ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ

«ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ»

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Δημιουργία και υλοποίηση ενός ηλεκτρονικού περιβάλλοντος για τη διδασκαλία στρατηγικών πρόσθεσης νοερού λογισμού, βασισμένο στα στάδια γνωστικής ανάπτυξης του Jerome Bruner

Σπέντζου Αιμιλία - ΜΗΜ 1910

Επιβλέπων:Αναπληρωτής καθηγητής κ. Φιλιππάκης Μιχαήλ

Πειραιάς, 2021

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική εργασία βασίζεται στον σχεδιασμό και την υλοποίηση ενός ηλεκτρονικού περιβάλλοντος που πραγματεύεται τις στρατηγικές πρόσθεσης νοερού λογισμού με υπέρβαση της δεκάδας στην Α' Δημοτικού. Σε αυτή την τάξη, οι μαθητές καλούνται να μάθουν τον μηχανισμό της πρόσθεσης και γι' αυτό, διδάσκονται στρατηγικές, ώστε να εκτελούν τις προσθέσεις εύκολα και σωστά. Στόχος είναι οι μαθητές να μάθουν να προσθέτουν με ευχέρεια μέχρι τον αριθμό 20, ξεπερνώντας σιγά-σιγά τα εποπτικά υλικά και εκτελώντας προσθέσεις νοερά, είτε ανακαλώντας άμεσα από τη μνήμη τους αθροίσματα (ανακλητικές νοερές στρατηγικές πρόσθεσης) είτε αξιοποιώντας τα απομνημονευμένα αθροίσματα για τον υπολογισμό άλλων αθροισμάτων (νοερές κατασκευαστικές στρατηγικές πρόσθεσης). Ωστόσο, οι στρατηγικές που οι μαθητές διδάσκονται δεν είναι πάντα εύκολο να τις κατανοήσουν και να τις χρησιμοποιήσουν, διότι σε αυτή την ηλικία, πολλά παιδιά έχουν ανάγκη την άμεση αισθητοποίηση και του οπτικοποίηση των ποσοτήτων, με τη βοήθεια εποπτικού υλικού ή ακόμα και τη χρήση των δακτύλων τους. Προκειμένου οι μαθητές να ξεκινούν από οικείες τεχνικές μάθησης και σταδιακά να προχωρούν και να κατακτούν αφηρημένες μαθηματικές έννοιες, στην εργασία αυτή εφαρμόζεται το θεωρητικό μοντέλο των τριών σταδίων γνωστικής ανάπτυξης του Jerome Bruner. Σύμφωνα με αυτό, οι μαθητές διέρχονται από πολλαπλά στάδια αναπαραστάσεων μαθηματικών εννοιών, μέχρι να κατανοήσουν και να μπορούν να εφαρμόζουν τις διδαχθείσες μαθηματικές έννοιες. Συγκεκριμένα, στο πρώτο στάδιο γνωστικής ανάπτυξης, στο πρακτικό, οι μαθητές μαθαίνουν να υπολογίζουν με τη βοήθεια αντικειμένων, στο εικονιστικό στάδιο με εικόνες και στο συμβολικό στάδιο με σύμβολα, αριθμούς και γράμματα. Η σημασία των πολλαπλών μαθηματικών αναπαραστάσεων έγκειται στο γεγονός ότι οι μαθητές ενισχύονται σημαντικά στην ομαλή μετάβαση από το ένα στάδιο γνωστικής ανάπτυξης στο άλλο, κατανοώντας σε βάθος και εννοιολογικά την κάθε στρατηγική και ανακαλύπτοντας τις σχέσεις των αριθμών, γεγονός που θα αποδειχθεί πολύ βοηθητικό για την εκτέλεση των πράξεων και στις υπόλοιπες δεκάδες μέχρι τον αριθμό 100. Στην παρούσα έρευνα λοιπόν τίθενται τα ερευνητικά ερωτήματα: α) αν βελτιώθηκαν οι επιδόσεις των μαθητών σε ασκήσεις μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος και β) σε ποιον βαθμό οι μαθητές μπόρεσαν να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν τις στρατηγικές νοερού λογισμού που διδάχθηκαν στο ηλεκτρονικό μάθημα. Το ηλεκτρονικό μάθημα δομείται σε τρεις ενότητες που η καθεμία αντιπροσωπεύει το κάθε στάδιο γνωστικής ανάπτυξης, ενώ παράλληλα η κάθε στρατηγική διέρχεται και από τα τρία στάδια πρακτικής, εικονιστικής και συμβολικής αναπαράστασης.

ABSTRACT

This thesis is based on the design and implementation of a digital environment, which deals with mental computation strategies at First (1^{st}) Grade of Primary School for adding by exceeding ten. At First Grade, students are asked to learn the mechanism of addition and thus, they are taught strategies in order to perform additions easily and correctly. The aim is the students to learn to add fluently until number 20, slowly overcoming the supervisory materials and performing mental additions either by recalling sums (from their memory) directly (recalling mental addition strategies) or by using memorized sums for computing other sums (constructing mental addition strategies). However, the strategies that the students are taught are not always easy to be understood and used, because, at this age, many children need immediate sensing and visualization of quantities with the aid of supervisory materials or even with the use of their fingers. In this thesis, the theoretical model of Jerome Bruner regarding the three stages of cognitive development is applied, so students can start from familiar cognitive techniques and gradually move forward and acquire abstract mathematical concepts. According to this theoretical model, students go through multiple stages of representation of mathematical concepts until they understand and are able to apply the taught mathematical concepts. More particularly, at the first stage of cognitive development, the enactive representation (action-based stage), the young students learn to calculate with the aid of objects, at the iconic representation (image-based stage), they calculate with the help of images and at the symbolic representation (language-based stage), they learn to calculate with symbols, numbers and letters. The importance of multiple mathematical representations lies in the fact that young students are greatly enhanced in normal transition from the one cognitive development stage to the other, understanding in depth and conceptually each strategy and discovering the relations of numbers, which will prove to be very helpful for performing mathematical operations with the following ten, up to number 100.

In this study, the following research questions arise:

a) Whether the performance of the students in exercises following the attendance of e-course improved and

b) To what extent the young students could understand and use the mental computation strategies that they were taught at e-course.

E-course is structured in three sections, each one of them represents each stage of cognitive development and at the same time, each strategy goes through all three stages of enactive, iconic and symbolic representation.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Ευχαριστώ θερμά τον επιβλέποντα της εργασίας, αναπληρωτή καθηγητή κ. Φιλιππάκη Μιχαήλ, για την καθοδήγησή του στην εκπόνηση της διπλωματικής εργασίας και τη Δρ. Πούλου Μαρία Ελένη για τον έλεγχο και τις χρήσιμες παρατηρήσεις στη στατιστική (ποσοτική και ποιοτική) ανάλυση των δεδομένων στο κομμάτι της έρευνας της διπλωματικής εργασίας.

Ένα ξεχωριστό «ευχαριστώ» οφείλω στην καθηγήτρια κα.Παρασκευά Φωτεινή για τις παρεμβάσεις της σε καίρια σημεία της εργασίας.

Θα ήθελα, επίσης, να ευχαριστήσω όλους τους καθηγητές του μεταπτυχιακού προγράμματος, ειδικότερα τους κ. Ρετάλη Συμεών, κ. Σάμψων Δημήτριο και κ. Σαντιπαντάκη Γεώργιο, για τις πολύτιμες γνώσεις που μου παρείχαν κατά τη διάρκεια των σπουδών μου.

Πίνακας Περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ……………………………………………………8

2.1 Η ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΣΤΗΝ Α' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ..8

2.1.1 ΣΤΟΧΟΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ (ΔΕΠΠΣ) ΚΑΙ ΣΤΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ (ΑΠΣ)..8

2.1.2 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ Α' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ 9

2.1.3 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΣΤΗΝ Α' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ..9

2.1.4 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΣΤΗΝ Α' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ 11

2.2 ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ..16

2.2.1 ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΟΡΙΟΘΕΤΗΣΗ ΤΗΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ.................................16

2.2.2 ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ, ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ 17

2.2.3 ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 18

2.2.4 ΜΟΡΦΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ 20

2.3 ΣΤΑΔΙΑ ΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΚΑΤΑ BRUNER...22

2.3.1 Η ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ..22

2.3.2 ΤΟ ΤΡΙΑΔΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΆΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΔΙΩΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΟΥ BRUNER..23

2.3.3 ΟΙ ΠΡΑΞΙΑΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ 24

2.3.3.1 ΤΑ ΧΕΙΡΑΠΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ..24

2.3.3.2 ΤΑ ΨΗΦΙΑΚΑ ΧΕΙΡΑΠΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ...26

2.3.4 ΟΙ ΕΙΚΟΝΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ 27

2.3.4.1 Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗΣ 28

2.3.5 ΟΙ ΣΥΜΒΟΛΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ 29

2.3.6. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ CRA..30

2.3.7 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ BRUNER ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ Α' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ...........30

2.4 Ο ΝΟΕΡΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ..32

2.4.1 ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΟΡΙΟΘΕΤΗΣΗ ΤΟΥ ΝΟΕΡΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ 32

2.4.2 Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΝΟΕΡΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ 32

2.4.3 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΝΟΕΡΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ 34

2.4.4 ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΝΟΕΡΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ....35

2.4.5 Η ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΣΤΟΝ ΝΟΕΡΟ ΛΟΓΙΣΜΟ 36

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ..39

3.1 ΣΤΟΧΟΣ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ..39

3.2 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ..39

3.3 ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ:......39
3.3.1 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΝΟΕΡΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ......39
3.3.2 ΣΤΑΔΙΑ ΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΟΥ BRUNER......40
3.3.3 ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ......40
3.3.4 ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ......40
3.4 ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ......41
3.4.1 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΝΟΕΡΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ......41
3.4.2 ΣΤΑΔΙΑ ΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΟΥ BRUNER......41
3.4.3 ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ......42
3.4.4 ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ......42
3.5 ΔΕΙΓΜΑ......42
3.6 ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ......43
3.7 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ......44
3.8 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΡΕΥΝΑΣ......44
3.9 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΕΝΑΡΙΟΥ......45
3.9.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΩΤΗΣ ΦΑΣΗΣ......47
3.9.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΦΑΣΗΣ......49
3.9.3 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΡΙΤΗΣ ΦΑΣΗΣ......61
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ......63
4.1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ......63
4.2: ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ 1ΟΥ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΣ......63
4.3: ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ 2ΟΥ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΣ......69
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ......80
5.1 ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ......80
5.2 ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ......81
5.3 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ......82
5.4 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ......82
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ......84
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΠΙΝΑΚΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ......96
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΩΝ ΠΛΑΤΦΟΡΜΑΣ......100

Πίνακας εικόνων

Εικόνα 1: Εξέλιξη στρατηγικών πρόσθεσης 11
Εικόνα 2: Κατασκευαστικές στρατηγικές ή άμεσης ανάκλησης 13
Εικόνα 3 :Μορφές αναπαράστασης 21
Εικόνα 4: Στάδια γνωστικής ανάπτυξης Bruner 24
Εικόνα 5: Γενικός εκπαιδευτικός σχεδιασμός μαθήματος 46
Εικόνα 6: Σχεδιάγραμμα οργάνωσης πρώτης φάσης 47
Εικόνα 7: Στιγμιότυπο από βίντεο εισαγωγής 48
Εικόνα 8: Άδεια εισόδου στο δάσος 48
Εικόνα 9: Σχεδιάγραμμα οργάνωσης δεύτερης φάσης 49
Εικόνα 10: Στιγμιότυπα από τα ψηφιακά εκπαιδευτικά παιχνίδια 60
Εικόνα 11: Σχεδιάγραμμα οργάνωσης τρίτης φάσης 61
Εικόνα 12: Βραβείο εξερευνητή Μαθηματικών 62

Πίνακας διαγραμμάτων

Διάγραμμα 1: Ραβδόγραμμα μέσων επιδόσεων όλων των ασκήσεων 64
Διάγραμμα 2: Error bar μέσων επιδόσεων όλων των ασκήσεων 64
Διάγραμμα 3: : Ιστόγραμμα μέσων επιδόσεων στις pre-test ασκήσεις 65
Διάγραμμα 4: Ιστόγραμμα μέσων επιδόσεων στις post-test ασκήσεις 65
Διάγραμμα 5: Q-Q plot μέσων επιδόσεων στις pre-test ασκήσεις 66
Διάγραμμα 6: Q-Q plot μέσων επιδόσεων στις post-test ασκήσεις 66
Διάγραμμα 7: Ιστόγραμμα ερώτησης 1 70
Διάγραμμα 8: Ιστόγραμμα ερώτησης 2 70
Διάγραμμα 9: Ιστόγραμμα ερώτησης 3 71
Διάγραμμα 10: Ιστόγραμμα ερώτησης 4 72
Διάγραμμα 11: Ιστόγραμμα ερώτησης 5 72
Διάγραμμα 12: Ιστόγραμμα ερώτησης 6 73
Διάγραμμα 13: Ιστόγραμμα ερώτησης 7 74
Διάγραμμα 14: Ιστόγραμμα ερώτησης 8 74
Διάγραμμα 15: Ιστόγραμμα ερώτησης 9 75

Πίνακας 1: Μέτρα θέσης και μέτρα διασποράς 63
Πίνακας 2: Τεστ κανονικότητας Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk 67
Πίνακας 3: Μέσες επιδόσεις μαθητών σε όλες τις ασκήσεις 67
Πίνακας 4: Τεστ εξαρτημένων δειγμάτων (paired t-test) 68
Πίνακας 5: Wilcoxon Signed Rank Test 68
Πίνακας 6: Μέτρα θέσης και μέτρα διασποράς ερωτηματολογίου 69
Πίνακας 7: Έλεγχοι υπόθεσης ερωτηματολογίου 76

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ

2.1 Η ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΣΤΗΝ Α’ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

2.1.1 ΣΤΟΧΟΙ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΟ ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΟ ΕΝΙΑΙΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ (ΔΕΠΠΣ) ΚΑΙ ΣΤΟ ΑΝΑΛΥΤΙΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ (ΑΠΣ)

Σύμφωνα με το Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγραμμάτων Σπουδών για τα Μαθηματικά, επιδιώκεται οι μαθητές να ασκηθούν στη μεθοδική σκέψη, στην ανάλυση, στη γενίκευση, στην εφαρμογή, στην κριτική και στις λογικές διεργασίες, καθώς και στη διατύπωση των σκέψεών τους με σαφήνεια και λιτότητα. Επιπλέον, βασικός στόχος, σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών, είναι η ανάπτυξη της παρατηρητικότητας, την προσοχής, της αυτοσυγκέντρωσης και της πρωτοβουλίας.

Η διαθεματική προσέγγιση ορίζει για τους μαθητές της Α’ Δημοτικού να ξέρουν να απαγγέλλουν, να διαβάζουν, να γράφουν και να διατάσσουν τους φυσικούς αριθμούς μμέχρι το 100, καθώς και να εκτελούν τις πράξεις της πρόσθεσης και της αφαίρεσης με αριθμούς που δεν ξεπερνούν το 20. Ως προς την επίλυση προβλημάτων, οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να εξερευνούν μία κατάσταση, να διατυπώνουν ερωτήσεις με βάση συγκεκριμένα δεδομένα, να αναδιατυπώνουν ένα πρόβλημα, να αξιοποιούν τα μαθηματικά στην καθημερινότητά τους και να εξοικειώνονται με τις νέες τεχνολογίες.

Σύμφωνα με το Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών, οι γενικοί στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών περιλαμβάνουν την απόκτηση βασικών μαθηματικών γνώσεων και ικανοτήτων, την καλλιέργεια της μαθηματικής γλώσσας ως μέσου επικοινωνίας, την κατανόηση στοιχειωδών μαθηματικών μεθόδων, την εξοικείωση με την αποδεικτική διαδικασία, την ανάπτυξη της ικανότητας επίλυσης προβλημάτων και την καλλιέργεια θετικής στάσης απέναντι στα Μαθηματικά. Οι ειδικοί γνωστικοί στόχοι της διδασκαλίας των Μαθηματικών για την Α’ Δημοτικού, σχετικά με τις πράξεις, ορίζουν ότι οι μαθητές αναμένεται:

- Να απαγγέλλουν προφορικά 1-1 και 2-2 την ακολουθία των αριθμών
- Να αναλύουν σε αθροίσματα τους αριθμούς μέχρι το πέντε (5)
- Να υπολογίζουν αθροίσματα μέχρι το πέντε (5)
- Να λύνουν προβλήματα πρόσθεσης και να κάνουν χρήση των συμβόλων (+) και (=)
- Να αναγνωρίζουν, να διαβάζουν και να γράφουν τα αριθμητικά σύμβολα μέχρι το είκοσι (20)
- Να επαληθεύουν αποτελέσματα της πράξης της πρόσθεσης με την αφαίρεση και της αφαίρεσης με την πρόσθεση
- Να κάνουν προσθέσεις με αριθμούς μέχρι το είκοσι (20), χρησιμοποιώντας τα διπλά και την δεκάδα
- Να χρησιμοποιούν την αριθμογραμμή και άτυπες εμπειρικές στρατηγικές (π.χ. δαχτύλων, λεκτικών επιχειρημάτων)

2.1.2 ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΗΝ Α' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στην Α' Δημοτικού, έχουν επιλεγεί στα σχολικά βιβλία θέματα που να είναι οικεία στους μαθητές και παρουσιάζουν ενδιαφέρον, με σκοπό να τους ενεργοποιούν για να τους δημιουργούν κίνητρα για μάθηση. Τα βιβλία των Μαθηματικών της πρώτης Α' Δημοτικού στηρίζονται στην παιδαγωγική αρχή ότι η μάθηση είναι πιο αποτελεσματική, όταν ενεργοποιείται η περιέργεια του παιδιού για μάθηση και μέσα από τη δημιουργία των κατάλληλων κινήτρων. Το βιβλίο του δασκάλου προτείνει δραστηριότητες που παραπέμπουν σε παιχνίδια, ώστε οι μαθητές να εμπλέκονται ενεργά και έχουν θετική στάση απέναντι στο μάθημα. Συνήθως, οι ενότητες ξεκινούν με μία δραστηριότητα που στοχεύει στον προσανατολισμό και την εκμαίευση ιδεών. Στη συνέχεια, η νέα γνώση επισημοποιείται και ακολουθούν ασκήσεις εφαρμογής και εμπέδωσης. Πολλές φορές, η νέα γνώση επεκτείνεται και συνδυάζεται με άλλα μαθήματα.

Στη φάση της εκμαίευσης, σημαντικό στοιχείο προς αξιοποίηση από τον εκπαιδευτικό είναι οι άτυπες στρατηγικές που διατυπώνονται από τους μαθητές κατά τη διερεύνηση μιας αριθμητικής σχέσης. Οι άτυπες στρατηγικές είναι διαδικασίες υπολογισμού που αναπτύσσει το παιδί σε εξωσχολικό περιβάλλον και πριν την οργανωμένη διδασκαλία. Οι στρατηγικές αυτές αφορούν στην επίλυση απλών προβλημάτων με πρόσθεση ή αφαίρεση και στηρίζονται στη χρήση αντικειμένων ή δακτύλων (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008). Η άτυπη γνώση του παιδιού, η οποία εκφράζεται μέσω υλικής αναπαράστασης, γίνεται η αφετηρία, έτσι ώστε να οδηγηθεί προοδευτικά και σύμφωνα με το επίπεδό και τον ρυθμό του προς πιο αφηρημένες διαδικασίες υπολογισμού και μετέπειτα, στους γραπτούς τυπικούς αλγόριθμους (Λεμονίδης, 2002). Βασική προϋπόθεση για να πραγματοποιηθεί η σύνδεση άτυπης και τυπικής γνώσης και η ομαλή μετάβαση από την υλική στη νοερή αναπαράσταση είναι η αλληλεπίδραση του τρόπου σκέψης του παιδιού και των όσων αυτό διδάσκεται στο σχολείο.

2.1.3 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΣΤΗΝ Α' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Ένας γενικός ορισμός που έχει δοθεί για την πράξη της πρόσθεσης είναι ο εξής:

> **Ορισμός**: *Πρόσθεση δύο φυσικών αριθμών μ και ν είναι η πράξη με την οποία βάζουμε μαζί σε ένα πλήθος το πλήθος των μονάδων του αριθμού μ με το πλήθος των μονάδων του αριθμού ν και συγκροτείται, έτσι, ένας φυσικός αριθμός, το άθροισμα μ+ν των αριθμών μ και ν* (Χατζηκυριάκου, 2008, σ.38).

Για την ανάπτυξη και την κατανόηση της έννοιας της πρόσθεσης από έναν μαθητή, υπάρχουν τρεις σημαντικές παράμετροι:

α) Οι σταθερές σχέσεις των αριθμών της πρώτης δεκάδας, δηλαδή, τους συνδυασμούς των αριθμών που δίνουν τα αθροίσματα ως τον αριθμό δέκα (10) και αποτελούν τη βάση για την εκτέλεση κάθε άλλης πρόσθεσης˙

β) Οι πράξεις με αριθμούς που υπερβαίνουν την πρώτη δεκάδα και η σχέση τους με τους αριθμούς της πρώτης δεκάδας˙

γ) Ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται τα μαθηματικά προβλήματα στα παιδιά και ο τρόπος που τα κατανοούν˙

δ) Η χρήση υλικού ή αναπαραστάσεων από τους μαθητές, ώστε να κατανοήσουν σταδιακά τις μαθηματικές σχέσεις (Τζεκάκη, 2011).

Πολλά παιδιά προσχολικής ηλικίας προσθέτουν με τη βοήθεια αντικειμένων ή δακτύλων, πριν ακόμα διδαχθούν πράξεις. Όταν τα μικρά παιδιά χρησιμοποιούν τα δάχτυλά τους, δίνουν υλική υπόσταση στους αριθμούς που πρέπει να αθροίσουν, ενώ γίνεται μια αντιστοίχιση ένα προς ένα μεταξύ δακτύλων και ακολουθίας των φυσικών αριθμών. Με αυτή τη διαδικασία της υλικής απαρίθμησης όλων των αντικειμένων ‘’*το παιδί για να προσθέσει μ+ν αναπαριστά με αντικείμενα ή με τα δάχτυλά του τη συλλογή μ μετά τη συλλογή ν και απαριθμεί στη συνέχεια την ολότητα, απαριθμώντας όλα τα στοιχεία αρχίζοντας από το 1*’’ (Carpenter, 1981).

Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (1994), υπάρχουν τέσσερις αριθμητικές διαδικασίες που ακολουθούν τα παιδιά για την εκτέλεση μιας πρόσθεσης, κατά το διάστημα που μεσολαβεί από την απαρίθμηση των συλλογών μέχρι τον νοερό λογισμό. Πιο συγκεκριμένα, αυτές οι διαδικασίες είναι: α) αρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον πρώτο, β) αρίθμηση από τον πρώτο, γ) αρίθμηση όλων αρχίζοντας από το μεγαλύτερο και δ) αρίθμηση από το μεγαλύτερο. Ο μελετητής αναλύει αυτές τις διαδικασίες και την εφαρμογή τους μέσα από το παράδειγμα της πρόσθεσης
4 + 7:

● **Αρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον πρώτο**: Το παιδί αριθμεί για να φτάσει στον πρώτο αριθμό (4) αρχίζοντας από το 1 ("*1, 2, 3, 4*") και συνεχίζει αυτή την ευθεία αρίθμηση μέχρι την αρίθμηση και του δεύτερου αριθμού της πράξης (7) ("*5, 6, 7, 8, 9, 10, 11*"). Η απάντηση της συγκεκριμένης πρόσθεσης είναι ο τελευταίος αριθμός (11) αυτής της αρίθμησης.

● **Αρίθμηση από τον πρώτο:** Με αυτή τη μέθοδο, ο μαθητής αριθμεί αρχίζοντας από τον πληθάριθμο του πρώτου προσθετέου που δίνεται στο πρόβλημα. Στο παράδειγμα μας, το παιδί θα πει “4” (παύση) και θα μετρήσει "*5, 6, 7, 8, 9, 10, 11*". Η απάντηση είναι το 11.

● **Αρίθμηση όλων αρχίζοντας από τον μεγαλύτερο**: Ο μαθητής αριθμεί μέχρι το μεγαλύτερο, από τους δύο προσθετέους, αριθμό (7) αρχίζοντας από το 1 ("*1, 2, 3, 4, 5, 6, 7*") και συνεχίζει αυτή την ευθεία αρίθμηση μέχρι την αρίθμηση και του μικρότερου αριθμού (4) ("*8, 9, 10, 11*"). Η απάντηση είναι ο τελευταίος αριθμός (11) αυτής της αρίθμησης.

● **Αρίθμηση από τον μεγαλύτερο**: Με την τελευταία περίπτωση αριθμητικής διαδικασίας, ο μαθητής αρχίζει να αριθμεί από τον πληθάριθμο του μεγαλύτερου προσθετέου. Στο παράδειγμα, το παιδί θα μετρήσει “*7*” (παύση), *8, 9, 10, 11*". Η απάντηση είναι 11 (Λεμονίδης, 1994).

Ο Λεμονίδης (2003) ισχυρίζεται ότι η μάθηση της αρίθμησης είναι αναγκαία αλλά δεν επαρκεί, ώστε να βοηθηθούν οι μαθητές να αναπτύξουν την ικανότητα της πρόσθεσης. Γι’ αυτόν τον λόγο, ο μελετητής προτείνει την αθροιστική ανάλυση και σύνθεση των αριθμών, τη χρήση γνωστών αθροισμάτων ως βάση για άλλες πράξεις και τα συμπληρώματα των αριθμών.

Σύμφωνα με έρευνα της Nunes και των συνεργατών της (2007), η έννοια της πρόσθεσης προϋποθέτει την κατάκτηση και την κατανόηση της προσθετικής σύνθεσης. Οι μαθητές, όταν ξεκινούν να γνωρίζουν την πρόσθεση, χρησιμοποιούν τη στρατηγική της ολικής απαρίθμησης για να βρουν το άθροισμα δύο προσθετέων. Αυτό σημαίνει πως, αν πρέπει να βρουν το άθροισμα της πρόσθεσης 3+2, τότε θα φτιάξουν δύο σύνολα από τρία (3) και δύο (2) αντικείμενα αντίστοιχα και θα τα μετρήσουν ένα-ένα, αρχίζοντας από το πρώτο σύνολο και μετά θα προχωρήσουν στο άλλο. Έπειτα, η φάση της ολικής απαρίθμησης θα δώσει τη θέση της σε μια πιο αφαιρετική στρατηγική, στη φάση της μερικής απαρίθμησης. Σε αυτή τη φάση, τα παιδιά, με βάση το προηγούμενο παράδειγμα, τα παιδιά θα σχηματίσουν δύο σύνολα από τρία (3) και δύο (2) αντικείμενα, αλλά το ένα σύνολο θα γίνει αντιληπτό ως μία ενιαία μονάδα που μπορεί να συνδυαστεί με μια μικρότερη. Επομένως, θα απαγγείλουν απευθείας τον πληθάριθμο του πρώτου συνόλου και μετά από αυτόν, θα αρχίσουν να απαριθμούν ένα-ένα το πλήθος των αντικειμένων του δεύτερου συνόλου. Στην πραγματικότητα, με τη στρατηγική της μερικής απαρίθμησης, τα παιδιά πραγματοποιούν μια αρίθμηση από την απόλυτη τιμή ενός αριθμού και μετά.

Στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών για την Α' Δημοτικού, σχετικά με την υπέρβαση της δεκάδας, στόχος είναι οι μαθητές να ξέρουν να κάνουν προσθέσεις με αριθμούς μέχρι τον αριθμό είκοσι (20), χρησιμοποιώντας στρατηγικές, όπως τη διάσπαση ενός αριθμού, την εύρεση ζεύγους του δέκα (10), τον υπολογισμό διπλών αθροισμάτων, καθώς και να χρησιμοποιούν το αντίστοιχο σύμβολο.

Παρακάτω, αναλύονται οι τρόποι με τους οποίους προσθέτουν οι μαθητές της Α' Δημοτικού. Αυτοί οι τρόποι πρόσθεσης ονομάζονται στρατηγικές.

2.1.4 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΣΤΗΝ Α' ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Εικόνα 1: Εξέλιξη στρατηγικών πρόσθεσης

Σύμφωνα με τον Λεμονίδη (2003), οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα μικρά παιδιά στις προσθέσεις μονοψήφιων αριθμών χωρίζονται σε τρία επίπεδα:

<u>**1ο επίπεδο: Στρατηγικές με υλικά και αισθητοποίηση αριθμών**</u>

Αρχικά, οι μαθητές, για να υπολογίσουν απλές πράξεις, έχουν ανάγκη να ποσοτικοποιήσουν τους αριθμούς. Συνήθως, οι μαθητές χρησιμοποιούν το πιο άμεσο και οικείο εποπτικό υλικό, τα δάχτυλά τους ή άλλα αντικείμενα, προκειμένου να κατασκευάσουν μία αναπαράσταση της πρόσθεσης. Στις στρατηγικές με υλικά, όπως ονομάζονται αλλιώς, τα παιδιά εκτελούν μία πρόσθεση, βγάζοντας τόσα δάχτυλα ή αντικείμενα όσα ορίζουν οι προσθετέοι, απαριθμώντας τα ένα προς ένα, από την αρχή. Η στρατηγική αυτή ονομάζεται **απαρίθμηση όλων ή επαναρίθμηση.**

Η διαδικασία της απαρίθμησης είναι η πρώτη και η πιο αυθόρμητη μέθοδος μέτρησης που χρησιμοποιούν τα παιδιά, ήδη από πολύ νεαρή ηλικία. Για την επιτυχή απαρίθμηση, προαπαιτείται πολύ καλή γνώση της ακολουθίας των αριθμών, δηλαδή, της αριθμογραμμής. Ωστόσο, η γνώση της αριθμογραμμής δεν εγγυάται την αλάνθαστη απαρίθμηση, καθώς ενδέχεται να προκύψουν άλλες δυσκολίες. Μερικές από αυτές περιλαμβάνουν την αναντιστοιχία της απαγγελίας των αριθμών και της κατάδειξης των αντικειμένων, την υπερπήδηση των αριθμών ή των αντικειμένων, την κακή οργάνωση των υλικών με το να μη διαχωρίζονται τα ήδη μετρημένα υλικά από αυτά που πρόκειται να μετρηθούν ή ακόμα, τη μη απόδοση της πληθικότητας στον τελευταίο αριθμό ή στο τελευταίο αντικείμενο της απαρίθμησης (Λεμονίδης, 1998).

2ο επίπεδο: Στρατηγικές επαρίθμησης

Πρόκειται για εξέλιξη του πρώτου επιπέδου, καθώς γίνεται συντόμευση της διαδικασίας της πρόσθεσης. Τα παιδιά δεν απαριθμούν από την αρχή αντικείμενα ή δάχτυλα, αλλά χρησιμοποιούν την ακολουθία των αριθμών (αριθμογραμμή). Συγκρατούν τον πληθάριθμο του πρώτου ή του μεγαλύτερου προσθετέου στην εργαζόμενη μνήμη και προχωρούν σε ευθεία αρίθμηση όσο ορίζει ο δεύτερος ή ο μικρότερος προσθετέος (Geary et al.,1991; Leutzinger,1999). Σε αυτή τη φάση, οι μαθητές είτε υπολογίζουν χρησιμοποιώντας βοηθητικά υλικά είτε εκτελούν τις πράξεις νοερά, ανάλογα με το επίπεδό τους. Οι στρατηγικές απαρίθμησης κι επαρίθμησης ονομάζονται **διαδικασίες μέτρησης**, καθώς έχουν την ιδιότητα της μέτρησης ένα-ένα.

3ο επίπεδο: Στρατηγικές άμεσης ανάκλησης ή κατασκευαστικές στρατηγικές

Σε αυτό το επίπεδο, τα παιδιά δεν καταφεύγουν πλέον στα δάχτυλα ή στα αντικείμενα για να υπολογίσουν, αλλά ανακαλούν από τη μνήμη τους γνωστά αθροίσματα για να υπολογίσουν άλλα (π.χ. αφού 6+6=12, άρα 6+7=13). Στις κατασκευαστικές στρατηγικές εντάσσονται όλες οι νοερές στρατηγικές που χρησιμοποιούν τα παιδιά, προκειμένου να υπολογίσουν πράξεις με βάση γνωστά τους αθροίσματα. Τέτοιες στρατηγικές είναι:

- Η υπέρβαση της δεκάδας με “πέρασμα” στο δέκα (10)
- Η χρήση του πέντε (5) για την ανάλυση των προσθετέων
- Η στρατηγική «κοντά στα διπλά»
- Η αντιστάθμιση με προσθετέο τον αριθμό εννέα (9)
- Η εξισορρόπηση

Οι στρατηγικές άμεσης ανάκλησης είναι οι διαδικασίες κατά τις οποίες το παιδί γνωρίζει απ’ έξω αθροίσματα και τα ανασύρει αυτόματα από τη μακρόχρονη μνήμη. Δεν απαιτείται προσπάθεια και χρόνος, ενώ μένει υπάρχει περιθώριο στην εργαζόμενη μνήμη για επεξεργασία άλλων δεδομένων (Jensen & Whang, 1994; Logie, Gilhooly & Wynn, 1994).

3ο επίπεδο: Στρατηγικές ανάκλησης ή κατασκευαστικές στρατηγικές πρόσθεσης		
	Στρατηγική	**Παράδειγμα**
1	**Κοντά στα διπλά**	**7+6=13** 7+6=6+6+1 ή 7+7-1. Υπολογίζουν με βάση τα διπλά αθροίσματα.
2	**Χρήση του 5**	**6+7=13** 5+1+5+2=10+3. Αναλύουν τους προσθετέους με βάση το 5.
3	**Υπέρβαση της δεκάδας ή πέρασμα από το 10**	**9+7=16** 9+1=10, 10+6=16. Προσθέτουν στον μεγαλύτερο όρο μέχρι να φτάσουν στο 10 και μετά προσθέτουν τα υπόλοιπα του δεύτερου όρου.
4	**Αντιστάθμιση (Compensation)**	**9+5=14** 9+1=10, 10+5=15, 15-1=14. Συμπληρώνουν τον έναν όρο, ώστε να γίνει εύκολα η πρόσθεση και στη συνέχεια αφαιρούν αυτό το συμπλήρωμα από το αποτέλεσμα.
5	**Εξισορρόπηση (Leveling)**	**6+8=14** 7+7=14. Προσθέτουν στον έναν όρο και αφαιρούν από τον άλλον τον ίδιο αριθμό, ώστε να καταλήξουν σε ένα γνωστό άθροισμα.

Εικόνα 2: Κατασκευαστικές στρατηγικές ή άμεσης ανάκλησης (Πηγή: Λεμονίδης, χ.χ)

Σύμφωνα με τον Thompson (1999), οι συνηθέστερες νοερές στρατηγικές που χρησιμοποιούνται από παιδιά για την πρόσθεση αριθμών μέχρι το είκοσι (20) και είναι χρήσιμες και για τους υπόλοιπους διψήφιους αριθμούς είναι:

- **Ευθεία αρίθμηση ένα προς ένα,** από τον έναν προσθετέο προς τον άλλον (π.χ. 4+5 -> 4,5,6,7,8,9, άρα 4+5=9). Πρόκειται για το πρώτο στάδιο μετά την απαρίθμηση όλων των προσθετέων.
- **Αρίθμηση από τον μεγαλύτερο προσθετέο** (π.χ. αντί για 3+7=7+3). Πρόκειται για μία στρατηγική, η οποία ουσιαστικά αξιοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα και μειώνει τον φόρτο της εργαζόμενης μνήμης. Η χρήση αυτής είναι περισσότερο αποδοτική, όταν η διαφορά των προσθετέων είναι μεγάλη. Ακόμα, προϋποθέτει τη δυνατότητα σύγκρισης και διάταξης των αριθμών.
- **Η ανάλυση ενός αριθμού με βάση το πέντε (5):** (π.χ. 7+2=5+2+2)
- **Το συμπλήρωμα του δέκα (10):** (π.χ. 8+6=10+4=14)
- **Τα σχεδόν διπλά** (π.χ. αφού 8+8=16, τότε 8+7=15)
- **Η αντιστάθμιση με προσθετέο τον αριθμό εννέα (9).**

Ο Van de Walle (2005) δίνει τον ορισμό της *αποδοτικής στρατηγικής* ως της στρατηγικής που εφαρμόζεται με το μυαλό και σε σύντομο χρονικό διάστημα. Ακόμα, υποστηρίζει πως με την επαναλαμβανόμενη χρήση τους, οι στρατηγικές αυτές γίνονται αυτόματες. Ωστόσο, διευκρινίζει πως δεν είναι δυνατό οι μαθητές νεαρής ηλικίας να κατανοήσουν εύκολα και γρήγορα μία στρατηγική, αλλά απαιτείται εξάσκηση και καθοδήγηση από τη μεριά του εκπαιδευτικού, ώστε τα παιδιά να συνδέσουν τις αριθμητικές σχέσεις με τα βασικά δεδομένα. Ως αποδοτικές στρατηγικές υποδεικνύει:

- Το συμπλήρωμα του δέκα (10) για τον υπολογισμό μιας πρόσθεσης
- Την αντιστάθμιση για την εκτέλεση των προσθέσεων με προσθετέο τον αριθμό εννέα (9)
- Τη χρήση των διπλών αθροισμάτων για τον υπολογισμό προσθέσεων με προσθετέους που έχουν μία μονάδα διαφορά

Για αυτόν τον λόγο, ο Van de Walle (2005) υποστηρίζει πως η στρατηγική της απαρίθμησης δεν είναι αποδοτική και ότι οι μαθητές είναι έτοιμοι να χρησιμοποιούν μία στρατηγική, όταν δε θα χρειάζονται πλέον υλικά. Επιπλέον, ο ίδιος επισημαίνει πως είναι πολύ σημαντικό οι μαθητές να μπορούν να αποφασίζουν ποια στρατηγική είναι κατάλληλη για κάθε δεδομένο.

Συνοψίζοντας, οι παραπάνω ερευνητές διαπιστώνουν ότι οι πιο βασικές νοερές στρατηγικές πρόσθεσης για τους μαθητές της Α' Δημοτικού, οι οποίες θα αποτελέσουν και αντικείμενο μελέτης της παρούσας ερευνητικής εργασίας είναι οι εξής:

- **Η στρατηγική των προσθετέων με διαφορά μιας μονάδας:** Η στρατηγική αυτή προϋποθέτει την αυτοματοποίηση των αθροισμάτων με όμοιους προσθετέους, ώστε να ανακαλούνται άμεσα στη μνήμη για την επεξεργασία των άλλων αθροισμάτων. Οι μελετητές Groen και Parkman (1972), στη μέτρηση των χρόνων υπολογισμού προσθέσεων σε μαθητές Α' Δημοτικού, κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι τα αθροίσματα των όμοιων προσθετέων είναι τα πρώτα που αποθηκεύονται στη μνήμη των παιδιών.

- **Η στρατηγική της αντιστάθμισης με προσθετέο τον αριθμό 9:** Σε αυτή τη στρατηγική, ο ένας προσθετέος στρογγυλοποιείται στο πλησιέστερο πολλαπλάσιο του δέκα (10) και το αποτέλεσμα επιδιορθώνεται ή αντισταθμίζεται στο τέλος (Λεμονή & Χρήστου, 2019). Συγκεκριμένα, σε μία πρόσθεση με προσθετέο το εννέα (9), ο αριθμός εννέα (9) μετατρέπεται σε δέκα (10) και στη συνέχεια, αφαιρούμε από το άθροισμα τη μονάδα που μετέτρεψε σε δεκάδα τον αριθμό εννέα (9). Στις προσθέσεις με προσθετέο τον αριθμό δέκα (10) και με τον δεύτερο προσθετέο να είναι μεγαλύτερος του αριθμού δύο (2), αξιοποιείται το γεγονός πως η ελληνική γλώσσα φανερώνει τα αθροίσματα μέσα από τις αριθμολέξεις, όπως, για παράδειγμα, δέκα και τέσσερα ισούται με δεκατέσσερα (Λεμονίδης, 1998).

- **Η υπέρβαση της δεκάδας ή η "στάση" στο 10:** Η στρατηγική αυτή αποτελείται από δύο μέρη. Αρχικά, οι μαθητές συμπληρώνουν τον μεγαλύτερο από τους δύο αριθμούς της πρόσθεσης, ώστε να φτάνουν στο δέκα και στη συνέχεια, προσθέτουν τα υπόλοιπα (Torbeyns, Verschaffel & Ghesquiere, 2005). Παραδείγματος χάριν, για την εκτέλεση της πρόσθεσης 9+4, οι μαθητές πρέπει να ακολουθήσουν τα εξής βήματα:

α) Ανάλυση του ενός προσθετέου (του 4) σε άθροισμα δύο όρων (1+3), ώστε ο ένας όρος το δύο, όταν προστίθεται στον άλλο προσθετέο να δίνει άθροισμα δέκα (10): *(9+1=10).*

β) Πρόσθεση του μεγάλου προσθετέου με έναν αριθμό ώστε να έχουμε άθροισμα δέκα (10): *(9+1=10).*

γ) Πρόσθεση στη δεκάδα του δεύτερου όρου που απομένει από την ανάλυση του ενός προσθετέου (10+3=13).

Η στρατηγική αυτή δεν είναι εύκολη για τους μαθητές. Η δυσκολία τους έγκειται στο γεγονός ότι αυτοί πρέπει να χειριστούν ταυτόχρονα και τις τρεις πράξεις που απαιτούνται στην πρόσθεση με “στάση στη δεκάδα”. Συνεπώς, είναι απαραίτητη η χρήση εποπτικού υλικού και αναπαραστάσεων, ώστε οι μαθητές να κάνουν δοκιμές, να εξηγούν τις παρατηρήσεις τους και τις συζητούν με τους συμμαθητές τους. Επιπροσθέτως, πρέπει να έχει προηγηθεί η αυτοματοποίηση, από τη μεριά των μαθητών, αθροισμάτων μονοψήφιων αριθμών και του συμπληρώματος του αριθμού δέκα (10). Για αυτόν τον λόγο, προτείνεται η διδασκαλία της στρατηγικής αυτής να ξεκινάει με αρκετές δοκιμές στα εποπτικά υλικά και συζήτηση ανάμεσα στους μαθητές, καθώς και να πραγματοποιείται προς το τέλος της τάξης (Λεμονίδης, χ.χ.).

