

ΤΜΗΜΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΚΑΙ ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΠΜΣ: ΨΗΦΙΑΚΕΣ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΕΣ ΚΑΙ ΔΙΚΤΥΑ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

**ΜΕΛΕΤΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ
ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΙΣΟΔΩΝ – ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΕΞΟΔΩΝ
(MIMO)**

ΜΠΑΡΟΥΣΗΣ ΒΛΑΣΙΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ: ΕΠΙΚ. ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΑΝΑΤΑΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

Περίληψη

Σκοπός της διπλωματικής εργασίας, ήταν η θεωρητική μελέτη και προσομοίωση των συστημάτων MIMO ενός χρήστη, εστιάζοντας όμως το ενδιαφέρον στη χωρητικότητα που μπορεί να επιτευχθεί με αυτά τα συστήματα και σε βασικούς παράγοντες που μπορούν να την επηρεάσουν. Τα συστήματα *πολλαπλών εισόδων – πολλαπλών εξόδων* (*multiple input – multiple output, MIMO*) αποτελούν ένα νέο πεδίο έρευνας στο χώρο των ασύρματων επικοινωνιών. Βασικό χαρακτηριστικό αυτών των συστημάτων είναι η χρήση περισσότερων της μίας κεραιών στο πομπό και το δέκτη, γεγονός που όπως θα δούμε υπόσχεται βελτίωση σε θέματα όπως για παράδειγμα η *αξιοπιστία* και η *χωρητικότητα*.

Αρχικά αναφερθήκαμε στους βασικούς μηχανισμούς διάδοσης σε ασύρματο δίαυλο και κάναμε μία εισαγωγή στα συστήματα MIMO. Ακολούθως παρουσιάσαμε εποπτικά τις κατηγορίες συστημάτων SISO, SIMO, MISO και MIMO, αποδεικνύοντας αναλυτικά και την έκφραση της χωρητικότητας που ισχύει σε κάθε μία κατηγορία. Στη συνέχεια καλύψαμε το βασικό θεωρητικό υπόβαθρο των συστημάτων MIMO και υπολογίσαμε αναλυτικά τη χωρητικότητα στην περίπτωση καναλιών που υπόκεινται σε διαλείψεις Rayleigh και Rician. Επίσης, εξετάσαμε και την επίδραση στη χωρητικότητα καναλιών επιλεκτικών ως προς τη συχνότητα καθώς και την επίδραση που έχει το φαινόμενο της *χωρικής συσχέτισης*. Τέλος, κάναμε μία εισαγωγή στην τεχνική της *εικονικής αναπαράστασης καναλιών* (*virtual channel representation*) και την εφαρμόσαμε για τον υπολογισμό της χωρητικότητας MIMO.

Λέξεις κλειδιά

Εργοδική χωρητικότητα, Outage χωρητικότητα, MIMO, singular value decomposition, Waterfilling, χωρική συσχέτιση, χωρική διαφορισιμότητα, διαλείψεις Rayleigh, διαλείψεις Rician, εικονική αναπαράσταση καναλιών.

Abstract

The purpose of this thesis was the theoretical study and simulation of single – user MIMO systems, focusing on the capacity that can be achieved with those systems and on the parameters that influence it. The multiple input – multiple output systems form a recent research field in the wireless communications section. The basic characteristic of those systems is the use of more than one antennas in the transmitter and the receiver. This fact provides improvement in performance measures such as *reliability* and *capacity*.

Firstly, we referred to the basic propagation mechanisms in a wireless channel and we introduced MIMO systems. Then, we presented in a supervisory way the system categories SISO, SIMO, MISO and MIMO, proving analytically the capacity expression in every one of these categories. In the following, we covered the basic theoretical background of MIMO systems and we estimated the capacity in both Rayleigh and Rician channels. Moreover, we investigated the influence of frequency selective channels and spatial correlation in capacity. Finally, we introduced the virtual channel representation technique and we applied this technique to the estimation of MIMO capacity.

Key words

Ergodic capacity, Outage capacity, MIMO, singular value decomposition, Waterfilling, spatial correlation, spatial diversity, Rayleigh fading, Rician fading, virtual channel representation.

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών *Ψηφιακές Επικοινωνίες και Δίκτυα* του τμήματος *Διδακτικής της Τεχνολογίας και Ψηφιακών Συστημάτων* του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επίκουρο καθηγητή του Πανεπιστημίου Πειραιώς κύριο *Κανάτα Αθανάσιο* για τη σωστή παρότρυνσή του στην επιλογή του συγκεκριμένου θέματος, για την καθοδήγησή του και τη στενή συνεργασία μας καθ' όλη τη διάρκεια της ανάπτυξης. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον υποψήφιο Διδάκτορα του Πανεπιστημίου Πειραιώς κύριο *Θεοφιλάκο Παναγιώτη* για τη σημαντική στήριξη και τις χρήσιμες συμβουλές που μου παρείχε.

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1	1
ΕΙΣΑΓΩΓΗ	1
1.1 ΕΞΕΛΙΞΗ ΤΩΝ ΑΣΥΡΜΑΤΩΝ ΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ	1
1.2 ΒΑΣΙΚΟΙ ΜΗΧΑΝΙΣΜΟΙ ΔΙΑΔΟΣΗΣ.....	2
1.2.1 Απώλειες διάδοσης ελεύθερου χώρου	3
1.2.2 Διαλείψεις μεγάλης κλίμακας (<i>large scale fading</i>).....	5
1.2.3 Διαλείψεις μικρής κλίμακας (<i>small scale fading</i>).....	6
1.3 ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΙΜΟ	10
1.3.1 Κέρδος συστοιχίας (<i>Array gain</i>)	11
1.3.2 Κέρδος διαφορισιμότητας (<i>Diversity Gain</i>).....	11
1.3.3 Χωρική Πολυπλεξία (<i>spatial multiplexing</i>).....	13
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2	14
ΕΠΙΣΚΟΠΗΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ SISO, SIMO, MISO ΚΑΙ MIMO	14
2.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	14
2.2 ΜΟΝΤΕΛΑ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ	14
2.2.1 Σύστημα SISO.....	14
2.2.2 Σύστημα SIMO.....	15
2.2.3 Σύστημα MISO.....	16
2.2.4 Σύστημα MIMO.....	17
2.3 ΜΟΝΤΕΛΑ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ	18
2.3.1 Σύστημα SISO.....	19
2.3.2 Σύστημα SIMO.....	20
2.3.3 Σύστημα MISO.....	21
2.3.4 Σύστημα MIMO.....	22
2.4 ΈΚΦΡΑΣΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΝΑΛΙΩΝ SISO, SIMO, MISO, MIMO.....	23
2.4.1 Γενικά.....	23
2.4.2 Μέτρο πληροφορίας.....	23
2.4.3 Συνδυασμένη και υποσυνθήκη εντροπία.....	25
2.4.4 Αμοιβαία πληροφορία.....	25
2.4.5 Διαφορική εντροπία	26

2.5 ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ SISO.....	27
2.6 ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΝΑΛΙΟΥ SIMO.....	29
2.7 ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΝΑΛΙΟΥ MISO.....	30
2.8 ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ MIMO.....	31
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....	34
ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΝΑΛΙΩΝ MIMO.....	34
3.1 ΜΟΝΤΕΛΟ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ MIMO ΓΙΑ FLAT FADING CHANNEL.....	34
3.1.1 Γενική παρουσίαση.....	34
3.1.2 Singular Value Decomposition (SVD).....	37
3.1.3 Εναλλακτικός τρόπος απόδειξης της χωρητικότητας.....	39
3.2 ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΝΑΛΙΟΥ MIMO ΜΕ RAYLEIGH FADING.....	42
3.2.1 Διαφορισιμότητα σε πομπό και δέκτη (MIMO).....	45
3.2.2 Διαφορισιμότητα λήψης.....	48
3.2.3 Διαφορισιμότητα εκπομπής.....	50
3.2.4 Transmit – receive diversity όταν τα υποκανάλια είναι ορθογώνια μεταξύ τους.....	52
3.3 OUTAGE CAPACITY.....	53
3.4 ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΝΑΛΙΟΥ MIMO ΜΕ RAYLEIGH FADING ΟΤΑΝ ΤΟ ΚΑΝΑΛΙ ΕΙΝΑΙ ΓΝΩΣΤΟ ΣΤΟΝ ΠΟΜΠΟ.....	54
3.5 ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΝΑΛΙΟΥ MIMO ΜΕ RICIAN FADING.....	59
3.5.1 Γενική παρουσίαση.....	59
3.5.2 Διαφορισιμότητα στη μεριά του πομπού και του δέκτη (MIMO).....	63
3.5.3 Διαφορισιμότητα στο δέκτη (SIMO).....	66
3.5.4 Διαφορισιμότητα στον πομπό (MISO).....	67
3.6 ΕΝΑΛΛΑΚΤΙΚΟΣ ΤΡΟΠΟΣ ΣΗΜΑΤΟΔΟΣΙΑΣ.....	68
3.7 ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ MIMO ΟΤΑΝ ΤΟ ΚΑΝΑΛΙ ΕΧΕΙ ΣΥΧΝΟΕΠΙΛΕΚΤΙΚΗ ΣΥΜΠΕΡΙΦΟΡΑ (FREQUENCY SELECTIVE CHANNEL).....	69
3.7.1 Εισαγωγή.....	69
3.7.2 Κανάλι με Rayleigh fading.....	70
3.7.3 Κανάλι με Rician fading.....	73
3.8 SPATIAL FADING CORRELATION.....	74
3.8.1 Γενικά.....	74
3.8.2 Μοντελοποίηση χωρικής συσχέτισης.....	75
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....	83
ΕΙΚΟΝΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΚΑΝΑΛΙΩΝ.....	83
4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....	83

4.2 ΣΤΟΙΧΕΙΟΚΕΡΑΙΕΣ	84
4.2.1 Γενική παρουσίαση	84
4.2.2 μονοδιάστατες συστοιχίες κεραιών με ισαπέχοντα στοιχεία (ULAS)	92
4.3 ΦΥΣΙΚΗ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΠΕΡΙΒΑΛΛΟΝΤΟΣ ΣΚΕΔΑΣΗΣ	98
4.4 ΕΙΚΟΝΙΚΗ ΑΝΑΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΚΑΝΑΛΙΟΥ (VIRTUAL CHANNEL REPRESENTATION)	102
4.4.1 Σχέση μεταξύ εικονικής αναπαράστασης και φυσικών μοντέλων	105
4.4.2 Εικονική αναπαράσταση πρακτικών καναλιών	109
4.4.3 Σχέση μεταξύ παράλληλων καναλιών και διαφορισιμότητας (diversity)	110
4.4.4 Επίδραση της απόστασης μεταξύ των κεραιών στη χωρητικότητα	114
4.5 ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΚΦΡΑΣΗ ΤΗΣ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ ΚΑΝΑΛΙΟΥ ΜΙΜΟ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΤΟΥ ΕΙΚΟΝΙΚΟΥ	
ΠΙΝΑΚΑ \mathbf{H}_v	119
4.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑΣ	121
4.6.1 Μεθοδολογία	121
4.6.2 Γραφική απεικόνιση	122
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ	128
ΑΝΑΦΟΡΕΣ	131

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Εξέλιξη των ασύρματων επικοινωνιών

Η εποχή των ασύρματων επικοινωνιών ξεκινάει στα 1861, όταν ο Maxwell προτείνει την μαθηματική θεωρία των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στο King's College του Λονδίνου. Μερικά χρόνια αργότερα, το 1887, ο Hertz επιδεικνύει πρακτικά την ύπαρξη τέτοιου είδους κυμάτων, χρησιμοποιώντας στάσιμα κύματα (standing waves) στο πανεπιστήμιο της Καρλσρούης. Η χρονολογία ορόσημο για τις ασύρματες επικοινωνίες υπήρξε όμως το 1895, όταν ο Marconi, φοιτητής ακόμα στο πανεπιστήμιο της Μπολόνια, κατασκευάζει και θέτει σε λειτουργία τον ασύρματο τηλεγράφο. Τρία χρόνια αργότερα, το 1898, επιτυγχάνει την ασύρματη ζεύξη του καναλιού της Μάγχης, πλάτους 52 χιλιομέτρων, ενώνοντας το Dover με το Wimereux.

Η αστική χρήση της ασύρματης τεχνολογίας ξεκινά με την εγκατάσταση του πρώτου κινητού τηλεφωνικού συστήματος εύρους 2 MHz, το 1921 για την αστυνομική διεύθυνση του Detroit. Τα πλεονεκτήματα της νέας τεχνολογίας γίνονται αμέσως φανερά, όμως η έλλειψη καναλιών στις ζώνες χαμηλών συχνοτήτων καθιστά ανέφικτη την ευρύτερη χρήση της. Το 1933, ο Armstrong εφευρίσκει τη διαμόρφωση συχνότητας (Frequency Modulation – FM), η οποία έδωσε την δυνατότητα για υψηλής ποιότητας ασύρματες επικοινωνίες. Το 1946 η Bell Systems εισάγει ένα προσωπικό σύστημα επικοινωνιών (Personal Correspondence System) που λειτουργεί στα 150 MHz με κανάλια φωνής διαχωρισμένα ανά 120 KHz. Καθώς η ζήτηση για δημόσιες ασύρματες υπηρεσίες συνεχώς αυξάνεται, η AT&T κατασκευάζει χρησιμοποιώντας τεχνολογία FM το σύστημα IMTS (Improved Mobile Telephone Service). Αυτά είναι τα πρώτα συστήματα κινητής τηλεφωνίας που συνδέονται με το ήδη υπάρχον δημόσιο τηλεφωνικό δίκτυο και χρησιμοποιούν καθορισμένο αριθμό ραδιοκαναλιών σε μια περιορισμένη γεωγραφική περιοχή.

Η επέκταση της τεχνολογίας για την εξυπηρέτηση περισσότερων χρηστών με την χρήση πλήρως αμφίδρομων καναλιών (full duplex channels) προϋπόθετε την επέκταση του εύρους ζώνης. Η λύση ήταν τα κυψελωτά συστήματα, που συνέλαβε ο Ring στα εργαστήρια Bell το 1947. Η κυψελωτή προσέγγιση ως γνωστόν, διαιρεί την περιοχή ραδιοκάλυψης σε μικρότερα τμήματα ή κυψέλες (cells), σε κάθε μια από τις οποίες χρησιμοποιείται υποσύνολο των συνολικά διαθέσιμων διαύλων. Το πρώτο αναλογικό κυψελωτό σύστημα υψηλής χωρητικότητας κατασκευάστηκε από την AT&T το 1970 και ονομάστηκε AMPS (Advanced Mobile Phone Service). Από τότε τα κυψελωτά συστήματα αναπτύχθηκαν με εκρηκτικό ρυθμό με αποτέλεσμα στη σύγχρονη εποχή να εξυπηρετούν σχεδόν 1 δισεκατομμύριο συνδρομητών. Από τα υπάρχοντα συστήματα ξεχωρίζει το σύστημα GSM (Global System for Mobile) που χρησιμοποιείται στην Ευρώπη και κατέχει το μεγαλύτερο μερίδιο στην παγκόσμια αγορά. Στις Ηνωμένες Πολιτείες στα κυψελωτά δίκτυα εφαρμόζεται το πρότυπο IS – 136, που χρησιμοποιεί την τεχνική πολλαπλής πρόσβασης με διαίρεση χρόνου (TDMA – Time Division Multiple Access) και το IS – 95, που βασίζεται στην πολλαπλή πρόσβαση με διαίρεση κώδικα (CDMA – Code Division Multiple Access). Οι διαρκώς αυξανόμενες απαιτήσεις για υψηλότερες φασματικές αποδόσεις και ρυθμούς μετάδοσης οδήγησαν στην ανάπτυξη των λεγόμενων τεχνολογιών τρίτης γενιάς (3G), η οποία όμως απέτυχε να προσφέρει ένα παγκοσμίως κοινό πρότυπο. Τα πρότυπα UMTS (ευρυζωνική CDMA) και 1XRTT είναι σήμερα τα πιο διαδεδομένα ασύρματα συστήματα τρίτης γενιάς.

1.2 Βασικοί μηχανισμοί διάδοσης

Το σήμα κατά τη διάδοσή του από τον πομπό στο δέκτη, μέσω ενός ασύρματου διαύλου, υπόκειται σε ορισμένους μηχανισμούς διάδοσης που είναι η απευθείας διάδοση, η ανάκλαση, η περίθλαση και η σκέδαση. Η ύπαρξη αυτών των μηχανισμών οφείλεται στην παρουσία διαφόρων φυσικών ή τεχνητών αντικειμένων, που παρεμβάλλονται μεταξύ πομπού και δέκτη και συμμετέχουν στη διάδοση. Φυσικά, αυτά τα αντικείμενα συνήθως κινούνται με τυχαίο τρόπο μέσα στο περιβάλλον. Αποτέλεσμα αυτών των μηχανισμών διάδοσης είναι το μεταδιδόμενο σήμα να φτάνει στο δέκτη μέσω πολλών

διαφορετικών διαδρομών. Αυτό το φαινόμενο καλείται *πολυδιαδρομική διάδοση* (*multipath propagation*).

Οι πολυδιαδρομικές συνιστώσες που λαμβάνει ο δέκτης γενικά έρχονται από διαφορετικές κατευθύνσεις και διαφέρουν μεταξύ τους στο χρόνο άφιξης, στη φάση αλλά και στο πλάτος. Ωστόσο συνδυάζονται μεταξύ τους στην κεραία λήψης, με αποτέλεσμα να παράγεται ένα σύνθετο λαμβανόμενο σήμα. Αυτός ο συνδυασμός των συνιστωσών του σήματος στην κεραία λήψης οδηγεί τελικά σε αρνητική ή θετική συμβολή, που εκφράζεται με τις αυξομειώσεις στο πλάτος του λαμβανόμενου σήματος. Αυτές οι διακυμάνσεις στο πλάτος του σήματος λήψης ονομάζονται *διαλείψεις* (*fading*).

Όσον αφορά το πλάτος του σήματος λήψης, μπορεί να θεωρηθεί ως άθροισμα τριών συνιστωσών που είναι η μέση τιμή των απωλειών διάδοσης (mean propagation path loss), οι διαλείψεις ευρείας κλίμακας (large scale fading) και οι διαλείψεις μικρής κλίμακας (small scale fading).

1.2.1 Απώλειες διάδοσης ελεύθερου χώρου

Σε αυτό το μοντέλο διάδοσης γίνεται η υπόθεση ότι μεταξύ της κεραίας πομπού και της κεραίας του δέκτη δεν υπάρχουν καθόλου τεχνητά ή φυσικά εμπόδια τα οποία θα μπορούσαν να προκαλέσουν ανάκλαση ή επιπλέον εξασθένηση του σήματος που διαδίδεται. Αντίθετα, το σήμα που εκπέμπεται φτάνει στην κεραία του δέκτη μέσω απευθείας διαδρομής (Line Of Sight, LOS). Όπως γίνεται κατανοητό, η υπόθεση ελεύθερου χώρου είναι το απλούστερο μοντέλο υπολογισμού των απωλειών διάδοσης. Κάτω από αυτές τις συνθήκες και υπό την προϋπόθεση ότι οι κεραίες εμπομπής και λήψης είναι ιστροπικές, η ισχύς που λαμβάνεται στο δέκτη θα είναι ελαττωμένη σε σχέση με την ισχύ εκπομπής κατά ένα παράγοντα L_s που εκφράζει τις *απώλειες ελεύθερου χώρου* (*Free Space Loss, FSL*). Θα ισχύει:

$$L_s = \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right)^2 \quad (1.1)$$

όπου με d συμβολίζουμε την απόσταση μεταξύ κεραίας εκπομπής και κεραίας λήψης και λ είναι το μήκος κύματος του διαδιδόμενου σήματος. Η ισχύς λήψης μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$P_R = \frac{P_T G_T G_R}{L_s} \quad (1.2)$$

όπου P_T και P_R είναι η εκπεμπόμενη και λαμβανόμενη ισχύς, G_T και G_R είναι τα κέρδη των κεραιών εκπομπής και λήψης αντίστοιχα. Η εξίσωση (1.2) είναι η γνωστή εξίσωση του Harald Friis. Εκφρασμένη σε decibels η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$P_R (dB) = P_T (dB) + G_R (dB) + G_T (dB) - L_s (dB) \quad (1.3)$$

όπου στην εξίσωση (1.3) ισχύει: $X (dB) = 10 \log_{10} (X)$.

Η εξίσωση του Friis προϋποθέτει επίπεδο μέτωπο ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων στην θεωρούμενη απόσταση d , πράγμα που σημαίνει ότι ισχύει για το μακρινό πεδίο, δηλαδή όταν:

$$d > \frac{2D^2}{\lambda} \quad (1.4)$$

όπου D είναι η μέγιστη γραμμική διάσταση της κεραίας. Επιπλέον πρέπει να ισχύουν:

$$\begin{aligned} \frac{2D^2}{\lambda} &\ll D \\ \frac{2D^2}{\lambda} &\ll \lambda \end{aligned} \quad (1.5)$$

Ωστόσο, πολλές φορές είναι επιθυμητό να εκφράζουμε τη λαμβανόμενη ισχύ P_R ή τις απώλειες διάδοσης L_s σε απόσταση d συναρτήσει της ισχύος ή των απωλειών διάδοσης σε κάποιο σημείο αναφοράς d_o . Η λαμβανόμενη ισχύς στο σημείο αναφοράς $P_R(d_o)$ μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση (1.2), με την προϋπόθεση ότι το σημείο αναφοράς βρίσκεται στο μακρινό πεδίο, ή να προκύψει από μετρήσεις ως μέση τιμή μετρήσεων στην απόσταση d_o από τον πομπό. Επίσης, απαίτηση είναι να ισχύει: $d > d_o$. Σε αυτή την περίπτωση, λόγω της (1.2) θα είναι:

$$P_R(d) = P_R(d_o) \left(\frac{d_o}{d} \right)^2, \quad d > d_o > \frac{2D^2}{\lambda} \quad (1.6)$$

Σε decibel η παραπάνω εξίσωση γράφεται:

$$P_R(d)(dB) = P_R(d_o)(dB) + 10 \log_{10} \left(\frac{d_o}{d} \right)^2, \quad d > d_o > \frac{2D^2}{\lambda} \quad (1.7)$$

Αντίστοιχα, λόγω της (1.1) θα ισχύει:

$$L_s(d) = L_s(d_o) \left(\frac{d}{d_o} \right)^2, \quad d > d_o > \frac{2D^2}{\lambda} \quad (1.8)$$

και σε λογαριθμική κλίμακα θα είναι:

$$L_s(d)(dB) = L_s(d_o)(dB) + 10 \log_{10} \left(\frac{d}{d_o} \right)^2 \quad (1.9)$$

Σημειώνουμε εδώ ότι οι σχέσεις (1.7) και (1.9) ισχύουν στην περίπτωση του ελεύθερου χώρου (Free Space Loss, FSL). Στη γενικότερη περίπτωση, θα ισχύουν τα εξής:

$$P_R(d)(dB) = P_R(d_o)(dB) + 10 \log_2 \left(\frac{d_o}{d} \right)^n \quad (1.10)$$

$$L_s(d)(dB) = L_s(d_o)(dB) + 10 \log_2 \left(\frac{d}{d_o} \right)^n \quad (1.11)$$

Όπου n είναι ο συντελεστής απωλειών διάδοσης (*path loss factor*), η τιμή του οποίου κυμαίνεται από 2 έως 4 για αστικές περιοχές και εξαρτάται από το εκάστοτε περιβάλλον. Εύκολα παρατηρούμε από τις δύο παραπάνω εξισώσεις, ότι για $n=2$ προκύπτουν οι (1.7) και (1.9) που ισχύουν στην περίπτωση ελεύθερου χώρου.

1.2.2 Διαλείψεις μεγάλης κλίμακας (large scale fading)

Αυτού του είδους οι διαλείψεις οφείλονται στην παρουσία αντικειμένων στο χώρο διάδοσης τα οποία είναι μακριά από το δέκτη, έτσι ώστε η κίνηση του δέκτη σε σχέση με αυτά τα αντικείμενα να μπορεί να θεωρηθεί αργή. Οι διαλείψεις μεγάλης κλίμακας

εκφράζουν τη μέση εξασθένηση της ισχύος του λαμβανόμενου σήματος λόγω της κίνησης σε μεγάλες περιοχές. Μετρήσεις έχουν δείξει ότι για οποιαδήποτε τιμή της απόστασης d , η λαμβανόμενη ισχύς εκφρασμένη σε λογαριθμική κλίμακα, ακολουθεί κανονική (Gaussian) κατανομή. Άρα η λαμβανόμενη ισχύς μπορεί τελικά να εκφραστεί ως:

$$P_R(d) = \overline{P_R(d_o)} + 10n \log_{10} \left(\frac{d_o}{d} \right) + X_\sigma \quad (dB), \quad d > d_o > \frac{2D^2}{\lambda} \quad (1.12)$$

όπου X_σ είναι Gaussian τυχαία μεταβλητή εκφρασμένη σε dB, μηδενικής μέσης τιμής και με τυπική απόκλιση σ (η οποία είναι επίσης εκφρασμένη σε dB).

Επειδή η λαμβανόμενη ισχύς ακολουθεί την κανονική κατανομή όταν είναι εκφρασμένη σε dB, συχνά λέμε ότι ακολουθεί τη *λογαριθμοκανονική κατανομή (log-normal distribution)*. Στην εξίσωση (1.12) με $\overline{P_R(d_o)}$ συμβολίζουμε τη μέση λαμβανόμενη ισχύ στην απόσταση αναφοράς. Επίσης, συνήθεις τιμές της τυπικής απόκλισης σ της τυχαίας μεταβλητής X_σ είναι από $4dB$ έως $12dB$ με τυπική τιμή τα $8dB$.

1.2.3 Διαλείψεις μικρής κλίμακας (small scale fading)

Με τον όρο *διαλείψεις μικρής κλίμακας* εννοούμε τις απότομες μεταβολές του πλάτους του λαμβανόμενου σήματος (ή αντίστοιχα της ισχύος) λόγω μικρών μετατοπίσεων του δέκτη. Οι διαλείψεις μικρής κλίμακας οφείλονται στην ύπαρξη σκεδαστών σε κοντινή απόσταση από το δέκτη και στη μετατόπιση του δέκτη σε σχέση με αυτούς τους σκεδαστές.

Το λαμβανόμενο σήμα θα προκύπτει ως συνδυασμός πολυδιαδρομικών συνιστωσών που λαμβάνει ο δέκτης. Αυτές οι συνιστώσες καταφθάνουν από πολλές κατευθύνσεις και διαφέρουν μεταξύ τους στο χρόνο άφιξης, στη φάση αλλά και στο πλάτος. Αυτό σημαίνει ότι όταν οι πολυδιαδρομικές συνιστώσες προστίθενται στην κεραία του δέκτη, συμβάλουν θετικά ή αρνητικά στο συνολικό λαμβανόμενο σήμα. Αυτή η θετική ή αρνητική συμβολή αιτιολογεί τις (απότομες) αυξομειώσεις στο πλάτος του λαμβανόμενου σήματος. Σημειώνουμε εδώ ότι το γεγονός ότι οι πολυδιαδρομικές

συνιστώσες διαφέρουν μεταξύ τους ως προς το χρόνο άφιξης, προκαλεί τη *χρονική διασπορά* (*time dispersion*) του σήματος. Στη συνέχεια αναφέρουμε επιγραμματικά δύο μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για τη μοντελοποίηση των διαλείψεων μικρής κλίμακας.

Κατανομή Rayleigh

Έστω ότι το σήμα λήψης (μιγαδική περιβάλλουσα) προκύπτει από υπέρθεση μεγάλου αριθμού πολυδιαδρομικών συνιστωσών και πως δεν υπάρχει καθόλου απευθείας διάδοση (Line Of Sight, LOS). Τότε, από το *κεντρικό οριακό θεώρημα* (*Central Limit Theorem*) προκύπτει ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της μιγαδικής περιβάλλουσας θα είναι ανεξάρτητες Gaussian τυχαίες μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή και ίδια διασπορά σ^2 . Αν συμβολίσουμε τη λαμβανόμενη μιγαδική περιβάλλουσα με $c(t)$, μπορούμε να γράψουμε:

$$c(t) = I(t) + jQ(t) = r(t)e^{j\theta(t)} \quad (1.13)$$

όπου θα ισχύουν:

$$\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{[I(t)]^2 + [Q(t)]^2} \\ \theta(t) &= \arctan \left[\frac{Q(t)}{I(t)} \right] \end{aligned} \quad (1.14)$$

Στην περίπτωση αυτή, η $c(t)$ είναι μιγαδική τυχαία μεταβλητή και καλείται *circularly symmetric Gaussian*. Επίσης, από τα παραπάνω προκύπτει ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Probability Density Function, PDF) της τυχαίας μεταβλητής I θα είναι:

$$p_I(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}, \quad \sigma^2 = \frac{P_o}{2} \quad (1.15)$$

όπου P_o είναι η ισχύς της μιγαδικής περιβάλλουσας του σήματος λήψης. Όμοια ισχύουν και για την τυχαία μεταβλητή Q .

Όμως, εφόσον οι τυχαίες μεταβλητές $I(t)$ και $Q(t)$ είναι ανεξάρτητες Gaussian τυχαίες μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή και ίδια διασπορά σ^2 , τότε μέσω της σχέσης

(1.14) θα προκύπτει μία νέα τυχαία μεταβλητή $r(t)$ η οποία θα ακολουθεί την κατανομή *Rayleigh (Rayleigh distribution)*, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας:

$$p_r(r) = \frac{r}{\sigma^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \quad (1.16)$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση θα προκύψει η εξής συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (Cumulative Distribution Function, CDF):

$$F_r(R) = \Pr(r \leq R) = \int_0^R p_r(r) dr = 1 - e^{-\frac{R^2}{2\sigma^2}} \quad (1.17)$$

Η μέση τιμή της κατανομής Rayleigh θα είναι:

$$E[r] = \int_0^{\infty} r p(r) dr = \sigma \sqrt{\frac{\pi}{2}} = 1.2533\sigma \quad (1.18)$$

Η μέση τετραγωνική τιμή θα είναι:

$$E[r^2] = \int_0^{\infty} r^2 p(r) dr = 2\sigma^2 \quad (1.19)$$

Η ενεργός τιμή (RMS) θα είναι η τετραγωνική ρίζα της μέσης τετραγωνικής τιμής, οπότε θα είναι $\sqrt{2}\sigma = 1.4142\sigma$. Όσον αφορά τη διασπορά, θα υπολογίζεται ως εξής:

$$\sigma_r^2 = E[r^2] - (E[r])^2 = 2\sigma^2 - \sigma^2 \frac{\pi}{2} = 0.4292\sigma^2 \quad (1.20)$$

Όσον αφορά τη φάση, θα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο $[0, 2\pi)$. Άρα η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας θα είναι:

$$p(\theta) = \frac{1}{2\pi} \quad (1.21)$$

Άρα η μέση τιμή θα είναι:

$$E[\theta] = \int_0^{2\pi} \theta p(\theta) d\theta = \pi \quad (1.22)$$

Η μέση τετραγωνική τιμή θα είναι:

$$E[\theta^2] = \int_0^{2\pi} \theta^2 p(\theta) d\theta = \frac{4\pi^2}{3} \quad (1.23)$$

Άρα η διασπορά θα είναι:

$$\sigma_r^2 = E[\theta^2] - (E[\theta])^2 = \frac{\pi^2}{3} \quad (1.24)$$

Κατανομή Rician

Στην περίπτωση ύπαρξης και μίας σταθερής συνιστώσας με ισχυρό πλάτος (π.χ. συνιστώσα απευθείας διάδοσης ή ισχυρή ανάκλαση) οι κατανομές του πλάτους και της φάσης της μιγαδικής περιβάλλουσας είναι διαφορετικές. Η μιγαδική περιβάλλουσα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$c = c_o + \sum_{i=1}^N c_i e^{j\theta_i} \quad (1.25)$$

όπου με c_o μοντελοποιούμε τη συνιστώσα με ισχυρό πλάτος και θεωρούμε N ανακλώμενες συνιστώσες. Σε αυτή την περίπτωση το πραγματικό και φανταστικό μέρος της μιγαδικής περιβάλλουσας c είναι πάλι Gaussian τυχαίες μεταβλητές με την ίδια διασπορά αλλά με μη μηδενική μέση τιμή.

Το πλάτος της μιγαδικής περιβάλλουσας θα ακολουθεί την κατανομή Rice, της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η εξής:

$$p_r(r) = \frac{r}{\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2 + |c_o|^2}{2\sigma^2}\right) I_o\left(\frac{r|c_o|}{\sigma^2}\right) \quad (1.26)$$

όπου $I_o(x)$ είναι η τοποποιημένη συνάρτηση Bessel πρώτου είδους και μηδενικής τάξης που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$I_o(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{x \cos(\theta)} d\theta \quad (1.27)$$

Μία σημαντική παράμετρος είναι ο λόγος της ισχύος της απευθείας συνιστώσας προς την ισχύ των πολυδιαδρομικών συνιστωσών που καλείται *Rician factor*. Θα ισχύει:

$$K = \frac{|c_o|^2}{\sum_{i=1}^N |c_i|^2} \quad (1.28)$$

Σημειώνουμε εδώ, ότι όταν δεν υπάρχει απευθείας συνιστώσα διάδοσης θα είναι $K = 0$ και η κατανομή γίνεται Rayleigh.

1.3 Εισαγωγή στα συστήματα MIMO

Από τα προηγούμενα, γίνεται κατανοητό ότι η διάδοση σημάτων μέσω ραδιοδιαύλου είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη [1]. Βέβαια, εκτός από την εμφάνιση διαλείψεων, κατά τη σχεδίαση ασύρματων συστημάτων επικοινωνίας πρέπει να αντιμετωπιστούν επιπλέον προβλήματα, των οποίων η παρουσία οφείλεται στη φύση της διάδοσης. Για παράδειγμα οι ομοδιαυλικές παρεμβολές αποτελούν ένα βασικό πρόβλημα. Επιπλέον, εξαιτίας των μηχανισμών διάδοσης στους οποίους υπόκειται το σήμα, προκύπτει η *διασπορά φάσματος (Doppler spread)*. Επίσης ένα πρόβλημα είναι και η *χρονική διασπορά (time spread)* του σήματος, γεγονός που οδηγεί σε *διασυμβολική παρεμβολή (intersymbol interference)*[2].

Από τα παραπάνω, προκύπτει ότι η σχεδίαση και υλοποίηση ασύρματων συστημάτων επικοινωνίας είναι μία εξαιρετικά δύσκολη διαδικασία. Τα βασικά κριτήρια με τα οποία μπορεί να αξιολογηθούν τα ασύρματα συστήματα επικοινωνίας είναι η *αξιοπιστία* και η δυνατότητα μετάδοσης *υψηλού ρυθμού δεδομένων*. Ένα μέτρο της αξιοπιστίας είναι ο ρυθμός σφαλμάτων (bit error rate, BER). Δεδομένου του περιορισμού ισχύος εκπομπής, ο ρυθμός σφαλμάτων πρέπει να διατηρηθεί σε κάθε περίπτωση κάτω από σαφώς ορισμένα επίπεδα. Ο υψηλός ρυθμός δεδομένων απαιτεί μεγάλο εύρος ζώνης. Όμως το εύρος ζώνης είναι πάντα περιορισμένο, οπότε πρέπει να γίνεται βέλτιστη εκμετάλλευση του διαθέσιμου φάσματος. Δηλαδή σκοπός είναι να επιτευχθεί ο μέγιστος ρυθμός μετάδοσης συμβόλων ανά Herz. Το κριτήριο αυτό καλείται διαφορετικά και *φασματική απόδοση* του συστήματος.

Τα προβλήματα της ασύρματης διάδοσης από τη μία μεριά και οι υψηλές επιδόσεις που απαιτούνται από τα ασύρματα συστήματα από την άλλη μεριά, οδήγησαν στην ανάπτυξη τεχνικών, με βάση τις οποίες μπορεί να εξασφαλιστεί υψηλή χωρητικότητα και αξιοπιστία υπό τις δυσμενείς συνθήκες διάδοσης. Έχουν πραγματοποιηθεί σημαντικές εξελίξεις προς αυτή την κατεύθυνση πρόσφατα, ανάμεσα στις οποίες περίοπτη θέση

κατέχουν τα συστήματα πολλαπλών εισόδων – πολλαπλών εξόδων (*multiple input – multiple output, MIMO*).

Τέτοιου είδους συστήματα υλοποιούνται με χρήση περισσότερων της μίας κεραιών στον πομπό και/ή στο δέκτη. Με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να εκμεταλευτούμε και τη διάσταση του χώρου για τη βελτίωση της επίδοσης των ασύρματων συστημάτων [3]. Άρα, μπορούμε να πούμε ότι στα συστήματα MIMO υπάρχει η δυνατότητα για ταυτόχρονη επεξεργασία του σήματος στο πεδίο του χώρου και του χρόνου (*space – time processing*).

Η χρήση πολλών κεραιών σε πομπό και δέκτη, προσφέρει όπως θα δούμε στη συνέχεια τη δυνατότητα αποσύνθεσης του ασύρματου διαύλου σε παράλληλα υποκανάλια. Στη συνέχεια θα εξηγήσουμε συνοπτικά ορισμένα βασικά χαρακτηριστικά των συστημάτων MIMO, χάρη στα οποία εξασφαλίζεται η αξιοπιστία και η υψηλή φασματική απόδοση. Αυτά τα χαρακτηριστικά στην ουσία αποτελούν στρατηγικές υλοποίησης ενός συστήματος MIMO [6], με την έννοια ότι ανάλογα τον τρόπο σχεδίασης του συστήματος και τις απαιτήσεις, κάποια από αυτά τα χαρακτηριστικά θα υφίστανται ενώ κάποια άλλα όχι.

1.3.1 Κέρδος συστοιχίας (Array gain)

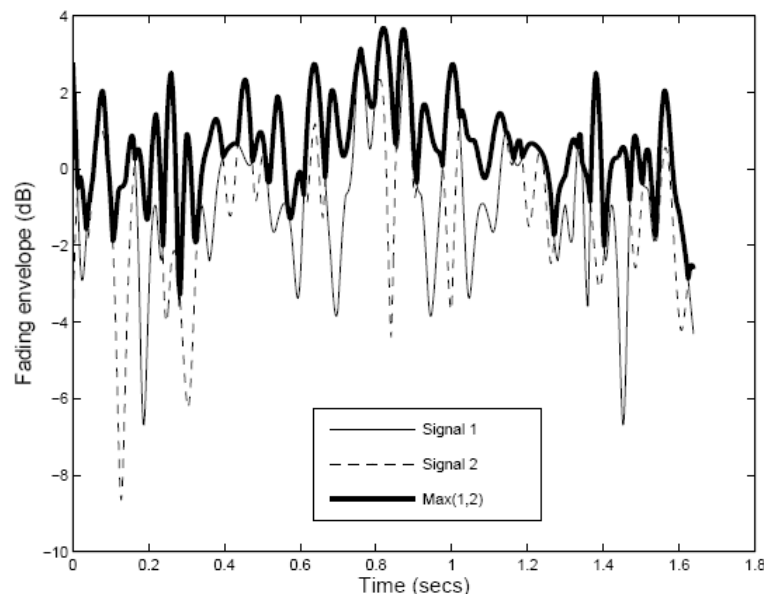
Το κέρδος συστοιχίας αναφέρεται στη μέση αύξηση του σηματοθορυβικού λόγου στο δέκτη, εξαιτίας της επίδρασης της χρήσης πολλών κεραιών στο δέκτη ή στον πομπό ή και στα δύο άκρα. Αν για παράδειγμα θεωρήσουμε ένα κανάλι με μία κεραία εκπομπής και πολλές κεραιές λήψης, τότε τα σήματα που θα καταφθάνουν στις κεραιές λήψης θα έχουν εν γένει διαφορετικά πλάτη και φάσεις. Ωστόσο, ο δέκτης μπορεί να συνδυάσει κατάλληλα τα σήματα πετυχαίνοντας τελικά αύξηση του σηματοθορυβικού λόγου (σε σχέση με την περίπτωση συστήματος με μία κεραία και στα δύο άκρα). Μάλιστα, η αύξηση του σηματοθορυβικού λόγου είναι ανάλογη του αριθμού των κεραιών λήψης [3].

1.3.2 Κέρδος διαφορισιμότητας (Diversity Gain)

Ο βασικός σκοπός της διαφορισιμότητας, είναι η καταπολέμηση των διαλείψεων ώστε να αυξηθεί η αξιοπιστία του δεδομένου συστήματος. Υπάρχουν τρεις βασικές μορφές διαφορισιμότητας [4], η διαφορισιμότητα στο πεδίο του χρόνου (time or temporal diversity), η διαφορισιμότητα στο πεδίο της συχνότητας (frequency diversity) και η διαφορισιμότητα στο πεδίο του χώρου (spatial or antenna diversity).

Ωστόσο στην περίπτωση των συστημάτων MIMO μας ενδιαφέρει η χωρική διαφορισιμότητα, βασική ιδέα της οποίας είναι να παρέχονται στο δέκτη πολλαπλά αντίγραφα του ίδιου σήματος εκπομπής τα οποία φτάνουν στο δέκτη μέσω διαφορετικών και όσο το δυνατόν ασυσχέτιστων διαδρομών. έτσι, ο δέκτης λαμβάνει το ίδιο σήμα πληροφορίας σε περισσότερες από μία κεραιές. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να μειωθεί η πιθανότητα σφάλματος λόγω των διαλείψεων διότι η πιθανότητα να βρίσκεται σε βαθιά διάλειψη (deep fading) το ίδιο σήμα σε δύο ή περισσότερες διαφορετικές θέσεις λήψης ελαττώνεται εκθετικά. Άρα, γίνεται κατανοητό ότι όσο περισσότερα αντίγραφα του ίδιου σήματος λαμβάνει ο δέκτης (δηλαδή όσο αυξάνει η τάξη διαφορισιμότητας), τόσο πιο αποτελεσματικά αντιμετωπίζονται οι διαλείψεις.

Άρα το κέρδος διαφορισιμότητας αναφέρεται στην αύξηση της αξιοπιστίας ενός δεδομένου συστήματος MIMO μέσω της αντιμετώπισης των διαλείψεων με τη λογική που εξηγήθηκε παραπάνω. Ένα παράδειγμα της θετικής επίδρασης της χωρικής διαφορισιμότητας, φαίνεται με την παρακάτω εικόνα:



Εδώ, παρατηρούμε δύο αντίγραφα του ίδιου σήματος που φτάνουν στο δέκτη μέσω ασυσχέτιστων διαδρομών, οπότε θα υπόκεινται σε ανεξάρτητες διαλείψεις. Όμως, εξαιτίας της διαφορισιμότητας παρατηρούμε ότι το τελικό σήμα δεν υποφέρει από έντονες διαλείψεις.

1.3.3 Χωρική Πολυπλεξία (spatial multiplexing)

Η χωρική πολυπλεξία μπορεί να προσφέρει μεγάλη αύξηση στη χωρητικότητα ενός συστήματος MIMO¹. Συγκεκριμένα, η αύξηση της χωρητικότητας είναι ανάλογη του αριθμού των ζευγών των κεραιών σε πομπό και δέκτη, ή πιο απλά ανάλογη του παράγοντα $\min(n_T, n_R)$, όπου n_T, n_R ο αριθμός των κεραιών σε πομπό και δέκτη. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα χωρικής πολυπλεξίας για ένα σύστημα MIMO με δύο κεραιές εκπομπής και δύο κεραιές λήψης. Ωστόσο αυτό το παράδειγμα μπορεί να γενικευτεί για οποιοδήποτε σύστημα MIMO $n_T \times n_R$.

Η προς μετάδοση ροή bits διασπάται (αποπολυπλέκεται) σε χαμηλότερου ρυθμού υποροές. Αυτό γίνεται διότι κάθε στοιχείο της στοιχειοκεραίας μπορεί να λειτουργεί μέχρι ένα μέγιστο ρυθμό μετάδοσης (μέγιστο εύρος ζώνης). Άρα, στην περίπτωση του παραδείγματος που θεωρούμε, θα προκύπτουν δύο υποροές, των οποίων ο ρυθμός μετάδοσης θα είναι ο μισός του ρυθμού μετάδοσης της αρχικής ροής bits (bit stream). Στη συνέχεια κάθε μία υποροή επεξεργάζεται κατάλληλα και διαδίδεται μέσω διαφορετικής κεραιάς εκπομπής. Από τη μεριά του ο δέκτης θα λάβει τα δύο αυτά σήματα και ύστερα από κατάλληλη επεξεργασία (π.χ. αποκωδικοποίηση, αποδιαμόρφωση κ.τ.λ.) θα εξάγει πάλι τις δύο υποροές bits (sub streams), οι οποίες τελικά θα συνδυαστούν (πολυπλεξή) με αποτέλεσμα να προκύψει το αρχικό bitstream.

