

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



## ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

### ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

#### «ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΑΠΟΘΕΜΑΤΩΝ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΩΝ ΖΗΜΙΩΝ»

Ζαφειρία Καρυτινού

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του  
Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση  
Μεταπτυχιακού διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και  
Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος ..... (Επιβλέπων)
- Βερροπούλου Γεωργία.....
- Σεβρόγλου Βασίλειος.....

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS  
AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL  
SCIENCE AND RISK MANAGEMENT**

**“STOCHASTIC MULTIVARIATE RESERVING  
METHODS FOR LOSS INSURANCE PORTFOLIOS”**

BY  
Zafeiria Karytinou

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the  
University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of  
Master of Science in Actuarial science and Risk Management

**Piraeus, Greece  
2020**



## Ευχαριστίες

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου κ. Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη για την αμέριστη βοήθεια του, την καθοδήγησή του και τη στήριξη του κατά τη διάρκεια συγγραφής της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου στην οποία αφιερώνω και τη παρούσα διπλωματική εργασία για την συμπαράστασή τους και την υποστήριξή τους σε κάθε μου προσπάθεια.



## Περίληψη

Η εργασία αυτή επικεντρώνεται στην ανάδειξη των μοντέλων που χρησιμοποιούνται για την εύρεση των αποθεμάτων ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων και συγκεκριμένα για χαρτοφυλάκια γενικών ασφαλίσεων. Ο στόχος της εργασίας είναι η παρουσίαση των μεθόδων αυτών στους αναγνώστες με τρόπο εύκολο και κατανοητό. Η μέθοδος που θα μελετηθεί είναι η μέθοδος της τριγωνικής εξέλιξης ζημιών ή όπως είναι γνωστή στη βιβλιογραφία ως Chain – Ladder Method.

Η Chain – Ladder Method (CL) είναι μια από τις πιο διαδοσμένες μεθόδους που χρησιμοποιούνται για να εκτιμηθούν τα αποθέματα ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων. Λόγω όμως ότι η μέθοδος αυτή επηρεάζεται αρκετά από ακραίες παρατηρούμενες τιμές (όπως για παράδειγμα ένα πολύνεκρο ατύχημα, ένας καταστροφικός σεισμός ή έντονα καιρικά φυσικά φαινόμενα που μπορεί να προκαλέσουν καταστροφικές ζημιές) είναι γεγονός ότι οι αναλογιστές προτιμούν να διασπούν το ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο σε άλλα μικρότερα χαρτοφυλάκια συνήθως ανάλογα με τις επιχειρησιακές γραμμές που έχει η εταιρία ούτως ώστε να γίνει μια πιο λεπτομερή και στοχευόμενη εκτίμηση των αποθεμάτων που πρέπει να κρατούνται.

Αυτομάτως, η μέθοδος της Chain – Ladder μετατρέπεται σε Πολυμεταβλητή Chain – Ladder καθώς πλέον εργαζόμαστε σε μικρότερα ομοιογενή χαρτοφυλάκια από τα οποία το τελικό αποτέλεσμα της εκτίμησης θα προκύψει αν προσθέσουμε τις εκτιμήσεις του κάθε υπό-χαρτοφυλακίου. Η μοντελοποίηση αυτή και οι εκτιμήσεις των μελλοντικών υποχρεώσεων είναι από τις σημαντικότερες εργασίες που πρέπει να γίνονται σε μια ασφαλιστική εταιρία. Βάσει νόμου, η ασφαλιστική εταιρία θα πρέπει να δημιουργεί τα αποθέματά της με αυτό τον τρόπο ώστε να είναι φερέγγυα.

Τέλος, η μέθοδος αποθεματοποίησης Πολυμεταβλητής Chain – Ladder είναι η πιο διαδοσμένη και εύκολης χρήσης μέθοδος που χρησιμοποιείται ακόμα και στις μέρες μας από τους αναλογιστές. Μέσα στην παρούσα διπλωματική εργασία θα υπάρξει και αναλυτικό παράδειγμα για το πώς εφαρμόζεται και χρησιμοποιείται η μέθοδος αυτή.





## **Abstract**

The purpose of this paper is to examine the use of the Loss Reserving Methods and especially the use of a Multivariate version of the Chain – Ladder Method in the insurance companies. The aim is to introduce the readers the method in a simple and intuitive way.

Based on Solvency II each insurance company is obliged to count and keep a capital adequacy for the possible claims that the insured clients will demand. Hence, it is very important for the company to count the reserves that must keep so as being solvent. The Multivariate Chain – Ladder method is one of the Loss Reserving Methods that counts the reserves the company must have.

The Multivariate Chain – Ladder Method is based on a stochastic model such as the Chain – Ladder. It is the multivariate version of Schnaus model and extends the univariate model of Mack. It is preferred when the insurance portfolio consists several subportfolios with a certain dependence structure and it resolves in a way the problem of non- additivity of the univariate chain – ladder method.

The chain – ladder method is the most famous method and it is widely used from the actuaries. This method applies in a single run – off triangle and it is well – known that the chain ladder’s predictors for the non – observable (future) total claims of a total portfolio consisting of several subportfolios differ, from the sums of the chain – ladder predictors for the non – observable total claims of the subportfolio.

Finally, in this paper I will describe the data that we need for using run – off triangle techniques. Moreover, I will introduce the concept behind the mathematical techniques and I will demonstrate how run – off triangles are constructed for both incremental and cumulative claims loss amounts.



## Λεξιλόγιο όρων

Accident year	Έτος ατυχήματος
Case Reserve	Απόθεμα εκκρεμών ζημιών
Claim	Ζημιά, Απαίτηση
Conditional	Δέσμευση
Contrast	Αντίθεση
Cumulative claims	Σωρευτικές απαιτήσεις
Development factor	Παράγοντας εξέλιξης
Development pattern	Πρότυπο εξέλιξης
Development year	Έτος Εξέλιξης
Distribution	Κατανομή
Estimator	Εκτιμητής
IBNR (Incurred But Not Reported)	Επισυμβάσεις αλλά μη αναφερόμενες
IBNS (Incurred But Not Settled)	Επισυμβάσεις αλλά μη πλήρως διακανονιζόμενες
Incremental claims	Προσαυξητικές απαιτήσεις/ζημιές
Incurred claims	Επισυμβάσεις απαιτήσεις/ζημιές
Outstanding claims	Εκκρεμείς απαιτήσεις/ζημιές
Paid claims	Πληρωθείσες απαιτήσεις/ζημιές
Recursive algorithm	Αναδρομικός αλγόριθμος
Run off triangles	Απορρέοντα τρίγωνα
Ultimate Claims	Τελικές απαιτήσεις/ζημιές

## Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη .....	7
Abstract.....	9
Λεξιλόγιο όρων .....	11
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ.....</b>	<b>14</b>
1.1 Εισαγωγή.....	14
1.2 Ιστορική Αναδρομή.....	15
1.2 Σκοπός της διπλωματικής .....	17
1.3 Ορισμοί.....	18
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ .....</b>	<b>21</b>
2.1 Chain – Ladder (Distribution – free).....	21
2.1.1 Το μοντέλο της μεθόδου Chain – Ladder (Distribution Free) .....	22
2.1.2 Αριθμητικό παράδειγμα.....	28
2.2 Bornhuetter – Ferguson (BF) Method.....	39
2.2.1. Το μοντέλο της μεθόδου Bornhuetter – Ferguson (BF) .....	40
2.2.2 Αριθμητικό παράδειγμα.....	42
2.3 Αριθμός των IBNYR απαιτήσεων, Poisson Model.....	45
2.3.1. Το μοντέλο της μεθόδου Poisson.....	45
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ CHAIN LADDER .....</b>	<b>47</b>
3.1. Εισαγωγικά στοιχεία πολυμεταβλητού μοντέλου Chain – Ladder.....	47
3.2 Διαφορά μονοδιάστατου και πολυμεταβλητού μοντέλου .....	48
3.3 Γενική πολυμεταβλητή δομή και σημειογραφία .....	49
3.4 Πολυμεταβλητή μέθοδος Chain – Ladder .....	50
3.4.1 Παρουσίαση πολυμεταβλητού μοντέλου Chain – Ladder .....	51
3.4.2. Υπό συνθήκη Διαδικασία Διακύμανσης.....	55
3.4.3 Υπό συνθήκη Εκτίμηση Σφαλμάτων για Μοναδιαία Έτη Ατυχήματος .....	56
3.4.4 Υπό συνθήκη Εκτίμηση Σφαλμάτων για Συνολικά Έτη Ατυχήματος .....	57
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ .....</b>	<b>59</b>
4.1. Εισαγωγικά στοιχεία πολυμεταβλητού προσθετικού μοντέλου .....	59
4.2. Πολυμεταβλητό Προσθετικό Μοντέλο Αποθεματοποίησης .....	59
4.3 Συνδυασμός μεθόδων πολυμεταβλητής CL και ALR.....	64
4.3.1 Συνδυασμός μεθόδων CL και ALR: Το μοντέλο .....	65
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΤΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΜΙΑΣ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΙΑΣ .....</b>	<b>69</b>
5.1 Αριθμητικά Δεδομένα .....	69
5.2 Παρουσίαση χαρτοφυλακίου γενικών ασφαλίσεων.....	70
5.3 Διαχωρισμός χαρτοφυλακίου σε υπό-χαρτοφυλάκια.....	77
5.4 Υπολογισμοί .....	94
5.4.1 Υπολογισμός αποθεμάτων με βάση τον σταθμισμένο μέσο (R-project) .....	94
5.4.2 Υπολογισμός αποθεμάτων με βάση τον αριθμητικό μέσο .....	113

<i>5.5 Συμπεράσματα.....</i>	<i>118</i>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1.....</b>	<b>123</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2.....</b>	<b>125</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3.....</b>	<b>126</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4.....</b>	<b>127</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>	<b>130</b>

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΕΙΣΑΓΩΓΗ

## 1.1 Εισαγωγή

Στο παρόν εισαγωγικό κεφάλαιο, γίνεται μια περιγραφή του τι ακριβώς θα αναλυθεί στα επόμενα κεφάλαια. Το πρώτο βήμα της παρούσας εργασίας είναι να δοθούν οι ορισμοί και οι έννοιες βασικών όρων που χρησιμοποιούνται στην ασφαλιστική ορολογία και κατ' επέκταση σε αυτή την εργασία. Αναλυτικά οι ορισμοί αυτοί βρίσκονται στην επόμενη ενότητα αλλά αξίζει να αναφέρουμε και να δώσουμε την ερμηνεία του όρου κινδύνου (risk) πιο εκτενώς, αφού είναι άλλωστε το βασικό αντικείμενο της ασφάλισης. Ως κίνδυνος εκλαμβάνεται η κατάσταση που εμπεριέχει αβεβαιότητα σχετικά με το αποτέλεσμα που θα εμφανιστεί. Η έννοια της πιθανότητας είναι αδιάρρηκτα συνδεδεμένη με την έννοια του κινδύνου εφόσον το αποτέλεσμα μιας απόφασης συνοδεύεται πάντα από μια πιθανότητα πραγματοποίησής του.

Η διαφορά του κινδύνου από οποιαδήποτε άλλη δαπάνη ή απώλεια είναι η αβεβαιότητα που τον χαρακτηρίζει για το πότε θα συμβεί αλλά και για το μέγεθος της ζημίας που θα προκαλέσει. Για να μπορέσουν αυτές οι δύο έννοιες να μετρηστούν δημιουργήθηκε η έννοια της ασφάλισης και κατά συνέπεια οι εταιρίες που παρέχουν ασφάλιση, οι ασφαλιστικές εταιρίες. Οι ασφαλιστικές εταιρίες λειτουργούν ως λήπτες κινδύνων, έναντι αμοιβών – ασφαλίσεων που λαμβάνουν. Οι πολίτες έχουν την επιλογή να μεταβιβάσουν τον κίνδυνο (οικονομικό κίνδυνο) σε μια ασφαλιστική εταιρία με σκοπό την διατήρηση του βιοτικού τους επιπέδου, ελαχιστοποιώντας ή εξαλείφοντας τις οικονομικές απώλειες που δημιουργούνται από την επέλευσή του, δημιουργώντας προστασία για το μέλλον τους.

Αντίστοιχα, οι ασφαλιστικές εταιρίες θα πρέπει να διαχειριστούν κατάλληλα τους κινδύνους που αναλαμβάνουν εκ μέρους των ασφαλισμένων τους. Βασικός στόχος των ασφαλιστικών εταιριών είναι να έχουν εξασφαλίσει τα απαραίτητα αποθέματα ώστε σε περίπτωση που επέλθουν οι ασφαλισμένοι κίνδυνοι, να είναι σε θέση να αποζημιώσουν τους ασφαλισμένους τους, χωρίς να συμβούν σημαντικές οικονομικές μεταβολές και σε εκείνες. Συνεπώς, θα πρέπει να υπολογίζονται και να κρατούνται τα απαραίτητα και αναγκαία αποθέματα. Έτσι έχουν αναπτυχθεί ανά τα χρόνια διάφορες μέθοδοι αποθεματοποίησης που υπολογίζουν αυτά τα αποθέματα.

Στο κεφάλαιο 2 παρουσιάζονται οι βασικές μέθοδοι αποθεματοποίησης που χρησιμοποιούνται και σήμερα στις ασφαλιστικές εταιρίες. Οι μέθοδοι αυτές είναι οι Chain – Ladder, Bornhuetter - Ferguson και το μοντέλο Poisson για τον αριθμό των IBNR απαιτήσεων. Στο ίδιο κεφάλαιο υπάρχουν δύο παραδείγματα ένα για τη μέθοδο Chain – Ladder και ένα για τη μέθοδο Bornhuetter - Ferguson. Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για να εκτελεστούν τα αριθμητικά παραδείγματα είναι κοινά και για τις δύο μεθόδους και οι αριθμοί που χρησιμοποιήθηκαν ως προσαυξητικές απαιτήσεις είναι τυχαίοι. Ο σκοπός των παραδειγμάτων όπως αναφέρεται και στην ενότητα 2 είναι καθαρά για να περιγράψουν τους αλγόριθμους των μεθόδων.

Στο κεφάλαιο 3 όπου είναι και η βασική ενότητα αυτής της διπλωματικής περιγράφεται αναλυτικά η πολυμεταβλητή μέθοδος της Chain – Ladder. Επισημαίνονται ποιες είναι οι διαφορές που έχει με τη μονοδιάστατη Chain – Ladder και ποια είναι η χρησιμότητά της. Επιπλέον, γίνεται εκτίμηση των σφαλμάτων και για μοναδιαία έτη ατυχήματος αλλά και για συνολικά έτη ατυχήματος. Το παράδειγμα της πολυμεταβλητής μεθόδου Chain – Ladder που είναι και το κύριο μέρος αυτής της διπλωματικής εργασίας παρουσιάζεται στο κεφάλαιο 5. Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για το παράδειγμα αυτό είναι πραγματικά δεδομένα τα οποία

έχουν ληφθεί από ασφαλιστική εταιρία. Περισσότερες πληροφορίες και λεπτομέρειες σχετικά με τη φύση των δεδομένων αυτών θα υπάρξουν στο κεφάλαιο 5. Οι αναλυτικοί πίνακες των δεδομένων βρίσκονται συγκεντρωτικά και στο Παράρτημα 1.

Στο κεφάλαιο 4 υπάρχει η παρουσίαση επίσης ενός πολυμεταβλητού μοντέλου αποθεματοποίησης, του προσθετικού μοντέλου αποθεματοποίησης ή όπως γράφεται και στην βιβλιογραφία ALR (Additive Loss Reserving Model). Το μοντέλο αυτό συνδυάζεται κατάλληλα με τη μέθοδο Chain – Ladder και υπάρχει και μοντέλο των συνδυασμένων αυτών μεθόδων. Το συνδυασμένο μοντέλο των δύο μεθόδων αυτών παρουσιάζεται στην υπό-ενότητα 4.3.

Τέλος στο κεφάλαιο 5 όπως αναφέρθηκε και παραπάνω βρίσκεται το αριθμητικό παράδειγμα αυτής της διπλωματικής εργασίας. Το παράδειγμα αυτό υπολογίζει τα αποθέματα που απαιτούνται για μια ασφαλιστική εταιρία. Ο υπολογισμός των αποθεμάτων αυτών γίνεται με τη μέθοδο της πολυμεταβλητής Chain – Ladder. Χρησιμοποιείται η πολυμεταβλητή Chain – Ladder γιατί τα δεδομένα αποτελούν ένα χαρτοφυλάκιο από γενικές ασφαλίσεις ζημιών και αυτό θα πρέπει να διασπαστεί σε διαφορετικές επιχειρησιακές γραμμές ώστε να μην γίνει υποεκτίμηση ή υπερεκτίμηση του κινδύνου.

Όλοι οι υπολογισμοί γίνονται αναλυτικά κάτω από την εκτέλεση του κάθε παραδείγματος. Στο παράρτημα 2 βρίσκονται πίνακες που δείχνουν πως οι διαφορετικές επιχειρησιακές γραμμές συσχετίζονται μεταξύ τους. Οι πίνακες αυτοί αποτελούν τη standard formula συσχετίσεων που έχουν οι επιχειρησιακές γραμμές και είναι οι πίνακες που χρησιμοποιούν και οι αναλογιστές για τον υπολογισμό των κεφαλαίων που πρέπει να έχουν κατά την κοινοτική οδηγία Solvency II. Οι πηγές άντλησης των δεδομένων αναφέρονται στο τέλος της παρούσας εργασίας.

## **1.2 Ιστορική Αναδρομή**

Για την εύρυθμη λειτουργία των ασφαλιστικών εταιριών και την προστασία των ασφαλισμένων θεσμοθετήθηκε το νομικό πλαίσιο της Φερεγγυότητας II (Solvency II), κατά το οποίο η κάθε εταιρία που δραστηριοποιείται στον κλάδο της ιδιωτικής ασφάλισης θα πρέπει να πληροί συγκεκριμένες προϋποθέσεις ώστε να διατηρεί την άδεια λειτουργίας της. Με βάση την κοινοτική αυτή οδηγία, μια από τις απαιτήσεις της, είναι η δημιουργία, η παρακολούθηση και η έγγραφη απεικόνιση των αποθεμάτων των ασφαλιστικών εταιριών. Οι ασφαλιστικές εταιρείες καλούνται να υπολογίσουν και να αναφέρουν γραπτώς τις εκτιμήσεις τους για τα αποθέματα που πρέπει να διαθέτουν ώστε να μπορούν να αποπληρώσουν πιθανές απαιτήσεις που θα προκύψουν στο μέλλον.

Εκτενέστερα, παρατηρούμε ότι κάθε ασφαλιστική εταιρία έχει ένα χαρτοφυλάκιο πελατών. Από αυτό το χαρτοφυλάκιο πελατών, κάποιιο δεν θα αποτελέσουν ποτέ απαίτηση αποζημίωσης, ενώ κάποιιο άλλοι μπορεί να αποτελέσουν παραπάνω από μια φορά απαίτηση αποζημίωσης από την ασφαλιστική εταιρία. Οι πιθανές αυτές απαιτήσεις, όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, με βάση την κοινοτική οδηγία (Solvency II) θα πρέπει να εκτιμηθούν από τον υπεύθυνο αναλογιστή ούτως ώστε η εταιρία να κρατήσει το απαιτούμενο ποσό ως απόθεμα και να είναι σε θέση να τις καλύψει όταν και αν αυτές προκύψουν.

Στις ασφαλίσεις ζημιών η περίοδος της ασφαλιστικής κάλυψης (ισχύς συμβολαίου) μπορεί να είναι από ένα μήνα μέχρι και ένα έτος. Με το πέρας της ισχύς του συμβολαίου, ο ασφαλισμένος είτε θα ανανεώσει τη σύμβαση του είτε θα τη τερματίσει. Όποια και από τις δυο περιπτώσεις και αν συμβεί η ασφαλιστική εταιρεία θα έχει ακόμα ευθύνη για τις απαιτήσεις που πραγματοποιήθηκαν κατά τη διάρκεια του συμβολαίου αυτού και θα πρέπει να παρακολουθεί την εξέλιξη των απαιτήσεων αυτών με το πέρας των ετών. Την ευθύνη για τις απαιτήσεις αυτές που πραγματοποιήθηκαν εντός της ασφαλιστικής αυτής περιόδου του εκάστοτε συμβολαίου την έχει ο αναλογιστής. Οι απαιτήσεις αυτές χωρίζονται σε δυο κατηγορίες. Η πρώτη κατηγορία αφορά τις απαιτήσεις που έχουν δηλωθεί αλλά δεν έχουν διευθετηθεί ακόμα (IBNS- Incurred But No Settled) και η δεύτερη κατηγορία τις απαιτήσεις που έχουν συμβεί αλλά δεν έχουν αναγγελθεί (IBNR- Incurred But Not Reported).

Η ασφαλιστική εταιρεία διαθέτει έμπειρους διακανονιστές ζημιών, οι οποίοι προσδιορίζουν το ύψος της χρηματικής αποζημίωσης των IBNS απαιτήσεων. Εκτιμώντας τους κινδύνους η ασφαλιστική εταιρεία έχει προσδιορίσει το απαιτούμενο ύψος αποθεμάτων που πρέπει να διατηρεί τόσο για τις απαιτήσεις IBNS όσο και για τις IBNR απαιτήσεις. Ωστόσο, είναι αρκετά δύσκολο να εκτιμηθούν οι απαιτήσεις IBNR. Η εκτίμησή τους γίνεται με βάση ιστορικά δεδομένα που κρατάει η εταιρεία, όπως θα δούμε και παρακάτω, καθώς αυτές δεν έχουν γνωστοποιηθεί ακόμα στην ασφαλιστική ή ακόμα και ο πελάτης ο ίδιος μπορεί να μην έχει αντιληφθεί το ότι έχει συμβεί μια απαίτηση που χρήζει αποζημίωσης.

Παραδείγματος χάρη, μετά από την επέλευση σεισμού προκαλούνται ζημιές σε μια ασφαλισμένη κατοικία οι οποίες δεν διαπιστώνονται άμεσα με αποτέλεσμα να μην αναφερθούν έγκαιρα, δηλαδή με την επέλευση του ασφαλισμένου κινδύνου, στην ασφαλιστική εταιρεία. Ακόμα, ένας άλλος τύπος IBNR απαιτήσεων είναι ένας πελάτης ο οποίος είχε τραυματιστεί στο παρελθόν και ενώ ήταν ασφαλισμένος να διαπιστώσει τη βαρύτητα του τραυματισμού του αρκετό διάστημα μετά το τραύμα. Ή διαφορετικά στις ασφαλίσεις αυτοκινήτων ένα πολύνεκρο δυστύχημα να συμβεί και η εταιρεία να αποζημιώσει αφού πρώτα το θέμα λυθεί δικαστικά, όπου η δίκη μπορεί να λάβει χώρα και μετά από αρκετά χρόνια από την ημερομηνία συμβάντος, ή να χρειαστεί να αποζημιώσει αρκετές φορές γιατί μπορεί να υπάρξει αναβίωση τραυματισμών. Για όλες αυτές τις περιπτώσεις η ασφαλιστική εταιρεία είναι υποχρεωμένη να κρατάει ένα ποσό στην άκρη (απόθεμα) ούτως ώστε όταν χρειαστεί να είναι σε θέση να μπορεί να αποζημιώσει τους πελάτες της.

Είναι απαραίτητο λοιπόν να γίνει ένας αξιόπιστος υπολογισμός για τον καθορισμό των αποθεμάτων ώστε η σταθερότητα και ύπαρξη της εταιρείας να είναι διασφαλισμένες. Έτσι, για την εκτίμηση των ζημιών αυτών χρησιμοποιούνται αρκετές μέθοδοι αποθεματοποίησης. Οι πιο γνωστές είναι οι παρακάτω: Chain-ladder (CL) method, Bornhuetter-Ferguson (BF) method και Poisson model. Από τις τρεις μεθόδους αυτές, η μέθοδος chain-ladder είναι η κοινή και πιο γνωστή μέθοδος λόγω της εύκολης χρήσης της μεταξύ των ασφαλιστικών εταιριών τεχνική που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των IBNR απαιτήσεων. Στην παρούσα διπλωματική θα εξετάσουμε πως λειτουργούν οι τρεις μέθοδοι αυτοί, αλλά το βάρος θα δοθεί στο πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain -Ladder και ποιες είναι οι διαφορές που παρουσιάζει έναντι του μονοδιάστατου μοντέλου της Chain-Ladder. Επιπλέον, αναφορά θα γίνει και στα σφάλματα που μπορεί να παρουσιάσουν οι εκτιμήσεις μας λόγω της χρήσης του στοχαστικού



μοντέλου, δίνοντας μας το πλεονέκτημα της μεγαλύτερης γνώσεως σχετικά με την εκτίμηση του αποθέματος.

Τέλος θα πρέπει να τονιστεί ότι ο νόμος προβλέπει ακριβώς το ύψος των αποθεμάτων το οποίο θα πρέπει να διατηρεί η κάθε ασφαλιστική εταιρεία, που δραστηριοποιείται στον κλάδο των ασφαλίσεων ζημιών. Είναι δεδομένο ότι το ποσό αυτό των αποθεμάτων είναι ανάλογο με το ύψος των κινδύνων που έχει αναλάβει. Όσο μεγαλύτερο χαρτοφυλάκιο κινδύνων αναλαμβάνει τόσο μεγαλύτερο απόθεμα θα πρέπει να κρατεί.

## 1.2 Σκοπός της διπλωματικής

Ο σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας είναι να εξεταστεί το πρόβλημα της στοχαστικής μοντελοποίησης των αποθεμάτων ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων ζημιών από πολυμεταβλητής άποψης. Ένα χαρτοφυλάκιο γενικών ασφαλίσεων λόγω του μεγάλου όγκου δεδομένων που περιλαμβάνει, χωρίζεται σε μικρότερα υπό-χαρτοφυλάκια ώστε να είναι ευκολότερη η εύρεση του αποθέματος για το κάθε υπό-χαρτοφυλάκιο ξεχωριστά. Με αυτό τον τρόπο μειώνεται αρκετά ο κίνδυνος να υπάρχει υπερεκτίμηση ή υποεκτίμηση των απαιτήσεων. Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται αυτή η διάσπαση του χαρτοφυλακίου σε άλλα μικρότερα υπό-χαρτοφυλάκια θα μελετηθεί και στην παρούσα εργασία.

Τέτοιες περιπτώσεις λοιπόν όπως θα δούμε και παρακάτω στο αριθμητικό παράδειγμα της εργασίας είναι η διάσπαση ενός χαρτοφυλακίου γενικών ασφαλίσεων σε διάφορες επιχειρησιακές γραμμές (Lines of Business) ή σε υπό-χαρτοφυλάκια μικρών και μεγάλων απαιτήσεων όπου τα μικρότερα υπό-χαρτοφυλάκια διατηρούν χαρακτηριστικά ομοιογένειας μεταξύ τους. Ακολούθως θα εφαρμοστεί η μέθοδος αποθεματοποίησης Chain – Ladder για την εκτίμηση του αποθέματος του κάθε Line of Business. Στο τέλος θα αθροίσουμε τα αποθέματα που εκτιμήθηκαν για κάθε επιχειρησιακή γραμμή όπου και θα καταλήξουμε στο συνολικό απόθεμα το οποίο απαιτείται να κρατήσει η ασφαλιστική εταιρία έτσι ώστε να είναι σε θέση να καλύψει μελλοντικές απαιτήσεις που θα έρθουν από τους ασφαλισμένους κινδύνους που έχει αναλάβει.

Επομένως, σε αυτή την εργασία θα εκτιμηθούν τα αποθέματα των απαιτήσεων ταυτόχρονα για διάφορα τρίγωνα ζημιών που είναι συσχετισμένα μεταξύ τους. Έτσι ένα ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο θα διαιρεθεί σε ομοιογενή υπό-χαρτοφυλάκια στα οποία θα υπολογιστούν τα εκτιμώμενα αποθέματα ζημιών μέσω της μεθόδου chain ladder. Ύστερα, αθροίζοντας τα εκτιμώμενα αυτά αποθέματα του κάθε υπό-χαρτοφυλακίου θα είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε το συνολικό απόθεμα για όλο το χαρτοφυλάκιο ζημιών.

### 1.3 Ορισμοί

Στο παρόν κεφάλαιο θα αναπτυχθούν οι ορισμοί κάποιων εννοιών που θα χρησιμοποιηθούν καθόλα τη διάρκεια της παρούσας εργασίας.

Ασφάλιση: Είναι η κάλυψη των οικονομικών συνεπειών από την επέλευση του ασφαλισμένου κινδύνου.

Ασφαλιστικός κίνδυνος: Ο όρος ασφαλιστικός κίνδυνος χρησιμοποιείται με τρεις διαφορετικές έννοιες:

1. Το αντικείμενο της ασφάλισης, δηλαδή η οικία, το αυτοκίνητο, το σκάφος, το πρόσωπο κ.τ.λ.
2. Η αβεβαιότητα ή η πιθανότητα του ζημιογόνου γεγονότος και των διαστάσεων ζημιάς, που μπορεί να προκληθούν.
3. Το ζημιογόνο γεγονός έναντι του οποίου γίνεται η ασφάλιση.

Ασφάλιστρα: Το οικονομικό αντάλλαγμα που είναι πληρωτέο από έναν ασφαλισμένο σε έναν ασφαλιστή για εξασφάλιση της πληρωμής ενός εγγυημένου ποσού, όταν συμβεί ένα γεγονός έναντι του οποίου γίνεται η ασφάλιση.

Ασφαλιστήριο συμβόλαιο ζημιών: Η σύμβαση μεταξύ δύο πλευρών: ασφαλιστή και ασφαλισμένου. Παρέχει στον ασφαλιστή ένα δεδομένο ποσό χρημάτων (ασφάλιστρο) και στον ασφαλισμένο οικονομική κάλυψη απέναντι στον πιθανό ασφαλισμένο κίνδυνο που μπορεί να συμβεί κατά τη διάρκεια της ισχύς του συμβολαίου.

Απαίτηση/Αποζημίωση: Το δικαίωμα του ασφαλισμένου για αξίωση αποζημίωσης από τον ασφαλιστή σε περίπτωση που επέλθει ο ασφαλισμένος κίνδυνος (από την πλευρά του ασφαλισμένου). Το ποσό που υποχρεούται να καταβάλλει ο ασφαλιστής στον ασφαλισμένο σε περίπτωση που επέλθει ο ασφαλισμένος κίνδυνος (από την πλευρά του ασφαλιστή).

Αποθέματα: Οι προβλέψεις που κάθε ασφαλιστική επιχείρηση πρέπει να σχηματίζει στο παθητικό κατά την κατάρτιση των οικονομικών της καταστάσεων προκειμένου να απεικονίσει λογιστικά διάφορες υποχρεώσεις που έχει από τους ασφαλιστικούς κινδύνους που ανέλαβε, είτε αυτοί επήλθαν, είτε βρίσκονται ακόμα υπό ασφαλιστική κάλυψη στο τέλος της θεωρούμενης περιόδου.

Απόθεμα εκκρεμών ζημιών: Απόθεμα που δημιουργήθηκε για να αντιμετωπιστούν οι υποχρεώσεις της ασφαλιστικής εταιρίας για τις ζημιές εκείνες που κατά το κλείσιμο κάθε οικονομικής χρήσεως παραμένουν σε εκκρεμότητα, περιμένοντας τη διαδικασία ολοκλήρωσης του οριστικού διακανονισμού.

Αποθεματοποίηση ζημιών: Ο υπολογισμός του απαιτούμενου αποθέματος που πρέπει να διατηρεί μια ασφαλιστική εταιρεία. Τα χρήματα που πρέπει βάσει νόμου να διατηρεί ο ασφαλιστής για να μπορεί να καλύψει τις απαιτήσεις που θα προκύψουν, μελλοντικές αποζημιώσεις προς ασφαλισμένους, από τα ασφαλιστικά συμβόλαια που έχει συνάψει.

Απορρέοντα τρίγωνα: Θεωρούμε ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο και υποθέτουμε ότι η κάθε απαίτηση προς την ασφαλιστική εταιρία διακανονίζεται είτε μέσα στο έτος που συμβαίνει είτε στα επόμενα έτη (έτη εξέλιξης). Το χαρτοφυλάκιο μπορεί να μοντελοποιηθεί είτε από προσαυξητικές απαιτήσεις είτε από σωρευτικές απαιτήσεις.

Δεδουλευμένα ασφάλιστρα: Το μέρος των ασφαλίσεων που αφορούν την περίοδο που έχει εκπνεύσει.

Διαδικασία Αποθεματοποίησης: Η διαδικασία εκτίμησης των αποθεματικών ζημιών χωρίζεται σε δύο μέρη. Το πρώτο μέρος είναι η ανάλυση των διαθέσιμων δεδομένων και η εφαρμογή κατάλληλων μοντέλων σε αυτά. Το δεύτερο μέρος είναι η χρήση των αποτελεσμάτων από την εφαρμογή του μοντέλου στα δεδομένα με σκοπό την εκτίμηση των μελλοντικών ζημιών.

Εκκρεμείς Ζημιές: Οι εκκρεμείς ζημιές (Outstanding Claims) είναι η πρόβλεψη της ασφαλιστικής εταιρείας για όλες τις αξιώσεις που έχουν γίνει, για τις οποίες ο ασφαλιστής είναι υπόχρεος, όμως δεν έχουν διευθετηθεί. Δηλαδή, η διαφορά μεταξύ των ασφαλιστικών απαιτήσεων που έχουν κατατεθεί και των απαιτήσεων που έχουν διακανονιστεί.

Επισυμβάσες Ζημιές: Οι επισυμβάσες ζημιές (Incurred Claims) ορίζονται ως οι απαιτήσεις που καταβλήθηκαν κατά τη διάρκεια του έτους ασφάλισης στις οποίες έχουν προστεθεί, τα αποθέματα κατά το τέλος του έτους ασφάλισης και η αρχική εκτίμηση για το άνοιγμα νέων φακέλων για απαιτήσεις εντός του έτους αξιολόγησης.

Κίνδυνος: Οποιαδήποτε αβέβαιη μελλοντική ζημιά.

Μαθηματικό απόθεμα: Η νομική υποχρέωση των Ασφαλιστικών Εταιριών να διατηρούν αποθεματικά κεφάλαια σύμφωνα με τους καθιερωμένους ασφαλιστικούς νόμους του κράτους.

Μέθοδοι εκτίμησης αποθεμάτων: Οι μέθοδοι που χρησιμοποιεί η ασφαλιστική εταιρεία για τον υπολογισμό και σχηματισμό των αποθεμάτων της.

Περιθώριο Φερεγγυότητας: Το περιθώριο φερεγγυότητας είναι μια δικλείδα ασφαλείας για την ασφαλιστική εταιρία έτσι ώστε να είναι εξασφαλισμένη η φερεγγυότητά της. Είναι δηλαδή το επιπλέον απόθεμα πέραν των τεχνικών αποθεμάτων που πρέπει να έχει η ασφαλιστική εταιρία.

Πληρωθείσες Ζημιές: Οι πληρωθείσες απαιτήσεις (Paid Claims), είναι οι απαιτήσεις που έχουν πληρωθεί από την ασφαλιστική εταιρεία μετά τη σύναψη του ασφαλιστηρίου συμβολαίου.

Πρότυπο εξέλιξης: Η χρήση των απορρεόντων τριγώνων στις μεθόδους αποθεματοποίησης μπορεί να δικαιολογηθεί μόνο αν υποθεθεί ότι η εξέλιξη των ζημιών του κάθε έτους ατυχήματος ακολουθεί ένα πρότυπο εξέλιξης, το οποίο είναι κοινό για όλα τα έτη ατυχήματος.

*Επισυμβάσεις απαιτήσεις = Πληρωθείσες Απαιτήσεις + Εκκρεμείς Απαιτήσεις*

Chain Ladder (CL) method ή τριγωνικής εξέλιξης ζημιών: Ντετερμινιστική μέθοδος εκτίμησης αποθεμάτων ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων ζημιών, όπου οι μεταβλητές θεωρούνται γνωστές.

Στοχαστικό μοντέλο Chain – Ladder: Το στοχαστικό μοντέλο το οποίο υπολογίζει τις ίδιες εκτιμήσεις των μελλοντικών απαιτήσεων όπως και η μέθοδος Chain – Ladder. Η μέθοδος τριγωνικής εξέλιξης ζημιών εκτιμά τη μεταβλητότητα του αποτελέσματος που αποδίδεται.

Additive method: μέθοδος εκτίμησης αποθεμάτων ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων ζημιών.

Bornhuetter – Ferguson (BF) method: Ντετερμινιστική μέθοδος εκτίμησης αποθεμάτων ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων ζημιών.

Poisson model for claim counts: μέθοδος εκτίμησης αποθεμάτων ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων ζημιών.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

### 2.1 Chain – Ladder (Distribution – free)

Η συγκεκριμένη τεχνική είναι η πιο απλή και λογική αλλά παράλληλα και η πιο γνωστή μέθοδος για τον καθορισμό των αποθεμάτων της ασφαλιστικής εταιρείας. Στηρίζεται πάνω στα ιστορικά δεδομένα που κρατεί η εταιρία σε σχέση με τις πληρωθείσες απαιτήσεις και τις εκκρεμείς. Οι αναλογιστές συχνά χρησιμοποιούν τη συγκεκριμένη τεχνική για να εκτιμήσουν - προβλέψουν μελλοντικές αποζημιώσεις που θα κληθούν να αποδώσουν στους ασφαλισμένους ακόμα και για απαιτήσεις που δεν τους έχουν γνωστοποιηθεί τη στιγμή που γίνεται ο υπολογισμός του αποθέματος. Αυτές οι απαιτήσεις καλούνται στην ασφαλιστική ορολογία ως IBNR (Incurred But Not Reported), επισυμβάσες αλλά μη αναφερόμενες. Ως εκ τούτου, οι αναλογιστές υπολογίζουν το ύψος των μελλοντικών αποζημιώσεων των IBNR απαιτήσεων χρησιμοποιώντας τα τρίγωνα των σωρευτικών (πληρωθείς και εκκρεμείς) παρελθουσών αποζημιώσεων.

Η μέθοδος αποθεματοποίησης αυτή βασίζεται στην παραδοχή ότι οι σχέσεις που ίσχυσαν κατά το πρόσφατο παρελθόν μπορούν να χρησιμοποιηθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να εκτιμήσουν τις μελλοντικές αποζημιώσεις που θα απαιτηθούν. Πολλές φορές όμως παρελθοντικά γεγονότα ενδέχεται να μην είναι αντιπροσωπευτικά για τον υπολογισμό αποθεμάτων στο μέλλον. Εξαιτίας αυτού οι αναλογιστές καλούνται να ελέγξουν τα ιστορικά δεδομένα που θα χρησιμοποιήσουν και ενδεχομένως να αφαιρέσουν ακραίες παρατηρούμενες τιμές από τις μετρήσεις τους ώστε τα αποτελέσματα που θα υπολογίσουν να μην υποεκτιμούν αλλά ούτε να υπερεκτιμούν τον κίνδυνο, καθώς τα αποτελέσματα αυτά πρόκειται για αποθέματα που πρέπει να κρατάει η ασφαλιστική εταιρία.

Ο Mack (1993) παρουσίασε ότι η μέθοδος Chain – Ladder ή τριγωνικής εξέλιξης ζημιών είναι ίσως η πιο διαδεδομένη τεχνική για τον υπολογισμό της εκτίμησης των αποθεμάτων ασφαλιστικών χαρτοφυλακίων ζημιών, λόγω της εύκολης χρήσης και εφαρμογής που έχει στα δεδομένα της ασφαλιστικής εταιρείας καθώς και λόγω του γεγονότος ότι δεν απαιτείται η παραδοχή κάποιας κατανομής (distribution – free). Το απαιτούμενο για τη μέθοδο αυτή είναι η ύπαρξη ποιοτικών ιστορικών δεδομένων ώστε τα αποτελέσματα που θα παραχθούν να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στην πραγματικότητα που θα συμβεί.

Ιστορικά επισημαίνεται ότι η Chain – Ladder μέθοδος ξεκίνησε ως ντετερμινιστική ωστόσο εξελίχθηκε σε στοχαστική με σκοπό να εκτιμήσει τη μεταβλητότητα του αποτελέσματος που απέδιδε. Ο Taylor (2011) ασχολήθηκε με μεθόδους που προκύπτουν από τη μέθοδο Chain – Ladder. Η μια ήταν ίδια με αυτή που ανέπτυξε ο Mack (1993), η ντετερμινιστική και η άλλη βασίστηκε στην υπόθεση ότι οι προσαυξητικές απαιτήσεις (incremental claims) ακολουθούν την κατανομή Poisson. Τέλος με το πέρασμα των χρόνων διάφορα στοχαστικά μοντέλα που αφορούν τη μέθοδο Chain – Ladder έχουν αναπτυχθεί με αποτέλεσμα η τεχνική αυτή να έχει βελτιωθεί από τους Mack (1993), Renshaw (1998), England & Verral (2002), Hess & Schmidt (2002), Neuhaus (2006).

### 2.1.1 Το μοντέλο της μεθόδου Chain – Ladder (Distribution Free)

Όπως, αναφέρθηκε και στην προηγούμενη παράγραφο κατά τη διαδικασία της αποθεματοποίησης ζημιών τα δεδομένα των ζημιών συνήθως παρουσιάζονται ως ένα τρίγωνο εξέλιξης ζημιών. Οι γραμμές του τριγώνου παριστάνουν τα έτη ατυχήματος ή το ασφαλιστικό έτος ή το έτος αναγγελίας της ζημιάς, δηλαδή το έτος κατά το οποίο συνέβη η ζημιά. Οι στήλες του τριγώνου αναπαριστούν τις περιόδους εξέλιξης (μέρες, μήνες, τρίμηνο, τετράμηνο, έτος) δηλαδή τη χρονική περίοδο που θα παρέλθει μέχρι να διακανονιστεί η ζημιά (Dahl, 2003).

Τα εισαγόμενα δεδομένα στον πίνακα μπορεί να είναι το πλήθος των ζημιών, ή συνθηθέστερα τα ποσά των ζημιών. Οι ζημιές που θα εισαχθούν είτε πληρωθείσες είτε επισυμβάσες μπορεί να καταχωρηθούν ή σωρευτικά (cumulative) ή και όχι σωρευτικά (incremental). Ο σκοπός της μεθόδου αποθεματοποίησης είναι ουσιαστικά η συμπλήρωση του κάτω μέρους του τριγώνου (κίτρινο πλαίσιο) με τις εκτιμήσεις των αναλογιστών για την εξέλιξη των ζημιών. Προφανώς όσο πιο κοντά στη διαγώνιο του τριγώνου βρισκόμαστε τόσο πιο καλές εκτιμήσεις μπορούμε να κάνουμε για το πώς μπορεί να εξελιχθούν οι ζημιές. Όσο απομακρυνόμαστε τόσο οι εκτιμήσεις μας γίνονται πιο αβέβαιες καθώς δεν μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι αυτά που ισχύσαν κατά το πρόσφατο παρελθόν θα ισχύσουν και στο εγγύς μέλλον.

Το τρίγωνο ζημιών για κάθε έτος ατυχήματος έχει την παρακάτω μορφή και στο συγκεκριμένο πίνακα στις γραμμές αναγράφονται τα έτη ατυχήματος και στις στήλες τα έτη εξέλιξης:

Έτος Ατυχήματος	Έτος εξέλιξης							
	1	2	...	j-1	j	...	I-1	I
1	$X_{11}$	$X_{12}$	...	$X_{1j-1}$	$X_{1j}$	...	$X_{1I-1}$	$X_{1I}$
2	$X_{21}$	$X_{22}$	...	$X_{2j-1}$	$X_{2j}$	...	$X_{2I-1}$	
...	...	...	...	...	...	...		
i-1	$X_{i-11}$	$X_{i-12}$	...	$X_{i-1j-1}$	$X_{i-1j}$			
I	$X_{I1}$	$X_{I2}$	...	$X_{Ij-1}$				
...	...	...	...					
I-1	$X_{I-11}$	$X_{I-12}$						
I	$X_{I1}$							

Πίνακας 2.1 Τρίγωνο εξέλιξης ζημιών ανά έτος ατυχήματος και εξέλιξης

Η τυχαία μεταβλητή  $X_{i,j}$  παριστάνει τις ζημιές για το έτος ατυχήματος  $i$ , δηλαδή το έτος στο οποίο συμβαίνει το ατύχημα και για το έτος εξέλιξης  $j$  το οποίο αντιπροσωπεύει το χρονικό διάστημα από την ημερομηνία που συνέβη η ζημιά μέχρι την ημερομηνία υποβολής της αναφοράς. Προσθέτοντας τις ζημιές  $X_{i,j}$  για κάθε έτος ατυχήματος, τότε λαμβάνουμε τις σωρευτικές ζημιές.

Έστω, η τυχαία μεταβλητή  $C_{i,j}$  παριστάνει τις σωρευτικές ζημιές. Συνεπώς, έχουμε:

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^j X_{i,k} \quad (2.1)$$

Οι παρατηρούμενες απαιτήσεις μπορούν να απεικονιστούν ως τρίγωνο εξέλιξης και αυτές. Το τρίγωνο εξέλιξης των αθροιστικών ζημιών προκύπτει χρησιμοποιώντας τα δεδομένα των σωρευτικών ζημιών του Πίνακα 2.1 και της σχέσης 2.1 και αντίστοιχα οι γραμμές του πίνακα αναφέρονται στα έτη ατυχήματος ενώ οι στήλες του στα έτη εξέλιξης των ζημιών.

Ο Πίνακας 2.2 έχει την παρακάτω μορφή:

Έτος Ατυχήματος	Έτος Εξέλιξης							
	1	2	...	j-1	j	...	I-1	I
1	$C_{1,1}$	$C_{1,2}$	...	$C_{1,j-1}$	$C_{1,j}$	...	$C_{1,I-1}$	$C_{1,I}$
2	$C_{2,1}$	$C_{2,2}$	...	$C_{2,j-1}$	$C_{2,j}$	...	$C_{2,I-1}$	
...	...	...	...	...	...	...		
i-1	$C_{i-1,1}$	$C_{i-1,2}$	...	$C_{i-1,j-1}$	$C_{i-1,j}$			
i	$C_{i,1}$	$C_{i,2}$	...	$C_{i,j-1}$				
...	...	...	...					
I-1	$C_{I-1,1}$	$C_{I-1,2}$						
I	$C_{I,1}$							

**Πίνακα 2.2** Σωρευτικό τρίγωνο εξέλιξης ζημιών ανά έτος ατυχήματος και έτος εξέλιξης

Βασιζόμενοι στα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι ο αλγόριθμος της Chain – Ladder επιδιώκει να εκτιμήσει τις μελλοντικές απαιτήσεις που θα επέλθουν στο τμήμα που μένει άδειο στους παραπάνω πίνακες (κίτρινο πλαίσιο) .

### Παρατηρήσεις για τα τρίγωνα εξέλιξης ζημιών:

Με βάση τα τρίγωνα που φαίνονται στους Πίνακες 2.1 και 2.2 ισχύουν τα παρακάτω:

- Στο πρώτο τρίγωνο (Πίνακας 2.1) η διαγώνιος αναπαριστά τις ζημιές που έγιναν κατά την τελευταία περίοδο αναφοράς του τριγώνου και διεκπεραιώθηκαν μέχρι το πέρας της περιόδου αυτής.
- Στο δεύτερο τρίγωνο (Πίνακας 2.2) η διαγώνιος αναπαριστά το σύνολο των ζημιών που έγιναν από την πρώτη περίοδο αναφοράς και διεκπεραιώθηκαν μέχρι και την τελευταία περίοδο αναφοράς.
- Οι ζημιές που βρίσκονται στο τελευταίο έτος εξέλιξης  $I$ , ονομάζονται **τελικές ζημιές** (Ultimate Claims).

### Υποθέσεις του μοντέλου (distribution – free CL model)

Για την ισχύ και εγκυρότητα του μοντέλου χρειάζονται να ληφθούν υπόψη οι παρακάτω υποθέσεις:

- Έστω οι τυχαίες μεταβλητές  $C_{i,j}$  με  $i$  το έτος ατυχήματος ή το ασφαλιστικό έτος και  $j$  το έτος εξέλιξης με  $0 \leq i \leq I$  και  $1 \leq j \leq J$ . Οι  $C_{i,j}$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές για διαφορετικά έτη ατυχήματος  $i$ .
- Υπάρχουν παράγοντες εξέλιξης  $f_0, \dots, f_{J-1} > 0$  τέτοιοι ώστε για όλα τα  $0 \leq i \leq I$  και  $1 \leq j \leq J$  ισχύει ότι:

$$E[C_{i,j}|C_{i,0}, \dots, C_{i,j-1}] = E[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = f_{j-1}C_{i,j-1} \quad (2.2)$$

Οι τυχαίες μεταβλητές  $C_{i,j}$  όπως αναφέρθηκε και παραπάνω παριστάνουν το πλήθος των σωρευτικών ζημιών. Επομένως, για κάθε έτος ατυχήματος  $i$  και το έτος εξέλιξης  $j$  η τυχαία

μεταβλητή  $C_{i,j}$  αντικατοπτρίζει τον αριθμό των αθροιστικών ζημιών που συνέβησαν στο έτος εκείνο.

Επιπλέον, η δεύτερη υπόθεση του μοντέλου μας δίνει έναν τρόπο εκτίμησης της μέσης τιμής των σωρευτικών ζημιών του έτους ατυχήματος  $i$  και του έτους εξέλιξης  $j$  δοθέντων όλων των σωρευτικών ζημιών των προηγούμενων ετών. Εναλλακτικά, για τον υπολογισμό της εκτιμώμενης μέσης τιμής των σωρευτικών απαιτήσεων του έτους ατυχήματος  $i$  και του έτους εξέλιξης  $j$ , χρησιμοποιείται ο παράγοντας  $f_k$  ο οποίος πολλαπλασιαζόμενος με το πλήθος των σωρευτικών απαιτήσεων του προηγούμενου έτους  $j-1$  έχει ως αποτέλεσμα την εκτίμηση της μέσης τιμής των σωρευτικών απαιτήσεων. Ο παράγοντας εξέλιξης ζημιών υπολογίζεται ως εξής:

$$f_{i,j} = \frac{C_{i,j}}{C_{i,j-1}} \quad (2.3)$$

Έτος Ατυχήματος	Έτος Εξέλιξης							
	1	2	...	j-1	j	...	I-1	I-1/I
1	$f_{1,1}$	$f_{1,2}$	...	$f_{1,j-1}$	$f_{1,j}$	...	$f_{1,I-1} = \frac{C_{1,I-1}}{C_{1,I-2}}$	$f_{1,I} = \frac{C_{1,I}}{C_{1,I-1}}$
2	$f_{2,1}$	$f_{2,2}$	...	$f_{2,j-1}$	$f_{2,j}$	...	$f_{2,I-1}$	
...	...	...	...	...	...	...		
i-1	$f_{i-1,1}$	$f_{i-1,2}$	...	$f_{i-1,j-1}$	$f_{i-1,j}$			
i	$f_{i,1}$	$f_{i,2}$	...	$f_{i,j-1}$				
...	...	...	...					
I-1	$f_{I-1,1}$	$f_{I-1,2}$						
I	$f_{I,1}$							

Πίνακας 2.3 Παράγοντες εξέλιξης σωρευτικών ζημιών

#### Παρατηρήσεις του μοντέλου:

- Οι παραπάνω υποθέσεις είναι οι δυο υποθέσεις του μοντέλου της μεθόδου Chain – Ladder (Distribution Free) όπως προτάθηκαν από τον Mack (1993). Αυτές οι δυο υποθέσεις είναι επαρκείς ώστε να εκτιμήσουμε τις αναμενόμενες μελλοντικές απαιτήσεις κατά συνθήκη και ως εκ τούτου να περιγράψουμε τον αλγόριθμο της μεθόδου Chain – Ladder.
- Επιπλέον, η υπόθεση της ανεξαρτησίας μεταξύ των απαιτήσεων, για διαφορετικά έτη ατυχήματος, είναι κοινή παραδοχή σχεδόν σε όλες τις μεθόδους που χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των αποθεμάτων.
- Ακόμα πιο ισχυρές υποθέσεις μπορούμε να κάνουμε για την ακολουθία  $C_{i,0}, C_{i,1}, \dots$ , οι οποίες αποτελούν μια αλυσίδα Markov. Παρατηρούμε ότι:

$$C_{i,j} \prod_{k=0}^{j-1} f_k^{-1}$$



σχηματίζει ένα martingale<sup>1</sup> για  $j \geq 1$ .

- Οι παράγοντες  $f_k$  καλούνται link ratios, παράγοντες εξέλιξης ή παράγοντες Chain – Ladder ή παράγοντες ηλικίας εξέλιξης. Είναι οι σημαντικότεροι παράγοντες της μεθόδου Chain – Ladder γιατί περιγράφουν το πως εξελίσσονται επιτυχώς οι αθροιστικές απαιτήσεις. Η βασική δυσκολία είναι να δοθούν κατάλληλοι εκτιμητές για αυτούς τους παράγοντες. Οι παράγοντες εξέλιξης αυτοί φαίνονται και σχηματικά στον παραπάνω Πίνακα 2.3.

Τα παραπάνω γενικεύονται αν θεωρήσουμε με  $I$  τα έτη ατυχήματος, με  $J$  τα έτη εξέλιξης και με  $D_I = \{C_{i,j}: i + j \leq I, 0 \leq j \leq J\}$  να είναι το σύνολο των παρατηρήσεων στο χρόνο  $I$ . Τότε ο στόχος μας είναι να εκτιμήσουμε το σύνολο  $\bar{D}_I = \{C_{i,j}: i + j > I, 0 \leq j \leq J\}$ .

### Λήμμα 2.1

Κάτω από τις υποθέσεις του μοντέλου που αναφέρθηκαν στην παραπάνω παράγραφο (Υποθέσεις μοντέλου Chain – Ladder) ισχύει το εξής:

$$E[C_{i,j}|D_I] = E[C_{i,j}|C_{i,I-1}] = C_{i,I-1}f_{I-i} \dots f_{j-1} \quad (2.4)$$

για όλα τα  $1 \leq i \leq I$ .

*Απόδειξη:*

Δοθέντος της σχέσης (2.2) και δεδομένου ότι τα διαφορετικά έτη ατυχήματος είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} E[C_{i,j}|D_I] &= E[C_{i,j}|C_{i,0}, \dots, C_{i,I-i}] = \\ &E[E[C_{i,j}|C_{i,j-1}]|C_{i,0}, \dots, C_{i,I-i}] = \\ &f_{j-1}E[C_{i,j-1}|D_I] \end{aligned}$$

Αν συνεχίσουμε τη διαδικασία μέχρι να φτάσουμε στη διαγώνιο  $i + j = I$  αποκτούμε την απαίτηση που ζητάμε. •

Το παραπάνω λήμμα 2.1 μας δίνει έναν αλγόριθμο για την πρόβλεψη των τελικών απαιτήσεων  $C_{i,j}$  δεδομένων των παρατηρήσεων  $D_I$ . Ο συγκεκριμένος αλγόριθμος ονομάζεται **αναδρομικός αλγόριθμος (recursive algorithm)**. Για γνωστούς παράγοντες εξέλιξης  $f_k$ , οι υποχρεώσεις εκκρεμών απαιτήσεων για το έτος ατυχήματος  $I$ , προβλέπονται από τον παρακάτω τύπο:

$$E[C_{i,j}|D_I] - C_{i,I-i} = C_{i,I-i}(f_{I-i} \dots f_{j-1} - 1) \quad (2.5)$$

Η σχέση (2.5) είναι η «καλύτερη εκτίμηση» των αποθεμάτων για το έτος ατυχήματος  $i$  στο χρόνο  $I$  δεδομένων των συνολικών παρατηρήσεων  $D_I$  και των παραγόντων εξέλιξης. •

---

<sup>1</sup> Martingale: είναι μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές (π.χ. στοχαστική διαδικασία) στην οποία σε μια συγκεκριμένη στιγμή στην πραγματοποιηθείσα ακολουθία, η προσδοκία της επόμενης τιμής στην ακολουθία είναι ίση με την παρούσα παρατηρούμενη τιμή, δεδομένης της γνώσης όλων των προηγούμενων παρατηρούμενων τιμών.