2.2 ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ

2.2.1 ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΟΡΙΟΘΕΤΗΣΗ ΤΗΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗΣ

Στα Μαθηματικά, με τον όρο "αναπαράσταση" δηλώνονται οι διαφορετικοί τρόποι, με τους οποίους παρουσιάζονται οι μαθηματικές έννοιες στους μαθητές, με σκοπό τη βαθύτερη, εννοιολογική κατανόηση των Μαθηματικών. Για το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής (National Council of Teachers of Mathematics / NCTM), η αναπαράσταση αποτέλεσε τη βάση επαγγελματικής ανάπτυξης για τη χρονιά 2006-2007. Εν έτει 2006, ο Francis Fennel, Πρόεδρος του ως άνω Συμβουλίου, χαρακτηρίζει την αναπαράσταση ως διαδικασία, η οποία:

> *περιλαμβάνει τη χρήση μοντέλων για την οργάνωση, την καταγραφή και την επικοινωνία μαθηματικών ιδεών, καθώς και την επιλογή, εφαρμογή και μετάφραση αυτών των μοντέλων για την επίλυση προβλημάτων και την ερμηνεία των μαθηματικών. Τα μοντέλα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για παρουσίαση μαθηματικών, μέσω της χρήσης χειριστικών υλικών, διαγραμμάτων, γραφικών ενδείξεων και συμβολικών εκφράσεων. Η αναπαράσταση περιλαμβάνει επίσης την εσωτερίκευση ή τη λήψη μαθηματικών ιδεών και την κατανόησή τους* (Fennel, 2006).

Σε συνέχεια του μηνύματός του, ο Fennel ισχυρίζεται πως η έννοια της αναπαράστασης αποτελεί ένα εργαλείο χρήσιμο εξίσου για μαθητές και εκπαιδευτικούς. Από τη μία πλευρά, οι μαθητές καθίστανται ικανοί να λύνουν μαθηματικά προβλήματα και να εξηγούν τις μαθηματικές τους ιδέες στους άλλους. Από την άλλη, οι εκπαιδευτικοί αξιολογούν με ποιο τρόπο και σε ποιο βαθμό οι μαθητές τους κατανοούν τις διδασκόμενες έννοιες και δημιουργούν εσωτερικές αναπαραστάσεις των εννοιών αυτών.

Σύμφωνα με έναν άλλο ορισμό του Εθνικού Συμβουλίου των Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM), ο όρος αναπαράσταση αναφέρεται στη *"σύλληψη μιας μαθηματικής έννοιας ή πράξης σε κάποια μορφή ή και στην ίδια τη μορφή"*, δηλαδή, ο όρος αποδίδει και τη διαδικασία της αναπαράστασης αλλά και το προϊόν της αναπαράστασης αυτής (NCTM, 2000).

Οι Αρχές και τα Πρότυπα των Σχολικών Μαθηματικών (Principles and Standards for School Mathematics/ PSSM) που έχουν οριστεί από το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών Αμερικής (NCTM) επισημαίνουν πως τα αναλυτικά προγράμματα, από το προνήπιο ως την τελευταία τάξη του Δημοτικού, πρέπει να καθιστούν ικανούς τους μαθητές να:

> *δημιουργούν και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για την οργάνωση, την καταγραφή και την επικοινωνία των μαθηματικών ιδεών, να επιλέγουν, να εφαρμόζουν και να μεταφράζουν μεταξύ των μαθηματικών αναπαραστάσεων για την επίλυση των προβλημάτων και να χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για να διαμορφώνουν και να ερμηνεύουν τα φυσικά, κοινωνικά και μαθηματικά φαινόμενα* (NCTM, 2000, σ.66).

Κατά τους Pape και Tchoshanov (2001), γίνεται μια ολιστική προσέγγιση της έννοιας της αναπαράστασης, καθώς η έννοια δηλώνει ταυτόχρονα και τις εσωτερικές και τις εξωτερικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών. Ως εσωτερικές αναπαραστάσεις νοούνται οι αφηρημένες προσεγγίσεις μαθηματικών ιδεών ή γνωστικών σχημάτων που διαμορφώνουν οι μαθητές μέσα από την εμπειρία τους. Από την άλλη, οι εξωτερικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών ιδεών περιλαμβάνουν χειραπτικές, εικονικές, συμβολικές προσεγγίσεις, όπως αντικείμενα, εικόνες, γραφήματα, σχέδια, σύμβολα, εξισώσεις, πράξεις, και λειτουργούν "ως ερέθισμα στις αισθήσεις που διευκολύνει την κατανόηση των εννοιών από τους μαθητές" (Janvier, Girardon & Morandi, 1993,σ.81). Επιπλέον, οι Pape και Tchoshanov (2001) θεωρούν ως αναπαράσταση την εξωτερίκευση εσωτερικών, γνωστικών λειτουργιών.

Για τους δύο αυτούς μελετητές, υπάρχει μεγάλος βαθμός αλληλεπίδρασης ανάμεσα στις δύο αυτές μορφές αναπαραστάσεων, τις εσωτερικές και τις εξωτερικές. Για αυτόν τον λόγο, ορίζουν την αναπαραστατική σκέψη ως την ικανότητα του ατόμου να ερμηνεύει, να κατασκευάζει και να λειτουργεί αποτελεσματικά τόσο με τις εσωτερικές όσο και με τις εξωτερικές αναπαραστάσεις, σε ατομικό επίπεδο και σε κοινωνικό σύνολο. Ακόμα, οι Pape και Tchoshanov υποστηρίζουν πως η ανάπτυξη της αναπαραστατικής σκέψης συντελείται μέσα από την κατανόησης μιας έννοιας από έναν μαθητή (εσωτερίκευση) και με τη βελτίωση της δημιουργικότητάς του (εξωτερίκευση) και ονομάζουν την αλληλοσυσχέτιση των δύο αυτών διαδικασιών "γνωστική αναπαράσταση" (Pape & Tchoshanov, 2001,σ.126)

Κατά καιρούς, πολλοί ερευνητές έχουν προσπαθήσει να ορίσουν την αναπαράσταση, προσδίδοντας έτσι στην έννοια διάφορες ερμηνείες. Ως αναπαράσταση, στα μαθηματικά, μπορεί να οριστεί η δυνατότητα δημιουργίας, ερμηνείας και χρήσης εικόνων στο μυαλό, στο χαρτί, στα χέρια ή στα τεχνολογικά εργαλεία, οι οποίες δίνουν την ευκαιρία στους μαθητές να συνδέσουν τα αντικείμενα με αφηρημένες μαθηματικές έννοιες (Marzano, 2010). Σύμφωνα με τους Coulombe και Berenson (2001), οι αναπαραστάσεις είναι ένας τρόπος μοντελοποίησης Μαθηματικών, με το οποίο οι μαθητές εκφράζουν τη σκέψη τους, κάνοντας τις μαθηματικές ιδέες πιο συγκεκριμένες. Η Κολέζα (2009) διευκρινίζει πως με τον όρο αναπαράσταση δε δηλώνονται μόνο σύμβολα και εκφράσεις, αλλά και αντικείμενα, σχήματα, πίνακες, ενώ, επισημαίνει πως ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην εκπαιδευτική διαδικασία μπορεί να λειτουργήσει ως εργαλείο επικοινωνίας, ως μέθοδος σκέψης ή καταγραφής αυτής της σκέψης.

Ο Van de Walle (2005) εξετάζει τις αναπαραστάσεις των μαθηματικών εννοιών με τη βοήθεια των "μοντέλων". Στη συνέχεια, εξηγεί ότι ως μοντέλο μιας μαθηματικής έννοιας μπορεί να χρησιμεύσει ένα αντικείμενο, μία εικόνα, ένα σχέδιο "το οποίο την αναπαριστά ή στο οποίο μπορεί να επιβληθεί η σχέση αυτή για την έννοια" (Van de Walle, 2005,σ.44). Για τον ίδιο, τα μοντέλα βοηθούν τους μαθητές να εξερευνήσουν νέες ιδέες και να κατανοήσουν νέες έννοιες, καθώς και να κάνουν τις συνδέσεις ανάμεσα σε έννοιες και σύμβολα. Συνεπώς, πρέπει να υπάρχει μια ποικιλία μοντέλων διαθέσιμη στα παιδιά, ώστε εκείνα να επιλέγουν ελεύθερα αυτά που εξυπηρετούν τη δράση τους.

Ωστόσο, ο ανωτέρω μελετητής κρίνει αναγκαίο να διευκρινίσει πως το μοντέλο της έννοιας δεν απεικονίζει την έννοια, αφού η απεικόνιση προϋποθέτει επίδειξη. Ο μαθητής, ο οποίος δεν έχει ακόμα διαμορφώσει στο μυαλό του τη μαθηματική σχέση, βλέπει απλά ένα αντικείμενο ή μια εικόνα και όχι την απεικόνιση της έννοιας. Μόνο ο νους μπορεί να αντιστοιχίσει τα αντικείμενα με τη μαθηματική σχέση (Thompson, 1994 όπως αναφέρεται στο Van de Walle, 2005).

2.2.2 ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ, ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΓΝΩΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΔΙΚΑΣΤΙΚΗ ΓΝΩΣΗ

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι οι μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος τις στρατηγικές νοερού υπολογισμού που θα διδαχθούν. Προκειμένου οι μαθητές να αποκτήσουν την ικανότητα να υπολογίζουν νοερά, είναι απαραίτητη η μαθηματική κατανόηση (Gusty, 2005). Οι νοεροί υπολογισμοί προϋποθέτουν την εννοιολογική κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων, πέρα από την ικανότητα των γρήγορων υπολογισμών (Olsen, 2015).

Το βάρος πέφτει στον όρο “εννοιολογική”. O Skemp (1976) ονόμασε εννοιολογική κατανόηση (relational understanding) τη μορφή κατανόησης, κατά την οποία ο μαθητής ξέρει τι κάνει και γιατί το κάνει, έχοντας κατακτήσει τις μαθηματικές έννοιες και έχοντας ανακαλύψει τις μεταξύ τους σχέσεις, χωρίς να βασίζεται στην εφαρμογή κανόνων. Στον αντίποδα της εννοιολογικής κατανόησης βρίσκεται η εργαλειακή κατανόηση (instrumental understanding), η οποία αναφέρεται στη μηχανική εκτέλεση των πράξεων και στη διαδικαστική εφαρμογή κανόνων.

Σε έναν αντίστοιχο διαχωρισμό προβαίνει και ο Van de Walle (2005), συνδέοντας την κατανόηση με την εννοιολογική γνώση και αντιπαραβάλλοντάς τη με τη διαδικαστική γνώση. Αρχικά, ο μελετητής δίνει τον ορισμό της κατανόησης, χαρακτηρίζοντάς την ως “μέσο μέτρησης ποιότητας και ποσότητας των συνδέσεων μιας ιδέας με τις υπάρχουσες ιδέες” (Van de Walle, 2005,σ.38). Για εκείνον, η κατανοητή ιδέα ενσωματώνεται σε ένα πλούσιο δίκτυο εννοιών, διαδικασιών και προϋπαρχουσών γνώσεων, ειδάλλως, αν παραμείνει αυτόνομη, θεωρείται μηχανική αποστήθιση. Για ένα τέτοιο δίκτυο συσχετιζόμενων ιδεών μίλησαν και οι Hiebert και Carpenter (1992).

Επομένως, η εννοιολογική γνώση συνίσταται από κατανοητές ιδέες, συνδεδεμένες με τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις και από λογικές σχέσεις. Από την άλλη, η διαδικαστική γνώση περιλαμβάνει όλους τους κανόνες που εφαρμόζουμε και τις διαδικασίες που ακολουθούμε κατά την εκτέλεση των πράξεων, προκειμένου να λυθεί μία άσκηση. Η διαδικαστική γνώση αποτελεί ένα χρήσιμο εργαλείο του μυαλού, καθώς η μηχανική εφαρμογή των αλγοριθμικών διαδικασιών αφήνει περιθώρια για ενασχόληση με πιο απαιτητικές διαδικασίες. Η εφαρμογή των κανόνων μπορεί να στηρίζεται από την εννοιολογική γνώση, δεν εξασφαλίζει, όμως, την εννοιολογική κατανόηση. Συνεπώς, η σύνδεση εννοιολογικής και διαδικαστικής γνώσης είναι απαραίτητη στη διδασκαλία των Μαθηματικών και κανένας κανόνας δεν πρέπει να διδάσκεται αποκομμένος από κάποιο εννοιολογικό πλαίσιο (Van de Walle, 2005).

2.2.3 ΣΥΝΔΕΣΗ ΤΩΝ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Σύμφωνα με τις γνωστικές θεωρίες, το μυαλό λειτουργεί πιο αποτελεσματικά με αναπαραστατικά μοτίβα για την κωδικοποίηση και την αποκωδικοποίηση των πληροφοριών. Δυστυχώς, πολλές φορές το μαθηματικό περιεχόμενο προσφέρεται στους μαθητές με έναν αφηρημένο και συμβολικό τρόπο, παρακάμπτοντας τα αναπαραστατικά μοτίβα, ενώ η γνωστική ικανότητα του ανθρώπινου μυαλού φαίνεται πως ανταποκρίνεται καλύτερα στα μοτίβα πολλαπλών αναπαραστάσεων, δηλαδή, στον συνδυασμό πραξιακών, εικονικών και αφαιρετικών αναπαραστάσεων. Το βάθος της κατανόησης εξαρτάται από τη δύναμη των συνδέσεων ανάμεσα στις μαθηματικές αναπαραστάσεις που οι μαθητές έχουν εσωτερικεύσει (Pape & Tchoshanov, 2001).

Κατά το Εθνικό Συμβούλιο Έρευνας των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής (NRC,2001,σ.94), “εξαιτίας της αφηρημένη φύσης των Μαθηματικών, οι άνθρωποι έχουν πρόσβαση σε μαθηματικές ιδέες μόνο μέσα από τις αναπαραστάσεις αυτών των ιδεών”. Πολλοί ερευνητές, μεταξύ των οποίων και ο Bruner, τονίζουν πως ο σκοπός των αναπαραστάσεων είναι να συνδέσουν τα αφηρημένα Μαθηματικά με συγκεκριμένες εμπειρίες των μαθητών (Harries, 2011). Το Εθνικό Συμβούλιο Καθηγητών Μαθηματικών (NCTM, 2000), εξηγεί πως η διδασκαλία των Μαθηματικών πρέπει να στοχεύει στην κατανόηση και στην ενεργό συμμετοχή των μαθητών στην οικοδόμηση της νέας γνώσης. Επομένως, καθίσταται σαφές πως η μαθηματική κατανόηση μπορεί να επιτευχθεί μέσα από την αναπαράσταση. Οι αναπαραστάσεις αποτελούν δυναμικά εργαλεία σκέψης, και μάθησης που βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος τις έννοιες και να αναγνωρίσουν τις κοινές μαθηματικές ιδέες σε διάφορες περιπτώσεις, ειδικά όταν μπορούν να τις αναπαραστήσουν ευέλικτα με διάφορους τρόπους (Greeno & Hall, 1997; NCTM, 2000).

Όπως αναφέρθηκε παραπάνω, οι αναπαραστάσεις διακρίνονται σε εξωτερικές και σε εσωτερικές. Οι εξωτερικές αναπαραστάσεις ελαφραίνουν το μνημονικό φορτίο, επειδή το άτομο, χάρη στις ορατές και απτές αναπαραστάσεις, δεν χρειάζεται να συγκρατήσει κάποια πληροφορία στο μυαλό του (Suwa & Tversky, 2002). Ωστόσο, η εννοιολογική κατανόηση μιας μαθηματικής έννοιας βασίζεται στις εσωτερικές αναπαραστάσεις της έννοιας αυτής, η ανάπτυξη των οποίων καθορίζεται από τις εξωτερικές αναπαραστάσεις που παρουσιάζονται στους μαθητές κατά τη διδασκαλία (Hiebert & Wearne, 1992). Οι εσωτερικές αναπαραστάσεις που αναμένεται να διαμορφωθούν και να εξασφαλίσουν την εννοιολογική κατανόηση είναι οι λεκτικές και οι νοητικές εικόνες, η χρήση γραφικών συμβόλων, καθώς και συναισθήματα, πεποιθήσεις, αξίες (Goldin & Shteingold, 2001). Για τους Hiebert & Carpenter (1992), μαθηματική κατανόηση σημαίνει ένα δίκτυο εσωτερικών αναπαραστάσεων, όπου όσο περισσότερες και ισχυρότερες οι συνδέσεις, τόσο μεγαλύτερος ο βαθμός κατανόησης.

Συμπεραίνεται, λοιπόν, πως υπάρχει άρρηκτη σύνδεση ανάμεσα στις αναπαραστάσεις και τη μαθηματική κατανόηση. Τη σύνδεση αυτή διερεύνησαν διάφοροι μελετητές. Σύμφωνα με τον Puri (2014), οι άνθρωποι αναπτύσσουν αναπαραστάσεις, ώστε να ερμηνεύσουν και να κατανοήσουν τον κόσμο. Οι Lesh, Post & Behr (1987) διαπίστωσαν πως όταν οι μαθητές μαθαίνουν να αναπαριστούν, να συζητούν και να κάνουν συνδέσεις ανάμεσα στις μαθηματικές ιδέες με πολλούς τρόπους, επιτυγχάνουν βαθύτερη μαθηματική κατανόηση. Σε άρθρο των Anwar, Yuwono & As' ari (2016), καταγράφονται τα αποτελέσματα των ερευνών των Dundar (2015), BAL (2014) και Villeagas (2009), οι οποίες απέδειξαν πως οι αναπαραστάσεις αποτελούν εγγύηση για τη μαθηματική κατανόηση και την επίλυση προβλημάτων Επιπλέον, οι Pape και Tchoshanov (2001) χαρακτήρισαν τις αναπαραστάσεις “γνωστικά εργαλεία” που χρησιμοποιεί ο μαθητής για να εξηγήσει και να δικαιολογήσει μια άποψη.

Παρόμοια θέση υποστήριξε και ο Van de Walle (2005) ισχυριζόμενος ότι, αν ένας εκπαιδευτικός επιθυμεί να διαπιστώσει τον βαθμό κατανόησης μιας ιδέας από έναν μαθητή, η καλύτερη λύση είναι η επίδειξη της ιδέας με υλικά, καθώς η επεξήγηση αφηρημένων εννοιών αποδεικνύεται δύσκολη για τα παιδιά. Τα υλικά μπορούν, επίσης, να θεωρηθούν ως χρήσιμα εργαλεία κατανόησης και μετάδοσης πληροφοριών, καθώς και επικοινωνίας μεταξύ των μαθητών (Greeno & Hall, 1997). Τέλος, οι μαθητές χρησιμοποιούν αναπαραστάσεις για να οργανώσουν και να καταγράψουν τον τρόπο σκέψης τους για τις μαθηματικές τους ιδέες (Minarni, Napitupulu & Husein, 2016).

Επιπροσθέτως, αντικείμενο μελέτης γίνεται και η μαθηματική κατανόηση μέσα από τις πολλαπλές αναπαραστάσεις. Αυτό σημαίνει πως είναι σημαντικό μία έννοια να παρουσιάζεται με διαφορετικά συστήματα αναπαράστασης, γιατί με αυτόν τον τρόπο κατακτάται η κατανόηση της έννοιας αυτής και η ευελιξία στον τρόπο χρήσης της (Lemonidis, 2003 ; Rau, Aleven & Rummel, 2013). Το ίδιο διαπιστώνει και ο Harries (2011), δηλώνοντας πως οι πολλαπλές αναπαραστάσεις αυξάνουν την πιθανότητα κατανόησης μιας έννοιας.

Απόρροια των πολλαπλών μορφών αναπαράστασης μιας έννοιας είναι ότι η έννοια αυτή εξετάζεται από διάφορες οπτικές που η καθεμία εμπλουτίζει το περιεχόμενό της (Tripathi, 2008) . Ένας ακόμα λόγος που αυξάνει την αξία των πολλαπλών αναπαραστάσεων είναι ότι με τη χρήση τους, η μάθηση γίνεται πιο ελκυστική και ενδιαφέρουσα, ενώ αυξάνεται το κίνητρο και τη συμμετοχή των μαθητών (Dufour-Janvier et al., 1987).

Επομένως, γίνεται σαφές πως οι μαθητές πρέπει να είναι σε θέση να προσεγγίζουν ένα πρόβλημα από διαφορετικές οπτικές και να ενθαρρύνονται να μεταβαίνουν από τη μία μορφή αναπαράστασης στην άλλη μέχρι να κατανοήσουν ένα πρόβλημα και να οδηγηθούν στη λύση του. Την ευελιξία αυτή στη χρήση των αναπαραστάσεων εξήραν και οι Lesh et al. (1983), δηλώνοντας πως ένας μαθητής έχει κατανοήσει μία έννοια, όταν μπορεί να τη “μεταφράζει” και να τη μεταφέρει σε πολλαπλές αναπαραστάσεις. Εξάλλου, διαπιστώθηκε πως η ενίσχυση της ικανότητας των μαθητών να κινούνται μεταξύ των αναπαραστάσεων ευνοεί την ανάπτυξη των εννοιών στους μαθητές και τα παιδιά που αντιμετωπίζουν δυσκολίες στην εναλλαγή των αναπαραστάσεων είναι τα ίδια παιδιά που δυσκολεύονται στην εκτέλεση των πράξεων και στην ανάπτυξη των εννοιών (Van de Walle, 2005).

2.2.4 ΜΟΡΦΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Κατά τους Lesh et al. (1983), υπάρχουν πέντε μορφές αναπαραστάσεων που εμφανίζονται στη διδασκαλία των Μαθηματικών:

α) Οι πραγματικές καταγραφές, δηλαδή, εμπειρίες και γεγονότα του πραγματικού κόσμου που δημιουργούν πλαίσια ερμηνείας καταστάσεων, επίλυσης προβλημάτων και ανάπτυξης γνώσεων·

β) Οι εικόνες ή τα διαγράμματα·

γ) Τα χειραπτικά υλικά, για τα οποία διευκρινίζεται πως από μόνα τους δεν αναπαριστούν κάποια έννοια, αλλά επαφίεται στον εκπαιδευτικό να προσδώσει κάποιο νόημα στην αναπαράσταση της έννοιας·

δ) Ο προφορικός λόγος·

ε) Τα γραπτά σύμβολα.

Σε μια προσπάθεια ομαδοποίησης των παραπάνω μορφών αναπαράστασης και λαμβάνοντας υπόψη τον παραπάνω διαχωρισμό των αναπαραστάσεων σε εσωτερικές-νοητικές δομές και εξωτερικές - αισθητηριακές, θα μπορούσε να ειπωθεί πως τα τρία στάδια γνωστικής ανάπτυξης του Jerome Bruner αποτελούν την πιο αντιπροσωπευτική κατηγοριοποίηση των διαφόρων μορφών αναπαραστάσεων. Ο Bruner υποστήριξε ότι η κατανόηση μιας έννοιας από τους μαθητές διέρχεται μέσα από **τρία στάδια αναπαραστάσεων:**

α) **Το πραξιακό στάδιο**, που περιλαμβάνει τις πραξιακές αναπαραστάσεις, ήτοι χρήση αντικειμένων και μαθηματικού εποπτικού υλικού (π.χ. κύβους, ράβδους, άβακες) και ψηφιακών χειραπτικών υλικών ·

β) **Το εικονιστικό στάδιο**, που περιλαμβάνει τις εικονικές αναπαραστάσεις, ήτοι σχέδια, ζωγραφιές, γραφήματα, διαγράμματα·

γ) **Το συμβολικό στάδιο**, που περιλαμβάνει τις συμβολικές αναπαραστάσεις, ήτοι σύμβολα, γράμματα και αριθμούς.

Εικόνα 3 :Μορφές αναπαράστασης

Στο επόμενο κεφάλαιο, αναλύεται το τριαδικό μοντέλο αναπαραστάσεων του Bruner.

2.3 ΣΤΑΔΙΑ ΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΚΑΤΑ BRUNER

2.3.1 Η ΑΝΑΚΑΛΥΠΤΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Ο Jerome Bruner, ένας από τους γνωστικούς ψυχολόγους της μάθησης, ασχολήθηκε ιδιαίτερα με την κοινωνική και βιολογική θεμελίωση της εκπαίδευσης, τα κίνητρα των μαθητών για μάθηση, την νοητική ανάπτυξη των παιδιών αλλά και με θέματα που σχετίζονται με τη μάθηση, το αναλυτικό πρόγραμμα και τη διδασκαλία. Ο Bruner πρότεινε την “**ανακαλυπτική μάθηση**”, η οποία συνεπάγεται αναδιάταξη και μετασχηματισμό του προς μάθηση υλικού, με τρόπο που να οδηγεί στην ουσιαστική κατανόηση. Στόχος της ανακαλυπτικής μάθησης είναι η παρακίνηση των μαθητών για χρήση πληροφοριών και επίλυση προβλημάτων σε ποικίλες συνθήκες. Η νέα γνώση αποκτά νόημα, όταν οι μαθητές την ανακαλύπτουν μόνοι τους, χωρίς να είναι απαραίτητες οι αμοιβές ή οποιαδήποτε άλλα εξωτερικά κίνητρα. Ο Bruner μάλιστα, ισχυρίζεται ότι τα εξωτερικά κίνητρα μπορούν να έχουν πρόσκαιρα αποτελέσματα και δεν προωθούν την ουσιαστική μάθηση. Αντιθέτως, η ανακαλυπτική μάθηση προσφέρει στα παιδιά δεξιότητες χρήσιμες για την αντιμετώπιση αληθινών προβληματικών καταστάσεων στο μέλλον, ενισχύει την αυτοπεποίθησή τους και τα βοηθά να θυμούνται όσα έχουν μάθει (Κασσωτάκης & Φλουρής, 2003).

Σύμφωνα με τον Bruner, η γνώση είναι διαδικασία, όχι το αποτέλεσμα και ο άνθρωπος είναι “επεξεργαστής πληροφοριών”. Βασική αρχή της θεωρίας είναι ότι ο μαθητής μπορεί να αποκτά νέες γνώσεις και δεξιότητες μέσω πειραματισμού και πρακτικής. Το παιδί συμμετέχει ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία και δεν αποδέχεται παθητικά τη γνώση. Η ανακάλυψη πραγματοποιείται μέσα από την αλληλεπίδραση με το περιβάλλον, τη χρήση των αντικειμένων και την εξερεύνηση των ιδιοτήτων τους. Μαθαίνει να συνεργάζεται και να αυτενεργεί, να ελέγχει τις υποθέσεις που διατυπώνει και στο τέλος, αποκτά ευχέρεια στην επίλυση προβλημάτων (Brown, 2006).

Κατά τον Bruner, η ανακάλυψη της γνώσης ακολουθεί την επαγωγική μέθοδο, καθώς το παιδί ξεκινά με τη μελέτη συγκεκριμένων παραδειγμάτων και οδηγείται σε γενικά συμπεράσματα. Ως εκ τούτου, οι μαθητές που έχουν μάθει μέσω αυτής έχουν τη δυνατότητα να μεταφέρουν τις γνώσεις τους ευκολότερα σε πλείστες καταστάσεις. Εξάλλου, η εκμάθηση των Μαθηματικών απαιτεί από τους μαθητές να βασίζονται στη δική τους ικανότητα να ανακαλύψουν τη γενίκευση πίσω από μια συγκεκριμένη μαθηματική λειτουργία. (Wen, 2018).

Ο Bruner αναγνωρίζει τέσσερις τύπους γνωστικών στρατηγικών, τις οποίες χρησιμοποιούν τα παιδιά. Στην πρώτη στρατηγική, το παιδί διατυπώνει υποθέσεις που το οδηγούν σε αποσπασματικές λύσεις και δεν του επιτρέπουν να πάρει αποφάσεις. Κατά τη δεύτερη στρατηγική, το παιδί διατυπώνει μια υπόθεση, τη θέτει σε έλεγχο και όταν αυτή δεν επαληθεύεται, διατυπώνει εκ νέου μία υπόθεση. Κατά την τρίτη στρατηγική, το παιδί διατυπώνει διάφορες υποθέσεις που διαφοροποιούνται κατά ένα στοιχείο, ενώ κατά την τέταρτη στρατηγική, οι υποθέσεις που διατυπώνονται διαφοροποιούνται ως προς περισσότερα από ένα στοιχεία. (Παπαμιχαήλ, 1988).

Επομένως, γίνεται σαφές πως η ανακαλυπτική μάθηση μπορεί να ενεργοποιήσει το ενδιαφέρον όλων των τύπων μαθητών να συμμετάσχουν στη μαθησιακή διαδικασία, ειδικά εκείνων που δεν ανταποκρίνονται στον παραδοσιακό μετωπικό τρόπο διδασκαλίας. Αυτό συμβαίνει γιατί οι μαθητές αναπτύσσουν εσωτερικά κίνητρα για μάθηση, βιώνουν τη χαρά της ανακάλυψης και της αυτενέργειας, ενώ η μάθηση γίνεται πιο αποτελεσματική και ελκυστική (Brown, 2006).

2.3.2 ΤΟ ΤΡΙΑΔΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΆΣΕΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΔΙΩΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΟΥ BRUNER

Οι θεωρίες διδασκαλίας που πρότεινε ο Bruner στο βιβλίο του εν έτει 1966 με τίτλο “Toward a Theory of Instruction” αναμφίβολα κληροδότησε μια πλούσια κληρονομιά σε πολλές γενιές εκπαιδευτικών στον τομέα της μάθησης και της διδασκαλίας. Μια από τις ανεκτίμητες συνεισφορές του στη Διδακτική των Μαθηματικών είναι η σύλληψη της ιδέας των τριών μορφών αναπαράστασης: των ενεργών, των εικονικών και των συμβολικών. Η θεωρία αυτή υπήρξε η αφετηρία για πολλές διδακτικές πρακτικές στο μάθημα των Μαθηματικών, όλες όμως συγκλίνουν στο τριμερές σχήμα του μοντέλου του Bruner (Leong, Ho & Cheng, 2015).

Σύμφωνα με τον Bruner, υπάρχουν τρεις μορφές με τις οποίες τα άτομα αναπαριστούν και ερμηνεύουν τον πραγματικό κόσμο γύρω τους. Αυτές οι μορφές είναι οι πράξεις, οι εικόνες και τα σύμβολα. Ο Bruner θεώρησε καθεμία από τις τρεις αυτές μορφές αναπαράστασης όχι μόνο ως αλληλοσυνδεόμενους τρόπους μάθησης, αλλά και ως στάδια γνωστικής ανάπτυξης του ατόμου (Presno, 1997). Ο μελετητής υποστήριξε πως μέσα από αυτά τα τρία στάδια γνωστικής ανάπτυξης πραγματώνεται η απόκτηση, ο μετασχηματισμός και η αξιολόγηση των γνώσεων, δηλαδή, πραγματοποιείται η αναπαράσταση των γνώσεων στη γνωστική δομή του ατόμου (Κολιάδης, 1997).

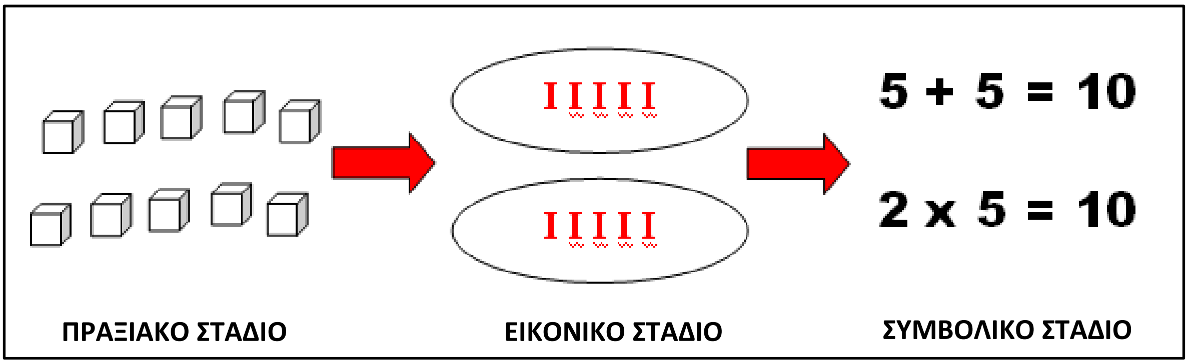
Τα τρία αυτά στάδια είναι (Roblyer, 2008; Presno, 1997):

- **Το στάδιο της πραξιακής αναπαράστασης:**. Το παιδί μαθαίνει με πραγματικά αντικείμενα, παραδείγματα και πρότυπα επίδειξης, παιχνίδια ρόλων. Ένα παιδί μπορεί να περιγράψει ένα αντικείμενο, αφού προσδιορίσει τι μπορεί να κάνει με αυτό. Θεωρείται ένα δύσκολο στάδιο αναπαράστασης για τη διδασκαλία, καθώς σε πολλές περιπτώσεις, δεν υπάρχουν επαρκείς εικόνες και λέξεις που αναπαριστούν καθαρά μία δραστηριότητα. Αντίθετα, ορισμένες φορές, η επίδειξη είναι ο μόνος τρόπος αναπαράστασης της γνώσης, όπως συμβαίνει με τα αθλήματα.

- **Το στάδιο της εικονιστικής αναπαράστασης:** Γίνεται δηλαδή αναπαράσταση των πραγμάτων μέσω εικόνων ή σχεδιαγραμμάτων. Το παιδί αρχίζει να αντιλαμβάνεται τις ιδιότητες των αντικειμένων. Αυξάνεται η οπτική μνήμη και τα παιδιά μπορούν να σκέφτονται για μια πράξη χωρίς πραγματικά να τη βιώνουν. Το παιδί δεν μπορεί ακόμα να κάνει συσχετισμούς αφηρημένων εικόνων. Στην ουσία, η εικονική αναπαράσταση είναι η σύνοψη μιας ολοκληρωμένης δραστηριότητας.

- **Το στάδιο της συμβολικής αναπαράστασης**: Σε αυτό το επίπεδο νοητικής ανάπτυξης, το παιδί είναι πλέον σε θέση να αναπαριστά σχέσεις μεταξύ πραγμάτων, χρησιμοποιώντας αφηρημένα γλωσσικά ή μαθηματικά σύμβολα και να μιλά με αφηρημένους όρους. Το παιδί καθίσταται ικανό να μιλά για μία έννοια, χωρίς να έχει άμεση εμπειρία.

Τα τρία αυτά στάδια συνυπάρχουν στη γνωστική δομή του κάθε παιδιού, διαφέρει, όμως, ο βαθμός που χρησιμοποιείται το κάθε στάδιο σε κάθε ηλικία. Καθώς το άτομο εξελίσσεται προς ένα συγκεκριμένο στάδιο, οι τρεις μορφές αναπαραστάσεων αλληλοσυμπληρώνονται και συνεργάζονται για την υλοποίηση γνωστικών δραστηριοτήτων (Wen, 2018).



Εικόνα 4: Στάδια γνωστικής ανάπτυξης Bruner

Παρακάτω, περιγράφονται αναλυτικά οι τρεις μορφές αναπαράστασης.

2.3.3 ΟΙ ΠΡΑΞΙΑΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

2.3.3.1 ΤΑ ΧΕΙΡΑΠΤΙΚΑ ΥΛΙΚΑ

Για τον Bruner, κανένα παιδί δε γεννιέται με την ικανότητα της αφηρημένης σκέψης. Αντιθέτως, τα παιδιά κατανοούν και κατασκευάζουν αφηρημένες έννοιες μέσω της αλληλεπίδρασής τους με συγκεκριμένα αντικείμενα στο περιβάλλον (Cope, 2015). Επομένως, οι πραξιακές αναπαραστάσεις που υλοποιούνται με τα χειραπτικά υλικά αποδεικνύονται ιδιαίτερα ωφέλιμες για την κατανόηση των αφηρημένων ιδεών των Μαθηματικών.

Σύμφωνα με το Εθνικό Συμβούλιο των Εποπτικών Αρχών των Μαθηματικών (National Council of Supervisors of Mathematics/NCSM, 2013), τα χειραπτικά υλικά που χρησιμοποιούνται στις σχολικές αίθουσες είναι “φυσικά αντικείμενα που τα χρησιμοποιούν οι μαθητές είτε ατομικά είτε σε μικρές ομάδες. Αποτελούν αντικείμενα που απευθύνονται σε διάφορες αισθήσεις και τα οποία μπορεί να αγγίξουν, να μετακινήσουν, να τακτοποιήσουν ή αλλιώς να χειριστούν τα παιδιά”.

Ως χειραπτικά υλικά μπορούν να θεωρηθούν όλα τα πραγματικά αντικείμενα που μπορούν να προέρχονται από το φυσικό περιβάλλον, όπως πέτρες και φύλλα, αντικείμενα καθημερινής χρήσης (π.χ. καλαμάκια, κουμπιά, βόλοι), παιχνίδια ή προσομοιώσεις πραγματικών αντικειμένων με ρεαλιστικά χαρακτηριστικά, όπως ζάρια, κάρτες, πλαστικά χρήματα ή φαγητά. Συνήθως, στις σχολικές αίθουσες υπάρχουν χειραπτικά υλικά με αμιγώς μαθηματική μορφή και εκπαιδευτική χρήση. Μερικά από αυτά είναι οι κύβοι, το υλικό δεκαδικής βάσης, η ζυγαριά, το αριθμητήριο και το δίχρωμο αριθμητήριο, ο άβακας, οι ράβδοι Cuisenaire, γεωμετρικά σχήματα και στερεά, οι γεωπίνακες, οι πλακοστρώσεις, το υλικό Dienes, τάγκραμ, παζλ και επιτραπέζια παιχνίδια. Εν ολίγοις, χειραπτικά αντικείμενα είναι όλα τα απτά αντικείμενα ή μοντέλα αυτών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν στο μάθημα των Μαθηματικών και να λειτουργήσουν εκπαιδευτικά, συμβάλλοντας στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Μία σύντομη περιγραφή για τα χειραπτικά υλικά δόθηκε από τους Van de Walle και τους συνεργάτες του (2013), ορίζοντάς τα ως φυσικά αντικείμενα που μπορούν να χρησιμοποιήσουν οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί, για να απεικονίσουν και να ανακαλύψουν τις μαθηματικές έννοιες, καθώς και να επιβάλουν μαθηματικές σχέσεις.

Σύμφωνα με τους θεωρητικούς της γνωστικής ανάπτυξης (Bruner, Montessori, Piaget), φαίνεται ότι τα μικρά παιδιά αποκτούν γνωστικά οφέλη από την εκμάθηση των μαθηματικών εννοιών με τα χειραπτικά υλικά. Για τους Carbonneau, Marley, & Selg (2013) τα χειραπτικά υλικά διευκολύνουν τη μάθηση, καθώς:

α) βοηθούν τους μαθητές να κατανοήσουν σε βάθος αφηρημένες μαθηματικές έννοιες,

β) ενθαρρύνουν τον πραγματικό κόσμο της γνώσης των μαθητών,

γ) παρέχουν στον μαθητή διαφορετικούς τρόπους να αναπαραστήσει εσωτερικά την έννοια που διδάσκεται, με σκοπό τη βελτίωση της κωδικοποίησης και της επαλήθευσης,

δ) παρέχουν ευκαιρίες στους μαθητές να ανακαλύψουν τις μαθηματικές έννοιες μέσω της εξερεύνησης.

Σημαντικά είναι τα οφέλη της χρήσης των χειραπτικών υλικών και στον ψυχοκοινωνικό τομέα. Η μάθηση αποκτά μεγαλύτερο νόημα για τα παιδιά, λόγω της βιωματικότητας, της εξερεύνησης και της ανακάλυψης. Αυξάνεται σημαντικά το ενδιαφέρον των μαθητών, καθώς εκείνοι εμπλέκονται ενεργά στη μαθησιακή διαδικασία. Λόγω της τρισδιάστατης φύσης των υλικών, ενεργοποιούνται όλες οι αισθήσεις, ενώ η φυσική δράση που προκαλείται ενισχύει τη μνήμη και την κατανόηση (Martin & Schwartz, 2005; Glenberg, Gutierrez, Levin, Japuntich, & Kaschak, 2004). Η ενασχόληση των παιδιών με αντικείμενα, ειδικά με φυσικά αντικείμενα που βρίσκονται στο άμεσο περιβάλλον τους και χρησιμοποιούνται στην καθημερινότητά τους, καθιστά την επεξεργασία τους πιο οικεία και τη διαδικασία μάθησης πιο διασκεδαστική και αποτελεσματική. Παράλληλα, οι μαθητές συνεργάζονται, συζητούν για τις ιδέες τους και ανταλλάσσουν απόψεις για τις παρατηρήσεις τους, με αποτέλεσμα να διδάσκονται μεταξύ τους. Με αυτόν τον τρόπο, οι μαθητές οδηγούνται πιο εύκολα και ευχάριστα στην εννοιολογική κατανόηση μιας έννοιας.

Μιλώντας για χειραπτικά υλικά, δε θα μπορούσε να παραληφθεί η αναφορά στα δάχτυλα, τα οποία αποτελούν το πρωτογενές εποπτικό υλικό των μαθητών. Η ενέργεια αυτή είναι αναμενόμενη από μαθητές νεαρής ηλικίας. Είναι γνωστό στην εκπαιδευτική κοινότητα πως η χρήση των δαχτύλων συνδέεται με την αρίθμηση και την αντίστοιχη ένα προς ένα μεταξύ των δακτύλων και των αριθμών. Συνεπώς, προτιμάται συχνά από τους εκπαιδευτικούς ως μέθοδος διδασκαλίας για την εισαγωγή και την εκτέλεση προσθέσεων και αφαιρέσεων. Ωστόσο, δεν αναγνωρίζουν όλοι οι εκπαιδευτικοί τη σημασία της χρήσης των δακτύλων, ενώ ορισμένοι την εκλαμβάνουν ως δυσκολία εκ μέρους του μαθητή. Σε κάθε περίπτωση, οι εκπαιδευτικοί πρέπει να γνωρίζουν καλά τις διαδικασίες και τις στρατηγικές που χρησιμοποιεί το παιδί στην εκτέλεση νοερών υπολογισμών, ώστε να καταλάβουν γιατί οι μαθητές χρησιμοποιούν τα δάχτυλα και με ποιον τρόπο (Λεμονίδης, 1994).

Στο άρθρο των Boaler, Chen, Williams & Cordero (2016) αναφέρεται ότι ακόμα και όταν κάποιος εκτελεί έναν υπολογισμό χωρίς τα δάχτυλά του, ο νους δημιουργεί αναπαράσταση του υπολογισμού αυτού με τα δάχτυλα. Σε άλλο σημείο του άρθρου, δηλώνεται πως επιστήμονες διαπίστωσαν ότι η χρήση των δακτύλων συνδέεται με τον κιναισθητικό φλοιό του εγκεφάλου. Επιπλέον, έρευνες έδειξαν πως, όταν εξάχρονα παιδιά βελτίωσαν την ικανότητα αναπαράστασης με δάχτυλα, βελτίωσαν και τις αριθμητικές τους ικανότητες. Επομένως, δε θα πρέπει να υπάρχει δυσπιστία σχετικά με τη χρήση των δακτύλων στα Μαθηματικά.

