

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης
Π.Μ.Σ. στην «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου»

**«Βέλτιστη Στρατηγική Επανεπένδυσης και
Υπολογισμός Εταιρικής Ανάπτυξης»**

Μιχάλης Α. Πανουργιάς

*Πειραιάς,
Σεπτέμβριος 2020*

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από την ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν 6/11-6-2018 συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Σεβρόγλου Βασίλειος
- Αγιακλόγλου Χρήστος
- Κυριαζής Αθανάσιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



Department of Statistics and Insurance Science
Postgraduate Program in 'Actuarial Science and Risk Management'

«Optimal Reinvestment Strategy and Valuing Corporate Growth»

Michalis A. Panourgias

*Piraeus,
September 2020*

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις βαθιές μου ευχαριστίες στον κύριο Βασίλειο Σεβρόγλου, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για την πολύτιμη καθοδήγηση, στήριξη και βοήθεια του σε όλη τη διάρκεια υλοποίησης της εν λόγω εργασίας.

Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κύριο Αθανάσιο Κυριαζή, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, καθώς και τον κύριο Χρήστο Αγιακλόγλου, Καθηγητή του Τμήματος Οικονομικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για τη συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή.

Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Αθανάσιο και Καλλιόπη καθώς και τον αδερφό μου Αλέξανδρο, που με τη βοήθεια τους και τη στήριξη τους σε όλη τη διάρκεια των ακαδημαϊκών μου σπουδών με βοήθησαν να ανταπεξέλθω και να ανταποκριθώ σε όλες τις δυσκολίες.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι χρηματοπιστωτικοί οργανισμοί και εταιρείες μπορούν να εφαρμόσουν μια βέλτιστη στρατηγική επένδυσης, αλλά και επανεπένδυσης, των περιουσιακών τους στοιχείων με απώτερο στόχο την αύξηση των πωλήσεων τους και κατά επέκταση την εταιρική τους ανάπτυξη. Το προτεινόμενο μοντέλο που θα αναλύσουμε, υπολογίζει και διαχειρίζεται τις μελλοντικές ταμειακές ροές που θα προκύψουν από επενδύσεις σε εξοπλισμό και περιουσιακά στοιχεία μέσω της χρήσης των χρηματοοικονομικών παραγώγων και πιο συγκεκριμένα των δικαιωμάτων προαίρεσης. Θα παρουσιάσουμε τις διάφορες καταστάσεις και θέσεις που μπορεί να πάρει μια εταιρεία προσπαθώντας να βρει τη βέλτιστη στρατηγική που θα εφαρμόσει, καθώς και τρόπους τιμολόγησης και αποτίμησης των δικαιωμάτων προαίρεσης που αποτελούν τον βασικό πυλώνα της εταιρείας σε αυτή της την προσπάθεια. Επίσης, θα αναλύσουμε διάφορα στοχαστικά μοντέλα και μεθόδους που μας βοηθάνε στην αποτίμηση των χρηματοοικονομικών παραγώγων και τέλος, θα παρουσιάσουμε τα συμπεράσματα που πηγάζουν από αυτό το μοντέλο και ποια θέση θα πρέπει να πάρει η εταιρεία για να επιτύχει το βέλτιστο αποτέλεσμα.

Abstract

In this paper we will present the way in which financial companies and institutions can apply an optimal investment and reinvestment strategy of their assets, in order to increase their revenue sales and achieve corporate growth as well. The suggested model, that we will analyze, calculates and manages the future cash flows that will be a result from investments on assets through the use of financial derivatives and more specific through the options. We will present all the different conditions and situations that a company can take while can achieve its best investment strategy and also ways to measure, value and calculate the options which are the main tool of company's try to achieve its goals. Also, we will present stochastic models and methods that can help us in valuing and pricing of the financial derivatives. Finally, in the conclusions we will show the results of this model and what conditions suits best for the company's investment strategy.

Πρόλογος

Η παρούσα διπλωματική εργασία πραγματεύεται ένα μοντέλο για την εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής επανεπένδυσης εταιρειών οι οποίες μπορούν να αυξάνουν τις πωλήσεις τους μέσω επενδύσεων σε πραγματικά περιουσιακά στοιχεία, όπως εξοπλισμό, εγκαταστάσεις, νέες τεχνολογίες κ.α..

Μία απόφαση επένδυσης αναμένεται να οδηγήσει στην αύξηση της παραγωγικότητας και ως εκ τούτου στην αύξηση των ταμειακών ροών κατά τις επόμενες οικονομικές περιόδους, μέχρι οι αυξημένες πωλήσεις να φτάσουν στη μέγιστη ζήτηση της αγοράς (Damodaran, A., 2002).

Τα διαθέσιμα μοντέλα για τον υπολογισμό της παρούσης αξίας των αναμενόμενων ταμειακών ροών κατόπιν επενδύσεων και κατόπιν επανεπενδύσεων σε περίπτωση όπου εξετάζονται άνω της μίας οικονομικής περίοδοι, δεν λαμβάνουν υπόψη βασικούς δείκτες όπως η αβεβαιότητα της ζήτησης, ενώ βασίζονται στην υπόθεση ότι μία επένδυση αποδίδει σταθερά καθ' όλες τις επενδυτικές περιόδους. Επιπλέον, δεν επιτρέπουν την εύρεση μιας βέλτιστης στρατηγικής επανεπένδυσης για πολλαπλές οικονομικές περιόδους, καθώς τα παραγόμενα αποτελέσματα αφορούν διακριτές οικονομικές περιόδους (Zhao, L. & Huchzermeier, A., 2015), (Hamza, D., Ngom, P. & Mendy, P., 2014.).

Το προτεινόμενο μοντέλο μεταχειρίζεται τις επενδύσεις σε πραγματικό εξοπλισμό οι οποίες επιδρούν θετικά στις μελλοντικές ταμειακές ροές ως χρηματοοικονομικά παράγωγα με δικαιώματα προαίρεσης και τις δυνατές επενδύσεις ως ευκαιρίες για ανάπτυξη. Ως εκ τούτου, μια εταιρεία μπορεί να ασκήσει το δικαίωμα αγοράς μιας ευκαιρίας επένδυσης σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή, ενώ αν έχει ασκήσει ένα τέτοιο δικαίωμα σε κάποια προηγούμενη οικονομική περίοδο, τότε το μοντέλο εξετάζει την περίπτωση της επανεπένδυσης.

Σε αυτό λαμβάνονται υπόψη όλοι οι πραγματικοί συντελεστές (εξωγενείς) οι οποίοι καθορίζουν την παρούσα αξία των αναμενόμενων ταμειακών ροών, ενώ θεωρείται πως μία εταιρεία μπορεί να βρίσκεται σε δύο διακριτές καταστάσεις, μία αναμονής και μία επανεπένδυσης (Gennady, L., 2008.).

Όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί αναλύονται με χρήση δενδροδιαγράμματος επί του οποίου αποτυπώνεται σε κόμβους κάθε κατάσταση ως συνάρτηση μιας προηγούμενης κατάστασης.

Για τον υπολογισμό της παρούσης αξίας χρησιμοποιείται η κίνηση Brown, η οποία βρίσκει εφαρμογή στην αποτίμηση των χρηματοοικονομικών παραγώγων με δικαιώματα προαίρεσης (Black, F. & Scholes, M., 1973), ενώ λαμβάνονται υπόψη δύο σενάρια, τα οποία είναι γραμμικώς εξαρτημένα μεταξύ τους· αύξηση της ζήτησης της αγοράς και μείωση της ζήτησης της αγοράς.

Επιπλέον, το προτεινόμενο μοντέλο χρησιμοποιεί τη μέθοδο MAD για τον υπολογισμό των παρούσων αξιών των αναμενόμενων ταμειακών ροών (Geroski, P. A., Machin, S. J. & Walter, C. F., 1997.). Κατόπιν ολοκλήρωσης του μοντέλου, μια εταιρεία μπορεί να χαράξει τη βέλτιστη στρατηγική επανεπένδυσης αν έχει προκαθορισμένες κάποιες επενδύσεις με την εκτιμώμενη επίδρασή τους στη ζήτηση της αγοράς, στο κεφάλαιο κίνησης καθώς και το κόστος για την κάθε επένδυση.

Στο τέλος της παρούσης το μοντέλο χρησιμοποιήθηκε για την επίλυση ενός τυχαίου αριθμητικού παραδείγματος, μέσα από το οποίο ο συγγραφέας κατέληξε πως η βέλτιστη στρατηγική επανεπένδυσης είναι η τήρηση στάσης αναμονής για όλες τις εξεταζόμενες οικονομικές περιόδους. Το γεγονός αυτό είναι τυχαίο, ενώ η εφαρμογή του μοντέλου σκοπεύει στην κατάδειξη της ευκολίας χρήσης του, αλλά και της οπτικοποίησης του αποτελέσματος, καθώς είναι εμφανής η βέλτιστη στρατηγική επανεπένδυσης, καθώς το μοντέλο καταλήγει σε ένα δενδροδιάγραμμα όπου υπολογίζονται οι παρούσες αξίες των αναμενόμενων ταμειακών ροών για όλους τους δυνατούς συνδυασμούς αποφάσεων επένδυσης ή αναμονής και επίδρασης των τυχόν επενδύσεων στη ζήτηση της αγοράς και ως εκ τούτου στις μελλοντικές ταμειακές ροές.

Κατάλογος πινάκων/εικόνων/γραφημάτων

Εικόνα 1-1: Τυπική κανονική κατανομή (Hamza, Ngom , & Mendy, 2014)	16
Εικόνα 1-2: Συνάρτηση μάζας πιθανότητας μεταβλητής κατά Poisson (Glantz & Kissell, 2014)	17
Εικόνα 1-3: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Kissell & Poserina, 2017).....	18
Εικόνα 2-1: Η επιφάνεια της μέσης αναμενόμενης μεταβλητότητας της τιμής του υποκείμενου του παραγώγου περιουσιακού στοιχείου (μεταβλητότητα - χρόνος μέχρι τη λήξη του παραγώγου – τιμή άσκησης δικαιώματος προαίρεσης) (Haugh, 2013)	36
Εικόνα 3-1: Μοντέλο υπολογισμού της καθαρής παρούσας αξίας κατόπιν επανεπένδυσης, συνέχισης της παρούσας κατάστασης ή αποεπένδυσης (Smith, 2005)	48
Εικόνα 3-2:Αβεβαιότητα της ζήτησης μια εταιρείας με σταθερή παραγωγή προϊόντων S_0 (Gennady, 2008)	56
Εικόνα 3-3: Δενδροδιάγραμμα για λήψη απόφασης επανεπένδυσης ή απόφασης αναμονής επένδυσης με ορίζοντα δύο έτη (Gennady, 2008).....	58
Πίνακας 3-1: Στοιχεία σεναρίου υπολογισμού βέλτιστης στρατηγικής επανεπένδυσης.....	64
Πίνακας 3-2: Ευκαιρίες ανάπτυξης και σχετικά κόστη.....	65
Πίνακας 3-3: Υπολογισμός αξίας αναμενόμενων ταμειακών ροών (αξίες σε χιλιάδες)	66
Πίνακας 3-4: Υπολογισμός EBIT και αναμενόμενων ταμειακών ροών μετά τόκων και φόρων	68
Πίνακας 3-5: Παρούσα αξία για κάθε συνδυασμό αποφάσεων επανεπένδυσης (σε χιλιάδες €) με χρήση μεθόδου MAD	72

Πίνακας 3-6: Υπολογισμός συνολικά αναμενόμενων ταμειακών ροών κάθε κόμβου (σε χιλιάδες €).....	73
Πίνακας 3-7:Βέλτιστη στρατηγική επανεπένδυσης	74

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες.....	ii
Περίληψη.....	v
Abstract	vi
Πρόλογος.....	vii
Κατάλογος πινάκων/εικόνων/γραφημάτων	ix
Περιεχόμενα.....	xi
Κεφάλαιο 1.....	13
Μαθηματικές Έννοιες-Ορισμοί και Στοχαστικές Ανελίζεις.....	13
1.1. Θεωρία Πιθανοτήτων.....	13
1.1.1. Τυχαίες μεταβλητές.....	13
1.1.2. Κανονική κατανομή.....	14
1.1.3. Τυπική κανονική κατανομή.....	15
1.1.4. Κατανομή Poisson	16
1.1.5. Εκθετική κατανομή.....	17
1.2. Στοχαστικές ανελίζεις.....	18
1.2.1. Κίνηση Brown	19
1.2.2. Αριθμητική κίνηση Brown	19
1.2.3. Γεωμετρική κίνηση Brown.....	20
1.2.4. Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck	21
1.3. Στοχαστικός Λογισμός.....	21
Κεφάλαιο 2.....	23
Ανασκόπηση Χρηματοοικονομικής Θεωρίας.....	23
2.1. Πρωτογενείς και δευτερογενείς αγορές.....	23
2.2. Χρηματοοικονομικά παράγωγα.....	24
2.2.1. Δικαίωμα προαίρεσης (option).....	26
2.2.2. Τιμολόγηση.....	28
2.2.3. Αποτίμηση	30
2.3. Εφαρμογή στοχαστικού λογισμού στα χρηματοοικονομικά	34
2.3.1. Μοντέλο Black-Scholes.....	34
2.3.2. Σύνδεση με Κίνηση Brown	38
Κεφάλαιο 3.....	42
Εταιρική Ανάπτυξη με τη χρήση των Real Options.....	40
3.1. Θεωρητικό υπόβαθρο.....	43
3.2. Εφαρμογή του μοντέλου.....	63

Συμπεράσματα	75
Βιβλιογραφία	77

Κεφάλαιο 1

Μαθηματικές Έννοιες-Ορισμοί και Στοχαστικές Ανελίξεις

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζονται οι βασικές έννοιες από τη θεωρία πιθανοτήτων καθώς και στοχαστικές ανελίξεις. Συγκεκριμένα, θα αναλυθούν έννοιες που θα χρησιμοποιήσουμε στα επόμενα κεφάλαια της εργασίας μας, και ιδιαίτερα στο μοντέλο που θα παρουσιάσουμε στο τελευταίο κεφάλαιο, και βοηθήσουν τον αναγνώστη να ανταποκριθεί στη ροή της εργασίας και να κατανοήσει ευκολότερα το μοντέλο που θα παρουσιάσουμε. Συνεπώς, θα αναφερθούμε σε πιθανότητες (διακριτές και συνεχείς κατανομές), στην κίνηση Brown (αριθμητική και γεωμετρική) και στη διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck.

1.1. Θεωρία Πιθανοτήτων

Στο πρώτο αυτό κεφάλαιο παρουσιάζουμε τις πιο σημαντικές κατανομές πιθανοτήτων, οι οποίες θα αποτελέσουν και τη βάση για την ανάλυση που θα ακολουθήσει στα επόμενα κεφάλαια. Πρόκειται να παρουσιάσουμε διακριτές και συνεχείς κατανομές, όπου θα εξετάσουμε αντίστοιχα τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας και τις συναρτήσεις πιθανότητας.

Προτού αναφερθούμε σε κατανομές, κάνουμε μία εισαγωγή στην τυχαία μεταβλητή, καθώς χρησιμοποιείται ο όρος για τον ορισμό των κατανομών.

1.1.1. Τυχαίες μεταβλητές

Τυχαία Μεταβλητή είναι μία μεταβλητή η οποία μπορεί να παίρνει πραγματικές τιμές. Οι Τυχαίες Μεταβλητές συμβολίζονται με κεφαλαίο γράμμα ενώ οι τιμές τις οποίες λαμβάνουν οι Τυχαίες Μεταβλητές συμβολίζονται με μικρό γράμμα έτσι ώστε να ξεχωρίζουν.

Ως εκ τούτου μπορούμε να πούμε ότι η Τυχαία Μεταβλητή X μπορεί να λάβει την τιμή k , ενώ αντίστοιχα, η πιθανότητα να λάβει αυτή την τιμή συμβολίζεται ως $P(X=k)$.

Ορισμός 1.1.1: Ως Τυχαία Μεταβλητή X σε έναν δειγματοχώρο S ορίζεται μία συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί τιμές $X(s)$ σε σημεία s του δειγματοχώρου S :

$$X: S \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \in \mathbb{R}$$

Επιπλέον, οι Τυχαίες Μεταβλητές μπορούν να είναι συνεχείς ή διακριτές, ανάλογα με τον εκάστοτε δειγματοχώρο. Πιο ορθά, οι συνεχείς αναφέρονται σε Τυχαίες Μεταβλητές των οποίων η κατανομή είναι συνεχής, ενώ αντίστοιχα οι διακριτές αναφέρονται σε Τυχαίες Μεταβλητές των οποίων η κατανομή δεν είναι συνεχής.

Ενδεικτικά, ο δειγματοχώρος των αποτελεσμάτων ρίψης ενός ζαριού αποτελείται από τα ενδεχόμενα $\{1,2,3,4,5,6\}$, ως εκ τούτου το αποτέλεσμα της ρίψης ενός ζαριού μπορεί να αντιστοιχιστεί σε μία Τυχαία Διακριτή Μεταβλητή (Thomopoulos, 2012).

Αντίστοιχα, ως χαρακτηριστικό παράδειγμα συνεχούς Τυχαίας Μεταβλητής μπορεί να αναφερθεί το ύψος των μαθητών μίας τάξης, όπου κάθε μαθητής μπορεί να έχει ύψος το οποίο μετριέται σε εκατοστά και μπορεί να λαμβάνει όλες τις δυνατές τιμές που ανήκουν στο σύνολο των ρητών αριθμών (\mathbb{Q}).

Στην πραγματικότητα, σύμφωνα και με τη θεωρία πιθανοτήτων, η πιθανότητα ένας μαθητής να έχει ένα συγκεκριμένο ύψος μπορεί να λάβει οποιαδήποτε από τις παραπάνω τιμές, ωστόσο για λόγους υπολογισμού είθισται να διαχωρίζουμε τις δυνατές αυτές τιμές σε διαστήματα τιμών.

1.1.2. Κανονική κατανομή

Ορισμός 1.1.2: Μία τυχαία μεταβλητή X της οποίας η κατανομή με μέσο όρο μ και τυπική της απόκλιση σ^2 ακολουθεί την κανονική κατανομή γνωστή και ως κατανομή Gauss:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2), \mu \in \mathbb{R} \text{ και } \sigma^2 > 0$$

Τότε, η συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας ισούται με:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \quad (1.1.2)$$

Η κανονική κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει πολλά προβλήματα από την καθημερινή μας ζωή όπως τη ρίψη κέρματος, ζαριού, το ύψος ενός δείγματος ανθρώπων κ.α..

1.1.3. Τυπική κανονική κατανομή

Ορισμός 1.1.3: Η τυπική κανονική κατανομή (*standard normal distribution*) είναι μία ειδική περίπτωση της τυπικής κατανομής, στην οποία μπορεί να αναχθεί οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή κατανέμεται κανονικά. Έχει ευρεθεί για την ευκολότερη επίλυση προβλημάτων πιθανοτήτων.

Μία τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή αν:

$$X \sim N(0,1), \text{ όπου } \mu = 0 \text{ και } \sigma^2 = 1$$

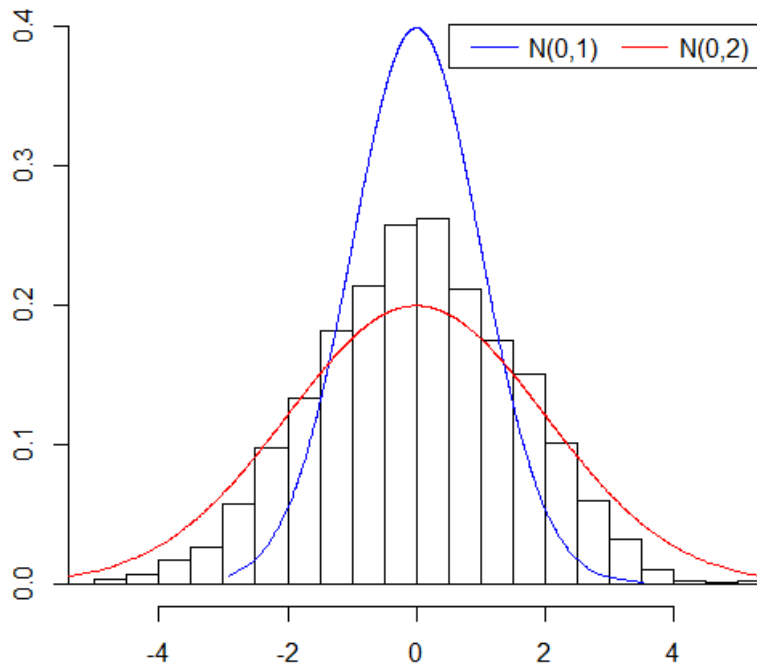
Για την μετάβαση από την κανονική στην τυπική κανονική κατανομή γίνεται η ακόλουθη αντικατάσταση:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \rightarrow Z \sim N(0,1)$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση της πυκνότητας πιθανότητας ισούται με:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (1.1.3)$$

Παρακάτω δίνουμε το ιστόγραμμα της κανονικής και της τυπικής κανονικής κατανομής:



Εικόνα 0-1: Τυπική κανονική κατανομή (Hamza, Ngom , & Mendy, 2014)

Στο παραπάνω γράφημα δίνονται οι τιμές δύο τυχαίων μεταβλητών οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή με κόκκινο και την τυπική κανονική κατανομή με μπλε.

Δεν αναφερόμαστε σε συγκεκριμένες εφαρμογές της τυπικής κανονικής κατανομής στην καθημερινή ζωή, καθώς αποτελεί ειδική περίπτωση της κανονικής κατανομής.

