ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Ανάλυση του πλεονάσματος για ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες ασφαλιστικών κινδύνων

ΚΑΡΑΚΙΤΣΟΣ ΧΑΡΙΛΑΟΣ

(ΜΑΕ17030)

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπλ. Καθηγητής Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)
- Αναπλ. Καθηγήτρια Βερροπούλου Γεωργία
- Επικ. Καθηγητής Τζαβελάς Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAMME IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Surplus analysis of renewal stochastic insurance risk processes

KARAKITSOS CHARILAOS

(MAE17030)

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus

2020

Για την Ηλέκτρα,

το Χρήστο Άνθιμο

και τη Ροζαλία

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Βασικό αντικείμενο της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι η μελέτη του πλεονάσματος για ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες ασφαλιστικών κινδύνων. Πραγματοποιείται ενδελεχής ανάλυση σημαντικών μεγεθών όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας, ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία, το έλλειμμα που δημιουργείται μετά την επέλευση της χρεοκοπίας κα.

Στο Κεφάλαιο 1 γίνεται παρουσίαση των μαθηματικών μεγεθών που θα φανούν χρήσιμα στη συνέχεια. Πιο συγκεκριμένα, παρουσιάζονται το πολυώνυμο Lagrange, ο τελεστής Dickson – Hipp, η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, καθώς επίσης και δύο κατανομές, πάνω στις οποίες βασίζεται το μεγαλύτερο μέρος της εργασίας, οι κατανομές Erlang και Cox.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η συνάρτηση Gerber – Shiu για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson, όπως επίσης και εφαρμογές της συγκεκριμένης συνάρτησης μέσω της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης.

Στο Κεφάλαιο 3 μελετάται η συνάρτηση Gerber – Shiu για το μοντέλο Sparre – Andersen (ανανεωτικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου) με εξάρτηση μεταξύ των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των κινδύνων και των αντίστοιχων μεγεθών των απαιτήσεων ζημιών.

Στο Κεφάλαιο 4 δίνονται αναλυτικά αποτελέσματα για τη συνάρτηση των Gerber – Shiu που εξετάστηκε στο Κεφάλαιο 3, θεωρώντας ότι τα ύψη των απαιτήσεων ακολουθούν κατανομές Erlang και Cox.

Το Κεφάλαιο 5 εξετάζεται η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson, ενώ δίνεται η από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 6 παρέχονται χρήσιμα συμπεράσματα για τον υπολογισμό του συνολικού ύψους των απαιτήσεων και το πλήθος αυτών πριν τη χρεοκοπία, μέσω της γενικευμένης συνάρτησης των Gerber - Shiu.

ABSTRACT

The main study of this thesis is the surplus analysis of renewal stochastic insurance risk processes. We analyze important quantities such as the ruin probability, the time of ruin, the surplus prior to ruin, the deficit after ruin occurs.

In Chapter 1 we proceed to a technical introduction of what follows. We present the Lagrange polynomial, the Dickson – Hipp operator, the defective renewal equation and we define the Erlang distribution and the Coxian distribution.

In Chapter 2 the Gerber – Shiu function under the classical Poisson risk model is presented. Further results of this function combined with the defective renewal equation are given.

An extension of the Gerber – Shiu function is given in Chapter 3, this time under the dependent Sparre – Andersen risk model

In Chapter 4 we give further analysis to Erlang and Coxian distributions and we make use of their results to draw conclusions about the claim sizes and the interclaim times.

In Chapter 5 the time of ruin distribution under the classical Poisson risk model is presented, while we also give the joint distribution of the time of ruin and the deficit after ruin occurs.

In Chapter 6 we draw conclusions about estimating the aggregate claim costs and the number of claims until ruin.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Βασικός στόχος του Κεφαλαίου αυτού, είναι η παρουσίαση και ανάλυση μαθηματικών εννοιών που θα χρειασθούν στη συνέχεια της εργασίας. Μέσω αυτού του Κεφαλαίου, ο αναγνώστης αποκτά μία πρώτη επαφή με σημαντικά μαθηματικά μεγέθη που σχετίζονται με την ανάλυση του πλεονάσματος μέσω στοχαστικών διαδικασιών. Συγκεκριμένα, γίνεται εκτενής παρουσίαση:

- Στα πολυώνυμα Lagrange, που θα φανούν ιδιαίτερα χρήσιμα για την παρουσίαση μαθηματικών αποτελεσμάτων.
- Στον τελεστή Dickson-Hipp, ένα σημαντικό μέγεθος στη χρήση των μετασχηματισμών Laplace και στην ανάλυση συναρτήσεων επιβίωσης.
- Στη σύνθετη γεωμετρική κατανομή, η οποία εφαρμόζεται στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, που ικανοποιεί η συνάρτηση Gerber - Shiu.
- Στις κατανομές Erlang και Cox, οι οποίες έχουν μεγάλη εφαρμογή στις ποσότητες που θα εξετάσουμε στη διαχείριση κινδύνου και στον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας.

1.1 ΤΑ ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ LAGRANGE

Έστω η διακριτή ακολουθία $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ και h(x) ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n-1. Τότε, το πολυώνυμο Lagrange ορίζεται ως,

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}, \tag{1.1}$$

έτσι ώστε το h(x) να μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των $h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_n)$.

Μία χρήσιμη εφαρμογή ακολουθεί στο επόμενο Παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.1 *Για h(x)=1 θα έχουμε,*

$$1 = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}, \tag{1.2}$$

και για x=0, n≥2 προκύπτει,

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x_i}{x_i-x_j}=1.$$

Το δεξιό μέλος της (2.2) είναι πολυώνυμο βαθμού n-1, αφού είναι άθροισμα n τέτοιων πολυωνύμων. Ο συντελεστής του x^{n-1} για το i-πολυώνυμο είναι ο,

$$\frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_i-x_j},$$

και επειδή ο συντελεστής θα πρέπει να είναι ίσος με 0 για n≥2, θα έχουμε,

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j)\right\}^{-1}=\sum_{i=1}^{n}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(x_j-x_i)\right\}^{-1}=0, \qquad (1.3)$$

το οποίο προκύπτει πολλαπλασιάζοντας με $(-1)^{n-1}$.

□

1.2 Ο ΤΕΛΕΣΤΗΣ DICKSON-HIPP

Σε αυτήν την Ενότητα παρουσιάζουμε τον τελεστή Dickson-Hipp, όπως επίσης και τον μετασχηματισμό Laplace του, ενώ αναλύουμε και μερικές από τις ιδιότητές του.

Έστω r να είναι ένας αριθμός και h(x) μία ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση

$$T_r h(x)=e^{rx}\int_x^{\infty}e^{-ry}h(y)dy\,, Re(r)\geq 0, x\geq 0, \qquad (1.4)$$

ορίζεται ως ο τελεστής Dickson-Hipp της συνάρτησης h(x). Εάν αλλάξουμε τη μεταβλητή ολοκλήρωσης παίρνουμε,

$$T_r h(x)=\int_0^{\infty}e^{-ry}h(x+y)dy. \qquad (1.5)$$

Μπορούμε να εκφράσουμε το T_r σαν γραμμικό τελεστή, ως εξής,

$$T_r\{\textstyle\sum_{i=1}^{n}\alpha_i h_i(x)\}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i T_r h_i(x), \qquad (1.6)$$

και να ορίσουμε τον αντίστοιχο μετασχηματισμό Laplace,

$$\tilde{h}(s)=\int_0^{\infty}e^{-sy}h(y)dy=T_s h(0). \qquad (1.7)$$

Ακόμα, για τη συνάρτηση επιβίωσης θα έχουμε,

$$\int_x^\infty h(y)dy = T_0 h(x).$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.2 *Μίξη εκθετικών*

Έστω $h(x) = \sum_{i=1}^k q_i h_i(x), x > 0$ όπου $h_i(x) = \beta_i e^{-\beta_i x}$, $\beta_i > 0$, $0 \le q_i < 1$, $\sum_{i=1}^k q_i = 1$. Τότε, μέσω των σχέσεων που αναπτύξαμε πιο πάνω θα έχουμε,

$$T_r h(x) = \sum_{i=1}^k q_i T_r h_i(x) = \sum_{i=1}^k q_i \beta_i e^{-\beta_i x} \int_0^\infty e^{-(\beta_i + r)y} dy = \sum_{i=1}^k \frac{q_i \beta_i}{\beta_i + r} e^{-\beta_i x}.$$

□

Έστω για n=1,2,…,

$$T_{r_1, r_2, \dots, r_n} h(x) = T_{r_1} T_{r_2} \cdots T_{r_n} h(x). \tag{1.8}$$

Για n=2,

$$\begin{aligned} T_{r_1, r_2} h(x) &= e^{-r_1 x} \int_x^\infty e^{-r_1 y} \{T_{r_2} h(y)\} dy \\ &= e^{-r_1 x} \int_x^\infty e^{-(r_1 - r_2)y} \int_y^\infty e^{-r_2 t} h(t)\, dt dy \\ &= e^{-r_1 x} \int_x^\infty e^{-r_2 t} \left\{ \int_x^t e^{-(r_1 - r_2)y} dy \right\} h(t) dt. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Έτσι, αν $r_1 \neq r_2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} T_{r_1, r_2} h(x) &= e^{-r_1 x} \int_x^\infty e^{-r_2 t} \left\{ \frac{e^{-(r_1 - r_2)x} - e^{-(r_1 - r_2)t}}{r_1 - r_2} \right\} h(t) dt \\ &= \frac{e^{-r_2 x} \int_x^\infty e^{-r_2 t} h(t) dt - e^{-r_1 x} \int_x^\infty e^{-r_1 t} h(t) dt}{r_1 - r_2}, \end{aligned}$$

και

$$T_{r_1, r_2} h(x) = \frac{T_{r_2} h(x) - T_{r_1} h(x)}{r_1 - r_2}, r_1 \neq r_2. \tag{1.10}$$

Ο μετασχηματισμός Laplace του τελεστή Dickson-Hipp αποτελεί ειδική περίπτωση της (1.10) δηλαδή,

$$\int_0^\infty e^{-sy}\{T_r h(y)\}dy = T_{s,r}h(0) = \frac{T_r h(0) - T_s h(0)}{s-r}$$

ή ισοδύναμα

$$\int_0^\infty e^{-sy}\{T_r h(y)\}dy = \frac{\tilde{h}(r)-\tilde{h}(s)}{s-r}. \qquad (1.11)$$

Μέσω της (1.11) παρατηρούμε ότι

$$T_{r_1,r_2}h(x) = T_{r_2}T_{r_1}h(x), \qquad (1.12)$$

που μας οδηγεί στο συμπέρασμα πως η σειρά των όρων της παράστασης μπορεί να αλλάξει, χωρίς όμως να αλλάξει το αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1 *Αν* $r_1 \neq r_2$ *για i≠j και n≥1 τότε ισχύει*

$$T_{r_1,r_2,\dots,r_n}h(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T_{r_i}h(x), \qquad (1.13)$$

όπου,

$$\alpha_i = \frac{1}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(r_j - r_i)}, \quad i = 1,2,\dots,n.$$

Απόδειξη Προφανώς η (1.13) ισχύει για n=2, αφού σε αυτήν την περίπτωση η (1.13) ανάγεται στη (1.10). Θα δείξουμε ότι η (1.13) ισχύει για κάθε n μέσω της μεθόδου της μαθηματικής επαγωγής. Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τη σχέση (1.12) θα έχουμε,

$$T_{r_1,r_2,\dots,r_n,r_{n+1}}h(x) = T_{r_{n+1},r_1,r_2,\dots,r_n}h(x) = T_{r_{n+1}}T_{r_1,r_2,\dots,r_n}h(x),$$

και μέσω της υπόθεσης της επαγωγής χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1.6), (1.10) παίρνουμε,

$$\begin{aligned} T_{r_1,r_2,\dots,r_n,r_{n+1}}h(x) &= T_{r_{n-1}}\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{T_{r_i}h(x)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(r_j - r_i)}\right\} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{T_{r_{n+1},r_i}h(x)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(r_j - r_i)} = \sum_{i=1}^{n}\frac{T_{r_i}h(x) - T_{r_{n+1}}h(x)}{(r_{n+1} - r_i)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(r_j - r_i)}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την (1.3) προκύπτει,

$$T_{r_1,r_2,\dots,r_n,r_{n+1}}h(x) = \left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{T_{r_i}h(x)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}(r_j-r_i)}\right\} - \left\{T_{r_{n+1}}h(x)\right\}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}(r_j-r_i)\right\}^{-1}\right)$$

$$= \left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{T_{r_i}h(x)}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}(r_j-r_i)}\right\} - \left\{T_{r_{n+1}}h(x)\right\}\left(-\left\{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n+1}(r_j-r_{n+1})\right\}^{-1}\right),$$

οπότε η (1.13) ισχύει και για n+1.

□

Σε επέκταση του μετασχηματισμού Laplace που αναπτύξαμε στη (1.11) έχουμε,

$$\int_0^\infty e^{-sy}\left\{e^{-sy}\int_y^\infty e^{-rt}dF(t)\right\}dy = \frac{\tilde{f}(r)-\tilde{f}(s)}{s-r}, \qquad (1.14)$$

$$\text{με } \tilde{f}(s) = E(e^{-sY}) = \int_0^\infty e^{-sy}dF(y). \qquad (1.15)$$

Αν στην (1.14) θέσουμε r=0, τότε βρίσκουμε ότι

$$\int_0^\infty e^{-sy}d\bar{F}(y) = \frac{1-E(e^{-sY})}{s}, \qquad (1.16)$$

και καθώς το s τείνει στο μηδέν, βάσει του κανόνα L'Hopital παίρνουμε

$$E(Y) = \int_0^\infty \bar{F}(y)\,dy. \qquad (1.17)$$

Κάθε μία από τις σχέσεις (1.14), (1.16) και (1.17) ισχύει για οποιαδήποτε μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή Y, ακόμα κι αν η Y έχει διακριτή μάζα πιθανότητας σε ένα σημείο. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τη συνάρτηση κατανομής F ως εξής:

$$F_{1,r}(y) = 1 - \bar{F}_{1,r}(y), \quad y \geq 0$$

με

$$\bar{F}_{1,r}(y) = \frac{e^{-ry}\int_y^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)dx} = \frac{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x+y)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)dx}, \quad y \geq 0, \qquad (1.18)$$

Για την περίπτωση του τελεστή Dickson-Hipp ισχύει,

$$\bar{F}_{1,r}(y) = \left\{\frac{T_r\bar{F}(y)}{T_r\bar{F}(0)}\right\},$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση κατανομής $F_{1,r}(y)$ είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$f_{1,r}(y) = \frac{\bar{F}(y) - re^{ry}\int_y^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)\,dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)\,dx}.$$

Ολοκληρώνοντας κατά μέλη παίρνουμε,

$$e^{ry}\int_y^\infty e^{-rx}\,dF(x) = \bar{F}(y) - re^{ry}\int_y^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)\,dx$$

$$\Rightarrow f_{1,r}(y) = \frac{e^{ry}\int_y^\infty e^{-rx}dF(x)}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)dx},\ y > 0. \tag{1.19}$$

Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε το μετασχηματισμό Laplace για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{1,r}(y)$,

$$\tilde{f}_{1,r}(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\,f_{1,r}(y)dy = \left(\frac{r}{s-r}\right)\frac{\tilde{f}(r)-\tilde{f}(s)}{1-\tilde{f}(r)}. \tag{1.20}$$

Για r=0 η παραπάνω σχέση απλοποιείται και γίνεται

$$f_{1,0}(y) = \frac{\bar{F}(y)}{E(Y)}. \tag{1.21}$$

Συχνά, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της (1.21) αναφέρεται και ως συνάρτηση ισορροπίας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.3 *Μίξη εκθετικών*

Η υπόθεσή μας είναι η εξής:

έστω $\bar{F}(x) = \sum_{i=1}^k q_i\bar{F}_i(x)\,, x \geq 0$ με $\bar{F}_i(x) = e^{-\beta_i x}, \beta_i > 0$ και $0 \leq q_i < 1$ με $\sum_{i=1}^k q_i = 1$. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Παραδείγματος 2.2 η γενικευμένη συνάρτηση ισορροπίας θα είναι,

$$f_{1,r}(y) = \frac{T_r f(y)}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)\,dx} = \frac{\sum_{i=1}^k \frac{q_i\beta_i}{\beta_i + r}}{\sum_{j=1}^k \frac{q_j}{\beta_j + r}} = \sum_{i=1}^k q_i(r)f_i(y),$$

όπου,

$$q_i(r) = \frac{\frac{q_i}{\beta_i + r}}{\sum_{j=1}^k \frac{q_j}{\beta_j + r}}, \qquad i = 1,2,\dots,k.$$

□

Μπορούμε ακόμα να εξάγουμε συμπεράσματα για τις ροπές της $F_{1,r}(y)$:

$$\int_0^\infty y^n f_{1,r}(y)dy = \frac{\int_0^\infty y^n e^{ry} \int_y^\infty e^{-rx}\, dF(x)dy}{\int_0^\infty e^{-rx}\, dF(x)}$$

$$= \frac{\int_0^\infty e^{-rx}\left\{\int_0^x y^n e^{ry} dy\right\} dF(x)}{\int_0^\infty e^{-rx} dF(x)}. \tag{1.22}$$

Επίσης, για r≠0,

$$\int_0^x y^n e^{ry} dy = \frac{n!}{(-r)^{n+1}}\left\{1 - e^{rx} \sum_{j=0}^n \frac{(-rx)^j}{j!}\right\}. \tag{1.23}$$

Με αντικατάσταση της (1.23) στον αριθμητή της (1.22) παίρνουμε,

$$\int_0^\infty e^{-rx}\left\{\int_0^x y^n e^{ry} dy\right\} dF(x) = \frac{n!}{(-r)^{n+1}} \int_0^\infty e^{-rx}\left\{1 - e^{rx} \sum_{j=0}^n \frac{(-rx)^j}{j!}\right\} dF(x)$$

$$= \frac{n!}{(-r)^{n+1}}\left\{\int_0^\infty e^{-rx} dF(x) - \sum_{j=0}^n \frac{(-rx)^j}{j!} \int_0^\infty x^j dF(x)\right\}$$

$$= \frac{n!}{(-r)^{n+1}}\left\{\tilde{f}(r) - \sum_{j=0}^n \frac{(-rx)^j}{j!} E(Y^j)\right\}.$$

Επομένως, για r≠0 και n=1,2,…,

$$\int_0^\infty y^n f_{1,r}(y)dy = \frac{n!}{(-r)^n}\left\{1 + \sum_{j=1}^n \frac{(-r)^j}{j!} \frac{E(Y^j)}{1-\tilde{f}(r)}\right\}, \tag{1.24}$$

και για r=0 είναι

$$\int_0^\infty y^n f_{1,0}(y)dy = \frac{E(Y^{n+1})}{(n+1)E(Y)}. \tag{1.25}$$

1.3 Η ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Έστω η συνάρτηση m(x) που ικανοποιεί την παρακάτω ολοκληρωτική εξίσωση,

$$m(x) = \varphi \int_0^x m(x-y) dF(y) + v(x)\,,\ x \geq 0, \tag{1.26}$$

με 0<φ<1, $F(y) = 1 - \bar{F}(y), F(0) = 0$ και $v(x) \geq 0$, όπου για $x < \infty \Rightarrow v(x) < \infty$. Τότε, η (1.26) καλείται «ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση».

Προκειμένου να βρούμε τη λύση $m(x)$ της (1.26), ορίζουμε το μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes της $f(y) = F'(y)$ να είναι,

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} dF(y).$$

Τότε, η συνάρτηση επιβίωσης της n-οστής συνέλιξης της F, θα είναι $\bar{F}^{*n}(y) = 1 - F^{*n}(y)$ και επομένως για το μετασχηματισμό Laplace θα έχουμε $\int_0^\infty \bar{F}^{*n}(y)dy = \frac{\{1-[\tilde{f}(s)]^n\}}{s}$. Στη συνέχεια, ορίζουμε τη σύνθετη γεωμετρική κατανομή $G(y) = 1 - \bar{G}(y)$ ως,

$$\bar{G}(y) = \sum_{n=1}^\infty (1-\varphi)\varphi^n \bar{F}^{*n}(y), \; y \geq 0. \quad (1.27)$$

Αφού G(0)=φ, η G(y) έχει διακριτή μάζα πιθανότητας στο 0 ίση με 1-φ. Επομένως, ισχύει ότι

$$E(e^{-sL}) = \int_0^\infty e^{-sx} dG(x) = \sum_{n=0}^\infty (1-\varphi)\varphi^n \left[\tilde{f}(s)\right]^n = \frac{1-\varphi}{1-\varphi\tilde{f}(s)}. \quad (1.28)$$

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace στη (1.26), έχουμε

$$\tilde{m}(s) = \varphi\tilde{m}(s)\tilde{f}(s) + \tilde{v}(s)$$

ή ισοδύναμα

$$\tilde{m}(s) = \frac{\tilde{v}(s)E(e^{-sL})}{1-\varphi}. \quad (1.29)$$

Για τη λύση της (1.29) ένας εναλλακτικός τρόπος εύρεσής της είναι ο ακόλουθος:

Έστω $G(y) = 1 - \varphi + \int_0^y g(x)dx$, όπου,

$$g(y) = \sum_{n=1}^\infty (1-\varphi)\varphi^n f^{*n}(y), \; y > 0, \quad (1.30)$$

να είναι μία συνάρτηση πυκνότητας μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Τότε, μέσω της (1.28) παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace για τη (1.30),

$$\tilde{g}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} g(y)dy = \frac{1-\varphi}{1-\varphi\tilde{f}(s)} - (1-\varphi). \quad (1.31)$$

Η (1.29) εκφράζεται ως,

$$\tilde{m}(s) = \frac{1}{1-\varphi}\tilde{g}(s)\tilde{v}(s) + \tilde{v}(s).$$

$$\Rightarrow m(x) = \frac{1}{1-\varphi}\int_0^x v(y)g(x-y)\,dy + v(x). \quad (1.32)$$

Εναλλακτικά ξανά, βλέπουμε τώρα πως η (1.16) οδηγεί σε,

$$\tilde{\bar{G}}(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\bar{G}(y)dy = \frac{1-E(e^{-sL})}{s}. \tag{1.33}$$

Υποθέτοντας ότι,

$$s\tilde{v}(s) = C - \tilde{v}_*(s), \tag{1.34}$$

έχουμε,

$$\widetilde{m}(s) = \frac{\tilde{v}(s)\{1-[1-E(e^{-sL})]\}}{1-\varphi} = \frac{\tilde{v}(s) - s\tilde{v}(s)\tilde{\bar{G}}(s)}{1-\varphi}$$

ή ισοδύναμα

$$\widetilde{m}(s) = \frac{\tilde{v}(s) - C\tilde{\bar{G}}(s) + \tilde{v}_*(s)\tilde{\bar{G}}(s)}{1-\varphi}. \tag{1.35}$$

Για παράδειγμα, εάν η v(x) είναι διαφορίσιμη, η (1.34) ισχύει για $\tilde{v}_*(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\{-v'(x)\}\,dx$ και ακόμα C=v(0), με τη (2.35) να μας δίνει,

$$m(x) = \frac{v(x) - v(0)\bar{G}(x) - \int_0^x v'(x-y)\bar{G}(y)dy}{1-\varphi}. \tag{1.36}$$

Ομοίως, έστω $\tilde{v}(s) = \tilde{v}_r(s)$ όπου,

$$\tilde{v}_r(s) = k\frac{\tilde{h}(r)-\tilde{h}(s)}{s-r}, \tag{1.37}$$

οπότε,

$$s\tilde{v}_r(s) = k\frac{s}{s-r}\{\tilde{h}(r)-\tilde{h}(s)\} = k\left(1+\frac{r}{s-r}\right)\{\tilde{h}(r)-\tilde{h}(s)\}$$
$$\Rightarrow s\tilde{v}_r(s) = k\tilde{h}(r) - \{k\tilde{h}(s) - r\tilde{v}_r(s)\},$$

με την (1.34) να ισχύει για $C = k\tilde{h}(r)$ και $\tilde{v}_*(s) = k\tilde{h}(s) - r\tilde{v}_r(s)$. Τότε,

$$\widetilde{m}(s) = \frac{\tilde{v}_r(s) - k\tilde{h}(r)\tilde{\bar{G}}(s) + \{k\tilde{h}(s) - r\tilde{v}_r(s)\}\tilde{\bar{G}}(s)}{1-\varphi}. \tag{1.38}$$

Έτσι λοιπόν, βρίσκουμε ότι

$$m(x) = \left(\frac{k}{1-f}\right)\left[\{T_r h(x)\} - \tilde{h}(r)\bar{G}(x) + \int_0^x \{h(y) - rT_r h(y)\}\bar{G}(x-y)dy\right].$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.4 *Συνάρτηση επιβίωσης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής*

Από (1.28) και (1.33) προκύπτει,

$$\tilde{\bar{G}}(s) = \frac{1}{s}\left\{1 - \frac{1-\varphi}{1-\varphi\tilde{f}(s)}\right\} = \left\{\frac{\varphi}{1-\varphi\tilde{f}(s)}\right\}\frac{1-\tilde{f}(s)}{s}, \tag{1.39}$$

η οποία γράφεται και ως,

$$\tilde{\bar{G}}(s) = \varphi\tilde{f}(s)\tilde{\bar{G}}(s) + \varphi\frac{1-\tilde{f}(s)}{s}.$$

Παίρνοντας τώρα αντίστροφους μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της παραπάνω σχέσης, βρίσκουμε άμεσα ότι η δεξιά ουρά $\bar{G}(x)$ ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{G}(x) = \varphi\int_0^x \bar{G}(x-y)dF(y) + \varphi\bar{F}(x). \tag{1.40}$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (1.26) και (1.40) βλέπουμε ότι η λύση της (1.26) όταν

$v(x) = \varphi\bar{F}(x)$ είναι η $m(x) = \bar{G}(x)$ όπως αυτή δίνεται στη (1.27).

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.5 *Συνάρτηση πυκνότητας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής*

Για το μετασχηματισμό Laplace της πυκνότητας έχουμε,

$$\tilde{g}(s) = (1-\varphi)\left\{\frac{1-\varphi}{1-\varphi\tilde{f}(s)} - 1\right\} = \frac{\varphi(1-\varphi)\tilde{f}(s)}{1-\varphi\tilde{f}(s)}$$
$$\tilde{g}(s) = \varphi\tilde{f}(s)\tilde{g}(s) + \varphi(1-\varphi)\tilde{f}(s),$$

από την οποία έπεται ότι η συνάρτηση πυκνότητας g(x) της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$g(x) = \varphi\int_0^x g(x-y)f(y)dy + \varphi(1-\varphi)f(x), \tag{1.41}$$

□

Έστω τώρα, ότι υπάρχει R>0 που να ικανοποιεί την,

$$\int_0^\infty e^{Ry}dF(y) = \frac{1}{\varphi}. \tag{1.42}$$

Αν η παράσταση $e^{Rx}v(x)$ είναι «άμεσα ολοκληρώσιμη κατά Riemann» τότε,

$$m(x) \sim Ce^{Rx},\ x \to \infty, \tag{1.43}$$

όπου,

$$C = \frac{\int_0^\infty e^{Ry} v(y) dy}{\varphi \int_0^\infty y e^{Ry} dF(y)}. \tag{1.44}$$

Μία επαρκής συνθήκη ώστε η $e^{Rx}v(x)$ να είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann, είναι να ισχύει $e^{Rx}v(x) \leq h(x)$, όπου h(x) είναι μία μη-αρνητική, μη-αύξουσα και κατά Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αυτή η συνθήκη ικανοποιείται εφόσον $\int_0^\infty e^{(R+\varepsilon)x} v(x) dx < \infty$ για κάποιο ε>0. Επειδή $\lim_{x\to\infty} e^{(R+\varepsilon)x} v(x) = 0$, υπάρχει $K < \infty$ τέτοιο ώστε $e^{(R+\varepsilon)x} v(x) \leq K$ δηλαδή $e^{Rx}v(x) \leq h(x)$ με $h(x) = Ke^{-\varepsilon x}$. Το ασυμπτωτικό αυτό αποτέλεσμα της (1.43) καλείται και «ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg» και ισχύει,

$$C_L e^{-Rx} \leq m(x) \leq C_U e^{-Rx}, \ x \geq 0, \tag{1.45}$$

όπου $C_L = inf\alpha(z)$ και $C_U = sup\alpha(z)$ για z≥0 και

$$\alpha(z) = \frac{e^{Rz} v(z)}{\varphi \int_z^\infty e^{Ry} dF(y)}.$$

Πιο συγκεκριμένα, η (1.27) ικανοποιεί την

$$\bar{G}(x) \leq e^{-Rx}, \ x \geq 0. \tag{1.46}$$

Έστω τώρα η από-κοινού συνάρτηση επιβίωσης $\bar{G}(x,y), x \geq 0, y \geq 0$, η οποία ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση,

$$\bar{G}(x,y) = \varphi \int_0^x \bar{G}(x-t,y) dF(t) + \varphi \bar{F}(x+y), \tag{1.47}$$

ώστε $\bar{G}(x,0) = \bar{G}(x)$. Μπορούμε να δείξουμε μία εναλλακτική μορφή για την $\bar{G}(x,y)$, παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace:

$$\int_0^\infty e^{-sx} \bar{G}(x,y) dx = \frac{\varphi \int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}(x+y) dx}{1-\varphi \tilde{f}(s)} = \frac{\varphi}{1-\varphi} \left\{ \int_0^\infty e^{-sx} dG(x) \right\} \left\{ \int_0^\infty e^{-sx} \bar{F}(x+y) dx \right\}. \tag{1.48}$$

Οπότε, αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplace, έπεται ότι

$$\bar{G}(x,y) = \frac{\varphi}{1-\varphi} \int_0^x \bar{F}(x+y-t) dG(t). \tag{1.49}$$

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε τη λεγόμενη «κατανομή υπολειπομένου χρόνου ζωής» με συνάρτηση κατανομής $F_x(y) = 1 - \bar{F}_x(y)$, όπου

$$\bar{F}_x(y) = \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)}, \ y \geq 0 \tag{1.50}$$

και

$$f_x(y) = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)}. \tag{1.51}$$

Ορίζουμε επίσης τη συνάρτηση επιβίωσης,

$$\bar{A}_x(y) = \frac{\bar{G}(x,y)}{\bar{G}(x)}, \tag{1.52}$$

η οποία ικανοποιεί την

$$\bar{A}_x(y) = \frac{\int_0^x \bar{F}_{x-t}(y)\bar{F}(x-t)dG(t)}{\int_0^x \bar{F}(x-t)dG(t)}.\ y \geq 0 \tag{1.53}$$

Η (1.53) αποτελεί συνάρτηση επιβίωσης, αφού είναι μίξη της (1.50) στο x. Στην πραγματικότητα, η (1.52) είναι η συνάρτηση επιβίωσης του ελλείμματος της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπία. Τότε, η συνάρτηση επιβίωσης του υπολειπόμενου χρόνου ζωής της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής,

$$\bar{G}_x(y) = \frac{\bar{G}(x+y)}{\bar{G}(x)},\ y \geq 0 \tag{1.54}$$

ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\bar{G}_x(y) = \varphi \int_0^x \bar{G}_x(y-t)dF(t) + \varphi\bar{F}(y) + (1-\varphi)\bar{A}_x(y). \tag{1.55}$$

Για να το αποδείξουμε, έστω η τ.μ. Θ_y με συνάρτηση κατανομής $F_x(y)$, ανεξάρτητη της τ.μ. L. Τότε,

$$P(L + \Theta_y > x) = \bar{G}(x) + \int_0^x \bar{F}_y(x-t)dG(t) = \bar{F}_y(x) + \int_0^x \bar{G}(x+t)d\,F_y(t),$$

οπότε μέσω των (1.49) και (1.50) παίρνουμε,

$$\bar{G}(x,y) = \frac{\varphi}{1-\varphi}\bar{F}(y)\left\{\bar{F}_y(x) + \int_0^x \bar{G}(x+t)dF_y(t) - \bar{G}(x)\right\}$$

$$\bar{G}(x,y) = \frac{\varphi}{1-\varphi}\left\{\bar{F}(x+y) + \int_y^{x+y} \bar{G}(x+y-t)dF(t) - \bar{G}(x)\bar{F}(y)\right\}. \tag{1.56}$$

και μέσω της (1.40) έπεται ότι

$$\bar{G}(x,y) = \frac{\varphi}{1-\varphi}\left\{\frac{\bar{G}(x+y)}{\varphi} - \int_0^y \bar{G}(x+y-t)dF(t) - \bar{G}(x)\bar{F}(y)\right\}.$$

Η $\bar{G}_x(y)$ της (1.54) είναι η συνάρτηση επιβίωσης της τ.μ. $L+V_x$, οι οποίες είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες. Πιο αναλυτικά,

$$\bar{G}_x(y)=\frac{\bar{G}(x+y)}{\bar{G}(x)}=P(L+V_x>y),\ y\geq 0. \tag{1.57}$$

ή ισοδύναμα,

$$\bar{G}_x(y)=\bar{G}(x)+\int_0^y \bar{A}_x(y-t)dG(t)=\bar{A}_x(y)+\int_0^y \bar{G}(y-t)dA_x(t). \tag{1.58}$$

Έτσι, προκύπτει ότι ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, είναι η συνέλιξη της συγκεκριμένης σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με την $A_x(y)$. Για να αποδειχθεί η (1.57), παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace της (1.55) με τη βοήθεια της (1.16),

$$\tilde{\bar{\bar{G}}}_x(s)=\varphi\tilde{\bar{\bar{G}}}_x(s)\tilde{f}(s)+\varphi\frac{1-\tilde{f}(s)}{s}+(1-\varphi)\frac{1-E(e^{-sV_x})}{s}$$

ή ισοδύναμα

$$\tilde{\bar{\bar{G}}}_x(s)=\frac{\varphi\{1-\tilde{f}(s)\}+(1-\varphi)[1-E(e^{-sV_x})]}{s\{1-\varphi\tilde{f}(s)\}}=\frac{1-\varphi\tilde{f}(s)-(1-\varphi)[E(e^{-sV_x})]}{s\{1-\varphi\tilde{f}(s)\}}$$

ή

$$\tilde{\bar{\bar{G}}}_x(s)=\frac{1-E(e^{-sL})E(e^{-sV_x})}{s},$$

οπότε η αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace μας δίνει την (1.57).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.6 *Συνέλιξη σύνθετης γεωμετρικής κατανομής*

Έστω η συνάρτηση κατανομής μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής να είναι η

$K(x)=1-\bar{K}(x)=G*C(x)$, όπου $C(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής μίας θετικής τυχαίας μεταβλητής, ανεξάρτητης του L. Για τη συνάρτηση επιβίωσης θα ισχύει,

$$\bar{K}(x)=\bar{G}(x)+\int_0^x \bar{C}(x-t)dG(t)=\bar{C}(x)+\int_0^x \bar{G}(x-t)dC(t). \tag{1.59}$$

Από την (1.40), αν $C(x)=F(x)$, θα ισχύει $\bar{K}(x)=\bar{G}(x)/\varphi=\bar{G}(x)/\bar{G}(0)$. Τότε, η ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση,

$$\bar{K}(x)=\varphi\int_0^x \bar{K}(x-t)dF(t)+\varphi\bar{F}(x)+(1-\varphi)\bar{C}(x). \tag{1.60}$$

Ομοίως με την (1.47) ορίζουμε την από-κοινού συνάρτηση επιβίωσης,

$$\bar{\mathcal{H}}(x,y)=\int_0^x \bar{G}(x-t,y)dC(t)+\bar{C}(x+y). \tag{1.61}$$

Για το μετασχηματισμό Laplace του ολοκληρώματος της (1.61), κάνοντας χρήση και της (1.48), παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{-sx}\left\{\int_0^x \bar{G}(x-t,y)dC(t)\right\}dx$$
$$=\left\{\int_0^\infty e^{-sx}\bar{G}(x,y)dx\right\}\left\{\int_0^\infty e^{-sx}\,dC(x)\right\}$$
$$=\frac{\varphi}{1-\varphi}\left\{\int_0^\infty e^{-sx}\,dG(x)\right\}\left\{\int_0^\infty e^{-sx}\,\bar{F}(x+y)dx\right\}\left\{\int_0^\infty e^{-sx}\,dC(x)\right\}$$
$$=\int_0^\infty e^{-sx}\left\{\int_0^x \bar{G}(x-t,y)\,dC(t)\right\}dx=\frac{\varphi}{1-\varphi}\int_0^\infty e^{-sx}\left\{\int_0^x \bar{F}(x+y-t)dK(t)\right\}dx.$$

Τότε, λόγω της μοναδικότητας του μετασχηματισμού Laplace, η (1.61) ικανοποιεί την

$$\bar{\mathcal{H}}(x,y)=\bar{C}(x+y)+\tfrac{\varphi}{1-\varphi}\textstyle\int_0^x \bar{F}(x+y-t)dK(t). \qquad (1.62)$$

Ορίζουμε τώρα το πηλίκο των $\bar{\mathcal{H}}(x,y)$ και $\bar{K}(x)$ ως εξής:

$$\bar{\mathcal{M}}_x(y)=\tfrac{\bar{\mathcal{H}}(x,y)}{\bar{K}(x)}, \qquad (1.63)$$

ενώ ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής για τη συνάρτηση κατανομής K(y) θα είναι,

$$\bar{K}_x(y)=\frac{\bar{K}(x+y)}{\bar{K}(x)}, \qquad y\geq 0.$$

Όμως, για το δεύτερο όρο του δεξιού μέλους της (1.62) έχουμε την ίδια μορφή με τη (1.49) μόνο που το G αντικαθίσταται από K, και χρησιμοποιώντας τη (1.56) καταλήγουμε

$$\bar{\mathcal{H}}(x,y)=\bar{C}(x+y)+\frac{\varphi}{1-\varphi}\left\{\bar{F}(x+y)+\int_y^{x+y}\bar{K}(x+y-t)dF(t)-\bar{K}(x)\bar{F}(y)\right\}$$
$$=\bar{C}(x+y)+\frac{\varphi}{1-\varphi}\left\{\bar{F}(x+y)+\int_0^{x+y}\bar{K}(x+y-t)dF(t)-\int_0^y\bar{K}(x+y-t)dF(t)\right.$$
$$\left.-\bar{K}(x)\bar{F}(y)\right\}$$
$$=\bar{C}(x+y)+\frac{\varphi}{1-\varphi}\left\{\frac{\bar{K}(x+y)-(1-\varphi)\bar{C}(x+y)}{\varphi}-\int_0^y\bar{K}(x+y-t)dF(t)\right.$$
$$\left.-\bar{K}(x)\bar{F}(y)\right\}.$$

Διαιρώντας με $\bar{K}(x)$ καταλήγουμε στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την $\bar{K}_x(y)$,

$$\bar{K}_x(y)=\varphi\textstyle\int_0^y\bar{K}_x(y-t)dF(t)+\varphi\bar{F}(y)+(1-\varphi)\bar{\mathcal{M}}_x(y). \qquad (1.64)$$

Ομοίως με τις περιπτώσεις των (1.57) και (1.58), το αποτέλεσμα για τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής της σύνθετης γεωμετρικής συνέλιξης K(y), μπορεί να ανακτηθεί εναλλακτικά, ως εξής:

Έστω $\mathcal{R}_x$ ανεξάρτητο του L με συνάρτηση κατανομής $\mathcal{M}_x(y)$. Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace για τη (2.64) και κάνοντας χρήση της (2.28) θα έχουμε,

$$\int_0^{\infty} e^{-sx}\bar{K}_x(y) = \frac{1-\varphi\tilde{f}(s)-(1-\varphi)[E(e^{-sV_x})]}{s\{1-\varphi\tilde{f}(s)\}} = \frac{1-E(e^{-sL})E(e^{-sV_x})}{s},$$

και αντιστρέφοντας της άνωθι εξίσωση προκύπτει ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής για την $\bar{K}_x(y)$ ως εξής,

$$\bar{K}_x(y) = \frac{\bar{K}(x+y)}{\bar{K}(x)} = P(L+\mathcal{R}_x > y), \tag{1.65}$$

ή ισοδύναμα,

$$\bar{K}_x(y) = \bar{G}(y) + \int_0^y \bar{\mathcal{M}}_x(y-t)\,dG(t) = \bar{\mathcal{M}}_x(y) + \int_0^y \bar{G}(y-t)\,d\mathcal{M}_x(t).$$

□

1.4 Η ΜΙΚΤΗ ERLANG ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η κλάση των μικτών Erlang κατανομών, εντάσσεται στην ευρύτερη οικογένεια των θετικών κατανομών πιθανοτήτων. Η χρήση της μας δίνει εξαιρετικά αναλυτικές εκτιμήσεις των πιο σημαντικών μεγεθών στη Διαχείριση Κινδύνου.

Αρχικά, ας ορίσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μίας Erlang κατανομής, την οποία θα χρησιμοποιήσουμε αρκετά και στα επόμενα Κεφάλαια. Για β>0 και j=1,2,3,…

$$\mathcal{E}_{\beta,j}(y) = \frac{\beta(\beta y)^{j-1}e^{-\beta y}}{(j-1)!},\ y>0. \tag{1.66}$$

Δίνουμε επίσης και το μετασχηματισμό Laplace, ως εξής

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\beta,j}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy}\mathcal{E}_{\beta,j}(y)dy = \left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^j. \tag{1.67}$$

Στην περίπτωση που j=1 η Erlang κατανομή ανάγεται στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\mathcal{E}_{\beta,1}(y) = \beta e^{-\beta y}$ και μετασχηματισμό Laplace $\tilde{\mathcal{E}}_{\beta,1}(s) = \beta/\beta + s$. Χρήσιμο είναι εδώ, να ορίσουμε την $\mathcal{E}_{\beta,j}(x+y), x \geq 0, y \geq 0$. Έτσι, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{\beta,j}(x+y) &= \frac{\beta e^{-\beta(x+y)}}{(j-1)!}\sum_{k=0}^{j-1}\binom{j-1}{k}x^k y^{j-1-k} \\ &= \frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^{j-1}\left\{\frac{\beta^{k+1}x^k e^{-\beta x}}{k!}\right\}\left\{\frac{\beta^{j-k}y^{j-k-1}e^{-\beta y}}{(j-k-1)!}\right\}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^{j-1} \mathcal{E}_{\beta,k+1}(x)\mathcal{E}_{\beta,j-k}(y).$$

Συνεπώς,

$$\mathcal{E}_{\beta,j}(x+y) = \frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{j} \mathcal{E}_{\beta,k}(x)\mathcal{E}_{\beta,j+1-k}(y). \tag{1.68}$$

Ακόμα, έστω η ακολουθία πιθανοτήτων $\{q_1, q_2, \dots\}$ με πιθανογεννήτρια συνάρτηση,

$$Q(z) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j z^j. \tag{1.69}$$

Τότε για y>0,

$$f(y) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \mathcal{E}_{\beta,j}(y) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \frac{\beta(\beta y)^{j-1}e^{-\beta y}}{(j-1)!}, \tag{1.70}$$

λέμε ότι η f ακολουθεί μία μικτή Erlang κατανομή.

Ο μετασχηματισμός Laplace της (1.70), μέσω των σχέσεων (1.67) και (1.69), είναι

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} f(y)dy = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^j = Q\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right), \tag{1.71}$$

οπότε η κλάση της μικτής Erlang κατανομής, μπορεί να θεωρηθεί σαν μία σύνθετη κατανομή με εκθετικό δεύτερο μέρος.

Για $q_j = 1$ η f(y) ανάγεται στην περίπτωση της Erlang κατανομής με παράμετρο j. Για $\beta_1 < \beta$ ορίζουμε την ακόλουθη αλγεβρική ταυτότητα:

$$\frac{\beta_1}{\beta_1+s} = \frac{\beta}{\beta+s}\left\{\frac{\frac{\beta_1}{\beta}}{1-\left(1-\frac{\beta_1}{\beta}\right)\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)}\right\}, \tag{1.72}$$

η οποία εκφράζει (σε μορφή μετασχηματισμού Laplace) ότι ένα περικομμένο στο μηδέν γεωμετρικό άθροισμα εκθετικών τυχαίων μεταβλητών, ακολουθεί την εκθετική κατανομή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.8 *Μίξη δύο εκθετικών κατανομών*

Έστω $f(y) = p\beta_1 e^{-\beta_1 y} + (1-p)\beta_2 e^{-\beta_2 y},\ με\ 0 < \beta_1 < \beta_2\ και\ 0 < p < 1$ μία μίξη δύο εκθετικών κατανομών, με βάρη μίξης p και 1-p τα οποία αθροίζουν στη μονάδα. Τότε,

$$\tilde{f}(s) = p\frac{\beta_1}{\beta_1+s} + (1-p)\frac{\beta_2}{\beta_2+s},$$

δηλαδή $\tilde{f}(s) = Q(\frac{\beta_2}{\beta_2+s})$ με

$$Q(z) = z\left\{1 - p + p\left[\frac{\frac{\beta_1}{\beta_2}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)z}\right]\right\}$$

ή

$$Q(z) = \left\{1 - p + p\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)\right\}z + p\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^j z^j.$$

Έτσι, για τους συντελεστές q_j του z^j θα έχουμε,

$$q_j = \begin{cases} 1 - p + p\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right), & j = 1 \\ p\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)\left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^j, & j = 2,3,\ldots \end{cases}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.9 *Άθροισμα ανεξάρτητων Γάμμα κατανομών*

Έστω ο μετασχηματισμός Laplace

$$\tilde{f}(s) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i + s}\right)^{\alpha_i}, \tag{1.73}$$

και $\beta = sup_i\beta_i$. Κάνοντας χρήση της (1.72) συνεπάγεται ότι η (1.73) μπορεί να εκφραστεί ως $\tilde{f}(s) = Q\{\beta/(\beta + s)\}$ όπου,

$$Q(z) = z^m \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\frac{\beta_i}{\beta}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta}\right)z}\right)^{\alpha_i}, \tag{1.74}$$

με $m = \sum_{i=1}^{n}\alpha_i$. Τότε, αν το m είναι ένας θετικός ακέραιος αριθμός, η (1.74) αποτελεί την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της συνέλιξης αρνητικών διωνυμικών κατανομών, μετατοπισμένων δεξιά κατά m. Τέλος, για $\alpha_i = 1$ όπου i=1,2,…,n η (1.73) είναι ο μετασχηματισμός Laplace της γενικευμένης Erlang κατανομής, που ανήκει στην οικογένεια των μικτών Erlang κατανομών.

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.10 *Μίξη Erlang κατανομών με διαφορετική κλίμακα παραμέτρων*

Έστω,

$$f(y) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}\,\mathcal{E}_{\beta,k}(y),$$

με $p_{ik} > 0, \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik} = 1$ και $\beta < \infty$.

Τότε, για το μετασχηματισμό Laplace έχουμε,

$$\tilde{f}(s) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i+s}\right)^k, \tag{1.75}$$

και μέσω των (1.72) και (1.75), παίρνουμε

$$Q(z) = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}\, z^k\left(\frac{\frac{\beta_i}{\beta}}{1-\left(1-\frac{\beta_i}{\beta}\right)z}\right)^k. \tag{1.76}$$

Το ανάπτυγμα μίας αρνητικής διωνυμικής κατανομής στην (1.76) μας δίνει,

$$\begin{aligned} Q(z) &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}\sum_{m=0}^{\infty}\binom{k+m-1}{k-1}\left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^k\left(1-\frac{\beta_i}{\beta}\right)^m z^{m+k} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} p_{ik}\sum_{j=k}^{\infty}\binom{j-1}{k-1}\left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^k\left(1-\frac{\beta_i}{\beta}\right)^{j-k} z^j \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\sum_{k=1}^{j} p_{ik}\binom{j-1}{k-1}\left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^k\left(1-\frac{\beta_i}{\beta}\right)^{j-k}\right\} z^j, \end{aligned}$$

οπότε, εναλλάσσοντας τη σειρά των δύο πρώτων αθροισμάτων καταλήγουμε ότι οι συντελεστές q_j των z^j θα υπολογίζονται σύμφωνα με τη σχέση,

$$q_j = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{j} p_{ik}\binom{j-1}{k-1}\left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^k\left(1-\frac{\beta_i}{\beta}\right)^{j-k},\ j = 1,2,.. \tag{1.77}$$

□

Συνεχίζοντας την ανάλυσή μας για την οικογένεια των μικτών Erlang κατανομών, ας δώσουμε το μετασχηματισμό Laplace της συνάρτησης επιβίωσης

$$\int_0^{\infty} e^{-sy}\bar{F}(y)dy = \frac{1-Q\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)}{s} = \sum_{j=1}^{\infty} q_j\left\{\frac{1-\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^j}{s}\right\}.$$

Μέσω της σχέσης

$$\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^k = \left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)\frac{1-\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^j}{1-\frac{\beta}{\beta+s}} = \beta\,\frac{1-\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^j}{s},$$

παίρνουμε,

$$\int_0^{\infty} e^{-sy}\bar{F}(y)dy = \frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{\infty} q_j\sum_{k=1}^{j}\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^k = \frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^k\sum_{j=k}^{\infty} q_j$$

$$\Rightarrow \int_0^\infty e^{-sy}\bar{F}(y)dy = \frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^\infty \bar{Q}_k \left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^{k+1}, \tag{1.78}$$

όπου $\bar{Q}_k = \sum_{j=k+1}^\infty q_j, k = 0,1,2,..$ (1.79)

Τότε, για τη συνάρτηση δεξιάς ουράς της μικτής Erlang κατανομής θα ισχύει ότι

$$\bar{F}(y) = \frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^\infty \bar{Q}_k\, \mathcal{E}_{\beta,k+1}(y) = e^{-\beta y}\sum_{k=0}^\infty \bar{Q}_k \frac{(\beta y)^k}{k!}. \tag{1.80}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.11 *(Ο υπολειπόμενος χρόνος ζωής για τη μικτή Erlang κατανομή)*

Από τη σχέση (1.68) έχουμε

$$\begin{aligned} f(x+y) &= \sum_{j=1}^\infty q_j \mathcal{E}_{\beta,j}(x+y) \\ &= \frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^\infty q_j \sum_{k=1}^j \mathcal{E}_{\beta,k}(y)\,\mathcal{E}_{\beta,j+1-k}(x) \\ &= \frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^\infty\sum_{j=k}^\infty q_j \mathcal{E}_{\beta,k}(y)\,\mathcal{E}_{\beta,j+1-k}(x). \end{aligned}$$

Τότε, για n=k-1 και m=j-k παίρνουμε

$$f(x+y) = \frac{1}{\beta}\sum_{m=0}^\infty\sum_{n=0}^\infty q_{m+n+1}\mathcal{E}_{\beta,m+1}(x)\,\mathcal{E}_{\beta,n+1}(y). \tag{1.81}$$

Αντικαθιστώντας την (1.81) στην (1.51),

$$f_x(y) = \frac{\frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^\infty \mathcal{E}_{\beta,j}(y)\sum_{k=0}^\infty q_{j+k}\mathcal{E}_{\beta,k+1}(x)}{\frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^\infty \bar{Q}_k\,\mathcal{E}_{\beta,k+1}(x)}$$

ή

$$f_x(y) = \sum_{j=1}^\infty q_{j,x}\,\mathcal{E}_{\beta,j}(y),\ \ y \geq 0, \tag{1.82}$$

$$\text{όπου } q_{j,x} = \frac{\sum_{k=0}^\infty q_{j+k}\mathcal{E}_{\beta,k+1}(x)}{\sum_{k=0}^\infty \bar{Q}_k\mathcal{E}_{\beta,k+1}(x)},\ \ j = 1,2,.. \tag{1.83}$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.12 *(Γενικευμένη κατανομή ισορροπίας για μικτή Erlang κατανομή)*

Ας επανέλθουμε τη σχέση (1.18). Παραγωγίζοντάς την, παίρνουμε

$$f_{1,r}(y) = \frac{\int_0^\infty e^{-rx} f(x+y)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)dx} = \frac{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x) f_x(y)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)dx}, \tag{1.84}$$

Στην περίπτωση της μικτής Erlang κατανομής, είναι

$$f_{1,r}(y) = \sum_{j=1}^\infty q_j(r)\mathcal{E}_{\beta,j}(y), \tag{1.85}$$

όπου

$$q_j(r) = \frac{\int_0^\infty q_{j,x} e^{-rx}\bar{F}(x)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)dx},\ j = 1,2,\ldots \tag{1.86}$$

Για τον παρονομαστή της (1.86) θα έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)dx = \frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^\infty \bar{Q}_k\, \tilde{\mathcal{E}}_{\beta,k+1}(r) = \frac{1}{\beta+r}\sum_{k=0}^\infty \bar{Q}_k\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^k.$$

Αντίστοιχα, για τον αριθμητή ισχύει ότι

$$q_{j,x} e^{-rx}\bar{F}(x) = \frac{e^{-rx}}{\beta}\sum_{k=0}^\infty q_{j+k}\, \mathcal{E}_{\beta,k+1}(x),$$

και χρησιμοποιώντας ξανά την (1.67), προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty q_{j,x} e^{-rx}\bar{F}(x)dx = \frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^\infty q_{j+k}\, \tilde{\mathcal{E}}_{\beta,k+1}(r) = \frac{1}{\beta+r}\sum_{k=0}^\infty q_{j+k}\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^k,$$

οπότε η (1.86) γίνεται

$$q_j(r) = \frac{\sum_{k=0}^\infty q_{j+k}\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^k}{\sum_{k=0}^\infty \bar{Q}_k\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^k}, j = 1,2,.. \tag{1.87}$$

Για την περαιτέρω ανάλυση της παραπάνω διακριτής κατανομής, παίρνουμε την πιθανογεννήτρια συνάρτηση

$$Q_{1,\frac{\beta}{\beta+r}}(z) = \frac{1-\frac{\beta}{\beta+r}}{1-Q\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)}\frac{Q(z)-Q\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)}{z-\frac{\beta}{\beta+r}}$$

ή

$$Q_{1,\frac{\beta}{\beta+r}}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{n,1}\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right) z^n,$$

όπου

$$q_{n,1}\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right) = \frac{\sum_{j=n+1}^{\infty} q_j \left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^{j-n-1}}{\sum_{j=0}^{\infty} \bar{Q}_j \left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^j} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} q_{j+n+1} \left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^{j}}{\sum_{j=0}^{\infty} \bar{Q}_j \left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^j},$$

οπότε από την (1.87), έπεται ότι $q_j(r) = q_{j-1,1}\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)$. Επομένως, είναι

$$\sum_{j=1}^{\infty} q_j(r) z^j = \sum_{j=1}^{\infty} q_{j-1,1}\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right) z^j = zQ_{1,\frac{\beta}{\beta+r}}(z) = Q_r^*(z).$$

Άμεσα προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned} Q_r^*\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right) &= \left(\frac{\beta}{\beta+s}\right) \frac{1-\frac{\beta}{\beta+r}}{1-Q\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)} \frac{Q\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right) - Q\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)}{\frac{\beta}{\beta+s} - \frac{\beta}{\beta+r}} \\ &= \frac{\frac{\beta}{\beta+s}\frac{r}{\beta+r}}{\frac{\beta}{\beta+s} - \frac{\beta}{\beta+r}} \frac{Q\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right) - Q\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)}{1-Q\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)} \\ &= \frac{r}{\beta+r-\beta-s} \frac{Q\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right) - Q\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)}{1-Q\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)} \\ &= \frac{r}{s-r} \frac{Q\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right) - Q\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)}{1-Q\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)}, \end{aligned}$$

που είναι η (1.20) με $\tilde{f}(s) = Q\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)$.

