ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Ανάλυση διαδικασιών πλεονάσματος στη θεωρία χρεοκοπίας με τυχαία ασφάλιστρα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Νοέμβριος 2021

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

– Ευστάθιος Χατζηκωνσταντινίδης, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)

– Αντζουλάκος Δημήτριος, Αναπληρωτής Καθηγητής

– Ψαρράκος Γεώργιος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUADE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Surplus analysis in ruin theory with stochastic premiums

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus Greece

November 2021

Στην οικογένειά μου

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Φτάνοντας στο τέλος αυτής της διαδρομής, θέλω να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη, Αναπληρωτή Καθηγητή στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύτιμη καθοδήγηση και συνεισφορά του στην ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας καθ’ όλη τη διάρκεια της συνεργασίας μας.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διπλωματική εργασία γενικεύει το κλασικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων σύμφωνα με το οποίο τα ασφάλιστρα δεν εισπράττονται με σταθερό ρυθμό, αλλά περιγράφονται από μια σύνθετη στοχαστική διαδικασία. Αυτές οι διαδικασίες πλεονάσματος θα εξετασθούν θεωρώντας διάφορες δομές εξάρτησης μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των απαιτήσεων. Για όλα αυτά θα δοθούν αναλυτικά αποτελέσματα υπολογισμού μέτρων μέσω της μελέτης των αντίστοιχων αναμενόμενων προεξοφλημένων συναρτήσεων ποινής των Gerber Shiu.

Επιπλέον, στην εργασία μελετώνται και αναλύονται διάφορα μέτρα κινδύνου, όπως για παράδειγμα η πιθανότητα χρεοκοπίας , ο χρόνος μέχρι τη χρεοκοπία, μέσω της συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu.

Το Κεφάλαιο 1 αποτελεί ένα εισαγωγικό μέρος το οποίο αναλύει τις βασικές έννοιες από τη θεωρία χρεοκοπίας, δίνει μια σύντομη περιγραφή του κλασικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων καθώς και της αναμενόμενης προεξοφλημένης συνάρτησης ποινής των Gerber-Shiu και γίνεται λόγος στη επίλυση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί αυτή η συνάρτηση.

Στο Κεφάλαιο 2 εξετάζεται το μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα. Αναλυτικότερα, θα θεωρήσουμε ότι τα ασφάλιστρα δεν εισπράττονται με σταθερό ρυθμό και περιγράφονται από μία στοχαστική διαδικασία Poisson.

Στο Κεφάλαιο 3 εξετάζεται το μοντέλο κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα και εξαρτήσεις. Συγκεκριμένα, θα επεκτείνουμε το μοντέλο αυτό θεωρώντας ότι υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων, των ασφαλίστρων και του χρόνου εμφάνισης κινδύνου.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 4 μελετάται το μοντέλο με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις καθώς και στρατηγικές μερισμάτων. Συγκεκριμένα, θα εξεταστούν, υπό τη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου, διάφορες εξαρτήσεις ανάμεσα στα μεγέθη των ασφαλίστρων και τους χρόνους που αυτά εμφανίζονται.

ABSTRACT

The current paper generalizes the classic model of risk theory according to which premiums are not collected at a constant rate, but are described by a complex stochastic process. These surplus processes will be analyzed by considering various dependency structures between the inter-claim times and inter-premium times. For the above, results will be given through the study of the corresponding expected discounted Gerber Shiu penalty functions.

In addition, the work studies and analyzes various risk measures, such as the ruin probability or the ruin time, the time to ruin theory, through the Gerber-Shiu penalty function.

Chapter 1 is an introductory part that analyzes the basic concepts from ruin theory, gives a brief description of the classic model , known as the Cramér-Lundberg model, of risk theory as well as the expected discounted Gerber-Shiu penalty function and discusses the solution of the defective renewal equation for this function.

Chapter 2 examines the risk model with stochastic premiums. More specifically, we will consider that premiums are not collected at a constant rate and are described by a a Poisson process.

Chapter 3 examines the risk model with stochastic premiums and dependencies. Specifically, we will extend this model considering that there is a dependency between claim sizes, premiums and inter-claim times.

Finally, Chapter 4 examines the model with stochastic premiums, dependencies and dividend strategies. In particular, under the threshold dividend strategy, various dependencies between claims sizes and inter-claim times in which they occur will be considered.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΙΝΗΣ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Στο κλασσικό μοντέλο τα ασφάλιστρα εισπράττονται με σταθερό ρυθμό από την ασφαλιστική. Στην παρούσα διπλωματική θα μελετήσουμε περιπτώσεις όπου τα συνολικά ασφάλιστρα δεν εισπράττονται με σταθερό ρυθμό αλλά αντίθετα είναι στοχαστικές ανελίξεις.

Κάθε ασφαλιστική επιχείρηση έχει την υποχρέωση να καταβάλλει την αποζημίωση που δικαιούται ο ασφαλισμένος όταν επέλθει ζημιά, σύμφωνα με το ασφαλιστήριό του. Με άλλα λόγια υποχρεούται να εξασφαλίσει την απαραίτητη ασφάλεια στους πελάτες από ζημιές που θα συναντήσουν μελλοντικά. Οι πελάτες σε αντάλλαγμα καταβάλλουν στην επιχείρηση ασφάλιστρα για να εξασφαλίσουν τη βιωσιμότητα της και να συμβάλλουν στη δημιουργία του αναγκαίου αποθέματος. Τα ασφάλιστρα θα πρέπει να ξεπερνούν το μέσο κόστος των ζημιών σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα, που σημαίνει ότι από την αρχή ακόμη οι πελάτες δέχονται κάποια θετική επιβάρυνση ασφαλείας.

Οι συνολικές αποζημιώσεις S(t) εξαρτώνται από το πλήθος των ζημιογόνων γεγονότων που εμφανίζονται σε κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα T_n και το μέγεθος των ζημιών που προκαλούνται.

Η ΑΝΕΛΙΞΗ ΤΟΥ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ

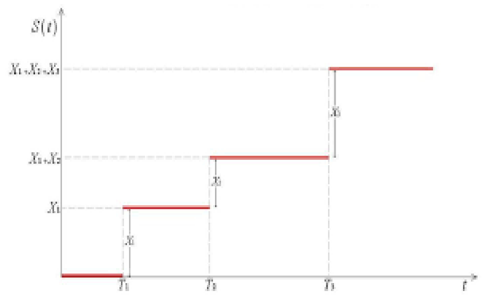
Ορισμός 1.1.1: Στοχαστική ανέλιξη είναι μια οικογένεια τ.μ. $\{X_t: t\varepsilon T\}$ όπου T είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο. Το σύνολο αυτό δηλώνει τις τιμές τις παραμέτρου t και ονομάζεται δεικτοσύνολο της στοχαστικής ανέλιξης. Πρόκειται δηλαδή για μια στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο ή διακριτής παραμέτρου. Αν T είναι ένα μη αριθμήσιμο σύνολο τότε πρόκειται για μια στοχαστική ανέλιξη σε συνεχή χρόνο.

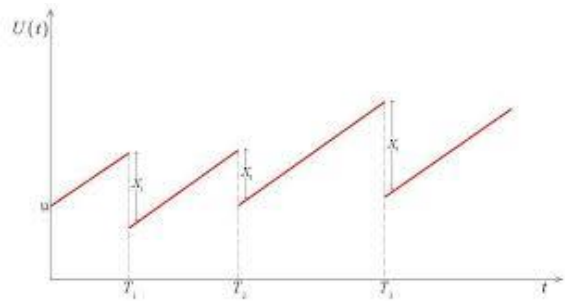
Ορισμός 1.1.2: Έστω S(t) στοχαστική διαδικασία των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο t και {Xi} μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. , με την τ.μ. Xi να περιγράφει το μέγεθος της i−οστής ζημιάς. Το μέγεθος των συνολικών αποζημιώσεων που καταβάλλονται μέχρι το χρόνο t θα είναι:

$$S(t) = X_1 + X_2 + \cdots + X_{N(t)}$$

Ορισμός 1.1.3: Έστω {Wn,n≥1} μια ακολουθία τ.μ. που εκφράζει τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των ζημιογόνων ενδεχομένων και το χρόνο επέλευσης του οστού ζημιογόνου ενδεχομένου. Σύμφωνα με τα ανωτέρω θα ισχύει ότι:

$$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$$





<u>Διαφορά διαγραμμάτων:</u> Βλέπουμε δυο διαγράμματα με τις συνολικές αποζημιώσεις και με την ανέλιξη πλεονάσματος συναρτήσει του χρόνου t. Οι δειγματοσυναρτήσεις U(t) εμφανίζουν άλματα προς τα κάτω κατά τις χρονικές στιγμές Ti επέλευσης ζημιογόνων γεγονότων. Αξίζει να τονίσουμε ότι τα άλματα είναι ίδιου μεγέθους με τα αντίστοιχα άλματα προς τα πάνω της S(t) με την μόνη διαφορά ότι η S(t) είναι κλιμακωτή ενώ η U(t) είναι ευθύγραμμο τμήμα με θετική κλίση και συντελεστή διεύθυνσης c.

1.2 Η ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΓΙΑ ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

Διαδικασία Πλεονάσματος

Ορισμός 1.2.1: Κάθε ασφαλιστική στοχεύει στην ελάφρυνση των πελατών της από τον φόβο του κινδύνου που ενδεχομένως θα συναντήσουν και τους διευκολύνει να αντιμετωπίσουν αποτελεσματικά τις συνέπειές τους, καλύπτοντας τις ζημίες που προκαλούνται από ατυχήματα. Οι πελάτες σε αντάλλαγμα καταβάλλουν στην εταιρία ασφάλιστρα για να εξασφαλίσουν τη βιωσιμότητα της εταιρίας και να συμβάλλουν στη δημιουργία του αναγκαίου αποθέματος. Στην ασφαλιστική ορολογία τα αποθεματικά καλούνται *πλεόνασμα*. Το πλεόνασμα αποτελεί «περιθώριο ασφαλείας». Η τιμή του πλεονάσματος την χρονική στιγμή t είναι U(t).

Στοχαστική Ανέλιξη Πλεονάσματος

Θεωρούμε μία συνάρτηση $P(t)$ η οποία δηλώνει τα συνολικά ασφάλιστρα που εισέρχονται στην εταιρεία σε ένα διάστημα [0,t] και c το ασφάλιστρο που εισέρχεται στην εταιρεία στην μονάδα του χρόνου, έτσι ώστε το σύνολο των ασφαλίστρων που εισπράττει η εταιρεία στο χρονικό διάστημα [0,t]είναι ct και u το αποθεματικό που κρατάει η εταιρεία για κάθε χαρτοφυλάκιο.

<u>Ορισμός 1.2.2:</u> τότε η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος δίνεταια πο την ακόλουθη σχέση

$$U(t) = u + P(t) - S(t) \quad \Rightarrow \quad U(t) = u + ct - S(t)\,, t \geq 0$$

Όπου u: αρχικό αποθεματικό

P(t): σύνολο ασφαλίστρων που εισπράττονται στο (0,t]

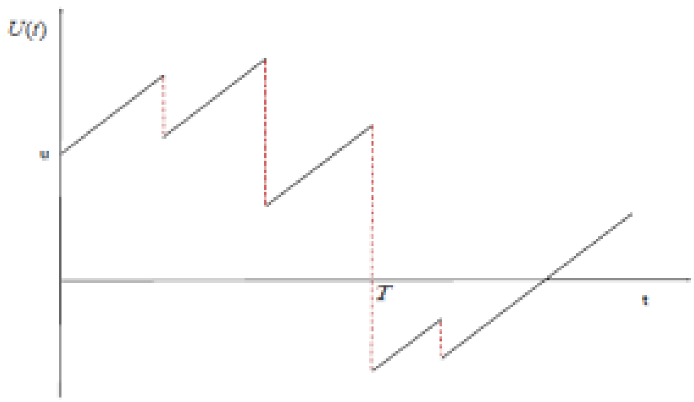
S(t): στοχαστική ανέλιξη των συνολικών αποζημιώσεων

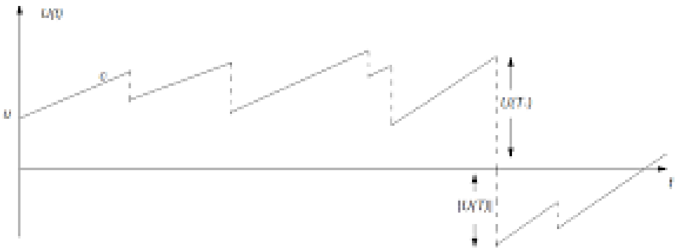
Προφανώς τα ασφάλιστρα θα πρέπει να ξεπερνούν το μέσο κόστος των ζημιών σε οποιοδήποτε χρονικό διάστημα, που σημαίνει ότι από την αρχή ακόμη οι πελάτες δέχονται κάποια θετική επιβάρυνση ασφαλείας.

<u>Υποθέσεις του κλασσικού μοντέλου:</u>

- P(t)=ct για κάποιο c>0, δηλαδή P(t) είναι μια γραμμική συνάρτηση
- Οι μεταβλητές X_i που εκφράζουν τα μεγέθη των αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. και είναι επίσης ανεξάρτητες από τον αριθμό των αποζημιώσεων N(t) σε οποιοδήποτε διάστημα [0,t]
- Η {N(t): t} είναι μια ανέλιξη Poisson έτσι ώστε η ανέλιξη {S(t) :t≥0} στην σχέση είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson

Τότε μιλάμε για το κλασικό πρότυπο ή κλασικό μοντέλο/υπόδειγμα της θεωρίας κινδύνου.





Ανάλυση Διαγραμμάτων:

Στο παραπάνω διάγραμμα παρουσιάζεται η ανέλιξη πλεονάσματος για το κλασικό πρότυπο. Ας πάμε να αναλύσουμε τι συμβαίνει αναλυτικότερα. Έστω ότι μια εταιρεία έχει αρχικό αποθεματικό u. Το πλεόνασμα θα αυξηθεί κατά c λόγω ασφαλίστρων. Την χρονική στιγμή T_1όμως θα έχουμε πτώση πλεονάσματος λόγω κάποιας αποζημίωσης. Μετά η εταιρεία θα συνεχίσει με αποθεματικό u+ct και θα συνεχίσουν οι προσαυξήσεις. Λογικό αφού δεν γίνεται να υπάρχουν πάντα μόνο κέρδη ή μόνο ζημιές. Έρχεται όμως η χρονική στιγμή T όπου το πλεόνασμα για πρώτη φορά γίνεται αρνητικό, δηλαδή θα μπορούσε κάποιος να σκεφτεί ότι η εταιρεία «χρεοκοπεί». Στην πραγματικότητα ούτε καν παύει η λειτουργεία της, διότι δανείζεται από άλλα χαρτοφυλάκια κτλ. Έχει λοιπόν νόημα να μελετήσουμε το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία U(T-) και το έλλειμμα αμέσως μετά την χρεοκοπία |U(T)| (αφού U(T)<0 ,t≥0).

Αν ρίξουμε μια ματιά στο διάγραμμα οι πλάγιες γραμμές έχουν κλίση c και απεικονίζουν την ανοδική πορεία του πλεονάσματος από τη γραμμική ροή των ασφαλίστρων στο χρόνο. Οι κατακόρυφες γραμμές απεικονίζουν την πτώση του πλεονάσματος όταν πληρώνεται κάποια αποζημίωση. Έστω τώρα $W_1=T_1$, $W_2=T_2-T_1$, $W_3=T_3-T_2$ κ.ο.κ. είναι τα μήκη των βημάτων στους ενδιαμέσους χρόνους διαδοχικών απαιτήσεων.

Συνθήκη Καθαρού Κέρδους

Ορισμός 1.2.3: Μια βασική προϋπόθεση που κάνουμε στο κλασσικό μοντέλο για να μην συμβεί χρεοκοπία είναι $c > \lambda\mu_1$, δηλαδή τα έσοδα να μην υπερβαίνουν κατά μέσο όρο τα έξοδα σε κάθε χρονική στιγμή. Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως Συνθήκη του Καθαρού Κέρδους.

όπου λ είναι το αναμενόμενο πλήθος αποζημιώσεων

μ_1 είναι η μέση αποζημίωση

Περιθώριο Ασφαλείας

<u>Ορισμός 1.2.4:</u> Το περιθώριο ασφαλείας ή συντελεστής ασφαλείας θ, εκφράζει τη φερεγγυότητα ενός χαρτοφυλακίου και δίνεται από την ακόλουθη σχέση δεδομένου ότι ισχύει η Συνθήκη Καθαρού Κέρδους :

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1 > 0$$

Με άλλα λόγια εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους για τον ασφαλιστή. Για το λόγο αυτό παίρνει συνήθως τιμές μεταξύ $0 < \theta < 1$ αλλά για τιμές μεγαλύτερες του 1 το χαρτοφυλάκιο παύει να είναι ανταγωνιστικό (ο ασφαλιστής έχει μεγάλο κέρδος άρα ο ασφαλιζόμενος δεν έχει λόγο να το επιλέξει).

Επιπλέον για συγκεκριμένη τιμή του αρχικού αποθεματικού u όσο το περιθώριο ασφαλείας σε ένα μοντέλο μεγαλώνει τόσο η πιθανότητα χρεοκοπίας μικραίνει.

1.3 ΜΕΤΡΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Στην ενότητα αυτή θα μελετήσουμε κάποιες μεταβλητές οι οποίες συνδέονται άμεσα με τη χρεοκοπίας στο κλασσικό μοντέλο. Η μελέτη αυτή θα βοηθήσει στην καλύτερη κατανόηση της εμφάνισης ή μη της χρεοκοπίας.

Πιθανότητα Χρεοκοπίας

<u>Ορισμός 1.3.1:</u> Η πιθανότητα χρεοκοπίας για αρχικό αποθεματικό u>0 δίνεται από την σχέση $\psi(u) = \Pr(T < \infty | U(0) = u) = \Pr(U(T) < 0 | U(0) = u)$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μια φθίνουσα συνάρτηση συνεπώς ισχύει ότι

$$\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0$$

Χρεοκοπία θα συμβεί αν κατά τη χρονική στιγμή έστω t εμφάνισης του ζημιογόνου ενδεχομένου το υπάρχον αποθεματικό u+ct είναι μικρότερο από το ύψος της αποζημίωσης Χ.

> **<u>Σημείωση:</u>** Αν δεν ισχύει η Συνθήκη Καθαρού Κέρδους τότε $\psi(u) = 1$, $\forall u \geq 0$, δηλαδή η χρεοκοπία είναι βέβαιη όσο μεγάλο και αν είναι το αρχικό αποθεματικό u. Αντίθετα αν ισχύει η Συνθήκη τότε $\psi(u) < 1,\ \forall u \geq 0$.

Από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας έχουμε:

$$\psi(u) = \int_0^\infty f_T(t)\Pr(X > u + ct)dt = \int_0^\infty f_T(t)\,[1 - F_x(u + ct)]dt$$
$$= \int_0^\infty F_T'(t)\,[1 - F_x(u + ct)]dt$$

Πιθανότητα μη-Χρεοκοπίας

Ορισμός 1.3.2: Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση

$$\delta(u) = 1 - \psi(u) = \Pr(T = \infty | U(0) = u) = \Pr(U(t) \geq 0, \text{για κάθε } t \geq 0$$

Η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας είναι μια αύξουσα συνάρτηση συνεπώς ισχύει ότι

$$\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1$$

Σημείωση: Η δ(u) είναι μεικτή κατανομή αφού δ(0)>0 και δ(u) συνεχής στο (0,∞). Συνεπώς μπορεί να θεωρηθεί ως μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής.

$$1 - \psi(u) = \Pr(\text{δεν εμφανίζεται χρεοκοπία})$$
$$= \Pr(U(t) \geq 0, \text{για κάθε } t \geq 0) = \Pr(u + ct - S(t) \geq 0)$$
$$= \Pr(u \geq S(t) - ct) = \Pr(u \geq L) = F_L(u)$$

Σημείωση: Στο κλασσικό πρότυπο η δ(u) ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση η οποία είναι μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση καθώς εμφανίζεται τόσο με την μορφή παραγώγου όσο και μέσα στο ολοκλήρωμα.

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u - x)f(x)dx$$

Χρόνος Χρεοκοπίας:

Ορισμός 1.3.3: Ο χρόνος χρεοκοπίας T για $t \geq 0$ δίνεται από τη σχέση

$$T = \inf\{t: U(t) < 0 | U(0) = u\} \text{ ή } T = \infty \text{ αν } U(t) \geq 0$$

Πρόκειται για μια ελλειμματική τ.μ. γιατί με θετική πιθανότητα μπορεί να πάρει την τιμή άπειρο, δηλαδή $P(T = \infty) > 0$. Αυτό συμβαίνει διότι όταν ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους η εταιρεία στην πραγματικότητα μπορεί να μην χρεοκοπήσει ποτέ.

> **Σημείωση:** Ισχύει ότι $P(T = \infty) = P(U(t) \geq 0, \forall t) = 1 - \psi(u) = \delta(u)$ από όπου προκύπτει ότι ο χρόνος χρεοκοπίας Τα εξαρτάται από την τιμή του αρχικού αποθεματικού u.

Έλλειμα τη στιγμή Χρεοκοπίας

Ορισμός 1.3.4: Το έλλειμα τη στιγμή της χρεοκοπίας συμβολίζεται με |U(T)| λόγω του ότι παίρνει αρνητική τιμή. Εκφράζει τη σφοδρότητα της χρεοκοπίας δηλαδή το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το μηδέν όταν επέλθει χρεοκοπία.

Πλεόνασμα πριν τη Χρεοκοπία

Ορισμός 1.3.5: Το πλεόνασμα λίγο πριν την χρεοκοπίας συμβολίζεται με U(T-) και δίνεται από τη σχέση $\mathrm{U(T-)} = \lim_{\mathrm{t \to T-}} \mathrm{U(t)}$.

Εκφράζει το μέγεθος του πλεονάσματος λίγο πριν τη χρονική στιγμή της καταβολής της ασφαλιστικής αποζημίωσης η οποία οδηγεί σε χρεοκοπία και παίρνει θετικές τιμές.

Μέγεθος Πτώσης Πλεονάσματος:

Ορισμός 1.3.6: Το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό επίπεδο u συμβολίζεται με την τ.μ. L_1. Αναλυτικότερα η L_1 είναι η τιμή της διαφοράς S(t)-ct τη στιγμή που η διαφορά αυτή καθίσταται για πρώτη φορά θετική. Αν δεν υπάρξει πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό τότε θέτουμε $L_1=0$.

Ας υποθέσουμε ότι η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από τη τιμή u συμβαίνει την χρονική στιγμή t_1 και το πλεόνασμα εκείνη τη στιγμή είναι u_1. Τότε η τιμή της L_1 είναι $L_1=u-u_1$. Αντίστοιχα τώρα μπορούμε να ορίσουμε την τ.μ. L_2 η οποία παριστά το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u_1 όταν το αρχικό αποθεματικό u_1 και παίρνει την τιμή $L_2= u_1 - u_2$. Με τον ίδιο τρόπο εκφράζεται και η τ.μ. L_3 η οποία παριστά το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το $u-L_1-L_2$ κ.ο.κ

Οι τ.μ. L_1, L_2, $L_3 \ldots L_j$ για j=i,i+1,… ονομάζονται κλιμακωτά ύψη καθώς παρουσιάζουν τη σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από την αρχική τιμή u ως τη στιγμή της χρεοκοπίας ή αν δεν συμβεί χρεοκοπίας ως την ελάχιστη τιμή που παίρνει η ανέλιξη $\{U(t) : t \geq 0\}$.

Έστω τώρα η διακριτή τ.μ. Κ η οποία εκφράζει το πλήθος των κλιμακωτών υψών και ακολουθεί τη γεωμετρική κατανομή. Δηλαδή

$$Pr(K = k) = [\psi(0)]^k \delta(0) = (\frac{1}{1+\theta})^k \frac{\theta}{1+\theta}, \qquad k = 0,1,2\ldots$$

Στο κλασσικό μοντέλο που μελετάμε θεωρούμε τη σύνθετη τ.μ.

$$L = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ K = 0 \\ L_1 + \ L_2 + \ldots + L_k, & \alpha\nu\ K \geq 1 \end{cases}$$

Όπου οι μεταβλητές $L_1, L_{2,..}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες και ανεξάρτητες της τ.μ. K , η οποία ονομάζεται μέγιστη σωρευτική απώλεια και την αναλύουμε παρακάτω.

> **<u>Σημείωση:</u>** Οι τ.μ. U(T-) και L_1 είναι είναι διαφορετικές, όμως στην περίπτωση που το αρχικό αποθεματικό u είναι ίσο με μηδέν τότε και μόνο τότε οι δυο τ.μ. συμπίπτουν.

Μέγιστη Σωρευτική Απώλεια

<u>Ορισμός 1.3.7:</u> Η μέγιστη σωρευτική απώλεια (maximal aggregate loss) L είναι η μεγαλύτερη δυνατή συνολική ζημιά από όλες τις δυνατές στο διάστημα [0,t] και δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{L} = \max_{\mathrm{t} \geq 0}\{\mathrm{S(t)} - \mathrm{ct}\} = \mathrm{L_1} + \mathrm{L_2} + \cdots + \mathrm{L_N},\ \ \mathrm{L} \geq 0$$

όπου S(t):κεφάλαιο που απαιτείται στο [0,t]

ct: ποσό που εισπράττεται στο [0,t]

N: τυχαίος αριθμός των καταγραμμένων πτώσεων

L_i ανεξάρτητες τ.μ.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η L είναι μικτού τύπου με μάζα πιθανότητας στο μηδέν και ακολουθεί την σύνθετη γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $\frac{\theta}{1+\theta}$.

Η πιθανότητα η L να πάρει την τιμή μηδέν είναι $Pr(L = 0) = (K = 0) = \delta(0)$.

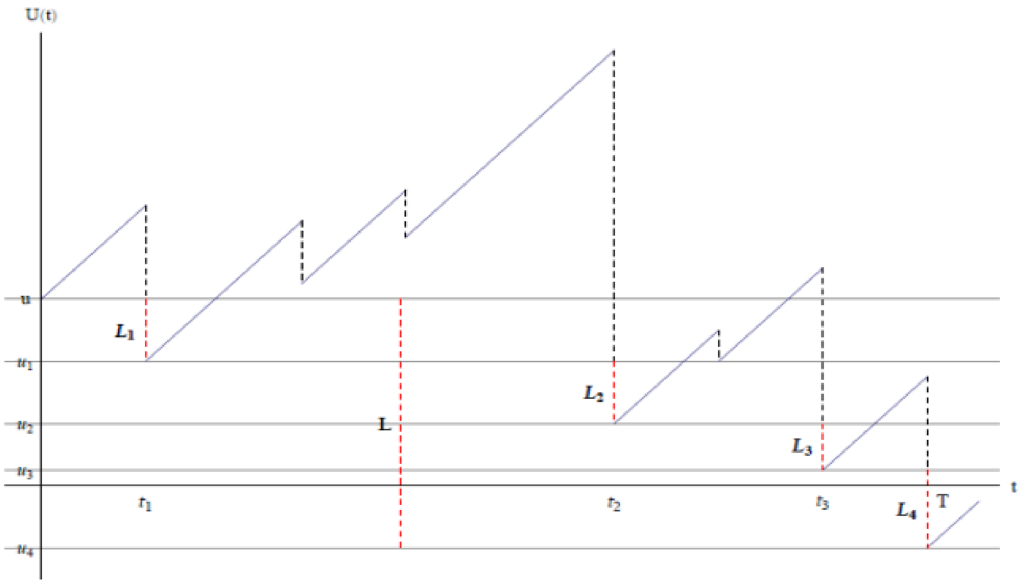


Figure 1: Γραφική παράσταση των μεταβλητών Li και της μέγιστης σωρευτικής απώλειας L στην ανέλιξη πλεονάσματος

Συντελεστής Προσαρμογής

Ορισμός 1.3.8: Η σταθερά R είναι η θετική λύση της εξίσωσης $M_x(r) = 1 + (1 + \theta)\mu_1 r$ η οποία ονομάζεται εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής ή εξίσωση του Lundberg.

Παρατηρήσεις:

- Από τη σχέση είναι φανερό ότι ο συντελεστής προσαρμογής R δεν υπάρχει στις περιπτώσεις που η ροπογεννήτρια M(r) απειρίζεται για κάθε r>0 (π.χ κατανομή Pareto).
- Ο συντελεστής προσαρμογής R είναι χρήσιμος διότι μας δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας.
- Για να ισχύει η σχέση ο συντελεστής προσαρμογής δεν μπορεί να είναι μηδέν ούτε αρνητικός.
- Ο συντελεστής προσαρμογής παίρνει θετικές τιμές μόνο καιδ εν έχει περισσότερες από μια αποδεκτές λύσεις. Από την παραπάνω σχέση παρατηρούμε ότι το δεξιό μέλος είναι μια γραμμική συνάρτηση συνεπώς δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μια λύσεις.

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε δυο σημαντικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο. Είναι χρήσιμα διότι μας παρέχουν μια γνώση για την ψ(u) όταν δεν υπάρχει κάποιος αναλυτικός τύπος.

1. **Ανισότητα Lundberg:** Η ανισότητα Lundberg είναι σημαντική διότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξετάσει την αλληλεπίδραση μεταξύ του αρχικού αποθεματικού u και του περιθωρίου ασφαλείας θ.

Έστω τώρα ότι υπάρχει συντελεστής προσαρμογής R>0 τέτοιος ώστε να ικανοποιεί την εξίσωση $1 + (1 + \theta)RE(X) = M_x(R)$ τότε η ανίσοτητα Lundberg μας δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}, u \geq 0$$

<u>Σημείωση:</u> Η ανισότητα Lundberg απαιτεί την ύπαρξη συντελεστή προσαρμογής R συνεπώς και την ύπαρξη ροπογεννήτριας $M_x(t)$. Σε περιπτώσεις όπου η ροπογεννήτρια δεν ορίζεται (πχ κατανομή Pareto) τότε χρησιμοποιούνται άλλες προσεγγίσεις για την ψ(u).

<u>Σημείωση:</u> Επιπλέον, από την ανισότητα Lundberg προκύπτει ότι $\psi(\infty) = 0 \Rightarrow \delta(\infty) = 1$.

Πράγματι,

$$0 \leq \psi(u) \leq e^{-Ru} \Rightarrow 0 \leq \lim_{u\to\infty} \psi(u) \leq \lim_{u\to\infty} e^{-Ru} \Rightarrow 0 \leq \psi(\infty) \leq 0 \Rightarrow \psi(\infty) = 0$$

2. **Ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg:** Στο κλασσικό μοντέλο ο ασυμπτωτικός τύπος Cramer Lundberg είναι πολύ σημαντικός διότι μας προσφέρει μια πολύ καλή προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) στις περιπτώσεις που το αρχικό απόθεμα u παίρνει πολύ μεγάλες τιμές.

   Προϋπόθεση για να ισχύει όμως είναι : $\int_0^\infty x e^{Rx} \bar{F}(x) dx < \infty$

   Η πιθανότητα χρεοκοπίας για το κλασσικό μοντέλο ικανοποιεί τη σχέση:

   $\psi(u) \sim Ce^{-Ru}, u \to \infty$ δηλαδή $C = \lim_{u\to\infty} e^{Ru}\, \psi(u)$

   όπου η σταθερά είναι $C = \frac{\theta E(X)}{E[xe^{Rx}] - (1+\theta)E(X)}$

1.4 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΤΩΝ GERBER-SHIU

Το 1998 οι Gerber και Shiu κατάφεραν να μοντελοποιήσουν τις τ.μ. του χρόνου χρεοκοπίας T, το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας |U(T)| και το πλεόνασμα ακριβώς πριν την χρεοκοπία U(T-) σε μια μόνο συνάρτηση η οποία λέγεται προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής. Το σημαντικό με την εξίσωση αυτή είναι ότι κατάφεραν να μελετήσουν ταυτόχρονα μέτρα κινδύνου τα οποία πριν μπορούσαν να τα μελετήσουν μεμονωμένα.

