

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗΣ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΕ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΩΝ.

Νικόλαος Μηλιάδης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του
Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική
Κινδύνου

Πειραιάς

Ιούνιος 2021

UNIVERSITY OF PIRAEUS



DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

**POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK
MANAGEMENT**

**COVARIANCE IDENTITIES WITH APPLICATIONS TO
ACTUARIAL RISK MEASURES**

Nikolaos Miliadis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of
Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in
Actuarial Science and Risk Management

Piraeus

June 2021

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Γ. Ψαρράκος (Επιβλέπων)
- Μ. Μπούτσικας
- Κ. Πολίτης

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

*Στους γονείς μου
Πουλχερία και Φίλιππο,
στις αδερφές μου
Ελένη και Κλημεντίνη
και στην γιαγιά μου
Ελένη.*

Ευχαριστίες

Με την ολοκλήρωση αυτής της εργασίας θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κο. Γεώργιο Ψαρράκο για την πολύτιμη βοήθεια, τις συμβουλές που μου παρείχε και την σωστή καθοδήγηση και υπομονή που έδειξε κατά την διάρκεια της δουλειάς μου παρά τις δυσκολίες που αντιμετωπίσα στην πορεία υλοποίησης της. Επίσης είμαι ευγνώμων στα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Μιχαήλ Μπούτσικα και Κωνσταντίνο Πολίτη για τις χρήσιμες συμβουλές και τις παρατηρήσεις τους. Τέλος πολλά ευχαριστώ οφείλω και στην οικογένεια μου για τις ηθική και υλική υποστήριξη που μου παρείχαν για την επίτευξη των στόχων μου.

Περίληψη

Σε αυτήν την εργασία παρουσιάζονται τρεις διαφορετικές γενικεύσεις της ταυτότητας του Stein, η οποία στη κλασική της εκδοχή συσχετίζει την συνδιακύμανση μίας τυχαίας μεταβλητής X που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μία τυχαία μεταβλητή $g(X)$. Οι γενικεύσεις βασίζονται στις εργασίες των Papadatos και Parathanasiou (2001), Kattumanil (2009) και των Landsman και Valdez (2016).

Συγκεκριμένα, στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και αποδεικνύονται αποτελέσματα από την εργασία των Papadatos και Parathanasiou και εφαρμογές αυτών σε γνωστές κατανομές. Στη συνέχεια, στο δεύτερο κεφάλαιο, παρουσιάζεται μία άλλη μορφή ταυτότητας συνδιακύμανσης που παρέθεσε ο Kattumanil, ο οποίος έδειξε ότι αποτελεί γενίκευση της αντίστοιχης ταυτότητας των Papadatos και Parathanasiou. Επιπλέον, παρουσιάζονται εφαρμογές της γενικευμένης αυτής ταυτότητας σε οικογένειες κατανομών όπως η οικογένεια Pearson, ενώ γίνεται και μία σύνδεση με την καμπύλη Lorenz και τον δείκτη Gini.

Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο, επικεντρωνόμαστε στην εργασία των Landsman και Valdez, το οποίο περιέχει μία επέκταση της ταυτότητας του Stein για ουρές κατανομών. Θα δούμε ότι η συγκεκριμένη ταυτότητα αποδεικνύεται χρήσιμη στον υπολογισμό ροπών τυχαίων μεταβλητών δεσμευμένες στην ουρά της κατανομής, οι οποίες με τη σειρά τους εμφανίζονται στην αναλογιστική διαχείριση κινδύνων.

Abstract

The main aim of this dissertation is to present three different generalizations of Stein's identity, which refers to the relation between the covariance of a random variable X that follows the normal distribution and a random variable $g(X)$. These generalizations are based on the papers of Papadatos and Papathanasiou (2001), Kattumanil (2009) and Landsman and Valdez (2016).

Specifically, in the first chapter results from the work of Papadatos and Papathanasiou are studied and their applications in known distributions are investigated. Then, in the second chapter, another form of covariance identity due to Kattumanil is obtained, which is a generalization of the respective identities of Papadatos and Papathanasiou. Furthermore, applications of this generalized identity are given for families of distributions such as the well known Pearson family, while a connection is made with the Lorenz curve and the Gini index.

In the third and final chapter, the paper of Landsman and Valdez is studied, and an extension of Stein's identity for distribution tails is obtained. This identity is a useful tool in calculating tail conditional moments of random variables, which in turn appear often in actuarial risk management.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1 Μία γενικευμένη ταυτότητα συνδιακύμανσης τύπου Stein με εφαρμογές σε φράγματα διακύμανσης.....	9
1.1 Εισαγωγή	9
1.2 Η ταυτότητα συνδιακύμανσης Stein και οι γενικεύσεις της.....	9
1.3 Γενικευμένη ταυτότητα συνδιακύμανσης	11
1.4 Άνω και κάτω φράγματα διακύμανσης	22
Κεφάλαιο 2 Εφαρμογές της ταυτότητας Stein στην οικογένεια Pearson, την καμπύλη Lorenz και τον δείκτη Gini.....	31
2.1 Εισαγωγή	31
2.2 Μια διαφορετική ταυτότητα Stein.....	32
2.3 Ορισμός οικογένειας Pearson και εφαρμογές σε συνεχείς κατανομές.....	35
2.4 Καμπύλη Lorenz και δείκτης Gini	40
Κεφάλαιο 3 Αναδρομικές σχέσεις μέτρων κινδύνων που επηρεάζονται από την δεξιά ουρά της κατανομής μέσω της ταυτότητας Stein	50
3.1 Εισαγωγή	50
3.2 Η ταυτότητα Stein σε ουρές κατανομών.....	50
3.3 Η ταυτότητα Stein για συνεχείς δεσμευμένες μέσες τιμές	53
3.4 Παραδείγματα των αναδρομικών σχέσεων στην συνεχή περίπτωση.....	56
3.5 Η ταυτότητα Stein στην διακριτή περίπτωση	72
3.6 Παραδείγματα στην διακριτή περίπτωση.....	77
Βιβλιογραφία	83

Κεφάλαιο 1

Μία γενικευμένη ταυτότητα συνδιακύμανσης τύπου Stein με εφαρμογές σε φράγματα διακύμανσης

1.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε την αρχική μορφή της ταυτότητας συνδιακύμανσης του Stein, σύμφωνα με την εργασία του Stein (1981), καθώς και γενικεύσεις αυτής της ταυτότητας, που οφείλονται στους Papadatos και Papathanasiou (2001) που τις χρησιμοποιούμε στο υπόλοιπο της εργασίας. Ειδικότερα, στην Ενότητα 1.2 δίνεται ο τύπος της ταυτότητας του Stein με σκοπό στην συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για να βρεθούν κάποιες σχέσεις στην τυποποιημένη κανονική κατανομή, περιλαμβάνοντας και το άνω φράγμα της διακύμανσής της. Στην Ενότητα 1.3 αναφέρονται κάποιες ιδιότητες της τυχαίας μεταβλητής (τ.μ.) X^* που είναι ιδιαίτερα σημαντική στην γενίκευση της ταυτότητας του Stein. Επίσης, πραγματοποιούνται κάποιες εφαρμογές εύρεσης της κατανομής της τ.μ. X^* με την βοήθεια της τ.μ. X και δίνονται κάποιες ιδιότητες. Στην Ενότητα 1.4 που είναι και η τελευταία, παρουσιάζονται αποτελέσματα από την εργασία των Papadatos και Papathanasiou (2001) που σχετίζονται με άνω και κάτω φράγματα για την διακύμανση μιας συνάρτησης της τ.μ. X , χρησιμοποιώντας στα φράγματα αυτά και την τ.μ. X^* . Αξίζει να τονιστεί ότι πολλές από τις σχέσεις του πρώτου κεφαλαίου είναι αρκετά σημαντικές στην αναλογιστική επιστήμη και θα τις μελετήσουμε πιο αναλυτικά στα επόμενα κεφάλαια. Στο συγκεκριμένο σημείο, αναφέρουμε ότι στο υπόλοιπο του κεφαλαίου η τ.μ. X και η τ.μ. X^* έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού.

1.2 Η ταυτότητα συνδιακύμανσης Stein και οι γενικεύσεις της

Η ταυτότητα συνδιακύμανσης του Stein, για μία τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή δίνεται στην παρακάτω πρόταση. Η απόδειξη της πρότασης παραλείπεται και μπορεί να βρεθεί στην εργασία του Stein (1981).

Πρόταση 1.1. Έστω X μία τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 , το οποίο συμβολίζεται με $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Έστω, ακόμα, μία συνάρτηση g με παράγωγο g' για την οποία ισχύει $E|g'(X)| < \infty$. Τότε, ισχύει

$$\text{Cov}[X, g(X)] = \sigma^2 E[g'(X)]. \quad (1.1)$$

Η σχέση (1.1) είναι γνωστή ως ταυτότητα του Stein (βλέπε Stein (1981)). Χρησιμοποιώντας ότι

$$\text{Cov}(X, g(X)) = E(X g(X)) - \mu g(X),$$

είναι εύκολο να δούμε ότι η σχέση (1.1) γράφεται ως

$$E[(X - \mu)g(X)] = \sigma^2 E[g'(X)].$$

Στην περίπτωση της τυποποιημένης τ.μ. $Z = (X - \mu)/\sigma$ που ακολουθεί την $N(0,1)$, δηλαδή $Z \sim N(0,1)$, και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\text{Cov}[Z, g(Z)] = E[Zg(Z)]$, η (1.1) παίρνει την μορφή

$$E[Zg(Z)] = E[g'(Z)].$$

Επίσης, σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\text{Cov}(X, X) = E[X(X - \mu)] = E(X^2) - \mu E(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sigma^2.$$

Επομένως η σχέση (1.1) μπορεί να γραφτεί και ως

$$\text{Cov}[X, g(X)] = \text{Cov}(X, X)E[g'(X)].$$

Αυτή η ταυτότητα έχει πολλές σημαντικές εφαρμογές στις πιθανότητες και στην στατιστική σύμφωνα με παραδείγματα του Stein (1972) και του Hudson (1978). Πολλές γενικεύσεις έχουν αναφερθεί στους Cacoullios και Parathanasiou (1989) καθώς επίσης και στον Hudson (1978). Στην επόμενη πρόταση, δίνεται ένα άνω φράγμα για την διακύμανση $\text{Var}[g(Z)]$ την οποία απέδειξε ο Chernoff (1981), και είναι γνωστή ως ανισότητα Chernoff.

Πρόταση 1.2. Έστω Z μία τ.μ. που ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή, δηλαδή $Z \sim N(0,1)$. Τότε, ισχύει

$$\text{Var}[g(Z)] \leq E[(g'(Z))^2]. \quad (1.2)$$

Παρατήρηση 1.1. Η ισότητα της (1.2) ισχύει αν και μόνο αν η g είναι γραμμική. Πράγματι, έστω ότι έχουμε $g(x) = ax + \beta$. Τότε, $g'(x) = a$ και από το αριστερό μέλος της ανισότητας (1.2) καταλήγουμε ότι

$$\text{Var}[aX + \beta] = a^2 \text{Var}[X].$$

Αντίστοιχα, για το δεξί μέλος της ανισότητας (1.1) προκύπτει ότι

$$\sigma^2 E[(g'(X))^2] = \sigma^2 E[a^2].$$

Επομένως, επαληθεύουμε ότι $Var[X] = \sigma^2$.

Η απόδειξη του αντιστρόφου παραλείπεται και μπορεί να βρεθεί στην εργασία του Chernoff (1981).

Αξίζει να αναφέρουμε ότι η (1.2) και η πολυμεταβλητή της αναλογία που αποδείχτηκε από τον Chen (1982), παρακίνησαν για να γενικευτεί η ανισότητα σε διακριτές και συνεχείς τ.μ. καθώς και στην αναζήτηση κάτω φραγμάτων για τη διασπορά. Αυτά διατυπώθηκαν από τον Casoulllos (1982), καθώς επίσης και από τους Casoulllos και Parathanasiou (1985). Για περισσότερες λεπτομέρειες και εφαρμογές στις πιθανότητες και στην στατιστική, βλέπε την εργασία των Papadatos και Parathanasiou (2001).

1.3 Γενικευμένη ταυτότητα συνδιακύμανσης

Στην ενότητα αυτή, μελετάμε μία γενίκευση της ταυτότητας Stein (βλέπε σχέση (1.1)), σύμφωνα με την εργασία των Papadatos και Parathanasiou (2001). Αρχικά, δίνεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) της τ.μ. X^* και στην συνέχεια κάποιες βασικές ιδιότητες που αυτή ικανοποιεί. Επιπλέον, αναφέρονται ορισμένα παραδείγματα για την εύρεση της μονοκόρυφης τιμής σε μερικές συνεχείς σ.π.π.. Επιπρόσθετα, γίνονται εφαρμογές εύρεσης της κατανομής της τ.μ. X^* με την γνώση της κατανομής της τ.μ. X και δίνονται κάποια συμπεράσματα. Τόσο στα παραδείγματα όσο και στις εφαρμογές χρησιμοποιούνται γραφήματα. Στον επόμενο ορισμό αλλά και στο υπόλοιπο της εργασίας για τον ορισμό της απόλυτα συνεχούς συνάρτησης παραθέτουμε το βιβλίο του Apostol (1977, σελ. 139).

Ορισμός 1.1. Έστω X μία απόλυτα συνεχής τ.μ. με σ.π.π. f , μέση τιμή μ , διακύμανση σ^2 και στήριγμα $S(X)$. Η X^* είναι μία τ.μ. με σ.π.π. f^* που δίνεται από την σχέση

$$f^*(x) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{-\infty}^x (\mu - t)f(t)dt = \frac{1}{\sigma^2} \int_x^{\infty} (t - \mu)f(t)dt. \quad (1.3)$$

Η f^* είναι σ.π.π. (βλέπε Papadatos και Parathanasiou (2001)). Πράγματι

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)dx &= \int_{-\infty}^0 f^*(x)dx + \int_0^{\infty} f^*(x)dx \\ &= \frac{1}{\sigma^2} \left[\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^x (\mu - t)f(t)tdtdx + \int_0^{\infty} \int_x^{\infty} (t - \mu)f(t)tdtdx \right]. \end{aligned}$$

Από το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) dx &= \frac{1}{\sigma^2} \left[\int_{-\infty}^0 \int_t^0 (\mu - t) f(t) dx dt + \int_0^{\infty} \int_0^t (t - \mu) f(t) dx dt \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left[- \int_{-\infty}^0 t(\mu - t) f(t) dt + \int_0^{\infty} t(t - \mu) f(t) dt \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left[-\mu \int_{-\infty}^0 t f(t) dt + \int_{-\infty}^0 t^2 f(t) dt + \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt - \mu \int_0^{\infty} t f(t) dt \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt - \mu \int_{-\infty}^{\infty} t f(t) dt \right] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} [E(X^2) - \mu^2] \\
&= \frac{1}{\sigma^2} \sigma^2 = 1.
\end{aligned}$$

Το ακόλουθο λήμμα, συνοψίζει κάποιες βασικές ιδιότητες του X^* και παρουσιάζει την γενικευμένη ταυτότητα του Stein (Σχέση (1.4)).

Λήμμα 1.1. Έστω X μία απόλυτα συνεχής τ.μ. με σ.π.π. f , μέση τιμή μ , διακύμανση σ^2 και στήριγμα $S(X)$. Τότε, ορίζουμε το X^* να είναι μία τ.μ. με σ.π.π. f^* που ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- i) Η f^* είναι μία μονοκόρυφη απόλυτα συνεχής συνάρτηση με μέση τιμή μ και μέγιστη τιμή

$$f^*(\mu) = \frac{E|X - \mu|}{2\sigma^2}.$$

Επίσης, η συνάρτηση $\frac{f^{*'}(x)}{\mu - x}$ είναι μη αρνητική και ολοκληρώσιμη.

- ii) Για κάθε απόλυτα συνεχή συνάρτηση g με $E|g'(X^*)| < \infty$ έχουμε

$$\text{Cov}[X, g(X)] = \sigma^2 E[g'(X^*)]. \quad (1.4)$$

- iii) Αν η τ.μ. Y ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\text{Cov}[X, g(X)] = \sigma^2 E[g'(Y)]$$

για κάθε απόλυτα συνεχή συνάρτηση g με $E|g'(Y)| < \infty$ τότε $Y \stackrel{d}{=} X^*$, όπου το $\stackrel{d}{=}$ σημαίνει ισότητα ως προς την κατανομή.

- iv) Για σταθερούς αριθμούς $a \neq 0$ και b έχουμε

$$(aX + b) \stackrel{d}{=} aX^* + b.$$

Η απόδειξη βρίσκεται στο άρθρο των Papadatos και Parathanasiou (2001) και παραλείπεται. Ακολούθως, δίνεται μια διαφορετική μορφή της γενικευμένης ταυτότητας (σχέση (1.4)) που θα φανεί χρήσιμη σε κάποιες εφαρμογές.

Πρόταση 1.3. Έστω ότι έχουμε την τ.μ. X και την τ.μ. X^* που ορίζονται στο ίδιο σύνολο. Τότε, για την μη αρνητική συνάρτηση $w(x) = \frac{f^*(x)}{f(x)}$ προκύπτει ότι

$$\text{Cov}[X, g(X)] = \sigma^2 E[w(X)g'(X)].$$

Απόδειξη

Από την (1.4) έχουμε

$$\text{Cov}[X, g(X)] = \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} g'(x) f^*(x) dx.$$

Θέτοντας $w(x) = \frac{f^*(x)}{f(x)}$ ισοδύναμα έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X, g(X)] &= \sigma^2 \int_{-\infty}^{\infty} g'(x) w(x) f(x) dx \\ &= \sigma^2 E[w(X)g'(X)]. \end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 1.2. Η ταυτότητα (1.4) (βλέπε Cacoullos και Parathanasiou (1989)), παραμένει σε ισχύ για κάθε απόλυτα συνεχή φθίνουσα συνάρτηση g , ακόμα και στην περίπτωση που $E[g'(X^*)] = \infty$ όπως προκύπτει από μία εφαρμογή του θεωρήματος Tonelli. Σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε $E[(X - \mu)(g(X) - g(\mu))] = \infty$. Αν ωστόσο $E[g'(X^*)] = \infty$ και η g είναι αυθαίρετη, τότε μπορεί να προκύψει ότι

$$E|(X - \mu)(g(X) - g(\mu))| < \infty.$$

Στην συνέχεια αυτής της ενότητας, δίνονται κάποια παραδείγματα μονοκόρυφων κατανομών και μετά στις ακόλουθες εφαρμογές υπολογίζεται η κατανομή και η μονοκόρυφη τιμή της τ.μ. X^* με την βοήθεια της τ.μ. X . Θυμίζουμε ότι, η μονοκόρυφη κατανομή έχει μία κορυφή, την οποία υπολογίζουμε μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο της σ.π.π.. Στο υπόλοιπο της εργασίας συμβολίζουμε την κορυφή με m .

Παράδειγμα 1.1

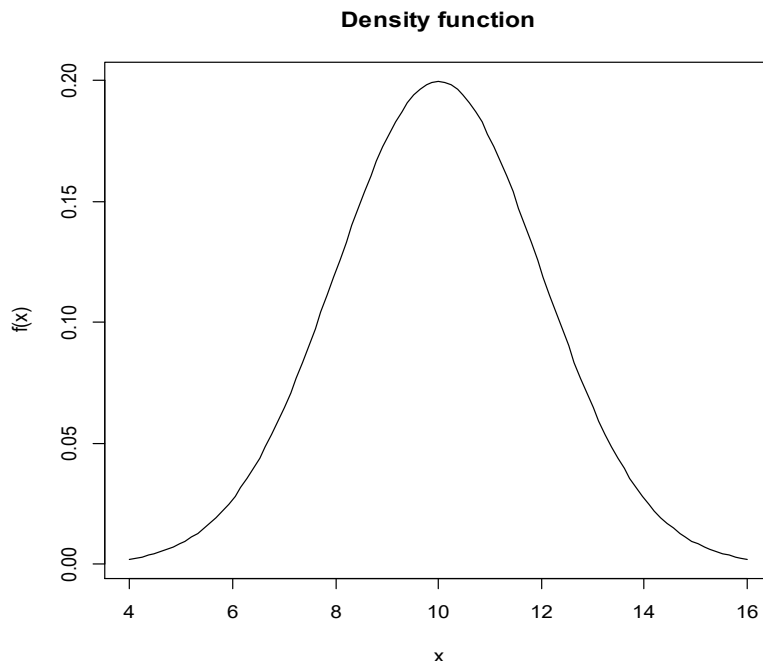
Έχω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. Τότε, θα έχουμε

$$f'(x) = \frac{1}{2\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (-2(x-\mu)(x-\mu)')$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sigma^2\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} (-(x-\mu)).$$

Λύνοντας την εξίσωση $f'(x) = 0$ ως προς x , προκύπτει ότι η κορυφή είναι $m = \mu$.

Παρατήρηση 1.3. Η κανονική κατανομή παίρνει την μεγαλύτερη τιμή της όταν $m = \mu$.



Γράφημα 1.1: Η σ.π.π. f με μονοκόρυφο σημείο $m=\mu=10$

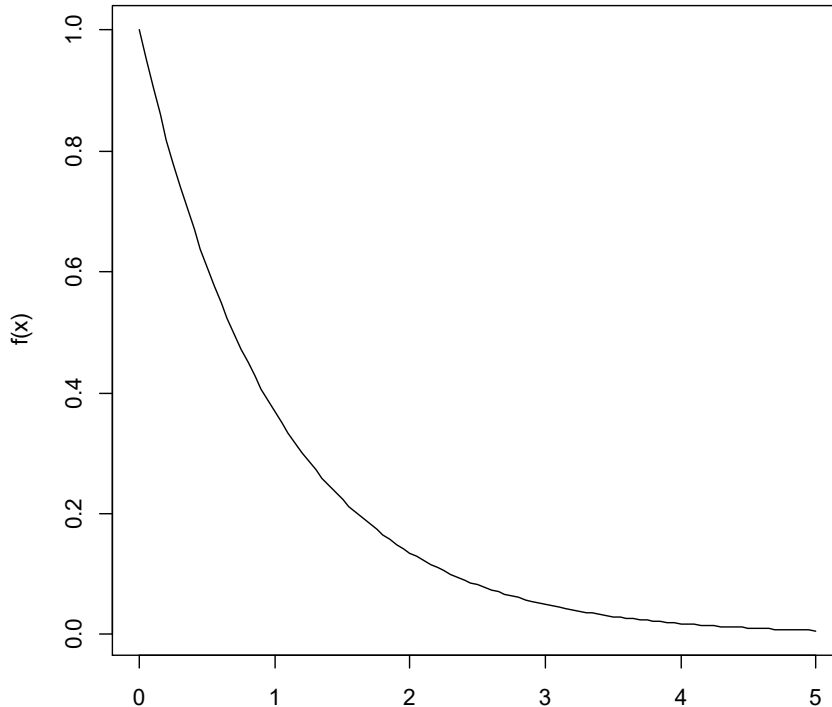
Παράδειγμα 1.2

Αυτό το παράδειγμα αφορά την εκθετική κατανομή. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ με $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$. Τότε, θα έχουμε

$$f'(x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x} < 0.$$

Παρατήρηση 1.4. Στην εκθετική κατανομή όταν $x = 0$ η f θα πάρει την μέγιστη τιμή της. Πράγματι, για $x = 0$ έχουμε $f(0) = \lambda$. Έτσι, καταλαβαίνουμε ότι η κορυφή είναι $m = 0$.

Density function



Γράφημα 1.2: Η σ.π.π. f με μονοκόρυφη τιμή $m=0$.

Από την σχέση (1.3) γίνεται αντιληπτό ότι με την γνώση της κατανομής της τ.μ. X μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή της τ.μ. X^* αλλά και να βρούμε την μονοκόρυφη τιμή που την ορίζει. Παρακάτω, δίνονται κάποιες εφαρμογές εύρεσης της τ.μ. X^* με την βοήθεια της τ.μ. X και επισημαίνονται κάποιες παρατηρήσεις.