Σε θεωρητικό επίπεδο για την εκτίμηση των αποθεμάτων χρησιμοποιείται η κατά συνθήκη αναμενόμενη μέση τιμή (βλέπε σχέση 2.5). Στις πρακτικές εφαρμογές όμως οι παράγοντες εξέλιξης δεν είναι γνωστοί και πρέπει να εκτιμηθούν. Ακολουθως, έχουμε:

$$\hat{f}_j = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} \quad (2.6)$$

Για  $j = 0, \dots, J - 1$ . •

Με τη σχέση (2.6) εκτιμώνται οι παράγοντες εξέλιξης  $f_j$  με βάση το μέσο σταθμισμένο ατομικό παράγοντα εξέλιξης:

$$F_{i,j+1} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

Αντιστοίχως, ο εκτιμητής της Chain – Ladder (CL estimator) για  $E[C_{i,j}|D_I]$  είναι:

$$\hat{C}_{i,j}^{CL} = \hat{E}[C_{i,j}|D_I] = C_{i,I-i} \hat{f}_{I-i} \dots \hat{f}_{j-1} \quad (2.7)$$

για  $i + j > I$ . •

Η σχέση (2.7) είναι ο εκτιμητής της μεθόδου Chain – Ladder και οδηγεί στον αλγόριθμο υπολογισμού των αποθεμάτων βασισμένος στις εκτιμήσεις των παραγόντων εξέλιξης. Αρκετές φορές ο συγκεκριμένος τρόπος εκτίμησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί χωρίς να θεωρήσουμε κατάλληλο στοχαστικό μοντέλο.

Επιπλέον, ορίζουμε  $B_k = \{C_{i,j} : i + j \leq I, 0 \leq j \leq k\} \subseteq D_I$  (2.8) όπου είναι το σύνολο όλων των παρατηρήσεων στο χρόνο  $I$  και συγκεκριμένα, ισχύει:

$$B_J = D_I \quad \bullet$$

## Λήμμα 2.2

Κάτω από τις υποθέσεις του μοντέλου που αναφέρθηκαν στην παραπάνω παράγραφο (Υποθέσεις μοντέλου Chain – Ladder) ισχύουν τα εξής:

(a). Δοθέντος των  $B_j$ , ο  $\hat{f}_j$  είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής για τον  $f_j$ , π.χ.  $E[\hat{f}_j|B_j] = f_j$

Απόδειξη:

$$E[\hat{f}_j|B_j] = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} E[C_{i,j+1}|B_j]}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = \frac{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j} f_j}{\sum_{i=0}^{I-j-1} C_{i,j}} = f_j$$

Όπου και αυτομάτως αποδεικνύεται η συνθήκη της αμεροληψίας.

(b). Ο  $\hat{f}_j$  είναι (άνευ όρων) αμερόληπτος για τον  $f_j$ , π.χ.  $E[\hat{f}_j] = f_j$

Απόδειξη:

Από την προηγούμενη απόδειξη προκύπτει άμεσα ότι  $E[\hat{f}_j] = f_j$

(c). Ισχύει ότι  $E[\hat{f}_0 \dots \hat{f}_j] = E[\hat{f}_0] \dots E[\hat{f}_j]$ , δηλαδή  $\hat{f}_0, \dots, \hat{f}_{j-1}$  είναι ασυσχέτιστοι

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} E[\hat{f}_0 \dots \hat{f}_j] &= E[E[\hat{f}_0 \dots \hat{f}_j | B_j]] = E[\hat{f}_0 \dots \hat{f}_{j-1} E[\hat{f}_j | B_j]] = E[\hat{f}_0 \dots \hat{f}_{j-1}] f_j \\ &= E[\hat{f}_0 \dots \hat{f}_{j-1}] E[\hat{f}_j] \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία οδηγούμαστε στην ζητούμενη απαίτηση (c).

(d). Δοθέντος του  $C_{i,I-i}$ , ο  $\hat{C}_{i,J}^{CL}$  είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής για  $E[C_{i,J} | D_I] = E[C_{i,J} | C_{i,I-i}]$ , δηλαδή  $E[\hat{C}_{i,J}^{CL} | C_{i,I-i}] = E[C_{i,J} | D_I]$

Απόδειξη:

Για να αποδείξουμε την αμεροληψία έχουμε:

$$\begin{aligned} E[\hat{C}_{i,J}^{CL} | C_{i,I-i}] &= E[C_{i,I-i} \hat{f}_{I-i} \dots \hat{f}_{j-2} \hat{f}_{j-1} | C_{i,I-i}] \\ &= E[C_{i,I-i} \hat{f}_{I-i} \dots \hat{f}_{j-2} E[\hat{f}_{j-1} | B_{j-1}] | C_{i,I-i}] = f_{j-1} E[\hat{C}_{i,J-1}^{CL} | C_{i,I-i}] \end{aligned}$$

Συνεχίζοντας τη διαδικασία έχουμε:

$$E[\hat{C}_{i,J}^{CL} | C_{i,I-i}] = C_{i,I-i} f_{I-i} \dots f_{j-1} = E[C_{i,J} | D_I]$$

(e).  $\hat{C}_{i,J}^{CL}$  είναι (άνευ όρων) αμερόληπτος εκτιμητής για  $E[C_{i,J}]$ , π.χ.  $E[\hat{E}_{i,J}^{CL}] = E[C_{i,J}]$ .

Απόδειξη:

Από την προηγούμενη απόδειξη προκύπτει άμεσα  $E[\hat{E}_{i,J}^{CL}] = E[C_{i,J}]$ .

### Μειονεκτήματα της μεθόδου Chain – Ladder

Αν και όπως αναφέρθηκε και παραπάνω η μέθοδος Chain – Ladder είναι μια ευρέως διαδεδομένη μέθοδος και οι περισσότεροι αναλογιστές χρησιμοποιούν τη μέθοδο αυτή για τον υπολογισμό των αποθεμάτων των ασφαλιστικών εταιρειών, παρόλα αυτά το μοντέλο παρουσιάζει κάποια μειονεκτήματα.

Ένα από τα αρνητικά σημεία της μεθόδου είναι το πλήθος των παραμέτρων που απαιτούνται για τον υπολογισμό του αποθέματος. Ο όγκος των δεδομένων που χρειάζεται κάθε φορά ο αναλογιστής να διαχειριστεί είναι αρκετά μεγάλος και αυτό κάποιες φορές μπορεί να δυσκολέψει την εξαγωγή αποτελεσμάτων, γιατί ενδεχομένως δεν υπάρχουν διαθέσιμα όλα τα στοιχεία που απαιτούνται για να πραγματοποιηθεί η διεργασία. Παραδείγματος χάρη, αν μια ασφαλιστική εταιρία δημιουργήσει μια καινούρια επιχειρησιακή γραμμή αυτή αυτομάτως δεν θα μπορεί να μοντελοποιηθεί με σκοπό την εξαγωγή αποθεμάτων από τη μέθοδο Chain – Ladder καθώς δεν θα υπάρχουν διαθέσιμα ιστορικά δεδομένα.

Επιπλέον, η μέθοδος της τριγωνικής εξέλιξης ζημιών δεν παρέχει πληροφορίες σχετικά με τη μεταβλητότητα του αποτελέσματος, δημιουργώντας έτσι μια αβεβαιότητα για τις μελλοντικές εκτιμήσεις των απαιτήσεων. Ακόμα μειονέκτημα αποτελεί η μεγάλη επίδραση που ασκούν οι ακραίες παρατηρούμενες τιμές στα αποτελέσματα. Τα αποτελέσματα που δίνει το μοντέλο μας επηρεάζονται αισθητά από τις ακραίες τιμές που μπορεί να παρατηρηθούν.

Παραδείγματος χάρη, αν σε κάποιο έτος προκύψει μια αρκετά μεγαλύτερη αποζημίωση από τις συνηθισμένες λόγω ενός ακραίου γεγονότος που μπορεί να έχει συμβεί, η εκτίμηση του αποθέματος θα αλλάξει αισθητά. Συνεπώς, τέτοιες ακραίες παρατηρήσεις θα πρέπει να εντοπίζονται και να μην λαμβάνονται υπόψη στον υπολογισμό του αποθέματος. Αντίστοιχα αυτό θα μπορούσε να συμβεί στην περίπτωση που τύχαινε να μην υπάρξουν μεγάλες απαιτήσεις κατά ένα έτος εξέλιξης πράγμα που ξεφεύγει από την κανονικότητα λόγω πάλι κάποιων εξωτερικών παραγόντων. Εξαιτίας αυτού, υπάρχει περίπτωση να εξαιρεθούν και αρκετά έτη τα οποία χαρακτηρίζονται ως μη αντιπροσωπευτικά για να προβλέψουν το τι αναμένεται να συμβεί στο μέλλον. Όταν υπολογίζουμε παράγοντες εξέλιξης είναι προτιμότερο να αγνοούνται πηλίκια που θεωρούνται ακραίες τιμές και δεν κυμαίνονται σχετικά γύρω από κάποια τιμή.

Τέλος, λόγω ότι η υπάρχει πληθώρα στοχαστικών μοντέλων chain-ladder, ενδέχεται να προκύψουν προβλήματα πρόβλεψης. Αυτό συμβαίνει καθώς το κάθε διαφορετικό μοντέλο που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των απαιτήσεων βασίζεται σε διαφορετικές υποθέσεις. Γι' αυτό το λόγο και πολλοί αναλογιστές προτιμούν να υπολογίζουν τα αποθέματα του κάθε υπό-χαρτοφυλακίου με διαφορετικές μεθόδους αποθεματοποίησης. Παραδείγματος χάρη, η μέθοδος Chain – Ladder να προτιμάτε για την εκτίμηση των αποθεμάτων στον κλάδο αυτοκινήτου αλλά να μην θεωρείται εξίσου κατάλληλη για την εκτίμηση αποθεμάτων για τον κλάδο πυρός. Αυτό προφανώς, με το πέρασ των ετών μπορεί να αλλάξει και κάποια μέθοδος που θεωρούταν κατάλληλη για κάποια επιχειρησιακή γραμμή λόγω της διαφορετικότητας των δεδομένων να μην θεωρείται πλέον. Γι' αυτό υπάρχουν διάφορες μέθοδοι αποθεματοποίησης η κάθε μια έχοντας τα θετικά και τα αρνητικά της και η κάθε μια να εφαρμόζει και να θεωρείται κατάλληλη σε διαφορετικές ενδεχομένως επιχειρησιακές γραμμές όπως θα δούμε και παρακάτω.

### **2.1.2 Αριθμητικό παράδειγμα**

Στο παρόν παράδειγμα παρατίθενται τυχαία αριθμητικά δεδομένα που τείνουν να μοιάσουν σε πραγματικά. Η άσκηση έχει εκτελεστεί με δύο τρόπος. Ο πρώτος τρόπος έχει γίνει στο excel και ο δεύτερος τρόπος έχει γίνει χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού R. Οποιοσδήποτε υπολογισμός αναλύεται κάτω από κάθε πίνακα. Η άσκηση εκτελέστηκε με δύο τρόπους για να παρατηρήσουμε τυχόν διαφορές που θα διαπιστωθούν. Ο σκοπός του παραδείγματος αυτού είναι να γίνει μια πρώτη περιγραφή του αλγορίθμου της μεθόδου Chain – Ladder. Αναλυτικό παράδειγμα με πραγματικά δεδομένα θα συμπεριληφθεί στο τελευταίο κεφάλαιο αυτής της εργασίας, το οποίο παράδειγμα θα αναφέρεται σε συγκεκριμένη επιχειρησιακή γραμμή και πως αυτή χωρίζεται σε υπό-χαρτοφυλάκια για να γίνει μια πιο σωστή εκτίμηση του αποθέματος.

## 1<sup>ος</sup> τρόπος: Προσέγγιση μέσω Excel

Έστω η ασφαλιστική εταιρία XYZ που διαθέτει ένα ασφαλιστικό πρόγραμμα για την ασφάλιση αυτοκινήτου. Στον πίνακα 1 φαίνονται τα ποσά σε χιλιάδες ευρώ που έχει πληρώσει η ασφαλιστική εταιρία XYZ ως αποζημιώσεις για ζημιές που έχουν προκύψει από την ασφάλιση αυτοκινήτων.

**Πίνακας 1: Μη αθροιστικό τρίγωνο πληρωμών**

Έτος Ατυχήματος	Έτη εξέλιξης ζημιών					
	0	1	2	3	4	5
2013	543	123	97	17	6	1
2014	632	332	179	15	4	
2015	1312	820	122	11		
2016	1395	250	32			
2017	1421	102				
2018	1341					

Για την κατανόηση του πίνακα 1 δίνεται ως παράδειγμα ότι το ποσό των 543.000 ευρώ (πρώτη γραμμή πρώτη στήλη) αναφέρεται σε αποζημιώσεις που έχει δώσει η ασφαλιστική XYZ εντός του 2013 για ζημιές που συνέβησαν το 2013. Το ποσό των 123.000 ευρώ (πρώτη γραμμή δεύτερη στήλη) αναφέρεται σε αποζημιώσεις που έχει δώσει η ασφαλιστική XYZ εντός του 2014 αλλά για ζημιές που συνέβησαν το 2013. Αντίστοιχα, το ποσό των 32.000 ευρώ (τέταρτη γραμμή, τρίτη στήλη) αναφέρεται σε αποζημιώσεις που έδωσε η ασφαλιστική το 2018 για ζημιές που έγιναν το 2016 και ούτω καθεξής.

Στο πίνακα 2 φαίνεται το αθροιστικό τρίγωνο εξέλιξης πληρωμών, δηλαδή ο τρόπος με τον οποίο εξελίσσονται οι αποζημιώσεις με το πέρασμα των χρόνων. Η διαγώνιος του τριγώνου όπου και οι αποζημιώσεις είναι με έντονο χρώμα δείχνουν τι ακριβώς έχει πληρώσει η ασφαλιστική XYZ για ζημιές που έχουν συμβεί από το έτος 2013 – 2018. Αυτό σημαίνει ότι για το έτος 2013 οι συνολικές αποζημιώσεις που έχει δώσει η ασφαλιστική εταιρία ανέρχονται στο ποσό των 787.000 ευρώ. Το ποσό αυτό υπολογίζεται αν προσθέσουμε όλες τις αποζημιώσεις που έχει δώσει η ασφαλιστική XYZ με το πέρασμα των ετών, δηλαδή  $543+123+97+17+6+1=787$ . Για το έτος 2014 οι συνολικές αποζημιώσεις ανέρχονται στο ποσό του 1.162.000 ευρώ, για το 2015 σε 2.265.000 ευρώ και ούτω καθεξής. Με αντίστοιχο τρόπο υπολογίζονται και για τα υπόλοιπα έτη οι σωρευτικές αποζημιώσεις.

**Πίνακας 2: Αθροιστικό τρίγωνο πληρωμών**

Έτος Ατυχήματος	Έτη εξέλιξης ζημιών					
	0	1	2	3	4	5
2013	543	666	763	780	786	<b>787</b>
2014	632	964	1143	1158	<b>1162</b>	
2015	1312	2132	2254	<b>2265</b>		
2016	1395	1645	<b>1677</b>			
2017	1421	<b>1523</b>				
2018	<b>1341</b>					

Ο σκοπός των μεθόδων αποθεματοποίησης είναι να συμπληρωθεί το κενό κάτω μέρος του πίνακα. Αυτό το μέρος του πίνακα αναφέρεται σε ζημιές που έχουν ήδη συμβεί τα προηγούμενα έτη αλλά δεν έχουν κλείσει ακόμα. Επομένως, θα πρέπει να γίνει κάποια

εκτίμηση για το ποσό των αποζημιώσεων που θα κληθεί να δώσει η ασφαλιστική στα επόμενα έτη για ζημιές που ήδη έχουν συμβεί. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται κάποιοι συντελεστές εξέλιξης ζημιών. Οι συντελεστές αυτοί παρουσιάζονται στον πίνακα 3.

**Πίνακας 3: Συντελεστές εξέλιξης ζημιών ανά έτος**

Έτος Ατυχήματος	1/0	2/1	3/2	4/3	5/4
2013	1,226519	1,145646	1,022280	1,007692	1,001272
2014	1,525316	1,185684	1,013123	1,003454	
2015	1,625	1,057223	1,004880		
2016	1,17921	1,019452			
2017	1,071780				
<b>Μέσος όρος</b>	1,3255655	1,1020016	1,013428015	1,00557327	1,001272265
<b>Γεωμετρικός μέσος</b>	1,3089319	1,099989	1,013403102	1,005571037	1,001272265

Οι συντελεστές εξέλιξης ζημιών είναι αυτοί που μαζί με τα ιστορικά δεδομένα αποζημιώσεων θα μας δώσουν τις εκτιμήσεις των αποθεμάτων που θα πρέπει να κρατεί η ασφαλιστική εταιρία για τις ζημιές που έχουν ήδη συμβεί τα προηγούμενα έτη. Οι συντελεστές εξέλιξης όπως έχει γραφεί και στα προηγούμενα κεφάλαια είναι το πηλίκιο των αθροιστικών αποζημιώσεων δυο διαδοχικών ετών. Για την κατανόηση αυτού έχουμε:

$$1,226519 = \frac{666}{543}$$

$$1,145646 = \frac{763}{666}$$

$$1,022280 = \frac{780}{763}$$

$$1,007692 = \frac{786}{780}$$

$$1,001272 = \frac{787}{786}$$

Αντίστοιχα υπολογίζονται και οι υπόλοιποι συντελεστές εξέλιξης για τα υπόλοιπα έτη. Ακολουθώντας, βρίσκουμε τον μέσο όρο των συντελεστών αυτών (κάθετα) όπως επίσης και τον γεωμετρικό μέσο. Μπορούν να υπολογιστούν και άλλα στατιστικά μέτρα όπως ο μέσος όρος των 3 τελευταίων ετών. Για τους σκοπούς της παρούσας άσκησης θα εργαστούμε μόνο με το μέσο όρο και τον γεωμετρικό μέσο. Παρατηρούμε ότι ύστερα από την εύρεση του μέσου όρου και του γεωμετρικού μέσου λόγω ότι οι τιμές των δυο μέτρων είναι αρκετά κοντά θα εργαστούμε μόνο με τον μέσο όρο. Η απόφαση για το ποιο στατιστικό μέτρο θα επιλέξουμε ως συντελεστή εξέλιξης είναι καθαρά υποκειμενική.

Στον πίνακα 4 βρίσκονται οι τελικές εκτιμήσεις των αθροιστικών πληρωμών στα έτη εξέλιξης με συντελεστή εξέλιξης τον μέσο όρο. Επιπλέον, στον πίνακα 4 μπορεί να αποσαφηνιστεί ποιο είναι το μέγεθος του ποσού σε χιλιάδες ευρώ που έχει ήδη πληρωθεί και πόσα χρήματα

απαιτείται η ασφαλιστική εταιρία να κρατήσει ακόμα για τις ζημιές των προηγούμενων ετών, δηλαδή το ύψος των αποθεμάτων που θα χρειαστεί.

Πίνακας 4: Εκτιμήσεις αθροιστικών πληρωμών στα έτη εξέλιξης με βάση το μέσο όρο								
Έτος ατυχήματος	0	1	2	3	4	Εκτιμήσεις Τελικών Ζημιών	Πληρωμένες Ζημιές	Εκτίμηση Αποθέματος
2013	543	666	763	780	786	<b>787</b>	<b>787</b>	-
2014	632	964	1.143	1.158	<b>1.162</b>	<b>1.163</b>	<b>1.162</b>	1
2015	1.312	2.132	2.254	<b>2.265</b>	<b>2.278</b>	<b>2.281</b>	<b>2.265</b>	16
2016	1.395	1.645	<b>1.677</b>	<b>1.700</b>	<b>1.709</b>	<b>1.711</b>	<b>1.677</b>	34
2017	1.421	<b>1.523</b>	<b>1.678</b>	<b>1.701</b>	<b>1.710</b>	<b>1.713</b>	<b>1.523</b>	190
2018	<b>1.341</b>	<b>1.778</b>	<b>1.959</b>	<b>1.985</b>	<b>1.996</b>	<b>1.999</b>	<b>1.341</b>	658
Σύνολο						<b>9.654</b>	<b>8.755</b>	899

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω ο σκοπός της άσκησης είναι να συμπληρώσουμε το κάτω μέρος του τριγώνου. Το τμήμα αυτό που φαίνεται με κόκκινα γράμματα, έχει συμπληρωθεί πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά το σωρευτικό ποσό αποζημιώσεων με τον αντίστοιχο συντελεστή εξέλιξης. Παραδείγματος χάρη έχουμε τα εξής:

$$2278 = 2265 \times 1,005573$$

$$1709 = 1677 \times 1,013428 \times 1,005573$$

και αντίστοιχα τα υπόλοιπα βρίσκονται με τον ίδιο τρόπο.

Οι εκτιμήσεις των τελικών ζημιών προκύπτουν ως εξής:

$$1163 = 1162 \times 1,001272265$$

$$2281 = 2265 \times 1,001272265 \times 1,00557327$$

$$1711 = 1677 \times 1,001272265 \times 1,00557327 \times 1,013428015$$

$$1713 = 1523 \times 1,001272265 \times 1,00557327 \times 1,013428015 \times 1,1020016$$

$$1999 = 1341 \times 1,001272265 \times 1,00557327 \times 1,013428015 \times 1,1020016 \times 1,3255655$$

Η στήλη που αναφέρεται στις πληρωμένες ζημιές είναι ίση με τη διαγώνιο του αθροιστικού τριγώνου πληρωμών, ενώ η στήλη με τις εκτιμήσεις προκύπτει όπως περιγράφεται και από πάνω χρησιμοποιώντας την διαγώνιο των σωρευτικών ζημιών πολλαπλασιαζόμενη κατάλληλα με τους συντελεστές εξέλιξης. Η εκτίμηση του αποθέματος είναι η διαφορά των τελικών εκτιμήσεων ζημιών με τις πληρωμένες ζημιές. Τελικώς, αυτά είναι τα ποσά που θα πρέπει να κρατάει η ασφαλιστική εταιρία για προγενέστερες ζημιές.

## 2<sup>ος</sup> τρόπος: Προσέγγιση μέσω R-project

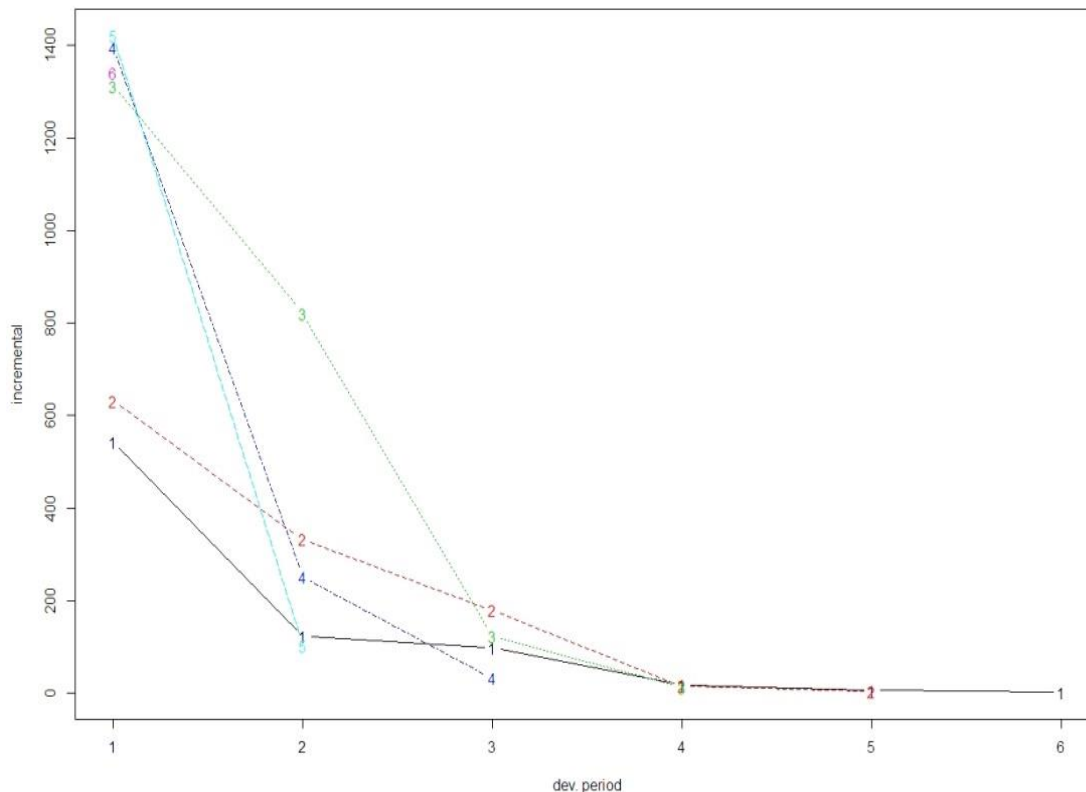
Σημειώνεται ότι για την εκτέλεση αυτού του παραδείγματος έχουν χρησιμοποιηθεί τα ίδια προσauxητικά δεδομένα που έχουμε θεωρήσει και στο παραπάνω παράδειγμα που εκτελέστηκε στο Excel. Το παράδειγμα εκτελέστηκε με τον αλγόριθμο «MackChainLadder» όπως αυτός έχει οριστεί κ έχει αναλυθεί από τον Mack. Οι πίνακες έχουν εξαχθεί ακριβώς με την ίδια μορφή που εξαγονται στην R-console. Σημειώνεται ότι η πρώτη χρονιά είναι το 2013.

Επιπλέον, η τιμή στο κελί (1,1) 543 αναφέρεται σε ζημιές που έγιναν το 2013 και πληρώθηκαν το 2013. Αντιστοίχως, η τιμή στο κελί (1,6) 1 αναφέρεται σε ζημιές που έγιναν το 2013 αλλά πληρώθηκαν το 2018. Συνεπώς έχουμε τα παρακάτω:

- **Προσαυξητικές Απαιτήσεις (Incremental Claims)**

origin	dev					
	1	2	3	4	5	6
1	543	123	97	17	6	1
2	632	332	179	15	4	NA
3	1312	820	122	11	NA	NA
4	1395	250	32	NA	NA	NA
5	1421	102	NA	NA	NA	NA
6	1341	NA	NA	NA	NA	NA

**Πίνακας 1:** Προσαυξητικές Απαιτήσεις



**Γράφημα 1:** Απεικόνιση προσαυξητικών απαιτήσεων

Το παραπάνω γράφημα (Γράφημα 1) δείχνει τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσονται οι προσαυξητικές απαιτήσεις.

Η κάθε γραμμή του γραφήματος αναφέρεται σε κάθε έτος ατυχήματος. Η γραμμή 1 αναφέρεται στο έτος ατυχήματος 2013, η γραμμή 2 στο έτος ατυχήματος 2014, η γραμμή 3 στο έτος ατυχήματος 2015 και ούτω καθεξής.

Παρατηρούμε και από το γράφημα παραπάνω ότι οι προσαυξητικές απαιτήσεις ξεκινούν από μια σχετικά μεγάλη αρχική τιμή και τείνουν στο 0 με το πέρας των ετών.

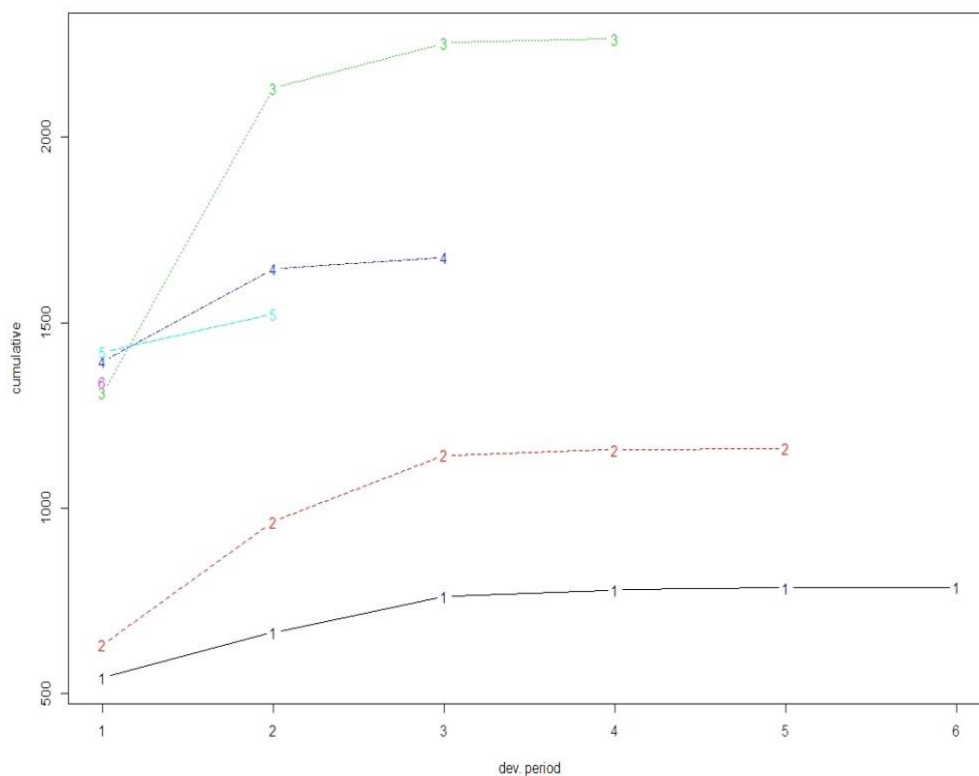


- Σωρευτικές Απαιτήσεις (Cumulative Claims)

	dev					
origin	1	2	3	4	5	6
1	543	666	763	780	786	787
2	632	964	1143	1158	1162	NA
3	1312	2132	2254	2265	NA	NA
4	1395	1645	1677	NA	NA	NA
5	1421	1523	NA	NA	NA	NA
6	1341	NA	NA	NA	NA	NA

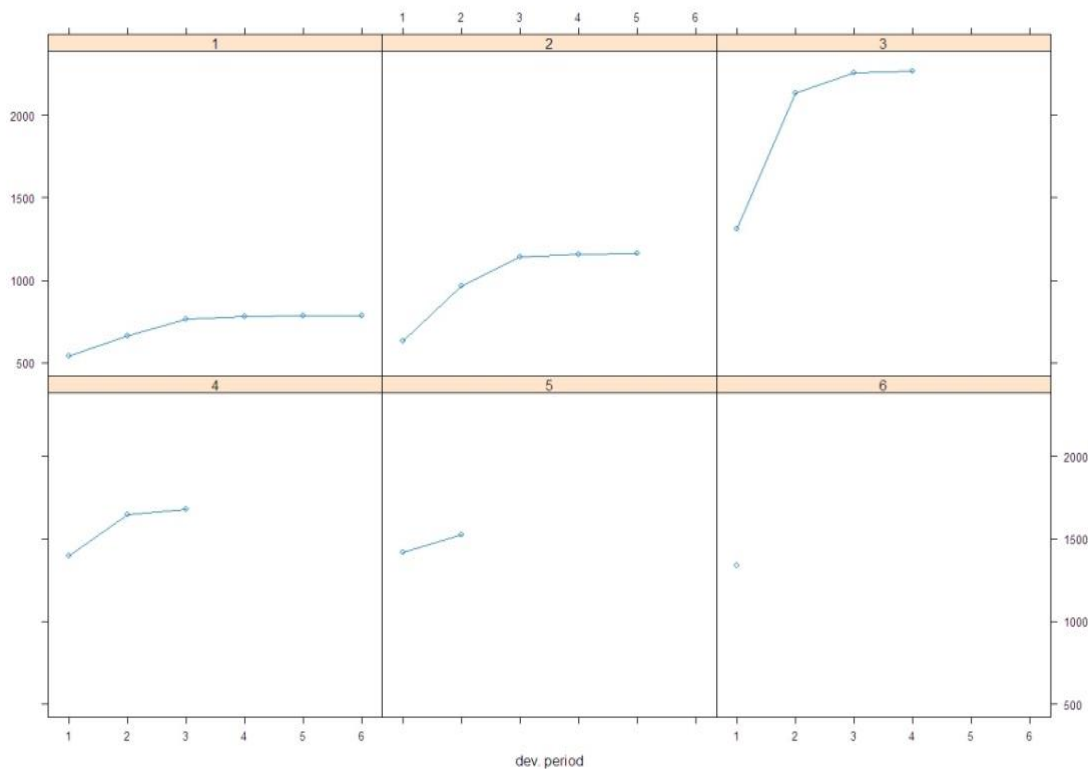
**Πίνακας 2:** Σωρευτικές απαιτήσεις

Αντίστοιχα και σε αυτό το γράφημα (Γράφημα 2) βλέπουμε την εξέλιξη των σωρευτικών ζημιών. Παρατηρούμε όπως φαίνεται και από το γράφημα ότι η γραμμή 3 δηλαδή το έτος 2015 έχουμε μια πιο έντονη αύξηση ζημιών συγκριτικά με τα άλλα έτη. Πολλοί είναι οι παράγοντες θα μπορούσαν να είχαν συντελέσει στην αύξηση αυτή. Στο παράδειγμα που θα γίνει στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο αυτής της εργασίας θα αναλυθούν εκτενέστερα τέτοιου τύπου φαινόμενα.



**Γράφημα 2:** Απεικόνιση σωρευτικών απαιτήσεων

Στο γράφημα 3 είναι η ίδια εικόνα με το γράφημα 2 όπου απεικονίζονται και πάλι οι σωρευτικές απαιτήσεις και πως αυτές εξελίσσονται αλλά χωρισμένες σε έτη ατυχήματος.



**Γράφημα 3:** Απεικόνιση σωρευτικών απαιτήσεων ανά έτος

- Τα αποτελέσματα για το σωρευτικό τρίγωνο ζημιών μετά την εφαρμογή της μεθόδου Chain Ladder όπως προτάθηκε από τον Mack. Η R έχει τη δυνατότητα με το πακέτο «ChainLadder» να κάνει όλους τους υπολογισμούς δίνοντας ως εισαγόμενα δεδομένα το τρίγωνο με τις απαιτήσεις είτε σε μορφή προσαυξητικών απαιτήσεων είτε σε μορφή σωρευτικών απαιτήσεων. Για να τρέξει όμως το μοντέλο του Mack όπως είναι σχεδιασμένο στην R είναι απαραίτητο οι απαιτήσεις να είναι σωρευτικές. Γι αυτό το λόγο ως εισαγόμενο στοιχείο δίνουμε τις προσαυξητικές και ύστερα με τις κατάλληλες εντολές υπολογίζεται ο πίνακας με τις σωρευτικές απαιτήσεις ο οποίος και ακολούθως χρησιμοποιείται για να γίνουν οι απαραίτητοι υπολογισμοί που θα δούμε παρακάτω.

`MackChainLadder(Triangle = cumulative, est.sigma = "Mack")`

	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E	CV(IBNR)
1	787	1.000	787	0.00	0.00	NaN
2	1,162	0.999	1,163	1.48	1.48	1.000
3	2,265	0.994	2,280	14.58	6.92	0.475
4	1,677	0.983	1,705	28.24	15.84	0.561
5	1,523	0.911	1,672	148.81	119.25	0.801
6	1,341	0.697	1,924	582.65	390.39	0.670

**Πίνακας 3:** Συνολικά αποτελέσματα

Η στήλη με το όνομα «Latest» μας δείχνει τη διαγώνιο του σωρευτικού τριγώνου, δηλαδή το πώς έχουν εξελιχθεί οι ζημιές μέχρι σήμερα. Η στήλη «Dev.To.Date» μας δείχνει το ποσοστό εξέλιξης των ζημιών. Συνεπώς βλέπουμε ότι οι ζημιές που συνέβησαν το 2013 που είναι και το πρώτο έτος για το οποίο έχουμε δεδομένα έχουν εξελιχθεί πλήρως. Αντιθέτως για το έτος 2018 οι ζημιές εκτιμάται ότι έχουν εξελιχθεί κατά 69,7% και έχουν ακόμα IBNR 582,65. Αυτό το IBNR είναι το απόθεμα που πρέπει να κρατήσει η εταιρία για ζημιές που συνέβησαν το 2018. Το IBNR έχει υπολογιστεί αν από το «Ultimate» που αποτελεί την εκτίμηση για τις τελικές ζημιές αφαιρέσουμε τη στήλη «Latest» που αποτελεί τις πληρωμένες ως τώρα ζημιές.

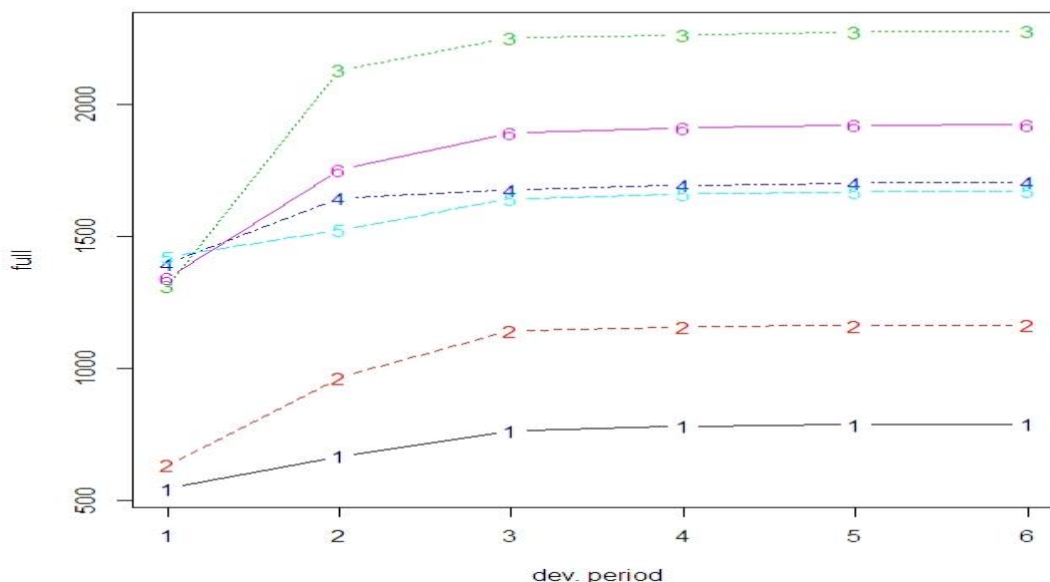
- Συνολικά οι ζημιές επισυμβάσες και εκτιμώμενες (με κόκκινα γράμματα) όπως αυτές υπολογίστηκαν σύμφωνα με το μοντέλο Chain Ladder του Mack είναι:

	dev					
origin	1	2	3	4	5	6
1	543	666.000	763.000	780.000	786.000	<b>787.000</b>
2	632	964.000	1143.000	1158.000	<b>1162.000</b>	<b>1163.478</b>
3	1312	2132.000	2254.000	<b>2265.000</b>	<b>2276.687</b>	<b>2279.584</b>
4	1395	1645.000	<b>1677.000</b>	<b>1694.334</b>	<b>1703.077</b>	<b>1705.244</b>
5	1421	<b>1523.000</b>	<b>1644.119</b>	<b>1661.113</b>	<b>1669.685</b>	<b>1671.809</b>
6	<b>1341</b>	<b>1752.429</b>	<b>1891.793</b>	<b>1911.348</b>	<b>1921.210</b>	<b>1923.655</b>

**Πίνακας 4:** Συνολικές ζημιές επισυμβάσες και εκτιμώμενες

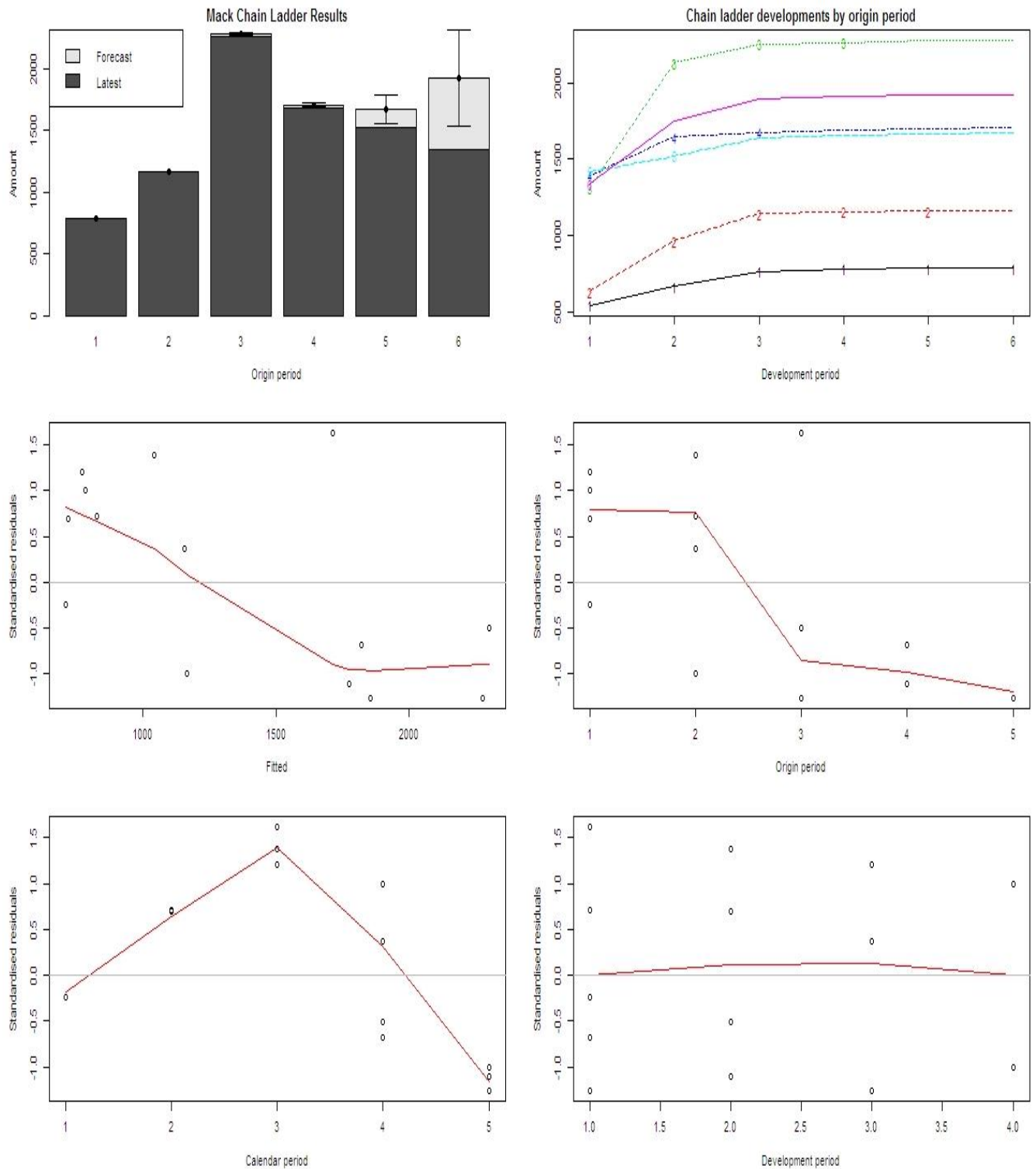
Με έντονα γράμματα φαίνεται η διαγώνιος του τριγώνου.

Στο γράφημα 4 υπάρχει αναλυτικά και η απεικόνιση των παραπάνω μεγεθών του παραπάνω πίνακα.



**Γράφημα 4:** Απεικόνιση σωρευτικών και εκτιμώμενων μελλοντικών απαιτήσεων (συνολικό τρίγωνο)

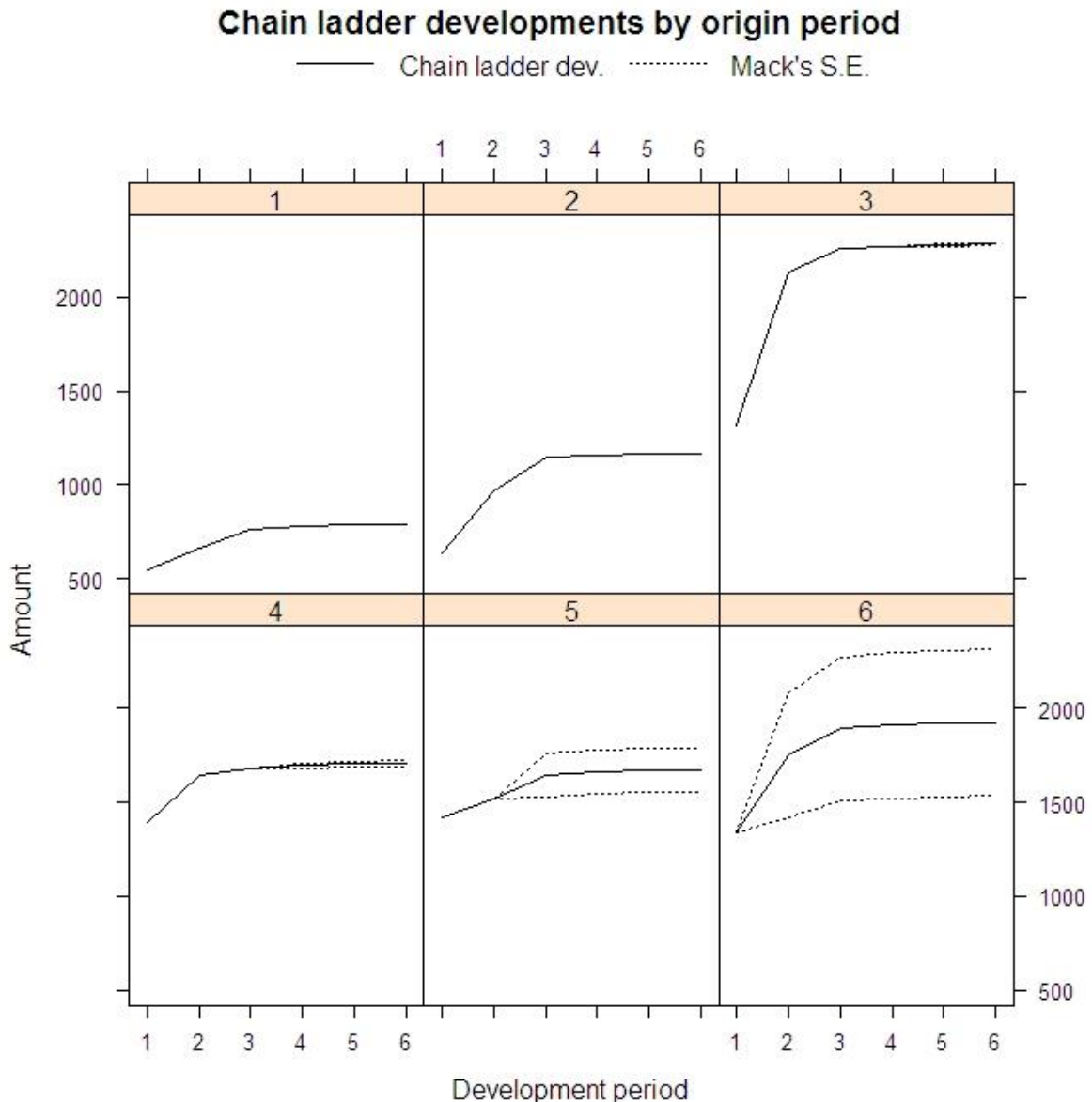
Στο πίνακα που ακολουθεί (γράφημα 5) φαίνονται συνοπτικά σε ξεχωριστά γραφήματα όλα τα παραγόμενα αποτελέσματα από την εκτέλεση του παραδείγματος αυτού στην R.



**Γράφημα 5:** Συνοπτικά αποτελέσματα

Στο γράφημα 6 απεικονίζονται για κάθε έτος ξεχωριστά η εξέλιξη που θα έχουν οι ζημιές εμπεριεχομένων των μελλοντικών εκτιμήσεων καθώς και των τυπικών σφαλμάτων.

Παρατηρείται ότι στα τρία πρώτα έτη ατυχήματος (γράφημα 1: 2013, γράφημα 2: 2014, γράφημα 3: 2015) οι εκτιμήσεις μας έχουν πολύ μικρά τυπικά σφάλματα, δηλαδή είναι σχεδόν βέβαιο ότι η κατανομή των ζημιών θα έχει την ακόλουθη πορεία. Στα έτη ατυχήματος (γράφημα 4: 2016, γράφημα 5: 2017, γράφημα 6: 2018) τα διαστήματα μεγαλώνουν και φαίνεται πόσο μπορεί να αποκλίνουν τελικά οι εκτιμήσεις που κάνουμε με την πραγματικότητα που θα έρθει. Ειδικά στο τελευταίο έτος ατυχήματος παρατηρούμε ότι είναι πολύ μεγάλο το εύρος του διαστήματος της εκτίμησής μας και αυτό γιατί δεν έχουμε παρακολουθήσει καθόλου την εξέλιξη των ζημιών αυτών παρά μόνο πως εξελίχθηκαν στο έτος που συνέβησαν το 2018.



**Γράφημα 6:** Απεικόνιση εξέλιξης εμπεριεχομένων των εκτιμήσεων και των σφαλμάτων

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται κ η διαφορά των εκτιμήσεων ανάλογα με το που γίνονται οι υπολογισμοί. Η διαφορά αυτή οφείλεται στο γεγονός ότι ως παράγοντας εξέλιξης στο Excel έχει χρησιμοποιηθεί ο αριθμητικός μέσος ενώ ως παράγοντας εξέλιξης στη R έχει χρησιμοποιηθεί ο weighted average.

Πληρωμένες Ζημιές	Εκτιμήσεις Τελικών Ζημιών Excel	Εκτίμηση Αποθέματος Excel	Εκτιμήσεις Τελικών Ζημιών R	Εκτίμηση Αποθέματος R
787	787	-	787	-
1.162	1.163	1	1.163	1
2.265	2.281	16	2.280	15
1.677	1.711	34	1.705	28
1.523	1.713	190	1.672	149
1.341	1.999	658	1.924	583
8.755	9.654	899	9.531	776

Πίνακας 5: Εκτιμήσεις αποθεμάτων

Συνοπτικά έχουμε:

	Totals
Latest:	8,755.00
Dev:	0.92
Ultimate:	9,530.77
IBNR:	775.77
Mack.S.E	417.90
CV(IBNR):	0.54

Το παραπάνω πινακάκι μας δείχνει ότι συνολικά έχουν πληρωθεί 8.755.000 ευρώ. Εκτιμάται ότι οι ζημιές θα εξελιχθούν και το ποσό αυτό θα φτάσει στα 9.530.000 ευρώ. Υπολογίζεται ότι οι ζημιές έχουν εξελιχθεί κατά 92% και ότι για απόθεμα η εταιρία θα πρέπει να κρατήσει το ποσό των 775.770 ευρώ για να είναι σε θέση να καλύψει τις ζημιές που θα εξελιχθούν.

Τέλος, αναφέρεται ότι οι παράγοντες εξέλιξης όπως αυτοί υπολογίστηκαν και χρησιμοποιήθηκαν στο μοντέλο του Mack (Παράγοντες εξέλιξης R) είναι:

Παράγοντες εξέλιξης με βάση το weighted average						
	1,306807	1,079527	1,010337	1,00516	1,001272	1
Παράγοντες εξέλιξης με βάση το Μέσο όρο	1,325566	1,102002	1,013428	1,005573	1,001272	

Οι παράγοντες αυτοί υπολογίστηκαν με βάση τον τύπο του weighted average όπως αυτός ορίζεται στο μοντέλο του Mack και ο οποίος είναι:

$$f_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}}$$

Αντίστοιχα, στο παραπάνω πίνακα βλέπουμε και τους παράγοντες εξέλιξης όπως υπολογίστηκαν στο excel. Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίστηκαν οι παράγοντες εξέλιξης στο excel έχει αναλυθεί στο προηγούμενο παράδειγμα.

Οι διαφορετικές εκτιμήσεις των αποθεμάτων όπως αναφέρθηκε και σε προηγούμενη ενότητα οφείλονται στους διαφορετικούς παράγοντες εξέλιξης που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των αποθεμάτων. Αναφέρεται ότι η επιλογή του παράγοντα εξέλιξης είναι καθαρά

υποκειμενική. Το R – project έχει ως προκαθορισμένη επιλογή για παράγοντα εξέλιξης το σταθμισμένο μέσο (weighted average).

## 2.2 Bornhuetter – Ferguson (BF) Method

Η μέθοδος Bornhuetter and Ferguson είναι και εκείνη μια από τις μεθόδους αποθεματοποίησης που χρησιμοποιείται ευρέως στις ασφαλιστικές εταιρίες. Όπως και οι άλλες μέθοδοι αποθεματοποίησης στοχεύει στο να εκτιμήσει επισυμβάσεις αλλά μη αναφερόμενες ζημιές (IBNR). Η Bornhuetter and Ferguson μέθοδος είναι γενικά μια πολύ ισχυρή και ισορροπημένη μέθοδος δεδομένου ότι δεν χρησιμοποιεί ακραίες παρατηρήσεις για την εκτίμηση των αποθεμάτων. Συνήθως είναι μια μέθοδος που χρησιμοποιείται για τους υπολογισμούς στις γενικές ασφαλίσεις και στις ασφαλίσεις υγείας. Η συγκεκριμένη μέθοδος έγινε γνωστή και δημοσιεύτηκε στο γνωστό άρθρο «The Actuary and IBNR» από τους Bornhuetter and Ferguson (1972), 40 χρόνια σχεδόν μετά από τη δημοσίευση της chain-ladder.

Με μια πρώτη ματιά και συγκρίνοντας τις δυο μεθόδους αποθεματοποίησης που έχουν αναφερθεί ως τώρα, οι δύο μέθοδοι Chain-Ladder και Bornhuetter and Ferguson έχουν λίγα κοινά στοιχεία. Από τη μία η Chain-Ladder όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη ενότητα υπολογίζει τις προβλέψεις των τελικών σωρευτικών απαιτήσεων και κάθε πρόβλεψη προκύπτει διαδοχικά πολλαπλασιάζοντας τις τωρινές σωρευτικές απαιτήσεις με τους αντίστοιχους παράγοντες που είναι παράγοντες εξέλιξης (link ratios) και αποκτώνται από τα απορρέοντα τρίγωνα. Ενώ από την άλλη πλευρά η Bornhuetter and Ferguson μέθοδος υπολογίζει προβλέψεις για τις εκκρεμείς ζημιές και κάθε πρόβλεψη προκύπτει πολλαπλασιάζοντας τον εκτιμητή των αναμενόμενων τελικών σωρευτικών ζημιών με τον εκτιμητή του ποσοστού των εκκρεμών ζημιών.

