ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Στοχαστικές Επενδυτικές Αποδόσεις και ο Κίνδυνος Εισφοράς σε Προκαθορισμένα Συνταξιοδοτικά Σχήματα

Στέφανος Βασιλάκης
ΜΑΕ 18008

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς,

Ιούλιος 2021

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ…….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Σεβρόγλου Βασίλειος (Επιβλέπων)
- Νεκτάριος Μιλτιάδης
- Πολίτης Κωνσταντίνος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIREAUS

DEPARTMENT OF STATISTICS & INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE & RISK MANAGEMENT

The Contribution Rate Risk for Defined Benefit Pension Scheme in a Stochastic Investment Environment

Stefanos Vasilakis
MAE18008

MSc Dissertation
submitted to the Department of Statistics & Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master in Science in Actuarial Science & Risk Management

Piraeus,

2021, July

Στους γονείς μου,
Μάγδα και Σπύρο
και,
στον αδελφό μου Χρήστο

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύτιμη και σημαντική υποστήριξη, καθοδήγηση, βοήθεια και υπομονή σε όλη τη διάρκεια υλοποίησης της παρούσας εργασίας.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Μιλτιάδη Νεκτάριο Ομότιμο Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης καθώς και τον κύριο Πολίτη Κωνσταντίνο Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης καθώς για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου και κυρίως τους γονείς μου και τον αδελφό για την βοήθεια και την υποστήριξη τους καθ’ όλη τη διάρκεια της ζωής μου και των ακαδημαϊκών μου σπουδών.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε τα συνταξιοδοτικά σχήματα για τον υπολογισμό των συντάξεων και ειδικότερα θα μελετήσουμε τα συνταξιοδοτικά σχήματα προκαθορισμένων παροχών καθώς και την συμπεριφορά του κινδύνου εισφοράς. Για την ανάλυση των παραπάνω θα χρησιμοποιήσουμε στοχαστική και χρηματοοικονομική προσέγγιση. Θα κατανοήσουμε τη σχέση μεταξύ του ποσοστού εισφοράς και κεφαλαίου, το οποίο είναι πολύ σημαντικό σχετικά για τον περιορισμό του κινδύνου εισφοράς. Το μοντέλο μας θα εφαρμοστεί σε τρεις περιπτώσεις και θα παρατηρηθεί η διακύμανση των εισφορών. Με βάση αυτό θα παρουσιαστεί η επιλογή των κατάλληλων πλεονασμάτων και ελλείψεων για την ελαχιστοποίηση του κινδύνου εισφοράς. Τέλος θα παρουσιαστούν εφαρμογές και θα δοθούν χρήσιμα συμπεράσματα.

Abstract

In this dissertation we will analyze pension schemes for the calculation of pensions and we will study define benefit pension schemes as well as the behavior of the contribution risk. For above analysis we will use a stochastic and financial approach. We will understand the relationship between the contribution rate and capital rate, which is very important in terms of limiting contribution risk. Our model will be applied in three cases and the variation of the contributions will be observed. Based on this, a discussion of the selection of the appropriate spreading valuation surpluses and deficiencies to minimize the contribution rate risk will be presented. Finally, we will present applications and useful conclusions.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Η θεωρία των συνταξιοδοτικών ταμείων αποτελεί μια τεράστια περιοχή επιστημονικής έρευνας και μελέτης με ενδιαφέροντες εφαρμογές. Αν συνταξιοδοτικό ταμείο ονομάζουμε ένα χρηματοοικονομικό σύστημα το οποίο καθορίζεται από τέσσερα βασικά στοιχεία. Πρώτο και βασικότερο είναι η ομάδα των ασφαλισμένων η οποία αποτελείται από τα ενεργά μέλη ή εργαζομένους, συνταξιούχους και τους δικαιούχος των συντάξεων. Επίσης αναφέρουμε ότι το συνταξιοδοτικό κεφάλαιο αποτελείται από, το σύνολο των περιουσιακών στοιχείων τα οποία μπορεί να είναι μετρητά, ομόλογα, μετοχές κλπ. Όμως το συνταξιοδοτικό ταμείο χρειάζεται και μία ομάδα ατόμων για να διαχειρίζεται το παραπάνω κεφάλαιο. Η ομάδα μπορεί να είναι είτε διοικητικό συμβούλιο, είτε μια επιτροπή διαχείρισης επενδύσεων ακόμα και αναλογιστές. Και σαν τελευταίο στοιχείο μπορεί να θεωρηθεί ο κανονισμός του ταμείου[3].

Βασικός στόχος των συνταξιοδοτικών σχημάτων προκαθορισμένων παροχών είναι να προσφέρουν στα μέλη που συμμετέχουν πρόσθετες συνταξιοδοτικές παροχές, οι οποίες ενισχύουν το συνταξιοδοτικό εισόδημα του εργαζομένου κι εξασφαλίζουν μια αξιοπρεπή διαβίωση μετά το πέρας της εργασιακής υπηρεσίας.

Μεγάλη συνεισφορά στην μελέτη και ανάλυση των παραπάνω συνταξιοδοτικών σχημάτων έχουν οι Dufresne (1986) [11], (1998) [12], Haberman (1997) [15] , Haberman και Sung (1994) [16], Ζυμπίδης και Haberman (1997) [21].

Αρκετές φορές μπορεί να προσέξουμε ότι η έννοια του Συνταξιοδοτικού Ταμείου ταυτίζεται πρακτικά με το Συνταξιοδοτικό Κεφάλαιο δηλαδή με το σύνολο των περιουσιακών στοιχείων. Ένα Συνταξιοδοτικό Ταμείο λαμβάνει εισόδημα από τις εισφορές των ασφαλισμένων μελών του ταμείου καθώς και επιπλέον εισόδημα από επενδύσεις των περιουσιακών στοιχείων που σχετίζονται με τις προηγούμενες εισφορές. Οι εκροές του συνταξιοδοτικού ταμείου είναι κυρίως συντάξεις και συμπληρωματικές παροχές προς τους ασφαλισμένους, κάποια έξοδα λειτουργίας του ταμείου και μπορεί να υπάρχουν και έξοδα αντασφάλισης του ταμείου.

Η ιστορία των συνταξιοδοτικών ταμείων ξεκινάει στα μέσα του 19^{o} αλλά κυρίως στις αρχές του 20^{o} αιώνα. Οι χώρες που ασχολήθηκαν και κατάφεραν να δημιουργήσουν ένα Συνταξιοδοτικό Ταμείο είναι η Μεγάλη Βρετανία όπου αρκετές εταιρίες σιδηροδρόμων ήταν πρωτοπόρες στη δημιουργία τέτοιων σχημάτων. Από την άλλη μεριά του Ατλαντικού ωκεανού, στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής και στον Καναδά, παρόμοιες εταιρίες ανάπτυξαν και αυτές παρόμοια συνταξιοδοτικά σχήματα [3].

Η μεγάλη ανάπτυξη αυτών των σχημάτων επήλθε μετά το τέλος του $2^{ου}$ Παγκοσμίου πολέμου όπου υπήρξαν μεγάλες κοινωνικές και οικονομικές αλλαγές. Οι σημαντικές δημογραφικές αλλαγές όπως η ραγδαία αύξηση των γεννήσεων (baby-boom)[9] καθώς και η αύξηση της αναμενόμενης ζωής των ανθρώπων, είχε σαν αποτέλεσμα την ευαισθητοποίηση της κοινωνίας για τις πολυπληθείς ομάδες ηλικιωμένων ατόμων.

Στην Ελλάδα η ιστορία των συνταξιοδοτικών ταμείων ξεκινάει στο πρώτο μισό του $19^{ου}$ αιώνα και φτάνει μέχρι και σήμερα. Πιο συγκεκριμένα με το διάταγμα του $15^{ης}$ Δεκεμβρίου του 1836 ιδρύεται το πρώτο Συνταξιοδοτικό Ταμείο στην Ελλάδα, το Ναυτικό Απομαχικό Ταμείο (Ν.Α.Τ.). Το 1922 ψηφίστηκε ο νόμος 2868/1922 περί υποχρεωτικής ασφάλισης εργαζομένων και ιδιωτικών υπαλλήλων [1].

Σχετικά με την δομή των Συνταξιοδοτικών Ταμείων, μπορούμε να τα διαχωρίσουμε σε τρεις βασικούς τύπος με βάσει την προτεραιότητα ως προς τον καθορισμό των εισφορών και των παροχών. Συγκεκριμένα, έχουμε τα συνταξιοδοτικά σχήματα Καθορισμένης Εισφοράς, Καθορισμένης Παροχής και Υβριδικά.

Η εργασία διαμορφώνεται ως εξής

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε και αναλύουμε κάποιες βασικές μαθηματικές έννοιες της Θεωρία Πιθανοτήτων και της Στατιστικής. Δηλαδή ο αναγνώστης μπορεί να μελετήσει βασικές έννοιές πιθανότητας, μέση τιμή, διακύμανση καθώς ροπή και ροππογεννήτριες. Όλες αυτές η έννοιες θα τον βοηθήσουν στην κατανόηση των υπόλοιπων κεφαλαίων.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε κάποιους ποιο χρηματοοικονομικούς και αναλογιστικούς ορισμούς. Αρχικά εισάγεται η έννοια του επιτοκίου, απλός και σύνθετος τόκος καθώς και η έννοια της παρούσας αξίας τόσο των ραντών πληρωμών όσο και μερικών βασικών αναλογιστικών ραντών ζωής. Στο δεύτερο μέρος γίνεται μια πρώτη ανάλυση με παραδείγματα των Συνταξιοδοτικών Ταμείων.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζεται η έννοια του Συνταξιοδοτικού Σχήματος Προκαθορισμένων Παροχών στα οποία καθορίζεται εξ αρχής η παροχή ως σταθερό ποσό και στη συνέχεια υπολογίζεται η απαιτούμενη εισφορά. Επίσης, θα δούμε ότι είναι απαραίτητη η τακτική αναλογιστική παρακολούθηση για τυχόν αναπροσαρμογή των εισφορών προκειμένου να επιτευχθεί η προκαθορισμένη παροχή. Τέλος θα μελετηθούν σχετικές εφαρμογές που θα οδηγήσουν σε συμπεράσματα.

1^o Κεφάλαιο

Βασικές Μαθηματικές Έννοιες - Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε κάποιες βασικές έννοιες της στατιστικής της θεωρία πιθανοτήτων και της στοχαστικής θεωρίας. Γενικά θα αναλύσουμε κάποιες έννοιες και ορισμούς που θα χρησιμοποιήσουμε στα υπόλοιπα κεφάλαια της εργασίας. Θα αναφέρουμε έννοιες όπως ο χώρος πιθανότητας, η δεσμευμένη πιθανότητα αλλά και ορισμούς για την ανεξαρτησία μεταξύ διαφόρων μεταβλητών καθώς και την μέση τιμή και την διακύμανση. Συνεπώς αυτό το κεφάλαιο θα βοηθήσει τον αναγνώστη να ανταποκριθεί στην ροή της διπλωματικής εργασίας και να κατανοήσει ευκολότερα το μοντέλο που θα αναπτύξουμε.

1.1 Έννοιες της Θεωρίας Πιθανοτήτων

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε από τους Pascal και Fermat το 17^o αιώνα και στην συνέχεια τον 18^o αιώνα ακόμα περισσότερο από τους Bernoulli, De Moivre, Laplace και Gauss. Αφορμή για την ανάπτυξη μια τέτοιας θεωρίας αποτέλεσε η επίλυση προβλημάτων που παρουσιάστηκαν με την ανάπτυξη του εμπορίου, των ασφαλίσεων κτλ.

Το κύριο αντικείμενο της θεωρίας πιθανοτήτων είναι η μελέτη τυχαίων (ή στοχαστικών) φαινομένων. Για τέτοια φαινόμενα χρησιμοποιείτε συνήθως ο όρος *πείραμα τύχης*.

1.1.1 Δειγματικός Χώρος Πιθανότητας

Ορισμός 1.1.1 [5]**:** Ένα τυχαίο πείραμα αποτελείται από τρία στοιχεία *(Ω, F, P)* για τα οποία ισχύουν τα εξής:

- *Ω* είναι το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων τα οποία μπορούν να εμφανιστούν σε μία εκτέλεση του πειράματος τύχης (δειγματικός χώρος).

- F είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω η οποία έχει την δομή μια συνάρτησης σ- άλγεβρας.
- P είναι η συνάρτηση η οποία σχετίζει ένα αριθμό $P(A)$ σε κάθε σύνολο $A \in F$.

1.1.2 Αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας

***Ορισμός 1.1.2*[5]:** Έστω ένας δειγματικός χώρος Ω για ένα πείραμα τύχης. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι σε κάθε ενδεχόμενο A του Ω αντιστοιχεί ένας πραγματικός αριθμός $P(A)$. Αν η $P(*)$ ικανοποιεί τα επόμενα τρία αξιώματα, θα ονομάζεται πιθανότητα στο δειγματικό χώρο Ω ενώ ο αριθμός $P(A)$ θα λέγεται πιθανότητα του ενδεχομένου A

- $P(A) \geq 0 \; για \; κάθε \; ενδεχόμενο \; A \; του \; \Omega$
- $P(\Omega) = 1$
- $Αν \; A_1, A_2, \ldots . είναι \; μια \; ακολουθία \; ξένων \; ανα \; δύο \; ενδεχομέων \; του \; \Omega \; \left(δηλαδή \; A_i A_j = \emptyset \; για \; i \neq j\right), τοτε$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) \tag{1.1}$$

***Παράδειγμα 1.1.3*[5]:** Θεωρούμε το παράδειγμα της ρίψης ενός ζαριού με $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$. Αν θεωρήσουμε ότι ισοπίθανα δυνατά αποτελέσματα τότε με την βοήθεια της (1.1)

$$P(\Omega) = P(\{1,2,3,4,5,6\}) = 1 \; και \; P(\Omega) = P(\bigcup_{i=1}^{6} \{i\}) = \sum_{i=1}^{6} P(\{i\}) = 6p$$

Όπου $p = 1/6$, δηλαδή όσο θα προέκυπτε και με τον κλασικό ορισμό (Laplace).

1.1.3 Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Μια εξίσου σημαντική έννοια στην θεωρία πιθανοτήτων η οποία έχει προκύψει από την αντίστοιχη της θεωρία συνόλων είναι τα ξένα ή ασυμβίβαστα ενδεχόμενα.

Ορισμός 1.1.5[5]: Δυο ενδεχόμενα A,B λέγονται ξένα ή ασυμβίβαστα αν η τομή τους είναι αδύνατο ενδεχόμενο δηλαδή αν ισχύει $AB=\emptyset$

Στην περίπτωση που έχουμε περισσότερα από δύο δεδομένα $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ ισχύει,

$$A_i A_j = \emptyset \; για \; όλα \; τα \; i \neq j \; (i, j = 1,2, \dots .. \nu)$$

θα λέμε ότι έχουμε ξένα ανά δύο ενδεχόμενα (αντίστοιχος ορισμός ισχύει για άπειρα το πλήθος ενδεχόμενα).

Παράδειγμα 1.1.6: Έστω ότι ρίχνουμε δύο νομίσματα, θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή για το πρώτο νόμισμα

$$N_1 = \begin{cases} K, το \; νόμισμα \; φέρει \; κορώνα \\ Γ, το \; νομισμα \; φέρει \; γράμματα \end{cases}$$

και την τυχαία μεταβλητή για το δεύτερο νόμισμα

$$N_2 = \begin{cases} K, το \; νόμισμα \; φέρει \; κορώνα \\ Γ, το \; νομισμα \; φέρει \; γράμματα \end{cases}$$

Οι παραπάνω τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες καθώς το αποτέλεσμα του ενός νομίσματος δεν επηρεάζεται από το αποτέλεσμα του άλλου.

Ορισμός 1.1.7[5]: Έστω A,B δυο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Τα A,B λέγονται *ανεξάρτητα* αν ισχύει

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Αξίζει να αναφερθεί ότι στην αντίθετη περίπτωση

$$P(AB) \neq P(A)P(B)$$

τα ενδεχόμενα A,B λέγονται *εξαρτημένα.*

1.1.4 Δεσμευμένη Πιθανότητα

Η δεσμευμένη πιθανότητα είναι μια πολύ σημαντική έννοια διπλής σημασίας για την θεωρία πιθανοτήτων. Πρώτον, η χρήση της κρίνεται απαραίτητη όταν μας ενδιαφέρει ο υπολογισμός πιθανοτήτων στην περίπτωση που διαθέτουμε κάποιες πρόσθετες πληροφορίες σχετικά με την έκβαση του πειράματος. Για παράδειγμα αν μπορούσαμε να γνωρίζουμε ότι ένα συγκεκριμένο ενδεχόμενο έχει συμβεί, αυτό θα μπορούσε να περιορίσει τα αποτελέσματα του πειράματος. Δεύτερον, η χρήση της δεσμευμένης πιθανότητας αποδεικνύεται ιδιαίτερα χρήσιμη όταν δεν διαθέτουμε αρκετές πληροφορίες για ένα πείραμα. Έτσι η εισαγωγή κατάλληλων δεσμεύσεων μπορεί να αποτελεί σημαντικό εργαλείο για τον υπολογισμό.

