ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

MARTINGALES ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Δημήτρης Π. Λυμπερόπουλος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς
Δεκέμβριος 2006

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

MARTINGALES ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ

Δημήτρης Π. Λυμπερόπουλος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς
Δεκέμβριος 2006

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ....... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων),

- Ευστάθιος Χατζηκωνσταντινίδης,

- Δημήτριος Στέγγος.

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS

MARTINGALES IN RISK THEORY WITH APPLICATIONS IN FINANCE

by
Dimitris P. Lyberopoulos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics.

Piraeus, Greece
December 2006

Στο Χάρη
(και στη Θεία Του).

Στους γονείς μου,
Άννα και Παναγιώτη.

Ευχαριστίες

Κατ'αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα την παρούσα διπλωματική εργασία κύριο Νικόλαο Μαχαιρά για την αμέριστη συμπαράστασή του και την πολύτιμη βοήθεια που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κύριο Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη και κύριο Δημήτριο Στέγγο για την επίβλεψή τους. Ακόμη θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου σε όλα τα μέλη Δ.Ε.Π. στο Π.Μ.Σ. στην Εφαρμοσμένη Στατιστική του Πανεπιστημίου Πειραιώς, αλλά και στους συμφοιτητές μου για τη εποικοδομητική συνεργασία μας κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα το Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών (Ι.Κ.Υ.), για την οικονομική ενίσχυση που μου παρείχε υπό μορφή υποτροφίας κατά τη διάρκεια των μεταπτυχιακών μου σπουδών, συμβάλλοντας έτσι καθοριστικά στην επιτυχή ολοκλήρωσή τους.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία διερευνάται η επίδραση της Θεωρίας των Martingales στη Θεωρία Κινδύνου και δίνονται κάποιες εφαρμογές των παραπάνω στα χρηματοοικονομικά. Συγκεκριμένα, παρατίθεται ένας martingale - χαρακτηρισμός της διαδικασίας Poisson και επισημαίνεται η συνεισφορά των martingales στο πρόβλημα της χρεοκοπίας. Επίσης, υποθέτουμε ένα υπόδειγμα μη κερδοσκοπικών αγορών για τη μελέτη ισοδύναμων ως προς ένα martingale κατανομών πιθανότητας, επάνω στο βασικό χώρο πιθανότητας μιας σύνθετης διαδικασίας Poisson. Η εν λόγω μελέτη βρίσκει εφαρμογή στις αρχές υπολογισμού πριμ (*premium calculation principles*).

Abstract

The impact of the martingales in Risk Theory is investigated and some applications of the above in finance are given. More precisely, a martingale characterization of the Poisson process is presented and the contribution of the martingales to the ruin problem is pointed out. Moreover, a model of arbitrage free markets is assumed to study martingale equivalent probability distributions on the basic probability space of a compound Poisson process. The latter is applied to premium calculation principles.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

μ.χ.: μετρήσιμος χώρος

χ.μ., χ.π.: χώρος μέτρου, χώρος πιθανότητας

σ.**μ.μ.**: σύνολο μηδενικού μέτρου

σ.**β.**: σχεδόν βέβαια

τ.μ.: τυχαία μεταβλητή

σ.**κ.(π.)**: συνάρτηση κατανομής (πιθανότητας)

σ.**(π.)π.**: συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας

σ.**δ./Σ.Δ.**: στοχαστική διαδικασία/Στοχαστική Διαδικασία

χ.σ.: χαρακτηριστική συνάρτηση

ρ.γ.σ.**, π.γ.**σ.: ροπογεννήτρια συνάρτηση, πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Εισαγωγή

Αντικείμενο της παρούσας εργασίας αποτελεί η μελέτη της επίδρασης και της σημαντικότητας της Θεωρίας των Martingales στη Θεωρία Κινδύνου και οι εφαρμογές των παραπάνω στα χρηματοοικονομικά.

Τα martingales αποτελούν μια ιδιαίτερη κλάση σ.δ., η χρήση της οποίας σε προβλήματα της Θεωρίας Κινδύνου καθίσταται ιδιαιτέρως σημαντική, εξαιτίας ενός βασικού πλεονεκτήματος που παρουσιάζει· *τα martingales αποτελούν στην πραγματικότητα το μαθηματικό εκείνο εργαλείο μέσω του οποίου μπορούμε να μελετήσουμε ένα δίκαιο παίγνιο.*

Η εύρεση ενός κατάλληλου υποδείγματος της διαχρονικής εξέλιξης του χαρτοφυλακίου κινδύνων μιας ασφαλιστικής εταιρείας ή γενικότερα μιας επιχείρησης ανάληψης κινδύνων, δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα εύκολο πρόβλημα, εξαιτίας της εμπλοκής σε αυτό διαφόρων σ.δ.. Βασικό αντικείμενο μελέτης της Θεωρίας Κινδύνου αποτελεί η ανάπτυξη τέτοιων υποδειγμάτων. Η σ.δ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ άφιξης των απαιτήσεων και η σ.δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ μεγέθους απαίτησης, που ορίζονται επάνω σε έναν σταθερό χ.π. (Ω, Σ, P), αποτελούν τις δύο συντεταγμένες μιας σ.δ. κινδύνου (βλ. Ενότητες 3.2 και 3.5). Η σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων ορίζει και ορίζεται από την σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων, η οποία περιγράφει τον αριθμό των απαιτήσεων που πραγματοποιούνται σε ένα χρονικό διάστημα (βλ. Θεωρήματα 3.3.2 και 3.3.3). Ως μια συνέπεια της ισοδυναμίας της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων με αυτή του αριθμού των απαιτήσεων, η σ.δ. κινδύνου ορίζεται από τις σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και μεγέθους απαίτησης. Οι συνολικές απαιτήσεις (των ασφαλισμένων έναντι της εταιρείας) ορίζονται τότε, σε κάθε χρονική στιγμή t ($t \geq 0$), ως το τυχαίο άθροισμα $S_t := \sum_{k=0}^{N_t} X_k$ (βλ. Ενότητα 3.5).

Για να τονίσουμε τον λόγο για τον οποίο τα martingales παίζουν σημαντικό ρόλο στη Θεωρία Κινδύνου, θεωρούμε μια οποιαδήποτε σ.δ. κινδύνου $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ και την σ.δ. $\{R_t^u\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αποθεματικού (μιας εταιρείας), με

$$R_t^u := u + P_t - S_t,$$

όπου u το αρχικό κεφάλαιο που διατηρεί η εταιρεία και P_t τα έσοδα της εταιρείας (*premium income*) μέχρι τον χρόνο t (βλ. και Ενότητα 5.1). Αν αγνοήσουμε προσωρινά το αρχικό κεφάλαιο u, τότε, δοθείσης της σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ένας φυσικός τρόπος για να κατασκευάσουμε τη σ.δ. $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι να θεωρήσουμε τη διαφορά

$$M_t = P_t - S_t$$

ως ένα «δίκαιο παίγνιο» (δηλαδή ως ένα martingale) μεταξύ του ασφαλιστή και του ασφαλιζόμενου.

Οι Delbaen & Haezendonk (1987) χρησιμοποιούν μια αυστηρή προσέγγιση μέσω martingales για την κατασκευή δίκαιων γενικών υποδειγμάτων στη Θεωρία Κινδύνου, επιτρέποντας σε οικονομικούς παράγοντες, όπως π.χ. ο πληθωρισμός να ενσωματωθούν στο κλασσικό υπόδειγμα της Θεωρίας Κινδύνου. Ο Paulsen (1993) κάνει ένα βήμα παραπάνω και επιτρέπει στους οικονομικούς παράγοντες να είναι στοχαστικοί. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι η παρουσία πληθωρισμού στο παραπάνω υπόδειγμα συνεπάγεται την απώλεια μιας εκ των δύο βασικότερων ιδιοτήτων της $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Έτσι, ενώ η ανεξαρτησία των προσαυξήσεών της διατηρείται, η στασιμότητα χάνεται, κάτι που έχει ως συνέπεια τη μη δυνατότητα εφαρμογής ανανεωτικών τεχνικών στο υπόδειγμά μας και την αντικατάστασή τους από τη Θεωρία των Martingales. Για περισσότερες λεπτομέρειες πάνω σε αυτά τα θέματα, βλέπε τα [16] και [26].

Η διάρθρωση της παρούσας εργασίας έχει ως ακολούθως:

Στο *Κεφάλαιο 1* παραθέτουμε βασικές έννοιες και ορισμούς, ενώ στο *Κεφάλαιο 2* ορίζεται η έννοια των martingales και δίνονται ορισμένα βασικά αποτελέσματα που σχετίζονται με αυτά.

Στο *Κεφάλαιο 3*, αρχικά παραθέτουμε μια επισκόπηση της Θεωρίας Κινδύνου, όπως αυτή περιγράφηκε προηγουμένως, και στη συνέχεια εξειδικεύουμε τα παραπάνω για την περίπτωση της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου (βλ. Ενότητα 3.4), ενώ κάνουμε και μια σύντομη αναφορά στις σύνθετες κατανομές (βλ. Ενότητα 3.6).

Στο *Κεφάλαιο 4*, δίνεται ένας χαρακτηρισμός της διαδικασίας Poisson – η οποία αποτελεί το κατάλληλο υπόδειγμα για τη σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, στα πλαίσια της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου – μέσω martingales.

Πιο συγκεκριμένα, αποδεικνύεται, βάσει ενός γενικότερου αποτελέσματος (βλ. Θεώρημα 4.1.2), ότι αν η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων είναι μια διαδικασία Poisson (με παράμετρο $\alpha > 0$), τότε η σ.δ. $\{N_t - \alpha t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale. Αντιστρόφως, αν η $\{N_t - \alpha t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale, τότε το μέτρο απαίτησης μ (βλ. Ορισμό 3.2.8), που αντιστοιχεί στη σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων, περιορισμένο σε μια σ-υποάλγεβρα γινόμενο της σ-άλγεβρας γινόμενο $\Sigma \otimes \mathcal{B}((0,\infty))$ γίνεται ένα μέτρο γινόμενο, κάτι που με τη σειρά του συνεπάγεται ότι η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων είναι μια διαδικασία Poisson.

Μια ευθεία απόδειξη της προαναφερθείσας συνεπαγωγής δίνεται από τον Watanabe (βλ. Παρατήρηση 4.2.5(b)).

Στο *Κεφάλαιο 5*, μελετάμε τη σχέση των martingales με ένα από τα πιο σημαντικά προβλήματα της Θεωρίας Κινδύνου· το πρόβλημα της χρεοκοπίας. Για το σκοπό αυτό προβαίνουμε στη συνοπτική μελέτη της σ.δ. του αποθεματικού. Κύρια εργαλεία για τη μελέτη του προβλήματος της χρεοκοπίας αποτελούν ο συντελεστής προσαρμογής και υπερπροσαρμογής (*adjustment and superadjustment coefficient*), η ύπαρξη των οποίων είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη συγκεκριμένου εκθετικού martingale και υπερ-martingale, αντίστοιχα (βλ. Πορίσματα 5.2.4 και 5.2.5). Κεντρικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου αυτού είναι η Ανισότητα Lundberg (βλ. Θεώρημα 5.2.6).

Στο *Κεφάλαιο 6* εξετάζουμε τη σχέση των πιθανοτήτων ουράς τυχαίου αθροίσματος με τις πιθανότητες χρεοκοπίας και τα martingales. Μελετάμε αρχικά τα φράγματα πιθανοτήτων ουράς των Runnenburg & Goovaerts (1985), στη συνέχεια το γενικότερο αποτέλεσμα των Willmot & Lin (1994), το οποίο αποδεικνύεται μέσω κλασσικών υπολογιστικών μεθόδων απειροστικού λογισμού, και παραθέτουμε μια πιο απλή απόδειξή του μέσω μιας martingale-μεθόδου, που οφείλεται στον Gerber (1994). Τέλος, γίνεται μια σύγκριση και ένας σχολιασμός των προαναφερθέντων φραγμάτων.

Το *Κεφάλαιο 7* αναφέρεται σε μία εφαρμογή της κλασσικής σ.δ. κινδύνου και των martingales στη χρηματοοικονομική αποτίμηση της ασφάλισης (*financial pricing insurance*) και στη σύνδεση της εφαρμογής αυτής με την θεωρία των αρχών υπολογισμού πριμ (*premium calculation principles*). Αρχικά, βέβαια, δίνεται το γενικό πλαίσιο, μέσα στο οποίο βρίσκουν εφαρμογή στα χρηματοοικονομικά τα martingales και η Θεωρία Κινδύνου (βλ. Ενότητα 7.1), όπως αυτό προτάθηκε από τους Sondermann (1988) και Delbaen & Haezendonk (1989).

Πιο συγκεκριμένα, είναι γνωστό ότι αν μια χρηματιστηριακή ή ασφαλιστική αγορά είναι μη κερδοσκοπική, τότε οι αποτιμήσεις των προς διαπραγμάτευση ριψοκίνδυνων περιουσιακών στοιχείων/συμβολαίων (*risky assets*) συμπεριφέρονται ως γραμμικές συναρτήσεις, διαφορετικά μπορούν να εμφανιστούν ευκαιρίες κερδοσκοπίας (βλ. π.χ. [17] και Ενότητα 7.1). Ένα κατάλληλο μαθηματικό πλαίσιο για την μελέτη τέτοιων ασφαλιστικών αγορών έχει εισαχθεί από τον Sondermann (1988), ο οποίος απέδειξε ότι αν δεν υπάρχουν κερδοσκοπικές ευκαιρίες, τα πριμ (για την ανάληψη του κινδύνου) υπολογίζονται με αναμενόμενες τιμές όχι ως προς το αρχικό μέτρο πιθανότητας P, αλλά ως προς ένα νέο μέτρο πιθανότητας Q, που ονομάζεται *ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο μέτρο*. Οι Delbaen & Haezendonk (1989) ξεκινούν με μια σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συνολικών απαιτήσεων, που είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson ως προς το βασικό μέτρο πιθανότητας P, και υποθέτουν ότι σε κάθε χρονική στιγμή t μια ασφαλιστική εταιρία μπορεί να πουλήσει τον εναπομείναντα κίνδυνο της περιόδου $(t, T]$ για δοσμένο πριμ p_t. Επομένως, η προκύπτουσα σ.δ. τιμών $\{V_t^*\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει τη μορφή

$$V_t^* = p_t + S_t.$$

Σύμφωνα με τον Sondermann (1988), θα έπρεπε να υπάρχει μια ουδέτερη κινδύνου κατανομή πιθανότητας Q ώστε η $\{V_t^*\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι ένα Q-martingale. Το επόμενο βήμα για την αποτίμηση των συμβολαίων σε μη κερδοσκοπικές αγορές είναι η επιλογή μιας κατάλληλης κατανομής Q που να οδηγεί σε γραμμικό πριμ της μορφής $p_t = p(T-t)$, όπου $p := p_Q$ είναι η πυκνότητα ασφαλίστρου (*premium density*). Στη συνέχεια οι Delbaen & Haezendonk (1989) αποδεικνύουν ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι επίσης σύνθετη διαδικασία Poisson ως προς το μέτρο πιθανότητας Q και ότι τα P και Q είναι προοδευτικά ισοδύναμα (βλ. Ορισμό 7.2.3 και Πρόταση 7.2.6).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον στο έβδομο κεφάλαιο παρουσιάζουν τα εξής αποτελέσματα: (α) Η πυκνότητα ασφαλίστρου ως προς την Q είναι μεγαλύτερη της πυκνότητας ασφαλίστρου ως προς την P – δηλαδή $E_Q[S_1] \geq E_P[S_1]$ – υποδηλώνοντας ότι η ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο κατανομή πιθανότητας εξασφαλίζει μεγαλύτερα πριμ για την ανάληψη του κινδύνου. (β) Ενώ οι P και Q είναι προοδευτικά ισοδύναμες, όχι μόνο δεν είναι ισοδύναμες, αλλά κάθετες μεταξύ τους κατανομές πιθανότητας (βλ. επίσης Ορισμό 7.2.3 και Πρόταση 7.2.6).

Τέλος, τα *παραρτήματα* περιλαμβάνουν χρήσιμα αποτελέσματα και έννοιες της Θεωρίας Μέτρου και της Θεωρίας Πιθανοτήτων, καθώς και ορισμένα χρήσιμα γραφήματα σ.δ., για την πληρέστερη και πιο ολοκληρωμένη κατανόηση μερικών ορισμών και αποτελεσμάτων του κύριου μέρους της παρούσας εργασίας.

Κλείνοντας, σημειώνουμε ότι θα παρουσίαζε ενδιαφέρον για εμάς η επέκταση του κύριου αποτελέσματος τόσο του Κεφαλαίου 4 όσο και του Κεφαλαίου 7 σε υποδείγματα μη κλασσικής θεωρίας κινδύνου.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο παρόν κεφάλαιο παραθέτουμε ορισμένες εισαγωγικές έννοιες και κάποιους βασικούς συμβολισμούς και ορισμούς που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία.

Με $\mathbb{N}$ συμβολίζεται το σύνολο $\{0, 1, 2, \ldots\}$ όλων των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο όλων των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών. Επίσης χρησιμοποιούνται τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}^* := \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\setminus\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\setminus\{0\}$ και $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$. Ομοίως ορίζονται και οι συμβολισμοί $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$. Ακόμη, με $\mathbb{N}_n$, $\mathbb{N}_n^*$ συμβολίζονται τα σύνολα $\{0, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ και $\{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$, αντίστοιχα. Τέλος, με $\mathbb{C}$ συμβολίζεται το σύνολο των μιγαδικών αριθμών.

Έστω Ω σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Με A^c ή $\Omega\setminus A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του** A (σε σχέση με το Ω) και με $A \uplus B$ συμβολίζεται η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων και με $\biguplus_{i\in I} A_i$ συμβολίζεται η ένωση μιας οικογένειας $\{A_i\}_{i\in I}$ ($I \neq \varnothing$) ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Ω.

Μια σ-**άλγεβρα** υποσυνόλων του Ω είναι ένα σύστημα Σ, υποσυνόλων του Ω, τέτοιο ώστε (i) $\Omega \in \Sigma$, (ii) για κάθε $E \in \Sigma$ ισχύει $E^c \in \Sigma$, (iii) για κάθε ακολουθία $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του Σ ισχύει $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$. Τα στοιχεία της Σ καλούνται **ενδεχόμενα**, ενώ για κάθε $A \in \Sigma$ με χ_A συμβολίζουμε την **δείκτρια συνάρτηση** του (ενδεχομένου) A. Ας θεωρήσουμε επίσης $\mathcal{G}$ σύστημα υποσυνόλων του Ω. **Η ελάχιστη** σ-**άλγεβρα** υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$ συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται **η** σ-**άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **γεννήτορας** της $\sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, με $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $\mathcal{B}((\alpha, \beta))$, όπου $\alpha, \beta \in \overline{\mathbb{R}}$, συμβολίζουμε την Borel σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και (α, β), αντίστοιχα.

Αν Θ είναι ένα σύνολο και T μια σ-άλγεβρα στο Θ, μία συνάρτηση $f : \Omega \to \Theta$ ονομάζεται Σ-T-**μετρήσιμη** ή απλώς **μετρήσιμη** αν και μόνο αν για κάθε $B \in T$ ισχύει $f^{-1}(B) \in \Sigma$. Ειδικά, αν $\Theta = \mathbb{R}$ και $T = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, τότε η f ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)**, ενώ αν

$\Theta = \mathbb{R}^n$ και $T = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $n \in \mathbb{N}^*$, τότε η f ονομάζεται **(n-διάστατο) τυχαίο διάνυσμα**.

Μια οικογένεια $\{B_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται **διαμέριση** του Ω αν και μόνο αν (i) $B_j \cap B_k = \varnothing$ για κάθε $j, k \in I$ ώστε $j \neq k$ και (ii) $\bigcup_{j\in I} B_j = \Omega$. Οι τελευταίες δύο ιδιότητες συνοπτικά συμβολίζονται ως εξής: $\biguplus_{j\in I} B_j = \Omega$. Αν επί πλέον η $\{B_j\}_{j\in I}$ είναι μια οικογένεια στο Σ, τότε και μόνο τότε αυτή ονομάζεται μια **Σ-μετρήσιμη διαμέριση** του Ω.

Μια μετρήσιμη συνάρτηση $s : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **απλή ή κλιμακωτή** συνάρτηση αν και μόνο αν το σύνολο τιμών της $s(\Omega)$ είναι πεπερασμένο. Αν η s είναι απλή, τότε υπάρχει μοναδική, πεπερασμένη, μετρήσιμη διαμέριση $\{A_1, \ldots, A_n\}$ τέτοια ώστε $A_j \neq \varnothing$ για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$ και μοναδική ακολουθία $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε $\alpha_i \neq \alpha_j$ για κάθε $i, j \in \mathbb{N}^*$ με $i \neq j$, ώστε $s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$. Η παραπάνω παράσταση ονομάζεται η **κανονική μορφή** της s και προκύπτει, αν γράψουμε $s(\Omega) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ και θέσουμε $A_k := s^{-1}(\{\alpha_k\})$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

Το ζεύγος (Ω, Σ) ονομάζεται **μετρήσιμος χώρος** (μ.χ.) αν και μόνο αν (i) το Ω είναι ένα οποιοδήποτε (βασικό) σύνολο, (ii) η Σ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Επίσης αν θεωρήσουμε (Ω, Σ) έναν μ.χ., τότε η συνολοσυνάρτηση $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ ονομάζεται **(σ-προσθετικό) μέτρο** αν και μόνο αν (i) $\mu(\varnothing) = 0$, (ii) για κάθε ακολουθία $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο Σ τέτοια ώστε $B_j \cap B_k = \varnothing$ για κάθε $j, k \in I$ ώστε $j \neq k$ ισχύει $\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n)$. Τα μέτρα μ, ν ονομάζονται **κάθετα μεταξύ τους** και γράφουμε $\mu \perp \nu$ αν και μόνο υπάρχει $A \in \Sigma$ ώστε $\nu(A) = 0 = \mu(A^c)$. Ακόμη, το ν ονομάζεται **απόλυτα συνεχές ως προς το** μ και συμβολίζεται με $\nu \ll \mu$ αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ με $\mu(A) = 0$ έπεται ότι $\nu(A) = 0$. Επί πλέον, τα ν και μ ονομάζονται **ισοδύναμα** (συμβολικά $\nu \sim \mu$) αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ ισχύει $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \nu(A) = 0$ ή αλλιώς αν και μόνο αν το $\nu \ll \mu$ και το $\mu \ll \nu$.

Η τριάδα (Ω, Σ, μ) ονομάζεται **χώρος μέτρου** (χ.μ.) αν και μόνο αν (i) το Ω είναι ένα οποιοδήποτε (βασικό) σύνολο, (ii) η Σ είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω, (iii) η συνολοσυνάρτηση $\mu : \Sigma \to [0, \infty]$ είναι ένα μέτρο. Αν το μ είναι τέτοιο ώστε $\mu(\Omega) = 1$ τότε αυτό ονομάζεται **μέτρο πιθανότητας ή πιθανότητα** και συμβολίζεται συνήθως με P. Συνακόλουθα, ο αντίστοιχος χ.μ. ονομάζεται **χώρος πιθανότητας** (χ.π.) και συμβολίζεται με (Ω, Σ, P). Αν το μ είναι τέτοιο ώστε $\mu(\Omega) < \infty$, τότε αυτό ονομάζεται **πεπερασμένο μέτρο** και αν υπάρχει $\{\Omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο Σ με $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $\mu(\Omega_n) < \infty$, τότε αυτό ονομάζεται **σ-πεπερασμένο μέτρο** και ο αντίστοιχος χ.μ. **χώρος πεπερασμένου ή σ-πεπερασμένου μέτρου**. Στο εξής κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν χ.μ. (Ω, Σ, μ).

Ένα σύνολο $N \in \Sigma$ ονομάζεται **σύνολο μηδενικού μέτρου** ($\sigma.\mu.\mu.$) ή **σύνολο μ-μηδενικού μέτρου** ($\mu - \sigma.\mu.\mu.$) ή **μ-μηδενικό σύνολο** αν και μόνο αν $\mu(N) = 0$. Το σύνολο όλων των $\mu-\sigma.\mu.\mu.$ συμβολίζεται με Σ_0.

Έστω (Ω, Σ, P) χ.π. και $p(x)$ μια ιδιότητα εφαρμόσιμη σε στοιχεία $x \in \Omega$ (π.χ. ισότητα δύο τυχαίων μεταβλητών X και Y). Θα λέμε ότι «η $p(x)$ ισχύει για σχεδόν κάθε $x \in \Omega$» ή ότι «η $p(x)$ ισχύει σχεδόν βέβαια $(\sigma.\beta.)$» ή αν κρίνεται αναγκαίο να αναφέρουμε το μέτρο πιθανότητας που θεωρούμε ότι «η $p(x)$ ισχύει για P-σχεδόν κάθε $x \in \Omega$» ή «η $p(x)$ ισχύει P-σχεδόν βέβαια $(\sigma.\beta.)$» αν και μόνο αν το σύνολο $N := \{x \in \Omega : p(x) \text{ δεν ισχύει}\}$ είναι ένα P-μηδενικό σύνολο.

Ιδιαιτέρως, αν δύο μετρήσιμες συναρτήσεις X, Y είναι $P-\sigma.\beta.$ ίσες, τότε γράφουμε $X = Y \quad P-\sigma.\beta.$ ή $X =_P Y$. Αντίστοιχοι συμβολισμοί μπορούν να γραφούν και για τις σχέσεις διάταξης $>, <, \geq, \leq$.

Στη συνέχεια, προχωρούμε ένα βήμα παρακάτω, ορίζοντας την έννοια της ολοκληρωσιμότητας μιας τ.μ. και διακρίνοντας τα διάφορα είδη τ.μ.. Στο εξής κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά θεωρούμε έναν χ.π. (Ω, Σ, P).

Μία μετρήσιμη συνάρτηση (τ.μ.) $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** (ως προς το μέτρο P) αν και μόνο αν $\int |f| dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ (αντ. $\mathcal{L}^1_+(P)$) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (αντ. μη αρνητικών $P-\sigma.\beta.$, ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^0(P)$ και $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται αντίστοιχα το σύνολο όλων των Σ-μετρήσιμων συναρτήσεων και όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων** – δηλαδή όλων των μετρήσιμων $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε $\int |f|^2 dP < \infty$ – συναρτήσεων.

Μια συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής** $(\sigma.\kappa.)$ αν και μόνο αν είναι φραγμένη, αύξουσα, δεξιά συνεχής και $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$. Αν η F έχει επί πλέον την ιδιότητα $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$, τότε αυτή ονομάζεται **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** $(\sigma.\kappa.\pi.)$.

Για μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

είναι πιθανότητα και ονομάζεται **κατανομή (πιθανότητας)** της τ.μ. X. Μάλιστα, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$, τότε η P_X ονομάζεται **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)** (*degenerate (probability) distribution*). Η P_X (αντ. η τ.μ. X) παράγει την **συνάρτηση κατανομής πιθανότητας** $(\sigma.\kappa.\pi.)$ **της τ.μ.** X (αντ. την $\sigma.\kappa.\pi.$) $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$, που ορίζεται από τον τύπο

$$F_X(x) := P_X\big((-\infty, x]\big) = P(X \leq x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Η F_X είναι πράγματι $\sigma.\kappa.\pi.$ (βλ. π.χ. και [6], Πρόταση 1.4.9).

Μια $\sigma.\kappa.\pi.$ $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (αντ. μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ με $\sigma.\kappa.\pi.$ $F_X = F$) ονομάζεται: (i)

Διακριτή, αν και μόνο αν αυτή (αντ. η $\sigma.\kappa.\pi.$ αυτής) είναι της μορφής

$$F(x) = \sum_{k \in K : k \leq x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα $\sum_{k \in K} f(k) = 1$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** ($\sigma.\pi.$) της F (αντ. της X). (ii) **Συνεχής**, αν και μόνο αν η F είναι συνεχής συνάρτηση (αντ. το σύνολο τιμών R_X της X έχει την πληθικότητα του συνεχούς και η $P_X(\{x\}) = 0$ για κάθε $x \in R_X$). (iii) **Απόλυτα Συνεχής**, αν και μόνο αν αυτή (αντ. η $\sigma.\kappa.\pi.$ αυτής) είναι της μορφής

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** ($\sigma.\pi.\pi.$) της F (αντ. της X). Προφανώς, αν η τ.μ. X είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας «συνεχής τ.μ.» θα εννοούμε «απόλυτα συνεχής τ.μ.».

Ακόμη, θα λέμε ότι η τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X **ακολουθεί την κατανομή** $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$, όπου $m \in \mathbb{N}^*$ και $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν και μόνο αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X} d\lambda(x) = \int_{B \cap R_X} f_X(x)d\lambda(x) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

όπου f_X η αντίστοιχη $\sigma.(\pi.)\pi.$, ανάλογα με το αν η τ.μ. X είναι συνεχής ή διακριτή, ενώ με λ συμβολίζεται το μέτρο Lebesgue επάνω στον $\mathbb{R}$. Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το R_X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Έπειτα παραθέτουμε τις έννοιες του μετρήσιμου ορθογωνίου, της σ-άλγεβρας και του μέτρου γινομένου.

Έτσι θεωρούμε (Ω, Σ, μ) και (Θ, T, ν) χ.μ.. Ένα $R \subseteq \Omega \times \Theta$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο (του $\Omega \times \Theta$)** αν και μόνο αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επί πλέον, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται **σ-άλγεβρα γινόμενο** των Σ και T και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.

Έστω επίσης ο χ.μ. $(\Omega \times \Theta, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μέτρο ρ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των μ και ν** και σημειώνεται με $\mu \otimes \nu$ αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$.

Για μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$EX := E[X] := \int XdP = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

(εφόσον υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$) ονομάζεται η **μέση τιμή** ή η **αναμενόμενη τιμή** ή η **μαθηματική ελπίδα** της τ.μ. X. Ειδικά αν η τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $EX \in \mathbb{R}$, δηλαδή είναι ένας αριθμός.

Τα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν και μόνο αν $P\big(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\big) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$ για κάθε $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

Οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ πραγματικών αριθμών τα ενδεχόμενα $\{X_k \leq \alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ στοιχείων της $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ τα ενδεχόμενα $\{X_k \in B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ. [6], Παρατήρηση 3.2.5(b)). Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.

Οι σ-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ της Σ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n^*$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων σ-υποαλγεβρών της** Σ αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε, πεπερασμένες στο πλήθος, από αυτές είναι ανεξάρτητες.

Επί πλέον, για κάθε τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο Ω που ονομάζεται η **σ-άλγεβρα στο Ω η παραγόμενη από την** X και ισχύει $\sigma(X) \subseteq \Sigma$. Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$ τ.μ., όπου I σύνολο δεικτών, ορίζουμε

$$\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big) = \sigma\bigg(\bigcup_{j\in I}\sigma(X_j)\bigg).$$

Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in T}$ τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη μιας** οικογένειας $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ, όπου $T, I \neq \varnothing$ σύνολα δεικτών, αν και μόνο αν για κάθε πεπερασμένο αριθμό τ.μ. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}$ και σ-υποαλγεβρών $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ της Σ $(m, n \in \mathbb{N}^*)$, οι σ-(υπο)άλγεβρες $\sigma(X_{t_1}), \ldots, \sigma(X_{t_m}), \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ είναι ανεξάρτητες.

Αν οι P, Q είναι κατανομές πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, τότε η κατανομή πιθανότητας με τύπο

$$(P * Q)(B) := \int_{\mathbb{R}} P(B - y)dQ(y) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

όπου $B - y := \{z - y : z \in B\}$, ονομάζεται η **συνέλιξη** των P, Q. Επίσης για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ως την **n-οστη συνέλιξη** της P, την κατανομή πιθανότητας $P^{*(n+1)} := P^n * P$, όπου P^{*0} (εκφυλισμένη) κατανομή που ικανοποιεί την $P^{*0}(\{0\}) = 1$. Ομοίως, ορίζεται και η συνέλιξη δύο σ.κ.π. F, G ή δύο σ.(π.)π. f, g. Τέλος, σημειώνουμε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας (επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$) $\{P_{X_k}\}_{k\in\mathbb{N}_n}$, τότε από τον ορισμό της συνέλιξης άμεσα έχουμε ότι

$$P_{X_0+\cdots+X_n} = P_{X_0} * \cdots * P_{X_n} = (P_{X_0} * \cdots * P_{X_{n-1}}) * P_{X_n}.$$

Μία οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$, όπου I ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (βλ. π.χ. [5], Ορισμός 1.19), μετρήσιμων συναρτήσεων $X_j : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $(j \in I)$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία (σ.δ.) ή στοχαστική ανέλιξη**. Επί πλέον, αν το I είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια **σ.δ. συνεχούς χρόνου**, ενώ αν το $I \subseteq \mathbb{Z}$, τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια **σ.δ. διακριτού χρόνου**.

Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$: (i) Είναι μια σ.δ. **ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j \in \mathbb{N}^*_m)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. (ii) Είναι μια σ.δ. **στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\mathbb{N}^*_m}$ έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}^*_m}$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $j \in \mathbb{N}^*_m$ και για κάθε $h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h}} = P_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}}$.

Τέλος, σημειώνουμε πως σε ολόκληρη την υπόλοιπη εργασία κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε έναν σταθερό χ.π. (Ω, Σ, P).

Κεφάλαιο 2

Martingales

Αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου αποτελεί η αναφορά σε μία από τις θεμελιώδεις έννοιες της παρούσας εργασίας, δηλαδή στα martingales. Έτσι δίνουμε τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες των martingales, καθώς και ορισμένες ανισότητες για martingales, που θα μας φανούν χρήσιμες αργότερα (βλ. Κεφάλαια 5 και 6). Προηγουμένως, όμως, γίνεται μια επισκόπηση της έννοιας της δεσμευμένης μέσης τιμής, η οποία αποτελεί απαραίτητη προϋπόθεση για τον ορισμό των martingales.

2.1 Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Στην παρούσα ενότητα δίνουμε διαδοχικά τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής ως προς ένα ενδεχόμενο, μια τ.μ. και μια σ-άλγεβρα, καθώς επίσης και τις βασικές ιδιότητες αυτής σε κάθε περίπτωση:

***Ορισμός* 2.1.1.** Για κάθε ενδεχόμενο $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα της τ.μ. X ως προς την δεσμευμένη πιθανότητα P_B συμβολίζεται με

$$E_B[X] := E[X|B] := \int_B X dP_B$$

και (εφόσον υπάρχει στο $\overline{\mathbb{R}}$) ονομάζεται **η δεσμευμένη μέση τιμή της (τ.μ.) X δοθέντος του (ενδεχομένου) B.**

Παρακάτω, παραθέτουμε κι αποδεικνύουμε τις βασικές ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής $E[X|B]$.

Πρόταση 2.1.2. Έστω $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ μια (Σ-μετρήσιμη) διαμέριση του Ω, τέτοια ώστε $P(B_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, καθώς και τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) $E[X|B] = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP$.

(ii) Αν $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε $EX = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n)E[X|B_n]$.

(iii) $E[\chi_A|B] = P(A|B)$ για κάθε $A \in \Sigma$.

(iv) $P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n)P(A|B_n)$ για κάθε $A \in \Sigma$ (*Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας*).

Απόδειξη. **(i)** Η απόδειξη της ζητούμενης σχέσης γίνεται σε τέσσερα βήματα, αποδεικνύοντας εύκολα το (i) διαδοχικά για την περίπτωση δεικτριών, απλών μη αρνητικών, μη αρνητικών και όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων (βλ. π.χ. και [30], Section 5.12).
(ii) Αρχικά σημειώνουμε ότι $EX < \infty$, αφού εξ'υποθέσεως η $X \in \mathcal{L}^1(P)$. Επίσης επειδή η $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι μια (Σ-μετρήσιμη) διαμέριση του Ω, τέτοια ώστε $P(B_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} EX &= \int_{\biguplus_{n=0}^{\infty} B_n} X dP = \int \chi_{\biguplus_{n=0}^{\infty} B_n}(X^+ - X^-) dP \\ &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{B_n}\right) X^+ dP - \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{B_n}\right) X^- dP \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \chi_{B_n} X^+ dP - \sum_{n=0}^{\infty} \int \chi_{B_n} X^- dP \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_{B_n} X^+ dP - \int_{B_n} X^- dP \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{B_n} X dP \\ &\overset{\text{(i)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} P(B_n)E[X|B_n], \end{aligned}$$

με την τέταρτη από το τέλος ισότητα να ισχύει λόγω του Θεωρήματος B.Levi (βλ. π.χ. [4], Πόρισμα 6.10).
(iii) Επειδή για κάθε $A \in \Sigma$ η $\chi_A \in \mathcal{L}^1(P)$, τότε έχουμε ότι

$$E[\chi_A|B] := \int \chi_A dP_B = \int_A dP_B = P_B(A) := P(B|A).$$

(iv) Το ζητούμενο αποδεικνύεται άμεσα από το (ii) για $X = \chi_A$, λαμβάνοντας υπόψη το (iii). □

Στην συνέχεια επεκτείνουμε την έννοια της δεσμευμένης μέση τιμής, θεωρώντας τώρα ότι η δέσμευση δεν αφορά απλώς ένα ενδεχόμενο, αλλά μια τ.μ. και μια σ-άλγεβρα ενδεχομένων του Ω.

***Ορισμός* 2.1.3.** Έστω τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και διακριτή τ.μ. $Y : \Omega \to \mathbb{R}$, με σύνολο τιμών $R_Y := \{y_n \in \mathbb{R} : n \in I, I \subseteq \mathbb{N}\}$.

Η **δεσμευμένη μέση τιμή της (τ.μ.)** X **δοθείσης της (τ.μ.)** Y είναι μια τ.μ. $E[X|Y] : \Omega \to \mathbb{R}$ με τύπο $(E[X|Y])(\omega) := E[X|Y = y_n]$ αν $y_n = Y(\omega)$ για $y_n \in R_Y$.

***Ορισμός* 2.1.4.** Έστω τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και μια *οποιαδήποτε* τ.μ. $Y : \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε **μια δεσμευμένη μέση τιμή της (τ.μ.)** X **δοθείσης της (τ.μ.)** Y ορίζεται να είναι μια τ.μ. $E[X|Y] : \Omega \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί τα εξής:

(i) η $E[X|Y]$ είναι μια $\sigma(Y)$-μετρήσιμη συνάρτηση,

(ii) $\int_A E[X|Y]dP = \int_A XdP$ για κάθε $A \in \sigma(Y)$.

Παρατηρήσεις 2.1.5. Από τον Ορισμό 2.1.4 προκύπτει ότι:
(a) Μπορούν να υπάρξουν περισσότερες από μία δεσμευμένες μέσες τιμές $E[X|Y]$ που να ικανοποιούν τις συνθήκες (i) και (ii) του Ορισμού 2.1.4, αλλά αν υπάρχει μία Y^* με τις ιδιότητες αυτές, τότε θα είναι $E[X|Y] = Y^* \quad P|\sigma(Y) - \sigma.\beta.$, δηλαδή θα ισχύει ότι $P(\{\omega \in \Omega : E[X|Y](\omega) = Y^*(\omega)\}) = 1$.
(b) Έστω τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και τ.μ. $Y, Y^* : \Omega \to \mathbb{R}$. Αν $\sigma(Y) = \sigma(Y^*)$, τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει $E[X|Y] = E[X|Y^*] \quad P|\sigma(Y) - \sigma.\beta.$.

***Ορισμός* 2.1.6.** Έστω τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και T σ-υποάλγεβρα της Σ. Τότε **μια δεσμευμένη μέση τιμή της (τ.μ.)** X **δοθείσης της** σ**-υποάλγεβρας** T ορίζεται να είναι μια τ.μ. $E[X|T] : \Omega \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

(i) η $E[X|T]$ να είναι μια T-μετρήσιμη συνάρτηση,

(ii) $\int_A E[X|T]dP = \int_A XdP$ για κάθε $A \in T$.

Παρατηρήσεις 2.1.7. Για τον παραπάνω ορισμό παρατηρούμε τα εξής:
(a) Αποτελεί γενίκευση του Ορισμού 2.1.4, αφού η T είναι μια οποιαδήποτε σ-υποάλγεβρα της Σ και όχι κατ'ανάγκη η ελάχιστη σ-άλγεβρα που καθιστά την τ.μ. $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη. Με άλλα λόγια, ο Ορισμός 2.1.4 προκύπτει από τον Ορισμό 2.1.6 για $T = \sigma(Y)$.
(b) Έτσι η έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής δοθείσης μιας σ-υποάλγεβρας της Σ επεκτείνει την δέσμευση επάνω σε μια τ.μ. Y υπό την έννοια ότι $E[X|Y] = E[X|\sigma(Y)] \quad P|\sigma(Y) - \sigma.\beta.$ (βλ. και Ορισμούς 2.1.4 και 2.1.6).
(c) Ο λόγος που υπογραμμίζουμε τη λέξη «μία» στον Ορισμό 2.1.6 (όπως και στον 2.1.4) είναι για να τονίσουμε το ότι η $E[X|T]$ (αντ. $E[X|Y]$) *δεν* είναι μονοσήμαντα ορισμένη.
(d) Η ύπαρξη μιας δεσμευμένης μέσης τιμής $E[X|T]$ είναι συνέπεια του Θεωρήματος Radon-Nikodym (βλ. Θεώρημα Α΄.1.2).

Σε αντιστοιχία και με την Πρόταση 2.1.2, παραθέτουμε υπό την μορφή της παρακάτω πρότασης τις βασικές ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής και για την πιο γενική περίπτωση όπου η δέσμευση αναφέρεται σε μία σ-υποάλγεβρα της Σ.

Πρόταση 2.1.8. Έστω $X, Y \in \mathcal{L}^1(P)$, T σ-υποάλγεβρα της Σ και ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathcal{L}^1(P)$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad E[aX + bY|T] = aE[X|T] + bE[Y|T] \quad P|T - \sigma.\beta.$ (*γραμμικότητα*),

(ii) $E[E[X|T]] = EX$,

(iii) αν η X είναι T-μετρήσιμη, τότε $E[XY|T] = XE[Y|T] \quad P|T - \sigma.\beta.$ (*«παίρνοντας έξω από την δέσμευση ότι είναι γνωστό» - "taking out what's known"*),

(iv) αν η X ανεξάρτητη της T, τότε $E[X|T] = EX \quad P|T - \sigma.\beta.$,
(*ανεξαρτησία*)

(v) αν $H \subseteq T$ σ-υποάλγεβρα της Σ, τότε $E\big[E[X|T]\,\big|\,H\big] = E[X|H] \quad P|H - \sigma.\beta.$, χωρίς κατ'ανάγκη η X να είναι T-μετρήσιμη (*Ιδιότητα του Πύργου*),

(vi) αν $X \geq 0 \quad P - \sigma.\beta.$, τότε και $E[X|T] \geq 0 \quad P|T - \sigma.\beta.$ (*θετικότητα*),

(vii) αν $Y \geq X \quad P - \sigma.\beta.$, τότε και $E[Y|T] \geq E[X|T] \quad P|T - \sigma.\beta.$
(*μονοτονία δεσμευμένων μέσων τιμών*),

(viii) αν η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα $P - \sigma.\beta.$ και $X = \lim_{n\to\infty} X_n$, τότε και η $\{E[X_n|T]\}_{n\in\mathbb{N}}$ αύξουσα $P|T - \sigma.\beta.$ κι επί πλέον ισχύει $E[X|T] = \lim_{n\to\infty} E[X_n|T] \quad P|T - \sigma.\beta.$
(*Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης για Δεσμευμένες Μέσες Τιμές*),

(ix) αν $X = \lim_{n\to\infty} X_n \quad P - \sigma.\beta.$ και υπάρχει $Z \in \mathcal{L}^1(P)$ ώστε $|X_n| \leq Z \ P - \sigma.\beta.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $E[X|T] = \lim_{n\to\infty} E[X_n|T] \quad P|T - \sigma.\beta.$ (*Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης για Δεσμευμένες Μέσες Τιμές*),

(x) αν $\liminf_{n\to\infty} EX_n < \infty$, τότε $E\Big[\liminf_{n\to\infty} X_n|T\Big] \leq \liminf_{n\to\infty} E[X_n|T] \quad P|T - \sigma.\beta.$ (*Λήμμα Fatou για Δεσμευμένες Μέσες Τιμές*),

(xi) αν $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή[1] συνάρτηση και $\varphi \circ X \in \mathcal{L}^1(P)$, τότε

$$\varphi(E[X|T]) \leq E[\varphi(X)|T] \quad P|T - \sigma.\beta.$$

(*Δεσμευμένη Ανισότητα Jensen*).

[1] *Μια συνάρτηση $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* **κυρτή** *αν και μόνο αν για κάθε $\alpha \in [0,1]$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει $\varphi\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leq \alpha\varphi(x) + (1-\alpha)\varphi(y)$.*

Απόδειξη. **(i)** Άμεση συνέπεια του Ορισμού 2.1.6 και των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος.
(ii) Άμεση συνέπεια της συνθήκης (ii) του Ορισμού 2.1.6 για $A = \Omega$.
(iii) Εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι η (iii) ισχύει για $X = \chi_A$ με $A \in T$. Στη συνέχεια επίσης εύκολα μπορεί να δειχθεί ότι η ιδιότητα (iii) ικανοποιείται και για απλές μη αρνητικές, μη αρνητικές και εν τέλει για όλες τις T-μετρήσιμες συναρτήσεις, κι επομένως αποδεικνύεται η ζητούμενη ιδιότητα.

(iv) Επειδή εξ'υποθέσεως η τ.μ. X είναι ανεξάρτητη της σ-υποάλγεβρας T της Σ θα έχουμε επίσης ότι οι τ.μ. χ_A, X θα είναι ανεξάρτητες για κάθε $A \in T$ κι επομένως έπεται ότι $E[\chi_A X] = E[\chi_A] \cdot EX$ για κάθε $A \in T$. Επομένως, για κάθε $A \in T$ έχουμε ότι

$$\int_A E[X|T]dP = E[\chi_A X] = E[\chi_A] \cdot EX = \int_A EXdP,$$

κάτι που ισοδυναμεί με το (iv).

(v) Για κάθε $A \in H$ έχουμε ότι

$$\int_A E\big[E[X|T]\,\big|\,H\big]dP \;=\; \int_A E[X|T]dP = \int_A XdP = \int_A E[X|H]dP.$$

Όμως, επειδή η παραπάνω παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε $A \in H$, άμεσα έχουμε την ισχύ της (v).

(vi) Για την απόδειξη της (vi) βλ. π.χ. [30], Section 9.7(d).
(vii) Αποδεικνύεται άμεσα από την ιδιότητα (vi), αν θεωρήσουμε μια τ.μ. W τέτοια ώστε $W := Y - X \geq 0 \quad P|T - \sigma.\beta.$.

(viii) Για την απόδειξη της (viii) βλ. π.χ. [30], Section 9.7(e).
(ix) Για την απόδειξη της (ix) βλ. π.χ. [6], Πρόταση 3.3.14(8).
(x) Αποδεικνύεται άμεσα αν εφαρμόσουμε την (viii) για την ακολουθία $\{X_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ τ.μ. τέτοιων ώστε $X_n' = \inf_{k\geq n} X_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.
(xi) Επειδή η φ είναι κυρτή θα υπάρχουν δύο ακολουθίες πραγματικών αριθμών $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$\varphi(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n x + \beta_n). \tag{2.1}$$

(βλ. π.χ. [8], Πρόταση 19.6).[2] Επομένως, επειδή η $\varphi(X) \in \mathcal{L}^1(P)$, από την ιδιότητα (vii) άμεσα έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $E[\varphi(X)|T] \geq E[\alpha_n X + b_n|T] = \alpha_n E[X|T] + b_n$

[2] *Η (2.1) αποτελεί την αλγεβρική έκφραση ενός γεγονότος που εποπτικά/γεωμετρικά είναι μάλλον εύκολα αντιληπτό, δηλαδή του ότι το γράφημα μιας κυρτής συνάρτησης βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (σε κάθε σημείο της συνάρτησης που αυτή υπάρχει).*

$P|T-\sigma.\beta.$, απ'όπου έπεται ότι

$$E[\varphi(X)|T] \geq \sup_{n\in\mathbb{N}}(\alpha_n E[X|T]+b_n) \overset{(2.1)}{=} \varphi(E[X|T]) \quad P|T-\sigma.\beta..$$

Άρα δείξαμε την (xi), ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη της παρούσας πρότασης. □

2.2 Ορισμός και Βασικές Ιδιότητες των Martingales

Το αντικείμενο της παρούσας ενότητας είναι ο ορισμός της έννοιας του martingale – όπως και του υπερ-martingale και του υπο-martingale – καθώς και η παράθεση ορισμένων στοιχειωδών ιδιοτήτων τους υπό την μορφή προτάσεων. Για το σκοπό αυτό ορίζουμε αρχικά την έννοια της διύλισης.

Στο εξής – κι εφόσον δεν αναφέρεται διαφορετικά – με I θα συμβολίζουμε ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο.

***Ορισμοί* 2.2.1.** Μία οικογένεια $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **διύλιση** αν και μόνο αν για κάθε $j,k\in I$ με $j<k$ ισχύει $\Sigma_j\subseteq\Sigma_k$.
Μία σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ αν και μόνο αν για κάθε $j\in I$ η τ.μ. X_j είναι Σ_j-μετρήσιμη.
Η $\{T_j\}_{j\in I}$ με $T_j=\sigma\big(\{X_k : k\leq j\}\big)$ για κάθε $j\in I$ ονομάζεται **η κανονική διύλιση για την** $\{X_j\}_{j\in I}$. Προφανώς, κάθε σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στην κανονική της διύλιση.

***Ορισμός* 2.2.2.** Μια σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται **ένα martingale ως προς τη διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ ή **ένα** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$**-martingale** (ή η οικογένεια $\{(X_j,\Sigma_j)\}_{j\in I}$ ονομάζεται **ένα martingale**) αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη (διύλιση) $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$.

(ii) Για κάθε $j\in I$ η $X_j\in\mathcal{L}^1(P)$.

(iii) Για κάθε $j,k\in I$ με $j\leq k$ ισχύει $E[X_k|\Sigma_j]=X_j \quad P|\Sigma_j-\sigma.\beta..$

***Ορισμός* 2.2.3.** Μια σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται **ένα υπερ - martingale** (αντ. **υπο - martingale**) **ως προς τη διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ ή αλλιώς **ένα** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$**-υπερ-martingale** (αντ. **ένα** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$**-υπο-martingale**) αν και μόνο αν ισχύουν τα (i) και (ii) του Ορισμού 2.2.2 και επί πλέον για κάθε $j,k\in I$ με $j\leq k$ ισχύει $E[X_k|\Sigma_j]\leq X_j \quad P|\Sigma_j-\sigma.\beta.$ (αντ. $E[X_k|\Sigma_j]\geq X_j \quad P|\Sigma_j-\sigma.\beta.$).

Παρατηρήσεις 2.2.4. Σχετικά με τους Ορισμούς 2.2.2 και 2.2.3 παρατηρούμε τα εξής:
(a) Έστω η σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ και η διύλιση $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$. Τότε για κάθε $j,k\in I$ με $j\leq k$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $E[X_k|\Sigma_j]=X_j \quad P|\Sigma_j-\sigma.\beta..$

(ii) $\int_A X_j dP=\int_A X_k dP$ για κάθε $A\in\Sigma_j$.

(b) Στις περισσότερες των περιπτώσεων, όπως και στην παρούσα εργασία, οι παραπάνω ορισμοί και προτάσεις βρίσκουν εφαρμογή πρωτίστως για $I=\mathbb{N}$ – όπου μπορούμε να πούμε ότι μπορούν να εκφραστούν οι κύριες ιδέες για martingales με πεπερασμένα σύνολα δεικτών – καθώς και για $I=[0,\infty)$, ενώ ενδιαφέρουσα είναι και η περίπτωση όπου $I=\mathbb{Z}$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα λήμμα χρήσιμο σε πολλές περιπτώσεις για την μελέτη προβλημάτων σχετικών με υπερ/υπο-martingales.

Λήμμα 2.2.5. Αν η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$-υπερ-martingale (αντ. υπο-martingale), τότε για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ ισχύει

$$E[X_n|\Sigma_1]\leq X_1 \quad (\text{αντ.}\quad E[X_n|\Sigma_1]\geq X_1) \quad P|\Sigma_1-\sigma.\beta..$$

Ιδιαιτέρως, αν η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$-martingale, τότε η $E[X_n|\Sigma_1]=X_1 \quad P|\Sigma_1-\sigma.\beta..$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την ζητούμενη ανισότητα για την περίπτωση του υπερ-martingale, αφού αντίστοιχα αποδεικνύεται η ζητούμενη ανισότητα και στην περίπτωση του υπο-martingale, με μόνη διαφοροποίηση τις αντεστραμένες ανισότητες. Οπότε έχουμε:

Εξ'υποθέσεως, η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα υπερ-martingale ως προς τη διύλιση $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, άρα για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $E[X_{n+1}|\Sigma_n]\leq X_n \quad P|\Sigma_n-\sigma.\beta..$ Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη την ιδιότητα της μονοτονίας των δεσμευμένων μέσων τιμών (βλ. Πρόταση 2.1.8(v)) έχουμε ότι $E\big[E[X_{n+1}|\Sigma_n]\,\big|\,\Sigma_1\big]\leq E[X_n|\Sigma_1] \quad P|\Sigma_1-\sigma.\beta.$, αφού προφανώς είναι $\Sigma_1\subseteq\Sigma_n$. Τότε από την Ιδιότητα του Πύργου (βλ. Πρόταση 2.1.8(v)) και την τελευταία ανισότητα άμεσα έπεται ότι

$$E[X_{n+1}|\Sigma_1]\leq E[X_n|\Sigma_1] \quad P|\Sigma_1-\sigma.\beta.. \tag{2.2}$$

Τέλος, με τη βοήθεια της (2.2) εύκολα αποδεικνύεται το ζητούμενο με επαγωγή στο $n\in\mathbb{N}^*$. □

2.3 Ανισότητες για Martingales

Στην παρούσα ενότητα παραθέτουμε ορισμένες σημαντικές ανισότητες για martingales, με σημαντικότερη εξ'αυτών την ανισότητα του Kolmogorov, η οποία θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμη παρακάτω, όταν θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα της χρεοκοπίας, και σε αυτό το πλαίσιο θα αποδείξουμε την Ανισότητα Lundberg (βλ. Θεώρημα 5.2.6). Προηγουμένως, όμως, κρίνεται σκόπιμο να γίνει αναφορά σε μία από τις βασικότερες έννοιες στη Θεωρία των Martingales, αυτή του χρόνου διακοπής.

Παρακάτω και για την παρούσα ενότητα, θεωρούμε την ακολουθία $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $\mathcal{L}^1(P)$ με κανονική διύλιση $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

***Ορισμός* 2.3.1.** Η συνάρτηση $\tau : \Omega \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ είναι ένας **χρόνος διακοπής** για την $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν $\{\tau = n\} \in \Sigma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επί πλέον, ο χρόνος διακοπής ονομάζεται **φραγμένος** αν και μόνο αν $\sup_{\omega\in\Omega} \tau(\omega) < \infty$. Το σύνολο όλων των φραγμένων χρόνων διακοπής συμβολίζεται με $\mathscr{T}$.

Προφανώς, αν με R_τ συμβολίσουμε το σύνολο τιμών ενός φραγμένου χρόνου διακοπής, τότε το σύνολο τιμών όλων των φραγμένων χρόνων διακοπής $R_{\mathscr{T}} := \bigcup_{\tau\in\mathscr{T}} R_\tau$ είναι υπερσύνολο του $\mathbb{N}$.

Διαισθητικά, ένας χρόνος διακοπής είναι μια χρονική στιγμή διακοπής ενός τυχαίου φαινομένου, η οποία εξαρτάται αποκλειστικά από την ιστορία του φαινομένου.

Λήμμα 2.3.2. Για την συνάρτηση $\tau : \Omega \to \mathbb{N}\cup\{\infty\}$ οι παρακάτω συνθήκες είναι ισοδύναμες:

(i) $\{\tau \le n\} \in \Sigma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $\{\tau = n\} \in \Sigma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη του παρόντος λήμματος αρκεί να δείξουμε τις παρακάτω δύο συνεπαγωγές:
(i) ⇒ (ii) : Έστω ότι το (i) ισχύει, τότε $\{\tau \le n-1\} \in \Sigma_{n-1} \subseteq \Sigma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, αφού υποθέσαμε (στην αρχή της παρούσας ενότητας) ότι η $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι διύλιση. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $\{\tau = n\} = \{\tau \le n\}\setminus\{\tau \le n-1\} \in \Sigma_n$, άρα δείξαμε το (ii).
(ii) ⇒ (i) : Έστω, τώρα, ότι το (ii) ισχύει, τότε $\{\tau = k\} \in \Sigma_k \subseteq \Sigma_n$ για κάθε $k \in \mathbb{N}_n^*$ κι επομένως έχουμε ότι $\{\tau \le n\} = \bigcup_{k=1}^{n}\{\tau = k\} \in \Sigma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, άρα δείξαμε το (i), κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη τόσο της παρούσας συνεπαγωγής όσο και ολόκληρου του λήμματος. □

Παρατήρηση 2.3.3. Από το παραπάνω λήμμα έπεται ότι κάθε χρόνος διακοπής τ ως προς μια διύλιση $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Σ_n-μετρήσιμη συνάρτηση για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, συνεπώς είναι Σ-μετρήσιμη συνάρτηση, δηλαδή τ.μ..

Για $\tau \in \mathscr{T}$ θέτουμε $Z_\tau := \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{\tau=n\}} Z_n$. Τότε η Z_τ είναι τ.μ. (βλ. απόδειξη του (i) του παρακάτω λήμματος). Για την Z_τ παρακάτω παραθέτουμε δύο χρήσιμα αποτελέσματα υπό την μορφή ενός λήμματος.

Λήμμα 2.3.4. Ισχύουν τα εξής:

(i) $|Z_\tau| = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{\tau=n\}} |Z_n|$.

(ii) $EZ_\tau = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{\tau=n\}} Z_n dP$.

Απόδειξη. **(i)** Για κάθε $\omega \in \Omega$ υπάρχει ακριβώς ένα $n_0 := n_{0,\omega} \in \mathbb{N}$ ώστε $\tau(\omega) = n_0$. Επομένως, για κάθε $\omega \in \Omega$ υπάρχει μοναδικό $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\chi_{\{\tau=n_0\}}(\omega) = 1$ και $\chi_{\{\tau=n\}}(\omega) = 0$ για κάθε $n \neq n_0$. Άρα έπεται ότι για κάθε $\omega \in \Omega$ υπάρχει μοναδικό $n_0 := n_{0,\omega} \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\chi_{\{\tau=n_0\}}(\omega) Z_{n_0}(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{\tau=n\}}(\omega) Z_n(\omega) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{\tau=n\}} Z_n\right)(\omega) = Z_\tau(\omega), \tag{2.3}$$

άρα

$$|Z_\tau(\omega)| = \chi_{\{\tau=n_0\}}(\omega) |Z_{n_0}|(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{\tau=n\}}(\omega) |Z_n|(\omega),$$

που είναι το (i).
(ii) Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} EZ_\tau &= \int \left(\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{\tau=n\}} Z_n\right) dP \overset{(2.3)}{=} \int \chi_{\{\tau=n_0\}} Z_{n_0} dP \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int \chi_{\{\tau=n\}} Z_n dP = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{\tau=n\}} Z_n dP, \end{aligned}$$

με την προτελευταία ισότητα να ισχύει διότι για κάθε $\omega \in \Omega$ και $n \in \mathbb{N}\setminus\{n_0\}$ ισχύει ότι $\chi_{\{\tau=n\}}(\omega) = 0$, απ'όπου άμεσα έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}\setminus\{n_0\}$ ισχύει επίσης ότι $\int \chi_{\{\tau=n\}} Z_n dP = 0$. □

Λήμμα (Μεγιστική Ανισότητα) 2.3.5. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$P\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} |Z_n| > \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\tau\in\mathscr{T}} E|Z_\tau|.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα ενδεχόμενα

$$\{|Z_n| > \varepsilon\}, \{|Z_n| \leq \varepsilon\}, \{|Z_n| < \varepsilon\} \in \Sigma_n.$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $A_n := B_n \cap C_n$, όπου $B_n := \{|Z_n| > \varepsilon\}$ και $C_n := \bigcap_{k=0}^{n-1} B_k^c$ με $\bigcap_{k=0}^{-1} B_k^c := \Omega$, απ'όπου άμεσα έπεται ότι η ακολουθία $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της Σ_n.

Τότε έχουμε ότι τα ενδεχόμενα $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανά δύο ασυμβίβαστα, αφού για κάθε $j, m \in \mathbb{N}$ με $j < m$ έχουμε $A_j \cap A_m = \big(B_j \cap B_j^c\big) \cap \big(\bigcap_{0\leq k\neq j\leq m-1} B_k^c\big) \cap B_m = \varnothing$.

Έπειτα για την απόδειξη της μεγιστικής ανισότητας, θα δείξουμε τα παρακάτω πέντε βήματα.

(a) $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |Z_n| > \varepsilon\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{|Z_n| > \varepsilon\}$.

Πράγματι, έχουμε:

$$\begin{aligned} \omega \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{|Z_n| > \varepsilon\} \quad &\Leftrightarrow \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad |Z_n|(\omega) > \varepsilon \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} \quad |Z_n(\omega)| > \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |Z_n(\omega)| > \varepsilon \Leftrightarrow \omega \in \Big\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |Z_n| > \varepsilon\Big\}, \end{aligned}$$

που αποδεικνύει το (a).

(b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\sup_{n\in\mathbb{N}} |Z_n| > \varepsilon\} = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Πράγματι, αρχικά σημειώνουμε ότι η σχέση $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \biguplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ έχει ουσιαστικά αποδειχθεί πριν το βήμα (a). Επίσης, από τον ορισμό του ενδεχομένου A_n ($n \in \mathbb{N}$) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \quad &= \quad \bigcup_{n=0}^{\infty}(B_n \cap C_n) \overset{\textbf{(a)}}{=} \Big\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |Z_n| > \varepsilon\Big\} \cap \left(\bigcup_{n=0}^{\infty} C_n\right) \\ &= \quad \Big\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |Z_n| > \varepsilon\Big\} \cap C_0 \overset{\Omega=C_0}{=} \Big\{\sup_{n\in\mathbb{N}} |Z_n| > \varepsilon\Big\}. \end{aligned}$$

(c) Αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ ορίσουμε την συνάρτηση

$$\tau_r(\omega) := \begin{cases} n & \text{αν } \omega \in A_n \quad \text{και} \quad n \in \mathbb{N}_r \\ r & \text{αν } \omega \in \Omega \setminus \big(\biguplus_{n=0}^{r} A_n\big) \end{cases}$$

τότε $\tau_r \in \mathscr{T}$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι από τον ορισμό της τ_r, για κάθε $r \in \mathbb{N}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}_r$ έχουμε ότι

$$\{\tau_r = n\} = \{\omega \in \Omega : \tau_r(\omega) = n\} = A_n \in \Sigma_n \subseteq \Sigma_r. \tag{2.4}$$

Όμως, αφού $A_n \in \Sigma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει $\biguplus_{n=0}^{r} A_n \in \Sigma_r$, άρα $\Omega \backslash (\biguplus_{n=0}^{r} A_n) \in \Sigma_r$. Επομένως, για κάθε $r \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\{\tau_r = r\} = \{\omega \in \Omega : \tau_r(\omega) = r\} = \Omega \backslash \left(\biguplus_{n=0}^{r} A_n \right) \in \Sigma_r. \tag{2.5}$$

Άρα, σύμφωνα με τις (2.4) και (2.5) δείξαμε ότι $\{\tau_r = n\} \in \Sigma_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επειδή από τον ορισμό της τ_r για κάθε $r \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\omega \in \Omega$ έχουμε ότι $\tau_r(\omega) \leq r < \infty$, τότε έχουμε και ότι $\sup_{\omega \in \Omega} \tau_r(\omega) \leq r < \infty$, άρα έπεται το (c).

(d) Για κάθε $r \in \mathbb{N}$ ισχύει $\sum_{n=0}^{r} P(A_n) \leq \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\tau \in \mathscr{T}} E|Z_\tau|$.

Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ από τον ορισμό του ενδεχομένου A_n έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(A_n) &= \int_{A_n} dP = \int_{\{|Z_n| > \varepsilon\} \cap (\bigcap_{k=0}^{n-1} \{|Z_k| \leq \varepsilon\})} 1 dP \\ &\leq \int_{\{|Z_n| > \varepsilon\} \cap (\bigcap_{k=0}^{n-1} \{|Z_k| \leq \varepsilon\})} \frac{|Z_n|}{\varepsilon} dP = \frac{1}{\varepsilon} \int_{A_n} |Z_n| dP, \end{aligned}$$

απ'όπου, για κάθε $r \in \mathbb{N}$, έπεται ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{r} P(A_n) &\leq \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{r} \int_{A_n} |Z_n| dP = \frac{1}{\varepsilon} \int \sum_{n=0}^{r} \chi_{A_n} |Z_{\tau_r}| dP \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \int \chi_{\biguplus_{n=0}^{r} A_n} |Z_{\tau_r}| dP \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega |Z_{\tau_r}| dP = \frac{1}{\varepsilon} E|Z_{\tau_r}| \\ &\overset{\tau_r \in \mathscr{T}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\tau \in \mathscr{T}} E|Z_\tau|, \end{aligned}$$

άρα δείξαμε το (d).

Τότε, έχουμε ότι

$$P\Big(\sup_{n \in \mathbb{N}} |Z_n| > \varepsilon\Big) \overset{\textbf{(b)}}{=} P\left(\biguplus_{n=0}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A_n) = \lim_{r \to \infty} \sum_{n=0}^{r} P(A_n) \overset{\textbf{(d)}}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\tau \in \mathscr{T}} E|Z_\tau|.$$

Και επειδή δείξαμε την τελευταία σχέση για τυχόν $\varepsilon > 0$, δείξαμε την μεγιστική ανισότητα. □

Λήμμα 2.3.6. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η ακολουθία $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ τ.μ. είναι ένα υπερ-martingale. (αντ. υπο-martingale, αντ. martingale).

(ii) Η ανισότητα $EZ_\upsilon \geq EZ_\tau$ (αντ. $EZ_\upsilon \leq EZ_\tau$, αντ. $EZ_\upsilon = EZ_\tau$) ισχύει για κάθε $\tau, \upsilon \in \mathscr{T}$ ώστε $\upsilon \leq \tau$.

Απόδειξη. Η απόδειξη του παραπάνω λήμματος αρκεί να γίνει για την περίπτωση του υπερ-martingale, αφού για αυτή του υπο-martingale, η απόδειξη είναι όμοια. Οπότε έχουμε:
(i) $\Rightarrow$ *(ii)* : Έστω $\tau, \upsilon \in \mathscr{T}$ ώστε $\upsilon \leq \tau$. Τότε, για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ έχουμε ότι $\{\upsilon = k\} \cap \{\tau = n\} \in \Sigma_n$ και από το Λήμμα 2.3.2(i) ότι $\{\tau \leq n\} \in \Sigma_n$, απ'όπου έπεται ότι

$$\{\upsilon = k\} \cap \{\tau \geq n+1\} = \{\upsilon = k\} \cap \{\tau \leq n\}^c \in \Sigma_n. \tag{2.6}$$

Επειδή $\upsilon \leq \tau$, τότε για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει ότι $\upsilon(\omega) \leq \tau(\omega)$ κι επομένως επίσης έχουμε ότι $\omega \in \{\upsilon = k\} \Leftrightarrow \upsilon(\omega) = k \Rightarrow k \leq \tau(\omega) \Leftrightarrow \omega \in \{\tau \geq k\}$, άρα

$$\{\upsilon = k\} \subseteq \{\tau \geq k\}. \tag{2.7}$$

Επίσης, για κάθε $k, m \in \mathbb{N}$ με $k \neq m$ ισχύει ότι $\{\upsilon = k\} \cap \{\upsilon = m\} = \varnothing$, άρα και ότι $\bigcup_{k=0}^n \{\upsilon = k\} = \biguplus_{k=0}^n \{\upsilon = k\}$. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \omega \in \{\tau = n\} &\Leftrightarrow \tau(\omega) = n \Rightarrow \upsilon(\omega) \leq n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}_n \quad \upsilon(\omega) = k \\ &\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}_n \quad \omega \in \{\upsilon = k\} \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{k=0}^n \{\upsilon = k\}. \end{aligned}$$

Δηλαδή δείξαμε ότι $\{\tau = n\} \subseteq \bigcup_{k=0}^n \{\upsilon = k\} = \biguplus_{k=0}^n \{\upsilon = k\}$, απ'όπου άμεσα έπεται ότι

$$\{\tau = n\} \cap \left(\biguplus_{k=0}^n \{\upsilon = k\} \right) = \{\tau = n\}. \tag{2.8}$$

Επίσης από το (i) έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\int_A Z_n dP \geq \int_A Z_{n+1} dP \quad \text{για κάθε} \quad A \in \Sigma_n. \tag{2.9}$$

Η απόδειξη της ανισότητας του (ii) θα γίνει, τώρα, βάσει των παρακάτω δύο βημάτων.
(a) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $\sum_{n=k}^\infty \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP \leq \int_{\{\upsilon=k\}} Z_k dP$.