Το γεγονός ότι οι δύο μέθοδοι στοχεύουν σε διαφορετικές ποσότητες μπορεί να παραληφθεί καθώς οι προβλέψεις των τελικών ζημιών μπορούν να μετατραπούν σε προβλέψεις εκκρεμών ζημιών και αντίστροφα. Παρόλα αυτά μια σημαντική διαφορά στηρίζεται στο γεγονός ότι η Chain – Ladder Method δημιουργείται από τωρινές ζημιές ενώ η Bornhuetter and Ferguson βασίζεται σε αναμενόμενες τελικές ζημιές και αυτό συμβαίνει λόγω της διαφορετικής πηγής πληροφόρησης που έχουν οι δύο μέθοδοι. Η πηγή πληροφόρησης της Chain – Ladder Method δηλαδή είναι ότι βασίζεται εντελώς στα ιστορικά δεδομένα που περιέχονται στα απορρέοντα τρίγωνα σε αντίθεση με την Bornhuetter and Ferguson που περιορίζει την χρήση των απορρεόντων τριγώνων για την εκτίμηση του ποσοστού των εκκρεμών ζημιών και χρησιμοποιεί το γινόμενο των κερδισμένων ασφαλίσεων (earned premiums) με το αναμενόμενο δείκτη ζημιών (Loss Ratio) για την εκτίμηση των τελικών ζημιών. Παρόλο των διαφορών όμως που αναφέρθηκαν παραπάνω, οι δύο μέθοδοι αυτοί όπως και άλλες μέθοδοι αποθεματοποίησης έχουν και αρκετά κοινά στοιχεία στην πραγματικότητα.

Το βασικό σημείο της Bornhuetter and Ferguson είναι η πολύπλοκη δομή των προβλέψεων των εκκρεμών ζημιών. Είναι πιο χρήσιμη τεχνική όταν οι τελικές πληρωθείσες ζημιές δεν είναι ομοιόμορφες μεταξύ τους στα αρχικά έτη, γεγονός που καθιστά την Chain – Ladder αναποτελεσματική για την παραγωγή ασφαλών εκτιμήσεων για τις μελλοντικές απαιτήσεις αντίστοιχα λόγω της μεταβλητότητας του αποτελέσματος που εμπεριέχει. Εξαιτίας αυτού ο σκοπός της μεθόδου είναι να σταθεροποιήσει τα μη ικανοποιητικά αποτελέσματα που παράγονται από την Chain – Ladder. Ως εκ τούτου, για την εκτίμηση των αποθεμάτων χρησιμοποιούνται οι τελικές εκτιμώμενες ζημιές κάθε έτους, οι οποίες προκύπτουν ως το

γινόμενο του δείκτη ζημιών<sup>2</sup> (Loss Ratio) επί το δεδουλευμένο ασφάλιστρο<sup>3</sup> (earned premium), συνδυασμένες με τους παράγοντες εξέλιξης  $f_k$  της μεθόδου Chain – Ladder.

Λόγω ότι η μέθοδος χρησιμοποιεί τις εκτιμώμενες τελικές ζημιές και αυτές θεωρούνται σαν χρήση εξωτερικής πληροφορίας για την εκτίμηση των αποθεμάτων υπάρχει η πεποίθηση από αρκετούς ότι η Bornhuetter and Ferguson μέθοδος ακολουθεί τη Μπεϋζιανή μεθοδολογία. Αυτή η χρήση δεδομένων όμως από εξωτερικές πηγές αποτελεί και ένα από τα μειονεκτήματα της μεθόδου.

### 2.2.1. Το μοντέλο της μεθόδου Bornhuetter – Ferguson (BF)

Αντίστοιχα με τη μέθοδο Chain – Ladder έχουμε τα εξής:

*Υποθέσεις 2.2.1.α:*

Έστω οι σωρευτικές απαιτήσεις  $C_{i,j}$ .

- Θεωρούμε ότι οι  $C_{i,j}$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους για διαφορετικά έτη ατυχήματος  $i$ .
- Τότε υπάρχουν παράμετροι  $\mu_0, \dots, \mu_I > 0$  και  $\beta_0, \dots, \beta_J > 0$  με  $\beta_J = 1$  τέτοιοι ώστε για όλα τα  $0 \leq i \leq I$ ,  $0 \leq j \leq J - 1$  και  $1 \leq k \leq J - j$  έχουμε:

$$E[C_{i,0}] = \beta_0 \mu_i$$

$$E[C_{i,j+k} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j}] = C_{i,j} + (\beta_{j+k} - \beta_j) \mu_i \quad \square$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στα εξής:

$$E[C_{i,j}] = \beta_j \mu_i \quad \text{και} \quad E[C_{i,J}] = \mu_i \quad (2.8)$$

Η ακολουθία  $(\beta_j)_{j=0, \dots, J}$  εκφράζει το πρότυπο ανάπτυξης των απαιτήσεων. Αν οι  $C_{i,j}$  είναι οι αθροιστικές πληρωμές, τότε  $(\beta_j)_j$  κατοπτρίζει το πρότυπο των αθροιστικών χρηματοροών. Αυτό το πρότυπο συνήθως χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των προεξοφλημένων αποθεμάτων όταν οι τιμές του χρόνου διαφέρουν με την πάροδο του. Με βάση τα προαναφερθέντα, παρατηρούμε ότι από τις υποθέσεις του μοντέλου 2.2.1.α συνεπάγονται τα παρακάτω.

<sup>2</sup> Είναι το πηλίκο των συνολικών ζημιών που συνέβησαν προς τα συνολικά ασφάλιστρα που εισπράχθηκαν. Όσο πιο μικρό είναι αυτό το πηλίκο τόσο πιο κερδοφόρα θεωρείται η επιχειρησιακή γραμμή η οποία μελετάται. Παραδείγματος χάρη, αν μια ασφαλιστική εταιρία έχει πληρώσει 5εκ. ευρώ σε ζημιές και έχει λάβει 3εκ. ευρώ ασφάλιστρα τότε ο δείκτης ζημιών είναι 167% πράγμα που σημαίνει ότι η συγκεκριμένη επιχειρησιακή γραμμή δεν είναι καθόλου κερδοφόρα.

<sup>3</sup> Είναι το μέρος εκείνο του ασφάλιστρου για την περίοδο που έχει εκπνεύσει.



Υποθέσεις 2.2.1.β:

Έστω οι σωρευτικές απαιτήσεις  $C_{i,j}$ .

- Θεωρούμε ότι οι  $C_{i,j}$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους για διαφορετικά έτη ατυχήματος  $i$ .
- Τότε υπάρχουν παράμετροι  $\mu_0, \dots, \mu_I > 0$  και  $\beta_0, \dots, \beta_J > 0$  με  $\beta_J = 1$  τέτοιοι ώστε για όλα τα  $0 \leq i \leq I$  και  $0 \leq j \leq J$  έχουμε:

$$E[C_{i,j}] = \beta_j \mu_i \quad (2.9)$$

Σημειώνουμε ότι οι υποθέσεις του μοντέλου 2.2.1.α είναι ισχυρότερες από τις υποθέσεις του μοντέλου 2.2.1.β. Οι υποθέσεις του μοντέλου 2.2.2.β χρησιμοποιούνται ως βοηθητικές για την (BF) μέθοδο (Radtke and Schmidt 2004). Παρόλα αυτά, η σχέση (2.8) παρουσιάζει αρκετές δυσκολίες στον αλγόριθμο της (BF) μεθόδου. Παρατηρούμε ότι:

$$E[C_{i,j}|D_I] = E[C_{i,j}|C_{i,0}, \dots, C_{i,I-i}] = C_{i,I-i} + E[C_{i,j} - C_{i,I-i}|C_{i,0}, \dots, C_{i,I-i}] \quad (2.10)$$

Αν δεν υπάρχουν επιπλέον υποθέσεις για την εξάρτηση της δομής μεταξύ των προσαυξητικών απαιτήσεων, δεν γνωρίζουμε ακριβώς την χρήση της σχέσης (2.9). Αν όμως γνωρίζουμε ότι οι προσαυξητικές απαιτήσεις  $C_{i,j} - C_{i,I-i}$  είναι ανεξάρτητες από τις  $C_{i,0}, \dots, C_{i,I-i}$  τότε αυτό θα μπορούσε να σημαίνει ότι:

$$E[C_{i,j}|D_I] = E[C_{i,j}|C_{i,0}, \dots, C_{i,I-i}] = C_{i,I-i} + E[C_{i,j} - C_{i,I-i}] = C_{i,I-i} + (1 - \beta_{I-i})\mu_i \quad (2.11)$$

όπου η παραπάνω σχέση ακολουθεί τις υποθέσεις του μοντέλου 2.2.1.α

Κάτω και από τις δυο υποθέσεις του μοντέλου (2.2.1.α, 2.2.1.β) εκκρεμεί η εκτίμηση του δεξιού μέρους των εξισώσεων. Στην (BF) μέθοδο αυτό γίνεται ως ακολούθως:

Ο εκτιμητής της BF μεθόδου για  $E[C_{i,j}|D_I]$  δίνεται από:

$$\hat{C}_{i,j}^{BF} = \hat{E}[C_{i,j}|D_I] = C_{i,I-i} + (1 - \hat{\beta}_{I-i})\hat{\mu}_i \quad (2.12)$$

για  $1 \leq i \leq I$ , όπου ο  $\hat{\beta}_{I-i}$  είναι ένας κατάλληλος εκτιμητής για την παράμετρο  $\beta_{I-i}$  και αντίστοιχα ο  $\hat{\mu}_i$  είναι ο εκτιμητής που υπολογίστηκε στη σχέση (2.8) για τις αναμενόμενες τελικές απαιτήσεις  $E[C_{i,j}]$ .

Ο αλγόριθμος που φαίνεται στην σχέση (2.12) είναι αυτός που χρησιμοποιεί η μέθοδος BF ώστε να υπολογιστούν τα αποθέματα που απαιτούνται να διαθέτει η ασφαλιστική εταιρεία. Ο αλγόριθμος αυτός συνήθως χρησιμοποιείται χωρίς να θεωρήσουμε κάποιο κατάλληλο στοχαστικό μοντέλο.

### Σύγκριση Εκτιμητών μεθόδου BF και μεθόδου CL

Από τις υποθέσεις του μοντέλου της μεθόδου CL (βλέπε κεφάλαιο 2, παράγραφος 2.1) έχουμε τα ακόλουθα:

$$E[C_{i,j}] = E[E[C_{i,j}|C_{i,j-1}]] = f_{j-1}E[C_{i,0}] \prod_{k=0}^{j-1} f_k$$

$$E[C_{i,j}] = E[C_{i,0}] \prod_{k=0}^{j-1} f_k$$

από το οποίο προκύπτει ότι,

$$E[C_{i,j}] = \prod_{k=j}^{J-1} f_k^{-1} E[C_{i,J}]$$

Συνεπώς, αν το συγκρίνουμε με τις υποθέσεις του μοντέλου της μεθόδου BF (βλέπε κεφάλαιο 2, παράγραφοι 2.2.1.α, 2.2.1.β) έχουμε ότι:

$$\prod_{k=j}^{J-1} f_k^{-1} \quad \text{"παίζει το ρόλο του"} \quad \beta_j \quad (2.13)$$

Οι δυο μεταβλητές της σχέσης (2.13) συχνά σχετίζονται μεταξύ τους και θεωρούνται ως ίσες.

### 2.2.2 Αριθμητικό παράδειγμα

Χρησιμοποιώντας και εφαρμόζοντας τα ίδια δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν στο αριθμητικό παράδειγμα του προηγούμενου κεφαλαίου, θα παρουσιαστεί και η μέθοδος αποθεματοποίησης BF.

Οι πίνακες και οι υποθέσεις για τους συντελεστές εξέλιξης παραμένουν ίδιοι όπως παρουσιάστηκαν στο παράδειγμα με την Chain – Ladder.

**Πίνακας 1: Μη αθροιστικό τρίγωνο πληρωμών**

		Έτη εξέλιξης ζημιών					
Έτος Ατυχήματος		0	1	2	3	4	5
2013		543	123	97	17	6	1
2014		632	332	179	15	4	
2015		1312	820	122	11		
2016		1395	250	32			
2017		1421	102				
2018		1341					

**Πίνακας 2: Αθροιστικό τρίγωνο πληρωμών**

		Έτη εξέλιξης ζημιών					
Έτος Ατυχήματος		0	1	2	3	4	5
2013		543	666	763	780	786	787
2014		632	964	1143	1158	1162	
2015		1312	2132	2254	2265		
2016		1395	1645	1677			
2017		1421	1523				
2018		1341					

**Πίνακας 3: Συντελεστές εξέλιξης ζημιών ανά έτος**

Έτος Ατυχήματος	1/0	2/1	3/2	4/3	5/4
2013	1,226519337	1,145645646	1,022280472	1,0076923	1,001272265
2014	1,525316456	1,185684647	1,01312336	1,0034542	
2015	1,625	1,057223265	1,004880213		
2016	1,17921147	1,019452888			
2017	1,071780436				

<b>Μέσος όρος</b>	1,32556554	1,102001611	1,013428015	1,0055733	1,001272265
<b>Γεωμετρικός μέσος</b>	1,308931888	1,099989005	1,013403102	1,005571	1,001272265

Στο επόμενο πίνακα (πίνακας 4) θα προστεθεί μια επιπλέον στήλη συγκριτικά με αυτόν που είχε επισυναφθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο, η οποία θα μας δείξει το πρότυπο εξέλιξης των ζημιών και θα χρησιμοποιηθεί στη μέθοδο BF.

**Πίνακας 4: Εκτίμηση Αποθέματος και Ποσοστό εξέλιξης**

Έτος ατυχήματος	Εκτιμήσεις		Εκτίμηση Αποθέματος	Ποσοστό εξέλιξης
	Τελικών Ζημιών CL	Πληρωμένες με Ζημιές		
2013	787,00	787,00	-	100%
2014	1.163,48	1.162,00	1,48	99,8%
2015	2.280,52	2.265,00	15,52	99%
2016	1.711,16	1.677,00	34,16	98%
2017	1.712,54	1.523,00	189,54	89%
2018	1.998,81	1.341,00	657,81	67%
Σύνολο	9.653,51	8.755,00	898,51	

Η στήλη ποσοστό εξέλιξης θα δείχνει και ποσοστιαία το πόσο έχουν εξελιχθεί οι ζημιές με το πέρασμα των ετών. Είναι εμφανές ότι οι ζημιές που έχουν συμβεί το 2013 είναι πλέον «κλεισμένες».

Ο πίνακας που ακολουθεί (πίνακας 5) δείχνει ποια είναι τα ασφάλιστρα που εισπράχθηκαν από την ασφαλιστική εταιρία XYZ για την ασφάλιση αυτοκινήτων. Με βάση τα ασφάλιστρα αυτά και χρησιμοποιώντας τη σωρευτική διαγώνιο καταλήξαμε στους δείκτες ζημιών (Loss Ratios).

**Πίνακας 5: Loss Ratios & Ασφάλιστρα**

Loss Ratios	Ασφάλιστρα
16,22%	4.852,03
18,98%	6.114,45
18,07%	12.449,28
21,15%	7.770,77
22,42%	6.041,20
20,59%	4.369,48

Σημειώνεται ότι, ο δείκτης ζημιών είναι το πηλίκο των συνολικών πληρωμών που δόθηκαν ως αποζημιώσεις προς το συνολικό ποσό των ασφαλιστρών που εισπράχθηκαν κατά το έτος εκείνο. Παρακάτω υπάρχουν αναλυτικά οι πράξεις εύρεσης των Loss Ratios:

$$\frac{787}{4852,03} = 16,22\%$$

$$\frac{1162}{6114,45} = 18,98\%$$

$$\frac{2265}{12449,28} = 18,07\%$$

$$\frac{1677}{7770,77} = 21,15\%$$

$$\frac{1523}{6041,20} = 22,42\%$$

$$\frac{1341}{4369,48} = 20,59\%$$

Στο πίνακα 6 υπάρχει η εκτίμηση του αποθέματος με τη μέθοδο BF καθώς επίσης και οι τιμές του αποθέματος που βρέθηκαν με τη μέθοδο CL. Παρατηρούμε ότι δύο αυτές μέθοδοι δεν έχουν σημαντικές αποκλίσεις με τη μέθοδο BF να είναι πιο συντηρητική, απαιτώντας περισσότερα χρήματα να κρατηθούν ως απόθεμα για την κάλυψη προγενέστερων κινδύνων.

Πίνακας 6: Εκτίμηση Αποθέματος με διαφορετικές μεθόδους		
Έτος ατυχήματος	Εκτίμηση Αποθέματος με CL	Εκτίμηση Αποθέματος με BF
2013	787,00	787,00
2014	1.163,48	1.164,32
2015	2.280,52	2.287,50
2016	1.711,16	1.709,87
2017	1.712,54	1.671,99
2018	1.998,81	1.637,89
Σύνολο	9.653,51	8.755,00

Η στήλη με τις εκτιμήσεις των αποθεμάτων με τη μέθοδο BF έχει υπολογιστεί με τον ακόλουθο τρόπο:

$$\begin{aligned} & \text{Εκτίμηση αποθέματος} \\ & = \text{Τελικές ζημιές} \\ & + \text{Ασφάλιστρα} \times (1 - \text{Ποσοστό εξέλιξης}) \times \text{Δείκτη ζημιών} \end{aligned}$$

Παραδείγματος χάρη:

$$787 = 787 + 4.852,03 \times (1 - 100\%) \times 16,22\%$$

$$1.164,95 = 1162 + 6.114,45 \times (1 - 100\%) \times 18,98\%$$

### 2.3 Αριθμός των IBNYR απαιτήσεων, Poisson Model

Το Poisson model χρησιμοποιείται κυρίως για τη μέτρηση των απαιτήσεων. Το μοντέλο Poisson είναι η πρώτη μέθοδος για την αποθεματοποίηση των απαιτήσεων, το οποίο βασίζεται σε σαφή, συγκεκριμένη επιλογή κατανομής. Αυτή η επιλογή της κατανομής επιτρέπει τον υπολογισμό του Εκτιμητή Μέγιστης Πιθανοφάνειας για τις παραμέτρους του μοντέλου, οι οποίοι χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των αποθεμάτων.

Το αξιοσημείωτο της μεθόδου αυτής είναι ότι οι Εκτιμητές Μέγιστης Πιθανοφάνειας οδηγούν στο ίδιο αποτέλεσμα με αυτό του αλγορίθμου της μεθόδου Chain-Ladder. Οι Hachemeister & Stanard (1975) ήταν αυτοί όπου πρώτοι έκαναν την παραπάνω διαπίστωση και η οποία τελικά διατυπώθηκε από τον Kremer (1985) και αργότερα από τον Mack (1991). Το συμπέρασμα από την παραπάνω διαπίστωση είναι ότι το μοντέλο Poisson είναι ένα εναλλακτικό στοχαστικό μοντέλο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επιβεβαιώσει τα αποτελέσματα αποθεματοποίησης της μεθόδου Chain-Ladder. Πράγματι, υπάρχει μια αμφιλεγόμενη άποψη για την επιλογή του σωστού στοχαστικού μοντέλου για τον αλγόριθμο της Chain-Ladder, εξαιτίας της ποικιλίας των μοντέλων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, τα οποία βεβαίως, βασίζονται σε διαφορετικές μεθοδολογίες το καθένα.

Η βασική υπόθεση για την εφαρμογή της μεθόδου είναι ότι οι πρόσθετες απαιτήσεις είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κατανομή Poisson με τις προσδοκίες να εξαρτώνται από δύο παράγοντες, το χρόνο συμβάντος και το χρόνο ανάπτυξης.

#### 2.3.1. Το μοντέλο της μεθόδου Poisson

*Υποθέσεις 2.3.1.:*

Υπάρχουν παράμετροι  $\mu_0, \dots, \mu_I > 0$  και  $\gamma_0, \dots, \gamma_J > 0$  τέτοιοι ώστε οι προσαναυξητικές απαιτήσεις  $X_{i,j}$  είναι ανεξάρτητες και ακολουθούν την κατανομή Poisson με:

$$E[X_{i,j}] = \mu_i \gamma_j \text{ για όλα τα } 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J \quad \text{και} \quad \sum_{j=0}^J \gamma_j = 1$$

Σημειώνεται ότι το μοντέλο της μεθόδου Poisson υποδηλώνει ότι οι προσαναυξητικές  $X_{i,j}$  είναι μη αρνητικές.

Οι αθροιστικές απαιτήσεις στο χρόνο ατυχήματος  $i$ ,  $C_{i,J}$  ακολουθούν την κατανομή Poisson με:

$$E[C_{i,J}] = \mu_i$$

Ως εκ τούτου,  $\mu_i$  είναι μια παράμετρος που αντιπροσωπεύει τη συνολική αναμενόμενη απαίτηση κατά το έτος ατυχήματος  $i$ , ενώ η παράμετρος  $\gamma_j$  ορίζει το αναμενόμενο πρότυπο χρηματορροών για διαφορετικές περιόδους εξέλιξης  $j$ . Επιπλέον έχουμε ότι,

$$\frac{E[X_{i,j}]}{E[X_{i,0}]} = \frac{\gamma_j}{\gamma_0}$$

το οποίο είναι ανεξάρτητο από το  $i$ .

### Σύγκριση Εκτιμητών μεθόδου Poisson και BF

Το μοντέλο Poisson ικανοποιεί τις υποθέσεις του μοντέλου 2.2.1.α Bornhuetter – Ferguson (BF).

*Απόδειξη:*

Η ανεξαρτησία των αθροιστικών απαιτήσεων των διαφορετικών ετών ατυχήματος ακολουθεί την ανεξαρτησία των  $X_{i,j}$ . Επιπλέον, ισχύει:

$$E[C_{i,0}] = E[X_{i,0}] = \mu_i \beta_0 \text{ με } \beta_0 = \gamma_0 \text{ και}$$

$$E[C_{i,j+k} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j}] = C_{i,j} + \sum_{l=1}^k E[X_{i,j+l} | C_{i,0}, \dots, C_{i,j}] = C_{i,j} + \mu_i \sum_{l=1}^k \gamma_{j+l} = C_{i,j} + \mu_i (\beta_{j+k} - \beta_j)$$

με  $\beta_j = \sum_{l=0}^j \gamma_l$  το οποίο και ολοκληρώνει την απόδειξη.

Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο Poisson ικανοποιεί τις υποθέσεις της μεθόδου BF. Ως εκ τούτου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους εκτιμητές της μεθόδου BF για να αποφασίσουμε τα αποθέματα των απαιτήσεων του μοντέλου Poisson. Παρόλα αυτά, υπάρχουν και άλλες διαφορετικές μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων  $(\mu_i)_i$  και  $(\gamma_j)_j$ . Η μια μέθοδος είναι η χρήση του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας. Η συνάρτηση πιθανότητας για το πλήθος των παρατηρήσεων  $D_I = \{X_{i,j}; i+j \leq I, 0 \leq j \leq J\}$  δίνεται από:

$$L_{D_1}(\mu_0, \dots, \mu_I, \gamma_0, \dots, \gamma_J) = \prod_{i+j \leq I} \left( \exp(-\mu_i \gamma_j) \frac{(\mu_i \gamma_j)^{X_{i,j}}}{X_{i,j}!} \right)$$

Μεγιστοποιώντας το λογάριθμο της παραπάνω συνάρτησης πιθανοφάνειας και θέτοντάς τη ίση με το 0 τότε παρατηρούμε:

$$\sum_{j=0}^{I-i} \hat{\mu}_i \hat{\gamma}_j = \sum_{j=0}^{I-i} X_{i,j} = C_{i,I-i} \quad (2.14)$$

$$\sum_{i=0}^{I-j} \hat{\mu}_i \hat{\gamma}_j = \sum_{i=0}^{I-j} X_{i,j} \quad (2.15)$$

Για όλα τα  $i \in \{0, \dots, I\}$  και  $j \in \{0, \dots, J\}$  κάτω από τον περιορισμό  $\sum_{j=0}^J \hat{\gamma}_j = 1$ . Εάν το σύστημα των εξισώσεων αυτών έχει μοναδική λύση, τότε ο εκτιμητής  $\hat{\mu}_i$  και ο εκτιμητής  $\hat{\gamma}_j$  είναι οι εκτιμητές των  $\mu_i$  και  $\gamma_j$  αντίστοιχα.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ CHAIN LADDER

### 3.1. Εισαγωγικά στοιχεία πολυμεταβλητού μοντέλου Chain – Ladder

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε το πρόβλημα της αποθεματοποίησης απαιτήσεων σε ένα πολυμεταβλητό επίπεδο. Ο όρος «πολυμεταβλητό» μπορεί να οριστεί με αρκετούς διαφορετικούς τρόπους. Στο παρόν κεφάλαιο θεωρούμε ότι εκτιμούμε τα αποθέματα των απαιτήσεων ταυτόχρονα για διαφορετικά συσχετισμένα τρίγωνα ζημιών. Η συγκεκριμένη μέθοδος προέκυψε λόγω του ότι πρακτικά είναι πιο εύκολο να υποδιαιρούμε το συνολικό χαρτοφυλάκιο σε υπό-χαρτοφυλάκια (συνήθως σε επιχειρησιακές γραμμές ή ανάλογα με το μέγεθος των απαιτήσεων δηλαδή σε χαρτοφυλάκια μικρών ζημιών και σε χαρτοφυλάκια μεγάλων ζημιών) τα οποία όμως διατηρούν τις ιδιότητες ομοιογένειας, παραδείγματος χάρη οι υποθέσεις της μεθόδου Chain – Ladder ή οι υποθέσεις του προσθετικού μοντέλου αποτίμησης ζημιών. Σε μερικές περιπτώσεις τα συνολικά αποθέματα συνήθως λαμβάνονται εφαρμόζοντας την κατάλληλη μέθοδο σε κάθε υπό-χαρτοφυλάκιο και με αυτό τον τρόπο συγκεντρώνουμε τα αποθέματα των απαιτήσεων του κάθε υπό-χαρτοφυλακίου.

Παρακάτω, θα παρουσιαστούν μέθοδοι που επιτρέπουν μια ταυτόχρονη μελέτη του κάθε υπό-χαρτοφυλακίου. Αυτό έχει το πλεονέκτημα ότι, από τη παρατήρηση του ενός υπό-χαρτοφυλακίου, μπορούμε να λάβουμε πληροφόρηση και για τα άλλα υπό-χαρτοφυλάκια, παραδείγματος χάρη, υπό-χαρτοφυλάκια μικρών και μεγάλων απαιτήσεων. Ακόμα, η μέθοδος αυτή αντιμετωπίζει το πρόβλημα της εξάρτησης μεταξύ των απορρεόντων χαρτοφυλακίων των διαφορετικών εργασιών της εταιρίας, δηλαδή απαιτήσεις από σωματικές βλάβες από αυτοκινητιστικό ατύχημα έναντι απαιτήσεων από γενικές ασφαλίσσεις.

Το πρόβλημα της εξάρτησης μεταξύ των απορρεόντων υπό-χαρτοφυλακίων για διαφορετικές επιχειρησιακές γραμμές έχει μελετηθεί και ερευνηθεί από αρκετούς συγγραφείς – ερευνητές όπως οι Holmberg (1994), Braun (2004) και Merz – Wüthrich (2007;2008). Οι προαναφερθέντες γενίκευσαν το μονοδιάστατο μοντέλο της Chain – Ladder του Mack (1993) στο πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain – Ladder ενσωματώνοντας συσχετισμούς μεταξύ των μερικών απορρεόντων υπό-χαρτοφυλακίων. Επιπλέον, μια ταυτόχρονη μελέτη επιτρέπει μια ενιαία προσέγγιση για την εκτίμηση των αποτελεσμάτων του συνολικού χαρτοφυλακίου.

Μια εναλλακτική ιδέα για τον υπολογισμό των συγκεντρωτικών αποθεμάτων καθώς και των αβεβαιοτήτων τους είναι να υπολογίσουμε τα αποθέματα παρά μόνο από τα συγκεντρωτικά τρίγωνα ζημιών. Αλλά θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί με το γεγονός ότι εάν ένα υπό-χαρτοφυλάκιο ικανοποιεί για παράδειγμα τις υποθέσεις της μεθόδου CL, τα συγκεντρωτικά απορρέοντα τρίγωνα δεν δίνουν απαραίτητως ικανοποιητικά αποτελέσματα (Ajne 1994, Klemmt 2004). Έτσι, σε αρκετές περιπτώσεις τα απορρέοντα τρίγωνα ζημιών δεν δίνουν λύση στο πρόβλημα της εύρεσης των κατάλληλων αποθεμάτων. Ένα επιπλέον πλεονέκτημα της μεθόδου πολυμεταβλητής αποθεματοποίησης απαιτήσεων είναι ότι επιλύει το πρόβλημα της προσθετικότητας. Αυτό σημαίνει ότι οι εκτιμητές των τελικών απαιτήσεων για το συνολικό χαρτοφυλάκιο λαμβάνονται από το άθροισμα όλων των εκτιμητών των τελικών απαιτήσεων του κάθε υπό-χαρτοφυλακίου.

Ακόμα ένα όμως εφικτό πολυμεταβλητό μοντέλο αποθεματοποίησης δίνεται από την μέθοδο ALR που αναφέρεται και ορίζεται στο επόμενο κεφάλαιο και προτάθηκε από τους Hess, Schmidt – Zocher (2006) και Schmidt (2006a) η οποία είναι βασισμένη σε ένα γραμμικό

πολυμεταβλητό μοντέλο. Κάτω από τις υποθέσεις του πολυμεταβλητού μοντέλου ALR οι Hess, Schmidt – Zocher (2006) και Schmidt (2006α) σχημάτισαν μια φόρμουλα για τον εκτιμητή Gauss – Markov για τις μη παρατηρούμενες αυξητικές απαιτήσεις που είναι οι βέλτιστες από την άποψη του κλασικού κριτηρίου βελτιστοποίησης της ελάχιστης αναμενόμενης τετραγωνικής απώλειας.

Το πολυμεταβλητό μοντέλο απαιτήσεων έχει μελετηθεί από αρκετούς όπως οι Brehm (2002), Kirschner et al. (2002), Braun (2004), Taylor και McGuire (2005, 2007), Schmidt (2006a, b) και πολλούς άλλους.

### **3.2 Διαφορά μονοδιάστατου και πολυμεταβλητού μοντέλου**

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε περιγραφή και αναλύθηκε το μονοδιάστατο μοντέλο της μεθόδου Chain Ladder το οποίο έχει εφαρμογή σε ένα απορρέον τρίγωνο παρόλο που είναι γνωστό ότι οι μη παρατηρούμενες μελλοντικές απαιτήσεις που θα έρθουν, αποτελούνται από διαφορετικά υπό-χαρτοφυλάκια. Ο Braun (2004) πρότεινε ένα δισδιάστατο μοντέλο αποθεματοποίησης το οποίο επέκτεινε το μονοδιάστατο και έκανε χρήση της υπόθεσης ότι δύο υπό-χαρτοφυλάκια που είναι μέρος ενός συνολικού χαρτοφυλακίου έχουν μεταξύ τους συσχέτιση.

Στο ίδιο πνεύμα με τον Mack (1993), ο Braun (2004) χρησιμοποίησε το μοντέλο του ως πρότυπο για την κατασκευή των εκτιμητών για τα σφάλματα πρόβλεψης των εκτιμητών της μονοδιάστατης Chain – Ladder. Το μοντέλο του Braun (2004) δεν χρησιμοποιήθηκε για να αντικαταστήσει το μονοδιάστατο μοντέλο της Chain – Ladder αλλά για να επιδείξει τη συσχέτιση που υπάρχει μεταξύ των υπό-χαρτοφυλακίων.

Μετά από αυτές τις μελέτες και έχοντας κατά νου ότι το μονοδιάστατο μοντέλο, όπως είδαμε και στις προηγούμενες ενότητες, παρουσιάζει αρκετά μειονεκτήματα όπως την μη σωστή εκτίμηση ή την αλλοίωση των εκτιμήσεων των αποθεμάτων των ασφαλιστικών εταιριών το μοντέλο αυτό επεκτάθηκε στην πολυμεταβλητή μορφή του. Ως εκ τούτου, είναι φυσικό και πρακτικό το αρχικό χαρτοφυλάκιο γενικών ασφαλίσεων να υποδιαιρείται σε αρκετά μικρότερα συσχετισμένα υπό-χαρτοφυλάκια. Η υποδιαίρεση αυτή μπορεί να γίνει με διάφορα κριτήρια όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω μερικά από τα οποία είναι ο όγκος των δεδομένων (μικρές και μεγάλες απαιτήσεις) ή διαφορετικές επιχειρησιακές γραμμές παρόλα αυτά όμως τα υπό-χαρτοφυλάκια συνεχίζουν να διατηρούν τις ιδιότητες ομοιογένειας.

Συνεπώς θεωρούμε ότι το πρόβλημα της αποθεματοποίησης μπορεί να μελετηθεί με ένα πολυμεταβλητό μοντέλο. Πιο συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από συσχετισμένα μεταξύ τους απορρέοντα υπό-χαρτοφυλάκια στα οποία χρησιμοποιούμε και εφαρμόζουμε είτε τη μέθοδο Chain – Ladder (CL) είτε την προσθετική μέθοδο αποτίμησης ζημιών (additive loss reserving method ALR) για την εκτίμηση του αποθέματος. Επιπλέον, παράγουμε έναν εκτιμητή για το υπό συνθήκη μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης (MSEP) για την πρόβλεψη των τελικών απαιτήσεων του συνολικού χαρτοφυλακίου.



Με την θεώρηση του πολυμεταβλητού μοντέλου επιτυγχάνουμε την λύση του προβλήματος της μη προσθετικότητας καθώς η πολυμεταβλητή μέθοδος παραμελεί την δομή εξάρτησης που υπάρχει μεταξύ των υπό-χαρτοφυλακίων. Για την καλύτερη κατανόηση της διαφοράς των δυο μοντέλων παρακάτω παρουσιάζεται αναλυτικά το πολυμεταβλητό μοντέλο της Chain – Ladder.

### 3.3 Γενική πολυμεταβλητή δομή και σημειογραφία

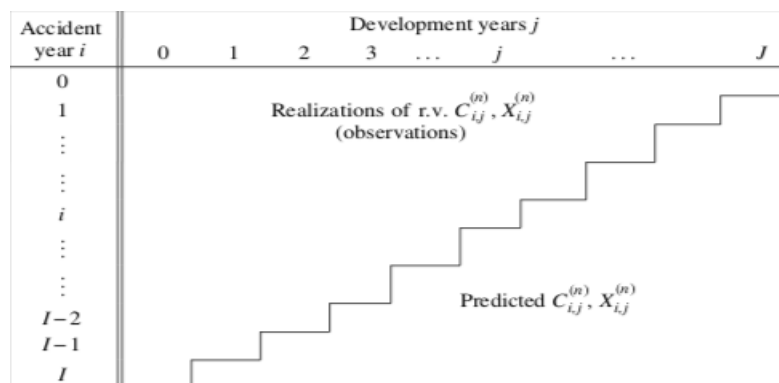
Θεωρούμε ότι τα υπό-χαρτοφυλάκια αποτελούνται από  $N \geq 1$  απορρέοντα τρίγωνα παρατηρήσεων του ίδιου μεγέθους. Σε αυτά τα τρίγωνα έχουμε τους ακόλουθους δείκτες:

- $n, 1 \leq n \leq N,$  αριθμός υποχαρτοφυλακίων (αριθμός τριγώνων)
- $i, 0 \leq i \leq I,$  έτος ατυχήματος (γραμμές)
- $j, 0 \leq j \leq J,$  έτος εξέλιξης ζημιάς (στήλες)

Οι αυξητικές απαιτήσεις του τριγώνου  $n$  για το έτος ατυχήματος  $i$  και το έτος εξέλιξης  $j$  γράφονται ως  $X_{i,j}^{(n)}$  και οι αθροιστικές απαιτήσεις για το έτος ατυχήματος  $i$  μέχρι και το έτος εξέλιξης  $j$  δίνονται από τη σχέση:

$$C_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^j X_{i,k}^{(n)} \quad (3.1)$$

Όπως και στο μονοδιάστατο μοντέλο θεωρούμε ότι το τελευταίο έτος εξέλιξης είναι το έτος  $J$ , όπου  $X_{i,j}^{(n)} = 0$  για όλα τα  $j > J$ , και το τελευταίο έτος ατυχήματος δίνεται από το  $I$ . Επίσης, στο παρακάτω πίνακα (3.1) φαίνεται η δομή των δεδομένων των απαιτήσεων για  $N$  πλήθος απαιτήσεων.



**Πίνακας 3.1** Πλήθος απαιτήσεων με τρίγωνα εξέλιξης  $n \in \{1, \dots, N\}$

Συνήθως στο χρόνο  $I$ , έχουμε τις παρατηρήσεις  $D_I^{(n)} = \{C_{i,j}^{(n)}; i + j \leq I\}$  για όλα τα απορρέοντα υπό-χαρτοφυλάκια με  $n \in \{1, \dots, N\}$ . Αυτό σημαίνει ότι στο χρόνο  $I$  (ημερολογιακό έτος  $I$ ) έχουμε ένα σύνολο παρατηρήσεων από όλα τα υπό-χαρτοφυλάκια το οποίο δίνεται από:

$$D_I^N = \bigcup_{n=1}^N D_I^{(n)}$$

και χρειαζόμαστε να προβλέψουμε τις τυχαίες μεταβλητές οι οποίες δίνονται από

$$D_I^{N,c} = \{C_{i,j}^{(n)}; i + j > I, 1 \leq n \leq N, i \leq I\}$$

Για την παραγωγή του υπό όρους Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος Πρόβλεψης (MSEP) της πολυμεταβλητής μεθόδου είναι πιο βολικό να γράψουμε τα  $N$  υπό-χαρτοφυλάκια με τη μορφή διανυσμάτων. Έτσι, ορίζουμε τα  $N$ -διαστάσεων τυχαία διανύσματα των προσαυξητικών και σωρευτικών απαιτήσεων ως

$$X_{i,j} = (X_{i,j}^{(1)}, \dots, X_{i,j}^{(N)})' \quad \text{και} \quad C_{i,j} = (C_{i,j}^{(1)}, \dots, C_{i,j}^{(N)})'$$

για  $i \in \{0, \dots, I\}$  και  $j \in \{0, \dots, J\}$ . Επιπλέον, ορίζουμε για  $k \in \{0, \dots, J\}$

$$B_k^N = \{C_{i,j}; i + j \leq I \text{ και } 0 \leq j \leq k\} \quad (3.2)$$

και το μοναδιαίο διάνυσμα στήλης  $N$ -διάστασης είναι  $1 = (1, \dots, 1)' \in \mathbb{R}^N$

Το σύνολο  $B_k^N$  περιέχει όλες τις  $N$ -διαστάσεων τυχαίες μεταβλητές των σωρευτικών απαιτήσεων μέχρι το χρόνο εξέλιξης  $k$  που παρατηρήθηκαν στο χρόνο  $I$ .

### 3.4 Πολυμεταβλητή μέθοδος Chain – Ladder

Οι Pröhl και Schmidt (2005) και Schmidt (2006b) έχουν μελετήσει τη πολυμεταβλητή μέθοδο CL για ένα χαρτοφυλάκιο  $N$  συσχετισμένων απορρεόντων τριγώνων βασισμένο στους πολυμεταβλητούς age-to-age εκτιμητές. Παρόλα αυτά, η μελέτη τους δεν υπερέβη τους καλύτερους εκτιμητές. Αυτό συνέβη γιατί δεν είχαν αντλήσει έναν εκτιμητή για το υπό συνθήκη Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα Πρόβλεψης για τις συνολικές προβλέψεις απαιτήσεων.

Από την άλλη μεριά ο Braun (2004) έχει γενικεύσει το μονοδιάστατο μοντέλο CL του Mack στη πολυμεταβλητή περίπτωση όπου ενσωματώνει τις συσχετίσεις μεταξύ των διαφορετικών υπό-χαρτοφυλακίων. Σε αυτό το μοντέλο υπολογίζει τις εκτιμήσεις του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος της πρόβλεψης το οποίο βασίζεται στην προσέγγιση του Mack. Οι Merz και Wüthrich (2007b) με παρόμοιο τρόπο έχουν δώσει έναν εκτιμητή για το υπό συνθήκη Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα πρόβλεψης, αλλά έχουν χρησιμοποιήσει προσεγγίσεις αναδειγματοληψίας. Παρόλα αυτά οι μελέτες των Braun (2004) και Merz και Wüthrich (2007b) έχουν το μειονέκτημα ότι οι παράγοντες της μεθόδου CL εκτιμώνται με ένα μονοδιάστατο τρόπο. Για την εκτίμηση των παραγόντων age-to-age, οι παράγοντες αυτοί έχουν περιοριστεί μόνο στις μονοδιάστατες απαιτήσεις τριγώνων εξέλιξης.

Τελικώς, οι Merz και Wüthrich (2007c) έχουν υπολογίσει ένα υπό συνθήκη εκτιμητή Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος πρόβλεψης για το πολυμεταβλητό μοντέλο της μεθόδου CL, όπου οι παράγοντες της CL είναι και εκείνοι εκτιμώμενοι με ένα πολυμεταβλητό τρόπο. Τα αποτελέσματα της έρευνας των Merz και Wüthrich (2007c) που προτάθηκαν από τους Pröhl και Schmidt (2005) και Schmidt (2006b) νωρίτερα για το υπό συνθήκη Μέσο Τετραγωνικό

Σφάλμα πρόβλεψης για την εκτίμηση του παράγοντα age-to-age στο πολυμεταβλητό μοντέλου παρουσιάζονται παρακάτω.

### 3.4.1 Παρουσίαση πολυμεταβλητού μοντέλου Chain – Ladder

Ανάλογα με τη μονοδιάστατη περίπτωση, το επίκεντρο του ενδιαφέροντος μας στη πολυμεταβλητή CL είναι οι παράγοντες εξέλιξης (Link ratios) των αθροιστικών απαιτήσεων. Ορίζουμε για  $n \in \{1, \dots, N\}$ ,  $i \in \{0, \dots, I\}$  και  $j \in \{1, \dots, J\}$  οι ατομικοί παράγοντες εξέλιξης για το έτος ατυχήματος  $i$  και το έτος εξέλιξης  $j$  με:

$$F_{i,j}^{(n)} = \frac{C_{i,j}^{(n)}}{C_{i,j-1}^{(n)}} \quad \text{και} \quad F_{i,j} = \left( F_{i,j}^{(1)}, \dots, F_{i,j}^{(N)} \right)'$$

Ακολουθώς έχουμε:

$$D(a) = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_N \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad D(c)^b = \begin{pmatrix} c_1^b & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & c_N^b \end{pmatrix}$$

οι  $N \times N$  διαγώνιοι πίνακες του διανύσματος  $N$  –διάστασης  $a = (a_1, \dots, a_N)' \in \mathbb{R}^N$  και  $(c_1^b, \dots, c_N^b)' \in \mathbb{R}_+^N$  όπου  $b \in \mathbb{R}$  και  $c = (c_1, \dots, c_N)' \in \mathbb{R}_+^N$ . Επιπλέον, έχουμε:

$$C_{i,j} = D(C_{i,j-1})F_{i,j} = D(F_{i,j})C_{i,j-1}$$

για όλα τα  $j = 1, \dots, J$  και  $i = 0, \dots, I$ .

Το μοντέλο της πολυμεταβλητής Chain – Ladder προκύπτει από τον ακόλουθο ορισμό.

Υποθέσεις 3.4.1.:

- Οι αθροιστικές ζημιές  $C_{i,j}$  των διαφορετικών ετών ατυχήματος  $i$  είναι ανεξάρτητες.
- $(C_{i,j})_{j \geq 0}$  σχηματίζει μια αλυσίδα Markov  $N$ - διάστασης. Υπάρχουν  $N$ - διάστασης καθοριστικά διανύσματα

$$f_j = (f_j^{(1)}, \dots, f_j^{(N)})'$$

με  $f_j^{(n)} > 0$ ,  $n = 1, \dots, N$  και ο συμμετρικά θετικά ορισμένος  $N \times N$  πίνακας  $\Sigma_j$  για  $j = 0, \dots, J - 1$  τέτοιο ώστε για όλα τα  $0 \leq i \leq I$  και  $1 \leq j \leq J$  έχουμε:

$$E[C_{i,j}|C_{i,j-1}] = D(f_{j-1})C_{i,j-1} \quad (3.3)$$

$$Cov(C_{i,j}, C_{i,j}|C_{i,j-1}) = D(C_{i,j-1})^{1/2} \Sigma_{j-1} D(C_{i,j-1})^{1/2} \quad (3.4)$$

**Παρατηρήσεις του μοντέλου:**

- Οι παράγοντες  $f_j$  καλούνται  $N$ - διάστασης παράγοντες εξέλιξης ή παράγοντες CL ή link ratios.

- Επισημαίνεται ότι η εξάρτηση μεταξύ διαφορετικών υπό-χαρτοφυλακίων ορίζεται μέσω του πίνακα συσχέτισης  $\Sigma_{j-1}$ , ο οποίος περιγράφει την υπό συνθήκη εξάρτηση μεταξύ  $C_{i,j}^{(n)}$  και  $C_{i,j}^{(m)}$  δοθέντος του  $C_{i,j-1}$ .
- Για πρακτικούς λόγους κάποιοι θέλουν να ελέγξουν την εξάρτηση στα λογιστικά έτη τα οποία αναφέρονται στη διαγώνιο του τριγώνου αποθεματοποίησης των απαιτήσεων. Όπως όμως και με όλα τα μοντέλα έτσι και αυτό το μοντέλο δεν μπορεί να χειριστεί τις εξαρτήσεις των διαγωνίων, το οποίο μπορεί να γίνει μόνο χρησιμοποιώντας αριθμητικές μεθόδους όπως bootstrap.

### Λήμμα 3.1

Κάτω από τις υποθέσεις 3.4.1. του μοντέλου έχουμε για όλα τα  $1 \leq i \leq I$  :

$$E[C_{i,J}|D_I^N] = E[C_{i,J}|C_{i,I-i}] = \prod_{j=I-i}^{J-1} D(f_j)C_{i,I-i} \quad \square$$

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα έχουμε ένα αναδρομικό αλγόριθμο (recursive algorithm) για την εκτίμηση της αναμενόμενης τελικής ζημιάς και για την πρόβλεψη της τελικής απαίτησης, αντίστοιχα, δοθέντος της παρατήρησης  $D_I^N$ . Αν οι  $N$ -διάστασης παράγοντες τις CL,  $f_j$  είναι γνωστοί, η αναμενόμενη εκκρεμείς απαιτήσεις – υποχρεώσεις του έτους ατυχήματος  $i$  για τα  $N$  συσχετισμένα τρίγωνα απαιτήσεων βασιζόμενα στην πληροφορία  $D_I^N$  εκτιμώνται στο χρόνο  $I$  από:

$$E[C_{i,J}|D_I^N] - C_{i,I-i} = D(f_{j-1}) \dots D(f_{I-i})C_{i,I-i} - C_{i,I-i}$$

Παρόλα αυτά, στις περισσότερες πρακτικές εφαρμογές πρέπει να εκτιμήσουμε του παράγοντες της CL από τα δεδομένα. Οι Pröhl και Schmidt (2005) και Schmidt (2006b) πρότειναν τους ακόλουθους παράγοντες εξέλιξης για  $f_j$ ,  $j = 0, \dots, J-1$ ,

$$\hat{f}_j = (\hat{f}_j^{(1)}, \dots, \hat{f}_j^{(N)})' = (\sum_{i=0}^{I-j-1} D(C_{i,j})^{\frac{1}{2}} \Sigma_j^{-1} D(C_{i,j})^{\frac{1}{2}})^{-1} \times \sum_{i=0}^{I-j-1} D(C_{i,j})^{1/2} \Sigma_j^{-1} D(C_{i,j})^{1/2} F_{i,j+1} \quad (3.5)$$

Επισημαίνεται ότι, το στοιχείο  $\hat{f}_j^{(n)}$  είναι ο παράγοντας εξέλιξης για το έτος εξέλιξης  $j$  και  $n \in \{1, \dots, N\}$  βασισμένο στην πληροφορία  $D_I^N$ . Επιπλέον, αυτός ο εκτιμητής υποθέτει ότι ο πίνακας διακυμάνσεων  $\Sigma_j$  είναι γνωστός.  $\square$

Ο εκτιμητής της πολυμεταβλητής CL για  $E[C_{i,J}|D_I^N]$  ορίζεται ως:

$$\hat{C}_{i,j}^{CL} = (\hat{C}_{i,j}^{(1)CL}, \dots, \hat{C}_{i,j}^{(N)CL})' = \hat{E}[C_{i,j}|D_I^N] = \prod_{l=I-i}^{j-1} D(\hat{f}_l)C_{i,I-i}$$

για  $i + j > I$ .

## Παρατηρήσεις:

- Στην περίπτωση που  $N=1$  (δηλαδή υπάρχει μόνο ένα τρίγωνο ζημιών) οι παράγοντες εξέλιξης της σχέσης (3.5) συμπίπτουν με τους κλασικούς παράγοντες εξέλιξης της μονοδιάστατης CL

$$\hat{f}_j = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}} F_{i,j+1} \quad (3.6)$$

- Στις προσεγγίσεις του Braun (2004) και Merz και Wüthrich (2007b), οι εκτιμητές για τις μελλοντικές αθροιστικές απαιτήσεις των  $N$  συσχετισμένων τριγώνων βασίζονται στους μονοδιάστατους παράγοντες εκτίμησης (3.6) οι οποίοι δεν λαμβάνουν υπόψη τους την συσχέτιση μεταξύ των διαφορετικών τριγώνων. Στο πίνακά μας αυτό σημαίνει ότι οι  $N -$  διαστάσεως παράγοντες της CL,  $f_j$  εκτιμώνται από τους μονοδιάστατους

$$\hat{f}_j^{(0)} = \left( \sum_{i=0}^{I-j-1} D(C_{k,j}) \right)^{-1} \sum_{i=0}^{I-j-1} D(C_{i,j}) F_{i,j+1} \quad (3.7)$$

με συντεταγμένες:

$$\hat{f}_j^{(n)(0)} = \sum_{i=0}^{I-j-1} \frac{C_{i,j}^{(n)}}{\sum_{k=0}^{I-j-1} C_{k,j}^{(n)}} F_{i,j+1}^{(n)}$$

για  $n = 1, \dots, N$ . Επισημαίνεται ότι οι  $\hat{f}_j$  και  $\hat{f}_j^{(0)}$  είναι αμερόληπτοι εκτιμητές για τους παράγοντες εξέλιξης της πολυμεταβλητής CL,  $f_j$ . Αν ο πίνακας  $\Sigma_j$   $N \times N$  διαστάσεων είναι διαγώνιος τότε οι  $\hat{f}_j$  και  $\hat{f}_j^{(0)}$  συμπίπτουν.

- Αν οι  $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{j-2}$  είναι διαγώνιοι πίνακες, οι τρεις ακόλουθοι εκτιμητές συμπίπτουν: (1) το άθροισμα των μονοδιάστατων εκτιμητών της CL σε κάθε υπό-χαρτοφυλάκιο, (2) ο εκτιμητής του πολυμεταβλητού μοντέλου της CL που προτάθηκε από τον Braun (2004) και Merz και Wüthrich (2007b) βασιζόμενος στους παράγοντες εξέλιξης (3.7) και (3) ο εκτιμητής της πολυμεταβλητής CL βασιζόμενος στους παράγοντες εξέλιξης (3.5). Παρόλα αυτά, σε άλλες περιπτώσεις είναι πιο λογικό να χρησιμοποιούμε τους εκτιμητές της πολυμεταβλητής (3.4) όταν ένας έχει τις κατάλληλες εκτιμήσεις για το πίνακα συνδιακυμάνσεων  $\Sigma_j$ .

## Λήμμα 3.2

Κάτω από τις υποθέσεις του μοντέλου:

- (α) Δοθέντος των  $B_j^N$ , ο  $\hat{f}_j$  είναι αμερόληπτος εκτιμητής για  $f_j$ . Δηλαδή,  $E[\hat{f}_j | B_j^N] = f_j$
- (β) Ο  $\hat{f}_j$  είναι αμερόληπτος για  $f_j$ . Δηλαδή  $E[\hat{f}_j] = f_j$
- (γ) Οι  $\hat{f}_j$  και  $\hat{f}_k$  είναι ασυσχέτιστοι για  $j \neq k$ . Δηλαδή,  $E[\hat{f}_j \hat{f}_k'] = f_j f_k' = E[\hat{f}_j] E[\hat{f}_k]'$
- (δ) Δοθέντος του  $C_{i,I-i}$ , ο εκτιμητής  $\hat{C}_{i,j}^{CL}$  είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής για  $E[C_{i,j} | D_i^N] = E[C_{i,j} | C_{i,I-i}]$ . Δηλαδή,  $E[\hat{C}_{i,j}^{CL} | C_{i,I-i}] = E[C_{i,j} | D_i^N]$
- (ε) Ο  $\hat{C}_{i,j}^{CL}$  είναι εκτιμητής για  $E[C_{i,j}]$ . Δηλαδή,  $E[\hat{C}_{i,j}^{CL}] = E[C_{i,j}]$ .

Απόδειξη:

(α) Χρησιμοποιώντας τη  $F_{i,j} = D(C_{i,j-1})^{-1}C_{i,j}$  και τη (3.3) παρατηρούμε ότι:

$$E[\hat{f}_j | B_j^N] = \left( \sum_{i=0}^{I-j-1} D(C_{i,j})^{1/2} \Sigma_j^{-1} D(C_{i,j})^{1/2} \right)^{-1} \\ \times \sum_{i=0}^{I-j-1} D(C_{i,j})^{1/2} \Sigma_j^{-1} D(C_{i,j})^{-1/2} E[C_{i,j+1} | B_j^N] = f_j$$

(β) Προκύπτει άμεσα από το (α).

(γ) Χρησιμοποιώντας τα (α) και (β) για  $j < k$  έχουμε:

$$E[\hat{f}_j \hat{f}_k'] = E \left[ E[\hat{f}_j \hat{f}_k' | B_k^N] \right] = E \left[ \hat{f}_j E[\hat{f}_k' | B_k^N] \right] = E[\hat{f}_j] = f_j' = E[\hat{f}_j] E[\hat{f}_k']$$

(δ) Χρησιμοποιώντας την (α) παρατηρούμε:

$$E[\hat{C}_{i,j}^{CL} | C_{i,I-i}] = E[D(\hat{f}_{j-1})D(\hat{f}_{j-2}) \dots D(\hat{f}_{I-i})C_{i,I-i} | C_{i,I-i}] \\ = E[E[D(\hat{f}_{j-1}) | B_{j-1}^N] D(\hat{f}_{j-2}) \dots D(\hat{f}_{I-i})C_{i,I-i} | C_{i,I-i}] \\ = D(f_{j-1})E[\hat{C}_{i,j-1}^{CL} | C_{i,I-i}]$$

Η επανάληψη της διαδικασίας και το Λήμμα (3.2) οδηγούν στο παρακάτω:

$$E[\hat{C}_{i,j}^{CL} | C_{i,I-i}] = D(f_{j-1}) \dots D(f_{I-i})C_{i,I-i} = E[C_{i,j} | C_{i,I-i}]$$

(ε) Προκύπτει άμεσα από την απόδειξη (δ).

