ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΙΕΡΑΡΧΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΞΙΟΠΙΣΤΙΑΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΩΝ

Σοφία-Μαρία Βλάμη

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού διπλώματος ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

ΠΕΙΡΑΙΑΣ, Σεπτέμβριος 2020

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

PREMIUM ESTIMATION BASED ON HIERARCHICAL CREDIBILITY MODELS

by **Sofia-Maria Vlami**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

PIRAEUS, September 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμόν ……… συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της επιτροπής (σε αλφαβητική σειρά) ήταν:

- Επίκουρος Καθηγητής Πιτσέλης Γεώργιος (επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος
- Επίκουρος Καθηγητής Τζαβελάς Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών της συγγραφέως.

Περίληψη

Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας λαμβάνει χώρα μία ανασκόπηση των ιεραρχικών μοντέλων αξιοπιστίας χαρτοφυλακίου κάνοντας χρήση μεθόδων Μπεϋζιανής και εμπειρικής Μπεϋζιανής. Παράλληλα, η έρευνα έχει επεκταθεί και σε πολυ-επίπεδα ιεραρχικά μοντέλα. Επιγραμματικά, αξίζει να αναφερθεί ότι το κυριότερο πλεονέκτημα των συγκεκριμένων μοντέλων είναι το γεγονός ότι επιτρέπουν την αναγνώριση του κινδύνου μέσα από μία σειρά διαδικασιών και σχηματισμών στοχεύοντας στον υπολογισμό του ασφαλίστρου.

Στο τέλος της εργασίας, παρουσιάζονται ορισμένες ενδιαφέρουσες εφαρμογές των μοντέλων μέσω του στατιστικού πακέτου R.

Abstract

This thesis intends to present and review the hierarchical models of credibility theory using Bayes and Empirical Bayes methods. In the meantime, the research has been extended to multi-level hierarchical models. It is worth to briefly outline that the main advantage of these models is the fact that they enable the risk identification through a series of procedures and formations aiming to calculate the premium.

In the light of the above arguments, several interesting applications associated with the relevant models are presented through the statistical package R.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: Μπεϋζιανή Μέθοδος

1.1 Θεωρία κατά Bayes

Η Μπεϋζιανή στατιστική είναι ένα χρήσιμο εργαλείο για τη διαχείριση και τον έλεγχο της αβεβαιότητας. Ειδικότερα, η Μπεϋζιανή μέθοδος αναφέρει ότι με την πραγματοποίηση ή μη ενός ενδεχομένου θα υπάρχει ή δεν θα υπάρχει πιθανότητα πραγματοποίησης κάποιου άλλου. Με άλλα λόγια, μας παρέχει την δυνατότητα (μέσω πιθανοτήτων) να καταλήξουμε σε ένα επιθυμητό αποτέλεσμα λαμβάνοντας υπόψιν όλες τις παραμέτρους που αυξάνουν το ρίσκο και την αβεβαιότητα. Όπως προαναφέρθηκε, η συγκεκριμένη μέθοδος βασίζεται στην ιδέα της συνέπειας. Είναι ένας σύγχρονος τρόπος επίλυσης αναλογιστικών προβλημάτων και ανταποκρίνεται σε βέλτιστο τρόπο συλλογής δεδομένων και εκτίμησης παραμέτρων πράγμα που είναι δύσκολο να γίνει με την "Κλασική Στατιστική" (Klugman, 1992).

Συμπερασματικά, η Μπεϋζιανή προσέγγιση έχει ως στόχο την προσέγγιση της άγνωστης παραμέτρου θ. Η πληροφορία της θ βρίσκεται στην εκ των προτέρων κατανομή η οποία δεν επηρεάζεται από τα δεδομένα. Στόχος μας είναι η προσέγγιση εκ των υστέρων κατανομής η οποία συνδέει την εκ των προτέρων πληροφορία με τα εκάστοτε δεδομένα.
Για τον υπολογισμό υπάρχουν τέσσερα βασικά στάδια που πρέπει να ακολουθηθούν:

1) Συνάρτηση Πιθανοφάνειας $f(x|\theta)$
2) Εκ των προτέρων κατανομή $f(\theta)$
3) Εκ των υστέρων κατανομή $f(\theta|x)$
4) Συμπεράσματολογία μέσω της εκ των υστέρων πληροφορίας

1.2 Εφαρμογή θεωρήματος Bayes

Με βάση τα παραπάνω, ικανοποιείται η ακόλουθη σχέση:

$$f(\theta|x) = \frac{f(\theta)f(x|\theta)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(\theta)f(x|\theta)d\theta} \quad (1)$$

Αναλυτικότερα, θα αναφερθούν παρακάτω οι όροι του θεωρήματος (Klugman, 1992).

1.2.1 Συνάρτηση Πιθανοφάνειας (Likelihood Function)

Έστω τυχαίο δείγμα παρατηρήσεων X_1,X_2, ... X_n που είναι ανεξάρτητες και ισόνομες μεταξύ τους και με παράμετρο θ. Θεωρώντας γνωστές τις τιμές της $\underset{\smile}{X}$, δημιουργείται μία συνάρτηση του θ η οποία ονομάζεται συνάρτηση πιθανοφάνειας του θ. Έτσι έχουμε:

$$L(\theta; x) = L(\theta|x) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)$$

1.2.2 Εκ των Προτέρων Κατανομή (A priori)

Η επιλογή μιας εκ των προτέρων κατανομής είναι εξέχουσας σημασίας, καθώς καθορίζει την μορφή της εκ των υστέρων κατανομής. Υπάρχουν διάφορες κατηγορίες εκ των προτέρων κατανομών όπως είναι οι πληροφοριακές, οι μη-πλ ηροφοριακές και οι συζυγείς.

1.2.3 Εκ των Υστέρων Κατανομή (Posteriori)

Έχοντας ολοκληρώσει τον υπολογισμό της συνάρτησης πιθανοφάνειας και της εκ των προτέρων κατανομής, η εκ των υστέρων κατανομή υπολογίζεται με βάση τη σχέση (1). Η συγκεκριμένη κατανομή περιέχει όλη την πληροφορία που αφορά το θ.

Ο παρονομαστής ονομάζεται περιθώρια κατανομή και περιέχει στοιχεία από το $\underset{\smile}{X}$ λόγω της ολοκλήρωσης του θ, με αποτέλεσμα να μην επηρεάζεται η εκ των υστέρων πληροφορία. Οπότε μπορεί να γραφεί ανάλογα στη μορφή

$$f(\theta|x) \propto f(\theta) f(x|\theta)$$

1.3 Ιεραρχική Μπεϋζιανή Ανάλυση (Hierarchical Bayes Analysis)

Η Ιεραρχική Μπεϋζιανή ανάλυση χρησιμοποιείται στην περίπτωση που η παράμετρος θ περιγράφεται από μια άλλη εκ των προτέρων κατανομή. Έστω, λοιπόν, λ-γνωστό η παράμετρος της εκ των προτέρων η οποία ονομάζεται υπερ-παράμετρος. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, ο τύπος της εκ των υστέρων κατανομής θα υποστεί κάποιες τροποποιήσεις, ως εξής:

$$\int f(x|\theta) f(\theta|\lambda) f(\lambda) d\lambda$$

$$p(\theta|x) = \frac{}{\iint (x|\theta) f(\theta|\lambda) f(\lambda) d\theta d\lambda}$$

Στο σημείο αυτό φαίνεται πως είναι πολύ πιθανό να μην έχουμε πληροφορία για την παράμετρο θ, καθώς ενδέχεται αυτή να περιγράφεται από κάποια άλλη κατανομή. Έτσι, η ανάλυση μας θα επεκταθεί σε περισσότερα από ένα επίπεδα.

Στο κεφάλαιο 3, θα παρουσιαστεί εκτενέστερα η ανάλυση των ιεραρχικών μοντέλων σε δύο επίπεδα, η οποία θα γενικευτεί και σε τρία επίπεδα. Εφαρμογές με βάση το μοντέλο του Hachemeister θα πραγματοποιηθούν με την βοήθεια του πακέτου R για δύο επίπεδα.

1.4 Εμπειρική Μπεϋζιανή Ανάλυση (Empirical Bayes)

Η εμπειρική Μπευζιανή προσέγγιση δίνει μεγάλη σημασία στην συλλογή των δεδομένων και έπειτα εκτιμάει την εκ των προτέρων πληροφορία. Η συγκεκριμένη μέθοδος έχει σκοπό να εκμεταλευτεί τόσο την προσέγγιση της Μπεϋζιανής Στατιστικής όσο και της Κλασικής στατιστικής, έτσι ώστε τα αποτελέσματα να είναι όσο το δυνατόν πιο αξιόπιστα. Η συγκεκριμένη προσέγγιση μελετήθηκε από τον Robbins (1955), ο οποίος παρουσίασε ένα διαφορετικό τρόπο υπολογισμού της εκ των υστέρων πληροφορίας. Πιο συγκεκριμένα, εξέφρασε την εκ των υστέρων μέση τιμή αναλύοντας την σε όρους με τη βοήθεια της περιθώριας κατανομής η οποία περιγράφεται από τον παρονομαστή της σχέσης (1). Αφότου πραγματοποιηθεί η προαναφερθείσα διαδικασία, τα επόμενα στάδια ακολουθούν το πρότυπο Bayes. Η Εμπειρική Μπεϋζιανή Ανάλυση διαχωρίζεται σε παραμετρική και μη-παραμετρική (Klugman, 1992).