Πράγματι, από την (2.9), λαμβάνοντας υπόψη και την (2.6), και για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ έχουμε ότι

$$\int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n+1\}} Z_n dP \geq \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n+1\}} Z_{n+1} dP,$$

απ'όπου θέτοντας $A_{n,k} := \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n+1\}} Z_{n+1} dP + \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP$ έπεται ότι

$$\begin{aligned} A_{n,k} &\leq \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n+1\}} Z_n dP + \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP \\ &= \int_{(\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n+1\})\uplus(\{\upsilon=k\}\cap\{\tau=n\})} Z_n dP \\ &= \int_{\{\upsilon=k\}\cap(\{\tau\geq n+1\}\uplus\{\tau=n\})} Z_n dP = \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n\}} Z_n dP, \end{aligned}$$

δηλαδή δείξαμε ότι για κάθε $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leq n$ ισχύει

$$\int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n+1\}} Z_{n+1}dP + \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP \leq \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n\}} Z_n dP.$$

Συνεπώς, έχουμε

$$\sum_{n=k}^{\infty} \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n\}} Z_n dP \geq \sum_{n=k}^{\infty} \left(\int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n+1\}} Z_{n+1}dP + \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP \right). \quad (2.10)$$

Επειδή, όμως, εξ'υποθέσεως η $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα υπερ-martingale, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η τ.μ. $Z_n \in \mathcal{L}^1(P)$ κι επομένως ισχύει ότι $\infty > \int |Z_n| dP \geq \int Z_n dP = EZ_n$, άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε και ότι

$$\int_A Z_n dP < \infty \quad \text{για κάθε} \quad A \in \Sigma. \quad (2.11)$$

Οπότε το δεύτερο μέλος της (2.10) μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο επιμέρους σειρών και θέτοντας $\ell := n+1$ στην πρώτη σειρά του δεξιού μέλους της παραπάνω ανισότητας έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n\}} Z_n dP &\geq \sum_{\ell=k+1}^{\infty} \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq \ell\}} Z_\ell dP + \sum_{n=k}^{\infty} \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP \\ &= \sum_{n=k+1}^{\infty} \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n\}} Z_n dP + \sum_{n=k}^{\infty} \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP, \end{aligned}$$

απ'όπου λαμβάνοντας εκ νέου υπόψη την (2.11) τελικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP &\leq \sum_{n=k}^{\infty} \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n\}} Z_n dP - \sum_{n=k+1}^{\infty} \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq n\}} Z_n dP \\ &= \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau\geq k\}} Z_k dP \overset{(2.7)}{=} \int_{\{\upsilon=k\}} Z_k dP, \end{aligned}$$

άρα δείξαμε το (a).

(b) $EZ_\upsilon \geq EZ_\tau$.

Πράγματι, από το Λήμμα 2.3.4(ii) και επειδή (εξ'υποθέσεως) $\upsilon \in \mathscr{T}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} EZ_\upsilon &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{\upsilon=k\}} Z_k dP \overset{\textbf{(a)}}{\geq} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{\{\upsilon=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\biguplus_{k=0}^{n}(\{\upsilon=k\}\cap\{\tau=n\})} Z_n dP \\ &\overset{(2.8)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{\tau=n\}} Z_n dP = EZ_\tau, \end{aligned}$$

με την δεύτερη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Fubini (βλ. π.χ. [4], Θεώρημα 9.14 για χ.μ. $(\Omega, \Sigma, \mu) = (\Theta, T, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, όπου μ το αριθμητικό μέτρο (*counting measure*)), λαμβάνοντας υπόψη και την ολοκληρωσιμότητα των τ.μ. Z_n $(n \in \mathbb{N})$, και την τρίτη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του [4], Πόρισμα 6.12(i).

Και επειδή δείξαμε το (b) για αυθαίρετους $\tau, \upsilon \in \mathscr{T}$ ώστε $\upsilon \leq \tau$, τότε αυτό θα ισχύει και για οποιουσδήποτε φραγμένους χρόνους διακοπής με την παραπάνω ιδιότητα, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη της πρώτης συνεπαγωγής.

(ii) ⇒ (i) : Έστω ότι το (ii) ισχύει. Αρκεί να δείξουμε την ισχύ των (χαρακτηριστικών) ιδιοτήτων ενός υπερ-martingale. Όμως, από τις υποθέσεις που κάναμε στην αρχή της παρούσας ενότητας έχουμε ότι η $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η κανονική διύλιση για την $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, άρα η $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι προσαρμοσμένη στην $\{\Sigma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, και ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $Z_n \in \mathcal{L}^1(P)$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε την τρίτη ιδιότητα, δηλαδή την ισχύ της (2.9) για την $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \Sigma_n$ και ας ορίσουμε την συνάρτηση

$$\tau(\omega) := \begin{cases} n+1 & \text{αν } \omega \in A \\ n & \text{αν } \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}.$$

Τότε, ομοίως με το βήμα (c) της απόδειξης του Λήμματος 2.3.5 αποδεικνύεται ότι $\tau \in \mathscr{T}$.

Επίσης ορίζουμε την συνάρτηση $\upsilon(\omega) := n$ για κάθε $\omega \in \Omega$, απ'όπου άμεσα έπεται ότι $\upsilon \in \mathscr{T}$ και $\upsilon \leq \tau$. Τότε, λόγω της ισχύος της (ii) έχουμε ότι $EZ_\upsilon \geq EZ_\tau$. Όμως,

$$\begin{aligned} EZ_\upsilon \geq EZ_\tau \quad &\Leftrightarrow \quad \int_A Z_\upsilon dP + \int_{\Omega\setminus A} Z_\upsilon dP \geq \int_A Z_\tau dP + \int_{\Omega\setminus A} Z_\tau dP \\ &\Leftrightarrow \quad \int_A Z_n dP + \int_{\Omega\setminus A} Z_n dP \geq \int_A Z_{n+1} dP + \int_{\Omega\setminus A} Z_n dP \\ &\Leftrightarrow \quad \int_A Z_n dP \geq \int_A Z_{n+1} dP, \end{aligned}$$

με την τελευταία ισοδυναμία να ισχύει λόγω της (2.11).

Και επειδή δείξαμε την ζητούμενη ανισότητα για αυθαίρετα $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \Sigma_n$, τότε αυτή ισχύει για οποιαδήποτε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \Sigma_n$ κι επομένως δείξαμε την ισχύ της ζητούμενης ιδιότητας των υπερ-martingales, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη της αντίστροφης συνεπαγωγής κι άρα και ολόκληρου του λήμματος.

Η ισοδυναμία των (i) και (ii) για martingales είναι άμεση συνέπεια εκείνων για υπερ-martingales και υπο-martingales. □

***Ορισμός* 2.3.7.** Η ακολουθία $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τ.μ. είναι

(i) **θετική** αν και μόνο αν ισχύει ότι η Z_n είναι θετική τ.μ. για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή αν και μόνο αν $Z_n(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) **ένα θετικό υπερ-martingale** αν και μόνο αν είναι θετική και υπερ-martingale.

Πόρισμα (Ανισότητα Kolmogorov) 2.3.8. Αν $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα θετικό υπερ - martingale, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} Z_n > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon} EZ_0.$$

Απόδειξη. Εξ'υποθέσεως η $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα θετικό υπερ-martingale, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $Z_n > \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{0}$ η μηδενική συνάρτηση και $|Z_n| = Z_n$. Επίσης άμεσα έχουμε ότι $\mathbf{0} \in \mathscr{T}$, καθώς και ότι $\tau > \mathbf{0}$ για κάθε $\tau \in \mathscr{T}$. Τότε, από το Λήμμα 2.3.6 άμεσα έπεται ότι $EZ_\tau \leq EZ_0$ για κάθε $\tau \in \mathscr{T}$, άρα και ότι $\sup_{\tau\in\mathscr{T}} EZ_\tau \leq EZ_0$ κι επομένως, λαμβάνοντας υπόψη και ότι $|Z_n| = Z_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, από το Λήμμα 2.3.5 έπεται το ζητούμενο. $\square$

Κεφάλαιο 3

Επισκόπηση Θεωρίας Κινδύνου

Αντικείμενο αυτού του κεφαλαίου είναι μία χρήσιμη για την παρούσα εργασία επισκόπηση βασικών εννοιών και αποτελεσμάτων της Θεωρίας Κινδύνου. Έτσι, αρχικά σκιαγραφούμε ένα υπόδειγμα της διαχρονικής εξέλιξης του χαρτοφυλακίου των κινδύνων μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, θέτοντας το γενικό πλαίσιο αναφοράς του παρόντος κεφαλαίου (βλ. Ενότητα 3.1). Έπειτα, προχωράμε στην μελέτη των $\sigma.\delta.$ άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων (βλ. Ενότητες 3.2 και 3.3, αντίστοιχα) και εξειδικεύουμε την μελέτη αυτή στα πλαίσια της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου (βλ. Ενότητα 3.4). Τέλος, μελετάμε την $\sigma.\delta.$ συνολικών απαιτήσεων (βλ. Ενότητες 3.5 και 3.6).

Για την πληρέστερη κατανόηση των εννοιών της $\sigma.\delta.$ άφιξης των απαιτήσεων, του αριθμού των απαιτήσεων και των συνολικών απαιτήσεων βλέπε και Σχήματα Β΄1 και Β΄3.

3.1 Το Υπόδειγμα

Για να αναπτύξουμε ένα υπόδειγμα της διαχρονικής εξέλιξης (του χαρτοφυλακίου των κινδύνων) μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, εισάγουμε διαδοχικά

- την $\sigma.\delta.$ άφιξης των απαιτήσεων (*claim arrival process*),
- την $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων (*claim number process*),
- την $\sigma.\delta.$ συνολικών απαιτήσεων (*aggregate claims process*), και
- την $\sigma.\delta.$ του αποθεματικού (*reserve process*), η οποία θα μας απασχολήσει αργότερα στο Κεφάλαιο 5.

Θα δούμε ότι η $\sigma.\delta.$ άφιξης των απαιτήσεων και η $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων καθορίζει η μία την άλλη και ότι η δεύτερη αποτελεί την καρδιά του προβλήματος μελέτης της διαχρονικής εξέλιξης του χαρτοφυλακίου μιας ασφαλιστικής επιχείρησης.

Ας θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων που ασφαλίζονται από κάποια ασφαλιστική εταιρεία. Οι κίνδυνοι προξενούν τις απαιτήσεις (έναντι της εταιρείας) και οδηγούν στην πληρωμή ασφαλίστρων προς αυτήν, η οποία, με τη σειρά της, θα εξοφλήσει τις απαιτήσεις. Το χαρτοφυλάκιο μπορεί να αποτελείται από έναν και μοναδικό ή περισσότερους κινδύνους.

Υποθέτουμε ότι η εταιρεία ενδιαφέρεται πρωτίστως για την συνολική επίδοση του χαρτοφυλακίου, δηλαδή, για το ισοζύγιο μεταξύ ασφαλίστρων και πληρωμών απαιτήσεων υπολογιζόμενο συνολικά για όλους τους κινδύνους. Φυσικά, ένα πλεόνασμα των ασφαλίστρων έναντι των πληρωμών απαιτήσεων θα είναι ευπρόσδεκτο! Στην περίπτωση που το χαρτοφυλάκιο αποτελείται από αρκετούς κινδύνους, αυτό σημαίνει ότι *η εταιρεία δεν ενδιαφέρεται για το ποιος από τους κινδύνους του χαρτοφυλακίου προκαλεί μια συγκεκριμένη απαίτηση.* Αυτή είναι **η συλλογική οπτική της Θεωρίας Κινδύνου**.

Επί πλέον υποθέτουμε ότι στο χαρτοφυλάκιο οι απαιτήσεις (που εγείρουν οι πραγματοποιήσεις των κινδύνων) λαμβάνουν χώρα τυχαία και σε έναν άπειρο χρονικό ορίζοντα ξεκινώντας στο χρόνο μηδέν, έτσι ώστε

- καμιά απαίτηση να μην λαμβάνει χώρα στο χρόνο μηδέν, και

- να μην συμβαίνουν δύο (ή περισσότερες) απαιτήσεις, ταυτόχρονα.

Η υπόθεση της μη ταυτόχρονης πραγματοποίησης δύο (ή περισσότερων) απαιτήσεων φαίνεται ότι μπορεί να γίνει χωρίς βλάβη της γενικότητας. Πράγματι, δεν πρέπει να παρουσιάζεται κάποιο σημαντικό πρόβλημα όταν το χαρτοφυλάκιο είναι μικρό. Όμως, όταν το χαρτοφυλάκιο είναι μεγάλο, εξαρτάται από το είδος της υπό εξέταση ασφάλισης για το αν αυτή η υπόθεση είναι πράγματι αποδεκτή, κι επομένως ανάλογα με την περίπτωση πρέπει να λάβουμε ή να μην λάβουμε υπόψη την πιθανότητα δύο ασφαλισμένοι από το ίδιο μεγάλο χαρτοφυλάκιο να προξενήσουν ένα αυτοκινητιστικό δυστύχημα για το οποίο είναι και οι δύο εν μέρει υπεύθυνοι.

Πάντως, η υπόθεση της μη ταυτόχρονης εμφάνισης δύο απαιτήσεων ακόμα κι όταν κρίνεται ως μη αποδεκτή, μπορεί να διατηρηθεί, αλλάζοντας ελαφρώς την οπτική μας, δηλαδή, με το να θεωρήσουμε τα γεγονότα (που προκαλούν την έγερση) απαίτησης (όπως αυτοκινητιστικά δυστυχήματα) αντί των ατομικών απαιτήσεων. Ο αριθμός των ατομικών απαιτήσεων που εγείρονται για ένα συγκεκριμένο γεγονός απαίτησης μπορεί τότε να ερμηνευτεί ως το μέγεθος του γεγονότος απαίτησης.

Στις επόμενες ενότητες αυτού του κεφαλαίου μετατρέπουμε τις προηγούμενες ιδέες — που περιγράφουν το υπόδειγμα της διαχρονικής εξέλιξης του χαρτοφυλακίου των κινδύνων — σε ένα *πιθανοθεωρητικό* υπόδειγμα.

3.2 Η Σ.Δ. Άφιξης των Απαιτήσεων

Στην παρούσα ενότητα ορίζουμε τόσο την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων όσο και την σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων. Αποδεικνύουμε ότι οι δύο σ.δ. είναι ισοδύναμες και εισάγουμε την έννοια της *«έκρηξης»*. Τέλος, ορίζουμε το μέτρο απαίτησης και παραθέτουμε ένα χρήσιμο αποτέλεσμα που σχετίζεται με αυτό.

***Ορισμός* 3.2.1.** Η ακολουθία $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τ.μ. είναι μια **σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων** αν και μόνο αν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_T \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega\backslash\Omega_T$ να ισχούν τα εξής:

(t_1) $T_0(\omega) = 0$, και

(t_2) $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Επί πλέον, το P-μηδενικό σύνολο Ω_T ονομάζεται **το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Από τις δύο παραπάνω (χαρακτηριστικές) ιδιότητες (της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων) άμεσα προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η τ.μ. T_n είναι θετική.

***Ορισμός* 3.2.2.** Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων. Η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, όπου $W_n := T_n - T_{n-1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι η **σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων** (*claim interarrival process*).

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς άμεσα έπεται για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ότι η τ.μ. W_n είναι θετική, καθώς και ότι ισχύει η σχέση

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k. \tag{3.1}$$

Ερμηνεύοντας, τώρα, τους Ορισμούς 3.2.1 και 3.2.2 σε όρους του υποδείγματος που σκιαγραφήσαμε στην προηγούμενη ενότητα σημειώνουμε τα εξής:

- Η T_n ($n \in \mathbb{N}$) είναι η τ.μ. που δηλώνει τον *χρόνο εμφάνισης / πραγματοποίησης* της n-απαίτησης.

- Η W_n ($n \in \mathbb{N}^*$) είναι η τ.μ. που δηλώνει τον *χρόνο αναμονής μεταξύ της* $n-1$ *και της* n *απαίτησης*.

- Με πιθανότητα ένα *καμία* απαίτηση δεν εγείρεται στον χρόνο μηδέν και δύο (ή παραπάνω) απαιτήσεις δεν εμφανίζονται ταυτόχρονα.

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως οι Ορισμοί 3.2.1 και 3.2.2 βρίσκουν άμεση φυσική ερμηνεία, αφού προφανώς οι χρόνοι άφιξης και οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων θα είναι θετικοί, ενώ λογικά η απαίτηση n θα εμφανίζεται σε χρόνο μεταγενέστερο αυτού στον οποίο εμφανίζεται η απαίτηση $n-1$.

Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου και εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως μια σταθερή σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και την $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως την αντίστοιχη – επαγόμενη από την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε – και το υποθέτουμε – ότι το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων είναι το κενό σύνολο, δηλαδή θέτουμε το $\Omega_T := \varnothing \in \Sigma$.

Από τον Ορισμό 3.2.2 και την (3.1), γίνεται φανερό ότι η σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων καθορίζουν η μία την άλλη. Συγκεκριμένα, έχουμε τα ακόλουθα διαισθητικά μάλλον προφανή, αλλά συνάμα εξαιρετικά χρήσιμα αποτελέσματα.

Λήμμα 3.2.3. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύουν τα εξής:

(i) $\sigma\big(\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}\big) = \sigma\big(\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}\big)$.

(ii) Για τα τυχαία διανύσματα $\mathbf{T_n}, \mathbf{W_n} : \Omega \to \mathbb{R}^n$ με τύπο

$$\mathbf{T_n}(\omega) := (T_1, \ldots, T_n)'(\omega) = (T_1(\omega), \ldots, T_n(\omega))'$$

και

$$\mathbf{W_n}(\omega) := (W_1, \ldots, W_n)'(\omega) = (W_1(\omega), \ldots, W_n(\omega))'$$

για κάθε $\omega \in \Omega$, αντίστοιχα, καθώς και για τον $n \times n$-πίνακα $\mathbf{M_n} = [m_{ij}]$ με

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{αν } i \geq j \\ 0 & \text{αν } i < j \end{cases}$$

έχουμε:

(ii1) Ο $\mathbf{M_n}$ είναι αντιστρέψιμος και ικανοποιεί την σχέση $\det(\mathbf{M_n}) = 1$, και

(ii2) $\mathbf{T_n} = \mathbf{M_n} \circ \mathbf{W_n}$ καθώς και $\mathbf{W_n} = \mathbf{M_n^{-1}} \circ \mathbf{T_n}$.

Απόδειξη. (i) Από το [4], Παρατήρηση 13.10 και την (3.1) έπεται ότι $\sigma\big(\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}\big) \subseteq \sigma\big(\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}\big)$, ενώ επίσης από το [4], Παρατήρηση 13.10 και από τη σχέση $W_k = T_k - T_{k-1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, έπεται ότι $\sigma\big(\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}\big) \subseteq \sigma\big(\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}\big)$. Επομένως, δείξαμε το (i).

(ii) Για την απόδειξη του πρώτου ζητουμένου του (ii) θα δείξουμε με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}^*$ τη σχέση

$$\det(\mathbf{M_n}) = 1, \tag{3.2}$$

οπότε έχουμε:

• Για $n = 1$ (εξ'ορισμού) έχουμε ότι $\mathbf{M_1} = [m_{11}] = [1]$, άρα και ότι $\det(\mathbf{M_1}) = \det([1]) = 1$, δηλαδή η (3.2) ισχύει.

• Έστω ότι η (3.2) ισχύει για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$, τότε έχουμε ότι ο πίνακας

$$\mathbf{M_{n+1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

είναι τριγωνικός κάτω (βλ. π.χ. [2], Ορισμός II.19) κι επομένως έχουμε ότι

$$\det(\mathbf{M_{n+1}}) = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1)^{1+1}\det(\mathbf{M_n}) = \det(\mathbf{M_n}) = 1,$$

με την τελευταία ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια της υπόθεσης της επαγωγής. Άρα δείξαμε την (3.2), από την οποία έπεται ότι $\det(\mathbf{M_n}) \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ κι επομένως ότι ο $\mathbf{M_n}$ είναι αντιστρέψιμος (βλ. π.χ. [2], Θεώρημα III.37), κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του (ii1).

• Για την απόδειξη του δεύτερου ζητούμενου του (ii) αρχικά σημειώνουμε ότι η ισχύς της

$$\mathbf{M_n} \circ \mathbf{W_n} = \mathbf{M_n}\mathbf{W_n} \tag{3.3}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ είναι άμεση συνέπεια του [3], Θεώρημα IV.8.

Επίσης, από την (3.3) και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{M_n} \circ \mathbf{W_n} &= \mathbf{M_n}\mathbf{W_n} = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 \\ \dots \\ W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n m_{1j} W_1 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n m_{nj} W_n \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_{11}W_1 + \sum_{j>1}^n m_{1j} W_1 \\ \dots \\ \sum_{j=1}^n m_{nj} W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 \\ \dots \\ W_1 + \dots + W_n \end{bmatrix} \overset{(3.1)}{=} \begin{bmatrix} T_1 \\ \dots \\ T_n \end{bmatrix} = \mathbf{T_n}, \end{aligned}$$

άρα δείξαμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$\mathbf{M_n W_n} = \mathbf{M_n} \circ \mathbf{W_n} = \mathbf{T_n}. \tag{3.4}$$

Τέλος, από το (ii1) έχουμε ότι ο $\mathbf{M_n}$ είναι αντιστρέψιμος κι επομένως θα υπάρχει μοναδικός αντίστροφος $\mathbf{M_n^{-1}}$ ώστε $\mathbf{M_n M_n^{-1}} = \mathbf{I_n} = \mathbf{M_n^{-1} M_n}$, όπου $\mathbf{I_n}$ ο $n \times n$-μοναδιαίος πίνακας. Από την τελευταία σχέση και λαμβανομένης υπόψη της (3.4) για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι

$$\mathbf{T_n} = \mathbf{M_n} \circ \mathbf{W_n} \Leftrightarrow \mathbf{T_n} = \mathbf{M_n W_n} \Leftrightarrow \mathbf{M_n^{-1} T_n} = \mathbf{W_n} \Leftrightarrow \mathbf{M_n^{-1}} \circ \mathbf{T_n} = \mathbf{W_n},$$

με την τελευταία ισοδυναμία να ισχύει διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\mathbf{M_n^{-1}} \circ \mathbf{T_n} = \mathbf{M_n^{-1} T_n}$ (άμεση συνέπεια του [3], Θεώρημα IV.8). $\square$

Το Λήμμα 3.2.3(i) ουσιαστικά δηλώνει ότι η *πληροφορία* που είναι διαθέσιμη από την γνώση (της σ.δ.) των χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι *ίδια/ισοδύναμη* με την πληροφορία που είναι διαθέσιμη από την γνώση (της σ.δ.) των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων. Μια εναλλακτική διατύπωση των παραπάνω είναι ότι οι σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι *ισοδύναμες*.

Επί πλέον, το (ii) του εν λόγω λήμματος υποδηλώνει ότι αν γνωρίζουμε τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων, τότε μπορούμε να βρούμε τον χρόνο άφιξης κάθε απαίτησης (μέσω του πίνακα $\mathbf{M_n}$), και αντίστροφα γνωρίζοντας τους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων μπορούμε να βρούμε τους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων (μέσω του πίνακα $\mathbf{M_n^{-1}}$). Δηλαδή, το Λήμμα 3.2.3 ουσιαστικά αποδεικνύει για τις σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων – αυστηρά και στα πλαίσια του πιθανοθεωρητικού υποδείγματος που έχουμε εισάγει – ό,τι διαισθητικά είναι μάλλον προφανές κι εκεί ακριβώς είναι που έγκειται η σπουδαιότητά του.

Η παραπάνω αντιστοιχία μεταξύ χρόνων άφιξης των απαιτήσεων και ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων διατηρείται και για τις αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας όπως γίνεται φανερό στο ακόλουθο λήμμα, του οποίου η απόδειξη είναι προφανής.

Λήμμα 3.2.4. Οι κατανομές των τυχαίων διανυσμάτων του Λήμματος 3.2.3 ικανοποιούν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ τα εξής:

$$P_{\mathbf{T_n}} = (P_{\mathbf{W_n}})_{\mathbf{M_n}} \quad \text{και} \quad P_{\mathbf{W_n}} = (P_{\mathbf{T_n}})_{\mathbf{M_n^{-1}}}.$$

Οι υποθέσεις του υποδείγματος που αναπτύχθηκε στην Ενότητα 3.1 δεν αποκλείουν την δυνατότητα πραγματοποίησης απείρως πολλών απαιτήσεων σε πεπερασμένο χρόνο, δηλαδή την πραγματοποίηση του ενδεχομένου που ορίζεται ακολούθως.

***Ορισμός* 3.2.5.** Το ενδεχόμενο $\{\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\}$ ονομάζεται **έκρηξη**.

Παρακάτω παραθέτουμε δύο αποτελέσματα (υπό τη μορφή λημμάτων) που αναφέρονται στην πιθανότητα της έκρηξης.

Λήμμα 3.2.6. Αν $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} ET_n < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.

Απόδειξη. Αν θεωρήσουμε το σύνολο $A := \{\omega \in \Omega : \sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n(\omega) = \infty\} \in \Sigma$, τότε εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης του Lebesgue (βλ. π.χ. [4], Πόρισμα 6.8) εύκολα αποδεικνύεται (με απαγωγή σε άτοπο) ότι $P(A) = 0$. □

Πόρισμα 3.2.7. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} EW_n < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.

Απόδειξη. Εξ'υποθέσεως έχουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} EW_n < \infty$, άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ πρέπει $\infty > EW_n = E[T_n - T_{n-1}]$, απ'όπου άμεσα έπεται ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ ισχύει

$$\infty > \sum_{n=1}^{k} E[T_n - T_{n-1}] = E\Big[\sum_{n=1}^{k}(T_n - T_{n-1})\Big] = E[T_k - T_0] = ET_k, \tag{3.5}$$

με την τελευταία ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια της (t_1).

Επομένως, όταν $\sum_{n=1}^{\infty} EW_n < \infty$, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} EW_n &= \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} EW_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k} E[T_n - T_{n-1}] \overset{(3.5)}{=} \lim_{k\to\infty} E\Big[\sum_{n=1}^{k}(T_n - T_{n-1})\Big]\\ &\overset{(3.5)}{=} \lim_{k\to\infty} ET_k = \sup_{k\to\infty} ET_k = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} ET_n,\end{aligned}$$

με την προτελευταία ισότητα να ισχύει λόγω του [9], Πρόταση 2.6.3, και λαμβανομένου υπόψη του ότι η $\{ET_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία (θετικών αριθμών), αφού η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών τ.μ. (ως σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων).

Επομένως, τελικά έχουμε ότι $\sup_{n\in\mathbb{N}^*} ET_n = \sum_{n=1}^{\infty} EW_n < \infty$ κι άρα σύμφωνα με το Λήμμα 3.2.6 άμεσα έπεται το ζητούμενο. □

Στο σημείο αυτό αξίζει να αναφέρουμε ότι κατά την ανάπτυξη ενός υποδείγματος για μια συγκεκριμένη ασφαλιστική επιχείρηση, μια από τις πρώτες αποφάσεις που πρέπει να ληφθεί είναι η απόφαση για το αν θα πρέπει να θεωρήσουμε την πιθανότητα έκρηξης ίση με το μηδέν ή όχι. Αυτή φυσικά είναι μια απόφαση που αφορά την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων.

Κλείνουμε την παρούσα ενότητα εισάγοντας μία έννοια που στο Κεφάλαιο 4 θα αποδειχθεί ως ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο για τον χαρακτηρισμό της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων – η οποία αποτελεί αντικείμενο μελέτης στην αμέσως επόμενη ενότητα – μέσω martingales. Για $n \in \mathbb{N}^*$ το γράφημα της T_n ορίζεται από την απεικόνιση $U_n : \Omega \to \Omega\times\mathbb{R}$ με τύπο $U_n(\omega) := (\omega, T_n(\omega))$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η U_n είναι $\Sigma-\Sigma\otimes\mathcal{B}(\mathbb{R})$-μετρήσιμη (βλ. Λήμμα 3.2.9(i)).

***Ορισμός* 3.2.8.** Η συνολοσυνάρτηση $\mu : \Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0, \infty]$ με τύπο

$$\mu(C) := \sum_{n=1}^{\infty} P_{U_n}(C)$$

για κάθε $C \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, όπου $P_{U_n}(C) := P\big(U_n^{-1}(C)\big)$ για κάθε $C \in \Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, ονομάζεται το **μέτρο απαίτησης** που επάγεται από την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Το μ είναι μέτρο (βλ. Λήμμα 3.2.9(ii)).

Λήμμα 3.2.9. Ισχύουν τα εξής:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η απεικόνιση U_n είναι $\Sigma - \Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-μετρήσιμη.

(ii) Η συνολοσυνάρτηση μ είναι ένα μέτρο.

Απόδειξη. **(i)** Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} U_n^{-1}(A \times B) &:= \{\omega \in \Omega : U_n(\omega) \in A \times B\} = \{\omega \in \Omega : \omega \in A, T_n(\omega) \in B\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \omega \in A\} \cap \{\omega \in \Omega : T_n(\omega) \in B\} = A \cap \{T_n \in B\}, \end{aligned}$$

οπότε ισχύει ότι

$$U_n^{-1}(A \times B) = A \cap \{T_n \in B\} = A \cap T_n^{-1}(B) \in \Sigma, \tag{3.6}$$

αφού (εξ'υποθέσεως) για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η T_n είναι τ.μ. κι επομένως ισχύει ότι $T_n^{-1}(B) \in \Sigma$ (κι ακόμη η Σ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές ως σ-άλγεβρα).

Επομένως, η U_n είναι πράγματι $\Sigma - \Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-μετρήσιμη.

(ii) Αρκεί να δείξουμε για την μ τις δύο (χαρακτηριστικές) ιδιότητες του μέτρου, οπότε έχουμε:

(a) $\mu(\varnothing) = 0$.

Πράγματι, επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η P_{U_n} είναι κατανομή πιθανότητας, έχουμε ότι

$$\mu(\varnothing) := \sum_{n=1}^{\infty} P_{U_n}(\varnothing) = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0.$$

(b) Για κάθε $\{C_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ ακολουθία στο $\Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ώστε $C_k \cap C_j = \varnothing$ για κάθε $k, j \in \mathbb{N}^*$ με $k \neq j$, ισχύει ότι $\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k)$.

Πράγματι, λαμβάνοντας εκ νέου υπόψη ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η P_{U_n} είναι κατανομή πιθανότητας έχουμε:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{U_n}\left(\biguplus_{k=1}^{n} C_k\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} P_{U_n}(C_k) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} P_{U_n}(C_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k),$$

με την προτελευταία ισότητα να ισχύει λόγω του Θεωρήματος Fubini (βλ. π.χ. [4], Θεώρημα 9.13 για χ.μ. $(\Omega, \Sigma, \mu) = (\Theta, T, \nu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), P)$). □

Τέλος, παραθέτουμε ένα αποτέλεσμα χρήσιμο για υπολογιστικούς σκοπούς, που αφορά το μέτρο απαίτησης.

Λήμμα 3.2.10. Για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

$$\mu(A \times B) = \int_A \Bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \in B\}} \Bigg) dP.$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\int_A \chi_{\{T_n \in B\}} dP = \int \chi_A \chi_{\{T_n \in B\}} = \int \chi_{A \cap \{T_n \in B\}} dP = P(A \cap \{T_n \in B\}), \tag{3.7}$$

οπότε για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu(A \times B) &= \sum_{n=1}^{\infty} P\big(U_n^{-1}(A \times B)\big) \overset{(3.6)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} P(A \cap \{T_n \in B\}) \overset{(3.7)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int \chi_{A \cap \{T_n \in B\}} dP \\ &= \int \Bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A \cap \{T_n \in B\}} \Bigg) dP = \int \Bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_A \chi_{\{T_n \in B\}} \Bigg) dP \\ &= \int \chi_A \Bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \in B\}} \Bigg) dP = \int_A \Bigg(\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \in B\}} \Bigg) dP, \end{aligned}$$

με την τέταρτη από το τέλος ισότητα να ισχύει από το Θεώρημα B.Levi (βλ. π.χ. [4], Πόρισμα 6.10). □

3.3 Η Σ.Δ. του Αριθμού των Απαιτήσεων

Στην παρούσα ενότητα εισάγουμε την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και καταδεικνύουμε ότι οι σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων καθορίζουν η μία την άλλη. Παραθέτουμε ακόμη δύο αποτελέσματα που αναφέρονται στο πως συνδέεται η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με την πιθανότητα της έκρηξης. Τέλος, ορίζουμε τις έννοιες της προσαύξησης, των ανεξάρτητων και των στάσιμων προσαυξήσεων για την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, και δίνουμε ένα αποτέλεσμα που αναφέρεται στη σχέση της προσαύξησης με το μέτρο απαίτησης που ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα.

***Ορισμός* 3.3.1.** Μία οικογένεια $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ τ.μ. ονομάζεται **σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων** αν και μόνο αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_N \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_N$ να ισχύουν τα εξής:

(n_1) $N_0(\omega) = 0$,

(n_2) $N_t(\omega) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ για κάθε $t \in (0, \infty)$,

(n_3) $N_t(\omega) = \inf_{s \in (t,\infty)} N_s(\omega)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$,

(n_4) $\sup_{s \in [0,t)} N_s(\omega) \le N_t(\omega) \le \sup_{s \in [0,t)} N_s(\omega) + 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, και

(n_5) $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Επί πλέον, το P-μηδενικό σύνολο Ω_N ονομάζεται **το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Ερμηνεύοντας, τώρα, τον παραπάνω ορισμό σε όρους του υποδείγματος που σκιαγραφήσαμε στην Ενότητα 3.1 σημειώνουμε τα εξής:

- Η N_t $(t \in \mathbb{R}_+)$ είναι η τ.μ. που δηλώνει τον *αριθμό των απαιτήσεων* που εγείρονται/εμφανίζονται στο (χρονικό) διάστημα $[0, t]$.

- Σχεδόν όλες – εκτός από ορισμένες μηδενικού μέτρου – οι τροχιές της $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ξεκινούν από το μηδέν (βλ. (n_1)), είναι δεξιά συνεχείς (βλ. (n_3)), αυξάνουν με άλματα μοναδιαίου ύψους στα σημεία ασυνέχειας (βλ. (n_4)), και τείνουν (αύξουσες) στο άπειρο (βλ. (n_5)).

Παρατηρούμε, λοιπόν, πως – όπως και στην περίπτωση των Ορισμών 3.2.1 και 3.2.2 (των σ.δ. άφιξης και ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων) – ο Ορισμός 3.3.1 βρίσκει άμεση φυσική ερμηνεία και βρίσκεται σε απόλυτη συμφωνία με την κοινή λογική για τον τρόπο με τον οποίο εμφανίζονται οι απαιτήσεις. Σε χρόνο μηδέν δεν έχουμε καμία απαίτηση, ενώ προϊόντος του χρόνου ο αριθμός των απαιτήσεων – που προφανώς για να έχει νόημα παίρνει μόνο θετικές ακέραιες τιμές ή την τιμή άπειρο – αυξάνει. Μάλιστα, όταν αυτό γίνεται, η αύξηση δεν είναι μεγαλύτερη της μίας απαίτησης, αφού σύμφωνα και με τα όσα αναφέρθηκαν στην Ενότητα 3.2 δύο ή περισσότερες απαιτήσεις δεν εμφανίζονται ταυτόχρονα (με πιθανότητα ένα).

Το πρώτο μας αποτέλεσμα διατυπώνει τον ισχυρισμό ότι κάθε σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων επάγεται από μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων (βλ. και Σχήμα Β΄1).

Θεώρημα 3.3.2. Αν $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και για κάθε $\omega \in \Omega$ και $t \in \mathbb{R}_+$ θέσουμε

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \le t\}}(\omega), \tag{3.8}$$

τότε για την $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_N = \Omega_T$, και

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\omega \in \Omega\setminus\Omega_T$ ισχύει

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}. \tag{3.9}$$

Απόδειξη. (i) Αρκεί να δείξουμε ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τις (n_1)-(n_5). Όμως, η ισχύς των (n_1) και (n_2) είναι προφανής. Η απόδειξη των υπόλοιπων ιδιοτήτων θα γίνει βάσει των παρακάτω βημάτων και για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_T$.

(a) Η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι αύξουσα ως προς t.

Άμεση συνέπεια της (3.8).

(b) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega) = \min_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$.

Αρχικά (και για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_N$) θέτουμε $\{T_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}} := \{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $t_n < t_{n+1}$, αφού η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών τ.μ. ως σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων. Και επειδή το $\mathbb{R}_+ = \bigcup_{n=0}^{\infty}[t_n, t_{n+1})$ έπεται ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ θα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $t \in [t_{n_0}, t_{n_0+1})$. Όμως, για κάθε $t \in [t_{n_0}, t_{n_0+1})$ από την (3.8) άμεσα έχουμε ότι $N_t(\omega) = N_{t_{n_0}}(\omega)$, άρα και ότι

$$N_t(\omega) = \min\{N_s(\omega) : s \in [t_{n_0}, \infty)\} = \min\{N_s(\omega) : s \in (t, \infty)\} = \inf\{N_s(\omega) : s \in (t, \infty)\}$$

(αφού η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι αύξουσα ως προς t), κάτι που ουσιαστικά αποδεικνύει το (b).

(c) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \le N_t(\omega) \le \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$.

Πράγματι, αρχικά σημειώνουμε ότι επειδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι αύξουσα, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε $N_t(\omega) = \sup_{s\in[0,t]} N_s(\omega) \ge \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega)$. Επομένως, η πρώτη ανισότητα του (c) ισχύει, άρα αρκεί να δείξουμε την δεύτερη.

Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $s \in [0, t)$ προφανώς ισχύει $\bigcup_{s\in[0,t)}\{T_n \le s\} = \{T_n < t\}$, άρα (για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_T$)

$$\chi_{\{T_n<t\}}(\omega) = \chi_{\bigcup_{s\in[0,t)}\{T_n\le s\}}(\omega) = \sup_{s\in[0,t)} \chi_{\{T_n\le s\}}(\omega). \tag{3.10}$$

Επίσης επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η T_n είναι (μετρήσιμη) συνάρτηση κι ακόμη επειδή η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι εξ'υποθέσεως γνησίως αύξουσα, έπεται ότι αν $t \in \mathbb{R}_+$ και αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $T_{n_0}(\omega) = t$, τότε το n_0 είναι μοναδικό. Επομένως, θα έχουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n=t\}} = \chi_{\{T_{n_0}=t\}}(\omega). \tag{3.11}$$

Οπότε, τελικά έχουμε ότι

$$N_t(\omega) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n<t\}\uplus\{T_n=t\}}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty}\big(\chi_{\{T_n<t\}}(\omega) + \chi_{\{T_n=t\}}\big)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n<t\}}(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n=t\}}(\omega) \overset{(3.11)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n<t\}}(\omega) + \chi_{\{T_{n_0}=t\}}(\omega)$$

$$\overset{(3.10)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \sup_{s\in[0,t)} \chi_{\{T_n\le s\}}(\omega) + \chi_{\{T_{n_0}=t\}}(\omega) = \sup_{s\in[0,t)} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n\le s\}}(\omega) + \chi_{\{T_{n_0}=t\}}(\omega),$$

με την δεύτερη ισότητα να ισχύει ακόμα και στην περίπτωση όπου $N_t(\omega) = \infty$, αφού σύμφωνα με την (3.11) η δεύτερη σειρά αποτελείται ουσιαστικά από έναν μόνον όρο την $\chi_{\{T_{n_0}=t\}}(\omega) \in \{0,1\}$, ενώ επίσης ισχύει ότι

$$\chi_{\{T_n=t\}}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{αν } n = n_0 \\ 0 & \text{αν } n \in \mathbb{N} : n \neq n_0 \end{cases}.$$

Επομένως, η παρουσία ενός αρκούντως μεγάλου t είναι αυτή που έχει ως συνέπεια την πραγματοποίηση του ενδεχομένου $\{T_n < t\}$ άπειρες φορές κι άρα το να απειρίζονται οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n<t\}}$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n\le t\}}$. Άρα δείξαμε ότι

$$N_t(\omega) = \sup_{s\in[0,t)} \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n\le s\}}(\omega) + \chi_{\{T_{n_0}=t\}}(\omega). \tag{3.12}$$

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

• Αν $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) = \infty$, τότε από την (3.12) άμεσα έπεται η ισχύς του (c).

• Αν $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) < \infty$, τότε επειδή για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $\chi_{\{T_{n_0}=t\}}(\omega) \le 1$, από την (3.12) άμεσα έχουμε την ανισότητα $N_t(\omega) \le \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$, κάτι που ολοκληρώνει και την απόδειξη του (c).

(d) $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Άμεση συνέπεια των (n_1) και (a).

Και επειδή δείξαμε τα (b)-(d) για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_T$, τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης $\Omega_N = \Omega_T$, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του (i).

(ii) Αρχικά παρατηρούμε ότι για $n = 0$ και για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_T$, επειδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι αύξουσα και ισχύει $N_0(\omega) = 0$, για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_T$, έχουμε ότι

$$\inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = 0\} = 0 = T_0(\omega),$$

με την δεύτερη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι εξ'υποθέσεως η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων.

Έστω, τώρα, $n \in \mathbb{N}^*$ και $\omega \in \Omega\setminus\Omega_T$, τότε διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

• Αν δεν υπάρχει $t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $N_t(\omega) = n$, τότε το $\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\} = \varnothing$, άρα το $\inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\} := \infty$. Επομένως, επειδή τα n και ω είναι αυθαίρετα, για κάθε

$n \in \mathbb{N}^*$ και $\omega \in \Omega\setminus\Omega_T$ έχουμε ότι (ο χρόνος άφιξης) $T_n(\omega) = T_1(\omega) = \infty$, δηλαδή η σ.δ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ άφιξης των απαιτήσεων εκπίπτει στην $\{T_0, T_1\}$ με $T_1(\omega) = \infty$ για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_T$ κι από το γεγονός αυτό άμεσα έπεται η ισχύς της (3.9) για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\omega \in \Omega\setminus\Omega_T$.

• Αν υπάρχει $t \in \mathbb{R}_+$ με $N_t(\omega) = n$, τότε θεωρούμε τον $t_0 := \min\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}$. Οπότε, από την (3.8) έχουμε ότι $\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{\{T_k\le t_0\}}(\omega) = n$. Κι επειδή η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι πρέπει οι n-πρώτοι όροι της τελευταίας σειράς να είναι μη μηδενικοί και κανένας άλλος, άρα ισχύει ότι $T_n(\omega) = t_0$ και $T_{n+1}(\omega) > t_0$.

Επομένως, και για την δεύτερη περίπτωση – άρα και γενικά – δείξαμε την ισχύ της (3.9) για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\omega \in \Omega\setminus\Omega_T$. Και επειδή στην αρχή της απόδειξης επίσης δείξαμε την (3.9) για $n = 0$ και για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_T$, τελικά δείξαμε την (ii), ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του θεωρήματος. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα αποτελεί το αντίστροφο του Θεωρήματος 3.3.2 και δηλώνει ότι κάθε σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων επάγεται από μία σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων (βλ. επίσης και Σχήμα Β΄1).

Θεώρημα 3.3.3. Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και για κάθε $\omega \in \Omega$ και $n \in \mathbb{N}$ θέσουμε $T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\}$, τότε για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_T = \Omega_N$, και

(ii) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega\setminus\Omega_N$ ισχύει $N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n\le t\}}(\omega)$.

Απόδειξη. **(i)** Αρχικά σημειώνουμε ότι από τον ορισμό του $T_0(\omega)$ έχουμε ότι $T_0(\omega) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_N$. Επομένως, για να δείξουμε την (i) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_N$ ισχύει $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_N$ θέτουμε

$$A_n := A_n(\omega) := \{t \in \mathbb{R}_+ : N_t(\omega) = n\},$$

οπότε άμεσα έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $A_{n-1} \cap A_n = \varnothing$, καθώς και ότι $s < t$ για κάθε $(s,t) \in A_{n-1} \times A_n$, απ'όπου συνεπάγεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_N$ ισχύει η $T_{n-1}(\omega) := \inf A_{n-1}(\omega) \le \inf A_n(\omega) =: T_n(\omega)$.

Αν, τώρα, υπήρχε $n \in \mathbb{N}^*$ και $\omega \in \Omega\setminus\Omega_N$ ώστε $T_{n-1}(\omega) = T_n(\omega)$, τότε θα υπήρχε (τουλάχιστον ένα) $s_0 \in A_{n-1}$ ώστε $T_n(\omega) = T_{n-1}(\omega) \le s_0 < T_n(\omega)$, που είναι άτοπο. Επομένως, πρέπει $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $\omega \in \Omega\setminus\Omega_N$, κάτι που αποδεικνύει την (i).

(ii) Έστω $n \in \mathbb{N}^*$ και $t \in \mathbb{R}_+$, τότε για κάθε $\omega \in \Omega \backslash \Omega_N$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \omega \in \{T_n \leq t\} &\Leftrightarrow T_n(\omega) \leq t \Leftrightarrow \inf\{s \in \mathbb{R}_+ : N_s(\omega) = n\} \leq t \\ &\Leftrightarrow \exists s \in \mathbb{R}_+ \quad [N_s(\omega) = n \quad \& \quad s \leq t] \\ &\Rightarrow \exists s \in [0,t] \quad n = N_s(\omega) \leq N_t(\omega) \\ &\Rightarrow N_t(\omega) \geq n \Leftrightarrow \omega \in \{N_t \geq n\}, \end{aligned}$$

με την πρώτη συνεπαγωγή να ισχύει διότι η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων. Άρα δείξαμε ότι

$$\{\omega \in \Omega \backslash \Omega_N : T_n(\omega) \leq t\} \subseteq \{\omega \in \Omega \backslash \Omega_N : N_t(\omega) \geq n\}. \tag{3.13}$$

Επίσης, για κάθε $\omega \in \Omega \backslash \Omega_N$ τέτοιο ώστε $\omega \in \{N_t \geq n\}$ έχουμε ότι $N_t(\omega) \geq n$ και για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ ισχύει $N_t(\omega) \geq N_s(\omega)$. Τότε:

- Αν $N_s(\omega) = \infty$, τότε $N_t(\omega) = \infty$ και επειδή

$$\{T_\infty \leq t\} = \{\sup_{n \in \mathbb{N}^*} T_n \leq t\} = \{N_t = \infty\} = \{N_t \geq \infty\},$$

θα έχουμε $T_\infty(\omega) \leq t$, άρα $T_n(\omega) \leq t$. Επομένως,

$$\{\omega \in \Omega \backslash \Omega_N : T_n(\omega) \leq t\} \supseteq \{\omega \in \Omega \backslash \Omega_N : N_t(\omega) \geq n\}.$$

- Για $N_s(\omega) \in \mathbb{N}$, έπεται ότι θα υπάρχει $s_0 \in [0,t]$ ώστε $N_{s_0}(\omega) = n$. Επομένως, το $\inf\{s \in \mathbb{R}_+ : N_s(\omega) = n\} \in [0,t]$, κάτι που από τον ορισμό της τ.μ. T_n ($n \in \mathbb{N}^*$) έπεται ότι $T_n(\omega) \leq t$, δηλαδή ότι $\omega \in \{T_n \leq t\}$.

Άρα $\{\omega \in \Omega \backslash \Omega_N : T_n(\omega) \leq t\} \supseteq \{\omega \in \Omega \backslash \Omega_N : N_t(\omega) \geq n\}$ κι επομένως λαμβάνοντας υπόψη και την (3.13) άμεσα έπεται ότι

$$\{\omega \in \Omega \backslash \Omega_N : T_n(\omega) \leq t\} = \{\omega \in \Omega \backslash \Omega_N : N_t(\omega) \geq n\}. \tag{3.14}$$

Επομένως για κάθε $\omega \in \Omega \backslash \Omega_N$ έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{N_t \geq n\}}(\omega) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{N_t(\omega) - \text{μονάδες}} = N_t(\omega),$$

κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη τόσο του (ii) όσο και ολόκληρου του θεωρήματος. $\square$

Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου, θεωρούμε την $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ως μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, την $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ως μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων που επάγεται από την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και την $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ως την σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, που επάγεται από την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης (της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων ή της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, αφού $\Omega_T = \Omega_N$) είναι το κενό σύνολο, δηλαδή θέτουμε το $\Omega_T = \Omega_N = \varnothing$.

Εξαιτίας της παραπάνω υπόθεσης, παίρνουμε δύο απλές, αλλά πολύ χρήσιμες ισότητες, που καταδεικνύουν το ότι ορισμένα ενδεχόμενα που καθορίζονται από την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων μπορούν να ερμηνευτούν (ισοδύναμα) ως ενδεχόμενα που καθορίζονται από την σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων κι αντίστροφα.

Λήμμα 3.3.4. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύουν τα εξής:

(i) $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$.

(ii) $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t\} \setminus \{T_{n+1} \leq t\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

Απόδειξη. **(i)** Άμεση συνέπεια της (3.14) και του ότι υποθέσαμε το $\Omega_N = \varnothing$.
(ii) Επειδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, τότε για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει ότι $N_t(\omega) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ κι επομένως, λαμβάνοντας υπόψη και το (i), έχουμε:

$$\{N_t = n\} = \{N_t \geq n\} \setminus \{N_t \geq n+1\} = \{T_n \leq t\} \setminus \{T_{n+1} \leq t\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\},$$

άρα δείξαμε την ζητούμενη ισότητα ενδεχομένων. □

Άμεση συνέπεια του (i) του Λήμματος 3.3.4 αποτελεί το παρακάτω αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.3.5. Ισχύει $\sigma\big(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sigma\big(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\big)$.

Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν προηγουμένως, δεν πρέπει να μας εκπλήσει το ότι η έκρηξη μπορεί επίσης να εκφραστεί μέσω της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, κάτι που καταδεικνύεται στα παρακάτω δύο αποτελέσματα.

Λήμμα 3.3.6. Για την πιθανότητα της έκρηξης ισχύει

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\right) = P\left(\bigcup_{t\in\mathbb{N}^*} \{N_t = \infty\}\right) = P\left(\bigcup_{t\in(0,\infty)} \{N_t = \infty\}\right).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την ισότητα ενδεχομένων

$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\right\} = \bigcup_{t\in\mathbb{N}^*} \{N_t = \infty\} = \bigcup_{t\in(0,\infty)} \{N_t = \infty\}.$$

Για το σκοπό αυτό αποδεικνύουμε πρώτα τα παρακάτω τρία βήματα.
(a) $\bigcup_{t\in\mathbb{N}^*} \{N_t = \infty\} = \bigcup_{t\in(0,\infty)} \{N_t = \infty\}$.

Πράγματι, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\omega \in \bigcup_{t\in(0,\infty)} \{N_t = \infty\} &\Leftrightarrow \exists t \in (0,\infty) \quad N_t(\omega) = \infty \\
&\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* \quad \text{με} \quad m \geq t > 0 \quad N_m(\omega) \geq N_t(\omega) = \infty \\
&\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* \quad \omega \in \{N_m = \infty\} \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} \{N_m = \infty\},
\end{aligned}
$$

με την πρώτη συνεπαγωγή να αποτελεί άμεση συνέπεια του Αξιώματος των Αρχιμήδη-Ευδόξου (βλ. π.χ. [7], Πόρισμα 3.16) και του ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι αύξουσα.

Άρα $\bigcup_{t\in(0,\infty)}\{N_t = \infty\} \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*}\{N_m = \infty\} = \bigcup_{t\in\mathbb{N}^*}\{N_t = \infty\}$, κάτι που ουσιαστικά αποδεικνύει το (a), αφού η αντίστροφη σχέση εγκλεισμού προκύπτει άμεσα από το ότι το $\mathbb{N}^* \subseteq (0,\infty)$.

(b) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}\{N_t \geq n\} = \{N_t = \infty\}$.

Πράγματι, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \{N_t \geq n\} &\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \quad N_t(\omega) \geq n \Leftrightarrow N_t(\omega) \geq \lim_{n\to\infty} n = \infty \\
&\Leftrightarrow N_t(\omega) = \infty \Leftrightarrow \omega \in \{N_t = \infty\},
\end{aligned}
$$

άρα δείξαμε το (b).

(c) $\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\right\} = \bigcup_{t\in\mathbb{N}^*}\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n \leq t\right\}$.

Πράγματι, έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\omega \in \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\right\} &\Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n(\omega) < \infty \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}_+ \quad \sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n(\omega) \leq t \\
&\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^* \quad \sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n(\omega) \leq m \Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}^*} \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n \leq m\right\},
\end{aligned}
$$

με την (ευθεία συνεπαγωγή στην) τρίτη ισοδυναμία να ισχύει λόγω του Αξιώματος των Αρχιμήδη-Ευδόξου και επειδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι αύξουσα ως σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων. Άρα δείξαμε το (c).

Επομένως, τελικά έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{t\in(0,\infty)} \{N_t = \infty\} &\overset{\textbf{(a)}}{=} \bigcup_{t\in\mathbb{N}^*} \{N_t = \infty\} \overset{\textbf{(b)}}{=} \bigcup_{t\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \{N_t \geq n\} = \bigcup_{t\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \{T_n \leq t\} \\
&= \bigcup_{t\in\mathbb{N}^*} \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n \leq t\right\} \overset{\textbf{(c)}}{=} \left\{\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\right\},
\end{aligned}
$$

με την τρίτη ισότητα να ισχύει λόγω του Λήμματος 3.3.4.

Από την τελευταία ισότητα και το (a) άμεσα έπεται το ζητούμενο. □

Πόρισμα 3.3.7. Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές τότε η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με το μηδέν.

Απόδειξη. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ εξ'υποθέσεως ισχύει ότι $EN_t < \infty$. Τότε, θα δείξουμε ότι $P(N_t = \infty) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Θέτουμε $A_t := \{\omega \in \Omega : N_t(\omega) = \infty\} = N_t^{-1}(\{\infty\}) \in \Sigma$, αφού η N_t $(t \in \mathbb{R}_+)$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Έστω, τώρα ότι υπάρχει $t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 < P(N_t = \infty) = P(A_t)$. Τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} EN_t &= \int_\Omega N_t(\omega)dP(\omega) = \int_{A_t} N_t(\omega)dP(\omega) + \int_{A_t^c} N_t(\omega)dP(\omega) \\ &\geq \int_{A_t} \infty dP(\omega) = \infty \int_{A_t} dP(\omega) = \infty \cdot P(A_t) \overset{P(A_t)>0}{=} \infty, \end{aligned}$$

με την ανισότητα να ισχύει διότι η τ.μ. N_t είναι μη αρνητική, αφού η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.

Άρα έχουμε ότι $\infty > EN_t \geq \infty$, άρα και ότι $\infty > \infty$, που προφανώς είναι άτοπο. Επομένως, πρέπει η $P(N_t = \infty) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, απ'όπου από τον υποπροσθετικό νόμο των πιθανοτήτων και το Λήμμα 3.3.6 έχουμε ότι

$$0 = \sum_{t\in\mathbb{N}^*} P(N_t = n) \geq P\left(\bigcup_{t\in\mathbb{N}^*} \{N_t = n\}\right) = P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\right)$$

κι άρα τελικά έπεται ότι $P\big(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\big) = 0$, που είναι το ζητούμενο. □

Όπως θα διαπιστώσουμε και στα επόμενα κεφάλαια, η μελέτη της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων θα βασιστεί σε σημαντικό βαθμό στις ιδιότητες των προσαυξήσεών της, οι οποίες ορίζονται ως ακολούθως.

Στο σημείο αυτό κρίνεται σκόπιμο να επισημάνουμε ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ η προσαύξηση της σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων επάνω στο διάστημα $(s, t]$ ικανοποιεί την

$$N_t - N_s = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{s<T_n\leq t\}}. \tag{3.15}$$

Επειδή, μάλιστα, για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει $N_0(\omega) = 0$ και $T_n(\omega) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η (3.15) βρίσκεται σε συμφωνία με τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκε η τ.μ. N_t στο Θεώρημα 3.3.2. Επί πλέον, για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ έχουμε ότι

$$N_t(\omega) = (N_t - N_s)(\omega) + N_s(\omega), \tag{3.16}$$

που ισχύει ακόμα κι αν το $N_s(\omega)$ απειρίζεται.

Επίσης κρίνεται σκόπιμο να επισημάνουμε ότι σύμφωνα με την (3.15) η ανεξαρτησία των προσαυξήσεων της σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων ισοδυναμεί με την ισχύ της συνθήκης

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m} \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right) = \prod_{j=1}^{m} P\big(N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\big), \tag{3.17}$$

όπου $k_j \in \mathbb{N}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}_m^*$.

Κλείνοντας την παρούσα ενότητα, παραθέτουμε το παρακάτω λήμμα, που αποτελεί άμεση συνέπεια της (3.15) και του Λήμματος 3.2.10 και το οποίο συνδέει το μέτρο απαίτησης με τις προσαυξήσεις της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων.

Λήμμα 3.3.8. Για κάθε $A \in \Sigma$ και $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ ισχύει

$$\mu(A \times (s,t]) = \int_A (N_t - N_s)dP.$$

3.4 Η Κλασσική Θεωρία Κινδύνου

Στις προηγούμενες τρεις ενότητες θέσαμε το γενικό πλαίσιο της Θεωρίας Κινδύνου και μελετήσαμε διεξοδικά τα «δομικά στοιχεία» της – τις σ.δ. των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης, χρόνων άφιξης και του αριθμού των απαιτήσεων. Η συνηθέστερη εξειδίκευση αυτού του πλαισίου – η οποία είναι και η ιστορικά πρώτη που εμφανίστηκε – αναφέρεται στην περίπτωση των ανεξάρτητων και εκθετικά κατανεμημένων ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων και είναι γνωστή ως Κλασσική Θεωρία Κινδύνου.

Στην παρούσα ενότητα αποδεικνύουμε ότι στο πλαίσιο της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου οι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων κατανέμονται σύμφωνα με μία κατανομή Γάμμα, καθώς και ότι το γεγονός αυτό ισοδυναμεί με το ότι ο αριθμός των απαιτήσεων κατανέμεται σύμφωνα με μία κατανομή Poisson. Σε αυτή την περίπτωση η έκρηξη είναι ή μόνο αδύνατη ή μόνο βέβαια σύμφωνα με τα δύο παρακάτω αποτελέσματα.

Θεώρημα (Νόμος 0-1 της Έκρηξης) 3.4.1. Έστω $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ακολουθία στοιχείων του $(0,\infty)$ κι ας υποθέσουμε ότι η σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, και ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha_n)$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} = \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.

(ii) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με την μονάδα.

Απόδειξη. (i) Η απόδειξη του ζητουμένου θα γίνει βάσει των παρακάτω τριών βημάτων.
(a) $\{\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\} = \{\sum_{n=1}^{\infty} W_n < \infty\}$.

Πράγματι, για κάθε $\omega \in \Omega$ τέτοιο ώστε $\sum_{n=1}^{\infty} W_n(\omega) < \infty$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} W_n(\omega) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} W_n(\omega) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} (T_n - T_{n-1})(\omega) \\ &= \lim_{k\to\infty} (T_k - T_0)(\omega) = \lim_{k\to\infty} T_k(\omega) = \sup_{k\in\mathbb{N}^*} T_k(\omega) = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n(\omega).\end{aligned}$$

Άρα δείξαμε το (a).

(b) Υπάρχει η μέση τιμή $E\big[e^{-\sum_{n=1}^{\infty} W_n}\big]$ και ισχύει $E\big[e^{-\sum_{n=1}^{\infty} W_n}\big] \geq 0$.

Πράγματι, αρχικά για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ θέτουμε $J_n := \prod_{k=1}^{n} e^{-W_k} = e^{-\sum_{k=1}^{n} W_n}$, απ'όπου άμεσα έπεται ότι η J_n θετική τ.μ. και μάλιστα για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $|J_n|(\omega) = J_n(\omega) < 1$ διότι το άθροισμα $\sum_{k=1}^{n} W_n(\omega)$ είναι θετικό, αφού από τον ορισμό τους οι $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι θετικές τ.μ. (ως ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων). Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ δείξαμε ότι

$$|J_n| = J_n < \mathbf{1}, \tag{3.18}$$

όπου $\mathbf{1} : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ. με τύπο $\mathbf{1}(\omega) = 1$ για κάθε $\omega \in \Omega$, η οποία προφανώς είναι ολοκληρώσιμη.

Ακόμη, έχουμε $\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty}\big(\prod_{k=1}^{n} e^{-W_k}\big) =: \prod_{n=1}^{\infty} e^{-W_n} = e^{-\sum_{n=1}^{\infty} W_n} =: J$, δηλαδή υπάρχει μοναδική τ.μ. $J := \lim_{n\to\infty} J_n$. Τότε, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue (βλ. π.χ. [4], Θεώρημα 6.21) και λαμβανομένης υπόψη της (3.18) έπεται ότι οι τ.μ. J_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ και J είναι ολοκληρώσιμες και ισχύει ότι $EJ = \lim_{n\to\infty} EJ_n$. Επί πλέον ισχύει ότι $EJ \geq 0$, αφού η τ.μ. J είναι θετική ως όριο θετικών τ.μ.. Άρα δείξαμε το (b).

(c) $E\big[e^{-\sum_{n=1}^{\infty} W_n}\big] = 0$.

Πράγματι, εξ'υποθέσεως έχουμε ότι $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, άρα η $\chi.\sigma.$ της τ.μ. W_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ δίνεται για κάθε $u \in \mathbb{R}$ από τον τύπο

$$\varphi_{W_n}(u) = \frac{\alpha_n}{\alpha_n - \mathrm{i}u} \tag{3.19}$$

(βλ. Ενότητα Α′.2(i)). Τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E\big[e^{-\sum_{n=1}^{\infty} W_n}\big] &= E\Bigg[\prod_{n=1}^{\infty} e^{-W_n}\Bigg] = \prod_{n=1}^{\infty} E\big[e^{-W_n}\big] = \prod_{n=1}^{\infty} \varphi_{W_n}(\mathrm{i}) \overset{(3.19)}{=} \prod_{n=1}^{\infty}\bigg(\frac{\alpha_n}{\alpha_n+1}\bigg) \\ &= \prod_{n=1}^{\infty}\bigg(1 - \frac{1}{\alpha_n+1}\bigg) \leq \prod_{n=1}^{\infty} e^{-(\alpha_n+1)^{-1}} = e^{-\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n+1)^{-1}} = 0, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω της εξ'υποθέσεως ανεξαρτησίας των τ.μ. W_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ και του Θεωρήματος Κυριαρχημένης Σύγκλισης του Lebesgue, η ανισότητα ισχύει επειδή για κάθε $x \in (0,1)$ ισχύει $e^{-x} \geq 1 - x$, και η τελευταία ισότητα ισχύει διότι η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n+1)^{-1} = \infty$, αφού εξ'υποθέσεως $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} = \infty$.

Επομένως, δείξαμε ότι $E\big[e^{-\sum_{n=1}^{\infty} W_n}\big] \leq 0$, οπότε λαμβάνοντας υπόψη το (b) άμεσα έπεται το (c).

Όμως, θέτοντας $Y := e^{-\sum_{n=1}^{\infty} W_n}$ από το (c) έχουμε ότι $0 = E\big[e^{-\sum_{n=1}^{\infty} W_n}\big] = EY = \int_{\{Y>0\}} Y dP$, απ'όπου έπεται ότι το σύνολο $\{Y > 0\}$ είναι ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας, οπότε έχουμε ότι

$$0 = P\big(e^{-\sum_{n=1}^{\infty} W_n} > 0\big) = P\bigg(\sum_{n=1}^{\infty} W_n < \infty\bigg) \overset{(\mathbf{a})}{=} P\bigg(\sup_{n \in \mathbb{N}^*} T_n < \infty\bigg),$$

κάτι που αποδεικνύει το (i).

(ii) Έστω τώρα ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} < \infty$. Όμως, επειδή εξ'υποθέσεως ισχύει $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε (βλ. Ενότητα Α'.2(i)) έχουμε ότι $EW_n = 1/\alpha_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, απ'όπου άμεσα έπεται ότι $\sum_{n=1}^{\infty} EW_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} < \infty$ κι επομένως από το Πόρισμα 3.2.7 τελικά έπεται ότι η $P\big(\sup_{n \in \mathbb{N}^*} T_n < \infty\big) = 1$, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη τόσο του (ii) όσο και του θεωρήματος. □

Ο Νόμος 0-1 της Έκρηξης ουσιαστικά δηλώνει ότι αν οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητα και εκθετικά κατανεμημένοι, τότε η έκρηξη – δηλαδή το (καταστρεπτικό άρα και ανεπιθύμητο για την ασφαλιστική εταιρεία) ενδεχόμενο εμφάνισης απείρως πολλών απαιτήσεων σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα – είναι ή μόνο ένα σχεδόν αδύνατο ή μόνο ένα σχεδόν βέβαιο ενδεχόμενο.

Το παρακάτω αποτέλεσμα δηλώνει ουσιαστικά πως οι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων κατανέμονται σύμφωνα με μια κατανομή Γάμμα αν και μόνο αν βρισκόμαστε στο πλαίσιο της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου.

Λήμμα 3.4.2. Έστω $\alpha \in (0, \infty)$. Αν η σ.δ. $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Σε αυτήν την περίπτωση και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $EW_n = 1/\alpha$ και $ET_n = n/\alpha$, και η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. π.χ. [25], Lemma 1.2.2.

Το Λήμμα 3.4.2 ουσιαστικά καταδεικνύει το γεγονός πως στο πλαίσιο της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου και για ισόνομα (εκτός από ανεξάρτητα), εκθετικά κατανεμημένους ενδιάμεσους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων, το ενδεχόμενο της έκρηξης θεωρείται σχεδόν αδύνατο, κάτι που έχει σαφώς πρακτική σημασία διότι σε αντίθετη περίπτωση η ασφαλιστική εταιρεία θα λειτουργούσε γνωρίζοντας ότι σε κάποια μελλοντική χρονική στιγμή δεν θα μπορούσε να αντεπεξέλθει στις υποχρεώσεις της.

Λήμμα 3.4.3. Έστω $\alpha \in (0, \infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t)$ για κάθε $t \in (0, \infty)$.

Σε αυτήν την περίπτωση ισχύει $ET_n = n/\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $EN_t = \alpha t$ για κάθε $t \in (0, \infty)$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. π.χ. [25], Lemma 2.2.1.

Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι άμεση συνέπεια των προηγούμενων δύο λημμάτων και δηλώνει ότι στο πλαίσιο της Κλασσική Θεωρίας Κινδύνου (ισόνομα και ανεξάρτητα) εκθετικά κατανεμημένοι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων ισοδυναμούν με το ότι ο αριθμός των απαιτήσεων κατανέμεται σύμφωνα με μια κατανομή Poisson.

Πόρισμα 3.4.4. Έστω $\alpha \in (0, \infty)$. Αν η σ.δ. $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

(ii) $P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t)$ για κάθε $t \in (0, \infty)$.