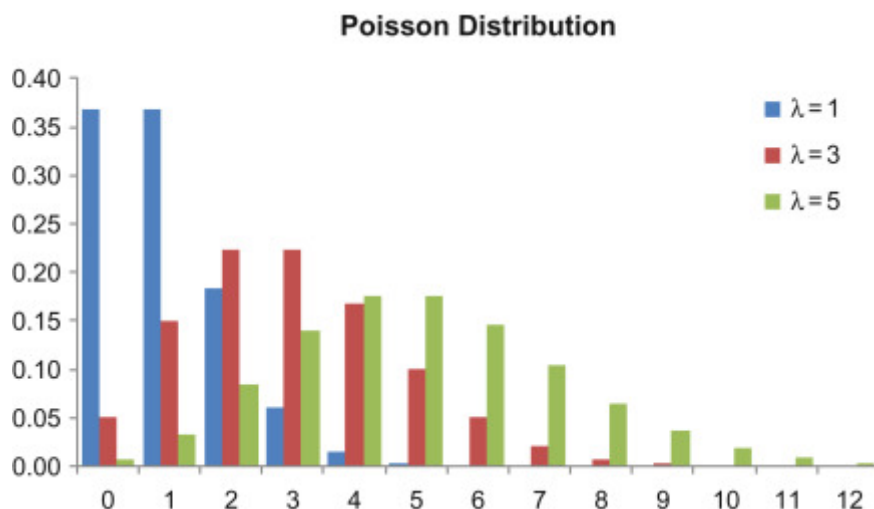
1.1.4. Κατανομή Poisson

Η κατανομή Poisson, που πήρε το όνομά της από τον Γάλλο μαθηματικό S.D. Poisson, είναι μία διακριτή κατανομή πιθανοτήτων, η οποία εκφράζει την πιθανότητα να συμβεί ένας συγκεκριμένος αριθμός γεγονότων σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, αν τα γεγονότα αυτά συμβαίνουν με σταθερό μέσο ρυθμό και είναι ανεξάρτητα από τη χρονική στιγμή που συνέβη το προηγούμενο γεγονός (Gart, 1975).

Ορισμός 1.1.4: Έστω ότι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Poisson. Τότε θα ισχύει ότι:

αν $\lambda > 0$ για $k=0,1,\dots$, τότε η συνάρτηση μάζας πιθανότητας μια μεταβλητής η οποία ακολουθεί την κατανομή Poisson ισούται με:

$$f(k, \lambda) = P(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \quad (1.1.4)$$



Εικόνα 0-2: Συνάρτηση μάζας πιθανότητας μεταβλητής κατά Poisson (Glantz & Kissell, 2014)

Η κατανομή Poisson εφαρμόζεται ευρέως σε επιστημονικούς τομείς όπως αυτοί των οικονομικών, της ιατρικής, της σεισμολογίας αλλά και σε εκφάνσεις της καθημερινής ζωής όπως είναι ο ρυθμός με τον οποίο φτάνουν κλήσεις σε ένα τηλεφωνικό κέντρο, ο ρυθμός με τον οποίο φτάνουν οι πελάτες σε ένα κατάστημα ή σε μία δημόσια υπηρεσία κ.ο.κ.

1.1.5. Εκθετική κατανομή

Η εκθετική κατανομή είναι η πιθανότητα κατανομής του χρόνου μεταξύ γεγονότων τα οποία συμβαίνουν σε μια διεργασία Poisson, όπου τα γεγονότα αυτά συμβαίνουν συνεχώς, ανεξάρτητα το ένα με το άλλο και με σταθερό ρυθμό.

Πρόκειται για ειδική περίπτωση της κατανομής Γάμμα, στην οποία ωστόσο δεν θα αναφερθούμε στην παρούσα.

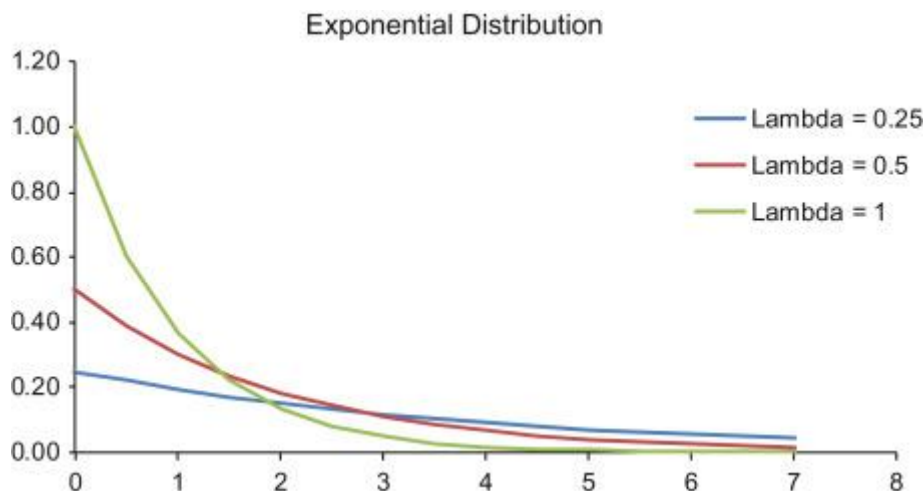
Ορισμός 1.1.5: Όταν μία τυχαία μεταβλητή X κατανέμεται εκθετικά, συμβολίζεται:

$$X \sim \text{exp}(\lambda), \lambda > 0$$

ενώ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισούται με:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (1.1.5.)$$

Παρακάτω παραθέτουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μία μεταβλητής η οποία κατανέμεται εκθετικά:



Εικόνα 0-3: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (Kissell & Poserina, 2017)

Δεδομένου ότι η κανονική κατανομή αφορά σε διεργασίες Poisson, μπορούμε να πούμε ότι η εκθετική κατανομή μπορεί να βρει εφαρμογή ομοίως με την κατανομή Poisson.

Αφού, λοιπόν, είδαμε κάποιες βασικές έννοιες και ορισμούς από τη θεωρία πιθανοτήτων, στη συνέχεια του κεφαλαίου θα προχωρήσουμε πιο διεξοδικά στην παρουσίαση των στοχαστικών ανελίξεων και πιο συγκεκριμένα στοχαστικών διαδικασιών όπως η κίνηση Brown (αριθμητική και γεωμετρική) και η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck.

1.2. Στοχαστικές ανελίξεις

Μια ομάδα τυχαίων μεταβλητών $X(t)$, με $t \in T$, και οι οποίες εξαρτώνται από τον χρόνο αποτελούν μία στοχαστική διεργασία. Κάθε ξεχωριστή τιμή $X(t)$ που μπορεί να λάβει η μεταβλητή καλείται κατάσταση αυτής (Trivedi, 2002).

Ορισμός 1.2: Αν θεωρήσουμε ότι υπάρχουν S τυχαίες μεταβλητές $X(t)$, όπου το S συμβολίζει το δειγματικό χώρο όπου μελετάται μια διεργασία, τότε οι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται ως $X(t_i, s_i)$ και από τους πιθανούς συνδυασμούς αυτών σχηματίζεται ένα σύνολο μεταβλητών για δεδομένο χρόνο και δειγματικό χώρο, οι οποίες ορίζουν την στοχαστική διεργασία.

Αν ο χρόνος στον οποίο αλλάζει καταστάσεις η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής, τότε έχουμε στοχαστικές διεργασίες ή αλυσίδες συνεχούς χρόνου, ενώ αν είναι αντίστοιχα διακριτός, έχουμε στοχαστικές διεργασίες ή αλυσίδες διακριτού χρόνου. Η ίδια κατηγοριοποίηση ισχύει και για το δειγματικό χώρο S , με αποτέλεσμα να έχουμε στοχαστικές διεργασίες συνεχούς ή διακριτού χώρου (Meyn & Tweedie, 2009).

Εντοπίζονται στοχαστικές ανελίξεις συνεχούς και διακριτού χρόνου και συνεχούς και διακριτού χώρου.

1.2.1. Κίνηση Brown

Η κίνηση Brown είναι μία από τις σημαντικότερες στοχαστικές διαδικασίες ή ανελίξεις, η οποία βρίσκει εφαρμογή μεταξύ των άλλων στην αποτίμηση και τιμολόγηση χρηματοοικονομικών παραγώγων. Η κίνηση Brown είναι μια τυχαία κίνηση (random walk) όπως η ρίψη ενός νομίσματος για άπειρες φορές. Πρόκειται για στοχαστική ανέλιξη συνεχούς χρόνου.

Η κίνηση Brown χαρακτηρίζεται από μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών W , οι οποίες μεταβάλλονται με τον χρόνο και κάθε μία εξ' αυτών είναι μία τυχαία διαδικασία (random walk) για t περιόδους.

1.2.2. Αριθμητική κίνηση Brown

Ορισμός 1.2.2: Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ ονομάζεται αριθμητική κίνηση Brown, όταν ικανοποιεί την παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$dX(t) = \alpha dt + \sigma dW_t \quad (1.2.2.)$$

Η παράμετρος α είναι ο συντελεστής ολίσθησης και η παράμετρος σ είναι η διακύμανση.

Επίσης ισχύει ότι:

$$E(X(t) - X(0)) = \alpha t$$

$$Var(\alpha t + \sigma Z(t)) = \sigma^2 t$$

$$(X(t) - X(0)) : ND(\alpha t, \sigma^2 t)$$

Επομένως η $X(t)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή, ως άθροισμα μεταβλητών που ακολουθούν την κανονική κατανομή:

$$X(t): ND(X(0) + at, \sigma^2 t)$$

1.2.3. Γεωμετρική κίνηση Brown

Η αριθμητική κίνηση Brown έχει αρκετά μειονεκτήματα σε σχέση με άλλες στοχαστικές ανελίξεις και άλλα μοντέλα για την αποτίμηση χρηματοοικονομικών προϊόντων, για το λόγο αυτό εισήχθη η γεωμετρική κίνηση Brown.

Πιο συγκεκριμένα, τα μειονεκτήματα της αριθμητικής κίνησης Brown που κατέστησαν αναγκαία την εισαγωγή της γεωμετρικής κίνησης Brown είναι τα παρακάτω:

- Η αριθμητική κίνηση είναι ένα μοντέλο που εμφανίζει προβλήματα για τιμές μετοχών, επειδή η αριθμητική κίνηση Brown παίρνει αρνητικές τιμές και οι τιμές των μετοχών δεν μπορούν να λαμβάνουν αρνητικές τιμές στις πραγματικές αγορές
- Η μέση τιμή και η διασπορά είναι ανεξάρτητες της τιμής της μετοχής. Πρακτικά όμως, αν η τιμή μιας μετοχής διπλασιαστεί θα περιμέναμε η μέση απόδοση και η τυπική απόκλιση απόδοσης να διπλασιαστεί και αυτή.

Ορισμός 1.2.3: Για μετατόπιση (μ) και διακύμανση (σ) συναρτήσεις της μεταβαλλόμενης με τον χρόνο τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου $S(t)$, προκύπτει η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (1.2.3)$$

Η τελευταία στοχαστική διαφορική εξίσωση καλείται γεωμετρική κίνηση Brown και σημαίνει ότι η ποσοστιαία αλλαγή στη τιμή της μετοχής ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2 στιγμιαία. Η σχέση αυτή χρησιμοποιείται στο κεφάλαιο 3, όπου παρουσιάζεται το προτεινόμενο μοντέλο, για τον υπολογισμό της αβεβαιότητας της μελλοντικής αξίας της παραγωγής ή των πωλήσεων μιας επιχείρησης.

1.2.4. Διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Ορισμός 1.2.4: Στην μοντελοποίηση της τιμολόγησης των προϊόντων, είναι αρκετά συχνό φαινόμενο οι τιμές να επανέρχονται στον μέσο όρο. Δηλαδή, αν μια τιμή ξεκινάει από τη μέση τιμή και προσαυξάνεται συνεχώς είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω, τότε σε μακροπρόθεσμο ορίζοντα θα τείνει να επανέλθει στη μέση τιμή. Αυτή την επαναφορά μπορούμε να την ενσωματώσουμε στην αριθμητική κίνηση Brown, που είδαμε νωρίτερα, και να πάρουμε την ακόλουθη στοχαστική διαδικασία:

$$dX(t) = \lambda[a - X(t)]dt + \sigma dZ(t) \quad (1.2.4)$$

όπου a είναι η μακροχρόνια μέση τιμή στην οποία η $X(t)$ τείνει να επανέλθει, σ είναι ο συντελεστής μεταβλητότητας, λ είναι η ταχύτητα της επιστροφής και $Z(t)$ είναι η κίνηση Brown. Η εν λόγω εξίσωση είναι η διαδικασία Ornstein – Uhlenbeck.

1.3. Στοχαστικός Λογισμός

Μια ομάδα τυχαίων μεταβλητών $X(t)$, με $t \in T$, και οι οποίες εξαρτώνται από τον χρόνο αποτελούν μία στοχαστική διεργασία. Κάθε ξεχωριστή τιμή $X(t)$ που μπορεί να λάβει η μεταβλητή καλείται κατάσταση αυτής (Trivedi, 2002).

Αν θεωρήσουμε ότι υπάρχουν S τυχαίες μεταβλητές $X(t)$, όπου το S συμβολίζει το δειγματικό χώρο όπου μελετάται μια διεργασία, τότε οι τυχαίες μεταβλητές συμβολίζονται ως $X(t, s_i)$ και από τους πιθανούς συνδυασμούς αυτών σχηματίζεται ένα σύνολο μεταβλητών για δεδομένο χρόνο και δειγματικό χώρο, οι οποίες ορίζουν την στοχαστική διεργασία.

Αν ο χρόνος στον οποίο αλλάζει καταστάσεις η τυχαία μεταβλητή είναι συνεχής, τότε έχουμε στοχαστικές διεργασίες ή αλυσίδες συνεχούς χρόνου, ενώ αν είναι αντίστοιχα διακριτός, έχουμε στοχαστικές διεργασίες ή αλυσίδες διακριτού χρόνου. Η ίδια κατηγοριοποίηση ισχύει και για το δειγματικό χώρο S , με αποτέλεσμα να έχουμε στοχαστικές διεργασίες συνεχούς ή διακριτού χώρου (Meyn & Tweedie, 2009).

Εντοπίζονται στοχαστικές ανελίξεις συνεχούς και διακριτού χρόνου και συνεχούς και διακριτού χώρου.

Συνοψίζοντας, σε αυτό το κεφάλαιο αναλύσαμε βασικές έννοιες και ορισμούς από τη θεωρία πιθανοτήτων, παρουσιάζοντας μεταξύ άλλων βασικές κατανομές όπως η τυπική κανονική, η Poisson και η εκθετική. Στη συνέχεια, δώσαμε τον ορισμό μιας στοχαστικής ανέλιξης και προχωρήσαμε στην παρουσίαση και ανάλυση των πιο βασικών στοχαστικών διαδικασιών όπως η κίνηση Brown (αριθμητική και γεωμετρική) και η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck. Όλα αυτά τα εργαλεία θα μας βοηθήσουν να προχωρήσουμε σε μια εκτενέστερη ανάλυση στο Κεφάλαιο 2, που θα αφορά τη τιμολόγηση των χρηματοοικονομικών παραγώγων και ιδιαίτερα των δικαιωμάτων προαίρεσης, καθώς επίσης και στην παρουσίαση του μοντέλου Black-Scholes.

Κεφάλαιο 2

Ανασκόπηση Χρηματοοικονομικής Θεωρίας

Σε αυτό το κεφάλαιο παρατίθενται τα ευρήματα της βιβλιογραφίας γύρω από τη χρηματοοικονομική θεωρία με έμφαση στα χρηματοοικονομικά παράγωγα. Αρχικά, θα κάνουμε μια παρουσίαση των πρωτογενών και δευτερογενών αγορών και στη συνέχεια θα υπεισέλθουμε στο βασικό κομμάτι της εργασίας μας που είναι τα δικαιώματα προαίρεσης. Θα παρουσιάσουμε τις βασικές έννοιες γύρω από τα δικαιώματα προαίρεσης, καθώς και τον τρόπο τιμολόγησης και αποτίμησης τους. Τέλος, θα παραθέσουμε το μοντέλο Black-Scholes και τη σύνδεση του με την κίνηση Brown.

2.1. Πρωτογενείς και δευτερογενείς αγορές

Οι χρηματοοικονομικές αγορές μπορούν να είναι είτε πρωτογενείς είτε δευτερογενείς. Οι δύο τύποι αγορών διαφέρουν μεταξύ τους λόγω των διαφορετικών αντικειμένων τα οποία τίθενται προς διαπραγμάτευση και λόγω της ιδιότητας όσων συμμετέχουν στη διαπραγμάτευση των χρηματοοικονομικών προϊόντων.

Στην πρωτογενή αγορά δημιουργούνται κινητές αξίες, ενώ στη δευτερογενή αγορά οι παραπάνω αξίες αποτελούν αντικείμενο διαπραγμάτευσης μεταξύ επενδυτών.

Στις πρωτογενείς αγορές οι επιχειρήσεις διαπραγματεύονται τις μετοχές τους ή ομόλογα όταν αυτές εισέρχονται για πρώτη φορά στην υποκείμενη αγορά.

Ένα τυπικό παράδειγμα συναλλαγής σε μια πρωτογενή αγορά αποτελεί η έναρξη διαπραγμάτευσης των μετοχών μιας επιχείρησης. Οι μετοχές αυτές προσφέρονται προς πώληση από την εκάστοτε επιχείρηση μέσω ενός μεσάζοντα, ο οποίος τις περισσότερες φορές είναι κάποιο χρηματοπιστωτικό ίδρυμα.

Οι δευτερογενείς αγορές είναι οι γνωστές χρηματιστηριακές αγορές, στις οποίες οι μετοχές των επιχειρήσεων τίθενται προς διαπραγμάτευση μεταξύ επενδυτών οι

οποίοι τις έχουν αγοράσει είτε στην πρωτογενή αγορά από την αντίστοιχη επιχείρηση είτε στη δευτερογενή αγορά από κάποιον άλλον επενδυτή.

Στις δευτερογενείς αγορές συνεπώς, οι επενδυτές αγοράζουν και πωλούν τίτλους που είχαν εκδοθεί προηγουμένως στις πρωτογενείς αγορές (Boehme & Colak, 2012).

Επιπλέον, στις δευτερογενείς αγορές πωλούνται και αγοράζονται και άλλα χρηματοοικονομικά προϊόντα, όπως είναι τα χρηματοοικονομικά παράγωγα και τα ασφάλιστρα έναντι κινδύνου, τα οποία είναι συνδεδεμένα με κάποιον τίτλο ο οποίος διαπραγματεύεται στην ίδια δευτερογενή αγορά.

2.2. Χρηματοοικονομικά παράγωγα

Ορισμός 2.2: *Ο όρος χρηματοοικονομικό παράγωγο αναφέρεται σε έναν τίτλο αξιών του οποίου η απόδοση προέρχεται από την αξία ενός άλλου υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Η αξία των παραγώγων δηλαδή προέρχεται από την αξία των υποκείμενων μέσων (underlying instruments) όπως τις συναλλαγματικές ισοτιμίες, τα επιτόκια, τις τιμές των χρεογράφων, των μετοχών, των εμπορευμάτων και των χρηματοοικονομικών δεικτών. Σε αντίθεση με τις υποκείμενες αξίες, οι συμβάσεις των παραγώγων προϊόντων έχουν συνήθως περιορισμένη διάρκεια και πάντα συγκεκριμένες ημερομηνίες λήξης.*

Οι πιο κοινοί τύποι υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων περιλαμβάνουν χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία, εμπορεύματα, συναλλαγματικά και επιτόκια, δείκτες χρηματοοικονομικών αγορών και μερικές φορές την τιμή άλλου κάποιου άλλου παράγωγου τίτλου (Sundaram & Das, 2011).

Το μέγεθος της παγκόσμιας αγοράς παραγώγων είναι τεράστιο και φτάνει στα \$640 τρις σε πραγματική αξία ή στα \$12 τρις σε ονομαστική αξία για το πρώτο μισό του 2019 (Investopedia, 2020).

Μάλιστα η αγορά παραγώγων αναπτύσσεται από χρόνο σε χρόνο παγκόσμια. Τα παράγωγα επιτοκίων αντιπροσωπεύουν τη μερίδα του λέοντος σε μέγεθος, ενώ τα παράγωγα χρεογράφων είναι αυτά τα οποία εμπεριέχουν τον μεγαλύτερο κίνδυνο για τον επενδυτή.

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, εντοπίζονται τρεις κύριοι τρόποι ταξινόμησης των χρηματοοικονομικών παραγώγων:

- Βάσει του υποκειμένου περιουσιακού στοιχείου

Σύμφωνα με την ταξινόμηση αυτή υπάρχουν παράγωγα μετοχών, παράγωγα νομισμάτων, παράγωγα επιτοκίων και ούτω καθεξής.

- Βάσει του αν δεσμεύεται ο κάτοχος να πραγματοποιήσει μία συναλλαγή

Με βάσει αυτό το κριτήριο, τα χρηματοοικονομικά παράγωγα κατατάσσονται σε δύο κατηγορίες, εκείνων που συνεπάγονται τη δέσμευση του κατόχου για μια δεδομένη συναλλαγή και εκείνων όπου ο κάτοχος μπορεί να μην πραγματοποιήσει την επαγόμενη συναλλαγή είτε για μέρος του παραγώγου είτε για όλη την αξία του.

Τα παράγωγα που εμπίπτουν στην πρώτη ομάδα είναι τα προθεσμιακά συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και τα swaps, ενώ τα παράγωγα που εμπίπτουν στην δεύτερη ομάδα είναι τα προθεσμιακά συμβόλαια δικαιώματα προαίρεσης.

- Βάσει του τρόπου με τον οποίο διαπραγματεύονται

Τα παράγωγα μπορούν να διαπραγματεύονται είτε σε οργανωμένες χρηματοοικονομικές αγορές είτε εκτός, μέσω εξωχρηματιστηριακών συναλλαγών, δηλαδή μέσω συμβάσεων που αποτελούν αντικείμενο ιδιωτικών διαπραγματεύσεων μεταξύ των επενδυτών.

Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα έχουν κατακτήσει το ενδιαφέρον των επενδυτών παγκοσμίως και εντοπίζονται τέσσερις κύριοι λόγοι που τα καθιστούν προσοδοφόρα και καθιστούν τη χρήση τους επιτακτική.

Αρχικά, τα παράγωγα χρησιμοποιούνται για τη μείωση της έκθεσης ενός επενδυτή στον κίνδυνο. Μέσω της αντιστάθμισης των ταμειακών ροών από ένα παράγωγο, τα παράγωγα χρησιμοποιούνται για την αντιστάθμιση των αρνητικών ταμειακών ροών οι οποίες προκαλούνται από μία προηγούμενη επένδυση – δέσμευση ενός επενδυτή.