Παρά τα ποικίλα οφέλη της χρήσης των χειραπτικών υλικών, δεν είναι πάντα αποτελεσματικά στην εκπαιδευτική διαδικασία. Οι μαθητές μπορούν εύκολα να παρασυρθούν και να αντιμετωπίσουν τα υλικά περισσότερο ως παιχνίδι παρά ως εκπαιδευτικό εργαλείο. Επιπρόσθετα, όπως έχει ήδη αναφερθεί, κανένα μοντέλο δεν απεικονίζει από μόνο του μια έννοια, αλλά το μυαλό επιβάλλει τη μεταξύ τους σχέση (Van de Walle, 2005). Επομένως, εναπόκειται στον εκπαιδευτικό πώς θα ενσωματώσει τα χειραπτικά υλικά στη διδασκαλία του, πώς θα βοηθήσει τους μαθητές του να μεταβούν ομαλά από όλα τα στάδια αναπαράστασης και πώς θα καταφέρει να πετύχει τη σύνδεση ανάμεσα στα υλικά, στις αφηρημένες μαθηματικές έννοιες και στα επιθυμητά μαθησιακά αποτελέσματα.

2.3.3.2 ΤΑ ΨΗΦΙΑΚΑ ΧΕΙΡΑΠΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Τα ψηφιακά χειραπτικά υλικά είναι “διαδραστικές, διαδικτυακές, ψηφιακές αναπαραστάσεις ενός δυναμικού αντικειμένου που δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να κατασκευάσουν μαθηματική γνώση” (Moyer, Bolyard & Spikell.,2002,σ.373). Σύμφωνα με τους παραπάνω ερευνητές, για να θεωρηθούν οι ψηφιακές αναπαραστάσεις ψηφιακά, χειραπτικά υλικά, ο μαθητής θα πρέπει να μπορεί να τα μετακινεί, όπως θα έκανε με το τρισδιάστατο αντικείμενο. Έχουν, επίσης, χαρακτηριστεί ως δυναμικά οπτικά αντίγραφα των φυσικών χειραπτικών υλικών και είναι διαθέσιμα στο διαδίκτυο, ως μικροεφαρμογές ή μικρότερες εκδόσεις εφαρμογών (Reimer & Moyer, 2005).

Σε άλλον ορισμό των Bartolini & Martignone (2014), τα ψηφιακά χειραπτικά υλικά χαρακτηρίζονται ως ψηφιακές δημιουργίες που μοιάζουν πολύ με τα φυσικά αντικείμενα, λειτουργούν με το ποντίκι και με τρόπο χρήσης αντίστοιχο με αυτόν τον φυσικών αντικειμένων.

Εύκολα θα μπορούσε κανείς να αντιληφθεί τα οφέλη και τη δημοφιλία των υλικών αυτών από τους μαθητές. Τα ψηφιακά χειραπτικά υλικά έχουν απεριόριστη, δωρεάν πρόσβαση και προσφέρουν τη δυνατότητα διάδρασης, επεξεργασίας και τροποποίησης των υλικών. Για παράδειγμα, ένας μαθητής μπορεί να αλλάξει το μέγεθος και το χρώμα ενός σχήματος, να μετακινήσει εικονικές μπίλιες ή να κρατήσει σημειώσεις με ψηφιακό μολύβι. Περαιτέρω, τα ψηφιακά χειραπτικά υλικά παρέχουν άμεση ανατροφοδότηση και οδηγίες, είναι σχεδιασμένα σε ευχάριστο ψηφιακό περιβάλλον, συνδυάζουν ήχο και εικόνα και έχουν συχνά παιγνιώδη χαρακτήρα.

Τα μεγαλύτερα, όμως, οφέλη είναι γνωστικά. Τα ψηφιακά χειραπτικά υλικά λειτουργούν σαν σύνδεσμος ανάμεσα στο πραξιακό, το εικονικό και το συμβολικό στάδιο, βοηθώντας τους μαθητές να κάνουν συνδέσεις ανάμεσα στις διάφορες αναπαραστάσεις και αυτές να γίνονται ορατές σε εκείνους (Moyer-Packenham, Salkind, & Bolyard, 2008). Η σύνδεση αυτή γίνεται με την ταυτόχρονη παρουσίαση των διαφορετικών αναπαραστάσεων. Τα εικονικά χειραπτικά υλικά, όπως τα αποκαλεί ο Λεμονίδης (2017), συνδυάζουν εικόνες, σύμβολα και γλώσσα, αναπτύσσοντας έτσι τη δυνατότητα οπτικοποίησης των μαθητών (Λεμονίδης, 2017).

Παραπάνω αναλύθηκε η αξία των πολλαπλών μορφών αναπαράστασης. Η δυνατότητα του μαθητή να μπορεί να ερμηνεύει διαφορετικές αναπαραστάσεις επηρεάζει την ικανότητα του να μοντελοποιεί και να κατανοεί τις μαθηματικές έννοιες (Goldin & Shteingold, 2001). Ως εκ τούτου, το γεγονός ότι τα ψηφιακά χειραπτικά υλικά συνδυάζουν κίνηση, εικόνα, σύμβολα και αριθμούς επιτρέπει την ταυτόχρονη πρόσληψη και επεξεργασία των ερεθισμάτων, τη σωστή ερμηνεία τους, την πολύπλευρη εξερεύνηση των μαθηματικών εννοιών και τέλος, συμβάλλει στη βαθύτερη κατανόησή τους.

Έρευνες που έχουν γίνει σχετικά με την αποτελεσματικότητα των αναπαραστάσεων με ψηφιακά χειραπτικά εργαλεία σε σύγκριση με χειραπτικά εργαλεία δεν έδειξαν μεγάλες διαφοροποιήσεις (Moyer-Packenham & Westenskow, 2013) Από αυτό εξάγεται το συμπέρασμα ότι, παρά την έλλειψη της επαφής και της φυσικής αλληλεπίδρασης με το αντικείμενο που ενδεχομένως να στερεί από τον μαθητή μια επιπλέον μορφή αναπαράστασης, τα ψηφιακά χειραπτικά αντικείμενα είναι εξίσου λειτουργικά στην εκπαιδευτική διαδικασία με τα χειραπτικά υλικά και μπορούν να τα αντικαταστήσουν επάξια.

2.3.4 ΟΙ ΕΙΚΟΝΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Οι εικονικές αναπαραστάσεις είναι οπτικές, στατικές αναπαραστάσεις χειραπτικών υλικών που βοηθούν τους μαθητές να σχηματίζουν τις μαθηματικές έννοιες. Σύμφωνα με τον Arcavi (2003, σ.217), έχουμε τον παρακάτω **ορισμό**:

> *Οπτικοποίηση είναι η ικανότητα, η διαδικασία και το προϊόν της δημιουργίας, της ερμηνείας, της χρήσης και της σκέψης πάνω στις φωτογραφίες, τις εικόνες και τα διαγράμματα, στο μυαλό μας, σε χαρτί ή με τα τεχνολογικά εργαλεία, με σκοπό την απεικόνιση, την επικοινωνία πληροφοριών, τη σκέψη και την ανάπτυξη προηγουμένως αγνώστων ιδεών και την προώθηση της κατανόησης.*

Οι εικονικές αναπαραστάσεις κατηγοριοποιούνται με διάφορους τρόπους. Ένας από αυτούς είναι ο διαχωρισμός στις εξωτερικές και στις εσωτερικές εικονικές αναπαραστάσεις. Οι εξωτερικές εικονικές αναπαραστάσεις είναι οι εικόνες, τα διαγράμματα, τα γραφήματα και οι αριθμογραμμές. Συγκεκριμένα, οι εικόνες είναι η πιο συχνή μορφή οπτικής αναπαράστασης και έχουν συχνά επεξηγηματικό ρόλο. Στις εικόνες συγκαταλέγονται οι χάρτες, οι φωτογραφίες, τα σχέδια, τα σχήματα και οι φωτογραφίες (Woolner et al., 2010). Οι εσωτερικές εικονικές αναπαραστάσεις δεν είναι τόσο εύκολο να μοντελοποιηθούν, καθώς αποτελούν νοητικές κατασκευές του ατόμου και απαιτούν τη δημιουργία ή την ανάκληση μιας εικόνας, προκειμένου αυτή να αναπαραστήσει μια πληροφορία (Matheson & Hutchinson, 2014).

Η χρήση εικονικών αναπαραστάσεων βοηθά τους μαθητές να μάθουν και να κατανοήσουν αφηρημένες έννοιες Μαθηματικών και να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα. Ο σκοπός της εικονικής αναπαράστασης είναι η ακριβής απεικόνιση των μαθηματικών ποσοτήτων και σχέσεων ενός συγκεκριμένου προβλήματος και η διευκόλυνση των διαδικασιών επαλήθευσης, με στόχο τη σωστή επίλυσή του. Οι τρόποι αναπαράστασης, που επιτρέπουν την αποτελεσματική μετάφραση ή την ερμηνεία των πληροφοριών στα λεκτικά αριθμητικά προβλήματα, διευκολύνουν την επίλυσή τους (Jitendra & Hoff, 1996).

Η χρήση χειραπτικών και εικονικών παραστάσεων είναι απαραίτητη όχι μόνο για μαθητές με μαθησιακές δυσκολίες ή μαθητές Δημοτικού, αλλά για τους μαθητές όλων των βαθμίδων (Wittmann, 1998). Όποια μορφή αναπαράστασης κι αν επιλέξει ο εκπαιδευτικός για το μάθημά του, πρέπει να γνωρίζει ότι οι μαθητές δεν αντιλαμβάνονται πάντα τις αναπαραστάσεις με τον αναμενόμενο τρόπο. Για τους μαθητές, οι αναπαραστάσεις μπορεί να αποκτούν διαφορετικό νόημα ή να μην οδηγούν στον προσδοκώμενο βαθμό κατανόηση μιας έννοιας. Επομένως, οι εκπαιδευτικοί οφείλουν να στηρίξουν τους μαθητές τους και να τους διδάξουν να ερμηνεύουν τις εικονικές αναπαραστάσεις με αποτελεσματικό τρόπο, ώστε να υποστηρίξουν την πρόοδο τους στη μετάβαση ανάμεσα στις διαφορετικές αναπαραστάσεις (Barmby,Bolden,Raine & Thompson, 2013).

2.3.4.1 Η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗΣ

Μία ιδιαίτερη περίπτωση οπτικής αναπαράστασης είναι η αριθμογραμμή. Η αριθμογραμμή, ως εκπαιδευτικό εργαλείο, δίνει τη δυνατότητα οπτικοποίησης των αριθμών και των πράξεών τους. Έχει επινοηθεί με βάση τον άξονα των πραγματικών αριθμών και αποτελεί έναν ιδιαίτερο τρόπο αναπαράστασης του αριθμού. Η χρήση της συμβάλλει στην πληρέστερη κατανόηση των αριθμών και των πράξεών τους (Μπαραλής, 2017).

Η συμβολή της αριθμογραμμής ως εποπτικό υλικό είναι καθοριστική για την κατανόηση πολλών μαθηματικών εννοιών (Lemonidis & Golfos, 2020). Η Σκουμπουρδή (2008) σε άρθρο της παραθέτει μερικά παραδείγματα χρήσης της αριθμογραμμής από διάφορους μελετητές. Ειδικότερα, μέσω της μονής, διπλής, κάθετης, συμπληρωμένης ή ημι-συμπληρωμένης αριθμογραμμής, γίνεται αναπαράσταση των αριθμών και των τεσσάρων πράξεων (Chazan & Ball, 1999; Kilpatrick et al., 2001; Wiegel, 1998), του πολλαπλασιασμού ως επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης (Elia & Gagatsis, 2003; Fuys & Liebov, 1993) και ως αναλογίας (Wallace & Gurganus, 2005). Επίσης, η αναπαράσταση της αριθμογραμμής, χρησιμοποιείται για την καταγραφή των εκτιμήσεων των μαθητών (Onslow et al., 2005), για τη μέτρηση του μήκους (Gravemeijer & Stephan, 2002) και του χρόνου (Moone & Groot, 2005; Warfield, 2001), για την καταγραφή της χρονικής σειράς γεγονότων (Kastberg, 2005) καθώς και για την ανάπτυξη της έννοιας του κλάσματος (Χαραλάμπους & Πίττα-Πανταζή, 2005). Η ερευνήτρια συμπληρώνει πως “η αριθμογραμμή προσφέρει τη δυνατότητα οργάνωσης της σκέψης για τους αριθμούς και τις θέσεις τους όσο και στη μέτρηση ποσοτήτων και μεγεθών διευκολύνοντας τον συλλογισμό και τη λύση και οδηγώντας στην ανάδυση απλών και σύνθετων στρατηγικών” (Σκουμπουρδή, 2008,σ.69).

Η αριθμογραμμή αποτελεί μια γεωμετρική ερμηνεία του αριθμού, μια αναπαράσταση ευθείας γραμμής που είναι χωρισμένη σε διαστήματα μιας γραμμικής μονάδας και περιλαμβάνει ένα σύνολο από μαθηματικές συμβάσεις (Saxe et al, 2010;2013). Οι συμβάσεις αυτές είναι η χρήση σημείων για το χώρισμα της σε διαστήματα, η τοποθέτηση των αριθμών από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο, από τα αριστερά προς τα δεξιά και η χρήση αριστερού και δεξιού βέλος που δείχνει ότι οι αριθμοί συνεχίζονται.

Βασικό στοιχείο της αριθμογραμμής είναι η απεικόνιση της διάταξης των φυσικών αριθμών, οι οποίοι εκτείνονται από τα αριστερά προς τα δεξιά πάνω στην ευθεία, ανάλογα με το πλήθος των μονάδων τους. Οι αριθμοί αυξάνονται προς τα δεξιά και μειώνονται προς τα αριστερά. Η αρχή της αριθμογραμμής είναι ένα σημείο στο οποίο τοποθετείται το μηδέν (0), αλλά η αριθμογραμμή εκτείνεται απεριόριστα προς τα δεξιά, αφού δεν υπάρχει τελευταίος φυσικός αριθμός. Η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών φυσικών αριθμών είναι ένα μοναδιαίο τμήμα. Αυτό σημαίνει πως κάθε μη μηδενικός φυσικός αριθμός έχει στα αριστερά του τον κατά μία μονάδα μικρότερο προηγούμενό του αριθμό και στα δεξιά του τον κατά μία μονάδα μεγαλύτερο επόμενό του αριθμό (Μπαραλής, 2017; Χατζηκυριάκου, 2008).

Μια άλλη εκδοχή της αριθμογραμμής είναι η άδεια αριθμογραμμή. Η άδεια αριθμογραμμή είναι ισχυρό εργαλείο για την εκτέλεση των νοερών υπολογισμών. Πρόκειται για μια μη διαβαθμισμένη ευθεία που βοηθά την καταγραφή και την αναπαράσταση των στρατηγικών των μαθητών κατά τη χρήση του νοερού λογισμού (Κολέζα, 2009). Άλλη χρήση της άδειας αριθμογραμμής είναι η εκτέλεση υπολογισμών (Diezmann, Lowrie & Sugars, 2010). Τέλος, οι Klein, Beishuizen & Treffers (1998) αναφέρουν ότι η άδεια αριθμογραμμή διευκολύνει τους μαθητές να καταλάβουν ποια διαδικασία έχουν ακολουθήσει, για να εκτελέσουν μια πράξη, καταγράφοντας τις ενέργειες που έχουν γίνει και πρόκειται να γίνουν, μέχρι την επίλυση της πράξης.

2.3.5 ΟΙ ΣΥΜΒΟΛΙΚΕΣ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

Οι συμβολικές αναπαραστάσεις περιλαμβάνουν σύμβολα και αριθμούς για να αναπαραστήσουν μαθηματικές ιδέες και έννοιες. Ο Hiebert (1988) όρισε τα σύμβολα ως "οντότητες που αντιπροσωπεύουν ή αντικαθιστούν κάτι άλλο" (Hiebert, 1988,σ.334). Οι οντότητες αυτές μπορούν να πάρουν διάφορες μορφές, από χειραπτικά αντικείμενα μέχρι γραπτά σύμβολα στο χαρτί.

Σύμφωνα με τον Hiebert, οι μαθητές διέρχονται κάποια στάδια μέχρι να αποκτήσουν ευχέρεια στη χρήση των μαθηματικών συμβόλων. Αρχικά, οι μαθητές πρέπει να μπορούν να αντιστοιχίζουν τα σύμβολα με το πλήθος των αντικειμένων που αναπαριστούν. Για παράδειγμα, αν έχουμε δύο σύνολα από πέντε και τρία μολύβια, πρέπει να μπορούν να αναγνωρίζουν το πλήθος και να το αντιστοιχίζουν με τους αριθμούς πέντε (5) και τρία (3), ενώ πρέπει να αναγνωρίζουν το σύμβολο + για την πρόσθεση των δύο αυτών συνόλων. Στη συνέχεια, χρειάζεται να αναπτύξουν διαδικασίες χειρισμού συμβόλων και αλγορίθμων και μετά, πρέπει οι μαθητές να συνηθίσουν αυτές τις διαδικασίες. Ακολουθεί η ανάπτυξη ευελιξίας στη χρήση του αλγορίθμου της πρόσθεσης και τέλος, αυτά τα σύμβολα και κανόνες να χρησιμοποιούνται ως σημείο αναφοράς για πιο αφηρημένα συστήματα, για παράδειγμα, η πρόσθεση φυσικών αριθμών να χρησιμοποιηθεί σαν βάση για την πρόσθεση των κλασμάτων (Pape & Tchoshanov, 2001).

Για τον Bruner, ο στόχος για τα Μαθηματικά είναι η μετάβαση από τη συγκεκριμένη στην αφηρημένη κατάσταση. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρει ο Bruner, "αν ένα παιδί ασχολείται με μαθηματικές ιδιότητες , πρέπει να μάθει τα σύμβολα αυτά καθαυτά, αλλιώς θα περιοριστεί σε πολύ στενά όρια της άμεσης διδασκαλίας των συμβόλων" (Bruner, 1966, σ.63). Το συμβολικό στάδιο είναι, κατά τον Bruner, το τελευταίο στάδιο αναπαραστάσεων και σηματοδοτεί την απομάκρυνση από τις αισθητηριακές εμπειρίες, όμως δεν υπερέχει ποιοτικά των δύο προηγουμένων σταδίων (Leong, Ho & Cheng, 2015). Εξάλλου, είναι γεγονός ότι ο Bruner θεωρεί εξίσου σημαντικές τις τρεις μορφές αναπαράστασης και αντιμετωπίζει με ευελιξία τη σειρά των τριών σταδίων, λαμβάνοντας υπόψη τη φύση του μαθήματος, την ανάπτυξη των μαθητών, τις προηγούμενες εμπειρίες και τις ατομικές ιδιαιτερότητες και προτιμήσεις (Presno, 1997).

Ωστόσο, συχνά στις σχολικές αίθουσες συναντώνται δύο ακραίες περιπτώσεις: α) η μακρόχρονη παραμονή των μαθητών στο πραξιακό και εικονικό στάδιο και β) η απευθείας μετάβαση στο συμβολικό στάδιο. Όταν ένας μαθητής προσεγγίζει τις μαθηματικές έννοιες σχεδόν αποκλειστικά με αντικείμενα και εικόνες, δεν μπορεί να θεωρηθεί πως διδάσκεται Μαθηματικά. Αντίστοιχα, η παράλειψη των προαναφερθεισών μορφών αναπαράστασης και η άμεση μετάβαση στις συμβολικές αναπαραστάσεις, στερεί από τους μαθητές εκπαιδευτικές εμπειρίες και εναλλακτικούς τρόπους επίλυσης ενός προβλήματος. Για παράδειγμα, αν ένας μαθητής δυσκολεύεται να λύσει ένα πρόβλημα με σύμβολα και αριθμούς, οι οπτικές αναπαραστάσεις αποτελούν μια καλή εναλλακτική λύση. Σε αυτή την περίπτωση, οι διαφορετικές μορφές αναπαράστασης λειτουργούν ως “δικλείδα ασφαλείας” για τους μαθητές.

Όποια σειρά αναπαραστάσεων και να ακολουθήσει έναν μαθητής στην εκπαιδευτική διαδικασία, είναι πολύ σημαντικό να κατανοηθούν η αντιστοιχία και οι σχέσεις μεταξύ των τριών σταδίων, ώστε να μη γίνουν αντιληπτές από τον μαθητή ως τρεις ασύνδετες μεταξύ τους διαδικασίες και η μετάβαση από το ένα στάδιο στο άλλο να περιλαμβάνει τη μαθηματική έννοια που διδάσκεται (Gersten et al., 2005).

2.3.6. ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ CRA

Ένα μοντέλο που βασίζεται στη θεωρία του Bruner σχετικά με τα στάδια γνωστικής ανάπτυξης είναι το μοντέλο CRA (Concrete-Representational-Abstract). Η μέθοδος αυτή εμπλέκει διαδικαστική και εννοιολογική μάθηση και βοηθά τους μαθητές να κάνουν στο μυαλό τους γνωστικές συνδέσεις. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, οι δραστηριότητες των μαθητών διέρχονται από πραξιακό, εικονιστικό και συμβολικό επίπεδο, προκειμένου εκείνοι να κατανοήσουν βαθύτερα τις μαθηματικές σχέσεις. Το μοντέλο αυτό είναι δημοφιλές για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε μικρές ηλικίες, αλλά και για άτομα που αντιμετωπίζουν μαθησιακές δυσκολίες σε διάφορα πεδία των Μαθηματικών (Eastburn, 2010).

Συγκεκριμένα, κατά το πραξιακό στάδιο, οι μαθητές προκειμένου να μάθουν μία νέα έννοια, χρησιμοποιούν τρισδιάστατα αντικείμενα. Η χρήση αυτών των αντικειμένων αυξάνει τον βαθμό αισθητοποίησης της διδασκόμενης έννοιας και διευκολύνει τον μαθητή να θυμάται τη διαδικασία με την οποία θα λύσει ένα πρόβλημα. Κατά το εικονιστικό στάδιο, οι μαθητές χρησιμοποιούν δισδιάστατα σχέδια, όπως εικόνες, διαγράμματα, για να αναπαραστήσουν μία έννοια. Το εικονιστικό περιλαμβάνει, επίσης, χρήση μεταγνωστικού τρόπου σκέψης, μέσα από ερωτήσεις, προτροπές και καθοδήγηση του εκπαιδευτικού. Σταδιακά, η καθοδήγηση υποχωρεί κι οι μαθητές αποκτούν τη σιγουριά της ανεξάρτητης δράσης και της ελεύθερης πρακτικής στο αφαιρετικό επίπεδο γνώσεων (Eastburn, 2010). Όταν το παιδί τελειοποιήσει αυτό το στάδιο, τα σχέδια και οι εικόνες διαδέχονται η αποκλειστική χρήση συμβόλων και αριθμών.

2.3.7 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΟΥ BRUNER ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ Α’ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ

Σχετικά με τη διδασκαλία των Μαθηματικών στην Α’ Δημοτικού, το μοντέλο των τριών μορφών αναπαραστάσεων του Bruner βρίσκει πλήρη αποδοχή και η εφαρμογή του συνιστάται στο βιβλίο Μαθηματικών Α’ Δημοτικού του δασκάλου. Συγκεκριμένα, το βιβλίο αναφέρει πως:

Πραγματοποιούμε τη σύνδεση και τη μετάδοση από διαφορετικές αναπαραστάσεις των αριθμών λαμβάνοντας υπόψη τις ικανότητες των μαθητών. Έτσι χρησιμοποιούμε: α) πραγματικά αντικείμενα (δίχρωμο αριθμητήριο, δάχτυλα, ζάρια κ.λπ.), β) εικόνες με αναπαραστάσεις αντικειμένων δακτύλων κ.λπ., γ) αναπαραστάσεις με τη χρήση συμβόλων σε οργανωμένη μορφή (ζάρι) ή όχι (σκόρπιες κουκκίδες, γραμμούλες) οι οποίες παρέχουν τη δυνατότητα καταμέτρησης, δ) αναπαραστάσεις με τη χρήση συμβόλων οι οποίες δεν παρέχουν τη δυνατότητα καταμέτρησης (αριθμοί-λέξεις και ψηφία). (Λεμονίδης, Θεοδώρου, Καψάλης & Πνευματικός, 2006, σ. 9).

Στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών για το επιστημονικό πεδίο των Μαθηματικών (2011), συναντάται και πάλι το μοντέλο του Bruner σχετικά με τις τρεις μορφές αναπαράστασης και τονίζεται η σημασία της χρήσης των χειραπτικών υλικών όχι απλά ως αντικείμενα, αλλά ως εκπαιδευτικά εργαλεία που προωθούν την εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών. Συγκεκριμένα:

Οι μαθητές χρειάζεται να αποκτήσουν την ικανότητα να χρησιμοποιούν κατάλληλα χειραπτικά και ψηφιακά εργαλεία, και τις κατάλληλες υπολογιστικές στρατηγικές προκειμένου να εκτελούν συγκεκριμένες μαθηματικές δράσεις, να διερευνούν μαθηματικές ιδέες, και να επιλύουν προβλήματα. Με τα εργαλεία επεκτείνουν τις ικανότητές τους να διερευνούν και να αναλύουν μαθηματικές έννοιες, να εξερευνούν μαθηματικές κανονικότητες, να κατανοούν γεωμετρικές σχέσεις καλλιεργώντας ή αμφισβητώντας τη διαίσθησή τους .

Σε άλλο σημείο του Νέου Προγράμματος Σπουδών, αναφέρονται με σαφήνεια όλες οι μορφές αναπαράστασης τις οποίες μελέτησε ο Bruner. Το ανωτέρω πρόγραμμα διευκρινίζει πως:

> *Οι μαθητές κυρίως με τα χειραπτικά υλικά αναπαριστούν μαθηματικές ιδέες και σχέσεις και μοντελοποιούν καταστάσεις χρησιμοποιώντας συγκεκριμένα υλικά, εικόνες, διαγράμματα (π.χ. αριθμογραμμή), γραφήματα, πίνακες, σύμβολα. Η χρήση αναπαραστάσεων τους βοηθά να κατανοήσουν τις μαθηματικές έννοιες και σχέσεις, να επικοινωνήσουν τη σκέψη τους, να εκφράσουν επιχειρήματα, και να ερμηνεύσουν πραγματικές καταστάσεις. Τα ψηφιακά εργαλεία ενισχύουν αυτές τις συνδέσεις καθώς εμπεριέχουν διασυνδεδεμένες αναπαραστάσεις α) μαθηματικού φορμαλισμού, β) κειμενικού λόγου, γ) μαθηματικών αναπαραστάσεων – γραφικών, σχηματικών, πινάκων κ.λπ. δ) προσομοιώσεων φαινομένων με μαθηματική συμπεριφορά – ιδιότητες* (Νέο Πρόγραμμα Σπουδών,2011, σ.28).

Επιπροσθέτως, στο Αναλυτικό Πρόγραμμα Σπουδών (2003) για το μάθημα των Μαθηματικών της Α' Δημοτικού, στη στήλη των ενδεικτικών δραστηριοτήτων, μπορεί να διακρίνει κανείς πλήθος από χειραπτικά υλικά, όπως ζάρια, ζυγαριά, αριθμητήριο, δάχτυλα, παζλ, καλαμάκια και πλαστελίνες για τα γεωμετρικά στερεά και σχήματα. Προτείνονται, επίσης, εικονικές αναπαραστάσεις, όπως η αριθμογραμμή και εποπτικά μέσα που δείχνουν “για παράδειγμα, το 6 ως 5+1, το 8 ως 5+3”, καθώς και καρτέλες στις οποίες υπάρχουν αναπαραστάσεις με εικόνες. Ακόμη, στις ενδεικτικές δραστηριότητες περιλαμβάνονται και συμβολικές αναπαραστάσεις, όπως είναι κάρτες με λέξεις και σύμβολα, προβλήματα και δραστηριότητες που οδηγούν στη συμβολική γραφή της πρόσθεσης και της ισότητας. Η πιο αντιπροσωπευτική δραστηριότητα του Αναλυτικού Προγράμματος που αποδίδει επακριβώς τα τρία στάδια γνωστικής ανάπτυξης του Bruner και τις τρεις μορφές αναπαράστασης είναι η “παρουσίαση των αριθμών με αντικείμενα, με συστοιχίες κουκίδων (ζάρι) και με ψηφία” (Αναλυτικό Πρόγραμμα, 2003, σ.255).

Συνεπώς, το μοντέλο των τριών μορφών αναπαραστάσεων του Bruner είναι κοινώς αποδεκτό και αποτελεσματικό στην εκπαιδευτική διαδικασία, καθώς συστήνεται στα σχολικά βιβλία και προγράμματα σπουδών.

2.4 Ο ΝΟΕΡΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

2.4.1 ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΗ ΟΡΙΟΘΕΤΗΣΗ ΤΟΥ ΝΟΕΡΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Χωρίς να ανατρέξει κάποιος στη βιβλιογραφία, αντιλαμβάνεται πως ο νοερός λογισμός είναι ο τρόπος υπολογισμού ή η διαδικασία επίλυσης μιας άσκησης που πραγματοποιείται με τον νου, χωρίς τη χρήση άλλου μέσου, όπως αριθμομηχανή, χαρτί και μολύβι. Οι διάφοροι ορισμοί που έχουν δοθεί κατά καιρούς από ερευνητές οδηγούν στο συμπέρασμα πως πρόκειται για μια έννοια που δεν μπορεί να οριστεί με σαφήνεια. Ωστόσο, όλες οι προσπάθειες ορισμού της έννοιας περιγράφουν πλήρως τις διαστάσεις του νοερού λογισμού.

Ο Λεμονίδης (2013, σ.25) ορίζει τον νοερό λογισμό ως τον "υπολογισμό που πραγματοποιείται νοερά και με τη χρήση στρατηγικών. Παράγει μια ακριβή απάντηση. Πραγματοποιείται συνήθως χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων όπως χαρτί και μολύβι, αν και μπορεί να χρησιμοποιείται το χαρτί και το μολύβι, για σύντομες σημειώσεις που υποστηρίζουν τη μνήμη". Σύμφωνα με μία άλλη προσέγγιση, η Maclellan (2001), παρόλο που υποστήριξε ότι ο ορισμός του νοερού λογισμού δεν μπορεί να είναι σαφής, ερμήνευσε την έννοια αυτή ως τη διαδικασία εκτέλεσης αριθμητικών πράξεων για την παραγωγή ενός ακριβούς αποτελέσματος. Κατά την ίδια ερευνήτρια, ο συνειδητός αριθμητικός υπολογισμός και η αποτελεσματική εκτέλεση νοερών πράξεων αποτελούν σύνθετες μεταγνωστικές διαδικασίες που συνδέονται στενά με τις γνώσεις και τις δεξιότητες του ατόμου. Άλλη ερευνήτρια, η Sowder (1990) ορίζει και εκείνη τον νοερό λογισμό ως τον υπολογισμό ενός αριθμητικού αποτελέσματος με τον νου, ωστόσο διευκρινίζει πως μπορεί να συνδυαστεί με τη χρήση αριθμομηχανής ή χαρτιού και μολυβιού.

Πέρα από το μέσο υπολογισμού μιας αριθμητικής πράξης, οι ορισμοί του νοερού λογισμού συγκλίνουν στο γεγονός της ακρίβειας του αριθμητικού αποτελέσματος. Για τους Wandt και Brown (1957), ο νοερός λογισμός αποτελεί τον υπολογισμό ενός αριθμητικού αποτελέσματος με ακρίβεια και χωρίς τη χρήση εξωτερικού μέσου. Σε παρόμοιο ορισμό καταλήγουν και οι McIntosh et al. (1997), υποστηρίζοντας ότι ο νοερός λογισμός είναι ο υπολογισμός μιας αριθμητικής πράξης με ακρίβεια και χωρίς τη χρήση εξωτερικών εργαλείων. Τέλος, οι ορισμοί των Reys R. (1984) και Reys B. (1985) συνοψίζουν τα δύο βασικά συστατικά των νοερών υπολογισμών: α) της ακριβούς απάντησης και β)της νοερής απάντησης, χωρίς εξωτερικά μέσα.

2.4.2 Η ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΟΥ ΝΟΕΡΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Τα παιδιά, πριν ακόμα ξεκινήσουν το σχολείο, έχουν αναπτύξει από μόνα τους άτυπες στρατηγικές, με βάση τις οποίες μπορούν να λύνουν μαθηματικά προβλήματα, συχνά με τη βοήθεια αναπαραστάσεων με αντικείμενα και δάχτυλα (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008). Οι πρώιμες αυτές στρατηγικές θα πρέπει μετά να αξιοποιούνται κατάλληλα από τους εκπαιδευτικούς και να ενσωματώνονται στην εκπαιδευτική διαδικασία, έτσι ώστε να γίνει ομαλά η μετάβαση σε πιο αφηρημένο τρόπο σκέψης και στον νοερό λογισμό. Η εξελικτική πορεία από τις πρακτικές ενέργειες των μαθητών στον νοερό λογισμό είναι μείζονος σημασίας. Οι λόγοι που καθιστούν επιβεβλημένη την ανάγκη της καλλιέργειας του νοερού λογισμού, ήδη από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού, είναι αρκετοί και σημαντικοί:

● **<u>Νοεροί υπολογισμοί και αίσθηση του αριθμού</u>:** Σύμφωνα με τους McIntosh et al. (1992, σ.3), η αίσθηση του αριθμού είναι "η γενική κατανόηση των αριθμών και των πράξεων από ένα άτομο, μαζί με την ικανότητα και την τάση να χρησιμοποιεί την ικανότητα αυτή με ευέλικτους τρόπους, ώστε να αναπτύξει χρήσιμες και αποτελεσματικές στρατηγικές για τη διαχείριση αριθμών και πράξεων". Οι μαθητές στην προσπάθειά τους να λύσουν γρήγορα και εύκολα τους υπολογισμούς, ανακαλύπτουν τις ιδιότητες και τις σχέσεις των αριθμών. Όσοι εκπαιδευόμενοι διαθέτουν ανεπτυγμένη την αίσθηση του αριθμού, δε λύνουν μηχανικά μια πράξη, εφαρμόζοντας μηχανικά κάποιους κανόνες, αλλά μαθαίνουν και κατανοούν βαθιά τις αρχές των Μαθηματικών πίσω από τις πράξεις (Gusty, 2005).

Ένας μαθητής που έχει αναπτύξει την αίσθηση του αριθμού συνδέει τους αριθμούς με καταστάσεις από την πραγματική ζωή, δημιουργεί κατάλληλες αναπαραστάσεις για τις αριθμητικές πράξεις, κατανοεί την ανάλυση και τη σύνθεση των αριθμών, καθώς και των μεταξύ τους σχέσεων, εκτελεί σωστά τα βήματα του αλγόριθμου, χρησιμοποιεί τις κατάλληλες στρατηγικές και εκτελεί υπολογισμούς με ακρίβεια (Χρήστου, 2016).

Ένας αποτελεσματικός τρόπος ανάπτυξης της αίσθησης του αριθμού είναι η ανάπτυξη του νοερού λογισμού, καθώς με τους νοερούς υπολογισμούς οι μαθητές καταλαβαίνουν τι πραγματικά σημαίνουν οι αριθμοί (Sowder, 1990). Ο νοερός λογισμός προάγει την καλλιέργεια της αίσθησης του αριθμού μέσα από την ανάπτυξη της κατανόησης του τρόπου με τον οποίο λειτουργούν οι αριθμοί και σχετίζονται μεταξύ τους (Sowder, 1990). Η εξάσκηση στους νοερούς λογισμούς εξασφαλίζει βαθύτερη κατανόηση της αίσθησης του αριθμού, σε συνάρτηση πάντα με την ηλικία και τις γνώσεις των μαθητών. Θα μπορούσε να ειπωθεί πως οι νοεροί υπολογισμοί εξαρτώνται άμεσα από την αίσθηση του αριθμού και αποτελούν είναι υποσύνολο της έννοιας (Λεμονίδης, 2016).

● **<u>Νοεροί υπολογισμοί και σχέσεις των αριθμών</u> :** Οι σχέσεις των αριθμών είναι από τις πιο σημαντικές έννοιες αναφορικά με τους αριθμούς και τις ποσότητες και εμπεριέχονται στην αίσθηση του αριθμού. Απέχουν πολύ από τις δεξιότητες αρίθμησης. Η στρατηγική της αρίθμησης, αν και είναι περισσότερο οικεία στους μικρούς μαθητές, δεν επιτρέπει την αντίληψη των αριθμών ως ποσότητες, καθώς και τη μεταξύ τους συσχέτιση. Οι σχέσεις των αριθμών αφορούν στη δυνατότητα πολλαπλής και ευέλικτης αναπαράστασης μιας ποσότητας. Για παράδειγμα, ο αριθμός 6 ισούται με 1 και 5 ή είναι το διπλάσιο του αριθμού 3 ή το μισό του αριθμού 12. Προκειμένου να γίνουν κατανοητές οι έννοιες του αριθμού και της ποσότητας, χρειάζεται οι μαθητές να κατακτήσουν τρία χαρακτηριστικά των σχέσεων των αριθμών:
α) την πληθικότητα, δηλαδή, την άμεση αναγνώριση του πλήθους των αντικειμένων χωρίς καταμέτρηση˙
β) τις σχέσεις "μέρους - όλου", που σημαίνει ότι οι μαθητές αναγνωρίζουν πως μια ποσότητα μπορεί να διασπαστεί σε μικρότερες ποσότητες και να συντεθεί από μικρότερες ποσότητες˙
γ) τις σχέσεις "περισσότερο - λιγότερο", που σταδιακά θα οδηγήσουν στο ερώτημα "πόσο περισσότερο ή λιγότερο" (Jung, Hartman, Smith & Wallace, 2013).
Αυτές τις σχέσεις δεν μπορούν να τις αντιληφθούν όλα τα παιδιά. Για αυτόν τον λόγο, είναι απαραίτητη η πλήρης και βαθιά κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων, ακόμα και για την αντίληψη πιο προηγμένων μαθηματικών εννοιών, όπως είναι η αξία θέσης (Baroody, 2004). Άρα, γίνεται αντιληπτό πως χωρίς τη βαθιά κατανόηση των αριθμητικών σχέσεων, είναι αδύνατη η εκτέλεση νοερών υπολογισμών.

●	**Νοεροί υπολογισμοί και γνωστικές δεξιότητες:** Οι νοεροί υπολογισμοί συμβάλλουν στην ανάπτυξη γνωστικών δεξιοτήτων. Όταν οι μαθητές παρακινούνται να εξηγήσουν τον τρόπο με τον οποίον σκέφτηκαν, να αναπαραστήσουν μια πράξη με διάφορους τρόπους, να βρουν εναλλακτικές λύσεις για την εκτέλεση μιας πράξης, αμέσως γίνεται αντιληπτό πως αυτοί αναπτύσσουν τη μεταγνωστική τους ικανότητα και την ευελιξία στον τρόπο σκέψης τους (Λεμονίδης, 2016). Είναι πολύ σημαντικό, κατά τη διδασκαλία, να αναδύονται οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μαθητές και να συζητούνται στην τάξη (Λεμονίδης, 2003). Όπως υποστηρίζει και ο French (1987), η αξία της εκτέλεσης νοερών λογισμών προκύπτει κατά κύριο λόγο από την επεξήγηση της μεθόδου που χρησιμοποιήθηκε, ειδάλλως, ο απλός έλεγχος της ορθότητας των απαντήσεων, χωρίς περαιτέρω εξήγηση, οδηγεί σε μαθησιακή αποτυχία.

●	**Νοεροί υπολογισμοί και ευελιξία:** Οι νοεροί υπολογισμοί ενισχύουν τα παιδιά, ώστε να επιλέξουν τις κατάλληλες στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων, κάνοντας υποθέσεις και γενικεύσεις (Heirdsfield & Cooper, 2004). Ανάλογα με τα δεδομένα του προβλήματος, η ευελιξία στον τρόπο σκέψης αποτελεί το αποτέλεσμα της λογικής επιλογής των στρατηγικών στους νοερούς υπολογισμούς (Λεμονίδης & Λυγούρας, 2008). Ο νοερός υπολογισμός αφορά στην ευελιξία και στη χρήση των μεθόδων που έχουν νόημα για το άτομο που κάνει τον υπολογισμό. Αυτό σημαίνει πως ένα άτομο θεωρείται ευέλικτο είτε όταν εκτελεί νοερούς υπολογισμούς με τη χρήση στρατηγικών είτε όταν επιλέγει τις κατάλληλες διαδικασίες επίλυσης, ανάλογα με τα αριθμητικά δεδομένα του εκάστοτε προβλήματος. Άρα, η ευελιξία είναι το κλειδί για την επιτυχία στη χρήση των νοερών υπολογισμών.

●	**Νοεροί υπολογισμοί και γραπτοί αλγόριθμοι:** Παρά το γεγονός ότι η Maclellan (2001) τονίζει την υπεροχή των νοερών υπολογισμών έναντι των γραπτών αλγορίθμων, καθώς οι τελευταίες μπορούν να λυθούν μηχανικά και διαδικαστικά, ενώ οι πρώτες απαιτούν μεταγνωστικό τρόπο σκέψης και εννοιολογική κατανόηση, οι νοεροί λογισμοί ενισχύουν την ανάπτυξη και την κατανόηση των γραπτών αλγορίθμων. Η αξία των αλγοριθμικών διαδικασιών έγκειται στο γεγονός ότι διευκολύνουν την εκτέλεση των ασκήσεων, αφήνοντας στο μυαλό περιθώρια για δραστηριότητες που απαιτούν μεγαλύτερη νοητική προσπάθεια (Van de Walle, 2005).

●	**Νοεροί υπολογισμοί και καθημερινότητα:** Οι νοεροί υπολογισμοί χρησιμοποιούνται συχνά στην καθημερινότητα. Χρησιμοποιούνται, δε, περισσότερο από τους γραπτούς, ενώ αν οι αριθμοί είναι μεγάλοι, οι νοεροί υπολογισμοί γίνονται κατ' εκτίμηση (Λεμονίδης, 2003). Οι Northcote & McIntosh (1999) διαπίστωσαν ότι το 85% των υπολογισμών που κάνουν οι ενήλικες στην καθημερινότητά τους γίνονται νοερά, παρά την εκτεταμένη χρήση της αριθμομηχανής. Αντίθετα, η χρήση των γραπτών υπολογισμών και της αριθμομηχανής αποδείχθηκε πολύ περιορισμένη (Dole & McIntosh, 2004).