Εφαρμογή 1.1

Έχω $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ με $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ και $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Η σ.π.π. είναι $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$. Τότε, ισχύει

$$f^*(x) = \frac{1}{\sigma^2} \int_x^\infty (t - \mu) f(t) dt.$$

Στο μ και σ^2 βάζουμε την μέση τιμή και την διακύμανση της κατανομής. Επομένως, έχουμε

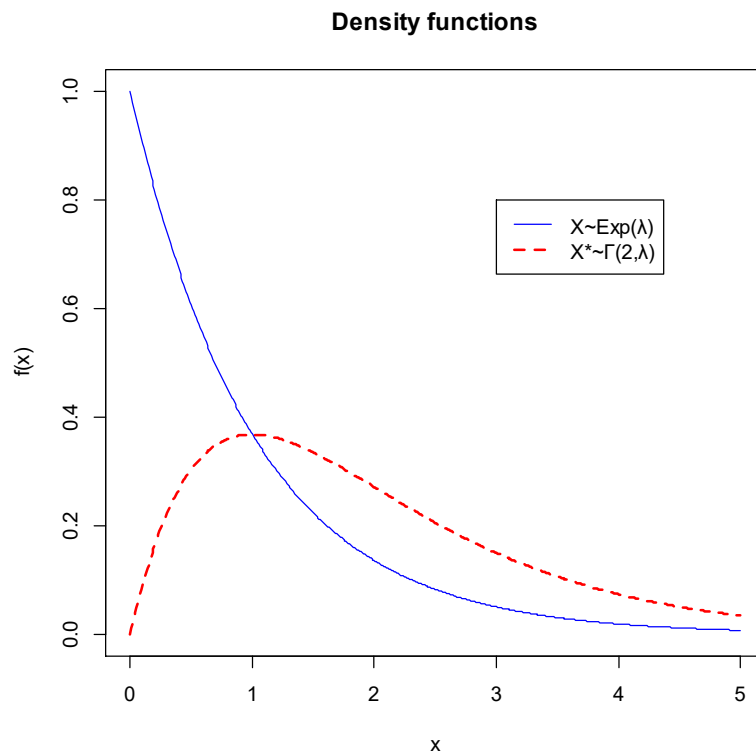
$$f^*(x) = \lambda^2 \int_x^\infty \left(t - \frac{1}{\lambda}\right) \lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^2 \int_x^\infty (\lambda t - 1)e^{-\lambda t} dt \\
&= \lambda^2 \left(-\frac{1}{\lambda}\right) \int_x^\infty (\lambda t - 1)(e^{-\lambda t})' dt \\
&= -\lambda \left[(\lambda t - 1)e^{-\lambda t} \Big|_x^\infty - \int_x^\infty (\lambda t - 1)' e^{-\lambda t} dt \right] \\
&= -\lambda \left[0 - (\lambda x - 1)e^{-\lambda x} - \int_x^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \right] \\
&= -\lambda \left[-\lambda x e^{-\lambda x} + e^{-\lambda x} - e^{-\lambda x} \right] \\
&= \lambda^2 x e^{-\lambda x}.
\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$f^*(x) = \frac{\lambda^2}{\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-\lambda x}.$$

Δηλαδή, συμπεραίνουμε ότι $X^* \sim \Gamma(2, \lambda)$.



x
Γράφημα 1.3: Οι σ.π.π. της X και X* για λ=1.

Αξίζει να αναφέρουμε ότι δεν μπορούμε να έχουμε $X^* \sim \text{Exp}(\lambda)$ γιατί η $f'(x) < 0$ όταν $X \sim \text{Exp}(\lambda)$. Τώρα, υπολογίζουμε την κορυφή της $X^* \sim \Gamma(2, \lambda)$. Για να το πετύχουμε αυτό ουσιαστικά πραγματοποιούμε την ίδια διαδικασία με τα προηγούμενα παραδείγματα. Πράγματι, έχουμε:

$$f^{*'}(x) = \lambda^2 e^{-\lambda x} (1 - x\lambda).$$

Μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο προκύπτει

$$\begin{aligned} f^{*'}(x) &= 0 \\ \lambda^2 e^{-\lambda x} (1 - x\lambda) &= 0 \\ x &= \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, από όλα τα παραπάνω καταλήγουμε στο γεγονός ότι όταν η τ.μ. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ τότε η τ.μ. $X^* \sim \Gamma(2, \lambda)$ με μονοκόρυφη τιμή την $m = \frac{1}{\lambda}$ που είναι ίδια με την μέση τιμή της τ.μ. X .

Εφαρμογή 1.2

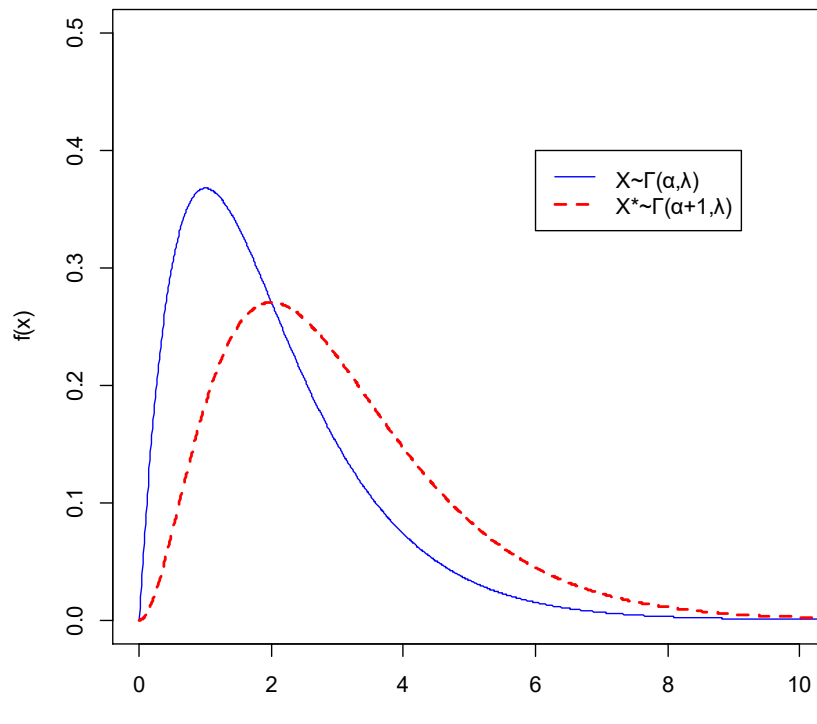
Έστω $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$ με $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$ και $\text{Var}(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$. Η σ.π.π. είναι $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$, $x > 0$, $\lambda > 0$, $\alpha > 0$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$. Τότε, από την σχέση (1.3) έχουμε

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{\lambda^2}{\alpha} \int_x^\infty \left(t - \frac{\alpha}{\lambda}\right) \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\lambda^{2+\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)} \int_x^\infty \left(t^\alpha - \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} dt \\ &= \frac{\lambda^{2+\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left[\int_x^\infty t^\alpha e^{-\lambda t} dt - \int_x^\infty \frac{\alpha}{\lambda} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \right] \\ &= \frac{\lambda^{2+\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left[-\frac{1}{\lambda} \int_x^\infty t^\alpha (e^{-\lambda t})' dt - \int_x^\infty \frac{\alpha}{\lambda} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \right] \\ &= \frac{\lambda^{2+\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left[-\frac{1}{\lambda} [t^\alpha e^{-\lambda t}]_x^\infty + \frac{1}{\lambda} \int_x^\infty (t^\alpha)' e^{-\lambda t} dt - \int_x^\infty \frac{\alpha}{\lambda} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \right] \\ &= \frac{\lambda^{2+\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)} \left[\frac{1}{\lambda} x^\alpha e^{-\lambda x} + \int_x^\infty \frac{\alpha}{\lambda} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt - \int_x^\infty \frac{\alpha}{\lambda} t^{\alpha-1} e^{-\lambda t} dt \right] \\ &= \frac{\lambda^{1+\alpha}}{\alpha \Gamma(\alpha)} x^\alpha e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

$$= \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-\lambda x}.$$

Δηλαδή, συμπεραίνουμε ότι η $X^* \sim \Gamma(\alpha+1, \lambda)$.

Density functions



Γράφημα 1.4: Οι σ.π.π. της X και X^* που $\alpha=2$ και $\lambda=1$.

Τώρα, υπολογίζουμε την κορυφή της τ.μ. $X^* \sim \Gamma(\alpha+1, \lambda)$. Παραγωγίζοντας την f^* παίρνουμε

$$f^{*'}(x) = \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} [ax^{\alpha-1}e^{-\lambda x} - x^{\alpha}\lambda e^{-\lambda x}]$$

$$f^{*'}(x) = \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-\lambda x} x^{\alpha} \left[\frac{\alpha}{x} - \lambda \right].$$

Εξισώνοντας την πρώτη παράγωγο με το μηδέν έχουμε

$$f^{*'}(x) = 0$$

$$\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-\lambda x} x^{\alpha} \left[\frac{\alpha}{x} - \lambda \right] = 0$$

$$\frac{\alpha}{x} - \lambda = 0$$

$$x = \frac{\alpha}{\lambda}$$

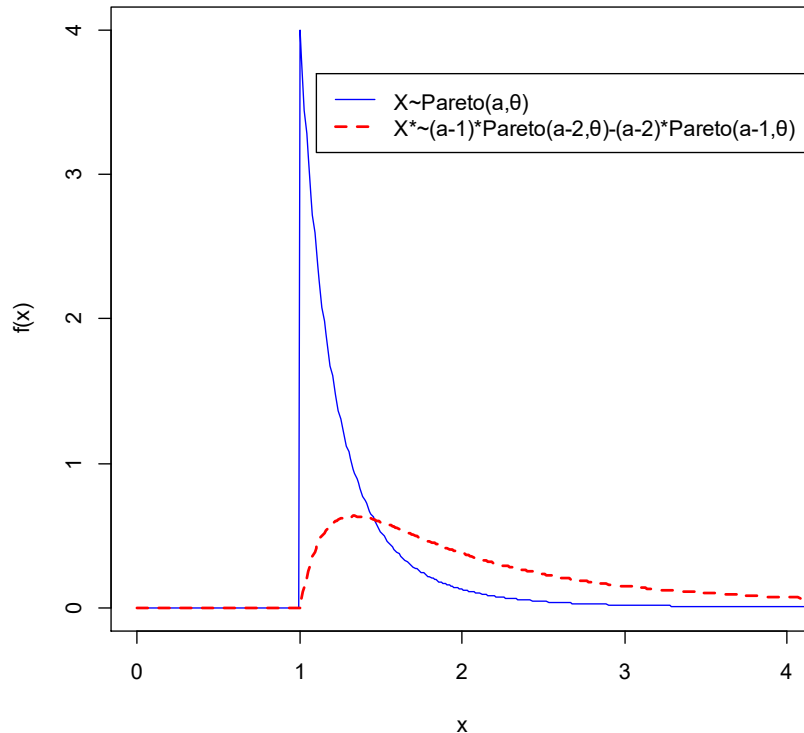
Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι όταν έχουμε μία τ.μ. $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$, τότε η τ.μ. X^* θα ακολουθεί μία κατανομή Γάμμα που το α θα είναι αυξημένο κατά μία μονάδα δηλαδή $X^* \sim \Gamma(\alpha + 1, \lambda)$ και η μονοκόρυφη τιμή της $m = \frac{\alpha}{\lambda}$ θα ισούται με την μέση τιμή της τ.μ. X .

Εφαρμογή 1.3

Έχω $X \sim \text{Pareto}(a, \theta)$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε την Pareto type 1 με $f(x) = \frac{a\theta^a}{x^{a+1}}$, $x \geq \theta$, $a > 2$, $\theta > 0$ με $E(X) = \frac{a\theta}{a-1}$ και $\text{Var}(X) = \frac{a\theta^2}{(a-1)^2(a-2)}$. Τότε, από την σχέση (1.3) έχουμε

$$\begin{aligned} f^*(x) &= \frac{(a-1)^2(a-2)}{a\theta^2} \int_x^\infty \left(t - \frac{a\theta}{a-1}\right) \frac{a\theta^a}{t^{a+1}} dt \\ &= \frac{(a-1)^2(a-2)}{\theta^{2-a}} \int_x^\infty t^{-a} - \frac{a\theta t^{-a-1}}{a-1} dt \\ &= \frac{(a-1)^2(a-2)}{\theta^{2-a}} \int_x^\infty \frac{1}{1-a} (t^{-a+1})' + \frac{a\theta}{a(a-1)} (t^{-a})' dt \\ &= \frac{(a-1)^2(a-2)}{\theta^{2-a}} \left[\frac{1}{1-a} t^{-a+1} + \frac{\theta t^{-a}}{a-1} \right]_x^\infty \\ &= \frac{(a-1)^2(a-2)}{\theta^{2-a}} \left[-\frac{x^{1-a}}{1-a} - \frac{\theta x^{-a}}{a-1} \right] \\ &= \frac{(a-1)(a-2)}{\theta^{2-a}} [x^{1-a} - \theta x^{-a}] \\ &= (a-1) \frac{(a-2)\theta^{a-2}}{x^{a-1}} - (a-2) \frac{(a-1)\theta^{a-1}}{x^a}. \end{aligned}$$

Δηλαδή, προκύπτει ότι η τ.μ. X^* είναι μία γενικευμένη μίξη μίας $\text{Pareto}(a-2, \theta)$ και μίας $\text{Pareto}(a-1, \theta)$ με συντελεστές $a-1$ και $2-a$ αντίστοιχα.



Γράφημα 1.5: Οι σ.π.π. της X και X^* που $a=4$ και $\theta=1$.

Τώρα, υπολογίζουμε την κορυφή της τ.μ. X^* μηδενίζοντας την πρώτη παράγωγο της σ.π.π. της και λύνοντας προς x . Πράγματι,

$$f^{*'}(x) = (a-1)(a-2)\theta^{a-2}(1-a)x^{-a} + (a-2)(a-1)\theta^{a-1}ax^{-a-1}$$

και μηδενίζοντας την $f^{*'}$ προκύπτει

$$f^{*'}(x) = 0$$

$$(a-1)(a-2)\theta^{a-2}(1-a)x^{-a} = -(a-2)(a-1)\theta^{a-1}ax^{-a-1}$$

$$x = \frac{a\theta}{a-1}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι όταν έχουμε μία τ.μ. $X \sim \text{Pareto}(a, \theta)$ τότε η τ.μ. X^* ακολουθεί μία γενικευμένη μίξη μίας $\text{Pareto}(a-2, \theta)$ και μίας $\text{Pareto}(a-1, \theta)$ με συντελεστές $a-1$ και $a-2$ αντίστοιχα και έχει μονοκόρυφη τιμή την $m = \frac{a\theta}{a-1}$ που είναι ίδια με την μέση τιμή της τ.μ. X .

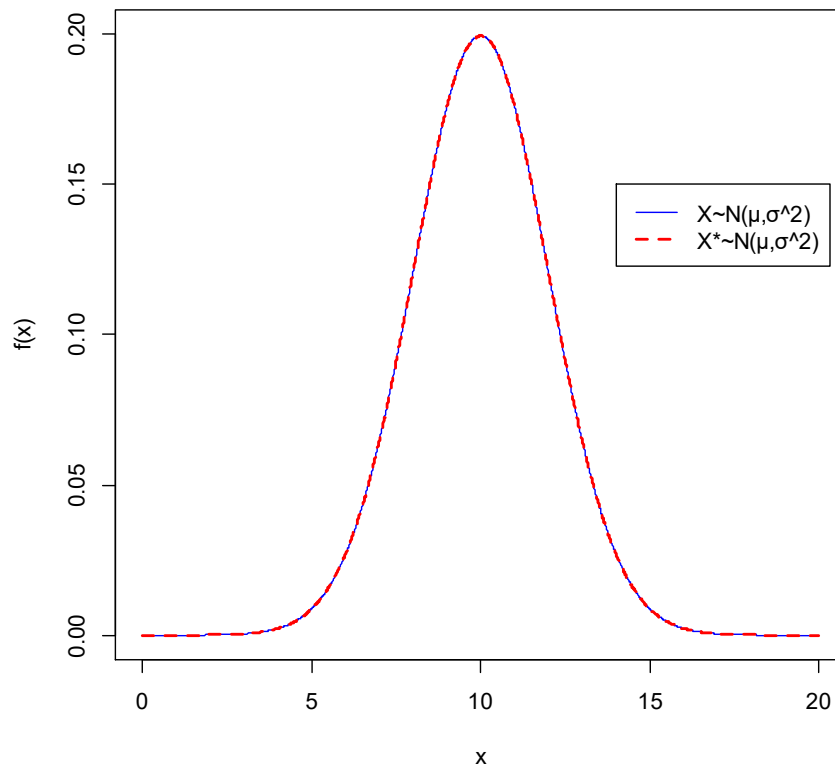
Εφαρμογή 1.4

Έχω $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με $E(X) = \mu$ και $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Η σ.π.π. είναι $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ όπου $-\infty < x < \infty$. Τότε, από την σχέση (1.3) έχουμε

$$\begin{aligned}
f^*(x) &= \frac{1}{\sigma^2} \int_x^\infty (t - \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt \\
&= \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_x^\infty (t - \mu) \left(-\frac{2\sigma^2}{2(t - \mu)} \right) \left(e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right)' dt \\
&= \frac{1}{\sigma^2 \sqrt{2\pi\sigma^2}} \left[-e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \right]_x^\infty \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.
\end{aligned}$$

Επομένως, όταν έχουμε μία τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε η τ.μ. $X^* \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Density functions



Γράφημα 1.6: Οι σ.π.π. της X και X^* με $\mu=10$ και $\sigma^2=2$.

Στην συνέχεια, δίνεται ο Πίνακας 1.1 που παρουσιάζει τα αποτελέσματα των παραπάνω εφαρμογών.

Πίνακας 1.1

Κατανομή της τ.μ. X	$f(x)$	Κατανομή της τ.μ. X^*	$f^*(x)$	Μονοκόρυφη τιμή της τ.μ. X^*	
1	$Exp(\lambda)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\Gamma(2, \lambda)$	$\frac{\lambda^2}{\Gamma(2)} x^{2-1} e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$
2	$\Gamma(\alpha, \lambda)$	$\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$	$\Gamma(\alpha + 1, \lambda)$	$\frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha + 1)} x^\alpha e^{-\lambda x}$	$\frac{\alpha}{\lambda}$
3	$Pareto(a, \theta)$	$\frac{a\theta^a}{x^{a+1}}$	$(a - 1)Pa(a - 2, \theta)$ $- (a - 2)Pa(a - 1, \theta)$	$(a - 1) \frac{(a - 2)\theta^{a-2}}{x^{a-1}}$ $- (a - 2) \frac{(a - 1)\theta^{a-1}}{x^a}$	$\frac{a\theta}{a - 1}$
4	$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ

1.4 Άνω και κάτω φράγματα διακύμανσης

Στην συγκεκριμένη ενότητα, παρουσιάζουμε ορισμένες ανισότητες, οι οποίες βρίσκονται στην εργασία των Papadatos και Papathanasiou, μεταξύ της τ.μ. X με την τ.μ. X^* χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwartz. Επίσης, αποδεικνύεται ότι αν Y είναι μία τ.μ. η οποία ικανοποιεί κάποιες ανισότητες σε σχέση με τη X τότε πρέπει να έχει την ίδια κατανομή με την X^* . Επιπλέον, παρέχονται ορισμένες εφαρμογές που επαληθεύουν τις σχέσεις των άνω και κάτω φραγμάτων της τ.μ. X^* με μία συνάρτηση g .

Πιο αναλυτικά, η ανισότητα του άνω φράγματος για την διακύμανση μίας συνάρτησης g για μία κανονική τ.μ. X σε όρους της g' είναι γνωστή ως *ανισότητα Chernoff* (βλέπε Chernoff (1981)). Τα άνω και τα κάτω φράγματα της $Var g[X]$ για μία αυθαίρετη τ.μ. X αποδείχτηκαν από τον Cacoullos (1982) και από τους Cacoullos και Papathanasiou (1985). Πιο συγκεκριμένα και τα άνω και τα κάτω φράγματα μπορούν να θεωρηθούν προϊόντα μίας ανισότητας Cauchy-Schwarz. Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη των φραγμάτων υπενθυμίζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwartz σε δύο εκδοχές που θα χρησιμοποιήσουμε.

Λήμμα 1.2 (Ανισότητα Cauchy-Schwartz)

- (i) Έστω $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\int_a^b |f(x)| dx < \infty$, $\int_a^b |g(x)| dx < \infty$, $\int_a^b g^2(x) dx < \infty$, $\int_a^b f^2(x) dx < \infty$. Τότε:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x) dx \right) \left(\int_a^b g^2(x) dx \right).$$

Η ισότητα στην παραπάνω ανισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε

$$g(x) = \lambda f(x),$$

για σχεδόν όλα τα $x \in [a, b]$.

- (ii) Έστω X, Y τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $E[|X|] < \infty, E[|Y|] < \infty, E[X^2] < \infty, E[Y^2] < \infty$. Τότε:

$$(Cov[X, Y])^2 \leq Var[X] Var[Y].$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν υπάρχουν σταθερές $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $Pr(X = \lambda_1 Y + \lambda_2) = 1$.

Το ακόλουθο λήμμα λοιπόν παρουσιάζει φράγματα της διασποράς της X σε όρους της τ.μ. X^* . Το αποτέλεσμα της (1.5) είναι μία ανισότητα τύπου Chernoff και όπως θα δούμε στο επόμενο λήμμα αποτελεί το άνω φράγμα. Αντίστοιχα, η (1.6) χαρακτηρίζει το κάτω φράγμα και γενικεύει το αποτέλεσμα που ελήφθη από τον Casouillos (1982) και τους Casouillos και Parathanasiou (1985) σε όρους μίας συνάρτησης w . Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε την εργασία των Papadatos και Parathanasiou (2001) παρουσιάζοντας ένα πιο αναλυτικό επιχειρήμα.

Λήμμα 1.3

Έχω X να είναι μία απόλυτα συνεχής τ.μ. με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 . Τότε για κάθε απόλυτα συνεχή συνάρτηση g με παράγωγο g' έχουμε τα ακόλουθα φράγματα:

i)
$$E[(g(X) - g(\mu))^2] \leq \sigma^2 E[(g'(X^*))^2] \quad (1.5)$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν είτε $E[g^2(X)] = \infty$ είτε

$$g(x) - g(\mu) = \begin{cases} \alpha_1(x - \mu) & \text{αν } x \leq \mu \\ \alpha_2(x - \mu) & \text{αν } x \geq \mu \end{cases}$$

για κάποιες σταθερές α_1, α_2 και για σχεδόν όλα τα $x \in S(X^*)$.

- ii) Αν $E|g'(X^*)| < \infty$ τότε

$$Var[g(X)] \geq \sigma^2 E[g'(X^*)] \quad (1.6)$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν $Pr[g(X) = aX + b] = 1$ για κάποιες σταθερές a και b .

Απόδειξη

- i) Έχω f μία σ.π.π. του X . Τότε, από το Θεώρημα Fubini, έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma^2 E[(g'(X^*))^2] &= \int_{-\infty}^{\mu} (g'(x))^2 \int_{-\infty}^x (\mu - t) f(t) dt dx \\ &+ \int_{\mu}^{\infty} (g'(x))^2 \int_x^{\infty} (t - \mu) f(t) dt dx \\ &= \int_{-\infty}^{\mu} f(t) (\mu - t) \int_t^{\mu} (g'(x))^2 dx dt \end{aligned}$$

$$+ \int_{\mu}^{\infty} f(t)(t - \mu) \int_{\mu}^t (g'(x))^2 dx dt.$$

Από το Λήμμα 1.2 (Ανισότητα Cauchy-Schwartz), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \left(\int_t^{\mu} g'(x) dx \right)^2 &\leq \int_t^{\mu} (g'(x))^2 dx \int_t^{\mu} 1 dx \\ &= (\mu - t) \int_t^{\mu} (g'(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στην ακόλουθη ανισότητα

$$(\mu - t) \int_t^{\mu} (g'(x))^2 dx \geq (g(\mu) - g(t))^2.$$

Πραγματοποιώντας το ίδιο επιχείρημα για το ολοκλήρωμα $(t - \mu) \int_{\mu}^t (g'(x))^2 dx$ και αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση, έχουμε

$$E[(g'(X^*))^2] \geq \int_{-\infty}^{\mu} f(t)(g(\mu) - g(t))^2 dt + \int_{\mu}^{\infty} f(t)(g(t) - g(\mu))^2 dt$$

που σημαίνει ότι

$$E[(g'(X^*))^2] \geq E[(g(X) - g(\mu))^2].$$

- ii) Από (1.4) και από την ανισότητα Cauchy-Schwartz για τυχαίες μεταβλητές έχουμε

$$\sigma^4 E^2[g'(X^*)] = \text{Cov}^2[X, g(X)] \leq \sigma^2 \text{Var}[g(X)].$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν ισχύει η ισότητα στην Cauchy-Schwartz και το ζητούμενο έπεται άμεσα από το Λήμμα 1.2. ■

Πόρισμα 1.1. Για κάθε απόλυτα συνεχή συνάρτηση g θα έχουμε

$$\text{Var}[g(X)] \leq \sigma^2 E[(g'(X^*))^2] \quad (1.7)$$

με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν είτε $E[g^2(X)] = \infty$ είτε η g να είναι γραμμική στην $S(X^*)$.

Απόδειξη

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Var}[g(X)] &= \text{Var}[g(X) - g(\mu)] \\ &\leq E[(g(X) - g(\mu))^2]. \end{aligned}$$

Έπεται από το Λήμμα 1.3(i) ότι

$$\text{Var}[g(X)] \leq \sigma^2 E[(g'(X^*))^2].$$

Η ισότητα θα ισχύει αν και μόνο αν ισχύει ισότητα στην (1.5) και το ζητούμενο έπεται από το Λήμμα 1.3. ■

Παρατήρηση 1.5.

