Π Α Ν Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Ι Ο Π Ε Ι Ρ Α Ι Ω Σ

Τ Μ Η Μ Α Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ
Κ Α Ι Α Σ Φ Α Λ Ι Σ Τ Ι Κ Η Σ Ε Π Ι Σ Τ Η Μ Η Σ

Μ Ε Τ Α Π Τ Υ Χ Ι Α Κ Ο Π Ρ Ο Γ Ρ Α Μ Μ Α
Σ Π Ο Υ Δ Ω Ν
Σ Τ Η Ν Ε Φ Α Ρ Μ Ο Σ Μ Ε Ν Η Σ Τ Α Τ Ι Σ Τ Ι Κ Η

Τιμολόγηση Αριθμητικών Ασιατικών Δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού-τύπου

Σπυρίδων Πετρόπουλος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Πειραιάς
Οκτώβριος 2006

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- ………………………………. (Επιβλέπων)
- ……………………………….
- ……………………………….

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
APPLIED STATISTICS

Pricing of European-style Arithmetic Asian options

By

Spiridon Petropoulos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics

Piraeus, Greece
October 2006

Στους γονείς μου,
Πέτρο και Ελένη,
στον παππού μου Παντελή,
στην γιαγιά μου Ιλιάδα,
στον θείο μου Χρήστο,
και στα αδέρφια μου,
Παντελή και Ιλιάδα

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στην κο. Χατζηκωνσταντινίδη Ευστάθιο, Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύ σημαντική καθοδήγηση, υποστήριξη, βοήθεια και υπομονή σε όλη την διάρκεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κ. Αρτίκη, Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, και τον κ. Πιτσέλη, Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος θέλω να ευχαριστήσω όλους τους φίλους μου, και ιδιαίτερα τους Βασίλη και Παναγιώτη Πιέρρο και Βαγγέλη Σταυρόπουλο, για την αμέριστη συμπαράσταση τους τελευταίους μήνες.

Πετρόπουλος Σπυρίδων

Οκτώβριος 2006

Περίληψη

Ο στόχος της εργασίας είναι να αναπτυχθούν και να συγκριθούν φράγματα για την τιμολόγηση των ευρωπαϊκών διακριτών Ασιατικών δικαιωμάτων με σταθερή και κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης. Λόγω της δομής εξάρτησης μεταξύ των τιμών της υποκείμενης μετοχής, δεν υπάρχει κανένας απλός-ακριβής τύπος τιμολόγησης κατά την προσέγγιση των Black και Scholes. Στην πρόσφατη βιβλιογραφία, προτείνονται διάφορες προσεγγίσεις και φράγματα για την τιμή αυτού του τύπου δικαιώματος (*Asian option*). Στην προσέγγισή μας χρησιμοποιούμε μία γενική τεχνική για άνω (και κάτω) φράγματα για τα ασφάλιστρα stop-loss των αθροισμάτων των εξαρτώμενων τυχαίων μεταβλητών, όπως εξηγείται σε Kaas et al. [13] και Dhaene et al. [4,5], και πρόσθετα, οι ιδέες των Rogers και Shi [7], Nielsen και Sandmann [16] και Vanmaele et al. [6]. Το κάτω φράγμα προσεγγίζει με μεγάλη ακρίβεια την πραγματική αξία του Ασιατικού δικαιώματος. Εντούτοις, τα συμονοτονικά άνω φράγματα παρουσιάζονται κάπως χειρότερα. Επομένως, κατασκευάζουμε ακριβέστερα άνω φράγματα που βασίζονται στα συμονοτονικά φράγματα. Χρησιμοποιώντας τις ιδέες των Rogers και Shi (1995), το πρώτο άνω φράγμα λαμβάνεται ως το συμονοτονικό κάτω φράγμα συν έναν όρο σφάλματος. Στη συνέχεια κάνοντας το σφάλμα φράγματος εξαρτημένο από την τιμή εξάσκησης, αυτό το άνω φράγμα γίνεται ακριβέστερο. Περαιτέρω, μελετάμε την περίπτωση όπου το Ασιατικό δικαίωμα μπορεί να διασπαστεί σε δύο μέρη. Σε ένα μέρος που μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς και σε ένα άλλο μέρος όπου εφαρμόζονται τα συμονοτονικά φράγματα. Αυτό το αποκαλούμενο μερικώς ακριβές/συμονοτονικό άνω φράγμα αποτελείται από ένα ακριβές μέρος της τιμής του δικαιώματος και κάποιου βελτιωμένου συμονοτονικού άνω φράγματος για το υπόλοιπο μέρος. Ένας από τους στόχους αυτού του άρθρου είναι να προσδιοριστούν τα πιο πρόσφατα καλύτερα κάτω και άνω φράγματα. Θα δείξουμε ότι τα κάτω φράγματα είναι πολύ κοντά στις τιμές Monte Carlo και ότι μία από τις τεχνικές των M. Vanmaele et al. [6] και Tom Hoedemakers and al. [3] οδηγεί σε πολύ ικανοποιητικά άνω φράγματα, βλέπε το θεώρημα 3.3.3. Αρκετά σύνολα αριθμητικών αποτελεσμάτων συμπεριλαμβάνονται.

Abstract

The aim of the paper is to develop and compare bounds on the pricing formulas for European type discrete Asian options with fixed and floating strike. Due to the dependence structure between the prices of the underlying asset, no simple exact pricing formula exists, not even in a Black-Scholes setting. In the recent literature, several approximations and bounds for the price of this type of option are proposed. In our approach we use a general technique for deriving upper (and lower) bounds for stop-loss premiums of sums of dependent random variables, as explained in Kaas et al.[13] and Dhaene et al. [4,5], and additionally, the ideas of Rogers and Shi [7], of Nielsen and Sandmann [16] and of M. Vanmaele et al. [6]. The lower bound approximates very accurate the real value of the Asian option. However, the comonotonic upper bounds perform rather badly for some strike prices. Therefore, we construct sharper upper bounds based upon the traditional comonotonic bounds. Making use of the ideas of Rogers and Shi (1995), the first upper bound is obtained as the comonotonic lower bound plus an error term. Next this bound is refined by making the error term dependent on the strike. Further, we study the case that the Asian option can be decomposed into two parts. One part which can be evaluated exactly and another part to which comonotonic bounds are applied. This so-called partially exact/comonotonic upper bound consists of an exact part of the option price and some improved comonotonic upper bound for the remaining part. One of the aims of this paper is to identify the currently best lower and upper bounds.We will show that the lower bounds are very close to the Monte Carlo values and that one of M. Vanmaele et al. [6] and Tom Hoedemakers and al. [3] techniques leads to very satisfying upper bounds, see Theorem 3.3.3. Several sets of numerical results are included.

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σε αυτό το έγγραφο μελετάτε η τιμολόγηση των διακριτών αριθμητικών Ασιατικών δικαιωμάτων ευρωπαϊκού-τύπου με σταθερή και κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης με την παραγωγή αναλυτικών κάτω και άνω φραγμάτων.

Ένα διακριτό αριθμητικό Ασιατικό δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού-τύπου είναι ένα οικονομικό παράγωγο όργανο με ημερομηνία άσκησης *T*, *n* κατά μέσο όρο ημερομηνίες και σταθερή τιμή εξάσκησης *K*, το οποίο παράγει στον χρόνο *T* μία εξόφληση

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)-K\right)_+,$$

όπου $x_+ = \max\{x,0\}$ και $S(T-i)$ είναι η τιμή μιας μετοχής με ρίσκο στο χρόνο T-i, i=0,...,n-1. Η τιμή του δικαιώματος αγοράς με απόδοση ουδέτερου ρίσκου (ουδέτερη απόδοση) στον τρέχοντα χρόνο $t = 0$ δίνεται από:

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^Q\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)-nK\right)_+\right]$$

κάτω από ένα martingale μέτρο *Q* και με κάποιο επιτόκιο *r* ουδέτερου κινδύνου.

Ένα διακριτό αριθμητικό Ασιατικό δικαίωμα πώλησης ευρωπαϊκού-τύπου, με ημερομηνία άσκησης *T*, *n* κατά μέσο όρο ημερομηνίες $(n \le T+1)$ και κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης με ποσοστό *β*, παράγει στον χρόνο *T* μία εξόφληση

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)-\beta S(T)\right)_+.$$

Ένα αριθμητικό Ασιατικό δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού-τύπου με συνεχές υπολογισμό μέσου όρου βασίζεται σε μια παρόμοια εξόφληση όπως παραπάνω αλλά με την αντικατάσταση του διακριτού μέσου όρου από ένα ολοκλήρωμα που διαιρείται με το μήκος της κατά μέσο όρο περιόδου. Στην παρούσα εργασία θα εστιάζουμε στο διακριτό υπολογισμό μέσου όρου που είναι και η κανονική προδιαγραφή στα πραγματικά συμβόλαια.

Κάποια *exotic options* (βλ. κεφάλαιο 1) θεωρούνται ότι έχουν πορεία εξαρτώμενη (*path dependent*). Η τελική αξία τους (στην άσκηση ή τη λήξη) εξαρτάται από την αξία της υποκείμενης μετοχής, όχι μόνο εκείνη την περίοδο, αλλά και στα προγενέστερα χρονικά σημεία. Από αυτή την άποψη, τα Ασιατικά δικαιώματα έχουν πορεία εξαρτώμενη αφού η αξία τους στη λήξη εξαρτάται από τη μέση αξία της μετοχής σε όλη τη διάρκεια ισχύς του δικαιώματος.

Μέσα στο πρότυπο των Black και Scholes [1], καμία κλειστή μορφή λύσης δεν είναι διαθέσιμη για τα Ασιατικά δικαιώματα περιλαμβάνοντας τον διακριτό αριθμητικό μέσο όρο. Σε αντιδιαστολή με τα δικαιώματα γεωμετρικού μέσου όρου, η συνάρτηση πυκνότητας για τον αριθμητικό μέσο όρο δεν ακολουθεί την *Λογαριθμο-Κανονική* κατανομή και δεν έχει καμία σαφή αντιπροσώπευση. Ποικίλες μέθοδοι για την ευρωπαϊκή περίπτωση και ειδικά για τη συνεχή περίπτωση μέσου όρου δικαιωμάτων με σταθερή τιμή εξάσκησης έχουν αναπτυχθεί ενώ μόνο μερικά έγγραφα εξετάζουν την πρακτικότερη περίπτωση του διακριτού αριθμητικού μέσου όρου. Ένας μερικός κατάλογος μεθόδων περιλαμβάνει (για τις αναφορές δείτε παραδείγματος χάριν, [15,18]):

- Monte Carlo ή μέθοδοι σχεδόν- monte Carlo,
- ακριβείς εκφράσεις που περιλαμβάνουν μετασχηματισμούς Laplace,
- μέθοδοι συνελίξεων που χρησιμοποιούν το γρήγορο μετασχηματισμό κατά Fourier,
- αναλυτικές προσεγγίσεις βασισμένες στη δέσμευση σε κάποιο μέσο όρο,
- διάφορες PDE μέθοδοι,
- μέθοδοι δέντρων.

Εστιάζουμε στις αναλυτικές μεθόδους, βασισμένες στα φράγματα μέσω της δέσμευσης σε κάποια τυχαία μεταβλητή. Στόχος μας είναι να δημιουργήσουμε ένα ενοποιημένο πλαίσιο για τα διακριτά αριθμητικά Ασιατικά δικαιώματα ευρωπαϊκού-τύπου μέσω αυτών των φραγμάτων, το οποίο γενικεύει τις διάφορες προσεγγίσεις στη βιβλιογραφία.

Σε όλο το έγγραφο θεωρούμε κυρίως «forward starting» Ασιατικά δικαιώματα $(n \leq T+1)$. Αυτά τα δικαιώματα επικρατούν σε αντίθεση με τα «in progress» Ασιατικά δικαιώματα ($T-n+1 \leq 0$). Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματα που θα προκύψουν για τα «forward starting» Ασιατικά δικαιώματα μπορούν άμεσα να μετασχηματιστούν σε αποτελέσματα για Ασιατικά δικαιώματα «in progress».

Ένα αναλυτικό άνω και κάτω φράγμα στην συνεχή περίπτωση μέσου όρου λήφθηκε με τη μέθοδο της δέσμευσης (βλ. Rogers and Shi [7]). Οι Simon et al [17] παρήγαγαν και υπολόγισαν σε ένα γενικό πλαίσιο μια αναλυτική έκφραση για το αποκαλούμενο συμονοτονικό άνω φράγμα, το οποίο είναι στην πραγματικότητα ο μικρότερος γραμμικός συνδυασμός από τις τιμές των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς που φράσσει την τιμή ενός Ασιατικού δικαιώματος ευρωπαϊκού-τύπου από ανωτέρω. Οι M. Vanmaele et al. [6] μελέτησαν και τα δύο, άνω και κάτω φράγματα για ένα αριθμητικό Ασιατικό δικαίωμα Ευρωπαϊκού-τύπου σύμφωνα με την προσέγγιση των Black και Scholes. Ειδικότερα, οι Nielsen και Sandmann [16] παράγουν μια ειδική περίπτωση του άνω φράγματος των Simon et al. χρησιμοποιώντας βελτιστοποίηση Lagrange. Επίσης εφαρμόζουν το σκεπτικό των Rogers και Shi στην αριθμητική περίπτωση μέσου όρου με τη χρησιμοποίηση μιας συγκεκριμένης τυποποιημένης κανονικά κατανεμημένης μεταβλητής δέσμευσης. Το έγγραφο οργανώνεται όπως ακολουθεί.

Στο κεφάλαιο 1 δίνουμε ορισμένες πληροφορίες περί τα παράγωγα. Στις ενότητες 1.1, 1.2, 1.3 παρουσιάζουμε το χρηματιστήριο παραγώγων, τα δικαιώματα προαίρεσης και τα *exotic* δικαιώματα. Στην ενότητα 1.4 δηλώνουμε τα Ασιατικά δικαιώματα με σταθερή και κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης.

Στο κεφάλαιο 2 δίνουμε κάποιες εισαγωγικές έννοιες και ορισμούς για την τιμολόγηση των παραγώγων (*Asian options*). Στις ενότητες 2.1 και 2.2 προκειμένου να περιγράψουμε την εξέλιξη τιμών των μετοχών $\{S(t),\ t \geq 0\}$ θα καταφύγουμε στην περιγραφή της κίνηση και Γεωμετρικής Κίνησης Brown. Στην ενότητα 2.3 σημειώνουμε το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown. Τέλος στην 2.4 κάνουμε αποτίμηση της αξίας των παραγώγων και παρουσιάζουμε την εφαρμογή στα Ασιατικά δικαιώματα.

Το κεφάλαιο 3 παρέχει τα φράγματα για τα διακριτά αριθμητικά δικαιώματα ευρωπαϊκού-τύπου με σταθερή τιμή εξάσκησης σύμφωνα με την προσέγγιση των Black και Scholes. Παρουσιάζουμε αρχικά στην ενότητα 3.1 κάτω και άνω φράγματα βασισμένα σε μια γενική τεχνική για την παραγωγή φραγμάτων για τα ασφάλιστρα stop-loss των αθροισμάτων των εξαρτώμενων τυχαίων μεταβλητών, όπως εξηγήθηκε στο [13,4]. Για σαφήνεια έχουμε συμπεριλάβει μια σύντομη επισκόπηση των μεθόδων τους στο παράρτημα Α. Στην ενότητα 3.2 παρουσιάζουμε ένα άνω φράγμα βασισμένο στο κάτω φράγμα συν έναν όρο σφάλματος. Οι Tom Hoedemakers et al [3] και M.Vanmaele et al [6], παρήγαγαν ένα άνω φράγμα βασισμένο στο κάτω φράγμα το οποίο είναι βελτιωμένο σε σχέση με το άνω φράγμα που είναι βασισμένο στις ιδέες των Rogers και Shi [7]. Στην ενότητα 3.3 θα δείξουμε πως μπορούμε να βελτιώσουμε τα φράγματα που παρουσιάσαμε στις ενότητες 3.1 και 3.2. Θα συνδυάσουμε την τεχνική της δέσμευσης σε κάποια κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή Λ και την ιδέα της ανάλυσης των υπολογισμών σε ένα ακριβές και ένα προσεγγιστικό μέρος. Στην παράγραφο 3.3.3 γενικεύουμε την προσέγγιση των Nielsen και Sandmann [16] σε μια γενική κατηγορία κανονικά κατανεμημένων μεταβλητών δέσμευσης. Παρουσιάζουμε επίσης στην παράγραφο 3.3.4 πώς να κάνουμε πιο ακριβές το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα των Kaas et al. [13] και Dhaene et al [4] με τη λήψη ενός άλλου αποκαλούμενου μερικώς ακριβές/συμονοτονικό άνω φράγμα που αποτελείται από ένα ακριβές μέρος της τιμής του δικαιώματος και κάποιου βελτιωμένου συμονοτονικού άνω φράγματος για το υπόλοιπο μέρος. Στην ενότητα 3.4 παρουσιάζουμε μερικές γενικές παρατηρήσεις. Θα δούμε πως μπορούμε να παράγουμε τα αντίστοιχα φράγματα για το δικαίωμα πώλησης με την χρήση της ισότητας πώλησης-αγοράς καθώς και των μετασχηματισμό των αποτελεσμάτων για «forward starting» Ασιατικά δικαιώματα σε «in progress». Στην ενότητα 3.5 συγκρίνουμε και συζητάμε όλες τις προσεγγίσεις και, επιπλέον, συγκρίνουμε τα αποτελέσματά των M. Vanmaele et al. [6] με εκείνα του Jacques [12] και των Nielsen και Sandmann [16]. Αρκετά σύνολα αριθμητικών αποτελεσμάτων δίνονται.

Το κεφάλαιο 4 μεταχειρίζεται τα διακριτά αριθμητικά Ασιατικά δικαιώματα ευρωπαϊκού-τύπου με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης σύμφωνα με την προσέγγιση των Black και Scholes. Στην ενότητα 4.1 χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα των Henderson και Wojakowski [11] στην περίπτωση του διακριτού μέσου όρου, προκειμένου να δημιουργήσουμε χρήσιμα αποτελέσματα συμμετρίας μεταξύ των Ασιατικών δικαιωμάτων με σταθερή-κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης. Εδώ πρέπει να επισημάνουμε, ότι δεν υπάρχει καμία τέτοια σχέση συμμετρίας για τα δικαιώματα «in progress». Στην ενότητα 4.2 δείχνουμε πως μπορούμε άμεσα να παράγουμε φράγματα για τα Ασιατικά δικαιώματα με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης, χωρίς την χρήση συμμετρίας. Επίσης τονίζουμε ότι αυτά τα φράγματα μπορούν να διαχειριστούν και τα «in progress» και τα «forward-starting» Ασιατικά δικαιώματα με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης. Τέλος στην ενότητα 4.3 δίνουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα ενός Ασιατικού δικαιώματος πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης.

Στο παράρτημα A δίνουμε μια περίληψη των διαδικασιών που χρησιμοποιήθηκαν για την λήψη των κάτω και άνω φραγμάτων για τα ασφάλιστρα stop-loss των αθροισμάτων $\mathbb{S}$ των εξαρτώμενων τυχαίων μεταβλητών. Στο παράρτημα B δίνουμε τους σχετικούς πίνακες που χρησιμοποιήθηκαν σε όλα τα αριθμητικά παραδείγματα και περιέχονται στα έγγραφα των: M. Vanmaele et al. [6], Nielsen και Sandmann [16] και Jacques [12].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Περί παραγώγων

1.1 Το χρηματιστήριο παραγώγων (*derivatives*)

Παράλληλα με την λειτουργία των χρηματιστηρίων αξιών όπου πραγματοποιούνται συναλλαγές μετοχών, σε αρκετές περιπτώσεις λειτουργούν και τα λεγόμενα χρηματιστήρια παραγώγων. Στα χρηματιστήρια αυτά δεν συναλλάσσονται μετοχές αλλά χρηματιστηριακά παράγωγα προϊόντα. Ως παράγωγο προϊόν θεωρείται μια διμερής σύμβαση η οποία μπορεί να αναφέρεται σε μετοχές, δείκτες μετοχών (π.χ. FTSE 20, FTSE 40), ομολογίες, συνάλλαγμα ή και εμπορεύματα. Ως ιστορικό σημείωμα, αναφέρουμε ότι στην Ελληνική αγορά, το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών δημιουργήθηκε το 1997 και από 31 Αυγούστου 2002 συγχωνεύτηκε με το χρηματιστήριο Αξιών Αθηνών.

1.1.1 Παράγωγα προϊόντα

Τα πιο γνωστά παράγωγα προϊόντα είναι:

• ***Τα δικαιώματα προαίρεσης*** (*options*).

Δικαίωμα προαίρεσης καλείται μία συμφωνία η οποία δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) να αγοράσει ή να πουλήσει ένα συγκεκριμένο αγαθό (π.χ. μετοχή) σε μία προκαθορισμένη τιμή, κατά τη διάρκεια μίας χρονικής περιόδου ή σε μία συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον.

• **Τα προθεσμιακά συμβόλαια** (*forwards και futures*).

Προθεσμιακό συμβόλαιο καλείται μία συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλομένων, ο ένας εκ των οποίων υπόσχεται να πουλήσει και ο άλλος να αγοράσει, μία συγκεκριμένη ποσότητα ενός αγαθού, σε μία καθορισμένη ημερομηνία στο μέλλον, σε μία προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής. Χωρίζονται σε δύο κατηγορίες: Τα ***Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης*** (*Futures*) τα οποία είναι τυποποιημένα προϊόντα και συναλλάσσονται στο χώρο του Χρηματιστηρίου παραγώγων, και τα ***Προθεσμιακά Συμβόλαια*** (*Forwards*) τα οποία διαμορφώνονται ανάλογα με τις ανάγκες του επενδυτή και διαπραγματεύονται κυρίως στην εξωχρηματιστηριακή αγορά (σε ένα οργανωμένο δίκτυο μεταξύ θεσμικών επενδυτών).

Η αγορά των παραγώγων αναπτύχθηκε για δύο κυρίως λόγους : για την αντιστάθμιση των κινδύνων (*hedging*) σε χαρτοφυλάκια διαχειριστών (π.χ. ώστε ο κάτοχος ενός χαρτοφυλακίου μετοχών να αντιμετωπίσει μια επικείμενη κρίση) και φυσικά για κερδοσκοπία λόγω της αβεβαιότητας της αγοράς (π.χ. ώστε ένας επενδυτής να εκμεταλλευτεί μία επικείμενη άνοδο της αγοράς). Παράγωγα προϊόντα μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τον ιδιώτη επενδυτή αλλά κυρίως χρησιμοποιούνται από τράπεζες, αμοιβαία κεφάλαια, διαχειριστές μεγάλων ιδιωτικών κεφαλαίων, ασφαλιστικά ταμεία και εταιρίες, δημόσιες εταιρίες, επενδυτικές εταιρίες, ιδιωτικές επιχειρήσεις, κ.α. (οι οποίες αποσκοπούν περισσότερο στην αντιστάθμιση των κινδύνων στα χαρτοφυλάκια τους και λιγότερο στην κερδοσκοπία). Στη συνέχεια θα επικεντρωθούμε μόνο στα δικαιώματα προαίρεσης.

1.2 Τα δικαιώματα προαίρεσης (options)

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, το δικαίωμα προαίρεσης δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) να αγοράσει ή να πωλήσει ένα αγαθό (π.χ. μετοχή) κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες. Διακρίνεται σε δύο είδη: ***Δικαίωμα αγοράς*** (*call option*) και ***Δικαίωμα πώλησης*** (*put option*). Συγκεκριμένα, ο αγοραστής αγοράζει από τον πωλητή το δικαίωμα αγοράς (αντίστοιχα, πώλησης) το οποίο του δίνει το δικαίωμα (αλλά όχι την υποχρέωση) να αγοράσει από τον (αντίστοιχα, να πωλήσει στον) πωλητή συγκεκριμένη ποσότητα (το μέγεθος του συμβολαίου) της υποκείμενης αξίας (π.χ. της μετοχής) σε προκαθορισμένη τιμή (η τιμή εξάσκησης - exercise price) σε προκαθορισμένη μελλοντική ημερομηνία (χρόνος εξάσκησης T - exercise time T). Επομένως, ένα δικαίωμα προαίρεσης χαρακτηρίζεται από τα παρακάτω:

1. ***Το είδος του δικαιώματος*** (δικαίωμα αγοράς ή δικαίωμα πώλησης)
2. ***Ο υποκείμενος τίτλος*** (π.χ. δείκτης FTSE/ASE-20 , μετοχή A κ.λπ.)
3. ***Το μέγεθος του συμβολαίου*** (π.χ. το κάθε συμβόλαιο με υποκείμενο τίτλο τη μετοχή A, συνήθως αντιστοιχεί σε 100 μετοχές A)
4. ***Η ημερομηνία λήξης***. Ανάλογα με το χρόνο εξάσκησης (T) υπάρχουν δύο κύριες κατηγορίες δικαιωμάτων προαίρεσης:

(α) ***Αμερικανικού τύπου*** (*American option*) όταν το δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να εξασκηθεί οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης.

(β) ***Ευρωπαϊκού τύπου*** (*European option*) όταν το δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να εξασκηθεί μόνο κατά την ημερομηνία λήξης.

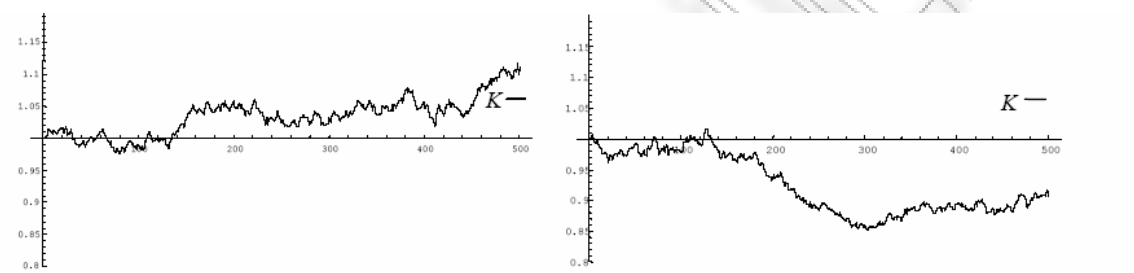
5. ***Η τιμή εξάσκησης*** K (*strike price* ή *exercise price*) είναι η προκαθορισμένη τιμή στην οποία ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς/πώλησης θα αγοράσει/πωλήσει (εάν επιλέξει να εξασκήσει το δικαίωμα) το συγκεκριμένο αγαθό (π.χ. μετοχή) στο οποίο αναφέρεται το δικαίωμα.

Προφανώς, ο αγοραστής ενός δικαιώματος προαίρεσης θα πρέπει να καταβάλει ένα αντίτιμο C (*ασφάλιστρο* ή *τιμή δικαιώματος* - *Option prize, option premium*) στον πωλητή του δικαιώματος διότι ο πωλητής αναλαμβάνει ρίσκο για το οποίο πρέπει να αποζημιωθεί (ο πωλητής είναι υποχρεωμένος να εκτελέσει την εντολή του αγοραστή εάν και όποτε ο δεύτερος το θελήσει, ενώ ο αγοραστής δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμά του, εάν δεν τον συμφέρει).

Συνοψίζοντας, ένας επενδυτής ή ένας διαχειριστής χαρτοφυλακίου μπορεί να λάβει τις εξής βασικές θέσεις:

Από την σκοπιά του επενδυτή

1. **Αγορά Δικαιώματος Αγοράς** (*Long Call*): συνήθως όταν προβλέπει ανοδική τάση στην μετοχή. Παρότι προσδοκά άνοδο, ο επενδυτής δεν επιθυμεί να ρισκάρει την αγορά μετοχών και εναλλακτικά αποφασίζει να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς (π.χ. 100 μετοχών) έναντι ποσού C. Έτσι, αν η μετοχή όντως κινηθεί ανοδικά, εξασκώντας το δικαίωμα, θα αγοράσει τις μετοχές στην προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης K η οποία θα είναι χαμηλότερη από την τιμή της μετοχής $\mathrm{S}(T)$ στο χρόνο εξάσκησης (κέρδος: $\mathrm{S}(T) - K - C$ διότι θεωρητικά, μπορεί αυτόματα να πωλήσει τις μετοχές στην τιμή $\mathrm{S}(T)$).



*η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης **K** στο χρόνο εξάσκησης: το δικαίωμα αγοράς εξασκείται*	*η τιμή της μετοχής είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης **K** στο χρόνο εξάσκησης: το δικαίωμα αγοράς δεν εξασκείται*

2. **Αγορά Δικαιώματος Πώλησης** (*Long Put*): συνήθως όταν προβλέπει καθοδική τάση στην μετοχή. Παρότι προσδοκά πτώση, ο διαχειριστής ενός χαρτοφυλακίου δεν επιθυμεί να ρισκάρει την πώληση μετοχών και εναλλακτικά αποφασίζει να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης (π.χ. 100 μετοχών). Έτσι αν η μετοχή όντως κινηθεί καθοδικά, εξασκώντας το δικαίωμα, θα πωλήσει τις μετοχές στην προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης K η οποία θα είναι υψηλότερη από την τιμή της μετοχής $\mathrm{S}(T)$ στο χρόνο εξάσκησης.

Από την σκοπιά του διαχειριστή χαρτοφυλακίου

1. **Πώληση Δικαιώματος Αγοράς** (*Short Call*): συνήθως όταν προβλέπει στάσιμη ή ελαφρά καθοδική τάση στην μετοχή. Ο διαχειριστής του χαρτοφυλακίου προκειμένου να αυξήσει την απόδοση του χαρτοφυλακίου του σε περίοδο στασιμότητας πωλεί ένα δικαίωμα αγοράς (π.χ. 100 μετοχών). Έτσι αν η μετοχή όντως μείνει στάσιμη ή κινηθεί

ελαφρά καθοδικά, ο αγοραστής του δικαιώματος δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα, και έτσι ο πωλητής θα έχει κέρδος από το ασφάλιστρο του δικαιώματος (*option premium*) που θα έχει καταβάλει ο αγοραστής (το οποίο θα αντισταθμίζει και ενδεχόμενη περιορισμένη πτώση της τιμής της μετοχής).

2. **Πώληση Δικαιώματος Πώλησης** (Short Put): συνήθως όταν προβλέπει στάσιμη ή ελαφρά ανοδική τάση στην μετοχή. Ο επενδυτής πωλεί ένα δικαίωμα πώλησης (π.χ. 100 μετοχών). Έτσι αν η μετοχή όντως μείνει στάσιμη ή κινηθεί ελαφρά ανοδικά, ο αγοραστής του δικαιώματος δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα, και έτσι ο πωλητής θα έχει κέρδος από το ασφάλιστρο του δικαιώματος (*option premium*) που θα έχει καταβάλει ο αγοραστής.

1.3 Διάφορες παραλλαγές δικαιωμάτων προαίρεσης (*exotic options*)

Εκτός από τα συνήθη δικαιώματα προαίρεσης που περιγράφηκαν παραπάνω (τα οποία μερικές φορές καλούνται και «vanilla options»), τα τελευταία χρόνια έχουν αρχίσει να προσελκύουν το ενδιαφέρον των επενδυτών αλλά και των ερευνητών και δικαιώματα προαίρεσης με διαφορετικούς όρους τα οποία είναι γνωστά ως «*exotic options*». Κυριότερα exotic options είναι:

1. ***Barrier options***. Αυτά τα δικαιώματα θεωρούνται ισχύοντα ή μη ισχύοντα («alive» ή «killed») ανάλογα με το αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου (π.χ. μετοχή) από τον χρόνο αγοράς 0 μέχρι τον χρόνο T εξάσκησης του δικαιώματος περάσει ή όχι ένα φράγμα (*barrier*).
2. ***Lookback options***. Η αξία και αυτών των δικαιωμάτων εξαρτάται από την πορεία της τιμής της μετοχής μέχρι τον χρόνο εξάσκησής τους. Συγκεκριμένα, η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος K δεν είναι προκαθορισμένη, αλλά είναι ίση με την μικρότερη τιμή που είχε η μετοχή από το χρόνο αγοράς του δικαιώματος μέχρι τον χρόνο εξάσκησης T (π.χ. μετρούμενη κατά το τέλος των συνεδριάσεων κάθε ημέρα).
3. ***Asian options***. Η αξία αυτών των δικαιωμάτων εξαρτάται από την πορεία της τιμής της μετοχής μέχρι τον χρόνο εξάσκησής τους.