1.5 Διαφορές Μπεϋζιανής και εμπειρικής Μπεϋζιανής (Stuart A. Klugman κεφ. 1)

Η κυριότερη διαφορά των δύο μεθόδων έγκειται στην εκ των προτέρων πληροφορία. Συγκεκριμένα, στην πρώτη περίπτωση από θέμα ιεραρχίας η εκ των προτέρων πληροφορία προηγείται της συλλογής δεδομένων. Στην αντίπερα όχθη, στη δεύτερη περίπτωση η εκ των προτέρων πληροφορία εκτιμάται με μεθόδους της Κλασικής στατιστικής (περιθώρια κατανομή) όπου τα δεδομένα είναι αυτά που θα προσαρμόσουν την εκ των προτέρων πληροφορία και στην πορεία θα εφαρμοστεί η θεωρία του Bayes (Klugman, 1992).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: Θεωρία Αξιοπιστίας Χαρτοφυλακίου (Credibility Theorem)

2.1 Εισαγωγή στη Θεωρία Αξιοπιστίας Χαρτοφυλακίου

Η αξιοπιστία χαρτοφυλακίου εκφράζει τη διαδικασία και την ανάλυση που πραγματοποιείται σε ένα χαρτοφυλάκιο με σκοπό την βέλτιστη εκτίμηση ασφαλίστρων μέσα σε μία δομή με έντονη πολυπλοκότητα. Πιο συγκεκριμένα, το πρόβλημα σε ένα χαρτοφυλάκιο είναι η εκτίμηση του ποσού των απαιτήσεων (claims) των ασφαλιστηρίων συμβολαίων που θα προκύψουν σε μία μελλοντική περίοδο κάλυψης.

Οι απαιτήσεις θεωρούνται τυχαίες ποσότητες και επηρεάζονται από τους ακόλουθους παράγοντες:

1) Ατομικά χαρακτηριστικά ασφαλισμένου
2) Τα χαρακτηριστικά της ομάδας που ανήκει ο ασφαλισμένος (φύλο, ηλικία, πίνακες θνησιμότητας κ.λ.π.)
3) Οικονομικοί παράγοντες
4) Αβεβαιότητα για το πότε θα επέλθει το ασφαλιστικό γεγονός.

Γεγονός είναι επίσης ότι η ακριβής πρόβλεψη ενός ασφαλίστρου η οποία θα ανταποκρίνεται επαρκώς στις ανάγκες της εταιρείας και του ασφαλισμένου δεν είναι εφικτή. Έτσι, με σκοπό το βέλτιστο υπολογισμό τον απαιτήσεων ερευνάται μία ποσότητα η οποία θα περιγράφεται από μία κατανομή. Η κατανομή αυτή θα παρέχει σημαντικές πληροφορίες, όπως η μέση τιμή και η διακύμανση του δείγματος. Πιο συγκεκριμένα, μεγαλύτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η μέση τιμή, καθώς παρέχει τη βέλτιστη πληροφορία σε ότι αφορά τις μελλοντικές απαιτήσεις. Φυσικά, αξίζει να σημειωθεί πως σε ότι αφορά την εκτίμηση του καθαρού ασφαλίστρου, οι οικονομικοί παράγοντες δεν λαμβάνονται υπόψη και υπολογίζονται εκτός της διαδικασίας της αξιοπιστίας χαρτοφυλακίου (Buhlmann, 1967).

2.2 Ορισμός Αξιοπιστίας Χαρτοφυλακίου

Η αξιοπιστία χαρτοφυλακίου ως έννοια παραπέμπει στην εκτίμηση ασφαλίστρου. Το ασφάλιστρο ονομάζεται ασφάλιστρο αξιοπιστίας και προκύπτει από μία σειρά διαδικασιών οι οποίες περιγράφονται από τον παρακάτω τύπο:

$$\mu(\theta)^{cred} = z\bar{X} + (1-z)E[\mu(\theta)]$$

όπου

$\bar{X}$: ο μέσος του δείγματος

$E[\mu(\theta)]$: η εκ των προτέρων μέση τιμή

z: ο συντελεστής αξιοπιστίας για $0 \leq z \leq 1$

$\mu(\theta)$: εκτιμώμενο ασφάλιστρο όπου

$$E[\mu(\theta)] = \mu$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$$

Ο συντελεστής αξιοπιστίας ορίζεται ως εξής:

$$z = \frac{n}{n+p}$$

όπου

$$p = \frac{s^2}{r^2}, \qquad s^2 = E[Var(X_i|\theta)] \; και \; r^2 = Var(\,\mu(\theta)) = E[\mu - \mu(\theta)]^2$$

Παρατήρηση: Το z εξαρτάται από το σύνολο των παρατηρήσεων, ενώ με το πέρασμα του χρόνου η τιμή του πλησιάζει στην μονάδα. Μέσω της Θεωρίας Αξιοπιστίας μπορούμε να συνδυάσουμε ατομικό και ομαδικό κίνδυνο, λαμβάνοντας έτσι υπόψιν όλες τις εκδοχές που μπορούν να ληφθούν σε ένα χαρτοφυλάκιο. Επομένως, η Θεωρία Αξιοπιστίας αποτελεί ένα ιδιαιτέρως χρήσιμο εργαλείο περιγραφής ομοιογενών ομάδων.

Έχοντας ένα χαρτοφυλάκιο με μεγάλο αριθμό συμβολαίων, είναι απαραίτητο να χωριστεί σε κλάσεις. Με τον διαχωρισμό έχουμε έναν αριθμό κλάσεων ο οποίος περιλαμβάνει δεδομένα με παρόμοια χαρακτηριστικά. Υπάρχει, δηλαδή, ομοιογένεια μεταξύ των στοιχείων μιας κλάσης. Στόχος μας είναι η εκτίμηση του καθαρού ασφαλίστρου μέσα από ομοιογενείς κλάσεις εκτιμώντας τον αριθμό των παραμέτρων που προκύπτει.

2.3 Μοντέλο του Buhlmann

Το μοντέλο του Buhlmann (1967) στηρίζεται στην σύγχρονη θεωρία αξιοπιστίας χαρτοφυλακίου η οποία δεν απαιτεί να υπάρχει γνώση κάποιας εκ των προτέρων πληροφορίας σε ότι αφορά το κομμάτι της κατανομής των ζημιών (Distribution free).

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο με $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_I$ ασφαλιστήρια συμβόλαια και $i = 1,2,\ldots, I$ είναι ο αριθμός των ασφαλιστηρίων συμβολαίων με $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in}$ τις αντίστοιχες απαιτήσεις που εκφράζονται ως τυχαίες μεταβλητές (βλέπε Σημειώσεις Γ. Πιτσέλης κεφ. 4).

2.3.1 Υποθέσεις

1) Τα ασφαλιστήρια συμβόλαια $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_I$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα και οι τυχαίες μεταβλητές $X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{in}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες.
2) Δοθέντος θ_i οι τυχαίες μεταβλητές είναι υπό δέσμευση ανεξάρτητες και ισόνομες
3) $E(X_{ij}|\Theta_i) = \mu(\Theta_i)$ για $i = 1,2,\ldots, I$ και $j = 1,2,\ldots, n$
4) $Cov(X_{ir}, X_{ij}|\Theta_i) = \delta_{ir}\sigma^2(\theta_i)$

όπου δ_{ir} ονομάζεται δείκτρια Konenker και ισχύει:

$$\delta_{ir} = \begin{cases} 1, \alpha\nu\ i = j \\ 0, \alpha\nu\ i \neq j \end{cases}$$

2.3.2 Συμβολισμοί

$$\bar{X}_{i\cdot} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}\ , \qquad \bar{X}_{\cdot\cdot} = \frac{1}{I}\sum_{i=1}^{I} X_i\ , \qquad \mu(\Theta_i) = E(X_{ij}|\Theta_i)\ ,$$

$$\mu = E[\mu(\Theta_i)]\ , \qquad s^2(\Theta_i) = Var(x_{ij}|\Theta_i)\ , \qquad s^2 = E[\sigma^2(\Theta_i)]\ ,$$

$$a = Var[\mu(\Theta_i)] \qquad \text{και} \qquad z = \frac{n}{n + \frac{s^2}{\alpha}}$$

2.3.3 Σημαντικές σχέσεις

$$E(X_{ij}) = E(\bar{X}_{i\cdot}) = E(\bar{X}_{\cdot\cdot}) = \mu$$
$$\mathrm{Cov}(X_{ij}, X_{ir}) = \delta_{ir} s^2 + a$$

$$\mathrm{Cov}(X_{ij}, \bar{X}_{i\cdot}) = \mathrm{Cov}(\bar{X}_{i\cdot}, \bar{X}_{i\cdot}) = \frac{s^2}{n} + a$$

$$\mathrm{Cov}(X_{ij}, \bar{X}_{\cdot\cdot}) = \mathrm{Cov}(\bar{X}_{i\cdot}, \bar{X}_{\cdot\cdot}) = \mathrm{Cov}(\bar{X}_{i\cdot}, \bar{X}_{\cdot\cdot}) = \mathrm{Cov}(\bar{X}_{\cdot\cdot}, \bar{X}_{\cdot\cdot}) = \frac{\left(\frac{s^2}{n} + a\right)}{I}$$

$$\mathrm{Cov}\,(X_{ij}, \mu(\Theta_i)) = \mathrm{Cov}(\bar{X}_{i\cdot}, \mu(\Theta_i)) = a$$

$$\mathrm{Cov}(\bar{X}_{\cdot\cdot}, \mu(\Theta_i)) = \frac{a}{I}$$

2.3.4 Ασφάλιστρο Αξιοπιστίας Buhlmann

Με την προϋπόθεση ότι ισχύουν όλες οι προαναφερθείσες υποθέσεις η εκτίμηση ασφαλίστρου αξιοπιστίας περιγράφεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\mu(\Theta_i)^{Cred} = z X_{i\cdot} + (1 - z)\mu$$

όπου

$$z = \frac{n}{n + \frac{s^2}{a}}$$

Οι ποσότητες μ, s^2 και a ονομάζονται παράμετροι δόμησης. Η ποσότητα $\mu(\Theta_i)^{Cred}$ περιγράφει την εκτίμηση του ασφαλίστρου αξιοπιστίας για το i-οστό ασφαλιστήριο συμβόλαιο (Herzog, 1989).