- i. Αν $E[g^2(X)] = \infty$ η ισότητα της σχέσης (1.5) διατηρείται. Αλλιώς, έχουμε ισότητα στα σημεία όπου χρησιμοποιήσαμε την Cauchy-Schwartz.
- ii. Αν η $S(X)$ είναι κάποιο πεπερασμένο ή άπειρο διάστημα τότε τα γνωστά άνω και κάτω φράγματα για την διακύμανση της $g(X)$ προκύπτουν και από τα αποτελέσματα των Casoullou και Parathanasiou (1989, 1985) όπως παρακάτω

$$\sigma^2 E^2[w(X)g'(X)] \leq \text{Var}[g(X)] \leq \sigma^2 E[w(X)(g'(X))^2]$$

για μία μη αρνητική συνάρτηση w ορισμένη στο $S(X)$ (στην πραγματικότητα $w(x) = f^*(x)/f(x)$). Οι δύο ισότητες ισχύουν αν και μόνο αν η g είναι γραμμική στην $S(X)$ υπό την προϋπόθεση ότι

$$E[w(X)(g'(X))^2] < \infty.$$

Στην συνέχεια, το ακόλουθο θεώρημα δείχνει την ισοδυναμία μεταξύ των φραγμάτων διακύμανσης και της ταυτότητας διακύμανσης (βλέπε Papadatos και Parathanasiou (2001)).

Θεώρημα 1.1

Υποθέτουμε ότι για κάθε απόλυτα συνεχή τ.μ. X με πεπερασμένη διακύμανση σ^2 η τ.μ. Y ικανοποιεί ένα από τα παρακάτω.

- i) Για κάθε απόλυτα συνεχή συνάρτηση g με παράγωγο g' θα έχουμε

$$\text{Var}[g(X)] \leq \sigma^2 E[(g'(Y))^2]. \quad (1.8)$$
- ii) Για κάθε απόλυτα συνεχή συνάρτηση g με παράγωγο g' τέτοια ώστε $E|g'(Y)| < \infty$ θα έχουμε

$$\text{Var}[g(X)] \geq \sigma^2 E^2[g'(Y)]. \quad (1.9)$$

Τότε θα έχουμε $Y \stackrel{d}{=} X^*$.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η (1.8) ισχύει. Έστω $A = (-\infty, t]$ ένα κλειστό διάστημα και $H = 1_A$ η χαρακτηριστική συνάρτηση του A . Τότε, αν $h(x) = (x - t)1_A$, έχουμε ότι η h είναι απόλυτα συνεχής και $h' = H$ σχεδόν παντού. Ορίζουμε τη συνάρτηση $g(x) = x + \lambda h(x)$ που λ είναι μία αυθαίρετη σταθερά η οποία είναι απόλυτα συνεχής με παράγωγο $g'(x) = 1 + \lambda h'(x)$ σχεδόν παντού. Επίσης, έχουμε $\text{Var}[g(X)] < \infty$ και $\text{Var}[(h'(X))^2] < \infty$. Από την (1.8) έχουμε

$$\begin{aligned} \text{Var}[g(X)] &= \sigma^2 + \lambda^2 \text{Var}[h(X)] + 2\lambda \text{Cov}[X, h(X)] \\ &\leq \sigma^2 E[(g'(Y))^2] \\ &= \sigma^2(1 + \lambda^2 E[(h'(Y))^2] + 2\lambda E[h'(Y)]). \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $\delta = \sigma^2 E[h'(Y)] - \text{Cov}[X, h(X)]$ και $\theta = \sigma^2 E[(h'(Y))^2] - \text{Var}[h(X)]$, έχουμε πάλι από την (1.8) ότι $\theta \geq 0$ και από την παραπάνω σχέση προκύπτει

$\lambda^2 \theta + 2\lambda \delta \geq 0$. Αφού το λ είναι ένας οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι πρέπει $\delta = 0$. Πράγματι, αν $\theta = 0$, έχουμε $2\lambda \delta \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και άρα πρέπει $\delta = 0$. Αν $\theta > 0$, και υποθέσουμε ότι $\delta \neq 0$, τότε θέτουμε $\lambda = -\frac{\delta}{\theta} < 0$, και τότε πρέπει

$$0 \leq \lambda(\lambda\theta + 2\delta) = \lambda(-\delta + 2\delta) = -\frac{\delta^2}{\theta} < 0,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, προκύπτει ότι $\delta = 0$ και άρα από τη σχέση (1.4) συμπεραίνουμε

$$\begin{aligned} E[h'(Y)] &= E[h'(X^*)] \\ E[H(Y)] &= E[H(X^*)] \\ E[1_A(Y)] &= E[1_A(X^*)] \\ P(Y \leq t) &= P(X^* \leq t) \end{aligned}$$

και άρα $Y \stackrel{d}{=} X^*$.

Με παρόμοιο επιχείρημα αποδεικνύεται το (ii). ■

Η σχέση του Θεωρήματος 1.1 για την τ.μ. X^* μπορεί να γραφτεί εναλλακτικά και ως

$$\sigma^2 E^2[g'(X^*)] \leq \text{Var}[g(X)] \leq \sigma^2 E[(g'(X^*))^2].$$

Στην συνέχεια, δίνονται μερικές εφαρμογές στις οποίες γνωρίζουμε την συνάρτηση της g και την κατανομή της τ.μ. X και μέσω αυτών επαληθεύονται τα παραπάνω άνω και κάτω φράγματα.

Εφαρμογή 1.5

Έστω $g(x) = x^2$, και η τ.μ. $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ με $E(X) = \frac{1}{\lambda}$, $E(X^n) = \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^n}$ και $\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. Τότε, έχουμε την $g'(x) = 2x$. Επίσης, από τις προηγούμενες εφαρμογές ξέρουμε ότι η τ.μ. $X^* \sim \Gamma(2, \lambda)$ με $E(X^n) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\lambda^n}$. Η διαδικασία που εφαρμόζουμε είναι να λύσουμε κάθε ένα από τα παραπάνω μέρη της ανίσωσης ξεχωριστά. Επομένως, για το κάτω φράγμα προκύπτει

$$\begin{aligned}
 E^2[g'(X^*)] &= E^2[2X^*] = 4E^2[X^*] \\
 &= 4 \cdot \frac{2^2}{\lambda^2} = \frac{16}{\lambda^2}.
 \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, για το άνω φράγμα έχουμε

$$\begin{aligned}
 E[(g'(X^*))^2] &= E[(2X^*)^2] = 4E[(X^*)^2] \\
 &= 4 \cdot \frac{\Gamma(2+2)}{\Gamma(2)\lambda^2} = 4 \cdot \frac{3!}{1!\lambda^2} \\
 &= \frac{24}{\lambda^2}.
 \end{aligned}$$

Τώρα, υπολογίζουμε την διακύμανση της g δηλαδή την $Var[g(X)] = Var[X^2]$.

Για να λύσουμε την παραπάνω σχέση, χρησιμοποιούμε μία γνωστή σχέση της διακύμανσης που είναι η

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X].$$

Επομένως, προκύπτει ότι

$$Var[g(X)] = Var[X^2] = E[X^4] - E^2[X^2].$$

Τώρα, λύνουμε ξεχωριστά την κάθε σχέση.

$$\begin{aligned}
 E[X^4] &= \frac{\Gamma(4+1)}{\lambda^4} = \frac{\Gamma(5)}{\lambda^4} = \frac{4!}{\lambda^4} = \frac{24}{\lambda^4} \\
 E[X^2] &= \frac{\Gamma(2+1)}{\lambda^2} = \frac{\Gamma(3)}{\lambda^2} = \frac{2!}{\lambda^2} = \frac{2}{\lambda^2} \\
 E^2[X^2] &= \frac{4}{\lambda^4}
 \end{aligned}$$

Η $Var[g(X)]$ παίρνει την μορφή

$$Var[g(X)] = E[X^4] - E^2[X^2] = \frac{24}{\lambda^4} - \frac{4}{\lambda^4} = \frac{20}{\lambda^4}.$$

Συνεπώς, για να αποδείξουμε την παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$\sigma^2 E^2[g'(X^*)] \leq Var[g(X)] \leq \sigma^2 E[(g'(X^*))^2]$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{16}{\lambda^2} \leq \frac{20}{\lambda^4} \leq \frac{1}{\lambda^2} \cdot \frac{24}{\lambda^2}$$

$$16 \leq 20 \leq 24,$$

το οποίο είναι προφανώς αληθές.

Εφαρμογή 1.6

Έστω $g(x) = x^2$, και η τ.μ. $X \sim \Gamma(a, \lambda)$ με $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}$, $E(X^n) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)\lambda^n}$ και $Var(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$. Τότε, έχουμε την $g'(x) = 2x$. Επίσης, γνωρίζουμε από την Εφαρμογή 1.2 ότι $X^* \sim \Gamma(a+1, \lambda)$. Η διαδικασία που εφαρμόζουμε είναι να λύσουμε κάθε ένα από τα παραπάνω μέρη της ανίσωσης ξεχωριστά. Για το κάτω φράγμα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E^2[g'(X^*)] &= E^2[2X^*] = 4E^2[X^*] \\ &= 4 \frac{(a+1)^2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

και αντίστοιχα για το άνω φράγμα έχουμε

$$\begin{aligned} E[(g'(X^*))^2] &= E[(2X^*)^2] = 4E[(X^*)^2] \\ &= 4 \frac{\Gamma(a+2+1)}{\Gamma(a+1)\lambda^2} \\ &= \frac{4(a+2)!}{a! \lambda^2} \\ &= \frac{4a!(a+1)(a+2)}{a! \lambda^2} \\ &= \frac{4(a+1)(a+2)}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

Η διακύμανση της $g(X)$ είναι

$$Var[g(X)] = Var[X^2] = E[X^4] - E^2[X^2].$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε τις ροπές $E[X^4]$ και $E[X^2]$. Έχουμε,

$$\begin{aligned} E[X^4] &= \frac{\Gamma(a+4)}{\Gamma(a)\lambda^4} = \frac{(a+3)!}{(a-1)! \lambda^4} \\ &= \frac{(a-1)! a(a+1)(a+2)(a+3)}{(a-1)! \lambda^4} \\ &= \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{\lambda^4} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \frac{\Gamma(a+2)}{\Gamma(a)\lambda^2} = \frac{(a+1)!}{(a-1)! \lambda^2} \\ &= \frac{(a-1)! a(a+1)}{(a-1)! \lambda^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a(a+1)}{\lambda^2} \\
&= \frac{a^2(a+1)^2}{\lambda^4}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\text{Var}[g(X)] &= E[X^4] - E^2[X^2] \\
&= \frac{a(a+1)(a+2)(a+3)}{\lambda^4} - \frac{a^2(a+1)^2}{\lambda^4} \\
&= \frac{a(a+1)[(a+2)(a+3) - a(a+1)]}{\lambda^4} \\
&= \frac{a(a+1)[a^2 + 3a + 2a + 6 - a^2 - a]}{\lambda^4} \\
&= \frac{a(a+1)[4a + 6]}{\lambda^4} \\
&= \frac{2a(a+1)(2a+3)}{\lambda^4}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, για να αποδείξουμε την παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}
\sigma^2 E^2[g'(X^*)] &\leq \text{Var}[g(X)] \leq \sigma^2 E[(g'(X^*))^2] \\
\frac{a}{\lambda^2} \cdot \frac{(a+1)^2}{\lambda^2} &\leq \frac{2a(a+1)(2a+3)}{\lambda^4} \leq \frac{a}{\lambda^2} \cdot \frac{4(a+1)(a+2)}{\lambda^2} \\
4(a+1) &\leq 2(2a+3) \leq 4(a+2) \\
4a+4 &\leq 4a+6 \leq 4a+8.
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι αφού καταλήξαμε σε κάτι που ισχύει δικαιολογούμε την παραπάνω ανισότητα.

Εφαρμογή 1.7

Έστω $g(x) = x^2$, και η τ.μ. $X \sim \text{Pareto}(a, \theta)$ με $E(X) = \frac{a\theta}{a-1}$, $E(X^n) = \frac{a\theta^n}{a-n}$ και $\text{Var}(X) = \frac{a\theta^2}{(a-1)^2(a-2)}$. Τότε, έχουμε την $g'(x) = 2x$. Επίσης, από την Εφαρμογή 1.3 γνωρίζουμε ότι η τ.μ. $X^* \sim (a-1)\text{Pa}(a-2, \theta) - (a-2)\text{Pa}(a-1, \theta)$. Τώρα, καλούμαστε να λύσουμε κάθε ένα από τα παραπάνω μέρη της ανίσωσης ξεχωριστά. Για το κάτω φράγμα ισχύει

$$\begin{aligned}
E^2[g'(X^*)] &= E^2[2X^*] = 4E^2[X^*] \\
&= 4[(a-1) \frac{(a-2)\theta}{a-2-1} - (a-2) \frac{(a-1)\theta}{a-1-1}]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4[(a-1) \frac{(a-2)\theta}{a-3} - \frac{(a-2)(a-1)\theta}{a-2}] \\
&= 4(a-1)^2(a-2)^2 \left[\frac{\theta}{a-3} - \frac{\theta}{a-2} \right]^2 \\
&= 4(a-1)^2(a-2)^2 \left[\frac{a\theta - 2\theta - a\theta + 3\theta}{(a-3)(a-2)} \right]^2 \\
&= \frac{4(a-1)^2\theta^2}{(a-3)^2}.
\end{aligned}$$

Για το άνω φράγμα έχουμε

$$\begin{aligned}
E[(g'(X^*))^2] &= E[(2X^*)^2] = 4E[(X^*)^2] \\
&= 4 \left[(a-1) \frac{(a-2)\theta^2}{a-2-2} - (a-2) \frac{(a-1)\theta^2}{a-1-2} \right] \\
&= 4(a-1)(a-2) \left[\frac{\theta^2}{a-4} - \frac{\theta^2}{a-3} \right] \\
&= 4(a-1)(a-2) \left[\frac{a\theta^2 - 3\theta^2 - a\theta^2 + 4\theta^2}{(a-4)(a-3)} \right] \\
&= \frac{4(a-1)(a-2)\theta^2}{(a-4)(a-3)}.
\end{aligned}$$

Στην συνέχεια, υπολογίζουμε την διακύμανση της $g(X)$.

$$Var[g(X)] = Var[X^2] = E[X^4] - E^2[X^2]$$

Τώρα, λύνουμε αντίστοιχα την κάθε σχέση.

$$\begin{aligned}
E[X^4] &= \frac{a\theta^4}{a-4} \\
E[X^2] &= \frac{a\theta^2}{a-2} \\
E^2[X^2] &= \frac{a^2\theta^4}{(a-2)^2}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω σχέσεις στην $Var[g(X)]$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
Var[g(X)] &= E[X^4] - E^2[X^2] = \frac{a\theta^4}{a-4} - \frac{a^2\theta^4}{(a-2)^2} \\
&= a\theta^4 \left[\frac{1}{a-4} - \frac{a}{(a-2)^2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a\theta^4 \left[\frac{(a-2)^2 - a(a-4)}{(a-4)(a-2)^2} \right] \\
&= a\theta^4 \left[\frac{a^2 - 4a + 4 - a^2 + 4a}{(a-4)(a-2)^2} \right] \\
&= \frac{4a\theta^4}{(a-4)(a-2)^2}.
\end{aligned}$$

Άρα, για να αποδείξουμε την παραπάνω ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}
&\sigma^2 E^2[g'(X^*)] \leq \text{Var}[g(X)] \leq \sigma^2 E[(g'(X^*))^2] \\
&\frac{a\theta^2}{(a-1)^2(a-2)} \cdot \frac{4(a-1)^2\theta^2}{(a-3)^2} \leq \frac{4a\theta^4}{(a-4)(a-2)^2} \leq \frac{a\theta^2}{(a-1)^2(a-2)} \cdot \frac{4(a-1)(a-2)\theta^2}{(a-4)(a-3)} \\
&\frac{1}{(a-2)(a-3)^2} \leq \frac{1}{(a-4)(a-2)^2} \leq \frac{1}{(a-1)(a-4)(a-3)}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για $a > 4$. Επομένως, επαληθεύεται το γεγονός ότι ισχύει η ανισότητα.

Κεφάλαιο 2

Εφαρμογές της ταυτότητας Stein στην οικογένεια Pearson, την καμπύλη Lorenz και τον δείκτη Gini

2.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε μία άλλη γενίκευση της ταυτότητας Stein που εφαρμόζεται σε γενικευμένες κλάσεις κατανομών. Πιο συγκεκριμένα, αναφερόμαστε σε αποτελέσματα από την εργασία του Kattumannil (2009). Είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι όπως θα αποδείξουμε παρακάτω, ταυτότητα που θα παρουσιάσουμε επεκτείνει την ταυτότητα που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Παράλληλα, εξάγουμε ορισμένα αποτελέσματα σαν ειδικές περιπτώσεις της γενικευμένης αυτής ταυτότητας και παρέχουμε κάποιες εφαρμογές. Αρχικά, υπενθυμίζουμε την ακόλουθη σχέση που αναφέρθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο (βλέπε Πρόταση 1.1) και αφορά μία διαφορίσιμη συνάρτηση c και μία τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή.

Σημειώνεται ότι στο υπόλοιπο του κεφαλαίου θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό από την εργασία του Kattumannil (2009).

Έστω X μία τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 . Έχω c μία διαφορίσιμη συνάρτηση με παράγωγο $c'(x)$. Τότε, ο Stein (1973) έδειξε ότι

$$E[c(X)(X - \mu)] = \sigma^2 E[c'(X)].$$

Αυτή η σχέση έγινε γνωστή ως ταυτότητα του Stein. Ο Hudson (1978) επέκτεινε την ταυτότητα του Stein στην Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (ΕΟΚ) και την χρησιμοποίησε σε πολυμεταβλητές εκτιμήσεις.

Στο συγκεκριμένο σημείο, αξίζει να τονιστεί ότι στο προηγούμενο κεφάλαιο για μία τ.μ. που ακολουθεί την κανονική κατανομή και για μία συνάρτηση $c(x)$ που $E|c'(X)| < \infty$ σύμφωνα με την σχέση (1.1) μπορούμε να γράψουμε ότι

$$Cov[X, c(X)] = \sigma^2 E[c'(X)].$$

Συνεπώς, κάνοντας μία σύγκριση με την πρώτη σχέση αυτού του κεφαλαίου προκύπτει ότι

$$E[c(X)(X - \mu)] = Cov[X, c(X)].$$

Στην συνέχεια, λαμβάνοντας υπόψη το αυξανόμενο ενδιαφέρον για τις ταυτότητες τύπου Stein και τις εφαρμογές τους παρουσιάζεται μία γενίκευση αυτής της ταυτότητας σε πολλές γνωστές συνεχείς κατανομές περιλαμβάνοντας και άλλες γνωστές οικογένειες κατανομών. Επίσης, γίνονται αναφορές και σε κάποιες εφαρμογές στην ανάλυση εισοδήματος χρησιμοποιώντας την καμπύλη Lorenz και τον δείκτη Gini.

Συνεπώς, στο υπόλοιπο μέρος του κεφαλαίου αναλύονται τρεις ενότητες. Στην Ενότητα 2.2, παρουσιάζεται και αποδεικνύεται η γενίκευση της ταυτότητας του Stein, όπως δίνεται στην εργασία του Kattumannil. Στην συνέχεια, στην Ενότητα 2.3, χρησιμοποιείται η γενικευμένη μορφή της ταυτότητας για κατανομές που ανήκουν στην οικογένεια της Pearson, της γενικευμένης Pearson και της ΕΟΚ. Τέλος, στην Ενότητα 2.4 επισημαίνονται κάποιοι ορισμοί της καμπύλης Lorenz και του δείκτη Gini και περιλαμβάνονται κάποιες εφαρμογές σε κατανομές.

2.2 Μια διαφορετική ταυτότητα Stein

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζεται μία διαφορετική μορφή της ταυτότητας του Stein, όπως αποδείχτηκε από τον Kattumannil (2009), η οποία βασίζεται σε μία σχέση μεταξύ δύο συναρτήσεων f και g και των παραγώγων τους. Επίσης, χρησιμοποιώντας την γενικευμένη μορφή της ταυτότητας αποδεικνύουμε με εύκολο τρόπο την ταυτότητα που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, από την εργασία των Papadatos και Papathanasiou

(2001). Ακολούθως, αναλύεται και ένα παράδειγμα που αφορά την ΕΟΚ και επισυνάπτεται μία παρατήρηση για την κατανομή Βήτα.

Παρακάτω, παρουσιάζεται και αποδεικνύεται η γενικευμένη μορφή της ταυτότητας του Stein, όπως αποδείχτηκε από τον Kattumanil (2009).

Θεώρημα 2.1. Έστω μία τ.μ. X με σ.π.π. f που ορίζεται στο διάστημα (a, b) , $a = \inf\{x: F(x) > 0\}$ και $b = \sup\{x: F(x) < 1\}$ όπου F είναι η συνάρτηση κατανομής. Επίσης, έστω μία συνάρτηση h με $E[h^2(X)] < \infty$ και $E[h(X)] = \mu$. Έστω f η σ.π.π. της X με παράγωγο f' και έστω μία συνάρτηση g έτσι ώστε

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)} + \frac{\mu - h(x)}{g(x)}, \quad \forall x. \quad (2.1)$$

Τότε για κάθε συνάρτηση c για την οποία ισχύει $E|c'(X)g(X)| < \infty$ θα ισχύει

$$E[c(X)(h(X) - \mu)] = E[c'(X)g(X)] \quad (2.2)$$

αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow b} g(x)f(x) = 0$.

Απόδειξη

Η σχέση (2.1) μπορεί εναλλακτικά να γραφτεί και ως

$$g(x)f'(x) = -g'(x)f(x) + (\mu - h(x))f(x).$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας παραγοντική ολοκλήρωση έχουμε:

$$E[c(X)(h(X) - \mu)] = \int_a^b c(x)(h(x) - \mu)f(x)dx.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} c(a) \int_a^b (h(x) - \mu)f(x)dx &= c(a)E[h(X) - \mu] \\ &= c(a)(\mu - \mu) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini, έχουμε

$$\begin{aligned} E[c(X)(h(X) - \mu)] &= \int_a^b c(x)(h(x) - \mu)f(x)dx - c(a) \int_a^b (h(x) - \mu)f(x)dx \\ &= \int_a^b (c(x) - c(a))(h(x) - \mu)f(x)dx \\ &= \int_a^b (h(x) - \mu)f(x) \int_a^x c'(t)dt dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b c'(t) \int_t^b (h(x) - \mu) f(x) dx dt \\
&= \int_a^b c'(t) \int_t^b (-g(x) f'(x) - g'(x) f(x)) dx dt \\
&= - \int_a^b c'(t) \int_t^b (f(x) g(x))' dx dt
\end{aligned}$$

Αφού ισχύει $\lim_{t \rightarrow b} g(t) f(t) = 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}
E[c(X)(h(X) - \mu)] &= \int_a^b c'(t) g(t) f(t) dt \\
&= E[c'(X) g(X)].
\end{aligned}$$

■

Παρατήρηση 2.1. Για μία δοθείσα $h(x)$ η συνάρτηση $g(x)$ χαρακτηρίζει με μοναδικό τρόπο την κατανομή της τ.μ. X . Έτσι, για $h(x) = x$ η τ.μ. X έχει την κατανομή Βήτα με παραμέτρους a και β αν και μόνο αν

$$g(x) = \frac{x(1-x)}{a+\beta}.$$

Στην συνέχεια, ακολουθεί ένα παράδειγμα στο οποίο αναλύουμε την σχέση (2.2) για τις κατανομές που ανήκουν στην ΕΟΚ.

Παράδειγμα 2.1

Υποθέτουμε ότι η κατανομή της τ.μ. X ανήκει στην ΕΟΚ με σ.π.π.

$$f(x) = \exp\{\theta x - \varphi(\theta)\} k(x), \quad -\infty \leq x \leq \infty, \theta \in \mathbb{R},$$

που φ και k δύο κατάλληλες συναρτήσεις.

Για $t(x) = -\frac{k'(x)}{k(x)}$ έχουμε

$$E[c(X)(t(X) - \theta)] = E[c'(X)], \quad \forall \theta. \quad (2.3)$$

Για να αποδείξουμε την σχέση (2.3) έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \frac{\theta \exp\{\theta x - \varphi(\theta)\} k(x) + k'(x) \exp\{\theta x - \varphi(\theta)\}}{\exp\{\theta x - \varphi(\theta)\} k(x)} \\
&= \theta + \frac{k'(x)}{k(x)}.
\end{aligned}$$

Στην συνέχεια, ορίζουμε

$$t(x) = -\frac{k'(x)}{k(x)} \text{ και } h(x) = t(x) - \theta + \mu \text{ οπότε συμπεραίνουμε ότι}$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \mu - h(x),$$

Που είναι η σχέση (2.1) για $g(x) = 1$.

Από το Θεώρημα 2.1, έπεται ότι

$$E[c(X)(t(X) - \theta)] = E[c'(X)].$$

■

2.3 Ορισμός οικογένειας Pearson και εφαρμογές σε συνεχείς κατανομές

Σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζονται κάποιες σχέσεις που συνδέουν την κατανομή μίας τ.μ. X με την οικογένεια Pearson ή την γενικευμένη οικογένεια Pearson. Οι οικογένειες αυτές περιλαμβάνουν πολλές γνωστές κατανομές όπως η αντίστροφη Γκαουσιανή, η Maxwell και η κατανομή Rayleigh. Στην συνέχεια, παρέχονται παραδείγματα εφαρμογών στις προαναφερθείσες κατανομές.