3.5 Η Σ.Δ. Συνολικών Απαιτήσεων

Στην παρούσα ενότητα εισάγουμε και μελετάμε την σ.δ. συνολικών απαιτήσεων και παραθέτουμε μερικά γενικά αποτελέσματα πάνω σε αυτήν, τα οποία θα μας φανούν χρήσιμα στη συνέχεια της παρούσας εργασίας. **Στο εξής και μέχρι το τέλος του κεφαλαίου υποθέτουμε ότι η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με το μηδέν**.

Θεωρούμε μια ακολουθία $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ θετικών τ.μ. και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ορίζουμε την τ.μ.

$$S_t := S_{N_t} := \sum_{k=0}^{N_t} X_k = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{N_t = n\}} \left(\sum_{k=0}^{n} X_k \right),$$

όπου $X_0(\omega) := 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Η τ.μ. S_{N_t} είναι ένα **τυχαίο άθροισμα**, δηλαδή άθροισμα ή σειρά τυχαίου πλήθους τ.μ..

Σε όρους του υποδείγματος που σκιαγραφήσαμε στην Ενότητα 3.1 οι παραπάνω τ.μ. βρίσκουν την ακόλουθη ερμηνεία:

- Η X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) είναι η τ.μ. που δηλώνει το *μέγεθος* ή την *ένταση* ή το *ποσό* της n-απαίτησης.

- Η S_t ($t \in \mathbb{R}_+$) είναι η τ.μ. που δηλώνει το *συνολικό μέγεθος* ή *ύψος* ή *ποσό* των απαιτήσεων που εγείρονται/εμφανίζονται μέχρι τον χρόνο t.

Συνακόλουθα, η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ονομάζεται η σ.**δ. μεγέθους απαίτησης** (*claim size process*) και η οικογένεια $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται η σ.**δ. συνολικών απαιτήσεων** που επάγεται από την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και την σ.δ. μεγέθους απαίτησης $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

***Ορισμός* 3.5.1.** Το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ για το οποίο ισχύει ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι μια σ.δ. μεγέθους απαίτησης με ανεξάρτητες και ισοκατανεμημένες τ.μ., και οι σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες ονομάζεται σ.**δ. κινδύνου**.

Στο εξής και μέχρι το τέλος του κεφαλαίου υποθέτουμε ότι το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ είναι μια σ.δ. κινδύνου. Με P_X συμβολίζουμε την κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X_n για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, ενώ ακόμη υποθέτουμε ότι η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με το μηδέν.

Το πρώτο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας μας προσφέρει έναν τύπο για τον υπολογισμό των κατανομών των συνολικών απαιτήσεων.

Λήμμα 3.5.2. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει

$$P(S_t \in B) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t = n) P\biggl(\sum_{k=0}^{n} X_k \in B\biggr).$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. π.χ. [25], Lemma 5.1.1.

Όπως και στην περίπτωση της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έτσι και σε αυτή της σ.δ. συνολικών απαιτήσεων η μελέτη της βασίζεται σε σημαντικό βαθμό στην μελέτη των προσαυξήσεών της. Για το λόγο αυτό κρίνεται σκόπιμο να επισημάνουμε ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ η προσαύξηση της σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συνολικών απαιτήσεων επάνω στο διάστημα $(s, t]$ ικανοποιεί την

$$S_t - S_s = S_{N_t} - S_{N_s} = \sum_{k=N_s+1}^{N_t} X_k.$$

Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε ότι επειδή το $N_0(\omega) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ (αφού εξ'υποθέσεως η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων), τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι $S_t - S_0 = \sum_{k=1}^{N_t} X_k = \sum_{k=0}^{N_t} X_k = S_t$ (αφού $X_0(\omega) := 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$) κι επομένως η τελευταία σχέση βρίσκεται σε συμφωνία και με τον ορισμό της τ.μ. S_t όπως αυτός δόθηκε στην αρχή της ενότητας. Επί πλέον, για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει ότι $S_t(\omega) = (S_t - S_s)(\omega) + S_s(\omega)$, ακόμα κι αν το $S_s(\omega)$ είναι άπειρο.

Παρακάτω παραθέτουμε δύο αποτελέσματα που συνδέουν την συμπεριφορά των προσαυξήσεων της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων με αυτή των προσαυξήσεων της σ.δ. συνολικών απαιτήσεων.

Θεώρημα 3.5.3. Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε το ίδιο ισχύει και για την σ.δ. συνολικών απαιτήσεων.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. π.χ. [25], Theorem 5.1.2.

Θεώρημα 3.5.4. Αν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε το ίδιο ισχύει και για την σ.δ. συνολικών απαιτήσεων.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. π.χ. [25], Theorem 5.1.3.

Η υπόθεση του Θεωρήματος 3.5.3 ικανοποιείται όταν η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων είναι μια διαδικασία Poisson (βλ. Ορισμό 4.1.1). Σε αυτή την περίπτωση η σ.δ. συνολικών απαιτήσεων είναι μία σύνθετη διαδικασία Poisson (βλ. Ορισμό 7.1.1).

3.6 Σύνθετες Κατανομές

Η μελέτη της σ.δ. συνολικών απαιτήσεων συνεχίζεται στην παρούσα ενότητα μέσω της αναφοράς στο πρόβλημα του υπολογισμού της κατανομής του ύψους των συνολικών απαιτήσεων – δηλαδή της τ.μ. S_t – σε δοσμένο χρόνο t ($t \in \mathbb{R}_+$). Για το λόγο αυτό ορίζουμε την έννοια της σύνθετης κατανομής (πιθανότητας) και παραθέτουμε ορισμένα χρήσιμα αποτελέσματα που σχετίζονται με τέτοιου είδους κατανομές.

Κατ'αρχάς και για λόγους ευκολίας προχωρούμε στην απλοποίηση – όπου αυτό κρίνεται αναγκαίο – των συμβολισμών που εισάγαμε μέχρι τώρα σε αυτό το κεφάλαιο. Έτσι, θεωρούμε την τ.μ. N για την οποία ισχύει ότι $P_N(\mathbb{N}) = 1$ και ορίζουμε την τ.μ. (τυχαίο άθροισμα) $S := S_N := \sum_{k=0}^{N} X_k$, με την $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ (σ.δ. μεγέθους απαίτησης όπως την ορίσαμε στην αρχή της Ενότητας 3.5) να είναι ισοκατανεμημένη και ανεξάρτητη της τ.μ. N. Τότε η κατανομή της τ.μ. S, έστω P_S, ονομάζεται **σύνθετη κατανομή** και σημειώνεται με $\mathbf{C}(P_N, P_X)$ (ή $\mathbf{C}(F_N, F_X)$ σε όρους $\sigma.\kappa.\pi.$). Οι σύνθετες κατανομές ονομάζονται από την κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων ή αλλιώς της **απαριθμήτριας τ.μ.** N· π.χ., αν η P_N είναι μια κατανομή Poisson, τότε η $\mathbf{C}(P_N, P_X)$ λέμε ότι είναι μια **σύνθετη κατανομή Poisson**.

Οι τ.μ. N και S θα αναφέρονται ως **ο αριθμός των απαιτήσεων** και ως **το ύψος των συνολικών απαιτήσεων**, υποκαθιστώντας έτσι τις σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων και των συνολικών απαιτήσεων, αντίστοιχα. Η υποκατάσταση αυτή δεν επηρεάζει ουσιαστικά την μελέτη της σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συνολικών απαιτήσεων, αφού ό,τι ισχύει για μια δεδομένη χρονική στιγμή, έστω $t_0 \in \mathbb{R}_+$, όπου $S_{t_0} := S$, επεκτείνεται αντίστοιχα για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t \in \mathbb{R}_+$. Με άλλα λόγια, με την απλοποίηση των συμβολισμών επικεντρώνουμε το ενδιαφέρον μας στην μελέτη «μιας από τις πολλές όμοιες σκιαγραφήσεις» της συμπεριφοράς της σ.δ. συνολικών απαιτήσεων.

Παρακάτω, παραθέτουμε το πρώτο αποτέλεσμα που αναφέρεται στον υπολογισμό της κατανομής του τυχαίου αθροίσματος S, το οποίο αποτελεί μια επαναδιατύπωση του Λήμματος 3.5.2, έχοντας λάβει υπόψη την απλοποίηση των συμβολισμών και τις υποθέσεις που κάναμε σε αυτή την ενότητα.

Λήμμα 3.6.1. Για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ισχύει $P_S(B) = \sum_{n=0}^{\infty} P_N(\{n\}) P_X^{*n}(B)$.

Παρόλο που ο παραπάνω τύπος είναι χρήσιμος σε ορισμένες ειδικές περιπτώσεις, απαιτεί τον υπολογισμό συνελίξεων, ο οποίος μπορεί να είναι δύσκολος ή τουλάχιστον χρονοβόρος. Για το σκοπό αυτό σε αρκετές περιπτώσεις είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε την χ.σ. του S και να εκμεταλλευτούμε ύστερα τον Τύπο της Αντιστροφής (βλ. π.χ. [30], Theorem (16.6)).

Λήμμα 3.6.2. Για κάθε $u \in \mathbb{R}$ ισχύει $\varphi_S(u) = m_N(\varphi_X(u))$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη βλ. π.χ. [25], Lemma 5.2.2.

Από το Λήμμα 3.6.2 και από την Ενότητα Α΄.2(iii) άμεσα έπεται το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3.6.3. Αν $P_N = \mathbf{P}(\alpha)$, τότε $\varphi_S(u) = e^{\alpha[\varphi_X(u)-1]}$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

Τέλος, στρεφόμαστε στον υπολογισμό των ροπών – και πιο συγκεκριμένα των δύο πρώτων, οι οποίες είναι και οι περισσότερο χρήσιμες – της κατανομής του ύψους των συνολικών απαιτήσεων, παραθέτοντας το πιο γνωστό αποτέλεσμα πάνω σε αυτές, τις «Ταυτότητες του Wald», το οποίο προκύπτει ως άμεση συνέπεια του Λήμματος 3.6.2, λαμβανομένης υπόψη της Πρότασης Α΄.1.6(i).

Λήμμα (Ταυτότητες του Wald) 3.6.4. Έστω ότι $EN < \infty$ και $EX < \infty$. Τότε υπάρχει η μέση τιμή και η διακύμανση της τ.μ. S και ικανοποιούνται οι ισότητες:

(i) $ES = ENEX$.

(ii) $VS = ENVX + VNE^2X$.

Κεφάλαιο 4

Ένας Χαρακτηρισμός της Διαδικασίας Poisson μέσω Martingales

Η διαδικασία Poisson αποτελεί το κατεξοχήν κατάλληλο υπόδειγμα για την $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων στα πλαίσια της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου. Στο παρόν κεφάλαιο δίνουμε έναν χαρακτηρισμό της διαδικασίας Poisson μέσω martingales (βλ. Ενότητα 4.2 και ειδικότερα Θεώρημα 4.2.4), αφού προηγουμένως την ορίσουμε και παραθέσουμε ορισμένα χρήσιμα αποτελέσματα, που αναφέρονται σε αυτήν (βλ. Ενότητα 4.1).

Για το υπόλοιπο αυτού του κεφαλαίου κι εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε ότι η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $\sigma.\delta.$ άφιξης των απαιτήσεων, ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων (με $\Omega_T = \Omega_N = \varnothing$), αντίστοιχα και όπως ακριβώς στο Κεφάλαιο 3.

4.1 Η Διαδικασία Poisson

Στην παρούσα ενότητα παραθέτουμε αρχικά τον ορισμό της διαδικασίας Poisson και στην συνέχεια αποδεικνύουμε ορισμένα σημαντικά αποτελέσματα που απορρέουν από αυτόν.

***Ορισμός* 4.1.1.** Η $\sigma.\delta.$ $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων ονομάζεται μια **(ομογενής) διαδικασία Poisson** με παράμετρο $\alpha \in (0,\infty)$ αν και μόνο αν έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις κι επιπλέον για κάθε $t \in (0,\infty)$ ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t)$.

Αφού σημειώσουμε ότι **για το υπόλοιπο αυτής της ενότητας όταν γράφουμε τη διύλιση $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα εννοούμε την κανονική διύλιση για την $\sigma.\delta.$** $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων, θα δώσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα που συνδέει την $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων με ανεξάρτητες προσαυξήσεις και πεπερασμένες μέσες τιμές με μία ιδιότητα που σχετίζεται με martingales.

Θεώρημα 4.1.2. Έστω $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αύξουσα σ.δ. μη αρνητικών τ.μ., με ανεξάρτητες προσαυξήσεις και πεπερασμένες μέσες τιμές, και $Z_0 = 0 \quad P-\sigma.\beta.$. Τότε η σ.δ. $\{Z_t - EZ_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $\{\widetilde{\Sigma}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale, όπου $\{\widetilde{\Sigma}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η κανονική διύλιση για την $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ισχύουν οι τρεις (χαρακτηριστικές) ιδιότητες των martingales για την $\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, όπου $C_t := Z_t - EZ_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Εξ'υποθέσεως, όμως, ισχύει $EZ_t < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ κι επομένως για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ επίσης έχουμε ότι $E|C_t| = E|Z_t - EZ_t| \leq E[|Z_t| + |EZ_t|] = 2EZ_t < \infty$, δηλαδή για για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η $C_t \in \mathcal{L}^1(P)$. Ακόμη, επειδή οι σταθερές (συναρτήσεις) είναι πάντα μετρήσιμες ως προς οποιαδήποτε σ-άλγεβρα και επειδή η $EZ_t \in \mathbb{R}_+$, άμεσα έπεται ότι η κανονική διύλιση της $\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα συμπίπτει με την κανονική διύλιση της $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, άρα η $\{C_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι προσαρμοσμένη στην $\{\widetilde{\Sigma}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε την τρίτη ιδιότητα ενός martingale. Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$ το σύνολο

$$A_m := \{(s_1,\ldots,s_m) \in \mathbb{R}_+^m : 0 < s_1 < \cdots < s_m := s\},$$

καθώς και για κάθε $(s_1,\ldots,s_m) \in A_m$ την σ-άλγεβρα

$$\mathcal{G}_{s_1,\ldots,s_m} := \sigma\big(\{Z_{s_j}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}\big)$$

και αποδεικνύουμε τα παρακάτω τρία βήματα.

(a) Το σύστημα όλων των σ-αλγεβρών $\mathcal{G}_{s_1,\ldots,s_m}$ είναι προς τα άνω κατευθυνόμενο[3] ως προς την σχέση $\subseteq$ του εγκλεισμού.

Πράγματι, έστω $(s_1,\ldots,s_m),(s_1^*,\ldots,s_m^*) \in A_m$, τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{s_1,\ldots,s_m} \cup \mathcal{G}_{s_1^*,\ldots,s_m^*} &:= \sigma\big(\{Z_{s_j}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}\big) \cup \sigma\big(\{Z_{s_j^*}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}\big) \\
&\subseteq \sigma\Big(\sigma\big(\{Z_{s_j}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}\big) \cup \sigma\big(\{Z_{s_j^*}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}\big)\Big) \\
&= \sigma\left(\sigma\left(\bigcup_{j=1}^m \sigma(Z_{s_j})\right) \cup \sigma\left(\bigcup_{j=1}^m \sigma(Z_{s_j^*})\right)\right) \\
&= \sigma\left(\left(\bigcup_{j=1}^m \sigma(Z_{s_j})\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^m \sigma(Z_{s_j^*})\right)\right) \\
&= \sigma\left(\bigcup_{j=1}^m \Big(\sigma(Z_{s_j}) \cup \sigma(Z_{s_j^*})\Big)\right)
\end{aligned}$$

[3] *Δηλαδή, για οποιεσδήποτε δύο σ-άλγεβρες που ανήκουν σε αυτό υπάρχει μια τρίτη, η οποία τις περιέχει και είναι και αυτή στοιχείο αυτού του συστήματος συνόλων.*

$$\subseteq \quad \sigma\Big(\bigcup_{j=1}^{m}\sigma(Z_{r_j})\Big) = \sigma\big(\{Z_{r_j}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}\big) = \mathcal{G}_{r_1,\ldots,r_m},$$

όπου $r_j := \max\{s_j, s_j^*\}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}_m^*$, ενώ σημειώνουμε ότι η τρίτη ισότητα ισχύει διότι (εύκολα αποδεικνύεται ότι) για $A, B \in \Sigma$ ισχύει $\sigma(A\cup B) = \sigma\big(\sigma(A)\cup\sigma(B)\big)$ και η δεύτερη σχέση εγκλεισμού αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι για κάθε $s < t$ ισχύει (λόγω του ότι η $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι αύξουσα σ.δ.) η σχέση εγκλεισμού $\sigma(\{Z_t, Z_s\}) \subseteq \sigma(Z_s)$.

(b) Για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s < t$ η σ-άλγεβρα $\sigma(Z_t - Z_s)$ είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\widetilde{\Sigma}_s$.

Πράγματι, έστω $m \in \mathbb{N}^*$ και $s_0, s_1, \ldots, s_m, s_{m+1} \in \mathbb{R}_+$ με $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_m := s < s_{m+1} := t$ και ας θεωρήσουμε την ακολουθία των προσαυξήσεων $\{Z_{s_j} - Z_{s_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_{m+1}^*}$. Επειδή, όμως, εξ'υποθέσεως η οικογένεια $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, η ακολουθία $\{Z_{s_j} - Z_{s_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_{m+1}^*}$ είναι ανεξάρτητη. Συνεπώς, έχουμε ότι και η $\{Z_{s_j} - Z_{s_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}$ θα είναι ανεξάρτητη της προσαύξησης $Z_{s_{m+1}} - Z_s := Z_t - Z_s$, απ'όπου έπεται ότι για κάθε $j \in \mathbb{N}_m^*$ η ακολουθία των προσαυξήσεων $\{Z_{s_k} - Z_{s_{k-1}}\}_{k\in\mathbb{N}_j^*}$ είναι ανεξάρτητη της $Z_t - Z_s$.

Όμως, άμεσα έχουμε ότι $Z_{s_m} = \sum_{j=1}^{m}(Z_{s_j} - Z_{s_{j-1}})$, απ'όπου επίσης άμεσα έπεται ότι

$$\mathcal{G}_{s_1,\ldots,s_m} = \sigma(\{Z_{s_j} - Z_{s_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}),$$

επομένως τελικά οι σ-άλγεβρες

$$\mathcal{G}_{s_1,\ldots,s_m} \quad \text{και} \quad \sigma(Z_t - Z_s) \quad \text{είναι ανεξάρτητες .} \tag{4.1}$$

Έστω

$$\mathcal{E}_s := \bigcup_{(s_1,\ldots,s_m)\in A_m} \mathcal{G}_{s_1,\ldots,s_m}, \tag{4.2}$$

τότε από το (a) έπεται ότι η οικογένεια $\mathcal{E}_s$ είναι άλγεβρα υποσυνόλων του Ω. Παρατηρούμε επίσης ότι $\mathcal{E}_s = \bigcup_{h\in[0,s]}\sigma(Z_h)$, άρα $\sigma(\mathcal{E}_s) = \sigma\big(\bigcup_{h\in[0,s]}\sigma(Z_h)\big) = \widetilde{\Sigma}_s$ (αφού η $\{\widetilde{\Sigma}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι η κανονική διύλιση για την $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$).

Τότε από τις (4.1) και (4.2) έχουμε ότι η άλγεβρα $\mathcal{E}_s$ είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\sigma(Z_t - Z_s)$, άρα και η $\widetilde{\Sigma}_s = \sigma(\mathcal{E}_s)$ θα είναι ανεξάρτητη της $\sigma(Z_t - Z_s)$ (βλ. π.χ. [4], Πόρισμα 13.4).

Και επειδή δείξαμε το ζητούμενο για αυθαίρετα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$, τότε θα ισχύει και για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του (b).

Επομένως, για την απόδειξη της τρίτης ιδιότητας του martingale αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s \leq t$ έχουμε:

$$C_t := Z_t - EZ_t = Z_s + (Z_t - Z_s) - E[Z_s + (Z_t - Z_s)] = (Z_s - EZ_s) + [(Z_t - Z_s) - E[(Z_t - Z_s)]].$$

Οπότε, λαμβάνοντας υπόψη τις ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής (βλ. Πρόταση 2.1.8), για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s < t$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E[C_t|\widetilde{\Sigma}_s] &=_{P|\widetilde{\Sigma}_s} E\big[(Z_s - EZ_s) + (Z_t - Z_s) - E[(Z_t - Z_s)] \,\big|\, \widetilde{\Sigma}_s\big] \\ &=_{P|\widetilde{\Sigma}_s} E[(Z_s - EZ_s)|\widetilde{\Sigma}_s] + E[(Z_t - Z_s)|\widetilde{\Sigma}_s] - E[(Z_t - Z_s)] \\ &=_{P|\widetilde{\Sigma}_s} E[Z_s|\widetilde{\Sigma}_s] - EZ_s + E[(Z_t - Z_s)|\widetilde{\Sigma}_s] - E[(Z_t - Z_s)] \\ &\overset{(\mathbf{b})}{=}_{P|\widetilde{\Sigma}_s} Z_s - EZ_s + E[(Z_t - Z_s)] - E[(Z_t - Z_s)] = C_s, \end{aligned}$$

κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. □

Άμεση συνέπεια του Ορισμού 4.1.1 και του Θεωρήματος 4.1.2 αποτελούν τα παρακάτω δύο αποτελέσματα.

Πόρισμα 4.1.3. Έστω ότι η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και πεπερασμένες μέσες τιμές. Τότε η σ.δ. $\{N_t - EN_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale.

Πόρισμα 4.1.4. Έστω ότι η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων είναι μια (ομογενής) διαδικασία Poisson με παράμετρο $\alpha \in (0,\infty)$. Τότε η σ.δ. $\{N_t - \alpha t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale.

4.2 Ο Χαρακτηρισμός

Λαμβάνοντας υπόψη τα Λήμματα 3.4.3 και 3.4.2 εγείρεται αντίστοιχα το ερώτημα για το αν η διαδικασία Poisson μπορεί να χαρακτηριστεί μέσω της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων ή μέσω της σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων. Μία καταφατική απάντηση στο ερώτημα αυτό θα δοθεί παρακάτω στο Θεώρημα 4.2.4, που αποτελεί το κύριο αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου, και το οποίο μας παρέχει χαρακτηρισμούς της διαδικασίας Poisson μέσω

- της σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων,

- των προσαυξήσεων και αναμενόμενων τιμών της σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων,

- μιας martingale - ιδιότητας μιας σχετιζόμενης σ.δ., και

- του μέτρου απαίτησης.

Για την απλοποίηση, όμως, της απόδειξης του εν λόγω χαρακτηρισμού αρχικά εισάγουμε για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $\omega \in \Omega$ την τ.μ.

$$T_n^s(\omega) := \begin{cases} 0 & \text{αν } n = 0 \\ \sum_{j=0}^{\infty} \chi_{\{T_j \le s < T_{j+1}\}}(\omega)[T_{n+j}(\omega) - s] & \text{αν } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}. \tag{4.3}$$

Ακόμη, για δεδομένο $s \in \mathbb{R}_+$ η ακολουθία $\{T_n^s\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων, διότι από τον ορισμό της άμεσα έπεται ότι για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει $T_0^s(\omega) = 0$ και $T_{n-1}^s(\omega) < T_n^s(\omega)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Η τελευταία ιδιότητα αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι για κάθε $j \in \mathbb{N}$ ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η ανισότητα $T_{n-1+j}(\omega) < T_{n+j}(\omega)$, αφού η $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων.

Τότε, στα πλαίσια του υποδείγματος που αναπτύξαμε στην Ενότητα 3.1 – και αντίστοιχα με τα όσα αναφέρθηκαν στην Ενότητα 3.2 για το πως ερμηνεύεται η τ.μ. T_n $(n \in \mathbb{N})$ στα πλαίσα αυτού του υποδείγματος – και για δοσμένο $s \in \mathbb{R}_+$ η τ.μ. T_n^s $(n \in \mathbb{N})$ μπορεί να ερμηνευτεί ως ο *χρόνος εμφάνισης/πραγματοποίησης n απαιτήσεων μετά την χρονική στιγμή s*. Συνεπώς, μπορούμε να ονομάσουμε την $\{T_n^s\}_{n \in \mathbb{N}}$ ως την s-**μετατοπισμένη σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων** (βλ. και Σχήμα Β΄2).

Ακόμη, για δεδομένο $s \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε την τ.μ.

$$W_n^s := T_n^s - T_{n-1}^s. \tag{4.4}$$

Τότε, προφανώς η $\{W_n^s\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων που επάγεται από την $\{T_n^s\}_{n \in \mathbb{N}}$ και για δοσμένο $s \in \mathbb{R}_+$ η τ.μ. W_n^s $(n \in \mathbb{N}^*)$ μπορεί να ερμηνευτεί στα πλαίσια του υποδείγματός μας ως η τ.μ. που δηλώνει τον *χρόνο αναμονής μεταξύ της $n-1$ και της n απαίτησης (μετά την χρονική στιγμή s)*.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε δύο αποτελέσματα που αφορούν την s - **μετατοπισμένη σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων** και τα οποία θα μας φανούν ιδιαιτέρως χρήσιμα στην απόδειξη του χαρακτηρισμού της διαδικασίας Poisson.

Λήμμα 4.2.1. Έστω $\alpha \in (0, \infty)$. Αν η $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητη και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha)$, τότε για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$, $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ και $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$P\left(\{N_s = k\} \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n} \{W_j^s > t_j\}\right)\right) = P(N_s = k) P\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{W_j > t_j\}\right).$$

Απόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ και $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ καθώς επίσης και $s, t \in \mathbb{R}_+$. Τότε, η απόδειξη του ζητουμένου θα γίνει βάσει των παρακάτω τριών βημάτων:

(a) $\{N_s = k\} \cap \{W_1^s > t\} = \{T_k \le s\} \cap \{W_{k+1} > (s + t) - T_{k+1}\}$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι από τις (4.3) και (4.4) και λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 3.3.4(ii) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} W_1^s &= \sum_{j=0}^{\infty} \chi_{\{T_j \le s < T_{j+1}\}}(T_{j+1}-s) = \sum_{j=0}^{\infty} \chi_{\{N_s=j\}}(T_{j+1}-s) \\ &= \chi_{\{N_s=k\}}(T_{k+1}-s) + \sum_{k\neq j=0}^{\infty} \chi_{\{N_s=j\}}(T_{j+1}-s), \end{aligned}$$

οπότε λαμβάνοντας εκ νέου υπόψη το Λήμμα 3.3.4(ii) επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \{N_s=k\}\cap\{W_1^s>t\} &= \{N_s=k\}\cap\{T_{k+1}-s>t\} \\ &= \{T_k \le s < T_{k+1}\}\cap\{T_{k+1}-s>t\} \\ &= \{T_k\le s\}\cap\{T_{k+1}>s\}\cap\{T_{k+1}>s+t\} \\ &= \{T_k\le s\}\cap\{T_{k+1}>s+t\} \\ &\overset{(3.1)}{=} \{T_k\le s\}\cap\{T_k+W_{k+1}>s+t\} \\ &= \{T_k\le s\}\cap\{W_{k+1}>(s+t)-T_{k+1}\}, \end{aligned}$$

με την τετάρτη ισότητα να ισχύει διότι $\{T_{k+1}>s+t\}\subseteq\{T_{k+1}>s\}$, που αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα ως σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων.
(b) Για κάθε $j\in\mathbb{N}_n^*\setminus\{1\}$ ισχύει

$$\{N_s=k\}\cap\{W_j^s>t_j\}=\{N_s=k\}\cap\{W_{j+k}>t_j\}.$$

Πράγματι, ομοίως με το (a) αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $j\in\mathbb{N}_n^*\setminus\{1\}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} W_j^s &= \sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\{T_m\le s<T_{j+m}\}}(T_{j+m}-s)-\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\{T_m\le s<T_{j+m}\}}(T_{j+m}-s) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\{N_s=m\}}(T_{j+m}-s)-\sum_{m=0}^{\infty}\chi_{\{N_s=m\}}(T_{j-1+m}-s) \\ &= \chi_{\{N_s=k\}}(T_{j+k}-s)-\chi_{\{N_s=k\}}(T_{j-1+k}-s)=\chi_{\{N_s=k\}}(T_{j+k}-T_{j-1+k}), \end{aligned}$$

απ'όπου τελικά έπεται ότι

$$\{N_s=k\}\cap\{W_j^s>t_j\}=\{N_s=k\}\cap\{T_{j+k}-T_{j-1+k}>t_j\}=\{N_s=k\}\cap\{W_{j+k}>t_j\}.$$

(c) $P\big(\{N_s=k\}\cap\{W_1^s>t\}\big)=P(W_1>t)P(N_s=k)$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι εξ'υποθέσεως η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητη, άρα και η τ.μ. W_{k+1} θα είναι ανεξάρτητη των τ.μ. $W_1,\ldots,W_k$, απ'όπου σύμφωνα και με την (3.1) έχουμε ότι η τ.μ. $T_k=\sum_{j=1}^{k}W_j$ είναι ανεξάρτητη της τ.μ. W_{k+1} ως συνάρτηση ανεξάρτητων της W_{k+1} τ.μ. (βλ. και Θεώρημα Α΄.1.4).

Τότε, θέτοντας $\varpi^k_{s,t} := P\big(\{N_s = k\} \cap \{W^s_1 > t\}\big)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\varpi^k_{s,t} &\overset{(\mathbf{a})}{=} P\big(\{T_k \le s\} \cap \{W_{k+1} > (s+t) - T_{k+1}\}\big)\\
&= \int_\Omega \chi_{\{T_k \le s\}\cap\{W_{k+1}>(s+t)-T_{k+1}\}}(\omega)dP(\omega)\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{(-\infty,s)}(r)\chi_{(s+t-r,\infty)}(u)dP_{W_{k+1},T_k}(u,r)\\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{(-\infty,s)}(r)\chi_{(s+t-r,\infty)}(u)d(P_{W_{k+1}} \otimes P_{T_k})(u,r)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,s)}(r)\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{(s+t-r,\infty)}(u)dP_{W_{k+1}}(u)\right)dP_{T_k}(r)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(-\infty,s)}(r)\left(\int_{\Omega} \chi_{\{W_{k+1}>s+t-r\}}(\omega)dP(\omega)\right)dP_{T_k}(r)\\
&= \int_{(-\infty,s)} P(W_{k+1} > s+t-r)dP_{T_k}(r),
\end{aligned}$$

με την τρίτη και την προτελευταία ισότητα να αποτελούν άμεση συνέπεια του [4], Θεώρημα 7.6, την τέταρτη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του Θεωρήματος Α′.1.5, λαμβανομένης υπόψη της ανεξαρτησίας των τ.μ. T_{k+1}, W_k, και την πέμπτη ισότητα να αντλεί την ισχύ της από το Θεώρημα Fubini (βλ. π.χ. [4], Θεώρημα 9.12). Άρα δείξαμε ότι

$$\varpi^k_{s,t} = \int_{(-\infty,s)} P(W_{k+1} > s+t-r)dP_{T_k}(r). \tag{4.5}$$

Επίσης εξ′υποθέσεως ισχύει ότι $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε (σύμφωνα με την Ενότητα Α′.1(i)) για κάθε $0 \le r \le s$ έχουμε ότι

$$P(W_{k+1} > s+t-r) = e^{-\alpha(s+t-r)},$$

απ′όπου άμεσα έπεται ότι $P(W_{k+1} > s+t-r) = P(W_{k+1} > s-r)P(W_{k+1} > t)$. Από την τελευταία σχέση έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\varpi^k_{s,t} &\overset{(4.5)}{=} \int_{(-\infty,s)} P(W_{k+1} > s-r)P(W_{k+1} > t)dP_{T_k}(r)\\
&= P(W_{k+1} > t)\int_{(-\infty,s)} P(W_{k+1} > s-r)dP_{T_k}(r)\\
&\overset{(4.5)}{=} P(W_{k+1} > t)P\big(\{N_s = k\} \cap \{W^s_1 > 0\}\big)\\
&= P(W_{k+1} > t)P\big(\{N_s = k\}\big) = P(W_1 > t)P\big(\{N_s = k\}\big),
\end{aligned}$$

με την προτελευταία ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι η W^s_1 είναι θετική τ.μ. (ως ενδιάμεσος χρόνος άφιξης των απαιτήσεων) κι άρα ισχύει ότι $\{W^s_1 > 0\} = \Omega$ και την τελευταία ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια της εξ'υποθέσεως ισονομίας των τ.μ. W_n $(n \in \mathbb{N}^*)$. Άρα δείξαμε το (c).

Επομένως, θέτοντας $\widetilde{t} := (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ και

$$\widetilde{\varpi}_{k,n}(s, \widetilde{t}) := P\Bigg(\{N_s = k\} \cap \Bigg(\bigcap_{j=1}^{n} \{W_j^s > t_j\}\Bigg)\Bigg)$$

τελικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varpi}_{k,n}(s, \widetilde{t}) &= P\Bigg(\bigcap_{j=1}^{n}\Big(\{N_s = k\} \cap \{W_j^s > t_j\}\Big)\Bigg) \\
&= P\Bigg(\{N_s = k, W_1^s > t_1\} \cap \Bigg(\bigcap_{j=2}^{n}\{N_s = k, W_j^s > t_j\}\Bigg)\Bigg) \\
&\overset{\text{(b)}}{=} P\Bigg(\{N_s = k, W_1^s > t_1\} \cap \Bigg(\bigcap_{j=2}^{n}\{N_s = k, W_{j+k} > t_j\}\Bigg)\Bigg) \\
&= P\Bigg(\{N_s = k\} \cap \{W_1^s > t_1\} \cap \Bigg(\bigcap_{j=2}^{n}\{W_{j+k} > t_j\}\Bigg)\Bigg) \\
&\overset{\text{(a)}}{=} P\Bigg(\{T_k \le s, W_{k+1} > (s + t_1) - T_k\} \cap \Bigg(\bigcap_{j=2}^{n}\{W_{j+k} > t_j\}\Bigg)\Bigg) \\
&= P\big(T_k \le s, W_{k+1} > (s + t_1) - T_k\big) P\Bigg(\bigcap_{j=2}^{n}\{W_{j+k} > t_j\}\Bigg) \\
&\overset{\text{(a)}}{=} P(\{N_s = k\} \cap \{W_1^s > t_1\}) \cdot \prod_{j=2}^{n} P(W_{j+k} > t_j) \\
&\overset{\text{(c)}}{=} P(N_s = k) P(W_1 > t_1) \cdot \prod_{j=2}^{n} P(W_j > t_j) \\
&= P(N_s = k) \cdot \prod_{j=1}^{n} P(W_j > t_j) = P(N_s = k) P\Bigg(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j > t_j\}\Bigg),
\end{aligned}$$

με την πέμπτη από το τέλος και την τέταρτη από το τέλος, καθώς και την τελευταία ισότητα να αποτελούν άμεση συνέπεια της εξ'υποθέσεως ανεξαρτησίας της $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$, και την τρίτη από το τέλος ισότητα να ισχύει λόγω της εξ'υποθέσεως ισονομίας της $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Επομένως, δείξαμε την ζητούμενη ισότητα για αυθαίρετα $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}^*$ και αυθαίρετα $t_1, \dots, t_n, s \in \mathbb{R}_+$, κάτι που άμεσα έπεται και την ισχύ της ζητούμενης ισότητας. □

Πόρισμα 4.2.2. Έστω $\alpha \in (0, \infty)$. Αν η $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητη και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha)$, τότε:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j^s > t_j\}\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j > t_j\}\right).$$

(ii) Για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ η τ.μ. N_s είναι ανεξάρτητη της $\{W_n^s\}_{n\in\mathbb{N}^*}$.

(iii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ η από κοινού κατανομή των τ.μ. W_j^s $(j \in \mathbb{N}_n^*)$ ταυτίζεται με την από κοινού κατανομή των τ.μ. W_j $(j \in \mathbb{N}_n^*)$.

Απόδειξη. **(i)** Από την εξ'υποθέσεως ανεξαρτησία της $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και σύμφωνα με το Πόρισμα 3.4.4, άμεσα έπεται ότι για κάθε $t \in (0,\infty)$ ισχύει ότι $P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t)$. Επομένως για $t \in (0,\infty)$ μπορούμε να θεωρήσουμε την ακολουθία ενδεχομένων $\{\{N_t = k\}\}_{k\in\mathbb{N}}$ ως μια (Σ-μετρήσιμη) διαμέριση του Ω. Οπότε, για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$, από το Λήμμα 4.2.1 έχουμε:

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(N_s = k) P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j > t_j\}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\{N_s = k\} \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j^s > t_j\}\right)\right). \tag{4.6}$$

Όμως, για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} P(N_s = k) P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j > t_j\}\right) &= P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j > t_j\}\right) \sum_{k=0}^{\infty} P(N_s = k) \\
&= P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j > t_j\}\right) P\left(\biguplus_{k=0}^{\infty}\{N_s = k\}\right) \\
&= P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j > t_j\}\right),
\end{aligned}$$

άρα θέτοντας $\varpi_n := P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j > t_j\}\right)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, από την (4.6) τελικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\varpi_n &= \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\{N_s = k\} \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j^s > t_j\}\right)\right) \\
&= P\left(\biguplus_{k=0}^{\infty}\left(\{N_s = k\} \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j^s > t_j\}\right)\right)\right) \\
&= P\left(\left(\biguplus_{k=0}^{\infty}\{N_s = k\}\right) \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j^s > t_j\}\right)\right) \\
&= P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j^s > t_j\}\right),
\end{aligned}$$

κι άρα δείξαμε τον ισχυρισμό (i).

(ii) Άμεση συνέπεια του (i) και του Λήμματος 4.2.1.

(iii) Από τον ισχυρισμό (ii), λαμβανομένου υπόψη και του ισχυρισμού (i), έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$P\Bigg(\{N_s = k\} \cap \Big(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j^s \le t_j\}\Big)\Bigg) = P(N_s = k)P\Big(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j \le t_j\}\Big).$$

Άρα εφαρμόζοντας εκ νέου τα επιχειρήματα της απόδειξης του ισχυρισμού (i), έχουμε ότι $P\big(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j^s \le t_j\}\big) = P\big(\bigcap_{j=1}^{n}\{W_j \le t_j\}\big)$, δηλαδή τον (iii). □

Παρατήρηση 4.2.3. Το Πόρισμα 4.2.2 πέρα από την χρησιμότητά του στην απόδειξη του χαρακτηρισμού της διαδικασίας Poisson εκφράζει κάτι εξαιρετικά σημαντικό: η s - μετατοπισμένη $\sigma.\delta.$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, που περιγράφει την εμφάνιση των απαιτήσεων στο διάστημα (s, ∞) έχει τις ίδιες ιδιότητες με την $\sigma.\delta.$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, που περιγράφει την εμφάνιση των απαιτήσεων στο διάστημα $(0, \infty)$ και επί πλέον είναι ανεξάρτητη της τ.μ. N_s. Επίσης, λαμβάνοντας υπόψη τις (3.1) και (4.3) άμεσα γίνεται κατανοητό ότι τα παραπάνω συμπεράσματα επεκτείνονται και στις $\sigma.\delta.$ άφιξης των απαιτήσεων (από τις οποίες επάγονται οι προαναφερθείσες $\sigma.\delta.$). Με άλλα λόγια, θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι οι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων παρουσιάζουν «ένα είδος αυτοομοιότητας» (βλ. Σχήμα Β΄2).

Τέλος, πριν προχωρήσουμε στην διατύπωση και απόδειξη του χαρακτηρισμού της διαδικασίας Poisson, που αποτελεί και το κεντρικό αποτέλεσμα όλου του κεφαλαίου, για τους σκοπούς εκείνου του μέρους του χαρακτηρισμού που αναφέρεται στο μέτρο απαίτησης, ορίζουμε το σύνολο

$$\mathscr{E} := \{A \times (s, t] : s, t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{με} \quad s \le t, \quad A \in \Sigma_s\}$$

και θέτουμε $\mathscr{H} := \sigma(\mathscr{E}) \subseteq \Sigma \otimes \mathcal{B}((0, \infty))$.

Ο εν λόγω χαρακτηρισμός δίνεται υπό την μορφή του παρακάτω αποτελέσματος.

Θεώρημα 4.2.4. Έστω $\alpha \in (0, \infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η $\sigma.\delta.$ $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ικανοποιεί την $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha)$.

(ii) Η $\sigma.\delta.$ $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων είναι μια (ομογενής) διαδικασία Poisson με παράμετρο α.

(iii) Η $\sigma.\delta.$ $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ικανοποιεί την $EN_t = \alpha t$.

(iv) Η σ.δ. $\{N_t - \alpha t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale.

(v) Το μέτρο απαίτησης μ ικανοποιεί την $\mu|\mathscr{H} = (\alpha P \otimes \lambda)|\mathscr{H}$.

(vi) Η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων έχει πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης και ικανοποεί την ανισότητα

$$E\big(N_t - (N_s + \alpha(t-s))\big)^2 \le E(N_t - Z)^2$$

για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s \le t$ και για κάθε τ.μ. Z ώστε $EZ^2 < \infty$ και $\sigma(Z) \subseteq \Sigma_s$.

Απόδειξη. Για την απόδειξη αρκεί να δείξουμε την ισχύ του ακόλουθου σχήματος (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i), καθώς και τις συνεπαγωγές (ii) $\Rightarrow$ (vi) και (vi) $\Rightarrow$ (iv).
(i) $\Rightarrow$ *(ii)* : Έστω ότι το (i) ισχύει, τότε από το Πόρισμα 3.4.4 έχουμε ότι $P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t)$ για κάθε $t \in (0, \infty)$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.

Για τον λόγο αυτό παραθέτουμε τα παρακάτω τέσσερα ενδιάμεσα βήματα.
(a) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $s, h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\{T_n^s \le h\} = \biguplus_{j=0}^{\infty}(\{N_s = j\} \cap \{T_{n+j+k} - s \le h\}).$$

Πράγματι, επειδή $P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t)$ για κάθε $t \in (0, \infty)$, έχουμε $P(N_t = \infty) = 0$ για κάθε $t \in (0, \infty)$ κι έτσι από το Πόρισμα 3.3.7 έπεται ότι η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με το μηδέν. Έτσι, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $N_t(\omega) < \infty$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $\omega \in \Omega$. Συνέπεια αυτού είναι ότι η $\{\{N_t = j\}\}_{j\in\mathbb{N}}$ $(t \in (0, \infty))$ μπορεί να θεωρηθεί ως μια (Σ-μετρήσιμη) διαμέριση του Ω. Οπότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $j \in \mathbb{N}$ και για κάθε $s, h \in \mathbb{R}_+$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\omega \in \{T_n^s \le h\} \;\Leftrightarrow\; T_n^s(\omega) \le h &\overset{(4.3)}{\Leftrightarrow} \sum_{j=0}^{\infty} \chi_{\{T_j \le s < T_{j+1}\}}(\omega)[T_{n+j+k}(\omega) - s] \le h \\
&\Leftrightarrow \sum_{j=0}^{\infty} \chi_{\{N_s = j\}}(\omega)[T_{n+j+k}(\omega) - s] \le h \\
&\Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} \quad [\chi_{\{N_s=j\}}(\omega) = 1 \quad \& \quad T_{n+j+k}(\omega) - s \le h] \\
&\Leftrightarrow \exists j \in \mathbb{N} \quad \omega \in \{N_s = j\} \cap \{T_{n+k} - s \le h\} \\
&\Leftrightarrow \omega \in \biguplus_{j=0}^{\infty}\big(\{N_s = j\} \cap \{T_{n+k} - s \le h\}\big),
\end{aligned}$$

με την τρίτη ισοδυναμία να ισχύει λόγω του Λήμματος 3.3.4(ii), και την (ευθεία συνεπαγωγή στην) τέταρτη ισοδυναμία και την τελευταία ισοδυναμία να αποτελούν άμεση συνέπεια του ότι η $\{\{N_t = j\}\}_{j\in\mathbb{N}}$ είναι για κάθε $t \in (0, \infty)$ μια διαμέριση του Ω.

(b) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $s, h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $\{N_{s+h} - N_s = n\} = \{T_n^s \le h < T_{n+1}^s\}$.

Πράγματι, λαμβάνοντας εκ νέου υπόψη ότι η $\{\{N_t = j\}\}_{j\in\mathbb{N}}$ είναι για κάθε $t \in (0, \infty)$ μια διαμέριση του Ω, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $s, h \in \mathbb{R}_+$ άμεσα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\{N_{s+h} - N_s = n\} &= \biguplus_{j=0}^{\infty}\big(\{N_{s+h} - N_s = n\} \cap \{N_s = j\}\big) \\
&\overset{(3.16)}{=} \biguplus_{j=0}^{\infty}\big(\{N_{s+h} = n + j\} \cap \{N_s = j\}\big) \\
&= \biguplus_{j=0}^{\infty}\big(\{T_{n+j} - s \le h < T_{n+j+1} - s\} \cap \{N_s = j\}\big) \\
&= \{T_n^s \le h < T_{n+1}^s\},
\end{aligned}$$

με την τρίτη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του Λήμματος 3.3.4(ii) και την τελευταία ισότητα να προκύπτει από το (a) αν θεωρήσουμε $k = 0$, καθώς επίσης και επειδή ομοίως με το (a) (και για $k = 1$) αποδεικνύεται για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $s, h \in \mathbb{R}_+$ η ισχύς της $\{T_{n+1}^s > h\} = \biguplus_{j=0}^{\infty}\big(\{T_{n+j+1} - s > h\} \cap \{N_s = j\}\big)$.

(c) Για κάθε $s, h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{N_{s+h}-N_s} = P_{N_h}$.

Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}^*$, $s \in \mathbb{R}_+$. Αρχικά παρατηρούμε ότι από το Πόρισμα 4.2.2(iii) έχουμε ότι

$$P_{W_1^s,\ldots,W_n^s} = P_{W_1,\ldots,W_n}. \tag{4.7}$$

Όμως, από την (3.1) και την (4.4) επίσης έχουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $T_n = \sum_{k=1}^n W_k$, καθώς και ότι $T_n^s = \sum_{k=1}^n W_k^s$ κι επομένως από την (4.7) άμεσα έπεται ότι

$$P_{T_n^s} = P_{T_n} \quad \text{για κάθε} \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{4.8}$$

Οπότε, για κάθε $s, h \in \mathbb{R}_+$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και από το Λήμμα 3.3.4(ii), έχουμε ότι

$$P(N_{s+h} - N_s = k) \overset{\textbf{(b)}}{=} P(T_k^s \le h < T_{k+1}^s) = P(T_k \le h < T_{k+1}) = P(N_h = k),$$

που ισοδυναμεί με το (c).

(d) Η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Έστω $s \in \mathbb{R}_+$. Από το Πόρισμα 4.2.2(ii),(iii) έχουμε ότι η τ.μ. N_s και η σ.δ. $\{W_n^s\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητες και οι πεπερασμένης διάστασης σ.κ.π. των $\{W_n^s\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ταυτίζονται. Συνεπώς, οι N_s και $\{T_n^s\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητες και οι πεπερασμένης διάστασης σ.κ.π. των $\{T_n^s\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ταυτίζονται.

Έστω, τώρα, $s, h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{R}_+$ και $\ell, \ell_1, \ldots, \ell_n \in \mathbb{N}$. Τότε, θέτοντας διαδοχικά $\widetilde{\ell} := (\ell_1, \ldots, \ell_n), \widetilde{h} := (h_1, \ldots, h_n)$ και

$$\hat{\varpi}_{\widetilde{\ell},\widetilde{h}}^{s,n} := P\left(\{N_s = \ell\} \cap \left(\bigcap_{j=1}^{n}\{N_{s+h_j} - N_s = \ell_j\}\right)\right),$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\hat{\varpi}^{s,n}_{\widetilde{\ell},\widetilde{h}} &\overset{(\mathbf{b})}{=} P\Bigg(\{N_s=\ell\}\cap\Bigg(\bigcap_{j=1}^{n}\{T^s_{\ell_j}\le h_j<T^s_{\ell_{j+1}}\}\Bigg)\Bigg)\\
&= P(N_s=\ell)P\Bigg(\bigcap_{j=1}^{n}\{T^s_{\ell_j}\le h_j<T^s_{\ell_{j+1}}\}\Bigg)\\
&\overset{(4.8)}{=} P(N_s=\ell)P\Bigg(\bigcap_{j=1}^{n}\{T_{\ell_j}\le h_j<T_{\ell_{j+1}}\}\Bigg)\\
&= P(N_s=\ell)P\Bigg(\bigcap_{j=1}^{n}\{N_{h_j}=\ell_j\}\Bigg),
\end{aligned}$$

με την δεύτερη ισότητα να ισχύει λόγω της ανεξαρτησίας της τ.μ. N_s και της σ.δ. $\{T^s_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, και την τελευταία ισότητα να ισχύει λόγω του Λήμματος 3.3.4(ii). Άρα δείξαμε ότι

$$\hat{\varpi}^{s,n}_{\widetilde{\ell},\widetilde{h}} = P(N_s=\ell)P\Bigg(\bigcap_{j=1}^{n}\{N_{h_j}=\ell_j\}\Bigg). \tag{4.9}$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε την (3.17) για $m=n$ με επαγωγή στο $n\in\mathbb{N}^*$:

- Για $n=1$ η (3.17) προφανώς ισχύει.
- Έστω ότι για κάποιο $n\in\mathbb{N}^*$ ισχύει

$$P\big(\textstyle\bigcap_{j=1}^{n}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=\ell_j\}\big)=\prod_{j=1}^{n}P\big(N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=\ell_j\big), \qquad (\Upsilon E),$$

και θεωρούμε τα $h_0,h_1,\ldots,h_n\in\mathbb{R}_+$ ώστε $0=h_0<h_1<\cdots h_n$ και $\ell_1,\ldots,\ell_n,\ell_{n+1}\in\mathbb{N}$. Τότε αρκεί να δείξουμε το βήμα της επαγωγής, δηλαδή ότι ισχύει η

$$P\big(\textstyle\bigcap_{j=1}^{n+1}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=\ell_j\}\big)=\prod_{j=1}^{n+1}P\big(N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=\ell_j\big), \qquad (BE).$$

Θέτουμε διαδοχικά $h_j:=t_{j+1}-t_1$ για κάθε $j\in\mathbb{N}_n$, καθώς και $\widetilde{h}:=(h_1,\ldots,h_n)$, $\widetilde{\ell}:=(\ell_1,\ldots,\ell_{n+1})$ και

$$\breve{\varpi}^{n}_{\widetilde{h},\widetilde{\ell}} := P\Bigg(\bigcap_{j=1}^{n}\{N_{h_j}-N_{h_{j-1}}=\ell_{j+1}\}\Bigg),$$

οπότε έχουμε ότι $0=h_0<h_1<\cdots h_n$, καθώς και ότι

$$\begin{aligned}
\breve{\varpi}^{n}_{\widetilde{h},\widetilde{\ell}} &\overset{(\Upsilon E)}{=} \prod_{j=1}^{n}P\big(N_{h_j}-N_{h_{j-1}}=\ell_{j+1}\big)=\prod_{j=1}^{n}P\big(N_{t_{j+1}-t_1}-N_{t_j-t_1}=\ell_{j+1}\big)\\
&\overset{(\mathbf{c})}{=} \prod_{j=1}^{n}P\big(N_{t_{j+1}-t_j}=\ell_{j+1}\big) \overset{r:=j+1}{=} \prod_{r=2}^{n+1}P\big(N_{t_r-t_{r-1}}=\ell_r\big)\\
&\overset{(\mathbf{c})}{=} \prod_{r=2}^{n+1}P\big(N_{t_r}-N_{t_{r-1}}=\ell_r\big)=\prod_{j=2}^{n+1}P\big(N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=\ell_j\big),
\end{aligned}$$

δηλαδή δείξαμε ότι

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{N_{h_j}-N_{h_{j-1}}=\ell_{j+1}\}\right)=\prod_{j=2}^{n+1}P\big(N_{t_j-t_{j-1}}=\ell_j\big). \tag{4.10}$$

Επίσης εύκολα αποδεικνύεται ότι για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ ισχύει

$$\bigcap_{j=1}^{n}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=\ell_j\}=\bigcap_{j=1}^{n}\left\{N_{t_j}=\sum_{r=1}^{j}\ell_r\right\}. \tag{4.11}$$

και

$$\bigcap_{j=1}^{n}\{N_{h_j}-N_{h_{j-1}}=\ell_{j+1}\}=\bigcap_{j=1}^{n}\left\{N_{h_j}=\sum_{r=2}^{j+1}\ell_r\right\}. \tag{4.12}$$

Οπότε θέτοντας επίσης $\widetilde{t}:=(t_0,t_1,\ldots,t_{n+1})$ και

$$A_{n+1}^{\widetilde{\ell},\widetilde{t}}:=P\left(\bigcap_{j=1}^{n+1}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=\ell_j\}\right)$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
A_{n+1}^{\widetilde{k},\widetilde{t}} &\overset{(4.11)}{=} P\left(\bigcap_{j=1}^{n+1}\left\{N_{t_j}=\sum_{r=1}^{j}\ell_r\right\}\right)=P\left(\{N_{t_1}=\ell_1\}\cap\left(\bigcap_{j=2}^{n+1}\left\{N_{t_j}=\sum_{r=1}^{j}\ell_r\right\}\right)\right)\\
&= P\left(\{N_{t_1}=\ell_1\}\cap\left(\bigcap_{j=2}^{n+1}\left\{N_{t_j}-N_{t_1}=\sum_{r=2}^{j}\ell_r\right\}\right)\right)\\
&\overset{y:=j-1}{=} P\left(\{N_{t_1}=\ell_1\}\cap\left(\bigcap_{y=1}^{n}\left\{N_{t_{y+1}}-N_{t_1}=\sum_{r=2}^{y+1}\ell_r\right\}\right)\right)\\
&= P\left(\{N_{t_1}=\ell_1\}\cap\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left\{N_{t_{j+1}}-N_{t_1}=\sum_{r=2}^{j+1}\ell_r\right\}\right)\right)\\
&\overset{h_j:=t_{j+1}-t_1}{=} P\left(\{N_{t_1}=\ell_1\}\cap\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left\{N_{t_1+h_j}-N_{t_1}=\sum_{r=2}^{j+1}\ell_r\right\}\right)\right)\\
&\overset{(4.9)}{=} P(N_{t_1}=\ell_1)P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left\{N_{h_j}=\sum_{r=2}^{j+1}\ell_r\right\}\right)\\
&\overset{(4.12)}{=} P(N_{t_1}=\ell_1)P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\left\{N_{h_j}-N_{h_{j-1}}=\ell_{j+1}\right\}\right)\\
&\overset{(4.10)}{=} P(N_{t_1}-N_{t_0}=\ell_1)\prod_{j=2}^{n+1}P(N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=\ell_j)=\prod_{j=1}^{n+1}P(N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=\ell_j).
\end{aligned}$$

Επομένως, δείξαμε την ισχύ της (BE), κάτι που ολοκληρώνει την επαγωγή κι άρα αποδεικνύει (δοθέντος του (i)) την ισχύ της (3.17), ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη του (d).

Όμως, από το (c) και το (d), λαμβανομένου υπόψη του Λήμματος Α′.1.3, άμεσα έπεται ότι η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων έχει (εκτός από ανεξάρτητες και) στάσιμες προσαυξήσεις, κάτι που έπεται την ισχύ του (ii).

(ii) ⇒ (iii) : Έστω ότι το (ii) ισχύει, τότε η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων είναι μια (ομογενής) διαδικασία Poisson με παράμετρο α κι επομένως έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, και για κάθε $t \in (0,\infty)$ ισχύει ότι $P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t)$, άρα $EN_t = \alpha t$ για κάθε $t \in (0,\infty)$ (βλ. Ενότητα Α′.2(iii)). Και επειδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων, ισχύει ότι $N_0(\omega) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$, άρα και ότι $EN_0 = 0 = \alpha t$ για $t = 0$. Επομένως, δείξαμε το (iii).

(iii) ⇒ (iv) : Άμεση συνέπεια του Πορίσματος 4.1.3 και του ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $EN_t = \alpha t < \infty$.

(iv) ⇒ (v) : Έστω ότι το (iv) ισχύει, δηλαδή ότι η σ.δ. $\{N_t - \alpha t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale, (ως προς την κανονική διύλιση $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$) τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι $E[N_t - \alpha t] < \infty$, άρα και ότι το $EN_t < \infty$, ενώ για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s \le t$ και για κάθε $A \in \Sigma_s$ έχουμε

$$\mu(A \times (s,t]) = \int_A (N_t - N_s)dP = \int_A \alpha(t-s)dP = \alpha(t-s)P(A) = (\alpha P \otimes \lambda)(A \times (s,t]),$$

με την πρώτη και την δεύτερη ισότητα να αποτελούν άμεση συνέπεια του Λήμματος 3.3.8 και του ότι $\Sigma_s \subseteq \Sigma$, και της τρίτης martingale-ιδιότητας της $\{N_t - \alpha t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, αντίστοιχα.

Και επειδή η τελευταία ισότητα ισχύει για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s \le t$ και για κάθε $A \in \Sigma_s$, δηλαδή για κάθε $A \times (s,t]$, που, όμως, είναι ένα τυπικό σύνολο του $\mathscr{E}$, τότε η τελευταία ισότητα θα ισχύει για κάθε σύνολο $F \in \mathscr{E}$, απ'όπου άμεσα έπεται ότι

$$\mu|\mathscr{E} = (\alpha P \otimes \lambda)|\mathscr{E}. \tag{4.13}$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι η ισότητα των δύο μέτρων της (4.13) επεκτείνεται και στην σ-άλγεβρα $\mathscr{H}$. Για το σκοπό αυτό, αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\biguplus_{n\in\mathbb{N}^*} (n-1, n] = (0,\infty). \tag{4.14}$$

Στη συνέχεια θέτουμε $F_n := \Omega \times (n-1,n] \in \mathscr{E}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, οπότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ άμεσα έχουμε ότι $(\alpha P \otimes \lambda)(F_n) = \alpha < \infty$. Επίσης από την (4.14) άμεσα έπεται ότι

$$\biguplus_{n\in\mathbb{N}^*} F_n = \Omega \times \biguplus_{n\in\mathbb{N}^*} (n-1,n] = \Omega \times (0,\infty) \in \mathscr{E} \tag{4.15}$$

κι επομένως από τις δύο τελευταίες σχέσεις άμεσα έπεται ότι το μέτρο $\mu|\mathscr{E} = (\alpha P \otimes \lambda)|\mathscr{E}$ είναι σ-πεπερασμένο.

Επίσης από τον ορισμό του $\mathscr{E}$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι η $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διύλιση άμεσα έπεται ότι το $\mathscr{E}$ είναι κλειστό ως προς την πράξη της τομής. Τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα Μοναδικότητας (της Επέκτασης) για σ-πεπερασμένα μέτρα (βλ. π.χ. [13], Theorem 10.3), λαμβάνοντας υπόψη ότι $\mathscr{H} := \sigma(\mathscr{E})$, καθώς και ότι το μέτρο $(\alpha P \otimes \lambda)|\mathscr{E}$ είναι σ-πεπερασμένο, άμεσα έπεται το (v), κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη της τέταρτης συνεπαγωγής.

(v) ⇒ (i) : Έστω ότι το (v) ισχύει. Για να αποδείξουμε ότι η σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητη, με εκθετικά κατανεμημένους ενδιάμεσους χρόνους, αρκεί να καθορίσουμε τις (από κοινού) κατανομές των τ.μ. $W_1, \ldots, W_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Για την απόδειξη της ζητούμενης συνεπαγωγής – και λαμβανομένης υπόψη της (3.1) – η μελέτη αυτή ανάγεται στην μελέτη της πιθανότητας ενδεχομένων της μορφής $A\cap\{W_n > t\}$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \sigma\big(\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}_{n-1}}\big) = \sigma\big(\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}^*_{n-1}}\big)$ (βλ. Λήμμα 3.2.3(i)).

Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$\mathscr{E}_n := \left\{\bigcap_{k=1}^{n}\{T_k > t_k\} : t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+\right\}$$

και παρατηρούμε ότι το $\mathscr{E}_n$ είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές, καθώς και ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η

$$\sigma(\mathscr{E}_n) = \sigma\big(\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}\big). \tag{4.16}$$

Άρα αρκεί να περιοριστούμε στη μελέτη ενδεχομένων της μορφής $A \cap \{W_n > t\}$, όπου $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathscr{E}_{n-1}$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathscr{E}_{n-1}$ ορίζουμε το σύνολο

$$H_{n,t}(A) := \{(\omega, \psi) : \omega \in A, \quad T_{n-1}(\omega) + t < \psi \le T_n(\omega)\}.$$

Τότε, αν για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ η U_k είναι η απεικόνιση που αναφέρεται στο Λήμμα 3.2.9(i), έχουμε ότι

$$\begin{aligned} U_n^{-1}(H_{n,t}(A)) &= A \cap \{\omega \in \Omega : T_{n-1}(\omega) + t < T_n(\omega)\} \\ &= A \cap \{\omega \in \Omega : W_n(\omega) > t\} = A \cap \{W_n(\omega) > t\}. \end{aligned}$$

Επίσης, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $n \neq k$ έχουμε ότι

$$U_k^{-1}(H_{n,t}(A)) = A \cap \{\omega \in \Omega : T_k(\omega) \in (T_{n-1}(\omega) + t, T_n(\omega)]\} = \varnothing,$$

κι επομένως τελικά δείξαμε ότι

$$U_k^{-1}(H_{n,t}(A)) = \begin{cases} A \cap \{W_n > t\} & \text{αν } k = n \\ \varnothing & \text{αν } k \neq n \end{cases},$$

απ'οπου άμεσα έπεται ότι

$$A \cap \{W_n > t\} = \biguplus_{k=1}^{\infty} U_k^{-1}\big(H_{n,t}(A)\big) \tag{4.17}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathscr{E}_{n-1}$.

Για να εκμεταλλευτούμε την υπόθεση της ισχύος του (v), δηλαδή το ότι ισχύει $\mu|\mathscr{H} = (\alpha P \otimes \lambda)|\mathscr{H}$, ώστε να υπολογίσουμε την πιθανότητα ενδεχομένων της μορφής $A \cap \{W_n > t\}$, αρκεί να δείξουμε ότι $H_{n,t}(A) \in \mathscr{H}$.

Για κάθε $k, m \in \mathbb{N}^*$ ώστε $k \leq m$ και για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ορίζουμε το σύνολο

$$H_{k,m;s,t} := \{(\omega, \psi) : T_k(\omega) > s, T_m(\omega) + t < \psi\}$$

και αποδεικνύουμε πρώτα το ακόλουθο ενδιάμεσο βήμα.

(a*) Για κάθε $k, m \in \mathbb{N}^*$ ώστε $k \leq m$ και για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ το $H_{k,m;s,t} \in \mathscr{H}$.

Πράγματι, για κάθε $k, m \in \mathbb{N}^*$ ώστε $k \leq m$, για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$ ώστε $s + t < p < q$ θέτουμε

$$G_{k,m;s,t;p,q} := \{T_k > s, T_m + t \leq p\} \times (p, q] \tag{4.18}$$

και έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& (\omega, \psi) \in \bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}: s+t<p<q} G_{k,m;s,t;p,q} \\
\Leftrightarrow\ & \exists p, q \in \mathbb{Q} : s + t < p < q \quad (\omega, \psi) \in G_{k,m;s,t;p,q} \\
\Leftrightarrow\ & \exists p, q \in \mathbb{Q} : s + t < p < q \quad \omega \in \{T_k > s, T_m + t \leq p\} \quad \& \quad \psi \in (p, q] \\
\Leftrightarrow\ & \exists p, q \in \mathbb{Q} : s + t < p < q \quad T_k(\omega) > s, T_m(\omega) + t \leq p, \quad p < \psi \leq q \\
\Rightarrow\ & T_k(\omega) > s \quad \& \quad T_m(\omega) + t < \psi \Leftrightarrow (\omega, \psi) \in H_{k,m;s,t},
\end{aligned}$$

άρα δείξαμε ότι

$$\bigcup_{p,q \in \mathbb{Q}: s+t<p<q} G_{k,m;s,t;p,q} \subseteq H_{k,m;s,t}. \tag{4.19}$$

Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
& (\omega, \psi) \in H_{k,m;s,t} \\
\Leftrightarrow\ & T_k(\omega) > s \quad \& \quad T_m(\omega) + t < \psi \\
\Rightarrow\ & \exists p, q \in \mathbb{Q} \quad T_m(\omega) + t \leq p < \psi < q, \quad T_k(\omega) > s \\
\Leftrightarrow\ & \exists p, q \in \mathbb{Q} \quad s + t < T_k(\omega) + t \leq T_m(\omega) + t \leq p < \psi < q \\
\Leftrightarrow\ & \exists p, q \in \mathbb{Q} : s + t < p < q \quad T_k(\omega) > s, \quad T_m(\omega) + t \leq p < \psi < q \\
\Leftrightarrow\ & \exists p, q \in \mathbb{Q} : s + t < p < q \quad (\omega, \psi) \in \{T_k > s, T_m + t \leq p\} \times (p, q) \\
\Rightarrow\ & (\omega, \psi) \in \{T_k > s, T_m + t \leq p\} \times (p, q],
\end{aligned}$$

με την πρώτη συνεπαγωγή να αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι το $\mathbb{Q}$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$ (βλ. π.χ. [7], Πρόταση 3.21), δηλαδή του ότι μεταξύ δύο πραγματικών αριθμών υπάρχει πάντα ένας ρητός, και την τελευταία συνεπαγωγή να αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι $(p, q) \subseteq (p, q]$.

Άρα δείξαμε ότι $\bigcup_{p,q\in\mathbb{Q}:s+t<p<q} G_{k,m;s,t;p,q} \supseteq H_{k,m;s,t}$ κι επομένως από την (4.19) και την τελευταία σχέση άμεσα έπεται ότι

$$H_{k,m;s,t} = \bigcup_{p,q\in\mathbb{Q}:s+t<p<q} G_{k,m;s,t;p,q}. \tag{4.20}$$

Όμως, λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 3.3.4(i), τότε για κάθε $k, m \in \mathbb{N}^*$ ώστε $k \leq m$, για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$ ώστε $s + t < p < q$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \{T_k > s, T_m + t \leq p\} &= \{T_k \leq s\}^c \cap \{T_m \leq p - t\} = \{N_s \geq k\}^c \cap \{N_{p-t} \geq m\} \\ &= \{N_s < k\} \cap \{N_{p-t} \geq m\} \in \Sigma_s, \end{aligned}$$

διότι το $\{N_s < k\} \in \Sigma_s \subseteq \Sigma_{p-t}$ και το $\{N_{p-t} \geq m\} \in \Sigma_{p-t}$, αφού $p - t > s$ και η $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι η κανονική διύλιση για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Επομένως, για κάθε $k, m \in \mathbb{N}^*$ ώστε $k \leq m$, για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$ ώστε $s + t < p < q$ δείξαμε ότι $\{T_k > s, T_m + t \leq p\} \subseteq \Sigma_s$ κι άρα το $G_{k,m;s,t;p,q} \in \mathscr{E} \subseteq \sigma(\mathscr{E}) =: \mathscr{H}$, οπότε από την (4.20) και λαμβάνοντας υπόψη ότι το σύνολο δεικτών της ένωσης που εμφανίζεται στην προαναφερθείσα σχέση είναι αριθμήσιμο ως υποσύνολο του $\mathbb{Q}$ − το οποίο είναι αριθμήσιμο (βλ. π.χ. [5], Πόρισμα 1.27) − άμεσα έπεται το (a*).

(b*) $H_{n,t}(A) \in \mathscr{H}$.

Πράγματι, επειδή το $A \in \mathscr{E}_{n-1}$, σύμφωνα με τον ορισμό του $\mathscr{E}_{n-1}$, έπεται ότι υπάρχουν $t_1, \ldots, t_{n-1} \in \mathbb{R}_+$ ώστε $A = \bigcap_{k=1}^{n-1}\{T_k > t_k\}$ κι επομένως έχουμε ότι

$$\begin{aligned} H_{n,t}(A) &= H_{n,t}\left(\bigcap_{k=1}^{n-1}\{T_k > t_k\}\right) \\ &= \left\{(\omega, \psi) : \omega \in \bigcap_{k=1}^{n-1}\{T_k > t_k\} \quad \& \quad T_{n-1}(\omega) + t < \psi \leq T_n(\omega)\right\} \\ &= \left(\bigcap_{k=1}^{n-1}\{(\omega, \psi) : T_k(\omega) > t_k, T_{n-1}(\omega) + t < \psi\}\right) \cap \{(\omega, \psi) : T_n(\omega) < \psi\}^c \\ &= \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} H_{k,n-1;t_k,t}\right) \cap H^c_{n,n;0,0}. \end{aligned}$$

Επομένως, δείξαμε ότι $H_{n,t}(A) = \left(\bigcap_{k=1}^{n-1} H_{k,n-1;t_k,t}\right) \cap H^c_{n,n;0,0}$, απ'όπου λαμβάνοντας υπόψη το (a*) και το ότι η $\mathscr{H}$ είναι σ-άλγεβρα άμεσα έπεται το (b*).

