ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗ «ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗ» ΜΕ ΕΙΔΙΚΕΥΣΗ «ΧΡΗΜΑΤΟΔΟΤΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΕΝΔΥΣΕΙΣ »

Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία

«Αποτίμηση Δικαιωμάτων Προαίρεσης με ένα Διω-Τριωνυμικό δέντρο»

του
Παναγιώτης Δ. Κουρμπέλης
ΜΧΑΝ1813

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ: Επίκουρος Καθηγητής Ν. Εγγλέζος
ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ: Αναπληρωτής Καθηγητής Ν.Κουρογένης
Επίκουρος Καθηγητής Μ. Ανθρωπέλος

Πειραιάς
Μάρτιος 2021

Περίληψη

Σκοπός της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η αποτίμηση των δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς που υπόκεινται σε άνω και κάτω φράγμα, με τη χρήση διω-τριωνυμικών, τριωνυμικών και διωνυμικών δέντρων. Πιο συγκεκριμένα, πλαισιώνεται θεωρητικά, η διαπραγμάτευση των δικαιωμάτων προαίρεσης στην αγορά, με αναφορές στα Αμερικανικά και Ευρωπαϊκά Δικαιώματα, ενώ παράλληλα γίνονται αναφορές στις στρατηγικές των δικαιωμάτων προαίρεσης, με στόχο την αναγωγή τους σε σημαντικά χρηματοπιστωτικά εργαλεία. Στο δεύτερο μέρος της εργασίας επιχειρείται προσέγγιση της αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης της αγοράς που υπόκεινται σε άνω και κάτω φράγμα, με αναφορές στις μαθηματικές σχέσεις που διέπουν τις περιπτώσεις του διωνυμικού, τριωνυμικού και διωτριωνυμικού μοντέλου αποτίμησης, τόσο στο πλαίσιο των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, όσο και στον συγκερασμό αυτών με προγραμματιστικές μεθόδους, για την ανάδειξη ευρημάτων, στο περιβάλλον της R.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Δικαιώματα Προαίρεσης Αγοράς, Διωνυμικό Δέντρο, Τριωνυμικό Δέντρο, Διω-Τριωνυμικό Δέντρο, Αριθμητική Ανάλυση, Μοντέλα Αποτίμησης Δικαιωμάτων

Abstract

The purpose of this dissertation is the evaluation of market double barrier options, using bino-trinomial, trinomial and binomial trees. More specifically, the trading of options in the market is theoretically framed, with references to American and European Rights, while references are made to the strategies of options, in order to highlight them as important financial instruments. The second part of the present thesis, is an attempt to approach the valuation of market double barrier options, with references to the mathematical relations characterizing the cases of the binomial, trinomial and bino-trinomial valuation model, both in the context of financial mathematics and their combination with programming methods. in order to highlight findings, in the environment of R

Πίνακας Περιεχομένων

Διαγράμματα και Πίνακες

Εισαγωγή

Τα δικαιώματα προαίρεσης άρχισαν να γίνονται αντικείμενο διαπραγμάτευσης περί το 1973. Η χρησιμότητά τους, παρά τα σενάρια για υψηλό ρίσκο, είναι ιδιαίτερα σημαντική σε επενδυτικό πλαίσιο. Τα οφέλη που αναδεικνύονται από τα δικαιώματα προαίρεσης είναι πολλά και μάλιστα κρίνεται σημαντική η συνεισφορά τους, στην ενίσχυση της αξίας ενός χαρτοφυλακίου επενδύσεων. Αν και έχουν παρέλθει πολλά χρόνια από τότε που για πρώτη φορά εισήχθησαν στις χρηματιστηριακές αγορές, η αξία τους έχει αρχίσει να αναδεικνύεται περισσότερο κατά τα τελευταία χρόνια.

Η εισαγωγή τους σε ένα χαρτοφυλάκιο, έχει αποδειχθεί για πολλούς ατελέσφορη και έχει δημιουργήσει εκτεταμένα προβλήματα, όμως οι υφιστάμενοι αυτοί προβληματισμοί απορρέουν κυρίως από εμπόδια που σχετίζονται με τη δυσκολία κατανόησής τους ή ελλιπούς εκπαίδευσης εκ μέρους των επενδυτών.

Ως εκ τούτου η μη σωστή εφαρμογή τους, ως ενός αρκετά ισχυρού εργαλείου, αποδεδειγμένα μπορεί να λειτουργήσει ως ανασταλτικός παράγοντας. Ένας καλός επενδυτής, πρέπει να λάβει όλη την απαιτούμενη πληροφόρηση προκειμένου να είναι σε θέση να αξιολογήσει στην εκάστοτε περίπτωση, την αξία ενός δικαιώματος προαίρεσης.

Τα πλεονεκτήματα τα οποία απορρέουν από την χρήση δικαιωμάτων προαίρεσης σχετίζονται με την υψηλή τους αποδοτικότητα, με το μειωμένο ρίσκο που παρουσιάζουν έναντι των μετοχών, ενώ έρχονται να αναδείξουν τη σημαντικότητά τους σε επίπεδο σχέσης κόστους-αποδοτικότητας, καθώς και εν δυνάμει υψηλών προσόδων και δυνατότητας στρατηγικών επιλογών.

Με την ραγδαία ανάπτυξη των χρηματοπιστωτικών αγορών, τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα για να καταφέρουν να ικανοποιήσουν τις ανάγκες των πελατών τους δημιούργησαν πιο εξελιγμένα παράγωγα. Οι αγορές έχουν γίνει αποτελεσματικότερες λόγω των οικονομικών καινοτομιών, όμως δημιουργούνται προβλήματα αποτίμησης.

Η αποπληρωμή του εξαρτάται από το αν η τιμή του υποκείμενου στοιχείου προσεγγίζει ένα από τα δύο επίπεδα τιμών πριν από την ημερομηνία λήξης. Στο πλαίσιο αυτής της αναζήτησης, κρίθηκε απαραίτητη η ανάπτυξη αποτελεσματικών αριθμητικών μεθόδων αποτίμησης αυτών των παραγώγων.

1 Δικαιώματα Προαίρεσης

Με τον όρο αγορές δικαιωμάτων προαίρεσης, γίνεται κυρίως λόγος για παράγωγα αξιόγραφα , δηλαδή ***αξιόγραφα*** των οποίων η τιμή καθορίζεται από την υφιστάμενη αξία άλλων αξιογράφων. Τα δικαιώματα προαίρεσης, καθώς και τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, αποτελούν παράγωγα αξιόγραφα.
Ιστορικά η διαπραγμάτευση των συμβολαίων δικαιωμάτων προαίρεσης ξεκίνησε το 1973, στο εθνικό χρηματιστήριο του Σικάγο - **C**hicago **B**oard **O**ptions **E**xchange (CBOE) , εισάγοντας για πρώτη φορά δικαιώματα προαίρεσης της αγοράς. Η εμφάνισή τους σημείωσε τεράστια επιτυχία, θέτοντας στο περιθώριο την εξωχρηματιστηριακή αγορά που λειτουργούσε μέχρι και τότε.
Για τα σύγχρονα δεδομένα, τα δικαιώματα προαίρεσης είναι προϊόν διαπραγμάτευσης και έχουν εδραιώσει την παρουσία τους στη χρηματιστηριακή αγορά, αναδεικνύοντας κατά αυτόν τον τρόπο την έντονη ανάγκη, κατανόησης αυτών των εργαλείων, από τον εκάστοτε διαχειριστή ενός χαρτοφυλακίου (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

1.1 Συμβόλαιο Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Το **δικαίωμα της προαίρεσης αγοράς** ή **κλήσης** παρέχει στον ιδιοκτήτη του την δυνατότητα να αγοράσει ένα στοιχείο ενεργητικού σε κάποια καθορισμένη τιμή, η συγκεκριμένη τιμή ονομάζεται **τιμή εξάσκησης** ή **τιμή εκτέλεσης**, σε μία ημερομηνία λήξης η οποία έχει καθοριστεί ή πριν από αυτή. Για παράδειγμα, οι μετοχές μιας εταιρείας με τιμή εξάσκησης 195$ με δικαίωμα προαίρεσης αγοράς τον Φεβρουάριο, δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα τις μετοχές αυτής της εταιρείας να τις αγοράσει οποιαδήποτε στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος, τον Φεβρουάριο, στην τιμή των 195$. Ο ιδιοκτήτης δεν έχει την υποχρέωση να ασκήσει το δικαίωμα αγοράς του. Ο μόνος λόγος για τον οποίο θα επιλέξει να κάνει χρήση του δικαιώματός του είναι αν η αγοραία αξία του υποκείμενου στοιχείου ενεργητικού είναι μεγαλύτερη της τιμής εξάσκησης. Σε αυτήν την περίπτωση, ο κάτοχος του δικαιώματος έχει την δυνατότητα να κάνει την αγορά του στοιχείου ενεργητικού, έναντι της τιμής εξάσκησης. Διαφορετικά, μπορεί να μην χρησιμοποιηθεί το δικαίωμα. Αν πριν από την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου δεν γίνει χρήση του δικαιώματος αγοράς τότε αυτό εκπνέει και δεν έχει καμία αξία. Οπότε, αν κατά την ημερομηνία λήξης η τιμή εξάσκησης είναι μικρότερη από την τιμή της μετοχής, η διαφορά ανάμεσα στην τιμή της μετοχής και την τιμή εξάσκησης είναι ίση με την αξία του δικαιώματος, όμως το δικαίωμα δεν έχει καμία αξία αν στη λήξη η τιμή εξάσκησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή της μετοχής. Το καθαρό κέρδος επί του δικαιώματος αγοράς είναι ίσο με την αξία του δικαιώματος μείον την τιμή που καταβλήθηκε αρχικά για την αγορά του (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

Η τιμή αγοράς ενός δικαιώματος ονομάζεται πριμ και είναι αντίστοιχη της αποζημίωσης της οποίας πρέπει ο αγοραστής του δικαιώματος να καταβάλει ώστε να έχει την δυνατότητα να ασκεί το δικαίωμα αγοράς μόνο όταν αυτό είναι επιθυμητό.

Οι πωλητές δικαιωμάτων αγοράς λαμβάνουν το πριμ ως πληρωμή έναντι της περίπτωσης να αναγκαστούν να παραδώσουν το στοιχείο ενεργητικού με αντάλλαγμα μια τιμή εξάσκησης η οποία είναι μικρότερη από την αγοραία αξία του στοιχείου σε κάποια μεταγενέστερη ημερομηνία. Ο πωλητής του δικαιώματος αγοράς θα καταφέρει να έχει ένα κέρδος ίσως με την τιμή η οποία προέκυψε από την αρχική πώληση του, αν το δικαίωμα αφεθεί να λήξει χωρίς αξία. Όμως αν ασκηθεί το δικαίωμα, τότε το κέρδος για τον πωλητή είναι ίσο με την τιμή μείον την διαφορά μεταξύ στην αξία των μετοχών οι οποίες πρέπει να παραδοθούν και την τιμή εξάσκησης που καταβάλλεται για αυτές τις μετοχές. Άρα ο πωλητής θα υποστεί ζημία αν η διαφορά που προκύπτει είναι μεγαλύτερη από την αρχική τιμή (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

Το **δικαίωμα πώλησης** δίνει στον ιδιοκτήτη του το δικαίωμα να πουλήσει στην καθορισμένη τιμή εξάσκησης ή εκτέλεσης σε κάποια ημερομηνία λήξης ή νωρίτερα από αυτή ένα στοιχείο ενεργητικού. Άρα, ένα δικαίωμα πώλησης μετοχών μιας εταιρείας με ημερομηνία λήξης τον Φεβρουάριο και τιμή εκτέλεσης στα 195$ δίνει την δυνατότητα στον κάτοχό του να πουλήσει μετοχές της εταιρείας στον εκδότη του δικαιώματος στην τιμή των 195$, ακόμα κι αν η τιμή της μετοχής της εταιρείας είναι μικρότερη από 195$, οποιαδήποτε στιγμή πριν από την ημερομηνία λήξης τον Φεβρουάριο. Όταν αυξάνεται η τιμή του στοιχείου ενεργητικού τότε αυξάνονται και τα κέρδη από τα δικαιώματα αγοράς, ενώ όταν η τιμή του στοιχείου πέφτει αυξάνονται τα κέρδη από τα δικαιώματα πώλησης. Μόνο αν η τιμή εξάσκησης είναι μεγαλύτερη από τη τιμή του υποκείμενου στοιχείου ενεργητικού μπορεί να ασκηθεί ένα δικαίωμα πώλησης, δηλαδή μόνο αν ο ιδιοκτήτης του μπορεί να παραδώσει έναντι της τιμής εξάσκησης ένα στοιχείο ενεργητικού με αγοραία αξία μικρότερη του ποσού αυτού. (Δεν είναι υποχρεωτικό κάποιος να έχει στην κατοχή του μετοχές της εταιρείας για να κάνει άσκηση του δικαιώματος πώλησής τους. Κατά την άσκηση του δικαιώματος, ο εκάστοτε χρηματιστής του επενδυτή αγοράζει τις απαραίτητες μετοχές κάποιας εταιρείας στην τιμή αγοράς και άμεσα τις παραδίδει σε έναν εκδότη δικαιώματος πώλησης έναντι της τιμής εξάσκησης. Ο κάτοχος του δικαιώματος πώλησης καταφέρνει και έχει κέρδος από την διαφορά ανάμεσα της τιμής εξάσκησης και της αγοραίας τιμής). (BODIE, KANE and ALAN, 2014)

Ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι **εντός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας** ή διαπραγματεύεται το χρηματικό του ισοδύναμο όταν θα παράγει θετική ταμειακή ροή η άσκησή του. Οπότε, εντός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας είναι ένα δικαίωμα αγοράς όταν η τιμή εξάσκησης είναι μικρότερη από την τιμή του στοιχείου ενεργητικού, ενώ ένα δικαίωμα πώλησης είναι εντός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας όταν η τιμή εξάσκησης υπερβαίνει την τιμή του στοιχείου. Αντιστρόφως, ένα δικαίωμα αγοράς είναι **εκτός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας** ή διαπραγματεύεται κάτω από το χρηματικό του ισοδύναμο όταν η τιμή του στοιχείου ενεργητικού είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης, κανείς δεν θα ασκήσει το δικαίωμα του να αγοράσει ένα στοιχείο ενεργητικού στην τιμή εκτέλεσης αν αυτό αξίζει λιγότερο. Ένα δικαίωμα πώλησης βρίσκεται εκτός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας αν η τιμή εξάσκησης είναι μικρότερη από την τιμή του στοιχείου ενεργητικού. Τα δικαιώματα διαπραγματεύονται το χρηματικό τους ισοδύναμο ενώ έχουν και **μηδενική εσωτερική αξία** μόνο όταν η τιμή εξάσκησης είναι ίση με την τιμή του στοιχείου ενεργητικού (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

1.2 Ιστορική Επισκόπηση

Τα δικαιώματα προαίρεσης αποτέλεσαν αντικείμενο διαπραγμάτευσης για πάρα πολλά χρόνια, ωστόσο παρέμεναν σχετικά ασαφή χρηματοοικονομικά εργαλεία, μέχρι και το 1973 (Appolloni and Ligori, 2014). Το 1973 σηματοδότησε μία νέα εποχή στη διαπραγμάτευση δικαιωμάτων, η οποία σε σύντομο σχετικά χρόνο επεκτάθηκε στις αμερικάνικες χρηματιστηριακές αγορές. Αλγόριθμοι οι οποίοι στηρίζονταν σε προσεγγίσεις με χρήση δενδροδιαγραμμάτων μελετώνται ήδη από το 1979 (Cox, Ross and Rubinstein, 1979), και μάλιστα φαίνεται να είναι ιδιαίτερα αποτελεσματικοί, τόσο από άποψη αποτελεσματικότητας, όσο και άποψη ταχύτητας κατά την εκτέλεσή τους, χρησιμοποιώντας μία οπισθοδρομική επαγωγή κατά τους υπολογισμούς τους (Muroi and Yamada, 2013).

Τα διωνυμικά δέντρα είναι μια δημοφιλής μέθοδος αποτίμησης. Συγκεκριμένα, τα τελευταία χρόνια έχει γίνει λεπτομερής μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς των τιμών σε ορισμένα δέντρα. Οι πρώτες αποδείξεις ότι η τιμή από την εφαρμογή του διωνυμικού μοντέλου αποτίμησης συγκλίνει στην τιμή από το μοντέλο των Black-Scholes, καθώς ο αριθμός των χρονικών περιόδων απειρίζεται, αναφέρεται στους Cox, Ross καθώς και στους Rubinstein, Rendleman and Bartter (1979). Στη συνέχεια, μια πιο γενική απόδειξη αναφορικά με τα επίπεδα σύγκλισης δόθηκε από την Hsia (1983) Το επίπεδο της σύγκλισης μελετήθηκε επίσης από τους Heston & Zhou (2000) οι οποίοι δουλεύοντας με το μοντέλο CRR, απέδειξαν ότι τα σφάλματα αντιπαραβάλλοντας τη διαφορά μεταξύ διωνυμικού και του Black & Scholes, ήταν $O(n^{-1/2})$. Σε ό,τι αφορά στα ευρωπαϊκά δικαιώματα, η σύγκλιση φαίνεται να είναι ταχύτερη. Ο Joshi (2009) μελέτησε ένα δέντρο με άρτιους αριθμούς βημάτων στα οποία η τιμή εξάσκησης είχε τοποθετηθεί στο γεωμετρικό μέσο όρο των δύο κεντρικών κόμβων στο τελικό βήμα. Έτσι, προέκυψε μία σύγκλιση υψηλότερης τάξης για διωνυμικά δέντρα με άρτιο πλήθος βημάτων, όπως αυτή προσδιορίστηκε από τον Joshi (2009), η οποία υποθέτει ότι η πιθανότητα μίας ανοδικής κίνησης έχει μία ομοιόμορφη επέκταση. Τελικώς, το ερώτημα το οποίο εγείρεται και μελετάται είναι η επίτευξη ομαλότερης και ταχύτερης σύγκλισης, συναρτήσει τόσο του χρησιμοποιούμενου μοντέλου, όσο και του πλήθους των βημάτων που διέπουν τη διαδικασία. Με την εισαγωγή μιας πρόσθετης βηματικά ανεξάρτητης μεταβλητής σε κάθε κόμβο, το διωτριωνυμικό δέντρο ίσως να αποτελέσει μία ικανοποιητική προσέγγιση στην αποτίμηση ως διαδικασίας, όπως αυτή περιεγράφηκε παραπάνω (Kim, Park and Qian, 2011).