Από τον Feller (1968)(p.265), είναι γνωστό ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_k z^k = \frac{1-Q(z)}{1-z}, \tag{1.88}$$

οπότε για r>0 η (1.87) μπορεί να γραφτεί και ως

$$q_j(r) = \left(\frac{r}{\beta+r}\right) \frac{\sum_{k=0}^{\infty} q_{j+k} \left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)^k}{1-Q\left(\frac{\beta}{\beta+r}\right)},$$

ενώ για r=0, είναι

$$q_j(0) = \frac{\bar{Q}_{j-1}}{\sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_k},\ j = 1,2,.. \tag{1.89}$$

Συνεπώς, για τη συνάρτηση ισορροπίας της μικτής Erlang κατανομής θα έχουμε

$$f_{1,0}(y) = \frac{\bar{F}(y)}{E(Y)} = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(0)\mathcal{E}_{\beta,j}(y).$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.13 *(Ο μετασχηματισμός Esscher)*

Επειδή $\tilde{f}(s) = Q\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)$, έπεται ότι

$$\frac{\tilde{f}(\mu+s)}{\tilde{f}(\mu)} = \frac{Q\left(\frac{\beta}{\beta+\mu+s}\right)}{Q\left(\frac{\beta}{\beta+\mu}\right)} = \frac{Q\left(\frac{\beta}{\beta+\mu}\cdot\frac{\beta+\mu}{\beta+\mu+s}\right)}{Q\left(\frac{\beta}{\beta+\mu}\right)} = Q^*\left(\frac{\beta+\mu}{\beta+\mu+s}\right),$$

με

$$Q^*(z) = \frac{Q\left(\frac{\beta}{\beta+\mu}z\right)}{Q\left(\frac{\beta}{\beta+\mu}\right)}$$

οπότε παίρνουμε

$$q_n^* = \frac{\left(\frac{\beta}{\beta+\mu}\right)^n q_n}{Q\left(\frac{\beta}{\beta+\mu}\right)}.$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.14 *(Σύνθετη γεωμετρική κατανομή)*

Έστω η τυχαία μεταβλητή L να ακολουθεί μία σύνθετη γεωμετρική κατανομή με μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes όπως δίνεται στη (1.28). Η αντικατάσταση του μετασχηματισμού Laplace της (1.71) μας δίνει

$$E(e^{-sL}) = C\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right),$$

όπου

$$C(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j z^j = \frac{1-\varphi}{1-\varphi Q(z)},$$

η οποία είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Έτσι, η τυχαία μεταβλητή L θα έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$g(y) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\, \mathcal{E}_{\beta,j}(y), \qquad y > 0$$

με $P(L=0)=c_0=1-\varphi$. Επίσης,

$$C(z)=\varphi Q(z)C(z)+(1-\varphi),$$

το οποίο μας οδηγεί μέσω της εξίσωσης των συντελεστών του z^j στην ταυτότητα

$$c_n=\varphi\sum_{k=1}^{n}q_k c_{n-k}\,,\ n=1,2,.. \tag{1.91}$$

Για κάθε $\alpha\geq 0$ από την (1.81) θα έχουμε

$$\begin{aligned}\int_y^\infty (x-y)^\alpha g(x)dx &= \int_0^\infty x^\alpha g(x+y)dx\\ &=\frac{1}{\beta}\int_0^\infty x^\alpha\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,n+1}(y)\sum_{m=0}^{\infty}c_{m+n+1}\mathcal{E}_{\beta,m+1}(x)\right\}dx\\ &=\frac{1}{\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,n+1}(y)\sum_{m=0}^{\infty}c_{m+n+1}\int_0^\infty x^\alpha\mathcal{E}_{\beta,m+1}(x)dx.\end{aligned}$$

Μέσω της (1.66) έχουμε

$$\int_0^\infty x^\alpha\mathcal{E}_{\beta,m+1}(x)dx=\frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{m!\,\beta^\alpha},$$

και έτσι

$$\int_y^\infty (x-y)^\alpha g(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,n+1}(y)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{c_{m+n+1}\Gamma(m+\alpha+1)}{m!\,\beta^\alpha}$$

$$\Rightarrow\int_y^\infty (x-y)^\alpha g(x)dx=e^{-\beta y}\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{n,\alpha}\frac{(\beta y)^n}{n!}, \tag{1.92}$$

όπου

$$\gamma_{n,\alpha}=\sum_{m=0}^{\infty}c_{m+n+1}\frac{\Gamma(m+\alpha+1)}{m!\,\beta^\alpha},\qquad n=0,1,2,..$$

Για α=0 $\Rightarrow \gamma_{n,0}=\sum_{m=0}^{\infty}c_{m+n+1}=\bar{C}_n$ και η (1.92) θα γίνει

$$\bar{G}(y)=P(L>y)=e^{-\beta y}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{C}_n\frac{(\beta y)^n}{n!},\ y\geq 0. \tag{1.93}$$

Τα $\bar{C}_n$ έχουν πιθανογεννήτρια συνάρτηση

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{C}_n z^n &= \frac{1}{1-z}\left\{1-\frac{1-\varphi}{1-\varphi Q(z)}\right\}\\ &=\frac{\varphi}{1-\varphi Q(z)}\frac{1-Q(z)}{1-z}.\end{aligned} \tag{1.94}$$

Εξισώνοντας ξανά τους συντελεστές του z^n θα έχουμε

$$\bar{C}_n = \frac{\varphi}{1-\varphi}\sum_{k=0}^{n} c_k \bar{Q}_{n-k}, \qquad n = 0,1,2,..$$

Εναλλακτικά, για την (1.94) μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n z^n = \varphi Q(z)\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n z^n\right\} + \varphi\frac{1-Q(z)}{1-z},$$

από την οποία εξισώνοντας τους συντελεστές του z^n, παίρνουμε τη διακριτή ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση που ικανοποιούν τα $\bar{C}_n$

$$\bar{C}_n = \varphi \sum_{k=1}^{n} c_k \bar{C}_{n-k} + \varphi \bar{Q}_n,\ n = 1,2,.. \tag{1.95}$$

Τα $\bar{C}_n$ μπορούν να υπολογισθούν αναδρομικά μέσω της (2.95) ξεκινώντας με $\bar{C}_0 = \varphi$.

□

1.5 Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ COX

Μία ακόμη χρήσιμη οικογένεια κατανομών, είναι η κατανομή Cox. Ο μετασχηματισμός Laplace της κατανομής Cox ορίζεται ως

$$\tilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sy} dF(y) = \frac{\alpha(s)}{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+s)^{n_i}}, \tag{1.96}$$

με $\lambda_i > 0, i = 1,2,\dots,m$.

Τα n_i είναι θετικοί ακέραιοι αριθμοί με $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$. Έτσι, ο παρονομαστής της (1.96) είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n κι ο αριθμητής ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n-1.

Αφού $\tilde{f}(0) = 1\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \alpha(0) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{\,n_i}$. Αν $\alpha(s) = \alpha(0)\ \forall\ s > 0$, τότε η (1.96) είναι ο μετασχηματισμός Laplace του αθροίσματος m ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την Erlang κατανομή. Φυσικά, για m=n=1 η (1.96) αποτελεί το μετασχηματισμό Laplace στην περίπτωση της εκθετικής κατανομής.

Μέσω της τεχνικής μερικών κλασμάτων παίρνουμε

$$\tilde{f}(s) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} p_{ij} \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+s}\right)^{j}. \tag{1.97}$$

Έτσι, η (1.97) μας δείχνει ότι η κατανομή Cox αποτελεί έναν συνδυασμό Erlang κατανομών. Αν $n_i = 1$ τότε αποτελεί συνδυασμό εκθετικών κατανομών. Επιπρόσθετα, αν $p_{ij} \geq 0\ \forall\ i,j$ η κατανομή είναι Erlang μικτού τύπου όπως συζητήθηκε στην προηγούμενη ενότητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.15 *(Η περίπτωση n=2)*

Η σχέση (1.96) γράφεται

$$\tilde{f}(s) = \frac{\alpha_1 s + \alpha_0}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}.$$

Αρχικά, $\alpha_0 = \lambda_1\lambda_2$ και θέτοντας $\alpha_1 = \lambda_1(1-p)$, τότε ο μετασχηματισμός Laplace μίας κατανομής Cox με παράμετρο n=2 γράφεται

$$\tilde{f}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y)dy = \frac{\lambda_1(1-p)s+\lambda_1\lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}. \tag{1.98}$$

Από την (1.98) είναι φανερό ότι αν p=0 τότε η $\tilde{f}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της εκθετικής κατανομής με μέσο $1/\lambda_1$, ενώ αν $\lambda_2 = \lambda_1(1-p)$ τότε η $\tilde{f}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της εκθετικής κατανομής με μέσο $1/\lambda_2$.

Η (1.98) γράφεται

$$\tilde{f}(s) = (1-p)\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} + p\frac{\lambda_1\lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}, \tag{1.99}$$

οπότε

$$f(y) = \lambda_1(1-p)e^{-\lambda_1 y} + \lambda_1\lambda_2 p e^{-\lambda_1 y} h(y), \tag{1.100}$$

όπου

$$h(y) = \int_0^y e^{(\lambda_1-\lambda_2)x}\, dx. \tag{1.101}$$

Για την ουρά της $f(y)$ μπορούμε να γράψουμε

$$\bar{F}(y) = (1-p)e^{-\lambda_1 y} + p\left[e^{-\lambda_1 y} + \lambda_1 e^{-\lambda_1 y} h(y)\right]$$

ή

$$\bar{F}(y) = e^{-\lambda_1 y}[1 + \lambda_1 p h(y)]. \tag{1.102}$$

Εάν $\lambda_1 \geq \lambda_2$ τότε από την (1.101) είναι $\lim_{y\to\infty} h(y) = \infty$ κι από τη (1.102) θα πρέπει $p \geq 0$ διότι σε διαφορετική περίπτωση η παράσταση $e^{-\lambda_1 y}\bar{F}(y)$ θα γινόταν αρνητική για μεγάλες τιμές του y. Επομένως, αν $0 < p < 1$ και $\lambda_1 \geq \lambda_2$ η (1.99) αποτελεί τη μίξη ενός μετασχηματισμού Laplace εκθετικής κατανομής με μέσο $1/\lambda_1$ κι ενός μετασχηματισμού Laplace του αθροίσματος δύο εκθετικών κατανομών με μέσους $1/\lambda_1$ και $1/\lambda_2$. Αν p=1 είναι ο μετασχηματισμός Laplace του αθροίσματος δύο εκθετικών κατανομών με μέσους $1/\lambda_1$ και $1/\lambda_2$. Για $\lambda_1 = \lambda_2$ η (1.99) είναι ο μετασχηματισμός Laplace μίας μικτής Erlang κατανομής.

Στην περίπτωση $\lambda_1 < \lambda_2$ τότε από τη (1.101)

$$h(y) = \frac{1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)y}}{\lambda_2 - \lambda_1},$$

η οποία μέσω της (1.102), δίνει

$$\lim_{y\to\infty} e^{-\lambda_1 y}\bar{F}(y) = 1 + \lambda_1 p \lim_{y\to\infty} h(y) = 1 + p\frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Αφού το συγκεκριμένο όριο δεν μπορεί να είναι αρνητικό, θα πρέπει $p \geq 1 - \lambda_2/\lambda_1$ ή ισοδύναμα $\lambda_2 \geq \lambda_1(1-p)$. Όμως $\lambda_2 \neq \lambda_1(1-p) \Rightarrow \lambda_1 < \lambda_2 \Rightarrow 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < p \leq 1$ με $p \neq 0$.

Θα δείξουμε τώρα ότι για $\lambda_1 < \lambda_2$ και $p < 0$ η (2.99) είναι ο μετασχηματισμός Laplace του αθροίσματος δύο εκθετικών κατανομών με μέσους $1/\lambda_1$ και $1/\lambda_2$. Προς τούτο, παρατηρούμε ότι αν $1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < p < 0$ τότε $p = \alpha\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)$, όπου $0 < \alpha < 1$.

Έτσι, για $\lambda_1 \neq \lambda_2$ θα έχουμε

$$\frac{\lambda_1\lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_2-\lambda_1}\right)\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}, \tag{1.103}$$

οπότε το άθροισμα δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών εκθετικά κατανεμημένων με διαφορετικούς μέσους, έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η οποία είναι συνδυασμός δύο εκθετικών μερών. Αντικαθιστώντας τη (1.103) στη (1.99) και διατηρώντας την υπόθεση ότι $\lambda_1 \neq \lambda_2$, παίρνουμε

$$\tilde{f}(s) = \left(1 - p + p\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}\right)\frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + \left(p\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)\frac{\lambda_2}{s + \lambda_2}$$

ή

$$\tilde{f}(s) = \left(1 - p\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1} + \left(p\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\right)\frac{\lambda_2}{s+\lambda_2}, \tag{1.104}$$

που είναι ο μετασχηματισμός Laplace του συνδυασμού δύο εκθετικών κατανομών. Έτσι, αν $p = \alpha\left(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right) τότε\ \alpha = p\frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}$ και η (2.104) θα γίνει

$$\tilde{f}(s) = (1-\alpha)\frac{\lambda_1}{s + \lambda_1} + \alpha\frac{\lambda_2}{s + \lambda_2},$$

που για $0 < \alpha < 1$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της μίξης δύο εκθετικών κατανομών.

Συνοψίζοντας, για την περίπτωση n=2 στην κατανομή Cox:

i) Έχει μετασχηματισμό Laplace όπως αυτός περιγράφεται στη (1.99), ο οποίος για p=1 είναι του αθροίσματος δύο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που ακολουθούν την εκθετική κατανομή (πιθανώς, με διαφορετικούς μέσους).

ii) Για $0 < p < 1$ έχει μετασχηματισμό Laplace όπως αυτός περιγράφεται στη (1.99), ο οποίος αποτελεί μίξη ενός μετασχηματισμού Laplace εκθετικής κατανομής και του αθροίσματος δύο εκθετικών κατανομών.

iii) Για $1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} < p < 0$ με $\lambda_1 < \lambda_2$ αποτελεί μίξη δύο εκθετικών κατανομών.

Για $\lambda_1 \neq \lambda_2$,

$$\bar{F}(y) = \left(1 - p\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)e^{-\lambda_1 y} + \left(p\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)e^{-\lambda_2 y},$$

και μέσω της (2.50)

$$\bar{F}_x(y) = \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = \left(1 - p_x\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)e^{-\lambda_1 y} + \left(p_x\frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2}\right)e^{-\lambda_2 y},$$

όπου $p_x = \frac{pe^{-\lambda_2 x}}{\bar{F}(x)}$. (1.105)

Ομοίως, αν $\lambda_1 = \lambda_2$,

$$\bar{F}(y) = e^{-\lambda_2 y}\{1 + p\lambda_2 y\}$$

και

$$\bar{F}_x(y) = \frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(x)} = e^{-\lambda_2 y}\{1 + p_x\lambda_2 y\}.$$

Έτσι, η κατανομή υπερβάλλουσας ζημίας με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_x(y) = \frac{f(x+y)}{\bar{F}(x)}$ είναι μορφής κατανομής Cox για n=2, με το p να αντικαθίσταται από το p_x. Ως εκ τούτου, μέσω της (1.98), παίρνουμε

$$\tilde{f}_x(s) = \int_0^\infty e^{-sy} f_x(y)dy = \frac{\lambda_1(1-p_x)s + \lambda_1\lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}. \quad (1.106)$$

Για τη γενικευμένη κατανομή ισορροπίας όπως αυτή ορίζεται στην (1.18) έχουμε

$$\tilde{f}_{1,r}(s) = \frac{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)\,\tilde{f}_x(s)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)\,dx} = \frac{\lambda_1(1 - p_{1,r})s + \lambda_1\lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)},$$

όπου

$$p_{1,r} = \frac{\int_0^\infty p_x e^{-rx}\bar{F}(x)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{F}(x)dx}. \quad (1.108)$$

Φυσικά, η (1.107) μας δείχνει ότι η γενικευμένη κατανομή ισορροπίας της (1.18) είναι μορφής Cox για n=2, μόνο που αντί για p έχουμε $p_{1,r}$ στη (1.108). Χρησιμοποιώντας τις (1.16) και (1.99) βρίσκουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace της $\bar{F}(y)$ ικανοποιεί την

$$\begin{aligned}\frac{1-\tilde{f}(s)}{s} &= \frac{1}{s}\left\{1-(1-p)\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1}-p\frac{\lambda_1\lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}\right\}\\ &= \frac{1}{s}\left\{(1-p)\left(1-\frac{\lambda_1}{s+\lambda_1}\right)+p\left(1-\frac{\lambda_1\lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}\right)\right\}\\ &= \frac{1-p}{s+\lambda_1}+p\frac{s+\lambda_1+\lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}\\ &= \frac{(1-p)(s+\lambda_2)+p(s+\lambda_1+\lambda_2)}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\int_0^\infty e^{-sy}\,\bar{F}(x)dx = \frac{s+\lambda_1 p+\lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}. \tag{1.109}$$

Ακόμα, από την (1.105) έχουμε ότι

$$\int_0^\infty p_x e^{-rx}\,\bar{F}(x)dx = p\int_0^\infty e^{-(r+\lambda_2)x}dx = \frac{p}{r+\lambda_2}$$

οπότε

$$p_{1,r} = \frac{p(r+\lambda_1)}{r+\lambda_2+\lambda_1 p}. \tag{1.110}$$

Συνοψίζοντας, η γενικευμένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισορροπίας $f_{1,r}(y)$ είναι της μορφής κατανομής Cox με n=2, μόνο που αντί για p έχουμε $p_{1,r}$.

Η συνάρτηση επιβίωσης της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής έχει μετασχηματισμό Laplace που δίνεται από τη σχέση

$$\int_0^\infty e^{-sy}\bar{G}(y)dy = \frac{1}{s}\left\{1-\frac{1-\varphi}{1-\varphi\tilde{f}(s)}\right\} = \left\{\frac{\varphi}{1-\varphi\tilde{f}(s)}\right\}\frac{1-\tilde{f}(s)}{s}.$$

Στην περίπτωση που η $\tilde{f}(s)$ έχει μετασχηματισμό Laplace της μορφής (1.98), τότε μέσω και της (1.109) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-sy}\bar{G}(y)dy &= \frac{\varphi\dfrac{s+\lambda_1 p+\lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}}{1-\varphi\dfrac{\lambda_1(1-p)s+\lambda_1\lambda_2}{(s+\lambda_1)(s+\lambda_2)}}\\ &= \frac{\varphi(s+\lambda_1 p+\lambda_2)}{s^2+\{\lambda_1+\lambda_2-\varphi\lambda_1(1-p)\}s+\lambda_1\lambda_2(1-\varphi)}.\end{aligned}$$

Οπότε, είναι

$$\int_0^\infty e^{-sy}\bar{G}(y)dy = \frac{\varphi(s+\lambda_1 p+\lambda_2)}{(s+R_1)(s+R_2)}, \tag{1.111}$$

όπου

$$R_1, R_2 = \frac{1}{2}\left[\{\lambda_1 + \lambda_2 - \varphi\lambda_1(1-p)\} \pm \sqrt{\{\lambda_1 + \lambda_2 - \varphi\lambda_1(1-p)\}^2 - 4\lambda_1\lambda_2(1-\varphi)}\right]. \quad (1.112)$$

Οι ρίζες R_1, R_2 είναι πραγματικές, διακριτές και θετικές. Για $\lambda_1 \geq \lambda_2$ και $0 < p \leq 1$ έχουμε

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \varphi\lambda_1(1-p) = \lambda_2 + \lambda_1\{1 - \varphi(1-p)\} > 0,$$

και

$$\begin{aligned} &\{\lambda_1 + \lambda_2 - \varphi\lambda_1(1-p)\}^2 - 4\lambda_1\lambda_2(1-\varphi) \\ &= \{\lambda_1[1 - \varphi(1-p)] - \lambda_2\}^2 + 4\lambda_1\lambda_2\{[1 - \varphi(1-p)] - (1-\varphi)\} \\ &= \{\lambda_1[1 - \varphi(1-p)] - \lambda_2\}^2 + 4\lambda_1\lambda_2\varphi p, \end{aligned}$$

που είναι θετικός αριθμός. Ομοίως, για $\lambda_1 < \lambda_2, είναι\ \lambda_2 - \lambda_1(1-p) > 0$, και

$$\begin{aligned} &\{\lambda_1 + \lambda_2 - \varphi\lambda_1(1-p)\}^2 - 4\lambda_1\lambda_2(1-\varphi) \\ &= \{\lambda_1 - [\lambda_2 - \varphi\lambda_1(1-p)]\}^2 + 4\lambda_1\{[\lambda_2 - \varphi\lambda_1(1-p)] - \lambda_2(1-\varphi)\} \\ &= \{\lambda_1 - [\lambda_2 - \varphi\lambda_1(1-p)]\}^2 + 4\varphi\lambda_1\{\lambda_2 - \lambda_1(1-p)\}, \end{aligned}$$

το οποίο και πάλι είναι θετικός αριθμός.

Τέλος, η (1.111) μπορεί να εκφραστεί ως συνδυασμός εκθετικών κατανομών, βάσει της ακόλουθης διαδικασίας

$$\int_0^\infty e^{-sy}\bar{G}(y)dy = \frac{\varphi}{R_2 - R_1}\left\{\frac{\lambda_2 + \lambda_1 p - R_1}{s + R_1}\frac{R_2 - \lambda_2 - \lambda_1 p}{s + R_2}\right\},$$

από την οποία έπεται ότι

$$\bar{G}(y) = \frac{\varphi}{R_2 - R_1}\{(\lambda_2 + \lambda_1 p - R_1)e^{-R_1 y} + (R_2 - \lambda_2 - \lambda_1 p)e^{-R_2 y}\}, \qquad y \geq 0.$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ GERBER – SHIU ΣΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ POISSON

Το κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson είναι ένα από τα πλέον σημαντικά εργαλεία που έχουμε στην ανάλυση πλεονάσματος των ασφαλιστικών κινδύνων. Σε αυτό το κεφάλαιο θα πραγματοποιηθεί εκτενής ανάλυση της συνάρτησης Gerber – Shiu, που μία πολύ σημαντική συνάρτηση στη μελέτη της πιθανότητας χρεοκοπίας.

2.1 ΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ POISSON

Ένα ευρέως χρησιμοποιούμενο μοντέλο για την ανάλυση της φερεγγυότητας μιας ασφαλιστικής εταιρίας είναι το κλασσικό μοντέλο Poisson. Η βασική υπόθεση που κάνουμε είναι ότι το συνολικό ύψος των ζημιών $\{S_t \ , t > 0\}$ ακολουθεί μία σύνθετη Poisson κατανομή και το πλήθος των ζημιών $\{N_t \ , t > 0\}$ ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο λt.

Έτσι, για το χρονικό διάστημα $(t_1, t_2]$ το πλήθος των ζημιών $\{N_{t_2} - N_{t_1}\}$ έχει μέσο $\lambda(t_2 - t_1)$. Οι ενδιάμεσοι χρόνοι από την μία απαίτηση έως την άλλη, καθώς επίσης και ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν την εκθετική κατανομή με σ.π.π. $k(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t > 0$. Αναφορικά με τα ύψη των ατομικών ζημιών $\{Y_i, i = 1,2,..\}$ πρόκειται για ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής $P(y) = 1 - \overline{P}(y) = P(Y \leq y)\ , y \geq 0$.

Για τη μεταβλητή Y_i ισχύουν τα εξής:

- Ο μέσος είναι $E(Y) = \int_0^\infty y dP(y) = \int_0^\infty \overline{P}\,(y)dy \ < \infty$.
- Ο μετασχηματισμός Laplace είναι $\tilde{p}(s) = \ E(e^{-sY}) = \int_0^\infty e^{-sY} dP(y)$.

Συνεπώς, το συνολικό ύψος των ζημιών θα είναι,

$$S_t = \begin{cases} 0 & , N = 0 \\ Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_N, & N \geq 1 \end{cases}$$

Άμεσα προκύπτει ότι,

$$E(S_t) = \lambda E(Y) t.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι τα ασφάλιστρα καταβάλλονται με συνεχή ρυθμό, σύμφωνα με ένα ρυθμό c ανά μονάδα χρόνου. Το ύψος των ασφαλίστρων c καθορίζεται έτσι ώστε τα συνολικά ασφάλιστρα να υπερβαίνουν το αναμενόμενο ύψος των απαιτήσεων. Με άλλα λόγια,

$$ct > E(S_t) = \lambda E(Y)t,$$

οπότε

$c = \lambda E(Y)(1+\theta),$ όπου $\theta > 0$ είναι το σχετικό περιθώριο ασφάλειας.

Υποθέτουμε ακόμα ότι η ασφαλιστική εταιρία ξεκινάει τη λειτουργία της έχοντας ως απόθεμα ένα αρχικό κεφάλαιο u. Τότε, το πλεόνασμα της ασφαλιστικής εταιρίας σε χρόνο t δίνεται από τη σχέση

$$U_t = u + ct - S_t\,, t \geq 0. \tag{2.1}$$

Αν και το συγκεκριμένο μοντέλο φαίνεται ιδιαίτερα απλοϊκό για να αντιπροσωπεύει τα πραγματικά δεδομένα, η ανάλυσή του παρέχει χρήσιμες πληροφορίες για τον κίνδυνο τον οποίο καλείται να διαχειριστεί η ασφαλιστική εταιρία.

2.2 Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Στην παράγραφο που προηγήθηκε ορίσαμε την έννοια του πλεονάσματος U_t ως συνάρτηση του χρόνου. Στην ανάλυση που ακολουθεί μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την περίπτωση που το πλεόνασμα γίνεται για πρώτη φορά αρνητικό. Με άλλα λόγια, το γεγονός της χρεοκοπίας ως άμεση συνέπεια του αρνητικού πλεονάσματος. Ο χρόνος χρεοκοπίας T είναι

$$T = inf\{\, t : \; U_t < 0 \,\}$$

και

$$T = \infty \text{ αν } U_t > 0 \; για \; t > 0.$$

Η χρεοκοπία ορίζεται λοιπόν για $\{T < \infty\}$ και η πιθανότητα χρεοκοπίας, η οποία αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα μεγέθη στη διαχείριση κινδύνων είναι

$$\psi(u) = P(T < \infty | U_0 = u)\,, \;\; u \geq 0. \tag{2.2}$$

Αφού για το αρχικό πλεόνασμα ισχύει $U_0 = u \geq 0$, η χρεοκοπία μπορεί να επέλθει εφόσον παρουσιαστεί μία απαίτηση τέτοιου μεγέθους, που θα προκαλέσει μία μεγάλη πτώση στο πλεόνασμα. Συνεπώς, εκτός από το γεγονός της χρεοκοπίας, μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει και το ύψος για το οποίο το πλεόνασμα έγινε αρνητικό, ή αλλιώς το μέγεθος του ελλείμματος.

Ως έλλειμμα κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας ορίζουμε την αρνητική τιμή του πλεονάσματος U_t ή $\alpha\lambda\lambda\iota\acute{\omega}\varsigma\ |U_t|$.

Μία δεύτερη ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι η τιμή του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, ή αλλιώς το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία. Η συγκεκριμένη ποσότητα συμβολίζεται με U_{t-} και συνδέεται άμεσα με μεγέθη όπως το ύψος της ζημιάς που (εκ των υστέρων) προκάλεσε τη χρεοκοπία.

Μία σημαντική τεχνική που αναπτύχθηκε για την αξιολόγηση αυτών των ποσοτήτων είναι αυτή των Gerber και Shiu (1998).

Έστω,

$$I(A)\begin{cases} 1, \alpha\nu\ \sigma\upsilon\mu\beta\alpha\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota\ \tau o\ A \\ 0, \alpha\nu\ \delta\varepsilon\nu\ \sigma\upsilon\mu\beta\alpha\acute{\iota}\nu\varepsilon\iota\ \tau o\ A \end{cases}$$

Τότε $P(A) = E[I(A)]$ και από την (2.2) έχουμε,

$$\psi(u) = E[I(T < \infty)|U_0 = u], u \geq 0 \tag{2.3}$$

Έστω ακόμα $w(x,y)$ η συνάρτηση ποινής, με $x \geq 0, y > 0$ και έστω $\delta \geq 0$. Τότε, η συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu αποτελεί τη γενίκευση της (2.3) και συγκεκριμένα

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} w(U_{T-}, |U_t|) I(T < \infty)|U_0 = u], u \geq 0 \tag{2.4}$$

όπου για $\delta = 0$ και $w(x,y) = 1$ αναγόμαστε στην περίπτωση $\psi(u)$.

Για $\delta = 0, w(x_1, y_1) = I(x_1 \leq x) I(y_1 \leq y)$, η $m_0(u)$ είναι η από-κοινού συνάρτηση του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία x και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία y, ενώ η $m_\delta(u)$ μας παρέχει πλήρη ανάλυση για τις μεταβλητές $U_{T-}, |U_t|, T$.

Έστω τώρα το δ να είναι ένας μιγαδικός αριθμός με μη-αρνητικό πραγματικό μέρος και ακόμα $w(x,y) = e^{-sx-zy}$. Αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε την $m_\delta(u)$ σαν τον από-κοινού μετασχηματισμό Laplace των μεταβλητών $U_{T-}, |U_t|, T$.

Ο στόχος λοιπόν των Gerber και Shiu ήταν διπλός. Αρχικά να καθορίσουν τη συνάρτηση $m_\delta(u)$ και στη συνέχεια να αντλήσουν πληροφορίες για κάποια (ή και για όλες) εκ των μεταβλητών $U_{T-}, |U_t|, T$.

2.3 Η ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ GERBER - SHIU

Σε αυτήν την παράγραφο μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu για το κλασσικό μοντέλο Poisson.

Αρχικά, θα ορίσουμε την ολοκληρωτική εξίσωση, που ικανοποιεί η $m_\delta(u)$. Το πλεόνασμα ακριβώς πριν την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης είναι

$$U_t = u + ct.$$

Τότε, αν για την πρώτη απαίτηση ισχύει

$$y > u + ct$$

επέρχεται η χρεοκοπία, με $U_{T-} = u + ct$. Ομοίως, το έλλειμμα που δημιουργείται θα ισούται με

$$|U_T| = y - u - ct$$

ενώ η συνάρτηση Gerber-Shiu θα είναι

$$e^{-\delta t} w(u + ct, y - u - ct).$$

Από την άλλη, αν

$$y \leq u = ct$$

τότε δεν επέρχεται η χρεοκοπία, αλλά το πλεόνασμα μειώνεται σε $u = ct - y \geq 0$.

Μετά την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης η διαδικασία $\{U_T : t \geq 0\}$ ξεκινάει με νέο αρχικό πλεόνασμα $u + ct - y$. Η αντίστοιχη συνάρτηση Gerber-Shiu είναι η εξής,

$$e^{-\delta t} m_\delta(u + ct - y).$$

Επειδή η χρονική στιγμή εμφάνισης της πρώτης απαίτησης ακολουθεί την εκθετική κατανομή με παράμετρο λ και το ύψος της ζημιάς y έχει συνάρτηση κατανομής $P(y)$ από το νόμο ολικής πιθανότητας παίρνουμε

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \{a(u + ct) + \sigma_\delta(u + ct)\} \lambda e^{-\lambda t} dt \qquad (2.5)$$

όπου

$$a(x) = \int_x^\infty w(x, y - x) dP(y) \qquad (2.6)$$

$$\sigma_\delta(x) = \int_0^x m_\delta(x - y) dP(y). \qquad (2.7)$$

Από την (2.7) συνεπάγεται ότι η (2.5) είναι μία ολοκληρωτική εξίσωση για την $m_\delta(u)$. Για τη λύση της θα πρέπει να αλλάξουμε τη μεταβλητή ολοκλήρωσης από t σε $x = u + ct$.

Τότε,

$$m_\delta(u) = \frac{\lambda}{c}\int_u^\infty e^{-\frac{\lambda+\delta}{c}(x-u)}\{a(x)+\sigma_\delta(x)\}dx,$$

η οποία μέσω της (1.4) και τον τύπο των Dickson-Hipp γράφεται ως

$$m_\delta(u) = \frac{\lambda}{c}\left\{T_{\frac{\lambda+\delta}{c}}a(u)\right\} + \frac{\lambda}{c}\left\{T_{\frac{\lambda+\delta}{c}}\sigma_\delta(u)\right\}. \tag{2.8}$$

Έτσι, αν

$$\widetilde{m}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, m_\delta(u)du$$

$$\tilde{\alpha}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, a(u)du$$

$$\tilde{\sigma}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-su}\, \sigma_\delta(u)du$$

τότε από την (2.8) έχουμε,

$$m_\delta(u) = \frac{\lambda}{c}\left\{\frac{\tilde{\alpha}(\frac{\lambda+\delta}{c}) - \tilde{\alpha}(s)}{s-\frac{\lambda+\delta}{c}}\right\} + \frac{\lambda}{c}\left\{\frac{\widetilde{\sigma_\delta}(\frac{\lambda+\delta}{c}) - \widetilde{\sigma_\delta}(s)}{s-\frac{\lambda+\delta}{c}}\right\}$$

και αφού $\tilde{\sigma}_\delta(s) = \widetilde{m}_\delta(s)\tilde{p}(s)$ από την (2.7) έπεται ότι

$$\widetilde{m}_\delta(s) = \left\{s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)\right\} = \frac{\lambda}{c}\left\{\tilde{\alpha}(\frac{\lambda+\delta}{c}) + m_\delta(\frac{\lambda+\delta}{c})\tilde{p}(\frac{\lambda+\delta}{c})\right\} - \frac{\lambda}{c}\tilde{\alpha}(s). \tag{2.9}$$

Έστω η εξίσωση $\widetilde{m}_\delta(s) = 0$, δηλαδή

$$s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s) = 0$$

και έστω οι $y_1(s) = \lambda\tilde{p}(s)$, $y_2(s) = (\lambda+\delta-cs)$, με $y_1(s) = y_2(s)$. (2.10)

Παρατηρούμε ότι $y_1(s) > 0$, $y_1'(s) < 0$, $y_1''(s) > 0$ για $s > 0$. Τότε η $y_1(s)$ είναι μία φθίνουσα συνάρτηση από το σημείο $y_1(0) = \lambda$.

Η $y_2(s)$ είναι μία ευθεία, η οποία φθίνει από το $y_2(0) = \lambda + \delta$ στο $y_2(\frac{\lambda+\delta}{c}) = 0$. Αφού $y_2(\frac{\delta}{c}) = \lambda = y_1(0)$, έχουμε ότι για $\delta > 0$ υπάρχει μοναδική θετική ρίζα $r = r(\delta)$ της εξίσωσης $y_1(s) = y_2(s)$, για την οποία ισχύει

$$\frac{\delta}{c} < r < \frac{\lambda + \delta}{c}.$$

Για $\delta = 0$ έχουμε $y_1(0) = y_2(0)$ και επειδή

$$y_1'(0) = -\lambda E(Y), \quad y_2'(0) = -c = -\lambda E(Y)(1 + \theta) < y_1'(0)$$

έπεται ότι για $s > 0$ ισχύει $y_1(s) > y_2(s)$. Έτσι, για $\delta = 0$ η (3.10) έχει ρίζα την $r = r(\delta) = 0$.

Συνοψίζοντας, για την (2.10) μπορούμε να γράψουμε ότι

$$s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s) = 0. \tag{2.11}$$

Η εξίσωση (2.11) αποτελεί μία επαναδιατύπωση της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg. Γενικά, αν το δ ανήκει στους μιγαδικούς αριθμούς με θετικό πραγματικό μέρος, τότε υπάρχει μοναδική ρίζα $r(\delta)$ με θετικό πραγματικό μέρος και από το Θεώρημα του Lagrange προκύπτει ότι (Goulden and Jackson (1983)):

$$f(r) = f(\frac{\lambda+\delta}{c}) + \sum(-1)^n \frac{(\frac{\lambda}{c})^n}{n!} \frac{d^{n-1}}{du^{n-1}}\{f'(u)[\tilde{p}(u)]^n\} \tag{2.12}$$

Αντικαθιστώντας στην (2.9) $s = r$, όπου $r = r(\delta)$ είναι η μοναδική ρίζα της (2.11), το αριστερό μέλος της (2.9) ισούται με μηδέν (υποθέτουμε ότι $\widetilde{m_\delta}(u) < \infty$). Επομένως, και το δεξιό μέλος θα ισούται με μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι,

$$\tilde{a}(r) = \tilde{a}(\frac{\lambda + \delta}{c}) + \widetilde{m_\delta}(\frac{\lambda + \delta}{c})\check{p}(\frac{\lambda + \delta}{c}),$$

όπου το άγνωστο κομμάτι στο δεξιό μέλος της (2.9) δίνεται από την $\frac{\lambda\tilde{a}(r)}{c}$.

Έτσι, η (2.9) γράφεται ως

$$\widetilde{m_\delta}(s) = \left\{s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s)\right\} = \frac{\lambda}{c}\{\tilde{a}(r) - \tilde{a}(s)\}. \tag{2.13}$$

Ας θεωρήσουμε την

$$\varphi_\delta = \frac{\lambda}{c}\left\{\frac{1-\tilde{p}(r)}{r}\right\}. \tag{2.14}$$

Για $c = \lambda E(Y)(1+\theta)$, από τη (1.16) παίρνουμε

$$\varphi_\delta = \frac{1}{1+\theta}\int_0^\infty e^{-ry}\frac{\overline{p(y)}}{E(Y)}dy \tag{2.15}$$

όπου $0 < \varphi_\delta < 1$.

Ακόμα, από τη (2.11) προκύπτει ότι $\frac{\lambda+\delta}{c} = r + \frac{\lambda \widetilde{p(s)}}{c}$ και έτσι

$$s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s) = s + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s) - r - \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(r) = (s-r)\left\{1 - \left(\frac{\lambda}{c}\right)\frac{\tilde{p}(r)-\tilde{p}(s)}{s-r}\right\}$$

$$=(s-r)\left\{1 - \left(\frac{\lambda}{c}\right)\frac{1-\tilde{p}(r)}{r}\left(\frac{r}{s-r}\right)\frac{\tilde{p}(r)-\tilde{p}(s)}{1-\tilde{p}(r)}\right\}.$$

Έτσι,

$$s - \frac{\lambda+\delta}{c} + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s) = (s-r)\{1 - \varphi_\delta \tilde{p}_{1,r}(s)\} \tag{2.16}$$

όπου το φ_δ δίνεται από την (2.14) και

$$\tilde{p}_{1,r}(s) = \left(\frac{r}{s-r}\right)\frac{\tilde{p}(r)-\tilde{p}(s)}{1-\tilde{p}(r)}.$$

Από τη (1.20) έχουμε ότι

$$\tilde{p}_{1,r}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} p_{1,r}(y)dy, \tag{2.17}$$

όπου από την (1.19) έπεται ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $p_{1,r}(y)$ δίνεται από τη σχέση

$$p_{1,r}(y) = \frac{e^{ry}\int_y^\infty e^{-rx}dP(x)}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{P}(x)dx}. \tag{2.18}$$

Με αντικατάσταση της (2.16) στην (2.13) προκύπτει ότι

$$\widetilde{m_\delta}(s)\{1 - \varphi_\delta \tilde{p}_{1,r}(s)\} = \left(\frac{\lambda}{c}\right)\frac{\tilde{\alpha}(r)-\tilde{\alpha}(s)}{s-r}. \tag{2.19}$$

Χρησιμοποιώντας την (1.11), η (2.19) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$m_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta(u-y)p_{1,r}(y)dy + \frac{\lambda}{c}T_r\alpha(u), u \geq 0 \tag{2.20}$$

Συνεπώς, η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (2.20), της οποίας τόσο οι λύσεις όσο και ειδικές περιπτώσεις της θα αναλυθούν στην επόμενη παράγραφο.

2.4 ΕΙΔΙΚΕΣ ΠΕΡΙΠΤΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΙΚΗΣ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ

Ξεκινώντας, ας δούμε μερικές ειδικές περιπτώσεις της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης, όπως αυτή περιγράφεται στη σχέση (2.20). Υποθέτουμε ότι $w(x,y) = 1$.

Τότε, από την (2.6) είναι $\alpha(x) = \bar{p}(x)$ και $T_r\alpha(u) = \int_0^\infty e^{-rx}\bar{p}\,(x+y)dx$. Όμως, από τη (1.18) και την (2.18) η συνάρτηση κατανομής $P_{1,r}(y) = 1 - \overline{P_{1,r}}(y)$ ικανοποιεί την

$$\overline{P_{1,r}}(y) = \frac{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{P}(x+y)dx}{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{P}(x)dx}. \tag{2.21}$$

και επομένως

$$T_r\alpha(u) = \left\{\int_0^\infty e^{-rx}\bar{P}(x)dx\right\}\overline{P_{1,r}}(u).$$

Από τη (2.15) έχουμε

$$T_r\alpha(u) = (1+\theta)E(Y)\varphi_\delta\overline{P_{1,r}}(u) = \frac{c}{\lambda}\varphi_\delta\overline{P_{1,r}}(u),$$

οπότε, η συνάρτηση Gerber-Shiu

$$\overline{G_\delta}(u) = E\left[e^{-\delta T}I(T<\infty)|U_0 = u\right], u \geq 0 \tag{2.22}$$

ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\overline{G_\delta}(u) = \varphi_\delta \int_0^u \overline{G_\delta}\,(u-y)P_{1,r}(y)dy + \varphi_\delta\overline{P_{1,r}}(u), u \geq 0. \tag{2.23}$$

Όμως, η $\overline{G_\delta}(u)$ αποτελεί τη συνάρτηση επιβίωσης μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, δηλαδή

$$\overline{G_\delta}(u) = \sum_{n=1}^\infty (1-\varphi_\delta)\varphi_\delta^n\overline{P_{1,r}^{*n}}(u), u \geq 0. \tag{2.24}$$

όπου η $\overline{P_{1,r}^{*n}}(u)$ είναι η n-οστή συνέλιξη της συνάρτησης επιβίωσης με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p_{1,r}(y)$.

Μία ακόμα ειδική περίπτωση της ελλειμματικής ανανεωτικής εξίσωσης προκύπτει μέσω των σχέσεων (2.3) και (2.22) όπου $\psi(u) = \bar{G}_0(u)$ και μέσω της (2.18) $P_{1,0}(y) = \frac{\bar{P}(y)}{E(Y)}$.

Για $\delta = 0$ έχουμε $r = 0$ και έτσι από την (3.15) $\varphi_0 = \frac{1}{1+\theta}$. Η (2.14) γίνεται

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (\tfrac{\theta}{1+\theta})(\tfrac{1}{1+\theta})^n \, \overline{P_{1,0}^{*n}}(u), u \geq 0.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ *(Μίξη κατανομών Erlang)*

Έστω $p(y) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \frac{\beta(\beta y)^{j-1} e^{-\beta y}}{(j-1)!}$ μία μικτή Erlang κατανομή. Από την (2.24) γνωρίζουμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace είναι ο

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} dG_\delta(u) = \frac{1 - \varphi_\delta}{1 - \varphi_\delta \widetilde{p_{1,r}}(s)}$$

όπου

$$\overline{G_\delta}(u) = e^{-\beta y} \sum_{n=0}^{\infty} \overline{C_{\delta,v}} \frac{(\beta y)^n}{n!}, y \geq 0. \tag{2.25}$$

Αν $q_1 = 1$ τότε $q_j = 0$ για $j = 2,3, \dots$ και $p(y) = \beta e^{-\beta y}$, τότε η $\overline{Q_\kappa}$ στην (1.79) είναι $\overline{Q_0} = 1$ και $\overline{Q_\kappa} = 0$ για $\kappa = 1,2, \dots$

Άμεσα, από τη (1.94) παίρνουμε $\overline{C_{\delta,n}} = \varphi_\delta^{n+1}$ για $n = 0,1,2, \dots$ Έτσι,

$$\overline{G_\delta}(y) = \varphi_\delta e^{-\beta y} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\beta \varphi_\delta y)^n}{n!} = \varphi_\delta e^{-\beta(1-\varphi_\delta)y}, y \geq 0 \qquad \square$$

Ακόμα, αξίζει να αναλύσουμε την ειδική περίπτωση όπου για τη συνάρτηση ποινής έχουμε $w(x,y) = w_2(y)$, έτσι ώστε να εξαρτάται αποκλειστικά από τη μεταβλητή του ελλείμματος $|U_T|$ κατά τη στιγμή της χρεοκοπίας. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\alpha(x) = \int_x^{\infty} w_2(y-x) dP(y)$$

και

$$\frac{\lambda}{c}T_r\alpha(u)=\frac{\lambda}{c}e^{ru}\int_u^{\infty}e^{-rx}\int_x^{\infty}w_2(y-x)dP(y)dx.$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης έχουμε

$$\frac{\lambda}{c}T_r\alpha(u)=\frac{\lambda}{c}e^{ru}\int_u^{\infty}\int_u^{y}e^{-rx}w_2(y-x)dxdP(y)$$

και με μία αλλαγή μεταβλητής (από x σε $t=y-x$) βρίσκουμε ότι

$$\frac{\lambda}{c}T_r\alpha(u)=\frac{\lambda}{c}e^{ru}\int_u^{\infty}\int_0^{y-u}e^{-r(y-t)}w_2(t)\mathrm{dtdP(y)}$$

$$=\varphi_\delta\frac{\int_u^{\infty}e^{-r(y-u)}\int_0^{y-u}e^{rt}w_2(t)dtdP(y)}{\int_0^{\infty}e^{-rx}\bar{P}(x)dx}. \quad (2.26)$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι $u_1=e^{ru}\int_0^{y-u}e^{rt}w_2(t)dt$ και $du_1=e^{ry}w_2(y-u)dy$, ενώ $dv_1=\frac{e^{-ry}dP(y)}{\int_0^{\infty}e^{-rx}\bar{P}(x)dx}$ με $v_1=-e^{-ry}P_{1,r}(y)$ και ολοκληρώνοντας κατά μέλη την (2.26) παίρνουμε

$$\frac{\lambda}{c}T_r\alpha(u)=\varphi_\delta\left\{-P_{1,r}(y)\int_0^{y-u}e^{-r(y-u-t)}w_2(t)dt+\int_u^{\infty}w_2(y-u)P_{1,r}(y)dy\right\}$$

δηλαδή

$$\frac{\lambda}{c}T_r\alpha(u)=V_{\delta,2}(u)=\varphi_\delta\int_u^{\infty}w_2(y-u)P_{1,r}(y)dy. \quad (2.27)$$

Συνοψίζοντας, η συνάρτηση Gerber-Shiu

$$m_{\delta,2}(u)=E\left[e^{-\delta T}w_2(|U_T|)I(T<\infty)|U_0=u\right],u\geq 0 \quad (2.28)$$

ικανοποιεί την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_{\delta,2}(u)=\varphi_\delta\int_0^{u}m_{\delta,2}(u-y)P_{1,r}(y)dy+\varphi_\delta\int_u^{\infty}w_2(y-u)P_{1,r}(y)dy,u\geq 0. \quad (2.29)$$

Μέσω της (1.32), η (2.29) γράφεται και ως

$$m_{\delta,2}(u) = v_{\delta,2}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u v_{\delta,2}(t) g_\delta(u-t)dt \tag{2.30}$$

όπου το $v_{\delta,2}(u)$ δίνεται από τη σχέση (2.27), ενώ ισχύει $g_\delta(u) = -\overline{G_\delta'}(u)$ ή αλλιώς

$$g_\delta(u) = \sum (1-\varphi_\delta)\varphi_\delta^n p_{1,r}^{*n}(u), \;\; u \geq 0 \tag{2.31}$$

Αφού $v_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta \int_0^\infty w_2(y) p_{1,r}(u+y)dy$, μπορούμε να γράψουμε

$$\int_0^u v_{\delta,2}(t) g_\delta(u-t)dt = \varphi_\delta \int_0^u \int_0^\infty w_2(y) p_{1,r}(t+y) g_\delta(u-t)dydt$$

$$= \varphi_\delta \int_0^\infty w_2(y) \int_0^u p_{1,r}(t+y) g_\delta(u-t)dtdy.$$

Αντικαθιστώντας τώρα στην (3.30) παίρνουμε

$$m_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta \int_0^\infty w_2(y) \left\{ p_{1,r}(u+y) + \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u p_{1,r}(t+y) g_\delta(u-t)dt \right\} dy$$

οπότε ισχύει

$$m_{\delta,2}(u) = \int_0^\infty w_2(y) h_{\delta,2}(y|u)dy \tag{2.32}$$

με

$$h_{\delta,2}(y|u) = \varphi_\delta p_{1,r}(u+y) + \frac{\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta}\int_0^u p_{1,r}(t+y) g_\delta(\mathrm{u-t})\mathrm{dt}. \tag{2.33}$$

Για $\delta = 0$ και $w_2(y) = e^{-zy}$, από τις σχέσεις (2.28) και (2.32) έχουμε ότι

$$E\left[e^{-z|U_T|} I(T<\infty) | U_0 = u\right] = \int_0^\infty e^{-zy} h_{0,2}(y|u)dy. \tag{2.34}$$

Ως μετασχηματισμός Laplace, η σχέση (2.34) μας δείχνει ότι η μεταβλητή του ελλείμματος $|U_T|$ έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $h_{0,2}(y|u)$, η οποία είναι ελαττωματική αφού στην (2.34) για $z = 0$ και μέσω της (2.3) συνεπάγεται ότι $\int_0^\infty h_{0,2}(y|u)dy = \psi(u) < 1$.