Έπειτα, τα παράγωγα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τη μεγιστοποίηση του κέρδους ενός επενδυτή ή ακόμη και για την κερδοσκοπία εάν ο επενδυτής έχει

πρόσβαση στις κατάλληλες πληροφορίες που του επιτρέπουν να προβλέψει την κίνηση της αγοράς. Η κερδοσκοπία αυξάνει την έκθεση σε κίνδυνο, επομένως, το δυνητικό κέρδος ή η δυνητική ζημία μεγεθύνεται σε σχέση με την αρχική επένδυση.

Επιπλέον, η χρήση παραγώγων συνεπάγεται μικρότερο κόστος συναλλαγής, καθώς έχουν μικρότερο κόστος προμήθειας, κόστος συναλλαγών κ.α. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, τα χρηματοοικονομικά παράγωγα έχουν συγκεντρώσει το ενδιαφέρον των επενδυτών καθώς αποτελούν μέσο για τη βελτιστοποίηση της αποτελεσματικότητας των χρηματοοικονομικών αγορών. Ο δανεισμός και η παροχή κεφαλαίων πραγματοποιούνται με χαμηλότερο κόστος όταν χρησιμοποιούνται παράγωγα, με αποτέλεσμα το χαμηλότερο κόστος συναλλαγής τόσο για τον δανειστή όσο και για τον δανειζόμενο.

Με τον τρόπο αυτό οι επιχειρήσεις μπορούν να αποκτούν πρόσβαση σε περισσότερα κεφάλαια με μικρότερο κόστος.

Τέλος, η χρήση παραγώγων μέσω για τους σκοπούς διαχείρισης περιουσιακών στοιχείων, μπορεί να συμβάλει στη μεγιστοποίηση της απόδοσης των επενδύσεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η επένδυση σε χρηματοοικονομικά παράγωγα από επιχειρήσεις έτσι ώστε να δηλώσουν μικρότερα κέρδη και να αποφύγουν την πληρωμή υπέρογκων φόρων.

2.2.1. Δικαίωμα προαίρεσης (option)

Η παρούσα διπλωματική εργασία εστιάζει στα χρηματοοικονομικά παράγωγα με δικαίωμα προαίρεσης, για την εξέταση της εφαρμογής της υποκείμενης θεωρίας για την αποτίμηση των επενδύσεων και τη λήψη αποφάσεων από-επένδυσης ή επανεπένδυσης, τα οποία στη διεθνή βιβλιογραφία αναφέρονται ως options.

Ορισμός 2.2.1: *Τα χρηματοοικονομικά παράγωγα με δικαίωμα προαίρεσης δίνουν στον κάτοχό τους να αγοράσει ή να πωλήσει μια συγκεκριμένη ποσότητα ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου σε σταθερή και εκ των προτέρων καθορισμένη τιμή, γνωστή ως τιμή άσκησης του δικαιώματος, είτε στην ημερομηνία λήξης του δικαιώματος είτε πριν αυτή φτάσει.*

Δεδομένου ότι ο κάτοχος έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πουλήσει μία θέση του, ο κάτοχος μπορεί να επιλέξει να μην ασκήσει το δικαίωμα πριν την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Υπάρχουν δύο τύποι χρηματοοικονομικών παραγώγων δικαίωμα προαίρεσης:

- *χρηματοοικονομικά παράγωγα με δικαίωμα αγοράς ή call options*
- *χρηματοοικονομικά παράγωγα με δικαίωμα πώλησης ή put options*

Το δικαίωμα αγοράς δίνει στον κάτοχο του αντίστοιχου παραγώγου, το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν την ημερομηνία λήξης του παραγώγου ή όταν αυτή έρθει. Η τιμή στην οποία ο κάτοχος του παραγώγου αγοράζει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο ονομάζεται **τιμή άσκησης του δικαιώματος αγοράς**.

Η κατοχή ενός τέτοιου παραγώγου ενέχει κίνδυνο για τον επενδυτή καθώς αν δεν ασκηθεί το δικαίωμα αγοράς του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου πριν την ημερομηνία λήξης του παραγώγου και κατά την ημερομηνία αυτή το περιουσιακό στοιχείο έχει μικρότερη αξία από την αξία του παραγώγου, ο επενδυτής δεν ασκεί καθόλου το δικαίωμα αγοράς, καθώς η αξία του παραγώγου είναι μεγαλύτερη από αυτή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου.

Αντίθετα, αν η αξία του περιουσιακού στοιχείου είναι μεγαλύτερη από την τιμή του παραγώγου, ο κάτοχος του παραγώγου αγοράζει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο στην τιμή άσκησης του δικαιώματος προαίρεσης.

Από τη διαφορά μεταξύ της αξίας του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου και του παραγώγου μπορεί στην τελευταία αυτή περίπτωση να προκύψει κέρδος για τον επενδυτή, κέρδος το οποίο είναι μικτό. Ακόλουθα, για τον υπολογισμό του καθαρού κέρδους του επενδυτή, πρέπει από το παραπάνω μικτό κέρδος να αφαιρεθεί το κόστος αρχικής αγοράς του παραγώγου.

Συνήθως, για τη λήψη απόφασης άσκησης του δικαιώματος αγοράς κατασκευάζεται ένα διάγραμμα εξόφλησης στο οποίο απεικονίζεται το αρχικό κόστος αγοράς του παραγώγου και η αξία του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου.

Συνεπώς, όταν ασκείται το δικαίωμα αγοράς η καθαρή πληρωμή είναι αρνητική και ισούται με την τιμή άσκησης του δικαιώματος, αν η αξία του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι μικρότερη από την τιμή άσκησης του δικαιώματος.

*Το δικαίωμα πώλησης, δίνει στον κάτοχο του παραγώγου το δικαίωμα να πουλήσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε σταθερή και προαποφασισμένη τιμή, η οποία και πάλι ονομάζεται **τιμή άσκησης του δικαιώματος**, σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή μέχρι την ημερομηνία λήξης του παραγώγου. Αντίστοιχα, ο αγοραστής πληρώνει ένα τίμημα για αυτό το δικαίωμα.*

Εάν η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι μεγαλύτερη από την τιμή άσκησης του δικαιώματος πώλησης, το δικαίωμα πώλησης δεν ασκείται καθώς θα ζημίωνε τον κάτοχο του παραγώγου και παρέρχεται η ημερομηνία λήξης του.

Εάν αντίθετα, η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι μικρότερη από την τιμή άσκησης του δικαιώματος πώλησης, ο κάτοχος του παραγώγου μπορεί να αποκομίσει κέρδος ασκώντας το δικαίωμα προαίρεσής του και πουλώντας το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο. Το κέρδος αυτό προκύπτει ως η διαφορά μεταξύ της τιμής άσκησης του δικαιώματος και της αρχικής τιμής αγοράς του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Αντίστοιχα με όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για τα παράγωγα με δικαίωμα αγοράς, το κέρδος αυτό είναι μικτό και για τον υπολογισμό του καθαρού κέρδους πρέπει να αφαιρεθεί το κόστος αρχικής αγοράς του παραγώγου.

Ένα παράγωγο με δικαίωμα πώλησης αποφέρει αρνητική απόδοση όταν η αξία του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι μεγαλύτερη από την τιμή άσκησης του δικαιώματος πώλησης (Sundaram & Das, 2011).

2.2.2. Τιμολόγηση

Στη βιβλιογραφία εντοπίζονται διάφορα μοντέλα για την τιμολόγηση των παραγώγων με δικαιώματα προαίρεσης, τα οποία αποσκοπούν στον υπολογισμό της τιμής του εκάστοτε παραγώγου, η οποία καταβάλλεται προκαταβολικά για την αγορά του.

Το πιο διαδεδομένο μοντέλο τιμολόγησης είναι το μοντέλο **Black-Scholes**, το οποίο αναλύεται εκτενώς στην παράγραφο 2.3.1. Τα παράγωγα με δικαιώματα προαίρεσης συγκεντρώνουν το ενδιαφέρον των επενδυτών καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν τόσο για την αντιστάθμιση του κινδύνου επένδυσης στο υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο όσο και γιατί μπορούν να προσφέρουν στους κατόχους τους δυσανάλογα μεγάλα κέρδη με περιορισμένη και προκαθορισμένη έκθεση σε κίνδυνο, η οποία ισούται με την τιμή του παραγώγου όταν αυτό αγοράζεται.

Για το λόγο αυτό, τα μοντέλα τιμολόγησης έχουν ιδιαίτερη σημασία καθώς είναι καίριος ο ακριβής υπολογισμός μιας δίκαιης τιμής για ένα παράγωγο έτσι ώστε να εξασφαλίζεται η αποδοτικότητα της αγοράς και ταυτόχρονα να μη δημιουργείται περιθώριο κερδοσκοπίας.

Άλλα μοντέλα τιμολόγησης τα οποία δεν χρησιμοποιούνται εξίσου ευρέως αλλά είναι ιδιαίτερα διαδεδομένα είναι το *διωνυμικό μοντέλο* και το *τριωνυμικό μοντέλο* (Gong, 2011).

Τα μοντέλα τιμολόγησης των παραγώγων εξετάζουν τους παράγοντες οι οποίοι δύνανται να επηρεάζουν και να διαμορφώνουν την τιμή ενός παραγώγου με δικαιώματα προαίρεσης:

- τρέχουσα τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου
- χρόνος μέχρι τη λήξη του παραγώγου
- μεταβλητότητα της αξίας του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου

Ενδεικτικά αναφέρεται ότι η μεταβολή της τρέχουσας τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου επιδρά στην τιμή του παραγώγου ισοδύναμα. Όσο αυξάνει η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, τόσο αυξάνεται η τιμή του αντίστοιχου παραγώγου με δικαίωμα αγοράς και αντίστροφα μειώνεται η τιμή του παραγώγου με δικαίωμα πώλησης.

Αντίστοιχα, όσο πιο μεγάλη είναι η περίοδος μέχρι τη λήξη του παραγώγου, σε τόσο μεγαλύτερη τιμή αυτό διατίθεται, ενώ όσο πιο μεταβλητή είναι η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, τόσο μικρότερη είναι η τιμή του αντίστοιχου

παραγώγου καθώς αντικατοπτρίζει αυξημένο κίνδυνο μεγάλης μεταβολής της τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου σε βαθμό όπου δεν έχει νόημα, καθώς αποφέρει ζημία, η άσκηση του δικαιώματος προαίρεσης (Batten & Wagner, 2012).

2.2.3. Αποτίμηση

Ορισμός 2.2.3: *Η αξία ενός παραγώγου με δικαίωμα προαίρεσης καθορίζεται από ορισμένες μεταβλητές που σχετίζονται με το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο και τις χρηματοπιστωτικές αγορές. Οι μεταβλητές αυτές παρατίθενται παρακάτω: (Sundaram & Das, 2011)*

- Τρέχουσα αξία του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου

Όπως προαναφέρθηκε, τα χρηματοοικονομικά παράγωγα με δικαίωμα προαίρεσης αποτελούν περιουσιακά στοιχεία τα οποία αντλούν αξία από ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο. Ως εκ τούτου, συνέπεια, οι μεταβολές της αξίας του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου επηρεάζουν την αξία των παραγώγων με δικαίωμα προαίρεσης αγοράς ή πώλησης επί του εκάστοτε υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Δεδομένου ότι το δικαίωμα αγοράς δίνει στον κάτοχό του το δικαίωμα αγοράς του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου σε σταθερή και προκαθορισμένη τιμή, η αύξηση της αξίας του περιουσιακού στοιχείου οδηγεί σε αύξηση της αξίας του δικαιώματος αγοράς.

- Διακύμανση της αξίας του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου

Ο κάτοχος ενός δικαιώματος προαίρεσης αποκτά το δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο σε σταθερή και προκαθορισμένη τιμή. Όσο υψηλότερη είναι η διακύμανση της τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η τιμή του παραγώγου. Αυτό ισχύει τόσο για τα παράγωγα με δικαίωμα αγοράς όσο και για τα παράγωγα με δικαίωμα πώλησης. Η επένδυση σε ένα παράγωγο με δικαιώματα προαίρεσης δεν μπορεί να επιφέρει στον κάτοχό του με μεγαλύτερη ζημία από αυτή του κόστους αγοράς του παραγώγου, αλλά μπορεί να τους αποδώσει κέρδη πολύ μεγαλύτερα από το αρχικό κόστος αγοράς του. Όσο μεγαλύτερη είναι η διακύμανση της αξίας του περιουσιακού στοιχείου, τόσο μεγαλύτερο κέρδος μπορεί να αποκομίσει ο κάτοχος του παραγώγου.

- Μερίσματα που καταβάλλονται επί του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου

Η αξία του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου μπορεί να μειώνεται κατά τη διάρκεια ζωής του αντίστοιχου χρηματοοικονομικού παραγώγου, εξαιτίας της καταβολής μερισμάτων στον κάτοχο του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Ως εκ τούτου, η τιμή άσκησης ενός δικαιώματος αγοράς επί του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι φθίνουσα συνάρτηση του όγκου των αναμενόμενων καταβολών μερισμάτων και η τιμή άσκησης ενός δικαιώματος πώλησης είναι μια αύξουσα συνάρτηση του όγκου των αναμενόμενων καταβολών μερισμάτων. Συνεπώς, ο κάτοχος ενός παραγώγου θα προβεί σε αγορά του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου μόλις η αξία του υπερβεί την τιμή άσκησης του δικαιώματος αγοράς έτσι ώστε να καρπωθεί επιπλέον τα μελλοντικά καταβαλλόμενα μερίσματα και αντίστροφα ο κάτοχος ενός παραγώγου θα ασκήσει το δικαίωμα πώλησης όσο τον δυνατόν αργότερα έτσι ώστε να προλάβει να εισπράξει όσο το δυνατόν περισσότερα μερίσματα.

- Τιμή άσκησης του δικαιώματος προαίρεσης

Η τιμή άσκησης του δικαιώματος προαίρεσης είναι ένα βασικό χαρακτηριστικό των χρηματοοικονομικών παραγώγων με δικαίωμα προαίρεσης. Στην περίπτωση δικαιώματος αγοράς, ο κάτοχος του παραγώγου αποκτά το δικαίωμα αγοράς σε καθορισμένη τιμή και η αξία του παραγώγου μειώνεται καθώς αυξάνεται η τιμή άσκησης του δικαιώματος αγοράς. Αντίστροφα, στην περίπτωση δικαιώματος πώλησης, ο κάτοχος του παραγώγου αποκτά το δικαίωμα πώλησης σε καθορισμένη τιμή και η αξία του παραγώγου αυξάνεται καθώς αυξάνεται η τιμή άσκησης του δικαιώματος πώλησης.

- Ημερομηνία λήξης

Η αξία των παραγώγων και των δύο ειδών δικαιωμάτων προαίρεσης αυξάνει όσο μακρύτερη είναι η ημερομηνία λήξης του δικαιώματος. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι η μακρύτερη ημερομηνία λήξης σημαίνει μεγαλύτερο χρονικό διάστημα κατά το οποίο μπορεί να μεταβληθεί η αξία του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Ειδικά, στην περίπτωση του παραγώγου με δικαίωμα αγοράς, η παρούσα αξία του

παραγώγου αυξάνει καθώς αυξάνεται η διάρκεια ζωής του, καθώς η τιμή του πλησιάζει στην πραγματική τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου.

- Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου σε συνάρτηση με την ημερομηνία λήξης του παραγώγου

Η επένδυση σε ένα παράγωγο με δικαίωμα προαίρεσης σημαίνει ότι ο αγοραστής του παραγώγου καταβάλλει εκ των προτέρων την αξία του παραγώγου, πράγμα το οποίο αφήνει περιθώριο για δημιουργία κόστους ευκαιρίας. Το ύψος του κόστους ευκαιρίας εξαρτάται από το κόστος κεφαλαίου και την απόσταση από την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος προαίρεσης. Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι μία από τις μεταβλητές που χρησιμοποιούνται για την αποτίμηση του παραγώγου, δηλαδή για τον υπολογισμό της παρούσας αξίας του της τιμής άσκησης του δικαιώματος προαίρεσης. Η τιμή αυτή δεν καταβάλλεται εκ των προτέρων αλλά επηρεάζει την τιμή του αγοράς του παραγώγου. Η πιθανή αύξηση του επιτοκίου μηδενικού κινδύνου συνεπάγεται την αύξηση της αξίας των παραγώγων με δικαίωμα αγοράς και αντίστροφα συνεπάγεται τη μείωση της αξίας των παραγώγων με δικαίωμα πώλησης.

Τέλος σε ότι αφορά στη διαφορά μεταξύ των αμερικάνικων και των ευρωπαϊκών χρηματοοικονομικών παραγώγων δικαιώματα προαίρεσης, η κύρια διαφορά μεταξύ αμερικάνικων και ευρωπαϊκών options είναι ότι στα αμερικάνικα παράγωγα, το δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να ασκηθεί ανά πάσα στιγμή πριν από τη λήξη του συμβολαίου, ενώ στα ευρωπαϊκά παράγωγα, το δικαίωμα προαίρεσης μπορεί να ασκηθεί μόνον κατά τη λήξη του συμβολαίου.

Η δυνατότητα της πρόωρης άσκησης του δικαιώματος προαίρεσης καθιστά τα αμερικάνικα options πιο ελκυστικά στους επενδυτές από ό,τι τα ευρωπαϊκά options, ενώ καθιστά αντίστροφα πιο δύσκολη την αποτίμηση τους σε σχέση με τα αντίστοιχα ευρωπαϊκά.

Για το λόγο αυτό, χρησιμοποιούνται διαφορετικά μοντέλα αποτίμησης των αμερικάνικων και των ευρωπαϊκών options, με τα πρώτα να είναι πιο πολύπλοκα, καθώς καλούνται να λάβουν υπόψη την πιθανότητα πρόωρης άσκησης του δικαιώματος αγοράς ή πώλησης της θέσης του κατόχου του παραγώγου.

Στις περισσότερες περιπτώσεις, οι επενδυτές αγοράζουν ασφάλειες ή ασφάλιστρα με αξία που κυμαίνεται ανάλογα με την εναπομένουσα διάρκεια του παραγωγού, με αποτέλεσμα να πρέπει να λαμβάνεται η αξία της ασφάλειας υπόψη προτού ασκηθεί ένα πρόωρο δικαίωμα αγοράς ή πώλησης.

Ενώ η πρόωρη άσκηση του δικαιώματος προαίρεσης δεν είναι γενικά η βέλτιστη πρακτική, εντούτοις υπάρχουν τουλάχιστον δύο εξαιρέσεις σε αυτόν τον κανόνα, οι οποίες ωθούν τους επενδυτές στην πρόωρη αγορά ή πώληση του συμβολαίου τους.

Η πρώτη είναι η περίπτωση κατά την οποία το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο, το του οποίου ο επενδυτής κατέχει το δικαίωμα πώλησης ή αγοράς, αποδίδει σημαντικά μερίσματα, με αποτέλεσμα την πρόωρη μείωση της αξίας του συμβολαίου, μέρος της οποίας είναι τα μερίσματα τα οποία απολαμβάνει ο κάτοχος του περιουσιακού στοιχείου και δεν απολαμβάνει ο κάτοχος του αντίστοιχου παραγωγού.

Σε αυτήν την περίπτωση, συνηθίζεται η άσκηση του δικαιώματος αγοράς του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου νωρίτερα από τη λήξη του συμβολαίου, αν το αντίστοιχο ασφάλιστρο αποδίδει λιγότερο από την μείωση στην αξία του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου εξαιτίας της καταβολής μερισμάτων.

Η δεύτερη εξαίρεση είναι η περίπτωση κατά την οποία ένας επενδυτής κατέχει τόσο το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο όσο και θέτει σε αυτό το περιουσιακό στοιχείο σε μια εποχή που τα επιτόκια είναι υψηλά. Στην περίπτωση αυτή, ισχύει το αντίστροφο, δηλαδή το ασφάλιστρο αποδίδει λιγότερο από το προσδοκώμενο κέρδος που θα είχε ο επενδυτής αν ασκούσε νωρίτερα το δικαίωμα πώλησης της θέσης του.

2.3. Εφαρμογή στοχαστικού λογισμού στα χρηματοοικονομικά

2.3.1. Μοντέλο Black-Scholes

Ορισμός 2.3.1: Το μοντέλο Black–Scholes είναι ένα μαθηματικό μοντέλο το οποίο βρίσκει εφαρμογή στην τιμολόγηση των παραγώγων. Το μοντέλο παρέχει μία εξίσωση η οποία παράγει την τιμή ενός ευρωπαϊκού παραγώγου.

Βασίζεται στην υπόθεση ότι κάθε παράγωγο μπορεί να έχει μόνο μία δίκαιη τιμή, η οποία είναι ανεξάρτητη από τον κίνδυνο και την απόδοση του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου.

Σε αντίθεση με άλλες μεθόδους και μοντέλα τα οποία χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της τιμής ενός παραγώγου, δεν λαμβάνει την αναμενόμενη απόδοση του παραγώγου ως ίση με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (Black & Scholes, 1973)

Η πρόταση του μοντέλου Black-Scholes οδήγησε στη ραγδαία ανάπτυξη των αγορών παραγώγων από τη δεκαετία του '70. Έκτοτε, πολλοί ερευνητές έχουν προσεγγίσει το μοντέλο με διαφορετικούς τρόπους, παράγοντας νέες εξισώσεις για την τιμολόγηση των παραγώγων με δικαιώματα προαίρεσης (Al Saedi & Tularam, 2018)

Οι Black F. και Scholes M. βασίστηκαν στην πρότερη βιβλιογραφία για να καταλήξουν στο συμπέρασμα ότι η δυναμική – διαρκής αναθεώρηση ενός επενδυτικού χαρτοφυλακίου, λαμβάνοντας υπόψη την κίνηση της αγοράς μπορεί να οδηγήσει στο μηδενισμό της απόδοσης των ασφαλειών έναντι κινδύνου.

Σε αυτό το συμπέρασμα βασίστηκαν για να καταλήξουν στο ότι οι επενδυτές μπορούν, με χρήση παραγώγων με δικαιώματα προαίρεσης, να καταλήξουν να μηδενίσουν τον κίνδυνο ή την αβεβαιότητα του χαρτοφυλακίου τους και να απολαύσουν εκ των προτέρων μία απόδοση μηδενικού κινδύνου.