1.3 Ανάγκη Ενός Τροποποιημένου Διωνυμικού Δέντρου

Ένα χαρακτηριστικό το οποίο αναδεικνύει την ιδιαίτερη αυτή χρησιμότητά τους, είναι η ευκολία της προσαρμοστικότητάς τους, καθώς μπορεί εύκολα να γίνει προσαρμογή στους υπολογισμούς, με τη χρήση τεχνικών πινάκων. Αυτό είναι και το χαρακτηριστικό που συνετέλεσε στην διάδοση και τελικώς στην εκτεταμένη εφαρμογή τους, από την ακαδημαϊκή κοινότητα. Με σημείο αναφοράς το ευρέως γνωστό και χρησιμοποιούμενο μέχρι και σήμερα κλασσικό μοντέλο Black & Scholes, το οποίο χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα στα χρηματοοικονομικά, ο υπολογισμός του υποκείμενου τίτλου προσδιορίζεται μέσω της γεωμετρικής κίνησης Brown. Η χρήση δέντρων για την διαδικασία αποτίμησης, είναι μία μέθοδος η οποία βρίσκει εφαρμογή ακόμα και σε αυτή την περίπτωση. Η πολυπλοκότητα ωστόσο των χρηματοοικονομικών προϊόντων, σε συνδυασμό με μία απλή και τυπική εφαρμογή ενός διωνυμικού δέντρου, ενδεχομένως να επιφέρει περαιτέρω σφάλματα στην προσέγγιση του μοντέλου Black & Scholes. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο καθίσταται ιδιαίτερα σημαντική, η εξέλιξη αυτών των μεθόδων, μεθόδων δηλαδή οι οποίες θα επιφέρουν μείωση των σφάλματων τα οποία προκύπτουν από την κατά περίπτωση εφαρμογή. (Muroi and Yamada, 2013).

1.4 Πρόβλημα Αποτίμησης με Barrier Options

Τα δικαιώματα προαίρεσης άνω και κάτω φράγματος αποτελούν έναν τύπο εξωτικών δικαιωμάτων οι οποίες χρησιμοποιήθηκαν για την αποτίμηση δικαιωμάτων για πρώτη φορά από τον Merton (1973). Οι πλέον συνήθεις προσεγγίσεις επιχείρησαν να αποτιμήσουν δικαιώματα με τη μέθοδο της αναμενόμενης τιμής και τη χρήση διαφορικών εξισώσεων. Η εφαρμογή της μεθόδου με τη χρήση διαφορικών εξισώσεων, διερευνήθηκε εκτενώς από τους Rubinstein and Reiner (1991) και Rich (1994). Η μέθοδος των διαφορικών εξισώσεων απαιτεί τον προσδιορισμό πιθανοτήτων ουδέτερου κινδύνου, του υποκείμενου δικαιώματος αγοράς, καθώς τίθεται είτε εκτός άνω είτε εκτός κάτω φράγματος (Ali, 2017).

Αν τελικά το δικαίωμα χάσει μέρος της υποκείμενης αξίας του, λόγω της παραπάνω διαδικασίας, τότε για την συνολική αποτίμηση της διαδικασίας είναι απαραίτητος και ο προσδιορισμός ως πιθανότητας της πρώτης φοράς που το barrier option βρέθηκε εκτός φραγμάτων. Στη συνέχεια το δικαίωμα υπολογίζεται ολοκληρώνοντας, το δικαίωμα το οποίο έχει εξασκηθεί, με τη χρήση πιθανοτήτων. Η μέθοδος προσδιορισμού των barrier options με τη μέθοδο της αναμενόμενης τιμής, καθίσταται πιο απαιτητική, αποτελεί ωστόσο μία εξίσου χρήσιμη μέθοδο αποτίμησης, καθιστώντας την μία αξιόλογη επιλογή.

Μία σύντομη συζήτηση αναφορικά με τη χρήση διαφορικών εξισώσεων συζητήθηκε από τον Wilmott (1993). Η βασική ιδέα αυτής της προσέγγισης είναι ότι όλα τα άνω και κάτω φραγμένα δικαιώματα, τα οποία ικανοποιούν τη μερική διαφορική εξίσωση των Black- Scholes αλλά με διαφορετική συνθήκες, τόσο σε χρονικό επίπεδο (λήξη), όσο σε και σε επίπεδο φραγμών (Ali, 2017).

Κατ 'αρχήν, αυτές οι μερικές διαφορικές εξισώσεις (PDE) μπορούν να μετατραπούν σε μερικές διαφορικές εξισώσεις και να επιλυθούν (Ali, 2017). Η ανάλυση και εδώ καθίσταται περίπλοκη και απαιτεί την αξιολόγηση ολοκληρωμάτων, αλλά λαμβάνονται ως αποτέλεσμα οι ίδιες λύσεις κλειστής μορφής. Η λύση από τη μέθοδο PDE σχετίζεται φυσικά με τις λύσεις από την προσέγγιση της αναμενόμενης τιμής. Ο Ritchken (1995) έχει διερευνήσει υπολογιστικές πτυχές των barrier options, με τη χρήση διωνυμικών και τρινομικών πλεγματικών πινάκων, για την εφαρμογή μεθόδων αποτίμησης (Ali, 2017).

Όπως προαναφέρθηκε, ένα barrier option χαρακτηρίζεται από την παρουσία, μίας ή δύο τιμών [άνω και κάτω φράγματος], οι οποίες το ενεργοποιούν. Αν η τιμή αυτή ενεργοποιηθεί σε κάποιον ορισμένο χρόνο πριν από το χρόνο ωρίμανσης του δικαιώματος, προκαλεί την εξάσκηση του δικαιώματος, το οποίο φέρει προκαθορισμένα χαρακτηριστικά (στην περίπτωση ενός knock-in δικαιώματος), ειδάλλως προκαλεί την μη εξάσκησή του (στην περίπτωση του knock -out δικαιώματος).

Υπάρχουν single-barrier options και double-barrier options. Η διαφοροποίησή τους έγκειται στα εξής σημεία. Ένα double – barrier option, έχει διπλά φράγματα άνω και κάτω, δηλαδή μία τιμή ενεργοποίησης η οποία είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης και ένα κάτω, δηλαδή μία τιμή ενεργοποίησης, η οποία είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης. Ένα single -barrier option, έχει μόνο ένα φράγμα, το οποίο μπορεί να είναι είτε μεγαλύτερο είτε μικρότερο από την τιμή της εξάσκησης.
Η αγορά barrier – options είναι πιο επισφαλής, και το γεγονός αυτό τεκμηριώνεται από το γεγονός ότι υφίσταται το ρίσκο, να μην ενεργοποιηθεί καμία από τις δύο τιμές ενεργοποίησης [άνω ή/και κάτω]. Η κτήση ενός double barrier option κοστίζει λιγότερο από ένα single barrier option, καθώς οποιαδήποτε από τις δύο τιμές ενεργοποίησης, μπορεί να οδηγήσει στη μη εξάσκηση του δικαιώματος, αναδεικνύοντας κατά αυτόν τον τρόπο ένα μεγαλύτερο ρίσκο για τον κάτοχό του. Το πόσο φθηνό καθίσταται ένα barrier option σχετίζεται με το που βρίσκεται η τιμή ενεργοποίησής του.

1.5 Διαπραγμάτευση των δικαιωμάτων προαίρεσης

Παρατηρείται ότι σε εξωχρηματιστηριακές αγορές κάποια δικαιώματα αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης. Αυτό συμβαίνει καθώς μία εξωχρηματιστηριακή αγορά έχει το πλεονέκτημα ότι οι όροι του συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης (η τιμή εξάσκησης, η ημερομηνία λήξης και ο αριθμός των μετοχών που έχουν δεσμευτεί) έχουν την δυνατότητα να προσαρμόζονται στις ανάγκες των συναλλασσόμενων. Όμως, ένα εξωχρηματιστηριακό συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης έχει υψηλότερο κόστος σε σχέση με τα δικαιώματα που αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε οργανωμένες αγορές.

Με βάση τις επιτρεπόμενες ημερομηνίες λήξης και τιμές εξάσκησης για κάθε εισηγημένο δικαίωμα τα συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης που αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης σε οργανωμένες αγορές είναι τυποποιημένα. Κάθε συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης σε μετοχές δίνει δικαίωμα αγοράς ή πώλησης 100 μετοχών (με εξαίρεση τις περιπτώσεις όπου μετά την εισαγωγή του συμβολαίου για διαπραγμάτευση γίνεται διάσπαση μετοχής, όπου αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το συμβόλαιο να προσαρμόζεται με βάση τους όρους της διάσπασης) (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

Η τυποποίηση των εισηγμένων συμβολαίων δικαιωμάτων προαίρεσης σημαίνει πως οι μετέχοντες στην αγορά συναλλάσσονται με βάση ένα περιορισμένο σύνολο ομοιόμορφων αξιογράφων. Έτσι αυξάνεται το βάθος των συναλλαγών με οποιοδήποτε συγκεκριμένο δικαίωμα, το οποίο έχει σαν αποτελέσματα μειώνεται το συναλλακτικό κόστος και να ενισχύεται η ανταγωνιστικότητα της αγοράς. Επομένως, τα δύο σημαντικά πλεονεκτήματα που προσφέρουν οι οργανωμένες αγορές είναι τα εξής: την ευκολία των συναλλαγών, που προέρχεται από την ύπαρξη μιας κεντρικής αγοράς στην οποία συνέρχονται οι αγοραστές και οι πωλητές δικαιωμάτων ή οι αντιπρόσωποί τους, καθώς και μια δευτερογενή αγορά με μεγάλη ρευστότητα, στην οποία οι αγοραστές και οι πωλητές δικαιωμάτων προαίρεσης έχουν την δυνατότητα να συναλλάσσονται γρήγορα και φτηνά (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

Η πλειοψηφία των συναλλαγών, μέχρι πρόσφατα, με δικαιώματα προαίρεσης στις Ηνωμένες Πολιτείες διεξάγονταν στο Χρηματιστήριο Δικαιωμάτων του Σικάγο. Όμως από το 2003 το ISE (International Securities Exchange), το οποίο εδρεύει στην Νέα Υόρκη και είναι ένα ηλεκτρονικό χρηματιστήριο βρέθηκε στην κορυφή ως η μεγαλύτερη αγορά δικαιωμάτων προαίρεσης εκτοπίζοντας το CBOE (Chicago Board Options Exchange). Στην Ευρώπη, χωρίς εξαιρέσεις, η διαπραγμάτευση δικαιωμάτων προαίρεσης γίνεται σε ηλεκτρονικά χρηματιστήρια (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

1.6 Αμερικάνικα και Ευρωπαϊκά Δικαιώματα Προαίρεσης

Σε έναν ιδιοκτήτη ενός **αμερικανικού δικαιώματος προαίρεσης** δίνεται η δυνατότητα να ασκήσει το δικαίωμα της αγοράς ή πώλησης του υποκείμενου στοιχείου ενεργητικού κατά την ημερομηνία λήξης ή νωρίτερα από αυτήν. Ενώ στα **ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης** επιτρέπεται η άσκηση του δικαιώματος μόνο κατά την ημερομηνία λήξης. Γενικά, τα ευρωπαϊκά δικαιώματα προαίρεσης θα έχουν μικρότερη αξία καθώς προσφέρουν λιγότερα περιθώρια κινήσεων σε σχέση με τα αμερικάνικα. Στις Ηνωμένες Πολιτείες είναι αμερικανικού τύπου σχεδόν όλα τα δικαιώματα προαίρεσης που αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης. Ωστόσο, είναι σημαντικό να αναφερθεί ότι υπάρχουν αξιοσημείωτες εξαιρέσεις σε αυτόν τον κανόνα, τις οποίες αποτελούν τα δικαιώματα προαίρεσης σε ξένο συνάλλαγμα και μετοχικούς δείκτες (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

1.7 Προσαρμογές στους όρους του δικαιώματος Προαίρεσης

Η αξία των μετοχών θα μεταβληθεί ριζικά από τις διασπάσεις τους, καθώς τα δικαιώματα προαίρεσης μεταβιβάζουν το δικαίωμα αγοράς ή πώλησής τους σε μια δεδηλωμένη τιμή, εφόσον οι όροι του συμβολαίου δεν προσαρμοστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να λαμβάνεται υπόψη η διάσπαση. Για παράδειγμα, έστω μια εταιρεία με τιμή μετοχής 195$. Αν ανακοινωθεί από την εταιρεία διάσπαση μετοχής σε αναλογία 2 προς 1, τότε η τιμή της μετοχής της θα έπεφτε από τα 195$ σε περίπου 97,50$. Άρα ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης 195$ θα ήταν σχεδόν άχρηστο, αφού δεν θα υπήρχε καμία σχεδόν πιθανότητα η μετοχή αυτή να πουληθεί σε τιμή μεγαλύτερη των 195$ πριν από την ημερομηνία λήξης των δικαιωμάτων (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

Για να ληφθεί υπόψη η διάσπαση της μετοχής, η τιμή εξάσκησης με βάση τον συντελεστή της διάσπασης μειώνεται, ενώ ο αριθμός των δικαιωμάτων αυξάνεται κατά τον παράγοντα αυτό. Παραδείγματος χάρη, κάθε αρχικό δικαίωμα αγοράς με τιμή εκτέλεσης 195$ θα διαιρεθεί μετά από μια διάσπαση 2 προς 1 σε δύο νέα δικαιώματα όπου η τιμή εξάσκησης τους θα είναι 97,5$ το καθένα. Ανάλογα προσαρμόζονται τα μερίσματα σε μετοχές που υπερβαίνουν το 10%. Ο αριθμός μετοχών που καλύπτεται από κάθε δικαίωμα προαίρεσης αυξάνεται ανάλογα με το μέρισμα της μετοχής, ενώ η τιμή εκτέλεσης μειώνεται κατά αυτή την αναλογία.

Οι όροι ενός συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης δεν επηρεάζονται από τα χρηματικά μερίσματα, σε αντίθεση με τα μερίσματα σε μετοχές. Αυτό συμβαίνει επειδή η καταβολή χρηματικού μερίσματος μειώνει την τιμή πώλησης της μετοχής χωρίς όμως να προκαλεί αντισταθμιστικές προσαρμογές του συμβολαίου του δικαιώματος, από τη μερισματική πολιτική επηρεάζεται η αξία του δικαιώματος. Τηρουμένων των αναλογιών, όταν γίνεται εφαρμογή πολιτικής διανομής υψηλού μερίσματος οι αξίες των δικαιωμάτων αγοράς είναι χαμηλότερες, αφού επιβραδύνεται ο ρυθμός αύξησης των τιμών των μετοχών λόγω αυτής της πολιτικής και προφανώς λειτουργεί αντίστροφα ως προς τις αξίες των δικαιωμάτων πώλησης οι οποίες είναι υψηλότερες όταν διανέμεται υψηλότερο μέρισμα. (Βέβαια δεν είναι υποχρεωτικό να αυξάνονται ή να μειώνονται οι αξίες των δικαιωμάτων κατά την καταβολή του μερίσματος ή στις ημερομηνίες αποκοπής του δικαιώματος μερίσματος. Η επίδρασή τους έχει ενσωματωθεί ήδη στην αρχική τιμή του δικαιώματος προαίρεσης αφού οι πληρωμές των μερισμάτων αναμένονται) (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

1.8 Εκκαθάριση Συναλλαγών με δικαιώματα Προαίρεσης

Η εταιρεία εκκαθάρισης συναλλαγών με δικαιώματα προαίρεσης (Options Clearing Corporation), ανήκει από κοινού στα χρηματιστήρια όπου διαπραγματεύονται τα δικαιώματα προαίρεσης σε μετοχές. Σε συμφωνία θα καταλήξουν οι αγοραστές και οι πωλητές δικαιωμάτων που συμφωνούν σε μία τιμή. Στο σημείο αυτό παρεμβαίνει η OCC η οποία μπαίνει ανάμεσα στους δύο συναλλασσόμενους και γίνεται επί της ουσίας αγοραστής του δικαιώματος από τον εκδότη του και ο εκδότης του δικαιώματος προς τον αγοραστή. Οπότε, η OCC ουσιαστικά εγγυάται την απόδοση των συμβολαίων καθώς όλα τα φυσικά πρόσωπα συναλλάσσονται μόνο με αυτή.