<u>Ορισμός 1.4.1:</u> Για $\delta \geq 0$ και $u \geq 0$ η συνάρτηση των Gerber-Shiu ή η προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής $m_\delta(u)$ δίνεται από τη σχέση:

$$m_\delta(u) = E\{e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u\}$$

Όπου δ: ένταση ανατοκισμού

w: [0,∞)x(0,∞)→[0,∞) μια διδιάστατη συνάρτηση στο R^2 που λέγεται συνάρτηση ποινής

U(T-): το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία

|U(T)|: το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία

I(T<∞): η δείκτρια συνάρτηση του ενδεχομένου εμφάνισης ή μη χρεοκοπίας

$$m_\delta(u) = \iiint_0^\infty e^{-\delta t} w(x,y) f(x,y,t|u) dtdxdy$$

Ειδικές Περιπτώσεις:

i. Για δ=0 και w(x,y)=1, προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας :

$$m_\delta(u) = E[I(T < \infty)|U(0) = u] = Pr(T < \infty|U(0) = u) = \psi(u)$$

ii. Για w(x,y)=1 και δ>0, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας:

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} I(T < \infty) \middle| U(0) = u\right]$$

iii. Για $w(x,y)=I(x \le x_1)I(y \le x_2)$ και $\delta>0$, δηλαδή η προεξοφλημένη από κοινού σ.κ. πλεονάσματος τη στιγμή ακριβώς πριν την χρεοκοπία και ελλειμάτος τη στιγμή της χρεοκοπίας:

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= E\{e^{-\delta T} I(U(T-) \le x_1) I(|U(T)| \le x_2) I(T<\infty) | U(0)=u\} \\ &= F_\delta(x_1, x_2|u) \end{aligned}$$

iv. Για $w(x,y)=I(x \le x_1)I(y \le x_2)$ και $\delta=0$, προκύπτει η από κοινού συνάρτηση κατανομής των U (T -) , U(T) τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό u και το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ x ενώ το έλλειμμα τη στιγμή της χρεοκοπίας το πολύ y:

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E\{I(U(T-) \le x_1) I(|U(T)| \le x_2) I(T<\infty) | U(0)\} \\ &= P\{(U(T-) \le x_1)(|U(T)| \le x_2)(T<\infty) | U(0)=u\} \\ &= F_0(x_1, x_2|u) \end{aligned}$$

v. Για $w(x,y)=I(x=x_1)I(y=x2)$ και $\delta>0$ προκύπτει η προεξοφλημένη σ.π.π. των U(T-) και |U(T)| τη στιγμή της χρεοκοπίας.

$$m_\delta(u) = h_\delta(x_{1|u}) = E\left[e^{-\delta T} I(U(T-) \le x_1) I(T<\infty) \middle| U(0)=u\right]$$

vi. Για $w(x,y)=I(x<x_1)$ και $\delta>0$ προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της U(T-) αμέσως πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας.

$$m_\delta(u) = E\left[e^{-\delta T} I(U(T-) \le x_1) I(T<\infty) \middle| U(0)=u\right] = F_\delta(x_1|u)$$

vii. Για $w(x,y)=I(x \le x_1)$ και $\delta=0$, προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της U (T-) αμέσως πριν τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή η πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό u και το μέγεθος του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία να είναι το πολύ x_1.

$$\begin{aligned} m_0(u) &= E\{I(U(T-) \le x_1) I(T<\infty) | U(0)\} = P\{(U(T-) \le x_1)(T \\ &< \infty) | U(0)=u\} = F_0(x_1|u) \end{aligned}$$

viii. Για $w(x,y)=I(x=x_1)$ και $\delta>0$ προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της U (T-) τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_\delta(u) = E\{e^{-\delta T} I(U(T-) = x_1) I(T<\infty) | U(0)=u\} = f_\delta(x_1|u)$$

ix. Για $w(x,y)=I(x=x_1)$ και $\delta=0$ προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της U (T-) τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_\delta(u) = E\{I(U(T-) = x_1)I(T < \infty)|U(0) = u\} = f_0(x_1|u)$$

x. Για $w(x,y)=I(y\leq x_2)$ και $\delta>0$ προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της |U(T)| τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_\delta(u) = E\{e^{-\delta T}I(|U(T)| \leq x_2)I(T < \infty)|U(0) = u\} = F_\delta(x_2|u)$$

xi. Για $w(x,y)=I(y\leq x_2)$ και $\delta=0$ προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση κατανομής της |U(T)| τη στιγμή της χρεοκοπίας. Η $F_0(x_2|u)$ εκφράζει την πιθανότητα να επέλθει χρεοκοπία, με αρχικό κεφάλαιο u και το ύψος ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας να είναι το πολύ x2.

$$m_0(u) = E\{I(|U(T)| \leq x_2)I(T < \infty)|U(0) = u\} = P\{(U(T-) \leq x_2)(T < \infty)|U(0) = u\} = F_0(x_2|u)$$

xii. Για $w(x,y)=I(y=x_2)$ και $\delta>0$ προκύπτει η προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της |U(T)| τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_\delta(u) = E\{e^{-\delta T}I(U(T-) = x_2)I(T < \infty)|U(0) = u\} = f_\delta(x_2|u)$$

xiii. Για $w(x,y)=I(y=x_2)$ και $\delta=0$ προκύπτει η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας της |U(T)| τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_0(u) = E\{I(U(T-) = x_2)I(T < \infty)|U(0) = u\} = f_0(x_2|u)$$

xiv. Για $w(x,y) = e^{-s_1x-s_2y}$ και $\delta=0$ προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace των U (T-), |U(T)|

$$m_0(u)E = e^{-s_1U(T-)-s_2|U(T)|}I(T < \infty)|U(0) = u$$

xv. Για $w(x,y)=x^k$ και $\delta=0$, προκύπτει η ροπή k-τάξης του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία

$$m_0(u) = E[U(T-)^k I(T < \infty|U(0) = u)]$$

Για $w(x,y)=x^k$ και $\delta=0$, προκύπτει η ροπή k-τάξης του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας

$$m_0(u) = E[|U(T)|^k I(T < \infty|U(0) = u)]$$

1.5 Η ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ (DEFECTIVE RENEWAL EQUATION)

Ορισμός 1.5.1: Μια εξίσωση που έχει την μορφή $m(u) = \kappa \int_0^u m(u-y)dZ(y) + r(u), \quad u \geq 0$ ονομάζεται ανανεωτική εξίσωση, όπου m(.) είναι η άγνωστη συνάρτηση, κ είναι μια σταθερά με 0<κ ≤1 , r(.) είναι μια φραγμένη συνάρτηση, Z(.) είναι μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής με $Z(u) = \int_{-\infty}^u \zeta(y)dy$ με ζ(y) την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Οι ανανεωτικές εξισώσεις διακρίνονται σε:

1) Ελλειμματικές (defective) όταν 0<κ<1

2) Κανονικές (proper)

3) Μη-Ελλειμματικές (no defective) όταν κ=1

Η συνάρτηση Gerber-Shiu φαίνεται να ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για 0<κ<1.

Για την ανάλυση της διαδικασίας πλεονάσματος στο κλασικό μοντέλο κινδύνου, έχουν χρησιμοποιηθεί ευρέως οι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Μια προσεγγιστική λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης παρουσιάζεται στη συνέχεια, μέσω της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, την οποία θα αναλύσουμε και παρακάτω:

Πόρισμα 1.5.2: Η συνάρτηση Gerber Shiu ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληροδιαφορική εξίσωση:

$$m'(u) = \frac{\lambda+\delta}{c} m_\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u m_\delta(u-x)f(x)dx - \frac{\lambda}{c}\gamma(u), \ u \geq 0$$

όπου $\gamma(x) = \int_x^\infty w(x, y-x)f(y)dy$

Πόρισμα 1.5.2: Για δ > 0, w(x,y)=1 η συνάρτηση m(u) των Gerber και Shiu ισούται με την πιθανότητα χρεοκοπίας και ισχύει ότι:

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(u) ικανοποιεί την ακόλουθη ολοκληροδιαφορική εξίσωση

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)f(x)dx - \frac{\lambda}{c}\bar{F}(u)$$

με $\bar{F}(u) = 1 - F(u) = \int_u^{\infty} f(x)dx$

<u>Θεώρημα 1.5.3</u> : Η συνάρτηση $m_\delta(u)$ των Gerber Shiu ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_\delta(u) = \frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u m_\delta(u-x)g(x)dx + \frac{1}{1+\xi_\delta}H(u)\,, u \geq 0$$

Όπου $\frac{1}{1+\xi_\delta} = \frac{\lambda}{c}\frac{1-\hat{f}(\rho)}{\rho} = 1 - \frac{\delta}{c\rho}$

$\rho=\rho(\delta)$ η θετική ρίζα της εξίσωσης Lundberg $\lambda + \delta - c\rho = \lambda\hat{f}(\rho)$ με $\xi_0=\theta$

$g(x) = \frac{\lambda}{c(1+\xi_\delta)-1}T_\rho f(x)$

$H(u) = \frac{\lambda}{c(1+\xi_\delta)^{-1}}T_\rho \gamma(u)$

$T_\rho f(x) = \int_x^{\infty} e^{-r(y-x)}f(y)dy$

<u>Θεώρημα 1.5.4</u>: Έστω η συνάρτηση κατανομής $K_\delta(u) = 1 - \bar{K}_\delta(u)$, με $\bar{K}_\delta(u) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta}\left(\frac{1}{1+\xi_\delta}\right)^n \bar{G}_\delta^{*n}(u),\ u \geq 0.$

Τότε η συνάρτηση των Gerber Shiu $m_\delta(u)$ δίνεται από τον τύπο

$$m_\delta(u) = \frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u H_\delta(u-x)dK_\delta(x) + \frac{1}{1+\xi_\delta}H_\delta(u),\ u \geq 0 \qquad (1.5.3.1)$$

ή

$$m_\delta(u) = -\frac{1}{\xi_\delta}\int_0^u \bar{K}_\delta(u-x)dH'_\delta(x)dx - \frac{1}{\xi_\delta}H_\delta(0)\bar{K}_\delta(u) + \frac{1}{\xi_\delta}H_\delta(u),\ u \geq 0$$

Όπου

G_δ^{*n}: η n-οστή συνέλιξη της σ.κ. G(x)

$\bar{G}_\delta^{*n}$: η n-οστή συνέλιξη της σ.κ. $\bar{G}(x)$

$$H_\delta(u)=\frac{\lambda}{c(1+\xi_\delta)^{-1}}T_\rho\gamma(u)=\frac{\lambda}{c}\frac{c}{\lambda}\frac{1}{\hat{\bar{F}}(\rho)}T_\rho\gamma(u)=\frac{T_\rho\gamma(u)}{\hat{\bar{F}}(\rho)}=\frac{\int_u^\infty e^{-\rho(x-u)}\gamma(x)dx}{\hat{\bar{F}}(\rho)}=\frac{e^{\rho u}\int_u^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty w(x,y-x)f(y)dydx}{\int_0^\infty e^{-\rho u}\bar{F}(y)dy}$$

Απόδειξη

Αν w(x,y)=1 τότε:

$$\gamma(x)=\int_x^\infty f(y)dy=\bar{F}(x) \tag{1.5.3.2}$$

και

$$H_\delta(u)=\frac{T_\rho\gamma(u)}{\hat{\bar{F}}(\rho)}=\frac{T_\rho\bar{F}(u)}{\hat{\bar{F}}(\rho)}=\bar{G}_\delta(u) \tag{1.5.3.3}$$

Τότε με τα παραπάνω και σε συνδυασμό με το *Θεώρημα 1.5.2* η συνάρτηση των Gerber Shiu γίνεται:

$$m_\delta(u)=\frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u m_\delta(u-x)g_\delta(x)dx+\frac{1}{1+\xi_\delta}\bar{G}_\delta(u),\ u\geq 0 \tag{1.5.3.4}$$

με $g_\delta(x)=G'_\delta(x)$

Όμως, ισχύει ότι επειδή η $\bar{K}_\delta(u)$ είναι η δεξιά ουρά σύνθετης γεωμετρικής της στοχαστικής διαδικασίας $S=W_1+W_2+\ldots+W_M$ όπου $M\sim G(\frac{\xi_\delta}{1+\xi_\delta})$ και η W έχει σ.κ. G_δ ισχύει:

$$\hat{\bar{K}}_\delta(u)=\frac{1}{1+\xi_\delta}\hat{\bar{K}}_{\delta(s)}\bar{g}_\delta(s)+\frac{1}{1+\xi_\delta}\hat{\bar{G}}_\delta(s)$$

Με αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace προκύπτει τελικά:

$$\bar{K}_\delta(u)=\frac{1}{1+\xi_\delta}\int_0^u \bar{K}_\delta(u-x)g_\delta(x)dx+\frac{1}{1+\xi_\delta}\bar{G}_\delta(u),\ u\geq 0 \tag{1.5.3.5}$$

Τότε από τις σχέσεις *(1.5.3.4)* και *(1.5.3.5)* καταλήγουμε ότι:

$\bar{K}_\delta(u)=\varphi_\delta(u)$ για $w(x,y)=1$

Άρα, $\bar{K}_\delta(u)=E\left[e^{-\delta T}I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right]$

Συμπεραίνουμε ότι η δεξιά ουρά $\overline{\mathrm{K}}_{\delta}(\mathrm{u})$ της σύνθετης γεωμετρικής είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και $\overline{\mathrm{K}}_{0}(\mathrm{u}) = \psi(\mathrm{u})$

Επομένως, η εύρεση του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας T, ανάγεται στον υπολογισμό της $\overline{\mathrm{K}}_{\delta}(\mathrm{u})$ οπότε κατά επέκταση στον υπολογισμό της σ.κ. της $\mathrm{G}_{\delta}(\mathrm{x})$.

Τότε προκύπτει το ζητούμενο του *Θεωρήματος 1.5.3* και η $\mathrm{m}_{\delta}(\mathrm{u})$ δίνεται από τη σχέση

$$m_{\delta}(\mathrm{u}) = \frac{1}{\xi_{\delta}} \int_{0}^{\mathrm{u}} \mathrm{H}_{\delta}(\mathrm{u}-\mathrm{x}) d\mathrm{K}_{\delta}(\mathrm{x}) + \frac{1}{1+\xi_{\delta}} \mathrm{H}_{\delta}(\mathrm{u}), \quad \mathrm{u} \geq 0$$

ή

$$m_{\delta}(\mathrm{u}) = -\frac{1}{\xi_{\delta}} \int_{0}^{\mathrm{u}} \overline{\mathrm{K}}_{\delta}(\mathrm{u}-\mathrm{x}) d\mathrm{H}'_{\delta}(\mathrm{x}) d\mathrm{x} - \frac{1}{\xi_{\delta}} \mathrm{H}_{\delta}(0) \overline{\mathrm{K}}_{\delta}(\mathrm{u}) + \frac{1}{\xi_{\delta}} \mathrm{H}_{\delta}(\mathrm{u}), \quad \mathrm{u} \geq 0$$

<u>Πρόταση 1.5.5:</u> Οι από κοινού μη-προεξοφλημένες σ.κ. των U(T-) και |U(T)|

Για x≤u:

$$\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y}|\mathrm{u}) = \frac{1}{\theta\rho_1}\left\{\int_0^{\mathrm{x}} \psi(\mathrm{u}-\mathrm{t})\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{t})d\mathrm{t} - \int_0^{\mathrm{x}} \psi(\mathrm{u}-\mathrm{t})\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{y}+\mathrm{t})d\mathrm{t}\right\} + \frac{1}{\theta}\psi(\mathrm{u})\{\mathrm{F}_{\mathrm{e}}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) - \mathrm{F}_{\mathrm{e}}(\mathrm{x}) - \mathrm{F}_{\mathrm{e}}(\mathrm{y})\}$$

Για x>u:

$$\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y}|\mathrm{u}) = \frac{1+\theta}{\theta}[\psi(\mathrm{u}) - \psi(\mathrm{u}+\mathrm{y})] + \frac{1}{\theta\rho_1}\int_0^{\mathrm{y}} \psi(\mathrm{u}+\mathrm{y}-\mathrm{t})\overline{\mathrm{F}}(\mathrm{t})d\mathrm{t} + \frac{1}{\theta}\psi(\mathrm{u})\{\mathrm{F}_{\mathrm{e}}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) - \mathrm{F}_{\mathrm{e}}(\mathrm{x}) - \mathrm{F}_{\mathrm{e}}(\mathrm{y})\} - \frac{1}{\theta}\{\mathrm{F}_{\mathrm{e}}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) - \mathrm{F}_{\mathrm{e}}(\mathrm{x})\}$$

Εύκολα τώρα προκύπτουν οι περιθώριες κατανομές των U(T-) και |U(T)| για y→∞ και x→∞ αντίστοιχα.

<u>Πρόταση 1.5.6:</u> Για τις περιθώριες ισχύει ότι

$$F_1(x|u) = \begin{cases} \frac{1}{\theta\rho_1}\{\int_0^x \psi(u-t)\bar{F}(t)dt - \frac{1}{\theta}\psi(u)F_e(x)\,, & x < u \\ \frac{1+\theta}{\theta}\psi(u) + \frac{1-\psi(u)}{\theta}F_e(x) - \frac{1}{\theta} & ,\ x \geq u \end{cases}$$

$$F_2(y|u) = \frac{1+\theta}{\theta}[\psi(u) - \psi(u+y)] + \frac{1}{\theta}\int_0^y \psi(u+y-t)\bar{F}(t)dt - \frac{1}{\theta}\psi(u)F_e(y)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΙΝΗΣ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ

2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Σύμφωνα με το κλασικό μοντέλο κινδύνου, γνωστό ως μοντέλο Cramer-Lundberg, τα ασφάλιστρα θεωρούμε ότι λαμβάνονται από τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις σε ένα σταθερό ρυθμό στο χρόνο. Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα που θα κερδηθεί από τα μελλοντικά ασφάλιστρα είναι γνωστή ή ότι τα συνολικά ασφάλιστρα είναι καθοριστικά. Στο κεφάλαιο αυτό θα γενικεύσουμε την παραπάνω υπόθεση και θα θεωρήσουμε ότι τα ασφάλιστρα δεν εισπράττονται με σταθερό ρυθμό και περιγράφονται από μία στοχαστική διαδικασία Poisson.

Μελετώντας το μοντέλο κινδύνου που προτάθηκε από τον Boikov είναι σημαντικό στη θεωρία κινδύνου για δύο βασικούς λόγους. Αρχικά, διότι μπορούν να υπολογιστούν διάφορα μέτρα κινδύνου και να γίνουν προβλέψεις ευκολότερα σε μικρές ασφαλιστικές επιχειρήσεις στις οποίες τα ασφαλιστικά έσοδα έχουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα από τις αντίστοιχα μεγάλες ασφαλιστικές επιχειρήσεις. Δεύτερον, με τη μελέτη στοχαστικών ασφαλίστρων δίνεται η δυνατότητα επέκτασης της έρευνας σε μοντέλα πιο σύνθετα και ρεαλιστικά όπως για παράδειγμα στους Boucherie, που ενσωματώνουν μορφές εξάρτησης ανάμεσα στα ασφάλιστρα και στις απαιτήσεις.

Στις ενότητες 2.2 και 2.3 θα δούμε πως η συνάρτηση των Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και αναπτύσσεται μια ολοκληρωτική εξίσωση που ικανοποιείται από την προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής.

Στην ενότητα 2.4 εξετάζεται ένα μοντέλο κινδύνου για το οποίο τα ασφάλιστρα ακολουθούν τη γενικευμένη Erlang(n,β) κατανομή και αναπτύσσεται η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση Gerber-Shiu.

2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

<u>Συνθήκη 2.1:</u> Υποθέτουμε ότι το αρχικό αποθεματικό σε μια ασφαλιστική είναι $u \geq 0$. Ο αριθμός των αποζημιώσεων δίνεται από μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με ίδια κατανομή $Y_1, Y_2, \ldots$ με $F(y) = 1 - \overline{F}(y), \quad y > 0$, ενώ ο αριθμός των ασφαλίστρων δίνεται από μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με ίδια κατανομή $P_1, P_2, \ldots$ με $G(x) = 1 - \overline{G}(x), \quad x > 0$ τότε η διαδικασία πλεονάσματος έχει τη μορφή:

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{M(t)} P_i - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \quad \textbf{(2.1)}$$

Όπου u: αρχικό αποθεματικό

M(t):αριθμός ατομικών ασφαλίστρων

N(t):αριθμός αποζημιώσεων

Ας υποθέσουμε ότι οι τ.μ. X_i είναι εξαρτημένες από τον αριθμό των αποζημιώσεων N(t).

<u>Παρατήρηση 2.2.</u> Η διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ μπορεί να εκφραστεί διαφορετικά, θεωρώντας ως απαριθμήτρια συνάρτηση των ατομικών ασφαλίστρων και απαιτήσεων μέχρι τη στιγμή t την $J(t) = M(t) + N(t)$. Τότε η $J(t)$ είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση λ+μ.

Έστω Bi, i=1,2,… μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας $P(B_i = 1) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$ και πιθανότητα αποτυχίας $P(B_i = 0) = 1 - P(B_i = 1) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}$.

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $X_i = I(B_i = 1)P_i - I(B_i = 0)Y_i, \quad i = 1,2$

Όπου I(E) παριστά τη δείκτρια συνάρτηση με $I(E) = \begin{cases} 1, & \text{αν συμβεί το E} \\ 0, & \text{αν δε συμβεί το E} \end{cases}$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών Bi είναι ανεξάρτητη από τις $J(t)$, P_i και Y_i. Επομένως, βάση των παραπάνω προκύπτει ότι η διαδικασίας πλεονάσματος γράφεται ως

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{J(t)} X_i$$

Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι:

$$E(X_i) = E[I(B_i = 1)P_i - I(B_i = 0)Y_i] = E[I(B_i = 1)E(P_i) - E[I(B_i = 0)]E(Y_i) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}E(P_i) - \frac{\lambda}{\mu+\lambda}E(Y_i) = \frac{\mu E(P_i) - \lambda E(Y_i)}{\mu+\lambda} > 0, \ \ i = 1,2,..$$

<u>Συνθήκη 2.3:</u> Έστω η σταθερά $\delta \geq 0$ και ω: $[0,\infty) \times (0,\infty) \rightarrow [0,\infty)$ μία φραγμένη συνάρτηση.

Για την ύπαρξη της συνάρτησης Gerber-Shiu m(u) η παραπάνω συνθήκη ώστε η ω να είναι φραγμένη είναι αναγκαία.

$$m(u) = E\{e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T < \infty) | U(0) = u\}, \ \ u \geq 0$$

<u>Συνθήκη 2.4</u>: Τα ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα μεγέθη των απαιτήσεων Yi είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με (μετρήσιμη) συνάρτηση πυκνότητας f(y), y>0. Επίσης και τα ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα ατομικά ασφάλιστρα Xi είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με (μετρήσιμη) συνάρτηση πυκνότητας g(x), x>0 αντίστοιχα.

Κατά τη διάρκεια της μελέτης θεωρούμε την h: $[0,\infty) \rightarrow$ R η οποία ικανοποιεί την $\int_0^\infty h(x)\,dx < \infty$ με τον μετασχηματισμό να ορίζεται ως:

$\tilde{h}(x) = \int_0^\infty e^{-su} h(u) du, \ \ s \geq 0$

3. ΕΛΛΕΙΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ GERBER SHIU

Στην ενότητα αυτή θα δοθεί μία ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu. Αναλυτικότερα, για τη λύση τέτοιων εξισώσεων, οι Lin and Willmot έχουν δώσει άμεσες εκφράσεις μέσω μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, ενώ οι Willmot μελέτησαν σημαντικά θεωρήματα που παρέχουν άνω και κάτω φράγματα των αυτών των λύσεων.

Στην ειδική περίπτωση όπου w(x,y)=1 τότε, προκύπτει ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, δηλαδή

$$\psi_\delta(u) = E\{e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u\},\ u \geq 0 \qquad (3.1)$$

<u>Πρόταση 3.1:</u> Κάτω από την Συνθήκη 2.1 η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί τη σχέση

$$0 < \psi_0(u) < 1 \text{ για όλα τα } u \varepsilon [0,\infty)$$

Απόδειξη:

Έστω αρχικό αποθεματικό uε[0,∞). Υποθέτουμε ότι μέχρι να συμβεί η άφιξη του πρώτου ασφαλίστρου, έχουν συμβεί k εN το πλήθος απαιτήσεων μεγέθους η κάθε μια μεγαλύτερη από ξ > 0 ικανοποιώντας την σχέση $\bar{F}(\xi) = P(Y > \xi) > 0$, ώστε kξ>u. Επιπλέον, θεωρούμε το χρόνο μέχρι την εμφάνιση του πρώτου ασφαλίστρου T_1 . Αφού η διαδικασία αφίξεων των ασφαλίστρων είναι Poisson με ένταση μ , η τυχαία μεταβλητή είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέσο 1/ μ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{T_1}(t) = \mu e^{-\mu t}, t \geq 0$.

Τότε για την πιθανότητα χρεοκοπίας θα ισχύει

$$\psi_0(u) \geq P[N(T_M \geq k \text{ και } Y_1, Y_2, \ldots, Y_k > \xi]$$

$$= P[N(T_M \geq k]P[Y_1, Y_2, \ldots, Y_k > \xi]$$

$$= P[N(T_M \geq k] \prod_{t=1}^{k} P(Y_i > \xi)$$

$$= P[N(T_M \geq k]\bar{F}^k(\xi) = \bar{F}^k(\xi) \int_0^\infty P[N(T = k)\ f_{T_1}(t)dt$$

$$= \bar{F}^k(\xi)\int_0^\infty \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\mu e^{-\mu t}dt$$

$$= \bar{F}^k(\xi)\frac{\mu\lambda^k}{k!}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu)t}\,dt > 0$$

Δηλαδή δείξαμε ότι $\psi_0(u) > 0$ για όλα τα uε[0,∞).

Για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta_0(0)$ με αρχικό αποθεματικό u = 0 είναι

$\delta_0(0) = 1 - \psi_0(0) = P(T = \infty | U(0) = 0) = P(\sum_{i=1}^{J(T)} X_i \geq 0) = P(\sum_{i=1}^{J(T)} X_i \geq 0, n = 1,2\ldots)$ *(3.2)*

Επίσης, $E(X_i) > 0$ προκύπτει από τη (2.3). Επομένως $1 - \psi_0(u) > 0 \Rightarrow \psi_0(u) < 1$. Όμως η $\psi_\delta(u)$ είναι μη-αυξουσα συνάρτηση και καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση ότι $\psi_0(u) < 1$ για κάθε uε[0,∞).

Από την Πρόταση 3.1 προκύπτουν δύο σημαντικά αποτελέσματα. Πρώτον, ο κίνδυνος δεν είναι ούτε σίγουρος ούτε αναπόφευκτος. Δεύτερον, η συνάρτηση ποινής $m_\delta(u)$ ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση. Συγκεκριμένα, δηλώνει ότι η σταθερά φ_δ ανήκει στο διάστημα (0,1) και αυτή η εξίσωση είναι πράγματι ελλειμματικού τύπου.

Έστω $R^2 = R \times R = [0,\infty) \times [0,\infty) = [0,\infty)^2$ και $B(R^2)$ η Borel στο R^2. Συμβολίζουμε με v το μέτρο πιθανότητας στο $(R^2, B(R^2))$ των τυχαίων μεταβλητών U(T-) και T, δεδομένου ότι U(0)=0. Συνεπώς, η από κοινού συνάρτηση κατανομής των U(T-) και T είναι

$v([0,x] \times [0,t]) = P(U(T-) \leq x, T \leq t | U(0) = 0]$, για κάθε $x \geq 0, t > 0$
(3.3)

κάτω από τις Συνθήκες 2.1 και 2.4 , έστω $p_x(y)$, $y > 0$ η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας |U(T)| δοθέντος ότι $U(T-) = x$ και $T = t$ για $x \geq 0, t > 0$. Η $p_x(y)$ συμπίπτει με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y_1 - x$ δοθέντος ότι $Y_1 > x$ και είναι

$p_x(y) = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)}$, $y > 0$
(3.4)

<u>Θεώρημα 3.2:</u> Θεωρούμε ότι ισχύουν οι Συνθήκες 2.1 ,2.2 και 2.4 και ότι οι v και $p_x(y)$ δίνονται από τους τύπους που αναφέραμε παραπάνω και θέτουμ

$$\varphi_\delta = \int e^{-\delta t} v(dx * dt)$$
(3.5)

$$f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int e^{-\delta t} p_x(y) v(dx * dt)\,, \quad y > 0$$
(3.6)

$$H_{\delta,w}(u) = \int_u^\infty \int e^{-\delta t} w(u + x, y - u) p_x(y) v(dx * dt) dy \quad u \geq 0$$
(3.7)

τότε, $0 < \varphi_\delta < 1$ και f_δ είναι μια συνάρτηση πυκνότητας

$$\Rightarrow \quad m(u) = \varphi_\delta \int_0^u m(u - y) f_\delta(y) dy + H_{\delta,w}(u)$$
(3.8)

Απόδειξη

Για $\varphi_\delta \leq \varphi_0 = v(R_+^2) = \psi_0(0)$ εύκολα καταλήγουμε από την Πρόταση 3.1 ότι $0 < \varphi_\delta < 1$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini έχουμε $\int_0^\infty f_\delta(y) dy = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty \int e^{-\delta t} p_x(y) v(dx * dt) dy = 1$. Συνεπώς, η f_δ είναι μια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Αν δεσμεύσουμε την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u η συνάρτηση ποινής γίνεται

$$m(u) = \int_0^\infty m(u - y) \int_{R_+^2} e^{-\delta t} p_x(y) v(dx * dt) dy + \int_u^\infty \int_{R_+^2} w(u + x, y - u) p_x(y) v(dx * dt)\, dy$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει η ζητούμενη εξίσωση (3.8).

Παρατήρηση: Είναι σημαντικό να αναφέρουμε πως η ιδέα του να θεωρήσουμε τη δέσμευση ως προς την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό έχει χρησιμοποιηθεί από τους **Gerber Shiu** στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας, και από τον **Willmot** στο μοντέλο Sparre Andersen. Ουσιαστικά, υπάρχουν δύο προϋποθέσεις για να ισχύει η ανανεωτική *Εξίσωση (3.8)*:

Η πρώτη είναι ότι η τ.μ. της |U(T)| δοθέντος ότι U(T-)=x και T=t πρέπει να έχει πυκνότητα πιθανότητας p_x.

Η δεύτερη είναι ότι η διαδικασία πλεονάσματος πρέπει να ανανεώνεται τη στιγμή της πρώτης πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό επίπεδο αποθεματικού. Η δεύτερη προϋπόθεση είναι αληθής εάν η διαδικασία πλεονάσματος έχει την ιδιότητα Markov και η πρώτη πτώση κάτω από το αρχικό επίπεδο αποθεματικού είναι χρόνος διακοπής (stopping time). Αυτή η απαίτηση ικανοποιείται για κάθε διαδικασία Levy και ειδικά για τη διαδικασία της Συνθήκης *(2.1)*. Για να δείξουμε ότι η *Εξίσωση (3.8)* είναι ελλειμματική, θα πρέπει να διασφαλιστεί ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας παίρνει τιμές αυστηρά μεταξύ 0 και 1. Από τον παραπάνω σχολιασμό, είναι φανερό ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση της μορφής (*3.8)* κάτω από αρκετά γενικές υποθέσεις. Ωστόσο, δεν φαίνεται να υπάρχει κάποιος γενικός τρόπος με τον οποίο να μπορούν να προσδιοριστούν με σαφήνεια οιφ_δ, f_δ και $H_{\delta,w}$. Στην πραγματικότητα, πέρα από την ύπαρξη μιας ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, κάποιος μπορεί να εκμεταλλευτεί τη δομή της *Εξίσωσης (3.8)* και να εξάγει ποιο ακριβείς εκφράσεις για τις εν λόγω ποσότητες.

Πράγματι, από την *Εξίσωση (3.4)*η οποία είναι άμεση συνέπεια των Συνθηκών (2.1) και (2.4) , η που δίνεται στην , f_δ ενσωματώνει κάποιες ιδιότητες από την κατανομή των απαιτήσεων (λόγω της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας) διατυπώνοντας και κάποιες επιπλέον υποθέσεις.

Αυτό θα φανεί στο *Πόρισμα 3.8* στη συνέχεια, όπου κατανεμημένες απαιτήσεις έχουν σαν αποτέλεσμα η f_δ να είναι και αυτή εκθετική ίδιας μορφής

Πόρισμα 3.3: Ας υποθέσουμε ότι ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες και ότι η συνάρτηση ποινής είναι της μορφής $w(x, y)=w_1(y)$ για κάποια φραγμένη συνάρτηση w_1 τότε το αναμενόμενο προεξοφλημένο έλλειμμα ικανοποιεί τη σχέση

$$m(u) = \varphi_\delta \int_0^u m(u-y) f_\delta(y)dy + \varphi_\delta \int_u^\infty w_1(y-u) f_\delta(y)dy$$

Σημείωση 3.4: Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το Πόρισμα 3.3 έχει το πλεονέκτημα ότι η συνάρτηση $H_{\delta,w}(u)$ παίρνει συγκεκριμένη μορφή. Επιπλέον, στην ειδική περίπτωση όπου w(y)=1 για κάθε y>0, τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι, για δ>0 , ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας ψ_δ, παίρνοντας τη μορφή

$$\psi_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u \psi_\delta(u-y)dF_\delta(y) + \varphi_\delta \bar{F}_\delta(u), \quad u \geq 0$$
(3.9)

Οπως έχουμε ήδη αναφέρει το Θεώρημα 3.2 είναι σχετικά γενικό και δεν παρέχει ένα ακριβή τρόπο υπολογισμού των μεταβλητών φ_δ, f_δ και $H_{\delta,w}$. Στα επόμενα κεφάλαια θα αναφερθούμε αναλυτικότερα σε εξισώσεις και εκφράσεις οι οποίες σχετίζονται με την συνάρτηση των Gerber-Shiu. Αυτό επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Laplace στην $m(u)$ και στη συνέχεια παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Για να είναι εφικτό κάτι τέτοιο, θα πρέπει να διασφαλιστεί η ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace της και η μοναδικότητα του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace.

Λήμμα 3.5: έστω ότι ισχύουν οι παραπάνω συνθήκες. Επιπλέον υποθέτουμε ότι υπάρχει η ροπή δεύτερης τάξης της κατανομής του μεγέθους των απαιτήσεων, δηλαδή $E(Y_1^2) < \infty \Rightarrow \int_0^\infty m(u)du < \infty$

Στην περίπτωση λοιπόν που υπολογιστεί ο μετασχηματισμός $\widehat{m}$ και η συνάρτηση m είναι συνεχής, τότε ο μοναδικός συνεχής μετασχηματισμός Laplace της συμπίπτει με το $\widehat{m}$.

Συνθήκη 3.6: Η συνάρτηση $m: (0,\infty) \to [0,\infty)$ είναι συνεχής.

Η Συνθήκη αυτή ισχύει κάτω από αρκετά γενικές υποθέσεις τις οποίες ικανοποιούν σχεδόν όλες οι περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν στη θεωρία χρεοκοπίας. Αυτό φαίνεται στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.7: Έστω οι Συνθήκες (2.1), (2.3) και (2.4) και (3.6). Επιπλέον υποθέτουμε ότι $w: [0,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ είναι τέτοια ώστε για όλα σχεδόν τα y<0

$$\lim_{\Delta \to 0} w(x+\Delta, |y+\Delta|) = w(x,|y|), \text{ για όλα τα } x \geq 0$$
(3.10)

Τότε η συνάρτηση $m: (0,\infty) \to [0,\infty)$ είναι συνεχής.

Πόρισμα 3.8: Έστω $w(x,y) = e^{-zx}w_1(y)$, $z \geq 0$ και $w_1: (0,\infty) \to [0,\infty)$ μια οριοθετημένη συνάρτηση και Οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημές με $f(x) = ae^{-ax}$, $a > 0$ τότε

$$m(u) = b_{\delta,z}[a\varphi_\delta e^{-a(1-\varphi_\delta)u} + ze^{-(a+z)u}]$$
(3.11)

όπου $b_{\delta,z} = \frac{E\{w_1(Y_1) \int e^{-zx-\delta t} v(dx*dt)}{z+a\varphi_\delta}$

(3.12)

Απόδειξη

Θεωρούμε βάση της σχεσης (3.18) ότι

$$p_x(y) = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)} = \frac{\alpha e^{-\alpha(x+y)}}{e^{-\alpha x}} = \alpha e^{-\alpha y} = f(y)$$

Σύμφωνα με το παραπάνω η (3.7) γίνεται

$$H_{\delta,w}(u) = \int_u^\infty \int e^{-\delta t} w(u+x, y-u) p_x(y) v(dx * dt) dy$$

$$= \int_0^\infty w_1(y-u) \alpha\, e^{-\alpha y} dy \times \int_{R_+^2} e^{-\delta t} e^{-z(u+x)}\, v(dx * dt)$$

$$= e^{-\alpha u} \int_0^\infty w_1(y-u) \alpha\, e^{-\alpha y} dy \times e^{-zu} \int_{R_+^2} e^{-zx-\delta t}\, v(dx * dt)$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $y_1 = y - u \Rightarrow dy_1 = dy \Rightarrow u \leq y < \infty \Rightarrow 0 \leq y < \infty$

$$H_{\delta,w}(u) = e^{-\alpha u} \int_0^\infty w_1(\,y_1) \alpha\, e^{-\alpha\, y_1} d\, y_1 \times e^{-zu} \int_{R_+^2} e^{-zx-\delta t}\, v(dx * dt)$$

$$= e^{-(\alpha+z)u} E[w_1(Y_1)] \int_{R_+^2} e^{-zx-\delta t}\, v(dx * dt) = \alpha_{\delta,z} e^{-(\alpha+z)u}$$

Όπου $\alpha_{\delta,z} = E[w_1(Y_1)] \int_{R_+^2} e^{-zx-\delta t}\, v(dx * dt)$

Έτσι, αν πάρουμε μετασχηματισμούς Laplace η $H_{\delta,w}(u)$ γίνεται:

$$\widehat{H}_{\delta,w}(s) = \int_0^\infty e^{-su} H_{\delta,w}(u) du = \int_0^\infty e^{-su} \alpha_{\delta,z} e^{-(\alpha+z)u} du = \alpha_{\delta,z} \int_0^\infty e^{-(s+\alpha+z)u}\, du$$

$$= \alpha_{\delta,z} \frac{1}{s+\alpha+z}$$

Επιπλέον για την f_δ έχουμε:

$$f_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_{R_+^2} e^{-\delta t}\,\alpha e^{-\alpha y} v(dx * dt) = \frac{1}{\varphi_\delta}\alpha e^{-\alpha y}\int_{R_+^2} e^{-\delta t}\, v(dx * dt) = \alpha e^{-\alpha y} = f(y)$$

Και αν χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς Laplace θα πάρουμε:

$$\hat{f}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\, f_\delta(y)dy = \int_0^\infty e^{-sy}\,\alpha e^{-\alpha y}dy = \alpha\int_0^\infty e^{-(s+\alpha)y}\,dy = \frac{\alpha}{\alpha+s}$$

Συνοψίζοντας, η συνάρτηση ποινής $m(u)$ στη σχέση (3.8) με μετασχηματισμούς Laplace μας δίνει

$$\widehat{m}(s) = \frac{\widehat{H}_{\delta,w}(s)}{1-\varphi_\delta\hat{f}_\delta(s)} = \frac{\alpha_{\delta,z}\dfrac{1}{s+\alpha+z}}{1-\varphi_\delta\dfrac{\alpha}{\alpha+s}} = \frac{\alpha_{\delta,z}(s+\alpha)}{(s+\alpha+z)[s+\alpha(1-\varphi_\delta)]}$$

Με αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

4. ΜΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΓΙΑ ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ GERBER SHIU

Η ενότητα αυτή εστιάζει στην εύρεση μιας ολοκληρωτικής εξίσωσης που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu. Αν και το αποτέλεσμα είναι ασθενέστερο από την ελλειμματική ανανεωτική Εξίσωση έχει αποδειχθεί ότι είναι σημαντικό καθώς έχει αρκετές πρακτικές εφαρμογές. Για παράδειγμα, έχουμε τη δυνατότητα να υπολογίσουμε τα μεγέθη φ_δ και $b_{\delta,z}$.