Ορισμός 1.1.8**[5]**: Έστω ένας χώρος πιθανότητας $B \subseteq \Omega$ ένα ενδεχόμενο του Ω με $P(B) > 0$. Τότε, για κάθε ενδεχόμενο του A *του* Ω η δεσμευμένη πιθανότητα του A δοθέντος του B δίνεται από τον τύπο

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.2}$$

Παράδειγμα 1.1.9: Η πιθανότητα να ζήσει ένας άνδρας τουλάχιστον 70 χρόνια είναι 0.85, ενώ η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον 75 χρόνια είναι 0.80. Αν διαλέξουμε τυχαία έναν 70-χρονο άνδρα, ποια η πιθανότητα να ζήσει τουλάχιστον 5 χρόνια (ώστε να ξεπεράσει το 75 έτος σε ηλικία).

Έστω $P(A) = 0.80$, $P(B) = 0.85$ και $AB = 0\ (\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ A \subseteq B)$. Η πιθανότητα που ζητήθηκε να υπολογίσουμε είναι η δεσμευμένη πιθανότητα με την βοήθεια της (1.2)

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0.80}{0.85} = 0.94.$$

1.2 Έννοιες της Θεωρίας Στατιστικής

Η Στατιστική είναι ένα σύνολο αρχών και μεθοδολογιών για το σχεδιασμό της διαδικασίας συλλογής δεδομένων, την συνοπτική και αποτελεσματική παρουσίαση τους και τέλος την εξαγωγή των αντίστοιχων συμπερασμάτων. Επίσης επιτυγχάνει τη συλλογή, επεξεργασία, παρουσίαση και ανάλυση των στατιστικών στοιχείων με την εφαρμογή κατάλληλων για κάθε περίπτωση στατιστικών μεθόδων.

1.2.1 Τυχαίες Μεταβλητές

Ας ξεκινήσουμε αναφέροντας κάποιες βασικές έννοιες της τυχαίας μεταβλητής, της συνάρτησης κατανομής, της συνάρτησης πιθανότητας και της συνάρτησης πυκνότητας.

Ορισμός 1.2.1[5]: Ένα πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο Ω περιέχει μία πραγματική συνάρτηση $X\colon \Omega \to R$ που καλείται τυχαία μεταβλητή (του πειράματος) αν για κάθε διάστημα $I \subseteq R$ το σύνολο $\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in I\}$ είναι ενδεχόμενο του Ω. Η πιθανότητα εμφάνισης του ενδεχομένου θα γράφεται ως $P(X \in I)$.

Μία τυχαία μεταβλητή $X\colon \Omega \to R$ αντιστοιχεί στο δειγματικό χώρο Ω σε ένα υποσύνολο του συνόλου των πραγματικών αριθμών *R*. Το σύνολο αυτό είναι το $\{x \in R\colon X(\omega) = x \text{ για κάποιο } \omega \in \Omega\}$ και καλείται πεδίο τιμών ή σύνολο τιμών της τυχαίας μεταβλητής *X*.

Ορισμός 1.2.2[4]: Μια τυχαία μεταβλητή *X* λέγεται διακριτή αν το σύνολο των τιμών της είναι πεπερασμένο ή το πολύ αριθμήσιμο δηλαδή

$$P(X \in \{x_0, x_1, x_2, \dots\}) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = x_k) = 1$$

Στην περίπτωση αυτή η συνάρτηση

$$f(x_k) = P(X = x_k), \qquad k = 0,1,2, \dots$$

Καλείται συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής *X* και ισχύει

$$f(x_k) \geq 0, \qquad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \qquad k = 1,2, \ldots$$

και

$$\sum_{k=0}^{\infty} f(x_k) = 1.$$

Ορισμός 1.2.3[4]***:*** Έστω μια διακριτή τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x_k) = P(X = x_k), \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

Η συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = P(X \leq x), \quad x \in R$$

Υποθέτουμε ότι οι δυνατές τιμές $x_0, x_1, x_2, \ldots$ έχουν αριθμηθεί έτσι ώστε $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots$ τότε,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ \sum_{k=0}^{s} f(x_k), & x_s \leq x \leq x_{s+1}, \quad s = 0,1,2, \ldots \end{cases}$$

Και

$$f(x_s) = \begin{cases} F(x_0), & s = 0 \\ F(x_s) - F(x_{s-1}), & s = 1,2, \ldots \end{cases}$$

Παράδειγμα 1.2.4: Ο αριθμός των συμβολαίων που πουλάει μια ασφαλιστική εταιρία σε μία εβδομάδα είναι η τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πιθανότητας που δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{25}x, & x = 1,2,3,4 \\ \frac{1}{25}(10-x), & x = 5,6,7,8,9 \end{cases}$$

Ποια η πιθανότητα σε μια εβδομάδα να πουληθούν περισσότερα από 5 συμβόλαια γνωρίζοντας ότι έχουν πουληθεί τουλάχιστον 3

$$P(X > 5|X \geq 3) = \frac{P(X > 5, X \geq 3)}{P(X \geq 3)} = \frac{f(6) + f(7) + f(8) + f(9)}{1 - f(1) - f(2)} = \frac{9}{22}.$$

***Ορισμός 1.2.5*[6].:** Μια τυχαία μεταβλητή X λέγεται συνεχής αν υπάρχει πραγματική συνάρτηση $f: R \to [0, \infty]$, τέτοια ώστε για κάθε υποσύνολο $A \in R$ $f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty$ να ισχύει

$$P(X \in A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Τέτοια ώστε για κάθε πραγματικούς αριθμούς α και β με $\alpha<\beta$ να ισχύει

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$$

Η $f(x)$ καλείται πυκνότητα πιθανότητας ή απλώς πυκνότητα της τυχαίας μεταβλητής *X*.

***Ορισμός 1.2.6*[5]:** Ονομάζουμε συνάρτηση κατανομής *F* μιας συνεχής τυχαίας μεταβλητής *X* την συνάρτηση,

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx, \quad -\infty < x < \infty$$

Επίσης αφού η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο σημείο *x* τότε παραγωγίζοντας τη παραπάνω σχέση έχουμε

$$F'(x) = f(x).$$

Παράδειγμα 1.2.7: Ας θεωρήσουμε μια τυχαία μεταβλητή *X* συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = c(4 - x^2), \qquad -2 \leq x \leq 2.$$

Για να υπολογίσουμε τη σταθερά c ισχύει

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_{-2}^{2} c(4-x^2) = 1 \Rightarrow \frac{32}{2}c = 1 \Rightarrow c = \frac{2}{32}.$$

Ας υπολογίσουμε επίσης και την συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-2}^{2} c(4-x^2)dx = \frac{16+12x-x^3}{32}, -2 \le x \le 2.$$

1.2.2 Μέτρα Θέσεις και Διασποράς

Τα ποιο συνηθισμένα μέτρα που θα χρησιμοποιήσουμε και στην συνέχεια αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι η μέση τιμή, η διακύμανση και η συνδιακύμανση.

Ορισμός 1.2.8[2]: Έστω ότι η X είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x)$. Τότε η μέση τιμή ορίζεται από τη σχέση

$$E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k f(x_k) \tag{1.3}$$

Παρόμοιο ορισμό έχουμε και όταν η X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός 1.2.9: Έστω ότι η X είναι μια συνεχή τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x)$. Τότε η μέση τιμή αυτής ορίζεται από τη σχέση

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \tag{1.4}$$

Αξίζει να αναφέρουμε και κάποιες ιδιότητες της μέσης τιμής

i. Αν η X και η Y είναι τυχαίες μεταβλητές και c_1, c_2 είναι σταθερές τότε ισχύει $E(c_1X + c_2Y) = c_1E(X) + c_2E(Y)$
ii. Αν $X \le Y$ τότε $E(X) \le E(Y)$
iii. Αν $X = c$, όπου c μια σταθερά, τότε $E(X) = c$

iv. Αν $X \geq 0$ τότε $E(X) = \int XdP = 0$ αν και μόνο αν $X = 0$, όπου P μέτρο πιθανότητας.

Η διακύμανση ίσως είναι και το ποίο σημαντικό μέτρο θέσεις αφού είναι το μέγεθος που μας δείχνει πόσο κοντά στην μέση τιμή βρίσκονται οι τιμές μια τυχαίας μεταβλητής. Όπως θα δούμε θα μας απασχολήσει αρκετά στην συνέχεια της διπλωματικής εργασίας σε σχέση με το συμπέρασμα που θα καταλήξουμε.

***Ορισμός 1.2.10*[4]:** Ορίζουμε την διακύμανση ή διασπορά μιας τυχαίας μεταβλητής X και θα τη συμβολίζουμε $Var(X)$ με συνάρτηση

$$Var(X) = E[(X - E(X)^2]$$

Η οποία μετά την ανάπτυξη τετραγώνου παίρνει την ποιο συνηθισμένη της μορφή

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 \quad (1.5)$$

Αν τώρα έχουμε πάνω από μια τυχαία μεταβλητή, τότε χρησιμοποιούμε τη συνδιακύμανση.

***Ορισμός 1.2.11*[6]:** Έστω δυο τυχαίες μεταβλητές X, Y τότε η συνδιακύμανση τους ορίζεται ως

$$Cov(X,Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] \quad (1.6)$$

Η οποία μετά από πράξεις γράφεται και

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (1.7)$$

Αξίζει να αναφέρουμε ότι αν η τυχαίες μεταβλητές X, Y είναι ανεξάρτητες έχουν μηδενική συνδιακύμανση $Cov(XY) = 0$.

***Παράδειγμα 1.2.12*[6]:** Έστω οι συναρτήσεις πιθανότητας δυο διακριτών τυχαίων μεταβλητών

$$f(x) = \frac{2x+3}{21}, x = 1{,}23 \;\; και \; f(y) = \frac{2+y}{7} \;\; y = 1{,}2$$

Η μέση τιμή από την (1.4) για κάθε μια από της από αυτές είναι

$$E[X] = \sum_{x=1}^{3} xf(x) = \sum_{x=1}^{3} x\frac{2x+3}{21} = \frac{5}{21} + \frac{14}{21} + \frac{27}{21} = \frac{46}{21}$$

$$E[Y] = \sum_{y=1}^{2} xf(x) = \sum_{y=1}^{2} y\frac{2+y}{7} = \frac{3}{7} + \frac{8}{7} = \frac{11}{7}$$

Επίσης μας δίνεται και η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας

$$f(x,y) = \frac{x+y}{21}, \qquad x = 1,2,3 \; \kappa\alpha\iota \; y = 1,2$$

Οπότε η από κοινού μέση τιμή

$$E(X,Y) = \sum_{x=1}^{3}\sum_{y=1}^{2} xyf(x,y) = \frac{71}{21}$$

Άρα η συνδιακύμανση από την (1.7) είναι

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{71}{21} - \frac{46}{21}\frac{11}{7} = -\frac{2}{147}$$

Παράδειγμα 1.2.13: Έστω η παρακάτω συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \qquad x > 0, \lambda > 0$$

Οπότε η μέση τιμή της παραπάνω συνεχούς τυχαίας μεταβλητής είναι

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda}$$

Για τον υπολογισμό της διακύμανσης θα χρειαστούμε και την δεύτερη ροπή.

$$E(X^2) = \int_{0}^{\infty} x^2 f(x)dx$$

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$E(X) = \lambda \left[x^2 \frac{e^{-\lambda\chi}}{-\lambda}\right]_0^2 - \lambda \int_0^{\infty} ((x)^2)' \frac{e^{-\lambda\chi}}{-\lambda}$$

$$E(X) = \int_0^{\infty} 2x\lambda e^{-\lambda x} = \frac{2}{\lambda^2}$$

Επομένως η διακύμανση από την (1.5),

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$Var(X) = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Θα δούμε τις ροπές και τις ροπογεννήτριες της τυχαίας μεταβλητής *X*. Η ροπογεννήτρια είναι μια συνάρτηση που χρησιμεύει για τον υπολογισμό όλων των ροπών *k*-τάξεως όπου *k=1,2,…* της τυχαίας μεταβλητής *X.*

Ορισμός 1.2.14 *[4]* ***:*** Η ροπή μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής *X* τάξης *r* συμβολίζεται με $E[X^r]$ και δίνεται από τη συνάρτηση

$$E[X^r] = \sum_x x^r P(X = x) \tag{1.8}$$

Και αντίστοιχα ο τύπος μια συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

$$E[X^r] = \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x) dx \tag{1.9}$$

Ορισμός 1.2.15 *[6]* ***:*** Έστω μια τυχαία μεταβλητή *X* για την οποία υπάρχει η μέση τιμή $E[e^{tx}]$ για κάθε t που ανήκει σε ένα διάστημα της μορφής $[-\delta, \delta]$, $\delta > 0$. Τότε η συνάρτηση $M_{\chi}(t) = E(e^{tx})$ ονομάζεται ροπογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής *X.*

Αν *X* είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή τότε η ροπογεννήτρια της δίνεται από τον τύπο

$$M_t(t) = \sum_x e^{tx} P(X = x) \tag{1.10}$$

Ενώ αν X είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή τότε η ροπογεννήτρια της δίνεται από τον τύπο

$$M_t(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx \tag{1.11}$$

Και κάποιες ιδιότητες της ροπογεννήτριας

i. Ισχύει πάντα ότι $M_t(0) = 1$
ii. Οι ροπές της X μπορούν να υπολογιστούν αν πάρουμε διαδοχικές παραγώγου της $M_t(t)$

$$E(X) = \left[\frac{d}{dx} M_t(t)\right]_{t=0}$$
$$E(\mathrm{X}^2) = \left[\frac{d^2}{dx^2} M_t(t)\right]_{t=0}.$$

Παράδειγμα 1.2.16: Έστω X μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = c^x$, $x = 1,2,\ldots$, όπου η c είναι μια πραγματική σταθερά.

Ας ξεκινήσουμε να υπολογίσουμε την τιμή της c από την (1.10)

$$M_t(t) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} P(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} c^x = \frac{ce^t}{(1 - ce^t)}$$

Ισχύει από τις ιδιότητες

$$M_t(0) = 1$$

$$\frac{c}{1 - c} = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Επομένως η ροπογεννήτρια γράφεται

$$M_\chi(t) = \frac{e^t}{2 - e^t}, \quad t < \ln 2$$

Πολύ εύκολα απλώς παραγωγίζοντας την ροπογεννήτρια μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή και την διακύμανση

$$M'_X(t) = \frac{2e^t}{(2-e^t)^2}$$

Και η δεύτερη παράγωγος

$$M''_X(t) = \frac{2e^t(2-e^t)}{(2-e^t)^3}$$

Ισχύει

$$E(X) = M'_X(0) = 2 \quad \text{και} \quad E(X^2) = M''_X(0) = 6$$

Και η διακύμανση

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6 - 4 = 2.$$

1.3 Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες

Οι μεταβλητές των οποίων οι τιμές αλλάζουν με το πέρασμα του χρόνου με αβέβαιο τρόπο λέγεται ότι ακολουθούν στοχαστική διαδικασία. Οι στοχαστικές διαδικασίες διακρίνονται ανάλογα την μορφή της περιόδου σε στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου και σε στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου. Ο ίδιος διαχωρισμός μπορεί να υπάρξει ανάλογα και με την μορφή τη μεταβλητής να είναι δηλαδή η μεταβλητή της στοχαστικής διαδικασίας συνεχής ή διακριτή. Αυτός ο διαχωρισμός σημαίνει ότι μία συνεχής στοχαστική διαδικασία μπορεί να λάβει οποιαδήποτε τιμή μέσα σε ένα πεδίο ορισμού, ενώ η διακριτή στοχαστική μεταβλητή οι τιμές που μπορεί να λάβει είναι συγκεκριμένες.