Όταν ένα δικαίωμα ασκείται από τον κάτοχό του, η OCC φροντίζει έτσι ώστε μια εταιρεία μέλος της, όπου οι πελάτες της έχουν εκδώσει το δικαίωμα αυτό, να καλύψει την σχετική υποχρέωση. Η εταιρεία μέλος διαλέγει ανάμεσα στους πελάτες της που έχουν εκδώσει το δικαίωμα εκείνο που θα το εκπληρώσει. Ο πελάτης που επιλέγεται πρέπει να παραδώσει 100 μετοχές σε τιμή η οποία ισούται με την τιμή εξάσκησης για συμβόλαιο δικαιώματος αγοράς που εκδόθηκε ή για κάθε συμβόλαιο δικαιώματος πώλησης που εκδόθηκε να αγοράσει 100 μετοχές στην τιμή εξάσκησής της.

Επειδή η OCC εγγυάται την απόδοση των συμβολαίων, οι εκδότες των δικαιωμάτων είναι υποχρεωμένοι να καταθέτουν περιθώριο ούτως ώστε να υπάρχει εγγύηση ότι οι συμβατικές τους υποχρεώσεις μπορούν να τηρηθούν. Το απαιτούμενο περιθώριο εν μέρει προσδιορίζεται από το ποσό στο οποίο το δικαίωμα βρίσκεται εντός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας, καθώς αυτή η αξία αποτελεί ένδειξη της ενδεχόμενης υποχρέωσης του πωλητή του δικαιώματος. Αν το απαιτούμενο περιθώριο είναι μεγαλύτερο από το κατατεθειμένο τότε ο εκδότης λαμβάνει ειδοποίηση για να καταθέσει πρόσθετο περιθώριο. Αντ' αυτού, ο ιδιοκτήτης του δικαιώματος δεν χρειάζεται να καταθέσει περιθώριο, διότι θα κάνει άσκηση του δικαιώματος μόνο αν αυτό είναι επικερδές. Έπειτα από την αγορά του δικαιώματος προαίρεσης δεν διακυβεύονται άλλα χρήματα (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

Από τα άλλα αξιόγραφα τα οποία περιλαμβάνονται στο χαρτοφυλάκιο του επενδυτή προσδιορίζονται οι υποχρεώσεις κατάθεσης περιθωρίου. Αν για παράδειγμα, ο εκδότης ενός δικαιώματος αγοράς, ο οποίος έχει στην κατοχή του τις μετοχές έναντι των οποίων έχει εκδοθεί το δικαίωμα, έχει την δυνατότητα να καλύψει την υποχρέωση επιτρέποντας σε ένα χρηματιστή να διατηρεί τις μετοχές αυτές στον χρηματιστηριακό λογαριασμό. Με αυτό τον τρόπο παρέχεται η εγγύηση πως η μετοχή θα είναι διαθέσιμη προς παράδοση σε περίπτωση που ασκηθεί το δικαίωμα αγοράς. Βέβαια, αν δεν υφίσταται κατοχή του υποκείμενου αξιογράφου, η υποχρέωση κατάθεσης προσδιορίζεται από την αξία του υποκείμενου αξιογράφου, καθώς και από το ποσό κατά το οποίο το δικαίωμα βρίσκεται εκτός ή εντός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας. Αυτά τα δικαιώματα τα οποία είναι εκτός της ισοδύναμης χρηματικής αξίας προϋποθέτουν από τον εκδότη τους καταβολή μικρότερου περιθωρίου, αφού οι πληρωμές που αναμένονται θα είναι χαμηλότερες.

1.9 Εισηγμένα Δικαιώματα Προαίρεσης

Τα δικαιώματα προαίρεσης επί άλλων στοιχείων ενεργητικού, πέρα από μετοχές, είναι επίσης αντικείμενο ευρείας διαπραγματευτικής δραστηριότητας. Σε αυτά περικλείονται τα δικαιώματα επί χρηματιστηριακών και κλαδικών δεικτών, επί ξένου συναλλάγματος, καθώς ακόμα και επί των τιμών συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης σε χρυσό, άργυρο, αγροτικά προϊόντα, αξιόγραφα σταθερού εισοδήματος και μετοχικούς δείκτες (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

1.10 Δικαιώματα Προαίρεσης επί των δεικτών

Ένα δικαίωμα προαίρεσης επί δείκτη είναι ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης το οποίο στηρίζεται σε έναν δείκτη αγοράς μετοχών, όπως S&P 500 ή ο NASDAQ 100. Τα δικαιώματα επί των δεικτών βασίζονται πάνω σε αρκετούς δείκτες ευρείας βάσης, καθώς και σε πολλούς κλαδικούς δείκτες, ακόμα και σε δείκτες τιμών εμπορευμάτων.

Η κατασκευή των δεικτών μπορεί να διαφοροποιείται ανάμεσα σε διαφορετικά συμβόλαια ή χρηματιστήρια. Για παράδειγμα, ο δείκτης S&P 100 είναι ένας σταθμισμένος ως προς την αξία μέσος όρος των 100 μετοχών που συγκροτούν την ομάδα μετοχών της Standard & Poor's. Η αγοραία αξία του συνόλου κάθε μετοχής που κυκλοφορεί είναι ανάλογη με τους συντελεστές στάθμισης. Ο Dow Jones Industrial Index αντίθετα είναι ένας σταθμισμένος ως προς την τιμή μέσος όρος 30 μετοχών.

Διαπραγμάτευση πραγματοποιείται επίσης με συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης επί πολλών μετοχικών δεικτών του εξωτερικού. Για παράδειγμα, επί του δείκτη Nikkei Stock Index τα δικαιώματα προαίρεσης είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης στο χρηματιστήριο της Σιγκαπούρης καθώς και στο Χρηματιστήριο Εμπορευμάτων του Σικάγο. Επί ευρωπαϊκών δεικτών, παραδείγματος χάρη ο Financial Times Share Exchange, τα δικαιώματα είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης στο NYSE-Euronext Exchange. Στο Χρηματιστήριο Δικαιωμάτων του Σικάγο προσφέρονται επιπλέον και δικαιώματα προαίρεσης επί δεικτών συγκεκριμένων κλάδων, όπως οι κλάδοι του πετρελαίου (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

Τα δικαιώματα προαίρεσης επί των δεικτών δεν αναγκάζουν τον εκδότη του δικαιώματος πώλησης να <<αγοράσει τον δείκτη>> ούτε τον εκδότη του δικαιώματος αγοράς κατά την εξάσκηση να <<παραδώσει τον δείκτη>>, σε αντίθεση με τα δικαιώματα προαίρεσης επί μετοχών. Εφαρμόζεται, όμως, μια διαδικασία χρηματικού διακανονισμού. Για να πραγματοποιηθεί η διαδικασία αυτή ο εκδότης του δικαιώματος καταβάλλει ένα ποσό στον κάτοχό του, το οποίο υπολογίζεται από την χρηματική απόδοση που θα πρόκυπτε κατά την άσκησή του. Το ποσό αυτό είναι ίσο με την διαφορά μεταξύ στην τιμή εξάσκησης του δικαιώματος και στην τιμή του δείκτη. Αν ο δείκτης S&P, για παράδειγμα, είναι στις 1400 μονάδες όταν ένα δικαίωμα αγοράς ασκείται επί του δείκτη με τιμή εξάσκησης 1390 μονάδες τότε ο ιδιοκτήτης του δικαιώματος αγοράς λαμβάνει μια χρηματική πληρωμή της διαφοράς επί τον πολλαπλασιαστή του συμβολαίου ανά συμβόλαιο.

Τα δικαιώματα προαίρεσης επί των σημαντικότερων δεικτών, δηλαδή ο S&P 100, ο S&P 500, ο NASDAQ και ο Dow Jones Industrials είναι τα συμβόλαια με την μεγαλύτερη συναλλακτική δραστηριότητα στο CBOE. Αυτά είναι τα συμβόλαια τα οποία κυριαρχούν στον όγκο συναλλαγών του CBOE.

1.11 Δικαιώματα σε ΣΜΕ

Τα δικαιώματα σε ΣΜΕ προσφέρουν στους ιδιοκτήτες τους το δικαίωμα να αγοράζουν εάν συγκεκριμένο συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης ή να το πωλούν χρησιμοποιώντας σαν τιμή μελλοντικής εκπλήρωσης την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος προαίρεσης. Αν και η διαδικασία παράδοσης μπορεί να χαρακτηριστεί περίπλοκη, οι όροι των δικαιωμάτων σε ΣΜΕ στην ουσία έχουν σχεδιαστεί έτσι ώστε να επιτρέπουν την έκδοση του δικαιώματος επί της ίδιας της τιμής μελλοντικής εκπλήρωσης. Κατά την άσκηση του δικαιώματος ο ιδιοκτήτης του λαμβάνει μια καθαρή χρηματική απόδοση η οποία ισούται με την διαφορά μεταξύ της τρέχουσας τιμής μελλοντικής εκπλήρωσης επί του συγκεκριμένου στοιχείου ενεργητικού και της τιμής εξάσκησης του δικαιώματος. Άρα, αν υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι η τιμή μελλοντικής εκπλήρωσης είναι 37$ και το δικαίωμα αγοράς έχει τιμή εξάσκησης στα 35$, τότε ο ιδιοκτήτης που ασκεί το δικαίωμα αγοράς επί των ΣΜΕ κατοχυρώνει μια χρηματική απόδοση 2$. (BODIE, KANE and ALAN, 2014)

1.12 Δικαιώματα σε ξένο συνάλλαγμα

Ένα δικαίωμα προαίρεσης σε ξένο συνάλλαγμα δίνει το δικαίωμα αγοράς ή πώλησης μίας ποσότητας ξένου συναλλάγματος έναντι μιας ποσότητας εγχώριου νομίσματος η οποία είναι καθορισμένη. Η αγορά ή πώληση του συναλλάγματος με αντάλλαγμα συγκεκριμένο αριθμό δολαρίων προβλέπεται από τα δικαιώματα προαίρεσης σε ξένο συνάλλαγμα. Οι τιμές των συμβολαίων δίνεται σε σεντς ή κλάσματα του σεντς ανά μονάδα ξένου νομίσματος (BODIE, KANE and ALAN, 2014).

Μεταξύ των δικαιωμάτων σε ξένο συνάλλαγμα και των δικαιωμάτων προαίρεσης επί ΣΜΕ σε ξένο συνάλλαγμα διακρίνεται μια σημαντική διαφορά. Τα δικαιώματα σε ξένο συνάλλαγμα προσφέρουν χρηματικές αποδόσεις οι οποίες εξαρτώνται από την διαφορά μεταξύ της τιμής εξάσκησης και τη συναλλαγματική ισοτιμία κατά την λήξη. Ενώ τα δικαιώματα προαίρεσης επί ΣΜΕ σε ξένο συνάλλαγμα αποτελούν δικαιώματα επί συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης τα οποία αποφέρουν χρηματικές αποδόσεις που εξαρτώνται από την διαφορά μεταξύ στην τιμή εξάσκησης και την τιμή συναλλαγματικής ισοτιμίας μελλοντικής εκπλήρωσης κατά την λήξη. Γενικά δεν είναι ίσες οι συναλλαγματικές ισοτιμίες και οι τιμές συναλλαγματικών ισοτιμιών μελλοντικής εκπλήρωσης, οπότε τα συμβόλαια δικαιωμάτων επί ΣΜΕ και δικαιωμάτων προαίρεσης δεν θα έχουν ίδιες αξίες, ακόμα και στην περίπτωση που οι ημερομηνίες λήξης και οι τιμές εκτέλεσης είναι πανομοιότυπες. Την κυριαρχία στις συναλλαγές με δικαιώματα προαίρεσης σε ξένο συνάλλαγμα, έχουν οι συναλλαγές με δικαιώματα επί ΣΜΕ σε ξένο συνάλλαγμα.

1.13 Δικαιώματα Προαίρεσης Επιτοκίου

Με βάση έντοκα γραμμάτια καθώς και ομόλογα του δημοσίου των ΗΠΑ όπως και άλλων μεγάλων οικονομιών πραγματοποιείται η διαπραγμάτευση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Επιπλέον, γίνεται διαπραγμάτευση με δικαιώματα προαίρεσης επί διαφόρων επιτοκίων. Κάποια από αυτά είναι τα εξής: τα συμβόλαια επί του επιτοκίου του ομολόγου του αμερικανικού δημοσίου, του έντοκου γραμματίου του αμερικανικού δημοσίου, των ομοσπονδιακών καταθέσεων όπως και τα ΣΜΕ επί ευρωδολαρίων. (BODIE, KANE and ALAN, 2014)

2 Δικαιώματα Προαίρεσης Κατά τη Λήξη

2.1 Δικαιώματα Αγοράς

Κάτοχος Δικαιώματος

Η κατοχή ενός δικαιώματος προαίρεσης εκχωρεί στον κάτοχό του το δικαίωμα να αποκτήσει ένα αξιόγραφο στην τιμή εξάσκησης. Επί παραδείγματι, αν κατέχει κάποιος το δικαίωμα αγοράς επί μίας μετοχής, η οποία έστω ότι έχει τιμή εκτέλεσης 100 ευρώ και πωλείται σήμερα στα 110 ευρώ, παραχωρεί στον κάτοχο του δικαιώματος αγοράς να το εξασκήσει, πραγματοποιώντας αγορά της μετοχής στα 100 ευρώ και ταυτόχρονα πουλώντας τις μετοχές, στην τιμή των 10 ευρώ ανά μετοχή (κέρδος). Αν η τιμή πώλησης της μετοχής διαμορφωθεί σε τιμή μικρότερη των 100 ευρώ, τότε ο κάτοχος του δικαιώματος αγοράς μπορεί να μην πραγματοποιήσει καμία κίνηση, με άμεσο επακόλουθο ούτε την πραγματοποίηση κερδών, αλλά ούτε και την πραγματοποίηση ζημιών. Η αξία στη λήξη προσδιορίζεται από τις ακόλουθες σχέσεις : (BODIE, KANE and ALAN, 2014)

Χρηματικές Αποδόσεις για τον κάτοχο του δικαιώματος προαίρεσης

$$\boxed{\begin{cases} S_T - X, αν\ S_T > X \\ 0, αν\ S_T \leq X \end{cases}}$$

Όπου

$\boldsymbol{S_T}$ είναι η αξία της μετοχής κατά τη λήξη
$\boldsymbol{X}$ η τιμή εξάσκησης
Όπως είναι εμφανές από τον παραπάνω τύπο, το **δικαίωμα** προαίρεσης της **αγοράς εξασκείται** από τον κάτοχό του, κατά την περίπτωση που η **αξία της μετοχής** κατά τη λήξη είναι **μεγαλύτερη** από την **τιμή εξάσκησης**. Αν συμβαίνει το **αντίθετο**, το δικαίωμα θα λήξει με **μηδενικές** χρηματικές **αποδόσεις** για τον κάτοχο του δικαιώματος, δημιουργώντας του ζημιές, ίσες με την τιμή που κατέβαλε αρχικά προκειμένου να αποκτήσει το δικαίωμα. Το κέρδος που θα πρόκυπτε ισούται με την χρηματική απόδοση αν αφαιρεθεί η αρχική τιμή κτήσης του. Για την καλύτερη κατανόηση των δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς, παρατίθεται ένα αριθμητικό παράδειγμα. Τα δεδομένα προσδιορίζονται ακολούθως :

Έστω ότι το **δικαίωμα αγοράς** κοστίζει **14** ευρώ και έχουμε τις ακόλουθες αξίες μετοχών, προσδιορίζοντας στην εκάστοτε περίπτωση και τη σχετική αξία των δικαιωμάτων :

Αξία Μετοχής	*Αξία Δικαιώματος*
90	0
100	0
110	10
120	20
130	30

Όπως φαίνεται και από τον παραπάνω πίνακα η **αξία** του δικαιώματος **μηδενίζει** όταν η **αξία** της μετοχής είναι **μικρότερη του 100**. Για μετοχές των οποίων η αξία είναι μεγαλύτερη του 100, η αξία του δικαιώματος προσδιορίζεται αν από την αξία της μετοχής, αφαιρέσουμε την τιμή εξάσκησης, οπότε και προκύπτουν οι παραπάνω τιμές. Έτσι, η αξία του δικαιώματος αυξάνεται κατά 1 ευρώ για κάθε αύξηση κατά 1 ευρώ στην αξία της μετοχής. Τα κέρδη σημειώνουν θετικό πρόσημο, όταν η τιμή της μετοχής ανέλθει και γίνει μεγαλύτερη των 114 ευρώ, δηλαδή αθροίζοντας την τιμή εξάσκησης και την αξία του δικαιώματος αγοράς. Το σημείο στο οποίο δεν πραγματοποιούνται ούτε κέρδη ούτε ζημιές καλείται νεκρό σημείο, και μάλιστα για το σημείο αυτό ισχύει ότι $\boldsymbol{S_T}$ - $\boldsymbol{X}$ = 114 - 100 = 14 ευρώ, δηλαδή προκύπτει μόνο το αρχικό κόστος του δικαιώματος αγοράς.