Για $\delta > 0$ και η $h_{0,2}(y|u)$ μπορεί να θεωρηθεί ως μία προεξοφλητική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Η συνάρτηση $h_{\delta,2}(y|u)$ έχει δομή πολύ πιο γενική από το κλασσικό μοντέλο Poisson, όπως περιγράφεται στην (2.33).

Θα εξετάσουμε τώρα πιο αναλυτικά τις λύσεις της συνάρτησης Gerber – Shiu. Η γενική λύση της (2.20) είναι

$$m_\delta(u) = \frac{\lambda}{c} T_r \alpha(u) + \frac{\lambda}{c(1-\varphi_\delta)} \int_0^u \{T_r \alpha(t)\} g_\delta(u-t)dt, \tag{2.35}$$

όπου η $g_\delta(u)$ δίνεται από την (2.31). Ακόμα έχουμε

$$\int_0^u \{T_r \alpha(t)\} g_\delta(u-t)dt = \int_0^u g_\delta(u-t) \int_t^\infty e^{-r(x-t)} \alpha(x)dxdt$$

και αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης παίρνουμε

$$\int_0^u \{T_r \alpha(t)\} g_\delta(u-t)dt$$
$$= \int_0^u \alpha(x) \int_0^x e^{-r(x-t)} g_\delta(u-t)dtdx + \int_u^\infty \alpha(x) \int_0^u e^{-r(x-t)} g_\delta(u-t)dtdx,$$

οπότε,

$$m_\delta(u) = \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \alpha(x) e^{-r(x-u)} dx$$
$$+ \frac{\lambda}{c(1-\varphi_\delta)} \int_u^\infty \alpha(x) \int_0^u e^{-r(x-t)} g_\delta(u-t)dtdx + \frac{\lambda}{c(1-\varphi_\delta)} \int_0^u \alpha(x) \int_0^x e^{-r(x-t)} g_\delta(u-t)dtdx.$$

Τότε, ισχύει ότι

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty \alpha(x) \gamma_\delta(u,x)dx \tag{2.36}$$

όπου η $\gamma_\delta(u,x)$ ικανοποιεί την

$$\gamma_\delta(u,x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{c(1-\varphi_\delta)} \int_0^x e^{-r(x-t)} g_\delta(u-t)dt, x < u \\ \frac{\lambda}{c} e^{-r(x-u)} + \frac{\lambda}{c(1-\varphi_\delta)} \int_0^u e^{-r(x-t)} g_\delta(u-t)dt, x > u \end{cases} \tag{2.37}$$

Η συνάρτηση $\gamma_\delta(u,x)$ απλοποιείται σημαντικά για $\delta = 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, είναι $r = 0$, $g_0(u) = -\overline{G_0'}(u) = -\psi'(u)$.

Επίσης, $\psi(0) = \varphi_0 = \frac{1}{1+\theta}$, οπότε ισχύει $\frac{\lambda}{\{c(1-\varphi_0)\}} = \frac{1}{\theta E(Y)}$. Έτσι, για $x > u$ η (2.37) γίνεται

$$\frac{\lambda}{c} + \frac{\lambda}{\mathrm{c}(1-\varphi_\delta)}\{\psi_0 - \psi_u\} = \frac{\lambda}{c}(1 + \frac{\varphi_0}{1-\varphi_0}) - \frac{\psi(u)}{\theta E(Y)} = \frac{1-\psi(u)}{\theta E(Y)}$$

και

$$\gamma_0(u,x) = \begin{cases} \frac{\{\psi(u-x)-\psi(u)\}}{\theta E(Y)}, \ x < u \\ \frac{1-\psi(u)}{\theta E(Y)}, \ x > u \end{cases} \tag{2.38}$$

Έστω τώρα $w(x,y) = w_1(x)$, οπότε σε αυτήν την περίπτωση η συνάρτηση ποινής εμπεριέχει αποκλειστικά τη μεταβλητή U_{T-}, δηλαδή το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία. Σε αυτήν την περίπτωση $\alpha(x) = w_1(x)\bar{P}(x)$. Επομένως, η συνάρτηση ποινής

$$m_{\delta,1}(u) = E\left[e^{-\delta T} w_1(U_{T-}) I(T < \infty) | U_0 = u\right], u \geq 0 \tag{2.39}$$

μπορεί να γραφεί και μέσω της (2.36) ως εξής

$$m_{\delta,1}(u) = \int_0^\infty w_1(x) h_{\delta,1}(x|u) dx \tag{2.40}$$

όπου

$$h_{\delta,1}(x|u) = \bar{P}(x)\gamma_\delta(u,x) \tag{2.41}$$

Για $\delta = 0$ και $w_1(x) = e^{-sx}$, η (2.39) και η (2.40) οδηγούν σε

$$E[e^{-sU_{T^-}} I(T < \infty) | U_0 = u] = \int_0^\infty e^{-sx} h_{0,1}(x|u) dx. \tag{2.42}$$

Η (2.42) αποτελεί μετασχηματισμό Laplace, οπότε το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία έχει πυκνότητα $h_{0,1}(x|u)$. Για $\delta > 0$, η πυκνότητα $h_{\delta,1}(x|u)$ είναι προεξοφλητική συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Εύκολα διαπιστώνει κανείς ότι

$$h_{0,1}(y|0) = h_{0,2}(y|0) = \frac{\bar{P}(y)}{E(Y)(1+\theta)}.$$

Έτσι, η πυκνότητα τόσο του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία U_{T-} όσο και του ελλείμματος $|U_T|$ έχει ίδια συνάρτηση πυκνότητας $\frac{\bar{P}(y)}{E(Y)}$, δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπία και $u = 0$, επειδή $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Το μέγεθος της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία είναι $U_{T-} + |U_T|$ και ο μετασχηματισμός Laplace δίνεται από τη σχέση $w(x,y) = e^{-zx}e^{-zy}$, αφού από την (3.6) έχουμε ότι $\alpha(x) = \int_x^\infty e^{-zy} dP(y)$. Οπότε για $\delta = 0$ θα έχουμε,

$$E\left[e^{-z(U_{T-}+|U_T|)} I(T<\infty)|U_0 = u\right] = \int_0^\infty \left\{\int_x^\infty e^{-zy} dP(y)\right\} \gamma_0(u,x)dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-zy} \left\{\int_0^y \gamma_0(u,x)dx\right\} dP(y).$$

Αυτό σημαίνει ότι η απαίτηση που προκαλεί τη χρεοκοπία έχει πυκνότητα $\left\{\int_0^y \gamma_0(u,x)dx\right\} dP(y)$.

Για $u = 0$ συνεπάγεται από την (3.38), ότι $\gamma_0(0,x) = \frac{\{1-\psi(0)\}}{\theta E(Y)} = \frac{1}{(1+\theta)E(Y)}, x > 0$. Δηλαδή, για u=0 η απαίτηση που προκαλεί τη χρεοκοπία έχει πυκνότητα ίση με $\frac{y dP(y)}{(1+\theta)E(Y)}$ και αφού $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$ η συγκεκριμένη πυκνότητα, δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπία, αποκαλείται η «length-biased» της $\frac{y dP(y)}{E(Y)}$.

Μέχρι τώρα όλα τα αποτελέσματα του κλασσικού μοντέλου Poisson αφορούν στην κατανομή $P(y)$ και στις περιπτώσεις που είναι διακριτή, συνεχής και μικτού τύπου. Συγκεκριμένα, η ύπαρξη των περιθωρίων κατανομών:

- $h_{\delta,1}(x|u)$ για το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία U_{T-}
- $h_{\delta,2}(y|u)$ για το έλλειμμα $|U_T|$

δεν απαιτούν απαραιτήτως η μεταβλητή $P(y)$ να είναι συνεχής. Στην περίπτωση όμως που η $P(y)$ έχει πυκνότητα $p(y)$ τότε

$$\alpha(x) = \int_0^\infty w(x,y)p(x+y)dy$$

από το οποίο και μέσω της (2.36) προκύπτει

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(x,y) h_{d,12}(x,y|u) dxdy \tag{2.43}$$

όπου η $h_{d,12}(x,y|u) = \gamma_\delta(u,x)p(x+y)$.

Για $\delta = 0$ και $w(x,y) = e^{-zy-sx}$ έχουμε

$$E\left[e^{-sU_{T-}-z|U_T|} I(T<\infty)|U_0 = u\right] = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx-zy} h_{0,12}(x,y|u) dxdy, \tag{2.45}$$

με την παραπάνω παράσταση να αποτελεί τον μετασχηματισμό Laplace των δύο μεταβλητών $U_{T-}, |U_T|$ και η $h_{0,12}(x,y|u)$ να είναι η από-κοινού πυκνότητα του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος που αυτή δημιουργεί.

Πρέπει να σημειωθεί εδώ, ότι όλα τα αποτελέσματα που εξήχθησαν για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson, αποτελούν ειδικές περιπτώσεις πιο γενικών μοντέλων κινδύνου. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στη μελέτη της από-κοινού πυκνότητας $h_{\delta,12}(x,y|0)$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ GERBER-SHIU ΣΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ SPARRE-ANDERSEN ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ

Μία αξιοσημείωτη γενίκευση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου Poisson είναι το εξαρτημένο μοντέλο Sparre-Andersen (ή αλλιώς ανανεωτικό μοντέλο). Το συγκεκριμένο μοντέλο μας δίνει μία πιο γενική κατανομή αναφορικά με τους ενδιάμεσους χρόνους των απαιτήσεων, καθώς επίσης και μία εκτίμηση για το μέγεθος της απαίτησης στο τέλος του εκάστοτε ενδιάμεσου χρόνου μεταξύ δύο απαιτήσεων.

Συνδυάζοντας μεγέθη, όπως το ύψος της πρώτης απαίτηση και την πρώτη πτώση του πλεονάσματος, εξάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα για τις από-κοινού και περιθώριες κατανομές των τριών βασικών μεταβλητών που εξετάζουμε $(T, |U_T|, U_{T-})$.

3.1 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ SPARRE-ANDERSEN ΜΕ ΕΞΑΡΤΗΣΗ

Όπως αναφέρθηκε ήδη, στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θεωρούμε ένα πιο γενικό μοντέλο από το κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson. Αρχικά, υποθέτουμε ότι το πλήθος των απαιτήσεων $\{N_t : t > 0\}$ είναι μία ανανεωτική διαδικασία αντί μίας διαδικασίας Poisson. Έστω επίσης $\{V_1, V_{2,\ldots}\}$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες παριστούν τους ενδιάμεσους χρόνους των απαιτήσεων:

V_1 ο χρόνος μέχρι την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης.

V_2 ο χρόνος μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης απαίτησης.

ενώ γενικά V_i ο χρόνος μεταξύ της $(i-1)$ και της i απαίτησης.

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής V όπου είναι ισόνομη με τις είναι V_i

$$K(t) = 1 - \bar{K}(t) = P(V \leq t)\ με\ σ.π.π.\ k(t) = K'(t).$$

Τα ατομικά ύψη των απαιτήσεων $\{Y_1, Y_{2,\ldots}\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με μία τ.μ. Y, όπου Y_i είναι το ύψος της i-απαίτησης. Επίσης, υποθέτουμε ότι η ανεξαρτησία και ισονομία ισχύει και για τη διμεταβλητή ακολουθία $\{(V_i, Y_i) : i = 1,2,\ldots\}$.

Το ζεύγος $\{V, Y\}$ έχει από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η οποία δίνεται ως αποτέλεσμα της περιθώριας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $k(t)$ ως προς V και της δεσμευμένης συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $p(y|t)\ της\ Y$, για $\mathrm{V} = \mathrm{t}$.

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$\tilde{p}(s|t) = \int_0^\infty e^{-sy} p(y|t) dy,$$

ενώ τα ασφάλιστρα υποθέτουμε ότι καταβάλλονται με συνεχή ρυθμό και ισχύει

$$c = \left\{\frac{E(Y)}{E(V)}\right\}(1+\theta), \quad \theta > 0.$$

Στην ειδική περίπτωση της ανεξαρτησίας μεταξύ V_i, Y_i παίρνουμε το μοντέλο ανανεωτικού κινδύνου των Sparre-Andersen χωρίς εξάρτηση, όπου $P(y|t) = P(y)$.

Για το πλεόνασμα ισχύει ότι

$$U_t = u + c - S_t, \quad t \geq 0$$

όπου S_t το συνολικό ύψος των απαιτήσεων και ισχύει $S_t = \sum_{i=1}^{M_t} Y_i$ με $S_t = 0 \; \alpha\nu \; N_t = 0$.

Όλα τα μεγέθη που σχετίζονται με τη χρεοκοπία, δηλαδή ο χρόνος χρεοκοπίας T, το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία U_{T-}, το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία $|U_t|$, η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ και η συνάρτηση Gerber-Shiu $m_\delta(u)$ συνεχίζουν να ισχύουν όπως ορίσθηκαν στην παράγραφο (2.2).

3.2 Ο ΧΡΟΝΟΣ ΕΜΦΑΝΙΣΗΣ ΚΑΙ ΤΟ ΥΨΟΣ ΤΗΣ ΠΡΩΤΗΣ ΑΠΑΙΤΗΣΗΣ

Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο και το ύψος της πρώτης απαίτησης μπορούμε να γράψουμε για τη συνάρτηση Gerber-Shiu

$$m_\delta(u) = \alpha_\delta(u) + \int_0^\infty e^{-\delta t} \sigma_{t,\delta}(u+ct) k(t) dt \tag{3.1}$$

όπου

$$\sigma_{t,\delta}(x) = \int_0^x m_\delta(x-y) p(y|t) dy, \tag{3.2}$$

$$\alpha_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \alpha_t(u+ct) k(t) dt \tag{3.3}$$

$$\alpha_t(x) = \int_x^\infty w(x, y-x) p(y|t) dy. \tag{3.4}$$

Για μία συνάρτηση $h_t(x)$ ισχύει

$$\int_0^\infty e^{-su} \int_0^\infty e^{-\delta t} h_t(u+ct)k(t)dtdu$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\delta-\mathrm{cs})\mathrm{t}} \left\{ \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{s}(\mathrm{u}+\mathrm{ct})} \mathrm{h}_\mathrm{t}(\mathrm{u}+\mathrm{ct})\mathrm{du} \right\} \mathrm{k}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

$$= \int_0^\infty e^{-(\delta-ct)t} \left\{ \widetilde{h_t}(s) - \int_0^{ct} e^{-sx} h_t(x)dx \right\} k(t)dt,$$

οπότε είναι

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{su}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta \mathrm{t}} \mathrm{h}_\mathrm{t}(\mathrm{u}+\mathrm{ct})\mathrm{k}(\mathrm{t})\mathrm{dtdu} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-(\delta-\mathrm{cs})\mathrm{t}} \widetilde{\mathrm{h}_\mathrm{t}}(\mathrm{s})\mathrm{k}(\mathrm{t})\mathrm{dt} - \mathrm{h}^*(\mathrm{s}) \qquad (3.5)$$

με $\mathrm{h}^*(\mathrm{s}) = \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t} \left\{ \int_0^{ct} e^{-sx} h_t(x)dx \right\} k(t)dt.$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (3.1) και (3.2) έπεται ότι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu είναι

$$\widetilde{m_\delta}(s) = \widetilde{\alpha_\delta}(s) + \widetilde{m_\delta}(s) \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t} \tilde{p}(s|t)k(t)dt - \sigma_\delta^*(s)$$

όπου $\sigma_\delta^*(s) = \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t} \left\{ \int_0^{ct} e^{-sx} \sigma_{t,\delta}(x)dx \right\} k(t)dt.$

Παρατηρούμε ότι

$$E[e^{-sY-(\delta-cs)V}] = \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t} \tilde{p}(s|t)k(t)dt, \qquad (3.6)$$

από όπου παίρνουμε

$$\widetilde{m_\delta}(s)(1 - E[e^{-sY-(\delta-cs)V}]) = \widetilde{\alpha_\delta}(s) - \sigma_\delta^*(s) \qquad (3.7)$$

Η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg δίνεται από τη σχέση

$$E[e^{-sY-(\delta-cs)V}] = 1, \qquad (3.8)$$

οι ρίζες της οποίας μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση των άγνωστων μεγεθών της σχέσης (3.7). Η γενική διατύπωση της (3.7) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg παίζει σημαντικό ρόλο στον υπολογισμό της $\widetilde{m_\delta}(s)$. Προκειμένου να αναλύσει κανείς περαιτέρω την (3.7) θα πρέπει να κάνει συμπληρωματικές υποθέσεις για τις $k(t)$ $και$ $p(y|t)$. Περισσότερες πληροφορίες για τη $m_\delta(u)$ παρουσιάζονται παρακάτω.

3.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ

Αφού η συνάρτηση Gerber-Shiu, όπως καθορίζεται στη (2.4), είναι αποτέλεσμα της από-κοινού συνάρτησης πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας, του ελλείμματος που προκαλεί η χρεοκοπία και του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, είναι χρήσιμο να εξετάσουμε σε βάθος αυτές τις τρεις τυχαίες μεταβλητές.

Στην περίπτωση που επέλθει η χρεοκοπία κατά την πρώτη απαίτηση, το πλεόνασμα (x) και ο χρόνος (t) συνδέονται γραμμικά ως εξής

$$x = u + ct \Rightarrow t = \frac{x-u}{c}.$$

Για να υπάρχει έλλειμμα (y), θα πρέπει το ύψος της απαίτησης να είναι (x+y), με υπό συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $p(x+y|t) = p(x+y|\frac{x-u}{c})$.

Έτσι, η πυκνότητα μπορεί να γραφεί και ως $p(x+y|t)k(t)$ και με μία αλλαγή στις μεταβλητές (από t σε x=u+ct), συνεπάγεται ότι η από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία U_{T-} και του ελλείμματος $|U_T|$ είναι η εξής

$$h_{12}^*(x,y|u) = \frac{1}{c}p(x+y|\frac{x-u}{c})k(\frac{x-u}{c}) \quad , \ x > u \tag{3.9}$$

με $T = \frac{x-u}{c}$.

Από την άλλη, αν η χρεοκοπία επέλθει με την εμφάνιση κάποιας απαίτησης μετά από την πρώτη, δεν υπάρχει αντίστοιχη σχέση μεταξύ T και U_{T-}. Οπότε, ορίζουμε την από-κοινού πυκνότητα των T, U_{T-}, $|U_T|$ ως εξής

$h_{12}^{**}(t,x,y|u)$, όπου T=t, $U_{T-} = x$ και $|U_T| = y$.

Τότε, από τη (2.4) έχουμε

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta(\frac{x-u}{c})} w(x,y) h_{12}^*(x,y|u)dxdy$$
$$+ \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\delta t} w(x,y) h_{12}^{**}(t,x,y|u)dtdxdy \qquad (3.10)$$

Έτσι, ξεχωρίζουμε τις πυκνότητες

- $h_{\delta,12}^*(x,y|u) = e^{-\delta(\frac{x-u}{c})} h_{12}^*(x,y|u)$ (3.11)
- $h_{\delta,12}^{**}(x,y|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} h_{12}^{**}(t,x,y|u)dt$ (3.12)
- $h_{\delta,12}(x,y|u) = h_{\delta,12}^*(x,y|u) + h_{\delta,12}^{**}(x,y|u)$ (3.13)

Τότε, για τη συνάρτηση Gerber-Shiu μπορούμε να γράψουμε ότι

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(x,y) h_{\delta,12}(x,y|u)dxdy \qquad (3.14)$$

Ίδια μορφή συναντήσαμε και στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson (2.43). Προφανώς, για δ=0, η $h_{0,12}(x,y|u)$ αποτελεί την από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία U_{T-} και του ελλείμματος $|U_T|$.

Επίσης, από την

$$\alpha_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \left\{ \int_{u+ct}^\infty w(u+ct, y-u-ct) p(y|t) dy \right\} k(t)dt$$

έπεται ότι

$$\alpha_\delta(u) = \frac{1}{c} \int_u^\infty e^{-\delta(\frac{x-u}{c})} \left\{ \int_x^\infty w(x, y-x) p(y|\frac{x-u}{c}) \right\} k(\frac{x-u}{c})dx,$$

όπου με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών (έτσι ώστε τα όρια του εσωτερικού ολοκληρώματος να είναι στο $0, +\infty$) έχουμε:

$$\alpha_\delta(u) = \frac{1}{c} \int_u^\infty e^{-\delta(\frac{x-u}{c})} \int_0^\infty w(x,y) p(x+y|\frac{x-u}{c}) k(\frac{x-u}{c}) dy\, dx. \qquad (3.15)$$

Συνεπώς, η $\alpha_\delta(u)$ αποτελεί τη συνεισφορά για τη συνάρτηση Gerber-Shiu όταν η χρεοκοπία επέρχεται κατά την πρώτη απαίτηση και συγκεκριμένα ισχύει

$$\int_0^\infty \int_0^\infty w(x,y) h_{\delta,12}^{**}(x,y|u)dxdy = m_\delta(u) - \alpha_\delta(u)\ . \qquad (3.16)$$

3.4. Η ΠΡΩΤΗ ΠΤΩΣΗ ΤΟΥ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΤΟ ΑΡΧΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Με βάση τη συνάρτηση Gerber-Shiu, σε αυτήν την παράγραφο θα εξετάσουμε την πρώτη χρονικά στιγμή, κατά την οποία το πλεόνασμα πέφτει σε τιμή μικρότερη της αρχικής του αξίας u. Σε αυτήν την περίπτωση, όπου το πλεόνασμα από x+u πριν την εμφάνιση της απαίτησης, μειώνεται σε u-y, η συνάρτηση πυκνότητας είναι $h_{12}^{*}(x,y|0)$ για κάθε τιμή του u, συμπεριλαμβανομένου και του u=0.

Η χρονική στιγμή αυτής της μείωσης του πλεονάσματος είναι $\frac{x}{c}$, ενώ η χρεοκοπία επέρχεται για εφόσον το ύψος της ζημιάς υπερβεί την αρχική τιμή του πλεονάσματος, δηλαδή $y > u$. Σε αυτήν την περίπτωση, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία είναι $U_{T-} = x + u$ και το έλλειμμα που προκαλεί η χρεοκοπία είναι $|U_T| = y - u$.

Στην περίπτωση όπου το ύψος της ζημιάς δεν υπερβαίνει το πλεόνασμα δηλαδή για y<u, η χρεοκοπία δεν επέρχεται. Τότε, η διαδικασία συνεχίζεται, αυτήν τη φορά όμως με τιμή πλεονάσματος $u' = u - y$.

Η από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας των t, x, y είναι η $h_{12}^{**}(t,x,y|0)$. Και εδώ, για u<y η χρεοκοπία επέρχεται με $U_{T-} = x + u$, $|U_T| = y - u$, ενώ για u>y το αρχικό πλεόνασμα αναπροσαρμόζεται σε u-y.

Για τη συνάρτηση Gerber-Shiu, έχουμε

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y) \int_0^\infty \left\{ e^{-\frac{\delta x}{c}} h_{12}^{*}(x,y|0) + \int_0^\infty e^{-\delta t}\, h_{12}^{**}(t,x,y|0)dt \right\} dxdy$$
$$+ \int_u^\infty \int_0^\infty w(x+u, y-u) \left\{ e^{-\frac{\delta x}{c}} h_{12}^{*}(x,y|0) + \int_0^\infty e^{-\delta t}\, h_{12}^{**}(t,x,y|0)dt \right\} dxdy.$$

Μέσω της (3.13), η $m_\delta(u)$ ικανοποιεί την ολοκληρωτική εξίσωση

$$m_\delta(u) = \int_0^u m_\delta(u-y) \int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dxdy + v_\delta(u), \tag{3.17}$$

όπου

$$v_\delta(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty w(x+y, y-u)\, h_{\delta,12}(x,y|0)dxdy \tag{3.18}$$

Ορίζουμε τώρα την ποσότητα

$$\varphi_\delta = \int_0^\infty \int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dxdy, \tag{3.19}$$

ενώ από την (3.14) έχουμε

$$\varphi_\delta = E[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U_0 = 0] < 1.$$

Ακόμα, έστω

$$b_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta} \int_0^\infty h_{\delta,12}(x, y|0) dx. \tag{3.20}$$

Έτσι, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την (3.17) ως εξής

$$m_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta(u - y)\, b_\delta(y) dy + v_\delta(u), \tag{3.21}$$

με την $m_\delta(u)$ να ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση.

Η (3.21) απλοποιείται για $w(x, y) = w_2(y)$ ανεξάρτητο του x και η συνάρτηση Gerber-Shiu γίνεται $m_{\delta,2}(u)$, ενώ η $v_\delta(u)$ γράφεται

$$v_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta \int_u^\infty w_2(y - u)\, b_\delta(y) dy \tag{3.22}$$

ενώ η (3.21) γίνεται

$$m_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta(u - y)\, b_\delta(y) dy + \varphi_\delta \int_u^\infty w_2(y - u)\, b_\delta(y) dy. \tag{3.23}$$

Αν $w(x, y) = w_2(y)$=1, τότε η $m_{\delta,2}(u)$ ανάγεται μέσω της (2.22) σε

$$\bar{G}_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u \bar{G}_\delta(u - y)\, b_\delta(y) dy + \varphi_\delta \bar{B}_\delta(u) \tag{3.24}$$

όπου $\bar{B}_\delta(u)$ είναι η συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής $B_\delta(u)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $b_\delta(u)$.

Η $\bar{G}_\delta(u)$ είναι συνάρτηση επιβίωσης μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και πιο συγκεκριμένα

$$\bar{G}_\delta(u) = \sum_{n=1}^\infty (1 - \varphi_\delta)\, \varphi_\delta^n \bar{B}_\delta^{*n}(u), \quad u \geq 0 \tag{3.25}$$

με την $\bar{B}_\delta^{*n}(u)$ να αποτελεί τη n-οστή συνέλιξη της $\bar{B}_\delta(u)$.

Ακόμα, ο αντίστοιχος τύπος της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_\delta(u)$ είναι

$$g_\delta(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\varphi_\delta)\,\varphi_\delta^n b_\delta^{*n}(u), \tag{3.26}$$

με την $b_\delta^{*n}(u)$ να αποτελεί τη n-οστή συνέλιξη της $b_\delta(u)$.

Το Θεώρημα που ακολουθεί εκφράζει την $h_{\delta,12}(x,y|u), u>0$ ως συνάρτηση της $h_{\delta,12}(x,y|0)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1 *Η πυκνότητα $h_{\delta,12}(x,y|u)$ικανοποιεί την*

$$h_{\delta,12}(x,y|u) = \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^x h_{\delta,12}(x-t,y+t|0)\,g_\delta(u-t)dt, \qquad \gamma\iota\alpha\ x<u \tag{3.27}$$

$$h_{\delta,12}(x,y|u) = h_{\delta,12}(x-u,y+u|0) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u h_{\delta,12}(x-t,y+t|0)\,g_\delta(u-t)dt, x>0 \tag{3.28}$$

Απόδειξη

Από την (3.18) έχουμε

$$v_\delta(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty w(x,y)\,h_{\delta,12}(x-u,y+u|0)dydx$$

οπότε παίρνουμε

$$v_\delta(u) = \int_u^\infty k_\delta(u,x)dx \;\; \mu\varepsilon\; k_\delta(u,x) = \int_0^\infty w(x,y)h_{\delta,12}(x-u,y+u|0)\,dy.$$

Η γενική λύση της (3.21) χρησιμοποιώντας την (1.32) είναι

$$m_\delta(u) = v_\delta(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u v_\delta(t)\,g_\delta(u-t)dt.$$

Παρατηρούμε ότι αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης παίρνουμε,

$$\int_0^u v_\delta(t)g_\delta(u-t)dt = \int_0^u\int_t^\infty k_\delta(t,x)\,g_\delta(u-t)dxdt$$

$$= \int_u^\infty \int_0^u k_\delta(t,x) g_\delta(u-t) dt dx + \int_0^u \int_0^x k_\delta(t,x) g_\delta(u-t) dt dx.$$

Έτσι,

$$\int_0^u v_\delta(t) g_\delta(u-t) dt$$

$$= \int_u^\infty \int_0^u \left\{ \int_0^\infty w(x,y)\, h_{\delta,12}(x-t, y+t|0) dy \right\} g_\delta(u-t) dt dx + \int_0^u \int_0^x \left\{ \int_0^\infty w(x,y) h_{\delta,12}(x-t, y+t|0) dy \right\} g_\delta(u-t) dt dx.$$

$$= \int_u^\infty \int_0^\infty w(x,y) \left\{ \int_0^u h_{\delta,12}(x-t, y+t|0) g_\delta(u-t) dt \right\} dy dx + \int_0^u \int_0^\infty w(x,y) \left\{ \int_0^x h_{\delta,12}(x-t, y+t|0) g_\delta(u-t) dt \right\} dy dx.$$

Επομένως, για τη συνάρτηση Gerber-Shiu θα ισχύει

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= \int_u^\infty \int_0^\infty w(x,y) h_{\delta,12}(x-u, y+u|0)\, dy dx \\ &+ \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_u^\infty \int_0^\infty w(x,y) \left\{ \int_o^u h_{\delta,12}(x-t, y+t|0) g_\delta(u-t) dt \right\} dy dx \\ &+ \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u \int_0^\infty w(x,y) \left\{ \int_o^x h_{\delta,12}(x-t, y+t|0) g_\delta(u-t) dt \right\} dy dx. \end{aligned}$$

Όμως, από την (3.14) ισχύει

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(x,y) h_{\delta,12}(x,y|u)\, dy dx$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές του $w(x,y)$, προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχει $R_\delta > 0$, τέτοιο ώστε να ισχύει

$$\tilde{b}_\delta(-R_\delta) = \frac{1}{\varphi_\delta} \tag{3.29}$$

με

$$\tilde{b}_\delta(s) = \int_0^\infty e^{-sy} b_\delta(y) dy$$

και R_δ να είναι ο γενικευμένος συντελεστής προσαρμογής.

Τότε, από την (1.43), αν $\tilde{b}_\delta(-R_\delta - \varepsilon) < \infty\, για\ κάποιο\ \varepsilon > 0, συνεπάγεται\ ότι$

$$\bar{G}_\delta(u) \sim C_\delta e^{-R_\delta(u)}, u \to \infty \tag{3.30}$$

Μέσω της (1.44) και εφόσον αντικαταστήσουμε το $v(y)$ με $\varphi_\delta \bar{B}_\delta(y)$, παίρνουμε

$$C_\delta = \frac{1-\varphi_\delta}{\varphi_\delta R_\delta \int_0^\infty y e^{R_\delta y} b_\delta(y) dy}.$$

Ακόμα, από την (1.46) έχουμε

$$\bar{G}_\delta(u) \le e^{-R_\delta u}, \qquad u \ge 0 \tag{3.31}$$

Αν

$$\tilde{p}(-R_\delta|t) = \int_0^\infty e^{R_\delta y} p(y|t) dy < \infty \tag{3.32}$$

τότε $\lim\limits_{u\to\infty} e^{R_\delta u}\bar{p}(u|t) = 0. Επίσης, από\ την\ \ (3.31)\ προκύπτει\ ότι$

$$\lim_{u\to\infty} e^{R_\delta u}\int_0^u \bar{G}_\delta(u-y)p(y|t)dy = \int_0^\infty \left\{\lim_{u\to\infty} e^{R_\delta(u-y)}\bar{G}_\delta(u-y)\right\} e^{R_\delta y}p(y|t)dy$$
$$= C_\delta \tilde{p}(-R_\delta|t).$$

Έτσι,

$$\lim_{u\to\infty} e^{R_\delta y}\bar{G}_\delta^* p(u|t) = C_\delta \tilde{p}(-R_\delta|t), \tag{3.33}$$

όπου
$$\bar{G}_\delta^* p(u|t) = \bar{p}(u|t) + \int_0^u \bar{G}_\delta(u-y)p(y|t)dy.$$

Για $w(x,y) = 1$, η (3.4) γίνεται $\alpha_t(x) = \bar{p}(x|t)$, ενώ η (3.1) γίνεται

$$G_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\overline{G_\delta * P}(u+ct|t)k(t)dt. \tag{3.34}$$

Αδιαμφισβήτητα, ισχύει $\overline{G_\delta * P}(u|t) \le 1$, αφού πρόκειται για συνάρτηση επιβίωσης κάποιας κατανομής και βάσει της (3.33), συνεπάγεται ότι η παράσταση $e^{R_\delta u}\overline{G_\delta * P}(u|t)$, θα είναι μία συνάρτηση ως προ u στο (0,+∞).

Τότε,

$$\lim_{u\to\infty} e^{R_\delta u}\bar{G}_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-(\delta+cR_\delta)t}\left\{\lim_{u\to\infty} e^{R_\delta(u+ct)}\overline{G_\delta * P}(u+ct|t)\right\}$$

οπότε μέσω των (3.30) και (3.33) παίρνουμε

$$C_\delta = \int_0^\infty e^{-(\delta+cR_\delta)t}\{C_\delta\tilde{p}(-R_\delta|t\}k(t)dt.$$

Διαιρώντας κατά μέλη με το C_δ έπεται ότι

$$E\left[e^{R_\delta Y-(\delta+cR_\delta)V)}\right] = 1. \tag{3.35}$$

Συγκρίνοντας την (3.35) με την (3.8) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι $s=-R_\delta$ αποτελεί ρίζα της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg. Συνοψίζοντας, αν το $R_\delta>0$ ικανοποιεί την (3.29) και η (3.32) ισχύει για κάθε t>0, τότε το R_δ ικανοποιεί επίσης την (3.35).

Στην περίπτωση της ανεξαρτησίας για την ανανεωτική διαδικασία Sparre-Andersen, όταν δηλαδή $P(y|t)=P(y)=1-\bar{P}(y)$, έχει ενδιαφέρον να δει κανείς το πώς απλοποιούνται οι συναρτήσεις πυκνοτήτων για τις μεταβλητές Y και V. Αρχικά, εφόσον ισχύει $P(y|t)=P(y)$, τότε η υπό-συνθήκη συνάρτηση πυκνότητας του ελλείμματος $|U_T|$ για μεταγενέστερες απαιτήσεις της αρχικής ($N_T \geq 2$), με $U_{T-}=x$ και T=t, είναι η

$$\frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}$$

Οπότε μπορούμε να γράψουμε την από-κοινού συνάρτηση των x,y,u ως εξής

$$h_{12}^{**}(t,x,y|u) = \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}h_1^{***}(t,x|u) \tag{3.36}$$

όπου η $h_1^{***}(t,x|u)$ αντιπροσωπεύει την από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας των T και U_{T-} όταν επέρχεται η χρεοκοπία από απαιτήσεις μεταγενέστερες της αρχικής. Με αντικατάσταση της (3.36) στην (3.12), προκύπτει

$$h_{\delta,12}^{**}(x,y|u) = \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}h_{\delta,1}^{***}(x|u)$$

όπου η $h_{\delta,1}^{***}(x|u)=\int_0^\infty e^{-\delta t}\, h_1^{***}(t,x|u)dt$ αποτελεί την πυκνότητα του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, από απαιτήσεις μεταγενέστερες της αρχικής. Έτσι, από τις σχέσεις (3.9), (3.11) και (3.13) έχουμε

$$h_{\delta,12}(x,y|u) = \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}\left\{\frac{1}{c}e^{-\delta(\frac{x-u}{c})}k(\frac{x-u}{c})\bar{P}(x) + h_{\delta,1}^{***}(x|u)\right\}$$

ή ισοδύναμα

$$h_{\delta,12}(x,y|u)=\frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}h_{\delta,1}(x|u).$$

Η τελευταία σχέση παριστάνει την από-κοινού πυκνότητα του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, με περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας για το U_{T-} να είναι

$$h_{\delta,1}(x|u)=\frac{1}{c}e^{-\delta(\frac{x-u}{c})}k(\frac{x-u}{c})\bar{P}(x)+h_{\delta,1}^{***}(x|u).$$

Στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson, η (3.37) προκύπτει εύκολα μέσω των (2.41) και (2.44). Από την (3.19) παίρνουμε

$$\varphi_\delta=\int_0^\infty h_{\delta,1}(x|0)\left\{\int_0^\infty\frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}dy\right\}dx=\int_0^\infty h_{\delta,1}(x|0)dx, \tag{3.38}$$

οπότε,

$$b_\delta(y)=\int_0^\infty\frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}\left\{\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\varphi_\delta}\right\}dx. \tag{3.39}$$

Στην περίπτωση που η $p(\cdot)$ είναι μία μικτή Erlang κατανομή, η $b_\delta(y)$ είναι επίσης μικτή Erlang κατανομή.

Επίσης, μέσω των (3.18) και (3.37) έχουμε

$$v_\delta(u)=\int_u^\infty\int_0^\infty w(x+u,y-u)\frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}h_{\delta,1}(x|0)dx$$

ή

$$v_\delta(u)=\int_0^\infty\left\{\int_u^\infty w(x+u,y-u)p(x+y)dy\right\}\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\bar{P}(x)}dx$$

ή

$$v_\delta(u)=\int_0^\infty\left\{\int_{x+u}^\infty w(x+u,y-x-u)p(y)dy\right\}\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\bar{P}(x)}dx$$

και έτσι μπορούμε να γράψουμε τη $v_\delta(u)$

$$v_\delta(u)=\int_0^\infty\alpha(x+u)\frac{h_{\delta,1}(x|0)}{\bar{P}(x)}dx, \tag{3.40}$$

με

$$\alpha(x) = \int_x^\infty w(x, y-x)p(y)dy. \tag{3.41}$$

Συνοψίζοντας, στο ανανεωτικό μοντέλο Sparre-Andersen όπου ισχύει η ανεξαρτησία μεταξύ των μεταβλητών Y και V, η (3.37) ισχύει πάντα, ενώ η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (3.21), με φ_δ να δίνεται από την (3.38), $b_\delta(y)$ να δίνεται από την (3.39) και $v_\delta(u)$ να δίνεται από την (3.40).

3.5 Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΩΝ ΡΟΠΩΝ ΤΟΥ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ

Στη συγκεκριμένη παράγραφο μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε την κατανομή και τις ροπές του ελλείμματος που προκαλεί την επέλευση της χρεοκοπίας στο εξαρτημένο μοντέλο Sparre-Andersen. Για τους υπολογισμούς μας, θα χρησιμοποιήσουμε την $m_{\delta,2}(u)$, όπως αυτή ορίζεται στην (2.28) και η οποία ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (3.23).

Από την (3.14) συνεπάγεται ότι για $w_2(y) = e^{-zy}$, είναι

$$m_{\delta,2}(u) = E\left[e^{-\delta T - z|U_T|} I(T < \infty) | U_0 = u\right] = \int_0^\infty e^{-zy} h_{\delta,2}(y|u)dy, \tag{3.42}$$

όπου η

$$h_{\delta,2}(y|u) = \int_0^\infty h_{\delta,12}(x, y|u)dx, \tag{3.43}$$

είναι η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας του ελλείμματος. Η λύση της (3.23) μπορεί μέσω της (1.32) να εκφραστεί και ως εξής

$$m_{\delta,2}(u) = v_{\delta,2}(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u v_{\delta,2}(t) g_\delta(u-t)dt, \tag{3.44}$$

όπου η $g_\delta(u)$ προκύπτει από τη σχέση (3.26).

Επιπλέον, είναι

$$v_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta \int_0^\infty w_2(y) b_\delta(u+y)dy.$$

Επομένως, ισχύει ότι

$$m_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta \int_0^\infty w_2(y) b_\delta(u+y)dy + \frac{\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta} \int_0^u \int_0^\infty w_2(y) b_\delta(t+y) g_\delta(u-t)dydt$$

$$= \varphi_\delta \int_0^\infty w_2(y) b_\delta(u+y)dy + \frac{\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta} \int_0^\infty w_2(y) \int_0^u b_\delta(t+y) g_\delta(u-t)dtdy$$

$$= \varphi_\delta \int_0^\infty w_2(y) \left\{ b_\delta(u+y) + \frac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u b_\delta(t+y) g_\delta(u-t)dt \right\} dy.$$

Έτσι, για $w_2(y) = e^{-zy}$ και εξισώνοντας τους συντελεστές του e^{-zy} στην (3.42), παίρνουμε

$$h_{\delta,2}(y|u) = \varphi_\delta b_\delta(u+y) + \tfrac{\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta} \int_0^u b_\delta(t+y) g_\delta(u-t)dt. \tag{3.45}$$

Η πυκνότητα της σχέσης (3.45) μπορεί να βρεθεί μέσω της συνάρτησης επιβίωσης $\bar{G}_\delta(u)$, όπως προκύπτει από την (3.42) για z=0:

$$\bar{G}_\delta(u) = \int_0^\infty h_{\delta,2}(y|u)dy = \varphi_\delta \bar{B}_\delta(u) + \tfrac{\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta} \int_0^u \bar{B}_\delta(t+y) g_\delta(u-t)dt. \tag{3.46}$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας και πάλι την (3.45), η συνάρτηση

$$h_{\delta,2,u}(y) = \frac{h_{\delta,2}(y|u)}{\bar{G}_\delta(u)}$$

μπορεί να γραφεί και ως

$$h_{\delta,2,u}(y) = \tfrac{(1-\varphi_\delta)\bar{B}_\delta(u) b_{\delta,u}(y) + \int_0^u b_{\delta,t}(y) \bar{B}_\delta(t) g_\delta(u-t)dt}{(1-\varphi_\delta)\bar{B}_\delta(u) + \int_0^u \bar{B}_\delta(t) g_\delta(u-t)dt}, \tag{3.47}$$

όπου για $x, y \geq 0$,

$$b_{\delta,x}(y) = \tfrac{b_\delta(x+y)}{\bar{B}_\delta(x)}. \tag{3.48}$$

Η $b_{\delta,x}(y)$ αποτελεί την κατανομή υπερβάλλουσας ζημίας, σχετιζόμενη με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $b_\delta(u)$. Η (3.47) αποτελεί τη μίξη του αρχικού πλεονάσματος u με τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας $b_{\delta,u}(y)$.

Αφού $\bar{G}_\delta(u) = \psi(u)\ \gamma\iota\alpha\ \delta = 0$, γίνεται φανερό ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $h_{0,2,u}(y)$ αποτελεί τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος πριν τη χρεοκοπία $|U_T|$, δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπία $(T < \infty)$.

Θα μελετήσουμε τώρα τις ροπές της τ.μ. $|U_T|$. Αρχικά, ορίζουμε τις ροπές της $B_\delta(y)$ ως εξής

$$\mu_{\kappa,\delta} = \int_0^\infty y^\kappa d\, B_\delta(y), \gamma\iota\alpha\ \kappa = 0,1,2,.. \tag{3.49}$$

Οι ροπές του ελλείμματος ορίζονται μέσω της σχέσης

$$r_{\kappa,\delta}(u) = E\left[e^{-\delta T}|U_T|^\kappa I(T < \infty)|U_0 = u\right], k = 0,1,2,.. \tag{3.50}$$

Στην περίπτωση που $w(x,y) = w_2(y) = y^\kappa$, έχουμε

$$r_{\kappa,\delta}(u) = \int_0^\infty y^\kappa h_{\delta,2}(y|u)dy, \tag{3.51}$$

με την $h_{\delta,2}(y|u)$ να δίνεται από τη σχέση (3.45).

Ακόμα, από την (3.21) έχουμε

$$\varphi_\delta b_\delta(u+y) = \frac{1}{1-\varphi_\delta}\left\{g_\delta(u+y) - \varphi_\delta \int_0^{u+y} b_\delta(v) g_\delta(u+y-v)dv\right\}$$

και από την (3.45)

$$\begin{aligned}(1-\varphi_\delta)&h_{\delta,2}(y|u) - g_\delta(u+y)\\ &= -\varphi_\delta \int_0^{u+y} b_\delta(v) g_\delta(u+y-v)dv + \varphi_\delta \int_0^u b_\delta(t+y) g_\delta(u-t)dt\\ &= -\varphi_\delta \int_0^{u+y} b_\delta(v) g_\delta(u+y-v)dv + \varphi_\delta \int_y^{u+y} b_\delta(v) g_\delta(u+y-v)dv,\end{aligned}$$

όπου με αλλαγή της μεταβλητής από t σε v=t+y καταλήγουμε στην

$$h_{\delta,2}(y|u) = \frac{1}{1-\varphi_\delta}\left\{g_\delta(u+y) - \varphi_\delta \int_0^{y} b_\delta(v) g_\delta(u+y-v)dv\right\}.$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, η (3.51) γίνεται

$$r_{\kappa,\delta}(u) = \frac{1}{1-\varphi_\delta}\left\{\int_0^\infty y^\kappa g_\delta(u+y)dy - \varphi_\delta \int_0^\infty y^\kappa \int_0^y b_\delta(v) g_\delta(u+y-v)dvdy\right\}$$

$$= \frac{1}{1-\varphi_\delta}\left\{\int_0^\infty y^\kappa g_\delta(u+y)dy - \varphi_\delta \int_0^\infty b_\delta(v) \int_v^\infty y^\kappa \, g_\delta(u+y-v)dydv\right\}.$$

Μέσω αλλαγής της μεταβλητής ολοκλήρωσης από y σε x=u+y-v παίρνουμε

$$\int_0^\infty b_\delta(v) \int_v^\infty y^\kappa \, g_\delta(u+y-v)dydv = \int_0^\infty b_\delta(v) \int_u^\infty (v+x-u)^\kappa \, g_\delta(x)dxdv$$

$$= \int_0^\infty \int_u^\infty \left\{\sum_{j=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{j} v^{\kappa-j}(x-u)^j\right\} b_\delta(v) g_\delta(x)dxdv$$

$$= \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{j} \left\{\int_0^\infty v^{\kappa-j} b_\delta(v)dv\right\}\left\{\int_u^\infty (x-u)^j g_\delta(x)dx\right\}.$$

Έπειτα, χρησιμοποιώντας την (3.49) έχουμε

$$r_{\kappa,\delta}(u) = \frac{1}{1-\varphi_\delta}\left\{\int_u^\infty (x-u)^\kappa g_\delta(x)dx - \varphi_\delta \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{j} \mu_{\kappa-j,\delta} \int_u^\infty (x-u)^j g_\delta(x)dx\right\}$$

ή διαφορετικά

$$r_{\kappa,\delta}(u) = \frac{\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta}\left\{\frac{1}{\varphi_\delta}\int_u^\infty (x-u)^\kappa g_\delta(x)dx - \sum_{j=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{j} \mu_{\kappa-j,\delta} \int_u^\infty (x-u)^j g_\delta(x)dx\right\}. \quad (3.52)$$

Παρατηρούμε ότι οι τιμές των ροπών του ελλείμματος $e^{-\delta T}|U_T|$ μπορούν να βρεθούν μέσω της $r_{\kappa,\delta}(u)$.

Ακόμα, για k=1 παίρνουμε το μέσο έλλειμμα από την απλοποίηση της (3.52), το οποίο είναι ίσο με

$$r_{1,\delta}(u) = \int_u^\infty (x-u)^\kappa g_\delta(x)dx - \frac{\varphi_\delta \mu_{1,\delta}}{1-\varphi_\delta}\bar{G}_\delta(u).$$

Μέσω της (2.28) γνωρίζουμε ότι ο μέσος μίας σύνθετης Γεωμετρικής Κατανομής είναι

$$\int_0^\infty \bar{G}_\delta(y)dy = \frac{\varphi_\delta \mu_{1,\delta}}{1-\varphi_\delta}, \tag{3.53}$$

και ολοκληρώνοντας κατά μέλη, οδηγούμαστε στις

$$\int_u^\infty (x-u)g_\delta(x)dx = \int_u^\infty \bar{G}_\delta(y)dy,$$

και

$$r_{1,\delta}(u) = \int_0^\infty \{\bar{G}_\delta(u+y) - \bar{G}_\delta(u)\bar{G}_\delta(y)\}\, dy.$$

Επομένως, το μέσο έλλειμμα δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπία θα είναι

$$\frac{r_{1,0}(u)}{\psi(u)}$$

ή διαφορετικά

$$E[|U_T||T<\infty, U_0 = u] = \int_0^\infty \left\{\frac{\psi(u+y)}{\psi(u)} - \psi(y)\right\} dy. \tag{3.54}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1 *Οι ροπές του ελλείμματος της χρεοκοπίας στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson.*

Στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson, η παράσταση για την (3.50) δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπία, δόθηκε από το Θεώρημα 3.1.

Σε αυτήν την περίπτωση, οι ροπές του ελλείμματος μπορούν να υπολογισθούν κάνοντας χρήση της (3.52) με

- $\varphi_\delta = \frac{\lambda}{c}\left\{\frac{1-\tilde{p}(r)}{r}\right\}$ στην (2.14)
- $g_\delta(x)$ στην (2.31).

□

Έστω $w(x,y_1) = w_2(y_1) = I(y_1 > y)$ με y σταθερό. Τότε, μέσω της (3.14) έχουμε

$$m_\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty w(x, y_1)\, h_{\delta,12}(x, y_1|u)\, dx dy_1$$

$$= \int_0^\infty w_2(y_1) \left\{ \int_0^\infty h_{\delta,12}(x, y_1|u) dx \right\} dy_1$$

$$= \int_0^\infty I(y_1 > y) h_{\delta,2}(y_1|u)\, dy_1 = \int_y^\infty h_{\delta,2}(y_1|u) dy_1.$$

Από την παραπάνω σχέση ορίζουμε την ακόλουθη συνάρτηση επιβίωσης:

$$\overline{H}_{\delta,2}(y|u) = \int_y^\infty h_{\delta,2}(y_1|u) dy_1, \tag{3.55}$$

και αν $w_2(y_1) = I(y_1 > y)$, η (3.22) γίνεται

$$v_{2,\delta}(u) = \varphi_\delta \int_u^\infty w_2(y_1 - u)\, b_\delta(y_1) dy_1$$

$$= \varphi_\delta \int_u^\infty I(y_1 > y + u)\, b_\delta(y_1) dy_1$$

$$= \varphi_\delta \int_{y+u}^\infty b_\delta(y_1) dy_1 = \varphi_\delta \bar{B}_\delta(y + u).$$

Άρα, από την (3.23), έπεται ότι η $\overline{H}_{\delta,2}(y|u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:

$$\overline{H}_{\delta,2}(y|u) = \varphi_\delta \int_0^u \overline{H}_{\delta,2}(y|u - x)\, b_\delta(x) dx + \varphi_\delta \bar{B}_\delta(y + u). \tag{3.56}$$

Εφόσον υπάρχει $R_\delta > 0$ που να ικανοποιεί την (3.29) και η $e^{R_\delta u}\bar{B}_\delta(y + u)$ αποτελεί μία ολοκληρώσιμη ως προς u Riemann συνάρτηση, τότε από τις σχέσεις (1.43) και (1.44) προκύπτει

$$\overline{H}_{\delta,2}(y|u) \sim \left\{ \frac{\int_0^\infty e^{R_\delta x} \bar{B}_\delta(y+x) dx}{\int_0^\infty x e^{R_\delta x} b_\delta(x) dx} \right\} e^{-R_\delta u},\ u \to \infty \tag{3.57}$$

Αφού,

$$\int_0^\infty e^{(R_\delta + \varepsilon)x} \bar{B}_\delta(y + x)\, dx \le \int_0^\infty e^{(R_\delta)x} \bar{B}_\delta(x)\, dx = \frac{\tilde{b}_\delta(-R_\delta - \varepsilon) - 1}{R_\delta + \varepsilon},$$

έπεται ότι η συνάρτηση $e^{R_\delta u}\bar{B}_\delta(y+u)$ είναι άμεσα ολοκληρώσιμη κατά Riemann αν $\tilde{b}_\delta(-R_\delta-\varepsilon)<\infty$ για κάποιο $\varepsilon>0$ και η (3.57) ισχύει κανονικά.