Μετά την ακαδημαϊκή τους έρευνα, επιχείρησαν να δοκιμάσουν τα συμπεράσματά τους προβαίνοντας σε επενδύσεις σε δευτερογενείς χρηματοοικονομικές αγορές, κίνηση η οποία ήταν αποτυχημένη λόγω της αδυναμίας του έως τότε μοντέλου να αντισταθμίσει τον κίνδυνο στις πραγματικές χρηματοοικονομικές αγορές. Κατόπιν εντατικής έρευνας κατέληξαν το 1973 στο προαναφερθέν μοντέλο, σε μία έρευνά

τους για την τιμολόγηση των εταιρικών υποχρεώσεων και την τιμολόγηση των παραγώγων με δικαιώματα προαίρεσης (Black & Scholes, 1973)

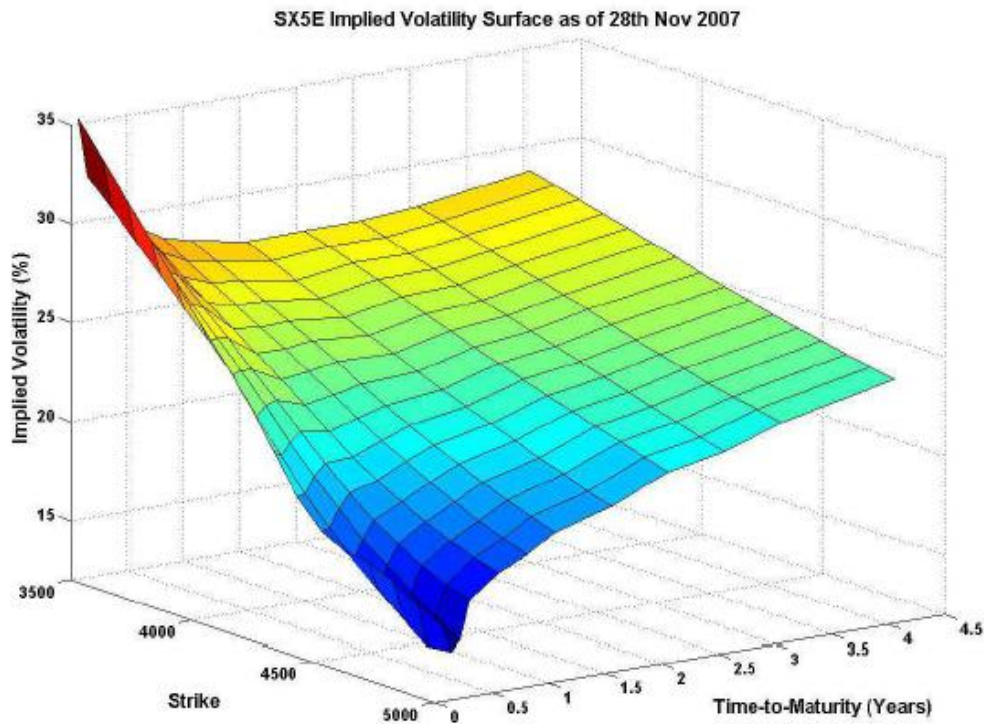
Αργότερα, το μοντέλο Black-Scholes αναλύθηκε περαιτέρω από τον Merton C. Robert, ο οποίος και πρότεινε το μοντέλο Black-Scholes όπως χρησιμοποιήθηκε έκτοτε ευρέως για την τιμολόγηση παραγώγων με δικαιώματα προαίρεσης. (Merton, 1973), (Dinica, 2011)

Το μοντέλο Black-Scholes και οι παραδοχές στις οποίες βασίζεται έχουν έκτοτε εξεταστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους παράγοντας νέα μοντέλα τα οποία χρησιμοποιούνται σήμερα στην τιμολόγηση παραγώγων και στη διαχείριση κινδύνου. Η ουσιαστικότερη συμβολή του μοντέλου είναι το σκεπτικό πίσω από αυτό, το οποίο βρίσκει ιδιαίτερη εφαρμογή στα πραγματικά παράγωγα με δικαιώματα προαίρεσης.

Ο τύπος των Black-Scholes περιλαμβάνει ουσιαστικά μόνον μία μεταβλητή η οποία δεν μπορεί να συλληχθεί από τις αγορές, η οποία είναι η μέση αναμενόμενη μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Ωστόσο, η μεταβλητή αυτή μπορεί να υπολογιστεί έμμεσα χρησιμοποιώντας τις τιμές άλλων παραγώγων τα οποία αφορούν στο ίδιο υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο.

Η τιμή των παραγώγων με δικαιώματα προαίρεσης, όπως αυτή προκύπτει από το μοντέλο Black-Scholes αυξάνεται όσο αυξάνεται η μέση αναμενόμενη μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου του παραγώγου περιουσιακού στοιχείου, καθίσταται εφικτή η αναπαραγωγή ενός ορόσημου μεταβλητότητας της τιμής ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου, έτσι ώστε αυτή να αποτελέσει μέτρο σύγκρισης για τον προσδιορισμό της τιμής άλλων παραγώγων τα οποία αφορούν σε άλλα υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία, των οποίων η μεταβλητότητα της αξίας συγκρίνεται με την τιμή «ορόσημο».

Για το λόγο αυτό και δεδομένης της αρχικής υπόθεσης, η οποία λάμβανε υπόψη πως οι αγορές δεν έχουν κόστη συναλλαγών, το μοντέλο βρίσκει ιδιαίτερα εφαρμογή σε παράγωγα τα οποία διαπραγματεύονται εκτός των χρηματιστηριακών αγορών (over the counter).



Εικόνα 0-1: Η επιφάνεια της μέσης αναμενόμενης μεταβλητότητας της τιμής του υποκείμενου του παραγώγου περιουσιακού στοιχείου (μεταβλητότητα - χρόνος μέχρι τη λήξη του παραγώγου - τιμή άσκησης δικαιώματος προαίρεσης) (Haugh, 2013)

Παρακάτω παρατίθεται ο τύπος του μοντέλου Black-Scholes, ο οποίος αφορά αποκλειστικά σε ευρωπαϊκά χρηματοοικονομικά παράγωγα, στα οποία όπως προαναφέρεται παραπάνω στο κεφάλαιο 2 το δικαίωμα προαίρεσης ασκείται αποκλειστικά κατά το χρόνο λήξης του παραγώγου:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS \frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \quad (2.3.1)$$

όπου V η τιμή του παραγώγου

σ η μεταβλητότητα της αξίας του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου

S η τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου

r το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου

t ο χρόνος

Ο τελευταίος τύπος του μοντέλου Black-Scholes βασίζεται στην υπόθεση ότι αν οι αγορές δεν είχαν κόστη συναλλαγών, οι επενδυτές θα μπορούσαν να αντισταθμίσουν πλήρως τον κίνδυνο των επενδύσεών τους με χρήση παραγώγων

μέσω των οποίων θα μπορούσαν να πωλούν ή να αγοράζουν τα υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία των επενδύσεών τους αντιδρώντας στην διακύμανση της αξίας του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου. Κάτω από αυτή την υπόθεση, η τιμή των παραγώγων που θα επιτρέψει την ολική αντιστάθμιση του κινδύνου των επενδύσεων μπορεί να υπολογιστεί από το μοντέλο Black-Scholes.

Η ευρέως χρησιμοποιούμενη εξίσωση του μοντέλου Black-Scholes, η οποία προέρχεται από τη λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης, παρατίθεται παρακάτω:

$$C = S_t N(d_1) - K e^{-rt} N(d_2) \quad (2.3.1.1)$$

όπου:

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r + \sigma_s^2)t}{\sigma_s \sqrt{t}} \quad (2.3.1.2)$$

και

$$d_2 = d_1 - \sigma_s \sqrt{t} \quad (2.3.1.3)$$

όπου:

C η τιμή του παραγώγου με δικαίωμα προαίρεσης αγοράς

S_t η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου του παραγώγου περιουσιακού στοιχείου

K η τιμή άσκησης του δικαιώματος προαίρεσης αγοράς του υποκείμενου του παραγώγου περιουσιακού στοιχείου

r το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου

t ο χρόνος μέχρι την ημερομηνία λήξης του παραγώγου

N η κανονική κατανομή

Το μοντέλο υποθέτει ότι οι τιμές των υποκείμενων των παραγώγων περιουσιακών στοιχείων ακολουθούν την κανονική κατανομή, επειδή οι τιμές των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων δεν μπορούν να λάβουν αρνητικές τιμές λόγω των κανόνων των αγορών. Συχνά, οι τιμές των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων ακολουθούν την κανονική κατανομή αλλά με έντονη κύρτωση και συγκέντρωση στο

δεξί ήμισυ της κατανομής. Αυτό υποδεικνύει ότι οι καθοδικές τάσεις των τιμών των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων είναι συχνότερες στις πραγματικές αγορές από ό,τι προβλέπει η κανονική κατανομή (Corrado & Su, 1996)

Οι δε διακυμάνσεις των τιμών των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων οι οποίες έχουν μικρότερη ένταση παραμένουν εξίσου συχνές ανεξάρτητα από την τιμή άσκησης ενός δικαιώματος προαίρεσης.

Οι μεγάλες οικονομικές κρίσεις του περασμένου αιώνα κατέδειξαν ότι οι μικρής έντασης διακυμάνσεις της αξίας των υποκείμενων στοιχείων ήταν πιο έντονες από τις αντίστοιχες διακυμάνσεις της τιμής των αντίστοιχων χρηματοοικονομικών παραγώγων. Στην ουσία, οι αγορές αντιδρούν πιο έντονα σε καθοδικές διακυμάνσεις των τιμών περιουσιακών στοιχείων από ό,τι σε ανοδικές διακυμάνσεις.

Για το λόγο αυτό, το μοντέλο Black-Scholes δεν μπορεί να υπολογίσει την έμμεση μεταβλητότητα της τιμής των υποκείμενων των παραγώγων περιουσιακών στοιχείων.

2.3.2. Σύνδεση με Κίνηση Brown

Η κίνηση Brown παρατέθηκε παραπάνω, στο Κεφάλαιο 1., βρίσκει εφαρμογή μεταξύ άλλων στα χρηματοοικονομικά, καθώς μπορεί να εφαρμοστεί για την εξέταση της επίδρασης των αγοραπωλησιών, της προσφοράς και της ζήτησης χρηματοοικονομικών προϊόντων στις τιμές αυτών και στις τιμές των αγορών. Παρόλο που εντοπίζονται διάφορες θεωρίες για τον μηχανισμό με τον οποίο η συμπεριφορά των επενδυτών επηρεάζει τη δυναμική των τιμών, δεν υπάρχουν τα αντίστοιχα απαραίτητα εμπειρικά στοιχεία για τη στήριξη των παραπάνω θεωριών (Goetzmann, 2000).

Οι χρηματοοικονομικές αγορές ακολουθούν την κίνηση Brown, καθώς τα περιουσιακά στοιχεία τα οποία είναι τα αντικείμενα συναλλαγής των αγορών αλλάζουν συνεχώς τιμές, με τυχαίο ρυθμό. Για το λόγο αυτό, τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της κίνησης Brown είναι τα ίδια μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την τιμολόγηση των χρηματοοικονομικών περιουσιακών

στοιχείων και παραγώγων. Ένα από αυτά είναι το μοντέλο Black-Scholes, το οποίο συζητήθηκε στην προηγούμενη παράγραφο.

Για τη σύνδεση του μοντέλου Black-Scholes με την κίνηση Brown, γίνεται η υπόθεση ότι εξετάζεται ένα περιουσιακό στοιχείο το οποίο δεν αποδίδει μερίσματα, η τιμή το οποίου ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown με μετατόπιση S_t , η οποία υπολογίζεται ως: (Prabakaran, 2015)

$$S_t = e^{\mu t + \sigma W_t^P} \quad (2.3.2)$$

Ο λογάριθμός της τιμής μιας μετοχής (Y_t) μπορεί να υπολογιστεί από τη διαφορική εξίσωση της κίνησης Brown, η οποία αναφέρθηκε στις παραγράφους 1.3.1 και 1.3.2:

$$dY(t) = \mu dt + \sigma dW_t^P \quad (2.3.2.1)$$

όπου:

μ είναι σταθερά που αναπαριστά τη μετατόπιση της τιμής της μετοχής

σ είναι σταθερά που αναπαριστά το θόρυβο στην τιμή της μετοχής

dW_t^P είναι η κίνηση Brown (λευκός θόρυβος με μέση τιμή μηδέν και συντελεστή συσχέτισης δ συναρτήσει του χρόνου)

Τότε η αναμενόμενη τιμή του περιουσιακού στοιχείου υπολογίζεται ως:

$$E^P = (dW_t, dW_{t'}) = dt \times dt' \times \delta(t - t') \quad (2.3.2.2)$$

σε έναν δειγματοχώρο (Ω, F_t, P)

Για τον υπολογισμό της παραγώγου της τιμής του περιουσιακού στοιχείου, δεδομένου ότι η τιμή είναι μία στοχαστική διεργασία, με εφαρμογή του λήμματος του Ito προκύπτει η παρακάτω διαφορική εξίσωση η οποία αφορά στην τιμή του περιουσιακού στοιχείου:

$$dS_t = \left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2 \right) S_t dt + \sigma S_t dW_t^P \quad (2.3.2.3)$$

Η αναλυτική λύση της παραπάνω διαφορικής εξίσωσης είναι η:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma dW_t} \quad (2.3.2.4)$$

όπου S_0 μία τυχαία αρχική τιμή του εξεταζόμενου περιουσιακού στοιχείου.

Η τελευταία σχέση χρησιμοποιείται ευρέως για την τιμολόγηση παραγώγων με δικαιώματα προαίρεσης.

Εξετάζοντάς τα περισσότερα, υπό τη σκοπιά του μοντέλου Black-Scholes και της συνδεδεμένης κίνησης Brown, αξίζει να αναφερθεί ότι η σχέση αυτή χρησιμοποιείται για τον εκ των προτέρων υπολογισμό της τιμής ενός παραγώγου με δικαίωμα αγοράς, στο οποίο ο κάτοχος έχει το δικαίωμα να αγοράσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο, ενώ ο κάτοχός του, άρα αυτός που πουλά το παράγωγο έχει την υποχρέωση να εκπληρώσει τη συναλλαγή σε περίπτωση όπου ο κάτοχος του παραγώγου αποφασίσει να ασκήσει το δικαίωμά του.

Από την παραπάνω διατύπωση, γίνεται εύκολα κατανοητό το γεγονός πως ο κάτοχος ενός παραγώγου με δικαίωμα αγοράς λαμβάνει μαζί με το παράγωγο μία αυξημένη αξία, καθώς έχει το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να αγοράσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο στην προκαθορισμένη τιμή.

Πιο συγκεκριμένα, αν K είναι η τιμή άσκησης του δικαιώματος αγοράς και T είναι ο χρόνος άσκησης του δικαιώματος αγοράς, ο κάτοχος του παραγώγου μπορεί να αγοράζει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο στην τιμή K , κατά την ημερομηνία άσκησης του δικαιώματος αγοράς και να τις πουλά στην τιμή S_t , όπως αυτή υπολογίστηκε από την παραπάνω γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης.

Στην πραγματικότητα, η αλληλουχία των παραπάνω κινήσεων πραγματοποιείται μόνο εάν η τιμή πώλησης είναι μεγαλύτερη από την αγοράς, δηλαδή αν η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου είναι μεγαλύτερη από την τιμή άσκησης του δικαιώματος αγοράς:

$$S_t > K$$

Σε διαφορετική περίπτωση, ο κάτοχος του παραγώγου εκμεταλλεύεται το γεγονός ότι δεν είναι υποχρεωμένος να αγοράσει το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο κατά την ημερομηνία λήξης του παραγώγου, καθώς αυτό θα του δημιουργούσε ζημία ίση με τη διαφορά της τρέχουσας τιμής του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου και της τιμής άσκησης του δικαιώματος αγοράς και δεν προβαίνει σε άσκηση του

δικαιώματός του. Η δε ζημία του ισούται με το κόστος αρχικής αγοράς του παραγωγού.

Συνοψίζοντας, σε αυτό το κεφάλαιο κάναμε μια εισαγωγή στις χρηματοοικονομικές αγορές (πρωτογενείς και δευτερογενείς) και στη συνέχεια παρουσιάσαμε την έννοια των χρηματοοικονομικών παραγώγων και ιδιαίτερα των δικαιωμάτων προαίρεσης. Παραθέσαμε τους τύπους υπολογισμού ενός δικαιώματος προαίρεσης και στη συνέχεια είδαμε τη σύνδεση του στοχαστικού λογισμού με τα χρηματοοικονομικά παράγωγα παραθέτοντας και αναλύοντας το μοντέλο Black-Scholes. Όλες αυτές οι έννοιες θα χρησιμοποιηθούν εκτενώς στο Κεφάλαιο 3 και θα μας βοηθήσουν να αναλύσουμε καλύτερα το προτεινόμενο μοντέλο εταιρικής ανάπτυξης που μπορεί να εφαρμόσει μια εταιρεία και βασίζεται στη θεωρία των Real Options.

Εταιρική Ανάπτυξη με τη χρήση των Real Options

Τα διαθέσιμα μοντέλα υπολογισμού της αξίας των επιχειρήσεων και των επενδύσεων δεν μπορούν να έχουν καθολική εφαρμογή καθώς τα μειονεκτήματα κάθε μοντέλου περιορίζουν την εφαρμοσιμότητα και την εγκυρότητά τους. Ειδικά, η εφαρμοσιμότητά τους περιορίζεται σημαντικά όταν απαιτείται η αποτίμηση επενδύσεων με έσοδα σε πολλές περιόδους κατά τις οποίες μεταβάλλεται ο κίνδυνος.

Το πιο συχνά χρησιμοποιούμενο μοντέλο αποτίμησης των επενδύσεων το μοντέλο DCF ή μοντέλο προεξόφλησης των ταμειακών ροών βασίζεται στην υπόθεση διατήρησης ενός σταθερού επιτοκίου προεξόφλησης, γεγονός το οποίο απλοποιεί τη διαδικασία υπολογισμού, ωστόσο προεξοφλεί και την αδυναμία παραγωγής έγκυρων αποτελεσμάτων όταν μια επένδυση αποπληρώνεται σε πολλές περιόδους κατά μπορεί να μεταβάλλεται ο κίνδυνος της επένδυσης (Gennady, 2008).

Στο παρόν κεφάλαιο γίνεται ανασκόπηση της βιβλιογραφίας και παρουσιάζεται ένα μοντέλο αποτίμησης των επενδύσεων το οποίο βασίζεται στη θεωρία των real options. Η θεωρία των real options ομοιάζει στη θεωρία των χρηματοοικονομικών παραγώγων με δικαίωμα προαίρεσης και αναλύεται για τη λήψη αποφάσεων σε δενδροδιαγράμματα δυαδικών επιλογών. Το μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί για τη λήψη αποφάσεων επανεπένδυσης από εταιρείες ή επενδυτές οι οποίοι επιχειρούν να αποτιμήσουν τρέχουσες επενδύσεις λαμβάνοντας υπόψη τις δυνατότητες αντιστάθμισης του κινδύνου, όπως είναι η μεταβαλλόμενη ζήτηση ή απόδοση μιας επένδυσης. Μέσω της αποτίμησης της απόδοσης πραγματικών επενδύσεων, οι εταιρείες μπορούν να αποφασίζουν αν θα παραμείνουν δεσμευμένες στην εκάστοτε επένδυση ή αν θα προχωρήσουν σε κάποια νέα επένδυση έτσι ώστε να εξασφαλίσουν ένα επιθυμητό βαθμό ανάπτυξης (Lin & Smith, 2007), (Zhao & Huchzermeier, 2015).

Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου περιγράφεται το προτεινόμενο μοντέλο και δίδεται το σχετικό θεωρητικό υπόβαθρο μέχρι την παραγωγή των τελικών τύπων για την εφαρμογή του μοντέλου κατόπιν κατάλληλων απλοποιήσεων. Στο δεύτερο μέρος του κεφαλαίου, το προτεινόμενο μοντέλο εφαρμόζεται σε μια υποθετική επένδυση, με σκοπό να καταδειχθεί η ευκολία εφαρμογής του. Επιπλέον, εφαρμόζεται παράλληλα το μοντέλο DCF έτσι ώστε να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων των δύο μοντέλων, με σκοπό να καταδειχθεί η αυξημένη ακρίβεια που προσφέρεται από το προτεινόμενο μοντέλο αποτίμησης.

3.1. Θεωρητικό υπόβαθρο

Όπως προαναφέρθηκε, τα παράγωγα προσφέρουν στον επενδυτή τη δυνατότητα να αντισταθμίσει πιθανές απώλειες της επένδυσής του, οι οποίες μπορούν να οφείλονται στην πτωτική τάση μιας μετοχής ή σε αρνητικές εξελίξεις ή τάσεις σε μια αγορά, στην περίπτωση που εξετάζεται η αποτίμηση μιας επένδυσης. Δεδομένου ότι οι πραγματικές επενδύσεις αποπληρώνουν τον επενδυτή σε βάθος πολλών περιόδων, η πιθανότητα της μεταβαλλόμενης ανάπτυξης της αγοράς ή εν γένει της μεταβαλλόμενης απόδοσης της επένδυσης είναι ιδιαίτερα μεγάλη.

Το προτεινόμενο μοντέλο αποτίμησης των επενδύσεων με χρήση της θεωρίας των real options, όπου το δικαίωμα προαίρεσης αναφέρεται στην απόφαση επανεπένδυσης ή συνέχισης της δέσμευσης σε μία υφιστάμενη επένδυση, προσφέρει έναν ακριβή και πρακτικό τρόπο αποτίμησης της τρέχουσας απόδοσης της παραπάνω υφιστάμενης επένδυσης.