Παραπάνω, παρουσιάσαμε συνοπτικά τους βασικούς μηχανισμούς διάδοσης μέσω ενός ραδιοδιαύλου. Η γνώση του τρόπου διάδοσης μέσα από ένα ασύρματο κανάλι, καθώς και οι παράγοντες που επηρεάζουν τη διάδοση είναι απαραίτητα στοιχεία για την κατανόηση των τεχνικών που χρησιμοποιούνται στον τομέα των ασύρματων επικοινωνιών και φυσικά για την κατανόηση της φιλοσοφίας των συστημάτων MIMO. Σημειώνουμε, ότι σκόπιμα αποφεύχθηκε η αυστηρή μαθηματική τεκμηρίωση και η

¹ Σε βάρος όμως της Διαφορισιμότητας

αναφορά σε άλλες παραμέτρους του ασύρματου διαύλου, καθώς το περιεχόμενο αυτού του κεφαλαίου δεν αποτελεί το βασικό αντικείμενο της πτυχιακής εργασίας. Παρόλα αυτά, για λόγους πληρότητας προτρέπεται ο αναγνώστης στην αναφορά [6].

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΡΡΑΙΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Επισκόπηση συστημάτων SISO, SIMO, MISO και MIMO

2.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα κάνουμε μία σύντομη επισκόπηση των SISO, SIMO, και MISO συστημάτων, καταλήγοντας διαδοχικά στα συστήματα MIMO. Πιο συγκεκριμένα θα ξεκινήσουμε από τη σχέση εισόδου – εξόδου που ισχύει σε κάθε ένα από αυτά τα συστήματα.

Στη συνέχεια, θα παρουσιάσουμε τη βασική σχέση της χωρητικότητας και θα δείξουμε έναν τρόπο με τον οποίο μπορούμε να υπολογίσουμε τη χωρητικότητα καναλιού σε κάθε ένα από τα παραπάνω συστήματα, ξεκινώντας από τα κανάλια SISO και καταλήγοντας σταδιακά σε κανάλια MIMO. Ωστόσο εδώ θα θεωρήσουμε την ύπαρξη χωρικά λευκού θορύβου Gauss.

Επίσης, τονίζουμε στην ανάλυση που ακολουθεί, ότι παριστάνουμε τα σήματα στη βασική ζώνη.

2.2 Μοντέλα συνεχούς χρόνου

2.2.1 Σύστημα SISO

Το σύστημα μίας εισόδου – μίας εξόδου παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα:

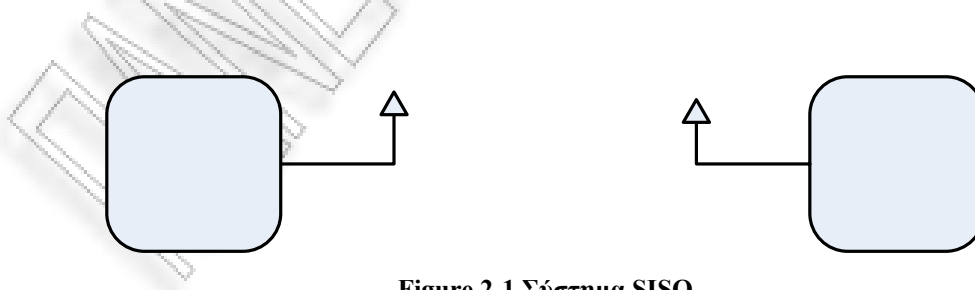


Figure 2-1 Σύστημα SISO

Ένα τέτοιο σύστημα αποτελείται από μία κεραία στον πομπό και μία κεραία στο δέκτη. Θα συμβολίσουμε τη χρονικά μεταβαλλόμενη κρουστική απόκριση του καναλιού

ενός τέτοιου συστήματος ως $h(t, \tau)$. Εδώ αξίζει να σημειώσουμε ότι η συνάρτηση $h(t, \tau)$ αναφέρεται από κακή χρήση της γλώσσας ως χρονικά μεταβαλλόμενη κρουστική απόκριση. Κανονικά ονομάζεται *input delay spread function* [7] και παριστάνει την κρουστική απόκριση του διαύλου τη χρονική στιγμή t , για μία κρουστική που εκπέμπεται τη χρονική στιγμή $t - \tau$.

Θεωρώντας ότι μεταδίδεται ένα σήμα $x(t)$, το λαμβανόμενο σήμα θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$y(t) = h(t, \tau) * x(t) \Leftrightarrow y(t) = \int_0^{\tau_{total}} h(t, \tau) x(t - \tau) d\tau \quad (2.1)$$

Από την παραπάνω σχέση, βλέπουμε πως η έξοδος προκύπτει από τη συνέλιξη του σήματος εισόδου με την κρουστική απόκριση του διαύλου. Επίσης, με τ_{total} συμβολίζουμε τη χρονική διάρκεια της κρουστικής απόκρισης του διαύλου.

2.2.2 Σύστημα SIMO

Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε σύστημα μίας εισόδου – πολλαπλών εξόδων. Ένα τέτοιο σύστημα παρουσιάζεται στο παρακάτω σχήμα και αποτελείται από μία κεραία εκπομπής και πολλές κεραίες λήψης. Έστω n_R ο αριθμός των κεραιών λήψης.



Figure 2-2 Σύστημα SIMO

Αν θεωρήσουμε ότι η χρονικά μεταβαλλόμενη κρουστική απόκριση του διαύλου από την κεραία εκπομπής στην i κεραία λήψης είναι $h_i(t, \tau)$, $i = 1, \dots, n_R$ τότε μπορούμε να παραστήσουμε το δίαυλο SIMO με ένα διάνυσμα διαστάσεων $n_R \times 1$ που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{h}(t, \tau) = [h_1(t, \tau) \quad h_2(t, \tau) \quad \dots \quad h_{n_R}(t, \tau)]^T \quad (2.2)$$

Με άλλα λόγια, θεωρούμε ότι ένα κανάλι SIMO είναι ισοδύναμο με n_R κανάλια SISO. Αν τώρα θεωρήσουμε ότι εκπέμπεται ένα σήμα $x(t)$ από την κεραία εκπομπής, τότε το λαμβανόμενο σήμα από την i κεραία λήψης θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$y_i(t) = h_i(t, \tau) * x(t) \Leftrightarrow y_i(t) = \int_0^{(\tau_i)_{total}} h_i(t, \tau) x(t - \tau) d\tau, \quad i = 1, \dots, n_R \quad (2.3)$$

Άρα, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα διάνυσμα λήψης διαστάσεων $n_R \times 1$ το οποίο δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{y}(t) = [y_1(t) \quad y_2(t) \quad \dots \quad y_{n_R}(t)]^T \quad (2.4)$$

Αν λάβουμε υπόψη μας τις σχέσεις (2.2), (2.3) και (2.4) μπορούμε να εκφράσουμε τη σχέση εισόδου – εξόδου για ένα σύστημα SIMO ως:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{h}(t, \tau) * x(t) \quad (2.5)$$

2.2.3 Σύστημα MISO

Εδώ θεωρούμε σύστημα με πολλές κεραίες εκπομπής και μία κεραία λήψης. Ένα τέτοιο σύστημα είναι αυτό που φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:

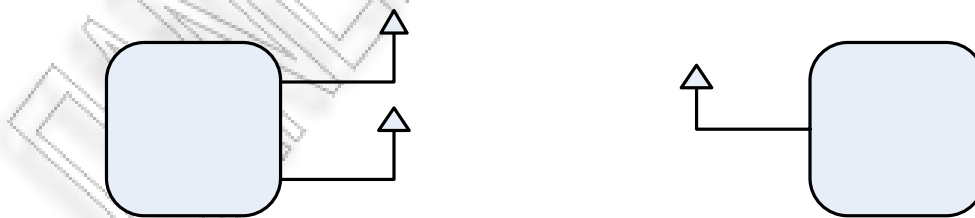


Figure 2-3 Σύστημα MISO

Αν θεωρήσουμε ότι ο αριθμός των κεραιών εκπομπής είναι n_T , τότε όμοια με προηγουμένως το κανάλι MISO μπορεί να αναλυθεί σε n_T κανάλια SISO. Αν συμβολίσουμε τη χρονικά μεταβαλλόμενη κρουστική απόκριση του καναλιού μεταξύ της

j κεραιάς εκπομπής και της κεραιάς λήψης ως $h_j(t, \tau)$, $j = 1, \dots, n_T$, τότε το κανάλι MISO μπορεί να παρασταθεί από ένα διάνυσμα διαστάσεων $1 \times n_T$ το οποίο δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{h}(t, \tau) = [h_1(t, \tau) \quad h_2(t, \tau) \quad \dots \quad h_{n_T}(t, \tau)] \quad (2.6)$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε ότι το σήμα που εκπέμπεται από τη j είναι το $x_j(t)$, τότε το σήμα στην κεραιά λήψης θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$y(t) = \sum_{j=1}^{n_T} h_j(t, \tau) * x_j(t) \quad (2.7)$$

Αν λάβουμε υπόψη μας τις σχέσεις (2.6) και (2.7) τότε μπορούμε να εκφράσουμε τη σχέση εισόδου – εξόδου ενός MISO συστήματος υπό μορφή διανυσμάτων ως εξής:

$$y(t) = \mathbf{h}(t, \tau) * \mathbf{x}(t) \quad (2.8)$$

Στην εξίσωση (2.8) με \mathbf{x} συμβολίζουμε το διάνυσμα εισόδου που έχει διαστάσεις $n_T \times 1$ και δίνεται από την εξής σχέση:

$$\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_{n_T}(t)]^T \quad (2.9)$$

2.2.4 Σύστημα MIMO

Εδώ θεωρούμε σύστημα πολλαπλών εισόδων – πολλαπλών εξόδων. Ένα τέτοιο σύστημα παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα:

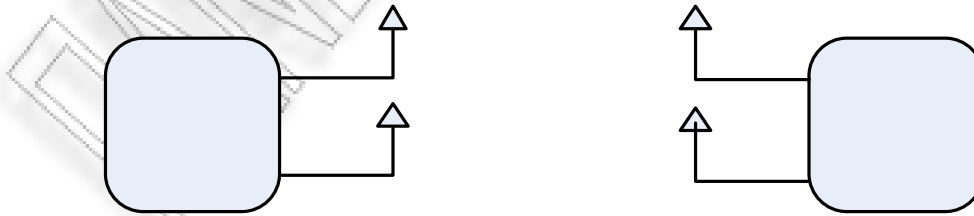


Figure 2-4 Σύστημα MIMO

Μπορούμε να φανταστούμε ένα τέτοιο σύστημα σαν ένα συνδυασμό των συστημάτων SIMO και MISO. Άρα αν ο αριθμός των κεραιών εκπομπής είναι ίσος με n_T και ο

αριθμός των κεραιών λήψης είναι n_R , τότε το κανάλι MIMO μπορεί να παρασταθεί από ένα πίνακα διαστάσεων $n_R \times n_T$ όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\mathbf{H}(t, \tau) = \begin{bmatrix} h_{11}(t, \tau) & h_{12}(t, \tau) & \dots & h_{1n_T}(t, \tau) \\ h_{21}(t, \tau) & h_{22}(t, \tau) & \dots & h_{2n_T}(t, \tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n_R1}(t, \tau) & h_{n_R2}(t, \tau) & \dots & h_{n_Rn_T}(t, \tau) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

Παραπάνω, το στοιχείο $h_{ij}(t, \tau)$ παριστάνει τη χρονικά μεταβαλλόμενη κρουστική απόκριση του διαύλου κατά τη μετάδοση ενός σήματος από την j κεραία εκπομπής στην i κεραία λήψης.

Επίσης, αν από τη j κεραία εκπομπής εκπέμπεται το σήμα $x_j(t)$, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το διάνυσμα εκπομπής \mathbf{x} διαστάσεων $n_T \times 1$ το οποίο δίνεται από τη σχέση (2.9) που παρουσιάστηκε παραπάνω. Σύμφωνα με όλα τα παραπάνω, το σήμα που λαμβάνεται από την i κεραία λήψης θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^{n_T} x_j(t) * h_{ij}(\tau, t) \quad , i = 1, 2, \dots, n_R \quad (2.11)$$

Άρα, μπορούμε να θεωρήσουμε το διάνυσμα λήψης που παρουσιάστηκε στη σχέση (2.4). Επομένως μπορούμε να παραστήσουμε τη σχέση εισόδου - εξόδου ενός συστήματος MIMO ως εξής:

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}(t, \tau) * \mathbf{x}(t) \quad (2.12)$$

2.3 Μοντέλα διακριτού χρόνου

Στη συνέχεια θα κάνουμε χρήση του μοντέλου σηματοδοσίας διακριτού χρόνου (*discrete time signal model* ή *sampled signal model*) για να περιγράψουμε τις παραπάνω κατηγορίες συστημάτων. Σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, όλα τα σήματα είναι διακριτού

χρόνου και εκφρασμένα στη βασική ζώνη (baseband). Επιπλέον θεωρούμε λευκό προσθετικό Gaussian θόρυβο με μηδενική μέση τιμή και διακύμανση σ_w^2 , ο οποίος συμβολίζεται ως $w(n)$. Σημειώνουμε εδώ ότι στην περίπτωση συστημάτων που εκμεταλευόμαστε το χώρο (SIMO, MISO, MIMO) ο θόρυβος θεωρείται χωρικά λευκός.

2.3.1 Σύστημα SISO

Σε αυτή την περίπτωση συμβολίζουμε το σήμα εισόδου ως $x(n)$, την κρουστική απόκριση του διαύλου ως $h(n)$ και το σήμα που λαμβάνεται από την κεραία λήψης ως $y(n)$. Το σήμα που λαμβάνουμε στην κεραία λήψης θα προκύπτει από τη συνέλιξη του σήματος εισόδου (δηλαδή το σήμα $x(n)$ που εκπέμπεται) και της κρουστικής απόκρισης του διαύλου, προσθέτοντας και το λευκό θόρυβο στο δέκτη. Εφόσον τα σήματα είναι διακριτά θα ισχύει:

$$y(n) = h(n) * x(n) + w(n) \Leftrightarrow y(n) = \sum_{k=0}^n h(k)x(n-k) + w(n) \quad (2.13)$$

Ωστόσο, στην περίπτωση που θεωρούμε κανάλι με επίπεδες διαλείψεις (flat fading channel) η κρουστική απόκριση του διαύλου θα είναι της μορφής:

$$h(n) = 0 \quad \forall n \neq 0 \quad (2.14)$$

Αντίθετα, θα ισχύει: $h(0) \neq 0$. Αυτό εξηγείται ως εξής: Η κρουστική απόκριση του διαύλου και η συνάρτηση μεταφοράς του διαύλου συνδέονται μέσω μετασχηματισμού Fourier. Στην περίπτωση που θεωρούμε δίαυλο με επίπεδες διαλείψεις, η συνάρτηση μεταφοράς του διαύλου θα είναι επίπεδη (flat). Είναι γνωστό ότι αν εφαρμόσουμε αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier σε επίπεδη συνάρτηση μεταφοράς, η $h(t)$ που θα προκύψει, θα έχει μία μόνο κρουστική¹. Άρα, επειδή εδώ θεωρούμε σήματα διακριτού

¹ Έστω ότι θεωρούμε συνάρτηση μεταφοράς του διαύλου $G(f)$ και αντίστοιχη κρουστική απόκριση $h(t)$. Τότε, αν $G(f) = 1$ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier θα δώσει: $h(t) = \delta(t)$.

χρόνου, η κρουστική απόκριση του διαύλου θα περιγράφεται όπως στη (2.14). Άρα στην περίπτωση διαύλου με επίπεδες διαλείψεις θα ισχύει:

$$(2.13) \xrightarrow{(2.14)} y(n) = h(0)x(n) + w(n) \Leftrightarrow y(n) = hx(n) + w(n) \quad (2.15)$$

2.3.2 Σύστημα SIMO

Στην περίπτωση αυτή, θεωρούμε σύστημα με μία κεραία εκπομπής και πολλές κεραιές λήψης. Έστω n_R ο αριθμός των κεραιών λήψης. Τότε το κανάλι MISO είναι ισοδύναμο με n_R κανάλια SISO. Αν θεωρήσουμε ότι η δειγματοληπτημένη κρουστική απόκριση του διαύλου από την κεραία εκπομπής στην i κεραία λήψης είναι $h_i(n)$, $i=1, \dots, n_R$, τότε μπορούμε να παραστήσουμε το δίαυλο SIMO με ένα διάνυσμα διαστάσεων $n_R \times 1$ που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{h}(n) = [h_1(n) \quad h_2(n) \quad \dots \quad h_{n_R}(n)]^T \quad (2.16)$$

Άρα θεωρώντας ότι εκπέμπεται ένα σήμα $x(n)$, το σήμα που θα ληφθεί από την i κεραία στο δέκτη θα δίνεται από τη σχέση:

$$y_i(n) = h_i(n) * x(n) + w_i(n) \Leftrightarrow y_i(n) = \sum_{k=0}^n h_i(k)x(n-k) + w_i(n) \quad (2.17)$$

Άρα αν υποθέσουμε δίαυλο με επίπεδες διαλείψεις (flat fading channel), τότε σύμφωνα και με τα προηγούμενα θα είναι:

$$y_i(n) = h_i x(n) + w_i(n) \quad (2.18)$$

Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να εκφραστεί και με ως εξής:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{h}x(n) + \mathbf{w}(n) \quad (2.19)$$

Όπου τα \mathbf{y} και \mathbf{w} είναι διανύσματα διαστάσεων $n_R \times 1$, όπως φαίνεται παρακάτω:

$$\mathbf{y}(n) = [y_1(n) \quad y_2(n) \quad \dots \quad y_{n_R}(n)]^T \quad (2.20)$$

$$\mathbf{w}(n) = [w_1(n) \quad w_2(n) \quad \dots \quad w_{n_R}(n)]^T \quad (2.21)$$

2.3.3 Σύστημα MISO

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε σύστημα το οποίο έχει πολλές κεραιές εκπομπής και μία κεραιά λήψης. Έστω n_r ο αριθμός των κεραιών εκπομπής. Τότε το κανάλι MISO είναι ισοδύναμο με n_r κανάλια SISO. Αν συμβολίσουμε τη δειγματοληπτημένη κρουστική απόκριση του καναλιού μεταξύ της j κεραιάς εκπομπής και της κεραιάς λήψης ως $h_j(n)$, $j=1, \dots, n_r$, τότε το κανάλι MISO μπορεί να παρασταθεί από ένα διάνυσμα διαστάσεων $1 \times n_r$ το οποίο δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{h}(n) = [h_1(n) \quad h_2(n) \quad \dots \quad h_{n_r}(n)] \quad (2.22)$$

Θεωρώντας ότι το σήμα που εκπέμπεται από την κεραιά j είναι το $x_j(n)$, τότε το σήμα στην κεραιά λήψης θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$y(n) = \sum_{j=1}^{n_r} h_j(n) * x_j(n) + w(n) \Leftrightarrow y(n) = \sum_{j=1}^{n_r} \sum_{k=0}^n h_j(k) x_j(n-k) + w(n) \quad (2.23)$$

Άρα στην περίπτωση που θεωρούμε διάυλο με επίπεδες διαλείψεις, τότε σύμφωνα και με τα προηγούμενα θα είναι:

$$(23) \rightarrow y(n) = \sum_{j=1}^{n_r} h_j x_j(n) + w(n) \quad (2.24)$$

Η παραπάνω σχέση εναλλακτικά μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$y(n) = \mathbf{h}\mathbf{x}(n) + w(n) \quad (2.25)$$

Όπου το διάνυσμα \mathbf{h} δίνεται από τη σχέση (2.22) και \mathbf{x} είναι το διάνυσμα εκπομπής διαστάσεων $n_r \times 1$ το οποίο δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{x}(n) = [x_1(n) \quad x_2(n) \quad \dots \quad x_{n_r}(n)]^T \quad (2.26)$$

2.3.4 Σύστημα MIMO

Όπως είπαμε και στην προηγούμενη ενότητα που περιγράψαμε τα μοντέλα συνεχούς χρόνου, το σύστημα MIMO συνδυάζει τα χαρακτηριστικά των συστημάτων SIMO και MISO. Έστω ότι ο αριθμός των κεραιών εκπομπής είναι ίσος με n_T και ο αριθμός των κεραιών λήψης είναι n_R . Τότε $\mathbf{x}(n)$ είναι το $n_T \times 1$ διάνυσμα εκπομπής, το οποίο παριστάνεται ως:

$$\mathbf{x}(n) = [x_1(n) \quad x_2(n) \quad \dots \quad x_{n_T}(n)]^T \quad (2.27)$$

Αντίστοιχα, $\mathbf{y}(n)$ και $\mathbf{w}(n)$ είναι τα $n_R \times 1$ διανύσματα του σήματος λήψης και του θορύβου, τα οποία παριστάνονται ως:

$$\mathbf{y}(n) = [y_1(n) \quad y_2(n) \quad \dots \quad y_{n_R}(n)]^T \quad (2.28)$$

$$\mathbf{w}(n) = [w_1(n) \quad w_2(n) \quad \dots \quad w_{n_R}(n)]^T \quad (2.29)$$

Επίσης, στην περίπτωση που θεωρούμε κανάλι με επίπεδες διαλείψεις, θα συμβολίζουμε με h_{ij} το δειγματοληπτημένο μιγαδικό κέρδος του καναλιού, κατά τη διάδοση ενός συμβόλου από την j κεραιά εκπομπής ως την i κεραιά λήψης. Άρα μπορούμε να σχηματίσουμε ένα πίνακα $n_R \times n_T$ που ονομάζεται *μιγαδικός πίνακας διαύλου (complex channel matrix)*:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & \dots & h_{1n_T} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & \dots & h_{2n_T} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n_R1} & h_{n_R2} & \dots & \dots & h_{n_Rn_T} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Άρα, το σήμα που λαμβάνεται από την i κεραιά λήψης θα δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$y_i(n) = \sum_{j=1}^{n_T} x_j(n) h_{ij} + w_i(n) \quad , i = 1, 2, \dots, n_R \quad (2.31)$$

Η εξίσωση (2.31) υπό μορφή πινάκων θα είναι:

$$\mathbf{y}(n) = \mathbf{H}\mathbf{x}(n) + \mathbf{w}(n) \quad (2.32)$$

Επιπλέον, επειδή θεωρήσαμε κανάλι χωρίς μνήμη, οι χρονικοί δείκτες μπορούν να παραλειφθούν. Άρα τελικά θα είναι:

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (2.33)$$

2.4 Έκφραση χωρητικότητας καναλιών SISO, SIMO, MISO, MIMO

2.4.1 Γενικά

Σε αυτή την ενότητα θα αποδείξουμε τους μαθηματικούς τύπους που μας δίνουν τη χωρητικότητα σε συστήματα SISO, SIMO, MISO και MIMO. Η παρουσίαση γίνεται με τέτοιο τρόπο, ώστε να φαίνεται καθαρά ο τρόπος με τον οποίο ξεκινώντας από την έκφραση της χωρητικότητας σε ένα κανάλι SISO, μπορούμε να καταλήξουμε σε εκφράσεις της χωρητικότητας για κανάλια SIMO, MISO και MIMO.

Επίσης, σε όλες τις περιπτώσεις θεωρούμε κανάλι χωρίς μνήμη. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της εξόδου μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή εξαρτάται από την τιμή της εισόδου εκείνη τη χρονική στιγμή και όχι και από προηγούμενες τιμές εισόδου.

Για την πλήρη κατανόηση όσων ακολουθούν στη συνέχεια, κρίνεται σκόπιμο να παρουσιάσουμε σε αυτό το σημείο κάποιους ορισμούς από τη θεωρία της πληροφορίας.

2.4.2 Μέτρο πληροφορίας

Θεωρούμε μία διακριτή πηγή με αλφάβητο \mathcal{A} . Επίσης θεωρούμε ότι η πιο πιθανή έξοδος της πηγής είναι η a_1 και η λιγότερο πιθανή έξοδος είναι η a_N . Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να 'ποσοτικοποιήσουμε' την πληροφορία που μας παρέχει μία έξοδος της πηγής. Διαισθητικά, ισχύει ότι η λιγότερο πιθανή έξοδος παρέχει την περισσότερη πληροφορία. Αντίστοιχα, η περισσότερο πιθανή έξοδος θα παρέχει την λιγότερη πληροφορία. Με άλλα λόγια, όσο πιο αναμενόμενη είναι μία έξοδος, τόσο πιο λίγη είναι και η πληροφορία που μας παρέχει αυτή η έξοδος. Επίσης, διαισθητικά, μία μικρή

αλλαγή της πιθανότητας μίας εξόδου δεν πρέπει να μεταβάλλει αρκετά την πληροφορία που μας παρέχει η συγκεκριμένη έξοδος.

Από τα παραπάνω, συμπεραίνουμε τα εξής:

- Το μέτρο της πληροφορίας της εξόδου a_j εξαρτάται μόνο από την πιθανότητα εμφάνισης της συγκεκριμένης εξόδου και όχι από την τιμή της. Έστω ότι αυτή την πιθανότητα τη συμβολίζουμε με p_j . Η συνάρτηση που μας δίνει το μέτρο της πληροφορίας μίας εξόδου θα συμβολίζεται ως $I(\cdot)$ και θα ονομάζεται *ιδία – πληροφορία (self – information)*.
- Η ιδία – πληροφορία είναι μία συνεχής συνάρτηση της p_j .
- Η ιδία – πληροφορία είναι μία φθίνουσα συνάρτηση της πιθανότητας μίας εξόδου της πηγής.

Η μαθηματική έκφραση που δίνει την ιδία – πληροφορία και ικανοποιεί τις παραπάνω απαιτήσεις, είναι η ακόλουθη [8]:

$$I(p_j) = -\log(p_j) = \log\left(\frac{1}{p_j}\right) \quad (2.34)$$

Συνοψίζοντας, η συνάρτηση της σχέσης (2.34) ονομάζεται ιδία – πληροφορία και μας δίνει το μέτρο της πληροφορίας μίας εξόδου a_j με πιθανότητα p_j . Στην περίπτωση που η βάση στο λογάριθμο είναι το 2, το μέτρο της πληροφορίας εκφράζεται σε bits, ενώ αν χρησιμοποιηθεί ο φυσικός λογάριθμος θα εκφράζεται σε nats.

Επεκτείνοντας τα παραπάνω, αν παραστήσουμε την έξοδο της διακριτής πηγής με μία τυχαία μεταβλητή X , μπορούμε να ορίσουμε το πληροφορικό περιεχόμενο της διακριτής πηγής, ως τη μέση τιμή της ιδίας – πληροφορίας των εξόδων της πηγής. Το πληροφορικό περιεχόμενο μίας πηγής είναι γνωστό ως *εντροπία* της πηγής και συμβολίζεται με $H(X)$. Η εντροπία της πηγής θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$H(X) = \sum_{j=1}^N p_j I(p_j) \Leftrightarrow H(X) = -\sum_{j=1}^N p_j \log(p_j) \Leftrightarrow H(X) = \sum_{j=1}^N p_j \log\left(\frac{1}{p_j}\right) \quad (2.35)$$

Στην παραπάνω σχέση, όπου N είναι το μήκος του αλφάβητου \mathcal{A} της διακριτής πηγής. Με άλλα λόγια, μπορούμε να θεωρήσουμε την εντροπία σαν ένα μέτρο της αβεβαιότητας της τυχαίας μεταβλητής X .

2.4.3 Συνδυασμένη και υποσυνθήκη εντροπία

Όταν έχουμε να κάνουμε με δύο ή περισσότερες τυχαίες μεταβλητές, μπορούμε να εισάγουμε τη *συνδυασμένη και την υποσυνθήκη εντροπία*. Πιο συγκεκριμένα η συνδυασμένη εντροπία ορίζεται ως εξής:

$$H(X, Y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log [p(x, y)] \quad (2.36)$$

Όπου $p(x, y)$ είναι η *συνδυασμένη συνάρτηση πιθανότητας μάζας* (*probability mass function, PMF*) των διακριτών τυχαίων μεταβλητών X, Y .

Η *υποσυνθήκη εντροπία* μίας τυχαίας μεταβλητής X , δοσμένης της τυχαίας μεταβλητής Y δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$H(X|Y) = - \sum_{x,y} p(x, y) \log [p(x|y)] \quad (2.37)$$

Στην παραπάνω σχέση, $p(x|y)$ είναι η συνάρτηση πιθανότητας μάζας της τυχαίας μεταβλητής X , δοσμένης της Y . Σύμφωνα με τα παραπάνω, μπορούμε να πούμε ότι με $H(X|Y)$ εκφράζουμε το μέτρο της αβεβαιότητας της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X , όταν η τιμή της διακριτής τυχαίας μεταβλητής Y είναι γνωστή.

Η συνδυασμένη και η υποσυνθήκη εντροπία συνδυάζονται σε μία σχέση η οποία είναι η παρακάτω:

$$H(X, Y) = H(Y) + H(X|Y) \quad (2.38)$$

2.4.4 Αμοιβαία πληροφορία

Αν θεωρήσουμε δύο διακριτές τυχαίες μεταβλητές X, Y , σαν *αμοιβαία πληροφορία* ορίζουμε την ποσότητα της πληροφορίας που παρέχεται από την τυχαία μεταβλητή Y

για την τυχαία μεταβλητή X . Με άλλα λόγια, η αμοιβαία πληροφορία δηλώνει την ποσότητα της αβεβαιότητας του X που έχει εξαλειφθεί με την εμφάνιση της τυχαίας μεταβλητής Y . Η αμοιβαία πληροφορία δύο διακριτών τυχαίων μεταβλητών συμβολίζεται ως $I(X;Y)$ και θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$I(X;Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (2.39)$$

2.4.5 Διαφορική εντροπία

Μέχρι αυτό το σημείο έχουμε ασχοληθεί με διακριτές πηγές ή αντίστοιχα με διακριτές τυχαίες μεταβλητές και έχουμε ορίσει κάποια μεγέθη. Στην περίπτωση που θεωρούμε πηγές διακριτού χρόνου, αλλά με συνεχές αλφάβητο, τότε οι πηγές αυτές μπορούν να μοντελοποιηθούν με συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε μια άλλη ποσότητα, αντίστοιχη της εντροπίας, που καλείται *διαφορική εντροπία (differential entropy)* και τη συμβολίζουμε ως $h(X)$. Η διαφορική εντροπία μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (probability density function, PDF) $f_X(x)$ δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$h(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \log f_X(x) dx \quad (2.40)$$

Επίσης, αν θεωρήσουμε δύο συνεχείς τυχαίες μεταβλητές X, Y , μπορούμε να ορίσουμε (αντίστοιχα με προηγουμένως) τη *συνδυασμένη διαφορική εντροπία* που δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$h(X, Y) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X,Y}(x, y) \log f_{X,Y}(x, y) dx dy \quad (2.41)$$

Επίσης ορίσουμε την *υποσυνθήκη διαφορική εντροπία* ως:

$$h(X|Y) = h(X, Y) - h(Y) \quad (2.42)$$

Τέλος, η αμοιβαία πληροφορία θα ορίζεται ως:

$$I(X;Y) = h(Y) - h(Y|X) = h(X) - h(X|Y) \quad (2.43)$$

2.5 Χωρητικότητα συστήματος SISO

Σε αυτό το σημείο, τονίζουμε ότι με τον όρο χωρητικότητα, ορίζουμε το μέγιστο ρυθμό μετάδοσης που μπορεί να επιτευχθεί, με αμελητέα πιθανότητα σφάλματος στο δέκτη.

Όπως επισημάνθηκε και προηγουμένως, θεωρούμε κανάλι διακριτού χρόνου χωρίς μνήμη. Από τη θεωρία της πληροφορίας γνωρίζουμε ότι [8] η χωρητικότητα για ένα τέτοιο κανάλι μπορεί να οριστεί σαν το μέγιστο της αμοιβαίας πληροφορίας μεταξύ της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X που παριστάνει την έξοδο της πηγής και της συνεχούς τυχαίας μεταβλητής Y που παριστάνει το σήμα που λαμβάνει ο δέκτης, για όλες τις πιθανές κατανομές της εισόδου που ικανοποιούν τον περιορισμό ισχύος. Άρα η χωρητικότητα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$C = \max_{p(x)} I(X; Y) \quad (2.44)$$

Όμως, θεωρώντας ότι ο λευκός προσθετικός θόρυβος Gauss συμβολίζεται με την τυχαία μεταβλητή W θα ισχύει:

$$Y = hX + W \quad (2.45)$$

Στην παραπάνω σχέση, με h συμβολίζουμε το κέρδος του διαύλου. Σύμφωνα με τα παραπάνω θα ισχύει:

$$\begin{aligned} I(X; Y) = h(Y) - h(Y | X) &\xrightarrow{(2.45)} I(X; Y) = h(Y) - h(hX + W | X) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow I(X; Y) = h(Y) - h(W | X) \end{aligned} \quad (2.46)$$

Παραπάνω θεωρήσαμε ότι $h(hX + W | X) = h(W | X)$. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι εφόσον το h είναι γνωστό στο δέκτη (υποτίθεται ότι ο διάυλος είναι γνωστός στο δέκτη), δεν υπάρχει καθόλου αβεβαιότητα του hX όταν το X είναι γνωστό. Επιπλέον οι τυχαίες μεταβλητές X, W είναι στατιστικά ανεξάρτητες οπότε θα ισχύει:

$$(2.46) \rightarrow I(X; Y) = h(Y) - h(W) \quad (2.47)$$

Επίσης, η ισχύς που λαμβάνεται από την κεραία λήψης, θα δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$(2.45) \rightarrow \sigma_Y^2 = |h|^2 \sigma_X^2 + \sigma_W^2 \quad (2.48)$$

Στην παραπάνω σχέση, με $|h|^2$ έχουμε συμβολίσει το κέρδος ισχύος που εισάγεται από το δίαυλο.

Επειδή έχουμε συμβολίσει τον περιορισμό ισχύος εκπομπής σαν p , μπορούμε να γράψουμε τη σχέση (2.48) ως:

$$\sigma_Y^2 = |h|^2 p + \sigma_W^2 \quad (2.49)$$

Επίσης η διαφορική εντροπία της τυχαίας μεταβλητής Y είναι άνω φραγμένη και θα ισχύει² (λαμβάνοντας υπόψη και τη σχέση(2.49)):

$$h(Y) \leq \frac{1}{2} \log_2 \left[2\pi e \left(|h|^2 p + \sigma_W^2 \right) \right] \quad (2.50)$$

Αντίστοιχα για τη διαφορική εντροπία της τυχαίας μεταβλητής W θα ισχύει:

$$h(W) \leq \frac{1}{2} \log_2 \left[2\pi e \sigma_W^2 \right] \quad (2.51)$$

Άρα θα είναι:

$$(2.47) \xrightarrow[(2.51)]{(2.50)} I(X; Y) \leq \frac{1}{2} \log_2 \left[2\pi e \left(|h|^2 p + \sigma_W^2 \right) \right] - \frac{1}{2} \log_2 \left[2\pi e \sigma_W^2 \right] \quad (2.52)$$

Οπότε:

$$(2.44) \xrightarrow{(2.52)} C = \frac{1}{2} \log_2 \left[2\pi e \left(|h|^2 p + \sigma_W^2 \right) \right] - \frac{1}{2} \log_2 \left[2\pi e \sigma_W^2 \right] \Leftrightarrow C = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{|h|^2 p + \sigma_W^2}{\sigma_W^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$C = \frac{1}{2} \log_2 \left(1 + |h|^2 \frac{p}{\sigma_W^2} \right) \quad (2.53)$$

Συνοψίζοντας, η σχέση (2.53) μας δίνει τη χωρητικότητα ενός καναλιού SISO διακριτού χρόνου με λευκό προσθετικό Gaussian θόρυβο. Όπου p είναι ο περιορισμός

² Cover, Thomas Elements of Information Theory-Wiley 1991

ισχύος εισόδου, σ_w^2 είναι η διασπορά του θορύβου (ισχύς του θορύβου) και $|h|^2$ είναι το κέρδος ισχύος που εισάγει το κανάλι. Σημειώνεται εδώ, ότι στη (2.53) η χωρητικότητα μετριέται σε *bits/μετάδοση*.

Όταν πρόκειται για κανάλι συνεχούς χρόνου περιορισμένου εύρους ζώνης B και με λευκό προσθετικό Gaussian θόρυβο μηδενικής μέσης τιμής και διασποράς σ_w^2 , το σήμα εξόδου μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$y(t) = h(t) * x(t) + w(t) \quad (2.54)$$

Όπου $x(t)$ είναι το σήμα εισόδου και $w(t)$ είναι μία συνάρτηση – δείγμα της στοχαστικής ανέλιξης με την οποία μοντελοποιείται λευκός Gaussian θόρυβος. Με $h(t)$ έχουμε συμβολίσει την κρουστική απόκριση του καναλιού. Εφόσον έχουμε κανάλι συνεχούς χρόνου, μπορούμε να δειγματοληπτήσουμε στο ρυθμό Nyquist για να πετύχουμε κανάλι διακριτού χρόνου. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αναπαραστήσουμε όλα τα σήματα με δείγματα που λαμβάνονται κάθε $\frac{1}{2B}$ δευτερόλεπτα. Τότε, ο αριθμός των μεταδόσεων (δειγμάτων) ανά δευτερόλεπτο θα είναι $2B$, οπότε η χωρητικότητα σε *bits/sec* θα είναι:

$$C = B \log_2 \left(1 + |h|^2 \frac{P}{\sigma_w^2} \right) \quad (2.55)$$

2.6 Χωρητικότητα καναλιού SIMO

Όπως αναφέραμε και πιο πριν, ένα κανάλι SIMO με n_r κεραίες λήψης μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο από n_r κανάλια SISO, όπου το δειγματοληπτημένο μιγαδικό κέρδος κάθε καναλιού να είναι h_i , $i = 1, \dots, n_r$. Άρα, η ολική λαμβανόμενη ισχύς θα είναι ίση με το άθροισμα της λαμβανόμενης ισχύος από κάθε κεραία λήψης. Θεωρούμε ότι η ισχύς εκπομπής είναι p και ότι κάθε κεραία λήψης i λαμβάνει ισχύ:

$$p_i = |h_i|^2 p + \sigma_w^2 \quad (2.56)$$

Άρα η ολική λαμβανόμενη ισχύς θα είναι:

$$p_{total} = p|h_1|^2 + p|h_2|^2 + \dots + p|h_{n_R}|^2 + \sigma_w^2 + \sigma_w^2 + \dots + \sigma_w^2 \Leftrightarrow p_{total} = p \sum_{i=1}^{n_R} |h_i|^2 + \sigma_w^2 \quad (2.57)$$

Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία όπως προηγουμένως και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.57) καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση της χωρητικότητας στην περίπτωση του καναλιού SIMO:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{p}{\sigma_w^2} \sum_{i=1}^{n_R} |h_i|^2 \right) \quad (2.58)$$

2.7 Χωρητικότητα καναλιού MISO

Αντίστοιχα, ένα κανάλι MISO με n_T κεραιές εκπομπής μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο από n_T κανάλια SISO, όπου το δειγματοληπτημένο μιγαδικό κέρδος κάθε καναλιού να είναι h_j , $j=1, \dots, n_T$. Δεδομένου του περιορισμού ισχύος εκπομπής που είναι p , αν θεωρήσουμε ότι ο πομπός δε γνωρίζει το κανάλι, τότε είναι λογικό η συνολική ισχύς εκπομπής να μοιράζεται εξίσου στις κεραιές εκπομπής. Άρα θεωρούμε ότι η μέση ισχύς που εκπέμπεται από κάθε κεραία είναι $\frac{p}{n_T}$. Άρα η συνολικά λαμβανόμενη ισχύς σε αυτή την περίπτωση θα είναι:

$$p_{total} = \frac{p}{n_T} |h_1|^2 + \frac{p}{n_T} |h_2|^2 + \dots + \frac{p}{n_T} |h_{n_T}|^2 + \sigma_w^2 \Leftrightarrow p_{total} = \frac{p}{n_T} \sum_{j=1}^{n_T} |h_j|^2 + \sigma_w^2 \quad (2.59)$$

Ακολουθώντας ανάλογη διαδικασία όπως προηγουμένως και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.59) καταλήγουμε στην παρακάτω έκφραση της χωρητικότητας στην περίπτωση του καναλιού MISO:

$$C = B \log_2 \left(1 + \frac{p}{n_T \sigma_w^2} \sum_{j=1}^{n_T} |h_j|^2 \right) \quad (2.60)$$

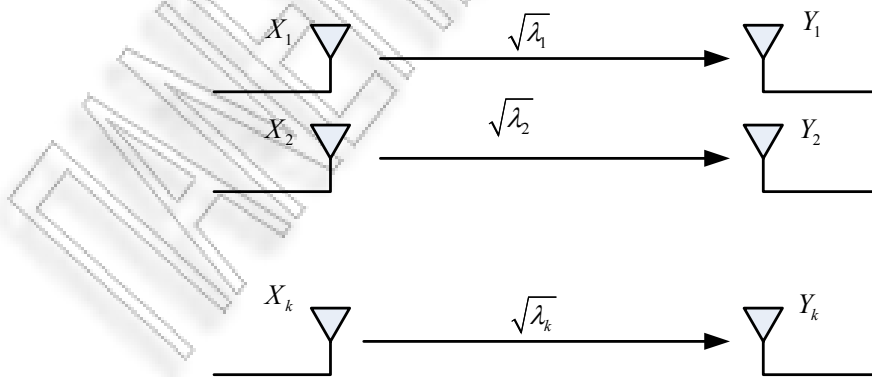
2.8 Χωρητικότητα MIMO

Η περίπτωση καναλιού MIMO είναι ένας συνδυασμός των περιπτώσεων SIMO και MISO. Θεωρούμε ένα κανάλι MIMO διακριτού χρόνου, n_T κεραίες εκπομπής και n_R κεραίες λήψης. Όπως θα αποδείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο, σύμφωνα με το θεώρημα της διάσπασης των ιδιόμορφων τιμών (*Singular Value Decomposition*), το κανάλι MIMO μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα σύνολο από έστω k παράλληλα υποκανάλια SISO. Τότε, όπως θα δούμε θα ισχύει:

$$y_i' = \sqrt{\lambda_i} x_i' + w_i', \quad i=1, \dots, k \quad (2.61)$$

Στην παραπάνω εξίσωση, με λ_i έχουμε συμβολίσει τις *ιδιοτιμές (eigenvalues)* του πίνακα $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$, αν $n_R < n_T$ ή του πίνακα $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ αν $n_R > n_T$.

Σύμφωνα με τη σχέση (2.61), το κανάλι MIMO μπορεί να παρασταθεί ισοδύναμα σαν ένα σύνολο από k παράλληλα υποκανάλια SISO. Κάθε υποκανάλι χαρακτηρίζεται από ένα κέρδος που είναι μία *ιδιόμορφη τιμή (singular value)* του πίνακα \mathbf{H} . Σχηματικά, η μοντελοποίηση του καναλιού MIMO με k παράλληλα υποκανάλια SISO φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 2-5 Ισοδύναμη αναπαράσταση καναλιού MIMO με k παράλληλα υποκανάλια SISO

Από το παραπάνω σχήμα, διαπιστώνουμε ότι το κέρδος κάθε παράλληλου υποκαναλιού είναι μία ιδιόμορφη τιμή του πίνακα \mathbf{H} που περιγράφει το MIMO κανάλι.

Αν λάβουμε υπόψη μας τον περιορισμό ισχύος εκπομπής p , θα πρέπει να ισχύει:

$$E \left[\sum_{i=1}^{n_T} X_i^2 \right] \leq p \quad (2.62)$$

Επίσης, αφού ο πομπός δε γνωρίζει το κανάλι, λογικό είναι η ισχύς εκπομπής να ισομοιράζεται στις κεραίες εκπομπής. Άρα, σύμφωνα και με τον περιορισμό ισχύος που φαίνεται από τη σχέση (2.62), κάθε κεραία εκπομπής μεταδίδει με μέση ισχύ $\frac{p}{n_T}$. Η χωρητικότητα αυτού του καναλιού μπορεί να εκφραστεί ως:

$$C = \max_{p(x_1, x_2, \dots, x_{n_T}) : E \left[\sum_{i=1}^{n_T} X_i^2 \right] \leq p} I(X_1, X_2, \dots, X_k; Y_1, Y_2, \dots, Y_k) \quad (2.63)$$

Η σχέση (2.63) μας λέει ότι εκφράζοντας το κανάλι MIMO διακριτού χρόνου με k παράλληλα υποκανάλια SISO, η χωρητικότητα μπορεί να οριστεί σαν το μέγιστο της αμοιβαίας πληροφορίας μεταξύ της διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής της εισόδου που συμβολίζεται με $\mathbf{X} = [X_1, X_2, \dots, X_k]$ και της διανυσματικής τυχαίας μεταβλητής της εξόδου που τη συμβολίζουμε με $\mathbf{Y} = [Y_1, Y_2, \dots, Y_k]$, για κάθε κατανομή της εισόδου που ικανοποιεί τους περιορισμούς ισχύος.