Παράδειγμα 2.2

Έστω X μία τ.μ. με σ.π.π. f . Η κατανομή της τ.μ. X ανήκει στην οικογένεια Pearson αν

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{-(x+d)}{a_0 + a_1x + a_2x^2}, \quad -\infty \leq x \leq \infty, d, a_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.4)$$

Τότε

$$E[c(X)(X - \mu)] = E[c'(X)(b_0 + b_1X + b_2X^2)] \quad (2.5)$$

με $b_i = \frac{a_i}{1-2a_2}$, $a_2 \neq \frac{1}{2}$, $i = 0, 1, 2$.

Για να ισχύει η σχέση (2.5) ανακαλούμε από τους Nair και Sankaran (1991) ότι η τ.μ. X ανήκει στην οικογένεια Pearson αν και μόνο αν

$$E(X|X > t) = \mu + (b_0 + b_1t + b_2t^2)k(t), \quad \forall t$$

που $k(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$. Η παραπάνω ταυτότητα γράφεται και ως

$$\int_t^\infty (x - \mu)f(x)dx = (b_0 + b_1t + b_2t^2)f(t), \quad \forall t.$$

Πράγματι, έχουμε

$$E(X|X > t) = \mu + (b_0 + b_1t + b_2t^2)k(t)$$

$$\frac{\int_t^\infty xf(x)dx}{\bar{F}(t)} = \mu + (b_0 + b_1t + b_2t^2)\frac{f(t)}{\bar{F}(t)}$$

$$\int_t^{\infty} xf(x)dx - \mu \bar{F}(t) = (b_0 + b_1t + b_2t^2)f(t)$$

$$\int_t^{\infty} xf(x)dx - \mu \int_t^{\infty} f(x)dx = (b_0 + b_1t + b_2t^2)f(t)$$

$$\int_t^{\infty} (x - \mu)f(x)dx = (b_0 + b_1t + b_2t^2)f(t).$$

Θέτοντας $g(t) = b_0 + b_1t + b_2t^2$ και παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση, έχουμε

$$-(t - \mu)f(t) = f'(t)g(t) + g'(t)f(t)$$

Επομένως, επιλέγοντας $h(t) = t$ από το Θεώρημα (2.1) έχουμε

$$E[c(X)(X - \mu)] = E[c'(X)(b_0 + b_1X + b_2X^2)].$$

Παρατήρηση 2.2. Η κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 ανήκει στην οικογένεια Pearson με $a_0 = \sigma^2$ και $a_1 = a_2 = 0$. Ως εκ τούτου, η σχέση (2.5) μπορεί να πάρει την μορφή της γνωστής ταυτότητας του Stein δηλαδή την

$$E[c(X)(X - \mu)] = \sigma^2 E[c'(X)].$$

Ο Sindu (2003), σε μία προσπάθεια να επεκτείνει το πεδίο εφαρμογών του Θεωρήματος (2.1) αντικατέστησε τον γραμμικό όρο της σχέσης (2.4) χρησιμοποιώντας την τετραγωνική σχέση έτσι ώστε να αποκτήσει την μορφή

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{b_0 + b_1x + b_2x^2}{a_0 + a_1x + a_2x^2}, \quad a_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad i = 0, 1, 2. \quad (2.6)$$

Εκτός από τα μέλη που ανήκουν στην οικογένεια Pearson, αυτή η επέκταση του συστήματος Pearson περιλαμβάνει και νέα μέλη όπως η αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή, η Maxwell και οι κατανομές Rayleigh. Το επόμενο παράδειγμα αφορά αυτήν την γενικευμένη οικογένεια Pearson.

Παράδειγμα 2.3

Έχουμε την τ.μ. X να ανήκει στην γενικευμένη οικογένεια Pearson σύμφωνα με την σχέση (2.6). Τότε, ισχύει

$$E[c(X)(pX^2 + qX + r)] = -E[c'(X)(a_2X^2 + a_1X + a_0)] \quad (2.7)$$

με $p = b_2$, $q = b_1 + 2a_2$ και $r = b_0 + a_1$.

Η γενικευμένη οικογένεια Pearson χαρακτηρίζεται από

$$E[(b_2X^2 + (b_1 + 2a_2)X + b_0 + a_1 + \mu) | X > t] = \mu - (a_2t^2 + a_1t + a_0)k(t).$$

Όπως και στην περίπτωση της οικογένειας Pearson, αυτό μπορεί να γραφτεί και ως

$$\int_t^{\infty} (b_2x^2 + (b_1 + 2a_2)x + b_0 + a_1)f(x)dx = -(a_2t^2 + a_1t + a_0)f(t), \quad \forall t.$$

Τώρα, θέτουμε $p = b_2, q = b_1 + 2a_2, r = b_0 + a_1$ και ορίζουμε $h(x) = px^2 + qx + r + \mu$ και $g(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Τότε, έχουμε

$$\int_t^{\infty} (h(x) - \mu)f(x)dx = -g(t)f(t), \quad \forall t.$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα (2.1), το ζητούμενο έπεται.

Στο επόμενο παράδειγμα παρουσιάζονται κάποια αποτελέσματα εφαρμογής των σχέσεων (2.6) και (2.7) στην κατανομή Rayleigh.

Παράδειγμα 2.4. Σαν ειδική περίπτωση χρησιμοποιούμε την κατανομή Rayleigh με σ.π.π. $f(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}$, $x > 0$, $\lambda > 0$ που ανήκει στην οικογένεια της σχέσης (2.6). Τότε, όταν $h(x) = 2\lambda x^2 + 2 + \mu$ έχουμε ότι $g(x) = -x$. Άρα η σχέση (2.7) μπορεί να πάρει την μορφή

$$2E[c(X)(1 - \lambda X^2)] = E[Xc'(X)], \quad \forall \lambda > 0.$$

Έχω $f(x) = 2\lambda x e^{-\lambda x^2}$, $x > 0$, $\lambda > 0$. Επομένως, παραγωγίζουμε την f και γράφουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\lambda e^{-\lambda x^2} + 2\lambda x(-2\lambda x)e^{-\lambda x^2} \\ &= 2\lambda e^{-\lambda x^2} - 4\lambda^2 x^2 e^{-\lambda x^2} \\ &= 2\lambda e^{-\lambda x^2}(1 - 2\lambda x^2). \end{aligned}$$

Διαιρώντας την f' με την f (το πηλίκο αυτό ονομάζεται score function) έχουμε

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2\lambda e^{-\lambda x^2}(1 - 2\lambda x^2)}{2\lambda x e^{-\lambda x^2}} = \frac{1 - 2\lambda x^2}{x}.$$

Από την σχέση (2.9) έχουμε ότι $b_0 = 1, b_1 = 0$ και $b_2 = -2\lambda$. Επίσης, από την σχέση (2.6) βρίσκουμε ότι $a_0 = 0, a_1 = 1$ και $a_2 = 0$. Συνεπώς, από την σχέση (2.7) μπορούμε να υπολογίσουμε τις σχέσεις για το p, q και r . Δηλαδή, ισχύει

$$\begin{aligned} p &= b_2 = -2\lambda \\ q &= b_1 + 2a_2 = 0 \\ r &= b_0 + a_1. \end{aligned}$$

Λύνοντας την σχέση (2.7) προκύπτει

$$E[c(X)(pX^2 + qX + r)] = -E[c'(x)(a_2X^2 + a_1X + a_0)]$$

$$E[c(X)(-2\lambda X^2 + 0X + 2)] = -E[c'(x)(0X^2 + X + 0)]$$

$$2E[c(X)(1 - \lambda X^2)] = E[Xc'(X)], \quad \forall \lambda > 0.$$

■

Τώρα παραθέτουμε τα αντίστοιχα αποτελέσματα χρήσης των σχέσεων (2.6) και (2.7) στην αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή.

Παράδειγμα 2.5. Για την αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή με σ.π.π. $f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}}$, $x > 0, a, \lambda > 0$ έχουμε $g(x) = -2a^2x^2$ όταν $h(x) = -\lambda x^2 + a^2x + \lambda a^2 + \mu$. Σύμφωνα με την σχέση (2.1) καταλήγουμε ότι

$$E[c(X)(\lambda a^2 + a^2X - \lambda X^2)] = 2a^2E[X^2c'(X)], \quad \forall a, \lambda > 0.$$

Απόδειξη

Έχουμε την σ.π.π. $f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}}$, $x > 0, a, \lambda > 0$. Παραγωγίζοντας αυτήν την σχέση προκύπτει

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]' e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} + \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \left[e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \right]' \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)' e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} + \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \left(-\frac{\lambda(x-a)}{xa^2} \right)' \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{2\lambda\pi 3x^2}{(2\pi x^3)^2} \right] e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \\ &\quad + \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \left[\frac{-\lambda 2(x-a)(x-a)' 2xa^2 + \lambda(x-a)^2 2a^2}{(2xa^2)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{6\lambda\pi x^2}{4\pi^2 x^6} \right] e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \\ &\quad + \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \frac{(x-a)[-2\lambda 2xa^2 + \lambda(x-a)2a^2]}{4x^2a^4} \\ &= \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \left[\frac{1}{2} \frac{2\pi x^3}{\lambda} \left(-\frac{3\lambda}{2\pi x^4} \right) + \left(\frac{(x-a)(-2\lambda xa^2 - 2\lambda a^3)}{4x^2a^4} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \left[-\frac{3}{2x} + \frac{(x-a)(-2\lambda a^2)(x+a)}{4x^2 a^4}\right] \\
&= \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \left[-\frac{3}{2x} - \frac{\lambda(x^2 - a^2)}{2x^2 a^2}\right].
\end{aligned}$$

Άρα γράφουμε

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x)}{f(x)} &= -\frac{3}{2x} - \frac{\lambda(x^2 - a^2)}{2x^2 a^2} \\
&= \frac{-3xa^2 - \lambda x^2 + \lambda a^2}{2x^2 a^2}.
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με την σχέση (2.6) προκύπτουν τα $b_0 = \lambda a^2$, $b_1 = -3a^2$, $b_2 = -\lambda$, $a_0 = 0$, $a_1 = 0$ και $a_2 = 2a^2$. Από την σχέση (2.7) βρίσκουμε τα p , q και r . Αυτά είναι

$$\begin{aligned}
p &= b_2 = -\lambda \\
q &= b_1 + 2a_2 = -3a^2 + 2 \cdot 2a^2 = a^2 \\
r &= b_0 + a_1 = \lambda a^2.
\end{aligned}$$

Επομένως από την σχέση (2.7) έχουμε

$$\begin{aligned}
E[c(X)(pX^2 + qX + r)] &= -E[c'(X)(a_2X^2 + a_1X + a_0)] \\
E[c(X)(-\lambda X^2 + a^2X + \lambda a^2)] &= -E[c'(X)(2a^2X^2)].
\end{aligned}$$

Από την σχέση (2.2) βρίσκουμε ότι $h(x) = -\lambda x^2 + a^2x + \lambda a^2 + \mu$ και $g(x) = 2a^2x^2$. Συνεπώς ισχύει ότι

$$E[c(X)(\lambda a^2 + a^2X - \lambda X^2)] = 2a^2E[X^2c'(X)], \quad \forall a, \lambda > 0.$$

■

Μέχρι στιγμής, έχουμε εφαρμόσει το Θεώρημα 2.1 σε κάποιες οικογένειες κατανομών που περιέχουν πολλές συνεχείς κατανομές με κοινή χρήση. Όμως υπάρχουν κάποιες άλλες σημαντικές κατανομές όπως η Weibull και η Burr που δεν ανήκουν σε αυτές τις οικογένειες αλλά παρουσιάζουν μία ποικιλία εφαρμογών. Η δομή του Θεωρήματος (2.1) μας επιτρέπει να τις συμπεριλάβουμε σε αυτό με την κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης h που δίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.6

Για την κατανομή Weibull με σ.π.π. $f(x) = \frac{\tau}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\tau-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\tau}$, $x > 0, \tau, \theta > 0$ θα έχουμε $h(x) = x^\tau + \mu - \theta^\tau$ και $g(x) = \theta^\tau \frac{x}{\tau}$. Επομένως, η σχέση (2.2) παίρνει την μορφή

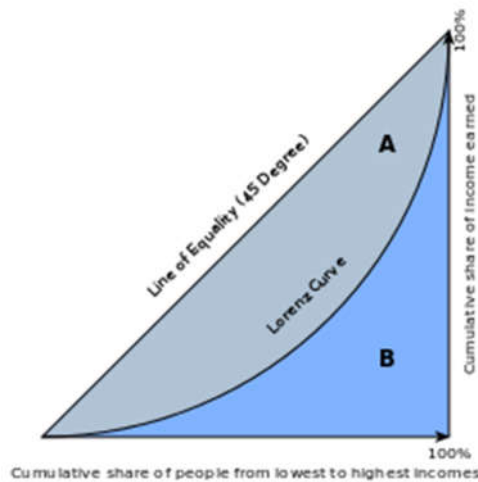
$$E[c(X)(X^\tau - \theta^\tau)] = \frac{\theta^\tau}{\tau} E[Xc'(X)], \quad \forall \tau, \theta > 0.$$

2.4 Καμπύλη Lorenz και δείκτης Gini

Σε αυτήν την ενότητα, παρουσιάζονται κάποιοι ορισμοί της καμπύλης Lorenz και του δείκτη Gini με την χρήση δεσμευμένων μέσω των τιμών. Στην συνέχεια, δίνεται ένα θεώρημα που παραθέτει μία εναλλακτική μορφή των παραπάνω σχέσεων που ισχύει για δύο συναρτήσεις f και g . Επιπλέον, γίνονται κάποια παραδείγματα εύρεσης του δείκτη Gini σε ορισμένες συνεχείς κατανομές. Τέλος, επισημαίνονται ορισμένες παρατηρήσεις που συνδέουν τον δείκτη Gini με ορισμένες ταυτότητες συνδιακύμανσης.

Αρχικά, πριν προβούμε στις μαθηματικές σχέσεις της καμπύλης Lorenz, δίνουμε μία ερμηνεία του δείκτη Gini και κάποιες συνοπτικές πληροφορίες από τον σύνδεσμο https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_curve. Στα οικονομικά η καμπύλη Lorenz είναι μία γραφική αναπαράσταση της κατανομής του εισοδήματος ή του πλούτου. Αναπτύχθηκε από τον Max O. Lorenz (1905) για την αντιπροσώπευση της ανισότητας στην κατανομή του πλούτου.

Η καμπύλη Lorenz είναι ένα γράφημα που δείχνει την αναλογία του συνολικού εισοδήματος που προσδιορίζεται από το κατώτατο ποσοστό των ανθρώπων. Συχνά χρησιμοποιείται για να ορίσει την κατανομή του εισοδήματος που δείχνει το ποσοστό του συνολικού εισοδήματος που παρουσιάζει ένα νοικοκυριό. Το ποσοστό των νοικοκυριών απεικονίζεται στον άξονα των x και το ποσοστό του εισοδήματος στον άξονα των y . Επίσης, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δείξει την κατανομή των περιουσιακών στοιχείων. Από πολλούς οικονομολόγους θεωρείται μέτρο κοινωνικής ανισότητας. Στο επόμενο διάγραμμα παρουσιάζεται η καμπύλη Lorenz μαζί με κάποιες άλλες πληροφορίες που θα αναλυθούν στην συνέχεια.



Γράφημα 2.1: Η καμπύλη Lorenz.

Για να μπορέσουμε να κατανοήσουμε την καμπύλη Lorenz και το δείκτη Gini παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα. Έστω ότι έχουμε έναν πληθυσμό A που αποτελείται από δύο ανθρώπους. Ο πρώτος άνθρωπος έχει εισόδημα 1000€ τον χρόνο και ο δεύτερος 99000€ αντίστοιχα. Επομένως, ο μέσος όρος του εισοδήματος είναι $\frac{1000+99000}{2} = 50000€$. Τώρα ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν άλλο πληθυσμό που πάλι αποτελείται από δύο κατοίκους με διαφορά ότι ο πρώτος έχει εισόδημα 50000€ και ο δεύτερος 50000€. Συνεπώς, εδώ ο μέσος όρος του εισοδήματος είναι $\frac{50000+50000}{2} = 50000€$. Παρατηρούμε ότι και στις δύο περιπτώσεις το μέσο εισόδημα είναι 50000€ τον χρόνο όμως αυτό δεν κατανέμεται ίσα και στις δύο περιπτώσεις. Ο πληθυσμός A παρουσιάζει πολύ μεγαλύτερη ανισοκατανομή εισοδήματος σε σχέση με τον πληθυσμό B που το εισόδημα κατανέμεται τέλεια στους κατοίκους. Επομένως εδώ κρίνεται επιτακτική ανάγκη μέτρησης αυτής της ανισότητας του εισοδήματος. Για να αντιμετωπιστεί αυτό το πρόβλημα, ο Ιταλός στατιστικός Corrado Gini (1912) δημιούργησε τον δείκτη Gini. Αυτό το έκανε για να μπορεί να μετρήσει την εισοδηματική ανισότητα για έναν πληθυσμό. Για να μπορέσει να προσεγγίσει αυτήν την ανισοκατανομή έφτιαξε ένα διάγραμμα. Στον άξονα των x όρισε το σωρευτικό ποσοστό του πληθυσμού και στον άξονα των y όρισε το σωρευτικό ποσοστό του εισοδήματος του πληθυσμού σε μία χώρα. Στην συνέχεια όρισε ότι σε μία απολύτως ίση κοινωνία καθώς προσθέτεις ένα ποσοστό στο σωρευτικό ποσοστό του πληθυσμού θα πρέπει να προσθέτεις ακριβώς το ίδιο ποσοστό στο σωρευτικό ποσοστό του εισοδήματος. Ωστόσο, αυτό δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί σε κανέναν πληθυσμό. Επομένως, παρατηρούμε ότι όταν προσθέτουμε ένα σωρευτικό ποσοστό του πληθυσμού τότε το ποσοστό του σωρευτικού εισοδήματος που θα προσθέτεται δεν θα είναι το ίδιο αλλά περισσότερο. Δηλαδή δημιουργείται μία καμπύλη που είναι γνωστή ως καμπύλη Lorenz και βρίσκεται κάτω από την καμπύλη της τέλει ισότητας. Ο Corrado Gini είπε ότι το εμβαδόν A μας βοηθάει να ορίσουμε τον δείκτη Gini. Αυτός ο δείκτης ορίζεται από το 0 μέχρι το 1 ή από

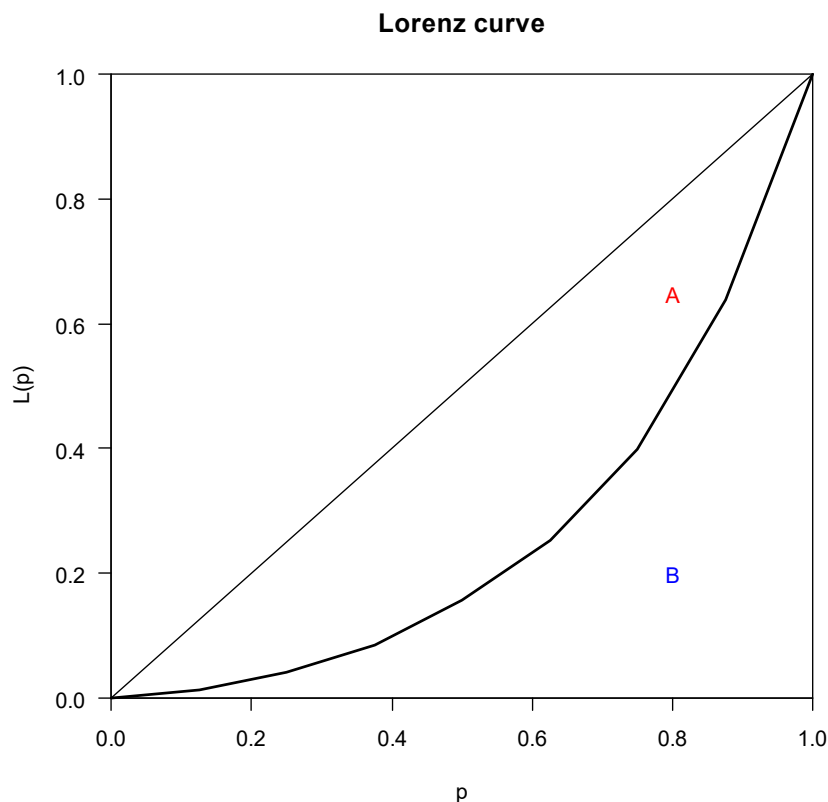
το 0 μέχρι το 100 όταν μιλάμε για ποσοστό. Αν δηλαδή το εμβαδόν του A είναι 0 (ή 0%), τότε υπάρχει τέλεια ισότητα εισοδήματος με αποτέλεσμα η καμπύλη Lorenz να ταυτίζεται με την καμπύλη τέλειας ισότητας δηλαδή όλα τα άτομα του πληθυσμού θα έχουν ακριβώς το ίδιο εισόδημα.

Αν το A είναι 1 (ή 100%), αυτό σημαίνει ότι η καμπύλη Lorenz απέχει την μέγιστη απόσταση από την καμπύλη της τέλειας ισότητας με αποτέλεσμα να έχουμε την μέγιστη ανισοκατανομή εισοδήματος δηλαδή ουσιαστικά το εισόδημα θα συγκεντρώνεται από μόνο ένα άτομο. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι όταν ο δείκτης Gini είναι 0 τότε έχουμε τέλεια ισότητα και όταν ο δείκτης Gini είναι 1 τότε έχουμε τέλεια ανισότητα. Ουσιαστικά ο τύπος του δείκτη Gini που δόθηκε με βάση το εμβαδόν του διαγράμματος είναι

$$Gini\ coefficient = \frac{Εμβαδόν\ A}{Εμβαδόν\ A + Εμβαδόν\ B}$$

Στο παρακάτω παράδειγμα με την χρήση του υπολογιστικού πακέτου R βρίσκεται ο δείκτης Gini και δόθηκε η καμπύλη Lorenz. Πιο συγκεκριμένα, δημιουργήσαμε μία κοινωνία που αποτελείται από 8 άτομα που τα εισοδήματα τους παρουσιάζονται στο διάνυσμα του x και είναι με αύξουσα σειρά. Στην συνέχεια, υπολογίζεται ο δείκτης Gini που είναι 0,4792169. Τέλος, δίνεται και μία διαγραμματική αναπαράσταση των παραπάνω δεδομένων.

```
library(ineq)
> x=c(5000,12000,18000,30000,40000,60000,100000,150000)
> x
[1] 5000 12000 18000 30000 40000 60000 100000 150000
> ineq(x,type="Gini")
[1] 0.4792169
> plot(Lc(x))
> text(0.8,0.65,"A",col="red")
> text(0.8,0.2,"B",col="blue")
```



Γράφημα 2.2: Η καμπύλη Lorenz για μία κοινωνία 8 ατόμων.

Στη συνέχεια, επισημαίνουμε μία εφαρμογή της σχέσης (2.2) που συνδέεται με την ανάλυση εισοδήματος και παρατηρήθηκε από τον Kattumanil (2009).

Η υπόλοιπη ενότητα χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος α) που είναι και το μεγαλύτερο αναλύει ορισμένες σχέσεις της καμπύλης Lorenz και του δείκτη Gini κάνοντας χρήση και δεσμευμένων μέσων τιμών και παρέχει κάποιες εφαρμογές υπολογισμού του δείκτη Gini μέσω παραδειγμάτων. Στο δεύτερο μέρος β) δίνονται κάποιες σχέσεις της συνδιακύμανσης με την τρίτη κεντρική ροπή και την μέση τιμή, που αναπτύχθηκαν από τον Kattumanil (2009).

α) Καμπύλη Lorenz και δείκτης Gini: Η καμπύλη Lorenz και ο δείκτης Gini χρησιμοποιούνται στην μελέτη εισοδήματος. Αρχικά δίνονται οι συνήθεις ορισμοί για την καμπύλη Lorenz και το δείκτη Gini. Στην συνέχεια της ενότητας αποδεικνύονται δύο ταυτότητες για αυτές από την εργασία του Kattumanil (2009) χρησιμοποιώντας την σχέση (2.2). Οι ταυτότητες αυτές βοηθούν στον πιο εύκολο τρόπο υπολογισμού αυτών των ποσοτήτων για μία δοθείσα κατανομή.

Ορισμός 2.1. Η καμπύλη Lorenz για μία απόλυτα συνεχή θετική τ.μ. X ορίζεται ως τη γραφική παράσταση $(F(x), L(F(x)))$, τέτοια ώστε

$$L(F(x)) = \frac{E(X|X \leq x)F(x)}{E(X)}, \quad x > 0. \quad (2.8)$$

Αν το X αναπαριστά το ετήσιο εισόδημα τότε $L(p)$ ($p = F(x)$) είναι το ποσοστό του συνολικού εισοδήματος που συσσωρεύεται σε άτομα έχοντας 100% χαμηλότερο εισόδημα.