<u>Θεώρημα 4.1:</u> Έστω ότι $\zeta(u) = \int_u^\infty w(u, y-u)f(y)dy$.
(4.1)

Η συνάρτηση Gerber-Shiu, κάτω από τις *Συνθήκες (2.1) και (2.3)*, ικανοποιεί την εξίσωση

$m(u) = \frac{\mu}{\mu+\lambda+\delta}\int_0^\infty m(u+x)g(x)dx + \frac{\lambda}{\mu+\lambda+\delta}\left[\int_0^u m(u-y)f(y)dy + \zeta(u)\right],\ u \geq 0$
(4.2)

Απόδειξη

Θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές T_N και T_M που συμβολίζουν αντίστοιχα το χρόνο μέχρι την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης, και το χρόνο μέχρι την εμφάνιση του πρώτου ατομικού ασφαλίστρου. Έστω $Z = \min(T_N, T_M)$ η τυχαία μεταβλητή του νωρίτερου γεγονότος η οποία είναι εκθετικά κατανεμημένη με μέσο 1/(λ+μ).

Έστω η δεσμευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu

$m(u|Z=t) = E\{e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|) I(T<\infty) | U(0)=u, Z=t\}$

Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο του νωρίτερου γεγονότος παίρνουμε

$$m(u) = \int_0^\infty m(u|Z=t) f_L(t) dt = \int_0^\infty m(u|Z=t)(\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)t} dt$$

από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας αλλά και δεδομένου ότι $P(T_N < T_M) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ παίρνουμε:

$$\begin{aligned} m(u) &= (\lambda+\mu)\int_0^\infty m(u|Z=t) e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\ &= \int_0^\infty [\lambda m(u|Z=t, T_N<T_M) + \mu m(u|Z=t, T_M \le T_N) e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\ &= \int_0^u e^{-\delta t}\{m(u-y)dF(y) + \zeta(u)] + \mu \int_0^\infty m(u+x)dG(x)\} e^{-(\lambda+\mu)t} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-(\lambda+\mu+\delta)t} dt \{\lambda[\int_0^u m(u-y)dF(y) + \zeta(u)] \\ &+ \mu \int_0^\infty m(u+x)dG(x)\} \end{aligned}$$

Σημείωση: παρατηρούμε ότι βάση του Θεώρηματος 4.1 και συγκεκριμένα για δ=0 και w(x1,x2)=1 προκύπτει η πιθανότητα χρεοκοπίας $m(u) = \psi_0(u)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$(\lambda+\mu)\psi_0(u) = \mu \int_0^\infty \psi_0(u+x) g(x) dx + \lambda[\int_0^u \psi_0(u-y) f(y) dy + \bar{F}(u)], \qquad u \ge 0$$

αφού

$$\zeta(u) = \int_u^\infty w(u, y-u) f(y) dy = \int_u^\infty f(y) dy = \bar{F}(u)$$

Το επόμενο πόρισμα αποτελεί μία εφαρμογή του Θεωρήματος 4.1 η οποία προσδιορίζει τα φ_δ και $b_{\delta,z}$ του Πορίσματος 4.2.

Πόρισμα 4.2: Έστω ότι ισχύουν οι συνθήκες του Πορίσματος 2. Τότε, η φ_δ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta) = \mu\varphi_\delta \hat{g}((1-\varphi_\delta)\alpha) + \lambda \qquad \textit{(4.3)}$$

στο διάστημα (0,1) και

$$b_{\delta,z} = \frac{\lambda E(w_1(Y_1))}{\alpha\lambda + z[\lambda+\delta+\mu(1-\hat{g}(\alpha+z))]} \tag{4.4}$$

Απόδειξη

Στην συγκεκριμένη περίπτωση γνωρίζουμε ότι

Η συνάρτηση πυκνότητας του μεγέθους των απαιτήσεων είναι $f(y) = \alpha e^{-\alpha y}$

Η συνάρτηση ποινής έχει τη μορφή $w(u + x, y - u) = e^{-z(u+x)} w_1(y - u)$

Οπότε βάση των παραπάνω προκύπτει:

$$\zeta(u) = e^{-(z+\alpha)u} \int_u^\infty w_1(y-u)\alpha e^{-\alpha(y-u)} dy = e^{-(z+\alpha)u} E\{w_1(Y_1)\} \tag{4.5}$$

Αντικαθιστώντας τις *(4.5) και (3.11) στην (4.2)* παίρνουμε

$$\begin{aligned}(\lambda+\mu+\delta)b_{\delta,z}[\alpha\varphi_\delta e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)u} + (\lambda+\mu+\delta)b_{\delta,z} z e^{-(z+\alpha)u}] &= \lambda e^{-(z+\alpha)u} E\{w_1(Y_1)\} \\ &+ \mu b_{\delta,z}[\alpha\varphi_\delta e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)u} \int_0^\infty e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)x} dG(x) \\ &+ z e^{-(z+\alpha)u} \int_0^\infty e^{-(z+\alpha)x} dG(x)] \\ &+ \lambda b_{\delta,z}\, [\alpha\varphi_\delta e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)u} \int_0^u e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)y} \alpha e^{-\alpha y} dy \\ &+ z e^{-(z+\alpha)u} \int_0^u e^{(z+\alpha)y} \alpha e^{-\alpha y} dy]\end{aligned}$$

Ωστόσο, τα δύο πρώτα ολοκληρώματα στο δεξιό μέλος της προηγούμενης σχέσης είναι μετασχηματισμοί Laplace

$$\hat{g}(\alpha(1-\varphi_\delta)) = \int_0^\infty e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)x} g(x) dx$$

$$\hat{g}(\alpha+z) = \int_0^\infty e^{-(\alpha+z)x} g(x) dx$$

Και τα άλλα δυο ολοκληρώματα προκύπτουν ως εξής αντίστοιχα:

$$\int_0^u e^{(\alpha+z)y} \alpha e^{-\alpha y} dy = \alpha \int_0^u e^{zy} dy = [\frac{e^{zy}}{zy}]_0^u = \alpha \frac{e^{zy}-1}{z}$$

$$\int_0^u e^{(1-\varphi_\delta)u}\alpha e^{-\alpha y}dy = \frac{1-e^{-\alpha\varphi_\delta u}}{\varphi_\delta}$$

Συνεπώς , η αντικαθιστώντας τα παραπάνω στην αρχική μας σχέση προκύπτει:

$0 = \lambda e^{-(z+\alpha)u}E(w_1(Y_1)) + b_{\delta,z}\{\alpha\varphi_\delta e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)u}[\mu\hat{g}(\alpha(1-\varphi_\delta)) - \lambda - \mu - \delta] +$
$ze^{-(z+\alpha)u}[\mu\hat{g}(\alpha+z) - \lambda - \mu - \delta] + \alpha\lambda[e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)y} - e^{-(\alpha+z)u}]\}$
(4.6)

από τη στιγμή που η φ_δ δεν εξαρτάται από το z και το w_1 μπορούμε να υπολογίζουμε την τιμή της (4.6) για $z = 0$ και $w_1 = 1$ για κάθε y>0. Κάτω από τις υποθέσεις αυτές έχουμε $b_{\delta,0} = \frac{\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\delta t}v(dx\times dt)}{\alpha\varphi_\delta} = \frac{\varphi_\delta}{\alpha\varphi_\delta} = \frac{1}{\alpha}$ και $E(w_1(Y_1)) = E(1) = 1$. Εύκολα παρατηρούμε ότι η εξίσωση (4.6) παίρνει την μορφή της εξίσωσης (4.3). Δηλαδή,

$$0 = \varphi_\delta e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)u}[\mu\hat{g}(\alpha(1-\varphi_\delta)) - \lambda - \mu - \delta] + \lambda e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)y}$$

και πολλαπλασιάζοντας με $e^{\alpha(1-\varphi_\delta)u}$ καταλήγουμε $\Rightarrow$ $\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta) = \mu\varphi\hat{g}(\alpha(1-\varphi_\delta)) + \lambda$

Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2 έχουμε ότι$\varphi_\delta \varepsilon (0,1)$. Συγκεκριμένα, $\varphi = \varphi_\delta$ και είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\varphi(\lambda+\mu+\delta) = \mu\varphi\hat{g}(\alpha(1-\varphi)) + \lambda$ στο διάστημα (0,1). Για να φανεί πιο εύκολα αυτό θέτουμε $v = \alpha(1-\varphi) \Rightarrow \varphi = 1 - \frac{v}{\alpha}$ οπότε η προηγούμενη σχέση γίνεται,

$$\lambda+\mu+\delta = \mu\hat{g}(v) + \frac{\alpha\lambda}{\alpha - v} \Rightarrow \lambda+\mu+\delta - \frac{\alpha\lambda}{\alpha - v} = \mu\hat{g}(v) \Rightarrow h(v) = \mu\hat{g}(v)$$

με $h(v) = \lambda+\mu+\delta - \frac{\alpha\lambda}{\alpha - v}$

Όμως, $h(v)' = -\frac{\alpha\lambda}{(\alpha-v)^2}$ και $h(v)'' = -\frac{2\alpha\lambda}{(\alpha-v)^3} < 0$ στο [0,α) και άρα η h είναι κοιλη στο διάστημα αυτό.

Επιπλέον, αφού $\mu > 0 \Rightarrow \hat{g}(v) > 0 \Rightarrow \mu\hat{g} > 0$.

Αλλά, $\frac{d}{dv}(\mu\hat{g}(v)) = \frac{d}{dv}(\mu\int_0^\infty e^{-vx}g(x)dx = \mu\int_0^\infty -xe^{-vx}g(x)dx$ και $\frac{d^2}{dv^2}(\mu\hat{g}(v)) = \frac{d}{dv}\{\mu\int_0^\infty -xe^{-vx}g(x)dx\} = \mu\int_0^\infty x^2e^{-vx}g(x)dx > 0$ και άρα η $\mu\hat{g}$ είναι κυρτή στο [0,α).

Ακόμη, για v=0 προκύπτει $h(0) = \mu + \delta \geq \mu = \mu\hat{g}(0)$. Βάση των παραπάνω εύλογα συμπεραίνουμε ότι δεν θα μπορούσαν να υπάρχουν δύο ρίζες στο [0,α).

Χρησιμοποιώντας την σχέση (4.3) βρίσκουμε $\mu\hat{g}(\alpha - (1 - \varphi_\delta)) = \frac{\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta)-\lambda}{\varphi_\delta}$ και αν αντικαταστήσουμε προκύπτει τελικώς η σχέση (4.6).

Δηλαδή,

$0 = \lambda e^{-(z+\alpha)u}E(w_1(Y_1)) + b_{\delta,z}\{\alpha\varphi_\delta e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)u}[\frac{\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta)-\lambda}{\varphi_\delta} - (\lambda + \mu + \delta)] + ze^{-(z+\alpha)u}[\mu\hat{g}(\alpha + z) - \lambda - \mu - \delta] + \alpha\lambda e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)u} - \alpha\lambda e^{-(\alpha+z)u}\}$

$\Rightarrow$

$0 = \lambda e^{-(z+\alpha)u}E(w_1(Y_1)) + b_{\delta,z}\{-\lambda\alpha e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)u} + ze^{-(z+\alpha)u}[\mu\hat{g}(\alpha + z) - \lambda - \mu - \delta] + \alpha\lambda e^{-\alpha(1-\varphi_\delta)u} - \alpha\lambda e^{-(\alpha+z)u}$

$\Rightarrow$

$0 = \lambda e^{-(z+\alpha)u}E(w_1(Y_1)) + b_{\delta,z}\{ze^{-(z+\alpha)u}[\mu\hat{g}(\alpha + z) - \lambda - \mu - \delta] - \alpha\lambda e^{-(\alpha+z)u}$

$\Rightarrow$

$b_{\delta,z}\{z[\mu\hat{g}(\alpha + z) - z(\lambda + \mu + \delta) - \alpha\lambda\} = -\lambda E(w_1(Y_1))$

$\Rightarrow$

$$b_{\delta,z} = \frac{\lambda E(w_1(Y_1))}{\alpha\lambda + z[(\lambda + \mu + \delta) - \mu\hat{g}(\alpha + z)]}$$

<u>Παράδειγμα 4.3</u>

Θεωρούμε ότι οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες με συνάρτηση πυκνότητας $f(y) = \alpha e^{-\alpha y}, \quad y \geq 0, \ \alpha > 0$ και ότι τα ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή Erlang(n, β) με συνάρτηση πυκνότητας $g(x) = \frac{\beta^n x^{n-1}e^{-\beta x}}{(n-1)!}, \ x \geq 0, \beta > 0, n = 1,2,..$ και με μετασχηματισμό laplace $\hat{g}(s) = (\frac{\beta}{\beta+s})^n$.

Στην περίπτωση αυτή η *(4.3)* γράφεται ως:

$$\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta)=\mu\varphi_\delta\left(\frac{\beta}{\beta+(1-\varphi_\delta)\alpha}\right)^n+\lambda \tag{4.7}$$

Θέτοντας $\nu=\frac{\beta+(1-\varphi_\delta)\alpha}{\beta}$ έχουμε $\varphi_\delta=1-\frac{\beta\nu-\beta}{\alpha}$ και αντικαθιστώντας στην *(4.7)* προκύπτει

$$p(\nu)=\nu^{n+1}\beta(\lambda+\mu+\delta)-\nu^n[\beta(\lambda+\mu+\delta)+\alpha(\mu+\delta)]-\nu\beta\mu+\mu(\alpha+\beta) \tag{4.8}$$

στο διάστημα (1 , 1+α/β).

Για παράδειγμα, εάν τα ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα, δηλαδή είναι n=1 και δ=0, τότε προκύπτει:

$$\varphi_0(\lambda+\mu)=\mu\varphi_0\varphi_\delta(\lambda+\mu+\delta)=\mu\varphi_\delta\left(\frac{\beta}{\beta+(1-\varphi_0)\alpha}\right)+\lambda$$

$$\Rightarrow\ \varphi_0=\frac{\lambda(\alpha+\beta)}{\alpha(\lambda+\mu)}$$

Στην ειδική περίπτωση που z=0 και w1(y)=1 για όλα τα y>0 , είναι $w(x,y)=e^{-zx}w_1(y)=1$, $E(w_1(Y_1))=1$, οπότε το Πόρισμα 2 δίνει:

$$b_{\delta,z}=\frac{\iint_0^\infty \nu(dx*dt)}{0+\alpha\varphi_0}=\frac{\varphi_0}{\alpha\varphi_0}=\frac{1}{\alpha}$$

και πιθανότητα χρεοκοπίας είναι:

$$\psi_0(u)=P[T<\infty|U(0)=u]=\frac{1}{\alpha}(\alpha\varphi_0e^{-\alpha(1-\varphi_0)u}+0)=\varphi_0e^{-\alpha(1-\varphi_0)u}$$
$$=\frac{\lambda(\alpha+\beta)}{\alpha(\lambda+\mu)}e^{-\frac{\alpha\mu+\beta\lambda}{\lambda+\mu}u},\ \ u\geq 0$$

5. ΑΤΟΜΙΚΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ ΜΕ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ERLANG

Στην ενότητα αυτή, εστιάζουμε στην περίπτωση όπου τα ατομικά ασφάλιστρα είναι κατανεμημένα σύμφωνα με την κατανομή Erlang (n,β) για κάποιο β>0 και n∈N και οι απαιτήσεις να ακολουθούν μια οποιαδήποτε κατανομή.

Με αυτό τον τρόπο, γενικεύεται η θεώρηση των εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων που εξετάστηκε στα Πορίσματα 3.8 και 4.2. Το κεντρικό αποτέλεσμα της ενότητας είναι το Θεώρημα 5.8 το οποίο παρέχει μια συγκεκριμένη ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber-Shiu.

Το επόμενο Λήμμα 5.1 δίνει κάποιες ιδιότητες της οι οποίες θα χρειαστούν στην περαιτέρω ανάλυση.

Λήμμα 5.1: Για n≥1 και β>0 η κατανομή Erlang(n,β) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g(x) = \frac{\beta^n x^{n-1} e^{-\beta x}}{(n-1)!},\ x \geq 0$ ικανοποιεί τις ιδιότητες

i. $g^{(k)}(0) = 0, k = 0,1,..,n-2$ και $g^{(n-1)}(0) = \beta^n$

ii. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \beta^{n-i} g^{(i)}(x) = 0$ για όλα τα x≥0

iii. $\int_0^\infty |\, g^{(k)}(u)| du < \infty,\ k = 0,1,..,n$

Για να μπορέσει να διατυπωθεί η ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση m , πρέπει πρώτα να δοθεί η μορφή του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu m . Ο μετασχηματισμός Laplace $\widehat{m}(s)$ έχει δειχθεί στο Λήμμα 3.5 ότι υπάρχει για όλα τα s ≥ 0 . Πρέπει επίσης να διασφαλίσουμε την ολοκληρωσιμότητα και κατ' επέκταση την ύπαρξη του μετασχηματισμού Laplace των βοηθητικών συναρτήσεων ζ και

$$\gamma(u) = \int_0^u m(u-y) dF(y) + \zeta(u), \quad u \geq 0 \qquad (5.1)$$

Η συνάρτηση ζ, είναι ολοκληρώσιμη ως συνέπεια του ότι $E(\Upsilon_1) < \infty$ καθώς και του ότι η w είναι φραγμένη συνάρτηση. Εάν $E({\Upsilon_1}^2) < \infty$, τότε από το Λήμμα 1 η συνάρτηση m είναι ολοκληρώσιμη όπως και η w και λόγω του θεωρήματος Fubini και του Λήμματος 5.1 είναι ολοκληρώσιμη και η γ.

Η πρόταση που ακολουθεί είναι συνέπεια του Θεωρήματος 4.1 και χαρακτηρίζει το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu m .

<u>Πρόταση 5.2:</u> Έστω ισχύουν οι Συνθήκες(2.1), (2.2), (2.3) και (3.6). Θεωρούμε ότι τα ατομικά ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή Erlang (n, β) και ότι για την κατανομή των απαιτήσεων ισχύει $E({Y_1}^2) < \infty$.

Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu είναι:

$$\widehat{m}(s) = \frac{\lambda(\beta-s)^n\hat{\zeta}(s)-p_{n-1}(s)}{[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)](\beta-s)^n-\mu\beta^n}, \quad s \geq 0 \qquad (5.2)$$

όπου

p_{n-1} είναι ένα πολυώνυμο το πολύ n–1 βαθμού

Επιπλέον, αν ρ1, ρ2, ..,ρn διακεκριμένες ρίζες με μη αρνητικά πραγματικά μέρη της εξίσωσης $L(s) = [\lambda + \mu + \delta - \lambda\hat{f}(s)](\beta - s)^n - \mu\beta^n = 0$ *(5.3)*

γνωστή και ως **θεμελιώδης εξίσωση Lundberg**, τότε το πολυώνυμο p_{n-1} μπορεί να εκφραστεί ως

$$p_{n-1}(s) = \lambda\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n\hat{\zeta}(\rho_j)}{\pi_{n,j}(\rho_j)}\pi_{n,j}(s) \qquad (5.4)$$

όπου

$$\pi_{n,j}(s) = \begin{cases} 1, \text{ εάν } n = j = 1 \\ \prod_{l=1,l\neq j}^{n}(\beta - \rho_j), \text{ εάν } n = 2,3,..,j = 1,2..,n \end{cases} \qquad (5.5)$$

Απόδειξη

Έστω, $l(u) = \int_0^\infty m(u + x)g(x)dx = \int_u^\infty g(x - u)m(x)dx$ *(5.6)*

Από τη συνάρτησης m , το Λήμμα 5.1 και τον κανόνα του Leibniz έχουμε

$$l^{(k)}(u) = (-1)^k \int_u^\infty g^{(k)}(x - u)m(x)dx, \ \ u \geq 0, k = 0,1,\ldots n - 1 \qquad (5.7)$$

και

$$l^{(n)}(u) = (-1)^n \int_u^\infty g^{(n)}(x - u)m(x)dx + (-1)^n\beta^n m(u), \ \ u \geq 0 \qquad (5.8)$$

Αφού η m είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση λόγω του Λήμματος 3.5, τότε από το Λήμμα 5.1 (iii) συνεπάγεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace $\tilde{l}^{(k)}(s)$ είναι καλά ορισμένος για όλα τα s ≥ 0 , k = 0,1,...,n. Ορίζουμε ως

$$S_l(n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\beta^{n-k}\, l^{(k)}(u), \ \ u \geq 0 \qquad (5.9)$$

Από το Λήμμα 5.1 (ii) και τις Εξισώσεις (5.7) και (5.8) οδηγούμαστε $S_l(u) = \beta^n m(u), u \geq 0$

η οποία με μετασχηματισμούς Laplace γίνεται $\hat{s}_l(u) = \beta^n \widehat{m}(s),\ s \geq 0.$ *(5.10)*

Επίσης ο μετασχηματισμός Laplace της $l^{(k)}(s)$ είναι

$$\hat{l}^{(k)}(s) = s^k \hat{l}(s) - \sum_{j=0}^{k-1} s^j l^{(k-1-j)}(0), \qquad u \geq 0, k = 0,1,\ldots n$$

η οποία σε συνδυασμό με την (5.9) δίνει $\hat{s}_l(s) = (\beta - s)^n \hat{l}(s) + \frac{1}{\mu} p_{n-1}(s),\ s > 0$

Όπου $p_{n-1}(s)$ είναι το πολυώνυμο που ορίσαμε στην Πρόταδη 5.2 το πολύ n –1 βαθμού.

Μαζί με την (5.10) έχουμε

$\beta^n \widehat{m}(s) = (\beta - s)^n \hat{l}(s) + \frac{1}{\mu} p_{n-1}(s) \ \Rightarrow\ \mu(\beta - s)^n \hat{l}(s) = \mu \beta^n \widehat{m}(s) - p_{n-1}(s),\ s \geq 0$ (5.11)

Τώρα εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στα δυό μέλη της εξίσωσης (4.2) βάση του Θεωρήματος 5.1 καταληγουμε στην:

$$(\lambda + \mu + \delta)(\beta - s)^n \widehat{m}(s) = \mu(\beta - s)^n \hat{l}(s) + \lambda(\beta - s)^n \hat{\gamma}(s)$$

όπου $\hat{\gamma}(s) = \widehat{m}(s)\hat{f}(s) + \hat{\zeta}(s)$

Αφού οι $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ ρn είναι οι ρίζες της Εξίσωσης (5.3), δηλαδή $L(\rho_j) = 0, j = 1, \ldots n$ τότε από την (5.2) έχουμε $\lambda(\beta - s)^n \hat{\zeta}(s) - p_{n-1}(s) = 0 \ \Rightarrow\ p_{n-1}(\rho_j) = \lambda(\beta - s)^n \hat{\zeta}(\rho_j),\ \ j = 1, \ldots n.$

Αφού το $p_{n-1}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο το πολύ n –1 βαθμού και υπό την υπόθεση ότι οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ είναι διακεκριμένες, τότε με παρεμβολή Lagrange προκύπτει η ζητούμενη σχέση (5.4).

Προκειμένου να χρησιμοποιηθεί η (5.4) για το πολυώνυμο $p_{n-1}(s)$ πρέπει η θεμελιώδης εξίσωση Lundberg που δίνεται στην (5.3) να έχει n διακεκριμένες μιγαδικές ρίζες με μη αρνητικά πραγματικά μέρη. Το λήμμα 5.3 που ακολουθεί μας εξασφαλίζει ότι υπάρχουν πάντα n ρίζες με μη αρνητικά πραγματικά μέρη, οπότε θα πρέπει να διαπιστωθεί ότι οι ρίζες είναι απλά διακεκριμένες. Θα ακολουθήσει το Παράδειγμα το 5.4 για καλύτερη κατανόηση.

Λήμμα 5.3: Η Εξίσωση Lundberg *(5.3)* έχει τουλάχιστον n ρίζες στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο. Επιπλέον, όταν $\delta = 0$ μία από αυτές τις ρίζες είναι ίση με μηδέν.

Παράδειγμα 5.4: Είναι φανερό από την *(5.3)* η συνάρτηση L είναι συνεχής τέτοια ώστε $L(0) = \delta\beta^n$ και $L(\beta) = -\mu\beta^n < 0$. Έτσι, αν $\delta > 0$ τότε $L(0) > 0$ και η L έχει μία ρίζα $\rho_1 \varepsilon (0,\beta)$ ενώ για $\delta = 0$ είναι $\rho_1 = 0$.

Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

i. Εάν n =1, τότε βάση των παραπάνω το πολυώνυμο $p_0(s)$ είναι μία σταθερά και γράφεται

$$p_0(s) = \lambda \frac{(\beta - \rho_1)\hat{\zeta}(\rho_1)}{\pi_{1,1}(\rho_1)} \pi_{1,1}(s) = \lambda(\beta - \rho_1)\hat{\zeta}(\rho_1)$$

Στην περίπτωση που w(x,y)=1 για κάθε $x \geq 0$ και $y > 0$ $\Rightarrow \hat{\zeta}(0) = E(Y_1)$

Στην περίπτωση που $\delta=0 \Rightarrow p_0(s) = \lambda\beta E(Y_1)$

ii. Εάν n =2, τότε

$$L(2\beta) = (\lambda + \mu + \delta - \lambda\hat{f}(s))(\beta - s)^2 - \mu\beta^2$$

Παράδειγμα 5.5: Θεωρούμε την περίπτωση όπου w(x,y)=1 για $x \geq 0$, $y \geq 0$. Τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι $m(u) = \psi_\delta(u) \Rightarrow \widehat{m}(u) = \psi_\delta(u)$

Επίσης με μετασχηματισμό Laplace έχουμε $\hat{\zeta}(s) = \frac{1-\hat{f}(s)}{s}$.

Τότε από την *εξίσωση (5.2)* προκύπτει

$$\hat{\psi}_\delta(s) = \frac{\lambda(\beta-s)^n \frac{1-\hat{f}(s)}{s} - p_{n-1}(s)}{[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)](\beta-s)^n - \mu\beta^n}$$
$$= \frac{\lambda(\beta-s)^n 1-\hat{f}(s) - sp_{n-1}(s)}{s\{[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)](\beta-s)^n - \mu\beta^n\}}$$
$$= \frac{\lambda(\beta-s)^n(1-\hat{f}(s)) + (\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n - (\mu+\delta)(\beta-s)^n + \mu\beta^n - sp_{n-1}(s)}{s\{[\lambda+(1-\hat{f}(s))(\beta-s)^n + (\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n\}}$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{(\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n + sp_{n-1}(s)}{s[\lambda+(1-\hat{f}(s))(\beta-s)^n + (\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n]}$$

Υπό την υπόθεση ότι οι απαιτήσεις ακολουθούν την κατανομή Erlang(k,α) με μετασχηματισμό Laplace τότε

$$\hat{\psi}_\delta(s) = \frac{1}{s} - \frac{(\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n + sp_{n-1}(s)}{s[\lambda+(1-(\frac{\alpha}{\alpha+s})^k)(\beta-s)^n + (\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n]}$$

$$= \frac{1}{s} - \frac{(\alpha+s)^k[(\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n + sp_{n-1}(s)]}{s\{\lambda[(\alpha+s)^k - \alpha^k](\beta-s)^n + (\alpha+s)^k(\mu+\delta)(\beta-s)^n - \mu\beta^n\}} \qquad (5.12)$$

Ο δεύτερος όρος στο δεξί μέλος της (5.12) είναι ρητή συνάρτηση ως προς s, όπου ο αριθμητής είναι πολυώνυμο βαθμού k+n και ο παρονομαστής είναι πολυώνυμο βαθμού k+n +1. Ακολουθώντας την διαδικασία εύρεσης του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace ρητών συναρτήσεων με ανάλυση σε απλά κλάσματα, και με την προϋπόθεση ότι μπορεί να προσδιοριστεί το πολυώνυμο $p_{n-1}(s)$, μπορεί να δοθεί αναλυτική έκφραση της $\hat{\psi}_\delta(u)$.

Λήμμα 5.6: Εάν οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg, που βρίσκονται στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο είναι διακεκριμένες, τότε η συνάρτηση L(s) μπορεί να γραφεί ως

$$L(s) = \{(-1)^n\left[\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)\right] + \lambda T_s[\sum_{j=1}^{n} \frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)} T_{\rho_j} f](0)\} \prod_{j=1}^{n}(s-\rho_j)$$

Λήμμα 5.7: Για n≥1 και διακεκριμένους μιγαδικούς αριθμούς έχουμε $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n \varepsilon C$ έχουμε

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\rho_l{}^j}{\pi_{n,l}(\rho_l)} = \begin{cases} 0, \text{εαν } j = 0,1, \dots n-2 \\ 1, \quad\quad \text{εαν } j = n-1 \end{cases}$$

όπου $\pi_{n,l}$ ορίστηκε στην εξίσωση (5.5)

Με βάση τα όσα έχουμε αναφέρει, μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το αποτέλεσμα αυτής της ενότητας. Συγκεκριμένα, εάν η συνάρτηση ζ είναι αρκετά ομαλή (smooth), δίνονται αναλυτικές εκφράσεις για τις φ_δ, f_δ και $H_{\delta,w}$ του Θεωρήματος 3.2, εκφρασμένες ως προς την κατανομή των απαιτήσεων, τη συνάρτηση ποινής w και τις ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg υπό την προϋπόθεση ότι αυτές είναι διακεκριμένες.

Για να επιτευχθούν τα εν λόγω αποτελέσματα θα πρέπει να αντιστρέψουμε την Εξίσωση 5.2 στην Πρόταση 5.2.

<u>Θεώρημα 5.8:</u> Έστω ότι ισχύουν οι Συνθήκες 2.1, 2.3, 2.4 και 2.6. Θεωρούμε ότι τα ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή Erlang (n, β) , τα μεγέθη των απαιτήσεων ικανοποιούν τη σχέση $E(\Upsilon_1{}^2) < \infty$ και η συνάρτηση ποινής είναι τέτοια ώστε η w είναι μία συνάρτηση της κλάσης $C^n[0,\infty)$. Επίσης υποθέτουμε ότι οι ρίζες $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ της εξίσωσης Lundberg που βρίσκονται στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο είναι διακεκριμένες.

Τότε:

$$m(u) = \varphi_\delta \int_0^u m(u-y)\, f_\delta(y)dy + H_{\delta,w}(u)$$

οπου

$$\varphi_\delta = \frac{\lambda}{\mu+\lambda+\delta}\left[1 + (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)} T_{\rho_j}\, \bar{F}(0)\right] \quad \textbf{(5.20)}$$

$$f_\delta(y) = \frac{\lambda}{\varphi_\delta(\mu+\lambda+\delta)}\left[f(y) + (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)} T_{\rho_j}\, f(y)\right],\ y \geq 0$$

$$H_{\delta,w}(u) = \frac{\lambda}{\mu+\lambda+\delta}\left[\zeta(u) + (-1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)} T_{\rho_j}\, \zeta(u)\right],\ u \geq 0$$

Απόδειξη

Έστω
$S_\zeta(u)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\beta^{n-k}\zeta^k(u),\ u\geq 0$ *(5.23)*

Ο μετασχηματισμός Laplace της παραγώγου είναι $\hat{\zeta}^k(s)=s^k\hat{\zeta}(s)-\sum_{j=0}^{k-1}s^j\,\zeta^{k-1-j}(0)$ και από τα σχέση (5.23) συμπεραίνουμε ότι η $\hat{S}_\zeta(s)-(\beta-s)^n\hat{\zeta}(s)$ είναι πολυώνυμο ως προς s το πολύ n–1 βαθμού.

Με βάση το προηγούμενο αποτέλεσμα και σε συνδυασμό με τις (5.2) και (5.3) έχουμε
$L(s)\widehat{m}(s)=\lambda\hat{S}_\zeta(s)+\bar{p}_{n-1}(s),\ s\geq 0$

Όπου $\bar{p}_{n-1}(s)$ είναι πολυώνυμο το πολύ n–1 βαθμού το οποίο μπορεί να προσδιοριστεί με βάση της Πρότασης 5.2. Συγκεκριμένα, αφού οι $\rho_1,\rho_2,\ldots\rho_n$ είναι ρίζες της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg, δηλαδή $L(\rho_j)=0,\ j=1,2,\ldots n$, το $\bar{p}_{n-1}(s)$ μπορεί να εκφραστεί σε σχέση με αυτές τις ρίζες εφαρμόζοντας παρεμβολή Lagrange.

Αναλυτικότερα,

$$L(s)\widehat{m}(s)=\lambda[\hat{S}_\zeta(s)-\sum_{j=1}^{n}\frac{\hat{S}_\zeta(\rho_j)}{\pi_{n,j}(\rho_j)}\pi_{n,j}(s)],\ \ s\geq 0$$

Με βάση το Λήμμα 5.6, η προηγούμενη εξίσωση γράφεται ως

$$\{\lambda+\mu+\delta-\lambda\hat{f}(s)+(-1)^n\lambda T_s[\sum_{j=1}^{n}\frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)}T_{\rho_j}f](0)\}\,\widehat{m}(s)$$
$$=\lambda(-1)^n[\frac{\hat{S}_\zeta(s)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)\ldots(s-\rho_n)}$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\frac{\hat{S}_\zeta(s)}{\pi_{n,j}(\rho_j)(s-\rho_j)}=\lambda T_sT_{\rho_1}\ldots T_{\rho_n}S_\zeta(0),\ \ s\neq\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n$$

όπου η τελευταία ισότητα προέκυψε με βάση την (5.18).

Χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace και βάση της σχέσης (5.23) έχουμε
$m(u)=\int_0^u m(u-y)h_\delta(y)dy+\frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\sum_k\binom{n}{k}(-1)^k\beta^{n-k}T_{\rho_1}T_{\rho_2}\ldots T_{\rho_n}\zeta^{(k)}(u),\ u\geq 0$
(5.24)

όπου

$$h_\delta(y) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu+\delta}\left[f(y) + (-1)^n \sum_{j=1}^{n} \frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)} T_{\rho_j} f(y)\right],\ y \geq 0 \qquad (5.25)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι το δεξί μέλος της *(5.24)* βάση των σχέσεων *(5.17)* , *(5.16)* και το *Λήμμα 5.7* απλοποιείται ως:

$$\sum_k \binom{n}{k}(-1)^k \beta^{n-k} T_{\rho_1} T_{\rho_2} \ldots T_{\rho_n} \zeta^{(k)}(u) =$$
$$(-1)^{n-1} \sum_k \binom{n}{k} (-1)^k \beta^{n-k} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{\pi_{n,j}(\rho_j)} \{\rho_l^k T_{\rho_1} \zeta(u) - \sum_{j=0}^{k-1} \rho_l^k\, \zeta^{(k-1-j)}(u)\} =$$
$$(-1)^{n-1} \sum_{l=1}^{n} \frac{(\beta-\rho_j)^n}{\pi_{n,j}(\rho_j)} T_{\rho_l}\, \zeta(u) +$$
$$(-1)^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \beta^{n-k} \sum_{j=0}^{k-1} \zeta^{(k-1-j)}(u) \sum_{l=1}^{n} \frac{\rho_l^j}{\pi_{n,j}(\rho_l)} =$$
$$(-1)^{n-1} \sum_{l=1}^{n} \frac{(\beta-\rho_l)^n}{\pi_{n,l}(\rho_l)} T_{\rho_l}\, \zeta(u) + \zeta(u), \quad u \geq 0 \qquad (5.26)$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε τα φ_δ, f_δ και $H_{\delta,w}$ στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση του Θεωρήματος 3.2. Αφού τα φ_δ και f_δ είναι ανεξάρτητα της συνάρτησης ποινής θεωρούμε την περίπτωση $w(x,y) = 1$ για κάθε $x \geq 0$, $y > 0$ τότε έχουμε $\zeta(u) = \bar{F}(u)$

Επιπλέον, προκύπτει ότι $T_0 T_{\rho_l} f(u) = \int_u^\infty T_{\rho_l} f(y)dy = T_{\rho_l}\bar{F}(u),\ u \geq 0, l = 1,2,\ldots,n$

Από τα δυο παραπάνω και σε συνδυασμό με τις 5.24, 5.25 και 5.26 για το μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας ψ_δ έχουμε

$$\psi_\delta(u) = \int_0^u \psi_\delta(u-y) h_\delta(y) + \int_u^\infty h_\delta(y)dy,\ u \geq 0 \qquad (5.27)$$

Από τις σχέσεις (5.27) και (3.9) παρατηρούμε ότι $\varphi_\delta = \psi_\delta(0) = \int_0^u h_\delta(y)dy$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις $\int_u^\infty T_{\rho_l} f(y)dy = T_{\rho_l}\bar{F}(0)$ και $f_\delta^*(y) = \frac{h_\delta(y)}{\varphi_\delta},\ y \geq 0$. Αν πάρουμε μετασχηματισμούς Laplace $[1 - \varphi_\delta \hat{f}_\delta^*(y)]\hat{\psi}_\delta(s) = \varphi_\delta[1 - \hat{f}_\delta^*(s)]/s,\ s \geq 0$.

Με παρόμοιο τρόπο η (3.9) μας δίνει $[1 - \varphi_\delta \hat{f}_\delta(s)]\hat{\psi}_\delta(s) = \varphi_\delta[1 - \hat{f}_\delta(s)]/s,\ s \geq 0$. Από τις δύο παραπάνω σχέσεις εύκολα συμπεραίνουμε πως $\hat{f}_\delta^*(s) = \hat{f}_\delta(s)$, $s > 0$ και κατ' επέκταση $\hat{f}_\delta^*(y) = \hat{f}_\delta(y)$, $y \geq 0$

Επιπλέον, έχουμε

$$h_\delta(y) = \varphi_\delta f_\delta^*(y) = \varphi_\delta f_\delta(y)$$

οπότε συγκρίνοντας την (3.8) με τις (5.24) , (5.26) προκύπτει η (5.22) για κάποιο w.

Παρατήρηση 5.9: Για τον αποτελεσματικό υπολογισμό του φ_δ που δίνεται στην (5.20) μπορεί να ληφθούν υπ' όψιν τα εξής:

- Αν $\rho_j = 0$ τότε:

$$T_{\rho_j}\bar{F}(0) = T_0\bar{F}(0) = \int_0^\infty \bar{F}(y)dy = E(Y_1)$$

- Αν $\rho_j \neq 0$ τότε:

$$T_{\rho_j}\bar{F}(0) = T_{\rho_j}T_0\bar{F}(0) = \frac{T_{\rho_j}f(0) - T_0 f(0)}{0-\rho_j} = \frac{\hat{f}(\rho_j) - \bar{F}(0)}{-\rho_j} = \frac{\hat{f}(\rho_j) - 1}{-\rho_j} = \frac{1-\hat{f}(\rho_j)}{\rho_j}$$

Αφού ρ_j είναι μία ρίζα της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg, δηλαδή $L(\rho_j) = 0$, τότε από την (5.3) έχουμε

$$\{\mu + \delta + \lambda[1 - \hat{f}(\rho_j)]\}(\beta - \rho_j)^n - \mu\beta^n = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda[1 - \hat{f}(\rho_j)] = \frac{\mu\beta^n}{(\beta-\rho_j)^n} - (\mu + \delta) \qquad \Rightarrow$$

$$1 - \hat{f}(\rho_j) = \frac{\mu\beta^n - (\mu+\delta)(\beta-\rho_j)^n}{\lambda(\beta-\rho_j)^n} \qquad \Rightarrow$$

Από όπου τελικά παίρνουμε:

$$(\beta - \rho_j)^n T_{\rho_j}\bar{F}(0) = \frac{\mu\beta^n - (\mu + \delta)(\beta - \rho_j)^n}{\lambda(\beta - \rho_j)^n}$$

Στο επόμενο παράδειγμα εξετάζουμε την περίπτωση όπου τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων ακολουθούν την κατανομή Erlang (n=2, β)

Παράδειγμα 5.10:

Α) Υποθέτουμε ότι τα ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα με μέσο 1/β , δηλαδή η X ακολουθεί την κατανομή Erlang (1, β) . Έστω ρ1 ε [0,β) είναι η ρίζα της εξίσωσης Lundberg που μελετήθηκε στο Παράδειγμα 5.4. Θυμίζουμε ότι είναι ρ1 = 0 εάν δ=0 και ρ1ε[0,β) αν δ > 0 . Η εξίσωση για το φ_δ για n =1 , γίνεται

$$\varphi_\delta = \frac{\lambda}{\mu+\lambda+\delta}(1 + \frac{\beta-\rho_1}{\pi_{1,1}(\rho_1)} T_{\rho_1}\bar{F}(0)$$

και για δ=0 $\Rightarrow$

$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}[1 + \beta E(Y_1)]$$

$$= \frac{\lambda+\beta\lambda E(Y_1)}{\mu+\lambda} = \frac{\lambda+\mu-\mu+\beta\lambda E(Y_1)}{\mu+\lambda} = 1 - \frac{\mu-\beta\lambda E(Y_1)}{\mu+\lambda} = 1 - \frac{\beta\mu\frac{1}{\beta} - \beta\lambda E(Y_1)}{\mu+\lambda} = 1 - \frac{\beta[\mu E(X_1)-\lambda E(Y_1)]}{\mu+\lambda}$$

Για δ > 0 έχουμε:

$$\varphi_\delta = \frac{\lambda}{\mu+\lambda+\delta}(1 + \frac{\mu\beta - (\mu+\delta)(\beta-\rho_1)}{\lambda\rho_1})$$

$$= \frac{\lambda}{\mu+\lambda+\delta}(1 + \frac{\mu\beta - \mu\beta + \mu\rho_1 - \delta\beta + \delta\rho_1}{\lambda\rho_1})$$

$$= \frac{\lambda}{\mu+\lambda+\delta}\frac{\lambda\rho_1 + \mu\rho_1 - \delta\beta + \delta\rho_1}{\lambda\rho_1}$$

$$= \frac{\rho_1(\lambda+\mu+\delta) - \delta\beta}{\rho_1(\lambda+\mu+\delta)} = 1 - \frac{\delta\beta}{\rho_1(\lambda+\mu+\delta)}$$

Δηλαδή βάση των παραπάνω προκύπτει:

$$\varphi_\delta = \begin{cases} 1 - \frac{\delta\beta}{\rho_1(\lambda+\mu+\delta)}, & \delta > 0 \\ 1 - \frac{\beta[\mu E(X_1)-\lambda E(Y_1)]}{\mu+\lambda}, & \delta = 0 \end{cases} \qquad (5.28)$$

αν τώρα θεωρήσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή για δ =ρ1 = 0 και w(x,y)=1, τότε από την Σημείωση 3.4 έχουμε

$$f_0(y) = \frac{\lambda}{\varphi_0(\lambda+\mu)}[f(y) + \frac{\beta}{\pi_{1,1}(0)} T_0 f(y)]$$

Η οποία λόγω της σχέσης $T_0 f(y) = \bar{F}(y)$ γίνεται $f_0(y) = \frac{\lambda}{\varphi_0(\lambda+\mu)}[f(y) + \beta\bar{F}(y)]$.

Όμως,

$$\bar{F}_0(y) = \int_y^\infty f_0(t)dt = \frac{\int_y^\infty [f(t)+\beta\bar{F}(t)]dt}{\int_0^\infty [f(t)+\beta\bar{F}(t)]dt}, y \geq 0 \quad (5.29)$$

Στην περίπτωση όπου η κατανομή των απαιτήσεων έχει κάποια συγκεκριμένη μορφή, μπορούν να βρεθούν αναλυτικές εκφράσεις για τις $\bar{F}_0(y)$ και φ_0. Σχετικά είναι τα Παραδείγματα 5.11 και 5.12.

B) Θεωρούμε την περίπτωση στην οποία τα ασφάλιστρα ακολουθούν την κατανομή Erlang(2,β). Έστω ότι ρ_1 και ρ_2 είναι οι δύο πραγματικές ρίζες της εξίσωσης Lundberg που μελετήθηκε στο Παράδειγμα 5.4 με $0 \leq \rho_1 < \beta < \rho_2$. Η έκφραση για το φ_δ από την (5.20) για n= 2 , γίνεται

$$\varphi_\delta = \frac{\lambda}{\mu+\lambda+\delta}\{1 - [\frac{(\beta-\rho_1)^2}{\pi_{2,1}(\rho_1)}T_{\rho_1}\bar{F}_{(0)} + \frac{(\beta-\rho_2)^2}{\pi_{2,2}(\rho_2)}T_{\rho_2}\bar{F}_{(0)}]\}$$

Από την σχέση (5.5) προκύπτει ότι:

$\pi_{2,1}(\rho_1) = \rho_1 - \rho_2$ και $\pi_{2,2}(\rho_2) = \rho_2 - \rho_1$

Και με αντικατάσταση στη παραπάνω σχέση έχουμε:

$$\varphi_\delta = \frac{\lambda}{\mu+\lambda+\delta}\{1 - [\frac{(\beta-\rho_1)^2}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}\bar{F}_{(0)} + \frac{(\beta-\rho_2)^2}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}\bar{F}_{(0)}]\}$$

Αν δ=0 τότε ρ_1=0 ⇒

$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\{1 - [\frac{\beta^2}{-\rho_2}T_0\bar{F}_{(0)} + \frac{(\beta-\rho_2)^2}{\rho_2}T_{\rho_2}\bar{F}_{(0)}]\}$$

Από την Παρατήρηση (5.9) για n=2 ⇒ $(\beta-\rho_2)^2 T_{\rho_2}\bar{F}_{(0)} = \frac{\mu\beta^2 - \mu(\beta-\rho_2)^2}{\lambda\rho_2}$

Άρα η αρχική σχέση για το φ_δ γίνεται:

$$\varphi_0 = \frac{\lambda}{\mu+\lambda}\{1 + \frac{\beta^2}{\rho_2}E(Y_1) + -\frac{1}{\rho_2}\frac{\mu\beta^2 - \mu(\beta-\rho_2)^2}{\lambda\rho_2}\}$$

$$=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\{1+\frac{\beta^2}{\rho_2}\mathrm{E}(\mathrm{Y}_1)-\frac{\mu\beta^2-\mu\beta^2-\mu{\rho_2}^2+2\mu\beta\rho_2}{\lambda{\rho_2}^2}\}$$

$$=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\{1+\frac{\beta^2}{\rho_2}\mathrm{E}(\mathrm{Y}_1)+\frac{\mu\rho_2+2\mu\beta}{\lambda\rho_2}\}$$

$$=\frac{\lambda}{\mu+\lambda}\{\frac{\lambda\beta^2\mathrm{E}(\mathrm{Y}_1)}{\rho_2(\lambda+\mu)}+\frac{\mu\rho_2+2\mu\beta}{\lambda\rho_2(\lambda+\mu)}\}$$

$$=\frac{\lambda\rho_2+\mu\rho_2-\mu\rho_2}{\rho_2(\lambda+\mu)}+\frac{\lambda\beta^2\mathrm{E}(\mathrm{Y}_1)}{\rho_2(\lambda+\mu)}+\frac{\mu\rho_2+2\mu\beta}{\lambda\rho_2(\lambda+\mu)}\}$$

$$=1+\frac{\lambda\beta^2\mathrm{E}(\mathrm{Y}_1)-2\mu\beta}{\rho_2(\lambda+\mu)}=1-\frac{\mu\beta^2\frac{2}{\beta}-\lambda\beta^2\mathrm{E}(\mathrm{Y}_1)}{\rho_2(\lambda+\mu)}$$

$$=1-\frac{\beta^2[\mu\mathrm{E}(\mathrm{X}_1)-\lambda\mathrm{E}(\mathrm{Y}_1)]}{\rho_2(\lambda+\mu)}$$

Αν δ>0 από την Παρατήρηση (5.9) είναι: $(\beta-\rho_j)^2\mathrm{T}_{\rho_j}\overline{\mathrm{F}}_{(0)}=\frac{\mu\beta^2-(\mu+\delta)(\beta-\rho_j)^2}{\lambda\rho_j}$

Οπότε

$$\varphi_\delta=\frac{\lambda}{\mu+\lambda+\delta}\{1-[\frac{1}{\rho_1-\rho_2}\frac{\mu\beta^2-(\mu+\delta)(\beta-\rho_1)^2}{\lambda\rho_1}+\frac{1}{\rho_2-\rho_1}\frac{\mu\beta^2-(\mu+\delta)(\beta-\rho_2)^2}{\lambda\rho_2}]\}$$

$$=\frac{1}{\mu+\lambda+\delta}\{\lambda-\frac{1}{\rho_1-\rho_2}[\frac{\mu\beta^2-(\mu+\delta)(\beta-\rho_1)^2}{\rho_1}-\frac{\mu\beta^2-(\mu+\delta)(\beta-\rho_2)^2}{\rho_2}]\}$$

$$=\frac{1}{\mu+\lambda+\delta}\{\lambda-\frac{1}{\rho_1-\rho_2}\frac{(\rho_1-\rho_2)[\mu\beta^2-(\mu+\delta)\rho_1\rho_2}{\rho_1\rho_2}\}$$

$$=\frac{(\mu+\lambda+\delta)\rho_1\rho_2-\beta^2\delta}{\rho_1\rho_2(\mu+\lambda+\delta)}$$

$$=1-\frac{\beta^2\delta}{\rho_1\rho_2(\mu+\lambda+\delta)}$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$\varphi_\delta = \begin{cases} 1 - \dfrac{\delta\beta^2}{\rho_1\rho_2(\lambda+\mu+\delta)}, & \delta > 0 \\ 1 - \dfrac{\beta^2[\mu E(P_1) - \lambda E(Y_1)]}{\rho_2(\mu+\lambda)}, & \delta = 0 \end{cases}$$

Τα επόμενα δύο παραδείγματα που ακολουθούν θα υπολογιστεί η πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι απαιτήσεις ακολουθούν μια συγκεκριμένη κατανομή.

<u>Παράδειγμα 5.11:</u> Έστω ότι τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με μέση τιμή 1/β και ότι τα μεγέθη των απαιτήσεων ακολουθούν την κατανομή Erlang (k,α) για k,α > 0. Έτσι έχουμε

$f(y) = f(y;k), y \geq 0$ όπου $f(y;k) = \frac{a^j y^{j-1} e^{-\alpha y}}{(y-1)!}$, $y \geq 0$

συμβολίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας της Erlang (j,α). Η αναμενόμενη τιμή των απαιτήσεων είναι $E(Y_1) = {}^{k}/_{\alpha}$.

Για τη συνάρτηση κατανομής των απαιτήσεων ισχύει $\bar{F}(u;k) = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{k} f(u;j)$ *(5.11.1)*

Για να υπολογίσουμε την $\bar{F}_0(u)$, όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε ότι για k=1 η *(5.11.1)* γίνεται $\bar{F}(u;1) = \frac{1}{\alpha} f(u;1)$ όμως $\bar{F}(u;1) = \bar{F}(u) = \int_u^\infty f(y;1)dy = \int_u^\infty \alpha e^{-\alpha y} dy = e^{-\alpha u}$

και $\frac{1}{\alpha} f(u;1) = \frac{1}{\alpha}\frac{\alpha e^{-\alpha u}}{(1-1)!} = e^{-\alpha u}$

Η *(5.11.1)* για k=k+1 γίνεται

$\bar{F}(u;k+1) = \int_u^\infty f(y;k+1)dy = \int_u^\infty \frac{a^{k+1}y^{k+1-1}e^{-\alpha y}}{(k+1-1)!}dy = \int_u^\infty \frac{a^{k+1}y^k e^{-\alpha y}}{k!}dy = \frac{a^k}{k!}\int_u^\infty y^k e^{-\alpha y}dy$

χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση προκύπτει τελικά

$$\bar{F}(u;k+1)=\frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{k+1} f(u;j)$$

Συνεπώς, η *(5.29)* σε αυτή τη περίπτωση γράφεται ως:

$$\bar{F}_0(y)=\frac{\int_u^{\infty}[f(y;k)+\beta\bar{F}(y;k)]dy}{\int_0^{\infty} f(y)dy+\beta\int_0^{\infty}\bar{F}(y)dy}\ ,y\geq 0$$

$$=\frac{\int_u^{\infty}[f(y;k)+\beta\frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{k} f(y;j)]dy}{1+\beta E(Y_1)}$$

$$=\frac{\int_u^{\infty}[f(y;k)+\beta\frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{k-1} f(y;j)+\beta\frac{1}{\alpha}f(y;k)]dy}{1+\beta\frac{k}{\alpha}}$$

$$=\int_u^{\infty}\sum_{j=1}^{k}\omega_j f(y;j)\,dy,\qquad y\geq 0$$

Όπου $\omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_{\kappa-1}=\frac{\beta/\alpha}{1+k\beta/\alpha}=\frac{\beta}{1+k\beta}$ και $\omega_\kappa=\frac{1+\beta/\alpha}{1+k\beta/\alpha}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha+k\beta}$

Με άλλα λόγια η $\bar{F}_0(y)$ είναι η συνάρτηση δεξιάς ουράς μιας κατανομής που προκύπτει από μείξη κατανομών Erlang με βάρη $\omega_1=\omega_2=\ldots=\omega_\kappa$.

Η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής Εξίσωσης δίνεται από τη σχέση

$$\psi_0(u)=e^{-\alpha u}\sum_{j=0}^{\infty} C_j\frac{(\alpha u)^j}{j!},\qquad u\geq 0$$

Όπου οι C_j ικανοποιούν τη σχέση

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j z^j=\frac{1-(1-\varphi_0)\left[1-\varphi_0\sum_{i=1}^{k}\omega_i z^i\right]^{-1}}{1-z} \tag{5.11.2}$$

Στην περίπτωση που δ=0 προκύπτει ότι

$$\varphi_0 = \psi_0(0) = \frac{\lambda(\alpha + k\beta)}{\alpha(\lambda + \mu)}$$

Από τα παραπάνω, μπορεί να προκύψει το δεύτερο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2 της εργασίας του Boikov (2002), σχετικά με την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν οι απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένες.

Για παράδειγμα, στην περίπτωση στην οποία τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι εκθετικά κατανεμημένα, δηλαδή k=1 η *(5.11.2)* γίνεται

$$\sum_{j=0}^{\infty} C_j z^j = \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_0 z}$$

Και $C_j = {\varphi_0}^{j+1},\ j = 0,1,..$ από όπου προκύπτει για την $\psi_0(u)$ ότι

$$\psi_0(u) = e^{-\alpha u}\varphi_0 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\alpha\varphi_0 u)^j}{j!} = e^{-\alpha u}\varphi_0 e^{\alpha\varphi_0 u} = \varphi_0 e^{-\alpha(1-\varphi_0)u}$$
$$= \frac{\lambda(\alpha + \beta)}{\alpha(\lambda + \mu)} e^{-\frac{(\alpha\mu - \beta\lambda)}{(\lambda+\mu)}u}, u \geq 0$$

Παράδειγμα 5.12: Έστω ότι η κατανομή των ατομικών ασφαλίστρων είναι η εκθετική με μέσο 1/ β και η κατανομή των απαιτήσεων είναι μία μείξη k εκθετικών κατανομών, με συνάρτηση πυκνότητας και συνάρτηση κατανομής Yi να είναι αντίστοιχα

$f(y) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j\, \alpha_j e^{-\alpha_j y}$ και $\bar{F}(y) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j\, e^{-\alpha_j y},\ y > 0, \alpha_j > 0, j = 1,2, \dots k$

όπου ω_j είναι τα βάρη και για τα οποία ισχύει η σχέση $\sum_{j=1}^{k} \omega_j = 1$ και $E(Y_1) = \sum_{j=1}^{k} \omega_j \frac{1}{\alpha_j}$

Η *(5.29)* γίνεται:

$$\bar{F}_0(y) = \frac{\int_u^{\infty}[f(y) + \beta\bar{F}(y)]dy}{\int_0^{\infty}[f(y) + \beta\bar{F}(y)]dy}$$
$$= \frac{\int_u^{\infty}(\sum_{j=1}^{k} \omega_j\, \alpha_j e^{-\alpha_j y} + \beta \sum_{j=1}^{k} \omega_j\, e^{-\alpha_j y})}{1 + \beta E(Y_1)}$$
$$= \frac{\int_u^{\infty}[\sum_{j=1}^{k} \omega_j\, e^{-\alpha_j y}(\alpha_j + \beta)]dy}{1 + \beta \sum_{j=1}^{k} \omega_j \frac{1}{\alpha_j}}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{k} \int_u^{\infty} \omega_j [e^{-\alpha_j y}(\alpha_j + \beta)] dy}{\sum_{j=1}^{k} \omega_j + \beta \sum_{j=1}^{k} \omega_j \frac{1}{\alpha_j}}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{k} \omega_j (\alpha_j + \beta) [\frac{e^{-\alpha_j y}}{-\alpha_j}]_u^{\infty}}{\sum_{j=1}^{k} (1 + \frac{\beta}{\alpha_j}) \omega_j}$$

$$= \frac{\sum_{j=1}^{k} (\alpha_j + \beta) \frac{e^{-\alpha_j u}}{\alpha_j}}{\sum_{j=1}^{k} (1 + \frac{\beta}{\alpha_j})}$$

δηλαδή

$$\bar{F}_0(y) = \omega_j^* e^{-\alpha_j u} \quad \text{με} \quad \omega_j^* = \frac{(\alpha_j + \beta) \frac{e^{-\alpha_j u}}{\alpha_j}}{\sum_{j=1}^{k} (1 + \frac{\beta}{\alpha_j}) \omega_j}$$

Τελικώς προκύπτει ότι η $\bar{F}_0(y)$ είναι η δεξιά ουρά μιας κατανομής που προκύπτει από τη μείξη των ίδιων k εκθετικών κατανομών που σχηματίζουν την κατανομή των απαιτήσεων αλλά με νέα βάρη ω_j^*, $j = 1,2, \dots k$.

Τότε η λύση της ελλειμματικής ανανεωτικής Εξίσωσης έχει τη μορφή $\psi_0(u) = \sum_{j=1}^{k} C_j \, e^{-r_j u}$, $u \geq 0$ όπου $r_1, r_2, \dots r_k$ είναι οι ρίζες της κάτωθι εξίσωσης

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{\omega_j^* \alpha_j}{\alpha_j - r} = \frac{1}{\varphi_0} = \frac{\lambda + \mu}{\lambda \sum_{j=1}^{k} (1 + \frac{\beta}{\alpha_j}) \omega_j}$$

Στην περίπτωση που δ=0 σε συνδυασμό με τη σχέση (5.28) προκύπτει το δεύτερο σκέλος της ανωτέρω εξίσωσης και

$$C_j = \frac{\sum_{j=1}^{k} \frac{\omega_j^* \alpha_j}{\alpha_j - r}}{\sum_{j=1}^{k} \frac{\omega_j^* \alpha_j}{(\alpha_j - r)^2}}, \quad j = 1,2..k$$

<u>Παρατήρηση 2.13:</u> Αν στην σχέση $\psi_0(u) = \sum_{j=1}^{k} C_j \, e^{-r_j u}$ θέσουμε k=1 προκύπτει το δεύτερο αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2 της εργασίας του Boikov.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ ΚΑΙ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ ΖΗΜΙΑΣ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μελετήσαμε το μοντέλο της θεωρίας κινδύνου θεωρώντας μια σύνθετη Poisson με στοχαστικά ασφάλιστρα.

Στο κεφάλαιο αυτό θα επεκτείνουμε το μοντέλο αυτό θεωρώντας ότι υπάρχει εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων, των ασφαλίστρων και του χρόνου εμφάνισης κινδύνου. Υπήρχαν αρκετοί ερευνητές που μελέτησαν και πρότειναν μοντέλα κινδύνου στα οποία ενσωματώνονται κάποιες μορφές εξάρτησης.

Συγκεκριμένα στις επόμενες ενότητες, θα περιγράψουμε το μοντέλο κινδύνου που θα μελετήσουμε, υποθέτοντας ότι οι κατανομές των ασφαλίστρων και των χρόνων εμφάνισης κινδύνων επηρεάζονται από τις απαιτήσεις. Έπειτα, θα δούμε πως οι εξισώσεις Laplace και οι ελλειμματικές εξισώσεις για την συνάρτηση ποινής επιτυγχάνονται όταν τα ατομικά ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα. Τέλος, θα αναφερθούμε στην περίπτωση όπου τα μεγέθη των ασφαλίστρων έχουν μετασχηματισμό Laplace που ανήκει στην ρητή οικογένεια κατανομών και φαίνεται ότι και στην περίπτωση αυτή μπορούν να επιτευχθούν οι μετασχηματισμοί Laplace για τις προεξοφλημές συναρτήσεις ποινής

2. ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Θεωρούμε το μοντέλο κινδύνου στο οποίο η στοχαστική ανέλιξη M(t) του αριθμού των ατομικών ασφαλίστρων μέχρι την στιγμή t είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση $\mu>0$, $\{X_i\}$ είναι ακολουθία αυστηρά θετικών τυχαίων μεταβλητών που παριστάνουν τα ύψη των ατομικών ασφαλίστρων, N(t) είναι μια στοχαστική ανέλιξη του αριθμού των απαιτήσεων μέχρι τη στιγμή t , $\{V_i\}$ είναι οι χρόνοι μεταξύ διαδοχικών αφίξεων απαιτήσεων και $\{Y_i\}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ισόνομα κατανεμημένες με την Y που έχουν συνάρτηση κατανομής $F(y) = P(Y \leq y)$, συνάρτηση πυκνότητας f , μέση τιμή μ και Μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y) dy$.

$$U(t) = u + \sum_{i=1}^{M(t)} X_i - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \qquad (2.1)$$

Ας υποθέσουμε ότι οι τ.μ. X_i είναι εξαρτημένες από τον αριθμό των αποζημιώσεων N(t) ως:

Αν ο αριθμός των απαιτήσεων Y_i είναι μεγαλύτερος ή ίσος από το κατώφλι B_i τότε ο χρόνος μέχρι την επόμενη άφιξη του i+1 ασφαλίστρου V_{i+1}, είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή $1/\lambda_1$, σ.κ. F_1, μέσο μ_1 και συνάρτηση Laplace $\hat{f}_1$

Αν ο αριθμός των απαιτήσεων Y_i είναι μικρότερος από το κατώφλι B_i τότε ο χρόνος V_{i+1} είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή $1/\lambda_2$, σ.κ. F_2, μέσο μ_2 και συνάρτηση Laplace $\hat{f}_2$.

Ας υποθέσουμε επίσης ότι η Bi είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μεταβλητών με τη B και ανεξάρτητη από την Yi. Τέλος, ας υποθέσουμε ότι ο χρόνος μέχρι την άφιξη του πρώτου ασφαλίστρου είναι εκθετικά κατανεμημένος με μέση τιμή $1/\lambda_1$ ή $1/\lambda_2$ καθώς και ότι η συνάρτηση κατανομής του ύψους ασφαλίστρου είναι Fi.

Έστω $T_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$ ο χρόνος μέχρι να συμβεί η n-απαίτηση. Τότε το πλεόνασμα θα είναι:

$$U_n = u + \sum_{i=1}^{M(tn)} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$= u + \sum_{i=1}^{M(T_1)} X_i + \sum_{i=M(T_1)+1}^{M(T_2)} X_i + \ldots + \sum_{i=M(T_{n-1})+1}^{M(T_n)} X_i - \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$= u + \sum_{i=1}^{M(V1)} X_i - \sum_{k=1}^{n-1} (Y_k - \sum_{i=M(T_{k)+1}}^{M(V_{k+1})} X_i) - Y_n$$

(2.2)

Έστω ότι $Y_k - \sum_{i=M(T_{k)+1}}^{M(T_{k+1})} X_i$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες με την $\{Y_k - \sum_{i=1}^{M(V_{k+1})} X_i\}$

και

$Y_k - \sum_{i=1}^{M(V_{k+1})} X_i$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες με την $\{Y_1 - \sum_{i=1}^{M(V_2)} X_i\}$ τυχαίες μεταβλητές.

Τότε

$$U_n \cong u + \sum_{i=1}^{M(V1)} X_i - \sum_{k=1}^{n-1} (Y_k - \sum_{i=M(T_{k)+1}}^{M(V_{k+1})} X_i) - Y_n$$

Όμως από τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών ισχύει τελικά:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{u+\sum_{i=1}^{M(V1)} X_i - Y_n}{n} - \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(Y_k - \sum_{i=1}^{MV_{k+1}} X_i)}{n}$$

$$= -\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{k=1}^{n-1}(Y_k - \sum_{i=1}^{MV_{k+1}} X_i)}{n}$$

$$= -E[Y_1 - \sum_{i=1}^{M(V2)} X_i]$$

$$= E(\sum_{i=1}^{M(V2)} X_i) - E(Y_1)$$

Στην παραπάνω σχέση εφαρμόζοντας το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας σε σχέση με το αν η απαίτηση ξεπρνάει ή όχι το κατώφλι B. στην περίπτωση όπου $Y \geq B$, ο μέσος αριθμός ασφαλίστρων είναι $\lambda/_{\lambda_1}$ και το αναμενόμενο ατομικό ασφάλιστρο είναι μ_1. Στην περίπτωση όπου $Y < B$, ο μέσος αριθμός ασφαλίστρων είναι $\lambda/_{\lambda_2}$ και το αναμενόμενο ατομικό ασφάλιστρο είναι μ_2. Συνεπώς,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{U_n}{n} = \Pr(Y \geq B)\frac{\lambda\mu_1}{\lambda_1} + \Pr(Y < B)\frac{\lambda\mu_2}{\lambda_2} - \mu > 0 \quad (2.3)$$

Γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση ποινής δίνεται από τον τύπο $\varphi(u) = E\{e^{-\delta T} w(U(T-), |U(T)|)I(T<\infty)|U(0)=u\}$. Δοθέντος ότι ο χρόνος εμφάνισης κινδύνων (Interclaim time) είναι εκθετικά κατανεμημένος τότε η συνάρτηση των Gerber-Shiu συμβολίζεται με $\varphi_i(u)$ και ισχύει η συνθήκη $\lim_{u\to\infty}\varphi_i(u) = 0$.

3. ΑΝΑΛΥΣΗ GERBER-SHIU ΓΙΑ ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΑ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ

Σε αυτή την ενότητα θα εστιάσουμε σε εκφράσεις των συναρτήσεων Gerber-Shiu και των αντίστοιχων μετασχηματισμών Laplace αυτών όταν τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων ακολουθούν μια οποιαδήποτε κατανομή. Στην συνέχεια ωστόσο θα εξειδικεύσουμε τα αποτελέσματα της μελέτης, στην περίπτωση όπου τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων ακολουθούν την εκθετική κατανομή.

Έστω $m_1(u)$ η συνάρτηση ποινή για την 1η απαίτηση και $m_2(u)$ η συνάρτηση ποινής για την 2η απαίτηση.

Έστω επίσης ότι W_1 η στιγμή που φτάνει το 1ο ασφάλιστρο τότε ισχύει από την συνθήκη έλλειψης μνήμης ότι

$m_1(\mathrm{u}) = \int_0^\infty \Pr(\mathrm{W}_1 < \mathrm{V}_1, \mathrm{W}_1 \in \mathrm{dt}) \mathrm{e}^{-\delta t} \int_0^\infty \mathrm{m}_1(\mathrm{u}+\mathrm{x}) \mathrm{dF}_1(\mathrm{x}) + \int_0^\infty \Pr(\mathrm{V}_1 < \mathrm{W}_1, \mathrm{V}_1 \in$ $\mathrm{dt}) \mathrm{e}^{-\delta t} [\int_0^u \mathrm{m}_1(\mathrm{u}-\mathrm{y}) \Pr(\mathrm{y} > \mathrm{B}) \mathrm{dF}(\mathrm{y}) + \int_0^u \mathrm{m}_2(\mathrm{u}-\mathrm{y}) \Pr(\mathrm{y} < \mathrm{B}) \mathrm{dF}(\mathrm{y}) +$ $\int_u^\infty \mathrm{w}(\mathrm{u}, \mathrm{y}-\mathrm{u})\, \mathrm{dF}(\mathrm{y})]$

$\Rightarrow$

$$\mathrm{m}_1(\mathrm{u}) = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\delta} \int_0^\infty \mathrm{m}_1(\mathrm{u}-\mathrm{x}) \mathrm{B}(\mathrm{y}) \mathrm{dF}_1(\mathrm{x}) + \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\delta} [\int_0^u \mathrm{m}_1(\mathrm{u}-\mathrm{y}) \mathrm{B}(\mathrm{y}) \mathrm{dF}(\mathrm{y}) + \int_0^u \mathrm{m}_2(\mathrm{u}-\mathrm{y}) \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{y}) \mathrm{dF}(\mathrm{y}) + \omega(\mathrm{u})] \qquad (3.1)$$

Και αντίστοιχα για την $\mathrm{m}_2(\mathrm{u})$ παίρνουμε:

$$\mathrm{m}_2(\mathrm{u}) = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_2+\delta} \int_0^\infty \mathrm{m}_2(\mathrm{u}-\mathrm{x}) \mathrm{B}(\mathrm{y}) \mathrm{dF}_2(\mathrm{x}) + \frac{\lambda_2}{\lambda+\lambda_2+\delta} [\int_0^u \mathrm{m}_1(\mathrm{u}-\mathrm{y}) \mathrm{B}(\mathrm{y}) \mathrm{dF}(\mathrm{y}) + \int_0^u \mathrm{m}_2(\mathrm{u}-\mathrm{y}) \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{y}) \mathrm{dF}(\mathrm{y}) + \omega(\mathrm{u})] \qquad (3.2)$$

Όπου $\omega(\mathrm{u}) = \int_0^\infty \mathrm{w}(\mathrm{x}, \mathrm{y}-\mathrm{u}) \mathrm{dF}(\mathrm{y})$

Έστω $\xi_1(\mathrm{y}) = \mathrm{B}(\mathrm{y}) \mathrm{f}(\mathrm{y})$, $\xi_2(\mathrm{y}) = \overline{\mathrm{B}}(\mathrm{y}) \mathrm{f}(\mathrm{y})$ και για i=1, 2 έστω $\mathrm{A}_i(\mathrm{u}) = \int_0^\infty \varphi_i(\mathrm{u}+\mathrm{x})\, \mathrm{dF}_i(\mathrm{x})$.

Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Laplace στην (3.1) και (3.2) προκύπτουν οι:

$$\widehat{m}_1(\mathrm{s}) = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\delta} \widehat{\mathrm{A}}_1(\mathrm{s}) + \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\delta} [\widehat{\mathrm{m}}_1(\mathrm{s}) \hat{\xi}_1(\mathrm{s}) + \widehat{\mathrm{m}}_2(\mathrm{s}) \hat{\xi}_2(\mathrm{s}) + \widehat{\omega}(\mathrm{s})] \qquad (3.3)$$

και

$$\widehat{\mathrm{m}}_2(\mathrm{s}) = \frac{\lambda}{\lambda+\lambda_2+\delta} \widehat{\mathrm{A}}_2(\mathrm{s}) + \frac{\lambda_2}{\lambda+\lambda_2+\delta} [\widehat{\mathrm{m}}_1(\mathrm{s}) \hat{\xi}_1(\mathrm{s}) + \widehat{\mathrm{m}}_2(\mathrm{s}) \hat{\xi}_2(\mathrm{s}) + \widehat{\omega}(\mathrm{s})] \qquad (3.4)$$

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε ότι το μέγεθος των ατομικών ασφαλίστρων είναι εκθετικά κατανεμημένο με συναρτήσεις κατανομής $\mathrm{F}_1(\mathrm{x})$ και $\mathrm{F}_2(\mathrm{x})$ αντίστοιχα.

$$\mathrm{F}_1(\mathrm{x}) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}}{\mu_1}} \qquad (3.5)$$

$$\mathrm{F}_2(\mathrm{x}) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{x}}{\mu_2}}$$

Στη συνέχεια θα χρειαστεί να ορίσουμε τον τελεστή Dickson-Hipp

<u>Ορισμός 3.1</u>: Για μια δοθείσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση h και για $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε τον συντελεστή Dickson-Hipp ως

$$T_r f(x) = \int_x^{\infty} e^{-r(y-x)} f(y)dy, \qquad x \geq 0$$

Ισχύουν τα εξής:

1) $T_r f(0) = \hat{f}(r)$

2) *Αν* $T_r\hat{f}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace του τελεστή $T_r f(x)$ τότε $T_r\hat{f}(s) = \frac{\hat{f}(s)-\hat{f}(r)}{r-s}$

3) $T_s T_r f(x) = \frac{T_s f(x) - T_r f(x)}{r-s}, \quad r \neq s$

3.1. ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ LAPLACE

Στην υποενότητα αυτή θα δοθούν εκφράσεις των μετασχηματισμών Laplace για τις συναρτήσεις Gerber-Shiu στη περίπτωση που τα ασφάλιστρα ακολουθούν μια γενική κατανομή καθώς και στην ειδική περίπτωση που είναι εκθετικά κατανεμημένα.

$$\widehat{A}_i(s) = \int_0^{\infty} e^{-su} \int_0^{\infty} m_i(u+x) \frac{1}{\mu_i} e^{-\frac{x}{\mu_i}} dxdu$$

$$= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-su} \varphi_i(u+x) \frac{1}{\mu_i} e^{-\frac{x}{\mu_i}} dxdu$$

$$= \frac{1}{\mu_i}\int_0^{\infty}\int_x^{\infty} e^{-s(u-x)} m_i(u)\, du\, e^{-\frac{x}{\mu_i}} dx$$

$$= \frac{1}{\mu_i} T_s T_{\frac{1}{\mu_i}} \varphi_i(0)$$

$$= \frac{\widehat{m}_i(s) - \widehat{m}_i(\frac{1}{\mu_i})}{1-\mu_i s}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.1) και (3.2) παίρνουμε:

$$\{1 - \frac{\lambda}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(1-\mu_1 s)} - \frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}\}\widehat{\Phi}_1(s) - \frac{\lambda_1\hat{\xi}_2(r)}{\lambda+\lambda_1+\delta}\widehat{\Phi}_2(s) = \frac{\lambda_1\widehat{\omega}(s)}{\lambda+\lambda_1+\delta} - \frac{\lambda\widehat{\Phi}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(1-\mu_1 s)} \quad (3.6)$$

$$\{1 - \frac{\lambda}{(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2 s)} - \frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(r)}{\lambda+\lambda_2+\delta}\}\widehat{\Phi}_2(s) - \frac{\lambda_2\hat{\xi}_1(r)}{\lambda+\lambda_2+\delta}\widehat{\Phi}_1(s) = \frac{\lambda_2\widehat{\omega}(s)}{\lambda+\lambda_2+\delta} - \frac{\lambda\widehat{\Phi}_2(\frac{1}{\mu_2})}{(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2 s)} \quad (3.7)$$

Για διευκόλυνση θέτουμε:

$$x_i(s) = 1 - \frac{\lambda}{(\lambda+\lambda_i+\delta)(1-\mu_i s)} - \frac{\lambda_i\hat{\xi}_i(s)}{\lambda+\lambda_i+\delta}, \quad i = 1,2$$

$$h_1(s) = \frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\delta} - \frac{\lambda\lambda_1}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2 s)}$$

$$h_2(s) = \frac{\lambda_2}{\lambda+\lambda_2+\delta} - \frac{\lambda\lambda_2}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_1 s)}$$

Λύνοντας τις παραπάνω εξισώσεις (3.3) και (3.4) προκύπτουν οι $\widehat{\phi}_1(u)$ και $\widehat{\phi}_2(u)$

<u>Πρόταση 3.1:</u> Οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu στην περίπτωση που τα μεγέθη των ατομικών ασφαλίστρων ακολουθούν την εκθετική κατανομή, εκφράζονται ως

$$\widehat{m}_1(u) = \frac{h_1(u)\widehat{\omega}(u) - \frac{\lambda x_2(u)\widehat{m}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(1-\mu_1 u)} - \frac{\lambda\lambda_1\hat{\xi}_2(u)\widehat{m}_2(\frac{1}{\mu_2})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2 u)}}{x_1(u)x_2(u) - \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(u)\hat{\xi}_2(u)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}} \quad \textit{(3.8)}$$

$$\widehat{m}_2(u) = \frac{h_2(u)\widehat{\omega}(u) - \frac{\lambda x_1(u)\widehat{m}_2(\frac{1}{\mu_2})}{(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2 u)} - \frac{\lambda\lambda_2\hat{\xi}_1(u)\widehat{m}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_1 u)}}{x_1(u)x_2(u) - \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(u)\hat{\xi}_2(u)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}} \quad \textit{(3.9)}$$

<u>Σημείωση</u>: Για να τα υπολογίσουμε όμως θα πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε τις ποσότητες $\widehat{m}_1(\frac{1}{\mu_1})$ και $\widehat{m}_2(\frac{1}{\mu_2})$ λύνοντας την

$$\frac{\lambda x_2(\rho_i)\widehat{m}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(1-\mu_1\rho_i)} + \frac{\lambda\lambda_1\hat{\xi}_2(\rho_i)\widehat{m}_2(\frac{1}{\mu_2})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2\rho_i)} = h_i(\rho_i)\widehat{\omega}(\rho_i) \quad \textit{(3.6)}$$

Για το λόγο αυτό θα μελετήσουμε τις ρίζες του κοινού παρονομαστή των *(3.1.1) και (3.1.2)* σύμφωνα με το επόμενο λήμμα.

Όπου ρ_i για i=1,2 οι ρίζες της εξίσωσης

$$x_1(s)x_2(s) - \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)} = 0 \qquad \textit{(3.10)}$$

Συνεπώς, μπορούμε πλέον να υπολογίσουμε για i=1,2 τις $\widehat{m}_i(\frac{1}{\mu_i})$, $\varphi_i(u)$ και τελικά τις πιθανότητες χρεοκοπίας $\psi_i(u)$.

<u>Λήμμα 3.1:</u> Για δ>0 η εξίσωση (3.5) έχει ακριβώς δύο ρίζες, έστω $\rho_1(\delta)$, $\rho_2(\delta)$ στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο, δηλαδή, Re $(\rho_i(\delta)) > 0$ i =1,2.

Απόδειξη

Έχουμε $\prod_{i=1}^{2}[\mathrm{x_i(s)}(1-\mu_{\mathrm{i}}(s))] = \prod_{i=1}^{2}[\frac{\lambda_{\mathrm{i}}(1-\mu_{\mathrm{i}}(s))\hat{\xi}_{\mathrm{i}}(\mathrm{s})}{\lambda+\lambda_{\mathrm{i}}+\delta}]$ το οποίο λόγω της σχέσης *(3.10)* ισοδύναμα γράφεται ως

$$\prod_{i=1}^{2}[1-\mu_{\mathrm{i}}s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_{\mathrm{i}}+\delta}] = [1-\mu_1 s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\delta}]\frac{\lambda_2(1-\mu_2 s)\hat{\xi}_2(\mathrm{s})}{\lambda+\lambda_2+\delta} + [1-\mu_2 s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_2+\delta}]\frac{\lambda_1(1-\mu_1 s)\hat{\xi}_1(\mathrm{s})}{\lambda+\lambda_1+\delta} \qquad (3.11)$$

Στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Rouché προκειμένου να αποδείξουμε το *Λήμμα 3.1.*

Έστω r > 0 ένας αρκετά μεγάλος αριθμός και Cr η καμπύλη που περιέχει το φανταστικό άξονα με φορά από το –ir στο ir και ημικύκλιο με ακτίνα r που διαγράφεται δεξιόστροφα από το ir στο – ir . Θα δείξουμε ότι για Cr, το μέτρο του αριστερού μέλους της *(3.11)* είναι αυστηρά μεγαλύτερο από το μέτρο του δεξιού μέλους της *(3.11).*

$$\frac{|\lambda_{\mathrm{i}}-\lambda_{\mathrm{i}}\mu_{\mathrm{i}}s|}{|\lambda_{\mathrm{i}}+\delta-(\lambda+\lambda_{\mathrm{i}}+\delta)\mu_{\mathrm{i}}s|} < 1, \qquad i = 1,2$$

Έπειτα για r αρκετά μεγάλο, s στο ημικύκλιο και για κάθε ε > 0 έχουμε

$$\frac{|\frac{1}{\mu_{\mathrm{i}}}-s|}{|\frac{\lambda_{\mathrm{i}}+\delta}{(\lambda+\lambda_{\mathrm{i}}+\delta)\mu_{\mathrm{i}}}-s|} < 1+\varepsilon$$

Ειδικότερα, για $\varepsilon = min\{\frac{\mu+\delta}{\lambda_1},\frac{\mu+\delta}{\lambda_2}\}$ υπάρχει $r_0 > 0$ τέτοιο ώστε όταν $r > r_0$, έχουμε για i =1,2.

$$\frac{|\lambda_{\mathrm{i}}-\lambda_{\mathrm{i}}\mu_{\mathrm{i}}s|}{|\lambda_{\mathrm{i}}+\delta-(\lambda+\lambda_{\mathrm{i}}+\delta)\mu_{\mathrm{i}}s|} = \frac{\lambda_{\mathrm{i}}}{\lambda+\lambda_{\mathrm{i}}+\delta}\frac{|\frac{1}{\mu_{\mathrm{i}}}-s|}{|\frac{\lambda_{\mathrm{i}}+\delta}{(\lambda+\lambda_{\mathrm{i}}+\delta)\mu_{\mathrm{i}}}-s|} < \frac{\lambda_{\mathrm{i}}}{\lambda+\lambda_{\mathrm{i}}+\delta}(1+\varepsilon)$$
$$\leq 1$$

Οπότε για μεγάλο r, έχουμε

$$
\begin{aligned}
&|[1-\mu_1 s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_1+\delta}]\frac{\lambda_2(1-\mu_2 s)\hat{\hat{\xi}}_2(s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}+[1-\mu_2 s\\
&\quad-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_2+\delta}]\frac{\lambda_1(1-\mu_1 s)\hat{\hat{\xi}}_1(s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}|\\
&\quad=\prod_{i=1}^{2}[1-\mu_i s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}]|\frac{\lambda_2(1-\mu_2 s)\hat{\hat{\xi}}_2(s)}{\lambda_2+\delta-(\lambda+\lambda_2+\delta)\mu_2 s}\\
&\quad+\frac{\lambda_1(1-\mu_1 s)\hat{\hat{\xi}}_1(s)}{\lambda_1+\delta-(\lambda+\lambda_1+\delta)\mu_1 s}|\\
&\quad\leq|\prod_{i=1}^{2}[1-\mu_i s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}]|(\frac{|\hat{\hat{\xi}}_2(s)|*|\lambda_2-\lambda_2\mu_2 s|}{|\lambda_2+\delta-(\lambda+\lambda_2+\delta)\mu_2 s|}\\
&\quad+\frac{|\hat{\hat{\xi}}_1(s)|*|\lambda_1-\lambda_1\mu_1 s|}{|\lambda_1+\delta-(\lambda+\lambda_1+\delta)\mu_1 s|}\\
&\quad<|\prod_{i=1}^{2}[1-\mu_i s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}]|(|\hat{\hat{\xi}}_1(s)|+|\hat{\hat{\xi}}_2(s)|)\\
&\quad\leq|\prod_{i=1}^{2}[1-\mu_i s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}]|(\hat{\hat{\xi}}_1(0)+\hat{\hat{\xi}}_2(0))\\
&\quad=\prod_{i=1}^{2}[1-\mu_i s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}]
\end{aligned}
$$

Σημειώνουμε ότι και τα δύο μέλη της (3.11) είναι αναλυτικές συναρτήσεις για s εντός της Cr. Τότε από το θεώρημα Rouché, η Εξίσωση (3.11) έχει τον ίδιο αριθμό ριζών εντός της Cr με την εξίσωση $\prod_{i=1}^{2}[1-\mu_i s-\frac{\lambda}{\lambda+\lambda_i+\delta}]=0$.

Προφανώς, η παραπάνω εξίσωση έχει για ρίζες τις $s_i=\frac{\lambda_i+\delta}{(\lambda+\lambda_i+\delta)\mu_i}$, $i=1,2$ εντός της Cr.

Τέλος, για r→∞ ολοκληρώνεται η ζητούμενη απόδειξη.

<u>Παρατήρηση 3.1:</u> Έστω $\rho_1(\delta)$ η ρίζα με το μικρότερο μέτρο, τότε $\lim_{\delta\to 0+}\rho_1(\delta)=0$. Στη συνέχεια για λόγους απλότητας οι ρίζες θα συμβολίζονται ρ_1 και ρ_2.

Αφού οι $\widehat{m}_i(s)$, i =1,2 είναι αναλυτικές για Re (s) ≥ 0, οι ρ_1 και ρ_2 πρέπει να είναι επίσης ρίζες των αριθμητών των (3.8) και (3.9). Και οι δύο αυτές εξισώσεις δίνουν το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων για τα $\widehat{m}_1(\frac{1}{\mu_1})$ και $\widehat{m}_2(\frac{1}{\mu_2})$

$$\frac{\lambda x_2(\rho_i)\widehat{m}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(1-\mu_1\rho_i)}+\frac{\lambda\lambda_1\hat{\hat{\xi}}_2(\rho_i)\widehat{m}_2(\frac{1}{\mu_2})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2\rho_i)}=h_i(\rho_i)\widehat{\omega}(\rho_i) \quad (3.12)$$

Από τη λύση του συστήματος (3.12) προκύπτουν τα $\widehat{m}_1(\frac{1}{\mu_1})$ και $\widehat{m}_2(\frac{1}{\mu_2})$ έτσι ώστε στη συνέχεια μπορούν να προσδιοριστούν οι μετασχηματισμοί Laplace $\widehat{m}_1(u)$ και $\widehat{m}_2(u)$

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

Θεωρούμε την περίπτωση εκθετικά κατανεμημένων απαιτήσεων και κατωφλίων με μέσους $\mu_F=1$ και $\mu_B=2$ αντίστοιχα και συναρτήσεις κατανομής αντίστοιχα $B(x) = 1 - e^{-0.5x}$ και $F(y) = 1 - e^{-y}$.

Έστω ότι $\delta=0$, $w=1$, $\lambda=1$, $\lambda_1=0.4$, $\lambda_2=0.5$, $\mu_1=0.5$ και $\mu_2=1$.

Εύκολα προκύπτει ότι η Συνθήκη Καθαρού Κέρδους ισχύει σε αυτή την περίπτωση καθώς,

$$\Pr(Y \geq B)\frac{\lambda\mu_1}{\lambda_1} + \Pr(Y < B)\frac{\lambda\mu_2}{\lambda_2} - \mu_F$$

$$= \frac{\frac{1}{\mu_F}}{\frac{1}{\mu_{\mathbf{B}}}+\frac{1}{\mu_F}}\frac{\lambda\mu_1}{\lambda_1} + \frac{\frac{1}{\mu_F}}{\frac{1}{\mu_{\mathbf{B}}}+\frac{1}{\mu_F}}\frac{\lambda\mu_2}{\lambda_2} - \mu_F$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+1}\frac{1*0{,}5}{0{,}4} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1}\frac{1*1}{0{,}5} - 1 = \frac{3}{4} > 0$$

Για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας, θέτουμε $\delta = 0$ και τιμή της συνάρτησης ποινής $\omega(x1, x2) = 1$, οπότε από τη συνάρτηση Gerber-Shiu είναι $m_i(u) = \psi_i(u)$.

Οπότε υπολογίζουμε πρώτα:

$$\xi_1(y) = B(y)f(y) = (1 - e^{-\frac{1}{2}y})e^{-y} = e^{-y} - e^{-\frac{3}{2}y}$$

$$\hat{\xi}_1(r) = \int_0^\infty e^{-ry}\,\xi_1(y)dy = \int_0^\infty e^{-ry}\,(e^{-y} - e^{-\frac{3}{2}y})dy = \frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+\frac{3}{2}}$$

$$\xi_2(y) = \overline{B}(y)f(y) = e^{-\frac{1}{2}y}\,e^{-y} = e^{-\frac{3}{2}y}$$

$$\hat{\xi}_2(r) = \int_0^\infty e^{-ry}\,\xi_2(y)dy = \int_0^\infty e^{-ry}\,e^{-\frac{3}{2}y}\,dy = \int_0^\infty e^{-(r+\frac{3}{2})y}\,dy = \frac{1}{r+\frac{3}{2}}$$

$$x_1(r) = 1 - \frac{\lambda}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(1-\mu_1 r)} - \frac{\lambda_1 \hat{\xi}_1(s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}$$
$$= 1 - \frac{1}{1.4(1-0.5r)} - \frac{0.4}{1.4}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+1.5}\right)$$

$$x_2(r) = 1 - \frac{\lambda}{(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2 r)} - \frac{\lambda_2 \hat{\xi}_2(r)}{\lambda+\lambda_2+\delta} = 1 - \frac{1}{1.5(1-r)} - \frac{0.5}{1.5(r+1.5)}$$

Τότε σύμφωνα με τους παραπάνω υπολογισμούς η (3.5) γίνεται:

$$x_1(r)x_2(r)\frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(r)\hat{\xi}_2(r)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)} = 0 \Rightarrow \left[1 - \frac{1}{1.4(1-0.5r)} - \frac{0.4}{1.4}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+1.5}\right)\right]\left[1 - \frac{1}{1.5(1-r)} - \frac{0.5}{1.5(r+1.5)}\right] = \frac{0.2}{1.4*1.5}\left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{r+1.5}\right)\frac{1}{r+1.5}$$

Λύνοντας την εξίσωση προκύπτουν τέσσερις ρίζες

r_1=0, r_2=0.523009204, r_3=-0.270554613 και r_4=-1.514359353

Επιπλέον, από την *(3.6)* έχουμε ότι $\widehat{m}_1(\frac{1}{\mu_1}) = 0{,}333621$ και $\widehat{m}_2(\frac{1}{\mu_2}) = 0{,}541487$

Όμως παίρνοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace τελικά προκύπτουν οι πιθανότητες χρεοκοπίας με

$$\psi_1(u) = 0.7487227223e^{-0.270554613u} + 0.01359317324e^{-1.514359353u}$$

$$\psi_2(u) = 0.6815162964e^{-0.270554613u} + 0.01280823418e^{-1.514359353u}$$

3.2. ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΙΚΕΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Στόχος της υποενότητας αυτής είναι να δοθούν κάποιες ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις τις οποίες ικανοποιούν οι συναρτήσεις $\varphi_1(u)$ και $\varphi_2(u)$

Έστω,

$$H(s) = (1-\mu_1 s)(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta} - \mu_2 s)\frac{\lambda_1\hat{\hat{\xi}}_1(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)} + (1-\mu_2 s)(\frac{\lambda_1+\delta}{\lambda+\lambda_1+\delta} - \mu_1 s)\frac{\lambda_2\hat{\hat{\xi}}_2(s)}{(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

$$= h_{11}\hat{\hat{\xi}}_1(s) + h_{12}s\hat{\hat{\xi}}_1(s) + h_{13}s^3\hat{\hat{\xi}}_1(s) + h_{21}\hat{\hat{\xi}}_2(s) + h_{22}s\hat{\hat{\xi}}_2(s) + h_{23}s^3\hat{\hat{\xi}}_2(s)$$

(3.2)

Όπου

$$h_{11} = \frac{\lambda_1(\lambda_2+\delta)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}, \qquad h_{12} = -[\frac{\mu_1(\lambda_2+\delta)}{(\lambda+\lambda_2+\delta)} + \mu_2]\frac{\lambda_1}{\lambda+\lambda_1+\delta}, \qquad h_{13} = \frac{\lambda_1\mu_1\mu_2}{\lambda+\lambda_1+\delta}$$

$$h_{21} = \frac{\lambda_2(\lambda_1+\delta)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}, \qquad h_{22} = -[\frac{\mu_2(\lambda_1+\delta)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)} + \mu_1]\frac{\lambda_2}{\lambda+\lambda_2+\delta}, \qquad h_{23} = \frac{\lambda_2\mu_1\mu_2}{\lambda+\lambda_2+\delta}$$

Έτσι η *(3.8) και (3.9)* μέσω της $H(s)$ γράφεται:

$$(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)\{x_1(s)x_2(s) - \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\hat{\xi}}_1(s)\hat{\hat{\xi}}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}\} = (\frac{\lambda_1+\delta}{\lambda+\lambda_1+\delta} - \mu_1 s)(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta} - \mu_2 s) - H(s) \quad \textbf{(3.2.1)}$$

Θέτοντας στην *(3.2.1)* s=ρi ,i=1,2 παίρνουμε

$$(\frac{\lambda_1+\delta}{\lambda+\lambda_1+\delta} - \mu_1\rho_1)(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta} - \mu_2\rho_2) - H(\rho_i)$$
$$= (1-\mu_1\rho_i)(1-\mu_2\rho_i)\{x_1(\rho_i)x_2(\rho_i) - \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)\hat{\hat{\xi}}_2(\rho_i)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}\}$$
$$= 0$$

Και ισοδύναμα

$$H(\rho_i) = (\frac{\lambda_1+\delta}{\lambda+\lambda_1+\delta} - \mu_1\rho_i)(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta} - \mu_2\rho_i), \qquad i = 1,2$$

Ορίζουμε το πολυώνυμο $l(s) = (\frac{\lambda_1+\delta}{\lambda+\lambda_1+\delta} - \mu_1 s)(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta} - \mu_2 s) - \mu_1\mu_2(s-\rho_1)(s-\rho_2)$ **(3.2.2)**

$$\Rightarrow l(s) = \frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}\frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta} - \frac{\lambda_1+\delta}{\mu+\lambda_1+\delta}\mu_2 s - \frac{\lambda_2+\delta}{\mu+\lambda_2+\delta}\mu_1 s + \mu_1\mu_2 s^2 - \mu_1\mu_2 s^2 + \mu_1\mu_2 s\rho_1 + \mu_1\mu_2 s\rho_2 - \mu_1\mu_2\rho_1\rho_2$$

δηλαδή είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού ως προς s, και ικανοποιεί τη σχέση $l(\rho_i) = H(\rho_i)$

για i=1,2.

Από τον τύπο παρεμβολής Lagrange έχουμε

$$l(s) = \frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2} H(\rho_1) + \frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1} H(\rho_2) \quad \textbf{(3.2.3)}$$

Με βάση τις (3.2.1), (3.2.2) και (3.2.3) παίρνουμε

$$(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)\{x_1(s)x_2(s) - \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}\}$$

$$= \mu_1\mu_2(s-\rho_1)(s-\rho_2) + l(s) - H(s)$$

$$= \mu_1\mu_2(s-\rho_1)(s-\rho_2) + \frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2} H(\rho_1) + \frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1} H(\rho_2) - H(s)$$

$$= (s-\rho_1)(s-\rho_2)\{\mu_1\mu_2 + \frac{1}{\rho_1-\rho_2}\frac{H(\rho_1)}{s-\rho_1} + \frac{1}{\rho_2-\rho_1}\frac{H(\rho_2)}{s-\rho_2} - \frac{H(s)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}$$

$$= (s-\rho_1)(s-\rho_2)\{\mu_1\mu_2 + \frac{(s-\rho_2)H(\rho_1)}{(\rho_1-\rho_2)(s-\rho_1)(s-\rho_2)} + \frac{(s-\rho_1)H(\rho_2)}{(\rho_2-\rho_1)(s-\rho_1)(s-\rho_2)} - \frac{(\rho_2-\rho_1)H(s)}{(\rho_2-\rho_1)(s-\rho_1)(s-\rho_2)}$$

$$= (s-\rho_1)(s-\rho_2)\{\mu_1\mu_2 - \frac{\frac{H(s)-H(\rho_2)}{s-\rho_2} - \frac{H(s)-H(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}\}$$

(3.13)

Στη συνέχεια με τη βοήθεια των ιδιοτήτων του συντελεστή Dickson-Hipp, Tr που έχουμε ορίσει στην αρχή του κεφαλαίου για k , i= 1,2 παίρνουμε:

$$\frac{\hat{\xi}_k(s) - \hat{\xi}_2(\rho_i)}{s-\rho_i} = -T_s T_{\rho_i}\xi_k(0)$$

$$\frac{s\hat{\xi}_k(s) - \rho_i\hat{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i} = \frac{s\hat{\xi}_k(s) - \rho_i\hat{\xi}_k(\rho_i) + \rho_i\hat{\xi}_k(\rho_i) - \rho_i\hat{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i}$$
$$= \hat{\xi}_k(s) - \rho_i T_s T_{\rho_i}\xi_k(0)$$

$$\frac{s^2\hat{\xi}_k(s) - {\rho_i}^2\hat{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i} = \frac{s^2\hat{\xi}_k(s) - {\rho_i}^2\hat{\xi}_k(\rho_i) + {\rho_i}^2\hat{\xi}_k(\rho_i) - {\rho_i}^2\hat{\xi}_k(\rho_i)}{s-\rho_i} = (s+\rho_i)\hat{\xi}_k(s) - {\rho_i}^2 T_s T_{\rho_i}\xi_k(0)$$

και επίσης για k =1, 2

$$\Rightarrow \frac{\frac{\hat{\xi}_k(s) - \hat{\xi}_2(\rho_2)}{s-\rho_2} - \frac{\hat{\xi}_k(s) - \hat{\xi}_2(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1} = \frac{T_s T_{\rho_1}\xi_k(0) - T_s T_{\rho_2}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1} = T_s T_{\rho_1} T_{\rho_2}\xi_k(0)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{s\hat{\xi}_k(s) - \rho_2\hat{\xi}_2(\rho_2)}{s-\rho_2} - \frac{s\hat{\xi}_k(s) - \rho_1\hat{\xi}_2(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1} = \frac{\rho_1 T_s T_{\rho_1}\xi_k(0) - \rho_2 T_s T_{\rho_2}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1}$$

$$= \frac{\rho_1 T_s T_{\rho_1}\xi_k(0) - \rho_2 T_s T_{\rho_2}\xi_k(0) + \rho_1 T_s T_{\rho_1}\xi_k(0) - \rho_1 T_s T_{\rho_1}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1}$$
$$= \rho_1 T_s T_{\rho_1} T_{\rho_2}\xi_k(0) - T_s T_{\rho_2}\xi_k(0)$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{s^2\hat{\xi}_k(s) - {\rho_2}^2\hat{\xi}_2(\rho_2)}{s-\rho_2} - \frac{s^2\hat{\xi}_k(s) - {\rho_1}^2\hat{\xi}_2(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1} = \frac{\rho_2\hat{\xi}_k(s) - \rho_1\hat{\xi}_k(s)}{\rho_2-\rho_1} - \frac{{\rho_2}^2 T_s T_{\rho_2}\xi_k(0) - {\rho_1}^2 T_s T_{\rho_1}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1}$$

$$= \hat{\xi}_k(s) - \frac{{\rho_2}^2 T_s T_{\rho_2}\xi_k(0) - {\rho_1}^2 T_s T_{\rho_1}\xi_k(0) + {\rho_1}^2 T_s T_{\rho_1}\xi_k(0) - {\rho_1}^2 T_s T_{\rho_1}\xi_k(0)}{\rho_2-\rho_1}$$

$$= \hat{\xi}_k(s) - (\rho_1+\rho_2) T_s T_{\rho_2}\xi_k(0) + {\rho_1}^2 T_s T_{\rho_1} T_{\rho_2}\xi_k(0)$$

Από τη σχέση (3.2) H(s), για i=1, 2 έχουμε:

$$H(s)-H(\rho_i)=h_{11}\hat{\hat{\xi}}_1(s)+h_{12}s\hat{\hat{\xi}}_1(s)+h_{13}s^2\hat{\hat{\xi}}_1(s)+h_{21}\hat{\hat{\xi}}_2(s)+h_{22}s\hat{\hat{\xi}}_2(s)+h_{23}s^2\hat{\hat{\xi}}_2(s)-[h_{11}\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)+h_{12}\rho_i\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)+h_{13}\rho_i{}^2\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)+h_{21}\hat{\hat{\xi}}_2(\rho_i)+h_{22}\rho_i\hat{\hat{\xi}}_2(\rho_i)+h_{23}\rho_i{}^2\hat{\hat{\xi}}_2(\rho_i)=h_{11}[\hat{\hat{\xi}}_1(s)-\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)]+h_{12}[s\hat{\hat{\xi}}_1(s)-\rho_i\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)]+h_{13}[s^2\hat{\hat{\xi}}_1(s)-\rho_i{}^2\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)]+h_{21}[\hat{\hat{\xi}}_2(s)-\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)]+h_{22}[s\hat{\hat{\xi}}_2(s)-\rho_i\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)]+h_{23}[s^2\hat{\hat{\xi}}_2(s)-\rho_i{}^2\hat{\hat{\xi}}_2(\rho_i)]$$

Και διαιρώντας με $s-\rho_i$ έχουμε:

$$\frac{H(s)-H(\rho_i)}{s-\rho_i}=(s-\rho_i)h_{11}\frac{\hat{\hat{\xi}}_1(s)-\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)}{s-\rho_i}+(s-\rho_i)h_{12}\frac{s\hat{\hat{\xi}}_1(s)-\rho_i\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)}{s-\rho_i}+(s-\rho_i)h_{13}\frac{s^2\hat{\hat{\xi}}_1(s)-\rho_i{}^2\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)}{s-\rho_i}+(s-\rho_i)h_{21}\frac{\hat{\hat{\xi}}_2(s)-\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)}{s-\rho_i}+(s-\rho_i)h_{22}\frac{s\hat{\hat{\xi}}_2(s)-\rho_i\hat{\hat{\xi}}_1(\rho_i)}{s-\rho_i}+(s-\rho_i)h_{23}\frac{s^2\hat{\hat{\xi}}_2(s)-\rho_i{}^2\hat{\hat{\xi}}_2(\rho_i)}{s-\rho_i}$$

Συνεπώς με βάση τα παραπάνω για i=1, 2 έχουμε:

$$\widehat{G}(s)=\sum_{k=1}^{2}[h_{k1}\frac{\frac{\hat{\hat{\xi}}_k(s)-\hat{\hat{\xi}}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\frac{\hat{\hat{\xi}}_k(s)-\hat{\hat{\xi}}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}+h_{k2}\frac{\frac{s\hat{\hat{\xi}}_k(s)-\rho_2\hat{\hat{\xi}}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\frac{s\hat{\hat{\xi}}_k(s)-\rho_1\hat{\hat{\xi}}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}+h_{k3}\frac{\frac{s^2\hat{\hat{\xi}}_k(s)-\rho_2{}^2\hat{\hat{\xi}}_k(\rho_2)}{s-\rho_2}-\frac{s^2\hat{\hat{\xi}}_k(s)-\rho_1{}^2\hat{\hat{\xi}}_k(\rho_1)}{s-\rho_1}}{\rho_2-\rho_1}$$

$$=\sum_{k=1}^{2}\{h_{k1}T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0)+h_{k2}[\rho_1T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0)-T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)]+h_{k3}[\hat{\hat{\xi}}_k(s)-(\rho_1+\rho_2)T_sT_{\rho_2}\xi_k(0)+\rho_i{}^2T_sT_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(0)\}\quad \textit{(3.14)}$$

Πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή του κλάσματος στην (3.8) με $(1-\mu_1s)(1-\mu_2s)$ παίρνουμε

$$M_1(s)=(1-\mu_1s)(1-\mu_2s)\{h_1(s)\widehat{\omega}(s)-\frac{\lambda\chi_2(s)\widehat{\phi}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(1-\mu_1s)}-\frac{\lambda\lambda_1\hat{\hat{\xi}}_2(s)\widehat{\phi}_2(\frac{1}{\mu_2})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)(1-\mu_2s)}\}=\tau_{11}(s)\widehat{\omega}(s)+\tau_{12}(s)\hat{\hat{\xi}}_2(s)-\frac{\lambda\widehat{\phi}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)}(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta}-\mu_2s)$$

(3.15)

όπου

$$\tau_{11}(s) = \frac{\lambda_1(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)}{\lambda+\lambda_1+\delta} - \frac{\lambda\,\lambda_1(1-\mu_1 s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

$$\tau_{12}(s) = \frac{\lambda\,\lambda_2\widehat{\phi}_1(\frac{1}{\mu_1})(1-\mu_2 s) - \lambda\,\lambda_1\widehat{\phi}_2(\frac{1}{\mu_2})(1-\mu_1 s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{\lambda\,\widehat{\phi}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)}(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta} - \mu_2 s)$ είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού ικανοποιώντας την

$$\frac{\lambda\,\widehat{\phi}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)}(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta} - \mu_2\rho_i) = \tau_{11}(\rho_i)\widehat{\omega}(\rho_i) + \tau_{12}(\rho_i)\hat{\hat{\xi}}_2(\rho_i), \qquad i = 1,2$$

λόγω του ότι τα ρ1, ρ2 είναι ρίζες του αριθμητή της σχέσης (3.8).

