

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ  
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ  
ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΟΙ ΔΕΙΚΤΕΣ  
ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΔΕΞΙΑΣ ΟΥΡΑΣ  
ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΑΠΩΛΕΙΑΣ ΓΙΑ  
ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΙΚΟΥΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥΣ**

Μαρίνα Χαμηλού

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων  
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην  
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς,  
Νοέμβριος 2021

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ  
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ  
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ  
ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΟΙ ΔΕΙΚΤΕΣ  
ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΔΕΞΙΑΣ ΟΥΡΑΣ  
ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΑΠΩΛΕΙΑΣ ΓΙΑ  
ΚΑΤΑΣΤΡΟΦΙΚΟΥΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥΣ**

Μαρίνα Χαμηλού

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων  
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην  
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς,  
Νοέμβριος 2021

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής: Ψαρράκος Γεώργιος (Επιβλέπων)
- Επίκουρος Καθηγητής: Πιτσέλης Γεώργιος
- Αναπληρωτής Καθηγητής: Πολίτης Κωνσταντίνος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
ACTUARIAL SCIENCE AND RISK  
MANAGEMENT**

**ACTUARIAL INDICES OF  
MEASURING THE RIGHT TAIL  
OF LOSS DISTRIBUTIONS FOR  
CATASTROPHIC RISKS**

By  
Marina Chamilou

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University  
of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science  
in Applied Statistics

Piraeus, Greece

November 2021



*Στην οικογένειά μου*



## Ευχαριστίες

Ολοκληρώνοντας τη διπλωματική μου εργασία θα ήθελα να ευχαριστήσω αρχικά τον κ. Ψαρράκο Γεώργιο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς και επιβλέποντα καθηγητή μου για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση του που συνέβαλαν καθοριστικά στην εκπόνηση της διπλωματικής μου εργασίας.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον Επίκουρο Καθηγητή του Τμήματος κ. Πιτσέλη Γεώργιο και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Πολίτη Κωνσταντίνο για τη συμμετοχή τους στην Τριμελή Επιτροπή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και τους φίλους μου για την υπομονή, την κατανόηση και τη στήριξη που μου προσέφεραν και συνεχίζουν να μου προσφέρουν σε κάθε βήμα της ζωής μου.





## Περίληψη

Τα περισσότερα προβλήματα που καλείται κάποιος να λύσει στη σημερινή εποχή αντιμετωπίζονται με μαθηματική μοντελοποίηση. Η θεωρία κινδύνου αποτελεί μια ουσιαστική μαθηματική βάση για τον υπολογισμό των ασφαλιστικών προβλημάτων αλλά και για τον υπολογισμό του κινδύνου και άλλων σχετικών στοιχείων. Στην αναλογιστική επιστήμη εμφανίζονται συχνά πολύ μεγάλοι ασφαλιστικοί κίνδυνοι, όπου τα ευρέως γνωστά μέτρα κινδύνων, όπως για παράδειγμα η τυπική απόκλιση ή ο μέσος Gini, είναι μη αποδεκτά μέτρα στη μέτρηση της δεξιάς ουράς των κινδύνων. Για το λόγο αυτό ο Wang (1998) πρότεινε έναν αναλογιστικό δείκτη που βασίζεται στο μοντέλο αναλογικών κινδύνων.

Η παρούσα εργασία αποτελεί μελέτη της απόδοσης του δείκτη Wang, καθώς και άλλων δεικτών για κατανομές με βαριά ουρά. Επιπλέον, θα δοθούν παραδείγματα που θα επαληθεύουν τα θεωρητικά αποτελέσματα. Πιο συγκεκριμένα, θα διεξαχθούν αριθμητικά παραδείγματα σε γνωστές κατανομές στα οποία θα συγκριθούν οι δείκτες κινδύνου δεξιάς ουράς όπως του Wang (1998), των Wei & Yatracos (2004) και ο ευρέως γνωστός δείκτης Gini.



## **Abstract**

Most of the problems that one has to solve today are solved by mathematical modeling. From insurance problems to risk calculation and related data, risk theory provides a substantial mathematical basis. Actuarial science often presents very high insurance risks, where well-known risk measures, such as the standard deviation or the Gini mean, are unacceptable measures in measuring the right-hand side of risks. For this reason, Wang (1998) proposed an actuarial index based on the proportional risk model.

This thesis is a study of the performance of the Wang index, as well as other indicators for heavy-duty distributions. In addition, examples will be given to verify the theoretical results. More specifically, numerical examples will be conducted in known distributions comparing right-tail risk indices such as Wang (1998), Wei & Yatracos (2004) and the well-known Gini index.



# Περιεχόμενα

Περίληψη.....	xi
Abstract .....	xiii
Περιεχόμενα .....	xiii
Κατάλογος Πινάκων .....	xv
Κατάλογος Σχημάτων .....	xvi
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 .....	1
Εισαγωγή.....	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 .....	4
Βασικές έννοιες και ορισμοί .....	4
2.1 Ορισμοί – Παραδείγματα.....	4
2.1.1 Τυχαίες μεταβλητές .....	4
2.1.2 Βασικοί ορισμοί.....	4
2.1.3 Στοχαστικές διατάξεις.....	8
2.1.4 Δεξιά ουρά κατανομής .....	11
2.2 Θεωρητικά αποτελέσματα .....	18
2.2.1 Ασφαλιστικά επίπεδα .....	18
2.2.2 Συμμονοτονικότητα (Comonotonicity) .....	19
2.2.3 Προσθετικότητα.....	21
2.2.4 Ισοδύναμη προσέγγιση.....	22
2.2.5 Απόκλιση δεξιάς ουράς.....	24
2.2.6 Δείκτης Gini .....	28
2.2.7 Μετρικές πιθανοτήτων .....	31
2.2.8 Δείκτης δεξιάς ουράς .....	32
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 .....	36
Αριθμητικά αποτελέσματα.....	36

3.1 Περιπτώσεις για την κατανομή Γάμμα.....	36
3.2 Περιπτώσεις για την κατανομή Weibull.....	39
3.3 Σύγκριση γνωστών κατανομών ως προς τους προτεινόμενους δείκτες δεξιάς ουράς.....	41
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....	44
Συμπεράσματα.....	44
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	47
Ελληνική.....	47
Ξένη.....	47
Παράρτημα.....	49

## Κατάλογος Πινάκων

Πίνακας 3-1: Πίνακας αποτελεσμάτων για διαφορετικές τιμές του δείκτη $a$ .....	38
Πίνακας 3-2: Πίνακας αποτελεσμάτων για διαφορετικές τιμές του δείκτη $c$ .....	40
Πίνακας 3-3: Συγκριτικά αποτελέσματα κατανομών .....	42



## Κατάλογος Σχημάτων

Σχήμα 1-1: Παράδειγμα συνάρτησης απώλειας.....	8
Σχήμα 2-1: Ένταση κινδύνου για την κατανομή Γάμμα για διάφορες τιμές του $\alpha$ ...	18
Σχήμα 3-1: Γραφική παράσταση για την Γάμμα( $\lambda = 1, \beta$ ), $\beta > 0$ .....	37
Σχήμα 3-2: Γραφική παραστάτη για την Weibull( $\theta = 1, c$ ), $c > 0$ .....	39



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Εισαγωγή

Ο ασφαλιστικός κίνδυνος παρουσιάζεται ως μια ευρεία έννοια. Πιο συγκεκριμένα, μπορεί να σχετίζεται με μια επιχείρηση, νομικές ή διαχειριστικές περιπτώσεις που υπόκεινται σε οικονομικές επιβαρύνσεις εξαιτίας τυχαίων ατυχημάτων. Όμως, στην παρούσα εργασία, ο όρος περιγράφεται ως μια μεταβλητή ζημίας που ποσοτικοποιεί την ενδεχόμενη απώλεια με συσχέτιση στο ασφάλιστρο συμβολαίου και ποικίλλει με τα χαρακτηριστικά του πελάτη. Η μεταβλητή αυτή είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί μια κατανομή (κατανομή ζημιών ή κινδύνων ή απωλειών).

Η κατανομή μιας ασφαλιστικής απώλειας αποτελείται από μια μακριά δεξιά ουρά. Αυτό το χαρακτηριστικό επιφέρει μεγάλες ζημιές και ονομάζεται κίνδυνος δεξιάς ουράς. Συνήθως, εμφανίζει χαμηλή συχνότητα αλλά όταν υφίσταται, προκαλεί εξαιρετικά υψηλή απώλεια. Στην πράξη υφίστανται δύο είδη περιπτώσεων εμφάνισης κινδύνου δεξιάς ουράς. Στην πρώτη πτυχή αντιμετωπίζεται το ποιοτικό ζήτημα του τύπου ασφάλισης. Ουσιαστικά, αν η ασφάλιση είναι αστικής ευθύνης ενδέχεται τα ποσά για τις ζημιές να παρουσιάζουν υψηλή λοξότητα, δηλαδή και δεξιά ουρά (Wei & Yatracos, 2004).

Στην ασφάλιση ακινήτων ελλοχεύουν ποικίλοι και σημαντικοί κίνδυνοι. Ένας από αυτούς αποτελεί τον κίνδυνο φυσικών καταστροφών, δηλαδή σεισμών, τυφώνων ή ακόμη και πλημμυρών. Είναι προφανές από την ιδιαιτερότητα αυτών των περιστάσεων να διακρίνονται μεγάλες αποκλίσεις εξαιτίας της δεξιάς ουράς. Μάλιστα, δεν δύναται να μην θεωρηθούν ως σημαντικές οι απώλειες που ίσως προκύψουν σε τέτοια γεγονότα. Γι' αυτό το λόγο, η ύπαρξη δεικτών σχετικά με την τυχαία απόκλιση από την προσδοκώμενη απώλεια είναι επιθυμητή για κάθε ασφαλιστική εταιρία (Wang, 1998).

Ένα άλλο ζήτημα αφορά αυτές – καθ'αυτές τις κατανομές πιθανότητας των απωλειών. Πιο συγκεκριμένα, ο λόγος γίνεται για απώλειες που το μέγεθος είναι δύσκολο έως αδύνατο να προβλεφθεί με κάποια καλή ακρίβεια. Η αβεβαιότητα είναι μια παράμετρος που συνηθίζεται να χαρακτηρίζει τέτοιες περιπτώσεις, δηλαδή η βελτιστοποίηση της εκτίμησης των παραμέτρων της κατανομής δεν είναι ιδιαίτερα

επιτυχημένη. Όσον αφορά το στατιστικό σφάλμα δειγματοληψίας διακρίνεται μια έντονη συσχέτιση με την ύπαρξη δεξιάς ουράς. Όσο πιο μακριά είναι η δεξιά ουρά, τόσο λιγότερα είναι τα δεδομένα που μπορούν να αναλυθούν. Επομένως, η αβεβαιότητα τείνει να είναι υψηλότερη σχετικά με την πραγματοποίηση των απωλειών λόγω της ουράς. Για παράδειγμα, στην ασφάλιση αστικής ευθύνης, παρουσιάζεται πιο υψηλή αβεβαιότητα όταν αυξάνονται τα όρια επαναπροσδιορισμού σε σχέση με τη βασική επιλογή ορίου.

Τα πιο συνήθη μέτρα του ασφαλιστικού κινδύνου δεξιάς ουράς περιλαμβάνουν τη διακύμανση, την τυπική απόκλιση και το δείκτη Gini. Η βάση σε αυτές τις ποσότητες είναι η τυπική απόκλιση που αποτελεί το βέλτιστο τρόπο διαχείρισης όταν ο κίνδυνος ακολουθεί κανονική κατανομή. Βέβαια, αν και το συγκεκριμένο μέτρο χρησιμοποιείται και για μεταβλητές που δεν ακολουθούν κανονική κατανομή, δεν ενδείκνυται για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου πόσο μάλλον σε ουρές με ιδιαίτερη λοξότητα στην κατανομή τους. Με αυτή την περίπτωση έχουν ασχοληθεί αρκετοί συγγραφείς με το αποτέλεσμα να είναι κοινό στις μελέτες τους, δηλαδή ότι δεν διακρίνεται καλή απόδοση όταν η τυπική απόκλιση ποσοτικοποιεί τον κίνδυνο (Ramsay, 1993; Lowe and Stanard, 1996).

Μια άλλη περίπτωση εκτίμησης του κινδύνου δεξιάς ουράς συνιστάται υπό την αξιολόγηση διαστημάτων εμπιστοσύνης. Αυτός ο τρόπος προσέγγισης του κινδύνου πηγάζει από τη φυσική ερμηνεία της απώλειας και του κινδύνου της. Βέβαια, η ένταση κινδύνου καλείται να υπολογίζει την αβεβαιότητα στο μέγιστο δυνατό βαθμό. Σε αυτό μπορεί να προστεθεί η συνιστώσα της εμφάνισης ενός καταστροφικού γεγονότος. Ουσιαστικά, η έννοια της καταστροφής έχει ποσοτικό χαρακτήρα. Αν διατίθεται μια πιθανότητα εμφάνισης ενός δυσάρεστου γεγονότος τότε είναι εύκολο να υπολογιστεί ένα ποσό σχετικό με το κατώτατο όριο ασφαλείας.

Ο Butsic (1994) αναφέρει ως ιδανικό μέτρο τη χρήση των αναμενόμενων ελλειμμάτων των αντισυμβαλλομένων (Expected Policyholder Deficit), όταν δημιουργούνται οι προϋποθέσεις του συμβολαίου σχετικά με τα ασφάλιστρα. Οι Gerber και Shiu (1997) προσπαθούν να περιγράψουν και να αναλύσουν την πιθανότητα καταστροφής καθώς και τις ενδεχόμενες απώλειες όταν πραγματοποιηθεί ένα τέτοιο γεγονός.

Οι δείκτες δεξιάς ουράς, όπως, για παράδειγμα, το αναμενόμενο έλλειμμα αντισυμβαλλομένου (Expected Policyholder Deficit) και ο δείκτης του Wang (Wang, 1998), έχουν άμεση διασύνδεση με τις ιδιότητες του ασφαλιστρου. Πολλοί από τους δείκτες που αναφέρθηκαν αποτελούν σταθμισμένους μέσους όρους πάνω από όλες τις

τιμές απώλειας. Έτσι, προσφέρουν μια ποσοτικοποίηση σε σχέση με τη γενικότητα του όρου της απώλειας, κάτι που μπορεί να διαφέρει αρκετά από την απώλεια και τον κίνδυνο εμφάνισης της προερχόμενο από τη δεξιά ουρά. Ο λόγος που τέτοια μέτρα δεν είναι απολύτως ικανοποιητικά εξαρτάται από την επιρροή που παρουσιάζεται από το μέσο, γεγονός που δεν φαίνεται να επηρεάζει αισθητά τη δεξιά ουρά, η οποία είναι πολύ απομακρυσμένη. Μάλιστα, τέτοιες περιπτώσεις διακρίνονται και στη στατιστική επιστήμη όπου οι ουρές ακολουθούν δικούς τους νόμους σε σχέση με τις υπόλοιπες παρατηρήσεις μέσα σε ένα δείγμα (Rojo, 1992).