(c*) $P(A \cap \{W_n > t\}) = (\alpha P \otimes \lambda)(H_{n,t}(A))$.

Πράγματι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(A \cap \{W_n > t\}) &\overset{(4.17)}{=} P\left(\biguplus_{k=1}^{\infty} U_k^{-1}(H_{n,t}(A))\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\Big(U_k^{-1}\big(H_{n,t}(A)\big)\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P_{U_k}\big(H_{n,t}(A)\big) = \mu(H_{n,t}(A)) = (\alpha P \otimes \lambda)(H_{n,t}(A)), \end{aligned}$$

με την προτελευταία ισότητα να προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του μέτρου απαίτησης, και την τελευταία ισότητα να έπεται άμεσα από την (v), λαμβανομένου υπόψη και του (b*). Άρα δείξαμε το (c*).

(d*) $P(A \cap \{W_n > t\}) = \alpha \int_{[t,\infty)} P(A \cap \{W_n > s\}) d\lambda(s)$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι επειδή το μέτρο του Lesbegue μηδενίζεται στα σημεία και είναι αναλλοίωτο ως προς τις μεταθέσεις (βλ. π.χ. [4], Πρόταση 4.6), τότε για κάθε $\omega \in \Omega$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \chi_{(T_{n-1}(\omega)+t, T_n(\omega)]}(s) d\lambda(s) &= \int_{\mathbb{R}} \chi_{(t, T_n(\omega)-T_{n-1}(\omega)]}(s) d\lambda(s) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{(t, W_n(\omega)]}(s) d\lambda(s) \\ &= \lambda\big((t, W_n(\omega)]\big) = \lambda\big([t, W_n(\omega))\big) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[t, W_n(\omega))}(s) d\lambda(s), \end{aligned}$$

άρα δείξαμε ότι για κάθε $\omega \in \Omega$ ισχύει η

$$\int_{\mathbb{R}} \chi_{(T_{n-1}(\omega)+t, T_n(\omega)]}(s) d\lambda(s) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[t, W_n(\omega))}(s) d\lambda(s), \tag{4.21}$$

ενω άμεσα και για κάθε $\omega \in \Omega$ επίσης έπεται η ισχύς της

$$\chi_A(\omega) \chi_{[t, W_n(\omega))}(s) = \chi_{[t,\infty)}(s) \chi_{A \cap \{W_n > s\}}(\omega). \tag{4.22}$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} P(A \cap \{W_n > t\}) &\overset{(\mathbf{c}^*)}{=} (P \otimes \lambda)(H_{n,t}(A)) \\ &= \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \chi_{H_{n,t}(A)}(\omega, s) d(P \otimes \lambda)(\omega, s) \\ &= \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \chi_A(\omega) \chi_{(T_{n-1}(\omega)+t, T_n(\omega)]}(s) d(P \otimes \lambda)(\omega, s) \\ &= \int_{\Omega} \chi_A(\omega) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{(T_{n-1}(\omega)+t, T_n(\omega)]}(s) d\lambda(s) \right) dP(\omega) \\ &\overset{(4.21)}{=} \int_{\Omega} \chi_A(\omega) \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[t, W_n(\omega))}(s) d\lambda(s) \right) dP(\omega) \\ &= \int_{\Omega \times \mathbb{R}} \chi_A(\omega) \chi_{[t, W_n(\omega))}(s) d(P \otimes \lambda)(\omega, s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(4.22)}{=} \int_{\Omega\times\mathbb{R}} \chi_{[t,\infty)}(s)\chi_{A\cap\{W_n>s\}}(\omega)d(P\otimes\lambda)(\omega,s)\\
&= \int_{\mathbb{R}} \chi_{[t,\infty)}(s)\left(\int_{\Omega}\chi_{A\cap\{W_n>s\}}(\omega)dP(\omega)\right)d\lambda(s)\\
&= \int_{[t,\infty)} P(A\cap\{W_n>s\})d\lambda(s),
\end{aligned}$$

με την τέταρτη και την προτελευταία ισότητα να αντλούν την ισχύ τους από το Θεώρημα Fubini (βλ. π.χ. [4], Θεώρημα 9.12).

Άρα δείξαμε ότι $\alpha^{-1}P(A\cap\{W_n>t\}) = \int_{[t,\infty)} P(A\cap\{W_n>s\})d\lambda(s)$, που ισοδυναμεί με το (d*).

(e*) $P(A\cap\{W_n>t\}) = P(A)e^{-\alpha t}$.

Πράγματι, έστω η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(t) := \begin{cases} 0 & \text{αν } t\in(-\infty,0) \\ P(A\cap\{W_n>t\}) & \text{αν } t\in\mathbb{R}_+ \end{cases}.$$

Άμεσα διαπιστώνεται ότι η g είναι φραγμένη, φθίνουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}_+$, κάτι που υποδηλώνει ότι είναι και Riemann ολοκληρώσιμη και ικανοποιεί για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ την ισότητα $\int_{[t,\infty)} g(s)d\lambda(s) = \int_t^\infty g(s)ds$.

Όμως, δείξαμε το (d*) για αυθαίρετα $n\in\mathbb{N}^*$, $t\in\mathbb{R}_+$ και $A\in\mathscr{E}_{n-1}$, άρα θα ισχύει και για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$, $t\in\mathbb{R}_+$ και $A\in\mathscr{E}_{n-1}$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψη την τελευταία ισότητα ολοκληρωμάτων και για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
g(t)-g(0) &= P(A\cap\{W_n>t\}) - P(A\cap\{W_n>0\})\\
&\overset{(\mathbf{e}^*)}{=} \alpha\int_{[t,\infty)} g(s)d\lambda(s) - \alpha\int_{[0,\infty)} g(s)d\lambda(s)\\
&= \alpha\left(\int_t^\infty g(s)ds - \int_0^\infty g(s)ds\right) = -\alpha\int_0^t g(s)ds.
\end{aligned}$$

Επειδή σύμφωνα με το Α΄ Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού (βλ. π.χ. [7], Θεώρημα 17.25) η $g|\mathbb{R}_+$ είναι διαφορίσιμη στα σημεία που είναι συνεχής, μπορούμε να παραγωγίσουμε στην τελευταία σχέση και τελικά να πάρουμε την διαφορική εξίσωση $g'(t) = -\alpha g(t)$ που εύκολα προκύπτει ότι έχει γενική λύση την $g(t) = g(0)e^{-\alpha t}$ για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$, με αρχική συνθήκη την $g(0) = P(A\cap\{W_n>0\}) = P(A\cap\Omega) = P(A)$, κάτι που ουσιαστικά αποδεικνύει το (e*).

Όμως, για $t_1=\cdots=t_{n-1}=0$ και λαμβάνοντας εκ νέου υπόψη ότι οι τ.μ. T_n $(n\in\mathbb{N}^*)$ είναι θετικές ως χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων, επίσης έχουμε ότι

$$\bigcap_{k=1}^{n-1}\{T_k>t_k\} = \bigcap_{k=1}^{n-1}\{T_k>0\} = \bigcap_{k=1}^{n-1}\Omega = \Omega,$$

άρα το $\Omega \in \mathscr{E}_{n-1}$, οπότε από το (e*) και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε

$$P(W_n > t) = P(\Omega \cap \{W_n > t\}) = e^{-\alpha t} P(\Omega) = e^{-\alpha t}. \tag{4.23}$$

Από την τελευταία σχέση, όμως, άμεσα έπεται ότι η σ.κ.π. της τ.μ. W_n ($n \in \mathbb{N}^*$) ισούται με $F_{W_n}(t) := P(W_n \leq t) = 1 - e^{-\alpha t}$ που είναι η σ.κ.π. της εκθετικής κατανομής με παράμετρο $\alpha \in (0, \infty)$. Επομένως, δείξαμε ότι η $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ κι άρα αρκεί να δείξουμε την ανεξαρτησία των ενδιάμεσων χρόνων απαίτησης.

Από το (e*), όμως, λαμβάνοντας υπόψη την (4.23) άμεσα έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathscr{E}_{n-1}$ ισχύει $P(A \cap \{W_n > t\}) = P(A)P(W_n > t)$ κι επομένως τα ενδεχόμενα A και $\{W_n > t\}$ είναι ανεξάρτητα. Και επειδή από την (4.16) και το Λήμμα 3.2.3(i) έχουμε ότι το $A \in \sigma\big(\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}_{n-1}}\big) = \sigma\big(\{W_k\}_{k \in \mathbb{N}^*_{n-1}}\big)$ ($\sigma(W_0) := \{\varnothing, \Omega\}$), τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι η σ-άλγεβρα $\sigma\big(\{W_k\}_{k \in \mathbb{N}^*_{n-1}}\big)$ είναι ανεξάρτητη της τ.μ. W_n, άρα και ότι οι τ.μ. W_k ($k \in \mathbb{N}^*_n$) είναι ανεξάρτητες για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, απ'όπου εύκολα προκύπτει επαγωγικά και η ανεξαρτησία της ακολουθίας $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Επομένως, δοθέντος του (v) δείξαμε την ισχύ του (i), άρα δείξαμε την ζητούμενη συνεπαγωγή.

(ii) ⇒ (vi) : Έστω ότι το (ii) ισχύει, τότε η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις και επί πλέον ισχύει ότι $P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t)$ για κάθε $t \in (0, \infty)$, απ'όπου (βλ. Ενότητα A′.2(iii)) για κάθε $t \in (0, \infty)$ έπεται ότι $EN_t = VN_t = \alpha t < \infty$, άρα και ότι $EN_t^2 = VN_t + E^2 N_t = \alpha t(1 + \alpha t) < \infty$. Επομένως δείξαμε ότι η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης κι άρα αρκεί να δείξουμε ακόμα την ανισότητα του (vi).

Αρχικά και για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s \leq t$ εισάγουμε την τ.μ. $Z_0 := N_s + \alpha(t - s)$, η οποία προφανώς είναι Σ_s-μετρήσιμη. Επίσης άμεσα προκύπτει για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η ισχύς της

$$E(N_t - Z)^2 = E(N_t - Z_0)^2 + E(Z - Z_0)^2 + 2E(N_t - Z_0)E(Z_0 - Z). \tag{4.24}$$

Τότε για την απόδειξη της ζητούμενης ανισότητας παραθέτουμε τα παρακάτω ενδιάμεσα βήματα.

(a)** Για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s \leq t$ η τ.μ. $N_t - Z_0$ είναι ανεξάρτητη της τ.μ. $Z_0 - Z$ και $N_t - Z_0, Z_0 - Z \in \mathcal{L}^1(P)$.

Πράγματι, επειδή $\sigma(Z) \subseteq \Sigma_s$ έχουμε ότι

$$\sigma(Z_0 - Z) \subseteq \sigma(\{Z_0, Z\}) = \sigma\big(\sigma(Z_0) \cup \sigma(Z)\big) \subseteq \sigma(\Sigma_s \cup \Sigma_s) = \sigma(\Sigma_s) = \Sigma_s,$$

με την πρώτη σχέση εγκλεισμού να αποτελεί συνέπεια του [4], Παρατήρηση 13.10.

Ακόμη επειδή η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε από το βήμα (b) της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1.2 και για $\{Z_t\}_{t \in \mathbb{R}_+} = \{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχουμε ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$

ώστε $s \leq t$ οι σ-άλγεβρες $\sigma(N_t - N_s)$ και Σ_s είναι ανεξάρτητες. Όμως, επειδή (από την (3.16)) άμεσα έχουμε ότι $N_t - Z_0 = (N_t - N_s) - \alpha(t-s)$, έπεται ότι και οι σ-άλγεβρες $\sigma(N_t - Z_0)$ και $\Sigma_s \supseteq \sigma(Z_0 - Z)$ είναι ανεξάρτητες. Άρα ισχύει το (a**).

Παρατηρούμε ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s \leq t$ έχουμε

$$E|Z_0| = E|N_s - \alpha(t-s)| \leq E|N_s| + \alpha(t-s) < \infty,$$

άρα η Z_0 είναι ολοκληρώσιμη τ.μ. κι επομένως το ίδιο θα ισχύει και για την $N_t - Z_0$ ως διαφορά ολοκληρώσιμων τ.μ..

Επίσης επειδή εξ'υποθέσεως η $Z \in \mathcal{L}^2(P) \subseteq \mathcal{L}^1(P)$ (βλ. π.χ. [4], Πρόταση 11.8), τότε και η $Z_0 - Z \in \mathcal{L}^1(P)$, αφού $Z_0, Z \in \mathcal{L}^1(P)$.

(b)** Για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s \leq t$ ισχύει $E[(N_t - Z_0)(Z_0 - Z)] = 0$.

Πράγματι, από το (a**) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E[(N_t - Z_0)(Z_0 - Z)] &= E(N_t - Z_0)E(Z_0 - Z) \\ &= E\big[N_t - [N_s + \alpha(t-s)]\big]E(Z_0 - Z) \\ &\overset{(3.16)}{=} E\big[(N_t - N_s) - \alpha(t-s)\big]E(Z_0 - Z) \\ &= [E(N_t - N_s) - \alpha(t-s)]E(Z_0 - Z) = 0, \end{aligned}$$

με την τελευταία ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s \leq t$ η $E(N_t - N_s) = \alpha(t-s)$. Άρα δείξαμε το (b**).

Από τον ορισμό της τ.μ. Z_0, εύκολα έπεται ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s \leq t$ ισχύει $E(N_t - Z_0)^2 = V(N_t - N_s) < \infty$. Επίσης $E(Z_0 - Z)^2 < \infty$, αφού οι Z_0, Z είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες τ.μ..

Τότε, από την (4.24), λαμβάνοντας υπόψη το (b**), άμεσα έπεται ότι

$$E(N_t - Z)^2 = E(N_t - Z_0)^2 + E(Z - Z_0)^2 \geq E(N_t - Z_0)^2 = E\big[N_t - [N_s + \alpha(t-s)]^2\big],$$

κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη της συνεπαγωγής.

(vi) $\Rightarrow$ *(iv)* : Έστω ότι το (vi) ισχύει. Επειδή η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι προσαρμοσμένη στη $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, αφού η $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι η κανονική διύλιση της $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, άμεσα έχουμε ότι η σ.δ. $\{N_t - \alpha t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι προσαρμοσμένη στη $\{\Sigma_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Επίσης εφαρμόζοντας την ανισότητα του (vi) για $s = 0$ και $Z = \mathbf{0}$ άμεσα έπεται ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η τ.μ. $N_t - \alpha t$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, άρα και ολοκληρώσιμη. Επομένως, για να δείξουμε το (iv) αρκεί να δείξουμε την τρίτη (χαρακτηριστική) ιδιότητα ενός martingale για την $\{N_t - \alpha t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$.

Αρχικά θεωρούμε οποιαδήποτε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s \leq t$, $A \in \Sigma_s$ και $c \in \mathbb{R}$, και θέτουμε $Z := N_s + \alpha(t-s) + c\chi_A$, η οποία είναι προφανώς Σ_s-μετρήσιμη – κι άρα ισχύει ότι

$\sigma(Z) \subseteq \Sigma_s$ – και ικανοποιεί την $EZ^2 < \infty$, αφού από το (vi) έχουμε ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης. Τότε, από το (vi) επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} & E\big(N_t - (N_s + \alpha(t-s))\big)^2 \\ \leq\ & E(N_t - Z)^2 \\ =\ & E\big(N_t - (N_s + \alpha(t-s) + c\chi_A)\big)^2 \\ =\ & E\Big(\big(N_t - (N_s + \alpha(t-s))\big) - c\chi_A\Big)^2 \\ =\ & E\big(N_t - (N_s + \alpha(t-s))\big)^2 - 2cE\big[N_t - (N_s + \alpha(t-s))\chi_A\big] + c^2 P(A), \end{aligned}$$

με την τελευταία ισότητα να ισχύει διότι $P(A) = E[\chi_A] = E[\chi_A^2]$.

Στη συνέχεια διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:

• $P(A) > 0$. Αν θέσουμε στην τελευταία ανισότητα

$$c := \frac{E\big[\chi_A(N_t - (N_s + \alpha(t-s))\big]}{P(A)}$$

άμεσα έπεται ότι $0 \leq -E^2\big[\chi_A(N_t - (N_s + \alpha(t-s))\big]/P(A)$, άρα $E\big[\chi_A(N_t - (N_s + \alpha(t-s))\big] = 0$.

Από την τελευταία ισότητα, όμως, άμεσα έπεται ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s \leq t$ ισχύει $\int_A (N_t - \alpha t)dP = \int_A (N_s - \alpha s)$, δηλαδή δείξαμε την ζητούμενη ιδιότητα για την $\{N_t - \alpha t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

• $P(A) = 0$. Τότε, $0 = P(A) = E[\chi_A] = \int \chi_A dP$, άρα η τ.μ. $\chi_A(N_t - \alpha t) = 0 \quad P-\sigma.\beta.$, κι επομένως εύκολα διαπιστώνεται ότι η σ.δ. $\{N_t - \alpha t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί την ζητούμενη ιδιότητα του martingale .

Άρα δείξαμε ότι η $\{N_t - \alpha t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι martingale, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη της τελευταίας συνεπαγωγής, άρα και του θεωρήματος. □

Παρατηρήσεις 4.2.5. Κλείνοντας αυτό το κεφάλαιο κρίνεται σκόπιμο να επισημάνουμε ότι τόσο το Θεώρημα 4.1.2 και τα Πορίσματα 4.1.3 και 4.1.4, όσο κυρίως ο τελευταίος χαρακτηρισμός είναι τυπικά παραδείγματα της ουσιαστικής συμβολής των martingales στη Θεωρία Κινδύνου. Μάλιστα, αναφορικά με τον παραπάνω χαρακτηρισμό παρατηρούμε τα εξής:

(a) Η ιδιότητα (vi) του Θεωρήματος 4.2.4 σχετίζεται με το πρόβλημα της *πρόβλεψης* (*prediction*) για την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με ανεξάρτητες προσαυξήσεις και πεπερασμένες ροπές δεύτερης τάξης. Το προκύπτον συμπέρασμα είναι ότι για την προαναφερθείσα σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *η καλύτερη πρόβλεψη σε σχέση με ένα αναμενόμενο τετραγωνικό σφάλμα της τ.μ.* N_t *μειωμένης κατά μία άλλη τ.μ., η οποία εξαρτάται μόνο από την ιστορία της* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *μέχρι τον χρόνο* s $(s \leq t)$*, δίνεται από την* $N_s + E(N_t - N_s)$.

(b) Σχετικά με τα martingales, αναφέρουμε ότι στα πλαίσια της απόδειξης του χαρακτηρισμού δείξαμε τις συνεπαγωγές (iv) $\Rightarrow$ (v) $\Rightarrow$ (i). Μία κατευθείαν συνεπαγωγή από το (iv) $\Rightarrow$ (ii) έχει αποδειχθεί από τον Watanabe (βλ. [29]).

Κεφάλαιο 5

Το Πρόβλημα της Χρεοκοπίας και τα Martingales

Στο παρόν κεφάλαιο εισάγουμε την $\sigma.\delta.$ του αποθεματικού και μελετάμε το πρόβλημα της χρεοκοπίας, ολοκληρώνοντας έτσι την μελέτη του υποδείγματος του χαρτοφυλακίου μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, το οποίο έχουμε εισάγει στην Ενότητα 3.1 και ουσιαστικά μελετήσει στα δύο προηγούμενα κεφάλαια.

Σε αυτό το πλαίσιο, ορίζουμε την $\sigma.\delta.$ του αποθεματικού (Ενότητα 5.1) και τις έννοιες του συντελεστή προσαρμογής και του συντελεστή υπερπροσαρμογής και αποδεικνύουμε την Ανισότητα Lundberg (Ενότητα 5.2). Τέλος, αναφερόμαστε στην σχέση της πιθανότητας χρεοκοπίας και των πιθανοτήτων ουράς τυχαίου αθροίσματος (βλ. Παρατήρηση 5.2.7) και δίνουμε μία αναγκαία συνθήκη, όπως και ορισμένες ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ενός συντελεστή υπερπροσαρμογής (Ενότητα 5.3).

5.1 Το Υπόδειγμα

Σε ολόκληρο το παρόν κεφάλαιο θεωρούμε την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ως μια $\sigma.\delta.$ του αριθμού των απαιτήσεων, την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως μια $\sigma.\delta.$ άφιξης των απαιτήσεων που επάγεται από την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (βλ. Θεώρημα 3.3.3) και την $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως μια $\sigma.\delta.$ ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων που επάγεται από την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Υποθέτουμε ότι το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης είναι το κενό σύνολο (δηλαδή ότι $\Omega_T = \Omega_N = \emptyset$), καθώς και ότι η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με το μηδέν (δηλαδή ότι $P(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty) = 0$).

Επί πλέον, θεωρούμε την $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ως μια $\sigma.\delta.$ μεγέθους απαίτησης, την $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ως την $\sigma.\delta.$ συνολικών απαιτήσεων που επάγεται από την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και

την $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, καθώς και $\kappa \in (0,\infty)$. Για κάθε $u \in (0,\infty)$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ορίζουμε την τ.μ.

$$R_t^u := u + \kappa t - S_t,$$

για την οποία σύμφωνα με τον ορισμό της τ.μ. S_t (βλ. Ενότητα 3.5) έχουμε ότι $R_0^u = 0$.

Σε όρους του υποδείγματος που σκιαγραφήσαμε στην Ενότητα 3.1 η εισαγωγή της τ.μ. R_t^u βρίσκει την ακόλουθη ερμηνεία:

- Το κ παριστάνει την **ένταση ασφαλίστρου** (*premiun intensity*) έτσι ώστε με κt να δίνεται το **εισόδημα από ασφάλιστρα** (της ασφαλιστικής εταιρείας) μέχρι τον χρόνο t. Δηλαδή, η ένταση ασφαλίστρου είναι το ποσό των νομισματικών μονάδων (αναγόμενο) στη μονάδα του χρόνου που εισπράττει η ασφαλιστική εταιρεία από ασφάλιστρα (μέχρι τον t).

- Το u παριστάνει το **αρχικό αποθεματικό** (που διατηρεί η εταιρεία).

- Η τ.μ. R_t^u παριστάνει το **αποθεματικό** στο χρόνο t όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u.

Η οικογένεια $\{R_t^u\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται η **σ.δ. του αποθεματικού** που επάγεται από την σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, την σ.δ. μεγέθους απαίτησης $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, την ένταση ασφαλίστρου κ και το αρχικό αποθεματικό u (βλ. και Σχήμα Β΄4).

Το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στο **πρόβλημα της χρεοκοπίας** για την σ.δ. του αποθεματικού. Αυτό είναι το πρόβλημα του υπολογισμού ή της εκτίμησης της πιθανότητας του ενδεχομένου η σ.δ. του αποθεματικού (ή πιο απλά το αποθεματικό) να πέσει κάποια στιγμή κάτω από το μηδέν (βλ. Σχήμα Β΄4).

Για να δοθεί, όμως, μια ακριβής διατύπωση του προβλήματος της χρεοκοπίας, χρειάζεται πρώτα να γίνει αναφορά σε ορισμένες έννοιες της Θεωρίας Μέτρου.

***Ορισμός* 5.1.1.** Έστω $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια οικογένεια μετρήσιμων συναρτήσεων $Z_t : \Omega \to [-\infty,\infty]$. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $Z : \Omega \to [-\infty,\infty]$ ονομάζεται **ουσιώδες infinum** (*essential infimum*) της $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αν και μόνο αν ικανοποεί τα εξής:

(i) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι $P(Z_t \geq Z) = 1$.

(ii) Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $Y : \Omega \to [-\infty,\infty]$ που ικανοποιεί την $P(Z_t \geq Y) = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ισχύει ότι $P(Z \geq Y) = 1$.

Άμεση συνέπεια του Ορισμού 5.1.1 είναι ότι δύο οποιαδήποτε ουσιώδη infima μιας οικογένειας μετρήσιμων συναρτήσεων είναι $P - \sigma.\beta.$ ίσα.

Το $P - \sigma.\beta.$ μοναδικό ουσιώδες infimum της οικογένειας $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σημειώνεται με $\inf_{t\in\mathbb{R}_+} Z_t$.

Λήμμα 5.1.2. Κάθε οικογένεια $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μετρήσιμων συναρτήσεων $\Omega \to [-\infty,\infty]$ έχει ένα ουσιώδες infimum.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τις ιδιότητες (i) και (ii) του Ορισμού 5.1.1.

Η συνάρτηση $f : \overline{\mathbb{R}} \to [-1, 1]$ με τύπο

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{αν } x = -\infty \\ \frac{x}{1+|x|} & \text{αν } x \in \mathbb{R} \\ 1 & \text{αν } x = \infty \end{cases}$$

εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι $1-1$, επί και αμφισυνεχής, οπότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $Z_t : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ υπάρχει μοναδική τ.μ. $\widetilde{Z}_t : \Omega \to [-1, 1]$ με $\widetilde{Z}_t = f \circ Z_t$, καθώς επίσης και για κάθε τ.μ. $\widetilde{Z}_t : \Omega \to [-1, 1]$ υπάρχει μοναδική μετρήσιμη συνάρτηση $Z_t : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ με $Z_t = f^{-1} \circ \widetilde{Z}_t$. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας, αρκεί να δείξουμε την ύπαρξη ουσιώδους infimum των $Z_t(\omega) \in [-1, 1]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $\omega \in \Omega$.

Όμως, στην περίπτωση αυτή παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι η $|Z_t| \le \mathbf{1} \in \mathcal{L}^1(P)$, όπου η $\mathbf{1} : \Omega \to \mathbb{R}_+$ είναι η σταθερή συνάρτηση με τύπο $\mathbf{1}(\omega) = 1$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Επομένως, από το [6], Πρόταση 2.2.13, έχουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η τ.μ. $Z_t \in \mathcal{L}^1(P)$.

Επίσης θέτουμε $\mathscr{J} := \{A \subseteq \mathbb{R}_+ : A \ \ \text{αριθμήσιμο}\}$ και για κάθε $J \in \mathscr{J}$ θεωρούμε την μετρήσιμη συνάρτηση $Z_J := \inf_{t\in J} Z_t$ (βλ. π.χ. [6], Πρόταση 2.1.7(b)). Τότε η απόδειξη του ζητουμένου θα γίνει βάσει των παρακάτω τριών βημάτων.

(a) Υπάρχει $\{J_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ ακολουθία στοιχείων του $\mathscr{J}$ ώστε για $J_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} J_n$ να ισχύει ότι $EZ_{J_\infty} = \inf_{J\in\mathscr{J}} EZ_J$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι $J_\infty \in \mathscr{J}$ (βλ. π.χ. και [5], Θεώρημα 1.30). Επίσης από τον ορισμό της τ.μ. Z_J άμεσα προκύπτει ότι

$$|EZ_J| = \left|\int Z_J dP\right| \le \int |Z_J| dP \le \int \mathbf{1} dP = P(\Omega) = 1,$$

άρα ισχύει ότι $EZ_J \in [-1, 1]$ κι επομένως $c := \inf_{J\in\mathscr{J}} EZ_J \in [-1, 1]$.

Από τον ορισμό του c και σύμφωνα με το [5], Θεώρημα 2.4, έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ υπάρχει $J_n \in \mathscr{J}$ ώστε

$$c \le EZ_{J_n} < c + \frac{1}{n}$$

που με τη σειρά του συνεπάγεται ότι

$$c \le \inf_{n\in\mathbb{N}^*} EZ_{J_n} \le \inf_{n\in\mathbb{N}^*}\left(c+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(c+\frac{1}{n}\right) = c.$$

Άρα δείξαμε ότι $c \le \inf_{n\in\mathbb{N}^*} EZ_{J_n} \le c$ ή ισοδύναμα ότι το $c = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} EZ_{J_n}$ κι άρα μπορούμε να επιλέξουμε μια ακολουθία $\{J_n\}_{n\in\mathbf{N}^*}$ στο $\mathscr{J}$ τέτοια ώστε $c = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} EZ_{J_n}$.

Επίσης από τον ορισμό του J_∞ έχουμε ότι το $J_\infty \supseteq J_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ κι άρα για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $Z_{J_\infty} \le Z_{J_n}$, συνεπώς $EZ_{J_\infty} \le EZ_{J_n}$ κι επομένως $EZ_{J_\infty} \le \inf_{n\in\mathbb{N}^*} EZ_{J_n} = c$. Όμως, από τον ορισμό του c και επειδή $J_\infty \in \mathscr{J}$ επίσης έχουμε ότι $c \le EZ_{J_\infty}$, κι επομένως τελικά έπεται ότι $EZ_{J_\infty} = c$, κάτι που αποδεικνύει το (a).

(b) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι $P\big(Z_t \ge Z_{J_\infty}\big) = 1$.

Πράγματι, επειδή από τις ιδιότητες του infimum έχουμε ότι για οποιαδήποτε δύο μη κενά φραγμένα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\} := \inf A \wedge \inf B,$$

τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε

$$Z_{J_\infty\cup\{t\}} := \inf_{s\in J_\infty\cup\{t\}} Z_s = \inf_{s\in J_\infty} Z_s \wedge Z_t \le \inf_{s\in J_\infty} Z_s =: Z_{J_\infty} \quad P-\sigma.\beta.,$$

απ'όπου σύμφωνα και με το (a) έχουμε ότι $EZ_{J_\infty\cup\{t\}} \le EZ_{J_\infty} = c$. Όμως, επειδή $J_\infty \in \mathscr{J}$ τότε επίσης έχουμε ότι $J_\infty\cup\{t\} \in \mathscr{J}$, οπότε από τον ορισμό του c έχουμε ότι $EZ_{J_\infty\cup\{t\}} \ge c$, κι επομένως, λαμβανομένου υπόψη και του (a), έπεται ότι $EZ_{J_\infty\cup\{t\}} = c = EZ_{J_\infty}$.

Όμως, από την τελευταία σχέση και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε $Z_{J_\infty} \wedge Z_t = Z_{J_\infty}$ $P-\sigma.\beta.$, οπότε άμεσα προκύπτει ότι $P\big(Z_{J_\infty} \wedge Z_t = Z_{J_\infty}\big) = P\big(Z_{J_\infty} \le Z_t\big) = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, δηλαδή το (b).

(c) Για οποιαδήποτε μετρήσιμη συνάρτηση $Y : \Omega \to [-1, 1]$ τέτοια ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ να ισχύει ότι $P(Z_t \ge Y) = 1$ ικανοποιείται η $P(Z_{J_\infty} \ge Y) = 1$.

Πράγματι, έστω μια οποιαδήποτε μετρήσιμη συνάρτηση $Y : \Omega \to [-1, 1]$ τέτοια ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ να ισχύει ότι $P(Z_t \ge Y) = 1$. Τότε, επειδή $P(Z_t \ge Y) = 1$ για κάθε $t \in J_\infty$, άμεσα έπεται το (c), κάτι που ολοκληρώνει και την απόδειξη ολόκληρου του λήμματος, αφού τα (b) και (c), είναι οι ζητούμενες ιδιότητες του Ορισμού 5.1.1. □

Ας επιστρέψουμε τώρα, στην $\sigma.\delta.$ του αποθεματικού $\{R_t^u\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Από το Λήμμα 5.1.2 έπεται ότι η $\sigma.\delta.$ του αποθεματικού έχει ένα ουσιώδες infinum, το οποίο συμβολίζεται με $\inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u$. Επί πλέον, επειδή το ουσιώδες infinum, εξ'ορισμού είναι μια τ.μ. επίσης έχουμε ότι $\big\{\inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u < 0\big\} \in \Sigma$.

***Ορισμός* 5.1.3.** Το ενδεχόμενο $\{\inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u < 0\}$ ονομάζεται **χρεοκοπία** της $\sigma.\delta.$ του αποθεματικού και η πιθανότητα αυτού ονομάζεται **πιθανότητα χρεοκοπίας**.
Η πιθανότητα χρεοκοπίας σημειώνεται με $\Psi(u) := P\big(\inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u < 0\big)$ για κάθε $u \in (0,\infty)$ για να τονίσουμε την εξάρτηση της πιθανότητας χρεοκοπίας από το αρχικό αποθεματικό.

Η πρώτη χρονική στιγμή για την οποία το αποθεματικό γίνεται αρνητικό ονομάζεται **χρόνος χρεοκοπίας** και συμβολίζεται με $\widetilde{T}$, δηλαδή για κάθε $u \in (0,\infty)$ ο $\widetilde{T} := \widetilde{T}(u) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : R_t^u < 0\}$.

Στην πράξη, ένα άνω φράγμα Ψ^* της πιθανότητας χρεοκοπίας δίνεται προκαταβολικά και η ασφαλιστική εταιρεία εστιάζει το ενδιαφέρον της στην επιλογή εκείνου του αρχικού αποθεματικού u ώστε $\Psi(u) \le \Psi^*$. Θεωρητικά, θα ήταν επιθυμητή η επιλογή ενός τέτοιου u ώστε $\Psi(u) = \Psi^*$ αλλά το πρόβλημα του υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι ακόμη δυσκολότερο από το πρόβλημα υπολογισμού της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων.

Για το λόγο αυτό το *επιθυμητό είναι να έχουμε ένα άνω φράγμα* $\widehat{\Psi}(u)$ για την πιθανότητα χρεοκοπίας, όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u, και να επιλέξουμε ένα u τέτοιο ώστε $\widehat{\Psi}(u) = \Psi^*$. Μάλιστα, επειδή $\Psi(u) \le \widehat{\Psi}(u)$ μπορούμε να ισχυριστούμε ότι η ασφαλιστική εταιρεία *βρίσκεται στην ασφαλή (υπό την έννοια ότι λαμβάνει υπόψη το χειρότερο δυνατό σενάριο για την πιθανότητα χρεοκοπίας) πλευρά*, αλλά ίσως να δεσμεύει πάρα πολλά κεφάλαια.

Διαισθητικά, είναι ξεκάθαρο ότι ο χρόνος που η $\sigma.\delta.$ του αποθεματικού πέφτει για πρώτη φορά κάτω από το μηδέν πρέπει να είναι ένας χρόνος άφιξης απαίτησης. Για να γίνει το γεγονός αυτό ακριβώς κατανοητό, εισάγουμε μια *διακριτοποίηση της $\sigma.\delta.$ του αποθεματικού*· για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ θέτουμε

$$G_n := \kappa W_n - X_n,$$

καθώς και

$$U_n^u := \begin{cases} u + \sum_{j=1}^n G_j & \text{αν } n \in \mathbb{N}^* \\ u & \text{αν } n = 0 \end{cases}.$$

Η ακολουθία $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ονομάζεται η **$\sigma.\delta.$ υπερβάλλοντος ποσού (ζημιάς)** *(excess premium process)* και ουσιαστικά δηλώνει την διαφορά (εισροή ή εκροή κεφαλαίου) μεταξύ των εισπραχθέντων ασφαλίστρων στο μεσοδιάστημα μέχρι την εμφάνιση της επόμενης απαίτησης, και του μέγεθους της απαίτησης αυτής.

Η ακολουθία $\{U_n^u\}_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται η **τροποποιημένη $\sigma.\delta.$ του αποθεματικού** και ουσιαστικά δηλώνει το ύψος του αποθεματικού στις χρονικές στιγμές εμφάνισης των απαιτήσεων, όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u ($u \in (0,\infty)$). Εναλλακτικά, το αποθεματικό μπορεί να δοθεί ως το αρχικό αποθεματικό προσαυξημένο κατά την διαφορά των συνολικά εισπραχθέντων ασφαλίστρων μέχρι την εμφάνιση μιας απαίτησης μείον το συνολικό ύψος των απαιτήσεων που εμφανίστηκαν μέχρι εκείνη την χρονική στιγμή. Το γεγονός αυτό αποδεικνύεται παρακάτω.

Πράγματι, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} G_j = \sum_{j=1}^{n} \big(\kappa W_j - X_j\big) = \kappa \sum_{j=1}^{n} W_j - \sum_{j=1}^{n} X_j = \kappa T_n - S_n, \tag{5.1}$$

άρα και ότι

$$U_n^u = u + \kappa T_n - S_n, \tag{5.2}$$

κάτι που ισχύει και για $n = 0$, διότι ισχύει $S_0(\omega) = T_0(\omega) := 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ (αφού από την αρχή της παρούσας ενότητας υποθέσαμε ότι η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. συνολικών απαιτήσεων και η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων).

Τέλος, αναφορικά με τις $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{U_n^u\}_{n\in\mathbb{N}}$ σημειώνουμε ότι ομοίως με το (i) του Λήμματος 3.2.3 αποδεικνύεται η ισχύς της

$$\sigma\big(\{U_k^u\}_{k\in\mathbb{N}_n}\big) = \sigma\big(\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}\big). \tag{5.3}$$

Παρακάτω, καταδεικνύεται ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας καθορίζεται από την τροποποιημένη σ.δ. του αποθεματικού (βλ. Λήμμα 5.1.5). Για την απόδειξη, όμως, του εν λόγω αποτελέσματος, αποδεικνύουμε πρώτα το παρακάτω λήμμα που αναφέρεται σε δύο ιδιότητες του supremum και του infimum μιας οικογένειας πραγματικών αριθμών.

Λήμμα 5.1.4. Ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $I \neq \varnothing$ ένα σύνολο δεικτών και $\{[\alpha_j, \beta_j)\}_{j\in I}$ με $\alpha_j < \beta_j$ για κάθε $j \in I$, οικογένεια ημιάνοικτων διαστημάτων του $\mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι $\bigcup_{j\in I}[\alpha_j, \beta_j) = [\inf_{j\in I} \alpha_j, \sup_{j\in I} \beta_j)$.

(ii) Αν $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ακολουθία μη κενών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε για οποιαδήποτε οικογένεια πραγματικών αριθμών $\{x_k\}_{k\in J}$, όπου $J = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, ισχύει

$$\inf_{k\in\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n} x_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\in A_n} x_k,$$

εφόσον τα infimum υπάρχουν.

Απόδειξη. **(i)** Αρχικά παρατηρούμε ότι εύκολα αποδεικνύεται η

$$\bigcup_{j\in I}[\alpha_j, \beta_j) \subseteq \Big[\inf_{j\in I} \alpha_j, \sup_{j\in I} \beta_j\Big). \tag{5.4}$$

Έστω, τώρα, το $x \in [\inf_{j\in I} \alpha_j, \sup_{j\in I} \beta_j)$ και ας υποθέσουμε ακόμη ότι για κάθε $j \in I$ το $x \notin [\alpha_j, \beta_j)$, τότε ισοδύναμα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \forall j \in I \quad x \in [\alpha_j, \beta_j)^c \quad &\Leftrightarrow \quad \forall j \in I \quad [x < \alpha_j \quad \acute{\eta} \quad x \geq \beta_j] \Rightarrow x \leq \inf_{j\in I} \alpha_j \quad \acute{\eta} \quad x \geq \sup_{j\in I} \beta_j \\ &\Leftrightarrow \quad \sup_{j\in I} \beta_j \leq x \leq \inf_{j\in I} \alpha_j \Rightarrow \sup_{j\in I} \beta_j \leq \inf_{j\in I} \alpha_j, \end{aligned}$$

που όμως είναι άτοπο, αφού εξ'υποθέσεως είναι $\alpha_j < \beta_j$ για κάθε $j \in I$, άρα και $\sup_{j\in I} \beta_j > \inf_{j\in I} \alpha_j$.

Επομένως, θα υπάρχει $j \in I$ ώστε $x \in [\alpha_j, \beta_j)$ που ισοδυναμεί με το ότι το $x \in \bigcup_{j\in I} [\alpha_j, \beta_j)$. Άρα ουσιαστικά δείξαμε την αντίστροφη της (5.4) σχέση εγκλεισμού, κάτι που αποδεικνύει το (i).

(ii) Αφού για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\inf_{k\in\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n} x_k \leq \inf_{k\in A_n} x_k$, άμεσα προκύπτει ότι

$$y_1 := \inf_{k\in\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n} x_k \leq \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\in A_n} x_k =: y_0.$$

Αντιστρόφως, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x_{k_0} \in B := \{x_k : k \in \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\}$ ώστε $y_1 + \varepsilon > x_{k_0}$. Άρα για $\varepsilon := n^{-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ με $x_{k_0} \in A_{n_0}$ και $y_1 + n^{-1} > x_{k_0}$. Επομένως

$$y_1 \geq x_{k_0} \geq \inf_{k\in A_{n_0}} x_k \geq \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\in A_n} x_k = y_0$$

κι άρα δείξαμε το (ii). □

Λήμμα 5.1.5. Η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί για κάθε $u \in (0, \infty)$ την σχέση $\Psi(u) = P\big(\inf_{n\in\mathbb{N}} U_n^u < 0\big)$.

Απόδειξη. Ορίζουμε το $A := \big\{\omega \in \Omega : \sup_{n\in\mathbb{N}} T_n(\omega) < \infty\big\}$, οπότε για κάθε $\omega \in \Omega \backslash A$ ισχύει ότι $\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n(\omega) = \infty$. Άρα για κάθε $\omega \in \Omega \backslash A$ έχουμε $\inf_{n\in\mathbb{N}} T_n(\omega) = 0$ καθώς και $\sup_{n\in\mathbb{N}} T_{n+1}(\omega) = \infty$ κι επομένως σύμφωνα με το Λήμμα 5.1.4(i) έχουμε ότι

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \big[T_n(\omega), T_{n+1}(\omega)\big) = \Big[\inf_{n\in\mathbb{N}} T_n(\omega), \sup_{n\in\mathbb{N}} T_{n+1}(\omega)\Big) = [0, \infty) = \mathbb{R}_+.$$

Τότε, από την τελευταία σχέση και σύμφωνα με το Λήμμα 5.1.4(ii) για κάθε $u \in (0, \infty)$ και για κάθε $\omega \in \Omega \backslash A$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u(\omega) &= \inf_{t\in\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\big[T_n(\omega), T_{n+1}(\omega)\big)} R_t^u(\omega) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{t\in\big[T_n(\omega), T_{n+1}(\omega)\big)} \big[u + \kappa t - S_t(\omega)\big] \\ &= \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{t\in\big[T_n(\omega), T_{n+1}(\omega)\big)} \left[u + \kappa t - \sum_{j=0}^{N_t(\omega)} X_j(\omega)\right] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{t\in\left[T_n(\omega),T_{n+1}(\omega)\right)}\left[u+\kappa t-\sum_{j=0}^{n}X_j(\omega)\right] = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left[u+\kappa T_n(\omega)-\sum_{j=0}^{n}X_j(\omega)\right] \\
&\overset{(3.1),X_0:=\mathbf{0}}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}}\left[u+\kappa\sum_{j=1}^{n}W_j(\omega)-\sum_{j=1}^{n}X_j(\omega)\right] = \inf_{n\in\mathbb{N}}\left[u+\sum_{j=1}^{n}[\kappa W_j(\omega)-X_j(\omega)]\right] \\
&\overset{(5.1)}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}}\left[u+\sum_{j=1}^{n}G_j(\omega)\right] \overset{(5.2)}{=} \inf_{n\in\mathbb{N}} U_n^u(\omega),
\end{aligned}
$$

με την τέταρτη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του Λήμματος 3.3.4(ii) και την πέμπτη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα (ως σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων).

Άρα δείξαμε ότι για κάθε $u \in (0,\infty)$ και για κάθε $\omega \in \Omega\setminus A$ ισχύει η

$$\inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u(\omega) = \inf_{n\in\mathbb{N}} U_n^u(\omega). \tag{5.5}$$

Επειδή, όμως, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $\omega \in \Omega$ για τους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων ισχύει ότι $T_n(\omega) > 0 = T_0(\omega)$ και επειδή από την αρχή της παρούσας ενότητας υποθέσαμε ότι η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με το μηδέν, έχουμε $P(A) = P\big(\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\big) = P\big(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty\big) = 0$. Δηλαδή, το A είναι σύνολο μηδενικής πιθανότητας κι επομένως από την (5.5) και για κάθε $u \in (0,\infty)$ έχουμε ότι $\inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u = \inf_{n\in\mathbb{N}} U_n^u \quad P-\sigma.\beta.$, άρα $P\big(\inf_{n\in\mathbb{N}^*} U_n^u < 0\big) = P\big(\inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u < 0\big) =: \Psi(u)$. □

Ο ρόλος του Λήμματος 5.1.5 είναι θεμελιώδης στην προσπάθεια διακριτοποίησης του προβλήματος της χρεοκοπίας, αφού μας επιτρέπει να μεταβούμε από την σ.δ. του αποθεματικού (με υπεραριθμήσιμο σύνολο δεικτών) στην τροποποιημένη σ.δ. του αποθεματικού (με αριθμήσιμο σύνολο δεικτών) για την μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας. Έτσι αρκεί να περιοριστούμε στην παρακολούθηση της εξέλιξης του αποθεματικού για αριθμήσιμες το πλήθος χρονικές στιγμές – τόσες όσες οι απαιτήσεις που θα εμφανιστούν στο χαρτοφυλάκιο μας – χωρίς να χάνουμε καμία πληροφορία σε σχέση με αυτή που θα αποκομίζαμε από την παρακολούθηση του αποθεματικού σε κάθε χρονική στιγμή (κι άρα συνολικά σε υπεραριθμήσιμες το πλήθος χρονικές στιγμές). Αυτή ακριβώς η μετάβαση από το συνεχές (υπεραριθμήσιμο) στο διακριτό (το πολύ αριθμήσιμο) διευκολύνει σημαντικά τον μαθηματικό χειρισμό του προβλήματος της χρεοκοπίας και την εξαγωγή σχετικών με αυτό αποτελεσμάτων.

Στην περίπτωση που τα υπερβάλλοντα ποσά είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα, με πεπερασμένες μέσες τιμές, το Λήμμα 5.1.5 οδηγεί σε ένα πρώτο αποτέλεσμα πάνω στην πιθανότητα χρεοκοπίας, το οποίο φωτίζει κάπως τους διαφορετικούς ρόλους που έχουν το αρχικό αποθεματικό και η ένταση ασφαλίστρου.

Θεώρημα 5.1.6. Έστω ακολουθία $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων τ.μ., με μη εκφυλισμένες κατανομές και πεπερασμένες μέσες τιμές. Αν $EG_n := EG \leq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε για οποιοδήποτε αρχικό αποθεματικό η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με την μονάδα.

Απόδειξη. Για να δείξουμε ότι υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας Ω_∞ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega\backslash\Omega_\infty$ να ισχύει ότι $\sum_{j=1}^{\infty} G_j(\omega) = -\infty$, αρκεί να εφαρμόσουμε ένα γνωστό αποτέλεσμα της θεωρίας σ.δ. (βλ. π.χ. [12], Satz 11.8) σύμφωνα με το οποίο για την ακολουθία $\{\sum_{j=1}^{n} G_j\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ακριβώς ένα από τα ακόλουθα ισχύει $P-\sigma.\beta.$:

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} G_j = -\infty \quad \text{και} \quad \limsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} G_j = \infty, \tag{5.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} G_j = \infty, \tag{5.7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} G_j = -\infty. \tag{5.8}$$

Πράγματι, αν ίσχυε $\infty = \limsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} G_j = \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \sup_{k\geq n} \sum_{j=1}^{k} G_j \ \ P-\sigma.\beta.$, τότε για κάθε $M > 0$ θα υπήρχε $n \in \mathbb{N}^*$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ με $k \geq n$ να ισχύει $\sum_{j=1}^{k} G_j \geq M \quad P-\sigma.\beta.$, άρα $0 \geq kEG = \sum_{j=1}^{k} EG_j = E\big[\sum_{j=1}^{k} G_j\big] \geq M$, που είναι άτοπο.

Άρα η (5.6) δεν μπορεί να ισχύει, συνεπώς δεν μπορεί να ισχύει και η (5.7). Επομένως ισχύει η (5.8), οπότε για κάθε $u \in (0,\infty)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 &= P\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} G_j = -\infty\Big) = P\Big(\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} G_j = -\infty\Big) \leq P\Big(\liminf_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} G_j < -u\Big) \\ &= P\Big(\inf_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} G_j < -u\Big) = P\Big(\inf_{n\in\mathbb{N}}\Big(u + \sum_{j=1}^{n} G_j\Big) < 0\Big) = P\Big(\inf_{n\in\mathbb{N}} U_n^u < 0\Big) = \Psi(u), \end{aligned}$$

με την τελευταία ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του Λήμματος 5.1.5. □

Πόρισμα 5.1.7. Έστω ότι οι $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και ότι σε καθεμιά από αυτές, οι αντίστοιχες τ.μ. κατανέμονται ανεξάρτητα και ισόνομα, με μη εκφυλισμένες κατανομές και πεπερασμένες μέσες τιμές. Αν $\kappa \leq EX/EW$, τότε για οποιοδήποτε αρχικό αποθεματικό η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με την μονάδα.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι $G_n := \kappa W_n - X_n$ άρα και η $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων τ.μ., με μη εκφυλισμένες κατανομές.

Επί πλέον, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι

$$EG_n := E[\kappa W_n - X_n] = \kappa EW_n - EX_n = \kappa EW - EX = EG < \infty$$

ως διαφορά πεπερασμένων μέσων τιμών. Επίσης

$$EG \leq 0 \Leftrightarrow \kappa EW - EX \leq 0 \Leftrightarrow \kappa \leq EX/EW.$$

Άρα το Θεώρημα 5.1.6 βρίσκει εδώ εφαρμογή κι επομένως για οποιοδήποτε αρχικό αποθεματικό η πιθανότητα χρεοκοπίας ισούται με την μονάδα. □

Με ενδιαφέρον παρατηρούμε ότι το Θεώρημα 5.1.6 και το Πόρισμα 5.1.7 δεν περιλαμβάνουν καμία υπόθεση σχετικά με το αρχικό αποθεματικό.

Στο πρόβλημα του Πορίσματος 5.1.7, βλέπουμε ότι για να αποτρέψουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας από το να γίνει ίση με τη μονάδα, η ένταση ασφαλίστρου πρέπει να είναι αρκούντως μεγάλη για να διασφαλίζει ότι το αναμενόμενο εισόδημα από ασφάλιστρα ανά απαίτηση, κEW, είναι αυστηρά μεγαλύτερο από το αναμενόμενο μέγεθος απαίτησης EX. Το αναμενόμενο μέγεθος απαίτησης ονομάζεται **καθαρό ασφάλιστρο** και το αναμενόμενο υπερβάλλον ποσό $EG = \kappa EW - EX$ ονομάζεται **επιβάρυνση ασφαλείας** (*safety loading*) της (τροποποιημένης) σ.δ. του αποθεματικού. Τέλος, σημειώνουμε ότι η επιβάρυνση ασφαλείας είναι αυστηρά θετική αν και μόνο αν η ένταση ασφαλίστρου ικανοποιεί την συνθήκη $EG = E[G(\kappa)] > 0$ ή ισοδύναμα την $\kappa > EX/EW$.

5.2 Η Ανισότητα Lundberg

Στην παρούσα ενότητα αποδεικνύουμε την Ανισότητα Lundberg που αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα στην μελέτη του προβλήματος της χρεοκοπίας. Για τους σκοπούς, όμως, αυτής της απόδειξης, εισάγουμε πρώτα τις έννοιες του συντελεστή προσαρμογής και του συντελεστή υπερπροσαρμογής, και δίνουμε για τον κάθε συντελεστή έναν martingale-χαρακτηρισμό.

Σε ολόκληρη την ενότητα υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητη.

***Ορισμός* 5.2.1.** Μια σταθερά $\varrho \in (0, \infty)$ ονομάζεται:

(i) ένας **συντελεστής προσαρμογής** (*adjustment coefficient*) για την σ.δ. $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ υπερβάλλοντος ποσού αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ικανοποιεί την $E\big[e^{-\varrho G_n}\big] = 1$.

(ii) ένας **συντελεστής υπερπροσαρμογής** (*superadjustment coefficient*) για την σ.δ. $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ υπερβάλλοντος ποσού αν και μόνο αν για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ικανοποιεί την $E\left[e^{-\varrho G_n}\right] \leq 1$.

Η σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού δεν είναι αναγκαίο να έχει έναν συντελεστή υπερπροσαρμογής· αν η κατανομή κάποιου υπερβάλλοντος ποσού είναι μη εκφυλισμένη, τότε η σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού έχει το πολύ έναν συντελεστή προσαρμογής. Το γεγονός αυτό καταδεικνύεται στην παρακάτω πρόταση.

Παρατήρηση 5.2.2. Αν η σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι τέτοια ώστε η κατανομή του υπερβάλλοντος ποσού να είναι μη εκφυλισμένη και επιπλέον έχει συντελεστή προσαρμογής, τότε αυτός είναι μοναδικός.

Πράγματι, έστω ϱ, ζ δύο συντελεστές προσαρμογής της $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\varrho < \zeta$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $E\left[e^{-\varrho G_n}\right] = 1 = E\left[e^{-\zeta G_n}\right]$.

Έστω, τώρα, ότι υπάρχει κάποιο $n_0 \in \mathbb{N}^*$ ώστε η κατανομή του αντίστοιχου υπερβάλλοντος ποσού, δηλαδή της τ.μ. G_{n_0}, να μην είναι εκφυλισμένη. Τότε από την τελευταία σχέση έχουμε ότι $\int e^{-\varrho G_{n_0}} dP = \int e^{-\zeta G_{n_0}} dP = 1 < \infty$, απ'όπου έπεται ότι

$$0 = \int e^{-\varrho G_{n_0}} dP - \int e^{-\zeta G_{n_0}} dP = \int \left(e^{-\varrho G_{n_0}} - e^{-\zeta G_{n_0}}\right) dP$$

και επειδή η $e^{-\varrho G_{n_0}} - e^{-\zeta G_{n_0}}$ είναι μια θετική τ.μ., τότε η τελευταία σχέση (και σύμφωνα με το [4], Πρόταση 6.20) ισοδυναμεί με το ότι $e^{-\varrho G_{n_0}} - e^{-\zeta G_{n_0}} = 0 \quad P-\sigma.\beta.$, δηλαδή με το ότι $e^{-\varrho G_{n_0}} = e^{-\zeta G_{n_0}} \quad P-\sigma.\beta.$, κάτι που επειδή η εκθετική συνάρτηση είναι συνεχής, εν τέλει ισοδυναμεί με το ότι $e^{-\varrho G_{n_0}} = e^{-\zeta G_{n_0}}$. Άρα $\varrho = \zeta$, που είναι άτοπο. □

Για το υπόλοιπο της παρούσας ενότητας, με $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ σημειώνουμε την κανονική διύλιση για την τροποποιημένη σ.δ. του αποθεματικού $\{U_n^u\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Λήμμα 5.2.3. Έστω $u, \varrho \in (0,\infty)$. Αν η $Z_n := e^{-\varrho G_n} \in \mathcal{L}^1(P)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, τότε η ισότητα

$$\int_A e^{-\varrho U_{n+1}^u} dP = \int_A e^{-\varrho U_n^u} dP \int_\Omega e^{-\varrho G_{n+1}} dP \tag{5.9}$$

ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $A \in \mathcal{F}_n$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι επειδή από την αρχή της παρούσας ενότητας υποθέσαμε την $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ανεξάρτητη, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\int e^{-\varrho U_n^u} dP \overset{(5.2)}{=} e^{-\varrho u} \int \left(\prod_{j=1}^n e^{-\varrho G_j}\right) dP = e^{-\varrho u} \prod_{j=1}^n \int e^{-\varrho G_j} dP. \tag{5.10}$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$\int \big|e^{-\varrho U_n^u}\big| dP = \int e^{-\varrho U_n^u} dP \overset{(5.10)}{=} e^{-\varrho u} \prod_{j=1}^{n} \int e^{-\varrho G_j} dP = e^{-\varrho u} \prod_{j=1}^{n} \int Z_j dP < \infty,$$

αφού η $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ εξ'υποθέσεως είναι ακολουθία ολοκληρώσιμων τ.μ.. Επομένως, ουσιαστικά δείξαμε ότι η ολοκληρωσιμότητα των τ.μ. Z_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ συνεπάγεται την ολοκληρωσιμότητα των τ.μ. $e^{-\varrho U_n^u}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Ακόμη, από την υπόθεση της ανεξάρτητης $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι η τ.μ. G_{n+1} είναι ανεξάρτητη των τ.μ. $G_1, \ldots, G_n$, άρα και ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\sigma\big(\{G_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}\big) \overset{(5.3)}{=} \sigma\big(\{U_k^u\}_{k\in\mathbb{N}_n}\big) = \mathcal{F}_n$.

Λαμβάνοντας, τώρα, υπόψη την ολοκληρωσιμότητα των τ.μ. Z_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ και $e^{-\varrho U_n^u}$ $(n \in \mathbb{N})$, από την (5.2) και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{F}_n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_A e^{-\varrho U_{n+1}^u} dP &= \int_A e^{-\varrho\left[(\sum_{j=1}^n G_j)+G_{n+1}\right]} dP = \int_A e^{-\varrho\left(U_n^u + G_{n+1}\right)} dP \\
&= \int_A E\big[e^{-\varrho U_n^u} e^{-\varrho G_{n+1}} \,\big|\, \mathcal{F}_n\big] dP = \int_A e^{-\varrho U_n^u} E\big[e^{-\varrho G_{n+1}} \,\big|\, \mathcal{F}_n\big] dP \\
&= \int_A e^{-\varrho U_n^u} E\big[e^{-\varrho G_{n+1}}\big] dP = E\big[e^{-\varrho G_{n+1}}\big] \int_A e^{-\varrho U_n^u} dP \\
&= \int_\Omega e^{-\varrho G_{n+1}} dP \int_A e^{-\varrho U_n^u} dP,
\end{aligned}$$

με την τέταρτη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια την Πρότασης 2.1.8(iii), λαμβανομένης υπόψη της $\mathcal{F}_n$-μετρησιμότητας της τ.μ. U_n^u, και την πέμπτη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια την Πρότασης 2.1.8(iv), λαμβάνοντας υπόψη και το ότι η τ.μ. G_{n+1} είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_n$. □

Ως άμεση συνέπεια του Λήμματος 5.2.3, λαμβάνουμε δύο χαρακτηρισμούς μέσω martingales, έναν για τον συντελεστή υπερπροσαρμογής κι έναν για τον συντελεστή προσαρμογής, υπό την μορφή αντίστοιχων πορισμάτων. Αρχικά παραθέτουμε τον martingale-χαρακτηρισμό που αναφέρεται στον συντελεστή υπερπροσαρμογής.

Πόρισμα 5.2.4. Έστω $\varrho \in (0, \infty)$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο ϱ είναι ένας συντελεστής υπερπροσαρμογής για την σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού.

(ii) Για κάθε $u \in (0, \infty)$ η ακολουθία $\big\{e^{-\varrho U_n^u}\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα υπερ-martingale.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε τις παρακάτω συνεπαγωγές.
(i) $\Rightarrow$ *(ii)* : Έστω $u \in (0, \infty)$ και ότι το (i) ισχύει. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι

$E\big[e^{-\varrho G_n}\big] \leq 1$ κι επομένως η $Z_n := e^{-\varrho G_n} \in \mathcal{L}^1(P)$. Όμως, στην απόδειξη του Λήμματος 5.2.3 δείξαμε ότι η ολοκληρωσιμότητα των τ.μ. Z_n ($n \in \mathbb{N}^*$) συνεπάγεται την ολοκληρωσιμότητα των τ.μ. $\big\{e^{-\varrho U_n^u}\big\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Επίσης η $\big\{e^{-\varrho U_n^u}\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι προσαρμοσμένη στην $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η τ.μ. U_n^u είναι $\mathcal{F}_n$-μετρήσιμη, αφού έχουμε θεωρήσει την $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι η κανονική διύλιση για την $\{U_n^u\}_{n\in\mathbb{N}}$. Επομένως, για να δείξουμε την ισχύ του (ii), αρκεί να δείξουμε για την $\big\{e^{-\varrho U_n^u}\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ την τρίτη (χαρακτηριστική) ιδιότητα ενός υπέρ-martingale.

Τότε, λόγω της ολοκληρωσιμότητας των τ.μ. Z_n ($n \in \mathbb{N}^*$), σύμφωνα με το Λήμμα 5.2.3 και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{F}_n$ έχουμε ότι

$$\int_A e^{-\varrho U_{n+1}^u} dP = \int_A e^{-\varrho U_n^u} dP \int_\Omega e^{-\varrho G_{n+1}} dP \leq \int_A e^{-\varrho U_n^u} dP,$$

αφού $E\big[e^{-\varrho G_n}\big] \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Άρα δείξαμε την ζητούμενη ιδιότητα του υπέρ-martingale, για τυχόν, άρα και για κάθε $u \in (0,\infty)$, ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη της ορθής συνεπαγωγής.

(ii) $\Rightarrow$ (i) : Έστω ότι το (ii) ισχύει. Τότε, σύμφωνα με τον ορισμό του υπερ-martingale για κάθε $u \in (0,\infty)$ έχουμε την ολοκληρωσιμότητα των τ.μ. $e^{-\varrho U_n^u}$ ($n \in \mathbb{N}$), καθώς και την ισχύ της ανισότητας $\int_A e^{-\varrho U_{n+1}^u} dP \leq \int_A e^{-\varrho U_n^u} dP$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A \in \mathcal{F}_n$.

Όμως, η ολοκληρωσιμότητα των τ.μ. $e^{-\varrho U_n^u}$ ($n \in \mathbb{N}$), λαμβανομένης υπόψη της (5.10), άμεσα συνεπάγεται και την ολοκληρωσιμότητα των τ.μ. Z_n ($n \in \mathbb{N}^*$). Οπότε, από το Λήμμα 5.2.3, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $A \in \mathcal{F}_n$ έχουμε την ισχύ της (5.9), από την οποία λαμβάνοντας υπόψη και την τελευταία ανισότητα, άμεσα έπεται ότι $1 \geq \int_\Omega e^{-\varrho G_{n+1}} dP = E\big[e^{-\varrho G_{n+1}}\big]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάτι που ουσιαστικά ισοδυναμεί με την ισχύ του (i), αποδεικνύοντας έτσι την αντίστροφη συνεπαγωγή, κι επομένως και τον παρόντα χαρακτηρισμό.□

Από την απόδειξη του Πορίσματος 5.2.4 γίνεται φανερό ότι *η ολοκληρωσιμότητα των τ.μ. $e^{-\varrho G_n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ισοδυναμεί με την ολοκληρωσιμότητα των τ.μ. $e^{-\varrho U_n^u}$* ($n \in \mathbb{N}$), όπου $u \in (0,\infty)$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε τον martingale-χαρακτηρισμό που αναφέρεται στον συντελεστή προσαρμογής, ο οποίος αποδεικνύεται ομοίως με το Πόρισμα 5.2.4.

Πόρισμα 5.2.5. Έστω $\varrho \in (0,\infty)$. Τότε, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο ϱ είναι ένας συντελεστής προσαρμογής για την $\sigma.\delta.$ υπερβάλλοντος ποσού.

(ii) Για κάθε $u \in (0,\infty)$ η ακολουθία $\big\{e^{-\varrho U_n^u}\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα martingale.

Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας δίνεται ακολούθως.

Θεώρημα (Ανισότητα Lundberg) 5.2.6. Αν $\varrho \in (0, \infty)$ είναι ένας συντελεστής υπερ-προσαρμογής για την σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού, τότε για κάθε $u \in (0, \infty)$ ισχύει η ανισότητα $\Psi(u) = P\big(\inf_{n\in\mathbb{N}} U_n^u < 0\big) \leq e^{-\varrho u}$.

Απόδειξη. Επειδή η συνάρτηση $f(x) := e^{-\varrho x}$ είναι φθίνουσα στο $\mathbb{R}_+$, άμεσα έπεται ότι για κάθε $u \in (0, \infty)$ ισχύει $\sup_{n\in\mathbb{N}} f\big(U_n^u\big) = \sup_{n\in\mathbb{N}} e^{-\varrho U_n^u} = e^{-\varrho \inf_{n\in\mathbb{N}} U_n^u}$ με την $\sup_{n\in\mathbb{N}} e^{-\varrho U_n^u}$ να είναι θετική τ.μ..

Επίσης, εξ'υποθέσεως ο $\varrho \in (0, \infty)$ είναι ένας συντελεστής υπερπροσαρμογής για την σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού, που σύμφωνα με το Πόρισμα 5.2.4 ισοδυναμεί με το ότι η ακολουθία $\big\{e^{-\varrho U_n^u}\big\}_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών τ.μ. είναι ένα υπερ-martingale. Τότε από το Πόρισμα 2.3.8 έπεται η ισχύς της Ανισότητας Kolmogorov, οπότε, λαμβάνοντας υπόψη το Λήμμα 5.1.5, το ότι η f είναι φθίνουσα και την τελευταία ισότητα, για κάθε $u \in (0, \infty)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Psi(u) &= P\Big(\inf_{n\in\mathbb{N}} U_n^u < 0\Big) = P\Big(e^{-\varrho \inf_{n\in\mathbb{N}} U_n^u} > e^{-0\varrho}\Big) \\ &= P\Big(\sup_{n\in\mathbb{N}} e^{-\varrho U_n^u} > 1\Big) \leq E\big[e^{-\varrho U_0^u}\big] = E[e^{-\varrho u}] = e^{-\varrho u}, \end{aligned}$$

που είναι η Ανισότητα Lundberg. □

Το άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας που εξασφαλίζεται από την ανισότητα του Lundberg εξαρτάται σαφώς από το αρχικό αποθεματικό u. Δυνητικά, εξαρτάται επίσης, μέσω του συντελεστή υπερπροσαρμογής, από την ένταση ασφαλίστρου κ.

Κλείνοντας την παρούσα ενότητα, παραθέτουμε υπό μορφή παρατήρησης ορισμένες χρήσιμες επισημάνσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας και την ανισότητα του Lundberg, και το πως αυτές σχετίζονται με το πρόβλημα της εύρεσης φραγμάτων για την πιθανότητα ουράς της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων. Το πρόβλημα αυτό μελετάται διεξοδικά στο επόμενο κεφάλαιο.

Παρατήρηση 5.2.7. Για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ ορίζουμε την **πιθανότητα ουράς του τυχαίου αθροίσματος** S_N (όπως αυτό ορίστηκε στην Ενότητα 3.6) με $\psi(x) := P(S_N > x)$. Τότε, για την περίπτωση του S_N και λαμβανομένου υπόψη του ορισμού της σ.δ. του αποθεματικού (βλ. Ενότητα 5.1), η Ανισότητα Lundberg (βλ. Θεώρημα 5.2.6) ισοδύναμα γίνεται $\psi(x) \leq e^{-\varrho x}$, όπου $\varrho \in (0, \infty)$ ένας συντελεστής υπερπροσαρμογής.

Πράγματι, έστω $u \in (0, \infty)$ και $t_0 \in \mathbb{R}_+$. Τότε, θέτοντας $S_t := S_{t_0}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι $R_t^u = R_{t_0}^u$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, άρα $\inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u = R_{t_0}^u$, επομένως η πιθανότητα χρεοκοπίας $\Psi(u) = P\big(R_{t_0}^u < 0\big) = P\big(S_{t_0} > u + \kappa t_0\big) = \psi(x)$, όπου $x := u + \kappa t_0 \in (0, \infty)$.

Δηλαδή, στην περίπτωσή μας, θεωρήσαμε ουσιαστικά την απλοποίηση των συμβολισμών που είχαμε εισάγει για την σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συνολικών απαιτήσεων στην Ενότητα 3.6. Έτσι επικεντρώνοντας το ενδιαφέρον μας στη μελέτη της σ.δ. συνολικών απαιτήσεων για μια δεδομένη χρονική στιγμή, έστω t_0, διαπιστώνουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας (η μελέτη της) ανάγεται σε μια (στην μελέτη μιας) πιθανότητα ουράς.