Τα τελευταία θα τα μελετήσουμε εκτενέστερα στην ακόλουθη ενότητα μιας και αποτελούν το βασικό αντικείμενο μελέτης μας στην παρούσα εργασία.

1.4 Ασιατικά δικαιώματα (*Asian options*)

Ως ιστορικό σημείωμα, αναφέρουμε ότι ο χαρακτηρισμός των δικαιωμάτων ως «***Asian***» δεν έχει καμία ιδιαίτερη σημασία. Ο David Spaughton και ο Mark Standish το 1987 ήταν στο Τόκιο για δουλειά όταν ανέπτυξαν τον πρώτο εμπορικά χρησιμοποιούμενο τύπο τιμολόγησης για δικαιώματα που συνδέθηκαν με τη μέση τιμή του ακατέργαστου πετρελαίου. Επειδή ήταν στην Ασία, ονόμασαν τα δικαιώματα αυτά ως «Asian options».

Τα Ασιατικά δικαιώματα είναι δικαιώματα των οποίων η αξία στο χρόνο T της εξάσκησης εξαρτάται από τη μέση τιμή της μετοχής κατά τη διάρκεια του χρόνου μεταξύ 0 (όταν το δικαίωμα αγοράστηκε) και του χρόνου της άσκησης T. Δεδομένου ότι αυτοί οι μέσοι όροι γίνονται συνήθως από άποψη των τιμών στο τέλος της ημέρας, και έστω N να δηλώνει τον αριθμό των εμπορικών ημερών σε ένα έτος (συνήθως παίρνουμε N=252), τότε το:

$$S_d(i) = S(i/N)$$

δηλώνει την τιμή της μετοχής στο τέλος της i ημέρας. Ο μέσος όρος υπολογίζεται συνήθως αριθμητικά,

$$\textit{arithmetic average}=\frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n}$$

ή γεωμετρικά,

$$\textit{geometric average}=\sqrt[n]{s_1 s_2 \ldots s_n} \quad .$$

Οι προδιαγραφές συμβολαίων για ένα Ασιατικό δικαίωμα επιτρέπουν διάφορες παραλλαγές.

1) Με Σταθερή τιμή εξάσκησης (*fixed Asian option*)

Το πιο κοινό Ασιατικού τύπου δικαίωμα αγοράς είναι αυτό στο οποίο ο χρόνος άσκησης είναι το τέλος των n εμπορικών ημερών, η τιμή εξάσκησης είναι σταθερή K, και η εξόφληση στο χρόνο άσκησης T είναι

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{S_d(i)}{n} - K\right)_+ .$$

2) Με Κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης (*floating Asian option*)

Μία άλλη περίπτωση είναι η εξής: η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος K δεν είναι προκαθορισμένη, αλλά είναι ίση με τη μέση τιμή που είχε η μετοχή από το χρόνο αγοράς του δικαιώματος μέχρι τον χρόνο άσκησης T (π.χ. μετρούμενη κατά το τέλος των συνεδριάσεων κάθε ημέρα) και με ποσοστό β (για κάποια σταθερά $\beta \in \mathbb{R}_+$) παρέχει στον χρόνο T εξόφληση:

$$\left(\beta S_d(n) - \sum_{i=1}^{n} \frac{S_d(i)}{n}\right)_+ .$$

Ως συνήθως έχουμε να διακρίνουμε ανάμεσα σε δικαιώματα αγοράς και πώλησης. Τα διαφορετικά είδη των Ασιατικών δικαιωμάτων συνοψίζονται στον πίνακα 1, όπου $x_+ = \max\{x, 0\}$ και $\Sigma_D = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_d(i)}{n}$ ο αριθμητικός μέσος όρος.

Option type	Asian pay off
Fixed strike call	$(\Sigma_D - K)_+$
Fixed strike put	$(K - \Sigma_D)_+$
Floating strike call	$(\beta S_T - \Sigma_D)_+$
Floating strike put	$(\Sigma_D - \beta S_T)_+$

Πίνακας 1

Τύποι προεξοφλήσεων για τα Ασιατικά δικαιώματα

Θεωρητικά τουλάχιστον μπορούμε επιπλέον να διακρίνουμε μεταξύ ενός αριθμητικού μέσου όρου που υπολογίζεται βάσει πεπερασμένων τιμών μετοχών κατά τη διάρκεια του χρόνου και ενός συνεχώς υπολογισμένου αριθμητικού μέσου όρου. Τα δικαιώματα με μέσο όρο βασισμένο στις πεπερασμένες τιμές των μετοχών κατά τη διάρκεια του χρόνου καλούνται διακριτά Ασιατικά δικαιώματα σε διάκριση με τα συνεχή Ασιατικά δικαιώματα. Στην πράξη μόνο τα διακριτά Ασιατικά δικαιώματα κυκλοφορούν στο εμπόριο, ενώ η πλειοψηφία των ερευνητικών εργασιών εξετάζει τα συνεχή Ασιατικά δικαιώματα. Όπως είπαμε και στην εισαγωγή εμείς στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση των διακριτών αριθμητικών Ασιατικών δικαιωμάτων σταθερής και κυμαινόμενης τιμής εξάσκησης.

Ένα συμβόλαιο Ασιατικού δικαιώματος γράφεται στο χρόνο $t = 0$ και λήγει στο χρόνο $T > 0$. Εάν στον τρέχοντα χρόνο 0, ο υπολογισμός μέσου όρου δεν έχει αρχίσει ακόμα, δηλαδή είναι $n \leq T+1$ τότε έχουμε τα «***forward starting***» Ασιατικά δικαιώματα και οι n μεταβλητές $S(T - n + 1),\ldots,S(T)$ είναι τυχαίες. Αυτή η περίπτωση επικρατεί σε αντίθεση με την περίπτωση που $n \geq T+1$ (στο χρόνο 0 ο υπολογισμός μέσου όρου έχει ξεκινήσει) όπου μόνο οι τιμές $S(1), \ldots, S(T)$ παραμένουν τυχαίες. Στη βιβλιογραφία, αυτό το Ασιατικό δικαίωμα καλείται «***in progress***». Τέλος αν $T=n-1$, ο μέσος όρος υπολογίζεται κατά τη διάρκεια ολόκληρης της ζωής του δικαιώματος, και ονομάζεται «*plain-vanilla*» δικαίωμα.

Σημειώνουμε ότι τα αποτελέσματά μας για «*forward starting*» Ασιατικά δικαιώματα μπορούν αμέσως να μετασχηματιστούν σε αποτελέσματα για Ασιατικά δικαιώματα «*in progress*», όπως θα δούμε στην συνέχεια.

Τέλος θα λέμε ότι ένα δικαίωμα είναι *at-the-money* εάν η υποκείμενη αξία επί του παρόντος είναι ίση με την τιμή εξάσκησης. Διαφορετικά, το δικαίωμα λέγεται ότι είναι *in-the-money* **(**δηλ. ασκείται**)** εάν έχει θετική πραγματική αξία, ή *out-of-the-money* **(**δηλ. δεν ασκείται**)** εάν έχει μηδέν πραγματική αξία. Ένα δικαίωμα αγοράς είναι *in-the-money* εάν η τιμή της υποκείμενης μετοχής είναι επάνω από την τιμή εξάσκησης. Ένα δικαίωμα πώλησης είναι *in-the-money* εάν η τιμή της υποκείμενης μετοχής είναι κάτω από την τιμή εξάσκησης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί για την τιμολόγηση των παραγώγων (*Asian options*)

2.1 Κίνηση Brown

Μια απλοποιημένη περιγραφή του μοντέλου αυτού είναι η ακόλουθη: σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα θεωρούμε ότι η $X(t)$ αυξάνεται ή μειώνεται απειροστά (και με πιθανότητα σχεδόν 0.5), ανεξάρτητα από το παρελθόν. Αν λοιπόν χωρίσουμε το χρονικό διάστημα $[0, t]$ σε n υποδιαστήματα πλάτους Δ το καθένα ($\Delta = t/n$) και υποθέσουμε ότι $X(0) = 0$ ή $X(0) = c$ έχουμε την προσαύξηση

$$X(i\Delta) = \begin{cases} X((i-1)\Delta) + \sigma\sqrt{\Delta}, & \text{με πιθ.p} \\ X((i-1)\Delta) - \sigma\sqrt{\Delta}, & \text{με πιθ.1-p} \end{cases} \quad \text{όπου p=}\frac{1}{2}\left(1 + \frac{r}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right), i = 1, 2, ..., n.$$

Ορισμός. Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X(t), t > 0\}$ καλείται ***κίνηση Brown*** με παραμέτρους r (*drift parameter*) και σ^2 (*volatility ή variance parameter*) (συμβ. BM(r, σ^2)) αν ισχύει ότι:

1) Η τ.μ. $X(t + y) - X(y) \sim N(rt, t\sigma^2)$.
2) Η τ.μ. $X(t + y) - X(y)$, $t > 0$ είναι ανεξάρτητη από τις $X(u)$, $0 \le u < y$, δηλαδή ότι η $\{X(t), t \ge 0\}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Συνήθως λαμβάνεται $X(0) = 0$ ή $X(0) = c$.

2.2 Γεωμετρική Κίνηση Brown

Προκειμένου να περιγράψουμε την εξέλιξη τιμών αγαθών ή μετοχών $\{S(t), t \ge 0\}$ (όπου $S(t)$ είναι η τιμή στο χρόνο t) θα καταφύγουμε στην Γεωμετρική Κίνηση Brown. Η κίνηση Brown δεν είναι κατάλληλη για την περιγραφή τέτοιων φαινομένων διότι: (i) μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές, κάτι που δεν είναι αποδεκτό, ενώ (ii) η αύξηση ή μείωση μιας τιμής είναι, σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, ανεξάρτητη από την ίδια την τιμή (π.χ. είναι το ίδιο πιθανό το ενδεχόμενο «η τιμή 100 να κινηθεί στο 100+10=110 σε διάστημα μήκους Δ» με το ενδεχόμενο «η τιμή 10 να κινηθεί στο 10+10=20 σε διάστημα μήκους Δ») κάτι που δεν φαίνεται λογικό και δεν ταιριάζει σε πραγματικά δεδομένα. Θεωρούμε εναλλακτικά λοιπόν τώρα ότι, σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα μήκους Δ, η τιμή $S(t)$ μπορεί είτε να αυξηθεί είτε να μειωθεί με κάποια πιθανότητα και ανεξάρτητα από το παρελθόν ως εξής:

$$S(t+\Delta)=\begin{cases} S(t)e^{\sigma\sqrt{\Delta}}, \text{ με πιθ.p} \\ S(t)e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}, \text{ με πιθ.1-p} \end{cases} \quad \text{όπου p=}\frac{1}{2}\left(1+\frac{r}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right).$$

Δηλαδή, η ποσοστιαία μείωση ή αύξηση της τιμής ($S(t{+}\Delta)/S(t)$) σε κάθε απειροστό διάστημα χρόνου είναι σταθερή και ανεξάρτητη από το παρελθόν, ενώ η αντίστοιχη πιθανότητα αύξησης ή μείωσης είναι «κοντά» στο 0.5.

Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $X(t) = \ln(S(t))$, τότε η $X(t + \Delta)=X(t) \pm \sigma\Delta^{1/2}$ (με πιθανότητα p το + και $1 - p$ το −), και επομένως η ανέλιξη $\{X(t), t \geq 0\} = \{\ln S(t), t \geq 0\}$ είναι μια κίνηση Brown. Δηλαδή, η τ.μ.

$$X(t + y) - X(t) = \ln S(t + y) - \ln S(y) = \ln(S(t + y)/S(y))$$

ακολουθεί κανονική κατανομή $N(rt,t\sigma^2)$ και είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν $S(u)$, $0\leq u < y$.

Μια στοχαστική ανέλιξη με τις παραπάνω ιδιότητες καλείται *γεωμετρική κίνηση Brown*. Ιδιαίτερα, έχουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός. Μία στοχαστική ανέλιξη $\{S(t), t \geq 0\}$ καλείται ***γεωμετρική κίνηση Brown*** με παραμέτρους r (drift parameter) και σ^2 (volatility parameter) (συμβ. GBM(r, σ^2)) αν ισχύει ότι:

1) Η τυχαία μεταβλητή

$$\ln \frac{S(t+y)}{S(y)} \sim N(tr, t\sigma^2), \;\; \text{y>0}.$$

2) Η τ.μ. $S(t+y)/S(y)$ είναι ανεξάρτητη από τις $S(u)$, $0 \leq u < y$.

Είναι προφανές ότι αν $\{X(t),\ t \geq 0\} \sim \mathrm{BM}(r,\ \sigma^2)$, τότε η $\{e^{X(t)},\ t \geq 0\} \sim \mathrm{GBM}(r,\ \sigma^2)$. Άρα, ένα σχετικά απλό μοντέλο που μπορεί να περιγράψει την εξέλιξη τιμών στο χρόνο είναι η γεωμετρική κίνηση Brown. Αν λοιπόν $\{S(t),\ t \geq 0\} \sim \mathrm{GBM}(r,\ \sigma^2)$ τότε η $S(t)$ ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή, δηλαδή ο λογάριθμός της ακολουθεί την κανονική κατανομή,

$$\ln S(t) \sim N(tr + \ln S(0), t\sigma^2).$$

2.3 Το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown

Έστω $S(t)$ η τιμή της μετοχής που μας ενδιαφέρει στον χρόνο t. Θεωρούμε ότι η αρχική τιμή $S(0)$ είναι γνωστή (π.χ. είναι η τιμή της μετοχής στο παρόν). Προφανώς, η $S(t)$ είναι τυχαία μεταβλητή και η οικογένεια $\{S(t),\ t \geq 0\}$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη. Ξεκινώντας την μελέτη της τιμής $S(t)$ μιας μετοχής, θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε την συμπεριφορά της διαδικασίας $\{S(t),\ t \geq 0\}$ σε ένα πολύ μικρό διάστημα του χρόνου. Χωρίζουμε λοιπόν το χρονικό διάστημα $(0,t]$ σε n υποδιαστήματα πλάτους $\Delta t = t/n$ το καθένα (με Δt «μικρό»). Στο i-οστό διάστημα χρόνου $(t_i,\ t_i + \Delta t] = ((i-1)\Delta t,\ i\Delta t]$ θεωρούμε ότι η ποσοστιαία αυξομείωση της S είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή και διασπορά ανάλογη του Δt, και ανεξάρτητη από το παρελθόν της διαδικασίας. Δηλαδή,

$$\frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_i)}{S(t_i)} = r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_i$$

όπου $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές (τ.μ.) που ακολουθούν $N(0,1)$, δηλαδή $r\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t} \sim N(r\Delta t, \sigma^2\Delta t)$ για κάποιες σταθερές r, σ^2. Οι τ.μ. $\sqrt{\Delta t}Z_1, \sqrt{\Delta t}Z_2, ..., \sqrt{\Delta t}Z_n$ τώρα μπορούν να θεωρηθούν ως οι προσαυξήσεις μιας BM (γνωρίζουμε ότι οι προσαυξήσεις μιας κίνησης Brown είναι ανεξάρτητες κανονικές τ.μ.) και επομένως μπορούμε να γράψουμε ότι,

$$\frac{S(t_i+\Delta t)-S(t_i)}{S(t_i)} = r\Delta t + \sigma(B(t_i+\Delta t)-B(t_i))$$

όπου $\{B(t),\ t \geq 0\}$ ~ BM(0,1) (και άρα $B(t_i+\Delta t)-B(t_i)$ ~ $N(0,\Delta t)$). Απλούστερα, η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = r\Delta t + \sigma\Delta B(t)\,.$$

Εάν θεωρήσουμε το $\Delta t \to 0$, τότε η παραπάνω εξίσωση θα μπορούσε να γραφεί στη μορφή:

$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dB(t)$ ή ισοδύναμα, $dS(t) = rS(t)dt + \sigma S(t)dB(t)$, όπου B ~ BM(0,1).

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια στοχαστική διαφορική εξίσωση (Σ.Δ.Ε) για την διαδικασία S. Η στοχαστική διαδικασία $S = \{S(t),\ t \geq 0\}$ που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής θα πρέπει να ικανοποιεί την Σ.Δ.Ε (δηλ. την ισοδύναμη στοχαστική ολοκληρωτική εξίσωση). Αποδεικνύεται (χρησιμοποιώντας το γνωστό ως λήμμα του Ito) ότι ο λογάριθμος της διαδικασίας S θα ικανοποιεί την Σ.Δ.Ε

$$d\ln S(t) = (r - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dB(t)$$

όπου B ~ BM(0,1). Ολοκληρώνοντας κατά μέλη από 0 έως t την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι,

$$\ln S(t) - \ln S(0) = (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t) \text{ και άρα } \ln S(t) \sim N(\ln S(0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t)\,.$$

Δηλαδή η διαδικασία ln $S(t)$ ~ BM($r - \sigma^2/2,\ \sigma^2$) και επομένως η S που ικανοποιεί την παραπάνω Σ.Δ.Ε θα είναι μια γεωμετρική κίνηση Brown. Φαίνεται επίσης ότι

$$\ln\frac{S(t)}{S(0)} = (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t) \text{ και άρα } \ln\frac{S(t)}{S(0)} \sim N((r - \frac{\sigma^2}{2})t, \sigma^2 t)$$

και ως εκ τούτου, οι τυχαίες μεταβλητές S(t)/S(0) κατανέμονται Λογαριθμο-Κανονικά με παραμέτρους $(r-\frac{\sigma^2}{2})t$ και $t\sigma^2$.

2.4 Αποτίμηση της αξίας παραγώγων (*risk-neutral valuation*)

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή στόχος μας είναι να βρεθεί η τιμή C πώλησης/αγοράς ενός δικαιώματος προαίρεσης (συγκεκριμένα για την εργασία μας του διακριτού αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος) όταν είναι γνωστά όλα τα υπόλοιπα μεγέθη (r, σ, $S(0)$, t, K) με κλίση (*drift*) ίση με τη δύναμη του επιτοκίου r ουδέτερου-κινδύνου. Πιο συγκεκριμένα, μας ενδιαφέρει να βρούμε την τιμή C ενός παραγώγου το οποίο αποδίδει κέρδος $h(S)$ από τη χρήση του στο χρόνο εξάσκησης t, όπου S είναι η διαδικασία που εκφράζει την εξέλιξη της τιμής του χρηματιστηριακού προϊόντος (μετοχής).

Αρχικά υποθέτουμε ότι στην αγορά υπάρχει μια επένδυση χωρίς ρίσκο που προσφέρει επιτόκιο r. Επομένως, επενδύοντας ποσό A, μετά από χρόνο t θα λάβουμε Ae^{rt}. Επίσης, αν υπάρχει μια στρατηγική αγοραπωλησιών μετοχών, δικαιωμάτων και ομολόγων που επιτρέπει σε έναν εξιδανικευμένο παίκτη χρηματιστηρίου να έχει σίγουρο κέρδος (ο οποίος μπορεί να κάνει στιγμιαία συναλλαγές μετοχών χωρίς κόστος συναλλαγών), τότε λέγεται ότι η αγορά προσφέρει ευκαιρία για κερδοσκοπία (*arbitrage*). Σύμφωνα με την θεωρία της εξισορροπητικής κερδοσκοπίας (*arbitrage pricing*), αποδεικνύεται το εξής.

Πρόταση (*arbitrage pricing ή risk-neutral valuation*). Για να μην υπάρχει δυνατότητα για arbitrage στην αγορά θα πρέπει η παρούσα αξία του παραγώγου (που αποδίδει κέρδος $h(S)$ στο χρόνο t), να είναι ίση με

$$E[e^{-rt}h(S) / \ln S \sim BM(r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)].$$

Με άλλα λόγια, η παρούσα αξία του παραγώγου θα πρέπει να είναι ίση με την παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του παραγώγου όταν η υποκείμενη μετοχή ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown και συγκεκριμένα όταν

$$\ln S(t) = \ln S(0) + (r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B(t) <=> \frac{S(t)}{S(0)} = e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B(t)}.$$

Παρακάτω θα δείξουμε ότι: $E(S(t)) = S(0)e^{tr}$.

Είναι $\frac{S(t)}{S(0)} = e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B(t)} => S(t) = S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B(t)} = S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma\sqrt{t}Z}$.

Παίρνουμε μέσες τιμές και υψώνοντας στην n προκύπτει:

$$E(S(t)^n) = S(0)^n e^{n(r-\frac{\sigma^2}{2})t} E(e^{n\sigma\sqrt{t}Z}).$$

Ισχύει ότι αν αν Z ~ N(0,1) τότε $E(e^{uZ}) = e^{u^2/2}$ και το παραπάνω γίνεται:

$$E(S(t)^n) = S(0)^n e^{n(r-\frac{\sigma^2}{2})t} e^{\frac{1}{2}n^2\sigma^2 t} => E(S(t)) = S(0)e^{tr}$$ και αποδείχτηκε.

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι η αναμενόμενη τιμή της μετοχής στο χρόνο t είναι ίση με το κέρδος που θα είχαμε αν επενδύαμε τα χρήματα που δώσαμε για την αγορά της μετοχής ($S(0)$) σε μια επένδυση χωρίς ρίσκο (π.χ. σε ομόλογο με επιτόκιο r). Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι η μετοχή προσφέρει «ουδέτερη απόδοση» ή «απόδοση ουδέτερου ρίσκου» (*risk-neutral*). Συνοψίζοντας λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι: «Η παρούσα αξία του παραγώγου θα πρέπει να είναι ίση με την παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του παραγώγου όταν η υποκείμενη μετοχή προσφέρει απόδοση ουδέτερου ρίσκου»

Παρατήρηση

Η πρόταση δεν υπονοεί ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί στην πραγματικότητα την GBM με τις παραπάνω παραμέτρους, αλλά ότι προκειμένου να αποτιμηθεί η αξία του παραγώγου θα πρέπει να «υποθέσουμε» ότι η τιμή της μετοχής ακολουθεί την συγκεκριμένη GBM και να υπολογίσουμε την παραπάνω αναμενόμενη τιμή.

2.4.1 Εφαρμογή στα Ασιατικά δικαιώματα

Μια εφαρμογή της παραπάνω πρότασης (*arbitrage pricing*) είναι να βρούμε την παρούσα αξία των δικαιωμάτων προαίρεσης. Θα πρέπει να υπολογίσουμε την παρούσα τιμή ή το ασφάλιστρο C του δικαιώματος (*option cost* ή *option premium*).

Συγκεκριμένα, για ένα διακριτό αριθμητικό Ασιατικό δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού-τύπου με:

• ***S*(0)**: η σημερινή τιμή του υποκείμενου τίτλου (*security's initial price*)

• ***K***: η σταθερή τιμή εξάσκησης (*strike price ή exercise price*)

• ***T***: η ημερομηνία άσκησης (*exercise time*)

• ***r***: το επιτόκιο της αγοράς χωρίς κίνδυνο (*risk-neutral interest rate*)

αποδίδει κέρδος $h(S)$ στο χρόνο T

$$h(S)=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)-K\right)_+,$$

όπου $x_+=\max\{x,0\}$ και $S(T-i)$ είναι η τιμή της μετοχής με ρίσκο στο χρόνο T-i, i=0,…,n-1. Η τιμή του δικαιώματος αγοράς κάτω από ένα martingale μέτρο Q (βλ.ενότητα 2.5) και με κάποιο επιτόκιο r ουδέτερου κινδύνου στον τρέχοντα χρόνο t=0 σύμφωνα με τα παραπάνω είναι:

$$E^Q[e^{-rT}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)-K\right)_+/\ln S\sim BM(r-\frac{\sigma^2}{2},\sigma^2)]\text{ δηλαδή είναι}$$

$$AC(n,K,T)=\frac{e^{-rT}}{n}E^Q\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)-nK\right)_+\right]\text{ όπως παρουσιάστηκε και στην εισαγωγή.}$$

Ανάλογα για ένα διακριτό αριθμητικό Ασιατικό δικαίωμα πώλησης ευρωπαϊκού-τύπου, με ημερομηνία άσκησης T, n κατά μέσο όρο ημερομηνίες $(n\le T+1)$ και κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης με ποσοστό β, αποδίδει κέρδος $h(S)$ στο χρόνο T

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)-\beta S(T)\right)_+$$

και είναι

$$APF(n,\beta,T)=\frac{e^{-rT}}{n}E^Q\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)-n\beta S(T)\right)_+\right].$$

2.4.2 Martingale μέτρο *Q*

Υποθέτουμε ότι είμαστε αυτήν την περίοδο στο χρόνο 0. Εξετάζουμε μία μετοχή με τιμές που περιγράφονται από τη στοχαστική διαδικασία $\{S(t),t\ge 0\}$ και με κάποιο επιτόκιο r ουδέτερου κινδύνου που είναι σταθερό στο χρόνο. Γενικά, η δεσμευμένη μέση τιμή (όσον αφορά το φυσικό μέτρο πιθανότητας) του $e^{-rt}S(t)$, λαμβάνοντας υπόψη την πληροφορία που είναι διαθέσιμη στο χρόνο 0, διαφέρει από την τρέχουσα τιμή $S(0)$. Εντούτοις, θα υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα μοναδικό "ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q" έτσι ώστε η διαδικασία προεξόφλησης $\{e^{-rt}S(t), t \geq 0\}$ να είναι ***Martingale*** κάτω από αυτό το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας. Αυτό υπονοεί ότι για οποιοδήποτε $t \geq 0$, η δεσμευμένη μέση τιμή (όσον αφορά το ισοδύναμο μέτρο ***Martingale***) του $e^{-rt}S(t)$, λαμβάνοντας υπόψη την διαθέσιμη πληροφορία στο χρόνο 0, θα είναι ίση με την τρέχουσα τιμή $S(0)$, δηλ.:

$$E^{Q}[e^{-rt}A(t)] = A(0),\ t \geq 0.$$

Τέλος η ύπαρξη ενός ισοδύναμου ***Martingale*** μέτρου σχετίζεται με την απουσία κερδοσκοπίας στην αγορά τίτλων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Φράγματα για τα Ασιατικά Δικαιώματα με Σταθερή τιμή εξάσκησης

3.0 Ασιατικά δικαιώματα με σταθερή τιμή εξάσκησης κατά την προσέγγιση των *Black* και *Scholes*

Κατά την προσέγγιση των Black και Scholes, όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο 2, η τιμή μίας μετοχής $\{S(T), t \geq 0\}$ υπό τον ουδέτερο-κίνδυνο με μέτρο *Q* ακολουθεί μια γεωμετρική διαδικασία κίνησης Brown, με διακύμανση *σ* και με κλίση (*drift*) ίση με την δύναμη (*force*) του επιτοκίου *r* ουδέτερου-κινδύνου. Από κεφάλαιο 2 έχουμε δείξει ότι:

$$\frac{dS(T)}{S(T)} = rdt + \sigma dB(t), \quad \mathrm{t} \geq 0, \tag{1}$$

όπου $\{B(T), t \geq 0\}$ είναι μια τυποποιημένη διαδικασία κίνησης Brown υπό το *Q*. Ως εκ τούτου, οι τυχαίες μεταβλητές S(t)/S(0) κατανέμονται *Λογαριθμο-Κανονικά* με παραμέτρους $(\mathrm{r}-\frac{\sigma^2}{2})t$ και $t\sigma^2$.

Από κεφάλαιο 2 έχουμε : $S(t) = S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma B(t)} = S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma\sqrt{t}Z} = a_i e^{Y_i}$ με

$$a_i = S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t} \text{ και } Y_i = \sigma\sqrt{t}Z \sim N(0, \sigma^2 t).$$

Εφαρμόζοντας λοιπόν το θεώρημα 5 και από τις σχέσεις (77) και (78) (στο παράρτημα Α), βρίσκουμε:

$$EC(K,T) = e^{-rT}E^Q[(S(T)-K)_+] = S(0)\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2),$$

όπου τα d_1 και d_2 δίνονται ως:

$$d_1 = \frac{(r+\sigma^2/2)T + \ln(S(0)/K)}{\sigma\sqrt{T}}$$

και

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$.

Αυτός ο τύπος είναι γνωστός ως τύπος τιμολόγησης των Black και Scholes (1973) για τα Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα αγοράς. Μέσα στο μοντέλο Black και Scholes, καμία κλειστή έκφραση δεν είναι διαθέσιμη για την τιμή ενός αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος αγοράς. Επομένως, θα παράγουμε τα άνω και κάτω φράγματα για την τιμή τέτοιων δικαιωμάτων.

Στόχος μας είναι ο καθορισμός της τιμής του Ασιατικού δικαιώματος, κάτι το οποίο είναι αρκετά περίπλοκο. Η δυσκολία έγκειται στο γεγονός ότι δεν έχουμε μια σαφή αναλυτική έκφραση για τη κατανομή του μέσου όρου $\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)$ στην έκφραση

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^Q\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - nK\right)_+\right].$$

Ένας τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές προσομοίωσης Monte Carlo για να λάβουμε μια αριθμητική εκτίμηση της τιμής, δείτε Kemna και Vorst (1990) [14], ή μπορούμε αριθμητικά να λύσουμε μια παραβολική μερική διαφορική εξίσωση, δείτε Rogers και Shi [7] (1995). Αλλά καθώς και οι δύο προσεγγίσεις είναι μάλλον χρονοβόρες, θα ήταν χρήσιμο να βρούμε μία ακριβής και εύκολα υπολογίσιμη προσέγγιση αυτής της τιμής.

Το πρόβλημα της τιμολόγησης των αριθμητικών Ασιατικών δικαιωμάτων αποδεικνύεται ισοδύναμο με τον υπολογισμό των ασφαλίστρων stop-loss ενός αθροίσματος εξαρτώμενων κινδύνων. Ως εκ τούτου μπορούμε να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα των συμονοτονικών άνω και κάτω φραγμάτων των ασφαλίστρων stop-loss, τα οποία έχουν συνοψιστεί στην παράγραφο 3.1 και στο παράρτημα Α.

Εμείς θα επικεντρωθούμε στα φράγματα για τα αριθμητικά Ασιατικά δικαιώματα Ευρωπαϊκού-τύπου με σταθερή τιμή εξάσκησης υπό τον συλλογισμό της συμονοτονικότητας και με τη χρησιμοποίηση της προσέγγισης των Rogers και Shi (όχι της συνεχής περίπτωσης) που είναι γενικευμένη στο [16]. Θα σημειώνουμε μόνο τους τύπους των Ασιατικών δικαιωμάτων αγοράς «forward starting». Τα Ασιατικά δικαιώματα «in progress» και τα αντίστοιχα Ασιατικά δικαιώματα πώλησης μπορούν να αναπτυχθούν με παρόμοιο τρόπο.

3.1. Φράγματα βασισμένα στο συλλογισμό της συμονοτονικότητας

Και στο οικονομικό και στο ασφαλιστικό πλαίσιο αρκετά συχνά αντιμετωπίζουμε τυχαίες μεταβλητές του τύπου $\mathbb{S}=\sum_{i=0}^{n-1} X_i$ όπου οι όροι X_i δεν είναι αμοιβαία ανεξάρτητοι και η πολυμεταβλητή συνάρτηση κατανομής του τυχαίου διανύσματος $(X_1, X_2, ..., X_n)$ δεν είναι πλήρως καθορισμένη επειδή γνωρίζουμε μόνο την περιθώρια συνάρτηση κατανομής των τυχαίων μεταβλητών X_i. Σε τέτοιες περιπτώσεις, για να είμαστε σε θέση να λάβουμε αποφάσεις, είναι χρήσιμο να βρούμε τη δομή εξάρτησης για το τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$ παράγοντας τις λιγότερο ευνοϊκές συνολικές αξίες του S με δοσμένες τις περιθώριες κατανομές. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη τις περιθώριες κατανομές των όρων σε μια τυχαία μεταβλητή $S=\sum_{i=1}^{n} X_i$, θα ψάξουμε για την από-κοινού κατανομή με το μεγαλύτερο άθροισμα, υπό την έννοια της κυρτής διάταξης. Συνεπώς για να αντιμετωπίσουμε αυτήν την κατάσταση αναζητούμε τα κάτω φράγματα της μορφής $\underline{\mathbb{S}}=\sum_{i=0}^{n-1} \underline{X_i}$ και τα άνω φράγματα της μορφής $\overline{\mathbb{S}}=\sum_{i=0}^{n-1} \overline{X_i}$ για το άθροισμα $\mathbb{S}=\sum_{i=0}^{n-1} X_i$.