Ορισμός 1.3.1 *[1]*: Μία στοχαστική διαδικασία είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{X(t) : t \in T\}$, όπου t είναι μία παράμετρος που παίρνει τιμές σε ένα κατάλληλα ορισμένο σύνολο T. Μια στοχαστική διαδικασία *X* μπορεί να θεωρηθεί και ως μια συνάρτηση δύο μεταβλητών. Για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή *t* είναι μια τυχαία μεταβλητή

$$X_t\colon \Omega \to R : \omega \to X_t(\omega)$$

για ένα σταθερό τυχαίο αποτέλεσμα $\omega \in \Omega$, είναι μια συνάρτηση του χρόνου

$$X(\omega)\colon T \to R : \tau \to X_t(\omega)$$

Η συνάρτηση αυτή ονομάζεται πραγματοποίηση, ή τροχιά (path) της διαδικασίας *X*.

1.3.1 Τυχαίος Περίπατος

Ορισμός 1.3.2*[9]*: Θεωρούμε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται κατά μήκος του άξονα των πραγματικών αριθμών. Τη χρονική στιγμή t = 0, το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση X_0και για κάθε ακέραια χρονική μονάδα κάνει ένα βήμα προς τα αριστερά ή προς τα δεξιά ή παραμένει στη θέση του. Οπότε αν το σωματίδιο τη χρονική στιγμή n-1, βρίσκεται στην κατάσταση X_{n-1}, τότε τη χρονική στιγμή n θα βρίσκεται στην κατάσταση

$$X_n = X_{n-1} + Z_n$$

όπου Z_i είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομές $F_i(x)$, $i = 1,2,3 \ldots$

Αν

$$f_i(x) = P(Z_i = x) = \begin{cases} p \quad , \qquad x = 1 \\ q \quad , \qquad x = -1 \\ 1 - p - q \qquad , x = 0 \\ 0, \qquad διαφορετικά \end{cases}$$

τότε η διαδικασία ονομάζεται *Απλός Τυχαίος Περίπατος*.

Παράδειγμα 1.3.2: Θεωρούμαι μια ασφαλιστική εταιρεία, η οποία ξεκινάει τις εργασίες της τη χρονική στιγμή 0, με ένα αρχικό κεφάλαιο X_0. Κατά τη διάρκεια των περιόδων 1, 2,… (μέρες ή μήνες ...) η εταιρεία λαμβάνει από τους ασφαλισμένους τα χρηματικά ποσά $Y_1, Y_2, \ldots.$ και πληρώνει για ζημίες $W_1, W_2, \ldots$ Τότε το κεφάλαιο της εταιρίας στο τέλος n-οστής χρονικής περιόδου θα είναι.

$$X_n = X_0 + (Y_1 - W_1) + \cdots + (Y_n - W_n)$$

- Αν $X_n < 0$ τότε η εταιρία παύει να λειτουργεί
- Αν $Z_r = Y_r - W_r, r = 1,2,\ldots$ αποτελούν ισόνομες και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τότε η X_n συμπεριφέρεται σαν ένας τυχαίος περίπατος που ξεκινάει από τη θέση X_0 και κάνει βήματα μήκους Z_r.

1.3.2 Διαφορικές Εξισώσεις

Στην υποενότητα αυτή θα αναφέραμε σε έννοιες της θεωρίας των διαφορικών εξισώσεών και θα επικεντρωθούμε κυρίως στις ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις. Οι διαφορικές εξισώσεις μπορούν να είναι ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις που “διαστρεβλώνονται” από κάποιον τυχαίο θόρυβο. Η θεωρία των ντετερμινιστικών εξισώσεων αποτελεί τη βάση για πολλές πτυχές των υπολογιστικών μαθηματικών.

Ορισμός 1.3.3[9]: Μια στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι μια εξίσωση της μορφής

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dZ_t \tag{1.12}$$

όπου Z_t είναι μια κίνηση Brown $\sigma: R^n \to R^{n\times m}$ και $b: R^n \to R^n$ είναι μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις με $X_t \in R$.

Ορισμός 1.3.4: Μια διαφορική εξίσωση δίνεται από τη συνάρτηση που περιέχει το χρόνο t μια γνωστή συνάρτηση *x(t)* και πεπερασμένο πλήθος παραγώγων αυτής

$$f\left(t, x(t), x'(t), x''(t), \ldots, x^{(n)}(t)\right) = 0, \qquad 0 \le t \le T \tag{1.13}$$

Ο στόχος είναι να βρεθεί μια συνάρτηση *x(t)* που καλείται και λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης.

Οι απλούστερες διαφορικές εξισώσεις είναι αυτές της πρώτης τάξης. Περιέχουν δηλαδή μόνο την ανεξάρτητη t, τη συνάρτηση *x(t)* και την πρώτη παράγωγο. Η εξίσωση τέτοιας μορφής είναι

$$x'(t) = \frac{dx(t)}{dt} a\big(t, x(t)\big), \;\; x(0) = x_0$$

όπου η $a\big(t, x(t)\big)$ είναι μια γνωστή συνάρτηση, ισοδύναμα

$$dx(t) = a\big(t, x(t)\big)dt, \qquad x(0) = x_0 \tag{1.14}$$

Την παραπάνω εξίσωση μπορούμε να την ερμηνεύσουμε ως την αλλαγή θέσης ενός σωματιδίου στο χρονικό διάστημα $(t, t+dt)$. Εναλλακτικά μας δείχνει ότι η ταχύτητα $x'(t)$ είναι μια συνάρτηση του χρόνου *t* και της θέσης *x(t)* [1],[8].

Παράδειγμα 1.3.5: Υποθέτουμε ότι η ταχύτητα είναι συνάρτηση του χρόνου

$$x'(t) = a(t)$$

Ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη στην παραπάνω εξίσωσης λαμβάνουμε την λύση

$$x(t) = x(0) + \int_{-t}^{t} a(s)ds$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι η ταχύτητα εξαρτάται από τη θέση του σωματιδίου *x(t)* δηλαδή,

$$x'(t) = cx(t)$$

για κάποια σταθερά *c*. Στη περίπτωση αυτή η απλή ολοκλήρωση δε βοηθάει, αλλά γνωρίζουμε ότι η λύση της είναι εκθετική μορφής

$$x(t) = x(0)e^{ct}.$$

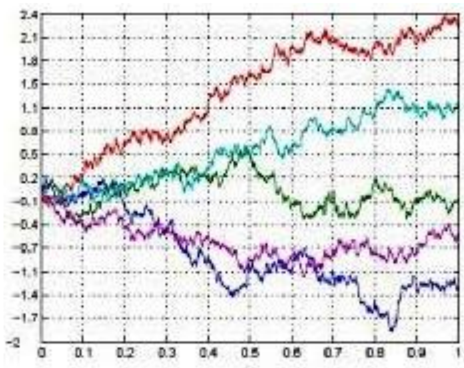
1.3.3 Κίνηση Brown

Η κίνηση Brown αποτελεί μια στοχαστική διαδικασία με σημαντικό ρόλο στην θεωρία πιθανοτήτων και στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά. Στην ουσία η κίνηση Brown είναι ένας τυχαίο περίπατος που συμβαίνει σε συνεχή χρόνο με συνεχείς κινήσεις. Η κίνηση Brown έλαβε το όνομα της από τον βιολόγο Robert Brown του οποίου η έρευνα χρονολογείται περίπου το 1820. Το 1923 ο Norbert Wiener ήταν ο πρώτος που κατάφερε να δώσει μια πιο μαθηματική έννοια στην θεωρία αυτή.

***Ορισμός 1.3.6*[8]:** Μια στοχαστική διαδικασία $Z = (Z_t, t \in [0, \infty])$ ονομάζεται κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener εφόσον πληρούνται οι ακόλουθες προϋποθέσεις.

- Να ξεκινάει από το μηδέν $Z_0 = 0$
- Να έχει στάσιμες ανεξάρτητες προσαυξήσεις.
- Για κάθε *t>o*, η Z_t έχει μια κανονική κατανομή *N(0,1)*
- Έχει συνεχείς και τροχιές (paths), δηλαδή να μην υπάρχουν άλματα.

Στο παρακάτω σχήμα[2] φαίνονται κάποιες τροχιές της διαδικασίας Wiener .



Θα εισάγουμε και την Γεωμετρική Κίνηση Brown επειδή η κίνηση Brown έχει κάποια μειονεκτήματα, όσο αφορά το μοντέλο των μετοχών. Για παράδειγμα αν υποθέσουμε ότι η τιμή μιας μετοχή δεν παίρνει και αρνητικές τιμές τότε είναι προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε την γεωμετρική κίνηση Brown.

***Ορισμός 1.3.7*[8]:** Η γεωμετρική κίνηση Brown ικανοποιεί την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX(t) = \mu X(t) + sX(t)dZ(t) \tag{1.15}$$

Ισοδύναμη μορφή είναι

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \mu dt + \sigma dZ(t)$$

Από την παραπάνω σχέση εύκολα προκύπτει ότι η τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 ανά μονάδα χρόνου.

Για αρχική τιμή *X(0)* δίνεται η εξίσωση

$$X(t) = X(o)e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma Z(t)}$$

Η οποία όπως φαίνεται δεν είναι κανονικά κατανεμημένη διότι είναι εκθετικής μορφής.

Παράδειγμα 1.3.8*[8]*: Η τιμή μίας μετοχής σήμερα είναι 10€. Η τιμή αυτή ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown με $\mu = 10\%$ και $\sigma^2 = 9\%$. Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα σε δύο χρόνια από τώρα η τιμή της μετοχής να είναι πάνω από 200€.

Η πιθανότητα αυτή είναι

$$P(X(2) > 200) = P(X(2) > 200) = P\left(\frac{X(2)}{X(0)} > 2\right)$$
$$= P\left(\ln\frac{X(2)}{X(0)} > \ln 2\right)$$

Όμως όπως αναφέραμε παραπάνω η $X(t)$ είναι εκθετικής μορφής οπότε η $\ln\frac{X(2)}{X(0)}$ είναι κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή

$$\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 = 0{,}1 - \frac{1}{2}0{,}09 = 0{,}11$$

και διακύμανση

$$\sigma^2 t = 0{,}09 * 2 = 0{,}18$$

Άρα η πιθανότητα σε δύο χρόνια από τώρα η τιμή της μετοχής να είναι πάνω από 200€ είναι

$$P(X(2) > 200) = P\left(\frac{\ln\frac{X(2)}{X(0)} - 0{,}11}{\sqrt{0{,}18}} > \frac{\ln 2 - 0{,}11}{\sqrt{0{,}18}}\right) = P(Z > 1{,}37) = 85\%$$

Στο επόμενο κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε κάποιες χρηματοοικονομικές έννοιες και θα κάνουμε μια εισαγωγή στα συνταξιοδοτικά ταμεία και στην έννοια της εισφοράς.

2^o Κεφάλαιο

Χρηματοοικονομικές Έννοιες και Ράντες Πληρωμών

Τα χρηματοοικονομικά είναι γενικά ο κλάδος της οικονομικής επιστήμης που ασχολείται κυρίως με την διαχείριση κεφαλαίων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε βασικές χρηματοοικονομικές έννοιες όπως για παράδειγμα την έννοια του τόκου (επιτοκίου) και της παρούσα αξία και θα δώσουμε τους αντίστοιχους ορισμούς και παραδείγματα. Επιπλέον, θα μελετήσουμε τον όρο ράντα που είναι μια σειρά από πληρωμές που γίνονται σε ίσες χρονικές περίοδος και θα αναφέρουμε βασικά είδη ραντών.

2.1 Χρηματοοικονομικές Ράντες Πληρωμών

Σίγουρα κάποια στιγμή μέσα στην ζωή μας έχουμε ακούσει ή μπορεί κα να έχουμε χρησιμοποιήσει την έκφραση *“ο χρόνος είναι χρήμα”* συνήθως εννοούμε ότι ο χρόνος δεν γυρνάει πίσω, οπότε πρέπει να κάνουμε τις σωστές επιλογές. Όμως, αν το δούμε από μία ποιο μαθηματική – χρηματοοικονομική γωνία παρατηρούμε ότι υπάρχει άμεση συσχέτιση μεταξύ του χρόνου και της αξία του χρήματος. Αυτό εύκολα το καταλαβαίνουμε αν αναλογιστούμε την αξία εκατό ευρώ σήμερα με την αξία εκατό ευρώ πριν δέκα χρόνια. Η συγκεκριμένη συσχέτιση αναπτύσσεται από διάφορα χρηματοοικονομικά μοντέλα. Για τους σκοπούς της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασία θα αναφέρουμε ένα από αυτά το οποίο χρησιμοποιείται κυρίως στους συνήθεις υπολογισμούς.

2.1.1 Συναρτήσεις Επιτοκίου

Ορισμός 2.1.1[10]: Υποθέτουμε ότι την χρονική στιγμή *0* υπάρχει κεφάλαιο K_0 τότε μετά από ένα έτος και δεδομένου του επιτοκίου i θα υπάρχει

$$K_1 = K_0 + iK_0 = K_0(1 + i)$$

Γενικά μετά από n έτη θα έχουμε κεφάλαιο

$$K_n = K_0(1+i)^n \tag{2.1}$$

Όπου ο παράγοντας $(1+i)$ ονομάζεται *συσσωρευτικός παράγοντας* και φανερώνει την συσσωρευτική αξία του κεφαλαίο τη στιγμή *0* μετά από ένα έτος επένδυσης.

Ορισμός 2.1.2**[3]**: Ο τύπος για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας με κεφάλαιο *K* και επιτόκιο *i* για *n* χρονικά έτη δίνεται παρακάτω

$$PV = \frac{K}{(1+i)^n} \tag{2.2}$$

Ορισμός 2.1.2: Ονομάζουμε προεξοφλητικό παράγοντα

$$u^n = \left(\frac{1}{1+i}\right)^n, \ \ n = 1,2,3 \ldots \tag{2.3}$$

την προεξοφλημένη αξία ενός ευρώ πριν από *n* έτη.

Συνήθως μας ενδιαφέρει να μπορούμε να μελετήσουμε την συμπεριφορά μιας σειρά από *n* πληρωμές στην αρχή της περιόδου.

2.1.2 Παρούσα Αξία Ραντών

Ορισμός 2.1.3**[10]**: Η προεξοφλημένη αξία μιας σειράς *n* πληρωμών μιας νομισματικής μονάδος καταβλητέες στην αρχή της κάθε περιόδου *n* (προκαταβλητέα) ορίζεται

$$\ddot{a}_{n]} = 1 + u + u^2 + \cdots + u^{n-1} = \frac{1-u^n}{1-u} = \frac{1-u^n}{d} \tag{2.4}$$

όπου, *d* το προεξοφλητικό επιτόκιο

$$d = \frac{i}{1+i} \tag{2.5}$$

και από την (2.3)

$$d = 1 - u \tag{2.6}$$

Ο παραπάνω ορισμός στην ουσία είναι μια *προκαταβλητέα ράντα*. Ας αναφέρουμε τώρα και το αντίστοιχο ορισμό για την *ληξιπρόθεσμη ράντα*.

***Ορισμός 2.1.4*[10]:** Ληξιπρόθεσμη λέγεται η ράντα για την οποία οι πληρωμές πραγματοποιούνται στην τέλος των περιόδων. Με την χρήση του προεξοφλητικού παράγοντα u ορίζουμε την παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμη ράντας ως

$$\alpha_{n]} = u + u^2 + \cdots + u^n = \frac{1 - u^n}{i} \tag{2.7}$$

Όπως παρατηρούμε η παρούσα αξία μια ράντας είναι το άθροισμα των σημερινών τιμών κάθε μιας από τις n πληρωμές.

Παράδειγμα 2.1.5: Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την παρούσα αξία μιας ληξιπρόθεσμης ράντας του ποσού των 1000€ που καταβάλλεται ετησίως για 5 χρόνια με επιτόκιο 5%.

οπότε από την (2.7)

$$1000a_{n]} = 1000\frac{1 - (1.05)^{-5}}{0{,}05} = 4.239{,}48$$

Παράδειγμα 2.1.6: Αν έχουμε το ίδιο δεδομένα με το παραπάνω παράδειγμα απλώς τώρα η παρούσα αξία που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι μιας προκαταβλητέα ράντας από την (2.5)

$$d = \frac{i}{i+1} = \frac{0.05}{1.05} = 0{,}04762$$

και από την (2.4)

$$1000\ddot{a}_{n]} = 1000\frac{1 - (1.05)^{-5}}{0{,}04762} = 4.545{,}86$$

Υποθέτουμε τώρα ότι έχουμε μια ράντα πληρωμών με άπειρη συχνότητα πληρωμών σε ένα ορισμένο χρονικό διάστημα. Δηλαδή η συχνότητα των πληρωμών μπορεί να γίνεται είτε καθημερινά, είτε κάθε ώρα, κάθε λεπτό κ.τ.λ. Έτσι η ράντα της οποία η συχνότητα των πληρωμών καταβάλλονται συνεχώς για τις περιόδους *n* ονομάζεται ράντα συνεχών πληρωμών.