Ορισμός 2.2. Ο δείκτης Gini συμβολίζεται με $J(x)$ και ορίζεται ως

$$J(x) = 2 \int_0^1 (p - L(p)) dp = 1 - 2 \int_0^1 L(p) dp. \quad (2.9)$$

Το παρακάτω θεώρημα προτείνει μία εναλλακτική σχέση για την καμπύλη Lorenz και τον συντελεστή Gini.

Θεώρημα 2.2. Υποθέτουμε ότι η $f(x)$ και $g(x)$ ικανοποιούν την σχέση (2.1) με $h(x) = x$. Τότε

$$L(F(x)) = F(x) - \frac{1}{\mu} f(x)g(x), \quad \forall x. \quad (2.10)$$

$$J(x) = \frac{2E[f(X)g(X)]}{E(X)}, \quad \forall x. \quad (2.11)$$

Απόδειξη

Θυμίζοντας ότι $\mu = E(X)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E(X|X \leq x)F(x) &= \frac{\int_0^x tf(t)dt}{F(x)} F(x) \\ &= \int_0^x (t - \mu)f(t)dt + \mu \int_0^x f(t)dt \\ &= \int_x^0 (\mu - t)f(t)dt + \mu F(x). \end{aligned}$$

Λόγω της σχέσης (2.1) και αφού έχουμε υποθέσει ότι $h(x) = x$, προκύπτει ότι

$$(f(t)g(t))' = (\mu - t)f(t).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} E(X|X \leq x)F(x) &= \int_x^0 (f(t)g(t))' dt + \mu F(x) \\ &= \mu F(x) - f(x)g(x). \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας το παραπάνω στην σχέση (2.8) έχουμε την εναλλακτική μορφή που δίνεται στην σχέση (2.10). Για να αποδείξουμε την σχέση (2.11) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 L(p) dp &= \int_0^1 \left(\frac{E(X|X \leq x)F(x)}{E(X)} \right) dF(x) \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^1 \int_0^x tf(t) dt dF(x).\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$\int_0^1 L(p) dp = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty \int_0^x tf(t) dt f(x) dx.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^1 L(p) dp &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty tf(t) \int_t^\infty f(x) dx dt \\ &= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty (1 - F(t)) tf(t) dt \\ &= \frac{\mu}{\mu} - \frac{1}{\mu} \int_0^\infty tF(t) f(t) dt \\ &= 1 - \frac{1}{\mu} E[XF(X)] \\ &= 1 - E[F(X)] - \frac{1}{\mu} E[(X - \mu)F(X)].\end{aligned}$$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $E[F(X)] = \frac{1}{2}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}E[F(X)] &= \int_0^\infty F(x) f(x) dx \\ &= \int_0^\infty F(x) (F(x))' dx \\ &= \int_0^\infty \frac{(F'(x))^2}{2} dx \\ &= \left[\frac{F^2(x)}{2} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Οπότε, αντικαθιστώντας την $E[F(X)]$ στην παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\int_0^1 L(p) dp = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} E[(X - \mu)F(X)].$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.2) μπορούμε να γράψουμε

$$E[(X - \mu)F(X)] = E[F'(X)g(X)] = E[f(X)g(X)].$$

Άρα η παραπάνω σχέση γίνεται

$$\int_0^1 L(p) dp = \frac{1}{2} - \frac{1}{\mu} E[f(X)g(X)].$$

Επομένως, από την σχέση (2.9) προκύπτει

$$\begin{aligned} J(x) &= 1 - 2 \int_0^1 L(p) dp \\ &= 1 - \frac{2}{2} + \frac{2}{\mu} E[f(X)g(X)] \\ &= \frac{2}{\mu} E[f(X)g(X)] \\ &= \frac{2E[f(X)g(X)]}{E(X)}, \quad \forall x. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η σχέση (2.11) ισχύει και ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

Στην συνέχεια παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα εύρεσης του δείκτη Gini σε ορισμένες συνεχείς κατανομές.

Παράδειγμα 2.7

Έστω ότι έχουμε την κατανομή Βήτα με σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{B(a,\beta)} x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}$, $0 < x < 1$, $0 < a, \beta < 1$. Επίσης, από την Παρατήρηση 2.1 έχουμε ότι $g(x) = \frac{x(1-x)}{a+\beta}$.

Γνωρίζουμε ότι

$$B(a, \beta) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(\beta)}{\Gamma(a + \beta)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{\beta-1} dx.$$

Επομένως, η σ.π.π. μπορεί να γραφτεί και ως

$$f(x) = \frac{\Gamma(a + \beta)}{\Gamma(a)\Gamma(\beta)} x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}, \quad 0 < x < 1, 0 < a, \beta < 1.$$

Ακόμα, για την μέση τιμή ξέρουμε ότι

$$E(X) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \frac{\Gamma(a+\beta)}{\Gamma(a+\beta+1)} = \frac{a}{a+\beta}.$$

Άρα, ισχύει

$$\begin{aligned} E[f(X)g(X)] &= \int_0^1 f(x)g(x)f(x)dx \\ &= \frac{1}{B^2(a,\beta)(a+\beta)} \int_0^1 x^{2(a-1)}(1-x)^{2(\beta-1)}x(1-x)dx \\ &= \frac{1}{B^2(a,\beta)(a+\beta)} \int_0^1 x^{2a-1}(1-x)^{2\beta-1}dx. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $B(2a, 2\beta) = \int_0^1 x^{2a-1}(1-x)^{2\beta-1}dx$. Επομένως, η παραπάνω σχέση ισοδύναμα γράφεται

$$E[f(X)g(X)] = \frac{B(2a, 2\beta)}{B^2(a, \beta)(a + \beta)}.$$

Συνεπώς για τον δείκτη Gini έχουμε

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{2E[f(X)g(X)]}{E(X)} \\ &= \frac{2 \frac{B(2a, 2\beta)}{B^2(a, \beta)(a + \beta)}}{\frac{a}{a + \beta}} \\ &= \frac{2B(2a, 2\beta)}{B^2(a, \beta)a}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.8

Θεωρούμε την κανονική κατανομή με σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $-\infty < x < \infty$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$. Επίσης, έχουμε $g(x) = \sigma^2$. Επομένως,

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{2E[f(X)g(X)]}{E(X)} \\ &= \frac{2\sigma^2}{\mu} E[f(X)]. \end{aligned}$$

Η $E[f(X)]$ είναι

$$E[f(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x)dx$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \left[\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{-\frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{1}{\frac{2\pi\sigma^2\mu}{\sigma^2}} \left[-\frac{e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{x} \right]_{-\infty}^{\infty} \\
&= \frac{1}{2\pi\mu}.
\end{aligned}$$

Επομένως, λύνοντας την σχέση για τον δείκτη Gini προκύπτει ότι

$$J(x) = \frac{2\sigma^2}{\mu 2\pi\mu} = \frac{\sigma^2}{\pi\mu^2} = \left(\frac{\sigma}{\mu\sqrt{\pi}} \right)^2.$$

Παρατήρηση 2.3

(α) Αφού η κατανομή μίας τ.μ. X χαρακτηρίζεται από την συνάρτηση $g(x)$ εύκολα αποδεικνύεται μία εναλλακτική μορφή του δείκτη Gini η οποία είχε αποδειχτεί από τον Tziafetas (1989) που είναι η

$$J(x) = \frac{2Cov[X, F(X)]}{E(X)}.$$

Η σχέση προκύπτει κατευθείαν σαν πόρισμα της σχέσης (2.11). Για να το διαπιστώσουμε αυτό παρατηρούμε ότι από την σχέση (2.2) έχουμε

$$Cov[X, F(X)] = E[F(X)(X - \mu)] = E[f(X)g(X)].$$

(β) Η από κοινού κατανομή του ζεύγους (\bar{X}, S^2) είναι περίπλοκη για πολλές κατανομές και η εύρεση της συνδιακύμανσης του \bar{X} και του S^2 , χρησιμοποιώντας τον ορισμό είναι πολλές φορές δύσκολη. Μπορεί όμως να αποδειχθεί μία απλή έκφραση σαν αυτή της σχέσης (2.2).

Ο Zhang (2007) επισήμανε μία ταυτότητα συνδιακύμανσης μεταξύ της \bar{X} και S^2 χρησιμοποιώντας την τρίτη κεντρική ροπή που είναι η

$$Cov(\bar{X}, S^2) = \frac{E[(X - \mu)^3]}{n}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.2) επαληθεύεται η ακόλουθη εναλλακτική ταυτότητα για κατανομές που ικανοποιούν την εξίσωση (2.1).

$$\text{Cov}(\bar{X}, S^2) = \frac{2E[g(X)g'(X)]}{n}.$$

Πράγματι, αν $c(x) = (x - \mu)^2$ από το Θεώρημα 2.1 συμπεραίνουμε

$$\begin{aligned} n \text{Cov}(\bar{X}, S^2) &= E[(X - \mu)^3] \\ &= E[(X - \mu)(X - \mu)^2] \\ &= E[(X - \mu)c(X)] \\ &= E[c'(X)g(X)] \\ &= E[2(X - \mu)g(X)] \\ &= 2 E[g'(X)g(X)], \end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται.

Η παραπάνω ταυτότητα μας δίνει έναν εύκολο τρόπο για να βρούμε την συνδιακύμανση μεταξύ της μέσης τιμής και της διακύμανσης για κατανομές που ικανοποιούν την σχέση (2.1).

Παρατήρηση 2.4. Για μία κανονική τ.μ. που περιγράφεται στην Παρατήρηση 2.2 με συνάρτηση $g(x) = \sigma^2$ και $g'(x) = 0$ θα έχουμε ότι η $\text{Cov}(\bar{X}, S^2) = 0$ που αποτελεί ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα.

Κεφάλαιο 3

Αναδρομικές σχέσεις μέτρων κινδύνων που επηρεάζονται από την δεξιά ουρά της κατανομής μέσω της ταυτότητας Stein

3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε μία άλλη γενίκευση της ταυτότητας του Stein και πιο συγκεκριμένα αναλύουμε την εργασία των Landsman και Valdez (2016). Βασικός σκοπός του κεφαλαίου είναι η κατανόηση και η χρήση της ταυτότητας Stein σε μέτρα κινδύνων που επηρεάζονται από τη δεξιά ουρά της κατανομής. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται μία γενίκευση της ταυτότητας του Stein λαμβάνοντας υπόψη τη δεξιά ουρά ενός κινδύνου που ακολουθεί μία συνεχή ή διακριτή κατανομή. Με αυτήν την ταυτότητα μπορούν να αναπτυχθούν αναδρομικές σχέσεις και να βρεθούν σχέσεις για δεσμευμένες μέσες τιμές, ροπές και διακυμάνσεις. Στις επόμενες ενότητες δίνονται παραδείγματα αυτών των αναδρομικών σχέσεων σε πολλές κλάσεις κατανομών περιλαμβάνοντας και την ΕΟΚ. Αυτές οι διαδικασίες παρουσιάζουν ιδιαίτερο ενδιαφέρον στην αναλογιστική διαχείριση κινδύνων. Η ταυτότητα του Stein πέρα από τον αναλογισμό βέβαια έχει πολλές εφαρμογές στην στατιστική, στα χρηματοοικονομικά και στην ασφάλιση.

Συνεπώς το υπόλοιπο κεφάλαιο χωρίζεται σε 6 μέρη. Στην Ενότητα 3.2 παρουσιάζουμε κατανομές στην ΕΟΚ στην περίπτωση της πολυμεταβλητής περίπτωσης. Στη συνέχεια παραθέτουμε την ταυτότητα του Stein για κατανομές που ανήκουν στην οικογένεια αυτή και παρέχουμε ορισμένες σχέσεις προσδιορισμού των δεσμευμένων μέσων τιμών και διακυμάνσεων για την μονοδιάστατη περίπτωση. Στη συνέχεια έχουμε τις Ενότητες 3.3 και 3.4 στις οποίες παρουσιάζεται και αποδεικνύεται η ταυτότητα που οφείλεται στους Landsman και Valdez (2016) για μία ουρά συνεχών κατανομών και παρουσιάζονται αναδρομικές σχέσεις υπολογισμού δεσμευμένων μέσων τιμών για την συνεχή περίπτωση και δίνονται κάποια παραδείγματα αντίστοιχα. Μετά ακολουθούν οι Ενότητες 3.5 και 3.6 στις οποίες παρουσιάζονται οι αντίστοιχες αναδρομικές σχέσεις για την διακριτή περίπτωση και δίνονται παραδείγματα εφαρμογών αυτών των τύπων.

3.2 Η ταυτότητα Stein σε ουρές κατανομών

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζεται η σ.π. για μία τ.μ. X που ανήκει στην ΕΟΚ και δίνεται μία γενίκευση της ταυτότητας του Stein για τυχαίες μεταβλητές που ανήκουν σε αυτή την οικογένεια. Επίσης, στην σχέση (3.3) αναφέρουμε ένα αποτέλεσμα της κανονικής κατανομής για την μονοδιάστατη περίπτωση το οποίο χρησιμοποιήσαμε και στα προηγούμενα κεφάλαια και στο οποίο βρίσκουμε την μέση τιμή και την δεύτερη ροπή της τ.μ. X . Τέλος δίνεται ο ορισμός της δεσμευμένης ροπής, μέσης τιμής και διακύμανσης.

Μία τ.μ. X . ανήκει στην ΕΟΚ αν έχει σ.π.π.

$$f(x) = \exp \left[\sum_{i=1}^s \theta_i T_i(x) - \varphi(\theta) + \ln k(x) \right] \quad (3.1)$$

που φ και k δύο κατάλληλες συναρτήσεις και $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_s)$ είναι ένα διάνυσμα παραμέτρων.

Η ΕΟΚ είναι πολύ σημαντική στην στατιστική και πολλές συνεχείς και διακριτές κατανομές ανήκουν σε αυτήν όπως για παράδειγμα η Κανονική, η Γάμμα, η Βήτα, η Chi-squared, η Λογιστική, η Διωνυμική, η Poisson και η Αρνητική Διωνυμική. Στην περίπτωση της κανονικής κατανομής με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 έχουμε $\theta_1 = \frac{\mu}{\sigma^2}$, $\theta_2 = -\frac{1}{2}\sigma^2$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = x^2$ και $k(x) = 1$.

Τώρα υποθέτουμε μία τ.μ. X ανήκει στην ΕΟΚ με σ.π.π. ίδια με αυτήν της σχέσης (3.1). Επίσης έχουμε και μία συνάρτηση g που ικανοποιεί την σχέση $E(|g'(X)|) < \infty$. Τότε προκύπτει η ταυτότητα του Stein για την ΕΟΚ (βλέπε Landsman και Valdez (2016)) που είναι η

$$E[g'(X)] = -E \left[\left(\frac{k'(X)}{k(X)} + \sum_{i=1}^s \theta_i T_i'(X) \right) g(X) \right] \quad (3.2)$$

που g' , k' και T_i' είναι οι πρώτες παράγωγοι των g , k και T_i .

Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα της ΕΟΚ αποδείχθηκε και από τον Hudson (1978). Ο Kattumannil (2009) μάλιστα όπως είδαμε και στην τελευταία ενότητα του δεύτερου κεφαλαίου γενίκευσε την παραπάνω ταυτότητα του Stein και την συνέδεσε με τον δείκτη Gini και την καμπύλη Lorenz αναφερόμενος στην μονοδιάστατη περίπτωση.

Στην συνέχεια αναφέρεται ένα κλασσικό αποτέλεσμα που αναφέρθηκε και στα προηγούμενα κεφάλαια και ισχύει στην κανονική περίπτωση σύμφωνα με τον Stein.

Όταν έχουμε την τ.μ. $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ υπενθυμίζουμε από το πρώτο κεφάλαιο την κλασσική ταυτότητα του Stein. (Σχέση (1.1)).

$$E[(X - \mu)g(X)] = \sigma^2 E[g'(X)], \quad (3.3)$$

η οποία γράφεται και ως

$$Cov[X, g(X)] = Cov(X, X)E[g'(X)].$$

Όπως παρατηρούμε δηλαδή η ταυτότητα συνδιακύμανσης του Stein για μία συνάρτηση g μπορεί να γραφτεί και σαν συνδυασμός της συνδιακύμανσης της τ.μ. X με την παράγωγο της g .

Στην συνέχεια δίνονται δύο αποτελέσματα της σχέσης (3.3) για διάφορες τιμές της συνάρτησης g .

Αν έχουμε $g(x) = 1$ τότε $E(X) = \mu$. Πράγματι για $g(x) = 1$ η σχέση (3.3) γίνεται

$$E(X - \mu) = \sigma^2 E(0)$$

$$E(X) - \mu = 0$$

$$E(X) = \mu.$$

Επίσης αν έχουμε $g(x) = x$ τότε $E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2$. Πράγματι για $g(x) = x$ η σχέση (3.3) γίνεται

$$E[(X - \mu)X] = \sigma^2 E(1)$$

$$E(X^2) - \mu E(X) = \sigma^2$$

$$E(X^2) - \mu\mu = \sigma^2$$

$$E(X^2) = \sigma^2 + \mu^2.$$

Στο συγκεκριμένο σημείο επισημαίνουμε ότι πέρα από τις εφαρμογές που θα πραγματοποιηθούν στην ΕΟΚ, σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε και με κατανομές της οικογένειας Pearson. Παράλληλα επεκτείνουμε την ταυτότητα του Stein και στην περίπτωση των διακριτών τ.μ.. Όπως ήδη αναφέραμε και στην εισαγωγική ενότητα αυτού του κεφαλαίου κύριο μέλημα μας είναι η εφαρμογή της ταυτότητας του Stein σε κατανομές με βαριά ουρά. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία στην αναλογιστική επιστήμη και στην διαχείριση κινδύνου καθώς μπορούν να υπολογιστούν ζημιές (σε περίπτωση που μιλάμε για κίνδυνο) οι οποίες ξεφεύγουν από ένα επίπεδο τιμών και πολλές φορές μπορεί να είναι μεγάλες. Επομένως σύμφωνα με τους Landsman και Valdez (2016), η ταυτότητα του Stein μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό δεσμευμένων μέσω τιμών της μορφής

$$E(X^n | X > d), \quad (3.4)$$

για κάποια τιμή d έτσι ώστε $X > d$. Αυτή η γενίκευση καλείται “tail Stein’s identity”. Όταν $n = 1$ τότε προκύπτει ένα γνωστό μέτρο μέτρησης κινδύνων στα χρηματοοικονομικά και απωλειών στην ασφάλιση που είναι

$$TCE_q(X) = E(X | X > x_q), \quad (3.5)$$

που $0 < q < 1$ και x_q είναι το q ποσοστιαίο σημείο σύμφωνα με το οποίο ισχύει

$F(x_q) = q$. Η σχέση (3.5) είναι γνωστή στα χρηματοοικονομικά και στην ασφάλιση σαν tail conditional expectation (TCE) ή αλλιώς tail value-at-risk (TVAR). Ουσιαστικά με την σχέση (3.5) μετράμε την μέση αξία της απώλειας μίας τ.μ. X όταν αυτή ξεπερνάει μία τιμή x_q . Επίσης στην αναλογιστική επιστήμη μία γνωστή σχέση για την μέτρηση και την

σωστή κατανόηση των κινδύνων είναι αυτή της δεσμευμένης διακύμανσης (tail variance). Αυτή μπορεί να γραφτεί ως

$$TV_q(X) = Var(X|X > x_q) = E(X^2|X > x_q) - [TCE_q(X)]^2. \quad (3.6)$$

Σε αυτό το σημείο αναφέρουμε ότι στις επόμενες ενότητες του κεφαλαίου πέρα από την ΕΟΚ γίνονται κάποια παραδείγματα χρησιμοποιώντας και άλλες κατανομές που δεν ανήκουν σε αυτήν την οικογένεια. Ακόμα, σε όλες τις γενικεύσεις του λήμματος του Stein χρησιμοποιούνται στοιχεία λογισμού και πιθανοτήτων.

Στην συνέχεια του παρόντος κεφαλαίου ακολουθεί η τρίτη ενότητα που σύμφωνα με τους Landsman και Valdez (2016) αναλύεται η ταυτότητα του Stein για την συνεχή περίπτωση και δημιουργούνται δεσμευμένοι τύποι μέσων τιμών, ροπών και διακυμάνσεων. Στην τέταρτη ενότητα γίνονται κάποια παραδείγματα με άλλες συνεχείς κατανομές και υπολογίζονται αναδρομικοί τύποι μεταξύ τους. Στην πέμπτη ενότητα δημιουργούνται οι αντίστοιχες σχέσεις με την τρίτη αλλά τώρα αφορούν την συνεχή περίπτωση. Τέλος ακολουθεί η έκτη ενότητα που δίνονται αντίστοιχες αναδρομικές σχέσεις για διακριτές τυχαίες μεταβλητές και παρουσιάζονται αντίστοιχα παραδείγματα.

3.3 Η ταυτότητα Stein για συνεχείς δεσμευμένες μέσες τιμές

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται αναδρομικές σχέσεις υπολογισμού δεσμευμένων μέσων τιμών στην περίπτωση που έχουμε μία συνεχή τ.μ. X . Αρχικά ορίζουμε την σ.π.φ. $f(x)$ που το x ανήκει στο στήριγμα $S(X) \subseteq R$, όπως ορίστηκε στο Κεφάλαιο 1 και η $f(x)$ ορίζεται για $x \in S(X)$. Η επόμενη σχέση αφορά την ένταση κινδύνου (ένταση θνησιμότητας) για μία συνεχή τ.μ. X . Θεωρούμε λοιπόν ότι για μία τ.μ. X έχουμε την συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \leq x)$ και την συνάρτηση δεξιάς ουράς $\bar{F}(x) = P(X > x)$. Συνεπώς η ένταση κινδύνου ορίζεται ως

$$h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)}, \quad (3.7)$$

που $x \in S$ δεδομένου ότι $\bar{F}(x) \neq 0$.

Στην συνέχεια ακολουθεί το Λήμμα 3.1 που σύμφωνα με τους Landsman και Valdez (2016) παρουσιάζεται η ουρά της ταυτότητας του Stein στην συνεχή περίπτωση.

Λήμμα 3.1. Έχω $g : R \rightarrow R$ με g' να είναι μία συνάρτηση με πρώτη παράγωγο g' , συνεχής και να ισχύει $E(|g'(X)|) < \infty$. Τότε ορίζουμε την συνάρτηση

$$J(x) = -\frac{d}{dx} \log f(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}, \quad (3.8)$$

για όλα τα $x \in S$. Τότε αν $\lim_{x \rightarrow u} g(x)f(x) = 0$ όπου $u = \sup S$ έχουμε

$$E[g'(X)|X > d] = E[J(X)g(X)|X > d] - g(d)h(d), \quad (3.9)$$

για όλα τα $d \in S$.

Απόδειξη

Έχουμε το ακόλουθο

$$\begin{aligned} E[J(X)g(X)|X > d] &= - \int_d^u \frac{f'(x)}{f(x)} g(x) \frac{f(x)}{\bar{F}(d)} dx \\ &= - \int_d^u \frac{f'(x)}{\bar{F}(d)} g(x) dx. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά παράγοντες παίρνουμε

$$\begin{aligned} E[J(X)g(X)|X > d] &= - \left[\frac{f(x)}{\bar{F}(d)} g(x) \right]_d^u + \int_d^u g'(x) \frac{f(x)}{\bar{F}(d)} dx \\ &= g(d) \frac{f(d)}{\bar{F}(d)} + E[g'(X)|X > d]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Επομένως ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

Στην συνέχεια γίνεται η υπόθεση ότι $a = \inf S$ που a μπορεί να είναι το $-\infty$. Τότε έχοντας $d \rightarrow a$ η σχέση (3.10) μπορεί να γραφτεί και ως

$$E[g'(X)] = E[J(X)g(X)] \quad (3.11)$$

με την προϋπόθεση ότι $\lim_{x \rightarrow a} g(x)f(x) = 0$. Στην περίπτωση λοιπόν που η τ.μ. X ανήκει στην ΕΟΚ μπορούμε να πούμε ότι

$$J(x) = - \frac{d}{dx} \log f(x) = - \left[\sum_{i=1}^s \theta_i T_i'(x) + \frac{k'(x)}{k(x)} \right].$$

Επομένως παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση αποτελεί μία γενίκευση του Λήμματος 3.1 και αφορά την ΕΟΚ για την πολυμεταβλητή περίπτωση χρησιμοποιώντας την σχέση (3.2). Στο επόμενο θεώρημα παρουσιάζονται αναδρομικές σχέσεις μεταξύ των ροπών της δεξιάς ουράς που χρησιμοποιούνται σε συνεχείς κατανομές. Γενικά οι αναδρομικές σχέσεις είναι χρήσιμες στην αναλογιστική επιστήμη και στην διαχείριση κινδύνων καθώς προσδίδουν μεγάλη υπολογιστική ευκολία.