Εισάγουμε αρχικά την έννοια του "stop-loss ασφαλίστρου". Το ασφάλιστρο stop-loss με συνεχές όριο ιδίας κράτησης d της τυχαίας μεταβλητής X καθορίζεται από το $E[(X-d)_+]$, με τη σημείωση ότι $(x-d)_+ = \max(x-d, 0)$. Κάνοντας μια ολοκλήρωση κατά μέρη, βρίσκουμε αμέσως ότι:

$$E[(X-d)_+] = \int_d^{\infty} (1-F_X(x))dx, \quad -\infty < d < +\infty,$$

όπου F_X είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ) του X. Επίσης χρήσιμη είναι η παρατήρηση ότι το $E[(X-d)_+]$ είναι μια φθίνουσα συνεχής συνάρτηση ως προς d, με παράγωγο $F_X(d)-1$ ως προς d, το οποίο πηγαίνει στο $+\infty$.

Τώρα, είμαστε σε θέση να καθορίσουμε τη stop-loss διάταξη μεταξύ των τυχαίων μεταβλητών όπου θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω.

Ορισμός. Θεωρούμε δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y. Τότε θα λέμε ότι η X προηγείται της Y υπό την έννοια της κυρτής διάταξης, και θα συμβολίζουμε με $X \leq_{cx} Y$, εάν και μόνο εάν:

$$E[X]=E[Y],\ E[(X-d)_+] \leq E[(Y-d)_+], -\infty < d < +\infty .$$

Για τα παραπάνω φράγματα πρέπει να ισχύουν τα (**α**) και (**β**):

α) οι περιθώριες συναρτήσεις κατανομών των $X_i, \underline{X_i}$ και $\overline{X_i}$ ($i = 1, \ldots, n$) να είναι ίσες.

β) να είναι $\underline{\mathbb{S}} \preceq_{cx} \mathbb{S} \preceq_{cx} \overline{\mathbb{S}}$, όπου $\preceq_{cx}$ δηλώνει την κυρτή διάταξη και σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό σημαίνει ότι

$$E[\underline{\mathbb{S}}] = E[\mathbb{S}] = E[\overline{\mathbb{S}}] \text{ και } E[(\underline{\mathbb{S}}-d)_+] \leq E[(\mathbb{S}-d)_+] \leq E[(\overline{\mathbb{S}}-d)_+] \text{ για όλα τα } d \in \mathbb{R} .$$

Βασισμένοι σε Dhaene et al [4] και Kaas et al [13], θα παρουσιάσουμε τις πιθανές επιλογές των $\overline{\mathbb{S}}$ και $\underline{\mathbb{S}}$ για τα κάτω και άνω φράγματα. Η αναλυτική μορφή τους θα παρουσιαστεί στις επόμενες παραγράφους.

Αναφορικά έχουμε τα παρακάτω τρία φράγματα:

1) ***Συμονοτονικό άνω φράγμα***: Αναφερόμενοι σε Dhaene et al [4], μια πιθανή επιλογή για ένα άνω φράγμα $\overline{\mathbb{S}}$ δίνεται από $\overline{\mathbb{S}} := \mathbb{S}^c$ με

$$\mathbb{S}^c \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U) \tag{2}$$

και όπου το σύμβολο $\overset{d}{=}$ χρησιμοποιείται για να δείξει την ισότητα στην κατανομή.

Οι Dhaene et al απέδειξαν ότι για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ έχουμε:

$X_1 + X_2 + \ldots + X_n \leq_{cx} X_1^c + X_2^c + \ldots + X_n^c$ (για την απόδειξη βλ. [4]).

Επιλέγουμε δηλαδή τις συνιστώσες του τυχαίου διανύσματος $(\overline{X_1},\overline{X_2},...,\overline{X_n})$ (με τις ίδιες περιθώριες με το $(X_1, X_2,..., X_n)$) έτσι ώστε $\overline{X_i} := X_i^c := F_{X_i}^{-1}(U)$, όπου :

α) η $F_X^{-1}(U)$ είναι η συνηθισμένη αντίστροφη μιας συνάρτησης κατανομής, υπολογισμένη σε μια ομοιόμορφη στο (0,1) τυχαία μεταβλητή *U*, η οποία είναι μια μη-φθίνουσα και αριστερά-συνεχής συνάρτηση ορισμένη από

$$F_X^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} / F_X(x) \geq p\}, \quad \mathrm{p} \in [0,1],$$

με $\inf \varnothing = +\infty$ από ορισμό.

β) το αντίστοιχο τυχαίο διάνυσμα $(X_1^c, X_2^c,..., X_n^c)$ είναι συμονοτονικό.

Ορισμός. Ένα τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, X_2,..., X_n)$ λέγεται ότι είναι συμονοτονικό εάν κάθε δύο πιθανά αποτελέσματα $(x_1, x_2,..., x_n)$ και $(y_1, y_2,..., y_n)$ του $(X_1, X_2,..., X_n)$ είναι διατεταγμένα κατά συνιστώσες.

2) ***Βελτιωμένο Συμονοτονικό άνω φράγμα***: Τώρα υποθέτουμε ότι έχουμε κάποιες πρόσθετες πληροφορίες διαθέσιμες σχετικά με την στοχαστική φύση του $(X_1, X_2,..., X_n)$. Ακριβέστερα, υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποια τυχαία μεταβλητή *Λ* με μια δεδομένη συνάρτηση κατανομής, έτσι ώστε να ξέρουμε τις α.σ.κ. (δοθέντος ότι *Λ*=*λ*) των τυχαίων μεταβλητών X_i, για όλες τις πιθανές τιμές του *λ*. Βασισμένοι σε Kaas et al [13] , επιλέγουμε $\overline{\mathbb{S}} := \mathbb{S}^u$, με

$$\mathbb{S}^u = F_{X_1/\Lambda}^{-1}(U) + F_{X_2/\Lambda}^{-1}(U) + ...F_{X_n/\Lambda}^{-1}(U). \tag{3}$$

Για να είμαστε ακριβέστεροι, επιλέγουμε τις συνιστώσες του τυχαίου διανύσματος $(\overline{X_1},\overline{X_2},...,\overline{X_n})$ έτσι ώστε $\overline{X_i} := F_{X_i/\Lambda}^{-1}(U)$, όπου $F_{X_i/\Lambda}^{-1}(U)$ είναι ο συμβολισμός για την τυχαία μεταβλητή $f_i(U,\Lambda)$, με τη συνάρτηση f_i να καθορίζεται από $f_i(u,\lambda) = F_{X_i|\Lambda=\lambda}^{-1}(u)$, και με *U* να είναι ομοιόμορφη στο (0,1) τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη του *Λ*. Όπως αποδεικνύεται στους Dhaene et al [4]

$$F_{X_1|\Lambda}^{-1}(U) + F_{X_2|\Lambda}^{-1}(U) + ... + F_{X_n|\Lambda}^{-1}(U) \leq_{cx} F_{X_1}^{-1}(U) + F_{X_2}^{-1}(U) + ... + F_{X_n}^{-1}(U)$$

κάτι το οποίο σημαίνει ότι το άνω φράγμα $\mathbb{S}^u$ είναι πράγματι βελτιωμένο σε σχέση με το άνω φράγμα $\mathbb{S}^c$.

Παρατήρηση

Εάν το *Λ* είναι ανεξάρτητο των $X_1, X_2, ..., X_n$, τότε πραγματικά δεν έχουμε κάποια πρόσθετη πληροφορία και το βελτιωμένο άνω φράγμα είναι λιγότερο αξιόπιστο από το συμονοτονικό άνω φράγμα.

3) *Κάτω φράγμα*: Όπως και πριν, υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποια τυχαία μεταβλητή *Λ* με δεδομένη συνάρτηση κατανομής, έτσι ώστε να ξέρουμε τις δεσμευμένες α.σ.κ. (λαμβάνοντας υπόψη *Λ* = *λ*) των τυχαίων μεταβλητών X_i, για όλες τις πιθανές τιμές *λ*. Για να λάβουμε ένα κάτω φράγμα, υπό την έννοια της κυρτής διάταξης, για το $S = X_1 + X_2 + ... + X_n$ πρέπει να δεσμεύσουμε σε αυτή την τυχαία μεταβλητή. Σύμφωνα με Kaas et al [13], ως ένα κάτω φράγμα επιλέγουμε το $\underline{\mathbb{S}} := \mathbb{S}^\ell$, όπου $\mathbb{S}^\ell$ να είναι μια δεσμευμένη μέση τιμή του $\mathbb{S}$ δοσμένης κάποιας τυχαίας μεταβλητής *Λ*, όχι απαραίτητα ίση με αυτή που εισάγεται στην (3):

$$\mathbb{S}^\ell = E[\mathbb{S}/\Lambda]. \tag{4}$$

Με άλλα λόγια , επιλέγουμε τις συνιστώσες του τυχαίου διανύσματος $(\underline{X_1}, \underline{X_2}, ..., \underline{X_n})$ έτσι ώστε $\underline{X_i} := E[X_i/\Lambda]$. Αποδεικνύεται στους Dhaene et al [4] ότι για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα X και οποιοδήποτε τυχαία μεταβλητή *Λ*, έχουμε:

$$E[X_1|\Lambda] + E[X_2|\Lambda] + ... + E[X_n|\Lambda] \leq_{cx} X_1 + X_2 + ... + X_n. \tag{5}$$

Συμπέρασμα

Συνοψίζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι, το άθροισμα $\mathbb{S}$ είναι φραγμένο κάτω και άνω υπό την έννοια της κυρτής διάταξης από τα αθροίσματα που δίνονται στις (4), (3) και (2):

$$\mathbb{S}^\ell \preceq_{cx} \mathbb{S} \preceq_{cx} \mathbb{S}^u \preceq_{cx} \mathbb{S}^c,$$

που συνεπάγεται εξ ορισμού της κυρτής διάταξης ότι :

$$E[\mathbb{S}^{\ell}] = E[\mathbb{S}] = E[\mathbb{S}^{u}] = E[\mathbb{S}^{c}] \text{ και}$$

$$E[(\mathbb{S}^{\ell} - d)_{+}] \le E[(\mathbb{S} - d)_{+}] \le E[(\mathbb{S}^{u} - d)_{+}] \le E[(\mathbb{S}^{c} - d)_{+}]$$

για όλα τα d στο $\mathbb{R}$.

Μια πιο λεπτομερής επισκόπηση της κατασκευής αυτών των αθροισμάτων και των αντίστοιχων φραγμάτων, βασισμένη στη βιβλιογραφία, δίνεται στο παράρτημα Α. Σημειώνουμε επίσης ότι σε όλο το έγγραφο και ειδικά στις αποδείξεις των θεωρημάτων, χρησιμοποιούμε τα αποτελέσματα που συνοψίζονται στο παράρτημα.

Σημειώνουμε ότι η τιμολόγηση των Ασιατικών δικαιωμάτων κατά την προσέγγιση των Black και Scholes είναι στην πραγματικότητα μια ιδιαίτερη περίπτωση των αθροισμάτων των *Λογαριθμο-Κανονικών* μεταβλητών στο παράρτημα Α. Πράγματι, ας εξετάσουμε την τιμή ενός διακριτού αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού-τύπου με σταθερή τιμή εξάσκησης K, ημερομηνία λήξης T και με μέσο όρο n τιμών της μετοχής με $T - n + 1 \ge 0$:

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}[(\mathbb{S} - nK)_{+}] \tag{6}$$

με

$$\mathbb{S} = \sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) = \sum_{i=0}^{n-1} S(0) e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-i)+\sigma B(T-i)} . \tag{7}$$

Αυτό μπορεί να ξαναγραφεί ως άθροισμα των *Λογαριθμο-Κανονικών* τυχαίων μεταβλητών:

$$\mathbb{S} = \sum_{i=0}^{n-1} X_i = \sum_{i=0}^{n-1} a_i e^{Y_i} ,$$

(8)

με

$$\left.\begin{array}{l} Y_i = \sigma B(T-i) \sim N(0, \sigma^2 (T-i)), \delta\eta\lambda.\ E[Y_i] = 0 \text{ και } \sigma_{Y_i}^2 = \sigma^2 (T-i) \\ \kappa\alpha\iota \\ a_i = S(0) e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-i)} \end{array}\right\} \tag{9}$$

με $\mathrm{cov}(Y_i, Y_j) = \sigma^2 \min(T-i, T-j)$

οδηγεί στο

$$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = a_i a_j e^{((T-i)+(T-j))\sigma^2/2}[e^{\sigma^2 \min(T-i,T-j)} - 1].$$

3.1.1. Συμονοτονικό άνω φράγμα

Για $F_X^{-1}(U)$ όπως ορίστηκε παραπάνω και $\mathbb{S}^c \overset{d}{=} \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(U)$ από την (2) έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

θεώρημα 3.1.1.

Το συμονοτονικό άνω φράγμα για την τιμή ενός αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος αγοράς δίνεται από:

$$AC(n,K,T) \le CUB = \frac{e^{-rT}}{n} E^Q\left[\left(\mathbb{S}^c - nK\right)_+\right]$$

$$= \frac{S(0)}{n} \sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri} \Phi[\sigma\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^c}(nK))] - e^{-rT} K(1 - F_{\mathbb{S}^c}(nK))$$

και η $F_{\mathbb{S}^c}(nK)$ προκύπτει από την επίλυση της

$$S(0)\sum_{i=0}^{n-1} \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-i) + \sigma\sqrt{T-i}\,\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^c}(nK))\right] = nK .$$

Απόδειξη.

Από την σχέση (88) στο παράρτημα όπου δηλώνει την έκφραση για το stop-loss ασφάλιστρο του S^c με δοσμένο d με $F_{S^c}^{-1}(0) < d < F_{S^c}^{-1}(1)$ είναι:

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{E[Y_i] + (\sigma_{Y_i}^2/2)} \Phi(sign(\alpha_i)\sigma_{Y_i} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(d))) - d(1 - F_{S^c}(d)).$$

Για $d=nK$, $\alpha_i, E[Y_i], \sigma_{Y_i}$ από την (9) και πολλαπλασιάζοντας τον παραπάνω τύπο με $\frac{e^{-rT}}{n}$ προκύπτει το άνω φράγμα

$$CUB = \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi[\sigma\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(nK))] - e^{-rT}K(1 - F_{S^c}(nK)).$$

Το υπόλοιπο πρόβλημα είναι πώς να υπολογίσουμε την ποσότητα $F_{S^c}(nK)$. Από την (87) για $x=nK$ και $\alpha_i, E[Y_i], \sigma_{Y_i}$ από την (9), παίρνουμε την $F_{\mathbb{S}^c}(nK)$ που προκύπτει από την επίλυση της

$$S(0)\sum_{i=0}^{n-1}\exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-i) + \sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{S^c}(nK))\right] = nK.$$

3.1.2. Κάτω φράγμα

Ένα κάτω φράγμα για την τιμή του Ασιατικού δικαιώματος AC(*n, K, T*) λαμβάνεται με τη χρησιμοποίηση μιας κανονικά κατανεμημένης μεταβλητής δέσμευσης *Λ* και με την αντικατάσταση του $\mathbb{S}$ με $\mathbb{S}^\ell$ στο δεξιό μέλος της (6), όπου σύμφωνα με την (4)

$$\mathbb{S}^\ell = \sum_{i=0}^{n-1} E^Q[X_i / \Lambda] = \sum_{i=0}^{n-1} a_i E^Q[e^{Y_i} / \Lambda].$$

Το ακόλουθο θεώρημα δηλώνει ένα κάτω φράγμα για την τιμή του δικαιώματος AC(*n, K, T*).

θεώρημα 3.1.2.

Υποθέτουμε ότι το άθροισμα $\mathbb{S}$ δίνεται από (7)–(9) και *Λ* είναι μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης έτσι ώστε (σB(*T–i*),*Λ*) είναι διμεταβλητή κανονικά κατανεμημένη για όλα τα *i*. Τότε το συμονοτονικό κάτω φράγμα για την τιμή του δικαιώματος AC(*n, K, T*) δίνεται από

$$\text{LB}\Lambda = \frac{e^{-rT}}{n} E^Q[(\mathbb{S}^\ell - nK)_+]$$

$$=\frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1}e^{-ri}\Phi[\sigma\rho_{T-i}\sqrt{T-i}-\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^{\ell}}(nK))]-e^{-rT}K(1-F_{\mathbb{S}^{\ell}}(nK)), \qquad (10)$$

όπου ρ_{T-i}=corr(σB$(T-i)$, Λ)≥ 0 και $F_{\mathbb{S}^{\ell}}(nK)$ προκύπτει από την επίλυση της

$$S(0)\sum_{i=0}^{n-1}\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\rho_{T-i}^2\right)(T-i)+\sigma\rho_{T-i}\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^{\ell}}(nK))\right]=nK, \qquad (11)$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) μιας τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής και $F_{\mathbb{S}^{\ell}}(\cdot)$ αντιπροσωπεύει την α.σ.κ. του $\mathbb{S}^{\ell}$.

Απόδειξη.

Από την σχέση (85) στο παράρτημα έχουμε:

$$\mathbb{S}^{\ell}\overset{d}{=}\sum_{i=1}^{n}E[X_i/\Lambda]=\sum_{i=1}^{n}a_i e^{E[Y_i]+r_i\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(V)+\frac{1}{2}(1-r_i^2)\sigma_{Y_i}^2}$$

Αντικαθιστώντας από την (9) τα: $a_i=S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-i)}$, $E[Y_i]$=0 και $\sigma_{Y_i}^2=\sigma^2(T-i)$

ο παραπάνω τύπος γίνεται:

$$S^{\ell}=S(0)\sum_{i=0}^{n-1}e^{(r-(\sigma^2/2)\rho_{T-i}^2)(T-i)+\sigma\rho_{T-i}\sqrt{T-i}\sigma\Phi^{-1}(V)}$$

με $\rho_{T-i}=r_i$. Από αυτήν την έκφραση, βλέπουμε ότι το $\mathbb{S}^{\ell}$ είναι ένα συμονοτονικό άθροισμα Λογαριθμοκανονικών τυχαίων μεταβλητών. Έτσι από την σχέση (90) όπου δηλώνει την έκφραση για το stop-loss ασφάλιστρο του S^{ℓ} έχουμε:

$$E[(S^{\ell}-d)_+]=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i e^{E[Y_i]+(\sigma_{Y_i}^2/2)}\Phi[r_i\sigma_{Y_i}-\Phi^{-1}(F_{S^{\ell}}(d))]-d(1-F_{S^{\ell}}(d))$$

για d=nK , $\alpha_i, E[Y_i], \sigma_{Y_i}$ από την (9) και πολλαπλασιάζοντας τον παραπάνω τύπο με $\frac{e^{-rT}}{n}$ προκύπτει το κάτω φράγμα

$$\text{LB}\Lambda=\frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1}e^{-ri}\Phi[\sigma\rho_{T-i}\sqrt{T-i}-\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^{\ell}}(nK))]-e^{-rT}K(1-F_{\mathbb{S}^{\ell}}(nK)).$$

Από την (89) για x=nK και $\alpha_i, E[Y_i], \sigma_{Y_i}$ από την (9), παίρνουμε την $F_{\mathbb{S}^{\ell}}(nK)$ που προκύπτει από την επίλυση της

$$S(0)\sum_{i=0}^{n-1}\exp\left[\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\rho_{T-i}^2\right)(T-i)+\sigma\rho_{T-i}\sqrt{T-i}\,\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^\ell}(nK))\right]=nK.$$

Στόχος μας είναι να παραγάγουμε μια κλειστή-μορφή έκφρασης για το κάτω φράγμα. Συνεπώς η επιλογή της κατάλληλης μεταβλητής δέσμευσης Λ κρίνεται αναγκαία. Στην πραγματικότητα, οι τύποι (10)–(11) για το κάτω φράγμα είναι γενικοί υπό την έννοια ότι ισχύουν για οποιαδήποτε κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης Λ, που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 3.1.2, με την αντικατάσταση του κατάλληλου $\rho_{\mathrm{T}-i}$. Ωστόσο συγκεκριμένες επιλογές για το Λ δίνουν ποιοτικότερο κάτω φράγμα.

Κατάλληλη επιλογή για την μεταβλητή *Λ*

Οι M.Vanmaele et al [6] όρισαν την Λ ως μια κανονική τυχαία μεταβλητή που δίνεται από

$$\Lambda=\sum_{i=0}^{n-1}\beta_i \mathrm{B}(T-i), \qquad \beta_i\in\mathbb{R}^+. \tag{12}$$

Για γενικό θετικό β_i, η διακύμανση της Λ δίνεται από

$$\sigma_\Lambda^2=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\beta_i\beta_j\min(T-i,T-j)$$

και οι συσχετίσεις από

$$\rho_{\mathrm{T}-i}=corr(\sigma B(T\text{-}i),\Lambda)=\frac{\operatorname{cov}(B(T-i),\Lambda)}{\sqrt{T-i}\,\sigma_\Lambda}=\frac{\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j\min(T-i,T-j)}{\sqrt{T-i}\,\sigma_\Lambda}\geq 0. \tag{13}$$

Αρχικά πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι το $\mathbb{S}^\ell$ είναι ένα άθροισμα από n συμονοτονικές τυχαίες μεταβλητές. Έστω $\underline{X}=(X_1,X_2,...,X_n)$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Σημειώνουμε ότι η σχέση $E[E[X_i|\Lambda]]=E[X_i]$ ισχύει πάντα, αλλά η σχέση $Var[E[X_i|\Lambda]]<Var[X_i]$ ισχύει αν: $E[Var[X_i|\Lambda]]\neq 0$ που σημαίνει ότι η X_i, δοθέντος ότι $\Lambda=\lambda$, είναι εκφυλισμένη για κάθε λ. Αυτό υπονοεί ότι το τυχαίο διάνυσμα $(E[X_1|\Lambda],E[X_2|\Lambda],...,E[X_n|\Lambda])$ γενικά, δεν θα έχει τις ίδιες περιθώριες συναρτήσεις

κατανομής με το $\underline{X}$. Εάν μπορούσαμε όμως να βρούμε μια τυχαία μεταβλητή δέσμευσης *Λ* με την ιδιότητα ότι όλες οι τυχαίες μεταβλητές $E[X_i|\Lambda]$ να είναι μη-αύξουσες συναρτήσεις του *Λ* (ή όλες είναι μη-φθίνουσες συναρτήσεις του *Λ*), τότε το κάτω φράγμα S^{ℓ} είναι ένα άθροισμα συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών. Αυτό συμβαίνει όταν οι συσχετίσεις $\rho_{\mathrm{T}-i}$ είναι θετικές. Πράγματι από την (13) για θετικούς συντελεστές β_i, συνεπάγεται ότι οι $\rho_{\mathrm{T}-i}$ είναι θετικές. Η επιλογή της κατάλληλης ρυθμιστικής μεταβλητής *Λ* από την (12) φαίνεται να μετατρέπεται σε επιλογή κατάλληλου β_i.

Ο συλλογισμός μας στηρίζεται στην παραγωγή ενός ποιοτικού κάτω φράγματος εξετάζοντας την διακύμανσή του $E^{Q}[\mathbb{S}/\Lambda]$. Για να μεγιστοποιηθεί η ποιότητα, πρέπει αυτή η διακύμανση να γίνει όσο το δυνατόν πιο κοντά στη $\mathrm{var}^{Q}[\mathbb{S}]$. Γενικώς από την (5) $\mathbb{S}^{\ell} \leq_{cx} \mathbb{S}$ συνεπάγεται ότι $\mathrm{var}[\mathbb{S}^{\ell}] \leq \mathrm{var}[\mathbb{S}]$. Η αντίστροφη περίπτωση δεν ισχύει γενικά. Για δύο τυχαίες μεταβλητές *X,Z* γνωρίζουμε ότι ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα για τις διακυμάνσεις:

$$\mathrm{var}[\mathrm{X}] = E[\mathrm{var}[\mathrm{X}/\mathrm{Z}]] + \mathrm{var}[E[\mathrm{X}/\mathrm{Z}]] \Rightarrow E[\mathrm{var}[\mathrm{X}/\mathrm{Z}]] = \mathrm{var}[\mathrm{X}] - \mathrm{var}[E[\mathrm{X}/\mathrm{Z}]].$$

Για $X=\mathbb{S}$ και $Z=\Lambda$ είναι

$$E^{Q}[\mathrm{var}^{Q}[\mathbb{S}/\Lambda]] = \mathrm{var}^{Q}[\mathbb{S}] - \mathrm{var}^{Q}[E^{Q}[\mathbb{S}/\Lambda]].$$

Θα πρέπει λοιπόν η παραπάνω μέση τιμή να είναι μικρή. Αυτό ωστόσο δεν συνεπάγεται ότι η παραπάνω έκφραση θα πρέπει να ελαχιστοποιηθεί κάτω από τη δεσμευμένη μεταβλητή *Λ*. Σε αυτό θα μας βοηθήσει η απόδειξη της παρακάτω σχέσης.

Η ακόλουθη σχέση συνδέει τις διασπορές και τα ασφάλιστρα stop-loss:

$$\frac{1}{2}Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (E[(X-t)_+] - (E[X]-t)_+)dt$$

Απόδειξη.

Αλλάζοντας τη διάταξη των ολοκληρωμάτων έχουμε:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (E[(X-t)_+] - (E[X]-t)_+)dt = \int_{-\infty}^{E[X]} E[(t-X)_+]dt + \int_{E[X]}^{+\infty} E[(X-t)_+]dt.$$

Από Dhaene et al [4] έχουμε

$$E[(d-X)_+] = \int_{-\infty}^{d} F_X(x)dx$$

και χρησιμοποιώντας τη μερική ολοκλήρωση και τον παραπάνω τύπο, βρίσκουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{E[X]} E[(t-X)_+]dt = \int_{-\infty}^{E[X]}\int_{-\infty}^{t} F_X(x)dxdt = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{E[X]} (x-E[x])^2 dF_X(x) \\ &\int_{E[X]}^{\infty} E[(X-t)_+]dt = \frac{1}{2}\int_{E[X]}^{\infty} (x-E[X])^2 dF_X(x) \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{=>}$$

$$\frac{1}{2}Var[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} (E[(X-t)_+] - (E[X]-t)_+)dt =>$$

$Var[X] = 2\int_{-\infty}^{+\infty} (E[(X-t)_+] - (E[X]-t)_+)dt$ και αποδείχτηκε η σχέση.

Εφαρμόζουμε δύο φορές την παραπάνω σχέση για $t = k$. Μία για $X=\mathbb{S}$ και μία για $X=\mathbb{S}^\ell$ και προκύπτει

$$\mathrm{var}^Q[\mathbb{S}] - \mathrm{var}^Q[\mathbb{S}^\ell] = 2\int_{-\infty}^{+\infty} \{E^Q[(\mathbb{S}-k)_+] - E^Q[(\mathbb{S}^\ell - k)_+]\}dk.$$

Από αυτήν την σχέση φαίνεται ότι ελαχιστοποιώντας την διαφορά της διακύμανσης υπό την *Λ* δεν εγγυάται ότι η διαφορά μεταξύ των αντίστοιχων ασφάλιστρων stop-loss για ένα συγκεκριμένο *k* θα ελαχιστοποιηθεί. Διαισθητικά, για να πάρουμε το καλύτερο κάτω φράγμα για το AC(*n, K, T*), πρέπει τα *Λ* και $\mathbb{S}$ να είναι όσο το δυνατόν πιο όμοια.

Αποδεικνύεται ότι δίνουν πολύ καλά αποτελέσματα οι δύο ακόλουθοι υποψήφιοι τύποι για το *Λ* :

1) ο γραμμικός μετασχηματισμός της προσέγγισης πρώτης-τάξης του $\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)$ στην (6), όπως προτάθηκε στην γενική τοποθέτηση των Kaas et al [13] και χρησιμοποιήθηκε στους Dhaene et al [5]:

$$\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-i)} \mathrm{B}(T-i), \tag{14}$$

2) ο τυποποιημένος λογάριθμος του γεωμετρικού μέσου όρου $G = \sqrt[n]{\prod_{i=0}^{n-1} S(T-i)}$ όπως προτάθηκε στους Nielsen και Sandmann [16]:

$$\Lambda = \frac{\ln \mathbb{G} - E^{Q}[\ln \mathbb{G}]}{\sqrt{\operatorname{var}^{Q}[\ln \mathbb{G}]}} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{var}^{Q}[\sum_{i=0}^{n-1} B(T-i)]}} \sum_{i=0}^{n-1} B(T-i), \tag{15}$$

όπου

$$\operatorname{var}^{Q}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{B}(T-i)\right] = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_i \beta_j \min(T-i, T-j) = n^2 T - \frac{n}{6}(n-1)(4n+1).$$

Παρατηρήσεις

- Σημειώνουμε ότι η ρυθμιστική μεταβλητή Λ εμφανίζεται μόνο στον τύπο των συσχετίσεων ρ_{T-i} στην (13).
- Το κάτω φράγμα (9)–(10) διαφέρει για τις δύο επιλογές του Λ στην (14) και (15), μόνο από την σχέση (13) για το συντελεστή συσχέτισης $\rho_{\mathrm{T}-i}$:

1. $$\rho_{\mathrm{T}-i} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-i)} \min(T-i, T-j)}{\sqrt{T-i}\,\sigma_{\Lambda}}$$

με $\sigma_{\Lambda}^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(2T-i-j)} \min(T-i, T-j)$,

2. $$\rho_{\mathrm{T}-i} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1} \min(T-i, T-j)}{\sqrt{n^2 T - \frac{n}{6}(n-1)(4n+1)}\sqrt{T-i}} = \frac{n(T-i) - (n-i-j)(n-i)/2}{\sqrt{n^2 T - \frac{n}{6}(n-1)(4n+1)}\sqrt{T-i}}$$

αφού $\sigma_{\Lambda} = 1$.

- Υπενθυμίζουμε ότι οι τύποι (10)–(11) για το κάτω φράγμα είναι γενικοί υπό την έννοια ότι ισχύουν για οποιαδήποτε κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης Λ, που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 3.1.2.
- Σημειώνουμε ότι η κλειστή-μορφή λύσης του κάτω φράγματος κατά Nielsen και Sandmann [16] (όπως θα δειχτεί αργότερα) είναι μια ειδική περίπτωση της (10) και (11) με την (15) ως ρυθμιστική μεταβλητή.

Επιπλέον, το κάτω φράγμα μπορεί να εκφραστεί ως συνδυασμός τύπων των Black και Scholes.

Θεώρημα 3.1.2*.

Για μια γενική κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης *Λ*, που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 3.1.2, το κάτω φράγμα LB*Λ* του AC(*n, K, T*) μπορεί να γραφτεί ως ένας μέσος όρος του τύπου των Black και Scholes για μία υποκείμενη μετοχή της οποίας η διαδικασία τιμών $\tilde{S}(t)$ είναι γεωμετρική κίνηση Brown με $\tilde{S}(0) = S(0)$ και με μεταβλητή διακύμανση $\tilde{\sigma}_\iota = \sigma\rho_{T-i}$ στο χρονικό διάστημα *T - i*:

$$\text{LB}\Lambda = \frac{e^{-rT}}{n}\sum_{i=0}^{n-1} E^Q[(\tilde{S}(T-i)-\tilde{K}_i)_+] = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(e^{-ri}\tilde{S}(0)\Phi(d_1,i) - e^{-rT}\tilde{K}_i\Phi(d_2,i))$$

με

$$\tilde{S}(T-i) = \tilde{S}(0)e^{(r-\tilde{\sigma}_i^2/2)(T-i)+\tilde{\sigma}_i B(T-i)}$$

και τιμές εξάσκησης

$$\tilde{K}_i = F^{-1}_{E[S(T-i)/\Lambda]}(F_{\mathbb{S}^\ell(nK)}) = S(0)e^{(r-\tilde{\sigma}_i^2/2)(T-i)+\tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^\ell}(nK))}$$

και όπου

$$d_{1,i} = \frac{(r+(\tilde{\sigma}_i^2/2))(T-i) - \ln(\tilde{K}_i/\tilde{S}(0))}{\tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i}} = \tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^\ell}(nK)) \ ,$$

$$d_{2,i} = d_{1,i} - \tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i} = -\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^\ell}(nK))$$

ενώ το $F_{\mathbb{S}^\ell}(nK)$ μπορεί να υπολογιστεί από $\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{K}_i = nK$ ομοίως όπως στην (11).