Ορισμός 2.1.7*[8]****:*** Ορίζουμε ως παρούσα αξία μιας ράντας συνεχών πληρωμών για *n* περιόδους με τον παρακάτω τύπο

$$\bar{\alpha}_{n]} = \int_0^n u^t = \frac{1-u^n}{\delta} \tag{2.8}$$

όπου δ η ένταση ανατοκισμού

$$\delta = \ln(1+i) \tag{2.9}$$

Ακόμα θα αναφέρουμε το τύπο σύνδεσης της διακριτής και της συνεχής ράντας πληρωμών

$$\bar{\alpha}_{n]} = \frac{i}{\delta}\ddot{\alpha}_{n]}.$$

2.2 Μέθοδοι Χρηματοδότησης και Αναλογιστικές Συναρτήσεις

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να εισάγει τις πιο κύριες μεθόδους χρηματοδότησης των συνταξιοδοτικών ταμείων καθώς και την έννοια του πίνακα θνησιμότητας γιατί η αξία των πληρωμών δεν επηρεάζεται μόνο από τον παράγοντα του επιτοκίου αλλά υπάρχει και ένας δεύτερος παράγοντας αυτός της πιθανότητας επιβίωσης του ασφαλισμένου. Συγκεκριμένα, θα αναφέρουμε το διανεμητικό (pay as you go) και κεφαλαιοποιητικό (funded systems) σύστημα, εφαρμογές των οποίων συναντάμε σε αρκετές χώρες της Ευρωπαϊκής Ενώσεις αλλά και σε όλο τον κόσμο. Επίσης θα προσδιορίσουμε κάποια βασικά αναλογιστικά μέτρα και έννοιές που απαιτούνται για τη ορθή και αποτελεσματική κατανόηση των ταμείων συνταξιοδότησης.

2.2.1 Μέθοδοι Κοστολόγησης -Χρηματοδότησης

Το σημαντικότερο σημείο για το σχεδιασμό ενός συνταξιοδοτικού ταμείου είναι η επιλογή της κατάλληλου μεθόδου χρηματοδότησης για τον υπολογισμό των παροχών του. Γενικά μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι υπάρχουν αρκετές μέθοδοι χρηματοδότησης ανάλογα με τον τρόπο που επηρεάζουν τις παροχές του ταμείου. Στην συγκεκριμένη εργασία θα επικεντρωθούμε στο Διανεμητικό σύστημα, το οποίο αποτελεί το ισχύον ασφαλιστικό σύστημα στην κοινωνική ασφάλιση στην Ελλάδα, καθώς και στο Κεφαλαιοποιητικό σύστημα.

Το Διανεμητικό σύστημα ορίζεται ως ένα σύστημα μεταφοράς εισφορών από τις νεώτερες γενεές στου ηλικιωμένους, δηλαδή στηρίζεται στην αρχή των τρεχουσών πληρωμών. Με άλλα λόγια, οι σημερινοί εργαζόμενοι πληρώνουν εισφορές, αλλά οι εισφορές αυτές την ίδια χρονιά χρησιμοποιούνται για να ικανοποιηθούν τα θεσπισμένα δικαιώματα των συνταξιούχων, δηλαδή να πληρωθούν οι συντάξεις τους. Πρόκειται για ένα είδους άτυπου κοινωνικού συμβολαίου μεταξύ των διαφορετικών γενεών. Η πληρωμή των εισφορών από τους εργαζομένους μπορεί να μην χρηματοδότει τις δικές τους εισφορές (σύνταξη) αλλά δημιουργεί αλληλεγγύη μεταξύ των γενεών δηλαδή, ότι και οι επόμενες γενεές θα συνεχίσουν να κάνουν το ίδιο. Οπότε για να είναι βιώσιμο το Διανεμητικό σύστημα θα πρέπει οι εισφορές να είναι ίσες με της εκροές δηλαδή, θα πρέπει να μπαίνουν μονίμως τουλάχιστον όσα χρήματα βγαίνουν [22].

Συμπεραίνουμε, ότι το Διανεμητικό σύστημα βασίζεται στην αναλογία εργαζομένων και συνταξιούχων. Η αναλογία μειώνεται λόγω της γήρανσης του πληθυσμού με αποτέλεσμα οι συνταξιούχοι να ξεπερνούν τους εργαζομένους και από την αύξηση του ποσοστού ανεργίας. Επομένως, το σύστημα για να εξασφαλίσει τη βιωσιμότητά του, σε αυτές τις νέες συνθήκες, πρέπει να βρίσκει νέους πόρους για τη χρηματοδότησή του, που θα καλύπτουν επαρκώς το έλλειμμα που δημιουργείται.

Το Κεφαλαιοποιητικό σύστημα χρησιμοποιείται κυρίως από ιδιωτικά συνταξιοδοτικά ταμεία. Σε αντίθεση με το διανεμητικό σύστημα η στόχευση του δεν είναι η κοινωνική αλληλεγγύη αλλά η συσσώρευση της μέγιστης δυνατής συνταξιοδοτικής απολαβής [22]. Στο συγκεκριμένο σύστημα οι εισφορές του εργαζομένου αποτελούν και τις αποταμιεύσεις του και δεν χρησιμοποιούνται για να χρηματοδοτήσει τις συντάξεις άλλων. Η κύρια λειτουργία του είναι αυτή της ατομικής κεφαλαιακής συσσώρευσης, σύμφωνα με την οποία το ύψος των παρεχόμενων συντάξεων είναι συνάρτηση της ικανότητας των ατόμων να αποταμιεύουν εισοδήματα κατά τη διάρκεια του εργάσιμου βίου τους. Η συγκριμένη μέθοδος αποτελεί την βασική λειτουργία των ασφαλιστικών εταιριών που δραστηριοποιούνται στον ιδιωτικό τομέα.

Συνεπώς, στο Κεφαλαιοποητικό σύστημα κάθε εργαζόμενος συσσωρεύει κεφάλαια αποκλειστικά για την χρηματοδότηση των δικών του παροχών. Επομένως, η διαχείριση αποτελεί ένα σημαντικό παράγοντα δηλαδή, το κεφαλαιοποιητικό σύστημα επιβάλλει σωστή διαχείριση, όσον αφορά στις επενδύσεις των αποταμιεύσεων, αυστηρούς κανόνες λειτουργίας και ανεξαρτησία διοίκησης [21].

Στην συνέχεια της εργασίας θα αναλύσουμε περαιτέρω το Κεφαλαιοποητικό σύστημα και πιο συγκεκριμένα δούμε με μέσο μαθηματικής ανάλυσης την διαχείριση των εισφορών ώστε να επιτευχθεί η μέγιστη αποδοχή.

2.2.2 Συναρτήσεις του πίνακα θνησιμότητας

Ο πίνακας θνησιμότητας είναι μια συστηματική απεικόνιση της θνησιμότητας ενός πληθυσμού με την μορφή ενός πίνακα δύο στηλών. Η πρώτη στήλη αναφέρεται στην ηλικία (Χ), ενώ η δεύτερη στήλη αναφέρεται στο αριθμό των ατόμων (l_x) που επιβιώνουν μέχρι την αντίστοιχη ηλικία.

Ακόμη ως $d_x = l_x - l_{x-1}$ ορίζουμε το πλήθος των θανάτων ηλικίας (Χ).

Ορισμός 2.2.1 *[3]***:** Οι συναρτήσεις επιβίωσης και θανάτου του πίνακα θνησιμότητας έχουν του εξής τύπους.

Πιθανότητα επιβίωσης ατόμου ηλικίας (Χ) μέχρι τη ηλικία (Χ+1)

$$p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x}$$

και πιθανότητα επιβίωσης ατόμου (Χ) μέχρι την ηλικία (Χ+n)

$$_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x} \tag{2.10}$$

Ενώ, πιθανότητα θανάτου ατόμου ηλικίας (Χ) μέχρι τη ηλικία (Χ+1)

$$q_x = \frac{d_x}{l_x} \tag{2.11}$$

και η πιθανότητα θανάτου ατόμου ηλικίας (Χ) μέχρι την ηλικία (Χ+n)

$$_nq_x = \frac{l_x - l_{x+n}}{l_x}.$$

Κρίνεται απαραίτητο η αναφορά των παραπάνω συναρτήσεων επιβίωσης αφού επηρεάζουν έμμεσα την αξία των πληρωμών των συνταξιοδοτικών ταμείων.

Παράδειγμα 2.2.2: Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου ένα άτομο ηλικίας 30 ετών να πεθάνει μετά από 10 έτη και πριν την συμπλήρωση του 60^{ου} έτους της ηλικίας του.

X	l_x
30	600
40	540
60	320

Επομένως η πιθανότητα από την (2.10) είναι

$$P = {}_{10}p_{30\,20}q_{40} = \frac{l_{40}}{l_{30}} \cdot \frac{l_{40} - l_{60}}{l_{40}} = \frac{540}{600} \cdot \frac{540 - 320}{600} = 0{,}33.$$

Παράδειγμα 2.2.3 [3]***:*** Δημιουργείται ένα ταμείο από 1000 άτομα τα οποία είναι όλα ηλικίας 40 ετών. Αποφασίζουν να πληρώσουν σήμερα μια εφάπαξ εισφορά C προκειμένου να δοθούν εφάπαξ 10.000€ στην ηλικία των 60 ετών σε όσους έχουν επιβιώσει. Δίνεται επιτόκιο $i = 5\%$

Η εισφορά C θα είναι

$$Εισφορές = Εφάπαξ$$

$$1.000C = 1.000\,{}_{40}p_{60}\,10.000\left(\frac{1}{1+0{,}05}\right)^{20}$$

$$C = 10.000\,\frac{l_{60}}{l_{40}}$$

$$C = 10.000\,\frac{320}{540}\left(\frac{1}{1{,}05}\right)^{20} \Rightarrow C = 2.233€.$$

2.2.3 Συναρτήσεις Επιτοκίου και Θνησιμότητας

Για την αποτίμηση των συνταξιοδοτικών ταμείων και την πραγματοποίηση των απαραίτητων μαθηματικών υπολογισμών χρησιμοποιούνται οι σύνθετες συναρτήσεις επιτοκίου και θνησιμότητας. Αναφέρουμε κάποιες από αυτές

$$D_x = u^x l_x \quad , \quad N_x = \sum_{i=0}^{\omega-1-x} D_{x+1}$$

και

$$C_x = u^{x+1} d_x \quad , \quad M_x = \sum_{i=0}^{\omega-1-x} C_{x+1}$$

Οι συναρτήσεις αυτές μπορούν να μας βοηθήσουν στην προεξόφληση ή συσσώρευση μιας μονάδας ή μιας σειράς πληρωμών που βασίζεται σε ενδεχόμενο θανάτου ή επιβίωσης ενός ατόμου.

Γενικά παρατηρούμε ότι ισχύον τα εξής

- Πολλαπλασιάζοντας με μία εκ των συναρτήσεων D,C,N,M προεξοφλούμε χρήματα

- Διορώντας με την συνάρτηση D συσσωρεύονται χρήματα

Για την περαιτέρω κατανόηση των παραπάνω συναρτήσεων θα αναφέρουμε το εξής παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.2.4*[3]*: Ένα άτομο ηλικίας (Χ) θέλει να ασφαλιστή (έναντι του κινδύνου του θανάτου), ώστε εάν πεθάνει τον επόμενο χρόνο (και πριν την ηλικία Χ+1) να εισπράξουν οι συγγενείς του στο τέλος του έτους ένα ευρώ. Στόχος μας είναι να υπολογίσουμε το απαιτούμενο ασφάλιστρο.

Από την αρχή της ισοδυναμίας ισχύει

Ε(Παρούσας Αξίας Ασφαλίστρων) = Ε(Παρούσα Αξία Παροχών)

$$Ασφάλιστρο = uq_x + 0p_x = uq_x = \frac{C_x}{D_x} = \frac{u^{x+1}d_x}{u^x l_x}$$

Παράδειγμα2.2.5*[3]*: Αξία ετήσιας σύνταξης ενός ευρώ για άτομο ηλικίας (Χ) με πληρωμές που γίνονται στην αρχή του έτους είναι

$$Αξία\ Σύνταξης = 1 + up_x + u^2\ {}_2p_x\ + \cdots = \frac{D_x}{D_x} + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} = \frac{N_x}{D_x} = \ddot{a}_x.$$

2.2.4 Άλλες Χρήσιμες Συναρτήσεις

Κάποιες άλλες χρήσιμες συναρτήσεις που συναντάμε στα συνταξιοδοτικά ταμεία είναι αυτές του μισθού του εργαζομένου και οι συναρτήσει που μας δίνουν τις παροχές.

Ορισμός 2.2.6*[3]*: Έστω ότι s_x είναι ο ετήσιος μισθός ενός ατόμου ηλικίας (Χ). Έχουμε υποθέσει ότι $s_a = 1$ όπου a η εισαγωγική ηλικία. Επομένως το σύνολο των μισθών έως την ηλικία (Χ).

$$S_x = \sum_{t=a}^{x-1} s_t$$

Ορισμός 2.2.7[3]: Έστω ότι b_x η παροχή που αντιστοιχεί στο έτος ηλικίας (X). Η συνολική παροχή που έχει συσσωρευτεί μέχρι στιγμής στην ηλικία (X) για ένα άτομο το οποίο εντάχθηκε στο ταμείο στην ηλικία α.

$$B_\chi = \sum_{t=a}^{x-1} b_t$$

Παράδειγμα 2.2.8[3]: Άτομο ηλικίας 60 ετών γίνεται μέλος στο Συνταξιοδοτικό Ταμείο "X" και αγοράζει με εφάπαξ ασφάλιστρο P ετήσια σύνταξη η οποία ξεκινάει αμέσως και καταβάλλεται στο τέλος κάθε έτους και έως την ηλικία των 70 ετών. Τα πρώτα πέντε έτη το ύψος της σύνταξης είναι 1.000 ευρώ ενώ στην συνέχεια (και μέχρι το τέλος) διπλασιάζεται. Εάν το ταμείο "X" χρησιμοποιεί επιτόκιο υπολογισμού $i = 4\%$ θέλουμε να υπολογίσουμε το ασφάλιστρο με αμελητέα θνησιμότητα.

Ισχύει

$$\text{Παρούσα Αξία Ασφαλίστρων} = \text{Παρούσα Αξία Σύνταξης}$$

$$P = 1.000(1 + a_{5]} + 2u^5 a_{5]})$$

$$P = 1.000 a_{5]}(1 + 2u^5)$$

$$P = 1000 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5}{0{,}04}\left[1 + 2\left(\frac{1}{1{,}04}\right)^5\right] = 11.770$$

Παράδειγμα 2.2.9[3]: Ο κανονισμός του ταμείου "X" προβλέπει την παροχή εφάπαξ ίσο με 10.000€ κατά την κανονική ηλικία συνταξιοδότησης των 65 ετών. Άτομο ηλικίας 25 ετών εγγράφεται ως μέλος του ταμείου και καταβάλλει ετήσιες εισφορές (στην αρχή του έτους) ίσες με C. Μετά από 30 έτη κατά την ηλικία των 55 ετών (και πριν δώσει την ετήσια εισφορά) αποφασίζει να αποχωρήσει από το ταμείο. Υπολογίζεται το απόθεμα που του αντιστοιχεί κατά την συγκριμένη χρονική στιγμή και του αποδίδεται το 90%. Μας ενδιαφέρει να υπολογίζουμε το ποσό που θα εισπράξει το μέλος του ταμείου χωρίς θνησιμότητα.

$$C_1 \ddot{s}_{40} = 10.000 \Rightarrow C_1 = \frac{10.000}{\ddot{s}_{40}}$$

Αναδρομικά: $C_1 \ddot{s}_{30} - 0 = 5.902$

Προοπτικά: $10.000 u^{10} - C_1 \ddot{a}_{30} = 5.900$

Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε περεταίρω με την έννοια του συνταξιοδοτικού ταμείου προκαθορισμένων παροχών και με τον υπολογισμό των μελλοντικών εισφορών καθώς και την ελαχιστοποίηση του κινδύνου εισφοράς του ταμείου . Επίσης θα αναφέρουμε εφαρμογές και θα καταλήξουμε σε ενδιαφέροντα συμπεράσματα.