Στον πραγματικό επιχειρηματικό κόσμο εφαρμόζεται μια διαρκής αποτίμηση των τρεχουσών επενδύσεων με σκοπό την ορθή λήψης απόφασης για επανεπένδυση έτσι ώστε να προφυλαχθεί η ανάπτυξη της εταιρείας, συνεπώς μπορεί να αποτελέσει ένα εργαλείο για τον ακριβέστερο υπολογισμό της αναμενόμενης εταιρικής ανάπτυξης και για την ορθή λήψη αποφάσεων επανεπένδυσης.

Προτού παρουσιαστεί η θεωρία των real options, αξίζει να αναφερθεί ότι αυτή αναφέρεται σε πραγματικές επενδύσεις, όπως είναι για παράδειγμα οι επενδύσεις σε εξοπλισμό, μηχανές, εγκαταστάσεις ή η επένδυση σε μία νέα τεχνολογία, με

σκοπό την αύξηση βασικών δεικτών μιας εταιρείας, όπως οι πωλήσεις, το μερίδιο στην αγορά ή η απόδοση κόστους.

Η χρηματοοικονομική θεωρία βασίζεται στην αρχή της μεταχείρισης των επενδύσεων και των επενδυτικών ευκαιριών ως ευκαιρίες για ανάπτυξη. Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, για την αποτίμηση μιας εταιρείας απαιτείται ο υπολογισμός της αξίας του ενεργητικού της και των αναμενόμενων ευκαιριών ανάπτυξης. (Myers, 1977), (Damodaran, 2002), (Copeland, et al., 2000)

Οι εταιρείες προβαίνουν σε επενδύσεις για διάφορους λόγους, με κυριότερους την ανάπτυξη μέσω εισόδου σε μια νέα αγορά, μέσω προσφοράς ενός νέου προϊόντος, μέσα από την απόκτηση βιώσιμου ανταγωνιστικού πλεονεκτήματος κ.α..

Αντίστοιχα, στο μοντέλο προεξόφλησης των ταμειακών ροών, η αποτίμηση μιας εταιρείας γίνεται σε δύο διακριτά χρονικά διαστήματα:

- *Αρχικό διάστημα αμέσως μετά από μία επένδυση, κατά το οποίο η εταιρεία απολαμβάνει υψηλής ανάπτυξης, π.χ. μέσα από την απότομη αύξηση της ζήτησης και των πωλήσεων, ως απόρροια της επένδυσής της η οποία της προσδίδει ένα προσωρινό ανταγωνιστικό πλεονέκτημα, ή της προσδίδει πλεονέκτημα κόστους ή πλεονέκτημα μέσω της διαφοροποίησης από τον ανταγωνισμό, ή αποκτά προσωρινά βελτιωμένη απόδοση π.χ. λόγω των οικονομικών κλίμακας*
- *Μεσοπρόθεσμο και μακροπρόθεσμο διάστημα κατά το οποίο η επίδραση της επένδυσης στην ανάπτυξη της εταιρείας έχει ισορροπήσει καθώς η εταιρεία έχει ήδη απολαύσει τα πλεονεκτήματα που της προσέδωσε η επένδυση, με αποτέλεσμα η επίδρασή της να μην αντικατοπτρίζεται με αυξημένο μερίδιο της αγοράς*

Επιπλέον, το μοντέλο προεξόφλησης των μελλοντικών ταμειακών ροών βασίζεται στην υπόθεση ότι οι εταιρείες προβαίνουν διαρκώς σε επενδύσεις έτσι ώστε να αυξήσουν την ανάπτυξη, κερδοφορία και άλλους δείκτες απόδοσης της εταιρείας (Damodaran, 2001).

Αντίθετα, σύμφωνα με τη θεωρία των real options, οι εταιρείες δεν ακολουθούν ένα συγκεκριμένο μοτίβο επενδύσεων, καθώς κάθε επένδυση λαμβάνεται υπόψη ως ευκαιρία για ανάπτυξη. Ως εκ τούτου, κάθε επένδυση γίνεται μόνο όταν δεν επιτυγχάνεται η ανάπτυξη και απόδοση της εταιρείας και αν αναμένεται η επένδυση αυτή να είναι επιτυχημένη. Στο σημείο αυτό αναφέρεται ότι, σύμφωνα με τη θεωρία των real options, οι εταιρείες κατέχουν το *δικαίωμα της προαίρεσης*, δηλαδή το δικαίωμα να «αγοράσουν» ή να μην αγοράσουν μια ευκαιρία επένδυσης. Για το λόγο αυτό η θεωρία των real options ομοιάζει στη θεωρία των χρηματοοικονομικών παραγώγων, όπου ο επενδυτής μπορεί να αγοράσει παράγωγα με δικαίωμα αγοράς ή δικαίωμα πώλησης, έτσι ώστε να τα χρησιμοποιήσει κατάλληλα, δηλαδή να πουλήσει αν η επένδυσή του δεν αποδίδει όπως ανέμενε ή να αγοράσει αν η επένδυσή του ξεπερνά τις προσδοκίες του, όπως συζητήθηκε πιο αναλυτικά και στο Κεφάλαιο 2.

Σύμφωνα δε με τη θεωρία των real options, οι εταιρείες οι οποίες προβαίνουν σε πραγματικές επενδύσεις, όπως αυτές στις οποίες αναφερθήκαμε παραπάνω, έχουν περισσότερο το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να προχωρούν σε πραγματικές επενδύσεις, καθώς αυτές είναι ως επί το πλείστο δύσκολα ή μη αντιστρέψιμες και είναι δύσκολα ρευστοποιήσιμες. Ως εκ τούτου και όπως αναφέρθηκε παραπάνω, κάθε απόφαση επανεπένδυσης λαμβάνεται μόνο όταν η εκάστοτε επένδυση αναμένεται να είναι κερδοφόρα ή όταν οι συνθήκες της αγοράς είναι τέτοιες που καθιστούν την επένδυση ελκυστική. Υπάρχει επί της ουσίας σημαντική διαφορά από την επένδυση π.χ. σε μετοχές μιας άλλης εταιρείας ή στην αγορά ομολόγων, προϊόντα τα οποία είναι άυλα και μπορούν να μεταπωληθούν σε δευτερεύουσες αγορές σχετικά άμεσα αν αποδεικνύονται ζημιογόνα.

Συνεπώς, οι πραγματικές επενδύσεις έχουν και προσφέρουν σημαντικά μικρότερη ευελιξία από ό,τι οι επενδύσεις σε άυλα χρηματοοικονομικά προϊόντα και απαιτούν την δέσμευση του επενδυτή σε αυτές (Trigeorgis & Brennan, 2000).

Ως εκ τούτου, οι εταιρείες και η διοίκηση τους καλούνται να αποφασίσουν όχι μόνο για την αναμενόμενη απόδοση και κερδοφορία μιας επένδυσης αλλά και για την επαγόμενη ευελιξία και την απαιτούμενη δέσμευση που φέρνει η επένδυση αυτή για την εταιρεία.

Δεδομένου ότι οι σύγχρονες εταιρείες δραστηριοποιούνται σε πολλές αγορές, η απόφαση επανεπένδυσης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη διαδικασία, η οποία καθιστά πρώιμα εργαλεία για την εκτίμηση της βιωσιμότητας των επενδύσεων, όπως η εκτίμηση της καθαρής παρούσας αξίας μιας επένδυσης, ανεπαρκή. Δεν φτάνει μια πραγματική επένδυση να έχει θετική καθαρή παρούσα αξία, αλλά πρέπει να αναλύεται και να εκτιμάται και η επίδραση στη συνολική απόδοση της εταιρείας λαμβάνοντας υπόψη το στρατηγικό της σχεδιασμό. Η θεωρία αυτή αναφέρεται και ως θεωρία μεγιστοποίησης της καθαρής παρούσας αξίας μέσω της επανεπένδυσης ή της αναμονής πριν τη λήψη απόφασης για επένδυση και βασίζεται στην παραδοχή ότι η απόδοση μιας επένδυσης επηρεάζεται από μελλοντικές αποφάσεις επανεπένδυσης και το χρησιμοποιούμενο προεξοφλητικό επιτόκιο επηρεάζεται τόσο από μελλοντικές όσο και από υφιστάμενες και προηγούμενες αποφάσεις και επενδύσεις της εταιρείας, οι οποίες μεταφράζονται σε στοχαστικές μεταβλητές οι οποίες δύνανται να επηρεάσουν την απόδοση μιας επένδυσης και την επίπτωση στη συνολική απόδοση της εταιρείας (Luehrman, 1998), (Amram & Nalin, 2000).

Για το λόγο αυτό στον πραγματικό επιχειρηματικό κόσμο, πολλές φορές οι εταιρείες ενδέχεται να προβαίνουν σε επενδύσεις οι οποίες δεν μοιάζουν ιδιαίτερα συμφέρουσες ή σημαντικές, αλλά αποσκοπούν στην προετοιμασία εισόδου σε μια αγορά ή στη δημιουργία του κατάλληλου περιβάλλοντος ώστε να «αγοράσουν» ένα δικαίωμα ανάπτυξης, δηλαδή να προβούν σε μια καίρια επένδυση στο μέλλον και όσο αναμένουν τυχόν άλλες εξελίξεις. Αντίστοιχα, συχνά οι εταιρείες μπορεί να κρατούν στάση αναμονής και να μην προβαίνουν σε νέες επενδύσεις ώστε να υποστηρίξουν προηγούμενες επενδύσεις, οι οποίες είναι κερδοφόρες αλλά η κερδοφορία τους φθίνει, καθώς αναμένουν διάφορες άλλες εξελίξεις που μπορεί να διαμορφώσουν νέες επιχειρηματικές ευκαιρίες ή να προδιαγράψουν την αρνητική ανάπτυξη μιας αγοράς και να οδηγήσουν στην έξοδο από αυτή.

Η θεωρία των real options μπορεί να προσφέρει και να αποτελέσει ένα ολοκληρωμένο εργαλείο για την ανάλυση τέτοιων πολύπλοκων αποφάσεων επανεπένδυσης, προσφέροντας μεγαλύτερη ακρίβεια και καλύτερη αιτιολόγηση κάθε θετικής ή αρνητικής απόφασης επανεπένδυσης. Συνολικά, η θεωρία των real options και το προτεινόμενο μοντέλο μπορεί να δώσει μεγαλύτερη ακρίβεια για την

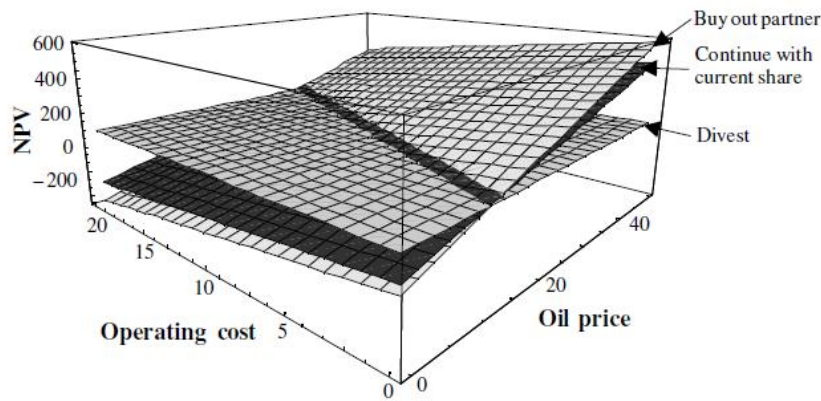
αποτίμηση της αξίας και τον προσδιορισμό της προσδοκώμενης ανάπτυξης μιας εταιρείας.

Τα μοντέλα που βασίζονται στη θεωρία των real options εξετάζουν την απόδοση και την αξία μιας εταιρείας ως μία εξαρτημένη στοχαστική μεταβλητή, καθώς σύμφωνα με τον Samuelson (1965), το σύνολο των μεταβλητών που εισάγουν αβεβαιότητα και διαμορφώνουν την αξία μιας εταιρείας μπορούν να συνδυαστούν κατάλληλα και να δημιουργήσουν ένα μοτίβο τυχαίας πορείας, συνεπώς μεταβάλλονται τυχαία. (Samuelson, 1965), (Van Horne & Parker, 1967), (Geroski, et al., 1997).

Η σύμπτυξη όλων των μεταβλητών που εισάγουν αβεβαιότητα σε μία κοινή, τυχαία μεταβλητή μπορεί να απλοποιήσει τη διαδικασία της αποτίμησης, ωστόσο καθιστά δύσκολο τον προσδιορισμό των ορίων της κοινής αυτής μεταβλητής πάνω και κάτω από τα οποία μία επένδυση πρέπει να προκριθεί ή να αποκλειστεί.

Σύμφωνα με νεότερους ακαδημαϊκούς, η εξέταση της μεταβλητότητας της απόδοσης μιας επένδυσης με μία μόνο μεταβλητή μπορεί να παράγει ανακριβή αποτελέσματα. Στη μεταβλητή αυτή, συμπεριλαμβάνεται σαφώς η αβεβαιότητα των μελλοντικών ταμειακών η οποία μπορεί να λαμβάνεται υπόψη πιο απαισιόδοξα από ό,τι στην πραγματικότητα, ενώ η στάθμισή της με άλλες μεταβλητές που εισάγουν αβεβαιότητα έχει αποτέλεσμα την εξαγωγή πιο αισιόδοξων, από τα πραγματικά, αποτελεσμάτων για την αξία μιας επένδυσης. (Smith & McCardle, 1999), (Smith, 2005)

Ενδεικτικά αναφέρεται το αποτέλεσμα ενός μοντέλου βασισμένου στη θεωρία των real options, για τη λήψη απόφασης επένδυσης στον κλάδο των πετρελαιοειδών, στο οποίο έχουν συμπεριληφθεί δύο μεταβλητές αβεβαιότητας: τα λειτουργικά κόστη και η τιμή πώλησης του πετρελαίου. Το μοντέλο προτείνει τη λήψη μία εκ των τριών αποφάσεων: **επένδυση** (*buy out partner*), **αποεπένδυση** και **συνέχιση της τρέχουσας κατάστασης (αναμονή)** (Εικόνα 0-1):



Εικόνα 0-1: Μοντέλο υπολογισμού της καθαρής παρούσας αξίας κατόπιν επανεπένδυσης, συνέχισης της παρούσας κατάστασης ή αποεπένδυσης (Smith, 2005)

Το παραπάνω μοντέλο υπολογίζει την καθαρή παρούσα αξία της επένδυσης στα \$421 εκατομμύρια, κατόπιν επένδυσης μετά από πέντε έτη, ενώ αν χρησιμοποιούνταν απλά ο υπολογισμός της καθαρής παρούσας αξίας, ο οποίος δεν λαμβάνει υπόψη την απόφαση επανεπένδυσης, η καθαρή παρούσα αξία υπολογίζεται σε \$392 εκατομμύρια. (Smith & McCardle, 1999), (Smith, 2005).

Εντούτοις, όχι μόνον η αξία μιας επένδυσης επηρεάζεται ομοίως μη-γραμμικά, καθώς οι μεταβλητές που την διαμορφώνουν δεν μεταβάλλονται γραμμικά, αλλά και συνολικά η αξία μιας εταιρείας δεν μεταβάλλεται γραμμικά, καθώς εξαρτάται από την απόδοση πολλών επενδύσεων ή ακριβέστερα πολλών ευκαιριών για ανάπτυξη, σύμφωνα με τη θεωρία των real options.

Το παραπάνω θα μπορούσε να μην έχει ισχύ μόνο στην περίπτωση όπου οι εταιρείες έχουν να αποφασίσουν αποκλειστικά για μία πιθανή επένδυση, σενάριο το οποίο αποκλίνει σημαντικά από την πραγματικότητα στον επιχειρηματικό κόσμο.

Ο υπολογισμός της μεταβλητότητας των αναμενόμενων, μελλοντικών ταμειακών ροών κάθε ξεχωριστής επένδυσης είναι ιδιαίτερα πολύπλοκος, ως εκ τούτου δεν είναι δυνατός ο υπολογισμός των ταμειακών ροών κάθε επένδυσης ούτε και ο υπολογισμός της επίδρασης κάθε επένδυσης στην αναμενόμενη ανάπτυξη της εταιρείας με χρήση της θεωρίας των real options.

Για την αποφυγή της παραπάνω δυσκολίας, το προτεινόμενο μοντέλο υπολογίζει μια άλλη βοηθητική μεταβλητή η οποία μετρά την αβεβαιότητα, η οποία είναι συνιστώσα της αξίας μιας εταιρείας και η οποία επηρεάζεται από διάφορους

εξωγενείς παράγοντες. Κατόπιν υπολογισμού αυτής της μεταβλητής υπολογίζονται οι μελλοντικές ταμειακές ροές για να αποτιμηθεί η εταιρεία. Οι υπολογιζόμενες αυτές μελλοντικές ταμειακές ροές συμπεριλαμβάνουν την αβεβαιότητα που διέπει την εταιρεία. Με τον τρόπο αυτό, η αξία της εταιρείας είναι συνάρτηση της στοχαστικής διαδικασίας που έχει εφαρμοστεί για την εκτίμηση της αβεβαιότητας και για τον υπολογισμό της επίδρασης της αβεβαιότητας στην αξία της εταιρείας.

Δεδομένου ότι το προτεινόμενο μοντέλο υπολογίζει τις μελλοντικές ταμειακές ροές λαμβάνοντας υπόψη την αβεβαιότητα, το καθιστά ιδιαίτερα χρηστικό, καθώς διευκολύνεται ο υπολογισμός και άλλων χρηματοοικονομικών μεγεθών, όπως η επίδραση στην κεφαλαιακή διάρθρωση, στις φοροελαφρύνσεις, στις αποσβέσεις κ.α., για τη συνολική εκτίμηση της επίδρασης πολλαπλών ευκαιριών ανάπτυξης στην αξία της εταιρείας.

Στην πραγματικότητα, όταν οι εταιρείες αξιολογούν πιθανές επενδύσεις σε περιουσιακά στοιχεία όπως εγκαταστάσεις, εξοπλισμό, νέες τεχνολογίες κ.α., καλούνται να επιλέξουν μεταξύ επενδυτικών ευκαιριών. Επειδή τα διαθέσιμα κεφάλαια είναι πεπερασμένα, κάποιες επενδυτικές ευκαιρίες αποκλείουν την επιλογή κάποιων άλλων επενδυτικών ευκαιριών. Παράλληλα, δεν είναι εφικτή και ρεαλιστική ούτε και η αύξηση της ικανότητας παραγωγής των παραγωγικών επιχειρήσεων επ' άπειρο, καθώς η ζήτηση διαμορφώνεται από την αγορά και τόσο αυτή όσο και το μερίδιο της αγοράς το οποίο διεκδικεί κάθε επιχείρηση είναι πεπερασμένο.

Σε αυτό το πλαίσιο, οι επιχειρήσεις καλούνται να επιλέξουν τη βέλτιστη στρατηγική επένδυσης διαρκώς έτσι ώστε να εξασφαλίσουν την ανάπτυξη στην οποία στοχεύουν.

Κάτω από τη λογική του προτεινόμενου μοντέλου, η επέκταση της παραγωγικής ικανότητας μιας παραγωγικής επιχείρησης εξετάζεται ως η άσκηση ενός δικαιώματος προαίρεσης και πιο συγκεκριμένα, ως η άσκηση του δικαιώματος επέκτασης. Σε ό,τι αφορά στην τιμολόγηση του δικαιώματος αυτού και για τις ανάγκες του προτεινόμενου μοντέλου, αυτό τιμάται ως ίσο με το κόστος της σχετικής επένδυσης ενώ σε ό,τι αφορά στην αποτίμηση του, η αξία του λαμβάνεται

ιση με τα αναμενόμενα αυξημένα έσοδα, λόγω της εκτεταμένης παραγωγικής ικανότητας που θα αποφέρει η αξιολογούμενη επένδυση καθώς και λόγω της δυνατότητας που θα προσφέρει αυτή έτσι ώστε να ακολουθήσουν και μελλοντικές επεκτάσεις της παραγωγικής ικανότητας.

Ως εκ τούτου η αξία μιας τέτοιας επένδυσης, σύμφωνα με το προτεινόμενο μοντέλο, έχει δύο συνιστώσες· την άμεση θετική επίπτωση στις ταμειακές ροές εξαιτίας της ίδιας της επένδυσης καθώς και τη δυνητική μελλοντική αύξηση των ταμειακών ροών όπως αυτή προκύπτει ως δυνατότητα την οποία προσφέρει η αρχικά αξιολογούμενη επένδυση. Βέβαια, σε ό,τι αφορά στη δεύτερη αυτή συνιστώσα της αξίας του δικαιώματος προαίρεσης, όπως εξετάζεται μία αξιολογούμενη επένδυση, η δυνητική περαιτέρω επέκταση κατά το μέλλον περιορίζεται από τις ανάγκες και τη ζήτηση της αγοράς. Ειδικά σε περίπτωση όπου μία αγορά αναπτυχθεί, μία επένδυση μπορεί να δώσει σε μία επιχείρηση πλεονεκτική θέση έτσι ώστε να μπορέσει να εκμεταλλευτεί την πιθανή περαιτέρω ανάπτυξη της αγοράς στο μέλλον.

Αν θεωρηθεί η περίπτωση όπου μια επιχείρηση διατηρεί σταθερή την παραγωγική της ικανότητα και τις πωλήσεις της, πρέπει να ληφθεί υπόψη η αβεβαιότητα της μελλοντικής αξίας της σταθερής αυτής παραγωγής καθώς οι αγορές εξελίσσονται.

Για τη συμπερίληψη της αβεβαιότητας της μελλοντικής αξίας της παραγωγής, γίνεται η υπόθεση πως η διακύμανση στη ζήτηση καθώς και η διακύμανση οποιασδήποτε άλλης μεταβλητής επηρεάζει την μελλοντική αξία της παραγωγής είναι τυχαία, δηλαδή πρόκειται για τυχαίες διαδικασίες (RW).