### Παρατηρήσεις για το Λήμμα 3.2

- Παρατηρούμε ότι στο Λήμμα 3.3 (δ) φαίνεται ότι αποκτούμε έναν αμερόληπτο εκτιμητή  $\hat{C}_{i,j}^{CL}$  για την αναμενόμενη τελική απαίτηση  $E[C_{i,j} | D_I^N]$ .
- Αυτό έπεται το ότι ο εκτιμητής για τις συγκεντρωτικές τελικές απαιτήσεις για τα έτη ατυχήματος  $i \in \{1, \dots, I\}$  είναι:

$$\sum_{n=1}^N \hat{C}_{i,j}^{(n)CL} = 1' \hat{C}_{i,j}^{CL} \quad (3.8)$$

δοθέντος  $C_{i,I-i}$  είναι αμερόληπτος εκτιμητής για το  $\sum_{n=1}^N E[C_{i,j}^{(n)} | C_{i,I-i}]$ .

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι το ίδιο με αυτό που ισχύει και στη μονοδιάστατη περίπτωση αλλά για την πολυμεταβλητή.

### Λήμμα 3.3

Κάτω από τις υποθέσεις του μοντέλου 3.4.1, ο εκτιμητής  $\hat{f}_j$  είναι ένας  $B_{j+1}^N$  μετρήσιμος αμερόληπτος εκτιμητής για το  $f_j$ , ο οποίος ελαχιστοποιεί την υπό συνθήκη αναμενόμενη τετραγωνική απώλεια του  $f_j$  ανάμεσα σε όλους τους  $N$ -διαστάσεων αμερόληπτους γραμμικούς συνδυασμούς των αμερόληπτων εκτιμητών  $(F_{i,j+1})_{0 \leq i \leq l-j-1}$  για το  $f_j$ , υπό συνθήκη  $B_j^N$ , δηλαδή:

$$\begin{aligned} E[(f_j - \hat{f}_j)'(f_j - \hat{f}_j) | B_j^N] \\ = \min_{W_{i,j} \in \mathbb{R}^{N \times N}} E \left[ \left( (f_j - \sum_{i=0}^{l-j-1} W_{i,j} F_{i,j+1})' (f_j - \sum_{i=0}^{l-j-1} W_{i,j} F_{i,j+1}) \right) | B_j^N \right] \end{aligned}$$

Ο στόχος μας τώρα είναι να αντλήσουμε έναν εκτιμητή για το υπό συνθήκη Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα της πολυμεταβλητής CL για τα μοναδιαία έτη ατυχήματος  $i \in \{1, \dots, I\}$

$$\begin{aligned} mse_{p_{\sum_{i,n} C_{i,j}^{(n)} | D_i^N}} \left( \sum_{n=1}^N \hat{C}_{i,j}^{(n)CL} \right) = \\ E \left[ \left( \left( \sum_{i,n} \hat{C}_{i,j}^{(n)CL} - \sum_{i,n} C_{i,j}^{(n)} \right)^2 | D_i^N \right) \right] = 1' E \left( (\hat{C}_{i,j}^{CL} - C_{i,j}) (\hat{C}_{i,j}^{CL} - C_{i,j})' | D_i^N \right) 1 = \\ 1' Var(C_{i,j} | D_i^N) 1 + 1' \left( \hat{C}_{i,j}^{CL} - E(C_{i,j} | D_i^N) \right) \left( \hat{C}_{i,j}^{CL} - E(C_{i,j} | D_i^N) \right)' 1 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Για τα συνολικά έτη ατυχήματος θεωρούμε ότι:

$$mse_{p_{\sum_{i,n} C_{i,j}^{(n)} | D_i^N}} \left( \sum_{n=1}^N \hat{C}_{i,j}^{(n)CL} \right) = E \left[ \left( \left( \sum_{i,n} \hat{C}_{i,j}^{(n)CL} - \sum_{i,n} C_{i,j}^{(n)} \right)^2 | D_i^N \right) \right]$$

Ανάλογα με την μονοδιάστατη περίπτωση όπου αρχικά δίνουμε έναν εκτιμητή για τη διαδικασία της διακύμανσης και της εκτίμησης των σφαλμάτων για τα μοναδιαία έτη ατυχήματος.

#### **3.4.2. Υπό συνθήκη Διαδικασία Διακύμανσης**

Η υπό συνθήκη διαδικασία διακύμανσης  $1' Var(C_{i,j} | D_i^N) 1$  προέρχεται από τη στοχαστική κίνηση των  $C_{i,j}$ . Αν θεωρήσουμε το γινόμενο ως  $\prod_{i=k+1}^k D(f_i) = I$ , όπου  $I$  είναι ο  $N \times N$  αναγνωριστικός πίνακας, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

### Λήμμα 3.4

(Διαδικασία Διακύμανσης για μοναδιαία έτη ατυχήματος). Κάτω από τις υποθέσεις του μοντέλου 3.4.1 η υπό συνθήκη διαδικασία διακύμανσης για τις τελικές απαιτήσεις  $C_{i,j}$  για τα έτη ατυχήματος  $i \in \{1, \dots, I\}$ , δοθέντος των παρατηρήσεων  $D_i^N$ , δίνεται από:

$$1' Var(C_{i,j} | D_i^N) 1 = 1' \left( \sum_{j=l-i}^{j-1} \prod_{k=j+1}^{k-1} D(f_k) \sum_{i,j}^C \prod_{k=j+1}^{k-1} D(f_k) \right) 1 \quad (3.10)$$

Όπου

$$\Sigma_{i,j}^C = E(D(C_{i,j})^{1/2} \Sigma_j D(C_{i,j})^{1/2} | C_{i,I-i}) \quad (3.11)$$

*Απόδειξη:*

Θεωρούμε ότι  $i \in \{1, \dots, I\}$ . Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Markov και την ανεξαρτησία των διαφορετικών ετών ατυχήματος έχουμε:

$$\begin{aligned} 1'Var(C_{i,j}|D_i^N)1 &= 1'Var(C_{i,j}|C_{i,I-i})1 = 1'E \left[ Var \left( (C_{i,j}|C_{i,j-1}) | C_{i,I-i} \right) \right] 1 + \\ &1'Var \left( (E[C_{i,j}|C_{i,j-1}] | C_{i,I-i}) \right) 1 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Παρατηρούμε ότι για τη σχέση στο δεξί μέρος της εξίσωσης έχουμε ότι:

$$1'Var \left( (E[C_{i,j}|C_{i,j-1}] | C_{i,I-i}) \right) 1 = 1'D(f_{j-1})Var(C_{i,j-1}|C_{i,I-i})D(f_{j-1})1$$

Και χρησιμοποιώντας τη σχέση 3.3 αποκτούμε τη σχέση στο αριστερό μέρος της εξίσωσης:

$$1'E \left[ Var \left( (C_{i,j}|C_{i,j-1}) | C_{i,I-i} \right) \right] 1 = 1'E \left( D(C_{i,j-1})^{\frac{1}{2}} \Sigma_{j-1} (C_{i,j-1})^{\frac{1}{2}} | C_{i,j-1} \right) 1$$

Και ως εκ τούτου, αποκτούμε την ακόλουθη αναδρομική φόρμουλα για την υπό συνθήκη διαδικασία διακύμανσης των ετών ατυχήματος  $i \in \{1, \dots, I\}$

$$1'Var(C_{i,j}|D_i^N)1 = 1'(\Sigma_{i,j-1}^C + D(f_{j-1})Var(C_{i,j-1}|D_i^N)D(f_{j-1}))1 \quad (3.13)$$

Η επανάληψη αυτής της αναδρομικής φόρμουλας ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος.

### Παρατηρήσεις:

- Η φόρμουλα (3.12) δίνει μια αναδρομική φόρμουλα για την υποθετική διαδικασία διακύμανσης των συσχετισμένων απορρεόντων τριγώνων. Είναι ίδιο με τη μονοδιάστατη περίπτωση της CL.
- Για  $N=1$  οι φόρμουλες (3.9)-(3.10) μειώνουν την υποθετική διαδικασία διακύμανσης για τα μοναδιαία έτη ατυχήματος για τα ατομικά απορρέοντα τρίγωνα.

Αν αντικαταστήσουμε τις παραμέτρους  $f_k$  και  $\Sigma_{i,j}^C$  στην σχέση (3.9) από τους εκτιμητές τους, αποκτούμε έναν εκτιμητή της υποθετικής διαδικασίας διακύμανσης για ένα μοναδιαίο έτος ατυχήματος.

### 3.4.3 Υπό συνθήκη Εκτίμηση Σφαλμάτων για Μοναδιαία Έτη Ατυχήματος

Σε αυτή την υποενότητα ασχολούμαστε με το δεύτερο σκέλος:

$$1' \left( \hat{C}_{i,j}^{CL} - E(C_{i,j}|D_i^N) \right) \left( \hat{C}_{i,j}^{CL} - E(C_{i,j}|D_i^N) \right)' 1 \quad (3.14)$$



της σχέσης 3.9. Αυτό σημαίνει ότι θέλουμε να αποφασίσουμε την αβεβαιότητα στην εκτίμηση της υπό συνθήκης προσδοκίας (μέση τιμή)  $E(C_{i,J}|D_I^N)$  από τον εκτιμητή  $\hat{C}_{i,J}^{CL}$ .

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1 και τον εκτιμητή της πολυμεταβλητής CL όπως αναφέρεται και ορίζεται παραπάνω έχουμε, για την υπό συνθήκη εκτίμηση σφαλμάτων των ετών ατυχήματος  $i > 0$ , την αναπαράσταση:

$$\begin{aligned} & 1' \left( \hat{C}_{i,J}^{CL} - E(C_{i,J}|D_I^N) \right) \left( \hat{C}_{i,J}^{CL} - E(C_{i,J}|D_I^N) \right)' 1 \\ &= 1' \left( \prod_{j=I-i}^{J-1} D(\hat{f}_j) - \prod_{j=I-i}^{J-1} D(f_j) \right) C_{i,I-i} C'_{i,I-i} \left( \prod_{j=I-i}^{J-1} D(\hat{f}_j) - \prod_{j=I-i}^{J-1} D(f_j) \right) 1 \end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$D(b)ac'D(d) = D(a)bd'D(c) \quad (3.15)$$

Για το αυθαίρετα N-Διάστασης διανύσματα a, b, c και d, αποκτούμε την υπό συνθήκη εκτίμηση σφάλματος

$$\begin{aligned} & 1' \left( \hat{C}_{i,J}^{CL} - E(C_{i,J}|D_I^N) \right) \left( \hat{C}_{i,J}^{CL} - E(C_{i,J}|D_I^N) \right)' 1 = \\ & 1' D(C_{i,I-i}) (\hat{g}_{i|J} - g_{i|J}) (\hat{g}_{i|J} - g_{i|J})' D(C_{i,I-i}) 1 \end{aligned} \quad (3.16)$$

όπου το γινόμενο, των εκτιμητών της πολυμεταβλητής CL και των παραγόντων  $\hat{g}_{i|J}$  και  $g_{i|J}$  αντίστοιχα ορίζονται από:

$$\begin{aligned} \hat{g}_{i|J} &= D(\hat{f}_{I-i}) \dots D(\hat{f}_{j-1}) 1 \\ g_{i|J} &= D(f_{I-i}) \dots D(f_{j-1}) 1 \end{aligned} \quad (3.17)$$

Για  $j = I - i + 1, \dots, J$ .

### 3.4.4 Υπό συνθήκη Εκτίμηση Σφαλμάτων για Συνολικά Έτη Ατυχήματος

Θεωρούμε δυο διαφορετικά έτη ατυχήματος  $1 \leq i < k \leq I$ . Από τις υποθέσεις του μοντέλου 3.4.1 γνωρίζουμε ότι οι τελικές απαιτήσεις  $C_{i,J}$  και  $C_{k,J}$  είναι ανεξάρτητες. Παρόλα αυτά, θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί αν συναθροίσουμε τους εκτιμητές  $\hat{C}_{i,J}$  και  $\hat{C}_{k,J}$  αφού χρησιμοποιούν τις ίδιες παρατηρήσεις για την εκτίμηση των παραγόντων  $f_j$  της μεθόδου CL και συνεπώς δεν υπάρχει πλέον ανεξαρτησία. Ορίζουμε ως:

$$\begin{aligned} & mse_{\sum_n C_{i,J}^{(n)} + \sum_n C_{k,J}^{(n)} | D_I^N} \left( \sum_{n=1}^N \hat{C}_{i,J}^{(n)CL} + \sum_{n=1}^N \hat{C}_{k,J}^{(n)CL} \right) \\ &= E \left( \left( \left( \sum_{n=1}^N \hat{C}_{i,J}^{(n)CL} + \hat{C}_{i,J}^{(n)CL} \right) - \sum_{n=1}^N C_{i,J}^{(n)} + C_{k,J}^{(n)} \right)^2 \middle| D_I^N \right) \end{aligned}$$

Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης των δυο συνολικών ετών  $i$  και  $k$ . Έχουμε:

$$\begin{aligned} msep_{\sum_n c_{i,j}^{(n)} + \sum_n c_{k,j}^{(n)} | D_I^N} & \left( \sum_{n=1}^N \hat{c}_{i,j}^{(n)CL} + \sum_{n=1}^N \hat{c}_{k,j}^{(n)CL} \right) \\ & = 1' Var(C_{i,j} + C_{k,j} | D_I^N) 1 \\ & + 1' (\hat{c}_{i,j}^{CL} + \hat{c}_{k,j}^{CL} - E[C_{i,j} + C_{k,j} | D_I^N]) x (\hat{c}_{i,j}^{CL} + \hat{c}_{k,j}^{CL} - E[C_{i,j} + C_{k,j} | D_I^N])' 1 \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των διαφορετικών ετών ατυχήματος, η υποθετική διαδικασία διακύμανσης μπορεί να γίνει ως εξής:

$$1' Var(C_{i,j} + C_{k,j} | D_I^N) 1 = 1' Var(C_{i,j} | D_I^N) 1 + 1' Var(C_{k,j} | D_I^N) 1$$

Για την υπό συνθήκη εκτίμηση σφαλμάτων έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} & 1' (\hat{c}_{i,j}^{CL} + \hat{c}_{k,j}^{CL} - E[C_{i,j} + C_{k,j} | D_I^N]) x (\hat{c}_{i,j}^{CL} + \hat{c}_{k,j}^{CL} - E[C_{i,j} + C_{k,j} | D_I^N])' 1 \\ & = 1' (\hat{c}_{i,j}^{CL} - E[C_{i,j} | D_I^N]) (\hat{c}_{i,j}^{CL} - E[C_{i,j} | D_I^N])' 1 \\ & + 1' (\hat{c}_{k,j}^{CL} - E[C_{k,j} | D_I^N]) (\hat{c}_{k,j}^{CL} - E[C_{k,j} | D_I^N])' 1 \\ & + 2 1' (\hat{c}_{i,j}^{CL} - E[C_{i,j} | D_I^N]) (\hat{c}_{k,j}^{CL} - E[C_{k,j} | D_I^N])' 1 \end{aligned}$$

Ως εκ τούτου, έχουμε την ακόλουθη αποσύνθεση για το μέσο τετραγωνικό σφάλμα πρόβλεψης για δυο συνολικά έτη ατυχήματος:

$$\begin{aligned} msep_{\sum_n c_{i,j}^{(n)} + \sum_n c_{k,j}^{(n)} | D_I^N} \left( \sum_{n=1}^N \hat{c}_{i,j}^{(n)CL} + \sum_{n=1}^N \hat{c}_{k,j}^{(n)CL} \right) & = msep_{\sum_n c_{i,j}^{(n)} | D_I^N} \left( \sum_{n=1}^N \hat{c}_{i,j}^{(n)CL} \right) + \\ msep_{\sum_n c_{k,j}^{(n)} | D_I^N} \left( \sum_{n=1}^N \hat{c}_{k,j}^{(n)CL} \right) & + 2 1' (\hat{c}_{i,j}^{CL} - E[C_{i,j} | D_I^N]) (\hat{c}_{k,j}^{CL} - E[C_{k,j} | D_I^N])' 1 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Αυτό σημαίνει ότι επιπρόσθετα στο Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα Πρόβλεψης για τα μοναδιαία έτη ατυχήματος αποκτούμε 2 φορές τα γινόμενα:

$$\begin{aligned} & 1' (\hat{c}_{i,j}^{CL} - E[C_{i,j} | D_I^N]) (\hat{c}_{k,j}^{CL} - E[C_{k,j} | D_I^N])' 1 = \\ & 1' (\prod_{j=i-i}^{j-1} D(\hat{f}_j) - \prod_{j=i-i}^{j-1} D(f_j)) c_{i,i-i} c'_{k,i-k} (\prod_{j=i-k}^{j-1} D(\hat{f}_j) - \prod_{j=i-k}^{j-1} D(f_j)) 1 = 1' D(C_{i,i-i}) (\hat{g}_{i|j} - \\ & g_{i|j}) (\hat{g}_{k|j} - g_{k|j})' D(C_{k,i-k}) 1 \end{aligned} \quad (3.19)$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4: ΠΟΛΥΜΕΤΑΒΛΗΤΟ ΠΡΟΣΘΕΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΟΘΕΜΑΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

### 4.1. Εισαγωγικά στοιχεία πολυμεταβλητού προσθετικού μοντέλου

Συχνά στις ασφαλίσεις ζημιών τα αποθέματα για τις ζημιές που κρατούνται αποτελούν το μεγαλύτερο μέρος των υποχρεώσεων όπως αυτές φαίνονται στον ισολογισμό της εταιρίας. Ως εκ τούτου η εκτίμηση της επάρκειας αποθεμάτων για τις απαιτήσεις που θα προκύψουν για ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από αρκετά απορρέοντα υπό-χαρτοφυλάκια είναι σχετικό για κάθε εταιρία ασφαλίσεων ζημιών.

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται το πολυμεταβλητό προσθετικό μοντέλο αποθεματοποίησης (εφεξής θα καλείται ALR, Additive Loss Reserving) όπως προτάθηκε από τους Hess et al. (2006) και Schmidt (2006b). Η πολυμεταβλητή ALR μέθοδος βασίζεται σε προσαυξητικές απαιτήσεις (incremental losses). Το μοντέλο αυτό επιτρέπει τη μελέτη ατομικών απορρεόντων υπό-χαρτοφυλακίων στα οποία γίνεται η χρήση και της μεθόδου Chain –Ladder και της ALR για διαφορετικά υπό-χαρτοφυλάκια. Όπως και στο πολυμεταβλητό μοντέλο CL θα θεωρήσουμε ότι το πολυμεταβλητό ALR μοντέλο αποτελείται από μερικά συσχετιζόμενα υπό-χαρτοφυλάκια. Μέσα σε αυτό το πλαίσιο ψάχνουμε για πολυμεταβλητούς εκτιμητές που λαμβάνουν υπόψη τους την δομή της συσχέτισης.

Στις ακόλουθες παραγράφους θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο των Merz και Wüthrich (2007d) και θα αναλυθεί ένα πλαίσιο για τη πολυμεταβλητή ALR μέθοδο για να αντλήσουμε έναν εκτιμητή για το υπό συνθήκη Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα Πρόβλεψης. Το μοντέλο ALR θα συνδυαστεί με το πολυδιάστατο μοντέλο της CL.

### 4.2. Πολυμεταβλητό Προσθετικό Μοντέλο Αποθεματοποίησης

Στη πολυμεταβλητή μέθοδο ALR μελετάμε κανονικές προσαυξητικές απαιτήσεις (ατομικά προσαυξητικά Loss Ratios). Ορίζουμε για  $i \in \{0, \dots, I\}$  και  $j \in \{1, \dots, J\}$  το  $N$ -διάστασης διάνυσμα των κανονικών προσαυξητικών απαιτήσεων για τα έτη ατυχήματος  $i$  και έτος εξέλιξης  $j$  από:

$$M_{i,j} = \left( M_{i,j}^{(1)}, \dots, M_{i,j}^{(N)} \right)' = V_i^{-1} X_{i,j}$$

$$\text{Με } V_i = \begin{pmatrix} V_i^{(1,1)} & V_i^{(1,2)} & \dots & V_i^{(1,N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ V_i^{(N,1)} & V_i^{(N,2)} & \dots & V_i^{(N,N)} \end{pmatrix}$$

όπου είναι ένας ντετερμινιστικός θετικά ορισμένος πίνακας  $N \times N$ . Οι συντεταγμένες  $M_{i,j}^{(n)}$  της  $M_{i,j}$  ( $n = 1, \dots, N$ ) εκφράζουν τις κανονικοποιημένες προσαυξητικές απαιτήσεις για έτος ατυχήματος  $i$  και έτος εξέλιξης  $j$  του υπό-χαρτοφυλακίου  $n$ . Στη μονοδιάστατη περίπτωση όπου  $N = 1$  έχουμε:

$$M_{i,j} = X_{i,j}/V_i$$

όπου  $V_i \in \mathbb{R}$  είναι ένα κατάλληλο (ντετερμινιστικό) μέτρο όγκου. Αν  $X_{i,j}$  εκφράζει τις προσαυξητικές απαιτήσεις και  $V_i$  είναι το συνολικό ασφάλιστρο που λαμβάνεται για έτος ατυχήματος  $i$ , τότε  $M_{i,j}$  δείχνει πως το συνολικό loss ratio πληρώνεται με τη πάροδο του χρόνου.

Το ακόλουθο πολυμεταβλητό μοντέλο ALR μελετήθηκε από τους Merz και Wüthrich (2007d).

*Υποθέσεις 4.2.1.: (Πολυμεταβλητή χρονοσειρά μοντέλο ALR)*

- Οι προσαυξητικές απαιτήσεις  $X_{i,j}$  των διαφορετικών ετών ατυχήματος  $i$  είναι ανεξάρτητες.
- Υπάρχουν  $(N \times N)$  – διαστάσεων ντετερμινιστικοί θετικά ορισμένοι συμμετρικοί πίνακες  $V_0, \dots, V_I$  και  $N$  – διάστασης σταθερές  $(j = 1, \dots, J)$

$$m_j = (m_j^{(1)}, \dots, m_j^{(N)})' \text{ και } \sigma_{j-1} = (\sigma_{j-1}^{(1)}, \dots, \sigma_{j-1}^{(N)})'$$

με  $\sigma_j^{(n)} > 0$  για όλα  $n = 1, \dots, N$  όπως και ένα  $N$  – διαστάσεων διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών

$$\varepsilon_{i,j} = (\varepsilon_{i,j}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{i,j}^{(N)})'$$

τέτοιο ώστε για όλα τα  $i \in \{0, \dots, I\}$  και  $j \in \{1, \dots, J\}$  έχουμε:

$$X_{i,j} = V_i m_j + V_i^{\frac{1}{2}} D(\varepsilon_{i,j}) \sigma_{j-1} \quad (4.1)$$

Επιπλέον οι τυχαίες μεταβλητές  $\varepsilon_{i,j}$  είναι ανεξάρτητες με  $E[\varepsilon_{i,j}] = 0$  και θετικά ορισμένες:

$$Cov(\varepsilon_{i,j}, \varepsilon_{i,j}) = E[\varepsilon_{i,j} \varepsilon_{i,j}'] = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{j-1}^{(1,2)} & \dots & \rho_{j-1}^{(1,N)} \\ \rho_{j-1}^{(2,1)} & 1 & \dots & \rho_{j-1}^{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{j-1}^{(N,1)} & \rho_{j-1}^{(N,2)} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

όπου  $\rho_{j-1}^{(n,m)} \in (-1,1)$  για  $n, m \in \{1, \dots, N\}$  και  $n \neq m$ . □

Στη μονοδιάστατη περίπτωση  $N = 1$ , το μοντέλο ALR ικανοποιεί τη σχέση:

$$\frac{X_{i,j}}{V_i} = m_j + V_i^{-1/2} \sigma_{j-1} \varepsilon_{i,j} \quad (4.2)$$

$$\text{με } E[X_{i,j}] = V_i m_j \text{ και } Var(X_{i,j}) = V_i \sigma_{j-1}^2 \quad (4.3)$$

Κάτω από τις υποθέσεις του μοντέλου 4.2.1 έχουμε:

$$\text{Cov}(X_{i,j}, X_{i,j}) = V_i^{1/2} E[D(\varepsilon_{i,j})\sigma_{j-1}\sigma'_{j-1}D(\varepsilon_{i,j})]V_i^{1/2} \quad (4.4)$$

Ανάλογα με τη πολυμεταβλητή CL, παρατηρούμε ότι για την αναμενόμενη τιμή της δεξιάς πλευράς της εξίσωσης της σχέσης (4.4) έχουμε:

$$\Sigma_{j-1} = E[D(\varepsilon_{i,j})\sigma_{j-1}\sigma'_{j-1}D(\varepsilon_{i,j})] = D(\sigma_{j-1})\text{Cov}(\varepsilon_{i,j}, \varepsilon_{i,j})D(\sigma_{j-1}) =$$

$$\begin{pmatrix} (\sigma_{j-1}^{(1)})^2 & \sigma_{j-1}^{(1)}\sigma_{j-1}^{(2)}\rho_{j-1}^{(1,2)} & \dots & \sigma_{j-1}^{(1)}\sigma_{j-1}^{(N)}\rho_{j-1}^{(1,N)} \\ \sigma_{j-1}^{(2)}\sigma_{j-1}^{(1)}\rho_{j-1}^{(2,1)} & (\sigma_{j-1}^{(2)})^2 & \dots & \sigma_{j-1}^{(2)}\sigma_{j-1}^{(N)}\rho_{j-1}^{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{j-1}^{(N)}\sigma_{j-1}^{(1)}\rho_{j-1}^{(N,1)} & \sigma_{j-1}^{(N)}\sigma_{j-1}^{(2)}\rho_{j-1}^{(N,2)} & \dots & (\sigma_{j-1}^{(N)})^2 \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

και περιορίζουμε κάθε υπόθεση σχετικά με τη συσχέτιση μεταξύ των  $N$  υπο-χαρτοφυλακίων για κάθε έτος εξέλιξης  $j$  ( $j = (1, \dots, J)$ ) στα  $N$  απορρέοντα τρίγωνα. Ο πίνακας  $\Sigma_{j-1}$  κατοπτρίζει τη συσχέτιση δομής μεταξύ των προσauξητικών απαιτήσεων των ετών εξέλιξης  $j$  για διαφορετικά  $N$  υπο-χαρτοφυλάκια.

### Παρατηρήσεις:

- Οι προσauξητικές απαιτήσεις  $X_{i,j}$  και  $X_{k,l}$  είναι ανεξάρτητες για  $i \neq k$  ή  $j \neq l$ .
- Τα  $N$ -διαστάσεων αναμενόμενα προσauξητικά loss ratios  $(m_j)_{1 \leq j \leq J}$  μπορεί να ερμηνευτεί σαν ένα πολυμεταβλητό πρότυπο κλιμακωτών αναμενόμενων χρηματοροών για τα διαφορετικά έτη εξέλιξης.
- Στις περισσότερες εφαρμογές, ο πίνακας  $V_i$  επιλέγεται να είναι διαγώνιος με σκοπό να αντιπροσωπεύσει ένα μέτρο όγκου των ετών ατυχήματος  $i$ .
- Αφού υποθέτουμε ότι ο πίνακας  $V_i$  είναι ένας θετικός συμμετρικός πίνακας, υπάρχει ένας καλά ορισμένος θετικός συμμετρικός πίνακας  $V_i^{1/2}$  (καλείται η τετραγωνική ρίζα του πίνακα  $V_i$ ) ικανοποιώντας τη συνθήκη:

$$V_i = V_i^{1/2}V_i^{1/2}$$

- Η πολυμεταβλητή χρονοσειρά του μοντέλου ALR είναι μια ειδική περίπτωση του πολυμεταβλητού μοντέλου ALR όπως αυτό προτάθηκε απο τους Hess et al. (2006) και Schmidt (2006b) με ανεξάρτητες προσauξητικές απαιτήσεις  $X_{i,j}$  και θετικά ορισμένους συμμετρικούς πίνακες  $\Sigma_j = E[D(\varepsilon_{i,j+1})\sigma_j\sigma_j^T D(\varepsilon_{i,j+1})]$ .

**Λήμμα 4.1:**

Κάτω από τις υποθέσεις του μοντέλου 4.2.1 για όλα τα  $1 \leq i \leq I$

$$E[C_{i,j}|D_i^N] = E[C_{i,j}|C_{i,I-i}] = C_{i,I-i} + V_i \sum_{j=I-i+1}^J m_j$$

Απόδειξη:

Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των προσαυξητικών απαιτήσεων παρατηρούμε ότι:

$$\begin{aligned} E[C_{i,j}|D_i^N] &= C_{i,I-i} + E \left[ \sum_{j=I-i+1}^J X_{i,j} | D_i^N \right] \\ &= C_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1}^J E[X_{i,j}] = C_{i,I-i} + V_i \sum_{j=I-i+1}^J m_j = E[C_{i,j}|C_{i,I-i}] \end{aligned}$$

□

Αυτό το αποτέλεσμα κινητοποιεί έναν αλγόριθμο για την εκτίμηση των αναμενόμενων τελικών απαιτήσεων δοθέντος των παρατηρήσεων  $D_i^N$ . Αν τα  $N$  – διάστασης αναμενόμενα προσαυξητικά loss ratios  $(m_j)_{1 \leq j \leq J}$  είναι γνωστά, τότε οι αναμενόμενες εκκρεμείς απαιτήσεις – υποχρεώσεις για τα έτη ατυχήματος  $i$  για τα  $N$  συσχετισμένα απορρέοντα τρίγωνα που βασίζονται στην πληροφορία  $D_i^N$  είναι:

$$E[C_{i,j}|D_i^N] - C_{i,I-i} = V_i \sum_{j=I-i+1}^J m_j$$

Στις περισσότερες εφαρμογές πρέπει να εκτιμήσουμε τους δείκτες  $m_j$  από τα δεδομένα στα πάνω μέρος του τριγώνου. Οι Hess et al. (2006) και Schmidt (2006b) πρότειναν τους ακόλουθους πολυμετβλητούς εκτιμητές για  $j = 1, \dots, J$ :

$$\widehat{m}_j = (\widehat{m}_j^{(1)}, \dots, \widehat{m}_j^{(N)})' = (\sum_{i=0}^{I-j} V_i^{1/2} \sum_{j-1}^{-1} V_i^{1/2})^{-1} \sum_{i=0}^{I-j} (V_i^{1/2} \sum_{j-1}^{-1} V_i^{1/2}) M_{i,j} \quad (4.6)$$

Οι συντεταγμένες  $\widehat{m}_j^{(n)}$  εκφράζουν το εκτιμώμενο προσαυξητικό loss ratio για τα έτη εξέλιξης  $j$  και το απορρέον τρίγωνο  $n \in \{1, \dots, N\}$  βασισμένο στην πληροφορία  $D_i^N$ .

Ο εκτιμητής του πολυμεταβλητού μοντέλου ALR για  $E[C_{i,j}|D_i^N]$  για  $i + j > I$  δίνεται από τη σχέση:

$$\widehat{C}_{i,j}^{AD} = (\widehat{C}_{i,j}^{(1)AD}, \dots, \widehat{C}_{i,j}^{(N)AD})' = \widehat{E}(C_{i,j}|D_i^N) = C_{i,I-i} + V_i \sum_{j=I-i+1}^J m_j$$

Αυτό σημαίνει ότι στη πολυμεταβλητή μέθοδο ALR προβλέπουμε την κανονικότητα των σωρευτικών απαιτήσεων  $V_i^{-1}C_{i,j}$  από το άθροισμα των τελευταίων παρατηρούμενων κανονικοποιημένων σωρευτικών απαιτήσεων  $V_i^{-1}C_{i,I-i}$  και των σταθμισμένων εκτιμώμενων δεικτών  $\widehat{m}_{I-i+1}, \dots, \widehat{m}_j$ , δοθέντος της πληροφορίας  $D_I^N$ . Από τον παραπάνω εκτιμητή παρατηρούμε ότι για τις προσαυξητικές απαιτήσεις  $X_{i,j}$  με  $i + j > I$ :

$$\widehat{X}_{i,j}^{AD} = \left( \widehat{X}_{i,j}^{(1)AD}, \dots, \widehat{X}_{i,j}^{(N)AD} \right)' = V_i \widehat{m}_j$$

### Παρατηρήσεις:

- Στην περίπτωση  $j = J$  (σημειώνεται ότι γενικά υποθέτουμε  $I = J$ ) έχουμε  $\widehat{m}_j = M_{0,J}$ .
- Ο εκτιμητής της σχέσης (4.6) είναι ένας σταθμισμένος μέσος όρος των παρατηρούμενων ατομικών κανονικοποιημένων προσαυξητικών απαιτήσεων  $M_{i,j}$ . Στην περίπτωση που  $N=1$  (δηλαδή έχουμε μόνο ένα υπό-χαρτοφυλάκιο) ο εκτιμητής της σχέσης (4.6) συμπίπτει με τα μονοδιάστατα εκτιμώμενα προσαυξητικά loss ratios

$$\widehat{m}_j = \sum_{i=0}^{I-j} \frac{V_i}{\sum_{k=0}^{I-j} V_k} M_{i,j} \quad (4.7)$$

με ντετερμινιστικά βάρη  $V_i$  α οποία χρησιμοποιούνται στη μονοδιάστατη ALR μέθοδο (Radtke και Schmidt (2004) και Schmidt (2006a)).

- Στην περίπτωση όπου  $N=1$  παρατηρούμε ότι ο μονοδιάστατος εκτιμητής ALR

$$\widehat{C}_{i,j}^{AD} = C_{i,I-i} + \sum_{j=I-i+1}^J \frac{\sum_{k=0}^{I-j} X_{k,j}}{\sum_{k=0}^{I-j} V_k} V_i \quad (4.8)$$

το οποίο είναι παρόμοιο με τους εκτιμητές της μεθόδου BF.

- Ο πίνακας συνδιακύμανσης  $\Sigma_{j-1}$  στον εκτιμητή της σχέσης (4.6) αντικατοπτρίζει τη δομή συσχέτισης μεταξύ διαφορετικών υπό-χαρτοφυλακίων. Αν εξαιρέσουμε την δομή συνδιακύμανσης παρατηρούμε ότι ο ακόλουθος (αμερόληπτος) εκτιμητής

$$\widehat{m}_j^{(0)} = \left( \sum_{i=0}^{I-j} V_i \right)^{-1} \sum_{i=0}^{I-j} V_i M_{i,j} \quad (4.9)$$

Αν η ποσότητα  $V_i$  είναι ένας διαγώνιος πίνακας τότε οι συντεταγμένες της παραπάνω σχέσης (4.9) δίνονται από:

$$\widehat{m}_j^{(n)(0)} = \sum_{i=0}^{I-j} \frac{V_i^{(n,n)}}{\sum_{k=0}^{I-j} V_k^{(n,n)}} M_{i,j}^{(n)} \quad (4.10)$$

το οποίο σημαίνει ότι οι συντεταγμένες του  $\widehat{m}_j^{(0)}$  δίνονται από τους εκτιμητές της μονοδιάστατης ALR μεθόδου.

- Οι Hess et al. (2006) και Schmidt (2006b) έδειξαν ότι ο εκτιμητής του πολυμεταβλητού προσαυξητικού δείκτη ζημιών είναι άριστος εκτιμητής του  $m_j$ , με αναφορά στο

κριτήριο ελάχιστης αναμενόμενης τετραγωνικής ζημιάς σε περίπτωση συσχετισμένων απορρεόντων τριγώνων. Παρόλα αυτά, όπως και στη πολυμεταβλητή περίπτωση της CL, γίνεται η υπόθεση ότι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων  $\Sigma_{j-1}$  είναι γνωστός. Αν δεν έχουμε αξιόπιστους εκτιμητές για τον πίνακα συνδιακυμάνσεων είναι συχνά πιο κατάλληλο να χρησιμοποιήσουμε μονοδιάστατους εκτιμητές.

- Ο εκτιμητής  $\hat{m}_j^{(0)}$  δεν εξαρτάται από τον πίνακα  $\Sigma_{j-1}$  αν  $j = J$  ή αν  $\Sigma_{j-1}$  και  $V_0, \dots, V_{I-j}$  είναι διαγώνιοι. Σε αυτή την περίπτωση οι  $N$  συντεταγμένες  $\hat{m}_j^{(1)}, \dots, \hat{m}_j^{(N)}$  της σχέσης (4.6) συμπίπτει με τους μονοδιάστατους εκτιμητές της σχέσης (4.10) για  $N$  υπό-χαρτοφυλάκια. Αυτό σημαίνει ότι αν  $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{j-2}$  και  $V_0, \dots, V_j$  είναι διαγώνιοι πίνακες, οι ακόλουθοι εκτιμητές συμπίπτουν:

(1) Με την εκτίμηση για ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο βασισμένο στους μονοδιάστατους εκτιμητές της σχέσης (4.6) για κάθε ατομικό υπό-χαρτοφυλάκιο, (2) με το ότι η πολυμεταβλητή πρόβλεψη βασίζεται στους εκτιμητές της σχέσης (4.9) και (3) η πολυμεταβλητή πρόβλεψη βασίζεται στους εκτιμητές της σχέσης (4.6). Παρόλα αυτά, σε άλλες περιπτώσεις είναι πιο λογικό να χρησιμοποιήσουμε τους πολυμεταβλητούς εκτιμητές της σχέσης (4.6), οποτεδήποτε υπάρχει ένας κατάλληλος εκτιμητής για τους πίνακες συνδιακύμανσης  $\Sigma_j$ .

### 4.3 Συνδυασμός μεθόδων πολυμεταβλητής CL και ALR

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζεται ο συνδυασμός των μεθόδων που προτάθηκαν από τους Merz και Wüthrich (2008). Οι δύο μέθοδοι CL και ALR συνδυάζονται σε ένα μοντέλο. Η θεώρηση ενός τέτοιου συνδυασμού από δύο διαφορετικά μοντέλα δημιουργεί ένα πρώτο βήμα προς την εκτίμηση του συνολικού Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος για τα συγκεντρωτικά υπό-χαρτοφυλάκια χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεθόδους αποθεματοποίησης για διαφορετικά υπό-χαρτοφυλάκια.

Η χρήση διαφορετικών μεθόδων αποθεματοποίησης για διαφορετικά υπό-χαρτοφυλάκια κινητοποιείται από το γεγονός ότι γενικά, οι υποθέσεις ομοιογένειας δεν ικανοποιούνται πλήρως από όλα τα υπό-χαρτοφυλάκια καθώς και ότι μερικές φορές έχουμε μόνο για μερικά από τα υπό-χαρτοφυλάκια πληροφορίες (όπως ασφάλιστρα, αριθμό συμβολαίων, εξωτερικές γνώσεις από ειδικούς, δεδομένα από παρόμοια χαρτοφυλάκια, στατιστικά από την ασφαλιστική αγορά) τα οποία θα μπορούσαμε να τα συμπεριλάβουμε στην ανάλυση που κάνουμε για την εύρεση των αποθεμάτων.

Σε αυτές τις περιπτώσεις η χρήση της μεθόδου CL για ένα κομμάτι του συνολικού μας χαρτοφυλακίου που αποτελείται από μικρότερα υπό-χαρτοφυλάκια από την μια πλευρά και από την άλλη πλευρά η χρήση της μεθόδου ALR για το υπόλοιπο κομμάτι του χαρτοφυλακίου είναι μια λογική προσέγγιση. Από αυτή τη πλευρά είναι ενδιαφέρον να επισημανθεί ότι η μέθοδος CL και η μέθοδος ALR είναι πολύ διαφορετικές σε κάποιες πτυχές και ως εκ τούτου εκμεταλλεύονται διαφορετικά χαρακτηριστικά από τα δεδομένα των ατομικών υπό-χαρτοφυλακίων.

Η μέθοδος CL βασίζεται στις σωρευτικές απαιτήσεις (cumulative claims) ενώ η μέθοδος ALR εφαρμόζεται σε προσαυξητικές απαιτήσεις (incremental claims). Παραδείγματος χάρη, η μέθοδος ALR επιτρέπει την μοντελοποίηση αρνητικών προσαυξητικών απαιτήσεων και είναι επίσης κατάλληλη για τη χρήση πραγματοποιημένων γεγονότων, το οποίο μπορεί να σημαίνει την εκθείαση αρνητικών προσαυξητικών απαιτήσεων σε περίπτωση που οι απαιτήσεις υπερεκτιμώνται. Αντιθέτως με τη μέθοδο ALR, η μέθοδος CL παλινδρομεί σε παλιές



παρατηρήσεις στο πάνω μέρος των απορρέοντων τριγώνων και δεν χρησιμοποιεί καμία επιπλέον ειδική γνώση ή κάποια εξωτερική πληροφορία. Τέλος η μέθοδος ALR είναι πιο εύρωστη στις παρατηρήσεις ακραίων τιμών έναντι της CL.

#### 4.3.1 Συνδυασμός μεθόδων CL και ALR: Το μοντέλο

Στα παρακάτω θεωρούμε ότι χωρίς απώλεια της γενικότητας θα χρησιμοποιήσουμε τη πολυμεταβλητή μέθοδο CL για τα πρώτα  $K$  ( $K \leq N$ ) απορρέοντα τρίγωνα  $n = 1, \dots, K$  και τη πολυμεταβλητή ALR τα υπόλοιπα  $N - K$  απορρέοντα τρίγωνα  $n = K+1, \dots, N$ . Αυτό σημαίνει ότι πρέπει να διακρίνουμε τις σωρευτικές και τις προσαυξητικές απαιτήσεις μεταξύ τους σε αυτές που ανήκουν στα απορρέοντα τρίγωνα για τη μέθοδο CL και σε αυτές που ανήκουν στα απορρέοντα τρίγωνα για τη μέθοδο ALR αντίστοιχα. Ως εκ τούτου, υπάρχει μια συγκεκριμένη σημειογραφία που παρουσιάζεται παρακάτω.

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{CL} &= \left( C_{i,j}^{(1)}, \dots, C_{i,j}^{(K)} \right)' \\ X_{i,j}^{CL} &= \left( X_{i,j}^{(1)}, \dots, X_{i,j}^{(K)} \right)' \\ F_{i,j}^{CL} &= \left( \frac{C_{i,j}^{(1)}}{C_{i,j-1}^{(1)}}, \dots, \frac{C_{i,j}^{(K)}}{C_{i,j-1}^{(K)}} \right)' \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} C_{i,j}^{AD} &= \left( C_{i,j}^{(K+1)}, \dots, C_{i,j}^{(N)} \right)' \\ X_{i,j}^{AD} &= \left( X_{i,j}^{(K+1)}, \dots, X_{i,j}^{(N)} \right)' \end{aligned}$$

Για όλα τα  $i \in \{0, \dots, I\}$  και  $j \in \{0, \dots, J\}$  οι σωρευτικές/προσαυξητικές απαιτήσεις που ανήκουν στα απορρέοντα τρίγωνα για τη χρήση της πολυμεταβλητής CL μεθόδου και της πολυμεταβλητής ALR μεθόδου αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι οι σωρευτικές/προσαυξητικές απαιτήσεις για έτος ατυχήματος  $i$  και έτος εξέλιξης  $j$  ολόκληρου του χαρτοφυλακίου δίνεται από:

$$C_{i,j} = \begin{pmatrix} C_{i,j}^{CL} \\ C_{i,j}^{AD} \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad X_{i,j} = \begin{pmatrix} X_{i,j}^{CL} \\ X_{i,j}^{AD} \end{pmatrix}$$

Επιπλέον, ορίζουμε:

$$B_k^K = \{C_{i,j}^{CL}; i + j \leq I \text{ και } 0 \leq j \leq k\}$$

για  $k \in \{0, \dots, J\}$ .

Αυτό το σετ αποτελείται από όλες τις  $K$ -διάστασης τυχαίες μεταβλητές των σωρευτικών απαιτήσεων μέχρι το έτος εξέλιξης  $k$  τα οποία έχουν παρατηρηθεί στα πρώτα  $K$  απορρέοντα τρίγωνα.

Η ακόλουθη πολυμεταβλητή χρονοσειρά είναι ένας συνδυασμός της πολυμεταβλητής CL χρονοσειράς και της πολυμεταβλητής ALR χρονοσειράς.

Υποθέσεις μοντέλου 4.3.1 (Συνδυασμός μοντέλου χρονοσειρών CL και ALR)

- Οι προσανζητικές απαιτήσεις  $X_{i,j}$  των διαφορετικών ετών ατυχήματος  $i$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.
- Υπάρχουν σταθερές  $f_j = (f_j^{(1)}, \dots, f_j^{(K)})'$  και  $\sigma_j^{CL} = (\sigma_j^{(1)}, \dots, \sigma_j^{(K)})'$  με  $f_j^{(k)} > 0$ ,  $\sigma_j^{(k)} > 0$  και μεταβλητές  $\varepsilon_{i,j+1}^{CL} = (\varepsilon_{i,j+1}^{(1)}, \dots, \varepsilon_{i,j+1}^{(K)})'$  τέτοιες ώστε για όλα τα  $i \in \{0, \dots, I\}$  και  $j \in \{0, \dots, J-1\}$  έχουμε:

$$C_{i,j+1}^{CL} = D(f_j)C_{i,j}^{CL} + D(C_{i,j}^{CL})^{1/2} D(\varepsilon_{i,j+1}^{CL})\sigma_j^{CL} \quad (4.11)$$

- Υπάρχουν σταθερές  $m_j = (m_j^{(1)}, \dots, m_j^{(N-K)})'$  και  $\sigma_{j-1}^{AD} = (\sigma_{j-1}^{(K+1)}, \dots, \sigma_{j-1}^{(N)})'$  με  $\sigma_{j-1}^{(n)} > 0$  και τυχαίες μεταβλητές  $\varepsilon_{i,j}^{AD} = (\varepsilon_{i,j}^{(K+1)}, \dots, \varepsilon_{i,j}^{(N)})'$  τέτοιες ώστε για όλα τα  $i \in \{0, \dots, I\}$  και  $j \in \{0, \dots, J-1\}$  έχουμε:

$$X_{i,j}^{AD} = V_i m_j + V_i^{1/2} D(\varepsilon_{i,j}^{AD})\sigma_{j-1}^{AD} \quad (4.12)$$

όπου  $V_0, \dots, V_I$  είναι θετικά ορισμένοι συμμετρικοί  $(N-K) \times (N-K)$  πίνακες.

- Οι τυχαίες μεταβλητές

$$\varepsilon_{i,j+1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{i,j+1}^{CL} \\ \varepsilon_{i,j+1}^{AD} \end{pmatrix} \text{ και } \varepsilon_{k,l+1} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{k,l+1}^{CL} \\ \varepsilon_{k,l+1}^{AD} \end{pmatrix}$$

είναι ανεξάρτητες για  $i \neq k$  ή  $j \neq l$ , με  $E[\varepsilon_{i,j+1}] = 0$  και θετικά ορισμένες

$$Cov(\varepsilon_{i,j+1}, \varepsilon_{i,j+1}) = E[\varepsilon_{i,j+1}\varepsilon_{i,j+1}'] = \begin{pmatrix} 1 & \rho_j^{(1,2)} & \dots & \rho_j^{(1,N)} \\ \rho_j^{(2,1)} & 1 & \dots & \rho_j^{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_j^{(N,1)} & \rho_j^{(N,2)} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

για σταθερό  $\rho_j^{(n,m)} \in (-1,1)$  για  $n \neq m$ .

Χρησιμοποιώντας την ακόλουθη σημειογραφία:

$$\sigma_j = \begin{pmatrix} \sigma_j^{CL} \\ \sigma_j^{AD} \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_j = E[D(\varepsilon_{i,j+1})\sigma_j\sigma_j'D(\varepsilon_{i,j+1})]$$

$$\Sigma_j^{(C)} = E[D(\varepsilon_{i,j+1}^{CL})\sigma_j^{CL}(\sigma_j^{CL})'D(\varepsilon_{i,j+1}^{CL})]$$

$$\begin{aligned}\Sigma_j^{(A)} &= E \left[ D(\varepsilon_{i,j+1}^{AD}) \sigma_j^{AD} (\sigma_j^{AD})' D(\varepsilon_{i,j+1}^{AD}) \right] \\ \Sigma_j^{(C,A)} &= E \left[ D(\varepsilon_{i,j+1}^{CL}) \sigma_j^{CL} (\sigma_j^{AD})' D(\varepsilon_{i,j+1}^{AD}) \right] \\ \Sigma_j^{(A,C)} &= E \left[ D(\varepsilon_{i,j+1}^{AD}) \sigma_j^{AD} (\sigma_j^{CL})' D(\varepsilon_{i,j+1}^{CL}) \right] = \left( \Sigma_j^{(C,A)} \right)'\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned}\Sigma_j &= D(\sigma_j) \text{Cov}(\varepsilon_{i,j+1}, \varepsilon_{i,j+1}) D(\sigma_j) \\ &= \begin{pmatrix} (\sigma_j^{(1)})^2 & \sigma_j^{(1)} \sigma_j^{(2)} \rho_j^{(1,2)} & \dots & \sigma_j^{(1)} \sigma_j^{(N)} \rho_j^{(1,N)} \\ \sigma_j^{(2)} \sigma_j^{(1)} \rho_j^{(2,1)} & (\sigma_j^{(2)})^2 & \dots & \sigma_j^{(2)} \sigma_j^{(N)} \rho_j^{(2,N)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_j^{(N)} \sigma_j^{(1)} \rho_j^{(N,1)} & \sigma_j^{(N)} \sigma_j^{(2)} \rho_j^{(N,2)} & \dots & (\sigma_j^{(N)})^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \Sigma_j^{(C)} & \Sigma_j^{(C,A)} \\ \Sigma_j^{(A,C)} & \Sigma_j^{(A)} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Επιπλέον, ορίζουμε ένα  $K$  – διάστασης και  $(N - K)$  διάστασης στήλης μοναδιαίο διάνυσμα με  $1_K \in \mathbb{R}^K$  και  $1_{N-K} \in \mathbb{R}^{N-K}$ , αντίστοιχα, τέτοια ώστε το  $N$ - διάστασης στήλης μοναδιαίο διάνυσμα να δίνεται από  $1 = (1'_K, 1'_{N-K})'$ .

Επισημαίνεται ότι, ο συνδυασμός των μεθόδων CL και ALR είναι κατάλληλος για απορρέοντα χαρτοφυλάκια  $N$  συσχετισμένων υπό-χαρτοφυλακίων στα οποία τα πρώτα  $K$  υπό-χαρτοφυλάκια ικανοποιούν τις υποθέσεις ομοιογένειας της (πολυμεταβλητής) CL μεθόδου και τα υπόλοιπα  $N - K$  υπό-χαρτοφυλάκια ικανοποιούν τις υποθέσεις ομοιογένειας της (πολυμεταβλητής) ALR μεθόδου.

**Ο εκτιμητής του συνδυασμού των δύο μεθόδων CL & ALR** για  $E[C_{i,j}|D_i^N]$  και για  $i + j > 1$  δίνεται από τη σχέση:

$$\hat{C}_{i,j} = \left( \hat{C}_{i,j}^{(1)CL}, \dots, \hat{C}_{i,j}^{(K)CL}, \hat{C}_{i,j}^{(K+1)AD}, \dots, \hat{C}_{i,j}^{(N)AD} \right)' = \hat{E}[C_{i,j}|D_i^N] = \begin{pmatrix} \prod_{l=i}^{j-1} D(\hat{f}_l) C_{i,l-i}^{CL} \\ C_{i,l-i}^{AD} + V_i \sum_{l=i+1}^j \hat{m}_l \end{pmatrix}$$

Εκ τούτου, οι εκτιμητές των παραγόντων εξέλιξης  $f_j$  και οι εκτιμητές των προσαυξητικών δείκτη ζημιών  $m_j$  δίνονται από:

$$\begin{aligned}
\hat{f}_j &= \left( \hat{f}_j^{(1)}, \dots, \hat{f}_j^{(K)} \right)' \\
&= \left( \sum_{i=0}^{I-j-1} D(C_{i,j}^{CL})^{1/2} (\Sigma_j^{(C)})^{-1} D(C_{i,j}^{CL})^{1/2} \right)^{-1} \\
&\quad \times \sum_{i=0}^{I-j-1} D(C_{i,j}^{CL})^{1/2} (\Sigma_j^{(C)})^{-1} D(C_{i,j}^{CL})^{-1/2} C_{i,j+1}^{CL}
\end{aligned}$$

για  $j = 0, \dots, J - 1$  και

$$\hat{m}_j = \left( \hat{m}_j^{(1)}, \dots, \hat{m}_j^{(N-K)} \right)' = \left( \sum_{i=0}^{I-j} V_i^{1/2} (\Sigma_{j-1}^{(A)})^{-1} V_i^{1/2} \right)^{-1} \sum_{i=0}^{I-j} V_i^{1/2} (\Sigma_{j-1}^{(A)})^{-1} V_i^{-1/2} X_{i,j}^{AD}$$

για  $j = 1, \dots, J$  αντίστοιχα.

Επισημαίνεται ότι, ο  $\hat{C}_{i,j}$  είναι αμερόληπτος εκτιμητής για  $E[C_{i,j} | D_i^N] = E[C_{i,j} | C_{i,i-j}]$  και για το  $E[C_{i,j}]$ .

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5: ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΓΙΑ ΤΟ ΧΑΡΤΟΦΥΛΑΚΙΟ ΜΙΑΣ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΤΑΙΡΙΑΣ

## 5.1 Αριθμητικά Δεδομένα

Το παρόν παράδειγμα εκτελείται με σκοπό την ανάδειξη της μεθόδου Πολυμεταβλητής Chain – Ladder. Τα αριθμητικά δεδομένα που θα χρησιμοποιηθούν για την εκτέλεση της εφαρμογής, ανήκουν σε ελληνική ασφαλιστική εταιρία και αφορούν ένα χαρτοφυλάκιο γενικών ασφαλίσεων στον κλάδο αυτοκινήτου. Τα δεδομένα αυτά ελήφθησαν από την ασφαλιστική εταιρία ως ένα σύνολο που αφορά όλο τον κλάδο του αυτοκινήτου και ήταν διαχωρισμένα σε πληρωθείσες και εκκρεμείς απαιτήσεις. Αρχικά έγινε η εύρεση των σωρευτικών επισυμβάντων απαιτήσεων (*Επισυμβάσεις απαιτήσεις = Σωρευτικές πληρωθείσες απαιτήσεις + Εκκρεμείς απαιτήσεις*). Όλοι οι υπολογισμοί έγιναν χρησιμοποιώντας τις σωρευτικές επισυμβάσεις απαιτήσεις.

Για να γίνει η ανάδειξη της πολυμεταβλητής μεθόδου Chain – Ladder, το χαρτοφυλάκιο αυτό χωρίστηκε σε επιχειρησιακές γραμμές (lines of business). Ο διαχωρισμός αυτός βασίστηκε στις έννοιες όπως αυτές αναλύθηκαν στο κεφάλαιο 3 «Πολυμεταβλητή μέθοδος Chain – Ladder» και έχοντας ως γνώμονα τη διατήρηση των χαρακτηριστικών ομοιογένειας. Έτσι, ύστερα από μελέτη και κάτω από την βοήθεια των αναλογιστών της προκειμένης ασφαλιστικής εταιρίας έγινε διαχωρισμός των δεδομένων αυτών σε επιχειρησιακές γραμμές με βάση τη διατήρηση των ιδιοτήτων ομοιογένειας μεταξύ των γραμμών αυτών (βλέπε Παράρτημα 2).

Το χαρτοφυλάκιο του κλάδου αυτοκινήτου διασπάστηκε αρχικά σε δύο μέρη:

- α) Αστική ευθύνη και
- β) Λοιπές ζημιές αυτοκινήτου (Motor Other, M.O.).

Ακολούθως έγινε ακόμα ένας διαχωρισμός του χαρτοφυλακίου **αστικής ευθύνης** σε δύο μέρη τα οποία είναι:

- α) Σωματικές βλάβες (Bodily Injury, B.I.)
- β) Υλικές Ζημιές (Property Damages, P.D.)

