m,\delta}^d \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{s}{\beta}\right)^{i} \binom{m+i-1}{i}$$
$$\times \{\tau_{j+m+i}(u) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{\beta}\right)^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n,\delta}}{1-\phi_\delta}$$
$$\binom{n+k-1}{k} \tau_{m+i+n+k+j}(u)\}$$

Τελικά,

$$m_{\delta,s}^d(u) = \phi_\delta^d e^{-su} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{b}_{j,\delta}(s) \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\eta}_{m,\delta}^d \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{s}{\beta}\right)^{i} \binom{m+i-1}{i}$$
$$\times \left\{ \tau_{j+m+i}(u) + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{\beta}\right)^{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n,\delta}}{1-\phi_\delta} \binom{n+k-1}{k} \tau_{m+i+n+k+j}(u) \right\}$$
$$+ e^{-su} \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{b}_{j,\delta}^d(s) \tau_j(u)$$

που είναι μια μορφή σειράς με εκθετική απόσβεση.

Όταν $s = 0$, η συνάρτηση ποινής γίνεται $w(x,y) = w_2(y)$ και

$$m_{\delta,0}^d(u) = \phi_\delta^d \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{b}_{j,\delta}(0) \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\eta}_{m,\delta}^d \left\{ \tau_{j+m}(u) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{n,\delta}}{1-\phi_\delta} \tau_{j+m+n}(u) \right\}$$
$$+ \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{b}_{j,\delta}(0) \tau_j(u)$$
$$= \phi_\delta^d \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{b}_{j,\delta}(0) \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{\eta}_{m,\delta}^d \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n,\delta}}{1-\phi_\delta} \tau_{j+m+n}(u) + \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{b}_{j,\delta}(0) \tau_j(u)$$

το οποίο ισχύει διότι $c_{0,\delta} = 1 - \phi_\delta$ από την σχέση (41).

Έστω τώρα $l = m + n$. Αλλάζοντας την σειρά του αθροίσματος παίρνουμε,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{\eta}_{m,\delta}^{d}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n,\delta}}{1-\phi_{\delta}}\tau_{j+m+n}(u)=\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{\eta}_{m,\delta}^{d}\sum_{l+m}^{l}\frac{c_{l-m,\delta}}{1-\phi_{\delta}}\tau_{j+l}(u)$$
$$=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\tilde{\eta}_{m,\delta}^{d}\frac{c_{l-m,\delta}}{1-\phi_{\delta}}\tau_{j+l}(u)$$

Αντικαθιστώντας αυτό στην παρακάτω σχέση και θέτοντας $n=l+j$,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{b}_{j,\delta}(0)\sum_{m=1}^{\infty}\tilde{\eta}_{m,\delta}^{d}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n,\delta}}{1-\phi_{\delta}}\tau_{j+m+n}(u)$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{b}_{j,\delta}(0)\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{l}\tilde{\eta}_{m,\delta}^{d}\frac{c_{l-m,\delta}}{1-\phi_{\delta}}\tau_{j+l}(u)$$
$$=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{n=j+1}^{\infty}\sum_{m=1}^{n-j}\tilde{b}_{j,\delta}(0)\tilde{\eta}_{m,\delta}^{d}\frac{c_{l-m-j,\delta}}{1-\phi_{\delta}}\tau_{n}(u)$$
$$=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n-j}\tilde{b}_{j,\delta}(0)\tilde{\eta}_{m,\delta}^{d}\frac{c_{l-m-j,\delta}}{1-\phi_{\delta}}\tau_{n}(u)$$

Έτσι,

$$m_{\delta,0}^{d}(u)=\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{m=1}^{n-j}\tilde{b}_{j,\delta}(0)\tilde{\eta}_{m,\delta}^{d}\frac{c_{l-m-j,\delta}}{1-\phi_{\delta}}\right\}\tau_{n}(u)+\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{b}_{j,\delta}(0)\tau_{j}(u)$$
$$=e^{-\beta u}\sum_{i=0}^{\infty}R_{i,\delta}^{d}\frac{(\beta u)^{i}}{i!}$$