Ακολούθως, έστω

$$\bar{H}_{\delta,2,u}(y)=\int_y^\infty h_{\delta,2,u}(y_1)\,dy_1=\frac{\bar{H}_{\delta,2}(y|u)}{\bar{G}_\delta(u)}, \tag{3.58}$$

και επειδή, μέσω της (3.46) ισχύει $\bar{G}_\delta(u)=\bar{H}_{\delta,2}(0|u)$ θα έχουμε

$$\lim_{u\to\infty}\bar{H}_{\delta,2,u}(y)=\frac{\int_0^\infty e^{R_\delta x}\bar{B}_\delta(y+x)\,dx}{\int_0^\infty e^{R_\delta x}\bar{B}_\delta(x)\,dx}.$$

Ακόμα, ισχύει,

$$\bar{H}_{\delta,2,\infty}(y)=1-H_{\delta,2,\infty}(y),$$

με

$$\bar{H}_{\delta,2,u}(y)=\frac{\int_0^\infty e^{R_\delta x}\bar{B}_\delta(y+x)dx}{\int_0^\infty e^{R_\delta x}\bar{B}_\delta(x)dx}. \tag{3.59}$$

Σημειώνουμε εδώ, ότι ο παρονομαστής της (3.59) δίνεται από τη σχέση

$$\int_0^\infty e^{R_\delta x}\bar{B}_\delta(x)\,dx=\frac{1-\varphi_\delta}{\varphi_\delta R_\delta}$$

όπως προκύπτει από την (3.29).

Μία σύγκριση ανάμεσα στην (3.59) και τη (1.18) μας δείχνει ότι η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{H}_{\delta,2,\infty}(y)$ προσομοιάζει σε τύπου Dickson-Hipp, μόνο που στη θέση του r υπάρχει το $-R_\delta$. Έτσι, από τη (1.19) προκύπτει η ακόλουθη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$h_{\delta,2,\infty}(y)=\frac{e^{-R_\delta y}\int_y^\infty e^{R_\delta x}b_\delta(x)dx}{\int_0^\infty e^{R_\delta x}\bar{B}_\delta(x)dx}=\frac{\int_0^\infty e^{R_\delta x}\bar{B}_\delta(x)b_{\delta,x}(y)dx}{\int_0^\infty e^{R_\delta x}\bar{B}_\delta(x)dx}, \tag{3.60}$$

όπου η $b_{\delta,x}(y)$ δίνεται από την (3.48).

Ακόμα, από τη (1.24) οι ροπές για n=1,2,3,… δίνονται από τη σχέση

$$\int_0^{\infty} y^n h_{\delta,2,\infty}(y)dy = \frac{n!}{R_\delta^n}\left\{1 - \frac{\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta}\sum_{j=1}^{n}\frac{R_\delta^j}{j!}\mu_{j,\delta}\right\}.$$

Επίσης, η $\bar{A}_x(y)$ όπως αναφέρεται στη (1.52), είναι ουσιαστικά η $\overline{H}_{\delta,2,u}(y)$ για x=y. Ακόμα, από τη (1.57) έπεται ότι

$$\frac{\bar{G}_\delta(u+y)}{\bar{G}_\delta(u)} = P(L_\delta + X_{\delta,u} > y), \tag{3.61}$$

όπου η τυχαία μεταβλητή L_δ έχει συνάρτηση κατανομής $G_\delta(u) = 1 - \bar{G}_\delta(u)$ και η συνάρτηση επιβίωσης της σύνθετης Γεωμετρικής Κατανομής $\bar{G}_\delta(u)$ δίνεται στην (3.25).

Η $X_{\delta,u}$ παριστά το έλλειμμα κατά τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι επέρχεται η χρεοκοπία ($U_0 = u$) με

$$H_{\delta,2,u}(y) = 1 = \overline{H}_{\delta,2,u}(y).$$

Πιο συγκεκριμένα, για δ=0 ($\bar{G}_0(u) = \psi(u)$), ολοκληρώνοντας την (3.61) καταλήγουμε στην

$$\int_0^{\infty} \frac{\psi(u+y)}{\psi(u)}dy = \int_0^{\infty} P(L_0 + X_{0,u} > y)dy = E(L_0) + E(X_{0,u}).$$

Όμως, αφού

$$E(L_0) = \int_0^{\infty} \psi(y)dy \qquad \kappa\alpha\iota \qquad X_{0,u} = |U_T| \; \delta o\theta \acute{\varepsilon}\nu\tau o\varsigma \; T < \infty, U_0 = u,$$

το μέσο έλλειμμα δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπία βρίσκεται όπως και στην περίπτωση της (3.54).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ERLANG ΚΑΙ COX ΓΙΑ ΤΑ ΥΨΗ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ

Σε αυτό το κεφάλαιο πλαισιώνουμε όσα ειπώθηκαν στο Κεφάλαιο 3 δεδομένου ότι μεγέθη όπως η περιθώρια κατανομή του ύψους των απαιτήσεων ή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων, μπορούν να αποσαφηνιστούν μέσω της κατάλληλης παραμετροποίησης. Στους υπολογισμούς μας, ιδιαίτερα χρήσιμες είναι οι υποθέσεις που εμπεριέχουν Erlang κατανομές ή κατανομές Cox.

Στην παράγραφο 4.1 θα δούμε μία γενίκευση του κλασσικού μοντέλου Poisson, όπως αυτή αναλύθηκε στο Κεφάλαιο 2. Η βασική μας υπόθεση είναι ότι η περιθώρια συνάρτηση των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ δύο απαιτήσεων ακολουθεί Erlang κατανομή. Για την αποσαφήνιση της συνάρτησης Gerber-Shiu θα χρησιμοποιηθούν το πολυώνυμο Lagrange και ο κατάλληλος μετασχηματισμός Laplace.

Στην παράγραφο 4.2 θα θεωρήσουμε το μοντέλο της ανεξαρτησίας για τις μεταβλητές του ενδιάμεσου χρόνου μεταξύ των απαιτήσεων και του εκθετικά κατανεμημένου ατομικού ύψους τους. Προκειμένου να υπολογίσουμε σημαντικά μεγέθη όπως την πρώτη χρονικά πτώση του πλεονάσματος, το χρόνο και το ύψος της πρώτης απαίτησης θα δεσμεύσουμε αντίστοιχα ως προς αυτές τις μεταβλητές. Μία επέκταση του πολυωνύμου Lagrange θα μας βοηθήσει να ορίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας και την πιθανότητα χρεοκοπίας σε συγκεκριμένες χρονικές στιγμές. Για την περιθώρια κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, θα γίνει χρήση του τελεστή Dickson-Hipp.

Η παράγραφος 4.3 αποτελεί μία επέκταση της παραγράφου 4.2 αναφορικά με την περιθώρια συνάρτηση του ατομικού ύψους των απαιτήσεων, η οποία ακολουθεί την κατανομή Cox. Παράλληλα, θα δούμε τις ειδικές περιπτώσεις της συνάρτησης ποινής, για τις οποίες ισχύει η συνάρτηση Gerber-Shiu, μέσω επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος εξισώσεων.

Στην παράγραφο 4.4 αντικαθιστούμε την κατανομή Cox με μία μίξη Erlang κατανομών, καταλήγοντας έτσι σε χρήσιμα αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας, την τιμή του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία και τα υπόλοιπα σχετικά μεγέθη που μας ενδιαφέρουν.

4.1 ΤΟ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ COX ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ

Στο εξαρτημένο μοντέλο των Sparre-Andersen υποθέτουμε ότι η από-κοινού πυκνότητα των ενδιάμεσων χρόνων εμφάνισης των απαιτήσεων (V) και του μεγέθους των απαιτήσεων (Y) είναι της μορφής

$$p(y|t)k(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \eta_{ij}(y)\, \mathcal{E}_{\lambda_i,j}(t), \tag{4.1}$$

όπου

$$\mathcal{E}_{\lambda_i,j}(t) = \frac{\lambda_i(\lambda_i t)^{j-1}e^{-\lambda_i t}}{(j-1)!}, \tag{4.2}$$

είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας Erlang κατανομής.

Έστω επίσης

$$\tilde{\eta}_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\eta_{ij}(y)dy$$

οπότε, η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της V θα είναι η εξής

$$k(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\eta_{ij}(0)\,\mathcal{E}_{\lambda_i,j}(t). \tag{4.3}$$

Η k(t) έχει τη μορφή της κατανομής Cox, αντίστοιχης με εκείνη που είδαμε στην παράγραφο (1.5). Ομοίως, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y θα είναι

$$p(y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\eta_{ij}(y). \tag{4.4}$$

Αν

$$\eta_{ij}(y) = \tilde{\eta}_{ij}(0)p(y),$$

τότε από τις σχέσεις (4.1), (4.2), (4.3) προκύπτει ότι $p(y|t) = p(y)$. Επομένως, το μοντέλο μας είναι το κανονικό μοντέλο Sparre-Andersen με ενδιάμεσους χρόνους που ακολουθούν την κατανομή Cox και V,Y ανεξάρτητα.

Για τη συνάρτηση Gerber-Shiu μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} m_\delta(u) = &\int_0^\infty e^{-\delta t}\int_{u+ct}^\infty w(u+ct, y-u-ct)p(y|t)k(t)dydt \\ &+\int_0^\infty e^{-\delta t}\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct-y)p(y|t)k(t)dydt, \end{aligned} \tag{4.5}$$

οπότε μέσω της (4.1) έχουμε

$$\begin{aligned} m_\delta(u) = &\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\int_{u+ct}^\infty w(u+ct, y-u-ct)\eta_{ij}(y)dy\right\}\mathcal{E}_{\lambda_i,j}(t)dt \\ &+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\int_0^{u+ct} m_\delta(u+ct, y-u-ct)\eta_{ij}(y)dy\right\}\mathcal{E}_{\lambda_i,j}(t)dt. \end{aligned}$$

Τότε, από την (4.1) έπεται ότι

$$m_\delta(u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \int_0^\infty e^{-\delta t} \chi_{ij,\delta}(u+ct)\, \mathcal{E}_{\lambda_i,j}(t), \tag{4.6}$$

με

$$\chi_{ij,\delta}(x) = \alpha_{ij}(x) + \int_0^x m_\delta(x-y)\eta_{ij}(y)dy, \tag{4.7}$$

και

$$\alpha_{ij}(x) = \int_x^\infty w(x, y-x)\eta_{ij}(y)dy. \tag{4.8}$$

Έστω επίσης οι μετασχηματισμοί Laplace

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \mathcal{E}_{\lambda_i,j}(t)dt = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+s}\right)^j, \tag{4.9}$$

και από την (4.2) ισχύει

$$\tilde{\alpha}_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, \alpha_{ij}(x)dx,$$

οπότε παίρνουμε

$$\tilde{\chi}_{ij,\delta}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \chi_{ij,\delta}(x)dx = \tilde{\alpha}_{ij}(s) + \tilde{m}_\delta(s)\tilde{\eta}_{ij}(s). \tag{4.10}$$

Στη σχέση (3.5) αντικαθιστούμε το $h_t(x)$ με $\chi_{ij,\delta}(x)$ και το k(t) με $\mathcal{E}_{\lambda_i,j}(t)$ και παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{-su} \int_0^\infty e^{-\delta t} \chi_{ij,\delta}(u+ct) \mathcal{E}_{\lambda_i,j}(t)\, dtdu = \tilde{\chi}_{ij,\delta}(s) \tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta - cs) - \chi^*_{ij,\delta}(s), \tag{4.11}$$

όπου

$$\chi^*_{ij,\delta}(s) = \int_0^\infty e^{-(\delta-cs)t} \left\{ \int_0^{ct} e^{-sx} \chi_{ij,\delta}(x)dx \right\} \mathcal{E}_{\lambda_i,j}(t)dt.$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, παίρνουμε

$$\chi^*_{ij,\delta}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} \left\{ \int_{\frac{x}{c}}^\infty e^{-(\delta-cs)t} \mathcal{E}_{\lambda_i,j}(t)dt \right\} \chi_{ij,\delta}(x)dx, \tag{4.12}$$

κι αν αντί για j θέσουμε κ, από την (4.2) έπεται ότι

$$\int_{\frac{x}{c}}^{\infty} e^{-(\delta-cs)t}\mathcal{E}_{\lambda_i,j}(t)dt = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i+\delta-cs}\right)^{\kappa}\int_{\frac{x}{c}}^{\infty}\frac{(\lambda_i+\delta-cs)^{\kappa}t^{\kappa-1}e^{-(\lambda_i+\delta-cs)t}}{(\kappa-1)!}dt$$

$$= \lambda_i^{\kappa}e^{-(\lambda_i+\delta-cs)\left(\frac{x}{c}\right)}\sum_{j=1}^{\kappa}\frac{(\lambda_i+\delta-cs)^{-j}x^{\kappa-j}}{c^{\kappa-j}(\kappa-j)!}.$$

Με αντικατάσταση στην (4.12) προκύπτει

$$\chi_{i\kappa,\delta}^{*}(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-sx}\left\{\lambda_i^{k}e^{-\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-s\right)x}\sum_{j=1}^{\kappa}\frac{(\lambda_i+\delta-cs)^{-j}x^{k-j}}{c^{\kappa-j}(\kappa-j)!}\right\}\chi_{i\kappa,\delta}(x)dx$$

$$\Rightarrow \chi_{i\kappa,\delta}^{*}(s) = \lambda_i^{k}\sum_{j=1}^{\kappa}\frac{(\lambda_i+\delta-cs)^{-j}}{(-c)^{\kappa-j}(\kappa-j)!}\tilde{\chi}_{i\kappa,\delta}^{(\kappa-j)}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right),$$

(4.13)

όπου

$$\tilde{\chi}_{i\kappa,\delta}^{\ell}(z) = \int_{0}^{\infty}(-x)^{\ell}e^{-zx}\chi_{ij,\delta}(x)dx.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν, μέσω των (4.6) και (4.11) ότι

$$\widetilde{m}_{\delta}(s) = \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\tilde{\chi}_{ij,\delta}(s)\,\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta-cs) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}x_{ik,\delta}^{*}(s), \qquad (4.14)$$

και από την (4.13)

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}x_{ik,\delta}^{*}(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\lambda_i^{\kappa}\sum_{j=1}^{\kappa}\frac{(\lambda_i+\delta-cs)^{-j}}{(-c)^{\kappa-j}(\kappa-j)!}\tilde{\chi}_{i\kappa,\delta}^{(\kappa-j)}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}(\lambda_i+\delta-cs)^{-j}\sum_{k=j}^{n_i}\frac{\lambda_i^{\kappa}\tilde{\chi}_{i\kappa,\delta}^{(\kappa-j)}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right)}{(-c)^{\kappa-j}(\kappa-j)!}.$$

Επομένως,

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}x_{ik,\delta}^{*}(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\frac{C_{ij}}{(\lambda_i+\delta-cs)^{j}}, \qquad (4.15)$$

όπου για τον αριθμητή ισχύει

$$C_{ij} = \sum_{k=j}^{n_i}\frac{\lambda_i^{\kappa}\tilde{\chi}_{i\kappa,\delta}^{(\kappa-j)}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}\right)}{(-c)^{\kappa-j}(\kappa-j)!}.$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (4.10), (4.14), (4.15) προκύπτει ότι

$$\tilde{m}_\delta(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\{\tilde{\alpha}_{ij}(s) + \tilde{m}_\delta(s)\tilde{\eta}_{ij}(s)\}\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta - cs) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\frac{C_{ij}}{(\lambda_i + \delta - cs)^j},$$

ενώ για την $\tilde{m}_\delta(s)$ ισχύει

$$\tilde{m}_\delta(s)\{1 - E[e^{-sY-(\delta-cs)V}]\} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j\tilde{\alpha}_{ij}(s) - C_{ij}}{(\lambda_i+\delta-cs)^j}, \tag{4.16}$$

όπου

$$E[e^{-sY-(\delta-cs)V}] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\{\tilde{\eta}_{ij}(s)\}\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta - cs). \tag{4.17}$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι το γινόμενο $\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i + s)^{n_i}$ αποτελεί πολυώνυμο n-βαθμού, με

$$n = \sum_{i=1}^{m} n_i.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, είναι

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\frac{C_{ij}}{(\lambda_i+\delta-cs)^j} = \frac{q(s)}{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+\delta-cs)^{n_i}}, \tag{4.18}$$

όπου

$$q(s) = \left\{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i + \delta - cs)^{n_i}\right\}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\frac{C_{ij}}{(\lambda_i + \delta - cs)^j}.$$

Το $q(s)$ είναι πολυώνυμο n-1 βαθμού ή και μικρότερου. Συνεπώς, για την (4.16) θα ισχύει

$$\tilde{m}_\delta(s)\{1 - E[e^{-sY-(\delta-cs)V}]\} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j\tilde{\alpha}_{ij}(s)}{(\lambda_i+\delta-cs)^j} - \frac{q(s)}{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+\delta-cs)^{n_i}}. \tag{4.19}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις (4.9) και (4.17) η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg γράφεται ως εξής

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j\tilde{\eta}_{ij}(s)}{(\lambda_i+\delta-cs)^j} = 1. \tag{4.20}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπάρχουν n το πλήθος διακριτές ρίζες $r_1, r_2, \dots, r_n$ στην εξίσωση Lundberg (4.20) με μη-αρνητικό πραγματικό μέρος $\{\mathrm{Re}(r_\kappa) \geq 0\}$ στο μιγαδικό επίπεδο. Για $|\tilde{m}(r_\kappa)| < \infty$, το αριστερό μέλος της (4.19) μηδενίζεται για $s = r_\kappa$.

Έτσι για $\kappa = 1,2,\dots,n$ προκύπτει

$$q(r_\kappa)=\{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+\delta-cr_\kappa)^{n_\iota}\}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j\tilde{\alpha}_{ij}(s)}{(\lambda_i+\delta-cr_\kappa)^j}. \qquad (4.21)$$

Αφού το πολυώνυμο q(s) είναι βαθμού το πολύ n-1, θα έχουμε

$$q(s)=\sum_{\kappa=0}^{n-1}q_\kappa s^\kappa=\sum_{\kappa=1}^{n}q(r_\kappa)\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq\kappa}}^{n}\left(\frac{s-r_\ell}{r_\kappa-r_\ell}\right). \qquad (4.22)$$

Αναφορικά με το μετασχηματισμό Laplace, θα είναι

$$\widetilde{m}_\delta(s)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\dfrac{\lambda_i^j\tilde{\alpha}_{ij}(s)}{(\lambda_i+\delta-cs)^j}-\dfrac{q(s)}{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+\delta-cs)^{n_i}}}{1-\sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\dfrac{\lambda_i^j\tilde{\eta}_{ij}(s)}{(\lambda_i+\delta-cs)^j}}.$$

Για s=0 θα ισχύει

$$m_\delta(0)=\lim_{s\to\infty}s\widetilde{m}_\delta(s)=\frac{\left(\lim\limits_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\dfrac{\lambda_i^j\tilde{\alpha}_{ij}(s)}{(\lambda_i+\delta-cs)^j}\right)-\left(\lim\limits_{s\to\infty}\dfrac{q(s)}{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+\delta-cs)^{n_i}}\right)}{1-\left(\lim\limits_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\dfrac{\lambda_i^j\tilde{\eta}_{ij}(s)}{(\lambda_i+\delta-cs)^j}\right)}$$

και επειδή

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j\tilde{\alpha}_{ij}(s)}{(\lambda_i+\delta-cs)^j}=0,$$

$$\lim_{s\to\infty}\sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\frac{\lambda_i^j\tilde{\eta}_{ij}(s)}{(\lambda_i+\delta-cs)^j}=0,$$

καταλήγουμε σε

$$m_\delta(0)=-\lim_{s\to\infty}\frac{q(s)}{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+\delta-cs)^{n_i}}.$$

Με δεδομένο ότι το πολυώνυμο τόσο του αριθμητή όσο και του παρονομαστή είναι πολυώνυμα βαθμού n, συνεπάγεται από (4.22)

$$m_\delta(0)=-\lim_{s\to\infty}\frac{\sum_{\kappa=1}^{n}q_{\kappa-1}s^\kappa}{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+\delta-cs)^{n_i}}=-\lim_{s\to\infty}\frac{\sum_{\kappa=1}^{n}q_{\kappa-1}s^{\kappa-n}}{\prod_{i=1}^{m}\left(\dfrac{\lambda_i+\delta}{c}-c\right)^{n_i}}=-\frac{q_{n-1}}{(-c)^n}$$

ή

$$m_\delta(0)=-(-c)^{-n}\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{q(r_\kappa)}{c^n\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\kappa}}^{n}(r_j-r_\kappa)}.$$

Χρησιμοποιώντας την (4.21) έχουμε

$$m_\delta(0)=\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{\{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+\delta-cr_\kappa)^{n_i}\}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_\iota}\tilde{\alpha}_{ij}(r_\kappa)\,\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta-cr_\kappa)}{c^n\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\kappa}}^{n}(r_j-r_\kappa)},$$

δηλαδή,

$$m_\delta(0)=\sum_{\kappa=1}^{n}\alpha_\kappa\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_\iota}\tilde{\alpha}_{ij}(r_\kappa)\,\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta-cr_\kappa), \tag{4.23}$$

όπου

$$\alpha_\kappa=\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i+\delta}{c}-r_\kappa\right)^{n_i}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\kappa}}^{n}(r_j-r_\kappa)}. \tag{4.24}$$

Τώρα, σύμφωνα με την (2.43) για u=o,

$$m_\delta(0)=\int_0^\infty\int_0^\infty w(x,y)h_{\delta,12}(x,y|0)\,dxdy.$$

Κάνοντας χρήση της (4.8), η (4.23) γράφεται ως εξής

$$m_\delta(0)=\sum_{\kappa=1}^{n}\alpha_\kappa\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta-cr_\kappa)\int_0^\infty e^{-r_\kappa x}\int_x^\infty w(x,y-x)\eta_{ij}(y)dydx$$

ή

$$m_\delta(0)=\int_0^\infty\int_0^\infty w(x,y)\left\{\sum_{\kappa=1}^{n}\alpha_\kappa\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta-cr_\kappa)e^{-r_\kappa x}\,\eta_{ij}(x+y)\right\}dxdy.$$

Αφού $w(x,y)=e^{-sx-zy}$, τότε το $m_\delta(0)$ αντιπροσωπεύει το μετασχηματισμό Laplace του $h_{\delta,12}(x,y|0)$, οπότε

$$h_{\delta,12}(x,y|0)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\kappa=1}^{n}\alpha_\kappa\,\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta-cr_\kappa)e^{-r_\kappa x}\eta_{ij}(x+y). \tag{4.25}$$

Η περιθώρια συνάρτηση του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία, δίνεται από την (4.25) ολοκληρώνοντας ως προς y,

$$h_{\delta,1}(x|0)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\kappa=1}^{n}\alpha_\kappa\,\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta-cr_\kappa)e^{-r_\kappa x}\int_x^\infty\eta_{ij}(y)dy.$$

Και από την (3.19) μπορούμε να γράψουμε

$$\varphi_\delta=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\kappa=1}^{n}\alpha_\kappa\,\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta-cr_\kappa)e^{-r_\kappa x}\int_0^\infty T_{r_\kappa}\eta_{ij}(y)dy.$$

Έτσι είναι

$$b_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa\, \tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta - cr_\kappa) T_{r_\kappa}\eta_{ij}(y).$$

Η συνάρτηση Gerber-Shiu ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση (3.21), όπου μέσω της (3.18) παίρνουμε

$$v_\delta(u) = \int_0^\infty \left\{\int_u^\infty w(x+u, y-u)\eta_{ij}(x+y)dy\right\}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa\, \tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta - cr_\kappa)e^{-r_\kappa x}\right\}dx$$

ή

$$v_\delta(u) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa\, \tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta - cr_\kappa)\int_0^\infty e^{-r_\kappa x}\int_{x+u}^\infty w(x+u, y-x-u)\eta_{ij}(y)dydx$$

και μέσω της (4.8)

$$v_\delta(u) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa\, \tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta - cr_\kappa)\int_0^\infty e^{-r_\kappa x}\alpha_{ij}(x+u)dx.$$

Ακόμα, μέσω της (3.5), είναι

$$v_\delta(u) = \textstyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa\, \tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta - cr_\kappa) T_{r_\kappa}\alpha_{ij}(u). \qquad (4.26)$$

Περαιτέρω απλοποιήσεις μας οδηγούν στο κανονικό μοντέλο Sparre-Andersen με V,Y ανεξάρτητα. Συνεπώς, αν

$$\eta_{ij}(y) = \tilde{\eta}_{ij}(0)p(y),$$

τότε από την (4.1), p(y|t)=p(y) και η k(t) έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που ακολουθεί την κατανομή Cox. Ο μετασχηματισμός Laplace θα είναι,

$$\tilde{\kappa}_s = E(e^{-sV}) = \textstyle\int_0^\infty e^{-st}\kappa(t)dt = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\tilde{\eta}_{ij}(0)\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(s). \qquad (4.27)$$

Μέσω απλοποιήσεων, η (4.25) μπορεί να γραφτεί και ως εξής

$$h_{\delta,12}(x, y|0) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa\, \tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta - cr_\kappa)e^{-r_\kappa x}\tilde{\eta}_{ij}(0)p(x+y)$$

ή

$$h_{\delta,12}(x, y|0) = p(x+y)\sum_{\kappa=1}^{n}\alpha_\kappa e^{-r_\kappa x}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\tilde{\eta}_{ij}(0)\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta - cr_\kappa).$$

ή

$$h_{\delta,12}(x,y|0) = p(x+y)\sum_{\kappa=1}^{n}\alpha_\kappa^* e^{-r_\kappa x}, \tag{4.28}$$

με

$$\alpha_\kappa^* = \alpha_\kappa \tilde{\kappa}(\delta - cr_\kappa). \tag{4.29}$$

Τότε, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την (4.29). Παρατηρούμε ότι από την (4.27) συνεπάγεται ότι,

$$\tilde{\kappa}(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\tilde{\eta}_{ij}(0)\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}\right)^j,$$

κι επειδή το $\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i + s)^{n_i}$ είναι πολυώνυμο βαθμού n, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$\tilde{\kappa}(s) = \frac{q_1(s)}{\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i+s)^{n_i}}, \tag{4.30}$$

όπου το $q_1(s)$ είναι πολυώνυμο n-1 βαθμού.

Άρα, είναι

$$\alpha_\kappa^* = \frac{c^{-n}\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i + \delta - cr_\kappa)^{n_i}}{\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\kappa}}^{n}(r_j - r_\kappa)}\tilde{\kappa}(\delta - cr_\kappa)$$

ή

$$\alpha_\kappa^* = \frac{q_1(\delta - cr_\kappa)}{c^n\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\kappa}}^{n}(r_j - r_\kappa)}. \tag{4.31}$$

Στην περίπτωση ανεξαρτησίας και μέσω της (4.28), θα έχουμε

$$h_{\delta,1}(x|0) = \overline{P}(x)\sum_{\kappa=1}^{n}\alpha_\kappa^* e^{-r_\kappa x},$$

και

$$\varphi_\delta = \sum_{\kappa=1}^{n}\alpha_\kappa^*\int_0^\infty e^{-r_\kappa x}\,\overline{P}(x)dx. \tag{4.32}$$

Στην περίπτωση που $r_\kappa \neq 0$ έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-r_\kappa x}\,\overline{P}(x)dx = \frac{1-\overline{p}(r_\kappa)}{r_\kappa}.$$

Ακόμα, από την (4.28), είναι

$$b_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa^* \, T_{r_\kappa} p(y). \tag{4.33}$$

Ομοίως, στην περίπτωση της ανεξαρτησίας ισχύει $\eta_{ij}(y) = \tilde{\eta}_{ij}(0)p(y)$. Τότε, $\alpha_{ij}(x) = \tilde{\eta}_{ij}(0)\alpha(x)$, με

$$\alpha(x) = \int_x^\infty w(x, y - x)p(y)dy.$$

Έτσι για την (4.26) μπορούμε να γράψουμε,

$$v_\delta(u) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa \, \tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta - cr_\kappa)\tilde{\eta}_{ij}(0)T_{r_\kappa}\alpha(u)$$

ή

$$v_\delta(u) = \sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa T_{r_\kappa}\alpha(u)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \tilde{\eta}_{ij}(0)\tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,j}(\delta - cr_\kappa),$$

και μέσω των σχέσεων (4.27) και (4.29),

$$v_\delta(u) = \sum_{\kappa=1}^{n} \alpha_\kappa^* \, T_{r_\kappa}\alpha(u). \tag{4.34}$$

Τέλος, σε μία ακόμα ειδική περίπτωση όπου $q_1(s) = q_1(0) = \prod_{i=1}^{m} \lambda_i^{n_i}$, η (5.30) γράφεται ως εξής

$$\tilde{\kappa}(s) = \prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}\right)^{n_i}, \tag{4.35}$$

με

$$\alpha_\kappa^* = \frac{\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i}{c}\right)^{n_i}}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq\kappa}}^{n_i}(r_j - r_\kappa)}.$$

Σύμφωνα με αυτά τα δεδομένα και κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 1.1, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε τις σχέσεις (4.33) και (4.34) ως εξής

$$b_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\left\{\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i}{c}\right)^{n_i}\right\} T_{r_1, r_2, \dots, r_n} p(y), \tag{4.36}$$

$$v_\delta(y) = \left\{\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\lambda_i}{c}\right)^{n_i}\right\} T_{r_1, r_2, \dots, r_n} \alpha(u). \tag{4.37}$$

Τα τελευταία αποτελέσματα διατυπώθηκαν από τους Li, Garrido (2004) για την ειδική περίπτωση της Erlang κατανομής όπου m=1, καθώς επίσης και από τους Gerber, Shiu (2005) στην ειδική περίπτωση Erlang κατανομής όπου$n_i = 1$ για i=1,2,…,m.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.1 *(Μίξη εκθετικά κατανεμημένων ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ απαιτήσεων)*

Υποθέτουμε ότι οι ενδιάμεσοι χρόνοι εμφάνισης δύο απαιτήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$\kappa(t) = p\left(\lambda_1 e^{-\lambda_1 y}\right) + (1-p)\left(\lambda_2 e^{-\lambda_2 y}\right), \qquad t > 0.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\lambda_1 < \lambda_2$. Τότε, m=2 με $n_i = 1$ για $i = 1,2$ και $\tilde{\eta}_{11}(0) = p, \tilde{\eta}_{12}(0) = 1 - p$.

Εδώ η (4.24) εκφράζεται ως

$$\alpha_\kappa = \frac{\prod_{i=1}^{2}\left(\frac{\lambda_i + \delta}{c} - r_\kappa\right)}{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq\kappa}}^{2}\left(r_j - r_\kappa\right)}, \text{για } \kappa = 1,2$$

όπου r_1, r_2 είναι οι ρίζες της (4.20).

Επιπλέον, αν $\overline{P}(y) = e^{-\beta y}, p(y) = \beta e^{-\beta y}$, τότε οι σχέσεις (5.32) και (5.33) δίνονται αντιστοίχως από τις

$$\varphi_\delta = \frac{\left(\frac{\lambda_1 + \delta}{c} - r_1\right)\left(\frac{\lambda_2 + \delta}{c} - r_1\right)}{(r_2 - r_1)(\beta + r_1)} + \frac{\left(\frac{\lambda_1 + \delta}{c} - r_2\right)\left(\frac{\lambda_2 + \delta}{c} - r_2\right)}{(r_1 - r_2)(\beta + r_2)}$$

και

$$b_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\sum_{\kappa=1}^{2}\frac{\alpha_\kappa^*}{\beta + r_\kappa}p(y)$$

με το α_κ^* να δίνεται από την (4.29).

□

4.2 ΤΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΟ ΕΚΘΕΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΤΑ ΥΨΗ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ

Στη συγκεκριμένη παράγραφο, εξετάζουμε το ανεξάρτητο μοντέλο Sparre-Andersen, όπου θα ισχύει $p(y) = p(y|t) = \beta e^{-\beta x}$. Σε αυτήν την περίπτωση, είναι

$$h_{\delta,12}(x, y|u) = p(y)h_{\delta,1}(x|u). \tag{4.38}$$

Αφού η παραπάνω σχέση εκφράζει την από-κοινού πυκνότητα των U_{T-}, $|U_T|$ αυτό σημαίνει ότι η περιθώρια συνάρτηση του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία U_{T-} και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία $|U_T|$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Ομοίως, από την (3.39), είναι

$$b_\delta(y) = p(y). \tag{4.39}$$

Γνωρίζοντας ότι $p(y) = \mathcal{E}_{\beta,1}(y)$ έχουμε

$$b_\delta^{*n} = \mathcal{E}_{\beta,n}(y) = \frac{\beta(\beta y)^{n-1} e^{-\beta y}}{(n-1)!}$$

με αντίστοιχη συνάρτηση επιβίωσης

$$\overline{B}_\delta^{*n}(u) = e^{-\beta u} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta u)^j}{j!}.$$

Ακόμα, μέσω της σχέσης (3.25), βρίσκουμε ότι

$$\overline{G}_\delta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varphi_\delta)\varphi_\delta^n \left\{ e^{-\beta u} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta u)^j}{j!} \right\}$$

ή

$$\overline{G}_\delta(u) = (1-\varphi_\delta) e^{-\beta u} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta u)^j}{j!} \sum_{n=j+1}^{\infty} \varphi_\delta^n$$

ή

$$\overline{G}_\delta(u) = e^{-\beta u} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\beta u)^j}{j!} \varphi_\delta^{j+1}$$

ή

$$\overline{G}_\delta(u) = \varphi_\delta e^{-\beta(1-\varphi_\delta)u}, \qquad u \geq 0 \tag{4.40}$$

Επίσης, για την (3.24) ισχύει ότι

$$\overline{G}_\delta(u) = \varphi_\delta \int_0^u \overline{G}_\delta(u-y)\beta e^{-\beta y} dy + \varphi_\delta e^{-\beta u}. \tag{4.41}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς το ύψος και το χρόνο εμφάνισης της πρώτης απαίτησης, βρίσκουμε

$$\overline{G}_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \left\{ \frac{\overline{G}_\delta(u+ct)}{\varphi_\delta} \right\} \kappa(t) dt, \tag{4.42}$$

και από την (4.40), έχουμε ότι

$$\varphi_\delta = \int_0^\infty e^{-\delta t - \beta(1-\varphi_\delta)ct} \kappa(t) dt$$

ή

$$\varphi_\delta = \tilde{\kappa}\{\delta + c\beta(1-\varphi_\delta)\}. \tag{4.43}$$

Η φ_δ είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης $s = \tilde{\kappa}\{\delta + c\beta(1 - s)\}$ ενώ ταυτόχρονα ισχύει $0 < \varphi_\delta < \tilde{\kappa}(\delta)$. Πράγματι, έστω $R_\delta = \beta(1 - \varphi_\delta)$, έτσι ώστε η (4.43) να γράφεται ως

$$R_\delta = \beta\{1 - \tilde{\kappa}(\delta + cR_\delta)\}. \tag{4.44}$$

Η (4.44) είναι ισοδύναμε της

$$\frac{\beta}{\beta - R_\delta}\tilde{\kappa}(\delta + cR_\delta) = 1,$$

δηλαδή $s = -R_\delta$, η οποία είναι ρίζα της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg $\tilde{p}(s)\tilde{\kappa}(\delta - cs) = 1$. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι το R_δ αποτελεί έναν "γενικευμένο συντελεστή προσαρμογής", όπως προκύπτει από την (3.30) σε συνδυασμό με την επαναδιατύπωση της (4.40)

$$\overline{G}_\delta(u) = \left(1 - \frac{R_\delta}{\beta}\right)e^{-R_\delta u}, \qquad u \geq 0.$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την εξίσωση $y_1(s) = y_2(s)$, όπου $y_1(s) = \tilde{\kappa}(\delta + cs)$ και $y_2(s) = 1 - \frac{s}{\beta}$.

Για s>0 έχουμε $y_1(s) > 0, y_1'(s) < 0, y_1''(s) > 0$ με την $y_1(s)$ να αποτελεί μία φθίνουσα, θετική κυρτή συνάρτηση με $y_1(s) = \tilde{\kappa}(\delta)$.

Αντίστοιχα, η $y_2(s)$ είναι μία ευθεία γραμμή, φθίνουσα από $y_2(0) = 1$ στο $y_2(\beta) = 0$. Για δ=0, $y_1(0) = y_2(0) = 1$, ενώ για τις πρώτες παραγώγους στο μηδέν ισχύει

$$y_1'(0) = -cE(V)$$

$$y_2'(0) = -\frac{1}{\beta} = -cE(Y).$$

Η θετικά ορισμένη συνθήκη cE(V)>E(Y), αποτελεί μία επαναδιατύπωση για τις παραγώγους $y_1'(0) < y_2'(0)$, που συνεπάγεται ότι η $y_1(s)$ έχει μία πιο "απότομη" αρνητική κλίση από την $y_2(s)$ στο s=0.

Συνεπώς, για $\delta \geq 0$, θα υπάρχει μοναδική θετική λύση R_δ για την εξίσωση $y_1(s) = y_2(s)$.

Μία σαφής λύση για τη φ_δ δίνεται μέσω του Θεωρήματος του Lagrange (Goulden and Jackson (1983)),

$$f(\varphi_\delta) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\{f'(s)[\tilde{\kappa}(\delta + c\beta(1 - s))]^n\}|s = 0. \tag{4.45}$$

Η πυκνότητα του χρόνου χρεοκοπία T προκύπτει μέσω της σχέσης (4.45), ενώ η συνάρτηση επιβίωσης $\overline{G}_\delta(u)$ από το μετασχηματισμό Laplace της T μέσω της (2.22). Θα ισχύει

$$\{\tilde{\kappa}(s)\}^n = \int_0^\infty e^{-st}\kappa^{*n}(t)dt,$$

όπου $\kappa^{*n}(t)$ είναι η n-οστή συνέλιξη της κ(t). Έστω επίσης $f(s) = se^{-\beta u(1-s)}$ οπότε η (4.45) γίνεται

$$\overline{G}_\delta(u) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left\{(1+\beta us)e^{-\beta u(1-s)}\int_0^\infty e^{-\delta t - c\beta(1-s)t}\,\kappa^{*n}(t)dt\right\}|s=0$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left\{\int_0^\infty e^{-\delta t}\left[(1+\beta us)e^{-\beta(u+ct)(1-s)}\right]\kappa^{*n}(t)dt\right\}|s=0.$$

Με επαγωγή ως προς n, έχουμε

$$\frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}}\left\{(1+\beta us)e^{-\beta(u+ct)(1-s)}\right\}$$

$$= \beta^{n-1}(u+ct)^{n-2}\{u(n-1)+(u+ct)(1+\beta us)\}e^{-\beta(u+ct)(1-s)}$$

$$= \beta^{n-1}(u+ct)^{n-2}(nu+ct)e^{-\beta(u+ct)},$$

οπότε

$$\overline{G}_\delta(u) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-\delta t}(nu+ct)\beta^{n-1}(u+ct)^{n-2}e^{-\beta(u+ct)}\kappa^{*n}(t)dt$$

$$= \int_{\mathbf{0}}^\infty e^{-\delta t}\left\{e^{-\beta(u+ct)}\sum_{n=1}^\infty \frac{(nu+ct)}{n!}\beta^{n-1}(u+ct)^{n-2}\kappa^{*n}(t)\right\}dt \qquad (4.46)$$

Για τη συνάρτηση επιβίωσης θα ισχύει

$$\overline{G}_\delta(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}f_T(t|u)dt,$$

με την $f_T(t|u)$ να είναι η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας Τ.

Επίσης, είναι

$$f_T(t|u) = e^{-\beta(u+ct)}\sum_{n=1}^\infty \frac{nu+ct}{n!}\beta^{n-1}(u+ct)^{n-2}\kappa^{*n}(t). \qquad t>0 \qquad (4.47)$$

Για τον καθορισμό της $f_T(t|u)$ έχουμε,

$$f_T(t|u) = e^{-\beta(u+ct)}\left\{\kappa(t) + \sum_{n=2}^\infty \frac{(n-1)u+(u+ct)}{n!}\beta^{n-1}(u+ct)^{n-2}\kappa^{*n}(t)\right\}$$

ή

$$f_T(t|u) = e^{-\beta(u+ct)}\left\{\kappa(t) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\beta^{n-1}}{n!}\beta^{n-1}\kappa^{*n}(t)[(n-1)u(u+ct)^{n-2} + (u+ct)^{n-1}]\right\}$$

και χρησιμοποιώντας τα κατάλληλα διωνυμικά αναπτύγματα, παίρνουμε

$$\begin{aligned} f_T(t|u) = e^{-\beta(u+ct)}\Bigg\{&\kappa(t) \\ &+ \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\beta^{n-1}}{n!}\beta^{n-1}\kappa^{*n}(t)\Bigg[(n-1)u\left\{\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}u^{n-2-j}(ct)^j\right\} \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}u^{n-1-j}(ct)^j\Bigg]\Bigg\}\end{aligned}$$

ή

$$f_T(t|u) = e^{-\beta(u+ct)}\left\{\kappa(t) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\kappa^{*n}(t)}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}(\beta u)^{n-1-j}(c\beta t)^j\left[(n-1)\binom{n-2}{j} + \binom{n-1}{j}\right]\right\}.$$

Έτσι, είναι

$$f_T(t|u) = e^{-\beta(u+ct)}\left\{\kappa(t) + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\kappa^{*n}(t)}{n!}\sum_{j=0}^{n-1}\left[(n-j)\binom{n-j}{j}\right](\beta u)^{n-1-j}(c\beta t)^j\right\}$$

ή

$$f_T(t|u) = e^{-\beta(u+ct)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n-j}{n}\frac{(\beta u)^{n-1-j}}{(n-1-j)!}\frac{(e\beta t)^j}{j!}\kappa^{*n}(t). \qquad (4.48)$$

Για την πεπερασμένη συνάρτηση κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας έχουμε

$$\psi_1(t|u) = \int_0^t f_T(x|u)dx = P(T \le t|U_0 = u), \qquad (4.49)$$

κι αντικαθιστώντας την (4.48) στην (4.49) θα έχουμε

$$\psi_1(t|u) = e^{-\beta u}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{n-j}{n}\frac{(\beta u)^{n-1-j}}{(n-1-j)!}\frac{(e\beta t)^j}{j!}k_{j,n}(t), \qquad (4.50)$$

με

$$k_{j,n}(t) = \int_0^t\frac{(c\beta x)^j}{j!}e^{-c\beta x}\kappa^{*n}(x)dx. \qquad (4.51)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.2 *(Ενδιάμεσοι χρόνοι μικτής Erlang κατανομής: πεπερασμένου χρόνου πιθανότητα χρεοκοπίας)*

Στην ειδική περίπτωση όπου $\kappa(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \frac{\lambda(\lambda t)^{i-1} e^{-\lambda t}}{(i-1)!}$ θα έχουμε

$$\tilde{\kappa}(s) = Q\left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right), \acute{o}\pi o\upsilon\ Q(z) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i z^i,$$

με

$$\kappa^{*n}(t) = \sum_{i=n}^{\infty} q_i^{*n} \frac{\lambda(\lambda t)^{i-1} e^{-\lambda t}}{(i-1)!}, \acute{o}\pi o\upsilon\ \{Q(z)\}^n = \sum_{i=n}^{\infty} q_i^{*n} z^i.$$

Έτσι, η (3.51) θα γίνει

$$\mathrm{K_{j,n}(t)} = \sum_{i=1}^{n} q_i^{*n} \int_0^t \frac{(\mathrm{c\beta x})^{\mathrm{j}}}{\mathrm{j!}} e^{-c\beta x} \frac{\lambda(\lambda x)^{i-1} e^{-\lambda x}}{(i-1)!} dx$$

ή

$$\mathrm{K_{j,n}(t)} = \frac{(\mathrm{c\beta})^{\mathrm{j}}}{\mathrm{j!}} \sum_{i=1}^{\infty} q_i^{*n} \frac{\lambda^i}{(i-1)!} \int_0^t x^{i+j-1} e^{-(\lambda + c\beta)x} dx$$

ή

$$\mathrm{K_{j,n}(t)} = \sum_{i=n}^{\infty} q_i^{*n} \binom{i+j-1}{j} \left(\frac{\lambda}{\lambda + c\beta}\right)^i \left(\frac{c\beta}{\lambda + c\beta}\right)^j \left\{1 - e^{-(\lambda + c\beta)t} \sum_{m=0}^{i+j-1} \frac{[(\lambda + c\beta)t]^m}{m!}\right\},$$

η οποία και μπορεί να αντικατασταθεί στην (4.50).

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.3 *(Ενδιάμεσοι χρόνοι Γάμμα κατανομής: πεπερασμένου χρόνου πιθανότητα χρεοκοπίας).*

Αν τώρα, είναι

$$\kappa(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{\alpha - 1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}, \alpha > 0, \lambda > 0$$

τότε,

$$\tilde{\kappa}(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s}\right)^{\alpha}\ \kappa\alpha\iota\ \kappa^{*\mathrm{n}}(\mathrm{t}) = \frac{\lambda(\lambda t)^{\alpha n - 1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha n)}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση η (4.51) γράφεται

$$\mathrm{k_{j,n}(t)} = \int_0^t \frac{(\mathrm{c\beta}x)^{\mathrm{j}}}{\mathrm{j!}} e^{-c\beta x} \frac{\lambda(\lambda x)^{\alpha n - 1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(\alpha n)} dx = \frac{(c\beta)^j \lambda^{\alpha n}}{j!\, \Gamma(\alpha n)} \int_0^t x^{j + \alpha n - 1} e^{-(\lambda + c\beta)x} dx$$

$$= \frac{(c\beta)^j \lambda^{\alpha n}}{(\lambda + c\beta)^{j+\alpha n}} \frac{\Gamma(j+\alpha n)}{j!\,\Gamma(\alpha n)} \int_0^{(\lambda+c\beta)t} \frac{y^{j+\alpha n-1} e^{-y}}{\Gamma(j+\alpha n)} dy$$

$$= \frac{(c\beta)^j \lambda^{\alpha n}}{(\lambda + c\beta)^{j+\alpha n}} \frac{\Gamma(j+\alpha n)}{j!\,\Gamma(\alpha n)} P(j+\alpha n, (\lambda + c\beta)t),$$

όπου η P αποτελεί μία μη-πλήρη Γάμμα κατανομή.

□

Υπενθυμίζεται, ότι αναφορικά με τις ροπές της T, μπορούμε να γράψουμε

$$\psi_i(u) = \int_0^\infty t^i\, \mathrm{f_T}(\mathrm{t|u})\mathrm{dt} = \mathrm{E}\left[T^i I(T<0)|U_0 = u\right].$$

Ταυτόχρονα ισχύει,

$$\psi_i(u) = e^{-\beta u} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n-j}{n} \frac{(\beta u)^{n-1-j}}{(n-1-j)!} \frac{(c\beta)^j}{j!} \int_0^\infty t^{i+j} e^{-c\beta t} \kappa^{*\mathrm{n}}(\mathrm{t})\mathrm{d}t$$

ή

$$\psi_i(u) = e^{-\beta u} \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{n-j}{n} \frac{(c\beta)^j}{j!} \frac{(\beta u)^{n-1-j}}{(n-1-j)!} (-1)^{i+j} \tilde{\kappa}_n^{(i+j)}(c\beta), \qquad (4.52)$$

με

$$\tilde{\kappa}_n^{(j)}(s) = (-1)^j \textstyle\int_0^\infty t^j e^{-st} \kappa^{*\mathrm{n}}(\mathrm{t})\mathrm{d}t, \quad j = 0,1,.. \qquad (4.53)$$

Παρατηρούμε τέλος, ότι για $\tilde{\kappa}_n^{(0)}(s) = \{\tilde{\kappa}(s)\}^n$ και για j>0, το $\tilde{\kappa}_n^{(j)}(s)$ αντιπροσωπεύει την j-παράγωγο του $\{\tilde{\kappa}(s)\}^n$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.4 *(Ενδιάμεσοι χρόνοι Γάμμα κατανομής: Ροπές του χρόνου χρεοκοπίας)*

Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα, έχουμε

$$\kappa(t) = \frac{\lambda(\lambda t)^{\alpha-1} e^{-\lambda t}}{\Gamma(\alpha)}, \alpha > 0, \lambda > 0$$

τότε,

$$\tilde{\kappa}(s) = \left(1 + \frac{s}{\lambda}\right)^{-\alpha}, \text{με } \tilde{\kappa}_n^{(0)}(s) = \left(1 + \frac{s}{\lambda}\right)^{-n\alpha}.$$

Στην προκειμένη περίπτωση, θα ισχύει

$$\tilde{\kappa}_n^{(j)}(s) = \{(-n\alpha)(-n\alpha-1)\ldots(-n\alpha+1-j)\}\left(1+\frac{s}{\lambda}\right)^{-n\alpha-j}\lambda^{-j}$$
$$= (-1)^j\{(n\alpha)(n\alpha+1)\ldots(n\alpha+j-1)\}\lambda^{n\alpha}(\lambda+s)^{-n\alpha-j}$$
$$= (-1)^j j!\binom{\alpha n+j-1}{j}\lambda^{n\alpha}(\lambda+s)^{-n\alpha-j},$$

με την (4.52) να ορίζεται για cβ αντί για s.

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.5 *(Αντίστροφοι κατά Gauss ενδιάμεσοι χρόνοι: Ροπές του χρόνου χρεοκοπίας)*

Αν

$$\kappa(t) = \frac{\mu}{\sqrt{2\pi\lambda t^3}}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\lambda t}},$$

τότε το μ είναι ο μέσος και ισχύει μ>0 και λ>0.

Έτσι,

$$\tilde{\kappa}(s) = e^{-\frac{\mu}{\lambda}(\sqrt{1+2\lambda s}-1)}$$

και

$$\tilde{\kappa}_n^{(0)}(s) = \{\tilde{\kappa}(s)\}^n = e^{-\frac{n\mu}{\lambda}(\sqrt{1+2\lambda s}-1)}.$$

Τότε,

$$\tilde{\kappa}_n^{(j)}(s) = (-1)^j\{\tilde{\kappa}(s)\}^n\sum_{i=0}^{j-1}\frac{(j+i-1)!}{(j-i-1)!\,i!}\left(\frac{\lambda}{i}\right)^i(n\mu)^{j-i}(1+2\lambda s)^{-\frac{i+j}{2}}$$

με την (4.52) να προκύπτει άμεσα από το παραπάνω αποτέλεσμα.