Θα ισχύουν τα εξής:

$$I(X_1, X_2, \dots, X_k; Y_1, Y_2, \dots, Y_k) = h(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) - h(Y_1, Y_2, \dots, Y_k | X_1, X_2, \dots, X_k) \quad (2.64)$$

Αν ακολουθήσουμε όμοια διαδικασία όπως στην περίπτωση της χωρητικότητας καναλιού SISO και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (2.64) θα ισχύουν τα εξής:

$$(2.64) \rightarrow I(X_1, X_2, \dots, X_k; Y_1, Y_2, \dots, Y_k) = h(Y_1, Y_2, \dots, Y_k) - h(W_1, W_2, \dots, W_k) \quad (2.65)$$

Οι τυχαίες μεταβλητές Y_i , $i = 1, \dots, k$ είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Το ίδιο ισχύει και για τις τυχαίες μεταβλητές W_i , $i = 1, \dots, k$. Άρα θα είναι [9]:

$$(2.65) \rightarrow I(X_1, X_2, \dots, X_k; Y_1, Y_2, \dots, Y_k) = \sum_{i=1}^k h(Y_i) - \sum_{i=1}^k h(W_i) = \sum_{i=1}^k (h(Y_i) - h(W_i)) \quad (2.66)$$

Αν τώρα θεωρήσουμε ότι σε κάθε υποκανάλι το κέρδος ισχύος είναι λ_i , $i = 1, \dots, k$, και θεωρήσουμε ότι εκπέμπεται ένα σήμα από την i κεραία εκπομπής, τότε η ισχύς που θα λάβει η i κεραία λήψης θα είναι:

$$p_{r_i} = \lambda_i p_i + \sigma_w^2 \Leftrightarrow p_{r_i} = \lambda_i \frac{p}{n_T} + \sigma_w^2 \quad (2.67)$$

Όπου με p_i συμβολίζουμε την ισχύ του σήματος που εκπέμπεται από την i κεραία εκπομπής και με σ_w^2 συμβολίζουμε τον λευκό προσθετικό θόρυβο Gauss. Άρα, αντίστοιχα με τη σχέση (2.50), θα ισχύει:

$$h(Y_i) \leq \frac{1}{2} \log_2 \left[2\pi e \left(\lambda_i \frac{p}{n_T} + \sigma_w^2 \right) \right] \quad (2.68)$$

Άρα τελικά θα ισχύει:

$$(2.66) \xrightarrow[(2.63)]{(2.68)} C = \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{2} \log_2 \left(1 + \lambda_i \frac{p_i}{n_T \sigma_w^2} \right) \right) \quad (2.69)$$

Η χωρητικότητα όπως δίνεται από τη σχέση (2.69) είναι εκφρασμένη σε *bits/μετάδοση* ή *bits/δείγμα*. Στην περίπτωση τώρα που θεωρούμε ένα κανάλι συνεχούς χρόνου και περιορισμένου εύρους ζώνης B , τότε, με τη λογική που παρουσιάστηκε στην περίπτωση της χωρητικότητας SISO, η χωρητικότητα στη σχέση (2.69) παίρνει την εξής μορφή:

$$C = B \sum_{i=1}^k \left(\log_2 \left(1 + \lambda_i \frac{p_i}{n_T \sigma_w^2} \right) \right) \quad (2.70)$$

Αυτή αποτελεί την τελική έκφραση της χωρητικότητας σε ένα κανάλι MIMO και μετριέται σε *bits/sec*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Χωρητικότητα καναλιών MIMO

3.1 Μοντέλο συστήματος MIMO για flat fading channel

3.1.1 Γενική παρουσίαση

Σε αυτό το κεφάλαιο εξετάζουμε αναλυτικά την περίπτωση συστήματος MIMO με ένα χρήστη (single user MIMO system). Το σύστημα αποτελείται από μία συστοιχία n_T κεραιών εκπομπής και μία συστοιχία n_R κεραιών λήψης, όπως φαίνεται παρακάτω:

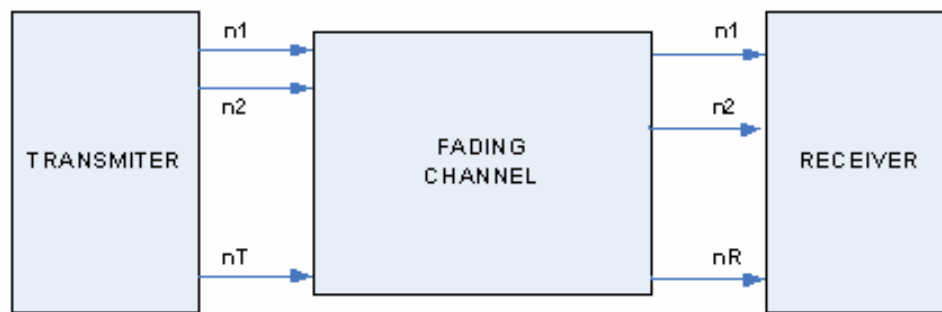


Figure 3-1 Σύστημα MIMO

Στην ανάλυση που ακολουθεί έχουμε κάνει τις παρακάτω απλοποιήσεις: Θεωρούμε ότι το εύρος ζώνης του καναλιού είναι $W = 1\text{Hz}$ και ότι η περίοδος ενός συμβόλου είναι $T_s = 1\text{sec}$. Άρα η ενέργεια ενός συμβόλου είναι ίση με την ισχύ που εκπέμπεται ανά σύμβολο. Επίσης αφού $W = 1\text{Hz}$ έπεται ότι η φασματική πυκνότητα ισχύος θορύβου N_o θα είναι ίση με την ισχύ του θορύβου ($N_o = \sigma_w^2$). Επίσης κάνουμε χρήση του μοντέλου σηματοδότησης διακριτού χρόνου (discrete time signal model ή sampled signal model), όπου σύμφωνα με αυτό το μοντέλο, όλα τα σήματα είναι διακριτού χρόνου και εκφρασμένα στη βασική ζώνη (baseband).

Άρα θεωρούμε ότι $\mathbf{x}(n)$ είναι το $n_T \times 1$ διάνυσμα εκπομπής, το οποίο παριστάνεται ως:

$$\mathbf{x}(n) = [x_1(n) \quad x_2(n) \quad \dots \quad x_{n_T}(n)]^T \quad (3.1)$$

Αντίστοιχα, $\mathbf{r}(n)$ και $\mathbf{w}(n)$ είναι τα $n_R \times 1$ διανύσματα σήματος λήψης και θορύβου, τα οποία παριστάνονται ως:

$$\mathbf{r}(n) = [r_1(n) \quad r_2(n) \quad \dots \quad r_{n_R}(n)]^T \quad (3.2)$$

$$\mathbf{w}(n) = [w_1(n) \quad w_2(n) \quad \dots \quad w_{n_R}(n)]^T \quad (3.3)$$

Επίσης, για την περίπτωση του καναλιού με επίπεδες διαλείψεις (flat fading channel) που εξετάζουμε, θα συμβολίζουμε με $h_{ij}(n)$ το δειγματοληπτημένο μιγαδικό κέρδος του καναλιού, κατά τη διάδοση ενός συμβόλου από την j κεραία εκπομπής ως την i κεραία λήψης. Άρα μπορούμε να σχηματίσουμε ένα πίνακα $n_R \times n_T$ που ονομάζεται *complex channel matrix*:

$$\mathbf{H}(n) = \begin{bmatrix} h_{11}(n) & h_{12}(n) & \dots & h_{1n_T}(n) \\ h_{21}(n) & h_{22}(n) & \dots & h_{2n_T}(n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n_R1}(n) & h_{n_R2}(n) & \dots & h_{n_Rn_T}(n) \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Άρα, το σήμα που λαμβάνεται από την i κεραία λήψης θα δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$r_i(n) = \sum_{j=1}^{n_T} x_j(n) h_{ij}(n) + w_i(n) \quad , i = 1, 2, \dots, n_R \quad \text{και} \quad j = 1, 2, \dots, n_T \quad (3.5)$$

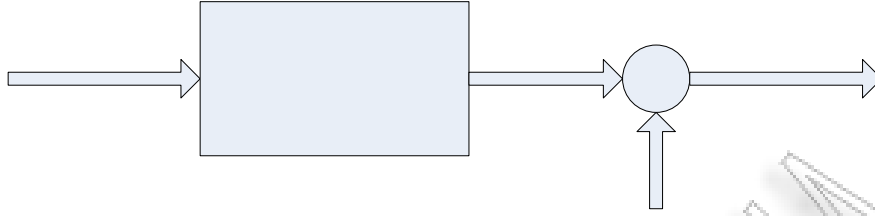
Η εξίσωση (3.5) υπό μορφή πινάκων θα είναι:

$$\mathbf{r}(n) = \mathbf{H}(n)\mathbf{x}(n) + \mathbf{w}(n) \quad (3.6)$$

Για περαιτέρω απλοποίηση, αφαιρούμε και την εξάρτηση από το διακριτό χρόνο n , οπότε η εξίσωση γίνεται:

$$\mathbf{r} = \mathbf{H}\mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (3.7)$$

Η εξίσωση (3.7) περιγράφει τη σχέση εισόδου – εξόδου σε ένα κανάλι MIMO υποθέτοντας επίπεδες διαλείψεις. Σχηματικά, η παραπάνω εξίσωση παριστάνεται στην εικόνα που ακολουθεί:



**Transmitted signal
vector \mathbf{x}**

Εικόνα 3-2 Εικονική αναπαράσταση σχέσης εισόδου - εξόδου σε κανάλι MIMO

**FLAT FADING
CHANNEL**

H

Θεωρούμε ότι το κανάλι είναι Gaussian, οπότε η κατάλληλη κατανομή που πρέπει να ακολουθούν τα στοιχεία του διανύσματος \mathbf{x} είναι η κανονική κατανομή. Άρα θεωρούμε ότι τα στοιχεία του διανύσματος \mathbf{x} είναι τυχαίες μεταβλητές i.i.d με μέση τιμή μηδέν και διασπορά 1. Επίσης, θεωρούμε ότι η συνολική ισχύς που μπορεί να εκπέμψει ο πομπός είναι p . Άρα στην περίπτωση που ο πομπός δε γνωρίζει το κανάλι, είναι λογικό η ισχύς να μοιράζεται εξίσου στις κεραίες [10]. Επομένως κάθε κεραία θα εκπέμψει με ισχύ $\frac{p}{n_T}$.

Άρα τελικά ο πίνακας αυτοσυμμεταβλητότητας του διανύσματος εισόδου θα είναι:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = E[\mathbf{xx}^H] \Leftrightarrow \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \frac{p}{n_T} \mathbf{I}_{n_T} \quad (3.8)$$

Στην παραπάνω σχέση ο πίνακας \mathbf{x}^H είναι ο αναστροφοσυζυγής του \mathbf{x} . Επίσης, για τη συνολική ισχύ p που μπορεί να εκπέμψει ο πομπός ισχύει [10]:

$$p = \text{tr}(\mathbf{R}_{\mathbf{xx}}) \quad (3.9)$$

Στη συνέχεια, θα δούμε πως όταν το κανάλι είναι γνωστό στον πομπό, η ισχύς μπορεί να μην κατανέμεται εξίσου στις κεραίες εκπομπής, αλλά μερικές κεραίες να εκπέμπουν με μεγαλύτερη ισχύ από άλλες. Αυτό όπως θα δούμε θα οδηγήσει σε αύξηση της χωρητικότητας.

Ο θόρυβος στο δέκτη περιγράφεται από ένα διάνυσμα $n_R \times 1$ και το συμβολίζουμε με \mathbf{w} . Υποθέτοντας χωρικά λευκό θόρυβο, τα στοιχεία του διανύσματος \mathbf{w} είναι Gaussian i.i.d. τυχαίες μεταβλητές, οπότε θα είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα με πίνακα αυτοσυμμεταβλητότητας:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{ww}} = E[\mathbf{ww}^H] \Leftrightarrow \mathbf{R}_{\mathbf{ww}} = \sigma_w^2 \mathbf{I}_{n_R} \quad (3.10)$$

Το διάνυσμα λήψης συμβολίζεται με \mathbf{r} και έχει διαστάσεις $n_R \times 1$. Ο πίνακας αυτοσυμμεταβλητότητας του διανύσματος λήψης προκύπτει μέσω της σχέσης (3.7)

$$\mathbf{R}_{rr} = E[\mathbf{r}\mathbf{r}^H] \xrightarrow{(7)} \mathbf{R}_{rr} = \mathbf{H}\mathbf{R}_{xx}\mathbf{H}^H + \mathbf{R}_{ww} \quad (3.11)$$

3.1.2 Διάσπαση Ιδιόμορφων τιμών (Singular Value Decomposition, SVD)

Το θεώρημα διάσπασης των ιδιόμορφων τιμών (*Singular Value Decomposition*) μας παρέχει τη δυνατότητα να μοντελοποιούμε ένα MIMO κανάλι, με k παράλληλα υποκανάλια. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με αυτό το θεώρημα κάθε πίνακας \mathbf{H} $n_R \times n_T$ μπορεί να παρασταθεί ως [4]:

$$\mathbf{H} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^H \quad (3.12)$$

Στην παραπάνω σχέση, \mathbf{D} είναι ένας διαγώνιος πίνακας* $n_R \times n_T$. Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του \mathbf{D} είναι οι τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών (*eigenvalues*) του πίνακα $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$, αν $n_R < n_T$ ή του πίνακα $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ αν $n_R \geq n_T$. Σημειώνεται εδώ ότι οι τετραγωνικές ρίζες των ιδιοτιμών ονομάζονται *ιδιόμορφες τιμές* (*singular values*) του \mathbf{H} . Άρα λοιπόν θα ισχύουν τα παρακάτω:

$$(3.7) \xrightarrow{(3.12)} \mathbf{r} = \mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{V}^H \mathbf{x} + \mathbf{w} \quad (3.13)$$

Έστω τώρα ότι κάνουμε τις παρακάτω θεωρήσεις:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{U}^H \mathbf{r}$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{V}^H \mathbf{x} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{w}' = \mathbf{U}^H \mathbf{w}$$

Τότε θα ισχύει:

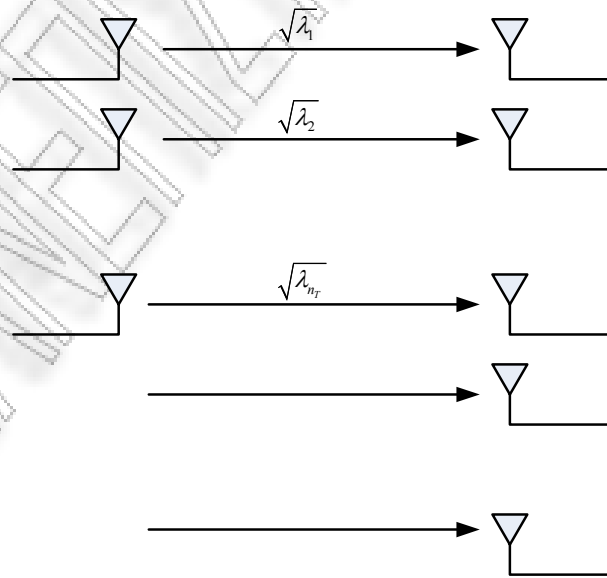
$$(3.13) \xrightarrow{(3.14)} \mathbf{r}' = \mathbf{D}\mathbf{x}' + \mathbf{w}' \quad (3.15)$$

* Κανονικά, διαγώνιοι πίνακες είναι οι τετραγωνικοί πίνακες. Αυτός καλείται καθ' υπέρβαση διαγώνιος.

Παραπάνω, ο πολλαπλασιασμός των διανυσμάτων $\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{w}$ με τους αντίστοιχους πίνακες μας δίνει μία νέα περιγραφή του συστήματος MIMO, η οποία μαθηματικά εκφράζεται με τη σχέση (3.15). Ο αριθμός των μη μηδενικών ιδιοτιμών του πίνακα $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ ή του $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ είναι ίσος με το $rank$ του πίνακα \mathbf{H} , που έστω ότι το συμβολίζουμε με k . Επειδή για τον πίνακα \mathbf{H} ισχύει $rank \leq \min(n_R, n_T)$, ο αριθμός των μη μηδενικών ιδιοτιμών θα είναι το πολύ $\min(n_R, n_T)$. Άρα, γνωρίζοντας ότι ο πίνακας \mathbf{D} περιέχει τις ιδιόμορφες τιμές του \mathbf{H} , μπορούμε από τη σχέση (3.15) να καταλήξουμε στην αντίστοιχη αναλυτική εξίσωση που είναι η ακόλουθη:

$$r'_i = \begin{cases} \sqrt{\lambda_i} x'_i + w'_i & , \quad i=1,2,\dots,k \\ w'_i & , \quad i=k+1,k+2,\dots,n_R \end{cases} \quad (3.16)$$

Όπως παρατηρούμε από την παραπάνω εξίσωση, το κανάλι MIMO μπορεί να παρασταθεί ισοδύναμα σαν ένα σύνολο από παράλληλα υποκανάλια. Κάθε υποκανάλι χαρακτηρίζεται από ένα κέρδος που είναι μία singular value του πίνακα \mathbf{H} . Σύμφωνα λοιπόν με τα παραπάνω, για $n_R > n_T$ θα ισχύει η εικόνα που ακολουθεί:



Εικόνα 3-3 Ισοδύναμη αναπαράσταση καναλιού MIMO με k παράλληλα υποκανάλια SISO

Εφόσον τα παράλληλα υποκανάλια είναι μεταξύ τους ανεξάρτητα, για να καθορίσουμε τη συνολική χωρητικότητα του καναλιού, αρκεί να προσθέσουμε τις επιμέρους χωρητικότητες των υποκαναλιών. Θεωρώντας ότι το κανάλι δεν είναι γνωστό στον πομπό, η συνολική ισχύς εκπομπής, όπως είπαμε και πιο πριν, μοιράζεται εξίσου στις κεραίες εκπομπής, έτσι ώστε κάθε κεραία να εκπέμπει ισχύ $\frac{P}{n_T}$. Αν αγνοήσουμε τις απώλειες διάδοσης, τότε η ισχύς που θα λαμβάνεται στο κάθε υποκανάλι θα είναι : $p_{r_i} = \frac{\lambda_i P}{n_T}$. Άρα η χωρητικότητα που επιτυγχάνεται θα είναι ίση με:

$$C = \sum_{i=1}^k \log_2 \left(1 + \frac{\lambda_i P}{n_T \sigma^2} \right) \quad (3.17)$$

Εδώ θυμίζουμε ότι το εύρος ζώνης του καναλιού έχει θεωρηθεί 1Hz. Η σχέση (3.17) επομένως, δείχνει τη χωρητικότητα ενός MIMO καναλιού, θεωρώντας το κανάλι ως ένα σύνολο από παράλληλα υποκανάλια, ανεξάρτητα μεταξύ τους, που το κάθε κανάλι παρουσιάζει κέρδος ισχύος λ_i .

3.1.3 Εναλλακτικός τρόπος απόδειξης της χωρητικότητας

Θυμίζουμε, ότι το κανάλι θεωρείται ότι έχει επίπεδες διαλείψεις, άρα πρόκειται για κανάλι χωρίς μνήμη (*memoryless*) [9]. Επίσης κάνουμε χρήση του μοντέλου σηματοδοσίας διακριτού χρόνου (*discrete time signal model* ή *sampled signal model*), οπότε όλα τα σήματα είναι διακριτού χρόνου και εκφρασμένα στη βασική ζώνη (*baseband*). Επίσης, σε αυτή την παράγραφο για ευκολία θεωρούμε ότι τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{H} που περιγράφει το κανάλι, δεν είναι τυχαίες μεταβλητές. Με άλλα λόγια θεωρείται ο πίνακας \mathbf{H} ντετερμινιστικός. Από τη θεωρία της πληροφορίας [8] γνωρίζουμε ότι η χωρητικότητα για ένα κανάλι διακριτού χρόνου χωρίς μνήμη δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$C = \max_{p(x)} I(\mathbf{x}; \mathbf{r}) \quad (3.18)$$

Στην παραπάνω σχέση, όπου $I(\mathbf{x};\mathbf{r})$ είναι η αμοιβαία πληροφορία των \mathbf{x} και \mathbf{r}^* .

Επίσης γνωρίζουμε ότι:

$$I(\mathbf{x};\mathbf{r}) = H(\mathbf{r}) - H(\mathbf{r}/\mathbf{x}) \quad (3.19)$$

Όπου $H(\mathbf{r})$ είναι η διαφορική εντροπία του \mathbf{r} και $H(\mathbf{r}/\mathbf{x})$ είναι η υπό συνθήκη διαφορική εντροπία του \mathbf{r} δοθέντος του \mathbf{x} . Ισχύει ότι $H(\mathbf{r}/\mathbf{x}) = H(\mathbf{w})$, όπου \mathbf{w} είναι το διάνυσμα του θορύβου. Άρα θα είναι:

$$(19) \rightarrow I(\mathbf{x};\mathbf{r}) = H(\mathbf{r}) - H(\mathbf{w}) \quad (3.20)$$

Άρα, από τις (3.18), (3.19) συμπαιρνουμε ότι για να αυξηθεί η χωρητικότητα πρέπει να αυξήσουμε το $H(\mathbf{r})$, δεδομένου ότι το $H(\mathbf{w})$ θεωρείται σταθερό. Από τον Telatar [11] γνωρίζουμε ότι η μέγιστη χωρητικότητα επιτυγχάνεται όταν το \mathbf{r} είναι *κυκλικά συμμετρικό μιγαδικό Gaussian διάνυσμα (circularly symmetric complex Gaussian vector)*. Για να ισχύει αυτό, πρέπει και το \mathbf{x} να είναι επίσης circularly symmetric complex Gaussian. Σε αυτή την περίπτωση, θα ισχύουν:

$$H(\mathbf{r}) = \log \det(\pi e \mathbf{R}_{rr}) \quad (3.21)$$

Όπου το \mathbf{R}_{rr} θα είναι:

$$(3.11) \xrightarrow{(3.10)} \mathbf{R}_{rr} = \mathbf{H} \mathbf{R}_{xx} \mathbf{H}^H + \sigma^2 \mathbf{I}_{n_R} \quad (3.22)$$

Επίσης, θεωρώντας θόρυβο επίσης circularly symmetric complex Gaussian θα ισχύει:

$$H(\mathbf{w}) = \log \det(\pi e \mathbf{R}_{ww}) \quad (3.23)$$

Όπου το \mathbf{R}_{ww} έχει οριστεί στη σχέση (3.10). Άρα λοιπόν θα ισχύουν τα παρακάτω:

* Η αμοιβαία πληροφορία ορίζεται πλήρως σε επόμενο κεφάλαιο.

$$\begin{aligned}
I(\mathbf{r}; \mathbf{x}) &= H(\mathbf{r}) - H(\mathbf{w}) \xrightarrow[(3.23)]{(3.21)} I(\mathbf{r}; \mathbf{x}) = \log_2 \det(\pi e \mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}) - \log_2 \det(\pi e \mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow I(\mathbf{r}; \mathbf{x}) = \log_2 \left(\frac{\det(\pi e \mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}})}{\det(\pi e \mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}})} \right) \Leftrightarrow I(\mathbf{r}; \mathbf{x}) = \log_2 \left(\frac{\det(\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}})}{\det(\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}})} \right) \xrightarrow{(3.10) \rightarrow \det(\mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}}) = \sigma^{2n_R}} \\
&\rightarrow I(\mathbf{r}; \mathbf{x}) = \log_2 \left(\frac{1}{\sigma^{2n_R}} \det(\mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}}) \right) \Leftrightarrow I(\mathbf{r}; \mathbf{x}) = \log_2 \det \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{R}_{\mathbf{r}\mathbf{r}} \right) \xrightarrow{(3.22)} \\
&\rightarrow I(\mathbf{r}; \mathbf{x}) = \log_2 \det \left(\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{H} \mathbf{R}_{\mathbf{x}\mathbf{x}} \mathbf{H}^H + \frac{1}{\sigma^2} \mathbf{R}_{\mathbf{w}\mathbf{w}} \right) \xrightarrow[(3.8)]{(3.10)} I(\mathbf{r}; \mathbf{x}) = \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_R} + \frac{p}{n_T \sigma^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right)
\end{aligned}$$

Άρα τελικά η χωρητικότητα δίνεται από τη σχέση:

$$C = \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_R} + \frac{p}{n_T \sigma^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \quad (3.24)$$

Οι σχέσεις (3.17) και (3.24) είναι ισοδύναμες. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Επειδή $\mathbf{H} \mathbf{H}^H = \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^H$ (eigendecomposition), με $\mathbf{Q} \mathbf{Q}^H = \mathbf{Q}^H \mathbf{Q} = \mathbf{I}$, θα ισχύει ότι:

$$C = \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_R} + \frac{p}{n_T \sigma^2} \mathbf{Q} \mathbf{\Lambda} \mathbf{Q}^H \right) \quad (3.25)$$

Επίσης γενικά αν \mathbf{A}, \mathbf{B} είναι τετραγωνικοί πίνακες, θα ισχύει:

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}\mathbf{B}) = \det(\mathbf{I} + \mathbf{B}\mathbf{A}) \quad (3.26)$$

Άρα τελικά θα είναι:

$$(3.24) \xrightarrow{(3.26)} C = \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_R} + \frac{p}{n_T \sigma^2} \mathbf{\Lambda} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \log_2 \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{p}{n_T \sigma^2} \lambda_i \right) \Leftrightarrow C = \sum_{i=1}^k \log_2 \left(1 + \frac{p}{n_T \sigma^2} \lambda_i \right)$$

Επίσης, λόγω των σχέσεων (3.24) και (3.26), η χωρητικότητα μπορεί να εκφραστεί και ως εξής:

$$C = \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_r} + \frac{P}{n_r \sigma^2} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \right) \quad (3.27)$$

Ομοίως με πριν, οι σχέσεις (3.17) και (3.27) είναι επίσης ισοδύναμες. Αυτό προκύπτει εύκολα, αν λάβουμε υπόψη μας ότι οι πίνακες $\mathbf{H}\mathbf{H}^H$ και $\mathbf{H}^H\mathbf{H}$ έχουν τις ίδιες ιδιοτιμές [11].

Στη συνέχεια, μελετάμε τη χωρητικότητα ενός καναλιού MIMO για διάφορες περιπτώσεις και εξάγουμε συμπεράσματα.

3.2 Εργοδική Χωρητικότητα καναλιού MIMO με Rayleigh fading

Σε αυτή την παράγραφο εκτιμάμε την χωρητικότητα ενός καναλιού MIMO, στην περίπτωση που δεν υπάρχει οπτική επαφή μεταξύ πομπού και δέκτη. Δηλαδή το σήμα που λαμβάνει ο δέκτης δεν έχει συνιστώσα Line Of Sight (LOS). Αντίθετα, το σήμα φτάνει στο δέκτη μέσω πολλαπλών διαδρομών. Ένα τέτοιο περιβάλλον διάδοσης μοντελοποιείται θεωρώντας ότι κάθε στοιχείο του πίνακα \mathbf{H} , είναι i.i.d. μιγαδική Gaussian τυχαία μεταβλητή με μηδενική μέση τιμή και με $E[|h_{ij}|^2] = 1$. Άρα το πραγματικό και το φανταστικό μέρος κάθε στοιχείου του \mathbf{H} θα έχει μηδενική μέση τιμή και διασπορά $\sigma^2 = \frac{1}{2}$. επομένως το πλάτος κάθε μιγαδικού στοιχείου του πίνακα \mathbf{H} θα ακολουθεί την κατανομή Rayleigh [12], ενώ η φάση του θα ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή. Εδώ θυμίζουμε πάλι ότι ο πίνακας \mathbf{H} που περιγράφει το κανάλι έχει διαστάσεις $n_R \times n_T$.

Στην περίπτωσή μας, επειδή ο πίνακας \mathbf{H} είναι τυχαίος, για τη χωρητικότητα θα ισχύει:

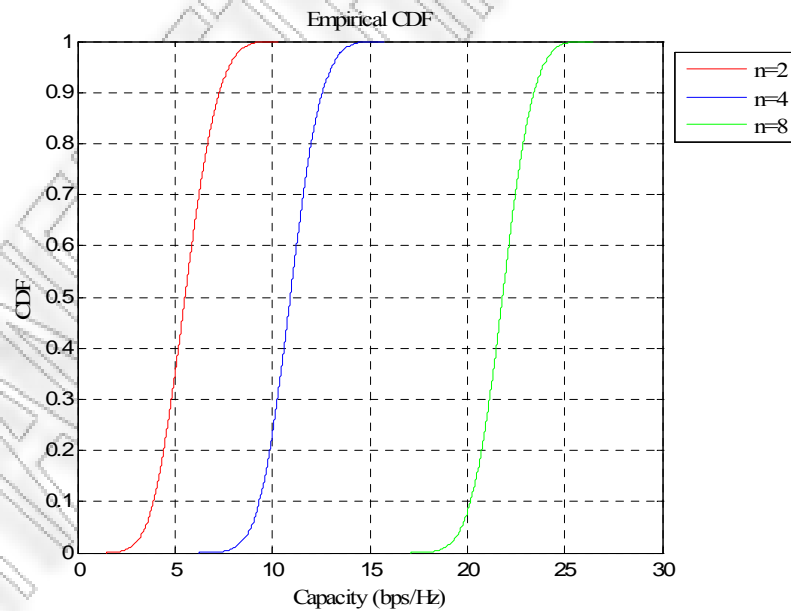
$$C = E \left\{ \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_r} + \frac{P}{n_r \sigma^2} \mathbf{H}\mathbf{H}^H \right) \right\} \quad (3.28)$$

ή

$$C = E \left\{ \sum_{i=1}^k \log_2 \left(1 + \frac{P}{n_T \sigma^2} \lambda_i \right) \right\} \quad (3.29)$$

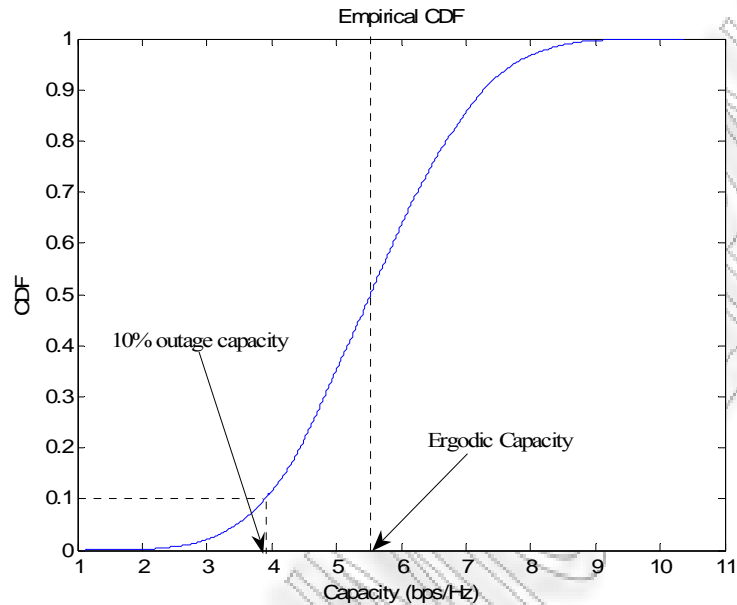
Όπου $E[\square]$ δηλώνει την αναμενόμενη τιμή, η οποία έχει νόημα λόγω της ύπαρξης του τυχαίου πλέον πίνακα \mathbf{H} στη σχέση (3.28) και της ύπαρξης των ιδιοτιμών στη σχέση (3.29) που είναι και αυτές τυχαίες μεταβλητές. Άρα και η χωρητικότητα στην περίπτωση MIMO καναλιού με Rayleigh fading θα είναι τυχαία μεταβλητή. Παρακάτω έχουμε απεικονίσει γραφικά τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (cumulative distribution function) της χωρητικότητας, ενδεικτικά για $SNR = 10dB$ και σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις:

- $n_T = n_R = 2$
- $n_T = n_R = 4$
- $n_T = n_R = 8$



Εικόνα 3-4 CDF για $SNR = 10dB$

Η CDF μας δίνει χρήσιμες πληροφορίες για τη χωρητικότητα. Για παράδειγμα θεωρούμε τη CDF της χωρητικότητας για $n_T = n_R = 2$ και $SNR = 10dB$. Τότε από το παρακάτω σχήμα μπορούμε να παρατηρήσουμε δύο χαρακτηριστικά μεγέθη:



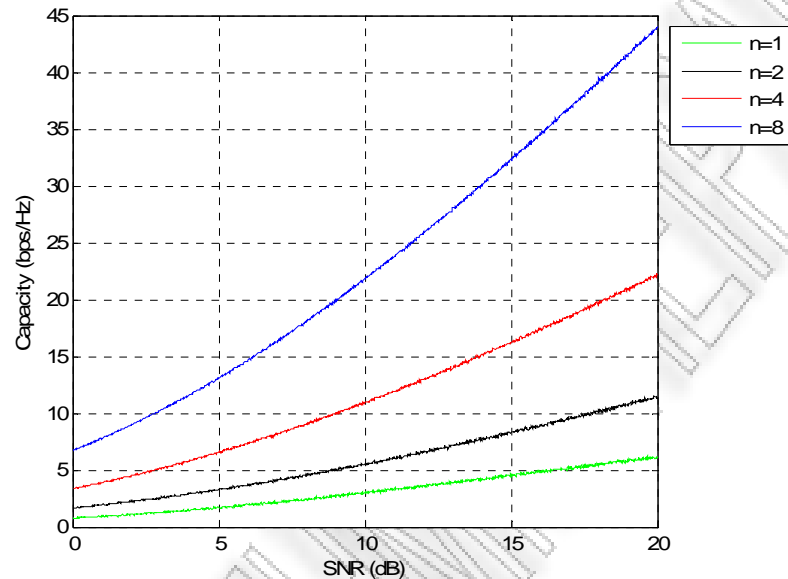
Εικόνα 3-5 CDF για $n_T=n_R=2$ και $SNR=10dB$

Γενικά, όταν χρησιμοποιούμε ένα στατιστικό μοντέλο για την περιγραφή του καναλιού, τότε κατά τη μελέτη της χωρητικότητας του καναλιού, εξετάζουμε δύο συχνά χρησιμοποιούμενες στατιστικές παραμέτρους [3]. Η μία ονομάζεται *Ergodic capacity*, και η άλλη *outage capacity*.

Η σχέση (3.28) παρουσιάζει στην ουσία την ergodic capacity ενός καναλιού MIMO. Γενικά σαν ergodic capacity ορίζουμε τη μέση τιμή της χωρητικότητας (mean), η οποία τονίζουμε ότι δεν είναι απαραίτητα ίση με τη μεσαία τιμή (50%). Για παράδειγμα στην παραπάνω εικόνα, ενώ η μεσαία τιμή (median) υπολογίζεται ότι είναι 5.5 bps/Hz, η εργοδική χωρητικότητα είναι ίση με 5.6 bps/Hz. Ενώ η διαφορά αυτή στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ελάχιστη, δεν ισχύει το ίδιο πάντα. Στη συνέχεια παριστάνουμε γραφικά την εργοδική χωρητικότητα, για διάφορες περιπτώσεις διαφορισιμότητας.

3.2.1 Διαφορισιμότητα σε πομπό και δέκτη (MIMO)

Παρακάτω παρουσιάζουμε την εργοδική χωρητικότητα ενός MIMO καναλιού, σε συνάρτηση με το SNR και με παράμετρο διάφορους συνδυασμούς κεραιών σε πομπό και δέκτη.

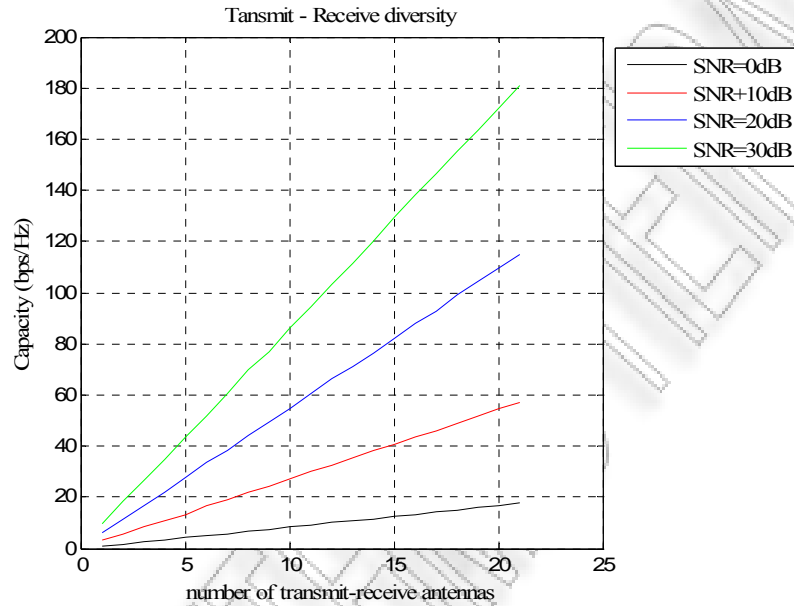


Εικόνα 3-6 Εργοδική χωρητικότητα συναρτήσει του SNR

Στην παραπάνω γραφική απεικόνιση θεωρούμε ότι ο αριθμός των κεραιών στο πομπό είναι ίσος με τον αριθμό των κεραιών στο δέκτη. Συγκεκριμένα η πράσινη καμπύλη απεικονίζει την εργοδική χωρητικότητα στην περίπτωση που έχουμε μία κεραία στο πομπό και μία στο δέκτη (περίπτωση SISO). Οι άλλες καμπύλες απεικονίζουν την χωρητικότητα στην περίπτωση MIMO με 2, 4 και 8 κεραιές σε πομπό και δέκτη. Η παραπάνω εικόνα προσφέρεται για να κάνουμε σύγκριση της χωρητικότητας που μπορούμε να πετύχουμε στο ίδιο περιβάλλον διάδοσης, στην περίπτωση που συστήματος SISO και MIMO. Φαίνεται καθαρά ότι στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε συστοιχία κεραιών σε πομπό και δέκτη (ή αλλιώς στην περίπτωση που έχουμε diversity σε πομπό και σε δέκτη) η χωρητικότητα που μπορούμε να πετύχουμε είναι σημαντικά μεγαλύτερη απ' ότι στην περίπτωση SISO. Επίσης μία σύγκριση μεταξύ των συστημάτων MIMO μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των κεραιών που χρησιμοποιούμε, τόσο περισσότερο αυξάνεται και η χωρητικότητα. Τέλος, για δεδομένο σύστημα MIMO,

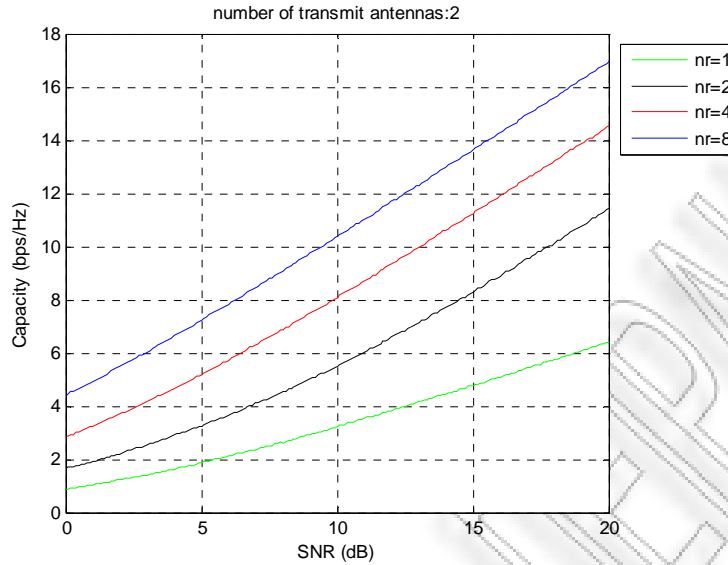
παρατηρούμε ότι με αύξηση του SNR αυξάνεται και η χωρητικότητα, όπως άλλωστε ήταν αναμενόμενο.

Στο παρακάτω σχήμα, παριστάνουμε γραφικά την εργοδική χωρητικότητα σε συνάρτηση με τον αριθμό των κεραιών εκπομπής και λήψης (θεωρώντας πάντα ότι οι κεραιές εκπομπής είναι ίσες στο πλήθος με τις κεραιές λήψης) και με παράμετρο το SNR



Εικόνα 3-7 Εργοδική χωρητικότητα συναρτήσει του αριθμού των κεραιών εκπομπής και λήψης

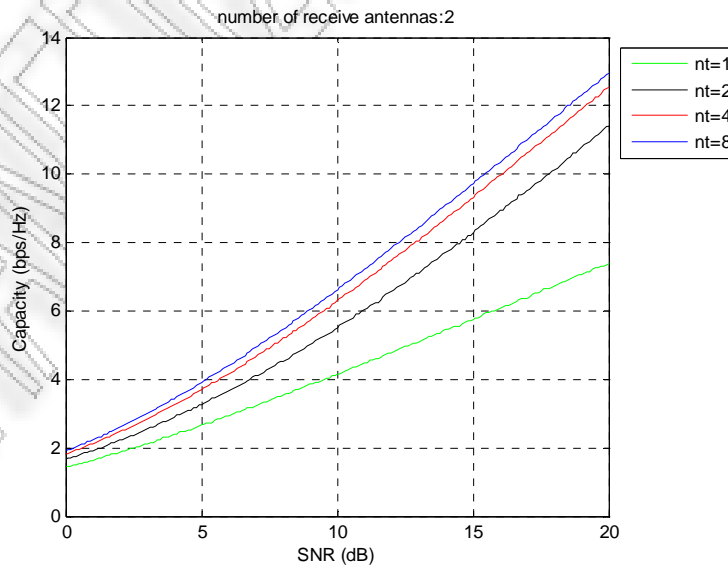
Στα επόμενα σχήματα συγκρίνουμε τη χωρητικότητα στην περίπτωση που ο αριθμός των κεραιών σε πομπό και δέκτη δεν είναι ίδιος. Συγκεκριμένα, στις καμπύλες που ακολουθούν, υποθέτουμε ότι ο πομπός αποτελείται από 2 κεραιές και ο δέκτης από 1,2,4 και 8 κεραιές:



Εικόνα 3-8 Εργοδική χωρητικότητα συναρτήσει του SNR με παράμετρο τον αριθμό κεραιών λήψης

Από τις παραπάνω καμπυλες παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένο SNR, όσο αυξάνουμε τον αριθμό των κεραιών λήψης διατηρώντας τον αριθμό των κεραιών εκπομπής σταθερό, η χωρητικότητα αυξάνει.

Στην αντίθετη περίπτωση, υποθέτουμε ότι έχουμε σταθερό αριθμό κεραιών λήψης και μεταβλητό αριθμό κεραιών εκπομπής. Τότε ισχύουν οι παρακάτω καμπύλες:



Εικόνα 3-9 Εργοδική χωρητικότητα συναρτήσει του SNR με παράμετρο τον αριθμό κεραιών εκπομπής

Σε αντίθεση με προηγουμένως, εδώ παρατηρούμε ότι διατηρώντας τον αριθμό των κεραιών λήψης σταθερό, όταν αυξάνουμε τον αριθμό των κεραιών εκπομπής η χωρητικότητα από ένα σημείο και μετά αυξάνεται λίγο.

Τα συμπεράσματα από τα δύο τελευταία σχήματα, παρατηρούνται πολύ έντονα στην περίπτωση που έχουμε διαφορισμότητα στη λήψη (receive diversity) και διαφορισμότητα στη μεριά εκπομπής (transmit diversity) αντίστοιχα.