Εκδότης Δικαιώματος

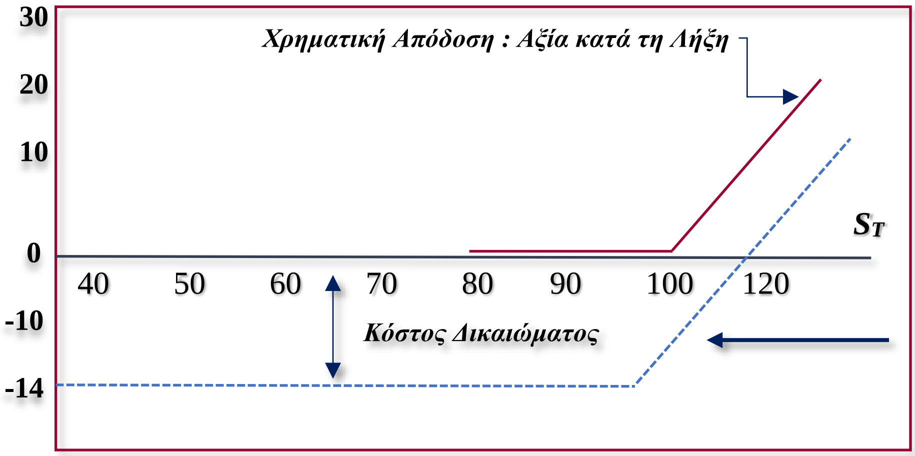
Οι ζημιές οι οποίες συνεπάγεται για τον εκδότη του δικαιώματος, λαμβάνουν χώρα όταν η τιμή της μετοχής είναι υψηλή. Σε αυτή την περίπτωση ο εκδότης του δικαιώματος θα αναγκαστεί να παραδώσει μετοχές, οι οποίες έχουν αξία $\boldsymbol{S_T}$ έναντι Χ ευρώ. Έτσι, έχουμε :

Χρηματικές Αποδόσεις για τον εκδότη του δικαιώματος προαίρεσης

$$\boxed{\begin{cases} -(S_T - X), \alpha\nu\ S_T > X \\ 0, \alpha\nu\ S_T \leq X \end{cases}}$$

Το ενδεχόμενο της έκθεσης σε ανάληψη κινδύνου, από την άνοδο της τιμής μίας μετοχής που είναι διατεθειμένος να αναλάβει ο εκδότης ενός δικαιώματος αγοράς, με αντιστάθμισμα το πριμ, την τιμή δηλαδή του δικαιώματος.

Οι παραπάνω διατυπώσεις μπορούν να αναπαρασταθούν και διαγραμματικά[1] ως εξής
:



Διάγραμμα 1. Χρηματική Απόδοσης και Κέρδος ενός Δικαιώματος Αγοράς κατά τη Λήξη

[1] *Πηγή : BODIE, KANE and ALAN, 2014, Ίδια Επεξεργασία*

2.2 Δικαιώματα Πώλησης

Όταν γίνεται αναφορά στον όρο δικαιώματα πώλησης, ουσιαστικά περιγράφεται η δυνατότητα πώλησης κάποιου στοιχείου του ενεργητικού. Εν προκειμένω ο κάτοχος του δικαιώματος πώλησης δε θα το ασκήσει, παρά μόνο στην περίπτωση που η αξία του στοιχείου του ενεργητικού βρεθεί να είναι μικρότερη σε σχέση με την τιμή εξάσκησης.
Η αξία ενός δικαιώματος πώλησης κατά τη λήξη προσδιορίζεται από τις ακόλουθες σχέσεις :

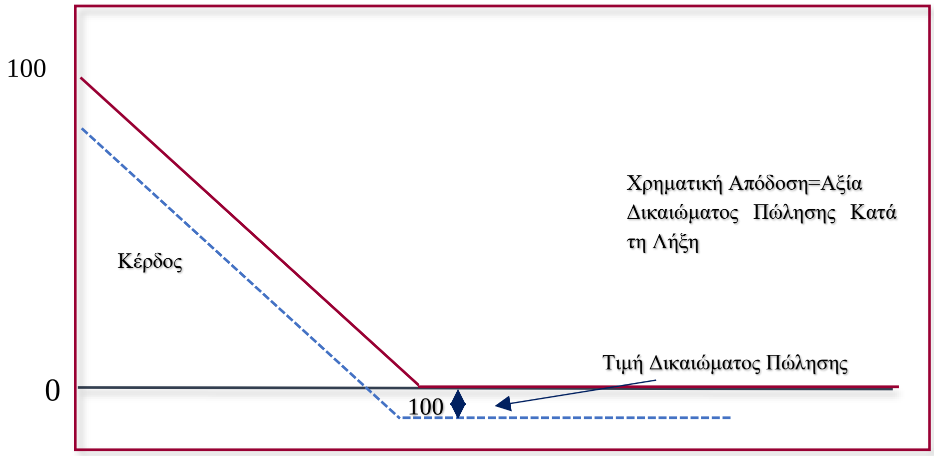
Χρηματικές Αποδόσεις για τον εκδότη του δικαιώματος προαίρεσης

$$\boxed{\begin{cases} X - S_T, \alpha\nu\ S_T < X \\ 0, \alpha\nu\ S_T \geq X \end{cases}}$$

Όπου

$\boldsymbol{S_T}$ είναι η αξία της μετοχής κατά τη λήξη
$\boldsymbol{X}$ η τιμή εξάσκησης

Στο παρακάτω σχήμα η συνεχής γραμμή παρουσιάζει τη χρηματική απόδοση κατά την λήξη για τον ιδιοκτήτη ενός δικαιώματος πώλησης μετοχών μιας εταιρείας, με τιμή εξάσκησης 100\$. Αν η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη των 100\$ κατά την λήξη, τότε δεν έχει αξία το δικαίωμα πώλησης καθώς δεν θα ασκηθεί για να πωληθούν οι μετοχές στα 100\$. Κατά την λήξη, στην περίπτωση όπου η τιμή είναι μικρότερη των 100\$, η αξία του δικαιώματος πώλησης δέχεται αύξηση 1\$ για κάθε μείωση της τιμής της μετοχής κατά ένα δολάριο. Στο ίδιο σχήμα υπάρχει και η διακεκομμένη γραμμή η οποία αντιπροσωπεύει ένα διάγραμμα του κέρδους του ιδιοκτήτη του δικαιώματος πώλησης κατά την λήξη, μείον το αρχικό κόστος του δικαιώματος.



Διάγραμμα 2. Χρηματική Απόδοση και κέρδος Δικαιώματος Πώλησης κατά τη λήξη

Η έκδοση *ακάλυπτου* δικαιώματος πώλησης (ακάλυπτα είναι τα δικαιώματα των οποίων η έκδοση γίνεται χωρίς αντισταθμιστική θέση ανοιχτής πώλησης στη μετοχή ώστε να υπάρχει αντιστάθμιση των κινδύνων) αφήνει εκτεθειμένο των εκδότη του σε ζημιές αν δημιουργηθεί πτώση στην αγορά. Η έκδοση ακάλυπτων δικαιωμάτων πώλησης τα οποία βρίσκονται αρκετά μακριά από την ισοδύναμη χρηματική αξία, κάποια στιγμή αποτελούσε μέθοδο δημιουργίας κέρδους, επειδή είχε εδραιωθεί η άποψη πως όσο στην αγορά δεν πραγματοποιείται πριν από την λήξη του δικαιώματος κάποια ιδιαίτερα σημαντική πτώση, θα μπορούσε να γίνει είσπραξη της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης χωρίς όμως ο ιδιοκτήτης του να το ασκήσει σε βάρος του εκδότη. Λόγω του ότι μόνο μεγάλες καθιζήσεις θα κατάφερναν να δημιουργήσουν ζημιές για τον εκδότη του δικαιώματος πώλησης, η μέθοδος αυτή δεν ήταν υπερβολικά επικίνδυνη. Βέβαια η άποψη αυτή έχει αλλάξει αφού πλέον θεωρείται ότι η στρατηγική αυτή ενέχει μεγάλο κίνδυνο. Σε αυτό το συμπέρασμα αυτό έχουμε καταλήξει μετά το χρηματιστηριακό κραχ του 1987 όπου οι εκδότες δικαιωμάτων πώλησης τέτοιου είδους είχαν πολύ μεγάλες ζημιές.

2.3 Δικαιώματα Προαίρεσης Έναντι μετοχικών Επενδύσεων

Τα δικαιώματα αγοράς δίνουν στους κατόχους τους την δυνατότητα να έχουν κέρδη όταν αυξάνονται οι τιμές των μετοχών κι αυτός είναι ο λόγος που η αγορά των δικαιωμάτων αγοράς θεωρείται μια αισιόδοξη στρατηγική. Ενώ για την αγορά δικαιωμάτων πώλησης ισχύει το αντίθετο, δηλαδή είναι μια απαισιόδοξη στρατηγική. Αντιστοίχως, η πώληση δικαιωμάτων αγοράς είναι απαισιόδοξη, ενώ η πώληση δικαιωμάτων πώλησης είναι αισιόδοξη. Η τιμή της υποκείμενης μετοχής καθορίζει τις αξίες των δικαιωμάτων προαίρεσης, οπότε μπορεί να χαρακτηριστεί ως υποκατάστατο της απευθείας αγοραπωλησίας μετοχών.

3 Μοντέλο Αποτίμησης με τη χρήση Διωνυμικών Δέντρων

Το διωνυμικό μοντέλο προτάθηκε για πρώτη φορά από τους Cox, Ross και Rubinstein το 1979. Στα οικονομικά, το διωνυμικό μοντέλο χρησιμοποιείται γενικά για επιλογές αποτίμησης με αριθμητική μέθοδο. Είναι ευέλικτη, διαισθητική και δημοφιλής προσέγγιση στην επιλογή τιμών. Το διωνυμικό μοντέλο βασίζεται θεωρία τυχαίων περιπάτων. Η βασική ιδέα είναι ότι, για μία μόνο χρονική περίοδο (πολύ σύντομης διάρκειας) το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο μπορεί να μετακινηθεί μόνο από την τρέχουσα τιμή του σε δύο πιθανά επίπεδα. Υποθέτει ότι η μεταβολή της τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου ακολουθεί την διωνυμική κατανομή. Για πολλές δοκιμές, αυτή η διωνυμική κατανομή πλησιάζει την κανονική κατανομή όπως προσεγγίζεται από το μοντέλο Black-Scholes-Merton.

Το μοντέλο αποτίμησης με τη χρήση διωνυμικών δέντρων είναι ένα μοντέλο ουδέτερου κινδύνου το οποίο χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της αξίας δικαιωμάτων προαίρεσης, όπως είναι για παράδειγμα τα δικαιώματα προαίρεσης Αμερικάνικου Τύπου. Σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο η τρέχουσα αξία ενός δικαιώματος ισούται με την παρούσα αξία των πιθανών σταθμισμένων μελλοντικών αποδόσεων των δικαιωμάτων. Έστω ένα παράδειγμα στο οποίο εξετάζουμε ένα call option, το οποίο επιτρέπει στον κάτοχό του να αγοράσει το δικαίωμα του οποίου η τρέχουσα τιμή αναφέρεται ως S_T στην τιμή εξάσκησης ***X.*** Σε οποιαδήποτε στιγμή το δικαίωμα μπορεί να κινηθεί ***είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω***. Στην πρώτη περίπτωση της ανοδικής κίνησης, η αναλογία της νέας τιμής ονομάζεται συντελεστής **u**, θέλοντας να συμβολίσουμε την ανοδική κίνηση (**up**), και αντίστοιχα στην περίπτωση της καθοδικής κίνησης, η αναλογία της νέας τιμής ονομάζεται **d**, θέλοντας να συμβολίσουμε την καθοδική κίνηση (**down**). Το call option θα είναι in the money, δηλαδή ο κάτοχος του δικαιώματος θα έχει την ευκαιρία να αγοράσει την ασφάλεια κάτω από την τρέχουσα τιμή της αγοράς. Έτσι, στην περίπτωση μίας ανοδικής κίνησης η πληρωμή από το **call option** θα ισούται με το μέγιστο από ($0,S_0u-X$), ενώ στην περίπτωση καθοδικής κίνησης θα ισούται με το μέγιστο από ($0, S_0d-X$).

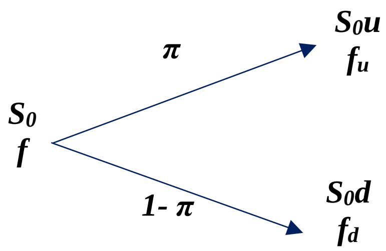
Το διωνυμικό μοντέλο έρχεται να ζυγίσει αποτελεσματικά τις διαφορετικές αποδόσεις προσδιορίζοντας κάθε φορά την αντίστοιχη πιθανότητα στο χρόνο 0.

- Αρχική τιμή μετοχής: $\boldsymbol{S_0}$
- Δικαίωμα σε μετοχή : Τρέχουσα Αξία ***f***
- Χρονική Διάρκεια Δικαιώματος : ***T***
- Risk free rate – επιτόκιο χωρίς κίνδυνο : ***r***

Όπως περιεγράφηκε και προηγουμένως το δικαίωμα μπορεί να κινηθεί είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω, προσδιορίζοντας και τις αντίστοιχες απολαβές οι οποίες θα είναι αντίστοιχα (Εγγλέζος, 2020) :

fu , u >1

fd ,d <1



Η τιμή του δικαιώματος αγοράς χρησιμοποιώντας το διωνυμικό μοντέλο ενός βήματος προσδιορίζεται χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση :

$$c = \frac{\pi \cdot S0u + (1-\pi)\cdot S0d}{1+r}$$

όπου π είναι η πιθανότητα της ανοδικής κίνησης και (1-π) είναι η πιθανότητα της καθοδικής κίνησης, όπως αυτή προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση :

$$\pi = \frac{1+r-d}{u-d}$$

Η παρούσα αξία του δικαιώματος πρακτικά ισούται με τις αναμενόμενες μελλοντικές απολαβές του, οι οποίες έχουν προεξοφληθεί λαμβάνοντας υπόψιν το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (Εγγλέζος, 2020). Συγκεκριμένα, περιγράφεται από την ακόλουθη συναρτησιακή σχέση :

$$f = e^{-rT}\hat{E}(f_T)$$

αν η **αναμενόμενη** τιμή της **μετοχής** μία χρονική στιγμή **T** είναι ίση με

$$\hat{E}(S_T) = p \cdot S_0 \cdot u + (1-p) \cdot S_0 \cdot d$$

$$\hat{E}(S_T) = p \cdot S_0 \cdot u + S_0 \cdot d - p \cdot S_0 \cdot d$$

$$\hat{E}(S_T) = p \cdot S_0 \cdot (u - d) + S_0 \cdot d$$

$$\hat{E}(S_T) = \frac{1+r-d}{u-d} \cdot S_0 \cdot (u-d) + S_0 \cdot d$$

$$\hat{E}(S_T) = S_0 + S_0 \cdot r - d \cdot S_0 + S_0 \cdot d$$

$$\hat{E}(S_T) = S_0 \cdot (1+ r)$$

Ως εκ τούτου ο αναμενόμενος ρυθμός απόδοσης της μετοχής, ισούται με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο (Εγγλέζος, 2020).

Αν υποθέσουμε ότι η πιθανότητα μιας ανοδικής κίνησης στον πραγματικό κόσμο είναι q τότε αναζητούμε u και d προκειμένου να επιτευχθεί η μεταβλητότητα στην τιμή μιας μετοχής (Εγγλέζος, 2020).

Σε ένα βήμα το οποία βρίσκεται στο χρονικό διάστημα [t, t+δt] με μήκος δt θα ισχύει ότι :

$$E(S_{t+\delta t}) = S_t \cdot e^{\mu \delta t}$$

$$E(S_{t+\delta t}) = q \cdot S_t \cdot u + (1-q) \cdot d\, S_t \cdot d = S_t \cdot e^{\mu \delta t}$$

Έτσι, λύνοντας ως προς q θα έχουμε ότι :

$$q = \frac{e^{\mu \delta t} - d}{u-d}$$

Η απόδοση της τιμής της μετοχής θα είναι ίση με :

$$R \triangleq \frac{S_{t+\delta t}}{S_t} \quad (1)$$

Με πιθανότητα ανοδικής κίνησης u ίση με q

Με πιθανότητα καθοδικής κίνησης d ίση με q

Η αναμενόμενη απόδοση θα είναι ίση με :

$$E(R) = q \cdot u + (1-q) \cdot d \quad (2)$$

Η διακύμανση της απόδοσης θα προσδιορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$\text{Var (R)} = E(R^2) - E(R)^2 = q \cdot u^2 + (1\text{-}q) \cdot d^2 - q^2u_2 - (1\text{-}q)^2d^2 \ (3)$$

Στόχος της κατασκευής ενός διωνυμικού δέντρου είναι η προσομοίωση των κινήσεων που ακολουθεί μία μετοχή. Αν επί παραδείγματι η αναμενόμενη τιμή μίας μετοχής είναι μ και η μεταβλητότητά της είναι σ, τότε στο χρονικό διάστημα [t, t+δt], τότε θα ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις :

$$\delta S = \mu \cdot S \cdot \delta t + \sigma \cdot S \cdot \varepsilon \cdot \text{sqrt}(\delta t)$$

με τον όρο του σφάλματος να ακολουθεί την τυποποιημένη κανονική κατανομή

Αντικαθιστώντας το δS ως τη μεταβολή στο χρόνο θα έχουμε τα ακόλουθα :

$$S_{t+\delta t} - S_t = \mu \cdot S \cdot \delta t + \sigma \cdot S \cdot \varepsilon \cdot \text{sqrt}(\delta t)$$

$$S_{t+\delta t} = St + \mu \cdot S \cdot \delta t + \sigma \cdot S \cdot \varepsilon \cdot \text{sqrt}(\delta t)$$

Έτσι, από τη σχέση (1) θα έχουμε ότι :

$$R = \frac{S_{t+\delta t}}{S_t} = 1 + \mu \cdot \delta t + \sigma \cdot \varepsilon \cdot \text{sqrt}(\delta t),$$

με μέση τιμή ίση με $1+\mu \cdot \delta_t$ *και τυπική απόκλιση ίση με* $\sigma \cdot \text{sqrt}(\delta t)$