Το EPD (Expected Policyholder Deficit) είναι ένα μέτρο που βελτιστοποιεί αυτή την οπτική σκοπιά. Ο συγκεκριμένος δείκτης συμπορεύεται με την πιθανότητα της καταστροφής καθώς λαμβάνει υπόψη και το μέγεθος των απωλειών οπότε αποτελεί μια σοβαρή ένδειξη για τη συμπεριφορά της ουράς σε σχέση με τη πιθανότητα εμφάνισης ενός αρνητικού γεγονότος. Γενικά, ένα μέτρο που μπορεί να προσφέρει ισχυρή πληροφορία για την ποιότητα και το ποσό της καταστροφής μπορεί να δώσει καλύτερα αποτελέσματα σχετικά με τον κίνδυνο της δεξιάς ουράς. Ο EPD, συμφωνεί με αυτές τις προϋποθέσεις ενός πρότυπου μέτρου καθώς μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση του κινδύνου για οποιαδήποτε τιμή απώλειας. Ο ασφαλιστικός κίνδυνος είναι συχνά απαραίτητο να μετρηθεί ως κίνδυνος δεξιάς ουράς πάνω από πολλές τιμές απώλειας. Ειδικότερα, στην αξιολόγηση των κατανομών ζημιών που συνδυάζονται μεταξύ τους αποτελεί απαραίτητη αναγκαιότητα. Ακόμη, στην περίπτωση, λοιπόν, που οι απώλειες είναι κοινές, ο δείκτης λογίζεται ως υπερπροσθετικός (Wei & Yatracos, 2004).

Στο κυρίως μέρος της εργασίας θα αναλυθούν και αξιολογηθούν αναλογιστικοί δείκτες μέτρησης της δεξιάς ουράς κατανομών απώλειας για καταστροφικούς κινδύνους αφού πρώτα τεθούν τα κατάλληλα θεμέλια για το θεωρητικό υπόβαθρο που απαιτείται και την εφαρμογή παραδειγμάτων για την καλύτερη οπτικοποίηση του προβλήματος.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Βασικές έννοιες και ορισμοί

### 2.1 Ορισμοί – Παραδείγματα

Στην παρούσα ενότητα αναφέρονται και σχολιάζονται αρκετοί ορισμοί που απαιτούνται για την πλήρη κατανόηση τους προβλήματος που διεκπεραιώνεται στην εργασία μας.

#### 2.1.1 Τυχαίες μεταβλητές

Οι τυχαίες μεταβλητές αποτελούν την πιο βασική θεωρητική βάση σχετικά με ολόκληρη τη θεωρία πιθανοτήτων. Πολλές φορές στην καθημερινότητα εντοπίζονται φαινόμενα που μπορούν να ερμηνευθούν μέσω των τυχαίων μεταβλητών. Γι' αυτό και μια πληθώρα εφαρμογών μπορεί να παρατηρηθεί και στην Αναλογιστική Επιστήμη. Μερικά παραδείγματα είναι τα εξής:

- η ηλικία θανάτου ενός ατόμου,
- ο χρόνος μέχρι να αποβιώσει από τη χρονική στιγμή που συνάπτει μια ασφάλεια,
- το χρηματικό ποσό που δίδεται για τα ασφάλιστρα κάποιου τυχαίου τύπου συμβολαίου ασφάλειας ζωής,
- ο αριθμός τραυματισμών από αυτοκινητιστικά ατυχήματα σε ένα χρόνο,
- η ποσότητα των χρημάτων που πρέπει να πληρωθούν κατά τη λήξη ενός τυχαίου ομολόγου υψηλών αποδόσεων (Klugman et al., 2004).

#### 2.1.2 Βασικοί ορισμοί

Στο σημείο αυτό αναφέρονται μερικοί ακόμη ορισμοί που θα συνεισφέρουν στην πλήρη κατανόηση των κυρίων ποσοτήτων που εξετάζονται σε οποιαδήποτε κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής (Klugman et al., 2004).

### Ορισμός 2.1

Η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$  ορίζεται ως η πιθανότητα η  $X$  να λάβει τιμές μικρότερες ή ίσες από ένα δεδομένο αριθμό  $x$ , δηλαδή

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$

Οι ιδιότητες που απαιτείται να ικανοποιεί η συνάρτηση κατανομής είναι οι ακόλουθες:

1.  $0 \leq F_X(x) \leq 1, \forall x$
2.  $F_X(x)$  αύξουσα συνάρτηση
3.  $F_X(x)$  δεξιά – συνεχής συνάρτηση
4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  και  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ .

### Ορισμός 2.2

Μια τυχαία μεταβλητή  $X$  ονομάζεται διακριτή, εάν το πεδίο τιμών της,  $R_X$  είναι πεπερασμένο ή το πολύ απείρως αριθμήσιμο. Ονομάζεται συνεχής, αν η συνάρτηση κατανομής της είναι συνεχής και διαφορίσιμη σε όλες τις πιθανές τιμές του πεδίου τιμών της.

Αυτοί οι δύο τύποι τυχαίων μεταβλητών δεν είναι οι μοναδικοί. Όμως είναι οι πιο συνηθισμένοι σε προβλήματα αναλογιστικών μαθηματικών και θα μας απασχολήσουν σχετικά με το ζήτημα της μελέτης μας.

### Ορισμός 2.3

Η συνάρτηση επιβίωσης μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$  ορίζεται ως η πιθανότητα του ενδεχομένου η  $X$  να είναι τουλάχιστον ίση με ένα δοθέν αριθμό  $x$  :

$$\bar{F}_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x) = S_X(x).$$

Εξαιτίας της διασύνδεσης μεταξύ της συνάρτησης επιβίωσης και της συνάρτησης κατανομής προκύπτει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} S_X(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 1 - 0 = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S_X(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1 - 1 = 0$$

#### Ορισμός 2.4

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μιας συνεχούς κατανομής συμβολίζεται με  $f_X(x)$  και εκφράζεται ως η παράγωγος της συνάρτησης κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$  ή η παράγωγος της αντίθετης της συνάρτησης επιβίωσης:

$$f_X(x) = \frac{d[F_X(x)]}{dx} = -\frac{d[S_X(x)]}{dx}.$$

#### Ορισμός 2.5

Η ένταση κινδύνου (ή αλλιώς hazard rate) ή η συνάρτηση θνησιμότητας ορίζεται ως ο λόγος της πυκνότητας με τη συνάρτηση επιβίωσης, υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχουν:

$$h_X(x) = \frac{f_X(x)}{S_X(x)}.$$

Συνδυάζοντας τους Ορισμούς 2.4 και 2.5 στην περίπτωση που η  $X$  είναι συνεχής είναι προφανές ότι ικανοποιείται η εξής σχέση:

$$S_X(x) = e^{-\int_0^x h_X(y) dy}.$$

Ο ορισμός της έντασης κινδύνου, με βάση τον συνδυασμό των παραπάνω ορισμών και δεδομένου ότι αναφέρεται σε μια απόλυτα συνεχή τυχαία μεταβλητή  $X$ , είναι ο εξής:

$$h_X(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{x < X \leq x + \Delta t | X > x\}}{\Delta t} = \frac{f_X(x)}{S_X(x)}.$$

Ουσιαστικά μπορεί να ερμηνευτεί σαν την περίπτωση αποτυχίας κάποιας συσκευής με διάρκεια ζωής  $X$  στο χρόνο  $x$  (Shaked and Shanthikumar, 2007). Στο υπόλοιπο της εργασίας, για λόγους απλότητας, όπου είναι προφανής η χρήση της τυχαίας μεταβλητής  $X$  θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς  $f_X(x)$ ,  $F_X(x)$ ,  $\bar{F}_X(x)$ ,  $S_X(x)$  και  $h_X(x)$  χωρίς τη χρήση του δείκτη  $X$ .



### Ορισμός 2.6

Η ροπή  $k$ -τάξης μιας τυχαίας μεταβλητής είναι η αναμενόμενη τιμή της  $k$ -οστής δύναμης τη μεταβλητής, εφ' όσον υπάρχει. Συμβολίζεται με  $E(X^k)$  ή  $\mu'_k$ , μάλιστα για  $k = 1$  προκύπτει ο μέσος της τυχαίας μεταβλητής που συνήθως αναφέρεται ως  $\mu$ .

$$\mu'_k = E(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x) dx.$$

### Ορισμός 2.7

Η κεντρική ροπή  $k$ -τάξης μιας τυχαίας μεταβλητής είναι η αναμενόμενη τιμή της  $k$ -οστής δύναμης της μεταβλητής από το μέσο της, αν υπάρχει. Συμβολίζεται με  $E((X - \mu)^k)$  ή  $\mu_k$ , μάλιστα για  $k = 2$  προκύπτει η διακύμανση ή διασπορά της τυχαίας μεταβλητής που συνήθως αναφέρεται ως  $\sigma^2$ .

$$\mu_k = E((X - \mu)^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^k f(x) dx.$$

### Ορισμός 2.8

Έστω μια τυχαία μεταβλητή  $X$  και ένα δοθέν αριθμός  $x$ , έτσι ώστε

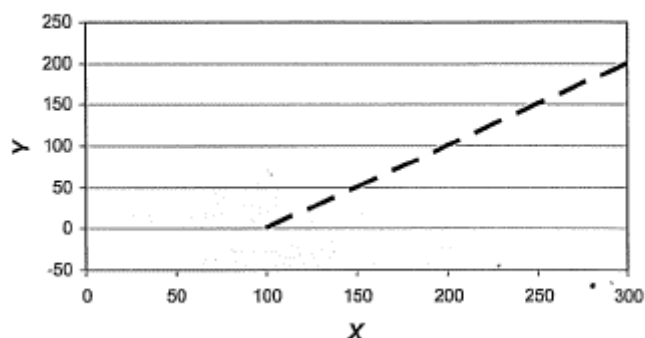
$$P(X > x) > 0,$$

τότε η υπολειπόμενη απώλεια ορίζεται ως η συνάρτηση  $Y = X - x | X > x$ . Η αναμενόμενη τιμή ή μέση τιμή της  $Y$  ορίζεται ως:

$$e_x(x) = e(x) = E(Y) = E(X - x | X > x),$$

και καλείται ως μέση συνάρτηση απώλειας (Πιτσέλης, 2018).

## ΣΧΗΜΑ 1-1



Παράδειγμα Συνάρτησης Απώλειας για  $x=100$

Πηγή : Klugman et al., 2004

### 2.1.3 Στοχαστικές διατάξεις

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζονται οι στοχαστικές διατάξεις, οι ορισμοί που συνδέονται με αυτές. Οι στοχαστικές διατάξεις αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο σε αρκετούς κλάδους επιστημών όπως είναι η στατιστική, οι πιθανότητες τα χρηματοοικονομικά, τα αναλογιστικά μαθηματικά, και άλλες επιστήμες. Η θεωρία των στοχαστικών διατάξεων αποτελεί υπόβαθρο για την προσέγγιση προβλημάτων στον αναλογισμό και τα ασφαλιστικά μαθηματικά. Κάθε ανθρώπινη δραστηριότητα είναι άμεσα ή έμμεσα συνδεδεμένη με την έννοια του κινδύνου, και μέσα από ένα σύνολο «τυχαίων» κινδύνων είναι σημαντική η έννοια της διάταξης από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο κίνδυνο.

#### Ορισμός 2.9

Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές μη αρνητικές  $X, Y$  με απολύτως συνεχείς κατανομές με ένταση κινδύνου  $h$  και  $r$  αντιστοίχως. Αν ισχύει ότι (Shaked and Shanthikumar, 2007):

$$h(x) \geq r(x), \quad x \geq 0$$

τότε η  $X$  είναι μικρότερη από τη  $Y$  ως προς την ένταση κινδύνου.

Ισοδύναμα

$$\frac{f(x)}{\bar{F}(y)} \geq \frac{g(x)}{\bar{G}(y)}, \quad \text{για όλα τα } x \leq y,$$

όπου τα  $\bar{F}$ ,  $\bar{G}$  αποτελούν τις ουρές των τυχαίων μεταβλητών  $X, Y$  αντιστοίχως. Συμβολίζουμε αυτή τη διάταξη ως:

$$X \leq_{hr} Y.$$

Ο Ορισμός 2.9 μπορεί να γενικευτεί και στην περίπτωση που τουλάχιστον μία από τις τυχαίες μεταβλητές  $X$  και  $Y$  δεν έχει απολύτως συνεχή κατανομή. Πιο συγκεκριμένα,  $\bar{F}(x)\bar{G}(y) \geq \bar{F}(y)\bar{G}(x)$ , για όλα τα  $x \leq y$ , ή ισοδύναμα η συνάρτηση  $\frac{\bar{G}(x)}{\bar{F}(x)}$  είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς  $x$ .

Ακόμη μπορεί εύκολα να προκύψει ότι:

$$\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} \geq \frac{\bar{G}(x+y)}{\bar{G}(x)}, \quad \text{για όλα τα } x, y \geq 0,$$

Επομένως δύο μεταβλητές ικανοποιούν την ανισότητα

$$X \leq_{hr} Y$$

αν και μόνο αν

$$P\{X - x > y | X > x\} \leq P\{Y - x > y | Y > x\}, \quad \text{για όλα τα } x, y \geq 0.$$

### Ορισμός 2.10

Έστω δυο τυχαίες μη αρνητικές μεταβλητές  $X, Y$  έτσι ώστε:

$$P\{X > x\} \leq P\{Y > x\}, \quad \text{για όλα τα } x \geq 0,$$

τότε η  $X$  είναι μικρότερη από την  $Y$  με τη συνήθη στοχαστική διάταξη και συμβολίζεται ως:

$$X \leq_{st} Y.$$

Σύμφωνα με την προηγούμενη εξίσωση κατά την οποία παρουσιάστηκε πως ισχύει το ακόλουθο:

$$X \leq_{hr} Y$$

αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} P\{X - x > y | X > x\} &\leq P\{Y - x > y | Y > x\}, \text{ για όλα τα } x, y \geq 0 \\ &\Rightarrow [X | X > x] \leq_{st} [Y | Y > x], \text{ για όλα τα } x \end{aligned}$$

### Ορισμός 2.11

Έστω δυο τυχαίες μη αρνητικές συνεχείς μεταβλητές  $X, Y$  με πυκνότητες  $f, g$  έτσι ώστε:

$$\frac{g(x)}{f(x)}, \quad \text{αύξουσα ως προς } x \geq 0.$$

Ισοδύναμα, για κάθε  $x \leq y$  έχουμε το:

$$\frac{g(x)}{f(x)} \leq \frac{g(y)}{f(y)} \Leftrightarrow f(x)g(y) \geq f(y)g(x)$$

τότε η  $X$  είναι μικρότερη από την  $Y$  ως προς το λόγο των πιθανοφανειών και συμβολίζεται ως:

$$X \leq_{lr} Y.$$

#### 2.1.4 Δεξιά ουρά κατανομής

Η ουρά μιας κατανομής, συνήθως η δεξιά ουρά της, αποτελεί το μέρος της πιθανότητας στο οποίο η τυχαία μεταβλητή του προβλήματος παρουσιάζει μεγάλες τιμές (συνήθως με μικρή συχνότητα). Τέτοια ζητήματα, πλέον, είναι πολύ ενδιαφέροντα στον τομέα του Αναλογισμού. Ο λόγος για τον οποίο ισχύει κάτι τέτοιο αναφέρεται στην παρουσία ή μη μεγάλων τιμών που επηρεάζουν έντονα τα κέρδη τους. Συνήθως, αυτό το πεδίο απασχολεί ασφάλειες υγείας που ενδέχεται να παρουσιάσουν ακραίες τιμές σε ορισμένες περιπτώσεις ενώ λιγότερο κίνδυνο στην προκειμένη περίπτωση επιδεικνύουν οι ασφάλειες των αυτοκινήτων για τυχόν ατυχήματα.