3.2.2 Διαφορισμότητα λήψης

Εδώ εκτιμούμε τη χωρητικότητα στην περίπτωση όπου $n_R \geq n_T = 1$. Θα ισχύει ότι

$\mathbf{h} = [h_1 \ h_2 \ \dots \ h_{n_R}]^T$. Άρα θα είναι:

$$Q = \mathbf{h}^H \mathbf{h} \Leftrightarrow Q = \begin{bmatrix} h_1^* & h_2^* & \dots & h_{n_R}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & h_{n_R} \end{bmatrix} \Leftrightarrow Q = \sum_{i=1}^{n_R} |h_i|^2 \quad (3.30)$$

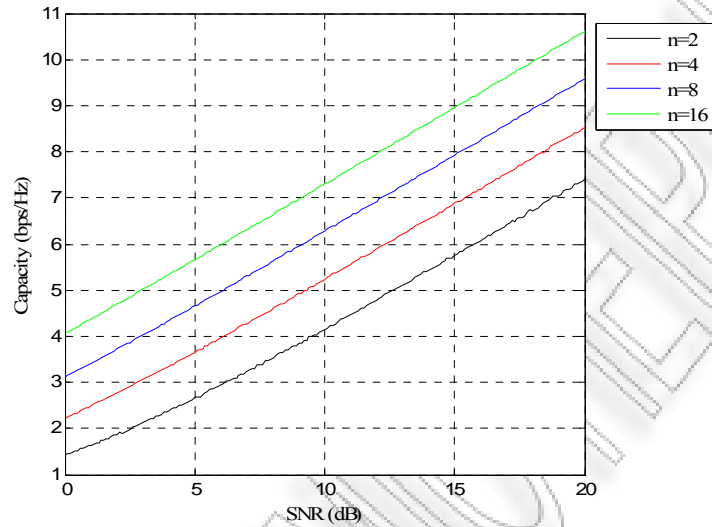
Άρα θα ισχύουν:

$$C = E \left\{ \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_T} + \frac{P}{n_T \sigma^2} \mathbf{H}^H \mathbf{H} \right) \right\} \xrightarrow{n_T=1} C = E \left\{ \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_T} + \frac{P}{n_T \sigma^2} \mathbf{h}^H \mathbf{h} \right) \right\} \xrightarrow{(3.30)} \\ \rightarrow C = E \left[\log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_R} |h_i|^2 \right) \right]$$

Άρα στην περίπτωση που έχουμε receive diversity η εργοδική χωρητικότητα είναι ίση με:

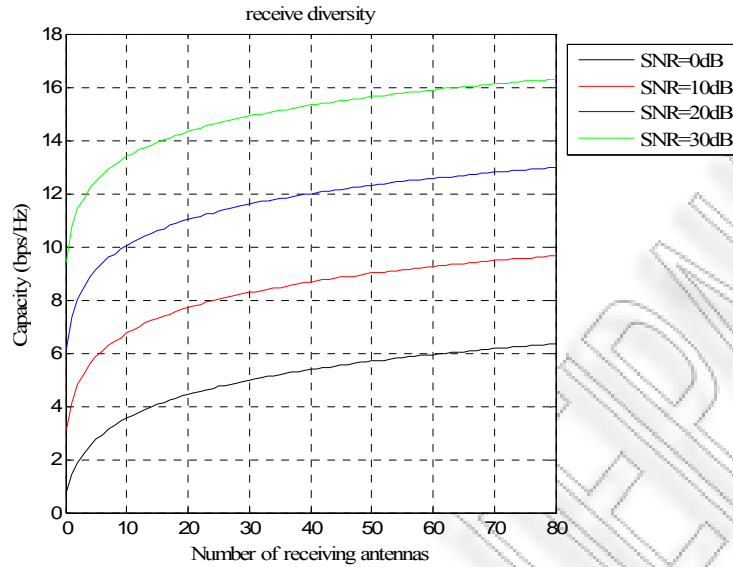
$$C = E \left[\log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_R} |h_i|^2 \right) \right] \quad (3.31)$$

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζουμε γραφικά τη χωρητικότητα, με βάση τη σχέση (3.31)



Εικόνα 3-10 Εργοδική χωρητικότητα συναρτήσει του SNR στην περίπτωση διαφορισιμότητας λήψης

Από τις παραπάνω καμπύλες παρατηρούμε καταρχήν ότι όσο αυξάνουμε τον αριθμό των κεραιών στο δέκτη, θα αυξάνεται και η χωρητικότητα. Επίσης, για συγκεκριμένο n_R παρατηρούμε μία σχεδόν γραμμική εξάρτηση της χωρητικότητας με το SNR, με τη χωρητικότητα να αυξάνεται σαφώς όσο αυξάνεται το SNR. Μία εναλλακτική απεικόνιση της χωρητικότητας όταν έχουμε receive diversity είναι η ακόλουθη:



Εικόνα 3-11 Εργοδική χωρητικότητα συναρτήσει του αριθμού κεραιών λήψης στην περίπτωση διαφορισιμότητας στο δέκτη

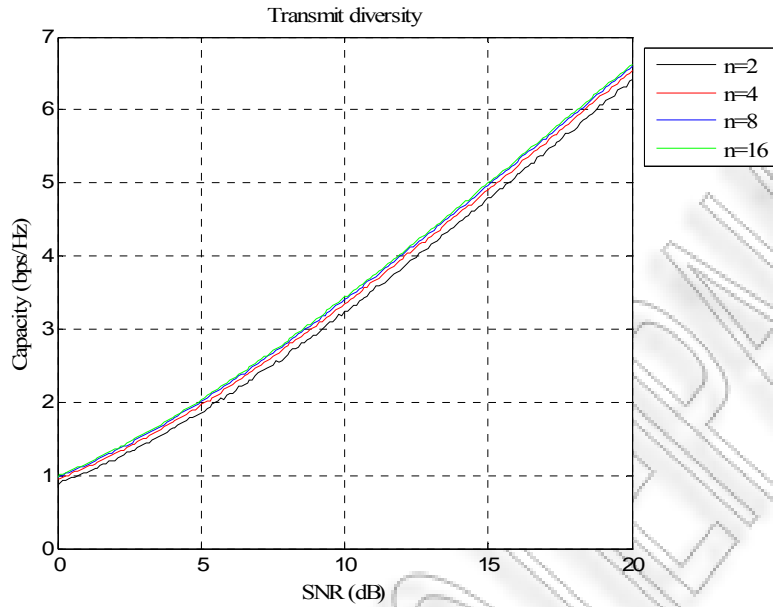
Εδώ, έχουμε απεικονίσει τη χωρητικότητα σε συνάρτηση με το n_r , και με παράμετρο το SNR.

3.2.3 Διαφορισιμότητα εκπομπής

Με ανάλογο συλλογισμό καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση που δίνει τη χωρητικότητα στην περίπτωση που κάνουμε transmit diversity ($n_t > n_r = 1$):

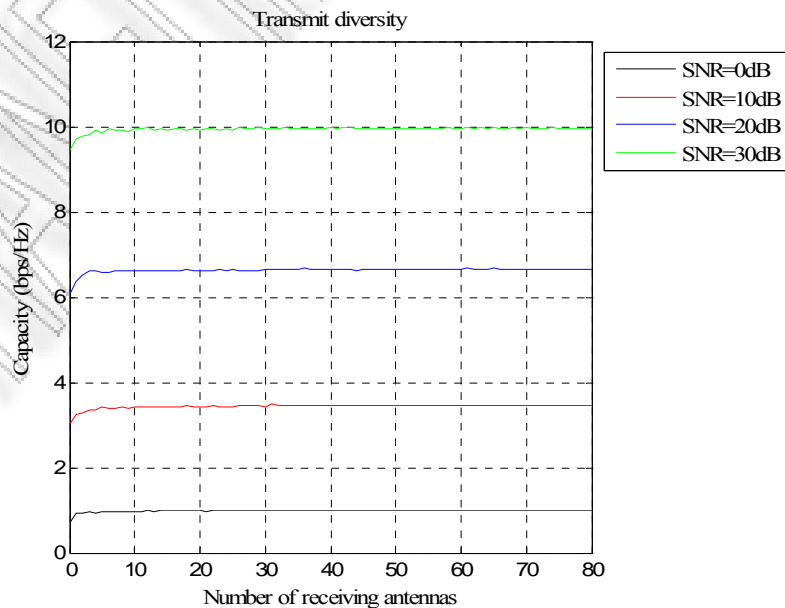
$$C = E \left[\log_2 \left(1 + \frac{P}{n_t \sigma^2} \sum_{j=1}^{n_t} |h_j|^2 \right) \right] \quad (3.32)$$

Στο παρακάτω σχήμα απεικονίζουμε γραφικά τη χωρητικότητα σε συνάρτηση με το SNR και με παράμετρο το n_t .



Εικόνα 3-12 Εργοδική χωρητικότητα συναρτήσει του SNR στην περίπτωση διαφορισιμότητας εκπομπής

Εδώ παρατηρούμε ότι έχουμε αύξηση της χωρητικότητας με το SNR, αλλά ταυτόχρονα βλέπουμε ότι η χωρητικότητα δεν αυξάνει αισθητά με αύξηση του n_T . Αυτό επιβεβαιώνεται και στο παρακάτω σχήμα που βλέπουμε ελάχιστη αύξηση της χωρητικότητας όταν $n_T \leq 15$ περίπου, αλλά αν αυξήσουμε περαιτέρω το n_T η χωρητικότητα δεν αλλάζει καθόλου.



3.2.4 Transmit – receive diversity όταν τα υποκανάλια είναι ορθογώνια μεταξύ τους

Σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι κάθε ξεχωριστή διαδρομή στο MIMO κανάλι δεν δέχεται παρεμβολές από άλλες. Με άλλα λόγια θεωρούμε τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{H} που περιγράφει το κανάλι ανεξάρτητα μεταξύ τους οπότε και *ορθογώνια*. Άρα αν θεωρήσουμε για απλότητα ότι $n_R = n_T = n$, για τον πίνακα \mathbf{H} διαστάσεων $n \times n$ θα ισχύει:

$$\mathbf{H} = \sqrt{n}\mathbf{I}_n \quad (3.33)$$

Όπου ο συντελεστής \sqrt{n} είναι μία σταθερά που εξαρτάται από τον περιορισμό ισχύος που έχει αποδοθεί στον πομπό [10]. Θυμίζουμε εδώ ότι η ολική ισχύς του πομπού είναι p και στην περίπτωση που ο πομπός δε γνωρίζει το κανάλι η ισχύς εκπομπής ισομοιράζεται στις κεραίες του. Άρα κάθε κεραία θα εκπέμπει με ισχύ $\frac{p}{n}$. Επίσης η ισχύς που λαμβάνει κάθε κεραία δέκτη είναι ίση με τη συνολική ισχύ εκπομπής p . Με αυτές τις υποθέσεις αγνοούμε τις εξασθενήσεις του σήματος κατά τη διάδοσή του, καθώς και τα κέρδη των κεραιών κ.τ.λ. Άρα λοιπόν, για τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{H} θα πρέπει να

ισχύει: $E \left[\sum_{j=1}^{n_r} |h_{ij}|^2 \right] = n_T, \quad i = 1, \dots, n_R$. Έτσι δικαιολογείται ο συντελεστής \sqrt{n} .

Από την (3.33) θα έχουμε ότι:

$$(3.33) \rightarrow \mathbf{H}\mathbf{H}^H = \mathbf{H}^H\mathbf{H} = n\mathbf{I}_n \quad (3.34)$$

Άρα στην περίπτωση αυτή η χωρητικότητα θα είναι:

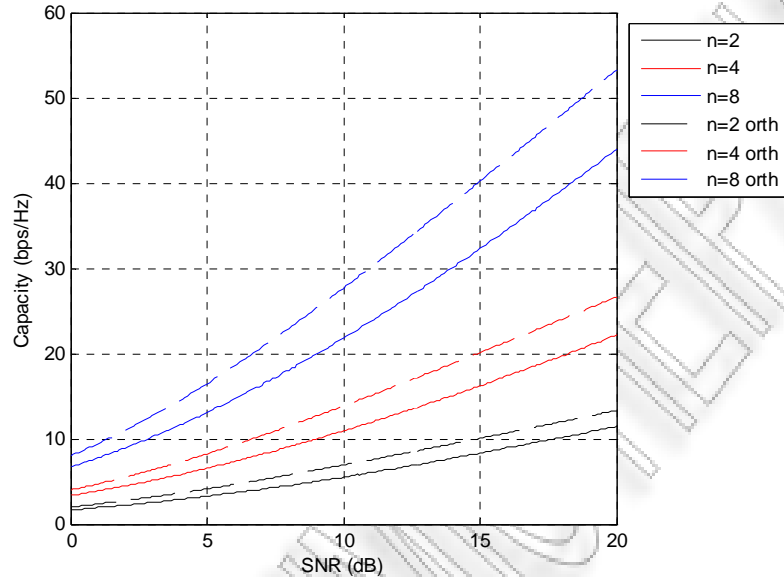
$$(3.28) \xrightarrow[n_T=n_R=n]{(3.34)} C = E \left\{ \log_2 \det \left(\mathbf{I}_n + \frac{p}{\sigma^2} \mathbf{I}_n \right) \right\} \Leftrightarrow C = \log_2 \det \left[\left(1 + \frac{p}{\sigma^2} \right) \mathbf{I}_n \right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow C = \log_2 \det \left[\text{diag} \left(1 + \frac{p}{\sigma^2} \right) \right] \Leftrightarrow C = \log_2 \left(1 + \frac{p}{\sigma^2} \right)^n \Leftrightarrow C = n \log_2 \left(1 + \frac{p}{\sigma^2} \right)$$

Άρα τελικά:

$$C = n \log_2 \left(1 + \frac{p}{\sigma^2} \right) \quad (3.35)$$

Στη συνέχεια κάνουμε σύγκριση της χωρητικότητας στην περίπτωση που ο πίνακας \mathbf{H} είναι unitary¹ οπότε θα ισχύει η (3.35), και στη γενικότερη περίπτωση που τα στοιχεία του \mathbf{H} δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους.



Εικόνα 3-14 Εργοδική χωρητικότητα όταν τα στοιχεία του \mathbf{H} είναι ορθογώνια μεταξύ τους

Στο παραπάνω σχήμα θεωρήσαμε ότι ο αριθμός των κεραιών εκπομπής είναι ίσος με τον αριθμό κεραιών λήψης. Με διακεκομμένες γραμμές παριστάνεται η χωρητικότητα όταν ο πίνακας \mathbf{H} είναι unitary. Σε κάθε περίπτωση παρατηρούμε ότι, θεωρώντας ορθογώνια μετάδοση, η χωρητικότητα είναι μεγαλύτερη.

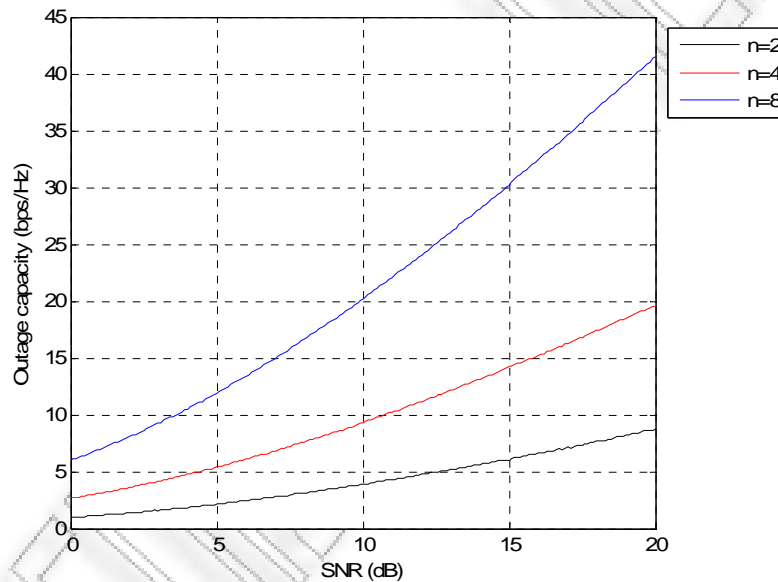
3.3 Outage Capacity

Ορίζουμε σαν $q\%$ outage capacity [4], τη χωρητικότητα που μπορεί να επιτευχθεί για το $(100-q)\%$ των πραγματοποιήσεων του καναλιού. Άρα θα ισχύει: $p(C \leq C_{out}) = q\%$. Επομένως, για να υπολογίσουμε γραφικά την outage capacity πρέπει να έχουμε τη CDF

¹ Λέμε ότι ένας πίνακας \mathbf{P} είναι unitary, όταν τα στοιχεία του είναι μιγαδικά και ισχύει:
 $\mathbf{P}^H \mathbf{P} = \mathbf{P} \mathbf{P}^H = \mathbf{I}$

της χωρητικότητας C , όπως φαίνεται σε προηγούμενο σχήμα, που για παράδειγμα 10% outage capacity σημαίνει ότι η πιθανότητα η χωρητικότητα να είναι μικρότερη από 3.9 bps/Hz είναι 10%, ή αντίστοιχα ότι για το 90% των πραγματοποιήσεων του καναλιού η χωρητικότητα θα είναι μεγαλύτερη των 3.9 bps/Hz. Ποιοτικά η outage capacity σημαίνει ότι πάντα υπάρχει πιθανότητα μία πραγματοποίηση του καναλιού να μην υποστηρίζει το ρυθμό δεδομένων που απαιτείται.

Στο σχήμα που παρουσιάζουμε στη συνέχεια, έχει απεικονιστεί γραφικά η outage χωρητικότητα στην περίπτωση που ο αριθμός των κεραιών στον πομπό είναι ίσος με τον αριθμό των κεραιών στο δέκτη ($n_T = n_R = n$) και για $n = 2, 4, 8$.



Εικόνα 3-15 Χωρητικότητα outage συναρτήσει του SNR

3.4 Χωρητικότητα καναλιού MIMO με Rayleigh fading όταν το κανάλι είναι γνωστό στον πομπό.

Μέχρι τώρα στην ανάλυσή μας θεωρήσαμε ότι τα χαρακτηριστικά του καναλιού είναι πλήρως γνωστά στο δέκτη και άγνωστα στον πομπό. Όπως είχαμε δει, όταν το κανάλι είναι άγνωστο στον πομπό, τότε η συνολική ισχύς εκπομπής μοιράζεται εξίσου στις

κεραίες εκπομπής, έτσι ώστε η ισχύς που εκπέμπεται ανά σύμβολο από κάθε κεραία να είναι $\frac{P}{n_T}$, όπου P η συνολική ισχύς. Σε αυτή την περίπτωση είδαμε ότι η χωρητικότητα δίνεται γενικά από τις σχέσεις (3.28) και (3.29).

Στην περίπτωση που ο πομπός γνωρίζει τα χαρακτηριστικά του καναλιού, η χωρητικότητα του καναλιού μπορεί να αυξηθεί [10]. Συγκεκριμένα, σε αυτή την περίπτωση ο πομπός δεν ισομοιράζει τη διαθέσιμη ισχύ στις κεραίες του, αλλά μπορεί να αντιστοιχίσει σε κάθε κεραία διαφορετικό ποσοστό από την ολική ισχύ. Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για αυτό το σκοπό ονομάζεται *waterfilling method* [3], [10]. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, αντιστοιχίζεται περισσότερη ισχύς σε ένα υποκανάλι στο οποίο οι συνθήκες διάδοσης είναι καλές, και λιγότερο ποσοστό ισχύος σε ένα υποκανάλι με λιγότερο καλές συνθήκες διάδοσης.

Η χωρητικότητα στην περίπτωση που το κανάλι είναι γνωστό στον πομπό γίνεται:

$$C = E \left\{ \sum_{i=1}^k \log_2 \left(1 + \frac{P}{n_T \sigma^2} \lambda_i \gamma_i \right) \right\} \quad (3.36)$$

Παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά από τη σχέση (3.29) είναι η προσθήκη του συντελεστή γ_i . Θυμίζουμε ξανά ότι με k συμβολίζουμε τον αριθμό των παράλληλων υποκαναλιών στα οποία μπορεί να αναλυθεί ένα MIMO κανάλι, σύμφωνα με τη μέθοδο *singular value decomposition*. Ο συντελεστής γ_i εκφράζει την ισχύ εκπομπής ενός συμβόλου που αντιστοιχίζεται στο i υποκανάλι, δηλαδή ισχύει ότι: $\gamma_i = E \left[|x_i|^2 \right]$, $i = 1, \dots, k$. Αν τώρα υποθέσουμε για τη συνολική ισχύ εκπομπής ότι $P = n_T$, τότε λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω καθώς και τη σχέση (9) καταλήγουμε στον ακόλουθο περιορισμό:

$$\sum_{i=1}^k \gamma_i = n_T \quad (3.37)$$

Άρα λοιπόν, το πρόβλημα της βέλτιστης κατανομής της ισχύος στις κεραίες του πομπού, ανάγεται στη μεγιστοποίηση της ακόλουθης συνάρτησης:

$$C = \max_{\sum_{i=1}^k \gamma_i = n_T} \sum_{i=1}^k \log_2 \left(1 + \frac{p}{n_T \sigma^2} \lambda_i \gamma_i \right) \quad (3.38)$$

Η μεγιστοποίηση της παραπάνω συνάρτησης πρέπει να γίνει με τον περιορισμό της σχέσης (3.37). Άρα, πρόκειται για ένα πρόβλημα μεγιστοποίησης μίας συνάρτησης με δεδομένους κάποιους περιορισμούς. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να μετατραπεί σε πρόβλημα μεγιστοποίησης μίας συνάρτησης χωρίς περιορισμούς.

Αυτή η μετατροπή μπορεί να γίνει ορίζοντας μία νέα συνάρτηση που λέγεται *Lagrangian συνάρτηση* ως εξής:

$$Y = \sum_{i=1}^k \log_2 \left(1 + \frac{p}{n_T \sigma^2} \lambda_i \gamma_i \right) + L \left(n_T - \sum_{i=1}^k \gamma_i \right) \quad (3.39)$$

Στην παραπάνω σχέση L είναι ο *πολλαπλασιαστής Lagrange*. Οι άγνωστοι στη συνάρτηση (3.39) είναι οι συντελεστές γ_i και το L . Για να προσδιορίσουμε τις τιμές των γ_i αρκεί να βρούμε τις μερικές παραγώγους της συνάρτησης Y και να τις θέσουμε με μηδέν. Με άλλα λόγια για να βρούμε τα γ_i πρέπει να λύσουμε την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\partial Y}{\partial \gamma_i} = 0 \quad (3.40)$$

ή

$$\frac{\partial Y}{\partial \gamma_i} = \frac{1}{\ln 2} \frac{\frac{p}{n_T \sigma^2} \lambda_i}{1 + \frac{p}{n_T \sigma^2} \lambda_i \gamma_i} - L = 0 \quad (3.41)$$

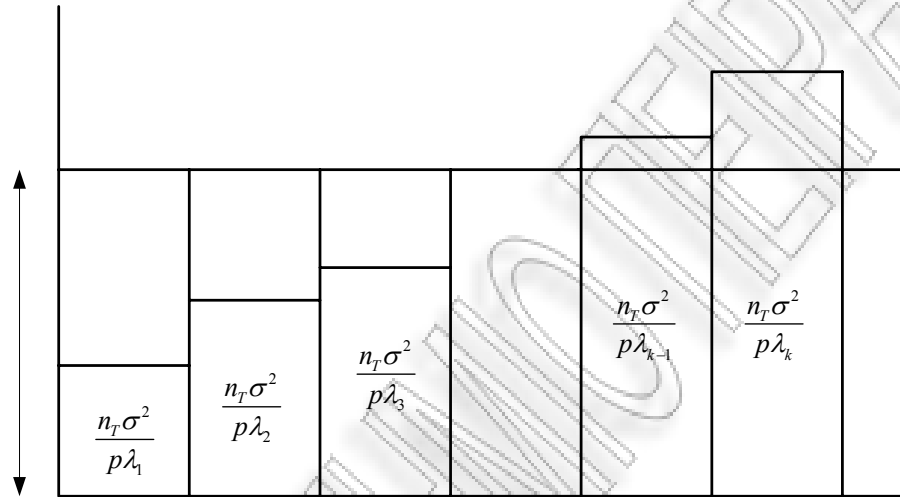
Λύνοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς γ_i βρίσκουμε ότι:

$$\gamma_i = \left(\mu - \frac{n_T \sigma^2}{p \lambda_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, k \quad (3.42)$$

Όπου ισχύει:

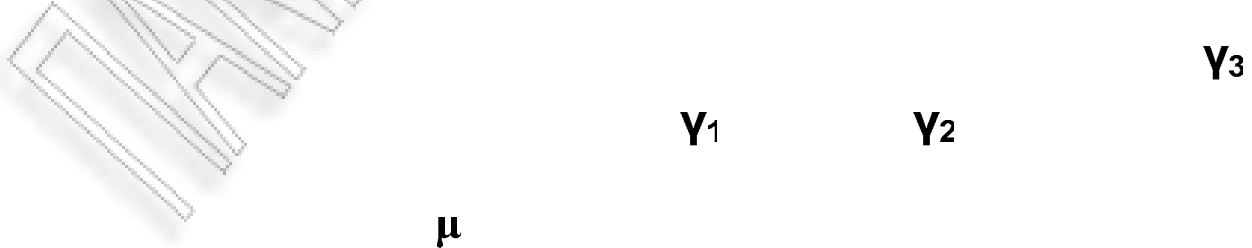
$$\mu = \frac{1}{L \ln 2} \quad (3.43)$$

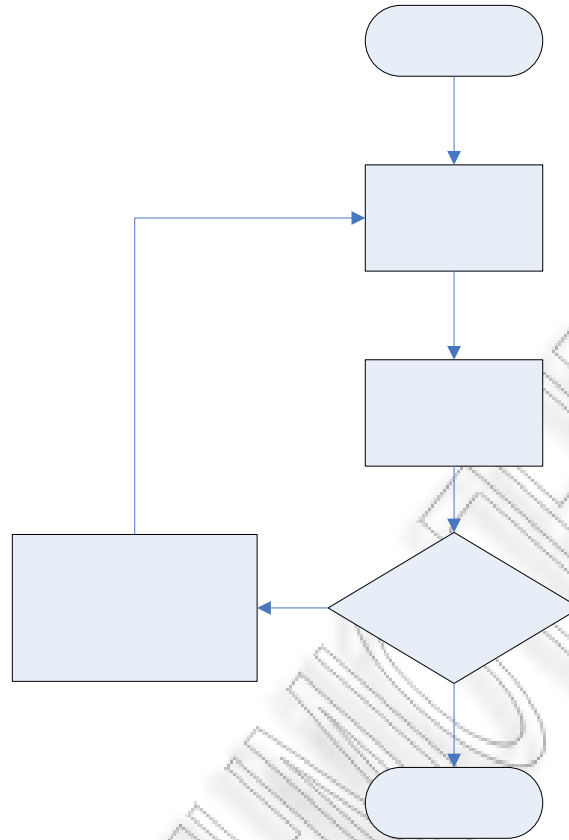
Η παράμετρος μ είναι μία σταθερά που υπολογίζεται σε συνδιασμό και με την εξίσωση (3.37). Από τη σχέση (3.42) στην οποία καταλήξαμε, παρατηρούμε ότι θα αντιστοιχίζεται περισσότερη ισχύς σε ένα υποκανάλι με μεγάλο κέρδος ισχύος (δηλαδή σε ένα κανάλι με καλές συνθήκες διάδοσης) και λιγότερη ισχύς σε ένα κανάλι με μικρό κέρδος ισχύος (δηλαδή σε ένα κανάλι στο οποίο οι συνθήκες διάδοσης δεν είναι καλές). Σχηματικά, ο τρόπος με τον οποίο λειτουργεί ο αλγόριθμος Waterfilling παρουσιάζεται παρακάτω:



Εικόνα 3-16 Μέθοδος Waterfilling

Στη συνέχεια απεικονίζεται γραφικά η χωρητικότητα στην περίπτωση που ο πομπός γνωρίζει το κανάλι. Για τη γραφική παράσταση της χωρητικότητας υλοποιήθηκε στο Matlab ο αλγόριθμος waterfilling όπως περιγράφηκε παραπάνω. Ο αλγόριθμος παριστάνεται στο παρακάτω σχηματικό διάγραμμα:





Εικόνα 3-18. Αλγόριθμος μεθόδου Waterfilling

Σύμφωνα με το παραπάνω διάγραμμα, αρχικά θέτουμε το μετρητή επαναλήψεων $s=1$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τη σταθερά μ . Η σταθερά αυτή υπολογίζεται συνδιάζοντας τις (3.37) και (3.42), οπότε καταλήγουμε στη ακόλουθη εξίσωση:

$$\mu = \frac{n_T}{k-s+1} \left[1 + \frac{\sigma^2}{p} \sum_{i=1}^{k-s+1} \frac{1}{\lambda_i} \right] \quad (3.44)$$

Επίσης για τον υπολογισμό των γ_i χρησιμοποιήθηκε η σχέση:

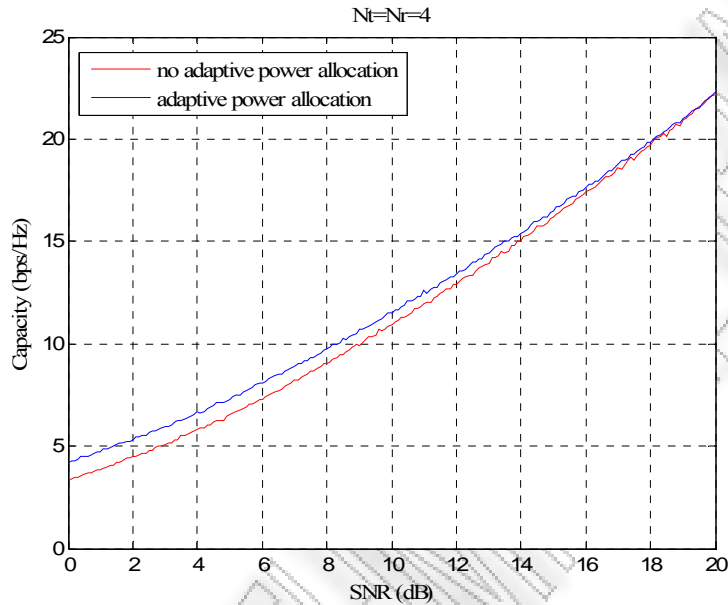
$$\gamma_i = \left(\mu - \frac{n_T \sigma^2}{p \lambda_i} \right)^+, \quad i = 1, 2, \dots, k-s+1$$

ΑΝ ΙΣΧΥΕΙ
 $\gamma_{k-s+1} < 0$ ΘΕΣΕ
 $\gamma_{k-s+1} = 0$ (45)

ΟΧΙ

Στη συνέχεια ελέγχεται αν ισχύει $\gamma_{k-s+1} < 0$. Αν ισχύει τότε θέτουμε $s = s + 1$ και αυξάνοντας το μετρητή επαναλήψεων s κατά 1, επαναλαμβάνουμε ξανά τους υπολογισμούς. Ο αλγόριθμος τερματίζεται αν ισχύει $\gamma_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, k$.

Στη συνέχεια συγκρίνουμε την εργοδική χωρητικότητα ενός καναλιού Rayleigh, στην περίπτωση που το κανάλι είναι γνωστό στο πομπό και στο δέκτη και όταν είναι γνωστό μόνο στο δέκτη. Θεωρούμε σύστημα MIMO με $n_T = n_R = 4$.



Εικόνα 3-18 Σύγκριση χωρητικότητας όταν το κανάλι είναι γνωστό στον πομπό και όταν δεν είναι

Από την παραπάνω εικόνα παρατηρούμε ότι όταν ο πομπός γνωρίζει το κανάλι, η χωρητικότητα είναι πάντα μεγαλύτερη απ' ό,τι στην αντίθετη περίπτωση. Επίσης παρατηρούμε ότι η διαφορά στη χωρητικότητα ελαττώνεται καθώς το SNR αυξάνει, ενώ φαίνεται ότι για μεγάλες τιμές του SNR η χωρητικότητα και στις δύο περιπτώσεις είναι ίδια. Άρα στην περίπτωση που ο πομπός γνωρίζει το κανάλι, έχουμε βελτίωση της χωρητικότητας μόνο για μικρές τιμές SNR.

3.5 Εργοδική Χωρητικότητα καναλιού MIMO με Rician fading

3.5.1 Γενική παρουσίαση

Μέχρι αυτό το σημείο είχαμε υποθέσει κανάλι με διαλείψεις Rayleigh. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τη χωρητικότητα ενός καναλιού MIMO στην περίπτωση που υπάρχει

και απευθείας διαδρομή του σήματος μεταξύ πομπού και δέκτη (Line of Sight, LOS συνιστώσα). Σε αυτή την περίπτωση το κανάλι καλείται Ricean. Για να μοντελοποιήσουμε και την απευθείας διαδρομή του σήματος, τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{H} που περιγράφει το κανάλι θα έχουν τις ίδιες στατιστικές ιδιότητες όπως στην περίπτωση που θεωρήσαμε διαλείψεις Rayleigh, με τη διαφορά όμως ότι τώρα θα έχουν μη μηδενική μέση τιμή. Με άλλα λόγια, κάθε στοιχείο του πίνακα \mathbf{H} είναι i.i.d. μιγαδική Gaussian τυχαία μεταβλητή με μη μηδενική μέση τιμή και με διασπορά $E[|h_{ij}|^2] = 1$. Άρα το πραγματικό και το φανταστικό μέρος κάθε στοιχείου του \mathbf{H} θα έχει μη μηδενική μέση τιμή και διασπορά $\sigma^2 = \frac{1}{2}$. Ο πίνακας \mathbf{H} , διαστάσεων $n_R \times n_T$ δίνεται από την παρακάτω σχέση [3]:

$$\mathbf{H} = a\bar{\mathbf{H}} + b\mathbf{H}_w \quad (3.46)$$

Στη σχέση (3.46), ο πρώτος όρος μοντελοποιεί τη LOS συνιστώσα διάδοσης και ο δεύτερος τις ανακλώμενες συνιστώσες λόγω της παρουσίας σκεδαστών στο χώρο. Άρα το πλάτος κάθε μιγαδικού στοιχείου του πίνακα \mathbf{H}_w θα ακολουθεί την κατανομή Rayleigh, ενώ η φάση του θα ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή. Επίσης, επειδή για τον πίνακα \mathbf{H} ισχύει ότι $E[|h_{ij}|^2] = 1$, στην παραπάνω εξίσωση γίνεται κανονικοποίηση ώστε:

$$a^2 + b^2 = 1 \quad (3.47)$$

Επίσης, αφού θεωρούμε και απευθείας συνιστώσα διάδοσης, χρησιμοποιούμε τον παράγοντα K που θυμίζουμε ότι ορίζεται ως ο λόγος της ισχύος στην απευθείας συνιστώσα προς τη συνολική ισχύ των ανακλώμενων συνιστωσών. Ο παράγοντας K θα δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{a^2}{b^2} \quad (3.48)$$

Συνδιάζοντας τις (3.47), (3.48) θα ισχύει:

$$a = \sqrt{\frac{K}{1+K}} \quad (3.49)$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{1+K}}$$

Άρα ο πίνακας \mathbf{H} που περιγράφει ένα κανάλι MIMO με διαλείψεις Rician θα δίνεται τελικά από την παρακάτω σχέση:

$$(1) \xrightarrow{(4)} \mathbf{H} = \sqrt{\frac{K}{1+K}} \bar{\mathbf{H}} + \sqrt{\frac{1}{1+K}} \mathbf{H}_w \quad (3.50)$$

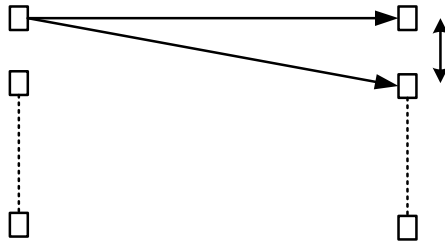
Όσον αφορά τον πίνακα $\bar{\mathbf{H}}$, μοντελοποιεί όπως είπαμε τη LOS συνιστώσα οπότε θα ισχύει:

$$\sqrt{\frac{K}{1+K}} \bar{\mathbf{H}} = E[\mathbf{H}] \quad (3.51)$$

Ο πίνακας αυτός είναι της μορφής:

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} e^{j\Phi_{11}} & \dots & \dots & \dots & e^{j\Phi_{1n_T}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{j\Phi_{n_R 1}} & \dots & \dots & \dots & e^{j\Phi_{n_R n_T}} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Όπου με Φ_{ji} συμβολίζουμε την ολίσθηση φάσης του σήματος κατά τη διάδοσή του από την j κεραία εκπομπής στην i κεραία λήψης. Στην περίπτωση που θεωρούμε σύστημα MIMO με n_T κεραίες εκπομπής και n_R κεραίες λήψης, τότε θα ισχύει το παρακάτω σχήμα:



Στο σχήμα αυτό, έχουμε θεωρήσει ότι $R \square D$. Επίσης θεωρούμε ότι η ολίσθηση φάσης του σήματος κατά τη διάδοσή του από την j κεραία εκπομπής προς την αντίστοιχη κεραία λήψης δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\Phi_{ji} = \Phi, \quad i = j \quad (3.53)$$

Επειδή όπως βλέπουμε από το παραπάνω σχήμα ισχύει $R' > R$, γενικά θα είναι:

$$\Phi_{ji} = \Phi + \vartheta_{ji} \Rightarrow e^{j\Phi_{ji}} = e^{j\Phi} e^{j\vartheta_{ji}}, \quad i \neq j \quad (3.54)$$

Άρα:

$$(7) \xrightarrow{(9)} \bar{\mathbf{H}} = e^{j\Phi} \begin{bmatrix} 1 & \dots & e^{j\vartheta_{nr}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{j\vartheta_{nr1}} & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Άρα θα ισχύει:

$$(5) \xrightarrow{(10)} \mathbf{H} = \sqrt{\frac{K}{1+K}} e^{j\Phi} \bar{\mathbf{H}} + \sqrt{\frac{1}{1+K}} \mathbf{H}_w \quad (3.56)$$

Στην περίπτωση τώρα που ισχύει $R \square D$ θα είναι $R \square R'$. Άρα προσεγγιστικά θα ισχύει $\vartheta_{ji} \square 0$. Άρα όταν η απόσταση μεταξύ πομπού και δέκτη είναι πολύ μεγάλη² τότε από την (3.55) βλέπουμε ότι όλα τα στοιχεία του πίνακα $\bar{\mathbf{H}}$ είναι 1. Πρακτικά αυτό σημαίνει ότι για σταθερό D , ανάλογα με την απόσταση που υπάρχει μεταξύ πομπού και

² Σε σχέση με την απόσταση D

δέκτη, οι τιμές των στοιχείων του $\bar{\mathbf{H}}$ ποικίλουν. Άρα θα υπάρχει και μία ειδική περίπτωση κατά την οποία η απόσταση R μεταξύ πομπού και δέκτη θα είναι τέτοια (σε σχέση με την απόσταση D), ώστε ο πίνακας $\bar{\mathbf{H}}$ να γίνεται ορθογώνιος.

Στη συνέχεια παριστάνουμε γραφικά τη χωρητικότητα καναλιού MIMO σε διάφορες περιπτώσεις, θεωρώντας τον πίνακα \mathbf{H} όπως περιγράφηκε παραπάνω. Για απλοποίηση, θεωρούμε στην (3.56) ότι $\Phi = 0$.

3.5.2 Διαφορισιμότητα στη μεριά του πομπού και του δέκτη (MIMO)

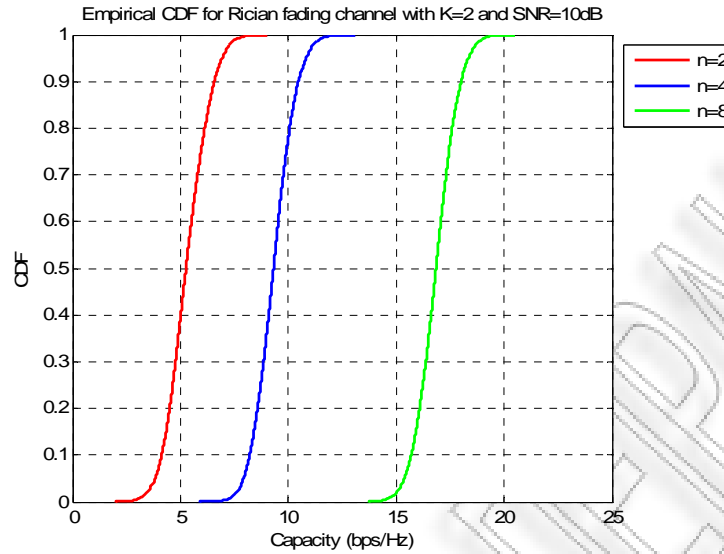
Σε αυτό το σημείο μελετάμε τη χωρητικότητα ενός MIMO καναλιού στην περίπτωση που θεωρούμε Ricean κανάλι και ότι το σύστημα MIMO αποτελείται από n_T κεραιές εκπομπής και n_R κεραιές λήψης. Η σχέση που ισχύει για τη χωρητικότητα σε αυτή την περίπτωση είναι η ίδια με αυτήν που είχαμε αποδείξει και στην περίπτωση καναλιού με διαλείψεις Rayleigh και την οποία παρουσιάζουμε ξανά εδώ για ευκολία:

$$C = E \left\{ \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_R} + \frac{P}{n_T \sigma^2} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \right\} \quad (3.57)$$

Φυσικά, στην παραπάνω εξίσωση ο πίνακας \mathbf{H} που περιγράφει το κανάλι θα δίνεται από τη σχέση (3.56).

Παρακάτω έχουμε απεικονίσει γραφικά τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (cumulative distribution function) της χωρητικότητας ενδεικτικά σε τρεις περιπτώσεις:

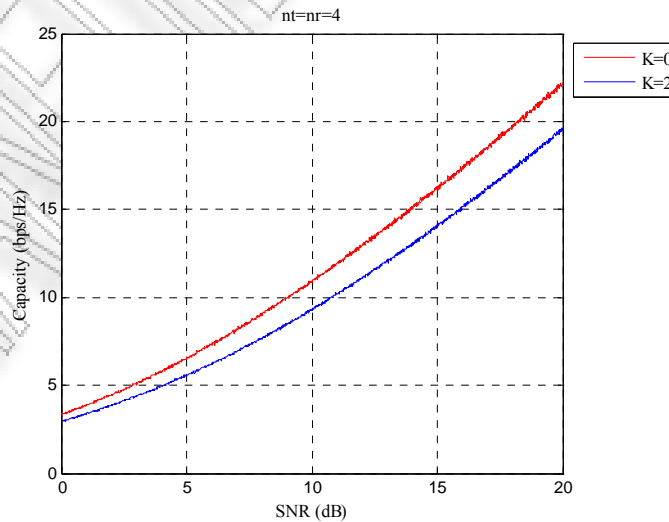
- $n_T = n_R = 2$
- $n_T = n_R = 4$
- $n_T = n_R = 8$



Εικόνα 3-19 CDF για κανάλι με διαλείψεις Rician, $k=2$ $\text{SNR}=10\text{dB}$

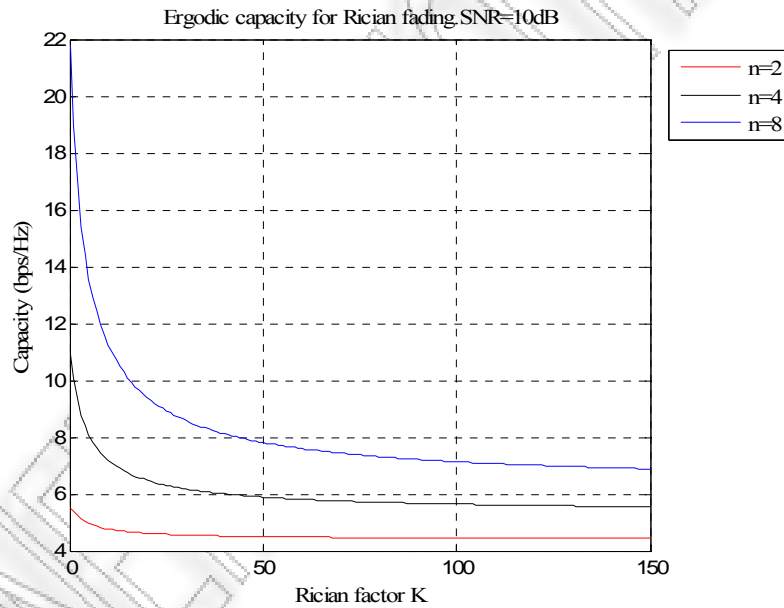
Από το παραπάνω σχήμα παρατηρούμε, όπως ήταν αναμενόμενο, ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των κεραιών, θα αυξάνεται και η χωρητικότητα. Σημειώνουμε εδώ ότι οι παραπάνω καμπύλες προέκυψαν με την υπόθεση ότι ο Rician factor (K) είναι ίσος με 2. Στην εικόνα που ακολουθεί, έχουμε παραστήσει την εργοδική χωρητικότητα MIMO καναλιού σε συνάρτηση με το SNR και για $n_T = n_R = 4$ σε δύο περιπτώσεις:

- Rician factor $K=0$
- Rician factor $K=2$



Εικόνα 3-20 Σύγκριση χωρητικότητας καναλιού με διαλείψεις Rayleigh και διαλείψεις Rician συναρτήσει του SNR

Όπως παρατηρούμε και από τη σχέση (3.56), η θεώρηση ότι $K = 0$ ισοδυναμεί με την περίπτωση καναλιού με διαλείψεις Rayleigh, καθώς σημαίνει ότι δεν υπάρχει καθόλου απευθείας διάδοση του σήματος παρά μόνο διάδοση μέσω ανακλάσεων. Με άλλα λόγια, η παραπάνω εικόνα μας βοηθά να συγκρίνουμε την εργοδική χωρητικότητα στην περίπτωση που έχουμε Rayleigh κανάλι και Rician κανάλι με $K = 2$. Η χωρητικότητα στην περίπτωση που υπάρχει LOS συνιστώσα ελαττώνεται σε σχέση με την περίπτωση που δεν υπάρχει καθόλου LOS συνιστώσα. Μάλιστα οι διαφορές στη χωρητικότητα είναι μεγαλύτερες σε μεγάλες τιμές SNR. Επίσης, όσο αυξάνει το K , τόσο περισσότερο ελαττώνεται η χωρητικότητα. Η τελευταία παρατήρηση επισημαίνεται περισσότερο με την παρακάτω εικόνα.