Με παρεμβολή Lagrange έχουμε

$\frac{\lambda\,\widehat{\phi}_1(\frac{1}{\mu_1})}{(\lambda+\lambda_1+\delta)}(\frac{\lambda_2+\delta}{\lambda+\lambda_2+\delta} - \mu_2 s) = \frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}[\tau_{11}(\rho_1)\widehat{\omega}(\rho_1) + \tau_{12}(\rho_i)\hat{\hat{\xi}}_2(\rho_1)] + \frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}[\tau_{11}(\rho_2)\widehat{\omega}(\rho_2) + \tau_{12}(\rho_2)\hat{\hat{\xi}}_2(\rho_2)$

Με βάση την προηγούμενη σχέση και σε συνδυασμό με την (3.15) παίρνουμε:

$M_1(s) = \frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}[\tau_{11}(s)\widehat{\omega}(s) - \tau_{11}(\rho_1)\widehat{\omega}(\rho_1)] + \frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}[\tau_{11}(s)\widehat{\omega}(s) - \tau_{11}(\rho_2)\widehat{\omega}(\rho_2)] + \frac{s-\rho_2}{\rho_1-\rho_2}[\tau_{12}(s)\hat{\hat{\xi}}_2(s) - \tau_{12}(\rho_1)\hat{\hat{\xi}}_2(\rho_1) + \frac{s-\rho_1}{\rho_2-\rho_1}[\tau_{11}(s)\hat{\hat{\xi}}_2(s) - \tau_{12}(\rho_2)\hat{\hat{\xi}}_2(\rho_2)]$

$$= \frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}[\frac{\tau_{11}(s)-\tau_{11}(\rho_1)}{s-\rho_1}\widehat{\omega}(s) - \tau_{11}(\rho_1)T_sT_{\rho_1}\omega(0)]$$
$$+ \frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}[\frac{\tau_{11}(s)-\tau_{11}(\rho_2)}{s-\rho_2}\widehat{\omega}(s)$$
$$- \tau_{11}(\rho_2)T_sT_{\rho_2}\omega(0)]$$
$$\times \frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_1-\rho_2}[\frac{\tau_{12}(s)-\tau_{12}(\rho_1)}{s-\rho_1}\hat{\xi}_2(s)$$
$$- \tau_{12}(\rho_1)T_sT_{\rho_1}\xi_2(0)]$$
$$+ \frac{(s-\rho_1)(s-\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}[\frac{\tau_{12}(s)-\tau_{12}(\rho_2)}{s-\rho_2}\hat{\xi}_2(s)$$
$$- \tau_{12}(\rho_2)T_sT_{\rho_2}\xi_2(0)]$$

$$= (s-\rho_1)(s-\rho_2)[\frac{\frac{\tau_{11}(s)-\tau_{11}(\rho_1)}{s-\rho_1} - \frac{\tau_{11}(s)-\tau_{11}(\rho_2)}{s-\rho_2}}{\rho_1-\rho_2}\widehat{\omega}(s)$$
$$- \frac{\tau_{11}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\omega(0) - \frac{\tau_{11}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\omega(0)$$
$$+ \frac{\frac{\tau_{12}(s)-\tau_{12}(\rho_1)}{s-\rho_1} - \frac{\tau_{12}(s)-\tau_{12}(\rho_2)}{s-\rho_2}}{\rho_1-\rho_2}\hat{\xi}_2(s) - \frac{\tau_{12}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\xi_2(0)$$
$$- \frac{\tau_{12}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\xi_2(0)$$

$$= (s-\rho_1)(s-\rho_2)[\frac{\lambda_1\mu_1\mu_2}{\lambda+\lambda_1+\delta}\widehat{\omega}(s) - \frac{\tau_{11}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\omega(0) - \frac{\tau_{11}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\omega(0) - \frac{\tau_{12}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\xi_2(0) - \frac{\tau_{12}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\xi_2(0)$$

Αντίστοιχα, πολλαπλασιάζοντας τον αριθμητή του κλάσματος στην (3.9) με $(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)$ και κάνοντας τις απαιτούμενες πράξεις, παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα της σχέσης (3.17)

$$M_2(s) = (s-\rho_1)(s-\rho_2)[\frac{\lambda_2\mu_1\mu_2}{\lambda+\lambda_2+\delta}\widehat{\omega}(s) - \frac{\tau_{21}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\omega(0) - \frac{\tau_{21}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\omega(0) - \frac{\tau_{22}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_sT_{\rho_1}\xi_1(0) - \frac{\tau_{22}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_sT_{\rho_2}\xi_2(0)$$

όπου

$$\tau_{21}(s) = \frac{\lambda_2(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)}{\lambda+\lambda_2+\delta} - \frac{\lambda\,\lambda_2(1-\mu_2 s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

$$\tau_{22}(s)=\frac{\lambda\,\lambda_1\widehat{\varphi}_2(\frac{1}{\mu_2})(1-\mu_1 s)-\lambda\,\lambda_2\widehat{\varphi}_1(\frac{1}{\mu_1})(1-\mu_2 s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

Θεώρημα 1: θεωρούμε ότι τα ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα με συναρτήσει κατανομής που δίνονται από τη σχέση (3.5). Τότε, οι συναρτήσεις Gerber-Shiu $m_1(u)$ και $m_2(u)$ ικανοποιούν τις ακόλουθες ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις.

$$m_1(u)=\frac{1}{\mu_1\mu_2}\int_0^u m_1\,(u-x)G(x)dx+B_1(u)$$
(3.18)

$$m_2(u)=\frac{1}{\mu_1\mu_2}\int_0^u m_2\,(u-x)G(x)dx+B_2(u)$$
(3.19)

όπου

$$G(x)=\sum_{i=1}^{2}[h_{k1}T_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(x)+h_{k2}(\rho_1T_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(x)-T_{\rho_2}\xi_k(x))+h_{k3}(\xi_k(x)-(\rho_1+\rho_2)T_{\rho_2}\xi_k(x)+{\rho_1}^2T_{\rho_1}T_{\rho_2}\xi_k(x)]$$

$$B_1(u)=\frac{\lambda_1\omega(u)}{\lambda+\lambda_1+\delta}-\frac{1}{\mu_1\mu_2}[\frac{\tau_{11}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}\omega(u)+\frac{\tau_{11}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}\omega(u)+\frac{\tau_{12}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}\xi_2(u)+\frac{\tau_{12}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}\xi_2(u)$$

$$B_2(u)=\frac{\lambda_2\omega(u)}{\lambda+\lambda_2+\delta}-\frac{1}{\mu_1\mu_2}[\frac{\tau_{21}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}\omega(u)+\frac{\tau_{21}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}\omega(u)+\frac{\tau_{22}(\rho_1)}{\rho_1-\rho_2}T_{\rho_1}\xi_1(u)+\frac{\tau_{22}(\rho_2)}{\rho_2-\rho_1}T_{\rho_2}\xi_1(u)$$

Απόδειξη

Με βάση όσα έχουμε ήδη αναφέρει σε αυτό το κεφάλαιο και βάση των σχέσεων (3.13)-(3.17) για i=1,2 οι μετασχηματισμοί Laplace των συναρτήσεων Gerber-Shiu εκφράζονται ως

$$\widehat{\phi}_i(s) = \frac{M_i(s)}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)[\mu_1\mu_2 - \widehat{G}(s)]} = \frac{\dfrac{M_i(s)}{\mu_1\mu_2(s-\rho_1)(s-\rho_2)}}{1-\dfrac{\widehat{G}(s)}{\mu_1\mu_2}}$$

και ισοδύναμα αναδιατάσσοντας τους όρους

$$\widehat{\phi}_i(s) = \frac{1}{\mu_1\mu_2}\widehat{\phi}_i(s)\widehat{G}(s) + \frac{M_i(s)}{\mu_1\mu_2(s-\rho_1)(s-\rho_2)}$$

Παίρνοντας τους αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης προκύπτουν οι (3.18) και (3.19).

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι οι (3.18) και (3.19) είναι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις.

Θα πρέπει να δείξουμε ότι:

$\frac{1}{\mu_1\mu_2}\int_0^\infty G(x)dx < 1 \quad \Rightarrow \qquad \frac{1}{\mu_1\mu_2}\widehat{G}(0) < 1$

Από τη σχέση (3.13) έχουμε:

$$\frac{\widehat{G}(s)}{\mu_1\mu_2} = 1 - \frac{(1-\mu_1 s)(1-\mu_2 s)[\chi_1(s)\chi_2(s) - \dfrac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}}{(s-\rho_1)(s-\rho_2)\mu_1\mu_2}$$

Η τελευταία σχέση για s = 0 γίνεται

$$\frac{\widehat{G}(s)}{\mu_1\mu_2} = 1 - \frac{1}{\rho_1\rho_2\mu_1\mu_2}[\chi_1(0)\chi_2(0) - \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(s)\hat{\xi}_2(s)}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}]$$

$$= 1 - \frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta) - (\lambda_1+\delta)\lambda_2\hat{\xi}_2(0) - (\lambda_2+\delta)\lambda_1\hat{\xi}_1(0)}{\rho_1\rho_2\mu_1\mu_2(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

Θα αντικαταστήσουμε το λ_2 που βρίσκεται μπροστά από το$\hat{\xi}_2(0)$ με $\lambda_2 + \delta > \lambda_2$ και αντίστοιχα το λ_1 με $\lambda_1 + \delta > \lambda_1$. Τότε οι όροι του αριθμητή μεγαλώνουν με αποτέλεσμα να μεγαλώνει και το κλάσμα που αφαιρείται από τη μονάδα.

Δηλαδή,

$$\frac{\widehat{G}(s)}{\mu_1\mu_2} < 1 - \frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta) - (\lambda_1+\delta)\lambda_2\hat{\xi}_2(0) - (\lambda_2+\delta)\lambda_1\hat{\xi}_1(0)}{\rho_1\rho_2\mu_1\mu_2(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

$$\frac{\widehat{G}(s)}{\mu_1\mu_2} < 1 - \frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta) - (\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)(\hat{\xi}_1(0)+\hat{\xi}_2(0))}{\rho_1\rho_2\mu_1\mu_2(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

Όμως, στην απόδειξη του Λήμματος 1 δείξαμε ότι $\hat{\xi}_1(0) + \hat{\xi}_2(0) = 1$ άρα:

$$\frac{\widehat{G}(s)}{\mu_1\mu_2} < 1 - \frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta) - (\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta)(\hat{\xi}_1(0)+\hat{\xi}_2(0))}{\rho_1\rho_2\mu_1\mu_2(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)} = 1 - 0 = 1$$

Τώρα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου δ=0.

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\widehat{G}(s)}{\mu_1\mu_2} = 1 - \frac{1}{\mu_1\mu_2}\lim_{\delta\to 0}\frac{(\lambda_1+\delta)(\lambda_2+\delta) - (\lambda_1+\delta)\lambda_2\hat{\xi}_2(0) - (\lambda_2+\delta)\lambda_1\hat{\xi}_1(0)}{\rho_1\rho_2(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

$$= 1 - \frac{1}{\mu_1\mu_2}\lim_{\delta\to 0}\frac{\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2[\hat{\xi}_1(0)+\hat{\xi}_2(0)]}{(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)\lim\limits_{\delta\to 0}\rho_1(\delta)\rho_2(\delta)}$$

Όμως, ο αριθμητής είναι ίσος με μηδέν αφού $\hat{\xi}_1(0) + \hat{\xi}_2(0) = 1$ και ο παρονομαστής $\lim\limits_{\delta\to 0}\rho_1(\delta) = 0$. Άρα εφαρμόζουμε τον κανόνα L' Hospital και παίρνουμε

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\widehat{G}(s)}{\mu_1\mu_2} = 1 - \frac{1}{\rho_2(0)\mu_1\mu_2(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)} \times \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2 + [\lambda_1(1-\hat{\xi}_1(0))] + [\lambda_2(1-\hat{\xi}_2(0))]\delta}{\rho_1(\delta)}$$

$$= 1 - \frac{\lambda_1(1-\hat{\xi}_1(0)) + \lambda_2(1-\hat{\xi}_2(0))}{\rho_2(0)\mu_1\mu_2(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)\rho_1'(0)}$$

Θέτουμε $s = \rho_1(\delta)$ στην σχέση (3.10) και έχουμε:

$$x_1(\rho_1(\delta))x_2(\rho_1(\delta)) - \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(\rho_1(\delta))\hat{\xi}_2(\rho_1(\delta))}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)} = 0$$

$$\prod_{i=1}^{2}(1 - \frac{\lambda}{(\lambda+\lambda_i+\delta)(1-\mu_i\rho_1(\delta))} - \frac{\lambda_i\hat{\xi}_i(\rho_1(\delta))}{(\lambda+\lambda_i+\delta)}) = \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(\rho_1(\delta))\hat{\xi}_2(\rho_1(\delta))}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

$$\prod_{i=1}^{2}\frac{1}{\lambda+\lambda_i+\delta}((\lambda+\lambda_i+\delta) - \frac{\lambda}{1-\mu_i\rho_1(\delta)} - \lambda_i\hat{\xi}_i(\rho_1(\delta)) = \frac{\lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(\rho_1(\delta))\hat{\xi}_2(\rho_1(\delta))}{(\lambda+\lambda_1+\delta)(\lambda+\lambda_2+\delta)}$$

$$\prod_{i=1}^{2}((\lambda+\lambda_i+\delta) - \frac{\lambda}{1-\mu_i\rho_1(\delta)} - \lambda_i\hat{\xi}_i(\rho_1(\delta)) = \lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1(\rho_1(\delta))\hat{\xi}_2(\rho_1(\delta))$$

Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας σχέσης ως προς δ προκύπτει:

$\{1 - \frac{\lambda\mu_1\rho_1'(\delta)}{[1-\mu_1\rho_1(\delta)]^2} - \lambda_1\hat{\xi}_1'(\rho_1(\delta))\rho_1'(\delta)\}\{(\lambda+\lambda_2+\delta) - \frac{\lambda}{1-\mu_2\rho_1(\delta)} - \lambda_2\hat{\xi}_2(\rho_1(\delta))\} +$
$\{(\lambda+\lambda_1+\delta) - \frac{\lambda}{1-\mu_1\rho_1(\delta)} - \lambda_1\hat{\xi}_1(\rho_1(\delta))\}\{1 - \frac{\lambda\mu_2\rho_1'(\delta)}{[1-\mu_2\rho_1(\delta)]^2} - \lambda_2\hat{\xi}_2'(\rho_1(\delta))\rho_1'(\delta)\} =$
$\lambda_1\lambda_2[\hat{\xi}_1'(\rho_1(\delta))\rho_1'(\delta)\hat{\xi}_2(\rho_1(\delta)) + \hat{\xi}_1(\rho_1(\delta))\hat{\xi}_2'(\rho_1(\delta))\rho_1'(\delta)]$

θέτοντας δ = 0 και δεδομένου ότι $\lim_{\delta\to 0+} \rho_1(\delta) = 0$ παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

$[1 - \lambda\mu_1\rho_1'(0) - \lambda_1\hat{\xi}_1'(0)\rho_1'(0)]\lambda_2(1-\hat{\xi}_2(0)) + \lambda_1(1-\hat{\xi}_1(0))[1 - \lambda\mu_2\rho_1'(0) -$
$\lambda_2\hat{\xi}_2'(0)\rho_1'(0) - \lambda_2\hat{\xi}_2'(0))\rho_1'(0)] = \lambda_1\lambda_2[\hat{\xi}_1'(0)\rho_1'(0)\hat{\xi}_2(0) + \hat{\xi}_1(0)\hat{\xi}_2'(0)\rho_1'(0)]$

$\Rightarrow$

$\lambda_1(1-\hat{\xi}_1(0)) + \lambda_2(1-\hat{\xi}_2(0)) = \{\lambda\lambda_2\mu_1(1-\hat{\xi}_2(0)) + \lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_1'(0)(1-\hat{\xi}_2(0)) +$
$\lambda\lambda_1\mu_2(1-\hat{\xi}_1(0)) + \lambda_1\lambda_2\hat{\xi}_2'(0)(1-\hat{\xi}_1(0)) + \lambda_1\lambda_2[\hat{\xi}_1'(0)\hat{\xi}_2(0) + \hat{\xi}_1(0)\hat{\xi}_2'(0)]\}\rho_1'(0)$

Από όπου τελικά αν λύσουμε ως προς $\rho_1'(0)$ προκύπτει:

$$\rho_1'(0) = \frac{\lambda_1(1-\hat{\xi}_1(0))+\lambda_2(1-\hat{\xi}_2(0))}{\lambda_1\lambda_2(\hat{\xi}_1'(0)+\hat{\xi}_2'(0))+\lambda\lambda_2\mu_1(1-\hat{\xi}_2(0))+\lambda\lambda_1\mu_2(1-\hat{\xi}_1(0))} \qquad \textit{(3.20)}$$

Αλλά για τους μετασχηματισμούς Laplace $\xi_1(y) = B(y)f(y)$ και $\xi_2(y) = \overline{B}(y)f(y)$ είναι

$\hat{\xi}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\,\xi_1(y)dy = \int_0^\infty e^{-sy}B(y)f(y)dy = \int_0^\infty e^{-sy}\,P(B \le y)f(y)dy$

$\hat{\xi}_2(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\,\xi_2(y)dy = \int_0^\infty e^{-sy}\overline{B}(y)f(y)dy = \int_0^\infty e^{-sy}\,P(B > y)f(y)dy$

Αθροίζοντας τους δύο μετασχηματισμούς προκύπτει:

$\hat{\xi}_1(s) + \hat{\xi}_2(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\,B(y)f(y)dy + \int_0^\infty e^{-sy}\,\overline{B}(y)f(y)dy = \int_0^\infty e^{-sy}\,[B(y) + \overline{B}(y)]f(y)dy = \int_0^\infty e^{-sy}f(y)dy = \hat{f}(s)$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση ως προς s και τα δύο μέλη, είναι

$$\hat{\xi}_1'(s) + \hat{\xi}_2'(s) = \hat{f}'(s)$$

Θέτοντας s = 0 στους παραπάνω μετασχηματισμούς Laplace βρίσκουμε αντίστοιχα

$\hat{\xi}_1(0) = \int_0^\infty P(B \le y)f(y)dy = P(B \le y) \;\Rightarrow\; 1 - \hat{\xi}_1(0) = 1 - P(B \le y) = P(B > y)$

$\hat{\xi}_2(0) = \int_0^\infty P(B > y)f(y)dy = P(B > y) \;\Rightarrow\; 1 - \hat{\xi}_2(0) = 1 - P(B > y) = P(B \le y)$

$\hat{\xi}_1'(0) + \hat{\xi}_2'(0) = \hat{f}'(0) = -\mu$

Τελικά η σχέση (3.20) , σύμφωνα με τα παραπάνω γίνεται:

$$\rho_1'(0) = \frac{\frac{1}{\lambda_2}P(B > y) + \frac{1}{\lambda_1}P(B \le y)}{\frac{\lambda\mu_1}{\lambda_1}P(B \le y) + \frac{\lambda\mu_2}{\lambda_2}P(B > y) - \mu} > 0$$

Ο αριθμητής όπως και ο παρονομαστής του κλάσματος είναι θετικός λόγω της συνθήκης Καθαρού Κέρδους. Δηλαδή $\rho_1'(0) > 0$.

Επιπλέον έχουμε ότι:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{\widehat{G}(s)}{\mu_1\mu_2} = 1 - \frac{1}{\rho_2(0)\mu_1\mu_2(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)} \times \lim_{\delta\to 0}\frac{\delta^2 + [\lambda_1(1-\hat{\hat{\xi}}_1(0))] + [\lambda_2(1-\hat{\hat{\xi}}_2(0))]\delta}{\rho_1(\delta)}$$

$$= 1 - \frac{\lambda_1 P(B > y) + \lambda_2 P(B \le y)}{\rho_2(0)\mu_1\mu_2(\lambda+\lambda_1)(\lambda+\lambda_2)\rho_1'(0)} < 1$$

Συνεπώς, οι εξισώσεις (3.18) και (3.19) είναι ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις και η απόδειξη της πρότασης ολοκληρώθηκε.

4. ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ ΜΕ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟ LAPLACE ΟΠΟΥ ΑΝΗΚΟΥΝ ΣΤΗ ΡΗΤΗ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Η ενότητα αυτή εστιάζει στην ειδική περίπτωση όπου τα μεγέθη των ασφαλίστρων έχουν μετασχηματισμούς Laplace και ανήκουν στη ρητή οικογένεια κατανομών, δηλαδή είναι της μορφής

$$\hat{f}_i(s) = \frac{q_i}{\prod_{j=1}^{m_i}(s+\lambda_{ij})^{n_{ij}}} \quad, i = 1,2 \qquad \textit{(4.1)}$$

Όπου m_i, n_{ij} με $n_{i1} + n_{i2} + \ldots + n_{im_i} = k_i$, $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{ij}$ με $\lambda_{ij_1} \neq \lambda_{ij_2}$ για $j_1 \neq j_2$ είναι στη γενική περίπτωση μιγαδικοί αριθμοί με θετικά πραγματικά μέρη, $q_i(s)$ είναι πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου με $k_i - 1$ που ικανοποιεί την $q_i(0) = \prod_{j=1}^{m_i}\lambda_{ij}{}^{n_{ij}}$

Η σχέση (4.1) αν την αναλύσουμε γράφεται και ως

$$\hat{f}_i(s) = \sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij}} q_{ij_1j_2}\left(\frac{\lambda_{ij_1}}{s+\lambda_{ij_1}}\right)^{j_2} \qquad \textit{(4.2)}$$

Όπου

$$q_{ij_1j_2} = \frac{1}{\lambda_{ij_1}{}^{j_2}(n_{ij_1} - j_2)!} \frac{d^{n_{ij_1}-j_2}}{ds^{n_{ij_1}-j_2}} \{ \prod_{k=1,k\neq j_1}^{m_i} \frac{q_i(s)}{(s+\lambda_{ik})^{n_{ik}}} \} \Big|_{s=\lambda_{ij_1}}$$

Υποθέτουμε ότι τα λ_{ij} στην (4.1) είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Αναλυτικότερα, η (4.2) μπορεί να επεκταθεί στο μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία $-\lambda_{ij}$.

Παίρνοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace της (4.2) προκύπτει

$$F_i(x) = \sum_{j_1=1}^{m_i} \sum_{j_2=1}^{n_{ij}} q_{ij_1j_2} F_{ij_1j_2}(x) \ , i = 1,2$$

Όπου $F_{ij_1j_2}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{j_2-1} \frac{(\lambda_{ij_1}x)^k}{k!} e^{-\lambda_{ij_1}x}$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας μιας Erlang (j_2) με παράμετρο λ_{ij_1}.

Έστω $X_{ij_1j_2}{}^{(1)}, \dots, X_{ij_1j_2}{}^{(j_2)}$ είναι j_2 ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές εκθετικά κατανεμημένες με μέσο $\frac{1}{\lambda_{ij_1}}$. Τότε το άθροισμα $X_{ij_1j_2}{}^{(1)} + \dots + X_{ij_1j_2}{}^{(j_2)}$ ακολουθεί μια κατανομή Erlang (j_2) με συνάρτηση πυκνότητας $F_{ij_1j_2}$.

<u>**Παρατήρηση 4.1:**</u> Για $Re(s) > max_j \lambda_{ij}$ ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $A_i(u)$, $i = 1,2$ που έχει οριστεί παραπάνω είναι

$$\widehat{A}_i(s) = \hat{f}_i(-s)\widehat{\varphi}_i(s) - L_i(s)$$

Όπου $L_i(s) = \sum_{j_1=1}^{m_i} \sum_{j_2=1}^{n_{ij}} \sum_{j_1=1}^{j_2} \frac{T^j_{\lambda_{ij_1}} \varphi_i(0)}{(\lambda_{ij_1} - s)^{j_2+1-j}}$

Απόδειξη

$$\widehat{A}_i(s)=\int_0^\infty e^{-su}A_i(u)du=\int_0^\infty e^{-su}\int_0^\infty \varphi_i(u+x)dF_i du$$
$$=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su}\varphi_i(u+x)dudF_i=\sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij}} q_{ij_1j_2}\int_0^\infty T_s\varphi_i(u+x)dF_{ij_1j_2}(x)$$
$$=\sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij}} q_{ij_1j_2}\,\lambda_{ij_1}E\int_0^\infty T_s\varphi_i(u+x)dF_{ij_1j_2}(x$$
$$+X_{j_1j_2}{}^{(2)}+\ldots X_{ij_1j_2}{}^{(j_2)})e^{-\lambda_{ij_1}{}^{x}}dx=\ldots$$
$$=\sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij}} q_{ij_1j_2}\,\lambda_{ij_1}ET_sT_{\lambda_{ij_1}}\varphi_i(X_{j_1j_2}{}^{(2)}+\ldots X_{ij_1j_2}{}^{(j_2)})=\ldots$$
$$=\sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij}} q_{ij_1j_2}\lambda_{ij_1}{}^{j_2}T_sT_{\lambda_{ij_1}}\varphi_i(0)$$

Όπου $T_{\lambda_{ij_1}}{}^{j_2}=T_{\lambda_{ij_1}}\ldots T_{\lambda_{ij_1}}$ για j_2 φορές. Επιπλέον, βάση της ιδιότητας του τελεστή Dickson-Hipp προκύπτει το ζητούμενο.

$$\widehat{A}_i(s)=\sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij}} q_{ij_1j_2}\,\lambda_{ij_1}{}^{j_2}\left(\frac{\widehat{\phi}_i(s)}{(\lambda_{ij_1}-s)^{j_2}}-\sum_{j_1=1}^{j_2}\frac{T^{j_2}_{\lambda_{ij_1}}\varphi_i(0)}{(\lambda_{ij_1}-s)^{j_2+1-j}}\right)$$
$$=\hat{f}_i(-s)\widehat{\phi}_i(s)-L_i(s)$$

Όπου $L_i(s)=\sum_{j_1=1}^{m_i}\sum_{j_2=1}^{n_{ij}}\sum_{j_1=1}^{j_2}\frac{T^{j_2}_{\lambda_{ij_1}}\varphi_i(0)}{(\lambda_{ij_1}-s)^{j_2+1-j}}$

Αντικαθιστώντας την (4.3) στις (3.3) και (3.4) έχουμε

$$[1-\frac{\lambda\hat{f}_1(-s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}-\frac{\lambda_1\hat{\xi}_1(s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}]\widehat{\phi}_1(s)-\frac{\lambda_1\hat{\xi}_2(s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}]\widehat{\phi}_2(s)=\frac{\lambda_1\widehat{\omega}(s)-\lambda L_1(s)}{\lambda+\lambda_1+\delta}$$
(4.4)

$$[1-\frac{\lambda\hat{f}_2(-s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}-\frac{\lambda_2\hat{\xi}_2(s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}]\widehat{\phi}_2(s)-\frac{\lambda_2\hat{\xi}_1(s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}]\widehat{\phi}_2(s)=\frac{\lambda_2\widehat{\omega}(s)-\lambda L_2(s)}{\lambda+\lambda_2+\delta}$$
(4.5)

Λύνοντας το σύστημα των παραπάνω εξισώσεων (4.4) και (4.5) παίρνουμε:

$$\widehat{\phi}_1(s) = \frac{[\lambda_1(\lambda+\lambda_2+\delta)-\lambda\lambda_1\hat{f}_2(-s)]\hat{\omega}(s)-\lambda\nu_2(s)L_1(s)-\lambda\lambda_1\hat{\hat{\xi}}_2(s)L_2(s)}{\nu_1(s)\nu_2(s)-\lambda_1\lambda_2\hat{\hat{\xi}}_1(s)\hat{\hat{\xi}}_2(s)} \qquad (4.6)$$

$$\widehat{\phi}_2(s) = \frac{[\lambda_1(\lambda+\lambda_2+\delta)-\lambda\lambda_1\hat{f}_2(-s)]\hat{\omega}(s)-\lambda\nu_2(s)L_1(s)-\lambda\lambda_1\hat{\hat{\xi}}_2(s)L_2(s)}{\nu_1(s)\nu_2(s)-\lambda_1\lambda_2\hat{\hat{\xi}}_1(s)\hat{\hat{\xi}}_2(s)} \qquad (4.7)$$

Όπου $\nu_i(s) = \lambda + \lambda_i + \delta - \lambda\hat{f}_i(-s) - \lambda_i\hat{\hat{\xi}}_i(s),\ i = 1,2$

Ο κοινός παρονομαστής των (4.6) και (4.7) είναι αναλυτική συνάρτηση για s στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο εκτός από τους πόλους λ_{ij} . Για να γίνει αναλυτική για όλα τα $Re(s) \geq 0$, ορίζουμε $\Lambda_i(s) = \prod_{j=1}^{m_i}(s-\lambda_{ij})^{n_{ij}}$ και έπειτα πολλαπλασιάζουμε τον αριθμητή και τον παρονομαστή των σχέσεων (4.6) και (4.7) με $\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)$ και παίρνουμε:

$$\widehat{m}_1(s) = \frac{Q_1\hat{\omega}(s) - \lambda\nu_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)L_1(s) - \lambda\lambda_1\hat{\hat{\xi}}_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)L_2(s)}{\nu_1(s)\nu_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{\hat{\xi}}_1(s)\hat{\hat{\xi}}_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)} \qquad (4.8)$$

$$\widehat{m}_2(s) = \frac{Q_2\hat{\omega}(s) - \lambda\nu_1(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)L_2(s) - \lambda\lambda_2\hat{\hat{\xi}}_1(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)L_1(s)}{\nu_1(s)\nu_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s) - \lambda_1\lambda_2\hat{\hat{\xi}}_1(s)\hat{\hat{\xi}}_2(s)\Lambda_1(s)\Lambda_2(s)} \qquad (4.9)$$

Όπου
$$Q_1(s) = \Lambda_1(s)\Lambda_2(s)[\lambda_1(\lambda + \lambda_2 + \delta) - \lambda\lambda_1\hat{f}_2(-s)]$$
$$Q_2(s) = \Lambda_1(s)\Lambda_2(s)[\lambda_2(\lambda + \lambda_1 + \delta) - \lambda\lambda_2\hat{f}_1(-s)]$$

Από τις (4.8) και (4.9) μπορούμε να βρούμε τα $\widehat{\phi}_1(s)$ και $\widehat{\phi}_2(s)$ αρκεί να είναι εφικτός ο προσδιορισμός των γινομένων $\Lambda_1(s)L_1(s)$ και $\Lambda_2(s)L_2(s)$ τα οποία είναι πολυώνυμα $k_i - 1$ βαθμού και εκφράζονται ως

$$\Lambda_i(s)L_i(s) = \sum_{n=1}^{k_i} L_{in}s^{n-1}, \qquad i = 1,2$$

Συνεπώς, έχουμε να προσδιορίσουμε τους $k_1 + k_2$ άγνωστους συντελεστές L_{in} . Το παρακάτω Λήμμα 2, του οποίου η απόδειξη παραλείπεται, μας πληροφορεί για τις ρίζες του παρονομαστή των σχέσεων (4.8) και (4.9).

<u>Λήμμα 2:</u> Ο κοινός παρονομαστής των (4.8) και (4.9)έχει ακριβώς $k_1 + k_2$ ρίζες, έστω $\rho_1, \dots, \rho_{k_1+k_2}$ στο δεξί μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Υποθέτοντας ότι οι ρίζες $\rho_1, \dots, \rho_{k_1+k_2}$ είναι διακριτές και εφόσον οι $\widehat{\phi}_1(s)$ και $\widehat{\phi}_2(s)$ είναι αναλυτικές για Re(s) ≥ 0, τότε οι $\rho_1, \dots, \rho_{k_1+k_2}$ είναι επίσης ρίζες των αριθμητών των σχέσεων (4.8) και (4.9).

Άρα και στις δύο περιπτώσεις, οι $k_1 + k_2$ γραμμικές εξισώσεις για τους άγνωστους συντελεστές L_{in} είναι

$$\lambda\nu_2(\rho_i)\Lambda_2(\rho_i)\sum_{n=1}^{k_1} L_{1n}{\rho_i}^{n-1} + \lambda\lambda_1\hat{\hat{\xi}}_2(\rho_i)\Lambda_1(\rho_i)\sum_{n=1}^{k_2} L_{2n}{\rho_i}^{n-1} = Q_1(\rho_i)\widehat{\omega}(\rho_i), \quad i = 1,2,\dots k_1 + k_2 \qquad \textit{(4.10)}$$

Μετά τη λύση του συστήματος των (4.10) και την εύρεση των L_{in} , οι μετασχηματισμοί Laplace των (4.8) και (4.9) μπορούν να προσδιοριστούν πλήρως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΥΠΟ ΤΗΝ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ ΚΑΤΩΦΛΙΟΥ

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στόχος των ασφαλιστικών είναι να καταβάλλουν μερίσματα που λαμβάνουν υπόψη τον πληθωρισμό δηλαδή τέτοια μερίσματα ώστε η πραγματική τους απόδοση να είναι σχετικά σταθερή από έτος σε έτος για τους μετόχους.

Ο de finetti είχε προβληματιστεί σχετικά με το ποια είναι η στρατηγική που μεγιστοποιεί την απόδοση της επένδυσης των μετοχών. Ήταν ο πρώτος συνεπώς που τη μελέτησε και αφορούσε το διωνυμικό μοντέλο.

Σύμφωνα με τη στρατηγική αυτή σε περίπτωση που η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος υπερβεί ένα κατώφλι, επιστρέφεται μέρισμα στους δικαιούχους, συνήθως με τη μορφή έκπτωσης στα ασφάλιστρα του επόμενου έτους. Για το λόγο αυτό κρίνεται απαραίτητη η ύπαρξη ενός σταθερού κατωφλίου, έστω b, το οποίο είναι μεγαλύτερο από το αρχικό αποθεματικό u. Σε περίπτωση που το πλεόνασμα υπερβεί το σταθερό όριο b αποδίδονται μερίσματα με σταθερό και συνεχή ρυθμό, ίσο με το ρυθμό είσπραξης ασφαλίστρων c.

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξεταστεί η δομή εξάρτησης μέσω της σύζευξης των Farlie-Gumbel-Morgenstern μεταξύ απαιτήσεων (claim size) και χρόνων εμφάνισης κινδύνων (Inter-claim time).