Συνεπώς, το συνολικό χαρτοφυλάκιο που θα μελετηθεί είναι διαχωρισμένο σε **τρία υπό-χαρτοφυλάκια Σωματικές βλάβες (Bodily Injury), Υλικές ζημιές (Property Damages) και Λοιπές ζημιές αυτοκινήτου (Motor Other)**. Το κάθε υπό-χαρτοφυλάκιο θα μελετηθεί ξεχωριστά για τον υπολογισμό των απαιτούμενων αποθεμάτων και στο τέλος για να βρεθεί το συνολικό απόθεμα που θα πρέπει να κρατάει η ασφαλιστική εταιρία θα αθροιστούν τα επιμέρους αποθέματα.

Τα αποθέματα αυτά του κάθε υπό-χαρτοφυλακίου θα υπολογιστούν με δύο μεθόδους. Η μια μέθοδος θα γίνει χρησιμοποιώντας το υπολογιστικό φύλλο excel και θεωρώντας ως παράγοντα εξέλιξης τον αριθμητικό μέσο. Η δεύτερη μέθοδος θα γίνει χρησιμοποιώντας τη γλώσσα προγραμματισμού R- project και θεωρώντας ως παράγοντα εξέλιξης το σταθμισμένο μέσο (weighted average). Τα αποτελέσματα θα παρουσιαστούν και με τις δύο μεθόδους.

## 5.2 Παρουσίαση χαρτοφυλακίου γενικών ασφαλίσεων

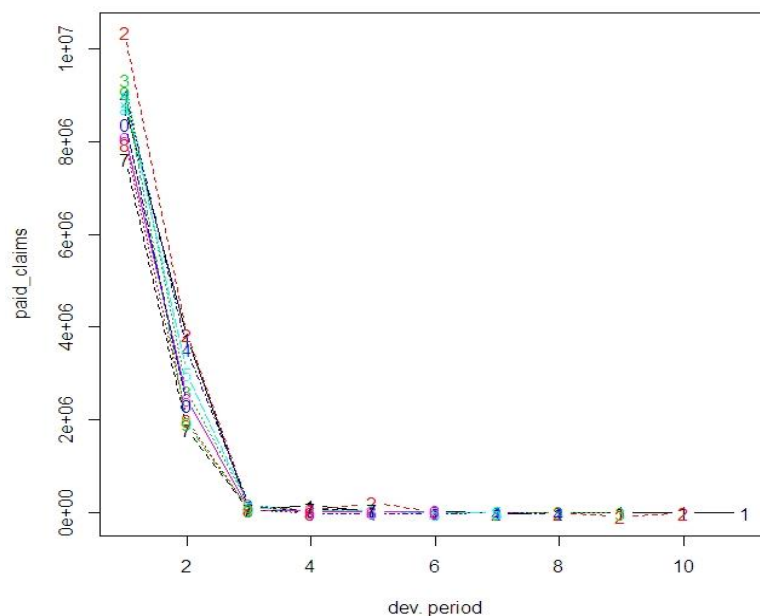
Το χαρτοφυλάκιο γενικών ασφαλίσεων για τον κλάδο αυτοκινήτου που θα μελετηθεί αφορά τα έτη ατυχήματος 2008 – 2018. Παρακάτω παρουσιάζονται οι πίνακες με τα δεδομένα χωρισμένα σε πληρωμένες απαιτήσεις (προσαυξητικές και σωρευτικές), εκκρεμείς απαιτήσεις και σωρευτικές επισυμβάσεις απαιτήσεις. Τα πραγματικά ποσά έχουν διαιρεθεί με 100 για να μπορούν να χωράνε οι πίνακες στην παρούσα εργασία. Μετά από κάθε πίνακα δεδομένων υπάρχει η αντίστοιχη γραφική απεικόνιση όπως αυτή έχει παραχθεί από το R – project για να έχουμε και σε εικόνα πως εξελίσσονται οι πληρωμές.

Στο πίνακα 1 φαίνονται οι πληρωθείσες προσαυξητικές απαιτήσεις (incremental paid claims motor) για το συνολικό χαρτοφυλάκιο αυτοκινήτου. Σκοπός της εργασίας αυτής είναι να γίνει η διάσπαση του παρακάτω πίνακα σε μικρότερα υπό-χαρτοφυλάκια που να διατηρούν τις ιδιότητες ομοιογένειας ώστε να μπορούμε να εκτιμήσουμε καλύτερα τις ζημιές που αναμένονται να έρθουν στο μέλλον και ποιο θα είναι τελικά το ποσό του αποθέματος που θα πρέπει να κρατήσει η ασφαλιστική εταιρία για τις ήδη επισυμβάσεις ζημιές καθώς και για την εκτίμηση των IBNR ζημιών.

Incremental Paid Claims Motor											
AY	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	293.655	148.485	54.291	54.005	26.051	41.641	16.220	8.426	12.820	3.678	4.789
2009	340.272	167.426	55.943	47.962	40.307	35.074	26.942	14.434	6.991	5.209	
2010	329.602	137.127	39.250	26.704	39.821	32.982	9.855	11.545	8.142		
2011	300.815	142.082	39.045	37.692	28.560	25.198	10.412	16.464			
2012	295.106	123.047	29.578	36.482	26.266	22.653	19.147				
2013	260.500	111.142	40.787	26.919	35.376	19.743					
2014	240.235	95.282	23.181	25.540	40.989						
2015	231.552	98.972	30.784	26.035							
2016	254.969	104.992	38.093								
2017	234.820	107.245									
2018	256.689										

Πίνακας 1: Πληρωθείσες Προσαυξητικές Απαιτήσεις (συνολικό χαρτοφυλάκιο)

Το γράφημα 1 που ακολουθεί είναι μια απεικόνιση της «εξέλιξης» των πληρωθείσων ζημιών για το συνολικό χαρτοφυλάκιο του αυτοκινήτου προτού γίνει οποιοσδήποτε διαχωρισμός σε επιχειρησιακές γραμμές. Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα πρότυπο για τον τρόπο που εξελίσσονται οι ζημιές. Από το 2008 έως και το 2018 που είναι τα ιστορικά έτη τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε για να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε το κενό μέρος του παραπάνω τριγώνου φαίνεται ότι ο τρόπος με τον οποίο κινήθηκαν οι πληρωμές στο διάστημα αυτών των 10 χρόνων παρουσιάζει κοινά στοιχεία. Οι πληρωμές που έγιναν μέσα στο 2008 φαίνεται ότι έχουν αν όχι ίδια παρόμοια πορεία με τις πληρωμές που έγιναν μέσα στο 2009 και ούτω καθεξής για τα υπόλοιπα έτη. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε τη πληροφορία του πρόσφατου παρελθόντος για να εκτιμήσουμε το επερχόμενο μέλλον καθώς θεωρούμε ότι αν δεν συμβεί κάποιο σπάνιο γεγονός οι εκτιμήσεις που θα κάνουμε για την εξέλιξη των πληρωμών θα είναι πολύ κοντά στις πραγματικές πληρωμές.



**Γράφημα 1:** Απεικόνιση πληρωμένων προσαυξητικών απαιτήσεων (συνολικό χαρτοφυλάκιο)

Στο πίνακα 2 υπάρχουν οι σωρευτικές ζημιές για το συνολικό χαρτοφυλάκιο αυτοκινήτου. Ο πίνακας αυτός παράχθηκε σύμφωνα με τύπο της σχέσης (2.1) από το κεφάλαιο 2.1.1: Το μοντέλο της μεθόδου *Chain – Ladder*:

$$C_{i,j} = \sum_{k=1}^j X_{i,k}$$

Όπου  $C_{i,j}$  είναι τυχαία μεταβλητή που παριστάνει τις σωρευτικές απαιτήσεις και  $X_{i,k}$  είναι οι πληρωθείσες απαιτήσεις. Στο παράδειγμα μας έχουμε ότι οι σωρευτικές απαιτήσεις που φαίνονται στην πρώτη γραμμή και δεύτερη στήλη έχουν προκύψει ως εξής:

$$442.140 = 293.655 + 148.485$$

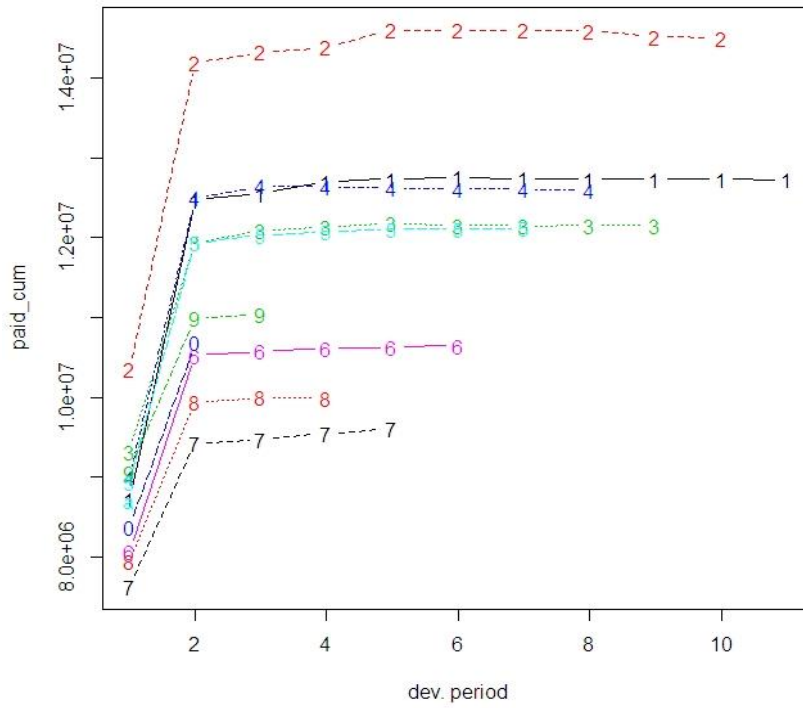
Και ούτω καθεξής προκύπτουν οι σωρευτικές ζημιές για το συνολικό χαρτοφυλάκιο αυτοκινήτου. Συνεπώς μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι το συνολικό ποσό που έχει πληρωθεί μέχρι σήμερα για ζημιές που συνέβησαν το 2008 είναι 6.640.600 ευρώ για το συνολικό χαρτοφυλάκιο αυτοκινήτου. Οι σωρευτικές ζημιές παρουσιάζονται αναλυτικά στον πίνακα 2. Η πληροφορία που μας δίνει η διαγώνιος του σωρευτικού πίνακα ζημιών είναι το συνολικό ποσό που μια ασφαλιστική εταιρία έχει πληρώσει για ζημιές που αφορούν ένα συγκεκριμένο έτος ατυχήματος μέχρι και τη χρονική στιγμή που δείχνει ο πίνακας. Παραδείγματος χάρη, βλέπουμε ότι οι ζημιές που αφορούν το έτος 2008 έχουν εξελιχθεί μέχρι το 2018 και ανέρχονται στο ποσό των 66.406.000 ευρώ. Το ποσό αυτό δείχνει ότι η ασφαλιστική εταιρία από το 2008 μέχρι και το 2018 έχει πληρώσει ως αποζημίωση τα 66.406.000 ευρώ για ζημιές που έχουν συμβεί το 2008 στον κλάδο αυτοκινήτου.

Cumulative Paid Claims Motor											
AY	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	293.655	442.140	496.431	550.436	576.487	618.128	634.348	642.774	655.593	659.272	664.060
2009	340.272	507.698	563.641	611.602	651.909	686.983	713.925	728.359	735.349	740.559	
2010	329.602	466.729	505.979	532.682	572.503	605.485	615.340	626.885	635.027		
2011	300.815	442.897	481.942	519.634	548.194	573.392	583.803	600.267			
2012	295.106	418.153	447.731	484.213	510.479	533.133	552.280				
2013	260.500	371.642	412.429	439.348	474.724	494.466					
2014	240.235	335.517	358.698	384.238	425.226						
2015	231.552	330.525	361.309	387.343							
2016	254.969	359.961	398.054								
2017	234.820	342.066									
2018	256.689										

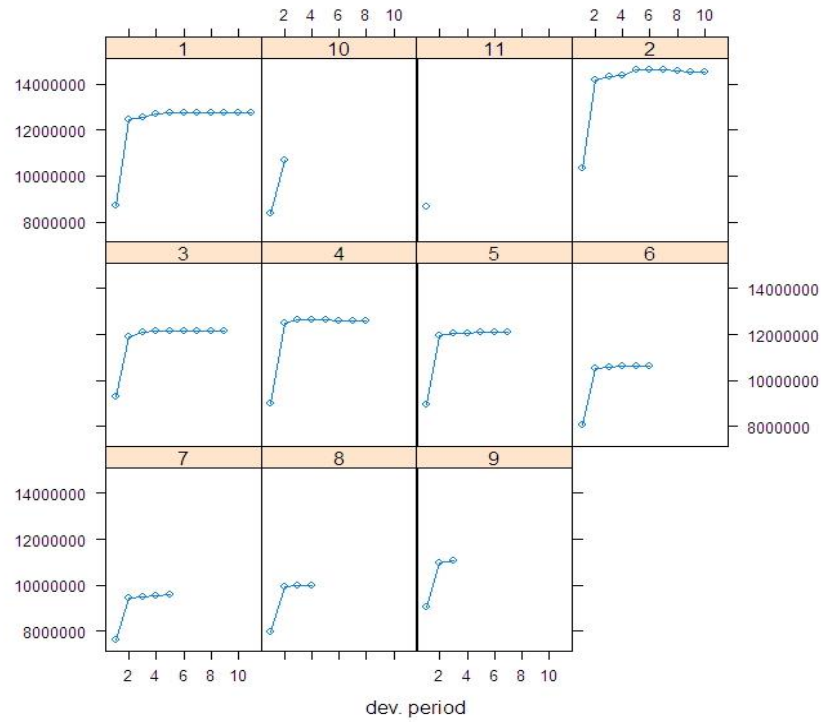
Πίνακας 2: Απεικόνιση πληρωμένων προσαυξητικών απαιτήσεων (συνολικό χαρτοφυλάκιο)

Αντίστοιχη, παρατήρηση με αυτή που έγινε στο γράφημα 1 μπορεί να γίνει και για τα γραφήματα που ακολουθούν που παρουσιάζουν γραφικά τον τρόπο εξέλιξης των σωρευτικών ζημιών. Βλέπουμε ότι υπάρχει συγκεκριμένο πρότυπο με το οποίο εξελίσσονται οι σωρευτικές ζημιές. Είναι το αντίστροφο μοτίβο από αυτό που είδαμε στο γράφημα 1. Αξίζει επιπλέον να αναφέρουμε ότι η χρονιά με το μεγαλύτερο ύψος πληρωμών – αποζημιώσεων είναι η δεύτερη χρονιά με βάση το γράφημα 2, δηλαδή το έτος 2009. Αυτό είναι εμφανές και από τον σωρευτικό πίνακα πληρωμών, καθώς βλέπουμε από τη διαγώνιο του πίνακα 2 (οι πληρωμές της διαγώνιου φαίνονται με έντονα γράμματα) ότι το μεγαλύτερο ποσό πληρωμών από τα σωρευτικά ποσά αντιστοιχεί στο έτος 2009. Αυτό μπορεί να σημαίνει ότι ενδεχομένως το 2009 να είναι ένα έτος που μπορεί να συνέβησαν κάποια σπάνια γεγονότα που ξεφεύγουν από την κανονικότητα που συνήθως υπάρχει για το χαρτοφυλάκιο των αυτοκινήτων ή απλώς ήταν μια «κακή» χρονιά για την ασφαλιστική εταιρία. Παρόλα αυτά ακόμα δεν έχουμε σαφή εικόνα για το τι ακριβώς συνέβη το 2009 και ξεφεύγει από τα υπόλοιπα έτη, παρακάτω και μετά τη διάσπαση του χαρτοφυλακίου σε υπό – χαρτοφυλάκια θα μπορούσαμε να δούμε καλύτερα ποια είναι η αιτία για την μεγάλη σωρευτική πληρωμή που εμφανίζεται το 2009. Ακόμη, θα έχουμε τη δυνατότητα να δούμε ποια επιχειρησιακή γραμμή εκ των Αστική ευθύνη αυτοκινήτου, Υλικές Ζημιές αυτοκινήτου ή Λοιπές υλικές ζημιές αυτοκινήτου είναι εκείνη στην οποία η ασφαλιστική εταιρία κλήθηκε να καταβάλλει μεγάλες ή περισσότερες αποζημιώσεις συγκριτικά με αυτές που έχει πληρώσει τα υπόλοιπα έτη για ζημιές που πραγματοποιήθηκαν το 2009. Γενικότερα, μετά τη διάσπαση θα έχουμε μια πιο σαφή εικόνα για το πως κινείται μέσα στα χρόνια το χαρτοφυλάκιο αυτοκινήτου και που και πότε δίνονται οι μεγαλύτερες αποζημιώσεις.





**Γράφημα 2:** Απεικόνιση πληρωμένων σωρευτικών απαιτήσεων (συνολικό χαρτοφυλάκιο)



**Γράφημα 3:** Απεικόνιση σωρευτικών πληρωμών ανά έτος εξέλιξης

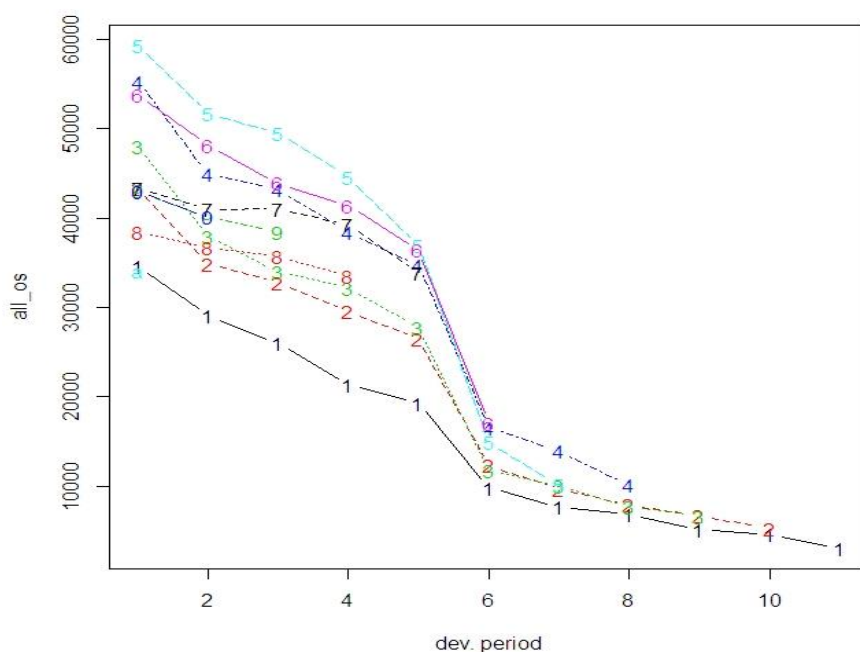
Όπως αναφέρθηκε και στην αρχή της παρούσας ενότητας εκτός από τις πληρωθείσες ζημιές υπάρχουν και οι εκκρεμείς ζημιές. Η εικόνα των εκκρεμών ζημιών αποτελεί το απόθεμα που εκτιμάται από τον κλάδο αυτοκινήτου που πρέπει να κρατηθεί για ζημιές που έχουν αναγγελθεί στην εταιρία αλλά δεν έχουν «κλείσει» ακόμα. Γι' αυτό το λόγο στους υπολογισμούς μας παρακάτω θα λάβουμε υπόψη και τις εκκρεμείς ζημιές. Σημειώνεται ότι, οι εκκρεμείς ζημιές είναι μια πρόβλεψη που γίνεται από τον κλάδο αυτοκινήτου χωρίς τη χρήση αναλογιστικών μοντέλων και συχνά μπορεί να παρατηρούμε τελείως διαφορετική εικόνα για τις εκτιμήσεις αυτές. Άλλες χρονιές μπορεί να βλέπουμε ότι υπάρχει μεγάλη εκκρεμότητα και άλλες χρονιές μπορεί να παρατηρούμε το αντίθετο. Παραδείγματος χάρη, το έτος 2018 βλέπουμε ότι η εκτίμηση του κλάδου για ζημιές που έγιναν το 2018 αλλά οι φάκελοι των ζημιών δεν έχουν κλείσει ακόμα για το πρώτο έτος εξέλιξης είναι 33.879 ευρώ ενώ για το 2012 η εκτίμηση του κλάδου για ζημιές που έγιναν το 2012 και δεν έχουν κλείσει ακόμα στο πρώτο έτος εξέλιξης ανέρχονται στο ποσό των 59.278. Είναι εμφανές λοιπόν, ότι οι εκτιμήσεις που μας δίνει ο κλάδος για τα χρήματα που θα πρέπει να κρατήσουμε για ζημιές που δεν έχουν κλείσει ακόμα αλλά υπάρχουν ως εκκρεμότητα έχουν μεγάλη διακύμανση. Ακόμα μια παράμετρος που θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας για τη διακύμανση των ποσών που υπάρχει από τη μια χρονική στιγμή στην άλλη για τις εκκρεμείς ζημιές είναι και η ποσότητα των ζημιών που υπάρχουν σε εκκρεμότητα κάθε χρονική στιγμή.

#### Outstanding Claims Motor

Accident Year	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	34.551	29.064	25.976	21.349	19.275	9.831	7.659	6.882	5.109	4.675	3.077
2009	43.350	34.860	32.795	29.579	26.559	12.323	9.727	7.921	6.703	5.248	
2010	47.951	37.976	33.955	32.208	27.703	11.777	10.024	7.748	6.653		
2011	55.283	44.888	43.161	38.362	34.685	16.518	13.957	10.173			
2012	59.278	51.631	49.520	44.586	36.989	14.927	10.145				
2013	53.711	48.078	43.879	41.363	36.388	17.068					
2014	43.372	40.944	41.010	39.224	33.906						
2015	38.376	36.738	35.722	33.475							
2016	43.087	40.083	38.419								
2017	42.997	40.072									
2018	33.879										

Πίνακας 3: Εκκρεμείς Απαιτήσεις (συνολικό χαρτοφυλάκιο)

Παρατηρούμε και στο γράφημα 4 ότι οι εκκρεμείς ζημιές από έτος σε έτος μπορεί να έχουν διαφορετική εικόνα. Ακόμα θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτό συμβαίνει γιατί είτε έχουμε διαφορετικό πλήθος ζημιών οπότε και τα ποσά των εκτιμήσεων θα είναι ανάλογα του πλήθους, είτε γιατί έχουμε διαφορετική συχνότητα και σφοδρότητα ζημιών από έτος σε έτος αλλά και λόγω της στρατηγικής που ακολουθεί ο εκάστοτε διευθυντής του τμήματος αποζημιώσεων. Ενδέχεται ένας διευθυντής να θέλει να αισθάνεται ασφαλής άρα και οι εκκρεμείς απαιτήσεις που δηλώνει να είναι ποσά πιο υψηλά από τα συνήθη (υπάρχει συγκεκριμένος κατάλογος αποτίμησης ζημιών) ή να θέλει να εφαρμόσει πιο επιθετική πολιτική οπότε και να δηλώνει μικρότερο ποσό εκκρεμής ζημιάς από αυτό που θα έπρεπε να δηλώσει σύμφωνα με τον κατάλογο ζημιών.



**Γράφημα 4:** Απεικόνιση εκκρεμών απαιτήσεων (συνολικό χαρτοφυλάκιο)

Σύμφωνα με τα παραπάνω το άθροισμα σωρευτικών πληρωθεισών ζημιών με τις αντίστοιχες εκκρεμείς απαιτήσεις έχει ως αποτέλεσμα τις επισυμβάσεις απαιτήσεις. Στο πίνακα 4 υπάρχουν οι επισυμβάσεις απαιτήσεις για το συνολικό χαρτοφυλάκιο αυτοκινήτου όπως αυτές διαμορφώθηκαν για τα έτη 2008 – 2018. Αναφορικά έχουμε ότι ο αριθμός στην πρώτη γραμμή και τρίτη στήλη 522.407 υπολογίστηκε ως εξής:

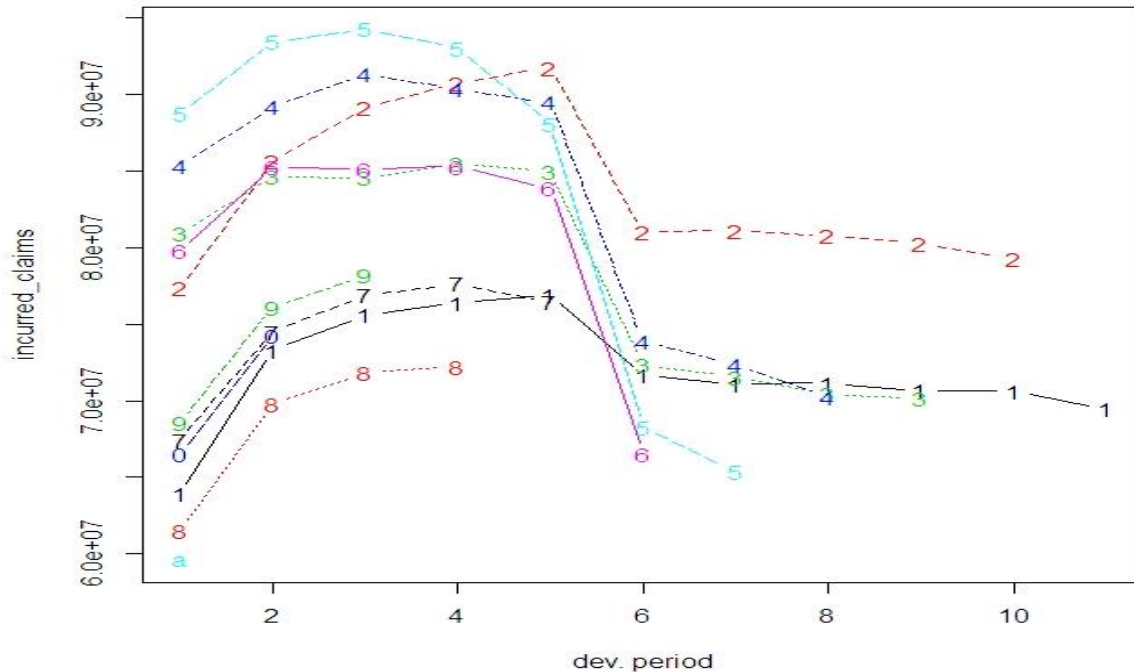
$$522.407 = 496.431 + 25.976$$

Και ούτω καθεξής υπολογίζονται και οι υπόλοιπες επισυμβάσεις ζημιές για το συνολικό χαρτοφυλάκιο αυτοκινήτου.

Incurred Cumulative Claims Motor											
Accident Year	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	328.206	471.204	522.407	571.785	595.762	627.959	642.007	649.656	660.702	663.947	667.137
2009	383.622	542.558	596.436	641.181	678.468	699.306	723.652	736.280	742.052	745.807	
2010	377.553	504.705	539.934	564.890	600.206	617.262	625.364	634.633	641.680		
2011	356.098	487.785	525.103	557.996	582.879	589.910	597.760	610.440			
2012	354.384	469.784	497.251	528.799	547.468	548.060	562.425				
2013	314.211	419.720	456.308	480.711	511.112	511.534					
2014	283.607	376.461	399.708	423.462	459.132						
2015	269.928	367.263	397.031	420.818							
2016	298.056	400.044	436.473								
2017	277.817	382.138									
2018	290.568										

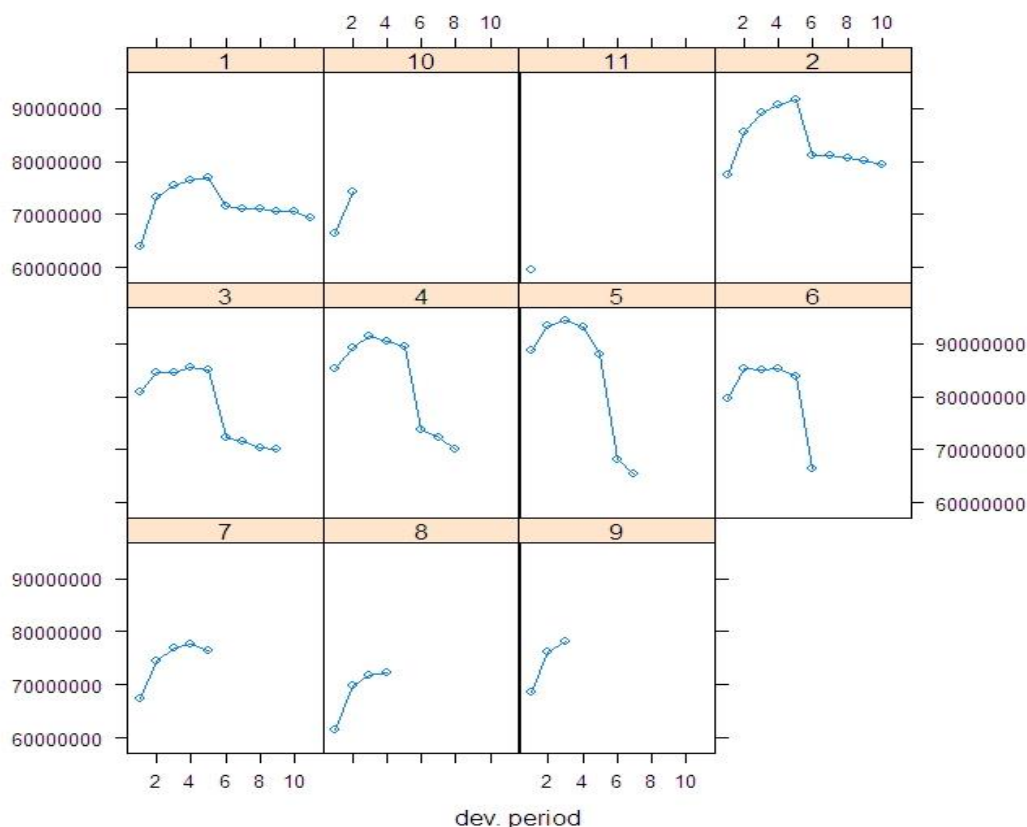
**Πίνακας 4:** Επισυμβάσεις Απαιτήσεις (συνολικό χαρτοφυλάκιο)

Όπως είναι εμφανές στο γράφημα 5 οι επισυμβάσεις ζημιές έχουν μια απροσδιόριστη πορεία και αυτό οφείλεται στις εκκρεμείς ζημιές λόγω της μεγάλης διακύμανσης που παρουσιάζουν από έτος σε έτος και επιπλέον στους λόγους που αναφέρθηκαν παραπάνω σχετικά με την αστάθεια της εκτίμησης των εκκρεμών ζημιών.



**Γράφημα 5:** Απεικόνιση επισυμβάντων πληρωμών (συνολικό χαρτοφυλάκιο)

Σημειώνεται ότι στα παραπάνω γραφήματα όπως και σε αυτά που θα ακολουθήσουν οι αριθμοί πάνω στις γραμμές δείχνουν το έτος ατυχήματος. Για παράδειγμα, η γραμμή 1 δείχνει τον τρόπο εξέλιξης των επισυμβάντων ζημιών για το έτος ατυχήματος 2008, η γραμμή 2 δείνει τον τρόπο εξέλιξης των επισυμβάντων γραμμών για το έτος ατυχήματος 2009 και ούτω καθεξής. Ενώ τα γραφήματα της μορφής όπως αυτή παρουσιάζεται στο γράφημα 6 απεικονίζουν ξεχωριστά για κάθε έτος ατυχήματος την εξέλιξη του εκάστοτε υπό μελέτη μεγέθους. Αντίστοιχα, ο αριθμός 1 στο πάνω μέρος του πορτοκαλί πλαισίου δηλώνει την εξέλιξη των επισυμβάντων ζημιών για το έτος ατυχήματος 2008 έτσι ο αριθμός 2 θα δηλώνει την εξέλιξη των επισυμβάντων ζημιών για το έτος ατυχήματος 2009 και ακολούθως.



Γράφημα 6: Απεικόνιση επισυμβάντων πληρωμών ανά έτος ατυχήματος

Συμπερασματικά θα λέγαμε ότι και από τα παραπάνω γραφήματα γίνεται σαφές ότι οι πληρωμές έχουν σχεδόν την ίδια πορεία - εξέλιξη με την πάροδο του χρόνου. Αυτός είναι και ο λόγος που γίνεται χρήση ιστορικών δεδομένων, αφού το πρόσφατο παρελθόν λειτουργεί ως καθρέφτης για του τι θα ακολουθήσει στο μέλλον. Σε αντίθεση όμως με τις εκκρεμείς που παρουσιάζουν μεγάλη όπως είδαμε και από τα παραπάνω γραφήματα καθώς είναι απλές εκτιμήσεις χωρίς τη χρήση αναλογιστικών μεθόδων.

### 5.3 Διαχωρισμός χαρτοφυλακίου σε υπό-χαρτοφυλάκια

Είναι πλέον ευρέως διαδεδομένο και γνωστό ότι είναι προτιμότερο να διασπάμε το συνολικό χαρτοφυλάκιο το οποίο θέλουμε μελετήσουμε σε μικρότερα υπό-χαρτοφυλάκια ώστε να εξάγουμε όσο το δυνατό ασφαλέστερες και επαρκείς εκτιμήσεις. Για το λόγο αυτό και χρησιμοποιώντας τις έννοιες που παρουσιάστηκαν και αναλύθηκαν στο Κεφάλαιο 3: Πολυμεταβλητή μέθοδος *Chain – Ladder* η παρούσα ενότητα στόχο έχει να διασπάσει, να μελετήσει και τελικά να εκτιμήσει το ποσό του αποθέματος που θα χρειαστεί να κρατήσει ανά υπό – χαρτοφυλάκιο. Επιπλέον, μετά τη διάσπαση του χαρτοφυλακίου σε μικρότερα υπό-χαρτοφυλάκια θα είμαστε σε θέση να δούμε ποιος είναι ο «*main driver*» δηλαδή ποιο υπό-χαρτοφυλάκιο είναι εκείνο στο οποίο δίνονται οι μεγαλύτερες αποζημιώσεις.

Όπως αναφέρθηκε και στην εισαγωγή το συνολικό χαρτοφυλάκιο γενικών ασφαλίσεων χωρίζεται σε τρία υπό-χαρτοφυλάκια. Συνεπώς  $n=3$  και για έτος ατυχήματος έχουμε ότι  $2008 \leq i \leq 2018$  και για έτη εξέλιξης  $1 \leq j \leq 10$ . Στα τρία αυτά υπό-χαρτοφυλάκια θα γίνουν όλοι οι υπολογισμοί των αποθεμάτων με χρήση της μεθόδου *Chain – Ladder*. Αναφέρεται ότι τα παρακάτω δεδομένα είναι τα προσαυξητικά, τα σωρευτικά και οι εκκρεμείς

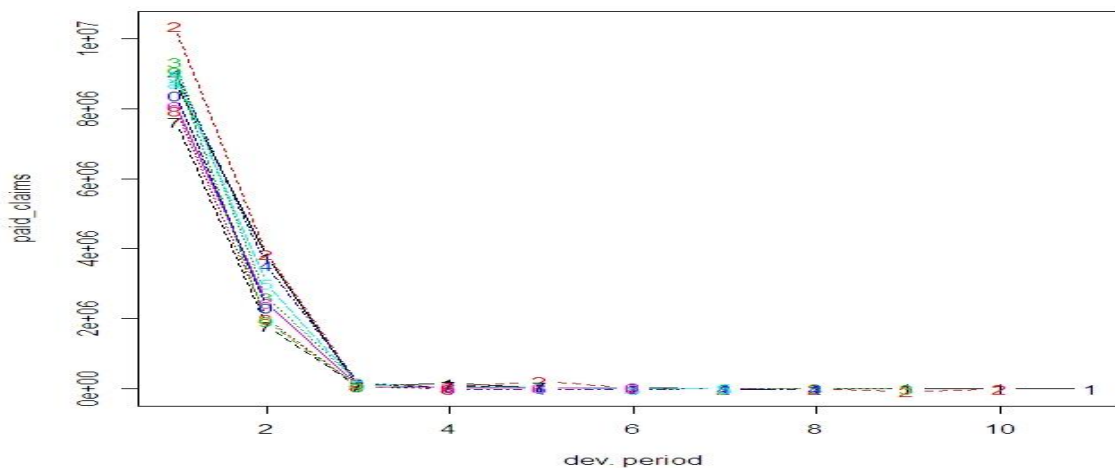
πληρωμές. Για όλους τους πίνακες με τα αριθμητικά δεδομένα υπάρχει το αντίστοιχο γράφημα που απεικονίζει ακριβώς την εξέλιξη των δεδομένων αυτών. Σε όλα τα γραφήματα παρατηρείται ότι οι πληρωμές εξελίσσονται με τον ίδιο τρόπο από έτος σε έτος. Τα χαρτοφυλάκια είναι τα εξής:

- Λοιπές Υλικές Ζημιές αυτοκινήτου (Motor Other)

Στο υπό – χαρτοφυλάκιο αυτό συμπεριλαμβάνονται όλες εκείνες οι ζημιές που δεν αφορούν σωματικές βλάβες και υλικές ζημιές αυτοκινήτου. Οι δύο κατηγορίες αυτές θα μελετηθούν σαν διαφορετικά υπό – χαρτοφυλάκια παρακάτω. Έτσι στον πίνακα 5 υπάρχουν τα ποσά που πληρώθηκαν στους ασφαλισμένους για τα έτη ατυχήματος 2008 – 2018. Παρατηρούμε ότι ζημιές που συνέβησαν το 2008 απέδωσαν αποζημίωση στους ασφαλισμένους τους ακόμα και 120 μήνες μετά. Τα αρνητικά ποσά που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα, αφορούν ποσά που είχαν κρατηθεί ως απόθεμα για ζημιές που συνέβησαν το αντίστοιχο έτος ατυχήματος αλλά τελικά «απελευθερώθηκαν» (έγινε release αποθεμάτων) γιατί αποτελούσαν ποσά που κρατούνταν επιπλέον των απαραίτητων από τον κλάδο αυτοκινήτου ως μαξιλάρι ασφαλείας. Γενικά, τέτοιου τύπου στρατηγικές και πολιτικές δεν είναι επιθυμητές, γιατί δεσμεύονται παραπάνω κεφάλαια από αυτά που πραγματικά χρειάζονται.

Incremental Paid Claims Motor Other											
AY	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	87.214	37.553	740	1.573	292	201	-138	-75	6	7	-86
2009	103.493	38.436	1.322	615	2.150	42	-38	-76	-743	-190	
2010	93.188	26.143	1.647	369	399	-164	-81	20	2		
2011	89.926	35.076	1.501	-106	-149	-153	-7	-179			
2012	89.395	29.950	986	390	405	-20	119				
2013	80.712	24.559	475	370	132	248					
2014	76.267	17.968	462	771	649						
2015	79.424	19.968	559	-35							
2016	90.630	19.236	566								
2017	83.759	23.053									
2018	86.890										

Πίνακας 5: Υπό-χαρτοφυλάκιο για λοιπές υλικές ζημιές αυτοκινήτου



Γράφημα 7: Απεικόνιση προσαυξητικών πληρωμών για λοιπές υλικές ζημιές αυτοκινήτου

Είναι εμφανές από το γράφημα 5 ότι επιβεβαιώνουμε το μοτίβο εξέλιξης των πληρωθεισών απαιτήσεων. Αντίστοιχα και στο γράφημα 8 υπάρχει γραφικά η ανάλογη εξέλιξη των σωρευτικών απαιτήσεων. Σημειώνουμε ότι οι σωρευτικές απαιτήσεις υπολογίστηκαν με βάση τον τύπο (3.1) που υπάρχει στο Κεφάλαιο 3: Πολυμεταβλητή μέθοδος Chain – Ladder και ο οποίος είναι ο εξής:

$$C_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^i X_{i,k}^{(n)}$$

Όπου η τυχαία μεταβλητή  $C_{i,j}^{(n)}$  παριστάνει τις σωρευτικές απαιτήσεις και η μεταβλητή  $X_{i,k}^{(n)}$  τις προσαυξητικές απαιτήσεις για έτος ατυχήματος  $i$  και έτος εξέλιξης  $j$  για το  $n$ -υπό χαρτοφυλάκιο. Έστω το υπό – χαρτοφυλάκιο Λοιπές Ζημιές Αυτοκινήτου ότι είναι το πρώτο υπό – χαρτοφυλάκιο τότε έχουμε ότι  $n = 1$  και άρα ο παραπάνω τύπος γίνεται:

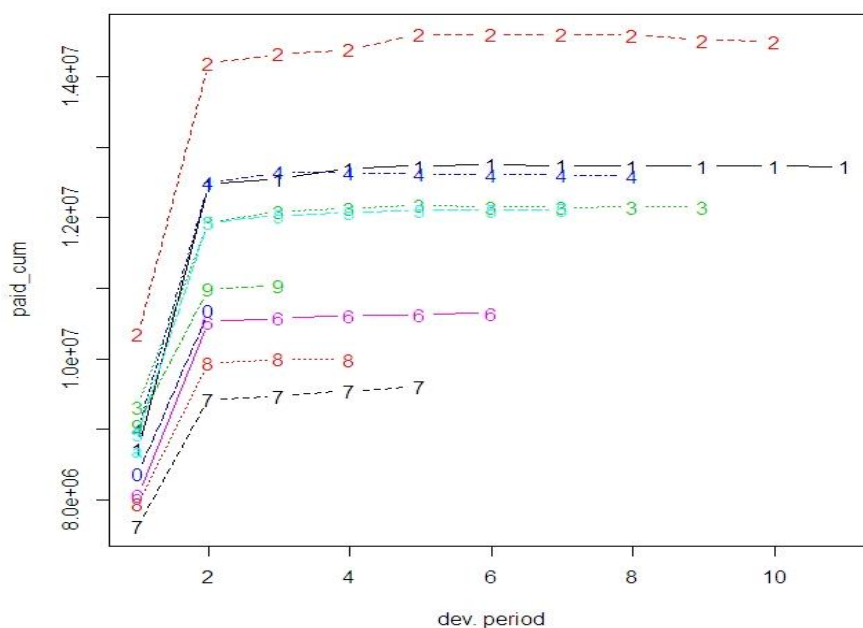
$$C_{i,j}^{(1)} = \sum_{k=0}^i X_{i,k}^{(1)}$$

Και υπολογίζει τις σωρευτικές απαιτήσεις για το υπό – χαρτοφυλάκιο 1 όπως αυτές φαίνονται στον πίνακα 6.

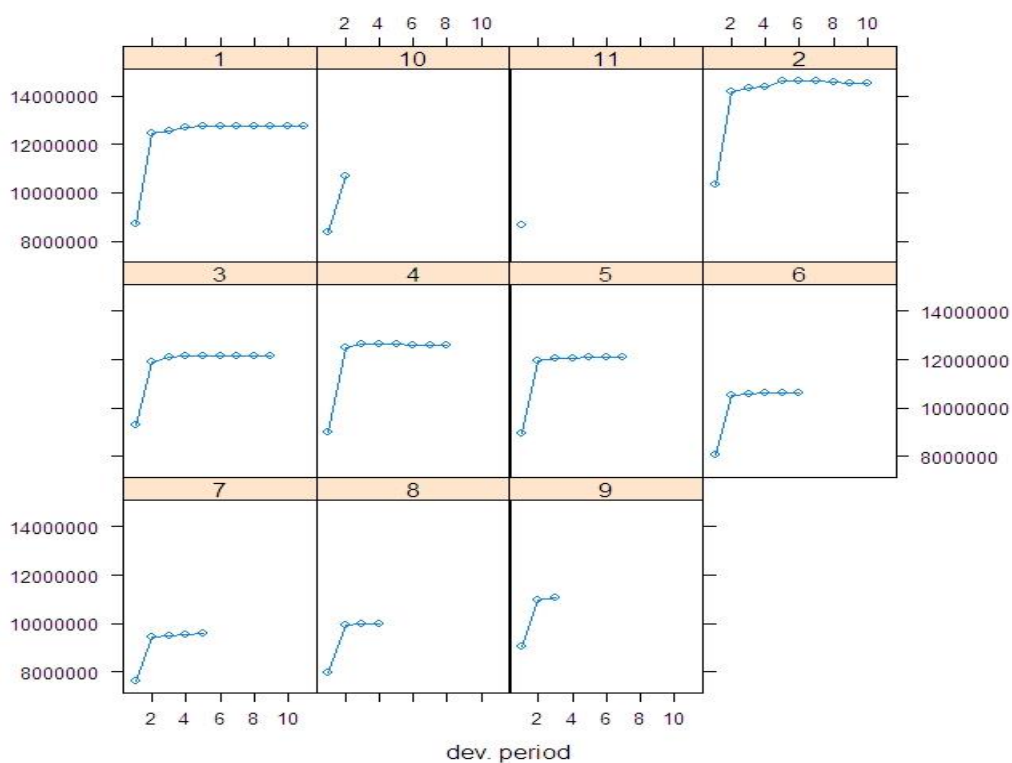
Cumulative Paid Claims Motor Other												
AY	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m	
2008	87.214	124.766	125.507	127.079	127.372	127.572	127.434	127.359	127.365	127.372	127.287	
2009	103.493	141.929	143.251	143.866	146.016	146.059	146.021	145.945	145.202	145.013		
2010	93.188	119.331	120.978	121.347	121.746	121.582	121.501	121.521	121.523			
2011	89.926	125.003	126.504	126.398	126.249	126.096	126.089	125.910				
2012	89.395	119.345	120.331	120.721	121.127	121.107	121.225					
2013	80.712	105.270	105.745	106.115	106.247	106.495						
2014	76.267	94.235	94.698	95.468	96.117							
2015	79.424	99.392	99.951	99.917								
2016	90.630	109.866	110.432									
2017	83.759	106.812										
2018	86.890											

Πίνακας 6: Σωρευτικές πληρωμές για Λοιπές Υλικές Ζημιές

Αντίστοιχα στις εικόνες 8 και 9 υπάρχουν και γραφικά οι σωρευτικές απαιτήσεις για το υπό – χαρτοφυλάκιο 1: Λοιπές ζημιές αυτοκινήτου (Motor Other). Οι σωρευτικές ζημιές απεικονίζονται αρχικά για όλα τα έτη ατυχήματος μαζί στο γράφημα 8 και ύστερα ξεχωριστά ανά έτος ατυχήματος στο γράφημα 9.



**Γράφημα 8:** Απεικόνιση σωρευτικών πληρωμών για Λοιπές Ζημιές



**Γράφημα 9:** Απεικόνιση σωρευτικών πληρωμών ανά έτος ατυχήματος

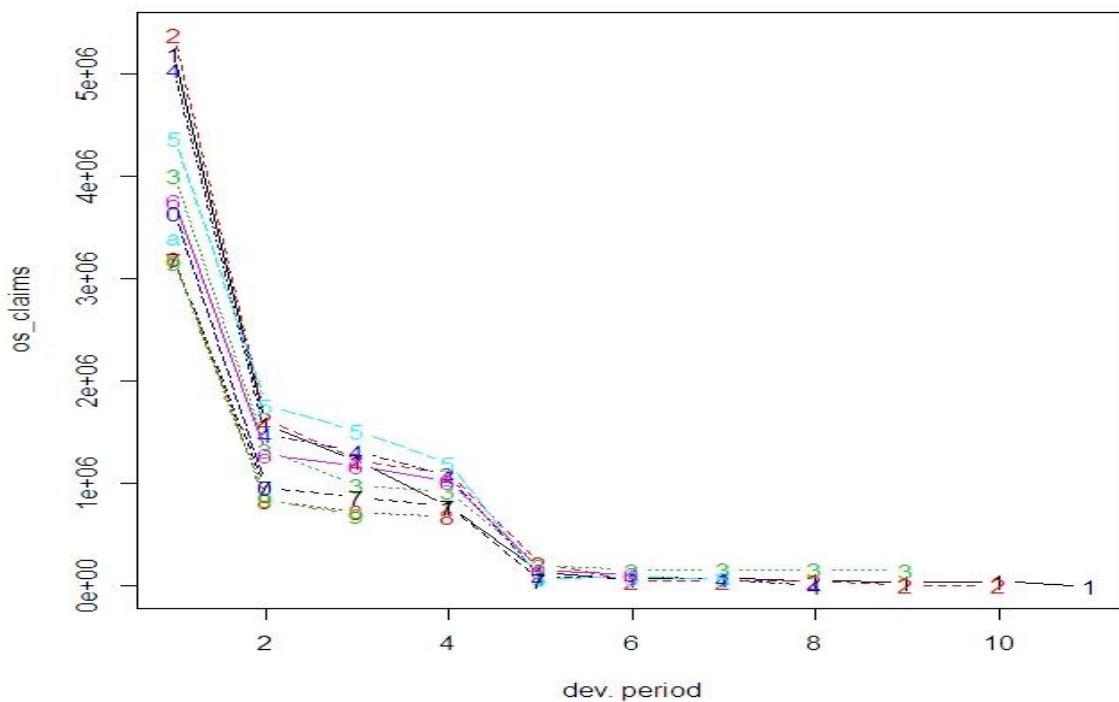
Στον πίνακα 7 υπάρχει η εικόνα των εκκρεμών απαιτήσεων για τις Λοιπές ζημιές αυτοκινήτου όπως αυτές εκτιμήθηκαν και προσδιορίστηκαν από τον κλάδο αποζημιώσεων για τα έτη 2008 – 2018. Ακολουθεί στο γράφημα 10 και η γραφική απεικόνιση των εκκρεμών απαιτήσεων αυτών. Όπως μπορεί να παρατηρηθεί για το συγκεκριμένο υπό – χαρτοφυλάκιο υπάρχει η



λογική του μοτίβου εξέλιξης και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι εκτιμήσεις που έχουν δοθεί από τον κλάδο παρουσιάζουν μια κανονικότητα.

Outstanding Claims Motor_Other											
Accident Year	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	51.997	15.843	12.221	7.757	1.279	685	727	529	341	408	18
2009	53.871	16.328	12.327	10.925	2.206	509	455	452	91	40	
2010	40.122	13.267	9.807	9.240	1.954	1.568	1.574	1.605	1.525		
2011	50.497	14.841	13.132	10.793	850	915	657	8			
2012	43.731	17.613	15.206	12.038	747	843	658				
2013	37.596	12.846	11.703	10.244	1.551	1.202					
2014	31.904	9.671	8.704	7.692	609						
2015	32.010	8.323	7.241	6.798							
2016	31.669	8.490	6.940								
2017	36.448	9.600									
2018	33.912										

Πίνακας 7: Εκκρεμείς πληρωμές για Λοιπές Ζημιές



Γράφημα 10: Απεικόνιση εκκρεμών πληρωμών για Λοιπές Ζημιές

Παρόλα αυτά, τα αρνητικά αποτελέσματα που είδαμε στον πίνακα 5 φανερώνουν ότι οι εκκρεμείς απαιτήσεις για τα έτη που έχουν παρουσιαστεί αρνητικές πληρωμές είναι εκτιμημένες παραπάνω κατά απόλυτη τιμή του αρνητικού ποσού του πίνακα 5. Θα ήταν λοιπόν δυνατό οι εκτιμήσεις αυτές να ήταν μικρότερες από αυτές που δηλώθηκαν και άρα να μην υπήρχαν τώρα στο πίνακα πληρωμών (πίνακας 5) τα αρνητικά ποσά αυτά.

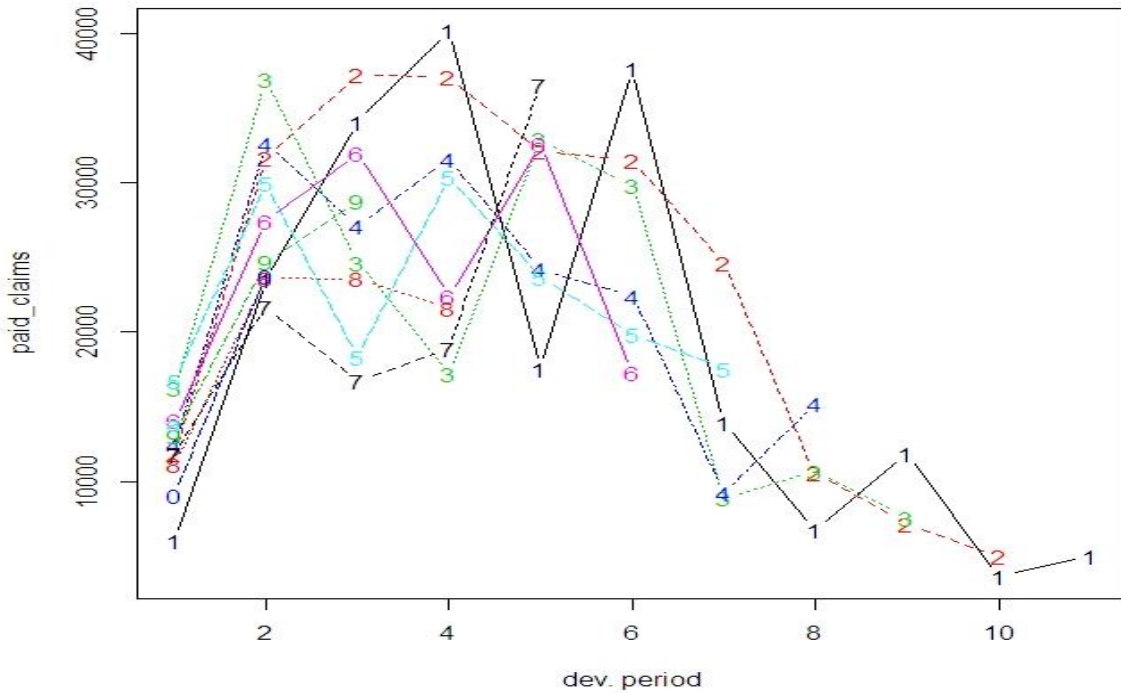
- Αστική ευθύνη για Σωματικές βλάβες (Bodily Injury)

Στο υπό – χαρτοφυλάκιο αυτό συμπεριλαμβάνονται όλες εκείνες οι ζημιές που αφορούν σωματικές βλάβες. Το υπό – χαρτοφυλάκιο αυτό είναι το δεύτερο χαρτοφυλάκιο που θα μελετηθεί και αφορά τα ποσά που πληρώθηκαν από την ασφαλιστική εταιρία ως αποζημίωση για σωματικές βλάβες που προκλήθηκαν από ατύχημα που συνέβη με το ασφαλισμένο όχημα. Περιλαμβάνονται και οι αποζημιώσεις που δόθηκαν προς τρίτους. Έτσι στον πίνακα 8 υπάρχουν τα ποσά που δόθηκαν ως αποζημίωση για τα έτη ατυχήματος 2008 – 2018. Παρατηρούμε ότι οι πληρωμές εξακολουθούν να είναι μεγάλα ποσά ακόμα και 132 μήνες μετά το ατύχημα. Αυτό συμβαίνει λόγω του ότι συχνά σε ατυχήματα που υπάρχουν και σωματικές βλάβες απαιτείται η δικαστική παρέμβαση και λύση για την απόφαση ορισμού ποσού για την σωματική βλάβη. Εξαιτίας αυτού και λόγω ότι τέτοιου τύπου δίκες μπορεί να πάρουν και πάνω από μια 10ετία για την έκβαση της υπόθεσης παρατηρούνται μεγάλα ποσά αποζημιώσεων να δίνονται μετά από μεγάλο χρονικό διάστημα.