2.4 Εκτιμητής αξιοπιστίας του μοντέλου του Buhlmann-Straub

Το συγκεκριμένο μοντέλο αναπτύχθηκε από τους Buhlmann-Straub (1970), ως κύριο εργαλείο για αντασφαλιστικά θέματα, ενώ παράλληλα είναι άμεσα εφαρμόσιμο και σε ασφαλίσεις ζωής και ζημιών. Θα μπορούσε εύκολα να ισχυριστεί κάποιος πως είναι το πλέον διαδεδομένο μοντέλο που χρησιμοποιείται στην ασφαλιστική αγορά (Buhlmann and Gisler, 2005).

Έστω ότι έχουμε να αναλύσουμε ένα χαρτοφυλάκιο με I αριθμό ασφαλιστηρίων συμβολαίων όπου

X_{ij}: οι απαιτήσεις/ζημιές (claims) του χαρτοφυλακίου και
w_{ij}: γνωστά βάρη τα οποία είναι μέτρα όγκου.

2.4.1 Υποθέσεις

Δοθέντος ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο με ασφαλιστήρια συμβόλαια Θ_i για $i =$

$1,2,\ldots, I$ και με απαιτήσεις/κινδύνους X_{ij} για $j = 1,2, \ldots, n$ ισχύει:

1) $E[X_{ij}|\Theta_i] = \mu(\Theta_i)$

2) $Var[X_{ij}|\Theta_i] = s\underline{\qquad\quad}2w(\Theta iji)$

3) Τα ζεύγη $(\Theta_1, X_{1J}), (\Theta_2, X_{2J}), \ldots, (\Theta_I, X_{IJ})$ είναι ανεξάρτητα και $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_I$ είναι ανεξάρτητα και ισόνομα.

2.4.2 Ασφάλιστρο αξιοπιστίας Buhlmann-Straub

Το εκτιμώμενο ασφάλιστρο αξιοπιστίας εκτιμάται από τον παρακάτω τυπο:

$$\hat{\mu}(\Theta_i) = z_i X_{i\cdot} + (1 - z_i)\mu$$

όπου z_i: Συντελεστής αξιοπιστίας (Credibility factor)

2.4.3 Χρήσιμες σχέσεις

n

$$w_{i\Sigma} = \sum_{j=1} w_{ij} \quad (1)$$

$$a = E[Var(\mu(\Theta_i))] \quad (2)$$

$$z_i = \frac{w_{i\Sigma}}{w_{i\Sigma} + a} \underline{s}^2 \quad (3)$$

Οι παραπάνω συμβολισμοί θα μελετηθούν αναλυτικότερα στο επόμενο κεφάλαιο για μεγαλύτερο αριθμών επιπέδων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: Το Ιεραρχικό Μοντέλο του Jewell (Hierarchical Jewell's Model)

Στον κόσμο των ασφαλειών γίνεται εύκολα αντιληπτό ότι ένα χαρτοφυλάκιο μπορεί να επηρεαστεί άμεσα από ένα μεγάλο αριθμό παραγόντων κινδύνου, κάτι που έχει ως αποτέλεσμα την διαίρεσή του σε διαφορετικές ομάδες ή διαφορετικούς κλάδους. Με τον τρόπο αυτό μία ασφαλιστική εταιρεία έχει την δυνατότητα να εξετάσει παρόμοιους κινδύνους ανάλογα με τον κλάδο, με σκοπό την βέλτιστη ανάλυση και την εκτίμηση ασφαλίστρου (Jewell, 1975) .

3.1 Ιεραρχική Αξιοπιστία (Jewell 1975)

Τα μοντέλα αξιοπιστίας είναι αναλογιστικά εργαλεία τα οποία κατανέμουν τα ασφάλιστρα μεταξύ ετερογενών ομάδων ασφαλισμένων. Σε γενικότερο πλαίσιο, θα μπορούσαν να θεωρηθούν ως μέθοδοι πρόβλεψης για διαφορετικά επίπεδα κινδύνου. Παράλληλα, η ιεραρχική αξιοπιστία χρησιμοποιεί ένα πίνακα με δεδομένα του Hachemeister (1975) με χρήση του στατιστικού πακέτου R, καθώς ανταποκρίνονται πλήρως σε μία ιεραρχική γραμμική προσέγγιση.

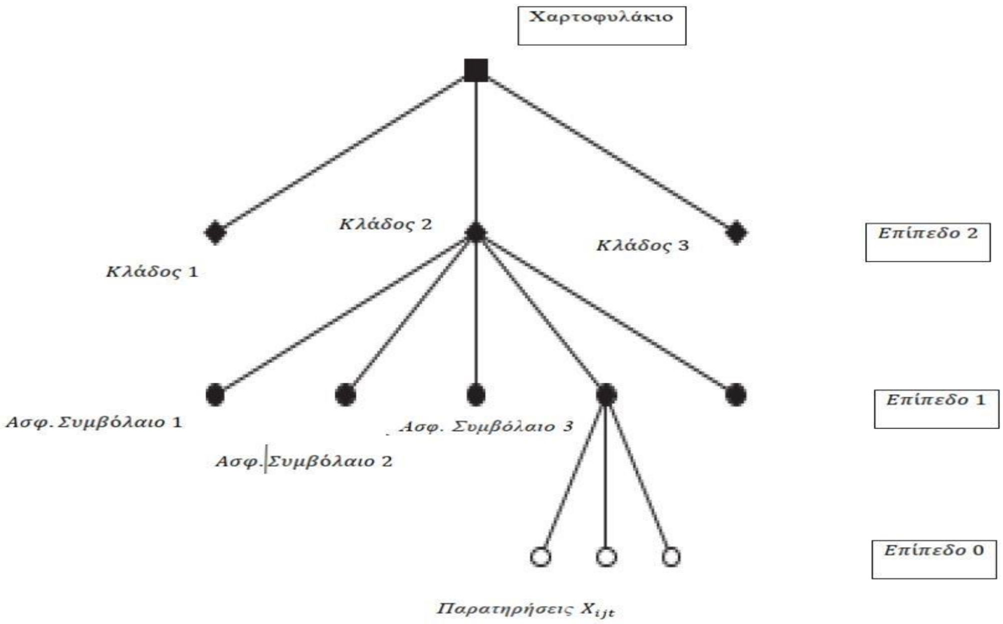
Το μοντέλο της ιεραρχικής αξιοπιστίας μελετήθηκε από τον Jewell (1975) και ορίστηκε ως ένας μέσος όρος που προκύπτει από τη χρήση δεδομένων του χαρτοφυλακίου με σκοπό την εκτίμηση του ασφαλίστρου αξιοπιστίας. Στο σύγχρονο κόσμο, η ιεραρχική αξιοπιστία είναι ένα εργαλείο το οποίο κατανέμει τα ασφάλιστρα σε ετερογενή χαρτοφυλάκια σχηματίζοντας δομή δέντρου. Εφόσον το μοντέλο μετράει την ομοιογένεια, η ιεραρχική αξιοπιστία μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση της ταξινόμησης.

Το ιεραρχικό μοντέλο δίνει μεγάλη βάση στην εκτίμηση των παραμέτρων αξιοπιστίας. Η εκτιμητές υπολογίζονται με τη βοήθεια των διακυμάνσεων. Στην πορεία θα δοθούν παραδείγματα μέσω του πακέτου R, στα οποία γίνεται χρήση της συνάρτησης cm του πακέτου actuar.

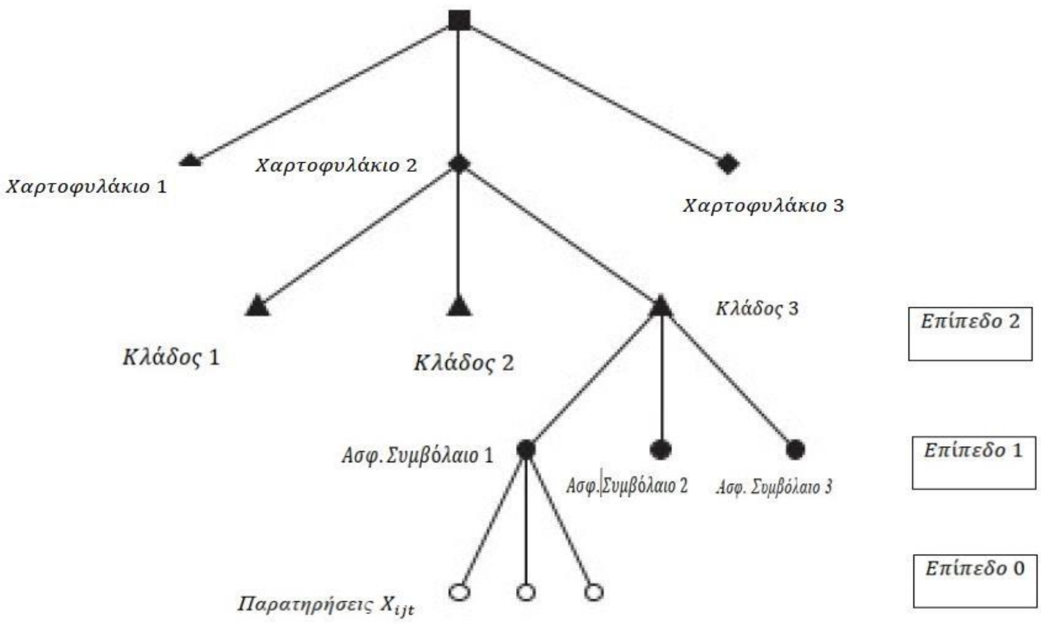
Μια ακόμη περίπτωση στην οποία εφαρμόζεται η ιεραρχική διαδικασία είναι η εκτίμηση υπολογισμού των ασφαλίστρων. Το παραπάνω γεγονός πραγματοποιείται με την δημιουργία ενός "Ιεραρχικού Δέντρου" ή "Hierarchical Tree". Η πορεία της διαδικασίας είναι από "πάνω προς τα κάτω" δηλαδή συγκεντρώνονται όλες οι απαιτήσεις του συνόλου των δραστηριοτήτων της επιχείρησης έτσι ώστε το ποσό αυτό να κατανεμηθεί διαδοχικά στα κατώτερα επίπεδα (βλέπε Jewell 1975).