Εικόνα 3-21 Εξάρτηση εργοδικής χωρητικότητας από το Rician factor

Εδώ, παρουσιάζουμε τη μεταβολή της χωρητικότητας ενός MIMO καναλιού, σε συνάρτηση με το Rician factor K και με παράμετρο τον αριθμό των κεραιών σε πομπή και δέκτη, ενώ θεωρούμε ότι $SNR = 10dB$. Σημειώνεται εδώ ότι για ευκολία έχουμε θεωρήσει ότι ο αριθμός των κεραιών στον πομπό είναι ίσος με τον αριθμό των κεραιών στο δέκτη. Από τις παραπάνω καμπύλες παρατηρούμε ότι όσο αυξάνει ο παράγοντας K , δηλαδή όσο περισσότερο αυξάνει η ισχύς της απευθείας συνιστώσας, τόσο περισσότερο ελαττώνεται η χωρητικότητα. Επίσης βλέπουμε πως από μία τιμή του K και μετά, η

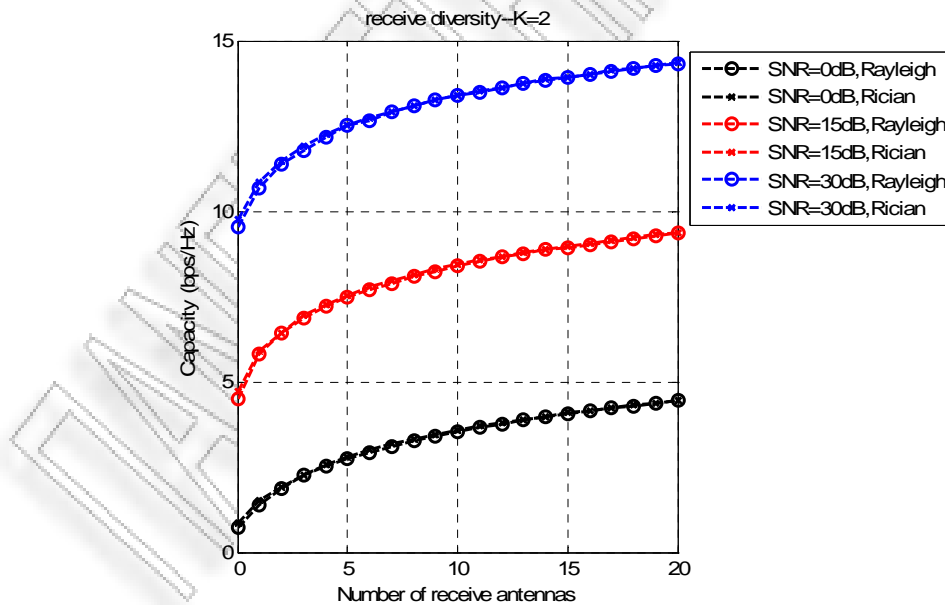
χωρητικότητα τείνει να σταθεροποιείται σε μία τιμή. Παρατηρούμε επίσης, ότι όσο πιο μικρός είναι ο αριθμός των κεραιών σε πομπό και δέκτη, τόσο πιο μικρή θα είναι και η τιμή του Rician factor στην οποία η χωρητικότητα θα συγκλίνει.

3.5.3 Διαφορισιμότητα στο δέκτη (SIMO)

Εδώ μελετάμε τη χωρητικότητα στην περίπτωση που έχουμε μία κεραία στο πομπό και πολλές κεραιές λήψης. Σε αυτή την περίπτωση το κανάλι θα περιγράφεται από ένα διάνυσμα \mathbf{h} διαστάσεων $n_r \times 1$. Είχαμε δείξει πως η χωρητικότητα σε αυτή την περίπτωση δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$C = E \left[\log_2 \left(1 + \frac{P}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n_r} |h_i|^2 \right) \right] \quad (3.58)$$

Στη συνέχεια παριστάνουμε γραφικά τη χωρητικότητα για ένα Rayleigh κανάλι και ένα Rician κανάλι, σε συνάρτηση με τον αριθμό των κεραιών λήψης και με παράμετρο το SNR



Εικόνα 3-22 Σύγκριση εργοδικής χωρητικότητας στις περιπτώσεις καναλιών Rayleigh και Rician στην περίπτωση SIMO

Από τις παραπάνω καμπύλες, παρατηρούμε ότι η χωρητικότητα στις δύο περιπτώσεις καναλιών είναι ίδια.

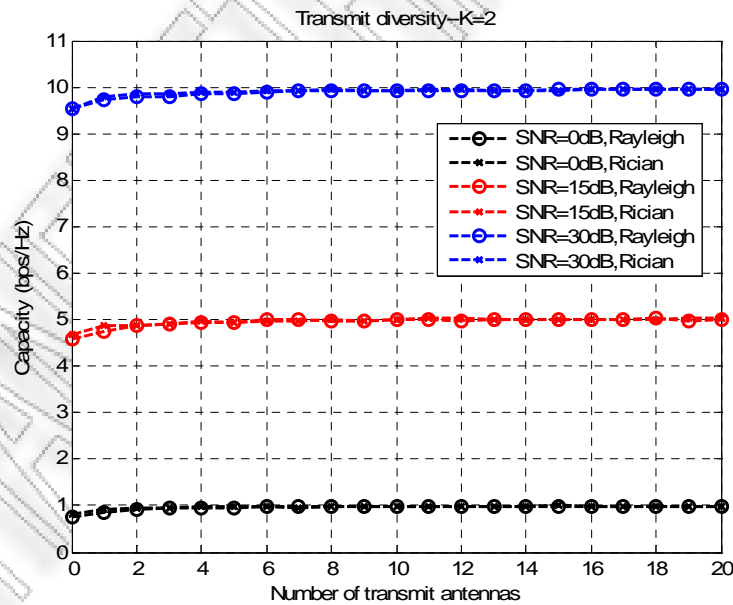
Όπως θα δούμε παρακάτω, στα ίδια συμπεράσματα καταλήγουμε και στην περίπτωση του Transmit diversity.

3.5.4 Διαφορισιμότητα στον πομπό (MISO)

Σε αυτή την περίπτωση το κανάλι περιγράφεται από ένα διάνυσμα \mathbf{h} διαστάσεων $1 \times n_T$. Είχαμε αποδείξει ότι η χωρητικότητα σε αυτή την περίπτωση δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$C = E \left[\log_2 \left(1 + \frac{P}{n_T \sigma^2} \sum_{j=1}^{n_T} |h_j|^2 \right) \right] \quad (3.59)$$

Στη συνέχεια, ομοίως με πριν, παριστάνουμε γραφικά τη χωρητικότητα για ένα κανάλι Rayleigh και ένα κανάλι Rice, σε συνάρτηση με τον αριθμό των κεραιών εκπομπής και με παράμετρο το SNR.



Εικόνα 3-23 Σύγκριση εργοδικής χωρητικότητας καναλιών Rayleigh και Rician στην περίπτωση MISO

Εδώ παρατηρούμε, αντίστοιχα με πριν, ότι η χωρητικότητα και στις δύο περιπτώσεις καναλιών είναι ίδια.

3.6 Εναλλακτικός τρόπος σηματοδοσίας

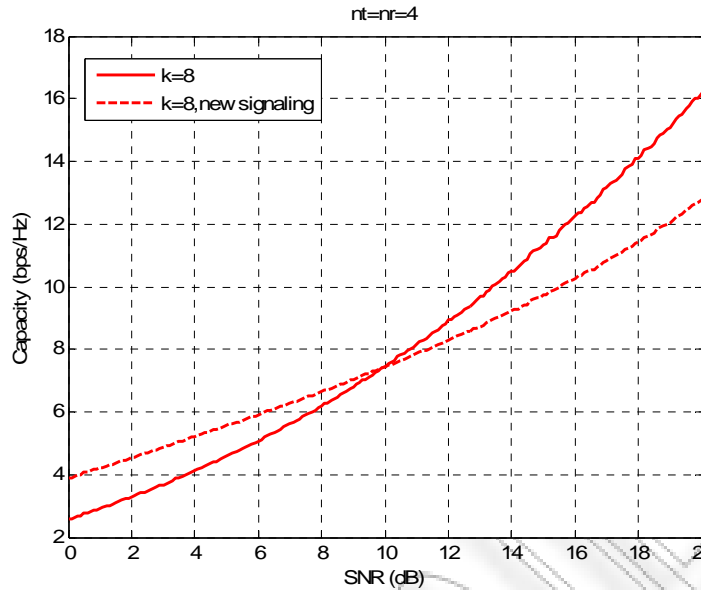
Μέχρι αυτό το σημείο, θεωρούσαμε ότι τα στοιχεία του διανύσματος εισόδου \mathbf{x} είναι τυχαίες μεταβλητές i.i.d με μέση τιμή μηδέν και διασπορά 1. Επίσης, είχαμε υποθέσει ότι η ισχύς που μπορεί να εκπέμψει ο πομπός είναι p . Άρα, δεδομένου ότι ο πομπός δε γνωρίζει το κανάλι διάδοσης, λογικό είναι η διαθέσιμη ισχύς να μοιράζεται εξίσου στις κεραίες εκπομπής. Επομένως κάθε κεραία θα εκπέμψει με ισχύ $\frac{p}{n_T}$. Άρα τελικά ο πίνακας αυτοσυμμεταβλητότητας του διανύσματος εισόδου \mathbf{x} μέχρι τώρα ήταν:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = E[\mathbf{xx}^H] \Leftrightarrow \mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \frac{p}{n_T} \mathbf{I}_{n_T} \quad (3.60)$$

Στην περίπτωση που έχουμε κανάλι Rice θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε έναν πίνακα αυτοσυμμεταβλητότητας του διανύσματος εισόδου, ο οποίος να εξαρτάται από τον παράγοντα K . Βέβαια, αυτό υπονοεί ότι ο πομπός πρέπει να γνωρίζει τη τιμή του παράγοντα K , που σημαίνει ότι χρειάζεται να έχει κάποια γνώση του καναλιού. Ο πίνακας αυτοσυμμεταβλητότητας που προτείνεται είναι ο εξής [13]:

$$\mathbf{R}_{\mathbf{xx}} = \frac{P}{n_t(1+K)} (\mathbf{I}_{n_t} + K\Psi_{n_t}) \quad (3.61)$$

Από την παραπάνω σχέση, παρατηρούμε ότι για $K=0$ προκύπτει η σχέση (3.60). Η χρήση του πίνακα αυτοσυμμεταβλητότητας της σχέσης (3.61) βελτιώνει όπως θα δούμε, τη χωρητικότητα για χαμηλές τιμές του SNR, ενώ για μεγαλύτερες τιμές η χωρητικότητα ελαττώνεται. Αυτά φαίνονται στις παρακάτω καμπύλες, όπου έχουμε θεωρήσει ίσο αριθμό κεραιών εκπομπής και λήψης ($n_t = n_r = 4$) και $K = 8$.



Εικόνα 3-24 Εναλλακτικός τρόπος σηματοδότησης καναλιών με διαλείψεις Rician

Οι παραπάνω καμπύλες, αντιστοιχούν στους δύο τρόπους σηματοδότησης οι οποίοι εκφράζονται μέσω των σχέσεων (3.60) και (3.61). Φαίνεται καθαρά ότι θεωρώντας τον πίνακα αυτοσυμμεταβλητότητας της σχέσης (3.61) έχουμε βελτίωση της χωρητικότητας για χαμηλές τιμές του SNR, αλλά για μεγαλύτερες τιμές έχουμε απώλεια.

3.7 Χωρητικότητα MIMO όταν το κανάλι έχει συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά (frequency selective channel).

3.7.1 Εισαγωγή

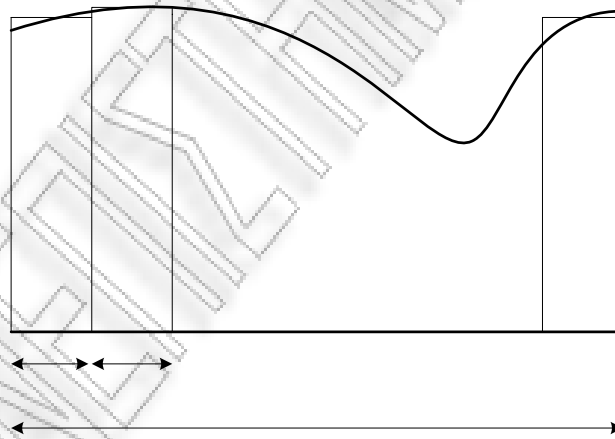
Έστω ότι το σήμα που μεταδίδουμε έχει εύρος ζώνης B_s και ότι το coherence bandwidth του καναλιού είναι B_c . Στην περίπτωση που ισχύει $B_c > B_s$, όλες οι συνιστώσες συχνότητες του μεταδιδόμενου σήματος επηρεάζονται κατά τον ίδιο τρόπο από το κανάλι, οπότε το κανάλι καλείται μη επιλεκτικό ως προς τις συχνότητες (frequency non selective channel) ή κανάλι με επίπεδες διαλείψεις (flat fading channel). Το δε σήμα, καλείται σήμα στενής ζώνης. Αντίθετα, αν $B_c < B_s$, τότε οι συνιστώσες

συχρότητες του μεταδιδόμενου σήματος επηρεάζονται με διαφορετικό τρόπο από το κανάλι, οπότε το κανάλι θεωρείται *επιλεκτικό ως προς τις συχνότητες (frequency selective fading)*.

Μέχρι αυτό το σημείο, θεωρούσαμε κανάλι με επίπεδες διαλείψεις (flat fading channel). Στη συνέχεια εξετάζουμε τη χωρητικότητα ενός MIMO διαύλου που παρουσιάζει συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά.

3.7.2 Κανάλι με Rayleigh fading

Η χωρητικότητα στην περίπτωση MIMO καναλιού με συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά, μπορεί να υπολογιστεί διαιρώντας το εύρος ζώνης του καναλιού σε N ανεξάρτητα υποκανάλια, έτσι ώστε κάθε υποκανάλι να μπορεί να θεωρηθεί ότι παρουσιάζει επίπεδες διαλείψεις. Άρα, αν για λόγους κανονικοποίησης θεωρήσουμε ότι το εύρος ζώνης του καναλιού είναι 1 Hz, τότε κάθε υποκανάλι θα έχει εύρος ζώνης $\frac{1}{N}$ Hz.



Εικόνα 3-25 Υπολογισμός χωρητικότητας για κανάλι με συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά

Προφανώς, όσο μεγαλύτερο είναι το N , τόσο εντονότερη είναι η συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά του καναλιού.

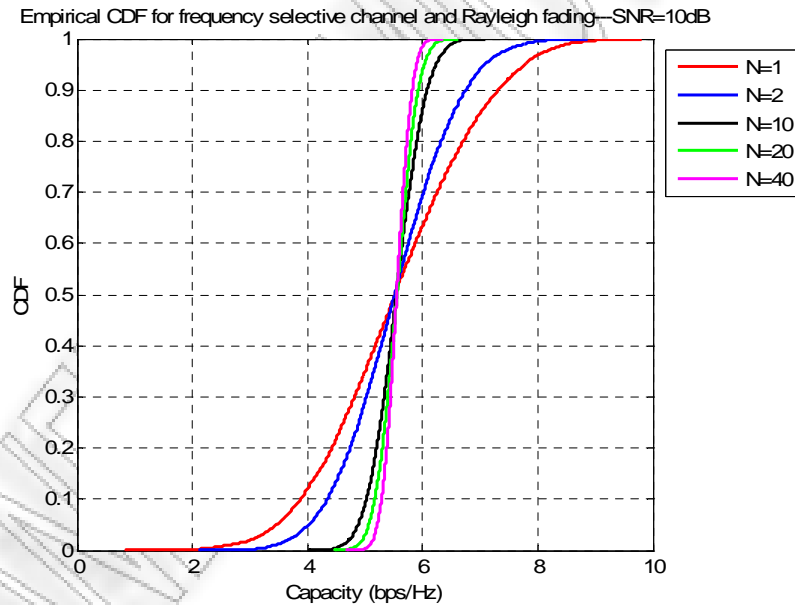
Εφόσον τα θεωρούμενα υποκανάλια είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους, η χωρητικότητα για ένα ντετερμινιστικό κανάλι θα δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_R} + \frac{p}{n_T \sigma^2} \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^H \right) \quad (3.62)$$

Στην παραπάνω σχέση, όπου \mathbf{H}_i είναι πίνακας διαστάσεων $n_R \times n_T$ που μοντελοποιεί το i υποκανάλι. Στην περίπτωση που ο πίνακας \mathbf{H}_i είναι τυχαίος, τότε υπολογίζουμε την εργοδική χωρητικότητα και τη χωρητικότητα outage. Η εργοδική χωρητικότητα θα είναι:

$$\bar{C} = E \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log_2 \det \left(\mathbf{I}_{n_R} + \frac{p}{n_T \sigma^2} \mathbf{H}_i \mathbf{H}_i^H \right) \right] \quad (3.63)$$

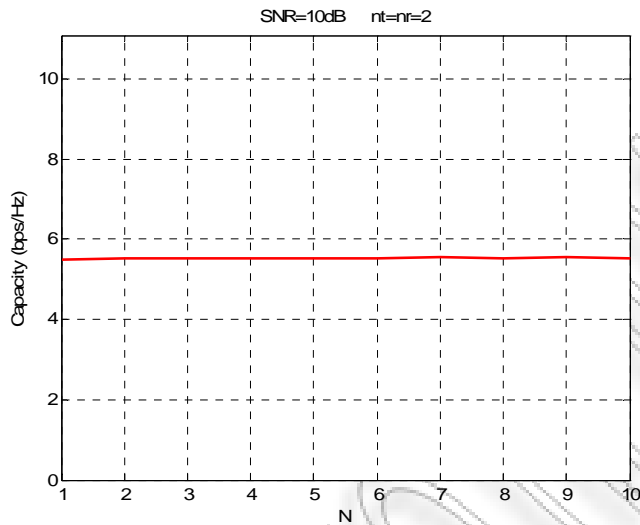
Στο σχήμα που ακολουθεί, έχουμε απεικονίσει γραφικά τη συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (cumulative distribution function, CDF) της χωρητικότητας στην περίπτωση Rayleigh καναλιού με συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά και $n_T = n_R = 2$ και για διάφορες τιμές του N . Επίσης θεωρείται ότι $SNR = 10dB$.



Εικόνα 3-26 CDF στην περίπτωση καναλιού Rayleigh με συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά

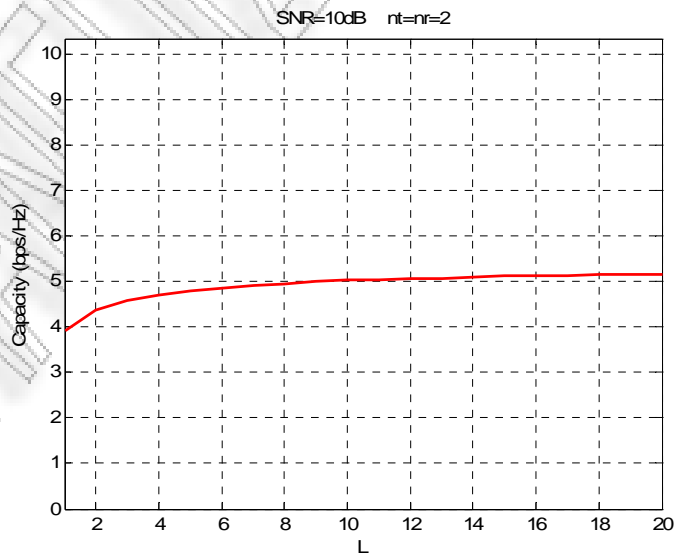
Από τις παραπάνω καμπύλες, παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένο SNR και συγκεκριμένο αριθμό κεραιών σε πομπό και δέκτη, η εργοδική χωρητικότητα είναι ανεξάρτητη του N . Άρα η εργοδική χωρητικότητα πρακτικά δεν εξαρτάται από το πόσο έντονη είναι η συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά του καναλιού. Αυτό φαίνεται και στην

παρακάτω εικόνα που παριστάνουμε την εργοδική χωρητικότητα σε συνάρτηση με το N .



Εικόνα 3-27 Εξάρτηση εργοδικής χωρητικότητας από τη συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά του καναλιού

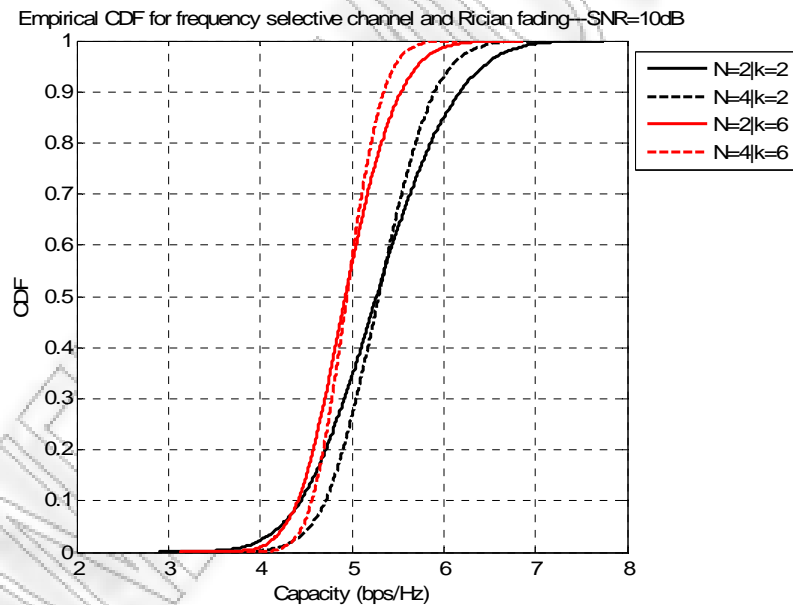
Παρ' όλα αυτά, από τη CDF της χωρητικότητας παρατηρούμε ότι για συγκεκριμένο SNR και αριθμό κεραιών σε πομπό και δέκτη, όσο αυξάνει το N αυξάνει η outage χωρητικότητα. Ωστόσο, όπως υπονοείται και από τις CDFs, υπάρχει ένα όριο πάνω από το οποίο η outage χωρητικότητα δεν αυξάνεται πλέον αισθητά με αύξηση του N . Αυτό φαίνεται καθαρά στην επόμενη εικόνα:



Εικόνα 3-28 Εξάρτηση outage χωρητικότητας από τη συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά του καναλιού

3.7.3 Κανάλι με Rician fading

Στην περίπτωση που θεωρούμε κανάλι Rice με συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά, θα ισχύει η εικόνα που απεικονίζεται παρακάτω. Εδώ θεωρούμε, όπως και προηγουμένως, $SNR = 10dB$ και $n_T = n_R = 2$. Επιπλέον, θεωρούμε δύο περιπτώσεις του παράγοντα K (Rician factor) και του N . Παρατηρώντας την παραπάνω εικόνα, τα συμπεράσματα που έχουμε να κάνουμε είναι αναμενόμενα. Καταρχήν παρατηρούμε πάλι ότι όσο αυξάνεται ο Rician factor διατηρώντας το N σταθερό, η χωρητικότητα θα ελαττώνεται. Επίσης κρατώντας σταθερό τον παράγοντα K και αυξάνοντας το N (δηλαδή αυξάνοντας τη συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά του καναλιού) η εργοδική χωρητικότητα παραμένει σταθερή ενώ θα αυξάνεται η outage χωρητικότητα.



Εικόνα 3-29 CDF για κανάλι Rician με συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά

3.8 Spatial fading correlation

3.8.1 Γενικά

Μέχρι αυτό το σημείο, θεωρήσαμε την περίπτωση που δεν υπάρχει χωρική συσχέτιση των κεραιών εκπομπής και λήψης. Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε χωρική συσχέτιση στην πλευρά του πομπού και του δέκτη και θα δούμε ότι η χωρητικότητα είναι μικρότερη σε σχέση με τη χωρητικότητα στην περίπτωση που δεν έχουμε χωρική συσχέτιση. Επίσης, θα δούμε ότι όσο αυξάνεται το SNR η διαφορά στη χωρητικότητα γίνεται εντονότερη.

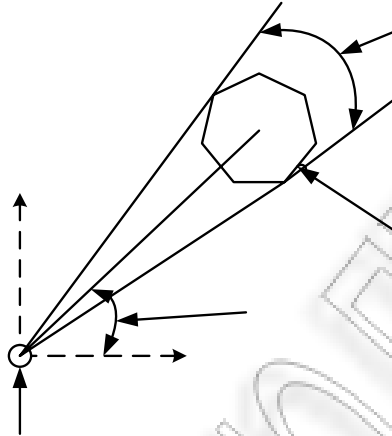
Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε την περίπτωση που τόσο ο πομπός όσο και ο δέκτης περιβάλλονται από σκεδαστές. Αυτή η περίπτωση για παράδειγμα μπορεί να μοντελοποιεί το περιβάλλον διάδοσης σε μία πόλη. Επίσης θεωρούμε ότι οι κεραιές εκπομπής και λήψης είναι *ομοιοκατευθυντικές* και ότι δεν υπάρχει απευθείας διάδοση του σήματος από τον πομπό προς το δέκτη (δεν υπάρχει LOS συνιστώσα). Υπό αυτές τις συνθήκες, μπορούμε εναλλακτικά να θεωρήσουμε ότι το σήμα που προσπίπτει στις κεραιές λήψης, προέρχεται από ένα σύνολο από *δευτερεύουσες πηγές*. Αυτές οι πηγές είναι οι σκεδαστές που υπάρχουν στο χώρο [14].

Γενικά, υπάρχουν διάφοροι παράγοντες από τους οποίους εξαρτάται η χωρική συσχέτιση μεταξύ δύο θεωρούμενων κεραιών [14]. Ένας από αυτούς τους παράγοντες είναι η *απόσταση* μεταξύ των κεραιών. Όταν η απόσταση αυτή είναι μικρή, η χωρική συσχέτιση θα είναι μεγάλη. Αντίστοιχα όταν η απόσταση δύο κεραιών είναι μεγάλη, τότε μεταξύ τους δεν υπάρχει συσχέτιση. Όμως, για δεδομένο περιβάλλον σκέδασης, πόση είναι η επαρκής απόσταση ώστε να μην έχουμε χωρική συσχέτιση; Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα πρέπει να γνωρίζουμε και τη συχνότητα λειτουργίας, ώστε να ξέρουμε και το αντίστοιχο μήκος κύματος. Με άλλα λόγια, μας ενδιαφέρει η *σχετική απόσταση* μεταξύ δύο κεραιών, δηλαδή ο λόγος της μεταξύ τους απόστασης προς το μήκος κύματος. Αν συμβολίσουμε τη σχετική απόσταση με D , τότε:

$$D = \frac{d}{\lambda} \quad (3.64)$$

Επίσης, η χωρική συσχέτιση εξαρτάται και από το *γωνιακό εύρος άφιξης* του σήματος στο δέκτη (angular spread of arrival). Όσο πιο μικρό είναι αυτό το εύρος, τόσο πιο μεγάλη είναι η συσχέτιση. Αντίθετα, όσο το εύρος γωνιών άφιξης αυξάνεται, η χωρική

συσχέτιση μεταξύ δύο κεραιών στο δέκτη ελαττώνεται. Αν θεωρήσουμε ότι οι σκεδαστές βρίσκονται συγκεντρωμένοι σε μία περιοχή (*cluster* σκεδαστών), τότε το εύρος γωνιών άφιξης του σήματος στο δέκτη θα εξαρτάται κυρίως από την απόσταση του *cluster* σκεδαστών από τις κεραιές λήψης. Αυτό φαίνεται σχηματικά στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 3-30 Γωνιακό εύρος άφιξης, μέση γωνία άφιξης

Είναι προφανές ότι όσο μικρότερη είναι η απόσταση της ομάδας των σκεδαστών (*cluster*), τόσο περισσότερο αυξάνει το γωνιακό εύρος άφιξης (*angular spread*). Επίσης στην παραπάνω εικόνα παρουσιάζουμε και ένα άλλο μέγεθος που είναι η *μέση γωνία άφιξης* (*mean angle of arrival, mean AOA*).

y

3.8.2 Μοντελοποίηση χωρικής συσχέτισης

Σε αυτό το σημείο συγκεντρώνουμε τις θεωρήσεις κάτω από τις οποίες ισχύει το μοντέλο που θα παρουσιάσουμε:

- Θεωρούμε ότι η χωρική συσχέτιση μεταξύ των κεραιών εκπομπής είναι ανεξάρτητη από τη χωρική συσχέτιση μεταξύ των κεραιών λήψης.
- Θεωρούμε συγκεκριμένο περιβάλλον σκέδασης, οπότε η χωρική συσχέτιση θα εξαρτάται κυρίως από τη σχετική απόσταση μεταξύ δύο κεραιών.
- Η σχετική απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών κεραιών εκπομπής ή λήψης θεωρείται σταθερή. Δηλαδή οι κεραιές μεταξύ τους ισαπέχουν κατά D (χωρικά ομοιόμορφες στοιχειοκεραιές).

Receive antennas

x

➤ Θεωρείται κανάλι με διαλείψεις Rayleigh.

Υπό τις παραπάνω θεωρήσεις, ο πίνακας που μοντελοποιεί το κανάλι δίνεται από την εξής σχέση [10]:

$$\mathbf{H} = \mathbf{R}_r^{1/2} \mathbf{H}_w \mathbf{R}_t^{1/2} \quad (3.65)$$

Όπου \mathbf{H}_w είναι ο πίνακας με τον οποίο είχαμε μοντελοποιήσει το κανάλι Rayleigh, \mathbf{R}_r είναι ο πίνακας συμμεταβολής (covariance matrix), διαστάσεων $n_r \times n_r$, ο οποίος μοντελοποιεί τη χωρική συσχέτιση στη μεριά του δέκτη και \mathbf{R}_t είναι ο πίνακας συμμεταβολής (covariance matrix), διαστάσεων $n_t \times n_t$, ο οποίος μοντελοποιεί τη χωρική συσχέτιση στη μεριά του πομπού. Σημειώνουμε εδώ, ότι η σχέση (3.65) αποτελεί το μοντέλο γινομένου Kronecker (*Kronecker product model*). Ο τρόπος με τον οποίο προκύπτουν τα στοιχεία των πινάκων \mathbf{R}_r , \mathbf{R}_t θα εξηγηθεί στη συνέχεια. Στη σχέση (3.65) όμως, οι πίνακες συμμεταβολής παρουσιάζονται με έναν εκθέτη. Ο συμβολισμός αυτός προκύπτει ως εξής: Θεωρώντας για παράδειγμα τον πίνακα \mathbf{R}_r , εφαρμόζουμε μία μέθοδο που ονομάζεται *Cholesky factorization* [15]. Εφαρμόζοντας αυτή τη μέθοδο στον πίνακα \mathbf{R}_r προκύπτει ένας πίνακας, έστω \mathbf{L} , τέτοιος ώστε:

$$\mathbf{L}\mathbf{L}^H = \mathbf{R}_r \quad (3.66)$$

Στη σχέση (3.65) έχουμε εφαρμόσει την παραπάνω μέθοδο και έχουμε θεωρήσει ότι:

$$\mathbf{R}_r^{1/2} = \mathbf{L} \quad (3.67)$$

Αντίστοιχα ισχύουν και για τον πίνακα \mathbf{R}_t .

Όσον αφορά τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{R}_r είναι οι συντελεστές συσχέτισης μεταξύ των κεραίων λήψης. Η μορφή του πίνακα \mathbf{R}_r είναι η ακόλουθη:

$$\mathbf{R}_r = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{1r} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \rho_{r1} & \cdot & \cdot & \cdot & \rho_{rr} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Για παράδειγμα, το στοιχείο ρ_{ij} , εκφράζει το συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των κεραιών λήψης i, j . Επίσης, για τον παραπάνω πίνακα πρέπει να ισχύει:

$$\rho_{ij} = 1, \quad i = j \quad (3.69)$$

Άρα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου είναι 1. Αντίστοιχα ισχύουν και για τον πίνακα \mathbf{R}_t .

Ισχύει ότι ο συντελεστής συσχέτισης μεταξύ δύο κεραιών i, j που είναι τοποθετημένες στα σημεία x_i, x_j αντίστοιχα, δίνεται από την παρακάτω σχέση [15]:

$$\rho_{ij} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m J_m(k \|x_i - x_j\|) \quad (3.70)$$

Όπου:

$$a_m = \int_0^{2\pi} p(\psi) e^{-jm\psi} d\psi \quad (3.71)$$

όπου με $p(\psi)$ συμβολίζουμε την κατανομή ισχύος σε συνάρτηση με τη γωνία άφιξης ψ (*angular power distribution*). Σημειώνουμε εδώ, ότι σαν γωνία άφιξης (*Angle of arrival, AOA*), ορίζουμε τη γωνία υπό την οποία φτάνει το σήμα στις κεραιές λήψης.

Αποδεικνύεται [17] ότι έχουμε ικανοποιητική προσέγγιση όταν το εύρος τιμών που παίρνει ο συντελεστής m στη σχέση (3.70) είναι:

$$m \in [-M, M], \quad M = \frac{\pi e}{\lambda} \max_{i,j} \{ \|x_i - x_j\| \} \Leftrightarrow M \approx 8.54 \frac{\max_{i,j} \{ \|x_i - x_j\| \}}{\lambda} \quad (3.72)$$

Θα μελετήσουμε την περίπτωση κατά την οποία έχουμε ομοιόμορφη κατανομή της ισχύος σε συνάρτηση με τη γωνία άφιξης ψ , όταν $\psi \in [\psi_0 - \Delta, \psi_0 + \Delta]$ και $\psi_0 \in [-\pi, \pi]$ είναι η μέση γωνία άφιξης. Επειδή θεωρούμε ομοιόμορφη κατανομή της ισχύος σε περιορισμένο εύρος γωνιών, η περίπτωση καλείται και *uniform limited scattering*. Η κατανομή της $p(\psi)$ τότε θα δίνεται από τη σχέση που ακολουθεί:

$$p(\psi) = \begin{cases} \frac{1}{2\Delta} & |\psi - \psi_0| \leq \Delta \\ 0 & \text{αλλού} \end{cases} \quad (3.73)$$

Λόγω των (3.71) και (3.73) θα ισχύει:

$$\begin{aligned}
 a_m &= \int_0^{2\pi} p(\psi) e^{-im\psi} d\psi \Leftrightarrow a_m = \int_{\psi_0-\Delta}^{\psi_0+\Delta} \frac{1}{2\Delta} e^{-im\psi} d\psi \Leftrightarrow a_m = \frac{-1}{2\Delta im} \int_{\psi_0-\Delta}^{\psi_0+\Delta} -ime^{-im\psi} d\psi \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow a_m = \frac{-1}{2\Delta im} \left[e^{-im\psi} \right]_{\psi_0-\Delta}^{\psi_0+\Delta} \Leftrightarrow a_m = \frac{-1}{2\Delta im} \left(e^{-im\psi_0} e^{-im\Delta} - e^{-im\psi_0} e^{im\Delta} \right) \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow a_m = \frac{-1}{2\Delta im} \left[e^{-im\psi_0} \left(e^{-im\Delta} - e^{im\Delta} \right) \right] \xrightarrow{\text{Euler: } e^{-ix} - e^{ix} = -2i \sin(x)} a_m = \frac{1}{\Delta m} \sin(m\Delta) e^{-im\psi_0}
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$a_m = \frac{1}{\Delta m} \sin(m\Delta) e^{-im\psi_0} \quad (3.74)$$

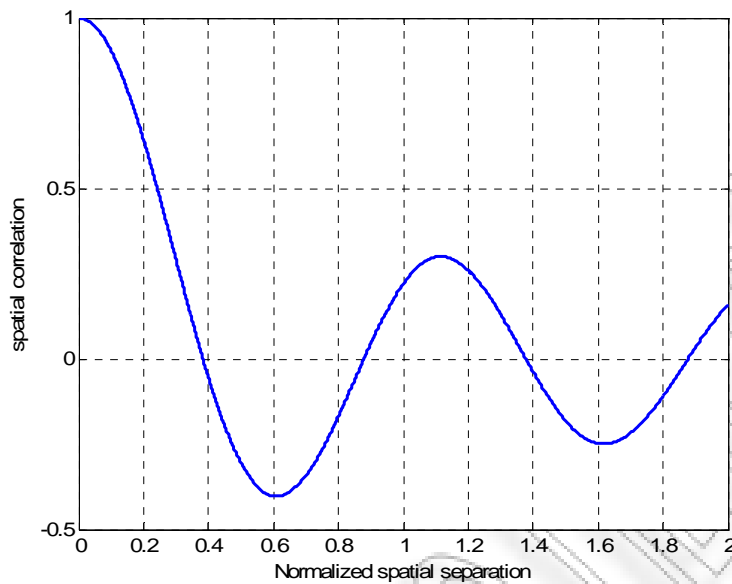
Στην περίπτωση που στην (3.74) θέσουμε $\Delta = \pi$ θα είναι:

$$a_m = \sin c(m) e^{-im\psi_0} \quad (3.75)$$

Όπως γνωρίζουμε, ο παλμός $\sin c(m)$ εμφανίζει μέγιστο για $m = 0$ και θα είναι μηδέν σε όλες τις υπόλοιπες ακέραιες τιμές του m . Άρα από τις (3.70) και (3.75) θα είναι:

$$\rho_{ij} = J_0 \left(k \|x_i - x_j\| \right), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.76)$$

Στην παραπάνω σχέση, όπου k είναι ο κυματάρηθος. Όπως βλέπουμε, οι συντελεστές συσχέτισης προκύπτουν από μία συνάρτηση Bessel πρώτου είδους, μηδενικής τάξης. Σαν όρισμα στη συνάρτηση έχουμε δώσει το γινόμενο του κυματάρηθου με την ευκλείδεια απόσταση μεταξύ δύο κεραιών. Παρατηρούμε ότι για δεδομένη συχνότητα (άρα και δεδομένο μήκος κύματος) ο συντελεστής συσχέτισης ελαττώνεται καθώς η απόσταση μεταξύ του ζεύγους των θεωρούμενων κεραιών αυξάνει. Επίσης, ο συντελεστής συσχέτισης μηδενίζεται όταν απόσταση των κεραιών γίνει περίπου ίση με 0.4λ . Αυτό φαίνεται από το παρακάτω σχήμα στο οποίο έχουμε απεικονίσει γραφικά το συντελεστή συσχέτισης σε συνάρτηση με την κανονικοποιημένη απόσταση, όπως αυτή ορίστηκε στη σχέση (3.64).



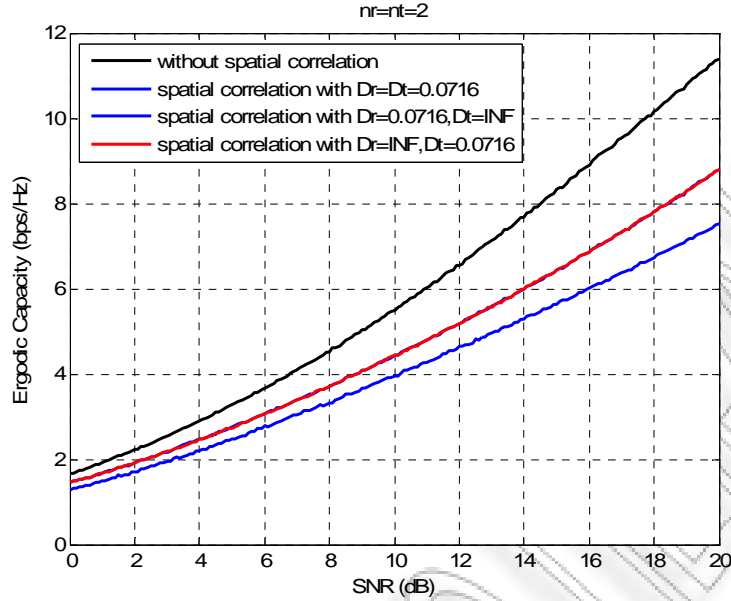
Εικόνα 3-31 Συντελεστής συσχέτισης συναρτήσει της κανονικοποιημένης απόστασης

Επίσης, παρατηρούμε ότι αν μηδενιστεί η ευκλείδεια απόσταση, ο συντελεστής συσχέτισης γίνεται 1, το οποίο είναι απόλυτα λογικό.

Στην επόμενη εικόνα έχουμε απεικονίσει γραφικά την εργοδική χωρητικότητα σε συνάρτηση με το SNR στην περίπτωση που $n_t = n_r = 2$, και θεωρώντας τις παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

- Η απόσταση μεταξύ των κεραιών είναι επαρκώς μεγάλη, ώστε δεν υπάρχει καθόλου χωρική συσχέτιση.
- Θεωρούμε ότι η κανονικοποιημένη απόσταση μεταξύ των κεραιών σε πομπό και δέκτη είναι $D_t = D_r = 0.0716$ (συντελεστής συσχέτισης $\rho = 0.95$), οπότε έτσι μοντελοποιούμε την περίπτωση ισχυρής χωρικής συσχέτισης τόσο σε πομπό όσο και σε δέκτη.
- Θεωρούμε την περίπτωση χωρικής συσχέτισης μόνο στο δέκτη, ορίζοντας σαν απόσταση μεταξύ των κεραιών λήψης την $D_r = 0.0716$ (συντελεστής συσχέτισης $\rho = 0.95$).

Η γραφική παράσταση της εργοδικής χωρητικότητας είναι η εξής:



Εικόνα 3-32 Εργοδική χωρητικότητα στην περίπτωση ύπαρξης χωρικής συσχέτισης

Από την παραπάνω εικόνα παρατηρούμε καταρχήν ότι στην περίπτωση που υπάρχει χωρική συσχέτιση μεταξύ των κεραιών σε ένα σύστημα MIMO, η χωρητικότητα ελαττώνεται σε σχέση με την περίπτωση που δεν υπάρχει χωρική συσχέτιση. Επίσης παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που υπάρχει χωρική συσχέτιση μόνο στο δέκτη, η χωρητικότητα είναι μεγαλύτερη απ' ότι στην περίπτωση που θεωρούμε συσχέτιση τόσο σε πομπό όσο και σε δέκτη.

Σημαντικό είναι να σημειώσουμε, ότι σε κάθε περίπτωση όσο αυξάνεται το SNR η διαφορές στη χωρητικότητα αυξάνονται. Με άλλα λόγια, φαίνεται ότι στην περίπτωση που θεωρούμε συσχέτιση, οι απώλειες στη χωρητικότητα είναι εμφανείς για μεγάλες τιμές του SNR. Για να προσδιορίσουμε ποσοτικά τις απώλειες λόγω χωρικής συσχέτισης, θεωρούμε ότι $n_t = n_r = n$ (οπότε οι πίνακες είναι τετραγωνικοί) και μεγάλες τιμές SNR. Τότε για τη χωρητικότητα θα ισχύει η προσέγγιση:

$$C = \log_2 \det \left(\mathbf{I}_n + \frac{\rho}{n} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \Leftrightarrow C = \log_2 \det \left(\frac{\rho}{n} \mathbf{H} \mathbf{H}^H \right) \quad (3.77)$$

Όπου με \mathbf{I}_n συμβολίζουμε το μοναδιαίο πίνακα διαστάσεων $n \times n$. Θεωρώντας χωρική συσχέτιση στη μεριά του πομπού και του δέκτη, για τον πίνακα που περιγράφει το κανάλι θα ισχύει η σχέση (3.65). Άρα έχοντας υπόψη και τις (3.66), (3.67) θα είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}\mathbf{H}^H &= \left(\mathbf{R}_r^{1/2}\mathbf{H}_w\mathbf{R}_t^{1/2}\right)\left(\mathbf{R}_r^{1/2}\mathbf{H}_w\mathbf{R}_t^{1/2}\right)^H \Leftrightarrow \mathbf{H}\mathbf{H}^H = \mathbf{R}_r^{1/2}\mathbf{H}_w\mathbf{R}_t^{1/2}\mathbf{R}_t^{H/2}\mathbf{H}_w^H\mathbf{R}_r^{H/2} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mathbf{H}\mathbf{H}^H = \mathbf{R}_r^{1/2}\mathbf{H}_w\mathbf{R}_t\mathbf{H}_w^H\mathbf{R}_r^{H/2} \end{aligned} \quad (3.78)$$

Άρα από (3.77) και (3.78) θα ισχύουν τα εξής:

$$\begin{aligned} C &= \log_2 \det\left(\frac{\rho}{n}\mathbf{R}_r^{1/2}\mathbf{H}_w\mathbf{R}_t\mathbf{H}_w^H\mathbf{R}_r^{H/2}\right) \Leftrightarrow C = \log_2 \left[\det\left(\frac{\rho}{n}\mathbf{H}_w\mathbf{H}_w^H\right) \det(\mathbf{R}_t) \det(\mathbf{R}_r) \right] \Leftrightarrow \\ C &= \log_2 \det\left(\frac{\rho}{n}\mathbf{H}_w\mathbf{H}_w^H\right) + \log_2 \det(\mathbf{R}_t) + \log_2 \det(\mathbf{R}_r) \end{aligned} \quad (3.79)$$

Από την παραπάνω σχέση, προκύπτει ότι οι πίνακες \mathbf{R}_t και \mathbf{R}_r έχουν την ίδια επίδραση στη χωρητικότητα. Επίσης, είναι φανερό ότι η αρνητική επίδραση της χωρικής συσχέτισης στη χωρητικότητα, εκφράζεται μέσω του όρου [3]:

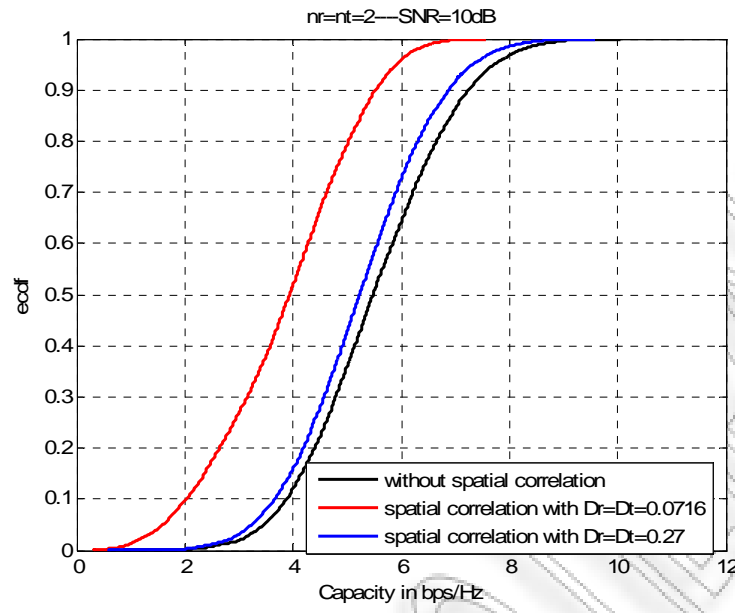
$$A = \log_2 \det(\mathbf{R}_t) + \log_2 \det(\mathbf{R}_r) \quad (3.80)$$

Δεδομένου ότι η ορίζουσα των πινάκων \mathbf{R}_t και \mathbf{R}_r θα είναι πάντα μικρότερη της μονάδας, προκύπτει ότι πάντα θα ισχύει: $A \leq 0$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν οι πίνακες \mathbf{R}_t , \mathbf{R}_r είναι μοναδιαίοι, πράγμα που σημαίνει ότι δεν έχουμε καθόλου συσχέτιση.

Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζουμε τις συναρτήσεις κατανομής πιθανότητας (cumulative distribution functions) για τις εξής περιπτώσεις:

- Όταν δεν υπάρχει χωρική συσχέτιση σε πομπό και δέκτη
- Όταν υπάρχει υψηλή χωρική συσχέτιση τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη (μικρό D)
- Όταν υπάρχει ασθενέστερη χωρική συσχέτιση τόσο στον πομπό όσο και στο δέκτη (μεγαλύτερο D απ' ότι προηγουμένως)

Θεωρείται σε όλες τις περιπτώσεις ότι $SNR = 10dB$.



Εικόνα 3-33 Σύγκριση CDF στην περίπτωση ύπαρξης χωρικής συσχέτισης

Τα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε είναι ίδια με προηγουμένως.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εικονική αναπαράσταση καναλιών

4.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο σκοπός είναι η μελέτη της χωρητικότητας καναλιού MIMO, θεωρώντας μία διαφορετική μοντελοποίηση του καναλιού. Θυμίζουμε, ότι μέχρι αυτό το σημείο, χρησιμοποιήσαμε ένα στατιστικό μοντέλο βάσει του οποίου υποθέσαμε ότι τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{H} που περιγράφει το κανάλι είναι ανεξάρτητες και ομοιόμορφα κατανομημένες (i.i.d.) μιγαδικές Gaussian τυχαίες μεταβλητές με μηδενική μέση τιμή και διασπορά 1. Ωστόσο αυτή η θεώρηση μοντελοποιεί ένα ομοιόμορφο περιβάλλον σκέδασης που σπάνια συμβαίνει στην πράξη. Επομένως υπάρχει ανάγκη χρήσης κατάλληλων μοντέλων, με τα οποία να γίνεται δυνατή η μοντελοποίηση πιο ρεαλιστικών καναλιών.

Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν τα *φυσικά μοντέλα* (*physical models*) [18] τα οποία είναι σαφώς μία πιο λεπτομερής και πιο συγκεκριμένη περιγραφή του περιβάλλοντος διάδοσης. Ωστόσο τέτοια μοντέλα, λόγω της πολυπλοκότητάς τους, είναι δύσκολο να ενσωματωθούν στη μελέτη της χωρητικότητας ή στη σχεδίαση τηλεπικοινωνιακών δεκτών. Επίσης, στην πραγματικότητα μεταξύ των στοιχείων του πίνακα \mathbf{H} που περιγράφει το κανάλι υπάρχει συσχέτιση, η οποία πρέπει να συμπεριληφθεί σε ένα ρεαλιστικό μοντέλο. Μία προσπάθεια έγινε με το μοντέλο του Kronecker, το οποίο παρουσιάστηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ωστόσο αυτό το μοντέλο αδυνατούσε να συμπεριλάβει πλήρως τα φυσικά χαρακτηριστικά του διαύλου.

Από τα παραπάνω, προκύπτει η ανάγκη χρήσης ενός διαφορετικού τρόπου μοντελοποίησης του καναλιού, ο οποίος πρέπει αφενός να περιγράφει με σαφήνεια το περιβάλλον διάδοσης και αφετέρου πρέπει να είναι εύχρηστο. Στην παρούσα αναφορά περιγράφουμε ένα τέτοιο μοντέλο, το οποίο αποτελεί μία *εικονική αναπαράσταση του καναλιού* (*virtual channel representation*) και χρησιμοποιούμε αυτό το μοντέλο για τη

μελέτη της χωρητικότητας ενός MIMO συστήματος. Όπως θα δούμε και στη συνέχεια, τα βασικά χαρακτηριστικά αυτού του τρόπου μοντελοποίησης είναι τα ακόλουθα:

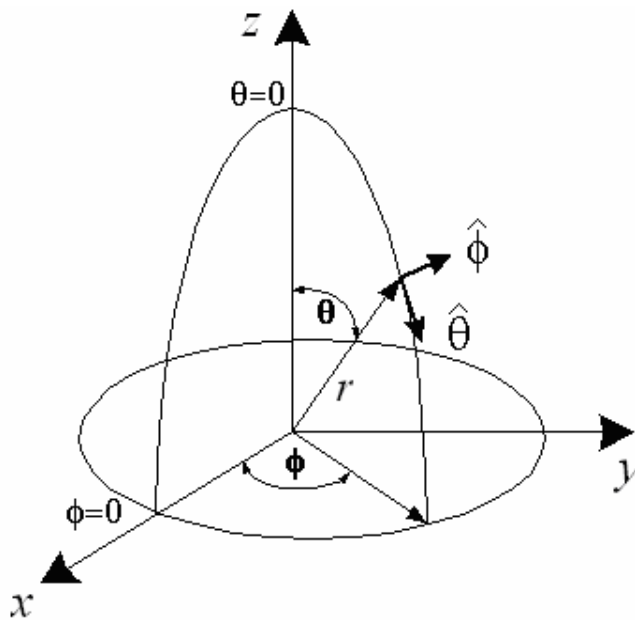
- Αποτελεί μία *ενδιάμεση* ή αλλιώς *εικονική (virtual)* αναπαράσταση του καναλιού.
- Η μοντελοποίηση αφενός δεν είναι πολύπλοκη και αφετέρου παρέχει μία σαφή ερμηνεία του φυσικού περιβάλλοντος σκέδασης
- Αν θεωρήσουμε ότι η εικονική αναπαράσταση (virtual representation) του καναλιού γίνεται μέσω ενός πίνακα \mathbf{H}_v , τότε ο πίνακας αυτός συνδέεται όπως θα δούμε με τον αρχικό πίνακα \mathbf{H} , με σχέση διδιάστατου διακριτού μετασχηματισμού Fourier.
- Η εικονική αναπαράσταση του καναλιού είναι περισσότερο ακριβής όταν οι σκεδαστές του περιβάλλοντος διάδοσης μπορούν να οργανωθούν σε ομάδες (clusters) σκεδαστών.
- Ένας *εικονικός πίνακας (virtual matrix)* \mathbf{H}_v , θα αποτελείται από μη επικαλυπτόμενους υποπίνακες οι οποίοι θα αντιστοιχούν σε διαφορετικά clusters σκεδαστών του καναλιού που περιγράφει ο \mathbf{H}_v .

Ωστόσο, για τη μελέτη της χωρητικότητας MIMO, θεωρώντας το παραπάνω μοντέλο εικονικής αναπαράστασης του καναλιού (virtual channel representation model), υποθέτουμε ότι τόσο ο πομπός τόσο και ο δέκτης αποτελούνται από *μονοδιάστατες, γραμμικές συστοιχίες κεραιών, των οποίων τα στοιχεία ισαπέχουν (1-D Uniform Linear Arrays, ULAs)*. Για αυτό το λόγο, αρχικά θα παρουσιάσουμε βασικές αρχές της θεωρίας στοιχειοκεραιών καθώς και την έννοια του *Beamforming*.

4.2 Στοιχειοκεραίες

4.2.1 Γενική παρουσίαση

Θεωρούμε αρχικά ότι τα στοιχεία βρίσκονται τοποθετημένα στο χώρο, οπότε θα θεωρήσουμε σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων που παρουσιάζεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 4-1 Σφαιρικό σύστημα συντεταγμένων

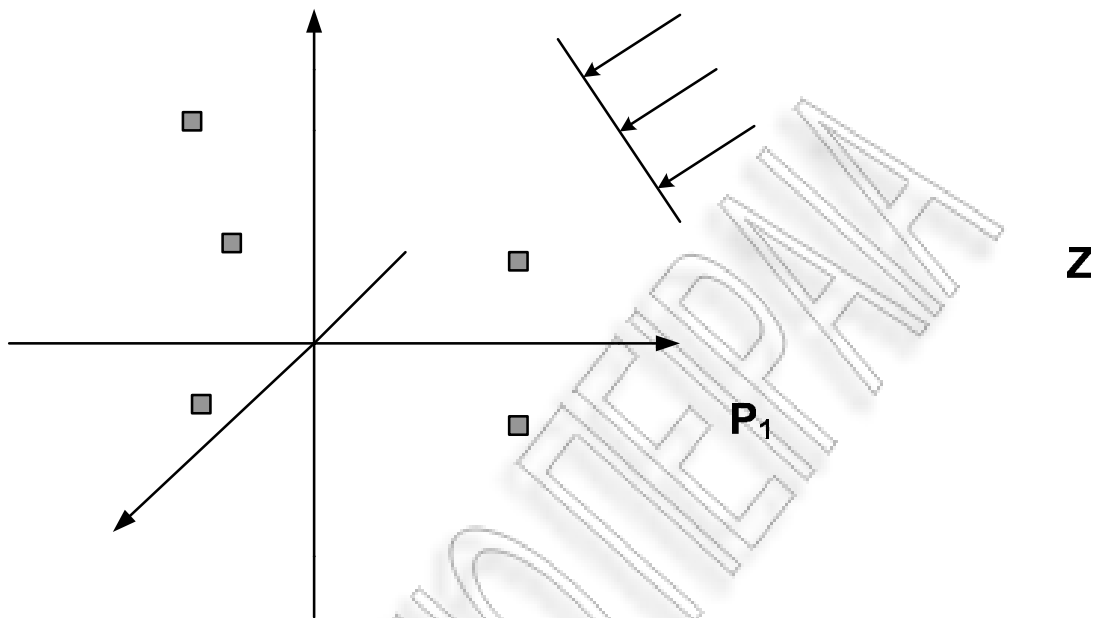
Αν θεωρήσουμε τώρα ότι ένα στοιχείο βρίσκεται τοποθετημένο στη θέση που είναι το πέρας του διανύσματος \mathbf{r} , τότε η θέση αυτού του στοιχείου στο χώρο προσδιορίζεται από τις εξής συντεταγμένες:

$$x = r \sin \theta \cos \phi \quad (4.1)$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \quad (4.2)$$

$$z = r \cos \theta \quad (4.3)$$

Θεωρούμε στοιχειοκεραία της οποίας τα στοιχεία είναι ισοτροπικά και η θέση τους στο χώρο προσδιορίζεται από τα διανύσματα θέσης \mathbf{p}_n , $n = 0, \dots, N-1$, όπου N είναι το σύνολο των στοιχείων. Επίσης, τα στοιχεία δειγματοληπτούν χωρικά το πεδίο του επίπεδου κύματος που προσπίπτει από κατεύθυνση που ορίζεται από το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{a} , όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:

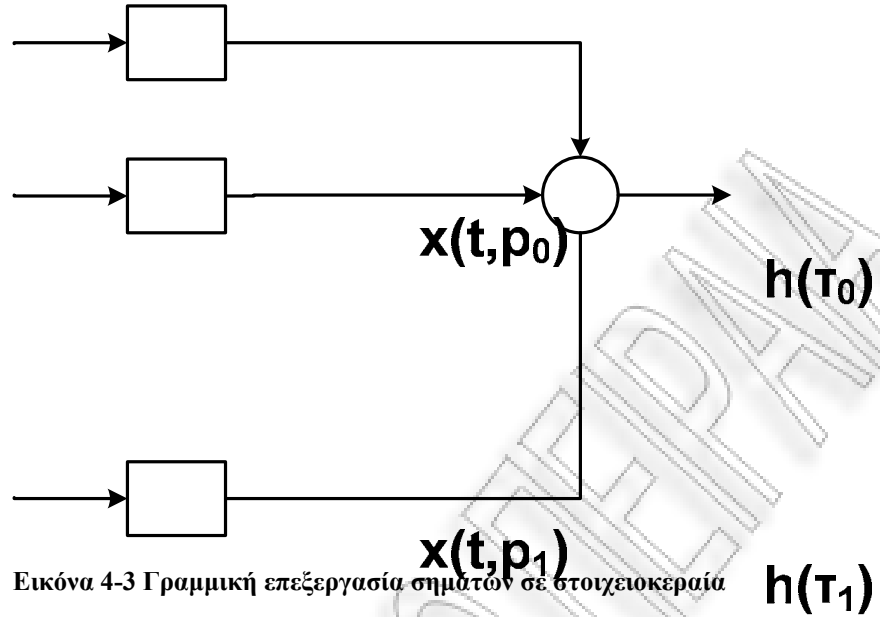


Εικόνα 4-2 Χωρική δειγματοληψία προσπίπτοντος πεδίου από στοιχειοκεραία P_2

Αν συμβολίσουμε με $x(t, \mathbf{p}_n)$ το σήμα που λαμβάνεται από το στοιχείο n , τότε το σύνολο των σημάτων που λαμβάνονται από τη στοιχειοκεραία είναι:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} x(t, \mathbf{p}_0) \\ x(t, \mathbf{p}_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x(t, \mathbf{p}_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

Θεωρούμε στη συνέχεια ότι αυτά τα σήματα τίθενται σαν είσοδοι σε γραμμικά χρονικά αμετάβλητα (*Linear Time Invariant, LTI*) φίλτρα όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Οι κρουστικές αποκρίσεις περιέχονται στο διάνυσμα \mathbf{h} που φαίνεται παρακάτω:

$$\mathbf{h}(\tau) = \begin{bmatrix} h_0(\tau_0) \\ h_1(\tau_1) \\ \vdots \\ h_{N-1}(\tau_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

Άρα το σήμα που προκύπτει τελικά είναι:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} h_i(t-\tau) x_i(\tau, \mathbf{p}_i) d\tau \Leftrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(\mathbf{t}, \mathbf{p}_{N-1}) \mathbf{x}(\tau, \mathbf{p}) d\tau \quad (4.6)$$

Το φάσμα του τελικού σήματος λήψης θα είναι επομένως:

$$Y(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \Leftrightarrow Y(\omega) = \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{X}(\omega) \quad (4.7)$$

Όπου θα ισχύουν:

$$\mathbf{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{h}(t) e^{-j\omega t} dt \quad (4.8)$$

και

$$\mathbf{X}(\omega, \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{p}) e^{-j\omega t} dt \quad (4.9)$$

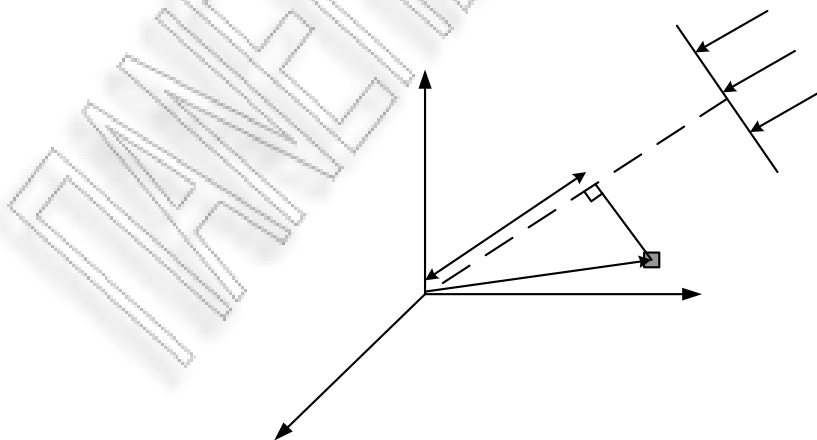
Εναλλακτικά, μπορούμε να εκφράσουμε το σήμα που λαμβάνεται από ένα στοιχείο ως $x(t - \tau_n)$, ώστε να δώσουμε έμφαση στις καθυστερήσεις άφιξης του προσπίπτοντος σήματος σε κάθε στοιχείο. Σημειώνουμε εδώ ότι αυτές οι καθυστερήσεις εκφράζονται σε σχέση με την αρχή των αξόνων. Με άλλα λόγια, θεωρούμε εδώ ότι οι καθυστερήσεις είναι κανονικοποιημένες με την καθυστέρηση άφιξης ενός σήματος στην αρχή των αξόνων. Σύμφωνα με αυτή τη θεώρηση, το σύνολο των σημάτων που λαμβάνονται από τη στοιχειοκεραία είναι:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{p}) = \begin{bmatrix} x(t - \tau_0) \\ x(t - \tau_1) \\ \vdots \\ x(t - \tau_{N-1}) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

όπου το σήμα που λαμβάνεται από το n -οστό στοιχείο θα είναι:

$$x(t - \tau_n) = e^{j\omega(t - \tau_n)} \Leftrightarrow x(t - \tau_n) = e^{j\omega t} e^{-j\omega \tau_n} \quad (4.11)$$

Για να υπολογίσουμε τώρα την καθυστέρηση άφιξης του σήματος στο n -οστό στοιχείο, θεωρούμε την παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 4-4 Υπολογισμός καθυστέρησης άφιξης του σήματος στο n -οστό στοιχείο

Σε αυτή την εικόνα, θεωρούμε το n -στό στοιχείο με διάνυσμα θέσης \mathbf{p}_n και μέτωπο κύματος (σήμα) που προσπίπτει από την κατεύθυνση \mathbf{a} . Η καθυστέρηση τώρα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$\tau_n = \frac{s_n}{c} \quad (4.12)$$

Όπου c είναι η ταχύτητα διάδοσης στο μέσο. Όπως παρατηρούμε από το παραπάνω σχήμα, η απόσταση s_n είναι η προβολή του διανύσματος \mathbf{p}_n πάνω στο διάνυσμα \mathbf{a} . Άρα θα είναι:

$$s_n = \frac{\langle \mathbf{p}_n, \mathbf{a} \rangle}{\|\mathbf{a}\|} \Leftrightarrow s_n = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{p}_n}{\|\mathbf{a}\|} \Leftrightarrow s_n = \mathbf{a}^T \mathbf{p}_n \quad (4.13)$$

Άρα από (4.12) και (4.13) θα είναι:

$$\tau_n = \frac{\mathbf{a}^T \mathbf{p}_n}{c} \quad (4.14)$$

Άρα αν το μοναδιαίο διάνυσμα \mathbf{a} ορίζεται ως (το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στη φορά του διανύσματος):

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \cos \phi \\ -\sin \theta \sin \phi \\ -\cos \theta \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Τότε από (4.14) και (4.15) θα είναι:

$$\tau_n = -\frac{1}{c} \left[\sin \theta \cos \phi P_{X_n} + \sin \theta \sin \phi P_{Y_n} + \cos \theta P_{Z_n} \right] \quad (4.16)$$

Όπου $P_{X_n}, P_{Y_n}, P_{Z_n}$ οι συντεταγμένες του διανύσματος \mathbf{p}_n . Άρα θα είναι:

$$\omega \tau_n = \frac{\omega}{c} \mathbf{a}^T \mathbf{p}_n \quad (4.17)$$

Όμως το κυμαάνυσμα ορίζεται ως:

$$\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{a} \quad (4.18)$$

Άρα από τις (4.17) και (4.18) θα είναι τελικά:

$$\omega\tau_n = \mathbf{k}^T \mathbf{p}_n \quad (4.19)$$

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να ορίσουμε ένα διάνυσμα ως εξής:

$$\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_0} \\ e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_{N-1}} \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Αυτό το διάνυσμα ονομάζεται *array manifold vector* και περιλαμβάνει όλα τα χωρικά χαρακτηριστικά της κεραίας. Από τις σχέσεις (4.11), (4.19) και (4.20) θα έχουμε:

$$x(t - \tau_n) = e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau_n} \Leftrightarrow x(t, \mathbf{p}_n) = e^{j\omega t} e^{-j\mathbf{k}^T \mathbf{p}_n} \quad (4.21)$$

Σε μορφή πινάκων η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{p}) = e^{j\omega t} \mathbf{v}(\mathbf{k}) \quad (4.22)$$

Το αντίστοιχο φάσμα προκύπτει από τις σχέσεις (4.9) και (4.22) ως εξής:

$$\mathbf{X}(\omega, \mathbf{p}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x}(t, \mathbf{p}) e^{-j\omega t} dt \Leftrightarrow \mathbf{X}(\omega, \mathbf{p}) = \mathbf{v}(\mathbf{k}) \quad (4.23)$$

Ή πιο απλά:

$$\mathbf{X}(\omega) = \mathbf{v}(\mathbf{k}) \quad (4.24)$$

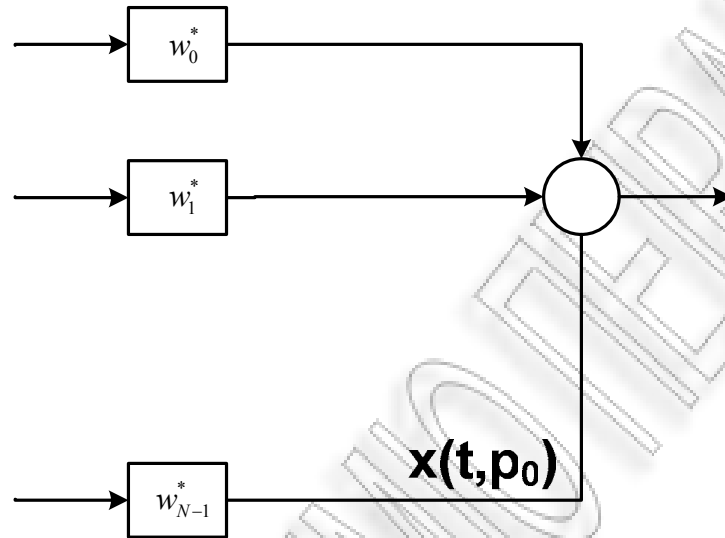
Άρα από τις σχέσεις (4.7) και (4.24), προκύπτει ότι το φάσμα της εξόδου είναι:

$$Y(\omega) = Y(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{H}^T(\omega) \mathbf{v}(\mathbf{k}) \quad (4.25)$$

Η παραπάνω συνάρτηση καλείται *συνάρτηση απόκρισης συχνότητας – κυματανύσματος* (*frequency – wavenumber response function*) και στην ουσία είναι η συνάρτηση μεταφοράς της στοιχειοκεραίας. Το διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας προκύπτει από την παραπάνω συνάρτηση ως εξής:

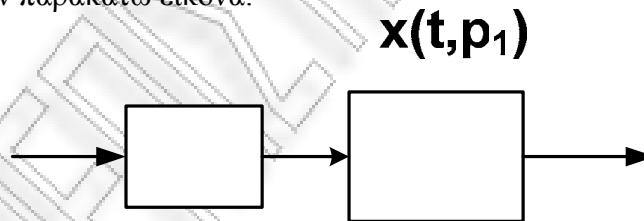
$$B(\omega : \theta, \phi) = Y(\omega, \mathbf{k}) \Big|_{\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \mathbf{a}(\theta, \phi)} \quad (4.26)$$

Σε πολλές περιπτώσεις απαιτείται η στροφή του διαγράμματος ακτινοβολίας μίας κεραίας. Αυτό επιτυγχάνεται με την επεξεργασία της απόκρισης κάθε στοιχείου με ένα κέρδος και μία στροφή φάσης. Με άλλα λόγια εφαρμόζουμε μιγαδικά βάρη στην απόκριση κάθε στοιχείου. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει η παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 4-5 Beamformer με μιγαδικά βάρη

Η υλοποίηση κάθε μιγαδικού βάρους γίνεται με ένα κέρδος και μία ολίσθηση φάσης, όπως φαίνεται στην παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 4-6 Υλοποίηση μιγαδικών βαρών σε Beamformer

Όσον αφορά τα μιγαδικά βάρη θεωρούμε:

$$\mathbf{w}^H = [w_0^* \quad w_1^* \quad \dots \quad w_{N-1}^*] \quad (4.27)$$

Σύμφωνα με την παραπάνω εικόνα, η έξοδος θα είναι:

$$y(t) = \mathbf{x}(t, \mathbf{p}) \mathbf{w}^H \quad (4.28)$$

Στην παραπάνω σχέση το διάνυσμα $\mathbf{x}(t, \mathbf{p})$ δίνεται από τη σχέση (4.22). Άρα θα ισχύει:

$$Y(\omega) = Y(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\mathbf{k}) \quad (4.29)$$

Η στροφή του διαγράμματος ακτινοβολίας με εφαρμογή μιγαδικών βαρών στις αποκρίσεις των στοιχείων παρουσιάζεται και στην επόμενη παράγραφο που αναλύουμε μία ειδική περίπτωση στοιχειοκεραιών, που είναι οι μονοδιάστατες συστοιχίες κεραιών, των οποίων τα στοιχεία ισαπέχουν (1-D Uniform Linear Arrays, ULAs).

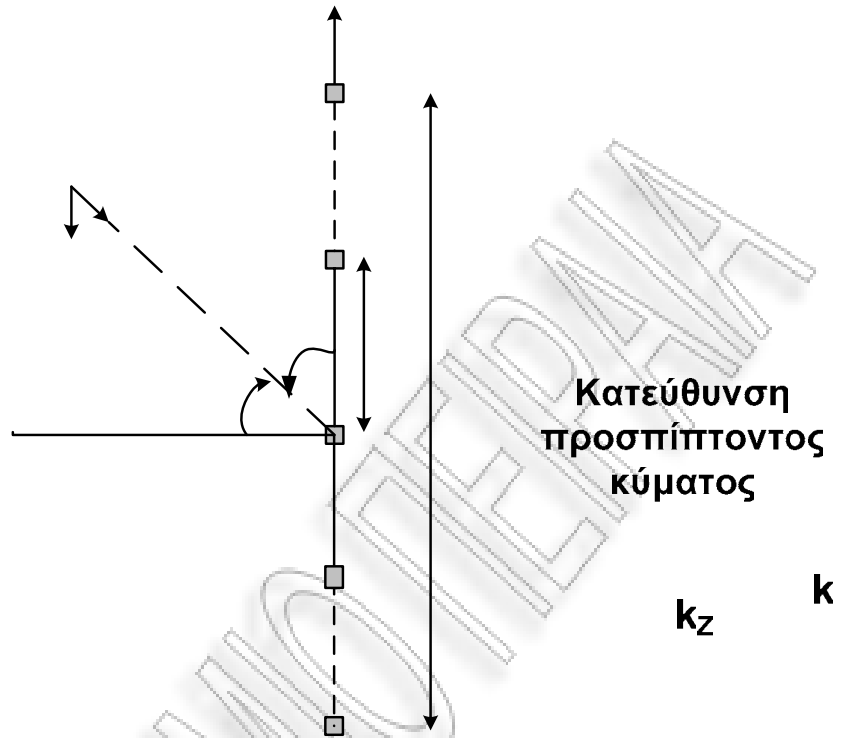
4.2.2 μονοδιάστατες συστοιχίες κεραιών με ισαπέχοντα στοιχεία (ULAS)

Στην προηγούμενη παράγραφο παρουσιάσαμε τη γενική περίπτωση στοιχειοκεραίας, όπου τα στοιχεία της βρίσκονταν σε τυχαίες θέσεις στο χώρο, οι οποίες προσδιορίζονταν από τα διανύσματα \mathbf{P}_n , $n = 0, \dots, N-1$, όπου N το πλήθος των στοιχείων. Σε αυτή την περίπτωση, θεωρούμε ότι τα στοιχεία ισαπέχουν μεταξύ τους και βρίσκονται σε θέσεις που ανήκουν στον ίδιο άξονα. Αν τα στοιχεία τοποθετούνται κατα μήκος του άξονα Z , τότε τα διανύσματα θέσης \mathbf{P}_n θα έχουν μόνο Z συνιστώσα. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να επιλέξουμε περιττό αριθμό στοιχείων (N περιττός). Επίσης για απλοποίηση στους υπολογισμούς, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η αρχή των αξόνων βρίσκεται στο κέντρο της ομοιόμορφης γραμμικής στοιχειοκεραίας όπως φαίνεται στην εικόνα που ακολουθεί. Από αυτή την εικόνα θα ισχύουν τα εξής:

$$\mathbf{p}_{z_n} = p_{z_n} \hat{\mathbf{z}} \quad (4.30)$$

Όπου:

$$p_{z_n} = \left(n - \frac{N-1}{2} \right) d, \quad n = 0, \dots, N-1 \quad (4.31)$$



Εικόνα 4-7 Πρόσπτωση επίπεδου κύματος σε ULA

Άρα και τα εσωτερικά γινόμενα του κυματανύσματος με τα διανύσματα θέσης θα περιέχουν μόνο τη Z συνιστώσα του κυματανύσματος. Άρα το array manifold vector τώρα γίνεται:

$$\mathbf{v}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} e^{-jk_z p_{Z0}} \\ e^{-jk_z p_{Z1}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{-jk_z p_{Z(N-1)}} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{v}(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} e^{jk_z d \left(\frac{N-1}{2}\right)} \\ e^{jk_z d \left(\frac{N-1}{2} - 1\right)} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ e^{-jk_z d \left(\frac{N-1}{2}\right)} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

Επίσης θα ισχύει ότι:

$$-k_z d = \frac{2\pi}{\lambda} \cos \theta d = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin \theta' = 2\pi a \sin \theta' \quad (4.33)$$

Όπου a είναι η κανονικοποιημένη απόσταση μεταξύ των στοιχείων για την οποία ισχύει:

$$a = \frac{d}{\lambda} \quad (4.34)$$

Το array manifold vector στην περίπτωση της παραπάνω εικόνας και αν λάβουμε υπόψη τις σχέσεις (4.32) και (4.33) γίνεται:

$$\mathbf{v}(\theta') = \begin{bmatrix} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta'} \\ e^{-j\left(\frac{N-1}{2}-1\right)\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta'} \\ \vdots \\ e^{j\left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta'} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Επίσης, η γωνία θ' έχει νόημα να παίρνει τιμές:

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.36)$$

Άρα εναλλακτικά μπορούμε να εκφράσουμε το manifold vector σε συνάρτηση με τη γωνία θ' που σχηματίζει η κατεύθυνση πρόσπτωσης του επίπεδου κύματος με το οριζόντιο επίπεδο. Φυσικά το manifold vector λόγω της σχέσης (4.19) μπορεί να εκφραστεί και σε συνάρτηση με τις καθυστερήσεις άφιξης του κύματος στα στοιχεία.

Με βάση τα παραπάνω, μπορούμε να εκφράσουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας της στοιχειοκεραίας σε συνάρτηση με τη γωνία θ' ως εξής:

$$B(\theta') = \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\theta') \Leftrightarrow B(\theta') = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta'} \sum_{i=0}^{N-1} w_n^* e^{jn\frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta'}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.37)$$

Θέτοντας $\Psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin\theta'$ η σχέση (4.37) γίνεται:

$$B(\theta') = \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\theta') \Leftrightarrow B(\theta') = e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Psi} \sum_{i=0}^{N-1} w_n^* e^{jn\Psi}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2} \quad (4.38)$$

Μία συνηθισμένη περίπτωση είναι εκείνη κατά την οποία τα βάρη είναι ίσα μεταξύ τους και αποτελούνται μόνο από πραγματικό μέρος. Τότε η (4.27) γίνεται:

$$\mathbf{w}^H = \frac{1}{N} [1 \quad 1 \quad \dots \quad 1] \Leftrightarrow \mathbf{w}^H = \frac{1}{N} \mathbf{I}_N \quad (4.39)$$

Τότε θα είναι:

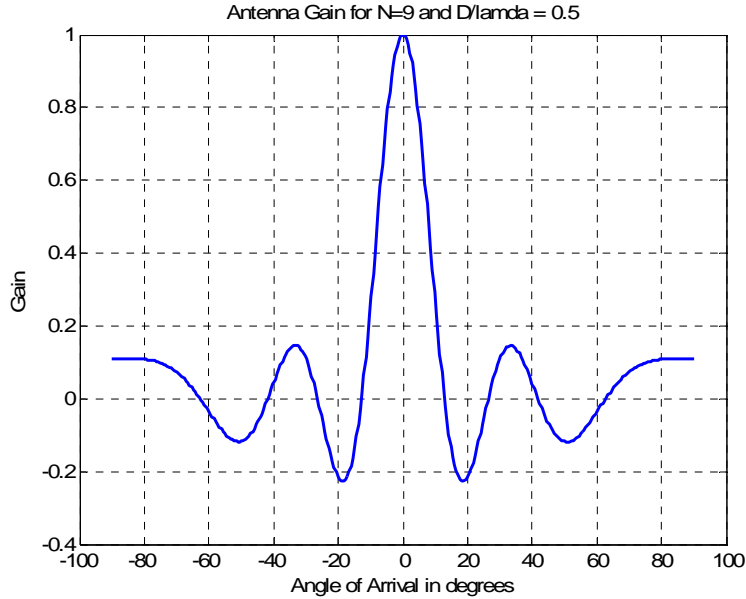
$$\begin{aligned} B(\theta') &= e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Psi} \sum_{i=0}^{N-1} w_n^* e^{jn\Psi} \Leftrightarrow B(\theta') = \frac{1}{N} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Psi} \sum_{i=0}^{N-1} e^{jn\Psi} \Leftrightarrow B(\theta') = \frac{1}{N} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Psi} \frac{1 - e^{jN\Psi}}{1 - e^{j\Psi}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow B(\theta') = \frac{1}{N} e^{-j\frac{N}{2}\Psi} e^{j\frac{\Psi}{2}} \frac{1 - e^{jN\Psi}}{1 - e^{j\Psi}} \Leftrightarrow B(\theta') = \frac{1}{N} \frac{e^{-j\frac{N}{2}\Psi} - e^{j\frac{N}{2}\Psi}}{e^{-j\frac{\Psi}{2}} - e^{j\frac{\Psi}{2}}} \Leftrightarrow B(\theta') = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(N\frac{\Psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi}{2}\right)} \end{aligned}$$

Άρα τελικά:

$$B(\theta') = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(N\frac{\Psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi}{2}\right)}, \quad \Psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta' \quad (4.40)$$

Σημειώνεται ότι η σχέση (4.40) ισχύει για $-\frac{\pi}{2} \leq \theta' \leq \frac{\pi}{2} \rightarrow -2\pi \frac{d}{\lambda} \leq \Psi \leq 2\pi \frac{d}{\lambda}$.

Παρακάτω φαίνεται η γραφική απεικόνιση της σχέσης (4.40).



Εικόνα 4-8 Διάγραμμα ακτινοβολίας στοιχειοκεραίας συναρτήσει γωνίας πρόσπτωσης

Από την παραπάνω γραφική παράσταση φαίνεται ότι όταν τα βάρη είναι ίσα μεταξύ τους και πραγματικά, τότε το διάγραμμα ακτινοβολίας παρουσιάζει έναν κύριο λοβό για $\theta' = 0^\circ$. Με άλλα λόγια το κέρδος της κεραίας είναι μέγιστο για $\theta' = 0^\circ$, ενώ για άλλες γωνίες είναι σημαντικά μικρότερο.

Στην περίπτωση τώρα που θα θέλαμε να στρέψουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας, ώστε το μέγιστο κέρδος να αντιστοιχεί σε διαφορετική γωνία θ' , προφανώς θα έπρεπε να επιλέξουμε διαφορετικά μιγαδικά (εν γένει) βάρη. Στην πράξη το διάνυσμα των μιγαδικών βαρών θα παίρνει τη μορφή του manifold vector και γίνεται:

$$\mathbf{w} = \frac{1}{N} \mathbf{v}(\theta_T) \quad (4.41)$$

Στην παραπάνω σχέση, όπου θ_T είναι η γωνία προς την οποία θέλουμε να γίνει στροφή του διαγράμματος ακτινοβολίας. Σε αυτή την περίπτωση θα είναι:

$$B(\theta_T) = \mathbf{w}^H \mathbf{v}(\theta') \Leftrightarrow B(\theta_T) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\theta_T) \mathbf{v}(\theta') \quad (4.42)$$

Η αναλυτική σχέση του διαγράμματος ακτινοβολίας σε αυτή την περίπτωση προκύπτει ύστερα από συνδιασμό των (4.35) και (4.42) ως εξής:

$$B(\theta_T) = \frac{1}{N} \mathbf{v}^H(\theta_T) \mathbf{v}(\theta') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B(\theta_T) = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} e^{j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Psi_T} & e^{j\left(\frac{N-1}{2}-1\right)\Psi_T} & \dots & e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\Psi_T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)(\Psi-\Psi_T)} \\ e^{-j\left(\frac{N-1}{2}-1\right)(\Psi-\Psi_T)} \\ \vdots \\ e^{j\left(\frac{N-1}{2}\right)(\Psi-\Psi_T)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B(\theta_T) = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)(\Psi-\Psi_T)} & e^{-j\left(\frac{N-1}{2}-1\right)(\Psi-\Psi_T)} & \dots & e^{j\left(\frac{N-1}{2}\right)(\Psi-\Psi_T)} \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B(\theta_T) = \frac{1}{N} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)(\Psi-\Psi_T)} \sum_{i=0}^{N-1} e^{ji(\Psi-\Psi_T)} \Leftrightarrow B(\theta_T) = \frac{1}{N} e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)(\Psi-\Psi_T)} \frac{1-e^{jN(\Psi-\Psi_T)}}{1-e^{j(\Psi-\Psi_T)}} \Leftrightarrow$$

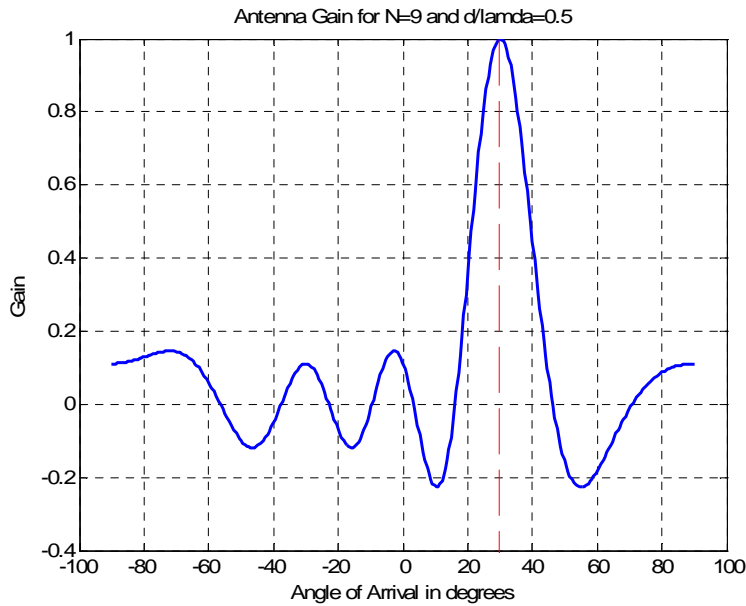
$$\Leftrightarrow B(\theta_T) = \frac{1}{N} e^{-j\frac{N}{2}(\Psi-\Psi_T)} e^{j\frac{(\Psi-\Psi_T)}{2}} \frac{1-e^{jN(\Psi-\Psi_T)}}{1-e^{j(\Psi-\Psi_T)}} \Leftrightarrow B(\theta_T) = \frac{1}{N} \frac{e^{-j\frac{N}{2}(\Psi-\Psi_T)} - e^{j\frac{N}{2}(\Psi-\Psi_T)}}{e^{-j\frac{(\Psi-\Psi_T)}{2}} - e^{j\frac{(\Psi-\Psi_T)}{2}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow B(\theta_T) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(N\frac{(\Psi-\Psi_T)}{2}\right)}{\sin\left(\frac{(\Psi-\Psi_T)}{2}\right)}$$

Άρα τελικά:

$$B(\theta_T) = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(N \frac{\Psi - \Psi_T}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Psi - \Psi_T}{2}\right)}, \quad \Psi = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta' \quad \text{και} \quad \Psi_T = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta_T \quad (4.43)$$

Η παραπάνω σχέση γραφικά απεικονίζεται στην εικόνα που ακολουθεί, όπου έχουμε θεωρήσει ότι ο κύριος λοβός θα παρουσιάζεται για $\theta_T = 30^\circ$:



Εικόνα 4-9 Στροφή διαγράμματος ακτινοβολίας στοιχειοκεραίας

Άρα επιλέγοντας κατάλληλα τα μιγαδικά βάρη μπορούμε να επιτύχουμε στροφή του διαγράμματος ακτινοβολίας προς την επιθυμητή κατεύθυνση. Σημειώνουμε εδώ ότι το διάνυσμα των μιγαδικών βαρών, λόγω της χρησιμότητάς του το ονομάζουμε διάνυσμα οδήγησης (steering vector).

4.3 Φυσική μοντελοποίηση περιβάλλοντος σκέδασης

Όπως τονίσαμε και πιο πριν, θα θεωρήσουμε μονοδιάστατες, γραμμικές συστοιχίες κεραιών σε πομπό και δέκτη, των οποίων τα στοιχεία ισαπέχουν μεταξύ τους (Uniform Linear Arrays, ULAs). Επίσης, θεωρούμε ότι οι σκεδαστές βρίσκονται επαρκώς μακριά και από το πομπό και από το δέκτη (*far-field scattering*), ώστε να μπορούμε να

υποθέσουμε ότι στον δέκτη προσπίπτει επίπεδο κύμα. Επίσης, θεωρούμε ότι η ULA στον πομπό αποτελείται από n_T στοιχεία, ενώ στο δέκτη από n_R στοιχεία. Ο πίνακας που περιγράφει το κανάλι, μπορεί να εκφραστεί μέσω των *διανυσμάτων οδήγησης και απόκρισης*, τα οποία παρουσιάζονται παρακάτω [19]:

$$\mathbf{a}_T(\theta_T) = \frac{1}{\sqrt{n_T}} \begin{bmatrix} 1 & e^{-j2\pi\theta_T} & \dots & e^{-j2\pi(n_T-1)\theta_T} \end{bmatrix}^T \quad (4.44)$$

$$\mathbf{a}_R(\theta_R) = \frac{1}{\sqrt{n_R}} \begin{bmatrix} 1 & e^{-j2\pi\theta_R} & \dots & e^{-j2\pi(n_R-1)\theta_R} \end{bmatrix}^T \quad (4.45)$$

Η σχέση (4.44) παριστάνει το *διάνυσμα οδήγησης (steering vector)*, που χρησιμοποιείται για να στρέψουμε το διάγραμμα ακτινοβολίας προς τη γωνία θ_T , ώστε να μπορούμε να μεταδώσουμε προς την αντίστοιχη κατεύθυνση. Αντίστοιχα, η σχέση (4.45) εκφράζει το *διάνυσμα απόκρισης (response vector)*, βάσει του οποίου καθορίζεται η κατεύθυνση (γωνία) θ_R προς την οποία η ULA λήψης θα μπορεί να στρέψει το διάγραμμα ακτινοβολίας, ώστε να λαμβάνει μέγιστη ισχύ του σήματος υπό αυτή τη γωνία. Στις παραπάνω σχέσεις, θ είναι μία μεταβλητή, η οποία αντιστοιχεί στη *φυσική γωνία διάδοσης* Φ μέσω της ακόλουθης σχέσης¹:

$$\theta = \frac{d}{\lambda} \sin \Phi = a \sin \Phi \rightarrow \Phi = \sin^{-1}\left(\frac{\theta}{a}\right), \quad a = \frac{d}{\lambda} \quad (4.46)$$

Άρα, μπορούμε να θεωρήσουμε τη μεταβλητή θ σαν μία *κανονικοποιημένη γωνία*. Επίσης, σημειώνουμε πως η γωνία Φ μετράται σε σχέση με τον οριζόντιο άξονα. Άρα η ορατή περιοχή θα είναι η $-\frac{\pi}{2} \leq \Phi \leq \frac{\pi}{2}$. Άρα από την (4.46) θα προκύπτει ότι:

$$-a \leq \theta \leq a \quad (4.47)$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι τα διανύσματα των σχέσεων (4.44) και (4.45) είναι περιοδικά ως προς θ , με περίοδο 1. Άρα θεωρώντας τη θεμελιώδη περίοδο, θέτουμε:

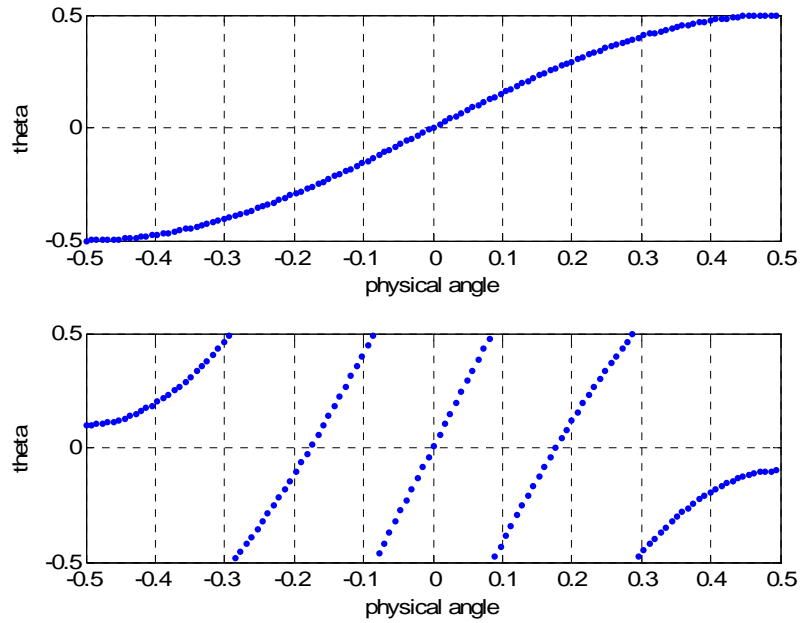
$$-0.5 \leq \theta \leq 0.5 \quad (4.48)$$

Λόγω των (4.47) και (4.48) θα είναι:

¹ Από θεωρία 1-D Uniform Linear Arrays που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

$$a = 0.5 \quad (4.49)$$

Άρα, αν θεωρήσουμε ότι $a \leq 0.5$, τότε μόνο μία γωνία Φ θα αντιστοιχεί σε κάθε τιμή της μεταβλητής θ (αντιστοιχία ένα προς ένα). Αν υποθέσουμε ότι $a > 0.5$, τότε θα υπάρχουν πάνω από μία φυσικές γωνίες Φ που θα αντιστοιχούν σε μία τιμή της θεμελιώδους περιόδου της μεταβλητής θ . Αυτή η παρατήρηση φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα, όπου έχουμε απεικονίσει γραφικά τη σχέση μεταξύ των Φ, θ για $a = 0.5$ και για $a = 1.9$.