3^o Κεφάλαιο

Προκαθορισμένα Συνταξιοδοτικά Σχήματα Παροχών σε Στοχαστικό Περιβάλλον

Σε αυτό το κεφάλαιο θα εξετάσουμε τα προκαθορισμένα συνταξιοδοτικά σχήματα (Defined Benefit Pension Schemes) και θα επικεντρωθούμε στην αβεβαιότητα που υπάρχει λόγο της μεταβλητότητας των επενδυτικών αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων. Τα συνταξιοδοτικά σχήματα προκαθορισμένων παροχών αποτελούν ένα κοινό μέσο παροχής εισοδήματος λόγο συνταξιοδότησης σε αρκετές Ευρωπαϊκές χώρες αλλά τα συναντάμε επίσης σε χώρες στην Βόρεια Αμερική αλλά και στην Αυστραλία [19].

Ο στόχος είναι η μη έκθεση του ταμείου συντάξεων σε κίνδυνο εισφοράς επιτοκίου (contribution rate risk). Αυτό θα επιτευχθεί με την βοήθεια ενός στοχαστικού μοντέλου για τον υπολογισμό του κινδύνου εισφοράς επιτοκίου. Το μοντέλο που θα χρησιμοποιήσουμε αντιπροσωπεύει την χρηματοοικονομική δομή ενός συνταξιοδοτικού προγράμματος προκαθορισμένων παροχών, δηλαδή την σχέση μεταξύ του ποσοστού εισφοράς και του κεφαλαίου [14]. Η κατανόηση των παραπάνω σχέσεων επιτρέπει στο αναλογιστικό τμήμα των εταιριών να ελέγξουν και να σταθεροποιήσουν των κίνδυνο εισφορά επιτοκίου.

3.1 Μέθοδος Χρηματοδότησής και το Στοχαστικό Μοντέλο

Η μέθοδος χρηματοδότησης μπορεί να θεωρηθεί ως το μέσο με το οποίο ο αναλογιστής μπορεί να καθορίσει το επίπεδο των εισφορών για την επίτευξη του επιδιωκόμενου επίπεδου παροχών. Αυτός ο προσδιορισμός πραγματοποιείτε μέσο της διαδικασίας αποτίμησης. Δηλαδή ο αναλογιστής θα πρέπει, ανά τακτά χρονικά διαστήματα, να αποτιμήσει τις πιθανές υποχρεώσεις που αναμένετε να καταβληθούν στα τρέχοντα μέλη, εκτιμώντας τις μελλοντικές εισφορές και να συγκρίνει αυτές τις υποχρεώσεις με την σημερινή αξία των περιουσιακών στοιχείων. Η οικονομική κατάσταση του συνταξιοδοτικού συστήματος θα επανεξετάζεται από την εκάστοτε εταιρία με την επόμενη αποτίμηση, η οποία θα είναι σε 1-3 χρόνια. Στην περίπτωση που μέσο αποτίμησης αποκαλυφθεί πλεόνασμα ή έλλειψη αυτό θα οφείλετε στο κίνδυνο εισφοράς επιτοκίου. Αυτό μελετήθηκε από τους Lee (1986)[13] και Marshall and Reeve (1993)[16].

Ας περιγράψουμε μια μέθοδο χρηματοδότησης η οποία θα βασίζεται στης συνολικής εισφορές *C(t)* του ασφαλισμένου προς την εταιρία και στο απόθεμα *F(t)* της εταιρίας. Επιπλέον θα ορίζουμε τις έννοιες του συνολικού κανονικού κόστος (total normal cost) *NC(t)* και τη συνολική αναλογιστική υποχρέωση (total actuarial liability) *AL(t)* όλα αυτά σε μονάδα χρόνο *t.*

Επομένως ο τύπος υπολογισμού της συνολικής εισφοράς προκύπτει,

$$C(t) = NC(t) + ADJ(t) \tag{3.1}$$

Όπου,

$$ADJ(t) = \frac{UL(t)}{\ddot{a}_{\overline{M|}}} \tag{3.2}$$

και

$$UL(t) = AL(t) - F(t) \tag{3.3}$$

Το συνολικό κανονικό κόστος *NC(t)* θεωρείται ως το κόστος που απαιτείται για την συσσώρευση των αντιστοίχων παροχών εάν επιβεβαιωθούν οι αναλογιστικές υποθέσεις.

Η συνολική αναλογιστική υποχρέωση (total actuarial liability) *AL(t)* ισούται με το απαραίτητο χρηματοοικονομικό ποσό που πρέπει να έχει το ταμείο έτσι ώστε σε συνδυασμό με τις εισφορές που θα εισπράξει στο μέλλον να μπορεί να καλύψει πλήρως τις μελλοντικές παροχές που έχει υποσχεθεί προς τα μέλη του.

Συνήθως η προσαρμογή του ποσοστό εισφοράς (adjustment of contribution rate risk) *ADJ(t)* παρουσιάζεται ως η εκκαθάριση της μη χρηματοδοτούμενης υποχρέωσης (unfunded liability) *UL(t).* Όμως, στη περίπτωση που εξετάζουμε εμείς θα την θεωρήσουμε ως την συνολική μην χρηματοδοτούμενη υποχρέωση διαιρεμένη με την παρούσα αξία μια πρόσκαιρης προκαταβλητέας ράντας διάρκειας *M* περιόδου. Ακόμη ως μη χρηματοδοτούμενη υποχρέωση προκύπτει από την διαφορά μεταξύ της αναλογιστικής υποχρέωσης και του αποθέματος σε χρόνο *t*. Αυτή η μέθοδος είναι συνήθως γνωστή και ως *Spread Method* για την αντιμετώπιση των συμφερόντων μεταξύ κερδών η ζημιών, την οποία μελέτησε ο Winklevoss 1993 [19].

Στην συνέχεια και από τις (3.2) και (3.3) η εξίσωση (3.1) μπορεί να γραφεί ως:

$$C(t) = NC(t) + \frac{AL(t) - F(t)}{\ddot{a}_{M]}}$$

και θέτοντας $k = 1/\ddot{a}_{M]}$

$$C(t) = NC(t) + k[AL(t) - F(t)] \tag{3.4}$$

Το k μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα είδος ποινής σε μορφή επιτοκίου για τη μη χρηματοοικονομική υποχρέωση.

Στο στοχαστικό μοντέλο θα επικεντρωθούμε κυρίως στην συμπεριφορά των εισφορών προς την ασφαλιστική εταιρία *C(t)* υπό την παρουσία στοχαστικών επενδυτικών αποδόσεων. Όπως είναι λογικό καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος *t* μεταβάλλεται και η εκτίμηση των εισφοράς *C(t)* και του αποθέματος *F(t)* του κάθε μέλους του συνταξιοδοτικού προγράμματος.

Ας ορίσουμε κάποιες παραδοχές που θα μας βοηθήσουν στην ανάπτυξη και κατανόηση του μοντέλου που θα χρησιμοποιήσουμε:

1. Ο πληθωρισμός είναι σταθερός καθ' όλη την διάρκεια του συνταξιοδοτικού προγράμματος.

2. Ο μισθός δεν επηρεάζεται από τον πληθωρισμό και δεν εφαρμόζεται κάποια κλίμακα για την αύξηση του. Επίσης ο ετήσιος μισθός θεωρείται σαν ξεχωριστή μονάδα για το κάθε μέλος.

3. Το επιτόκιο i για σκοπούς αποτίμησης θεωρείται σταθερό.

4. Η επένδυση έχει ποσοστό απόδοσης $i(t+1)$ κατά την χρονική περίοδο $(t, t+1)$. Δηλαδή, το μέσο επιτόκιο αποτίμηση μεταξύ της χρονικής περιόδου $(t, t+1)$ προκύπτει:

$$E[i(t+1)] - E[i(t)] = E[i(t)] + i - E[i(t)] = i$$

5. Ακόμη ορίζουμε και την διακύμανση της απόδοσης του επιτοκίου ως $\sigma^2 = Var[i(t)]$.

6. Στο μοντέλο μας ορίζουμε τον ετήσιο συντελεστή προεξόφλησης $u = 1/(1 + E[i(t)])$ αντί του γνωστού από την θεωρία $u^* = E[1/(1 + i(t))]$

7. Υποθέτουμε ότι τα κέρδη από το ποσοστό της απόδοσης $i(t)$ είναι ανεξάρτητα, ταυτόσημα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με ($i(t) > -1$ με πιθανότητα 1).

8. Η εισφορά και τα έξοδα παροχών επέρχονται στην αρχή κάθε περιόδου.

9. Το απόθεμα την χρονική στιγμή μηδέν είναι ίσο με την μονάδα $F(0) = 1$

10. Το χρονικό διάστημα της αποτίμησης είναι ένας χρόνος.

Σύμφωνα με τις παραπάνω προϋποθέσεις το αναμενόμενο κόστος *NC*, η αναλογιστική υποχρέωση *AL* και τα έξοδα παροχών *B* θεωρούνται ανεξάρτητα από το χρόνο *t*.

Περαιτέρω, η αναλογιστική υποχρέωση για μια περίοδο μετά προκύπτει αν προσθέσουμε σε αυτή το αναμενόμενο κόστος και αφαιρέσουμε τα έξοδά παροχών προς τους ασφαλισμένους. Αυτό με την μορφή σχέσης αποτυπώνεται:

$$AL = (1 + i)(AL + NC - B) \tag{3.5}$$

Αφού, το αναμενόμενο κόστος *NC* και η αναλογιστική υποχρέωση *AL* η σχέση (3.4) γράφεται (Trowbridge 1952) [18].

$$C(t) = NC + k[AL - F(t)] \tag{3.6}$$

3.2 Η Εισφορά και το Απόθεμα του Ταμείου

Θα παραθέσουμε κάποια τυποποιημένα αποτελέσματα για την συνολική εισφορά του ασφαλισμένου *C(t)* αλλά και για το απόθεμα *F(t)* της εταιρίας.

O D. Dufresne (1986, 1988) [11] [12] παρατήρησε ότι στο συγκεκριμένο μοντέλο η προσαρμογή του ποσοστό εισφοράς *ADJ(t)* είναι ένα κλάσμα της μη χρηματοδοτούμενης υποχρέωσης (unfunded liability) *UL(t)* (3.2). Δηλαδή, τα πλεονάσματα και η ελλείψεις αντιμετωπίζονται με τον ίδιο τρόπο. Οπότε, προκύπτει η σχέση που συνδέει το απόθεμα με την εισφορά του ταμείου στο χρονικό διάσημα *(t,t+1)*

$$F(t+1) = [1+i(t+1)][F(t)+C(t)-B(t)], \qquad t = 0,1,2\ldots \quad (3.7)$$

Και με χρήση της (3.4)

$$F(t+1) = [1+i(t+1)]\big[F(t)+NC(t)+k\big(AL(t)-F(t)\big)-B(t)\big]$$

$$F(t+1) = [1+i(t+1)][(1-k)F(t)+NC(t)+kAL(t)-B(t)]$$

$$F(t+1) = w(t+1)[qF(t)+r(t)] \qquad (3.8)$$

Όπου για απλοποίηση της εξισώσεις θέτουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές

$$w(t+1) = \frac{1+i(t+1)}{1+i}$$

$$q = (1+i)(1-k)$$

$$r(t) = (1+i)[NC(t)-B(t)+kAL(t)]$$

Όμως, λόγω της υπόθεσης ότι το αναμενόμενο κόστος *NC*, η αναλογιστική υποχρέωση *AL* και τα έξοδα παροχών *B* θεωρούνται ανεξάρτητα από το χρόνο *t* προκύπτει

$$r = (1+i)(NC-B+kAL)$$

$$r = (1+i)(NC-B+AL-AL+kAL)$$

$$r = (1+i)(NC+AL-B)-(1+i)(1-k)AL$$

Οπότε από την σχέση (3.5) και την εξίσωση $q = (1+i)(1-k)$

$$r = (1-q)AL$$

Η σχέση (3.8) είναι μια εξίσωση παραγωγής αναδρομικών εξισώσεων για το απόθεμα *F(t)*. Λόγω της ανεξαρτησία μεταξύ των *w(t+1), q, r(t)* προκύπτει η αναδρομική μέση τιμή του αποθέματος.

$$E[F(t+1) = E[w(t+1)]E[qF(t)+r] \tag{3.9}$$

Από την υπόθεση 4 βλέπουμε ότι

$$E[w(t+1)] = E\left[\frac{1+i(t+1)}{1+i}\right] = \frac{1+E[i(t+1)]}{1+i} = \frac{1+i}{1+i} = 1$$

Συμπεράνουμε ότι (3. 9)

$$E[F(t+1)] = qE[F(t)+r] \tag{3.10}$$

και

$$E[F(t)] = q^t F_0 + \frac{r(1-q^t)}{1-q}, \qquad t \geq 0$$

$$E[F(t)] = q^t F_0 + AL(1-q^t), \quad t \geq 0 \tag{3.11}$$

Η σχέση (3.9) μπορεί να γενικευτεί και για της n-ροπές του αποθέματος.

Δηλαδή για n=1,2,…

$$E[F(t+1)]^n = E[w(t+1)]^n E[qF(t)+r]^n \tag{3.12}$$

Από την σχέση (3.6) εύκολα μπορούμε να δούμε την μέση τιμή της εισφοράς *C(t)*.

$$E[C(t)] = NC + k(AL - E[F(t)]) \tag{3.13}$$

Αν *M>1* και αφού *0<q<1*,

$$\lim_{t\to\infty} E[F(t)] = \lim_{t\to\infty}[q^t F_0 + AL(1-q^t)] = AL$$

και

$$\lim_{t\to\infty} E[C(t) = \lim_{t\to\infty}[NC + k(AL - EF(t)] = \lim_{t\to\infty}[NC + k(AL - AL)] = NC$$

Ως συνέπεια των παραπάνω παρατηρούμε ότι αν το απόθεμα την χρονική στιγμή *t=0* είναι ίσο με την αναλογιστική υποχρέωση $F_0 = AL$.

$$E[F(t)] = AL \quad \kappa\alpha\iota \quad E[C(t)] = NC \quad \gamma\iota\alpha\ t > 0$$

Δηλαδή, η καταβολή περισσότερων τόκων της μη χρηματοδοτούμενη υποχρέωση *(k>d)* έχει σαν αποτέλεσμα η εισφορά και το απόθεμα του χαρτοφυλακίου να συγκλίνει στις αναμενόμενες τιμές.

Για να έχουμε μια ποιο εμπεριστατωμένη άποψη για το συνταξιοδοτικό πρόγραμμα προκαθορισμένων εισφορών πρέπει να μελετήσουμε και την διακύμανση του αποθέματος και των εισφορών του συνταξιοδοτικού ταμείου.

Όπως και για την μέση τιμή λαμβάνουμε τον αναδρομικό τύπο (3.12)

$$E[F(t+1)]^2 = E[qF(t) + r]^2$$

$$E[F(t+1)]^2 = E[w(t+1)]^2[q^2V[F(t) + q(EF(t) + r)^2]$$

Από την θεωρία πιθανοτήτων έχουμε τον τύπο της διακύμανσης

$$Var[F(t+1)] = E[F(t+1] - (E[F(t+1)])^2$$

Η παραπάνω εξίσωση γίνετε με τη χρήση της (3.10)

$$Var[F(t+1)] = E[w(t+1)^2]q^2Var[F(t)] + (E[w(t+1)^2] - 1)(E[F(+1)])^2$$

Έχουμε ορίσει,

$$w(t+1) = \frac{1 + i(t+1)}{1+i}$$

$$E[w(t+1)^2] = E[\frac{(1 + i(t+1))^2}{(1+i)^2}]$$

$$E[w(t+1)^2] = \frac{(E[1 + i(t+1)])^2 + Var[i(t+1)]}{(1+i)^2}$$

$$E[w(t+1)^2] = \frac{(1+i)^2+\sigma^2}{(1+i)^2}$$

Οπότε ο αναδρομικός τύπος για την διακύμανση του ταμείου γίνεται,

$$Var[F(t+1)] = (1-k)^2[(1+i)^2+\sigma^2]Var[F(t)] + \sigma^2(1+i)^2(E[F(t+1)])^2$$

$$Var[F(t+1)] = aVar[F(t)] + b(E[F(t+1)])^2 \qquad (3.14)$$

όπου,

$$a = (1-k)^2((1+i)^2+\sigma^2) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad b = \frac{\sigma^2}{(1+i)^2}$$

Αν υποθέσουμε ότι *Var[F(x)]=0* που σημαίνει ότι η τιμή του αποθέματος την χρονική στιγμή *t=0* είναι γνωστή τότε

$$Var[F(t)] = b\sum_{j=1}^{t} a^{t-j}(E[F(j)])^2 \,, \qquad t>1 \quad (3.15)$$

Ακόμη αν υποθέσουμε ότι *α<1* και έχουμε δείξει ότι *E[C(t)]=AL* η σχέση (3.14) μπορεί να γραφεί

$$\limsup_{t\to\infty} Var\,[F(t)] \le a \limsup_{t\to\infty} Var[F(t)] + bAL^2$$

$$\limsup_{t\to\infty} Var\,[F(t)] \le \frac{bAL^2}{1-a}$$

$$\liminf_{t\to\infty} Var[F(t] \ge \frac{bAL^2}{1-a}$$

$$\lim_{t\to\infty} Var[F(t)] = \frac{bAL^2}{1-a}$$

Άρα δεσμεύοντας την τιμή της παραμέτρου *α<1* μπορούμε να περιορίσουμε την τιμή διακύμανση της απόδοσης σ^2 ή την περίοδο *M*.