Γενικότερα, τυχαίες μεταβλητές που τείνουν να επιδεικνύουν μεγάλες πιθανότητες εμφάνισης υψηλών τιμών αποκαλούνται ότι έχουν βαριά τη δεξιά ουρά τους. Η «βαρύτητα» στην ουρά μπορεί να είναι ένα ζήτημα του μοντέλου ή της κατανομής των πραγματικών δεδομένων που εφαρμόζονται. Όταν επιλέγονται για να προσαρμοστούν στα δεδομένα, το βάρος της ουράς συνδράμει στον περιορισμό των επιλογών. Θεωρητικά, αν υπάρχει μια κατανομή όπως η Pareto στην προσαρμογή τότε από τη φύση της έχει «βαριά» ουρά και η χρήση της ανταποκρίνεται άριστα σε περιστάσεις με ρίσκο όπως οι ασφάλειες υγείας.

Αντίθετα, για πληρωμές οδοντιατρικών ασφαλειών μια κατανομή με «ελαφριά» ουρά θεωρείτο βέλτιστη επιλογή, όπως η Λογάριθμο-κανονική κατανομή.

Θυμίζουμε ότι όπως σημειώθηκε στον Ορισμό 2.7, η ροπή  $k$ -τάξης μιας συνεχής τυχαίας μεταβλητής, μη αρνητικής (όπως τα ασφάλιστρα) δίδεται από τη σχέση

$$\int_0^{\infty} x^k f(x) dx.$$

Είναι προφανές ότι η ύπαρξη αυτού του ολοκληρώματος εξαρτάται τόσο από τις τιμές του εκθέτη  $k$ , όσο και από τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $f(x)$ . Δηλαδή, αν η συνάρτηση πυκνότητας λαμβάνει υψηλές τιμές για ακραίες θετικές τιμές του  $x$  το παραπάνω ολοκλήρωμα δεν συγκλίνει (τείνει στο άπειρο). Γι' αυτό η ροπή  $k$ -τάξης μπορεί να λειτουργήσει ως εύρεση της «βαριάς» ουράς καθώς σε κατανομές με μεγάλες ροπές σε ορίσματα υψηλά, υποδηλώνεται ύπαρξη «βαριάς» δεξιάς ουράς.

Ένα παράδειγμα σύγκρισης παρουσιάζεται ακολούθως. Υπολογίζονται οι ροπές  $k$ -τάξης των κατανομών Γάμμα και Pareto, αντιστοίχως, και ελέγχεται η ύπαρξη της, δηλαδή αν συγκλίνουν τα ολοκληρώματά τους για όλα τα  $k$  ή συγκεκριμένα εξ' αυτών.

- Για την κατανομή Γάμμα:

$$\mu'_k = \int_0^{\infty} x^k \frac{x^{a-1} e^{-\frac{x}{\theta}}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} dx$$

Θέτουμε  $y = \frac{x}{\theta}$  και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι

$$\mu'_k = \int_0^{\infty} (y\theta)^k \frac{(y\theta)^{a-1} e^{-y}}{\Gamma(\alpha)\theta^\alpha} dy.$$

Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση

$$\mu'_k = \frac{\theta^k}{\Gamma(\alpha)} \Gamma(\alpha + k) < \infty, \text{ για οποιοδήποτε } k.$$

- Για την κατανομή Pareto:

$$\mu'_k = \int_0^{\infty} x^k \frac{a\theta^\alpha}{(x + \theta)^{\alpha+1}} dx$$

Θέτουμε  $y = x + \theta$  και αντικαθιστώντας προκύπτει ότι

$$\mu'_k = \int_0^{\infty} (y - \theta)^k \frac{a\theta^\alpha}{y^{\alpha+1}} dy.$$

Κάνοντας πράξεις καταλήγουμε στην ακόλουθη έκφραση

$$\mu'_k = a\theta^\alpha \int_\theta^{\infty} \sum_{j=0}^k y^{j-a-1} (-\theta)^{k-j} dx, \text{ για τις ακέραιες τιμές του } k.$$

Ωστόσο, για να συγκλίνει το τελευταίο ολοκλήρωμα θα πρέπει ο εκθέτης του  $y$  να είναι αυστηρά μικρότερος του  $-1$ , δηλαδή:

$$j - a - 1 < -1, \text{ για κάθε } j$$

$$j - a < 0, \text{ για κάθε } j$$

$$j < a, \text{ για κάθε } j.$$

Οπότε θα ισχύει και για  $j = x$ , δηλαδή απαιτείται το  $k < a$  για να συγκλίνει η σειρά και εν γένει το ολοκλήρωμα στις ακέραιες τιμές του  $k$ . Επομένως, η ροπή  $k$ -τάξης υπάρχει αν και μόνο αν το  $k < a$ , ενώ στην περίπτωση της κατανομής Γάμμα υπάρχει

για κάθε  $k$ . Έτσι, καταλήγουμε ότι η κατανομή Pareto έχει πιο βαριά δεξιά ουρά από την κατανομή Γάμμα (Wang et al., 1997).

Ένας άλλος τρόπος σύγκρισης δύο κατανομών με βάση το βάρος της ουράς τους διακρίνεται μέσα από το όριο του λόγου των συναρτήσεων επιβίωσης με τα  $x$  να τείνουν στο  $\infty$  (για μεγάλες τιμές του  $x$ )<sup>1</sup>. Αναλυτικότερα, αν ο αριθμητής υπερβαίνει δραματικά την εικόνα του παρονομαστή, τότε το όριο του λόγου αποκλίνει

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S_1(x)}{S_2(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-f_1(x)}{-f_2(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_1(x)}{f_2(x)}.$$

Η πρώτη ισότητα οφείλεται στον κανόνα του De L' Hospital, καθώς η παράγωγος της συνάρτησης επιβίωσης ισούται με την αντίθετη της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Συνεπώς, όσο το αρχικό όριο αποκλίνει, θα τείνει στο άπειρο και το τελικό όριο, άρα θα αυξάνει γρηγορότερα η  $f_1(x)$  όσο το  $x \rightarrow \infty$ , δηλαδή θα έχει πιο «βαριά» ουρά από την  $f_2(x)$ , (Rojo, 1992).

Στο σημείο αυτό θα αναπτυχθεί ξανά το ίδιο παράδειγμα με την κατανομή Pareto και την κατανομή Γάμμα, αυτή τη φορά όμως ο έλεγχος των ουρών τους θα πραγματοποιηθεί με βάση το κριτήριο του ορίου των λόγων των συναρτήσεων πυκνότητας τους, (Πιτσέλης, 2018).

- Για την κατανομή Γάμμα:

$$f_{gamma}(x) = x^{\tau-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} \lambda^{-\tau} \Gamma(\tau)^{-1}, \quad x > 0 \quad (\lambda > 0, \tau > 0)$$

- Για την κατανομή Pareto:

$$f_{pareto}(x) = \alpha \theta^\alpha (x + \theta)^{-\alpha-1}, \quad x > 0 \quad (\theta > 0, \alpha > 0)$$

Άρα το όριο του λόγου των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας των δύο κατανομών γίνεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{pareto}(x)}{f_{gamma}(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha \theta^\alpha (x + \theta)^{-\alpha-1}}{x^{\tau-1} e^{-\frac{x}{\lambda}} \lambda^{-\tau} \Gamma(\tau)^{-1}} \\ &= C \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{\lambda}}}{(x+\theta)^{\alpha+1} x^{\tau-1}} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>  $X_1 \sim f_1, S_1$   
 $X_2 \sim f_2, S_2$

όπου το  $C = \frac{a\theta^\alpha}{\lambda^{-\tau}[\Gamma(\tau)]^{-1}}$  είναι σταθερά και εξαρτάται μονάχα από τις παραμέτρους

Όμως η τελευταία ποσότητα  $C \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{\lambda}}}{(x+\theta)^{\alpha+1} x^{\tau-1}}$  υπερβαίνει την:

$$C \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{\lambda}}}{(x+\theta)^{\alpha+1}},$$

καθώς έχει μειωθεί ο παρονομαστής και από τους κανόνες του De L' Hospital αφού

$$\frac{d\left(e^{\frac{x}{\lambda}}\right)}{dx} = \frac{1}{\lambda} e^{\frac{x}{\lambda}}, \text{ και } \frac{d((x+\theta)^{\alpha+1})}{dx} = (\alpha+1)(x+\theta)^\alpha$$

Επαγωγικά μετά από  $\alpha+1$  παραγωγίσεις έχουμε:

$$\frac{d^{\alpha+1}\left(e^{\frac{x}{\lambda}}\right)}{dx} = \frac{1}{\lambda^{\alpha+1}} e^{\frac{x}{\lambda}}, \text{ και } \frac{d^{\alpha+1}((x+\theta)^{\alpha+1})}{dx} = (\alpha+1)!$$

Τουτέστιν, ύστερα από  $\alpha+1$  εφαρμογές του De L'Hospital έχουμε ότι:

$$C \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{x}{\lambda}}}{(x+\theta)^{\alpha+1}} = C \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}} e^{\frac{x}{\lambda}}}{(\alpha+1)!} = \infty$$

Άρα  $\frac{f_{pareto}}{f_{gamma}} > C \frac{e^{\frac{x}{\lambda}}}{(x+\theta)^{\alpha+1}}$  και  $C \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\lambda^{\alpha+1}} e^{\frac{x}{\lambda}}}{(\alpha+1)!} = \infty$

οπότε το  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{pareto}}{f_{gamma}} = \infty$  κάτι που ερμηνεύεται ως ότι η  $f_{pareto}$  συγκλίνει γρηγορότερα στο  $\infty$  από ότι η  $f_{gamma}$ . Επομένως, η Pareto έχει πιο «βαριά» ουρά, δηλαδή πιο μεγάλη πιθανότητα εμφάνισης υψηλών τιμών σε σχέση με την κατανομή Γάμμα.

Δύο ακόμη μέτρα σχετικά με την ουρά μιας κατανομής αντικατοπτρίζονται στην ένταση κινδύνου (hazard rate) και στο μέσο υπολειπόμενο χρόνο ζωής (mean residual lifetime).



Για την ένταση κινδύνου έχουμε δύο περιπτώσεις:

1. Αν η συνάρτηση της έντασης κινδύνου είναι φθίνουσα, τότε σε μεγάλες τιμές η πιθανότητα εμφάνισης τους μπορεί να είναι μικρή αλλά για ακόμη μεγαλύτερες τιμές η πιθανότητα πραγματοποίησης τους γίνεται ολοένα και μεγαλύτερη. Σε αυτή, λοιπόν, την περίπτωση υπάρχει ένδειξη ότι η κατανομή έχει βαριά ουρά. Αν επιπλέον  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$ , τότε η κατανομή έχει βαριά ουρά.

2. Αν η συνάρτηση της έντασης κινδύνου είναι αύξουσα, τότε σε μεγάλες τιμές η πιθανότητα εμφάνισης τους μπορεί να είναι μικρή αλλά για ακόμη μεγαλύτερες τιμές η πιθανότητα πραγματοποίησης τους γίνεται ολοένα και πιο μικρή. Ουσιαστικά, η δεξιά ουρά τέτοιων κατανομών είναι λεπτή (light).

Επομένως, ας υπολογιστεί η ένταση κινδύνου για την κατανομή Pareto:

$$h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}$$
$$h(x) = \frac{\alpha \theta^\alpha (x + \theta)^{-\alpha-1}}{\theta^\alpha (x + \theta)^{-\alpha}} = \frac{\alpha}{x + \theta}$$

Έστω ότι τα  $x > 0$ , όπως και στις τυχαίες μεταβλητές ασφαλιστρών σε αναλογιστικά ζητήματα και  $x_1, x_2$  τέτοια ώστε  $x_1 > x_2$ . Τότε:

$$x_1 + \theta > x_2 + \theta$$
$$\frac{1}{x_1 + \theta} < \frac{1}{x_2 + \theta}$$
$$\frac{\alpha}{x_1 + \theta} < \frac{\alpha}{x_2 + \theta}$$
$$h(x_1) < h(x_2)$$

Άρα η ένταση κινδύνου της κατανομής Pareto φθίνει και  $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$  κάτι που υποδηλώνει την «βαριά» ουρά της συγκεκριμένης κατανομής.

Για την κατανομή Γάμμα ισχύει ότι:

$$h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}.$$

Όμως αυτός ο τύπος δεν είναι εφαρμόσιμος καθώς απουσιάζει μια κλειστή μορφή του  $\bar{F}(x)$ . Επομένως:

$$\frac{1}{h(x)} = \frac{\int_x^\infty f(t)dt}{f(x)} = \frac{\int_0^\infty f(x+y)dy}{f(x)},$$

Οπότε, εάν ο λόγος  $\frac{f(x+y)}{f(x)}$  αυξάνεται ως συνάρτηση του  $x$  για σταθεροποιημένο  $y$  τότε ο λόγος  $\frac{1}{h(x)}$  αυξάνεται εξίσου, δηλαδή η  $h(x)$  είναι φθίνουσα. Επομένως, ελέγχεται η υπόσταση αυτού του εγχειρήματος αναφορικά με την κατανομή Γάμμα ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{f(x+y)}{f(x)} &= \frac{(x+y)^{a-1} e^{-\frac{x+y}{\theta}}}{x^{a-1} e^{-\frac{x}{\theta}}} = \frac{(x+y)^{a-1} e^{-\frac{y}{\theta}}}{x^{a-1}} \\ &= \left(\frac{x+y}{x}\right)^{a-1} e^{-\frac{y}{\theta}} = \left(1 + \frac{y}{x}\right)^{a-1} e^{-\frac{y}{\theta}} \end{aligned}$$

Όμως,

$$\left(1 + \frac{y}{x}\right)^{a-1} e^{-\frac{y}{\theta}} = \begin{cases} \text{αύξουσα, } 0 < a < 1 \\ \text{φθίνουσα, } a > 1 \end{cases}$$

Επομένως, αν η κατανομή Γάμμα που έχει επιλεχθεί έχει παράμετρο  $0 < a < 1$ , αναμένεται να έχει βαριά ουρά ενώ για  $a > 1$ , θα έχει ελαφριά ουρά κατανομής. Σε περίπτωση που το  $a = 1$ , τότε προκύπτει εκθετική κατανομή, που ως γνωστόν έχει σταθερή ένταση κινδύνου  $h$ , και προφανώς έχει ελαφριά ουρά.

Ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής δίνει εξίσου σημαντική πληροφορία σχετικά με το είδος της ουράς μιας κατανομής. Αν, η συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής αυξάνεται στο  $x$  και το όριο καθώς  $x \rightarrow \infty$  είναι άπειρο, τότε σε μεγάλες τιμές το αναμενόμενο αποτέλεσμα γίνεται ολοένα και μεγαλύτερο, οπότε η πιθανότητα

μεταφέρεται προς τα αριστερά, δίδοντας μια πιο «βαριά» ουρά στην κατανομή. Γενικότερα, η ένταση κινδύνου είναι στενά συνδεδεμένη με τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής μιας τυχαίας μεταβλητής.