όπου

$$R_{i,\delta}^{d} = \begin{cases} \beta \tilde{b}_{1,\delta}(0) & , \qquad i = 0 \\ \beta \left[\tilde{b}_{i+1,\delta}(0) \sum_{j=1}^{i} \sum_{m=1}^{i+1-j} \tilde{b}_{j,\delta}(0) \phi_{\delta}^{d} \tilde{\eta}_{m,\delta}^{d} \frac{c_{l-m-j,\delta}}{1-\phi_{\delta}} \right] & , \qquad i = 1,2,\dots \end{cases}$$

Επομένως, η $m_{\delta,0}^{d}(u)$ είναι σειρά με εκθετική απόσβεση, όπως στο κλασσικό ανανεωτικό μοντέλο.

4.2.2 Ειδική περίπτωση: Stationary ανανεωτική διαδικασία κινδύνου

Έστω $\delta = 0$ στη συνάρτηση των Gerber-Shiu στο stationary ανανεωτικό μοντέλο, δηλαδή $m_0^e(u) = E\{w(U_{T_e^-}, |U_{T_e}|) I(T_e < \infty) | U_0 = u\}$. Σε αυτή την περίπτωση, από την ενότητα 2.2 ξέρουμε ότι

$$m_0^e(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u m_0(u-y) p_1(y) dy + \frac{1}{(1+\theta)E(Y)} \int_u^{\infty} \int_t^{\infty} w(t, y-t) p(y) dy\, dt. \tag{43}$$

Έστω ακόμα $w(x,y) = e^{-sx} w_2(y)$ όπως και πριν. Τότε, το διπλό ολοκλήρωμα στο δεύτερο μέλος της παραπάνω εξίσωσης γίνεται:

$$\begin{aligned} \int_u^{\infty} \int_t^{\infty} w(t, y-t) p(y) dy\, dt &= \int_u^{\infty} \int_t^{\infty} e^{-st} w_2(y-t) p(y) dy\, dt \\ &= \int_u^{\infty} e^{-st} \int_0^{\infty} w_2(y) p(y+t) dy\, dt. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (40), μια ιδιότητα της μίξης Erlang κατανομών, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_u^{\infty} \int_t^{\infty} w(t, y-t) p(y) dy\, dt &= \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^{\infty} w_2(y) \tau_j(y) dy \int_u^{\infty} e^{-st}\, \eta_j(t) dt \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} E_j[w_2(Y)] \int_u^{\infty} e^{-st-\beta t} \sum_{m=j}^{\infty} q_m \frac{(\beta t)^{m-j}}{(m-j)!} dt \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} E_j[w_2(Y)] \sum_{m=j}^{\infty} \frac{q_m \beta^{m-j}}{(\beta+s)^{m-j+1}}$$

$$\times \int_u^{\infty} \frac{(\beta+s)^{m-j+1} t^{m-j} e^{-(\beta+s)t}}{(m-j)!} dt$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} E_j[w_2(Y)] \sum_{m=j}^{\infty} q_m \beta^{m-j} e^{-(\beta+s)u} \sum_{k=0}^{m-j} \frac{(\beta+s)^{k-m+j-1} u^k}{k!}$$

$$= e^{-su} \sum_{j=1}^{\infty} E_j[w_2(Y)] \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{k} \binom{k}{q} \frac{b^q s^{k-q} u^k}{k!} e^{-\beta u}$$

$$\times \sum_{m=k+j}^{\infty} q_m \beta^{m-j} (\beta+s)^{j-m-1}$$

$$= e^{-su} \sum_{j=1}^{\infty} E_j[w_2(Y)] \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{k} \frac{(su)^{k-q}}{(k-q)!} \times \sum_{m=k+j}^{\infty} q_m \beta^{m-j} (\beta+s)^{j-m-1} \tau_{q+1}(u) \qquad (44)$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την μορφή του $m_{0,s}$ στο Willmot (2007), όταν οι απαιτήσεις είναι μίξεις Erlang κατανομών, το ολοκλήρωμα στο πρώτο μέρος της (43) είναι:

$$\int_0^u m_0(u-y)\bar{P}((y)dy =$$

$$= \int_0^u e^{-s(u-y)} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{b}_{i,0}(s)\{\tau_i(u-y)$$

$$+\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\beta}\right)^{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n,0}}{1-\phi_0}\binom{n+l-1}{l}\tau_{n+l+i}(u$$

$$-y))\}\sum_{j=1}^{\infty}q_j\sum_{k=0}^{j-1}\frac{\beta^k y^k}{k!}e^{-\beta y}dy$$

$$=e^{-su}\sum_{j=1}^{\infty}q_j\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{b}_{i,0}(s)\{\int_0^u e^{sy}\tau_i(u$$

$$-y)\frac{\beta^k y^k}{k!}e^{-\beta y}dy$$

$$+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\beta}\right)^{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n,0}}{1-\phi_0}\binom{n+l-1}{l}\int_0^u e^{sy}\tau_{n+l+i}(u$$

$$-y)\frac{\beta^k y^k}{k!}e^{-\beta y}dy$$

Χρησιμοποιώντας το ολοκλήρωμα βήτα κατανομής (42) παίρνουμε:

$$\int_0^u e^{sy}\tau_i(u-y)\frac{\beta^k y^k}{k!}e^{-\beta y}dy=\frac{1}{\beta}\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\beta}\right)^{h}\binom{k+h}{h}\tau_{i+k+h+1}(u).$$

Επομένως,

$$\int_0^u m_0(u-y)\bar{P}((y)dy$$

$$=\frac{1}{\beta}e^{-su}\sum_{j=1}^{\infty}q_j\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{b}_{i,0}(s)\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\beta}\right)^{h}\binom{k+h}{h}\left\{\tau_{(i+k+h+1)}(u)\right. \qquad (45)$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\beta}\right)^{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n,0}}{1-\phi_0}\binom{k+l-1}{l}\tau_{n+l+i+k+h+1}(u)\right\}$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας τις (45) και (44) παίρνουμε

$$m_{0,s}^{e}(u)=\frac{1}{(1+\theta)E(Y)}\left\{\int_{0}^{u} m_{0,s}(u-y)\bar{P}(y)dy+\int_{u}^{\infty}\int_{t}^{\infty} e^{-st}w_2(y-t)p(y)dydt\right\}$$

$$=\frac{e^{-su}}{\beta(1+\theta)E(Y)}\left[\sum_{j=1}^{\infty} q_j \sum_{k=0}^{j-1}\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{b}_{i,0}(s) \sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\beta}\right)^{h}\binom{k+h}{h}\right.$$

$$\times\left\{\tau_{i+k+h+1}(u)\right.$$

$$\left.+\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{s}{\beta}\right)^{i}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_{n,0}}{1-\phi_0}\binom{k+l-1}{l}\tau_{n+l+i+k+h+1}(u)\right\}$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}E_j[w_2(Y)]\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{q=0}^{k}\frac{(su)^{k-q}}{(k-q)!}\sum_{m=k+j}^{\infty}q_m\beta^{m-j}(\beta$$

$$\left.+s)^{j-m-1}\tau_{q+1}(u)\right]$$

Όταν $s=0$, η συνάρτηση ποινής $w(x,y)=w_2(y)$ είναι μόνο συναρτήσει του ελλείμματος και η συνάρτηση των Gerber-Shiu γίνεται απλούστερη:

$$m_{0,0}^{e}(u)=\frac{e^{-\beta u}}{(1+\theta)E(Y)}\sum_{j=1}^{\infty} q_j\left[\sum_{k=0}^{j-1}\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{b}_{i,0}(s)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_{n,0}}{1-\phi_0}\frac{(\beta u)^{n+i+k}}{(n+i+k)!}\right.$$

$$\left.+\sum_{m=1}^{j}E_m[w_2(Y)]\sum_{k=0}^{j-m}\frac{\beta^{k-1}u^k}{k!}\right].$$