Το προτεινόμενο μοντέλο υπολογίζει την αβεβαιότητα αυτή ως μία τυχαία κατανομημένη μεταβλητή $S^{nom}(t)$ η οποία είναι συνάρτηση του χρόνου:

$$\frac{dS^{nom}}{S^{nom}} = \mu dt + \sigma dW \quad (3.1)$$

όπου $S_0^{nom} = S_0$

μ είναι ο πληθωρισμός

dW είναι μία τυπική διαδικασία Weiner, η οποία ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1)$

σ είναι η μεταβλητότητα της ζήτησης της αγοράς

Στη συνέχεια, εξετάζεται η γενική περίπτωση όπου η επιχείρηση έχει το δικαίωμα να επεκτείνει την παραγωγική της ικανότητα, γίνεται η υπόθεση ότι το ανταγωνιστικό πλεονέκτημα της επιχείρησης το οποίο αποφέρει αυξημένα έσοδα διαρκεί T περιόδους. Μετά από τη λήξη κάθε τέτοιας περιόδου, οι μέτοχοι της εταιρείας απολαμβάνουν την αυξημένη αξία της επένδυσής τους, μέσα από την επανεπένδυση σε αυτή.

Για την απλοποίηση του προτεινόμενου μοντέλου, η αναλογία μεταβλητού κόστους και πωλήσεων λαμβάνεται ανεξάρτητη της κατάστασης της επιχείρησης, του κόστους χρήματος και της κατάστασης της αγοράς, δηλαδή δεν λαμβάνεται υπόψη η αβεβαιότητα του κόστους.

Για την εκτίμηση της αβεβαιότητας της ζήτησης η οποία διαμορφώνεται από την αγορά γίνεται η υπόθεση ότι η αγορά ανοίγει σε διακριτές περιόδους $t/1, \dots, t/2, \dots, T$.

Για την επίλυση του μοντέλου επιπλέον, τίθεται η προϋπόθεση η μεταβλητότητα της ζήτησης (σ) να είναι μη στοχαστική και ως εκ τούτου να μπορεί να υπολογιστεί σε κάθε χρόνο t .

Συνεπώς, η αβεβαιότητα της μελλοντικής αξίας της παραγωγής μπορεί να θεωρηθεί ως συνάρτηση της αβεβαιότητας της αξίας της παραγωγής στις παραπάνω διακριτές περιόδους:

$$S^{nom} = \{S_1^{nom}, S_2^{nom}, \dots, S_T^{nom}\} \quad (3.1.1)$$

Σε κάθε χρονική στιγμή, είναι γνωστά όλα τα δεδομένα ω_t τα οποία έχουν διαμορφώσει τη ζήτηση για κάθε προηγούμενη περίοδο. Με βάση αυτά τα δεδομένα διαμορφώνεται η προσδοκία της επιχείρησης για κάθε μελλοντική περίοδο και η οποία προσδοκία εκφράζεται ως πιθανότητα p .

Έχοντας περιγράψει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες διαμορφώνονται οι προσδοκίες της επιχείρησης για κάθε μελλοντική περίοδο και οι συνθήκες κάτω από

τις οποίες διαμορφώνεται η μελλοντική αξία της παραγωγής της επιχείρησης, η αξία των μελλοντικών ταμειακών ροών εκφράζεται ως:

$$E(\dots|\omega_t)$$

καθώς η αξία τους εξαρτάται από τα δεδομένα ω_t τα οποία διαμορφώνουν τις προσδοκίες της επιχείρησης ή πιο απλά ως:

$$E(\omega_t)$$

Σύμφωνα με τη βιβλιογραφία, οι ενδογενείς παράγοντες στις επιχειρήσεις καθώς και η μεγάλη ανομοιογένεια των περιουσιακών τους στοιχείων έχουν πάντα μεγαλύτερη βαρύτητα στην αποτίμηση των ευκαιριών ανάπτυξης της επιχείρησης έναντι των εξωγενών παραγόντων, αυτών που σχετίζονται με τη γενικότερη κατάσταση της αγοράς. Ως εκ τούτου, γίνεται η υπόθεση ότι κατά την εξέταση της εταιρικής στρατηγικής επανεπένδυσης, η επιχείρηση αξιολογεί μόνο την επίδραση των εξωγενών παραγόντων στη ζήτηση της αγοράς.

Επιπλέον, θεωρείται ότι οι αποφάσεις επανεπένδυσης λαμβάνονται στην αρχή κάθε περιόδου t και η αβεβαιότητα της ζήτησης υπολογίζεται στο τέλος κάθε περιόδου t , κατόπιν εφαρμογής της επένδυσης.

Λαμβάνεται ως t ο χρόνος κατά τον οποίο αποτιμάται η αξία της επιχείρησης και T ο χρόνος κατά τον οποίο λήγει το «δικαίωμα» προαίρεσης αγοράς μιας ευκαιρίας ανάπτυξης. Ο χρόνος λήξης του δικαιώματος προαίρεσης εξαρτάται από τυχόν περιόδους απρόσμενης ανάπτυξης μιας επένδυσης.

Σύμφωνα με το προτεινόμενο μοντέλο, οι επιχειρήσεις μπορούν να βρίσκονται σε μία εκ των δύο παρακάτω καταστάσεων, οι οποίες σχετίζονται με τη λήψη αποφάσεων επένδυσης και επανεπένδυσης:

- $m_t=1$

Λήψη απόφασης αντικατάστασης του εξοπλισμού, των εγκαταστάσεων κ.α. και αναμονή έναντι της επένδυσης για την αύξηση της παραγωγικής ικανότητας και των πωλήσεων (αναμονή για επανεπένδυση).

- $m_t=2$

Λήψη απόφασης αντικατάστασης του εξοπλισμού, των εγκαταστάσεων κ.α. και λήψη απόφασης επανεπένδυσης για την αύξηση της παραγωγικής ικανότητας και των πωλήσεων.

Λαμβάνεται επίσης ότι μια επένδυση $I_t^{new}(\xi)$, η επιχείρηση αυξάνει την παραγωγή και τις πωλήσεις της κατά έναν παράγοντα ξ .

Για τον υπολογισμό της τιμής του παραπάνω δικαιώματος ανάπτυξης, η οποία διαμορφώνεται από το κόστος της επένδυσης και από τη μεταβολή του κεφαλαίου κίνησης εξαιτίας αυτής της επένδυσης, γίνεται η υπόθεση πως η τιμή του δικαιώματος είναι μη στοχαστική και ανεξάρτητη από εξωγενείς παράγοντες της αγοράς.

Σε κάθε μία από τις ανωτέρω δύο καταστάσεις (1 ή 2), η επιχείρηση μπορεί να λάβει την απόφαση αναμονής ή επανεπένδυσης και ως εκ τούτου για κάθε κατάσταση υπολογίζεται η αξία των μελλοντικών ταμειακών ροών FCF_t^m για $m=1$ ή 2.

Στην περίπτωση όπου μεταξύ δύο περιόδων η επιχείρηση παραμένει στην κατάσταση 1 δεν υπολογίζονται κόστη μετάβασης, συνεπώς:

$$c_1 = 0$$

Στην περίπτωση όπου μεταξύ δύο περιόδων η επιχείρηση μεταβεί από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2, υπολογίζονται κόστη μετάβασης, τα οποία αποτελούνται από το καθαρό κόστος της επένδυσης και από τη μεταβολή του κεφαλαίου κίνησης ως εξής:

$$c_2 = I^{new}(\xi) + \overline{dWC}(\xi) \quad (3.1.2)$$

Οι ταμειακές ροές στο χρονικό διάστημα $(t, t+\Delta t)$, μεταξύ δύο περιόδων, εξαρτώνται από την τιμή της στοχαστικής μεταβλητής $S^{nom}(t)$, η οποία εισήχθη παραπάνω, καθώς και σε προηγούμενες και μελλοντικές αποφάσεις της επιχείρησης m_t , οπότε υπολογίζονται ως εξής:

$$FCF^m(t) = FCF(S_t^{nom}, m_t, m_{t-1}, \dots, m_0, t)$$

$$FCF^m(t) = FCF(S_t^{nom}, m_t, t) \quad (3.1.3.)$$

Αν στην εκτίμηση των μελλοντικών ταμειακών ροών ληφθεί υπόψη και ο πληθωρισμός, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη τυχόν κόστη για τη μετάβαση από μία επενδυτική απόφαση σε μία άλλη, οι μελλοντικές ταμειακές ροές, ως συνάρτηση των επενδυτικών αποφάσεων m_t υπολογίζονται ως εξής:

$$FCF(t)(S_t, m_t, t) = EBIT(S_t, m_t, t) \times (1 - tax\ rate) + A'_t(m_t) - I_t^{replace}(m_t) - dWC'_t(m_t) \quad (3.1.4.)$$

όπου $EBIT(S_t, m_t, t)$ είναι τα κέρδη προ τόκων και φόρων και τα οποία υπολογίζονται από την παρακάτω σχέση:

$$EBIT(S_t, m_t, t) = S_t(m_t, t) \times (1 - VarCost) - A'_t(m_t) \quad (3.1.5)$$

όπου $VarCost$ είναι η αναλογία μεταβλητού κόστους για πωλήσεις S_t

$tax\ rate$ είναι ο φόρος στον οποίο εμπίπτουν τα κέρδη προ τόκων και φόρων

A'_t είναι η προσαρμοσμένη πραγματική απόσβεση

$I_t^{replace}(m_t)$ είναι οι επενδύσεις οι οποίες αποκλείονται αμοιβαία με την προκρινόμενη επένδυση και

$dWC'_t(m_t)$ είναι η διορθωμένη μεταβολή του κεφαλαίου κίνησης εξαιτίας του πληθωρισμού

Μετά από μία περίοδο ανάπτυξης, οι μελλοντικές ταμειακές ροές αποτυπώνονται στην αποτίμηση της επιχείρησης CV_t . Για τον υπολογισμό της αξίας της επιχείρησης χρησιμοποιείται ένα μοντέλο αποτίμησης το οποίο εφαρμόζεται για την αποτίμηση των αμερικάνικων παραγώγων μετοχών με δικαίωμα αγοράς.

Για την απλοποίηση της επίλυσης του μοντέλου επιλέγεται η επίλυσή του με κατασκευή δενδροδιαγραμμάτων δυαδικών αποφάσεων·

- παραμονή στην πρότερη κατάσταση
- μετάβαση από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2

Με τον τρόπο αυτό, για κάθε περίοδο γίνεται πιο εύκολος ο υπολογισμός των ταμειακών ροών οι οποίες επηρεάζονται από τη λήψη απόφασης αναμονής ή από τη λήψη απόφασης επανεπένδυσης.

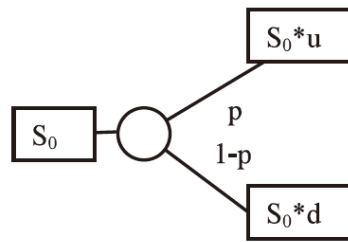
Η επίλυση του δενδροδιαγράμματος μπορεί να γίνει με χρήση της γεωμετρικής κίνησης Brown, ωστόσο αυτό είναι ιδιαίτερα πολύπλοκο δεδομένων των πολλών μεταβλητών που λήφθηκαν υπόψη παραπάνω. Για το λόγο αυτό, το προτεινόμενο μοντέλο βασίζεται σε ένα απλοποιημένο δενδροδιάγραμμα το οποίο και πάλι μπορεί να επιλυθεί με χρήση της γεωμετρικής κίνησης Brown, θέτοντας τους παρακάτω περιορισμούς – υποθέσεις:

- εφαρμόζεται η μέθοδος γραμμικής απόσβεσης τόσο για φορολογικούς όσο και για χρηματοοικονομικούς σκοπούς
- τυχόν ζημίες μιας περιόδου δεν μεταφέρονται στην επόμενη περίοδο
- οι επιχειρήσεις έχουν πρόσβαση σε μη πεπερασμένα κεφάλαια και μπορούν συγκεντρώνουν μετοχικά κεφάλαια ή να δανείζονται έτσι ώστε να υποστηρίξουν τις επενδυτικές τους αποφάσεις

Ένας επιπλέον περιορισμός είναι η εκτέλεση όλων των υπολογισμών με χρήση πραγματικών νομισματικών έναντι ονομαστικών όρων, πράγμα το οποίο οδηγεί το μοντέλο στον ορθό υπολογισμό των ονομαστικών όρων. Αυτό επιτρέπει την απλουστευμένη επίλυση του δενδροδιαγράμματος. Ως εκ τούτου, για κάθε περίοδο λαμβάνεται υπόψη το πραγματικό κόστος της επένδυσης, η πραγματική μεταβολή του κεφαλαίου κίνησης, η πραγματική μεταβολή της ζήτησης καθώς και η πραγματική τιμή του πληθωρισμού.

Η απλουστευμένη αυτή επίλυση καθιστά όλες τις πιθανές διαδρομές του δενδροδιαγράμματος ανεξάρτητες την μία από την άλλη και επιτρέπει την μετάβαση σε οποιαδήποτε κατάσταση όταν το δενδροδιάγραμμα επιλύεται ανάστροφα.

Με τον τρόπο αυτό, μπορεί να εφαρμοστεί ο αλγόριθμος Bellman για τον ανασυνδυασμό του δενδροδιαγράμματος. Παρακάτω παρατίθενται οι δύο κλάδοι για μία αρχική αξία πωλήσεων S_0 :



Εικόνα 0-2: Αβεβαιότητα της ζήτησης μια εταιρείας με σταθερή παραγωγή προϊόντων S_0 (Gennady, 2008)

Η χρήση του δυαδικού δένδροδιαγράμματος όπως αυτό παρουσιάζεται παραπάνω, στην Εικόνα 0-2, επιτρέπει τον εύκολο υπολογισμό των πωλήσεων σε κάθε επόμενη περίοδο, λαμβάνοντας υπόψη την αβεβαιότητα της ζήτησης στις αγορές. Παρακάτω, παρουσιάζεται η σχέση που προκύπτει από την Εικόνα 0-2, η οποία υπολογίζει τις πωλήσεις σε κάθε επόμενη περίοδο ως συνάρτηση των πωλήσεων κατά την προηγούμενη περίοδο και για δύο περιπτώσεις:

- αύξηση της ζήτησης κατά έναν παράγοντα u
- μείωση της ζήτησης κατά έναν παράγοντα d

Οι δύο παραπάνω περιπτώσεις μπορούν να εξεταστούν ως δύο αλληλοαποκλειόμενα ενδεχόμενα τα οποία έχουν αντίστοιχα πιθανότητες εμφάνισης:

- p για αύξηση της ζήτησης
- $1-p$ για μείωση της ζήτησης

Αυτό σημαίνει ότι η ζήτηση σε μία επόμενη περίοδο μπορεί είτε να αυξηθεί είτε να μειωθεί. Οι παράγοντες μεταβολής της ζήτησης u και d μπορούν να υπολογιστούν ως συνάρτηση της διακύμανσης της ζήτησης ως εξής:

$$u = \exp(\sigma\sqrt{k^{-1}}) \quad (3.1.6.)$$

$$d = \frac{1}{u} \quad (3.1.7)$$

όπου k είναι ο αριθμός των διακριτών χρονικών καταστάσεων από τις οποίες αποτελείται κάθε περίοδος.

Ο συντελεστής k χρησιμοποιείται απαραίτητα για την κατασκευή της κίνησης Brown από την αρχική διωνυμική κατανομή των περιόδων.

Η πιθανότητα αύξησης της ζήτησης μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση των συντελεστών αύξησης ή μείωσης της ζήτησης και του πληθωρισμού μ :

$$p = \frac{1+\mu/k-d}{u-d} \quad (3.1.8)$$

Έπειτα ορίζονται ως $S_t(j,q)$ οι πωλήσεις σε χρόνο t , με j να συμβολίζει τις φορές που η ζήτηση αυξήθηκε, $t-j$ τις φορές που η ζήτηση μειώθηκε και q τις φορές που η επιχείρηση έκανε επανεπενδύσεις πριν από το χρόνο t .

Όπως προαναφέρθηκε, το προτεινόμενο μοντέλο εξετάζει τις αποφάσεις επανεπένδυσης ως ευκαιρίες ανάπτυξης, όπου η επιχείρηση ασκεί το δικαίωμα αγοράς μιας ευκαιρίας ανάπτυξης λαμβάνοντας την απόφαση επανεπένδυσης ή αναμένει και δεν ασκεί το δικαίωμα αγοράς μιας ευκαιρίας ανάπτυξης. Επιπλέον, όπως προαναφέρθηκε, μετά από μία επανεπένδυση σε πραγματικά περιουσιακά στοιχεία, η επιχείρηση απολαμβάνει μία περίοδο T όπου η ζήτηση άρα και οι πωλήσεις αυξάνονται με μεγάλο ρυθμό. Ως εκ τούτου, ο δείκτης q μπορεί να λάβει τιμές από μηδέν έως t με $t \leq T$.

Από τα παραπάνω δεδομένα προκύπτει ότι οι πωλήσεις σε οποιαδήποτε περίοδο θα ισούνται με το γινόμενο των πωλήσεων σε μία προηγούμενη περίοδο με τους συντελεστές u^j , d^{t-j} και ξ :

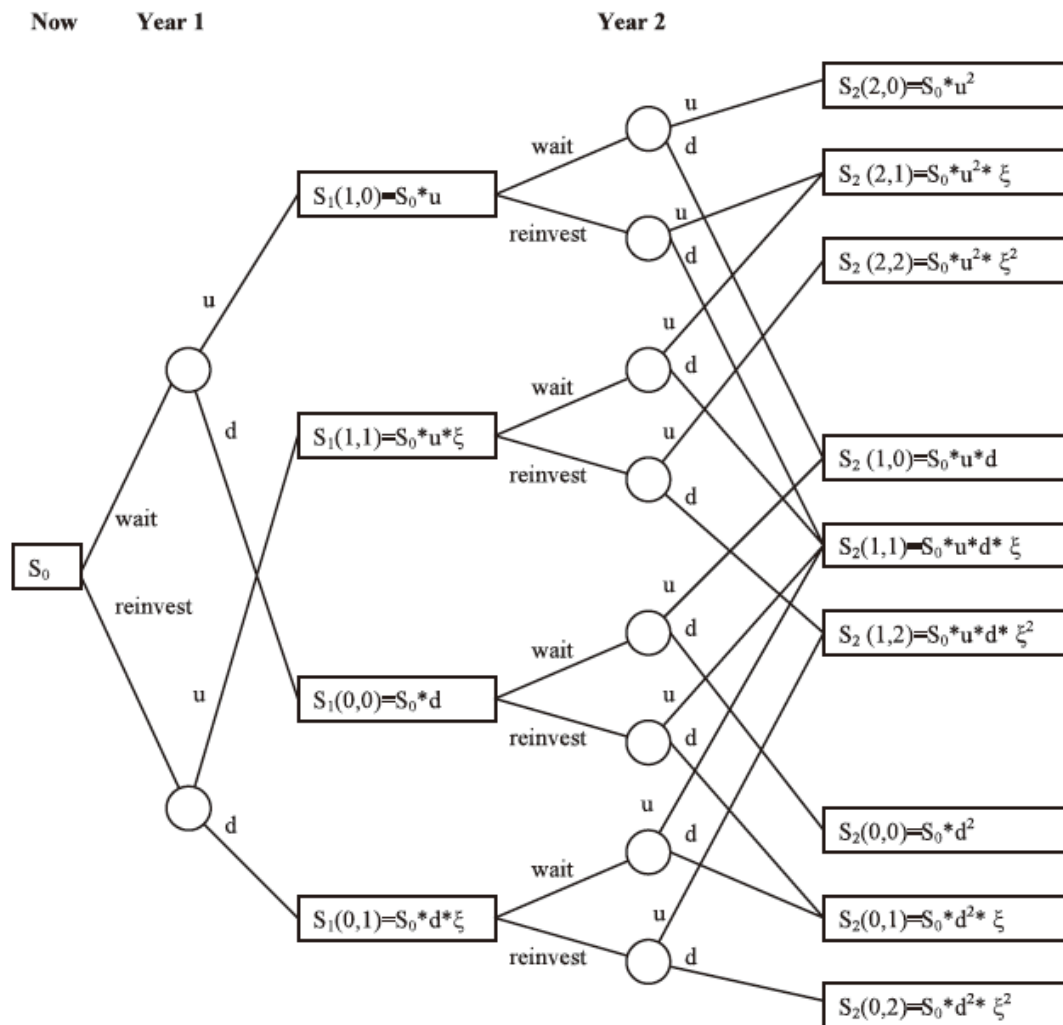
$$S_t(j, q) = \frac{s_0 \times u^j d^{t-j} \prod_{i=0}^q \xi_i}{(1+\mu)^t} \quad (3.1.9)$$

όπου:

$$0 \leq \xi \leq t$$

$$0 \leq q \leq t$$

και ξ_i η ανάπτυξη εξαιτίας της i -οστής απόφασης επανεπένδυσης και με $\xi_0=1$ σε περίπτωση όπου η επιχείρηση αναμένει και δεν λαμβάνει απόφαση επανεπένδυσης.



Εικόνα 0-3: Δενδροδιάγραμμα για λήψη απόφασης επανεπένδυσης ή απόφασης αναμονής επένδυσης με ορίζοντα δύο έτη (Gennady, 2008)

Παραπάνω, στην Εικόνα 0-3, αναπαρίσταται το ανάπτυγμα του δενδροδιαγράμματος για τη λήψη αποφάσεων αναμονής ή επανεπένδυσης από το τρέχον έτος και για διάρκεια δύο ετών, δηλαδή δύο περιόδων.

Στο δενδροδιάγραμμα λαμβάνονται υπόψη όλοι οι συντελεστές που παρουσιάστηκαν παραπάνω και σχετίζονται με την αβεβαιότητα της ζήτησης και υπολογίζεται η αξία των πωλήσεων για κάθε πιθανό συνδυασμό αποφάσεων. Το δενδροδιάγραμμα προσφέρει τη δυνατότητα αναδρομής σε κάθε πρότερη κατάσταση και εκτίμηση της ανάπτυξης της επιχείρησης σε περίπτωση όπου είχαν ληφθεί διαφορετικές αποφάσεις επανεπένδυσης ή αναμονής.

Καθώς όπως προαναφέρθηκε, όλες οι μελλοντικές και παρελθοντικές ταμειακές ροές του μοντέλου εκτιμώνται σε πραγματικούς όρους, το τελικό δέντρο των

αναμενόμενων ταμειακών ροών προσφέρει την παραπάνω δυνατότητα αναδρομής προς τα πίσω ή μετακίνησης προς τα εμπρός καθώς στις αξίες των πωλήσεων έχουν ήδη συμπεριληφθεί οι εξωγενείς λοιποί παράγοντες που μπορούν να επηρεάσουν την αξία των πωλήσεων.