Αρχικά,

$$\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = \frac{e^{-\int_0^{x+y} h(t)dt}}{e^{-\int_0^x h(t)dt}} = e^{-\int_x^{x+y} h(t)dt} = e^{-\int_0^y h(x+t)dt}.$$

Με λίγα λόγια, αν η ένταση κινδύνου  $h(x)$  είναι φθίνουσα συνάρτηση, τότε η συνάρτηση του υπολειπόμενου χρόνου ζωής  $e(x)$  είναι μια αύξουσα συνάρτηση του  $x$ , σύμφωνα με την παραπάνω σχέση που καταλήξαμε για το λόγο  $\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)}$ . Αντίστοιχα, εάν η ένταση κινδύνου είναι αύξουσα συνάρτηση, ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής θα φθίνει ως προς  $x$ .

Υπάρχει βέβαια μια ακόμη διασύνδεση μεταξύ της έντασης κινδύνου και του υπολειπόμενου χρόνου ζωής. Όσο το  $x$  τείνει στο άπειρο, τα  $\bar{F}(x)$ ,  $\int_x^\infty \bar{F}(t)dt$  κατευθύνονται προς το 0. Έτσι, η οριακή συμπεριφορά του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής με τη βοήθεια των κανόνων του De L'Hospital δίνουν ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_x^\infty \bar{F}(t)dt}{\bar{F}(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\bar{F}(x)}{-f(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)}.$$

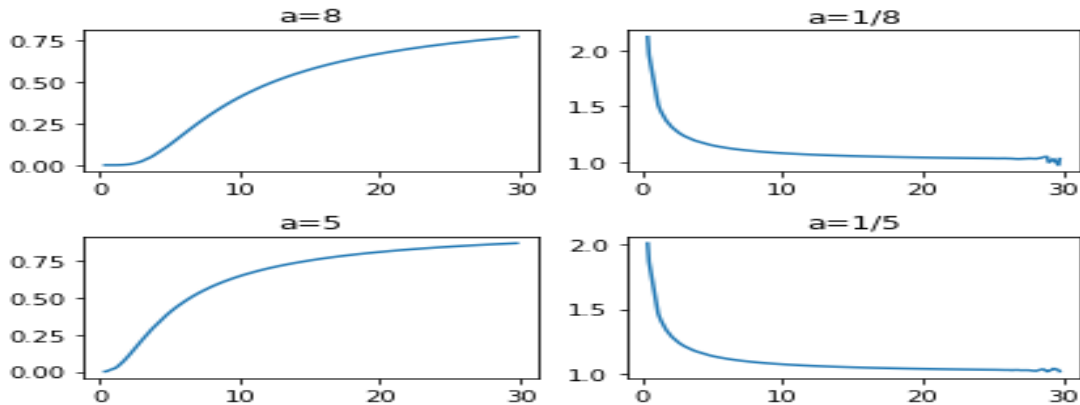
Ως παράδειγμα θα ελεγχθεί η συμπεριφορά του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής για την κατανομή Γάμμα. Το πρόβλημα σε αυτή την κατανομή, όπως και προηγουμένως, είναι η πολυπλοκότητα του  $e(x)$  γι' αυτό και ελέγχεται το  $e(0)$ . Όμως το  $e(0) = E(X) = \alpha\theta$ , οπότε έχουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} e(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{h(x)} = \theta.$$

Από το προηγούμενο παράδειγμα σχετικά με την κατανομή Γάμμα και την ένταση κινδύνου, είναι γνωστό ότι η συνάρτηση της έντασης κινδύνου είναι φθίνουσα για

$0 < \alpha < 1$  και αύξουσα για  $\alpha > 1$  (ΣΧΗΜΑ 2-1). Επομένως, η συνάρτηση του μέσου υπολειπόμενου χρόνου ζωής  $e(x)$ , παρουσιάζεται αύξουσα από το  $e(0) = \alpha\theta$  έως το  $e(\infty) = \theta$  για  $0 < \alpha < 1$  ενώ είναι φθίνουσα στην αντίθετη περίπτωση.

ΣΧΗΜΑ 2-1



Ένταση κινδύνου της κατανομής Γάμα για διάφορες τιμές της παραμέτρου της  $\alpha$ .

## 2.2 Θεωρητικά αποτελέσματα

### 2.2.1 Ασφαλιστικά επίπεδα

Σύνηθες φαινόμενο των ασφαλειών είναι τα επίπεδα με τα οποία διαχωρίζονται τα ασφάλιστρα. Η κατηγοριοποίηση αυτή προκύπτει ως απόρροια του κινδύνου που ενδέχεται να υπάρχει σε αυτές τις περιπτώσεις (Wang, 1998).

#### Ορισμός 2.12

Έστω μια τυχαία μεταβλητή  $X$ . Το επίπεδο κινδύνου  $(a, a + h]$  ορίζεται ως μια επέκταση της τυχαίας μεταβλητής  $X$ :

$$X_{(a, a+h]} = \begin{cases} 0, & 0 \leq X < a \\ X - \alpha, & \alpha \leq X < a + h \\ h, & a + h \leq X \end{cases}$$

### Λήμμα 2.1

Η επέκταση της απώλειας πάνω στο  $X_{(\alpha, \alpha+h]}$  έχει συνάρτηση επιβίωσης:

$$S_{X_{(\alpha, \alpha+h]}} = \begin{cases} S_X(a+t), & t < h \\ 0, & t \geq h \end{cases}$$

Επομένως, από τον Ορισμό 2.12 και Λήμμα 2.1 υπολογίζεται και η μέση τιμή της συνάρτησης επιβίωσης στο επίπεδο  $(\alpha, \alpha + h]$ :

$$E[X_{(\alpha, \alpha+h)}] = \int_0^{\infty} S_{X_{(\alpha, \alpha+h)}}(t) dt = \int_0^h S_X(a+u) du = \int_a^{a+h} S_X(t) dt .$$

Ουσιαστικά, η ανωτέρω μέση τιμή προωθεί το προσδοκώμενο αποτέλεσμα, δηλαδή ότι ως μέρος μιας τυχαίας μεταβλητής, προσδίδει μερίδιο ανάλογο και στην περίπτωση μιας ενδεχόμενης οριοθέτησης.

### 2.2.2 Συμμοτονικότητα (Comonotonicity)

Ο συνήθης τρόπος με τον οποίο εξετάζεται η σχέση μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών βασίζεται στο συντελεστή συσχέτισης του Pearson:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)}\sqrt{Var(Y)}},$$

όπου το  $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$  και  $Var(X), Var(Y)$  οι διασπορές των  $X, Y$  αντιστοίχως. Αν το  $\rho = 1$  προκύπτει τέλεια θετική συσχέτιση (για  $\rho = -1$  είναι τέλεια αρνητική συσχέτιση ομοίως). Σε περίπτωση που το  $\rho = 0$ , οι δύο μεταβλητές θεωρούνται ασυσχέτιστες.

Το βασικό μειονέκτημα της παραπάνω μεθοδολογίας αφορά στο γεγονός ότι το μέτρο αυτό εξετάζει μόνο γραμμικές σχέσεις μεταξύ των μεταβλητών. Ως επέκταση αυτού του αποτελέσματος προκύπτει η συμμοτονικότητα από τους Yaari (1987) και Schmeidler (1986).

### Ορισμός 2.13

Δύο μεταβλητές  $X, Y$  είναι συμμονοτονικές αν υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή  $Z$  και δύο αύξουσες συναρτήσεις  $u, v \in R$  έτσι ώστε:

$$X = u(Z) \text{ \& } Y = v(Z), \text{ με πιθανότητα } 1$$

Μάλιστα μπορεί να αποδειχθεί ότι δύο μεταβλητές πλήρως συσχετισμένες είναι και συμμονοτονικές. Αν επομένως, έχουμε δύο επίπεδα  $(a, a + h], (b, b + h]$  θα αντιστοιχούν τα επίπεδα πληρωμών  $X_{(a, a+h]}, X_{(b, b+h]}$  της συνάρτησης κινδύνου  $X$ , τα οποία είναι συμμονοτονικά από τη στιγμή που αποτελούν μέρος του συνολικού κινδύνου  $X$ .

### Λήμμα 2.2

Έστω δύο συναρτήσεις κινδύνου  $X, Y$  που είναι συμμονοτονικές. Τότε ισχύει ότι:

$$Cov(X, Y) \geq 0.$$

### Απόδειξη

Υπάρχει συνάρτηση  $u$  αύξουσα πραγματική έτσι ώστε:

$$X = u(Z), \quad Y = v(Z), \quad \text{με πιθανότητα } 1$$

Αφού η  $u$  δεν είναι φθίνουσα υπάρχει ένα  $t_0$  έτσι ώστε

$$u(t) \geq E[u(Z)], \text{ για κάθε } t \geq t_0$$

ενώ για κάθε  $t < t_0$  ισχύει ότι:

$$u(t) < E[u(Z)].$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
Cov(X, Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] = \int_0^{\infty} u(t)v(t)dF_Z(t) - E[u(Z)] \int_0^{\infty} v(t)dF_Z(t) \\
&= \int_0^{t_0} \{u(t) - E[u(Z)]\}v(t)dF_Z(t) + \int_{t_0}^{\infty} \{u(t) - E[u(Z)]\}v(t)dF_Z(t) \\
&\geq \int_0^{t_0} \{u(t) - E[u(Z)]\}v(t_0)dF_Z(t) + \int_{t_0}^{\infty} \{u(t) - E[u(Z)]\}v(t_0)dF_Z(t) \geq 0
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει από τη στιγμή που έχει θεωρηθεί ότι η διαφορά  $u(t) - E[u(Z)]$  θετική για κάθε  $t \geq t_0$ .  $\square$

### 2.2.3 Προσθετικότητα

Συχνά παρατηρείται ένας είδος μερικής ή ολικής προσθετικότητας μεταξύ δύο μεταβλητών κινδύνου αναφορικά με κάποιο μέτρο τους. Τις περισσότερες φορές ικανοποιείται ένας είδος υπο-προσθετικότητας, δηλαδή:

Έστω  $X, Y$  δύο συναρτήσεις κινδύνου και  $R$  ένα μέτρο του, τότε ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση (Artzner et al. 1996):

$$R[X_1 + X_2] \leq R[X_1] + R[X_2].$$

Στην πραγματικότητα η παραπάνω σχέση μπορεί να βοηθήσει έναν επενδυτή να συγχωνεύσει δύο χαρτοφυλάκια, ελαχιστοποιώντας τον κίνδυνο που είχε το άθροισμα των δύο χαρτοφυλακίων που το καθένα εμπεριείχε ξεχωριστά το κάθε χρηματοοικονομικό στοιχείο. Βέβαια, η ικανοποίηση μιας τέτοιας ιδιότητας φαντάζει δύσκολη, μιας και απαιτεί και την συμμοτονικότητα των δύο μεταβλητών. Όμως, δεν πρέπει να μεριμνάται πως τα ασφαλιστικά επίπεδα έχουν αυτή την ιδιότητα κάτι που συνεπάγεται και την υποπροσθετικότητα.

## 2.2.4 Ισοδύναμη προσέγγιση

Έστω κάποιος κίνδυνος  $X$ . Τότε:

$$H[X] = E[X] + R[X]$$

όπου εκφράζει την μεταφορά του κινδύνου  $X$ .

Η θεωρία του ισοδυναμίου, συνήθως, προσδίδει μια ένδειξη του κινδύνου δεξιάς ουράς.

Οι Wang et al. (1997) πρότειναν πέντε κύρια αξιώματα που πρέπει να χαρακτηρίζουν οι ασφαλιστικές τιμές κι αυτά είναι τα εξής:

### Αξίωμα 1

Για δεδομένες συνθήκες στην αγορά, η τιμή του ασφαλιστικού κινδύνου  $X$  επηρεάζεται μόνο από τη συνάρτηση κατανομής της. Για αυτό το λόγο εάν

$$S_1 = S_2$$

Τότε

$$H(X_1) = H(X_2)$$

### Αξίωμα 2

Εάν  $X_1 \leq X_2$ , με πιθανότητα 1 τότε:

$$H(X_1) \leq H(X_2).$$

### Αξίωμα 3

Αν  $X_1, X_2$  είναι συμμοτονικά τότε:

$$H(X_1 + X_2) = H(X_1) + H(X_2).$$

### Αξίωμα 4

Για  $x \geq 0$ , ισχύει ότι:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} H[X_{(x, \infty)}] = H[X]$$



και

$$\lim_{x \rightarrow \infty} H[\min(X, x)] = H[X].$$

### Θεώρημα 2.1

Εάν το ισοδύναμο  $H(X)$  ικανοποιεί τα Αξιώματα από 1 έως 4 και το  $H(1) = 1$ , τότε το  $H$  μπορεί να λάβει την ακόλουθη μορφή (Wang et al., 1997):

$$H(X) = \int_0^{\infty} \varphi[S_X(t)] dt$$

όπου η  $\varphi$  είναι μια συνάρτηση στρέβλωσης, η οποία καθορίζει το μέτρο κινδύνου, αύξουσα με τιμές  $\varphi(0) = 0$  και  $\varphi(1) = 1$ . Η παραπάνω μορφή ικανοποιεί μερικές επιπρόσθετες ιδιότητες όπως:

- $H(aX + b) = aH(X) + b$ , για  $a, b \geq 0$ .
- $H(X) \geq E(X)$ , αν και μόνο αν  $\varphi(x) \geq x$ , για όλα τα  $x \in [0,1]$ .
- Η  $H$  ικανοποιεί τη δεύτερη στοχαστική διαδικασία αν και μόνο αν η  $\varphi$  είναι κοίλη συνάρτηση.
- Εάν η  $\varphi$  είναι κοίλη τότε

$$H(X_1 + X_2) \leq H(X_1) + H(X_2)$$

Σε συνδυασμό με όσα διατυπώθηκαν παραπάνω μπορεί να καθοριστεί μια ολόκληρη κλάση από μέτρα κινδύνου για την απόκλιση δεξιάς ουράς ως εξής:

$$R[X] = \int_0^{\infty} \varphi[S_X(t)] dt - E(X)$$

υπό τον περιορισμό ότι :

$$\varphi \text{ αύξουσα, κοίλη, } \varphi(0) = 0 \text{ και } \varphi(1) = 1 .$$

Επιπλέον στα Αξιώματα 1-4 προτάθηκε ένα ακόμη Αξίωμα από τους Wang et al. (1997) για τη μείωση των κινδύνων που ακολουθούν σύνθετη κατανομή Bernoulli.

### Αξίωμα 5

Έστω  $Y = BX$ , να είναι ένας κίνδυνος που ακολουθεί σύνθετη κατανομή Bernoulli, όπου η  $B$  είναι ανεξάρτητη από την απώλεια της τυχαίας μεταβλητής  $X = Y | Y > 0$ . Σε αυτή την περίπτωση οι τιμές στην αγορά σχετικά με τους κινδύνους  $Y = BX$  και  $BH(x)$  είναι ισοδύναμες.