3.1.3. Βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα

Όπως και στο κάτω φράγμα, θεωρούμε μια κανονική τυχαία μεταβλητή δέσμευσης *Λ*. Ένα βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα για την τιμή του Ασιατικού δικαιώματος AC(*n, K, T*) δίνεται από

$$\text{AC}(n, K, T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^Q[(S - nK)_+] \leq \frac{e^{-rT}}{n} E^Q[(S^u - nK)_+] \ , \tag{16}$$

όπου σύμφωνα με την (3) $\mathbb{S}^u = \sum_{i=0}^{n-1} F^{-1}_{X_i/\Lambda}(U) = \sum_{i=0}^{n-1} F^{-1}_{a_i e^{Y_i}/\Lambda}(U)$ για μια ομοιόμορφη στο (0,1) τυχαία μεταβλητή *U* ανεξάρτητη της *Λ*. Συγκεκριμένα, λαμβάνουμε την ακόλουθη αναλυτική έκφραση για αυτό το φράγμα.

θεώρημα 3.1.3.

Υποθέτουμε ότι το άθροισμα $\mathbb{S}$ δίνεται από (7)–(9) και *Λ* είναι μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης έτσι ώστε (*σB*(*T-i*), *Λ*) είναι διμεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή για όλα τα *i*. Τότε το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα για την τιμή του δικαιώματος AC(*n, K, T*) δίνεται από

$$\begin{aligned} \text{ICUB}\Lambda &= \frac{e^{-rT}}{n} E^Q[(\mathbb{S}^u - nK)_+] \\ &= \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{i=0}^{n-1} S(0) e^{r(\mathrm{T}-i)} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\rho^2_{T-i}(T-i)} \\ &\quad \times \int_0^1 e^{\rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(\upsilon)} \Phi(\sqrt{1-\rho^2_{T-i}}\sigma\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK))) d\upsilon \\ &\quad - e^{-rT} K(1 - F_{\mathbb{S}^u}(nK)) , \end{aligned} \tag{17}$$

όπου

$$V = \Phi\left(\frac{\Lambda - E[\Lambda]}{\sigma_\Lambda}\right) \tag{18}$$

είναι μία ομοιόμορφη στο (0 , 1) τυχαία μεταβλητή, $\rho_{\mathrm{T}-i}$ =corr(*σB*(*T-i*),*Λ*) και

$$F_{\mathbb{S}^u}(nK) = \int_0^1 F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK) d\upsilon$$

και τέλος η ρυθμιστική κατανομή $F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK)$ προκύπτει από την επίλυση της

$$nK = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \exp[\rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(\upsilon) + \sqrt{1-\rho^2_{T-i}}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK))] \ . \tag{19}$$

Απόδειξη.

Όπως φαίνεται και από την (17) για να βρούμε το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα για την τιμή του δικαιώματος AC(*n*, *K*, *T*) αρκεί να καθορίσουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της $\mathbb{S}^u$ την $F_{\mathbb{S}^u}(x)$ και το ασφάλιστρο stop-loss $E[(\mathbb{S}^u - d)_+]$, όπου δεσμεύουμε επάνω σε μια κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή ή ισοδύναμα πάνω σε μια ομοιόμορφη στο (0 , 1) τυχαία μεταβλητή *V*, όπως φαίνεται στην (18). Η δεσμευμένη πιθανότητα $F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(x)$ δηλώνεται επίσης από $F_{\mathbb{S}^u}(x/V=\upsilon)$. Από το παράρτημα Α έχουμε δείξει ότι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ.) της $\mathbb{S}^u$ για $\alpha_i \geq 0$ δίνεται από τον τύπο (93)

$$F_{\mathbb{S}^u}(x) = \int_0^1 F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(x)d\upsilon .$$

Ψάχνουμε τώρα μια έκφραση για το ασφάλιστρο stop-loss με όριο ιδίας κράτησης *d* με $F^{-1}_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(0) < d < F^{-1}_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(1)$ για το $\mathbb{S}^u$. Από την (73) προκύπτει:

$$\mathrm{E}[(\mathbb{S}^u - d)_+] = \int_0^1 E(\mathbb{S}^u - d)_+ / V = \upsilon]d\upsilon = \sum_{i=0}^{n-1}\int_0^1 E[(F^{-1}_{X_i/\Lambda}(U/V=\upsilon) - d_i)_+]d\upsilon \qquad (20)$$

με $d_i = F^{-1}_{X_i/\Lambda}(F_{\mathbb{S}^u}(d/V=\upsilon)/V=\upsilon)$ και με την U μια τυχαία μεταβλητή που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο (0,1) και ανεξάρτητη της *V*.

Είναι $X_i = a_i e^{Y_i}$ και από την (81) δείξαμε ότι η τυχαία μεταβλητή Y_i ακολουθεί την *Κανονική* Κατανομή με παραμέτρους

$$\mu_i = E[Y_i] + r_i\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(V) \text{ και } \sigma_i = \sqrt{(1-r_i^2)}\sigma_{Y_i} .$$

Συνεπώς η $F^{-1}_{X_i/\Lambda}(U/V=\upsilon)$ ακολουθεί μια *Λογαριθμο-Κανονική* κατανομή με μέσο και τυπική απόκλιση:

$$\mu_\upsilon(i) = \ln\alpha_i + E[Y_i] + r_i\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(\upsilon), \quad \sigma_\upsilon(i) = \sqrt{1-r_i^2}\sigma_{Y_i} .$$

Από την (82) για $U = F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(d)$ λαμβάνουμε

$$d_i = a_i \exp\left[E[Y_i] + r_i\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(\upsilon) + sign(a_i)\sqrt{1-r_i^2}\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(d))\right]. \qquad (21)$$

Από τον τύπο (77) προκύπτει:

$$\mathrm{E}[(\mathbb{S}^u - d)_+ / V = \upsilon] = \sum_{i=0}^{n-1} [sign(a_i) e^{\mu_\upsilon(i) + \frac{\sigma_\upsilon^2(i)}{2}} \Phi(sign(a_i) d_{i,1}) - d_i \Phi(sign(a_i) d_{i,2})$$

με

$$d_{i,1} = \frac{\mu_\upsilon(i) + \sigma_\upsilon^2(i) - \ln d_i}{\sigma_\upsilon(i)}, \quad d_{i,2} = d_{i,1} - \sigma_\upsilon(i) \text{ από την (78).}$$

Αν αντικαταστήσουμε στον παραπάνω τύπο τα: $\mu_\upsilon(i), \sigma_\upsilon(i), d_i, d_{i,1}, d_{i,2}$ από τις αντίστοιχες σχέσεις και σύμφωνα με την (20) ολοκληρώσουμε στο διάστημα [0 , 1] έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[(\mathbb{S}^u - d)_+] &= \sum_{i=0}^{n-1} [a_i e^{E[Y_i] + \frac{1}{2}\sigma_{Y_i}^2 (1-r_i^2)} \\ &\quad \times \int_0^1 e^{r_i \sigma_{Y_i} \Phi^{-1}(\upsilon)} \Phi(sign(a_i)\sqrt{1-r_i^2}\sigma_{Y_i} - \Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(d))) d\upsilon \\ &\quad - d(1 - F_{\mathbb{S}^u}(d)). \end{aligned} \tag{22}$$

Για d=nK, $r_i = \rho_{T-i}$ και για $\alpha_i, E[Y_i], \sigma_{Y_i}$ από την (9) η (22) δίνει το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα.

Από την (92) για x=nK και $\alpha_i, E[Y_i], \sigma_{Y_i}$ από την (9), παίρνουμε την $F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK)$ που προκύπτει από την επίλυση της

$$nK = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \exp[\rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(\upsilon) + \sqrt{1-\rho_{T-i}^2}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK))].$$

Κατάλληλη επιλογή της μεταβλητής *Λ*

Βρέθηκε από τους M.Vanmaele et al [6] ότι η μεταβλητή δέσμευσης

$$\Lambda = \sum_{k=1}^{T} \beta_k W_k \text{ , με } W_k \text{ i.i.d } N(0,1) \text{ έτσι ώστε } B(T-i) \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{T-i} W_k \text{ , } i=0,\ldots n-1, \tag{23}$$

με όλα τα β_k ίσα με μια ίδια σταθερά (για ευκολία παίρνουμε ίσο με την μονάδα) οδηγεί σε ένα πιο ακριβές άνω φράγμα από άλλες επιλογές για τα β_k ή από τις μεταβλητές δέσμευσης που παρουσιάσαμε στο κάτω φράγμα.

Για $\Lambda = \sum_{k=1}^{T} W_k \overset{d}{=} B(T)$ οι συσχετισμένοι όροι έχουν τη μορφή:

$$r_i = \rho_{T-i} = \frac{\operatorname{cov}(B(T-i),\Lambda)}{\sqrt{T-i}\,\sigma_\Lambda} = \frac{T-i}{\sqrt{T-i}\sqrt{T}} = \frac{\sqrt{T-1}}{\sqrt{T}}, \; i=0,...,n-1. \tag{24}$$

Παρατήρηση

Για $\Lambda = \sum_{k=1}^{T} W_k \overset{d}{=} B(T)$ η δομή εξάρτησης των όρων στο άθροισμα $\mathbb{S}^u$ αντιστοιχεί καλύτερα σε αυτή των όρων στο άθροισμα $\mathbb{S}$ απ' ότι για άλλες επιλογές του *Λ*. Ερευνώντας τις συσχετίσεις

$$corr[F^{-1}_{S(T-i)/\Lambda}(U), F^{-1}_{S(T-j)/\Lambda}(U)] = \frac{e^{[\rho_{T-j}\rho_{T-j}+\sqrt{1-\rho^2_{T-i}}\sqrt{1-\rho^2_{T-j}}]\sigma^2\sqrt{T-i}\sqrt{T-j}}-1}{\sqrt{e^{\sigma^{2(T-i)}}-1}\sqrt{e^{\sigma^{2(T-j)}}-1}},$$

$$corr[S(T-i), S(T-j)] = \frac{e^{\sigma^2\min(T-i,T-j)}-1}{\sqrt{e^{\sigma^{2(T-i)}}-1}\sqrt{e^{\sigma^{2(T-j)}}-1}},$$

μπορεί να φανεί ότι για ρ_{T-i} που δίνεται από την (24) αυτές οι συσχετίσεις όχι μόνο συμπίπτουν για $i = j$ αλλά και όταν ένας από τους δείκτες *i* ή *j* είναι ίσος με το μηδέν. Επιπλέον, για $i \neq j$, οι διαφορές

$$\left|[\rho_{T-i}\rho_{T-j} + \sqrt{1-\rho^2_{T-i}}\sqrt{1-\rho^2_{T-j}}]\sigma^2\sqrt{T-i}\sqrt{T-j} - \sigma^2\min(T-i,T-j)\right|$$

είναι μικρές για όλα τα *i* και *j* στο {0,...,*n*-1} σε σύγκριση με άλλες επιλογές του *Λ*.

Όπως και στην περίπτωση του κάτω φράγματος, μπορούμε να ξαναγράψουμε το άνω φράγμα ως έκφραση του τύπου των Black and Scholes.

Θεώρημα 3.1.3*.

Γενικά για μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης *Λ*, ικανοποιώντας τις υποθέσεις του θεωρήματος 3.1.2, το βελτιωμένο άνω φράγμα του AC(*n, K, T*) μπορεί να γραφτεί ως συνδυασμός τύπων των Black και Scholes για μία υποκείμενη μετοχή με $\tilde{S}(0) = S(0)$ και με διακύμανση $\tilde{\sigma}_i = \sigma\sqrt{1-\rho^2_{T-i}}$:

$$\frac{e^{-rT}}{n}E^Q[(\mathbb{S}^u - nK)_+] = \int_0^1 \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{\rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(\upsilon)-\frac{\sigma^2}{2}\rho_{T-i}^2(T-i)}$$

$$\times\{e^{-ri}\tilde{S}(0)\Phi(d_{1,i}(\upsilon)) - e^{rT}\tilde{K}_i(\upsilon)\Phi(d_{2,i}(\upsilon))\}d\upsilon$$

με

$$\tilde{S}(T-i) = \tilde{S}(0)e^{(r-\frac{\tilde{\sigma}_i^2}{2})(T-i)+\tilde{\sigma}_i B(T-i)}$$

και οι τιμές εξάσκησης καθορίζονται από

$$\tilde{K}_i(\upsilon) = S(0)e^{(r-\frac{\tilde{\sigma}_i^2}{2})(T-i)+\tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK))},$$

όπου

$$d_{1,i}(\upsilon) = \frac{(r+(\tilde{\sigma}_i^2/2))(T-i)-\ln(\tilde{K}_i(\upsilon)/\tilde{S}(0))}{\tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i}} = \tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i} - \Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK)),$$

$$d_{2,i}(\upsilon) = d_{1,i}(\upsilon) - \tilde{\sigma}_i\sqrt{T-i} = -\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK))$$

και $F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK)$ μπορεί να υπολογιστεί παρόμοια με την (19) από $\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{K}_i(\upsilon) = nK$.

3.2. Άνω Φράγμα βασισμένο στο κάτω φράγμα συν έναν όρο σφάλματος

Σαν εναλλακτική λύση της παραγράφου 3.1.3, ακολουθώντας τις ιδέες των Rogers και Shi [7], οι Tom Hoedemakers et al [3] και M.Vanmaele et al [6], παρήγαγαν ένα άνω φράγμα βασισμένο στο κάτω φράγμα. Πράγματι, εφαρμόζουμε την ακόλουθη γενική ανισότητα από Rogers και Shi [7] για κάθε τυχαία μεταβλητή *Y* και *Z*:

$$0 \le E[E[Y_+/Z] - E[Y/Z]_+] \le \frac{1}{2}E\left[\sqrt{\mathrm{var}(Y/Z)}\right]. \tag{25}$$

Θεώρημα 3.2.1.

Έστω ότι το $\mathbb{S}$ δίνεται από (7)–(9) και *Λ* είναι μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης έτσι ώστε (*σB*(*T-i*),*Λ*) είναι διμεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή για όλα τα *i*. Τότε το άνω φράγμα για την τιμή του AC(*n, K, T*) δίνεται από

$$UB\Lambda = \frac{e^{-rT}}{n}\{E^Q[(\mathbb{S}^\ell - nK)_+] + \varepsilon\}, \tag{26}$$

όπου το σφάλμα φράγματος ε ισούται

$$\varepsilon = \frac{1}{2} E^{Q}[\sqrt{\mathrm{var}^{Q}(\mathbb{S}/\Lambda)}] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j e^{r_{ij}\sigma\sigma_{ij}\Phi^{-1}(\upsilon)+\frac{1}{2}(1-r_{ij}^2)\sigma^2\sigma_{ij}^2} \right.$$

$$\left. -\left(\sum_{i=0}^{n-1} S(0) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2\rho_{T-i}^2)(T-i)+\rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(\upsilon)} \right)^2 \right\}^{1/2} d\upsilon \quad , \tag{27}$$

με

$$a_i a_j = S(0)^2 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(2T-i-j)\right], \tag{28}$$

$$\sigma_{ij} = \sqrt{(T-i)+(T-j)+2\min(T-i,T-j)}\,, \tag{29}$$

$$r_{ij} = \frac{\sqrt{T-i}}{\sigma_{ij}}\rho_{T-i} + \frac{\sqrt{T-j}}{\sigma_{ij}}\rho_{T-j}\,. \tag{30}$$

Απόδειξη.

Η (25) για $Y = \sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - nK$ και Z μια μεταβλητή δέσμευσης Λ, δίνει ένα σφάλμα φράγματος για την διαφορά της τιμής του δικαιώματος και του κάτω της φράγματος

$$0 \le E^{Q}[E^{Q}[(\mathbb{S}-nK)_+ /\Lambda] - (\mathbb{S}^{\ell} - nK)_+] \le \frac{1}{2} E^{Q}[\sqrt{\mathrm{var}^{Q}(\mathbb{S}/\Lambda)}]\,. \tag{31}$$

Συνεπώς, η (26) δίνει το άνω φράγμα για τιμή του δικαιώματος AC(n, K, T).
Γνωρίζουμε ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση για την διασπορά: $Var[X] = E[X^2] - (E[X])^2$.
Λόγω αυτού μπορούμε να γράψουμε

$$E^{Q}[\sqrt{\mathrm{var}^{Q}(\mathbb{S}/\Lambda)}] = E^{Q}[(E^{Q}[\mathbb{S}^2/\Lambda] - E^{Q}[\mathbb{S}/\Lambda]^2)^{1/2}]$$

$$= E^{Q}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} E^{Q}[S(T-i)S(T-j)/\Lambda] - (\mathbb{S}^{\ell})^2 \right)^{1/2}\right] \quad , \tag{32}$$

και αν οι κατανομές των $S(T-i)$ και η Λ είναι καθορισμένες και γνωστές μπορεί να γραφτεί πιο αναλυτικά. Από την (32) λαμβάνουμε ότι:

$$E^Q[\sqrt{\text{var}^Q(\mathbb{S}/\Lambda)}] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} E^Q[S(T-i)S(T-j)/\Lambda = \lambda] - (E[\mathbb{S}/\Lambda = \lambda])^2 \right\}^{\frac{1}{2}} dF_\Lambda(\lambda) \ . \qquad (33)$$

Εξετάζουμε τώρα τον πρώτο όρο στην δεξιά πλευρά της (33). Σύμφωνα με τις ιδιότητες των *Λογαριθμο-Κανονικά* κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών, το γινόμενο *Λογαριθμο-Κανονικών* είναι ξανά *Λογαριθμο-Κανονικό*, και η δέσμευση μιας *Λογαριθμο-Κανονικής μεταβλητής* από μια *κανονική* μεταβλητή παράγει μια *Λογαριθμο-Κανονική* μεταβλητή.

Μπορούμε να συνεχίσουμε δηλώνοντας $Y_{ij} = Y_i + Y_j$ με $E[Y_{ij}] = E[Y_i] + E[Y_j]$ και

$$\sigma_{Y_{ij}}^2 = \sigma_{Y_i}^2 + \sigma_{Y_j}^2 + 2\sigma_{Y_iY_j}$$

όπου $\sigma_{Y_iY_j}$ είναι το $\text{cov}(Y_i, Y_j)$. Αντικαθιστώντας τα $\sigma_{Y_i}, \sigma_{Y_j}, \sigma_{Y_iY_j}$ προκύπτει:

$$\sigma_{Y_{ij}}^2 = \sigma^2 \left((T-i) + (T-j) + 2\min(T-i, T-j) \right)$$

και θέτοντας $\sigma_{ij} = \sqrt{(T-i) + (T-j) + 2\min(T-i, T-j)} \Rightarrow \sigma_{Y_{ij}} = \sigma\sigma_{ij}$.

Σημειώνουμε επίσης, ότι: $r_{ij} = \dfrac{Cov(Y_{ij}, \Lambda)}{\sigma_{Y_{ij}}\sigma_\Lambda} = \dfrac{Cov(Y_i, \Lambda)}{\sigma_{Y_{ij}}\sigma_\Lambda} + \dfrac{Cov(Y_j, \Lambda)}{\sigma_{Y_{ij}}\sigma_\Lambda} = \dfrac{\sigma_{Y_i}}{\sigma_{Y_{ij}}} r_i + \dfrac{\sigma_{Y_j}}{\sigma_{Y_{ij}}} r_j$,

και με αντικατάσταση προκύπτει η (30).

Δεσμεύοντας, δοθέντος ότι *Λ=λ*, η τυχαία μεταβλητή Y_{ij} (τύπος (81) στο παράρτημα Α) είναι κανονικά κατανεμημένη με παραμέτρους: $\mu(ij) = E[Y_{ij}] + r_{ij} \dfrac{\sigma_{Y_{ij}}}{\sigma_\Lambda}(\lambda - E[\Lambda])$ και $\sigma^2(ij) = (1 - r_{ij}^2)\sigma_{Y_{ij}}^2$. Ως εκ τούτου, δεσμεύοντας, δοθέντος ότι *Λ=λ*, η τυχαία μεταβλητή $e^{Y_{ij}}$ είναι Λογαριθμο-Κανονικά κατανεμημένη με παραμέτρους $\mu(ij)$ και $\sigma^2(ij)$. Επειδή $E[e^{Y_{ij}} / \Lambda = \lambda] = e^{\mu(ij) + \frac{1}{2}\sigma^2(ij)}$, βρήκαμε στην (83) του παραρτήματος ότι:

$$E[e^{Y_{ij}} / \Lambda = \lambda] = e^{E[Y_{ij}] + r_{ij}\sigma_{Y_{ij}}\Phi^{-1}(V) + \frac{1}{2}(1 - r_{ij}^2)\sigma_{Y_{ij}}^2} \ ,$$

όπου η τυχαία μεταβλητή $V = \Phi\left(\dfrac{\Lambda - E[\Lambda]}{\sigma_\Lambda}\right)$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα (0 , 1) . Συνεπώς ο πρώτος στην (33) ισούται με

$$\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} E^Q[S(T-i)S(T-j)/\Lambda] = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j \exp\left(r_{ij}\sigma\sigma_{ij}\Phi^{-1}(V) + \frac{1}{2}(1-r_{ij}^2)\sigma^2\sigma_{ij}^2\right). \quad (34)$$

Ο δεύτερος όρος στην στη δεξιά πλευρά της (33) μπορεί σύμφωνα με την (85) στο θεώρημα 6 να γραφτεί σαν

$$\mathbb{S}^{\ell} \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{n-1} S(0) e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2\rho_{T-i}^2)(T-i)+\rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}\,\Phi^{-1}(V)} \quad (35)$$

για $r_i = \rho_{T-i}$ και για $\alpha_i, E[Y_i], \sigma_{Y_i}$ από την (9).

Συνεπώς γράψαμε ρητά το $E^Q[\sqrt{\mathrm{var}^Q(\mathbb{S}/\Lambda)}]$, δίνοντας κάποια μεγάλη, αναλυτική και υπολογίσιμη έκφραση.

3.3. Φράγματα δέσμευσης μέσω της τεχνικής της διάσπασης

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε πως μπορούμε να βελτιώσουμε τα φράγματα που παρουσιάσαμε στις ενότητες 3.1 και 3.2. Θα συνδυάσουμε την τεχνική της δέσμευσης σε κάποια κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή *Λ* και την ιδέα της ανάλυσης των υπολογισμών σε ένα ακριβές και ένα προσεγγιστικό μέρος. Αυτή η ιδέα της διάσπασης μας παραπέμπει στον Curran (1994) [20].

Τα φράγματα που παράγουμε είναι βασισμένα σε μια γενική τεχνική για την παραγωγή φραγμάτων για τα ασφάλιστρα stop-loss των αθροισμάτων των εξαρτώμενων τυχαίων μεταβλητών. Πριν προχωρήσουμε στην εφαρμογή τους στα Ασιατικά δικαιώματα παραθέτουμε την σχετική θεωρία (βλ. Tom Hoedemakers et al [3]).

3.3.1. Διάσπαση του ασφαλίστρου stop-loss

Δεσμεύοντας το $\mathbb{S}$ σε κάποια τυχαία μεταβλητή *Λ*, το ασφάλιστρο stop-loss μπορεί να διασπαστεί σε δύο μέρη. Το ένα από αυτά μπορεί είτε να υπολογιστεί ακριβώς είτε με τη χρησιμοποίηση της αριθμητικής ολοκλήρωσης, ανάλογα με την κατανομή της υποκείμενης τυχαίας μεταβλητής. Για το υπόλοιπο μέρος παράγουμε αρχικά ένα κάτω και ένα άνω φράγμα βασισμένα στους συμονοτονικούς κινδύνους, και ένα άλλο άνω φράγμα που ισούται με αυτό το κάτω φράγμα συν έναν όρο σφάλματος.

Από την ιδιότητα του πύργου για την δεσμευμένη μέση τιμή, το ασφάλιστρο stop-loss $E[(\mathbb{S}-d)_+]$ με $\mathbb{S}=\sum_{i=1}^{n} X_i$ ισούται με $E[E[(\mathbb{S}-d)_+ / \Lambda]]$,

για κάποια ρυθμιστική μεταβλητή *Λ* με α.σ.κ. F_Λ.

Εάν επιπλέον, υπάρχει ένα d_Λ τέτοιο ώστε $\Lambda \geq d_\Lambda$ που συνεπάγεται ότι $\mathbb{S} \geq d$ ισχύει ότι

$$E[(\mathbb{S}-d)_+ / \Lambda] = E[\mathbb{S}-d / \Lambda] \overset{(4)}{=} (\mathbb{S}^{\ell}-d)_+ . \tag{36}$$

Η διάσπαση λοιπόν του stop-loss προκύπτει από

$$E[(\mathbb{S}-d)_+] = \int_{-\infty}^{d_\Lambda} E[(\mathbb{S}-d)_+ / \Lambda = \lambda] dF_\Lambda(\lambda) + \int_{d_\Lambda}^{+\infty} E[\mathbb{S}-d / \Lambda = \lambda] dF_\Lambda(\lambda)$$

$$\overset{(\sigma\upsilon\mu\beta.)}{=} I_1 + I_2 . \tag{37}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα (ακριβές μέρος) μπορεί περαιτέρω να απλοποιηθεί σε

$$I_2 = \int_{d_\Lambda}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} E[X_i / \Lambda = \lambda] dF_\Lambda(\lambda) - d(1-F_\Lambda(d_\Lambda)) \tag{38}$$

και μπορεί να καταγραφθεί ρητά εάν η διμεταβλητή κατανομή (X_i, Λ) είναι γνωστή για όλα τα *i*.

Η παραγωγή φραγμάτων για το πρώτο μέρος I_1 της διάσπασης και η πρόσθεση τους στο ακριβές μέρος I_2 (38) μας δίνει τα φράγματα για το ασφάλιστρο stop-loss.

Τώρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τα αντίστοιχα φράγματα για τα Ασιατικά δικαιώματα που μελετάμε.

3.3.2. Κάτω φράγμα

Με τη βοήθεια της ανισότητας *Jensen*, το πρώτο ολοκλήρωμα I_1 (37), για *d*=*nK*, φράσσεται κάτω από:

$$I_1 \geq \int_{-\infty}^{d_\Lambda} (E[\mathbb{S}/\Lambda=\lambda]-nK)_+ \, dF_\Lambda(\lambda) = \int_{-\infty}^{d_\Lambda} \left(\sum_{i=1}^{n} E[S(T-i)/\Lambda=\lambda]-nK \right)_+ dF_\Lambda(\lambda) \,. \qquad (39)$$

Προσθέτοντας το ακριβές μέρος I_2 (38) για $X_i = S(T-i)$ και $d = nK$ και εισάγοντας την (4) καταλήγουμε στο κάτω φράγμα της παραγράφου 3.1.2. Συνεπώς το κάτω φράγμα μέσω της διάσπασης ισούται με το κάτω φράγμα χωρίς διάσπαση για το οποίο έχουμε δώσει αναλυτική έκφραση στην 3.3.2.

3.3.3. Άνω Φράγμα βασισμένο στο κάτω φράγμα

Σημειώνουμε ότι το σφάλμα φράγματος στην (31) και ως εκ τούτου το ε είναι ανεξάρτητα από την τιμή εξάσκησης *K*. Στο ακόλουθο θεώρημα θα δείξουμε πώς να ενισχύσουμε (*strengthen*) το σφάλμα φράγματος ε στο θεώρημα 3.2.1 κάνοντας το εξαρτημένο από την τιμή εξάσκησης μέσω ενός κατάλληλα επιλεγμένου σταθερού d_Λ τέτοιο ώστε $\Lambda \geq d_\Lambda$ που συνεπάγεται ότι $\mathbb{S} \geq nK$. Η έννοια της εύρεσης τέτοιου d_Λ γενικά για μια μεταβλητή δέσμευσης *Λ* φαίνεται από την (36) για $d = nK$ ότι στο σύνολο $\{\Lambda \geq d_\Lambda\}$ ισχύει η σχέση:

$$E^Q[(\mathbb{S}-nK)_+ / \Lambda] = E^Q[\mathbb{S}-nK/\Lambda] = (\mathbb{S}^\ell - nK)_+ \,. \qquad (40)$$

Το ακόλουθο θεώρημα μπορεί να θεωρηθεί ως γενίκευση του αντίστοιχου αποτελέσματος των Nielsen και Sandmann [16]. Δεδομένου ότι οι Nielsen και Sandmann παρήγαγαν το αποτέλεσμά τους άμεσα για *Λ* που δίνεται από την (15), οι M.Vanmaele et al [6] επεκτείνανε αυτήν την προσέγγιση σε κάθε κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή δέσμευσης *Λ*.

Το ακόλουθο βοηθητικό αποτέλεσμα απαιτείται προκειμένου να καταγραφθούν τα φράγματα (βλ. M.Vanmaele et al [6] και Tom Hoedemakers et al [3]).

Λήμμα

Για κάθε σταθερά $b \in \mathbb{R}$ και κάθε κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή *Λ* ισχύει

$$\int_{-\infty}^{d_\Lambda} e^{b\Phi^{-1}(\upsilon)} dF_\Lambda(\lambda) = e^{\frac{b^2}{2}} \Phi(d_\Lambda^* - b), \tag{41}$$

όπου $d_\Lambda^* = \dfrac{d_\Lambda - E^Q[\Lambda]}{\sigma_\Lambda}$, $V = \Phi\left(\dfrac{\Lambda - E[\Lambda]}{\sigma_\Lambda}\right)$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα (0,1) και συνεπώς, η $\Phi^{-1}(V) = \dfrac{\Lambda - E[\Lambda]}{\sigma_\Lambda}$ είναι μια τυπική κανονική μεταβλητή.

Θεώρημα 3.3.3.

Έστω ότι το $\mathbb{S}$ δίνεται από τις (7)–(9) και *Λ* είναι μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης έτσι ώστε (*σB*(*T-i*),*Λ*) είναι διμεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή για όλα τα *i*. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $d_\Lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\Lambda \geq d_\Lambda$ που συνεπάγεται ότι $\mathbb{S} \geq nK$. Τότε ένα άνω φράγμα για την τιμή του δικαιώματος AC(*n, K, T*) δίνεται από

$$UB\Lambda_d = LB\Lambda + \frac{e^{-rT}}{n}\varepsilon(d_\Lambda), \tag{42}$$

όπου το σφάλμα φράγματος $\varepsilon(d_\Lambda)$ δίνεται από

$$\begin{aligned}\varepsilon(d_\Lambda) = {} & \frac{S(0)}{2}\{\Phi(d_\Lambda^*)\}^{1/2} \\ & \times\left\{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} e^{r(2T-i-j)+\sigma^2\rho_{T-i}\rho_{T-j}\sqrt{T-i}\sqrt{T-j}}\Phi(d_\Lambda^* - \sigma(\rho_{T-i}\sqrt{T-i} + \rho_{T-j}\sqrt{T-j}))\right. \\ & \left.\times(e^{\sigma^2(\min(T-i,T-j)-\rho_{T-i}\rho_{T-j}\sqrt{T-i}\sqrt{T-j}} - 1)\right\}^{1/2},\end{aligned} \tag{43}$$

με $d_\Lambda^* = (d_\Lambda - E^Q[\Lambda])/\sigma_\Lambda$, $\Phi(\cdot)$ η τυποποιημένη κανονική α.σ.κ. και $\rho_{T-i} = corr(\sigma B(T-i), \Lambda) \geq 0$.

Απόδειξη.

Γενικά, για $d_\Lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\Lambda \geq d_\Lambda$ που συνεπάγεται ότι $\mathbb{S} \geq nK$, προκύπτει από την εφαρμογή της (40) στην (25) ότι :

$$
\begin{aligned}
0 &\leq E^Q[E^Q[(\mathbb{S}-nK)_+ / \Lambda] - (\mathbb{S}^\ell - nK)_+] \\
&= \int_{-\infty}^{d_\Lambda} (E^Q[(\mathbb{S}-nK)_+ / \Lambda = \lambda] - (E^Q[\mathbb{S} / \Lambda = \lambda] - nK)_+) dF_\Lambda(\lambda) \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{d_\Lambda} (\operatorname{var}^Q(\mathbb{S} / \Lambda = \lambda))^{1/2} dF_\Lambda(\lambda) \qquad (44) \\
&\leq \frac{1}{2} (E^Q[\operatorname{var}^Q(\mathbb{S} / \Lambda) 1_{\{\Lambda < d_\Lambda\}}])^{1/2} (E^Q[1_{\{\Lambda < d_\Lambda\}}])^{1/2} =: \varepsilon(d_\Lambda) \ , \qquad (45)
\end{aligned}
$$

όπου η ανισότητα Holder's έχει εφαρμοστεί στην τελευταία ανισότητα. Όπου $1_{\{\Lambda < d_\Lambda\}}$ είναι η δείκτρια συνάρτηση, δηλ. $1_{\{c\}} = 1$ εάν η συνθήκη *c* είναι αληθής και $1_{\{c\}} = 0$ αν όχι, και όπου $F_\Lambda(\cdot)$ δηλώνει την κανονική αθροιστική συνάρτηση κατανομής της *Λ*.