Απλοποιώντας επιπλέον και θέτοντας $w_2(y)=1$ οδηγούμαστε σε πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi^e(u) = \frac{e^{-\beta u}}{(1+\theta)E(Y)} \sum_{j=1}^{\infty} q_j \left[\sum_{k=0}^{j-1} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{b}_{i,0}(s) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_{n,0}}{1-\phi_0} \frac{(\beta u)^{n+i+k}}{(n+i+k)!} + (j-k) \frac{\beta^{k-1} u^k}{k!} \right].$$

Να σημειωθεί ότι η $\psi^e(u)$ είναι μία compound γεωμετρική συνέλιξη, που είναι ήδη γνωστή από τους Willmot και Dickson (2003) ως

$$\psi^e(u) = \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi(u-y) dP_e(y) + \frac{1}{1+\theta} \bar{P}_e(u).$$

και πως το $\tilde{b}_{i,0}(0)$ μπορεί να υπολογιστεί εύκολα όταν οι ενδιάμεσοι χρόνοι είναι Coxian, όπως έχει επισημανθεί και στο παράδειγμα 3.2 του Willmot (2007).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ
ΥΠΟΘΕΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΓΙΑ ΤΟΝ ΧΡΟΝΟ ΜΕΧΡΙ ΤΗΝ ΠΡΩΤΗ ΑΠΑΙΤΗΣΗ

5.1 Εκθετική

Ας ξεκινήσουμε αυτό το κεφάλαιο από την πιο απλή εκδοχή και την εκθετική κατανομή. Υποθέτοντας λοιπόν πως ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή, το τροποποιημένο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου γίνεται τόσο χρήσιμο όσο και εύχρηστο. Αυτό συμβαίνει λόγω της ιδιότητας της αμνησίας της εκθετικής κατανομής που διευκολύνει την μελέτη που απαιτείται όσον αφορά τον τελευταίο κίνδυνο που είχε εμφανιστεί πριν την χρονική στιγμή μηδέν. Όταν το κλασσικό Poisson ανανεωτικό μοντέλο διαδικασίας κινδύνου επεκτάθηκε στο κλασσικό Sparre-Andersen ανανεωτικό μοντέλο αυτή η ιδιότητα χάθηκε.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του χρόνου μέχρι την πρώτη απαίτηση, $k_1(t)$, είναι

$$k_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$$

με μετασχηματισμό Laplace

$$\tilde{k}_1(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$$

Όπως είδαμε και στην ενότητα (2.2), η $m_\delta^d(u)$ μπορεί να γραφεί

$$\begin{aligned} m_\delta^d(u) &= \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_\delta(u+ct)k_1(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t}\sigma_\delta(u+ct)\lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= \lambda\int_0^\infty e^{-(\lambda+\delta)t}\sigma_\delta(u+ct)dt \end{aligned}$$

όπου

$$\sigma_\delta(s) = \int_0^t m_\delta(t-y)dP(y) + \int_t^\infty w(t, y-t)dP(y)$$

Με μία αλλαγή μεταβλητής, θέτοντας $x = u + ct, \eta$ $m_\delta^d(u)$ γίνεται

$$m_\delta^d(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda+\delta}{c}u} \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}t} \sigma_\delta(t) dt = \frac{\lambda}{c} T_{\frac{\lambda+\delta}{c}} \sigma_\delta(u) \tag{46}$$

Επομένως, η $m_\delta^d(u)$ είναι μετασχηματισμός Dickson-Hipp του $\sigma_\delta(t)$. Σε επόμενη ενότητα θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τον Laplace μετασχηματισμό της $m_\delta^d(u)$ για να βρούμε μια αναλυτική λύση, όμως στην εκθετική περίπτωση που μελετάμε τώρα προκύπτει απευθείας κλειστή μορφή από την εξίσωση που προέκυψε στην ενότητα 2.2.