### Θεώρημα 2.2

Αν η τιμή  $H(X)$  ικανοποιεί τα Αξιώματα από 1 έως 5 που αναλύθηκαν προηγουμένως, τότε ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση:

$$H(X) = \int_0^{\infty} [S_X(t)]^r dt, \quad \text{όπου } r > 0$$

Επιπλέον για  $0 < r \leq 1$  ισχύει:

$$H(X) \geq E(X).$$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 φαίνεται ότι μια αρκετά καλή επιλογή συναρτήσεων στρέβλωσης  $\varphi$  είναι εκείνες που ικανοποιούν:

$$\varphi(x) = x^r, \quad 0 < r \leq 1$$

#### **2.2.5 Απόκλιση δεξιάς ουράς**

Ένα ακόμη μέτρο σχετικά με τον υπολογισμό του κινδύνου της δεξιάς ουράς είναι η απόκλιση της, όπως ορίστηκε από τον Wang (1998).

#### Ορισμός 2.14

Έστω μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή  $X$  με συνάρτηση επιβίωσης

$$S_X(t) = P\{X > t\}.$$

Τότε ορίζεται η απόκλιση δεξιάς ουράς όπως παρακάτω:

$$D(X) = \int_0^{\infty} \sqrt{S_X(t)} dt - \int_0^{\infty} S_X(t) dt$$

και ο δείκτης δεξιάς ουράς :

$$\begin{aligned} d(X) = \frac{D(X)}{E(X)} &\Leftrightarrow d(X) = \frac{\int_0^{\infty} \sqrt{S_X(t)} dt - \int_0^{\infty} S_X(t) dt}{\int_0^{\infty} S_X(t) dt} \\ &\Leftrightarrow d(X) = \frac{\int_0^{\infty} \sqrt{S_X(t)} dt}{\int_0^{\infty} S_X(t) dt} - 1 \end{aligned}$$

Ιδιότητες που ικανοποιούνται για την απόκλιση είναι οι ακόλουθες:

- Αν  $P\{X = b\} = 1$  τότε  $D[X] = 0$ .
- $D[cX] = cD[X]$ , για  $c > 0$ .
- $D[X + b] = D[X]$ , για κάθε  $b$ .
- $D[X_1 + X_2] \leq D[X_1] + D[X_2]$ .
- Αν τα  $X_1, X_2$  είναι συμμοτοτικά, τότε ισχύει ότι:

$$D[X_1 + X_2] = D[X_1] + D[X_2].$$

Η συγκεκριμένη έννοια μπορεί εύκολα να συμπεριληφθεί στην ιδέα των ασφαλιστικών επιπέδων. Πιο συγκεκριμένα, για ένα μικρού εύρους διάστημα  $(t, t + dt]$  ισχύουν τα ακόλουθα:

- $D[X_{(t,t+dt)}] \leq \sigma[X_{(t,t+dt)}]$ .
- Ο λόγος  $\frac{D[X_{(t,t+dt)}]}{\sigma[X_{(t,t+dt)}]}$  αποτελεί αύξουσα συνάρτηση του  $t$ .
- Εάν  $X$  είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με ενίσχυση (support) το σύνολο  $[0, \omega)$ ,  $\omega \in R \cup \{\pm\infty\}$  τότε:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{D[X_{(t,t+dt)}]}{\sigma[X_{(t,t+dt)}]} = 1.$$

- Για μία μη αρνητική τυχαία μεταβλητή  $X$ , η απόκλιση δεξιάς ουράς της  $D[X]$  είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν η τυπική της απόκλιση  $\sigma(X)$  είναι πεπερασμένη.

### Απόδειξη

Έστω μια μεταβλητή  $u$  τέτοια ώστε:

$$u = S_X(t)$$

δηλαδή η πιθανότητα η  $X$  να χτυπάει το διάστημα  $[t, t + dt]$  για οποιοδήποτε  $dt$  καθώς

$$S_X(t) = P\{X > t\}.$$

Το επίπεδο πληρωμής στο διάστημα  $[t, t + dt]$ , αφού πρώτα περιθωριοποιήσουμε την τυχαία μεταβλητή  $X$  στο  $[t, t + dt]$  ως  $X_{(t,t+dt]}$ , ακολουθεί κατανομή Bernoulli μιας και:

$$P\{X_{(t,t+dt]} = 0\} = 1 - u$$

και

$$P\{X_{(t,t+dt]} = dt\} = u.$$

Οπότε σύμφωνα με την γνωστή μέση τιμή σε κατανομές Bernoulli ισχύει ότι:

$$E(X_{(t,t+dt]}) = udt$$

και

$$E(X_{(t,t+dt]}^2) = udt^2$$

Άρα από τον τύπο :

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Ισχύει ότι :

$$\begin{aligned} Var(X_{(t,t+dt]}) &= E(X_{(t,t+dt]}^2) - [E(X_{(t,t+dt]})]^2 = udt^2 - (udt)^2 \\ &= dt^2(u - u^2) \Rightarrow \sigma[X_{(t,t+dt]}] = \sqrt{u - u^2} dt \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, ισχύει ότι:

$$D[X_{(t,t+dt)}] = (\sqrt{u} - u)dt.$$

Ακολούθως θα δειχθεί ότι:

$$(\sqrt{u} - u) \leq \sqrt{u - u^2}, \quad \forall 0 \leq u \leq 1$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{u} - u) \leq \sqrt{u - u^2} &\Rightarrow (\sqrt{u} - u)^2 \leq \sqrt{u - u^2}^2 \Rightarrow \sqrt{u}^2 - 2u\sqrt{u} + u^2 \leq u - u^2 \\ &\Rightarrow -2u\sqrt{u} + 2u^2 \leq 0 \Rightarrow -2u(\sqrt{u} - u) \leq 0 \\ &\Rightarrow \sqrt{u} - u \geq 0 \Rightarrow \sqrt{u} \geq u.\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα είναι ορθή αφού όταν τα  $0 \leq u \leq 1$  τότε οι δυνάμεις του  $u$  φθίνουν, αυξάνοντας τον εκθέτη κάθε φορά.

Επίσης,

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{u} - u)}{\sqrt{u - u^2}} = 1.$$

Αφού ο λόγος:

$$\frac{(\sqrt{u} - u)}{\sqrt{u - u^2}} = \frac{\sqrt{u}(1 - \frac{u}{\sqrt{u}})}{\frac{\sqrt{u}\sqrt{u - u^2}}{\sqrt{u}}} = \frac{\sqrt{u}(1 - \sqrt{u})}{\sqrt{u}\sqrt{\frac{u - u^2}{u}}} = \frac{1 - \sqrt{u}}{\sqrt{1 - u}}$$

Όταν το  $u \rightarrow 0$ , είναι θετικό αφού ανήκει στο  $(0,1]$ . Άρα η τελευταία σχέση μπορεί να αντικατασταθεί στο όριο δίνοντας μας:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{u} - u)}{\sqrt{u - u^2}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{u}}{\sqrt{1 - u}}$$

και αφού

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{u}}{\sqrt{1 - u}} = \frac{1 - \sqrt{0}}{\sqrt{1 - 0}} \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{u}}{\sqrt{1 - u}} = 1.$$

Άρα και το

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{u}-u)}{\sqrt{u-u^2}} = 1. \quad \square$$

### 2.2.6 Δείκτης Gini

Αρκετές κατανομές με μεγάλη ουρά πηγάζουν μέσα από κατανομές εισοδήματος. Χαρακτηριστικά παραδείγματα αποτελούν οι κατανομές Pareto και η λογαριθμοκανονική κατανομή (Arnold, 1983). Ένα ευρέως γνωστό μέτρο για την εισοδηματική ανισότητα είναι ο δείκτης Gini.

#### Ορισμός 2.15

Έστω ότι το επίπεδο του πλούτου για τα άτομα σε ένα σύνολο εκφράζεται μέσα από μια κατανομή  $S_X(u)$ , που αναφέρεται στο ποσοστό των ατόμων με περιουσία που υπερβαίνει το  $u$ . Ως μέτρο της ανισότητας εισοδήματος μιας κοινωνίας, ο δείκτης Gini είναι:

$$gini(X) = \frac{E(|X_1 - X_2|)}{E(X_1 + X_2)} = \frac{E(|X_1 - X_2|)}{2E(X)},$$

όπου  $X_1, X_2$  είναι ανεξάρτητες και έχουν την ίδια κατανομή με τη μεταβλητή  $X$ .

#### Πρόταση 2.1

Ο δείκτης Gini μπορεί να γραφτεί με ισοδύναμο τρόπο ως εξής (Dorfman, 1979):

$$gini(X) = 1 - \frac{\int_0^\infty S_X(u)^2 du}{\int_0^\infty S_X(u) du}.$$

#### Απόδειξη

Αρχικά θα αποδειχθεί ότι ισχύει:

$$|x - y| = 2 \left[ \frac{x + y}{2} - \min(x, y) \right].$$

Έστω  $x < y$ , τότε:

$$|x - y| = y - x$$

και

$$\min(x, y) = x.$$

Άρα:

$$|x - y| = 2 \left[ \frac{x + y}{2} - \min(x, y) \right]$$

$$y - x = 2 \left[ \frac{x + y}{2} - x \right]$$

$$y - x = 2 \frac{x + y}{2} - 2x$$

$$y - x = x + y - 2x$$

$$y - x - x - y + 2x = 0$$

$$0 - 2x + 2x = 0$$

$$0 = 0, \text{ ισχύει.}$$

Ανάλογο αποτέλεσμα θα είχαμε στην περίπτωση που λαμβάναμε  $y < x$ .

Συνεπώς, για  $X, Y$  ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές ισχύει ότι:

$$S_{\min(X,Y)}(t) = P(X > t, Y > t).$$

Όμως αφού είναι ανεξάρτητες η πιθανότητα της τομής τους ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων τους:

$$S_{\min(X,Y)}(t) = P(X > t)P(Y > t) \Rightarrow S_{\min(X,Y)}(t) = S_X(t)S_Y(t).$$

Όμως για  $X$  και  $Y$ , ισόνομες:

$$S_X(t)S_Y(t) = S_X(t)^2,$$

οπότε

$$S_{\min(X,Y)}(t) = S_X(t)^2, \quad 0 \leq t < \infty.$$

Επίσης αν στη θέση των  $x, y$  τοποθετηθούν οι τυχαίες μεταβλητές  $X, Y$  αντιστοίχως:

$$\begin{aligned}
 |X - Y| &= 2 \left[ \frac{X + Y}{2} - \min(X, Y) \right] \\
 \frac{1}{2} E\{|X - Y|\} &= E \left[ \frac{X + Y}{2} - \min(X, Y) \right] \\
 \frac{1}{2} E\{|X - Y|\} &= \left[ E \left[ \frac{X + Y}{2} \right] - E(\min(X, Y)) \right] \\
 \frac{1}{2} E\{|X - Y|\} &= \frac{1}{2} E[X] + \frac{1}{2} E[Y] - E(\min(X, Y)) \\
 \frac{1}{2} E\{|X - Y|\} &= \frac{1}{2} E[X] + \frac{1}{2} E[X] - E(\min(X, Y)) \\
 \frac{1}{2} E\{|X - Y|\} &= E[X] - \int_0^{\infty} S_X(t)^2 dt \\
 \frac{E\{|X - Y|\}}{2E[X]} &= 1 - \frac{\int_0^{\infty} S_X(t)^2 dt}{E[X]} \\
 \frac{E\{|X - Y|\}}{E[X + Y]} &= 1 - \frac{\int_0^{\infty} S_X(t)^2 dt}{\int_0^{\infty} S_X(t) dt}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Ερμηνευτικά, όσο μεγαλύτερος είναι ο δείκτης Gini τόσο μεγαλύτερη η ανισότητα των εισοδημάτων μέσα σε ένα κοινωνικό σύνολο. Μεταφέροντας ένα μοναδιαίο χρηματικό ποσό από εύπορους ανθρώπους σε ασθενέστερους, ο δείκτης Gini φθίνει αναλογικά. Αντίστοιχη συμπεριφορά παρατηρείται όταν προστίθεται ένα σταθερό ποσό σε όλα τα άτομα μιας κοινωνίας.

Γενικότερα, υπάρχουν μερικές ισοδύναμες εκφράσεις του δείκτη Gini όπως:

$$\begin{aligned}
 gini(X) &= \frac{1}{2} E[|X_1 - X_2|] = \int_0^{\infty} [S_X(t) - S_X(t)^2] dt \Leftrightarrow \\
 gini(X) &= E[X] - E[\min(X_1, X_2)] \Leftrightarrow \\
 gini(X) &= E[\max(X_1, X_2)] - E[X],
 \end{aligned}$$

όπου  $X_1, X_2$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με κάποια τυχαία μεταβλητή  $X$ .

Επομένως, η ερμηνεία που δίνει ο δείκτης Gini για τη δεξιά ουρά κατανομής έχει ως εξής :



Έστω ότι παρατηρείται μια τυχαία μεταβλητή  $X$ , για την οποία έχουμε άλλες δύο μη παρατηρήσιμες και ανεξάρτητες  $Y_1, Y_2$  και

$$X = \min(Y_1, Y_2)$$

Τότε η απόκλιση της δεξιάς ουράς της κατανομής  $X$  ταυτίζεται με το δείκτη Gini του  $Y_1$ . Ουσιαστικά, η απόκλιση δεξιάς ουράς της  $X$  ισούται με το ήμισυ της αναμενόμενης απόλυτης διαφοράς μεταξύ των  $Y_1, Y_2$ . Ένας, ακόμη τρόπος ερμηνείας θεωρεί την απόκλιση δεξιάς ουράς ως τη μέση διαφορά μεταξύ  $Y_1$  και  $X$ .

Γενικότερα, φαίνεται πως ο δείκτης δεξιάς ουράς και ο δείκτης Gini παρουσιάζουν μια ομοιόμορφη ερμηνεία και αναπαράσταση. Επίσης, ο δείκτης  $d(X)$  που μετριάζει τον κίνδυνο δεξιάς ουράς έχει παράλληλες ιδιότητες με το μέτρο των εισοδηματικών ανισοτήτων που επιφέρει ο δείκτης Gini.

### 2.2.7 Μετρικές πιθανοτήτων

Η θεωρία πιθανοτήτων προσφέρει άμεσα και έμμεσα αρκετές λύσεις σε ζητήματα εφαρμοσμένων επιστημών, όπως και στον Αναλογισμό. Μια ειδική κατηγορία σε αυτό τον τομέα αποτελούν τα θεωρήματα σύγκλισης. Εκεί γίνεται εκτεταμένη χρήση μετρικών χώρων πιθανοτήτων που ο ρόλος τους βασίζεται στην μέτρηση της απόστασης μεταξύ κατανομών πιθανότητας (Rachev, 1991).