Ο δεύτερος όρος της μέσης τιμής στο γινόμενο της (45) ισούται με

$$E^Q[1_{\{\Lambda < d_\Lambda\}}] = 0 \bullet P(\Lambda \geq d_\Lambda) + 1 \bullet P(\Lambda \leq d_\Lambda) = F_\Lambda(d_\Lambda) = \Phi(d_\Lambda^*) \ . \qquad (46)$$

Ο πρώτος όρος της μέσης τιμής στο γινόμενο της (45) μπορεί να εκφραστεί ως

$$E^Q[\operatorname{var}^Q(\mathbb{S}/\Lambda) 1_{\{\Lambda < d_\Lambda\}}] = E^Q[E^Q[\mathbb{S}^2 / \Lambda] 1_{\{\Lambda < d_\Lambda\}}] - E^Q[(E^Q[\mathbb{S}/\Lambda])^2) 1_{\{\Lambda < d_\Lambda\}}] . \qquad (47)$$

Τώρα θα μελετήσουμε τον δεύτερο όρο στην δεξιά πλευρά της (47)

$$E^Q[(E^Q[\mathbb{S}/\Lambda])^2) 1_{\{\Lambda < d_\Lambda\}}] = \int_{-\infty}^{d_\Lambda} (E^Q[\mathbb{S}/\Lambda = \lambda])^2 dF_\Lambda(\lambda) \ . \qquad (48)$$

Σύμφωνα με την (85) και χρησιμοποιώντας την σημειογραφία Y_{ij} που παρουσιάσαμε στην ενότητα 3.2 μπορούμε να εκφράσουμε την (48) ως:

$$E^Q[(E^Q[\mathbb{S}/\Lambda])^2) 1_{\{\Lambda < d_\Lambda\}}]$$

$$= \int_{-\infty}^{d_\Lambda} \left(\sum_{i=1}^{n} E[X_i / \Lambda = \lambda] \right)^2 dF_\Lambda(\lambda)$$

$$= \int_{-\infty}^{d_\Lambda} \left(\sum_{i=1}^{n} a_i e^{E[Y_i] + r_i \sigma_{Y_i} \Phi^{-1}(\upsilon) + \frac{1}{2}(1-r_i^2)\sigma_{Y_i}^2} \right)^2 dF_\Lambda(\lambda)$$

$$= \int_{-\infty}^{d_\Lambda} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j e^{E[Y_{ij}] + (r_i \sigma_{Y_i} + r_j \sigma_{Y_j}) \Phi^{-1}(\upsilon) + \frac{1}{2}\{(1-r_i^2)\sigma_{Y_i}^2 + (1-r_j^2)\sigma_{Y_j}^2\}} dF_\Lambda(\lambda)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i a_j e^{E[Y_{ij}] + \frac{1}{2}\{(1-r_i^2)\sigma_{Y_i}^2 + (1-r_j^2)\sigma_{Y_j}^2\}} \times \int_{-\infty}^{d_\Lambda} e^{(r_i \sigma_{Y_i} + r_j \sigma_{Y_j}) \Phi^{-1}(\upsilon)} dF_\Lambda(\lambda). \tag{49}$$

Για $r_i = \rho_{T-i}$ και για $\alpha_i, \alpha_j, \sigma_{Y_i}, \sigma_{Y_j}, E[Y_{ij}] = E[Y_i] + E[Y_j]$ από την (9) η (49) γίνεται:

$$E^Q[(E^Q[\mathbb{S}/\Lambda])^2) 1_{\{\Lambda < d_\Lambda\}}] = \int_{-\infty}^{d_\Lambda} \left(\sum_{i=1}^{n} E[X_i / \Lambda = \lambda] \right)^2 dF_\Lambda(\lambda)$$

$$= S(0)^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} e^{r(2T-i-j) - \frac{\sigma^2}{2}(\rho_{T-i}^2 (T-i) + \rho_{T-j}^2 (T-j))}$$

$$\times \int_{-\infty}^{d_\Lambda} e^{\sigma(\rho_{T-i}\sqrt{T-i} + \rho_{T-j}\sqrt{T-j}) \Phi^{-1}(\upsilon)} dF_\Lambda(\lambda), \tag{50}$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι η $\Phi^{-1}(\upsilon) = (\lambda - E^Q[\Lambda]) / \sigma_\Lambda$ και $\Phi(\cdot)$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας τυποποιημένης κανονικής μεταβλητής.

Εφαρμόζοντας το Λήμμα στην (50) με $b = \sigma(\rho_{T-i}\sqrt{T-i} + \rho_{T-j}\sqrt{T-j})$ προκύπτει

$$E^Q[(E^Q[\mathbb{S}/\Lambda])^2) 1_{\{\Lambda < d_\Lambda\}}]$$

$$= S(0)^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} e^{r(2T-i-j) + \sigma^2 \rho_{T-i} \rho_{T-j} \sqrt{T-i}\sqrt{T-j}} \Phi(d_\Lambda^* - \sigma(\rho_{T-i}\sqrt{T-i} + \rho_{T-j}\sqrt{T-j})). \tag{51}$$

Τώρα μελετάμε τον πρώτο όρο στην δεξιά πλευρά της (47), $E^Q[E^Q[\mathbb{S}^2 / \Lambda] 1_{\{\Lambda < d_\Lambda\}}]$. Ο όρος $E^Q[\mathbb{S}^2 / \Lambda]$ δίνεται από την (34). Επικαλούμαστε τις (28)–(30) και εφαρμόζουμε το Λήμμα με $b = r_{ij} \sigma \sigma_{ij} = \sigma(\rho_{T-i}\sqrt{T-i} + \rho_{T-j}\sqrt{T-j})$:

και απλοποιώντας λαμβάνουμε

$$E^Q[E^Q[\mathbb{S}^2 / \Lambda] 1_{\{\Lambda < d_\Lambda\}}]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \int_{-\infty}^{d_\Lambda} E^Q[S(T-i)S(T-j)/\Lambda=\lambda]\, dF_\Lambda(\lambda) \\
&= S(0)^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(2T-i-j)+\frac{1}{2}(1-r_{ij}^2)\sigma^2\sigma_{ij}^2} \int_{-\infty}^{d_\Lambda} e^{r_{ij}\sigma\sigma_{ij}\Phi^{-1}(\upsilon)} dF_\Lambda(\lambda) \\
&= S(0)^2 \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} e^{r(2T-i-j)+\sigma^2\min(T-i,T-j)} \Phi(d_\Lambda^* - \sigma(\rho_{T-i}\sqrt{T-i} + \rho_{T-j}\sqrt{T-j}))\,. \qquad (52)
\end{aligned}
$$

Συνδυάζοντας τις (52) και (51) στην (47), και έπειτα αντικαθιστώντας τις (46) και (47) στην (45) τελικά προκύπτει η έκφραση για το σφάλμα φράγματος στην (43).

Παρατηρήσεις

- Σημειώνουμε ότι σε αντίθεση με την (31) το σφάλμα φράγματος τώρα εξαρτάται από το K μέσω του d_Λ .
- Υπενθυμίζουμε ότι το σφάλμα φράγματος στην (45) και συνεπώς στην (43) ισχύει για οποιαδήποτε κανονική τυχαία μεταβλητή δέσμευσης Λ που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 3.1.2 και για την οποία υπάρχει ένα ολοκληρώσιμο φράγμα d_Λ τέτοιο ώστε $\Lambda \geq d_\Lambda$ που συνεπάγεται ότι $S \geq nK$.
- Για Λ δοσμένο από την (15), οι Nielsen και Sandmann διαπίστωσαν ότι το αντίστοιχο d_Λ δίνεται από

$$
d_{GA} = \frac{n\ln(K/S(0)) - \sum_{i=0}^{n-1}(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-i)}{\sigma\sqrt{n^2T - \frac{1}{6}n(n-1)(4n+1)}} \quad , \qquad (53)
$$

  όπου ο δείκτης GA είναι για να υπενθυμίζει το γεγονός ότι η Λ είναι ο τυποποιημένος λογάριθμος του γεωμετρικού μέσου όρου. Το σφάλμα φράγματος στην (43) συμπίπτει με αυτό που βρέθηκε στους Nielsen και Sandmann [16] για την ειδική επιλογή της Λ από την (15) και το αντίστοιχο d_{GA} στην (53).
- Οι M.Vanmaele et al [6] έδειξαν επίσης ότι για Λ δοσμένο από την (14) αυτή η τεχνική χρησιμοποιείται για να ενισχύσει το σφάλμα φράγματος στην (31) και ως εκ τούτου να κάνει πιο ακριβές το άνω φράγμα στην (26).

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα $e^x \geq 1+x$ και τις σχέσεις (7)–(9) και (14), λαμβάνουμε:

$$\mathbb{S} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i e^{Y_i} \geq \sum_{i=0}^{n-1} a_i (1+Y_i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} a_i + \sum_{i=0}^{n-1} a_i Y_i \underset{(14)}{\overset{(7)-(9)}{=}} \sum_{i=0}^{n-1} a_i + S(0)\sigma \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-i)} B(T-i)}_{=\Lambda}.$$

Συνεπώς θα είναι $\mathbb{S} \geq nK$ όταν το *Λ* είναι μεγαλύτερο από

$$\mathbb{S} \geq nK \Rightarrow \sum_{i=0}^{n-1} a_i + S(0)\sigma \underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-i)} B(T-i)}_{=\Lambda} \geq nK$$

$$\Rightarrow \Lambda \geq (nK - \sum_{i=0}^{n-1} a_i)/(S(0)\sigma).$$

Έτσι στην περίπτωση που το *Λ* είναι ο γραμμικός μετασχηματισμός της προσέγγισης πρώτης-τάξης (FA) του $\mathbb{S} = \sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)$, έχουμε:

$$d_{FA} = \frac{nK - \sum_{i=0}^{n-1} S(0) e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-i)}}{S(0)\sigma}. \tag{54}$$

- Τέλος παρατηρούμε ότι το άνω φράγμα στην (26) αντιστοιχεί στην οριακή περίπτωση της (44) όπου d_Λ ισούται με το άπειρο.

3.3.4. Μερικώς(*partially*) ακριβές /συμονοτονικό άνω φράγμα

Στην συνέχεια θα δείξουμε πώς μπορούμε να κάνουμε πιο ακριβές το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα της ενότητας 3.1.3 των Kaas et al [13] και Dhaene et al [4] με τη λήψη ενός άλλου αποκαλούμενου μερικώς ακριβές/συμονοτονικό άνω φράγμα που αποτελείται από ένα ακριβές μέρος της τιμής του δικαιώματος και κάποιου βελτιωμένου συμονοτονικού άνω φράγματος για το υπόλοιπο μέρος (βλ.Tom Hoedemakers et al [3] και M.Vanmaele et al [6]). Αυτό το άνω φράγμα βελτιώνει το άνω φράγμα που συμβολίζεται με $C_A^{**,G}$ στο έγγραφο του Nielsen και Sandmann [16], όπως θα εξηγηθεί σε επόμενη ενότητα.

θεώρημα 3.3.4.

Έστω ότι το $\mathbb{S}$ δίνεται από (7)–(9) και *Λ* είναι μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης έτσι ώστε (σB(*T-i*),*Λ*) είναι διμεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή για όλα τα *i*. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $d_\Lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\Lambda \geq d_\Lambda$ που συνεπάγεται ότι $S \geq nK$. Τότε το μερικώς ακριβές/συμονοτονικό άνω φράγμα για την τιμή του δικαιώματος AC(*n,K,T*) δίνεται από

$$\text{PECUB}\Lambda = \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi(\rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}-d_\Lambda^*) - e^{-rT}K\Phi(-d_\Lambda^*)$$

$$+\frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\rho_{T-i}^2(T-i)}$$

$$\times\int_0^{\Phi(d_\Lambda^*)} e^{\rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(\upsilon)}\Phi(\sqrt{1-\rho_{T-i}^2}\sigma\sqrt{T-i}-\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK)))d\upsilon$$

$$-e^{-rT}K\left(\Phi(d_\Lambda^*)-\int_0^{\Phi(d_\Lambda^*)} F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK)d\upsilon\right), \tag{55}$$

όπου $d_\Lambda^* = (d_\Lambda - E^Q[\Lambda])/\sigma_\Lambda$ και $F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}$ δίνεται από την (19) και $\rho_{T-\iota} = corr(\sigma B(T-i),\Lambda)$.

Απόδειξη.

Για την απόδειξη θα εργαστούμε ως εξής: Αρχικά φράζουμε άνω, τον πρώτο όρο της (37) I_1 αντικαθιστώντας το $\mathbb{S}/\Lambda=\lambda$ με το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα $\mathbb{S}^u$ (υπό την έννοια της κυρτής διάταξης): Για $d = nK$ είναι

$$\int_{-\infty}^{d_\Lambda} E[(\mathbb{S}-nK)_+/\Lambda=\lambda]dF_\Lambda(\lambda) \leq \int_{-\infty}^{d_\Lambda} E[(\mathbb{S}^u-nK)_+/\Lambda=\lambda]dF_\Lambda(\lambda). \tag{56}$$

Προσθέτουμε την (56) στο ακριβές μέρος I_2 της διάσπασης (37) και προκύπτει το αποκαλούμενο μερικώς ακριβές/συμονοτονικό άνω φράγμα.

Σύμφωνα με όσα είπαμε στην ενότητα 3.3.1 (και από τον τύπο (38)), για οποιαδήποτε κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή *Λ*, με αθροιστική συνάρτηση κατανομής α.σ.κ $F_\Lambda(\cdot)$, για την οποία υπάρχει ένα d_Λ τέτοιο ώστε $\Lambda \geq d_\Lambda$ που συνεπάγεται ότι $S \geq nK$ και που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 3.1.2, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{e^{-rT}}{n}E^Q[(\mathbb{S}-nK)_+] = \frac{e^{-rT}}{n}E^Q[E^Q[(\mathbb{S}-nK)_+/\Lambda]]$$

$$= \frac{e^{-rT}}{n}\left\{\underbrace{\int_{-\infty}^{d_\Lambda} E^Q[(\mathbb{S}-nK)_+/\Lambda=\lambda]dF_\Lambda(\lambda)}_{I_1}\right.$$

$$\left. + \underbrace{\int_{d_\Lambda}^{\infty} E^Q[\mathbb{S}-nK/\Lambda=\lambda]dF_\Lambda(\lambda)}_{I_2}\right\}. \qquad (57)$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα με $b = r_i\sigma_{Y_i} = \rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}$ και χρησιμοποιώντας την (85) για $r_i = \rho_{T-i}$ και για $\alpha_i, E[Y_i], \sigma_{Y_i}$ από την (9), μπορούμε να γράψουμε τον δεύτερο όρο στην (57) σε κλειστή μορφή:

$$\frac{e^{-rT}}{n}\int_{d_\Lambda}^{\infty} E^Q[\mathbb{S}-nK/\Lambda=\lambda]dF_\Lambda(\lambda)$$

$$= \frac{e^{-rT}}{n}\int_{d_\Lambda}^{\infty} E^Q[\mathbb{S}/\Lambda=\lambda]dF_\Lambda(\lambda) - e^{-rT}K(1-F_\Lambda(d_\Lambda))$$

$$= \frac{e^{-rT}}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S(0)e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2\rho_{T-i}^2)(T-i)}\int_{d_\Lambda}^{\infty} e^{\rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(\upsilon)}dF_\Lambda(\lambda) - e^{-rT}K(1-\Phi(d_\Lambda^*))$$

$$= \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi(\rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}-d_\Lambda^*) - e^{-rT}K\Phi(-d_\Lambda^*), \qquad (58)$$

όπου $d_\Lambda^* = (d_\Lambda - E^Q[\Lambda])/\sigma_\Lambda$ και $\upsilon = (\lambda - E^Q[\Lambda])/\sigma_\Lambda$.

Για τον πρώτο όρο της (57), αντικαθιστούμε την (84) (με $r_i = \rho_{T-i}$ και $\alpha_i, E[Y_i], \sigma_{Y_i}$ από την (9)) στην (56) και καταλήγουμε στο ακόλουθο άνω φράγμα παρόμοιο με την (17) αλλά τώρα με ένα ολοκλήρωμα από το μηδέν στο $\Phi(d_\Lambda^*)$:

$$\frac{e^{-rT}}{n}\int_{-\infty}^{d} E^{Q}[(\mathbb{S}-nK)_{+} / \Lambda=\lambda]dF_{\Lambda}(\lambda)$$

$$\leq \frac{e^{-rT}}{n}\int_{-\infty}^{d} E^{Q}[(\mathbb{S}^{u}-nK)_{+} / \Lambda=\lambda]dF_{\Lambda}(\lambda)$$

$$=\frac{e^{-rT}}{n}\int_{0}^{\Phi(d_{\Lambda}^{*})} E^{Q}[(\mathbb{S}^{u}-nK)_{+} / V=\upsilon]d\upsilon$$

$$=\frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri} e^{-\frac{\sigma^{2}}{2}\rho_{T-i}^{2}(T-i)}$$

$$\times\int_{0}^{\Phi(d_{\Lambda}^{*})} e^{\rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(\upsilon)}\Phi(\sqrt{1-\rho_{T-i}^{2}}\sigma\sqrt{T-i}-\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^{u}/V=\upsilon}(nK)))d\upsilon$$

$$-e^{-rT}K\left(\Phi(d_{\Lambda}^{*})-\int_{0}^{\Phi(d_{\Lambda}^{*})} F_{\mathbb{S}^{u}/V=\upsilon}(nK)d\upsilon\right), \tag{59}$$

όπου υπενθυμίζουμε ότι $d_{\Lambda}^{*}=(d_{\Lambda}-E^{Q}[\Lambda])/\sigma_{\Lambda}$ και η $F_{\mathbb{S}^{u}/V=\upsilon}$ προκύπτει από την

$$nK=\sum_{i=0}^{n-1} a_{i}\exp[\rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(\upsilon)+\sqrt{1-\rho_{T-i}^{2}}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^{u}/V=\upsilon}(nK)).$$

Τέλος, προσθέτοντας την (59) και την (58) λαμβάνουμε την (55).

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάσαμε το μερικώς (*partially*) ακριβές /συμονοτονικό άνω φράγμα το οποίο αποφανθήκαμε ότι είναι πιο ακριβές από το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα της παραγράφου 3.1.3. Αυτόν τον ισχυρισμό καλούμαστε να αποδείξουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.4*.

Για κάθε ρυθμιστική μεταβλητή *Λ* που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος 3.3.4 είναι,

$$\text{PECUB}\Lambda \leq \text{ICUB}\Lambda,$$

όπου PECUB*Λ* και ICUB*Λ* καθορίζονται από τις (55) και (17), αντίστοιχα.

Απόδειξη.

Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με την υπόθεση του θεωρήματος 3.3.4 υπάρχει ένα d_Λ τέτοιο ώστε $\Lambda \geq d_\Lambda \Rightarrow S \geq nK$. Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός και σύμφωνα με την κυρτή διάταξη των ασφαλίστρων stop-loss των $\mathbb{S}$ και $\mathbb{S}^u$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}
ne^{rT}\,\mathrm{ICUB}\mathit{\Lambda} &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[(\mathbb{S}^u - nK)_+ / \Lambda = \lambda]dF_\Lambda(\lambda) \\
&= \int_{-\infty}^{d_\Lambda} E[(\mathbb{S}^u - nK)_+ / \Lambda = \lambda]dF_\Lambda(\lambda) + \int_{d_\Lambda}^{+\infty} E[(\mathbb{S}^u - nK)_+ / \Lambda = \lambda]dF_\Lambda(\lambda) \\
&\geq \int_{-\infty}^{d_\Lambda} E[(\mathbb{S}^u - nK)_+ / \Lambda = \lambda]dF_\Lambda(\lambda) + \int_{d_\Lambda}^{+\infty} E[(\mathbb{S} - nK)_+ / \Lambda = \lambda]dF_\Lambda(\lambda) \\
&= \int_{-\infty}^{d_\Lambda} E[(\mathbb{S}^u - nK)_+ / \Lambda = \lambda]dF_\Lambda(\lambda) + \int_{d_\Lambda}^{+\infty} E[\mathbb{S} - nK / \Lambda = \lambda]dF_\Lambda(\lambda) \\
&= ne^{rT}\,\mathrm{PECUB}\mathit{\Lambda} \Rightarrow \mathrm{ICUB}\mathit{\Lambda} \geq \mathrm{PECUB}\mathit{\Lambda}.
\end{aligned}$$

Τονίζουμε ότι για δύο διαφορετικές ρυθμιστικές μεταβλητές $\mathit{\Lambda}_1$ και $\mathit{\Lambda}_2$ δεν ισχύει απαραιτήτως ότι $\mathrm{PECUB}\mathit{\Lambda}_1 \leq \mathrm{ICUB}\mathit{\Lambda}_2$.

Επιλογή της μεταβλητής δέσμευσης

Όπως είδαμε προηγουμένως, για τις τυχαίες μεταβλητές *Λ* που δίνονται από τις (14) και (15) παραγάγαμε το d_Λ, όπως φαίνεται στους τύπους (53) και (54), και συνεπώς μπορούμε να υπολογίσουμε το νέο άνω φράγμα PECUB*Λ* από την (55).

Οι M.Vanmaele et al [6] διαπίστωσαν όμως ότι αυτές οι επιλογές του *Λ* δεν οδηγούν στο καλύτερο βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα. Η "καλύτερη" επιλογή είναι $\mathit{\Lambda}=B(T)$ για την οποία δεν βρίσκουμε το κατάλληλο d_Λ σε αυτό το νέο άνω φράγμα. Ωστόσο, αναμένουμε ότι η συμβολή του ακριβούς μέρους (58) θα αντισταθμίσει την κάπως χαμηλή ποιότητα του $\mathbb{S}^u$.

3.4. Γενικές διαπιστώσεις

Σε αυτό το τμήμα συνοψίζουμε μερικές γενικές παρατηρήσεις:

1. Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με την παραγωγή φραγμάτων για το αριθμητικό Ασιατικό δικαίωμα αγοράς. Θα δούμε πως μπορούμε να παράγουμε τα αντίστοιχα φράγματα για το δικαίωμα πώλησης με την χρήση της ισότητας πώλησης-αγοράς. Δηλώνοντας την τιμή ενός αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος πώλησης ευρωπαϊκού-τύπου με ημερομηνία άσκησης T, n κατά μέσο όρο ημερομηνίες και σταθερή τιμή εξάσκησης K από AP(n, K, T), βρίσκουμε από την ισότητα πώλησης-αγοράς (βλ.Alziary et al [21]) στο παρόν ότι:

$$AC(n, K, T) - AP(n, K, T) = \frac{S(0)}{n}\frac{1-e^{-rn}}{1-e^{-r}} - e^{-rT}K\,. \qquad (60)$$

   Ως εκ τούτου, μπορούμε να παράγουμε φράγματα για το Ασιατικό δικαίωμα πώλησης από τα φράγματα για το δικαίωμα αγοράς. Αυτά τα φράγματα για το δικαίωμα πώλησης συμπίπτουν με τα φράγματα που λαμβάνονται εφαρμόζοντας τη θεωρία των συμονοτονικών φραγμάτων και της προσέγγισης μέσω δέσμευσης κατευθείαν στα Ασιατικά δικαιώματα πώλησης. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η ισότητα πώλησης-αγοράς ισχύει επίσης για αυτά τα φράγματα.

<u>Σημείωση</u>: Εάν το n και το T εκφράζονται σε ημέρες, τότε για τους αριθμητικούς υπολογισμούς στην (60), το r πρέπει να ερμηνευθεί ως ένα συνεχώς σύνθετο επιτόκιο για μια ημέρα που είναι ίσο με ένα συνεχώς σύνθετο επιτόκιο για ένα έτος διαιρεμένο με τον αριθμό (συναλλαγών) των ημερών ανά χρόνο.

2. Η περίπτωση μιας συνεχούς παραγωγής μερισμάτων (*devidend yield*) δ μπορεί εύκολα να εξεταστεί με την αντικατάσταση του επιτοκίου r από το r-δ .

3. Όταν ο αριθμός του μέσου όρου των ημερομηνιών n είναι ίσος με 1, το Ασιατικό δικαίωμα αγοράς AC(n, K, T) μετατρέπεται σε ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι σε αυτήν την περίπτωση τα άνω και κάτω φράγματα για την τιμή του Ασιατικού δικαιώματος παράγονται και τα δύο από τον τύπο των Black και Scholes για την τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς.

Για τα φράγματα βασισμένα σε μια μεταβλητή δέσμευσης *Λ* αυτό ισχύει αφού για n=1 έχουμε ότι $\Lambda = \beta_0 B(T)$ ενώ $\mathbb{S} = S(0)\exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma B(T)$ που συνεπάγεται ότι $\rho_T = 1$, και συνεπώς $\mathbb{S}^u = \mathbb{S}^\ell = \mathbb{S}$.

4. Τα κάτω και άνω φράγματα, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, παράγονται για «forward starting» Ασιατικά δικαιώματα αλλά μπορούν εύκολα να προσαρμοστούν και να ισχύουν και για Ασιατικά δικαιώματα «in progress». Σε αυτήν την περίπτωση είναι $T - n + 1 \leq 0$ και μόνο οι τιμές $S(1),\ldots,S(T)$ παραμένουν τυχαίες (από κεφάλαιο 2) έτσι ώστε η τιμή του δικαιώματος να δίνεται από (βλ.M.Vanmaele et al [6]):

$$AC(n,K,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^Q\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - nK\right)_+\right]$$

$$= \frac{e^{-rT}}{n} E^Q\left[\left(\sum_{i=0}^{T-1} S(T-i) - \left(nK - \sum_{i=T}^{n-1} S(T-i)\right)\right)_+\right].$$

Έτσι αντικαθιστώντας το nK με $nK - \sum_{i=T}^{n-1} S(T-i)$ και αθροίζοντας για το μέσο όρο για i από μηδέν έως T-1 αντί του n-1 τα επιθυμητά φράγματα προκύπτουν.

5. Τα φράγματα μπορούν να επεκταθούν στην περίπτωση της ντετερμινιστικής συνάρτησης μεταβλητότητας $\sigma=\sigma(t)$ ή $\sigma=\sigma(S(0),t)$ αλλά δεν είναι κατάλληλα όταν υποθέτουμε μια στοχαστική φαινομενική μεταβλητότητα $\sigma=\sigma(S,t)$.

3.5. Αριθμητική απεικόνιση

Σε αυτήν την ενότητα δίνουμε διάφορα αριθμητικά παραδείγματα σύμφωνα με την προσέγγιση των Black και Scholes. Συζητάμε τα αποτελέσματά μας και τα συγκρίνουμε με εκείνα που βρίσκονται στη βιβλιογραφία (Jacques, Nielsen και Sandmann) και με την τιμή Monte Carlo.

Στον πίνακα 2 δηλώνουμε τους συμβολισμούς για τα κάτω και άνω φράγματα που θα χρησιμοποιήσουμε στους πίνακες 3,4 και 5 του παραρτήματος Β.

lower bounds	
LBB_T:	lower bound with $\Lambda = \sum_{k=1}^{T} W_k \stackrel{d}{=} B(T)$
LB FA:	lower bound with $\Lambda = \sum_{j=0}^{n-1} \exp[(r - \frac{\sigma^2}{2})(T - j)]B(T - j)$
LB GA:	lower bound with $\Lambda = (\ln \mathbb{G} - E^{\tilde{Q}}[\ln \mathbb{G}])/\sqrt{\mathrm{var}^{Q}(\ln \mathbb{G})}$
upper bounds	
UBGA$_d$:	upper bound equal to lower bound LB GA plus $\varepsilon(d_{\mathrm{GA}})\mathrm{e}^{-rT}/n$
UBFA$_d$:	upper bound equal to lower bound LB FA plus $\varepsilon(d_{\mathrm{FA}})\mathrm{e}^{-rT}/n$
UB FA:	upper bound equal to lower bound LB FA plus constant $\varepsilon\mathrm{e}^{-rT}/n$
UB GA:	upper bound equal to lower bound LB GA plus constant $\varepsilon\mathrm{e}^{-rT}/n$
PECUB GA:	partially exact/comonotonic upper bound with $\Lambda = (\ln \mathbb{G} - E^{\tilde{Q}}[\ln \mathbb{G}])/\sqrt{\mathrm{var}^{Q}(\ln \mathbb{G})}$
ICUBB_T:	improved comonotonic upper bound with $\Lambda = \sum_{k=1}^{T} W_k \stackrel{d}{=} B(T)$
UBB_T:	upper bound equal to lower bound LBB_T plus constant $\varepsilon e^{-rT}/n$

Πίνακας 2
Συμβολισμοί των κάτω και άνω φραγμάτων που χρησιμοποιούνται στους πίνακες 3,4 και 5

Πριν προχωρήσουμε στη σύγκριση των φραγμάτων είναι σκόπιμο να αναφέρουμε επιγραμματικά τις μεθόδους προσέγγισης του Jacques και τα φράγματα των Nielsen και Sandmann.

3.5.1. Μέθοδοι προσέγγισης του *Jacques*

Ο Jacques εξέτασε την περίπτωση όπου ο μέσος όρος είναι ο (διακριτός) αριθμητικός μέσος όρος των τελευταίων *n* τιμών. Η πρόκληση με αυτά τα δικαιώματα όπως έχουμε αναφέρει σε προηγούμενη ενότητα, είναι ότι η κατανομή του μέσου όρου δεν είναι γνωστή όταν κάνουμε τη συνηθισμένη υπόθεση ότι η τιμή των μετοχών ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown.

Στην εργασία του δίνει τους αναλυτικούς τύπους για την οικοδόμηση του χαρτοφυλακίου ισοστάθμισης κινδύνου για τα Ασιατικά (αριθμητικού μέσου όρου) δικαιώματα. Οι τύποι βασίζονται στην προσέγγιση του αριθμητικού μέσου όρου των συσχετισμένων *Λογαριθμο-Κανονικών* μεταβλητών από: είτε μια *Λογαριθμο-Κανονική* είτε μια αντίστροφη *Gaussian* μεταβλητή. Και οι δύο δίνουν άριστα αποτελέσματα τα οποία έχουν χρησιμοποιηθεί ως μέτρο της ποιότητας των προσεγγίσεων. Τα αριθμητικά παραδείγματα που ακολουθούν παρέχουν μια ισχυρή αξιολόγηση της καλής ποιότητας και των δύο προσεγγίσεων όταν οι παράμετροι του προτύπου είναι σε ένα λογικό διάστημα.

3.5.2. Άνω φράγματα βασισμένα στους *Nielsen* και *Sandmann*

Σε αυτήν την παράγραφο θα παρουσιάσουμε συνοπτικά το σκεπτικό, σύμφωνα με το οποίο λαμβάνουμε τα άνω φράγματα των Nielsen και Sandmann προκειμένου να τα χρησιμοποιήσουμε σε επόμενη ενότητα όταν θα προβούμε σε συγκρίσεις φραγμάτων.

Η μέθοδος λοιπόν, για να παράγουμε και να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα είναι βασισμένη σε μια προσέγγιση της τελικής εξόφλησης ενός Ασιατικού δικαιώματος. Ψάχνουμε το καλύτερο χαρτοφυλάκιο των απλών δικαιωμάτων, δηλαδή δικαιώματα ευρωπαϊκού-τύπου, το οποίο υπερέχει της εξόφλησης του Ασιατικού δικαιώματος. Τυπικά το πρόβλημα μπορεί να οριστεί ως εξής:

Υποθέτουμε ότι $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ είναι αριθμοί που ικανοποιούν την $\sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = 1$. Η εξόφληση και η τιμή ενός Ασιατικού δικαιώματος είναι μικρότερη από

$$
\begin{aligned}
& C_A(K,T) = \exp\{-rT\} E\{[A(T)-K]_+\} \\
& = \frac{\exp\{-rT\}}{n} E\left[\left[\sum_{i=0}^{n-1} (S(T-i) - \alpha_i nK\right]_+\right] \\
& \le \frac{\exp\{-rT\}}{n} \sum_{i=0}^{n-1} E\left[\left[S(T-i) - \alpha_i nK\right]_+\right] \\
& = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} C(T, \alpha_i nK, T-i) = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \exp\{-ri\} C(\alpha_i nK, T-i) \\
& \le \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \exp\{-ri\} C(\alpha_i nK, T) \\
& \le \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} C(\alpha_i nK, T)
\end{aligned}
$$

όπου $C_A(K,T)$ είναι η τιμή ενός αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K και ημερομηνία λήξης T, $A(T) := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)$ είναι ο διακριτός αριθμητικός μέσος όρος και $C(\alpha_i nK,T)$ είναι η τιμή ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς.