2.4.3 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΝΟΕΡΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Στην καθημερινή γλώσσα, η λέξη “στρατηγική” χρησιμοποιείται για να δηλώσει την απόφαση για την εκτέλεση μιας ενέργειας με συγκεκριμένη σειρά πράξεων. Φαίνεται λοιπόν ότι μια νοερή στρατηγική υπολογισμού είναι μια “νοερή μέθοδος” που θεωρείται ότι χρησιμοποιείται ως αποτέλεσμα μιας απόφασης (Threlfall, 2009). Στη γλώσσα των Μαθηματικών, ως στρατηγικές νοούνται οι διάφοροι τρόποι που μπορεί να χρησιμοποιήσει κάποιος, για να υπολογίσει ένα απλό αριθμητικό πρόβλημα, νοερά (Threfall, 2000).

Ως στρατηγικές νοερού υπολογισμού νοούνται οι διαδικασίες εκείνες κατά τις οποίες το άτομο υπολογίζει με ακρίβεια το αριθμητικό αποτέλεσμα μιας πράξης, χωρίς τη χρήση εξωτερικού μέσου (Maclellan, 2001). Σύμφωνα με τον Thompson (1999), ως στρατηγικές νοερών υπολογισμών ορίζονται οι υπολογισμοί με την εφαρμογή γνωστών αριθμητικών γεγονότων ή γρήγορων υπολογισμών για τη λύση μιας πράξης, της οποίας το αποτέλεσμα είναι άγνωστο. Σε έναν άλλον ορισμό του, ο ίδιος ερευνητής χαρακτηρίζει τις στρατηγικές νοερών υπολογισμών ως νοητικές διεργασίες για την ανάπτυξη επίλυσης υπολογισμών.

Οι στρατηγικές που χρησιμοποιούν οι μικροί μαθητές με αριθμούς μέχρι το 20 χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: α) στρατηγικές καταμέτρησης και β) στρατηγικές άμεσης ανάκλησης (Beishuizen, 1993; Thompson, 1999). Ο Thompson (1999) περιγράφει αυτές τις στρατηγικές για προσθέσεις και αφαιρέσεις μέχρι το 20. Οι στρατηγικές καταμέτρησης περιλαμβάνουν α) τη μέτρηση από τον πρώτο αριθμό, β) τη μέτρηση από τον μεγαλύτερο αριθμό, γ) μέτρηση από πίσω προς τα εμπρός, δ) την αντίστροφη μέτρηση και ε) τη συμπληρωματική μέτρηση. Στις στρατηγικές άμεσης ανάκλησης ανήκουν α) οι κοντινές δυάδες, β) η αφαίρεση ως αντίστροφο της πρόσθεσης, γ) η ανάλυση ενός αριθμού με βάση το 5, δ) το πέρασμα από τη δεκάδα, ε) η αντιστάθμιση και στ) η εξισορρόπηση. Από αυτές, οι στρατηγικές άμεσης ανάκλησης είναι νοεροί λογισμοί. Κατά τον Threlfall (2000), οι στρατηγικές καταμέτρησης όχι απλά δεν είναι αποδοτικές, δε θεωρούνται στρατηγικές.

Με βάση τον Beishuizen (1985), οι βασικές νοερές στρατηγικές πρόσθεσης και αφαίρεσης που χρησιμοποιούν περισσότερο οι μαθητές μετά την Α΄ Δημοτικού χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: α) σε στρατηγικές συσσώρευσης και β) σε στρατηγικές διαχωρισμού. Κατά τις στρατηγικές διαχωρισμού, οι όροι της πράξης διαχωρίζονται σε δεκάδες και μονάδες και υπολογίζονται μεταξύ τους, ξεχωριστά. Στις στρατηγικές συσσώρευσης, ο ένας όρος της πράξης μένει σταθερός και σε αυτόν προστίθενται ή αφαιρούνται οι δεκάδες και οι μονάδες του δεύτερου όρου. Επιπλέον, αντικείμενο μελέτης στη βιβλιογραφία έχουν αποτελέσει και οι ολιστικές στρατηγικές (Cooper et al.,1996). Μερικές από αυτές είναι η στρατηγική της αντιστάθμισης, η στρατηγική της εξισορρόπησης, το πέρασμα στη δεκάδα και η στρατηγική της αρίθμησης (Λεμονή & Χρήστου, 2019).

2.4.4 ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΕΣ ΓΝΩΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΝΟΕΡΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Ένα βασικό χαρακτηριστικό του νοερού λογισμού είναι ότι μπορεί να διδαχθεί και να αναπτυχθεί. Μάλιστα, η συστηματική διδασκαλία στρατηγικών νοερού λογισμού πρέπει να ξεκινάει από νεαρή ηλικία (Gusty, 2005). Για την επίτευξη αυτού του σκοπού πρέπει να πληρούνται κάποιες γνωστικές προϋποθέσεις.

Σύμφωνα με έρευνα των Dole & McIntosh (2004), η ευχέρεια στον νοερό λογισμό στηρίζεται στα βασικά αριθμητικά δεδομένα. Ως βασικά δεδομένα στην πρόσθεση είναι οι οι συνδυασμοί, όπου οι δύο προσθετέοι είναι μικρότεροι του αριθμού 10, ενώ επιδεξιότητα στα βασικά δεδομένα θεωρείται η άμεση απάντηση ενός παιδιού (σε λιγότερο από τρία δευτερόλεπτα), χωρίς να χρησιμοποιήσει μη αποδοτικούς τρόπους υπολογισμού, όπως η απαρίθμηση (Van de Walle, 2005).

Άλλες έρευνες χαρακτηρίζουν την άμεση ανάκληση βασικών αριθμητικών δεδομένων για την εκτέλεση νοερών λογισμών ως απαραίτητη δεξιότητα για τη χρήση του νοερού λογισμού (Sowder, 1988). Κατά τους Λεμονίδη και Λυγούρα (2008), ο νοερός λογισμός δε συνδέεται με τη βραχύχρονη μνήμη, καθώς τους χαρακτηρίζει η μεταγνωστική λειτουργία και επομένως, άτομα με ευχέρεια στους νοερούς υπολογισμούς ανακαλούν άμεσα από τη μακρόχρονη μνήμη γνωστές πράξεις.

Ο Λεμονίδης (2003), προκειμένου οι μαθητές να υιοθετήσουν κατάλληλες στρατηγικές για τον νοερό υπολογισμό απλών αριθμητικών πράξεων, δίνει έμφαση στην αθροιστική ανάλυση και σύνθεση των αριθμών, δηλαδή, στην ανάλυση και σύνθεση των αριθμών σε αθροίσματα, όπως είναι τα διπλά αθροίσματα (π.χ. 2+2) ή η ανάλυση των αριθμών με βάση τον αριθμό 10 (π.χ. 12=10+2) και ιδιαίτερα τα συμπληρώματα του αριθμού 10 (π.χ. 6+4). Έτσι, προτείνει να χρησιμοποιούν οι μαθητές αποτελέσματα που τους είναι γνωστά και αποθηκευμένα στη μνήμη τους, ώστε να υπολογίζουν άλλες πράξεις.

Υπάρχουν και άλλοι ερευνητές που ασχολήθηκαν με τις γνωστικές προϋποθέσεις για την εκτέλεση των νοερών υπολογισμών. Η Maclellan (2001) υπέδειξε ως απαραίτητη προαπαιτούμενη γνώση για την ανάπτυξη του νοερού λογισμού την ευχέρεια στον χειρισμό των βασικών δεδομένων και τη γνώση των σχέσεων μεταξύ των αριθμών, τη σύγκριση των αριθμών και την κατανόηση του συμπληρώματος με βάση τη δεκάδα. Περαιτέρω, ο Thompson (1999) θέτει και μία ακόμα παράμετρο ως προαπαιτούμενη γνώση για την εκτέλεση των νοερών υπολογισμών, τη γνώση ότι οι αριθμοί μπορούν να διασπαστούν σε μέρη.

Επομένως, συμπεραίνεται πως η άμεση ανάκληση γνωστών πράξεων και η επιδεξιότητα στα βασικά δεδομένα αποτελούν τα γνωστικά θεμέλια, πάνω στα οποία θα δομηθούν οι νοερές στρατηγικές.

2.4.5 Η ΜΕΤΑΒΑΣΗ ΣΤΟΝ ΝΟΕΡΟ ΛΟΓΙΣΜΟ

Ένα παιδί είναι σε θέση να χρησιμοποιήσει μια στρατηγική, όταν την έχει κατανοήσει. Για αυτόν τον λόγο, ο εκπαιδευτικός οφείλει να βοηθήσει το παιδί να κατανοήσει σε βάθος τις αριθμητικές πράξεις και τις αριθμητικές σχέσεις. Ένας υπεύθυνος εκπαιδευτικός σχεδιάζει προβλήματα που διευκολύνουν την ανάπτυξη στρατηγικών κατά την επίλυσή τους, συζητά με τους μαθητές του τις μεθόδους που εκείνοι προτείνουν, υποδεικνύει ιδέες, χωρίς όμως να παρουσιάζει μετωπικά μια στρατηγική. Μόλις ο εκπαιδευτικός βεβαιωθεί ότι οι μαθητές του έχουν αυτοματοποιήσει μια αποδοτική νοητική διαδικασία και μπορούν να τη χρησιμοποιήσουν, χωρίς να προσφύγουν σε αντικείμενα, τότε οι μαθητές του μπορούν να εξασκηθούν σε αυτή (Van de Walle, 2005).

Σύμφωνα με τους Dole & McIntosh (2004), οι μαθητές, με τη βοήθεια των εκπαιδευτικών τους, πρέπει να ακολουθήσουν μια συγκεκριμένη διαδικασία, ώστε να κατακτήσουν τις νοερές στρατηγικές. Πρώτα, πειραματίζονται στις στρατηγικές με τη βοήθεια των αντικειμένων. Στη συνέχεια, αυτές οι ενέργειες μετατρέπονται σε νοητικές αναπαραστάσεις και τέλος, αντικαθίστανται από σύμβολα. Κάποιοι μαθητές παραμένουν για μεγαλύτερο χρονικό διάστημα στις εικονικές αναπαραστάσεις και στα αντικείμενα, ενώ άλλοι μεταβαίνουν πιο γρήγορα στα σύμβολα. Ο Bills (1999) αναφέρει πως οι μαθητές παραδειγματίζονται από τα λόγια, τις ενέργειες και τα υλικά των δασκάλων τους, ώστε να σχηματίσουν τις νοητικές εικόνες που θα χρησιμοποιήσουν μετέπειτα στις νοερές στρατηγικές τους. Κατά μια άλλη άποψη, για τους Carpenter et al. (1988), οι στρατηγικές που αναπτύσσουν τα παιδιά χωρίς τη χρήση αντικειμένων ή άλλων αναπαραστάσεων αποκαλούνται «αυτοσχέδιες», ενώ υποστηρίζουν πως πριν το στάδιο της ανάπτυξης των αυτοσχέδιων στρατηγικών, προηγείται η άμεση σχηματοποίηση, ήτοι, η αναπαράσταση μιας πράξης ή ενός προβλήματος με υλικά ή σχέδια.

Ο Van de Walle (2005) επιχειρεί να απαντήσει στη συνήθη ερώτηση των εκπαιδευτικών, η οποία είναι γιατί συνήθως αποτυγχάνουν οι μαθητές τους, όταν προσπαθούν να κάνουν κάτι χωρίς χειραπτικά υλικά. Ο ανωτέρω μελετητής εξηγεί ότι στα πρώτα στάδια δόμησης μιας έννοιας, δεν είναι εύκολη και αυτόματη η μετάβαση στο συμβολικό επίπεδο. Για αυτό, είναι απαραίτητα τα μοντέλα, τα οποία συνδέουν τις έννοιες και τα σύμβολα. Περαιτέρω, ο μελετητής προτείνει στους εκπαιδευτικούς να παροτρύνουν τους μαθητές τους να καταγράψουν τι έκαναν με τα μοντέλα, εξηγώντας έτσι την εκάστοτε έννοια και με χειραπτική αναπαράσταση και με συμβολική αναπαράσταση. Όπως αναφέρει χαρακτηριστικά, "όταν τα παιδιά δουν τα μαθηματικά σε γραπτή μορφή ως έκφραση ή καταγραφή των ιδεών που έχουν ήδη αναπτύξει, τότε η γραπτή και η συμβολική μορφή είναι πιθανότερο ότι θα αποκτήσει νόημα" (Van de Walle, 2005, σ.47). Επομένως, ο εκπαιδευτικός πρέπει να ενθαρρύνει τους μαθητές του να αντικαθιστούν τα αντικείμενα ή τις εικόνες του βιβλίου, αναπαριστώντας τις ενέργειές τους με σύμβολα και αριθμούς.

Επιπροσθέτως, οι δυσκολίες στο να γίνει η μετάβαση από συγκεκριμένες σε αφηρημένες αναπαραστάσεις μπορούν να γίνουν κατανοητές από την οπτική της αναλογίας. Κατά τη διαδικασία της μετάβασης, οι συγκεκριμένες και οι αφηρημένες αναπαραστάσεις μπορούν να θεωρηθούν ως η βάση και ο στόχος, αντίστοιχα. Δεδομένου ότι το κλειδί της αναλογίας είναι η δομική χαρτογράφηση από τη βάση στον στόχο, μια επιτυχής μετάβαση από συγκεκριμένες σε αφηρημένες αναπαραστάσεις απαιτεί την ίδια πορεία. Οι μαθητές οφείλουν να παρατηρήσουν τις δομικές ομοιότητες μεταξύ των δύο, ωστόσο, δεν εντοπίζονται άμεσα από όλους (Holyoak & Koh, 1987).

Πρόσφατα, γνωστικοί ψυχολόγοι πρότειναν μια μέθοδο που ονομάζεται "εξασθένηση της συγκεκριμενοποίησης", για να αντιμετωπίσουν το ζήτημα της μετάβασης στον νοερό λογισμό (Goldstone & Son, 2005). Οι εν λόγω μελετητές όρισαν την εξασθένηση της συγκεκριμενοποίησης ως τη "διαδικασία της μείωσης επιτυχώς της συγκεκριμενοποίησης μιας προσομοίωσης με τον σκοπό την επίτευξη στο τέλος μιας σχετικώς ιδεατής και αποδομημένης αναπαράστασης, η οποία είναι ακόμη ευκρινώς συνδεδεμένη με τη φυσική κατάσταση που επιδεικνύει" (Goldstone & Son, 2005, σ.70). Παρόλο που αυτή η μέθοδος προέρχεται από τον Bruner (1966), υπήρχαν δύο διαφορές σε σύγκριση με τις προηγούμενες μεθόδους εκμάθησης. Πρώτον, κατά τη διαδικασία εξασθένησης της συγκεκριμενοποίησης, οι αναπαραστάσεις χρησιμοποίησαν σαν στόχο την ίδια έννοια. Δεύτερον, η διαδικασία των αναπαριστούμενων αλλαγών είναι διαδοχική, με δομικές συνδέσεις. Αυτά τα χαρακτηριστικά μοιάζουν να είναι κρίσιμα, επειδή συμβάλλουν στη διατήρηση των ομοιοτήτων μεταξύ συγκεκριμένων και αφηρημένων αναπαραστάσεων (Holyoak & Koh, 1987).

Στις μικρές τάξεις, ακολουθείται η σταδιακή μετάβαση από το πραξιακό στάδιο στο αφηρημένο, καθώς οι μαθητές έχουν ανάγκη πρώτα να παρατηρήσουν και να εξερευνήσουν μια έννοια με χειραπτικά υλικά, έπειτα να αποσύρουν τα αντικείμενα και να στηρίξουν τη μάθησή τους με εικόνες και τέλος, να μπορούν να αποδώσουν με αριθμούς και σύμβολα όσα έμαθαν, αποδεικνύοντας έτσι την κατανόηση της μαθηματικής έννοιας. Παρ' όλα αυτά, σε έρευνα που είχε πραγματοποιήσει ο Tchoshanov στη δεκαετία του 1990 σε λύκειο της Ρωσίας σχετικά με τριγωνομετρικές ταυτότητες, διαπιστώθηκε πως μια διαφορετική ακολουθία στη σειρά των σταδίων μπορεί να επιφέρει, επίσης, θετικά μαθησιακά αποτελέσματα (Lesser & Tchoshanov, 2005). Σε κάθε περίπτωση, όλες οι μορφές αναπαραστάσεων ενυπάρχουν στο άτομο και αλληλοσυμπληρώνονται, ώστε να επιτυγχάνεται ο μέγιστος δυνατός βαθμός κατανόησης των μαθηματικών εννοιών.

Ο Bruner υποστηρίζει πως η πιο λογική και πιθανή μετάβαση ανάμεσα στα στάδια ξεκινάει από το πραξιακό στάδιο, συνεχίζει στο εικονικό και καταλήγει στο αφηρημένο. Χαρακτηριστικά, ο Bruner αναφέρει πως "αν είναι αλήθεια ότι η συνήθης πορεία της πνευματικής ανάπτυξης μετακινείται από την πραξιακή μέσω της εικονικής στη συμβολική αναπαράσταση του κόσμου, είναι πιθανό ότι μια βέλτιστη ακολουθία θα προχωρήσει προς την ίδια κατεύθυνση" (Bruner, 1966, σ.49).Όταν οι μαθητές ξεκινούν να μαθαίνουν από φυσικά υλικά, έχουν περισσότερες πιθανότητες να λύσουν προβλήματα και να κατανοήσουν μαθηματικές έννοιες αφηρημένων ιδεών (Baranes, Perry & Stiegler, 1989).

Ωστόσο, ο Bruner αποδέχεται πως η πορεία "πραξιακό στάδιο-εικονικό στάδιο-συμβολικό στάδιο" δεν είναι πάντα γραμμική και είναι πιθανό ένας μαθητής να παρακάμψει τα δύο πρώτα στάδια (πραξιακό και εικονικό). Αν κάποιος μαθητής έχει κατακτήσει το συμβολικό σύστημα και οι προηγούμενοι τρόποι διδασκαλίας δεν του προσφέρουν ισχυρά γνωστικά εργαλεία, δεν είναι υποχρεωμένος να ξεκινήσει τη μάθησή του από τα προηγούμενα στάδια (Leong, Ho & Cheng, 2015).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

3.1 ΣΤΟΧΟΣ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΗΣ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η δημιουργία και η υλοποίηση ενός ηλεκτρονικού μαθήματος για τη διδασκαλία στρατηγικών πρόσθεσης νοερού λογισμού με υπέρβαση της δεκάδας στην Α' τάξη Δημοτικού, βασισμένο στα τρία στάδια γνωστικής ανάπτυξης του Bruner. Οι επιμέρους στόχοι του μαθήματος είναι:

- η βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών στην επίλυση των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας και
- η κατανόηση και η χρήση των στρατηγικών του νοερού λογισμού κατά την επίλυση των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας.

3.2 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΑ ΕΡΩΤΗΜΑΤΑ

Με βάση τους στόχους της εργασίας, προκύπτουν τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

1. Η παρακολούθηση ενός ηλεκτρονικού μαθήματος, που βασίζεται στα στάδια γνωστικής ανάπτυξης του Bruner, βοηθά τους μαθητές να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους στην επίλυση των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας;

2. Σε τι βαθμό βοήθησε τους μαθητές η παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος, που βασίζεται στα στάδια γνωστικής ανάπτυξης του Bruner, να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν τις στρατηγικές νοερού λογισμού κατά την επίλυση προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας;

3.3 ΕΝΝΟΙΟΛΟΓΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ:

3.3.1 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΝΟΕΡΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Ο Λεμονίδης (2013) ορίζει τον νοερό λογισμό ως τον «*υπολογισμό που πραγματοποιείται νοερά και με τη χρήση στρατηγικών. Παράγει μια ακριβή απάντηση. Πραγματοποιείται συνήθως χωρίς τη χρήση εξωτερικών μέσων όπως χαρτί και μολύβι, αν και μπορεί να χρησιμοποιείται το χαρτί και το μολύβι, για σύντομες σημειώσεις που υποστηρίζουν τη μνήμη*». Ως στρατηγικές νοερού υπολογισμού νοούνται οι διαδικασίες εκείνες κατά τις οποίες το άτομο υπολογίζει με ακρίβεια το αριθμητικό αποτέλεσμα μιας πράξης, χωρίς τη χρήση εξωτερικού μέσου (Maclellan, 2001). Σύμφωνα με τον Thompson (1999) ως στρατηγικές νοερών υπολογισμών ορίζονται οι υπολογισμοί με την εφαρμογή γνωστών ή γρήγορων υπολογισμών αριθμητικών γεγονότων για τη λύση μιας πράξης, της οποίας το αποτέλεσμα είναι άγνωστο.

3.3.2 ΣΤΑΔΙΑ ΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΟΥ BRUNER

Σύμφωνα με τον Bruner, στη σχολική μάθηση, η γνωστική ανάπτυξη του ατόμου ακολουθεί τρία στάδια. Αυτά τα στάδια αποτελούν τους τρεις τρόπους επεξεργασίας, σύμφωνα με τους οποίους και μέσω της ανακαλυπτικής μάθησης, πραγματώνεται η απόκτηση, ο μετασχηματισμός και η αξιολόγηση των γνώσεων (Κολιάδης, 1997). Τα τρία στάδια είναι:

Πραξιακή αναπαράσταση: Πρόκειται για τη μάθηση που συντελείται με πραγματικά, τρισδιάστατα αντικείμενα ή παιχνίδια ρόλων και παραδείγματα. Το παιδί παρατηρεί το περιβάλλον του, αλληλεπιδρά και ανακαλύπτει νέες γνώσεις. Το στάδιο αυτό ολοκληρώνεται στον πέμπτο με έκτο χρόνο ζωής του παιδιού.
Εικονιστική αναπαράσταση: Η μάθηση πραγματοποιείται με εικόνες, σχεδιαγράμματα, ζωγραφιές. Η μετάβαση από τα τρισδιάστατα αντικείμενα στις δισδιάστατες εικόνες αποτελεί εξέλιξη του προηγούμενου σταδίου, ωστόσο το παιδί δεν μπορεί ακόμα να κατανοήσει μία έννοια σε αφαιρετικό επίπεδο.
Συμβολική αναπαράσταση: Η μάθηση πλέον περνά σε αφαιρετικό επίπεδο και συντελείται μέσα από γλωσσικά και μαθηματικά σύμβολα.

Τα τρία αυτά στάδια ενυπάρχουν στο παιδί, ανεξάρτητα από την ηλικία. Ωστόσο, σε κάθε άτομο διαφέρει ο βαθμός που χρησιμοποιείται το στάδιο στην κάθε ηλικία.

3.3.3 ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ

Με τον όρο “επιδόσεις“ δηλώνεται το επίπεδο απόδοσης των μαθητών στην προσπάθειά τους να ανταποκριθούν στις απαιτήσεις που έχουν ορίσει οι εκπαιδευτικοί φορείς για εκείνους. Αποτελούν τα προσδοκώμενα αποτελέσματα σχετικά με το τι ένας μαθητής αναμένεται να γνωρίζει και να μπορεί να το αποδεικνύει στο τέλος της μαθησιακής διαδικασίας. Οι επιδόσεις δεν περιορίζονται μόνο στην έννοια των γνώσεων, αλλά σε ένα σύνολο δεξιοτήτων, ικανοτήτων, στάσεων και συμπεριφορών που αποκτά το άτομο μέσα από μία επιτυχή εμπλοκή σε εμπειρίες (Adam, 2004). Οι περισσότεροι ορισμοί του όρου “σχολικές επιδόσεις“ συγκλίνουν στην ανάγκη για σαφή και ακριβή προσδιορισμό των αποτελεσμάτων που καλούνται να επιτύχουν οι μαθητές, μετά την ολοκλήρωση μιας εκπαιδευτικής δραστηριότητας (Prøitz,2010). Συνήθως, το επίπεδο των επιδόσεων και τα κριτήρια αξιολόγησης καθορίζονται από τον εκπαιδευτικό, από τα αναλυτικά προγράμματα και τους οδηγούς σπουδών.

3.3.4 ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ

Σύμφωνα με τον Van de Walle (2005), η κατανόηση μπορεί να θεωρηθεί το μέσο μέτρησης της ποιότητας και της ποσότητας των συνδέσεων μιας ιδέας με τις προϋπάρχουσες ιδέες. Όσο πιο πολλές και ποιοτικές οι συνδέσεις, τόσο μεγαλύτερος ο βαθμός κατανόησης. Κάθε άτομο έχει διαμορφώσει τα δικά του γνωστικά σχήματα, τα οποία δέχονται συνεχώς τροποποιήσεις για την οικοδόμηση της νέας γνώσης, ενώ οι αναπαραστάσεις που το άτομο δημιουργεί διευκολύνουν τη σύνδεση υπαρχουσών και νέων γνώσεων. Προκειμένου να μπορέσει ένας μαθητής να πραγματοποιήσει συνδέσεις ανάμεσα στις πληροφορίες, πρέπει να συμμετέχει ενεργά στη διαδικασία της μάθησης.

Ο Skemp (1976) ονόμασε εννοιολογική κατανόηση (relational understanding) τη μορφή κατανόησης, κατά την οποία ο μαθητής ξέρει τι κάνει και γιατί το κάνει, έχοντας κατακτήσει τις μαθηματικές έννοιες και έχοντας ανακαλύψει τις μεταξύ τους σχέσεις, χωρίς να βασίζεται στην εφαρμογή κανόνων. Στον αντίποδα της εννοιολογικής κατανόησης βρίσκεται η εργαλειακή κατανόηση (instrumental understanding), η οποία αναφέρεται στη μηχανική εκτέλεση των πράξεων και στη διαδικαστική εφαρμογή κανόνων.

3.4 ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΚΟΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

3.4.1 ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΝΟΕΡΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

Στην παρούσα εργασία, αντικείμενο μελέτης είναι η διδασκαλία νοερών στρατηγικών πρόσθεσης με υπέρβαση της δεκάδας. Σκοπός είναι οι μαθητές, μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις (ψηφιακό χειραπτικό υλικό, αριθμογραμμή, σύμβολα και αριθμοί) να οδηγηθούν στην εννοιολογική κατανόηση και στη χρήση νοερών τρόπων υπολογισμού των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας, χωρίς τη χρήση αντικειμένων ή δακτύλων.

Οι στρατηγικές πρόσθεσης νοερού λογισμού που θα διδαχθούν τα παιδιά στο ηλεκτρονικό μάθημα είναι:

1. Η στρατηγική των προσθετέων με διαφορά μιας μονάδας (το κόλπο με τα διπλά)
2. Η στρατηγική αντιστάθμισης με προσθετέο τον αριθμό 9 (το κόλπο με το 9)
3. Η στρατηγική της συμπλήρωσης της δεκάδας (η στάση στο 10)

3.4.2 ΣΤΑΔΙΑ ΓΝΩΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ ΤΟΥ BRUNER

Τα τρία στάδια γνωστικής ανάπτυξης, κατά Bruner, είναι το πραξιακό στάδιο (μάθηση με αντικείμενα), το εικονιστικό στάδιο (μάθηση με εικόνες) και το συμβολικό στάδιο (μάθηση με γλωσσικά και μαθηματικά σύμβολα). Στην παρούσα εργασία διερευνάται αν τα παιδιά, διερχόμενα μέσα από αυτά τα τρία στάδια, θα βελτιώσουν τις επιδόσεις τους στην επίλυση των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας και σε ποιο βαθμό θα κατανοήσουν και θα χρησιμοποιήσουν τις στρατηγικές πρόσθεσης νοερού λογισμού που θα διδαχθούν. Γι' αυτό τον λόγο, η κάθε στρατηγική θα προσεγγιστεί μέσα από αυτά τα τρία στάδια.

Συγκεκριμένα, στην αρχή της διδασκαλίας της καθεμίας από τις τρεις στρατηγικές, οι μαθητές παρακολουθούν ένα βίντεο που περιγράφει μια προβληματική κι αναζητούν πιθανές λύσεις, παρατηρώντας παράλληλα εικόνες για τη στρατηγική που εξετάζουν και που θα μπορούσαν να τους φανούν βοηθητικές ως προς την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών.

Στη συνέχεια, ξεκινώντας από μία συγκεκριμένη πρόσθεση, πραγματοποιούν δοκιμές σε ψηφιακό χειραπτικό υλικό. Αναπαριστούν την πρόσθεση, ενώ παράλληλα καταγράφουν στον πίνακα εργασίας τους τις πράξεις με σύμβολα και αριθμούς. Εκεί, παρακινούνται να παρατηρήσουν τις σχέσεις των αριθμών και διαπιστώνουν τα πρώτα τους συμπεράσματα. Έπειτα, οι μαθητές λύνουν την πράξη στην αριθμογραμμή και επαληθεύουν τις ιδέες τους. Τέλος, αφού έχουν ανακαλύψει τη στρατηγική, οι μαθητές λύνουν μια άσκηση, η οποία περιλαμβάνει μόνο αριθμούς και σύμβολα και συμβάλλει στην αυτοαξιολόγησή τους, καθώς και στην εμπέδωση της νέας γνώσης.

3.4.3 ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ

Στην εργασία αυτή, ερευνητικό ερώτημα αποτελεί η βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος. Επομένως, οι μαθητές θα λύσουν ασκήσεις πριν και μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος, έτσι ώστε να διαπιστωθεί αν εκείνοι κατάφεραν να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους στην επίλυση των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας. Οι ασκήσεις που καλούνται να λύσουν οι μαθητές πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση είναι παρόμοιου σχεδιασμού και ανάλογης δυσκολίας. Η πλατφόρμα e-front, στην οποία έχει σχεδιαστεί το μάθημα, δίνει τη δυνατότητα συλλογής δεδομένων από την κάθε άσκηση. Ειδικότερα, δίνονται ανά μαθητή και άσκηση πληροφορίες για το ποσοστό επιτυχίας μιας άσκησης. Με τη σύγκριση των αποτελεσμάτων, θα προκύψουν συμπεράσματα για το αν το ηλεκτρονικό μάθημα, βασισμένο στα στάδια γνωστικής ανάπτυξης του Bruner, βελτιώνει τις επιδόσεις των μαθητών στο μάθημα των Μαθηματικών.

3.4.4 ΚΑΤΑΝΟΗΣΗ

Για να διερευνηθεί ο βαθμός κατανόησης και χρήσης των στρατηγικών πρόσθεσης νοερού λογισμού, θα πραγματοποιηθεί ατομική συνέντευξη με κάθε μαθητή, στην οποία το κάθε παιδί θα κληθεί να απαντήσει σε συγκεκριμένες ερωτήσεις σχετικά με τον τρόπο επίλυσης των προσθέσεων. Η εκπαιδευτικός θα καταγράφει σε μια πενταβάθμια κλίμακα τον βαθμό που ισχύει ή όχι η κάθε πρόταση, συμπληρώνοντας ένα ερωτηματολόγιο. Από τα αποτελέσματα θα αξιολογηθεί σε ποιο βαθμό οι μαθητές έχουν κατανοήσει και χρησιμοποιούν τις στρατηγικές νοερού λογισμού που διδάχθηκαν.

3.5 ΔΕΙΓΜΑ

Το δείγμα της παρούσας εργασίας είναι είκοσι τέσσερις (24) μαθητές ενός τμήματος της Α' τάξης του Αρσάκειου Δημοτικού Σχολείου. Το τμήμα αποτελείται από δεκατέσσερα (14) κορίτσια και δέκα (10) αγόρια. Η ηλικία των εν λόγω μαθητών κυμαίνεται μεταξύ των εξίμισι (6,5) και επτά (7) ετών. Ο κάθε μαθητής διαθέτει λογαριασμό και προσωπικούς κωδικούς για την είσοδό του στη σχολική πλατφόρμα και για την πρόσβασή του στο ηλεκτρονικό μάθημα. Επίσης, κατά την περίοδο που διεξάγεται η έρευνα, οι μαθητές είναι σε θέση να διαβάζουν και να γράφουν, ενώ κατέχουν και βασικές γνώσεις χειρισμού ηλεκτρονικού υπολογιστή. Επίσης, λόγω ηλικίας, υπάρχει συνεχής καθοδήγηση και λεπτομερής επεξήγηση των διαδικασιών από την εκπαιδευτικό τους.

3.6 ΕΡΓΑΛΕΙΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην παρούσα ερευνητική εργασία, για τη συλλογή των δεδομένων, χρησιμοποιούνται δύο ερευνητικά εργαλεία. Το πρώτο ερευνητικό εργαλείο είναι τα δεδομένα από την επίλυση των ασκήσεων. Τα δεδομένα αυτά δίνουν πληροφορίες ανά μαθητή και άσκηση για το ποσοστό επιτυχίας της άσκησης. Στην πρώτη φάση της παρέμβασης, οι μαθητές διδάσκονται την ενότητα «Προσθέσεις με υπέρβαση της δεκάδας» μετωπικά και με τη στρατηγική που τους είναι γνωστή και οικεία από την επίλυση των προσθέσεων μέσα στην πρώτη δεκάδα, τη στρατηγική της επαρίθμησης. Οι μαθητές ξέρουν να προσθέτουν με τη στρατηγική της ευθείας αρίθμησης, δηλαδή, να ξεκινούν από τον μεγαλύτερο προσθετέο και να προχωρούν ευθεία στην αριθμογραμμή τόσα βήματα όσα ορίζει ο δεύτερος προσθετέος. Ανάλογα με το επίπεδο των μαθητών, ορισμένα παιδιά χρησιμοποιούν ακόμα αντικείμενα ή δάχτυλα για την εκτέλεση των προσθέσεων, κάποια παιδιά χρειάζονται την οπτικοποίηση των προβλημάτων, για να λύσουν τις ασκήσεις, ενώ κάποια παιδιά μπορούν να υπολογίζουν τις πράξεις νοερά, χωρίς τη βοήθεια εξωτερικού μέσου. Η επίλυση ασκήσεων και η συλλογή στατιστικών σε αυτή τη φάση αποσκοπεί στην αποτύπωση του τρέχοντος επιπέδου γνώσεων και ικανοτήτων των μαθητών. Από αυτές τις ασκήσεις θα συλλεγούν τα δεδομένα σχετικά με το ποσοστό επιτυχίας των ασκήσεων. Στη συνέχεια, οι μαθητές του τμήματος θα κληθούν να λύσουν ασκήσεις παρόμοιου σχεδιασμού και ανάλογης δυσκολίας, μετά την ολοκλήρωση του μαθήματος κι εφόσον έχουν διδαχθεί τις τρεις στρατηγικές νοερού υπολογισμού για την πρόσθεση με υπέρβαση της δεκάδας. Από τις ασκήσεις αυτές, θα συλλεγούν δεδομένα και έπειτα, θα γίνει η σύγκριση των αποτελεσμάτων των ασκήσεων πριν και μετά το ηλεκτρονικό μάθημα. Τα δεδομένα των ασκήσεων θα απαντήσουν στο ερευνητικό ερώτημα, αν η παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος βελτιώνει τις επιδόσεις των μαθητών στο μάθημα των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας.

Το δεύτερο ερευνητικό εργαλείο είναι μια διαγνωστική συνέντευξη με χρήση ερωτηματολογίου. Σύμφωνα με τον Van de Walle (2005), μέσω της συνέντευξης ο εκπαιδευτικός έχει τη δυνατότητα να ελέγξει ποιους τρόπους σκέψης και ποιες διαδικασίες χρησιμοποιούν οι μαθητές, για να λύσουν ένα πρόβλημα και τον τρόπο με τον οποίο οι μαθητές δομούν τις έννοιες. Από την άλλη, ο εκπαιδευτικός δεν αντλεί μόνο πληροφορίες για τη σκέψη των μαθητών του, αλλά λαμβάνει και ανατροφοδότηση σχετικά με την αποτελεσματικότητα του σχεδιασμού της διδασκαλίας του. Επίσης, επισημαίνεται πως ο εκπαιδευτικός οφείλει να ακούει με υπομονή και απλά να καταγράφει τις απαντήσεις των μαθητών του, χωρίς να καθοδηγεί και να παρεμβαίνει.

Αφού διδαχθούν οι μαθητές τις στρατηγικές νοερού υπολογισμού, θα κληθούν σε σύντομες ατομικές συνεντεύξεις, στις οποίες θα εξηγήσουν στην εκπαιδευτικό με ποιον τρόπο σκέφτηκαν, ώστε να λύσουν τις προσθέσεις με υπέρβαση της δεκάδας. Η εκπαιδευτικός θα καταγράψει τον βαθμό στον οποίο ισχύουν οι δείκτες επίδοσης που έχουν επιλεγεί στο ερωτηματολόγιο. Με αυτόν τον τρόπο, θα απαντηθεί το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα σχετικά με τον βαθμό κατανόησης και χρήσης των στρατηγικών νοερού υπολογισμού στον υπολογισμό των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας.

3.7 ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝ ΚΑΙ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΑ ΕΡΓΑΛΕΙΑ

Η πλατφόρμα e-Front είναι ένα ολοκληρωμένο Σύστημα Διαχείρισης Ηλεκτρονικών Μαθημάτων (LMS). Η πλατφόρμα αυτή έχει σχεδιαστεί, ώστε να επιτρέπει τη δημιουργία διαδικτυακών κοινοτήτων μάθησης. Το σύστημα χρησιμοποιεί μια διεπαφή χρήστη στηριγμένη σε εικονίδια. Η πλατφόρμα προσφέρει ένα πλήθος από χαρακτηριστικά, όπως εργαλεία για την δημιουργία περιεχομένου και δημιουργία αξιολογήσεων, ένα εργαλείο διαχείρισης παραδοτέων, ένα πλήθος από στατιστικά στοιχεία, δημοσκοπήσεις και άλλα (https://www.efrontlearning.com).

Εκτός από τα εργαλεία της πλατφόρμας, στην εργασία ενσωματώθηκαν και web 2.0 ψηφιακά εκπαιδευτικά εργαλεία, προκειμένου να γίνει το ηλεκτρονικό μάθημα πιο ελκυστικό για τους μικρούς μαθητές. Συγκεκριμένα:

- Για τη δημιουργία βίντεο, χρησιμοποιήθηκαν τα εργαλεία Powtoon, Voki και Video Editor˙
- Για τα ψηφιακά μαθηματικά εργαλεία και ψηφιακά μαθηματικά παιχνίδια, χρησιμοποιήθηκαν οι ιστοσελίδες https://www.mathlearningcenter.org/apps, https://www.ictgames.com και https://wordwall.net.

3.8 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Οι επιστημονικές έρευνες, ανάλογα με τον σκοπό για τον οποίο διεξάγονται, τα μέσα συλλογής δεδομένων, το είδος των δεδομένων, τον τόπο διεξαγωγής ή το πλήθος στο οποίο απευθύνονται, μπορούν να χωριστούν σε διάφορες κατηγορίες (Τσιπλητάρης, 2006). Η παρούσα έρευνα είναι μικτή. Οι μικτές προσεγγίσεις συνδυάζουν ποσοτικές και ποιοτικές μεθόδους κατά τον μεθοδολογικό τους σχεδιασμό, με απώτερο στόχο να αξιοποιούνται ορθότερα και πιο αποτελεσματικά τα πλεονεκτήματα της κάθε μεθόδου και να μειώνονται οι αδυναμίες εκάστης εκ της ποιοτικής και της ποσοτικής μεθόδου έρευνας (Κοντογιαννάτου, 2018). Η συλλογή δεδομένων γίνεται με στατιστικά από ασκήσεις της σχολικής πλατφόρμας και με συνέντευξη, κατά τη διάρκεια της οποίας η εκπαιδευτικός θα συμπληρώνει ένα ερωτηματολόγιο.

Σκοπός της παρούσας ερευνητικής εργασίας είναι η δημιουργία και η υλοποίηση ενός ηλεκτρονικού μαθήματος για τη διδασκαλία στρατηγικών νοερού λογισμού στην πρόσθεση με υπέρβαση της δεκάδας στην Α' τάξη Δημοτικού, βασισμένο στα τρία στάδια γνωστικής ανάπτυξης του Bruner. Οι επιμέρους στόχοι του μαθήματος είναι η βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών στην επίλυση των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας και η διερεύνηση του βαθμού κατανόησης και εφαρμογής των στρατηγικών νοερού λογισμού.

Ως δείγμα, χρησιμοποιείται μια σχολική τάξη είκοσι τεσσάρων (24) μαθητών, οι οποίοι θα παρακολουθήσουν το ηλεκτρονικό μάθημα, θα λύσουν ασκήσεις και θα κληθούν σε ατομικές συνεντεύξεις. Η διδακτική παρέμβαση αναπτύσσεται σε τρεις φάσεις: μία εισαγωγική που αντιστοιχεί στη στρατηγική της επαρίθμησης, με ή χωρίς χειραπτικό υλικό , μία φάση που αντιστοιχεί στη διδασκαλία των τριών στρατηγικών πρόσθεσης και μία φάση αξιολόγησης. Οι δραστηριότητες εκτελούνται είτε ατομικά από τον κάθε μαθητή είτε ομαδικά από όλη την τάξη, ενώ πραγματοποιούνται στην πλατφόρμα και δια ζώσης.