Επιπλέον, θεωρούμε την περίπτωση του ανανεωτικού μοντέλου της θεωρίας κινδύνων όπου η από κοινού κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων και των μεγεθών των απαιτήσεων εμφανίζει εξάρτηση μέσω της σύζευξης των Farlie-Gumbel-Morgenstern και οι ενδιάμεσοι χρόνοι ακολουθούν την Erlang(n) κατανομή υπό την ύπαρξη στρατηγικής σταθερού μερίσματος. Στο κεφάλαιο αυτό δείχνουμε ότι η συνάρτηση των Gerber-Shiu ικανοποιεί μία ολοκληρο-διαφορική εξίσωση και δίνονται οι αντίστοιχες οριακές συνθήκες.

Όταν το πλεόνασμα του ασφαλιστή είναι κάτω από ένα ορισμένο επίπεδο, κρατείται ως ρευστοποιημένο απόθεμα. Καθώς το πλεόνασμα φτάνει το προκαθορισμένο επίπεδο, η υπέρβασή του θα επιφέρει τόκο με σταθερό ρυθμό. Σε περίπτωση που το πλεόνασμα εξακολουθεί να ξεπερνά ένα υψηλότερο επίπεδο, η υπέρβασή του από αυτό το υψηλότερο επίπεδο θα καταβληθεί ως μερίσματα στους μετόχους του ασφαλιστή με σταθερό επιτόκιο μερισμάτων ή με τη στρατηγική μερίσματος κατωφλίου. Τα χαμηλότερα και τα υψηλότερα επίπεδα ονομάζονται επίπεδο ρευστοποιημένου αποθέματος και επίπεδο κατωφλίου, αντίστοιχα.

2. ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

Έστω y_iκαι $\bar{y}_i$ ο αριθμός των ασφαλίστρων από μη αρνητικές και ανεξάρτητες μεταβλητές με σ.κ. $F_y(y) = P[y_i \leq y]$

N_t και $\overline{N}_t$ ο αριθμός των απαιτήσεων που ακολουθούν κατανομή Poisson(λ)

x το αρχικό πλεόνασμα της εταιρείας

τότε το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t συμβολίζεται με X_t και δίνεται από τη σχέση

$$X_t(x) = x + \sum_{i=1}^{\overline{N}_t} \bar{y}_i - \sum_{i=1}^{N_t} y_i\,, t \geq 0 \qquad \textit{(4.1)}$$

Στο μοντέλο αυτό θεωρούμε ότι οι y_i, $\bar{y}_i$ και οι διαδικασίες N_t και $\overline{N}_t$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Στο μοντέλο κινδύνου που εξετάζουμε, θεωρούμε ότι υπάρχει εξάρτηση ανάμεσα στις μεταβλητές Yi και Vi καθώς και ανάμεσα στις μεταβλητές Xi και Wi η οποία μοντελοποιείται μέσω της σύζευξης **Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM)** με παράμετρο θ ∈ −[1,1] η οποία ορίζεται

$$C_\theta^{FGM}(u1, u2) = u1u2[1 + \theta(1 - u1)(1 - u2)], \qquad u1, u2\varepsilon[0,1]$$

Υποθέτουμε ότι Yi ,Ti είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα τυχαία διανύσματα και για συγκεκριμένο i ≥1, η εξάρτηση ανάμεσα στις μεταβλητές Yi και Ti δίνεται από τη σύζευξη FGM με παράμετρο θ ∈ [-1,1] . Δηλαδή, το μέγεθος μιας απαίτησης εξαρτάται από το χρόνο που έχει μεσολαβήσει από την εν λόγω απαίτηση και την προηγούμενη. Έτσι, η από κοινού συνάρτηση κατανομής ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} F_{Y,T}(y,t) &= C_\theta^{FGM}(F_Y(y), F_T(t)) \\ &= F_Y(y)F_T(t) + \theta F_Y(y)F_T(t)(1 - F_Y(y))(1 - F_T(t)), \qquad y,t \geq 0 \end{aligned}$$

Η αντίστοιχη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ορίζεται ως:

$$\begin{aligned} f_{Y,T}(y,t) &= f_Y(y)f_T(t) + \theta f_Y(y)f_T(t)\big(1 - 2F_Y(y)\big)\big(1 - 2F_T(t)\big) \\ &= \lambda e^{-\lambda t}f_Y(y) + \theta h_Y(y)\big(2\lambda e^{-2\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}\big), \qquad y,t \geq 0 \qquad \textit{(4.2)} \end{aligned}$$

όπου

$$h_Y(y) = f(y)(1 - 2F_Y(y)), \quad y \geq 0$$

Η δεσμευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των απαιτήσεων ορίζεται ως:

$$f_{Y|T}(y|t) = \frac{f_{Y,T}(y,t)}{f_T(t)} = \frac{\lambda e^{-\lambda t} f_Y(y) + \theta h_Y(y)\left(2\lambda e^{-2\lambda t} - \lambda e^{-\lambda t}\right)}{\lambda e^{-\lambda t}}$$
$$= f_Y(y) + \theta h_Y(y)\left(2e^{-\lambda t} - 1\right), \qquad y, t \geq 0$$

Για να είμαστε πιο ακριβείς έστω T_i ,i≥1 μια ακολουθία ενδιάμεσων αφίξεων και T_1 ο χρόνος που έρχεται η $1^η$ απαίτηση. Η μεταβλητή T ακολουθεί κατανομή Poisson. Τότε για $\theta\varepsilon[-1,1]$

Ορισμός 3.1: Η οικογένεια κατανομών Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) εκφράζει μια συσχέτιση μεταξύ δυο τυχαίων μεταβλητών X και Y.

Δυο μεταβλητές X και Y θα λέμε ότι ανήκουν στην οικογένεια FGM αν η από κοινού συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο:

$H(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = F(x)G(y)\{1 + \theta[1 - F(x)][1 - G(y)]\}$,για κάθε x,yεR και -1≤θ≤1

Για να ορίσουμε την Farlie-Gumbel-Morgenstern θεωρούμε ότι οι δυο μεταβλητές X και Y ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή οπότε θα ισχυει F(x)=x και G(y)=y.

Τότε $H(x,y) = xy[1 + \theta(1-x)(1-y)]$, με $x, y\varepsilon[0,1]$ και $\theta\varepsilon[0,1]$

Τότε η FGM ορίζεται ως $c^{FGM}(u,v) = uv[1 + \theta(1-u)(1-v)]$, $u, v\varepsilon[0,1]$

Επιπρόσθετα, όπως ήδη αναφέραμε η ασφαλιστική πληρώνει μέρισμα στους μετόχους σύμφωνα με την ακόλουθη στρατηγική. Έστω b>0 το κατώφλι, όταν το πλεόνασμα είναι πιο χαμηλά από το κατώφλι τότε κανένα μέρισμα δεν πληρώνεται. Αντίθετα, όταν το πλεόνασμα υπερβεί ή είναι ίσο με το κατώφλι τότε το μέρισμα πληρώνεται συνεχώς με τιμή d>0.

Θεωρούμε $X_t^b(x)$ τη διαδικασία πλεονάσματος κάτω από την στρατηγική μερισμάτων κατωφλίου. Τότε έχουμε ότι

$$X_t^b(x) = x + \sum_{i=1}^{\bar{N}_t} \bar{y}_i - \sum_{i=1}^{N_t} y_i - d\int_0^t I(X_s^b(x) \geq b)ds, \qquad t \geq 0 \qquad (4.2)$$

Όπου I: η δείκτρια συνάρτηση

d: τιμή που πληρώνει η ασφαλιστική αν το πλεόνασμα υπερβεί το κατώφλι b

Ας δηλώσουμε ως Dt ,t≥0 την κατανομή μερισμάτων τότε σύμφωνα με το μοντέλο αυτό προκύπτει ότι

$$dD_t = \begin{cases} d\,dt, \text{αν } X_t^b(x) \geq b \\ 0, \quad \text{αν } X_t^b(x) < b \end{cases}$$

Έστω $t_b(x) = \inf\{t \geq 0: X_t^b(x) < 0\}$ ο χρόνος χρεοκοπίας για το ακόλουθο μοντέλο. Τότε για $\delta_0 \geq 0$ η συνάρτηση των Gerber-Shiu είναι

$$m(x,b) = E\{e^{-\delta t_b} w\left(X_{t_b-}^b(x), \left|X_{t_b}^b(x)\right|\right) I(t_b < \infty) | X_0^b(x) = x\}, \quad x \geq 0$$

Όπου w: μια μη αρνητική συνάρτηση

$X_{t_b-}^b$: το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία

$X_{t_b}^b$: το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία

Παρατηρούμε ότι αν w(.,.)=1 και δ_0=0 τότε η παραπάνω συνάρτηση Gerber Shiu $m(x,b)$ ταυτίζεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας ψ(x). Δηλαδή έπεται ότι

$$\psi(x) = E[I(t_b < \infty) | X_0^b(x) = x]$$

Ορίζουμε για δ>0 την αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση για πληρωμές μερισμάτων μέχρι να επέλθει χρεοκοπίας ως

$$v(x,b) = E[\int_0^{t_b} e^{-\delta t}\, dD_t | X_0^b(x) = x], \quad x \geq 0$$

Για ευκολία θα γράφουμε m(x) και v(x) αντί για m(x, b) και v(x, b) όταν:

$$m(x,b) = \begin{cases} m_1(x), x\varepsilon[0,b] \\ m_2(x), x\varepsilon[b,\infty] \end{cases} \qquad \text{και} \qquad v(x,b) = \begin{cases} v_1(x), x\varepsilon[0,b] \\ v_2(x), x\varepsilon[b,\infty] \end{cases}$$

3. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ GERBER-SHIU

Θεώρημα 1: Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $X_t^b(x)$ που ικανοποιεί την σχέση *(1)* κάτω από τις υποθέσεις ότι $\theta \neq 0$και $\bar{\theta} \neq 0$. Επίσης θεωρούμε τις σ.π.π. $f_Y(y)$ και $f_{\bar{Y}}(y)$ με τις αντίστοιχες παραγώγους τους $f'_Y(y)$και $f'_{\bar{Y}}(y)$ οι οποίες είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^+$. Ακόμη θεωρούμε την συνάρτηση $w(u_1, u_2)$ με τις αντίστοιχες δεύτερες παραγώγους $w''_{u1,u1}(u_1, u_2)$, $w''_{u1,u2}(u_1, u_2)$ και $w''_{u2,u2}(u_1, u_2)$ οι οποίες είναι συνεχείς στο$\mathbb{R}^2_+$. Τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί τις εξής εξισώσεις

$$\left(\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0\right)m_1(x) = \lambda \{\int_0^x m_1(x-y)f_Y(y)dy + \int_x^\infty w(x, y-x)f_Y(y)dy\} + \frac{\lambda\theta(\bar{\lambda}+\delta_0)}{2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0}\{\int_0^x m_1(x-y)h_Y(y)dy + \int_x^\infty w(x, y-x)h_Y(y)dy\} + \bar{\lambda}\{\int_0^{b-x} m_1(x+y)f_{\bar{Y}}(y)dy + \int_{b-x}^\infty m_2(x+y)f_{\bar{Y}}(y)dy\} + \frac{\lambda\theta(\bar{\lambda}+\delta_0)}{\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0}\{\int_0^{b-x} m_1(x+y)h_{\bar{Y}}(y)dy + \int_{b-x}^\infty m_2(x+y)h_{\bar{Y}}(y)dy\} \text{ , } x\varepsilon[0, b] \tag{9}$$

και

$$d^3m_2'''(x) + (4\lambda + 4\bar{\lambda} + 3\delta_0)d^2m_2''(x) + ((\lambda + 2\bar{\lambda} + \delta_0)(3\lambda + 2\bar{\lambda} + 2\delta_0) + (2\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0)(\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0))dm_2'(x) + (\lambda + 2\bar{\lambda} + \delta_0)(2\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0)(\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0)m_2(x) = (\lambda + 2\bar{\lambda} + \delta_0)(2\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0) + (3\lambda + 3\bar{\lambda} + 2\delta_0)d\beta_1'(x) + d^2\beta_1''(x) - 2(+2\bar{\lambda} + \delta_0)\beta_2(x) - 2d\beta_2'(x) + 2\bar{\lambda}^2\bar{\theta}(\bar{\lambda} - \lambda)\int_0^\infty m_2(x+y)h_{\bar{Y}}(y)dy, \quad x\varepsilon[b, \infty) \tag{10}$$

όπου
$$\beta_1(x) = \lambda\int_{x-b}^x m_1(x-y)\{f_Y(y) + \theta\, h_Y(y)\}dy + \lambda\int_0^{x-b} m_2(x-y)\{f_Y(y) + \theta\, h_Y(y)\}dy + \lambda\int_x^\infty w(x, y-x)\{f_Y(y) + \theta\, h_Y(y)\}dy + \bar{\lambda}\int_0^\infty m_2(x+y)\{f_Y(y) + \bar{\theta}h_{\bar{Y}}(y)\}dy, \quad x \in [b, \infty)$$

$$\beta_2(x) = \lambda^2\theta\left[\int_{x-b}^x m_1(x-y)\, h_Y(y)dy + \int_0^{x-b} m_2(x-y)\, h_Y(y)dy + \int_x^\infty w(x, y-x)\, h_Y(y)dy\right] + \bar{\lambda}^2\bar{\theta}\int_0^\infty m_2(x+y)\, h_{\bar{Y}}(y)dy, x\varepsilon[b, \infty]$$

Απόδειξη

Ο χρόνος άφιξης της πρώτης απαίτησης ακολουθεί εκθετική κατανομή με μέσο $\frac{1}{\lambda+\bar{\lambda}}$.

Έστω ότι το $x \in [0, b]$. Θεωρώντας το χρόνο και το μέγεθος του πρώτου γεγονότος της $X_t^b(x)$ από το θεώρημα ολικής πιθανότητας παίρνουμε

$$m(x) = \int_0^\infty e^{-(\lambda+\bar{\lambda})t}\Big(\lambda \int_0^\infty e^{-\delta_0 t} m(x-y) f_{Y|T}(y|t)dy + \lambda \int_0^\infty e^{-\delta_0 t} w(x, y-x) f_{Y|T}(y|t)dy + \int_0^\infty e^{-\delta_0 t} m(x-y) f_{Y|T}(y|t)dy + \bar{\lambda} \int_0^\infty e^{-\delta_0 t} m(x+y) f_{\bar{Y}|\bar{T}}(y|t)dy\Big)dt \quad \textit{(11)}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (4), (5) στην (11) και λαμβάνοντας υπόψιν την (7) παίρνουμε:

$$m_1(x) = \int_0^\infty e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)t}\Big[\lambda \int_0^x m_1(x-y)\big(f_Y(y) + \theta h_Y(y)(2e^{-\lambda t}-1)\big)dy + \lambda \int_x^\infty w(x, y-x)\big(f_Y(y) + \theta h_Y(y)(2e^{-\lambda t}-1)\big)dy + \bar{\lambda} \int_0^{b-x} m_1(x+y)\big(f_{\bar{Y}}(y) + \bar{\theta} h_{\bar{Y}}(y)(2e^{-\bar{\lambda} t}-1)\big)dy + \bar{\lambda} \int_{b-x}^\infty m_2(x+y)\big(f_{\bar{Y}}(y) + \bar{\theta} h_{\bar{Y}}(y)(2e^{-\bar{\lambda} t}-1)\big)dy\Big]dt \quad \textit{(12)}$$

Ομαδοποιώντας τα ολοκληρώματα στο δεξί μέρος της (12) ως προς τη μεταβλητή ολοκλήρωσης είτε t είτε y έχουμε:

$$m_1(x) = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)t}dt\Big(\int_0^x m_1(x-y) f_Y(y)dy + \int_x^\infty w(x, y-x) f_Y(y)dy\Big) + \lambda\theta \int_0^\infty e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)t}(2e^{-\lambda t}-1)dt\Big\{\int_0^x m_1(x-y) h_Y(y)dy + \int_x^\infty w(x, y-x) h_Y(y)dy\Big\} + \bar{\lambda} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)t}dt\Big(\int_0^{b-x} m_1(x-y) f_{\bar{Y}}(y)dy + \int_{b-x}^\infty m_2(x+y) f_{\bar{Y}}(y)dy\Big) + \bar{\lambda}\bar{\theta} \int_0^\infty e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)t}(2e^{-\bar{\lambda} t}-1)dt\Big\{\int_0^{b-x} m_1(x-y) h_{\bar{Y}}(y)dy + \int_{b-x}^\infty m_2(x+y) h_{\bar{Y}}(y)dy\Big\}, \quad x \in [0, b] \quad \textit{(13)}$$

Αν υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα ως προς t στην σχέση (13) θα πάρουμε:

$$m_1(x)=\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0}\left(\int_0^x m_1(x-y)f_Y(y)dy+\int_x^\infty w(x,y-x)\,f_Y(y)dy\right)$$
$$+\frac{\lambda\theta(\bar{\lambda}+\delta_0)}{(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)}\left(\int_0^x m_1(x-y)h_Y(y)dy\right.$$
$$\left.+\int_x^\infty w(x,y-x)\,h_Y(y)dy\right)$$
$$+\frac{\lambda}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0}\left(\int_0^{b-x} m_1(x+y)f_{\bar{Y}}(y)dy+\int_{b-x}^\infty w(x,y-x)\,f_{\bar{Y}}(y)dy\right)$$
$$+\frac{\bar{\lambda}\bar{\theta}(\lambda+\delta_0)}{(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)}\left(\int_0^{b-x} m_1(x-y)h_{\bar{Y}}(y)dy\right.$$
$$\left.+\int_{b-x}^\infty w(x,y-x)\,h_{\bar{Y}}(y)dy\right),\qquad x\in[0,b]$$

Από την οποία παίρνουμε της (9).

Έστω ότι τώρα το $x\in[b,\infty)$. Θεωρώντας το χρόνο και το μέγεθος του πρώτου γεγονότος της διαδικασίας $(X_t^b(x))_{t\geq 0}$ από το θεώρημα ολικής πιθανότητας παίρνουμε

$$m(x)=\int_0^{(x-b)/d}e^{-(\lambda+\bar{\lambda})t}\Big(\lambda\int_0^{x-dt}e^{-\delta_0 t}m(x-dt-y)f_{Y|T}(y|t)dy+$$
$$\lambda\int_{x-dt}^\infty e^{-\delta_0 t}w(x-dt,y-x-dt)f_{Y|T}(y|t)dy+\bar{\lambda}\int_0^\infty e^{-\delta_0 t}m(x-dt+$$
$$y)f_{\bar{Y}|\bar{T}}(y|t)dy\Big)dt+\int_{(x-b)/d}^\infty e^{-(\lambda+\bar{\lambda})t}\Big(\lambda\int_0^b e^{-\delta_0 t}m(b-y)f_{Y|T}(y|t)dy+$$
$$\lambda\int_b^\infty e^{-\delta_0 t}w(b,y-b)f_{Y|T}(y|t)dy+\bar{\lambda}\int_0^\infty e^{-\delta_0 t}m(b+y)f_{\bar{Y}|\bar{T}}(y|t)dy\Big)dt,\;\; x\in[b,\infty)$$

(14)

Αντικαθιστώντας τις (4) και (5) στην (14) και λαμβάνοντας υπόψιν την (7) παίρνουμε

$$m_2(x)=I_{1,2,3}(x)+I_{4,5,6}(x),\;\; x\in[b,\infty)$$

(16)

Όπου

$$
\begin{aligned}
I_{1,2,3}(x) = \int_{0}^{(x-b)/d} & e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)t} \\
& \times \Big(\lambda \int_{x-dt-b}^{x-dt} m_2(x-dt-y)(f_Y(y)-\theta h_Y(y))(2e^{-\lambda t}-1))dy \\
& + \lambda \int_{x-dt-b}^{x-dt} m_1(x-dt-y)(f_Y(y)-\theta h_Y(y))(2e^{-\lambda t}-1))dy \\
& + \lambda \int_{x-dt}^{\infty} w(x-dt, y-x+dt)(f_Y(y)-\theta h_Y(y))(2e^{-\lambda t}-1))dy \\
& + \bar{\lambda} \int_{0}^{\infty} m_2(x-dt+y)(f_{\bar{Y}}(y)+\bar{\theta} h_{\bar{Y}}(y)(2e^{-\bar{\lambda} t}-1)dy\Big)\,dt
\end{aligned}
$$

Αλλάζοντας την μεταβλητή $x-dt=s \Rightarrow t=\frac{x-s}{d} \Rightarrow dt=-\frac{1}{d}ds$ και $0 \le t \le \frac{u-b}{d} \Rightarrow u \le s \le b$ παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
I_{1,2,3}(x) = \frac{1}{d}\int_{b}^{x} & e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)(x-s)/d} \\
& \times \Big(\lambda \int_{0}^{s-b} m_2(s-y)(f_Y(y)+\theta h_Y(y))(2e^{-\lambda(x-s)/d}-1))dy \\
& + \lambda \int_{s-b}^{s} m_1(s-y)(f_Y(y)+\theta h_Y(y))(2e^{-\lambda(x-s)/d}-1))dy \\
& + \lambda \int_{s}^{\infty} w(s, y-s)(f_Y(y)-\theta h_Y(y))(2e^{-\lambda(x-s)/d}-1))dy \\
& + \bar{\lambda} \int_{0}^{\infty} m_2(s+y)(f_{\bar{Y}}(y)+\bar{\theta} h_{\bar{Y}}(y)(2e^{-\bar{\lambda}(x-s)/d}-1)dy\Big)\,ds \\
& = \frac{1}{d} e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)x/d} I_1(x) + \frac{2}{d} e^{-(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)x/d} I_2(x) \\
& + \frac{2}{d} e^{-(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)x/d} I_3(x), \qquad x \in [b, \infty)
\end{aligned}
$$

Όπου

$$I_1(x) = \int_b^x e^{(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)s/d} \{\lambda \int_0^{s-b} m_2(s-y)(f_Y(y) + \theta h_Y(y))dy$$

$$+ \lambda \int_{s-b}^{s} m_1(s-y)(f_Y(y) + \theta h_Y(y))dy$$

$$+ \lambda \int_s^{\infty} w(s, y-s)(f_Y(y) - \theta h_Y(y))dy$$

$$+ \bar{\lambda} \int_0^{\infty} m_2(s+y)(f_{\bar{Y}}(y) + \bar{\theta} h_{\bar{Y}}(y))dy\}ds$$

$$I_2(x) = \lambda\theta \int_b^x e^{(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)s/d} \{\int_0^{s-b} m_2(s-y)h_Y(y)dy + \int_{s-b}^{s} m_1(s-y)h_Y(y)dy$$

$$+ \int_s^{\infty} w(s, y-s)h_Y(y)dy\}ds$$

$$I_3(x) = \bar{\lambda}\bar{\theta} \int_b^x e^{(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0)s/d} \{\int_0^{\infty} m_2(s+y)h_{\bar{Y}}(y)dy\}ds$$

Αν ομαδοποιήσουμε τα ολοκληρώματα ως προς t ή y παίρνουμε

$$I_{4,5,6}(x) = \lambda \int_{(x-b)/d}^{\infty} e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)t} dt \left(\int_0^b m_1(b-y)f_Y(y)dy + \int_b^{\infty} w(b, y-b)f_Y(y)dy\right) + \lambda\theta \int_{(x-b)/d}^{\infty} e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)t}(2e^{-\lambda t} - 1)dt \left(\int_0^b m_1(b-y)h_Y(y)dy + \int_b^{\infty} w(b, y-b)h_Y(y)dy\right) + \bar{\lambda} \int_{(x-b)/d}^{\infty} e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)t} dt \int_0^{\infty} m_2(s+y)f_{\bar{Y}}(y)\, dy + \bar{\lambda}\bar{\theta} \int_{(x-b)/d}^{\infty} e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)t}(2e^{-\lambda t} - 1)dt \int_0^{\infty} m_2(s+y)h_{\bar{Y}}(y)dy \tag{17}$$

Αν υπολογίσουμε τα ολοκληρώματα ως προς t στην παραπάνω σχέση (17) έχουμε

$$I_{4,5,6}(x) = I_4(x) + I_5(x) + I_6(x), \ x \in [b, \infty) \tag{18}$$

όπου

$$\mathrm{I}_4(x) = \frac{e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)(x-b)/d}}{\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0} \times \{\lambda \int_0^b m_1(b-y) f_Y(y) dy + \lambda \int_b^\infty w(b, y-b) f_Y(y) dy$$
$$- \lambda\theta \int_0^b m_1(b-y) h_Y(y) dy + \lambda \int_b^\infty w(b, y-b) h_Y(y) dy$$
$$+ \bar{\lambda} \int_0^\infty m_2(b+y) f_{\bar{Y}}(y) dy - \bar{\lambda}\bar{\theta} \int_0^\infty m_2(s+y) h_{\bar{Y}}(y) dy\}$$

$$\mathrm{I}_5(x) = \frac{2\lambda\theta e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)(x-b)/d}}{2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0} \times \{\int_0^b m_1(b-y) h_Y(y) dy + \lambda \int_b^\infty w(b, y-b) h_Y(y) dy\}$$

$$\mathrm{I}_6(x) = \frac{2\bar{\lambda}\bar{\theta} e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)(x-b)/d}}{\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0} \int_0^\infty m_2(b+y) h_{\bar{Y}}(y) dy$$

Αντικαθιστώντας τις (16), (18) στην (15) παίρνουμε

$$m_2(x) = \frac{1}{d} e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)x/d} \mathrm{I}_1(x) + \frac{2}{d} e^{-(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)x/d} \mathrm{I}_2(x) + \frac{2}{d} e^{-(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0)x/d} \mathrm{I}_3(x) + \mathrm{I}_4(x) + \mathrm{I}_5(x) + \mathrm{I}_6(x), \ x \in [b, \infty) \qquad (19)$$

Από τις σχέσεις (9) και (19) αντίστοιχα εύκολα συμπεραίνουμε ότι η $m_1(x)$ είναι συνεχής στο [0,b] και η $m_2(x)$ είναι συνεχής στο [b,∞). Όντως, από τις παραπάνω σχέσεις το δεξί μέλος είναι συνεχής συνάρτηση στο [0,b] και στο [b, ∞) αντίστοιχα. Συνεπώς, είναι συνεχής και στο αριστερό τους μέλος και η $m_2(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο [b,∞) με

$$m_2'(x) = -\frac{\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0}{d^2} e^{-(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)x/d} \mathrm{I}_1(x) - \frac{2(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)}{d^2} e^{-(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)x/d} \mathrm{I}_2(x) - \frac{2(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0)}{d^2} e^{-(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0)x/d} \mathrm{I}_3(x) - \frac{\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0}{d} \mathrm{I}_4(x) - \frac{2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0}{d} \mathrm{I}_5(x) - \frac{\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0}{d} \mathrm{I}_6(x) + \frac{1}{d} \beta_1(x), \quad x \in [b, \infty) \qquad (20)$$

όπου η $\beta_1(x)$ έχει οριστεί στο Θεώρημα 1 αυτής της παραγράφου.

Αν πολλαπλασιάσουμε με $\left(\lambda + 2\bar{\lambda} + \delta_0\right)/d$ την σχέση (19) και προσθέσουμε την (20) θα έχουμε

$$dm_2'(x) + (\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0)m_2(x) = -\frac{2\lambda}{d}e^{-(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)x/d}I_2(x) - \frac{2\bar{\lambda}}{d}I_3(x) - \lambda I_5(x) - \bar{\lambda}I_6(x) + \beta_1(x),\ \ x \in [b,\infty) \qquad (21)$$

Από τη στιγμή που οι συναρτήσεις $m_1(x)$ και $m_2(x)$ είναι συνεχείς και φραγμένες αντίστοιχα στο [0,b] και [b, ∞) και η $w(u_1, u_2)$ είναι συνεχής και φραγμένη στο R_+^2 σαν συνάρτηση δύο μεταβλητών. Από την *(21)* καταλήγουμε ότι ισχύει το ίδιο και για την $m_2'(x)$ στο [b, ∞).

Επιπλέον, έχοντας υπόψιν ότι οι $f_Y'(y)$ και $f_{\bar{Y}}'(y)$ είναι συνεχείς και φραγμένες στο R_+ και οι $w_{u_1}'(u_1, u_2)$ και $w_{u_2}'(u_1, u_2)$ είναι συνεχείς και φραγμένες στο R_+^2. Από την *(9)* προκύπτει ότι το ίδιο ισχύει και για την $m_1'(x)$ στο [0,b]. Επομένως η $\beta_1(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο [b, ∞). Από τα παραπάνω και από τη σχέση *(21)* ισχύει ότι

$$dm_2''(x) + (\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0)m_2'(x) = \frac{2\lambda(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)}{d^2}e^{-(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)x/d}I_2(x) + \frac{2\bar{\lambda}(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0)}{d^2}e^{-(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0)x/d}I_3(x) + \frac{\lambda(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)}{d}I_5(x) + \frac{\bar{\lambda}(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0)}{d}I_6(x) + \beta_1'(x) - \frac{2}{d}\beta_2(x), \quad x \in [b,\infty) \qquad (22)$$

όπου

$$\begin{aligned}\beta_1'(x) = \lambda\int_{x-b}^{x} & m_1'(x-y)\{f_Y(y) + \theta\, h_Y(y)\}dy \\ & + \lambda\int_0^{x-b} m_2''(x-y)\{f_Y(y) + \theta\, h_Y(y)\}dy \\ & + \lambda\int_x^{\infty} w_{u_1}'(x, y-x) - w_{u_2}'(x, y-x)\{f_Y(y) + \theta\, h_Y(y)\}dy \\ & + \bar{\lambda}\int_0^{\infty} m_2''(x+y)\{f_Y(y) + \bar{\theta}h_{\bar{Y}}(y)\}dy + \lambda(m_1(0) - w(x,0)\{f_Y(y) \\ & + \theta h_Y(x)\}, \quad x \in [b,\infty)\end{aligned}$$

η οποία είναι συνεχής και φραγμένη στο [b, ∞) και η συνάρτηση $\beta_2(x)$ έχει οριστεί στο Θεώρημα 1 αυτής της παραγράφου.

Αν πολλαπλασιάσουμε με $\left(\lambda + 2\bar{\lambda} + \delta_0\right)/\mathrm{d}$ την σχέση (19) και προσθέσουμε την (20) θα έχουμε

$$\mathrm{d}^2 \mathrm{m}_2''(\mathrm{x}) + (3\lambda + 2\bar{\lambda} + 2\delta_0) d \mathrm{m}_2''(\mathrm{x}) + (2\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0)(\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0)\mathrm{m}_2(\mathrm{x}) = -\frac{2\bar{\lambda}(\bar{\lambda}-\lambda)}{\mathrm{d}} e^{-(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0)\mathrm{x}/\mathrm{d}} \mathrm{I}_3(\mathrm{x}) + \bar{\lambda}(\bar{\lambda}-\lambda)\mathrm{I}_6(\mathrm{x}) + (2\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0)\beta_1(\mathrm{x}) + d\beta_1'(\mathrm{x}) - 2\beta_2(\mathrm{x}), \ \ \mathrm{x} \in [\mathrm{b}, \infty) \qquad (23)$$

Από την σχέση *(23)* καταλήγουμε ότι η $\mathrm{m}_2''(\mathrm{x})$ είναι συνεχής και φραγμένη στο [b, ∞). Επιπλέον, έχοντας υπόψιν ότι οι $\mathrm{f}_{\mathrm{Y}}'(\mathrm{y})$ και $\mathrm{f}_{\bar{\mathrm{Y}}}'(\mathrm{y})$ είναι συνεχείς και φραγμένες στο R_+ και οι $\mathrm{w}_{\mathrm{u}_1\mathrm{u}_2}''(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$ και $\mathrm{w}_{\mathrm{u}_1\mathrm{u}_2}''(\mathrm{u}_1, \mathrm{u}_2)$ είναι συνεχείς και φραγμένες στο R_+^2. Από την *(9)* προκύπτει ότι το ίδιο ισχύει και για την $\mathrm{m}_1''(\mathrm{x})$ στο [0,b]. Συνεπώς η $\beta_1(\mathrm{x})$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [b, ∞).

Ακόμη, με παρόμοιο τρόπο παρατηρούμε ότι η $\beta_2(\mathrm{x})$ είναι παραγωγίσιμη στο [b, ∞). Άρα σε συνδυασμό με τη σχέση (23) η $\mathrm{m}_2(\mathrm{x})$ φαίνεται να έχει και τρίτη παράγωγο στο [b, ∞). Παραγωγίζοντας την *(23)* έχουμε

$$\mathrm{d}\mathrm{m}_2'''(\mathrm{x}) + (3\lambda + 2\bar{\lambda} + \delta_0)\mathrm{m}_2''(\mathrm{x}) + (2\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0)(\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0)\mathrm{m}_2'(\mathrm{x}) = -\frac{2\bar{\lambda}(\bar{\lambda}-\lambda)(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)}{\mathrm{d}^2} e^{-(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)\mathrm{x}/\mathrm{d}} \mathrm{I}_3(\mathrm{x}) - \frac{\bar{\lambda}(\bar{\lambda}-\lambda)(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0)}{d} e^{-(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0)\mathrm{x}/\mathrm{d}} \mathrm{I}_6(\mathrm{x}) + (2\lambda + \bar{\lambda} + \delta_0)\beta_1'(\mathrm{x}) + \mathrm{d}\beta_1''(\mathrm{x}) - 2\beta_2'(\mathrm{x}) + \frac{2\bar{\lambda}^2\bar{\theta}(\bar{\lambda}-\lambda)}{d}\int_0^\infty \mathrm{m}_2(\mathrm{x}+y)\mathrm{h}_{\bar{\mathrm{Y}}}(\mathrm{y})\mathrm{dy}, \quad \mathrm{x} \in [\mathrm{b}, \infty) \qquad (24)$$

Αν πολλαπλασιάσουμε με $\left(\lambda + 2\bar{\lambda} + \delta_0\right)/\mathrm{d}$ την σχέση *(23)* και προσθέσουμε την *(24)* προκύπτει η ζητούμενη σχέση *(10).*

Σημείωση: Για να λυθούν οι εξισώσεις (1) και (2) απαιτούνται κάποιες συνθήκες. Η πρώτη είναι ότι $\mathrm{m}_1(\mathrm{b}) = \mathrm{m}_2(\mathrm{b})$. Δεύτερον, δεδομένου ότι ισχυει η Συνθήκη Καθαρού Κέρδους εύκολα αποδεικνύεται ότι $\lim_{\mathrm{x}\to\infty} \mathrm{m}_2(\mathrm{x}) = 0$. Τέλος, θέτοντας x=b στις ενδιάμεσες εξισώσεις προκύπτουν επιπλέον συνθήκες που περιέχουμε την παράγωγο της $\mathrm{m}_2(\mathrm{x})$. Οι παραπάνω εξισώσεις δεν μπορούν να λυθούν αναλυτικά, οπότε για την επίλυσή τους απαιτούνται διάφορες αριθμητικές μέθοδοι.