Αυτές οι ανισότητες αντιπροσωπεύουν τα άνω φράγματα για την τιμή του αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος. Τα φράγματα εξαρτώνται από την επιλογή των α_i, και το καλύτερο άνω φράγμα σε αυτό το πλαίσιο, συμβολίζεται με u^* και βρίσκεται για $a^* = (a_1^*, a_2^*, ..., a_n^*)$ που ικανοποιεί την

$$u^* := \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{n-1} \exp\{-ri\} C(\alpha_i^* nK, T-i)$$

$$= \inf_{\{\alpha_i\}_{i=0}^{n-1}, \sum_{i=0}^{n-1}\alpha_i = 1} \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{n-1} \exp\{-ri\} C(\alpha_i nK, T-i).$$

Οι Nielsen και Sandmann επίσης παρήγαγαν και ένα άλλο άνω φράγμα που συμβολίζεται με $C_A^{u,G}$ και εξαρτάται και αυτό από τους συντελεστές a_i που ικανοποιούν την $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 1$. Τα φράγματα $C_A^{u,G}$ ανάλογα με τις διαφορετικές επιλογές των συντελεστών a_i χαρακτηρίζονται ως: $C_A^{*,G}$ για την ειδική επιλογή $a_i = a_i^*$ και $C_A^{N,G}$ για $a_i = \frac{1}{n}$ αντίστοιχα. Τέλος έχουμε το άνω φράγμα $C_A^{**,G}$ που παρουσιάζει τα αποτελέσματα για τη βέλτιστη συχνότητα των βαρών a_i σε σχέση με το $C_A^{u,G}$ φράγμα (δηλ. την συχνότητα που ελαχιστοποιεί το άνω φράγμα $C_A^{u,G}$). Σημειώνουμε ότι το άνω φράγμα $C_A^{**,G}$ παρήχθη για την ειδική ρυθμιστική μεταβλητή *Λ* που δίνεται από την (15), με τη χρήση ενός αλγορίθμου βελτιστοποίησης για να βρεθούν τα βάρη a_i έτσι ώστε το άνω φράγμα για τον πρώτο όρο στην (57),

$$\frac{e^{-rT}}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_{-\infty}^{d_\Lambda} E^Q[(S(T-i) - a_i nK)_+ / \Lambda = \lambda] dF_\Lambda(\lambda),$$

να ελαχιστοποιείται. Στην πραγματικότητα, οι Nielsen και Sandmann εισάγουν μια δεύτερη προσέγγιση φράσσοντας αυτήν την έκφραση από επάνω χρησιμοποιώντας ένα χαρτοφυλάκιο από δικαιώματα αγοράς. Η έκφραση που λαμβάνεται με αυτόν τον τρόπο στην συνέχεια ελαχιστοποιείται όσον αφορά τα βάρη a_i. Με τη μέθοδό που παρουσιάσαμε στην 3.3.4, ωστόσο, έχουμε άμεσα την ακριβή βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος ελαχιστοποίησης, δηλαδή τα βέλτιστα βάρη a_i για δοσμένο λ ή υ είναι (από M.Vanmaele et al [6]) :

$$a_i = \frac{1}{nK} F^{-1}_{S(T-i)/\Lambda=\lambda}(F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK))$$

$$= \frac{S(0)}{nK} e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})(T-i)+\rho_{T-i}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}(\upsilon)+\sqrt{1-\rho_{T-i}^2}\sigma\sqrt{T-i}\Phi^{-1}((F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(nK))}.$$

Από αυτή την άποψη, το μερικώς ακριβές/συμονοτονικό άνω φράγμα βελτιώνει το άνω φράγμα $C_A^{**,G}$, όπως θα δούμε στον πίνακα 4 για αριθμητικά αποτελέσματα.

3.5.3. Σύγκριση των φραγμάτων μας με αυτά του *Jacques*

Σε αυτήν την παράγραφο συγκρίνουμε τα αποτελέσματά των φραγμάτων που έχουμε αναφέρει με εκείνα του Jacques [12]. Όπως είδαμε παραπάνω ο Jacques προσέγγισε την κατανομή του αθροίσματος $\mathbb{S}$ των *Λογαριθμο-Κανονικών* (*LN*) μεταβλητών, βλέπε (7), στην περίπτωση του διακριτού αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος ευρωπαϊκού-τύπου με τη βοήθεια της *Λογαριθμο-Κανονικής* (*LN*) και της αντίστροφης *Gaussian* κατανομής (*IG*). Για τη σύγκριση επίσης περιλαμβάνουμε τα κάτω φράγματα και από τα άνω, αυτά που είναι βασισμένα στα κάτω φράγματα, από τα θεωρήματα 3.2.1 και 3.3.3. Παρουσιάζουμε εδώ ένα σύνολο αριθμητικών πειραμάτων όπου θεωρούμε ένα «forward starting» ($T-n+1\geq 0$) διακριτό αριθμητικό Ασιατικό δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού-τύπου με σταθερή τιμή εξάσκησης που έχει τα ίδια στοιχεία όπως στο έγγραφο του Jacques [12]: αρχική τιμή μετοχής *S*(0)=100, ένα ονομαστικό ετήσιο (καθημερινά διακριτό σύνθετο) επιτόκιο 9% ανά χρόνο (που αντιστοιχεί σε ένα συνεχώς σύνθετο επιτόκιο $r=\ln\left(1+\frac{0.09}{365}\right)$ ανά ημέρα ή 8,9989% ετησίως), με λήξη 120 ημερών και μέσο όρο περιόδου *n* 30 ημερών. Οι τιμές της διακύμανσης σ είναι σε ετήσια βάση. Σαν συγκριτική μέτρηση περιλάβαμε την τιμή που λήφθηκε μέσω της προσομοίωσης Monte Carlo με την προσαρμογή της ρυθμιστικής μεταβλητής (*variate-control*) (βλ.Παράρτημα B[B2]) της τεχνικής των Kemna και Vorst [14] στα διακριτά αριθμητικά Ασιατικά δικαιώματα ευρωπαϊκού-τύπου. Ο αριθμός των επαναλήψεων στο Monte Carlo ήταν 10.000.

Χρησιμοποιούμε τους ακόλουθους συμβολισμούς:

- όπου *Λ* μπορεί να είναι το *GA*, το *FA* ή B_T,
- όπου LB*Λ* είναι το κάτω φράγμα,
- όπου PECUB*Λ* είναι το μερικώς ακριβές/συμονοτονικό άνω φράγμα,
- όπου UB*Λ* είναι το άνω φράγμα βασισμένο στο κάτω φράγμα (από θεώρημα 3.2.1), και
- όπου $UB\Lambda_d$ ίνα το άνω φράγμα που δίνεται από το θεώρημα 3.3.3.

Επίδραση της αύξησης του Κ στα φράγματα

Φαίνεται από τον πίνακα 3 (στο Παράρτημα B[B1]) ότι τα φράγματα είναι ακριβέστερα όταν η τιμή εξάσκησης *K* είναι μικρότερη από την αρχική τιμή της μετοχής. Συνεπώς η σχετική διαφορά μεταξύ ενός κάτω φράγματος και του αντίστοιχου άνω φράγματος αυξάνεται με *το K*. Για τα άνω φράγματα UB FA και UBB_T αυτό είναι σαφές, αφού για τις διαφορετικές τιμές του *K* μια ίδια σταθερά προστίθεται ενώ η τιμή του κάτω φράγματος μειώνεται. Ωστόσο η επίδραση του επιπέδου της διακύμανσης είναι μικρότερη αφού όπως φαίνεται επηρεάζεται από την επίδραση της τιμής εξάσκησης.

Σύγκριση LB FA , LB GA και LBB_T σε σχέση με τα αποτελέσματα Monte Carlo

Όπως βλέπουμε από τον πίνακα 3, τα κάτω φράγματα LB FA και LB GA είναι ίσα μέχρι τα πέντε δεκαδικά ψηφία. Και τα δύο αυτά φράγματα συγκρινόμενα με τα αποτελέσματα Monte Carlo αποδίδουν πολύ καλά σε αντίθεση από το κάτω φράγμα LBB_T όπου δεσμεύσαμε επάνω στο $\Lambda = \sum_{k=1}^{T} W_k \overset{d}{=} B(T)$ (βλ.(23)). Η κακή απόδοση οφείλεται στο γεγονός ότι το *B*(*T*) διαφέρει πολύ από το $\mathbb{S}$ για *n* μεγαλύτερο από το ένα. Όπως είδαμε από την παράγραφο 3.1.1. η ποιότητα του κάτω φράγματος $E^{Q}[\mathbb{S}/\Lambda]$ μπορεί να κριθεί από την διακύμανση της. Για να μεγιστοποιηθεί η ποιότητα, πρέπει αυτή η διακύμανση να γίνει όσο το δυνατόν πιο κοντά στη $\text{var}^Q[\mathbb{S}]$. Ως εκ τούτου για $\Lambda = \sum_{k=1}^{T} W_k \overset{d}{=} B(T)$ η $E^Q[\sqrt{\text{var}^Q(\mathbb{S}/B(T))}]$ είναι μεγάλη, ενώ για Λ από την (14) ή (15) αυτός ο όρος $E^Q[\sqrt{\text{var}^Q(\mathbb{S}/\Lambda)}]$ είναι πολύ μικρός επειδή Λ και $\mathbb{S}$ είναι πάρα πολύ κοντά.

Σύγκριση UB GA_d με UB FA_d και PECUB GA με ICUB B_T

Το άνω φράγμα *UB* GA_d που είναι βασισμένο στο κάτω φράγμα LB GA συν ένα σφάλμα τιμολόγησης βλ. (42)–(43) και (53), παρουσιάζεται ως το καλύτερο όλων των εξεταζόμενων άνω φραγμάτων. Εντούτοις, το *UB* FA_d βλ. (42)–(43) και (54), είναι εξίσου καλό.

Για αυτό το σύνολο παραμέτρων, οι τιμές για το μερικώς ακριβές/συμονοτονικό άνω φράγμα PECUB GA, βλ. (55) και (53), είναι μικρότερες από αυτές για το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα ICUB B_T αλλά, όπως δείχνουν τα αποτελέσματα στον πίνακα 3 για την περίπτωση που το Λ δίνεται από την (15), δεν είναι τόσο καλά όπως θα αναμέναμε. Παρατηρούμε ότι έχουμε συμπεριλάβει μόνο το PECUB GA στον πίνακα 3 αφού ήταν το καλύτερο PECUBΛ άνω φράγμα για τις δύο μεταβλητές δέσμευσης που εξετάζουμε.

Σύγκριση UB FA με UB FA_d

Συγκρίνοντας τα φράγματα UB FA με UB FA_d, παρατηρούμε ότι κάνοντας το σφάλμα φράγματος εξαρτώμενο από την τιμή εξάσκησης K έχει οδηγήσει σε μια βελτίωση.

Αξιολόγηση και σύγκριση των προσεγγίσεων (LN) και (IG) με τις τιμές Monte Carlo

Επίσης από τον πίνακα 3 φαίνεται ότι γενικά η *Λογαριθμιθμο-Κανονική* προσέγγιση (*LN*) καθώς επίσης και η αντίστροφη *Gaussian* προσέγγιση (*IG*) του *Jacques* [12] εμπίπτουν στο διάστημα που δίνεται από το καλύτερο κάτω φράγμα και το καλύτερο άνω φράγμα. Η εξαίρεση είναι η *Λογαριθμιθμο-Κανονική* προσέγγιση στην περίπτωση που $K = 110$ για σ = 0.2 και 0.3, και η αντίστροφη *Gaussian* προσέγγιση στην περίπτωση που $K = 80$ για σ = 0.2, 0.3, και 0.4 (σε αυτές τις περιπτώσεις οι τιμές είναι μικρότερες από τα (συμονοτονικά) κάτω φράγματα LB FA και LB GA). Παρατηρούμε ότι οι προσεγγίσεις του Jacques [12] (εκτός από τις προαναφερθείσες περιπτώσεις) είναι πάντα υψηλότερες από τις αντίστοιχες τιμές Monte Carlo, αλλά ωστόσο όλες περιέρχονται στο διάστημα τιμών Monte Carlo (MC ± SE). Επιπλέον, σημειώνουμε ότι η ακρίβεια των προσομοιωμένων τιμών μειώνεται όσο η διακύμανση σ αυξάνεται. Η προσέγγιση Monte Carlo φαίνεται συστηματικά να υποεκτιμά τις πραγματικές τιμές, ειδικά για *at- και out-of-the money* (βλ.κεφάλαιο 1) δικαιώματα για τα οποία η τιμή Monte Carlo πέφτει ελαφρώς κάτω από τα κάτω φράγματα.

Συμπέρασμα 1. Από τον πίνακα 3 παρατηρούμε ότι, τα κάτω φράγματα LB FA και LB GA αποδίδουν εξίσου καλά (η διαφορά μεταξύ τους είναι συνολικά σχεδόν μηδέν) και είναι πολύ κοντά στις τιμές Monte Carlo. Τέλος το $\mathrm{UB\,GA}_d$ είναι το καλύτερο άνω φράγμα για τις παραμέτρους που εξετάζονται σε αυτόν τον πίνακα.

Συμπέρασμα 2. Τα αποτελέσματα υποδηλώνουν ότι όλα τα διαστήματα είναι ακριβέστερα για τα δικαιώματα που είναι *in-the-money* ενώ αντίθετα για τα δικαιώματα που είναι *out-of-the-money* είναι λιγότερο ακριβή.

3.5.4. Σύγκριση των φραγμάτων μας με αυτά των Nielsen και Sandmann

Σε αυτήν την παράγραφο χρησιμοποιούμε τα στοιχεία από την εργασία των Nielsen και Sandmann [16] προκειμένου να συγκριθούν τα διαφορετικά άνω φράγματα τους με τα δικά μας αποτελέσματα. Οι Nielsen και Sandmann δίνουν ως δεδομένα: σ=0.25, r=0.04, $S(0)$=100, T=3 έτη. Σημειώνουμε ότι n=3 έτη (κατά τη διάρκεια ολόκληρης της περιόδου) όπου ο υπολογισμός μέσου όρου πραγματοποιείται κάθε μήνα (στα προηγούμενα τμήματα ο υπολογισμός μέσου όρου έγινε καθημερινά).

Εξετάστηκαν οι ακόλουθες έξι τιμές εξάσκησης K: 50, 80, 90, 100, 110 και 200 (παραλείψαμε τις K: 60,70,120-190 που είναι στο έγγραφο [16]). Εκτός από τις τιμές εξάσκησης που χρησιμοποιήθηκαν στους παραπάνω πίνακες περιλάβαμε επίσης $K = 50$ και 200 ως παραδείγματα ακραίων *in-and out-of-the-money* δικαιωμάτων.

Τα φράγματα LB GA, UB GA και $\mathrm{UB\,GA}_d$ στον πίνακα 4 αναφέρθηκαν στο έγγραφο [16] και υπενθυμίζουμε ότι είναι οι ειδικές περιπτώσεις των γενικότερων φραγμάτων LBΛ, UBΛ και $\mathrm{UB}\Lambda_d$ για $\Lambda=GA$, αντίστοιχα. Όπως αναφέραμε και στην παράγραφο 3.5.2. οι Nielsen και Sandmann παράγουν επίσης ένα άλλο άνω φράγμα $C_A^{u,G}$ που εξαρτάται από τους συντελεστές a_i που ικανοποιούν την $\sum_{i=0}^{n-1} a_i = 1$. Οι τελευταίες τρεις στήλες στον πίνακα 4 παρουσιάζουν τα φράγματα $C_A^{*,G}$, $C_A^{N,G}$ και $C_A^{**,G}$ (τα φράγματα $C_A^{u,G}$ για τις διαφορετικές επιλογές των συντελεστών a_i).

Παρατηρούμε πάλι ότι το μερικώς ακριβές/συμονοτονικό άνω φράγμα PECUB GA είναι μικρότερο και έτσι καλύτερο από το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα ICUB B_T για τις τιμές εξάσκησης στο διάστημα 50–110 (καθώς και στο διάστημα 120-150 το οποίο όπως είπαμε δεν έχουμε συμπεριλάβει). Αντίθετα για αρκετά *out-of-the-money* δικαιώματα γίνεται μια αλλαγή και το ICUB B_T γίνεται καλύτερο και συγκεκριμένα για K=200 υπερτερεί όλων των άλλων άνω φραγμάτων συμπεριλαμβανομένων των επιλογών των Nielsen και Sandmann. Σημειώνουμε ότι αυτό είναι ένα παράδειγμα της περίπτωσης όταν για δύο διαφορετικές μεταβλητές δέσμευσης Λ_1 και Λ_2 δεν έπεται ότι PECUB $\Lambda_1 \le$ ICUB Λ_2 (θεώρημα 3.3.4*).

Συμπέρασμα 1. Μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι το καλύτερο άνω φράγμα δίνεται πάλι από το UB GA_d. Παρατηρούμε επίσης ότι τα κάτω φράγματα LB FA και LB GA είναι πολύ κοντά και ίσα μέχρι τα δύο δεκαδικά.

Συμπέρασμα 2. Από αυτόν τον πίνακα είναι σαφές ότι το PECUB GA βελτιώνει πράγματι το φράγμα $C_A^{**,G}$ όπως εξηγείται στην παράγραφο 3.3.5.

Συμπέρασμα 3. Το άνω φράγμα UB GA_d είναι γενικά το καλύτερο αλλά για παράδειγμα όταν r = 0.04, K = 200 και σ = 0.25, το UB FA_d αποδεικνύεται μικρότερο από το UB GA_d.

Στο επόμενο κεφάλαιο συζητάμε διαφορετικές μεθόδους για την τιμολόγηση των διακριτών αριθμητικών Ασιατικών δικαιωμάτων ευρωπαϊκού-τύπου με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης μέσω των φραγμάτων που αναπτύχθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ασιατικά δικαιώματα με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης κατά την προσέγγιση των Black και Scholes

Στόχος μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι παράγουμε φράγματα για τα Ασιατικά δικαιώματα με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης, άμεσα ή μέσω αποτελεσμάτων συμμετρίας. Μια αλλαγή του μέτρου πιθανότητας χρησιμοποιείται για να αποδειχθούν τα αποτελέσματα για τα πρότυπα όπου η υποκείμενη μετοχή ακολουθεί την εκθετική κίνηση Brown.

Από τον ορισμό του *arbitrage*, η τιμή στον τρέχοντα χρόνο $t = 0$ ενός Ασιατικού δικαιώματος πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης με ποσοστό (*percentage*) β δίνεται από

$$APF(n,\beta,T) = \frac{e^{-rT}}{n} E^{Q}\left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i) - n\beta S(T)\right)_{+}\right],$$

κάτω από τον ουδέτερο κίνδυνο με μέτρο πιθανότητας Q.

Στο πρότυπο των Black και Scholes, η ακόλουθη αλλαγή μέτρησης οδηγεί σε αποτελέσματα που εξετάσαμε στο κεφάλαιο 3. Ας ορίσουμε την πιθανότητα $\tilde{\mathrm{Q}}$ ισοδύναμη με την Q από το παράγωγο *Radon–Nikodym*

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\mathrm{Q}}}{\mathrm{dQ}} = \frac{S(T)}{S(0)e^{rT}} \overset{\kappa\varepsilon\varphi.3}{=} \frac{S(0)e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma B(T)}}{S(0)e^{rT}} = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma B(T)\right). \tag{61}$$

Κάτω από αυτήν την πιθανότητα $\tilde{\mathrm{Q}}$, η $\tilde{B}(t) = B(t) - \sigma t$ είναι μια κίνηση Brown και επομένως, τα δυναμικά της μετοχής υπό την $\tilde{\mathrm{Q}}$ προκύπτουν από την (1) για $B(t) = \tilde{B}(t) + \sigma t$ και έχουμε:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = rdt + \sigma dB(t) =>$$

$$\frac{dS(t)}{\mathrm{S(t)}} = (r+\sigma^2)dt + \sigma d\tilde{B}(t)\,. \tag{62}$$

Παραδειγματικά εξετάζουμε την περίπτωση ενός «forward starting» (με T-n+1>0) Ασιατικού δικαιώματος πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης. Χρησιμοποιώντας την πιθανότητα Q̃ (για dQ=dQ̃ $\frac{S(0)e^{rT}}{S(T)}$), η αντίστοιχη τιμή του δικαιώματος δίνεται από

$$APF(n,\beta,T) = \frac{S(0)}{n} E^{\tilde{Q}}\left[\left(\frac{\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)}{S(T)} - \beta n\right)_+\right]. \tag{63}$$

Από αυτόν τον τύπο, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ένα Ασιατικό δικαίωμα πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης μπορεί να ερμηνευθεί ως μια ένα Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με σταθερή τιμή εξάσκησης $\beta S(0)$.

Οι Henderson και Wojakowski [11] έχουν επιτύχει αποτελέσματα συμμετρίας μεταξύ των Ασιατικών δικαιωμάτων με κυμαινόμενη-σταθερή τιμή εξάσκησης στην «forward starting» περίπτωση του συνεχούς μέσου όρου. Εξέτασαν τα δυναμικά των Black και Scholes για την υποκείμενη μετοχή με μια συνεχή παραγωγή μερισμάτων δ.

Εμείς, θα αποδείξουμε παρόμοια αποτελέσματα στην περίπτωση των διακριτών αριθμητικών Ασιατικών δικαιωμάτων ευρωπαϊκού-τύπου. Τα αποτελέσματα συμμετρίας γίνονται πολύ χρήσιμα για τη μεταφορά γνώσης από τον έναν τύπο ενός δικαιώματος στον άλλο. Εδώ πρέπει να επισημάνουμε, ότι δεν υπάρχει καμία τέτοια σχέση συμμετρίας για τα δικαιώματα «in progress».

4.1. Αποτελέσματα Συμμετρίας για Αριθμητικά Ασιατικά Δικαιώματα

Προκειμένου να δημιουργήσουμε χρήσιμα αποτελέσματα συμμετρίας μεταξύ των Ασιατικών δικαιωμάτων με σταθερή-κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης παρόμοια με αυτά των Henderson και Wojakowski [11] στην περίπτωση του διακριτού μέσου όρου, εισάγουμε κάποιες επικρατούσες σημειογραφίες.

Ασιατικά δικαιώματα με σταθερή τιμή εξάσκησης

Για Ασιατικά δικαιώματα αγοράς με σταθερή τιμή εξάσκησης χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$AC(x_1,\ x_2, x_3, x_4, x_5,\ x_6,\ x_7)\text{, όπου:}$$

- x_1 είναι η τιμή εξάσκησης,
- x_2 η αρχική αξία της διαδικασίας $(S(t))_{t\geq 0}$,
- x_3 το επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου (*risk-free*),
- x_4 τα παραγόμενα μερίσματα ,
- x_5 η λήξη του δικαιώματος,
- x_6 ο αριθμός των όρων στο άθροισμα, και
- x_7 η ημερομηνία έναρξης του μέσου όρου.

Ανάλογα, για ένα δικαίωμα πώλησης με σταθερή τιμή εξάσκησης έχουμε τον συμβολισμό $AP(x_1,\ x_2, x_3, x_4, x_5,\ x_6,\ x_7)$.

Για παράδειγμα, το $AP(K, S(0), r, \delta, T, n, T-n+1)$ δηλώνει το Ασιατικό δικαίωμα πώλησης με σταθερή τιμή εξάσκησης K και με ημερομηνία λήξης T , που είναι «forward starting» με n όρους και με τον πρώτο όρο να είναι S(T-n+1). Όπου $(S(t))_{t\geq 0}$ δηλώνει ως συνήθως την διαδικασία Black και Scholes με αρχική τιμή S(0) και με παραγόμενα μερίσματα δ. Τέλος το βραχυπρόθεσμο σταθερό επιτόκιο είναι ίσο με r.

Ασιατικά δικαιώματα με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης

Για δικαιώματα με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης, εισάγουμε παρόμοια τον παρακάτω ελαφρώς τροποποιημένο συμβολισμό

$$ACF(y_1,\ \mathrm{y}_2, y_3, y_4, y_5,\ \mathrm{y}_6,\ \mathrm{y}_7)\text{, όπου:}$$

- y_1 είναι η αρχική αξία της διαδικασίας $(S(t))_{t\geq 0}$,
- y_2 το ποσοστό,
- y_3 το επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου,

- y_4 τα παραγόμενα μερίσματα ,

- y_5 τη λήξη του δικαιώματος,

- y_6 ο αριθμός των όρων στο άθροισμα, και

- y_7 την ημερομηνία έναρξης του μέσου όρου.

Για παράδειγμα, το $ACF(S(0),K/S(0),\delta,r,T,n,0)$ δηλώνει το Ασιατικό δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού-τύπου με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης, με ποσοστό $K/S(0)$ και ημερομηνία λήξης T το οποίο είναι «forward starting» με n όρους και με τον πρώτο όρο να είναι $S(0)$. Όπου $(S(t))_{t\geq 0}$ δηλώνει ως συνήθως την διαδικασία Black και Scholes με αρχική τιμή $S(0)$ και με παραγόμενα μερίσματα r. Τέλος το βραχυπρόθεσμο σταθερό επιτόκιο είναι ίσο με δ.

Ανάλογα, για ένα δικαίωμα πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης έχουμε τον συμβολισμό $APF(y_1,\ y_2, y_3, y_4, y_5,\ y_6,\ y_7)$.

Χρησιμοποιώντας αυτούς τους συμβολισμούς, επιτυγχάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα συμμετρίας.

Θεώρημα 4.1

$$AP(K,S(0),r,\delta,T,n,T-n+1) = ACF\left(S(0), \frac{K}{S(0)}, \delta, r, T, n, 0 \right)$$

$$ACF(S(0),\beta,r,\delta,T,n,T-n+1) = AP\left(\beta S(0), S(0), \delta, r, T, n, 0\right)$$

και

$$AC(K,S(0),r,\delta,T,n,T-n+1) = APF\left(S(0), \frac{K}{S(0)}, \delta, r, T, n, 0 \right)$$

$$APF(S(0),\beta,r,\delta,T,n,T-n+1) = AC\left(\beta S(0), S(0), \delta, r, T, n, 0\right).$$

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε μόνο το πρώτο αποτέλεσμα συμμετρίας δεδομένου ότι τα άλλα προκύπτουν με παρόμοιο τρόπο. Έχουμε λοιπόν,

$$AP(K,S(0),r,\delta,T,n,T-n+1)=e^{-rT}E^{Q}\left[\left(K-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)\right)_{+}\right]$$

$$=e^{-\delta T}E^{Q}\left[\frac{e^{-(r-\delta)T}S(T)}{S(0)}\left(\frac{KS(0)}{S(T)}-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\frac{S(T-i)S(0)}{S(T)}\right)_{+}\right].$$

Όπως πριν θα ορίσουμε την πιθανότητα $\tilde{Q}$ ισοδύναμη με την Q από το παράγωγο *Radon–Nikodym* αλλά τώρα δίνοντας βαρύτητα στην μερισματική απόδοση δ

$$\frac{d\tilde{Q}}{dQ}=\frac{S(T)}{S(0)e^{(r-\delta)T}}=\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma B(T)\right).$$

Επειδή

$$\left.\begin{aligned}S(T-i)&=S(0)e^{((r-\delta)+\frac{\sigma^2}{2})(T-i)+\sigma\tilde{B}(T-i)}\\ S(T)&=S(0)e^{((r-\delta)+\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\tilde{B}(T)}\end{aligned}\right\}=>\frac{S(T-i)}{S(T)}=e^{-((r-\delta)+\frac{\sigma^2}{2})i+\sigma(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T))}$$ και έχουμε:

$$AP(K,S(0),r,\delta,T,n,T-n+1)=$$

$$=e^{-\delta T}E^{\tilde{Q}}\left[\left(\frac{KS(0)}{S(T)}-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(0)\exp\left[-\left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)i+\sigma(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T))\right]\right)_{+}\right]=$$

$$=e^{-\delta T}E^{\tilde{Q}}\left[\left(K\exp\left[-((r-\delta)+\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma(\tilde{B}(0)-\tilde{B}(T))\right]\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(0)\exp\left[-\left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)i+\sigma(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T))\right]\right)_{+}\right].$$

Κάτω από αυτήν την πιθανότητα $\tilde{Q}$, η $\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T)$ είναι μια κίνηση Brown και επομένως, τα δυναμικά της μετοχής υπό την $\tilde{Q}$ δίνονται από

$$\frac{dS(T)}{S(T)} = ((r-\delta)+\sigma^2)dt + \sigma d\tilde{B}(t).$$

Λόγω των ανεξάρτητων προσαυξήσεων, η $\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T)$ έχει την ίδια κατανομή όπως η $\tilde{B}(i)$ και η $-\tilde{B}(i)$, και μπορούμε να επικεντρωθούμε στη διαδικασία $(S^*(t))_t$ που ορίζεται από

$$S^*(i) = S(0)\exp\left[-\left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)i + \sigma\tilde{B}(i)\right].$$

Τότε η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$AP(K,S(0),r,\delta,T,n,T-n+1) = e^{-\delta T}E^{\tilde{Q}}\left[\left(\frac{KS^*(T)}{S(0)} - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S^*(i)\right)_+\right]$$

$$= e^{-\delta T}E^{Q}\left[\left(\frac{K\tilde{S}(T)}{S(0)} - \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\tilde{S}(i)\right)_+\right]$$

με τη διαδικασία $(\tilde{S}(t))_t$ να καθορίζεται από

$$\tilde{S}(i) = S(0)\exp\left[-\left(r-\delta+\frac{\sigma^2}{2}\right)i + \sigma B(i)\right]$$

με $(B(t))_t$ μία κίνηση *Brown* υπό την *Q*. Αποδείχτηκε άρα ότι:

$$AP(K,S(0),r,\delta,T,n,T-n+1) = ACF\left(S(0),\frac{K}{S(0)},\delta,r,T,n,0\right).$$

Από τις ισότητες του θεωρήματος 4.1 είναι σαφές ότι χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 3, μπορούμε να πάρουμε φράγματα για ένα Ασιατικό δικαίωμα με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης μέσω των φραγμάτων για ένα Ασιατικό δικαίωμα με σταθερή τιμή εξάσκησης.

Σημείωση: Επισημαίνουμε ότι το επιτόκιο και τα παραγόμενα μερίσματα έχουν αλλάξει τους ρόλους τους κατά την μετάβαση, από ένα Ασιατικό δικαίωμα με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης σε ένα άλλο με σταθερή ή αντίστροφα.

4.2 Άμεση προσέγγιση

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάσαμε αποτελέσματα συμμετρίας παρόμοια με αυτά των Henderson και Wojakowski [11] στην περίπτωση του διακριτού μέσου όρου. Σε αυτό που ακολουθεί δείχνουμε πως μπορούμε άμεσα να παράγουμε φράγματα για τα Ασιατικά δικαιώματα με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης, χωρίς την χρήση συμμετρίας. Επίσης τονίζουμε ότι αυτά τα φράγματα μπορούν να διαχειριστούν και τα «in progress» και τα «forward-starting» Ασιατικά δικαιώματα με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης σε αντίθεση με την προσέγγιση που χρησιμοποιεί συμμετρία.
Γράφοντας τους τύπους *S*(*T-i*) και *S*(*T*) σύμφωνα με την προσέγγιση των Black και Scholes οδηγεί στο

$$\mathbb{S} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)}{S(T)} = \frac{S(0)e^{(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-i)+\sigma\tilde{B}(T-i)}}{S(0)e^{(r+\frac{\sigma^2}{2})T+\sigma\tilde{B}(T)}} \Rightarrow$$

$$\mathbb{S} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)}{S(T)} = \sum_{i=0}^{n-1} e^{-(r+\frac{\sigma^2}{2})i+\sigma(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T))} =: \sum_{i=0}^{n-1} a_i e^{Y_i} \qquad (64)$$

με

$$\left.\begin{array}{l} Y_i = \sigma(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T)) \sim N(0, i\sigma^2), \delta\eta\lambda.\ E^{\tilde{Q}}[Y_i]=0 \text{ και } \sigma_{Y_i}^2 = i\sigma^2 \\ \kappa\alpha\iota \\ a_i = e^{-(r+\frac{\sigma^2}{2})i} \end{array}\right\} . \qquad (65)$$

Σημειώνουμε ότι η $a_0 e^{Y_0}$ είναι στην πραγματικότητα μία σταθερά. Από το παραπάνω είναι ξεκάθαρο ότι το $\mathbb{S}$ είναι ένα άθροισμα *Λογαριθμο-Κανονικών* μεταβλητών και έτσι μπορούμε να εφαρμόσουμε τα αποτελέσματα του κεφαλαίου 3.