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.6 *(Ενδιάμεσοι χρόνοι μικτής Erlang κατανομής: Ροπές του χρόνου χρεοκοπίας)*

Όπως και στο Παράδειγμα 4.2, έχουμε

$$\{\tilde{\kappa}(s)\}^n = \left\{Q\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)\right\}^n = \sum_{i=1}^{\infty}q_i^{*n}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^i$$

με την j-παράγωγο να είναι η

$$\tilde{\kappa}_n^{(j)}(s) = \sum_{i=1}^{\infty}\{(-i)(-i-1)\cdots(-i-j+1)\}q_i^{*n}\left(1+\frac{s}{\lambda}\right)^{-i-j}\lambda^{-j}$$

$$= (-1)^{j}\sum_{i=1}^{\infty}\{(i)(i+1)\cdots(i+j-1)\}q_i^{*n}\frac{\lambda^{i}}{(\lambda+s)^{i+j}}$$

$$= (-1)^{j}j!\sum_{i=n}^{\infty}\binom{i+j-1}{j}q_i^{*n}\frac{\lambda^{i}}{(\lambda+s)^{i+j}}.$$

□

Επιστρέφουμε τώρα στην από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας $h_{\delta,12}(x,y|u)$. Για να την ορίσουμε, θα πρέπει πρώτα να ορίσουμε τη συνάρτηση πυκνότητας $h_{\delta,1}(x|u)$. Μέσω του μετασχηματισμού Laplace

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s|u) = \int_0^{\infty} e^{-sx}h_{\delta,1}(x|u)dx$$

και με δεδομένο ότι $w(x,y) = e^{-sx}$, συνεπάγεται ότι

$$E\left[e^{-\delta T - sU_{T^-}}I(T<\infty)|U_0 = u\right] = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-sx}h_{\delta,12}(x,y|u)dxdy.$$

Άρα,

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s|u) = E\left[e^{-\delta T - sU_{T^-}}I(T<\infty)|U_0 = u\right].$$

Χρησιμοποιώντας την (3.21), η $\tilde{h}_{\delta,1}(s|u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s|u) = \varphi_\delta\int_0^{u}\tilde{h}_{\delta,1}(s|u-y)b_\delta(y)dy + v_\delta(s|u) \tag{4.54}$$

με $b_\delta(y) = p(y) = \beta e^{-\beta y}$. Πάντα με δεδομένο ότι $w(x,y) = e^{-sx}$ και ότι μέσω της (3.41) προκύπτει $\alpha(x) = e^{-sx}\bar{P}(x)$ καταλήγουμε ότι,

$$v_\delta(s|u) = \int_0^{\infty} e^{-s(x+u)}\frac{\bar{P}(x+u)}{\bar{P}(x)}h_{\delta,1}(x|0)dx = e^{-(\beta+s)u}\tilde{h}_{\delta,1}(s|0).$$

Με αντικατάσταση στην (4.54), παίρνουμε,

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s|u) = \varphi_\delta\int_0^{u}\tilde{h}_{\delta,1}(s|u-y)\beta e^{-\beta y}dy + e^{-(\beta+s)u}\tilde{h}_{\delta,1}(s|0), \tag{4.55}$$

η επίλυση της οποίας γίνεται μέσω των κατάλληλων μετασχηματισμών Laplace. Έτσι, αν

$$\tilde{\tilde{h}}_{\delta,1}(s|z) = \int_0^{\infty} e^{-zu}\tilde{h}_{\delta,1}(s|u)du$$

τότε από την (4.55) έχουμε

$$\tilde{\tilde{h}}_{\delta,1}(s|z) = \varphi_\delta\tilde{h}_{\delta,1}(s|z)\frac{\beta}{\beta+z} + \frac{\tilde{h}_{\delta,1}(s|0)}{s+\beta+z}.$$

Επομένως, είναι

$$\tilde{\tilde{h}}_{\delta,1}(s|z) = \frac{h_{\delta,1}(s|0)}{(z+\beta+s)(1-\varphi_\delta\frac{\beta}{\beta+z})} = \tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|0)\frac{z+\beta}{(z+\beta+s)\{z+\beta(1-\varphi_\delta)\}},$$

δηλαδή,

$$\tilde{\tilde{h}}_{\delta,1}(s|z) = \frac{h_{\delta,1}(s|0)}{s+\beta\varphi_\delta}\left\{\frac{s}{z+\beta+s} + \frac{\beta\varphi_\delta}{z+\beta(1-\varphi_\delta)}\right\}.$$

Για την $\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|u)$ ισχύει

$$\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|u) = \frac{\tilde{h}_{\delta,1}(s|0)}{s+\beta\varphi_\delta}\left\{se^{-(\beta+s)u} + \beta\varphi_\delta e^{-\beta(1-\varphi_\delta)u}\right\}$$

ή

$$\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|u) = \frac{\tilde{h}_{\delta,1}(s|0)}{s+\beta\varphi_\delta}\left\{se^{-(\beta+s)u} + \beta\bar{G}_\delta(u)\right\}. \tag{4.56}$$

Για να μπορέσουμε λοιπόν να ορίσουμε την $\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|0)$, υποθέτουμε ότι $w(x,y) = e^{-sx}$ και ολοκληρώνουμε ως προς το χρόνο και το ύψος της πρώτης απαίτησης, παίρνουμε

$$\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\int_{u+ct}^\infty e^{-s(u+ct)}p(y)dy + \int_{u+ct}^\infty \tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|u+ct-y)p(y)dy\right\}\kappa(t)dt. \tag{4.57}$$

Είναι φανερό ότι,

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\int_{u+ct}^\infty e^{-s(u+ct)}p(y)dy\right\}\kappa(t)dt = e^{-su}\int_0^\infty e^{-(\delta+cs)t}\bar{P}(u+ct)\kappa(t)dt. \tag{4.58}$$

Επίσης, για $\mathrm{b}_\delta(\mathrm{y}) = p(y) = \beta e^{-\beta y}$, από την (4.55) έπεται ότι

$$\int_0^u \tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|u-y)p(y)dy = \frac{1}{\varphi_\delta}\left\{\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|u) - \tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|0)e^{-(\beta+s)u}\right\}. \tag{4.59}$$

Όμως, μέσω της (4.56) προκύπτει ότι

$$\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|u) = \frac{\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|0)}{s+\beta\varphi_\delta}\left\{(s+\beta\varphi_\delta)e^{-(\beta+s)u} + \beta\bar{G}_\delta(u) - \beta\varphi_\delta e^{-(\beta+s)u}\right\}$$

ή

$$\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|u) = \tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|0)e^{-(\beta+s)u} + \frac{\beta\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|0)}{s+\beta\varphi_\delta}\left\{\bar{G}_\delta(u) - \varphi_\delta e^{-(\beta+s)u}\right\}. \tag{4.60}$$

Συνεπώς, μέσω της (4.59) μπορούμε να γράψουμε ότι,

$$\int_0^u \tilde{h}_{\delta,1}(s|u-y)p(y)dy = \frac{\beta\tilde{h}_{\delta,1}(s|0)}{s+\beta\varphi_\delta}\left\{\frac{\bar{G}_\delta(u)}{\varphi_\delta} - e^{-(\beta+s)u}\right\}.$$

Αντικαθιστώντας το u με u+ct παίρνουμε,

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\int_0^{u+ct} \tilde{h}_{\delta,1}(s|u+ct-y)p(y)dy\right\}\kappa(t)dt$$

$$= \int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\frac{\beta\tilde{h}_{\delta,1}(s|0)}{s+\beta\varphi_\delta}\left[\frac{\bar{G}_\delta(u+ct)}{\varphi_\delta} - e^{-(\beta+s)(u+ct)}\right]\right\}\kappa(t)dt$$

$$= \frac{\beta\tilde{h}_{\delta,1}(s|0)}{s+\beta\varphi_\delta}\left\{\int_0^\infty e^{-\delta t}\frac{\bar{G}_\delta(u+ct)}{\varphi_\delta}\kappa(t)dt - e^{-(\beta+s)u}\tilde{\kappa}(\delta+c\beta+cs)\right\}.$$

Κάνοντας χρήση της (4.42), έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\int_0^{u+ct} \tilde{h}_{\delta,1}(s|u+ct-y)p(y)dy\right\}\kappa(t)dt$$

$$= \frac{\beta\tilde{h}_{\delta,1}(s|0)}{s+\beta\varphi_\delta}\left\{\bar{G}_\delta(u) - \tilde{\kappa}(\delta+c\beta+cs)e^{-(\beta+s)u}\right\}. \tag{4.61}$$

Αντικαθιστώντας τώρα τις (4.58) και (4.61) στην (4.57) οδηγούμαστε στη σχέση,

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s|u) = \tilde{\kappa}(\delta+c\beta+cs)e^{-(\beta+s)u} + \frac{\beta\tilde{h}_{\delta,1}(s|0)}{s+\beta\varphi_\delta}\left\{\bar{G}_\delta(u) - \tilde{\kappa}(\delta+c\beta+cs)e^{-(\beta+s)u}\right\}. \tag{4.62}$$

Εξισώνοντας τώρα τις (4.56) και (4.62), παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις επιβίωσης $\bar{G}_\delta(u)$ απλοποιούνται. Ακόμα, για τους συντελεστές του $e^{-(\beta+s)u}$ θα έχουμε

$$\frac{s\tilde{h}_{\delta,1}(s|0)}{s+\beta\varphi_\delta} = \tilde{\kappa}(\delta+c\beta+cs) - \tilde{\kappa}(\delta+c\beta+cs)\frac{\beta\tilde{h}_{\delta,1}(s|0)}{s+\beta\varphi_\delta}$$

οπότε, παίρνουμε

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s|0) = \frac{(s+\beta\varphi_\delta)\tilde{\kappa}(\delta+c\beta+cs)}{s+\beta\tilde{\kappa}(\delta+c\beta+cs)}. \tag{4.63}$$

Για τον υπολογισμό της $h_{\delta,1}(x|0)$, παίρνουμε το μετασχηματισμό Laplace (3.20), με κ αντί f και r αντί $\delta + cR_\delta$, δηλαδή

$$\tilde{\kappa}_{1,\delta+cR_\delta}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\kappa_{1,\delta+cR_\delta}(x)dx = \frac{\delta+cR_\delta}{1-\tilde{\kappa}(\delta+cR_\delta)}x\frac{\tilde{\kappa}(\delta+cR_\delta)-\tilde{\kappa}(s)}{s-\delta-cR_\delta}. \tag{4.64}$$

Επειδή μέσω των (4.43) και (4.44), είναι $\tilde{\kappa}(\delta+cR_\delta) = \varphi_\delta$, τότε από την (1.19) θα έχουμε

$$\kappa_{1,\delta+cR_\delta}(x) = \frac{\delta + cR_\delta}{1-\varphi_\delta} e^{(\delta+cR_\delta)x} \int_x^\infty e^{-(\delta+cR_\delta)y} \kappa(y)dy.$$

Επίσης, μία αλλαγή στη μεταβλητή ολοκλήρωσης μας δίνει,

$$\tilde{\kappa}(\delta + c\beta + cs) = \int_0^\infty e^{-(s+c\beta+cs)x} \kappa(x)dx = \int_0^\infty e^{-sx} \left\{\frac{1}{c} e^{-\left(\beta+\frac{\delta}{c}\right)x} \kappa\left(\frac{x}{c}\right)\right\} dx.$$

Ακόμα, έστω

$$\varphi_\delta^* = 1 - \frac{\tilde{\kappa}(\delta + c\beta)}{\tilde{\kappa}(\delta + cR_\delta)},$$

με $\beta > R_\delta$ και συνεπώς $0 < \varphi_\delta^* < 1$.

Κάνοντας λοιπόν χρήση της $\tilde{\kappa}(\delta + cR_\delta) = \varphi_\delta$ στην (5.64) έχουμε,

$$1 - \varphi_\delta^* \tilde{\kappa}_{1,\delta}^*(s) = 1 - \left\{1 - \frac{\tilde{\kappa}(\delta + c\beta)}{\tilde{\kappa}(\delta + cR_\delta)}\right\} \frac{\tilde{\kappa}_{1,\delta+cR_\delta}(\delta + c\beta + cs)}{\tilde{\kappa}_{1,\delta+cR_\delta}(\delta + c\beta)}$$

$$= 1 - \frac{\tilde{\kappa}(\delta + cR_\delta) - \tilde{\kappa}(\delta + c\beta)}{\tilde{\kappa}(\delta + cR_\delta)} x \left\{\frac{\tilde{\kappa}(\delta + cR_\delta) - \tilde{\kappa}(\delta + c\beta + cs)}{(\delta + c\beta + cs) - \delta - cR_\delta}\right\} \frac{(\delta + c\beta) - \delta - cR_\delta}{\tilde{\kappa}(\delta + cR_\delta) - \tilde{\kappa}(\delta + c\beta)}$$

$$= 1 - \frac{\beta - R_\delta}{s + \beta - R_\delta} x \frac{\tilde{\kappa}(\delta + cR_\delta) - \tilde{\kappa}(\delta + c\beta + cs)}{\tilde{\kappa}(\delta + cR_\delta)}.$$

Κάνοντας αντικατάσταση $\beta - R_\delta = \beta\varphi_\delta$, έχουμε

$$1 - \varphi_\delta^* \tilde{\kappa}_{1,\delta}^*(s) = 1 - \frac{\beta\varphi_\delta}{s + \beta\varphi_\delta} x \frac{\varphi_\delta - \tilde{\kappa}(\delta + c\beta + cs)}{\varphi_\delta}$$

$$= \frac{s + \beta\varphi_\delta - \beta\{\varphi_\delta - \tilde{\kappa}(\delta + c\beta + cs)\}}{s + \beta\varphi_\delta} = \frac{s + \beta\tilde{\kappa}(\delta + c\beta + cs)}{s + \beta\varphi_\delta}.$$

Επομένως, η (4.63) γράφεται,

$$\tilde{h}_{\delta,1}(s|0) = \frac{\tilde{\kappa}(\delta+c\beta+cs)}{1-\varphi_\delta^* \tilde{\kappa}_{1,\delta}^*(s)}. \tag{4.65}$$

Ενώ, για $\tilde{\kappa}(\delta + cR_\delta) = \varphi_\delta$, έπεται ότι

$$\frac{1}{\varphi_\delta} \tilde{h}_{\delta,1}(s|0) = \frac{1-\varphi_\delta^*}{1-\varphi_\delta^* \tilde{\kappa}_{1,\delta}^*(s)} x \frac{\tilde{\kappa}(\delta+c\beta+cs)}{\tilde{\kappa}(\delta+c\beta)}, \tag{4.66}$$

που εκφράζει την κατανομή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, για αρχικό πλεόνασμα u=0, ως σύνθετη γεωμετρική συνέλιξη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.7 *(Εμφάνιση απαίτησης που οδηγεί στη χρεοκοπία, με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα)*

Από τις σχέσεις (3.17), (3.18) και για δ=0, u=0, $w(x,y) = e^{-s(x+y)}$, καταλήγουμε στην κάτωθι παράσταση, που αντιπροσωπεύει το μετασχηματισμό Laplace της απαίτησης που οδηγεί στη χρεοκοπία:

$$\mathrm{E}\left[e^{-s(U_{T-}+|U_T|)}I(T<\infty)|U_0=u\right] = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(x+y)}h_{0,12}(x,y|0)dxdy$$

$$= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(x+y)}\beta e^{-\beta y}h_{0,1}(x|0)dxdy = \frac{\beta}{\beta+s}\tilde{h}_{0,1}(s|0),$$

όπου το $\tilde{h}_{0,1}(s|0)$ δίνεται από την (4.36). Έτσι, ο κανονικοποιημένος μετασχηματισμός Laplace της απαίτησης που προκαλεί τη χρεοκοπία με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα, είναι $\varphi_0^{-1}\frac{\beta}{\beta+s}\tilde{h}_{0,1}(s|0)$. Μέσω της (4.66) οδηγούμαστε στο συμπέρασμα πως ο συγκεκριμένος μετασχηματισμός Laplace, μπορεί να γραφτεί και ως συνέλιξη μίας σύνθετης Γεωμετρικής κατανομής.

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.8 *(Ενδιάμεσοι χρόνοι μικτής Erlang κατανομής)*

Έστω $\tilde{\kappa}(s) = Q\left(\frac{\mu}{\mu+s}\right)$. Τότε, από τη (2.13) θα έχουμε

$$\frac{\tilde{\kappa}(\delta+c\beta+cs)}{\tilde{\kappa}(\delta+c\beta)} = \frac{Q\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\beta+cs}\right)}{Q\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\beta}\right)} = \frac{Q\left(\frac{\frac{\mu}{c}}{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta+s}\right)}{Q\left(\frac{\frac{\mu}{c}}{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta}\right)}$$

$$= \frac{Q\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\beta}x\frac{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta}{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta+s}\right)}{Q\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\beta}\right)} = Q_2\left(\frac{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta}{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta+s}\right),$$

όπου

$$Q_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{z,n}z^n = \frac{Q\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\beta}z\right)}{Q\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\beta}\right)},$$

οπότε,

$$q_{z,n} = \frac{\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\beta}\right)^n q_n}{Q\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\beta}\right)}.$$

Ακόμα, από το Παράδειγμα (3.12) έχουμε $\tilde{\kappa}_{1,\delta+c\mathrm{R}_\delta}(\mathrm{s}) = \mathrm{Q}_3\left(\frac{\mu}{\mu+\mathrm{s}}\right)$, όπου αντίστοιχα

$$\mathrm{Q}_3(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{3,n}\, z^n$$

με

$$q_{3,n} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} q_{j+n}\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\mathrm{R}_\delta}\right)^j}{\sum_{j=0}^{\infty} \bar{Q}_j\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\mathrm{R}_\delta}\right)^j}.$$

Τότε,

$$\tilde{\kappa}_{1.\delta}^{*}(s) = \frac{\tilde{\kappa}_{1,\delta+c\mathrm{R}_\delta}(\delta+c\beta+cs)}{\tilde{\kappa}_{1,\delta+c\mathrm{R}_\delta}(\delta+c\beta)} = Q_4\left(\frac{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta}{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta+\mathrm{s}}\right),$$

με

$$Q_4(z) = \sum_{n=1}^{\infty} q_{4,n}\, z^n = \frac{Q_3\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\beta}z\right)}{Q\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\beta}\right)}$$

και

$$q_{4,n} = \frac{\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\beta}\right)^n q_{3,n}}{Q\left(\frac{\mu}{\mu+\delta+c\beta}\right)}.$$

Συνεπώς, η (4.66) γράφεται

$$\frac{1}{\varphi_\delta}\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|0) = Q_2\left(\frac{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta}{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta+\mathrm{s}}\right) x \frac{1-\varphi_\delta^*}{1-\varphi_\delta^* Q_4\left(\frac{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta}{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta+\mathrm{s}}\right)} = Q_5\left(\frac{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta}{\frac{\mu+\delta}{c}+\beta+\mathrm{s}}\right),$$

με

$$Q_5(z) = Q_2(z)\frac{1-\varphi_\delta^*}{1-\varphi_\delta^* Q_4(z)}.$$

Να σημειωθεί εδώ, πως οι συντελεστές του $Q_5(z)$, μπορούν να υπολογισθούν αναδρομικά, όπως και στην παραγώγιση της (3.91).

Συνοψίζοντας, η $\frac{1}{\varphi_\delta}\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|0)$ ακολουθεί μικτή Erlang κατανομή, με παράμετρο $\frac{\beta+(\mu+\delta)}{c}$ με βάρη μίξης που προέρχονται από σύνθετη Γεωμετρική συνέλιξη.

□

Η σχέση (4.56) επαναδιατυπώνεται ως εξής

$$\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|0) = \varphi_\delta^* \tilde{\kappa}_{1.\delta}^*(s)\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|0) + \tilde{\kappa}(\delta + \mathrm{c}\beta + \mathrm{cs}),$$

η οποία εφόσον αντιστραφεί μας δίνει την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$h_{\delta,1}(x|0) = \varphi_\delta^* \int_0^x \kappa_{1,\delta}^*(x-y) h_{\delta,1}(y|0)dy + \frac{1}{c} e^{-\left(\beta+\frac{\delta}{c}\right)x} \kappa\left(\frac{x}{c}\right).$$

Ομοίως,

$$\tilde{\mathrm{h}}_{\delta,1}(\mathrm{s}|0) = \tilde{\kappa}(\delta + \mathrm{c}\beta + \mathrm{cs}) + \tilde{\kappa}(\delta + \mathrm{c}\beta + \mathrm{cs}) \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_\delta^*)^n \left\{\tilde{\kappa}_{1,\delta}^*(s)\right\}^n,$$

η οποία αντιστρέφεται για να μας δώσει τη λύση

$$h_{\delta,1}(x|0) = \frac{1}{c} e^{-\left(\beta+\frac{\delta}{c}\right)x} \kappa\left(\frac{x}{c}\right) + \frac{1}{c} \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_\delta^*)^n \int_0^x e^{-\left(\beta+\frac{\delta}{c}\right)x} \kappa\left(\frac{y}{c}\right) \kappa_{1,\delta}^*(x-y)dy$$

όπου,

$$\int_0^\infty e^{-sx} \kappa_{1,\delta}^*(x)dx = \left\{\tilde{\kappa}_{1,\delta}^*(s)\right\}^n.$$

Τελικά, για u>0, μέσω της (5.60) θα έχουμε,

$$h_{\delta,1}(x|u) = \beta \bar{G}_\delta(u) \int_0^x e^{-\beta\varphi_\delta(x-y)} h_{\delta,1}(y|0)dy$$
$$+ e^{-\beta u} \left\{ h_{\delta,1}(x-u|0) - \beta\varphi_\delta \int_0^{x-u} e^{-\beta\varphi_\delta(x-u-y)} h_{\delta,1}(y|0)dy \right\} I(x-u>0). \tag{4.67}$$

Καταλήξαμε λοιπόν σε μία σχέση, η οποία εκφράζει την $h_{\delta,1}(x|u)$ συναρτήσει της $h_{\delta,1}(x|0)$.

4.3 ΤΟ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ COX ΓΙΑ ΤΑ ΥΨΗ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ

Σε αυτή την ενότητα, οι ρόλοι των συναρτήσεων πυκνοτήτων της Ενότητας (4.1) αντιστρέφονται. Υποθέτουμε δηλαδή, ότι η από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των εμφανίσεων των απαιτήσεων V και του ατομικού ύψους των απαιτήσεων Y είναι:

$$\mathrm{p}(\mathrm{y}|\mathrm{t})\kappa(\mathrm{t}) = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n_i}} \mathcal{E}_{\beta,\mathrm{j}}(\mathrm{y})\gamma_{\mathrm{ij}}(\mathrm{t}), \tag{4.68}$$

όπου $\mathcal{E}_{\beta,\mathrm{j}}(\mathrm{y})$ είναι η Erlang-j πυκνότητα (3.66). Οι περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των μεταβλητών V και Y είναι αντίστοιχα:

$$\kappa(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \gamma_{ij}(t) \tag{4.69}$$

$$p(y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \eta_{ij} \mathcal{E}_{\beta,j}(y), \tag{4.70}$$

όπου $\eta_{ij} = \int_0^\infty \gamma_{ij}(t)dt$.

Η κλάση των μοντέλων με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας την (4.68) είναι αρκετά γενική. Αν στην (4.69) είναι $\gamma_{ij}(t) = \eta_{ij}\gamma(t)$, τότε το κανονικό μοντέλο Sparre-Andersen μας οδηγεί στη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ατομικού ύψους απαίτησης της σχέσης (4.70). Στην περίπτωση που η $\gamma_{ij}(t)$ είναι είτε μη-αρνητική, είτε μη-θετική συνάρτηση, τότε η (4.68) μπορεί να γραφτεί ως

$$p(y|t)\kappa(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \eta_{ij} \mathcal{E}_{\beta,j}(y) \kappa_{ij}(t), \tag{4.71}$$

με $\kappa_{ij}(t) = \frac{\gamma_{ij}(t)}{\eta_{ij}}$.

Προφανώς, $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \eta_{ij} = 1$ και αν όλα τα η_{ij} είναι μη-αρνητικά, τότε η (4.71) αποτελεί μικτού τύπου συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας. Σε διαφορετική περίπτωση, η (4.71) είναι συνδυασμός συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας και συγκεκριμένα για $n_i = 1$ είναι συνδυασμός εκθετικών συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.9 *Η οικογένεια κατανομών των Farlie-Gumbel-Morgenstern*

Η οικογένεια κατανομών FGM ικανοποιεί τη σχέση

$$P(V \le t, Y \le y) = K(t)P(y)\{1 + \theta \bar{K}(t)\bar{P}(y)\}, \text{ όπου } |\theta| \le 1.$$

Αν $P(y) = 1 - e^{-\beta y}$, τότε η (5.68) ισχύει για m=2, $n_1 = 1$, $\beta_i = i\beta$, $\gamma_{11}(t) = \kappa(t)\{1 - \theta[1 - 2K(t)]\}$ και $\gamma_{21}(t) = \theta\kappa(t)\{1 - 2K(t)\}$.

□

Το μοντέλο (4.68) είναι ειδική περίπτωση του μοντέλου Sparre-Andersen, που αναλύθηκε στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

ΛΗΜΜΑ 4.1 *Η από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας της σχέσης (4.13) είναι*

$$h_{\delta,12}(x,y|u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \eta_{\delta,ij}(x|u) \mathcal{E}_{\beta,j}(x+y). \tag{4.72}$$

Απόδειξη

Για να καθορίσουμε την επίδραση του τελευταίου ενδιάμεσου χρονικού διαστήματος μεταξύ των απαιτήσεων στην κατανομή του ατομικού τους ύψους, θα θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή R_{N_T-1}, όπου $R_0 = u \; και \; για \; n = 1,2, \dots R_N = u + \sum_{i=1}^{n}(cV_i - Y_i)$. Τότε, για $N_T > 1$, η R_{N_T-1} παριστά το πλεόνασμα αμέσως μετά την προτελευταία απαίτηση. Ο τελευταίος ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ των απαιτήσεων θα είναι λοιπόν,

$$V_{N_T} = \frac{\left(U_{T-} - R_{N_T-1}\right)}{c}.$$

Στην περίπτωση που επέλθει η χρεοκοπία κατά την πρώτη απαίτηση, τότε η από-κοινού συνάρτηση του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία $U_{T-} = x$ και του ελλείμματος που προκαλεί η χρεοκοπία $|U_T| = y$, δίνεται από την (3.1). Σε αυτήν την περίπτωση ο χρόνος χρεοκοπίας θα δίνεται από τη σχέση

$$T = \frac{x-u}{c}$$

και $R_{N_T-1} = u$.

Αν η χρεοκοπία επέλθει για απαιτήσεις μεταγενέστερες της πρώτης (δηλαδή για πλήθος των απαιτήσεων $N_T > 1$), τότε για το χρόνο χρεοκοπίας (T=t), το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία $U_{T-} = x$, το έλλειμα που προκαλεί η χρεοκοπία $|U_T| = y$ και $R_{N_T-1} = r$, θεωρούμε την από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας $h_{123}^{***}(t,x,y,r|u)$.

Μέσω δεσμευμένων πιθανοτήτων έχουμε,

$$\begin{aligned} h_{123}^{***}(t,x,y,r|u) &= f_1^*(t,x,r|u) f_2^*(y|t,x,r,u) \\ &= f_1^*(t,x,r|u) f_3^*(y|t,x,\frac{x-r}{c},u) = f_1^*(t,x,r|u) f_4^*(y|x,\frac{x-r}{c}), \end{aligned}$$

κι αυτό γιατί η κατανομή του ατομικού ύψους της τελευταίας απαίτησης εξαρτάται από τον τελευταίο ενδιάμεσο χρόνο (μεταξύ προτελευταίας και τελευταίας απαίτησης), αλλά όχι από το χρόνο t και το αρχικό πλεόνασμα u. Φυσικά, η εξάρτηση από το x οφείλεται στο γεγονός ότι η τελευταία απαίτηση θα πρέπει να υπερβαίνει το x για να συμβεί η χρεοκοπία.

Εκ νέου, μέσω δεσμευμένων πιθανοτήτων θα έχουμε,

$$f_4^*(y|x,\frac{x-r}{c}) = \frac{f_5^*(x,y|\frac{x-r}{c})}{f_6^*(x|\frac{x-r}{c})}$$

και

$$f_5^*(x,y|\frac{x-r}{c}) = f_7^*(x,y|\frac{x-r}{c}) f_8^*(\frac{x-r}{c}).$$

Παρατηρούμε όμως ότι,

$$f_7^*(x,y|\frac{x-r}{c}) = h_{12}^*(x,y|r),$$

όπου δίνεται από την (3.9). Συνεπώς, για την από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας θα ισχύει,

$$h_{123}^{***}(t,x,y,r|u) = f_9^*(t,x,r,\frac{x-r}{c}|u)h_{12}^*(x,y|r),$$

με $f_9^*(t,x,r,\frac{x-r}{c}|u) = \frac{f_1^*(t,x,r|u)f_8^*(\frac{x-r}{c})}{f_6^*(x|\frac{x-r}{c})}$.

Η από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας $h_{\delta,12}(x,y|u)$ προκύπτει εφόσον ολοκληρώσουμε ως προς t και r:

$$h_{12}^{**}(t,x,y|u) = \int_0^x h_{123}^{***}(t,x,y,r|u)dr,$$

όπου μέσω των σχέσεων (3.11), (3.12), (3.13), είναι

$$h_{\delta,12}(x,y|u) = e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)}h_{12}^*(x,y|u) + \int_0^\infty e^{-\delta t}\int_0^x h_{123}^{***}(t,x,y,r|u)drdt.$$

Οπότε, από τις σχέσεις (3.9) και (4.68), έπεται ότι

$$h_{\delta,12}(x,y|u) = \frac{1}{c}e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\gamma_{ij}\left(\frac{x-u}{c}\right)\mathcal{E}_{\beta_i,j}(x+u)$$

$$+\frac{1}{c}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\mathcal{E}_{\beta_i,j}(x+y)\int_0^\infty\int_0^x e^{-\delta t}\gamma_{ij}\left(\frac{x-r}{c}\right)f_9^*(t,x,r,\frac{x-r}{c}|u)drdt,$$

και μέσω της (4.72) θα είναι

$$\eta_{\delta,ij}(x|u) = \frac{1}{c}\left\{e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)}\gamma_{ij}\left(\frac{x-u}{c}\right)+\right\}\int_0^\infty\int_0^x e^{-\delta t}\gamma_{ij}\left(\frac{x-r}{c}\right)f_9^*(t,x,r,\frac{x-r}{c}|u)drdt$$

οπότε προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

Από την πιθανοθεωρητική απόδειξη του Λήμματος (4.1) γίνεται φανερό ότι συναρτήσεις τύπου $h_{\delta,ij}(x|u)$ παρά την πολυπλοκότητά τους, είναι κατανοητές ως προς τα αποτελέσματά τους, κυρίως λόγω της απλότητας με την οποία εμφανίζεται η y. Πιο συγκεκριμένα, το κλιμακωτό ύψος (ladder height) της συνάρτησης $b_\delta(y)$ στην (3.20) μπορεί να εκφραστεί ως μίξη Erlang κατανομών στο επόμενο Λήμμα.

ΛΗΜΜΑ 4.2 *Η συνάρτηση κλιμακωτού ύψους (ladder height density) $b_\delta(y)$ μπορεί να εκφραστεί στη μορφή*

$$b_\delta(y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\eta_{\delta,ij}\mathcal{E}_{\beta_i,j}(y). \qquad (4.73)$$

Απόδειξη

Από τη σχέση (4.72) προκύπτει ότι η (3.20) μπορεί να γραφτεί ως εξής:

$$\mathrm{b}_\delta(\mathrm{y}) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^\infty \mathrm{h}_{\delta,12}(\mathrm{x},\mathrm{y}|0)\mathrm{dx} = \frac{1}{\varphi_\delta}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n_i}}\int_0^\infty \eta_{\delta,\mathrm{ij}}(\mathrm{x}|0)\mathcal{E}_{\beta_\mathrm{i},\mathrm{j}}(\mathrm{x}+\mathrm{y})\mathrm{dx}.$$

Κάνοντας χρήση της (1.68), είναι

$$\mathrm{b}_\delta(\mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\frac{1}{\varphi_\delta\beta_i}\int_0^\infty \eta_{\delta,\mathrm{i}\kappa}(\mathrm{x}|0)\left\{\sum_{j=1}^{\kappa}\mathcal{E}_{\beta_\mathrm{i},\mathrm{j}}(y)\mathcal{E}_{\beta_\mathrm{i},\kappa+1-j}(x)\right\}dx$$

ή

$$\mathrm{b}_\delta(\mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{\kappa}\frac{\mathcal{E}_{\beta_\mathrm{i},\mathrm{j}}(y)}{\varphi_\delta\beta_i}\int_0^\infty \eta_{\delta,\mathrm{i}\kappa}(\mathrm{x}|0)\mathcal{E}_{\beta_\mathrm{i},\kappa+1-j}(x)dx$$

ή

$$\mathrm{b}_\delta(\mathrm{y}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{\kappa=1}^{n_i}\mathcal{E}_{\beta_\mathrm{i},\mathrm{j}}(y)\sum_{\kappa=j}^{n_i}\frac{1}{\varphi_\delta\beta_i}\int_0^\infty \eta_{\delta,\mathrm{i}\kappa}(\mathrm{x}|0)\mathcal{E}_{\beta_\mathrm{i},\kappa+1-j}(x)dx,$$

οπότε,

$$\eta_{\delta,\mathrm{ij}} = \frac{1}{\varphi_\delta\beta_i}\sum_{\kappa=j}^{n_i}\int_0^\infty \eta_{\delta,\mathrm{i}\kappa}(\mathrm{x}|0)\mathcal{E}_{\beta_\mathrm{i},\kappa+1-j}(x)dx.$$

□

Θεωρούμε τη συνάρτηση Gerber-Shiu $m_{\delta,2}(u)$, όπως αυτή ορίζεται μέσω της σχέσης (2.28), με συνάρτηση ποινής $w(x,y) = w_2(y)$. Εδώ η συνάρτηση ποινής, είναι αποκλειστικά συνάρτηση του ελλείμματος. Η $m_{\delta,2}(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση και άρα μπορούμε να γράψουμε για την (3.22):

$$v_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta\int_u^\infty w_2(u-y)\,\mathrm{b}_\delta(\mathrm{y})\mathrm{dy} = \varphi_\delta\int_0^\infty w_2(y)\,\mathrm{b}_\delta(\mathrm{u}+\mathrm{y})\mathrm{dy}. \qquad (4.74)$$

Κάνοντας χρήση των σχέσεων (1.68) και (4.73) θα έχουμε

$$v_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta\int_0^\infty w_2(y)\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\eta_{\delta,\mathrm{i}\kappa}\mathcal{E}_{\beta_\mathrm{i},\kappa}(u+y)dy\right\}$$

$$= \varphi_\delta\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\eta_{\delta,\mathrm{i}\kappa}\int_0^\infty w_2(y)\left\{\frac{1}{\beta_i}\sum_{j=1}^{\kappa}\mathcal{E}_{\beta_\mathrm{i},j}(\mathrm{u})\mathcal{E}_{\beta_\mathrm{i},\kappa+1-j}(y)\,\mathrm{dy}\right\}$$

$$= \varphi_\delta \sum_{i=1}^{m} \sum_{\kappa=1}^{n_i} \sum_{j=1}^{\kappa} \mathcal{E}_{\beta_i,j}(u) \frac{\eta_{\delta,i\kappa}}{\beta_i} \int_0^\infty w_2(y) \mathcal{E}_{\beta_i,\kappa+1-j}(y)\, dy$$

$$\Rightarrow v_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{E}_{\beta_i,j}(\mathrm{u}) \sum_{k=j}^{n_i} \frac{\eta_{\delta,i\kappa}}{\beta_i} E\left[w_2(e_{i,k-j+1})\right],$$

με την $e_{i,j}$ να έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $\mathcal{E}_{\beta_i,j}(\mathrm{u})$ και έτσι

$$E\left[w_2(e_{i,j})\right] = \int_0^\infty w_2(y)\, \mathcal{E}_{\beta_i,j}(\mathrm{y}) dy. \tag{4.75}$$

Ακόμα,

$$v_{\delta,2}(u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \eta^*_{\delta,ij}\, \mathcal{E}_{\beta_i,j}(\mathrm{u}), \tag{4.76}$$

όπου

$$\eta^*_{\delta,ij} = \varphi_\delta \sum_{\kappa=j}^{n_i} \frac{\eta_{\delta,i\kappa}}{\beta_i} E\left[w_2(e_{i,k-j+1})\right].$$

Από τις σχέσεις (4.73) και (4.76), η ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση μπορεί να γραφτεί και σε μορφή μετασχηματισμού Laplace ως εξής:

$$\widetilde{m}_{\delta,2}(s) = \frac{\tilde{v}_{\delta,2}(s)}{1 - \varphi_\delta \tilde{b}_\delta(s)} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \eta^*_{\delta,ij} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + s}\right)^j}{1 - \varphi_\delta \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \eta_{\delta,ij} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + s}\right)^j}.$$

Έτσι,

$$\widetilde{m}_{\delta,2}(s) = \frac{\{\prod_{\kappa=1}^{m} (\beta_\kappa + s)^{n_\kappa}\} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \eta^*_{\delta,ij} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + s}\right)^j}{\{\prod_{\kappa=1}^{m} (\beta_\kappa + s)^{n_\kappa}\} \left\{1 - \varphi_\delta \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \eta_{\delta,ij} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + s}\right)^j\right\}}. \tag{4.77}$$

Είναι φανερό ότι ο αριθμητής της σχέσης (4.77) αποτελεί ένα πολυώνυμο βαθμού το πολύ n-1. Αντίστοιχα, ο παρονομαστής της εν λόγω σχέσης είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n. Έτσι, ο παρονομαστής έχει n-ρίζες στο μιγαδικό επίπεδο, τις οποίες συμβολίζουμε με $-R_{1,\delta}, -R_{2,\delta}, \dots, -R_{n,\delta}$. Υποθέτοντας ότι οι συγκεκριμένες ρίζες είναι διακριτές, καταλήγουμε στην επόμενη σχέση

$$\widetilde{m}_{\delta,2}(s) = \sum_{\kappa=1}^{n} \frac{C_{\kappa,\delta}}{s + R_{\kappa,\delta}}, \tag{4.78}$$

όπου οι ποσότητες $C_{1,\delta}, C_{2,\delta}, \ldots, C_{n,\delta}$ είναι συνεχείς. Παίρνοντας τώρα τη συνάρτηση του μετασχηματισμού Laplace, θα έχουμε

$$\tilde{m}_{\delta,2}(u) = \sum_{\kappa=1}^{n} C_{\kappa,\delta} e^{-R_{\kappa,\delta} u}. \tag{4.79}$$

Μολονότι η συνάρτηση Gerber-Shiu είναι απλής μορφής, πρέπει να καθοριστούν οι ποσότητες $C_{\kappa,\delta}$ και $R_{\kappa,\delta}$ για κ=1,2,…,n. Υποθέτουμε ότι τα $\beta_\kappa, R_{\kappa,\delta}$ είναι διακριτά για κάθε κ θετικό. Τότε, από τη σχέση (5.73) έχουμε

$$\left\{\prod_{\kappa=1}^{m}(s+\beta_\kappa)^{n_\kappa}\right\}\tilde{b}_\delta(s) = \left\{\prod_{\kappa=1}^{m}(s+\beta_\kappa)^{n_\kappa}\right\}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\eta_{\delta,ij}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i+s}\right)^j,$$

όπου η συγκεκριμένη παράσταση είναι ένα πολυώνυμο το πολύ n-1 βαθμού. Αυτό συνεπάγεται, ότι το $\{\prod_{\kappa=1}^{m}(s+\beta_\kappa)^{n_\kappa}\}\{1-\varphi_\delta\tilde{b}_\delta(s)\}$ είναι πολυώνυμο βαθμού n, με συντελεστή του s^n ίσο με 1. Όμως, από την (5.77), το $s=-R_{j,\delta}$ είναι ρίζα της $1-\varphi_\delta\tilde{b}_\delta(s)$ για j=1,2,…, n και επομένως ρίζα του πολυωνύμου. Έτσι, το πολυώνυμο είναι $\prod_{j=1}^{n}(s+R_{j,\delta})$ ή

$$1-\varphi_\delta\tilde{b}_\delta(s) = \frac{\prod_{j=1}^{n}(s+R_{j,\delta})}{\prod_{i=1}^{m}(\beta_i+s)^{n_i}}. \tag{4.80}$$

Επειδή $\tilde{b}_\delta(0)=1$, έπεται ότι

$$\varphi_\delta = 1-\frac{\prod_{j=1}^{n}(R_{j,\delta})}{\prod_{i=1}^{m}(\beta_i)^{n_i}}, \tag{4.81}$$

και

$$\tilde{b}_\delta(s) = \frac{\{\prod_{i=1}^{m}(\beta_i+s)^{n_i}\}-\left\{\prod_{j=1}^{n}(s+R_{j,\delta})\right\}}{\varphi_\delta\{\prod_{i=1}^{m}(\beta_i+s)^{n_i}\}}. \tag{4.82}$$

Επειδή,

$$\tilde{b}_\delta(s) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\eta_{\delta,ij}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i+s}\right)^j,$$

εφαρμόζοντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων παίρνουμε,

$$\eta_{\delta,ij} = \frac{\beta_i^{-j}}{(n_i-j)!}\left\{\frac{d^{n_i-j}}{ds^{n_i-j}}\left[(s+\beta_i)^{n_i}\tilde{b}_\delta(s)\right]\right\}\Bigg|_{s=-\beta_i}, \tag{4.83}$$

όπου $\tilde{b}_\delta(s)$ δίνεται από τη σχέση (4.82).

Μία σχέση για τα $C_{\kappa,\delta}$ μπορεί να βρεθεί από τα παραπάνω αποτελέσματα. Από την (4.80) έχουμε,

$$\frac{1-\varphi_\delta \tilde{b}_\delta(s)}{s+R_{\kappa,\delta}} = \frac{\prod_{j=1,j\neq\kappa}^{n}(s+R_{j,\delta})}{\prod_{i=1}^{m}(s+\beta_i)^{n_i}},$$

μέσω της οποίας παίρνουμε,

$$\lim_{s\to -R_{\kappa,\delta}} \frac{1-\varphi_\delta \tilde{b}_\delta(s)}{s+R_{\kappa,\delta}} = \frac{\prod_{j=1,j\neq\kappa}^{n}(R_{j,\delta}-R_{\kappa,\delta})}{\prod_{i=1}^{m}\left(\beta_i-R_{\kappa,\delta}\right)^{n_i}}.$$

Από την (4.78) έπεται ότι,

$$C_{\kappa,\delta} + \sum_{j=1,j\neq\kappa}^{n} C_{j,\delta}\left(\frac{s+R_{\kappa,\delta}}{s+R_{j,\delta}}\right) = (s+R_{\kappa,\delta})\tilde{m}_{\delta,2}(s) = \frac{\tilde{v}_{\delta,2}(s)}{\frac{\left\{1-\varphi_\delta \tilde{b}_\delta(s)\right\}}{(s+R_{\kappa,\delta})}},$$

από όπου παίρνοντας το όριο καθώς $s \to -R_{\kappa,\delta}$, οδηγούμαστε στην κάτωθι σχέση

$$C_{\kappa,\delta} = \tilde{v}_{\delta,2}(-R_{\kappa,\delta})\frac{\prod_{i=1}^{m}\left(\beta_i-R_{\kappa,\delta}\right)^{n_i}}{\prod_{j=1,j\neq\kappa}^{n}(R_{j,\delta}-R_{\kappa,\delta})}. \tag{4.84}$$

Είναι φανερό ότι $C_{\kappa,\delta} \neq 0$, καθόσον $\beta_i \neq R_{\kappa,\delta}$ στην (4.84) και $\tilde{v}_{\delta,2}(-R_{\kappa,\delta}) \neq 0$ στην (4.74). Παρόλο που το $\tilde{v}_{\delta,2}(s)$ δίνεται από τη σχέση (4.76), η εξάρτηση των συντελεστών $\eta^*_{\delta,ij}$ καθιστά την (4.84) λιγότερο χρηστική. Ωστόσο, για μερικά w_2 η (4.84) παρέχει πολύ χρήσιμα αποτελέσματα. Για παράδειγμα, αν $w_2(y) = e^{-zy}$, τότε μέσω των (1.5) και (4.74) έχουμε $v_{\delta,2}(u) = \varphi_\delta T_z b_\delta(u)$ και μέσω της (1.11) καταλήγουμε ότι

$$\tilde{v}_{\delta,2}(s) = \frac{\varphi_\delta \tilde{b}_\delta(z) - \varphi_\delta \tilde{b}_\delta(s)}{s-z},$$

που εύκολα υπολογίζεται μέσω της (4.82). Για z=0 και $w_2(y) = 1$, έχουμε

$$\tilde{v}_{\delta,2}(-R_{\kappa,\delta}) = \frac{(1-\varphi_\delta)}{R_{\kappa,\delta}},$$

αφού $\varphi_\delta \tilde{b}_\delta(-R_{\kappa,\delta}) = 1$.

Συνεχίζοντας, χρησιμοποιούμε την (4.81) για να απλοποιήσουμε την (4.84). Για $w_2(y) = 1$, θα έχουμε

$$C^*_{\kappa,\delta} = \left\{\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{\beta_i-R_{\kappa,\delta}}{\beta_i}\right)^{n_i}\right\}\left\{\prod_{j=1,j\neq\kappa}^{n}\left(\frac{R_{j,\delta}}{R_{j,\delta}-R_{\kappa,\delta}}\right)\right\}. \tag{4.85}$$

Επειδή $m_{\delta,2}(u) = \bar{G}_\delta(u)$, όταν $w_2(y) = 1$, με $\bar{G}_\delta(u)$ να είναι η συνάρτηση επιβίωσης του χρόνου χρεοκοπίας, συνεπάγεται μέσω της (4.79)

$$\bar{G}_\delta(u) = \sum_{\kappa=1}^{n} C^*_{\kappa,\delta} e^{-R_{\kappa,\delta}u}, \quad u \geq 0, \tag{4.86}$$

όπου τα $C^*_{\kappa,\delta}$ δίνονται από την (4.85). Η πιθανότητα χρεοκοπίας αποτελεί ουσιαστικά ειδική περίπτωση της (4.86) για δ=0.

Στη συνέχεια, θα υπολογισθούν τα $R_{\kappa,\delta}$ με τη βοήθεια του επόμενου Θεωρήματος.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1 *Για το μοντέλο με από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας $p(y|t)\kappa(t)$ όπως αυτό περιγράφεται στη σχέση (4.68) και συνάρτηση Gerber-Shiu $m_{\delta,2}(u)$ όπως περιγράφεται στη σχέση (4.79), υποθέτουμε ότι τα $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ και $R_{1,\delta}, R_{2,\delta}, \ldots, R_{n,\delta}$ παίρνουν διακριτές τιμές. Τότε, για $\kappa = 1,2,\ldots,n$ το $-R_{\kappa,\delta}$ αποτελεί ρίζα της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg, ικανοποιεί δηλαδή την*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^j \bar{\gamma}_{ij}\left(\delta + cR_{\kappa,\delta}\right) = 1, \tag{4.87}$$

με $\bar{\gamma}_{ij}(s) = \int_0^\infty e^{-st}\bar{\gamma}_{ij}(t)dt$, εφόσον $\bar{\gamma}_{in_i}(\delta + c\beta_i) \neq 0$.

Ακόμα, τα $C_{1,\delta}, C_{2,\delta}, \ldots, C_{n,\delta}$ ικανοποιούν το εξής γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$\sum_{\kappa=1}^{n} C_{\kappa,\delta}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^j = E\left[w_2(e_{ij})\right], \tag{4.88}$$

για $i = 1,2,\ldots,m$ και $j = 1,2,\ldots,m$ με $E\left[w_2(e_{ij})\right]$ να δίνεται από την (4.75).