3.2 Ιεραρχικό Δέντρο

Στην περίπτωση εξέτασης δύο επιπέδων το Ιεραρχικό δέντρο αναλύεται ως εξής:



Στην περίπτωση εξέτασης τριών επιπέδων το Ιεραρχικό δέντρο αναλύεται ως εξής:



3.3 Υποθέσεις (Buhlmann and Gisler, 2005)

Οι υποθέσεις του Ιεραρχικού Δέντρου είναι οι κάτωθι:

1) Υπάρχει ανεξαρτησία μεταξύ των κλάδων της ασφάλισης. Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο των μεταβλητών $(X_i, \Theta_{ij}, \Theta_i)$ είναι ανεξάρτητο από το σύνολο $(X_{i'}, \Theta_{i'j}, \Theta_{i'})$.
2) Για κάθε $i = 1,2 \dots, I$ και δεδομένου $\Theta_i = \theta_i$ τα ασφαλιστήρια συμβόλαια είναι υπό δέσμευση ανεξάρτητα (Θ_{ij}, X_{ij}) είναι ανεξάρτητα.
3) Για κάθε $i = 1,2 \dots, I$ και $j = 1,2 \dots, I_j$ και δοθέντων των τιμών (Θ_{ji}, Θ_i) οι παρατηρήσεις X_{ji} είναι υπό δέσμευση ανεξάρτητες.
4) Όλες οι μεταβλητές (Θ_{ij}, Θ_i), για $i = 1,2\dots, I$ και $j = 1,2 \dots, I_j$ είναι ισόνομα κατανεμημένες.
5) $E[X_{ijt}|\Theta_{ij}, \Theta_i] = \mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)$ για όλα τα $t = 1,2,\dots, n_{ij}$.
6) $Var[X_{ijt}|\Theta_{ij}, \Theta_i] = \frac{1}{w_{ijt}} \sigma^2(\Theta_{ij}, \Theta_i)$ όπου w_{ijt} είναι τα βάρη για $i = 1,2\dots, I,\ j =$

$1,2 \ldots, I_j$ και $t = 1,2, \ldots, n_{ij}$.

Ίδιες υποθέσεις ισχύουν και στην περίπτωση που έχουμε 3 επίπεδα με την διαφορά ότι θα εξεταστεί μία παραπάνω παράμετρος. Με βάση τις υποθέσεις, αξίζει να αναφερθεί το ακόλουθο θεώρημα.

3.4 Θεώρημα

Με βάση τα προαναφερθέντα, καταλήγουμε στα ακόλουθα συμπεράσματα για τις μέσες τιμές:

$$E[X_{ijt}|\Theta_i] = \mu(\Theta_i) \qquad (1)$$

$$E[\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)|\Theta_i] = \mu(\Theta_i) \qquad (2)$$

$$E[\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)] = \mu \qquad (3)$$

$$E[\mu(\Theta_i)] = \mu \qquad (4)$$

Απόδειξη

Οι σχέσεις (2), (3) και (4) αποτελούν συμβολισμούς της μέσης τιμής.

Για την σχέση (1) έχουμε:

$$E[X_{ijt}|\Theta_i] = E[E[X_{ijt}|\Theta_{ij}\Theta_i]|\Theta_i] = E[\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)|\Theta_i] = \mu(\Theta_i)$$

Όπως αποδεικνύεται έπειτα από ανάλυση μέσων τιμών καταλήγουμε στην σχέση (2)

Οι παραπάνω σχέσεις γενικεύονται και στην περίπτωση των τριών επίπεδων έχουν την ακόλουθη μορφή:

$$E[X_{ijtk}|\Theta_i] = \mu(\Theta_i)$$

$$E[E[\mu(\Theta_{ijt}, \Theta_{ij}, \Theta_i)|\Theta_{ij}, \Theta_i]|\Theta_i] = \mu(\Theta_i)$$

$$E[\mu(\Theta_{ijt}, \Theta_{ij}, \Theta_i)] = \mu$$

3.5 Παράμετροι Δόμησης

Παρακάτω παρουσιάζονται οι παράμετροι που θα χρησιμοποιηθούν στο μοντέλο στην περίπτωση των δύο επιπέδων.

1) Σταθμισμένη μέση τιμή:

$$\mu = E[X_{ij}] = E[\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)] = E[\mu(\Theta_i)]$$

2) Διακύμανση (μεταξύ κοορτής) ($Between\ cohort\ variance$)

$$s^2 = E[[E[\sigma^2(\Theta_{ij},\Theta_i)|\Theta_i]\ ]$$

3) Διακύμανση εντός κοορτής και μεταξύ των κλάδων της επιχείρησης ($Within\ cohort/between\ state\ variance$)

$$a = E\{Var[(\Theta_{ij}, \Theta_i)|\Theta_i\ ]\}$$

4) Διακύμανση μεταξύ των χαρτοφυλακίων($Within\ state\ variance$)

$$b = Var\{E[\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)|\Theta_i\ ]\ \} = Var[\mu(\Theta_i)]$$

Οι παραπάνω παράμετροι στην περίπτωση των τριών επιπέδων αναλύονται ως εξής:

$$\mu = E[X_{ijt}] = E[\mu(\Theta_{ijt},\Theta_{ij}, \Theta_i)] = E[\mu(\Theta_i)] \quad (1)$$

$$s^2 = E[E[E[\sigma^2(\Theta_{ijt},\Theta_{ij}, \Theta_i)|\Theta_{ij}, \Theta_i]|\Theta_i]\ ] \quad (2)$$

$$a = E\{E[Var[(\Theta_{ijt},\Theta_{ij}, \Theta_i)|\Theta_{ij}, \Theta_i]|\Theta_i\ ]\} \quad (3)$$

$$b = E[Var\{E[\mu(\Theta_{ijt}, \Theta_{ij}, \Theta_i)|\Theta_{ij}, \Theta_i]\ |\Theta_i\ ]\ \} = Var[\mu(\Theta_i)] \quad (4)$$

$$c = Var[E[\mu(\Theta_{ijt}, \Theta_{ij}, \Theta_i)|\ \Theta_{ij}, \Theta_i]|\Theta_i] \quad (5)$$

Παρατηρείται ότι στην περίπτωση των τριών επιπέδων έχουμε να εκτιμήσουμε μία έξτρα παράμετρο.

Η εκτίμηση των παραμέτρων αποτελεί σημαντικό στάδιο τόσο για την κατανόηση των μεθόδων όσο και για την εκτίμηση του ασφαλίστρου αξιοπιστίας.

3.6 Συμβολισμοί

Οι παρακάτω συμβολισμοί χρησιμοποιούνται έχοντας ως στόχο την ανάλυση και κατανόηση του τυπολογίου.

Για δύο επίπεδα έχουμε:

$$X_{ijw} = \sum_{n=1}^{n_{ij}} \frac{w_{ijt}}{w_{ij\Sigma}} X_{ijtk}$$

όπου

$$w_{ij\Sigma} = \sum_{t=1}^{n_{ij}} w_{ijt}$$

$$X_{izw} = \sum_{j=1}^{J_I} \frac{z_{ij}}{z_{i\Sigma}} X_{ijw}$$

όπου z_{ij} είναι ο συντελεστής αξιοπιστίας (Credibility Factor).