Στην υπόλοιπη ενότητα, μελετάμε λεπτομερώς μόνο την «forward starting» περίπτωση. Η «in progress» περίπτωση μπορεί να εξεταστεί με παρόμοιο τρόπο.

4.2.1. Κάτω φράγμα

Προκειμένου να ληφθεί ένα κάτω φράγμα καλής ποιότητας για το «forward starting» Ασιατικό δικαίωμα, θεωρούμε ως μεταβλητή δέσμευσης μια κανονική τυχαία μεταβλητή *Λ* η οποία να είναι όσο πιο όμοια με το $\mathbb{S}$. Εμπνευσμένοι από την επιλογή για την περίπτωση του δικαιώματος με σταθερή τιμή εξάσκησης, παίρνουμε

$$\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i (\tilde{B}(T-i) - \tilde{B}(T)) \tag{66}$$

με τα β_i να είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί.

Ειδικότερα για:

1) $\beta_i = e^{-(r+\frac{\sigma^2}{2})i}$ βρίσκουμε την προσέγγιση πρώτης-τάξης του $\mathbb{S}$.

2) Εάν β_i ισούται με $1/\sqrt{\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}$ για όλα τα *i*, τότε $\Lambda = (\mathbb{G} - E^{\tilde{Q}}[\ln \mathbb{G}]) / \sqrt{\operatorname{var}^{\tilde{Q}}[\ln \mathbb{G}]}$ είναι ο τυποποιημένος λογάριθμος του γεωμετρικού μέσου όρου $\mathbb{G}$:

$$\mathbb{G} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \frac{S(T-i)}{S(T)} \right)^{1/n} = \left(\prod_{i=0}^{n-1} \exp\left[-\left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) i + \sigma(\tilde{B}(T-i) - \tilde{B}(T)) \right] \right)^{1/n} , \tag{67}$$

με

$$E^{\tilde{Q}}[\ln \mathbb{G}] = -\left(r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{n-1}{2}$$

$$\operatorname{var}^{\tilde{Q}}[\ln \mathbb{G}] = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \min(i, j) = \frac{\sigma^2}{n^2} \left(\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \right).$$

Αυτή η επιλογή του *Λ* είναι παρόμοια με την επιλογή στην (15) του Nielsen και Sandmann [16] στην περίπτωση της σταθερής τιμής εξάσκησης.

Για γενικό β_i, έχουμε από την (81) του παραρτήματος (με αντικατάσταση των $: E[Y(i)], \sigma_{Y(i)}, E[\Lambda]$) ότι η $Y_i / \Lambda = \lambda$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή $r_i \dfrac{\sigma\sqrt{i}}{\sigma_\Lambda}$ και διακύμανση $\sigma_{Y_i}^2(1-r_i^2)$. Όπου $r_0 = 0$ και για $i \geq 1$

$$r_i = \frac{\operatorname{cov}(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T), \Lambda)}{\sqrt{i}\sigma_\Lambda} = \frac{\sum_{j=0}^{n-1}\beta_j \min(i,j)}{\sqrt{i}\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\beta_i\beta_j \min(i,j)}} \tag{68}$$

με $\sigma_\Lambda^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1}\beta_i\beta_j \min(i,j)$.

Και για τις δύο επιλογές του *Λ* που θεωρήσαμε, οι συσχετίσεις r_i είναι θετικές.

Ανάλογα λοιπόν με το θεώρημα 3.1.2 το ακόλουθο, δηλώνει ένα κάτω φράγμα για την τιμή του δικαιώματος $APF(n,\beta,T)$.

θεώρημα 4.2.1.

Υποθέτουμε ότι το άθροισμα $\mathbb{S}$ δίνεται από (64)–(65) και *Λ* είναι μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης έτσι ώστε $[\sigma(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T)), \Lambda]$ είναι διμεταβλητή κανονικά κατανεμημένη για όλα τα *i*. Τότε το συμονοτονικό κάτω φράγμα για την τιμή του δικαιώματος $APF(n,\beta,T)$ δίνεται από

$$APF(n,\beta,T) \geq LB\Lambda = \frac{S(0)}{n}E^{\tilde{Q}}[(\mathbb{S}^\ell - n\beta)_+] =$$
$$= \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi[\sigma r_i\sqrt{i} - \Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^\ell}(n\beta))] - S(0)\beta(1-F_{\mathbb{S}^\ell}(n\beta)),$$

και όπου το $F_{\mathbb{S}^\ell}(n\beta)$ λαμβάνεται από την επίλυση της

$$\sum_{i=0}^{n-1}\exp\left[-\left(r+\frac{r_i^2\sigma^2}{2}\right)i + r_i\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^\ell}(n\beta))\right] = n\beta .$$

Απόδειξη 4.2.1: Όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος 3.1.2, αντικαθιστώντας στην (90) τα: $\alpha_i, E[Y_i], \sigma_{Y_i}$ από την (65), *d=nβ* και πολλαπλασιάζοντας με $\frac{S(0)}{n}$ προκύπτει το κάτω φράγμα.

4.2.2. Βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα

Ανάλογα με την περίπτωση του βελτιωμένου συμονοτονικού άνω φράγματος για τα Ασιατικά δικαιώματα με σταθερή τιμή εξάσκησης, οι M.Vanmaele et al [6] έχουν βρει επίσης ότι και στην περίπτωση των Ασιατικών δικαιωμάτων με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης, η μεταβλητή δέσμευσης

$\Lambda = -\sum_{k=1}^{T} W_k$, με W_k i.i.d. N(0,1) έτσι ώστε $\tilde{B}(T-i) \overset{d}{=} \sum_{k=1}^{T-i} W_k$, i=0,…n-1,

οδηγεί σε ένα πιο ακριβές άνω φράγμα απ' ότι άλλες επιλογές, όπως για παράδειγμα η μεταβλητή δέσμευσης στο κάτω φράγμα.

θεώρημα 4.2.2.

Υποθέτουμε ότι το άθροισμα $\mathbb{S}$ δίνεται από (64)–(65) και *Λ* είναι μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης έτσι ώστε $[\sigma(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T)),\Lambda]$ είναι διμεταβλητή κανονικά κατανεμημένη για όλα τα *i*. Τότε το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα για την τιμή του δικαιώματος $APF(n,\beta,T)$ δίνεται από

$$APF(n,\beta,T) \le ICUB\Lambda = \frac{S(0)}{n} E^{\tilde{Q}}[(\mathbb{S}^u - n\beta)_+] =$$

$$= \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-(r+\frac{\sigma^2}{2}r_i^2)i} \int_0^1 e^{r_i\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(\upsilon)} \Phi\left(\sqrt{1-r_i^2}\,\sigma\sqrt{i} - \Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(n\beta))\right) d\upsilon$$

$$-S(0)\beta(1-F_{\mathbb{S}^u}(n\beta)),$$

με τις συσχετίσεις να δίνονται από $r_i = \frac{\mathrm{cov}(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T),\Lambda)}{\sqrt{i}\sigma_\Lambda} = \frac{i}{\sqrt{i}\sqrt{T}} = \sqrt{i/T}$,

για *i*=1,.. .,*n*-1 και r_0=0.

Απόδειξη 4.2.2: Όμοια με την απόδειξη του θεωρήματος 3.1.3 και κάνοντας τις αντίστοιχες αντικαταστάσεις στην (22) προκύπτει το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα. Από τις (92)–(93) μπορούμε να πάρουμε την δεσμευμένη κατανομή $F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(x)$ και την αθροιστική συνάρτηση κατανομής (α.σ.κ) του $\mathbb{S}^u$.

4.2.3. Φράγματα βασισμένα στην προσέγγιση των Rogers και Shi

Με έναν παρόμοιο συλλογισμό με αυτόν της ενότητας 3.2, είναι εύκολο να παραχθεί ένα άνω φράγμα βασισμένο στο κάτω φράγμα ακολουθώντας τις ιδέες των Rogers και Shi [7] και Nielsen και Sandmann [16].

Στο ακόλουθο θεώρημα δηλώνουμε ένα άνω φράγμα για το $APF(n, \beta, T)$ σε σχέση με ένα σταθερό σφάλμα ε. Σημειώνουμε ότι το σφάλμα φράγματος ε είναι ανεξάρτητο από την τιμή εξάσκησης K.

θεώρημα 4.2.3.

Υποθέτουμε ότι το άθροισμα $\mathbb{S}$ δίνεται από (64)–(65) και Λ είναι μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης έτσι ώστε $[\sigma(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T)),\Lambda]$ είναι διμεταβλητή κανονικά κατανεμημένη για όλα τα i. Τότε το άνω φράγμα για την τιμή του $APF(n,\beta,T)$ δίνεται από

$$APF(n,\beta,T) \le UB\Lambda = \frac{S(0)}{n}\{E^{\tilde{Q}}[(\mathbb{S}^{\ell}-n\beta)_{+}]+\varepsilon\},$$

όπου το σφάλμα φράγματος ε ισούται

$$\varepsilon = \frac{1}{2}E^{\tilde{Q}}[\sqrt{\operatorname{var}^{\tilde{Q}}(\mathbb{S}^{\ell}/\Lambda)}] = \frac{1}{2}\int_0^1 \left\{ \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} a_i a_j e^{r_{ij}\sigma\sigma_{ij}\Phi^{-1}(\upsilon)+\frac{1}{2}(1-r_{ij}^2)\sigma^2\sigma_{ij}^2} - \left(\sum_{i=0}^{n-1} e^{-(r+\frac{1}{2}\sigma^2 r_i^2)i+r_i\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(\upsilon)} \right)^2 \right\}^{1/2} d\upsilon$$

με

$$a_i a_j = \exp\left[-\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(i+j)\right],$$

$$\sigma_{ij} = \sqrt{i + j + 2\min(i, j)},$$

$$r_{ij} = \frac{\sqrt{i}}{\sigma_{ij}} r_i + \frac{\sqrt{j}}{\sigma_{ij}} r_j.$$

Απόδειξη 4.2.3.: Παρόμοια με αυτήν του θεωρήματος 3.2.1.

Σε αντιστοιχία με την παράγραφο 3.3.3 στο ακόλουθο θεώρημα θα δούμε ότι μπορούμε να ενισχύσουμε το σφάλμα φράγματος ε του θεωρήματος 4.2.3 κάνοντας το εξαρτημένο από την τιμή εξάσκησης μέσω ενός κατάλληλα επιλεγμένου σταθερού d_Λ τέτοιο ώστε $\Lambda \geq d_\Lambda$ που συνεπάγεται ότι $\mathbb{S} \geq nK$. Η δεσμευτική μεταβλητή που χρησιμοποιούμε εδώ δίνεται από την (66).

θεώρημα 4.2.3*.

Υποθέτουμε ότι το άθροισμα $\mathbb{S}$ δίνεται από (64)–(65) και Λ είναι μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης έτσι ώστε $[\sigma(\tilde{B}(T-i) - \tilde{B}(T)), \Lambda]$ είναι διμεταβλητή κανονικά κατανεμημένη για όλα τα i. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $d_\Lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\Lambda \geq d_\Lambda$ που συνεπάγεται ότι $\mathbb{S} \geq nK$. Τότε ένα άνω φράγμα για την τιμή του δικαιώματος $APF(n, \beta, T)$ δίνεται από

$$APF(n,\beta,T) \leq UB\Lambda_d = LB\Lambda + \frac{S(0)}{n}\varepsilon(d_\Lambda) \Rightarrow$$

$$APF(n,\beta,T) \leq \frac{S(0)}{n}\{E^{\tilde{Q}}[(\mathbb{S}^\ell - n\beta)_+] + \varepsilon(d_\Lambda)\},$$

οπού d_Λ είναι τέτοιο ώστε $\mathbb{S} \geq n\beta$ εάν $\Lambda \geq d_\Lambda$ και με

$$\varepsilon(d_\Lambda) = \frac{1}{2}\{\Phi(d_\Lambda^*)\}^{1/2}$$

$$\times \left\{ \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} e^{-r(i+j)+\sigma^2 r_i r_j \sqrt{i}\sqrt{j}} \Phi(d_\Lambda^* - \sigma(r_i\sqrt{i} + r_j\sqrt{j}))(e^{\sigma^2(\min(i,j) - r_i r_j \sqrt{i}\sqrt{j})} - 1 \right\}^{1/2},$$

όπου $d_\Lambda^* = (d_\Lambda - E^{\tilde{Q}}[\Lambda]) / \sigma_\Lambda$ και οι συσχετίσεις r_i καθορίζονται στην (68).

Απόδειξη 4.2.4.: Παρόμοια με αυτήν του θεωρήματος 3.3.3.

Παρατηρήσεις

- Σημειώνουμε ότι σε αντίθεση με την 4.2.3 το σφάλμα φράγματος τώρα εξαρτάται από το *K* μέσω του d_{Λ}.

- Για $\beta_i = \frac{\sigma}{n}(1/\sqrt{\mathrm{var}^{\tilde{Q}}[\ln \mathbb{G}]})$ με το γεωμετρικό μέσο όρο (*GA*) $\mathbb{G}$ να καθορίζεται στην (67), η *Λ* ισούται με τον τυποποιημένο λογάριθμο του γεωμετρικού μέσου όρου και η αντίστοιχη d_{Λ} είναι ίση με

  $$\tilde{d}_{GA} = \frac{\ln(\beta) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(n-1)/2}{\frac{\sigma}{n}\sqrt{\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n}}.$$

- Στην περίπτωση που το *Λ* είναι γραμμικός μετασχηματισμός της προσέγγισης πρώτης-τάξης (FA) του $\mathbb{S} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} S(T-i)}{S(T)}$, δηλαδή $\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i (\tilde{\mathrm{B}}(T-i) - \tilde{\mathrm{B}}(T))$ *με* $\beta_i = e^{-(r+\frac{\sigma^2}{2})i}$, παίρνουμε

  $$\tilde{d}_{FA} = \frac{n\beta - \sum_{i=0}^{n-1} e^{-(r+\frac{\sigma^2}{2})i}}{\sigma}.$$

4.2.4. Μερικώς ακριβές/συμονοτονικό άνω φράγμα

Στην συνέχεια θα δούμε πώς μπορούμε να κάνουμε πιο ακριβές το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα της 4.4.2. Το παρακάτω φράγμα αποτελείται από ένα ακριβές μέρος της τιμής του δικαιώματος και κάποιου βελτιωμένου συμονοτονικού άνω φράγματος για το υπόλοιπο μέρος. Για να το πετύχουμε αυτό θα βασιστούμε στην θεωρία που αναπτύξαμε στην ενότητα 3.2. Σύμφωνα λοιπόν με την παράγραφο 3.3.4 μπορούμε παρόμοια να παραγάγουμε ένα μερικώς ακριβές/συμονοτονικό άνω φράγμα.

θεώρημα 4.2.4.

Υποθέτουμε ότι το άθροισμα $\mathbb{S}$ δίνεται από (64)–(65) και *Λ* είναι μια κανονικά κατανεμημένη μεταβλητή δέσμευσης έτσι ώστε $[\sigma(\tilde{B}(T-i)-\tilde{B}(T)),\Lambda]$ είναι διμεταβλητή κανονικά κατανεμημένη για όλα τα *i*. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $d_\Lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\Lambda \geq d_\Lambda$ που συνεπάγεται ότι $S \geq nK$. Τότε το μερικώς ακριβές/συμονοτονικό άνω φράγμα για την τιμή του δικαιώματος AC(*n, K, T*) δίνεται από

$$APF(n,\beta,T) \leq \frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-ri}\Phi(r_i\sigma\sqrt{i}-d_\Lambda^*) - S(0)\beta\Phi(-d_\Lambda^*)$$

$$+\frac{S(0)}{n}\sum_{i=0}^{n-1} e^{-(r+\frac{\sigma^2}{2}r_i^2)i}\int_0^{\Phi(d_\Lambda^*)} e^{r_i\sigma\sqrt{i}\Phi^{-1}(\upsilon)}\Phi(\sqrt{1-r_i^2}\,\sigma\sqrt{i}-\Phi^{-1}(F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(n\beta)))d\upsilon$$

$$-S(0)\beta\left(\Phi(d_\Lambda^*)-\int_0^{\Phi(d_\Lambda^*)} F_{\mathbb{S}^u/V=\upsilon}(n\beta)d\upsilon\right),$$

όπου $d_\Lambda^* = (d_\Lambda - E^{\tilde{Q}}[\Lambda])/\sigma_\Lambda$ και $\upsilon = (\lambda - E^{\tilde{Q}}[\Lambda])/\sigma_\Lambda$.

Απόδειξη 4.2.4: Παρόμοια με αυτήν του θεωρήματος 3.3.4.

Οι πρώτοι δύο όροι του άνω φράγματος συνθέτουν το ακριβές μέρος του $\frac{S(0)}{n}E^{\tilde{Q}}[(\mathbb{S}^\ell - n\beta)_+]$, ενώ οι τελευταίοι δύο όροι καθορίζουν το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα για το υπόλοιπο μέρος.

Παρατήρηση

Δηλώνοντας την τιμή ενός διακριτού αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης με ημερομηνία άσκησης *T*, *n* κατά μέσο όρο ημερομηνίες και ποσοστό *β* από

$$ACF(n,\beta,T)=\frac{e^{-rT}}{n}E^{Q}\left[\left(n\beta S(T)-\sum_{i=0}^{n-1}S(T-i)\right)_{+}\right],$$

βρίσκουμε από την ισότητα πώλησης-αγοράς στο παρόν:

$$APF(n,\beta,T)-ACF(n,\beta,T)=\frac{S(0)}{n}\frac{1-e^{-rn}}{1-e^{-r}}-\beta S(0). \tag{69}$$

Ως εκ τούτου, μπορούμε να παράγουμε φράγματα για το Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης από τα φράγματα για το δικαίωμα πώλησης.

Στην επόμενη ενότητα θα δώσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα ενός Ασιατικού δικαιώματος πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης.

4.3. Αριθμητική απεικόνιση

Στον πίνακα 5 παρουσιάζουμε τα διαφορετικά κάτω και άνω φράγματα για ένα Ασιατικό δικαίωμα πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης με:
- αρχική τιμή μετοχής $S(0)$=100,
- ημερομηνία λήξης 120 ημερών και
- κατά μέσο όρο περίοδο n 30 ημερών.

Οι επιλογές για τη διακύμανση και το επιτόκιο ουδέτερου κινδύνου είναι σ = 0.2, 0.3, 0.4 και r = 0.09, 0.05 αντίστοιχα. Επίσης το ποσοστό β επιλέγεται με τιμές: 0.8, 0.9, 1.0 και 1.1. Συμπεριλαμβάνουμε επίσης, τις εκτιμήσεις τιμών Monte Carlo (βασισμένες σε 10.000 προσομοιωμένες πορείες) με την προσαρμογή της τεχνικής «variate-control» των Kemna και Vorst [14] (Παράρτημα B2). Πράγματι, με την εφαρμογή της αλλαγής μέτρησης στην (61), μπορούμε να ερμηνεύσουμε ένα Ασιατικό δικαίωμα πώλησης με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης ως ένα Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με σταθερή τιμή εξάσκησης $\beta S(0)$. Ως εκ τούτου μπορούμε να προσομοιώσουμε τα δυναμικά της τιμής της μετοχής (*stock-price*) σύμφωνα με την (62), και να χρησιμοποιήσουμε το γεωμετρικό μέσο όρο $\mathbb{G}$ που δίνεται από την (67) ως «control-variate».

Παρατηρούμε παρόμοια συμπεριφορά των κάτω και άνω φραγμάτων όπως και στο Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με σταθερή τιμή εξάσκησης εκτός από μερικές ενδιαφέρουσες ειδικές περιπτώσεις.

Ειδικές περιπτώσεις

1. Για $\sigma = 0.2,\ 0.3,\ 0.4$ και $\beta = 0.8$ τα κάτω και τα καλύτερα άνω φράγματα συμπίπτουν μέχρι τα τρία ή τέσσερα δεκαδικά και δίνουν έτσι σχεδόν ακριβή αποτελέσματα. Αν και η εκτίμηση τιμών Monte Carlo είναι ελαφρώς υψηλότερη, το διάστημα [MC ± SE] συμπίπτει με το διάστημα [LB$\mathit{\Lambda}$, $UB\Lambda_d$] για $\mathit{\Lambda} = FA$ ή $\mathit{\Lambda} = GA$. Σημειώνουμε ότι για $\beta = 0.8$ ($\sigma = 0.2,\ 0.3$) (που είναι μια περίπτωση θεωρητικού ενδιαφέροντος καθώς αυτό συμβαίνει σπάνια στην πράξη) οι τιμές PECUB GA και ICUB B_T πάσχουν από τις αριθμητικές αστάθειες που προκαλούνται από την σύνθετη αριθμητική ολοκλήρωση.
2. Για $\sigma = 0.2$ και 0.3, και $\beta = 1.1$ η τιμή για το άνω φράγμα UB FA_d είναι μεγαλύτερη από αυτή για το UB FA κάτι το οποίο πρέπει να προκλήθηκε από την πρόσθετη ανισότητα Holder στην παραγωγή του σφάλματος φράγματος $\varepsilon(\tilde{d}_{FA})$.
3. Το μερικώς ακριβές/συμονοτονικό άνω φράγμα PECUB GA είναι το καλύτερο όλων των άνω φραγμάτων για $\sigma = 0.2$ και $\beta = 1.1$.

<u>Σημείωση</u>: Σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση σημειώνουμε ότι χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα της ισότητας πώλησης-αγοράς στην (69) μπορούμε εύκολα να πάρουμε την τιμή για ένα Ασιατικό δικαίωμα αγοράς με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης. Για παράδειγμα, εξετάζουμε την καταχώρηση στον πίνακα 8 με $\beta = 1.0$, $\sigma = 0.2$, και $r = 0.05$. Εφαρμόζοντας την (69), λαμβάνουμε ότι LB FA=1.387410, LB GA=1.387411, UB GA_d =1.388847, UB FA_d =1.388792, PECUB GA=1.557532, και ICUB B_T =1.575395.

Παράρτημα Α.

Μερικά θεωρητικά αποτελέσματα

Σε αυτήν την ενότητα, όπως αναφέραμε και στο κεφάλαιο 3, θα δώσουμε μία περίληψη των διαδικασιών που χρησιμοποιήθηκαν για την λήψη των κάτω και άνω φραγμάτων για τα ασφάλιστρα stop-loss των αθροισμάτων $\mathbb{S}$ των εξαρτώμενων τυχαίων μεταβλητών. Για τα φράγματα αυτά χρησιμοποιήσαμε την έννοια της συμονοτονικότητας και της κυρτής διάταξης, σύμφωνα με τους Dhaene et al [4] (βλ.ενότητα 3.1.)

Α.1. Αθροίσματα των συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών

Ο τύπος S^c χρησιμοποιείται για το άθροισμα των συνιστωσών του συμονοτονικού $(X_1^c,...,X_n^c)$ του τυχαίου διανύσματος $(X_1,...,X_n)$:

$$S^c = X_1^c + ... + X_n^c .$$

Θα αποδείξουμε στην συνέχεια ότι προσεγγίζοντας τη συνάρτηση κατανομής του $S = X_1 + ... + X_n$ από τη συνάρτηση κατανομής του συμονοτονικού αθροίσματος S^c είναι μια καλή στρατηγική υπό την έννοια της κυρτής διάταξης ($S \leq_{cx} S^c$). Τονίζουμε ότι αυτή η προσέγγιση θα είναι σημαντική μόνο εάν μπορούμε εύκολα να καθορίσουμε τη συνάρτηση κατανομής και τα stop-loss ασφάλιστρα του S^c. Στα δύο επόμενα θεωρήματα, φαίνεται ότι αυτές οι ποσότητες μπορούν πράγματι εύκολα να καθοριστούν από τις περιθώριες συναρτήσεις κατανομών των όρων του αθροίσματος.

Θεώρημα 1.

Η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής $F_{S^c}^{-1}$ του αθροίσματος S^c των συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών $(X_1^c,...,X_n^c)$ δίνεται από :

$$F_{S^c}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p),\ 0 < p < 1\,.$$

Σε αυτό το θεώρημα παρατηρούμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος των συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών είναι απλά το άθροισμα των αντίστροφων συναρτήσεων κατανομών των περιθωρίων κατανομών τους.

Λαμβάνοντας υπόψη τώρα τις αντίστροφες συναρτήσεις $F_{X_i}^{-1}$, η α.σ.κ του $S^c = X_1^c + ... + X_n^c$ μπορεί να καθοριστεί ως εξής:

$$F_{S^c}(x) = \sup\{p \in (0,1) \,|\, F_{S^c}(x) \geq p\} = \sup\{p \in (0,1) \,|\, F_{S^c}^{-1}(p) \leq x\}$$

$$= \sup\{p \in (0,1) \,\Big|\, \sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(p) \leq x\}\,. \tag{70}$$

Στην περίπτωση που έχουμε γνησίως αύξουσες και συνεχείς περιθώριες συναρτήσεις κατανομής, για οποιοδήποτε $F_{S^c}^{-1}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1)$, η πιθανότητα $F_{S^c}(x)$ καθορίζεται μεμονωμένα από την $F_{S^c}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x$, ή ισοδύναμα,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(x)) = x\ ,\quad F_{S^c}^{-1}(0) < x < F_{S^c}^{-1}(1)\,. \tag{71}$$

Αρκεί έτσι να λύσουμε την τελευταία εξίσωση για να πάρουμε την $F_{S^c}(x)$.

Στο ακόλουθο θεώρημα, έχει αποδειχτεί (από τους Dhaene et al [4]) ότι τα stop-loss ασφάλιστρα ενός αθροίσματος συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών μπορούν να καθοριστούν από τα stop-loss ασφάλιστρα των όρων του αθροίσματος.

Θεώρημα 2.

Τα stop-loss ασφάλιστρα του αθροίσματος S^c των συνιστωσών του συμονοτονικού τυχαίου διανύσματος $(X_1^c, ..., X_n^c)$ δίνονται από:

$$E[(\mathbb{S}^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - d_i)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - F_{X_i}^{-1}(F_{\mathbb{S}^c}(d)))_+],\quad (\mathrm{F}_{\mathbb{S}^c}^{-1}(0)<\mathrm{d}<\mathrm{F}_{\mathbb{S}^c}^{-1}(1))$$

με τα d_i να δίνονται ως εξής:

$$d_i = F_{X_i}^{-1}(F_{S^c}(d)) \quad (i = 1, 2, ..., n).$$

Α.2. Συμονοτονικό άνω φράγμα

Θεώρημα 3.

Για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $(X_1, X_2, ..., X_n)$ έχουμε:

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \leq_{cx} X_1^c + X_2^c + ... + X_n^c \ .$$

Απόδειξη.

Αρκεί να αποδείξουμε τον stop-loss συνδυασμό, δεδομένου ότι είναι προφανές ότι οι μέσες τιμές αυτών των δύο αθροισμάτων είναι ίσες. Ως εκ τούτου, πρέπει να αποδείξουμε ότι:

$$E[(X_1 + X_2 + ... + X_n - d)_+] \leq_{cx} E[X_1^c + X_2^c + ... + X_n^c - d)_+]$$

ισχύει για όλα τα d με $d \in (F_{S^c}^{-1}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$, δεδομένου ότι τα stop-loss ασφάλιστρα μπορούν να δειχτούν ότι είναι ίσα για άλλες τιμές του *d*.

Ο ακόλουθος τύπος ισχύει για όλα τα $(x_1, x_2, ..., x_n)$ με $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$:

$$\begin{aligned}
&(x_1 + x_2 + ... + x_n - d)_+ \\
&= ((x_1 - d_1) + (x_2 - d_2) + ... + (x_n - d_n))_+ \leq ((x_1 - d_1)_+ + (x_2 - d_2)_+ + ... + (x_n - d_n)_+)_+ \\
&= (x_1 - d_1)_+ + (x_2 - d_2)_+ + ... + (x_n - d_n)_+ \ .
\end{aligned}$$

Τώρα αντικαθιστώντας τις σταθερές από τις αντίστοιχες τυχαίες μεταβλητές στην παραπάνω ανισότητα και παίρνοντας μέσες τιμές, παίρνουμε ότι:

$$E[(X_1 + X_2 + ... + X_n - d)_+] \leq E[(X_1 - d_1)_+] + E[(X_2 - d_2)_+] + ... + E[(X_n - d_n)_+]$$

ισχύει για όλα *τα* d και *τα* d_i τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$.

Με την επιλογή του $d \in (F_{S^c}^{-1}(0), F_{S^c}^{-1}(1))$ και τα d_i όπως έχουν οριστεί στο θεώρημα 2, η παραπάνω ανισότητα αποδείχτηκε.

Το παραπάνω θεώρημα δηλώνει ότι το κυρτό-μεγαλύτερο άθροισμα των συνιστωσών ενός τυχαίου διανύσματος με δοσμένες περιθώριες, λαμβάνεται από το συμονοτονικό άθροισμα $\mathbb{S}^c$.

Από τα θεωρήματα 2 και 3 καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το μικρότερο άνω φράγμα της μορφής $\sum_{i=1}^{n} E[(X_i - d_i)_+]$ με $\sum_{i=1}^{n} d_i = d$ για το stop-loss ασφάλιστρο $E[(X_1 + X_2 + ... + X_n - d)_+]$ είναι το συμονοτονικό άνω φράγμα.

A.3. Βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα

Τώρα ας υποθέσουμε ότι έχουμε κάποιες πρόσθετες πληροφορίες διαθέσιμες σχετικά με την στοχαστική φύση του $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Ακριβέστερα, υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποια τυχαία μεταβλητή *Λ* με δεδομένη συνάρτηση κατανομής, έτσι ώστε να ξέρουμε τις δεσμευμένες αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών, δοθέντος ότι *Λ* = *λ*, των τυχαίων μεταβλητών X_i , για όλες τις πιθανές τιμές του *λ*. Οι Kaas et al [13] όπως είδαμε και στο κεφάλαιο 3 καθορίζουν το βελτιωμένο συμονοτονικό άνω φράγμα $\mathbb{S}^u$ όπως στην (3). Σημειώνουμε ότι

$$\mathbb{S}^u = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i \ / \ \Lambda \right)^c .$$

Προκειμένου να ληφθεί η συνάρτηση κατανομής του $\mathbb{S}^u$, παρατηρούμε ότι δοθέντος *Λ*=*λ*, η τυχαία μεταβλητή $\mathbb{S}^u$ είναι ένα άθροισμα από συμονοτονικές τυχαίες μεταβλητές. Ως εκ τούτου από θεώρημα 1 έχουμε,

$$\mathrm{F}^{-1}_{\mathbb{S}^u/\Lambda=\lambda}(\mathrm{p}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{F}^{-1}_{X_i\ /\Lambda=\lambda}(p), \quad \mathrm{p} \in [0\ ,1].$$

Δοθέντος ότι *Λ* = *λ*, η α.σ.κ του $\mathbb{S}^u$ προκύπτει από την σχέση (70) :

$$\mathrm{F}_{\mathbb{S}^u/\Lambda=\lambda}(\mathrm{x}) = \sup\left\{ \mathrm{p} \in [0,1] / \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{F}^{-1}_{X_i\ /\Lambda=\lambda}(p) \leq x \right\}.$$

Η α.σ.κ. του $\mathbb{S}^u$ προκύπτει έπειτα από

$$F_{\mathbb{S}^u}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{F}_{\mathbb{S}^u/\Lambda=\lambda}(\mathrm{x}) \mathrm{dF}_{\Lambda}(\lambda).$$

Εάν οι περιθώριες α.σ.κ. $\mathrm{F}_{X_i\,/\Lambda=\lambda}$ είναι γνησίως αύξουσες και συνεχείς, τότε η $\mathrm{F}_{\mathbb{S}^u\,/\Lambda=\lambda}(\mathrm{x})$ προκύπτει με την επίλυση της:

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{F}^{-1}_{X_i\,/\Lambda=\lambda}(\mathrm{F}_{\mathbb{S}^u\,/\Lambda=\lambda}(\mathrm{x})) = x\,, \quad x \in (\mathrm{F}^{-1}_{\mathbb{S}^u\,/\Lambda=\lambda}(0), \mathrm{F}^{-1}_{\mathbb{S}^u\,/\Lambda=\lambda}(1)) \tag{72}$$

όπως φαίνεται και από την (71).