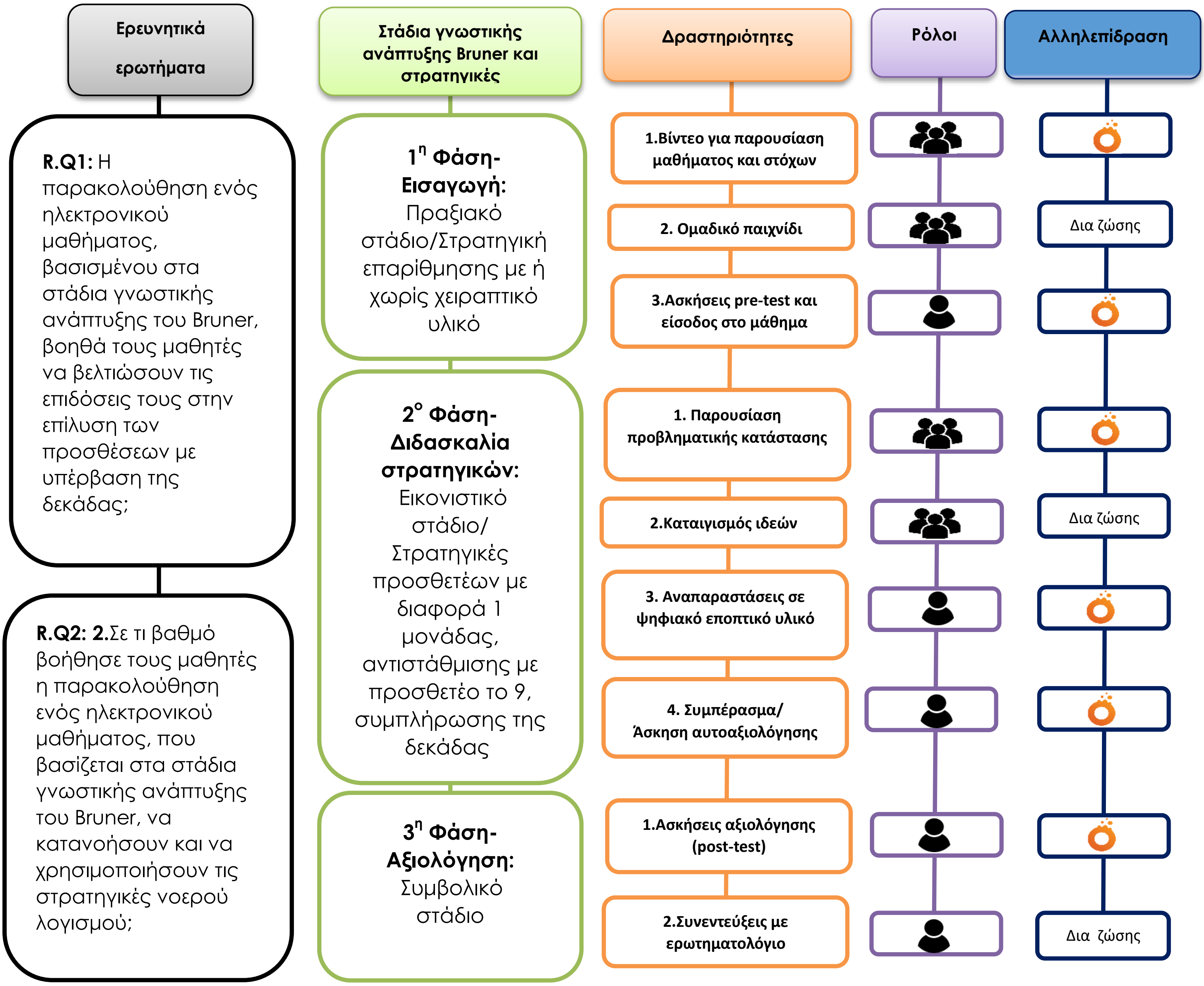
3.9 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΣΕΝΑΡΙΟΥ

Ο ήρωας της ιστορίας είναι ένας λαγός, ο οποίος έχει χαθεί μέσα σε ένα δάσος. Στην προσπάθειά του να βρει την έξοδο, συναντάει διάφορα ζώα, τα οποία μπορούν να τον καθοδηγήσουν σωστά. Ενώ τα πλησιάζει με σκοπό να ρωτήσει πληροφορίες για την έξοδο του δάσους, εκείνα προσπαθούν να λύσουν κάποια δικά τους μαθηματικά προβλήματα και ζητούν τις συμβουλές του. Αν ο λαγός καταφέρει να βοηθήσει τα ζώα, τότε εκείνα, για να τον ευχαριστήσουν, θα του δείξουν τον δρόμο και θα του δώσουν τα απαραίτητα εργαλεία που χρειάζεται, ώστε να συνεχίσει την πορεία του στο δάσος, μέχρι να φτάσει στο τέλος. Αυτά τα εργαλεία είναι μία πυξίδα, ένας χάρτης και το κλειδί της πόρτας της εξόδου του δάσους. Χωρίς αυτά, ο λαγός δεν μπορεί να προχωρήσει στο δάσος και να βγει από αυτό.

Η αποστολή των μαθητών είναι να εκπροσωπήσουν τον λαγό και τα να βρουν λύσεις στα διάφορα μαθηματικά προβλήματα των ζώων. Αφού παρακολουθήσουν προσεκτικά τις εικόνες και βίντεο με τις ιστορίες των ζώων, οι μαθητές συζητούν μεταξύ τους, προτείνουν λύσεις, πειραματίζονται στα ψηφιακά τους εποπτικά υλικά, αναπαριστούν τα μαθηματικά προβλήματα με διάφορους τρόπους, κρατούν σημειώσεις, παίζουν παιχνίδια και λύνουν ασκήσεις. Με αυτόν τον τρόπο, ανακαλύπτουν τις στρατηγικές πρόσθεσης, ή αλλιώς, διάφορα μαθηματικά “κόλπα”, με τη βοήθεια των οποίων τα ζωάκια μπορούν να υπολογίζουν εύκολα, σωστά και γρήγορα. Αν οι μαθητές περάσουν με επιτυχία τις διάφορες δοκιμασίες, ο λαγός θα βγει από το δάσος και εκείνοι θα πάρουν βραβείο εξερευνητή Μαθηματικών.

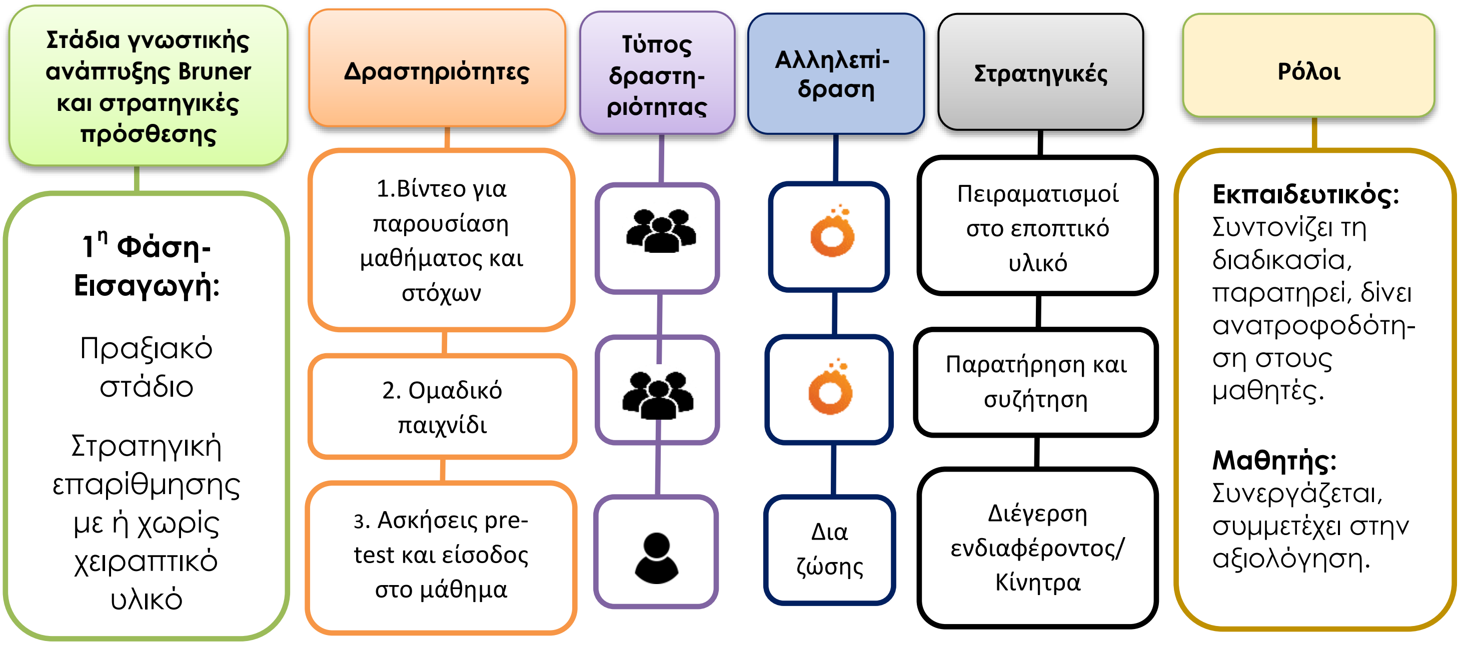
Στην αρχή, προκειμένου οι μαθητές να μπορέσουν να πάρουν άδεια εισόδου στο δάσος, να ακολουθήσουν τον λαγό και να τον βοηθήσουν στην επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων, πρέπει να λύσουν κάποιες ασκήσεις. Στο τέλος, οι μαθητές λύνουν ξανά αντίστοιχες ασκήσεις, ώστε να διαπιστωθεί αν βελτιώθηκαν στην επίλυση των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας, αν κατανόησαν τις στρατηγικές που διδάχθηκαν και αν κατάφεραν να τις χρησιμοποιήσουν.

Ακολουθεί ο γενικός εκπαιδευτικός σχεδιασμός του μαθήματος.



Εικόνα 5: Γενικός εκπαιδευτικός σχεδιασμός μαθήματος

3.9.1 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΠΡΩΤΗΣ ΦΑΣΗΣ



Εικόνα 6: Σχεδιάγραμμα οργάνωσης πρώτης φάσης

Η πρώτη φάση είναι εισαγωγική, αποτελείται από μια ενότητα και ονομάζεται “Πραξιακό στάδιο/ Στρατηγική της επαρίθμησης με ή χωρίς εποπτικό υλικό“, καθώς οι μαθητές μαθαίνουν να προσθέτουν μονοψήφιους αριθμούς υπερβαίνοντας τη δεκάδα με τη στρατηγική που τους είναι οικεία ήδη από την εκτέλεση προσθέσεων στην πρώτη δεκάδα, τη στρατηγική της επαρίθμησης ή ευθείας αρίθμησης. Δεδομένου ότι οι μαθητές ξεκινούν πρώτη φορά να κάνουν προσθέσεις με μονοψήφιους αριθμούς μέχρι τον αριθμό 20, ορισμένοι, ανάλογα με το επίπεδό τους, έχουν ανάγκη τη χρήση των αντικειμένων ή των δαχτύλων, ώστε να εκτελέσουν τις πράξεις, ενώ άλλοι επιδεικνύουν ευχέρεια στην εκτέλεση των προσθέσεων νοερά, χωρίς βοηθητικό μέσο. Σε κάθε περίπτωση, στόχος της διδασκαλίας είναι οι μαθητές να μεταβαίνουν βαθμιαία από το ένα στάδιο στο άλλο, δηλαδή, από τα δάχτυλα και τα αντικείμενα στην αριθμογραμμή και μετά στους νοερούς υπολογισμούς, ώστε να λύνουν τις πράξεις με σύμβολα και αριθμούς.

Σε αυτή τη φάση, οι μαθητές γνωρίζουν τον ήρωα του μαθήματος και την ιστορία του, ενημερώνονται για τους στόχους του μαθήματος και για την αποστολή τους. Συγκεκριμένα, στο ηλεκτρονικό μάθημα, τα παιδιά θα διδαχθούν κάποια “κόλπα“, όπως αποκαλούνται οι στρατηγικές πρόσθεσης, προκειμένου εκείνα να υπολογίζουν γρήγορα και σωστά, με το μυαλό. Οι μαθητές συζητούν μεταξύ τους, αναζητούν κόλπα που ήδη γνωρίζουν στην πρόσθεση και διατυπώνουν υποθέσεις για το ποια μπορεί να είναι αυτά τα νέα κόλπα που θα μάθουν και που ενδεχομένως να χρησιμοποιούν ήδη, πριν τη συστηματική διδασκαλία των στρατηγικών.

Ως μελλοντικοί εξερευνητές του δάσους, οι βοηθοί του λαγού χρειάζονται προπόνηση στα μαθηματικά προβλήματα και για αυτόν τον λόγο, οι μαθητές καλούνται να παίξουν ένα ομαδικό παιχνίδι, το οποίο εμπλέκει τα εποπτικά υλικά. Στόχος είναι οι μαθητές να εξασκηθούν στις προσθέσεις και στη σωστή χρήση του εποπτικού υλικού, να αναπαραστήσουν τις πράξεις σε αυτά, αλλά και να διερευνήσουν τις σχέσεις των αριθμών. Ακόμα, οι μαθητές ενημερώνονται πως για να ολοκληρώσουν μια ενότητα, να προχωρήσουν στην επόμενη και να οδηγήσουν τον λαγό στο τέλος του ηλεκτρονικού μαθήματος, θα πρέπει να έχουν συλλέξει τρία απαραίτητα εργαλεία: μία πυξίδα, έναν χάρτη και ένα κλειδί.

Οι μαθητές κατατοπίζονται για όλες τις πληροφορίες της ενότητας μέσα από ένα βίντεο.

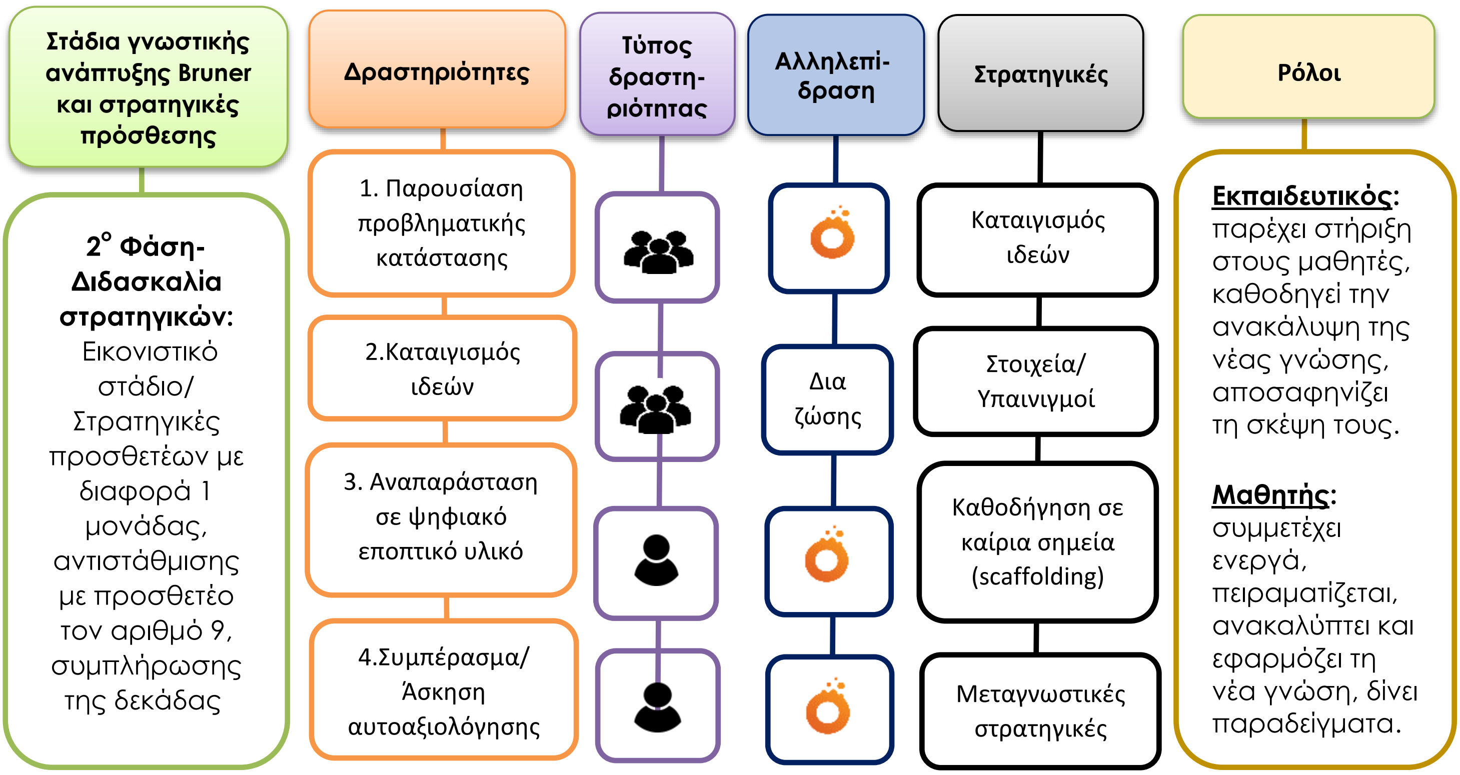
Εικόνα 7: Στιγμιότυπο από βίντεο εισαγωγής

Έπειτα, για να μπορέσουν οι μαθητές να μπουν στο δάσος μαζί με τον λαγό και να τον βοηθήσουν να ανακαλύψει τα “κόλπα της πρόσθεσης“, ζητείται από εκείνους να λύσουν ατομικά κάποιες ασκήσεις με προσθέσεις με υπέρβαση της δεκάδας, ώστε να λάβουν “άδεια εισόδου“ στο δάσος. Οι ασκήσεις για την άδεια εισόδου στο δάσος είναι οι ασκήσεις pre-test που πρέπει να λύσουν οι μαθητές, προκειμένου να αξιολογηθεί το τρέχον επίπεδο επιδόσεων και να συγκριθεί με αντίστοιχες ασκήσεις, μετά την ολοκλήρωση του ηλεκτρονικού μαθήματος. Οι μαθητές θα μπορούν να έχουν στη διάθεσή τους εποπτικά υλικά, ώστε να βοηθιούνται στην επίλυση των ασκήσεων.

Ολοκληρώνοντας τις ασκήσεις, τελειώνει η πρώτη φάση και οι μαθητές λαμβάνουν άδεια εισόδου στο δάσος.

Εικόνα 8: Άδεια εισόδου στο δάσος

3.9.2 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΔΕΥΤΕΡΗΣ ΦΑΣΗΣ



Εικόνα 9: Σχεδιάγραμμα οργάνωσης δεύτερης φάσης

Η δεύτερη φάση είναι η φάση της διδασκαλίας των τριών στρατηγικών και ονομάζεται «Εικονιστικό στάδιο/ Στρατηγικές νοερού λογισμού: το κόλπο με τα διπλά, το κόλπο του 9, η στάση στο 10“ και αποτελείται από τρεις ενότητες, μία για την κάθε στρατηγική πρόσθεσης νοερού λογισμού που θα διδαχθούν οι μαθητές. Στη φάση αυτή, γίνεται προσπάθεια ώστε οι μαθητές να μεταβούν στο επόμενο αφαιρετικό επίπεδο, της εικονιστικής αναπαράστασης, με απομάκρυνση του χειραπτικού υλικού. Οι μαθητές ανακαλύπτουν και κατανοούν τις νέες στρατηγικές, αναπαριστώντας τα προβλήματα πρόσθεσης με τη βοήθεια βίντεο, εικόνων και ψηφιακού εποπτικού υλικού που χειρίζονται οι ίδιοι. Η φάση αυτή αποτελείται από τρεις ενότητες, μία για κάθε στρατηγική:

1. Οι περιπέτειες του λαγού-Το κόλπο με τα διπλά (στρατηγική προσθετέων με διαφορά μιας μονάδας)

2. Οι περιπέτειες του λαγού-Το κόλπο του 9 (στρατηγική αντιστάθμισης με προσθετέο τον αριθμό 9)

3. Οι περιπέτειες του λαγού-Η στάση στο 10 (στρατηγική της συμπλήρωσης της δεκάδας)

Οι τρεις ενότητες ακολουθούν την ίδια δομή. Συγκεκριμένα, η κάθε ενότητα αποτελείται από τις εξής δραστηριότητες: α) παρουσίαση προβληματικής κατάστασης, κατά την οποία οι μαθητές παρακολουθούν ένα βίντεο με μια ιστορία που χρήζει διερεύνησης, β) καταιγισμός ιδεών, κατά τον οποίο οι μαθητές σχολιάζουν όσα παρατήρησαν στα βίντεο, ερμηνεύουν τα στοιχεία και διατυπώνουν υποθέσεις, γ) διερεύνηση σε ψηφιακό εποπτικό υλικό, κατά την οποία οι μαθητές αναπαριστούν κάποιες πράξεις σε ψηφιακά χειραπτικά υλικά και αριθμογραμμή και δ) διατύπωση συμπεράσματος και άσκηση αυτοαξιολόγησης με αριθμούς και σύμβολα. Από αυτή τη φάση, αναμένεται οι μαθητές να ανακαλύψουν τη στρατηγική πρόσθεσης που διδάσκονται στην εκάστοτε ενότητα του ηλεκτρονικού μαθήματος μέσα από πολλαπλές αναπαραστάσεις των μαθηματικών προβλημάτων, οι οποίες αντιστοιχούν στα τρία στάδια γνωστικής ανάπτυξης του Bruner (πραξιακό-εικονιστικό-συμβολικό στάδιο).

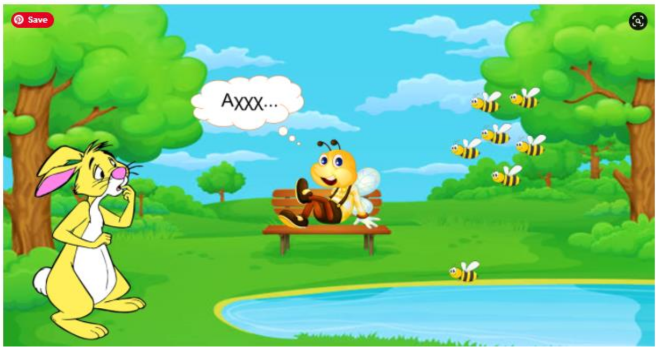
Πιο αναλυτικά, οι μαθητές, αφού έχουν παρακολουθήσει τα βίντεο και τα έχουν σχολιάσει, έχουν παρατηρήσει εικόνες και έχουν ανταλλάξει απόψεις με τους συμμαθητές τους, χρησιμοποιούν αρχικά ψηφιακό χειραπτικό υλικό, προκειμένου να αναπαραστήσουν μόνοι τους μία πρόσθεση μονοψήφιων αριθμών με υπέρβαση της δεκάδας, όπως προκύπτει από την ιστορία που παρακολούθησαν στα βίντεο. Μέσα από δοκιμές με τις οποίες διαμορφώνουν κατάλληλα τα υλικά (μετακινούν μπίλιες, αφαιρούν μονάδες, συμπληρώνουν πλαίσια, σημειώνουν πάνω στην αριθμογραμμή) κατανοούν τις σχέσεις που έχουν οι αριθμοί μεταξύ τους, διατυπώνουν τις παρατηρήσεις και τα συμπεράσματά τους, βασιζόμενοι σε απτά παραδείγματα και βιωματικές δραστηριότητες. Με αυτόν τον τρόπο, ανακαλύπτουν τη νέα στρατηγική (κόλπο).

Το ψηφιακά χειραπτικά υλικά αντιπροσωπεύουν τη μετάβαση από το πραξιακό στάδιο στο εικονιστικό, καθώς συνδυάζουν χαρακτηριστικά και από τα δύο στάδια αναπαράστασης. Οι μαθητές δεν αγγίζουν πλέον αντικείμενα, ωστόσο αλληλεπιδρούν με τα ψηφιακά υλικά, τα μετακινούν και τα τροποποιούν. Τα ψηφιακά μαθηματικά εργαλεία που χρησιμοποιούν οι μαθητές στις τρεις ενότητες της φάσης είναι το αριθμητήριο, το υλικό δεκαδικής βάσης και τα πλαίσια του αριθμού 10 (ten frames). Παράλληλα, πάνω στο ψηφιακό εποπτικό υλικό, οι μαθητές κρατούν σημειώσεις με το ψηφιακό μολύβι της εφαρμογής.

Μετά το ψηφιακό χειραπτικό υλικό, οι μαθητές αναπαριστούν το πρόβλημα που μελετούν και στην αριθμογραμμή, η οποία αποτελεί το τελευταίο στάδιο γεωμετρικής, εικονικής αναπαράστασης. Οι μαθητές, με τη βοήθεια της αριθμογραμμής, αντιλαμβάνονται καλύτερα τις σχέσεις των αριθμών και ανακαλύπτουν τη στρατηγική.

Η κάθε ενότητα τελειώνει με μία εμπεδωτική άσκηση, στην οποία οι μαθητές εφαρμόζουν τη νέα γνώση και ελέγχουν τον βαθμό κατανόησης της διδαχθείσας στρατηγικής. Η άσκηση αυτή αποσκοπεί αποκλειστικά στην αυτοαξιολόγηση και στην άμεση ανατροφοδότηση των μαθητών. Δε συλλέγονται στατιστικά στοιχεία. Η μορφή της άσκησης περιλαμβάνει μόνο αριθμούς και σύμβολα, προκειμένου οι μαθητές να εισαχθούν στο συμβολικό επίπεδο αναπαράστασης και να εφαρμόσουν την κάθε στρατηγική νοερά, χωρίς τη βοήθεια αντικειμένων, αριθμογραμμής ή άλλης απεικόνισης. Τέλος, όταν ολοκληρωθεί η άσκηση, οι μαθητές λαμβάνουν το εργαλείο που πρέπει να εξασφαλίσουν, ώστε να μεταβούν στην επόμενη ενότητα.

Ακολουθεί η οργάνωση της φάσης ανά ενότητα στρατηγικής.

1. Οι περιπέτειες του λαγού-Το κόλπο με τα διπλά	
Στιγμιότυπα πλατφόρμας	Επεξήγηση
Μια φορά κι έναν καιρό, ένας λαγός, ο Άκης Λαγουδάκης, είχε πάει βόλτα στο δάσος. Απολάμβανε και θαύμαζε τις ομορφιές της φύσης. Περπατούσε, περπατούσε... Ώσπου κατάλαβε ότι είχε χαθεί! Δεν ήξερε πώς να γυρίσει πίσω...  Ο λαγός αποφάσισε να ψάξει κάποιο ζωάκι να του δώσει οδηγίες για το πώς θα βγει από το δάσος . Στον δρόμο του συνάντησε μία μέλισσα. Ενώ ετοιμαζόταν να τη ρωτήσει για πληροφορίες, την είδε προβληματισμένη και σκέφτηκε να της προσφέρει τη βοήθειά του.  	Εισαγωγή στην ενότητα-Διήγηση της ιστορίας του λαγού
 	**Δραστηριότητα 1:** Παρουσίαση προβληματικής κατάστασης. Η μέλισσα θέλει να ξέρει πόσα παιδιά της γυρίζουν στις κυψέλες, αλλά ο αριθμός των μελισσών που επιστρέφει συνεχώς αλλάζει.
 Μέλισσα, όση ώρα επέστρεφαν τα μικρά σου στις κυψέλες, πρόλαβα να τραβήξω 3 φωτογραφίες.Τι παρατηρείς;   Ε, αυτά που σου 'λεγα! Πότε οι μέλισσες είναι ίσα μοιρασμένες στις 2 κυψέλες, πότε η μία κυψέλη έχει 1 παραπάνω κι η άλλη 1 παρακάτω...Άντε να τις μετρήσεις, μετά! Για κάτσε να φτιάξω τις πράξεις στο αριθμητήριο, μπας και καταλάβω τίποτα...Θα ξεκινήσω από το διπλό άθροισμα που το ξέρω. Θα με βοηθήσεις;	**Δραστηριότητα 2:** Καταιγισμός ιδεών. Οι μαθητές παρατηρούν πώς αλλάζει το άθροισμα των μελισσών, καθώς εκείνες επιστρέφουν στις κυψέλες τους, ερμηνεύουν τα στοιχεία και διατυπώνουν υποθέσεις.

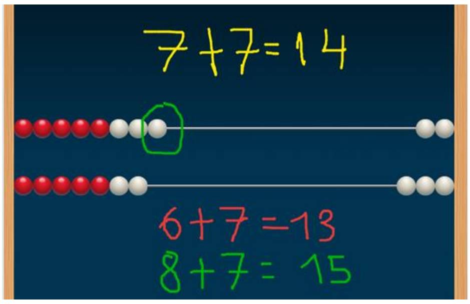
<table>
<tr>
<td>

Δραστηριότητα 1:

Η μέλισσα θέλει να φτιάξεις τις ομάδες μελισσών, που είδες στις φωτογραφίες του λαγού, στο αριθμητήριό της. Μπορείς να κρατήσεις σημειώσεις με το ψηφιακό μολυβάκι του εργαλείου.

Ανοίγουμε το αριθμητήριο, πατώντας την εικόνα:

Τι παρατηρήσατε; Γιατί συνέβη αυτό;



</td>
<td>

Δραστηριότητα 3α:

Αναπαράσταση πρόσθεσης σε ψηφιακό χειραπτικό υλικό

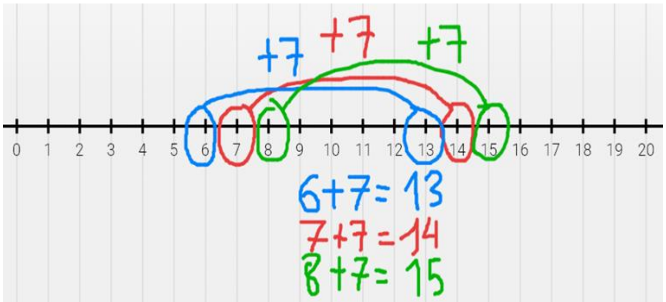
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Δραστηριότητα 2:

Ο λαγός κάτι ανακάλυψε...Για να σιγουρευτεί, πρότεινε στη μέλισσα να πάρουν το μολύβι τους και να κάνουν αυτές τις πράξεις και στην αριθμογραμμή. Σίγουρα, θα βρουν έναν τρόπο να υπολογίζουν τις μέλισσες.

Ανοίγουμε την αριθμογραμμή, πατώντας την εικόνα:

Τι συμπέρασμα βγάζετε; Συζητήστε με τους συμμαθητές σας.

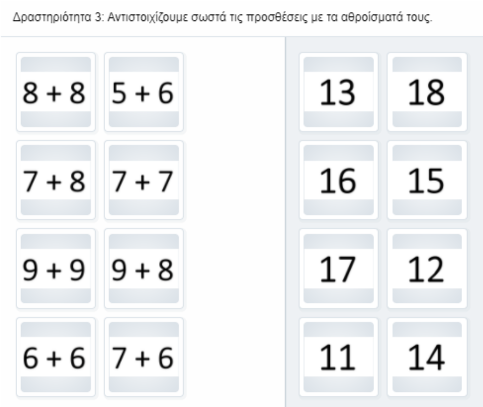


</td>
<td>

Δραστηριότητα 3β:

Αναπαράσταση πρόσθεσης σε αριθμογραμμή

</td>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
<td>

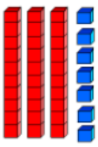
Δραστηριότητα 3γ:

Άσκηση αυτοαξιολόγησης με συμβολική αναπαράσταση

</td>
</tr>
</table>

__Δραστηριότητα 4:__

Διατύπωση συμπεράσματος και τέλος ενότητας. Ο λαγός πρέπει να απαντήσει σωστά στην ερώτηση της μέλισσας, για να προχωρήσει στο δάσος. Τότε, παίρνει την πυξίδα και προχωράει στο δάσος. Η μέλισσα, για να τον ευχαριστήσει, του προσφέρει ένα δώρο. Το δώρο της μέλισσας είναι ένα εκπαιδευτικό βίντεο για τη ζωή της μέλισσας και την παραγωγή του μελιού.

2.Οι περιπέτειες του λαγού-Το κόλπο του 9	
Στιγμιότυπα πλατφόρμας	Επεξήγηση
Καθώς περπατούσε ο Άκης Λαγουδάκης, βρήκε τον φίλο του τον Γουίνι! Χάρηκε τόσο πολύ που τον είδε! Τον πλησίασε να τον χαιρετήσει και να τον ρωτήσει πώς θα βγει από το δάσος...  	Εισαγωγή στην ενότητα-Διήγηση της ιστορίας
 	**<u>Δραστηριότητα 1:</u>** Παρουσίαση προβληματικής κατάστασης με βίντεο. Ο αρκούδος ψάχνει έναν τρόπο να προσθέτει εύκολα και γρήγορα με τον αριθμό 9, ώστε να παραγγέλνει καθημερινά τα βαζάκια με μέλι που χρειάζεται εκείνος και τα 9 παιδιά του.
Λαγός: Α, Γουίνι, κοίτα! Βρήκα κάτι δεκάδες στο βιβλίο! **Γουίνι:** Καλέ, τι μας νοιάζουν εμάς οι δεκάδες; Εγώ με το 9 θέλω να μάθω να προσθέτω! **Λαγός:** Ας ξεκινήσουμε με το 10 που είναι εύκολο και βλέπουμε. Εξάλλου, σιγά τη μεγάλη διαφορά... **Γουίνι:** Καλά λες! Ας πούμε ότι θα πάρω 5 βαζάκια μέλι για εμένα και 9 για τα μωρά μου. Θα υπολογίσω τα βαζάκια με τα τετραγωνάκια. **Λαγός:** Ωραία. Αντί για 9 βαζάκια μέλι, πες πως θα πάρεις 10...    Ερώτηση Πόσα τετραγωνάκια πήρε ο Γουίνι, για να κάνει τα 9 βαζάκια 10;	**<u>Δραστηριότητα 2:</u>** Καταιγισμός ιδεών. Οι μαθητές, μέσα από υπαινιγμούς και ερωτήσεις που καθοδηγούν τη σκέψη τους, σκέφτονται και προτείνουν πιθανές λύσεις για τον προβληματισμό του αρκουδιού. Για να προχωρήσουν στην ενότητα, πρέπει να απαντήσουν σωστά στην ερώτηση.

Δραστηριότητα 1:

Τα χέρια του Γουίνι είναι μες στο μέλι, ο λαγός ψάχνει συνέχεια στα βιβλία.

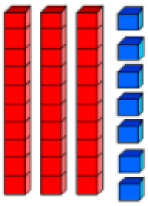
Ανοίγουμε εμείς το υλικό δεκαδικής βάσης, πατώντας την εικόνα, και υπολογίζουμε το άθροισμα 10 + 5.

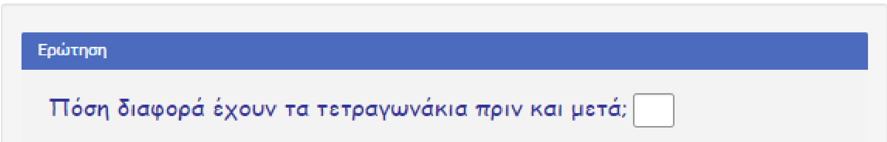
Συζητάμε:

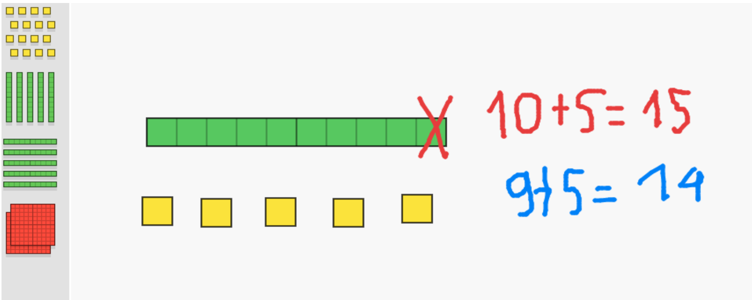
α) Πόσες δεκάδες και πόσες μονάδες θα χρειαστούμε, για να φτιάξουμε το άθροισμα;

β) Πόσα είναι τα όλα τα τετραγωνάκια;

γ) Ο Γουίνι πήρε 1 τετραγωνάκι, για να κάνει τα 9 βαζάκια 10. Αποφάσισε να το επιστρέψει. Πόσα τετραγωνάκια έμειναν;







Δραστηριότητα 3α:

Αναπαράσταση πρόσθεσης σε ψηφιακό χειραπτικό υλικό. Αφού αναπαραστήσουν την πρόσθεση, οι μαθητές πρέπει να απαντήσουν σωστά στην ερώτηση, για να προχωρήσουν στην ενότητα. Επιπλέον, συζητούν τις παρατηρήσεις τους με τους συμμαθητές τους.

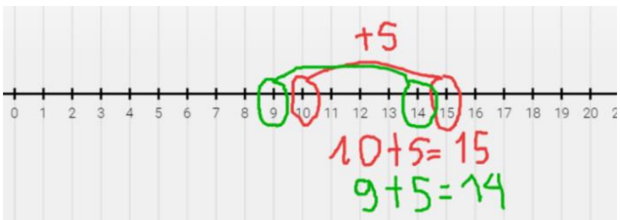
Δραστηριότητα 2:

Ο λαγός και ο αρκουδάκος παρατήρησαν πως το 9 με το 10 έχουν 1 τετραγωνάκι διαφορά και πως το 14 μετο 15 έχουν 1 τετραγωνάκι διαφορά, επίσης!

Έλυσαν με το μολύβι τους τις πράξεις 10+5 και 9+5 στην αριθμογραμμή, για να καταλάβουν γιατί συμβαίνει αυτό.

Ανοίγουμε την αριθμογραμμή, πατώντας την εικόνα.

Τι λέτε να κατάλαβαν οι δύο φίλοι;



Δραστηριότητα 3β:

Αναπαράσταση πρόσθεσης σε αριθμογραμμή

<table>
<tr>
<td>

9+3=

13

12

</td>
<td>

<u>Δραστηριότητα 3γ:</u>

Άσκηση αυτοαξιολόγησης με σύμβολα και αριθμούς

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Γουίνι: Λαγέ, σ'ευχαριστώ που μου έμαθες *το κόλπο με το 9* ! Σου χαρίζω αυτόν τον χάρτη του δάσους, ώστε να μπορέσεις να βρεις την έξοδο. Πριν φύγεις, κάτι θέλουν να σου πουν τα μικρά μου. Κάνε **9** βήματα ευθεία, μετά στρίψε αριστερά και κάνε άλλα **7** βήματα, για να τα συναντήσεις!

Ερώτηση

Πόσα βήματα πρέπει να κάνει ο λαγός, για να συναντήσει τα 9 αρκουδάκια;

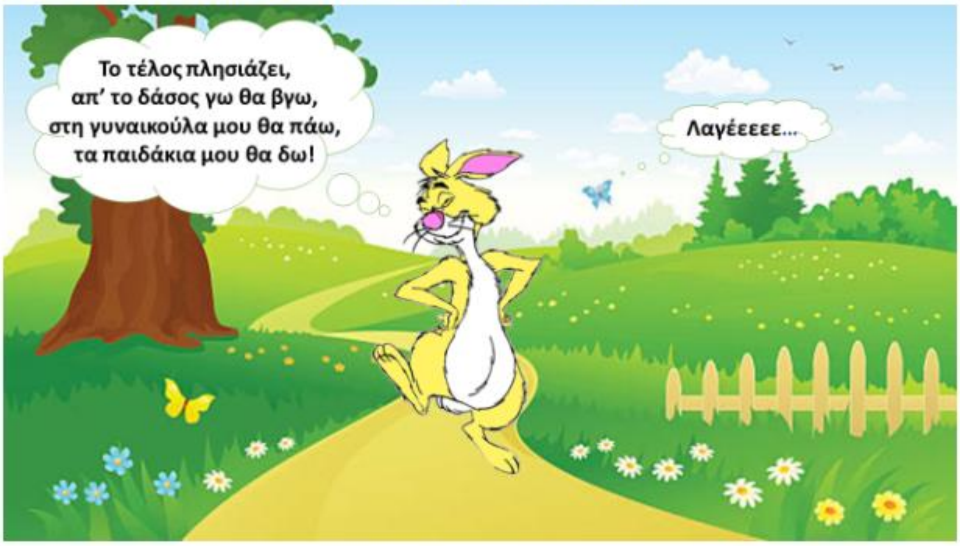
- 17
- 16

</td>
<td>

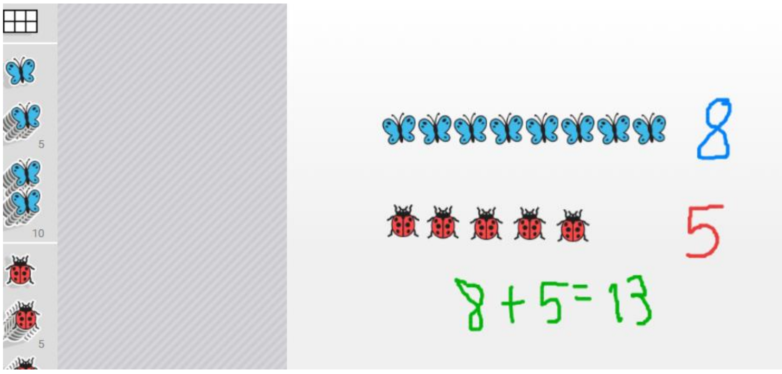
<u>Δραστηριότητα 4:</u>

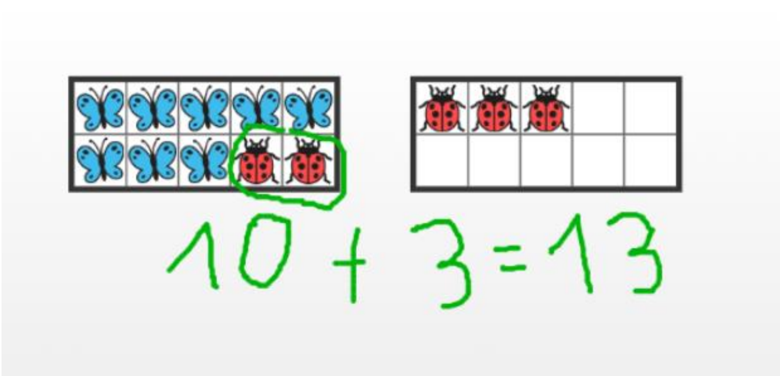
Διατύπωση συμπεράσματος και τέλος ενότητας. Ο αρκούδος, για να ευχαριστήσει τον λαγό που του έμαθε το κόλπο με το 9, του προσφέρει τον χάρτη του δάσους. Τέλος, ο λαγός, για να συναντήσει τα αρκουδάκια, πρέπει να βρει σε πόσα βήματα θα τα συναντήσει, κάνοντας μία πρόσθεση με το 9.