Έτσι, η διακύμανση θα είναι $\text{Var (R)} = [\sigma \cdot \text{sqrt}(\delta t)]^2$

Αποδεικτικά καταλήγουμε στις ακόλουθες σχέσεις οι οποίες διέπουν την ανοδική και καθοδική κίνηση σε ό,τι αφορά στο διωνυμικό δέντρο προσδιορίζοντας τις ακόλουθες ποσότητες :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$$

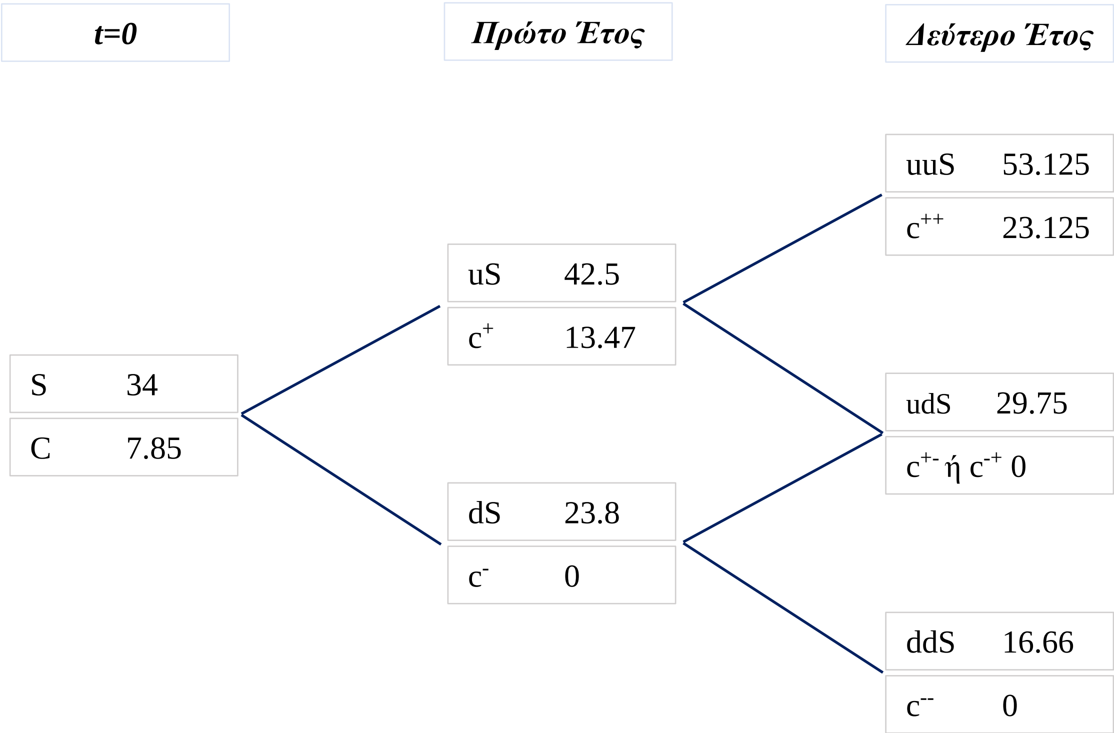
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$$

$$p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d},$$ (Εγγλέζος, 2020)

3.2 Αριθμητική Εφαρμογή

Για την καλύτερη κατανόηση των παραπάνω διατυπώσεων μπορούμε να παραθέσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα. Έστω, ότι έχουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης Αμερικάνικου τύπου, με λήξη σε 2 χρόνια με τιμή εξάσκησης 30 δολαρίων σε μία μετοχή, με τρέχουσα αξία ίση με 34 δολάρια. Αναμένεται αύξηση της μετοχής κατά 1.25 και μείωση κατά 0.70. Αν το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο ισούται με r=3%, προσδιορίζουμε την τιμή του δικαιώματος ως εξής :

$$\pi = \frac{1+0.03-0.70}{1.25-0.70} = 0.6$$



Περίοδος 1	*Περίοδος 2*	*Call Option*	*Put Option*
U	U	max(uuS-X,0)	max(X-uuS,0)
U	D	max(udS-X,0)	max(X-udS,0)
D	U	max(duS-X,0)	max(X-duS,0)
D	D	max(ddS-X,0)	max(X-ddS,0)

Οι κόμβοι του παραπάνω δέντρου συμπληρώνονται ως εξής :

Στο τέλος του δευτέρου έτους και στην περίπτωση ανοδικής κίνησης, θα έχουμε ότι η τρέχουσα τιμή και η αποπληρωμή του δικαιώματος θα είναι αντίστοιχα ίσα με :

$u \cdot u \cdot S = 1.25 \cdot 1.25 \cdot 34 = 53.125$

$c = 53.125 - 30 = 23.125$

Στο τέλος του δευτέρου έτους και στην περίπτωση μίας ανοδικής και μίας καθοδικής κίνησης, θα έχουμε ότι η τρέχουσα τιμή και η αποπληρωμή του δικαιώματος θα είναι αντίστοιχα ίσα με :

$u \cdot d \cdot S = 1.25 \cdot 0.70 \cdot 34 = 29.75$

$c = 0$

Εν προκειμένω, η τιμή του δικαιώματος θα είναι μηδενική, καθώς η τρέχουσα τιμή είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης.

Στο τέλος του δευτέρου έτους και στην περίπτωση καθοδικής κίνησης, θα έχουμε ότι η τρέχουσα τιμή και η αποπληρωμή του δικαιώματος, θα είναι αντίστοιχα ίσα με :

$d \cdot d \cdot S = 0.70 \cdot 0.70 \cdot 34 = 16.66$

$c = 0$, γεγονός το οποίο απαξιώνει το δικαίωμα προαίρεσης.

3.3 Εφαρμογή μέσω της R – Βήματα Υλοποίησης Αλγορίθμου

Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε τα αποτελέσματα με τη χρήση ενός διωνυμικού δέντρου. Προσδιορίζοντας τις παραμέτρους του δέντρου και υποθέτοντας ότι κάθε βήμα πραγματοποιείται σε ένα μήνα, με :

$\delta t = 1/12 = 0.0833$

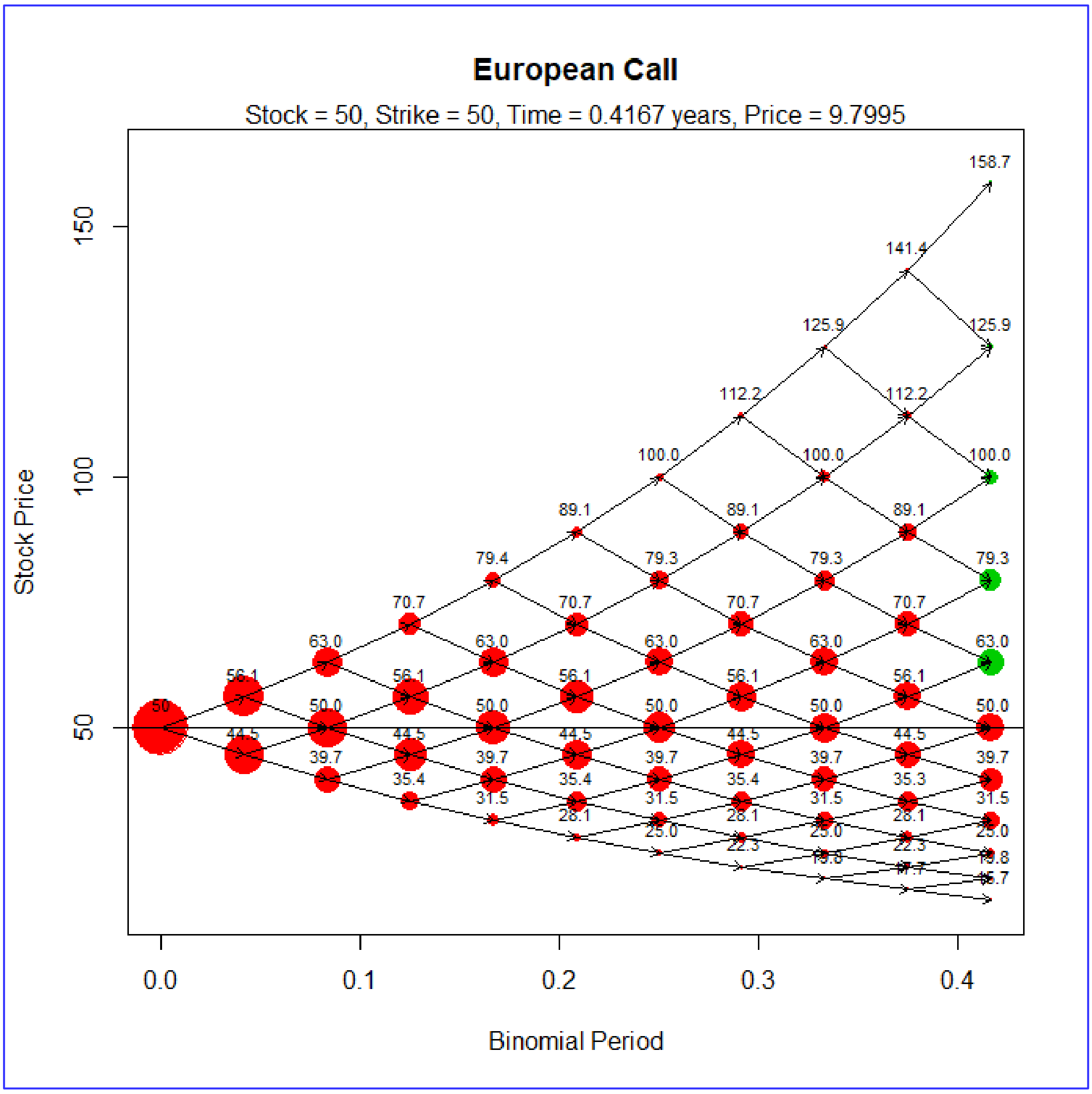
$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}} = 1.1224$

$d = 1/u = 0.8909$

και το αντίστοιχο

$p = \frac{e^{r\delta t} - d}{u - d} = 0.5073$

Τα διαγραμματικά αποτελέσματα τα οποία λαμβάνουμε είναι τα παρακάτω [***Διάγραμμα 1***], με χρήση της έτοιμης διαδικασίας της R **binomplot()** του πακέτου **derivmkts**, στην οποία προσαρμόζουμε τα ακόλουθα, με βάση τις αριθμητικές τιμές όπως αυτές ορίστηκαν παραπάνω :



Διάγραμμα 3. Εφαρμογή Διωνυμικού Δέντρου μέσω της R

Για την προσομοίωση αποτελεσμάτων με τη χρήση συνάρτησης στην R, ορίζουμε πίνακες κενών τιμών, προκειμένου να τους διατρέξουμε με τη χρήση επαναληπτικών διαδικασιών και να προσδιορίσουμε τις τιμές σε κάθε κόμβο. Συγκεκριμένα, ορίζεται ως j η χρονική στιγμή jδt, για τιμές j=0,...N και ως i το πλήθος των ανοδικών κινήσεων μέχρι και τη στιγμή jδt για i από 0 έως και j. Ως N ορίζεται ο αριθμός των χρονικών βημάτων και N+1 είναι τα χρονικά βήματα του δέντρου και T η χρονική στιγμή της λήξης του δικαιώματος. Αν η τιμή σε έναν κόμβο είναι S_{ij} = S*(U^i)*(D^(j-i)), με i = 0,….j και j=0,…N και f_{ij} η τιμή του δικαιώματος στον κόμβο [i,j], στην λήξη θα έχουμε f_{iN} = max{ S*(U^i)*(D^(N-i))-K,0}, για i από 1 έως N. Αν η τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι μεγαλύτερη του άνω φράγματος τότε f_{iN}=0 και αντίστοιχα αν η τιμή f_{iN} είναι μικρότερη του κάτω φράγματος τότε f_{iN}=0. Μειώνοντας τον αριθμό των χρονικών βημάτων κατά 1, υπολογίζουμε f_{ij}=exp(-r*delta_t)*(pu*f[i+2,j+2])+(pd*f[i+1,j+2]).

για προσομοίωση αποτελεσμάτων στο περιβάλλον της R και σε ό,τι αφορά στο διωνυμικό μοντέλο, ακολουθήθηκε η παρακάτω διαδικασία :

- ∝ Ορίζουμε μία συνάρτηση η οποία λαμβάνει ως παραμέτρους εισόδου

  - Την τιμή του υποκείμενου τίτλου S
  - Την τιμή της μεταβλητότητας σ
  - Την τιμή της χρονικής λήξης του δικαιώματος T
  - Τον αριθμό των χρονικών βημάτων N
  - Την τιμή για το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο r
  - Την τιμή για την τιμή της αγοράς K
  - Την τιμή για το άνω φράγμα της μετοχής HU
  - Την τιμή για το κάτω φράγμα HD
- Ορίζουμε έναν πίνακα μηδενικών τιμών N+1 γραμμών και N+1 στηλών και έναν πίνακα f N+1 γραμμών και N+1 στηλών επίσης.
- Ορίζουμε την τιμή για το δt ως το πηλίκο T/N
- Ορίζουμε τις τιμές των u & d σύμφωνα με τις δοθείσες σχέσεις όπως αυτές προσδιορίστηκαν παραπάνω, καθώς και τις αντίστοιχες πιθανότητες ανοδικής και καθοδικής κίνησης μέσω των ποσοτήτων ***pu*** & ***pd***.

Προσομοιώνοντας αριθμητικά δεδομένα κατά την κλήση της συνάρτησης και συγκεκριμένα τα εξής :

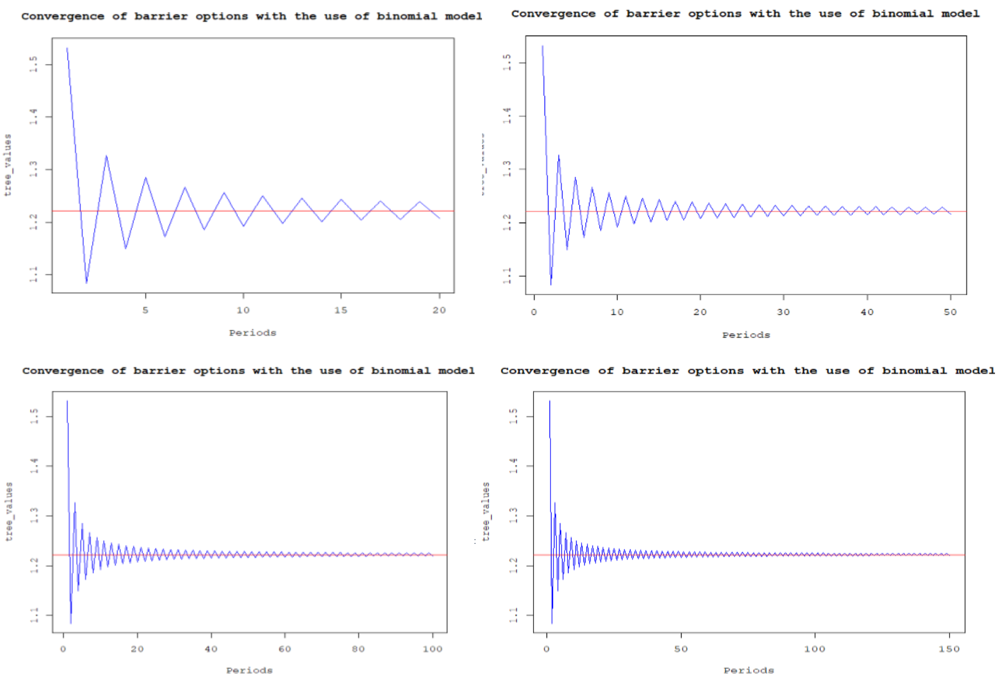
- **binomial(S=60,sigma=0.25,T=1/24,N=12,r=0.001,K=60,HU=90,HD=30)**
  και με την εφαρμογή της παραπάνω συνάρτησης, λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα :

```
         [,1]      [,2]     [,3]      [,4]       [,5]       [,6]      [,7]       [,8]      [,9]     [,10]
 [1,] 1.197461 0.7496229 0.415521 0.1927338 0.06713835 0.01333107 0.0000000 0.00000000 0.0000000 0.0000000
 [2,] 0.000000 1.6517377 1.088527 0.6415101 0.32013427 0.12171883 0.0268537 0.00000000 0.0000000 0.0000000
 [3,] 0.000000 0.0000000 2.223045 1.5419692 0.96750503 0.52140120 0.2179472 0.05409326 0.0000000 0.0000000
 [4,] 0.000000 0.0000000 0.000000 2.9139128 2.12469132 1.42002080 0.8292163 0.38415573 0.1089638 0.0000000
 [5,] 0.000000 0.0000000 0.000000 0.0000000 3.71448213 2.83949229 2.0193175 1.28067341 0.6633023 0.2194933
 [6,] 0.000000 0.0000000 0.000000 0.0000000 0.00000000 4.60205467 3.6714593 2.76857968 1.9069179 1.1134892
 [7,] 0.000000 0.0000000 0.000000 0.0000000 0.00000000 0.00000000 5.5460346 4.58732213 3.6426294 2.7117514
 [8,] 0.000000 0.0000000 0.000000 0.0000000 0.00000000 0.00000000 0.0000000 6.51853893 5.5456019 4.5868927
 [9,] 0.000000 0.0000000 0.000000 0.0000000 0.00000000 0.00000000 0.0000000 0.00000000 7.5054755 6.5181029
[10,] 0.000000 0.0000000 0.000000 0.0000000 0.00000000 0.00000000 0.0000000 0.00000000 0.0000000 8.5070583
[11,] 0.000000 0.0000000 0.000000 0.0000000 0.00000000 0.00000000 0.0000000 0.00000000 0.0000000 0.0000000
[12,] 0.000000 0.0000000 0.000000 0.0000000 0.00000000 0.00000000 0.0000000 0.00000000 0.0000000 0.0000000
[13,] 0.000000 0.0000000 0.000000 0.0000000 0.00000000 0.00000000 0.0000000 0.00000000 0.0000000 0.0000000
          [,11]      [,12]     [,13]
 [1,] 0.0000000  0.0000000  0.000000
 [2,] 0.0000000  0.0000000  0.000000
 [3,] 0.0000000  0.0000000  0.000000
 [4,] 0.0000000  0.0000000  0.000000
 [5,] 0.0000000  0.0000000  0.000000
 [6,] 0.4421406  0.0000000  0.000000
 [7,] 1.7944860  0.8906343  0.000000
 [8,] 3.6422032  2.7113284  1.794066
 [9,] 5.5451692  4.5864633  3.641777
[10,] 7.5050360  6.5176668  5.544737
[11,] 9.5235049  8.5066154  7.504597
[12,] 0.0000000 10.5550358  9.523059
[13,] 0.0000000  0.0000000 11.601875
```