Η διακύμανση των εισφορών προκύπτει εύκολα από την σχέση (3.6)

$$Var[C(t)] = Var[NC + k(AL - F(t))]$$

$$Var[C(t)] = Var[k(AL - F(t)]$$

$$Var[C(t)] = k^2 Var[F(t)] \tag{3.16}$$

Αναφέρουμε επίσης ότι ο Dufresne(1986) [10] έδειξε τον παρακάτω αποτέλεσμα για την συνδιακύμανση.

$$Cov\big(C(t), C(t+u)\big) = q^u Var[C(t)]$$

Αν τώρα υποθέσουμε περίοδο $M=1$ τότε η μη χρηματοδοτούμενη υποχρέωση εξοφλείτε εντελώς στο τέλος κάθε ημερολογιακής αποτίμησης, ώστε να μην υπάρχει απόδοση μελλοντικών πληρωμών.

Οπότε,

$$E[F(t)] = AL \quad και \quad E[C(t)] = NC \quad για\ κάθε\ t > 1$$

Και σαν αποτέλεσμα αν το απόθεμα την χρονική στιγμή $t=0$ ισούται με την αναλογιστική υποχρέωση$(F_0 = AL)$ για κάθε $t > 1$.

$$Var[C(t)] = Var[F(t)] = bAL^2 \quad για\ κάθε\ t > 1.$$

3.3 Η Παρούσα Αξία των Μελλοντικών Εισφορών

Στα συνταξιοδοτικά σχήματα προκαθορισμένων παροχών ο αναλογιστής θα πρέπει να καθορίσει την παρούσα αξία των μελλοντικών εισφορών στο σήμερα για όλη την χρονική διάρκεια του συνταξιοδοτικού προγράμματος.

Παρόλο, που έχουμε ορίσει ότι οι αποδόσεις των επενδύσεων ακολουθούν το στοχαστικό μοντέλο για τους σκοπούς αυτής της εργασίας θα χρησιμοποιήσουμε ένα ντετερμινιστικό μοντέλο όσο αφορά το εκπτωτικό επιτόκιο.

Σημειώνουμε ότι έχουμε υποθέσει σαν επιτόκιο $i=E[i(t)]$ και επιπλέον ότι $i>0$ και ο συντελεστής προεξοφλήσεις υ είναι μικρότερος της μονάδος.

Ας ορίσουμε την παρούσα αξία των μελλοντικών εισφορών ως εξής,

$$G(t) = \sum_{s=0}^{t} \upsilon^s C(s) \qquad (3.17)$$

Επιπλέον,

$$G(\infty) = \lim_{t\to\infty} G(t)$$

Οπότε θα διερευνήσουμε την συμπεριφορά της μέσης τιμής και της διακύμανσης της παρούσα αξία των μελλοντικών εισφορών καθ' όλη την διάρκεια του συνταξιοδοτικού προγράμματος. Με σκοπό την επιλογή τον κατάλληλων παραμέτρων ώστε να ελαχιστοποιήσουμε την κίνδυνο εισφοράς επιτοκίου.

Ας ξεκινήσουμε αρχικά από την μέση τιμή και ας υποθέσουμε *M>1*, τότε η (3.17) γίνεται από την (3.13)

$$E[G(t)] = \sum_{s=0}^{t} \upsilon^s (NC + kAL - kE[F(s)])$$

Κάνοντας και χρήση της (3.11)

$$E[G(\infty)] = \sum_{s=0}^{\infty} \upsilon^s \left(NC + kAL - k\left[q^s F_0 + \frac{r(1-q^s)}{1-q}\right]\right)$$

$$E[G(\infty)] = \sum_{s=0}^{\infty} \upsilon^s \left(NC + kAL - kq^s F_0 - \frac{kr(1-q^s)}{1-q}\right)$$

$$E[G(\infty)] = \sum_{s=0}^{\infty} \upsilon^s \left(NC + kAL - kq^s F_0 - \frac{kr(1-q^s)}{1-q}\right)$$

$$E[G(\infty)] = (NC + kAL)\sum_{s=0}^{\infty} \upsilon^s - kF_0 \sum_{s=0}^{\infty} q^s - \frac{kr}{1-q}\sum_{s=o}^{\infty}(1-q^s)\upsilon^s$$

$$E[G(\infty)] = \frac{NC + kAL}{d} - kF_0 \sum_{s=0}^{\infty} (\upsilon q)^s - \frac{kr}{1-q}\sum_{s=0}^{\infty} \upsilon^s + \frac{kr}{1-q}\sum_{s=0}^{\infty} (\upsilon q)^s$$

$$E[G(\infty)] = \frac{NC + kAL}{d} - \frac{kF_0}{1-uq} - \frac{kr}{d(1-q)} + \frac{kr}{(1-q)(1-qu)}$$

$$E[G(\infty)] = \frac{NC}{d} + \frac{kAL}{d} - \frac{kF_0}{k} - \frac{kr}{d(1-q)} + \frac{r}{1-q}$$

Θυμίζουμε $r = (1-q)AL$ και $k = 1 - \upsilon q$

$$E[G(\infty)] = \frac{NC}{d} - F_0 + \frac{kAL(1-q) - kr - dr}{d(1-q)}$$

$$E[G(\infty)] = \frac{NC}{d} - F_0 + \frac{kr - kr - dr}{d(1-q)}$$

$$E[G(\infty)] = \frac{NC}{d} - F_0 + AL$$

Καταλήξαμε ότι η παρούσα αξία των μελλοντικών εισφορών είναι οι αναμενόμενες εισφορές συν την διαφορά μεταξύ του κεφαλαίου την χρονική στιγμή μηδέν και της αναλογιστικής υποχρέωσης. Δηλαδή οι μελλοντικές εισφορές ταυτίζονται με της αναμενόμενες εισφορές υπό την υπόθεση $F_0 = AL$.

Υποθέτοντας τώρα ότι το κεφάλαιο την χρονική στιγμή *t=0* είναι μηδενικό $F_0 = 0$.

$$E[G(\infty)] = \frac{NC}{d} + AL$$

$$E[G(\infty)] = NC + dAL$$

Με την βοήθεια της σχέσης (3.5)

$$AL = (1+i)(AL + NC - B)$$

$$AL - (1+i)AL = (1+i)(NC - B)$$

$$-iAL = (1+i)(NC - B)$$

$$dAL = NC + B$$

Επομένως προκύπτει ακολούθως τύπος για τη παρούσα αξία των μελλοντικών εισφορών με μηδενικό αρχικό κεφάλαιο

$$E[G(\infty)] = B$$

Με την ίδια μεθοδολογία μπορούμε εύκολα να δώσουμε και μια σχέση για πεπερασμένο χρόνο.

$$E[G(t)] = \sum_{s=0}^{t} u^s E[C(s)]$$

$$E[G(t)] = \sum_{s=0}^{\infty} u^s E[C(s)] - \sum_{s=t+1}^{\infty} u^s E[C(s)]$$

$$E[G(t)] = \left[\frac{NC}{d} - F_0 + AL\right] - \frac{NC}{d} u^{t+1} - (AL - F_0)(1-k)^{t+1}$$

Όπως μελέτησαν και οι Owardally και Haberman [17]

Αξίζει να δούμε και την συμπεριφορά της διακύμανσης των μελλοντικών εισφορών του χαρτοφυλακίου.

$$Var[G(\infty)] = Var[\sum_{s=0}^{\infty} u^s C(u)]$$

ισχύει ότι,

$$Var[C(0)] = Var[F(0)] = 0$$

οπότε,

$$Var[G(\infty)] = 0 + Var[\sum_{s=1}^{\infty} u^s\, C(u)]$$

$$Var[G(\infty)] = \sum_{s=1}^{\infty} u^{2s} Var[C(u)] + \sum_{\substack{s,t>1 \\ s\neq 1}} u^s u^t Cov[C(s), C(t)]$$

Θυμίζουμε ότι από Dufresne (1986) [9],

$$Cov\big(C(t), C(t+u)\big) = q^u Var[C(t)]$$

Ως εκ τούτου, η παραπάνω εξίσωση της διακύμανσης της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισφορών γράφεται

$$Var[G(\infty)] = \sum_{s=1}^{\infty} u^2 Var[C(u)] + 2\sum_{s=2}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} u^s u^t q^{s-t} Var[C(t)] \quad (3.18)$$

Αν τώρα υποθέσουμε όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι ο χρόνος είναι πεπερασμένος δηλαδή *α<1* και με την βοήθεια των σχέσεων (3.15) και (3.16) προκύπτει η συνάρτηση διακύμανση των συνολικών εισφορών των εσφαλμένων σε πεπερασμένο χρόνο.

$$Var[C(t)] = k^2 b \sum_{j=1}^{t} a^{t-j}(E[F(j)])^2$$

$$Var[C(t)] = k^2 b a^t \sum_{j=1}^{t} a^{-j}\,[q^j F_0 + AL\big(1-q^j\big)]^2 \quad (3.19)$$

Στην συνέχεια θα μελετήσουμε τη συμπεριφορά του κινδύνου εισφοράς μέσο της μέσης τιμής και της διακύμανσης της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισφορών καθ' όλη την διάρκεια του συνταξιοδοτικού σχήματος προκαθορισμένων παροχών σε τρείς διαφορετικές υποθέσεις

1. Το απόθεμα την χρονική στιγμή μηδέν ταυτίζεται με την αναλογιστική υποχρέωση, δηλαδή $F_0 = AL$
2. Μηδενικό αρχικό αποθεματικό, δηλαδή $F_0 = 0$
3. $F_0 \neq 0 \; και \; F_0 \neq AL$

Ας κινήσουμε με την πιο απλή υπόθεση από της τρεις που θα εξετάσουμε στον υπόλοιπο της διπλωματικής εργασίας.

Πρώτη υπόθεση

Υποθέτουμε ότι $F_0 = AL$ δηλαδή το απόθεμα της εταιρεία είναι ίσο με την αναλογιστική υποχρέωση της προς τους συμβαλλόμενους.

Προκύπτει ότι η διακύμανση των συνολικών εισφορών

$$Var[C(t)] = k^2 ba^t \sum_{j=1}^{t} a^{-j}\, [q^j AL + AL\big(1 - q^j\big)]^2$$

$$Var[C(t)] = k^2 ba^t \sum_{j=\text{`}}^{t} a^{-j} AL^2$$

$$Var[C(t)] = k^2 b \sum_{j=1}^{t} AL^2 (\frac{1 - a^t}{1 - a})$$

Οπότε διακύμανση της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισφορών μπορεί να γραφτεί,

$$Var[G(\infty)] = bk^2 AL^2 \sum_{s=1}^{\infty} u^{2s} (\frac{1 - a^s}{1 - a}) + \frac{2bk^2 AL^2}{1 - a} \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{t=1}^{s-1} u^s u^t q^{s-1} (1 - a^t)$$

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς της παραπάνω διακύμανσης θα ξεκινάμε πρώτα με το πρώτο άθροισμα

$$\sum_{s=1}^{\infty} u^{2s} (\frac{1 - a^s}{1 - a}) = \frac{1}{1 - \alpha} \left(\sum_{s=1}^{\infty} u^2 - \sum_{s=1}^{\infty} u^{2s} a^s \right)$$

$$= \frac{1}{1 - a} [\left(\frac{u^2}{1 - u^2} \right) - \left(\frac{au^2}{1 - au^2} \right)]$$

Συνεχίζουμε με το διπλό άθροισμα

$$\sum_{s=2}^{\infty} \sum_{t=1}^{s-1} u^s u^t q^{s-1} (1 - a^t) = [(\frac{u^3 q^2}{(q - u)(1 - uq)} - \frac{qu^4}{(q - u)(1 - u^2)}$$

$$- \frac{u^3 a q^4}{(q - au)(1 - uq)} + \frac{a^2 q u^4}{(q - u)(1 - uq)}$$

Διαιρώντας και με bAL^2 προκύπτει

$$\frac{Var[G(\infty)]}{bAL^2} = \frac{k^2 u^2}{(1 - u^2)(1 - au^2)} + \frac{2qk^2 u^3}{(1 - u^2)(1 - uq)(1 - au^2)}$$

$$\frac{Var[G(\infty)]}{bAL^2} = \frac{k^2u^2(1-uq) + 2qk^2u^3}{(1-u^2)(1-uq)(1-au^2)}$$

$$\frac{Var[G(\infty)]}{bAL^2} = \frac{k^2u^2 - qk^2u^3 + 2qk^2u^3}{(1-u^2)(1-uq)(1-au^2)}$$

$$\frac{Var[G(\infty)]}{bAL^2} = \frac{k^2u^2 + qk^2u^3}{(1-u^2)(1-uq)(1-au^2)}$$

$$\frac{Var[G(\infty)]}{bAL^2} = \frac{u^2k^2(1+uq)}{(1-u^2)(1-qu)(1-au^2)}$$

$$\frac{Var[G(\infty)]}{bAL^2} = \frac{u^2(1-uq)^2(1+qu)}{(1-u^2)(1-qu)(1-au^2)}$$

$$Var[G(\infty)] = \frac{bAL^2u^2}{(1-u^2)}\frac{1-u^2q^2}{(1-au^2)}$$

$$Var[G(\infty)] = \frac{bAL^2u^2}{(1-u^2)}\frac{1-u^2q^2}{1-u^2q^2(1+b)} \qquad (3.20)$$

Θυμίζουμε ότι $k = 1 - uq, a = q^2(1+b)$ και αξίζει να σημειωθεί ότι $q \rightarrow k$ είναι μια συνάρτηση 1 προς 1 (1 - 1) μεταξύ (0,1) με εικόνα στο (d,1).

Αν θεωρήσουμε τη διακύμανση της παρούσας άξιας των μελλοντικών εισφορών $Var[G(\infty)]$ ως συνάρτηση της πιθανότητας θανάτου q, δηλαδή *f(q)*, είναι σχετικά εύκολο να δείξουμε ότι η *f(q)* είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς *q*.

Οπότε είναι ξεκάθαρο ότι για να ελαχιστοποιήσουμε την (3.20), δηλαδή την διακύμανση της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισφορών, αρκεί να ελαχιστοποιούμε την παρακάτω συνάρτηση.

$$f(q) = \frac{1-u^2q^2}{1-u^2q^2(1+b)}$$

Επομένως η μικρότερη τιμή που λαμβάνει η συνάρτηση είναι για $q = 0, f(0) = 1$ και M=1

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ομοιότητα μεταξύ των περιορισμών $F_0 = AL$ και $M = 1$ και οι δυο οδηγούν σε $E[F(t)] = AL \; και \; E[C(t)] = NC$.

Αφού έχουμε μόνο μια περίοδο ($M = 1$) προκύπτει ο ακόλουθος τύπος για την διακύμανση μελλοντικών εισφορών

$$Var[G(\infty)] = \sum_{s=1}^{\infty} u^{2s} Var[C(s)] = \frac{bAL^2u^2}{1-u^2}$$

Συμπεραίνουμε ότι για να υπάρξει η ίδια ομοιότητα θα πρέπει να ελαχιστοποιήσουμε τη διακύμανση των μελλοντικών εισφορών.