Απόδειξη

Για $w(x,y) = w_2(y)$, η (4.1) γίνεται

$$m_{\delta,2}(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\int_{u+ct}^\infty w_2(y-u-ct)\,p(y|t)\kappa(t)dydt + \int_0^\infty e^{-\delta t}\int_0^{u+ct} m_{\delta,2}(u+ct-y)\,p(y|t)\kappa(t)dydt. \tag{4.89}$$

Κάνοντας αντικατάσταση των (4.68) και (4.79) στην (4.89) μας δίνει

$$\sum_{\kappa=1}^{n} C_{\kappa,\delta}e^{-R_{\kappa,\delta}u} = \int_0^\infty e^{-\delta t}\int_{u+ct}^\infty w_2(y-u-ct)\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\mathcal{E}_{\beta_i,j}(y)\gamma_{ij}(t)\right\}dydt$$
$$+\int_0^\infty e^{-\delta t}\int_0^{u+ct}\left\{\sum_{\kappa=1}^{n} C_{\kappa,\delta}e^{-R_{\kappa,\delta}(u+ct-y)}\right\}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\mathcal{E}_{\beta_i,h}(y)\gamma_{ij}(t)\right\}dydt.$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\int_0^\infty w_2(y)\,\mathcal{E}_{\beta_i,h}(y+u+ct)dy\right\}\gamma_{ih}(t)dt$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} C_{\kappa,\delta}\sum_{n=1}^{n_i}\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\int_0^{u+ct} e^{-R_{\kappa,\delta}(u+ct-y)}\mathcal{E}_{\beta_i,h}(y)dy\right\}\gamma_{ih}(t)dt.$$

Θα δουλέψουμε τώρα βασιζόμενοι στα δύο εσωτερικά ολοκληρώματα της προηγούμενης σχέσης. Αρχικά, κάνοντας χρήση της (2.68) θα έχουμε,

$$\int_0^\infty w_2(y)\,\mathcal{E}_{\beta_i,\mathrm{h}}(\mathrm{y+u+ct})\mathrm{d}y = \frac{1}{\beta_i}\int_0^\infty w_2(y)\left\{\sum_{\ell=1}^{h}\mathcal{E}_{\beta_i h-\ell+1}(y)\,\mathcal{E}_{\beta_i,\ell}(u+ct)\right\}dy$$

$$= \frac{1}{\beta_i}\sum_{\ell=1}^{h}\int_0^\infty w_2(y)\,\mathcal{E}_{\beta_i h-\ell+1}(y)\,dy\mathcal{E}_{\beta_i,\ell}(u+ct)$$

$$= \frac{1}{\beta_i}\sum_{\ell=1}^{h}E\left[w_2(e_{i,h-\ell+1})\right]\mathcal{E}_{\beta_i,\ell}(u+ct).$$

Συνεχίζοντας, για $R \neq \beta_i$, είναι

$$\int_0^u e^{-R(u-y)}\,\mathcal{E}_{\beta_i,\mathrm{h}}(\mathrm{y})\mathrm{dy} = \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R}\right)^h e^{-Ru} - \frac{1}{\beta_i}\sum_{\ell=1}^{h}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R}\right)^{h-\ell+1}\mathcal{E}_{\beta_i,\ell}(u),$$

οπότε,

$$\sum_{\kappa=1}^{n} C_\kappa e^{-R_{\kappa,\delta}u} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{h}=1}^{\mathrm{n_i}}\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\frac{1}{\beta_i}\sum_{\ell=1}^{h}E\left[w_2(e_{i,h-\ell+1})\right]\mathcal{E}_{\beta_i,\ell}(u+ct)\right\}\gamma_{\mathrm{ih}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

$$+\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} C_{\kappa,\delta}\sum_{h=1}^{n_i}\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^h e^{-R_{\kappa,\delta}(u+ct)}\right\}\gamma_{\mathrm{ih}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

$$-\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} C_{\kappa,\delta}\sum_{h=1}^{n_i}\int_0^\infty e^{-\delta t}\left\{\frac{1}{\beta_i}\sum_{\ell=1}^{h}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^{h-\ell+1}\mathcal{E}_{\beta_i,\ell}(u+ct)\right\}\gamma_{\mathrm{ih}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

και

$$\sum_{\kappa=1}^{n} C_\kappa e^{-R_{\kappa,\delta}u} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{\mathrm{n_i}}\sum_{\ell=1}^{h}\frac{1}{\beta_i}E\left[w_2(e_{i,h-\ell+1})\right]\int_0^\infty e^{-\delta t}\,\mathcal{E}_{\beta_i,\ell}(u+ct)\gamma_{\mathrm{ih}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

$$+\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} C_{\kappa,\delta}\sum_{j=1}^{n_i}\int_0^\infty\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^h e^{-R_{\kappa,\delta}u}\int_0^\infty e^{(-\delta + cR_{\kappa,\delta})t}\,\gamma_{\mathrm{ij}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

$$-\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} C_{\kappa,\delta}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{\ell=1}^{h}\frac{1}{\beta_i}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^{h-\ell+1}\int_0^\infty e^{-\delta t}\,\mathcal{E}_{\beta_i,\ell}(u+ct)\gamma_{\mathrm{ih}}(\mathrm{t})\mathrm{dt},$$

με την άθροιση να αλλάζει από h σε j στην προτελευταία σειρά. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας ξανά τη (1.68) θα έχουμε

$$\frac{1}{\beta_i}\int_0^\infty e^{-\delta t}\,\mathcal{E}_{\beta_i,\ell}(u+ct)\gamma_{\mathrm{ih}}(\mathrm{t})\mathrm{dt} = \frac{1}{\beta_i^2}\sum_{j=1}^{\ell}\mathcal{E}_{\beta_i,\mathrm{j}}(\mathrm{u})\int_0^\infty e^{-\delta t}\,\mathcal{E}_{\beta_i,\ell-j+1}(ct)\gamma_{\mathrm{ih}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} \mathcal{E}_{\beta_i,\mathrm{j}}(\mathrm{u})\, M^*_{i,h,\ell-j+1}(\delta),$$

όπου

$$M^*_{i,h,\ell}(\delta) = \frac{1}{\beta_i^2}\int_0^\infty e^{-\delta t}\, \mathcal{E}_{\beta_i,\ell-j+1}(ct)\gamma_{\mathrm{ih}}(\mathrm{t})\mathrm{dt}. \tag{4.90}$$

Επομένως, είναι

$$\sum_{\kappa=1}^{n} C_\kappa \left\{1 - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n_i}} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^j \tilde{\gamma}_{ij}(\delta + cR_{\kappa,\delta})\right\} e^{-R_{\kappa,\delta}u}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{\mathrm{n_i}}\sum_{\ell=1}^{h} E\big[w_2(e_{i,h-\ell+1})\big] \sum_{j=1}^{\ell} \mathcal{E}_{\beta_i,\mathrm{j}}(\mathrm{u})\, M^*_{i,h,\ell-j+1}(\delta)$$

$$-\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} C_{\kappa,\delta} \sum_{h=1}^{n_i}\sum_{\ell=1}^{h} \frac{1}{\beta_i}\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^{h-\ell+1} \sum_{j=1}^{\ell} \mathcal{E}_{\beta_i,\mathrm{j}}(\mathrm{u})\, M^*_{i,h,\ell-j+1}(\delta)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{\mathrm{n_i}}\sum_{\ell=1}^{h} \mathcal{E}_{\beta_i,\mathrm{j}}(\mathrm{u}) \sum_{\ell=j}^{h} E\big[w_2(e_{i,h-\ell+1})\big]\, M^*_{i,h,\ell-j+1}(\delta)$$

$$-\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} C_{\kappa,\delta} \sum_{h=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{h} \mathcal{E}_{\beta_i,\mathrm{j}}(\mathrm{u}) \sum_{\ell=j}^{h} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^{h-\ell+1} M^*_{i,h,\ell-j+1}(\delta)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{E}_{\beta_i,\mathrm{j}}(\mathrm{u}) \sum_{h=j}^{n_i}\sum_{\ell=j}^{h} E\big[w_2(e_{i,h-\ell+1})\big]\, M^*_{i,h,\ell-j+1}(\delta)$$

$$-\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} C_{\kappa,\delta} \sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{E}_{\beta_i,\mathrm{j}}(\mathrm{u}) \sum_{h=j}^{n_i}\sum_{\ell=j}^{h} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^{h-\ell+1} M^*_{i,h,\ell-j+1}(\delta).$$

Τότε,

$$\sum_{\kappa=1}^{n} C_\kappa \left\{1 - \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}}\sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{n_i}} \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^j \tilde{\gamma}_{ij}(\delta + cR_{\kappa,\delta})\right\} e^{-R_{\kappa,\delta}u}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} \mathcal{E}_{\beta_i,\mathrm{j}}(\mathrm{u}) \left\{\sum_{h=j}^{n_i}\sum_{\ell=j}^{h} M^*_{i,h,\ell-j+1}(\delta) \left(E\big[w_2(e_{i,h-\ell+1})\big] - \sum_{\kappa=1}^{n} C_\kappa \left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^{h-\ell+1}\right)\right\}. \tag{4.91}$$

Η σχέση (4.91) ισχύει για κάθε u>0 και συνεπώς οι συντελεστές των $e^{-R_{\kappa,\delta}u}$ και $\mathcal{E}_{\beta_i,\mathrm{j}}(\mathrm{u})$ $(i = 1,2,\dots,m\, j = 1,2,\dots,n_i)$ είναι ίσοι με μηδέν Εξισώνοντας το $e^{-R_{\kappa,\delta}u}$ με το μηδέν, παίρνουμε τη σχέση (4.87). Για το $\mathcal{E}_{\beta_i,\mathrm{j}}(\mathrm{u})$ θα έχουμε

$$\sum_{h=j}^{n_i}\sum_{\ell=j}^{h} M^*_{i,h,\ell-j+1}(\delta)\left(E\left[w_2(e_{i,h-\ell+1})\right] - \sum_{\kappa=1}^{n} C_\kappa\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^{h-\ell+1}\right) = 0. \quad (4.92)$$

Προκειμένου να απλοποιήσουμε την (4.92) ορίζουμε την κάτωθι συνάρτηση

$$f_{i,j}(\delta) = E\left[w_2(e_{i,j+1})\right] - \sum_{\kappa=1}^{n} C_\kappa\left(\frac{\beta_i}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}}\right)^{j+1},$$

οπότε για το αριστερό μέλος της θα έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{h=j}^{n_i}\sum_{\ell=j}^{h} M^*_{i,h,\ell-j+1}(\delta) f_{i,h-\ell}(\delta) &= \sum_{\ell=j}^{n_i}\sum_{h=\ell}^{n_i} M^*_{i,h,\ell-j+1}(\delta) f_{i,n-\ell}(\delta) \\
&= \sum_{\ell=j}^{n_i}\sum_{h=0}^{n_i-\ell} M^*_{i,h+\ell,\ell-j+1}(\delta) f_{i,h}(\delta) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n_i-j}\sum_{h=0}^{n_i-j-\ell} M^*_{i,j+h-\ell,\ell+1}(\delta) f_{i,h}(\delta) \\
&= \sum_{h=0}^{n_i-j} f_{i,h}(\delta) \sum_{\ell=0}^{n_i-j-\ell} M^*_{i,j+h-\ell,\ell+1}(\delta).
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$M_{i,j}(\delta) = \sum_{\ell=0}^{n_i-j} M_{i,j+\ell,\ell+1}(\delta)$$

και

$$\sum_{h=j}^{n_i}\sum_{\ell=j}^{h} M_{i,h,\ell-j+1}(\delta) f_{i,h-\ell}(\delta) = \sum_{h=0}^{n_i-j} f_{i,h}(\delta)\, M_{i,j+h}(\delta),$$

οπότε βρίσκουμε ότι

$$\sum_{h=0}^{n_i-j} f_{i,h}(\delta)\, M_{i,j+h}(\delta) = 0. \quad (4.94)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την (4.94) για να δείξουμε ότι $f_{i,\kappa}(\delta) = 0$ για $\kappa = 0,1,\dots,n_i - 1$. Για $j = n_i$, η (4.94) γίνεται $f_{i,0}(\delta) M_{i,n_i}(\delta) = 0$ και από την (4.90) και την (4.93) θα έχουμε

$$M_{i,n_i}(\delta) = M_{i,n_i,1}(\delta) = \frac{1}{\beta_i}\tilde{\gamma}_{in_i}(\delta + c\beta_i),$$

η οποία, βάσει υπόθεσης, είναι μη-μηδενική. Άρα, $f_{i,0}(\delta) = 0$. Τώρα, από την επαγωγική υπόθεση, έστω $f_{i,h}(\delta) = 0$ για $h = 0,1,\ldots,\kappa - 1$ όπου $1 \le \kappa \le n_i - 1$. Έτσι, για $j = n_i - \kappa$,

$$\sum_{h=0}^{\kappa} f_{i,h}(\delta)\, M_{i,n_i+h-\kappa}(\delta) = 0,$$

το οποίο συνεπάγεται $f_{i,\kappa}(\delta)M_{i,n_i}(\delta) = 0 \Rightarrow f_{i,\kappa}(\delta) = 0$ για $\kappa = 0,1,\ldots,n_i - 1$ και επομένως ισχύει η (4.88).

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu μηδενίζεται στο άπειρο, το οποίο από την (4.79) προϋποθέτει το $R_{\kappa,\delta}$ να έχει θετικό πραγματικό μέρος για $\kappa = 1,2,\ldots,n$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για τη μίξη με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της (4.69), όπου $\gamma_{ij} = \eta_{ij}\kappa_{ij}(t)$, ικανοποιείται η συνθήκη $\tilde{\gamma}_{ij}(\delta + c\beta_i) \neq 0$ με $j = n_i$, όπως προκύπτει από την (4.68). Στην περίπτωση που $\tilde{\gamma}_{ij}(\delta + c\beta_i) = 0$ θα σήμαινε ότι $n_i = 0$, ότι δηλαδή το n_i θα μπορούσε να αντικατασταθεί από $n_i - 1$ στον ορισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της (4.77).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.10 *(Μίξη εκθετικά κατανεμημένων ατομικών υψών απαιτήσεων)*

Το γραμμικό σύστημα που συναντούμε στην (4.88) μας οδηγεί στην εύρεση του $C_{\kappa,\delta}$ με τη χρήση πολυωνύμων Lagrange. Το μοντέλο μας για τα ατομικά ύψη των απαιτήσεων ακολουθεί την εκθετική κατανομή. Σε αυτήν την περίπτωση, η (4.88) είναι

$$\sum_{\kappa=1}^{n} \frac{C_{\kappa,\delta}}{\beta_i - R_{\kappa,\delta}} = \frac{E[w_2(e_{i,1})]}{\beta_i}, i = 1,2,\ldots,n \qquad (4.95)$$

που αποτελεί ένα σύστημα εξισώσεων Cauchy. Για να λύσουμε ως προς $C_{\kappa,\delta}$ ορίζουμε την

$$Q^*(z) = \left\{\prod_{j=1}^{n}(z - R_{j,\delta})\right\}\sum_{\kappa=1}^{n}\frac{C_{\kappa,\delta}}{z - R_{\kappa,\delta}} = \sum_{\kappa=1}^{n} C_{\kappa,\delta}\left\{\prod_{j=1,j\neq\kappa}^{n}(z - R_{j,\delta})\right\}. \qquad (4.96)$$

Για i=1,2,…,n, η (4.95) γίνεται

$$Q^*(\beta_i) = \frac{E[w_2(e_{i,1})]}{\beta_i}\left\{\prod_{j=1}^{n}(\beta_i - R_{j,\delta})\right\} = E[w_2(e_{i,1})]\frac{\beta_i - R_{i,\delta}}{\beta_i}\prod_{j=1,j\neq\kappa}^{n}(\beta_i - R_{j,\delta}).$$

Αφού η (4.96) είναι πολυώνυμο βαθμού το πολύ n-1, από την (1.1) έπεται ότι

$$Q^*(z) = \sum_{i=1}^{n} Q^*(\beta_i)\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left(\frac{\beta_i - z}{\beta_j - \beta_i}\right),$$

δηλαδή,

$$Q^*(z) = \sum_{i=1}^{n} E\left[w_2(e_{i,1})\right]\left(\frac{\beta_i - R_{i,\delta}}{\beta_i}\right)\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left\{\frac{(\beta_i - z) - (\beta_i - R_{j,\delta})}{(\beta_j - \beta_i)}\right\}. \quad (4.97)$$

Με αντικατάσταση $z = R_{\kappa,\delta}$ στις (4.96) και (4.97) και λύνοντας ως προς $C_{\kappa,\delta}$ καταλήγουμε στη σχέση

$$C_{\kappa,\delta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} E\left[w_2(e_{i,1})\right]\left(\frac{\beta_i - R_{i,\delta}}{\beta_i}\right)\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left\{\frac{(\beta_i - z) - (\beta_i - R_{j,\delta})}{(\beta_j - \beta_i)}\right\}}{\prod_{j=1,j\neq\kappa}^{n}\left(R_{\kappa,\delta} - R_{j,\delta}\right)}.$$

Επιστρέφοντας στη συνάρτηση κλιμακωτού ύψους (5.73) για $n_i = 1$, έχουμε

$$\tilde{b}_\delta(s) = \sum_{\kappa=1}^{n} \eta_{\delta,i1}\left\{\frac{\beta_i}{(\beta_i + s)}\right\}.$$

Εξισώνοντας με την (4.82) μας δίνει,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \eta_{\delta,i1}\left\{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\beta_j + s)\right\} = \frac{1}{\varphi_\delta}\left\{\left(\prod_{j=1}^{n}(\beta_j + s)\right) - \left(\prod_{j=1}^{n}(R_{j,\delta} + s)\right)\right\}.$$

Αντικαθιστώντας $s = -\beta_i$ και λύνοντας ως προς $\eta_{\delta,i1}$ για i=1,2,…,n παίρνουμε

$$\eta_{\delta,i1} = \frac{\prod_{j=1}^{n}\left(\beta_i - R_{j,\delta}\right)}{\varphi_\delta \beta_i \prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left(\beta_i - \beta_j\right)}.$$

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.11 *(Ατομικά ύψη απαιτήσεων μικτής Erlang κατανομής - Μορφή πινάκων)*

Το σύστημα (4.88) μπορεί επίσης να λυθεί για m=1. Σε αυτήν την περίπτωση

$$\sum_{\kappa=1}^{n} C_{\kappa,\delta}\left(\frac{\beta_1}{\beta_1 - R_{\kappa,\delta}}\right)^j = E\left[w_2(e_{1,j})\right]. \quad (4.98)$$

Έστω λοιπόν $\boldsymbol{C}_\delta^T = \left(C_{\kappa,\delta}\right)_{1xn}$, $\boldsymbol{A} = \left(\alpha_{j,\kappa}\right)_{nxn}$, όπου $\alpha_{j,\kappa} = \rho_\kappa^j$ και $\rho_\kappa = \frac{\beta_1}{\beta_1 - R_{\kappa,\delta}}$. Έστω ακόμα, $\boldsymbol{W}^T = \left(w_j\right)_{1xn}$ με $w_j = E\left[w_2(e_{1,j})\right]$. Τότε, η σχέση (4.98) μπορεί να γραφτεί και σε μορφή πινάκων ως $\boldsymbol{AC}_\delta = \boldsymbol{W}$, που σημαίνει $\boldsymbol{C}_\delta = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{W}$. Ο πίνακας **A** καλείται και "πίνακας Vandermonde", όπου $\boldsymbol{A}^{-1} = \left(\alpha_{i,j}^*\right)$ με

$$\alpha_{i,j}^* = \frac{\sum_{\substack{1\leq\kappa_1<\cdots<\kappa_{n-j}\leq n \\ \kappa_1,\cdots,\kappa_{n-j}\neq i}}(-1)^j \prod_{\ell=1}^{n-j}\rho_{\kappa_\ell}}{\rho_i \prod_{\substack{\kappa=1 \\ \kappa\neq i}}^{n}(\rho_\kappa - \rho_j)},$$

και επομένως

$$C_{\kappa,\delta} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,\kappa}^{*} E\big[w_2(e_{1,j})\big].$$

□

Τέλος, μία σαφής έκφραση για την κατανομή του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία, μπορεί να προκύψει από το γενικό μοντέλο της (4.68). Είναι φανερό από τις (3.45) και (3.46) ότι η (3.47) γράφεται ως εξής

$$h_{\delta,2,u}(y) = \frac{\varphi_\delta(1-\varphi_\delta)b_\delta(u+y)+\varphi_\delta \int_0^u b_\delta(t+y)g_\delta(u-t)dt}{(1-\varphi_\delta)\bar{G}_\delta(u)}. \tag{4.99}$$

Σαφείς εκφράσεις για τα μεγέθη $b_\delta(y)$ και $\bar{G}_\delta(u)$ δίνονται επίσης από τις (4.73) και (4.86) αντιστοίχως. Έτσι, μέσω της (4.86), είναι

$$g_\delta(u) = -\bar{G}'_\delta(u) = \sum_{\kappa=1}^{n} C_{\kappa,\delta}^{*} R_{\kappa,\delta} e^{-R_{\kappa,\delta}u}. \tag{4.100}$$

Να σημειωθεί ότι το ολοκλήρωμα του αριθμητή της σχέσης (4.99) υπολογίζεται μέσω των σχέσεων (1.68), (4.73) και (4.100).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.12 *(Μίξη δύο εκθετικών κατανομών)*

Έστω ότι η κατανομή του ατομικού ύψους των απαιτήσεων είναι μίξη δύο επιμέρους εκθετικών κατανομών και ισχύει

$$p(y) = p\big(\beta_1 e^{-\beta_1 y}\big) + (1-p)\big(\beta_2 e^{-\beta_2 y}\big), \qquad y > 0.$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας υποθέσουμε για τις επιμέρους παραμέτρους ότι $\beta_1 < \beta_2$. Αυτό σημαίνει ότι η (4.70) ισχύει για $m = 2, n_i = 1$ $\mu\varepsilon$ $i = 1{,}2$. Τότε, για δ=0, μέσω των (4.85) και (4.86) έχουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι,

$$\psi(u) = C_{1,0}^{*} e^{-R_{1.0}u} + C_{2,0}^{*} e^{-R_{2.0}u},\ u \geq 0, \tag{4.101}$$

με τους συντελεστές των εκθετικών όρων να είναι

$$C_{1,0}^{*} = \frac{R_{2.0}(\beta_1 - R_{1.0})(\beta_2 - R_{2.0})}{\beta_1\beta_2(R_{2.0} - R_{1.0})}$$

$$C_{2,0}^{*} = \frac{R_{1.0}(\beta_1 - R_{1.0})(\beta_2 - R_{2.0})}{\beta_1\beta_2(R_{1.0} - R_{2.0})} \tag{4.102}$$

όπου $R_{1,0}, R_{2,0}$ είναι οι δύο θετικές ρίζες της εξίσωσης Lundberg $\tilde{k}(cr)\tilde{p}(-r) = 1$, όπου $0 < r_1 < \beta_1 < r_2 < \beta_2$.

Στη συνέχεια του Παραδείγματος, θα δώσουμε τη δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείμματος της χρεοκοπίας, δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπία, δηλαδή για την

$$\bar{H}_{0,2,u}(y) = \int_{y}^{\infty} h_{0,2,u}(x)dx.$$

Όπως αναφέρθηκε, η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{H}_{0,2,u}(y)$ εκφράζεται στην (1.52), με $\bar{G}(u,y) = \bar{H}_{0,2}(y|u)$ στην (3.56) και με $\bar{G}(u) = \bar{G}_0(u)$ στην (4.46), που είναι και η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Έτσι, από την (1.53) έχουμε,

$$\bar{H}_{0,2,u}(y) = \frac{\int_0^u \bar{B}_{0,u-t}(y)\bar{B}_0(u-t)dG_0(t)}{\int_0^u \bar{B}_0(u-t)dG_0(t)}, \tag{4.103}$$

όπου

$$\bar{B}_{0,x}(y) = \int_{y}^{\infty} b_{0,x}(t)dt$$

και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από την (3.48). Εναλλακτικά, η (4.103) μπορεί να προκύψει άμεσα μέσω της (3.47). Επίσης από την (4.46) έχουμε,

$$\bar{G}_0(u) = \frac{\varphi_\delta}{(1-\varphi_\delta)}\int_0^u \bar{B}_0(u-t)dG_0(t). \tag{4.104}$$

Από τις (4.81) και (4.82) αρχικά βρίσκουμε $\tilde{b}_0(s) = q\frac{\beta_1}{s+\beta_1} + (1-q)\frac{\beta_2}{s+\beta_2}$

όπου $q = \frac{\beta_2(\beta_1 - R_{1.0})(R_{2.0}-\beta_1)}{(\beta_2-\beta_1)(\beta_1\beta_2 - R_{1.0}R_{2.0})}$. Η αντιστροφή μας οδηγεί στη συνάρτηση επιβίωσης της κατανομής του κλιμακωτού ύψους, δηλαδή,

$$\bar{B}_0(y) = qe^{-\beta_1 y} + (1-q)e^{-\beta_2 y}, \qquad y \geq 0.$$

Έτσι, βρίσκουμε

$$\bar{B}_{0,x}(y) = q(x)e^{-\beta_1 y} + (1-q(x))e^{-\beta_2 y},\ y \geq 0 \tag{4.105}$$

με

$$q(x) = \frac{qe^{-\beta_1 x}}{qe^{-\beta_1 x} + (1-q)qe^{-\beta_1 x}}. \tag{4.106}$$

Όμως, από την (4.104) θα έχουμε

$$\int_0^u \bar{B}_0(u-t)dG_0(t) = \frac{\bar{G}_0(u)\{1-\varphi_0\}}{\varphi_0}$$

με τα φ_0, $\bar{G}_0(u)$ να δίνονται μέσω των σχέσεων που περιγράψαμε πιο πάνω.

Κάνοντας κανείς αντικατάσταση των σχέσεων (4.105), (4.106) στην (4.103) και λαμβάνοντας υπόψιν τα άνωθι αποτελέσματα καταλήγει στη σχέση,

$$\overline{H}_{0,2,u}(y) = q_1(x)e^{-\beta_1 y} + (1 - q_1(x))e^{-\beta_2 y},\ y \geq 0 \tag{4.107}$$

όπου για τα βάρη μίξης θα ισχύει

$$q_1(x) = \frac{q(\beta_1\beta_2 - R_{1.0}R_{2.0})}{C_{1,0}^* e^{-R_{1.0}u} + C_{2,0}^* e^{-R_{2.0}u}} \left\{ \frac{e^{-\beta_1 x}}{\beta_1\beta_2} + \frac{C_{1,0}^*(e^{-\beta_1 x} - e^{-R_{1.0}x})}{R_{2.0}(R_{1.0} - \beta_1)} + \frac{C_{2,0}^*(e^{-\beta_2 x} - e^{-R_{2.0}x})}{R_{1.0}(R_{2.0} - \beta_1)} \right\}.$$

Αξίζει να σημειωθεί εδώ, ότι η (4.107) αποτελεί πάλι μίξη δύο εκθετικών, με βάρη που αθροίζουν στη μονάδα.

□

4.4 ΤΟ ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ERLANG ΓΙΑ ΤΑ ΥΨΗ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ

Η από-κοινού πυκνότητα των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων V και του ατομικού ύψους απαίτησης Y, δίνεται από τη σχέση

$$p(y|t)k(t) = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} w_j \mathcal{E}_{\beta,j}(y)k_j(t), \tag{4.108}$$

όπου $\{w_1, w_2, \dots\}$ είναι το διακριτό μέτρο πιθανότητας, $\mathcal{E}_{\beta,j}(y)$ είναι η Erlang-j πυκνότητα της (1.66) και $k_j(t)$ είναι συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ως προς t. Το μοντέλο του Cox στην (4.71) για $\eta_{ij} \geq 0$ έχει τη μορφή της (4.108). Προς τούτο, για

$$\beta = max\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m\}$$

από τη (1.72) έπεται ότι

$$\tilde{E}_{\beta_i,h}(s) = \left(\frac{\beta_i}{\beta_i + h}\right)^h = Q_{ih}^*\left(\frac{\beta}{\beta+\sigma}\right), \tag{4.109}$$

όπου,

$$Q_{ih}^*(z) = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} q_{ihj} z^j = z^j \left\{ \frac{\frac{\beta_i}{\beta}}{1 - \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta} z\right)} \right\}^h, \tag{4.110}$$

και, όπως στη (2.77), είναι $q_{ihj}^* = 0$ για j<h. Ακόμα,

$$q_{ihj}^* = \binom{j-1}{h-1}\left(\frac{\beta_i}{\beta}\right)^h \left(1 - \frac{\beta_i}{\beta}\right)^{j-h}, j = h, h+1, \dots$$

Τότε, από τις (4.109) και (4.110) έχουμε ότι

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\beta_i,h}(s) = \textstyle\sum_{j=1}^{\infty} q_{ihj}^* \mathcal{E}_{\beta,j}(y). \tag{4.111}$$

Συνεπώς, για την από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των V και Y μπορούμε να γράψουμε,

$$
\begin{aligned}
p(y|t)k(t) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\eta_{ih}\mathcal{E}_{\beta_i,h}(y)k_{ih}(t) \\
&= \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\eta_{ih}k_{ih}(t)\sum_{j=1}^{\infty}q_{ihj}^{*}\,\mathcal{E}_{\beta,j}(y) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\eta_{ih}q_{ihj}^{*}k_{ih}(t)\right\}\mathcal{E}_{\beta,j}(y).
\end{aligned}
$$

Έτσι, η σχέση (4.71) μπορεί να γραφτεί και ως

$$p(y|t)k(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\sum_{j=1}^{\infty}q_{ihj}\,\mathcal{E}_{\beta,j}(y)k_{ih}(t), \qquad (4.112)$$

όπου $q_{ihj} = \eta_{ih}q_{ihj}^{*}$. Είναι φανερό ότι η (4.112) είναι ίδιας μορφής με την (4.108), μόνο που

$$w_j = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}q_{ihj}$$

και

$$k_j(t) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{h=1}^{n_i}\frac{q_{ihj}}{w_j}k_{ih}(t).$$

Ένα πρακτικό πλεονέκτημα της χρήσης σειρών αθροισμάτων που αναπτύσσουμε σε αυτήν την ενότητα, είναι ότι δεν καθιστά αναγκαίο τον υπολογισμό των ριζών της εξίσωσης Lundberg.

Η (4.108) έχει τη μορφή της (4.71) για $m = 1, \beta_1 = \beta, n_1 = \infty$. Ωστόσο, με τη χρησιμοποίηση του Λήμματος (4.1), για u=0 η (4.72) μπορεί να γραφτεί ως εξής,

$$h_{\delta,12}(x,y|0) = \sum_{j=1}^{\infty}m_{\delta,j}(x)\mathcal{E}_{\beta,j}(x+y). \qquad (4.113)$$

Τότε, η (3.19) γράφεται,

$$
\begin{aligned}
\varphi_\delta &= \int_0^\infty\int_0^\infty h_{\delta,12}(x,y|0)dydx \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^\infty w_{\delta,k}(x)\left\{\int_x^\infty \mathcal{E}_{\beta,k}(y)dy\right\}dx
\end{aligned}
$$

$$=\frac{1}{\beta}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty} w_{\delta,k}(x)\left\{\sum_{j=1}^{k}\mathcal{E}_{\beta,j}(x)dx\right\},$$

ή

$$\varphi_\delta = \tfrac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} w_{\delta,k,j}, \tag{4.114}$$

με

$$w_{\delta,k,j} = \int_0^{\infty} w_{\delta,k}(x)\,\mathcal{E}_{\beta,j}(x)dx. \tag{4.115}$$

Τότε, η (3.20) μέσω της (1.68) γράφεται,

$$b_\delta(y) = \frac{1}{\varphi_\delta}\int_0^{\infty} h_{\delta,12}(x,y|0)dx = \frac{1}{\varphi_\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty} w_{\delta,k}(x)\,\mathcal{E}_{\beta,k}(x+y)dx$$

$$=\frac{1}{\varphi_\delta}\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^{\infty} w_{\delta,k}(x)\left\{\frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{k}\mathcal{E}_{\beta,j}(y)\mathcal{E}_{\beta,k-j+1}(x)\right\}dx$$

$$=\frac{1}{\beta\varphi_\delta}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,j}(y)\sum_{k=j}^{\infty}\int_0^{\infty} w_{\delta,k}(x)\,\mathcal{E}_{\beta,k-j+1}(x)\,dx,$$

και τελικά,

$$b_\delta(y) = \sum_{j=1}^{\infty}\overline{w}_{\delta,j}\mathcal{E}_{\beta,j}(y). \tag{4.116}$$

Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.114) και (4.115) προκύπτουν τα διακριτά μέτρα πιθανοτήτων $\{\overline{w}_{\delta,1},\overline{w}_{\delta,2},\dots\}$, που δίνονται από τη σχέση,

$$\overline{w}_{\delta,j} = \frac{\sum_{k=j}^{\infty} w_{\delta,k,k-j+1}}{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=j}^{\infty} w_{\delta,k,j}}. \quad j=1,2,..$$

Τότε, από την (4.116) προκύπτει ο ακόλουθος μετασχηματισμός Laplace,

$$\tilde{b}_\delta(s) = \sum_{j=1}^{\infty}\overline{w}_{\delta,j}\left(\tfrac{\beta}{\beta+s}\right)^j. \tag{4.117}$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε τη σύνθετη Γεωμετρική κατανομή $[\alpha_{\delta,n}: n=0,1,2,\dots]$ με την ακόλουθη πιθανογεννήτρια συνάρτηση

$$A_\delta(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{\delta,n}z^n = \frac{1-\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta\sum_{j=1}^{\infty}\overline{w}_{\delta,j}z^n}. \tag{4.118}$$

Τότε,

$$A_\delta(\frac{\beta}{\beta+s}) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{\delta,n}\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^n = \frac{1-\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta \tilde{b}_\delta(s)},$$

που είναι ο μετασχηματισμός Laplace μιας σύνθετης Γεωμετρικής κατανομής. Η συγκεκριμένη κατανομή, έχει συνάρτηση κατανομής ίση με $1-\bar{G}_\delta(u)$, με

$$\bar{G}_\delta(u) = e^{-\beta u}\sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_{\delta,n}\frac{(\beta u)^n}{n!}, \quad u \geq 0$$

όπου $\bar{A}_{\delta,n} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{\delta,k}$.

Ακόμα,

$$\bar{A}_{\delta,n} = \varphi_\delta \sum_{k=1}^{n} \bar{w}_{\delta,k}\bar{A}_{\delta,n} + \varphi_\delta \sum_{k=n+1}^{\infty} \bar{w}_{\delta,k},$$

με $\bar{A}_{\delta,0} = \varphi_\delta$. Εδώ, πάλι η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται για δ=0, οπότε $\psi(u) = \bar{G}_0(u)$.

Για την ανάλυση του ελλείμματος που προκαλεί η χρεοκοπία, η πυκνότητα μιας σύνθετης Γεωμετρικής κατανομής δίνεται μέσω της σχέσης,

$$g_\delta(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\delta,n}\mathcal{E}_{\beta,n}(u), \tag{4.119}$$

όπου το $\alpha_{\delta,n}$ είναι ο συντελεστής του z^n στην (4.118) και υπολογίζεται ως εξής,

$$\alpha_{\delta,n} = \varphi_\delta \sum_{k=1}^{n} \bar{w}_{\delta,k}\alpha_{\delta,n-k}, \quad n = 1,2,..$$

με $\alpha_{\delta,0} = 1-\varphi_\delta$.

Προκειμένου να υπολογίσουμε την κατανομή του ελλείμματος, μέσω των σχέσεων (4.116) και (4.119), η (3.45) γράφεται,

$$\begin{aligned}
h_{\delta,2}(y|u) &= \varphi_\delta b_\delta(u+y) + \frac{\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta}\int_0^u b_\delta(t+y)\, g_\delta(u-t)dt \\
&= \varphi_\delta \sum_{i=1}^{\infty} \bar{w}_{\delta,i}\mathcal{E}_{\beta,i}(u+y) + \frac{\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta}\int_0^u \left\{\sum_{i=1}^{\infty} \bar{w}_{\delta,i}\mathcal{E}_{\beta,i}(t+y)\right\}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\delta,n}\mathcal{E}_{\beta,n}(u-t)\right\}dt \\
&= \varphi_\delta \sum_{i=1}^{\infty} \bar{w}_{\delta,i}\left\{\frac{1}{\beta}\sum_{j=1}^{i} \mathcal{E}_{\beta,j}(y)\mathcal{E}_{\beta,i-j+1}(u)\right\} \\
&\qquad + \frac{\varphi_\delta}{1-\varphi_\delta}\sum_{i=1}^{\infty} \bar{w}_{\delta,i}\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\delta,n}\int_0^u \mathcal{E}_{\beta,i}(t+y)\mathcal{E}_{\beta,n}(u-t)dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{\varphi_\delta}{\beta}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,j}(y)\left\{\sum_{i=j}^{\infty}\overline{w}_{\delta,i}\mathcal{E}_{\beta,i-j+1}(u)\right\}$$

$$+\frac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)}\sum_{i=1}^{\infty}\overline{w}_{\delta,i}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{\delta,n}\int_0^u\left\{\mathcal{E}_{\beta,j}(y)\mathcal{E}_{\beta,i-j+1}(t)\right\}\mathcal{E}_{\beta,n}(u-t)dt\,.$$

Ισχύει $\alpha_{\delta,0} = 1-\varphi_\delta$ και άρα,

$$h_{\delta,2}(y|u) = \frac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,j}(y)\left\{\alpha_{\delta,0}\sum_{i=j}^{\infty}\overline{w}_{\delta,i}\mathcal{E}_{\beta,i-j+1}(u)\right\}$$

$$+\frac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)}\sum_{i=1}^{\infty}\overline{w}_{\delta,i}\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{\delta,n}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,j}(y)\int_0^u\left\{\mathcal{E}_{\beta,j}(y)\mathcal{E}_{\beta,i-j+1}(t)\right\}\mathcal{E}_{\beta,n}(u-t)dt.$$

Επομένως,

$$h_{\delta,2}(y|u) = \frac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,j}(y)\left\{\alpha_{\delta,0}\sum_{i=j}^{\infty}\overline{w}_{\delta,i}\mathcal{E}_{\beta,i-j+1}(u)\right\}$$

$$+\frac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,j}(y)\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_{\delta,n}\sum_{i=j}^{\infty}\overline{w}_{\delta,i}\mathcal{E}_{\beta,i-j+1}(u)\right\}$$

$$=\frac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,j}(y)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{\delta,n}\sum_{i=j}^{\infty}\overline{w}_{\delta,i}\mathcal{E}_{\beta,i-j+1}(u)\right\}$$

$$=\frac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)}\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,j}(y)\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{\delta,n}\sum_{i=0}^{\infty}\overline{w}_{\delta,i+j}\mathcal{E}_{\beta,n+i+1}(u)\right\}.$$

Συνοψίζοντας, παίρνουμε

$$h_{\delta,2}(y|u) = \tfrac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)}\textstyle\sum_{j=1}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,j}(y)\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\overline{w}_{\delta,i+j}g_{\delta,i}(u)\right\}, \qquad (4.120)$$

με $g_{\delta,i}(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_{\delta,n}\mathcal{E}_{\beta,n+i+1}(u)$ για i=0,1,2,…

Ολοκληρώνοντας την (4.120) παίρνουμε,

$$\int_0^{\infty} h_{\delta,2}(y|u)dy = \frac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}w_{\delta,i+j}g_{\delta,i}(u)$$

$$=\frac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)}\sum_{i=0}^{\infty}g_{\delta,i}(u)\sum_{j=1}^{\infty}\overline{w}_{\delta,i+j} = \frac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)}\sum_{i=0}^{\infty}g_{\delta,i}(u)\sum_{j=i+1}^{\infty}\overline{w}_{\delta,j}.$$

Αλλάζοντας τα όρια άθροισης, έχουμε

$$\int_0^\infty h_{\delta,2}(y|u)dy = \frac{\varphi_\delta}{\beta(1-\varphi_\delta)}\sum_{j=1}^{\infty} \bar{w}_{\delta,j} \sum_{i=0}^{j-1} g_{\delta,i}(u). \tag{4.121}$$

Έτσι, διαιρώντας την (4.120) με την (4.121), έπεται ότι η πυκνότητα $h_{\delta,2}(y|u)$ μπορεί να εκφραστεί ως μίξη Erlang κατανομών και πιο συγκεκριμένα,

$$h_{\delta,2}(y|u) = \sum_{j=1}^{\infty} \bar{w}_{\delta,j}\, \mathcal{E}_{\beta,j}(y),$$

όπου

$$\bar{w}_{\delta,j}(u) = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \bar{w}_{\delta,i+j} g_{\delta,i}(u)}{\sum_{k=1}^{\infty} \bar{w}_{\delta,k} \sum_{i=0}^{u-1} g_{\delta,i}(u)}, \quad j = 1,2,.. \tag{4.122}$$

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του ελλείμματος, δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπία, είναι ειδική περίπτωση της (4.122), για δ=0. Η χρήση των σχέσεων στις οποίες καταλήξαμε, προϋποθέτει τη γνώση των $w_{\delta,j}(x)$ στην (4.113) και $w_{\delta,k,j}$ στην (4.115). Αυτό επιτυγχάνεται με κάποιες πρόσθετες υποθέσεις που αφορούν στην κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4.13 *(Ενδιάμεσοι χρόνοι Erlang κατανομής)*

Αν $k_{ih}(t) = \mathcal{E}_{\lambda_i,h}(t)$ τότε η (4.112) μπορεί να γραφτεί και ως εξής,

$$p(y|t)k(t) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} \eta_{ih}(y)\mathcal{E}_{\lambda_i,h}(t), \tag{4.123}$$

όπου,

$$\eta_{ih}(y) = \sum_{j=1}^{\infty} q_{ihj}\, \mathcal{E}_{\beta,j}(y). \tag{4.124}$$

Είναι φανερό ότι η σχέση (4.123) έχει τη μορφή κατανομής Cox και σε αυτήν την περίπτωση από την (4.25) και την (4.124) παίρνουμε

$$h_{\delta,12}(x,y|0) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,h}(\delta - cr_k) e^{-r_k x} \sum_{j=1}^{\infty} q_{ihj} \mathcal{E}_{\beta,j}(x+y)$$

ή

$$h_{\delta,12}(x,y|0) = \sum_{j=1}^{\infty} w_{\delta,j}(x)\mathcal{E}_{\beta,j}(x+y),$$

με

$$w_{\delta,j}(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} q_{ihj} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,h}(\delta - cr_k) e^{-r_k x}. \tag{4.125}$$

Συνεπώς, η (4.113) ισχύει για το $w_{\delta,j}(x)$ όπως αυτό δίνεται στην (4.125). Με αντικατάσταση της τελευταίας σχέσης στην (4.115), παίρνουμε,

$$w_{\delta,k,j} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{h=1}^{n_i} q_{ihj} \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_\ell \tilde{\mathcal{E}}_{\lambda_i,h}(\delta - cr_\ell) \tilde{\mathcal{E}}_{\beta,j}(r_\ell).$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η ανωτέρω παράσταση αποτελεί μία γενίκευση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου Poisson για u=0 (2.34).

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Η ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΤΟ ΚΛΑΣΣΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ POISSON

Στο συγκεκριμένο Κεφάλαιο θα γίνει μία πιο ενδελεχής ανάλυση της κατανομής των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας.

Στην Ενότητα 5.1 αναλύονται οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας. Για την κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας, μία προσέγγιση περιλαμβάνει την αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace της συνάρτησης Gerber-Shiu.

Στην Ενότητα 5.2 θα γίνει χρήση της ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης της πιθανότητας χρεοκοπίας, της οποίας η λύση γίνεται μέσω του μετασχηματισμού Laplace.

Η Ενότητα 5.3 περιλαμβάνει τρόπους υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση που τα ατομικά ύψη των απαιτήσεων ακολουθούν μικτή Erlang κατανομή.

Τα αποτελέσματα της Ενότητας 5.2, χρησιμοποιούνται στην Ενότητα 5.4 για την εύρεση της από-κοινού συνάρτησης κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία.

Στην ενότητα 5.5 θα δούμε πώς συνδυάζονται η συνάρτηση Gerber-Shiu με τη μεθοδολογία Seal για την εύρεση της κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας.

5.1 ΡΟΠΕΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Έστω

$$\psi_k(u) = E[T^k I(T < \infty) | U_0 = u], \qquad u \geq 0, k = 0,1,2,..$$

που είναι η ροπή k-τάξης του χρόνου χρεοκοπίας με αρχικό πλεόνασμα u, όπως παρουσιάσθηκε στην Ενότητα (4.2).

Από τις σχέσεις (4.15) και (2.18) έχουμε,

$$\varphi_\delta p_{1,r}(y) = \frac{\lambda}{c} \int_y^\infty e^{-r(x-y)} dP(x),$$

και χρησιμοποιώντας τη συγκεκριμένη παράσταση, η (3.23) γράφεται,

$$\bar{G}_\delta(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u \bar{G}_\delta(u-y)\, \partial_r(y) dy + \frac{\lambda}{c} \int_u^\infty \partial_r(y), \tag{5.1}$$

όπου,

$$\partial_r(y) = \int_u^\infty e^{-r(x-u)} dP(x). \tag{5.2}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.1 *Στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson, η μέση τιμή του χρόνου χρεοκοπίας ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση,*

$$\psi_1(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \psi_1(u-y)\, dP_{1,0}(y) + \frac{1}{c}\int_u^\infty \psi(y)dy. \qquad (5.3)$$

και υπολογίζεται από τη σχέση

$$\psi_1(u) = \frac{1+\theta}{c\theta}\left\{\int_0^u \psi(u-y)\,\psi(y)dy + \int_u^\infty \psi(y)dy - \psi(u)\int_0^\infty \psi(y)dy\right\}. \qquad (5.4)$$

Τότε, η μέση τιμή του χρόνου χρεοκοπίας, δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπία είναι,

$$E[T|(T<\infty), U_0 = u] = \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)}.$$

Απόδειξη

Αφού $\psi_1(u) = -\left(\frac{\partial}{\partial\delta}\right)\bar{G}_\delta(u)\Big|_{\delta=0}$, θα παραγωγίσουμε την (5.1) για να βρούμε τη μέση τιμή του χρόνου χρεοκοπίας ως εξής:

$$\frac{c}{\lambda}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\delta}\right)\bar{G}_\delta(u\right\} = \int_0^u \left\{\left(\frac{\partial}{\partial\delta}\right)\bar{G}_\delta(u-y)\right\}\partial_r(y)dy + \int_0^u \bar{G}_\delta(u-y)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial\delta}\right)\partial_r(y)\right\}dy + \int_u^\infty \frac{\partial}{\partial\delta}\partial_r(y)\,dy. \qquad (5.5)$$

Παρατηρούμε ότι για $s = r(\delta)$, παραγωγίζοντας την (4.11) ως προς δ καταλήγουμε στην

$$cr'(\delta) - 1 + \lambda\widetilde{p}'(r(\delta))r'(\delta) = 0$$

και για r(0)=0, όταν δ=0, έχουμε

$$r'(0) = \frac{1}{c-\lambda E(Y)} = \frac{1}{\theta\lambda E(Y)}.$$

Ακόμα, από την (5.2) ολοκληρώνοντας κατά μέλη βρίσκουμε,

$$\frac{\partial}{\partial r}\partial_r(u)\Big|_{r=0} = -\int_u^\infty (x-u)dP(x) = -E(Y)\bar{P}_{1,0}(u),$$

όπου το $\bar{P}_{1,r}(y)$ δίνεται από την (2.21). Τότε, για δ=0 στην (5.5) μαζί με το παραπάνω αποτέλεσμα, θα έχουμε

$$-\frac{c}{\lambda}\psi_1(u) = -\int_0^u \psi_1(u-y)\bar{P}(y)dy - \frac{1}{\theta\lambda}\int_0^u \psi(u-y)\,\bar{P}_{1,0}(y)dy - \frac{1}{\theta\lambda}\int_u^\infty \bar{P}_{1,0}(y)dy,$$

δηλαδή,

$$\psi_1(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \psi_1(u-y)dP_{1,0}(y) + \frac{1}{c\theta}\int_0^u \psi(u-y)\bar{P}_{1,0}(y)\,dy + \frac{1}{c\theta}\int_u^\infty \bar{P}_{1,0}(y)dy. \quad (5.6)$$

Αλλάζοντας τα όρια ολοκλήρωσης θα έχουμε,

$$\int_0^\infty e^{-su}\int_u^\infty \bar{P}_{1,0}(y)dydu = \frac{1}{s}\left\{\frac{E(Y^2)}{2E(Y)} - \frac{1-\tilde{p}_{1,0}(s)}{s}\right\}, \quad (5.7)$$

και επίσης μέσω της (3.53) για δ=0 παίρνουμε,

$$\int_0^\infty e^{-su}\int_u^\infty \psi(y)dydu = \frac{1}{s}\left\{\frac{E(Y^2)}{2E(Y)} - \tilde{\psi}(s)\right\}. \quad (5.8)$$

Όμως, από τη (1.39) για $\varphi = \frac{1}{1+\theta}$ και $\tilde{f}(s) = \tilde{p}_{1,0}(s)$, θα έχουμε

$$\tilde{\psi}(s) = \frac{1}{s}\left[1 - \frac{1}{1+\frac{1}{\theta}\{1-\tilde{p}_{1,0}(s)\}}\right] = \frac{1}{\theta}\left\{\frac{1-\tilde{p}_{1,0}(s)}{s}\right\}\frac{1}{1+\frac{1}{\theta}\{1-\tilde{p}_{1,0}(s)\}}.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας το τελευταίο αποτέλεσμα, η (5.8) μπορεί να γραφεί ως εξής,

$$\theta\int_0^\infty e^{-su}\int_u^\infty \psi(y)dydu = \frac{1}{s}\left\{\frac{E(Y^2)}{2E(Y)} - \frac{1-\tilde{p}_{1,0}(s)}{s} + \frac{1-\tilde{p}_{1,0}(s)}{s} - \theta\tilde{\psi}(s)\right\}$$
$$= \frac{1}{s}\left\{\frac{E(Y^2)}{2E(Y)} - \frac{1-\tilde{p}_{1,0}(s)}{s}\right\} + \left(\frac{1}{s}\right)\frac{1-\tilde{p}_{1,0}(s)}{s}\left\{1 - \frac{1}{1+\frac{1}{\theta}\{1-\tilde{p}_{1,0}(s)\}}\right\}$$
$$= \frac{1}{s}\left\{\frac{E(Y^2)}{2E(Y)} - \frac{1-\tilde{p}_{1,0}(s)}{s}\right\} + \tilde{\psi}(s)\frac{1-\tilde{p}_{1,0}(s)}{s}.$$

Τότε, αντιστρέφοντας την παραπάνω εξίσωση και μέσω της (5.7) μας οδηγεί στην

$$\theta\int_u^\infty \psi(y)dy = \int_u^\infty \bar{P}_{1,0}(y)dy + \int_0^u \psi(u-y)\bar{P}_{1,0}(y)\,dy,$$

και έτσι η (5.6) μπορεί να εκφραστεί μέσω της (5.3). Επιπρόσθετα, από την (1.36), η (5.3) έχει λύση που δίνεται μέσω της (5.4).

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.1 *Εκθετικά κατανεμημένα ύψη απαιτήσεων*

Υποθέτουμε ότι $\bar{P}(y) = e^{-\beta y},\ y \geq 0$. Τότε, $\psi(u) = Ce^{-Ru}$, όπου $C = \frac{1}{1+\theta}$ και $R = \frac{\theta\beta}{1+\theta}$. Εισάγοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$\psi_1(u) = \frac{1+\theta}{c\theta}\left\{C^2ue^{-Ru} + \frac{C}{R}e^{-Ru} - \frac{C^2}{R}e^{-Ru}\right\} = \frac{1}{c\theta}\left\{Cu + \frac{1}{R} - \frac{C}{R}\right\}e^{-Ru}.$$

Άρα, είναι

$$\psi_1(u) = \left\{\frac{1}{c\beta\theta} + \frac{1}{c\beta\theta^2}(Ru)\right\} e^{-Ru}.$$

□

Επιπρόσθετα, για κάποιο k, οι ροπές του χρόνου χρεοκοπίας δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπίας δίνονται από τη σχέση,

$$E[T^k|(T<\infty)|U_0=u] = \frac{\psi_k(u)}{\psi(u)},$$

όπου οι Lin και Willmot (2000) έδειξαν ότι η $\psi_k(u)$ ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση,

$$\psi_k(u) = \frac{1}{1+\theta}\int_0^u \psi_k(u-y)\, dP_{1,0}(y) + \frac{k}{c}\int_u^\infty \psi_{k-1}(y)dy, \tag{5.9}$$

της οποία η λύση δίνεται αναδρομικά μέσω της σχέσης

$$\psi_k(u) = \frac{k(1+\theta)}{c\theta}\left\{\int_0^u \psi_{k-1}(u-y)\,\psi(y)dy + \int_u^\infty \psi_{k-1}(y)1dy - \psi(u)\int_0^\infty \psi_{k-1}(y)dy\right\}. \tag{5.10}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.2 *(Μίξη Erlang κατανομών)*

Από το Παράδειγμα 4.1, όταν το ατομικό ύψος απαίτησης ακολουθεί μικτή Erlang κατανομή, η (4.25) για δ=0 γίνεται,

$$\psi(u) = e^{-\beta u}\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n \frac{(\beta u)^n}{n!},\ y \geq 0, \tag{5.11}$$

όπου το $\bar{C}_n$ υπολογίζεται αναδρομικά χρησιμοποιώντας τη (1.95) με $\varphi = \frac{1}{1+\theta}$. Τότε, η ροπή k-τάξης του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται από την κάτωθι σχέση,

$$\psi_k(u) = e^{-\beta u}\sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_{n,k} \frac{(\beta u)^n}{n!}, \tag{5.12}$$

με $\bar{C}_{n,0} = \bar{C}_n$. Στη συνέχεια θα δείξουμε μία αναδρομική έκφραση για το $\bar{C}_{n,k}$. Συνδέοντας τις σχέσεις (5.11) και (5.12) στην (5.10), τα τρία ολοκληρώματα εκφράζονται ως εξής:

Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε,

$$\int_0^u \psi_{k-1}(u-y)\,\psi(y)dy = e^{-\beta u}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \bar{C}_{n,k-1}\bar{C}_j \int_0^u \frac{\big(\beta(u-y)\big)^n(\beta y)^j}{n!\,j!}dy$$

$$= e^{-\beta u}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\bar{C}_{n,k-1}\bar{C}_j\frac{\beta^{n+j}}{n!\,j!}\int_0^u (u-y)^n y^j dy$$
$$= e^{-\beta u}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\bar{C}_{n,k-1}\bar{C}_j\frac{\beta^{n+j}u^{n+j+1}}{(n+j+1)!}$$
$$= \beta^{-1}e^{-\beta u}\sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{j}\bar{C}_{j-n}\bar{C}_{n-1,k-1}\right)\frac{(\beta u)^j}{j!}.$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα δίνεται από την

$$\int_u^{\infty}\psi_{k-1}(y)1dy = \beta^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{C}_{n,k-1}\int_0^{\infty}\frac{\beta(\beta y)^j e^{-\beta y}}{j!}dy$$
$$= \beta^{-1}e^{-\beta u}\sum_{j=0}^{\infty}\bar{C}_{j,k-1}\sum_{n=0}^{j}\frac{(\beta u)^n}{n!} = \beta^{-1}e^{-\beta u}\sum_{j=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=j}^{\infty}\bar{C}_{n,k-1}\right\}\frac{(\beta u)^j}{j!}.$$

Για το τρίτο ολοκλήρωμα έχουμε,

$$\int_0^{\infty}\psi_{k-1}(y)dy = \beta^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{C}_{n,k-1}\int_0^{\infty}\frac{\beta(\beta y)^j e^{-\beta y}}{j!}dy = \beta^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\bar{C}_{n,k-1}.$$

Οπότε, κάνοντας χρήση των ανωτέρω αποτελεσμάτων, παίρνουμε,

$$\bar{C}_{0,k} = \frac{k(1+\theta)}{c\theta}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\bar{C}_{n,k-1} - \bar{C}_0\sum_{n=0}^{\infty}\bar{C}_{n,k-1}\right) = \frac{k}{\lambda\theta}(1-\bar{C}_0)\sum_{n=0}^{\infty}\bar{C}_{n,k-1},$$

και για j=1,2,…

$$\bar{C}_{j,k} = \frac{k}{\lambda\theta}\left\{\sum_{n=1}^{j}\bar{C}_{j-n}\bar{C}_{n-1,k-1} + \sum_{n=j}^{\infty}\bar{C}_{n,k-1} - \bar{C}_j\sum_{n=0}^{\infty}\bar{C}_{n,k-1}\right\}.$$

□

Παρά το γεγονός πως η (5.10) είναι δύσκολο να λυθεί, τη λύση για την $\psi_k(u)$ την έδωσε ο Willmot (2002b). Εμπεριέχει τον υπολογισμό της $\psi_k(0)$:

$$\psi_k(0) = \frac{k}{c}\int_0^{\infty}\psi_{k-1}(y)dy,$$

η οποία είναι η (5.9) για u=0. Θα χρησιμοποιήσουμε την προσέγγιση Drekic (2004) για να βρούμε μία έκφραση της $\psi_k(0)$. Προς διευκόλυνσή μας, έστω,

$$\chi_{k,n} = \int_0^{\infty} x^n \psi_k(x)dx\,, k,n = 0,1,2.. \tag{5.13}$$

και επομένως,

$$\psi_{k+1}(0) = \frac{k+1}{c}\chi_{k,0}. \tag{5.14}$$

Έστω $\psi(u) = P(L > u)$, όπου L έχει μία σύνθετη γεωμετρική συνάρτηση κατανομής με μετασχηματισμό Laplace-Stieltjes $\tilde{g}_0(s)$, $\tilde{f}(s) = \tilde{p}_{1,0}(s)$ και $\varphi = \frac{1}{1+\theta}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.2 *Για n=0,1,2,… οι ποσότητες της σχέσης (5.13) μπορούν να υπολογισθούν από τις παρακάτω σχέσεις*

$$\chi_{k,n} = \frac{k(1+\theta)}{c\theta}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}E\left(L^{n-j}\right)\frac{\chi_{k-1,j+1}}{j+1}, \qquad k = 1,2,..$$

και για κ=0,

$$\chi_{0,n} = \int_0^\infty x^n \psi_0(x)dx = \frac{E(L^{n+1})}{n+1},$$

όπου $\psi_0(x) = \psi(x)$.