Μια πολύ σημαντική μετρική είναι η Kantorovich (Rachev, 1991) ή αλλιώς η Mallows μετρική (Aebi et al., 1992). Οι συγκεκριμένη μετρική έχει συχνή χρήση στην επιστήμη του Αναλογισμού. Για το λόγο αυτό παρουσιάζονται ακολούθως:

#### Ορισμός 2.16

Έστω δύο συναρτήσεις επιβίωσης,  $S_1, S_2$ , τότε ορίζεται η διάταξη μέσω της μετρικής (Kantorovich) Mallows ως έχει:

$$M(S_1, S_2) = \inf\{E[|X - Y|] : S_X = S_1, S_Y = S_2\}.$$

Οι Aebi et al. (1992) έδειξαν ότι η μετρική του Mallows επιφέρει μερικά πολύ σημαντικά αποτελέσματα στον χώρο των ασφαλιστικών μαθηματικών και κυρίως των αναλογιστικών μαθηματικών. Έστω  $U$  μια ομοιόμορφη κατανεμημένη τυχαία

μεταβλητή στο  $[0,1]$ . Για τις συναρτήσεις επιβίωσης  $S_1, S_2$  η μετρική Mallow ορίζεται ως:

$$M(S_1, S_2) = E[|S_1^{-1}(U) - S_2^{-1}(U)|] = \int_{-\infty}^{+\infty} |S_1(t) - S_2(t)| dt$$

Ουσιαστικά, η μετρική Mallow, μας δείχνει ότι για δύο οποιεσδήποτε τυχαίες μεταβλητές, ταυτίζεται με τη διαφορά δύο συμμοτονικών μεταβλητών, αφού οι  $S_1^{-1}, S_2^{-1}$  είναι αύξουσες. Επίσης είναι εμφανές ότι για μια μη αρνητική τυχαία μεταβλητή  $X$ , η δεξιά ουρά κατανομής της με βάση την μετρική Mallow ορίζεται ως (Aebi et al., 1992):

$$D(X) = M(\sqrt{S_X(t)}, S_X(t)) = \int_0^{\infty} [\sqrt{S_X(t)} - S_X(t)] dt.$$

### 2.2.8 Δείκτης δεξιάς ουράς

Στο σημείο αυτό αναφέρεται ένας ακόμη δείκτης μέτρησης του ασφαλιστικού κινδύνου δεξιάς ουράς, που υπάρχει στη βιβλιογραφία (Wei & Yatrakos, 2004).

#### Ορισμός 2.17

Έστω  $X$  μια τυχαία μεταβλητή με πεπερασμένη τη μέση απόλυτη τιμή της, δηλαδή

$$E|X| < \infty$$

με συνάρτηση κατανομής  $F_X$ , μέση τιμή  $\mu$  και  $I$  υποδηλώνει τη δείκτρια συνάρτηση. Ο δείκτης δεξιάς ουράς  $SLI_X$  υπολογίζεται να είναι στο σημείο  $\mu + t$  είναι:

$$SLI_X(t) = E\{(X - \mu)I[X > \mu + t]\} = \int_{\mu+t}^{+\infty} (x - \mu) dF_X(x).$$

Θέτοντας όπου  $w = x - \mu$  για  $x \geq \mu + t \rightarrow x - \mu \geq t \rightarrow w \geq t$

$$SLI_X(t) = \int_t^{+\infty} w dF_W(x) = \int_t^{+\infty} x dF_{X-\mu}(x).$$

Διακρίνονται τρεις επιπλέον εναλλακτικοί ισοδύναμοι τύποι του συγκεκριμένου δείκτη (Kaas et al., 2001):

$$1. \quad SLI_X(t) = TCE_{X-\mu} \left( F_{X-\mu}(t) \right) S_{X-\mu}(t)$$

όπου

$$TCE_X(p) = E[X|X > F_X^{-1}(p)], \quad 0 < p < 1$$

οπότε

$$\begin{aligned} SLI_X(t) &= TCE_{X-\mu} \left( F_{X-\mu}(t) \right) S_{X-\mu}(t) \\ SLI_X(t) &= E \left[ X - \mu | X - \mu > F_{X-\mu}^{-1} \left( F_{X-\mu}(t) \right) \right] S_{X-\mu}(t) \\ SLI_X(t) &= E[X - \mu | X - \mu > t] S_{X-\mu}(t) \\ SLI_X(t) &= S_{X-\mu}(t) \int_{t+\mu}^{+\infty} (x - \mu) dF_X(x). \end{aligned}$$

$$2. \quad SLI_X(t) = \int_{\mu+t}^{+\infty} (x - \mu - t) dF_X(x) + tS_X(t + \mu)$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί συνδυασμό του ορισμού

$$\begin{aligned} SLI_X(t) &= \int_{\mu+t}^{+\infty} (x - \mu) dF_X(x) \\ SLI_X(t) &= \int_{\mu+t}^{+\infty} (x - \mu - t + t) dF_X(x) \\ SLI_X(t) &= \int_{\mu+t}^{+\infty} (x - \mu - t) dF_X(x) + \int_{\mu+t}^{+\infty} t dF_X(x) \\ SLI_X(t) &= \int_{\mu+t}^{+\infty} (x - \mu - t) dF_X(x) + tS_X(t + \mu) \end{aligned}$$

$$3. \quad SLI_X(t) = \int_{\mu+t}^{+\infty} S_X(y) dy + tS_X(t + \mu)$$

το οποίο αποδεικνύεται εύκολα αφού από προηγουμένως ισχύει ότι:

$$SLI_X(t) = \int_{\mu+t}^{+\infty} (x - \mu - t) dF_X(x) + tS_X(t + \mu) = \int_{\mu+t}^{+\infty} (x - \mu - t)S_X(x) dx + tS_X(t + \mu)$$

θέτοντας  $y = x - \mu - t$  καταλήγουμε στην αρχική σχέση.

### Πρόταση 2.2

Έστω  $X, Y$  τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένες μέσες τιμές  $\mu_X, \mu_Y$  αντιστοίχως και πυκνότητες  $f_X, f_Y$ . Εάν το όριο

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_X(t)}{f_Y(t)}$$

υπάρχει, τότε ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{SLI_X(t)}{SLI_Y(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_X(t)}{f_Y(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_X(t)}{S_Y(t)}.$$

### Απόδειξη

$$SLI_X(t) = \int_{\mu_X+t}^{+\infty} (x - \mu_X) dF_X(x)$$

Παραγωγίζοντας ως προς  $t$

$$\frac{dSLI_X(t)}{dt} = -t f_X(t + \mu_X)$$

Υποθέτοντας ότι  $|\mu_X| < \infty$ , έχουμε ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} SLI_X(t) = 0$$

Συνεπώς, μέσω του κανόνα του De L' Hospital καταλήγουμε ότι:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{SLI_X(t)}{SLI_Y(t)} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{d(SLI_X(t))}{dt}}{\frac{d(SLI_Y(t))}{dt}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t f_X(t + \mu_X)}{-t f_Y(t + \mu_Y)} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_X(t + \mu_X)}{f_Y(t + \mu_Y)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f_X(t)}{f_Y(t)}. \quad \square\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει διότι η συμπεριφορά των σχέσεων  $t + \mu_X, t + \mu_Y$  είναι όμοιες με του  $t$  καθώς το  $t \rightarrow \infty$ .

Μερικές ακόμη σημαντικές ιδιότητες, σύμφωνα με τους Wei & Yatrakos (2004), είναι οι ακόλουθες:

- Εάν  $P(X = a) = 1, a \in R$ , τότε  $SLI_X(t) = 0$  για κάθε  $t \geq 0$
- $SLI_{X+b}(t) = SLI_X(t)$ , για οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό  $b$
- $SLI_{aX}(t) = aSLI_X\left(\frac{t}{a}\right)$ , για οποιονδήποτε πραγματικό θετικό αριθμό  $a$
- Εάν  $Y = aX + b, a > 0$ , τότε ισχύει:

$$SLI_{+Y}(t) \geq SLI_X(t) + SLI_Y(t)$$

- Αν  $X, Y$  είναι συμμοτονικές τότε ισχύει:

$$SLI_{X+Y}(t) \geq SLI_X(t) + SLI_Y(t)$$

για εκείνα τα  $t \geq t_{X,Y}$  όπου  $t_{X,Y} = \max\left\{F_{Y-\mu_Y}^{-1}\left(F_{X-\mu_X}(0)\right), F_{X-\mu_X}^{-1}\left(F_{Y-\mu_Y}(0)\right)\right\}$ .

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Αριθμητικά αποτελέσματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθούν αριθμητικά παραδείγματα στα οποία συγκρίνονται οι δείκτες κινδύνου δεξιάς ουράς όπως του Wang (1998), του Wei & Yatracos (2004) και ο ευρέως γνωστός δείκτης Gini. Για τη διεξαγωγή της διαδικασίας παράγονται δεδομένα ως ψευδοτυχαίοι αριθμοί από γνωστές κατανομές με τη βοήθεια της Python. Οι συγκεκριμένοι αριθμοί αποτελούν τα δείγματα πάνω στα οποία στη συνέχεια ευρίσκονται οι προαναφερθέντες δείκτες.

Ο δείκτης  $SLI(t)$  που ορίστηκε στο άρθρο των Wei & Yatracos (2004) θα εφαρμοστεί σε όλα τα ακόλουθα παραδείγματα με σκοπό να υπολογιστεί ως μέτρο της δεξιάς ουράς μιας κατανομής ερμηνεύοντας τον κίνδυνο που υπεισέρχεται εξαιτίας της. Ο συγκεκριμένος δείκτης μπορεί να υπολογιστεί σε μία ή και περισσότερες τιμές του  $t$ . Ο αναλογιστής θα μπορούσε να παρέχει πίνακες με ενδεικτικές τιμές του δείκτη υπολογιζόμενες τουλάχιστον για  $t$ -τιμές από αυτές, όπου οι πυκνότητες των κατανομών ενδιαφέροντος διασταυρώνονται μεταξύ τους. Διαπιστώνεται ότι ο υπολογισμός του δείκτη για διάφορες τιμές  $t$  είναι ένα πλεονέκτημα σε σύγκριση με μία μοναδική τιμή. Το  $SLI(t)$  υπολογίζεται με ακέραιες τιμές  $t$  για απλότητα και στην περίπτωση μας από 0 έως 1000.

### 3.1 Περιπτώσεις για την κατανομή Γάμμα

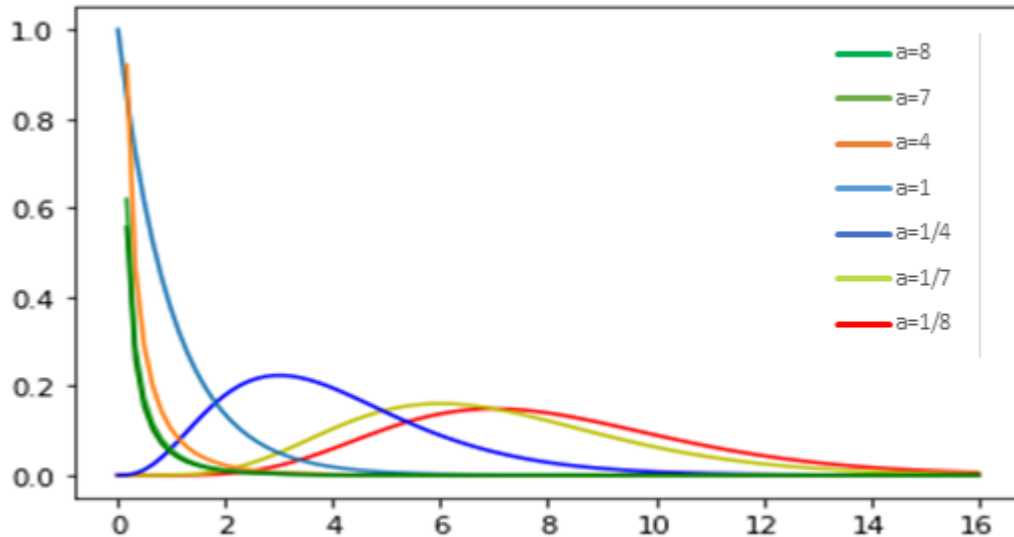
Στο σημείο αυτό θα εξεταστεί η κατανομή Γάμμα σχετικά με τις τιμές της σε όλους τους δείκτες δεξιάς ουράς για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων τους. Θεωρούμε την οικογένεια κατανομών Γάμμα της οποίας η συνάρτηση πιθανότητας έχει τον ακόλουθο τύπο:

$$f_X(x, \alpha, \lambda) = \frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0, \quad \alpha, \lambda \geq 0$$

παίρνουμε ως παραμέτρους το  $\lambda = 1$  και το  $\alpha$  να μεταβάλλεται.

Μια σημαντική παρατήρηση που μπορεί να πραγματοποιηθεί αφορά το γεγονός πως αν μικραίνει η τιμή του  $\alpha$ , η δεξιά ουρά γίνεται πιο βαριά για μεγάλες τιμές του  $x$ .

### ΣΧΗΜΑ 3-1



Γραφική παράσταση της  $f(x)$  για την κατανομή Γάμμα( $\lambda=1, \alpha$ ),  $\alpha > 0$

Σύμφωνα με τις γραφικές παραστάσεις στο Σχήμα 3-1 γίνεται αντιληπτή η παρουσία της δεξιάς ουράς κατανομής για τη συνάρτηση Γάμμα μεταβάλλοντας την παράμετρο για τιμές  $\alpha = 8, \alpha = 7, \alpha = 4, \alpha = 1, \alpha = \frac{1}{4}, \alpha = \frac{1}{7}$  και  $\alpha = \frac{1}{8}$ . Το αποτέλεσμα είναι ξεκάθαρο καθώς όταν το  $\alpha$  είναι μικρότερο, εντοπίζεται η πιο βαριά δεξιά ουράς κατανομής κινδύνου κάτι που υποδηλώνει τη σχέση που επικρατεί με την παράμετρο  $\alpha$ . Ουσιαστικά, η άνοδος της τιμής της παραμέτρου σηματοδοτεί και τη μείωση της βαρύτητας της δεξιάς ουράς κινδύνου για την υποκείμενη κατανομή.

Κατά τον υπολογισμό των δεικτών έχουν χρησιμοποιηθεί οι ακόλουθοι τύποι:

$$d(X) = \frac{\int_0^{\infty} \sqrt{S_X(t)} dt}{\int_0^{\infty} S_X(t) dt} - 1 \quad (Wang, 1998)$$

$$gini(X) = 1 - \frac{\int_0^{\infty} (S_X(t))^2 dt}{\int_0^{\infty} S_X(t) dt} \quad (Dorfman, 1979)$$

$$SLI(t) = \int_{\mu+t}^{+\infty} (x - \mu) dF_X(x), \quad (Wei \& Yatracos, 2004)$$

Για την επιλογή του τυχαίου δείγματος  $X$  λαμβάνεται μέγεθος 10.000 τιμών που ανήκουν στο διάστημα από 0 έως 1000. Θα ελεγχθεί η διάταξη που προκύπτει με τους δείκτες  $d(X)$ ,  $gini(X)$  και  $SLI(t)$ . Στον υπολογισμό του δείκτη  $SLI(t)$  έχουν ληφθεί όλες οι ακέραιες τιμές για το  $t$  που ανήκουν στο διάστημα  $(0, 1000)$ . Στο δείγμα  $X$  εφαρμόζεται η κατανομή Γάμμα για παραμέτρους:  $\alpha = 8, \alpha = 7, \alpha = 4, \alpha = 1, \alpha = \frac{1}{4}, \alpha = \frac{1}{7}$  και  $\alpha = \frac{1}{8}$ .