Εικόνα 4-10 Σχέση μεταξύ φυσικής γωνίας διάδοσης και κανονικοποιημένης γωνίας για $a=0.5$ και $a=1.9$

Στη συνέχεια, θεωρώντας ότι ο πομπός και ο δέκτης αποτελούνται από ULAs, ο πίνακας που θα περιγράφει το κανάλι θα μπορεί να εκφραστεί σε συνάρτηση των διανυσμάτων οδήγησης και απόκρισης (steering and response vectors) ως εξής [20]:

$$\mathbf{H} = \int_{-a_R}^{a_R} \int_{-a_T}^{a_T} G(\theta_R, \theta_T) \mathbf{a}_R(\theta_R) \mathbf{a}_T^H(\theta_T) d\theta_R d\theta_T \quad (4.50)$$

Στην παραπάνω σχέση, η συνάρτηση $G(\theta_R, \theta_T)$ περιγράφει τη θέση των σκεδαστών στο περιβάλλον διάδοσης (εκφράζει το physical scattering), σε συνάρτηση με τις

κανονικοποιημένες γωνίες θ_T και θ_R , και καλείται *spatial spreading function*. Με a_R, a_T έχουμε συμβολίσει την κανονικοποιημένη απόσταση μεταξύ των στοιχείων στο δέκτη και τον πομπό αντίστοιχα. Όμως, λόγω της σχέσης (4.49), θα ισχύει τελικά:

$$\mathbf{H} = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} G(\theta_R, \theta_T) \mathbf{a}_R(\theta_R) \mathbf{a}_T^H(\theta_T) d\theta_R d\theta_T \quad (4.51)$$

Αναλυτικά η σχέση (4.50) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$H(m, n) = \frac{1}{\sqrt{PQ}} \int_{-a_R}^{a_R} \int_{-a_T}^{a_T} G(\theta_R, \theta_T) e^{-j2\pi\theta_R m} e^{j2\pi\theta_T n} d\theta_R d\theta_T \quad (4.52)$$

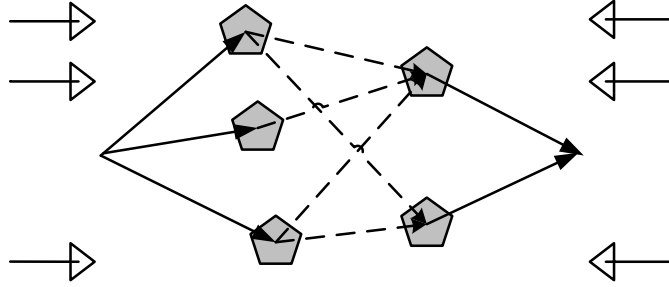
Ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο διακριτό μοντέλο, που είναι ειδική περίπτωση της σχέσης (4.50) δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^L b_i \mathbf{a}_R(\theta_{R,i}) \mathbf{a}_T^H(\theta_{T,i}) \quad (4.53)$$

Σημειώνουμε ότι το διακριτό μοντέλο της σχέσης (4.53) προκύπτει από την (4.50) αν ισχύει:

$$G(\theta_R, \theta_T) = \sum_{i=1}^L b_i \delta(\theta_R - \theta_{R,i}) \delta(\theta_T - \theta_{T,i}) \quad (4.54)$$

Στο μοντέλο της σχέσης (4.53), ο πομπός και ο δέκτης συνδέονται μέσω L διαδρομών διάδοσης. Τα σύνολα των τιμών $\{\theta_{T,i}\}, \{\theta_{R,i}\}$ είναι οι κανονικοποιημένες γωνίες εκπομπής και λήψης, ενώ τα $\{b_i\}$ είναι τα αντίστοιχα, ανεξάρτητα μεταξύ τους, κέρδη των διαδρομών. Σημειώνουμε εδώ, ότι η διαδρομή i ορίζεται πλήρως από ένα ζεύγος γωνιών εκπομπής και λήψης $\langle \theta_{T,i}, \theta_{R,i} \rangle$ και ένα μιγαδικό κέρδος b_i . Το διακριτό μοντέλο που αναφέραμε, παριστάνεται σχηματικά παρακάτω.



Εικόνα 4-11 Διακριτό μοντέλο αναπαράστασης καναλιού

Υπό μορφή πινάκων η σχέση (4.53) γίνεται:

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}_R(\underline{\theta}_R) \mathbf{H}_p \mathbf{A}_T^H(\underline{\theta}_T) \quad (4.55)$$

Και θα ισχύουν τα εξής:

$$\mathbf{A}_R(\underline{\theta}_R) = [\mathbf{a}_R(\theta_{R,1}) \quad \dots \quad \mathbf{a}_R(\theta_{R,L})] \quad (4.56)$$

$$\mathbf{A}_T(\underline{\theta}_T) = [\mathbf{a}_T(\theta_{T,1}) \quad \dots \quad \mathbf{a}_T(\theta_{T,L})] \quad (4.57)$$

$$\mathbf{H}_p = \text{diag}(b_1 \quad \dots \quad b_L) \quad (4.58)$$

Σημειώνεται, ότι ο πίνακας $\mathbf{A}_R(\underline{\theta}_R)$ είναι $(n_R \times L)$ διαστάσεων, ο πίνακας $\mathbf{A}_T(\underline{\theta}_T)$ είναι $(n_T \times L)$ διαστάσεων και ο διαγώνιος πίνακας \mathbf{H}_p είναι $(L \times L)$ διαστάσεων.

4.4 Εικονική αναπαράσταση καναλιού (virtual channel representation)

Στη συνέχεια, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τόσο ο αριθμός των στοιχείων εκπομπής n_T όσο και ο αριθμός των στοιχείων λήψης n_R είναι περιττοί αριθμοί. Τότε, ορίζουμε τα εξής:

$$\bar{\varrho} = \frac{n_R - 1}{2} \quad (4.59)$$

$$\bar{p} = \frac{n_T - 1}{2} \quad (4.60)$$

Η εικονική αναπαράσταση του πίνακα \mathbf{H} που περιγράφει το κανάλι, που ορίστηκε παραπάνω, μπορεί να εκφραστεί ως [20]:

$$\mathbf{H} = \sum_{q=-\bar{Q}}^{\bar{Q}} \sum_{p=-\bar{P}}^{\bar{P}} H_V(q, p) \mathbf{a}_R(\tilde{\theta}_{R,q}) \mathbf{a}_T^H(\tilde{\theta}_{T,p}) \quad (4.61)$$

Από την παραπάνω σχέση, ο πίνακας \mathbf{H}_V , αποτελεί την *εικονική αναπαράσταση* του καναλιού διάδοσης. Πιο συγκεκριμένα, η εικονική αναπαράσταση προϋποθέτει πως τα σήματα μεταδίδονται και λαμβάνονται υπό συγκεκριμένες, εικονικές κατευθύνσεις (γωνίες) $\{\tilde{\theta}_{R,q}\}, \{\tilde{\theta}_{T,p}\}$ [19]. Αυτές οι *εικονικές γωνίες* μπορούν να ληφθούν από ομοιόμορφη δειγματοληψία της μεταβλητής θ στη θεμελιώση περίοδο (θυμίζουμε ότι: $-0.5 \leq \theta \leq 0.5$) ως εξής:

$$\tilde{\theta}_{R,q} = \frac{q}{n_R}, \quad -\bar{Q} \leq q \leq \bar{Q} \quad (4.62)$$

$$\tilde{\theta}_{T,p} = \frac{p}{n_T}, \quad -\bar{P} \leq p \leq \bar{P} \quad (4.63)$$

Οι αντίστοιχες δειγματοληπτημένες *φυσικές γωνίες* θα προκύπτουν με συνδιασμό των σχέσεων (4.46), (4.62) και (4.63) ως εξής:

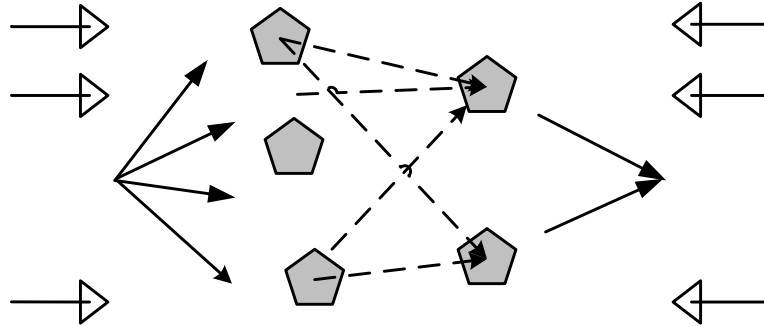
$$\varphi_{T,p} = \sin^{-1}\left(\frac{\tilde{\theta}_{T,p}}{a_T}\right) \Leftrightarrow \varphi_{T,p} = \sin^{-1}\left(\frac{p}{n_T a_T}\right) \quad (4.64)$$

και

$$\varphi_{R,q} = \sin^{-1}\left(\frac{\tilde{\theta}_{R,q}}{a_R}\right) \Leftrightarrow \varphi_{R,q} = \sin^{-1}\left(\frac{q}{n_R a_R}\right) \quad (4.65)$$

Όπως μπορούμε να συμπεράνουμε, το πλήθος των $\{\tilde{\theta}_{T,p}\}$ και $\{\tilde{\theta}_{R,q}\}$, εξαρτάται από τον αριθμό των στοιχείων στον πομπό και στο δέκτη αντίστοιχα. Επίσης, για δεδομένο αριθμό στοιχείων σε πομπό και δέκτη, η απόσταση μεταξύ των εικονικών γωνιών (virtual angle spacing) εξαρτάται από την κανονικοποιημένη απόσταση μεταξύ των στοιχείων του array (*array spatial resolution*).

Η εικονική αναπαράσταση του καναλιού που περιγράφεται από τη σχέση (4.61) επεξηγείται σχηματικά και από την εικόνα που ακολουθεί.



Εικόνα 4-12 Εικονική αναπαράσταση καναλιού

Όπως φαίνεται και στην εικόνα, οι συντελεστές $\{\mathbf{H}_V(q, p)\} = h_{q,p}$ του εικονικού πίνακα \mathbf{H}_V συνδέουν τις n_T εικονικές γωνίες εκπομπής με τις n_R εικονικές γωνίες λήψης. Σημειώνουμε εδώ, ότι για γωνίες στις οποίες δεν αντιστοιχεί κάποιος σκεδαστής, οι αντίστοιχοι συντελεστές $h_{q,p}$ προσεγγιστικά είναι μηδέν.

Εναλλακτικά, η σχέση (4.61) μπορεί να εκφραστεί και υπό μορφή πινάκων ως εξής:

$$\mathbf{H} = \mathbf{A}_R \mathbf{H}_V \mathbf{A}_T^H \quad (4.66)$$

Όπου θα είναι:

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_R(\tilde{\theta}_{R,-\tilde{\vartheta}}) & \dots & \mathbf{a}_R(\tilde{\theta}_{R,\tilde{\vartheta}}) \end{bmatrix} \quad (4.67)$$

$$\mathbf{A}_T = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_T(\tilde{\theta}_{T,-\tilde{\varphi}}) & \dots & \mathbf{a}_T(\tilde{\theta}_{T,\tilde{\varphi}}) \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Σημειώνεται, ότι ο πίνακας \mathbf{A}_R θα έχει διαστάσεις $n_R \times n_R$, ο πίνακας \mathbf{A}_T θα είναι $n_T \times n_T$ και ο \mathbf{H}_V $n_R \times n_T$. Από τη σχέση (4.61) βλέπουμε πως οι πίνακες \mathbf{H} και \mathbf{H}_V συνδέονται με σχέση διακριτού διδιάστατου μετασχηματισμού Fourier.

4.4.1 Σχέση μεταξύ εικονικής αναπαράστασης και φυσικών μοντέλων

Από τη σχέση (4.66) προκύπτει ότι:

$$\mathbf{H}_V = \mathbf{A}_R^H \mathbf{H} \mathbf{A}_T \quad (4.69)$$

Εδώ τονίζουμε, ότι ο πίνακας \mathbf{H}_V στην ουσία προκύπτει εφαρμόζοντας διδιάστατο διακριτό μετασχηματισμό Fourier στον πίνακα \mathbf{H} που περιγράφει το κανάλι. Ωστόσο, αυτό που μας ενδιαφέρει είναι να δούμε τον τρόπο με τον οποίο τα στοιχεία του \mathbf{H}_V σχετίζονται με το φυσικό μοντέλο που περιγράφεται από τη σχέση (4.51). Συνδυάζοντας τις (4.69) και (4.51) θα έχουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_V = \mathbf{A}_R^H \mathbf{H} \mathbf{A}_T &\rightarrow H_V(q, p) = \mathbf{a}_R^H(\tilde{\theta}_{R,q}) \mathbf{H} \mathbf{a}_T(\tilde{\theta}_{T,p}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow H_V(q, p) &= \mathbf{a}_R^H(\tilde{\theta}_{R,q}) \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} G(\theta_R, \theta_T) \mathbf{a}_R(\theta_R) \mathbf{a}_T^H(\theta_T) d\theta_R d\theta_T \mathbf{a}_T(\tilde{\theta}_{T,p}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow H_V(q, p) &= \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} G(\theta_R, \theta_T) \mathbf{a}_R^H(\tilde{\theta}_{R,q}) \mathbf{a}_R(\theta_R) \mathbf{a}_T^H(\theta_T) \mathbf{a}_T(\tilde{\theta}_{T,p}) d\theta_R d\theta_T \quad (4.70) \end{aligned}$$

Λόγω της σχέσης (4.45) θα είναι:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_R^H(\tilde{\theta}_{R,q}) \mathbf{a}_R(\theta_R) &= \frac{1}{n_R} \begin{bmatrix} 1 & e^{j2\pi\tilde{\theta}_{R,q}} & \dots & e^{j2\pi(n_R-1)\tilde{\theta}_{R,q}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j2\pi\theta_R} \\ \vdots \\ e^{-j2\pi(n_R-1)\theta_R} \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{n_R} \left[1 e^{-j2\pi(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} + \dots + e^{-j2\pi(n_R-1)(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} \right] = \frac{1}{n_R} \sum_{n=0}^{n_R-1} e^{-j2\pi n(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} = \\
&= \frac{1}{n_R} \frac{1 - e^{-j2\pi n_R(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})}}{1 - e^{-j2\pi(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})}} = \frac{1}{n_R} \frac{e^{-j\pi n_R(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} \left[e^{j\pi n_R(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} - e^{-j\pi n_R(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} \right]}{e^{-j\pi(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} \left[e^{j\pi(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} - e^{-j\pi(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} \right]} = \\
&= \frac{1}{n_R} e^{-j\pi(n_R-1)(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} \frac{e^{-j\pi n_R(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} - e^{j\pi n_R(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})}}{e^{-j\pi(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} - e^{j\pi(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})}} = \frac{1}{n_R} e^{-j\pi(n_R-1)(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} \frac{\sin \left[\pi n_R (\theta_R - \tilde{\theta}_{R,q}) \right]}{\sin \left[\pi (\theta_R - \tilde{\theta}_{R,q}) \right]}
\end{aligned}$$

Άρα θα είναι:

$$\mathbf{a}_R^H(\tilde{\theta}_{R,q}) \mathbf{a}_R(\theta_R) = \frac{1}{n_R} e^{-j\pi(n_R-1)(\theta_R-\tilde{\theta}_{R,q})} \frac{\sin \left[\pi n_R (\theta_R - \tilde{\theta}_{R,q}) \right]}{\sin \left[\pi (\theta_R - \tilde{\theta}_{R,q}) \right]} = y(\theta_R - \tilde{\theta}_{R,q}) \quad (4.71)$$

Ομοίως προκύπτει ότι:

$$\mathbf{a}_T^H(\theta_T) \mathbf{a}_T(\tilde{\theta}_{T,p}) = \frac{1}{n_T} e^{j\pi(n_T-1)(\theta_T-\tilde{\theta}_{T,p})} \frac{\sin \left[\pi n_T (\theta_T - \tilde{\theta}_{T,p}) \right]}{\sin \left[\pi (\theta_T - \tilde{\theta}_{T,p}) \right]} = z(\theta_T - \tilde{\theta}_{T,p}) \quad (4.72)$$

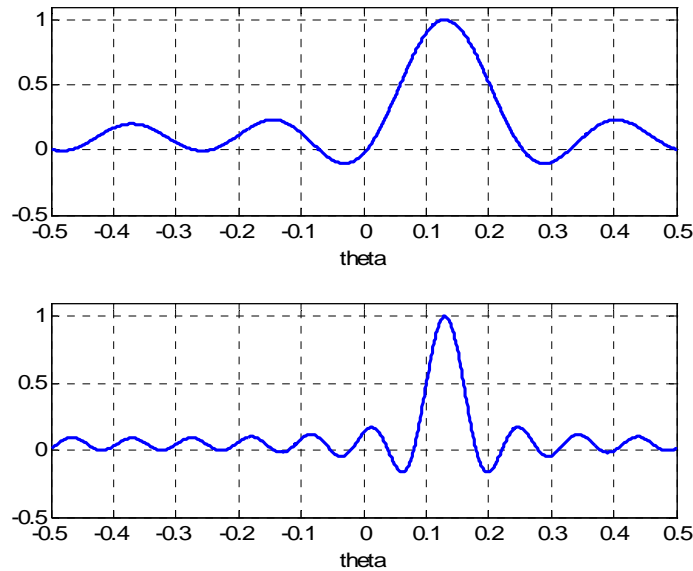
Επομένως, η σχέση (4.70) λόγω των (4.71) και (4.72) τελικά γίνεται:

$$H_V(q, p) = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} G(\theta_R, \theta_T) y(\theta_R - \tilde{\theta}_{R,q}) z(\theta_T - \tilde{\theta}_{T,p}) d\theta_R d\theta_T \quad (4.73)$$

Αν τώρα λάβουμε υπόψη μας και τις σχέσεις (4.62) και (4.63), η παραπάνω σχέση παίρνει την τελική της μορφή:

$$H_V(q, p) = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} G(\theta_R, \theta_T) y\left(\theta_R - \frac{q}{n_R}\right) z\left(\theta_T - \frac{p}{n_T}\right) d\theta_R d\theta_T \quad (4.74)$$

Η συνάρτηση $y(\theta_R - \tilde{\theta}_{R,q})$ που δίνεται από τη σχέση (4.71), μεγιστοποιείται για $\theta_R = \tilde{\theta}_{R,q}$, ενώ δεξιά και αριστερά από αυτή τη γωνία θα παρουσιάζει μικρή κυμάτωση. Αυτό φαίνεται και από τη γραφική απεικόνιση της συνάρτησης της σχέσης (4.71) για $\tilde{\theta}_{R,q} = 0.13$ και για δύο περιπτώσεις: Για $n_R = 5$ και για $n_R = 11$.



Εικόνα 4-13 Γραφική απεικόνιση της εξίσωσης 4.71

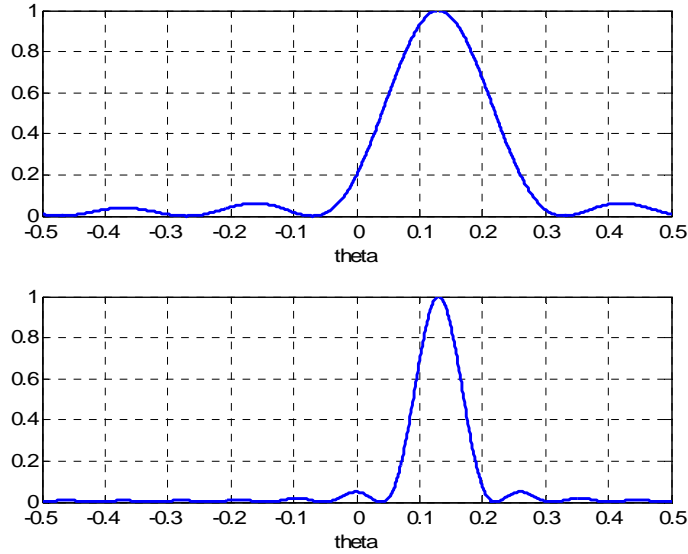
Η πρώτη καμπύλη ισχύει για $n_R = 5$ και η δεύτερη για $n_R = 11$.

Επίσης, παρατηρούμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων λήψης (όσο αυξάνεται το n_R), τόσο περισσότερο θα στενεύει ο κύριος λοβός της παραπάνω καμπύλης.

Αντίστοιχα ισχύουν και για τη σχέση (4.72).

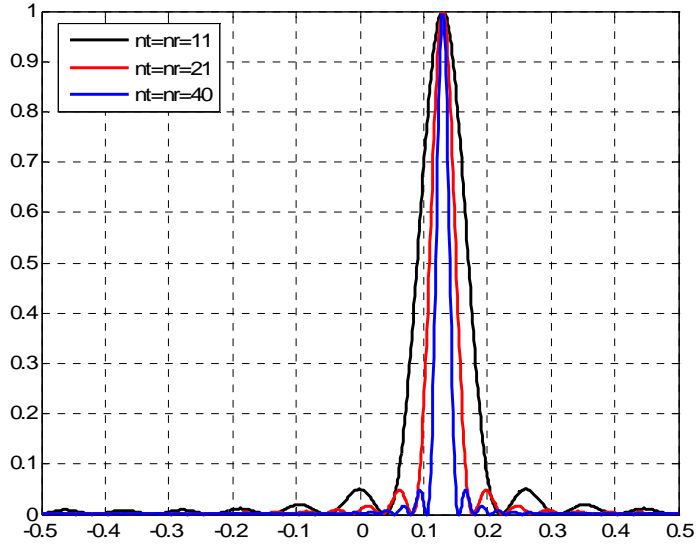
Ωστόσο, σημειώνουμε ότι στη σχέση (4.73) η συνάρτηση $G(\theta_R, \theta_T)$ πολλαπλασιάζεται με την $f(\theta_T - \tilde{\theta}_{T,p}) = y(\theta_R - \tilde{\theta}_{R,q})z(\theta_T - \tilde{\theta}_{T,p})$. Άρα χρήσιμο είναι να

δούμε και τη γραφική απεικόνιση της συνάρτησης $f(\theta_T - \tilde{\theta}_{T,p})$, θεωρώντας όπως πριν ότι $\tilde{\theta}_{R,q} = 0.13$ και δύο περιπτώσεις: $n_R = 5$ και $n_R = 11$.



Εικόνα 4-14 Γραφική απεικόνιση της σχέσης 4.73

Από τις παραπάνω καμπύλες παρατηρούμε, ομοίως με πριν, ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των στοιχείων του πομπού και του δέκτη (αυξάνοντα τα n_T, n_R) τόσο περισσότερο θα στενεύει ο κύριος λοβός, που θα είναι κεντραρισμένος στην γωνία $\theta_R = \tilde{\theta}_{R,q} = 0.13$. Επομένως, κατά προσέγγιση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για μεγάλες τιμές των n_T, n_R η συνάρτηση $f(\theta_T - \tilde{\theta}_{T,p})$ θα προσεγγίζεται από μία κρουστική για $\theta_R = \tilde{\theta}_{R,q}$. Αυτό φαίνεται και στην παρακάτω εικόνα όπου υποθέτουμε διάφορες αυξανόμενες τιμές των n_T, n_R .



Εικόνα 4-15 Γραφική απεικόνιση της σχέσης 4.73 για διάφορες τιμές του αριθμού των κεραιών εκπομπής και λήψης

Επομένως, προσεγγιστικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για μεγάλες τιμές των n_T, n_R , τα $\{H_V(q, p)\}$ θα είναι δείγματα της συνάρτησης $G(\theta_R, \theta_T)$ στις εικονικές γωνίες $\{\tilde{\theta}_T\}$ και $\{\tilde{\theta}_R\}$. Άρα αν λάβουμε υπόψη μας και τις σχέσεις (4.71), (4.72) και (4.73) θα ισχύει τελικά:

$$H_V(q, p) \approx \frac{G\left(\frac{q}{n_R}, \frac{p}{n_T}\right)}{n_T n_R} \quad (4.75)$$

4.4.2 Εικονική αναπαράσταση πρακτικών καναλιών

Τα πραγματικά κανάλια διάδοσης μπορούν να θεωρηθούν ως σύνολο από ξεχωριστές ομάδες σκεδαστών (*clusters*) [21]. Το μέγεθος ενός cluster εκφράζεται μέσω του γωνιακού εύρους (*angular spread*), όπως αυτό φαίνεται από τη μεριά του πομπού και του δέκτη. Στην περίπτωση μας, όσον αφορά τον πίνακα \mathbf{H}_V , διαφορετικά clusters σκεδαστών αντιστοιχούν σε διαφορετικούς, μη επικαλυπτόμενους υποπίνακες του \mathbf{H}_V

[20]. Επίσης, οι διαστάσεις ενός υποπίνακα του \mathbf{H}_V θα είναι ανάλογες του μεγέθους του αντίστοιχου cluster και της θεωρούμενης απόστασης μεταξύ των κεραιών. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι θεωρούμε ένα cluster, για το οποίο το γωνιακό εύρος από τη μεριά του πομπού και του δέκτη είναι αντίστοιχα:

$$S_T = [S_{T-}, S_{T+}] \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \quad (4.76)$$

$$S_R = [S_{R-}, S_{R+}] \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

Τότε, ο αριθμός των γραμμών του αντίστοιχου υποπίνακα θα είναι $(Q_+ - Q_-)$ και ο αριθμός των στηλών θα είναι $(P_+ - P_-)$, όπου ισχύει ότι:

$$Q_- = \lfloor a_R n_R \sin(S_{R-}) \rfloor \quad (4.77)$$

$$Q_+ = \lfloor a_R n_R \sin(S_{R+}) \rfloor$$

και:

$$P_- = \lfloor a_T n_T \sin(S_{T-}) \rfloor \quad (4.78)$$

$$P_+ = \lfloor a_T n_T \sin(S_{T+}) \rfloor$$

Με βάση τις σχέσεις (4.76), (4.77) και (4.78) παρατηρούμε την αντιστοιχία που υπάρχει ανάμεσα στο μέγεθος ενός cluster και της διάστασης του αντίστοιχου υποπίνακα του \mathbf{H}_V , δεδομένης της απόστασης μεταξύ των κεραιών στον πομπό και το δέκτη.

4.4.3 Σχέση μεταξύ παράλληλων καναλιών και διαφορισιμότητας (diversity)

Δεδομένου του πίνακα \mathbf{H}_V , μας ενδιαφέρει να εξετάσουμε τη συνεισφορά στη χωρητικότητα του κάθε cluster ξεχωριστά. Η εικονική αναπαράσταση του καναλιού μέσω του πίνακα \mathbf{H}_V , αναδεικνύει δύο παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν τη

χωρητικότητα ανά cluster σκεδαστών [20]: Ο αριθμός των παράλληλων καναλιών και η διαφορισιμότητα (diversity).

Είναι γνωστό, ότι ένα κανάλι MIMO μπορεί να μοντελοποιηθεί ως ένα σύνολο από παράλληλα κανάλια. Επίσης, όσο αυξάνεται ο αριθμός των παράλληλων καναλιών, τόσο περισσότερο αυξάνεται και η χωρητικότητα. Η σχέση που συνδέει τις διαστάσεις του πίνακα \mathbf{H} (ή του \mathbf{H}_V) με το μέγιστο αριθμό παράλληλων καναλιών, είναι η εξής:

$$PC_{\max} = \min(n_T, n_R) \quad (4.79)$$

Όπου με PC έχουμε συμβολίσει τον αριθμό των παράλληλων καναλιών, n_T είναι ο αριθμός των κεραιών εκπομπής (αριθμός στηλών του \mathbf{H}) και n_R είναι ο αριθμός των κεραιών λήψης (αριθμός γραμμών του \mathbf{H}). Ωστόσο, με αύξηση του αριθμού των παράλληλων καναλιών αυξάνουμε τη χωρητικότητα αλλά δεν εξασφαλίζεται η αξιοπιστία του συστήματος (π.χ. BER).

Όπως είχαμε αναφέρει και στο πρώτο κεφάλαιο, βασικός σκοπός της διαφορισιμότητας, είναι η καταπολέμηση των διαλείψεων ώστε να αυξηθεί η αξιοπιστία του δεδομένου συστήματος. Στην περίπτωση των συστημάτων MIMO μας ενδιαφέρει η χωρική διαφορισιμότητα (spatial diversity), βασική ιδέα της οποίας είναι να παρέχονται στο δέκτη πολλαπλά αντίγραφα του ίδιου σήματος εκπομπής τα οποία φτάνουν στο δέκτη μέσω διαφορετικών και όσο το δυνατόν ασυσχέτιστων διαδρομών. Έτσι, ο δέκτης λαμβάνει το ίδιο σήμα πληροφορίας σε περισσότερες από μία κεραιές. Με αυτό τον τρόπο μπορεί να μειωθεί η πιθανότητα σφάλματος λόγω των διαλείψεων διότι η πιθανότητα να βρίσκεται σε βαθιά διάλειψη (deep fading) το ίδιο σήμα σε δύο ή περισσότερες διαφορετικές θέσεις λήψης ελαττώνεται εκθετικά. Άρα, γίνεται κατανοητό ότι όσο περισσότερα αντίγραφα του ίδιου σήματος λαμβάνει ο δέκτης (δηλαδή όσο αυξάνει η τάξη διαφορισιμότητας), τόσο πιο αποτελεσματικά αντιμετωπίζονται οι διαλείψεις και τόσο περισσότερο θα αυξάνει το κέρδος λόγω διαφορισιμότητας.

Με όλα τα παραπάνω γίνεται κατανοητό ότι η *τάξη της διαφορισιμότητας (diversity order)* εκφράζει τον αριθμό των αντιγράφων του ίδιου σήματος που λαμβάνει ο δέκτης. Έτσι, στην περίπτωση που εξετάζουμε, η τάξη διαφορισιμότητας που αντιστοιχεί σε κάθε κανάλι, καθορίζεται από τον αριθμό των εικονικών γωνιών λήψης που αντιστοιχούν σε μία εικονική γωνία εκπομπής. Επομένως, γίνεται κατανοητό ότι η τάξη της

διαφορισιμότητας εξαρτάται στην ουσία από τη διάταξη των σκεδαστών στο περιβάλλον διάδοσης και από το πλήθος των κεραιών. Από τα παραπάνω, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το μέγιστο επίπεδο διαφορισιμότητας δίνεται από την παρακάτω σχέση:

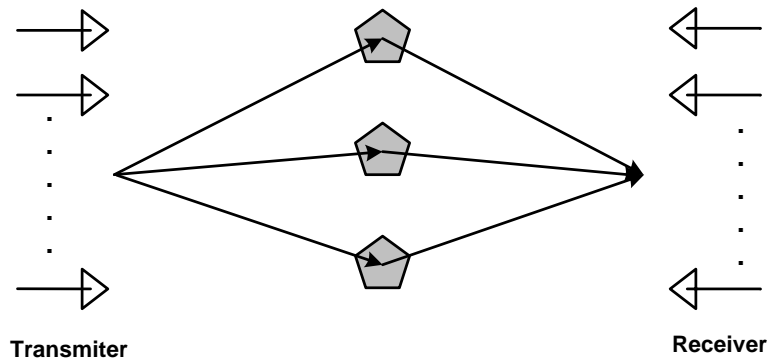
$$D_{\max} = \max(n_T, n_R) \quad (4.80)$$

Στη συνέχεια, θα εκφράσουμε την σχέση της τάξης της διαφορισιμότητας με τη διάταξη των clusters των σκεδαστών στο θεωρούμενο κανάλι διάδοσης. Θεωρούμε ένα cluster το οποίο καλύπτει όλη την ορατή περιοχή. Άρα για αυτό το cluster θα ισχύει:

$$S_{R-} = S_{T-} = -\frac{\pi}{2} \quad (4.81)$$

$$S_{R+} = S_{T+} = \frac{\pi}{2}$$

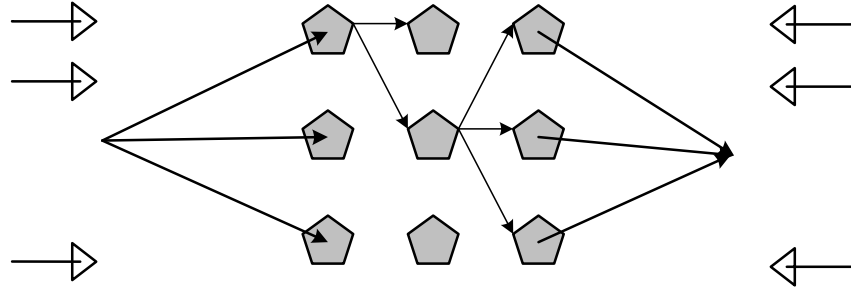
Μία ακραία περίπτωση είναι να έχουμε *διαγώνια σκέδαση (diagonal scattering)* κατά την οποία ο πίνακας \mathbf{H}_v είναι διαγώνιος. Όταν λέμε διαγώνια σκέδαση εννοούμε ότι το περιβάλλον διάδοσης περιέχει μία σειρά από σκεδαστές, όπως εικονίζεται στη συνέχεια:



Εικόνα 4-16 Περιβάλλον διάδοσης με μία σειρά από σκεδαστές: Διαγώνια σκέδαση

Όπως φαίνεται και από την παραπάνω εικόνα, σε κάθε εικονική γωνία εκπομπής (virtual transmit angle) αντιστοιχεί μία μόνο εικονική γωνία λήψης (virtual receive angle). Αυτή η κατάσταση ισοδυναμεί με χαμηλό επίπεδο διαφορισιμότητας και συγκεκριμένα θα ισχύει $D=1$. Στην άλλη ακραία περίπτωση θα είχαμε ένα περιβάλλον, πλούσιο σε σκεδαστές οι οποίοι θα ήταν ομοιόμορφα κατανομημένοι στο χώρο (rich scattering environment). Σημειώνουμε, ότι επειδή θεωρούμε και σε αυτή την περίπτωση πως οι

σκεδαστές καλύπτουν όλη την ορατή περιοχή, το περιβάλλον θεωρείται *maximally rich scattering*. Ένα τέτοιο περιβάλλον μοντελοποιείται όταν όλα τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{H}_V είναι μη μηδενικά. Αυτή η περίπτωση μπορεί να μοντελοποιηθεί θεωρώντας πολλές σειρές από clusters, σύμφωνα με την παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 4-17 maximally rich scattering περιβάλλον

Εδώ, κάθε εικονική γωνία εκπομπής συνδέεται με όλες τις εικονικές γωνίες λήψης, οπότε το επίπεδο της διαφορισιμότητας είναι το μέγιστο. Παρατηρούμε από την τελευταία εικόνα, ότι για να μοντελοποιήσουμε ικανοποιητικά ένα περιβάλλον πλούσιο σε σκεδαστές οι οποίοι θα ήταν ομοιόμορφα κατανεμημένοι, αρκεί να θεωρήσουμε πολλαπλές σειρές από σκεδαστές. Με άλλα λόγια, αρκεί να θεωρήσουμε ότι ο πίνακας \mathbf{H}_V αποτελείται από k διαγώνιες (k -diagonal matrix) [20]. Σε αυτή την περίπτωση κάθε διαγώνιος θα παριστάνει μία σειρά από σκεδαστές, οπότε θα μπορούμε να καταλήξουμε στην παρακάτω σχέση η οποία συμπεριλαμβάνει και τις δύο προαναφερθείσες περιπτώσεις [20]:

$$\mathbf{H}_k = \sum_{p=-\bar{P}}^{\bar{P}} \sum_{q=\max(-\bar{P}, p-k)}^{\max(\bar{P}, p+k)} \mathbf{H}_T(\tilde{\theta}_k) \mathbf{a}_T^H(\tilde{\theta}_{T,p}) \quad (4.82)$$

Στην παραπάνω σχέση, ισχύει: $0 \leq k \leq P-1$. Όταν $k=0$ θα έχουμε διαγώνια σκέδαση (μία σειρά από σκεδαστές), ενώ όταν $k=P-1$ θα έχουμε περιβάλλον πλούσιο σε σκεδαστές. Άρα ο συντελεστής k στην παραπάνω έκφραση θεωρούμε ότι εκφράζει το επίπεδο διαφορισιμότητας και συγκεκριμένα θα ισχύει:

$$D = k + 1 \quad (4.83)$$

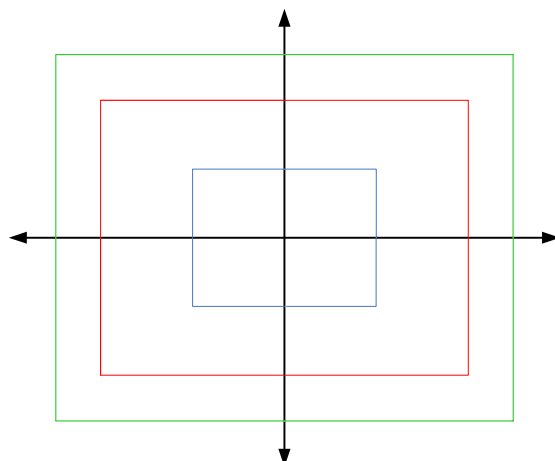
Στη συνέχεια, μέσω παραδειγμάτων δείχνουμε τον τρόπο με τον οποίο το περιβάλλον διάδοσης μπορεί να επηρεάσει τη χωρητικότητα δίνοντας έμφαση στον αριθμό των παράλληλων καναλιών και στην τάξη διαφορισιμότητας. Θεωρούμε περιβάλλον διάδοσης, που αποτελείται από μία σειρά από σκεδαστές (diagonal scattering). Ένα τέτοιο περιβάλλον μπορεί όπως είπαμε να μοντελοποιηθεί με χρήση της σχέσης (4.82) για $k = 0$. Σε ένα τέτοιο περιβάλλον, όπως φαίνεται και από την αντίστοιχη εικόνα, θα ισχύει $PC = PC_{\max}$ αλλά $D = 1$ διότι για μία γωνία εκπομπής υπάρχει μία γωνία λήψης. Επίσης, για δεδομένο περιβάλλον, αν ισχύει $n_T \leq n_R$, τότε κάθε εικονική γωνία εκπομπής πρέπει να συνδέεται με n_R εικονικές γωνίες λήψης ώστε να έχουμε μέγιστο επίπεδο διαφορισιμότητας. Αντίστοιχα, αν $n_T \geq n_R$, πρέπει n_T εικονικές γωνίες εκπομπής να συνδέονται με κάθε εικονική γωνία λήψης ώστε να έχουμε μέγιστο επίπεδο διαφορισιμότητας. Η συνηθισμένη κατάσταση είναι εκείνη κατά την οποία $PC < PC_{\max}$ και $D < D_{\max}$. Σε αυτή την περίπτωση όμως, μπορούμε να αυξήσουμε την απόσταση μεταξύ των κεραιών, οπότε όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο λόγω του φαινομένου της χωρικής εστίασης (*spatial zooming*) η χωρητικότητα θα αυξηθεί.

4.4.4 Επίδραση της απόστασης μεταξύ των κεραιών στη χωρητικότητα

Στην περίπτωση που θεωρούμε τον πίνακα \mathbf{H}_V για την περιγραφή του καναλιού MIMO, η αλλαγή της απόστασης μεταξύ των κεραιών έχει σαν αποτέλεσμα ένα φαινόμενο που καλείται χωρική εστίαση (*spatial zooming*). Ο ευκολότερος τρόπος να εξηγήσουμε τη χωρική εστίαση είναι μέσω παραδείγματος. Θεωρούμε λοιπόν πως $a_T = a_R = a$. Επίσης θεωρούμε ένα cluster, το οποίο χαρακτηρίζεται από γωνιακό εύρος

στη μεριά του πομπού και του δέκτη αντίστοιχα που δίνεται ως εξής: $S_T = \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right]$ και

$S_R = \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8} \right]$. Αυτό το cluster παρουσιάζεται για ευκολία στην παρακάτω εικόνα:



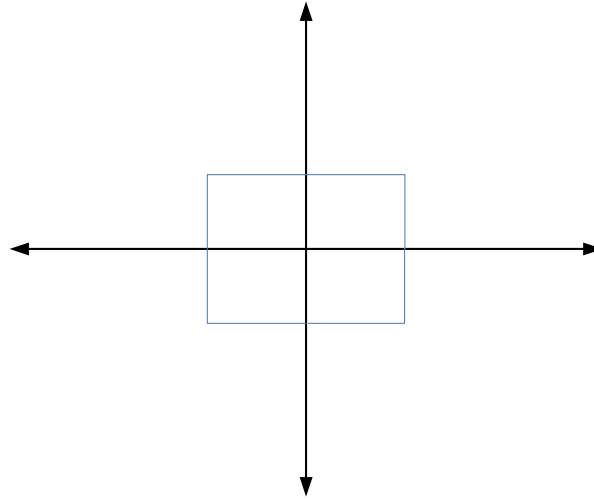
$$\Phi_R = \pi/2$$

Εικόνα 4-18 Χωρική εστίαση

Όπως φαίνεται από την εικόνα, το cluster απεικονίζεται στο πεδίο των εικονικών γωνιών θ . Από την παραπάνω εικόνα και αν λάβουμε υπόψη μας τη σχέση (4.46) συμπαίρνουμε ότι όσο αυξάνεται η απόσταση μεταξύ των κεραιών a , τόσο μεγαλύτερο θα φαίνεται το cluster στο πεδίο θ . Έτσι λοιπόν, όταν $a = 0.5$ θα είναι $\theta_T = \theta_R = 0.19$, ενώ όσο θα αυξάνεται η απόσταση a μεταξύ των στοιχείων των κεραιών, τόσο περισσότερο θα μεγεθύνεται το cluster στο πεδίο θ , ώσπου να γίνει $\theta_T = \theta_R = 0.5$ όταν $a = 1.31$. Τονίζουμε εδώ, ότι αυτού του είδους η εστίαση – μεγέθυνση του cluster είναι εικονική και παρατηρείται αν θεωρήσουμε το cluster στο πεδίο θ , όπως στην παραπάνω εικόνα. Στην πραγματικότητα, αν λάβουμε υπόψη μας και τις σχέσεις (4.64) και (4.65), παρατηρούμε ότι όσο αυξάνουμε την απόσταση a , όλο και περισσότερες εικονικές γωνίες θα αλληλεπιδρούν με το cluster.