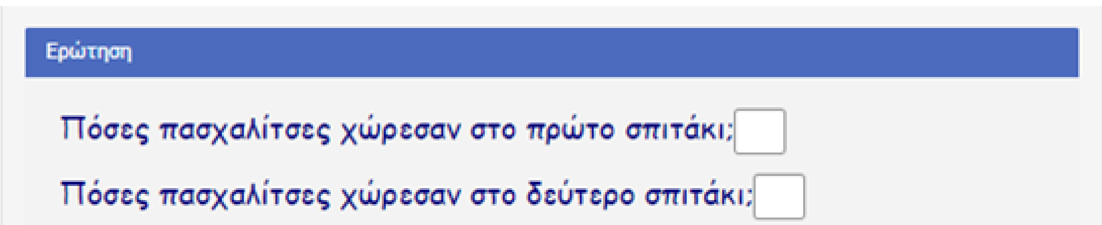
</td>
</tr>
</table>

3.Οι περιπέτειες του λαγού-Η στάση στο 10	
Στιγμιότυπα πλατφόρμας	Επεξήγηση
Ο Άκης Λαγουδάκης, έχοντας την πυξίδα και τον χάρτη, προχωράει στο δάσος, ελπίζοντας να βρει σύντομα το κλειδί της εξόδου.Τραγουδάει γεμάτος κέφι και χαρά! Νιώθει πως πλησιάζει η στιγμή που θα βρεθεί ξανά στο σπίτι του με την οικογένειά του! Ώσπου ξαφνικά, ακούγεται μια φωνή...  	Εισαγωγή στην ενότητα-Διήγηση της ιστορίας
Ο λαγός γυρίζει και βλέπει **8** πανέμορφες πεταλούδες και **5** τρισχαριτωμένες πασχαλίτσες που απολάμβαναν την ολάνθιστη φύση! Εκείνες τον πλησίασαν, για να του ζητήσουν μια χάρη που δεν πολυάρεσε στον Άκη Λαγουδάκη...  Ερώτηση Πόσες είναι οι πεταλούδες και οι πασχαλίτσες μαζί;	**<u>Δραστηριότητα 1:</u>** Παρουσίαση προβληματικής κατάστασης. Ο λαγός καλείται να φτιάξει σπίτια για τις πεταλούδες και τις πασχαλίτσες.

Δραστηριότητα 2:
Καταιγισμός ιδεών. Οι μαθητές ερμηνεύουν τα στοιχεία και διατυπώνουν υποθέσεις. Επιπλέον, παρακολουθούν ένα βίντεο, στο οποίο ο λαγός εξηγεί τη συνήθειά του να χωρίζει τη διαδρομή του μέχρι το 10, να κάνει ένα διάλειμμα και να συνεχίζει. Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια της συμπλήρωσης της δεκάδας.







Δραστηριότητα 3α:

Αναπαράσταση πρόσθεσης σε ψηφιακό χειραπτικό υλικό. Αφού αναπαραστήσουν την πρόσθεση, οι μαθητές πρέπει να απαντήσουν σωστά στην ερώτηση, για να προχωρήσουν στην ενότητα. Μοιράζοντας τα έντομα στα σπίτια, αντιλαμβάνονται καλύτερα την έννοια της συμπλήρωσης της δεκάδας.

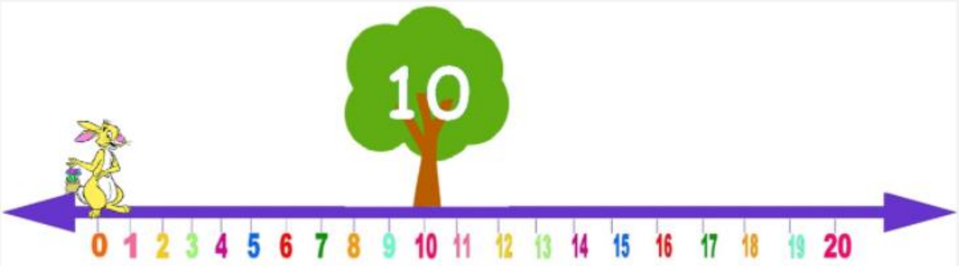
<table>
<tr>
<td>


Ερώτηση 1

Ο λαγός βρίσκεται στο 7 και θέλει να κάνει 5 βήματα μπροστά στην αριθμογραμμή.
Θα κάνει ☐ βήματα μέχρι το 10 και θα ξεκουραστεί.
Του μένουν άλλα ☐ βήματα μέχρι το τέλος της διαδρομής του.

Ερώτηση 2

Σε ποιον αριθμό θα φτάσει; Πάτησέ τον στην αριθμογραμμή.



ΥΠΟΒΟΛΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
</td>
<td>
<u>Δραστηριότητα 3β:</u>

Αναπαράσταση προσθέσεων σε αριθμογραμμή. Οι μαθητές, αφού παρακολουθήσουν ένα βίντεο στο οποίο ο λαγός εξηγεί την υπέρβαση της δεκάδας, ακολουθούν τα βήματα της «στάσης στο 10» και αναπαριστούν πράξεις στην αριθμογραμμή.
</td>
</tr>
<tr>
<td>
1 2 3 4

Ερώτηση 4

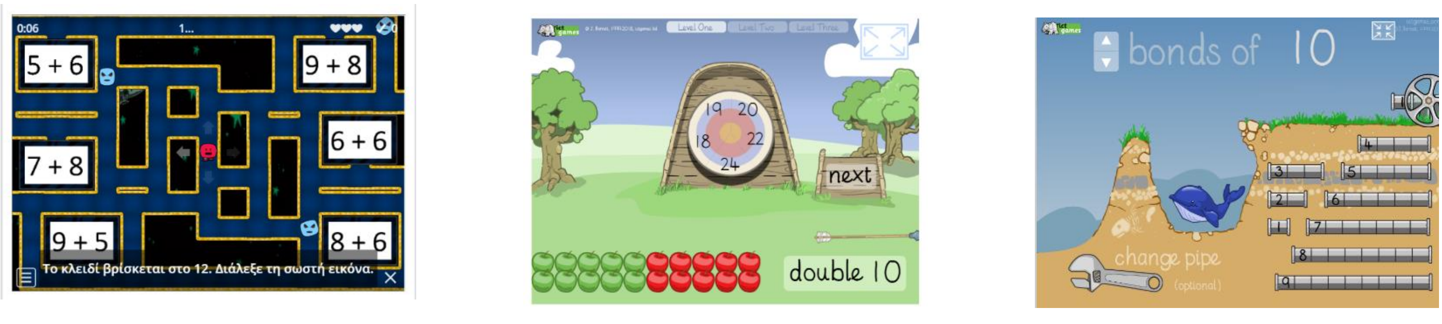
☐ ☐
V
6+ 7= 10 + ☐ = ☐

ΥΠΟΒΟΛΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ
</td>
<td>
<u>Δραστηριότητα 3γ:</u>

Άσκηση αυτοαξιολόγησης με συμβολική αναπαράσταση.
</td>
</tr>
</table>

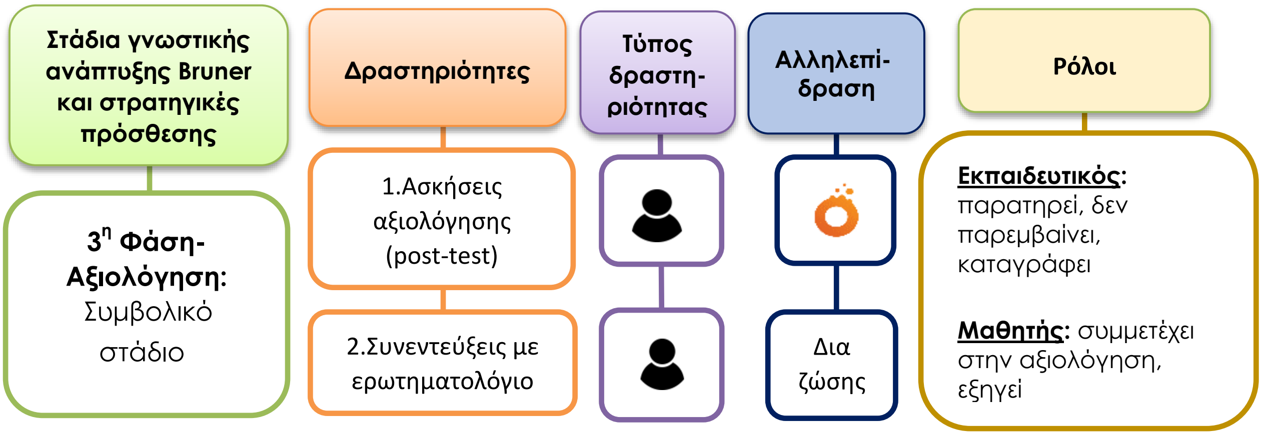
 	**Δραστηριότητα 4:** Τέλος ενότητας. Ο λαγός, έχοντας λύσει όλα τα μαθηματικά προβλήματα των ζώων του δάσους και έχοντας πάρει την πυξίδα, τον χάρτη και το κλειδί, βγαίνει από το δάσος και επιστρέφει στο σπίτι του.

Παράλληλα, ανάμεσα στις ενότητες του ηλεκτρονικού μαθήματος, υπάρχουν παιγνιώδεις δραστηριότητες που συνεισφέρουν στην εκπαιδευτική διαδικασία, εγείρουν το ενδιαφέρον και το κίνητρο των μαθητών και καθιστούν το μάθημα πιο διασκεδαστικό και ευχάριστο. Ακόμα, σε πολλά σημεία του μαθήματος, υπάρχουν ερωτήσεις, οι οποίες αν δεν απαντηθούν σωστά, δεν επιτρέπουν στον μαθητή να προχωρήσει στις επόμενες ενότητες. Οι ερωτήσεις αυτές, όπως τα στοιχεία και οι υπαινιγμοί που συναντώνται στους διαλόγους των ζώων, καθοδηγούν τη σκέψη του μαθητή και λειτουργούν υποστηρικτικά στον τρόπο σκέψης των μαθητών. Παράλληλα, το ηλεκτρονικό μάθημα είναι εμπλουτισμένο με εκπαιδευτικά βίντεο και μαθηματικά παιχνίδια, προκειμένου να αυξάνεται η προσοχή, η συγκέντρωση και η ικανοποίηση των μαθητών.



Εικόνα 10: Στιγμιότυπα από τα ψηφιακά εκπαιδευτικά παιχνίδια

3.9.3 ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΡΙΤΗΣ ΦΑΣΗΣ



Εικόνα 11: Σχεδιάγραμμα οργάνωσης τρίτης φάσης

Η τρίτη φάση είναι η φάση της αξιολόγησης της εκπαιδευτικής παρέμβασης και ονομάζεται «Συμβολικό στάδιο/Αξιολόγηση» και αποτελείται από δύο ενότητες. Μετά την ολοκλήρωση του ηλεκτρονικού μαθήματος, οι μαθητές παρακολουθούν πάλι ένα βίντεο με τη μέλισσα να τους συγχαίρει για την προσπάθειά τους και να τους ενημερώνει για τη δυνατότητα λήψης βραβείου ερευνητή. Για να λάβουν αυτό το βραβείο, οι μαθητές θα πρέπει να λύσουν ασκήσεις (post-test), ανάλογης δυσκολίας με αυτές που έλυσαν στην πρώτη φάση, χωρίς όμως τη βοήθεια χειραπτικού υλικού, αριθμογραμμής ή άλλων απεικονίσεων. Έτσι, μέσα από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων των ασκήσεων πριν και μετά τη διδακτική παρέμβαση, θα διαπιστωθεί αν η εκμάθηση των στρατηγικών πρόσθεσης μέσα από το ηλεκτρονικό μάθημα που βασίζεται στα στάδια γνωστικής ανάπτυξης του Bruner, βοήθησε τους μαθητές να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους στην επίλυση των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας, αλλά και να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν τις στρατηγικές νοερού λογισμού που διδάχθηκαν.

Μετά από αυτή τη διαδικασία, οι μαθητές θα κληθούν σε σύντομες ατομικές συνεντεύξεις, στις οποίες θα απαντήσουν στην εκπαιδευτικό ερωτήσεις σχετικές με τον τρόπο που έλυσαν τις ασκήσεις. Η εκπαιδευτικός θα αξιολογεί τις απαντήσεις των μαθητών σε μία πενταβάθμια κλίμακα. Από τα αποτελέσματα θα απαντηθεί το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα σχετικά με το αν το ηλεκτρονικό μάθημα που βασίζεται στα στάδια γνωστικής εξέλιξης του Bruner βοήθησε τους μαθητές να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν τις στρατηγικές πρόσθεσης με νοερό λογισμό που διδάχθηκαν.

Στο τέλος του μαθήματος, οι μαθητές λαμβάνουν το βραβείο εξερευνητή Μαθηματικών ως ανταμοιβή για την προσπάθειά τους.

Εικόνα 12: Βραβείο εξερευνητή Μαθηματικών

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ

4.1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

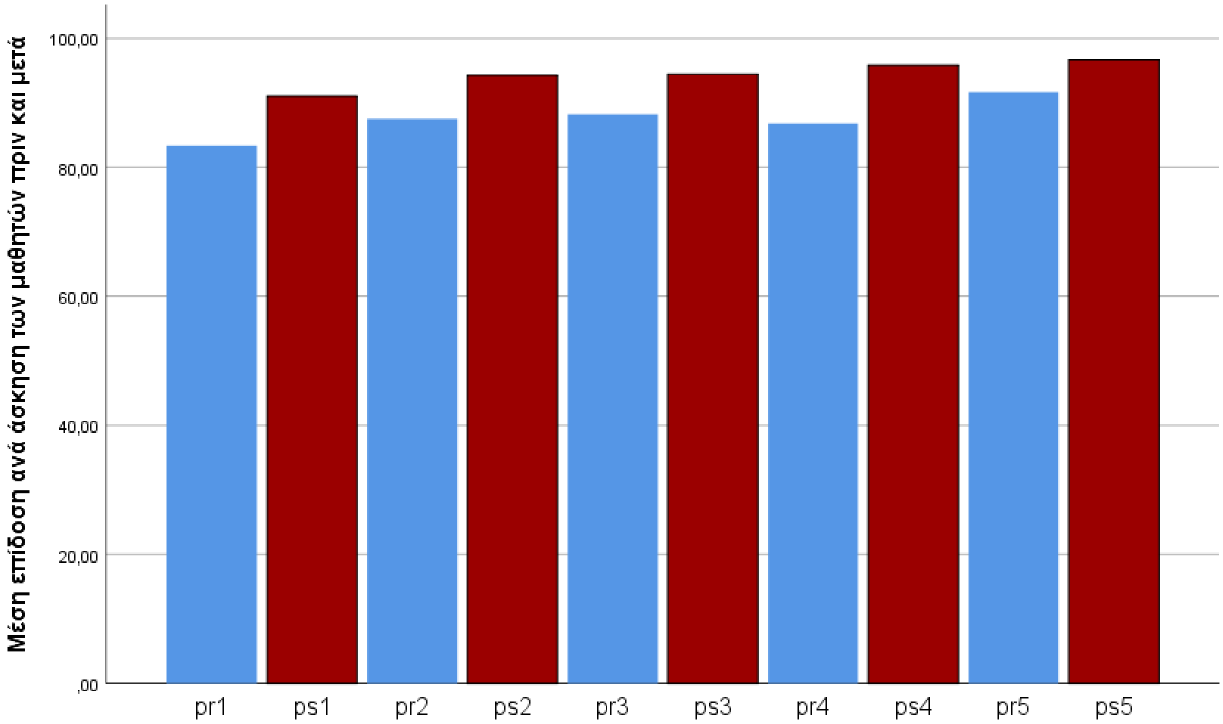
Στο παρόν κεφάλαιο διατυπώνονται τα αποτελέσματα της έρευνας βάσει των επιδόσεων που πέτυχαν οι μαθητές σε ασκήσεις πριν και μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος, καθώς και βάσει των απαντήσεων των μαθητών σε συνεντεύξεις, με τη βοήθεια ερωτηματολογίου πενταβάθμιας κλίμακας Likert. Το δείγμα ήταν είκοσι τέσσερις (24) μαθητές. Για την ανάλυση των δεδομένων και την πραγματοποίηση των στατιστικών ελέγχων χρησιμοποιήθηκε το λογισμικό Statistical Package for the Social Sciences (SPSS).

4.2: ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ 1ΟΥ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΣ

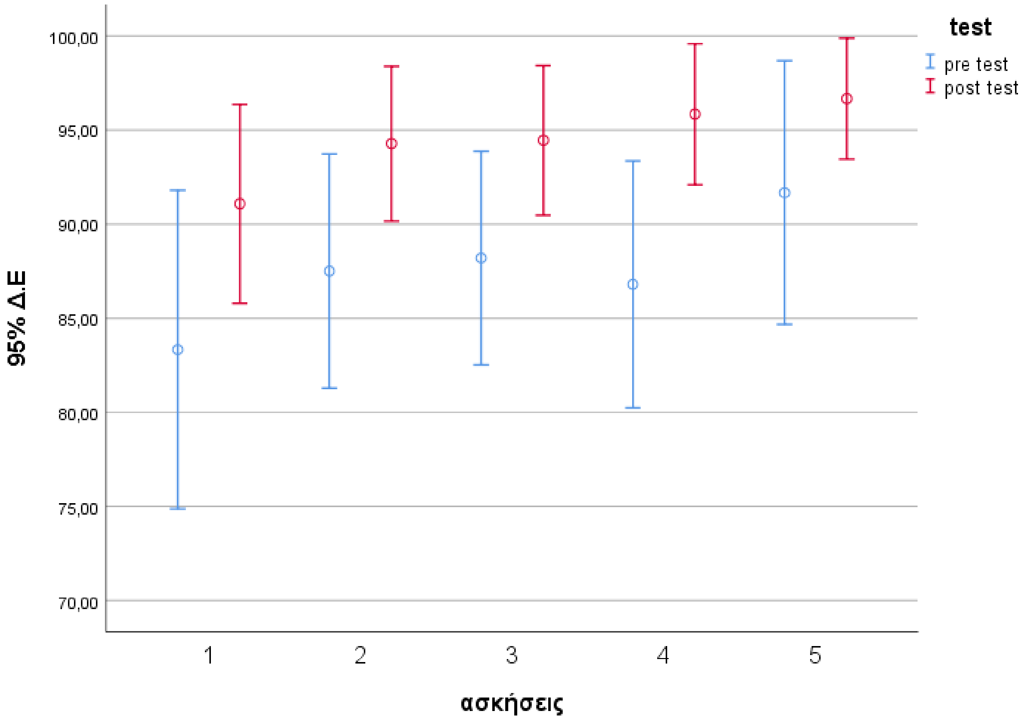
Αρχικά, υπολογίστηκαν τα μέτρα θέσης και διασποράς, συγκεκριμένα, οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις για κάθε άσκηση, πριν και μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος, για όλους τους μαθητές. Στη συνέχεια, δημιουργήθηκαν ένα ραβδόγραμμα και ένα ραβδόγραμμα σφαλμάτων (error bar), τα οποία δείχνουν συγκριτικά τις μέσες επιδόσεις των μαθητών σε κάθε άσκηση.

	Πλήθος	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση
Άσκηση 1 **πριν** το course	24	83,3321	20,05610
Άσκηση 2 **πριν** το course	24	87,5000	14,74420
Άσκηση 3 **πριν** το course	24	88,1942	13,44005
Άσκηση 4 **πριν** το course	24	86,8046	15,52546
Άσκηση 5 **πριν** το course	24	91,6667	16,59404
Άσκηση 1 **μετά** το course	24	91,0704	12,50607
Άσκηση 2 **μετά** το course	24	94,2708	9,73785
Άσκηση 3 **μετά** το course	24	94,4438	9,41159
Άσκηση 4 **μετά** το course	24	95,8329	8,86050
Άσκηση 5 **μετά** το course	24	96,6667	7,61387

Πίνακας 1: Μέτρα θέσης και μέτρα διασποράς



Διάγραμμα 1: Ραβδόγραμμα μέσων επιδόσεων όλων των ασκήσεων



Διάγραμμα 2: Ραβδόγραμμα σφαλμάτων (error bar) μέσων επιδόσεων όλων των ασκήσεων

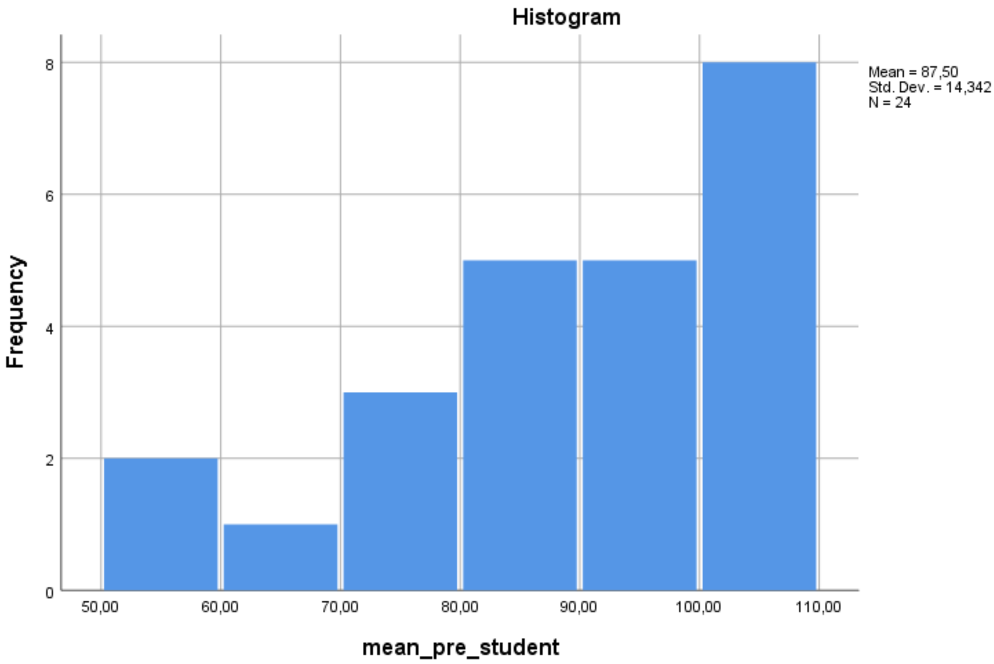
__Παρατήρηση__:

Από τον πίνακα 1 και τα γραφήματα φαίνεται **ότι οι μαθητές μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος σημειώνουν υψηλότερες κατά μέσο όρο επιδόσεις σε**

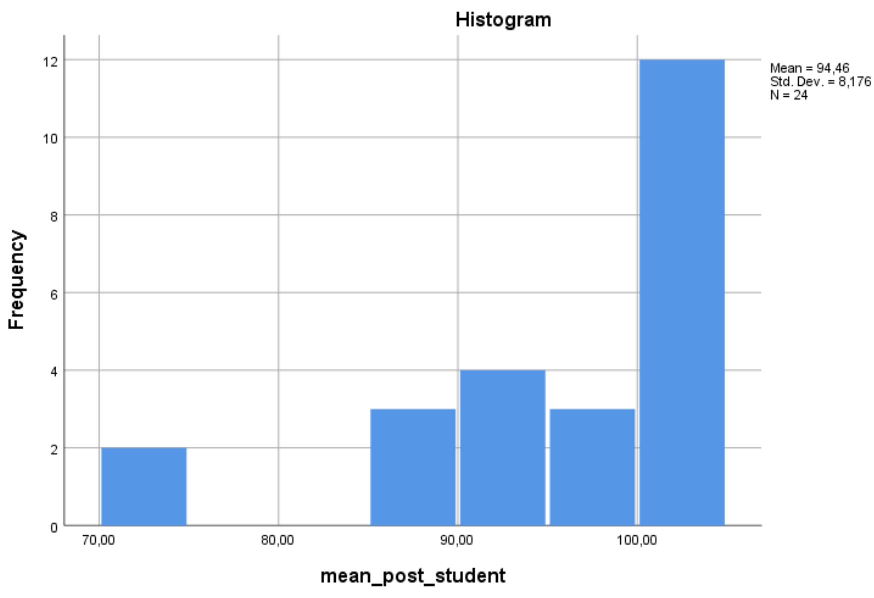
σύγκριση με πριν την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος. Τα διαστήματα εμπιστοσύνης, μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος, έχουν μικρότερο εύρος και οι μέσες τιμές έχουν ανεβεί, κάτι που μας δείχνει ότι **οι μαθητές κάνουν λιγότερα λάθη σε σχέση με πριν την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος.**

ΕΛΕΓΧΟΣ ΚΑΝΟΝΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ

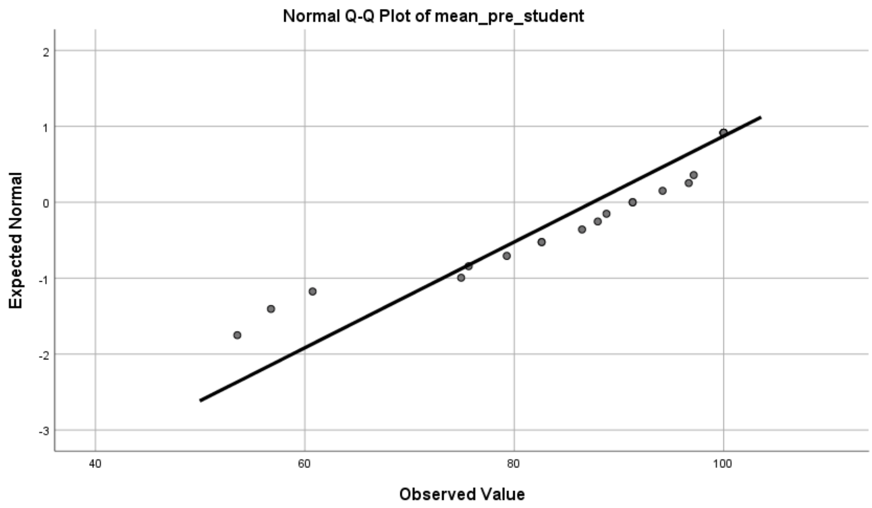
Έπειτα, πραγματοποιείται έλεγχος κανονικότητας των δεδομένων. Παρουσιάζονται τα ιστογράμματα για τις μέσες επιδόσεις όλων των μαθητών στις ασκήσεις πριν και μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος.



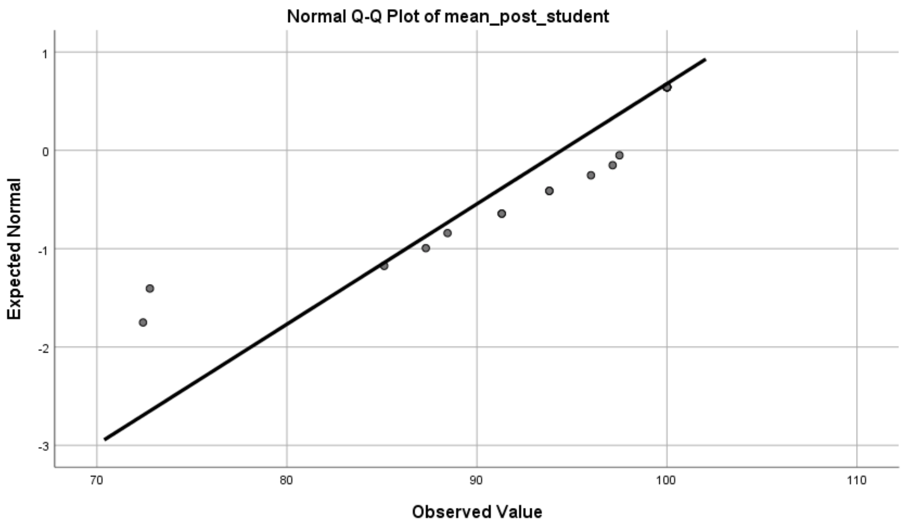
Διάγραμμα 3: : Ιστόγραμμα μέσων επιδόσεων στις pre-test ασκήσεις



Διάγραμμα 4: Ιστόγραμμα μέσων επιδόσεων στις post-test ασκήσεις



Διάγραμμα 5: Q-Q plot μέσων επιδόσεων στις pre-test ασκήσεις



Διάγραμμα 6: Q-Q plot μέσων επιδόσεων στις post-test ασκήσεις

Παρατήρηση:

Από τα ιστογράμματα φαίνεται ότι οι μέσες επιδόσεις των μαθητών ανά άσκηση δεν ακολουθούν κανονική κατανομή, τόσο πριν όσο και μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος.

Στη συνέχεια, παρουσιάζονται τα τεστ κανονικότητας Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk.

Μηδενική υπόθεση (H_0): Τα δεδομένα ακολουθούν κανονική κατανομή.

Εναλλακτική υπόθεση (H_a): Τα δεδομένα δεν ακολουθούν κανονική κατανομή.

Έλεγχος κανονικότητας δεδομένων		
	Kolmogorov-Smirnov	Shapiro-Wilk
	Sig.	
Μέσες επιδόσεις μαθητών στις **pre-test ασκήσεις**	,023	,001
Μέσες επιδόσεις μαθητών στις **post-test ασκήσεις**	,000	,000

Πίνακας 2: Τεστ κανονικότητας Kolmogorov-Smirnov και Shapiro-Wilk

Και οι δύο έλεγχοι **απορρίπτουν τη μηδενική υπόθεση της κανονικότητας** σε επίπεδο σημαντικότητας α=5%, τόσο πριν όσο και μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος.

<u>Συμπέρασμα</u>:

Άρα, συμπεραίνεται ότι **τα δεδομένα δεν ακολουθούν κανονική κατανομή.**

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΕΠΙΔΟΣΕΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

Στη συνέχεια, υπολογίστηκε η μέση απόδοση όλων των μαθητών για όλες τις ασκήσεις πριν την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος και για όλες τις ασκήσεις μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος.

Μέσες επιδόσεις μαθητών			
	Πλήθος	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση
Μέσες επιδόσεις μαθητών στις **pre-test ασκήσεις**	24	94,4569	8,17610
Μέσες επιδόσεις μαθητών στις **post-test ασκήσεις**	24	87,4995	14,34190

Πίνακας 3: Μέσες επιδόσεις μαθητών σε όλες τις ασκήσεις

Ο μέσος όρος των μέσων επιδόσεων μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος είναι 94,46 με τυπική απόκλιση 8,176, σε σχέση με τον μέσο όρο των επιδόσεων πριν την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος που είναι 87,50 με τυπική απόκλιση 14,342.

<u>Παρατήρηση:</u>

Επομένως, φαίνεται πως οι επιδόσεις βελτιώθηκαν μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος.

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε τεστ εξαρτημένων δειγμάτων (paired t-test) για να ελεγχθεί κατά πόσο οι μέσες τιμές των μέσων επιδόσεων είναι ίσες ή διαφέρουν.

<u>Μηδενική υπόθεση</u> (H_0): Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των μέσων τιμών των μέσων επιδόσεων των μαθητών στις pre test και post test ασκήσεις.

Εναλλακτική υπόθεση (H_a): Υπάρχει διαφορά μεταξύ των μέσων τιμών των μέσων επιδόσεων των μαθητών στις pre test και post test ασκήσεις.

Paired Samples Test	
	Sig. (2-tailed)
Διαφορά μέσων τιμών των μέσων επιδόσεων των μαθητών στις pre test και post test ασκήσεις	,000

Πίνακας 4: Τεστ εξαρτημένων δειγμάτων (paired t-test)

Παρατηρείται στον πίνακα 4 ότι sig=0<0,05. Άρα, **η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται.**

Συμπέρασμα:

Οι μέσες τιμές των επιδόσεων στις post test ασκήσεις είναι **μεγαλύτερες** σε σχέση με αυτές των pre test ασκήσεων σε επίπεδο σημαντικότητας α=5%.

ΜΗ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΜΕΣΩΝ ΕΠΙΔΟΣΕΩΝ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ ΠΡΙΝ ΚΑΙ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΚΟΛΟΥΘΗΣΗ ΤΟΥ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΜΕ WILCOXON SIGNED RANK TEST

Μηδενική υπόθεση (H_0): Δεν υπάρχει διαφορά μεταξύ των διάμεσων των μέσων επιδόσεων των μαθητών στις pre test και post test ασκήσεις.

Εναλλακτική υπόθεση (H_a): Υπάρχει διαφορά μεταξύ των διάμεσων των μέσων επιδόσεων των μαθητών στις pre test και post test ασκήσεις.

Related-Samples Wilcoxon Signed Rank Test		
	Sig.	Αποτέλεσμα
Διαφορά των διάμεσων των μέσων επιδόσεων των μαθητών στις pre test και post test ασκήσεις	,000	Απόρριψη μηδενικής υπόθεσης

Πίνακας 5: Wilcoxon Signed Rank Test

Παρατηρείται στον πίνακα 5 ότι sig=0<0,05. Άρα, **η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται .**

<u>Συμπέρασμα</u>:

Επομένως, συμπεραίνεται ότι και οι διάμεσοι των μέσων επιδόσεων στις post test ασκήσεις είναι **μεγαλύτερες** σε σχέση με αυτές των pre test ασκήσεων σε επίπεδο σημαντικότητας α=5%.

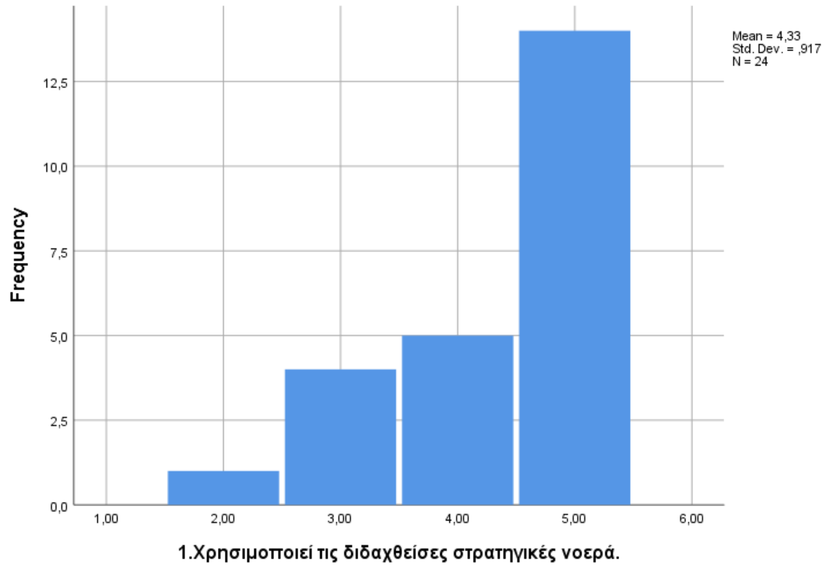
4.3: ΠΕΡΙΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΩΝ 2ΟΥ ΕΡΕΥΝΗΤΙΚΟΥ ΕΡΩΤΗΜΑΤΟΣ

Αρχικά, υπολογίστηκαν τα μέτρα θέσης και διασποράς, συγκεκριμένα, οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις για κάθε ερώτηση του ερωτηματολογίου. Επιπλέον, δημιουργήθηκαν ιστογράμματα που δείχνουν την κατανομή των απαντήσεων ανά ερώτηση του ερωτηματολογίου.

Ερωτήσεις	Πλήθος	Μέση τιμή	Τυπική απόκλιση
1. Χρησιμοποιεί τις διδαχθείσες στρατηγικές νοερά.	24	4,3333	,91683
2. Χρησιμοποιεί τις διδαχθείσες στρατηγικές με τη βοήθεια εποπτικού υλικού (δάχτυλα, αντικείμενα, αριθμογραμμή).	24	2,0833	1,01795
3. Κατά την επίλυση των ασκήσεων, χρησιμοποιεί και άλλες στρατηγικές νοερού λογισμού.	24	3,0000	1,41421
4. Όταν χρησιμοποιεί τις στρατηγικές, υπολογίζει με ακρίβεια το αριθμητικό αποτέλεσμα μιας πρόσθεσης.	24	4,7083	,55003
5. Εξηγεί με σαφήνεια τα βήματα της στρατηγικής που χρησιμοποίησε, για να λύσει μία πρόσθεση.	24	4,6667	,56466
6. Κατά τη χρήση των στρατηγικών πρόσθεσης, αντιλαμβάνεται τις σχέσεις των αριθμών μεταξύ τους.	24	4,8333	,48154
7. Μπορεί να εξηγήσει τις στρατηγικές, αναπαριστώντας τες στα εποπτικά υλικά.	24	4,9167	,28233
8. Μπορεί να εξηγήσει τις στρατηγικές, δίνοντας παραδείγματα για την καθεμία.	24	4,8333	,48154
9. Ανάλογα με τα αριθμητικά δεδομένα, επιλέγει την πιο κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση μιας πρόσθεσης.	24	4,7917	,58823

Πίνακας 6: Μέτρα θέσης και μέτρα διασποράς ερωτηματολογίου

ΕΡΩΤΗΣΗ 1: Χρησιμοποιεί τις διδαχθείσες στρατηγικές νοερά.

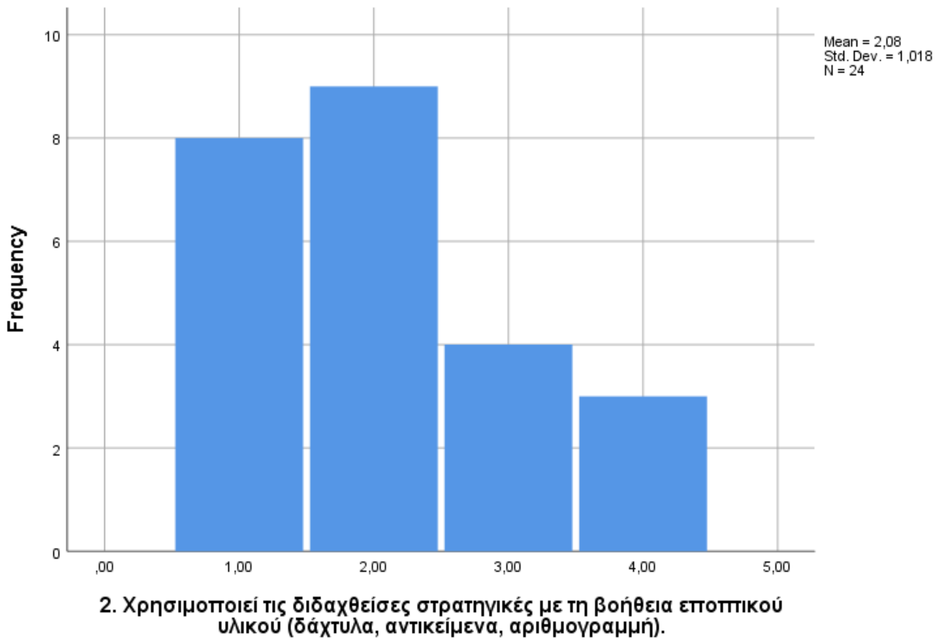


Διάγραμμα 7: Ιστόγραμμα ερώτησης 1

Ο μέσος όρος των απαντήσεων στην ερώτηση 1 είναι 4,33 με τυπική απόκλιση 0,916.

Άρα, φαίνεται πως οι μαθητές χρησιμοποιούν σε μεγάλο βαθμό τις διδαχθείσες στρατηγικές νοερά.

ΕΡΩΤΗΣΗ 2: Χρησιμοποιεί τις διδαχθείσες στρατηγικές με τη βοήθεια εποπτικού υλικού (δάχτυλα, αντικείμενα, αριθμογραμμή).

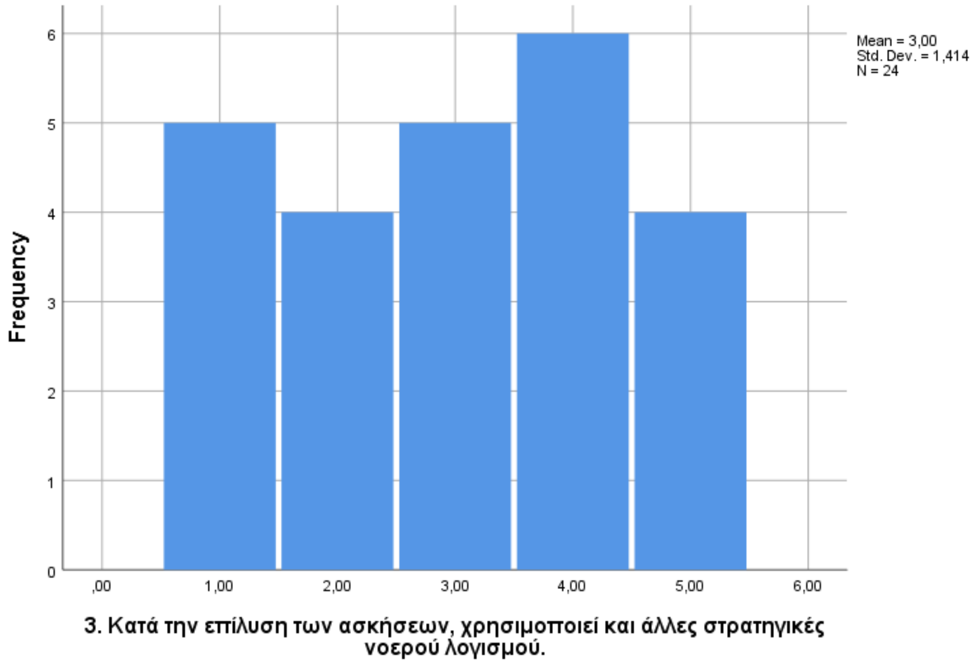


Διάγραμμα 8: Ιστόγραμμα ερώτησης 2

Ο μέσος όρος των απαντήσεων στην ερώτηση 2 είναι 2,08 με τυπική απόκλιση 1,017.

Άρα, φαίνεται πως οι μαθητές δε χρησιμοποιούν συχνά τις διδαχθείσες στρατηγικές με τη βοήθεια εποπτικού υλικού (δάχτυλα, αντικείμενα, αριθμογραμμή).

ΕΡΩΤΗΣΗ 3: Κατά την επίλυση των ασκήσεων, χρησιμοποιεί και άλλες στρατηγικές νοερού λογισμού.

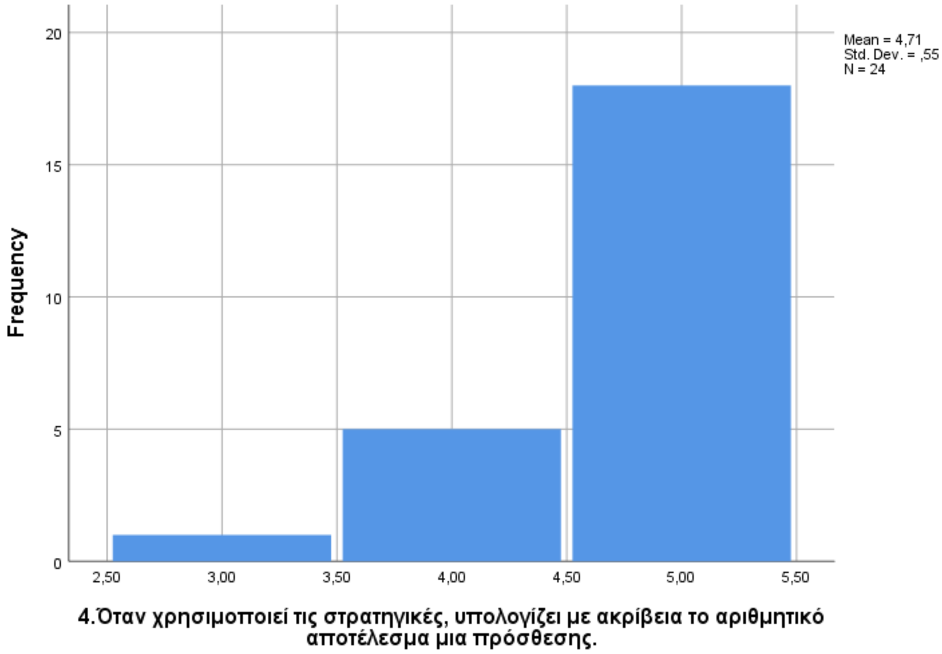


Διάγραμμα 9: Ιστόγραμμα ερώτησης 3

Ο μέσος όρος των απαντήσεων στην ερώτηση 3 είναι 3 με τυπική απόκλιση 0,414.