Incremental Paid Claims Motor BI											
AY	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	6.058	23.515	34.066	40.200	17.556	37.654	13.919	6.744	11.882	3.645	5.009
2009	11.869	31.688	37.218	37.062	32.138	31.464	24.623	10.539	7.164	5.008	
2010	16.252	36.933	24.664	17.201	32.920	29.794	8.863	10.661	7.568		
2011	12.468	32.600	27.099	31.586	24.199	22.419	9.215	15.206			
2012	16.735	29.969	18.293	30.350	23.645	19.843	17.562				
2013	14.059	27.416	31.985	22.396	32.582	17.311					
2014	11.755	21.695	16.695	18.844	36.516						
2015	11.141	23.625	23.554	21.611							
2016	13.059	24.696	28.748								
2017	9.096	23.751									
2018	13.774										

Πίνακας 8: Υπό-χαρτοφυλάκιο για αστική ευθύνη (σωματικές βλάβες)

Είναι δεδομένο ότι το υπό – χαρτοφυλάκιο αυτό έχει τις μεγαλύτερες πληρωμές συγκριτικά με τα υπόλοιπα (Υλικές ζημιές αυτοκινήτου και Λοιπές ζημιές αυτοκινήτου) καθώς και όπως φαίνεται από το επόμενο γράφημα 11 έχει μια αβέβαιη και ασταθής εξέλιξη με την πάροδο των χρόνων. Αυτό συμβαίνει γιατί, τα ποσά που μπορεί να εκδικάσει ο δικαστής ως αποζημίωση για σωματική βλάβη μπορεί να είναι από 0 έως 1.200.000 ευρώ ανά θύμα. Έτσι αναλόγως το ατύχημα μπορεί να παρατηρηθούν υπέρογκα μεγάλες αποζημιώσεις, όπου τέτοιου τύπου αποζημιώσεις δεν μπορούν να παρατηρηθούν όταν μιλάμε για υλικές ζημιές και λοιπές ζημιές αυτοκινήτου. Παραδείγματος χάρη για να κατανοήσουμε καλύτερα το μέγεθος του ποσού αποζημίωσης αρκεί να θυμηθούμε ένα πολύνεκρο ατύχημα όπως αυτό που συνέβη στα Τέμπη και να σκεφτούμε το πλήθος των θανόντων επί το μέγιστο ποσό αστικής ευθύνης για σωματική βλάβη ανά θύμα που θα έπρεπε να καταβάλλει η ασφαλιστική εταιρία σε ένα τέτοιο δυστύχημα.



**Γράφημα 11:** Απεικόνιση προσαυξητικών απαιτήσεων για σωματικές βλάβες

Σημειώνουμε ότι οι σωρευτικές απαιτήσεις υπολογίστηκαν με βάση τον τύπο (3.1) που υπάρχει στο Κεφάλαιο 3: Πολυμεταβλητή μέθοδος *Chain – Ladder* και ο οποίος είναι ο εξής:

$$C_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^i X_{i,k}^{(n)}$$

Όπου η τυχαία μεταβλητή  $C_{i,j}^{(n)}$  παριστάνει τις σωρευτικές απαιτήσεις και η μεταβλητή  $X_{i,k}^{(n)}$  τις προσαυξητικές απαιτήσεις για έτος ατυχήματος  $i$  και έτος εξέλιξης  $j$  για το  $n$ -υπό χαρτοφυλάκιο. Έστω το υπό – χαρτοφυλάκιο Αστικής ευθύνης για Σωματικές Βλάβες ότι είναι το δεύτερο υπό – χαρτοφυλάκιο τότε έχουμε ότι  $n = 2$  και άρα ο παραπάνω τύπος γίνεται:

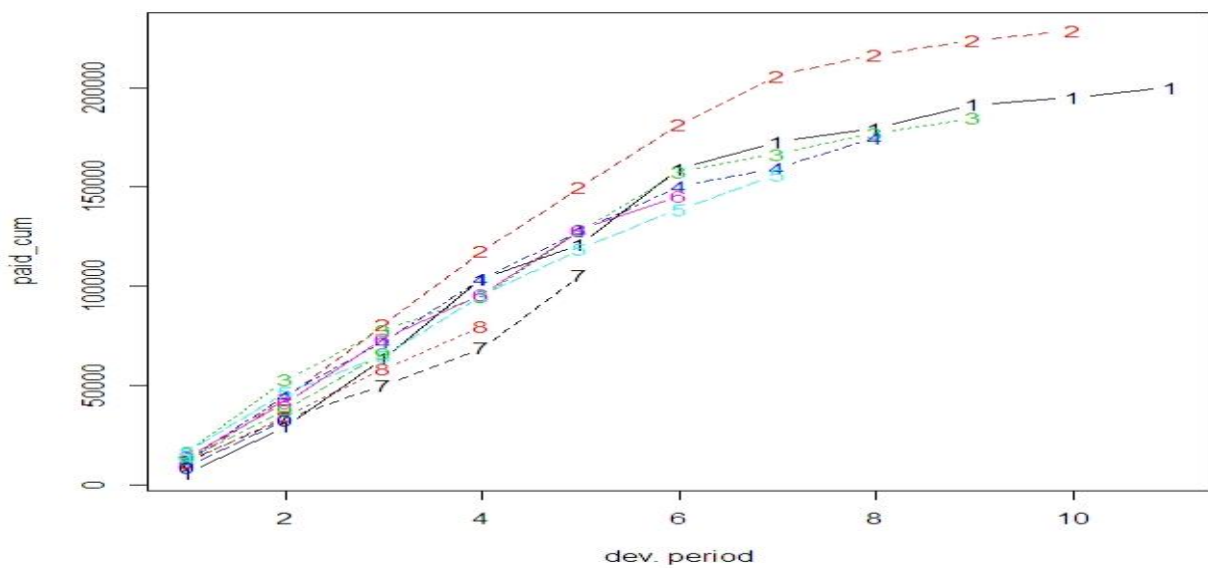
$$C_{i,j}^{(2)} = \sum_{k=0}^i X_{i,k}^{(2)}$$

Και υπολογίζει τις σωρευτικές απαιτήσεις για το υπό – χαρτοφυλάκιο 2 Αστική ευθύνη για σωματικές βλάβες όπως αυτές φαίνονται στον πίνακα 9. Όπως και στον πίνακα 4 που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τις σωρευτικές απαιτήσεις του συνολικού χαρτοφυλακίου το έτος ατυχήματος 2009 είναι εκείνο στο οποίο έχουν δοθεί οι μεγαλύτερες αποζημιώσεις συγκριτικά πάντα με τα υπόλοιπα έτη που εμφανίζονται στα υπό μελέτη δεδομένα μας. Αντίστοιχη εικόνα παρατηρούμε και για την Αστική ευθύνη για σωματικές βλάβες. Το έτος ατυχήματος 2009 δόθηκαν 22.877.400 ευρώ ως αποζημίωση για σωματικές βλάβες όταν η δεύτερη μεγαλύτερη αποζημίωση για σωματικές βλάβες έχει δοθεί το έτος 2008 και ανέρχεται στα 20.024.490 ευρώ. Αξίζει να παρακολουθήσουμε και παρακάτω το έτος ατυχήματος 2009 για να καταλάβουμε αν πρόκειται για απλά ένα τυχαίο γεγονός που συνέβη και αύξησε τις αποζημιώσεις συγκριτικά με τα άλλα έτη ή αν πρόκειται για ένα έτος που ξεφεύγει από την

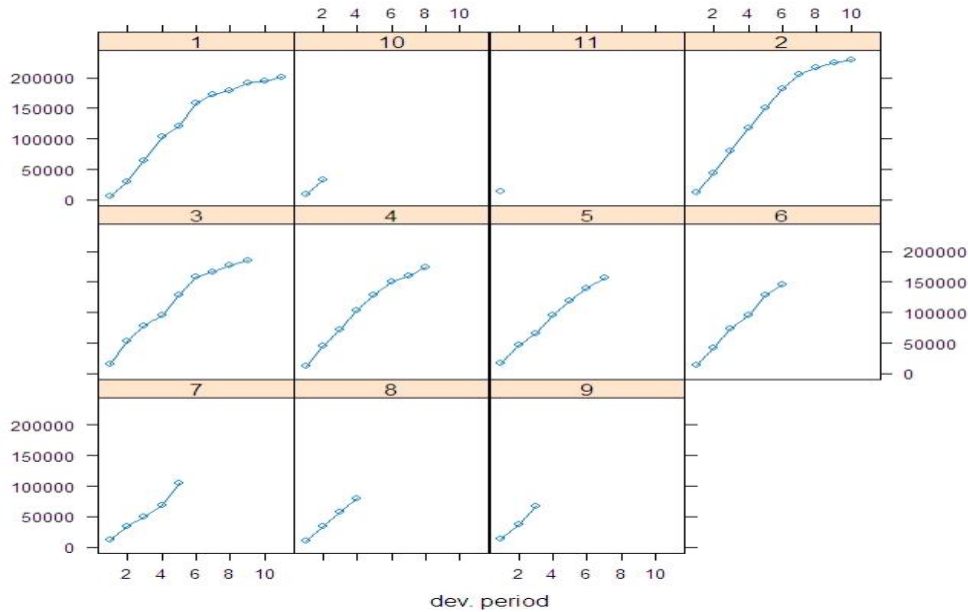
κανονικότητα καθώς κάποιο σπάνιο γεγονός μπορεί να συνέβη και τότε θα πρέπει να προχωρήσουμε σε εξαίρεση του έτους αυτού καθώς θα διαστρεβλώσει τα τελικά μας αποτελέσματα.

Cumulative Paid Claims Motor BI											
AY	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	6.058	29.573	63.639	103.839	121.394	159.049	172.968	179.712	191.594	195.239	200.249
2009	11.869	43.557	80.775	117.837	149.975	181.439	206.062	216.602	223.765	228.774	
2010	16.252	53.185	77.849	95.051	127.971	157.765	166.628	177.289	184.857		
2011	12.468	45.068	72.167	103.753	127.952	150.371	159.586	174.793			
2012	16.735	46.704	64.997	95.347	118.992	138.835	156.396				
2013	14.059	41.475	73.460	95.856	128.438	145.749					
2014	11.755	33.450	50.145	68.989	105.506						
2015	11.141	34.767	58.321	79.931							
2016	13.059	37.756	66.504								
2017	9.096	32.847									
2018	13.774										

Πίνακας 9: Σωρευτικές πληρωμές για σωματικές βλάβες



Γράφημα 12: Απεικόνιση σωρευτικών πληρωμών για σωματικές βλάβες



**Γράφημα 13:** Απεικόνιση σωρευτικών πληρωμών ανά έτος ατυχήματος

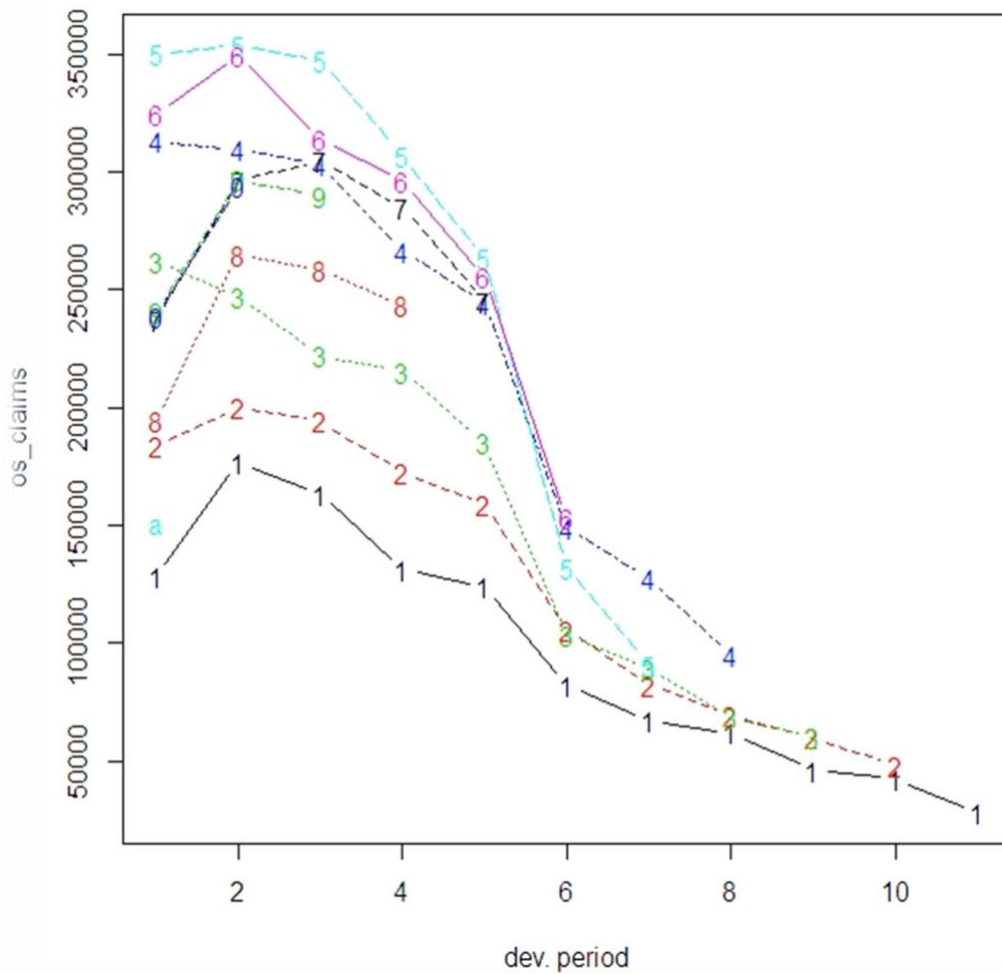
Αντίστοιχα με τα σχόλια που έγιναν και στην παραπάνω υπό-ενότητα οι σωρευτικές πληρωμές για την αστική ευθύνη σωματικών βλαβών έχουν το ίδιο πρότυπο εξέλιξης. Συγκριτικά με την εξέλιξη που είδαμε στις Λοιπές υλικές ζημιές βλέπουμε ότι εδώ οι σωρευτικές ζημιές έχουν μια πιο σφοδρή ανάπτυξη. Αυτό συμβαίνει γιατί τα ποσά που αποδίδονται στους ασφαλισμένους ως αποζημίωση είναι πολύ μεγάλα λόγω του ότι το όριο αστικής ευθύνης είναι 1.200.000ευρώ ανά θύμα όπως αναφέρθηκε και στην παραπάνω παράγραφο. Επιπλέον για το 2009 (γράφημα 13, εικόνα 2) επιβεβαιώνουμε ότι αναφέρθηκε και στις προηγούμενες παραγράφους και παρατηρούμε ότι η γραμμή είναι ελαφρώς μετατοπισμένη προς τα πάνω σε σχέση με εκείνη που φαίνεται για το 2008 (γράφημα 13, εικόνα 1). Μάλιστα φαίνεται ότι τα πρώτα χρόνια οι αποζημιώσεις εξελίσσονται σχετικά παρόμοια και στα δύο έτη ατυχήματος αλλά από το 2013 και μετά υπάρχει διαφορετική εξέλιξη των αποζημιώσεων.

Στον πίνακα 10 εμφανίζονται οι εκκρεμείς απαιτήσεις όπως αυτές εκτιμήθηκαν από τον κλάδο αυτοκινήτου για το πως θα εξελιχθούν οι ζημιές που έχουν αναγγελθεί για αστική ευθύνη σωματικών βλαβών. Αναφέρεται ότι συνήθως για την Αστική ευθύνη σωματικών βλαβών ο διευθυντής αποζημιώσεων λόγω των υπέρογκων ποσών που θα κληθεί να αποδώσει ως αποζημίωση δηλώνει παραπάνω από το κανονικό ποσά να κρατηθούν ως απόθεμα ώστε να υπάρχει ένα επίπεδο ασφάλειας και για την εταιρία.

Outstanding Claims BI											
Accident Year	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	128.178	176.550	163.411	131.253	124.059	81.914	67.193	61.856	45.941	42.462	28.175
2009	183.569	200.012	194.158	172.472	158.945	105.708	82.313	69.287	59.891	48.170	
2010	262.165	247.197	221.882	215.183	184.940	103.095	89.022	68.205	59.999		
2011	312.991	309.586	302.995	266.136	244.433	149.039	127.200	94.655			
2012	349.987	353.602	346.975	306.812	263.265	132.078	90.578				
2013	324.213	349.272	313.972	295.871	255.191	152.944					
2014	237.041	295.909	304.516	284.729	245.188						
2015	194.603	264.934	258.178	243.228							
2016	240.494	296.499	289.872								
2017	238.787	294.210									
2018	150.025										

**Πίνακας 10:** Εκκρεμείς πληρωμές για σωματικές βλάβες

Εξαιτίας των μεγάλων ποσών που δίνονται ως αποζημίωση για αστική ευθύνη σωματικών βλαβών παρατηρούμε ότι οι εκκρεμείς απαιτήσεις για το συγκεκριμένο υπό - χαρτοφυλάκιο είναι ελαφρώς μετατοπισμένες προς τα πάνω συγκριτικά με αυτές που είδαμε στο υπό – χαρτοφυλάκιο 1 (Λοιπές ζημιές αυτοκινήτου) και παρουσιάζουν μεγαλύτερη μεταβλητότητα από έτος σε έτος. Η γραφική απεικόνιση βρίσκεται στην παρακάτω εικόνα 14.



**Γράφημα 14:** Απεικόνιση εκκρεμών απαιτήσεων για σωματικές βλάβες

Οι εκκρεμείς απαιτήσεις για το υπό – χαρτοφυλάκιο 2 δείχνουν ότι μεταξύ τους υπάρχει ένα πρότυπο εξέλιξης από έτος σε έτος. Θα ήταν εύλογο να πούμε ότι πάνω κάτω από έτος σε έτος οι εκτιμήσεις που δίνει ο κλάδος αποζημιώσεων για τις εκκρεμείς απαιτήσεις που αφορούν Αστική ευθύνη σωματικών βλαβών είναι ανάλογες με τις ζημιές που θα αναγγελθούν και το πλήθος αυτών.

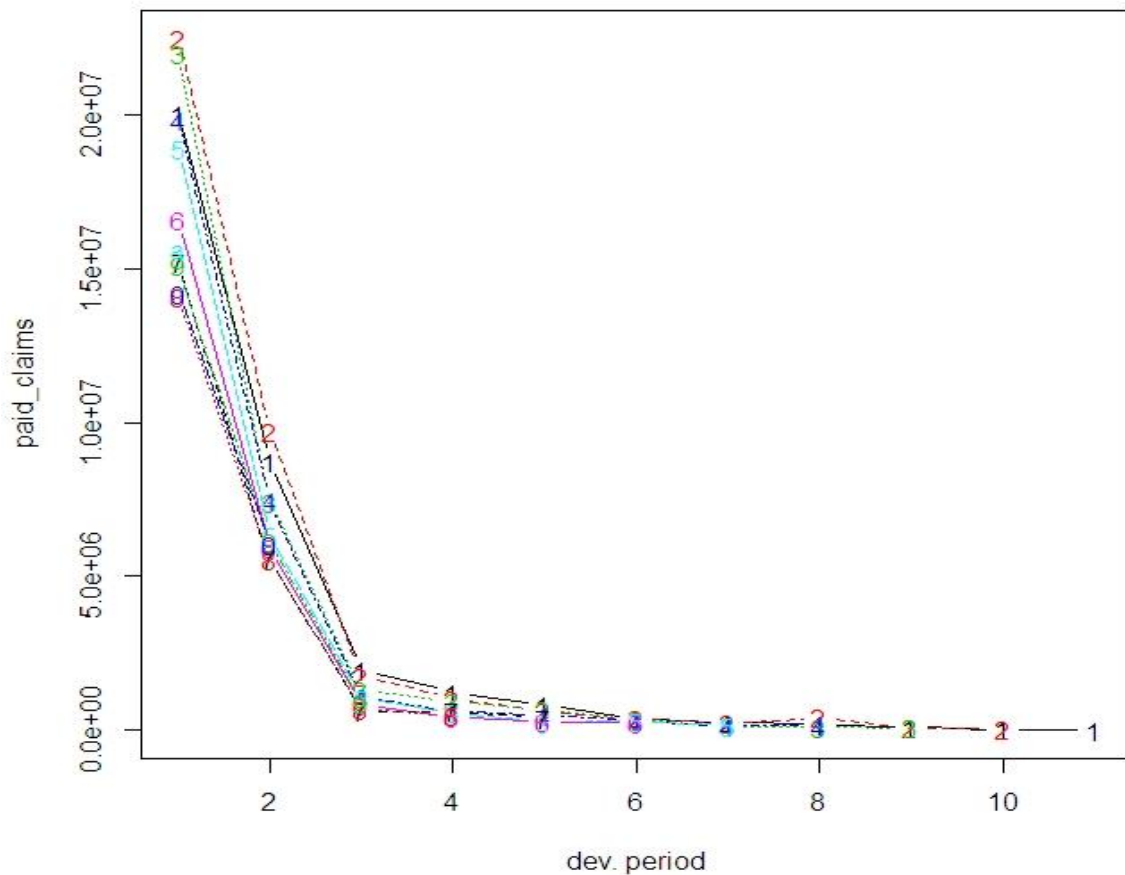
- Υλικές Ζημιές αυτοκινήτου

Στο υπό – χαρτοφυλάκιο αυτό συμπεριλαμβάνονται όλες εκείνες οι ζημιές που αφορούν αποζημιώσεις για υλικές ζημιές αυτοκινήτου. Το υπό – χαρτοφυλάκιο αυτό είναι το τρίτο και τελευταίο χαρτοφυλάκιο που θα μελετηθεί. Έτσι στον πίνακα 11 υπάρχουν τα ποσά που δόθηκαν ως αποζημίωση για τα έτη ατυχήματος 2008 – 2018. Παρατηρούμε όπως και στο υπό – χαρτοφυλάκιο 1 Λοιπές ζημιές αυτοκινήτου για το έτος ατυχήματος 2008 και μετά από 132 μήνες εξέλιξης υπάρχει αρνητική προσαυξητική απαίτηση. Η αιτία που βλέπουμε το αρνητικό ποσό αυτό είναι ίδια με αυτή που αναφέρθηκε και στο υπό – χαρτοφυλάκιο 1. Το ποσό που εκτιμήθηκε να κρατηθεί ως απόθεμα για τις ζημιές που συνέβησαν το 2008 ήταν κατά 13.500 ευρώ περισσότερο από αυτό που πραγματικά χρειάστηκε τελικά για να δοθεί ως αποζημίωση στους ασφαλισμένους. Αξίζει επίσης να παρατηρήσουμε ότι μετά την πενταετία οι ζημιές που εμπίπτουν στην κατηγορία Υλικές ζημιές αυτοκινήτου αν δεν έχουν κλείσει οι φάκελοί τους τότε παραγράφονται. Αντίστοιχη εικόνα λαμβάνουμε και από τον πίνακα όπου φαίνεται ότι για τα αρχικά ιστορικά έτη μελέτης (2008, 2009, 2010 και 2011) οι ζημιές που είχαν αναγγελθεί κατά το έτος ατυχήματος 72 μήνες έχει ξεκινήσει ή η παραγραφή της ή η αποπληρωμή τους και το κλείσιμο των φακέλων. Αυτό γίνεται αντιληπτό αν κοιτάξουμε ότι στα έτη 2008, 2009, 2010 και 2011 72 μήνες μετά από την εξέλιξη του κάθε έτους οι πληρωμές έχουν σχεδόν υποδιπλασιαστεί.

Incremental Paid Claims Motor PD											
AY	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	200.383	87.417	19.485	12.233	8.202	3.786	2.439	1.757	932	26	- 135
2009	224.910	97.302	17.404	10.285	6.018	3.567	2.356	3.971	570	391	
2010	220.162	74.051	12.938	9.133	6.502	3.352	1.074	863	573		
2011	198.420	74.405	10.445	6.212	4.510	2.932	1.203	1.436			
2012	188.976	63.129	10.299	5.742	2.216	2.830	1.467				
2013	165.729	59.167	8.328	4.152	2.662	2.184					
2014	152.213	55.619	6.023	5.925	3.823						
2015	140.987	55.379	6.671	4.459							
2016	151.279	61.060	8.779								
2017	141.965	60.441									
2018	156.025										

Πίνακας 11: Υπό-χαρτοφυλάκιο για υλικές ζημιές





Γράφημα 15: Απεικόνιση προσαυξητικών πληρωμένων απαιτήσεων για υλικές ζημιές

Το γράφημα 15 είναι ακόμα μια απεικόνιση όπως αυτές που είδαμε στις προηγούμενες ενότητες για τον τρόπο εξέλιξης των πληρωμών. Φαίνεται επίσης καθαρά το αποτέλεσμα της παραγραφής ζημιών μετά τη πενταετία. Υπάρχει μια φθίνουσα πορεία στις πληρωμές για όλα τα έτη ατυχήματος, όμως μετά το 5 έτος εξέλιξης και πριν το 6 έτος εξέλιξης οι πληρωμές τείνουν γύρω από μια συγκεκριμένη τιμή. Σε εκείνο ακριβώς το σημείο είναι που γίνεται και η παραγραφή των ζημιών. Το φαινόμενο αυτό της παραγραφής στην ασφαλιστική ορολογία συχνά συναντάται με τη φράση «*time stamp effect*». Με τον όρο time stamp effect νοείται η χρονική στιγμή κατά την οποία οι παρελθοντικές ζημιές παραγράφονται.

Στο πίνακα 12 υπάρχουν τα σωρευτικά δεδομένα όπως αυτά υπολογίστηκαν με βάση τις πληρωμές που είδαμε στον πίνακα 11.

Cumulative Paid Claims Motor PD											
AY	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	200.383	287.800	307.285	319.518	327.721	331.507	333.945	335.703	336.635	336.660	336.525
2009	224.910	322.211	339.615	349.900	355.918	359.485	361.841	365.812	366.382	366.772	
2010	220.162	294.213	307.151	316.284	322.786	326.137	327.211	328.074	328.647		
2011	198.420	272.826	283.270	289.482	293.992	296.924	298.128	299.564			
2012	188.976	252.105	262.404	268.146	270.361	273.192	274.659				
2013	165.729	224.896	233.224	237.377	240.039	242.223					
2014	152.213	207.832	213.855	219.780	223.603						
2015	140.987	196.366	203.037	207.496							
2016	151.279	212.339	221.118								
2017	141.965	202.406									
2018	156.025										

Πίνακας 12: Σωρευτικές πληρωμές υλικών ζημιών

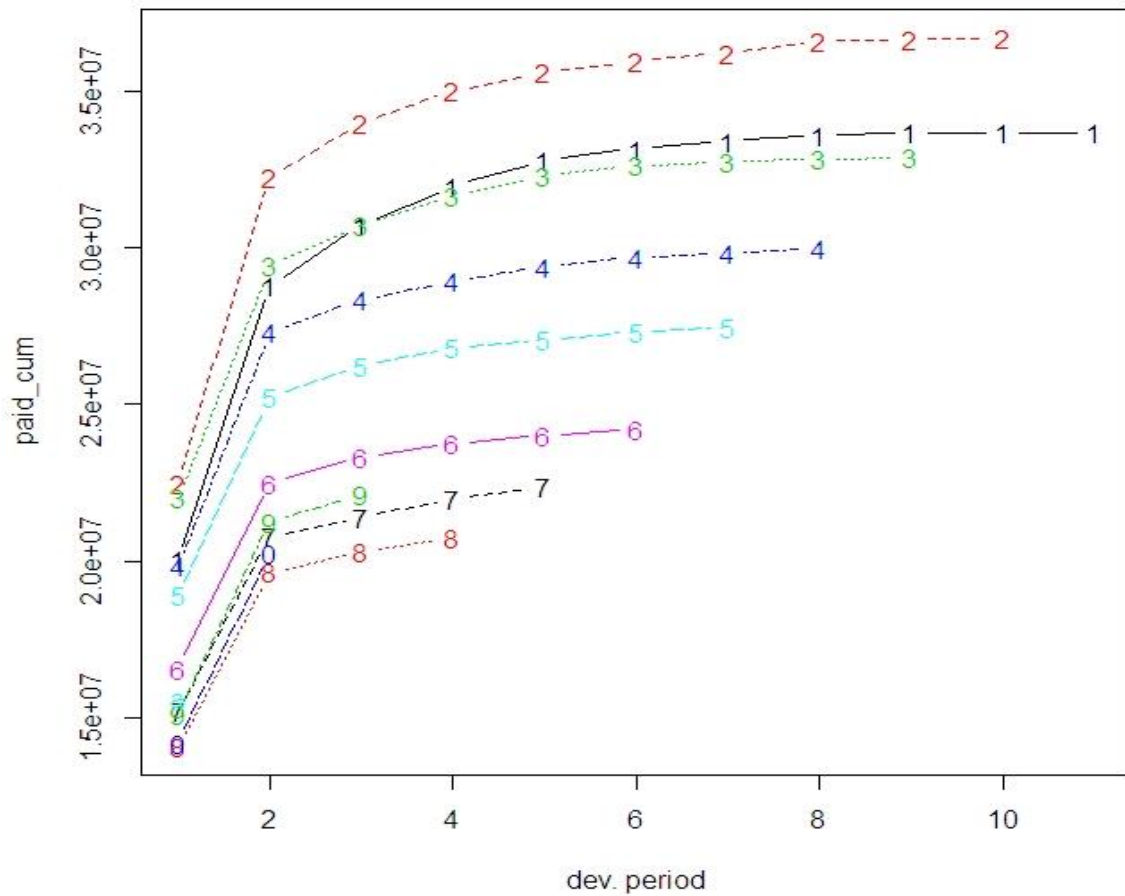
Σημειώνουμε ότι οι σωρευτικές απαιτήσεις υπολογίστηκαν με βάση τον τύπο (3.1) που υπάρχει στο Κεφάλαιο 3: Πολυμεταβλητή μέθοδος Chain – Ladder και ο οποίος είναι ο εξής:

$$C_{i,j}^{(n)} = \sum_{k=0}^i X_{i,k}^{(n)}$$

Όπου η τυχαία μεταβλητή  $C_{i,j}^{(n)}$  παριστάνει τις σωρευτικές απαιτήσεις και η μεταβλητή  $X_{i,k}^{(n)}$  τις προσαυξητικές απαιτήσεις για έτος ατυχήματος  $i$  και έτος εξέλιξης  $j$  για το  $n$ -υπό χαρτοφυλάκιο. Έστω το υπό – χαρτοφυλάκιο Υλικές ζημιές αυτοκινήτου ότι είναι το τρίτο υπό – χαρτοφυλάκιο τότε έχουμε ότι  $n = 3$  και άρα ο παραπάνω τύπος γίνεται:

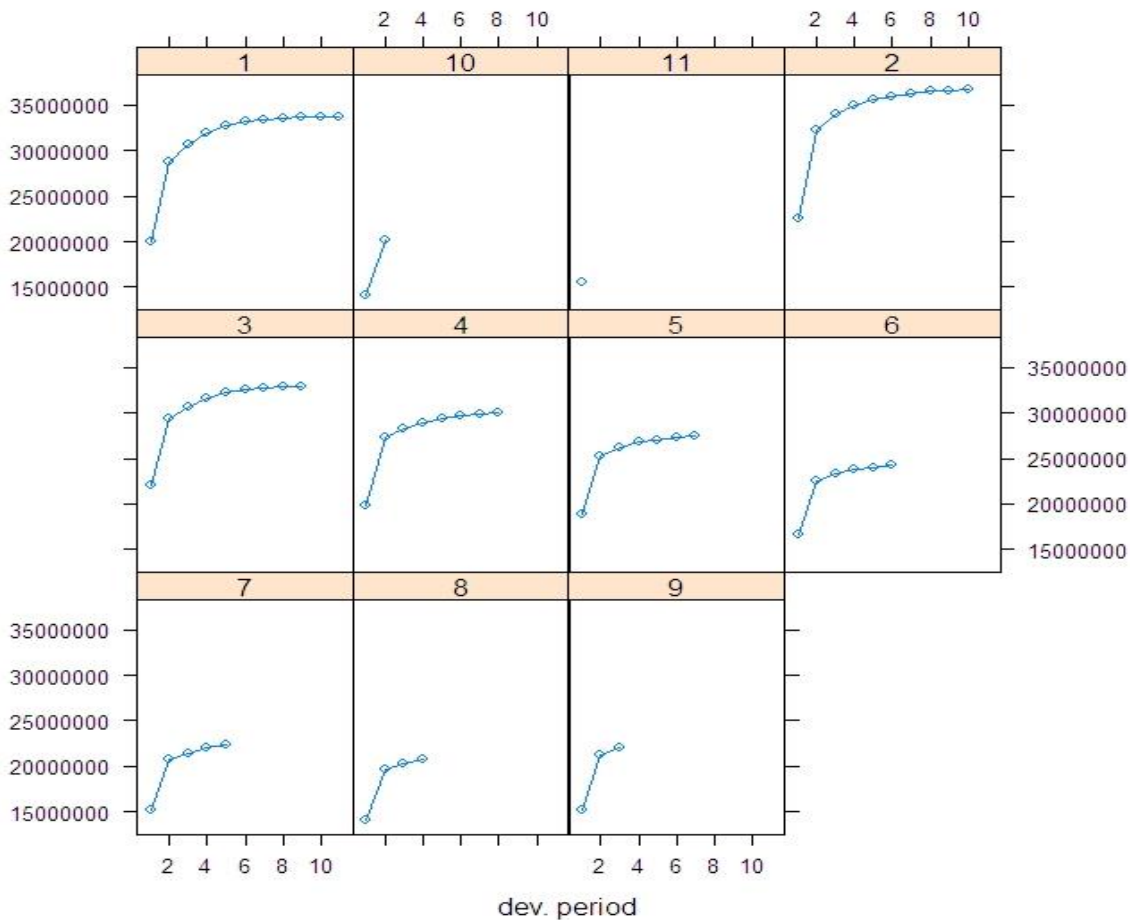
$$C_{i,j}^{(3)} = \sum_{k=0}^i X_{i,k}^{(3)}$$

Και υπολογίζει τις σωρευτικές απαιτήσεις για το υπό – χαρτοφυλάκιο 3 Υλικές ζημιές αυτοκινήτου όπως αυτές φαίνονται στον πίνακα 11. Όπως και στον πίνακα 4 που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για τις σωρευτικές απαιτήσεις του συνολικού χαρτοφυλακίου το έτος ατυχήματος 2009 είναι εκείνο στο οποίο έχουν δοθεί οι μεγαλύτερες αποζημιώσεις συγκριτικά πάντα με τα υπόλοιπα έτη που εμφανίζονται στα υπό μελέτη δεδομένα μας. Αντίστοιχη εικόνα παρατηρούμε και για τις Υλικές ζημιές αυτοκινήτου. Το έτος ατυχήματος 2009 δόθηκαν 3.667.720 ευρώ ως αποζημίωση για υλικές ζημιές αυτοκινήτου όταν για ατυχήματα που συνέβησαν το προηγούμενο έτος -2008- δόθηκαν συνολικά 3.365.250 ευρώ. Με βάση την μελέτη και από τα τρία υπό – χαρτοφυλάκια μπορούμε να ισχυριστούμε ότι κάποια σφοδρά συμβάν ή σφοδρά συμβάντα συνέβησαν μέσα στο 2009 γι' αυτό και απαιτήθηκαν τόσο μεγάλες αποζημιώσεις σε κάθε υπό - χαρτοφυλάκιο. Το συμπέρασμα αυτό μπορούμε να το εξάγουμε αφού παρατηρούμε ότι κατά το 2009 σε όλα τα υπό μελέτη χαρτοφυλάκια υπάρχει μεγαλύτερο σωρευτικό ποσό αποζημίωσης συγκριτικά με το προηγούμενο έτος. Ενώ συνήθως περιμένουμε ότι τα προηγούμενα έτη εξέλιξης θα έχουν μεγαλύτερα σωρευτικά ποσά αφού ουσιαστικά συμπεριλαμβάνουν ζημιές για ένα έτος παραπάνω. Έτσι στους τελικούς μας υπολογισμούς θα είχε νόημα να μην λάβουμε υπόψη τα δεδομένα για το 2009 αφού μοιάζει σαν μια ακραία παρατήρηση. Παρακάτω και μετά από τους υπολογισμούς θα μπορέσουμε να καταλήξουμε σε ασφαλέστερα συμπεράσματα για το έτος 2009.



**Γράφημα 16:** Απεικόνιση σωρευτικών πληρωμών για υλικές ζημιές αυτοκινήτου

Το γράφημα 16 απεικονίζει την πορεία των σωρευτικών πληρωμών όπως αυτές υπολογίστηκαν με βάση τις προσαυξητικές πληρωμές για τις υλικές ζημιές αυτοκινήτου. Η εξέλιξη των ζημιών φαίνεται να έχει παρόμοια από έτος σε έτος. Τα πρώτα έτη έχουμε μια αύξουσα πορεία για τις σωρευτικές πληρωμές και μετά τείνει να σταθεροποιηθεί σε μια τελική τιμή. Θα μπορούσαμε να χαρακτηρίσουμε ότι από το σχήμα βλέπουμε ότι η εξέλιξη των ζημιών είναι σαν το ελληνικό κεφαλαίο γράμμα «Γ». Στην αρχή έχουν μια σφοδρή ανάπτυξη και μετά πάνε να σταθεροποιηθούν σε κάποια τιμή. Εμφανές επιπλέον είναι και για το 2009 το πόσο μετατοπισμένες προς τα πάνω είναι οι σωρευτικές πληρωμές συγκριτικά με τα άλλα έτη εξέλιξης. Το γράφημα 17 που ακολουθεί μπορεί να μας δώσει και την αναλυτική μορφή της εξέλιξης των σωρευτικών πληρωμών για τις υλικές ζημιές αυτοκινήτου για κάθε έτος ατυχήματος.



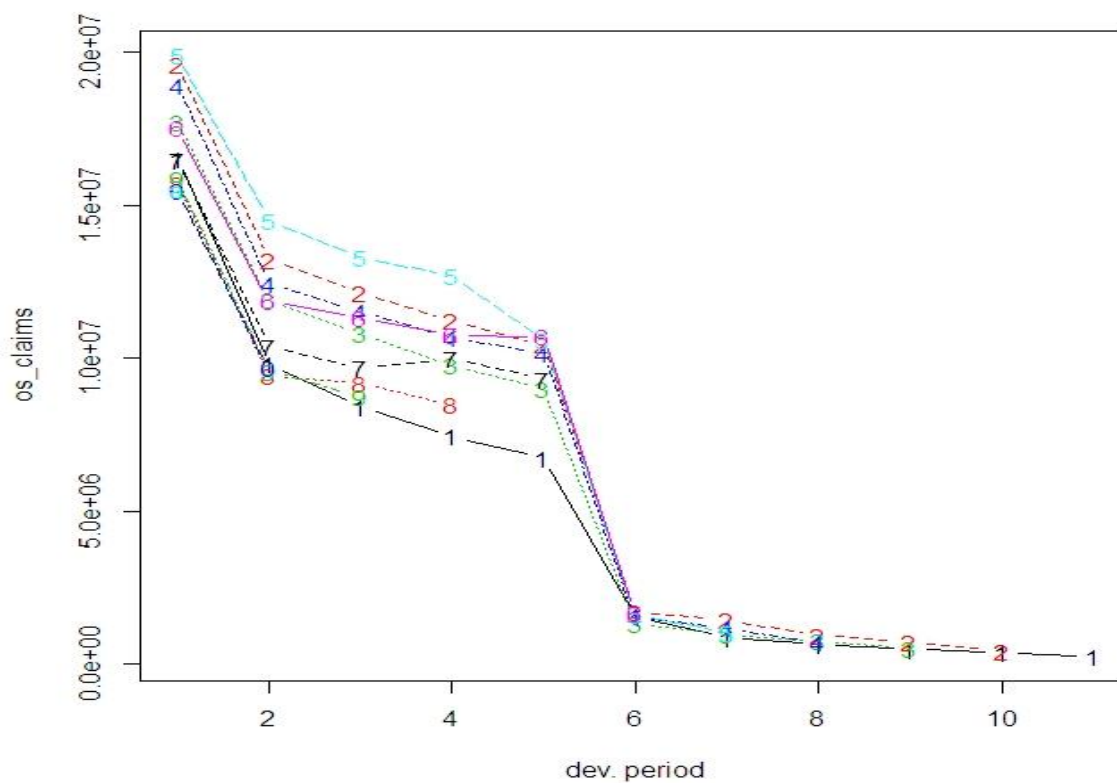
**Γράφημα 17:** Απεικόνιση σωρευτικών πληρωμών ανά έτος ατυχήματος

Συμπερασματικά και με βάση τα παραπάνω γραφήματα και τους παραπάνω πίνακες μπορούμε να ισχυριστούμε ότι οι σωρευτικές πληρωμές για τις υλικές ζημιές αυτοκινήτου εξελίσσονται με το ίδιο μοτίβο. Επομένως μπορούμε σχετικά εύκολα χρησιμοποιώντας τις πληροφορίες που λαμβάνουμε από τα ιστορικά έτη ατυχήματος να μπορέσουμε να εκτιμήσουμε το πώς θα προχωρήσουν οι πληρωμές τα επόμενα έτη.

Στον πίνακα 13 υπάρχουν οι εκκρεμείς απαιτήσεις για τις υλικές ζημιές αυτοκινήτου από το 2008 – 2018 όπως αυτές υπολογίστηκαν από τον κλάδο αυτοκινήτου. Το αποτέλεσμα της παραγραφής ζημιών μετά την πενταετία είναι εμφανές και στην εικόνα που έχουμε για τις εκκρεμείς απαιτήσεις. Όπως βλέπουμε και στο πίνακα 13 στους 72 μήνες εξέλιξης μετά το ατύχημα τα ποσά που θεωρεί ο κλάδος ότι θα πρέπει να κρατηθούν ως απόθεμα είναι σχεδόν το 1/3 των ποσών που έβαζε ως απόθεμα ένα χρόνο πριν. Αυτό συμβαίνει λόγω της παραγραφής ζημιών άρα ζημιές που δεν έχουν τελικά κλείσει στη πενταετία παραγράφονται και το απόθεμα των φακέλων αυτών ορίζεται βάση νόμου από τον κλάδο ίσο με 0. Το γράφημα 18 απεικονίζει και εκείνο το φαινόμενο της παραγραφής ζημιών στην πενταετία (time stamp effect).

Outstanding Claims PD											
Accident Year	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	165.332	98.247	84.124	74.479	67.416	15.708	8.673	6.432	4.812	3.879	2.581
2009	196.061	132.262	121.463	112.388	104.436	17.014	14.498	9.475	7.046	4.267	
2010	177.225	119.299	107.861	97.655	90.140	13.112	9.648	7.671	5.009		
2011	189.345	124.450	115.487	106.687	101.563	15.227	11.715	7.062			
2012	199.061	145.095	133.015	127.008	105.878	16.351	10.218				
2013	175.302	118.658	113.119	107.512	107.142	16.535					
2014	164.772	103.863	96.880	99.823	93.266						
2015	157.151	94.126	91.796	84.723							
2016	158.705	95.842	87.382								
2017	154.735	96.914									
2018	154.851										

Πίνακας 13: Εκκρεμείς πληρωμές για αστική ευθύνη υλικών ζημιών



Γράφημα 18: Απεικόνιση εκκρεμών πληρωμών

## 5.4 Υπολογισμοί

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιαστούν όλοι οι υπολογισμοί για την εύρεση των αποθεμάτων. Η υπό-ενότητα 5.4.1 περιλαμβάνει όλους τους υπολογισμούς όπως αυτοί έγιναν στο πρόγραμμα R – project θεωρώντας ως παράγοντα εξέλιξης τον σταθμισμένο μέσο καθώς και γραφική απεικόνιση αυτών. Η υπό-ενότητα 5.4.2 περιλαμβάνει όλους τους υπολογισμούς, όπως αυτοί έγιναν με χρήση του υπολογιστικού φύλλου Excel θεωρώντας ως παράγοντα εξέλιξης των αριθμητικό μέσο, καθώς και γραφική απεικόνιση αυτών. Τα συμπεράσματα για τα τελικά αποθέματα βρίσκονται αναλυτικά στο τέλος κάθε υπό-ενότητας.

### 5.4.1 Υπολογισμός αποθεμάτων με βάση τον σταθμισμένο μέσο (R-project)

- Λοιπές Υλικές Ζημιές αυτοκινήτου (Motor Other)

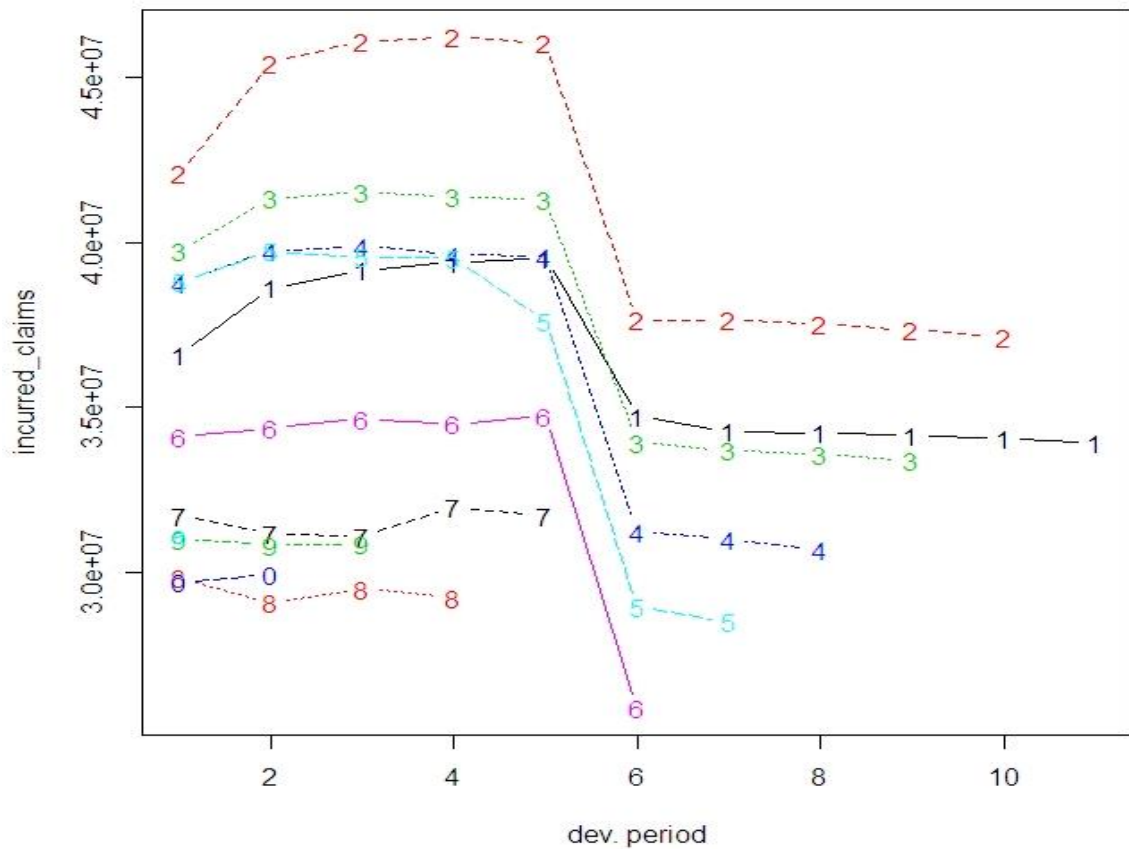
Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν (πληρωμένες απαιτήσεις και εκκρεμείς απαιτήσεις) είναι αυτά όπως παρουσιάστηκαν στην προηγούμενη ενότητα. Συνεπώς τα σωρευτικά επισυμβάντα δεδομένα είναι αυτά όπως εμφανίζονται παρακάτω στο πίνακα 14, το αντίστοιχο γράφημα 19 δείχνει και γραφικά πως οι σωρευτικές επισυμβάσεις ζημιές εξελίσσονται και το γράφημα 20 τη εξέλιξη έχουν ξεχωριστά για κάθε έτος:

Incurred Cumulative Claims Motor Other											
Accident Year	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	139.210	140.610	137.727	134.837	128.651	128.258	128.161	127.888	127.706	127.780	127.304
2009	157.365	158.257	155.578	154.791	148.223	146.568	146.476	146.397	145.294	145.053	
2010	133.310	132.598	130.786	130.588	123.700	123.150	123.075	123.127	123.048		
2011	140.423	139.844	139.635	137.191	127.099	127.010	126.747	125.918			
2012	133.127	136.958	135.537	132.759	121.874	121.950	121.883				
2013	118.308	118.117	117.448	116.359	107.798	107.697					
2014	108.171	103.906	103.402	103.160	96.726						
2015	111.434	107.715	107.192	106.715							
2016	122.299	118.356	117.372								
2017	120.206	116.413									
2018	120.802										

Πίνακας 14: Σωρευτικά δεδομένα πληρωμών Λοιπών Υλικών Ζημιών

Για τον υπολογισμό των επισυμβάντων απαιτήσεων χρησιμοποιήθηκε ο τύπος:

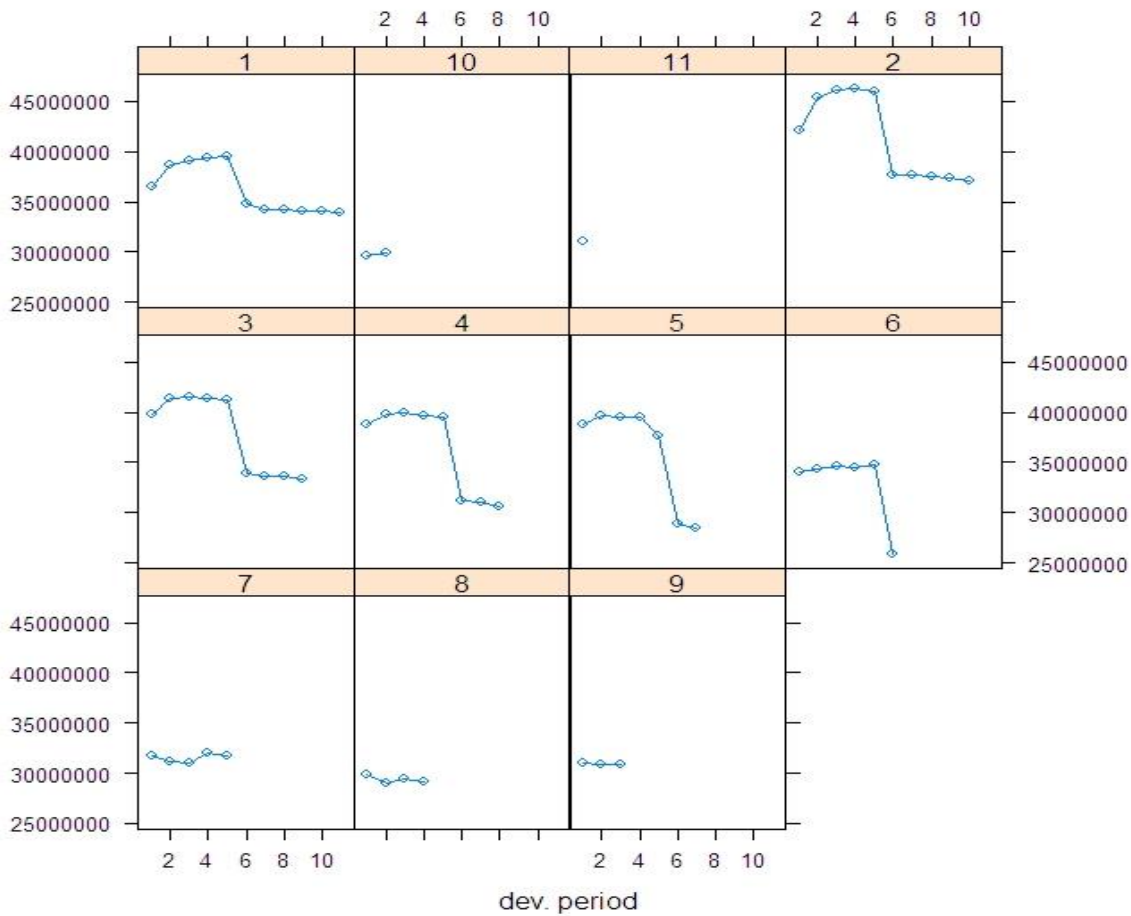
$$\text{Επισυμβάσεις απαιτήσεις}_{i,j} = \text{πληρωμένες απαιτήσεις}_{i,j} + \text{εκκρεμείς απαιτήσεις}_{i,j}$$



**Γράφημα 19:** Απεικόνιση σωρευτικών πληρωμών Λοιπών Υλικών Ζημιών

Το γράφημα 19 είναι η μίξη των σωρευτικών πληρωμών όπως αυτές διαμορφώθηκαν από το 2008 έως το 2018 για τις Λοιπές ζημιές αυτοκινήτου με τις εκκρεμείς απαιτήσεις όπως αυτές υπολογίστηκαν από τον κλάδο αυτοκινήτου. Φαίνεται ότι στα πρώτα έτη εξέλιξης το κάθε έτος ατυχήματος έχει δική του πορεία. Ενώ μετά από περίπου 6 έτη εξέλιξης οι πληρωμές τείνουν να σταθεροποιηθούν γύρω από κάποιες τιμές. Το φαινόμενο της παραγραφής ζημιών μετά την πενταετία ισχύει και για το χαρτοφυλάκιο των λοιπών ζημιών αυτοκινήτου. Άρα η εικόνα που μας παρέχει το γράφημα 19 για την απεικόνιση των σωρευτικών πληρωμών για τις λοιπές ζημιές αυτοκινήτου συνάδει με αυτά που έχουν αναφερθεί ως τώρα.

Το γράφημα 20 που βρίσκεται παρακάτω μας δίνει μια πιο λεπτομερή εικόνα για κάθε έτος ατυχήματος ξεχωριστά. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για τα έτη 2014, 2015, 2016 οι επισυμβάσεις απαιτήσεις κινούνται πάνω κάτω στις ίδιες τιμές.



Γράφημα 20: Απεικόνιση σωρευτικών πληρωμών ανά έτος εξέλιξης

Στο παρακάτω πίνακα (Πίνακας 15) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα όπως εξήχθησαν από το R – project. Ακολουθεί το γράφημα 21 που παρουσιάζει γραφικά τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα.

MackChainLadder(Triangle = mo.cum, est.sigma = "Mack")					
	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E
2008	12.730.425	1,0000	12.730.425	0	0
2009	14.505.282	1,0037	14.451.261	- 54.021	13.503
2010	12.304.834	1,0043	12.251.541	-53.293	27.313
2011	12.591.843	1,0078	12.494.259	-97.584	63.325
2012	12.188.331	1,0099	12.067.832	-120.499	75.008
2013	10.769.696	1,0109	10.653.456	-116.240	69.981
2014	9.672.635	1,0145	9.533.975	-138.660	83.540
2015	10.671.452	1,0806	9.875.427	-796.025	210.491
2016	11.737.190	1,0922	10.746.347	-990.843	242.023
2017	11.641.265	1,1033	10.550.839	-1.090.426	251.359
2018	12.080.223	1,1129	10.854.177	-1.226.046	367.573

Πίνακας 15: Αποτελέσματα από R - project



Η στήλη με τίτλο «Latest» είναι η διαγώνιος του τριγώνου των σωρευτικών πληρωμών όπως αυτή έχει προκύψει από τις προσαυξητικές απαιτήσεις. Η στήλη με τίτλο «Ultimate» δείχνει τελικά ποιο θα είναι το τελικό ποσό που θα πληρώσει η ασφαλιστική αυτή εταιρία για το κάθε έτος ατυχήματος και για τις ζημιές που συνέβησαν σε αυτό το έτος. Ο τύπος υπολογισμού που χρησιμοποιεί το R – project για τον υπολογισμό των τελικών απαιτήσεων είναι:

“Ο εκτιμητής της πολυμεταβλητής CL για  $E[C_{i,j}|D_i^N]$  ορίζεται ως:

$$\hat{C}_{i,j}^{CL} = (\hat{C}_{i,j}^{(1)CL}, \dots, \hat{C}_{i,j}^{(N)CL})' = \hat{E}[C_{i,j}|D_i^N] = \prod_{l=i}^{j-1} D(\widehat{f}_l) C_{i,l-i}$$

για  $i + j > I$ .”