Διάγραμμα 4. Αποτελέσματα από την εφαρμογή του διωνυμικού μοντέλου

Μεγάλο ερευνητικό ενδιαφέρον σε κάθε περίπτωση έχει να διερευνήσουμε κατά πόσον οι προβλέψεις οι οποίες κάνουμε με την προσαρμογή μαθηματικών μοντέλων, μπορούν να παράγουν αξιόπιστες πληροφορίες, οι οποίες θα μας επέτρεπαν με σχετική ακρίβεια να προβλέψουμε τις πραγματικές τιμές. Εν συντομία δηλαδή, έχουμε ένα σωστό γνώμονα διενέργειας προβλέψεων, όταν οι παρατηρηθείσες τιμές προσεγγίζουν τις θεωρητικές τιμές. Αυτό, είναι κάτι το οποίο μπορούμε και διαγραμματικά να διαπιστώσουμε, αν κατασκευάσουμε ένα διάγραμμα το οποίο να απεικονίζει την απόκλιση των θεωρητικών από τις παρατηρηθείσες τιμές, σε ένα ικανό πλήθος βημάτων. Πριν όμως κατασκευαστεί το σχετικό διάγραμμα, θα πρέπει να υπολογιστεί και η θεωρητική τιμή, έτσι ώστε να τεκμηριωθεί μέσω αυτού και η σύγκλιση με τις αντίστοιχες παρατηρηθείσες. Για τον προσδιορισμό αυτής θα χρησιμοποιήσουμε την έτοιμη διαδικασία της R ***DoubleBarrierOption()*** του πακέτου ‘fExoticOptions[2]’, με παραμέτρους DoubleBarrierOption("co",S,X,L,U,Time,r,b, sigma, delta1, delta2), όπου “co” ή “po”, μία παράμετρος τύπου character η οποία επέχει τη θέση του call option και του put option αντίστοιχα. Ένα double barrier option είτε “χτυπάει” έξω είτε μέσα, αν το στοιχείο του ενεργητικού “αγγίξει” είτε το άνω φράγμα είτε το κάτω φράγμα, μέχρι και την περίοδο λήξης.

Στα παραπάνω διαγράμματα παρουσιάζεται η σύγκλιση των θεωρητικών, όπως αυτές προσδιορίστηκαν με τη χρήση του πακέτου **‘fExoticOptions’** με τις παρατηρηθείσες τιμές για N=20, 50, 100 & 150 αντίστοιχα. Για να καταστεί περισσότερο σαφές, η



διαδικασία η οποία ακολουθείται εδώ είναι πρωτίστως να προσδιοριστεί η θεωρητική τιμή για τα συγκεκριμένα δεδομένα και μετά προσαρμόζοντας τα πραγματικά

[2] https://cran.r-project.org/web/packages/fExoticOptions/fExoticOptions.pdf

διαθέσιμα, να δούμε σε διάφορες εκτελέσεις του αλγορίθμου, κατά πόσον η θεωρία προσεγγίζεται από την πραγματικότητα. Συνεπώς, η κλήση της συνάρτησης για παραμέτρους

"co"

S=60

X=60

L=30

U=90

Time=1/24

r=0.001

b=0

sigma=0.25

delta1=0

delta2=0

```
Parameters:
          Value:
 TypeFlag co
 S        60
 X        60
 L        30
 U        90
 Time     0.0416666666666667
 r        0.001
 b        0
 sigma    0.25
 delta1   0
 delta2   0

Option Price:
 1.221329
```

Πίνακας 1. Αποτελέσματα Προσδιορισμού Θεωρητικής Τιμής με τη χρήση της R

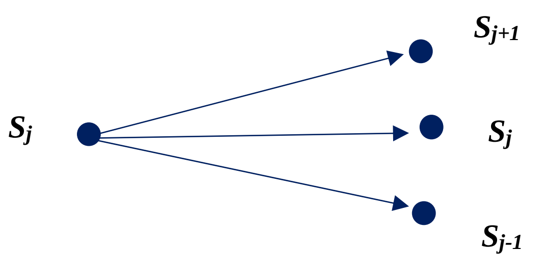
4 Μοντέλο Αποτίμησης με τη χρήση Τριωνυμικών Δέντρων

Όπως προαναφέρθηκε ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά, είναι το διωνυμικό μοντέλο αποτίμησης δικαιωμάτων. Κατέκτησε τον χώρο των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, μέχρι και την εμφάνιση ενός πιο εξελιγμένου μοντέλου, του τριωνυμικού δέντρου αποτίμησης, το οποίο ουσιαστικά έχει επιφέρει κάποιες διορθώσεις στο αρχικό διωνυμικό, με την εξής διαφορά, όπως αυτή θα αποτυπωθεί και στις επόμενες υποενότητες του παρούσας υποενότητας. Η διαφορά μεταξύ των δύο μοντέλων, είναι ότι ενώ προηγουμένως υποτίθεται μόνο μία ανοδική και μία ανοδική κίνηση, εν προκειμένω, υποτίθεται μία ανοδική κίνηση, μία καθοδική κίνηση, αλλά και η παραμονή στο ίδιο επίπεδο, προσδιορίζοντας κάθε φορά τις σχετικές πιθανότητες. Οι παράμετροι του τριωνυμικού μοντέλου είναι οι ακόλουθες :

Διωνυμικό Μοντέλο Αποτίμησης	*Τριωνυμικό Μοντέλο Αποτίμησης*
p_u	p_u
p_d	p_d
	p_m
u	u
d	d

Διάγραμμα 6. Διαφορές Διωνυμικού - Τριωνυμικού Δέντρου Αποτίμησης

Έτσι, σε αντιστοιχία της προηγούμενης απεικόνισης, έχουμε και την αντίστοιχη απεικόνιση των κινήσεων για το αντίστοιχο τριωνυμικό δέντρο, όπως παρουσιάζεται ακολούθως :



4.1 Μαθηματικές Σχέσεις που Διέπουν το Τριωνυμικό Δέντρο

Το τριωνυμικό δέντρο μπορεί να κατασκευαστεί με παρόμοιο τρόπο, σε σχέση με το διωνυμικό δέντρο. Πρέπει αρχικά να προσδιοριστεί το μέγεθος του άλματος ***u*** & ***d***, και στη συνέχεια τα $\boldsymbol{p_u}$ και $\boldsymbol{p_d}$, όσες και οι πιθανότητες μετάβασης ανάλογα την κατά περίπτωση κίνηση. Έτσι, προσδιορίζουμε το τριωνυμικό δέντρο τιμών ως ακολούθως :

$$S(t+\Delta t) = \begin{cases} S(t)\, u, \text{με πιθανότητα } p_u \\ S(t), \text{με πιθανότητα } 1 - p_u - p_d \\ S(t)\, d, \ \text{με πιθανότητα } p_d \end{cases}$$

Και ισχύει

$E[St(_{i+1})][S(t_i)] = e^{r\Delta t} S(t_i)$ (4)

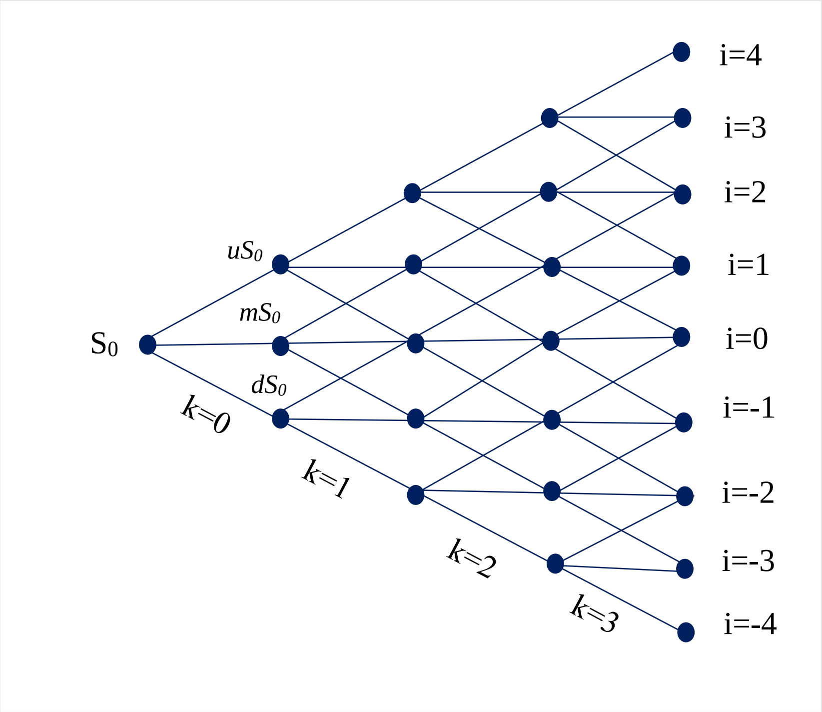
$Var[St(_{i+1})]\ [S(t_i)] = \Delta t\ S(t_i)^2\sigma^2 + O(\Delta t)$ (5)

,υπό την υπόθεση ότι η μεταβλητότητα του υποκείμενου στοιχείου του ενεργητικού σ είναι σταθερή. Η σχέση (4) ορίζει μία κατάσταση ισορροπίας ή μη κερδοσκοπίας. Ουσιαστικά, δηλαδή περιγράφει εκείνη την κατάσταση κατά την οποία η απόδοση από στο στοιχείο του ενεργητικού είναι ίση με το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο. Έτσι, μπορεί να διατυπωθεί η ακόλουθη σχέση (Εγγλέζος, 2020):

$1 - p_u - p_d + p_u u + p_d d = e^{r\Delta t}$ (6)

Εκ των συνθηκών (4) και (5) προκύπτουν δύο επιπλέον περιορισμοί σε 4 παραμέτρους του δέντρου. Τέλος, υπάρχει η δέσμευση ότι το μέγεθος του άνω άλματος είναι αντίστροφο του μεγέθους του προς τα κάτω άλματος.

Σημειώνεται εδώ ότι αυτή η συνθήκη δεν χρησιμοποιείται πάντα για κατασκευή ενός διωνυμικού δέντρου. Δεδομένης της γνώσης των αλμάτων μετάβασης σε κόμβους u, d και των αντίστοιχων πιθανοτήτων αυτών δηλαδή pu & pd, καθίσταται εφικτός ο προσδιορισμός της τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, δηλαδή η S για οποιαδήποτε δεδομένη ακολουθία μεταβολών στις υφιστάμενες τιμές. Μία διαγραμματική απεικόνιση για την προσέγγιση των παραπάνω σχέσεων παρατίθεται ακολούθως:



Διάγραμμα 7. Τριωνυμικό Δέντρο

Στο παραπάνω διάγραμμα [Διάγραμμα 7] απεικονίζονται οι δυνητικές κινήσεις που μπορούν να ακολουθηθούν σε ένα τριωνυμικό δέντρο. Όπως προκύπτει, φαίνεται να υπάρχουν τρεις δυνατότητες κίνησης, τις οποίες μπορούμε να ονομάσουμε N_u, N_d, N_m, σε αντιστοιχία με την ανοδική, καθοδική και παραμονή στον ίδιο κόμβο, συνεπώς η τιμή της υποκείμενης μετοχής στον κόμβο j και σε αντίστοιχο χρόνο i, δίνεται από τη σχέση $S_{i,j} = u^{Nu} d^{Nd} S(t_0)$, όπου $N_u + N_d + N_m = n$.

Εν συνεχεία προσδιορίζονται οι ποσότητες u, d, p_u, p_d, p_m :

$$u = e^{\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

$$d = e^{-\sigma\sqrt{2\Delta t}}$$

$$p_u = \left(\frac{e^{\frac{r\Delta t}{2}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}}} \right)$$

$$p_d = \left(\frac{e^{\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}} - e^{\frac{r\Delta t}{2}}}{e^{\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}} - e^{-\sigma\sqrt{\frac{\Delta t}{2}}}} \right)$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

Όπως προαναφέρθηκε, τα δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου call ή put, δίνουν τη δυνατότητα στον κάτοχό τους, να πουλήσει ή να αγοράσει αντίστοιχα έναν υποκείμενο τίτλο, σε μία προσυμφωνημένη τιμή Κ, εντός προκαθορισμένου χρόνου Τ. Η μεθοδολογία αποτίμησης με τη χρήση τριωνυμικών δέντρων, προσεγγίζει σε πολύ μεγάλο βαθμό αυτή της χρήσης διωνυμικών δέντρων. Έτσι, έχουμε τις αντίστοιχες τιμές στη λήξη :

C(S,T) = max$\{\boldsymbol{S - K}, \mathbf{0}\}$ σε ό,τι αφορά στα ***call options***

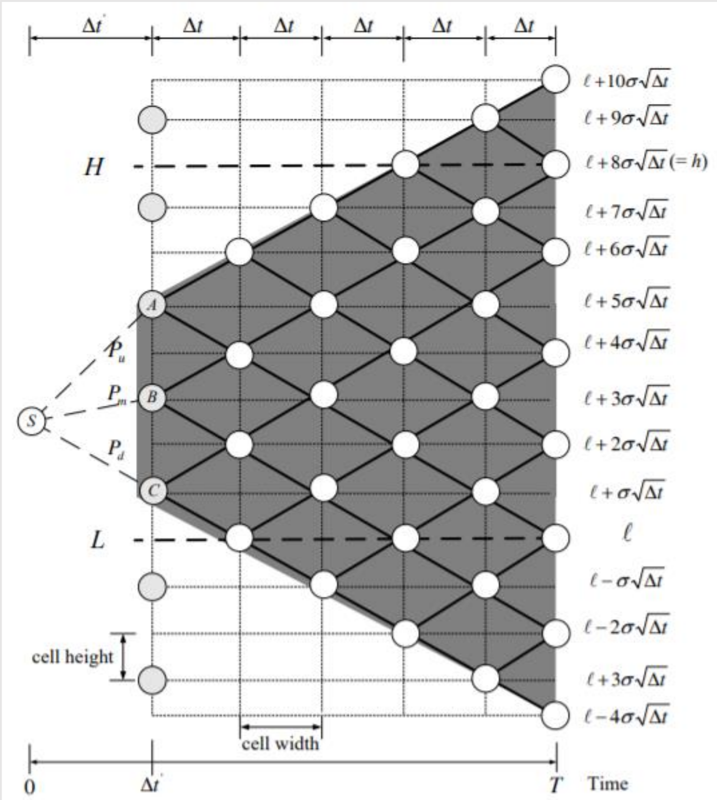
C(S, T) = max $\{\boldsymbol{K - S}, \mathbf{0}\}$ σε ό,τι αφορά στα ***put options***

Στη συνέχεια προσδιορίζονται οι τιμές, μέσω της σχέσης

$$C_{n,j} = e^{-r\Delta t} [p_u C_{n+1,j+1} + p_m C_{n+1,j} + p_d C_{n+1,j-1}]$$

5. Μοντέλο Αποτίμησης με τη χρήση Διωτριωνυμικών Δέντρων

Ένας ακόμα τρόπος αποτίμησης, επιτυγχάνεται με τη χρήση διωτριωνυμικών δέντρων. Η ονομασία τους προσδιορίζει ακριβώς και τη δομική τους σύσταση, καθώς πρόκειται για το συνδυασμό ενός διωνυμικού και ενός τριωνυμικού δέντρου. Επί της ουσίας, κατά το πρώτο χρονικό βήμα έχουμε ένα τριωνυμικό δέντρο αποτίμησης το οποίο στα επόμενα χρονικά βήματα εξελίσσεται σε διωνυμικό δέντρο.



Διάγραμμα 8. Διωτριωνυμικό Δέντρο Αποτίμησης[3]

Το δέντρο βρίσκεται εντός του γκρι πλέγματος με τα δύο πρώτα δύο χρονικά του βήματα να περικόπτονται. Έτσι, το δέντρο προέρχεται από τρεις κόμβους: A, B και C τη χρονική στιγμή Δt. Όπως, φαίνεται και από το Διάγραμμα 8, υπάρχουν δύο φράγματα, ένα L και ένα H, δηλαδή ένα ανώτερο και ένα κατώτερο φράγμα, όπως αυτά προσδιορίζονται από τις έντονες διακεκομμένες γραμμές. Στην επόμενη ενότητα συζητούνται οι σχέσεις που διέπουν το διωτριωνυμικό δέντρο αποτίμησης δικαιωμάτων, καθώς επίσης γίνεται και χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων και εφαρμογής σε ψευδοκώδικα της R, προκειμένου να διερευνηθεί η σχέση μεταξύ των εξεταζόμενων μεγεθών.