### ΠΙΝΑΚΑΣ 3-1

Πίνακας αποτελεσμάτων για διαφορετικές τιμές του δείκτη  $\alpha$

Γάμμα( $\alpha$ )	$d(X)$	$gini(X)$	$SLI(0)$	$SLI(10)$	$SLI(50)$	$SLI(100)$	$SLI(500)$	$SLI(1000)$
$\alpha=8$	0,291053	0,196381	1,116692	0,000232	4,47E-26	1,66E-69	1,2E-286	0
$\alpha=7$	0,314067	0,209473	1,043019	0,000201	3,87E-26	1,44E-69	1E-286	0
$\alpha=4$	0,434197	0,273438	0,781467	0,000112	2,17E-26	8,07E-70	5,7E-287	0
$\alpha=1$	1	0,5	0,367879	3,07E-05	5,96E-27	2,24E-70	1,6E-287	0
$\alpha=1/4$	2,336905	0,76276	0,15189	9,03E-06	1,74E-27	6,48E-71	4,6E-288	0
$\alpha=1/7$	3,263848	0,843495	0,100257	5,46E-06	1,05E-27	3,92E-71	2,8E-288	0
$\alpha=1/8$	3,530498	0,859407	0,090324	4,83E-06	9,32E-28	3,47E-71	2,5E-288	0

Αναφορικά με τον δείκτη  $d(X)$ , η αύξηση της παραμέτρου  $\alpha$  ισοδυναμεί με μείωση του δείκτη κάτι που συνεπάγεται μείωση των σημείων που ανήκουν στην ουρά. Διαπιστώνεται, λοιπόν, ότι η δεξιά ουρά γίνεται ελαφρύτερη. Ίδια αποτελέσματα παρατηρούνται και με το δείκτη  $gini(X)$  με τη διαφορά ότι το συγκεκριμένο μέτρο παρουσιάζει τιμές χαμηλότερες για τα αντίστοιχα  $\alpha$  σε σχέση με το  $d(X)$ . Ακόμη, και οι δύο δείκτες φθίνουν πιο απότομα για  $\alpha$  που ανήκουν στο διάστημα  $(\frac{1}{4}, 4)$  ενώ μειώνονται πιο ομαλά για τις κλασματικές τιμές του  $\alpha$ .

Σχετικά με το δείκτη  $SLI(t)$ , έχει όμοια συμπεριφορά με τους δύο προηγούμενους δείκτες. Για τιμές  $t \geq 20$ , φθίνει απότομα στην περίπτωση που το  $\alpha = 8$ . Αν το  $\alpha = 7$  για τιμές  $t \geq 19$ , φθίνει απότομα προς το μηδέν. Για  $\alpha = 4$ ,  $t \geq 16$  συγκλίνει γρηγορότερα προς μικρές τιμές του δείκτη. Εν ολίγοις, για σταθερό  $t$  όσο οι τιμές του



$\alpha$  μειώνονται, συμπεριφέρεται αντίστοιχα κι ο  $SLI(t)$ . Αν όμως πάρουμε σταθερό το  $\alpha$  τότε η αύξηση του  $t$  ισοδυναμεί με μείωση του συγκεκριμένου δείκτη. Οι περιπτώσεις που ο  $SLI(t)$  μηδενίζεται, ποικίλλουν ανάλογα τις τιμές του  $\alpha$ , καθώς όσο το τελευταίο αυξάνεται τόσο για μικρότερες τιμές του  $t$  μηδενίζεται ο δείκτης  $SLI(t)$  (ο πίνακας των ακεραίων τιμών  $t$  για το δείκτη  $SLI(t)$  της κατανομής Γάμμα υπάρχει στο Παράρτημα).

### 3.2 Περιπτώσεις για την κατανομή Weibull

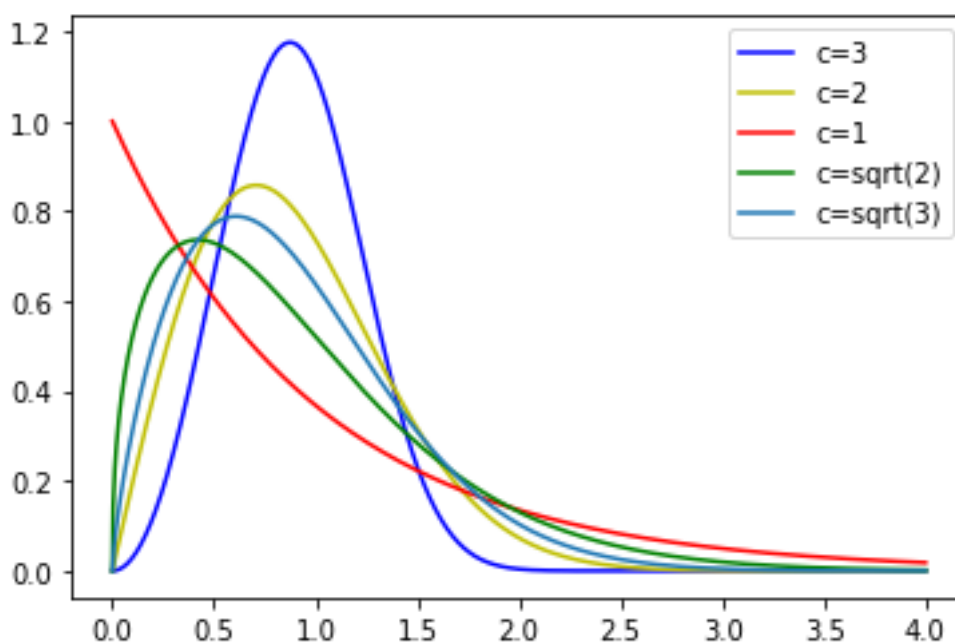
Στην παρούσα ενότητα θα ελεγχθεί η κατανομή Weibull αναφορικά με τη δεξιά ουρά κινδύνου που παρουσιάζει για διαφορετικές τιμές των παραμέτρων τους. Θεωρούμε την κατανομή Weibull της οποίας η συνάρτηση πιθανότητας έχει τον ακόλουθο τύπο:

$$f_x(x) = \theta c x^{c-1} e^{-\theta x^c}, \text{ για } x > 0, c > 0.$$

Παίρνουμε ως παραμέτρους το  $\theta = 1$  και το  $c$  να μεταβάλλεται.

Μπορεί να αποφανθεί κανείς τη σύνδεση μεταξύ παραμέτρου και δεξιάς ουράς καθώς όταν αυξάνεται η τιμή του  $c$ , η δεξιά ουρά γίνεται πιο λεπτή για μεγάλες τιμές του  $x$ .

ΣΧΗΜΑ 3-2



Γραφική παράσταση της  $f(x)$  για την κατανομή Weibull( $\theta = 1, c > 0$ )

Τα οπτικά ερεθίσματα από το ΣΧΗΜΑ 3-2 μας προσφέρει σημαντική επιβεβαίωση της παρατήρησης μας. Η δεξιά ουρά κατανομής για τη συνάρτηση Weibull μεταβάλλοντας την παράμετρο για τιμές  $c = 3$ ,  $c = 2$ ,  $c = 1$ ,  $c = \sqrt{2}$  και  $c = \sqrt{3}$  παρουσιάζεται στις γραφικές παραστάσεις. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο καθώς η τελευταία περίπτωση, στην οποία κυριαρχεί η μικρότερη παράμετρος, εντοπίζεται η πιο βαριά δεξιά ουράς κατανομής κινδύνου κάτι που υποδηλώνει τη συσχέτιση που διαδραματίζεται με την παράμετρο  $c$ . Επομένως, η αύξηση της τιμής της παραμέτρου έπεται και τη μείωση της βαρύτητας της δεξιάς ουράς κινδύνου για την υποκείμενη κατανομή Weibull.

### ΠΙΝΑΚΑΣ 3-2

Πίνακας αποτελεσμάτων για κάθε δείκτη με διαφορετική τιμή  $c$

Weibull( $c$ )	$d(X)$	$gini(X)$	SLI(0)	SLI(10)	SLI(50)	SLI(100)	SLI(500)	SLI(1000)
<b>c=3</b>	0,259921	0,206299	0,13134	0	0	0	0	0
<b>c=2</b>	0,414214	0,292893	0,186189	8,72E-45	0	0	0	0
<b>c=sqrt3</b>	0,492106	0,329806	0,211528	5,08E-24	0	0	0	0
<b>c= sqrt2</b>	0,632527	0,387453	0,255327	2,14E-11	8,5E-109	2,8E-291	0	0
<b>c=1</b>	1	0,5	0,367879	0,000346	9,83E-21	3,76E-42	3,6E-215	0

Αναφορικά με τον δείκτη  $d(X)$ , η αύξηση της παραμέτρου  $c$  ταυτίζεται με τη μείωση του δείκτη για τιμές στο (1, 3). Η μείωση είναι πιο απότομη από  $c = 1$  σε  $c = 2$  σε σχέση με το  $c = 2$  έως  $c = 3$ . Διαπιστώνεται, λοιπόν, ότι η δεξιά ουρά δεν μεταβάλλεται ομοιόμορφα. Αντίστοιχα, ο δείκτης  $gini(X)$  με την αύξηση της τιμής του  $c$ , μειώνεται. Αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με την παρατήρηση που διαπιστώθηκε και μέσα από τα γραφήματα της κατανομής Weibull στις προηγούμενες

παραγράφους. Ακόμη, ο δείκτης  $gini(X)$  φθίνει πιο αργά από το δείκτη  $d(X)$  για  $c \in (1,3)$  ενώ μειώνεται λιγότερο απότομα στην εναλλαγή από  $c = 2$  στο  $c = 3$ .

Αναφορικά με το δείκτη  $SLI(t)$ , έχει όμοια συμπεριφορά με το δείκτη  $gini(X)$ . Για τιμές  $t \geq 50$ , φθίνει απότομα για κάθε τιμή του  $c$ . Μάλιστα οι τιμές που παρουσιάζει είναι τόσο μικρές που προσεγγίζουν το 0. Η μεγάλη ομοιότητα υπάρχει για  $t = 0$  όπου συμπίπτει αρκετά καλά με τη συμπεριφορά των άλλων δύο δεικτών, έχοντας όμως πολύ πιο επιβραδυνόμενη σύγκλιση προς μικρότερες τιμές με την αύξηση του  $c$ . Οπότε, για σταθερό  $t$  όσο οι τιμές του  $c$  μειώνονται, συμπεριφέρεται αντιστρόφως κι ο δείκτης  $SLI(t)$ . Αν όμως πάρουμε σταθερό το  $c$  τότε η αύξηση του  $t$  ισοδυναμεί με μείωση του συγκεκριμένου δείκτη, κάτι που είναι και πασιφανές από τον ορισμό του. Οι περιπτώσεις που ο  $SLI(t)$  μηδενίζεται επακριβώς είναι αρκετές και εξαρτώνται από τις τιμές της παραμέτρου  $c$ , καθώς όσο το τελευταίο αυξάνεται τόσο για μικρότερες τιμές του  $t$  μηδενίζεται ο δείκτης  $SLI(t)$ .

### **3.3 Σύγκριση γνωστών κατανομών ως προς τους προτεινόμενους δείκτες δεξιάς ουράς**

Σε αυτή την πτυχή συγκρίνουμε τις δεξιές ουρές μερικών γνωστών κατανομών ως προς τους δείκτες που έχουν αναφερθεί στα παραπάνω μέρη. Επιλέγοντας τις κατάλληλες παραμέτρους (με τη βοήθεια δοκιμών στην Python) δημιουργήθηκαν κατανομές που έχουν όλες μέση τιμή 1 και διασπορά ίση με  $\sqrt{3}$  (Wang, 1998). Οι κατανομές που περιλαμβάνονται στη μελέτη μας είναι:

1. Pareto
2. Γάμμα
3. Λογαριθμοκανονική

### ΠΙΝΑΚΑΣ 3-3

Συγκριτικά αποτελέσματα κατανομών

Distribution	d(X)	gini(X)	SLI(0)	SLI(10)	SLI(50)	SLI(100)	SLI(500)	SLI(1000)
<b>Pareto</b>	3	0,6	0,416	0,093163	0,004553	0,001169	4,77E-05	1,2E-05
<b>Λογαριθμοκανονική</b>	2,604874	0,594904	0,443941	0,069497	0,002931	0,000429	1,36E-06	6,47E-08
<b>Γάμμα</b>	1,96277	0,713174	0,556357	0,04414	1,19E-07	8,65E-15	1,83E-72	9,6E-145

Για την Pareto χρησιμοποιήθηκε ο τύπος της συνάρτησης πιθανότητας της:

$$f_X(x) = \frac{al^{a+1}}{x^{a+1}}, \text{για } x \geq l, l > 0.$$

Για την Γάμμα χρησιμοποιήθηκε ο τύπος της συνάρτησης πιθανότητας της:

$$f_X(x) = \frac{\lambda^a x^{a-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(a)}, x > 0, a > 0, \lambda \geq 0.$$

Για την Λογαριθμοκανονική χρησιμοποιήθηκε ο τύπος της συνάρτησης πιθανότητας της:

$$f_X(x) = \frac{1}{sx\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - m)^2}{2s^2}}, \text{για } x > 0, m > 0, s > 0.$$

Στον υπολογισμό του δείκτη  $SLI(t)$  όλες οι ακέραιες τιμές του  $t$  από 0 έως 1000 έχουν χρησιμοποιηθεί και το δείγμα του πεδίου ορισμού  $X$  εξακολουθεί να έχει μέγεθος 10.000. Βέβαια, στον πίνακα φαίνονται μόνο τιμές του  $SLI(t)$  για  $t = 0, 10, 50, 100, 500, 1000$ , οι οποίες συγκρίνονται με τους υπόλοιπους δείκτες. Στον παραπάνω πίνακα

παρουσιάζονται τα αποτελέσματα και οι διατάξεις που δημιουργούνται με βάση την αξιολόγηση της δεξιάς ουράς κάθε κατανομής. Αν ληφθεί ως κριτήριο το μέτρο του:

- $d(X)$  τότε:

$$\text{Γάμμα} < \text{Λογαριθμοκανονική} < \text{Pareto}$$

- $gini(X)$  τότε:

$$\text{Λογαριθμοκανονική} < \text{Pareto} < \text{Γάμμα}$$

- $SLI(0)$  τότε:

$$\text{Pareto} < \text{Λογαριθμοκανονική} < \text{Γάμμα}$$

- $SLI(10)$  τότε:

$$\text{Γάμμα} < \text{Λογαριθμοκανονική} < \text{Pareto}$$

- $SLI(50)$  τότε:

$$\text{Γάμμα} < \text{Pareto} < \text{Λογαριθμοκανονική}$$

- $SLI(100)$  τότε:

$$\text{Γάμμα} < \text{Λογαριθμοκανονική} < \text{Pareto}$$

- $SLI(500)$  τότε:

$$\text{Γάμμα} < \text{Λογαριθμοκανονική} < \text{Pareto}$$

- $SLI(1000)$  τότε:

$$\text{Γάμμα} < \text{Λογαριθμοκανονική} < \text{Pareto}$$

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## Συμπεράσματα

Ένα κοινό χαρακτηριστικό για πολλούς ασφαλιστικούς κινδύνους είναι ο κίνδυνος δεξιάς ουράς, που αντιπροσωπεύει χαμηλής συχνότητας γεγονότα με μεγάλες απώλειες. Με μια ευρεία έννοια, ο ασφαλιστικός κίνδυνος αναφέρεται στις επιχειρηματικές, νομικές ή διαχειριστικές πτυχές της μεταφοράς του οικονομικού αντίκτυπου απρόβλεπτων ατυχημάτων. Ο όρος «ασφαλιστικός κίνδυνος» αναφέρεται σε μια μεταβλητή ζημίας που ποσοτικοποιεί το πιθανό ποσό ζημίας που σχετίζεται με ένα ασφαλιστικό συμβόλαιο ή ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, ανάλογα με την προβλεπόμενη εφαρμογή. Με αυτόν τον ορισμό, ένα χαρακτηριστικό πολλών ασφαλιστικών κινδύνων (μεμονωμένων ή συνολικών) είναι ο κίνδυνος δεξιάς ουράς, ο οποίος αντιπροσωπεύει γεγονότα χαμηλής συχνότητας και μεγάλης ζημίας.