Οι συντελεστές αξιοπιστίας ορίζονται ανάλογα με το επίπεδο του ασφαλιστηρίου συμβολαίου και του ασφαλιστικού κλάδου ως εξής:

$$z_{ij} = \frac{a w_{ij\Sigma}}{a w_{ij\Sigma} + s^2} = \frac{w_{ij\Sigma}}{w_{ij\Sigma} + \frac{s^2}{a}}$$

$$z_i = \frac{b z_{i\Sigma}}{b z_{i\Sigma} + a} = \frac{z_{i\Sigma}}{z_{i\Sigma} + \frac{a}{b}}$$

με

$$z_{i\Sigma} = \sum_{j=1}^{J_i} z_{ij}$$

I

z_i

$$X_{zzw} = \sum_{i=1} \frac{}{z_{\Sigma}} X_{izw}$$

και

$$z = \sum_{i=1}^{I} z_i$$

Στην περίπτωση που η ανάλυση επεκτείνεται σε τρία επίπεδα, το τυπολόγιο γενικεύεται ως εξής:

$$X_{ijtw} = \sum_{k=1}^{n_{ijt}} \frac{w_{ijtk}}{w_{ijt\Sigma}} X_{ijtk}$$

με

$$w_{ijt\Sigma} = \sum_{k=1}^{n_{ijt}} w_{ijtk}$$

$$X_{ijzw} = \sum_{t=1}^{T_{ij}} \frac{z_{ijt}}{z_{ij\Sigma}} X_{ijtw}$$

Η ανάλυση των συντελεστών αξιοπιστίας σε τρία επίπεδα θα έχει την εξής μορφή:

$$z_{ijt} = a \frac{a w_{ijt\Sigma}}{{}_{ijt\Sigma}} \quad \frac{w_{ijt\Sigma}}{w_{ijt\Sigma} + a} w \qquad + s^2 = \underline{s}^2$$

και

$$z_{ij\Sigma} = \sum_{t=1}^{T_{ij}} z_{ijt}$$

$$X_{izzw} = \sum^{J_I} \frac{z_{ij}}{} X_{ijzw}$$

$$z_{i\Sigma}$$
$$j=1$$

με

$$z_{ij} = \frac{b z_{ij\Sigma}}{b z_{ij\Sigma} + a} = \frac{z_{ij\Sigma}}{z_{ij\Sigma} + \underline{a}b}$$

και

$$z_{i\Sigma} = \sum_{j=1}^{J_i} z_{ij\Sigma}$$

$$X_{zzzw}X_{ijzw} \quad \Sigma = \sum_{j=1}^{J_I} \frac{z_i}{z}$$

με

$$z_i = c\frac{c z_i \Sigma}{i\Sigma + b} \quad \frac{z_i \Sigma}{z_{i\Sigma} + c} z \quad = \quad \underline{b}$$

και

$$z_{\Sigma} = \sum_{\iota=1}^{I} z_i$$

Όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως όταν έχουμε τρία επίπεδα το i, j, t γίνεται i, j, t, k.

3.7 Ορισμός

Στις περιπτώσεις δύο επιπέδων, εφόσον ισχύουν οι υποθέσεις που εξετάσαμε στην αρχή (1-6), τότε μπορούμε να ορίσουμε τι συν-διασπορές ως εξής:

$$Cov(X_{ijt}, X_{i'j't'}) = \delta_{ii'}\,[\delta_{jj}\,(\delta_{ii'}\,w\frac{S2}{\quad}_{ijt} + a) + b]$$

$$Cov(X_{ijt}, X_{i'j'w}) = Cov(X_{ij\cdot}, X_{i'j'\cdot}) = \delta_{ii'}\,(\delta_{jj'}\,Z\frac{a}{\quad}_{ij} + b)$$

$$Cov(X_{ijw}, X_{i'zw}) = Cov(X_{i\cdot\cdot}, X_{i'\cdot\cdot}) = \delta_{ii'} \frac{b}{Z_i}$$

$$Cov(X_{\cdot\cdot\cdot}, X_{\cdot\cdot\cdot}) = Cov(X_{\cdot\cdot\cdot}, X_{\cdot\cdot\cdot}) = \delta_{ii'} \frac{b}{z}$$

$$Cov(\mu(\Theta_i), X_{i'j't'}) = Cov(\mu(\Theta_i), X_{i'j'\cdot}) = \delta_{ii'} b$$

$$Cov(\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i), X_{i'j't'}) = \delta_{ii'}(\delta_{jj'} a + b)$$

Σχόλιο: Οι ποσότητες $\delta_{ii'}$ $και$ $\delta_{jj'}$ όπως αναφέρθηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, ονομάζονται δείκτριες Konenker και οι πιθανές τιμές που μπορούν να έχουν είναι:

$$\delta_{ii'} = \begin{cases} 1, αν\ i = i' \\ 0, αν\ i \neq i' \end{cases}$$

$$\delta_{jj'} = \begin{cases} 1, αν\ j = j' \\ 0, αν\ j \neq j' \end{cases}$$

3.8 Εκτίμηση Ασφαλίστρου Αξιοπιστίας (Estimation of Credibility Premium)

Ας θεωρήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο στο οποίο τα δεδομένα ταξινομούνται μέσα σε «κοορτές». Στην περίπτωση αυτή, θα παρουσιαστεί η ερμηνεία της ιεραρχικής δομής σε δύο επίπεδα. Οι παρατηρήσεις που θα χρησιμοποιηθούν είναι ποσά απαιτήσεων S_{ijt} για $i = 1,2, \ldots, I$, $j = 1,2, \ldots, J_i$ και $t = 1,2, \ldots, N_{ij}$ για περίοδο μικρότερη του έτους. Σε κάθε ποσό απαίτησης αντιστοιχεί και ένα βάρος w_{ijt}. Έτσι, η βέλτιστη γραμμική πρόβλεψη για την επόμενη περίοδο βασίζεται στην σχέση $X_{ijt} = \frac{S_{ijt}}{w_{ijt}}$ και παρουσιάζεται στο ακόλουθο θεώρημα (Πιτσέλης, 2018).

3.9 Θεώρημα Ορισμός ασφαλίστρου δύο επιπέδων

Αξιοποιώντας όλες τις προηγούμενες σχέσεις μπορούμε να εκτιμήσουμε το καθαρό ασφάλιστρο τόσο σε επίπεδο ασφαλιστικού κλάδου i όσο και σε επίπεδο ασφαλιστηρίου συμβολαίου (i, j).(Πιτσέλης, 2018) . Επομένως έχουμε:

1) Κλάδος Ασφάλισης

$$\hat{\mu}(\Theta_i)^{Cred} = z_i X_{izw} + (1 - z_i)\mu \quad (1)$$

2) Ασφαλιστήριο συμβόλαιο

$$\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)^{Cred} = z_{ij} X_{ijzw} + (1 - z_{ij})\hat{\mu}(\Theta_i)^{Cred} \quad (2)$$

Απόδειξη (Πιτσέλης, 2018)

Η απόδειξη θα πραγματοποιηθεί με την βοήθεια του θεωρήματος βέλτιστης προβολής.

Με βάση την σχέση (1) αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$E[\mu(\Theta_i)^{Cred}] = E[\mu(\Theta_i)]$$

$$Cov[\mu(\Theta_i)_{Cred}, X_{i'j't'}] = Cov[\mu(\Theta_i), X_{i'j't'}]$$

Και με βάση την (2) αρκεί να αποδείξουμε ότι:

$$E\,[\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)^{Cred}] = E[\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)]$$

$$Cov\,[\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)^{Cred}, X_{i'j't'}] = Cov[\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i), X_{i'j't'}]$$

Για την πρώτη περίπτωση έχουμε:

$$E[\mu(\Theta_i)^{Cred}] = E[z_i X_{izw} + (1 - Z_i)\mu] =$$

$$z_i E[X_{izw}] + (1 - z_i)\mu = \mu$$

όπου

$$\mu = E[\mu(\Theta_i)]$$

Οπότε αποδείχτηκε το πρώτο σκέλος.

Για τη συν-διακύμανση έχουμε:

$$Cov[\mu(\Theta_i)_{Cred}, X_{i'j't'}] = Cov[Z_i X_{izw} + (1 - Z_i)\mu, X_{i'j't'}]$$

$$= z_i Cov[X_{izw}, X_{i'j't'}] + (1 - z_i) Cov[\mu, X_{i'j't'}]$$

$$= z_i\, Cov\left[\sum_{j=1}^{J_I} \frac{z_{ij}}{z_{i\Sigma}} X_{izw}, X_{i'j't'}\right] + 0$$

$$= z_i \sum_{j=1}^{J_I} \frac{z_{ij}}{z_{i\Sigma}}\, Cov[X_{izw}, X_{i'j't'}]$$

Χρησιμοποιώντας την δεύτερη σχέση από το θεώρημα των συν-διακυμάνσεων έχουμε:

$$= z_i \sum_{j=1}^{J_I} \frac{z_{ij}}{z_{i\Sigma}} \delta_{ii'} \left(\delta_{jj'} \frac{a}{Z_{ij}} + b\right)$$

$$= z_i \left[\frac{z_{ij}}{z_{i\Sigma}} \delta_{ii'}\delta_{jj} \frac{a}{z_{ij}} + \sum_{j \neq j'}^{J_I} \frac{z_{ij}}{z_i} \delta_{ii'}\delta_{jj'} \frac{a}{z_{ij}} + \sum_{j=1}^{J_I} \frac{z_{ij}}{z_{i\Sigma}} \delta_{ii'}\, b\right]$$

$$= z_i \delta_{ii'} \left(\frac{a}{z_{i\Sigma}} + 0 + b\right)$$

$$= z_i \delta_{ii'} \left(\frac{a + b z_i}{z_i}\right)$$

$$= \delta_{ii'} b$$

που ισχύει.