Σημείωση: Το αντίστοιχο μοντέλο χωρίς την καταβολή μερισμάτων υπολογίζεται για b→∞. Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση Gerber-Shiu m(x) ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση.

$$\left(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0\right)m(x)=\lambda\{\int_0^x m(u)f_Y(x-u)du+\int_0^\infty w(x,u)f_Y(x+u)du\}+$$
$$\frac{\lambda\theta(\bar{\lambda}+\delta_0)}{2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0}\{\int_0^x m(u)h_Y(x-u)du+\int_0^\infty w(x,u)h_Y(x+u)du\}+$$
$$\bar{\lambda}\int_x^\infty m(u)f_{\bar{Y}}(u-x)du+\frac{\bar{\lambda}\bar{\theta}(\lambda+\delta_0)}{\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0}\{\int_x^\infty m(u)h_{\bar{Y}}(u-x)du\ \ ,x\varepsilon[0,\infty]$$

<u>Σημείωση:</u> Στο Θεώρημα 1 υποθέσαμε ότι $\theta\neq 0$και $\bar{\theta}\neq 0$. Στη συνέχεια θα δούμε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις στις οποίες δεν ισχύει η αρχική μας υπόθεση και θα έχουμε μια απλούστερη μορφή καθώς δεν θα εμπλέκεται η τρίτη παράγωγος του $m_2(x)$.

- Για $\theta=0$ και $\bar{\theta}=0$
  $$dm_2'(x)+\left(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0\right)m_2(x)=\beta_1(x),\qquad x\varepsilon[b,\infty]$$

- Για $\theta\neq 0$ και $\bar{\theta}=0$
  $$d^2m_2''(x)+(3\lambda+2\bar{\lambda}+2\delta_0)dm_2'(x)+(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)m_2(x)$$
  $$=(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)\beta_1(x)+d\beta_1'(x)-2\beta_2(x),\qquad x\varepsilon[b,\infty]$$

- Για $\theta=0$ και $\bar{\theta}\neq 0$
  $$d^2m_2''(x)+(2\lambda+3\bar{\lambda}+2\delta_0)dm_2'(x)+(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0)(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0)m_2(x)$$
  $$=(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0)\beta_1(x)+d\beta_1'(x)-2\beta_2(x),\qquad x\varepsilon[b,\infty]$$

4. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΣ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΜΕΝΕΣ ΠΛΗΡΩΜΕΣ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ ΜΕΧΡΙ ΤΗ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ

Θεώρημα 2: Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $X_t^b(x)$ κάτω από τις υποθέσεις ότι $\theta\neq 0$και $\bar{\theta}\neq 0$. Επίσης θεωρούμε τις σ.π.π. $f_Y(y)$ και $f_{\bar{Y}}(y)$ με τις αντίστοιχες παραγώγους τους $f_Y'(y)$και $f_{\bar{Y}}'(y)$ οι οποίες είναι συνεχείς στο $\mathbb{R}^+$. Τότε η αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση $v(x)$ ικανοποιεί την εξής εξίσωση

$$\left(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0\right)v_1(x)=\lambda\{\int_0^x v_1(x-y)f_Y(y)dy+\frac{\lambda\theta(\bar{\lambda}+\delta)}{2\lambda+\bar{\lambda}+\delta}\{\int_0^x v_1(x-y)h_Y(y)dy+\bar{\lambda}\{\int_0^{b-x}v_1(x+y)f_{\bar{Y}}(y)dy+\int_{b-x}^\infty v_2(x+y)f_{\bar{Y}}(y)dy\}+\frac{\bar{\lambda}\bar{\theta}(\lambda+\delta)}{\lambda+2\bar{\lambda}+\delta}\{\int_0^{b-x}v_1(x+y)h_{\bar{Y}}(y)dy+\int_{b-x}^\infty v_2(x+y)h_{\bar{Y}}(y)dy\}\ ,x\varepsilon[0,b]\qquad (2.1)$$

και

$$d^3v_2'''(x)+(4\lambda+4\bar{\lambda}+3\delta)d^2v_2''(x)+((\lambda+2\bar{\lambda}+\delta)(3\lambda+2\bar{\lambda}+2\delta)+(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta)(\lambda+\bar{\lambda}+\delta))dv_2'(x)+(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta)(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta)(\lambda+\bar{\lambda}+\delta)v_2(x)=(\lambda+2\bar{\lambda}+$$

$$\delta)(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta)+(3\lambda+3\bar{\lambda}+2\delta)d\beta_3'(x)+d^2\beta_3''(x)-2(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta_0)\beta_4(x)-2d\beta_4'(x)+(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta)(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta)d+2\bar{\lambda}^2\bar{\theta}(\bar{\lambda}-\lambda)\int_0^{\infty}v_2(x+y)h_{\bar{Y}}(y)dy, \quad x\varepsilon[b,\infty] \quad \textit{(2.2)}$$

όπου $\beta_3(x)=\lambda\int_{x-b}^{x}v_1(x-y)\{f_Y(y)+\theta\,h_Y(y)\}dy+\lambda\int_0^{x-b}v_2(x-y)\{f_Y(y)+\theta\,h_Y(y)\}dy+\bar{\lambda}\int_0^{\infty}v_2(x+y)\{f_{\bar{Y}}(y)+\bar{\theta}h_{\bar{Y}}(y)\}dy, \quad x\varepsilon[b,\infty]$

$$\beta_4(x)=\lambda^2\theta\left[\int_{x-b}^{x}m_1(x-y)\,h_Y(y)dy+\int_0^{x-b}v_2(x-y)\,h_Y(y)dy\right]+\bar{\lambda}^2\bar{\theta}\int_x^{\infty}v_2(u)\,h_{\bar{Y}}(u-x)du, \quad x\varepsilon[b,\infty]$$

<u>Σημείωση:</u> Για την επίλυση των παραπάνω εξισώσεων θεωρούμε $v_1(b)=v_2(b)$. Ισχύει το ίδιο αν αντικαταστήσουμε x=b στις ενδιάμεσες εξισώσεις. Επιπλέον κάτω από τη Συνθήκη Καθαρού Κέρδους εύκολα αποδεικνύεται ότι $\lim_{x\to\infty}v_2(x)={}^{d}/_{\delta}$.

<u>Σημείωση:</u> Αν τουλάχιστον μια παράμετρος από τις θ και $\bar{\theta}$ είναι μηδέν δεν χρειάζεται να παραγωγίσουμε τρεις φορές την $v_2(x)$. Αντίθετα *μπορούμε* να καταλήξουμε σε μια εξίσωση πιο απλής μορφής αντί για την *(2.2)*.

- Για $\theta=0$ και $\bar{\theta}=0$
  $dv_2'(x)+\left(\lambda+\bar{\lambda}+\delta_0\right)v_2(x)=\beta_3(x)+d, \quad x\varepsilon[b,\infty]$

- Για $\theta\neq 0$ και $\bar{\theta}=0$
  $$d^2v_2''(x)+(3\lambda+2\bar{\lambda}+2\delta_0)dv_2'(x)+(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta)(\lambda+\bar{\lambda}+\delta)v_2(x)=(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta)\beta_3(x)+d\beta_3'(x)-2\beta_4(x)+(2\lambda+\bar{\lambda}+\delta)d, \quad x\varepsilon[b,\infty]$$

- Για $\theta=0$ και $\bar{\theta}\neq 0$
  $$d^2v_2''(x)+(2\lambda+3\bar{\lambda}+2\delta)dv_2'(x)+(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta)(\lambda+\bar{\lambda}+\delta)v_2(x)=(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta)\beta_3(x)+d\beta_3'(x)-2\beta_4(x)+(\lambda+2\bar{\lambda}+\delta)d, \quad x\varepsilon[b,\infty]$$

<u>Σημείωση:</u> Η εξίσωση (2.1) έχει πιο ασθενείς υποθέσεις καθώς δεν περιέχει μέσα παραγώγους όπως η εξίσωση (2.2). Δε χρειάζεται να υπολογίσουμε τις παραγώγους των $f_Y(y)$ και $f_{\bar{Y}}(y)$ για να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα. Με άλλα λόγια καταλήγουμε στο ότι η (2.1) είναι σωστή για κάθε δυνατή περίπτωση.

5. ΕΚΘΕΤΙΚΑ ΚΑΤΑΝΕΜΗΜΕΝΕΣ ΑΠΑΙΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΑ

Στην ενότητα αυτή θα έχουμε εκθετικά κατανεμημένα ασφάλιστρα και απαιτήσεις. Αυτό σημαίνει ότι ισχύουν τα κάτωθι:

$$f_Y(y) = \frac{1}{\mu} e^{-y/\mu} \qquad h_Y(y) = \frac{2}{\mu} e^{-2y/\mu} - \frac{1}{\mu} e^{-y/\mu}, \qquad y \geq 0$$

και

$$f_{\overline{Y}}(y) = \frac{1}{\mu} e^{-y/\overline{\mu}} \qquad h_{\overline{Y}}(y) = \frac{2}{\mu} e^{-2y/\overline{\mu}} - \frac{1}{\mu} e^{-y/\overline{\mu}}, \qquad y \geq 0$$

a. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΧΩΡΙΣ ΚΑΤΑΒΟΛΗ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ

Στην ενότητα αυτή μελετάμε την πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση όπου δεν έχουμε καθόλου μερίσματα.

$$\psi(x) = \frac{1}{\lambda+\overline{\lambda}}\{(\lambda - \frac{\lambda\overline{\lambda}\theta}{2\lambda+\overline{\lambda}})I_{13}(x) + \frac{\lambda\overline{\lambda}\theta}{2\lambda+\overline{\lambda}} I_{14}(x) + (\lambda - \frac{\lambda\overline{\lambda}\overline{\theta}}{\lambda+2\overline{\lambda}})I_{15}(x) + \frac{\lambda\overline{\lambda}\overline{\theta}}{\lambda+2\overline{\lambda}} I_{16}(x) + (\lambda - \frac{\lambda\overline{\lambda}\theta}{2\lambda+\overline{\lambda}})e^{-x/\mu} + \frac{\lambda\overline{\lambda}\theta}{2\lambda+\overline{\lambda}} e^{-2x/\mu}, \qquad x\varepsilon[0,\infty) \qquad \textit{(4.1)}$$

όπου

$$I_{13}(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \int_0^x \psi(u)\, e^{u/\mu} du$$

$$I_{14}(x) = \frac{2}{\mu} e^{-2x/\mu} \int_0^x \psi(u)\, e^{2u/\mu} du$$

$$I_{15}(x) = \frac{1}{\overline{\mu}} e^{-x/\overline{\mu}} \int_x^\infty \psi(u)\, e^{-u/\overline{\mu}} du$$

$$I_{16}(x) = \frac{2}{\overline{\mu}} e^{2x/\overline{\mu}} \int_x^\infty \psi(u)\, e^{-2u/\overline{\mu}} du$$

Είναι φανερό ότι για $\theta = 0$ ή $\overline{\theta} = 0$ η ολοκληροδιαφορική εξίσωση *(4.1)* μπορεί να απλοποιηθεί σε μια τρίτης τάξης γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές.

<u>Λήμμα 1:</u> Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $X_t(x)$ η οποία σύμφωνα με την (1.1) ακολουθεί τις ίδιες υποθέσεις και έστω ότι τα ασφάλιστρα και απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή μ και $\overline{\mu}$ αντίστοιχα. Τότε για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(x)$ προκύπτουν οι ακόλουθες διαφορικές εξισώσεις

- Για $\theta \neq 0$ και $\overline{\theta} = 0$

$$\mu^2\bar{\mu}(\lambda+\bar{\lambda})(2\lambda+\bar{\lambda})\psi'''(x)+(\mu\bar{\mu}(2\lambda+3\bar{\lambda})(2\lambda+\bar{\lambda})-\lambda\mu^2(2\lambda+\bar{\lambda})+\lambda\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}\theta)\psi''(x)+(2(\bar{\lambda}\bar{\mu}-\lambda\mu)(2\lambda+\bar{\lambda})+\lambda\bar{\lambda}\mu\theta)\psi'(x)=0, \quad x\varepsilon[0,\infty)$$

❖ Για $\theta = 0$ και $\bar{\theta} \neq 0$

$$\mu\bar{\mu}^2(\lambda+\bar{\lambda})(\lambda+2\bar{\lambda})\psi'''(x)+(-\mu\bar{\mu}(3\lambda+2\bar{\lambda})(\lambda+2\bar{\lambda})+\bar{\lambda}\bar{\mu}^2(\lambda+2\bar{\lambda})+\lambda\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}\bar{\theta})\psi''(x)+(2(\lambda\mu-\bar{\lambda}\bar{\mu})(\lambda+2\bar{\lambda})+\lambda\bar{\lambda}\mu\bar{\theta})\psi'(x)=0, \quad x\varepsilon[0,\infty)$$

Για να διατυπώσουμε το Θεώρημα 3 που ακολουθεί είναι απαραίτητο να ορίσουμε τις παρακάτω σταθερές όπου

$$D_1=(\mu\bar{\mu}(2\lambda+3\bar{\lambda})(2\lambda+\bar{\lambda})-\lambda\mu^2(2\lambda+\bar{\lambda})+\lambda\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}\theta)^2-4\mu^2\bar{\mu}(\lambda+\bar{\lambda})(2\lambda+\bar{\lambda})(2(\bar{\lambda}\bar{\mu}-\lambda\mu)(2\lambda+\bar{\lambda})+\lambda\bar{\lambda}\mu\theta)$$

$$z_2=\frac{-(\mu\bar{\mu}(2\lambda+3\bar{\lambda})(2\lambda+\bar{\lambda})-\lambda\mu^2(2\lambda+\bar{\lambda})+\lambda\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}\theta)+\sqrt{D_1}}{2\mu^2\bar{\mu}(\lambda+\bar{\lambda})(2\lambda+\bar{\lambda})}$$

$$z_3=\frac{-(\mu\bar{\mu}(2\lambda+3\bar{\lambda})(2\lambda+\bar{\lambda})-\lambda\mu^2(2\lambda+\bar{\lambda})+\lambda\bar{\lambda}\mu\bar{\mu}\theta)-\sqrt{D_1}}{2\mu^2\bar{\mu}(\lambda+\bar{\lambda})(2\lambda+\bar{\lambda})}$$

$$\Delta_1=(\lambda+\bar{\lambda}-\frac{\bar{\lambda}}{1-\bar{\mu}z_2})(\mu(\lambda+\bar{\lambda})z_3-(\bar{\lambda}+\frac{\bar{\lambda}\mu}{\bar{\mu}})\frac{\bar{\mu}z_3}{1-\bar{\mu}z_3}-\frac{\lambda\bar{\lambda}\theta}{2\lambda+\bar{\lambda}})-(\lambda+\bar{\lambda}-\frac{\bar{\lambda}}{1-\bar{\mu}z_3})(\mu(\lambda+\bar{\lambda})z_2-(\bar{\lambda}+\frac{\bar{\lambda}\mu}{\bar{\mu}})\frac{\bar{\mu}z_2}{1-\bar{\mu}z_2}-\frac{\lambda\bar{\lambda}\theta}{2\lambda+\bar{\lambda}})$$

Θεώρημα 3: Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $X_t(x)$ η οποία σύμφωνα με την (1.1) ακολουθεί τις ίδιες υποθέσεις με $\theta \neq 0$ και $\bar{\theta} = 0$. Επίσης, έστω ότι τα ασφάλιστρα και απαιτήσεις είναι εκθετικά κατανεμημένα με μέση τιμή μ και $\bar{\mu}$ αντίστοιχα και με $\bar{\lambda}\bar{\mu} > \lambda\mu$.

❖ Για $2(\bar{\lambda}\bar{\mu}-\lambda\mu)(2\lambda+\bar{\lambda})+\lambda\bar{\lambda}\mu\theta \leq 0$ τότε

$$\psi(x)=\frac{\lambda(1-\bar{\mu}\,z_3)}{\lambda(1-\bar{\mu}\,z_3)-\lambda\mu z_3}e^{z_3 x}, \qquad x\varepsilon[0,\infty)$$

❖ Για $2(\bar{\lambda}\bar{\mu}-\lambda\mu)(2\lambda+\bar{\lambda})+\lambda\bar{\lambda}\mu\theta > 0$ τότε

$$\psi(x)=C_2e^{z_2 x}+C_3e^{z_3 x}, \qquad x\varepsilon[0,\infty)$$

όπου οι C_2, C_3 είναι γνωστές και με την προϋπόθεση ότι $\Delta_1 \neq 0$

b. ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΧΩΡΙΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗ

Για $\theta = 0$ και $\bar{\theta} \neq 0$ ορίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας ως

$$\psi(x) = \begin{cases} \psi_1(x), & \alpha\nu\ x\varepsilon[0, b] \\ \psi_2(x), & \alpha\nu\ x\varepsilon[b, \infty) \end{cases}$$

Στην περίπτωση αυτή όπου οι απαιτήσεις και τα ασφάλιστρα είναι εκθετικά κατανεμημένα τότε η $\psi(x)$ παίρνει την μορφή

$$(\lambda + \bar{\lambda})\psi_1(x) = \frac{\lambda}{\mu} e^{-x/\mu} \int_0^x \psi_1(u)\, e^{u/\mu} du + \lambda e^{-x/\mu} + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} e^{x/\bar{\mu}} \int_x^b \psi_1(u)\, e^{-u/\bar{\mu}} du + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} e^{x/\bar{\mu}} \int_b^\infty \psi_2(u)\, e^{-u/\bar{\mu}} du, \quad x\varepsilon[0, b]$$

και

$$d\psi_2'(x) + (\lambda + \bar{\lambda})\psi_2(x) = \frac{\lambda}{\mu} e^{-x/\mu} \int_0^b \psi_1(u)\, e^{u/\mu} du + \frac{\lambda}{\mu} e^{-x/\mu} \int_b^x \psi_2(u)\, e^{u/\mu} du + \lambda e^{-x/\mu} + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}} e^{x/\bar{\mu}} \int_x^\infty \psi_2(u)\, e^{-u/\bar{\mu}} du, \quad x\varepsilon[b, \infty)$$

Λήμμα 2: Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $X_t^b(x)$ η οποία σύμφωνα με την (1) ακολουθεί τις ίδιες υποθέσεις με $\theta = 0$ και $\bar{\theta} \neq 0$ και έστω ότι τα ασφάλιστρα και απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή μ και $\bar{\mu}$ αντίστοιχα. Τότε $\psi_1(x)$ και $\psi_2(x)$ είναι οι λύσεις των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων.

$$\mu\bar{\mu}(\lambda + \bar{\lambda})\psi_1''(x) + (\bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\mu)\psi_1'(x) = 0, \quad x\varepsilon[0, b]$$

και

$$d\mu\bar{\mu}\psi_2'''(x) + (d\bar{\mu} - d\mu + \mu\bar{\mu}(\lambda + \bar{\lambda}))\psi_2''(x) + (\bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\mu - d)\psi_2'(x) = 0, \quad x\varepsilon[b, \infty)$$

Θεώρημα 4: Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $X_t^b(x)$ κάτω από τις υποθέσεις με $\theta = 0$ και $\bar{\theta} \neq 0$ και έστω ότι τα ασφάλιστρα και απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή μ και $\bar{\mu}$ αντίστοιχα, με $\bar{\lambda}\bar{\mu} > \lambda\mu + d$.

Τότε προκύπτει ότι

$$\psi_1(x) = C_4 + C_5 e^{z_5 x}, \quad x\varepsilon[0, b]$$

και

$$\psi_2(x) = C_7 + C_8 e^{z_8 x}, \quad x\varepsilon[b, \infty)$$

όπου οι σταθερές C_4 , C_5 , C_7 και C_8 προσδιορίζονται από το σύστημα των γραμμικών εξισώσεων:

$$(\lambda e^{b/\bar{\mu}} + \bar{\lambda})C_4 + \frac{\lambda+\bar{\lambda}}{\mu+\bar{\mu}}(\bar{\mu}e^{b/\bar{\mu}} + \mu e^{z_5 b})C_5 + \frac{\bar{\lambda}e^{z_7 b}}{\bar{\mu}z_7-1}C_7 + \frac{\bar{\lambda}e^{z_8 b}}{\bar{\mu}z_8-1}C_8 = \lambda e^{b/\bar{\mu}} \qquad (1)$$

$$\lambda(1+\frac{\bar{\mu}}{\mu})C_4 + \frac{\bar{\mu}(\lambda+\bar{\lambda})}{\mu}C_5 = \lambda(1+\frac{\bar{\mu}}{\mu}) \qquad (2)$$

$$C_4 + e^{z_5 b}C_5 - e^{z_7 b}C_7 - e^{z_8 b}C_8 = 0 \qquad (3)$$

$$\lambda(e^{b/\bar{\mu}} - 1)C_4 + \frac{\bar{\mu}(\lambda+\bar{\lambda})}{\mu+\bar{\mu}}(e^{b/\bar{\mu}} + e^{z_5 b})C_5 + (\lambda+\bar{\lambda}+dz_7+\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}z_7-1})e^{z_7 b}C_7 + (\lambda+\bar{\lambda}+ dz_8+\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}z_8-1})e^{z_8 b}C_8 = \lambda e^{b/\bar{\mu}} \qquad (4)$$

c. ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΕΣ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΒΟΛΕΣ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ ΜΕΧΡΙ ΤΗ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΧΩΡΙΣ ΕΞΑΡΤΗΣΗ

Στην περίπτωση αυτή υποθέτουμε ότι $\theta = 0$ και $\bar{\theta} = 0$ τότε οι εξισώσεις των απαιτήσεων και των ασφάλιστρων όταν είναι εκθετικά κατανεμημένα η $v(x)$ παίρνει την μορφή

$$(\lambda+\bar{\lambda}+\delta)v_1(x) = \frac{\lambda}{\mu}e^{-x/\mu}\int_0^x v_1(u)\, e^{u/\mu}du + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}}e^{x/\bar{\mu}}\int_x^b v_1(u)\, e^{-u/\bar{\mu}}du + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}}e^{x/\bar{\mu}}\int_b^\infty v_2(u)\, e^{-u/\bar{\mu}}du, \quad x\varepsilon[0,b]$$

και

$$dv_2'(x) + (\lambda+\bar{\lambda}+\delta)v_2(x) = \frac{\lambda}{\mu}e^{-x/\mu}\int_0^b v_1(u)\, e^{u/\mu}du + \frac{\lambda}{\mu}e^{-x/\mu}\int_b^x v_2(u)\, e^{u/\mu}du + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}}e^{x/\bar{\mu}}\int_x^\infty v_2(u)\, e^{-u/\bar{\mu}}du + d, \quad x\varepsilon[b,\infty)$$

αντίστοιχα.

Το παρακάτω Λήμμα δείχνει ότι οι παραπάνω ολοκληροδιαφορικές εξισώσεις μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές.

Λήμμα 3: Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $X_t^b(x)$ η οποία σύμφωνα με την (1) ακολουθεί τις ίδιες υποθέσεις με $\theta = 0$ και $\overline{\theta} = 0$ και έστω ότι τα ασφάλιστρα και απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή μ και $\overline{\mu}$ αντίστοιχα. Τότε $v_1(x)$ και $v_2(x)$ είναι οι λύσεις των παρακάτω διαφορικών εξισώσεων.

$$\mu\overline{\mu}(\lambda+\overline{\lambda}+\delta)v_1''(x) + (\overline{\mu}(\overline{\lambda}+\delta) - \mu(\lambda+\delta))v_1'(x) - \delta v_1(x) = 0, \quad x\varepsilon[0,b]$$

και

$$d\mu\overline{\mu}v_2'''(x) + (d(\overline{\mu}-\mu) + \mu\overline{\mu}(\lambda+\overline{\lambda}+\delta))v_2''(x) + (\overline{\mu}(\overline{\lambda}+\delta) - \mu(\lambda+\delta) - d)v_2'(x) - \delta v_2(x) = -d, \quad x\varepsilon[b,\infty)$$

Για το κάτωθι θεώρημα ορίζουμε τις εξής σταθερές:

$$D_3 = [\overline{\mu}(\overline{\lambda}+\delta) - \mu(\lambda+\delta)]^2 + 4\delta\mu\overline{\mu}(\lambda+\overline{\lambda}+\delta)$$

$$\begin{aligned} D_4 = {} & -18\delta d\mu\overline{\mu}\left(d(\overline{\mu}-\mu) + \mu\overline{\mu}\big(\lambda+\overline{\lambda}+\delta\big)\right)\left(\overline{\mu}\big(\overline{\lambda}+\delta\big) - \mu(\lambda+\delta) - d\right) \\ & + 4\delta\left(d(\overline{\mu}-\mu) + \mu\overline{\mu}\big(\lambda+\overline{\lambda}+\delta\big)\right)^3 \\ & + (d((\overline{\mu}-\mu) + \mu\overline{\mu}(\lambda+\overline{\lambda}+\delta))^2\big(\overline{\mu}\big(\overline{\lambda}+\delta\big) - \mu(\lambda+\delta) - d\big)^2 \\ & - 4d\mu\overline{\mu}\big(\overline{\mu}\big(\overline{\lambda}+\delta\big) - \mu(\lambda+\delta) - d\big)^3 - 27(\delta d\mu\overline{\mu})^2 \end{aligned}$$

$$z_9 = \frac{-(\overline{\mu}(\overline{\lambda}+\delta) - \mu(\lambda+\delta)) + \sqrt{D_3}}{2\mu\overline{\mu}(\lambda+\overline{\lambda}+\delta)}$$

$$z_{10} = \frac{-(\overline{\mu}(\overline{\lambda}+\delta) - \mu(\lambda+\delta)) - \sqrt{D_3}}{2\mu\overline{\mu}(\lambda+\overline{\lambda}+\delta)}$$

Θεώρημα 5: Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $X_t^b(x)$ η οποία σύμφωνα με την (1) ακολουθεί τις ίδιες υποθέσεις με $\theta = 0$ και $\overline{\theta} = 0$ και έστω ότι τα ασφάλιστρα και απαιτήσεις ακολουθούν εκθετική κατανομή με μέση τιμή μ και $\overline{\mu}$ αντίστοιχα και $\overline{\mu}\overline{\lambda} > \lambda\mu + d$ και $D_4>0$.

$v_1(x) = C_9 e^{z_9 x} + C_{10} e^{z_{10} x}, x\varepsilon[0, b]$

και

$v_1(x) = C_{11} e^{z_{11} x} + C_{12} e^{z_{12} x} + {}^{d}/_{\delta}, x\varepsilon[b, \infty)$

όπου:

z_{11}, z_{12} είναι αρνητικές ρίζες από την εξίσωση του κύβου $d\mu\bar{\mu}z^3 + (d(\bar{\mu} - \mu) + \mu\bar{\mu}(\lambda + \bar{\lambda} + \delta))z^2 + (\bar{\mu}(\bar{\lambda} + \delta) - \mu(\lambda + \delta) - d)z - \delta = 0$

$C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}$ είναι σταθερές οι οποίες καθορίζονται από τα γραμμικά συστήματα (5.1)-(5.4):

$$[(\lambda + \bar{\lambda} + \delta)e^{b/\bar{\mu}} - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}z_9 - 1}(e^{z_9 b} - e^{b/\bar{\mu}})]C_9 + [(\lambda + \bar{\lambda} + \delta)e^{b/\bar{\mu}} - \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}z_{10} - 1}(e^{z_{10} b} - e^{b/\bar{\mu}})]C_{10} + \frac{\bar{\lambda}e^{z_{11} b}}{\bar{\mu}z_{11} - 1}C_{11} + \frac{\bar{\lambda}e^{z_{12} b}}{\bar{\mu}z_{12} - 1}C_{12} = \frac{d\bar{\lambda}}{\delta}$$

(5.1)

$$(\lambda + \delta + \frac{\lambda\bar{\mu}}{\mu} - \bar{\mu}z_9(\lambda + \bar{\lambda} + \delta)C_9 + (\lambda + \delta + \frac{\lambda\bar{\mu}}{\mu} - \bar{\mu}z_9(\lambda + \bar{\lambda} + \delta)C_{10} = 0$$

(5.2)

$$e^{z_9 b}C_9 + e^{z_{10} b}C_{10} - e^{z_{11} b}C_{11} - e^{z_{12} b}C_{12} = {}^{d}/_{\delta}$$

(5.3)

$$\frac{\lambda}{\mu z_9 + 1}(e^{b/\bar{\mu}} - e^{z_9 b})C_9 + \frac{\lambda}{\mu z_{10} + 1}(e^{b/\bar{\mu}} - e^{z_{10} b})C_{10} + (\lambda + \bar{\lambda} + \delta + dz_{11} + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}z_{11} - 1})e^{z_{11} b}C_{11} + (\lambda + \bar{\lambda} + \delta + dz_{12} + \frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}z_{12} - 1})e^{z_{12} b}C_{12} = -d(1 + \frac{\lambda}{\delta})$$

(5.4)

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Έστω ότι τα ασφάλιστρα και οι απαιτήσεις ακολουθούν μια εκθετική κατανομή και λ=0,1, $\bar{\lambda} = 2{,}3$, μ=3 και $\bar{\mu} = 0{,}2$. Τότε από το Θεώρημα 3 μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(x)$ για $x\varepsilon[0,\infty)$ για διάφορες τιμές του θ.

Πράγματι, ο παρακάτω πίνακας μας δείχνει τιμές της πιθανότητες χρεοκοπίας στο μοντέλο μερισμάτων

Πίνακας 1: Οι πιθανότητες χρεοκοπίας στο μοντέλο για διάφορες τιμές του θ

x/θ	-0,9	-0,5	-0,1	0,1	0,5	0,9
0	0,923700	0,808017	0,694653	0,638820	0,528807	0,420945
1	0,906484	0,766009	0,629915	0,563467	0,433686	0,307949
2	0,888003	0,724172	0,570650	0,497607	0,358674	0,228911
5	0,831762	0,608107	0,423229	0,343831	0,208380	0,100718
7	0,795628	0,540438	0,346536	0,268996	0,146531	0,060380
10	0,744222	0,452611	0,256692	0,186208	0,086812	0,028761
15	0,665780	0,336734	0,155646	0,100887	0,036402	0,008589
20	0,595603	0,25052	0,094376	0,054662	0,015276	0,002591
50	0,305291	0,042479	0,004690	0,001383	0,000083	0,000002
70	0,195532	0,013013	0,000634	0,000119	0,000003	0

- Για θ=-0,9 $\Rightarrow \psi(x) \approx 0{,}929934e^{-0{,}022277x} - 0{,}006234e^{-0.7444001x}$
- Για θ=-0,5 $\Rightarrow \psi(x) \approx 0{,}817753e^{-0{,}059151x} - 0{,}009736e^{-0.712238x}$
- Για θ=-0,1 $\Rightarrow \psi(x) \approx 0{,}698198e^{-0{,}100061x} - 0{,}003545e^{-0.676439x}$
- Για θ=0.1 $\Rightarrow \psi(x) \approx 0{,}634275e^{-0{,}122565x} + 0.004545e^{-0.656490x}$
- Για θ=0.5 $\Rightarrow \psi(x) \approx 0{,}492433e^{-0{,}173655x} + 0{,}036374e^{-0.610511x}$
- Για θ=0.1 $\Rightarrow \psi(x) \approx 0{,}309485e^{-0{,}239185x} + 0{,}111461e^{-0.550092x}$

Για $\theta_1 = 0$, συμβολίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi_0(x)$, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\psi_0(x) = \frac{\lambda(\mu + \bar{\mu})}{\bar{\mu}(\lambda + \bar{\lambda})}\exp(-\frac{(\bar{\lambda}\bar{\mu} - \lambda\mu)x}{\mu\bar{\mu}(\lambda\bar{\lambda})}), \qquad x\varepsilon[0,\infty)$$

$$\Rightarrow \psi_0(x) \approx 0{,}666667e^{-0{,}111111x}$$

Ας θεωρήσουμε τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4 και 5. Και θέτοντας τις τιμές d=0.1, b=5 kai δ=0,01 τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις πιθανότητες χρεοκοπίας

$\psi(x)$ και τις αναμενόμενες προεξοφλημένες καταβολές μερισμάτων μέχρι να επέλθει χρεοκοπίας $v(x)$ ως:

$$\psi_1(x) \approx 0{,}389315 + 0{,}407125e^{-0.11111x}, \quad x\varepsilon[0{,}5]$$

$$\psi_2(x) \approx 0{,}809486e^{-0.051863x} - 1{,}24332 * 10^{39}e^{-19.281470x}, \quad x\varepsilon[5,\infty)$$

$$v_1(x) \approx 4.555889e^{0.049220x} - 2.296416e^{-0.140506x}, \quad x\varepsilon[0{,}5]$$

$$v_2(x) \approx 10 - 9.149114e^{-0.107684x} + 4.07834 * 10^{40}e^{-19.405407x}, \quad x\varepsilon[5,\infty)$$

Πίνακας 2: Οι πιθανότητες χρεοκοπίας με και χωρίς καταβολή μερισμάτων και οι αναμενόμενες προεξοφλημένες συνάρτησεις μερισμάτων στο μοντέλο χωρίς εξάρτηση

x	$\psi_0(x)$	$\psi(x)$	$v(x)$
0	0,666667	0,796440	2,259472
1	0,596560	0,753626	2,790339
2	0,533825	0,715315	3,293343
5	0,382502	0,622904	4,689607
7	0,306284	0,563044	5,694612
10	0,219462	0,481915	6,883176
15	0,125917	0,371835	8,180807
20	0,072245	0,286900	8,938193
50	0,002577	0,060536	9,958020
70	0,000279	0,021455	9,995128

Τα αποτελέσματα που παρουσιάζονται στους Πίνακες 1 και 2 φανερώνουν ότι η θετική εξάρτηση μεταξύ των απαιτήσεων και των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης κινδύνων ανάμεσα σε διαδοχικές αφίξεις απαιτήσεων μειώνει την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(x)$, ενώ η αρνητική εξάρτηση την αυξάνει. Πράγματι, στην περίπτωση με την αρνητική εξάρτηση η κατάσταση στην οποία απαιτήσεις μεγάλου μεγέθους φτάνουν σε μικρής διάρκειας διαστήματα είναι πιο πιθανή, η οποία έχει σαν αποτέλεσμα να υπάρξει χρεοκοπία στο μέλλον πιο γρήγορα.

Επιπλέον, από τον Πίνακα 2 εύκολα συμπεραίνουμε ότι η καταβολή μερισμάτων ουσιαστικά αυξάνει την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(x)$.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Ε. Χατζηκωνσταντινίδης (2019), Θεωρία Κινδύνων Ι, Σημειώσεις Παραδόσεων, ΠΜΣ στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[2] Κ. Πολίτης (2012), Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου: Το Συλλογικό Πρότυπο και Θεωρία Χρεοκοπίας, Εκδόσεις Σταμούλη Α.Ε.

[3] Κ. Πολίτης (2012), Θεωρία Κινδύνων ΙΙ, Σημειώσεις Παραδόσεων, ΠΜΣ στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[4] Κ.Ι Κουτσοπουλου (1999), Αναλογιστικά Μαθηματικά: Μέρος Ι Θεωρία των Κινδύνων, Εκδόσεις Συμμετρία

[5] Διπλωματική Εργασία της Χατζή Κωνσταντίνας (2020), Μοντέλα κινδύνου με στοχαστικά ασφάλιστρα, εξαρτήσεις και στρατηγικές μερίσματος

[6] Chantal Labbe, Kristina P. Sendova (2009), Applied Mathematics and Computation: The expected discounted penalty function under a risk model with stochastic income

[7] Zhimin Zhang, Hu Yang (2010), Journal of Computational and Applied Mathematics: On a risk model with stochastic premiums income and dependence between income and loss

[8] Olene Regulina (2017), The risk model with stochastic premiums, dependence and a threshold dividend strategy