Επομένως, γίνεται φανερή η άμεση σχέση μεταξύ της πιθανότητας χρεοκοπίας και της πιθανότητας ουράς τυχαίου αθροίσματος, και κατ'επέκταση διαφαίνεται μια σχέση μεταξύ της Ανισότητας Lundberg και των φραγμάτων πιθανοτήτων ουράς (βλ. και Παρατήρηση 6.2.2), τα οποία και θα μας απασχολήσουν στο επόμενο κεφάλαιο.

5.3 Η Ύπαρξη ενός Συντελεστή Υπερπροσαρμογής

Στην παρούσα ενότητα μελετάμε το πρόβλημα της ύπαρξης ενός συντελεστή υπερπροσαρμογής.

Αρχικά, θεωρούμε την περίπτωση που τα υπερβάλλοντα ποσά (ζημιάς) κατανέμονται ανεξάρτητα και ισόνομα. Σύμφωνα με το ακόλουθο αποτέλεσμα, πρέπει να υποθέσουμε ότι η επιβάρυνση ασφαλείας είναι αυστηρά θετική.

Θεώρημα 5.3.1. Έστω ακολουθία $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων τ.μ., με μη εκφυλισμένες κατανομές και πεπερασμένες μέσες τιμές. Αν η σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού έχει έναν συντελεστή υπερπροσαρμογής, τότε $EG_n = EG > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$.

Απόδειξη. Επειδή εξ'υποθέσεως η $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ έχει έναν συντελεστή υπερπροσαρμογής, έστω $\varrho \in (0,\infty)$, τότε από την Ανισότητα Lundberg (βλ. Θεώρημα 5.2.6) και για κάθε $u \in (0,\infty)$ έχουμε ότι $\Psi(u) \leq e^{-\varrho u} < 1$.

Επίσης, εξ'υποθέσεως η $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων, ισόνομα κατανεμημένων τ.μ., με μη εκφυλισμένες κατανομές και πεπερασμένες μέσες τιμές, οπότε λαμβάνοντας υπόψη το Θεώρημα 5.1.6 έπεται το ζητούμενο. □

Πόρισμα 5.3.2. Έστω ότι οι $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους ακολουθίες τ.μ. και ότι σε καθεμιά από αυτές, οι αντίστοιχες τ.μ. κατανέμονται ανεξάρτητα και ισόνομα, με μη εκφυλισμένες κατανομές και πεπερασμένες μέσες τιμές. Αν η σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού έχει έναν συντελεστή υπερπροσαρμογής, τότε $\kappa > EX/EW$.

Απόδειξη. Από την απόδειξη του Πορίσματος 5.1.7 έχουμε ότι η $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων τ.μ., με μη εκφυλισμένες κατανομές και πεπερασμένες μέσες τιμές. Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι $EG_n = E[\kappa W_n - X_n] = \kappa EW_n - EX_n = \kappa EW - EX$.

Και επειδή, εξ'υποθέσεως, η $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ έχει έναν συντελεστή υπερπροσαρμογής, τότε από το Θεώρημα 5.3.1 έπεται ότι $EG > 0$, που ισοδυναμεί με το ότι $\kappa > EX/EW$. □

Στη συνέχεια παραθέτουμε ένα μερικό αντίστροφο του παραπάνω αποτελέσματος.

Θεώρημα 5.3.3. Έστω ότι ισχύουν τα εξής:

(i) Οι $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους ακολουθίες τ.μ..

(ii) Η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων τ.μ. και ισχύει ότι $\sup\{z \in \mathbb{R}_+ : E[e^{zW}] < \infty\} \in (0, \infty]$.

(iii) Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων τ.μ. και ισχύει ότι $\sup\{z \in \mathbb{R}_+ : E[e^{zX}] < \infty\} \in (0, \infty)$, καθώς επίσης και ότι $P_X(\mathbb{R}_+) = 1$.

Αν $\kappa > EX/EW$, τότε η σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού έχει έναν συντελεστή προσαρμογής.

Απόδειξη. Αρχικά σημειώνουμε ότι λόγω της εξ'υποθέσεως ισονομίας των τ.μ. W_n και X_n ($n \in \mathbb{N}$) για τις αντίστοιχες ρ.γ.σ. και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $M_{X_n}(z) = M_X(z)$ και ότι $M_{W_n}(z) = M_W(z)$ για κάθε $z \in \mathbb{R}$ για το οποίο εξασφαλίζεται η ύπαρξή τους.

(a) Υπάρχει $z_0 \in (0, \infty)$ τέτοιο ώστε $M_W(z) < \infty$ και $M_X(z) < \infty$ για κάθε $z \in (-\infty, z_0)$.

Πράγματι, εξ'υποθέσεως έχουμε ότι $P_X(\mathbb{R}_+) = 1$, δηλαδή ότι η X είναι $P-\sigma.\beta.$ θετική τ.μ., οπότε για κάθε $z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ ώστε $z_1 \geq z_2$ επίσης έχουμε ότι $z_1 X \geq z_2 X \quad P-\sigma.\beta.$, απ'όπου τελικά έπεται ότι $M_X(z_1) \geq M_X(z_2)$. Άρα δείξαμε ότι η M_X είναι αύξουσα συνάρτηση, κάτι που αποδεικνύεται ομοίως και για την M_W.

Όμως, επειδή $\sup\{z \in \mathbb{R}_+ : E[e^{zW}] < \infty\} \in (0, \infty]$, $\sup\{z \in \mathbb{R}_+ : E[e^{zX}] < \infty\} \in (0, \infty)$, έπεται ότι υπάρχει $z_3 \in (0, \infty)$ ώστε $M_W(z_3) < \infty$ καθώς και ότι υπάρχει $z_4 \in (0, \infty)$ ώστε $M_X(z_4) < \infty$. Τότε, θέτοντας $z_0 := \min\{z_3, z_4\}$ και επειδή (δείξαμε ότι) οι M_X και M_W είναι αύξουσες συναρτήσεις άμεσα έπεται το (a).

(b) Για κάθε $z \in \mathbb{R}$ ισχύει $M_G(z) = M_W(z\kappa) M_X(-z)$.

Άμεση συνέπεια της εξ'υποθέσεως ανεξαρτησίας μεταξύ των ολοκληρώσιμων (λόγω του (a)) τ.μ. e^{zW} και e^{zX}.

(c) $M_G'(0) > 0$.

Πράγματι, αφού σύμφωνα με το (b) δείξαμε ότι η ρ.γ.σ. M_G υπάρχει στο $(-\infty, z_0)$, τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $z \in (-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\infty, z_0)$ να ισχύει ότι

$$\frac{dM_G(z)}{dz} = \frac{d}{dz}[M_W(z\kappa) M_X(-z)] = \kappa M_X(-z) \frac{dM_W(z)}{dz} - M_W(z\kappa) \frac{dM_X(-z)}{dz},$$

με την πρώτη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του (b) και της Πρότασης Α'.1.6(ii).

Τότε, από την τελευταία σχέση, για $z = 0$, λαμβανομένης και πάλι υπόψη της Πρότασης Α'.1.6(ii), έχουμε ότι $M_G'(0) = \kappa M_X(0) M_W'(0) - M_W(0) M_X'(0) = \kappa EW - EX > 0$, αφού εξ'υποθέσεως είναι $\kappa > EX/EW$.

(d) Υπάρχει $z^* \in (z_0, \infty)$ ώστε $M_G(-z^*) = \infty$.

Πράγματι, από την υπόθεση (iii) υπάρχει $z^* > z_0$ ώστε $M_X(z^*) = \infty$. Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη το (b), έχουμε ότι

$$M_G(-z^*) = M_X(-z^*)M_W(-\kappa z^*) = \infty \cdot M_W(-\kappa z^*) = \infty.$$

(e) Υπάρχει $\xi \in (0, z^*)$ ώστε $M_G(-\xi) < 1$.

Πράγματι, από το (c) έχουμε ότι

$$0 < M_{G'}(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{M_G(x) - M_G(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{M_G(x) - 1}{x},$$

απ'όπου έπεται ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ και $x_0 := x_0(\varepsilon) \in (-z^*, 0) \cap (-\varepsilon, 0) \subseteq (-\infty, 0)$ ώστε $[M_G(x_0)-1]x_0^{-1} > 0$ ή ισοδύναμα $M_G(x_0) < 1$. Επομένως, τελικά μπορούμε να ισχυριστούμε ότι υπάρχει $\xi \in (0, z^*) \cap (0, \varepsilon)$ ώστε $M_G(-\xi) < 1$, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του (e).

Όμως, επειδή η M_G παραγωγίζεται στο $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\infty, z_0)$, θα είναι συνεχής στο $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\infty, z_0)$, άρα και στο $(-\varepsilon, \varepsilon) \cap (-\infty, z^*)$ (διότι $z^* > z_0$) κι επομένως και στο $(-z^*, -\xi] \cap (-\varepsilon, \varepsilon)$, το οποίο είναι ένα μη κενό σύνολο (αφού από το (e) έχουμε ότι $\xi \in (0, z^*) \cap (0, \varepsilon)$).

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Bolzano (βλ. π.χ. [9], Θεώρημα 4.8.6), λαμβανομένων υπόψη και των (d) και (e), έπεται ότι υπάρχει $\varrho \in (\xi, z^*) \cap (0, \varepsilon) \subseteq (0, \infty)$ με $1 = M_G(-\varrho) := E[e^{-\varrho G}] \overset{\textbf{(b)}}{=} E[e^{-\varrho G_n}]$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, που ουσιαστικά αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Αν στο Θεώρημα 5.3.3 η κατανομή τόσο των τ.μ. W_n ($n \in \mathbb{N}^*$) όσο και των τ.μ. X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) είναι μη εκφυλισμένη, τότε (σύμφωνα με την Παρατήρηση 5.2.2) ο συντελεστής προσαρμογής ϱ είναι μοναδικός.

Παρόλο που το Θεώρημα 5.3.3 παρέχει μία μάλλον γενική συνθήκη κάτω από την οποία υπάρχει ένας συντελεστής προσαρμογής, υπάρχουν σημαντικές κατανομές του μεγέθους απαίτησης που δεν ικανοποιούν αυτές τις συνθήκες. Για μια συζήτηση του προβλήματος της χρεοκοπίας για κατανομές μεγέθους απαίτησης με *βαριές ουρές*, βλέπε τα [14], [19], [20], [24] και [28].

Στο Πόρισμα 5.3.2 και στο Θεώρημα 5.3.3, οι ενδιάμεσοι χρόνων άφιξης των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένοι, που σημαίνει ότι η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων είναι μια *ανανεωτική διαδικασία*. Μια ειδική ανανεωτική διαδικασία είναι η (ομογενής) διαδικασία Poisson, για την οποία παρακάτω εξειδικεύουμε το Θεώρημα 5.3.3.

Πόρισμα 5.3.4. Έστω ότι ισχύουν τα εξής:

(i) Οι $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ και $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ είναι (μεταξύ τους) ανεξάρτητες.

(ii) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια (ομογενής) διαδικασία Poisson με παράμετρο α ($\alpha > 0$).

(iii) Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων τ.μ. και ισχύει ότι $\sup\{z \in \mathbb{R}_+ : E[e^{zX}] < \infty\} \in (0,\infty)$, καθώς επίσης και ότι $P_X(\mathbb{R}_+) = 1$.

Αν $\kappa > \alpha EX$, τότε η σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού έχει έναν συντελεστή προσαρμογής.

Απόδειξη. Εξ'υποθέσεως η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητη της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ άρα και της σ-άλγεβρας $\sigma\big(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\big)$ κι επομένως είναι (σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.5) ανεξάρτητη και της σ-άλγεβρας $\sigma\big(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big)$.

Όμως, $\sigma\big(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big) = \sigma\big(\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\big)$, διότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\{W_n > t\} = \{T_n - T_{n-1} > t\} \subseteq \{T_n > t\}$, συνεπώς $\sigma\big(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big) \supseteq \sigma\big(\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\big)$. Αντιστρόφως, $\{T_n \leq t\} \subseteq \{T_n - T_{n-1} \leq t\} = \{W_n \leq t\}$, συνεπώς $\sigma\big(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}\big) \subseteq \sigma\big(\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\big)$.

Επομένως, η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ θα είναι ανεξάρτητη της $\sigma\big(\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}\big)$, επομένως της $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, άρα ισχύει η ιδιότητα (i) του Θεωρήματος 5.3.3.

Επίσης εξ'υποθέσεως έχουμε ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια (ομογενής) διαδικασία Poisson με παράμετρο α, που σύμφωνα με το Θεώρημα 4.2.4 ισοδυναμεί με το ότι η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί την $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Οπότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι η ρ.γ.σ. της τ.μ. W_n θα δίνεται από τον τύπο $M_{W_n}(z) = M_W(z) = \alpha/(\alpha - z)$ για κάθε $z < \alpha$, και η μέση τιμή της θα ισούται με $EW_n = EW = 1/\alpha$ (βλ. Ενότητα Α'.2(i)).

Τότε, όμως, θα ισχύει ότι $\kappa > EX/EW$, αφού εξ'υποθέσεως έχουμε ότι $\kappa > \alpha EX$. Επίσης ισχύει ότι

$$\sup\{z \in \mathbb{R}_+ : E[e^{zW}] < \infty\} = \sup\left\{z \in \mathbb{R}_+ : \frac{\alpha}{\alpha - z} < \infty\right\} = \alpha > 0,$$

άρα ισχύει η ιδιότητα (ii) του Θεωρήματος 5.3.3. Επομένως, από το Θεώρημα 5.3.3 και επειδή $\kappa > EX/EW$, άμεσα έπεται η ύπαρξη ενός συντελεστή προσαρμογής. □

Για να εφαρμόσουμε την Ανισότητα Lundberg, τα αποτελέσματα σχετικά με την ύπαρξη ενός συντελεστή προσαρμογής, φυσικά, δεν επαρκούν· αντ'αυτού, ο συντελεστής προσαρμογής πρέπει να προσδιοριστεί ρητά. Για τον σκοπό αυτό, οι κατανομές των υπερβάλλοντων ποσών (ζημιάς) θα πρέπει να καθοριστούν κι αυτό γίνεται συνήθως μέσω του προσδιορισμού των κατανομών των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων και των μεγεθών απαίτησης.

Θεώρημα 5.3.5. Έστω ότι ισχύουν τα εξής:

(i) Οι $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι (μεταξύ τους) ανεξάρτητες.

(ii) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια (ομογενής) διαδικασία Poisson με παράμετρο α ($\alpha \in (0,\infty)$).

(iii) Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομα κατανεμημένων τ.μ. και ισχύει ότι $P_X = \mathbf{Exp}(\beta)$ ($\beta \in (0,\infty)$).

Αν $\kappa > \alpha/\beta$, τότε ο αριθμός $\beta-(\alpha/\kappa)$ είναι ο συντελεστής προσαρμογής για την σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού. Ειδικά, για $u \in (0,\infty)$ ισχύει $\Psi(u) = P\big(\inf_{n\in\mathbb{N}} U_n^u < 0\big) \le e^{-\left(\beta-\frac{\alpha}{\kappa}\right)u}$.

Απόδειξη: Έστω $\varrho := \beta - (\alpha/\kappa)$. Τότε έχουμε ότι

$$E\big[e^{-\varrho G}\big] = E\big[e^{-\varrho\kappa W}\big]E\big[e^{\varrho X}\big] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\varrho\kappa)(\beta-\varrho)} = 1,$$

με την πρώτη ισότητα να αποτελεί συνέπεια της ανεξαρτησίας των $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ (βλ. απόδειξη Πορίσματος 5.3.4) και την δεύτερη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι οι X και W είναι εκθετικά κατανεμημένες (βλ. και Ενότητα Α$'$.2(i)). Άρα το ϱ είναι ένας συντελεστής προσαρμογής για την σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού.

Η ανισότητα για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι τώρα άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.2.6. □

Στο προηγούμενο αποτέλεσμα, το φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας φθίνει όταν ή το αρχικό αποθεματικό ή η ένταση ασφαλίστρου αυξάνονται.

Τέλος, ας στραφούμε σε μια πιο γενική περίπτωση, στην οποία τα υπερβάλλοντα ποσά (ζημιάς) είναι και πάλι ανεξάρτητα, αλλά όχι και κατ'ανάγκη ισόνομα κατανεμημένα. Σε αυτή την περίπτωση, *η ύπαρξη ενός συντελεστή προσαρμογής δεν μπορεί να αναμένεται, και οι συντελεστές υπερπροσαρμογής προκύπτουν δικαιωματικά στη θέση του.*

Θεώρημα 5.3.6. Έστω ακολουθίες $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{\beta_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ στοιχείων του $(0,\infty)$ τέτοιες ώστε $\alpha := \sup_{n\in\mathbb{N}^*}\alpha_n < \infty$ και $\beta := \inf_{n\in\mathbb{N}^*}\beta_n > 0$. Ακόμα, έστω ότι ισχύουν τα εξής:

(i) Οι $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι (μεταξύ τους) ανεξάρτητες.

(ii) Η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\alpha_n)$.

(iii) Η $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. και για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει ότι $P_{X_n} = \mathbf{Exp}(\beta_n)$.

Αν $\kappa > \alpha/\beta$, τότε ο αριθμός $\beta - (\alpha/\kappa)$ είναι ένας συντελεστής υπερπροσαρμογής για την σ.δ. υπερβάλλοντος ποσού. Ειδικά, για $u \in (0,\infty)$ ισχύει $\Psi(u) = P\big(\inf_{n\in\mathbb{N}} U_n^u < 0\big) \le e^{-\left(\beta-\frac{\alpha}{\kappa}\right)u}$.

Απόδειξη: Θέτουμε $\varrho := \beta - (\alpha/\kappa)$, οπότε $\varrho \in (0, \infty)$, αφού εξ'υποθέσεως είναι $\kappa > \alpha/\beta$. Τότε, από τις υποθέσεις (ii) και (iii) (και όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.3) για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι

$$E\big[e^{-\varrho G_n}\big] = E\big[e^{-\varrho\kappa W_n}\big] E\big[e^{\varrho X_n}\big] = \frac{\alpha_n \beta_n}{\alpha_n\beta_n + \varrho[\kappa(\beta_n - \beta) + (\alpha - \alpha_n)]} \leq 1,$$

αφού $\varrho \in (0, \infty)$ και επειδή εξ'υποθέσεως έχουμε ότι $\alpha := \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \alpha_n < \infty$ άρα και ότι $\alpha - \alpha_n \in (0, \infty)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, καθώς και ότι $\beta := \sup_{n\in\mathbb{N}^*} \beta_n > 0$ άρα και ότι $\beta_n - \beta \in (0, \infty)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$. Άρα ο ϱ είναι ένας συντελεστής υπερπροσαρμογής για την $\sigma.\delta.$ υπερβάλλοντος ποσού.

Η ανισότητα για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι τώρα άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.2.6. □

Το παραπάνω αποτέλεσμα, το οποίο ουσιαστικά περιλαμβάνει ως ειδική περίπτωση (όταν $\alpha_n = \alpha$ και $\beta_n = \beta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$) το Θεώρημα 5.3.5, είναι μάλλον ένα εξαιρετικό παράδειγμα όπου ένας συντελεστής υπερπροσαρμογής όχι μόνο υπάρχει αλλά μπορεί να δοθεί σε συγκεκριμένη μορφή.

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο κάνοντας μια γενική παρατήρηση: Στην αναφορά μας για το πρόβλημα της χρεοκοπίας, θεωρήσαμε μόνο μια σταθερή ένταση ασφαλίστρου και ένα μεταβλητό αρχικό αποθεματικό. Αυτό έγινε έτσι ώστε να μην φορτωθούμε με πολλούς συμβολισμούς και για να διασαφηνίσουμε τον ρόλο των συντελεστών υπερπροσαρμογής, οι οποίοι εξαρτώνται από την ένταση ασφαλίστρου, αλλά όχι από το αρχικό αποθεματικό. Φυσικά, η ένταση ασφαλίστρου μπορεί κάλλιστα να είναι μια μεταβλητή απόφασης η οποία να μπορεί να προσδιοριστεί από ένα δοσμένο άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Ωστόσο ο ρόλος του αρχικού αποθεματικού και ο ρόλος της έντασης ασφαλίστρου είναι διαφορετικός, αφού ο πρώτος οριοθετείται από την χρηματοοικονομική ισχύ της ασφαλιστικής επιχείρησης, ενώ ο τελευταίος περιορίζεται σε μεγάλο βαθμό από τις συνθήκες της αγοράς. Συνεπώς, ο προσδιορισμός ενός φράγματος για την πιθανότητα χρεοκοπίας το οποίο θα εξαρτάται από το αρχικό αποθεματικό και όχι την ένταση ασφαλίστρου είναι ένας πολύ πιο εφικτός και ρεαλιστικός στόχος για την ασφαλιστική εταιρεία, λόγω της μικρότερης αβεβαιότητας που τον χαρακτηρίζει.

Κεφάλαιο 6

Φράγματα για Πιθανότητες Ουράς και Martingales

Στο παρόν κεφάλαιο εξετάζουμε την εύρεση (άνω) φραγμάτων για την πιθανότητα ουράς διάφορων σύνθετων κατανομών, μέσω των οποίων δίνεται η κατανομή των συνολικών απαιτήσεων των ασφαλισμένων έναντι μιας ασφαλιστικής επιχείρησης, πάντα αναφορικά με κάποιο χαρτοφυλάκιο κινδύνων (βλ. Ενότητα 3.6). Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο (βλ. Παρατήρηση 5.2.7), η μελέτη των πιθανοτήτων ουράς συνδέεται με την μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας, αφού η δεύτερη είναι μια ειδική περίπτωση της πρώτης.

Σε αυτό το πλαίσιο, θα γίνει η παρουσίαση δύο διαφορετικών μεθόδων εύρεσης τέτοιων φραγμάτων:

- Της εύρεσης φραγμάτων με έναν στοιχειώδη τρόπο βάσει μιας μορφής της Ανισότητας Chebyshev, που εισήγαγαν οι Runnenburg & Goovaerts (1985), και η οποία αναφέρεται στην περίπτωση σύνθετων Poisson και σύνθετων αρνητικών διωνυμικών κατανομών (βλ. Ενότητα 6.1).

- Της εύρεσης φραγμάτων μέσω μιας γενίκευσης της Ανισότητας Lundberg (βλ. Θεώρημα 5.2.6) της (ασφαλιστικής) θεωρίας κινδύνου, που εισήγαγαν οι Willmot & Lin (1994) και η οποία αποδείχθηκε εκ νέου, λίγο αργότερα από τον Gerber (1994) μέσω ενός επιχειρήματος με martingales (βλ. Ενότητες 6.2 - 6.3).

Επί πλέον, γίνεται μια σύντομη αναφορά στην χρησιμότητα των φραγμάτων πιθανοτήτων ουράς τυχαίου αθροίσματος, όπως επίσης η σύγκριση και ο σχολιασμός των φραγμάτων που μελετώνται σε αυτό το κεφάλαιο (βλ. Ενότητα 6.4).

Στο παρόν κεφάλαιο θεωρούμε το τυχαίο άθροισμα $S_N := \sum_{j=0}^{N} X_j$, **όπου** N **η απαριθμήτρια τ.μ. με** $P_N(\mathbb{N}) = 1$ **(βλ. και Ενότητα 3.6),** $X_0 := 0$ **και**

$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ μια $\sigma.\delta.$ μεγέθους απαίτησης ανεξάρτητη της N, τέτοια ώστε οι X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) να είναι ανεξάρτητες και ισόνομες, θετικές τ.μ., με $\sigma.\kappa.\pi.$ των μεγεθών απαίτησης F_X. Επί πλέον, με $\psi(x)$ συμβολίζουμε της πιθανότητας ουράς του τυχαίου αθροίσματος $S_N := S$, δηλαδή $\psi(x) := P(S_N > x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$, ενώ, σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στην αρχή της Ενότητας 3.6, θεωρούμε ότι οι συνολικές απαιτήσεις (των ασφαλισμένων έναντι) της ασφαλιστικής εταιρείας δίνονται από το τυχαίο άθροισμα S_N.

6.1 Φράγματα για Σύνθετες Poisson και Σύνθετες Αρνητικές Διωνυμικές Κατανομές

Αντικείμενο της παρούσας ενότητας αποτελεί η εξασφάλιση φραγμάτων για την πιθανότητα ουράς των δύο αυτών σύνθετων κατανομών – με έναν στοιχειώδη τρόπο και βάσει μιας μορφής της Ανισότητας Chebyshev – που παρουσιάζουν σαφή εξάρτηση από την $\sigma.\kappa.\pi.$ των μεγεθών απαίτησης, καθεαυτή, καθώς επίσης και από κάποιες ειδικές ροπές της.

Πριν προχωρήσουμε, όμως, στην εύρεση των εν λόγω φραγμάτων, παραθέτουμε αρχικά τα παρακάτω δύο λήμματα, ο ρόλος των οποίων είναι θεμελιώδης για την εξασφάλιση των φραγμάτων αυτών.

Λήμμα 6.1.1. Έστω Z μη αρνητική τ.μ. και $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ μετρήσιμη, αύξουσα συνάρτηση. Τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ ώστε $h(x) > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$P(Z > x) \leq \frac{E[h(Z)]}{h(x)}.$$

Απόδειξη. Επειδή τόσο η τ.μ. Z όσο και η h εξ'υποθέσεως είναι μη αρνητικές, για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$E[h(Z)] = \int h(Z)dP \geq \int_{\{Z>x\}} h(Z)dP \geq \int_{\{Z>x\}} h(x)dP = h(x)P(Z > x),$$

με την τελευταία ανισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι η h είναι εξ'υποθέσεως αύξουσα.

Από την παραπάνω ανισότητα και για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ ώστε $h(x) > 0$ άμεσα έπεται το ζητούμενο. □

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 6.1.1 για $h(x) := e^{ux}$ και $h(x) := x^u$, οι οποίες που είναι προφανώς μετρήσιμες, θετικές και αύξουσες συναρτήσεις για κάθε $x, u \in \mathbb{R}_+$, άμεσα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 6.1.2. Έστω Z μη αρνητική τ.μ.. Τότε για κάθε $x, u \in \mathbb{R}_+$ ισχύουν τα εξής:

(i) $P(Z > x) \leq e^{-ux} E[e^{uZ}]$.

(ii) $P(Z > x) \leq x^{-u} E[Z^u]$.

Για το υπόλοιπο της παρούσας ενότητας υποθέτουμε την ύπαρξη μιας σταθεράς $\kappa \in (0, \infty)$ που ικανοποιεί την συνθήκη

$$\int_0^\infty e^{\kappa x} dF_X(x) = p^{-1}, \tag{6.1}$$

όπου $p \in (0, 1)$, ενώ, σημαντικό είναι να υποτεθεί και η ισχύ της

$$\nu_1 := \int_0^\infty x e^{\kappa x} dF_X(x) < \infty. \tag{6.2}$$

Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση της σύνθετης κατανομής Poisson. Για το λόγο αυτό υποθέτουμε ακόμα ότι $P_N = \mathbf{P}(\lambda)$, δηλαδή ότι η τ.μ. S_N κατανέμεται σύμφωνα με μία σύνθετη κατανομή Poisson με παραμέτρους λ και $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$. Όμως, λαμβάνοντας υπόψη την Ενότητα Α′.2(iii), τότε από το Λήμμα 3.6.1 και για $B := (-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ άμεσα έχουμε ότι

$$F_{S_N}(x) := \begin{cases} \sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} F_X^{*n}(x) & \text{αν } x \in [0, \infty) \\ 0 & \text{αν } x \in (-\infty, 0) \end{cases}, \tag{6.3}$$

όπου F_X^{*n} η n-οστη συνέλιξη της σ.κ.π. της τ.μ. X, με $F_X^{*n}(x) := P\big(\sum_{j=1}^n X_j \leq x\big)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $x \in \mathbb{R}_+$, και

$$F_X^{*0}(x) := \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in [0, \infty) \\ 0 & \text{αν } x \in (-\infty, 0) \end{cases}. \tag{6.4}$$

Παρακάτω θα εστιάσουμε το ενδιαφέρον μας στην εξασφάλιση φραγμάτων για την $\psi(x)$, στην περίπτωση που οι τ.μ. X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) δεν είναι φραγμένες, κι ακόμα πιο ειδικά στην περίπτωση όπου δεν υπάρχουν εκθετικά φράγματα. Για το σκοπό αυτό παραθέτουμε αρχικά το ακόλουθο λήμμα, στο οποίο υποθέτουμε ότι $F_X(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$.

Λήμμα 6.1.3. Έστω τ.μ. $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ με σ.κ.π.

$$F_Y(y) = F_X(y)/F_X(x) \tag{6.5}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $y \in [0, x]$, καθώς και $G : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ συνάρτηση με τύπο

$$G(s) := G_N(s) := \sum_{n=0}^\infty P_N(\{n\}) F_X^n(x) F_Y^{*n}(s) = \sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda} \frac{[\lambda F_X(x)]^n}{n!} F_Y^{*n}(s) \tag{6.6}$$

για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$. Τότε, για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ και $x \in (0, \infty)$ ισχύουν τα εξής:

(i) $G(s) = F_{S_N}(s)$ για κάθε $s \in [0, x]$.

(ii) Υπάρχει τ.μ. $S' : \Omega \to \mathbb{R}$ με σ.κ.π. $F_{S'}$ που ορίζεται ως εξής:

$$F_{S'}(s) := \begin{cases} 0 & \text{αν } s \in (-\infty, 0) \\ G(s) & \text{αν } s \in [0, x] \\ G(s) + e^{\lambda[F_X(s)-1]} - e^{\lambda[F_X(x)-1]} & \text{αν } s \in (x, \infty) \end{cases}.$$

(iii) $\int_0^\infty e^{uy} dF_X^{*n}(y) = \left[\int_0^x e^{uy} dF_X(y)\right]^n$.

(iv) $\int_0^\infty e^{uy} dF_{S'}(y) = e^{\lambda[\int_0^x e^{uy} dF_X(y) - 1]}$.

Απόδειξη. Αρχικά σημειώνουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ η συνάρτηση $F_X/F_X(x)$ είναι μια σ.κ.π., λόγω του ότι η F_X είναι σ.κ.π.. Επομένως, υπάρχει μια τ.μ. $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε $F_Y = F_X/F_X(x)$ (βλ. π.χ. [6], Πρόταση 3.1.4) κι άρα επιτρέπεται να υποθέσουμε ότι υπάρχει τ.μ. $Y : \Omega \to \mathbb{R}$ με σ.κ.π. F_Y όπως στο παρόν λήμμα.

(i) Έστω $x \in (0, \infty)$ και $s \in [0, x]$. Για την απόδειξη της ζητούμενης ισότητας θα δείξουμε πρώτα για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ την ισχύ της

$$F_Y^{*n}(s) = F_X^{*n}(s)/F_X^n(x). \tag{6.7}$$

Απόδειξη με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}^*$:

• Για $n = 1$ έχουμε ότι $F_Y^{*1}(s) = F_Y(s) \overset{(6.5)}{=} F_X(s)/F_X(x) = F_X^{*1}(s)/F_X^1(x)$, δηλαδή η (6.7) ισχύει για $n = 1$.

• Έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει η

$$F_Y^{*n}(s) = F_X^{*n}(s)/F_X^n(x). \tag{ΥE}$$

Όμως, από τις ιδιότητες της συνέλιξης (βλ. π.χ. [13], εξίσωση (20.36)) για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι

$$F_Y^{*(n+1)}(s) = \int_0^\infty F_Y^{*n}(s-y) dF_Y(y) = \int_0^x F_Y^{*n}(s-y) dF_Y(y), \tag{6.8}$$

με την πρώτη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι εξ'υποθέσεως οι X_n ($n \in \mathbb{N}^*$) είναι θετικές τ.μ. και την δεύτερη ισότητα να ισχύει διότι για κάθε $y \in (x, \infty)$ το $s - y < s - x \in (-x, 0)$, κι επομένως έχουμε ότι η $F_Y^{*n}(s-y) = 0$ για κάθε $y \in (x, \infty)$, αφού για κάθε $y \in (-x, 0)$ έχουμε ότι $F_Y^{*n}(y) \le F_Y^{*n}(0) = 0$, απ'όπου επειδή η F_Y είναι σ.κ.π. συνεπάγεται ότι $F_Y^{*n}(y) = 0$.

Επομένως, τελικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F_Y^{*(n+1)}(s) &= \int_0^x F_Y^{*n}(s-y)dF_Y(y) \overset{(\Upsilon E)}{=} \int_0^x \frac{F_X^{*n}(s-y)}{F_X^n(x)} d\left(\frac{F_X(y)}{F_X(x)}\right) \\ &= \frac{1}{F_X^{n+1}(x)} \int_0^x F_X^{*n}(s-y)dF_X(y) \overset{(6.8)}{=} \frac{F_X^{*(n+1)}(s)}{F_X^{n+1}(x)}, \end{aligned}$$

κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη της επαγωγής, άρα και της (6.7).

Από τις (6.6) και (6.7), λαμβανομένης υπόψη και της (6.3), άμεσα έπεται η ισότητα του (i) για αυθαίρετα $x \in (0, \infty)$ και $s \in [0, x]$ κι επομένως τελικά η ισχύς του (i).

(ii) Αρχικά παρατηρούμε ότι οι συνελίξεις $\{F_Y^{*n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι *σ.κ.π.*, αφού η F_Y είναι *σ.κ.π.* κι επομένως έχουμε ότι

$$F_Y^{*n}(\infty) := \lim_{s\to\infty} F_Y^{*n}(s) = 1. \tag{6.9}$$

Έστω επίσης $x \in \mathbb{R}_+$, τότε θέτοντας $p_n := e^{-\lambda}(\lambda^n/n!)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και επειδή $F_Y^{*n}(s) \in [0,1]$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$, έχουμε ότι $p_n F_X^n(x) F_Y^{*n}(s) \le p_n F_X^n(x)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $s \in \mathbb{R}_+$, απ'οπου σύμφωνα με την (6.6), για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ έπεται ότι

$$G(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x) F_Y^{*n}(s) \le \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x) = m_N\big(F_X(x)\big) = e^{\lambda[F_X(x)-1]}. \tag{6.10}$$

Από την παραπάνω ανισότητα, τελικά και για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ έπεται ότι

$$G(\infty) := \lim_{s\to\infty} G(s) \le e^{\lambda[F_X(x)-1]} < \infty. \tag{6.11}$$

Επομένως, υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο της G για $s \to \infty$, οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} G(\infty) &= \lim_{s\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x) F_Y^{*n}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x) \Big[\lim_{s\to\infty} F_Y^{*n}(s)\Big] \\ &\overset{(6.9)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x) = m_N\big(F_X(x)\big) = e^{\lambda[F_X(x)-1]}, \end{aligned}$$

με την δεύτερη ισότητα να αιτιολογείται από τον παρακάτω ισχυρισμό:

• **Ισχυρισμός:** Αν θέσουμε $\alpha := \lim_{s\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x) F_Y^{*n}(s)$, καθώς επίσης και $\beta := \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x) \big[\lim_{s\to\infty} F_Y^{*n}(s)\big]$, τότε $\alpha = \beta$.

Πράγματι, επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η $F_Y^{*n}(s)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του s ($s \in \mathbb{R}_+$) ως *σ.κ.π.*, άμεσα έπεται ότι $\alpha \le \beta$. Επομένως, αρκεί να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα. Για το λόγο αυτό για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $s \in \mathbb{R}_+$ θέτουμε $\beta_n := \lim_{s\to\infty} F_Y^{*n}(s) \ge F_Y^{*n}(s)$, αφού η $F_Y^{*n}(s)$ είναι αύξουσα. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta(\varepsilon) > 0$ ώστε για κάθε $s > \delta(\varepsilon)$ να ισχύει ότι

$$\big|F_Y^{*n}(s) - \beta_n\big| < \varepsilon \Leftrightarrow \beta_n - F_Y^{*n}(s) < \varepsilon \Leftrightarrow F_Y^{*n}(s) > \beta_n - \varepsilon,$$

απ'όπου για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ άμεσα έπεται ότι

$$\begin{aligned} A(s) &:= \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x) F_Y^{*n}(s) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x)(\beta_n - \varepsilon) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x)\beta_n - \varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x) \overset{(6.10)}{=} \beta - \varepsilon e^{\lambda[F_X(x)-1]}, \end{aligned}$$

οπότε θέτοντας $\varepsilon' := \varepsilon e^{\lambda[F_X(x)-1]} > 0$ άμεσα έπεται ότι

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{s\to\infty} A(s) \geq \beta - \varepsilon' \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \alpha \geq \beta - \varepsilon' \Rightarrow \alpha \geq \beta,$$

κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού.

Επομένως, δείξαμε ότι $G(\infty) = e^{\lambda[F_X(x)-1]}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ κι άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ ώστε $F_X(x) < 1$ ισχύει $G(\infty) < 1$. Προφανώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ ώστε $F_X(x) = 1$, από τις (6.5) και (6.6) άμεσα έπεται ότι αναγόμαστε στην περίπτωση της σύνθετης κατανομής Poisson με παραμέτρους λ και $F_Y(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, δηλαδή της $F_{S_N}(x)$ κι επομένως η ισχύς των (ii)-(iv) του παρόντος λήμματος επίσης έπεται άμεσα.

Από την τελευταία ανισότητα προκύπτει ότι η G δεν είναι γενικά *σ.κ.π.*. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο να ορίσουμε την συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ με τύπο

$$F(s) := \begin{cases} 0 & \text{αν } s \in (-\infty, 0) \\ G(s) & \text{αν } s \in [0, x_0] \\ G(s) + e^{\lambda[F_X(s)-1]} - e^{\lambda[F_X(x_0)-1]} & \text{αν } s \in (x_0, \infty) \end{cases},$$

όπου $x_0 \in \mathbb{R}_+$ ώστε $F(x_0) < 1$.

Η F είναι μια *σ.κ.π.*, διότι είναι προφανώς φραγμένη στο $[0,1]$, είναι αύξουσα – λόγω του ότι η G είναι αύξουσα με $G(s) \geq 0$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$, καθώς επίσης και του ότι η F_X είναι αύξουσα – είναι δεξιά συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, αφού $\lim_{s\to x_0^+} F(s) = F(x_0)$, και τέλος διότι $\lim_{s\to-\infty} F(s) = 0$ και $\lim_{s\to\infty} F(s) = 1$. Επομένως, υπάρχει τ.μ. S' με *σ.κ.π.* $F_{S'} = F$ (βλ. π.χ. [6], Πρόταση 3.1.4).

(iii) Έστω $x \in \mathbb{R}_+$. Αρχικά παρατηρούμε ότι επειδή η F_Y είναι αύξουσα και άνω φραγμένη από το 1 (ως *σ.κ.π.*), άμεσα έπεται ότι για κάθε $y \in (x, \infty)$ ισχύει $F_Y(y) \geq F_Y(x) := F_X(x)/F_X(x) = 1$, συνεπώς $F_Y(y) = 1$ κι επομένως τελικά άμεσα έπεται ότι

$$\frac{dF_Y(y)}{dy} = 0 \quad \text{για} \quad y \in (x, \infty). \tag{6.12}$$

Έστω επίσης $u \in \mathbb{R}_+$. Τότε θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}^*$:

• Για $n = 1$ έχουμε ότι

$$\int_0^{\infty} e^{uy} dF_Y^{*1}(y) = \int_0^{\infty} e^{uy} dF_Y(y) \overset{(6.12)}{=} \int_0^{x} e^{uy} dF_Y(y) = \left[\int_0^{x} e^{uy} dF_Y(y)\right]^1,$$

άρα ο ισχυρισμός (iii) ισχύει για $n = 1$.

• Έστω ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}^*$ ισχύει η

$$\int_0^\infty e^{uy} dF_X^{*n}(y) = \left[\int_0^x e^{uy} dF_X(y)\right]^n, \qquad (\Upsilon E)$$

τότε αρκεί να δείξουμε το βήμα της επαγωγής, δηλαδή ότι ισχύει η

$$J_{n+1} := \int_0^\infty e^{uy} dF_X^{*(n+1)}(y) = \left[\int_0^x e^{uy} dF_X(y)\right]^{n+1}. \qquad (BE)$$

Όμως, επειδή οι $\sigma.\kappa.\pi.$ F_X, F_Y είναι διαφορίσιμες λ-$\sigma.\beta.$, τότε το ίδιο θα ισχύει και για τις συνελίξεις $\{F_Y^{*n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, κι επομένως από την (6.8) (και σύμφωνα π.χ. με το [18], IV, Satz 5.7) για κάθε $y \in (0, \infty)$ έχουμε ότι

$$\frac{dF_Y^{*(n+1)}(s)}{ds} = \int_0^x \frac{\partial F_Y^{*n}(s-y)}{\partial s} dF_Y(y),$$

άρα και ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{us} dF_Y^{*(n+1)}(s) &= \int_0^\infty \int_0^x e^{us} dF_Y^{*n}(s-y) dF_Y(y) \\
&= \int_0^\infty \int_0^x e^{uy} e^{u(s-y)} dF_Y^{*n}(s-y) dF_Y(y) \\
&= \int_0^\infty e^{uy} \left[\int_0^x e^{u(s-y)} dF_Y^{*n}(s-y)\right] dF_Y(y).
\end{aligned}$$

Θεωρώντας τον μετασχηματισμό (M): $\begin{cases} w := s - y \\ z := y \end{cases}$ στο τελευταίο ολοκλήρωμα και θέτοντας

$$I(x) := \int_0^x e^{uw} dF_Y(w),$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
J_{n+1} &= \int_0^\infty e^{uz} \left[\int_0^x e^{uw} dF_Y^{*n}(w)\right] dF_Y(z) \overset{(\Upsilon E)}{=} \int_0^\infty e^{uz} \left[\int_0^x e^{uw} dF_Y(w)\right]^n dF_Y(z) \\
&= \int_0^\infty e^{uz} [I(x)]^n dF_Y(z) = [I(x)]^n \int_0^\infty e^{uz} dF_Y(z) \overset{(6.12)}{=} [I(x)]^n \int_0^x e^{uz} dF_Y(z) \\
&= \left[\int_0^x e^{uy} dF_Y(y)\right]^n \left[\int_0^x e^{uy} dF_Y(y)\right] = \left[\int_0^x e^{uy} dF_Y(y)\right]^{n+1},
\end{aligned}$$

κάτι που αποδεικνύει την (BE), ολοκληρώνοντας έτσι την επαγωγή και κατά συνέπεια και την απόδειξη του (iii) για αυθαίρετο $x \in \mathbb{R}_+$ άρα και για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$. Άρα δείξαμε το (iii).

(iv) Αρχικά παρατηρούμε ότι επειδή οι F_X, F_Y παίρνουν τιμές στο $[0, 1]$ (ως $\sigma.\kappa.\pi.$) το ίδιο θα ισχύει και για τις συνελίξεις $\{F_Y^{*n}\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Θέτοντας, τώρα, $h_n(y) := p_n F_X^n(x) F_Y^{*n}(y)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}_+$, τότε για κάθε $y \in \mathbb{R}_+$ η $h_n(y)$ παίρνει τιμές στο $[0,1]$ και είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς y (αφού και η $F_Y^{*n}(y)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του y ως σ.κ.π.). Επομένως, η $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι μια ακολουθία αυξουσών συναρτήσεων, για την οποία από την (6.6) έχουμε ότι $\sum_{n=0}^{\infty} h_n = G$, οπότε από το [4], Θεώρημα 14.10, για λ-σχεδόν όλα τα y ισχύει ότι

$$\frac{dG(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n(y)\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{dh_n(y)}{dy} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x)\frac{dF_Y^{*n}(y)}{dy},$$

άρα και ότι

$$dG(y) = d\left(\sum_{n=0}^{\infty} h_n(y)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} dh_n(y) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x) dF_Y^{*n}(y).$$

Από την τελευταία σχέση (θέτοντας $\widetilde{I} := \int_0^{\infty} e^{uy} dG(y)$), για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\widetilde{I} &= \int_0^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} e^{uy} p_n F_X^n(x) dF_Y^{*n}(y) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\infty} e^{uy} p_n F_X^n(x) dF_Y^{*n}(y) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^n(x)\left[\int_0^{\infty} e^{uy} dF_Y^{*n}(y)\right] \overset{\textbf{(iii)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left[F_X(x)\int_0^{x} e^{uy} dF_Y(y)\right]^n \\
&\overset{(6.5)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left[F_X(x)\int_0^{x} e^{uy}\frac{dF_X(y)}{F_X(x)}\right]^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \left[\int_0^{x} e^{uy} dF_X(y)\right]^n \\
&= m_N\left(\int_0^{x} e^{uy} dF_X(y)\right) = e^{\lambda\left[\int_0^{x} e^{uy} dF_X(y) - 1\right]},
\end{aligned}$$

με την δεύτερη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του Θεωρήματος B.Levi (βλ. π.χ. [4], Πόρισμα 6.10) και τις δύο τελευταίες ισότητες να αντλούν άμεσα την ισχύ τους από τον Ορισμό Α′.1.6(iii) και από την Ενότητα Α′.2(iii), αντίστοιχα. □

Το παρακάτω αποτέλεσμα μας παρέχει ένα φράγμα για την πιθανότητα ουράς της υπό εξέταση σύνθετης κατανομής Poisson.

Πρόταση 6.1.4. Έστω ότι η τ.μ. S_N κατανέμεται σύμφωνα με μια σύνθετη κατανομή Poisson με παραμέτρους $\lambda \in (0,\infty)$ και $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$. Τότε

$$\psi(x) \le 1 - e^{\lambda[F_X(x)-1]} + \frac{\lambda\int_0^x y dF_X(y)}{x} e^{1+\lambda[F_X(x)-1]-\frac{\lambda}{x}\int_0^x y dF_X(y)}$$

για κάθε $x \in (0,\infty)$ με $x > \lambda\int_0^x y dF_X(y)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη της πρότασης θα γίνει βάσει τεσσάρων βημάτων. Για τα τρία πρώτα βήματα θεωρούμε $x \in (0,\infty)$ και $u \in \mathbb{R}_+$.

(a) $\psi(x) \le e^{-ux+\lambda[\int_0^x e^{uy} dF_X(y)-1]} + 1 - e^{-\lambda[F_X(x)-1]}$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι από το Λήμμα 6.1.3 έχουμε ότι

$$F_{S'}(x) = G(x) = F_{S_N}(x) \Leftrightarrow \psi(x) := P(S_N > x) = P(S^{'} > x).$$

Τότε από την τελευταία σχέση και λαμβάνοντας υπόψη το Πόρισμα 6.1.2(i) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\psi(x) &= P(S^{'} > x) \leq e^{-ux}E\big[e^{uS^{'}}\big] = e^{-ux}\int_{-\infty}^{\infty} e^{uy}dF_{S'}(y) \\
&= e^{-ux}\left[\int_0^x e^{uy}dG(y) + \int_x^\infty e^{uy}d\Big(G(y) + e^{\lambda[F_X(y)-1]} - e^{\lambda[F_X(x)-1]}\Big)\right] \\
&= e^{-ux}\left[\int_0^x e^{uy}dG(y) + \int_x^\infty e^{uy}dG(y) + \int_x^\infty e^{uy}d\Big(e^{\lambda[F_X(y)-1]}\Big)\right] \\
&= e^{-ux}\left[\int_0^\infty e^{uy}dG(y) - \int_x^\infty e^{uy}d\Big(-e^{\lambda[F_X(y)-1]}\Big)\right] \\
&\leq e^{-ux}\left[\int_0^\infty e^{uy}dG(y) - \int_x^\infty e^{ux}d\Big(-e^{\lambda[F_X(y)-1]}\Big)\right] \\
&= e^{-ux}\left[\int_0^\infty e^{uy}dG(y) + e^{ux}\int_x^\infty d\Big(e^{\lambda[F_X(y)-1]}\Big)\right] \\
&= e^{-ux}\int_0^\infty e^{uy}dG(y) + \Big[e^{\lambda[F_X(y)-1]}\Big]_x^\infty \\
&\leq e^{-ux}\int_0^\infty e^{uy}dF_{S'}(y) + \big(1 - e^{\lambda[F_X(x)-1]}\big) \\
&= e^{-ux+\lambda[\int_0^\infty e^{uy}dF_X(y)-1]} + 1 - e^{-\lambda[F_X(x)-1]},
\end{aligned}$$

με την τρίτη ισότητα και την τελευταία ανισότητα να αποτελούν άμεση συνέπεια του Λήμματος 6.1.3(ii), την δεύτερη ανισότητα να έπεται άμεσα από το ότι η συνάρτηση e^y είναι γνησίως αύξουσα ως προς y, και την τελευταία ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του Λήμματος 6.1.3(iv).

(b) $\int_0^x e^{uy}dF_X(y) \leq F_X(x) - \frac{1}{x}\int_0^x ydF_X(y) + \frac{e^{ux}}{x}\int_0^x ydF_X(y)$.

Πράγματι, έστω η συνάρτηση $h(u) := xe^{uy} - ye^{ux}$ ορισμένη επάνω στο $\mathbb{R}_+$. Τότε, για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ με $y \in [0, x]$ έχουμε ότι $h^{'}(u) = xye^{uy} - xye^{ux} = xy(e^{uy} - e^{ux}) \leq 0$ (αφού η e^y είναι γνησίως αύξουσα ως προς y) κι άρα δείξαμε ότι η h είναι φθίνουσα στο $\mathbb{R}_+$. Επομένως, για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι

$$h(u) \leq h(0) \Leftrightarrow xe^{uy} - ye^{ux} \leq x - y \Leftrightarrow xe^{uy} \leq ye^{ux} + x - y$$

κι άρα σύμφωνα με την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι

$$\int_0^x e^{uy}dF_X(y) = \frac{1}{x}\int_0^x xe^{uy}dF_X(y) \leq \frac{1}{x}\int_0^x (ye^{ux} + x - y)dF_X(y)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x}\left[\int_0^x ye^{ux}dF_X(y) + x\int_0^x dF_X(y) - \int_0^x ydF_X(y)\right] \\
&= \frac{1}{x}\left[xF_X(x) - \int_0^x ydF_X(y) + e^{ux}\int_0^x ydF_X(y)\right] \\
&= F_X(x) - \frac{1}{x}\int_0^x ydF_X(y) + \frac{e^{ux}}{x}\int_0^x ydF_X(y),
\end{aligned}$$

με τα επιμέρους ολοκληρώματα να μην απειρίζονται, αφού άμεσα διαπιστώνεται ότι για $u \in \mathbb{R}_+$ είναι μικρότερα του $\nu_1 < \infty$ (βλ. (6.2)). Άρα δείξαμε το (b).

(c) Αν θέσουμε $g(u) := \frac{\lambda e^{ux}}{x}\int_0^x ydF_X(y) - ux$, τότε

$$\psi(x) \le e^{g(u)+\lambda[F_X(x)-1]-\frac{\lambda}{x}\int_0^x ydF_X(y)} + 1 - e^{-\lambda[F_X(x)-1]}.$$

Πράγματι, από το (a) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\le e^{-ux+\lambda[\int_0^x e^{uy}dF_X(y)-1]} + 1 - e^{-\lambda[F_X(x)-1]} \\
&= e^{-\lambda-ux+\lambda\int_0^x e^{uy}dF_X(y)} + 1 - e^{-\lambda[F_X(x)-1]} \\
&\overset{\textbf{(b)}}{\le} e^{-\lambda+\lambda F_X(x)-\frac{\lambda}{x}\int_0^x ydF_X(y)+\frac{\lambda e^{ux}}{x}\int_0^x e^{uy}dF_X(y)-ux} + 1 - e^{-\lambda[F_X(x)-1]} \\
&= e^{g(u)+\lambda[F_X(x)-1]-\frac{\lambda}{x}\int_0^x ydF_X(y)} + 1 - e^{-\lambda[F_X(x)-1]},
\end{aligned}$$

άρα δείξαμε και το (c).

Και επειδή δείξαμε το (c) για αυθαίρετα $u \in \mathbb{R}_+$ και $x \in (0,\infty)$ θα ισχύει και για οποιαδήποτε $u \in \mathbb{R}_+$ και $x \in (0,\infty)$. Στη συνέχεια εξετάζουμε το αν και που μεγιστοποιείται η $g(u)$.

(d) Για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $x \in (0,\infty)$ τέτοιο ώστε $x > \lambda\int_0^x ydF_X(y)$ ισχύει ότι $g(u) \ge 1 + \ln\left(\frac{\lambda}{x}\int_0^x ydF_X(y)\right)$.

Πράγματι, για κάθε $u, x \in (0,\infty)$ έχουμε ότι

$$\frac{dg(u)}{du} = \left(\frac{\lambda}{x}\int_0^x ydF_X(y)\right)\frac{de^{ux}}{dx} - \frac{d(ux)}{du} = \lambda e^{ux}\int_0^x ydF_X(y) - x,$$

άρα έχουμε και ότι

$$\frac{dg(u)}{du} \ge 0 \Leftrightarrow \lambda e^{ux}\int_0^x ydF_X(y) - x \ge 0 \Leftrightarrow u \ge \frac{1}{x}\ln\frac{x}{\lambda\int_0^x ydF_X(y)} =: u^*(x).$$

Επομένως, έχουμε ότι $g^{'}(u) \ge 0$ αν και μόνο αν $u \ge u^* := u^*(x)$ και $g^{'}(u) < 0$ αν και μόνο αν $u < u^*$, που για να έχει νόημα πρέπει $u^* \in (0,\infty)$, δηλαδή πρέπει $\ln\frac{x}{\lambda\int_0^x ydF_X(y)} > 0$ ή ισοδύναμα $x > \lambda\int_0^x ydF_X(y)$. Άρα η $g(u)$ ελαχιστοποιείται στο $u = u^*$ και η ελάχιστη τιμή της ισούται με

$$g(u^*) = g\left(\frac{1}{x}\ln\frac{\lambda\int_0^x ydF_X(y)}{x}\right) = 1 + \ln\frac{\lambda\int_0^x ydF_X(y)}{x},$$

όπου $x > \lambda \int_0^x y dF_X(y)$. Επομένως, δείξαμε το (d).

Όμως, επειδή η ανισότητα του (c) ισχύει για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $x \in (0, \infty)$, τότε λαμβανομένου υπόψη του (d), το (c) μπορεί να εφαρμοστεί για $u = u* \in \mathbb{R}_+$, οπότε για κάθε $x \in (0, \infty)$ τέτοιο ώστε $x > \lambda \int_0^x y dF_X(y)$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\psi(x) &\leq e^{g(u^*)+\lambda[F_X(x)-1]-\frac{\lambda}{x}\int_0^x y dF_X(y)} + 1 - e^{\lambda[F_X(x)-1]} \\
&= e^{\ln \frac{\lambda \int_0^x y dF_X(y)}{x}} e^{1+\lambda[F_X(x)-1]-\frac{\lambda}{x}\int_0^x y dF_X(y)} + 1 - e^{\lambda[F_X(x)-1]} \\
&= 1 - e^{\lambda[F_X(x)-1]} + \frac{\lambda \int_0^x y dF_X(y)}{x} e^{1+\lambda[F_X(x)-1]-\frac{\lambda}{x}\int_0^x y dF_X(y)},
\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο φράγμα. □

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι η ανισότητα της Πρότασης 6.1.4 ισχύει για όλες τις κατανομές μεγέθους απαίτησης F_X, ακόμα και για εκείνες για τις οποίες το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty e^{ux} dF_X(x)$ είναι πεπερασμένο μόνο για $u = 0$, αφού από την (6.2), την ισχύ της οποίας έχουμε υποθέσει, άμεσα έχουμε για κάθε $x \in (0, \infty)$ ότι

$$\infty > \nu_1 := \int_0^\infty y e^{\kappa y} dF_X(y) \geq \int_0^\infty y dF_X(y) \geq \int_0^x y dF_X(y),$$

αφού $e^{\kappa y} \geq 1$ για κάθε $\kappa, y \in (0, \infty)$, κι άρα από το βήμα (b) της απόδειξης της Πρότασης 6.1.4 για κάθε $x \in (0, \infty)$ έχουμε και ότι $\int_0^x e^{uy} dF_X(y) < \infty$.

Δηλαδή τα εμπλεκόμενα στην απόδειξή μας ολοκληρώματα παραμένουν και σε αυτή την περίπτωση πραγματικοί αριθμοί, κι επομένως δεν αλλάζει τίποτα στην απόδειξη που δόθηκε παραπάνω για την Πρόταση 6.1.4. *Με άλλα λόγια, ακόμα κι αν αναιρέσουμε την ισχύ της (6.1) η Πρόταση 6.1.4 θα εξακολουθεί να ισχύει εφόσον διατηρείται η ισχύς της (6.2).*

Παρατηρήσεις 6.1.5. Κάτω από τις υποθέσεις της Πρότασης 6.1.4 ισχύουν τα εξής:
(a) Θέτοντας $H_{S_*}(s) := e^{-\lambda[F_X(x)-1]} G(s)$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι

$$H_{S_*}(s) \stackrel{(6.6)}{=} \sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda[F_X(x)-1]} e^{-\lambda} \frac{[\lambda F_X(x)]^n}{n!} F_Y^{*n}(s) = \sum_{n=0}^\infty e^{-\lambda F_X(x)} \frac{[\lambda F_X(x)]^n}{n!} F_Y^{*n}(s),$$

που αποτελεί ουσιαστικά την *σ.κ.π.* μιας τ.μ. S_* που κατανέμεται σύμφωνα με μια σύνθετη κατανομή Poisson με παραμέτρους $\lambda F_X(x)$ και $F_Y(x)$ (κάτι που έχει νόημα διότι, αφού από το Λήμμα 6.1.3 έχει υποτεθεί ότι η $F_X(x) \in (0,1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$).
(b) Το (a) ουσιαστικά δηλώνει ότι η τ.μ. S_* μπορεί να εκφραστεί ως ένα τυχαίο άθροισμα $S_* = \sum_{k=0}^M Y_k$, με την $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ να είναι μια *σ.δ.* μεγέθους απαίτησης με ανεξάρτητες, ισόνομες και θετικές τ.μ., καθώς και με κατανομή μεγέθους απαίτησης $F_Y(x)$, όπως αυτή ορίζεται στην (6.5), ανεξάρτητη της απαριθμήτριας τ.μ. M, όπου $P_M = \mathbf{P}(\lambda F_X(x))$ με

$\lambda, x \in (0,\infty)$. Μάλιστα, από τις (6.2) και (6.12) έχουμε ότι οι μέσες τιμές της $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, δηλαδή οι $EY_n = EY = \frac{1}{F_X(x)}\int_0^x ydF_X(y)$ $(n \in \mathbb{N})$ είναι πεπερασμένες. Επομένως, εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.6.4 άμεσα (βλ. και Ενότητα Α′.2(iii)) έπεται ότι

$$ES_* = \lambda F_X(x) EY \tag{6.13}$$

και

$$VS_* = \lambda F_X(x) EY^2. \tag{6.14}$$

Στη συνέχεια παραθέτουμε έναν εναλλακτικό τρόπο υπολογισμού φραγμάτων για την πιθανότητα $\psi(x)$, ο οποίος με τη σειρά του δίνει δύο νέα φράγματα αυτής, υπό την μορφή της παρακάτω πρότασης.

Πρόταση 6.1.6. Έστω ότι η τ.μ. S_N κατανέμεται σύμφωνα με μια σύνθετη κατανομή Poisson με παραμέτρους $\lambda \in (0,\infty)$ και $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$. Τότε για κάθε $x \in (0,\infty)$ ισχύουν τα εξής:

(i) $\psi(x) \le 1 - e^{\lambda[F_X(x)-1]} + \frac{1}{x^2}\left[\lambda\int_0^x y^2 dF_X(y) + \left[\lambda\int_0^x ydF_X(y)\right]^2\right]e^{\lambda[F_X(x)-1]}$.

(ii) $\psi(x) \le 1 - e^{\lambda[F_X(x)-1]} + \frac{1}{x}\left[\lambda\int_0^x ydF_X(y)\right]e^{\lambda[F_X(x)-1]}$.

Απόδειξη. Η παρούσα πρόταση αποδεικνύεται εύκολα αν εφαρμόσουμε για τη μη αρνητική τ.μ. S_* το Λήμμα 6.1.1 (θεωρώντας τις συναρτήσεις $h(x) := x^2$ και $h^*(x) := x$ ορισμένες επάνω στο $(0,\infty)$ για το (i) και (ii), αντίστοιχα), εκμεταλλευτούμε τις (6.13) και (6.14) και τέλος λάβουμε υπόψη τον ορισμό της $H_{S_*}(s)$ (βλ. Παρατήρηση 6.1.5(a)). □

Η παραπάνω πρόταση, εξασφαλίζει φράγματα για την πιθανότητα $\psi(x)$, *που παρουσιάζουν σαφή εξάρτηση τόσο από την συνάρτηση κατανομής πιθανότητας των μεγεθών απαίτησης όσο και από κάποιες ροπές της τ.μ.* S_*, *(δηλαδή από κάποιες ειδικές ροπές της* $F_X(x)$*)*. Φυσικά, τα αποτελέσματά της μπορεί να γενικευθούν εμπλέκοντας ροπές k-τάξης ($k \in \mathbb{N}$ με $k > 2$), θεωρώντας (αντίστοιχα με την απόδειξη του (i) της πρότασης) όπου $h(x) := x^k$ και λαμβάνοντας υπόψη και το Πόρισμα 6.1.2(ii).

Μια προσέγγιση ανάλογη αυτής της Πρότασης 6.1.6 επιτρέπει τον *υπολογισμό φραγμάτων για την πιθανότητα* $\psi(x)$, *ειδικά προσαρμοσμένων στην περίπτωση όπου η κατανομή των (ατομικών) μεγεθών ζημιών παρουσιάζει βαριά ουρά.* Στην ακόλουθη πρόταση, δίνουμε ένα φράγμα για την πιθανότητα ουράς της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων όταν αυτή είναι η σύνθετη αρνητική διωνυμική κατανομή, δηλαδή όταν υποθέτουμε ότι $P_N = \mathbf{NB}(\alpha, p)$

($\alpha \in (0,\infty)$ και $q \in (0,1)$) κι άρα ότι η τ.μ. S_N κατανέμεται σύμφωνα με μία σύνθετη αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους α, q και $F_X(x)$, για $x \in (0,\infty)$. Συνεπώς, ισχύει ότι

$$F_{S_N}(x) := \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x) & \text{αν } x \in [0,\infty) \\ 0 & \text{αν } x \in (-\infty,0) \end{cases},$$

όπου $p_n := P_N(\{n\}) = P(N=n) = \binom{\alpha-1+n}{n} p^\alpha q^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $\alpha \in (0,\infty)$ τέτοιο ώστε $\alpha \geq n-1$, $q \in (0,1)$ και $p := 1-q$.

Πρόταση 6.1.7. Έστω ότι η τ.μ. S_N κατανέμεται σύμφωνα με μια σύνθετη αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\alpha \in (0,\infty)$, $q \in (0,1)$ και $F_X(x)$, $x \in (0,\infty)$. Τότε, για κάθε $x \in (0,\infty)$ ισχύει ότι

$$\psi(x) \leq 1 - \left[\frac{q}{1-pF_X(x)}\right]^\alpha + \frac{p\mu(x)q^n}{[1-pF_X(x)]x + p\mu(x)} \frac{(1+\alpha)^{\alpha+1}}{\alpha^\alpha}[b(x;p)]^{-\alpha}, \tag{6.15}$$

όπου $\mu(x) := \int_0^x y dF_X(y)$ και $b(x;p) := 1 - pF_X(x) + p(\mu(x)/x)$ για κάθε $x \in (0,\infty)$.

Απόδειξη. Παρακάτω θα σκιαγραφήσουμε απλώς την απόδειξη της παρούσας πρότασης, αποφεύγοντας για λόγους συντομίας τους αναλυτικούς υπολογισμούς, αφού όπως ήδη αναφέρθηκε αυτή προκύπτει από μια προσέγγιση ανάλογη αυτής της Πρότασης 6.1.7.

Οπότε, για $\alpha \in (0,\infty)$, σύμφωνα με το (iii) και κατ'αναλογία του (iv) του Λήμματος 6.1.3, αποδεικνύεται ότι για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ ώστε $u < \kappa$, ισχύει η

$$\int_0^\infty e^{uy} dG(y) = m_N\left(\int_0^x e^{uy} dF_X(y)\right) = \left[q\left[1 - p\int_0^x e^{uy} dF_X(y)\right]^{-1}\right]^\alpha, \tag{6.16}$$

με την δεύτερη ισότητα να προκύπτει άμεσα από το ότι εξ'υποθέσεως ισχύει $P_N = \mathbf{NB}(\alpha,p)$ (βλ. και Ενότητα Α΄.2(vii)). Όμως, από την (6.1) για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ ώστε $u < \kappa$ έχουμε ότι

$$\int_0^x e^{uy} dF_X(y) \leq \int_0^\infty e^{uy} dF_X(y) \leq \int_0^\infty e^{\kappa y} dF_X(y) = p^{-1},$$

δηλαδή εξασφαλίζουμε ότι ο παρονομαστής $1 - p\int_0^x e^{uy} dF_X(y) > 0$ κι επομένως το ότι η (6.16) έχει νόημα για κάθε $\alpha \in (0,\infty)$.

Τότε, από την (6.16) και λαμβάνοντας υπόψη τόσο την εξ'υποθέσεως ισχύ της (6.2) όσο και το βήμα (b) της απόδειξης της Πρότασης 6.1.4, άμεσα έπεται ότι

$$\int_0^\infty e^{uy} dG(y) \leq q^\alpha \left[1 - p\left[F_X(x) - \frac{1}{x}\int_0^x y dF_X(y) + \frac{e^{ux}}{x}\int_0^x y dF_X(y)\right]\right]^{-\alpha} \tag{6.17}$$

κι άρα κατ'αναλογία με το βήμα (a) της απόδειξης της Πρότασης 6.1.4, τελικά και για κάθε $x \in (0,\infty)$ έχουμε ότι

$$\psi(x) \leq 1 - \left[\frac{q}{1-pF_X(x)}\right]^\alpha + \frac{q^\alpha}{g(u)}, \tag{6.18}$$

όπου η συνάρτηση

$$g(u) := e^{ux}\big[c(x;p) - (pe^{ux}\mu(x)/x)\big]^{\alpha} = e^{ux}(b - ce^{ux})^{\alpha} \tag{6.19}$$

και $c := c(x;p) := p\mu(x)/x$.

Τότε, για την εύρεση του καλύτερου (υπό την έννοια του ελάχιστου δυνατού ως προς $u \in [0,\kappa)$) φράγματος για την $\psi(x)$, αρκεί να ελαχιστοποιήσουμε ως προς $u \in [0,\infty)$, το δεξί μέλος της (6.15), δηλαδή αρκεί η μεγιστοποίηση της $g(u)$ ως προς $u \in [0,\kappa)$, από την οποία τελικά έπεται το ζητούμενο. □

Τέλος, παραθέτουμε το παρακάτω αποτέλεσμα, που αναφέρεται στην ισχύ της ανισότητας (6.15), όταν η μέση τιμή του μεγέθους απαίτησης EX δεν είναι πεπερασμένη, επομένως όταν η (6.2) δεν ισχύει.

Λήμμα 6.1.8. Έστω ότι η τ.μ. S_N κατανέμεται σύμφωνα με μια σύνθετη κατανομή αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $\alpha \in (0,\infty)$, $q \in (0,1)$ και $F_X(x)$, $x \in (0,\infty)$. Αν ικανοποιείται για κάθε $x \in (0,\infty)$ η ανισότητα

$$[1 - pF_X(x)]x \geq \alpha p\mu(x), \tag{6.20}$$

τότε η ανισότητα (6.15) ισχύει ακόμα κι αν η EX δεν είναι πεπερασμένη.

Απόδειξη. Έστω ότι η EX δεν είναι πεπερασμένη, τότε αναιρείται η ισχύς της (6.2), αφού αν ίσχυε η (6.2), άμεσα θα είχαμε ότι

$$\infty > \nu_1 := \int_0^{\infty} ye^{\kappa y} dF_X(y) > \int_0^{\infty} y dF_X(y) =: EX$$

(αφού $e^{\kappa y} > 1$ για κάθε $\kappa, y \in (0,\infty)$), που, όμως, εξ'υποθέσεως είναι άτοπο. Γενικά, όμως, δεν μπορούμε να συμπεράνουμε το ίδιο και για την ισχύ της (6.1).