Πιο συγκεκριμένα η τάξη του προτεινόμενου μοντέλου με το ανασυνδυασμένο δενδροδιάγραμμα είναι της τάξης $(t+1)(tk+1)$ αντί της τάξεως $2^t(k+1)^t$ στην οποία θα βρισκόταν αν δεν εκτελούνταν οι πράξεις με πραγματικούς όρους και εκτελούνταν με ονομαστικούς όρους.

Καθώς όπως προαναφέρθηκε η επιχείρηση σε κάθε χρονική στιγμή μπορεί να βρίσκεται σε μία εκ των δύο καταστάσεων ($m=1$ ή $m=2$), η βελτιστοποιημένη αξία των πωλήσεων εκφράζεται ως:

$$A_t(S_t, m_t, t)$$

Η μεγιστοποίηση της αξίας των πωλήσεων προϋποθέτει μεγιστοποιείται τόσο η αξία των τρεχουσών ταμειακών ροών όσο και των αναμενόμενων μελλοντικών ταμειακών ροών, υποθέτοντας ότι η μετάβαση από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 δεν έχει άλλα κόστη πέρα από το καθαρό κόστος της επένδυσης.

Για κάθε κατάσταση, η οποία χαρακτηρίζεται από αβεβαιότητα, ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης συγκρίνει την αναμενόμενη αξία των μελλοντικών και υφιστάμενων πωλήσεων αν ληφθεί απόφαση αναμονής με την αναμενόμενη αξία των μελλοντικών και υφιστάμενων πωλήσεων αν ληφθεί απόφαση επανεπένδυσης.

Η εξίσωση μεγιστοποίησης της αξίας των πωλήσεων παρουσιάζεται παρακάτω:

$$A_t(S_t, m_t, t) = \max(l) [FCF(S_t(j, q), m_t, t) - c_l + \rho E_t(A(S_{t+\Delta t}, l, t + \Delta t))] \quad (3.1.10)$$

όπου:

ρ ένα προεξοφλητικό επιτόκιο

$l_{t+\Delta t}$ οι πιθανές μεταβάσεις από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 ή αντίστροφα σε χρόνο t

Για την εκτίμηση των αναμενόμενων ταμειακών ροών και δεδομένου ότι αυτές εξαρτώνται από την αβεβαιότητα S και από τις αποφάσεις αναμονής ή

επανεπένδυσης q της επιχείρησης να τροποποιηθούν με αποφάσεις επανεπένδυσης q , πρέπει να ληφθούν υπόψη και να εισαχθούν στο μοντέλο τα επιτόκια προεξόφλησης έτσι ώστε το μοντέλο να λαμβάνει αυτά ως μέτρο του κινδύνου επίτευξης των αναμενόμενων ταμειακών ροών.

Άλλωστε, όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή του κεφαλαίου 3, τα υπόλοιπα μοντέλα όπως το μοντέλο προεξόφλησης των ταμειακών ροών βασίζεται στην υπόθεση διατήρησης ενός σταθερού επιτοκίου προεξόφλησης, γεγονός το οποίο απλοποιεί τη διαδικασία υπολογισμού, ωστόσο προεξοφλεί και την αδυναμία παραγωγής έγκυρων αποτελεσμάτων όταν μια επένδυση αποπληρώνεται σε πολλές περιόδους κατά μπορεί να μεταβάλλεται ο κίνδυνος της επένδυσης.

Το μέτρο για την αναπροσαρμογή του κινδύνου που χρησιμοποιείται από άλλα μοντέλα είναι το σταθμισμένο μέσο κόστος κεφαλαίου (weighted average cost of capital).

Η εισαγωγή του WACC στο προτεινόμενο μοντέλο δεν οδηγεί στην ακριβή αποτίμηση των real options, καθώς Ωστόσο, η προσέγγιση αυτή δεν παρέχει σωστή αποτίμηση των επιλογών ανάπτυξης ειδικά στην περίπτωση των real options, καθώς η απόφαση της επιχείρησης για μετάβαση από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 2 ή αντίστροφα επηρεάζει τις αναμενόμενες ταμειακές ροές και ως εκ τούτου επηρεάζει το κόστος κεφαλαίου.

Ως εκ τούτου, και καθώς πρέπει να συμπεριληφθεί ένα προεξοφλητικό επιτόκιο το οποίο θα είναι συνδεδεμένο και θα ακολουθεί την αβεβαιότητα των αναμενόμενων ταμειακών ροών. Καθώς αυτό είναι δύσκολο, στο προτεινόμενο μοντέλο, οι μελλοντικές ταμειακές ροές εκλαμβάνονται αρχικά ως μηδενικού κινδύνου και για τον υπολογισμό της αξίας τους χρησιμοποιείται το εκάστοτε επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

Τυπικά, για την αντιστάθμιση του κινδύνου με χρήση χρηματοοικονομικών παραγώγων, δημιουργείται ένα επενδυτικό πορτοφόλι ενεργητικών μηδενικού κινδύνου το οποίο αντισταθμίζει πλήρως ένα πανομοιότυπο επενδυτικό πορτοφόλι το οποίο αποτελείται από τα υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία. Το δεύτερο αυτό επενδυτικό πορτοφόλι περιλαμβάνει περιουσιακά στοιχεία τα οποία δημιουργούν

ταμειακές ροές οι οποίες σε όλες τις χρονικές στιγμές ισούνται με τις αναμενόμενες και αβέβαιες ταμειακές ροές των χρηματοοικονομικών παραγώγων των οποίων αυτά αποτελούν τα υποκείμενα περιουσιακά στοιχεία.

Με τη μέθοδο αυτή κατασκευάζονται τα δύο παραπάνω επενδυτικά πορτοφόλια έτσι ώστε η καθαρή παρούσα αξία του παραγώγου να ισούται με την καθαρή παρούσα αξία του πρώτου πορτοφολιού. Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται ότι αποκλείεται το ενδεχόμενο κερδοσκοπίας.

Για τον υπολογισμό της αξίας της επιχείρησης με την υπόθεση ότι δεν υπάρχουν περιθώρια κερδοσκοπίας, το προτεινόμενο μοντέλο χρησιμοποιεί την μέθοδο MAD η οποία προτάθηκε από τους Copeland και Antikarov (Copeland & Antikarov, 2003).

Η θεμελιώδης υπόθεση στην οποία βασίζεται η μέθοδος MAD είναι ότι η δίκαιη αξία ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου το οποίο δεν διαπραγματεύεται σε καμία αγορά, ισούται με την τιμή που αυτό θα είχε αν ήταν αντικείμενο διαπραγμάτευσης και ότι αν αυτά τα περιουσιακά στοιχεία δημιουργούσαν ταμειακές ροές με τη δυνατότητα αγοράς των σχετικών παραγώγων, οι ταμειακές αυτές ροές θα ισούταν με τις αντίστοιχες ταμειακές ροές των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων αν δεν υπήρχε η δυνατότητα αγοράς των σχετικών παραγώγων με δικαιώματα προαίρεσης (Mason & Merton, 1985).

Με βάση τις παραπάνω υποθέσεις, η παρούσα αξία των ταμειακών ροών μιας επιχείρησης η οποία δεν έχει δικαιώματα αγοράς ευκαιριών ανάπτυξης μπορεί να επιτελεί ρόλο ασφάλιστρου και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την κατασκευή του παραπάνω αναφερόμενου επενδυτικού πορτοφολιού χωρίς δικαιώματα αγοράς ευκαιριών ανάπτυξης και με ίση αξία ταμειακών ροών.

Το προτεινόμενο μοντέλο διευκολύνει τον υπολογισμό της αξίας της επιχείρησης για διαφορετικά σενάρια άσκησης δικαιωμάτων αγοράς ευκαιριών ανάπτυξης.

Στην επόμενη παράγραφο παρουσιάζεται ένα αριθμητικό παράδειγμα για δύο περιόδους ανάπτυξης.

Υπάρχουν δύο μέθοδοι με τις οποίες εκτιμάται η δίκαιη αξία των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης.

Η πρώτη είναι η χρήση του μοντέλου προεξόφλησης των ταμειακών ροών, στο οποίο όπως προαναφέρθηκε χρησιμοποιείται ως προεξοφλητικό επιτόκιο το μέσο σταθμισμένο κόστος κεφαλαίου (WACC) ως μέτρο προσαρμογής της αξίας της επιχείρησης στον κίνδυνο μη εκπλήρωσης των αναμενόμενων ταμειακών ροών.

Η δεύτερη είναι η χρήση ενός περιουσιακού στοιχείου το οποίο είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης και σχετίζεται με τα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης. Σε αυτή την περίπτωση, μπορεί να χρησιμοποιηθεί το προεξοφλητικό επιτόκιο για τον υπολογισμό της αξίας του παραπάνω περιουσιακού στοιχείου για την αποτίμηση των ενεργητικών της επιχείρησης.

Αξίζει να σημειωθεί ότι στην περίπτωση της τιμολόγησης των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης τα οποία είναι αντικείμενα διαπραγμάτευσης, οι δύο μέθοδοι αναμένεται να δώσουν το ίδιο αποτέλεσμα, δεδομένου ότι ο κίνδυνος των περιουσιακών στοιχείων της επιχείρησης παραμένει σταθερός κατά τη διάρκεια μιας περιόδου.

Αντίστοιχα, για τη γενίκευση του προτεινόμενου μοντέλου για εφαρμογή τόσο σε ιδιωτικές όσο και δημόσιες επιχειρήσεις, η παρούσα αξία των περιουσιακών στοιχείων υπολογίζεται με χρήση του μοντέλου προεξόφλησης των ταμειακών ροών, διαιρώντας τις αναμενόμενες ταμειακές ροές με το μέσο σταθμισμένο κόστος κεφαλαίου, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση:

$$PV(FCF_1(u)) = \frac{FCF_2(u^2)p + FCF_2(u,d)(1-p)}{1+WACC} \quad (3.1.11.)$$

Οι δείκτες 1 και 2 αναφέρονται στις μελλοντικές ταμειακές ροές για τις καταστάσεις 1 και 2 της επιχείρησης (1=αναμονή και 2=επανεπένδυση).

Σύμφωνα με τη μέθοδο MAD, η αναμενόμενη παρούσα αξία των μελλοντικών ταμειακών ροών χωρίς την «αγορά» ευκαιριών ανάπτυξης, αποτελεί ένα διαπραγματεύσιμο περιουσιακό στοιχείο.

Ως εκ τούτου, αυτή η αναμενόμενη παρούσα αξία των μελλοντικών ταμειακών ροών μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της αξίας, χωρίς περιθώριο κερδοσκοπίας, των ταμειακών ροών της επιχείρησης κατόπιν λήψης απόφασης επανεπένδυσης.

Στο δενδροδιάγραμμα, έπειτα από μία απόφαση επανεπένδυσης κατά την προηγούμενη περίοδο, υπολογίζεται η παρούσα αξία των αναμενόμενων ταμειακών ροών της επόμενης περιόδου και αντίστοιχα έπειτα από μία απόφαση αναμονής κατά την προηγούμενη περίοδο, υπολογίζεται η παρούσα αξία των αναμενόμενων ταμειακών ροών της επόμενης περιόδου.

Δεδομένου ότι το δενδροδιάγραμμα μπορεί να διαβαστεί και αντίστροφα, η αξία των αναμενόμενων ταμειακών ροών μετά από μία απόφαση αναμονής ισούται με την αξία των αναμενόμενων ταμειακών ροών στην προηγούμενη χρονική στιγμή όπου είχε ληφθεί απόφαση επανεπένδυσης.

Οι διαδικασίες αυτές επαναλαμβάνονται για κάθε κόμβο του δενδροδιαγράμματος και οδηγούν στον υπολογισμό της παρούσας αξίας των αναμενόμενων ταμειακών ροών σε όλες τις πιθανές διακλαδώσεις.

Τέλος, αν το δενδροδιάγραμμα διαβαστεί και επιλυθεί αντίστροφα προς την αρχική τωρινή περίοδο, μπορεί να υπολογιστεί η αξία της επιχείρησης, χωρίς περιθώριο κερδοσκοπίας και μέσω σύγκρισης της υπολογιζόμενης αξίας της επιχείρησης για κάθε δυνατό συνδυασμό να επιλεγεί η βέλτιστη στρατηγική επανεπένδυσης η οποία θα οδηγεί στη μεγιστοποίηση των πωλήσεων της επιχείρησης και επακόλουθα στην μεγιστοποίηση της αξίας της επιχείρησης.

Η αξία που υπολογίζεται στον αρχικό κόμβο του δενδροδιαγράμματος αντιστοιχεί στη δίκαιη παρούσα αξία της επιχείρησης, η οποία μπορεί να μεγιστοποιηθεί γνωρίζοντας εκ των προτέρων την αναμενόμενη μεταβολή της ίδιας αξίας κατόπιν λήψης διαφορετικών αποφάσεων αναμονής ή επανεπένδυσης σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή (κόμβο του δενδροδιαγράμματος), έχοντας λάβει υπόψη την αβεβαιότητα της αγοράς, και να οδηγήσει στην επιλογή της βέλτιστης στρατηγικής επανεπένδυσης η οποία θα οδηγήσει στη μεγιστοποίηση της αξίας της επιχείρησης.

3.2. Εφαρμογή του μοντέλου

Σε αυτή την παράγραφο παρατίθεται ο τρόπος εφαρμογής και τα αποτελέσματα του προτεινόμενου μοντέλου. Το μοντέλο εφαρμόζεται για δύο έτη για μία εταιρεία στην οποία η ζήτηση έχει 33% διακύμανση. Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου ορίζεται $r_f=1\%$ και ο πληθωρισμός $\mu=2\%$. Επελέγη η συγκεκριμένη διάρκεια καθώς

γίνεται η υπόθεση πως η εταιρεία απολαμβάνει αυξημένες ταμειακές ροές για δύο έτη μετά από μία επένδυση σε πραγματικό ενεργητικό και μετά από τα τρία έτη οι πωλήσεις της, άρα και η επίδραση των πωλήσεων στην αξία της εταιρείας θα σταθεροποιούνται.

Πίνακας 0-1: Στοιχεία σεναρίου υπολογισμού βέλτιστης στρατηγικής επανεπένδυσης

Αξία αρχικής ζήτησης	100.000,00 €
Διακύμανση ζήτησης	33,00%
Πληθωρισμός	2,00%
Επιτόκιο μηδενικού κινδύνου	2,00%
WACC μετά φόρων	8,00%
Φόρος	40%
Έξοδα για αποπληρωμή χρέους	0 €
Αποσβέσεις	0 €
Διάρκεια αυξημένων ταμειακών ροών	3
Μεταβλητά κόστη παραγωγής (% εσόδων)	90,00%
k	1
Ευκαιρίες ανάπτυξης	3
p	0,49
u	1,25
d	0,80
ξ_1	1,40
ξ_2	1,30
ξ_3	1,10

Ο υπολογισμός των u , d και p έγινε με εφαρμογή των παρακάτω σχέσεων, που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα αναλυτικά:

$$u = \exp(\sigma\sqrt{k^{-1}}) \quad (3.1.6)$$

$$d = \frac{1}{u} \quad (3.1.7)$$

$$p = \frac{1+\mu/k-d}{u-d} \quad (3.1.8)$$

Κατά τη διάρκεια των τριών ετών, η εταιρεία έχει τρεις αντίστοιχες ευκαιρίες να αυξήσει την παραγωγή της και τις πωλήσεις της ως εξής:

Πίνακας 0-2: Ευκαιρίες ανάπτυξης και σχετικά κόστη

	Έτος 1	Έτος 2	Έτος 3
Κόστος επένδυσης	6.000.000 €	5.500.000 €	2.500.000 €
Αύξηση πωλήσεων	40%	30%	10%
Αύξηση κεφαλαίου κίνησης	2.000.000 €	1.500.000 €	500.000 €

Το σταθμισμένο μέσο κόστος κεφαλαίου (WACC) της εταιρείας ισούται με 8% μετά από φόρους.

Παρακάτω υπολογίστηκε η αξία των πωλήσεων για όλες τις δυνατές καταστάσεις:

Πίνακας 0-3: Υπολογισμός αξίας αναμενόμενων ταμειακών ροών (αξίες σε χιλιάδες)

Περίοδος 0		Περίοδος 1		Περίοδος 2		Περίοδος 3	
S0(0,0)	100.000,00 €	S1(1,0)	122.500,00 €	S2(2,0)	150.062,50 €	S3(3,0)	183.826,56 €
		S1(1,1)	171.500,00 €	S2(2,1)	210.087,50 €	S3(3,1)	257.357,19 €
		S1(0,0)	78.400,00 €	S2(2,2)	273.113,75 €	S3(3,2)	334.564,34 €
		S1(0,1)	109.760,00 €	S2(1,0)	96.040,00 €	S3(3,3)	368.020,78 €
				S2(1,1)	134.456,00 €	S3(2,0)	117.649,00 €
				S2(1,2)	174.792,80 €	S3(2,1)	164.708,60 €
				S2(0,0)	61.465,60 €	S3(2,2)	214.121,18 €
				S2(0,1)	86.051,84 €	S3(2,3)	235.533,30 €
				S2(0,2)	111.867,39 €	S3(1,0)	75.295,36 €
						S3(1,1)	105.413,50 €
						S3(1,2)	137.037,56 €
						S3(1,3)	150.741,31 €
						S3(0,0)	48.189,03 €
						S3(0,1)	67.464,64 €
						S3(0,2)	87.704,04 €
						S3(0,3)	96.474,44 €

Ακολούθως υπολογίζονται οι αναμενόμενες καθαρές ταμειακές ροές με χρήση των τύπων:

$$FCF(t)(S_t, m_t, t) = EBIT(S_t, m_t, t) \times (1 - \text{tax rate}) + A'_t(m_t) - I_t^{\text{replace}}(m_t) - dWC'_t(m_t)$$

$$EBIT(S_t, m_t, t) = S_t(m_t, t) \times (1 - \text{VarCost}) - A'_t(m_t)$$

Για τον υπολογισμό EBIT και αναμενόμενων ταμειακών ροών προ τόκων και φόρων πρέπει να κατασκευαστεί η οικονομική κατάσταση της εταιρείας για το πέρας των τριών ετών για κάθε πιθανή διαδρομή του δενδροδιαγράμματος. Επειδή αυτό δεν θα συμβάλει στην κατανόηση του προτεινόμενου μοντέλου, παραλείπεται και απλοποιείται η παρακάτω σχέση πριν την εφαρμογή της για να υπολογιστούν οι αναμενόμενες ταμειακές ροές προ τόκων και φόρων για συνδυασμό διαφορετικών διαδρομών ως εξής:

$$EBIT(S_t, m_t, t) = S_t(m_t, t) \times (1 - VarCost) - A'_t(m_t) \quad (3.2.1)$$

- τα μεταβλητά κόστη ισούνται με το 90% των πωλήσεων κάθε κόμβου
- οι αποσβέσεις λαμβάνονται ως συνάρτηση των καταστάσεων σε κάθε κόμβο (πλήθος αποφάσεων αναμονής και πλήθος αποφάσεων επανεπένδυσης)
- κατόπιν οι αποσβέσεις κανονικοποιούνται με χρήση του πληθωρισμού
- λαμβάνεται υπόψη ένα σταθερό ενεργητικό ίσο με 10€ εκατομμύρια για το οποίο η ετήσια απόσβεση ισούται με 2€ εκατομμύρια

Πίνακας 0-4: Υπολογισμός EBIT και αναμενόμενων ταμειακών ροών μετά τόκων και φόρων

	Πωλήσεις	Ενεργητικό	Αποσβέσεις (adjusted)	Επένδυση ($I^{replace}$)	Μεταβλητά κόστη	Μεταβολή κεφαλαίου κίνησης	EBIT	FCF
$S_0(0,0)$	100.000,00 €	- €	- €	- €	90.000,00 €	- €	10.000,00 €	6.000,00 €
$S_1(1,0)$	122.500,00 €	- €	- €	- €	110.250,00 €	- €	12.250,00 €	7.350,00 €
$S_1(1,1)$	171.500,00 €	6.000,00 €	1.176,00 €	6.000,00 €	154.350,00 €	2.000,00 €	15.974,00 €	2.760,40 €
$S_1(0,0)$	78.400,00 €	- €	- €	- €	70.560,00 €	- €	7.840,00 €	4.704,00 €
$S_1(0,1)$	109.760,00 €	6.000,00 €	1.176,00 €	6.000,00 €	98.784,00 €	2.000,00 €	9.800,00 €	- 944,00 €
$S_2(2,0)$	150.062,50 €	- €	- €	- €	135.056,25 €	- €	15.006,25 €	9.003,75 €
$S_2(2,1)$	210.087,50 €	6.000,00 €	1.152,48 €	6.000,00 €	189.078,75 €	2.000,00 €	19.856,27 €	5.066,24 €
$S_2(2,2)$	273.113,75 €	11.500,00 €	2.208,92 €	11.500,00 €	245.802,38 €	3.500,00 €	25.102,46 €	2.270,39 €
$S_2(1,0)$	96.040,00 €	- €	- €	- €	86.436,00 €	- €	9.604,00 €	5.762,40

	Πωλήσεις	Ενεργητικό	Αποσβέσεις (adjusted)	Επένδυση ($I^{replace}$)	Μεταβλητά κόστη	Μεταβολή κεφαλαίου κίνησης	EBIT	FCF
								€
$S_2(1,1)$	134.456,00 €	6.000,00 €	1.152,48 €	6.000,00 €	121.010,40 €	2.000,00 €	12.293,12 €	528,35 €
$S_2(1,2)$	174.792,80 €	11.500,00 €	2.208,92 €	11.500,00 €	157.313,52 €	3.500,00 €	15.270,36 €	- 3.628,86 €
$S_2(0,0)$	61.465,60 €	- €	- €	- €	55.319,04 €	- €	6.146,56 €	3.687,94 €
$S_2(0,1)$	86.051,84 €	6.000,00 €	1.152,48 €	6.000,00 €	77.446,66 €	2.000,00 €	7.452,70 €	- 2.375,90 €
$S_2(0,2)$	111.867,39 €	11.500,00 €	2.208,92 €	11.500,00 €	100.680,65 €	3.500,00 €	8.977,82 €	- 7.404,39 €
$S_3(3,0)$	183.826,56 €	- €	- €	- €	165.443,91 €	- €	18.382,66 €	11.029,5 9 €
$S_3(3,1)$	257.357,19 €	6.000,00 €	1.129,43 €	6.000,00 €	231.621,47 €	2.000,00 €	24.606,29 €	7.893,20 €
$S_3(3,2)$	334.564,34 €	11.500,00 €	2.164,74 €	11.500,00 €	301.107,91 €	3.500,00 €	31.291,69 €	5.939,76 €
$S_3(3,3)$	368.020,78 €	14.000,00 €	2.635,34 €	14.000,00 €	331.218,70 €	4.000,00 €	34.166,74 €	5.135,38 €