Θεώρημα 3.1. Υποθέτουμε ότι η J είναι της μορφής

$$J(x) = \frac{P_l(x)}{Q_m(x)}, \quad (3.12)$$

όπου

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^l a_k x^k \quad \text{και} \quad Q_m(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$$

είναι δύο πολυώνυμα με βαθμούς l και m για κάποιες σταθερές a_k που $a_l \neq 0$ και b_k που $b_m \neq 0$. Υποθέτουμε ότι οι ρίζες της $Q_m(x)$ δεν ανήκουν στο στήριγμα S της κατανομής της τ.μ. X . Έχοντας την συνάρτηση

$$g(x) = x^n Q_m(x) \quad (3.13)$$

και προϋποθέτοντας ότι οι συνθήκες του Λήμματος 3.1 ισχύουν, οι Landsman και Valdez (2016) χρησιμοποιώντας την σχέση (3.4) απέδειξαν την ακόλουθη αναδρομική σχέση δεσμευμένων μέσων τιμών

$$\sum_{k=0}^l a_k E(X^{k+n} | X > d) = \sum_{k=0}^m (k+n) b_k E(X^{k+n-1} | X > d) + d^n Q_m(d) h(d). \quad (3.14)$$

Απόδειξη

Από την σχέση (3.13) για μία συνάρτηση g ισχύει

$$g(x) = x^n \sum_{k=0}^m b_k x^k = \sum_{k=0}^m b_k x^{k+n}.$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε

$$g'(x) = \sum_{k=0}^m (k+n) b_k x^{k+n-1}.$$

Επίσης μπορούμε να γράψουμε ότι

$$J(x)g(x) = x^n P_l(x) = \sum_{k=0}^l a_k x^{k+n}.$$

Επομένως αντικαθιστώντας την παραπάνω σχέση στην σχέση (3.9) προκύπτει η σχέση (3.14). Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. ■

Τώρα αναφέρουμε ορισμένα σχόλια στις παραπάνω σχέσεις που προήλθαν από την εργασία των Landsman και Valdez (2016). Παρατηρούμε λοιπόν ότι οι δυνάμεις που βρίσκονται οι μέσες τιμές στην σχέση (3.14) μας βοηθούν να κάνουμε αναδρομικούς

υπολογισμούς σε δεσμευμένες μέσες ροπές και πιο συγκεκριμένα σε ροπές με βαριά ουρά που όπως αναφέραμε και προηγουμένως είναι χρήσιμες στην αναλογιστική επιστήμη. Παράλληλα σε πολλές περιπτώσεις μπορούν να υπολογιστούν και δεσμευμένες μέσες τιμές και διακυμάνσεις χωρίς όμως αυτό να συμβαίνει πάντα γιατί αρκετές φορές απαιτούνται πιο σύνθετοι υπολογισμοί. Επίσης με την σωστή επιλογή των πολυωνύμων $P_l(x)$ και $Q_m(x)$ μπορούμε να έχουμε έναν σχετικά γρήγορο και απλό υπολογισμό της συνάρτησης $J(x)$ όπως φαίνεται και στην σχέση (3.12). Δηλαδή σε πολλές περιπτώσεις μπορούν να γίνουν πιο απλοί υπολογισμοί σε σχέση με την σχέση (3.8) στην οποία απαιτούνται πράξεις μεταξύ την σ.π.π. και της παραγώγου της. Ακόμα αξίζει να αναφέρουμε ότι ορισμένες κλάσεις κατανομών μας περιορίζουν στο να υπολογίσουμε την συνάρτηση $J(x)$ (πιο αναλυτικά βλέπουμε στα επόμενα παραδείγματα). Στην συνέχεια δίνεται μία σχέση που συνδέει την σ.π.π. με την συνάρτηση $J(x)$ της σχέσης (3.8). Επομένως η αντίστοιχη σχέση είναι

$$f(x) = c \exp \left[- \int_a^x J(z) dz \right], \quad \text{για } x \geq a, \quad (3.15)$$

που c είναι μία σταθερά κανονικοποίησης τέτοια ώστε να ισχύει

$$\int_a^\infty \exp \left[- \int_a^x J(z) dz \right] dx < \infty.$$

3.4 Παραδείγματα των αναδρομικών σχέσεων στην συνεχή περίπτωση

Σε αυτήν την ενότητα παρουσιάζονται εφαρμογές των παραπάνω σχέσεων που πραγματοποιήθηκαν από τους Landsman και Valdez (2016) πάνω σε κάποιες συνεχείς κατανομές. Πιο συγκεκριμένα αρχικά εξετάζονται μερικές περιπτώσεις μελών που ανήκουν στην ΕΟΚ και αυτές είναι η Κανονική, η Γάμμα, η αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή και η κατανομή Βήτα. Ωστόσο αναλύονται και κατανομές που δεν ανήκουν στην ΕΟΚ αλλά στην οικογένεια Pearson και αυτές είναι η Pareto, η Weibull και η Fisher-Snedecor (κατανομή F). Επομένως αφού ολοκληρωθούν τα παραδείγματα των κατανομών που ανήκουν στην ΕΟΚ θα δοθεί ένας επεξηγηματικός ορισμός για τα μέλη της οικογένειας Pearson και στην συνέχεια θα παρουσιαστούν τα παραδείγματα που αφορούν τις κατανομές της. Παράλληλα αναφέρουμε ότι σε αυτήν την ενότητα δίνονται κάποιοι πίνακες που θα παραθέτουν αντίστοιχα για κάθε οικογένεια ορισμένα αποτελέσματα. Παρακάτω το πρώτο παράδειγμα της κανονικής κατανομής που ανήκει στην ΕΟΚ.

Παράδειγμα 3.1

Έχουμε την τ.μ. X να ανήκει στην κανονική κατανομή με μέση τιμή μ , διακύμανση σ^2 και σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$, $-\infty < x < \infty$. Επομένως σύμφωνα με την σχέση (3.8) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} J(x) &= -\frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= -\frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] \left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)'}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]} \\ &= \frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2} \\ &= \frac{x-\mu}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την σχέση (3.12) έχουμε ότι $l = 1$ και $m = 0$. Επίσης από τα πολυώνυμα $P_l(x)$ και $Q_m(x)$ προκύπτει ότι $a_0 = -\mu$, $a_1 = 1$ και $b_0 = \sigma^2$. Επομένως τώρα χρησιμοποιούμε τα παραπάνω αποτελέσματα στην σχέση (3.14). Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^1 a_k E(X^{k+n}|X > d) &= \sum_{k=0}^0 (k+n)b_k E(X^{k+n-1}|X > d) + d^n Q_0(d)h(d) \\ a_0 E(X^n|X > d) + a_1 E(X^{n+1}|X > d) &= nb_0 E(X^{n-1}|X > d) + d^n \sigma^2 h(d) \\ E(X^{n+1}|X > d) &= n\sigma^2 E(X^{n-1}|X > d) + \mu E(X^n|X > d) + d^n h(d). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Για $n = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 E(X|X > d) &= \sigma^2 h(d) \\ -\mu + E(X|X > d) &= \sigma^2 h(d) \\ E(X|X > d) &= \mu + \sigma^2 h(d). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Η σχέση (3.17) ουσιαστικά είναι η TCE για την κανονική κατανομή. Για $n = 1$ η σχέση (3.16) γράφεται

$$\begin{aligned} E(X^2|X > d) &= n\sigma^2 + \mu E(X|X > d) + d\sigma^2 h(d) \\ E(X^2|X > d) &= \mu E(X|X > d) + \sigma^2 [1 + dh(d)]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Επίσης μπορούμε να υπολογίσουμε και την δεσμευμένη διακύμανση για την κανονική κατανομή. Συνεπώς,

$$\text{Var}(X|X > d) = E(X^2|X > d) - [TCE(x)]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \mu E(X|X > d) + \sigma^2[1 + dh(d)] - [\mu + \sigma^2 h(d)]^2 \\
&= \mu^2 + \mu\sigma^2 h(d) + \sigma^2 + \sigma^2 dh(d) - \mu^2 - 2\mu\sigma^2 h(d) - \sigma^4 h^2(d) \\
&= -\mu\sigma^2 h(d) + \sigma^2 + \sigma^2 dh(d) - \sigma^4 h^2(d) \\
&= \sigma^2[1 + (d - \mu)h(d) - \sigma^2 h^2(d)]. \tag{3.19}
\end{aligned}$$

Ακόμα για $n = 2$ μπορούμε να υπολογίσουμε την τρίτη ροπή. Άρα προκύπτει η σχέση

$$E(X^3|X > d) = n\sigma^2 E(X|X > d) + \mu E(X^2|X > d) + d^2 \sigma^2 h(d).$$

Από την παραπάνω σχέση συμπεραίνουμε ότι η τρίτη ροπή υπολογίζεται αναδρομικά με την βοήθεια της μέσης δεσμευμένης τιμής και της δεύτερης δεσμευμένης ροπής. Στην συνέχεια το επόμενο παράδειγμα αφορά την κατανομή Γάμμα που είναι και αυτή μέλος της ΕΟΚ.

Παράδειγμα 3.2

Έχουμε την τ.μ. X να ανήκει στην κατανομή Γάμμα με σ.π.π. $f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda \geq 0$, $\alpha \geq 0$. Αρχικά υπολογίζουμε την παράγωγο της f . Επομένως,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (a-1)x^{\alpha-2} e^{-\lambda x} + \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} (-\lambda) \\
&= \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} [(a-1)x^{-1} - \lambda].
\end{aligned}$$

Από τη σχέση (3.8) προκύπτει

$$\begin{aligned}
J(x) &= -\frac{f'(x)}{f(x)} = \lambda - \frac{a-1}{x} \\
&= \frac{\lambda x - (a-1)}{x}.
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα την σχέσης (3.8) με την σχέση (3.12) καταλαβαίνουμε ότι για τον αριθμητή ισχύει ότι $l = 1$, $a_0 = -(a-1)$ και $a_1 = \lambda$. Αντίστοιχα για τον παρονομαστή έχουμε $m = 1$, $b_0 = 0$ και $b_1 = 1$. Επομένως τώρα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3.1 και πιο συγκεκριμένα την σχέση (3.14) με στόχο να δημιουργήσουμε μία αναδρομική σχέση για την κατανομή Γάμμα. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^1 a_k E(X^{k+n}|X > d) &= \sum_{k=0}^1 (k+n)b_k E(X^{k+n-1}|X > d) + d^n Q_m(d)h(d) \Rightarrow \\
a_0 E(X^n|X > d) + a_1 E(X^{n+1}|X > d) \\
&= nb_0 E(X^{n-1}|X > d) + (n+1)b_1 E(X^n|X > d) + d^n Q_1(d)h(d) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$-(a-1)E(X^n|X > d) + \lambda E(X^{n+1}|X > d) = (n+1)E(X^n|X > d) + d^n dh(d) \Rightarrow$$

$$\lambda E(X^{n+1}|X > d) = (a+n)E(X^n|X > d) + d^{n+1}h(d). \quad (3.20)$$

Για $n = 0$ προκύπτει ότι

$$E(X|X > d) = \frac{a + dh(d)}{\lambda} = E(X) + \frac{dh(d)}{\lambda}. \quad (3.21)$$

Η σχέση (3.21) ουσιαστικά είναι η TCE και έχει επιβεβαιωθεί από τους Landsman και Valdez (2005). Για $n = 1$ υπολογίζουμε την δεύτερη ροπή. Δηλαδή έχουμε

$$\lambda E(X^2|X > d) = (a+1)E(X|X > d) + d^2h(d)$$

$$E(X^2|X > d) = \frac{a+1}{\lambda}E(X|X > d) + \frac{d^2h(d)}{\lambda}. \quad (3.22)$$

Η δεσμευμένη διακύμανση είναι

$$\begin{aligned} Var(X|X > d) &= E(X^2|X > d) - [TCE(x)]^2 \\ &= \frac{a+1}{\lambda} \cdot \frac{a+dh(d)}{\lambda} + \frac{d^2h(d)}{\lambda} - \left[\frac{a+dh(d)}{\lambda} \right]^2 \\ &= \frac{a^2 + adh(d) + a + dh(d)}{\lambda^2} + \frac{d^2h(d)}{\lambda} - \frac{a^2 + 2adh(d) + d^2h^2(d)}{\lambda^2} \\ &= \frac{a}{\lambda^2} + \frac{dh(d) - adh(d) - d^2h^2(d)}{\lambda^2} + \frac{d^2h(d)}{\lambda} \\ &= Var(X) + \frac{dh(d)}{\lambda^2} [1 - a - dh(d)] + \frac{d^2h(d)}{\lambda} \\ &= Var(X) + \frac{dh(d)}{\lambda^2} [d[\lambda - h(d)] - (a-1)]. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Παρακάτω υπολογίζεται η τρίτη δεσμευμένη ροπή. Δηλαδή βάζοντας όπου $n = 2$ προκύπτει ότι

$$\lambda E(X^3|X > d) = (a+2)E(X^2|X > d) + d^3h(d)$$

$$E(X^3|X > d) = \frac{(a+2)E(X^2|X > d)}{\lambda} + \frac{d^3h(d)}{\lambda}.$$

Επομένως η τρίτη ροπή υπολογίζεται με αναδρομικό τρόπο κάνοντας χρήση της δεύτερης δεσμευμένης ροπής. Επιπλέον στο σημείο αυτό αναφέρουμε ότι στην ειδική περίπτωση που το $a = 1$ θα προκύψει η εκθετική κατανομή. Δηλαδή η ένταση κινδύνου για $x > 0$ είναι

$$h(x) = \frac{f(x)}{\bar{F}(x)} = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{e^{-\lambda x}} = \lambda.$$

Τώρα υπολογίζοντας την μέση τιμή της ουράς έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E(X|X > d) &= E(X) + \frac{dh(d)}{\lambda} = E(X) + \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= E(X) + d. \end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση της δεσμευμένης μέσης τιμής έχει αποδειχθεί και από τους Landsman και Valdez (2005). Στην συνέχεια υπολογίζουμε και την δεσμευμένη διακύμανση. Στην διαδικασία αυτήν χρησιμοποιούμε την σχέση (3.23) στην οποία όπου a βάζουμε το 1 και όπου $h(d)$ το λ . Άρα ισχύει

$$\begin{aligned} Var(X|X > d) &= Var(X) + \frac{dh(d)}{\lambda^2} [d[\lambda - h(d)] - (a - 1)] \\ &= Var(X) + \frac{dh(d)}{\lambda^2} [d[\lambda - \lambda] - (1 - 1)] \\ &= Var(X). \end{aligned}$$

Στην συνέχεια το επόμενο παράδειγμα αφορά την αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή.

Παράδειγμα 3.3

Έχουμε την τ.μ. X που ανήκει στην αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή με σ.π.π. $f(x) = \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}}$, $x > 0, a, \lambda > 0$. Εφαρμόζουμε την ίδια διαδικασία με προηγουμένως δηλαδή υπολογίζουμε την παράγωγο της σ.π.π. f . Επομένως παίρνουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right]' e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} + \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} \left[e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \right]' \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)' e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} + \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \left(-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2} \right)' \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{2\lambda 3x^2}{(2\pi x^3)^2} \right] e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \\ &\quad + \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \left[\frac{-\lambda 2(x-a)(x-a)' 2xa^2 + \lambda(x-a)^2 2a^2}{(2xa^2)^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{2\lambda\pi 3x^2}{(2\pi x^3)^2} \right] e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \\
&\quad + \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \left[\frac{-\lambda 2(x-a)(x-a)' 2xa^2 + \lambda(x-a)^2 2a^2}{(2xa^2)^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{-\frac{1}{2}} \left[-\frac{6\lambda\pi x^2}{4\pi^2 x^6} \right] e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \\
&\quad + \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \frac{(x-a)[-2\lambda 2xa^2 + \lambda(x-a)2a^2]}{4x^2 a^4} \\
&= \left(\frac{\lambda}{2\pi x^3} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \left[\frac{1}{2} \frac{2\pi x^3}{\lambda} \left(-\frac{3\lambda}{2\pi x^4} \right) + \left(\frac{(x-a)(-2\lambda xa^2 - 2\lambda a^3)}{4x^2 a^4} \right) \right] \\
&= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \left[-\frac{3}{2x} + \frac{(x-a)(-2\lambda a^2)(x+a)}{4x^2 a^4} \right] \\
&= \sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \left[-\frac{3}{2x} - \frac{\lambda(x^2 - a^2)}{2x^2 a^2} \right].
\end{aligned}$$

Τώρα σύμφωνα με την σχέση (3.8) έχουμε

$$\begin{aligned}
J(x) &= -\frac{f'(x)}{f(x)} \\
&= -\frac{\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}} \left[-\frac{3}{2x} - \frac{\lambda(x^2 - a^2)}{2x^2 a^2} \right]}{\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}}} \\
&= \frac{3}{2x} + \frac{\lambda(x^2 - a^2)}{2x^2 a^2} \\
&= \frac{\lambda x^2 + 3a^2 x - \lambda a^2}{2a^2 x^2}.
\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας το αποτέλεσμα την σχέσης (3.8) με την σχέση (3.12) είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε το l και το m . Παρατηρούμε λοιπόν ότι στον αριθμητή είναι $l = 2$, $a_0 = -\lambda a^2$, $a_1 = 3a^2$ και $a_2 = \lambda$. Αντίστοιχα για τον παρονομαστή έχουμε $m = 2$, $b_0 = 0$, $b_1 = 0$ και $b_2 = 2a^2$. Χρησιμοποιώντας τώρα την σχέση (3.14) του Θεωρήματος 3.1 δημιουργούμε μία αναδρομική σχέση για την αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή. Δηλαδή ισχύει

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^2 a_k E(X^{k+n}|X > d) &= \sum_{k=0}^2 (k+n)b_k E(X^{k+n-1}|X > d) + d^n Q_m(d)h(d) \Rightarrow \\
a_0 E(X^n|X > d) + a_1 E(X^{n+1}|X > d) + a_2 E(X^{n+2}|X > d) &= nb_0 E(X^{n-1}|X > d) \\
+(n+1)b_1 E(X^n|X > d) + (n+2)b_2 E(X^{n+1}|X > d) + d^n Q_2(d)h(d) &\Rightarrow \\
-\lambda a^2 E(X^n|X > d) + 3a^2 E(X^{n+1}|X > d) + \lambda E(X^{n+2}|X > d) & \\
= (n+2)2a^2 E(X^{n+1}|X > d) + d^n 2a^2 d^2 h(d) &\Rightarrow \\
E(X^{n+2}|X > d) = \frac{a^2}{\lambda} (2n+1)E(X^{n+1}|X > d) + a^2 E(X^n|X > d) & \\
+ \frac{2a^2}{\lambda} d^{n+2} h(d). & \tag{3.24}
\end{aligned}$$

Δυστυχώς σε αυτήν την αναδρομική σχέση δεν μπορούμε να βρούμε την TCE. Ωστόσο αν την γνωρίζουμε ήδη τότε θα μπορούμε να υπολογίσουμε και μεγαλύτερες ροπές και την διακύμανση. Αυτό όμως πολλές φορές είναι αρκετά δύσκολο να επιτευχθεί καθώς απαιτούνται πολλές και περίπλοκες υπολογιστικές πράξεις. Για περεταίρω πληροφορίες υπολογισμού την μέσης τιμής της ουράς της αντίστροφης Γκαουσιανής κατανομής βλέπε τους Landsman και Valdez (2016). Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένα παράδειγμα που αφορά την κατανομή Βήτα.

Παράδειγμα 3.4

Έστω ότι έχουμε την τ.μ. X να ανήκει στην κατανομή Βήτα με σ.π.π. $f(x) = \frac{1}{B(a,\beta)} x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}$, $0 < x < 1$. Η παράγωγος της f είναι

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{B(a,\beta)} [(a-1)x^{a-2}(1-x)^{\beta-1} - x^{a-1}(\beta-1)(1-x)^{\beta-2}] \\
&= \frac{1}{B(a,\beta)} x^{a-1}(1-x)^{\beta-1} [(a-1)x^{-1} - (\beta-1)(1-x)^{-1}].
\end{aligned}$$

Όπως και προηγουμένως σύμφωνα με την σχέση (3.8) έχουμε

$$\begin{aligned}
J(x) &= -\frac{f'(x)}{f(x)} \\
&= -\frac{\frac{1}{B(a,\beta)} x^{a-1}(1-x)^{\beta-1} [(a-1)x^{-1} - (\beta-1)(1-x)^{-1}]}{\frac{1}{B(a,\beta)} x^{a-1}(1-x)^{\beta-1}} \\
&= \frac{\beta-1}{1-x} - \frac{a-1}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(\beta - 1)x - (1 - x)(a - 1)}{x - x^2} \\
&= \frac{\beta x - x - a + 1 + ax - x}{x - x^2} \\
&= \frac{\beta x - 2x + ax + 1 - a}{x - x^2} \\
&= \frac{(\beta - 2 - a)x + 1 - a}{x - x^2} \\
&= \frac{(2 - a - \beta)x + (a - 1)}{x^2 - x}.
\end{aligned}$$

Παρατηρώντας και συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση με την (3.12) βλέπουμε ότι για τον αριθμητή ισχύει ότι $l = 1$ με $a_0 = a - 1$ και $a_1 = 2 - a - \beta$. Επίσης για τον παρονομαστή έχουμε ότι $m = 2$ με $b_0 = 0$, $b_1 = -1$ και $b_2 = 1$. Συνεπώς τώρα υπολογίζουμε την αναδρομική σχέση μεταξύ των μέσων τιμών της ουράς. Επομένως σύμφωνα με την σχέση (3.14) έχουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^1 a_k E(X^{k+n} | X > d) \\
&= \sum_{k=0}^2 (k + n) b_k E(X^{k+n-1} | X > d) + d^n Q_m(d) h(d) \Rightarrow \\
&a_0 E(X^n | X > d) + a_1 E(X^{n+1} | X > d) \\
&= n b_0 E(X^{n-1} | X > d) + (n + 1) b_1 E(X^n | X > d) + (n + 2) b_2 E(X^{n+1} | X > d) \\
&\quad + d^n (d^2 - d) h(d) \Rightarrow \\
&(a - 1) E(X^n | X > d) + (2 - a - \beta) E(X^{n+1} | X > d) \\
&= -(n + 1) E(X^n | X > d) + (n + 2) E(X^{n+1} | X > d) \\
&\quad + (n + 2) E(X^{n+1} | X > d) + d^{n+1} (d - 1) h(d).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$(a + \beta + n) E(X^{n+1} | X > d) = (a + n) E(X^n | X > d) - d^{n+1} (d - 1) h(d). \quad (3.25)$$

Τώρα σε αντίθεση με την σχέση (3.24) του προηγούμενου παραδείγματος μπορούμε να υπολογίσουμε την δεσμευμένη μέση τιμή. Επομένως για $n = 0$ η σχέση (3.25) γράφεται ως

$$E(X|X > d) = \frac{a}{a + \beta} - \frac{d(d-1)h(d)}{a + \beta} = E(X) - \frac{d(d-1)h(d)}{a + \beta}. \quad (3.26)$$

Επίσης για $n = 1$ βρίσκεται η δεύτερη ροπή της ουράς που είναι η

$$E(X^2|X > d) = \frac{a + 1}{a + \beta + 1} E(X|X > d) - \frac{d^2(d-1)h(d)}{a + \beta + 1}. \quad (3.27)$$

Τώρα για την διακύμανση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \text{Var}(X|X > d) &= E(X^2|X > d) - [TCE(x)]^2 \Rightarrow \\ &= \frac{a + 1}{a + \beta + 1} \left[\frac{a}{a + \beta} - \frac{d(d-1)h(d)}{a + \beta} \right] - \frac{d^2(d-1)h(d)}{a + \beta - 1} \\ &\quad - \left[\frac{a}{a + \beta} - \frac{d(d-1)h(d)}{a + \beta} \right]^2 \Rightarrow \\ &= \left[\frac{a}{a + \beta} - \frac{d(d-1)h(d)}{a + \beta} \right] \left[\frac{a + 1}{a + \beta + 1} - \frac{a}{a + \beta} + \frac{d(d-1)h(d)}{a + \beta} \right] \\ &\quad - \frac{d^2(d-1)h(d)}{a + \beta - 1}. \end{aligned}$$

Τέλος για $n = 3$ βρίσκουμε την τρίτη που είναι συνάρτηση της δεύτερης και είναι

$$E(X^3|X > d) = \frac{a + 2}{a + \beta + 2} E(X^2|X > d) - \frac{d^3(d-1)h(d)}{a + \beta + 2}.$$

Στην συνέχεια παρουσιάζεται ένας Πίνακας που δίνει την συνάρτηση J της σχέσης (3.8) για τις παραπάνω συνεχείς κατανομές που μελετήθηκαν.