[3] Πηγή : https://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.192.6660&rep=rep1&type=pdf

5.1 Μαθηματικές Σχέσεις που Διέπουν το Διωτριωνυμικό Μοντέλο Αποτίμησης

Κατά την διαδικασία της κατασκευής του διωτριωνυμικού δέντρου, και προκειμένου να διασφαλιστεί αυτό βρίσκεται σε συμφωνία με το H_0 και L_0, πρέπει να είναι διακριτή τιμή, πολλαπλάσια του $2c_0$, όπου $h_0 = \ln(H_0/S_s)$ και $l_0 = \ln(L_0/S_s)$, δηλαδή οι λογαριθμησμένες τιμές του άνω και κάτω φράγματος. (Dai and Lyuu, 2010)

Έχουμε N βήματα για το διωνυμικό δέντρο και m βήματα για το τριωνυμικό δέντρο. Η ποσότητα Δ_T=T/m αποτελεί μία επιλογή του μήκους αναφορικά με τον προσδιορισμό του κάθε βήματος, για ένα διωτριωνυμικό δέντρο αποτίμησης, ωστόσο το πρόβλημα έγκειται στο γεγονός πως η ποσότητα $\frac{h_0-l_0}{2\sigma\sqrt{\Delta t}}$, ενδέχεται να μην είναι διακριτή. Με γνώμονα αυτό επομένως, επιλέγεται ένα Δ_t το οποίο δεν υπερβαίνει την τιμή του Δ_T, όπου $\Delta_t = (\frac{h-l}{2k\sigma})^2$, όπου k είναι η **ακέραια** ποσότητα k= $[\frac{h-l}{2\sigma\sqrt{\Delta_T}}]$. Ο αριθμός των χρονικών βημάτων του διωτριωνυμικού δέντρου ορίζεται ως η ποσότητα $[\frac{T}{\Delta t}]$, το οποίο ενδέχεται να διαφέρει από το m. Τέλος, το μήκος του πρώτου χρονικού βήματος, $\Delta t' =$ T-$(\left[\frac{T}{\Delta t}\right] - 1)\,\Delta t$, η οποία σχέση διέπεται από την εξής διατύπωση πως $\Delta t \leq \Delta t' \leq 2\Delta t$. Στη συνέχεια αυτό που καλείται κάποιος να υπολογίσει είναι η μέση τιμή και η διακύμανση τη χρονική στιγμή Δt', ως τις ακόλουθες ποσότητες, δηλαδή :

$$\mu(x) = (r-\sigma^2/2)x$$

$$Var(x) = \sigma^2 x$$

Από τις οποίες εκπηγάζουν οι τιμές των ποσοτήτων a,b,c, ως εξής :

$$b= \hat{\mu} - \mu(\Delta t')$$

$$a= \hat{\mu} + 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu(\Delta t') = \beta + 2\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$c=\hat{\mu} - 2\sigma\sqrt{\Delta t} - \mu(\Delta t') = \beta - 2\sigma\sqrt{\Delta t}, \text{ με } \alpha > \beta > \gamma$$

Οι πιθανότητες των κινήσεων σε αυτή την περίπτωση υπολογίζονται από τις σχέσεις :

$P_u=det_u/det$, πιθανότητα ανοδικής κίνησης για το πρώτο βήμα

$P_m=det_m/det$, πιθανότητα μη μετακίνησης για το πρώτο βήμα

$P_d=det_d/det$, πιθανότητα καθοδικής κίνησης για το πρώτο βήμα

, όπου $det = (\beta - \alpha)(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)$

$$det_u = (\beta\gamma + Var(\Delta t))(\gamma - \beta)$$

$$det_m = (\alpha\gamma + Var(\Delta t))(\alpha - \gamma)$$

$det_d = (\alpha\beta + Var(\Delta t))(\beta - \alpha)$. Σημειώνεται εδώ ότι, για να διασφαλιστεί η εγκυρότητα των τιμών των πιθανών κινήσεων, πρέπει αυτές να ικανοποιούν τη σχέση $P_u, P_m, P_d \geq 0$. Έτσι, υπολογίζουμε την πιθανότητα της ανοδικής κίνησης από τη σχέση p=$\frac{(e^{r\Delta t}-d)}{u-d}$, όπου u=$e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ και d= 1/u, προκειμένου να προσδιορίσουμε στη συνέχεια την αξία του δικαιώματος κατά τη λήξη (Dai and Lyuu, 2010).

5.2 Θεωρητική Τιμή & Διάγραμματα Σύγκλισης για τα τρία μοντέλα

Όπως έγινε λόγος και σε προηγούμενες υποενότητες, η πραγματική πληροφορία αποκτά αξία όταν μπορούμε να εξάγουμε τα βέλτιστα δυνατά αποτελέσματα με τα κατά περίπτωση διαθέσιμα μέσα. Από την κατασκευή των τριών μοντέλων, θα είχε αξία ο προσδιορισμός εκείνου το οποίο προσδιορίζει με τη βέλτιστη δυνατή ακρίβεια τα αποτελέσματα . Έτσι, για τα ίδια πειραματικά δεδομένα θα γίνει παρουσίαση των αποτελεσμάτων και των τριών μοντέλων με στόχο τον προσδιορισμό εκείνων, που προσεγγίζουν καλύτερα την απαιτούμενη πληροφορία.

Βήμα 1ο : Προσδιορισμός της θεωρητικής τιμής για ***δικαίωμα αγοράς*** με παραμέτρους, όπως αυτές προσδιορίζονται στην ***Εικόνα 1***.

```
Title:
 Double Barrier Option

Call:
 DoubleBarrierOption(TypeFlag = "co", S = 60, X = 65.3, L = 30,
     U = 90, Time = 1/24, r = 0.001, b = 0, sigma = 0.25, delta1 = 0,
     delta2 = 0)

Parameters:
          Value:
 TypeFlag co
 S        60
 X        65.3
 L        30
 U        90
 Time     0.0416666666666667
 r        0.001
 b        0
 sigma    0.25
 delta1   0
 delta2   0

Option Price:
 0.06453258
```

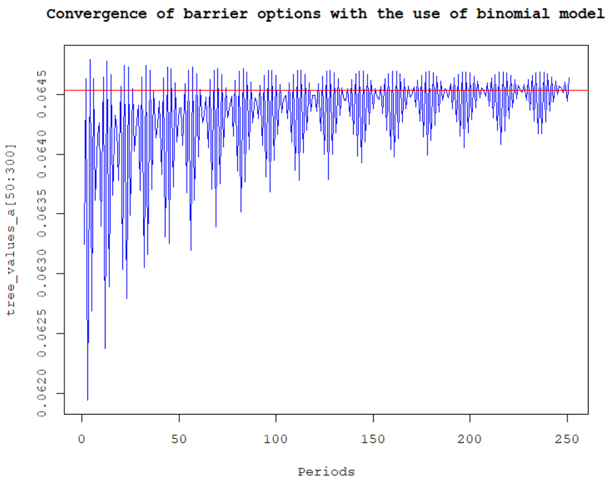
Εικόνα 1. Υπολογισμός Θεωρητικής Τιμής για τη Σύγκριση των Μοντέλων

Έχοντας στη διάθεση μας τη θεωρητική τιμή, μπορούμε με την κλήση της κάθε μίας από τις επιμέρους συναρτήσεις να δούμε πόσο καλά προσαρμόζονται στην εκάστοτε περίπτωση, προκειμένου να καταλήξουμε στην τελική επιλογή του μοντέλου. Έτσι, χρησιμοποιώντας την θεωρητική τιμή η οποία εν προκειμένω βρέθηκε ίση με 0.06453258, θα έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα :

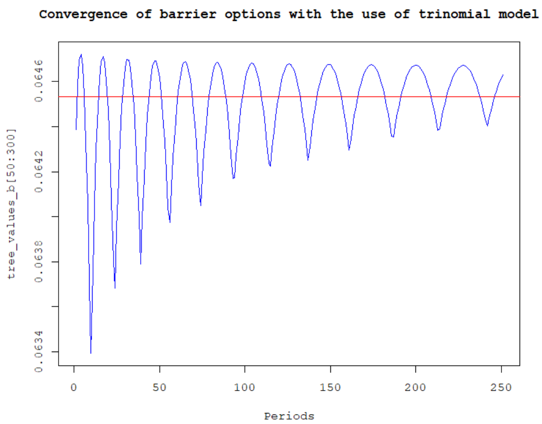
Βήμα 2º : Προσομοίωση Αποτελεσμάτων με τη χρήση των τριών Μοντέλων για τον προσδιορισμό της βέλτιστης σύγκλισης

5.3 Διωνυμικο Μοντέλο

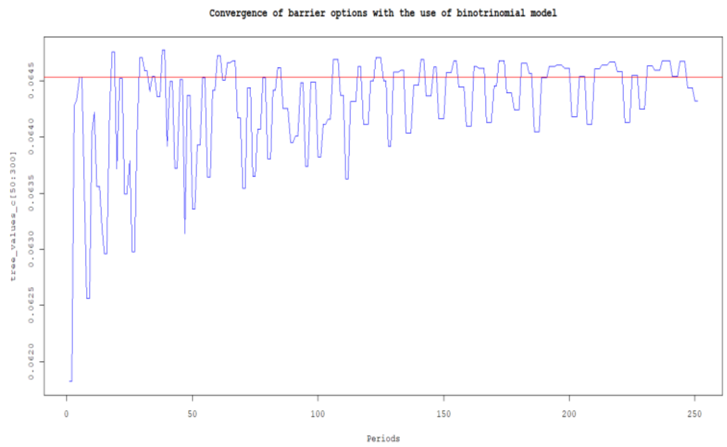
Για N=50 έως και 300 προσδιορίστηκαν τα αποτελέσματα των τριών μοντέλων και η διαγραμματική απεικόνισή τους αντιστοιχεί στα παρακάτω γραφήματα. Όπως, διαπιστώνεται όσο αυξάνεται το N, τόσο τείνει να μειωθεί και η απόσταση θεωρητικής – παρατηρηθέντων τιμών.



Διάγραμμα 9. Σύγκλιση Διωνυμικού Μοντέλου με τη θεωρητική τιμή (option value=0.06453258)



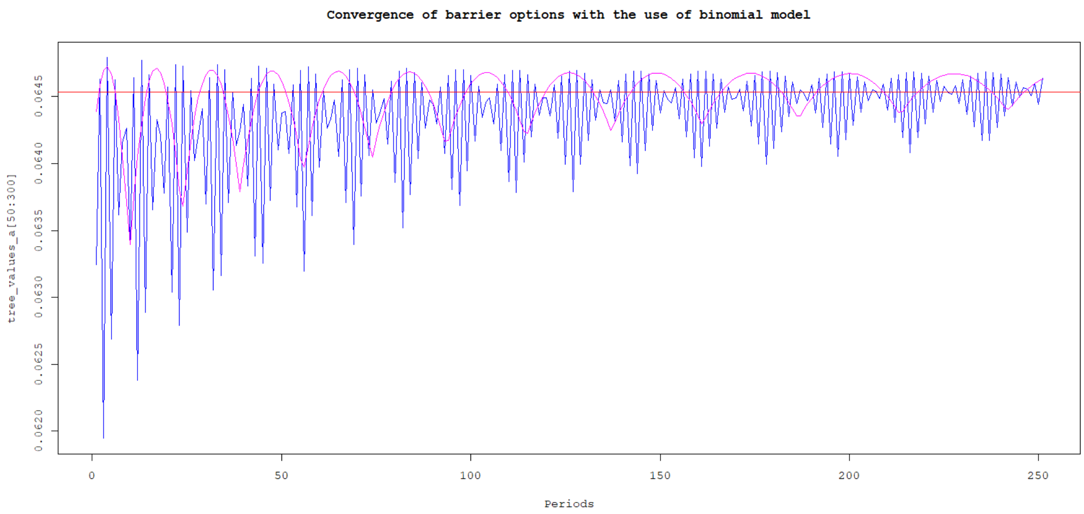
Διάγραμμα 10.. Σύγκλιση Τριωνυμικού Μοντέλου με τη θεωρητική τιμή (option value=0.06453258)



Διάγραμμα 11. . Σύγκλιση Διωτριωνυμικού Μοντέλου με τη θεωρητική τιμή (option value=0.06453258)

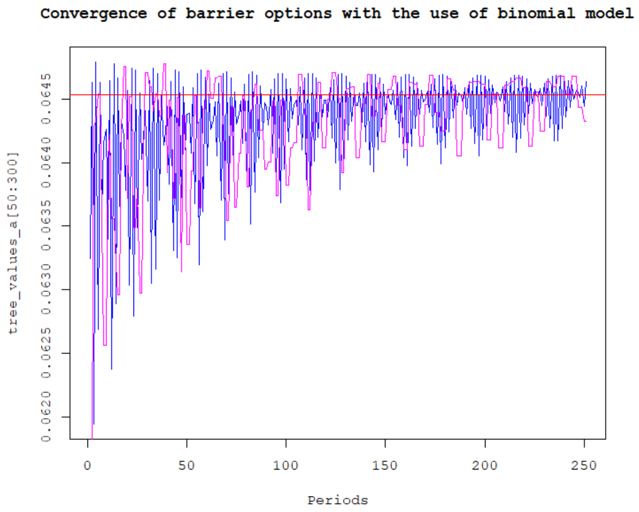
Όπως παρατηρείται από τα παραπάνω διαγράμματα [Διάγραμμα 8, 9 & 10], καλύτερα και ομαλότερα, φαίνεται να συγκλίνει το διωτριωνυμικό έναντι του διωνυμικού μοντέλου αποτίμησης δικαιωμάτων, γεγονός το οποίο τεκμηριώνεται και με τον υπολογισμό των errors από την εφαρμογή των τριών μοντέλων, αλλά και από την κατασκευή των ανά δύο κατά περίπτωση διαγραμμάτων, για τις μεταξύ τους συγκρίσεις. Έτσι, στα Διαγράμματα 11,12,13 επιχειρείται η ανάδειξη αυτής της σχέσης, με το συμπέρασμα το οποίο διατυπώθηκε παραπάνω να επιβεβαιώνεται και διαγραμματικά

Διωνυμικό – Τριωνυμικό :



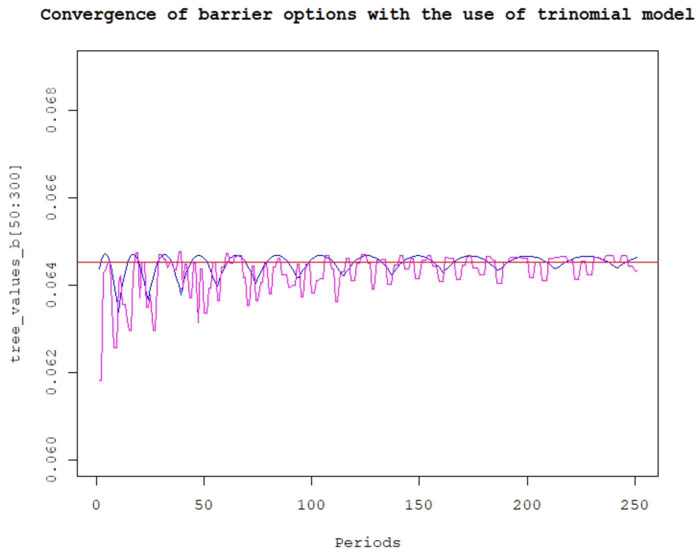
Διάγραμμα 12. Σύγκριση Διωνυμικού & Τριωνυμικού Μοντέλου Αποτίμησης Δικαιωμάτων

Διωνυμικό – Διωτριωνυμικό :



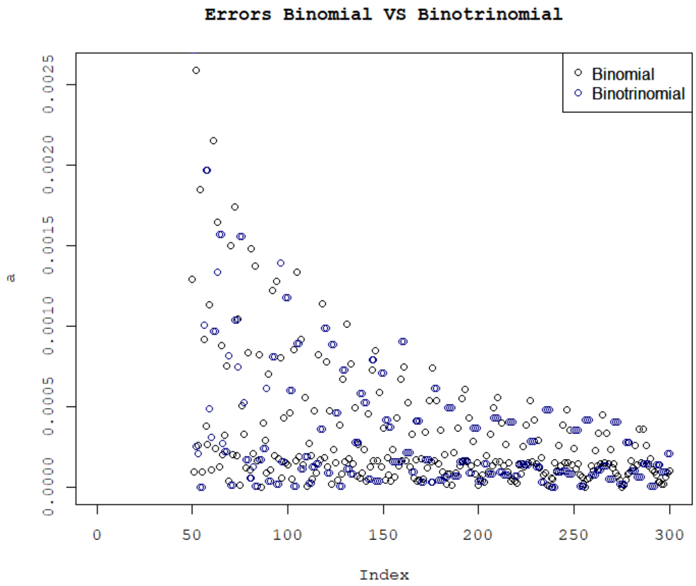
Διάγραμμα 13. Σύγκριση Διωνυμικού & Διωτριωνυμικού Μοντέλου Αποτίμησης Δικαιωμάτων

Τριωνυμικό – Διωτριωνυμικό :