Άρα, φαίνεται πως οι μαθητές, κατά την επίλυση των ασκήσεων, χρησιμοποιούν και άλλες στρατηγικές νοερού λογισμού σε μέτριο βαθμό.

ΕΡΩΤΗΣΗ 4: Όταν χρησιμοποιεί τις στρατηγικές, υπολογίζει με ακρίβεια το αριθμητικό αποτέλεσμα μιας πρόσθεσης.

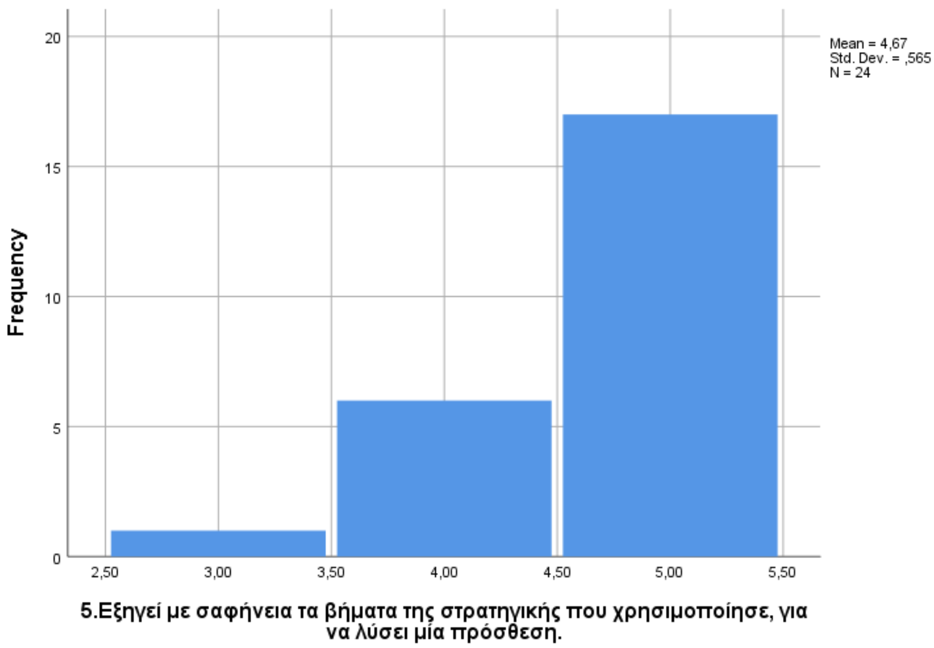


Διάγραμμα 10: Ιστόγραμμα ερώτησης 4

Ο μέσος όρος των απαντήσεων στην ερώτηση 4 είναι 4,70 με τυπική απόκλιση 0,550.

Άρα, φαίνεται πως οι μαθητές, όταν χρησιμοποιούν τις στρατηγικές, υπολογίζουν πολύ συχνά με ακρίβεια το αριθμητικό αποτέλεσμα μιας πρόσθεσης.

ΕΡΩΤΗΣΗ 5: Εξηγεί με σαφήνεια τα βήματα της στρατηγικής που χρησιμοποίησε, για να λύσει μία πρόσθεση.

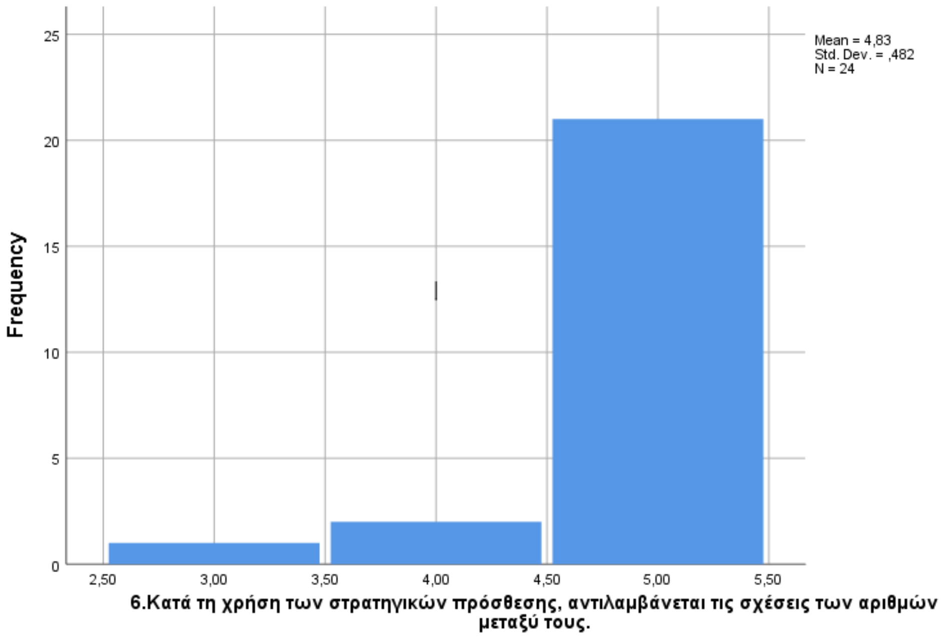


Διάγραμμα 11: Ιστόγραμμα ερώτησης 5

Ο μέσος όρος των απαντήσεων στην ερώτηση 5 είναι 4,67 με τυπική απόκλιση 0,564.

Άρα, φαίνεται πως οι μαθητές εξηγούν με σαφήνεια τα βήματα της στρατηγικής που χρησιμοποίησαν, για να λύσουν μία πρόσθεση πολύ συχνά.

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ 6</u>: Κατά τη χρήση των στρατηγικών πρόσθεσης, αντιλαμβάνεται τις σχέσεις των αριθμών μεταξύ τους.

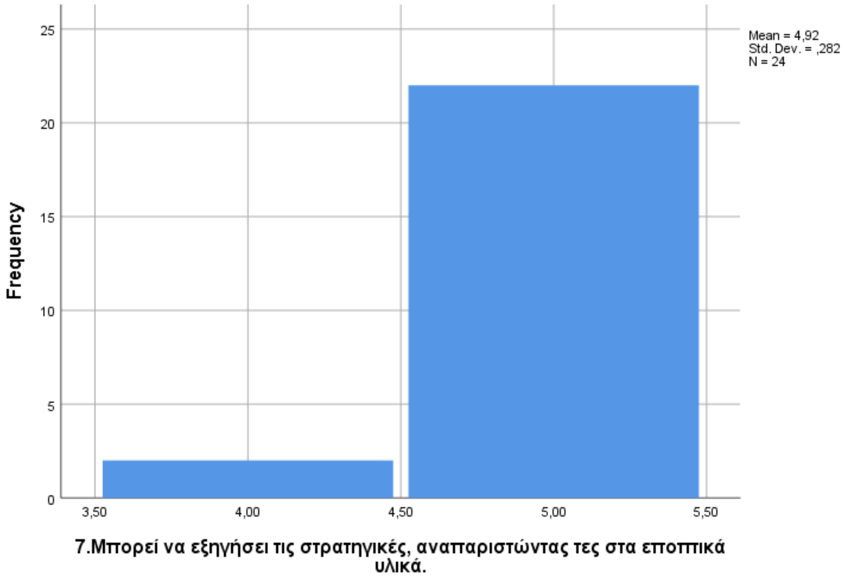


Διάγραμμα 12: Ιστόγραμμα ερώτησης 6

Ο μέσος όρος των απαντήσεων στην ερώτηση 6 είναι 4,83 με τυπική απόκλιση 0,481.

Άρα, φαίνεται πως οι μαθητές κατά τη χρήση των στρατηγικών πρόσθεσης, αντιλαμβάνονται τις σχέσεις των αριθμών μεταξύ τους πολύ συχνά.

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ 7</u>: Μπορεί να εξηγήσει τις στρατηγικές, αναπαριστώντας τες στα εποπτικά υλικά.

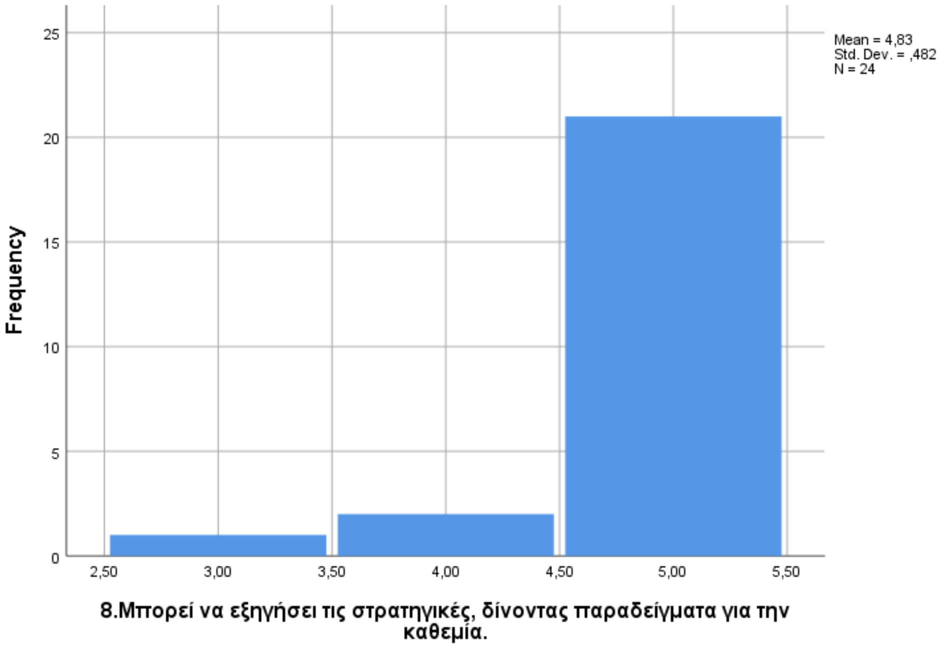


Διάγραμμα 13: Ιστόγραμμα ερώτησης 7

Ο μέσος όρος των απαντήσεων στην ερώτηση 7 είναι 4,91 με τυπική απόκλιση 0,282.

Άρα, φαίνεται πως οι μαθητές μπορούν να εξηγήσουν τις στρατηγικές, αναπαριστώντας τες στα εποπτικά υλικά σε πάρα πολύ μεγάλο βαθμό.

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ 8</u>: Μπορεί να εξηγήσει τις στρατηγικές, δίνοντας παραδείγματα για την καθεμία.

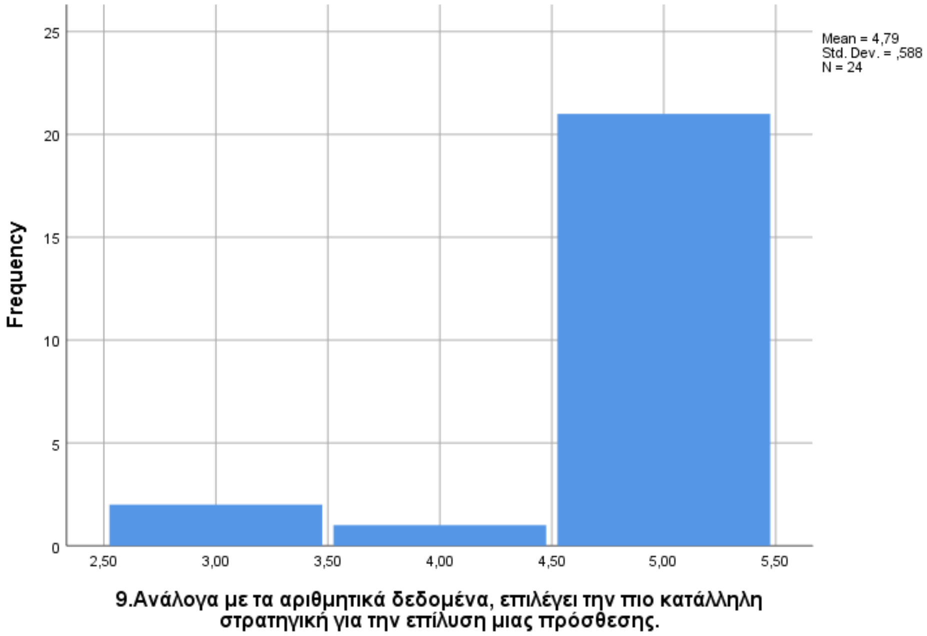


Διάγραμμα 14: Ιστόγραμμα ερώτησης 8

Ο μέσος όρος των απαντήσεων στην ερώτηση 8 είναι 4,83 με τυπική απόκλιση 0,481.

Άρα, φαίνεται πως οι μαθητές μπορούν να εξηγήσουν τις στρατηγικές, δίνοντας παραδείγματα για την καθεμία σε πάρα πολύ μεγάλο βαθμό.

ΕΡΩΤΗΣΗ 9: Ανάλογα με τα αριθμητικά δεδομένα, επιλέγει την πιο κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση μιας πρόσθεσης.



Διάγραμμα 15: Ιστόγραμμα ερώτησης 9

Ο μέσος όρος των απαντήσεων στην ερώτηση 9 είναι 4,79 με τυπική απόκλιση 0,481.

Άρα, φαίνεται πως οι μαθητές, ανάλογα με τα αριθμητικά δεδομένα, επιλέγουν την πιο κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση μιας πρόσθεσης σε πάρα πολύ μεγάλο βαθμό.

ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Θα πραγματοποιηθούν έλεγχοι υπόθεσης, για να διερευνηθεί σε ποιο βαθμό χρησιμοποιούν και κατανοούν οι μαθητές τις διδαχθείσες στρατηγικές.

Ορίστηκε ως μέτριος βαθμός το 3 της κλίμακας Likert 1-5 του ερωτηματολογίου.

One-Sample Statistics				One-Sample Test
	Ερωτήσεις	Πλήθος	Μέση τιμή	Sig. (2-tailed)
1.	Χρησιμοποιεί τις διδαχθείσες στρατηγικές νοερά.	24	4,3333	,000
2.	Χρησιμοποιεί τις διδαχθείσες στρατηγικές με τη βοήθεια εποπτικού υλικού (δάχτυλα, αντικείμενα, αριθμογραμμή).	24	2,0833	,000
3.	Κατά την επίλυση των ασκήσεων, χρησιμοποιεί και άλλες στρατηγικές νοερού λογισμού.	24	3,0000	1,000
4.	Όταν χρησιμοποιεί τις στρατηγικές, υπολογίζει με ακρίβεια το αριθμητικό αποτέλεσμα μιας πρόσθεσης.	24	4,7083	,000
5.	Εξηγεί με σαφήνεια τα βήματα της στρατηγικής που χρησιμοποίησε, για να λύσει μία πρόσθεση.	24	4,6667	,000
6.	Κατά τη χρήση των στρατηγικών πρόσθεσης, αντιλαμβάνεται τις σχέσεις των αριθμών μεταξύ τους.	24	4,8333	,000
7.	Μπορεί να εξηγήσει τις στρατηγικές, αναπαριστώντας τες στα εποπτικά υλικά.	24	4,9167	,000
8.	Μπορεί να εξηγήσει τις στρατηγικές, δίνοντας παραδείγματα για την καθεμία.	24	4,8333	,000
9.	Ανάλογα με τα αριθμητικά δεδομένα, επιλέγει την πιο κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση μιας πρόσθεσης.	24	4,7917	,000

Πίνακας 7: Έλεγχοι υπόθεσης ερωτηματολογίου

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 1:

Μηδενική υπόθεση (H_0): Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις διδαχθείσες στρατηγικές νοερά σε μέτριο βαθμό.

Εναλλακτική υπόθεση (H_a): Οι μαθητές δε χρησιμοποιούν τις διδαχθείσες στρατηγικές νοερά σε μέτριο βαθμό.

Συμπέρασμα:

Παρατηρείται στον πίνακα 7 ότι sig=0<0,05. Άρα, *η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και οι διδαχθείσες στρατηγικές χρησιμοποιούνται νοερά κατά μέσο όρο σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,3).*

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 2:

Μηδενική υπόθεση (H_0): Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις διδαχθείσες στρατηγικές με τη βοήθεια εποπτικού υλικού (δάχτυλα, αντικείμενα, αριθμογραμμή) σε μέτριο βαθμό.

Εναλλακτική υπόθεση (H_a): Οι μαθητές δε χρησιμοποιούν τις διδαχθείσες στρατηγικές με τη βοήθεια εποπτικού υλικού (δάχτυλα, αντικείμενα, αριθμογραμμή) σε μέτριο βαθμό.

Συμπέρασμα:

Παρατηρείται στον πίνακα 7 ότι sig=0<0,05. Άρα, *η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και οι μαθητές χρησιμοποιούν τις διδαχθείσες στρατηγικές με τη βοήθεια εποπτικού υλικού (δάχτυλα, αντικείμενα, αριθμογραμμή) κατά μέσο όρο σε βαθμό μικρότερο του μετρίου (m=2,1).*

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 3:

Μηδενική υπόθεση (H_0): Οι μαθητές, κατά την επίλυση των ασκήσεων, χρησιμοποιούν και άλλες στρατηγικές νοερού λογισμού σε μέτριο βαθμό.

Εναλλακτική υπόθεση (H_a): Οι μαθητές, κατά την επίλυση των ασκήσεων, δε χρησιμοποιούν και άλλες στρατηγικές νοερού λογισμού σε μέτριο βαθμό.

Συμπέρασμα:

Παρατηρείται στον πίνακα 7 ότι sig=1>0,05. Άρα, *η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται και οι μαθητές κατά την επίλυση των ασκήσεων χρησιμοποιούν και άλλες στρατηγικές νοερού λογισμού, κατά μέσο όρο, σε μέτριο βαθμό (m=3).*

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 4:

Μηδενική υπόθεση (H_0): Οι μαθητές, όταν χρησιμοποιούν τις στρατηγικές, υπολογίζουν με ακρίβεια το αριθμητικό αποτέλεσμα μια πρόσθεσης σε μέτριο βαθμό.

Εναλλακτική υπόθεση (H_a): Οι μαθητές, όταν χρησιμοποιούν τις στρατηγικές, δεν υπολογίζουν με ακρίβεια το αριθμητικό αποτέλεσμα μια πρόσθεσης σε μέτριο βαθμό.

Συμπέρασμα:

Παρατηρείται στον πίνακα 7 ότι sig=0<0,05. Άρα, *η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και οι μαθητές, όταν χρησιμοποιούν τις στρατηγικές, υπολογίζουν με ακρίβεια το αριθμητικό αποτέλεσμα μια πρόσθεσης κατά μέσο όρο, σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,7) .*

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 5:

Μηδενική υπόθεση (H_0): Οι μαθητές εξηγούν με σαφήνεια τα βήματα της στρατηγικής που χρησιμοποίησαν, για να λύσουν μία πρόσθεση, σε μέτριο βαθμό.

Εναλλακτική υπόθεση (H_a): Οι μαθητές, δεν εξηγούν με σαφήνεια τα βήματα της στρατηγικής που χρησιμοποίησε, για να λύσουν μία πρόσθεση, σε μέτριο βαθμό.

Συμπέρασμα:

Παρατηρείται στον πίνακα 7 ότι sig=0<0,05. Άρα, *η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και οι μαθητές εξηγούν με σαφήνεια τα βήματα της στρατηγικής που χρησιμοποίησαν, για να λύσουν μία πρόσθεση κατά μέσο όρο, σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,7) .*

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 6:

Μηδενική υπόθεση (H_0): Οι μαθητές, κατά τη χρήση των στρατηγικών πρόσθεσης, αντιλαμβάνονται τις σχέσεις των αριθμών μεταξύ του σε μέτριο βαθμό.

Εναλλακτική υπόθεση (H_a): Οι μαθητές, κατά τη χρήση των στρατηγικών πρόσθεσης, δεν αντιλαμβάνονται τις σχέσεις των αριθμών μεταξύ τους σε μέτριο βαθμό.

Συμπέρασμα:

Παρατηρείται στον πίνακα 7 ότι sig=0<0,05. Άρα, *η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και οι μαθητές, κατά τη χρήση των στρατηγικών πρόσθεσης, αντιλαμβάνονται τις σχέσεις των αριθμών μεταξύ τους κατά μέσο όρο, σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,8).*

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 7:

Μηδενική υπόθεση (H_0): Οι μαθητές μπορούν να εξηγήσουν τις στρατηγικές, αναπαριστώντας τες στα εποπτικά υλικά, σε μέτριο βαθμό.

Εναλλακτική υπόθεση (H_a): Οι μαθητές δεν μπορούν να εξηγήσουν τις στρατηγικές, αναπαριστώντας τες στα εποπτικά υλικά, σε μέτριο βαθμό.

Συμπέρασμα:

Παρατηρείται στον πίνακα 7 ότι sig=0<0,05. Άρα, *η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και οι μαθητές, μπορούν να εξηγήσουν τις στρατηγικές, αναπαριστώντας τες στα εποπτικά υλικά κατά μέσο όρο, σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,9).*

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 8:

Μηδενική υπόθεση (H_0): Οι μαθητές μπορούν να εξηγήσουν τις στρατηγικές, δίνοντας παραδείγματα για την καθεμία, σε μέτριο βαθμό.

Εναλλακτική υπόθεση (H_a): Οι μαθητές δεν μπορούν να εξηγήσουν τις στρατηγικές, δίνοντας παραδείγματα για την καθεμία, σε μέτριο βαθμό.

Συμπέρασμα:

Παρατηρείται στον πίνακα 7 ότι sig=0<0,05. Άρα, *η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και οι μαθητές, μπορούν να εξηγήσουν τις στρατηγικές, δίνοντας παραδείγματα για την καθεμία κατά μέσο όρο, σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,8).*

ΕΛΕΓΧΟΣ ΥΠΟΘΕΣΗΣ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 9:

Μηδενική υπόθεση (H_0): Οι μαθητές, ανάλογα με τα αριθμητικά δεδομένα, επιλέγουν την πιο κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση μιας πρόσθεσης, σε μέτριο βαθμό.

Εναλλακτική υπόθεση (H_a): Οι μαθητές, ανάλογα με τα αριθμητικά δεδομένα, δεν επιλέγουν την πιο κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση μιας πρόσθεσης, σε μέτριο βαθμό.

Συμπέρασμα:

Παρατηρείται στον πίνακα 7 ότι sig=0<0,05. Άρα, *η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται και οι μαθητές, επιλέγουν την πιο κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση μιας πρόσθεσης, κατά μέσο όρο, σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,8).*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην ενότητα αυτή επιχειρείται μια γενική επισκόπηση της ερευνητικής διαδικασίας που ακολουθήθηκε στην παρούσα εργασία. Έπειτα, παρουσιάζονται συνοπτικά τα αποτελέσματα της υλοποίησης της διεξαχθείσας έρευνας, καθώς και οι περιορισμοί που προέκυψαν. Τέλος, το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με ορισμένες προτάσεις για περαιτέρω διερεύνηση του υπό εξέταση θέματος στο μέλλον.

5.1 ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, δημιουργήθηκε και υλοποιήθηκε ένα ηλεκτρονικό μάθημα για τη διδασκαλία στρατηγικών πρόσθεσης νοερού λογισμού με υπέρβαση της δεκάδας στην Α' τάξη Δημοτικού, βασισμένο στη θεωρία του Jerome Bruner για τα τρία στάδια γνωστικής ανάπτυξης. Οι επιμέρους στόχοι του μαθήματος είναι:

- η βελτίωση των επιδόσεων των μαθητών στην επίλυση των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας˙
- η κατανόηση και η χρήση των στρατηγικών του νοερού λογισμού κατά την επίλυση των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας.

Με βάση τους στόχους της εργασίας, προέκυψαν τα εξής ερευνητικά ερωτήματα:

1. Η παρακολούθηση ενός ηλεκτρονικού μαθήματος, που βασίζεται στα στάδια γνωστικής ανάπτυξης του Bruner, βοηθά τους μαθητές να βελτιώσουν τις επιδόσεις τους στην επίλυση των προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας;

2. Σε τι βαθμό βοήθησε τους μαθητές η παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος, που βασίζεται στα στάδια γνωστικής ανάπτυξης του Bruner, να κατανοήσουν και να χρησιμοποιήσουν τις στρατηγικές νοερού λογισμού κατά την επίλυση προσθέσεων με υπέρβαση της δεκάδας;

Για τη διερεύνηση των ερωτημάτων, δημιουργήθηκε ένα ηλεκτρονικό μάθημα στο ψηφιακό περιβάλλον e-front, εφαρμόστηκε σε ένα τμήμα της Α' Δημοτικού, αποτελούμενο από είκοσι τέσσερις (24) μαθητές, ακολουθήθηκε το θεωρητικό μοντέλο των τριών σταδίων γνωστικής ανάπτυξης του Jerome Bruner και οργανώθηκε σε τρεις ενότητες. Οι επιδόσεις των μαθητών αξιολογήθηκαν μέσα από ασκήσεις και σχετικό ερωτηματολόγιο.

Τα ερευνητικά ερωτήματα απαντήθηκαν με τη βοήθεια δύο ερευνητικών εργαλείων. Τα εργαλεία αυτά ήταν τα ποσοστά των επιδόσεων των μαθητών από τις διαδραστικές ασκήσεις που πραγματοποιήθηκαν στην ηλεκτρονική πλατφόρμα πριν και μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος, καθώς και μέσα από ατομικές συνεντεύξεις, στις οποίες η εκπαιδευτικός σημείωνε σε ερωτηματολόγιο πενταβάθμιας κλίμακας Likert τον βαθμό κατά τον οποίον ίσχυαν ή δεν ίσχυαν οι υπό διερεύνηση μεταβλητές. Οι μεταβλητές επιλέχθηκαν με βάση τη θεωρητική, βιβλιογραφική επισκόπηση της παρούσας εργασίας και αναφέρονται στην εννοιολογική κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και στη δυνατότητα χρήσης στρατηγικών νοερού λογισμού.

5.2 ΣΥΖΗΤΗΣΗ – ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Σχετικά με το πρώτο ερευνητικό ερώτημα για τη σύγκριση των επιδόσεων των μαθητών πριν και μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος, τα ποσοστά επιτυχίας από τις ασκήσεις των μαθητών συγκεντρώθηκαν και επεξεργάστηκαν στο λογισμικό Statistical Package for the Social Sciences (SPSS).

Σχετικά με το δεύτερο ερευνητικό ερώτημα για τον βαθμό κατανόησης και χρήσης των διδαχθεισών στρατηγικών πρόσθεσης νοερού λογισμού, η εκπαιδευτικός εξέτασε τους μαθητές σε ατομικές συνεντεύξεις και σημείωνε σε ερωτηματολόγιο πενταβάθμιας κλίμακας Likert τον βαθμό επαλήθευσης των εννέα (9) μεταβλητών, όπως αυτές ορίστηκαν με βάση τις ανάγκες της έρευνας και τη βιβλιογραφική επισκόπηση της εργασίας. Ως μέτριος βαθμός ορίστηκε το τρία (3). Τα αποτελέσματα συγκεντρώθηκαν και επεξεργάστηκαν, επίσης, στο λογισμικό Statistical Package for the Social Sciences (SPSS).

Συμπέρασμα 1ου ερευνητικού ερωτήματος:

Συμπεραίνεται από τα γραφήματα και τους ελέγχους υπόθεσης πως όλοι οι μαθητές, μετά την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος, σημείωσαν υψηλότερες κατά μέσο όρο επιδόσεις σε σύγκριση με τις προηγούμενες από την παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος.

Συμπεράσματα 2ου ερευνητικού ερωτήματος:

Αντίστοιχα με τη σειρά των μεταβλητών του ερωτηματολογίου, προέκυψαν τα εξής συμπεράσματα:

1. *Οι διδαχθείσες στρατηγικές χρησιμοποιούνται νοερά κατά μέσο όρο σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,3).*
2. *Οι μαθητές χρησιμοποιούν τις διδαχθείσες στρατηγικές με τη βοήθεια εποπτικού υλικού (δάχτυλα, αντικείμενα, αριθμογραμμή) κατά μέσο όρο σε βαθμό μικρότερο του μετρίου (m=2,1).*
3. *Οι μαθητές κατά την επίλυση των ασκήσεων χρησιμοποιούν και άλλες στρατηγικές νοερού λογισμού κατά μέσο όρο σε μέτριο βαθμό (m=3).*
4. *Οι μαθητές, όταν χρησιμοποιούν τις στρατηγικές, υπολογίζουν με ακρίβεια το αριθμητικό αποτέλεσμα μια πρόσθεσης κατά μέσο όρο σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,7) .*
5. *Οι μαθητές εξηγούν με σαφήνεια τα βήματα της στρατηγικής που χρησιμοποίησαν, για να λύσουν μία πρόσθεση, κατά μέσο όρο σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,7) .*
6. *Οι μαθητές, κατά τη χρήση των στρατηγικών πρόσθεσης, αντιλαμβάνονται τις σχέσεις των αριθμών μεταξύ τους κατά μέσο όρο σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,8).*
7. *Οι μαθητές μπορούν να εξηγήσουν τις στρατηγικές, αναπαριστώντας τες στα εποπτικά υλικά, κατά μέσο όρο σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,9).*
8. *Οι μαθητές, μπορούν να εξηγήσουν τις στρατηγικές, δίνοντας παραδείγματα για την καθεμία κατά μέσο όρο σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,8).*

9. Οι μαθητές επιλέγουν την πιο κατάλληλη στρατηγική για την επίλυση μιας πρόσθεσης κατά μέσο όρο σε βαθμό μεγαλύτερο του μετρίου (m=4,8).

Από τη στατιστική ανάλυση των δεδομένων που συγκεντρώθηκαν κατά τη διεξαγωγή της έρευνας προέκυψε αποδοχή όλων, σχεδόν, των εναλλακτικών υποθέσεων που τέθηκαν με βάση τα ερευνητικά ερωτήματα. Επιπλέον, οι απαντήσεις του ερωτηματολογίου υπερβαίνουν κατά πολύ τον ορισμένο μέτριο βαθμό τρία (3) της πενταβάθμιας κλίμακας Likert.

Γενικό συμπέρασμα:

Επομένως, θα μπορούσε να ειπωθεί ως γενικό συμπέρασμα πως *το ηλεκτρονικό μάθημα θεωρείται αποτελεσματικό για την επίτευξη των εκπαιδευτικών στόχων στο μάθημα των Μαθηματικών και βοηθά σημαντικά τους μαθητές να κατανοήσουν, να χρησιμοποιήσουν και να βελτιώσουν τις νέες μαθηματικές έννοιες που διδάσκονται.*

5.3 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΤΗΣ ΕΡΕΥΝΑΣ

Κατά τον σχεδιασμό της έρευνας, υπήρξαν περιορισμοί που έπρεπε να ληφθούν σοβαρά υπόψη για τη σωστή μεθοδολογική οργάνωση και διεξαγωγή του ηλεκτρονικού μαθήματος. Ένας από αυτούς είναι η ηλικία των μαθητών.

1. Η έρευνα έχει δείγμα μαθητές Α' Δημοτικού, ηλικίας εξίμισι με επτά ετών. Ως εκ τούτου, γίνεται κατανοητό πως το ηλεκτρονικό μάθημα έπρεπε να σχεδιαστεί με μεγάλη προσοχή και λεπτομέρεια, ώστε να διευκολύνει τους μικρούς μαθητές να προχωρούν με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη αυτονομία. Παρ' όλα αυτά, ήταν απαραίτητη η συνεχής επιτήρηση και καθοδήγηση των ανωτέρω μαθητών, προκειμένου να μπορέσουν να συμμετάσχουν όλοι στο μάθημα, να συντονιστούν και να προχωρήσουν στις επόμενες δραστηριότητες.

2. Ακόμη, λόγω ηλικίας, δεν ήταν πάντοτε εφικτό να γίνει σαφής ο διαχωρισμός των σταδίων γνωστικής ανάπτυξης, καθώς ο ρυθμός και οι δυνατότητες του κάθε μαθητή ποικίλουν. Για αυτόν τον λόγο, υπήρξε ευελιξία στις διάφορες εκπαιδευτικές διαδικασίες.

3. Ένας ακόμα περιορισμός έχει να κάνει με το μέγεθος του δείγματος. Είναι γνωστό πως για να εξαχθούν ακριβή και αξιόπιστα συμπεράσματα μιας έρευνας, είναι σημαντικό το δείγμα να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Στην προκειμένη περίπτωση, το ηλεκτρονικό μάθημα και η έρευνα πραγματοποιήθηκαν σε μία σχολική τάξη που απαρτίζεται από είκοσι τέσσερα (24) παιδιά. Ο μικρός αριθμός δείγματος συμμετεχόντων δεν επιτρέπει την εξαγωγή γενικευμένων συμπερασμάτων, αλλά μόνο τη μελέτη μεμονωμένης περίπτωσης, και συγκεκριμένα, του δείγματος της συγκεκριμένης σχολικής τάξης, κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες.

5.4 ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΓΙΑ ΠΕΡΑΙΤΕΡΩ ΜΕΛΕΤΗ

Μια πρόταση για περαιτέρω έρευνα ή μελέτη του θέματος προκύπτει άμεσα από τον παραπάνω περιορισμό του δείγματος συμμετεχόντων. Επομένως, προκειμένου να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα σχετικά με την κατανόηση και τη χρήση στρατηγικών πρόσθεσης νοερού λογισμού, προτείνεται η διεξαγωγή της έρευνας με μεγαλύτερο δείγμα, είτε μεταξύ τμημάτων ενός σχολείου είτε ανάμεσα σε τμήματα πολλών σχολείων, ενώ η διάρκεια της έρευνας να καλύπτει μεγαλύτερο χρονικό διάστημα.

Στην παρούσα εργασία, για τη δημιουργία του ηλεκτρονικού μαθήματος, χρησιμοποιήθηκε το θεωρητικό μοντέλο των τριών σταδίων γνωστικής ανάπτυξης του Jerome Bruner. Μια πρόταση θα ήταν η μελέτη των στρατηγικών πρόσθεσης νοερού λογισμού με κάποιο άλλο θεωρητικό μοντέλο, ώστε να ακολουθήσει συγκριτική μελέτη και να εντοπιστεί η καλύτερη θεωρητική προσέγγιση για τη διδασκαλία των στρατηγικών πρόσθεσης νοερού λογισμού. Εναλλακτικά, προτείνεται η επιλογή μιας άλλης θεματικής ενότητας από το μάθημα των Μαθηματικών με το εν λόγω θεωρητικό μοντέλο, ακόμα και σε μεγαλύτερες τάξεις, προκειμένου να ελεγχθεί η αποτελεσματικότητα της χρήσης του μοντέλου αυτού.

Στην εργασία αυτή, οι στρατηγικές πρόσθεσης νοερού λογισμού με υπέρβαση της δεκάδας που εξετάζονται είναι η στρατηγική των προσθετέων με μια (1) μονάδα διαφορά, η στρατηγική αντιστάθμισης με προσθετέο τον αριθμό εννιά (9) και η στρατηγική της συμπλήρωσης της δεκάδας. Θα παρουσίαζε μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον ο σχεδιασμός ηλεκτρονικών μαθημάτων για τη διδασκαλία διαφορετικών στρατηγικών πρόσθεσης είτε στην Α’ Δημοτικού είτε σε άλλη τάξη, τη διδασκαλία στρατηγικών πρόσθεσης με μονοψήφιους και διψήφιους αριθμούς, τη διδασκαλία στρατηγικών και για τις υπόλοιπες πράξεις ή ακόμα και την επίλυση προβλημάτων.

Επιπλέον, ως προς το ψηφιακό περιβάλλον e-front που χρησιμοποιήθηκε, μια μελλοντική πρόταση για έρευνα είναι η επιλογή ενός άλλου ψηφιακού συστήματος διαχείρισης μάθησης που να εξυπηρετεί τις εκπαιδευτικές ανάγκες των μαθητών, καθώς και η ενσωμάτωση διαφορετικών ψηφιακών χειραπτικών υλικών που να αντιπροσωπεύουν το πραξιακό στάδιο αναπαράστασης σε κάθε στρατηγικής.

Τέλος, μια ακόμα πρόταση για μελέτη θα ήταν η παρακολούθηση του ηλεκτρονικού μαθήματος από τους μαθητές και η διεξαγωγή της έρευνας αποκλειστικά εξ αποστάσεως, ώστε να διερευνηθεί κατά πόσο αποτελεσματική είναι η τηλεκπαίδευση στο μάθημα των Μαθηματικών, σε τόσο μικρές ηλικίες.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΕΛΛΗΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

Δ.Ε.Π.Π.Σ. – Α.Π.Σ. Μαθηματικών (2003). Διαθεματικό Ενιαίο Πλαίσιο Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών. ΥΠΕΠΘ – Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. www.pi-schools.gr .

Καραντζής, Ι. (2008). ΟΙ ΝΟΕΡΟΙ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ ΚΑΤΑ ΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΥΠΕΡΒΑΣΗΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΔΕΚΑΔΑΣ: ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΚΑΙ ΕΠΙΔΟΣΕΙΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΤΩΝ Α' ΚΑΙ Β' ΤΑΞΗΣ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ. *Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών*, (3), 9 - 29.

Κασσωτάκης, Μ., & Φλουρής, Γ. (2003). Μάθηση και διδασκαλία, τομ. Α: Μάθηση.

Κολέζα, Ε. (2009). Θεωρία και πράξη στη διδασκαλία των μαθηματικών. Αθήνα: Εκδόσεις Τόπος.

Κολιάδης, Ε. (1997). Θεωρίες Μάθησης και Εκπαιδευτική Πράξη. Αθήνα: Αυτοέκδοση.

Κοντογιαννάτου, Γ. (2018). Έρευνες μικτών μεθόδων. Η λογική του σχεδιασμού και οι προϋποθέσεις εφαρμογής τους.

Λεμονή, Ι. & Χρήστου, Κ. (2019). ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΝΟΕΡΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΣΕ ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΜΕ ΑΚΕΡΑΙΟΥΣ. Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, (13), 25 – 45.

Λεμονίδης, Χ. (1994). Γιατί και πώς χρησιμοποιούν οι μαθητές τα δάκτυλά τους στην εκτέλεση απλών προσθέσεων και αφαιρέσεων. Περιοδικό Διάσταση, Τεύχος, 2-3, σελ. 96 – 112.

Λεμονίδης, Χ. (1998). Διαδικασίες που χρησιμοποιούν οι μαθητές της Α΄ τάξης του Δημοτικού σε πράξεις και προβλήματα προσθετικού τύπου. *Συμπεράσματα και προτάσεις για τη διδασκαλία. Στα Πρακτικά*, *1*, σελ. 11 -24.

Λεμονίδης, Χ. (1998). Διδασκαλία των πρώτων αριθμητικών εννοιών. Περιοδικό, Ερευνητική διάσταση της Διδακτικής των Μαθηματικών, Τεύχος 3. Περιοδική έκδοση του Παραρτήματος Κεντρικής Μακεδονίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας. σσ. 87 – 122.

Λεμονίδης, Χ. (2002). Μια νέα πρόταση διδασκαλίας στα Μαθηματικά για τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού Σχολείου. Themes in Education. Τεύχος, 3.

Λεμονίδης, Χ. (2003). Μια διαφορετική διδασκαλία των αριθμών και των πράξεων στην αρχή του σχολείου. “Γέφυρες”. Τεύχος 9, σελ. 22 – 29.

Λεμονίδης, Χ., Θεοδώρου, Α. Καψάλης, Α. & Πνευματικός, Δ. (2006). Μαθηματικά Α’ Δημοτικού. Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής (Βιβλίο Δασκάλου). Εκδόσεις ΟΕΔΒ.

Λεμονίδης, Χ. & Λυγούρας, Γ. (2008). Η επίδοση και η ευελιξία μαθητών της τρίτης τάξης δημοτικού στους νοερούς υπολογισμούς. Ευκλείδης Γ, 68, 20 – 44.

Λεμονίδης, Χ. (2013). Μαθηματικά της Φύσης και της Ζωής Νοεροί Υπολογισμοί Λογαριάζω με το τζιμιδι μ’. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Λεμονίδης, Χ. (2016). Η αίσθηση των αριθμών: Νοεροί υπολογισμοί και εκτιμήσεις.

Λεμονίδης, Χ. (2017). Θεωρητικά στοιχεία και διαδικασία κατασκευής ενός προγράμματος σπουδών και σχολικών βιβλίων για τη διδασκαλία των ρητών αριθμών. https://eclass.uowm.gr.

Λεμονίδης, Χ. (χ.χ.). ΟΙ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΕΣ ΠΡΟΣΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗΣ ΜΕ ΑΡΙΘΜΟΥΣ ΜΕΧΡΙ ΤΟ 20.

Μπαραλής, Γ. (2017). Αξιοποίηση της Αριθμογραμμής στα Μαθηματικά της Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης. Μαθηματική Επιθεώρηση, Τεύχος, 87.

Παπαμιχαήλ, Γ. (1998). Μάθηση και κοινωνία. Η εκπαίδευση στις θεωρίες της γνωστικής ανάπτυξης, Εκδ. Οδυσσέας, Αθήνα.

Σκουμπουρδή, Χ. (2008). Η ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΤΗΣ ΑΡΙΘΜΟΓΡΑΜΜΗΣ ΣΤΑ ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΤΟΥ ΔΗΜΟΤΙΚΟΥ ΣΧΟΛΕΙΟΥ. Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, (3), σελ. 67 – 87.

Τζεκάκη, Μ. (2011). Μαθηματική Εκπαίδευση για την Προσχολική και Πρώτη Σχολική Ηλικία. Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Υ.ΠΑΙ.Θ. Προγραμμάτων Σπουδών για τα Μαθηματικά στην Υποχρεωτική Εκπαίδευση. Αθήνα, 2011.

Φωτοπούλου, Χ. (χ.χ.). Η ευρετική-ανακαλυπτική θεωρία μάθησης του J. Bruner.