Ακόμα κι αν δεν υποθέσουμε την ισχύ της (6.2), πάντως, από το βήμα (b) της απόδειξης της Πρότασης 6.1.4 και για κάθε $x \in (0,\infty)$ και $u \in \mathbb{R}_+$, έπεται η ισχύς της ανισότητας $\int_0^x e^{uy} dF_X(y) \leq F_X(x) + (1 - e^{ux})\mu(x)/x$, απ'όπου άμεσα έπεται ότι για κάθε $x \in (0,\infty)$ και $u \in \mathbb{R}_+$ ισχύει η ανισότητα

$$1 - p\int_0^x e^{uy} dF_X(y) \geq 1 - pF_X(x) + \frac{p\mu(x)}{x}(1 - e^{ux}). \tag{6.21}$$

Υποθέτοντας, τώρα, την ισχύ της (6.20) για κάθε $x \in (0,\infty)$ έχουμε ότι

$$1 - pF_X(x) + \frac{p\mu(x)}{x}(1 - e^{ux}) \geq \frac{\alpha p\mu(x)}{x} + \frac{p\mu(x)}{x}(1 - e^{ux}) = \frac{p\mu(x)}{x}(\alpha + 1 - e^{ux})$$

κι επομένως για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned}\frac{p\mu(x)}{x}(\alpha+1-e^{ux})>0 \;&\Leftrightarrow\; \alpha+1-e^{ux}>0 \Leftrightarrow e^{ux}<\alpha+1\\ &\Leftrightarrow\; ux<\ln(\alpha+1)\Leftrightarrow u<\frac{1}{x}\ln(\alpha+1)=\kappa^*,\end{aligned}$$

άμεσα έπεται ότι $1-pF_X(x)+p\mu(x)(1-e^{ux})/x>0$.

Επομένως, έχοντας υποθέσει την ανισότητα (6.20), από την (6.21) και βάσει της τελευταίας ανισότητας, τελικά έπεται ότι υπάρχει $\kappa^* \in (0,\infty)$, τέτοιο ώστε για κάθε $u \in [0,\kappa^*]$ να ισχύει ότι $1-p\int_0^x e^{uy}dF_X(y)>0$, κάτι που ουσιαστικά μας επιτρέπει να επαναλάβουμε την απόδειξη της Πρότασης 6.1.7 και συνεπώς να αποδείξουμε την ανισότητα (6.15), ακόμα κι αν εκτός της (6.2) αναιρεθεί και η ισχύς της (6.1). Δηλαδή, δείξαμε ότι ακόμα κι αν $EX=\infty$, η (6.15) ισχύει όταν ικανοποιείται η (6.20), που είναι το ζητούμενο. □

Κλείνοντας την παρούσα ενότητα, κρίνεται σκόπιμο να επισημάνουμε μερικά πράγματα, αναφορικά με τις υποθέσεις για την ισχύ των συνθηκών (6.1) και (6.2) της παρούσας ενότητας, συνοψίζοντας τα όσα αναφέρθηκαν μέχρι τώρα για αυτές.

Παρατήρηση 6.1.9. Το άνω φράγμα για την πιθανότητα ουράς μιας σύνθετης κατανομής Poisson, που δίνεται στην Πρόταση 6.1.4 εξασφαλίζεται ακόμα κι αν άρουμε την υπόθεση για την ύπαρξη μιας σταθεράς $\kappa \in (0,\infty)$, που ικανοποιεί την (6.1), διατηρώντας απλώς την ισχύ της (6.2). Από την άλλη, στην περίπτωση του αντίστοιχου φράγματος για την πιθανότητα ουράς μιας σύνθετης αρνητικής διωνυμικής κατανομής, που δίνεται στην Πρόταση 6.1.7, η ύπαρξη του εξασφαλίζεται ακόμα και στην περίπτωση όπου $EX=\infty$ – κάτι που ισοδυναμεί με άρση της υπόθεσης για την ισχύ της (6.2), αλλά ακόμα και της (6.1) – αρκεί να ικανοποιείται η ανισότητα (6.20). Δηλαδή, διαπιστώνουμε ότι οι εν λόγω υποθέσεις, αν και είναι ιδιαίτερα σημαντικές για την εύρεση των παραπάνω φραγμάτων, υπό προϋποθέσεις μπορεί να παρακαμφθούν, χωρίς αυτό να επηρεάζει τα εξαγόμενα φράγματα.

6.2 Φράγματα Τύπου Lundberg

Στην παρούσα ενότητα μελετάμε φράγματα για την πιθανότητα ουράς διάφορων σύνθετων κατανομών, γενικεύοντας την Ανισότητα Lundberg. Για τον σκοπό αυτό το ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στα φράγματα τύπου Chebyshev και ειδικότερα στο αποτέλεσμα των Willmot & Lin (1994), που παρέχει ένα τέτοιο φράγμα για την πιθανότητα ουράς ενός τυχαίου αθροίσματος, καθώς και στην σχέση τους με την Ανισότητα Lundberg (βλ. Παρατηρήσεις 6.2.2).

Αρχικά θεωρούμε την απαριθμήτρια τ.μ. N, με $\sigma.\pi.$ $p_n := P(N = n)$ για κάθε $n \in R_N = \mathbb{N}$ και π.γ.σ. (βλ. Ορισμούς Α′.1.6)

$$m_N(z) := E\big[z^N\big] = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n,$$

με $z \in [-1, 1]$ ώστε $|z| < z_0$, δηλαδή με ακτίνα σύγκλισης μικρότερη του $z_0 \in (0, \infty)$.

Ακόμη, με M_X και M_{S_N} συμβολίζουμε τις ρ.γ.σ. των τ.μ. X και S_N, αντίστοιχα, που ορίζονται σε μια περιοχή του 0. Τέλος, για κάθε $s \in (0, \infty)$ ορίζουμε τον μετασχηματισμό Laplace της $\psi(x)$,

$$\widetilde{\psi}(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx}\psi(x)dx.$$

Στο σημείο αυτό, όμως, και πριν συνεχίσουμε την αναφορά μας στο γενικότερο πλαίσιο, στο οποίο εντάσσονται τα υπό μελέτη αποτελέσματα των Willmot & Lin (1994), θεωρούμε σκόπιμο να εισάγουμε την ακολουθία $\{\mathrm{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ με

$$\mathrm{a}_n := \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k \tag{6.22}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, καθώς και την γεννήτρια συνάρτηση αυτής

$$A(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{a}_n z^n \tag{6.23}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}$ ώστε $|z| < z_0$. Δηλαδή, θεωρούμε την $A(z)$ τέτοια ώστε να έχει την ίδια ακτίνα σύγκλισης με την π.γ.σ. m_N.

Στη συνέχεια παραθέτουμε το παρακάτω λήμμα, το οποίο θα μας φανεί ιδιαίτερα χρήσιμο τόσο στην απόδειξη των ζητούμενων αποτελεσμάτων όσο και στην πραγματοποίηση γενικότερων σχολίων κι επιμέρους παρατηρήσεων, αναφορικά με αυτά.

Λήμμα 6.2.1. Ισχύουν τα εξής:

(i) $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n[1 - F_X^{*n}(x)]$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$.

(ii) Αν η $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, είναι μια συνεχής σ.κ.π., τότε ο μετασχηματισμός Laplace της $\psi(x)$ ικανοποιεί την $M_{S_N}(-t) = t\widetilde{\psi}(t) + 1 - p_0$ για κάθε $t \in (0, \infty)$ ώστε $\widetilde{\psi}(t) < \infty$.

Απόδειξη. **(i)** Από το Λήμμα 3.6.1 για $B := (-\infty, x] \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ άμεσα έχουμε ότι

$$F_{S_N}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x) \tag{6.24}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$. Οπότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= 1 - F_{S_N}(x) \overset{(6.24)}{=} 1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(x) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_n[1 - 1 + F_X^{*n}(x)] \\
&= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} p_n + \sum_{n=0}^{\infty} p_n[1 - F_X^{*n}(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} p_n[1 - F_X^{*n}(x)] \\
&= p_0[1 - F_X^{*0}(x)] + \sum_{n=1}^{\infty} p_n[1 - F_X^{*n}(x)] = \sum_{n=1}^{\infty} p_n[1 - F_X^{*n}(x)].
\end{aligned}
$$

(ii) Επειδή εξ'υποθέσεως η $F_X(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}_+$, τότε από την (6.24) άμεσα έπεται ότι και η $F_{S_N}(x)$ θα είναι συνεχής για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ κι άρα για κάθε $t \in (0, \infty)$ ώστε $\widetilde{\psi}(t) < \infty$ έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\psi}(t) &= \int_0^{\infty} e^{-tx}[1 - F_{S_N}(x)]dx = \int_0^{\infty} e^{-tx}dx - \int_0^{\infty} e^{-tx} F_{S_N}(x)dx \\
&= \frac{1}{t} + \frac{1}{t}\left[\left[e^{-tx}F_{S_N}(x)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} e^{-tx}F'_{S_N}(x)dx\right] = \frac{1 - p_0 - M_{S_N}(-t)}{t}.
\end{aligned}
$$

Άρα δείξαμε ότι $\widetilde{\psi}(t) = [1 - p_0 - M_{S_N}(-t)]/t$ για κάθε $t \in (0, \infty)$ ώστε $\widetilde{\psi}(t) < \infty$, που ουσιαστικά είναι το ζητούμενο. □

Για μια θετική τ.μ. X ένα (άνω) φράγμα της πιθανότητας ουράς $\psi(x) := P(X > x)$ ονομάζεται **τύπου Lundberg** αν και μόνο αν για κάθε $x \in R_X = \mathbb{R}_+$ ισχύει η

$$\psi(x) \leq Ce^{-\kappa x}, \tag{6.25}$$

όπου $\kappa \in (0, \infty)$ και $C \in (0, \infty)$ η **σταθερά Lundberg**.

Επί πλέον, αν για το φράγμα της (6.25) υπάρχει $\kappa \in (0, \infty)$ ώστε $C = E[e^{\kappa X}] < \infty$, C σταθερό, τότε το φράγμα αυτό ονομάζεται φράγμα **τύπου Chebyshev**. Δηλαδή, τα φράγματα τύπου Chebyshev δεν είναι παρά ειδικές περιπτώσεις φραγμάτων τύπου Lundberg.

Παρατηρήσεις 6.2.2. Σχετικά με τα φράγματα τύπου Chebyshev παρατηρούμε τα εξής:
(a) Σύμφωνα και με τα όσα αναφέρθηκαν στην Παρατήρηση 5.2.7, στην περίπτωση που θεωρήσουμε την σ.δ. του αποθεματικού για μια δεδομένη χρονική στιγμή η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ίση με την πιθανότητα ουράς του τυχαίου αθροίσματος S_N. Σε αυτή την περίπτωση η Ανισότητα Lundberg δηλώνει ότι $\psi(x) \leq e^{-\kappa x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$, όπου το $\kappa \in (0, \infty)$ ικανοποιεί την

$$q^{-1} = \widetilde{f}_X(-\kappa) := \int_0^{\infty} e^{\kappa x} f_X(x)dx = \int_0^{\infty} e^{\kappa x} dF_X(x) = M_X(\kappa), \tag{6.26}$$

(που ουσιαστικά είναι η συνθήκη (6.1)), δηλαδή το κ είναι ένας συντελεστής υπερπροσαρμογής (βλ. π.χ. [21], Chapter 8). *Η παραπάνω συνθήκη στην πραγματικότητα αποσκοπεί* *στο να εξασφαλίσει ότι $C = 1 = E\big[e^{\kappa S_N}\big]$, δηλαδή ένα φράγμα τύπου Chebyshev που να δίνει την Ανισότητα Lundberg.*

(b) Όμως, αν $P_N = \mathbf{G}(1-q) = \mathbf{NB}(1, 1-q)$ και επειδή ομοίως με το Λήμμα 3.6.2 αποδεικνύεται ότι η ρ.γ.σ. του τυχαίου αθροίσματος S_N ισούται με $M_{S_N}(t) = m_N\big(M_X(t)\big)$ για κάθε $z \in \mathbb{R}$ για το οποίο εξασφαλίζεται η ύπαρξή της, από την (6.26) έχουμε $M_{S_N}(\kappa) = m_N\big(q^{-1}\big) = \lim_{t \to (q^{-1})^+} \frac{1-q}{1-qt} = \infty$ (βλ. Ενότητα A'.2(vii)). Άρα δείξαμε ότι $E\big[e^{\kappa S_N}\big] = \infty$, κι επομένως το φράγμα της (a), που δίνεται από την $\psi(x) \le e^{-\kappa x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$, δεν είναι τύπου Chebyshev.

(c) Από το (a) και το (b) άμεσα προκύπτει το συμπέρασμα πως η εξασφάλιση της ύπαρξης της ρ.γ.σ. για την κατανομή των ατομικών μεγεθών ζημιών (βλ. συνθήκη (6.26)) δεν συνεπάγεται αναγκαστικά την ύπαρξη της ρ.γ.σ. και για το τυχαίο άθροισμα S_N, δηλαδή για την κατανομή των συνολικών απαιτήσεων μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Η αντίστροφη συνεπαγωγή, πάντως, ισχύει και αυτό αποδεικνύεται στο παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 6.2.3. Αν η $F_X(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, είναι μια συνεχής σ.κ.π., τότε για το τυχαίο άθροισμα S_N έχουμε:

(i) Αν ισχύει η (6.25), τότε $\int_0^\infty e^{tx} dF_{S_N}(x) < \infty$ για κάθε $t < \kappa$.

(ii) Αν $M_{S_N}(t) < \infty$ για κάθε $t \in (0, \infty)$, τότε για κάθε $t \in (0, \infty)$ ισχύει

$$M_X(t) < \infty \quad \& \quad 1 \le M_X(t) < z_0.$$

Απόδειξη. **(i)** Έστω ότι η ανισότητα (6.25) ισχύει, τότε για κάθε $t \in (0, \infty)$ ώστε $t < \kappa$ έχουμε ότι

$$\widetilde{\psi}(-t) = \int_0^\infty e^{tx} \psi(x) dx \overset{(6.25)}{\le} \int_0^\infty e^{tx} \big(Ce^{-\kappa x}\big) dx = C \int_0^\infty e^{-(\kappa - t)x} dx < \infty.$$

Τότε, από το Λήμμα 6.2.1(ii), έχουμε ότι $M_{S_N}(t) = t\widetilde{\psi}(-t) + 1 - p_0 < \infty$.

(ii) Σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στην Παρατήρηση 6.2.2(b) για οποιοδήποτε $t \in (0, \infty)$ ώστε $M_{S_N}(t) < \infty$ ισχύει ότι $M_{S_N}(t) = m_N\big(M_X(t)\big)$, απ'όπου έπεται ότι πρέπει και η $M_X(t) < \infty$, αφού αλλιώς θα υπήρχε $t_0 \in (0, \infty)$ ώστε $\infty = M_X(t_0) \ge z_0$, κι επομένως $M_{S_N}(t_0) = \infty$, που, όμως, είναι άτοπο. Επομένως, ισχύει η ανισότητα $1 \le M_X(t) < z_0$ για κάθε $t \in (0, \infty)$. □

Παρατηρήσεις 6.2.4. Σχετικά με το Λήμμα 6.2.3, παρατηρούμε τα εξής:

(a) Το (i) του παραπάνω λήμματος δηλώνει ότι η ισχύς της ανισότητας (6.25) εξασφαλίζει την ισχύ της $E\big[e^{\kappa S_N}\big] < \infty$ για κάθε $t \in (0, \infty)$ ώστε $t < \kappa$, κάτι που καθιστά το $\kappa \in (0, \infty)$ σε σχέση με οποιοδήποτε $t < \kappa$ ως μια ανώτερη – υπό την έννοια του μέγιστου δυνατού φράγματος – επιλογή σταθεράς που εξασφαλίζει την δυνατότητα εύρεσης φραγμάτων τύπου Chebyshev.

(b) Επίσης, στο λήμμα καταδεικνύεται ότι η ισχύς της ανισότητας (6.25) εξασφαλίζει την ύπαρξη της ρ.γ.σ. του τυχαίου αθροίσματος S_N, και ότι η ύπαρξη της ρ.γ.σ. του S_N με τη σειρά της εξασφαλίζει την ύπαρξη της ρ.γ.σ. της X. Επομένως, αφού η απαριθμήτρια τ.μ. N μπορεί να θεωρηθεί ως το τυχαίο άθροισμα των (εκφυλισμένων) τ.μ. $X_n := \mathbf{1}$, $n \in \mathbb{N}^*$ (δηλαδή $N = S_N(\mathbf{1}, \ldots, \mathbf{1}, \ldots)$) η (6.25) εξασφαλίζει την ύπαρξη της ρ.γ.σ. και για την N.

Στο σημείο αυτό και πριν παραθέσουμε το θεώρημα που εξασφαλίζει το φράγμα των Willmot & Lin (1994) για την πιθανότητα ουράς $\psi(x)$, ορίζουμε

$$M := \sup\{n \in \mathbb{N} : p_n > 0\},$$

που δηλώνει τον μέγιστο αριθμό εμφάνισης απαιτήσεων μη μηδενικής πιθανότητας, και για το οποίο προφανώς ισχύει ότι $M \in \mathbb{N}$. Μάλιστα, **για την αποφυγή τετριμμένων περιπτώσεων, στο εξής κι αν δεν δηλώνεται διαφορετικά, θα θεωρούμε ότι** $M > 1$.

Τέλος, **σημειώνουμε ότι επειδή οι (6.4) και (6.8) δεν εξαρτώνται από την κατανομή της απαριθμήτριας τ.μ.** N (που στην προηγούμενη ενότητα την είχαμε διαδοχικά υποθέσει να είναι η $\mathbf{P}(\lambda)$ και η $\mathbf{NB}(\alpha, p)$), **η ισχύς τους διατηρείται και στην παρούσα ενότητα.**

Θεώρημα 6.2.5. Έστω το τυχαίο άθροισμα S_N και ας υποθέσουμε ότι

(i) υπάρχει $\varphi \in (0,1)$ ώστε $\mathrm{a}_{n+1} \le \varphi \mathrm{a}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

(ii) υπάρχει $\kappa \in (0,\infty)$ ώστε $\varphi^{-1} = \widetilde{f}_X(-\kappa) := \int_0^\infty e^{\kappa x} dF_X(x)$.

Τότε για την πιθανότητα ουράς του S_N, για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\psi(x) \le \frac{1-p_0}{\varphi} e^{-\kappa x}. \tag{6.27}$$

Απόδειξη. Αρχικά, ορίζουμε την ακολουθία $\{\psi_k(x)\}_{k\in\mathbb{N}}$ με

$$\psi_k(x) := \sum_{n=0}^{k} \mathrm{a}_n \big[F_X^{*n}(x) - F_X^{*(n+1)}(x)\big]$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$. Τότε, η απόδειξη του ζητούμενου θα γίνει βάσει των παρακάτω τριών βημάτων.

(a) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\widehat{\psi}_k(x) := \int_0^x \psi_k(x-y) dF_X(y) = \sum_{n=0}^{k} \mathrm{a}_n \big[F_X^{*(n+1)}(x) - F_X^{*(n+2)}(x)\big].$$

Πράγματι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ τελικά έχουμε:

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}_k(x) &= \int_0^x \sum_{n=0}^{k} \mathrm{a}_n \big[F_X^{*n}(x-y) - F_X^{*(n+1)}(x-y)\big] dF_X(y) \\
&= \sum_{n=0}^{k} \mathrm{a}_n \int_0^x \big[F_X^{*n}(x-y) - F_X^{*(n+1)}(x-y)\big] dF_X(y) \\
&\overset{(6.8)}{=} \sum_{n=0}^{k} \mathrm{a}_n \big[F_X^{*(n+1)}(x) - F_X^{*(n+2)}(x)\big].
\end{aligned}$$

(b) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $\psi_k(x) \leq \mathrm{a}_0 \varphi^{-1} e^{-\kappa x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$.

Απόδειξη με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$:

• Για $k = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\psi_k(x) &= \mathrm{a}_0\big[1 - F_X(x)\big] = \mathrm{a}_0 \int_x^\infty dF_X(y) \leq \mathrm{a}_0 e^{-\kappa x} \int_x^\infty e^{\kappa y} dF_X(y) \\
&\leq \mathrm{a}_0 e^{-\kappa x} \int_0^\infty e^{\kappa y} dF_X(y) \overset{\textbf{(ii)}}{=} \mathrm{a}_0 \varphi^{-1} e^{-\kappa x},
\end{aligned}$$

με τις δύο ανισότητες να αντλούν την ισχύ τους από το ότι το $e^{\kappa y} \geq e^{-\kappa(x-y)} \geq e^0 = 1$ για κάθε $y \in [x, \infty)$. Επομένως, δείξαμε ότι το (b) ισχύει για $k = 0$.

• Έστω ότι το (b) ισχύει για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\psi_{k+1}(x) &= \mathrm{a}_0\big[F_X^{*0}(x) - F_X^{*1}(x)\big] + \sum_{n=1}^{k+1} \mathrm{a}_n \big[F_X^{*n}(x) - F_X^{*(n+1)}(x)\big] \\
&= \mathrm{a}_0\big[1 - F_X(x)\big] + \sum_{n=1}^{k+1} \mathrm{a}_n \big[F_X^{*n}(x) - F_X^{*(n+1)}(x)\big] \\
&\overset{\textbf{(i)}}{\leq} \mathrm{a}_0\big[1 - F_X(x)\big] + \varphi \sum_{n=1}^{k+1} \mathrm{a}_{n-1} \big[F_X^{*n}(x) - F_X^{*(n+1)}(x)\big] \\
&\overset{\ell:=n-1}{=} \mathrm{a}_0\big[1 - F_X(x)\big] + \varphi \sum_{\ell=0}^{k} \mathrm{a}_\ell \big[F_X^{*(\ell+1)}(x) - F_X^{*(\ell+2)}(x)\big] \\
&\overset{\textbf{(a)}}{=} \mathrm{a}_0 \int_x^\infty dF_X(y) + \varphi \int_0^x \psi_k(x-y) dF_X(y) \\
&\leq \mathrm{a}_0 \int_x^\infty 1 dF_X(y) + \varphi \int_0^x \mathrm{a}_0 \varphi^{-1} e^{-\kappa(x-y)} dF_X(y) \\
&\leq \mathrm{a}_0 \int_x^\infty e^{-\kappa(x-y)} dF_X(y) + \mathrm{a}_0 \int_0^x e^{-\kappa(x-y)} dF_X(y) \\
&= \mathrm{a}_0 e^{-\kappa x} \int_0^\infty e^{\kappa y} dF_X(y) \overset{\textbf{(ii)}}{=} \mathrm{a}_0 \varphi^{-1} e^{-\kappa x},
\end{aligned}$$

με την προτελευταία και την τελευταία ανισότητα να ισχύουν λόγω της υπόθεσης της επαγωγής και του ότι το $e^{\kappa y} \geq 1$ για κάθε $y \in [x, \infty)$, αντίστοιχα.

Άρα δείξαμε το βήμα της επαγωγής, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη της επαγωγής, αποδεικνύοντας έτσι το (b).

(c) Για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι $\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = \psi(x)$.

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{a}_n\big[F_X^{*n}(x) - F_X^{*(n+1)}(x)\big]\\ &= \mathrm{a}_0\big[F_X^{*0}(x) - F_X^{*1}(x)\big] + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n\big[F_X^{*n}(x) - F_X^{*(n+1)}(x)\big]\\ &= \mathrm{a}_0\big[1 - F_X(x)\big] + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n\Big[\big[1 - F_X^{*(n+1)}(x)\big] - \big[1 - F_X^{*n}(x)\big]\Big].\end{aligned}$$

Θέτοντας, όμως, στο πρώτο άθροισμα του δεξιού μέλους της παραπάνω ισότητας όπου $\ell := n + 1$, τότε έχουμε:

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) &= \mathrm{a}_0\big[1 - F_X(x)\big] + \sum_{\ell=2}^{\infty} \mathrm{a}_{\ell-1}\big[1 - F_X^{*\ell}(x)\big] - \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{a}_n\big[1 - F_X^{*n}(x)\big]\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{a}_{n-1} - \mathrm{a}_n)\big[1 - F_X^{*n}(x)\big] = \sum_{n=1}^{\infty} p_n\big[1 - F_X^{*n}(x)\big] = \psi(x),\end{aligned}$$

με την προτελευταία και την τελευταία ισότητα να αποτελούν άμεση συνέπεια της υπόθεσης (i) και του Λήμματος 6.2.1(i), αντίστοιχα. Άρα, δείξαμε το (c).

Από το (b), όμως, για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ έπεται ότι $\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) \leq \mathrm{a}_0\varphi^{-1}e^{-\kappa x}$, κι άρα λαμβάνοντας υπόψη το (c), άμεσα έχουμε και ότι $\psi(x) \leq \mathrm{a}_0\varphi^{-1}e^{-\kappa x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$. Και επειδή θεωρήσαμε την $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως μια κατανομή πιθανότητας, έχουμε ότι

$$\mathrm{a}_0 := \sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k - p_0 = 1 - p_0 \tag{6.28}$$

κι επομένως από την τελευταία ανισότητα έπεται άμεσα το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 6.2.6. Από την παραπάνω απόδειξη εύκολα γίνεται αντιληπτό πως αν και το αποτέλεσμα των Willmot & Lin (1994) περιλαμβάνει στις υποθέσεις του και την ισχύ της (ii) του Θεωρήματος 6.2.5, θα μπορούσε να αποδειχτεί και με μία λιγότερο ισχυρή υπόθεση, την (ii*) $\varphi^{-1} \geq \widetilde{f}_X(-\kappa) := \int_0^\infty e^{\kappa x} dF_X(x)$, την οποία και εισάγουμε (ως (6.30)) στην απόδειξη του ιδίου αποτελέσματος που δόθηκε από τον Gerber (1994), αφού η (ii*) αρκεί για την απόδειξη του βήματος (b), που ουσιαστικά έπεται την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.5.

Στο αμέσως επόμενο λήμμα, θα δείξουμε ότι όταν η ανισότητα (6.25) ικανοποιείται για το τυχαίο άθροισμα S_N, αλλά ταυτόχρονα ικανοποιούνται και οι υποθέσεις του Θεωρήματος 6.2.5, τότε $z_0 \geq \varphi^{-1} > 1$, ενώ ειδικά για $\varphi^{-1} = z_0$, το Λήμμα 6.2.3 είναι μη εφαρμόσιμο κι έτσι το φράγμα της (6.25) είναι *βέλτιστο*. **Στο εξής και για το υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου, με τον όρο «βέλτιστο» θα εννοούμε το φράγμα τύπου Lundberg που αντιστοιχεί στο μεγαλύτερο δυνατό $\kappa \in (0, \infty)$ για το οποίο εξασφαλίζεται η δυνατότητα εύρεσης φραγμάτων τύπου Chebyshev**. Προφανώς, το βέλτιστο φράγμα είναι εκείνο που ως προς την πιθανότητα εμφάνισης μεγάλου ύψους συνολικών αποζημιώσεων αναφέρεται στο χειρότερο δυνατό σενάριο για την ασφαλιστική εταιρεία. **Επίσης, όταν θα αναφερόμαστε στο «φράγμα της (6.25)» θα εννοούμε το αντίστοιχο φράγμα για το S_N.**

Λήμμα 6.2.7. Αν ισχύει η υπόθεση (i) του Θεωρήματος 6.2.5, τότε:

(i) $z_0 \geq \varphi^{-1} > 1$.

(ii) Ιδιαιτέρως, αν $\varphi^{-1} = z_0 > 1$ και επί πλέον ισχύει η υπόθεση (ii) του Θεωρήματος 6.2.5, το φράγμα της (6.25) είναι βέλτιστο.

Απόδειξη. (i) Βάσει της υπόθεσης (i) του Θεωρήματος 6.2.5 εύκολα αποδεικνύεται επαγωγικά ότι $\mathrm{a}_n \leq \mathrm{a}_0\varphi^n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, από την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι

$$A(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{a}_n z^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{a}_0\varphi^n) z^n = \mathrm{a}_0 \sum_{n=0}^{\infty} (\varphi z)^n,$$

κι άρα η σύγκλιση της γεωμετρικής σειράς του δεξιού μέλους της ισότητας εξασφαλίζει την σύγκλιση της $A(z)$. Επομένως, για να εξασφαλίσουμε ότι η $A(z)$ συγκλίνει, αρκεί να ισχύει ότι $|\varphi z| < 1$, δηλαδή ότι $|z| < \varphi^{-1}$, αφού $\varphi \in (0, 1)$. Όμως, εξ'υποθέσεως, η $A(z)$ έχει ακτίνα σύγκλισης μικρότερη του $z_0 \in (0, \infty)$ κι άρα (βλ. π.χ. [10], Πρόταση 9.6.6) θα συγκλίνει (ομοιόμορφα) για κάθε $r \in (0, z_0)$. Επομένως, τελικά πρέπει $z_0 \geq \varphi^{-1} > 1$.
(ii) Ιδιαιτέρως, αν $\varphi^{-1} = z_0$, τότε όπως δείξαμε στο βήμα (a) της απόδειξης του Θεωρήματος 5.3.3 η ρ.γ.σ. $M_X(t)$ είναι αύξουσα ως προς t, ενώ ομοίως, αποδεικνύεται ότι και η π.γ.σ. $m_N(z)$ είναι αύξουσα ως προς z, απ'όπου (σύμφωνα με τα όσα αναφέρθηκαν στην Παρατήρηση 6.2.2(b)) επίσης έπεται ότι η $M_{S_N}(t) = m_N\big(M_X(t)\big)$ είναι αύξουσα ως προς t ως σύνθεση αυξουσών συναρτήσεων.

Επίσης, από την υπόθεση (ii) του Θεωρήματος 6.2.5, υπάρχει $\kappa \in (0, \infty)$ ώστε $M_X(\kappa) = \varphi^{-1} = z_0$. Επί πλέον, επειδή η $M_X(t)$ είναι αύξουσα ως προς t, τότε για οποιοδήποτε $\kappa^* \in (\kappa, \infty)$ έχουμε ότι $M_X(\kappa^*) \geq M_X(\kappa) = z_0$, απ'όπου λαμβάνοντας επίσης υπόψη ότι και η $m_N(z)$ είναι αύξουσα ως προς z, έπεται ότι $m_N\big(M_X(\kappa^*)\big) \geq m_N(z_0)$. Όμως, εξ'υποθέσεως, η ακτίνα σύγκλισης της $m_N(z)$ είναι μικρότερη του z_0, οπότε από την τελευταία ανισότητα τελικά έπεται ότι $M_{S_N}(\kappa^*) = m_N\big(M_X(\kappa^*)\big) = \infty$.

Συνεπώς, από το Λήμμα 6.2.3(i) έπεται ότι για κάθε $\kappa^* \in (\kappa, \infty)$ δεν μπορεί να βρεθεί για την πιθανότητα ουράς $\psi(x)$ φράγμα της μορφής (6.25) ώστε το $C = E\big[e^{\kappa^* S_N}\big]$, κι άρα δείξαμε το ζητούμενο. □

Σε κάθε περίπτωση, πάντως, η σταθερά Lundberg C, που αντιστοιχεί στο φράγμα των Willmot & Lin (1994), ικανοποιεί την ανισότητα $C < E\big[e^{\kappa S_N}\big]$ και συνεπώς λαμβάνεται *μια πιο εκλεπτυσμένη μορφή (βελτίωση) του φράγματος τύπου Chebyshev*. Το γεγονός αυτό καταδεικνύεται στο παρακάτω λήμμα.

Παρατηρήσεις 6.2.8. Σχετικά με το φράγμα των Willmot & Lin (1994), παρατηρούμε ακόμη τα εξής:

(a) Το φράγμα της (6.27) είναι μικρότερο του αντίστοιχου φράγματος τύπου Chebyshev (του Πορίσματος 6.1.2(i)).

Πράγματι, επειδή για το φράγμα της (6.27) ικανοποιείται η υπόθεση (ii) του Θεωρήματος 6.2.5 έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M_{S_N}(\kappa) \quad &= \quad m_N\big(M_X(\kappa)\big) = m_N(\varphi^{-1}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi^{-n} p_n = p_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-n} p_n \\ &\overset{p_0 \in [0,1]}{\geq} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-n} p_n \overset{\varphi \in (0,1)}{>} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{-1} p_n \overset{(6.28)}{=} \varphi^{-1}(1-p_0), \end{aligned}$$

άρα δείξαμε ότι $\varphi^{-1}(1-p_0) < M_{S_N}(\kappa) := E\big[e^{\kappa S_N}\big]$, κάτι που ουσιαστικά αποδεικνύει το ζητούμενο.

(b) Στο (i) του Λήμματος 6.2.7 δείξαμε ότι δοθείσης της υποθέσεως (i) του Θεωρήματος 6.2.5 ισχύει $z_0 \geq \varphi^{-1} > 1$. Άμεση συνέπεια της ανισότητας αυτής είναι ότι αν η κοινή ακτίνα σύγκλισης των $m_N(z)$ και $A(z)$ είναι ίση με $z_0 = 1$, τότε δεν υπάρχει κανένα $\varphi \in (0,1)$ που να ικανοποιεί την υπόθεση (i) του Θεωρήματος 6.2.5 και ταυτόχρονα να εξασφαλίζει την σύγκλιση της $A(z)$. Από την άλλη πλευρά, το (ii) του εν λόγω λήμματος, αναφέρεται στην περίπτωση όπου η υπόθεση (i) του Θεωρήματος 6.2.5 ισχύει για $\varphi \in (0,1)$, το οποίο ικανοποιεί την υπόθεση (ii) του ιδίου θεωρήματος, και ταυτόχρονα ισχύει ότι $\varphi^{-1} = z_0 > 1$.

6.3 Ένα Φράγμα Πιθανότητας Ουράς μέσω Martingales

Στην παρούσα ενότητα αποδεικνύεται εκ νέου το αποτέλεσμα των Willmot & Lin (1994), στο οποίο έγινε εκτεταμένη αναφορά στην προηγούμενη ενότητα, μέσω μιας martingale-μεθόδου. Η απόδειξη αυτή οφείλεται στον Gerber (1994), ο οποίος έτσι απάντησε ουσιαστικά στο αντίστοιχο ερώτημα που του είχε θέσει ο Καθηγητής Bühlmann στο 28ο Συνέδριο Αναλογιστικής Έρευνας της Ένωσης Αναλογιστών, στο οποίο είχε παρουσιαστεί και το αποτέλεσμα των Willmot & Lin (1994). Η αναφορά αυτή αποσκοπεί ακριβώς στο να καταδείξει την χρησιμότητα των martingales στην προσπάθεια εξασφάλισης φραγμάτων για την πιθανότητα ουράς ενός τυχαίου αθροίσματος.

Στην παρούσα ενότητα υποθέτουμε ότι υπάρχει $\varphi \in (0,1)$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να ισχύει η

$$P(N > k | N \geq k) \leq \varphi, \tag{6.29}$$

καθώς και ότι υπάρχει $r \in (0, \infty)$ ώστε

$$\varphi \int e^{rX} dP \leq 1. \tag{6.30}$$

Από τις παραπάνω υποθέσεις, η πρώτη είναι ουσιαστικά ισοδύναμη της υπόθεσης (i), ενώ η δεύτερη είναι ασθενέστερη της (ii) του Θεωρήματος 6.2.5.

Τέλος, σημειώνουμε ότι στο εξής όταν γράφουμε $\{\Sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ θα εννοούμε την *κανονική διύλιση* για την $\sigma.\delta.$ μεγέθους απαίτησης $\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$, ενώ θέτουμε $\Sigma_0 := \{\varnothing, \Omega\}$.

Στη συνέχεια παραθέτουμε το πρώτο αποτέλεσμα που θα μας φανεί χρήσιμο στην εύρεση του φράγματος των Willmot & Lin (1994) με τη χρήση martingales, υπό την μορφή του παρακάτω λήμματος.

Λήμμα 6.3.1. Έστω $\{Z_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$ η ακολουθία των τ.μ.

$$Z_k := \begin{cases} e^{rX_k} & \text{αν } N \geq k \\ \mathbf{0} & \text{αν } N < k \end{cases}, \tag{6.31}$$

τότε:

(i) $Z_k \in \mathcal{L}^1(P)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$.

(ii) Για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $E[Z_{k+1} | \{N \geq k\}] \leq 1$.

(iii) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $E[Z_{k+1} | \Sigma_k] \leq 1 \quad P|\Sigma_k - \sigma.\beta.$.

Απόδειξη. **(i)** Επειδή οι Z_k ($k \in \mathbb{N}^*$) είναι μη αρνητικές τ.μ., αρκεί να δείξουμε ότι $EZ_k < \infty$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$. Όμως, για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$, έχουμε

$$\begin{aligned} EZ_k &= \int_{\{N \geq k\}} Z_k dP + \int_{\{N < k\}} Z_k dP \overset{(6.31)}{=} \int_{\{N \geq k\}} e^{rX_k} dP \leq \int e^{rX_k} dP \\ &= \int e^{rX} dP \overset{(6.30)}{\leq} \varphi^{-1} < \infty. \end{aligned}$$

(ii) Αρχικά παρατηρούμε ότι από την (6.29) έχουμε ότι υπάρχει $\varphi \in (0,1)$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $x, r \in (0,\infty)$ να ισχύει η ανισότητα $e^{rx} P(N > k|N \geq k) \leq \varphi e^{rx}$, απ'όπου επίσης έχουμε ότι

$$\int_0^\infty e^{rx} P(N > k|N \geq k) dF_X(x) \leq \int_0^\infty \varphi e^{rx} dF_X(x) = \varphi \int_0^\infty e^{rx} dF_X(x)$$

κι άρα σύμφωνα με την (6.30) και λαμβανομένης υπόψη της εξ'υποθέσεως ισονομίας των τ.μ. X_k $(k \in \mathbb{N}^*)$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 &\geq \varphi \int_0^\infty e^{rx} dF_X(x) \geq P(N > k|N \geq k) \int_0^\infty e^{rx} dF_X(x) \\ &= E\big[\chi_{\{N>k\}}|\{N \geq k\}\big] E\big[e^{rX_{k+1}}\big], \end{aligned}$$

με την τελευταία ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.1.2(iii). Δηλαδή για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $x, r \in (0,\infty)$ δείξαμε ότι

$$E\big[\chi_{\{N>k\}}|\{N \geq k\}\big] E\big[e^{rX_{k+1}}\big] \leq 1. \tag{6.32}$$

Επίσης, σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.2(i) για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $x, r \in (0,\infty)$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E\big[e^{rX_{k+1}} \chi_{\{N \geq k+1\}}|\{N \geq k\}\big] &= \frac{1}{P(N \geq k)} \int e^{rX_{k+1}} \chi_{\{N \geq k+1\}} dP \\ &= \frac{1}{P(N \geq k)} E\big[e^{rX_{k+1}} \chi_{\{N \geq k+1\}}\big] \\ &= \frac{1}{P(N \geq k)} E\big[\chi_{\{N \geq k+1\}}\big] E\big[e^{rX_{k+1}}\big] \\ &= E\big[\chi_{\{N \geq k+1\}}|\{N \geq k\}\big] E\big[e^{rX_{k+1}}\big], \end{aligned}$$

με την τρίτη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι οι N και X_k $(k \in \mathbb{N}^*)$ είναι ανεξάρτητες τ.μ., όπως υποθέσαμε από την αρχή του παρόντος κεφαλαίου.

Άρα δείξαμε ότι

$$E\big[e^{rX_{k+1}} \chi_{\{N \geq k+1\}}|\{N \geq k\}\big] = E\big[\chi_{\{N \geq k+1\}}|\{N \geq k\}\big] E\big[e^{rX_{k+1}}\big],$$

οπότε από την (6.32) και για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ και $r \in (0,\infty)$ έχουμε

$$\begin{aligned} 1 &\geq E\big[\chi_{\{N>k\}}|\{N \geq k\}\big] E\big[e^{rX_{k+1}}\big] = E\big[\chi_{\{N \geq k+1\}}|\{N \geq k\}\big] E\big[e^{rX_{k+1}}\big] \\ &= E\big[e^{rX_{k+1}} \chi_{\{N \geq k+1\}}|\{N \geq k\}\big] \overset{(6.31)}{=} E\big[Z_{k+1}|\{N \geq k\}\big]. \end{aligned}$$

(iii) Από το (ii) και σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.2(i), για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $A \in \Sigma_k$ έχουμε ότι

$$1 \geq \int Z_{k+1} dP_{\{N \geq k\}} = \frac{1}{P(N \geq k)} \int Z_{k+1} dP \geq \int Z_{k+1} dP \geq \int_A Z_{k+1} dP.$$

Επίσης για $k = 0$ έπεται ότι για κάθε $A \in \Sigma_0 := \{\varnothing, \Omega\}$ ισχύει $\int_A Z_{k+1} dP = \int_A Z_1 dP \leq 1$. Άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $1 \geq \int_A Z_{k+1} dP = \int_A E[Z_{k+1}|\Sigma_k] dP$ για κάθε $A \in \Sigma_k$, που αποδεικνύει το (iii). □

Εισάγουμε επίσης την ακολουθία $\{S_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ των τ.μ.

$$S_k := \begin{cases} \sum_{j=1}^k X_j & \text{αν } k \in \mathbb{N}^* \\ \mathbf{0} & \text{αν } k = 0 \end{cases} \tag{6.33}$$

και παραθέτουμε το δεύτερο αποτέλεσμα που θα μας φανεί χρήσιμο για τον υπολογισμό του ζητούμενου φράγματος.

Λήμμα 6.3.2. Έστω $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ η ακολουθία των τ.μ.

$$Y_k := \begin{cases} e^{rS_k} & \text{αν } N \geq k \\ \mathbf{0} & \text{αν } N < k \end{cases}, \tag{6.34}$$

τότε:

(i) Για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $Y_k = Z_k Y_{k-1}$.

(ii) Η $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ είναι ένα υπερ-martingale ως προς τη διύλιση $\{\Sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$.

Απόδειξη. **(i)** Για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι $S_k := \sum_{j=1}^k X_j = \left(\sum_{j=1}^{k-1} X_j\right) + X_k = S_{k-1} + X_k$, όπου $S_0 := \mathbf{0}$. Οπότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $\omega \in \Omega$ ώστε $N(\omega) \geq k > k-1$, έχουμε ότι $Y_k(\omega) := e^{rS_k(\omega)} = e^{r(S_{k-1}+X_k)(\omega)} = e^{rS_{k-1}(\omega)} e^{rX_k(\omega)} = Y_{k-1}(\omega) Z_k(\omega)$, ενώ για κάθε $\omega \in \Omega$ ώστε $N(\omega) < k$, έχουμε ότι $Y_k(\omega) := 0 = Y_{k-1}(\omega) \cdot 0 = Y_{k-1}(\omega) Z_k(\omega)$ κι επομένως επειδή τα ενδεχόμενα $\{N \geq k\}$ και $\{N < k\}$ προφανώς αποτελούν μια διαμέριση του Ω, τελικά έπεται ότι $Y_k(\omega) = Y_{k-1}(\omega) Z_k(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $k \in \mathbb{N}^*$, αποδεικνύοντας έτσι το (i).

(ii) Αρχικά παρατηρούμε ότι από τον ορισμό των τ.μ. Y_k $(k \in \mathbb{N}^*)$ άμεσα έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ η τ.μ. Y_k είναι $\sigma(S_k)$-μετρήσιμη. Και επειδή από το [4], Παρατήρηση 13.10, για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $\sigma(S_k) = \sigma(X_1 + \cdots + X_k) \subseteq \sigma(\{X_1, \ldots, X_k\}) =: \Sigma_k$, τότε για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ η τ.μ. Y_k είναι Σ_k-μετρήσιμη κι άρα δείξαμε ότι η $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ είναι $\{\Sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$-προσαρμοσμένη.

Επομένως, αρκεί να δείξουμε τα παρακάτω δύο βήματα.

(a) Για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $Y_k \in \mathcal{L}^1(P)$.

Πράγματι, επειδή εξ'ορισμού οι $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ είναι θετικές τ.μ., αρκεί να δείξουμε ότι η $EY_k < \infty$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$. Η απόδειξη θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο.

Από την ανισότητα (6.30), την ισχύ της οποίας έχουμε υποθέσει, έχουμε ότι υπάρχουν $\varphi \in (0,1)$ και $r \in (0,\infty)$ ώστε $\int e^{rX} dP \leq \varphi^{-1}$, άρα για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ επίσης έχουμε ότι $\left(\int e^{rX} dP\right)^k \leq \varphi^{-k}$.

Έστω, τώρα, ότι υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $EY_{k_0} = \infty$. Τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\infty &= \int_{\{N \geq k_0\}} Y_{k_0} dP + \int_{\{N<k_0\}} Y_{k_0} dP \overset{(6.34)}{=} \int_{\{N \geq k_0\}} e^{rS_{k_0}} dP \\
&\overset{(6.33)}{=} \int_{\{N \geq k_0\}} e^{r\sum_{j=1}^{k_0} X_j} dP = \int_{\{N \geq k_0\}} \left(\prod_{j=1}^{k_0} e^{rX_j}\right) dP \\
&= \prod_{j=1}^{k_0} \int_{\{N \geq k_0\}} e^{rX_j} dP = \left(\int_{\{N \geq k_0\}} e^{rX} dP\right)^{k_0} \leq \left(\int e^{rX} dP\right)^{k_0},
\end{aligned}$$

με την τελευταία και την προτελευταία ισότητα να ισχύουν λόγω της ανεξαρτησίας και ισονομίας, αντίστοιχα, των τ.μ. X_k $(k \in \mathbb{N}^*)$, που έχουμε υποθέσει από την αρχή της παρούσας ενότητας.

Άρα δείξαμε ότι υπάρχουν $r \in (0,\infty)$ και $k_0 \in \mathbb{N}^*$ ώστε $\infty \leq \left(\int e^{rX} dP\right)^{k_0} \in (0, \varphi^{-k_0}) \subseteq (0,\infty)$, που είναι άτοπο. Επομένως, πρέπει για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ να ισχύει ότι $EY_k < \infty$, κάτι που αποδεικνύει το (a).

(b) Για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $E[Y_{k+1}|\Sigma_k] \leq Y_k \quad P|\Sigma_k - \sigma.\beta.$.

Πράγματι, από το (i) και για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$E[Y_{k+1}|\Sigma_k] = E[Z_{k+1}Y_k|\Sigma_k] = Y_k E[Z_{k+1}|\Sigma_k] \leq Y_k \cdot 1 = Y_k \quad P|\Sigma_k - \sigma.\beta.,$$

με την δεύτερη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια της Πρότασης 2.1.8(iii), λαμβανομένου υπόψη και του ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ οι τ.μ. $Z_k, Y_k \in \mathcal{L}^1(P)$ (βλ. Λήμμα 6.3.1 και (a), αντίστοιχα), και την ανισότητα να ισχύει λόγω του Λήμματος 6.3.1(iii).

Άρα δείξαμε και το (b), ολοκληρώνοντας έτσι τόσο την απόδειξη του (ii) όσο και του παρόντος λήμματος. □

Τέλος, στο παρακάτω θεώρημα δίνουμε το κύριο αποτέλεσμα της παρούσας ενότητας.

Θεώρημα 6.3.3. Έστω ότι υπάρχει $\varphi \in (0,1)$ ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ να ισχύει η (6.29), καθώς και ότι υπάρχει $r \in (0,\infty)$ ώστε να ισχύει η (6.30). Τότε για την πιθανότητα ουράς του τυχαίου αθροίσματος S_N και για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $\psi(x) \leq \frac{1-p_0}{\varphi} e^{-\kappa x}$.

Απόδειξη. Έστω $x \in \mathbb{R}_+$. Αρχικά, θεωρούμε την ακολουθία $\{Y_k\}_{k \in \mathbb{N}^*}$, όπως αυτή ορίζεται στο Λήμμα 6.3.2, καθώς και την

$$T := T_x := \min\{k \in \mathbb{N}^* : S_k > x \quad \text{ή} \quad N < k\},$$

η οποία είναι τ.μ. (ως μετρήσιμη συνάρτηση τ.μ.) με σύνολο τιμών το $\mathbb{N}^*$. Επίσης παρατηρούμε ότι από την εξ'υποθέσεως ανεξαρτησία των τ.μ. N και X_k ($k \in \mathbb{N}^*$) έπεται ότι οι τ.μ. N και X_1 είναι ανεξάρτητες, άρα η τ.μ. N είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\sigma(X_1) := \Sigma_1$ κι επομένως και το ενδεχόμενο $\{N \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητο της Σ_1, οπότε ισχύει

$$E[Y_T|\{N \geq 1\}, \Sigma_1] = E[Y_T|\Sigma_1] \quad P|\Sigma_1 - \sigma.\beta.. \tag{6.35}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι επειδή από το Λήμμα 6.3.2(ii) έχουμε την $\{Y_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$ να είναι ένα υπερ-martingale ως προς τη διύλιση $\{\Sigma_k\}_{k\in\mathbb{N}^*}$, τότε σύμφωνα με το Λήμμα 2.2.5 και για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$ έχουμε $E[Y_k|\Sigma_1] \leq Y_1 \quad P|\Sigma_1 - \sigma.\beta.$, άρα $E[Y_T|\Sigma_1] \leq Y_1 \quad P|\Sigma_1 - \sigma.\beta.$, κάτι που λαμβάνοντας υπόψη την (6.35) άμεσα συνεπάγεται την

$$E[Y_T|\{N \geq 1\}, \Sigma_1] \leq Y_1 \quad P|\Sigma_1 - \sigma.\beta.. \tag{6.36}$$

(a) $E[Y_T|\{N \geq 1\}, \Sigma_1] \geq e^{rx} E\big[\chi_{\{S_N > x\}}|\{N \geq 1\}, \Sigma_1\big] \quad P|\Sigma_1 - \sigma.\beta..$

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι άμεση συνέπεια του ορισμού της T είναι η σχέση

$$\{S_N > x\} \subseteq \{N \geq T\} \subseteq \{S_T > x\}, \tag{6.37}$$

επομένως εφαρμόζοντας την (6.34) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Y_T &= e^{rS_T}\chi_{\{N\geq T\}} \overset{(6.37)}{=} e^{rS_T}\chi_{\{S_T>x\}\cap\{N\geq T\}} = e^{rS_T}\chi_{\{S_T>x\}}\chi_{\{N\geq T\}} \\ &\overset{(6.37)}{\geq} e^{rx}\chi_{\{S_T>x\}}\chi_{\{S_N>x\}} = e^{rx}\chi_{\{S_N>x\}}. \end{aligned}$$

Δηλαδή δείξαμε ότι η τ.μ. $Y_T \geq e^{rx}\chi_{\{S_N>x\}}$, απ'όπου έπεται ότι

$$E[Y_T|\Sigma_1] \geq E\big[e^{rx}\chi_{\{S_N>x\}}|\Sigma_1\big] \quad P|\Sigma_1 - \sigma.\beta.,$$

κι επομένως επειδή το ενδεχόμενο $\{N \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητο της Σ_1, προκύπτει τελικά το (a).

(b) $P(S_N > x) = (1 - p_0)E\big[E[\chi_{\{S_N>x\}}|\{N \geq 1\}, \Sigma_1]\big].$

Αρχικά παρατηρούμε ότι σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.2(iii) κι επειδή $P(N \geq 1) > 0$, ισχύει $E[\chi_{\{S_N>x\}}|\{N \geq 1\}] = P(S_N > x|N \geq 1)$, απ'όπου λαμβάνοντας υπόψη ότι το ενδεχόμενο $\{N \geq 1\}$ είναι ανεξάρτητο της Σ_1 (από την Πρόταση 2.1.8(iv) άμεσα) έπεται ότι

$$E\big[E[\chi_{\{S_N>x\}}|\{N \geq 1\}, \Sigma_1]\big] = P(S_N > x|N \geq 1).$$

Λαμβανομένης υπόψη της τελευταίας σχέσης, από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας (βλ.

Πρόταση 2.1.2(iv)) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(S_N > x) &= P(S_N > x|N \geq 1)P(N \geq 1) + P(S_N > x|N < 1)P(N < 1) \\ &= P(S_N > x|N \geq 1)(1 - p_0) + P(0 > x|N = 0)p_0 \\ &= P(S_N > x|N \geq 1)(1 - p_0) \\ &= (1 - p_0)E\big[E[\chi_{\{S_N > x\}}|\{N \geq 1\}, \Sigma_1]\big]. \end{aligned}$$

(c) $P(S_N > x) \leq [(1 - p_0)/\varphi]e^{-rx}$.

Πράγματι, από την (6.36) και το (a) άμεσα έπεται ότι

$$e^{rx}E\big[\chi_{\{S_N>x\}}|\{N \geq 1\}, \Sigma_1\big] \leq Y_1 = e^{rX_1}\chi_{\{N\geq 1\}} \leq e^{rX_1} \quad P|\Sigma_1 - \sigma.\beta..$$

Τότε, από το (b) και την τελευταία σχέση έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(S_N > x) &= (1 - p_0)E\big[E[\chi_{\{S_N>x\}}|\{N \geq 1\}, \Sigma_1]\big] \leq (1 - p_0)e^{-rx}E\big[e^{rX_1}\big] \\ &= (1 - p_0)e^{-rx}\int e^{rX}dP \overset{(6.30)}{\leq} \frac{1 - p_0}{\varphi}e^{-rx}. \end{aligned}$$

Άρα δείξαμε το (c).

Και επειδή δείξαμε το (c) για τυχόν $x \in \mathbb{R}_+$, τότε θα ισχύει και για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$, άρα δείξαμε το ζητούμενο. □

Στο σημείο αυτό αξίζει να κάνουμε ένα μικρό σχόλιο για το τι αντιπροσωπεύει η τ.μ. T – η οποία είχε βοηθητικό ρόλο στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος – στα πλαίσια του υποδείγματός μας (βλ. Ενότητες 3.1 και 3.6): Η τ.μ. T δηλώνει ουσιαστικά την σειρά εμφάνισης εκείνης της απαίτησης που θα έχει ως αποτέλεσμα οι συνολικές απαιτήσεις του χαρτοφυλακίου μας να υπερβούν κάποιο όριο x, εντός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος ή αν δεν συμβεί κάτι τέτοιο την σειρά εμφάνισης της πρώτης απαίτησης που αναμένουμε (κάτω από το «χειρότερο σενάριο») να συμβεί αυτή η υπέρβαση του x. Με άλλα λόγια, η τ.μ. T κατέχει ουσιαστικά τον ρόλο ενός *«χρόνου προειδοποίησης»* για την εμφάνιση μεγάλου – υπό την έννοια ότι υπερβαίνει κάποιο ανεκτό επίπεδο x – ύψους συνολικών απαιτήσεων.

6.4 Σχολιασμός και Σύγκριση Φραγμάτων

Στην παρούσα ενότητα επισημαίνουμε εκείνα τα σημεία της προηγηθείσας ανάλυσης, αναφορικά με τα εξασφαλισθέντα φράγματα των Runnenburg & Goovaerts (1985), Willmot & Lin (1994) και Gerber (1994), που χρίζουν ιδιαίτερης προσοχής και προχωρούμε σε συγκρίσεις μεταξύ των διαφόρων φραγμάτων, όπου αυτό κρίνεται σκόπιμο. Πριν προχωρήσουμε, όμως, στις εν λόγω συγκρίσεις, κρίνεται σκόπιμο να γίνει μια σύντομη αναφορά στην χρησιμότητα των φραγμάτων πιθανοτήτων ουράς τυχαίου αθροίσματος.

Από τα Λήμματα 3.6.1 και 3.6.2 γίνεται κατανοητό πως εξαιτίας της ταυτόχρονης εμπλοκής τόσο της κατανομής των συνελίξεων των μεγεθών απαίτησης όσο και της κατανομής της απαριθμήτριας τ.μ. στους τύπους των εν λόγω λημμάτων, οι κατανομές των συνολικών απαιτήσεων μπορούν να καθοριστούν επακριβώς μόνο σε μερικές εξαιρετικές περιπτώσεις. Από την άλλη μεριά, οι πιο σημαντικές κατανομές του αριθμού των απαιτήσεων μπορούν να χαρακτηριστούν από έναν απλό αναδρομικό τύπο, επιτρέποντας έτσι τον αναδρομικό υπολογισμό των κατανομών των συνολικών απαιτήσεων και των ροπών τους – από τους αναδρομικούς τύπους του Panjer και του DePril, αντίστοιχα – *μόνο*, όμως, στην περίπτωση όπου η κατανομή του μεγέθους της απαίτησης είναι διακριτή (βλ. π.χ. [25], Sections 5.3 and 5.4). Η εύρεση φραγμάτων για την $\psi(x)$ αναιρεί τέτοιου είδους προβλήματα, ακόμα κι αν συνήθως δίνει πιο συντηρητικές – υπό την έννοια της υπερεκτίμησης – εκτιμήσεις της $\psi(x)$ και συνεπώς του κινδύνου εμφάνισης υψηλών συνολικών απαιτήσεων για το χαρτοφυλάκιό μας.

Ως προς τα φράγματα των Runnenburg & Goovaerts (1985), αρχικά αναφέρουμε ότι αφορούν την πιθανότητα ουράς είτε μιας σύνθετης κατανομής Poisson (βλ. Προτάσεις 6.1.4 και 6.1.6) είτε μιας σύνθετης αρνητικής διωνυμικής κατανομής (βλ. Πρόταση 6.1.7). Κοινό σημείο όλων των παραπάνω φραγμάτων είναι ότι παρουσιάζουν σαφή εξάρτηση από την κατανομή μεγέθους απαίτησης F_X καθεαυτή, καθώς επίσης και από κάποιες ειδικές ροπές της, π.χ. την $\mu(x) := \int_0^x y dF_X(y)$ για κάθε $x \in (0, \infty)$. Επίσης, όλα εξάγονται βάσει μιας παραλλαγής της ανισότητας Chebyshev που δίνεται στο Πόρισμα 6.1.2(i).

Ερχόμενοι, τώρα, στο φράγμα πιθανότητας ουράς των Willmot & Lin (1994), αναφέρουμε ως ένα πρώτο σημείο υπεροχής του σε σχέση με τα φράγματα των Runnenburg & Goovaerts (1985), το ευρύ πεδίο εφαρμογής του, το οποίο αφορά οποιαδήποτε κατανομή του τυχαίου αθροίσματος S_N, και όχι μόνο τις περιπτώσεις της σύνθετης Poisson και σύνθετης αρνητικής διωνυμικής κατανομής, όπως συμβαίνει με τα φράγματα των Runnenburg & Goovaerts (1985).

Το φράγμα των Willmot & Lin (1994) είναι σε κάθε περίπτωση ένα φράγμα τύπου Lundberg. Από το γεγονός αυτό απορρέει η ισχύς της Παρατήρησης 6.2.4(b), η οποία υποδηλώνει ότι αρκεί να εξετάσουμε την ύπαρξη των ρ.γ.σ. των τ.μ. X, N και S_N για να διαπιστώσουμε αν η αναζήτηση ενός φράγματος τύπου Lundberg για την $\psi(x)$ έχει έννοια. Με άλλα λόγια, η προαναφερθείσα παρατήρηση μας παρέχει αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη του φράγματος των Willmot & Lin (1994).

Τα σημαντικότερα, όμως, πλεονεκτήματα του φράγματος των Willmot & Lin (1994), έναντι των φραγμάτων των Runnenburg & Goovaerts (1985) δίνονται άμεσα τόσο από το Λήμμα 6.2.7 όσο και από την Παρατήρηση 6.2.8(a), σύμφωνα με τα οποία το φράγμα των Willmot & Lin (1994) είναι βέλτιστο και μικρότερο του φράγματος τύπου Chebyshev του Πορίσματος 6.1.2(i), άρα καλύτερο και των φραγμάτων των Runnenburg & Goovaerts (1985), τα οποία εξάγονται βάσει του προαναφερθέντος φράγματος τύπου Chebyshev.

Κλείνοντας, σημειώνουμε πως τα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για το αποτέλεσμα των Willmot & Lin (1994) σε σχέση με τα εξαγχθέντα φράγματα των Runnenburg & Goovaerts (1985) ισχύουν και για την σύγκριση Gerber (1994) και Runnenburg & Goovaerts (1985), αφού ο Gerber, έδωσε μια εναλλακτική απόδειξη του πρώτου αποτελέσματος μέσω ενός martignale-ισχυρισμού. Εκτός των όσων αναφέρθηκαν στην αρχή της προηγούμενης ενότητας για το ιστορικό της εναλλακτικής αυτής απόδειξης, το κύριο πλεονέκτημά της είναι ότι καθιστά την εξασφάλιση του φράγματος των Willmot & Lin (1994) πιο άμεση.

Κεφάλαιο 7

Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά

Στο παρόν κεφάλαιο περιγράφεται μία εφαρμογή των martingales και της Θεωρίας Κινδύνου στη χρηματοοικονομική αποτίμηση της ασφάλισης (*financial pricing insurance*), καθώς και μια προσέγγιση μέσω martingales του υπολογισμού πριμ σε μια μη κερδοσκοπική αγορά (βλ. Ενότητες 7.2 και 7.3), που προτάθηκαν από τους Delbaen & Haezendonk (1989). Στην Ενότητα 7.1 δίνουμε το γενικό πλαίσιο, μέσα στο οποίο βρίσκουν εφαρμογή στα χρηματοοικονομικά τα martingales και η Θεωρία Κινδύνου.

7.1 Το Γενικό Πλαίσιο

Απαραίτητη προϋπόθεση για την παρουσίαση τόσο του γενικού πλαισίου μέσα στο οποίο βρίσκει εφαρμογή στα χρηματοοικονομικά η μελέτη της σ.δ. κινδύνου, όσο και των βασικών αποτελεσμάτων αυτού του κεφαλαίου, αποτελεί ο ορισμός της έννοιας της σύνθετης διαδικασίας Poisson, ο οποίος δίνεται αμέσως παρακάτω.

***Ορισμός* 7.1.1.** Η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συνολικών απαιτήσεων, που επάγεται από την σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων και την σ.δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ μεγέθους απαίτησης (όπου $P_{X_n} = P_X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$) ονομάζεται μια **σύνθετη διαδικασία Poisson** (με παραμέτρους $\alpha \in (0,\infty)$ και P_X) αν και μόνο αν η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του αριθμού των απαιτήσεων είναι μια (ομογενής) διαδικασία Poisson (με παράμετρο $\alpha \in (0,\infty)$).

***Ορισμός* 7.1.2.** Το ζεύγος $(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}, \{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*})$ ονομάζεται **κλασσική σ.δ. κινδύνου** αν και μόνο αν είναι μια σ.δ. κινδύνου και επί πλέον η κατανομή του τυχαίου αθροίσματος $S_{N_t} := S_t := \sum_{k=0}^{N_t} X_k$ ($t \in \mathbb{R}_+$, $X_0 = \mathbf{0}$) είναι μια σύνθετη κατανομή Poisson.

Η κλασσική σ.δ. κινδύνου παραδοσιακά χρησιμοποιείται ως ένα υπόδειγμα για τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις.

Στα χρηματοοικονομικά, όπως επίσης και στα ασφαλιστικά μαθηματικά, οι τιμές των ριψοκίνδυνων – υπό την έννοια ότι η επένδυση σε αυτά εμπεριέχει την ανάληψη κάποιου κινδύνου – περιουσιακών στοιχείων (*risky assets*), δεν είναι ίσες με την αναμενόμενη τιμή (της αξίας) των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων. Πράγματι, παίρνοντας απλά την αναμενόμενη τιμή δεν λαμβάνουμε υπόψη την αποστροφή ως προς τον κίνδυνο των οικονομικών πρακτόρων, δηλαδή την τάση τους να μην προχωρούν στην ανάληψη επιπρόσθετων κινδύνων αν αυτοί δεν συνεπάγονται σημαντική πρόσθετη χρηματική αμοιβή. *Από την άλλη μεριά, αν η αγορά του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου παρουσιάζει επαρκή ρευστότητα (δηλαδή, δυνατότητα άμεσης πραγματοποίησης χρηματικών συναλλαγών), τότε οι τιμές συμπεριφέρονται ως γραμμικές συναρτήσεις, αλλιώς μπορεί να προκύψουν ευκαιρίες κερδοσκοπίας.* Για το λόγο αυτό, σε μία ασφαλιστική αγορά που παρουσιάζει ρευστότητα και όπου τα προϊόντα μπορούν να αγορασθούν και να πωληθούν πολύ συχνά και σε διαφορετικές ποσότητες, τα υποδείγματα των χρηματοοικονομικών αγορών που δεν επιτρέπουν τις ευκαιρίες κερδοσκοπίας μπορεί να βρουν καλή εφαρμογή, και αντίστροφα. Το κατάλληλο μαθηματικό πλαίσιο για την προτυποποίηση μιας τέτοιας χρηματοοικονομικής αγοράς οφείλεται στους Harrison & Kreps (1979). Η προσέγγισή τους χρησιμοποιήθηκε για την λύση προβλημάτων στα χρηματοοικονομικά που σχετίζονται με μετοχές και δικαιώματα προαίρεσης (options) πάνω σε μετοχές. Σε πιο πρόσφατες εργασίες από τους Artzner & Delbaen (1989), Delbaen (1986) και Heath, Jarrow & Morton (1987), η προσέγγιση των Harrison-Kreps χρησιμοποιήθηκε για την ανάπτυξη της αντίστοιχης θεωρίας στην περίπτωση των ομολόγων. Στην ασφαλιστική θεωρία η μέθοδος εισήχθη και χρησιμοποιήθηκε από τον Sondermann (1988). Για περισσότερα σχετικά με τα προαναφερθέντα υποδείγματα χρηματοοικονομικών αγορών που δεν παρουσιάζουν ευκαιρίες κερδοσκοπίας, βλέπε τα [11], [15], [22], [23] και [27].

Για να κάνουμε τα πράγματα πιο ξεκάθαρα εισάγουμε ορισμένους συμβολισμούς. Αν το Ω δηλώνει τον χώρο καταστάσεων κι αν η $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι μια διύλιση όπου η $\mathcal{H}_t$ αντιπροσωπεύει την διαθέσιμη πληροφορία μέχρι τον χρόνο t, και το T δηλώνει τον (χρονικό) ορίζοντα, τότε η σ.δ. των τιμών ενός χρηματοοικονομικού περιουσιακού στοιχείου γίνεται μια σ.δ. $\{V_t^*\}_{t\in[0,T]}$ προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in[0,T]}$. Σε κάθε χρονική στιγμή t ένα γραφείο μπορεί να αγοράσει ή να πουλήσει το χρηματοοικονομικό περιουσιακό στοιχείο και για τον σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιήσει στρατηγικές που δεν δημιουργούν ή χάνουν χρήμα – είναι δηλαδή αυτοχρηματοδοτούμενες. Οι στρατηγικές μπορούν να βασιστούν μόνο σε παρελθούσα πληροφόρηση. Για παράδειγμα, δεν μπορεί κάποιος να αγοράσει μια μετοχή δοθέντος του ενδεχομένου ότι η τιμή της θα αυξηθεί ή κάποιος δεν μπορεί να πουλήσει μια ασφάλιση αυτοκινήτου δοθέντος ότι δεν θα συμβεί κανένα ατύχημα. Κάνοντας χρήση αυτών των αυτοχρηματοδοτούμενων στρατηγικών η αγορά δημιουργεί νέα περιουσιακά στοιχεία τα οποία είναι το αποτέλεσμα ίσως περίπλοκων διαδικασιών αγοραπωλησίας. Το γεγονός ότι όλοι αυτοί οι συνδυασμοί μπορούν να πραγματοποιηθούν, αντανακλά την ρευστότητα της χρηματοοικονομικής αγοράς. Η τιμή ενός τέτοιου διαπραγματεύσιμου στην αγορά περιουσιακού στοιχείου πρέπει να δίνεται από την αρχική επένδυση, αλλιώς κάποιος μπορεί να δημιουργήσει ευκαιρίες κερδοσκοπίας.

Οι Harisson & Kreps (1979), και αργότερα κάτω από λιγότερο αυστηρές μαθηματικές συνθήκες οι Harrison & Pliska (1981) έδειξαν ότι ένα σύστημα τιμών είναι βιώσιμο (που περίπου σημαίνει ότι ικανοποιεί μία αρχή προτιμητέας μεγιστοποίησης, δηλαδή μεταξύ των πολλών συστημάτων που είναι δυνατόν να επιλεγούν, επιλέγεται εκείνο το σύστημα που μεγιστοποιεί π.χ. κάποια συνάρτηση) αν και μόνο αν υπάρχει μια «ουδέτερη κινδύνου» κατανομή πιθανότητας Q τέτοια ώστε οι τιμές $\{V_t^*\}_{t\in[0,T]}$ να είναι ένα Q-martingale. *Η ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο κατανομή πιθανότητας Q τροποποιεί την αρχικά εμπλεκόμενη κατανομή πιθανότητας P με σκοπό να αποδώσει μεγαλύτερο βάρος σε μη πιθανά ενδεχόμενα σε ένα περιβάλλον αποστροφής στον κίνδυνο.* Στα χρηματοοικονομικά αυτό οδηγεί στην έννοια της **«τιμής του κινδύνου»** και στα ασφαλιστικά μαθηματικά μάλλον εξηγεί την επιβάρυνση ασφαλείας (*loading factor*).