Απόδειξη

Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς Laplace στην (5.9) και επαναπροσδιορίζοντας τα όρια ολοκλήρωσης βρίσκουμε,

$$\tilde{\psi}_k(s) = \frac{k(1+\theta)}{c\theta}\tilde{g}_0(s)\int_0^\infty e^{-su}\int_u^\infty \psi_{k-1}(y)dydu,$$

όπου $\tilde{\psi}_k(s) = \int_0^\infty e^{-sy}\,\psi_k(y)dy$. Παραγωγίζοντας την παραπάνω σχέση n φορές η n-οστή παράγωγος του μετασχηματισμού Laplace είναι,

$$\tilde{\psi}_k^{(n)}(s) = (-1)^n\int_0^\infty y^n e^{-sy}\psi_k(y)dy = \frac{k(1+\theta)}{c\theta}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\tilde{g}_0^{(n-j)}(s)\frac{d^j}{ds^j}\left\{\int_0^\infty e^{-su}\int_u^\infty \psi_{k-1}(y)dydu\right\}.$$

Επειδή για τη n-οστή παράγωγο στο μηδέν ισχύει $\tilde{\psi}_k^{(n)}(0) = (-1)^n\chi_{k,n}$, μέσω της (5.13) θα έχουμε $\tilde{g}_0^{(n-j)}(0) = (-1)^{n-j}E\left(L^{n-j}\right)$ και

$$\frac{d^j}{ds^j}\left\{\int_0^\infty e^{-su}\int_u^\infty \psi_{k-1}(y)dydu\right\}\Bigg|_{s=0} = \int_0^\infty (-1)^j u^j\int_u^\infty \psi_{k-1}(y)dydu = (-1)^j\int_0^\infty \frac{y^{j+1}}{j+1}\psi_{k-1}(y)dy,$$

από όπου προκύπτει ότι

$$\tilde{\psi}_k^{(n)}(0) = \frac{k(1+\theta)(-1)^n}{c\theta}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}E\left(L^{n-j}\right)\frac{\int_0^\infty y^{j+1}\psi_{k-1}(y)dy}{j+1}.$$

□

Το Θεώρημα (5.2) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογισθεί το $\chi_{k,0}$ αναδρομικά. Το ίδιο ισχύει και για τις ροπές της τ.μ. L.

5.2 Η ΜΕΡΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΟΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

Είναι ξεκάθαρο, πως ο υπολογισμός του χρόνου χρεοκοπίας είναι ιδιαίτερα σημαντικός στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson. Σε αυτήν την ενότητα θα αναπτύξουμε τις μεθόδους υπολογισμού αυτής της σημαντικής τυχαίας μεταβλητής.

Μία καλή εκτίμηση του χρόνου χρεοκοπίας, όπως την είδαμε και στην Ενότητα 4.2, είναι εκείνη της υπόθεσης ότι τα ατομικά ύψη των απαιτήσεων ακολουθούν εκθετική κατανομή. Αυτό σημαίνει πως η συνάρτηση επιβίωσης $\bar{G}_\delta(u)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ο μετασχηματισμός Laplace της ελλειμματικής συνάρτησης πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας. Μία εναλλακτική προσέγγιση για τον υπολογισμό του χρόνου χρεοκοπίας είναι εκείνη του Seal (Seal (1978), Asmussen και Albrecher (2010)). Η συγκεκριμένη προσέγγιση κάνει χρήση της λεγόμενης «μεθόδου των απείρων». Όπως και στην Ενότητα 5.2, η συνάρτηση κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας είναι η,

$$\psi_1(t|u) = P(T \le t|U_0 = u). \tag{5.15}$$

Για τη διευκόλυνσή μας, ορίζουμε την πιθανότητα επιβίωσης του χρόνου χρεοκοπίας, ως εξής,

$$\bar{\psi}_1(t|u) = 1 - \psi_1(t|u) = P(T > t|U_0 = u). \tag{5.16}$$

Επιπλέον, ορίζουμε την από-κοινού συνάρτηση κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία $|U_T|$ ως εξής,

$$\psi_2(t, y|u) = P(T \le t, |U_T| \le y|U_0 = u). \tag{5.17}$$

Προφανώς, υπάρχει η ακόλουθη συσχέτιση μεταξύ των (5.15) και (5.17),

$$\psi_1(t|u) = \lim_{y\to\infty}\psi_2(t, y|u), \tag{5.18}$$

και $\psi(u) = \lim_{t\to\infty}\psi_1(t|u)$.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, σε αυτήν την Ενότητα θα γίνει αναφορά στη προσέγγιση Seal. Η συγκεκριμένη προσέγγιση αν και πολύπλοκη, φαίνεται να είναι υπολογιστικά και αναλυτικά πιο απλουστευμένη. Προς τούτο, θα ορίσουμε τη «μέθοδο του απείρου» προκειμένου να παράγουμε μία ολοκληροδιαφορική εξίσωση, η οποία να ικανοποιείται από την από-κοινού συνάρτηση του χρόνου χρεοκοπίας και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία. Έστω λοιπόν, σε απειροστό χρονικό διάστημα h, ότι η πιθανότητα να μην συμβεί καμία απαίτηση είναι περίπου ίση με 1-λh και επομένως το πλεόνασμα περίπου ίσο με u+ch. Αν υπάρξει απαίτηση (με πιθανότητα περίπου ίση με λh) ύψους x, τέτοιου ώστε 0<x<u+ch, τότε δεν επέρχεται χρεοκοπία και το πλεόνασμα μετά την αποζημίωση θα είναι u+ch-x. Αντίθετα, αν το ατομικό ύψος της απαίτησης είναι u+ch<x<u+ch+y, τότε επέρχεται η χρεοκοπία με την τιμή του ελλείμματος να είναι το πολύ y. Σύμφωνα με το νόμο ολικής πιθανότητας θα έχουμε,

$$\begin{aligned}\psi_2(t+h,y|u) &= (1-\lambda h)\psi_2(t,y|u+ch) + \lambda h\{\bar{P}(u+ch) - \bar{P}(u+ch+y)\} \\ &+ \lambda h\int_0^{u+ch} \psi_2(t,y|u+ch-x)p(x)dx + o(h),\end{aligned} \tag{5.19}$$

όπου το $o(h)$ είναι μία συνάρτηση που τείνει στο 0 πιο γρήγορα από h. Έτσι, παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}&\frac{\psi_2(t+h,y|u) - \psi_2(t,y|u)}{h} \\ &= c\frac{\psi_2(t,y|u+ch) - \psi_2(t,y|u)}{ch} - \lambda\psi_2(t,y|u+ch) + \lambda\{\bar{P}(u+ch) - \bar{P}(u+ch+y)\} \\ &+\lambda\int_0^{u+ch} \psi_2(t,y|u+ch-x)p(x)dx + \frac{o(h)}{h},\end{aligned}$$

και υποθέτοντας ότι h->0 προκύπτει η μερική ολοκληροδιαφορική εξίσωση,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\psi_2(t,y|u) = c\frac{\partial}{\partial u}\psi_2(t,y|u) - \lambda\psi_2(t,y|u) + \lambda\{\bar{P}(u) - \bar{P}(u+y)\} \\ &+\lambda\int_0^{u} \psi_2(t,y|u-x)p(x)dx.\end{aligned} \tag{5.20}$$

Είναι φανερό από την (5.18) ότι η $\psi_1(t|u)$ ικανοποιεί την

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_1(t|u) = c\frac{\partial}{\partial u}\psi_1(t|u) - \lambda\psi_1(t|u) + \lambda\bar{P}(u) + \lambda\int_0^u \psi_1(t|u-x)p(x)dx, \tag{5.21}$$

και $\psi_1(0|u) = 0$. Από τις (5.16) και (5.21) προκύπτει ότι,

$$\begin{aligned}-\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}_1(t|u) &= -c\frac{\partial}{\partial u}\tilde{\psi}_1(t|u) - \lambda\left(1-\tilde{\psi}_1(t|u)\right) + \lambda\bar{P}(u) \\ &+ \lambda\int_0^u \{1-\tilde{\psi}_1(t|u-x)\}p(x)dx,\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}_1(t|u) = c\frac{\partial}{\partial u}\tilde{\psi}_1(t|u) - \lambda\tilde{\psi}_1(t|u) + \lambda\int_0^u \{\tilde{\psi}_1(t|u-x)\}p(x)dx, \tag{5.22}$$

με $\tilde{\psi}_1(0|u) = 1$.

Επομένως, κάθε μία εκ των (5.20), (5.21), (5.22) είναι μερική ολοκληροδιαφορική εξίσωση της μορφής,

$$\frac{\partial}{\partial t}h(u,t) = c\frac{\partial}{\partial u}h(u,t) - \lambda h(u,t) + \tau(u) + \lambda\int_0^u h(u-x,t)p(x)dx, \qquad (5.23)$$

με το $\tau(u)$ να είναι $\lambda\{\bar{P}(u) - \bar{P}(u+y)\}$, $\lambda\bar{P}(u)$ και 0 αντίστοιχα. Σε κάθε περίπτωση, η $h(u,0)$ θα είναι ίση με 0 για τις (5.20) και (5.21), ενώ θα είναι ίση με 1 στην περίπτωση της (5.22). Θα προχωρήσουμε τώρα στην επίλυση της (5.23) μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών Laplace, ενοποιώντας τις $\psi_1(t|u)$, $\bar{\psi}_1(t|u)$ και $\psi_2(t,y|u)$.

Αρχικά, ορίζουμε τους εξής μετασχηματισμούς Laplace:

$$\tilde{\tau}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\tau(u)\,\mathrm{du}$$

$$\tilde{h}_1(s,t) = \int_0^\infty e^{-su}h(u,t)\,\mathrm{du}.$$

Τότε θα έχουμε,

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{h}_1(s,t) = c\{s\tilde{h}_1(s,t) - h(0,t)\} - \lambda\tilde{h}_1(s,t) + \tilde{\tau}(s) + \lambda\tilde{h}_1(s,t)\tilde{p}(s).$$

Ορίζουμε λοιπόν το μετασχηματισμό Laplace του $h(0,t)$ να είναι,

$$\tilde{\tilde{h}}(0,z) = \int_0^\infty e^{-zt}\,h(0,t), \qquad (5.24)$$

κι ο μετασχηματισμός Laplace διπλής μεταβλητής του $h(u,t)$ να είναι,

$$\tilde{h}(s,z) = \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-su-zt}\,h(u,t)dudt = \int_0^\infty e^{-zt}\tilde{h}_1(s,t)dt. \qquad (5.25)$$

Αφού η (5.25) είναι επίσης μετασχηματισμός Laplace ως προς z του $\tilde{h}_1(s,t)$, συνεπάγεται ότι παίρνοντας ξανά μετασχηματισμό Laplace ως προς z θα έχουμε,

$$z\tilde{h}(s,z) - \tilde{h}_1(s,0) = cs\tilde{h}(s,z) - c\tilde{\tilde{h}}(0,z) - \lambda\tilde{h}(s,z) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{z} + \lambda\tilde{h}(s,z)\tilde{p}(s),$$

που μας οδηγεί στην ακόλουθη σχέση,

$$\{z - cs + \lambda - \lambda\tilde{p}(s)\}\tilde{h}(s,z) = \tilde{h}_1(s,0) + \frac{\tilde{\tau}(s)}{z} - c\tilde{\tilde{h}}(0,z). \qquad (5.26)$$

Προκειμένου να λύσουμε την (5.23) μέσω της (5.26) υποθέτουμε ότι το $h(u,0)$ και κατ' επέκταση ο μετασχηματισμός Laplace $\tilde{h}_1(s,0)$ είναι γνωστά. Ωστόσο, το $h(0,t)$ καθώς επίσης και ο μετασχηματισμός Laplace στην (5.24) παραμένουν άγνωστα. Για να μπορέσουμε να τα υπολογίσουμε ορίζουμε το μετασχηματισμό Laplace $\tilde{\tilde{h}}(0,z)$ κάνοντας χρήση της (5.26).

Ο συντελεστής του $\tilde{h}(s,z)$ στο αριστερό μέλος της εξίσωσης (5.26), εφόσον ισούται με μηδέν, αποτελεί μία επαναδιατύπωση της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg (2.11) με μόνη διαφορά ότι το δ αντικαθίσταται με z. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης s=r(z) με θετικό πραγματικό μέρος,

$$s - \frac{\lambda+z}{c} + \frac{\lambda}{c}\tilde{p}(s) = 0, \tag{5.27}$$

κι έτσι αντικαθιστώντας στην (5.26) προκύπτει,

$$\tilde{\tilde{h}}(0,z) = \frac{1}{c}\tilde{h}_1\{r(z),0\} + \left(\frac{1}{c}\right)\frac{\tilde{\tau}\{r(z)\}}{z}. \tag{5.28}$$

Όσο για το μετασχηματισμό Laplace διπλής μεταβλητής του $h(u,t)$ θα ισχύει,

$$\tilde{h}(s,z) = \frac{\tilde{h}_1(s,0)+\frac{\tilde{\tau}(s)}{z}-c\tilde{\tilde{h}}(0,z)}{z-cs+\lambda-\lambda\{1-\tilde{p}(s)\}}, \tag{5.29}$$

με το $\tilde{\tilde{h}}(0,z)$ να δίνεται από την (5.28) και s=r(z) να ικανοποιεί την (5.27).

ΛΗΜΜΑ 5.1 *Έστω συνάρτηση g(t)*

$$\int_0^\infty e^{-r(z)t}g(t)dt = \int_0^\infty e^{-zt}g_*(t)dt\,, \tag{5.30}$$

όπου το s=r(z) ικανοποιεί την (5.27) και

$$g_*(t) = ce^{-\lambda t}g(ct) + \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda^n t^{n-1}e^{-\lambda t}}{n!}\int_0^{ct} xp^{*n}(ct-x)g(x)dx. \tag{5.31}$$

Απόδειξη

Αρχικά, παρατηρούμε ότι $\{\tilde{p}(s)\}^n = \int_0^\infty e^{-sx}\,p^{*n}(x)dx$ με το $p^{*n}(x)$ να είναι η n-οστή συνέλιξη της συνάρτησης p(x). Τότε η (2.12) για $f(x) = e^{-xt}$ και δ=z μας δίνει,

$$e^{-r(z)t} = e^{-\frac{\lambda+z}{c}t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^n}{n!}\frac{d^{n-1}}{dv^{n-1}}\left\{(-t)\int_0^\infty e^{-v(x+t)}p^{*n}(x)dx\right\}\Bigg|_{v=\frac{\lambda+z}{c}}$$

ή

$$e^{-r(z)t} = e^{-\frac{\lambda+z}{c}t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^n}{n!}\left\{(-1)^n t\int_0^\infty (x+t)^{n-1}e^{-v(x+t)}p^{*n}(x)dx\right\}\Bigg|_{v=\frac{\lambda+z}{c}}$$

$$= e^{-\frac{\lambda+z}{c}t} + t\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^n}{n!}\int_0^\infty (x+t)^{n-1}e^{-\frac{(z+\lambda)(x+t)}{c}}p^{*n}(x)dx.$$

Συνεχίζοντας, προχωρούμε σε αλλαγή της μεταβλητής ολοκλήρωσης από t σε v=t/c για το πρώτο ολοκλήρωμα, και από x σε v=(x+t)/c για το εσωτερικό ολοκλήρωμα στα δεξιά:

$$\int_0^\infty e^{-r(z)t} g(t)dt = \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda+z}{c}t}\, g(t)dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^n}{n!} \int_0^\infty t \left\{ \int_0^\infty (x+t)^{n-1} e^{-\frac{(z+\lambda)(x+t)}{c}} p^{*n}(x)dx \right\} g(t)dt$$

$$= c\int_0^\infty e^{-(z+\lambda)v}\, g(cv)dv + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^n}{n!} \int_0^\infty t \left\{ \int_{t/c}^\infty c^n v^{n-1} e^{-(z+\lambda)v} p^{*n}(cv-t)dv \right\} g(t)dt.$$

Συνεπώς, αντικαθιστώντας το t με x και το v με t, προκύπτει:

$$\int_0^\infty e^{-r(z)t} g(t)dt$$

$$= c\int_0^\infty e^{-(z+\lambda)t}\, g(ct)dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\lambda}{c}\right)^n}{n!} \int_0^\infty x \left\{ \int_{x/c}^\infty c^n t^{n-1} e^{-(z+\lambda)t} p^{*n}(ct-x)dt \right\} g(x)dx$$

$$= c\int_0^\infty e^{-(z+\lambda)t}\, g(ct)dt + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda)^n}{n!} \int_0^\infty t^{n-1} e^{-(z+\lambda)t} \int_0^{ct} x\, p^{*n}(ct-x) g(x)dxdt$$

$$= \int_0^\infty e^{-zt} \left\{ c e^{-\lambda t} g(ct) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda)^n}{n!} t^{n-1} e^{-\lambda t} \int_0^{ct} x\, p^{*n}(ct-x) g(x)dx \right\} dt.$$

□

Η τυχαία μεταβλητή του συνολικού ύψους των ζημιών S_t έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν την $P(S_t = 0) = e^{-\lambda t}$ και συνάρτηση πυκνότητας $f(y,t), y > 0$ η οποία δίνεται από τη σχέση,

$$f(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} p^{*n}(y), \quad y > 0. \tag{5.32}$$

Έτσι, για το μετασχηματισμό Laplace θα έχουμε,

$$\tilde{f}(s,t) = \int_0^\infty e^{-sy} f(y,t)dy = e^{\lambda t\{\tilde{p}(s)-1\}} - e^{-\lambda t}. \tag{5.33}$$

Οπότε, για την επίλυση της σχέσης (5.23) μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 5.3 *Η γενική λύση της μερικής ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης (5.23) μπορεί να εκφραστεί ως συνάρτηση του h(u,0) ως εξής:*

$$\begin{aligned}h(u,t) &= e^{-\lambda t}\{\alpha(u+ct)+h(u+ct,0)\}-\alpha(u)\\ &\quad+\int_0^{u+c}\{\alpha(u+ct-x)+h(u+ct-x,0)\}f(x,t)dx\\ &\quad-c\int_0^t h(0,x)f(u+c(t-x),t-x)\,dx,\end{aligned}$$

(5.34)

με την f(y,t) να δίνεται από την (5.32) και,

$$\alpha(u)=\frac{1}{\lambda\theta E(Y)}\int_0^u\{1-\psi(u-x)\}\tau(x)dx, \qquad (5.35)$$

ενώ,

$$\begin{aligned}h(0,t) &= e^{-\lambda t}h(ct,0)+\frac{1}{ct}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}\int_0^{ct}x\,p^{*n}(ct-x)h(x,0)dx\\ &+\int_0^t\left\{e^{-\lambda v}\tau(cv)+\frac{1}{cv}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda v)^n e^{-\lambda v}}{n!}\int_0^{cv}x\,p^{*n}(cv-x)\tau(x)dx\right\}dv.\end{aligned}$$

(5.36)

Απόδειξη

Για την απόδειξη της (5.36) θα κάνουμε χρήση του Λήμματος 5.1 με το g(t) να αντικαθίσταται από τα h(t,0) και τ(t) αντίστοιχα. Έτσι,

$$\tilde{h}_1(r(z),0)=\int_0^{\infty}e^{-r(z)t}\mathrm{h}(\mathrm{t},0)\mathrm{dt}=\int_0^{\infty}e^{-zt}\mathrm{h}_*(\mathrm{t},0)\mathrm{dt},$$

και $\tilde{\tau}(r(z))=\int_0^{\infty}e^{-zt}\tau_*(\mathrm{t},0)\mathrm{dt}$.

Τότε, η (5.28) γίνεται,

$$\tilde{\tilde{h}}(0,z)=\frac{1}{c}\int_0^{\infty}e^{-zt}\mathrm{h}_*(\mathrm{t},0)\mathrm{dt}+\frac{1}{c}\int_0^{\infty}e^{-zt}\int_0^{\tau}\tau_*(v)\mathrm{d}v\,\mathrm{dt}.$$

Επιστρέφοντας τώρα στην (5.29) και εφαρμόζοντας την τεχνική των μερικών κλασμάτων, παίρνουμε:

$$\tilde{h}(s,z)=\frac{\tilde{h}_1(s,0)-c\tilde{\tilde{h}}(0,z)}{z-cs+\lambda\{1-\tilde{p}(s)\}}+\frac{\tilde{\tau}(s)}{cs-\lambda\{1-\tilde{p}(s)\}}\left\{\frac{1}{z-cs+\lambda-\lambda\tilde{p}(s)}-\frac{1}{z}\right\}.$$

Για να αντιστρέψουμε την $\tilde{h}(s,z)$ σε σχέση με το z, χρησιμοποιώντας την (5.25), η παραπάνω σχέση μας δίνει την

$$\tilde{h}_1(s,t) = \tilde{h}_1(s,0)e^{cts+\lambda t\{\tilde{p}(s)-1\}} - c\int_0^t h(0,x)e^{c(t-x)s+\lambda(t-x)\{\tilde{p}(s)-1\}}dx$$
$$+\frac{\tilde{\tau}(s)}{cs-\lambda\{1-\tilde{p}(s)\}}\{e^{cts+\lambda t\{\tilde{p}(s)-1\}}-1\}. \tag{5.37}$$

Από τη (2.24), για δ=r=0 και μέσω της (1.39) συνεπάγεται ότι το συμπλήρωμα της πιθανότητας του χρόνου χρεοκοπίας θα έχει μετασχηματισμό Laplace,

$$\int_0^\infty e^{-su}\{1-\psi(u)\}du = \left(\frac{1}{s}\right)\frac{1}{1-\frac{1}{\theta}\left\{\frac{1-\tilde{p}(s)}{sE(Y)}-1\right\}} = \frac{\theta E(Y)}{\theta E(Y)s-\{1-\tilde{p}(s)\}+E(Y)s}$$
$$= \frac{\theta E(Y)}{\frac{c}{\lambda}s-\{1-\tilde{p}(s)\}} = \frac{\lambda\theta E(Y)}{cs-\lambda\{1-\tilde{p}(s)\}},$$

κάνοντας χρήση του $c = \lambda E(Y)(1+\theta)$. Επομένως, ο μετασχηματισμός Laplace για την (5.35) θα είναι,

$$\tilde{\alpha}(s) = \int_0^\infty e^{-su}\alpha(u)du = \frac{\tilde{\tau}(s)}{cs-\lambda\{1-\tilde{p}(s)\}}. \tag{5.38}$$

Στη συνέχεια, βλέπουμε ότι η (5.37) μέσω των (5.33) και (5.38) μπορεί να εκφρασθεί ως

$$\tilde{h}_1(s,t) = e^{cts}\tilde{h}_1(s,0)\{e^{-\lambda t}+\tilde{f}(s,t)\} - c\int_0^t e^{c(t-x)s}h(0,x)\{e^{-\lambda(t-x)}+\tilde{f}(s,t-x)\}dx$$
$$+e^{cts}\tilde{\alpha}(s)\{e^{-\lambda t}+\tilde{f}(s,t)\}-\tilde{\alpha}(s),$$

από την οποία έπεται ότι

$$e^{cts}\{\tilde{h}_1(s,t)+\tilde{\alpha}(s)\} = \{\tilde{h}_1(s,0)+\tilde{\alpha}(s)\}\{e^{-\lambda t}+\tilde{f}(s,t)\} - c\int_0^t e^{-cxs}h(0,x)\{e^{-\lambda(t-x)}+\tilde{f}(s,t-x)\}dx.$$

Έτσι, αυτή η σχέση του μετασχηματισμού Laplace ως προς s μπορεί να εκφρασθεί σε ολοκληρωτική μορφή ως

$$\int_0^\infty e^{-s(v+ct)}\{h(v,t)+\alpha(v)\}\,dv$$
$$= e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-su}\{\alpha(u)+h(u,0)\}\,du + \int_0^\infty e^{-su}\int_0^u\{\alpha(u-x)+h(u-x,0)\}\,f(x,t)\,dxdu$$
$$-c\int_0^t e^{-cxs-\lambda(t-x)}h(0,x)dx - c\int_0^t h(0,x)\int_0^\infty e^{-s(v+cx)}f(v,t-x)dvdx.$$

Αλλαγές των μεταβλητών ολοκλήρωσης, από v σε u=v+ct για το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης, από x σε u=cx στο προτελευταίο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της εξίσωσης και από v σε u=v+cx στο εσωτερικό ολοκλήρωμα του τελευταίου ολοκληρώματος, μας οδηγούν στην παρακάτω σχέση

$$\int_0^\infty e^{-su}\{h(u-ct,t)+\alpha(u-ct)\}\,du$$
$$=e^{-\lambda t}\int_0^\infty e^{-su}\{\alpha(u)+h(u,0)\}\,du+\int_0^\infty e^{-su}\int_0^u\{\alpha(u-x)+h(u-x,0)\}\,f(x,t)\,dxdu$$
$$-\int_0^{ct} e^{-su-\lambda(t-\frac{u}{c})}h(0,\frac{u}{c})du-c\int_0^t h(0,x)\int_{cx}^\infty e^{-su}f(u-cx,t-x)dudx.$$

(5.39)

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης στο τελευταίο ολοκλήρωμα της παραπάνω σχέσης, παίρνουμε

$$c\int_0^t h(0,x)\int_{cx}^\infty e^{-su}f(u-cx,t-x)dudx$$
$$=c\int_{ct}^\infty e^{-su}\int_0^t h(0,x)f(u-cx,t-x)dxdu$$
$$+c\int_0^{ct} e^{-su}\int_0^{u/c} h(0,x)f(u-cx,t-x)dxdu.$$

Λόγω της μοναδικότητας του μετασχηματισμού Laplace, οι συντελεστές του e^{-su} στην (5.39) μπορούν να εξισωθούν, που για u>ct αυτό σημαίνει ότι,

$$h(u-ct,t)+\alpha(u-ct)$$
$$=e^{-\lambda t}\{\alpha(u)+h(u,0)\}+\int_0^u\{\alpha(u-x)+h(u-x,0)\}f(x,t)dx$$
$$-c\int_0^t h(0,x)\,f(u-cx,t-x)dxdu.$$

□

Η συνάρτηση κατανομής του συνολικού ύψους ζημιών S_t δίνεται από τη σχέση,

$$F(y,t)=1-\bar{F}(y,t)=P(S_t\leq y)=e^{-\lambda t}+\int_0^y f(x,t)\,dx, \tag{5.40}$$

με τη συνάρτηση πυκνότητας $f(x,t)$ να δίνεται από τη σχέση (5.32), αφού όπως ήδη ειπώθηκε η τυχαία μεταβλητή S_t έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν, την $P(S_t=0)=e^{-\lambda t}$. Αντικαθιστώντας τη σχέση (5.32) στην (5.40) μας δίνει,

$$F(y,t)=1-\bar{F}(y,t)=e^{-\lambda t}+\sum_{n=1}^\infty\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}P^{*n}(y), \tag{5.41}$$

με $P^{*n}(y)=1-\bar{P}^{*n}(y)=\int_0^y p^{*n}(x)dx$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.1 *Για το χρόνο της πιθανότητας επιβίωσης, ισχύει ότι*

$$\bar{\psi}_1(t|u)=F(u+ct,t)-c\int_0^t\bar{\psi}_1(x|0)\,f(u+c(t-x),t-x)dx, \tag{5.42}$$

όπου,

$$\bar{\psi}_1(t|0) = \frac{1}{ct}\int_0^{ct} F(y,t)dy\,, t > 0. \tag{5.43}$$

Απόδειξη

Στην (5.34) θεωρώντας ότι $h(u,t) = \overline{\psi}_1(\mathrm{t|u})$, $h(u,0) = 1$, $\alpha(u) = 0$ παίρνουμε,

$$\overline{\psi}_1(\mathrm{t|u}) = e^{-\lambda t} + \int_0^{u+ct} f(x,t)dx - c\int_0^t \bar{\psi}_1(x|0)\, f(u + c(t-x), t-x)dx,$$

και

$$\overline{\psi}_1(\mathrm{t|0}) = e^{-\lambda t} + \frac{1}{ct}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}\int_0^{ct} xp^{*n}(ct-x)dx.$$

Όμως,

$$\int_0^{ct} xp^{*n}(ct-x)dx = \int_0^{ct}(ct-x)p^{*n}(x)dx = \int_0^{ct}\int_0^{ct-x} p^{*n}(x)dy\,dx$$
$$= \int_0^{ct}\int_0^{ct-y} p^{*n}(x)dx\,dy = \int_0^{ct} P^{*n}(ct-y)dy = \int_0^{ct} p^{*n}(y)dy.$$

Συνεπώς, είναι

$$\overline{\psi}_1(\mathrm{t|0}) = e^{-\lambda t} + \frac{1}{ct}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}\int_0^{ct} p^{*n}(y)dy$$
$$= \frac{1}{ct}\int_0^{ct}\left\{e^{-\lambda t} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}p^{*n}(y)\right\}dy.$$

□

Μία παρόμοια προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο. Επειδή $\psi_1(\mathrm{t|u}) = 1 - \overline{\psi}_1(\mathrm{t|u})$, έπεται άμεσα από την (5.42) ότι

$$\psi_1(\mathrm{t|u}) = \bar{F}(u + ct, t) + c\int_0^t \overline{\psi}_1(\mathrm{x|0})\, f(u + c(t-x), t-x)dx. \tag{5.44}$$

5.3 Η ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΧΡΟΝΟ – ΑΤΟΜΙΚΑ ΥΨΗ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ERLANG

Υπό τη συνθήκη ότι τα ατομικά ύψη των απαιτήσεων ακολουθούν μικτή Erlang κατανομή, θα εκφράσουμε την (5.44) σε έναν βολικό για υπολογιστικούς σκοπούς τύπο. Υποθέτουμε λοιπόν, πως για την p(y), όπως αυτή ορίζεται στη (1.70) θα έχουμε,

$$p(y) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k \mathcal{E}_{\beta,k}(y),\ y > 0, \tag{5.45}$$

όπου τα $\{q_1, q_2, \dots\}$ αποτελούν το διακριτό μέτρο πιθανότητας με ροπογεννήτρια ίση με,

$$Q(z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k z^k \,, \beta > 0,$$

και από την (1.66) θα έχουμε,

$$\mathcal{E}_{\beta,k}(y) = \frac{\beta^k y^{k-1} e^{-\beta y}}{(k-1)!}, y > 0. \tag{5.46}$$

Αφού $\tilde{p}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} p(y) dy = Q\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)$, έπεται ότι $\{\tilde{p}(s)\}^n = \left\{ Q\left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)\right\}^n = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{*n} \left(\frac{\beta}{\beta+s}\right)^k$ που μας οδηγεί στην

$$p^{*n}(y) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{*n} \mathcal{E}_{\beta,k}(y),\ y > 0. \tag{5.47}$$

Για την αντίστοιχη συνάρτηση επιβίωσης μπορούμε να γράψουμε,

$$\bar{P}^{*n}(y) = \frac{1}{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_k^{*n} \mathcal{E}_{\beta,k+1}(y), \tag{5.48}$$

όπου $\bar{Q}_k^{*n} = 1 - Q_k^{*n} = \sum_{j=k+1}^{\infty} q_j$. Μέσω της (5.41) συνεπάγεται ότι,

$$\bar{F}(y,t) = (1 - e^{-\lambda t}) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} P^{*n}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \{1 - P^{*n}(y)\},$$

δηλαδή,

$$\bar{F}(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!} \bar{P}^{*n}(y)\,, y > 0, \tag{5.49}$$

που σημαίνει ότι μπορούμε να εκφράσουμε τη συνάρτηση επιβίωσης σε μορφή μικτής Erlang κατανομής, ως εξής,

$$\bar{F}(y,t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{E}_{\lambda,n+1} \bar{P}^{*n}(y),$$

και δοθέντος ότι ισχύει η (5.48) είναι

$$\bar{F}(y,t) = \frac{1}{\lambda\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{Q}_k^{*n} \mathcal{E}_{\lambda,n+1}(t) \mathcal{E}_{\beta,k+1}(y). \tag{5.50}$$

Επιστρέφοντας τώρα στην $\overline{\psi}_1(t|0)$, όπως αυτή δίνεται στην (5.43), αρχικά μπορούμε να γράψουμε ότι,

$$P^{*n}(y) = 1 - \bar{P}^{*n}(y) = 1 - e^{-\beta y} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_k^{*n} \frac{(\beta y)^k}{k!} = e^{-\beta y} \sum_{k=0}^{\infty} (1 - \bar{Q}_k^{*n}) \frac{(\beta y)^k}{k!}$$

ή

$$P^{*n}(y) = \frac{1}{\beta}\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{*n}\mathcal{E}_{\beta,k+1}(y). \qquad (5.51)$$

Επομένως, μέσω των (5.41) και (5.51) παίρνουμε,

$$F(y,t) = e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} Q_k^{*n}\mathcal{E}_{\lambda,n+1}(t)\mathcal{E}_{\beta,k+1}(y). \qquad (5.52)$$

Παρατηρούμε επίσης, ότι αν $q_i = 1$ για k<i και $\bar{Q}_k = 0$ για k≥i από την (1.80) προκύπτει ότι,

$$\int_0^x \mathcal{E}_{\beta,i}(y)dy = 1 - e^{-\beta x}\sum_{k=0}^{i-1}\frac{(\beta x)^k}{k!} = e^{-\beta x}\sum_{k=i}^{\infty}\frac{(\beta x)^k}{k!} = \frac{1}{\beta}\sum_{k=i}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,k+1}(x). \qquad (5.53)$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (5.52), (5.53), και (5.43) καταλήγουμε ότι,

$$\begin{aligned}
\overline{\psi}_1(\mathrm{t}|0) &= \frac{1}{ct}\int_0^{ct}\left\{e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} Q_i^{*n}\mathcal{E}_{\lambda,n+1}(t)\mathcal{E}_{\beta,i+1}(y)\right\}dy \\
&= e^{-\lambda t} + \frac{1}{\lambda\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} Q_i^{*n}\frac{(\lambda t)^n e^{-\lambda t}}{n!}\int_0^{ct}\mathcal{E}_{\beta,i+1}(y)dy \\
&= e^{-\lambda t} + \frac{1}{c\beta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{Q_i^{*n}}{n}\mathcal{E}_{\lambda,n}(t)\sum_{k=i+1}^{\infty}\mathcal{E}_{\beta,k+1}(ct),
\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\overline{\psi}_1(\mathrm{t}|0) = e^{-\lambda t} + \frac{1}{c\beta^2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{Q_i^{*n}}{n}\right)\mathcal{E}_{\lambda,n}(t)\mathcal{E}_{\beta,k+1}(ct).$$

Παρατηρούμε επίσης ότι,

$$\mathcal{E}_{\lambda,i}(t)\mathcal{E}_{\beta,j}(ct) = \frac{\lambda^i t^{i-1}e^{-\lambda t}}{(i-1)!}\left\{\frac{\beta^j ct^{j-1}e^{-c\beta t}}{(j-1)!}\right\} = \frac{\lambda^i\beta^j c^{j-1}}{(i-1)!\,(j-1)!}t^{i+j-2}e^{-(\lambda+c\beta)t},$$

και από την (5.46) είναι

$$\mathcal{E}_{\lambda,i}(t)\mathcal{E}_{\beta,j}(ct) = \binom{i+j-2}{i-1}\frac{\lambda^i\beta^j c^{j-1}}{(\lambda+c\beta)^{i+j-1}}\mathcal{E}_{\lambda+c\beta,i+j-1}(t). \qquad (5.54)$$

Τότε, μέσω της (5.54) έπεται ότι

$$\overline{\psi}_1(\mathrm{t}|0) = e^{-\lambda t}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_{n,k}\,\mathcal{E}_{\lambda+c\beta,n+k}(t),$$

όπου

$$\alpha_{n,k} = \binom{n+k-1}{k}\frac{\lambda^n c\beta^{k-1}}{n(\lambda+c\beta)^{n+k}}\sum_{i=0}^{k-1} Q_i^{*n}.\ k = 1,2,.. \qquad (5.55)$$

Προς διευκόλυνση των υπολογισμών μας, ορίζουμε την εξής παράσταση,

$$e^{-\lambda t} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n,0} \mathcal{E}_{\lambda+c\beta,n}(t),$$

όπου

$$\alpha_{n,0} = \frac{(c\beta)^{n-1}}{(\lambda+c\beta)^n}. \tag{5.56}$$

Έτσι, οδηγούμαστε στο συμπέρασμα μέσω των (5.55) και (5.56) ότι,

$$\overline{\psi}_1(\mathrm{t}|0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{n,k}\, \mathcal{E}_{\lambda+c\beta,n+k}(t). \tag{5.57}$$

Για την πυκνότητα του συνολικού ύψους των ζημιών, ισχύει ότι

$$f(y,t) = \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_k^{*n}\, \mathcal{E}_{\lambda,n+1}(t) \mathcal{E}_{\beta,k}(y).$$

Συνεπώς, χρησιμοποιώντας την (1.68) θα έχουμε,

$$\begin{aligned} f(u+ct,t) &= \frac{1}{\lambda} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} q_j^{*n}\, \mathcal{E}_{\lambda,n+1}(t) \mathcal{E}_{\beta,j}(u+ct) \\ &= \frac{1}{\lambda\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} q_j^{*n}\, \mathcal{E}_{\lambda,n+1}(t) \sum_{k=1}^{j} \mathcal{E}_{\beta,k}(ct) \mathcal{E}_{\beta,j+1-k}(u) \\ &= \frac{1}{\lambda\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=k}^{\infty} q_j^{*n} \mathcal{E}_{\beta,j+1-k}(u) \right\} \mathcal{E}_{\lambda,n+1}(t) \mathcal{E}_{\beta,k}(ct). \end{aligned}$$

Μέσω της (5.54), είναι

$$f(u+ct,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(u) \mathcal{E}_{\lambda+c\beta,n+k}(t), \tag{5.58}$$

όπου,

$$b_{n,k}(u) = \binom{n+k-1}{k} \frac{\lambda^n c\beta^{k-1}}{n(\lambda+c\beta)^{n+k}} \sum_{i=0}^{\infty} q_{i+k-1}^{*n} \mathcal{E}_{\beta,\iota}(u). \tag{5.59}$$

Τέλος, για την (5.44) θα έχουμε,

$$\begin{aligned} &\int_0^t \overline{\psi}_1(\mathrm{x}|0)\, f(u+c(t-x),t-x)dx \\ &= \int_0^t \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{j,m} \mathcal{E}_{\lambda+c\beta,j+m}(x) \right\} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{n,k}(u) \mathcal{E}_{\lambda+c\beta,n+k}(t-x) \right\} dx \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{j,m} b_{n,k}(u) \int_0^t \mathcal{E}_{\lambda+c\beta,j+m}(x) \mathcal{E}_{\lambda+c\beta,n+k}(t-x)\, dx$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{j,m} b_{n,k}(u)\, \mathcal{E}_{\lambda+c\beta,j+m+n+k}(t).$$

Η κάτωθι σχέση μας δίνει λοιπόν τη νέα μορφή για την $\psi_1(\mathrm{t}|\mathrm{u})$:

$$\psi_1(\mathrm{t}|\mathrm{u}) = \frac{1}{\lambda\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{Q}_k^{*n} \mathcal{E}_{\lambda,n+1}(t) \mathcal{E}_{\beta,k+1}(u+ct) + c \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{j,m} b_{n,k}(u)\, \mathcal{E}_{\lambda+c\beta,j+m+n+k}(t). \tag{5.60}$$

5.4 Η ΑΠΟ-ΚΟΙΝΟΥ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΟΣ ΚΑΤΑ ΤΗ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ

Σε αυτήν την ενότητα θα δούμε συνοπτικά ορισμένα αποτελέσματα για την από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας Τ και του ελλείμματος που προκαλεί η χρεοκοπία $|U_T|$. Η συγκεκριμένη συνάρτηση πυκνότητας ορίζεται ως $\psi_2(t,y|u)$, βάσει του ακόλουθου Πορίσματος.

ΠΟΡΙΣΜΑ 5.2 *Η από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας $\psi_2(t,y|u)$ του χρόνου χρεοκοπίας και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία για το κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson, μπορεί να εκφραστεί ως εξής,*

$$\begin{aligned}\psi_2(t,y|u) = e^{-\lambda t}\alpha_1(u+ct,y) - \alpha_1(u,y) + \int_0^{u+ct} \alpha_1(u+ct-x,y)\, f(x,t)dx \\ - c\int_0^t \psi_2(x,y|0)\, f(u+c(t-x),t-x)dx,\end{aligned} \tag{5.61}$$

όπου,

$$\alpha_1(u,y) = \frac{1}{\theta E(Y)} \int_0^u \{1-\psi(u-x)\}\{\bar{P}(x) - \bar{P}(x+y)\}\, dx, \tag{5.62}$$

με

$$\psi_2(t,y|0) = \int_0^t \left\{\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_{\lambda,n+1}(v)\sigma_n(cv,y)\right\} dv, \tag{5.63}$$

και

$$\sigma_n(t,y) = \frac{1}{t}\int_0^t xp^{*n}(t-x)\{\bar{P}(x) - \bar{P}(x+y)\}dx. \tag{5.64}$$

Απόδειξη

Προκύπτει άμεσα η σχέση (5.63) μέσω της (5.36) για $h(x,0) = 0$ και $\tau(u) = \lambda\{\bar{P}(u) - \bar{P}(u+y)\}$. Ομοίως, η (5.62) είναι άμεση συνέπεια της (5.35) για $\tau(u) = \lambda\{\bar{P}(u) - \bar{P}(u+y)\}$ και η (5.61) από την (5.34).

□

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5.5 *(Ατομικά ύψη απαιτήσεων που ακολουθούν την εκθετική κατανομή)*

Σε αυτήν την περίπτωση, για τη συνάρτηση κατανομής του ατομικού ύψους των απαιτήσεων ισχύει,

$$P(y) = 1 - e^{-\beta y},$$

οπότε είναι $\bar{P}(x) - \bar{P}(x+y) = P(y)\,\bar{P}(x)$ για κάθε $x \geq 0$. Μέσω της (5.61) καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι το πηλίκο

$$\frac{\psi_2(t,y|u)}{P(y)},$$

είναι ανεξάρτητος του y. Τότε, μέσω και της (6.18), παίρνουμε

$$\frac{\psi_2(t,y|u)}{P(y)} = \lim_{y\to\infty}\frac{\psi_2(t,y|u)}{P(y)} = \frac{\psi_1(t,|u)}{1},$$

δηλαδή,

$$\psi_2(t,y|u) = P(y)\psi_1(t,|u). \tag{5.65}$$

Η τελευταία σχέση μας δείχνει ότι η συνάρτηση κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας T και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία $|U_T|$, μαζί με την υπό-συνθήκη κατανομή του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία $|U_T|$ δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπία, έχουν περιθώρια συνάρτηση κατανομής P(y), ανεξάρτητη του T.

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΓΕΝΙΚΕΥΣΕΙΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ GERBER - SHIU

Στο συγκεκριμένο Κεφάλαιο θα προβούμε σε μία σύντομη επέκταση σημαντικών μεγεθών που αναλύθηκαν μέχρι τώρα. Για τη συνάρτηση Gerber-Shiu θα δούμε την εφαρμογή της σε κάθε υποσύνολο του ελλείμματος που δημιουργεί η χρεοκοπία και του πλεονάσματος ακριβώς πριν τη χρεοκοπία. Η Ενότητα 6.2 περιλαμβάνει την τιμή του πλεονάσματος ακριβώς μετά την προτελευταία απαίτηση πριν τη χρεοκοπία. Επίσης, στη συγκεκριμένη παράγραφο αναλύεται το ελάχιστο πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία. Στην Ενότητα 6.3 θα δούμε μέσω μίας διαφορετικής προσέγγισης την ταυτόχρονη ανάλυση για το ελάχιστο και το μέγιστο πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία. Στις Ενότητας 6.4 και 6.5 επικεντρωνόμαστε στο συνολικό ύψος των απαιτήσεων και στο πλήθος των απαιτήσεων μέχρι τη στιγμή της χρεοκοπίας αντίστοιχα.

6.1 ΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΓΙΑ ΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΙΝΗΣ

Αρχικά, θεωρούμε ένα γενικό μοντέλο, δηλαδή το εξαρτημένο μοντέλο Sparre – Andersen που εξετάστηκε στο Κεφάλαιο 3 και βρίσκουμε ορισμένα δομικά αποτελέσματα για τη γενικευμένη συνάρτηση των Gerber – Shiu, η οποία περιέχει και κάποιες νέες μεταβλητές. Έστω λοιπόν $U_{-T} = inf_{0\le s\le t} U_T$ να είναι το ελάχιστο πλεόνασμα πριν τη χρονική στιγμή t και $R_n = u + \sum_{i=1}^{n}(cV_i - Y_i)\,, n = 1,2,\ldots,\ R_0 = u$ να είναι η τιμή του πλεονάσματος αμέσως μετά τη n-οστή απαίτηση. Σε συνδυασμό με το γεγονός της χρεοκοπίας, η ποσότητα U_{-T} αποτελεί την ελάχιστη τιμή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και το R_{N_T-1} θα είναι το πλεόνασμα ακριβώς μετά την προτελευταία απαίτηση πριν τη χρεοκοπία. Ενσωματώνοντας αυτές τις δύο μεταβλητές στη συνάρτηση Gerber-Shiu, παίρνουμε την παρακάτω γενικευμένη συνάρτηση

$$m_\delta^{**}(u) = E\left[e^{-\delta T} w^{**}\left(U_{T-}, |U_T|, U_{-T}, R_{N_T-1}\right) I(T < \infty) | U_0 = u\right],\ u > 0 \tag{6.1}$$

όπου η συνάρτηση ποινής $w^{**}(x, y, z, r)$ θεωρείται ότι ικανοποιεί κάποιες ήπιες συνθήκες ολοκληρωσιμότητας. Θα δειχτεί ότι μια ειδική περίπτωση της (6.1) όταν $w^{**}(x, y, z, r)$ $=w^{*}(x, y, r)$ αρκεί για να μελετηθεί ουσιωδώς η συνάρτηση $m_\delta^{**}(u)$. Ακόμα, η ύπαρξη της μεταβλητής R μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τον τελευταίο ενδιάμεσο χρόνο μεταξύ των απαιτήσεων $V_{N_T} = (U_{T-} - R_{N_T-1})/c$. Θα υπολογισθεί επίσης η τιμή του τελευταίου κλιμακωτού ύψους $U_{-T} + |U_T|$ συνδυάζοντας αυτές τις δύο μεταβλητές.

6.2 ΤΟ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΑΜΕΣΩΣ ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΠΡΟΤΕΛΕΥΤΑΙΑ ΑΠΑΙΤΗΣΗ ΚΑΙ ΤΟ ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΠΡΙΝ ΤΗ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ

Αρχικά, μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε μερικές από τις ιδιότητες της γενικευμένης συνάρτησης Gerber-Shiu, οι οποίες έχουν να κάνουν με τα μεγέθη $T, U_{T-}, |U_T|, U_{-T}, R_{N_T-1}$. Ας ορίσουμε την από-κοινού ελλειμματική πυκνότητα των μεταβλητών $U_{T-}, |U_T|, T, R_{N_T-1}$ σύμφωνα με τα παρακάτω. Όπως και στην Ενότητα (3.3) θα πάρουμε περιπτώσεις ανάλογα με το αν η χρεοκοπία συμβαίνει κατά την πρώτη απαίτηση, ή σε μία από τις μεταγενέστερες. Αν λοιπόν $N_T = 1$ (η χρεοκοπία επέρχεται κατά την πρώτη απαίτηση), τότε $x = u + ct \Rightarrow t = (x-u)/c$ και $r = u$. Άρα, η από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας των τεσσάρων μεταβλητών είναι η ίδια όπως στην Ενότητα 3.9. Όμως, αν $N_T > 1$ τότε η από-κοινού πυκνότητα έχει τη μορφή εκείνης στο Λήμμα 4.1 και πιο συγκεκριμένα $h_{123}^{***}(t,x,y,r|u)$. Εδώ, στη θέση των $h_{12}^{*}(x,y|u)$ και $h_{123}^{***}(t,x,y,r|u)$ ορίζουμε τις $h^{(1)}(x,y|u)$ και $h^{(2)}(t,x,y,r|u)$ αντίστοιχα. Οπότε, για τις από-κοινού συναρτήσεις πυκνότητας θα έχουμε

$$h_\delta^{(1)}(x,y|u) = e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)} h^{(1)}(x,y|u), \; x > u, y > 0 \tag{6.2}$$

και

$$h_\delta^{(2)}(x,y,r|u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\, h^{(2)}(t,x,y,r|u)dt, \; x > r, y > 0. \tag{6.3}$$

Όσο για την από-κοινού πυκνότητα των U_{T-} και $|U_T|$ αυτή θα είναι

$$h_{\delta,12}(x,y|u) = h_\delta^{(1)}(x,y|u) + \int_0^x h_\delta^{(2)}(x,y,r|u)\, dr. \tag{6.4}$$

Η σχέση (6.1) ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_\delta^{**}(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta^{**}(u-y) b_\delta(y) dy + v_\delta^{**}(u),$$

με τα $\varphi_\delta, b_\delta(y)$ να δίνονται στις σχέσεις (4.19) και (4.20) αντίστοιχα και

$$\begin{aligned} v_\delta^{**}(u) = &\int_u^\infty \int_0^\infty w^{**}(x+u, y-u, u, u) h_\delta^{(1)}(x,y|0)\, dxdy \\ &+ \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x w^{**}(x+u, y-u, u, r+u)\, h_\delta^{(2)}(x,y,r|0)\, drdxdy. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Προκειμένου να βρούμε την από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας των $U_{T-}, |U_T|, U_{-T}, R_{N_T-1}$ συναρτήσει των (6.2) και (6.3) υποθέτουμε ότι $w^{**}(x,y,z,r) = w^{*}(x,y,r)$ το οποίο σημαίνει ότι

$$m_\delta^{*}(u) = E\left[e^{-\delta T} w^{*}\left(U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\right) I(T < \infty) | U_0 = u\right], \; u \geq 0. \tag{6.6}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, και η (6.6) ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_\delta^*(u) = \varphi_\delta \int_0^u m_\delta^*(u-y) b_\delta(y) dy + v_\delta^*(u),$$

όπου

$$\begin{aligned} v_\delta^*(u) = &\int_u^\infty \int_0^\infty w^*(x+u, y-u, u) h_\delta^{(1)}(x, y|0)\, dxdy \\ &+ \int_u^\infty \int_0^\infty \int_0^x w^*(x+u, y-u, r+u)\, h_\delta^{(2)}(x, y, r|0)\, drdxdy. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Θέτοντας $w^{**}(x,y,z,r) = e^{-s_1x-s_2y-s_3z-s_4r}$ και $w^*(x,y,r) = e^{-s_1x-s_2y-s_4r}$ είναι προφανές ότι η (6.5) είναι απλώς η (6.7) πολλαπλασιασμένη με e^{-s_3u}, οπότε από τη (2.32) έπεται ότι η (6.1) μπορεί να γραφεί ως

$$m_\delta^{**}(u) = \tfrac{1}{1-\varphi_\delta} \int_0^u e^{-s_3z} v_\delta^*(z) g_\delta(u-z) dx + e^{-s_3u} v_\delta^*(u), \tag{6.8}$$

με

$$\begin{aligned} v_\delta^*(u) = &\int_0^\infty \int_u^\infty e^{-s_1x-s_2y-s_4u} h_\delta^{(1)}(x-y, y+u|0)\, dxdy \\ &+ \int_0^\infty \int_u^\infty \int_0^x e^{-s_1x-s_2y-s_4r}\, h_\delta^{(2)}(x-u, y+u, r-u|0)\, drdxdy. \end{aligned} \tag{6.9}$$

Αντικαθιστώντας την (6.9) στην (6.8) παίρνουμε την τιμή της από-κοινού πυκνότητας των $U_{T-}, |U_T|, U_{-T}, R_{N_T-1}$ στο σημείο (x,y,z,r), η οποία έχει τέσσερις διαφορετικές μορφές, ανάλογα με τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1. αν η χρεοκοπία επέλθει κατά την πρώτη απαίτηση,

$h_\delta^{(1)}(x-u, y+u|0)$ για $\{(x,y,z,r)|x>u, y>0, z=u, r=u\}$,

2. αν η χρεοκοπία επέλθει κατά την πρώτη πτώση του πλεονάσματος υπό της αρχικής του τιμής, για απαιτήσεις μεταγενέστερες της πρώτης,

$h_\delta^{(2)}(x-u, y+u, r-u|0)$ για $\{(x,y,z,r)|x>u, y>0, z=u, u<r<x\}$,

3. αν υπάρξει πτώση του πλεονάσματος που δεν οδηγεί σε χρεοκοπία, και ερχομός της χρεοκοπίας στην αμέσως επόμενη απαίτηση,

$\frac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta} h_\delta^{(1)}(x-z, y+z|0)$ για $\{(x,y,z,r)|x>z, y>0, 0<z<u, r=z\}$,

4. αν υπάρξει πτώση του πλεονάσματος που δεν οδηγεί σε χρεοκοπία, και ερχομός της χρεοκοπίας αλλά όχι στην επόμενη απαίτηση,

$\frac{g_\delta(u-z)}{1-\varphi_\delta} h_\delta^{(2)}(x-z, y+z, r-z|0)$ για $\{(x,y,z,r)|z<r<x, y>0, 0<z<u\}$.