Πίνακας 3.1

Κατανομή της τ.μ. X	$f(x)$	$J(x)$
$N(\mu, \sigma^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], -\infty < x < \infty$	$\frac{x-\mu}{\sigma^2}$
$\text{Gamma}(a, \lambda)$	$\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}, x > 0$	$\frac{\lambda x - (a-1)}{x}$
$\text{IG}(\lambda, a)$	$\sqrt{\frac{\lambda}{2\pi x^3}} e^{-\frac{\lambda(x-a)^2}{2xa^2}}, x > 0$	$\frac{\lambda x + 3xa^2 - \lambda a^2}{2a^2 x^2}$
$\text{Beta}(a, \beta)$	$\frac{1}{B(a, \beta)} x^{a-1} (1-x)^{\beta-1}, 0 < x < 1$	$\frac{(2-a-\beta)x + (a-1)}{x^2 - x}$

Όπως αναφέραμε και στην αρχή αυτής της ενότητας πέρα από τις κατανομές που ανήκουν στην ΕΟΚ, θα ασχοληθούμε και με κατανομές που ανήκουν στην οικογένεια Pearson. Σύμφωνα με τον Cramer (1999), αν μία κατανομή ανήκει στην οικογένεια Pearson τότε η συνάρτηση $J(x)$ του Λήμματος 3.1 παίρνει τη μορφή

$$J(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2},$$

που a_i και b_i είναι κάποιοι σταθεροί συντελεστές. Παρατηρούμε ότι αυτή η κλάση κατανομών εμπεριέχεται στην κλάση της σχέσης (3.12) με $l \leq 1$ και $m \leq 2$. Επίσης είναι φανερό ότι εκτός από την αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή, οι κατανομές που χρησιμοποιήθηκαν στα παραπάνω παραδείγματα ανήκουν και σε αυτήν την κλάση κατανομών. Ακόμα υπάρχουν και κατανομές όπως η Student's t, η Fisher και κάποιες κατανομές Types I-VII που δεν ανήκουν στην ΕΟΚ αλλά ανήκουν στην οικογένεια Pearson. Για περαιτέρω ανάλυση των κατανομών που ανήκουν στην οικογένεια Pearson βλέπε τον Johnson (1995). Στην συνέχεια παρουσιάζονται κάποια παραδείγματα κατανομών που ανήκουν στην οικογένεια Pearson (εκτός από την Weibull). Πιο συγκεκριμένα δημιουργούνται αναδρομικές σχέσεις υπολογισμού δεσμευμένων μέσων τιμών για την Pareto type I, την Pareto type II, την Weibull (που δεν ικανοποιεί το σύστημα Pearson αλλά για $\tau = 1$ ικανοποιεί την σχέση (3.12)) και την Fisher-Snedecor (F-κατανομή). Το επόμενο παράδειγμα λοιπόν αφορά τις κατανομές Pareto type I και Pareto type II.

Παράδειγμα 3.5

Έστω ότι έχουμε την τ.μ. X που ανήκει στην κατανομή Pareto type I με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{a\theta^a}{x^{(a+1)}}, \text{για } x > \theta. \quad (3.28)$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω σ.π.π. έχουμε

$$f'(x) = -a(a+1)\theta^a x^{-(a+2)}.$$

Επομένως λύνοντας την σχέση (3.28) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} J(x) &= -\frac{f'(x)}{f(x)} \\ &= \frac{a(a+1)\theta^a x^{-(a+2)}}{\frac{a\theta^a}{x^{(a+1)}}} \\ &= \frac{a+1}{x}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι στην παραπάνω σχέση ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή. Δηλαδή είναι της μορφής

$$J(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}.$$

Πιο αναλυτικά έχουμε $l = 0$ με $a_0 = a + 1$ και $m = 1$ με $b_0 = 0$ και $b_1 = 1$. Επομένως αφού $l < m$ τότε η κατανομή Pareto type I ανήκει στην οικογένεια Pearson. Συνεπώς από το Θεώρημα 3.1 και πιο συγκεκριμένα από την σχέση (3.14) έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^0 a_k E(X^{k+n}|X > d) &= \sum_{k=0}^1 (k+n)b_k E(X^{k+n-1}|X > d) + d^n Q_m(d)h(d) \\ a_0 E(X^n|X > d) &= nb_0 E(X^{n-1}|X > d) + (n+1)b_1 E(X^n|X > d) + d^n Q_1(d)h(d) \\ (a+1)E(X^n|X > d) &= (n+1)E(X^n|X > d) + d^n dh(d) \\ E(X^n|X > d) &= \frac{a}{a-n} d^n, \quad \text{για } a > n. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Παρατηρούμε ότι για $a \leq n$ η $E(X^n)$ δεν υπάρχει. Στην συνέχεια αυτού του παραδείγματος μελετάμε την κατανομή Pareto type II. Έχουμε δηλαδή την σ.π.π.

$$f(x) = \frac{a\theta^a}{(x+\theta)^{(a+1)}}, \quad \text{για } x > 0. \quad (3.30)$$

Συνεπώς παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση έχουμε ότι

$$f'(x) = -a\theta^a(a+1)(x+\theta)^{-(a+2)}.$$

Επομένως λύνοντας ως προς την σχέση (3.8) προκύπτει ότι

$$J(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{a\theta^a(a+1)(x+\theta)^{-(a+2)}}{\frac{a\theta^a}{(x+\theta)^{(a+1)}}} \\
&= \frac{a+1}{x+\theta}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι και σε αυτήν την περίπτωση ο βαθμός του αριθμητή είναι μικρότερος από τον βαθμό του παρονομαστή δηλαδή είναι της μορφής

$$J(x) = \frac{a_0 + a_1x}{b_0 + b_1x + b_2x^2}.$$

Αυτό προκύπτει βλέποντας ότι στον αριθμητή έχουμε $l = 0$ με $a_0 = a + 1$ και στον παρονομαστή έχουμε $m = 1$ με $b_0 = \theta$ και $b_1 = 1$. Επομένως αφού $l < m$ τότε η Pareto type II ανήκει και αυτή στην οικογένεια Pearson. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1 και πιο συγκεκριμένα από την σχέση (3.14) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^0 a_k E(X^{k+n}|X > d) &= \sum_{k=0}^1 (k+n)b_k E(X^{k+n-1}|X > d) + d^n Q_m(d)h(d) \Rightarrow \\
a_0 E(X^n|X > d) &= nb_0 E(X^{n-1}|X > d) + (n+1)b_1 E(X^n|X > d) \\
&+ d^n Q_1(d)h(d) \Rightarrow \\
(a+1)E(X^n|X > d) &= n\theta E(X^{n-1}|X > d) + (n+1)E(X^n|X > d) \\
&+ d^n(d+\theta)h(d) \Rightarrow \\
E(X^n|X > d) &= \frac{n\theta}{a-n} E(X^{n-1}|X > d) + \frac{a}{a-1} d^n, \text{ για } a > 0. \quad (3.31)
\end{aligned}$$

Επίσης για $n = 1$ βρίσκουμε την TCE_q που είναι η

$$E(X^n|X > d) = \frac{\theta}{a-1} + \frac{a}{a-1} d, \text{ για } a > 1. \quad (3.32)$$

Ακόμα για $d = x_q$ προκύπτει το q ποσοστιαίο σημείο της αξίας σε κίνδυνο (βλέπε Klugman et al. (2012)). Στην συνέχεια ακολουθεί το επόμενο παράδειγμα που αφορά την κατανομή Weibull.

Παράδειγμα 3.6

Σε αυτό το παράδειγμα έχουμε την κατανομή Weibull που είναι μία σημαντική κατανομή στις κατανομές απώλειας και συνεπώς αφορά και την αναλογιστική επιστήμη εξαιτίας του γεγονότος ότι διαθέτει βαριά ουρά όταν $0 < \tau < 1$. Πιο αναλυτικά έχουμε την σ.π.π.

$$f(x) = \frac{\tau}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\tau-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\tau}. \quad (3.33)$$

Σε αυτό το σημείο βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο που είναι

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\tau}{\theta} \left[\left[\left(\frac{x}{\theta} \right)^{\tau-1} \right]' e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\tau} + \left(\frac{x}{\theta} \right)^{\tau-1} \left[e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\tau} \right]' \right] \\ &= \frac{\tau}{\theta} \left[(\tau-1) \frac{x^{\tau-2}}{\theta^{\tau-1}} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\tau} + \left(\frac{x}{\theta} \right)^{\tau-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\tau} \left(-\tau \frac{x^{\tau-1}}{\theta^\tau} \right) \right] \\ &= \frac{\tau}{\theta} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\tau} \left(\frac{x}{\theta} \right)^{\tau-1} \left[(\tau-1)x^{-1} - \tau \frac{x^{\tau-1}}{\theta^\tau} \right]. \end{aligned}$$

Συνεπώς λύνουμε ως προς την σχέση (3.8) και έχουμε ότι

$$J(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\frac{\tau}{\theta^\tau} x^\tau - (\tau-1)}{x}.$$

Παρατηρώντας την παραπάνω σχέση καταλήγουμε ότι είναι παρόμοια με την σχέση

$$J(x) = \frac{a_0 + a_1 x}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}.$$

Επομένως για τον αριθμητή έχουμε $l = \tau$ με $a_0 = -(\tau-1)$ και $a_\tau = \frac{\tau}{\theta^\tau}$. Αντίστοιχα για τον παρονομαστή έχουμε $m=1$ με $b_0 = 0$ και $b_1 = 1$. Όμως παρατηρούμε τελικά ότι για $\tau > 1$ έχουμε $l > m$ και άρα δεν ανήκει στην οικογένεια Pearson. Κάνοντας χρήση την σχέση (3.12) του Θεωρήματος 3.1 προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\tau} a_k E(X^{k+n}|X > d) \\ &= \sum_{k=0}^1 (k+n)b_k E(X^{k+n-1}|X > d) + d^n Q_m(d)h(d) \Rightarrow \\ & \quad a_0 E(X^n|X > d) + a_\tau E(X^{n+\tau}|X > d) \\ &= nb_0 E(X^{n-1}|X > d) \Rightarrow \\ & \quad a_0 E(X^n|X > d) + a_\tau E(X^{n+\tau}|X > d) \\ &= nb_0 E(X^{n-1}|X > d) + (n+1)b_1 E(X^n|X > d) + d^n Q_1(d)h(d) \Rightarrow \\ & \quad -(\tau-1)E(X^n|X > d) + \frac{\tau}{\theta^\tau} E(X^{n+\tau}|X > d) \\ &= (n+1)E(X^n|X > d) + d^n dh(d). \end{aligned}$$

Άρα

$$E(X^{n+\tau}|X > d) = \frac{\theta^\tau}{\tau} (n + \tau)E(X^n|X > d) + d^{n+\tau}. \quad (3.34)$$

Συνεπώς παρατηρούμε ότι η κατανομή Weibull δεν ανήκει στην οικογένεια Pearson αλλά για $\tau > 1$ ικανοποιεί την σχέση (3.12). Για $n = 2$ η σχέση (3.34) γίνεται

$$E(X^{\tau+2}|X > d) = \frac{\theta^2}{\tau} (2 + \tau)E(X^2|X > d) + d^{2+\tau}.$$

Για $n = 3$ η σχέση (3.34) παίρνει την μορφή

$$E(X^{\tau+3}|X > d) = \frac{\theta^3}{\tau} (3 + \tau)E(X^3|X > d) + d^{3+\tau}.$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι και οι δύο πάνω περιπτώσεις αποτελούν μία συνάρτηση της δεσμευμένης n -οστής ροπής και υπολογίζονται γνωρίζοντας την τιμή τ . Το επόμενο παράδειγμα αφορά την κατανομή Fisher-Snedecor.

Παράδειγμα 3.7

Έχουμε την κατανομή Fisher-Snedecor με σ.π.π.

$$f(x) = \frac{1}{B\left(\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} x^{\frac{k_1}{2}-1} \left(1 + \frac{k_1}{k_2}x\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}, x > 0 \quad (3.35)$$

που $k_1 > 0, k_2 > 0$ και $B(\cdot, \cdot)$ είναι η συνάρτηση Βήτα. Παραγωγίζουμε την σχέση (3.35) και έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{B\left(\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} \left[\left(\frac{k_1}{2} - 1\right) x^{\frac{k_1}{2}-2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2}x\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}} \right. \\ &\quad \left. + x^{\frac{k_1}{2}-1} \left(-\frac{k_1+k_2}{2}\right) \left(1 + \frac{k_1}{k_2}x\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}-1} \frac{k_1}{k_2} \right] \Rightarrow \\ &= \frac{1}{B\left(\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} x^{-\frac{k_1}{2}} \left(1 + \frac{k_1}{k_2}x\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}} \left[\left(\frac{k_1}{2} - 1\right) x^{-1} \right. \\ &\quad \left. - \frac{k_1+k_2}{2} \left(1 + \frac{k_1}{k_2}x\right)^{-1} \frac{k_1}{k_2} \right]. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την σχέση (3.8) προκύπτει ότι

$$J(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{k_1 + k_2}{2} \cdot \frac{k_1}{k_2} - \frac{k_1}{2} - 1}{1 + \frac{k_1}{k_2}x} \\
&= \frac{\left(\frac{k_1x}{2} + \frac{k_2x}{2}\right) \frac{k_1}{k_2} - \frac{k_1}{2} + 1 - \frac{k_1^2x}{2k_2} + \frac{k_1}{k_2}x}{x + \frac{k_1}{k_2}x^2} \\
&= \frac{\frac{k_1^2x}{2k_2} + \frac{k_1k_2x}{2k_2} - \frac{k_1}{2} + 1 - \frac{k_1^2x}{2k_2} + \frac{k_1}{k_2}x}{x + \frac{k_1}{k_2}x^2} \\
&= \frac{1 - \frac{k_1}{2} + \frac{k_1}{k_2} \left(1 + \frac{k_2}{2}\right)x}{x + \frac{k_1}{k_2}x^2}.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η παραπάνω σχέση είναι της μορφής

$$J(x) = \frac{a_0 + a_1x}{b_0 + b_1x + b_2x^2}.$$

Επομένως στον αριθμητή έχουμε $l = 1$ με $a_0 = 1 - \frac{k_1}{2}$ και $a_1 = \frac{k_1}{k_2} \left(1 + \frac{k_2}{2}\right)$. Αντίστοιχα στον παρονομαστή έχουμε $m = 2$ με $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ και $b_2 = \frac{k_1}{k_2}$. Επομένως αφού $l < m$ τότε η κατανομή Fisher-Snedecor ανήκει στην οικογένεια Pearson. Άρα από το Θεώρημα 3.1 και πιο συγκεκριμένα από την σχέση (3.12) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^1 a_k E(X^{k+n} | X > d) \\
&= \sum_{k=0}^2 (k+n)b_k E(X^{k+n-1} | X > d) + d^n Q_m(d)h(d) \Rightarrow \\
&\quad a_0 E(X^n | X > d) + a_1 E(X^{n+1} | X > d) \\
&= nb_0 E(X^{n-1} | X > d) + (n+1)b_1 E(X^n | X > d) + (n+2)b_2 E(X^{n+1} | X > d) \\
&\quad + d^n Q_2(d)h(d) \Rightarrow \\
&\quad \left(1 - \frac{k_1}{2}\right) E(X^n | X > d) + \frac{k_1}{k_2} \left(1 + \frac{k_2}{2}\right) E(X^{n+1} | X > d) \\
&= (n+1)E(X^n | X > d) + (n+2) \frac{k_1}{k_2} E(X^{n+1} | X > d) + d^n \left(d + \frac{k_1}{k_2}d^2\right) h(d) \Rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_1}{2}\right) E(X^{n+1}|X > d) - (n+2) \frac{k_1}{k_2} E(X^{n+1}|X > d) \\
&= \left(n + \frac{k_1}{2}\right) E(X^n|X > d) + \left(d^{n+1} + \frac{k_1 d^{n+2}}{k_2}\right) h(d) \Rightarrow \\
& \left(\frac{k_1}{2} - \frac{k_1}{k_2} - \frac{k_1 n}{k_2}\right) E(X^{n+1}|X > d) \\
&= \left(\frac{2n + k_1}{2}\right) E(X^n|X > d) + \left(\frac{k_2 d^{n+1} + k_1 d^{n+2}}{k_2}\right) h(d) \Rightarrow \\
& k_1 \left[\frac{k_2 - 2(n+1)}{2k_2}\right] E(X^{n+1}|X > d) \\
&= \left(\frac{2n + k_1}{2}\right) E(X^n|X > d) + \frac{d^{n+1}(k_2 + k_1 d)}{k_2} h(d).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
E(X^{n+1}|X > d) &= \frac{(2n + k_1)k_2}{k_1[k_2 - 2(n+1)]} E(X^n|X > d) \\
&+ 2d^{n+1} \frac{k_2 + k_1 d}{k_1[k_2 - 2(n+1)]} h(d). \tag{3.36}
\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει βέβαια μόνο όταν $k_2 > 2(n+1)$. Επίσης για $n = 0$ η σχέση (3.36) γίνεται

$$E(X^n|X > d) = \frac{k_2}{k_2 - 2} + 2d \frac{k_2 + k_1 d}{k_1(k_2 - 2)} h(d), \quad \text{για } k_2 > 2.$$

Επίσης για $d = 0$ η παραπάνω σχέση γράφεται ως

$$E(X) = \frac{k_2}{k_2 - 2}.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί και από τον Johnson (1995). Για περισσότερα παραδείγματα πάνω στην κατανομή Fisher-Snedecor (F-κατανομή) βλέπε τον Phillips (1982). Στον παρακάτω πίνακα δίνεται η συνάρτηση J για κάθε μία από τα προηγούμενα παραδείγματα και στην συνέχεια παρουσιάζεται η επόμενη ενότητα στην οποία αναλύεται η διακριτή περίπτωση.

Πίνακας 3.2

Κατανομή της τ.μ. X	$f(x)$	$J(x)$
Pareto type I (a, θ)	$\frac{a\theta^a}{x^{(a+1)}}, \text{για } x > \theta$	$\frac{a+1}{x}$
Pareto type II (a, θ)	$\frac{a\theta^a}{(x+\theta)^{(a+1)}}, \text{για } x > 0$	$\frac{a+1}{x+\theta}$
Weibull (θ, τ)	$\frac{\tau}{\theta} \left(\frac{x}{\theta}\right)^{\tau-1} e^{-\left(\frac{x}{\theta}\right)^\tau}$	$\frac{\frac{\tau}{\theta^\tau} x^\tau - (\tau-1)}{x}$
Fisher – Snedecor (k_1, k_2)	$\frac{1}{B\left(\frac{k_1}{2}, \frac{k_2}{2}\right)} \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} x^{-\frac{k_1}{2}} \left(1 + \frac{k_1}{k_2}x\right)^{-\frac{k_1+k_2}{2}}$	$\frac{1 - \frac{k_1}{2} + \frac{k_1}{k_2} \left(1 + \frac{k_2}{2}\right)x}{x + \frac{k_1}{k_2}x^2}$

3.5 Η ταυτότητα Stein στην διακριτή περίπτωση

Στην συγκεκριμένη ενότητα αναλύεται το Λήμμα 3.1 στην περίπτωση των διακριτών τυχαίων μεταβλητών και πιο συγκεκριμένα στην περίπτωση μίας τ.μ. N με στήριγμα $S \subseteq \{0, 1, 2, \dots\}$. Στην αναλογιστική επιστήμη σημαντικό ρόλο παίζει η συχνότητα της κατανομής. Αρχικά αναφέρεται ότι στην διακριτή περίπτωση υπάρχει η μάζα πιθανότητας (μ.π.) p για μία τ.μ. N με στήριγμα S . Συγκεκριμένα, για $k \in S$, έχουμε

$$p(k) = P(N = k).$$

Στην επόμενη σχέση δίνεται μία σχέση που αναφέρεται στο άρθρο των Landsman και Valdez (2016) και αφορά την μεταβολή της μ.π.. Δηλαδή έχουμε

$$p(x, x+1) = \frac{p(x+1) - p(x)}{x+1-x} = p(x+1) - p(x) = \Delta p(x). \quad (3.37)$$

Όπως αναφέραμε η χρήση διακριτών κατανομών είναι αρκετά σημαντική στην αναλογιστική επιστήμη και μάλιστα οι Chiragien και Landsman (2007) εφάρμοσαν κάποιες μεθόδους κατανομής κεφαλαίου με την χρήση αυτών. Χρησιμοποιώντας λόγους μεταβολών λοιπόν, όπως αυτόν της σχέσης (3.37), παραθέτουμε το ακόλουθο λήμμα που συνοψίζει μερικές σχέσεις που αφορούν την ταυτότητα του Stein στην διακριτή περίπτωση. Αναφέρεται ότι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής για μία τ.μ. N δίνεται από τον τύπο $\bar{F}(x) = P(N > x)$.

Λήμμα 3.2. Έχω $g: S^* \rightarrow R$ μία συνάρτηση με $S^* = \{-1\} \cup S$ που S είναι το πεδίο ορισμού της τ.μ. N και να ικανοποιεί της σχέσεις

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x)|g(x)| < \infty \quad \text{και} \quad \sum_{x=0}^{\infty} p(x+1)|g(x)| < \infty.$$

Ορίζουμε την συνάρτηση J ώστε

$$J(x) = -\frac{p(x; x+1)}{p(x)} = -\frac{\Delta p(x)}{p(x)} = \frac{p(x) - p(x+1)}{p(x)},$$

Για κάθε $x \in S$. Τότε για κάθε $d \in S^*$ έχουμε

$$E[\Delta g(N-1) | N > d] = E[J(N)g(N) | N > d] - g(d) \frac{p(x+1)}{\bar{F}(d)}. \quad (3.38)$$

Απόδειξη

Λύνουμε την σχέση

$$\begin{aligned} E[J(N)g(N) | N > d] &= \sum_{x>d} J(x)g(x) \frac{p(x)}{\bar{F}(d)} = \sum_{x>d} \frac{g(x)p(x)}{\bar{F}(d)} - \sum_{x>d} \frac{g(x)p(x+1)}{\bar{F}(d)} \\ &= \sum_{x>d} \frac{g(x)p(x)}{\bar{F}(d)} - \sum_{x>d+1} \frac{g(x-1)p(x)}{\bar{F}(d)} \\ &= \sum_{x>d} \frac{g(x)p(x)}{\bar{F}(d)} - \sum_{x>d} g(x-1) \frac{p(x)}{\bar{F}(d)} + g(d) \frac{p(d+1)}{\bar{F}(d)} \\ &= \sum_{x>d} [g(x) - g(x-1)] \frac{p(x)}{\bar{F}(d)} + g(d) \frac{p(d+1)}{\bar{F}(d)}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η πρώτη σχέση του δεξιού μέρους της παραπάνω σχέσης μπορεί να γραφτεί και ως

$$\sum_{x>d} [g(x) - g(x-1)] \frac{p(x)}{\bar{F}(d)} = \sum_{x>d} \Delta g(x-1) \frac{p(x)}{\bar{F}(d)}.$$

Συνεπώς με αντικατάσταση της παραπάνω σχέσης στην προηγούμενη προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα. ■

Στην συνέχεια αναφέρεται ένα παράδειγμα που αφορά την σχέση (3.38). Αν δηλαδή έχουμε $g(x) = x$ και $d = -1$ τότε από την σχέση (3.38) προκύπτει ότι

$$E[\Delta g(N-1)] = E[J(N)g(N)] - g(-1)p(0).$$

Εφαρμόζουμε τώρα το παραπάνω λήμμα σε διακριτές κατανομές που ανήκουν στην κλάση $(a, b, 0)$ των διακριτών κατανομών. Τα μέλη αυτής της κλάσης ικανοποιούν την αναδρομική σχέση

$$\frac{p(x+1)}{p(x)} = a + \frac{b}{x+1}, \quad \text{για } x = 0, 1, \dots \quad (3.39)$$

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται τα a και b για την Διωνυμική κατανομή, την κατανομή Poisson και την αρνητική Διωνυμική. Παρόλο που η Γεωμετρική κατανομή ανήκει σε αυτήν την κλάση κατανομών, δεν την αναφέρουμε στον παρακάτω πίνακα γιατί ουσιαστικά αποτελεί μία ειδική περίπτωση της αρνητικής Διωνυμικής θέτοντας $a = 1$. Επίσης οι παρακάτω διακριτές είναι πολύ σημαντικές και μας απασχολούν σε μεγάλο βαθμό στην αναλογιστική επιστήμη. Για περισσότερα παραδείγματα βλέπε τον Klugman et al. (2012).

Πίνακας 3.3

Κατανομή της τ.μ. X	$p(x)$	a	b
Binomial (m, q)	$\binom{m}{x} q^x (1 - q)^{m-x} \quad x = 0, 1, \dots, m$	$-\frac{q}{1 - q}$	$(m + 1) \frac{q}{1 - q}$
Poisson (λ)	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!} \quad x = 0, 1, \dots$	0	λ
NB (p, α)	$\frac{\Gamma(x + \alpha)}{\Gamma(\alpha)x!} p^\alpha (1 - p)^x \quad x = 0, 1, \dots$	$1 - p$	$(\alpha - 1)(1 - p)$

Στην συνέχεια οι Landsman και Valdez (2016) υπολόγισαν την συνάρτηση J που αναφέραμε προηγουμένως, για μέλη της κλάσης $(a, b, 0)$. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned} J(x) &= \frac{p(x) - p(x+1)}{p(x)} = 1 - \frac{p(x+1)}{p(x)} \\ &= 1 - a - \frac{b}{x+1} = \frac{(1-a)(x+1) - b}{x+1} \\ &= \frac{(1-a)x + (1-a-b)}{x+1}. \end{aligned}$$

Στην παραπάνω σχέση θέτοντας $a^* = 1 - a$ και $b^* = 1 - a - b$ η συνάρτηση J παίρνει την μορφή

$$J(x) = \frac{a^*x + b^*}{x+1}, \quad (3.40)$$

μέσω της οποίας μπορούμε να υπολογίσουμε αναδρομικές σχέσεις για να βρούμε δεσμευμένες τιμές και ροπές για την συγκεκριμένη κλάση κατανομών. Το επόμενο θεώρημα αποτελεί μία αναδιατύπωση του Θεωρήματος 3.1 απλά σε αυτήν την περίπτωση ισχύει στην διακριτή περίπτωση.