Και αντίστοιχα:

$$E\left[\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)^{Cred}\right] = z_{ij} E\left[X_{izw} + (1 - z_{ij})\mu(\Theta_i)^{Cred}\right]$$

$$= z_{ij}\, E[X_{izw}] + (1 - z_{ij})E[\mu(\Theta_i)_{Cred}]$$

$$= z_{ij}\, \mu + (1 - z_{ij})\mu =$$

$$\mu$$

όπου

$$\mu = E[\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)]$$

Οπότε αποδείχτηκε το πρώτο σκέλος.

$$Cov\,[\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)^{Cred}, X_{i'j't'}] = z_{ij} Cov[X_{izw}, X_{i'j't'}] + (1 - z_{ij}) Cov[\mu(\Theta_i)^{Cred}, X_{i'j't'}]$$

$$= z_{ij}\delta_{ii'}\,(\delta_{jj'} \frac{a}{z_{ij}} + b) + (1 - z_{ij})\delta_{ii'} b$$

$$= \delta_{ii'}(\delta_{jj'} a + b)$$

το οποίο με βάση τις σχέσεις των συν-διακυμάνσεων που προαναφέρθηκαν ισχύει.

$$Cov[\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i), X_{i'j't'}] = \delta_{ii'}(\delta_{jj'} a + b)$$

Οπότε, η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

3.10 Θεώρημα: Ορισμός ασφαλίστρου τριών επιπέδων

Η παραπάνω θεωρία για την εκτίμηση του ασφαλίστρου γενικεύεται και για τρία επίπεδα. Συγκεκριμένα υπολογίζεται σε επίπεδο χαρτοφυλακίου i, σε επίπεδο ασφαλιστικού κλάδου (i, j) και σε επίπεδο ασφαλιστηρίου συμβολαίου (i, j, t) (Belhadj, et al., 2009).

Έτσι εκφράζεται από τις ακόλουθες σχέσεις:

1) Επίπεδο Χαρτοφυλακίου

$$\mu(\Theta_i)_{Cred} = z_i X_{izzw} + (1 - z_i)\mu$$

2) Επίπεδο Χαρτοφυλακίου

$$\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)^{Cred} = z_{ij} X_{ijzw} + (1 - z_{ij})\hat{\mu}(\Theta_i)^{Cred}$$

3) Επίπεδο Ασφαλιστηρίου Συμβολαίου

$$\mu(\Theta_{ijt}, \Theta_{ij}, \Theta_i)^{Cred} = z_{ijt} X_{ijtw} + (1 - z_{ijt})\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)^{Cred}$$

3.11 Εκτίμηση παραμέτρων με την μέθοδο «Iterative»

Η μέθοδος Iterative μεταφράζεται ως επαναληπτική μέθοδος. Το όνομά της προκύπτει από την διαδικασία που χρησιμοποιείται για την εκτίμηση των παραμέτρων. Πρόκειται ουσιαστικά για μια διαδικασία “ψευδο-εκτιμητών”στην οποία η εκτίμηση ενός επιπέδου σε μία παράμετρο εξαρτάται από την εκτίμηση του προηγούμενου. Επομένως, για δύο επίπεδα έχουμε:

$$\hat{\mu}_i = X_{izw} = \sum_{j=1}^{J_i} \frac{z_{ij}}{z_{i\Sigma}} X_{ijw}$$

$$\hat{\mu} = X_{zzw} = \sum_{i=1}^{I} \frac{z_i}{z_\Sigma} X_{izw}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{t=1}^{n_{ij}} w_{ijt}(X_{ijt} - X_{ijw})^2}{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_I} \sum_{t=1}^{T_{ij}} (n_{ij} - 1)}$$

Σύμφωνα με τις αναφορές των DeVylder, Goovaerts (1992) και Goulet (1998), ο εκτιμητής του s^2 είναι βέλτιστος από μία μεγάλη τάξη γραμμικών εκτιμητών κάτω από την μηδενική υπόθεση (Goovaerts, 1990 & Goovaerts and Hoogstad, 1987).

Ας εξετάσουμε τώρα τους εκτιμητές $\hat{a}$ και $\hat{b}$.

$$\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_I} z_{ij}(X_{ijw} - X_{izw})^2$$

$$\hat{a} = \frac{}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_I}(J_I - 1)}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{I} z_i (X_{izw} - X_{zzw})^2}{(I-1)}$$

Με μία πρώτη ματιά οι εκτιμητές φαίνονται απλοί στην σύνθεσή τους. Εντούτοις, μέσα στους υπολογισμούς υπάρχει η χρήση βαρών (όπως φαίνεται από το δεξί μέρος της ισότητας). Το γεγονός αυτό δημιουργεί μία επαναληπτική διαδικασία, η οποία πολλές φορές καθιστά περίπλοκη την εκτίμηση των παραμέτρων ειδικά στην περίπτωση πρέπει να εξεταστούν περισσότερα από τρία στάδια. (Belhadj, et al., 2009)

3.12 Ορισμός εκτίμηση παραμέτρων τριών επιπέδων

$$\hat{\mu}_i = X_{izzw} = \sum_{j=1}^{J_i} \frac{z_{ij}}{z_{i\Sigma}} X_{ijzw}$$

$$\hat{\mu} = X_{zzw} = \sum_{i=1}^{I} \frac{z_i}{z_\Sigma} X_{izw}$$

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_I}\sum_{t=1}^{T_{ij}}\sum_{k=1}^{n_{ijt}} w_{ijt}(X_{ijtk} - X_{ijt\cdot})^2}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_I}\sum_{t=1}^{T_{ij}}(n_{ijt} - 1)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_I}\sum_{t=1}^{T_{ij}} z_{ijt}(X_{ijtw} - X_{ijzw})^2}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}(T_{ij} - 1)}$$

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i} z_{ij}(X_{ijzw} - X_{izzw})^2}{\sum_{i=1}^{I}(J_i - 1)}$$

$$\hat{c} = \frac{\sum_{i=1}^{I} z_i (X_{izzw} - X_{zzzw})^2}{(I-1)}$$

Ισχύουν ακριβώς οι ίδιες υποθέσεις που ισχύουν για τα δύο επίπεδο. Παρατηρούμε ότι σε αυτήν την περίπτωση έχουμε μία παραπάνω παράμετρο να εκτιμήσουμε.

3.13 Απλοποιημένη εκτίμηση παραμέτρων σύμφωνα με τον Ohlsson (2005)

Με βάση το μοντέλο αξιοπιστίας του Jewell, η εκτίμηση γίνεται με την βοήθεια "ψευδοεκτιμητών". Συγκεκριμένα, οι εκτιμητές υπολογίζονται επαναληπτικά και σε κάθε επανάληψη πρέπει να επιλυθεί ένα πρόβλημα δύο ή και παραπάνω διαστάσεων. Σύμφωνα με παραδοχές των Ohlsson (2005) και Buhlmann and Gisler (2005), παρουσιάζεται μία εναλλακτική μέθοδος εύρεσης αμερόληπτων εκτιμητών. Συγκεκριμένα, γίνεται χρήση των πλήρως γνωστών βαρών κατά την διάρκεια υπολογισμού των εκτιμητών με σκοπό την δημιουργία απλοποιημένων εκτιμητών. Έτσι αντικαθιστά τους συντελεστές αξιοπιστίας (z, z_i) με τα βάρη που αναφέρθηκαν στην αρχή του κεφαλαίου.

Με βάση τις σχέσεις αυτές για δύο επίπεδα έχουμε:

$$A_i = \sum_{j=1}^{J_I} w_{ij\Sigma}(X_{ijw} - X_{iww})^2 - (J_I - 1)^2 s^2$$

$$B = \sum_{i=1}^{I} z_{i\Sigma}(X_{izw} - X_{zzw})^2 - (I - 1)^2 a$$

και

$$d_i = w_{i\Sigma} - \sum_{j=1}^{J_I} \frac{w_{ij\Sigma}^2}{w_{i\Sigma}},$$

όπου

$$w_{i\Sigma} = \sum_{j=1}^{J_I} w_{ij\Sigma}$$

e, $$= z_\Sigma - \sum_{i=1}^{I} \frac{z_{i\Sigma}^2}{z_\Sigma}$$

Με βάση την πρόταση του Ohlsson (2005) όταν οι παράμετροι λαμβάνονται υπόψιν ως σταθερές τιμές τότε ισχύει:

$$E[A_i] = E[d_i]a \quad (1)$$

$$E[B] = eb \quad (2)$$

Η (1) ισοδυναμεί με:

$$\tilde{a} = \frac{E[A_i]}{E[d_i]} = \frac{\frac{\sum_{i=1}^{I} A_i}{I}}{\frac{\sum_{i=1}^{I} d_i}{I}} = \frac{\sum_{i=1}^{I} A_i}{\sum_{i=1}^{I} d_i}$$

Η σχέση (2) περιγράφει τη μέση τιμής μίας σταθεράς, η οποία προφανώς ισούται με την ποσότητα της ίδιας της σταθεράς. Επομένως ισοδύναμα με την σχέση (2) έχουμε:

$$\tilde{b} = \frac{E[B]}{e} = \frac{B}{e}$$

3.14 Ορισμός παράμετροι θεωρήματος Ohlsson για τρία επίπεδα

Οι παράμετροι θα διαμορφωθούν ως εξής:

$$A_{ij} = \sum_{t=1}^{T_{ij}} w_{ijt\Sigma}(X_{ijt} - X_{ijww})^2 - (T_{ij} - 1)s^2$$

$$B_i = \sum_{j=1}^{J_i} z_{ij\Sigma}(X_{ijzw} - X_{izzw})^2 - (J_i - 1)a$$

$$C = \sum_{i=1}^{I} z_{i\Sigma}(X_{izzw} - X_{zzzw})^2 - (I - 1)b$$

και

$$d_{ij} = w_{ij\Sigma\Sigma} - \sum_{t=1}^{T_{ij}} \frac{w_{ijt\Sigma}^2}{w_{ij\Sigma\Sigma}},$$

$$t=1$$

$$e_i = z_{i\Sigma\Sigma} - \sum_{j=1}^{J_i} \frac{z_{ij\Sigma}^2}{z_{i\Sigma\Sigma}},$$

$$f = z_{\Sigma\Sigma} - \sum_{\iota=1}^{I} \frac{z_{i\Sigma}^2}{z_{\Sigma\Sigma}},$$