Δεύτερη υπόθεση

Μια ακόμη ενδιαφέρουσα υπόθεση είναι να μελετήσουμε την συμπεριφορά των μεγεθών που έχουμε αναφέρει μέχρι στιγμής του συνταξιοδοτικού προγράμματος προκαθορισμένων παροχών για μηδενικό αρχικό απόθεμα ($F_0 = 0$). Οπότε από την σχέση (3.19) γίνεται

$$Var[C(t)] = bk^2AL^2a^t \sum_{j=1}^{t} a^{-j}\,(1-q^j)^2$$

$$Var[C(t)] = bk^2AL^2 \sum_{j=1}^{t} a^{t-j}\,(1-2q^j+q^{2j})$$

$$Var[C(t)] = bk^2AL^2\left(\sum_{j=1}^{t} a^{t-j} - 2\sum_{j=1}^{t} a^{t-j}q^j + \sum_{j=1}^{t} a^{t-j}\,q^{2j}\right)$$

$$Var[C(t)] = bk^2AL^2\left(\frac{1-a^t}{1-a} - 2q\frac{a^t-q^t}{a-q} + q^2\frac{a^t-q^{2t}}{a-q^2}\right)$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια λογική όπως και στη πρώτη υπόθεση ας υπολογίσουμε την διακύμανση της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισφορών.

$$Var[G(\infty)] = \sum_{s=1}^{\infty} bk^2AL^2u^{2s}\left(\frac{1-a^s}{1-a} - 2q\frac{a^s-q^s}{a-q} + q^2\frac{a^s-q^{2s}}{a-q^2}\right)$$
$$+ 2\sum_{s=2}^{\infty}\sum_{t=1}^{s-1} u^s u^t q^{s-t} bk^2AL^2\left(\frac{1-a^t}{1-a} - 2q\frac{a^t-q^t}{a-q} + q^2\frac{a^t-q^{2t}}{a-q^2}\right)$$

Για να απλοποιήσουμε τους υπολογισμούς της παραπάνω διακύμανσης θα ξεκινάμε πρώτα με το πρώτο άθροισμα

$$\sum_{s=1}^{\infty} bk^2AL^2u^{2s}\left(\frac{1-a^s}{1-a} - 2q\frac{a^s-q^s}{a-q} + q^2\frac{a^s-q^{2s}}{a-q^2}\right)$$

Το οποίο το σπάμε σε ακόμα τρία αθροίσματα

$$\sum_{s=`}^{\infty} u^{2s}\frac{1-a^s}{1-a}$$
$$= \sum_{s=1}^{\infty}\frac{u^{2s}-a^s u^{2s}}{1-a} = \frac{1}{1-a}\left(\frac{u^2}{1-u^2} - \frac{au^2}{1-au^2}\right)$$
$$= \frac{1}{1-a}\frac{u^2-au^3-au^2+au^3}{(1-u^2)(1-au^2)}$$
$$= \frac{1}{1-a}\frac{(1-a)u^2}{(1-u^2)(1-au^2)} = \frac{u^2}{(1-u^2)(1-au^2)}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} 2qu^{2s}\frac{a^s-q^s}{a-q}$$

$$= 2q\sum_{s=1}^{\infty}\frac{(au^2)^s-(qu^{2)^s}}{a-q} = \frac{2q}{a-q}\left(\frac{au^2}{1-au^2} - \frac{qu^2}{1-aq}\right)$$

$$= \frac{2q}{a-q}\left(\frac{au^2-aqu^2-qu^2+aqu^4}{(1-au^2)(1-qu^2)}\right) = \frac{2q}{a-q}\frac{(a-q)u^2}{(1-au^2)(1-qu^2)}$$
$$= \frac{2qu^2}{(1-au^2)(1-qu^2)}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} q^s u^{2s} \frac{a^s - q^{2s}}{a - q^2}$$

$$= q^2 \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(au^2)^s - (qu^2)^s}{a - q^2} = \frac{q^2}{a - q^2}\left[\frac{(au^2)^s}{1 - au^2} - \frac{(qu^2)^s}{1 - (qu)^2}\right]$$

$$= \frac{q^2}{a - q^2}\left[\frac{au^2 - aq^2u^4 - q^2u^2 + aq^2u^4}{(1 - au^2)(1 - (qu)^2}\right] = \frac{q^2u^2}{(1 - au^2)(1 - (qu)^2}$$

Την ίδια μεθοδολογία θα εφαρμόσουμε και στο δεύτερο άθροισμα της διακύμανσης της παρούσας άξιας των μελλοντικών εισφορών.

$$2bk^2AL^2 \sum_{s=2}^{\infty} \sum_{t=1}^{s-1} u^s u^t q^{s-t} \left(\frac{1 - a^t}{1 - a} - 2q \frac{a^t - q^t}{a - q} + q^2 \frac{a^t - q^{2t}}{a - q^2}\right)$$

Όπως και πριν θα το σπάσουμε για να απλοποιήσουμε τις πράξεις σε ακόμα τρία αθροίσματα.

$$\sum_{s=1}^{\infty} u^s q^s \sum_{t=1}^{\infty} u^t q^{-t} \left(\frac{1 - a^t}{1 - a}\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} u^s q^s \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{u^t q^{-t} - u^t q^{-t} a^t}{1 - a}\right) = \frac{qu^3}{(1 - uq)(1 - u^2)(1 - au^2)}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} u^s q^s \sum_{t=1}^{\infty} u^t q^{-t} \left(2q \frac{a^t - q^t}{a - q}\right)$$

$$= 2q \sum_{s=1}^{\infty} u^s q^s \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{u^t q^{-t} a^t - u^t}{a - q}\right) = \frac{4u^3q^3}{(1 - uq)(1 - au^2)(1 - qu^2)}$$

$$\sum_{s=1}^{\infty} u^s q^s \sum_{t=1}^{\infty} u^t q^{-t}\left(q^2 \frac{a^t - q^{2t}}{a - q^2}\right)$$

$$= q^2 \sum_{s=1}^{\infty} u^s q^s \sum_{t=1}^{\infty}\left(\frac{u^t q^{-t} a^t - u^t q^{-t} q^{2t}}{a - q^2}\right) = \frac{2u^3 q^2}{(1-uq)(1-au^2)(1-q^2u^2)}$$

Οπότε,

$$Var[G(\infty)] = bk^2AL^2\left\{\frac{u^2}{(1-u^2)(1-au^2)} - \frac{2qu^2}{(1-au^2)(1-qu^2)} + \frac{q^2u^2}{(1-au^2)(1-(qu)^2} + \frac{2qu^3}{(1-uq)(1-u^2)(1-au^2)} - \frac{4u^3q^3}{(1-uq)(1-au^2)(1-qu^2)} + \frac{2u^3q^2}{(1-uq)(1-au^2)(1-q^2u^2)}\right\}$$

$$Var[G(\infty)] = bk^2AL^2\left\{\frac{u^2(1-qu)+qu^3}{(1-uq)(1-u^2)(1-au^2)} - \frac{2qu^2(1-qu)+4u^3q^3}{(1-uq)(1-au^2)(1-qu^2)} + \frac{q^2u^2(1-qu)+2u^3q^2}{(1-uq)(1-au^2)(1-q^2u^2)}\right\}$$

$$Var[G(\infty)] = bk^2AL^2\left\{\frac{u^2-qu^3+qu^3}{(1-uq)(1-u^2)(1-au^2)} - \frac{2qu^2-2u^3q^3+4u^3q^3}{(1-uq)(1-au^2)(1-qu^2)} + \frac{q^2u^2-u^3q^2+2u^3q^2}{(1-uq)(1-au^2)(1-q^2u^2)}\right\}$$

$$Var[G(\infty)] = bk^2AL^2\left\{\frac{u^2(1+qu)}{(1-uq)(1-u^2)(1-au^2)} - \frac{2qu^2(1+qu)}{(1-uq)(1-au^2)(1-qu^2)} + \frac{q^2u^2(1+qu)}{(1-uq)(1-au^2)(1-q^2u^2)}\right\} (3.21).$$

Έχουμε υποθέσει ότι *0<q<1*, *u<1* και *a<1* έτσι ώστε κάθε μια από τις παραπάνω γεωμετρικές σειρές να συγκλίνει και θυμίζομε ότι $k = 1 - uq$

Επομένως η παραπάνω συνάρτηση μπορεί να γραφεί

$$Var[G(\infty)] = bAL^2\left\{\frac{u^2(1+qu)(1-qu)^2}{(1-uq)(1-u^2)(1-au^2)} - \frac{2qu^2(1+qu)(1-qu)^2}{(1-uq)(1-au^2)(1-qu^2)} + \frac{q^2u^2(1+qu)(1-qu)^2}{(1-uq)(1-au^2)(1-q^2u^2)}\right\}$$

$$Var[G(\infty)] = bAL^2\left\{\frac{u^2(1-q^2u^2)}{(1-u^2)(1-au^2)} - \frac{2qu^2(1-q^2u^2)}{(1-au^2)(1-qu^2)} + \frac{q^2u^2(1-q^2u^2)}{(1-au^2)(1-q^2u^2)}\right\}$$

$$Var[G(\infty)] = \frac{bAL^2u^2(1-q^2u^2)}{(1-au^2)}\left(\frac{1}{1-u^2} - \frac{2q}{1-qu^2} + \frac{q^2}{1-q^2u^2}\right)$$

$$Var[G(\infty)] = \frac{bAL^2u^2(1-q^2u^2)}{(1-au^2)}\frac{(1-qu^2)(1-q^2u^2) - 2q(1-u^2)(1-q^2u^2) + q^2(1-u^2)(1-qu^2)}{(1-u^2)(1-qu^2)(1-q^2u^2)}$$

$$Var[G(\infty)] = \frac{bAL^2u^2(1-q^2u^2)}{(1-au^2)}\left[\frac{(1+qu^2)(1-q)^2}{(1-u^2)(1-qu^2)(1-q^2u^2)}\right]$$

$$Var[G(\infty)] = \frac{bAL^2u^2}{(1-au^2)}\frac{(1+qu^2)(1-q)^2}{(1-u^2)(1-qu^2)} \qquad (3.22)$$

Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση έτσι και εδώ παρατηρούμε ότι η διακύμανση της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισφορών αποτελείτε και από μια συνάρτηση *g(q)* που εξαρτάτε από την πιθανότητα θανάτου q.

$$Var[G(\infty)] = \frac{bAL^2u^2}{(1-u^2)}g(q)$$

όπου,

$$g(q) = \frac{(1+qu^2)(1-q)^2}{(1-au^2)(1-qu^2)}$$

$$g(q) = \frac{(1+qu^2)(1-q)^2}{(1-u^2q^2(1+b))(1-qu^2)} \tag{3.23}$$

Μας ενδιαφέρει και σε αυτή την περίπτωση να ελαχιστοποιήσουμε τη διακύμανση της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισφορών $Var[G(\infty)]$, άρα αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε την $g(q)$.

Αξίζει να θυμίσουμε ότι $a < 1 \; \kappa\alpha\iota \; 0 < q < q_{max}$.

Επιπλέον εύκολα προκύπτει ότι $g(0) = 1 \; \kappa\alpha\iota \; g'(0) < 0$. Δεδομένων αυτών των περιορισμών στις παραμέτρους, ισχύει $g(q) > 0, \;\; 0 < q < q_0$

Όπου

$$q_0 = \sqrt{\frac{1}{u^2(1+b)} = (1+i)q_{max} > q_{max}}$$

Επομένως η παράγωγός της $g(q)$ ισούται με το 0

$$g'(q) = 0$$

$$\left[\frac{(1+qu^2)(1-q)^2}{(1-u^2q^2(1+b))(1-qu^2)}\right]' = 0$$

$$[(1+qu^2)(1-q)^2]'[(1-u^2q^2(1+b))(1-qu^2)] \\ - [(1+qu^2)(1-q)^2][(1-u^2q^2(1+b))(1-qu^2)]' = 0$$

$$[(1+u^2)(1-q)^2 - (1+qu^2)2(1-q)]\big[\big(1-u^2q^2(1+b)\big)(1-qu^2)\big] \\ - [(1+qu^2)(1-q)^2]\big[\big(-2u^2q(1+b)\big)(1-qu^2) \\ - \big(1-u^2q^2(1+b)\big)u^2 = 0$$

$$(1-q)(u^2-3u^2q-2)\big[\big(1-u^2q^2(1+b)\big)(1-qu^2)\big] \\ - [(1+qu^2)(1-q)^2][-2u^2q(1+b)+3u^3q^2(1+b)-u^2] = 0$$

$$[u^2-4u^2q-2+3u^2q^2+2q][(1-u^2q^2-u^2q^2b)(1-u^2q)]$$

$$= [-1+2q-q^2-u^2q+2u^2q^2][-u^3q^2+2u^2q-2u^2qb-3u^3q^2 \\ - 3u^3q^2b+u^2]$$

$$(1-q)[q^3(1+b)u^4(1-u^2)-q^2u^4b+qu^2b+u^2-1]=0$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει λύσεις

$$(1-q)=0$$

$$q=1$$

Η οποία απορρίπτεται καθώς $q<q_{max}<1$ όπου $q_{max}=(1+b)^{-1/2}$

Οπότε αρκεί να λυθεί η κυβική εξίσωση

$$q^3(1+b)u^4(1-u^2)-q^2u^4b+qu^2b+u^2-1=0$$

$$q^3-q^2\frac{b}{(1+b)(1-u^2)}+q\frac{b}{(1+b)u^2(1-u^2)}-\frac{1-u^2}{(1+b)u^4(1-u^2)}=0 \quad (3.24)$$

Η παραπάνω εξίσωση (3.24) μπορεί να λυθεί ως προ q με την βοήθεια του προγράμματος Mathematica (Παράρτημα Α).

Οπότε η εξίσωση (3.24) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ελαχιστοποίηση των τιμών της πιθανότητας θανάτου q και περεταίρω την τιμή των περιόδων M.

$$q=(1+i)(1-k)$$

$$q=(1+i)\left(1-{}^{1}/_{\ddot{a}_{M\rceil}}\right), \quad \acute{o}\pi o\upsilon \;\; k=1/\ddot{a}_{M\rceil}$$

Θα αναπτύξουμε μια εφαρμογή για την περεταίρω κατανόηση των παραπάνω. Υποθέτουμε ότι έχουμε επιτόκιο $i=0.01$ και διακύμανση της απόδοσης του επιτοκίου $\sigma=0.20$.

Θυμίζουμε ότι

$$b=\left(\frac{\sigma}{1+i}\right)^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad u=\frac{1}{1+i}$$

οπότε,

$$b = \left(\frac{\sigma}{1+i}\right)^2 = \left(\frac{0.20}{1.01}\right)^2 = 0.,0392$$

και

$$u = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1.01} = 0{,}991$$

Με την βοήθεια του Mathematica (Παράρτημα Α) προκύπτει η λύση της κυβικής εξίσωσης (3.24) ως προς q. Υπάρχει μόνο μια αποδέκτη λύση της κυβικής εξίσωσης (3.24) για *0<q<1* την οποία θα συμβολίζουμε με q^* η οποία αν $q^* < q_{max}$ τότε η $Vr[G(\infty)]$ ελαχιστοποιείτε όταν $q^* = q$, ενώ αν $q^* > q_{max}$ τότε η $Vr[G(\infty)]$ ελαχιστοποιείτε όταν $q^* = q_{max}$.

$$q^* = 0{,}966 < q_{max} = 0{,}981$$

όπου,

$$q_{max} = (1+b)^{-1/2}$$

Από την εξίσωση της πιθανότητας θανάτου μπορούμε να υπολογίσουμε την προκαταβλητέα ράντα Μ περιόδων

$$q = (1+i)\left(1 - {}^{1}\!/\ddot{a}_{M\rceil}\right)$$

$$\ddot{a}_{M\rceil} = 1 - \frac{1+i}{q}$$

$$\ddot{a}_{M\rceil} = 22{,}872$$

Οπότε από την (2.4) υπολογίζουμε τις περιόδους Μ που χρειάζονται για να ελαχιστοποιηθεί συνάρτηση θανάτου $g(\,)$

$$\ddot{a}_{M\rceil} = \frac{1-u^M}{d}$$

$$u^M = 1 - d\ddot{a}_{M\rceil}$$

$$0{,}991^M = 1 - (0{,}00991)(22{,}872)$$

$$M = 25{,}804 \cong 26$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές για το επιτόκιο i και την τυπική απόκλιση του επιτοκίου σ στον κώδικα του Παραρτήματος Α μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις τιμές της περιόδου Μ όπου ελαχιστοποιούν την συνάρτηση θανάτου $g(\,.\,)$.

σ	*i=0,01*	*i=0,03*	*i=0,05*
0,01	*535*	*217*	*142*
0,05	*223*	*110*	*77*
0,10	*112*	*67*	*50*
0,15	*66*	*45*	*35*
0,20	*26*	*32*	*20*
0,30	*2*	*18*	*16*

Πίνακας 1: Οι τιμές του Μ που ελαχιστοποιούν την συνάρτηση θανάτου g(.).

Από αυτά τα αποτελέσματα βλέπουμε ότι για μικρές τιμές του σ, η βέλτιστη επιλογή είναι μεγάλο Μ δηλαδή μεγάλες τιμές για την πιθανότητα θανάτου $q^* = q_{max}$. Αυτό σημαίνει ότι ο κίνδυνός εισφοράς επιτοκίου παραμένει σταθερός. Επίσης όσο αυξάνεται τόσο το σ οι τιμές του Μ μικραίνουν.