Σε αυτήν την περίπτωση, βρίσκουμε επίσης από το θεώρημα 2 ότι για οποιοδήποτε $d \in (\mathrm{F}^{-1}_{\mathbb{S}^u\,/\Lambda=\lambda}(0), \mathrm{F}^{-1}_{\mathbb{S}^u\,/\Lambda=\lambda}(1))$:

$$E[(\mathbb{S}^u - d)_+ / \Lambda = \lambda] = \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - F^{-1}_{X_i/\Lambda=\lambda}(F_{\mathbb{S}^u\,/\Lambda=\lambda}(d)))_+ / \Lambda = \lambda]\,, \tag{73}$$

με $d_i = F^{-1}_{X_i/\Lambda=\lambda}(F_{\mathbb{S}^u\,/\Lambda=\lambda}(d))$ από το οποίο το ασφάλιστρο stop-loss με όριο ιδίας κράτησης d του $\mathbb{S}^u$ μπορεί να καθοριστεί από την ολοκλήρωση όσον αφορά το λ.

Α.4. Κάτω φράγμα

Έστω $\underline{X}(X_1, ..., X_n)$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με δεδομένες περιθώριες α.σ.κ $F_{X_1}, F_{X_2}, ..., F_{X_n}$. Υποθέτουμε όπως στην προηγούμενη παράγραφο ότι υπάρχει κάποια τυχαία μεταβλητή Λ με δοσμένη συνάρτηση κατανομής έτσι ώστε να ξέρουμε τις δεσμευμένες αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών, δοθέντος ότι $\Lambda = \lambda$, των τυχαίων μεταβλητών X_i, για όλες τις πιθανές τιμές του λ. Αυτή η τυχαία μεταβλητή Λ, ωστόσο, δεν πρέπει να είναι η ίδια όπως στην περίπτωση του άνω φράγματος. Υπενθυμίζουμε από τους Kaas et al [13] πως μπορούμε να λάβουμε ένα κάτω φράγμα, από την άποψη της κυρτής διάταξης, για $\mathbb{S} = X_1 + X_2 + ... + X_n$ δεσμεύοντας σε αυτήν την τυχαία μεταβλητή.

Η ιδέα αυτής της ενότητας είναι να παρατηρηθεί ότι η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής είναι πάντα μικρότερη ή ίση υπό την κυρτή διάταξη από την ίδια την τυχαία μεταβλητή. Οι Dhaene et al [4] έχουν αποδείξει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.

Για οποιοδήποτε τυχαίο διάνυσμα $\underline{X}$ και οποιοδήποτε τυχαία μεταβλητή Λ, έχουμε:

$$E[X_1 \left| \Lambda \right] + E[X_2 \left| \Lambda \right] + ... + E[X_n \left| \Lambda \right] \leq_{cx} X_1 + X_2 + ... + X_n .$$

<u>Παρατήρηση</u>

1. Σημειώνουμε ότι εάν τα *Λ* και *S* είναι αμοιβαία ανεξάρτητα, βρίσκουμε το τετριμμένο αποτέλεσμα: $E[S] \leq_{cx} S$.
2. Αφ' ετέρου, εάν τα *Λ* και *S* έχουν ένα προς ένα σχέση (δηλ.το *Λ* καθορίζει εντελώς το *S*), το κάτω φράγμα συμπίπτει με το *S*.

Για την δεσμευμένη μέση τιμή $\mathbb{S}^{\ell}$, βλ (4), ας υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή *Λ* είναι τέτοια ώστε όλες οι $E[X_i \; / \Lambda]$ να είναι μη-φθίνουσες και συνεχείς συναρτήσεις της *Λ*. Τα ποσοστημόρια του κάτω φράγματος $\mathbb{S}^{\ell}$ τότε προκύπτουν από

$$\mathrm{F}_{\mathbb{S}^{\ell}}^{-1}(p) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{F}_{E[X_i \; / \Lambda]}^{-1}(p) = \sum_{i=1}^{n} E[X_i \; / \Lambda = \mathrm{F}_{\Lambda}^{-1}(p)], \quad \mathrm{p} \in [0,1]$$

και η α.σ.κ. του $\mathbb{S}^{\ell}$ που προκύπτει από την (70), δίνεται από

$$F_{\mathbb{S}^{\ell}}(x) = \sup \left\{ p \in [0,1] / \sum_{i=1}^{n} E[X_i \; / \Lambda = F_{\Lambda}^{-1}(p)] \leq x \right\}.$$

Εάν τώρα πρόσθετα υποθέσουμε ότι οι α.σ.κ των τυχαίων μεταβλητών $E[X_i / \Lambda]$ είναι γνησίως αύξουσες και συνεχείς, τότε η α.σ.κ του $\mathbb{S}^{\ell}$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα και συνεχής, και από την σχέση (71) παίρνουμε για όλα τα $x \in (F_{\mathbb{S}^{\ell}}^{-1}(0), F_{\mathbb{S}^{\ell}}^{-1}(1))$,

$$\sum_{i=1}^{n} F_{E[X_i / \Lambda]}^{-1}(F_{\mathbb{S}^{\ell}}(x)) = x <=> \sum_{i=1}^{n} E[X_i / \Lambda = F_{\Lambda}^{-1}(F_{\mathbb{S}^{\ell}}(x))] = x , \tag{74}$$

όπου αναμφίβολα καθορίζει την α.σ.κ υπό την έννοια της κυρτής διάταξης του κάτω φράγματος $\mathbb{S}^{\ell}$ για το $\mathbb{S}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα 2, τα ασφάλιστρα stop-loss του $\mathbb{S}^{\ell}$ μπορούν να υπολογιστούν όπως

$$E[(\mathbb{S}^{\ell} - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} E[(E[X_i / \Lambda] - E[X_i / \Lambda = F_{\Lambda}^{-1}(F_{\mathbb{S}^{\ell}}(d))])_+], \tag{75}$$

που ισχύει για όλα τα $d \in (F_{\mathbb{S}^{\ell}}^{-1}(0), F_{\mathbb{S}^{\ell}}^{-1}(1))$.

Μέχρι τώρα, εξετάσαμε την περίπτωση όπου όλες οι $E[X_i / \Lambda]$ είναι μη-φθίνουσες συναρτήσεις της *Λ*. Η περίπτωση όπου όλες οι $E[X_i / \Lambda]$ είναι μη-αύξουσες και συνεχείς συναρτήσεις της *Λ* επίσης μας οδηγεί σε ένα συμονοτονικό διάνυσμα $(E[X_1 / \Lambda], E[X_2 / \Lambda], ..., E[X_n / \Lambda])$, και μπορεί να αντιμετωπιστεί με παρόμοιο τρόπο.

A.5. Αθροίσματα των *Λογαριθμο-Κανονικών* μεταβλητών

Σε αυτήν την ενότητα, μελετάμε τα άνω και κάτω φράγματα για $E[(\mathbb{S}-d)_+]$ όπου $\mathbb{S}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός *Λογαριθμο-Κανονικών* μεταβλητών. Δηλώνουμε

$$\mathbb{S} = \sum_{i=1}^{n} X_i = \sum_{i=1}^{n} a_i e^{Y_i} \quad , \tag{76}$$

με Y_i μία κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με μέσο $\mathrm{E}[Y_i]$ και διακύμανση $\sigma_{Y_i}^2$ και $a_i \in \mathbb{R}$.

Σε αυτήν την περίπτωση το ασφάλιστρο stop-loss με κάποιο όριο ιδίας κράτησης d_i, δηλαδή $E[(X_i - d_i)_+]$, μπορεί να ληφθεί από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.

Έστω X_i μία *Λογαριθμο-Κανονική* τυχαία μεταβλητή της μορφής $X_i = a_i e^{Y_i}$ με

$Y_i \sim N(E[Y_i], \sigma_{Y_i})$

και $a_i \in \mathbb{R}$. Τότε το ασφάλιστρο stop-loss με όριο ιδίας κράτησης d_i ισούται για $a_i d_i > 0$

$$E[(X_i - d_i)_+] = sign(a_i) e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}} \Phi(sign(a_i) d_{i,1}) - d_i \Phi(sign(a_i) d_{i,2}), \tag{77}$$

όπου $\mu_i = \ln|\alpha_i| + E[Y_i]$, $\sigma_i = \sigma_{Y_i}$, *Φ* είναι η α.σ.κ της *τυπικής κανονικής* κατανομής *N*(0,1), και τα $d_{i,1}$ και $d_{i,2}$ καθορίζονται από

$$d_{i,1} = \frac{\mu_i + \sigma_i^2 - \ln|d_i|}{\sigma_i}, \quad d_{i,2} = d_{i,1} - \sigma_i \ . \tag{78}$$

Οι περιπτώσεις $a_i d_i < 0$ είναι τετριμμένες.

Εξετάζουμε τώρα μια *κανονικά* κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή *Λ* και γενικεύουμε ελαφρώς το θεώρημα 1 των Dhaene et al [5] στις γενικότερες τοποθετήσεις μας. Πριν προχωρήσουμε στο θεώρημα είναι χρήσιμο να παρουσιάσουμε κάποιες έννοιες και τύπους για καλύτερη κατανόηση.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα τυχαίο διάνυσμα $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ έχει την πολυμεταβλητή *Κανονική* Κατανομή εάν και μόνο εάν κάθε γραμμικός συνδυασμός των μεταβλητών του διανύσματος ακολουθεί την *Κανονική* Κατανομή. Τώρα υποθέτουμε ότι το $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$ ακολουθεί την *Πολυμεταβλητή Κανονική* Κατανομή. Παίρνουμε το *Y* και το *Λ* να είναι γραμμικοί συνδυασμοί των μεταβλητών: $Y = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i Y_i$ και $\Lambda = \sum_{i=1}^{n} \beta_i Y_i$. Έτσι το διάνυσμα (*Y,Λ*) έχει μια διμεταβλητή *Κανονική* Κατανομή. Εν συνεχεία αυτή η διμεταβλητή (*Y,Λ*), δοθέντος ότι *Λ = λ*, το *Y* ακολουθεί την *Κανονική* Κατανομή με μέση τιμή και διασπορά που δίνονται ως:

$$E[Y \mid \Lambda = \lambda] = E[Y] + r[Y, \Lambda] \frac{\sigma_Y}{\sigma_\Lambda} (\lambda - E[\Lambda]) \tag{79}$$

και

$$Var[Y \mid \Lambda = \lambda] = \sigma_Y^2 (1 - r[Y, \Lambda]^2) \tag{80}$$

όπου το *r* (*Y, Λ*) είναι ο συντελεστής συσχέτισης *Pearson* για το ζεύγος (*Y, Λ*).

Για την ειδική περίπτωση $Y = Y_i$, από τις σχέσεις (79) και (80) βρίσκουμε ότι, δοθέντος *Λ = λ*, η τυχαία μεταβλητή Y_i ακολουθεί την *Κανονική* Κατανομή με παραμέτρους

$$\left.\begin{array}{l} \mu_i = E[Y_i] + r_i(\sigma_{Y_i} / \sigma_\Lambda)(\lambda - E[\Lambda]) = E[Y_i] + r_i \sigma_{Y_i} \Phi^{-1}(V) \\ \kappa\alpha\iota \\ \sigma_i^2 = (1 - r_i^2)\sigma_{Y_i}^2 \end{array}\right\} . \tag{81}$$

Εφαρμόζοντας τα αποτελέσματα των Dhaene et al [5] έχουμε ότι:

α) $F^{-1}_{X_i|\Lambda=\lambda}(U) = F^{-1}_{\alpha_i e^{Y_i}|\Lambda=\lambda}(U) = \alpha_i e^{\mu_i + sign(\alpha_i)\sigma_i \Phi^{-1}(U)} = \alpha_i e^{E[Y_i] + r_i \sigma_{Y_i} \Phi^{-1}(V) + sign(\alpha_i)\sqrt{1 - r_i^2}\sigma_{Y_i} \Phi^{-1}(U)}$ (82)

β) $E[X_i \left|\Lambda=\lambda\right.]=E[a_i e^{Y_i}\left|\Lambda=\lambda\right.]=a_i e^{\mu_i+(1/2\sigma_i^2)}=\alpha_i e^{E[Y_i]+r_i\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(V)+1/2(1-r_i^2)\sigma_{Y_i}^2}$ (83)

με U και $V=\Phi((\Lambda-E[\Lambda])/\sigma_\Lambda)$ να είναι αμοιβαία ανεξάρτητες ομοιόμορφες στο (0 , 1) τυχαίες μεταβλητές. Από (82) και (83) έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 6.

Έστω ότι $\mathbb{S}$ δίνεται από την (76) και θεωρούμε μια κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή *Λ* έτσι ώστε (Y_i , *Λ*) είναι διμεταβλητή κανονικά κατανεμημένη για όλα τα *i*. Τότε οι κατανομές του βελτιωμένου συμμονοτονικού άνω φράγματος $\mathbb{S}^u$ και του κάτω φράγματος $\mathbb{S}^\ell$ δίνονται από:

$$\mathbb{S}^u \overset{d}{=} \sum_{i=1}^n F_{X_i/\Lambda}^{-1}(U)=\sum_{i=1}^n a_i e^{E[Y_i]+r_i\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(V)+sign(a_i)\sqrt{1-r_i^2}\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(U)}, \quad (84)$$

$$\mathbb{S}^\ell \overset{d}{=} \sum_{i=1}^n E[X_i/\Lambda]=\sum_{i=1}^n a_i e^{E[Y_i]+r_i\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(V)+\frac{1}{2}(1-r_i^2)\sigma_{Y_i}^2}, \quad (85)$$

όπου U και $V=\Phi((\Lambda-E[\Lambda])/\sigma_\Lambda)$ όπως οριστήκαν παραπάνω, *Φ* είναι η α.σ.κ της *N* (0,1) κατανομής και r_i καθορίζεται από

$$r_i=corr(Y_i,\Lambda)=\frac{\mathrm{cov}[Y_i,\Lambda]}{\sigma_{Y_i}\sigma_\Lambda}.$$

Όταν για όλα τα *i* είναι $sign(a_i)=sign(r_i)$ για $r_i\neq 0$, ή για όλα τα *i* $sign(a_i)=-sign(r_i)$ για $r_i\neq 0$, τότε το $\mathbb{S}^\ell$ είναι συμμονοτονικό.

Έχει δειχτεί στους Dhaene et al [9] ότι,

$$F_{\alpha_i e^{Y_i}}^{-1}(p)=\alpha_i e^{E[Y_i]+sign(\alpha_i)\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(p)}, 0<p<1 . \quad (86)$$

Από την (71) και δεδομένου της (86) παίρνουμε την (87) από την επίλυση της οποίας προκύπτει η $F_{S^c}(x)$:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{E[Y_i]+sign(\alpha_i)\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(F_{S^c}(x))}=x, \quad F_{S^c}^{-1}(0)<x<F_{S^c}^{-1}(1). \quad (87)$$

Από την (87) και το θεώρημα 5 προκύπτει η ακόλουθη έκφραση για το stop-loss ασφάλιστρο του S^c με δοσμένο d με $F_{S^c}^{-1}(0)<d<F_{S^c}^{-1}(1)$:

$$E[(S^c - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{E[Y_i]+(\sigma_{Y_i}^2/2)} \Phi(sign(\alpha_i)\sigma_{Y_i} - \Phi^{-1}(F_{S^c}(d))) - d(1 - F_{S^c}(d)). \quad (88)$$

Ανάλογη έκφραση υπάρχει και για το stop-loss ασφάλιστρο του S^ℓ που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του θεωρήματος 3.2.1. Από την (74) η $F_{S^\ell}(x)$ μπορεί να ληφθεί από την επίλυση της :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{E[Y_i]+r_i\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(F_{S^\ell}(x))+1/2(1-r_i^2)\sigma_{Y_i}^2} = x. \quad (89)$$

Όμοια με την (88) προκύπτει η έκφραση για το stop-loss ασφάλιστρο του S^ℓ

$$E[(S^\ell - d)_+] = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{E[Y_i]+(\sigma_{Y_i}^2/2)} \Phi[r_i\sigma_{Y_i} - \Phi^{-1}(F_{S^\ell}(d))] - d(1 - F_{S^\ell}(d)). \quad (90)$$

Τέλος καθορίζουμε τη α.σ.κ. του S^u. Επειδή η $F_{S^u}(x|V = \upsilon)$ είναι η α.σ.κ. ενός αθροίσματος *n* συμονοτονικών τυχαίων μεταβλητών, έχουμε ότι:

$$F^{-1}_{S^u|V=\upsilon}(p) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{E[Y_i]+r_i\sigma_{Y(i)}\Phi^{-1}(\upsilon)+sign(\alpha_i)\sqrt{1-r_i^2}\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(p)}. \quad (91)$$

Για $F^{-1}_{S^u|V=\upsilon}(0) < x < F^{-1}_{S^u|V=\upsilon}(1)$, οι δεσμευμένες πιθανότητες $F_{S^u}(x|V = \upsilon)$ προκύπτουν επίσης από την επίλυση της:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e^{E[Y_i]+r_i\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(\upsilon)+sign(\alpha_i)\sqrt{1-r_i^2}\sigma_{Y_i}\Phi^{-1}(F_{S^u}(x|V=\upsilon))} = x \quad (92)$$

όπου $r_i = corr(Y_i, \Lambda)$.

Η α.σ.κ. του S^u προκύπτει τότε από την:

$$F_{S^u}(x) = \int_0^1 F_{S^u}(x|V = \upsilon)d\upsilon. \quad (93)$$

Παράρτημα Β.

Β1) Εδώ δίνουμε τους σχετικούς πίνακες που χρησιμοποιήθηκαν σε όλα τα αριθμητικά παραδείγματα του κεφαλαίου 3 και 4 και περιέχονται στα έγγραφα των: M. Vanmaele et al. [6], Nielsen και Sandmann [16] και Jacques [12].

<u>Πίνακας για την παράγραφο 3.5.3</u>

$T=120$, $n=30$, $r=\ln(1+0.09/365)$ daily, $S(0)=100$.

σ	K	LN	IG	MC (SE $\times 10^4$)	LB B_T	LB FA	LB GA	UB GA$_d$	UB FA$_d$	UB FA	PECUB GA	ICUB B_T	UB B_T
0.2	80	22.0027	22.0022	22.00271 (2.5)	21.994822	22.002619	22.002619	22.002732	22.002849	22.014767	22.004625	22.006032	23.446236
	90	12.7603	12.7599	12.76012 (2.6)	12.691751	12.760052	12.760053	12.761283	12.761506	12.772219	12.778069	12.786728	14.143164
	100	5.5219	5.5236	5.52165 (2.5)	5.364993	5.521689	5.521689	5.526257	5.526389	5.533856	5.566340	5.580651	6.816407
	110	1.6526	1.6536	1.65270 (2.0)	1.518289	1.652807	1.652806	1.661491	1.661639	1.664974	1.695799	1.704168	2.969703
0.3	80	22.3102	22.3079	22.30976 (5.8)	22.250172	22.309736	22.309736	22.311225	22.311808	22.337168	22.325349	22.333495	24.428128
	90	13.9253	13.9268	13.92461 (5.9)	13.763614	13.924578	13.924579	13.929696	13.930099	13.952005	13.968496	13.985921	15.941570
	100	7.5351	7.5414	7.53451 (5.8)	7.295732	7.534676	7.534676	7.545641	7.545771	7.562103	7.603959	7.624473	9.473688
	110	3.5174	3.5225	3.51735 (5.1)	3.288965	3.517536	3.517535	3.534765	3.535066	3.544963	3.589000	3.604201	5.466921
0.4	80	23.0359	23.0339	23.03488 (10.7)	22.894509	23.034765	23.034765	23.039974	23.041030	23.083564	23.072463	23.088993	25.800008
	90	15.4251	15.4330	15.42367 (10.8)	15.172741	15.423789	15.423789	15.435454	15.435878	15.472586	15.493971	15.518613	18.078240
	100	9.5649	9.5805	9.56384 (10.5)	9.244120	9.564114	9.564114	9.584043	9.584080	9.612911	9.658116	9.684280	12.149619
	110	5.5176	5.5318	5.51721 (9.7)	5.199653	5.517573	5.517573	5.545909	5.546323	5.566370	5.616391	5.637784	8.105152

Πίνακας 3

Σύγκριση των προσεγγίσεων LN και IG του Jacques με τα φράγματά μας

με σ: διακύμανση σε ετήσια βάση, K: τιμή εξάσκησης, LN: λογαριθμο-κανονική προσέγγιση ενός αθροίσματος λογαριθμοκανονικών, IG: αντίστροφη Gaussian προσέγγιση ενός αθροίσματος λογαριθμοκανονικών, MC: τιμή Monte Carlo με σφάλμα φράγματος (SE) βασισμένο σε 10.000 επαναλήψεις, οι συμβολισμοί για τα άλλα φράγματα δίνονται στον πίνακα 2.

<u>Πίνακας για την παράγραφο 3.5.4</u>

$T = 3$ years, $n = 3$ years, $r = 0.04$ yearly, $S(0) = 100$

σ	K	MC (SE $\times 10^3$)	LB FA	LB GA	UB GA$_d$	UB FA$_d$	UB FA	UB GA	PECUB GA	ICUB B_T	$C_A^{**,G}$	$C_A^{*,G}$	$C_A^{N,G}$
0.25	50	50.0506 (5.6)	50.0473	50.0472	50.0488	50.0599	50.5557	50.6536	50.0517	50.0565	50.0518	50.0535	50.0641
	80	24.7540 (5.7)	24.7457	24.7471	24.8222	24.8342	25.2542	25.3535	25.0299	25.2125	25.0424	25.0931	25.2908
	90	17.9405 (5.8)	17.9312	17.9343	18.0582	18.0632	18.4396	18.5406	18.4047	18.6367	18.4309	18.4950	18.6188
	100	12.4799 (5.9)	12.4759	12.4743	12.6490	12.6565	12.9843	13.0807	13.1149	13.3350	13.1516	13.2158	13.2088
	110	8.3887 (6.0)	8.3860	8.3830	8.6110	8.6206	8.8944	8.9894	9.1259	9.2843	9.1717	9.2261	9.1827
	200	0.1214 (2.9)	0.1183	0.1159	0.6962	0.6104	0.6267	0.7223	0.2514	0.2081	0.2662	0.2666	0.5922

Πίνακας 4

Σύγκριση των φραγμάτων μας με αυτά των Nielsen και Sanmann

με σ: διακύμανση σε ετήσια βάση, K: τιμή εξάσκησης, MC: τιμή Monte Carlo με σφάλμα φράγματος (SE) βασισμένο σε 10.000 επαναλήψεις, $C_A^{**,G}, C_A^{*,G}, C_A^{N,G}$: (τα φράγματα $C_A^{u,G}$ για τις διαφορετικές επιλογές των συντελεστών a_i), οι συμβολισμοί για τα άλλα φράγματα δίνονται στον πίνακα 2.

<u>Πίνακας για την ενότητα 4.3</u>

$T = 120$, $n = 30$, σ: yearly volatility, β: percentage, $S(0) = 100$

σ	β	MC (SE $\times 10^4$)	LB FA	LB GA	UB GA$_d$	UB FA$_d$	UB FA	PECUB GA	ICUB B_T
$r = 0.09$									
0.2	0.8	19.64351 (2.5)	19.643331	19.643331	19.643331	19.643331	19.652053	19.643118	19.643284
	0.9	9.64412 (2.5)	9.643903	9.643903	9.643923	9.643934	9.652625	9.645429	9.646147
	1.0	1.11387 (2.1)	1.113997	1.113998	1.119154	1.118720	1.122719	1.283311	1.301119
	1.1	0.00117 (0.6)	0.001154	0.001155	0.010306	0.010293	0.009876	0.004286	0.004762
0.3	0.8	19.64376 (5.6)	19.643332	19.643332	19.643333	19.643334	19.662815	19.642851	19.643255
	0.9	9.67084 (5.3)	9.670327	9.670324	9.671056	9.671175	9.689810	9.704453	9.708673
	1.0	1.75264 (5.0)	1.753406	1.753406	1.764434	1.763671	1.772889	2.008637	2.034843
	1.1	0.04090 (3.2)	0.040840	0.040844	0.060394	0.060568	0.060323	0.084571	0.089851
0.4	0.8	19.64452 (9.9)	19.643666	19.643666	19.643700	19.643762	19.678319	19.645280	19.645424
	0.9	9.78457 (9.1)	9.784545	9.784533	9.788040	9.788243	9.819198	9.891788	9.904717
	1.0	2.39166 (9.1)	2.393883	2.393884	2.412935	2.411692	2.428536	2.734542	2.769381
	1.1	0.19108 (7.4)	0.192114	0.192128	0.224217	0.224551	0.226767	0.320139	0.334277
$r = 0.05$									
0.2	0.8	19.80180 (2.5)	19.801637	19.801637	19.801637	19.801637	19.810313	19.801423	19.801590
	0.9	9.80230 (2.5)	9.802114	9.802114	9.802131	9.802141	9.810790	9.803394	9.804074
	1.0	1.18893 (2.2)	1.189061	1.189061	1.193931	1.193664	1.197736	1.359169	1.377045
	1.1	0.00141 (0.7)	0.001377	0.001377	0.010502	0.010525	0.010052	0.004943	0.005479
0.3	0.8	19.80200 (5.6)	19.801638	19.801638	19.801638	19.801640	19.821132	19.801156	19.801557
	0.9	9.82678 (5.3)	9.826301	9.826299	9.826970	9.827101	9.845795	9.858436	9.862434
	1.0	1.83020 (5.1)	1.830953	1.830953	1.841571	1.841046	1.850447	2.086848	2.113107
	1.1	0.04467 (3.3)	0.044669	0.044671	0.064136	0.064355	0.064163	0.091056	0.096617
0.4	0.8	19.80267 (10.0)	19.801942	19.801942	19.801972	19.802032	19.836644	19.803444	19.803566
	0.9	9.93501 (9.2)	9.935044	9.935035	9.938357	9.938621	9.969747	10.038765	10.051296
	1.0	2.47075 (9.2)	2.473011	2.473011	2.491532	2.490598	2.507713	2.814307	2.849193
	1.1	0.20234 (7.6)	0.203494	0.203505	0.235379	0.235795	0.238196	0.335905	0.350466

Πίνακας 5

Σύγκριση φραγμάτων για Ασιατικά δικαιώματα με κυμαινόμενη τιμή εξάσκησης

με:

MC: Monte Carlo price together with its standard error (SE) based on 10 000 paths;

LB FA: lower bound with $\Lambda = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{e}^{-(r+\frac{\sigma^2}{2})i}(\tilde{B}(T-i) - \tilde{B}(T))$;

LB GA: lower bound with $\Lambda = (\ln \mathbb{G} - E^{\tilde{Q}}[\ln \mathbb{G}])/\sqrt{\mathrm{var}^{\tilde{Q}}(\ln \mathbb{G})}$;

UB GA$_d$: upper bound equal to lower bound LB GA plus $\varepsilon(\tilde{d}_{\mathrm{GA}})S(0)/n$;

UB FA$_d$: upper bound equal to lower bound LB FA plus $\varepsilon(\tilde{d}_{\mathrm{FA}})S(0)/n$;

UB FA: upper bound equal to lower bound LB FA plus constant $\varepsilon S(0)/n$;

PECUB GA: partially exact/comonotonic upper bound with $\Lambda = (\ln \mathbb{G} - E^{\tilde{Q}}[\ln \mathbb{G}])/\sqrt{\mathrm{var}^{\tilde{Q}}(\ln \mathbb{G})}$;

ICUB B_T: improved comonotonic upper bound with $\Lambda = -\sum_{k=1}^{T} W_k \stackrel{d}{=} -\tilde{B}(T)$.

B2) Ρυθμιστική Μεταβλητή (*Control Variate*)

Αν η υποκείμενη μετοχή υποτεθεί ότι ακολουθεί Λογαριθμο-Κανονική κατανομή, τότε ο γεωμετρικός μέσος όρος της είναι Λογαριθμο-Κανονικός. Σε ένα κλασσικό έγγραφο, οι Kemna και Vorst (1990) χρησιμοποίησαν αυτό το γεγονός για να παραγάγουν μια αναλυτική λύση για την τιμή ενός γεωμετρικού Ασιατικού δικαιώματος (*geometric average rate option*). Χρησιμοποιούν αυτή την λύση ως «control variate» για μια λύση Monte-Carlo για την τιμολόγηση ενός αριθμητικού Ασιατικού δικαιώματος (*arithmetic average rate option*).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] F. Black, M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, J. Polit. Econ. 81 (1973) 637–659.

[2] David Vyncke, Marc Goovaerts, Jan Dhaene, “An accurate analytical approximation for the price of a European-style arithmetic Asian option”.

[3] Tom Hoedemakers, Grzegorz Darkiewicz, Griselda Deelstra, Jan Dhaene, M. Vanmaele, “Bounds for Stop-Loss Premiums of Stochastic Sums”.

[4] J. Dhaene, M. Denuit, M.J. Goovaerts, R. Kaas, D. Vyncke, The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: theory, Ins.: Math.Econom. 31 (1) (2002) 3–33.

[5] J. Dhaene, M. Denuit, M.J. Goovaerts, R. Kaas, D. Vyncke, The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: applications, Ins.: Math.Econom. 31 (2) (2002) 133–161.

[6] M. Vanmaele, G. Deelstra, J. Liinev, J. Dhaene, and M.J. Goovaerts, “Bounds for the price of discrete arithmetic Asian options”, Journal of Computational and Applied Mathematics 185 (2006) 51-90.

[7] L.C.G. Rogers, Z. Shi, The value of an Asian option, J. Appl.Probab. 32 (1995) 1077–1088.

[8] G. Deelstra, J. Liinev, M. Vanmaele, Pricing of arithmetic basket options by conditioning, Ins.: Math.Econom. 34 (2004) 55–57.

[9] E. Eberlein, A. Papapantoleon, Equivalence of floating and fixed strike Asian and lookback options, Stochastic Process. Appl. 115 (1) (2005) 31–40.

[10] H.Geman, CAT-calls, Risk 7 (9) (1994) 86–89.

[11] V. Henderson, R. Wojakowski, On the equivalence of floating and fixed-strike Asian options, J. Appl.Probab. 39 (2) (2002) 391–394.

[12] M. Jacques, On the hedging portfolio of Asian options, ASTIN Bull. 26 (1996) 165–183.

[13] R. Kaas, J. Dhaene, M.J. Goovaerts, Upper and lower bounds for sums of random variables, Ins.: Math.Econom. 27 (2000) 151–168.

[14] A.G.Z. Kemna, A.C.F. Vorst, A pricing method for options based on average asset values, J. Banking Finance 14 (1990) 113–129.

[15] T.R. Klassen, Simple, fast, and flexible pricing of Asian options, J. Comput. Finance 4 (3) (2001) 89–124.

[16] J.A. Nielsen, K. Sandmann, Pricing bounds on Asian options, J.Financial Quant. Anal. 38 (2) (2003) 449–473.

[17] S.Simon, M.J.Goovaerts, J.Dhaene, An easy computable upper bound for the price of an arithmetic Asian option, Ins.: Math.Econom.26 (2–3) (2000) 175–184.

[18] J. Vecer, A new PDE approach for pricing arithmetic average Asian options, J. Comput.Finance 4 (4) (2001) 105–113.

[19] J. Liinev, Topics in mathematical finance : from interest rate models to exotic options, Ph.D. Thesis, Ghent University, 2003.

[20] M. Curran, Valuing Asian and portfolio options by conditioning on the geometric mean price, Manage.Sci. 40 (12) (1994) 1705–1711.

[21] Alziary, B., Decamps, J.P. and Koehl, P.F(1997). A PDE approach to Asian options: analytical and numerical evidence.*J. Banking Finance* 21, 613-640.