5.2 Συνδιασμός εκθετικών

Η δεύτερη απλούστερη κατανομή σε αυτό το κεφάλαιο είναι ένας συνδυασμός εκθετικών κατανομών. Σε αυτή την περίπτωση η ιδιότητα της αμνησίας παύει να ισχύει, ωστόσο η κλειστή μορφή της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu χωρίς την χρήση του μετασχηματισμού Laplace.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τώρα είναι της μορφής

$$k_1(t) = \sum_{i=1}^{r} p_i \lambda_i e^{-\lambda_i t}$$

με p_i να είναι πραγματικοί αριθμοί και $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με αυτή στην προηγούμενη ενότητα παίρνουμε μία λύση σε κλειστό τύπο σαν συνδυασμό μετασχηματισμών Dickson-Hipp, δηλαδή

$$m_\delta^d(u) = \sum_{i=1}^{r} p_i \left(\frac{\lambda_i}{c_i}\right) e^{-\frac{\lambda_i+\delta}{c}u} \int_u^\infty e^{-\frac{\lambda_i+\delta}{c}t} \sigma_\delta(t)dt = \sum_{i=1}^{r} p_i \left(\frac{\lambda_i}{c_i}\right) T_{\frac{\lambda_i+\delta}{c}} \sigma_\delta(u). \qquad (47)$$

Οι σχέσεις (46) και (47) είναι σε απλή μορφή, ως μετασχηματισμός Dickson-Hipp και συνδυασμός μετασχηματισμών Dickson-Hipp. Σε αυτές λοιπόν τις περιπτώσεις, εάν έχουμε κλειστό τύπο για το $\sigma_\delta(t)$, μπορούμε να έχουμε και κλειστό τύπο για την $m_\delta^d(u)$.

5.3 Η επίπτωση της κατανομής του χρόνου έως την πρώτη απαίτηση

Σε αυτή την ενότητα, θα διερευνήσουμε πως διαφορετικές κατανομές του χρόνου έως την πρώτη απαίτηση επηρεάζει την πιθανότητα χρεοκοπίας. Συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε κατανομές με κοντές και μακριές ουρές αλλά και με την εκθετική κατανομή. Τα παραδείγματα που θα χρησιμοποιήσουμε για κατανομές με κοντές ουρές, με συντελεστή συσχέτισης (CV) μικρότερο από 1 και IFR (increasing failure rate), είναι άθροισμα εκθετικών και Γάμα κατανομές με παράμετρο shape (α) μεγαλύτερο ή ίσο με ένα. Τα παραδείγματα για τις κατανομές με μακριά ουρά, με CV μεγαλύτερο από ένα και DFR (decreasing failure rate), θα χρησιμοποιήσουμε μίξης εκθετικών κατανομών και Inverse Gaussian κατανομές. Για ορισμούς, βλέπε Willmot and Lin (2001) και τις αναφορές τους.

Για απλούστευση, θα θεωρήσουμε ότι τα ύψη των απαιτήσεων αλλά και οι χρόνοι μεταξύ την εμφάνιση δύο διαδοχικών απαιτήσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή, για παράδειγμα $p(y) = \beta e^{-\beta y}$ και $k(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Έπειτα, από την (31), θέτοντας $\delta = 0$ και $w_2(y) = 1$, έχουμε:

$$\psi^d(u) = \tilde{k}_1(ck)e^{\kappa u}. \tag{48}$$

Με την υπόθεση που κάναμε πως $k(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, το κ προκύπτει να είναι

$$\kappa = \frac{\beta\theta}{1+\theta}$$

και η πιθανότητα χρεοκοπίας στη σχέση (48) είναι

$$\psi^d(u) = \tilde{k}_1(\lambda\theta)e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}.$$