Στις ασφαλιστικές επιχειρήσεις το χρηματοοικονομικό ενεργητικό περιγράφεται από την τ.μ. S_t που δηλώνει το ύψος των συνολικών αποζημιώσεων που πρέπει να πληρωθούν μέχρι το χρόνο t. Στην κλασσική θεωρία κινδύνου η $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson ως προς το δοσμένο μέτρο πιθανότητας P. Σε κάθε χρονική στιγμή t η εταιρεία μπορεί να πουλήσει τον εναπομείναντα κίνδυνο της περιόδου $(t, T]$ για δοσμένο ασφάλιστρο p_t. Το ασφάλιστρο p_t $(0 \leq t \leq T)$ πρέπει να είναι μια προβλέψιμη διαδικασία, δηλαδή πρέπει να είναι γνωστό ακριβώς πριν τη χρονική στιγμή t. Έτσι, η υποκείμενη σ.δ. τιμών $\{V_t^*\}_{t\in[0,T]}$ μπορεί να οριστεί ως

$$V_t^* = p_t + S_t.$$

Πράγματι, αν η V_t^* δηλώνει τις εταιρικές υποχρεώσεις, τότε στον χρόνο t αποτελείται από δύο μέρη, πρώτον το μέρος S_t των απαιτήσεων μέχρι τον χρόνο t και δεύτερον την αμοιβή (το πριμ για την ανάληψη) του κινδύνου που απομένει $S_T - S_t$ (άγνωστο στο χρόνο t!). Η ρευστότητα της αγοράς υποδηλώνει ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες κερδοσκοπίας και συνεπώς από τη θεωρία των Harisson & Kreps *θα πρέπει να υπάρχει μία ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο κατανομή πιθανότητας Q ώστε η $\{V_t^*\}_{t\in[0,T]}$ να είναι ένα martingale ως προς την Q.*

Επί πλέον, αν η πιθανότητα Q αντανακλά επακριβώς το τι συμβαίνει στον πραγματικό κόσμο, τότε $p_t = p(T-t)$, όπου $p := p_Q := p(Q)$ είναι η πυκνότητα ασφαλίστρου (*premium density*). Για αυτό πρέπει να διερευνήσουμε το πρόβλημα του χαρακτηρισμού όλων αυτών των κατανομών πιθανότητας Q έτσι ώστε να ισχύει ακόμη ότι ο προβλέψιμος όρος της $\{S_t\}_{t\in[0,T]}$, δηλαδή ο p_t $(0 \le t \le T)$, είναι γραμμικός ως προς την Q.

Η προηγηθείσα θεώρηση μας οδηγεί στο ακόλουθο βασικό πρόβλημα:

[Π] Αν η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία P-σύνθετη διαδικασία Poisson , τότε ζητείται να χαρακτηριστούν εκείνες οι κατανομές πιθανότητας Q έτσι ώστε η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να παραμένει μια Q-σύνθετη διαδικασία Poisson, και οι Q και P να είναι ισοδύναμες κατανομές πιθανότητας ως προς κάθε $\mathcal{H}_t$.

Ο χαρακτηρισμός αυτός αποτελεί το κύριο αποτέλεσμα του παρόντος κεφαλαίου και βασικό αντικείμενο μελέτης στην Ενότητα 7.2 (βλ. Πρόταση 7.2.6).

Τέλος, σημειώνουμε ότι μια πυκνότητα ασφαλίστρου μπορεί να οριστεί ως

$$p = E_Q[S_1] = E_Q[N_1]E_Q[X_1].$$

Συνεπώς μια πυκνότητα ασφαλίστρου είναι το αποτέλεσμα μιας αλλαγής της κατανομής πιθανότητας: τροποποιούμε την ένταση του αριθμού των απαιτήσεων και αλλάζουμε την κατανομή των απαιτήσεων. Ως μια εφαρμογή των παραπάνω, θα οδηγηθούμε σε μερικές γνωστές αρχές υπολογισμού πριμ (βλ. Ενότητα 7.3).

7.2 Martingale - ισοδύναμες Σύνθετες Διαδικασίες Poisson

Στην παρούσα ενότητα παραθέτουμε το βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου, δηλαδή έναν martingale-χαρακτηρισμό ισοδύναμων κατανομών πιθανότητας στον βασικό χ.π. της σύνθετης διαδικασίας Poisson. Πριν, όμως, προχωρήσουμε στον εν λόγω χαρακτηρισμό ορίζουμε ορισμένες βασικές προαπαιτούμενες έννοιες: *την Q-σύνθετη διαδικασία Poisson και τις προοδευτικά ισοδύναμες κατανομές πιθανότητας.*

Ας θεωρήσουμε αρχικά έναν χ.π. $(\Omega^*, \Sigma^*, P^*)$, την ακολουθία $\{W_n^*\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ανεξάρτητων τ.μ. με $P_{W_n^*} = \mathbf{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, την ακολουθία $\{X_n^*\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ανεξάρτητων, ισόνομων, θετικών τ.μ., με κοινή κατανομή πιθανότητας $P^*_{X^*}$, ανεξάρτητη της $\{W_n^*\}_{n\in\mathbb{N}^*}$, και την οικογένεια $\{S_t^*\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, όπου για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$

$$S_t^* := \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\left\{\sum_{k=0}^{n} W_n^* \le t < \sum_{k=0}^{n+1} W_n^*\right\}} \left(\sum_{k=0}^{n} X_k^*\right), \tag{7.1}$$

με $X_0^* := \mathbf{0}$.

Για λόγους μαθηματικής ευκολίας, εισάγουμε επίσης τον χ.π. (Ω, Σ, P) με:

(α′) $\Omega = (0,\infty)^{\mathbb{N}} \times (0,\infty)^{\mathbb{N}}$, όπου με $(0,\infty)^{\mathbb{N}}$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : \mathbb{N} \to (0,\infty)$.

(β′) $\Sigma = \mathcal{B}((0,\infty)^{\mathbb{N}}) \otimes \mathcal{B}((0,\infty)^{\mathbb{N}})$, όπου $\mathcal{B}((0,\infty)^{\mathbb{N}}) = \otimes_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{B}_n((0,\infty))$ με $\mathcal{B}_n((0,\infty)) = \mathcal{B}((0,\infty))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ′) Θεωρούμε επίσης την απεικόνιση $\Xi : \Omega^* \to \Omega$ με τύπο

$$\begin{aligned}\Xi(\omega^*) &:= (W_1^*(\omega^*),\ldots,W_n^*(\omega^*),\ldots;X_1^*(\omega^*),\ldots,X_n^*(\omega^*),\ldots)\\ &:= (w_1,\ldots,w_n,\ldots;x_1,\ldots,x_n,\ldots)\\ &:= \omega, \quad \text{για κάθε} \quad \omega^* \in \Omega^*.\end{aligned}$$

Τότε, ορίζουμε την πιθανότητα P ως την κατανομή πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος

$$\Xi = (W_1^*,\ldots,W_n^*,\ldots;X_1^*,\ldots,X_n^*,\ldots),$$

οπότε, λαμβάνοντας υπόψη και την εξ'υποθέσεως ανεξαρτησία της οικογένειας

$$\{W_1^*,\ldots,W_n^*,\ldots;X_1^*,\ldots,X_n^*,\ldots\},$$

έχουμε ότι

$$P := P_\Xi^* = P_{W_1^*}^* \otimes \cdots \otimes P_{W_n^*}^* \otimes \cdots \otimes P_{X_1^*}^* \otimes \cdots \otimes P_{X_n^*}^* \otimes \cdots\,, \tag{7.2}$$

όπου $P_{W_j^*}^*$ και $P_{X_j^*}^*$ ($j \in \mathbb{N}$) είναι η κατανομή πιθανότητας της τ.μ. W_j^* και X_j^*, αντίστοιχα (βλ. και Θεώρημα Α′.1.5).

Επίσης για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$ ορίζουμε τις τ.μ. $W_j, X_j : \Omega \to (0,\infty)$ με τύπο $W_j(\omega) = w_j =: W_j^*(\omega*)$ και $X_j(\omega) = x_j =: X_j^*(\omega*)$, αντίστοιχα, μεταφέροντας έτσι ουσιαστικά, επάνω στο νέο χ.π. (Ω,Σ,P), τις τ.μ. που εισήχθησαν αρχικά επάνω στο χ.π. (Ω^*,Σ^*,P^*), ως εξής:

$$W_j^* = W_j \circ \Xi \quad \text{και} \quad X_j^* = X_j \circ \Xi \quad (j \in \mathbb{N}^*). \tag{7.3}$$

Τότε, για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}P_{W_j^*}^* &= P^* \circ (W_j^*)^{-1} = P^* \circ (W_j \circ \Xi)^{-1} = (P^* \circ \Xi^{-1}) \circ W_j^{-1}\\ &= P_\Xi^* \circ W_j^{-1} = P \circ W_j^{-1} = P_{W_j}\end{aligned}$$

και ομοίως ότι $P_{X_j} = P_{X_j^*}^*$. Ακόμη, για κάθε $\omega \in \Omega$ θέτουμε $X_0(\omega) := 0$ σε αντιστοιχία με το ότι $X_0^*(\omega^*) := 0$ για κάθε $\omega^* \in \Omega^*$.

Από τις (7.2) και (7.3) έχουμε ότι

$$P = P_{(W_1^*,\ldots,W_n^*,\ldots;X_1^*,\ldots,X_n^*,\ldots)}^* = P_{(W_1\circ\Xi,\ldots,W_n\circ\Xi,\ldots;X_1\circ\Xi,\ldots,X_n\circ\Xi,\ldots)}^*$$

$$\begin{aligned} &= P^*_{(W_1,\ldots,W_n,\ldots;X_1,\ldots,X_n,\ldots)\circ\Xi} = P^*\circ[(W_1,\ldots,W_n,\ldots;X_1,\ldots,X_n,\ldots)\circ\Xi]^{-1} \\ &= (P^*\circ\Xi^{-1})\circ(W_1,\ldots,W_n,\ldots;X_1,\ldots,X_n,\ldots)^{-1} \\ &= P^*_{\Xi}\circ(W_1,\ldots,W_n,\ldots;X_1,\ldots,X_n,\ldots)^{-1} = P_{(W_1,\ldots,W_n,\ldots;X_1,\ldots,X_n,\ldots)}. \end{aligned}$$

Όμως, από την τελευταία ισότητα και λαμβάνοντας υπόψη την (7.2), σε συνδυασμό με το ότι για κάθε $j \in \mathbb{N}^*$ η $P_{X_j} = P^*_{X^*_j}$ και η $P_{W_j} = P^*_{W^*_j}$ επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P_{(W_1,\ldots,W_n,\ldots;X_1,\ldots,X_n,\ldots)} &= P^*_{W^*_1}\otimes\cdots\otimes P^*_{W^*_n}\otimes\cdots\otimes P^*_{X^*_1}\otimes\cdots\otimes P^*_{X^*_n}\otimes\cdots \\ &= P_{W_1}\otimes\cdots\otimes P_{W_n}\otimes\cdots\otimes P_{X_1}\otimes\cdots\otimes P_{X_n}\otimes\cdots, \end{aligned}$$

που ισοδυναμεί με το ότι η οικογένεια $\{W_1,\ldots,W_n,\ldots;X_1,\ldots,X_n,\ldots\}$ είναι ανεξάρτητη.

Συνεπώς, **οι W_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες κι εκθετικά κατανεμημένες (με παράμετρο $\lambda > 0$) τ.μ. και οι X_n $(n \in \mathbb{N}^*)$ είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, θετικές τ.μ., με $X_0 := 0$. Ταυτόχρονα οι σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.**

Ακόμη εισάγουμε τις σ.δ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ως εξής:

$$T_n := \begin{cases} \sum_{k=1}^n W_k & \text{αν } n \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{αν } n = 0 \end{cases}. \tag{7.4}$$

$$N_t := \sum_{n=0}^{\infty} n\chi_{\{T_n\le t<T_{n+1}\}} \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{7.5}$$

$$S_t := \sum_{k=0}^{N_t} X_k \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{7.6}$$

Υποθέτουμε ότι $T_1(\omega) = W_1(\omega) < \infty$ για κάθε $\omega \in \Omega$.

Παρατηρήσεις 7.2.1. Σχετικά με τις σ.δ. που εισάγαμε αμέσως πιο πάνω αξίζει να παρατηρήσουμε τα εξής:

(a) Η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία μη αρνητικών τ.μ. κι επομένως είναι μια σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων. Ακόμη επειδή ισχύει $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\lambda)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, από τον Νόμο $0-1$ της Έκρηξης (βλ. Θεώρημα 3.4.1) έχουμε ότι η $P(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty) = 0$.

(b) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n\le t\}}$ $\quad P-\sigma.\beta.$.

Πράγματι, επειδή η $P(\sup_{n\in\mathbb{N}^*} T_n < \infty) = 0$ έπεται ότι υπάρχει $N \in \Sigma_0$ ώστε για οποιοδήποτε $\omega \in N^c$ να έχουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ υπάρχει το ελάχιστο $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $T_{n_0}(\omega) \le t < T_{n_0+1}(\omega)$ (αφού έχουμε θεωρήσει από το Κεφάλαιο 3 ότι $\Omega_T = \varnothing$). Δηλαδή δείξαμε ότι υπάρχει $N \in \Sigma_0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in N^c$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ να υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}^*$ ώστε

$$[\chi_{\{T_{n_0}\le t<T_{n_0+1}\}}(\omega) = 1] \quad \& \quad [\forall n \in \mathbb{N}^* : n \neq n_0 \quad \chi_{\{T_n\le t<T_{n+1}\}}(\omega) = 0].$$

Επειδή η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα έπεται ότι το

$$n_0 = \max\{n \in \mathbb{N} : T_n(\omega) \leq t\}$$

κι άρα έχουμε $\chi_{\{T_n\leq t\}}(\omega) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ με $n \leq n_0$. Επί πλέον, ισχύει $\chi_{\{T_n\leq t\}}(\omega) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ με $n > n_0$. Συνεπώς αιτιολογείται η ζητούμενη ισότητα.

(c) Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε (και το κάνουμε) ότι $N = \varnothing$.

(d) Από την (7.5) και την (b), λαμβάνοντας υπόψη το Θεώρημα 3.3.2, άμεσα έπεται ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων. Τότε, επειδή οι W_n ($n \in \mathbb{N}^*$) είναι ανεξάρτητες, ισόνομες κι εκθετικά κατανεμημένες (με παράμετρο $\lambda > 0$) τ.μ., από το Θεώρημα 4.2.4 άμεσα έπεται ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson κι επομένως (σύμφωνα με την (7.6) και τον Ορισμό 7.1.1) και η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson (με παραμέτρους λ και P_X) επάνω στον χ.π. (Ω, Σ, P). Τέλος, σημειώνουμε ότι από την ανεξαρτησία των σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ άμεσα έπεται η ανεξαρτησία των σ.δ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$. Άρα από την (b) προκύπτει ότι το ίδιο θα ισχύει και για τις σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ (βλ. Θεώρημα Α΄.1.4).

Παρακάτω θεωρούμε τον χ.π. (Ω, Σ, P), εκτός κι αν δηλώνεται διαφορετικά. Επειδή στο εξής το ενδιαφέρον μας θα επικεντρωθεί αποκλειστικά στην πληροφορία που εμπεριέχεται στην σύνθετη διαδικασία Poisson $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, θα υποθέσουμε ότι $\Sigma = \mathcal{H}_\infty := \sigma(\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$.

Επίσης για κάθε $t \in (0, \infty)$ ορίζουμε την σ-υποάλγεβρα της Σ, $\mathcal{H}_t := \sigma(\{S_u\}_{u\in[0,t]})$, ενώ ορίζουμε και την σ-άλγεβρα $\mathcal{H}_0 := \{\varnothing, \Omega\}$. Τότε, η οικογένεια $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι η κανονική διύλιση για την $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_t$. Η $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται επίσης *η εσωτερική ιστορία* της σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Παρακάτω παραθέτουμε το πρώτο αποτέλεσμα της παρούσας ενότητας, που θα μας χρησιμεύσει στην απόδειξη των υπολοίπων αποτελεσμάτων αυτής.

Λήμμα 7.2.2. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η τ.μ. N_t είναι $\mathcal{H}_t$-μετρήσιμη.

Απόδειξη. Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι άμεσα έχουμε:

$$N_t = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{T_n\leq t<T_{n+1}\}}\chi_{\{S_t=n\}}S_t \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{7.7}$$

Όμως, από την απόδειξη της Παρατήρησης 7.2.1(b) έπεται ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $\omega \in \Omega$ υπάρχει μοναδικό $n_0 := n_{0,t}(\omega) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\chi_{\{T_{n_0}\leq t<T_{n_0+1}\}}(\omega) = 1 \tag{7.8}$$

κι άρα τέτοιο ώστε $\chi_{\{T_{n_0} \leq t < T_{n_0+1}\}} \chi_{\{S_t = n_0\}}(\omega) \geq 0$, άρα από την (7.7) άμεσα έπεται ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $\omega \in \Omega$ υπάρχει μοναδικό $n_0 := n_{0,t}(\omega) \in \mathbb{N}$ ώστε $N_t(\omega) = S_t(\omega)\chi_{\{S_t = n_0\}}(\omega)$. Τότε, σύμφωνα με την προφανή σχέση $\sigma(\chi_{\{S_t = n_0\}}) \subseteq \sigma(S_t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\sigma(N_t) &= \sigma(S_t \chi_{\{S_t = n_0\}}) \subseteq \sigma(S_t, \chi_{\{S_t = n_0\}}) = \sigma\big(\sigma(S_t) \cup \sigma(\chi_{\{S_t = n_0\}})\big) \\
&= \sigma(S_t) \subseteq \sigma\left(\bigcup_{0 \leq u \leq t} \sigma(S_u) \right) = \sigma\big(\{S_u\}_{u \in [0,t]}\big) = \mathcal{H}_t,
\end{aligned}
$$

με την πρώτη σχέση εγκλεισμού να ισχύει από το [4], Παρατήρηση 13.10.

Δηλαδή δείξαμε ότι $\sigma(N_t) \subseteq \mathcal{H}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, που ισοδυναμεί με το ζητούμενο. □

Επειδή στο εξής θα θεωρήσουμε περισσότερες από μία κατανομές πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty)$ η κατανομή πιθανότητας θα προστεθεί ως υποδείκτης στους συμβολισμούς της μέσης και δεσμευμένης μέσης τιμής. Έτσι, π.χ. η $E_Q[\cdot]$ δηλώνει ότι θεωρούμε την μέση τιμή ως προς το μέτρο (ή την κατανομή) πιθανότητας Q.

Επί πλέον, αν η Q είναι κατανομή πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty)$ και η $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια σύνθετη διαδικασία Poisson επάνω στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty, Q)$, τότε θα λέμε ότι η $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια **Q-σύνθετη διαδικασία Poisson**.

***Ορισμός* 7.2.3.** Έστω P και Q κατανομές πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty)$. Οι P και Q ονομάζονται **προοδευτικά ισοδύναμες** (*progressively equivalent*) και συμβολίζουμε $P \stackrel{pr}{\sim} Q$, αν και μόνο αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$
\{N \in \mathcal{H}_t : P(N) = 0\} = \{N \in \mathcal{H}_t : Q(N) = 0\},
$$

δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ οι P και Q έχουν τα ίδια σύνολα μηδενικού μέτρου στην $\mathcal{H}_t$.

Έστω $\beta : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $e^{\beta(X_1)} \in \mathcal{L}^1(P)$, όπου η P ορίζεται όπως στην (7.2). Έστω επίσης η σ.δ. $\{M_t^{(\beta)}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ επάνω στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty, P)$, με

$$
M_t^{(\beta)} := e^{S_t^{(\beta)} - \lambda t E_P[e^{\beta(X_1)} - 1]} \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{7.9}
$$

όπου

$$
S_t^{(\beta)} := \begin{cases} \sum_{k=1}^{N_t} \beta(X_k) & \text{αν } t \in (0, \infty) \\ \mathbf{0} & \text{αν } t = 0 \end{cases} . \tag{7.10}
$$

Παρακάτω παραθέτουμε μια πολύ χρήσιμη πρόταση για την απόδειξη των βασικών αποτελεσμάτων της παρούσας ενότητας, που αναφέρεται στην σ.δ. που ορίσαμε πιο πάνω.

Πρόταση 7.2.4. Η σ.δ. $\{M_t^{(\beta)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty, P)$ είναι ένα θετικό $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale, και $E_P[M_t^{(\beta)}] = 1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η τ.μ. $S_t^{(\beta)}$ είναι $\mathcal{H}_t$-μετρήσιμη, κάτι που αποτελεί συνέπεια του Λήμματος 7.2.2 και του [6], Παρατήρηση 3.1.12(i). Επομένως, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και η τ.μ. $M_t^{(\beta)}$ θα είναι $\mathcal{H}_t$-μετρήσιμη και συνεπώς για την απόδειξη της παρούσας πρότασης, αρκεί να δείξουμε τα παρακάτω δύο βήματα:

(a) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η τ.μ. $M_t^{(\beta)} \in \mathcal{L}_+^1(P)$ με $E_P[M_t^{(\beta)}] = 1$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι επειδή για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η τ.μ. $S_t^{(\beta)}$ είναι ένα τυχαίο άθροισμα κι επειδή $P_{N_t} = \mathbf{P}(\lambda t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, τότε όπως και στο Πόρισμα 3.6.3 αποδεικνύεται ότι $E_P\big[e^{S_t^{(\beta)}}\big] = e^{\lambda t[E_P[e^{\beta(X_1)}-1]]}$. Επομένως, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε $E_P[M_t^{(\beta)}] = e^{-\lambda t E_P[e^{\beta(X_1)}-1]} E_P\big[e^{S_t^{(\beta)}}\big] = 1$. Άρα ισχύει το (a).

(b) Η σ.δ. $\{S_t^{(\beta)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.

Πράγματι, επειδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson, τότε αυτή έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις κι επομένως, ομοίως με τα Θεωρήματα 3.5.3 και 3.5.4, αποδεικνύεται ότι και η σ.δ. $\{S_t^{(\beta)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις.

(c) Για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ ώστε $s \le t$ ισχύει $E_P\big[M_t^{(\beta)}|\mathcal{H}_s\big] = M_s^{(\beta)} \quad P|\mathcal{H}_s - \sigma.\beta.$.

Πράγματι, επειδή η $\{S_t^{(\beta)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις και $S_t^{(\beta)} := \mathbf{0}$, τότε σύμφωνα με το Λήμμα A′.1.3 έχουμε ότι $P_{S_{\tau+h}^{(\beta)} - S_\tau^{(\beta)}} = P_{S_h^{(\beta)}}$ για κάθε $\tau, h \in \mathbb{R}_+$, οπότε για $t := \tau + h$ και $s := \tau$ έχουμε

$$P_{S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)}} = P_{S_{t-s}^{(\beta)}} \quad \text{για κάθε} \quad s, t \in \mathbb{R}_+ \quad \text{με} \quad s \le t, \tag{7.11}$$

δηλαδή δείξαμε ότι η τ.μ. $S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)}$ και η τ.μ. $S_{t-s}^{(\beta)}$ είναι ισόνομες. Από το (b) έπεται ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ η τ.μ. $S_{t-s}^{(\beta)}$ είναι ανεξάρτητη της σ-άλγεβρας $\mathcal{H}_s$ κι άρα τελικά και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ έχουμε ότι οι

$$\chi_A M_s^{(\beta)} \quad \text{και} \quad M_{t-s}^{(\beta)} \quad \text{είναι ανεξάρτητες τ.μ..} \tag{7.12}$$

Ακόμη για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ ισχύει ότι $S_t^{(\beta)} = S_s^{(\beta)} + (S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)})$, άρα λαμβάνοντας υπόψη την (7.9) επίσης άμεσα έπεται ότι

$$M_t^{(\beta)} = M_s^{(\beta)} e^{\left(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)}\right) - \lambda(t-s) E_P\left[e^{\beta(X_1)}-1\right]}. \tag{7.13}$$

Επομένως, για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_A E_P\big[M_t^{(\beta)}|\mathcal{H}_s\big] dP &= \int_A M_t^{(\beta)} dP \overset{(7.13)}{=} \int_A M_s^{(\beta)} e^{(S_t^{(\beta)} - S_s^{(\beta)}) - \lambda(t-s)E_P\left[e^{\beta(X_1)}-1\right]} dP \\ &\overset{(7.11)}{=} \int_A M_s^{(\beta)} e^{S_{t-s}^{(\beta)} - \lambda(t-s)E_P\left[e^{\beta(X_1)}-1\right]} dP \overset{(7.9)}{=} \int_A M_s^{(\beta)} M_{t-s}^{(\beta)} dP\end{aligned}$$

$$= \quad E_P\big[\chi_A M_s^{(\beta)} M_{t-s}^{(\beta)}\big] \overset{(7.12)}{=} E_P\big[\chi_A M_s^{(\beta)}\big] E_P\big[M_{t-s}^{(\beta)}\big] \overset{\textbf{(a)}}{=} \int_A M_s^{(\beta)} dP,$$

Δηλαδή δείξαμε ότι για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ ισχύει $\int_A E_P\big[M_t^{(\beta)} | \mathcal{H}_s\big] dP = \int_A M_s^{(\beta)} dP$ για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$, που εξ'ορισμού ισοδυναμεί με το (c), κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη της παρούσας πρότασης. $\square$

Ειδικά, αν $\beta(x) = \alpha x$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$ σταθερά, και αν η τ.μ. $e^{\alpha X_1} \in \mathcal{L}_+^1(P)$, τότε η σ.δ. που ορίζεται από την (7.9) είναι το martingale που εισήγαγε ο Gerber.

Λήμμα 7.2.5. Αν οι Q και P είναι δύο προοδευτικά ισοδύναμες κατανομές πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty)$, τότε οι αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας Q_{X_1} και P_{X_1} της τ.μ. X_1 είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Έστω $A \in \mathcal{B}((0, \infty))$ τέτοιο ώστε $P_{X_1}(A) = 0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει επίσης η $Q_{X_1}(A) = 0$.

(a) Αν $D_n := S_{T_1}^{-1}(A) \cap \{T_1 \leq n\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε η $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία ενδεχομένων τέτοια ώστε το $D_n \in \mathcal{H}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επί πλέον, ισχύει ότι $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = S_{T_1}^{-1}(A)$.

Πράγματι, από το Λήμμα 3.3.4(i) για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\{T_1 \leq n\} = \{N_n \geq 1\} \in \mathcal{H}_n$, αφού (από το Λήμμα 7.2.2) η N_n είναι $\mathcal{H}_n$-μετρήσιμη.

Επίσης για κάθε $\omega, \widetilde{\omega} \in \Omega$ τέτοιο ώστε $T_1(\omega), T_1(\widetilde{\omega}) \leq n$ προφανώς υπάρχει $t \in [0, n]$ τέτοιο ώστε $T_1(\widetilde{\omega}) = t$, άρα και τέτοιο ώστε $S_{T_1(\widetilde{\omega})}(\omega) = S_t(\omega)$. Δηλαδή, υπάρχει $t \in [0, n]$ ώστε η S_{T_1} να είναι $\mathcal{H}_t$-μετρήσιμη κι επομένως και $\mathcal{H}_n$-μετρήσιμη (αφού $\mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{H}_n$). Άρα επίσης έχουμε ότι $S_{T_1}^{-1}(A) \in \mathcal{H}_n$.

Και επειδή η $\mathcal{H}_n$ είναι σ-άλγεβρα, τελικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$D_n := S_{T_1}^{-1}(A) \cap \{T_1 \leq n\} \in \mathcal{H}_n.$$

Επί πλέον η $\{D_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα, αφού προφανώς η $\{T_1 \leq n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι γνησίως αύξουσα, ενώ επίσης προφανώς ισχύει η $\Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_1 \leq n\}$. Οπότε, έχουμε $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \big(S_{T_1}^{-1}(A) \cap \{T_1 \leq n\}\big) = S_{T_1}^{-1}(A)$, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του (a).

(b) $Q_{X_1}(A) = 0$.

Πράγματι, αρχικά παρατηρούμε ότι

$$Q_{X_1}(A) = Q(X_1^{-1}(A)) \overset{(7.5),(7.6)}{=} Q\big(S_{T_1}^{-1}(A)\big) \overset{\textbf{(a)}}{=} Q\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n\right) = \lim_{n \to \infty} Q(D_n),$$

με την τελευταία ισότητα να αντλεί την ισχύ της από το [6], Πρόταση 1.2.3(e), λαμβανομένου υπόψη και του (a). Άρα δείξαμε ότι

$$Q_{X_1}(A) = \lim_{n \to \infty} Q(D_n). \tag{7.14}$$

Επειδή, όμως, $D_n := S_{T_1}^{-1}(A) \cap \{T_1 \le n\} \subseteq S_{T_1}^{-1}(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άμεσα έπεται και ότι $P(D_n) \le P\big(S_{T_1}^{-1}(A)\big) \overset{(7.5),(7.6)}{=} P\big(X_1^{-1}(A)\big) = P_{X_1}(A) = 0$. Δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ δείξαμε ότι $P(D_n) \le 0$, άρα $P(D_n) = 0$ κι επομένως επειδή οι P και Q είναι προοδευτικά ισοδύναμες έχουμε ότι $Q(D_n) = 0$. Από την τελευταία σχέση και την (7.14) άμεσα έπεται το (b).

Επομένως, δείξαμε ότι αν $A \in \mathcal{B}((0,\infty))$ τέτοιο ώστε $P_{X_1}(A) = 0$ τότε $Q_{X_1}(A) = 0$. Κι επειδή το A είναι τυχόν τότε η εν λόγω συνεπαγωγή θα αληθεύει για κάθε $A \in \mathcal{B}((0,\infty))$ κι άρα θα έχουμε ότι $Q_{X_1} \ll P_{X_1}$. Ομοίως αποδεικνύεται και η αντίστροφη συνεπαγωγή, δηλαδή ότι $P_{X_1} \ll Q_{X_1}$, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. $\square$

Η ακόλουθη πρόταση περιλαμβάνει το βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου, δίνοντας τη λύση στο πρόβλημα **[Π]**.

Πρόταση 7.2.6. Έστω P η κατανομή πιθανότητας της (7.2). Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Αν η $Q : \mathcal{H}_\infty \to \mathbb{R}$ είναι κατανομή πιθανότητας ώστε να ικανοποιούνται οι ιδιότητες

  (I) $Q \overset{pr}{\sim} P$,

  (II) Η $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια Q-σύνθετη διαδικασία Poisson,

τότε υπάρχει μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $\beta : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $e^{\beta(X_1)} \in \mathcal{L}^1(P)$ και επί πλέον για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $0 \le s \le t$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$

$$Q(A) = \int_A M_t^{(\beta)} dP. \tag{M}$$

(ii) Αντίστροφα, έστω $\beta : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση ώστε η $e^{\beta(X_1)} \in \mathcal{L}^1(P)$. Τότε υπάρχει μια μοναδική κατανομή πιθανότητας Q επάνω στον μ.χ. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty)$ που ορίζεται από την (M) και η οποία ικανοποιεί τις ιδιότητες (I) και (II). Επί πλέον, αν $Q \neq P$ τότε $P \perp Q$.

Απόδειξη. **(i)** Από την ιδιότητα (II) άμεσα έπεται ότι η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson επάνω στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty, Q)$ κι επομένως υπάρχει $\lambda' \in (0,\infty)$ ώστε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}$ να έχουμε ότι

$$Q(N_t = n) = e^{-\lambda' t} \frac{(\lambda' t)^n}{n!}. \tag{7.15}$$

Από την Παρατήρηση 7.2.1(d), όμως, έχουμε επίσης ότι η $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson επάνω στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty, P)$ κι άρα ισχύει η

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}. \tag{7.16}$$

Θέτοντας

$$\alpha := \ln \lambda' - \ln \lambda \Leftrightarrow \lambda' = \lambda e^{\alpha} \tag{7.17}$$

από την (7.15) έχουμε ότι

$$Q(N_t = n) = e^{-\lambda t e^{\alpha}} \frac{(\lambda t e^{\alpha})^n}{n!} = e^{\lambda t} e^{n\alpha - \lambda t e^{\alpha}} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{n\alpha + \lambda t(1-e^{\alpha})} P(N_t = n),$$

άρα δείξαμε ότι

$$Q(N_t = n) = e^{n\alpha + \lambda t(1-e^{\alpha})} P(N_t = n) \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}_+ \text{ και } n \in \mathbb{N}. \tag{7.18}$$

Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\mathscr{X}_n := \sigma\big(\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}\big)$, άρα $\mathscr{X}_0 = \sigma(X_0) = \mathcal{H}_0$.

(a) Για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mathcal{H}_s \cap \{N_s = n\} \subseteq \mathscr{X}_n \cap \{N_s = n\}$.

Πράγματι, έστω $s \in \mathbb{R}_+$. Αν $N_s = \mathbf{0}$, άμεσα έχουμε ότι $S_u = \mathbf{0}$ για κάθε $u \in [0,t]$, άρα $\mathcal{H}_s \cap \{N_s = 0\} = \mathcal{H}_0 \cap \{N_s = 0\} = \mathscr{X}_0 \cap \{N_s = 0\}$. Επομένως, η σχέση εγκλεισμού του (a) ισχύει για $n = 0$.

Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι

$$\{N_s = n\} = \{N_s = n\} \cap \left[\bigcup_{0 \le u < s} \{N_u = n-1\}\right]. \tag{7.19}$$

Ακόμη από το [4], Παρατήρηση 13.10, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ έχουμε ότι

$$\sigma\big(X_0 + \cdots + X_n\big) \subseteq \sigma\Big(\{X_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}\Big) =: \mathscr{X}_n. \tag{7.20}$$

Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ επίσης έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_s \cap \{N_s = n\} &\overset{(7.19)}{=} \sigma\left(\left[\bigcup_{0 \le u < s} \sigma(S_u)\right] \cup \sigma(S_s)\right) \cap \left[\bigcup_{0 \le u < s} \{N_u = n-1\}\right] \cap \{N_s = n\} \\
&\overset{(7.6)}{=} \sigma\left(\left[\bigcup_{0 \le u < s} \sigma\left(\sum_{k=0}^{n-1} X_k\right)\right] \cup \sigma\left(\sum_{k=0}^{n} X_k\right)\right) \\
&\quad \cap \left[\bigcup_{0 \le u < s} \{N_u = n-1\}\right] \cap \{N_s = n\} \\
&= \sigma\left(\sigma\left(\sum_{k=0}^{n-1} X_k\right) \cup \sigma\left(\sum_{k=0}^{n} X_k\right)\right) \\
&\quad \cap \left[\bigcup_{0 \le u < s} \{N_u = n-1\}\right] \cap \{N_s = n\} \\
&\overset{(7.20)}{\subseteq} \sigma(\mathscr{X}_{n-1} \cup \mathscr{X}_n) \cap \left[\bigcup_{0 \le u < s} \{N_u = n-1\}\right] \cap \{N_s = n\} \\
&\overset{(7.19)}{=} \mathscr{X}_n \cap \{N_s = n\},
\end{aligned}$$

με την τελευταία ισότητα να είναι άμεση συνέπεια του ότι η $\{\mathscr{X}_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ προφανώς είναι μια διύλιση.

Και επειδή η ζητούμενη σχέση εγκλεισμού αποδείχτηκε για τυχόν $s \in \mathbb{R}_+$, τότε θα ισχύει και για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$, κάτι που αποδεικνύει το (a).

(b) Για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_s$ ισχύει $Q(A) = \sum_{n=0}^{\infty} Q(B_n)Q(N_s = n)$, όπου $B_n \in \mathscr{X}_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πράγματι, έστω $s \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_s$. Από το (a) άμεσα έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $B_n \in \mathscr{X}_n$ ώστε $A \cap \{N_s = n\} = B_n \cap \{N_s = n\}$. Επομένως, αφού η $\{N_s = n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια διαμέριση του Ω έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Q(A) &= Q\left(\biguplus_{n=0}^{\infty}[A \cap \{N_s = n\}]\right) = \sum_{n=0}^{\infty} Q(A \cap \{N_s = n\}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} Q(B_n \cap \{N_s = n\}) = \sum_{n=0}^{\infty} Q(B_n)Q(N_s = n), \end{aligned}$$

με την τελευταία ισότητα να ισχύει διότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τα $B_n \in \mathscr{X}_n$ και $\{N_s = n\}$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα, αφού εξ'υποθέσεως οι σ.δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Άρα ισχύει το (b).

Επί πλέον, από την ιδιότητα (I) και το Λήμμα 7.2.5, για κάθε $j \in \mathbb{N}_n^*$ έχουμε ότι $Q_{X_j} \ll P_{X_j}$, κι επομένως από το Θεώρημα Radon-Nikodym (βλ. Θεώρημα Α′.1.2) έπεται ότι υπάρχει υπάρχει σ.π.π. $f \in \mathcal{L}_+^1(P_{X_j})$ ώστε

$$Q_{X_j} = \int_A f dP_{X_j} \quad \text{για κάθε} \quad A \in \mathcal{B}\big((0,\infty)\big). \tag{7.21}$$

(c) Αν $\gamma := \ln f$, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $B_n \in \bigcap_{j=1}^n \sigma(X_j)$ ισχύει ότι $Q(B_n) = E_P\big[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)}\big]$.

Πράγματι, αρχικά σημειώνουμε ότι, επειδή η γ αποτελεί την σύνθεση της ln και της σ.π.π. f, είναι Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Επίσης για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και $B_n \in \bigcap_{j=1}^n \sigma(X_j)$ υπάρχουν $C_j \in \mathcal{B}\big((0,\infty)\big)$ ($j \in \mathbb{N}_n^*$) ώστε $B_n = \bigcap_{j=1}^n X_j^{-1}(C_j)$. Επομένως,

$$\begin{aligned} Q(B_n) &= \int \chi_{\bigcap_{j=1}^n X_j^{-1}(C_j)} dQ = \int \Big(\prod_{j=1}^n \chi_{X_j^{-1}(C_j)}\Big) dQ = \prod_{j=1}^n \int \chi_{X_j^{-1}(C_j)} dQ \\ &= \prod_{j=1}^n Q_{X_j}(C_j) \overset{(7.21)}{=} \prod_{j=1}^n \int_{C_j} f dP_{X_j} \overset{\gamma=\ln f}{=} \prod_{j=1}^n \int_{C_j} e^{\gamma} dP_{X_j} \\ &= \prod_{j=1}^n \int_{X_j^{-1}(C_j)} (e^{\gamma} \circ X_j) dP = \prod_{j=1}^n \int \chi_{X_j^{-1}(C_j)} e^{\gamma(X_j)} dP \\ &= \int \prod_{j=1}^n \Big[\chi_{X_j^{-1}(C_j)} e^{\gamma(X_j)}\Big] dP = \int \chi_{\bigcap_{j=1}^n X_j^{-1}(C_j)} e^{\sum_{j=1}^n \gamma(X_j)} dP \end{aligned}$$

$$= \int \chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^{n}\gamma(X_j)} dP = E_P\Big[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^{n}\gamma(X_j)}\Big],$$

με την τρίτη ισότητα και την τέταρτη από το τέλος ισότητα να αποτελούν άμεση συνέπεια της εξ'υποθέσεως ανεξαρτησίας των τ.μ. X_n $(n \in \mathbb{N})$, και την τέταρτη ισότητα και την έκτη από το τέλος ισότητα να αντλούν την ισχύ τους από το [4], Θεώρημα 7.6.

(d) Για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$ και για κάθε $B \in \mathscr{X}_n$ ισχύει $Q(B) = E_P\big[\chi_B e^{\sum_{j=1}^{n}\gamma(X_j)}\big]$.

Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}^*$ κι ας ορίσουμε τις κλάσεις

$$\mathfrak{M}_n := \big\{B \in \mathscr{X}_n : Q(B) = E_P\big[\chi_B e^{\sum_{j=1}^{n}\gamma(X_j)}\big]\big\},$$

$$\mathcal{D}_n := \left\{\bigcap_{j=1}^{n} B_j : B_j \in \sigma(X_j)\right\}$$

και

$$\mathcal{A}_n := \left\{\biguplus_{i=1}^{m} D_i : m \in \mathbb{N}^*, D_i \in \mathcal{D}_n\right\}.$$

Τότε, η $\mathcal{A}_n$ είναι μια άλγεβρα στο Ω, και βάσει του (c) ισχύει

$$\mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \mathfrak{M}_n. \tag{7.22}$$

Επομένως, αν με $m(\mathcal{A}_n)$ συμβολίσουμε την ελάχιστη μονότονη κλάση που περιέχει την $\mathcal{A}_n$, τότε έχουμε

$$\sigma(\mathcal{A}_n) = m(\mathcal{A}_n) \subseteq \mathfrak{M}_n, \tag{7.23}$$

όπου η πρώτη ισότητα αποτελεί συνέπεια του [4], Θεώρημα 1.16.

Επίσης, για κάθε $j \in \mathbb{N}_n^*$ ισχύει $\sigma(X_j) \subseteq \mathcal{D}_n$, αφού για κάθε $B_j \in \sigma(X_j)$ έχουμε $B_j = \bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(C_{k,j})$ με $C_{k,j} = (0,\infty)$ για κάθε $k, j \in \mathbb{N}_n^*$ με $k \neq j$ και $C_{j,j} \in \mathcal{B}((0,\infty))$ για κάθε $j \in \mathbb{N}_n^*$.

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψη και τις (7.22), (7.23) για κάθε $j \in \mathbb{N}_n^*$ έχουμε $\sigma(X_j) \subseteq \mathcal{D}_n \subseteq \mathcal{A}_n \subseteq \sigma(\mathcal{A}_n) \subseteq \mathfrak{M}_n$, άρα $\mathscr{X}_n = \sigma\big(\bigcup_{j=1}^{n}\sigma(X_j)\big) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_n) \subseteq \mathfrak{M}_n$, δηλαδή δείξαμε ότι $\mathscr{X}_n \subseteq \mathfrak{M}_n$ κι επομένως επειδή, εξ'ορισμού, ισχύει επίσης $\mathfrak{M}_n \subseteq \mathscr{X}_n$, έπεται ότι $\mathfrak{M}_n = \mathscr{X}_n$, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του (d).

(e) Αν $\beta(x) := \alpha + \gamma(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε η β είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big] = e^{\alpha}$.

Πράγματι, η β είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση, αφού η $\gamma := \ln f$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Επί πλέον έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big] &= \int e^{\beta(X_1)} dP = e^{\alpha}\int e^{\gamma(X_1)} dP = e^{\alpha}\int e^{\ln(f\circ X_1)} dP \\ &= e^{\alpha}\int \big(f \circ X_1\big) dP = e^{\alpha}\int_{\mathbb{R}_+} f(x) dP_{X_1}(x) \overset{f\sigma.\pi.\pi.}{=} e^{\alpha}, \end{aligned}$$

με την προτελευταία ισότητα να αντλεί την ισχύ της από το [4], Θεώρημα 7.6.

(f) Για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ ισχύει ότι $Q(A) = \int_A M_s^{(\beta)} dP$ για κάθε $A \in \mathcal{H}_s$.

Πράγματι, έστω $s \in \mathbb{R}_+$ και $A \in \mathcal{H}_s$. Από το (a) έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $B_n \in \mathscr{X}_n$ ώστε $A \cap \{N_s = n\} = B_n \cap \{N_s = n\}$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
Q(A) &\overset{\mathbf{(b)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} Q(B_n) Q(N_s = n) \overset{\mathbf{(d)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E_P\left[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^{n} \gamma(X_j)}\right] Q(N_s = n) \\
&\overset{(7.18)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E_P\left[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^{n} \gamma(X_j)}\right] e^{n\alpha + \lambda t(1-e^{\alpha})} P(N_s = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E_P\left[\chi_{B_n} e^{\sum_{j=1}^{n} \gamma(X_j) + n\alpha + \lambda t(1-e^{\alpha})}\right] E_P\left[\chi_{\{N_s = n\}}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E_P\left[\chi_{B_n} \chi_{\{N_s = n\}} e^{\sum_{j=1}^{n} [\alpha + \gamma(X_j)] + \lambda t(1-e^{\alpha})}\right] \\
&\overset{\beta(x) := \alpha + \gamma(x)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E_P\left[\chi_{B_n} \chi_{\{N_s = n\}} e^{\sum_{j=1}^{n} \beta(X_j) + \lambda t(1-e^{\alpha})}\right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} E_P\left[\chi_{B_n \cap \{N_s = n\}} e^{\sum_{j=1}^{N_s} \beta(X_j) + \lambda t(1-e^{\alpha})}\right] \\
&\overset{(7.9),(7.10),\mathbf{(e)}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} E_P\left[M_s^{(\beta)} \chi_{B_n \cap \{N_s = n\}}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} E_P\left[M_s^{(\beta)} \chi_{A \cap \{N_s = n\}}\right] \\
&= E_P\left[\sum_{n=0}^{\infty} M_s^{(\beta)} \chi_A \chi_{\{N_s = n\}}\right] = E_P\left[M_s^{(\beta)} \chi_A\right] = \int_A M_s^{(\beta)} dP,
\end{aligned}$$

με την πέμπτη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια της ανεξαρτησίας των ενδεχομένων B_n, $\{N_s = n\}$, η οποία προκύπτει άμεσα από την εξ'υποθέσεως ανεξαρτησία των σ.δ. $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ και $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, και την προτελευταία ισότητα να αιτιολογείται άμεσα από το ότι η $\{N_s = n\}_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια διαμέριση του Ω.

Εδώ ολοκληρώνεται η απόδειξη του τελευταίου βήματος, του (f).

Από τα (e) και (f) άμεσα έχουμε ότι υπάρχει $\beta : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $e^{\beta(X_1)} \in \mathcal{L}^1(P)$ κι επί πλέον για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$ να ισχύει

$$Q(A) = \int_A M_s^{(\beta)} dP \quad \text{για κάθε} \quad A \in \mathcal{H}_s.$$

Λαμβάνοντας, όμως, υπόψη ότι από την Πρόταση 7.2.4 η $\{M_t^{(\beta)}\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι ένα $\{\mathcal{H}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$-martingale τότε έπεται και η ισχύς της (M), κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη της παρούσας πρότασης.

(ii) Ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση $Q : \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{H}_t \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$Q(A) := \int_A M_t^{(\beta)} dP \quad \text{για κάθε} \quad A \in \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathcal{H}_t.$$

Τότε, εύκολα αποδεικνύεται ότι η Q είναι ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο επάνω στην άλγεβρα $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t$. Ο περιορισμός $Q|\mathcal{H}_t$ του Q στην $\mathcal{H}_t$ ($t\in\mathbb{R}_+$) είναι (σύμφωνα με την Πρόταση Α′.1.1 και την Πρόταση 7.2.4) πιθανότητα.

(a*) Για σταθερό $t\in\mathbb{R}_+$, για κάθε $r\in(0,\infty)$ και για κάθε $0\le u\le s\le t$ ισχύει $E_Q\big[e^{-r(S_s-S_u)}\,\big|\,\mathcal{H}_u\big]=_{Q|\mathcal{H}_u} e^{-\lambda(s-u)E_P[e^{\beta(X_1)}-1]}E_P\big[e^{-rS_{s-u}+S^{(\beta)}_{s-u}}\big]$.

Πράγματι, έστω σταθερό $t\in\mathbb{R}_+$ και ο μ.χ. $(\Omega,\mathcal{H}_t)$. Όμως, από τον ορισμό της Q έχουμε ότι $Q|\mathcal{H}_u\ll P$ κι επομένως από το Θεώρημα Radon-Nikodym έπεται ότι υπάρχει μια παράγωγος Radon-Nikodym $f=M^{(\beta)}_s$ της $Q|\mathcal{H}_u$ ως προς P. Τότε επειδή $\chi_A e^{-r(S_s-S_u)}\in\mathcal{L}^1_+(P)$ για κάθε $r\in(0,\infty)$ από το Θεώρημα Radon-Nikodym και για κάθε $r\in(0,\infty)$ και $0\le u\le s\le t$ επίσης έχουμε ότι

$$E_Q\Big[\chi_A e^{-r(S_s-S_u)}\Big]=E_P\Big[\chi_A e^{-r(S_s-S_u)}M^{(\beta)}_s\Big]\quad\text{για κάθε}\quad A\in\mathcal{H}_u. \tag{7.24}$$

Θέτοντας $\xi(t):=e^{-\lambda tE_P[e^{\beta(X_1)}-1]}$ για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$, από την (7.24) και για κάθε $r\in(0,\infty)$, $0\le u\le s\le t$ και $A\in\mathcal{H}_u$ έχουμε

$$\begin{aligned}
E_Q\Big[\chi_A e^{-r(S_s-S_u)}\Big] &= E_P\Big[\chi_A e^{-r(S_s-S_u)}M^{(\beta)}_s\Big]=E_P\Big[\chi_A e^{-r(S_s-S_u)}e^{S^{(\beta)}_s-\lambda sE_P[\beta(X_1)-1]}\Big]\\
&= \xi(s)E_P\Big[\chi_A e^{-r(S_s-S_u)+\left(S^{(\beta)}_s-S^{(\beta)}_u+S^{(\beta)}_u\right)}\Big]=\xi(s)E_P\big[\chi_A e^{S^{(\beta)}_u}\big]\\
&= E_P\Big[e^{-r(S_s-S_u)+S^{(\beta)}_s-S^{(\beta)}_u}\Big]\\
&\overset{(7.9)}{=} \xi(s-u)E_P\big[\chi_A M^{(\beta)}_u\big]E_P\Big[e^{-r(S_s-S_u)+S^{(\beta)}_s-S^{(\beta)}_u}\Big]\\
&= \xi(s-u)E_P\big[\chi_A M^{(\beta)}_u\big]E_P\Big[e^{-rS_{s-u}+S^{(\beta)}_{s-u}}\Big]\\
&= \xi(s-u)E_Q[\chi_A]E_P\Big[e^{-rS_{s-u}+S^{(\beta)}_{s-u}}\Big]\\
&= \xi(s-u)Q(A)E_P\Big[e^{-rS_{s-u}+S^{(\beta)}_{s-u}}\Big],
\end{aligned}$$

με την τέταρτη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια της ανεξαρτησίας των τ.μ. $\chi_A e^{S^{(\beta)}_u}$ και $S^{(\beta)}_s-S^{(\beta)}_u$, καθώς και της ανεξαρτησίας των τ.μ. $\chi_A e^{S^{(\beta)}_u}$ και $S^{(\beta)}_s-S^{(\beta)}_u$, που απορρέει από το γεγονός ότι οι σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{S^{(\beta)}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχουν ανεξάρτητες προσαυξήσεις – η μεν πρώτη ως P-σύνθετη διαδικασία Poisson, η άλλη δε, λόγω των όσων αναφέρθηκαν στο βήμα (b) της απόδειξης της Πρότασης 7.2.4. Επίσης η έκτη ισότητα αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι οι σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{S^{(\beta)}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχουν (ομοίως με τα όσα αναφέρθηκαν αμέσως πιο πάνω) στάσιμες προσαυξήσεις, επάνω στον χ.π. $(\Omega,\mathcal{H}_\infty,P)$, ενώ η προτελευταία ισότητα προκύπτει άμεσα από την (7.24) για $u=s$.

Δηλαδή, για κάθε $r\in(0,\infty)$, $0\le u\le s\le t$ και για κάθε $A\in\mathcal{H}_u$ δείξαμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_A \xi(s-u)E_P\big[e^{-rS_{s-u}+S^{(\beta)}_{s-u}}\big]dQ &= E_Q\big[\chi_A e^{-r(S_s-S_u)}\big]=\int_A e^{-r(S_s-S_u)}dQ\\
&= \int_A E_Q\big[e^{-r(S_s-S_u)}\,\big|\,\mathcal{H}_u\big]dQ,
\end{aligned}$$

που ισοδυναμεί με το (a*).

(b*) Για σταθερό $t \in \mathbb{R}_+$ η σ.δ. $\{S_u\}_{u\in[0,t]}$ έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις επάνω στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{H}_t, Q|\mathcal{H}_t)$.

Πράγματι, από το (a*) παρατηρούμε ότι η $E_Q\big[e^{-r(S_{u+h}-S_u)}\,\big|\,\mathcal{H}_u\big]$ $(0 \le u \le s \le t)$ είναι $Q|\mathcal{H}_u - \sigma.\beta.$ ίση με μια συνάρτηση των s, u, την $\zeta : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$\zeta(s,u;r) := e^{-\lambda(s-u)E_P[\beta(X_1)-1]}E_P\Big[e^{-rS_{s-u}+S^{(\beta)}_{s-u}}\Big] = \xi(s-u)E_P\Big[e^{-rS_{s-u}+S^{(\beta)}_{s-u}}\Big].$$

Άρα θέτοντας $\kappa := -r$ έχουμε ότι η ρ.γ.σ. της $S_s - S_u$ δοθείσης οποιασδήποτε τ.μ. S_u εξαρτάται $(Q|\mathcal{H}_u - \sigma.\beta.)$ από τα s και u μέσω της διαφοράς $s-u$. Τότε, σύμφωνα με το [13], Corollary (22.2), έχουμε ότι η αντίστοιχη σ.(π.)π. της τ.μ. $S_s - S_u$ δοθείσης οποιασδήποτε τ.μ. S_u εξαρτάται $(Q|\mathcal{H}_u - \sigma.\beta.)$ από τα s και u μέσω της διαφοράς $s-u$. Συνεπώς, η προσαύξηση (τ.μ.) $S_s - S_u$ κατανέμεται ανεξάρτητα των τ.μ. $\{S_\tau\}_{\tau\in[0,u]}$ για κάθε $0 \le u \le s \le t$. Επομένως, η σ.δ. $\{S_u\}_{u\in[0,t]}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Ακόμη, για κάθε $r \in (0,\infty)$, $0 \le u \le s \le t$ και για κάθε $h \in \mathbb{R}_+$ ώστε $u+h \le t$, από το (a*) έχουμε

$$\begin{aligned} E_Q\Big[e^{-r(S_{u+h}-S_u)}\,\Big|\,\mathcal{H}_u\Big] \;&=_{Q|\mathcal{H}_u}\; \xi(u+h-u)E_P\Big[e^{-rS_{u+h-u}+S^{(\beta)}_{u+h-u}}\Big] = \xi(h)E_P\Big[e^{-rS_h+S^{(\beta)}_h}\Big] \\ &=_Q \; E_Q\Big[e^{-r(S_h-S_0)}\,\Big|\,\mathcal{H}_0\Big] =_Q E_Q\big[e^{-rS_h}\big], \end{aligned}$$

απ'όπου ομοίως με τα όσα αναφέρθηκαν πιο πάνω για τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις άμεσα έπεται ότι η κατανομή της τ.μ. $S_{u+h} - S_u$ είναι $(Q|\mathcal{H}_u - \sigma.\beta.)$ ίδια με αυτήν της τ.μ. S_u για κάθε $0 \le u \le s \le t$ και για κάθε $h \in \mathbb{R}_+$ ώστε $u+h \le t$, κι επομένως η σ.δ. $\{S_u\}_{u\in[0,t]}$ θα έχει στάσιμες προσαυξήσεις, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του (b*) .

Ας θεωρήσουμε, τώρα, επάνω στον μ.χ. $\big((0,\infty), \mathcal{B}((0,\infty))\big)$, τις πιθανότητες μ και ν, που ορίζονται ως εξής:

$$\mu(A) := \int_A \frac{e^{\beta(x)}}{E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]}dP_{X_1}(x) \quad \text{και} \quad \nu(A) := \lambda'\int_A e^{-\lambda' x}dx, \tag{7.25}$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}((0,\infty))$, όπου $\lambda' := \lambda E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]$. Ορίζουμε επίσης την ακόλουθη πιθανότητα γινόμενο επάνω στο $\Omega = (0,\infty)^{\mathbb{N}} \times (0,\infty)^{\mathbb{N}}$:

$$\widetilde{Q} = \nu^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu^{\otimes\mathbb{N}}. \tag{7.26}$$

(c*) Η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $\widetilde{Q}$-σύνθετη διαδικασία Poisson (με παραμέτρους λ' και $\widetilde{Q}_X$).

Πράγματι, εκ κατασκευής του $\widetilde{Q}$ άμεσα έχουμε ότι $\widetilde{Q}_{X_1} = \mu = \widetilde{Q}_{X_n}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, ενώ από τους ορισμούς των ν και $\widetilde{Q}$ επίσης άμεσα έπεται ότι $\widetilde{Q}_{W_n} = \widetilde{Q}_{W_1} = \nu$ για κάθε $n \in \mathbb{N}^*$, άρα $\widetilde{Q}_{W_1} = \mathbf{Exp}(\lambda')$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψη την (7.26), έχουμε

$$\widetilde{Q} = \widetilde{Q}_{W_1} \otimes \cdots \otimes \widetilde{Q}_{W_n} \otimes \cdots \otimes \widetilde{Q}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \widetilde{Q}_{X_n} \otimes \cdots,$$

δηλαδή η οικογένεια $\{W_1,\ldots,W_n,\ldots;X_1,\ldots,X_n,\ldots\}$ παραμένει ανεξάρτητη και ως προς την $\widetilde{Q}$ (αφού κατ'αναλογία με τα όσα αναφέρθηκαν στην αρχή της παρούσας ενότητας για την P έχουμε ότι $\widetilde{Q}=\widetilde{Q}_{(W_1,\ldots,W_n,\ldots;X_1,\ldots,X_n,\ldots)}$).

Όμως, επειδή $\widetilde{Q}_{W_1}=\mathbf{Exp}(\lambda')$, έχουμε $\widetilde{Q}_{W_1}\sim P_{W_1}$, άρα και $\widetilde{Q}_{W_1}\ll P_{W_1}$, επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Radon-Nikodym, έπεται ότι υπάρχει μία $P_{W_1}-\sigma.\beta.$ μοναδική $g\in\mathcal{L}^1_+(P_{W_1})$ ώστε

$$\widetilde{Q}_{W_1}(B)=\int_B g\,dP_{W_1}\quad \text{για κάθε}\quad B\in\mathcal{B}\big((0,\infty)\big)$$

ή ισοδύναμα

$$\widetilde{Q}(A)=\int_A g(W_1)\,dP\quad \text{για κάθε}\quad A\in\mathcal{H}_\infty, \tag{7.27}$$

απ'όπου για $A=\Omega$ έχουμε

$$E_P[g(W_1)]=1. \tag{7.28}$$

Τότε, ομοίως με την απόδειξη του Λήμματος 3.6.2 και για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ και $u\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
E_{\widetilde{Q}}\big[e^{\mathrm{i}uS_t}\big] &\overset{(7.27)}{=} E_P\big[e^{\mathrm{i}uS_t}g(W_1)\big]=\sum_{n=0}^{\infty}E_P\Big[\chi_{\{N_t=n\}}g(W_1)\Big(\prod_{k=1}^{n}e^{\mathrm{i}uX_k}\Big)\Big]\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}E_P\big[\chi_{\{N_t=n\}}g(W_1)\big]E_P\Big[\prod_{k=1}^{n}e^{\mathrm{i}uX_k}\Big]\\
&\overset{(7.27)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}E_{\widetilde{Q}}\big[\chi_{\{N_t=n\}}\big]E_P\Big[\prod_{k=1}^{n}e^{\mathrm{i}uX_k}\Big]\\
&\overset{(7.28)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{Q}(N_t=n)\Big(\prod_{k=1}^{n}E_P\big[e^{\mathrm{i}uX_k}\big]E_P[g(W_1)]\Big)\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{Q}(N_t=n)\Big(\prod_{k=1}^{n}E_P\big[e^{\mathrm{i}uX_k}g(W_1)\big]\Big)\\
&\overset{(7.27)}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{Q}(N_t=n)\Big(\prod_{k=1}^{n}E_{\widetilde{Q}}\big[e^{\mathrm{i}uX_k}\big]\Big)\\
&\overset{\widetilde{Q}_{X_n}=\widetilde{Q}_{X_1}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\widetilde{Q}(N_t=n)E^n_{\widetilde{Q}}\big[e^{\mathrm{i}uX_1}\big]=e^{\lambda'\left[E_{\widetilde{Q}}\left[e^{iuX_1}\right]-1\right]},
\end{aligned}$$

με την τρίτη, την πέμπτη και την έκτη ισότητα να αποτελούν άμεση συνέπεια της ανεξαρτησίας της οικογένειας $\{W_1,\ldots,W_n,\ldots;X_1,\ldots,X_n,\ldots\}$ και την τελευταία ισότητα να ισχύει διότι $\widetilde{Q}_{N_t}=\mathbf{P}(\lambda')$ για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$, αφού $\widetilde{Q}_{W_n}=\mathbf{Exp}(\lambda')$ για κάθε $n\in\mathbb{N}^*$ (βλ. Πόρισμα 3.4.4).

Δηλαδή δείξαμε ότι για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ η χ.σ. της τ.μ. S_t ικανοποιεί την ισότητα του Πορίσματος 3.6.3, άρα η S_t κατανέμεται σύμφωνα με μια σύνθετη κατανομή Poisson με παραμέτρους λ' και $\widetilde{Q}_X$.

(d*) Για κάθε $r \in (0,\infty)$ ισχύει ότι $E_{\widetilde{Q}}\big[e^{-rX_1}\big] = \frac{E_P[e^{\beta(X_1)-rX_1}]}{E_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]}$.

Πράγματι, από την (7.26) και για κάθε $r \in (0,\infty)$ έχουμε

$$\begin{aligned}
E_{\widetilde{Q}}\big[e^{-rX_1}\big] &= \int_\Omega e^{-rX_1(\omega)} d\Big(\nu^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu^{\otimes\mathbb{N}}\Big)(\omega) = \int_{(0,\infty)} e^{-rx} d\Big[\Big(\nu^{\otimes\mathbb{N}} \otimes \mu^{\otimes\mathbb{N}}\Big) \circ X_1^{-1}\Big](x) \\
&= \int_{(0,\infty)} e^{-rx} d\mu(x) = \int_{(0,\infty)} e^{-rx} \frac{e^{\beta(x)}}{E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]} dP_{X_1}(x) \\
&= \frac{1}{E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]} \int_{(0,\infty)} e^{\beta(x)-rx} dP_{X_1}(x) = \frac{1}{E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]} \int e^{\beta(X_1)-rX_1} dP \\
&= \frac{E_P[e^{\beta(X_1)-rX_1}]}{E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]},
\end{aligned}$$

με την δεύτερη και την προτελευταία ισότητα να αποτελούν άμεση συνέπεια του [4], Θεώρημα 7.6.

(e*) Για $t \in \mathbb{R}_+$, για κάθε $u \in [0,t]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\widetilde{Q}(N_u = n) = \xi(u) P(N_u = n) \big[E_P[e^{\beta(X_1)}]\big]^n.$$

Πράγματι, επειδή η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια $\widetilde{Q}$-σύνθετη διαδικασία Poisson, (με παραμέτρους λ' και $\widetilde{Q}_X$) έπεται ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson ως προς Q, με παράμετρο $\lambda' = \lambda E_P[\beta(X_1)]$, οπότε για $t \in \mathbb{R}_+$, για κάθε $u \in [0,t]$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}(N_u = n) &= e^{-\lambda' u} \frac{(\lambda' u)^n}{n!} = e^{-\lambda E_P[e^{\beta(X_1)}]u} \frac{[\lambda E_P[e^{\beta(X_1)}]u]^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda u E_P[e^{\beta(X_1)}]} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \Big[E_P[e^{\beta(X_1)}]\Big]^n = \xi(u) e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^n}{n!} \Big[E_P[e^{\beta(X_1)}]\Big]^n \\
&= \xi(u) P(N_u = n) \Big[E_P[e^{\beta(X_1)}]\Big]^n,
\end{aligned}$$

με την τελευταία ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια του ότι εξ'υποθέσεως η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson επάνω στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty, P)$.

(f*) Για $r \in (0,\infty)$, $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $u \in [0,t]$ ισχύει

$$E_{\widetilde{Q}}\big[e^{-rS_u}\big] = \sum_{n=0}^\infty \Big[E_P[e^{\beta(X_1)-rX_1}]\Big]^n \xi(u) P(N_u = n).$$

Πράγματι, για $r \in (0,\infty)$, $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $u \in [0,t]$ η μέση τιμή $E_{\widetilde{Q}}\big[e^{-rS_u}\big]$ δηλώνει την ρ.γ.σ. του τυχαίου αθροίσματος S_u στη θέση $-r$ και ως προς την $\widetilde{Q}$. Επομένως, ομοίως με το Λήμμα 3.6.2 αποδεικνύεται ότι για κάθε $r \in (0,\infty)$ ισχύει ότι

$$E_{\widetilde{Q}}\big[e^{-rS_u}\big] = \sum_{n=0}^\infty \Big[E_{\widetilde{Q}}\big[e^{-rX_1}\big]\Big]^n \widetilde{Q}(N_u = n)$$

$$\overset{(\mathbf{d*}),(\mathbf{e*})}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Big[E_P\big[e^{\beta(X_1)-rX_1}\big]\Big]^n}{\Big[E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]\Big]^n} \xi(u)\Big[E_P[e^{\beta(X_1)}]\Big]^n P(N_u = n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\Big[E_P\big[e^{\beta(X_1)-rX_1}\big]\Big]^n \xi(u) P(N_u = n).$$

(g*) Για $r \in (0,\infty)$, $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $u \in [0,t]$ ισχύει

$$E_P\big[e^{-rS_u+S_u^{(\beta)}}\big] = \sum_{n=0}^{\infty}\Big[E_P[e^{\beta(X_1)-rX_1}]\Big]^n P(N_u = n).$$

Πράγματι, παρατηρούμε ότι για κάθε $r \in (0,\infty)$ και για κάθε $u \in [0,t]$ έχουμε ότι η τ.μ.

$$S_u^{(\beta)} - rS_u = \sum_{k=0}^{N_u}\beta(X_k) - r\sum_{k=0}^{N_u} X_k = \sum_{k=0}^{N_u}[\beta(X_k) - rX_k] = \sum_{k=0}^{N_u} U_k,$$

όπου $U_k := \beta(X_k) - rX_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Επομένως, $E_P\big[e^{-rS_u+S_u^{(\beta)}}\big] = E_P\big[e^{\sum_{k=0}^{N_u} U_k}\big]$, δηλαδή η ζητούμενη μέση τιμή είναι η ρ.γ.σ. του τυχαίου αθροίσματος $\sum_{k=0}^{N_u} U_k$ στη θέση $z = 1$ και ως προς την P. Τότε, λαμβάνοντας υπόψη και το ότι από την εξ'υποθέσεως ισονομία των τ.μ. X_k ($k \in \mathbb{N}^*$) έχουμε πως η $P_{U_k} = P_{U_1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$, προκύπτει άμεσα και το (g*).

(h*) Για $r \in (0,\infty)$, $t \in \mathbb{R}_+$ η $E_Q\big[e^{-rS_u}\big] = E_{\widetilde{Q}}\big[e^{-rS_u}\big]$ για κάθε $u \in [0,t]$.

Πράγματι, από το (a*) για κάθε $A \in \mathcal{H}_u$ έχουμε

$$\int_A E_Q\big[e^{-r(S_s-S_u)} \,\big|\, \mathcal{H}_u\big] dQ = \int_A \xi(s-u) E_P\Big[e^{-rS_{s-u}+S_{s-u}^{(\beta)}}\Big] dQ$$

απ'όπου για $A = \Omega \in \mathcal{H}_u$ και σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.8(ii) έπεται ότι

$$E_Q\big[e^{-r(S_s-S_u)}\big] = \xi(s-u) E_P\Big[e^{-rS_{s-u}+S_{s-u}^{(\beta)}}\Big]$$

κι επομένως θέτοντας $u := 0$ και $s := u$ έχουμε ότι

$$E_Q\big[e^{-rS_u}\big] = \xi(u) E_P\Big[e^{-rS_u+S_u^{(\beta)}}\Big] \overset{(\mathbf{f*})}{=} \xi(u)\sum_{n=0}^{\infty}\Big[E_P[e^{\beta(X_1)-rX_1}]\Big]^n P(N_u = n)$$
$$\overset{(\mathbf{e*})}{=} E_{\widetilde{Q}}\big[e^{-rS_u}\big],$$

κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του (h*).