Παραδοσιακά, τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα μέτρα κινδύνων είναι η διακύμανση και η τυπική απόκλιση. Η τυπική απόκλιση είναι ένα «τυπικό» μέτρο απόκλισης από τον μέσο όρο εάν η υποκείμενη μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή. Παρόλο που η τυπική απόκλιση έχει χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση της απόκλισης από το μέσο όρο για άλλες από τις κανονικές διανομές, δεν αποτελεί καλό μέτρο κινδύνου για μεγάλους ασφαλιστικούς κινδύνους με λοξές κατανομές. Η κακή απόδοση της τυπικής απόκλισης στη μέτρηση των ασφαλιστικών κινδύνων έχει αναφερθεί από πολλούς συγγραφείς.

Στην παρούσα εργασία παρουσιάστηκαν αρχικά τα θεωρήματα που σχετίζονται με τις ουρές κατανομής, οι βασικές έννοιες καθώς και η επεξήγηση των χαρακτηριστικών και των στοιχείων του κάθε λήμματος. Επιπλέον, παρουσιάστηκαν τα βασικά θεωρήματα που σχετίζονται με αυτό και οι αντίστοιχοι δείκτες δεξιάς ουράς. Ακόμη, διεξήχθη πειραματική διαδικασία στόχος της οποίας ήταν η σύγκριση των δεικτών κινδύνου δεξιάς ουράς των Wang (1998), Wei & Yatracos (2004) και του ευρέως γνωστού δείκτη Gini. Σύμφωνα με τα συμπεράσματα της πειραματικής διαδικασίας,

σημειώνεται ότι η διάταξη των κατανομών δεν συμπίπτει μεταξύ των δεικτών. Γίνεται ανάλυση της διάταξης για κάθε έναν από τους δείκτες με σκοπό να γίνει κατανοητή η διαφορά τους στον αναγνώστη.

Η προηγούμενη ανάλυση προσφέρει μια πληθώρα αποτελεσμάτων που μας απασχολούν εκτενώς στα πειράματα μας. Η πρώτη και σημαντικότερη παρατήρηση είναι ότι η διάταξη των κατανομών δεν συμπίπτει σε όλες τις περιπτώσεις μεταξύ των δεικτών  $d(X)$ ,  $gini(X)$  και  $SLI(t)$ . Οι δύο πρώτοι δείκτες πέρα από τη μοναδική τιμή που τους διακρίνει, συμπίπτουν στη διάταξη της λεπτότερης, της αμέσως λεπτότερης και της βαρύτερης δεξιάς ουράς κατανομής. Οπότε παρουσιάζουν ανάποδη κατάταξη για τις κατανομές των Γάμμα, Pareto και Λογαριθμοκανονικής με το δείκτη Gini να θεωρεί λεπτότερη τη δεξιά ουρά κατανομής της Pareto σε σχέση με την κατανομή Γάμμα.

Ο δείκτης  $SLI(t)$  παρουσιάζει τελείως διαφορετικές διατάξεις και εξαρτάται αποκλειστικά από την τιμή  $t$ . Φαίνεται ότι η συγκεκριμένη μεταβλητή όπως είναι λογικό προσδίδει μια διαφορετική προσέγγιση κινδύνου στο δείκτη. Χαμηλές τιμές του  $t$  υποδηλώνουν και μια δεξιά ουρά που ξεκινάει από αυτή την τιμή, η οποία συνήθως αξίζει να επιλεχθεί σε περιπτώσεις φαινομένων αποφυγής κινδύνου. Όσο το  $t$  αυξάνεται τόσο το επίπεδο ανοχής κινδύνου είναι και πιο υψηλό. Αξιοσημείωτο είναι ότι για μεγάλες τιμές του  $t$  ( $> 100$ ) επικρατεί μια συγκεκριμένη διάταξη στις κατανομές μας ως προς το  $SLI(t)$ , γεγονός που μπορεί να θεωρηθεί ένα είδος σύγκλισης του δείκτη.

Έστω ότι λαμβάνεται η συγκλίνουσα ταξινόμηση των κατανομών του  $SLI(t)$  ως εκπρόσωπος του δείκτη, δηλαδή :  $\Gamma\acute{\alpha}\mu\mu\alpha < \text{Λογαριθμοκανονική} < \text{Pareto}$ . Συγκριτικά με τη διάταξη που ορίζει ο δείκτης  $d(X)$ , η Γάμμα είναι η λεπτότερη κάτι που συμφωνεί με τον  $SLI(t)$ , στον οποίο συναντάται ως 1<sup>η</sup> πιο λεπτή κατανομή. Μια ακόμη ομοιότητα βρίσκεται στις κατανομές με τις δύο πιο βαριές δεξιές ουρές καταστροφής, όπου ο δείκτης  $d(X)$  ορίζει τις ίδιες με τον  $SLI(t)$ .

Η διάφορα σε αυτή την περίπτωση είναι ότι από τη μία ο  $d(X)$  θεωρεί βαρύτερη την Pareto ενώ από την άλλη ο  $SLI(t)$  υποθέτει την Λογαριθμοκανονική (για  $t = 50$ ).

Εάν πάλι δεχτούμε τη συγκλίνουσα ταξινόμηση των κατανομών του  $SLI(t)$  ως εκπρόσωπο του δείκτη εντοπίζονται όμοιες διαφορές σε σχέση με το δείκτη Gini, από ότι με τον  $d(X)$ . Στον  $gini(X)$ , η Λογαριθμοκανονική είναι η λεπτότερη κάτι που στον  $SLI(t)$ , συναντάται ως η 2<sup>η</sup> πιο λεπτή κατανομή. Καθοριστικό μειονέκτημα εντοπίζεται στην κατανομή Γάμμα, όπου για τον  $SLI(t)$  είναι η πιο λεπτή ενώ για τον  $gini(X)$  είναι

η πιο βαριά από τις κατανομές. Με λίγα λόγια για τον  $SLI(t)$  είναι μια κατανομή λεπτή ενώ για το δείκτη  $gini(x)$  είναι βαριά η δεξιά ουρά. Αξίζει να επισημανθεί όμως ότι η κατανομή Γάμμα για  $t = 0$  παρουσιάζεται ως η βαρύτερη για το δείκτη  $SLI(t)$ , γεγονός που έρχεται σε συμφωνία με το δείκτη  $gini(X)$  και σε αντίθεση με τον  $d(X)$ .



# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## Ελληνική

Γεώργιος Πιτσέλης (2018), ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ Μ.Π.Λ.ΟΥ.Ζ. (Μακριές, Παχιές ή Λεπτές Ουρές Ζημιοκατανομών), Εκδόσεις Παπαζήση.

## Ξένη

Aebi, M., Embrechts, P., and Mikosch, T. (1992). A Large Claim Index. *Bulletin of the Association of Swiss Actuaries*, 2, pp.143–56.

Arnold, B.C. (1983). *Pareto Distributions*. Fairland, Md.: International Cooperative Publishing House.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.M., and Heath, D. (1996). *A Characterization of Measures of Risk*. New York, Cornell University.

Butsic, R.P. (1994). Solvency Measurement for Property-Liability Risk-Based Capital Applications. *Journal of Risk and Insurance* 61, 4, pp. 656–690.

Dorfman, R. (1979). A Formula for the Gini Coefficient, *Review of Economics and Statistics*, 61, pp. 146–49.

Gerber, H.U., and Shiu, E.S.W. (1997). The Joint Distribution of the Time of Ruin, the Surplus Immediately before Ruin, and the Deficit at Ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, 21, pp. 129–37.

Hadar, J., and Russell, W.R. (1969). Rules for Ordering Uncertain Prospects. *American Economic Review* 59, 1, pp. 25–34.

Kaas, R., Goovaerts, M., Dhaene, J. and Denuit, M. (2001). *Modern Actuarial Risk Theory*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Klugman, S. A., Panjer, H.H., and Willmot, G.E. (2004). *Loss Models: From Data to Decisions*. 2<sup>nd</sup> ed. Toronto: Wiley-Interscience.

Lowe, S.P., and Stanard, J.N. (1996). An Integrated Dynamic Financial Analysis and Decision Support System for a Property Catastrophe Reinsurer. *Transactions of the XXVII ASTIN Colloquium*, Copenhagen, Denmark.

Rachev, S.T. (1991). *Probability Metrics and the Stability of Stochastic Models*. Chichester, England: Wiley.

- Ramsay, C.M. (1993). 'Loading Gross Premiums for Risk Without Using Utility Theory. *Transactions of the Society of Actuaries XLV*, pp. 305–349.
- Rojo, J. (1992). A pure-tail ordering based on the ratio of the quantile functions. *The Annals of Statistics* 20, pp. 570–579.
- Rothschild, M., and Stiglitz, J.E. (1970). Increasing Risk I: a Definition. *Journal of Economic Theory*, 2, pp. 225–43.
- Schmeidler, D. (1986). Integral Representation without Additivity, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 97, pp. 255–261.
- Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007). *Stochastic Orders*. New York: Springer.
- Wang, S., Young, V.R., and Panjer, H.H. (1997). Axiomatic Characterization of Insurance Prices. *Insurance: Mathematics and Economics*, 21, pp. 173–83.
- Wang, S. (1998). An Actuarial Index of the right-tail risk. *North American Actuarial Journal* 2, pp. 88-101.
- Wei, W. and Yatracos, Y. (2004). A stop-loss risk index. *Insurance: Mathematics and Economics* 34, pp. 241-250.
- Yaari, M.E. (1987). The Dual Theory of Choice under Risk. *Econometrica*, 55, pp. 95–115.

## Παράρτημα

<b>t</b>	<b>a=8</b>	<b>a=7</b>	<b>a=4</b>	<b>a=1</b>	<b>a=1/4</b>	<b>a=1/7</b>	<b>a=1/8</b>
<b>0</b>	1,116692	1,043019	0,781467	0,367879	0,15189	0,100257	0,090324
<b>1</b>	1,054045	0,977106	0,701869	0,270671	0,083556	0,04964	0,043731
<b>2</b>	0,900792	0,819813	0,53541	0,149361	0,035604	0,019977	0,017419
<b>3</b>	0,710349	0,630555	0,364905	0,073263	0,014359	0,007763	0,006725
<b>4</b>	0,524186	0,45204	0,229009	0,03369	0,005649	0,002971	0,002561
<b>5</b>	0,365837	0,305775	0,134949	0,014873	0,002191	0,001127	0,000968
<b>6</b>	0,243484	0,196989	0,075667	0,006383	0,000842	0,000425	0,000364
<b>7</b>	0,155554	0,121742	0,040755	0,002684	0,000321	0,00016	0,000137
<b>8</b>	0,0959	0,072592	0,021234	0,001111	0,000122	5,99E-05	5,11E-05
<b>9</b>	0,0573	0,041956	0,01076	0,000454	4,62E-05	2,24E-05	1,91E-05
<b>10</b>	0,0333	0,023594	0,005324	0,000184	1,74E-05	8,37E-06	7,1E-06
<b>11</b>	0,01888	0,01295	0,002581	7,37E-05	6,57E-06	3,12E-06	2,64E-06
<b>12</b>	0,010469	0,006956	0,001229	2,94E-05	2,47E-06	1,16E-06	9,83E-07
<b>13</b>	0,00569	0,003664	0,000576	1,16E-05	9,26E-07	4,32E-07	3,65E-07
<b>14</b>	0,003037	0,001897	0,000266	4,59E-06	3,47E-07	1,61E-07	1,36E-07
<b>15</b>	0,001594	0,000966	0,000122	1,8E-06	1,3E-07	5,97E-08	5,03E-08
<b>16</b>	0,000825	0,000485	5,5E-05	7,04E-07	4,85E-08	2,22E-08	1,87E-08
<b>17</b>	0,00042	0,00024	2,46E-05	2,74E-07	1,81E-08	8,22E-09	6,92E-09
<b>18</b>	0,000212	0,000118	1,09E-05	1,06E-07	6,76E-09	3,05E-09	2,56E-09
<b>19</b>	0,000105	5,7E-05	4,79E-06	4,12E-08	2,52E-09	1,13E-09	9,49E-10
<b>20</b>	5,18E-05	2,73E-05	2,09E-06	1,59E-08	9,39E-10	4,19E-10	3,51E-10

<b>21</b>	<b>2,52E-05</b>	<b>1,3E-05</b>	<b>9,04E-07</b>	<b>6,14E-09</b>	<b>3,5E-10</b>	<b>1,55E-10</b>	<b>1,3E-10</b>
<b>22</b>	1,22E-05	6,09E-06	3,89E-07	2,36E-09	1,3E-10	5,75E-11	4,81E-11
<b>23</b>	5,83E-06	2,84E-06	1,66E-07	9,06E-10	4,84E-11	2,13E-11	1,78E-11
<b>24</b>	2,76E-06	1,32E-06	7,08E-08	3,47E-10	1,8E-11	7,88E-12	6,58E-12
<b>25</b>	1,3E-06	6,04E-07	3E-08	1,33E-10	6,69E-12	2,91E-12	2,43E-12
<b>26</b>	6,07E-07	2,76E-07	1,26E-08	5,07E-11	2,48E-12	1,08E-12	9E-13
<b>27</b>	2,82E-07	1,25E-07	5,3E-09	1,94E-11	9,22E-13	3,99E-13	3,33E-13
<b>28</b>	1,3E-07	5,63E-08	2,21E-09	7,38E-12	3,42E-13	1,47E-13	1,23E-13
<b>29</b>	5,95E-08	2,52E-08	9,21E-10	2,81E-12	1,27E-13	5,45E-14	4,54E-14
<b>30</b>	2,71E-08	1,13E-08	3,82E-10	1,07E-12	4,71E-14	2,02E-14	1,68E-14
<b>31</b>	1,23E-08	4,99E-09	1,58E-10	4,05E-13	1,75E-14	7,45E-15	6,2E-15
<b>32</b>	5,52E-09	2,2E-09	6,49E-11	1,54E-13	6,48E-15	2,75E-15	2,29E-15
<b>33</b>	2,48E-09	9,67E-10	2,67E-11	5,83E-14	2,4E-15	1,02E-15	8,45E-16
<b>34</b>	1,1E-09	4,23E-10	1,09E-11	2,21E-14	8,91E-16	3,76E-16	3,12E-16
<b>35</b>	4,91E-10	1,84E-10	4,45E-12	8,35E-15	3,3E-16	1,39E-16	1,15E-16
<b>36</b>	2,17E-10	7,99E-11	1,81E-12	3,16E-15	1,22E-16	5,13E-17	4,25E-17
<b>37</b>	9,55E-11	3,45E-11	7,36E-13	1,19E-15	4,53E-17	1,89E-17	1,57E-17
<b>38</b>	4,19E-11	1,49E-11	2,98E-13	4,5E-16	1,68E-17	6,99E-18	5,8E-18
<b>39</b>	1,83E-11	6,37E-12	1,21E-13	1,7E-16	6,21E-18	2,58E-18	2,14E-18
<b>40</b>	7,97E-12	2,73E-12	4,86E-14	6,41E-17	2,3E-18	9,53E-19	7,89E-19