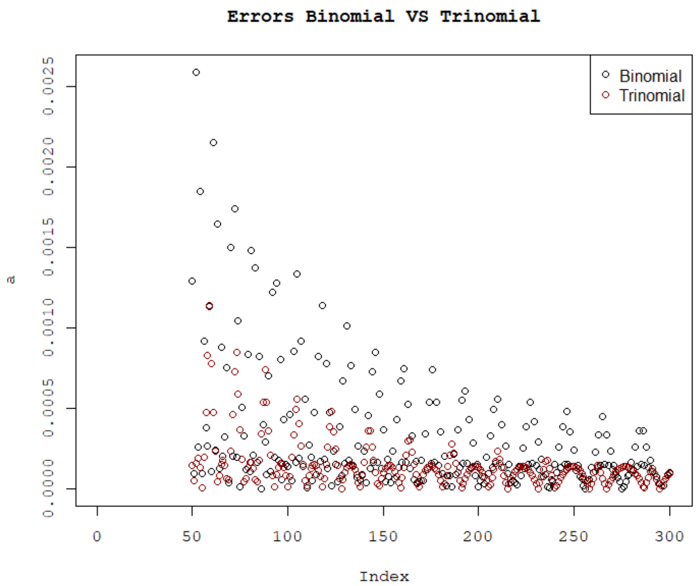


Διάγραμμα 14. Σύγκριση Τριωνυμικού & Διωτριωνυμικού Μοντέλου Αποτίμησης Δικαιωμάτων

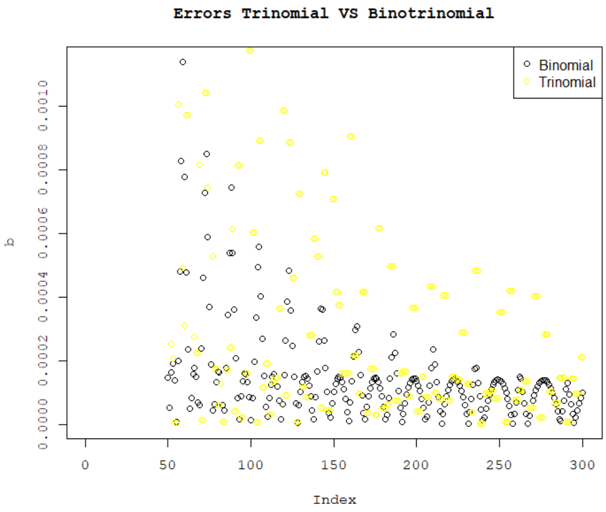
Τα διαγράμματα τα σχετικά με την απεικόνιση των παραπάνω αποτελεσμάτων συναρτήσει των errors -της υφιστάμενης απόστασης δηλαδή από την θεωρητική τιμή, μπορούν να υπολογιστούν για κάθε μοντέλο και οι αντίστοιχες διαγραμματικές απεικονίσεις αυτών, παρατίθενται ακολούθως :



Διάγραμμα 15. Errors Binomial – Binotrinomial



Διάγραμμα 16. Errors Binomial - Trinomial



Διάγραμμα 17. Errors Trinomial - Binotrinomial

Με την χρήση της διαδικασίας table(), ως έτοιμης διαδικασίας της R, προσδιορίστηκαν οι τιμές των errors για τα μοντέλα ανά δύο, αναδεικνύοντας ως προτιμότερο όλων το τριωνυμικό μοντέλο αποτίμησης, έναντι των άλλων δύο και του διωτριωνυμικού έναντι του διωνυμικού. Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της παραπάνω διαδικασίας, έχοντας πρώτα προσδιορίσει τις αποστάσεις της τελικής αξίας των δικαιωμάτων από την θεωρητική τιμή. Με την εφαρμογή λογικών τελεστών, έγιναν συγκρίσεις ανά δύο των μοντέλων ως εξής :

a=abs(tree_values_a-0.06453258)

b=abs(tree_values_b-0.06453258)

c=abs(tree_values_c-0.06453258)

συγκρίνοντας τις παραπάνω ποσότητες ανά δύο, προέκυψαν λογικά αποτελέσματα, τα οποία επέχουν θέση 0 και 1. Συνεπώς, η καταγραφή αυτών ως True ή False, ήταν και αυτή η οποία ανέδειξε το συμπέρασμα, το οποίο εποπτικά προσεγγίστηκε στα προηγούμενα βήματα.

	FALSE	TRUE
errors binomial-binotrinomial	114	137
errors binomial-trinomial	81	170
errors trinomial-binotrinomial	163	88

6 Συμπεράσματα

Στην παρούσα ερευνητική εργασία, έγινε μία προσπάθεια αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης αγοράς που υπόκεινται σε άνω και κάτω φράγμα με την εφαρμογή τους στο περιβάλλον της R. Για την ανάγκη της εφαρμογής, έγινε προσέγγιση των ζητουμένων με την μέθοδο της αριθμητικής ανάλυσης. Ως καλύτερος τρόπος προσέγγισης και μέσω της προσομοίωσης αριθμητικών τιμών, αναδείχθηκε το τριωνυμικό μοντέλο αποτίμησης, για λόγους ομαλότερης και ταχύτερης σύγκλισης της θεωρητικής και των πραγματικών τιμών, όπως προέκυψε τόσο με τη χρήση διαγραμματικών προσεγγίσεων μέσω των οποίων τεκμηριώνεται το παραπάνω συμπέρασμα, αλλά και μέσω του υπολογισμού των σφαλμάτων, τα οποία προσδιορίζονται ως οι αποστάσεις των παραπάνω μεγεθών. Σε ό,τι αφορά στα άλλα δύο μοντέλα, και με την επικράτηση της συνθήκης αλήθειας, κατά την εκτέλεση για μεγάλο μέγεθος N, συγκεκριμένα από 50 έως 300, τα σφάλματα του διωνυμικού μοντέλου ήταν κατά κράτος μεγαλύτερα αν αντιθέσει με τα αντίστοιχα του διω-τριωνυμικού, οπότε και επιβεβαιώνεται η ταχύτερη σύγκλιση για το διω-τριωνυμικό μοντέλο, αναγάγοντάς το σε βέλτιστο έναντι του διωνυμικού, αλλά με βεβαιότητα όχι καλύτερο του τριωνυμικού, σε ό,τι αφορά στα συγκεκριμένα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν κατά την προσομοίωση αποτελεσμάτων.

7 Βιβλιογραφικές Αναφορές

Ξένη Βιβλιογραφία

[1] Ali, A. (2017). Exotic Options: Pricing Path-Dependent single Barrier Option contracts.

[2] Appolloni, E. and Ligori, A., 2014. Efficient tree methods for pricing digital barrier options.

[3] BODIE, Z., KANE, A. and ALAN, M., 2014. *INVESTMENTS*. 10th ed.

[4] C.C. Hsia, On binomial option pricing, J. Financ. Res. 6 (1983) 41–5

[5] Cox, J., Ross, S. and Rubinstein, M., 1979. Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), pp.229-263.

[6] Dai, T. and Lyuu, Y., 2010. The Bino-Trinomial Tree: A Simple Model for Efficient and Accurate Option Pricing. *The Journal of Derivatives*, 17(4), pp.7-24.

[7] M. Joshi, Achieving smooth asymptotics for the prices of European options in binomial trees, Quant. Financ. 9 (2009) 171–176

[8] Makamo, Event. (2017). Pricing of Double Barrier Options and their applications in R.

[9] Muroi, Y. and Yamada, T., 2013. Spectral binomial tree: New algorithms for pricing barrier options. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 249, pp.107-119.

[10] R. Rendleman, B. Bartter, Two state option pricing, J. Financ. 34 (1979) 1093–1110

[11] Ragukumar, P. and Sethuraman, G., 2020. Binomial trees are graceful. *AKCE International Journal of Graphs and Combinatorics*, 17(1), pp.632-636.

[12] S. Heston, G. Zhou, On the rate of convergence of discrete-time contingent claims, Math. Financ. 10 (2000) 53–75

Ελληνική Βιβλιογραφία

[1] Εγγλέζος, Ν. (2020). Υπολογιστική Χρηματοοικονομική [Πανεπιστημιακές Σημειώσεις]. Πανεπιστήμιο Πειραιά, Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής, Π.Μ.Σ.: «Χρηματοοικονομική και Τραπεζική Διοικητική», Αθήνα

Διαδικτυακές Πηγές

- https://cran.r-project.org/bin/windows/base/
- https://cran.r-project.org/web/packages/fExoticOptions/fExoticOptions.pdf
- https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/oleg_zaboronski/fm/trinomial_tree_2008.pdf
- https://www.finpipe.com/exotic-options/

8 Παράρτημα - Μοντέλα

8.1 Διωνυμικό Μοντέλο Αποτίμησης Συνάρτηση

```
binomial <-function(S,sigma,T,N,r,K,HU,HD) {
  tree = matrix(0, nrow=N+1, ncol=N+1)
  f=matrix(0,nrow=N+1,ncol=N+1)
  delta_t=T/N
  U = exp(sigma*sqrt(delta_t))
  D = exp(-sigma*sqrt(delta_t))
  pu=(exp((r-q)*delta_t)-D)/(U-D)#probability
  pd=1-pu
      for (i in 0:N){
      tree[i+1,N+1] = S*(U^i)*(D^(N-i))
      if(tree[i+1,N+1]>=HU){
            f[i+1,N+1]=0
      }else if(tree[i+1,N+1]<=HD){
            f[i+1,N+1]=0
      }else{
            f[i+1,N+1]=max(S*(U^i)*(D^(N-i))-K,0)
      }
}
for (j in seq(N-1,0,by=-1)){
      for (i in 0:j){
            tree[i+1,j+1]=S*(U^i)*(D^(j-i))
            if(tree[i+1,j+1]>=HU){
                  f[i+1,j+1]=0
            }else if(tree[i+1,j+1]<=HD){
                  f[i+1,j+1]=0
            }else{
                  f[i+1,j+1]=exp(-
r*delta_t)*(pu*f[i+2,j+2])+(pd*f[i+1,j+2])
            }
      }
   }

return(f)

}
```

8.2 Κατασκευή Δενδροδιαγράμματος

```
binomplot(50,50,0.1,0.4,5/12,0.0833,     nstep=10,     putopt=FALSE,
american=FALSE,
    plotvalues=TRUE, plotarrows=TRUE, drawstrike=TRUE,
    pointsize=5, ylimval=c(0,0),
    saveplot = FALSE, saveplotfn='binomialplot.pdf',
    crr=FALSE, jarrowrudd=FALSE, titles=TRUE, specifyupdn=TRUE,
    up=1.1224, dn=0.8909, returnprice=FALSE, logy=FALSE)

N=150 (N=20,N=50,N=100)
tree_values=NULL
for (i in 1:N){
      tree_values[i]=binomial(S=60,sigma=0.2,T=1/12,i,r=0.05,q=0.02,K
=60,HU=90,HD=20)
}
```

8.3 Τριωνυμικό Μοντέλο Αποτίμησης Συνάρτηση

```
trinomial<- function(S,K,sigma,T,N,r,HD,HU) {
tree = matrix(0, nrow=2*N+1, ncol=N+1)
delta_t=T/N
f=matrix(0, nrow=2*N+1, ncol=N+1)
U = exp(sigma*sqrt(delta_t/2))
D = exp(-sigma*sqrt(delta_t/2))
pu=((exp(r*delta_t/2)-exp(-
sigma*sqrt(delta_t/2)))/(exp(sigma*sqrt(delta_t/2))-exp(-
sigma*sqrt(delta_t/2))))^2
pd=((exp(sigma*sqrt(delta_t/2))-
exp(r*delta_t/2))/(exp(sigma*sqrt(delta_t/2))-exp(-
sigma*sqrt(delta_t/2))))^2
pm=1-pu-pd
  for (i in 0:(2*N)) {
      tree[i+1,N+1] = S*(U^i)*(D^(2*N-i))
      if (tree[i+1,N+1]<=HD){
            f[i+1,N+1]=0
      }else if(tree[i+1,N+1]>=HU){
            f[i+1,N+1]=0
      }else{
            f[i+1,N+1]= max(tree[i+1,N+1]-K,0)
      }
  }
 for (j in seq(N-1, 0, by=-1)){
      for (i in 0:(2*j)){
            tree[i+1,j+1]=S*(U^i)*(D^(2*j-i))
            if(tree[i+1,j+1]>=HU){
                  f[i+1,j+1]=0
            }else if(tree[i+1,j+1]<=HD){
                  f[i+1,j+1]=0
            }else{
```

```
                f[i+1,j+1]=                                 exp(-
r*delta_t)*(pd*f[i+1,j+2]+pm*f[i+2,j+2]+pu*f[i+3,j+2])
            }
      }
}
return(f)
}
```

8.4 Διωτριωνυμικό Μοντέλο Αποτίμησης Συνάρτηση

```
bbt<-function(L,H,S0,m,K,T,sd,r){
      h=log(H/S0)
      l=log(L/S0)
      dt1=T/m
      k=ceiling((h-l)/(2*sd*sqrt(dt1)))
      dt2=((h-l)/(2*k*sd))^2
      N=floor(T/dt2)
      dt3=T-(N-1)*dt2
      mdt=(r-sd^2/2)*dt3
      vardt=sd^2*dt3
      flag=FALSE
      k0=0#initialize value in order to change the value in while
      process
      while(flag==FALSE){
            mhut=l+k0*sd*sqrt(dt2)#calculate b
            if(mhut>(mdt-sd*sqrt(dt2))&mhut<(mdt+sd*sqrt(dt2))){
                  flag=TRUE
            }
            k0=k0+1#increase k0 by one to check other values of b
      }
      k0=k0-1# to get the real value of k0
        mhut=l+k0*sd*sqrt(dt2)
        A=L*exp((k0+2)*sd*sqrt(dt2))
        B=L*exp(k0*sd*sqrt(dt2))
        C=L*exp((k0-2)*sd*sqrt(dt2))
        b=mhut-mdt
        a=b+2*sd*sqrt(dt2)#calculate a
        c=b-2*sd*sqrt(dt2)#calculate b
        determinant=(b-a)*(c-b)*(c-a)#det
        determinant.u=(b*c+vardt)*(c-b)#det(u)
        determinant.m=(a*c+vardt)*(a-c)#det(m)
        determinant.d=(a*b+vardt)*(b-a)#det(d)
        pu=determinant.u/determinant#pu
        pm=determinant.m/determinant#pm
        pd=determinant.d/determinant#pd
        S=matrix(0,nrow=(N+2),ncol=(N+1))#create zero element
matrices to store values
        f=matrix(0,nrow=(N+2),ncol=(N+1))#create      zero      element
matrices to store values
      up=exp(sd*sqrt(dt2))#up
      down=1/up #down
      p=(exp(r*dt2)-down)/(up-down)#calculate p
```

```
	for (i in 0:(N+1)){
		S[i+1,N+1]=L*exp((k0-2-(N-1)+2*i)*sd*sqrt(dt2))
		if (S[i+1,N+1]<=L){
			f[i+1,N+1]=0
		}else if(S[i+1,N+1]>=H){
			f[i+1,N+1]=0
		}else{
			f[i+1,N+1]=max(L*exp((k0-2-(N-
1)+2*i)*sd*sqrt(dt2))-K,0)		}
	}
	for (j in seq(N-1, 1, by=-1)){
		for (i in 0:(j+1)){
			S[i+1,j+1]<-L*exp((k0-2-(j-1)+2*i)*sd*sqrt(dt2))

			if (S[i+1,j+1]<=L){
				f[i+1,j+1]<-0
			}else if(S[i+1,j+1]>=H){
				f[i+1,j+1]<-0
			}else{
				f[i+1,j+1]<-exp(-r*dt2)*(p*f[i+2,j+2]+(1-
p)*f[i+1,j+2])
			}
		}
	}

#>>>>>>>>>root of the tree
	if(S0<=L){
		f[1,1]<-0
	}else if(S0>=H){
		f[1,1]<-0
	}else{
		f[1,1]<-exp(-r*dt3)*(pd*f[1,2]+pm*f[2,2]+pu*f[3,2])
	}
return(f)
}
```

9 Παράρτημα - Διαγράμματα για την επιλογή του βέλτιστου μοντέλου

9.1 Διαγράμματα των τριών μοντέλων για N=50 έως 300

Διωνυμικό Δέντρο

```
tree_values_a=NULL
for (j in 50:300){
      for (i in j:j){

      tree_values_a[i]=binomial(S=60,sigma=0.25,T=1/24,i,r=0.001,K=65
.3,HU=90,HD=30)
      }
}
```

Τριωνυμικό Δέντρο

```
tree_values_b=NULL
for (j in 50:300){
      for (i in j:j){

      tree_values_b[i]=trinomial(S=60,K=65.3,sigma=0.25,T=1/24,i,r=0.
001,HD=30,HU=90)
      }
}
```

Διωτριωνυμικό Δέντρο

```
tree_values_c=NULL

#N=50-300
for (j in 50:300){
      for (i in j:j){
            tree_values_c[i]=bbt(30,90,60,i,65.3,1/24,0.25,0.001)
      }
}
```

Διαγράμματα

```
win.graph()
plot(tree_values_a[50:300],type="l",col="blue",main="Convergence of
barrier options with the use of binomial
model",family="mono",xlab="Periods")
abline(h=0.06453258,col="red")
win.graph()
plot(tree_values_b[50:300],type="l",col="blue",ylim=c(0.06,0.069),mai
n="Convergence of barrier options with the use of trinomial
model",family="mono",xlab="Periods")
abline(h=0.06453258,col="red")
win.graph()
```

```
plot(tree_values_c[50:300],type="l",col="magenta",main="Convergence
of barrier options with the use of binotrinomial
model",family="mono",xlab="Periods")
abline(h=0.06453258,col="red")


#see the errors by calculating the absolute difference from the
theoretical price
a=abs(tree_values_a-0.06453258)#errors binomial
b=abs(tree_values_b-0.06453258)#errors trinomial
c=abs(tree_values_c-0.06453258)#errors binotrinomial

table(a>c)
```