Τρίτη υπόθεση

Στις δυο προηγούμενες περιπτώσεις υποθέσαμε ότι το αρχικό απόθεμα είναι ίσο είτε με το μηδέν ($F_0 = 0\ Πρώτη\, υπόθεση$) είτε ότι είναι ίσο με την αναλογιστική υποχρέωση ($F_0 = AL\ \ Δεύτερη\ υπόθεση$). Στη τρίτη και τελευταία υπόθεση θα μελετήσουμε την συμπεριφορά της διακύμανσης της παρούσας αξία των μελλοντικών εισφορών $Var[G(\infty)]$ για $F_0 \neq 0\ και\ F_0 \neq AL$.

Όπως και στις δύο προηγούμενες υποθέσεις θα ξεκινήσουμε με την διακύμανση των συνολικών εισφορών

$$Var[C(t)] = k^2 b a^t \sum_{j=1}^{t} a^{-j}\,[q^j F_0 + AL(1-q^j)]^2$$

$$Var[C(t)] = k^2 b a^t \sum_{j=1}^{t} a^{-j}\left[q^{2j}F_0^2 + 2q^j F_0 AL\left(1-q^j\right) + AL^2(1-q^j)^2\right]$$

$$Var[C(t)] = k^2 b\left[F_0^2 \sum_{j=1}^{t} a^{t-j}\, q^{2j} + 2F_0 AL\left(\sum_{j=1}^{t} a^{t-j}\, q^j - \sum_{j=1}^{t} a^{t-j}\, q^{2j}\right) + AL^2 \sum_{j=1}^{t} a^{t-j}\,(1-q^j)^2\right]$$

$$Var[C(t)] = k^2 b\left[F_0^2 \sum_{j=1}^{t} a^{t-j}\, q^{2j} + 2F_0 AL\left(\sum_{j=1}^{t} a^{t-j}\, q^j - \sum_{j=1}^{t} a^{t-j}\, q^{2j}\right) + AL^2\left(\sum_{j=1}^{t} a^{t-j} - 2\sum_{j=1}^{t} a^{t-j} q^j + \sum_{j=1}^{t} a^{t-j}\, q^{2j}\right)\right]$$

$$Var[C(t)] = k^2 b\left[q^2 F_0^2 \frac{a^t - q^{2t}}{a-q^2} + 2qF_0 AL\left(\frac{a^t-q^t}{a-q} - q\frac{a^t-q^{2t}}{a-q^2}\right) + AL^2\left(\frac{1-a^t}{1-a} - 2q\frac{a^t-q^t}{a-q} + q^2\frac{a^t-q^{2t}}{a-q^2}\right)\right]$$

Όποτε από (3.18)

$$\begin{aligned}Var[G(\infty)] = k^2 b \sum_{s=1}^{\infty} u^{2s}&\left[q^2 F_0^2 \frac{a^s-q^{2s}}{a-q^2} + 2qF_0 AL\left(\frac{a^s-q^s}{a-q} - q\frac{a^s-q^{2s}}{a-q^2}\right)\right. \\ &\left.+ AL^2\left(\frac{1-a^s}{1-a} - 2q\frac{a^s-q^s}{a-q} + q^2\frac{a^s-q^{2s}}{a-q^2}\right)\right] \\ + 2\sum_{s=2}^{\infty}\sum_{t=1}^{s-1} u^s u^t q^{s-t}&\left[q^2 F_0^2 \frac{a^t-q^{2t}}{a-q^2} + 2qF_0 AL\left(\frac{a^t-q^t}{a-q} - q\frac{a^t-q^{2t}}{a-q^2}\right)\right. \\ &\left.+ AL^2\left(\frac{1-a^t}{1-a} - 2q\frac{a^t-q^t}{a-q} + q^2\frac{a^t-q^{2t}}{a-q^2}\right)\right]\end{aligned}$$

$$Var[G(\infty)] = k^2 b\left[\frac{u^2q^2F_0^2}{(1-au^2)(1-q^2u^2)} + 2qF_0AL\left(\frac{u^2}{(1-au^2)(1-qu^2)} - \frac{u^2q^2}{(1-au^2)(1-q^2u^2)}\right)\right] + AL^2\left(\frac{u^2}{(1-u^2)(1-au^2)} - \frac{2qu^2}{(1-au^2)(1-qu^2)} + \frac{q^2u^2}{(1-au^2)(1-(qu)^2}\right) + \frac{2u^3q^3F_0^2}{(1-uq)(1-u^2)(1-au^2)}$$

$$+2qF_0AL\left(\frac{qu^3}{(1-uq)(1-au^2)(1-qu^2)} - \frac{2u^3q^2}{(1-uq)(1-au^2)(1-q^2u^2)}\right) + AL^2\left(\frac{2qu^3}{(1-uq)(1-u^2)(1-au^2)} - \frac{4u^3q^3}{(1-uq)(1-au^2)(1-qu^2)} + \frac{2u^3q^2}{(1-uq)(1-au^2)(1-q^2u^2)}\right)$$

Θυμίζουμε ότι $k = 1 - uq$,

$$Var[G(\infty)] = \frac{bAL^2u^2(1-u^2q^2)}{(1-u^2)(1-au^2)} + \frac{2AL(F_0-AL)bu^2q(1-u^2q^2)}{(1-au^2)(1-qu^2)} + \frac{b(F_0-AL)u^2q^2}{(1-au^2)} \qquad (3.25)$$

Παρατηρούμε ότι το πρώτο μέρος της (3.25) είναι η διακύμανση της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισφορών της πρώτης υπόθεσης $(F_0 = AL)$.

Η διακύμανση της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισφορών $Var[G(\infty)]$ ελαχιστοποιείται για τις τιμές του Μ μεταξύ αυτών που λαμβάνονται από της υποθέσεις 1 και 2. Για παράδειγμα, όταν $F_0 = 1/2AL, i = 1\% \;\; \kappa\alpha\iota\; \sigma = 0.20$, η τιμή του $M = 2$ και όταν $F_0 = 1/4AL$, η τιμ του $M = 10$, και οι δύο βρίσκονται μεταξύ των τιμών από την υπόθεση 1 (Μ = 1) και από την υπόθεση 2 (Μ = 26). Αυτό φαίνεται και στον παρακάτω πίνακα των τιμών του Μ που ελαχιστοποιούν την συνάρτηση θανάτου.

σ	i=0,01	i=0,03	i=0,05
0,01	70	24	16
0,05	60	23	14
0,10	42	20	13
0,15	28	16	11
0,20	19	13	10
0,30	11	8	7

Πίνακας 2: Οι τιμές του Μ που ελαχιστοποιούν την συνάρτηση θανάτου.

3.4 Άλλοι μέθοδοι Χρηματοδότησης

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε και κάποιες άλλες σημαντικές μεθόδους χρηματοδότησης που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της βασικής υποχρεώσεις για τα συνταξιοδοτικά σχήματα προκαθορισμένων παροχών.

3.4.1 Αθροιστική Μέθοδος Χρηματοδότησης

Στην συγκεκριμένη μέθοδο η συνολική συνεισφορά σχετίζεται άμεσα με τη διαφορά μεταξύ της παρούσας αξίας των μελλοντικών παροχών και του ταμείου.

$$C(t) = \frac{PVB - F(t)}{PVS} S$$

Όπου S είναι η συνολική μισθοδοσία, PVB η παρούσα αξία των μελλοντικών παροχών και PVS είναι η παρούσα αξία των μελλοντικών κερδών των τρεχόντων μελών. Τα S, PVB και PVS είναι συγκεντρωτικές τιμές, που σχετίζονται με ολόκληρο τον πληθυσμό των τρεχόντων μελών και εδώ υποθέτουμε ότι είναι σταθερές.

Στη συνέχεια, ο Dufresne (1986,1988) έδειξε ότι οι (3.11) και (3.12) γίνονται

$$EF(t) = q^t F_0 + \frac{1 - q^t}{1 - q} r \qquad \kappa\alpha\iota \qquad E[C(t)] = k[PVB - EF(t)]$$

Όπου,

$$q = (1+i)(1-k), \quad k = \frac{S}{PVS} \quad \kappa\alpha\iota \quad r = (1+i)\left(\frac{PVB}{PVS}S - B\right)$$

Οι παραπάνω συναρτήσεις για την μέση τιμή των συνολικών εισφορών και του αποθέματος είναι συγκρίσιμες με τις συναρτήσεις που μελετήσαμε στη διπλωματική εργασία (3.11) και (3.12) οπότε θα έχουν παρόμοια αποτελέσματα για την μέση τιμή $E[G(\infty)]$ και την διακύμανση $Var[G(\infty)]$ της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισφορών.

3.4.2 Εφαρμογή καθυστερήσεων

Σε αυτή την ενότητα θα αναφέρουμε την εφαρμογή καθυστερήσεων με την οποία ασχολήθηκαν Ζιμπίδης και Haberman [21].

Θα μπορούσαμε να εισαγάγουμε μια χρονική καθυστέρηση στον καθορισμό του ποσοστού συνεισφοράς σε σχέση με το απόθεμα του ταμείου.

$$C(t) = NC + k[AL - F(t-1)]$$

Ισχύει,

$$E[F(t)] = AL + a_0\mu_1^t + a_1\mu_2^t$$

Όπου $\alpha_0 \; \kappa\alpha\iota \; \alpha_1$ καθορίζονται από τις αρχικές συνθήκες του αποθέματος της χρονικές στιγμές $F_0 \; \kappa\alpha\iota \; F_{-1}$, και μ_ι είναι οι τετραγωνικές ρίζες της εξίσωσης.

$$y^2 - vy + vk = 0 \quad \acute{o}\pi o\upsilon \quad v = 1 + i$$

Όποτε,

$$E[G\infty)] = \sum_{s=0}^{\infty} u^2 E[C(s)] = \sum_{s=0}^{\infty} u^2 (NC + k[AL - F(t-1)])$$

$$E[G\infty)] = \sum_{s=0}^{\infty} u^2[NC - k(a_0\mu_1^{s-1} + a_1\mu_2^{s-1}]$$

$$E[G\infty)] = \frac{NC}{d} - k\left(\frac{a_0}{\mu_1(1-\mu_1 v)} + \frac{a_1}{\mu_2(1-\mu_2 v)}\right)$$

Η παραπάνω συνάρτηση έχει παρόμοιοι αποτέλεσμα με την παρακάτω συνάρτηση που μελετήσαμε σε αυτή την διπλωματική εργασία.

$$E[G(\infty)] = \frac{NC}{d} - F_0 + AL$$

Συμπεράσματα

Στην εργασία αύτη, μελετήσαμε τον κίνδυνο εισφοράς σε προκαθορισμένα συνταξιοδοτικά σχήματα. Βασικός μας στόχος ήταν η μελέτη της συμπεριφορά του κινδύνου εισφοράς και ο περιορισμός της επίδρασης του στο συνταξιοδοτικό ταμείο. Ο περιορισμός αυτός επετεύχθη με την ελαχιστοποίηση ενός συγκεκριμένου μέτρου θέσης, τη διακύμανση της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισφορών.

Αναλύσαμε την συμπεριφορά της διακύμανσης της παρούσας αξίας των μελλοντικών εισφορών σε τρεις διαφορετικές υποθέσεις όσο αφορά την σχέση μεταξύ του αρχικού αποθεματικού F_0 και της αναλογιστικής υποχρεώσεις AL του συνταξιοδοτικού σχήματος. Παρατηρήσαμε ότι και στις τρεις υποθέσεις η διακύμανση εξαρτάτε από ένα σταθερό μέλος και ένα μεταβλητό. Ποιο συγκριμένα δείξαμε ότι στην τρίτη υπόθεση περιλαμβάνονται και στοιχεία και από τις άλλες δύο.

Επίσης όλα αυτά τα αναλύσαμε και αριθμητικά μέσο εφαρμογών και είδαμε ότι η μικρότερες τιμές του κινδύνου εισφοράς παρατηρούνται στην πρώτη υπόθεση και οι μεγαλύτερες στην δεύτερη με την τρίτη να λαμβάνει τιμές μεταξύ των άλλων δύο.

Εν κατακλείδι, στα συνταξιοδοτικά σχήματα προκαθορισμένων παροχών υπάρχει η ανάγκη τακτικής αναλογιστικής παρακολουθήσεις για τυχόν αναπροσαρμογή των εισφορών προκειμένου αν επιτευχθεί η μέγιστη δυνατή παροχή προς τα μέλη του ταμείου.

Παράρτημα Α

Παραθέτουμε τον κώδικα του Mathematica τόσο για τον υπολογισμό για τις ρίζες της κυβικής εξίσωσης της πιθανότητας θανάτου όσο και για τον υπολογισμό των Μ περιόδων.

```
i=0.01

s=0.20

b=(s/(1+i))^2

u=1/(1+i)

FullSimplify[[NSolve[q^3*(1+b)*u^4*(1-u^2)-
q^2*u^4*b+q*u^2*b+u^2-1==0,q]]

qmax=(1+b)^(-1/2)

q=0.965842

FullSimplify[NSolve[(1+i)*(1-(1/aM))==q,aM]]

aM=22.872

FullSimplify[NSolve[(1+u^M)/(1-u)==aM,M]]
```

Βιβλιογραφία

Ελληνική

1. Γιαννακοπουλος Α. "Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική" Τόμος Ι. (2003).
2. Δικαιοσυνόπουλος Χ. " Γεωμετρικές Ιδιότητες της Κίνησης Brown" (2012)
3. Ζυμπίδης Α., "Συνταξιοδοτικά Ταμεία και Αναλογιστικές Μελέτες" , Εκδόσεις Εταιρίας Αξιοποίησης και Διαχείρισης της Περιουσίας του ΟΠΑ, (2008).
4. Ηλιόπουλος Γ., " Βασικές Μέθοδοι Εκτίμησης Παραμέτρων με Σημείο και με Δίαστημα", Β' Εκδοση, Εκδόσεις Σταμούλη, (2013).
5. Κούτρα Μ., "Εισαγωγή στις Πιθανότητες Θεωρία και Εφαρμογές", Μέρος 1, Εκδόσεις Σταμούλη, (2004).
6. Κούτρα Μ., "Εισαγωγή στις Πιθανότητες Θεωρία και Εφαρμογές", Μέρος 2, Εκδόσεις Σταμούλη, (2005).
7. Κουτσόπουλος Κ., "Αναλογιστικά Μαθηματικά Θεωρία των Κινδύνων", Μέρος 1, Εκδόσεις Συμμετρία, (1999).
8. Σεβρόγλου Β. "Στοχαστικά και Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά", Σημειώσεις, (2019).
9. Τήνιος Π., "Ασφαλιστικό Μια Μέθοδος Ανάγνωσης", Εκδόσεις Κριτική, (2010).
10. Χατζόπουλος Π., " Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής" Εκδόσεις Συμμετρία, (2011).

Ξένη

11. Dufresne D., "The Dynamics of Pension Funding, *The City University Department of Mathematics*, (1986).
12. Dufrense D., "Moments of Pension Contributions and Fund Levels when Rates of Rerurn are Random", *Journal of the Institute Actuaries*,535-554, (1998).
13. Lee E.M. "*An Introduction to Pesion Schemes",* Institute and Faculty of Actuaries, London UK, (1986).

14. Haberman S., "Stochastic investment returns and contribution rate risk in a defined benefit pension scheme", *Insurance: Mathematics and Economics 19* ,127-139,(1997).
15. Habernman S., Sung J-H, "Dynamic approaches to pension funding", *Insurance Mathematics and Economics,* 151-162, (1994).
16. Marshall D.R. and Reeve J.G., "Defined Benefit Pension Shemes – Funding for Ongoing Security", *Presented to the Staple Inn Actuarial Society,*(1993).
17. Owadally M.I. and S. Haberman "*Stochastic investment modeling and optimal pension funding strategies"*, Actiarial Research Paper No 76, City University, UK, (1986).
18. Trowbridge C. L. "Fundamental of Pension Funding" 1952
19. Turner J.A. and Beller D.J "Trends in Pensions", *U.S. Department of Labor,* (1992).
20. Winklevoss H.E. , "Pension Mathematics with Numerical Illustations", Second Edition, *Pension Research Council,*(1993).
21. Zimbidis A. and Haberman, "*Delay feedback the variability of pension contribution and fund levels»,* Insurance Mathematics and Economics 13, 371-285, (1993).

Ηλεκτρονικές ιστοσελίδες

22. http://www.apsep.gr/systimata