Όπως ορίστηκε στο Λήμμα 3.1 στο κεφάλαιο 3.4 Πολυμεταβλητή μέθοδος Chain Ladder.

Η στήλη με τίτλο «Dev.To.Date» αναγράφει το ποσοστό στο οποίο εκτιμάται ότι έχουν εξελιχθεί οι απαιτήσεις μέχρι και σήμερα. Ο υπολογισμός αυτών γίνεται ως εξής:

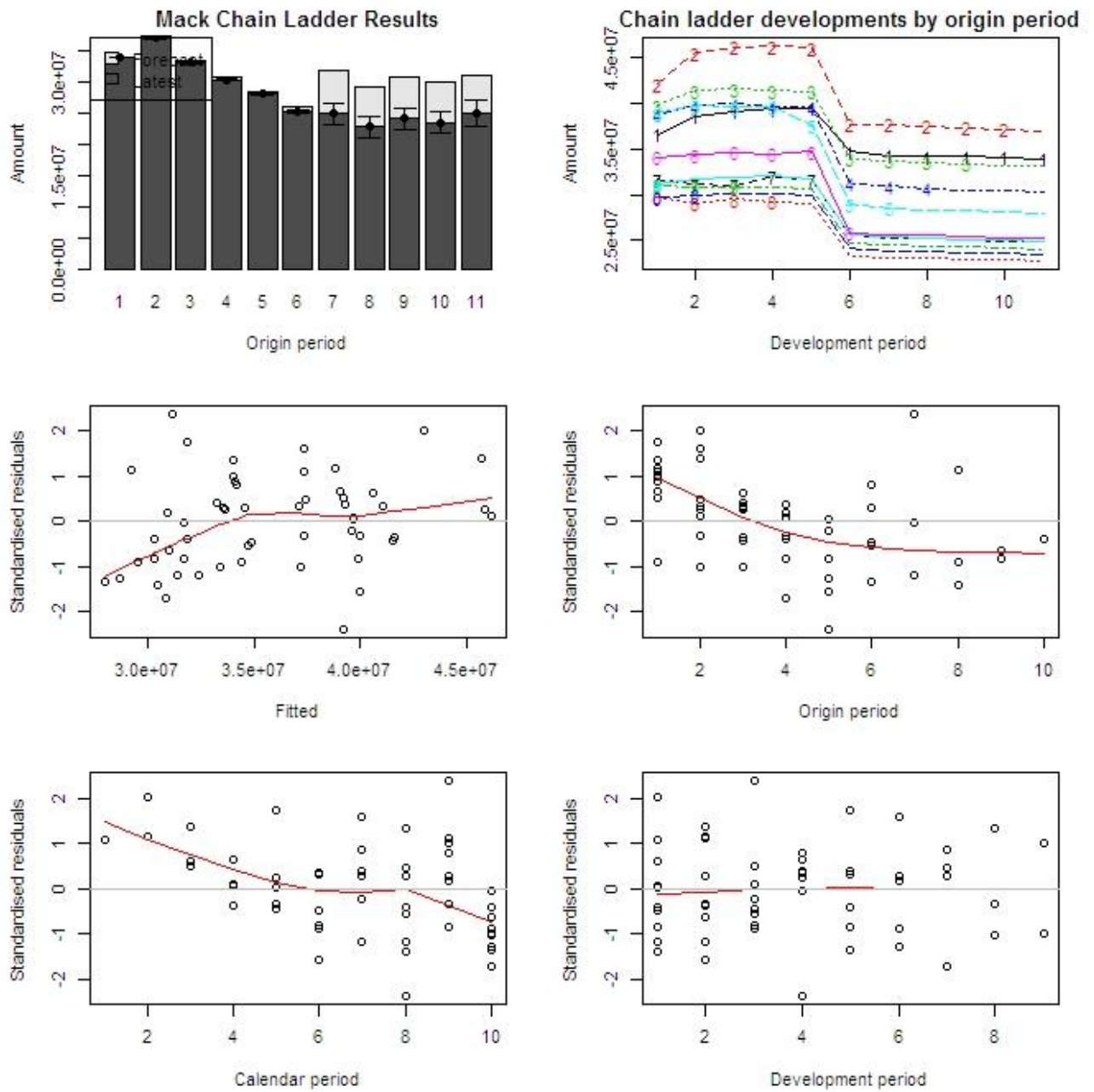
$$Dev. to Date_i = \frac{Ultimate_i}{Latest_i}$$

Θα περίμενε κανείς ότι τα ποσοστά αυτά θα ήταν κοντά στο 100% ή και κάτω από το 100%, αλλά είναι εμφανές ότι για τα έτη εξέλιξης μετά το 2011 φαίνεται ότι οι τελικές πληρωμές που έχουν δοθεί ως αποζημίωση μαζί με τις εκκρεμείς απαιτήσεις ξεπερνούν τις εκτιμήσεις για το πως μπορούν να εξελιχθούν οι ζημιές αυτές. Είναι λογικό λοιπόν να θεωρήσουμε ότι στο μέλλον θα έχουμε ενδεχόμενο «απελευθέρωσης» αποθεμάτων γιατί γίνεται κατανοητό από τα αποτελέσματα ότι οι εκκρεμείς ζημιές είναι ανέρχονται σε μεγαλύτερο ποσό από αυτό που θα έπρεπε να υπάρχει ως εκκρεμότητα ή όπως αναφέρεται στην ασφαλιστική ορολογία θα γίνει *release*.

Η στήλη «IBNR» είναι η διαφορά των πληρωμένων μέχρι τώρα απαιτήσεων από τις τελικές εκτιμήσεις όπως αυτές έχουν υπολογιστεί για την εξέλιξη των αποθεμάτων. Τέλος, η στήλη «Mack.S.E» υπολογίζει τα τυπικά σφάλματα όπως αυτά έχουν οριστεί από τον Mack στο μοντέλο που έχει αναπτύξει για την Chain – Ladder, βλέπε παράγραφο 3.4.4 Υπό συνθήκη εκτίμηση σφαλμάτων για συνολικά έτη ατυχήματος.

Όπως παρατηρείται αντίστοιχη εικόνα με τα ποσοστά εξέλιξης έχουμε και για το απόθεμα για τις IBNR απαιτήσεις όπου είναι αρνητικό. Ο λόγος που τα αποθέματα είναι αρνητικά είναι λόγω του γεγονότος ότι όπως αναφέρθηκε και παραπάνω η εταιρία κρατάει για τις εκκρεμείς απαιτήσεις παραπάνω χρήματα από αυτά που πραγματικά απαιτούνται. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να ακολουθηθεί μια πιο συντηρητική πολιτική για την ανατροπή αυτών των IBNR απαιτήσεων.

Το παρακάτω γράφημα 21 απεικονίζει τις ποσότητες όπως αυτές υπολογίστηκαν στον πίνακα 15. Στα γραφήματα αυτά έχει απεικονιστεί η εξέλιξη των πληρωμών περιέχοντας τις εκτιμήσεις αυτών καθώς και τις εκτιμήσεις των τυπικών σφαλμάτων.



**Γράφημα 21:** Απεικόνιση συνολικών στοιχείων όπως αυτά υπολογίζονται στο μοντέλο του Mack

Ο συντελεστής μεταβλητότητας των IBNR (πίνακας 16) απαιτήσεων όπως υπολογίζεται από το R – project.

	CV(IBNR)
2008	NaN
2009	-0,250
2010	-0,513
2011	-0,649
2012	-0,622
2013	-0,602
2014	-0,602
2015	-0,264
2016	-0,244
2017	-0,231
2018	-0,300

**Πίνακας 16:** Συντελεστής μεταβλητότητας IBNR απαιτήσεων Λοιπών Υλικών ζημιών

Οι παράγοντες εξέλιξης που χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστούν οι εκτιμήσεις των τελικών πληρωμών υπολογίστηκαν με βάση τον τύπο όπως αυτός έχει οριστεί από τον Mack. Ο τύπος με τον οποίο υπολογίζονται οι συντελεστές εξέλιξης αυτοί βρίσκεται στο κεφάλαιο 3.4.1 Παρουσίαση πολυμεταβλητού μοντέλου *Chain Ladder* και είναι ο εξής:

$$F_{i,j}^{(1)} = \frac{c_{i,j}^{(1)}}{c_{i,j-1}^{(1)}}$$

Όπου έτος ατυχήματος  $i \in \{1, \dots, I\}$  και έτος εξέλιξης  $j \in \{1, \dots, J\}$ .

Οι παράγοντες που χρησιμοποιήθηκαν τελικά φαίνονται στον παρακάτω πίνακα 17.

Link Ratios (f)
0,9913686
0.9898973
0.9893828
0.9388650
0.9964193
0.9990841
0.9978467
0.9965664
0.9993909
0.9962758
1

**Πίνακας 17:** Παράγοντες εξέλιξης πληρωμών

Οι παράγοντες εξέλιξης είναι μια απεικόνιση του πώς εξελίσσονται οι σωρευτικές πληρωμές από έτος σε έτος. Μας δίνουν την πληροφορία για το πώς περιμένουμε να εξελιχθούν οι ζημιές μετά από ένα έτος μετά από δύο έτη και ούτω καθεξής.

Συνοπτικά, τα αποτελέσματα για το υπό-χαρτοφυλάκιο των Λοιπών Υλικών Ζημιών για το κλάδο αυτοκινήτου είναι τα εξής:

	<b>Totals</b>
<b>Latest:</b>	130.893.176,90
<b>Dev:</b>	1,04
<b>Ultimate:</b>	126.209.539,00
<b>IBNR:</b>	-4.683.637,90
<b>Mack.S.E</b>	671.600,82
<b>CV(IBNR):</b>	-0,14

**Πίνακας 18:** Συνοπτικά αποτελέσματα για το υπό-χαρτοφυλάκιο Λοιπών Υλικών Ζημιών

Ο πίνακας 18 μας δίνει συνοπτικά και συγκεντρωτικά τις πληροφορίες ότι οι πληρωμές μέχρι και το 2018 που έχουν γίνει για τον κλάδο αυτοκινήτου και συγκεκριμένα για τις Λοιπές Υλικές Ζημιές αυτοκινήτου ανέρχονται στο ποσό των 130.893.176,90 ευρώ. Οι πληρωμές αυτές έχουν εξελιχθεί κατά 104%, δηλαδή μέχρι και τώρα τα ποσά που έχουν δηλωθεί ως εκκρεμείς απαιτήσεις είναι κατά 4% παραπάνω από αυτά που πραγματικά θα χρειαστεί η εταιρία για να αποζημιώσει ζημιές που έγιναν από το 2008 μέχρι και το 2018. Εκτιμάται ότι το συνολικό ποσό των πληρωμών θα ανέρθει στα 126.209.539 ευρώ, δηλαδή το ποσό που θα πρέπει να κρατηθεί ως απόθεμα από την ασφαλιστική εταιρία για τη συγκεκριμένη επιχειρησιακή γραμμή είναι -4.683.637,90 ευρώ. Το αρνητικό απόθεμα αυτό δείχνει ότι η εταιρία είναι επαρκώς αποθεματοποιημένη με το απόθεμα εκκρεμών ζημιών που κρατάει και δεν χρειάζεται επιπλέον απόθεμα. Η απόκλιση από αυτό το ποσό ανέρχεται στο  $\pm 671.600,82$  ευρώ και συντελεστή μεταβλητότητας -14%.

- Αστική Ευθύνη (Σωματικές βλάβες, Β. Ι.)

Τα προσαυξητικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν είναι αυτά όπως φαίνονται στον πίνακα 4. Επισημαίνεται ότι τα ποσά είναι διαιρεμένα με το 100 για λόγους χωρητικότητας των πινάκων στην παρούσα εργασία. Τα σωρευτικά επισυμβάντα δεδομένα είναι αυτά όπως εμφανίζονται παρακάτω στο πίνακα 19, το αντίστοιχο γράφημα 23 δείχνει και γραφικά πως οι σωρευτικές πληρωμές εξελίσσονται και το γράφημα 24 τι εξέλιξη έχουν οι σωρευτικές πληρωμές ξεχωριστά για κάθε έτος:

Incurred Cumulative Claims Motor BI											
Accident Year	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	134.237	206.124	227.050	235.091	245.454	240.963	240.161	241.568	237.535	237.701	228.424
2009	195.437	243.569	274.933	290.308	308.920	287.147	288.375	285.888	283.656	276.944	
2010	278.417	300.382	299.731	310.234	312.911	260.860	255.650	245.495	244.855		
2011	325.460	354.655	375.163	369.889	372.385	299.410	286.786	269.448			
2012	366.722	400.305	411.972	402.159	382.257	270.913	246.974				
2013	338.272	390.747	387.432	391.727	383.629	298.693					
2014	248.796	329.359	354.661	353.718	350.694						
2015	205.745	299.701	316.498	323.159							
2016	253.553	334.254	356.376								
2017	247.884	327.057									
2018	163.799										

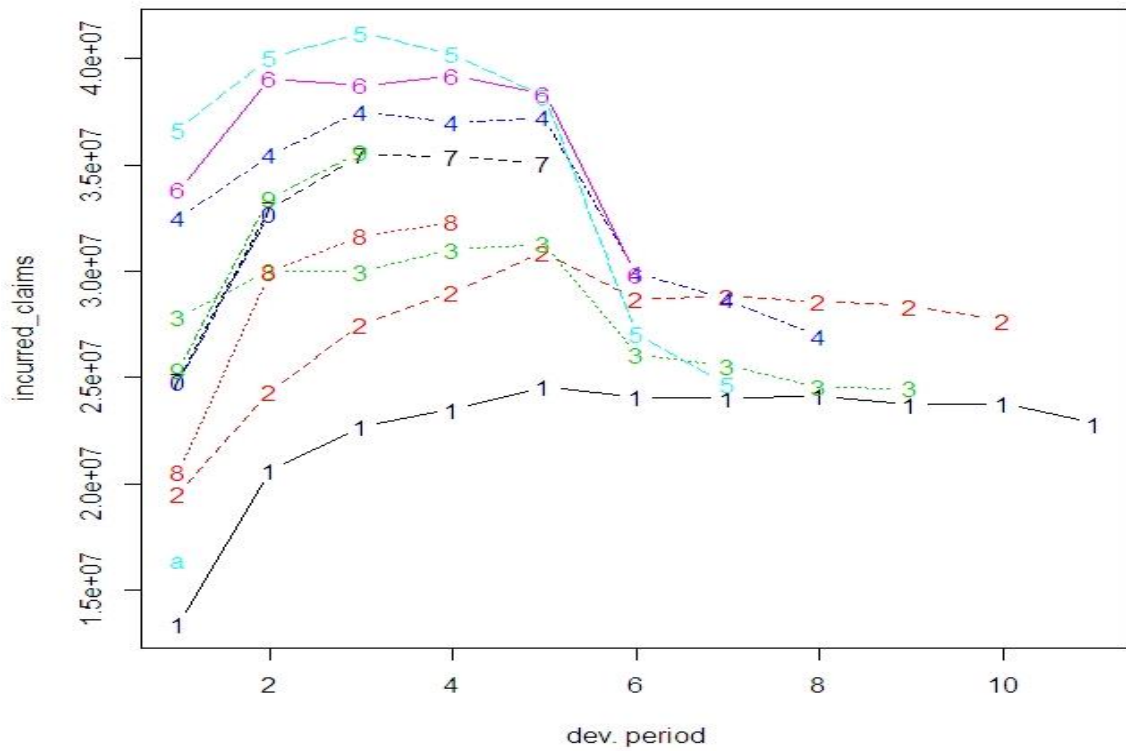
Πίνακας 19: Σωρευτικές πληρωμές Σωματικών βλαβών

Για τον υπολογισμό των επισυμβάντων απαιτήσεων χρησιμοποιήθηκε ο τύπος:

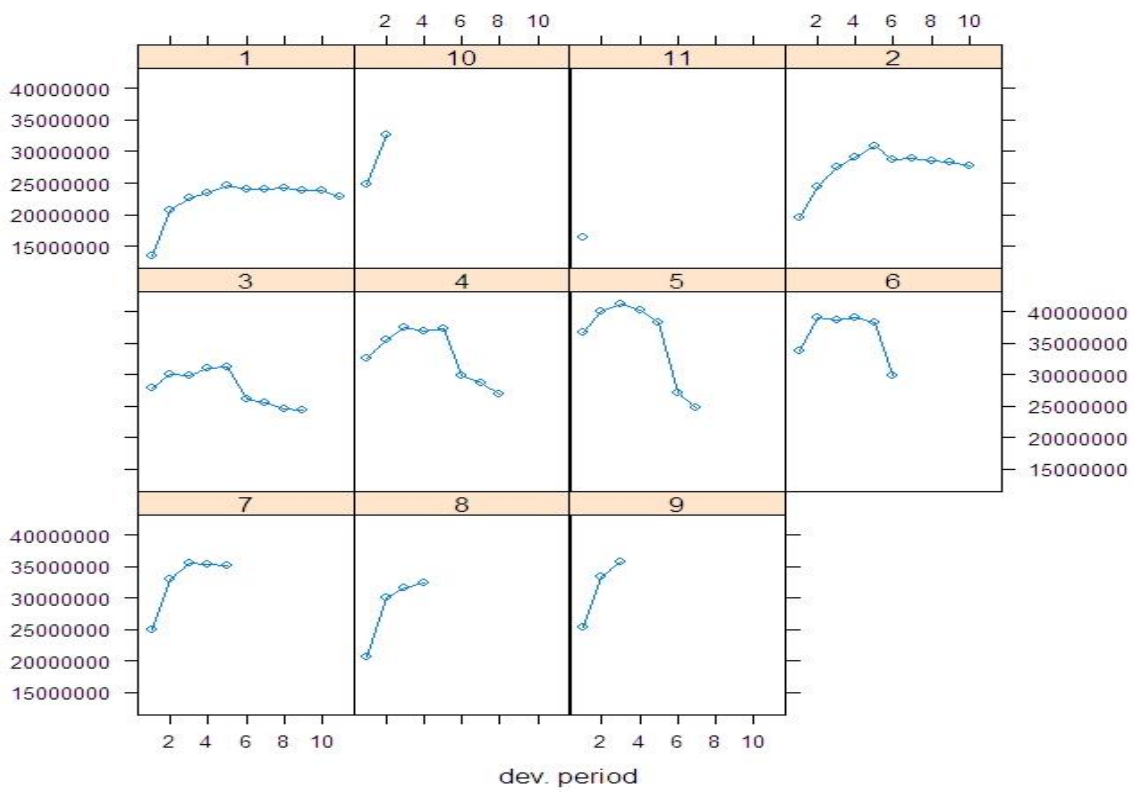
$$\text{Επισυμβάσεις απαιτήσεις}_{i,j} = \text{πληρωμένες απαιτήσεις}_{i,j} + \text{εκκρεμείς απαιτήσεις}_{i,j}$$

Το γράφημα 22 είναι η μίξη των σωρευτικών πληρωμών όπως αυτές διαμορφώθηκαν από το 2008 έως το 2018 για την Αστική ευθύνη για σωματικές βλάβες με τις εκκρεμείς απαιτήσεις όπως αυτές υπολογίστηκαν από τον κλάδο αυτοκινήτου. Φαίνεται ότι στα πρώτα έτη εξέλιξης μεταξύ των ετών ατυχήματος υπάρχουν μεγάλες διαφορές για το πω κυμαίνονται οι σωρευτικές απαιτήσεις. Ενώ μετά από περίπου 6 έτη εξέλιξης οι πληρωμές τείνουν να σταθεροποιηθούν γύρω από κάποιες τιμές. Αυτό συμβαίνει καθώς όπως έχουμε αναφέρει συχνά για περιπτώσεις που υπάρχουν σωματικές βλάβες σε ατυχήματα θα πρέπει να λυθούν με τη δικαστική οδό. Συνεπώς, η εξαετία είναι περίπου ένα εύλογο χρονικό διάστημα κατά το οποίο αποφασίζεται το ποσό που θα πρέπει να καταβάλλει η ασφαλιστική εταιρία ως αποζημίωση.

Το γράφημα 23 που βρίσκεται παρακάτω μας δίνει μια πιο λεπτομερή εικόνα για κάθε έτος ατυχήματος ξεχωριστά. Δεν μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει ακριβώς ίδιος τρόπος εξέλιξης των πληρωμών όπως στα άλλα δύο υπό – χαρτοφυλάκια καθώς το εύρος του ποσού που δίνεται ως αποζημίωση μπορεί να είναι από 0 μέχρι και 1.200.000 ευρώ.



Γράφημα 22: Απεικόνιση σωρευτικών πληρωμών για σωματικές βλάβες



Γράφημα 23: Απεικόνιση σωρευτικών πληρωμών ανά έτος ατυχήματος

Όπως αναφέρθηκε και στην προηγούμενη υπό μελέτη επιχειρησιακή γραμμή έχουμε ότι στο παρακάτω πίνακα (Πίνακας 20) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα όπως εξήχθησαν από το R – projec. Ακολουθεί το γράφημα 25 που παρουσιάζει γραφικά τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα.

MackChainLadder(Triangle = bi.cum, est.sigma = "Mack")					
	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E
2008	22.842.386	1.0000	22.842.386	0	0
2009	27.694.353	1,0406	26.613.493	- 1.080.860	272.419
2010	24.485.542	1.0538	23.234.380	- 1.251.162	561.605
2011	26.944.780	1,0633	25.339.557	- 1.605.223	628.916
2012	24.697.437	1,0924	22.606.424	- 2.091.013	991.594
2013	29.869.264	1,1267	26.508.746	- 3.360.518	1.531.867
2014	35.069.386	1,3629	25.729.946	- 9.339.440	3.517.590
2015	32.315.947	1,3611	23.741.253	- 8.574.694	3.495.502
2016	35.637.629	1,3465	26.466.827	- 9.170.802	3.792.511
2017	32.705.702	1,2816	25.518.863	- 7.186.839	3.870.325
2018	16.379.919	1,0436	15.694.910	- 685.009	3.831.033

Πίνακας 20: Αποτελέσματα από R - project

Η στήλη με τίτλο «Latest» είναι η διαγώνιος του τριγώνου των σωρευτικών πληρωμών όπως αυτή έχει προκύψει από τις προσαυξητικές απαιτήσεις.

Η στήλη «Ultimate» είναι η εκτίμηση για την εξέλιξη των απαιτήσεων με το πέρασμα των χρόνων. Ο τύπος υπολογισμού που χρησιμοποιεί το R – project για τον υπολογισμό των τελικών απαιτήσεων είναι:

“Ο εκτιμητής της πολυμεταβλητής CL για  $E[C_{i,j}|D_i^N]$  ορίζεται ως:

$$\hat{C}_{i,j}^{CL} = \left( \hat{C}_{i,j}^{(1)CL}, \dots, \hat{C}_{i,j}^{(N)CL} \right)' = \hat{E}[C_{i,j}|D_i^N] = \prod_{l=i}^{j-1} D(\hat{f}_l) C_{i,l-i}$$

για  $i + j > I$ .”

Όπως ορίστηκε στο Λήμμα 3.1 στο κεφάλαιο 3.4 Πολυμεταβλητή μέθοδος Chain Ladder.

Η στήλη με τίτλο «Dev.To.Date» αναγράφει το ποσοστό στο οποίο εκτιμάται ότι έχουν εξελιχθεί οι απαιτήσεις μέχρι και σήμερα. Ο υπολογισμός αυτών γίνεται ως εξής:

$$Dev. to Date_i = \frac{Ultimate_i}{Latest_i}$$

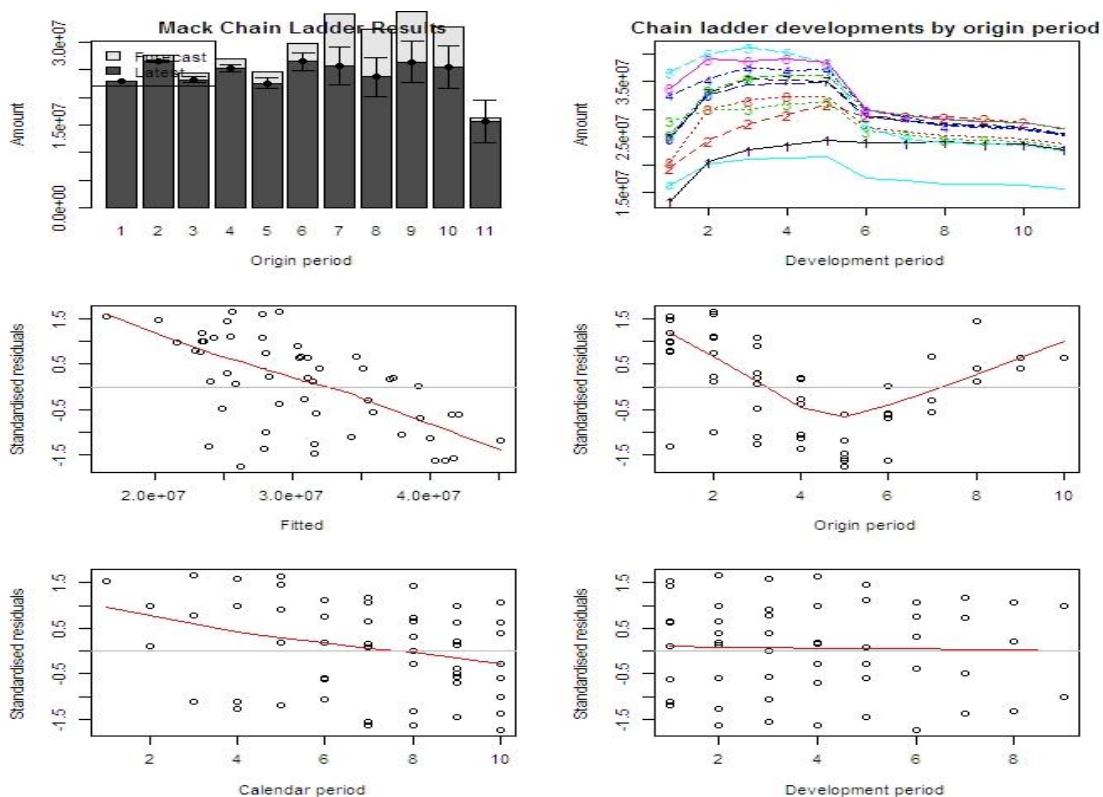
Θα περίμενε κανείς ότι τα ποσοστά αυτά θα ήταν κοντά στο 100% ή και κάτω από το 100%, αλλά είναι εμφανές ότι ακόμα και από το έτος 2009 φαίνεται ότι οι τελικές πληρωμές που έχουν δοθεί ως αποζημίωση μαζί με τις εκκρεμείς απαιτήσεις ξεπερνούν τις εκτιμήσεις για το πως μπορούν να εξελιχθούν οι ζημιές αυτές. Πλέον μπορούμε με ασφάλεια να καταλήξουμε ότι το 2009 είναι ένα έτος το οποίο θα πρέπει να εξαιρέσουμε από τους υπολογισμούς μας, καθώς φαίνεται ότι είναι ένα έτος που παρουσιάζει ακραίες τιμές. Είναι λογικό λοιπόν να

θεωρήσουμε ότι στο μέλλον θα έχουμε ενδεχόμενο «απελευθέρωσης» αποθεμάτων ή όπως αναφέρεται στην ασφαλιστική ορολογία θα γίνει *release*.

Η στήλη «IBNR» είναι η διαφορά των πληρωμένων μέχρι τώρα απαιτήσεων από τις τελικές εκτιμήσεις όπως αυτές έχουν υπολογιστεί για την εξέλιξη των αποθεμάτων. Τέλος, η στήλη «Mack.S.E» υπολογίζει τα τυπικά σφάλματα όπως αυτά έχουν οριστεί από τον Mack στο μοντέλο που έχει αναπτύξει για την Chain – Ladder, βλέπε παράγραφο 3.4.4 *Υπό συνθήκη εκτίμηση σφαλμάτων για συνολικά έτη ατυχήματος*.

Όπως παρατηρείται αντίστοιχη εικόνα με τα ποσοστά εξέλιξης έχουμε και για το απόθεμα για τις IBNR απαιτήσεις όπου είναι αρνητικό. Ο λόγος που τα αποθέματα είναι αρνητικά είναι λόγω του γεγονότος ότι όπως αναφέρθηκε και παραπάνω η εταιρία κρατάει για τις εκκρεμείς απαιτήσεις παραπάνω χρήματα από αυτά που πραγματικά απαιτούνται. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να ακολουθηθεί μια πιο συντηρητική πολιτική για την ανατροπή αυτών των IBNR απαιτήσεων. Βέβαια, στην περίπτωση του υπό – χαρτοφυλακίου Αστικής ευθύνης για σωματικές βλάβες θα πρέπει η εταιρία να νιώθει και ικανή να ανταποκριθεί ανά πάσα στιγμή σε τυχόν υπερογκες αποζημιώσεις. Κρίνεται λοιπόν σκόπιμο από την ίδια την εταιρία τα αποθέματα που κρατάει να είναι σαφώς παραπάνω από αυτά που πραγματικά χρειάζεται ώστε να υπάρχει ένα παραπάνω περιθώριο φερεγγυότητας και ασφάλειας.

Το παρακάτω γράφημα 24 απεικονίζει τις ποσότητες όπως αυτές υπολογίστηκαν στον πίνακα 20. Στα γραφήματα αυτά έχει απεικονιστεί η εξέλιξη των πληρωμών περιέχοντας τις εκτιμήσεις αυτών καθώς και τις εκτιμήσεις των τυπικών σφαλμάτων.



**Γράφημα 24:** Απεικόνιση προβλέψεων και καταλοίπων όπως αυτά ορίζονται στο μοντέλο του Mack



Ο συντελεστής μεταβλητότητας των IBNR (πίνακας 21) απαιτήσεων όπως υπολογίζεται από το R – project.

	CV(IBNR)
2008	NaN
2009	-0,252
2010	-0,449
2011	-0,392
2012	-0,474
2013	-0,456
2014	-0,377
2015	-0,408
2016	-0,414
2017	-0,539
2018	-5,593

Πίνακας 21: Συντελεστής μεταβλητότητας IBNR απαιτήσεων Σωματικών Βλαβών

Οι παράγοντες εξέλιξης που χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστούν οι εκτιμήσεις των τελικών πληρωμών υπολογίστηκαν με βάση τον τύπο όπως αυτός έχει οριστεί από τον Mack. Ο τύπος με τον οποίο υπολογίζονται οι συντελεστές εξέλιξης αυτοί βρίσκεται στο κεφάλαιο 3.4.1 Παρουσίαση πολυμεταβλητού μοντέλου Chain Ladder και είναι ο εξής:

$$F_{i,j}^{(1)} = \frac{c_{i,j}^{(1)}}{c_{i,j-1}^{(1)}}$$

Όπου έτος ατυχήματος  $i \in \{1, \dots, I\}$  και έτος εξέλιξης  $j \in \{1, \dots, J\}$ .

Οι παράγοντες που χρησιμοποιήθηκαν τελικά φαίνονται στον παρακάτω πίνακα 22.

Link Ratios (f)
1,2280307
1,0506178
1,0108957
1,0013272
0,8266964
0,9695823
0,9733199
0,991067
0,98744
0,9609718
1

Πίνακας 22: Παράγοντες εξέλιξης πληρωμών

Οι παράγοντες εξέλιξης είναι μια απεικόνιση του πως εξελίσσονται οι σωρευτικές πληρωμές από έτος σε έτος.

Συνοπτικά, τα αποτελέσματα για το υπό-χαρτοφυλάκιο των Σωματικών βλαβών για το κλάδο αυτοκινήτου είναι τα εξής (τα ποσά είναι τα πραγματικά ποσά):

	<b>Totals</b>
<b>Latest:</b>	308.642.345,34
<b>Dev:</b>	1,17
<b>Ultimate:</b>	264.296.785,00
<b>IBNR:</b>	- 44.345.560,34
<b>Mack.S.E</b>	10.929.656,26
<b>CV(IBNR):</b>	-0,25

**Πίνακας 23:** Συνοπτικά αποτελέσματα για το υπό-χαρτοφυλάκιο Σωματικών βλαβών

Ο πίνακας 23 μας δίνει συνοπτικά και συγκεντρωτικά τις πληροφορίες ότι οι πληρωμές μέχρι και το 2018 που έχουν γίνει για τον κλάδο αυτοκινήτου και συγκεκριμένα για την κατηγορία Αστικής Ευθύνης για σωματικές βλάβες ανέρχονται στο ποσό των 308.642.345,34ευρώ. Οι πληρωμές αυτές έχουν εξελιχθεί κατά 117%, δηλαδή η εταιρία κρατάει 17% παραπάνω αποθέματα από αυτό που πραγματικά απαιτείται να έχει ώστε να μπορεί να αντιμετωπίσει ζημιές που έχουν ήδη συμβεί στα έτη από το 2008 - 2018. Εκτιμάται ότι το συνολικό ποσό των πληρωμών θα ανέρθει στα 264.296.785ευρώ, δηλαδή το ποσό που θα πρέπει να κρατηθεί ως απόθεμα από την ασφαλιστική εταιρία για τη συγκεκριμένη επιχειρησιακή γραμμή είναι - 44.345.560,34ευρώ. Το αρνητικό απόθεμα αυτό σημαίνει ότι η εταιρία είναι επαρκώς αποθεματοποιημένη και δεν χρειάζεται να κρατήσει παραπάνω απόθεμα από αυτό που ήδη κρατάει για τις εκκρεμείς πληρωμές. Η απόκλιση από αυτό το ποσό ανέρχεται στο  $\pm 10.929.656,26$ ευρώ και συντελεστή μεταβλητότητας -25%.

- Υλικές Ζημιές, P.D.

Τα προσαυξητικά δεδομένα και σωρευτικά που χρησιμοποιήθηκαν είναι αυτά όπως φαίνονται στην προηγούμενη ενότητα. Τα ποσά είναι διαιρεμένα με 100 για λόγους χωρητικότητας των πινάκων στην παρούσα εργασία. Τα σωρευτικά επισυμβάντα δεδομένα είναι αυτά όπως εμφανίζονται παρακάτω στο πίνακα 24, το αντίστοιχο γράφημα 27 δείχνει και γραφικά πως οι σωρευτικές επισυμβάσεις πληρωμές εξελίσσονται και το γράφημα 28 τι εξέλιξη έχουν οι σωρευτικές επισυμβάσεις πληρωμές ξεχωριστά για κάθε έτος:

Incurred Cumulative Claims Motor PD											
Accident Year	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	365.715	386.047	391.409	393.997	395.137	347.215	342.619	342.135	341.447	340.539	339.106
2009	420.971	454.473	461.078	462.288	460.354	376.500	376.339	375.286	373.428	371.039	
2010	397.387	413.512	415.012	413.939	412.926	339.249	336.859	335.745	333.656		
2011	387.765	397.276	398.758	396.170	395.556	312.151	309.843	306.626			
2012	388.036	397.200	395.419	395.153	376.240	289.543	284.877				
2013	341.031	343.554	346.344	344.889	347.181	258.757					
2014	316.985	311.695	310.734	319.603	316.869						
2015	298.138	290.491	294.833	292.219							
2016	309.985	308.181	308.501								
2017	296.700	299.320									
2018	310.876										

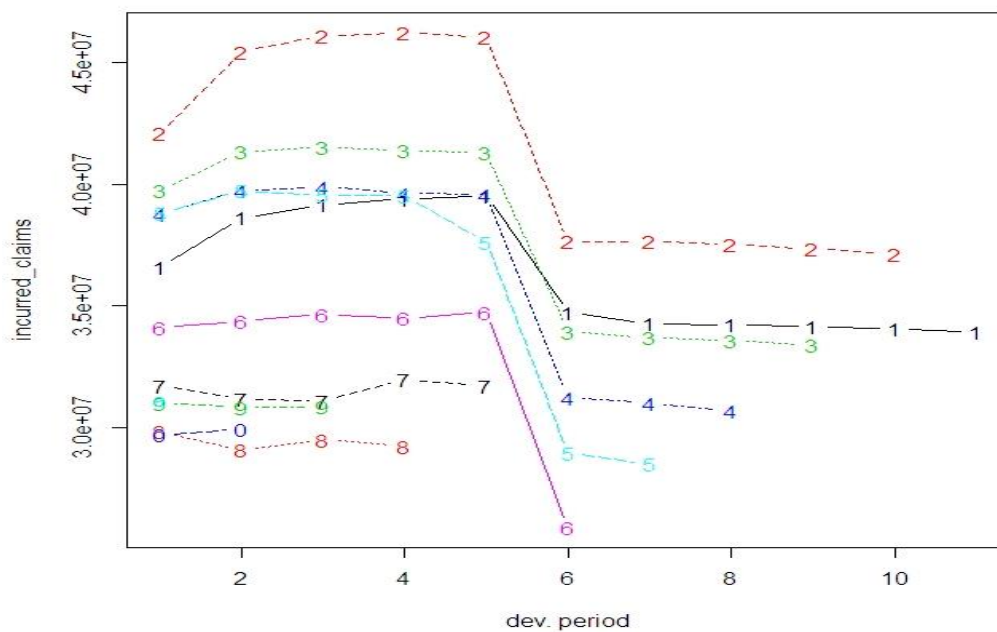
Πίνακας 24: Σωρευτικές επισυμβάσεις πληρωμές Υλικών Ζημιών

Για τον υπολογισμό των επισυμβάντων απαιτήσεων χρησιμοποιήθηκε ο τύπος:

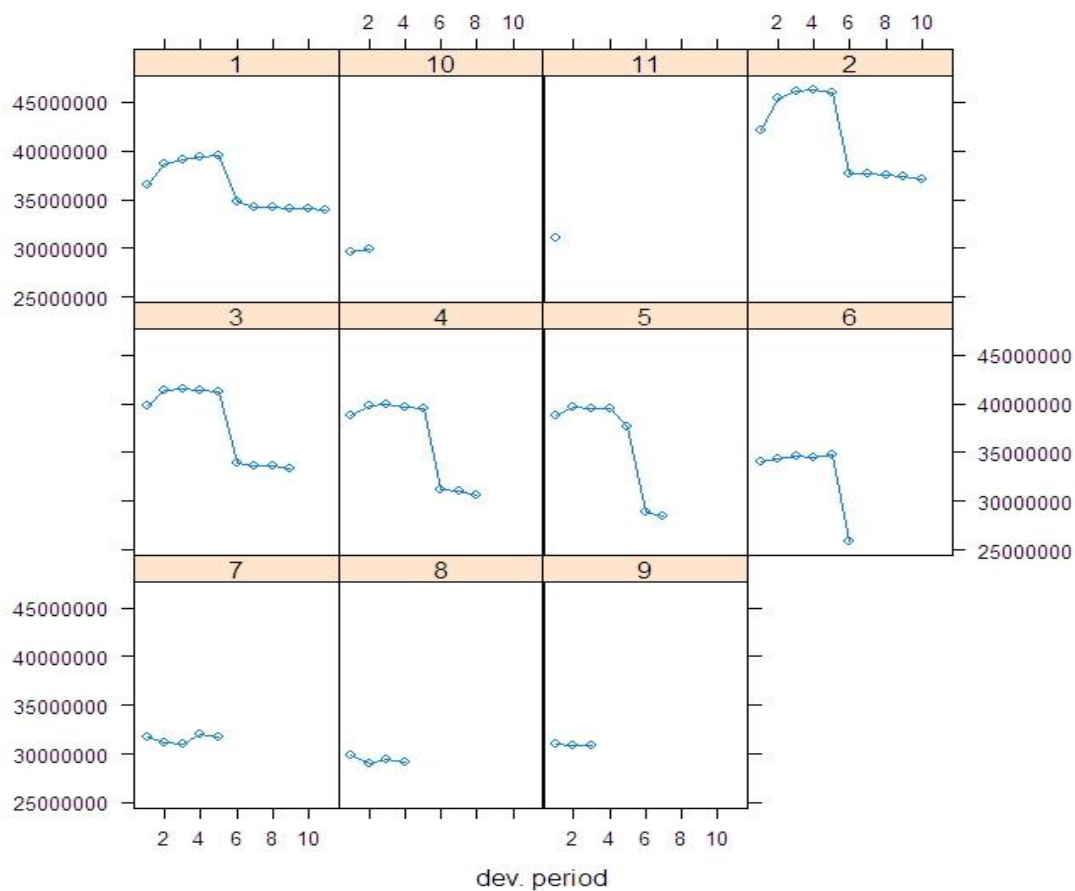
$$\text{Επισυμβάσεις απαιτήσεις}_{i,j} = \text{πληρωμένες απαιτήσεις}_{i,j} + \text{εκκρεμείς απαιτήσεις}_{i,j}$$

Το γράφημα 25 είναι η μίξη των σωρευτικών πληρωμών όπως αυτές διαμορφώθηκαν από το 2008 έως το 2018 για τις Υλικές ζημιές αυτοκινήτου με τις εκκρεμείς απαιτήσεις όπως αυτές υπολογίστηκαν από τον κλάδο αυτοκινήτου. Φαίνεται ότι στα πρώτα έτη εξέλιξης μεταξύ των ετών ατυχήματος υπάρχουν μεγάλες διαφορές για το πω κυμαίνονται οι σωρευτικές απαιτήσεις. Ενώ μετά από περίπου 6 έτη εξέλιξης οι πληρωμές τείνουν να σταθεροποιηθούν γύρω από κάποιες τιμές. Αυτό συμβαίνει καθώς όπως έχουμε αναφέρει υπάρχει το φαινόμενο της παραγραφής των απαιτήσεων μετά τη 5ετία. Έτσι από τον 6<sup>ο</sup> χρόνο και έπειτα οι επισυμβάσεις πληρωμές φαίνονται να σταθεροποιούνται γύρω από κάποια συγκεκριμένη τιμή.

Το γράφημα 23 που βρίσκεται παρακάτω μας δίνει μια πιο λεπτομερή εικόνα για κάθε έτος ατυχήματος ξεχωριστά. Δεν μπορούμε να πούμε ότι υπάρχει ακριβώς ίδιος τρόπος εξέλιξης των πληρωμών όπως στα άλλα δύο υπό – χαρτοφυλάκια καθώς το εύρος του ποσού που δίνεται ως αποζημίωση μπορεί να είναι από 0 μέχρι και 1.200.000 ευρώ.



Γράφημα 25: Απεικόνιση σωρευτικών πληρωμών για υλικές ζημιές



Γράφημα 26: Απεικόνιση σωρευτικών πληρωμών ανά έτος ατυχήματος

Όπως έχει αναφερθεί και παραπάνω έχουμε ότι στο παρακάτω πίνακα (Πίνακας 25) παρουσιάζονται τα αποτελέσματα όπως εξήχθησαν από το R – project. Ακολουθεί το γράφημα 17 που παρουσιάζει γραφικά τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα.

MackChainLadder(Triangle = mo.cum, est.sigma = "Mack")					
	Latest	Dev.To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E
2008	33.910.617	1.0000	33.910.617	0	0
2009	37.103.931	1,0042	36.947.791	- 156.140	111.042
2010	33.365.637	1,0088	33.072.038	- 293.599	150.078
2011	30.662.607	1,0133	30.259.047	- 403.560	161.535
2012	28.487.666	1,0177	27.991.950	- 495.716	202.089
2013	25.875.707	1,0264	25.209.753	- 665.954	268.456
2014	31.686.948	1,2740	24.871.711	- 6.815.237	1.701.468
2015	29.221.856	1,2146	22.753.594	- 6.468.262	1.697.748
2016	30.850.055	1,2822	24.058.612	- 6.791.443	1.777.498
2017	29.932.000	1,2746	23.481.605	- 6.450.395	1.765.174
2018	31.087.608	1,2467	24.935.366	- 6.152.242	2.032.931

Πίνακας 25: Αποτελέσματα από R - project

Η στήλη με τίτλο «Latest» είναι η διαγώνιος του τριγώνου των σωρευτικών πληρωμών όπως αυτή έχει προκύψει από τις προσαυξητικές απαιτήσεις.

Η στήλη «Ultimate» είναι η εκτίμηση για την εξέλιξη των απαιτήσεων με το πέρασμα των χρόνων. Ο τύπος υπολογισμού που χρησιμοποιεί το R – project για τον υπολογισμό των τελικών απαιτήσεων είναι:

“Ο εκτιμητής της πολυμεταβλητής CL για  $E[C_{i,j}|D_i^N]$  ορίζεται ως:

$$\hat{C}_{i,j}^{CL} = \left( \hat{C}_{i,j}^{(1)CL}, \dots, \hat{C}_{i,j}^{(N)CL} \right)' = \hat{E}[C_{i,j}|D_i^N] = \prod_{l=i}^{j-1} D(\hat{f}_l)C_{i,l-i}$$

για  $i + j > I$ .”

Όπως ορίστηκε στο Λήμμα 3.1 στο κεφάλαιο 3.4 Πολυμεταβλητή μέθοδος Chain Ladder.

Η στήλη με τίτλο «Dev.To.Date» αναγράφει το ποσοστό στο οποίο εκτιμάται ότι έχουν εξελιχθεί οι απαιτήσεις μέχρι και σήμερα. Ο υπολογισμός αυτών γίνεται ως εξής:

$$Dev. to Date_i = \frac{Ultimate_i}{Latest_i}$$

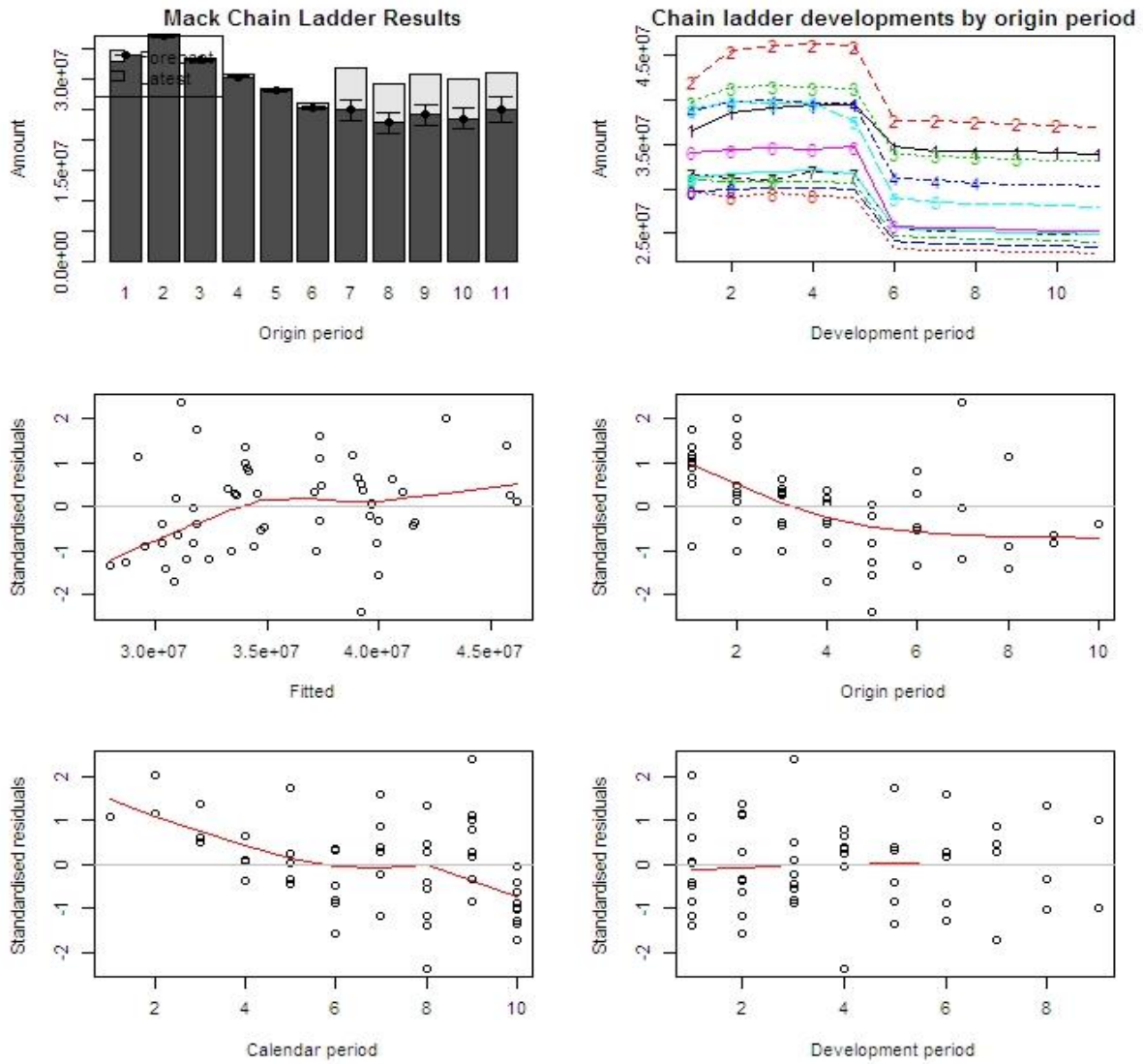
Θα περίμενε κανείς ότι τα ποσοστά αυτά θα ήταν κοντά στο 100% ή και κάτω από το 100%, αλλά είναι εμφανές ότι ακόμα και από το έτος 2011 φαίνεται ότι οι τελικές πληρωμές που έχουν δοθεί ως αποζημίωση μαζί με τις εκκρεμείς απαιτήσεις ξεπερνούν τις εκτιμήσεις για το πως μπορούν να εξελιχθούν οι ζημιές αυτές. Είναι λογικό λοιπόν να θεωρήσουμε ότι στο μέλλον θα έχουμε ενδεχόμενο «απελευθέρωσης» αποθεμάτων ή όπως αναφέρεται στην ασφαλιστική ορολογία θα γίνει *release*.

Η στήλη «IBNR» είναι η διαφορά των πληρωμένων μέχρι τώρα απαιτήσεων από τις τελικές εκτιμήσεις όπως αυτές έχουν υπολογιστεί για την εξέλιξη των αποθεμάτων. Τέλος, η στήλη «Mack.S.E» υπολογίζει τα τυπικά σφάλματα όπως αυτά έχουν οριστεί από τον Mack στο μοντέλο που έχει αναπτύξει για την Chain – Ladder, βλέπε παράγραφο 3.4.4 *Υπό συνθήκη εκτίμηση σφαλμάτων για συνολικά έτη ατυχήματος*.

Όπως παρατηρείται αντίστοιχη εικόνα με τα ποσοστά εξέλιξης έχουμε και για το απόθεμα για τις IBNR απαιτήσεις όπου είναι αρνητικό. Ο λόγος που τα αποθέματα είναι αρνητικά είναι λόγω του γεγονότος ότι όπως αναφέρθηκε και παραπάνω η εταιρία κρατάει για τις εκκρεμείς απαιτήσεις παραπάνω χρήματα από αυτά που πραγματικά απαιτούνται. Για το λόγο αυτό θα πρέπει να ακολουθηθεί μια πιο συντηρητική πολιτική για την ανατροπή αυτών των IBNR απαιτήσεων.

Η στήλη «Ultimate» είναι η εκτίμηση για την εξέλιξη των απαιτήσεων με το πέρασμα των χρόνων. Η στήλη «IBNR» είναι η διαφορά των πληρωμένων μέχρι τώρα απαιτήσεων από τις τελικές εκτιμήσεις όπως αυτές έχουν υπολογιστεί για την εξέλιξη των αποθεμάτων. Τέλος, η στήλη «Mack.S.E» υπολογίζει τα τυπικά σφάλματα όπως αυτά έχουν οριστεί από τον Mack στο μοντέλο που έχει αναπτύξει για την Chain – Ladder.

Το παρακάτω γράφημα 27 απεικονίζει τις ποσότητες όπως αυτές υπολογίστηκαν στον πίνακα 25. Στα γραφήματα αυτά έχει απεικονιστεί η εξέλιξη των πληρωμών περιέχοντας τις εκτιμήσεις αυτών καθώς και τις εκτιμήσεις των τυπικών σφαλμάτων.



Γράφημα 27: Απεικόνιση προβλέψεων και καταλοίπων όπως αυτά ορίζονται στο μοντέλο του Mack

Ο συντελεστής μεταβλητότητας των IBNR (πίνακας 26) απαιτήσεων όπως υπολογίζεται από το R – project.

	CV(IBNR)
2008	NaN
2009	-0,711
2010	-0,511
2011	-0,4
2012	-0,408
2013	-0,403
2014	-0,25
2015	-0,262
2016	-0,262
2017	-0,274
2018	-0,330

Πίνακας 26: Συντελεστής μεταβλητότητας IBNR απαιτήσεων Υλικών Ζημιών

Οι παράγοντες εξέλιξης που χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστούν οι εκτιμήσεις των τελικών πληρωμών υπολογίστηκαν με βάση τον τύπο όπως αυτός έχει οριστεί από τον Mack. Όπως έχει αναφερθεί και στην παρούσα εργασία σε προηγούμενη ενότητα ο τύπος αυτός είναι:

$$f_k = \frac{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k+1}}{\sum_{i=1}^{n-k} C_{i,k}}$$

Οι παράγοντες που χρησιμοποιήθηκαν τελικά φαίνονται στον παρακάτω πίνακα 27.

Link Ratios (f)
1,0224367
1,0059523
1,0015495
0,992012
0,8056546
0,9915168
0,9957037
0,9955994
0,9953893
0,9957918
1

Πίνακας 27: Παράγοντες εξέλιξης πληρωμών

Οι παράγοντες εξέλιξης είναι μια απεικόνιση του πως εξελίσσονται οι πληρωμές από έτος σε έτος.

Συνοπτικά, τα αποτελέσματα για το υπό-χαρτοφυλάκιο για Υλικές Ζημιές για το κλάδο αυτοκινήτου είναι τα εξής:

	Totals
Latest:	342.184.632,03
Dev:	1,11
Ultimate:	307.492.084,00
IBNR:	- 34.692.548,03
Mack.S.E	4.868.299,51
CV(IBNR):	-0,14

Πίνακας 28: Συνοπτικά αποτελέσματα για το υπό-χαρτοφυλάκιο για υλικές ζημιές

Ο πίνακας 28 μας δίνει συνοπτικά και συγκεντρωτικά τις πληροφορίες ότι οι πληρωμές μέχρι και το 2018 που έχουν γίνει για τον κλάδο αυτοκινήτου και συγκεκριμένα για την κατηγορία Αστικής Ευθύνης για υλικές ζημιές ανέρχονται στο ποσό των 342.184.632,03ευρώ. Οι πληρωμές αυτές έχουν εξελιχθεί κατά 111%, δηλαδή τα αποθέματα της εταιρίας είναι κατά 11% περισσότερα από αυτά που πραγματικά απαιτείται να έχει. Εκτιμάται ότι το συνολικό ποσό των πληρωμών θα ανέρθει στα 307.492.084ευρώ, δηλαδή το ποσό που θα πρέπει να κρατηθεί ως απόθεμα από την ασφαλιστική εταιρία για τη συγκεκριμένη επιχειρησιακή γραμμή είναι -34.692.548,03ευρώ. Το αρνητικό απόθεμα σημαίνει ότι η εταιρία είναι επαρκώς



αποθεματοποιημένη από τα αποθέματα που κρατάει για τις εκκρεμείς πληρωμές και δεν χρειάζεται να κρατήσει επιπλέον κεφάλαια. Η απόκλιση από αυτό το ποσό ανέρχεται στο  $\pm 4.868.299,51$  ευρώ και συντελεστή μεταβλητότητας -14%.