	Πωλήσεις	Ενεργητικό	Αποσβέσεις (adjusted)	Επένδυση (<i>I^{replace}</i>)	Μεταβλητά κόστη	Μεταβολή κεφαλαίου κίνησης	EBIT	FCF
$S_3(2,0)$	117.649,00 €	- €	- €	- €	105.884,10 €	- €	11.764,90 €	7.058,94 €
$S_3(2,1)$	164.708,60 €	6.000,00 €	1.129,43 €	6.000,00 €	148.237,74 €	2.000,00 €	15.341,43 €	2.334,29 €
$S_3(2,2)$	214.121,18 €	11.500,00 €	2.164,74 €	11.500,00 €	192.709,06 €	3.500,00 €	19.247,38 €	- 1.286,83 €
$S_3(2,3)$	235.533,30 €	14.000,00 €	2.635,34 €	14.000,00 €	211.979,97 €	4.000,00 €	20.917,99 €	- 2.813,87 €
$S_3(1,0)$	75.295,36 €	- €	- €	- €	67.765,82 €	- €	7.529,54 €	4.517,72 €
$S_3(1,1)$	105.413,50 €	6.000,00 €	1.129,43 €	6.000,00 €	94.872,15 €	2.000,00 €	9.411,92 €	- 1.223,42 €
$S_3(1,2)$	137.037,56 €	11.500,00 €	2.164,74 €	11.500,00 €	123.333,80 €	3.500,00 €	11.539,01 €	- 5.911,85 €
$S_3(1,3)$	150.741,31 €	14.000,00 €	2.635,34 €	14.000,00 €	135.667,18 €	4.000,00 €	12.438,79 €	- 7.901,39 €
$S_3(0,0)$	48.189,03 €	- €	- €	- €	43.370,13 €	- €	4.818,90 €	2.891,34 €

	Πωλήσεις	Ενεργητικό	Αποσβέσεις (adjusted)	Επένδυση ($I^{replace}$)	Μεταβλητά κόστη	Μεταβολή κεφαλαίου κίνησης	EBIT	FCF
$S_3(0,1)$	67.464,64 €	6.000,00 €	1.129,43 €	6.000,00 €	60.718,18 €	2.000,00 €	5.617,03 €	- 3.500,35 €
$S_3(0,2)$	87.704,04 €	11.500,00 €	2.164,74 €	11.500,00 €	78.933,63 €	3.500,00 €	6.605,66 €	- 8.871,86 €
$S_3(0,3)$	96.474,44 €	14.000,00 €	2.635,34 €	14.000,00 €	86.826,99 €	4.000,00 €	7.012,11 €	- 11.157,4 0 €

Κατόπιν υπολογίζεται η παρούσα αξία των παραπάνω ταμειακών ροών με χρήση του μοντέλου DCF, οι δείκτες Y και B για την εφαρμογή της μεθόδου MAD και προκύπτει η παρούσα αξία για κάθε συνδυασμό αποφάσεων επανεπένδυσης:

Πίνακας 0-5: Παρούσα αξία για κάθε συνδυασμό αποφάσεων επανεπένδυσης (σε χιλιάδες €) με χρήση μεθόδου MAD

	Πωλήσεις	EBIT	FCF	PV	Y	B
$S_0(0,0)$	100.000,00 €	10.000,00 €	6.000,00 €	6.000,00 €	1	0
$S_1(1,0)$	122.500,00 €	12.250,00 €	7.350,00 €	6.168,06 €	-0,24	8.606,80 €
$S_1(1,1)$	171.500,00 €	15.974,00 €	2.760,40 €	4.085,74 €	1,394	- 7.340,97 €
$S_1(0,0)$	78.400,00 €	7.840,00 €	4.704,00 €	4.967,56 €	-1,06	7.467,99 €
$S_1(0,1)$	109.760,00 €	9.800,00 €	- 944,00 €	2.405,04 €	-2,76	11.783,36 €
$S_2(2,0)$	150.062,50 €	15.006,25 €	9.003,75 €	7.555,87 €	-1,26	7.657,59 €
$S_2(2,1)$	210.087,50 €	19.856,27 €	5.066,24 €	5.769,41 €	1,03	- 4.089,13 €
$S_2(2,2)$	273.113,75 €	25.102,46 €	2.270,39 €	4.500,92 €	-0,16	3.035,62 €
$S_2(1,0)$	96.040,00 €	9.604,00 €	5.762,40 €	6.085,26 €	-5,74	18.428,45 €
$S_2(1,1)$	134.456,00 €	12.293,12 €	528,35 €	3.710,55 €	0,97	- 4.988,73 €
$S_2(1,2)$	174.792,80 €	15.270,36 €	- 3.628,86 €	1.824,40 €	-1,85	- 2.600,54 €
$S_2(0,0)$	61.465,60 €	6.146,56 €	3.687,94 €	5.144,06 €	0,29	4.636,27 €
$S_2(0,1)$	86.051,84 €	7.452,70 €	- 2.375,90 €	2.392,88 €	1,98	- 9.478,98 €
$S_2(0,2)$	111.867,39 €	8.977,82 €	- 7.404,39 €	111,43 €	1,51	- 3.746,67 €
$S_3(3,0)$	183.826,56 €	18.382,66 €	11.029,59 €	9.255,94 €	-0,32	8.514,74 €
$S_3(3,1)$	257.357,19 €	24.606,29 €	7.893,20 €	7.832,95 €	1,40	- 7.400,22 €
$S_3(3,2)$	334.564,34 €	31.291,69 €	5.939,76 €	6.946,66 €	1,30	- 4.236,67 €
$S_3(3,3)$	368.020,78 €	34.166,74 €	5.135,38 €	6.581,71 €	1,10	- 1.370,93 €
$S_3(2,0)$	117.649,00 €	11.764,90 €	7.058,94 €	7.454,44 €	0,32	5.311,04 €
$S_3(2,1)$	164.708,60 €	15.341,43 €	2.334,29 €	5.310,85 €	1,40	- 7.400,22 €
$S_3(2,2)$	214.121,18 €	19.247,38 €	- 1.286,83 €	3.667,93 €	1,30	- 4.236,67 €
$S_3(2,3)$	235.533,30 €	20.917,99 €	- 2.813,87 €	2.975,11 €	1,10	- 1.370,93 €
$S_3(1,0)$	75.295,36 €	7.529,54 €	4.517,72 €	6.301,48 €	0,32	5.311,04 €
$S_3(1,1)$	105.413,50 €	9.411,92 €	- 1.223,42 €	3.696,70 €	1,40	- 7.400,22 €
$S_3(1,2)$	137.037,56 €	11.539,01 €	- 5.911,85 €	1.569,54 €	1,30	- 4.236,67 €
$S_3(1,3)$	150.741,31 €	12.438,79 €	- 7.901,39 €	666,88 €	1,10	- 1.370,93 €
$S_3(0,0)$	48.189,03 €	4.818,90 €	2.891,34 €	5.563,58 €	0,89	9.713,51 €
$S_3(0,1)$	67.464,64 €	5.617,03 €	- 3.500,35 €	2.663,65 €	1,00	- €
$S_3(0,2)$	87.704,04 €	6.605,66 €	- 8.871,86 €	226,57 €	1,00	- €
$S_3(0,3)$	96.474,44 €	7.012,11 €	- 11.157,40 €	- 810,38 €	1,00	- €

Τέλος, προστίθενται οι ταμειακές ροές της προηγούμενης περιόδου σε κάθε κόμβο έτσι ώστε να προκύψουν οι συνολικά αναμενόμενες ταμειακές ροές κάθε κόμβου:

Πίνακας 0-6: Υπολογισμός συνολικά αναμενόμενων ταμειακών ροών κάθε κόμβου (σε χιλιάδες €)

	$PV_{\text{επανεπένδυση}}$	Συνολικά αναμενόμενες ταμειακές ροές
$S_0(0,0)$	6.000,00 €	6.000,00 €
$S_1(1,0)$	7.137,84 €	13.137,84 €
$S_1(1,1)$	- 1.644,18 €	- 3.644,18 €
$S_1(0,0)$	2.225,19 €	8.225,19 €
$S_1(0,1)$	5.155,69 €	3.155,69 €
$S_2(2,0)$	- 1.891,34 €	5.458,66 €
$S_2(2,1)$	1.829,84 €	1.179,84 €
$S_2(2,2)$	2.301,84 €	- 5.348,16 €
$S_2(1,0)$	- 16.507,79 €	- 9.157,79 €
$S_2(1,1)$	- 1.371,90 €	- 2.021,90 €
$S_2(1,2)$	- 5.971,75 €	- 13.621,75 €
$S_2(0,0)$	6.112,02 €	13.462,02 €
$S_2(0,1)$	- 4.747,21 €	- 5.397,21 €
$S_2(0,2)$	- 3.578,63 €	- 11.228,63 €
$S_3(3,0)$	5.583,89 €	14.587,64 €
$S_3(3,1)$	3.565,90 €	4.569,65 €
$S_3(3,2)$	4.793,99 €	- 1.202,26 €
$S_3(3,3)$	5.868,95 €	- 3.127,30 €
$S_3(2,0)$	7.694,08 €	16.697,83 €
$S_3(2,1)$	34,96 €	1.038,71 €
$S_3(2,2)$	531,64 €	- 5.464,61 €
$S_3(2,3)$	1.901,69 €	- 7.094,56 €
$S_3(1,0)$	7.325,50 €	16.329,25 €
$S_3(1,1)$	- 2.224,84 €	- 1.221,09 €
$S_3(1,2)$	- 2.196,27 €	- 8.192,52 €
$S_3(1,3)$	- 637,36 €	- 9.633,61 €
$S_3(0,0)$	14.653,98 €	23.657,73 €
$S_3(0,1)$	2.663,65 €	3.667,40 €
$S_3(0,2)$	226,57 €	- 5.769,68 €
$S_3(0,3)$	- 810,38 €	- 9.806,63 €

Τα αποτελέσματα αναδιατάσσονται σε δενδροδιάγραμμα για την εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής επανεπένδυσης:

Πίνακας 0-7: Βέλτιστη στρατηγική επανεπένδυσης

Περίοδος 0		Περίοδος 1		Περίοδος 2		Περίοδος 3	
S0(0,0)	6.000,00 €	S1(1,0)	13.137,84 €	S2(2,0)	5.458,66 €	S3(3,0)	14.587,64 €
		S1(1,1)	- 3.644,18 €	S2(2,1)	1.179,84 €	S3(3,1)	4.569,65 €
		S1(0,0)	8.225,19 €	S2(2,2)	- 5.348,16 €	S3(3,2)	- 1.202,26 €
		S1(0,1)	3.155,69 €	S2(1,0)	- 9.157,79 €	S3(3,3)	- 3.127,30 €
				S2(1,1)	- 2.021,90 €	S3(2,0)	16.697,83 €
				S2(1,2)	- 13.621,75 €	S3(2,1)	1.038,71 €
				S2(0,0)	13.462,02 €	S3(2,2)	- 5.464,61 €
				S2(0,1)	- 5.397,21 €	S3(2,3)	- 7.094,56 €
				S2(0,2)	- 11.228,63 €	S3(1,0)	16.329,25 €
						S3(1,1)	- 1.221,09 €
						S3(1,2)	- 8.192,52 €
						S3(1,3)	- 9.633,61 €
						S3(0,0)	23.657,73 €
						S3(0,1)	3.667,40 €
						S3(0,2)	- 5.769,68 €
						S3(0,3)	- 9.806,63 €

Ο παραπάνω πίνακας υποδεικνύει τις διαδρομές που μπορούν να οδηγήσουν σε μεγιστοποίηση των ταμειακών ροών για τρεις επενδυτικές περιόδους. Δεδομένου ότι το συγκεκριμένο παράδειγμα κατασκευάστηκε με τυχαία νούμερα, δεν προτείνεται η επανεπένδυση σε καμία από τις τρεις περιόδους, καθώς το κόστος επένδυσης σε συνδυασμό με την ανάγκη αύξησης του κεφαλαίου κίνησης καθιστούν τις επανεπενδύσεις λιγότερο συμφέρουσες από την αναμονή για επανεπένδυση σε κάθε κόμβο.

Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία εξετάστηκε ένα μοντέλο για την εύρεση της βέλτιστης στρατηγικής επανεπένδυσης εταιρειών. Ξεκινώντας από τη θεωρία πιθανοτήτων και τις πλέον διαδεδομένες στοχαστικές διεργασίες οι οποίες βρίσκουν εφαρμογή στην αποτίμηση των παραγώγων με δικαιώματα προαίρεσης κατασκευάστηκε το υπόβαθρο για το προτεινόμενο αυτό μοντέλο.

Επιπλέον, η σύνδεση της κίνησης Brown με το μοντέλο Black-Scholes αναδείχθηκε ως το πλέον χρήσιμο μοντέλο για την αποτίμηση των παραγώγων.

Το προτεινόμενο μοντέλο έχει σημαντικά πλεονεκτήματα έναντι άλλων απλούστερων μεθόδων οι οποίες χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό της παρούσης αξίας πιθανών επενδύσεων, όπως το μοντέλο DCF, καθώς πέραν του ότι λαμβάνεται υπόψη η αβεβαιότητα της ζήτησης της αγοράς, κάθε πιθανή κατάσταση στην οποία μπορεί να βρεθεί μία εταιρεία εξετάζεται ως συνάρτηση κάθε προηγούμενης πιθανής κατάστασης και όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί υπολογίζονται με χρήση δενδροδιαγράμματος, το οποίο είναι εύκολο να κατασκευαστεί και παρέχει πληροφορίες στις εταιρείες τόσο αν διαβαστεί από την παρούσα χρονική στιγμή μέχρι τη λήξη του ορίζοντα επενδύσεων όσο και αντίστροφα.

Το κυριότερο πλεονέκτημα του μοντέλου αναφέρθηκε παραπάνω ενώ παράλληλα πρέπει να αναφερθεί πως για την επίλυσή του χρησιμοποιούνται αποκλειστικά πραγματικοί και όχι ονομαστικοί όροι, το οποίο επιτρέπει τον υπολογισμό αποτελεσμάτων τα οποία είναι στο μέγιστο βαθμό κοντά στην πραγματικότητα.

Η εφαρμογή του μοντέλου δεν είναι ιδιαίτερα πολύπλοκη αν ληφθούν υπόψη τα πλεονεκτήματα που αυτό προσφέρει.

Σε ό,τι αφορά στο αριθμητικό παράδειγμα το οποίο επιλύθηκε, επελέγη ένα τυχαίο παράδειγμα και δεν μεταφέρθηκε απλώς το παράδειγμα του άρθρου στο οποίο το μοντέλο αυτό προτάθηκε έτσι ώστε να αξιολογηθεί και η εφαρμοσιμότητά του. Για το λόγο αυτό, το παράδειγμα το οποίο επιλύθηκε καταλήγει στην πρόταση αναμονής και στις τρεις επενδυτικές περιόδους που εξετάζει, το οποίο σε κάθε περίπτωση είναι ένα χρήσιμο αποτέλεσμα. Μάλιστα, το αποτέλεσμα αυτό είναι

αναμενόμενο, καθώς οι επενδύσεις που εξετάστηκαν τυχαία είχαν σχετικά μεγάλο κόστος, ενώ χρησιμοποιήθηκε ένα αρκετά μεγάλο ποσοστό μεταβλητού κόστους επί του συνόλου των εσόδων.

Βιβλιογραφία

- [1] Al Saedi, Y. H. & Tularam, G. A., 2018. A Review of the Recent Advances Made in the Black-Scholes. *Journal of Mathematics and Statistics*, 14(1), pp. 29 - 39.
- [2] Amram, M. & Nalin, K., 2000. Strategy and Shareholder Value Creation: The Real Options Frontier. *Journal of Applied Corporate Finance*, 13(1), pp. 89-99.
- [3] Batten, J. A. & Wagner, N., 2012. Derivatives Securities Pricing and Modelling. *Contemporary Studies in Economic and Financial Analysis*, Τόμος 94, pp. 3 - 14.
- [4] Black, F. & Scholes, M., 1973. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), pp. 637 - 654.
- [5] Boehme, R. & Colak, G., 2012. Primary Market Characteristics and Secondary Market Frictions of Stocks. *Journal of Financial Markets*.
- [6] Copeland, T. E. & Antikarov, V., 2003. *Real Options: A Practitioner's Guide*. 1 επιμ. Νέα Υόρκη: Texere.
- [7] Copeland, T., Koller, T. & Murrin, J., 2000. *Valuation: measuring and managing the value of companies*. 3 επιμ. 2000: McKinsey & Company, Inc.
- [8] Corrado, C. & Su, T., 1996. Skewness and kurtosis in S&P 500 index returns implied by option prices. *The Journal of Financial Research*, Τόμος 19, pp. 175 - 192.
- [9] Damodaran, A., 2001. *Corporate finance: theory and practice*. 2 επιμ. New York: John Wiley & Sons.
- [10] Damodaran, A., 2002. *Investment valuation: tools and techniques for determining the value of any asset*. 2 επιμ. New York: John Wiley & Sons.
- [11] Dinica, M.-C., 2011. The Real Options Attached to an Investment Project. *Economia. Seria Management*, 14(2), pp. 511 - 518.
- [12] Gart, J. J., 1975. The Poisson Distribution: The Theory and Application of Some Conditional Tests. Στο: G. P. Patil, S. Kotz & J. K. Ord , επιμ. *A Modern Course on Statistical Distributions in Scientific Work. NATO Advanced Study Institutes Series (Series C — Mathematical and Physical Sciences)*. Springer, επιμ. Dordrecht: NATO

- [13] Advanced Study Institutes Series (Series C — Mathematical and Physical Sciences Springer.
- [14] Gennady, L., 2008. Valuing Corporate Growth Using Real Options. *Kyoto Economic Review*, 77(2), pp. 173-205.
- [15] Geroski, P. A., Machin, S. J. & Walter, C. F., 1997. Corporate Growth and Profitability. *The Journal of Industrial Economics*, 45(2), pp. 171-189.
- [16] Glantz, M. & Kissell, R., 2014. *Multi-Asset Risk Modeling: Techniques for a Global Economy in an Electronic and Algorithmic Trading Era*. s.l.:Elsevier Inc..
- [17] Goetzmann, W. N., 2000. Stock markets, behavior, and the limits of history. *NBER Reporter Online*, Summer 2000, pp. 7 - 10.
- [18] Gong, H., 2011. Recent Developments in Option Pricing. *Journal of Mathematical Finance*, 1(3), pp. 63 - 71.
- [19] Hamza, D., Ngom, P. & Mendy, P., 2014. Comparison Between the Two Models: New Approach Using the α -Divergence. *Elsevier*.
- [20] Haugh, M., 2013. Black-Scholes and the Volatility Surface. *Financial Engineering: Continuous-Time Models*, p. Martin Haugh.
- [21] Investopedia, 2020. *How Big Is the Derivatives Market?*. [Ηλεκτρονικό] Available at: <https://www.investopedia.com/ask/answers/052715/how-big-derivatives-market.asp>
- [Πρόσβαση 28 Αύγουστος 2020].
- [22] Kissell, R. & Poserina, J., 2017. Advanced Math and Statistics. *Optimal Sports Math, Statistics, and Fantasy*.
- [23] Lin, C.-M. & Smith, S. D., 2007. Hedging, Financing and Investment Decisions: A Simultaneous Equations Framework. *The Financial Review*, Τόμος 42, pp. 191 - 209.
- [24] Luehrman, T. A., 1998. Investment Opportunities as Real Options: Getting Started On the Numbers. *Harvard Business Review*, July - August, pp. 51-67.

- [25] Mason, S. & Merton, R., 1985. The role of contingent claim analysis in corporate finance. Στο: E. Altman & M. Subrahmanyam, επιμ. *Recent advances in corporate finance*. Boston: MA.
- [26] Merton, R. C., 1973. Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, Τόμος 4, pp. 141 - 183.
- [27] Meyn , S. & Tweedie, R. L., 2009. *Markov Chains and Stochastic Stability*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [28] Myers, C. S., 1977. Determinants of corporate borrowing. *Journal of Financial Economics*, 5(2), pp. 147-176.
- [29] Prabakaran, S., 2015. Black Scholes Option Pricing Model – Brownian Motion Approach. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics*, 11(6), pp. 4587 - 4602.
- [30] Samuelson, P., 1965. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, March - May, pp. 41-49.
- [31] Smith, J., 2005. Alternative approaches for solving real-option problems (comment on Brandao et al. 2005). *Decision Analysis*, 2(2), pp. 89-102.
- [32] Smith, J. E. & McCardle, K. F., 1999. Options in the real world: Lessons learned in evaluating oil and gas investments. *Operations Research*, 47(1), pp. 1-15.
- [33] Sundaram, R. K. & Das, S. R., 2011. *Derivatives, Principles and Practice*. 1 επιμ. New York: Mc Graw-Hill .
- [34] Thomopoulos, N. T., 2012. *Fundamentals of queuing systems*. New York: Springer.
- [35] Trigeorgis, L. & Brennan, M. J., 2000. *Project flexibility, agency, and competition : new developments in the theory and application of real options*. New York: Oxford University Press.
- [36] Trivedi, K. S., 2002. *Probability and statistics with reliability, queuing and computer science applications*. s.l.:John Wiley & Sons .

[37] Van Horne, J. C. & Parker, G. G. C., 1967. The Random-Walk Theory: An Empirical Test. *Financial Analysts Journal*, 23(6), pp. 87-92.

[38] Zhao, L. & Huchzermeier, A., 2015. Operations–finance interface models: A literature review and framework. *European Journal of Operational Research*, 3(1), pp. 905 - 917.