με

$$X_{ijzw} = \sum_{t=1}^{T_{ij}} \frac{z_{ij\Sigma}}{z_{i\Sigma\Sigma}} X_{ijtw},$$

$$X_{izzw} = \sum_{j=1}^{J_i} \frac{w_{ij\Sigma\Sigma}}{w_{i\Sigma\Sigma\Sigma}} X_{ijzw},$$

$$X_{zzzw} = \sum_{i=1}^{I} \frac{z_{i\Sigma}}{z_{\Sigma\Sigma}} X_{izzw},$$

Με βάση την πρόταση του Ohlsson (2005), όταν οι παράμετροι λαμβάνονται υπόψιν ως σταθερές τιμές τότε ισχύει:

$$E[A_{ij}] = E[d_{ij}]a\; E[B_i]$$

$$= E[e_i]b$$

και

$$E[C] = fc$$

Για $i = 1,2,\dots, I, \;\; και \;\; j = 1,2,\dots, J_i$

Έτσι, ισχύει ότι $A_{ij}|d_{ij}$ και $B_i|e_i$ είναι αμερόληπτοι εκτιμητές των a και b και θα ισχύει ισοδύναμα:

$$\tilde{a} = \frac{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} A_{ij}}{\sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} d_{ij}}$$

$$\tilde{b} = \frac{\sum_{i=1}^{I} B_i}{\sum_{i=1}^{I} e_i}$$

και

$$\tilde{c} = \frac{C}{f}$$

3.15 Απλοποιημένη εκτίμηση παραμέτρων σύμφωνα με τη θεωρία των Buhlmann and Gisler

Η συγκεκριμένη μέθοδος δεν διαφέρει σημαντικά από την προαναφερθείσα. Η ουσία βρίσκεται στο πως η κάθε μία διαχειρίζεται το ενδεχόμενο της αρνητικής διακύμανσης.

Τα αποτελέσματα που θα προκύψουν από τους παραπάνω εκτιμητές μπορεί να έχουν αρνητικό πρόσημο. Στην πράξη όμως κάτι τέτοιο δεν είναι εφικτό και η χαμηλότερη τιμή που μπορούν να πάρουν οι παραπάνω εκτιμητές είναι η μηδενική, πράγμα που δεν υποστηρίζει την αμεροληψία.

Σύμφωνα με τους Bühlmann and Gisler (2005), παραλείπεται κάθε αμερόληπτη τιμή πριν από το στάδιο του μέσου όρου. Έτσι οι μεροληπτικοί και θετικοί εκτιμητές για δύο επίπεδα εκφράζονται ως εξής:

$$\hat{a}' = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} \max\left(\frac{A_i}{d_i}, 0\right)$$

$$\hat{b}' = max\left(\frac{B}{e}, 0\right)$$

3.16 Ορισμός: παράμετροι θεωρήματος Buhlmann and Gisler για τρία επίπεδα

Στην περίπτωση των τριών επιπέδων το τυπολόγιο διαμορφώνεται ως εξής:

$$\hat{a}' = \frac{1}{\sum_{i=1}^{I} J_i} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J_i} \max\left(\frac{A_{ij}}{d_{ij}}, 0\right)$$

$$\hat{b}' = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} max\left(\frac{B_i}{e_i}, 0\right)$$

και

$$\hat{c}' = max\left(\frac{C}{f}, 0\right)$$

Κεφάλαιο 4: Εφαρμογές στην R

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα παρουσιαστούν παραδείγματα που εφαρμόσθηκαν μέσω της γλώσσας προγραμματισμού R. Ειδικότερα, έγινε χρήση του πακέτου "Actuar", το οποίο παρέχει αναλογιστικές συναρτήσεις. Πιο συγκεκριμένα, θα δοθούν παραδείγματα με βάση το Μπεϋζιανό μοντέλο, το μοντέλο Buhlmann καθώς και το ιεραρχικό μοντέλο αξιοπιστίας.

Η συνάρτηση αξιοπιστίας "cm" διαδραματίζει βασικό ρόλο στους υπολογισμούς που γίνονται παρακάτω και έχει ως βασική προϋπόθεση τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται να έχουν μορφή ορθογώνιου πίνακα.

Επιγραμματικά αναφέρεται ότι χρησιμοποιήθηκαν οι μέθοδοι "Iterative", "Ohlsson" και Bühlmann-Gisler.

Προτού ξεκινήσει η παρουσίαση του κώδικα και των αποτελεσμάτων του πακέτου της R, κρίνεται απαραίτητος ο ορισμός ορισμένων εννοιών που πρόκειται να συναντήσει κατά την διάρκεια της εκτέλεσης του προγράμματος.

4.1 Δεδομένα Hachermeister (1975)

Το σύνολο των δεδομένων του Hachemeister αποτελείται από ποσά ασφαλιστικών απαιτήσεων που αφορούν σωματικές βλάβες καθώς και τον αντίστοιχο αριθμό των απαιτήσεων αυτών. Πιο συγκεκριμένα, τα δεδομένα περιγράφουν την προαναφερθείσα κατάσταση για πέντε περιοχές των Ηνωμένων Πολιτειών το χρονικό διάστημα 1970 με 1973. Τα δεδομένα με την χρήση του πακέτου της R έχουν την μορφή ενός πίνακα πέντε γραμμών και εικοσιπέντε στηλών. Η πρώτη στήλη θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως δείκτρια που απαριθμεί τις υπόλοιπες. Οι στήλες δύο με δεκατρία (2-13) παρουσιάζουν την μέση απαίτηση και οι στήλες δεκατέσσερα με εικοσιπέντε (14-25) αντιπροσωπεύουν τον αριθμό των απαιτήσεων. Στο παράδειγμα παρακάτω φαίνεται το αποτέλεσμα όταν ο κώδικας εκτελεί την εντολή
$data(hachemeister)$. Τα δεδομένα του Hachemeister θα κατηγοριοποιηθούν σε μία κοορτή το «1 με 3» ενώ σε άλλη κοορτή «2,4 και 5».

4.2 "Ratio & Weight”

Ο κώδικας περιέχει εκφράσεις όπως “ratio.1,ratio.2…ratio.12”. Αυτές περιγράφουν τις παρατηρήσεις από τα δεδομένα του Hachemeister ενώ τα “weight.1, weight.2… weight.12” είναι τα βάρη των παρατηρήσεων.

Στο κεφάλαιο 3, ως “ratio” χρησιμοποιήθηκαν τα X_{ijt} και ως “weight” τα w_{ijt}.

4.3 Μέθοδος “Iterative”

Ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε παρατίθεται παρακάτω.

```
library(actuar)
data(hachemeister) hachemeister
X <- cbind(cohort = c(1, 2,1, 2, 2), hachemeister) X
fit <- cm(~cohort + cohort: state, data = X, ratios
            = ratio. 1: ratio. 12, weights = weight. 1: weight. 12, method
            = “Iterative”)
predict(fit)
summary(fit)
summary(fit, levels = “cohort”)
predict(fit, levels = “cohort”)
```

4.4 Αποτελέσματα πακέτου actuar

$> data(hachemeister)$

$> hachemeister$

	state	ratio. 1	ratio. 2	ratio. 3	ratio. 4	ratio. 5	ratio. 6	ratio. 7	ratio. 8
[1,]	1	1738	1642	1794	2051	2079	2234	2032	2035
[2,]	2	1364	1408	1597	1444	1342	1675	1470	1448
[3,]	3	1759	1685	1479	1763	1674	2103	1502	1622
[4,]	4	1223	1146	1010	1257	1426	1532	1953	1123
[5,]	5	1456	1499	1609	1741	1482	1572	1606	1735

	$ratio.9$	$ratio.10$	$ratio.11$	$ratio.12$	$weight.1$	$weight.2$	$weight.3$	$weight.4$
[1,]	2115	2262	2267	2517	7861	9251	8706	8575
[2,]	1464	1831	1612	1471	1622	1742	1523	1515
[3,]	1828	2155	2233	2059	1147	1357	1329	1204
[4,]	1343	1243	1762	1306	407	396	348	341
[5,]	1607	1573	1613	1690	2902	3172	3046	3068

	$weight.5$	$weight.6$	$weight.7$	$weight.8$	$weight.9$	$weight.10$	$weight.11$	$weight.12$
[1,]	7917	8263	9456	8003	7365	7832	7849	9077
[2,]	1622	1602	1964	1515	1527	1748	1654	1861
[3,]	998	1077	1277	1218	896	1003	1108	1121
[4,]	315	328	352	331	287	384	321	342
[5,]	2693	2910	3275	2697	2663	3017	3242	3425

$> X <- cbind(cohort = c(1, 2, 1,2, 2), hachemeister)$

$> X$

	$cohort$	$state$	$ratio.1$	$ratio.2$	$ratio.3$	$ratio.4$	$ratio.5$	$ratio.6$	$ratio.7$
[1,]	1	1	1738	1642	1794	2051	2079	2234	2032
[2,]	2	2	1364	1408	1597	1444	1342	1675	1470
[3,]	1	3	1759	1685	1479	1763	1674	2103	1502
[4,]	2	4	1223	1146	1010	1257	1426	1532	1953
[5,]	2	5	1456	1499	1609	1741	1482	1572	1606

	$ratio.8$	$ratio.9$	$ratio.10$	$ratio.11$	$ratio.12$	$weight.1$	$weight.2$	$weight.3$
[1,]	2035	2115	2262	2267	2517	7861	9251	8706
[2,]	1448	1464	1831	1612	1471	1622	1742	1523
[3,]	1622	1828	2155	2233	2059	1147	1357	1329
[4,]	1123	1343	1243	1762	1306	407	396	348
[5,]	1735	1607	1573	1613	1690	2902	3172	3046