Συμπερασματικά λοιπόν, η αλληλεπίδραση περισσότερων εικονικών γωνιών με ένα σκεδαστή, καθώς αυξάνεται η απόσταση a , αντιστοιχεί με (εικονική) μεγέθυνση του σκεδαστή όταν αυτός απεικονίζεται στο πεδίο θ . Για παράδειγμα, θεωρούμε ότι ο προηγούμενος σκεδαστής στην περίπτωση που $a = 0.5$ φαίνεται στο πεδίο θ όπως στην παρακάτω εικόνα:

$$\Phi_R = -\pi/2$$



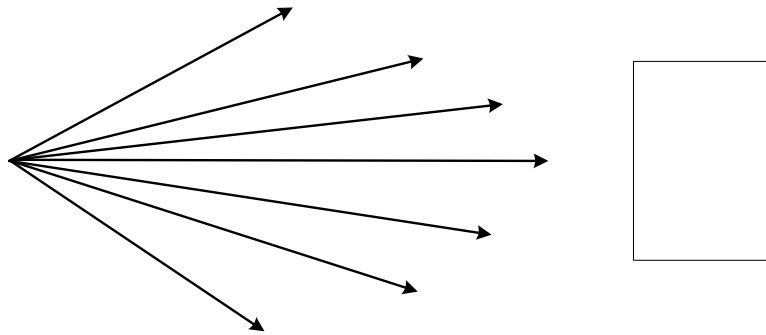
$$\Phi_R = \pi/2$$

Εικόνα 4-19 Απεικόνιση ενός σκεδαστή στο πεδίο θ για $a=0.5$

Έστω ότι σε αυτή την περίπτωση η αλληλεπίδραση των εικονικών γωνιών με το cluster είναι όπως παρακάτω:

$$\Phi_T = -\pi/2$$

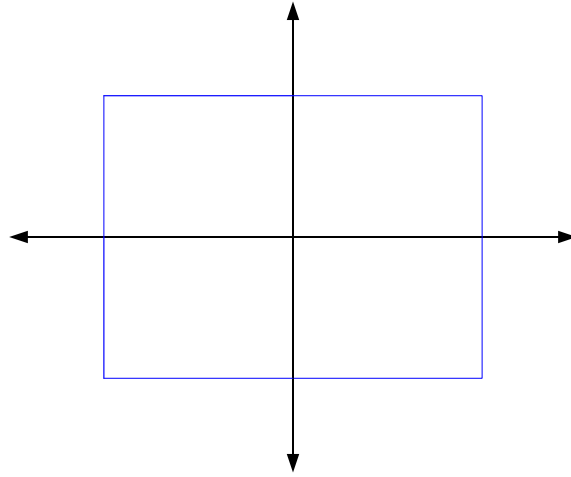
$$\theta_T = -1/2$$



$$\Phi_R = -\pi/2$$

Εικόνα 4-20 Αλληλεπίδραση εικονικών γωνιών με cluster

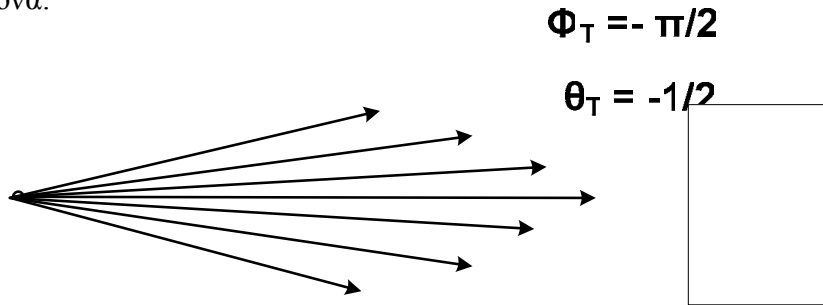
Αν αυξήσουμε την απόσταση a μεταξύ των κεραιών, τότε έχουμε χωρική εστίαση και το cluster στο πεδίο θ θα είναι:



$$\Phi_R = \pi/2$$

Εικόνα 4-21 Απεικόνιση cluster στο πεδίο θ όταν έχουμε χωρική εστίαση

Τότε, περισσότερες εικονικές γωνίες θα αλληλεπιδρούν με το cluster και έτσι θα ισχύει η παρακάτω εικόνα:



Εικόνα 4-22 Αλληλεπίδραση εικονικών γωνιών με cluster όταν έχουμε χωρική εστίαση

Επομένως παρατηρούμε ότι μεταβάλλοντας την απόσταση μεταξύ των κεραιών σε ένα σύστημα MIMO, αλλάζει και ο τρόπος με τον οποίο το σύστημα “βλέπει” τους σκεδαστές που συμμετέχουν στη διάδοση.

$$\Phi_R = -\pi/2$$

Μέχρι αυτό το σημείο, η επίδραση της απόστασης μεταξύ των κεραιών στη χωρητικότητα έχει μελετηθεί με χρήση του μοντέλου του Kronecker. Χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο, είχαμε καταλήξει σε έναν πίνακα \mathbf{H} που περιέγραφε το κανάλι, τα στοιχεία του οποίου ήταν συσχετισμένα. Συγκεκριμένα είχαμε δει πως όταν η απόσταση μεταξύ δύο κεραιών είναι μικρότερη από $\frac{\lambda}{2}$, όπου λ είναι το θεωρούμενο μήκος κύματος, τότε θα υπάρχει χωρική συσχέτιση μεταξύ των κεραιών οπότε τα στοιχεία του

\mathbf{H} θα είναι συσχετισμένα. Αντίθετα, όταν η απόσταση γίνει ίση με $\frac{\lambda}{2}$ ή και μεγαλύτερη, θεωρούμε πως δεν υπάρχει συσχέτιση. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιώντας το μοντέλο του Kronecker είχαμε δει ότι αυξάνοντας την απόσταση μεταξύ των κεραιών μπορούμε να αποσυσχετίσουμε το κανάλι, πράγμα που οδηγεί σε αύξηση της χωρητικότητας. Μέσω της θεώρησης του πίνακα \mathbf{H}_V , θα δούμε ότι η αύξηση της απόστασης a μεταξύ των κεραιών, εκτός το ότι αποσυσχετίζει το δίαυλο, θα προκαλεί αύξηση του αριθμού των παράλληλων καναλιών, που επίσης σημαίνει αύξηση της χωρητικότητας. Αυτό εξηγείται ως εξής: Από τη σχέση (4.75) είχαμε δει ότι τα στοιχεία $\{H_V(q, p)\}$ του πίνακα \mathbf{H}_V αποτελούν δείγματα της συνάρτησης $G(\theta_R, \theta_T)$ στις εικονικές γωνίες που ορίστηκαν στις σχέσεις (4.62) και (4.63). Επίσης θυμίζουμε ότι κάθε cluster ισοδυναμεί με έναν υποπίνακα του \mathbf{H}_V και ότι όσο περισσότερο αυξάνεται η απόσταση a μεταξύ των κεραιών, τόσο περισσότερες εικονικές γωνίες θα αλληλεπιδρούν με τα clusters. Αυτό σημαίνει τελικά ότι οι διαστάσεις των αντίστοιχων υποπινάκων του \mathbf{H}_V θα μεγαλώνουν² με αύξηση του a . Άρα, δεδομένου ότι τα στοιχεία του \mathbf{H}_V είναι ασυσχέτιστα, θα αυξάνεται και το rank του κάθε υποπίνακα, οπότε θα έχουμε αύξηση και του rank του \mathbf{H}_V . Από αυτό το συλλογισμό προκύπτει ότι με αύξηση της απόστασης a θα έχουμε όλο και περισσότερα παράλληλα κανάλια (αφού αυξάνεται το rank του \mathbf{H}_V) που σημαίνει ότι θα έχουμε αύξηση και της χωρητικότητας.

Αξίζει να τονίσουμε, ότι αυτός είναι ένας τρόπος να αυξήσουμε τη χωρητικότητα χωρίς να αυξάνουμε και την ισχύ εκπομπής, παρά μόνο την απόσταση μεταξύ των στοιχείων στις κεραιές πομπού και δέκτη.

² Επειδή όμως ο πίνακας \mathbf{H}_V έχει σταθερές διαστάσεις $n_r \times n_t$, σημαίνει τελικά ότι με αύξηση του a θα αλλάζουν τα περιεχόμενα του \mathbf{H}_V που σημαίνει ότι θα “αλλάζει” το κανάλι διάδοσης που “βλέπουν” ο πομπός και ο δέκτης.

4.5 Μαθηματική έκφραση της χωρητικότητας καναλιού MIMO με χρήση του εικονικού πίνακα \mathbf{H}_V .

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε μαθηματικές εκφράσεις, βάσει των οποίων μπορεί να γίνει ο υπολογισμός της χωρητικότητας χρησιμοποιώντας τον εικονικό πίνακα \mathbf{H}_V . Για ευκολία υποθέτουμε ότι $n_T = n_R$. Τότε, δεδομένου ότι ο πίνακας \mathbf{H} (ή ο \mathbf{H}_V) είναι γνωστός στον δέκτη, η έκφραση της εργοδικής χωρητικότητας θα δίνεται κατά τα γνωστά από την παρακάτω σχέση:

$$C = E \left\{ \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I}_{n_T} + \frac{\rho}{n_T} \mathbf{H}_V \mathbf{H}_V^H \right) \right] \right\} \quad bps / Hz \quad (4.84)$$

Σκοπός είναι να εκμεταλευτούμε τη διάταξη των σκεδαστών στο περιβάλλον διάδοσης (δομή του \mathbf{H}_V), ώστε να κάνουμε κατάλληλη αποσύνθεση (decomposition) της παραπάνω έκφρασης της χωρητικότητας. Συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε ότι οι σκεδαστές που υπάρχουν στο περιβάλλον διάδοσης μπορούν να οργανωθούν σε ομάδες (clusters). Κατά συνέπεια, μπορούμε να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι κάθε ξεχωριστό cluster είναι ένας υποπίνακας του \mathbf{H}_V . Μάλιστα, θυμίζουμε εδώ ότι το μέγεθος του cluster εκφράζεται μέσω του γωνιακού εύρους (angular spread), που φαίνεται από τη μεριά εκπομπής και από τη μεριά λήψης και ότι είναι ανάλογο των διαστάσεων του αντίστοιχου υποπίνακα.

Για παράδειγμα υποθέτουμε τον πίνακα \mathbf{H}_V όπως παρακάτω:

$$\mathbf{H}_V = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_V(1) & \mathbf{H}_V(2) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{H}_V(3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_V(4) & \mathbf{0} & \mathbf{H}_V(5) \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

Ο παραπάνω πίνακας απεικονίζει ένα περιβάλλον διάδοσης που αποτελείται από πέντε clusters. Σημειώνουμε εδώ, ότι ένα cluster είναι ευδιάκριτο από τον πομπό, όταν υπάρχει μία γωνία εκπομπής η οποία αντιστοιχεί στη θέση του συγκεκριμένου cluster. Αντίστοιχα ισχύουν στην περίπτωση που ένα cluster είναι ευδιάκριτο από το δέκτη. Όταν ένα cluster είναι ευδιάκριτο και από τον πομπό και από το δέκτη, σημαίνει ότι υπάρχει και μία γωνία εκπομπής και μία γωνία λήψης οι οποίες αντιστοιχούν στη θέση του συγκεκριμένου

cluster. Τα clusters τα οποία είναι ευδιάκριτα τόσο από τον πομπό όσο και από το δέκτη βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο του πίνακα \mathbf{H}_V και αντιστοιχούν στους υποπίνακες $\mathbf{H}_V(1)$, $\mathbf{H}_V(3)$ και $\mathbf{H}_V(5)$. Επίσης, ευδιάκριτα από τη μεριά του δέκτη είναι τα σύνολα των clusters: $\{\mathbf{H}_V(1), \mathbf{H}_V(2)\}$, $\{\mathbf{H}_V(3)\}$ και $\{\mathbf{H}_V(4), \mathbf{H}_V(5)\}$, ενώ ευδιάκριτα από τη μεριά του πομπού είναι τα σύνολα: $\{\mathbf{H}_V(1), \mathbf{H}_V(4)\}$, $\{\mathbf{H}_V(2), \mathbf{H}_V(3)\}$ και $\{\mathbf{H}_V(5)\}$.

Προφανώς, η χωρητικότητα θα εξαρτάται από τους όρους $\mathbf{H}_V \mathbf{H}_V^H$ ή $\mathbf{H}_V^H \mathbf{H}_V$, οι οποίοι θα γράφονται αναλυτικά ως εξής:

$$\mathbf{H}_V \mathbf{H}_V^H = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_V(1) \mathbf{H}_V^H(1) + \mathbf{H}_V(2) \mathbf{H}_V^H(2) & \mathbf{H}_V(2) \mathbf{H}_V^H(3) & \mathbf{H}_V(1) \mathbf{H}_V^H(4) \\ \mathbf{H}_V(3) \mathbf{H}_V^H(2) & \mathbf{H}_V(3) \mathbf{H}_V^H(3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_V(4) \mathbf{H}_V^H(1) & \mathbf{0} & \mathbf{H}_V(4) \mathbf{H}_V^H(4) + \mathbf{H}_V(5) \mathbf{H}_V^H(5) \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

$$\mathbf{H}_V^H \mathbf{H}_V = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_V^H(1) \mathbf{H}_V(1) + \mathbf{H}_V^H(4) \mathbf{H}_V(4) & \mathbf{H}_V^H(1) \mathbf{H}_V(2) & \mathbf{H}_V^H(4) \mathbf{H}_V(5) \\ \mathbf{H}_V^H(2) \mathbf{H}_V(1) & \mathbf{H}_V^H(2) \mathbf{H}_V(2) + \mathbf{H}_V^H(3) \mathbf{H}_V(3) & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}_V^H(5) \mathbf{H}_V(4) & \mathbf{0} & \mathbf{H}_V^H(5) \mathbf{H}_V(5) \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

Επειδή τα στοιχεία του πίνακα \mathbf{H}_V θεωρούνται ασυσχέτιστα, σημαίνει ότι και οι υποπίνακες που αντιπροσωπεύουν τα clusters θα είναι μεταξύ τους ασυσχέτιστοι. Αυτό σημαίνει, ότι στις σχέσεις (4.86) και (4.87) οι όροι που βρίσκονται στη διαγώνιο θα είναι διάφοροι του μηδενός, ενώ οι υπόλοιποι όροι θα παίρνουν πολύ μικρές τιμές, οπότε προσεγγιστικά θα μηδενίζονται. Λόγω της παρατήρησης ότι στις σχέσεις (4.86) και (4.87) υπερτερούν σαφώς οι όροι που βρίσκονται στη διαγώνιο, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο όρος $\mathbf{H}_V \mathbf{H}_V^H$ είναι χρήσιμος για τη διάκριση των clusters στη μεριά του δέκτη, ενώ ο όρος $\mathbf{H}_V^H \mathbf{H}_V$ για τη διάκριση στη μεριά του πομπού. Άρα μπορούμε να αποσυνθέσουμε την έκφραση της χωρητικότητας της σχέσης (4.84) και να προκύψουν τελικά οι προσεγγιστικές σχέσεις που φαίνονται παρακάτω:

$$C = E \left\{ \sum_{i=1}^{N_c} \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I} + \frac{\rho}{n_T} \sum_{j=1}^{N_{R,i}} \mathbf{H}_{V,R}(i,j) \mathbf{H}_{V,R}^H(i,j) \right) \right] \right\} \quad \text{bps / Hz} \quad (4.88)$$

ή

$$C = E \left\{ \sum_{i=1}^{N_c} \log_2 \left[\det \left(\mathbf{I} + \frac{\rho}{n_T} \sum_{j=1}^{N_{T,i}} \mathbf{H}_{V,T}^H(i,j) \mathbf{H}_{V,T}(i,j) \right) \right] \right\} \quad \text{bps / Hz} \quad (4.89)$$

Όπου στη σχέση (4.88) υπολογίζεται η χωρητικότητα με βάση τα clusters που είναι ευδιάκριτα στο δέκτη, ενώ στη σχέση (4.89) η χωρητικότητα υπολογίζεται με βάση τα clusters που είναι ευδιάκριτα στον πομπό. Επίσης, με N_c έχουμε συμβολίσει τον αριθμό των clusters που είναι ευδιάκριτα τόσο από τον πομπό όσο και από το δέκτη. Με $N_{R,i}$ συμβολίζουμε τον αριθμό των clusters που επικαλύπτονται από τη μεριά του δέκτη με το i -οστό cluster. Για παράδειγμα, θεωρώντας τον πίνακα της σχέσης (4.85), όταν θα είναι $i=1$, θα είναι: $N_{R,1}=2$, οπότε $H_{V,R}(1,1)=H_V(1)$ και $H_{V,R}(1,2)=H_V(2)$. Αντίστοιχα ισχύουν και για τη σχέση (4.89).

4.6 Υπολογισμός χωρητικότητας

4.6.1 Μεθοδολογία

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε γραφικά τη χωρητικότητα ενός καναλιού MIMO, χρησιμοποιώντας εικονική αναπαράσταση του καναλιού (Virtual channel representation) μέσω της χρήσης του πίνακα \mathbf{H}_V . Σκοπός των προσομοιώσεων είναι να συγκρίνουμε τη χωρητικότητα σε δύο περιπτώσεις: Όταν χρησιμοποιούμε την εικονική αναπαράσταση για τη μοντελοποίηση του καναλιού και όταν η μοντελοποίηση γίνεται υποθέτοντας πίνακα \mathbf{H} του οποίου τα στοιχεία είναι ανεξάρτητες ομοιόμορφα κατανεμημένες Gaussian τυχαίες μεταβλητές (iid) μηδενικής μέσης τιμής και διακύμανσης 1. Σημειώνουμε, ότι μέχρι αυτό το σημείο χρησιμοποιούσαμε το δεύτερο τρόπο μοντελοποίησης του διαύλου.

Επίσης, για την καλύτερη κατανόηση της εξάρτησης της χωρητικότητας από την απόσταση μεταξύ των στοιχείων (spatial zooming), χρησιμοποιούνται contour plots του

πίνακα \mathbf{H}_V και συγκεκριμένα του $E\left[|H_V(q, p)|^2\right]$ για την απεικόνιση των clusters των σκεδαστών του περιβάλλοντος διάδοσης. Πιο συγκεκριμένα, οι σκεδαστές στα contour plots απεικονίζονται σε συνάρτηση με τις κανονικοποιημένες γωνίες εκπομπής και λήψης θ_T και θ_R , οπότε, αυξάνοντας την κανονικοποιημένη απόσταση a μεταξύ των κεραιών, παρατηρούμε μέσω των contour plots, όπως θα δείξουμε στη συνέχεια, το φαινόμενο της χωρικής εστίασης (spatial zooming). Επίσης, για κάθε τιμή της απόστασης a , απεικονίζουμε γραφικά και την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας (cumulative distribution function, CDF) της χωρητικότητας.

4.6.2 Γραφική απεικόνιση

Στη συνέχεια, με a_T συμβολίζουμε την κανονικοποιημένη απόσταση μεταξύ των κεραιών εκπομπής και με a_R την αντίστοιχη απόσταση μεταξύ των κεραιών λήψης. Τότε για απλότητα των προσομοιώσεων θεωρούμε ότι $a_T = a_R = a$. Όσον αφορά την ισχύ του καναλιού σ_H^2 , αυτή θα είναι ίση με τη Frobenius νόρμα του πίνακα που περιγράφει το κανάλι και υποθέτουμε ότι μοιράζεται εξίσου στα clusters του περιβάλλοντος διάδοσης. Άρα, αν θεωρήσουμε N clusters σκεδαστών, τότε σε κάθε cluster θα αντιστοιχεί ισχύς:

$$\sigma_c^2 = \frac{\sigma_H^2}{N} \quad (4.90)$$

Το κάθε cluster μοντελοποιείται μέσω της σχέσης (4.53). Επίσης, θεωρούμε ότι σε κάθε cluster αντιστοιχούν L διαδρομές (paths) και σε κάθε διαδρομή θα αντιστοιχεί ένα ζεύγος γωνιών εκπομπής και λήψης (Φ_T, Φ_R) . Αυτές οι γωνίες, θα είναι τυχαίες μεταβλητές, ομοιόμορφα κατανομημένες μέσα στο γωνιακό εύρος, όπως αυτό φαίνεται από τη μεριά του πομπού και του δέκτη αντίστοιχα. Επίσης, οι διαδρομές χαρακτηρίζονται και από κέρδη που μοντελοποιούνται ως ανεξάρτητες ομοιόμορφα κατανομημένες μιγαδικές Gaussian τυχαίες μεταβλητές, με μηδενική μέση τιμή και διασπορά σ^2 . Θεωρώντας ότι η ισχύς που αντιστοιχεί σε κάθε cluster μοιράζεται εξίσου στις L διαδρομές, λόγω της σχέσης (4.90) θα είναι επιπλέον:

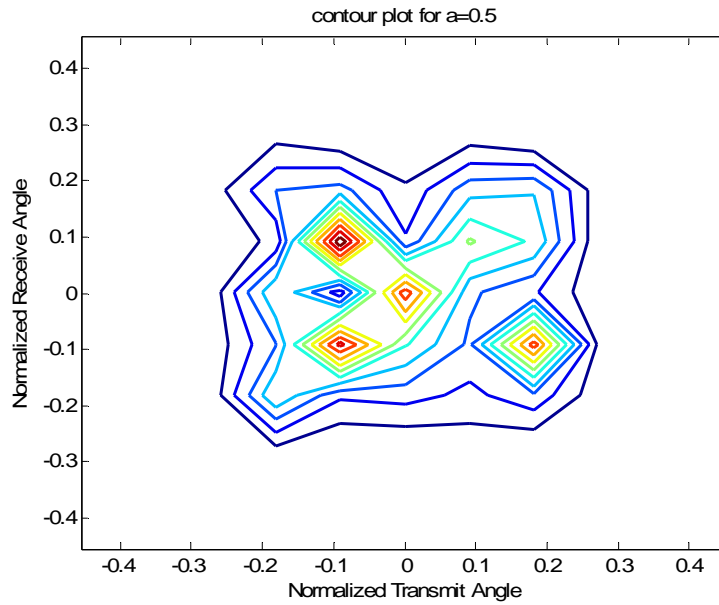
$$\sigma_c^2 = L\sigma^2 = \frac{\sigma_H^2}{N} \Rightarrow \sigma^2 = \frac{\sigma_H^2}{NL} \quad (4.91)$$

Άρα η σχέση (4.91) δίνει την ισχύ (διασπορά) του κάθε μιγαδικού κέρδους που αντιστοιχεί σε κάθε ξεχωριστή διαδρομή που διέρχεται μέσα από ένα cluster.

Οι προσομοιώσεις που παρουσιάζονται στη συνέχεια, ακολουθούν την παραπάνω λογική. Επιπλέον υποθέτουμε ότι:

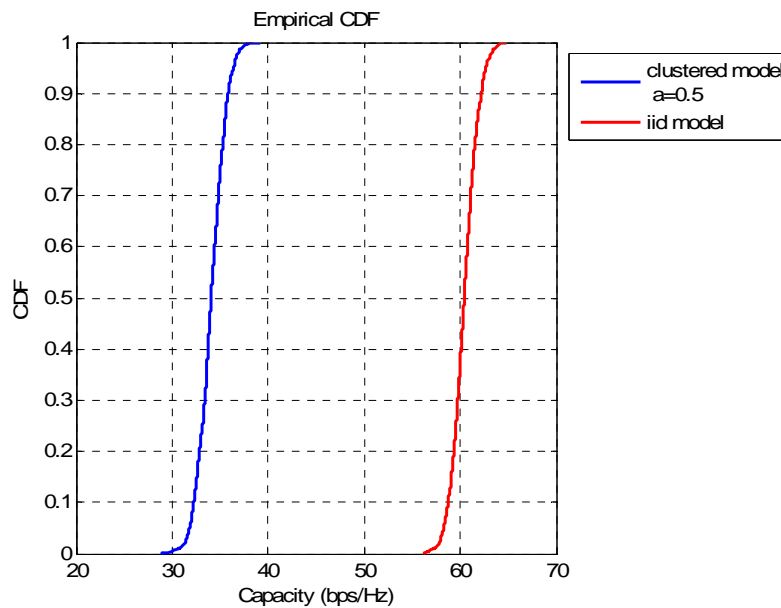
- Ο Αριθμός των στοιχείων εκπομπής είναι $n_T = 11$.
- Ο αριθμός των στοιχείων λήψης είναι $n_R = 11$.
- Θεωρούμε περιβάλλον που αποτελείται από ένα cluster με ίδιο γωνιακό εύρος (angular spread) όπως φαίνεται από τον πομπό και το δέκτη και ίσο με $\frac{\pi}{4}$.
- Από τη μεριά του πομπού, το cluster θα καλύπτει την περιοχή $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$. Την ίδια περιοχή θα καλύπτει το cluster και από τη μεριά του δέκτη.
- Θεωρούμε ότι στο cluster αντιστοιχούν $L = 200$ paths. Φυσικά, σε κάθε path αντιστοιχεί ένα ζεύγος γωνιών εκπομπής και λήψης $\langle \Phi_T, \Phi_R \rangle$ και ένα μιγαδικό κέρδος, όπως εξηγήθηκε παραπάνω.
- Για κάθε προσομοίωση, θεωρούμε 1000 πραγματοποιήσεις του καναλιού (του πίνακα \mathbf{H} και \mathbf{H}_V).
- Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, υπολογίζουμε τη CDF της χωρητικότητας, θεωρώντας SNR=20dB.
- Θα υπολογίσουμε τη χωρητικότητα για τρεις διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ των κεραιών $a = 0.5, 1$ και 1.31 . Με αυτόν τον τρόπο μπορούμε να μελετήσουμε την επίδραση της χωρικής εστίασης στη χωρητικότητα.

Για $a = 0.5$ το contour plot του $E\left[|H_V(q,p)|^2\right]$ θα είναι:



Εικόνα 4-23 Contour plot του πίνακα H_n όταν $\alpha=0.5$

Αντίστοιχα η χωρητικότητα θα είναι:

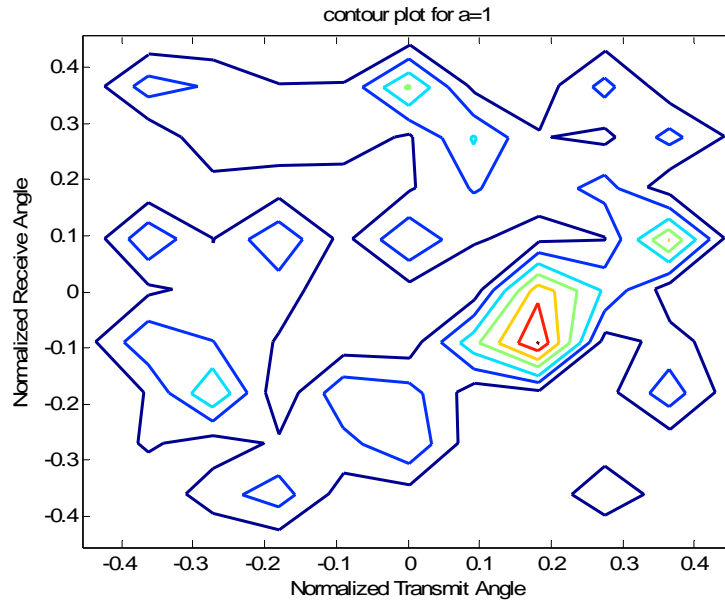


Εικόνα 4-24 CDF χωρητικότητας όταν $\alpha=0.5$

Εδώ, παρουσιάζουμε τις CDF της χωρητικότητας σε δύο περιπτώσεις. Η κόκκινη καμπύλη αντιστοιχεί στη χωρητικότητα, στην περίπτωση που θεωρούμε πολλούς σκεδαστές, ομοιόμορφα κατανομημένους στο χώρο (rich scattering environment) .

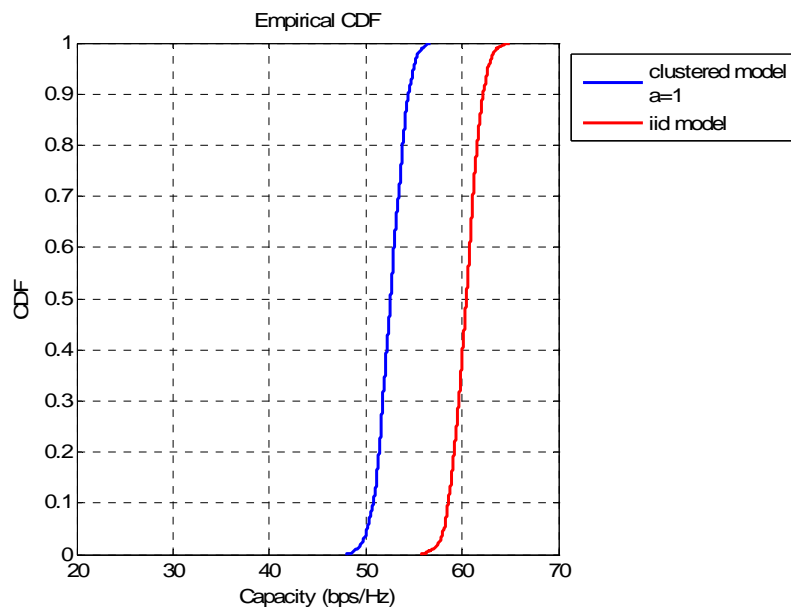
Παρακάτω θα δούμε ότι αυξάνοντας την απόσταση a μεταξύ των κεραιών, θα έχουμε χωρική εστίαση (spatial zooming) που συνεπάγεται αύξηση της χωρητικότητας.

Για $a = 1$ το contour plot του $E\left[|H_V(q, p)|^2\right]$ θα είναι:



Εικόνα 4-25 Contour plot του πίνακα H_V όταν $a=1$

Παρατηρούμε καθαρά, ότι αύξηση της απόστασης μεταξύ των κεραιών έχει ως αποτέλεσμα τη μεγέθυνση του cluster στο πεδίο των κανονικοποιημένων γωνιών θ , όπως ακριβώς είχαμε εξηγήσει και στην αντίστοιχη ενότητα. Επειδή αυτή η εικόνα τείνει να προσεγγίσει την περίπτωση πολλών σκεδαστών, ομοιόμορφα κατανομημένων στο χώρο, αναμένουμε η χωρητικότητα τώρα να είναι μεγαλύτερη. Η CDF της χωρητικότητας φαίνεται στη συνέχεια:

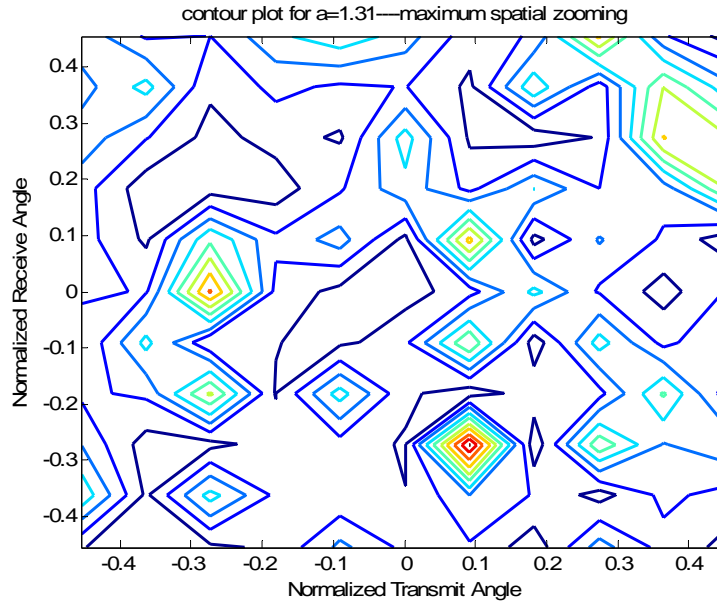


Εικόνα 4-26 CDF χωρητικότητας όταν $a=1$

Είναι εμφανές ότι τώρα η χωρητικότητα είναι αυξημένη σε σχέση με την περίπτωση που είχαμε $a = 0.5$ και πλησιάζει τη χωρητικότητα που θα είχαμε στην περίπτωση που θεωρούσαμε σκεδαστές ομοιόμορφα κατανομημένους στο χώρο.

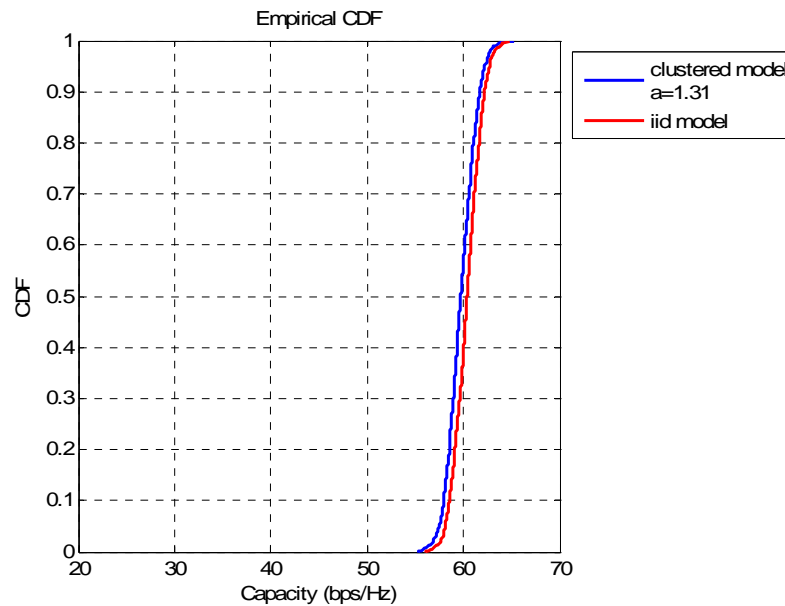
Μέγιστη μεγέθυνση του cluster θα έχουμε όταν αυτό καλύπτει όλο το πεδίο τιμών των κανονικοποιημένων γωνιών θ (δηλαδή τη θεμελιώδη περίοδο του θ). Λόγω της σχέσης (4.46), προκύπτει ότι εφόσον το cluster θα καλύπτει από τη μεριά του πομπού και του δέκτη την περιοχή $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$, σημαίνει ότι θα έχουμε $-0.5 \leq \theta \leq 0.5$ όταν $a = 1.31$. Άρα,

για $a = 1.31$ το contour plot του $E\left[|H_V(q, p)|^2\right]$ θα είναι το ακόλουθο:



Εικόνα 4-27 Contour plot του πίνακα H_n για $\alpha=1.31$: Μέγιστη μεγέθυνση του cluster

Και η αντίστοιχη CDF της χωρητικότητας είναι η εξής:



Εικόνα 4-28 CDF χωρητικότητας όταν $\alpha=1.31$

Εδώ παρατηρούμε ότι λόγω της μέγιστης χωρικής εστίασης, η χωρητικότητα γίνεται σχεδόν ίση με τη χωρητικότητα που παρουσιάζει ένα κανάλι με ομοιόμορφα καταναμημένους σκεδαστές.

Συμπεράσματα

Η παρούσα πτυχιακή εργασία ασχολείται με τη μελέτη της χωρητικότητας ενός ασύρματου διαύλου με χρήση συστημάτων επικοινωνιών πολλαπλών εισόδων – πολλαπλών εξόδων (MIMO). Η επίδοση τέτοιων συστημάτων, μελετάται θεωρώντας διάφορες συνθήκες διάδοσης, οι οποίες είδαμε ότι μπορεί να συμβάλλουν θετικά ή αρνητικά στη χωρητικότητα.

Η βασική διαπίστωση, είναι ότι τα συστήματα που χρησιμοποιούν πολλές κεραιές σε πομπό και δέκτη, υπερτερούν σε όλους τους τομείς από τα συστήματα με μία κεραία σε κάθε άκρο, κάτω υπό τις ίδιες συνθήκες διάδοσης. Πιο συγκεκριμένα τα συστήματα MIMO υπερτερούν διότι η χρήση πολλαπλών κεραιών μεταξύ άλλων:

- Έχει ως αποτέλεσμα τη δημιουργία παράλληλων διαδρομών στο κανάλι διάδοσης, γεγονός που αυξάνει τη χωρητικότητα (άρα και το ρυθμό μετάδοσης που μπορεί να επιτευχθεί).
- Κάνει δυνατή τη χωρική διαφορισιμότητα, με αποτέλεσμα να μπορούν να καταπολεμηθούν αποτελεσματικά οι διαλείψεις ώστε να αυξηθεί η αξιοπιστία του συστήματος.

Εστιάζοντας στην ανάλυση των συστημάτων MIMO είδαμε ότι όσο αυξάνεται ο αριθμός των κεραιών που χρησιμοποιούμε, τόσο περισσότερο αυξάνεται και η εργοδική χωρητικότητα. Παρατηρήσαμε επίσης, ότι για συγκεκριμένο SNR, με αύξηση του αριθμού των κεραιών λήψης διατηρώντας τον αριθμό των κεραιών εκπομπής σταθερό, η χωρητικότητα αυξάνει, ενώ στην αντίθετη περίπτωση, διατηρώντας τον αριθμό των κεραιών λήψης σταθερό, ο ρυθμός αύξησης της χωρητικότητας θα ελαττώνεται για $n_T \leq 15$, ενώ για μεγαλύτερο αριθμό κεραιών εκπομπής η χωρητικότητα δε θα μεταβάλλεται καθόλου. Σημειώνουμε εδώ, ότι παρόμοια ήταν η συμπεριφορά και της χωρητικότητας outage.

Στην περίπτωση που το κανάλι είναι γνωστό και στον πομπό, μπορούμε να έχουμε περαιτέρω βελτίωση της χωρητικότητας, μόνο όμως για μικρές τιμές SNR. Αυτό συμβαίνει διότι ο πομπός δεν ισομοιράζει πλέον τη διαθέσιμη ισχύ στις κεραιές του, αλλά αντιστοιχίζεται περισσότερη ισχύς σε ένα υποκανάλι στο οποίο οι συνθήκες

διάδοσης είναι καλές, και λιγότερο ποσοστό ισχύος σε ένα υποκανάλι με λιγότερο καλές συνθήκες διάδοσης.

Στην περίπτωση που υπάρχει και απευθείας διαδρομή του σήματος μεταξύ πομπού και δέκτη (κανάλι με διαλείψεις Rician) είδαμε ότι για δεδομένο σύστημα η χωρητικότητα θα ελαττώνεται σε σχέση με την περίπτωση κατά την οποία δεν υπάρχει καθόλου απευθείας συνιστώσα διάδοσης (κανάλι με διαλείψεις Rayleigh). Μάλιστα, με δεδομένη ισχύ εκπομπής, όσο θα αυξάνεται η ισχύς της απευθείας συνιστώσας, τόσο περισσότερο θα ελαττώνεται η χωρητικότητα, ώσπου τελικά να σταθεροποιηθεί σε μία τιμή (κάτω φράγμα). Αυτό που κάνει εντύπωση, είναι ότι στην περίπτωση συστημάτων SIMO ή MISO, οι χωρητικότητες στις περιπτώσεις διαλείψεων Rician και Rayleigh είναι ίδιες. Αυτό σημαίνει ότι για αυτή την κατηγορία συστημάτων, η χωρητικότητα δεν εξαρτάται από την ύπαρξη απευθείας ή όχι διάδοσης μεταξύ πομπού και δέκτη. Ωστόσο θυμίζουμε τον εναλλακτικό τρόπο σηματοδότησης στην περίπτωση καναλιού με διαλείψεις Rician, όπου μπορούμε να επιτύχουμε βελτίωση της χωρητικότητας για χαμηλές τιμές του SNR, αλλά για μεγαλύτερες τιμές έχουμε απώλεια.

Θεωρώντας κανάλι με συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά, είδαμε ότι ανεξάρτητα από το είδος των διαλείψεων, για συγκεκριμένο SNR και συγκεκριμένο αριθμό κεραιών σε πομπό και δέκτη, η εργοδική χωρητικότητα είναι ανεξάρτητη από το πόσο έντονη είναι η συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά του καναλιού. Όμως υπάρχει εξάρτηση της χωρητικότητας outage η οποία θα αυξάνει όσο περισσότερο έντονη γίνεται η συχνοεπιλεκτική συμπεριφορά. Ωστόσο είχαμε δει ότι υπάρχει ένα όριο, πάνω από το οποίο η outage χωρητικότητα δε μεταβάλλεται πλέον αισθητά.

Ένας παράγοντας που επιδρά αρνητικά στη χωρητικότητα, είναι η χωρική συσχέτιση μεταξύ των κεραιών. Είχαμε εξετάσει την περίπτωση κατά την οποία η χωρική συσχέτιση μεταξύ των κεραιών εκπομπής είναι ανεξάρτητη από τη χωρική συσχέτιση μεταξύ των κεραιών λήψης και ότι θα εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ των κεραιών και όχι από το περιβάλλον σκέδασης. Για την προσομοίωση της χωρικής συσχέτισης είχαμε χρησιμοποιήσει το μοντέλο γινομένου Kronecker. Σε αυτή την περίπτωση, είχαμε δει ότι για δεδομένη συχνότητα (άρα και δεδομένο μήκος κύματος) ο συντελεστής συσχέτισης ελαττώνεται καθώς η απόσταση μεταξύ του ζεύγους των

θεωρούμενων κεραιών αυξάνει και ότι για να μην έχουμε χωρική συσχέτιση, πρέπει η απόσταση μεταξύ των στοιχείων να γίνει τουλάχιστον ίση με 0.4λ .

Τέλος, μελετήσαμε τη χωρητικότητα χρησιμοποιώντας μία νέα μέθοδο, εκείνη της εικονικής αναπαράστασης καναλιών. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι αφενός η μοντελοποίηση να μην είναι πολύπλοκη και αφετέρου να περιγράφει με σαφήνεια το φυσικό περιβάλλον σκέδασης. Αυτή η μέθοδος εισήγαγε τον εικονικό πίνακα αναπαράστασης του καναλιού τον οποίο χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό και τη γραφική απεικόνιση της χωρητικότητας. Χρησιμοποιώντας αυτή τη μέθοδο, μπορέσαμε να μελετήσουμε τη χωρητικότητα μέσω δύο παραγόντων που την επηρεάζουν: Την τάξη διαφορισιμότητας και του αριθμού των παράλληλων καναλιών. Είδαμε ότι για δεδομένο περιβάλλον διάδοσης αποτελούμενο από ομάδες σκεδαστών (clusters), αν η απόσταση μεταξύ των κεραιών είναι μικρή η χωρητικότητα που προκύπτει θα είναι επίσης μικρή (διότι υπάρχει συσχέτιση). Όσο αυξάνουμε την απόσταση μεταξύ των κεραιών τότε εξαιτίας του φαινομένου της χωρικής εστίασης το περιβάλλον που “βλέπει” το σύστημα MIMO προσεγγίζει όλο και περισσότερο το πλούσιο σε σκεδαστές, ομοιόμορφα κατανεμημένους (rich scattering environment). Αυτό σημαίνει ότι η συσχέτιση θα ελαττώνεται σημαντικά οπότε η χωρητικότητα θα αυξάνει.

Αναφορές

- [1] Bernard Sklar, “Rayleigh fading channel in Mobile digital communication systems part1:Characterization,” IEEE Communications magazine, 1997
- [2] Κανάτας Αθανάσιος , “Συστήματα κινητών ραδιοεπικοινωνιών”
- [3] Paulraj, “Introduction to space – time wireless Communications”, Cambridge University press
- [4] Simon Haykin, “Modern wireless communications”, Prentice Hall 2005
- [5] M. Wennström, “On MIMO System and Adaptive Arrays for Wireless Communications: Analysis and Practical Aspects”, *thesis*, Uppsala 2002
- [6] Theodore S. Rappaport, “Wireless Communications, Principles and practice”, Prentice Hall 2002
- [7] Κανάτας Αθανάσιος, Διάλεξη με τίτλο: “Περιβάλλον διάδοσης και χαρακτηρισμός διαύλων 1”
- [8] Thomas M. Cover, Joy A. Thomas, “Elements of Information Theory”, Wiley 1991
- [9] John Proakis, Masoud Salehi, “Συστήματα Τηλεπικοινωνιών”
- [10] Branka Vucetic, Jinhong Yuan, “Space – Time coding”, Wiley 2003.
- [11] Emre Telatar, “Capacity of multi-antenna Gaussian channels,” European Transactions on Telecommunications, vol. 10 Nov. – Dec. 1999
- [12] Foshini Gans, “On limits of Wireless Communications in a fading environment when using multiple antennas,” Wireless personal communications, vol. 6 1999
- [13] Sudharman K. Jayaweera, H. Vincent Poor, “MIMO Capacity results for Rician fading channels,” IEEE Global Telecommunications conference 1-5 Dec. 2003 vol.4
- [14] Inaki Berenguer, Xiaodong Wang, “Space – Time coding and signal processing for MIMO Communications,” Journal of Computer Science and Technology, 2003 Vol.18 No.6
- [15] Carl D. Meyer “Matrix analysis and applied linear algebra”, Society of industrial and Applied mathematics 2000

- [16] Tony S. Pollok, "Introducing space into MIMO Capacity calculations," Journal in Telecommunication Systems, vol.24 Oct. 2003
- [17] Haley M. Jones, Rodney A. Kennedy, Thushara D. Abhayapala, "On Dimensionality of Multipath Fields: Spatial extent and richness," Acoustics, speech and signal processing, IEEE international conference 2002
- [18] Akbar Sayeed, Vasanthan Raghavan, Jayesh Kotecha "Capacity of space – time Wireless channels: A physical perspective," IEEE information Theory workshop Oct.2004
- [19] Zhihong Hong, "Spacial Multiplexing in correlated fading via the virtual channel representation"
- [20] : Akbar Sayeed, "Deconstructing Multiantenna fading channels," IEEE Transactions on signal processing Oct.2002 vol.50 p.2563 - 2579
- [21]: J. Fuhl, A. F. Molisch, and E. Bonek, "Unified channel model for mobile radio systems with smart antennas," Radar, Sonar and Navigation IEEE proceedings 1998.