Από το Λήμμα 1 του Cheung (2011), γνωρίζουμε ότι η ελλειμματική από-κοινού πυκνότητα της (6.3) για τα $U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$h_\delta^{(2)}(x,y,r|u) = h_\delta^{(1)}(x,y|r)\tau_\delta(u,r), \ x>r \tag{6.10}$$

όπου η $\tau_\delta(u,r)$ αποτελεί μία συνάρτηση μετάβασης από το u στο r σε χρονικές στιγμές εμφάνισης απαιτήσεων χωρίς χρεοκοπία και πιο συγκεκριμένα ορίζεται ως

$$\tau_\delta(u,r) = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[e^{-\delta\sum_{j=1}^{n} V_j} \Delta(R_n - r) I(R_i \geq 0, i=1,2,\dots,n)|U_0 = u\right], r>0 \tag{6.11}$$

όπου για τη συνάρτηση Δ(x) (συνάρτηση Δέλτα του Dirac), ισχύει

$$\Delta(x) = \begin{cases} +\infty, & x=0 \\ 0, & x\neq 0 \end{cases}$$

με $\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x)dx = 1$.

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.1 *Στο εξαρτημένο μοντέλο κινδύνου Sparre-Andersen, η γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu της (6.6) μπορεί να γραφτεί κι ως*

$$m_\delta^*(u) = \beta_\delta(u) + \int_0^\infty \beta_\delta(r)\tau_\delta(u,r)dr, \tag{6.12}$$

όπου,

$$\beta_\delta(u) = \int_0^\infty \int_u^\infty w^*(x,y,u) h_\delta^{(1)}(x,y|u)\, dxdy, \tag{6.13}$$

και

$$\tau_\delta(u,r) \begin{cases} \dfrac{1}{1-\varphi_\delta}\left\{g_\delta(u-r) + \displaystyle\int_0^r \tau_\delta(0,r-t)g_\delta(u-t)dt\right\}, r<u \\ \tau_\delta(0,r-u) + \dfrac{1}{1-\varphi_\delta}\displaystyle\int_0^u \tau_\delta(0,r-t)g_\delta(u-t)dt\,, r>u. \end{cases}$$

Στην ειδική περίπτωση που δ=0 έχουμε

$$\tau_0(u,r) \begin{cases} \dfrac{1}{1-\psi(0)}\left\{-\psi'(u-r) - \displaystyle\int_0^r \tau_0(0,r-t)\psi'(u-t)dt\right\}, r<u \\ \tau_0(0,r-u) - \dfrac{1}{1-\psi(0)}\displaystyle\int_0^r \tau_0(0,r-t)\psi'(u-t)dt\,, r>u. \end{cases} \tag{6.14}$$

Απόδειξη

Έστω η συνάρτηση

$$\xi_\delta(u) = \int_u^\infty \int_0^\infty \int_r^\infty w^*(x, y, r)\, h_\delta^{(2)}(x-u, y+u, r-u|0)\, dxdydr. \tag{6.15}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση της (6.10)

$$\begin{aligned} h_\delta^{(2)}(x-u, y+u, r-u|0) &= h_\delta^{(1)}(x-u, y+u|r-u)\tau_\delta(0, r-u) \\ &= h_\delta^{(1)}(x, y|r)\tau_\delta(0, r-u), \end{aligned}$$

η (6.15) γίνεται

$$\xi_\delta(u) = \int_u^\infty \beta_\delta(r)\tau_\delta(0, r-u)dr. \tag{6.16}$$

Αφού $h_\delta^{(1)}(x-u, y+u|0) = h_\delta^{(1)}(x, y|u)$ και το $v_\delta^*(u) = \beta_\delta(u) + \xi_\delta(u)$ τότε

$$\begin{aligned} m_\delta^*(u) &= \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u g_\delta(u-t)v_\delta^*(t)dt + v_\delta^*(u) \\ &= \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u g_\delta(u-t)\{\beta_\delta(u) + \xi_\delta(u)\}\, dt + \beta_\delta(u) + \xi_\delta(u). \end{aligned} \tag{6.17}$$

Από τις (6.16), (6.17), παίρνουμε

$$\begin{aligned} & m_\delta^*(u) - \beta_\delta(u) = \xi_\delta(u) + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u g_\delta(u-t)\{\beta_\delta(u) + \xi_\delta(u)\}\, dt \\ & = \int_u^\infty \beta_\delta(r)\tau_\delta(0, r-u)dr + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u g_\delta(u-t)\left\{\beta_\delta(t) + \int_u^\infty \beta_\delta(r)\tau_\delta(0, r-u)dr\right\}\, dt. \end{aligned} \tag{6.18}$$

Αλλάζοντας τη σειρά άθροισης στην (6.18), έπεται ότι

$$\begin{aligned} & m_\delta^*(u) - \beta_\delta(u) = \int_u^\infty \beta_\delta(r)\tau_\delta(0, r-u)dr + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\int_0^u \beta_\delta(r) g_\delta(u-r)dr \\ & + \frac{1}{1-\varphi_\delta}\left\{\int_0^u \beta_\delta(r)\int_0^r \tau_\delta(0, r-t)g_\delta(u-t)\, dtdr + \int_u^\infty \beta_\delta(r)\int_0^u \tau_\delta(0, r-t)g_\delta(u-t)\, dtdr\right\}. \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση των (6.6) (6.10) και (6.13) παίρνουμε το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.2 *Στο κανονικό μοντέλο κινδύνου Sparre-Andersen (όπου τα ατομικά ύψη των απαιτήσεων είναι ανεξάρτητα του χρόνου) η πυκνότητα* $h_{\delta,12}(x, y|u)$ *δίνεται από τη σχέση*

$$h_{\delta,12}(x, y|u) = p(x+y)\gamma_\delta(u, x), \tag{6.19}$$

όπου

$$\gamma_\delta(u,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_0^x e^{-\delta\left(\frac{x-r}{c}\right)} k\left(\dfrac{x-r}{c}\right)\tau_\delta(u,r)dr, & x < u \\ \dfrac{1}{c}e^{-\delta\left(\frac{x-u}{c}\right)} k\left(\dfrac{x-u}{c}\right) + \dfrac{1}{c}\displaystyle\int_0^x e^{-\delta\left(\frac{x-r}{c}\right)} k\left(\dfrac{x-r}{c}\right)\tau_\delta(u,r)dr, & x > u. \end{cases}$$

(6.20)

Απόδειξη

Όταν $w^*(x,y,r) = w(x,y)$ από την (2.43) μαζί με τις (6.4) και (6.10), εξισώνοντας τους συντελεστές του $w(x,y)$ και παίρνουμε

$$h_{\delta,12}(x,y|u) = I(x > u)h_\delta^{(1)}(x,y|u) + \int_0^x h_\delta^{(1)}(x,y|r)\tau_\delta(u,r)dr.$$

Επομένως, καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα για την από-κοινού συνάρτηση του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία μέσω της (6.2) και της (3.9).

□

6.3 ΜΕΓΙΣΤΗ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΤΙΜΗ ΤΟΥ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΠΡΙΝ ΤΗ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ

Θεωρώντας τώρα ότι το ασφάλιστρο εξαρτάται από το επίπεδο του πλεονάσματος, μπορούμε να υποθέσουμε για τη διαδικασία του πλεονάσματος ότι ικανοποιεί τη σχέση

$$dU_T = c(U_T)dt - dS_T, \qquad t \geq 0.$$

Εδώ, το $c(\cdot)$ είναι μία θετική συνάρτηση και το $c(U_T)$ να είναι ο στιγμιαίος ρυθμός του ασφαλίστρου τη χρονική στιγμή t.

Η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία συμπεριλαμβάνονται στη συνάρτηση Gerber-Shiu όπως αυτή ορίζεται στην (6.6) και αποτυπώνονται στην κάτωθι σχέση

$$m_\delta^{a,b}(u) = E\left[e^{-\delta T} w^*\left(U_{T-},|U_T|,R_{N_T-1}\right) I\left(\overline{U}_T < b, \underline{U}_T \geq \alpha, T < \infty\right) | U_0 = u\right], \quad (6.21)$$

όπου το $\overline{U}_T$ είναι η μέγιστη τιμή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία, ενώ το $\underline{U}_T$ η ελάχιστη τιμή του πλεονάσματος πριν τη χρεοκοπία. Για $u > \alpha$ και $u \geq b$ υποθέτουμε ότι $m_\delta^{a,b}(u) = 0$. Έστω τώρα η συνάρτηση $\ell(u,s)$, η οποία παριστάνει το επίπεδο του πλεονάσματος τη χρονική στιγμή s για $0 \leq s < t$, ξεκινώντας από u και υποθέτοντας ότι η πρώτη απαίτηση συμβαίνει τη χρονική στιγμή t>0. Το επίπεδο του πλεονάσματος ακριβώς πριν την εμφάνιση της πρώτης απαίτησης συμβολίζεται με $\ell(u,t) = \ell(u,t^-)$. Δηλαδή,

$$\ell(u,t) = u + \int_0^t c(\ell(u,s))\, ds. \quad (6.22)$$

Στο παρόν μοντέλο, η ακολουθία $\{R_n\}_{n=0}^\infty$ ορίζεται με τη βοήθεια της (6.22) ως

$$R_n = \ell(R_{n-1}, V_n) - Y_n, \qquad n = 1,2,\ldots,$$

και $R_0 = U_0 = u$. Επιπρόσθετα, για πλεόνασμα ακριβώς πριν την πρώτη απαίτηση $x = \ell(u,t)$ με αρχική τιμή u η χρονική στιγμή που φθάνει το επίπεδο x θα είναι

$$t = \gamma(u,x) = \int_u^x \frac{dv}{c(v)}, \qquad x > u.$$

Θα ορίσουμε τώρα την από-κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας των τεσσάρων μεταβλητών $U_{T-}, |U_T|, \underline{U}_T, R_{N_T-1}, \overline{U}_T$ για (x,y,z,r,s). Διαχωρίζουμε τις περιπτώσεις σε εκείνες που η χρεοκοπία επέρχεται κατά την πρώτη απαίτηση κι σε όσες επέρχεται για απαίτηση μεταγενέστερη της πρώτης:

- Για $N_T = 1 \Longrightarrow U_{T-} = x, |U_T| = y, T = \gamma(u,x), R_{N_T-1} = \underline{U}_T = u, \overline{U}_T = x$. Σε αυτήν την περίπτωση η από-κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας θα είναι

$$h_{1,\delta}^{a,b}(x,y|u) = \frac{\lambda}{c(x)} e^{-(\lambda+\delta)\gamma(u,x)} p(x+y), \alpha \leq u < x < b, y > 0. \qquad (6.23)$$

- Για $N_T \geq 1$ η από-κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας θα είναι

$$h_{2,\delta}^{a,b}(x,y,r|u) = \int_0^\infty \int_\alpha^r \int_x^b e^{-\delta t} h_2(t,x,y,r,s,z|u) ds dz dt\,, \alpha \leq r < x < b, y > 0, \alpha \leq u < b,$$

όπου $h_2(t,x,y,r,s,z|u)$ είναι η από-κοινού ελλειμματική συνάρτηση πυκνότητας των $U_{T-}, |U_T|, \underline{U}_T, R_{N_T-1}, \overline{U}_T, T$ στην περίπτωση που η χρεοκοπία επέλθει από απαίτηση μεταγενέστερης της πρώτης.

Τότε,

$$h_{2,\delta}^{a,b}(x,y,r|u) = \tau_\delta(u,r;\alpha,b) h_{1,\delta}^{a,b}(x,y|r), \alpha \leq r < x < b, y > 0, \alpha \leq u < b \qquad (6.24)$$

όπου η $\tau_\delta(u,r;\alpha,b)$ αποτελεί τη συνάρτηση μετάβασης από u στο r για ύψη απαιτήσεων μεταξύ α και b. Πιο συγκεκριμένα

$$\tau_\delta(u,r;\alpha,b) = \sum_{n=1}^\infty E\left[e^{-\delta \sum_{j=1}^n V_j} \Delta(R_n - r) I(R_i \geq \alpha, i = 1,2,\ldots,n, \overline{U}_T < b) | U_0 = u\right],$$

όπου για $\alpha = 0, b = \infty$ αναγόμαστε στην περίπτωση της (6.11).

Ο μετασχηματισμός της $\tau_\delta(u,r;\alpha,b)$ ως προς r μας δίνει,

$$\begin{aligned}\varphi_{\delta,\xi}(u;\alpha,b) &= \int_\alpha^b e^{-\xi r}\, \tau_\delta(u,r;\alpha,b) dr \\ &= \sum_{n=1}^\infty E\left[e^{-\delta \sum_{j=1}^n V_j} e^{-\xi R_n} I(R_i \geq \alpha, i = 1,2,\ldots,n, \overline{U}_T < b) | U_0 = u\right],\end{aligned}$$

με $\varphi_{\delta,\xi}(b;\alpha,b) = 0$.

Από το νόμο ολικής πιθανότητας έχουμε,

$$\varphi_{\delta,\xi}(u;\alpha,b) = (1 - \lambda h) e^{-\delta h} \varphi_{\delta,\xi}(\ell(u,h);\alpha,b)$$

$$+\lambda h e^{-\delta h}\int_0^{\ell(u,h)-\alpha}\left[e^{-\xi(\ell(u,h)-y)}+\varphi_{\delta,\xi}(\ell(u,h)-y;a,b)\right]p(y)dy+o(h).$$

(6.25)

Διαιρώντας με y και για $h \to \infty$ παίρνουμε

$$c(u)\varphi'_{\delta,\xi}(u;a,b)=(\lambda+\delta)\varphi_{\delta,\xi}(u;a,b)-\lambda\int_0^{u-\alpha}\varphi_{\delta,\xi}(u-y;a,b)\,p(y)dy$$
$$-\lambda\int_0^{u-\alpha}e^{-\xi(u-y)}p(y)dy.$$

(6.26)

όπου,

$$c(u)=\left.\frac{\partial\ell(u,h)}{\partial h}\right|_{h=0}=c(\ell(u,h))|_{h=0}.$$

Επομένως, η (6.26) αποτελεί μία ολοκληροδιαφορική εξίσωση που ικανοποιείται από την $\varphi_{\delta,\xi}(u;a,b)$ υπό το κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson με εξάρτηση μεταξύ πλεονάσματος και ασφαλίστρου.

6.4 ΤΟ ΣΥΝΟΛΙΚΟ ΥΨΟΣ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΜΕΧΡΙ ΤΗ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ

Στη συγκεκριμένη Ενότητα μας ενδιαφέρει να μελετήσουμε το προεξοφλημένο συνολικό ύψος των απαιτήσεων υπό το εξαρτημένο μοντέλο Sparre-Andersen για τις τρεις μεταβλητές $U_{T-},|U_T|,R_{N_T-1}$ (Cheung and Woo (2016)). Η συνάρτηση Gerber-Shiu δίνεται από τη σχέση

$$m_{\delta_{12},n}(u)=E\left[e^{-\delta_1 T}Z^n_{\delta_2}(T)w(U_{T-},|U_T|,R_{N_T-1})I(T<\infty)|U_0=u\right],u\geq 0, \qquad (6.27)$$

όπου η

$$Z_\delta(t)=\sum_{i=1}^{N_t}e^{-\delta T_i}f(Y_i),\ t\geq 0, \qquad (6.28)$$

είναι η συνάρτηση που δίνει το συνολικό ύψος των απαιτήσεων έως τη χρεοκοπία. Τα T_i αντιπροσωπεύουν το χρόνο άφιξης της i-απαίτησης, ενώ f είναι η συνάρτηση που ορίζει το ύψος της κάθε ζημιάς.

Το πλεονέκτημα της συγκεκριμένης χρήσης για τη συνάρτηση Gerber-Shiu, είναι ότι μας επιτρέπει να μελετήσουμε τη σχέση μεταξύ της (6.28) και άλλων ποσοτήτων που σχετίζονται με τη χρεοκοπία. Για παράδειγμα, από την (6.27) αν $w(x,y,r)=1,\ n=1$, παραγωγίζοντας ως προς δ_1 και θέτοντας $\delta_1=0$, μπορούμε να υπολογίσουμε τη συνδιακύμανση ανάμεσα στην (6.28) για t=T και του χρόνου χρεοκοπίας T δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπία.

Προκειμένου να αναλύσουμε την (6.27) στο εξαρτημένο μοντέλο κινδύνου Sparre-Andersen, θα κάνουμε χρήση των προεξοφλημένων ροπών για τις συναρτήσεις πυκνότητας. Και εδώ, η βάση των περιπτώσεών μας θα είναι το αν η χρεοκοπία επέρχεται κατά την πρώτη απαίτηση ή σε μεταγενέστερή της.

Αν $N_T = 1$ έπεται ότι $R_{N_T-1} = u, T = (U_{T-} - u)/c\,, Z_{\delta_2}(T) = e^{-\delta_2(U_{T-}-u)/c} f(U_{T-} + |U_T|)$, οπότε, η από-κοινού συνάρτηση των $\{T, Z_{\delta_2}(T), U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\}$ στο $\{t, z, x, y, r\}$ δίνεται από την $h_{12}^*(x, y|u)$ της (3.9).

Αν $N_T > 1$ τότε η από-κοινού πυκνότητα των $\{T, Z_{\delta_2}(T), U_{T-}, |U_T|, R_{N_T-1}\}$ για $\{t, z, x, y, r\}$ θα είναι η $h_{2,\delta_2}(t, z, x, y|u)$ για $0 \le r < x, y > 0, t > max(x - min(u, r), 0)/c$ και $z > e^{-\delta_2 t} f(x + y)$. Τότε, οι αντίστοιχες προεξοφλημένες πυκνότητες θα δίνονται από τις σχέσεις

$$h_{\delta_1,\delta_2,n}^{(1)}(x, y|u) = e^{-(\delta_1+n\delta_2)\left(\frac{x-u}{c}\right)} f^n(x + y) h^{(1)}(x, y|u),\ x > u, y > 0, \tag{6.29}$$

και

$$h_{\delta_1,\delta_2,n}^{(2)}(x, y, r|u) = \int_{max(x-min(u,v),0)/c}^{\infty} \int_{e^{-\delta_2 t} f(x+y)}^{\infty} e^{-\delta_1 t} z^n h_{2,\delta_2}(t, z, x, y, r|u) dz dt.$$

$$\text{για } 0 \le r < x, y > 0. \tag{6.30}$$

Τότε, με δεδομένες αυτές τις δύο πυκνότητες, η συνάρτηση Gerber-Shiu της σχέσης (6.27) γράφεται

$$m_{\delta_{12},n}(u) = \int_0^\infty \left\{ \int_u^\infty w(x, y, u) h_{\delta_1,\delta_2,n}^{(1)}(x, y|u) dx + \int_0^\infty \int_0^x w(x, y, r) h_{\delta_1,\delta_2,n}^{(2)}(x, y, r|u) dr dx \right\} dy \tag{6.31}$$

Μπορούμε ακόμα να ορίσουμε την από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας για τις U_{T-} *και* $|U_T|$ ως εξής

$$h_{\delta_1,\delta_2,n}^*(x, y|u) = I(x > u) h_{\delta_1,\delta_2,n}^{(1)}(x, y|u) + \int_0^x h_{\delta_1,\delta_2,n}^{(2)}(x, y, r|u) dr\,, \qquad x, y > 0,$$

ενώ η περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας του ελλείμματος της χρεοκοπίας θα είναι

$$h_{\delta_1,\delta_2,n}(y|u) = \int_0^\infty h_{\delta_1,\delta_2,n}^*(x, y|u) dx = \int_0^\infty \left\{ I(x > u) h_{\delta_1,\delta_2,n}^{(1)}(x, y|u) + \int_0^x h_{\delta_1,\delta_2,n}^{(2)}(x, y, r|u) dr \right\} dx. \tag{6.32}$$

Θέτουμε τώρα, $\delta_n^* = \delta_1 + n\delta_2$. Δεσμεύοντας ως προς την πρώτη πτώση του πλεονάσματος, η οποία διέπεται μέσω της προεξοφλημένης περιθώριας συνάρτησης πυκνότητας του ελλείμματος $|U_T|$, μπορεί να δειχθεί ότι η (6.27) ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_{\delta_{12},n}(u) = \varphi_{\delta_n^*} \int_0^u m_{\delta_{12},n}(u - y) b_{\delta_n^*}(y) dy + v_{\delta_{12},n}(u),\ u \ge 0, \tag{6.33}$$

όπου

$$\varphi_{\delta_n^*} = \int_0^\infty h_{\delta_n^*,\delta_2,0}(y|0)\, dy = E\left[e^{-\delta_n^* T} I(T < \infty)|U_0 = u\right] < 1, \tag{6.34}$$

$$b_{\delta_n^*}(y) = \frac{1}{\varphi_{\delta_n^*}} h_{\delta_n^*,\delta_2,0}(y|0),\ y > 0, \tag{6.35}$$

$$\begin{aligned} v_{\delta_{12},n}(u) = &\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \int_0^u h_{\delta_j^*,\delta_2,n-j}(u-s|0) m_{\delta_{12},j}(s)\, ds \\ &+ \int_0^\infty \int_u^\infty \Big\{ w(x,y,u) h^{(2)}_{\delta_1,\delta_2,n}(x-u, y+u|0) \\ &+ \int_0^x w(x,y,r) h^{(2)}_{\delta_1,\delta_2,n}(x-u,y+u|0) dr \Big\} dxdy. \end{aligned} \tag{6.36}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ 6.3 *Στο εξαρτημένο μοντέλο κινδύνου Sparre-Andersen η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας $h^{(2)}_{\delta_1,\delta_2,n}(x,y,r|u)$ ικανοποιεί την ακόλουθη αναδρομική σχέση*

$$\begin{aligned} h^{(2)}_{\delta_1,\delta_2,n}(x,y,r|u) &= \chi^*_{\delta_{12},n}(x,y,r|u) \\ &+ \frac{1}{1-\varphi_{\delta_n^*}} \left\{ g_{\delta_n^*}(u-r) h^{(1)}_{\delta_1,\delta_2,n}(x-r,y+r|0) + \int_0^u g_{\delta_n^*}(u-t) \chi^*_{\delta_{12},n}(x,y,r|t) dt \right\}, \end{aligned} \tag{6.37}$$

με $0 \le r < x, y > 0$ *και* $n = 0,1,2,\ldots$, *όπου*

$$\chi^*_{\delta_{12},n}(x,y,r|u) = \chi_{\delta_{12},n}(x,y,r|u) + I(r > u) h^{(2)}_{\delta_1,\delta_2,n}(x-u,y+u,r-u|0), 0 \le r < x, y > 0, \tag{6.38}$$

$$\begin{aligned} &\chi_{\delta_{12},n}(x,y,r|u) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} \left\{ h_{\delta_j^*,\delta_2,n-j}(u-r|0) h^{(1)}_{\delta_1,\delta_2,j}(x,y|r) + \int_0^u h_{\delta_j^*,\delta_2,n-j}(u-s|0)\, h^{(2)}_{\delta_1,\delta_2,j}(x,y,r|s) ds \right\}, \end{aligned} \tag{6.39}$$

για $\le r < x, y > 0$.

Απόδειξη

Με αντικατάσταση της (6.31) στον πρώτο όρο του δεξιού μέλους της (6.36) κι αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, παίρνουμε

$$v_{\delta_{12},n}(u) = \int_0^\infty \int_u^\infty w(x,y,u) h^{(1)}_{\delta_1,\delta_2,n}(x-u,y+u|0) dxdy + \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^x w(x,y,r) \chi^*_{\delta_{12},n}(x,y,r|u) drdxdy \tag{6.40}$$

Κάνοντας χρήση της (6.40) για το δεξιό μέλος της (6.37) θα έχουμε

$$\frac{1}{1-\varphi_{\delta_n^*}}\int_0^u g_{\delta_n^*}(u-t)v_{\delta_{12},n}(t)dt$$
$$=\int_0^\infty\int_u^\infty\int_0^{min(x,u)} w(x,y,r)\left\{g_{\delta_n^*}(u-r)h^{(1)}_{\delta_1,\delta_2,n}(x-r,y+r|0)\right\}drdxdy$$
$$+\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^x w(x,y,r)\left\{\int_0^u g_{\delta_n^*}(u-t)\chi^*_{\delta_{12},n}(x,y,r|t)dt\right\}drdxdy.$$

(6.41)

□

Δίνουμε επιπρόσθετα, μία ακόμη ολοκληρωτική σχέση μέσω της οποίας μπορούμε να εκφράσουμε την (6.27). Δεσμεύοντας ως προς το χρόνο και το ύψος της πρώτης απαίτησης (Ενότητα (2.3)) παίρνουμε

$$m_{\delta_{12},n}(u)=\beta_{\delta_{12},n}(u)$$
$$+\int_0^\infty e^{-\delta_n^* t}\left\{\int_0^{u+ct}\left[m_{\delta_{12},n}(u+ct-y)+\alpha^*_{\delta_{12},n}(u+ct,y)\right]p(y|t)dy\right\}k(t)dt,$$

(6.42)

όπου το

$$\beta_{\delta_{12},n}(u)=\int_0^\infty e^{-\delta_n^* t}\left\{\int_{u+ct}^\infty f^n(y)w(u+ct,y-u-ct,u)\,p(y|t)dy\right\}k(t)dt$$
$$=\int_0^\infty\int_u^\infty w(x,y,u)h^{(1)}_{\delta_1,\delta_2,n}(x,y|u)dydx\,,u\geq 0,$$

(6.43)

αποτελεί τη συνεισφορά στη χρεοκοπία της (6.27) κατά την πρώτη απαίτηση. Ακόμα,

$$\alpha^*_{\delta_{12},n}(x,y)=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}f^{n-j}(y)m_{\delta_{12},j}(x-y),\qquad 0<y\leq x.$$

Το ακόλουθο Θεώρημα μας δίνει μία έκφραση της (6.27) σε μορφή μετασχηματισμού Laplace.

ΘΕΩΡΗΜΑ 6.1 *Για n=0,1,2,..., ο μετασχηματισμός Laplace του $m_{\delta_{12},n}(u)$ είναι*

$$\tilde{m}_{\delta_{12},n}(s)=\frac{\tilde{\beta}_{\delta_{12},n}(s)-\tilde{\sigma}_{\delta_{12},n}(s)}{1-E\left[e^{-sY-(\delta_n^*-cs)V}\right]},$$

όπου $\tilde{\beta}_{\delta_{12},n}(s)$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της (6.43),

$$\tilde{\sigma}_{\delta_{12},n}(s)=\int_0^\infty e^{-sx}\left[\varpi_{\delta_{12},n}(x,\delta_n^*-cs)-\varpi^*_{\delta_{12},n}(x,\delta_n^*)\right]dx, \qquad (6.44)$$

και

$$E\left[e^{-sY-(\delta_n^*-cs)V}\right]=\int_0^\infty e^{-(\delta_n^*-cs)t}\tilde{p}(s|t)\,k(t)dt=\tilde{p}(\delta_n^*-cs,s).$$

Απόδειξη

Παίρνοντας μετασχηματισμούς Laplace και στα δύο μέλη της (6.42) θα έχουμε

$$\begin{aligned} &\tilde{m}_{\delta_{12},n}(s) \\ &= \tilde{\beta}_{\delta_{12},n}(s) + \int_0^\infty e^{-su} \int_0^\infty e^{-\delta_n^* t} \left\{ \int_0^{u+ct} m_{\delta_{12},n}(u+ct-y)\, p(y|t) dy \right\} k(t) dt du \\ &+ \tilde{\varphi}^*_{\delta_{12},n}(\delta_n^*, s). \end{aligned} \tag{6.45}$$

με $\tilde{\varpi}^*_{\delta_{12},n}(s, \delta_n^*) = \int_0^\infty e^{-su}\, \varpi^*_{\delta_{12},n}(u, \delta_n^*) du$ και

$$\varphi^*_{\delta_{12},n}(u, v) = \int_0^\infty e^{-vt} \int_0^{u+ct} \alpha^*_{\delta_{12},n}(u+ct, y)\, p(y|t) k(t) dy dt, \qquad u \geq 0.$$

Από τα αποτελέσματα της Παραγράφου (3.2), έπεται ότι το τριπλό ολοκλήρωμα της (6.45) μπορεί να γραφτεί κι ως εξής

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty e^{-su} \int_0^\infty e^{-\delta_n^* t} \left\{ \int_0^{u+ct} m_{\delta_{12},n}(u+ct-y)\, p(y|t) dy \right\} k(t) dt du \\ &= \tilde{m}_{\delta_{12},n}(s) \int_0^\infty e^{-(\delta_n^* - cs)t} \tilde{p}(s|t) k(t) dt - \int_0^\infty e^{-sx} \varpi_{\delta_{12},n}(x, \delta_n^* - cs) dx, \end{aligned} \tag{6.46}$$

με $\tilde{p}(s|t) = \int_0^\infty e^{-sy} p(y|t) dy$ και

$$\varpi_{\delta_{12},n}(x, v) = \int_{x/c}^\infty e^{-vt} \int_0^x m_{\delta_{12},n}(x-y)\, p(t, y) dy dt, \qquad x \geq 0.$$

Χρησιμοποιώντας την (6.46) και την (6.44) οδηγούμαστε στο ότι η (6.45) μπορεί να εκφρασθεί ως εξής

$$\tilde{m}_{\delta_{12},n}(s) = \tilde{\beta}_{\delta_{12},n}(s) + \tilde{m}_{\delta_{12},n}(s) \int_0^\infty e^{-(\delta_n^* - cs)t} \tilde{p}(s|t) k(t) dt - \tilde{\sigma}_{\delta_{12},n}(s).$$

Άμεσα προκύπτει το ζητούμενο αποτέλεσμα.

□

6.5 ΤΟ ΠΛΗΘΟΣ ΤΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΜΕΧΡΙ ΤΗ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ

Ένα πολύ σημαντικό μέγεθος στην ανάλυση της διαχείρισης κινδύνου είναι το πλήθος των απαιτήσεων μέχρι τη χρεοκοπία, δοθέντος ότι συμβαίνει η χρεοκοπία. Η συγκεκριμένη μεταβλητή συμβολίζεται ως N_T και αναλύθηκε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 3, βάσει των περιπτώσεων $N_T = 1$ και $N_T > 1$.

Στη συγκεκριμένη Ενότητα εστιάζουμε στην από-κοινού συνάρτηση πυκνότητας του χρόνου χρεοκοπίας T και του πλήθους των απαιτήσεων μέχρι τη χρεοκοπία N_T. Έτσι, ορίζουμε την ακόλουθη ποσότητα

$$\bar{G}_{\delta,r}(u) = E\left[r^{N_T} e^{-\delta T} I(T < \infty) | U_0 = u\right],\ u \geq 0. \tag{6.47}$$

Σύμφωνα με τον Dickson (2012), μπορούμε να γράψουμε την (6.47) ως

$$\bar{G}_{\delta,r}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{\infty} e^{-\delta t} w_n(t|u)\, dt, \tag{6.48}$$

όπου η $w_n(t|u)$ είναι η πυκνότητα που συνδέεται με το ενδεχόμενο της χρεοκοπίας κατά τη n-οστή απαίτηση στο χρόνο t.

Στο εξαρτημένο μοντέλο κινδύνου, είναι ξεκάθαρο ότι η πυκνότητα του πρώτου ενδιάμεσου χρόνου μεταξύ δύο απαιτήσεων (δηλαδή του χρονικού διαστήματος μεταξύ της πρώτης και της δεύτερης απαίτησης) είναι t και το ύψος της πρώτης απαίτησης υπερβαίνει την τιμή του πλεονάσματος κατά u+ct. Στην Παράγραφο (3.3) το ορίσαμε ως $w_1(t|u) = \bar{P}(u + ct|t)k(t)$.

Επιστρέφοντας στο γενικευμένο μοντέλο κινδύνου Sparre-Andersen οι Landriault et al. (2011) δέσμευσαν ως προς την πρώτη πτώση του πλεονάσματος για να δείξουν ότι η (6.47) μπορεί να γραφτεί κι ως

$$\bar{G}_{\delta,r}(u) = \varphi_{\delta,r} \int_0^u \bar{G}_{\delta,r}(u-y) b_{\delta,r}(y) dy + \varphi_{\delta,r} \bar{B}_{\delta,r}(u). \tag{6.49}$$

Παρατηρούμε για τη $\bar{G}_{\delta,r}(u)$ ότι αποτελεί τη συνάρτηση επιβίωσης μίας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής, για την οποία μπορούμε να γράψουμε

$$\bar{G}_{\delta,r}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \varphi_{\delta,r}\right) \varphi_{\delta,r}^{*} \bar{B}_{\delta,r}^{*n}(u),\ u \geq 0. \tag{6.50}$$

Στο μοντέλο Sparre-Andersen με υπόθεση ανεξαρτησίας, ισχύει

$$b_{\delta,r}(y) = \int_0^{\infty} \frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)} \left\{\frac{h_{\delta,r}(x|0)}{\varphi_{\delta,r}}\right\} dx, \tag{6.51}$$

με την $b_{\delta,r}(y)$ να αποτελεί τη μίξη γύρω από το x της υπερβάλλουσας ζημίας $\frac{p(x+y)}{\bar{P}(x)}$, γενικεύοντας έτσι την (3.39). Συνεπώς, αν η p(y) ακολουθεί τη μικτή Erlang κατανομή, το ίδιο μπορούμε να ισχυριστούμε και για την $b_{\delta,r}(y)$.

Στο ανεξάρτητο μοντέλο κινδύνου Sparre-Andersen υποθέτουμε ότι τα ατομικά ύψη των απαιτήσεων ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Άρα, μέσω της (6.51), $p(y) = \beta e^{-\beta y}$.οπότε είναι $b_{\delta,r}(y) = p(y)$. Αντίστοιχα, οι Landriault et al. (2011), έδειξαν ότι

$$\bar{G}_{\delta,r}(u) = \varphi_{\delta,r} e^{-\beta(1-\varphi_{\delta,r})u},\ u \geq 0, \tag{6.52}$$

όπου

$$\varphi_{\delta,r} = r\tilde{k}\left\{\delta + c\beta\left(1 - \varphi_{\delta,r}\right)\right\}. \tag{6.53}$$

Μία επέκταση των πολυωνύμων Lagrange μας δίνει

$$\bar{G}_{\delta,r}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{n!} \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \left\{ \beta^{n-1}(nu+ct)(u+ct)^{n-2} e^{-\beta(u+ct)} k^{*n}(t) \right\} dt,$$

από την οποία έπεται ότι

$$w_n(t|u) = \frac{\beta^{n-1}}{n!}(nu+ct)(u+ct)^{n-2} e^{-\beta(u+ct)} k^{*n}(t). \tag{6.54}$$

Προκειμένου να υπολογίσουμε την περιθώρια ελλειμματική κατανομή του πλήθους των απαιτήσεων έως τη χρεοκοπία N_T, θα ολοκληρώσουμε την (6.54) ως προς t, παίρνοντας

$$w_n(u) = \frac{\beta^{n-1}}{n!} \int_0^{\infty} (nu+ct)(u+ct)^{n-2} e^{-\beta(u+ct)} k^{*n}(t)\, dt. \tag{6.55}$$

Για να υπολογίσουμε την (6.55) για διάφορες επιλογές της k(t), σημειώνουμε ότι ισχύει

$$\begin{aligned}
&\beta^{n-1}(nu+ct)(u+ct)^{n-2} \\
&= \beta u(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} (\beta u)^{n-2-j} (c\beta t)^j + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (\beta u)^{n-1-j} (c\beta t)^j \\
&= (c\beta t)^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \left\{ \frac{(n-1)(n-2)!}{(n-2-j)!\, j!} + \frac{(n-1)!}{(n-1-j)!\, j!} \right\} (\beta u)^{n-1-j} (c\beta t)^j \\
&= (c\beta t)^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} (n-j) (\beta u)^{n-1-j} (c\beta t)^j.
\end{aligned}$$

Έτσι, η (6.55) γράφεται για n=1,2,3,…, ως

$$w_n(u) = \frac{e^{-\beta u}}{n!} \left\{ (-c\beta)^{n-1} \tilde{k}_n^{(n-1)}(c\beta) + \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-1}{j} (n-j)(\beta u)^{n-1-j} (-c\beta)^j \tilde{k}_n^{(j)}(c\beta) \right\}, \tag{6.56}$$

με το $\tilde{k}_n^{(j)}(s)$ να δίνεται από την (4.53).

Για u=0 έχουμε

$$w_n(0) = \frac{(-c\beta)^{n-1}}{n!} \tilde{k}_n^{(n-1)}(c\beta), \; n = 1,2,.. \tag{6.57}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.2 *(Ενδιάμεσοι χρόνοι μικτής Erlang κατανομής)*

Αν $k(t) = \sum_{i=1}^{\infty} q_i \frac{\lambda(\lambda t)^{i-1} e^{-\lambda t}}{(i-1)!}$, τότε μέσω και του Παραδείγματος (4.6) έχουμε

$$\tilde{k}_n^{(0)}(s) = \left\{Q\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)\right\}^n = \sum_{i=n}^{\infty} q_i^{*n}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^i,$$

όπου $\{Q(z)\}^n = \sum_{i=n}^{\infty} q_i^{*n} z^n$, $j = 1,2,\ldots$,

$$\tilde{k}_n^{(j)}(s) = (-1)^j j! \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i+j-1}{j} q_i^{*n} \frac{\lambda^i}{(\lambda+s)^{i+j}}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} w_n(0) &= \frac{(-c\beta)^{n-1}}{n!}(n-1)! \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i+n-2}{n-1} q_i^{*n} \frac{\lambda^i}{(\lambda+c\beta)^{i+n-1}} \\ &= \left(\frac{c\beta}{\lambda+c\beta}\right)^{n-1} \sum_{i=n}^{\infty} \frac{(i+n-2)!}{n!\,(i-1)!} q_i^{*n} \left(\frac{\lambda}{\lambda+c\beta}\right)^i. \end{aligned}$$

□

Για δ=0, η (6.48) γίνεται

$$\bar{G}_{0,r}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(u) r^n, \qquad (6.58)$$

Μολονότι η (6.58) έχει μορφή ροπογεννήτριας συνάρτησης, κάτι τέτοιο δεν ισχύει επειδή για r=1 η $\bar{G}_{0,1}(u) < 1$.

Θεωρούμε τώρα την ακόλουθη πιθανογεννήτρια συνάρτηση

$$M(z) = \sum_{j=0}^{\infty} m_j z^j = \tilde{k}\{c\beta(1-z)\} = \int_0^{\infty} e^{c\beta t(z-1)} k(t)dt, \qquad (6.59)$$

για την οποία ισχύει

$$\{M(z)\}^n = \sum_{j=0}^{\infty} m_j^{*n} z^j = \left(\tilde{k}\{c\beta(1-z)\}\right)^n = \int_0^{\infty} e^{c\beta t(z-1)} k^{*n}(t)dt.$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του z^j παίρνουμε

$$m_j^{*n} = \int_0^{\infty} \frac{(c\beta t)^j e^{-c\beta t}}{j!} k^{*n}(t)dt = \frac{(-c\beta)^j}{j!} \tilde{k}_n^{(j)}(c\beta).$$

Για $j = n-1, w_n(0) = \frac{1}{n} m_{n-1}^{*n}$, οπότε για u=0 είναι

$$\bar{G}_{0,r}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} m_{n-1}^{*n} r^n. \qquad (6.60)$$

Επίσης, $\bar{G}_{0,r}(0) = \varphi_{0,r}$ και μέσω των (7.52) και (7.59), παίρνουμε

$$\bar{G}_{0,r}(0) = rM\{\bar{G}_{0,r}(0)\}. \qquad (6.61)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6.3 *(Ενδιάμεσοι χρόνοι εκθετικής κατανομής)*

Σε αυτή την περίπτωση, είναι $k(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ με τους ενδιάμεσους χρόνους να ακολουθούν την εκθετική κατανομή στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson. Αφού για το μετασχηματισμό Laplace ισχύει $\tilde{k}(s) = \lambda/(\lambda + s)$ τότε,

$$\bar{G}_{0,r}(0) = \frac{\lambda r}{\lambda + c\beta\{1 - \bar{G}_{0,r}(0\}}$$

οπότε

$$c\beta\{\bar{G}_{0,r}(0)\}^2 - (\lambda + c\beta)\bar{G}_{0,r}(0) + \lambda r = 0.$$

Μέσω του Feller (1968) (p. 299) έπεται ότι η $\bar{G}_{0,r}(0)$ είναι η μικρότερη ρίζα αυτής της εξίσωσης δευτέρου βαθμού, οπότε

$$\begin{aligned}\bar{G}_{0,r}(0) &= \frac{\lambda + c\beta - \sqrt{(\lambda + c\beta)^2 - 4\lambda c\beta r}}{2c\beta} \\ &= \frac{c\beta + \lambda - \sqrt{(c\beta - \lambda)^2 - 4\lambda c\beta(r-1)}}{2c\beta}.\end{aligned}$$

Επειδή $c\beta - \lambda > 0$, έπεται ότι

$$\bar{G}_{0,r}(0) = \frac{\frac{c\beta + \lambda}{c\beta - \lambda} - \sqrt{1 - \frac{4c\beta\lambda}{(c\beta - \lambda)^2}(r-1)}}{\frac{2c\beta}{c\beta - \lambda}}.$$

Έστω $\beta_* = 4c\beta\lambda/(c\beta - \lambda)^2$ και άρα

$$1 + \beta_* = \frac{(c\beta - \lambda)^2 + 4c\beta\lambda}{(c\beta - \lambda)^2} = \left(\frac{c\beta + \lambda}{c\beta - \lambda}\right)^2$$

ή

$$\bar{G}_{0,r}(0) = \frac{c\beta - \lambda}{2c\beta}\left\{\sqrt{1 + \beta_*} - \sqrt{1 - \beta_*(r-1)}\right\}.$$

Για r=1, είναι

$$\bar{G}_{0,1}(0) = \varphi_0 = \frac{c\beta - \lambda}{2c\beta}\{\sqrt{1 + \beta_*} - 1\} = \frac{\lambda}{c\beta},$$

και

$$\bar{G}^*_{0,r}(0) = \frac{\sqrt{1 + \beta_*} - \sqrt{1 - \beta_*(r-1)}}{\sqrt{1 + \beta_*} - 1},$$

που είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση μίας εκτεταμένης κολοβής αρνητικής διωνυμικής κατανομής με παραμέτρους $r = -1/2$ και β_*.

□

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα διπλωματική εργασία πραγματοποιήθηκε μελέτη του πλεονάσματος σύμφωνα με τις ανανεωτικές στοχαστικές διαδικασίες ασφαλιστικών κινδύνων. Η διαχείριση κινδύνου για τις ασφαλιστικές εταιρίες βασίζεται στην εκτίμηση σημαντικών μεγεθών προκειμένου να εξαχθούν ασφαλή συμπεράσματα για τη στρατηγική που θα ακολουθήσουν. Τέτοια μεγέθη είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, ο χρόνος χρεοκοπίας, το πλεόνασμα πριν τη χρεοκοπία και η τιμή του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία.

Αρχικά, δόθηκε ο ορισμός της συνάρτησης ποινής (Gerber-Shiu) και είδαμε την εφαρμογή της στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson. Ουσιαστικά, η συνάρτηση Gerber-Shiu αποτελεί μία γενίκευση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Φάνηκε, ότι η εν λόγω συνάρτηση ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση, της οποίας μελετήσαμε ειδικές περιπτώσεις.

Περαιτέρω μελέτη της συνάρτησης Gerber-Shiu πραγματοποιήθηκε στο επόμενο Κεφάλαιο, αυτή τη φορά υπό το εξαρτημένο μοντέλο Sparre-Andersen. Το συγκεκριμένο μοντέλο είναι γνωστό κι ως ανανεωτικό μοντέλο κι ο λόγος για τον οποίον έχει εφαρμογή στη διαχείριση κινδύνου είναι γιατί μας παρέχει συμπεράσματα για την κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων των απαιτήσεων, καθώς επίσης και μία εκτίμηση για την απαίτηση στο τέλος του εκάστοτε ενδιάμεσου χρόνου.

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε ανάλυση των κατανομών Erlang και Cox. Οι συγκεκριμένες κατανομές παρέχουν μία πολύ καλή προσέγγιση στη μελέτη των δεδομένων μας. Η μελέτη μας βασίστηκε στις τυχαίες μεταβλητές των ενδιάμεσων χρόνων των απαιτήσεων και των ατομικών υψών τους, τόσο στην περίπτωση της ανεξαρτησίας τους, όσο και στην περίπτωση εξάρτησής τους.

Επίσης, μελετήσαμε την τυχαία μεταβλητή του χρόνου χρεοκοπίας υπό το κλασσικό μοντέλο κινδύνου Poisson. Κάνοντας χρήση της μερικής ολοκληροδιαφορικής εξίσωσης, καταλήξαμε στην από-κοινού συνάρτηση του χρόνου χρεοκοπίας και του ελλείμματος κατά τη χρεοκοπία.

Τέλος, επεκτείνοντας όσα είδαμε δόθηκαν πρόσθετες μεταβλητές για τη συνάρτηση Gerber-Shiu και εκτιμήθηκαν το συνολικό ύψος των απαιτήσεων και το πλήθος αυτών, πριν τη χρεοκοπία.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Albrecher, H., Teugels, J.L. (2006): Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. J. Appl. Probab. 43(1), 257–273.
2. Borovkov, K.A., Dickson, D.C.M. (2008): On the ruin time distribution for a Sparre Andersen risk process with exponential claim sizes. Insur. Math. Econ. 42(3), 1104–1108.
3. Boudreault,M., Cossette, H., Laudriault, D.,Marceau, E. (2006): On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. Scand. Actuar. J. 5, 265–285.
4. Cai, J., Dickson, D.C.M. (2002): On the expected discounted penalty function at ruin of a surplus process with interest. Insur. Math. Econ. 30(3), 389–404.
5. Chadjiconstantinidis, S., Politis, K. (2007): Two-sided bounds for the distribution of the deficit at ruin in the renewal risk model. Insur. Math. Econ. 41(1), 41–52.
6. Cheung, E.C.K. (2011): A generalized penalty function in Sparre Andersen risk models with surplus dependent premium. Insur. Math. Econ. 48(3), 384–397.
7. Cheung, E.C.K. (2013): Moments of discounted aggregate claim costs until ruin in a Sparre Andersen risk model with general interclaim times. Insur. Math. Econ. 53(2), 343–354.
8. Cheung, E.C.K., Landriault, D., Willmot, G.E.,Woo, J.-K. (2010a): Gerber-Shiu analysis with a generalized penalty function. Scand. Actuar. J. 3, 185–199.
9. Cheung, E.C.K., Landriault, D., Willmot, G.E., Woo, J.-K. (2010b): Structural properties of Gerber-Shiu functions in dependent Sparre Andersen models. Insur. Math. Econ. 46(1), 117–126.
10. Cossette, H., Marceau, E., Marri, F. (2008): On the compound Poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie-Gumbel-Morgenstern copula. Insur. Math. Econ. 43(3), 444–455.
11. Dickson, D.C.M. (2012): The joint distribution of the time to ruin and the number of claims until ruin in the classical risk model. Insur. Math. Econ. 50(3), 334–337.
12. Dickson, D.C.M., Hipp, C. (2001): On the time to ruin for Erlang (2) risk processes. Insur. Math. Econ. 29(3), 333–344.
13. Dickson, D.C.M., Willmot, G.E. (2001): The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model. ASTIN Bull. 35(1), 45–60. (2005)
14. Gerber, H.U., Shiu, E.S.W. (1998): On the time value of ruin. N. Am. Actuar. J. 2(1), 48–78.
15. Gerber, H.U., Shiu, E.S.W. (2005): The time value of ruin in a Sparre Andersen model. N. Am. Actuar. J. 9(2), 49–84.
16. Gordon E. Willmot, Jae-Kyung Woo: Surplus analysis of Sparre-Andersen Insurance Risk Processes, 20-148.
17. Gordon E. Willmot, Jae-Kyung Woo: Surplus analysis of Sparre-Andersen Insurance Risk Processes, 179-195.
18. Labbé, C., Sendov, H.S., Sendova, K.P. (2011): The Gerber-Shiu function and the generalized Cramér-Lundberg model. Appl. Math. Comput. 218(7), 3035–3056.
19. Landriault, D., Willmot, G.E. (2008): On the Gerber-Shiu discounted penalty function in the Sparre Andersen model with an arbitrary interclaim time distribution. Insur. Math. Econ. 42(2), 600–608.
20. Landriault, D., Willmot, G.E. (2009): On the joint distributions of the time to ruin, the surplus prior to ruin, and the deficit at ruin in the classcial risk model. N. Am. Actuar. J. 13(2), 252–270.

21. Lee, W.Y., Willmot, G.E. (2014): On the moments of the time to ruin in dependent Sparre Andersen models with emphasis on Coxian interclaim times. Insur. Math. Econ. 59, 1–10.
22. Lee, W.Y., Willmot, G.E. (2005a): The moments of the time of ruin in dependent Sparre Andersen models with Coxian claim sizes. Scand. Actuar. J. 6, 550–564. (2016)
23. Li, S. (2005b): Distributions of the surplus before ruin, the deficit at ruin and the claim causing ruin in a class of discrete time renewal risk models. Scand. Actuar. J. 4, 271–284.
24. Lin, X.S., Willmot, G.E. (2000): The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin. Insur. Math. Econ. 27(1), 19–44.
25. Willmot, G.E. (2007): On the discounted penalty function in the renewal risk model with general interclaim times. Insur. Math. Econ. 41(1), 17–31.
26. Willmot, G.E. (2015): On a partial integrodifferential equation of Seal's type. Insur.Math. Econ. 62, 54–61
27. Ε. Χατζηκωνσταντινίδης, Θεωρία Κινδύνου Ι & ΙΙ, Σημειώσεις Παραδόσεων, ΠΜΣ στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.