#### 5.4.2 Υπολογισμός αποθεμάτων με βάση τον αριθμητικό μέσο

- Λοιπές Υλικές Ζημιές αυτοκινήτου (Motor Other M.O.)

Τα προσαυξητικά και τα σωρευτικά δεδομένα είναι ίδια με αυτά όπως παρουσιάζονται στις προηγούμενες ενότητες. Τα ποσά είναι διαιρεμένα με 100 για λόγους χωρητικότητας των πινάκων στην παρούσα εργασία. Οι παράγοντες εξέλιξης που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των αποθεμάτων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

AY	Link Ratios									
	12m/2 4m	24m/3 6m	36m/4 8m	48m/6 0m	60m/7 2m	72m/8 4m	84m/9 6m	96m/1 08m	108m/ 120m	120m/ 132m
2008	1,0101	0,9795	0,9790	0,9541	0,9969	0,9993	0,9979	0,9986	1,0006	0,9963
2009	1,0057	0,9831	0,9949	0,9576	0,9888	0,9994	0,9995	0,9925	0,9983	
2010	0,9947	0,9863	0,9985	0,9473	0,9956	0,9994	1,0004	0,9994		
2011	0,9959	0,9985	0,9825	0,9264	0,9993	0,9979	0,9935			
2012	1,0288	0,9896	0,9795	0,9180	1,0006	0,9995				
2013	0,9984	0,9943	0,9907	0,9264	0,9991					
2014	0,9606	0,9951	0,9977	0,9376						
2015	0,9666	0,9951	0,9955							
2016	0,9678	0,9917								
2017	0,9684									
<b>Mean</b>	0,9897	0,9904	0,9898	0,9382	0,9967	0,9991	0,9978	0,9968	0,9995	0,9963
<b>Geometric</b>	0,9894	0,9904	0,9898	0,9381	0,9967	0,9991	0,9978	0,9968	0,9995	0,9963

Πίνακας 29: Παράγοντες εξέλιξης

Θεωρώντας τον μέσο όρο ως παράγοντα εξέλιξης υπολογίζουμε το κενό τμήμα των σωρευτικών πληρωμών το οποίο είναι και το ζητούμενο για να εκτιμήσουμε τα αποθέματα. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται ως εξής πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά το σωρευτικό επισυμβάν ποσό κάθε έτους με τον αντίστοιχο παράγοντα εξέλιξης. Παραδείγματος χάρη για το 2018 έχουμε:

$$12.080.223 \times 0,9897 = 11.955.562$$

και ούτω καθεξής.

Συνεπώς η πλήρης εικόνα για το πώς θα κινηθούν οι πληρωμές είναι η παρακάτω:

Full Triangle											
AY	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	13.921.026	14.060.985	13.772.739	13.483.665	12.865.112	12.825.759	12.816.147	12.788.802	12.770.571	12.778.013	12.730.425
2009	15.736.464	15.825.719	15.557.785	15.479.123	14.822.281	14.656.785	14.647.640	14.639.733	14.529.353	14.505.282	14.451.261
2010	13.331.049	13.259.767	13.078.579	13.058.755	12.369.995	12.315.034	12.307.549	12.312.678	12.304.834	12.298.226	12.252.425
2011	14.042.285	13.984.370	13.963.541	13.719.074	12.709.890	12.701.045	12.674.653	12.591.843	12.551.539	12.544.799	12.498.080
2012	13.312.693	13.695.783	13.553.743	13.275.906	12.187.365	12.194.952	12.188.331	12.161.547	12.122.620	12.116.111	12.070.988
2013	11.830.801	11.811.683	11.744.798	11.635.873	10.779.809	10.769.696	10.759.784	10.736.138	10.701.774	10.696.028	10.656.193
2014	10.817.118	10.390.597	10.340.187	10.316.047	9.672.635	9.640.911	9.632.037	9.610.870	9.580.108	9.574.963	9.539.304
2015	11.143.420	10.771.524	10.719.233	10.671.452	10.012.038	9.979.200	9.970.015	9.948.106	9.916.264	9.910.939	9.874.028
2016	12.229.950	11.835.606	11.737.190	11.617.422	10.899.553	10.863.805	10.853.806	10.829.954	10.795.289	10.789.492	10.749.310
2017	12.020.643	11.641.265	11.529.200	11.411.554	10.706.407	10.671.291	10.661.470	10.638.040	10.603.990	10.598.296	10.558.826
2018	12.080.223	11.955.562	11.840.471	11.719.649	10.995.464	10.959.400	10.949.313	10.925.252	10.890.282	10.884.434	10.843.898

Πίνακας 30: Σωρευτικές πληρωμές και οι εκτιμήσεις εξέλιξης πληρωμών

Το κόκκινο τμήμα είναι τα ποσά όπως εκτιμήθηκαν για το πώς θα κινηθούν οι πληρωμές για τις ζημιές που έγιναν στο διάστημα 2009-2018. Με βάση τον πίνακα αυτό πλέον είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε το τελικό απόθεμα που θα πρέπει να κρατηθεί για αυτή την επιχειρησιακή γραμμή. Ο πίνακας που ακολουθεί περιέχει όλες τις απαιτήσεις που έχουν πληρωθεί μέχρι και το 2018 (διαγώνιος σωρευτικού τριγώνου) καθώς επίσης και τις εκτιμήσεις για το πώς θα εξελιχθούν οι ζημιές τα επόμενα χρόνια. Η διαφορά των δύο μεγεθών σχηματίζει το απόθεμα.

Results			
Accident Year	Incurred Claims	Projected Ultimate	IBNR
2008	12.730.424,64	12.730.424,64	-
2009	14.505.282,09	14.451.261,35	- 54.020,74
2010	12.304.833,79	12.252.424,85	- 52.408,93
2011	12.591.843,28	12.498.079,79	- 93.763,48
2012	12.188.331,48	12.070.987,60	- 117.343,89
2013	10.769.696,11	10.656.193,24	- 113.502,86
2014	9.672.635,25	9.539.304,17	- 133.331,08
2015	10.671.452,43	9.874.028,26	- 797.424,17
2016	11.737.190,04	10.749.309,87	- 987.880,16
2017	11.641.265,29	10.558.825,65	- 1.082.439,65
2018	12.080.222,51	10.843.898,26	- 1.236.324,25

Πίνακας 31: Εκτίμηση Αποθέματος για Λοιπές Υλικές Ζημιές Αυτοκινήτου

Ο πίνακας 31 περιέχει τις επισυμβάσεις ζημιές (incurred claims) που είναι το άθροισμα των σωρευτικών πληρωμένων απαιτήσεων με τις εκκρεμείς, τις εκτιμήσεις για το πώς θα εξελιχθούν αυτές οι ζημιές (projected ultimate) και τη διαφορά των δύο αυτών μεγεθών, το IBNR. Όπως φαίνεται από τον παραπάνω πίνακα το IBNR από το 2009 μέχρι και το 2018 βγαίνει αρνητικό. Όπως σχολιάστηκε και στην προηγούμενη ενότητα αυτό δείχνει ότι το απόθεμα εκκρεμών ζημιών (case reserve) που κρατάει η εταιρία είναι επαρκές και δεν χρειάζεται να κρατήσει επιπλέον κεφάλαια για τις ζημιές που έγιναν από το 2009 μέχρι το 2018.

- Αστική Ευθύνη (Σωματικές Βλάβες)

Τα προσαυξητικά και τα σωρευτικά δεδομένα είναι ίδια με αυτά όπως παρουσιάζονται στους πίνακες στην προηγούμενη ενότητα. Οι παράγοντες εξέλιξης που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των αποθεμάτων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Link Ratios										
Accident Year	12m/24	24m/36	36m/48	48m/60	60m/72	72m/84	84m/96	96m/108	108m/120	120m/132
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
2008	1,5355	1,1015	1,0354	1,0441	0,9817	0,9967	1,0059	0,9833	1,0007	0,9610
2009	1,2463	1,1288	1,0559	1,0641	0,9295	1,0043	0,9914	0,9922	0,9763	
2010	1,0789	0,9978	1,0350	1,0086	0,8337	0,9800	0,9603	0,9974		
2011	1,0897	1,0578	0,9859	1,0067	0,8040	0,9578	0,9395			
2012	1,0916	1,0291	0,9762	0,9505	0,7087	0,9116				
2013	1,1551	0,9915	1,0111	0,9793	0,7786					
2014	1,3238	1,0768	0,9973	0,9915						
2015	1,4567	1,0560	1,0210							
2016	1,3183	1,0662								
2017	1,3194									
<b>Mean</b>	<b>1,2615</b>	<b>1,0562</b>	<b>1,0147</b>	<b>1,0064</b>	<b>0,8394</b>	<b>0,9701</b>	<b>0,9743</b>	<b>0,9910</b>	<b>0,9885</b>	<b>0,9610</b>
<b>Geometric Mean</b>	<b>1,25268</b>	<b>1,0553</b>	<b>1,0144</b>	<b>1,00578</b>	<b>0,8344</b>	<b>0,96951</b>	<b>0,97392</b>	<b>0,990947</b>	<b>0,988443</b>	<b>0,9609718</b>

Πίνακας 32: Παράγοντες Εξέλιξης

Θεωρώντας τον μέσο όρο ως παράγοντα εξέλιξης υπολογίζουμε το κενό τμήμα των σωρευτικών πληρωμών το οποίο είναι και το ζητούμενο για να εκτιμήσουμε τα αποθέματα. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται ως εξής πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά το σωρευτικό επισυμβάν ποσό κάθε έτους με τον αντίστοιχο παράγοντα εξέλιξης. Παραδείγματος χάρη για το 2018 έχουμε:

$$16.379.919 \times 1,2615 = 20.663.683$$

και ούτω καθεξής.

Συνεπώς η πλήρης εικόνα για το πώς θα κινηθούν οι πληρωμές είναι η παρακάτω:

Full Triangle											
Accident Year	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	13.423.677	20.612.384	22.704.975	23.509.142	24.545.351	24.096.289	24.016.085	24.156.784	23.753.464	23.770.089	<b>22.842.386</b>
2009	19.543.737	24.356.872	27.493.322	29.030.835	30.892.033	28.714.745	28.837.501	28.588.831	28.365.595	<b>27.694.353</b>	<b>26.613.493</b>
2010	27.841.655	30.038.247	29.973.139	31.023.403	31.291.125	26.085.989	25.565.017	24.549.463	<b>24.485.542</b>	<b>24.204.399</b>	<b>23.259.746</b>
2011	32.545.955	35.465.469	37.516.279	36.988.947	37.238.539	29.941.020	28.678.617	<b>26.944.780</b>	<b>26.701.305</b>	<b>26.394.720</b>	<b>25.364.583</b>
2012	36.672.163	40.030.518	41.197.193	40.215.854	38.225.650	27.091.274	<b>24.697.437</b>	<b>24.061.808</b>	<b>23.844.384</b>	<b>23.570.602</b>	<b>22.650.685</b>
2013	33.827.210	39.074.698	38.743.190	39.172.672	38.362.883	<b>29.869.264</b>	<b>28.975.876</b>	<b>28.230.135</b>	<b>27.975.046</b>	<b>27.653.836</b>	<b>26.574.557</b>
2014	24.879.599	32.935.893	35.466.092	35.371.800	<b>35.069.386</b>	<b>29.436.247</b>	<b>28.555.811</b>	<b>27.820.881</b>	<b>27.569.489</b>	<b>27.252.936</b>	<b>26.189.304</b>
2015	20.574.476	29.970.050	31.649.849	<b>32.315.947</b>	<b>32.523.025</b>	<b>27.298.904</b>	<b>26.482.396</b>	<b>25.800.829</b>	<b>25.567.690</b>	<b>25.274.121</b>	<b>24.287.719</b>
2016	25.355.341	33.425.419	<b>35.637.629</b>	<b>36.163.183</b>	<b>36.394.914</b>	<b>30.548.858</b>	<b>29.635.143</b>	<b>28.872.435</b>	<b>28.611.541</b>	<b>28.283.023</b>	<b>27.179.189</b>
2017	24.788.365	<b>32.705.702</b>	<b>34.543.273</b>	<b>35.052.688</b>	<b>35.277.303</b>	<b>29.610.767</b>	<b>28.725.110</b>	<b>27.985.823</b>	<b>27.732.941</b>	<b>27.414.511</b>	<b>26.344.573</b>
2018	<b>16.379.919</b>	<b>20.663.683</b>	<b>21.824.672</b>	<b>22.146.524</b>	<b>22.288.437</b>	<b>18.708.282</b>	<b>18.148.718</b>	<b>17.681.632</b>	<b>17.521.859</b>	<b>17.320.673</b>	<b>16.644.679</b>

Πίνακας 33: Σωρευτικές πληρωμές και οι εκτιμήσεις εξέλιξης πληρωμών

Το κόκκινο τμήμα είναι τα ποσά όπως εκτιμήθηκαν για το πώς θα κινηθούν οι πληρωμές για τις ζημιές που έγιναν στο διάστημα 2009-2018. Με βάση τον πίνακα αυτό πλέον είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε το τελικό απόθεμα που θα πρέπει να κρατηθεί για αυτή την επιχειρησιακή γραμμή.

Results			
Accident Year	Incurred Claims	Projected Ultimate	IBNR
2008	22.842.386,02	22.842.386,02	-
2009	27.694.352,56	26.613.493,12	- 1.080.859,44
2010	24.485.542,32	23.259.745,76	- 1.225.796,56
2011	26.944.779,79	25.364.582,53	- 1.580.197,26
2012	24.697.436,71	22.650.685,06	- 2.046.751,65
2013	29.869.264,29	26.574.557,43	- 3.294.706,86
2014	35.069.385,55	26.189.303,77	- 8.880.081,79
2015	32.315.947,47	24.287.719,17	- 8.028.228,30
2016	35.637.628,88	27.179.188,70	- 8.458.440,18
2017	32.705.702,31	26.344.573,27	- 6.361.129,04
2018	16.379.919,44	16.644.678,83	264.759,39

Πίνακας 34: Εκτίμηση αποθέματος για Σωματικές βλάβες

Ο πίνακας 34 περιέχει τις επισυμβάσεις ζημιές (incurred claims) που είναι το άθροισμα των σωρευτικών πληρωμένων απαιτήσεων με τις εκκρεμείς, τις εκτιμήσεις για το πώς θα εξελιχθούν αυτές οι ζημιές (projected ultimate) και τη διαφορά των δύο αυτών μεγεθών, το IBNR. Όπως φαίνεται από τον πίνακα 34 για τις χρονιές 2009-2017 η εταιρία έχει αρνητικό IBNR. Ισχύει όπως αναφέρθηκε και στην επιχειρησιακή γραμμή για τις Λοιπές Υλικές Ζημιές ότι το απόθεμα εκκρεμών ζημιών (case reserve) που κρατάει η εταιρία είναι επαρκές. Σε αντίθεση το 2018 το IBNR είναι θετικό το οποίο σημαίνει ότι εκτιμάται ότι το επιπλέον κεφάλαιο που πρέπει να συνεισφερθεί πλέον από το απόθεμα εκκρεμών ζημιών (case reserve) για την αστική ευθύνη και συγκεκριμένα για τις σωματικές βλάβες ανέρχεται στο ποσό των 264.759,39ευρώ.

- Αστική Ευθύνη (Υλικών Ζημιών)

Τα προσαυξητικά και τα σωρευτικά δεδομένα είναι ίδια με αυτά όπως παρουσιάζονται στην προηγούμενη ενότητα. Οι παράγοντες εξέλιξης που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό των αποθεμάτων φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Link Ratios										
Accident Year	12m/24	24m/36	36m/48	48m/60	60m/72	72m/84	84m/96	96m/108	108m/120	120m/132
	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m
2008	1,0556	1,0139	1,0066	1,0029	0,8787	0,9868	0,9986	0,9980	0,9973	0,9958
2009	1,0796	1,0145	1,0026	0,9958	0,8178	0,9996	0,9972	0,9950	0,9936	
2010	1,0406	1,0036	0,9974	0,9976	0,8216	0,9930	0,9967	0,9938		
2011	1,0245	1,0037	0,9935	0,9985	0,7891	0,9926	0,9896			
2012	1,0236	0,9955	0,9993	0,9521	0,7696	0,9839				
2013	1,0074	1,0081	0,9958	1,0066	0,7453					
2014	0,9833	0,9969	1,0285	0,9914						
2015	0,9744	1,0149	0,9911							
2016	0,9942	1,0010								
2017	1,0088									
<b>Mean</b>	<b>1,0192</b>	<b>1,0058</b>	<b>1,0019</b>	<b>0,9921</b>	<b>0,8037</b>	<b>0,9912</b>	<b>0,9955</b>	<b>0,9956</b>	<b>0,9955</b>	<b>0,9958</b>
<b>Geometric Mean</b>	<b>1,0187</b>	<b>1,0058</b>	<b>1,0018</b>	<b>0,9920</b>	<b>0,8026</b>	<b>0,9911</b>	<b>0,9955</b>	<b>0,9956</b>	<b>0,9955</b>	<b>0,9958</b>

Πίνακας 35: Παράγοντες εξέλιξης

Θεωρώντας τον μέσο όρο ως παράγοντα εξέλιξης υπολογίζουμε το κενό τμήμα των σωρευτικών πληρωμών το οποίο είναι και το ζητούμενο για να εκτιμήσουμε τα αποθέματα. Ο υπολογισμός αυτός γίνεται πολλαπλασιάζοντας κάθε φορά το σωρευτικό επισυμβάν ποσό κάθε έτους με τον αντίστοιχο παράγοντα εξέλιξης. Παραδείγματος χάρη για το 2018 έχουμε:

$$31.087.608 \times 1,0192 = 31.684.417$$

και ούτω καθεξής.

Συνεπώς η πλήρης εικόνα για το πώς θα κινηθούν οι πληρωμές είναι η παρακάτω:

Full Triangle											
Accident Year	12m	24m	36m	48m	60m	72m	84m	96m	108m	120m	132m
2008	36.571.470	38.604.719	39.140.922	39.399.725	39.513.662	34.721.503	34.261.878	34.213.460	34.144.691	34.053.922	<b>33.910.617</b>
2009	42.097.106	45.447.350	46.107.839	46.228.790	46.035.393	37.649.954	37.633.877	37.528.628	37.342.768	<b>37.103.931</b>	36.947.791
2010	39.738.691	41.351.233	41.501.177	41.393.881	41.292.609	33.924.914	33.685.866	33.574.464	<b>33.365.637</b>	33.214.588	33.074.815
2011	38.776.524	39.727.608	39.875.787	39.616.955	39.555.581	31.215.091	30.984.267	<b>30.662.607</b>	30.527.873	30.389.670	30.261.786
2012	38.803.650	39.719.956	39.541.850	39.515.307	37.623.980	28.954.253	<b>28.487.666</b>	28.360.196	28.235.579	28.107.754	27.989.472
2013	34.103.075	34.355.426	34.634.356	34.488.888	34.718.077	<b>25.875.707</b>	25.646.862	25.532.103	25.419.912	25.304.834	25.198.347
2014	31.698.516	31.169.537	31.073.436	31.960.252	<b>31.686.948</b>	25.466.623	25.241.395	25.128.451	25.018.034	24.904.775	24.799.972
2015	29.813.779	29.049.138	29.483.326	<b>29.221.856</b>	28.992.019	23.300.724	23.094.652	22.991.313	22.890.287	22.786.660	22.690.770
2016	30.998.453	30.818.061	<b>30.850.055</b>	30.907.739	30.664.642	24.645.002	24.427.041	24.317.740	24.210.886	24.101.281	23.999.859
2017	29.669.974	<b>29.932.000</b>	30.105.989	30.162.282	29.925.049	24.050.594	23.837.890	23.731.226	23.626.949	23.519.987	23.421.011
2018	<b>31.087.608</b>	31.684.417	31.868.592	31.928.181	31.677.058	25.458.675	25.233.518	25.120.609	25.010.226	24.897.002	24.792.232

Πίνακας 36: Σωρευτικές πληρωμές και οι εκτιμήσεις εξέλιξης πληρωμών

Το κόκκινο τμήμα είναι τα ποσά όπως εκτιμήθηκαν για το πώς θα κινηθούν οι πληρωμές για τις ζημιές που έγιναν στο διάστημα 2009-2018. Με βάση τον πίνακα αυτό πλέον είμαστε σε θέση να εκτιμήσουμε το τελικό απόθεμα που θα πρέπει να κρατηθεί για αυτή την επιχειρησιακή γραμμή.

Results			
Accident Year	Incurred Claims	Projected Ultimate	IBNR
2008	33.910.617,31	33.910.617,31	-
2009	37.103.930,71	36.947.791,25	- 156.139,46
2010	33.365.636,90	33.074.815,11	- 290.821,79
2011	30.662.607,34	30.261.785,50	- 400.821,84
2012	28.487.666,29	27.989.471,57	- 498.194,72
2013	25.875.707,13	25.198.347,09	- 677.360,03
2014	31.686.947,54	24.799.971,53	- 6.886.976,01
2015	29.221.855,90	22.690.770,37	- 6.531.085,53
2016	30.850.054,98	23.999.858,62	- 6.850.196,37
2017	29.932.000,38	23.421.011,15	- 6.510.989,23
2018	31.087.607,54	24.792.231,76	- 6.295.375,78

**Πίνακας 37:** Εκτίμηση αποθέματος για Αστική ευθύνη υλικών ζημιών

Ο πίνακας 37 περιέχει τις επισυμβάσεις ζημιές (incurred claims) που είναι το άθροισμα των σωρευτικών πληρωμένων απαιτήσεων με τις εκκρεμείς, τις εκτιμήσεις για το πώς θα εξελιχθούν αυτές οι ζημιές (projected ultimate) και τη διαφορά των δύο αυτών μεγεθών, το IBNR. Όπως φαίνεται από τον πίνακα 37 για τις χρονιές 2009-2018 η εταιρία έχει αρνητικό IBNR. Ισχύει όπως αναφέρθηκε και στην επιχειρησιακή γραμμή για τις Λοιπές Υλικές Ζημιές ότι το απόθεμα εκκρεμών ζημιών (case reserve) που κρατάει η εταιρία είναι επαρκές και δεν απαιτείται να συνεισφερθούν επιπλέον κεφάλαια ως απόθεμα.

## 5.5 Συμπεράσματα

Στην παραπάνω ενότητα (5.4 Υπολογισμοί) κάνοντας χρήση της μεθόδου Chain – Ladder βρέθηκαν τα IBNR αποθέματα που απαιτούνται να κρατηθούν για τις ζημιές που έχουν συμβεί αλλά δεν έχουν αναγγελθεί ακόμα πέρα των αποθεμάτων εκκρεμών ζημιών για τις τρεις επιχειρησιακές γραμμές όπως αυτές διασπάστηκαν σε Λοιπές Ζημιές Αυτοκινήτου, Αστική Ευθύνη για Σωματικές Βλάβες και Αστική Ευθύνη για Υλικές Ζημιές. Τα αποθέματα για τις IBNR ζημιές συγκεντρωτικά για κάθε επιχειρησιακή γραμμή ανάλογα με τον παράγοντα εξέλιξης που χρησιμοποιείται κάθε φορά είναι τα παρακάτω: (σημειώνεται ότι οι υπολογισμοί για το IBNR based on Mean έχουν γίνει στο excel, ενώ οι υπολογισμοί για το IBNR based on weighted average έχουν γίνει στο R-project.

- Λοιπές Υλικές Ζημιές Αυτοκινήτου

Comparison			
Accident Year	IBNR (based on Mean)	IBNR (based on Weighted average)	Difference
2008	-	-	-
2009	54.020,74	54.021,09	0,35
2010	52.408,93	53.292,79	883,85
2011	93.763,48	97.584,28	3.820,79
2012	117.343,89	120.499,48	3.155,60
2013	113.502,86	116.240,11	2.737,24
2014	133.331,08	138.660,25	5.329,17
2015	797.424,17	796.025,43	1.398,74
2016	987.880,16	990.843,04	2.962,87
2017	1.082.439,65	1.090.426,29	7.986,65
2018	1.236.324,25	1.226.045,51	10.278,74
<b>Total</b>	<b>4.668.439,23</b>	<b>4.683.638,27</b>	<b>15.199,04</b>

Πίνακας 37: Σύγκριση IBNR ανάλογα με τον παράγοντα εξέλιξης

Ο παραπάνω πίνακας μπορεί να επιβεβαιώσει την υπόθεση ότι η επιλογή του παράγοντα εξέλιξης είναι καθαρά υποκειμενική. Η διαφορά των IBNR αποθεμάτων ανάλογα με την επιλογή του παράγοντα εξέλιξης σε ποσό είναι 15.199,04 ευρώ η οποία δεν θεωρείται σημαντική διαφορά για τα δεδομένα της ασφαλιστικής επιχείρησης. Συνεπώς δεν μπορούμε να πούμε ότι ο συντελεστής εξέλιξης μπορεί να επηρεάσει σε σημαντικό βαθμό τα αποθέματα.

- Αστική ευθύνη για Σωματικές βλάβες

Comparison			
Accident Year	IBNR (based on Mean)	IBNR (based on Weighted average)	Difference
2008	-	-	-
2009	1.080.859,44	1.080.859,56	0,12
2010	1.225.796,56	1.251.162,32	25.365,76
2011	1.580.197,26	1.605.222,79	25.025,53
2012	2.046.751,65	2.091.012,71	44.261,06
2013	3.294.706,86	3.360.518,29	65.811,43
2014	8.880.081,79	9.339.439,55	459.357,77
2015	8.028.228,30	8.574.694,47	546.466,17
2016	8.458.440,18	9.170.801,88	712.361,70
2017	6.361.129,04	7.186.839,31	825.710,27
2018	264.759,39	685.009,44	949.768,83
<b>Total</b>	<b>40.691.431,69</b>	<b>44.345.560,32</b>	<b>3.654.128,63</b>

Πίνακας 38: Σύγκριση IBNR ανάλογα με τον παράγοντα εξέλιξης

Στην προκειμένη επιχειρησιακή γραμμή βλέπουμε ότι το αντίκτυπο του παράγοντα εξέλιξης είναι σχετικά μεγάλο. Η διαφορά των συνολικών IBNR ανέρχεται στα 3.654.128, 63 ευρώ. Ειδικά για το έτος 2018 όταν ο παράγοντας εξέλιξης είναι ο αριθμητικός μέσος βλέπουμε ότι πρέπει να κρατήσουμε επιπλέον απόθεμα πέρα από αυτό που κρατείται για τις εκκρεμείς ζημιές ίσο με 264.759,39ευρώ ενώ όταν ο παράγοντας εξέλιξης είναι ο σταθμισμένος μέσος βλέπουμε ότι είμαστε επαρκώς αποθεματοποιημένοι με τα αποθέματα που κρατούνται για τις εκκρεμείς ζημιές. Αν έπρεπε να επιλέξουμε μια από τις δύο εκτιμήσεις για τα IBNR αποθέματα, θα επιλέγαμε αυτή με παράγοντα εξέλιξης τον αριθμητικό μέσο. Η επιλογή αυτή θα γινόταν λόγω ότι βρισκόμαστε στο τελευταίο έτος και είναι πιθανό να προκύψουν ζημιές που συνέβησαν μέσα στο 2018 και δεν έχουν αναγγελθεί ακόμα (IBNR). Συνεπώς, θα πρέπει να αυξήσουμε τα αποθέματά μας κατά 264.759,39ευρώ.

- Υλικές ζημιές αυτοκινήτου

Comparison			
Accident Year	IBNR (based on Mean)	IBNR (based on Weighted average)	Difference
2008	-	-	-
2009	- 156.139,46	- 156.139,71	- 0,25
2010	- 290.821,79	- 293.598,90	- 2.777,11
2011	- 400.821,84	- 403.560,34	- 2.738,50
2012	- 498.194,72	- 495.716,29	2.478,43
2013	- 677.360,03	- 665.954,13	11.405,91
2014	- 6.886.976,01	- 6.815.236,54	71.739,47
2015	- 6.531.085,53	- 6.468.261,90	62.823,63
2016	- 6.850.196,37	- 6.791.442,98	58.753,38
2017	- 6.510.989,23	- 6.450.395,38	60.593,85
2018	- 6.295.375,78	- 6.152.241,54	143.134,24
<b>Total</b>	- 35.097.960,75	- 34.692.547,71	405.413,03

Πίνακας 39: Σύγκριση IBNR ανάλογα με τον παράγοντα εξέλιξης

Αντίστοιχα με την επιχειρησιακή γραμμή των Λοιπών Υλικών Ζημιών αυτοκινήτου παρατηρούμε από τον πίνακα 39 ότι η επιλογή του παράγοντα εξέλιξης στο σχηματισμό των IBNR αποθεμάτων δεν παίζει σημαντικό ρόλο. Η διαφορά των υπολογισμένων IBNR αποθεμάτων λόγω του διαφορετικού παράγοντα εξέλιξης θεωρείται σχετικά μικρή συγκριτικά με τα συνολικά που έχουν υπολογιστεί.

Αν αθροίσουμε όλες τις παραπάνω ποσότητες μπορούμε να καταλήξουμε στο απόθεμα που απαιτείται συνολικά για τον κλάδο αυτοκινήτου. Το συνολικό αποτέλεσμα φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

Ο τύπος που χρησιμοποιείται είναι αυτός όπως φαίνεται στη θεωρία (βλέπε Παρατηρήσεις για το Λήμμα 3.2, σχέση (3.7), σελίδα 54) και ο οποίος είναι:

$$\sum_{n=1}^N \hat{C}_{i,j}^{(n)CL} = 1' \hat{C}_{i,j}^{(n)CL}$$



Όπου  $i$  το έτος ατυχήματος και  $j$  το έτος εξέλιξης με  $i \in \{1, \dots, I\}$  και  $j \in \{1, \dots, J\}$  και όπου  $N$  το πλήθος των υπό - χαρτοφυλακίων.

Comparison			
Accident Year	IBNR (based on Mean)	IBNR (based on Weighted average)	Difference
<b>2008</b>	-	-	-
<b>2009</b>	- 1.291.019,64	- 1.291.020,36	- 0,72
<b>2010</b>	- 1.569.027,28	- 1.598.054,01	- 29.026,73
<b>2011</b>	- 2.074.782,58	- 2.106.367,41	- 31.584,83
<b>2012</b>	- 2.662.290,25	- 2.707.228,48	- 44.938,22
<b>2013</b>	- 4.085.569,75	- 4.142.712,52	- 57.142,77
<b>2014</b>	- 15.900.388,88	- 16.293.336,34	- 392.947,47
<b>2015</b>	- 15.356.738,00	- 15.838.981,81	- 482.243,80
<b>2016</b>	- 16.296.516,71	- 16.953.087,90	- 656.571,19
<b>2017</b>	- 13.954.557,92	- 14.727.660,98	- 773.103,06
<b>2018</b>	- 7.266.940,64	- 8.063.296,49	- 796.355,84
<b>Total</b>	- 80.457.831,66	- 83.721.746,30	- 3.263.914,64

Πίνακας 40: Συνολικό απόθεμα για τον κλάδο αυτοκινήτου

Με βάση τον τελευταίο αυτό πίνακα βλέπουμε ότι στο σύνολο για τις ζημιές του κλάδου αυτοκινήτου η εταιρία είναι επαρκώς αποθεματοποιημένη. Τα αρνητικά αυτά αποθέματα μεταφράζονται στο ότι τα αποθέματα εκκρεμών ζημιών (case reserves) είναι ικανοποιητικά για να καλύψουν όλες τις ζημιές που έχουν συμβεί και δεν έχουν κλείσει οι φάκελοι τους ακόμα αλλά και για όλες εκείνες τις ζημιές που έχουν συμβεί από το 2008-2018 αλλά δεν έχουν αναγγελθεί ακόμα.

Για λόγους σύγκρισης της πολυμεταβλητής μεθόδου Chain – Ladder με τη μονοδιάστατη παρατίθεται ο πίνακας 41 που δείχνει ποια είναι τα αποθέματα όπως υπολογίστηκαν αν θεωρούμε το χαρτοφυλάκιο ως μια οντότητα και δεν το χωρίζαμε σε επιχειρησιακές γραμμές.

Στη πλευρά του πίνακα με τίτλο Portfolio separated in Lines of Business έχει εφαρμοστεί η πολυμεταβλητή Chain Ladder, ενώ στη πλευρά του πίνακα με τίτλο Results είναι τα αποθέματα αν θεωρήσουμε το χαρτοφυλάκιο ως μια υπό μελέτη περίπτωση χωρίς να το διασπάσουμε σε επιχειρησιακές γραμμές.

Accident Year	Results			Portfolio separated in Lobs	
	Incurred Claims	Projected Ultimate	IBNR (Aggregated portfolio)	IBNR (based on Mean)	IBNR (based on Weighted average)
2008	69.483.427,97	69.483.427,97	-	-	-
2009	79.303.565,36	78.047.105,78	- 1.256.459,58	- 1.291.019,64	- 1.291.020,36
2010	70.156.013,01	68.609.981,66	- 1.546.031,35	- 1.569.027,28	- 1.598.054,01
2011	70.199.230,41	68.256.199,51	- 1.943.030,90	- 2.074.782,58	- 2.106.367,41
2012	65.373.434,48	62.788.745,71	- 2.584.688,77	- 2.662.290,25	- 2.707.228,48
2013	66.514.667,52	62.866.967,32	- 3.647.700,21	- 4.085.569,75	- 4.142.712,52
2014	76.428.968,34	60.911.360,02	- 15.517.608,33	- 15.900.388,88	- 16.293.336,34
2015	72.209.255,81	56.865.365,14	- 15.343.890,66	- 15.356.738,00	- 15.838.981,81
2016	78.224.873,90	61.841.208,16	- 16.383.665,74	- 16.296.516,71	- 16.953.087,90
2017	74.278.967,98	59.986.484,76	- 14.292.483,22	- 13.954.557,92	- 14.727.660,98
2018	59.547.749,49	52.568.692,39	- 6.979.057,10	- 7.266.940,64	- 8.063.296,49
<b>Total</b>	<b>781.720.154,27</b>	<b>702.225.538,42</b>	<b>- 79.494.615,85</b>	<b>- 80.457.831,66</b>	<b>- 83.721.746,30</b>

Πίνακας 41: Σύγκριση μονοδιάστατης Chain -Ladder με πολυμεταβλητή

Παρατηρείται ότι η διαφορά της μονοδιάστατης με τη πολυμεταβλητή Chain – Ladder δεν είναι μεγάλη στο τελικό αποτέλεσμα. Σαφώς όμως είναι προτιμότερο ένα χαρτοφυλάκιο να χωρίζεται σε επιχειρησιακές γραμμές και για το κάθε υπό-χαρτοφυλάκιο να γίνεται ο υπολογισμός των αποθεμάτων που απαιτούνται παρά αυτό να θεωρείται ως ένα σύνολο. Η ασφαλιστική εταιρία εφαρμόζει την πολυμεταβλητή μέθοδο και σε κάθε επιχειρησιακή γραμμή υπολογίζει τα αντίστοιχα αποθέματα που χρειάζεται.

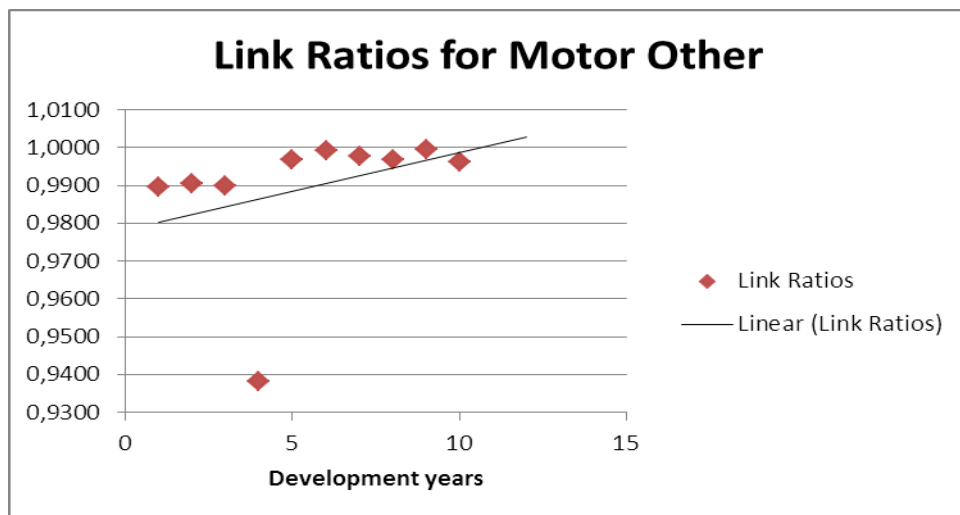
Πρέπει να επισημανθεί ακόμα ότι στην πραγματικότητα στις ασφαλιστικές εταιρίες για τον υπολογισμό των αποθεμάτων γίνεται μια πιο εκτενής μελέτη σχετικά με τους παράγοντες εξέλιξης που θα χρησιμοποιηθούν. Οι παράγοντες εξέλιξης όπως είναι γνωστό δείχνουν το πόσο περιμένουμε να εξελιχθούν οι πληρωμές ενός έτους ατυχήματος στα επόμενα. Συνεπώς αν μετά από μελέτη των παραγόντων εξέλιξης παρατηρήσουμε ότι κάποιος από αυτούς αποτελούν ακραίες παρατηρήσεις λόγω ενδεχομένως ακραίων αποζημιώσεων που μπορεί να δόθηκαν, τα ιστορικά δεδομένα του έτους αυτού εξαιρούνται και δεν λαμβάνονται υπόψη στον υπολογισμό του αποθέματος. Αυτή η τακτική γίνεται γιατί σκοπός είναι να γίνει πρόβλεψη των μελλοντικών πληρωμών λαμβάνοντας υπόψη ένα αντιπροσωπευτικό σύνολο δεδομένων. Αν στο σύνολο των ιστορικών δεδομένων έχουν παρατηρηθεί ακραία φαινόμενα, ακραίες πληρωμές τότε δεν είναι «σωστό» να ληφθούν υπόψη στον υπολογισμό.

Στο παράρτημα 1 υπάρχουν τα σχετικά γραφήματα για τους παράγοντες εξέλιξης. Εκεί μπορούμε να δούμε με μεγαλύτερη σαφήνεια ποιοι είναι εκείνοι οι παράγοντες που θεωρούνται ακραίοι (outliers) και άρα να αφαιρεθούν από την μελέτη μας. Στην παρούσα εργασία δεν εξαιρέθηκε κανένας παράγοντας εξέλιξης στον υπολογισμό των αποθεμάτων.

Τέλος θα πρέπει να αναφερθεί ακόμα ότι για την αξιοπιστία των αποτελεσμάτων οι αναλογιστές συχνά χρησιμοποιούν την συχνότητα (frequency) και τη σφοδρότητα (severity) ως παράγοντες αξιοπιστίας. Αυτοί οι δύο παράγοντες λαμβάνονται υπόψη λόγω του νόμου των μεγάλων αριθμών όπου αναφέρεται ότι όσο ο αριθμός των παρατηρήσεων αυξάνει τόσο η διαφορά μεταξύ της παρατηρούμενης συχνότητας ενός γεγονότος και της αληθινής υποκείμενης συχνότητας τείνει στο μηδέν.

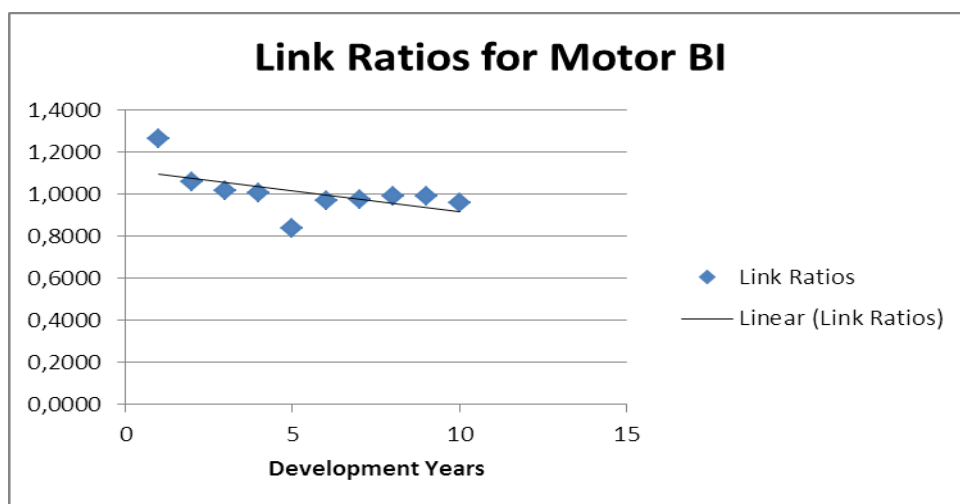
## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

Τα ακόλουθα γραφήματα δείχνουν τους παράγοντες εξέλιξης. Για το πρώτο γράφημα που αφορά τους παράγοντες εξέλιξης για τις λοιπές υλικές ζημιές αυτοκινήτου, παρατηρείται ότι στο 4 χρόνο ο παράγοντας εξέλιξης είναι μια ακραία παρατήρηση. Ο συγκεκριμένος παράγοντας εξέλιξης θα έπρεπε να εξαιρεθεί κανονικά από τον υπολογισμό των αποθεμάτων λόγω της απόκλισης που έχει από τους υπόλοιπους παράγοντες.



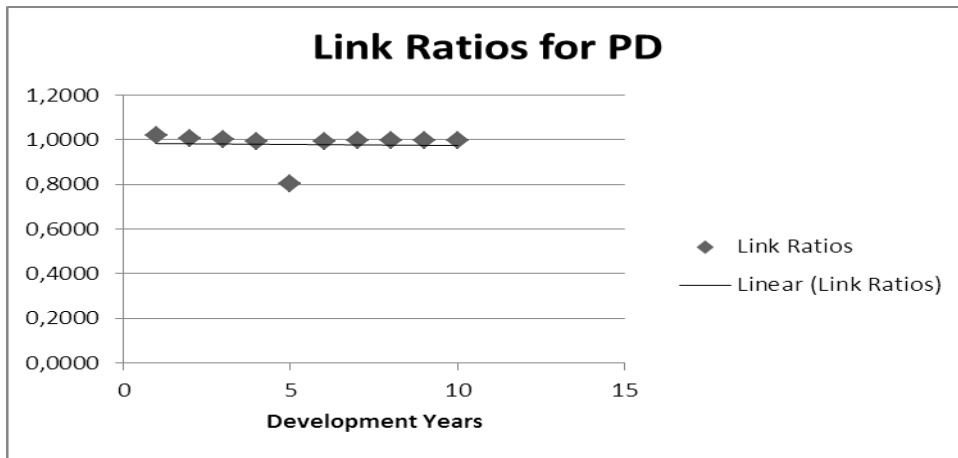
Γράφημα 25: Απεικόνιση παραγόντων εξέλιξης για Λοιπές Υλικές Ζημιές αυτοκινήτου

Αντίστοιχα με το παραπάνω σχόλιο και οι παράγοντες εξέλιξης για τις σωματικές βλάβες παρουσιάζουν κάποιες ακραίες παρατηρήσεις. Βλέπουμε λοιπόν ότι ο πρώτος και ο πέμπτος παράγοντας εξέλιξης ξεφεύγουν από την κανονικότητα των υπολοίπων και γι' αυτό στον υπολογισμό των αποθεμάτων θα πρέπει να μην ληφθούν υπόψη.



Γράφημα 26: Απεικόνιση παραγόντων εξέλιξης για αστική ευθύνη σωματικών βλαβών

Τέλος και για τους παράγοντες εξέλιξης για αστική ευθύνη υλικών ζημιών έχουμε μια ακραία παρατήρηση παράγοντα εξέλιξης. Με βάση ότι έχει λεχθεί ως τώρα και αυτός ο παράγοντας εξέλιξης στο 5<sup>ο</sup> έτος εξέλιξης θα πρέπει να εξαιρεθεί.



**Γράφημα 27:** Απεικόνιση παραγόντων εξέλιξης για αστική ευθύνη υλικών ζημιών

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

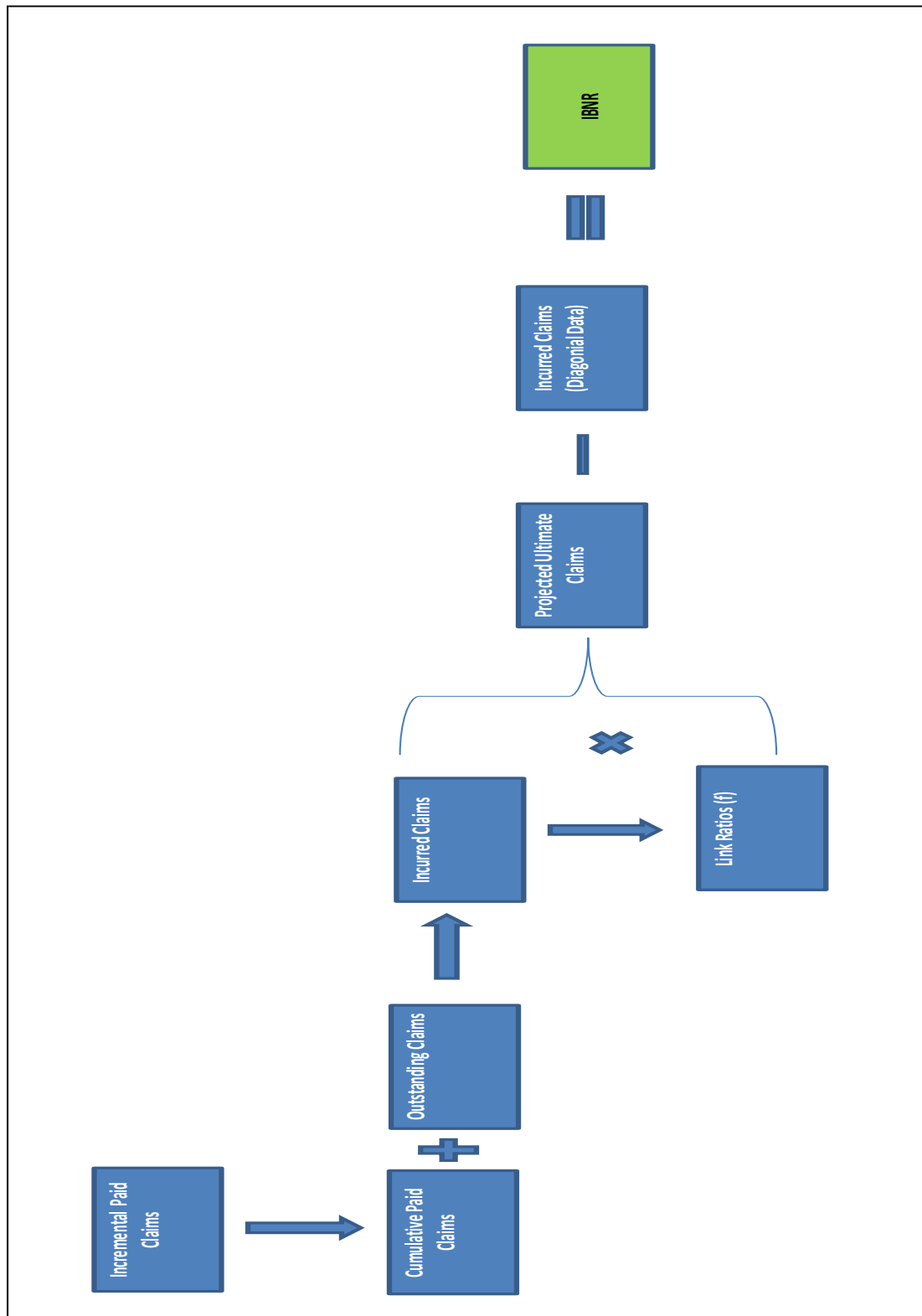
Ο ακόλουθος πίνακας δείχνει τις συσχετίσεις που έχουν οι επιχειρησιακές γραμμές μεταξύ τους όπως ορίζεται από σχετική μελέτη που έχει γίνει πάνω στο χαρτοφυλάκιο της συγκεκριμένης ασφαλιστικής εταιρίας από ομάδα εργασίας που είχε συσταθεί. Αναφορικά επισημαίνεται ότι η συγκεκριμένη ασφαλιστική εταιρία διαθέτει εσωτερικό μοντέλο για τον υπολογισμό των αποθεμάτων. Το εσωτερικό μοντέλο αυτό (P.I.M., Partial Internal Model) χρησιμοποιεί δεδομένα της αγοράς ως βάση και οι συσχετίσεις που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα είναι αυτές όπως έχουν υπολογιστεί και εισάγονται στο εσωτερικό μοντέλο της εταιρίας. Οι επιχειρησιακές γραμμές είναι οι εξής:

1. Motor vehicle liability insurance and proportional reinsurance
2. Other motor insurance and proportional reinsurance
3. Marine, aviation and transport insurance and proportional reinsurance
4. Fire and other damage to property insurance and proportional reinsurance
5. General liability insurance and proportional reinsurance
6. Credit and suretyship insurance and proportional reinsurance
7. Legal expenses insurance and proportional reinsurance
8. Assistance and its proportional reinsurance
9. Miscellaneous financial loss insurance and proportional reinsurance
10. Non-proportional property reinsurance
11. Non-proportional casualty reinsurance
12. Non-proportional marine, aviation and transport reinsurance

<i>CorrLob</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>1: M (3<sup>rd</sup> party)</i>	1											
<i>2: M (other)</i>	0.5	1										
<i>3: MAT</i>	0.5	0.25	1									
<i>4: Fire</i>	0.25	0.25	0.25	1								
<i>5: 3<sup>rd</sup> party liab</i>	0.5	0.25	0.25	0.25	1							
<i>6: credit</i>	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	1						
<i>7: legal exp.</i>	0.5	0.5	0.25	0.25	0.5	0.5	1					
<i>8: assistance</i>	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	1				
<i>9: misc.</i>	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	1			
<i>10: reins. (prop)</i>	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	1		
<i>11: reins. (cas)</i>	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	1	
<i>12: reins. (MAT)</i>	0.25	0.25	0.5	0.5	0.25	0.25	0.25	0.25	0.5	0.25	0.25	1

### ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 3

Γραφική απεικόνιση υπολογισμού IBNR απαιτήσεων.



## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 4

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την εκτέλεση του παραδείγματος του 5<sup>ου</sup> κεφαλαίου στο R – project.

```
library(ChainLadder)
```

```
#motor_all  
myCSVfile<-file.choose()  
all_paid<-read.csv2(file=myCSVfile, header=FALSE)  
all_paid<-as.triangle(as.matrix(all_paid))  
all_paid  
plot(all_paid)
```

```
myCSVfile<-file.choose()  
all_os<-read.csv2(file=myCSVfile, header=FALSE)  
all_os<-as.triangle(as.matrix(all_os))  
plot(all_os)
```

```
myCSVfile<-file.choose()  
all_incurred<-read.csv2(file=myCSVfile, header=FALSE)  
all_incurred<-as.triangle(as.matrix(all_incurred))  
plot(all_incurred)
```

```
#MOTOR_OTHER  
library(help="ChainLadder")  
myCSVfile<-file.choose()  
mo.tri<-read.csv2(file=myCSVfile, header=FALSE)  
mo.tri<-as.triangle(as.matrix(mo.tri))  
mo.tri #incremental 2008-2018
```

```
mo.cum<-incr2cum(mo.tri)  
mo.cum #cumulative
```

```
plot(mo.tri)  
plot(mo.cum)  
plot(mo.cum, lattice=TRUE)
```

```
mack_mo<-MackChainLadder(mo.cum, est.sigma="Mack")  
mack_mo
```

```
plot(full.triangle.mo)
```

```
plot(mack_mo)
```

```
f_mo<-mack_mo$f
```

```
f_mo
```

```
plot(f_mo)
```

```
full.triangle.mo<-mack_mo$FullTriangle
```

```
full.triangle.mo
```

```
#BI
```

```
library(ChainLadder)
```

```
myCSVfile<-file.choose()
```

```
bi.tri<-read.csv2(file=myCSVfile, header=FALSE)
```

```
bi.tri<-as.triangle(as.matrix(bi.tri))
```

```
bi.tri #incremental 2008-2018
```

```
bi.cum<-incr2cum(bi.tri)
```

```
bi.cum #cumulative
```

```
library(help="ChainLadder")
```

```
plot(bi.tri)
```

```
plot(bi.cum)
```

```
plot(bi.cum, lattice=TRUE)
```

```
mack_bi<-MackChainLadder(bi.cum, est.sigma="Mack")
```

```
mack_bi
```

```
full.triangle.bi<-mack_bi$FullTriangle
```

```
full.triangle.bi
```

```
plot(full.triangle.bi)
```

```
plot(mack_bi)
```

```
f_bi<-mack_bi$f
```

```
f_bi
```



```
plot(f_bi)
```

```
#PD
```

```
myCSVfile<-file.choose()  
pd.tri<-read.csv2(file=myCSVfile, header=FALSE)
```

```
pd.tri<-as.triangle(as.matrix(pd.tri))  
pd.tri #incremental 2008-2018
```

```
pd.cum<-incr2cum(pd.tri)  
pd.cum #cumulative
```

```
plot(pd.tri)  
plot(pd.cum)  
plot(pd.cum, lattice=TRUE)
```

```
mack_pd<-MackChainLadder(pd.cum, est.sigma="Mack")  
mack_pd
```

```
full.triangle.pd<-mack_pd$FullTriangle
```

```
full.triangle.pd  
plot(full.triangle.pd)
```

```
plot(mack_pd)
```

```
f_pd<-mack_pd$f  
f_pd  
plot(f_pd)  
library(help="ChainLadder")
```

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Mario V. Wüthrich & Michael Merz (2008), “*Stochastic claims reserving methods in insurance*”
- [2] CEIOPS’ Advice for Level 2 Implementing Measures on Solvency II: SCR Standard Formula Article 111 (d) Correlations (2010)
- [3] Klaus D. Schmidt and Mathias Zocher, “*The bornhuetter – Ferguson principle*”
- [4] Mario V. Wüthrich & Michael Merz, “*Combining Chain – Ladder and Additive Loss Reserving Methods for Dependent Lines of Business*”
- [5] Maria Dolores Martinez – Miranda, Jens Perch Nielsen, Richard Verrall Cass Business School (2013) “*A new R-package for statistical modelling and forecasting in non-life insurance*”
- [6] Thomas Mack, Munich Re Munich (Astin Bulletin Vol. 23, No. 2 1993) “*Distribution free calculation of the standard error of chain ladder reserve estimates*”
- [7] Carsten Pröhl and Klaus D. Schmidt, Lehrstuhl für Versicherungsmathematik Technische Universität Dresden , (2005) “*Multivariate Chain – Ladder*”
- [8] Alessandro Carrato, Fabio Concina, Markus Gesmann, Dan Murphy, Mario Wüthrich and Wayne Zhang (2018) “*Claims reserving with R: Chain – Ladder 0.2.9 Package Vignette*”
- [9] Stefano Cavastracci Strascia and Agostino Tripodi (2018) “*Overdispersed – Poisson Model in Claims Reserving: Closed tool for One – Year Volatility in GLM framewok*”