Χατζηκυριάκου, Κ. (2008). Αριθμοί, Σύνολα, Σχήματα: Μαθηματικά για τη δασκάλα και τον δάσκαλο. Θεσσαλονίκη: Σοφία.

Χρήστου, Κ. (2016). Αίσθηση του αριθμού. Ενότητα 3: Πρώιμα στάδια κατανόησης της έννοιας του αριθμού.

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ:

Anwar, R. B., Yuwono, I., & As' ari, A. R. (2016). Mathematical Representation by Students in Building Relational Understanding on Concepts of Area and Perimeter of Rectangle. Educational Research and Reviews, 11(21), 2002 - 2008.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. Educational studies in mathematics, 52(3), 215-241.

Baranes, R., Perry, M., & Stigler, J. W. (1989). Activation of real-world knowledge in the solution of word problems. Cognition and Instruction, 6(4), 287-318.

Barmby, P., Bolden, D., Raine, S., & Thompson, L. (2013). Developing the use of visual representations in the primary classroom. UK [United Kingdom]: Durham University.

Baroody, A. J. (2004). The role of psychological research in the development of early childhood mathematics standards. Engaging young children in mathematics: Standards for early childhood mathematics education, 149-172.

Bartolini, M. G., & Martignone, F. (2014). Manipulatives in mathematics education. In Encyclopedia of mathematics education (pp. 365 - 463). Springer, Cham.

Beishuizen, M. (1985). Evaluation of the use of structured materials in the teaching of primary mathematics. New directions in education and training technology: Aspects of educational technology, 18, 246-258.

Beishuizen, M. (1993). Mental strategies and materials or models for addition and subtraction up to 100 in Dutch second grades. Journal for Research in Mathematics Education, 24(4), 294-323.

Bills, C. (1999). What was in your head when you were thinking of that?. MATHEMATICS TEACHING-DERBY-, 39-41.

Boaler, J., Chen, L., Williams, C., & Cordero, M. (2016). Seeing as understanding: The importance of visual mathematics for our brain and learning. Journal of Applied & Computational Mathematics, 5(5), pp. 1 - 6.

Brown, E. S. (2006). Discovery Learning in the Classroom. Research Gate.

Bruner, J. S. (1966). Toward a theory of instruction. MA: Harvard University Press.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C. & Selg, S. C. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology. Vol 105 (2)*. pp. 380 - 400.

Carpenter, T. P. (1981). Initial instruction in addition and subtraction: A target of opportunity for curriculum development. In Proceedings of the National Science Foundation Directors Meeting. Washington.

Carpenter, T. P., Moser, J. M., & Hiebert, J. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for research in mathematics education*, *12*(1), 27-39.

Cooper, T. J., Heirdsfield, A., & Irons, C. J. (1996). Children's mental strategies for addition and subtraction word problems. Children's number learning, 147-162.

Cope, L. (2015). Math Manipulatives: Making the Abstract Tangible. Delta Journal of Education, 5(1), pp. 10 - 19.

Coulombe, W. N., & Berenson, S. B. (2001). Representations of patterns and functions: Tools for learning. The roles of representation in school mathematics, 166-172.

Diezmann, C. M., Lowrie, T., & Sugars, L. (2010). Primary students' success on the structured number line. Australian Primary Mathematics Classroom, 15 (4), pp. 24 – 28.

Dufour-Janvier, B., Bednarz, N., & Belanger, M. (1987). Pedagogical considerations concerning the problem of representation. Problems of representation in the teaching and learning of mathematics, 109-122.

Dole, S., & McIntosh, A. (2004). Mental computation: A strategies approach (Vol. 2). Module 1.

Eastburn, J. A. (2010). The effects of a concrete, representational, abstract (CRA) instructional model on tier 2 first-grade math students in a response to intervention model: educational implications for number sense and computational fluency (Doctoral dissertation, Temple University. Libraries).

Fennel, F. (2006). Show me the math! *NCTM News Bulletin*.

French, D. (1987). Mental methods in mathematics. Mathematics in School, 16 (2), 39-41.

Geary, D., Brown, S., Samaranayake, V. (1991). Cognitive addition: A short longitudinal study of strategy choice and speed-of-processing differences in normal and mathematically disabled children. Developmental Psychology, 27(5), p. 787 - 797.

Gersten, R., Jordan, N. C., & Flojo, J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. Journal of Learning Disabilities, 38(4), pp. 293 – 304.

Glenberg, A. M., Gutierrez, T., Levin, J. R., Japuntich, S., & Kaschak, M. P. (2004). Activity and imagined activity can enhance young children's reading comprehension. Journal of Educational Psychology, 96, 424–436.

Goldin, G., & Shteingold, N. (2001). Systems of representations and the development of mathematical concepts. The roles of representation in school mathematics, 2001, 1-23.

Goldstone, R. L., & Son, J. Y. (2005). The transfer of scientific principles using concrete and idealized simulations. The Journal of the learning sciences, 14(1), 69-110.
Greeno, J. G., & Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. Phi Delta Kappan, 78, 361-367.

Groen, G. J., & Parkman, J. M. (1972). A chronometric analysis of simple addition. Psychological review, 79(4), p. 329 – 343.

Gusty, R. (2005). The importance of mental calculation skills: a review of the literature.

Harries, T., & Barmby, P. (2011). The importance of using representations to help primary pupils give meaning to numerical concepts.

Heirdsfield, A., & Cooper, T. (2004). Inaccurate mental addition and subtraction: Causes and compensation. Investigations in Mathematics Learning, 26(3), 43-65.

Hiebert, J. (1988). A theory of developing competence with written mathematical symbols. Educational studies in mathematics, 19(3), 333-355.

Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics, 65-97.

Hiebert, J., & Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in first grade. Journal for research in mathematics education, 23(2), 98-122.

Holyoak, K. J., & Koh, K. (1987). Surface and structural similarity in analogical transfer. Memory & cognition, 15(4), 332-340.

Janvier, C., Girardon, C., & Morand, J. (1993). Mathematical symbols and representations. In P.S. Wilson (Ed.), Research ideas for the classroom: High
school mathematics, p. 79-102. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Jensen, A. & Whang, P. (1994). Speed of accessing arithmetic facts in long-term memory: A comparison of Chinese-American and Anglo-American children. Contemporary Educational Psychology, 19, p. 1 - 12.

Jitendra, A. K., & Hoff, K. (1996). The effects of schema-based instruction on the mathematical word-problem-solving performance of students with learning disabilities. Journal of Learning Disabilities, 29(4), 422-431.

Jung, M., Hartman, P., Smith, T., & Wallace, S. (2013). The Effectiveness of Teaching Number Relationships in Preschool. *Online Submission*, *6*(1), p. 165 - 178.

Klein, .S., Beishuizen,8. and Treffers, A.(1998). The Empty Number Line in Dutch Second Grades: Realistic Versus Gradual Program Design. Journal for Research in Mathematics Education. 29 (4), pp. 443 – 464.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models in applied mathematical problem solving. In R. Lesh (Ed.), The acquisition of mathematical concepts and processes. New York Academic Press.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In Problems of representations in the teaching and learning of mathematics (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum.

Lemonidis, H. E., & Golfos, A. C. (2020). Number line in the history and the education of mathematics. Inovacije u nastavi-časopis za savremenu nastavu, 33(1), pp. 36 - 56.

Leong, Y. H., Ho, W. K., & Cheng, L. P. (2015). Concrete-Pictorial-Abstract: Surveying its origins and charting its future.

Lemonidis, Ch. (2003). L'enseignement des premières notions arithmétiques selon l'analyse des différentes représentations des quantités. Annales de
Didactiques et de Sciences Cognitives vol. 9, (partie 2) des actes du colloque Argentoratum 2002, pages 103 – 117. Strasbourg, France.

Lesh, R., Landau, M., & Hamilton, E. (1983). Conceptual models and applied mathematical problem-solving research. Acquisition of mathematics concepts and processes, 263-343.

Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In Problems of representations in the teaching and learning of mathematics (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum.

Lesser, L., & Tchoshanov, M. (2005, October). The effect of representation and representational sequence on students' understanding. In Proceedings of the 27th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Leutzinger, L. (1999). Developing thinking strategies for addition facts. Teaching children mathematics, 6(1), p. 14 - 18.

Logie, R., Gilhooly, K. and Wynn, V. (1994). Counting on working memory in arithmetic problem solving. Memory and Cognition, 22(4), p. 395 - 410.

Maclellan, E. (2001). Mental calculation: its place in the development of numeracy. Westminster Studies in Education, 24:2 , pp. 145 – 154.

Marzano, R. J. (2010). Representing knowledge non linguistically. Educational Leadership, 67(8), 84–86.

Martin, T., & Schwartz, D. L. (2005). Physically distributed learning: Adapting and reinterpreting physical environments in the development of fraction concepts. Cognitive Science, 29, 587-625.

Matheson, I., & Hutchinson, N. (2014). Visual representation in mathematics. Ανακτήθηκε από https://www. ldatschool. ca/visual - representation.

McIntosh, A., Reys, R., & Reys, B. (1997). Mental computation in the middle grades: the importance of thinking strategies. Mathematics Teaching in the Middle School, 2(5), pp. 322 - 327.

Mcintosh, A., Reys, B., & Reys, R. (1992). A proposed framework for examining basic number sense . For the Learning of Mathematics, 12(3) , pp. 2-8.

Minarni, A., Napitupulu, E. E., & Husein, R. (2016). Mathematical Understanding and Representation Ability of Public Junior High School in North Sumatra. Journal on Mathematics Education, 7(1), pp. 45 - 58.

Moyer, P. S., Bolyard, J. J., & Spikell, M. A. (2002). What are virtual manipulatives?. Teaching children mathematics, 8(6), 372-377.

Moyer, P. S., Salkind, G., & Bolyard, J. J. (2008). Virtual manipulatives used by K-8 teachers for mathematics instruction: The influence of mathematical, cognitive, and pedagogical fidelity. Contemporary Issues in Technology and Teacher Education, 8(3), 202-218.

Moyer-Packenham, P. S., & Westenskow, A. (2013). Effects of virtual manipulatives on student achievement and mathematics learning.International Journal of Virtual and Personal Learning Environments, 4(3), 35-50.

National Council of Supervisors of Mathematics (2013). Improving student achievement in mathematics by using manipulatives with classroom instruction. Denver, CO: Author.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM.

National Research Council. (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds). Mathematics Learning Subcommittee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Northcote, M., & McIntosh, A. (1999). What mathematics do adults really do in everyday life?. This article was originally published as: Northcote, M., & McIntosh, A.(1999). What mathematics do adults really do in everyday life? Australian Primary Mathematics Classroom, 4 (1), 19-21. ISSN: 1326-0286.

Nunes, T. & Bryant, P. (2007). Τα παιδιά κάνουν μαθηματικά (μτφρ. Σ. Λειβαδοπούλου & Γ. Σαρηγιαννίδου). Αθήνα: Gutenberg.

Olsen, J. R. (2015). Five keys for teaching mental math. The Mathematics Teacher, 108(7), 543-547.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation (s) in developing mathematical understanding. *Theory into practice*, *40*(2), 118-127.

Presno, C. (1997). Bruner's three forms of representation revisited: Action, pictures and words for effective computer instruction. Journal of Instructional Psychology, 24(2), p. 112.

Puri, A. (2014). How to Create Joyful Learning in the Classroom. Ανακτήθηκε απόhttp://www.howtolearn.com/2014/11how-to-create-joyful-learning-in-the-classroom/

Rau, M. A., Aleven, V., & Rummel, N. (2013). How to use multiple graphical representations to support conceptual learning? Research-based principles in the Fractions Tutor. In Artificial Intelligence in Education (pp. 762 - 765). Springer Berlin Heidelberg.

Reimer, K., & Moyer, P. S. (2005). Third-graders learn about fractions using virtual manipulatives: A classroom study. Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching, 24(1), 5-25.

Reys, B. (1985). Mental computation. The Arithmetic Teacher, 32(6), pp. 43 -46.

Reys, R. (1984). Mental computation and estimation: Past, present, and future. The Elementary School Journal, 84(5) , pp. 546-557.

Roblyer, M. D. (2008). Εκπαιδευτική τεχνολογία και διδασκαλία (μτφρ.). Αθήνα: Έλλην.

Saxe, G. B., Earnest, D., Sitabkhan, Y., Haldar, L. C., Lewis, K. E., & Zheng, Y. (2010). Supporting generative thinking about the integer number line in elementary mathematics. Cognition and instruction, 28(4), pp. 433 - 474.

Saxe, G. B., Shaughnessy, M. M., Gearhart, M., & Haldar, L. C. (2013). Coordinating numeric and linear units: Elementary students' strategies for locating whole numbers on the number line. Mathematical Thinking and Learning, 15(4), pp. 235 - 258.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. Mathematics teaching, 77(1), 20-26.

Sowder, J. (1990). Mental computation and number sense. The Arithmetic Teacher, 37(7) , pp. 18 - 20.

Sowder, J. T. (1988). Mental computation and number comparison: Their roles in the development of number sense and computational estimation. *Number concepts and operations in the middle grades*, pp. 182 -197.

Suwa, M., & Tversky, B. (2002, April). External representations contribute to the dynamic construction of ideas. In International Conference on Theory and Application of Diagrams (pp. 341-343). Springer, Berlin, Heidelberg.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction. Part 1. Mathematics in school, 28(5), 2-4.
Threlfall, J. (2000). Mental calculation strategies. Research in mathematics education, 2(1), 77-90.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. ZDM, 41(5), 541-555.

Torbeyns, J., Verschaffel, L., & Ghesquière, P. (2005). Simple addition strategies in a first-grade class with multiple strategy instruction. *Cognition and Instruction*, *23*(1), p. 1 - 21.

Tripathi, P. N. (2008). Developing mathematical understanding through multiple representations. Mathematics Teaching in the middle school, 13(8), 438-445.

Van de Walle, J. A. (2005). Μαθηματικά για το Δημοτικό και το Γυμνάσιο: Μια εξελικτική διδασκαλία (μτφρ). Αθήνα: Τυπωθήτω - Γ. Δαρδανός.

Van de Walle, J. A., Karp, K.S., & Bay Williams, J. M. (2013). Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally. 8th Edition. Boston: Pearson.

Wandt, E., & Brown, G. W. (1957). Non-Occupational Uses of Mathematics Mental and Written—Approximate and Exact. The Arithmetic Teacher, 4(4), 151-154.

Warfield, 1. (2001). Teaching kindergarten children to solve word problems. Early Childhood Education, 2 8 (3) , pp. 163 - 167.

Wen, P. (2018, November). Application of Bruner's Learning Theory in Mathematics Studies. In International Conference on Contemporary Education, Social Sciences and Ecological Studies (CESSES 2018). Atlantis Press.

Wittmann, E. C. (1998). Standard number representations in the teaching of arithmetic. Journal für Mathematik-Didaktik, 19(2-3), 149-178.

Wiegel, H. (1998). Kindergarten Students' Organization of Counting in Joint Counting Tasks and the Emergence of Cooperation. Journal for Research in Mathematics Education, 29 (2), pp. 202 - 224.

Woolner, P., Clark, J., Hall, E., Tiplady, L., Thomas, U., & Wall, K. (2010). Pictures are necessary but not sufficient: Using a range of visual methods to engage users about school design. Learning Environments Research, 13(1), 1-22.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΠΙΝΑΚΩΝ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ

Πίνακες SPSS 1^{ου} ερευνητικού ερωτήματος

Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviation
pr1	24	83,3321	20,05610
pr2	24	87,5000	14,74420
pr3	24	88,1942	13,44005
pr4	24	86,8046	15,52546
pr5	24	91,6667	16,59404
ps1	24	91,0704	12,50607
ps2	24	94,2708	9,73785
ps3	24	94,4438	9,41159
ps4	24	95,8329	8,86050
ps5	24	96,6667	7,61387
Valid N (listwise)	24		

Tests of Normality

	Kolmogorov-Smirnov[a]			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
mean_pre_student	,192	24	,023	,828	24	,001
mean_post_student	,251	24	,000	,720	24	,000

a. Lilliefors Significance Correction

Paired Samples Statistics

		Mean	N	Std. Deviation	Std. Error Mean
Pair 1	mean_post_student	94,4569	24	8,17610	1,66894
	mean_pre_student	87,4995	24	14,34190	2,92753

Paired Samples Test

		Paired Differences					t	df	Sig. (2-tailed)
					95% Confidence Interval of the Difference				
		Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean	Lower	Upper			
Pair 1	mean_post_student - mean_pre_student	6,95742	6,95774	1,42024	4,01942	9,89541	4,899	23	,000

Hypothesis Test Summary

	Null Hypothesis	Test	Sig.	Decision
1	The median of differences between mean_pre_student and mean_post_student equals 0.	Related-Samples Wilcoxon Signed Rank Test	,000	Reject the null hypothesis.

Related-Samples Wilcoxon Signed Rank Test Summary

Total N	24
Test Statistic	136,000
Standard Error	19,339
Standardized Test Statistic	3,516
Asymptotic Sig.(2-sided test)	,000

Πίνακες SPSS 2ου ερευνητικού ερωτήματος

Descriptive Statistics

	N	Mean	Std. Deviation
Q1	24	4,3333	,91683
Q2	24	2,0833	1,01795
Q3	24	3,0000	1,41421
Q4	24	4,7083	,55003
Q5	24	4,6667	,56466
Q6	24	4,8333	,48154
Q7	24	4,9167	,28233
Q8	24	4,8333	,48154
Q9	24	4,7917	,58823
Valid N (listwise)	24		

One-Sample Statistics

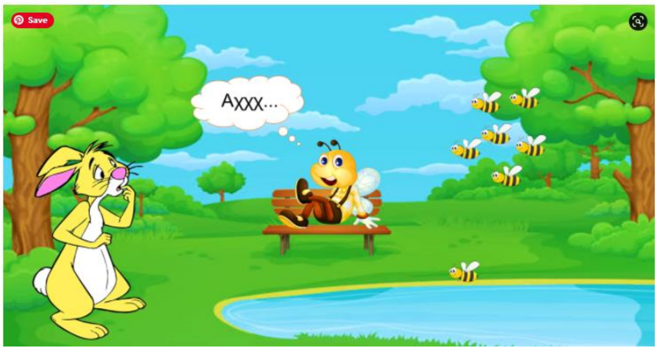
	N	Mean	Std. Deviation	Std. Error Mean
Q1	24	4,3333	,91683	,18715
Q2	24	2,0833	1,01795	,20779
Q3	24	3,0000	1,41421	,28868
Q4	24	4,7083	,55003	,11228
Q5	24	4,6667	,56466	,11526
Q6	24	4,8333	,48154	,09829
Q7	24	4,9167	,28233	,05763
Q8	24	4,8333	,48154	,09829
Q9	24	4,7917	,58823	,12007

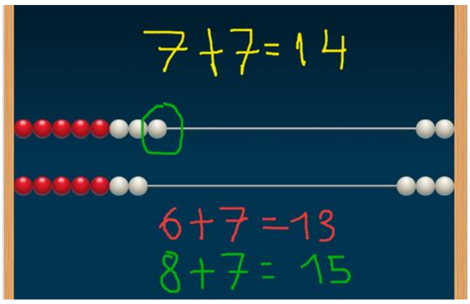
One-Sample Test

	Test Value = 3					
					95% Confidence Interval of the Difference	
	t	df	Sig. (2-tailed)	Mean Difference	Lower	Upper
Q1	7,125	23	,000	1,33333	,9462	1,7205
Q2	-4,412	23	,000	-,91667	-1,3465	-,4868
Q3	,000	23	1,000	,00000	-,5972	,5972
Q4	15,216	23	,000	1,70833	1,4761	1,9406
Q5	14,460	23	,000	1,66667	1,4282	1,9051
Q6	18,651	23	,000	1,83333	1,6300	2,0367
Q7	33,258	23	,000	1,91667	1,7974	2,0359
Q8	18,651	23	,000	1,83333	1,6300	2,0367
Q9	14,922	23	,000	1,79167	1,5433	2,0401

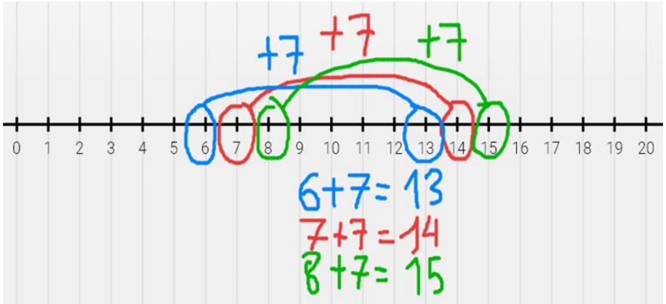
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤΙΓΜΙΟΤΥΠΩΝ ΗΛΕΚΤΡΟΝΙΚΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ

<table>
<tr><th colspan="2">1. Οι περιπέτειες του λαγού-Το κόλπο με τα διπλά</th></tr>
<tr><td>Στιγμιότυπα πλατφόρμας</td><td>Επεξήγηση</td></tr>
<tr><td>Μια φορά κι έναν καιρό, ένας λαγός, ο Άκης Λαγουδάκης, είχε πάει βόλτα στο δάσος. Απολάμβανε και θαύμαζε τις ομορφιές της φύσης. Περπατούσε, περπατούσε... Ώσπου κατάλαβε ότι είχε χαθεί! Δεν ήξερε πώς να γυρίσει πίσω...

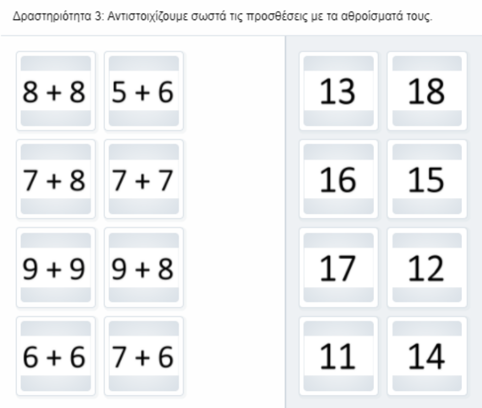

Ο λαγός αποφάσισε να ψάξει κάποιο ζωάκι να του δώσει οδηγίες για το πώς θα βγει από το δάσος . Στον δρόμο του συνάντησε μία μέλισσα. Ενώ ετοιμαζόταν να τη ρωτήσει για πληροφορίες, την είδε προβληματισμένη και σκέφτηκε να της προσφέρει τη βοήθειά του.

</td><td>Εισαγωγή στην ενότητα-Διήγηση της ιστορίας του λαγού</td></tr>
<tr><td>
</td><td><u>Δραστηριότητα 1:</u> Παρουσίαση προβληματικής κατάστασης. Η μέλισσα θέλει να ξέρει πόσα παιδιά της γυρίζουν στις κυψέλες, αλλά ο αριθμός των μελισσών που επιστρέφει συνεχώς αλλάζει.</td></tr>
</table>

 Μέλισσα, όση ώρα επέστρεφαν τα μικρά σου στις κυψέλες, πρόλαβα να τραβήξω 3 φωτογραφίες. Τι παρατηρείς;   Ε, αυτά που σου 'λεγα! Πότε οι μέλισσες είναι ίσα μοιρασμένες στις 2 κυψέλες, πότε η μία κυψέλη έχει 1 παραπάνω κι η άλλη 1 παρακάτω...Άντε να τις μετρήσεις, μετά! Για κάτσε να φτιάξω τις πράξεις στο αριθμητήριο, μπας και καταλάβω τίποτα...Θα ξεκινήσω από το διπλό άθροισμα που το ξέρω. Θα με βοηθήσεις;	**Δραστηριότητα 2:** Καταιγισμός ιδεών. Οι μαθητές παρατηρούν πώς αλλάζει το άθροισμα των μελισσών, καθώς εκείνες επιστρέφουν στις κυψέλες τους, ερμηνεύουν τα στοιχεία και διατυπώνουν υποθέσεις.
Δραστηριότητα 1: Η μέλισσα θέλει να φτιάξεις τις ομάδες μελισσών, που είδες στις φωτογραφίες του λαγού, στο αριθμητήριό της. Μπορείς να κρατήσεις σημειώσεις με το ψηφιακό μολυβάκι του εργαλείου. Ανοίγουμε το αριθμητήριο, πατώντας την εικόνα:  Τι παρατηρήσατε; Γιατί συνέβη αυτό; 	**Δραστηριότητα 3α:** Αναπαράσταση πρόσθεσης σε ψηφιακό χειραπτικό υλικό
Δραστηριότητα 2: Ο λαγός κάτι ανακάλυψε...Για να σιγουρευτεί, πρότεινε στη μέλισσα να πάρουν το μολύβι τους και να κάνουν αυτές τις πράξεις και στην αριθμογραμμή. Σίγουρα, θα βρουν έναν τρόπο να υπολογίζουν τις μέλισσες. Ανοίγουμε την αριθμογραμμή, πατώντας την εικόνα:  Τι συμπέρασμα βγάζετε; Συζητήστε με τους συμμαθητές σας.	**Δραστηριότητα 3β:** Αναπαράσταση πρόσθεσης σε αριθμογραμμή

<table>
<tr>
<td>



</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>



</td>
<td>

<u>**Δραστηριότητα 3γ:**</u>

Άσκηση αυτοαξιολόγησης με συμβολική αναπαράσταση

</td>
</tr>
<tr>
<td>

</td>
<td>

<u>**Δραστηριότητα 4:**</u>

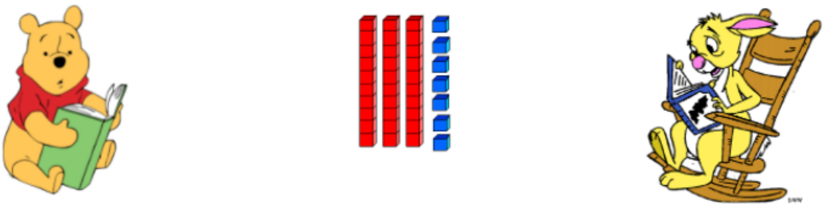
Διατύπωση συμπεράσματος και τέλος ενότητας. Ο λαγός πρέπει να απαντήσει σωστά στην ερώτηση της μέλισσας, για να προχωρήσει στο δάσος. Τότε, παίρνει την πυξίδα και προχωράει στο δάσος. Η μέλισσα, για να τον ευχαριστήσει, του προσφέρει ένα δώρο. Το δώρο της μέλισσας είναι ένα εκπαιδευτικό βίντεο για τη ζωή της μέλισσας και την παραγωγή του μελιού.

</td>
</tr>
</table>

Ερώτηση

Πόσα βήματα πρέπει να κάνει ο λαγός, για να βρει την πυξίδα; ☐

ΥΠΟΒΟΛΗ

2.Οι περιπέτειες του λαγού-Το κόλπο του 9	
Στιγμιότυπα πλατφόρμας	Επεξήγηση
Καθώς περπατούσε ο Άκης Λαγουδάκης, βρήκε τον φίλο του τον Γουίνι! Χάρηκε τόσο πολύ που τον είδε! Τον πλησίασε να τον χαιρετήσει και να τον ρωτήσει πώς θα βγει από το δάσος... 	Εισαγωγή στην ενότητα-Διήγηση της ιστορίας
	**Δραστηριότητα 1:** Παρουσίαση προβληματικής κατάστασης με βίντεο. Ο αρκούδος ψάχνει έναν τρόπο να προσθέτει εύκολα και γρήγορα με τον αριθμό 9, ώστε να παραγγέλνει καθημερινά τα βαζάκια με μέλι που χρειάζεται εκείνος και τα 9 παιδιά του.
Λαγός: Α, Γουίνι, κοίτα! Βρήκα κάτι δεκάδες στο βιβλίο! **Γουίνι:** Καλέ, τι μας νοιάζουν εμάς οι δεκάδες; Εγώ με το 9 θέλω να μάθω να προσθέτω! **Λαγός:** Ας ξεκινήσουμε με το 10 που είναι εύκολο και βλέπουμε. Εξάλλου, σιγά τη μεγάλη διαφορά... **Γουίνι:** Καλά λες! Ας πούμε ότι θα πάρω 5 βαζάκια μέλι για εμένα και 9 για τα μωρά μου. Θα υπολογίσω τα βαζάκια με τα τετραγωνάκια. **Λαγός:** Ωραία. Αντί για 9 βαζάκια μέλι, πες πως θα πάρεις 10...  Ερώτηση Πόσα τετραγωνάκια πήρε ο Γουίνι, για να κάνει τα 9 βαζάκια 10;	**Δραστηριότητα 2:** Καταιγισμός ιδεών. Οι μαθητές, μέσα από υπαινιγμούς και ερωτήσεις που καθοδηγούν τη σκέψη τους, σκέφτονται και προτείνουν πιθανές λύσεις για τον προβληματισμό του αρκουδιού. Για να προχωρήσουν στην ενότητα, πρέπει να απαντήσουν σωστά στην ερώτηση.

<table>
<tr>
<td>

<u>Δραστηριότητα 1:</u>

Τα χέρια του Γουίνι είναι μες στο μέλι, ο λαγός ψάχνει συνέχεια στα βιβλία.

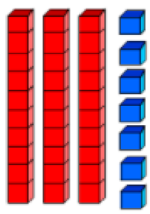
Ανοίγουμε εμείς το υλικό δεκαδικής βάσης, πατώντας την εικόνα, και υπολογίζουμε το άθροισμα 10 + 5.

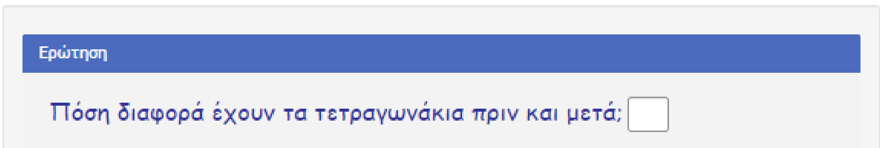
Συζητάμε:

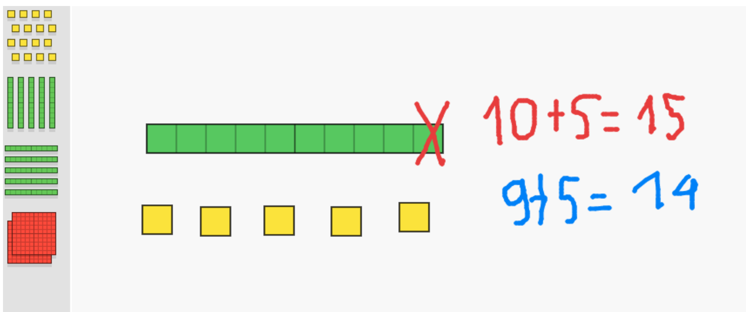
α) Πόσες δεκάδες και πόσες μονάδες θα χρειαστούμε, για να φτιάξουμε το άθροισμα;

β) Πόσα είναι τα όλα τα τετραγωνάκια;

γ) Ο Γουίνι πήρε 1 τετραγωνάκι, για να κάνει τα 9 βαζάκια 10. Αποφάσισε να το επιστρέψει. Πόσα τετραγωνάκια έμειναν;







</td>
<td>

<u>Δραστηριότητα 3α:</u>

Αναπαράσταση πρόσθεσης σε ψηφιακό χειραπτικό υλικό. Αφού αναπαραστήσουν την πρόσθεση, οι μαθητές πρέπει να απαντήσουν σωστά στην ερώτηση, για να προχωρήσουν στην ενότητα. Επιπλέον, συζητούν τις παρατηρήσεις τους με τους συμμαθητές τους.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

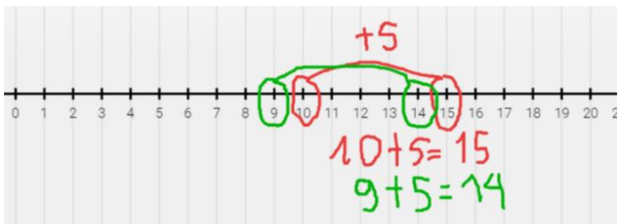
<u>Δραστηριότητα 2:</u>

Ο λαγός και ο αρκουδάκος παρατήρησαν πως το 9 με το 10 έχουν 1 τετραγωνάκι διαφορά και πως το 14 μετο 15 έχουν 1 τετραγωνάκι διαφορά, επίσης!

Έλυσαν με το μολύβι τους τις πράξεις 10+5 και 9+5 στην αριθμογραμμή, για να καταλάβουν γιατί συμβαίνει αυτό.

Ανοίγουμε την αριθμογραμμή, πατώντας την εικόνα.

Τι λέτε να κατάλαβαν οι δύο φίλοι;



</td>
<td>

<u>Δραστηριότητα 3β:</u>

Αναπαράσταση πρόσθεσης σε αριθμογραμμή

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>
9+3=
13
12 ✔
</td>
<td>
<u>Δραστηριότητα 3γ:</u>

Άσκηση αυτοαξιολόγησης με σύμβολα και αριθμούς
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Γουίνι: Λαγέ, σ'ευχαριστώ που μου έμαθες το κόλπο με το 9 ! Σου χαρίζω αυτόν τον χάρτη του δάσους, ώστε να μπορέσεις να βρεις την έξοδο. Πριν φύγεις, κάτι θέλουν να σου πουν τα μικρά μου. Κάνε **9** βήματα ευθεία, μετά στρίψε αριστερά και κάνε άλλα **7** βήματα, για να τα συναντήσεις!

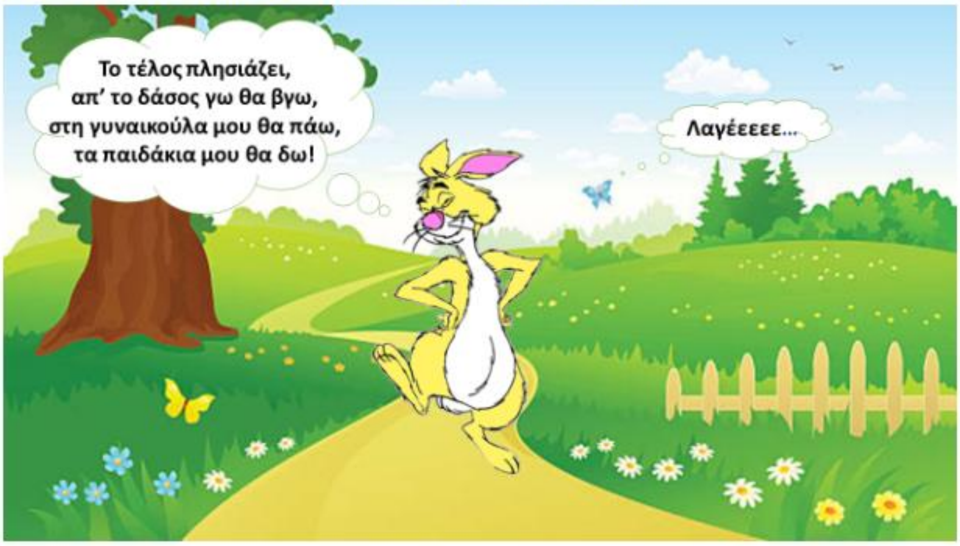
Ερώτηση

Πόσα βήματα πρέπει να κάνει ο λαγός, για να συναντήσει τα 9 αρκουδάκια;

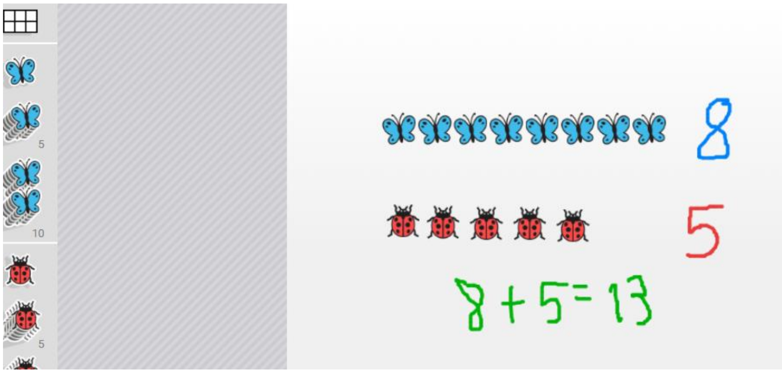
○ 17
○ 16

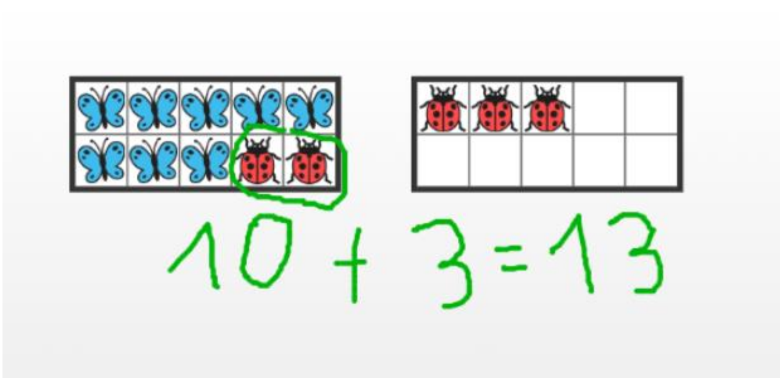
</td>
<td>
<u>Δραστηριότητα 4:</u>

Διατύπωση συμπεράσματος και τέλος ενότητας. Ο αρκούδος, για να ευχαριστήσει τον λαγό που του έμαθε το κόλπο με το 9, του προσφέρει τον χάρτη του δάσους. Τέλος, ο λαγός, για να συναντήσει τα αρκουδάκια, πρέπει να βρει σε πόσα βήματα θα τα συναντήσει, κάνοντας μία πρόσθεση με το 9.
</td>
</tr>
</table>

3.Οι περιπέτειες του λαγού-Η στάση στο 10	
Στιγμιότυπα πλατφόρμας	Επεξήγηση
Ο Άκης Λαγουδάκης, έχοντας την πυξίδα και τον χάρτη, προχωράει στο δάσος, ελπίζοντας να βρει σύντομα το κλειδί της εξόδου.Τραγουδάει γεμάτος κέφι και χαρά! Νιώθει πως πλησιάζει η στιγμή που θα βρεθεί ξανά στο σπίτι του με την οικογένειά του! Ώσπου ξαφνικά, ακούγεται μια φωνή...  	Εισαγωγή στην ενότητα-Διήγηση της ιστορίας
Ο λαγός γυρίζει και βλέπει **8** πανέμορφες πεταλούδες και **5** τρισχαριτωμένες πασχαλίτσες που απολάμβαναν την ολάνθιστη φύση! Εκείνες τον πλησίασαν, για να του ζητήσουν μια χάρη που δεν πολυάρεσε στον Άκη Λαγουδάκη...  Ερώτηση Πόσες είναι οι πεταλούδες και οι πασχαλίτσες μαζί;	**<u>Δραστηριότητα 1:</u>** Παρουσίαση προβληματικής κατάστασης. Ο λαγός καλείται να φτιάξει σπίτια για τις πεταλούδες και τις πασχαλίτσες.

Δραστηριότητα 2:
Καταιγισμός ιδεών. Οι μαθητές ερμηνεύουν τα στοιχεία και διατυπώνουν υποθέσεις. Επιπλέον, παρακολουθούν ένα βίντεο, στο οποίο ο λαγός εξηγεί τη συνήθειά του να χωρίζει τη διαδρομή του μέχρι το 10, να κάνει ένα διάλειμμα και να συνεχίζει. Οι μαθητές έρχονται σε επαφή με την έννοια της συμπλήρωσης της δεκάδας.





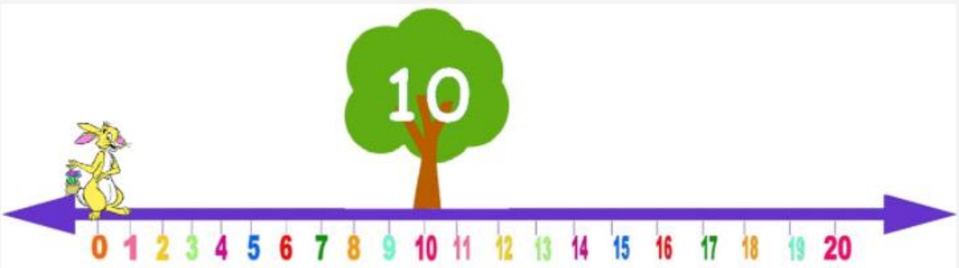
Ερώτηση

Πόσες πασχαλίτσες χώρεσαν στο πρώτο σπιτάκι;

Πόσες πασχαλίτσες χώρεσαν στο δεύτερο σπιτάκι;

Δραστηριότητα 3α:

Αναπαράσταση πρόσθεσης σε ψηφιακό χειραπτικό υλικό. Αφού αναπαραστήσουν την πρόσθεση, οι μαθητές πρέπει να απαντήσουν σωστά στην ερώτηση, για να προχωρήσουν στην ενότητα. Μοιράζοντας τα έντομα στα σπίτια, αντιλαμβάνονται καλύτερα την έννοια της συμπλήρωσης της δεκάδας.

 Ερώτηση 1 Ο λαγός βρίσκεται στο **7** και θέλει να κάνει **5** βήματα μπροστά στην αριθμογραμμή. Θα κάνει ☐ βήματα μέχρι το **10** και θα ξεκουραστεί. Του μένουν άλλα ☐ βήματα μέχρι το τέλος της διαδρομής του. Ερώτηση 2 Σε ποιον αριθμό θα φτάσει; Πάτησέ τον στην αριθμογραμμή.  ΥΠΟΒΟΛΗ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ	**<u>Δραστηριότητα 3β:</u>** Αναπαράσταση προσθέσεων σε αριθμογραμμή. Οι μαθητές, αφού παρακολουθήσουν ένα βίντεο στο οποίο ο λαγός εξηγεί την υπέρβαση της δεκάδας, ακολουθούν τα βήματα της «στάσης στο 10» και αναπαριστούν πράξεις στην αριθμογραμμή.
1 2 3 4 Ερώτηση 4 ☐ ☐ V 6+ 7= **10** + ☐ = ☐ ΥΠΟΒΟΛΗ ΑΠΑΝΤΗΣΗΣ	**<u>Δραστηριότητα 3γ:</u>** Άσκηση αυτοαξιολόγησης με συμβολική αναπαράσταση.

Λαγός: Αστεράκι, σ' ευχαριστώ τόσο πολύ για τη βοήθειά σου! Όποτε θέλεις, σε περιμένω σπίτι να σε κεράσω κέικ καρότο!

Δραστηριότητα 4:

Τέλος ενότητας. Ο λαγός, έχοντας λύσει όλα τα μαθηματικά προβλήματα των ζώων του δάσους και έχοντας πάρει την πυξίδα, τον χάρτη και το κλειδί, βγαίνει από το δάσος και επιστρέφει στο σπίτι του.