Στην πρώτη περίπτωση μελέτης, έστω ότι $k_1(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ και η διαδικασία απλουστεύεται σε κλασσική διαδικασία Poisson. Να σημειωθεί ότι η εκθετική κατανομή είναι και DFR και IFR και έχει συντελεστή συσχέτισης CV ίσο με 1. Σε αυτή την περίπτωση, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι:

$$\psi^d(u) = \frac{1}{1+\theta}e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}$$

Στην δεύτερη περίπτωση, θα θεωρήσουμε το άθροισμα δύο εκθετικών κατανομών, όπου ο Laplace μετασχηματισμός της $k_1(t)$ έχει τη μορφή

$$\tilde{k}_1(s) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+s}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+s}\right)$$

και έτσι

$$\psi^d(u) = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda s}\right)\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2+\lambda s}\right)e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}$$

Στην τρίτη περίπτωση, θα θεωρήσουμε την μίξη δύο εκθετικών, όπου $k_1(t) = q\lambda_1 e^{-\lambda_1 t} + (1-q)\lambda_2 e^{-\lambda_2 t}$ και η πιθανότητα χρεοκοπίας γίνεται:

$$\psi^d(u) = \left\{q\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda\theta} + (1-q)\frac{\lambda_2}{\lambda_2 + \lambda\theta}\right\} e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}.$$

Προκειμένου να απλοποιήσουμε λίγο τους υπολογισμούς, έστω ότι $\beta = \lambda = 1$ και $\theta = 0{,}2$. Οι παράμετροι λ_1 και λ_2 επιλέγονται έτσι ώστε η μέση τιμή του χρόνου μέχρι την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης να είναι 1.

Για το άθροισμα των δύο εκθετικών, $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Πρόκειται για μία Erlang-2 κατανομή με τον ελάχιστο συντελεστή συσχέτισης συγκριτικά με οποιαδήποτε άλλη επιλογή των λ. Συγκεκριμένα, ο συντελεστής συσχέτισης είναι 0,707.

Για την μίξη των δύο εκθετικών, $\lambda_1 = 0{,}2$, $\lambda_2 = 2$ και $q = \frac{1}{9}$. Ο συντελεστής συσχέτισης είναι 2,236.

Στον παρακάτω πίνακα, είναι φανερό ότι η κατανομή με κοντή ουρά έχουν μικρότερη πιθανότητα χρεοκοπίας και αυτή με μακριά ουρά μεγαλύτερη όταν η μέση τιμή των κατανομών είναι ίδια. Όπως επισημάνθηκε και στους Landriault and Willmot (2007), αυτό συμβαίνει λόγω της μεγαλύτερης διασποράς του όρου $cW_1 - Y_1$ στην διαδικασία πλεονάσματος για τις κατανομές με μακριά ουρά. Όσο μεγαλύτερη είναι η διασπορά αυτού του όρου, τόσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας.

	$k_1(t)$		
u	Εκθετική	Άθροισμα Εκθετικών	Μίξη Εκθετικών
0	0.833333333	0.826446281	0.863636364
0,1	0.819559545	0.812786325	0.849361710
0,5	0.766703679	0.760367285	0.794583813
1	0.705401437	0.699571673	0.731052399
5	0.362165174	0.359172073	0.375334816
10	0.157396336	0.156095540	0.163119839
20	0.029728328	0.029482639	0.030809358
30	0.005614956	0.005568551	0.005819136
50	0.000200308	0.000198652	0.000207592

Πίνακας: Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας, $\psi^d(u)$, για διάφορες κατανομές του χρόνου έως την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης.