Τότε από το (h*) και σύμφωνα με το [13], Theorem 22.2, άμεσα έπεται ότι τα μέτρα πιθανότητας $Q, \widetilde{Q}$ συμπίπτουν επάνω στην σ-άλγεβρα $\mathcal{H}_t$ (για δοσμένο $t \in \mathbb{R}_+$). Επομένως, τα $Q, \widetilde{Q}$ θα συμπίπτουν κι επάνω στην άλγεβρα $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t$ κι άρα το Q είναι σ-προσθετικό επάνω στην $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t$, κάτι που τελικά και σύμφωνα με το Θεώρημα Επέκτασης των Hahn-Carathèodory (βλ. π.χ. [6], Θεώρημα 1.3.5(iv)) συνεπάγεται ότι το $Q = \widetilde{Q}\Big|\sigma\Big(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+}\mathcal{H}_t\Big) = \widetilde{Q}|\mathcal{H}_\infty = \widetilde{Q}$.

Για το λόγο αυτό στο εξής θα γράφουμε Q αντί για $\widetilde{Q}$ κι επομένως η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα είναι μια Q-σύνθετη διαδικασία Poisson. Επίσης από την (M) άμεσα έπεται ότι $Q \stackrel{pr}{\sim} P$, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη του κύριου ζητούμενου του (ii) της παρούσας πρότασης.

• Επί πλέον, για την απόδειξη του δεύτερου ζητούμενου του (ii) της παρούσας πρότασης, δηλαδή του ότι $Q \neq P \Rightarrow P \perp Q$, υποθέτουμε ότι $Q \neq P$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψη την (M) άμεσα έπεται ότι $P(\beta(X_1) \neq 0) > 0$. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $P \perp Q$, με τη βοήθεια του παρακάτω ενδιάμεσου βήματος.

(i*) $\lim_{t\to\infty} M_t^{(\beta)} = 0 \quad P-\sigma.\beta..$

Πράγματι, αρχικά υπενθυμίζουμε ότι για κάθε $t \in (0,\infty)$ η

$$\xi(t) = e^{-\lambda t E_P[e^{\beta(X_1)-1}]} \Leftrightarrow \ln\xi(t) = -\lambda t E_P[e^{\beta(X_1)} - 1],$$

οπότε άμεσα έχουμε και ότι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln\xi(t)}{t} = \ln\xi(1). \tag{7.29}$$

Επίσης επειδή η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων τότε ισχύει ότι

$$\lim_{t\to\infty} N_t(\omega) = \sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty, \tag{7.30}$$

άρα θα έχουμε και ότι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{N_t}\sum_{k=0}^{N_t} \beta(X_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \beta(X_k). \tag{7.31}$$

Επειδή, όμως, από την γνωστή ανισότητα $e^x \geq 1 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}_+$, έχουμε ότι $e^{|\beta(X_1)|} \geq 1 + |\beta(X_1)| \geq |\beta(X_1)|$ και επειδή εξ'υποθέσεως η τ.μ. $e^{\beta(X_1)} \in \mathcal{L}^1(P)$, τότε προφανώς και η τ.μ. $\beta(X_1) \in \mathcal{L}^1(P)$. Οπότε από τον Ισχυρό Νόμο των Μεγάλων Αριθμών (βλ. π.χ. [4], Θεώρημα 13.34) έχουμε $\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=0}^{n}\beta(X_k) = E_P[\beta(X_1)] \quad P-\sigma.\beta.$, κι άρα λαμβάνοντας υπόψη την (7.31) τελικά έχουμε

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{N_t}\sum_{k=0}^{N_t} \beta(X_k) = E_P[\beta(X_1)] \quad P-\sigma.\beta.. \tag{7.32}$$

Ακόμη, από τον Ισχυρό Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και τον ορισμό της σ.δ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty}(T_n/n) = \lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} W_k = E_P[W_1] = \lambda^{-1} \quad P-\sigma.\beta.$, αφού εξ'υποθέσεως ισχύει $P_{W_k} = P_{W_1} = \mathbf{Exp}(\lambda)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$. Επομένως τελικά έχουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{T_n} = \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{T_n}{n}\Big)^{-1} = \Big(\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n}\Big)^{-1} = \lambda \quad P-\sigma.\beta.. \tag{7.33}$$

Επίσης από τις (7.5) και (7.8) έχουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega$ υπάρχει μοναδικό $n := n_t(\omega) \in \mathbb{N}$ ώστε $N_t := N_t(\omega) = n$ και $T_n(\omega) \leq t < T_{n+1}(\omega)$. Οπότε για κάθε $t \in (0, \infty)$ άμεσα έπεται ότι

$$\begin{aligned}
T_{N_t} \leq t < T_{N_t+1} \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{N_t}{T_{N_t+1}} < \frac{N_t}{t} \leq \frac{N_t}{T_{N_t}} \Rightarrow \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{T_{N_t+1}} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{T_{N_t}} \\
&\overset{(7.30)}{\Rightarrow} \quad \lim_{t\to\infty}\left[\frac{N_t+1}{T_{N_t+1}} - \frac{1}{T_{N_t+1}}\right] \leq \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \leq \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{T_{N_t}} \\
&\overset{(7.30),(7.33)}{\Rightarrow} \quad \lambda \leq \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \leq \lambda \quad P-\sigma.\beta. \\
&\Leftrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} = \lambda \quad P-\sigma.\beta..
\end{aligned}$$

Όμως, από την τελευταία σχέση και την (7.32) έχουμε ότι

$$\lambda E_P[\beta(X_1)] \;=_P\; \lim_{t\to\infty} \frac{N_t}{t} \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{N_t} \beta(X_k)}{N_t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{N_t} \beta(X_k)}{t},$$

δηλαδή δείξαμε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \frac{S_t^{(\beta)}}{t} = \lambda E_P[\beta(X_1)] \quad P-\sigma.\beta.. \tag{7.34}$$

Τότε από τις (7.29) και (7.34) άμεσα έπεται ότι

$$\lim_{t\to\infty}\Big[\frac{S_t^{(\beta)}}{t} + \frac{\ln \xi(t)}{t}\Big] =_P \lambda E_P[\beta(X_1)] + \ln \xi(1) = -\lambda E_P\Big[e^{\beta(X_1)} - [1 + \beta(X_1)]\Big] <_P 0,$$

με την ανισότητα να ισχύει διότι εύκολα αποδεικνύεται ότι η $e^x - (1+x)$ είναι μη αρνητική σε όλο το $\mathbb{R}$, και επειδή η $P(\beta(X_1) \neq 0) > 0$.

Επομένως, έχουμε $\lim_{t\to\infty}\big[S_t^{(\beta)} + \ln \xi(t)\big] = -\infty \quad P-\sigma.\beta.$, άρα $\lim_{t\to\infty} e^{[S_t^{(\beta)} + \ln \xi(t)]} = 0 \quad P-\sigma.\beta.$, που (λαμβανομένης υπόψη και της (7.9)) ισοδυναμεί με το (i*).

Επίσης σύμφωνα με το Θεώρημα Ανάλυσης Lebesgue (βλ. π.χ. [4], Θεώρημα 10.12(α)) και επειδή οι P, Q είναι πιθανότητες, υπάρχει μια $P-\sigma.\beta.$ μοναδική συνάρτηση $Z \in \mathcal{L}^1_+(P)$ ώστε να ισχύει η

$$Q(A) = \int_A Z dP + P^{(s)}(A) \quad \text{για κάθε} \quad A \in \mathcal{H}_\infty, \tag{7.35}$$

όπου $P^{(s)}$ είναι ένα μέτρο με την ιδιότητα $P \perp P^{(s)}$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψη και την (M), άμεσα και για κάθε $t \in (0, \infty)$ και $A \in \mathcal{H}_t$ έχουμε $\int_A M_t^{(\beta)} dP \geq \int_A Z dP$. Κι επειδή $\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, τότε $E_P[Z|\mathcal{H}_t] \leq M_t^{(\beta)} \quad P|\mathcal{H}_t - \sigma.\beta..$ Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα Σύγκλισης των Martingales (βλ. π.χ. [30], Section 14.2) έπεται

$$0 \leq Z = \lim_{t\to\infty} E_P[Z|\mathcal{H}_t] \leq \lim_{t\to\infty} M_t^{(\beta)} = 0 \quad P-\sigma.\beta..$$

Άρα δείξαμε ότι $Z = 0 \; P-\sigma.\beta.$ κι επομένως από την (7.35) άμεσα έπεται ότι $Q = P^{(s)} \perp P$, κάτι που ολοκληρώνει την απόδειξη τόσο του (ii) όσο κι ολόκληρης της πρότασης. □

Λήμμα 7.2.7. Αν με $P^{(\beta)}$ συμβολίσουμε την μοναδική κατανομή πιθανότητας που αντιστοιχεί στην Borel μετρήσιμη συνάρτηση $\beta : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ και η οποία καθορίζεται από την (M) και ικανοποιεί τις ιδιότητες (I) και (II) της Πρότασης 7.2.6(i), τότε ισχύουν τα εξής:

(i) $P^{(\mathbf{0})} = P$.

(ii) $E_{P^{(\beta)}}[N_1] = \lambda E_P[e^{\beta(X_1)}]$.

(iii) $P_{X_1}^{(\beta)}(A) = \frac{1}{E_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]} \int_A e^{\beta(x)} dP_{X_1}(x)$ για κάθε $A \in \mathcal{B}\big((0,\infty)\big)$.

Απόδειξη. **(i)** Έστω ότι $\beta = \mathbf{0}$, όπου $\mathbf{0} : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ η μηδενική συνάρτηση. Τότε, από την (7.10) έχουμε ότι $S_t^{(\beta)} = \mathbf{0}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\beta \circ X_1 = \mathbf{0} \circ X_1 = \mathbf{0}$, άρα και από την (7.9) και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι $M_t^{(\mathbf{0})} = e^{S_t^{(\mathbf{0})} - \lambda t E_P\left[e^{\beta(X_1)} - 1\right]} = e^{\mathbf{0} - \lambda t E_P[-1]} = e^{\lambda t}$, δηλαδή δείξαμε ότι $M_t^{(\mathbf{0})} = e^{\lambda t}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Όμως, από την Πρόταση 7.2.4, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε $1 = E_P\big[M_t^{(\mathbf{0})}\big] = e^{\lambda t}$, άρα δείξαμε ότι $M_t^{(\mathbf{0})} = 1$, κι επομένως για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και για κάθε $A \in \mathcal{H}_t$ έπεται ότι $P^{(\mathbf{0})}(A) \overset{(M)}{=} \int_A M_t^{(\mathbf{0})} dP = \int_A dP = P(A)$, απ'όπου επίσης έχουμε ότι $P^{(\mathbf{0})}(A) = P(A)$ για κάθε $A \in \bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{H}_t$.

Επομένως, τα $P, P^{(\mathbf{0})}$ θα συμπίπτουν επάνω στην άλγεβρα $\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{H}_t$, άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Επέκτασης των Hahn-Caratheòdory (βλ. π.χ. [6], Θεώρημα 1.3.5(iv)) συνεπάγεται ότι $P = P^{(\mathbf{0})}$ επάνω στην $\mathcal{H}_\infty = \Sigma$.

(ii) Από την (ii) της Πρότασης 7.2.6, έχουμε ότι η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι μια $P^{(\beta)}$-σύνθετη διαδικασία Poisson κι επομένως η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια ομογενής διαδικασία Poisson με παραμέτρους τις παραμέτρους της $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, άρα και με $\lambda' := \lambda E_P[e^{\beta(X_1)}]$. Οπότε, για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$E_{P^{(\beta)}}[N_t] = \lambda' t := \lambda t E_P[e^{\beta(X_1)}], \tag{7.36}$$

που για $t = 1$ δίνει το ζητούμενο.

(iii) Από την απόδειξη του (ii) της Πρότασης 7.2.6 άμεσα έχουμε ότι $Q_{X_1} = \mu$, άρα $P_{X_1}^{(\beta)} = Q_{X_1} = \mu$, δηλαδή ισχύει η (iii). □

Λήμμα 7.2.8. Έστω ο μ.χ. $\big((0,\infty), \mathcal{B}\big((0,\infty)\big)\big)$ και

$$\mathbb{B}_P := \{\beta \in \mathcal{L}^0(P_{X_1}) : E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big] < \infty\}.$$

Τότε, για κάθε $\beta, \beta' \in \mathbb{B}_P$ και $\alpha \in \mathbb{B}_{P^{(\beta)}}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Αν $P^{(\beta)} = P^{(\beta')}$ τότε $\beta = \beta' \quad P_{X_1} - \sigma.\beta.$.

(ii) $\alpha + \beta \in \mathbb{B}_P$ και $E_P\big[e^{\alpha(X_1)+\beta(X_1)}\big] = E_P\big[e^{\alpha(X_1)}\big] E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]$.

(iii) $P^{(\beta)(\alpha)} = P^{(\alpha+\beta)}$.

(iv) $-\beta \in \mathbb{B}_{P^{(\beta)}}$ και $P^{(\beta)(-\beta)} = P$.

Απόδειξη. Έστω οποιαδήποτε $\beta, \beta' \in \mathbb{B}_P$ και $\alpha \in \mathbb{B}_{P^{(\beta)}}$. Τότε έχουμε:
(i) Έστω $P^{(\beta)} = P^{(\beta')}$, τότε $P^{(\beta)}_{X_1} = P^{(\beta')}_{X_1}$, άρα

$$\begin{aligned} E_{P^{(\beta)}}[N_1] = E_{P^{(\beta')}}[N_1] &\Leftrightarrow \lambda E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big] = \lambda E_P\big[e^{\beta'(X_1)}\big] \overset{\lambda>0}{\Leftrightarrow} E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big] = E_P\big[e^{\beta'(X_1)}\big] \\ &\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{B}\big((0,\infty)\big) \quad \int_A e^{\beta} dP_{X_1} = \int_A e^{\beta'} dP_{X_1} \\ &\Leftrightarrow e^{\beta} = e^{\beta'} \quad P_{X_1}|\mathcal{B}\big((0,\infty)\big) - \sigma.\beta. \\ &\Leftrightarrow \beta = \beta' \quad P_{X_1}|\mathcal{B}((0,\infty)) - \sigma.\beta., \end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τρίτη ισοδυναμία αποτελούν άμεση συνέπεια του Λήμματος 7.2.7(iii), ενώ η τέταρτη ισοδυναμία είναι συνέπεια του [4], Πρόταση 6.20.
(ii) Αφού $\beta \in \mathbb{B}_P$ και $\alpha \in \mathbb{B}_{P^{(\beta)}}$, ισχύει $E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big] < \infty$ και $E_{P^{(\beta)}}\big[e^{\alpha(X_1)}\big] < \infty$. Οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E_{P^{(\beta)}}\big[e^{\alpha(X_1)}\big] &= \int_\Omega e^{\alpha(X_1)} dP^{(\beta)} = \int_{(0,\infty)} e^{\alpha} dP^{(\beta)}_{X_1} = E_{P^{(\beta)}_{X_1}}[e^{\alpha}] = E_{P_{X_1}}\left[e^{\alpha} \frac{e^{\beta}}{E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]}\right] \\ &= \frac{1}{E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]} \int_{(0,\infty)} e^{\alpha+\beta} dP_{X_1} = \frac{1}{E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]} \int_\Omega e^{(\alpha+\beta)(X_1)} dP \\ &= \frac{E_P\big[e^{(\alpha+\beta)(X_1)}\big]}{E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]}, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη και η προτελευταία ισότητα αποτελούν άμεση συνέπεια του [4], Θεώρημα 7.6, ενώ η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 7.2.7(iii).

Επομένως, τελικά έπεται ότι $E_P\big[e^{(\alpha+\beta)(X_1)}\big] < \infty$ κι επί πλέον έχουμε ότι

$$E_{P^{(\beta)}}\big[e^{\alpha(X_1)}\big] E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big] = \frac{E_P\big[e^{\alpha(X_1)+\beta(X_1)}\big]}{E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]} E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big] = E_P\big[e^{\alpha(X_1)+\beta(X_1)}\big],$$

κάτι που ουσιαστικά αποδεικνύει το (ii).
(iii) Από το Λήμμα 7.2.7(iii) και για κάθε $A \in \mathcal{B}\big((0,\infty)\big)$ έχουμε ότι

$$P^{(\beta)(\alpha)}_{X_1}(A) = \frac{1}{E_{P^{(\beta)}}\big[e^{\alpha(X_1)}\big]} \int_A e^{\alpha(x)} dP^{(\beta)}_{X_1}(x), \tag{7.37}$$

ενώ σύμφωνα με το Θεώρημα Radon-Nikodym (βλ. Θεώρημα Α'.1.2) επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P^{(\alpha+\beta)}_{X_1}(A) &= \frac{1}{E_P\big[e^{(\alpha+\beta)(X_1)}\big]} \int_A e^{(\alpha+\beta)(x)} dP_{X_1}(x) \\ &= \frac{1}{E_P\big[e^{\alpha(X_1)+\beta(X_1)}\big]} \int_A e^{\alpha(x)+\beta(x)} dP_{X_1}(x) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} \frac{1}{E_{P^{(\beta)}}\big[e^{\alpha(X_1)}\big] E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]} \int_A e^{\alpha(x)} e^{\beta(x)} dP_{X_1}(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{E_{P^{(\beta)}}\big[e^{\alpha(X_1)}\big]}\int_A e^{\alpha(x)}\frac{e^{\beta(x)}}{E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]}dP_{X_1}(x) \\ &= \frac{1}{E_{P^{(\beta)}}\big[e^{\alpha(X_1)}\big]}\int_A e^{\alpha(x)}dP^{(\beta)}_{X_1}(x) \overset{(7.37)}{=} P^{(\beta)(\alpha)}_{X_1}(A), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η προτελευταία ισότητα αποτελούν άμεση συνέπεια του Λήμματος 7.2.7 (iii).

(iv) Έστω $\beta \in \mathbb{B}_P$, τότε έχουμε ότι $E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big] < \infty$. Τότε, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E_{P^{(\beta)}}\big[e^{(-\beta)(X_1)}\big] &= E_{P^{(\beta)}}\big[e^{-\beta(X_1)}\big] = E_{P_{X_1}}\left[e^{-\beta}\frac{e^{\beta}}{E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]}\right] \\ &= \frac{1}{E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]}\int dP_{X_1} = \Big(E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big]\Big)^{-1} < \infty, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα αποτελεί άμεση συνέπεια του Λήμματος 7.2.7(iii).

Επομένως, $-\beta \in \mathbb{B}_{P^{(\beta)}}$, οπότε από το (ii) έχουμε ότι $\beta + (-\beta) = \mathbf{0} \in \mathbb{B}_P$, επομένως από το (iii) τελικά έπεται ότι $P^{(\beta)(-\beta)} = P^{(\beta-\beta)} = P^{(\mathbf{0})} \overset{7.2.7(\mathrm{i})}{=} P$. □

7.3 Εφαρμογή στις Αρχές Υπολογισμού Πριμ

Στην παρούσα ενότητα εισάγουμε την έννοια της αρχής υπολογισμού πριμ και καταδεικνύουμε πως η Πρόταση 7.2.6 βρίσκει εφαρμογή στη Θεωρία Αρχών Υπολογισμού Πριμ, παραθέτοντας και αντίστοιχα παραδείγματα για τρεις αρχές υπολογισμού πριμ.

Έστω $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σύνθετη διαδικασία Poisson επάνω στον χ.π. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty, P)$, όπως αυτός ορίζεται στην Ενότητα 7.2, κι ας υποθέσουμε ακόμα ότι η μέση τιμή $E_P[X_1] < \infty$. Η αντίστοιχη **πυκνότητα πριμ/ασφαλίστρου** (*premium density*) ορίζεται ως εξής:

$$p(P) := E_P[S_1] = E_P[N_1]E_P[X_1]. \tag{7.38}$$

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι η κατανομή πιθανότητας P μπορεί να αντικατασταθεί από μία άλλη κατανομή πιθανότητας Q τέτοια ώστε $P \overset{pr}{\sim} Q$ και η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να παραμένει μια σύνθετη διαδικασία Poisson κάτω από την Q.

Η όλη ιδέα συνίσταται στην εισαγωγή μιας νέας κατανομής πιθανότητας Q επάνω στον μ.χ. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty)$ με σκοπό την απόδοση μεγαλύτερου βάρους σε λιγότερο ευνοϊκά ενδεχόμενα. Πιο συγκεκριμένα η Q πρέπει να οριστεί με τέτοιο τρόπο ώστε η αντίστοιχη πυκνότητα πριμ

$$p(Q) := E_Q[S_1] = E_Q[N_1]E_Q[X_1] \tag{7.39}$$

να είναι πεπερασμένη και να περιλαμβάνει την επιβάρυνση ασφαλείας, δηλαδή να ισχύει

$$p(P) < p(Q) < \infty. \tag{7.40}$$

Παρατηρήσεις 7.3.1. Από τον παραπάνω ορισμό της πυκνότητας πριμ μπορούμε να κάνουμε ορισμένες επισημάνσεις για την Q που μας οδηγούν ουσιαστικά στον ορισμό της αρχής υπολογισμού πριμ αμέσως παρακάτω:

(a) Στην ουσία η Q αποτελεί έναν *κανόνα* που αποδίδει (μέσω της πυκνότητας πριμ) έναν θετικό αριθμό (τον $E_Q[S_1]$) σε κάθε «κίνδυνο» που εκφράζεται μέσω της ολοκληρώσιμης τ.μ. S_1.

(b) Πρακτικά το (a) σημαίνει ότι για κάθε κίνδυνο το χρηματοοικονομικό γραφείο ή η ασφαλιστική εταιρεία είναι διατεθειμένο(-η) να αναλάβει τον κίνδυνο αυτό έναντι αμοιβής ίσης με $p(Q)$. Επομένως, το κέρδος του(-ης) θα ισούται με $p(Q) - S_1$ κι άρα θα είναι τυχαίο μέγεθος, αφού η S_1 είναι τ.μ..

(c) Την Q μπορεί να την θεωρήσουμε και τέτοια ώστε το $E_Q[S_1] = \infty$, τότε, όμως, το πριμ/ασφάλιστρο μπορεί να είναι άπειρο και συνεπώς ο αντίστοιχος κίνδυνος να είναι *μη αναλήψιμος ή μη ασφαλίσιμος*, ανάλογα με το αν το υπόδειγμα μας αναφέρεται σε ένα χρηματοοικονομικό γραφείο ή μια ασφαλιστική εταιρεία.

***Ορισμός* 7.3.2.** Μια **αρχή υπολογισμού πριμ** (*premium calculation principle*) είναι μια κατανομή πιθανότητας Q επάνω στον μ.χ. $(\Omega, \mathcal{H}_\infty)$ τέτοια ώστε

(i) $Q \overset{pr}{\sim} P$,

(ii) η $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια Q-σύνθετη διαδικασία Poisson,

(iii) $E_Q[X_1] < \infty$.

Πρόταση 7.3.3. Αν η $P^{(\beta)}$ είναι μια αρχή υπολογισμού πριμ, τότε

$$p(P^{(\beta)}) = E_P[N_1]E_P[X_1 e^{\beta(X_1)}]. \tag{7.41}$$

Αν επί πλέον $\beta > \mathbf{0}$ $\quad P_{X_1} - \sigma.\beta.$, τότε

(i) $p(P) < p(P^{(\beta)}) < \infty$,

(ii) $E_P[N_1] < E_{P^{(\beta)}}[N_1]$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 7.2.6 έπεται ότι υπάρχει μια Borel-μετρήσιμη απεικόνιση $\beta : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $E_P[e^{\beta(X_1)}] < \infty$ και $Q = P^{(\beta)}$, με την $P^{(\beta)}$ να ορίζεται όπως στο Λήμμα 7.2.7. Επομένως, η $P^{(\beta)}$ ικανοποιεί τις δύο πρώτες συνθήκες της αρχής υπολογισμού πριμ. Αν επί πλέον ισχύει $E_{P^{(\beta)}}[X_1] < \infty$, τότε όντως υπάρχει μια αρχή υπολογισμού πριμ $P^{(\beta)}$.

Επομένως, αν με $\mathrm{id}_{(0,\infty)}$ συμβολίσουμε την ταυτοτική απεικόνιση στο $(0,\infty)$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} E_{P^{(\beta)}}[X_1] &= \int_\Omega X_1 dP^{(\beta)} = \int_\Omega \mathrm{id}_{(0,\infty)} \circ X_1 dP^{(\beta)} = \int_{(0,\infty)} \mathrm{id}_{(0,\infty)} dP^{(\beta)}_{X_1} \\ &= \int_{(0,\infty)} \mathrm{id}_{(0,\infty)}(x) d\mu(x) = \int_{(0,\infty)} x d\mu(x) \overset{(7.25)}{=} \int_{(0,\infty)} x \frac{e^{\beta(x)}}{E_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]} dP_{X_1}(x) \\ &= \int_\Omega X_1 \frac{e^{\beta(X_1)}}{E_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]} dP = \frac{E_P[X_1 e^{\beta(X_1)}]}{E_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]}, \end{aligned}$$

με την τρίτη και την προτελευταία ισότητα να αποτελούν άμεση συνέπεια του [4], Θεώρημα 7.6, και την τέταρτη ισότητα να ισχύει διότι $P^{(\beta)}_{X_1} = \mu$ (βλ. απόδειξη Λήμματος 7.2.7(iii)).

Άρα δείξαμε ότι

$$E_{P^{(\beta)}}[X_1] = \frac{E_P[X_1 e^{\beta(X_1)}]}{E_P\left[e^{\beta(X_1)}\right]}. \tag{7.42}$$

Επομένως, η υπόθεση $E_{P^{(\beta)}}[X_1] < \infty$ ισοδυναμεί με την $E_P[X_1 e^{\beta(X_1)}] < \infty$.

Επίσης από τις (7.39) και (7.42), λαμβανομένου υπόψη και του το Λήμματος 7.2.7(ii), έχουμε ότι $p(P^{(\beta)}) = \lambda E_P[X_1 e^{\beta(X_1)}] = E_P[N_1] E_P[X_1 e^{\beta(X_1)}]$.

• Αν επί πλέον η $\beta > \mathbf{0}$ $\quad P_{X_1} - \sigma.\beta.$, τότε:

(i) Από τις (7.39) και (7.41) άμεσα προκύπτει ότι το (i) ισχύει.

(ii) Από το Λήμμα 7.2.7(ii) άμεσα έπεται ότι $E_{P^{(\beta)}}[N_1] > \lambda = E_P[N_1]$. □

Παράδειγμα 7.3.4. Οι υποθέσεις της Πρότασης 7.3.3 για την β δεν συνεπάγονται γενικά ότι $E_{P^{(\beta)}}[X_1] \geq E_P[X_1]$, όπως φαίνεται παρακάτω:

Πράγματι, θέτοντας

$$\beta(x) := \begin{cases} n & \text{αν } x < E_P[X_1] \\ 0 & \text{αν } x \geq E_P[X_1] \end{cases},$$

$\mu := E_P\left[(X_1 - E_P[X_1]) e^{\beta(X_1)}\right]$ και $A := \{\omega \in \Omega : X_1(\omega) < E_P[X_1]\} \in \mathcal{H}_\infty$ έχουμε:

$$\mu = \int_A (X_1 - E_P[X_1]) e^{\beta(X_1)} dP + \int_{A^c} (X_1 - E_P[X_1]) e^{\beta(X_1)} dP = J_1(n) + J_2,$$

όπου $J_1(n) := \int_A (X_1 - E_P[X_1]) e^n dP$ και $J_2 := \int_{A^c} (X_1 - E_P[X_1]) dP$.

Από τον ορισμό του A προφανώς έχουμε ότι το ολοκλήρωμα J_2 παίρνει μη αρνητικές τιμές και ότι το ολοκλήρωμα $J_1(n)$ παίρνει αρνητικές τιμές και είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του n. Επί πλέον, επειδή η e^n είναι μη φραγμένη συνάρτηση, θα υπάρχει αρκούντως μεγάλο n ώστε $J_1(n) + J_2(n) < 0$, δηλαδή τέτοιο ώστε η μέση τιμή

$$\begin{aligned} E_P\Big[(X_1 - E_P[X_1]) e^{\beta(X_1)}\Big] < 0 \quad &\Leftrightarrow \quad E_P\left[X_1 e^{\beta(X_1)}\right] - E_P[X_1] E_P\left[e^{\beta(X_1)}\right] < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad E_{P^{(\beta)}}[X_1] - E_P[X_1] < 0 \\ &\Leftrightarrow \quad E_{P^{(\beta)}}[X_1] < E_P[X_1], \end{aligned}$$

με την δεύτερη ισοδυναμία να ισχύει λόγω της (7.42) και διότι $E_P[e^{\beta(X_1)}] \neq 0$, αφού στην Πρόταση 7.3.3 υποθέσαμε ότι $\beta > \mathbf{0} \quad P_{X_1} - \sigma.\beta.$.

Πρόταση 7.3.5. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η συνάρτηση β της Πρότασης 7.2.6 είναι αύξουσα.

(ii) $E_{P(\beta)}[X_1] \geq E_P[X_1]$ για κάθε $X_1 \in \mathcal{L}^1_+(P)$.

Απόδειξη. *(i) ⇒ (ii)* : Έστω ότι η συνάρτηση β της Πρότασης 7.2.6 είναι αύξουσα.
(a) Για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $E_P[e^{\beta(X_1)}]P(X_1 > u) \leq E_P\big[\chi_{\{X_1>u\}}e^{\beta(X_1)}\big]$.

Πράγματι, για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E_P\big[\chi_{\{X_1>u\}}e^{\beta(X_1)}\big] &= \int \chi_{\{X_1>u\}}e^{\beta(X_1)}dP = \int_{\{X_1>u\}} e^{\beta(X_1)}dP \\ &\geq e^{\beta(u)}\int_{\{X_1>u\}} dP = E_P[e^{\beta(X_1)}]P(X_1 > u), \end{aligned}$$

με την ανισότητα να ισχύει διότι $\{X_1 > u\} = \{\beta(X_1) \geq \beta(u)\}$, αφού έχουμε ότι η β είναι εξ'υποθέσεως αύξουσα, και την τελευταία ισότητα να ισχύει αν στο ενδιάμεσο βήμα (g) της απόδειξης του (i) της Πρότασης 7.2.6, θέσουμε $\alpha := \beta(u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}_+$.
(b) $E_P\big[X_1e^{\beta(X_1)}\big] = \int_{\mathbb{R}_+} E_P\big[\chi_{\{X_1>u\}}e^{\beta(X_1)}\big]d\lambda(u)$.

Πράγματι, έστω $A := \{(\omega, u) : \omega \in \Omega \quad \& \quad 0 \leq u < X_1(\omega)\}$ και θέτουμε $h(\omega, u) := \chi_A(\omega, u)e^{\beta(X_1(\omega))}$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και $u \in \mathbb{R}_+$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} (P \otimes \lambda)(h) &:= \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} h(\omega, u)d(P \otimes \lambda)(\omega, u) = \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \chi_A(\omega, u)e^{\beta(X_1(\omega))}d(P \otimes \lambda)(\omega, u) \\ &= \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \chi_\Omega(\omega)\chi_{[0,X_1(\omega))}(u)e^{\beta(X_1(\omega))}d(P \otimes \lambda)(\omega, u) \\ &= \int_\Omega \left(\int_{[0,X_1(\omega))} d\lambda(u)\right)e^{\beta(X_1(\omega))}dP(\omega) = \int_\Omega \lambda\Big(\big[0, X_1(\omega)\big)\Big)e^{\beta(X_1(\omega))}dP(\omega) \\ &= \int_\Omega X_1(\omega)e^{\beta(X_1(\omega))}dP(\omega) = E_P\big[X_1e^{\beta(X_1)}\big], \end{aligned}$$

με την τέταρτη ισότητα να αντλεί την ισχύ της από το Θεώρημα Fubini (βλ. π.χ. [4], Θεώρημα 9.12).

Λαμβάνοντας, εκ νέου υπόψη το Θεώρημα Fubini, ομοίως με τα παραπάνω, έχουμε:

$$\begin{aligned} E_P\big[X_1e^{\beta(X_1)}\big] &= (P \otimes \lambda)(h) = \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \chi_A(\omega, u)e^{\beta(X_1(\omega))}d(P \otimes \lambda)(\omega, u) \\ &= \int_{\Omega\times\mathbb{R}_+} \chi_{[0,\infty)}(u)\chi_{\{X_1>u\}}(\omega)e^{\beta(X_1(\omega))}d(P \otimes \lambda)(\omega, u) \end{aligned}$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_\Omega \chi_{\{X_1>u\}}(\omega) e^{\beta(X_1(\omega))} dP(\omega) \right) d\lambda(u) = \int_{\mathbb{R}_+} E_P\big[\chi_{\{X_1>u\}} e^{\beta(X_1)}\big] d\lambda(u).$$

Επομένως δείξαμε το (b).

Οπότε, τελικά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E_P\big[X_1 e^{\beta(X_1)}\big] &\stackrel{(\mathbf{b})}{=} \int_{\mathbb{R}_+} E_P\big[\chi_{\{X_1>u\}} e^{\beta(X_1)}\big] d\lambda(u) \stackrel{(\mathbf{a})}{\geq} \int_{\mathbb{R}_+} E_P[e^{\beta(X_1)}] P(X_1 > u) d\lambda(u) \\ &= E_P[e^{\beta(X_1)}] \int_{\mathbb{R}_+} P(X_1 > u) d\lambda(u) = E_P[e^{\beta(X_1)}] E_P[X_1], \end{aligned}$$

με την τελευταία ισότητα να αντλεί την ισχύ της από το ότι ως γνωστόν ισχύει η $E_P[X_1] = \int_{\mathbb{R}_+} P(X_1 > u) d\lambda(u)$, κάτι που αποδεικνύεται ομοίως με το (b), λαμβανομένου υπόψη του Θεωρήματος Fubini και για $h := \chi_A$.

Δηλαδή δείξαμε ότι $E_P\big[X_1 e^{\beta(X_1)}\big] \geq E_P[e^{\beta(X_1)}] E_P[X_1]$, που, λαμβάνοντας υπόψη την (7.42) και το ότι η $E_P[e^{\beta(X_1)}] \neq 0$, ισοδυναμεί με την ανισότητα του (ii) για κάθε $X_1 \in \mathcal{L}^1(P)$.

(ii) $\Rightarrow$ *(i)* : Έστω ότι για κάθε τ.μ. $X_1 \in \mathcal{L}^1(P)$ ισχύει η ανισότητα

$$E_{P^{(\beta)}}[X_1] \geq E_P[X_1]. \tag{7.43}$$

Έστω επίσης $x, y \in \mathbb{R}_+$ με $0 \leq x < y$, καθώς και $p \in (0,1)$.

Ας θεωρήσουμε, τώρα, μια τ.μ. X_1 τέτοια ώστε να έχει σύνολο τιμών $R_{X_1} = \{x, y\}$ και να ισχύει ότι $P(X_1 = x) = 1 - P(X_1 = y) = p$. Τότε, προφανώς ισχύει $X_1 \in \mathcal{L}^1(P)$. Οπότε, λαμβάνοντας υπόψη την (7.42) η ανισότητα (7.43) γίνεται

$$\big[x e^{\beta(x)} p + y e^{\beta(y)} (1-p)\big] \big[p e^{\beta(x)} + (1-p) e^{\beta(y)}\big]^{-1} \geq xp + y(1-p) \Leftrightarrow \beta(x) \leq \beta(y).$$

Επομένως, δείξαμε ότι η β είναι αύξουσα, δηλαδή ισχύει η δεύτερη συνεπαγωγή. □

Πριν παραθέσουμε, όμως, τρεις αρχές υπολογισμού πριμ (ασφαλίστρου), που αποτελούν τρία χαρακτηριστικά παραδείγματα όπου βρίσκει εφαρμογή η τελευταία πρόταση, κρίνεται σκόπιμο να δοθεί η ακόλουθη παρατήρηση.

Παρατήρηση 7.3.6. Η Πρόταση 7.2.6 μας εξασφαλίζει ότι η σ.δ. $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συνολικών απαιτήσεων είναι μια $P^{(\beta)}$-σύνθετη διαδικασία Poisson κι επομένως θα έχει ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις, αλλά και πεπερασμένες μέσες τιμές, αφού άλλωστε ισχύει και η $E_{P^{(\beta)}}[S_t] = p(P^{(\beta)}) < \infty$. Τότε, από το Θεώρημα 4.1.2, για $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} = \{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχουμε ότι η σ.δ. $\{S_t - E_{P^{(\beta)}}[S_t]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $P^{(\beta)}$-martingale ως προς τη διύλιση $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Παράδειγμα (Αρχή Αναμενόμενης Αξίας) 7.3.7. Αν $\beta(x) = c$ για κάθε $x \in (0, \infty)$, όπου $c \in \mathbb{R}$ σταθερά, τότε από το Λήμμα 7.2.7(ii) άμεσα έπεται ότι $E_{P^{(\beta)}}[N_1] = E_P[N_1] e^c$, από την (7.42) άμεσα έπεται ότι $E_{P^{(\beta)}}[X_1] = E_P[X_1]$, από την (7.41) έχουμε ότι $p(P^{(\beta)}) = p(P)e^c$ και τέλος από την Παρατήρηση 7.3.6 έχουμε ότι η σ.δ. $\{S_t - \lambda t e^c E_P[X_1]\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $P^{(\beta)}$-martingale ως προς τη διύλιση $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Παρατηρούμε ότι στην περίπτωσή μας το αναμενόμενο μέγεθος απαίτησης παραμένει αμετάβλητο ως προς την νέα (ουδέτερη ως προς τον κίνδυνο) κατανομή πιθανότητας. Αντίθετα η παράμετρος κινδύνου λ της υποκείμενης διαδικασίας Poisson πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα e^c, επιδρόντας έτσι με τρόπο ανάλογο και στο αντίστοιχο πριμ (ασφάλιστρο).

Παράδειγμα 7.3.8. Αν $\beta(x) = \ln(c + bx)$ για κάθε $x \in (0,\infty)$, όπου το $b \in (0,\infty)$ και το $c = 1 - bE_P[X_1] \in (0,\infty)$, επειδή έχουμε ότι

$$E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big] = E_P[c + bX_1] = c + bE_P[X_1] = 1 - bE_P[X_1] + bE_P[X_1] = 1$$

και ότι

$$\begin{aligned} E_P\big[X_1 e^{\beta(X_1)}\big] &= E_P\big[X_1(c+bX_1)\big] = cE_P[X_1] + bE_P[X_1^2] \\ &= cE_P[X_1] + b\big(E_P^2[X_1] + V_P[X_1]\big) \\ &= E_P[X_1](c + bE_P[X_1]) + bV_P[X_1] = E_P[X_1] + bV_P[X_1], \end{aligned}$$

τότε ομοίως με το Παράδειγμα 7.3.7 έχουμε:

- $E_{P^{(\beta)}}[N_1] = E_P[N_1] = \lambda$.
- $E_{P^{(\beta)}}[X_1] = E_P\big[X_1 e^{\beta(X_1)}\big] = E_P[X_1] + bV_P[X_1]$.
- $p(P^{(\beta)}) = p(P) + b\lambda V_P[X_1]$.
- η σ.δ. $\{S_t - \lambda t(E_P[X_1] + bV_P[X_1])\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $P^{(\beta)}$-martingale ως προς τη διύλιση $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι για την παρούσα αρχή υπολογισμού η παράμετρος κινδύνου παραμένει αμετάβλητη, ενώ το αναμενόμενο μέγεθος απαίτησης (κάτω από την $P^{(\beta)}$) αυξάνεται (σε σχέση με αυτό κάτω από την P) κατά έναν γραμμικό όρο ανάλογο της διακύμανσης της τ.μ. X_1. Το γεγονός αυτό επιδρά με τρόπο ανάλογο και στον υπολογισμό του πριμ (ασφαλίστρου) διαφοροποιούμενο μόνο κατά τον παράγοντα κλίμακας ($b\lambda$ αντί για λ).

Παράδειγμα (Αρχή του Esscher) 7.3.9. Αν $\beta(x) = cx - \ln E_P\big[e^{cX_1}\big]$ για κάθε $x \in (0,\infty)$, όπου $c \in (0,\infty)$ σταθερά, τότε επειδή $E_P\big[e^{\beta(X_1)}\big] = (E_P\big[e^{cX_1}\big])^{-1}E_P\big[e^{cX_1}\big] = 1$ και $E_P\big[X_1 e^{\beta(X_1)}\big] = E_P\big[X_1 e^{cX_1}\big](E_P\big[e^{cX_1}\big])^{-1}$, ομοίως με το Παράδειγμα 7.3.7 έχουμε:

- $E_{P^{(\beta)}}[N_1] = E_P[N_1] = \lambda$.

- $E_{P^{(\beta)}}[X_1] = E_P\big[X_1 e^{\beta(X_1)}\big] = E_P\big[X_1 e^{cX_1}\big]/E_P\big[e^{cX_1}\big]$.
- $p(P^{(\beta)}) = p(P)c^*$, όπου $c^* := E_P\big[X_1 e^{cX_1}\big]/E_P[X_1]E_P\big[e^{cX_1}\big] > 1$.
- η σ.δ. $\{S_t - \lambda t(E_P\big[X_1 e^{cX_1}\big]/E_P\big[e^{cX_1}\big])\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $P^{(\beta)}$-martingale ως προς τη διύλιση $\{\mathcal{H}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι για την αρχή υπολογισμού του Esscher η παράμετρος κινδύνου παραμένει αμετάβλητη, ενώ το αναμενόμενο μέγεθος απαίτησης (κάτω από την $P^{(\beta)}$) πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα c^*, ασκώντας αντίστοιχη επίδραση και στο υπολογισθέν πριμ (ασφάλιστρο).

Συνοψίζοντας, μπορούμε να ισχυριστούμε πως η πρώτη αρχή υπολογισμού πριμ φαίνεται να είναι κατάλληλη για καταστάσεις όπου η αγορά (ασφαλιστική εταιρεία) αναμένει αποκλειστικά αύξηση της συχνότητας εμφάνισης των απαιτήσεων, ενώ οι άλλες δύο για καταστάσεις όπου αναμένεται αύξηση των μεγεθών απαίτησης. Μάλιστα, η αρχή του Esscher φαίνεται να μετατοπίζει την προσδοκώμενη πολλαπλασιαστική επίδραση από τον παράγοντα κινδύνου της αρχής αναμενόμενης αξίας, στο αναμενόμενο μέγεθος ζημιάς. Παράλληλα, διατηρεί την σταθερότητα της παραμέτρου κινδύνου, όπως η δεύτερη αρχή, δίνοντάς μας έτσι την αίσθηση ενός «συνδυασμού» των δύο πρώτων αρχών υπολογισμού.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α΄

Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου και Θεωρίας Πιθανοτήτων

Στο παράρτημα αυτό δίνονται ορισμένοι βασικοί ορισμοί και χρήσιμα μετροθεωρητικά και πιθανοθεωρητικά αποτελέσματα, συμπληρωματικά των όσων αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 1, καθώς επίσης και οι κατανομές πιθανότητας στις οποίες έγινε αναφορά στην παρούσα εργασία.

Α΄.1 Ορισμοί και Χρήσιμα Αποτελέσματα

Πρόταση&Ορισμός Α΄.1.1. Έστω (Ω, Σ, μ) χ.μ. και $f : \Omega \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θέτουμε $\nu := \nu(f, \mu) : \Sigma \to [0, \infty]$ ώστε $\nu(A) := \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \Sigma$. Το ν ονομάζεται το **αόριστο ολοκλήρωμα της** f (ως προς μ) και ισχύουν τα εξής:

(i) ν μέτρο,

(ii) $\nu \ll \mu$,

(iii) Αν $g : \Omega \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση, τότε $\int_A g d\nu = \int_A g f d\mu$.

Για την απόδειξη της παραπάνω πρότασης βλ. π.χ. [4], Πόρισμα 6.12.

Θεώρημα (Radon-Nikodym) Α΄.1.2. Έστω μ, ν πεπερασμένα μέτρα επάνω στον μ.χ. (Ω, Σ). Αν $\nu \ll \mu$, τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ ώστε

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \text{για κάθε} \quad A \in \Sigma.$$

Η f ονομάζεται **παράγωγος Radon-Nikodym του** ν **ως προς** μ και είναι $\mu - \sigma.\beta.$ μοναδική.

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. π.χ. [4], Θεώρημα 10.12(β).

Λήμμα Α'.1.3. *Έστω (Ω, Σ, P) χ.π. και $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σ.δ. με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τέτοια ώστε $X_0(\omega) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις αν και μόνο αν για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει*

$$P_{X_{t+h}-X_t} = P_{X_h}. \tag{S}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του λήμματος θα γίνει βάσει των παρακάτω δύο βημάτων:
(a) Αν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις, τότε ισχύει η (S).

Πράγματι, έστω ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες (και ανεξάρτητες) προσαυξήσεις, τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ ισχύει $P_{X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h}} = P_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}}$, απ'όπου για $j = 1$ έχουμε $P_{X_{t_1+h}-X_h} = P_{X_{t_1}}$ για κάθε $h, t_1 \in \mathbb{R}_+$, διότι $t_0 = 0$ και $X_0(\omega) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Θέτοντας στην τελευταία σχέση $h := t \in \mathbb{R}_+$ και $t_1 := h \in \mathbb{R}_+$ έχουμε την (S).
(b) Αν ισχύει η (S), τότε η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις.

Πράγματι, έστω $m \in \mathbb{N}^*$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και $h \in \mathbb{R}_+$. Στη συνέχεια διακρίνουμε τις παρακάτω δύο περιπτώσεις:
• Αν $h \in \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε $t_{j-1} + h < t_j$, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} P_{X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h}} &= P_{X_{t_j+h}-X_{t_j}+X_{t_j}-X_{t_{j-1}+h}} = P_{X_{t_j+h}-X_{t_j}} * P_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}+h}} \\ &\overset{(S)}{=} P_{X_h} * P_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}+h}}, \end{aligned}$$

με την δεύτερη ισότητα να αποτελεί άμεση συνέπεια της εξ'υποθέσεως ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων της σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Ομοίως αποδεικνύεται ότι

$$P_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}} = P_{X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h}+X_{t_{j-1}+h}-X_{t_{j-1}}} = P_{X_h} * P_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}+h}}$$

κι επομένως έχουμε ότι $P_{X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h}} = P_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}}$, άρα η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις.
• Αν $h \in \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε $t_{j-1}+h \geq t_j$, τότε ομοίως με τα όσα αναφέρθηκαν στην πρώτη περίπτωση αποδεικνύεται ότι $P_{X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h}} * P_{X_{t_{j-1}+h}-X_{t_j}} = P_{X_h} = P_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}} * P_{X_{t_{j-1}+h}-X_{t_j}}$, απ'όπου έπεται ότι $P_{X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h}} = P_{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}}$, κάτι που ουσιαστικά ολοκληρώνει την απόδειξη του (b).

Από τα (a) και (b) έπεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα Α'.1.4. *Έστω (Ω, Σ, P) χ.π., $n \in \mathbb{N}^*$ και $k \in \mathbb{N}$ με $k \geq 2$. Έστω επίσης $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}_n^*}$ μία ανεξάρτητη οικογένεια τ.μ. και $\{I_j\}_{j\in\mathbb{N}_k^*}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του*

$\{1, \ldots, n\}$ ώστε $I_j \cap I_\ell = \varnothing$ για κάθε $j, \ell \in \mathbb{N}_k^*$ με $j \neq \ell$, καθώς και $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}_k^*}$ μία οικογένεια τυχαίων διανυσμάτων $Y_j := (X_i : i \in I_j) : \Omega \to \mathbb{R}^{cardI_j}$ για κάθε $j \in \mathbb{N}_k^*$. Τότε ισχύουν τα εξής:

(i) Η οικογένεια $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}_k^*}$ είναι ανεξάρτητη.

(ii) Αν για κάθε $j \in \mathbb{N}_k^*$ η συνάρτηση $h_j : \mathbb{R}^{cardI_j} \to \mathbb{R}$ είναι τ.μ., τότε η οικογένεια $\{h_j \circ Y_j\}_{j\in\mathbb{N}_k^*}$ είναι ανεξάρτητη.

Σημειώνουμε ότι με $cardA$ συμβολίζουμε την πληθικότητα ενός συνόλου A. Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βλ. π.χ. [6], Πόρισμα 3.2.8.

Θεώρημα Α΄.1.5. Έστω (Ω, Σ, P) χ.π., $n \in \mathbb{N}^*$ και το τυχαίο διάνυσμα $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ είναι ανεξάρτητη.

(ii) Η κατανομή πιθανότητας $P_{\mathbf{X}}$ μπορεί να εκφραστεί ως ένα γινόμενο πιθανοτήτων $P_1, \ldots, P_n : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$.

(iii) Η $P_{\mathbf{X}}$ είναι το μέτρο γινόμενο των κατανομών πιθανότητας $P_{X_1}, \ldots, P_{X_n}$ των τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$, αντίστοιχα. Δηλαδή ισχύει $P_{\mathbf{X}} = P_{X_1} \otimes \cdots \otimes P_{X_n}$.

(iv) Για τις αντίστοιχες *σ.κ.π.* ισχύει $F_{\mathbf{X}}(x) = \prod_{k=1}^n F_{X_k}(x_k)$ για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βλ. π.χ. [6], Θεώρημα 3.2.10.

Προτάσεις&Ορισμοί Α΄.1.6. Έστω (Ω, Σ, P) χ.π. και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ τ.μ.. Τότε:

(i) Η συνάρτηση $\varphi_X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με τύπο $\varphi_X(u) := E[e^{\mathrm{i}uX}]$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$, όπου i είναι η φανταστική μονάδα, ονομάζεται **χαρακτηριστική συνάρτηση** ($\chi.\sigma.$) **ή μετασχηματισμός Fourier** της τ.μ. X, καθορίζει μονοσήμαντα την κατανομή της (βλ. π.χ. [30], Section 16.6) και, εφόσον υπάρχει η απλή ροπή n τάξης, η n-οστή παράγωγός της στη θέση $u = 0$ ισούται με $\mathrm{i}^n EX^n$ (βλ. π.χ. [1], Θεώρημα σελ. 75).

(ii) Η συνάρτηση $M_X : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ με τύπο $M_X(t) := E[e^{tX}]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ονομάζεται **ροπογεννήτρια συνάρτηση** ($\rho.\gamma.\sigma.$) της τ.μ. X, και εφόσον υπάρχει $c \in (0, \infty)$ ώστε $M_X(t) < \infty$ για κάθε $t \in (-c, c)$, η n-οστή παράγωγός της στη θέση $t = 0$ ισούται με την n-οστή απλή ροπή EX^n (βλ. π.χ. [1], σελ. 61).

(iii) Αν $R_X = \mathbb{N}$, τότε η συνάρτηση $m_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $m_X(z) := E[z^X] = \sum_{n=0}^{\infty} z^n P(X = n)$ για κάθε $z \in \mathbb{R}$, ονομάζεται **πιθανογεννήτρια συνάρτηση** (π.γ.σ.) της τ.μ. X. Η $m_X(z) < \infty$ για κάθε $z \in [-\rho, \rho]$, όπου $\rho \in (0, \infty)$ η ακτίνα σύγκλισης της αντίστοιχης δυναμοσειράς. Προφανώς, $\rho \geq 1$. Η n-οστή παράγωγος της m_X στη θέση $z = 0$ ισούται με την πιθανότητα η τ.μ. X να πάρει την τιμή n, δηλαδή με την $P(X = n)$. Προφανώς, η m_X καθορίζει μονοσήμαντα την σ.π. της τ.μ. X (βλ. π.χ. [1], σελ. 68-69).

Α′.2 Χρήσιμες Κατανομές Πιθανότητας

Παρακάτω, παραθέτουμε τις κατανομές πιθανότητας στις οποίες έγινε αναφορά στην παρούσα εργασία. Σύμφωνα με τα όσα έχουν ήδη αναφερθεί στο Κεφάλαιο 1, ορίζουμε μια κατανομή πιθανότητας $\mathbf{K}(\theta)$ δίνοντας απλώς την αντίστοιχη σ.(π.)π..

Ακόμη, δίνουμε και την αντίστοιχη χ.σ.,[4] η οποία όπως αναφέρθηκε και στην Πρόταση Α′.1.6(i) καθορίζει μονοσήμαντα μια κατανομή πιθανότητας – δηλαδή δύο τ.μ. με την ίδια χ.σ. έχουν την ίδια κατανομή – καθώς και την μέση τιμή και διακύμανση της κάθε κατανομής. Οπότε έχουμε:

(i) **Εκθετική Κατανομή** ($P_X = \mathbf{Exp}(\beta)$)

- $f_X(x) = \beta e^{-\beta x}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$, με $\beta > 0$.
- $\varphi_X(u) = \beta/(\beta - \mathrm{i}u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.
- $EX = 1/\beta$, $VX = 1/\beta^2$.

(ii) **Κατανομή Γάμμα** ($P_X = \mathbf{Ga}(\alpha, \beta)$)

- $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$, με $\alpha, \beta > 0$.
- $\varphi_X(u) = [\beta/(\beta - \mathrm{i}u)]^\alpha$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.
- $EX = \alpha/\beta$, $VX = \alpha/\beta^2$.

Σημειώνουμε ότι $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ για κάθε $\alpha > 0$.

[4] *Παρακάτω, δίνουμε μόνο την χ.σ. της τ.μ. X και όχι την ρ.γ.σ. ή και την π.γ.σ.. Αυτό συμβαίνει διότι η πρώτη (εφόσον υπάρχει) υπολογίζεται ομοίως με την χ.σ. και ο τύπος της προκύπτει ουσιαστικά από τον τύπο της τελευταίας, αντικαθιστώντας το u με το $-\mathrm{i}t$. Δηλαδή, καταχρηστικά και για λόγους συντομίας, μπορούμε να γράψουμε ότι η $M_X(t) = \varphi_X(-\mathrm{i}t)$. Ομοίως, καταχρηστικά μπορούμε να γράψουμε ότι η $m_X(z) = \varphi_X(\frac{\ln z}{\mathrm{i}})$.*

(iii) **Κατανομή Poisson** ($P_X = \mathbf{P}(\lambda)$)

- $f_X(x) = e^{-\lambda}(\lambda^x/x!)$ για κάθε $x \in \mathbb{N}$, με $\lambda > 0$.
- $\varphi_X(u) = e^{\lambda(e^{iu}-1)}$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.
- $EX = VX = \lambda$.

(iv) **Διωνυμική Κατανομή** ($P_X = \mathbf{B}(n,p)$)

- $f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{N}_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, $p \in (0,1)$.
- $\varphi_X(u) = [(1-p) + pe^{iu}]^n$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$
- $EX = np$, $VX = np(1-p)$.

Σημειώνουμε ότι για $n = 1$ (και $p \in (0,1)$) η διωνυμική κατανομή ονομάζεται **κατανομή Bernoulli** ($P_X = \mathbf{B}(p)$).

(v) **Γεωμετρική Κατανομή (τύπου I)** ($P_X = \mathbf{G}(p)$)

- $f_X(x) = p(1-p)^x$ για κάθε $x \in \mathbb{N}$, με $p \in (0,1)$.
- $\varphi_X(u) = p/[(1-(1-p)e^{iu}]$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$
- $EX = 1/p$, $VX = (1-p)/p^2$.

(vi) **Αρνητική Διωνυμική Κατανομή (τύπου I)** ($P_X = \mathbf{NB}(r,p)$)

- $f_X(x) = \binom{x+r}{r} p^r (1-p)^x$ για κάθε $x \in \mathbb{N}$, $r \in (0,\infty)$, $p \in (0,1)$.
- $\varphi_X(u) = \big(p/[(1-(1-p)e^{iu}]\big)^r$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$
- $EX = r/p$, $VX = r(1-p)/p^2$.

Σημειώνουμε ότι $\binom{x+r}{r} := \Gamma(x+r)/[x!\Gamma(r)]$ για κάθε $x, r \in (0,\infty)$.

Παράρτημα Β΄

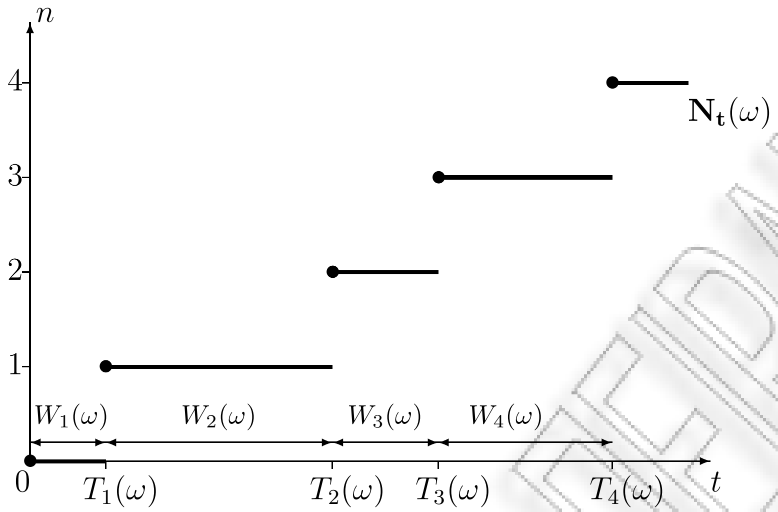
Γραφήματα Σ.Δ.

Παρακάτω δίνονται συναρτήσει των χρόνων άφιξης των απαιτήσεων κάποια ενδεικτικά γραφήματα των $\sigma.\delta.$

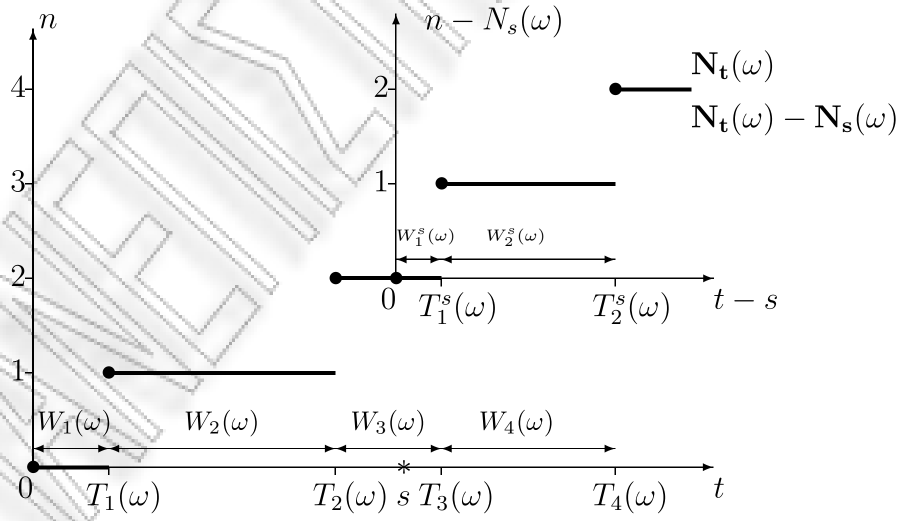
- του αριθμού των απαιτήσεων (συναρτήσει και των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων),
- μεγέθους απαίτησης και συνολικών απαιτήσεων (σε σχέση με το ενεργητικό της ασφαλιστικής εταιρείας), και
- του αποθεματικού (πάλι σε σχέση με το ενεργητικό της ασφαλιστικής εταιρείας),

τα οποία έχουν ρόλο συμπληρωματικό ως προς τους αντίστοιχους ορισμούς (βλ. Ορισμούς 3.2.1 και 3.2.2, καθώς και Ενότητες 3.5 και 5.1) και αποσκοπούν στην καλύτερη κατανόησή τους μέσω της εποπτείας.

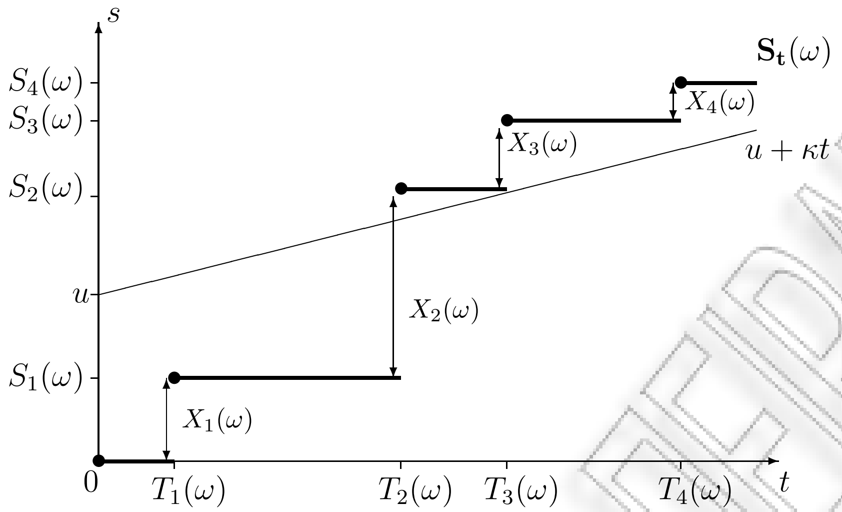
Τον ίδιο σκοπό εξυπηρετεί και το δεύτερο γράφημα, που αφορά την s-μετατοπισμένη $\sigma.\delta.$ άφιξης και ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων (βλ. Ενότητα 4.2) και ουσιαστικά δίνει μια εικόνα του *είδους της αυτοομοιότητας* το οποίο αναφέρεται στην Παρατήρηση 4.2.3(a).



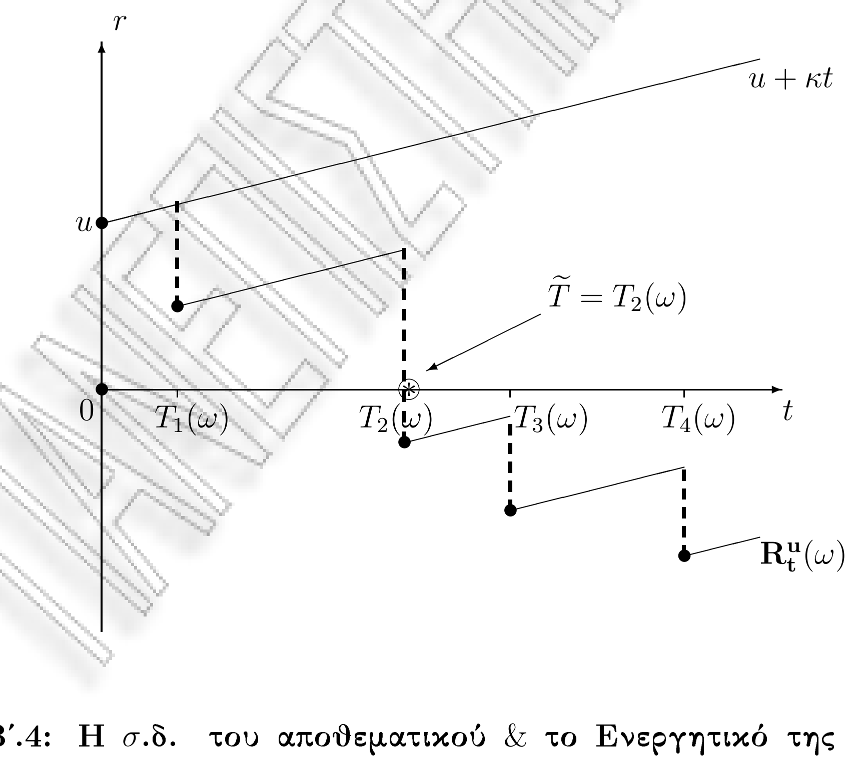
Σχήμα Β΄.1: Η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων & οι χρόνοι άφιξης και οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων



Σχήμα Β΄.2: Η s-μετατοπισμένη σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων και ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων



Σχήμα Β΄.3: Οι $\sigma.\delta.$ **μεγέθους απαίτησης και συνολικών απαιτήσεων & το Ενεργητικό της Ασφαλιστικής Εταιρίας**



Σχήμα Β΄.4: Η $\sigma.\delta.$ **του αποθεματικού & το Ενεργητικό της Ασφαλιστικής Εταιρίας**

Βιβλιογραφία

[1] Αθανασόπουλος Δ.: *Θεωρία Πιθανοτήτων: Τόμος ΙΙ*, Εκδόσεις Σταμούλη, Πειραιάς (1991).

[2] Γεωργιακόδης Μ.-Γεωργιάδης Π.: *Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας: Τόμος Ι*, Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα (1995).

[3] Γεωργιακόδης Μ.-Γεωργιάδης Π.: *Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας: Τόμος ΙΙ*, Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα (1995).

[4] Κουμμουλής Γ.-Νεγρεπόντης Σ.: *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία (1991).

[5] Μαχαιράς Ν.Δ.: *Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης*, Πειραιάς 2005.

[6] Μαχαιράς Ν.Δ.: *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πειραιάς 2006.

[7] Νεγρεπόντης Σ.-Γιωτόπουλος Σ.-Γιαννακούλιας Ε.: *Απειροστικός Λογισμός: Τόμος Ι*, Εκδόσεις Συμμετρία (1997).

[8] Νεγρεπόντης Σ.-Γιωτόπουλος Σ.-Γιαννακούλιας Ε.: *Απειροστικός Λογισμός: Τόμος ΙΙα*, Εκδόσεις Συμμετρία (1997).

[9] Παναγιωτόπουλος Α.-Σαπουνάκης Α.: *Απειροστικός Λογισμός: Τόμος 1*, Εκδόσεις Σταμούλη (1989).

[10] Παναγιωτόπουλος Α.-Σαπουνάκης Α.: *Απειροστικός Λογισμός: Τόμος 2*, Εκδόσεις Σταμούλη (1990).

[11] Artzner, P. & Delbaen, F. (1989): Term structure of interest rates, the martingale approach, *Advances in Applied Mathematics* **10**, 95-129.

[12] Bauer, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Walter de Gruyter, Berlin-New York (1991), 4 Auflage.

[13] Billingsley, P.: *Probability and Measure*, Third Edition, Wiley - Interscience, New York (1995).

[14] Beirlant, J. & Teugels, J.L. (1992): Modelling large claims in non-life insurance, *Insurance Math. Econom.* **11**, 17-29.

[15] Delbaen, F. (1986): Equity linked policies, *Bulletin de l'ARAB* **80**, 33-52.

[16] Delbaen, F. & Haezendonck, J. (1987): Classical risk theory in an economic environment, *Insurance Math. Econom.* **6**, 85-116.

[17] Delbaen, F. & Haezendonck, J. (1989): A martingale approach to premium calculation principles in an arbitrage free market, *Insurance Math. Econom.* **8**, 269-277.

[18] J. Elstrodt: *Mass-und Integrationstheorie*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York (1996).

[19] Embrechts, P. & Veraverbeke, N. (1982): Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims, *Insurance Math. and Econom.* **1**, 55-72.

[20] Embrechts, P. & Villaseñor, J.A. (1988): Ruin estimates for large claims, *Insurance Math. Econom.* **7**, 269-274.

[21] Gerber, H.U.: *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, Heubner Foundation Monograph, Homewood, Illinois (1979).

[22] Harrison, J.M. & Kreps, D.M. (1979): Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets, *Journal of Economic Theory* **20**, 381-408.

[23] Harrison, J.M. & Pliska, S.R. (1981): Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, *Stochastic Processes and their Applications* **11**, 215-260.

[24] Klüppelberg, C. (1989): Estimation of ruin probabilities by means of hazard rates, *Insurance Math. Econom.* **8**, 279-285.

[25] K.D. Schmidt: *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart (1996).

[26] Paulsen, J. (1993): Risk theory in a stochastic economic environment, *Stochastic Process Appl.* **46**, 327-361.

[27] Sondermann, D. (1991): Reinsurance in arbitrage free markets, *Insurance Math. Econom.* **10**, 191-202.

[28] Thorin, O. & Wikstad, N. (1977): Calculation of ruin probabilities when the claim distribution is lognormal, *ASTIN Bull.* **9**, 231-246.

[29] Watanabe, S. (1964): On discontinuous additive functionals and Lévy measures of a Markov process, *Japan J. Math.* **34**, 53-70.

[30] Williams, D.: *Probability with Martingales*, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

Ευρετήριο