Θεώρημα 3.2. Υποθέτουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε την συνάρτηση J ως

$$J(x) = \frac{a^*x + b^*}{x + 1}.$$

Τότε επιλέγοντας

$$g(x) = x^n(x + 1),$$

και υπό την προϋπόθεση ότι $E(N^{n+1}) < \infty$ προκύπτει η αναδρομική σχέση για δεσμευμένες ροπές:

$$E(N^{n+1}|N > d) = \frac{1}{a^*}E[P_n^*(N)|N > d] - \frac{b^*}{a^*}E(N^n|N > d) + (d + 1)d^n \frac{1}{a^*} \frac{p(d + 1)}{\bar{F}(d)},$$

όπου

$$P_n^*(x) = x^n(x + 1) - x(x - 1)^n.$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας ότι

$$\Delta g(N - 1) = N^n(N + 1) - (N - 1)^n N = P_n^*(N).$$

Επίσης παίρνουμε ότι

$$J(N)g(N) = \frac{a^*N + b^*}{N + 1} N^n(N + 1) = a^*N^{n+1} + b^*N^n.$$

Τότε σύμφωνα με το Λήμμα 3.2 προκύπτει ότι

$$E[\Delta g(N - 1)|N > d] = E[P_n^*(N)|N > d]$$

$$E[J(N)g(N)|N > d] = a^*E[N^{n+1}|N > d] + b^*E[N^n|N > d]$$

$$E[N^{n+1}|N > d] = \frac{1}{a^*}E[J(N)g(N)|N > d] + \frac{b^*}{a^*}E[N^n|N > d]$$

Από την σχέση (3.38) και για $g(d) = d^n(d + 1)$ προκύπτει το επιθυμητό αποτέλεσμα. ■

Στην συνέχεια αναφέρονται δύο εφαρμογές που αφορούν το Θεώρημα 3.2 και πιο συγκεκριμένα κάποια αποτελέσματα αν θέσουμε $n = 0$ και $n = 1$. Από το Θεώρημα 3.2 λοιπόν, για $n = 0$ προκύπτει $P_0^*(x) = 1$. Επίσης αυτό σημαίνει ότι θα έχουμε

$$E(N|N > d) = \frac{1 - b^*}{a^*} + \frac{1}{a^*}(d + 1) \frac{p(d + 1)}{\bar{F}(d)}.$$

Επίσης για $d = -1$ παίρνουμε την μέση τιμή της κλάσης $(a, b, 0)$. Δηλαδή έχουμε

$$E(N) = \mu = \frac{1 - b^*}{a^*}. \quad (3.41)$$

Ακόμα αν θέσουμε

$$r(d) = (d + 1) \frac{p(d + 1)}{\bar{F}(d)}, \quad (3.42)$$

τότε μπορούμε να ξαναγράψουμε την σχέση της μέσης τιμής της ουράς ως

$$E(N|N > d) = \mu + \frac{1}{a^*} r(d). \quad (3.43)$$

Τώρα για $n = 1$ έχουμε $P_1^*(x) = x(x + 1) - x(x - 1) = 2x$. Επομένως υπολογίζουμε ότι

$$\begin{aligned} E(N^2|N > d) &= \frac{2}{a^*} E(N|N > d) - \frac{b^*}{a^*} E(N|N > d) + \frac{1}{a^*} d(d + 1) \frac{p(d + 1)}{\bar{F}(d)} \\ &= \frac{2 - b^*}{a^*} E(N|N > d) + \frac{1}{a^*} d(d + 1) \frac{p(d + 1)}{\bar{F}(d)} \\ &= \frac{2 - b^*}{a^*} E(N|N > d) + \frac{d}{a^*} r(d). \end{aligned}$$

Η σχέση $\mu = (1 - b^*)/a^*$ μπορεί να γραφτεί και ως $(2 - b^*)/a^* = \mu + 1/a^*$. Επομένως προκύπτει μία σχέση για την δεύτερη ροπή που είναι η

$$\begin{aligned} E(N^2|N > d) &= \left(\mu + \frac{1}{a^*}\right) \left(\mu + \frac{1}{a^*} r(d)\right) + \frac{d}{a^*} r(d) \\ &= \mu \left(\frac{1}{a^*} + \mu\right) + \frac{r(d)}{a^*} \left(\frac{1}{a^*} + \mu\right) + \frac{d}{a^*} r(d) \\ &= \mu \left(\frac{1}{a^*} + \mu\right) + \left(\mu + d + \frac{1}{a^*}\right) \frac{r(d)}{a^*}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Στην συνέχεια ακολουθεί ένα πόρισμα που μας δίνει την δεσμευμένη διακύμανση για μία διακριτή κατανομή με την βοήθεια των σχέσεων (3.43) και (3.44).

Πόρισμα 3.1. Σύμφωνα με τις σχέσεις (3.43) και (3.44) προκύπτει η δεσμευμένη διακύμανση που δίνεται από τον τύπο

$$Var(N|N > d) = \sigma^2 + \left[d - \mu + \frac{1}{a^*} - \frac{r(d)}{a^*} \right] \frac{r(d)}{a^*}, \quad (4.45)$$

που $\sigma^2 = \mu/a^* = Var(N)$ και $r(d)$ είναι η έκφραση που δίνεται από την σχέση (4.42).

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της διακύμανσης αλλά και τις σχέσεις (3.43) και (3.44) προκύπτει ότι

$$Var(N|N > d) = E(N^2|N > d) - [E(N|N > d)]^2$$

$$\begin{aligned}
&= \mu \left(\frac{1}{a^*} + \mu \right) + \left(\mu + d + \frac{1}{a^*} \right) \frac{r(d)}{a^*} - \left(\mu + \frac{1}{a^*} r(d) \right)^2 \\
&= \sigma^2 + \mu^2 + \sigma^2 r(d) + \frac{dr(d)}{a^*} + \frac{r(d)}{a^*} - \mu^2 - 2\sigma^2 r(d) - \frac{r^2(d)}{a^{*2}} \\
&= \sigma^2 - \sigma^2 r(d) + \frac{r(d)}{a^*} \left[d + \frac{1}{a^*} - \frac{r(d)}{a^*} \right] \\
&= \sigma^2 + \frac{r(d)}{a^*} \left[d + \frac{1}{a^*} - \mu - \frac{r(d)}{a^*} \right].
\end{aligned}$$

■

Στην συνέχεια ακολουθεί η επόμενη ενότητα στην οποία δίνονται κάποια παραδείγματα που αφορούν την διακριτή περίπτωση.

3.6 Παραδείγματα στην διακριτή περίπτωση

Σε αυτήν την ενότητα αναπτύσσονται ορισμένα παραδείγματα που σχετίζονται με την διακριτή περίπτωση. Πιο συγκεκριμένα αναφερόμαστε στις κατανομές Poisson, Διωνυμική και Αρνητική Διωνυμική οι οποίες αποτελούν μέλη της κλάσης $(a, b, 0)$. Στα παρακάτω παραδείγματα χρησιμοποιούνται ορισμένα αποτελέσματα του Πίνακα 3.3 της προηγούμενης ενότητας καθώς και οι σχέσεις (3.43), (3.44) και (3.45). Επίσης πραγματοποιείται και μία αναφορά στην κλάση $(a, b, 1)$ και δημιουργούνται μερικές αναδρομικές σχέσεις με αυτήν. Στην συνέχεια αναφέρεται το πρώτο παράδειγμα αυτής της ενότητας που αφορά την κατανομή Poisson.

Παράδειγμα 3.8

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε την κατανομή Poisson στην οποία ισχύει $E(N) = Var(N) = \lambda$. Επίσης έχουμε ότι $a^* = 1 - a = 1 - 0 = 1$. Τώρα σύμφωνα με την σχέση (3.43) μπορούμε να γράψουμε ότι

$$E(N|N > d) = E(N) + \frac{1}{a^*} r(d) = \lambda + r(d).$$

Για την δεύτερη ροπή από την σχέση (3.44) έχουμε

$$E(N^2|N > d) = \lambda(1 + \lambda) + (\lambda + d + 1)r(d).$$

Τέλος για την διακύμανση προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
Var(N|N > d) &= E(N^2|N > d) - [E(N|N > d)]^2 \\
&= \lambda(1 + \lambda) + (\lambda + d + 1)r(d) - [\lambda + r(d)]^2 \\
&= \lambda + \lambda^2 + \lambda r(d) + dr(d) + r(d) - \lambda^2 - 2\lambda r(d) - r^2(d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda - \lambda r(d) + dr(d) + r(d) - r^2(d) \\
&= \lambda + [d + 1 - \lambda - r(d)]r(d).
\end{aligned}$$

Στην συνέχεια ακολουθεί το επόμενο παράδειγμα που αφορά την Διωνυμική κατανομή.

Παράδειγμα 3.9

Στην συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε την Διωνυμική κατανομή δηλαδή $X \sim B(m, q)$ στην οποία ισχύει $E(N) = mq$, $Var(N) = mq(1 - q)$ και $a^* = 1 - a = 1 + \frac{q}{1-q} = \frac{1}{1-q}$. Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.43) γράφουμε ότι

$$E(N|N > d) = E(N) + \frac{1}{a^*}r(d) = mq + (1 - q)r(d).$$

Για την δεύτερη ροπή σύμφωνα με την σχέση (3.44) έχουμε

$$\begin{aligned}
E(N^2|N > d) &= mq \left(\frac{1}{\frac{1}{1-q}} + mq \right) + \left(mq + d + \frac{1}{\frac{1}{1-q}} \right) \frac{r(d)}{\frac{1}{1-q}} \\
&= mq(1 - q + mq) + (mq + d + 1 - q)(1 - q)r(d).
\end{aligned}$$

Τέλος για την διακύμανση ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
Var(N|N > d) &= E(N^2|N > d) - [E(N|N > d)]^2 \Rightarrow \\
&= mq(1 - q + mq) + (mq + d + 1 - q)(1 - q)r(d) \\
&\quad - [mq + (1 - q)r(d)]^2 \Rightarrow \\
&= mq(1 - q) + m^2q^2 + (mq + d + 1 - q)(1 - q)r(d) - m^2q^2 \\
&\quad - 2mq(1 - q)r(d) - (1 - q)^2r^2(d) \Rightarrow \\
&= mq(1 - q) \\
&\quad + [mq + d + 1 - q - 2mq - (1 - q)r(d)](1 - q)r(d) \Rightarrow \\
&= mq(1 - q) + [1 - q - mq + d - (1 - q)r(d)](1 - q)r(d).
\end{aligned}$$

Στην συνέχεια έχουμε το επόμενο παράδειγμα που αφορά την αρνητική Διωνυμική κατανομή.

Παράδειγμα 3.10

Σε αυτό το παράδειγμα έχουμε την Αρνητική Διωνυμική κατανομή δηλαδή $X \sim NB(p, \alpha)$ με $E(N) = \alpha q/p$ που $q = 1 - p$ και $Var(N) = E(N)/p = \alpha q/p^2$. Επίσης ισχύει ότι $a^* = 1 - a = 1 - (1 - p)$. Συνεπώς σύμφωνα με την σχέση (3.43) προκύπτει ότι

$$E(N|N > d) = E(N) + \frac{1}{a^*}r(d) = \frac{\alpha q}{p} + \frac{1}{p}r(d).$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (3.44) για την δεύτερη ροπή προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} E(N^2|N > d) &= E(N) \left(\frac{1}{a^*} + E(N) \right) + \left(E(N) + d + \frac{1}{a^*} \right) \frac{r(d)}{a^*} \\ &= \frac{\alpha q}{p} \left(\frac{1}{p} + \frac{\alpha q}{p} \right) + \left(\frac{\alpha q}{p} + d + \frac{1}{p} \right) \frac{r(d)}{p} \\ &= \frac{\alpha q}{p^2} (1 + \alpha q) + \left(\frac{\alpha q + 1}{p} + d \right) \frac{r(d)}{p}. \end{aligned}$$

Όσον αφορά την διακύμανση ισχύει ότι

$$\begin{aligned} Var(N|N > d) &= E(N^2|N > d) - [E(N|N > d)]^2 \\ &= \frac{\alpha q}{p^2} (1 + \alpha q) + \left(\frac{\alpha q + 1}{p} + d \right) \frac{r(d)}{p} - \left[\frac{\alpha q}{p} + \frac{1}{p} r(d) \right]^2 \\ &= \frac{\alpha q}{p^2} + \frac{\alpha^2 q^2}{p^2} + \frac{(\alpha q + 1)r(d)}{p^2} + \frac{dr(d)}{p} - \frac{\alpha^2 q^2}{p^2} - \frac{2\alpha q r(d)}{p} - \frac{r^2(d)}{p^2} \\ &= \frac{\alpha q}{p^2} + \left[d - \frac{\alpha q}{p} + \frac{1}{p} - \frac{r(d)}{p} \right] \frac{r(d)}{p}. \end{aligned}$$

Στην συνέχεια γίνεται μία αναφορά στην κλάση $(a, b, 1)$. Σε αυτήν την περίπτωση κρίνεται απαραίτητη και η ύπαρξη της κλάσης $(a, b, 0)$. Αν δηλαδή $P(N = k) = p_k$ είναι η πιθανότητα για την κλάση $(a, b, 0)$ τότε για την κλάση $(a, b, 1)$ έχουμε

$$\tilde{p}(0) = p_0^M, \quad (3.46)$$

που p_0^M είναι μία σταθερά. Ο όρος M είναι για να δηλώσουμε την τροποποίηση. Αν $p(0) = 0$, αναγόμεστε στην κλάση $(a, b, 0)$. Αν $p(0) > 0$ έχουμε σ.π.π.

$$\tilde{p}(k) = cp_k = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} p_k, \quad \text{για } k > 0, \quad (3.47)$$

όπου $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{p}(k) = 1$. Συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε και την

$$\tilde{J}(k) = 1 - \frac{\tilde{p}(k+1)}{\tilde{p}(k)} = 1 - \frac{p_{k+1}}{p_k} = J(k), \quad \text{για } k > 0. \quad (3.48)$$

Για $k = 0$ έχουμε

$$\tilde{J}(0) = 1 - \frac{p(1)}{\tilde{p}(0)}$$

Οπότε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2, και ακολουθώντας τη διαδικασία υπολογισμού της αναδρομικής σχέσης για την κλάση $(a, b, 0)$ μπορούμε να δείξουμε μια αναδρομική σχέση υπολογισμού μέσω τιμών και για την κλάση $(a, b, 0)$. Πράγματι, από το Λήμμα 3.2 ισχύει

$$E[\Delta g(N-1)|N > d] = E[\tilde{J}(N)g(N)|N > d] - g(d) \frac{p(d+1)}{\bar{F}(d)}.$$

όπου $g(d) = d^n(d+1)$. Έστω

$$P_n^*(x) = x^n(x+1) - x(x-1)^n.$$

Τότε γράφουμε

$$\Delta g(N-1) = N^n(N+1) - (N-1)^n N = P_n^*(N).$$

Για $n = 0$, έχουμε $g(0) = 1$. Για $d = -1$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} E[\tilde{J}(N)g(N)|N > -1] &= E[\tilde{J}(0)g(0)] + E[J(N)g(N)|N > 0] \\ &= 1 - \frac{p(1)}{\tilde{p}(0)} + a^* E[N|N > 0] + b^* \\ &= 1 - \frac{p(1)}{\tilde{p}(0)} + a^* E[N] + b^* \end{aligned}$$

Συνεπώς, για $n = 0, d = -1$ έχουμε

$$\begin{aligned} E[1] &= E[\tilde{J}(N)g(N)|N > -1] - g(-1) \frac{p(-1+1)}{\bar{F}(-1)} = \\ &= 1 - \frac{p(1)}{\tilde{p}(0)} + a^* E[N] + b^*. \end{aligned}$$

Άρα η μέση τιμή είναι

$$E[N] = \frac{1}{a^*} \frac{p(1)}{\tilde{p}(0)} - \frac{b^*}{a^*}.$$

Για $d \geq 0$, έχουμε τον ίδιο τύπο με την κλάση $(a, b, 0)$, αφού η συνάρτηση J είναι κοινή για τις δύο κλάσεις σε αυτή τη περίπτωση. Άρα, για $d \geq 0$ έχουμε

$$E(N|N > d) = \frac{1-b^*}{a^*} + \frac{1}{a^*} (d+1) \frac{p(d+1)}{\bar{F}(d)}.$$

και όπως είδαμε

$$\mu = E[N] = \frac{1}{a^*} \frac{p(1)}{\tilde{p}(0)} - \frac{b^*}{a^*}.$$

Αν

$$r(d) = (d + 1) \frac{p(d + 1)}{\bar{F}(d)} - \frac{p(1)}{\tilde{p}(0)},$$

έχουμε

$$E(N|N > d) = \mu + \frac{1}{a^*} r(d).$$

Για $n \geq 1$, ο τύπος παραμένει ίδιος με τη κλάση $(a, b, 0)$ αφού σε αυτή τη περίπτωση έχουμε $g(x) = x^n(x + 1)$, άρα $g(0) = 0$. Οπότε συμπεραίνουμε

$$\begin{aligned} E[\tilde{J}(N)g(N)|N > -1] &= E[\tilde{J}(0)g(0)] + E[J(N)g(N)|N > 0] \\ &= E[J(N)g(N)|N > 0]. \end{aligned}$$

Άρα, για $n \geq 1$

$$E(N^{n+1}|N > d) = \frac{1}{a^*} E[P_n^*(N)|N > d] - \frac{b^*}{a^*} E(N^n|N > d) + (d + 1)d^n \frac{1}{a^*} \frac{p(d + 1)}{\bar{F}(d)},$$

και

$$E(N|N > d) = E[N] + \frac{1}{a^*} r(d),$$

όπου

$$r(d) = (d + 1) \frac{p(d + 1)}{\bar{F}(d)} - \frac{p(1)}{\tilde{p}(0)}$$

Για επιπλέον πληροφορίες για την κλάση $(a, b, 1)$ βλέπε τον Klugman (2012). Στην συνέχεια γίνονται κάποιες αναφορές στις σημειώσεις του κεφαλαίου 'Αναδρομικές μέθοδοι υπολογισμού σύνθετων κατανομών του Χατζηκωνσταντινίδη (2015) για τα μέλη των παραπάνω κλάσεων και δίνεται ένας επιπλέον ορισμός για τα μέλη που ανήκουν στην κλάση $(a, b, 1)$. Στην συνέχεια συμβολίζουμε με $\mathcal{R}(a, b, 0)$ τα μέλη που ανήκουν στην κλάση $(a, b, 0)$ και με $\mathcal{R}(a, b, 1)$ τα μέλη που ανήκουν στην κλάση $(a, b, 1)$.

Ορισμός 3.1. Η διακριτή τ.μ. $N \in \{0, 1, 2, \dots\}$ θα λέμε ότι ανήκει στην οικογένεια κατανομών $(a, b, 1)$ αν η σ.π.π. $p_n = \Pr(N = n)$ ικανοποιεί την παρακάτω αναδρομική σχέση πρώτης τάξης

$$p_n = \left(a + \frac{b}{n}\right) p_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (3.49)$$

που a και b είναι κατάλληλες σταθερές και $p_n = 0$ για κάθε $n < 0$.

Τα μέλη της κλάσης $(a, b, 0)$ ικανοποιούν την παραπάνω σχέση απλά για $n = 1, 2, 3, \dots$. Δηλαδή ισχύει ότι

$$\mathcal{R}(a, b, 0) \subset \mathcal{R}(a, b, 1).$$

Επομένως η κλάση $(a, b, 1)$ περιέχει ως μέλη της τις κατανομές Poisson, Διωνυμική και αρνητική Διωνυμική, οι οποίες εξετάστηκαν προηγουμένως ως παραδείγματα. Επίσης μία κατανομή που ανήκει στην κλάση $(a, b, 1)$ είναι και η λογαριθμοκανονική κατανομή. Παρακάτω παρουσιάζεται ο ορισμός μία τ.μ. N που ανήκει στην λογαριθμική κατανομή και ταυτόχρονα υπολογίζονται τα a και b με βάση την σχέση (3.49).

Ορισμός 3.2. Η θετική ακέραια τ.μ. $N \in \{1, 2, 3, \dots\}$ έχει την λογαριθμική κατανομή με παράμετρο q που $0 < q < 1$ αν έχει σ.π.π.

$$p_n = \frac{q^n}{-n \ln(1 - q)}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

και συμβολικά γράφουμε $N \sim LS(q)$.

Από τον παραπάνω ορισμό λοιπόν έπεται ότι

$$p_{n-1} = \frac{q^{n-1}}{-(n-1) \ln(1 - q)}, \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

οπότε για $n = 2, 3, 4, \dots$ ισχύει ότι

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = \frac{n-1}{n} q = q - \frac{q}{n}, \quad \text{για } n = 2, 3, 4, \dots$$

Επομένως αν η τ.μ. $N \sim LS(q)$ τότε η τ.μ. $N \in \mathcal{R}(a, b, 1)$ με $a = q$ και $b = -q$.

Βιβλιογραφία

Ελληνική βιβλιογραφία

Χατζηκωνσταντινίδης Ε. (2015). Σημειώσεις στο μάθημα : Θεωρία Κινδύνου 1, Πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών : Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική κινδύνου.

Ξενόγλωσση βιβλιογραφία

1. Apostol T.M. (1977). *Mathematical Analysis*. Second Edition, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts.
2. Cacoullos, T. and V. Papathanasiou (1989). Characterizations of distributions by variance bounds. *Statistics & Probability Letters*, 7, 351-356.
3. Cacoullos, T. and Papathanasiou, V. (1997). Characterizations of distributions by generalizations of variance bounds and simple proofs of the CLT. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 63, 157-171.
4. Cacoullos, T. (1982). On upper and lower bounds for the variance of a function of a random variable. *The Annals of Probability*, 10, 799-809.
5. Cacoullos, T. and Papathanasiou, V. (1985). On upper bounds for the variance of functions of random variables. *Statistics & Probability Letters*, 3, 175-184.
6. Chernoff, H. (1981). A note on an inequality involving the normal distribution. *The Annals of Probability*, 9, 533-535.
7. Chiragiev, A. and Landsman, Z. (2007). Multivariate Pareto portfolios: TCE-based capital allocation and divided differences. *Scandinavian Actuarial Journal*, 4, 261-280.
8. Hamada, M. and Valdez, E. A. (2008). CAPM and option pricing with elliptically contoured distributions. *Journal of Risk and Insurance*, 75, 387-409.
9. Hürlimann, W. (2002). "On a classical portfolio problem: Diversification, Comparative Static and Other Issues". In *Proceedings of the ASTIN Colloquium*, Tromso, Norway.
10. Ingersoll, J. E. (1987). *Theory of financial decision making* (Vol. 3). New York: Rowman & Littlefield publishers.
11. Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous univariate distributions, volume 2* (Vol. 289), John Wiley & Sons.
12. Kattumannil, S. K. (2009). On Stein's identity and its applications. *Statistics & Probability Letters*, 79, 1444-1449.
13. Klugman, S. A., Panjer, H. H. and Willmot, G. E. (2012). *Loss models: from data to decisions* (Vol. 715), John Wiley & Sons.
14. Landsman, Z. (2006). On the generalization of Stein's Lemma for elliptical class of distributions. *Statistics & Probability Letters*, 76, 1012-1016.

15. Landsman, Z. and Nešlehová, J. (2008). Stein's Lemma for elliptical random vectors". *Journal of Multivariate Analysis*, 99, 912-927.
16. Landsman Z. and Valdez E. A. (2016). The Tail Stein's Identity with Applications to Risk Measures. *North American Actuarial Journal*, 20, 313-326.
17. Nair, N. U. and Sankaran, P. G. (1991). Characterization of the Pearson family of distributions. *IEEE Transactions on Reliability*, 40, 75-77.
18. Papadatos, N. and V. Papathanasiou (2001). Unified variance bounds and a Stein-type identity. *Probability and Statistical Models with Applications*, 87-100.
19. Sankaran, P. G., Nair, N. U. and Sindhu, T. K. (2003). A generalized Pearson system useful in reliability analysis. *Statistical Papers*, 44, 125-130.
20. Steele, J. M. (2004). *The Cauchy-Schwarz master class: an introduction to the art of mathematical inequalities*. Cambridge University Press.
21. Stein, C. M. (1981). Estimation of the mean of a multivariate normal distribution. *The Annals of Statistics*, 9(6), 1135-1151.
22. Tzifetas, G. N. (1989). A formula for the Gini coefficient and its decomposition. *Biometrical Journal*, 31, 961-967.
23. Zhang, L. (2007). Sample mean and sample variance: Their covariance and their (in) dependence. *The American Statistician*, 61, 159-160.