Αυτό μπορεί να εξηγηθεί καθώς σε κατανομές με μακριά δεξιά ουρά, οι πιθανότητες είναι προς τα αριστερά. Έτσι, όταν μια τέτοια κατανομή έχει ίδια μέση τιμή με μία χωρίς μακριά ουρά, οι πιθανότητες στις μικρές τιμές θα είναι μεγαλύτερες στην κατανομή με μακριά ουρά. Αυτό μπορεί να φανεί και από τις αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών. Στην δική μας περίπτωση η αθροιστική συνάρτηση κατανομής στην τιμή 1 στην περίπτωση της μίξης εκθετικών (μακριά ουρά) είναι 0,788732, ενώ η αντίστοιχη τιμή για το άθροισμα εκθετικών (κοντή ουρά) είναι 0,593994. Αυτό μεταφράζεται σε πιθανοφάνεια να εμφανιστεί νωρίτερα μια απαίτηση στη περίπτωση κατανομής με μακριά ουρά, και άρα μεγαλύτερη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Το ίδιο μπορεί κάποιος να διαπιστώσει και από τον παρακάτω πίνακα, όπου μία κατανομή Γάμα(5, 5) έχει χρησιμοποιηθεί για κατανομή με κοντή ουρά και μία Inverse Gaussian(1, 0,2) ως κατανομή με μακριά ουρά για τον χρόνο έως την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης. Η Γάμα(5 ,5) έχει μέση τιμή 1 και συντελεστή συσχέτισης CV 0,447 και πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi^d(u) = \left(\frac{5}{5+\lambda\theta}\right)^5 e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}$$

και η Inverse Gaussian (1, 0,2) έχει μέση τιμή 1, συντελεστή συσχέτισης CV 2,236 και πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi^d(u) = e^{10,2\left(1-\left(1+\frac{2\lambda\theta}{0,2}\right)^{0,5}\right)} e^{-\frac{\beta\theta}{1+\theta}u}$$

	$k_1(t)$		
u	Εκθετική	Γάμα(5, 5)	Inverse Gaussian(1, 0,2)
0	0.833333333	0.821927107	0.863803332
0,1	0.819559545	0.808341847	0.849525918
0,5	0.766703679	0.756209444	0.794737431
1	0.705401437	0.695746275	0.731193734
5	0.362165174	0.357208048	0.375407380
10	0.157396336	0.155241978	0.163151375
20	0.029728328	0.029321422	0.030815314
30	0.005614956	0.005538101	0.005820261
50	0.000200308	0.000197566	0.000207632

Πίνακας: Υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας, $\psi^d(u)$, για διάφορες κατανομές του χρόνου έως την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. So-Yeun Kim, 2007. Topics in delayed renewal risk models. University of Waterloo
2. G.E. Willmot, 2004. A note on a class of delayed renewal risk processes. IME 34, 251-257
3. So-Yeun Kim, Gordon E. Wilmot,2016. On the analysis of ruin-related quantities in the delayed renewal risk model. Insurance: Mathematics and Economics 66, 77-85
4. Hans U. Gerbe, Elias S.W. Shiu, 2013. On the time value of ruin. North American Actuarial journal 2:1, 48-72
5. Hans U. Gerbe, Elias S.W. Shiu, 2005. The time value of ruin in a Sparre Andersen Model. North American Actuarial journal 9(2)
6. G.E. Willmot, 2004. The deficit at ruin in the stationary renewal risk model. SAJ 4, 241-255
7. Willmot, G.E., 2004. A note on a class of delayed renewal risk processes, Insurance: Mathematics and Economics 34, 251-257.
8. Landriault, D., 2007. On a general class of Sparre Andersen risk models with a constant dividend barrier, In Progress.
9. Landriault, D., Willmot, G.E., 2007. On the discounted penalty function in the renewal risk model with a Coxian claim size distribution, Submitted for Publication.
10. Willmot, G.E., Cai, J., and Lin X.S., 2001. Lundberg inequalities for renewal equations, Advances in Applied Probability 33, 674-689.