$weight.4$	$weight.5$	$weight.6$	$weight.7$	$weight.8$	$weight.9$	$weight.10$	$weight.11$	$weight.12$
[1,] 8575	7917	8263	9456	8003	7365	7832	7849	9077
[2,] 1515	1622	1602	1964	1515	1527	1748	1654	1861
[3,] 1204	998	1077	1277	1218	896	1003	1108	1121
[4,] 341	315	328	352	331	287	384	321	342
[5,] 3068	2693	2910	3275	2697	2663	3017	3242	3425

$> fit <- cm(\sim cohort + cohort{:}\, state, data = X, ratios = ratio.1{:}\, ratio.12, weights = weight.1{:}\, weight.12, method = "iterative")$

Call:

$cm(formula = \sim cohort + cohort{:}\, state, data = X, ratios = ratio.1{:}\, ratio.12, weights = weight.1{:}\, weight.12, method = "iterative")$

Structure Parameters Estimators

Collective premium: **1746**

Το συλλογικό ασφάλιστρο ή αλλιώς “Collective premium” περιγράφεται από την σχέση

$$\hat{\mu} = X_{zzw} = \sum_{i=1}^{I} \frac{z_i}{z_\Sigma} X_{izw}$$

Between cohort variance: **88981**
Within cohort/Between state variance: **10952**
Within state variance: **139120026**

Τα παραπάνω αφορούν τις εκτιμώμενες παραμέτρους και περιγράφονται από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$Between\ cohort\ variance{:}s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_i}\sum_{t=1}^{n_{ij}} w_{ijt}\left(X_{ijt} - X_{ijw}\right)^2}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_I}\sum_{t=1}^{T_{ij}}\left(n_{ij} - 1\right)}$$

$$Within\ cohort/between\ state\ variance{:}\hat{a} = \frac{\sum_{Ii=1} z_i\left(X_{izw} \_ X_{zzw}\right)^2}{(I-1)}$$

$$Within\ state\ variance{:}\ \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_I} z_{ij}\left(X_{ijw} \_ X_{izw}\right)^2}{\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J_I}(J_I - 1)}$$

$> predict(fit)$

$cohort

[1] **1949 1543**

Τα αποτελέσματα του πακέτου περιγράφουν το εκτιμώμενο ασφάλιστρο που προέκυψε από την παρακάτω σχέση:

$$\mu(\Theta_i)_{Cred} = z_i X_{izw} + (1 - z_i)\mu$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε $i = 1{,}2$ που είναι οι κλάδοι της ασφάλισης.

$state

[1]**2048 1524 1875 1497 1585**

Τα αποτελέσματα του πακέτου περιγράφουν το εκτιμώμενο ασφάλιστρο που προέκυψε από τον παρακάτω τύπο:

$Cred$ $\hat{}(\Theta_i)_{Cred}$

$$\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i) \quad = z_{ij} X_{ijzw} + (1 - z_{ij})\mu$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα έχουμε $i = 1,2$ που είναι οι κλάδοι της ασφάλισης και για τον κάθε κλάδο $J_i = 1,2,3,4,5$ $\;J_1 = 1,3$ και $J_2 = 2,4,5$.

$> summary(fit)$

$\boldsymbol{Call}$:

$$cm(formula = \sim cohort + cohort{:}\ state, data = X, ratios = ratio.1{:}\ ratio.12, weights = weight.1{:}\ weight.12, method = "iterative")$$

Structure Parameters Estimators

$Collective\ premium$: **1746**

$Between\ cohort\ variance$: **88981**
$Within\ cohort/Between\ state\ variance$: **10952**
$Within\ state\ variance$: **139120026**

Level: cohort

$cohort$	$Indiv.mean$	$Weight$	$Cred.Factor$	$Cred.premium$
1	1967	1.407	0.9196	1949
2	1528	1.596	0.9284	1543

Ο πίνακας που προέκυψε αναλύει τα ακόλουθα:

Ind. mean: ατομικός μέσος όρος

$$X_{izw} = \sum_{j=1}^{J_I} \frac{z_{ij}}{z_{i\Sigma}} X_{ijw}$$

Weight: Βάρη

$$w_{i\Sigma\Sigma} = \sum_{j=1}^{J_I} \sum_{t=1}^{n_{ij}} w_{ijt}$$

Cred. Factor: Συντελεστής αξιοπιστίας

$$z_i = \frac{b z_{i\Sigma}}{b z_{i\Sigma} + a} = \frac{z_{i\Sigma}}{z_{i\Sigma} + \frac{a}{b}}$$

Cred. premium: Εκτιμώμενο Ασφάλιστρο

$$\mu(\Theta_i)_{Cred} = z_i X_{izw} + (1 - z_i)\mu$$

Level: state

$Cohort$	$state$	$Indiv.Mean$	$Weight$	$Cred.factor$	$Cred.premium$
1	1	2061	100155	0.8874	2048
2	2	1511	19895	0.6103	1524
1	3	1806	13735	0.5195	1875
2	4	1353	4152	0.2463	1497
2	5	1600	36110	0.7398	1585

Ο πίνακας που προέκυψε αναλύει τα ακόλουθα: Ind.

mean: ατομικός μέσος όρος

$$X_{ijw} = \sum_{t=1}^{n_{ij}} \frac{w_{ijt}}{w_{ij\Sigma}} X_{ijt}$$

Weight: Βάρη

n_{ij}

$$w_{ij\Sigma} = \sum_{t=1} w_{ijt}$$

Cred. Factor: Συντελεστής αξιοπιστίας

$$z_{ij} = \frac{a w_{ij\Sigma}}{a w_{ij\Sigma} + \sigma^2} = \frac{w_{ij\Sigma}}{w_{ij\Sigma} + \frac{\sigma^2}{a}}$$

Cred. premium: Εκτιμώμενο Ασφάλιστρο

$$\widehat{\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)}^{Cred} = z_{ij} X_{ijzw} + (1 - z_{ij}) \widehat{\mu(\Theta_i)}^{Cred}$$

```
> summary(fit, levels = "cohort")
```

Call:

```
cm(formula = ~cohort + cohort: state, data = X, ratios = ratio. 1: ratio. 12,
   weights = weight. 1: weight. 12,method = "Buhlmann − Gisler")
```

Structure Parameters Estimators

Collective premium: **1746**

Between cohort variance: **88981**
Within cohort variance: **10952**

Detailed premiums

Cohort	*Indiv. Mean*	*Weight*	*Cred. factor*	*Cred. premium*
1	1967	1.407	0.9196	1949
2	1528	1.596	0.9284	1543

$> predict(fit, levels = "cohort")$

$cohort

$[\mathbf{1}]\ \mathbf{1949} \quad \mathbf{1543}$

που επιβεβαιώνεται και από τα πρώτα αποτελέσματα που προέκυψαν από το πακέτο.

4.5 Μέθοδος “Ohlsson”

Ο κώδικας παραμένει ο ίδιος και απλώς αλλάζει η μεταβλητή “fit” ως εξής:

$$fit < -\, cm(\sim cohort + cohort{:}\, state, data = X, ratios = ratio.1{:}\, ratio.12, weights = weight.1{:}\, weight.12, method = "Ohlsson")$$

$summary(fit)$

$predict(fit)$

Αποτελέσματα πακέτου Actuar

$cohort

$[\mathbf{1}]\ \mathbf{1946.859} \quad \mathbf{1543.250}$

$state

$[\mathbf{1}]\ \mathbf{2048.750} \quad \mathbf{1523.251} \quad \mathbf{1871.491} \quad \mathbf{1494.229} \quad \mathbf{1585.748}$

$> summary(fit)$

$\boldsymbol{Call}$:

$cm(formula = \sim cohort + cohort{:}\, state, data = X, ratios = ratio.1{:}\, ratio.12, \quad weights$

$= weight.1{:}\, weight.12, method = "Ohlsson")$

Structure Parameters Estimators

$Collective\ premium$: $\mathbf{1745.055}$

$Between\ cohort\ variance$: **88476.11**
$Within\ cohort/Between\ state\ variance$: **11628.45**
$Within\ state\ variance$: **139120026**

Detailed premiums

Level: cohort

$Cohort$	$Indiv.Mean$	$Weight$	$Cred.Factor$	$Cred.premium$
1	1965.436	1.427755	0.9157058	1946.859
2	1527.011	1.633248	0.9255216	1543.250

Level: state

$cohort$	$state$	$Indiv.mean$	$Weight$	$Cred.Factor$	$Cred.premium$
1	1	2060.921	100155	0.8932938	2048.750
2	2	1511.224	19895	0.6244749	1523.251
1	3	1805.843	13735	0.5344614	1871.491
2	4	1352.976	4152	0.2576359	1494.229
2	5	1599.829	36110	0.7511373	1585.748

$> summary(fit, levels = "cohort")$

$\boldsymbol{Call}$:

$cm(formula = \sim cohort + cohort: state, data = X, ratios = ratio.1: ratio.12, \quad weights = weight.1: weight.12, method = "Ohlsson")$

Structure Parameters Estimators

$Collective\ premium$: **1745.055**

$Between\ cohort\ variance$: **88476.11**
$Within\ cohort\ variance$: **11628.45**

Detailed premiums

$cohort$	$Indiv.mean$	$Weight$	$Cred.Factor$	$Cred.premium$
1	1965.436	1.427755	0.9157058	1946.859
2	1527.011	1.633248	0.9255216	1543.250

$> predict(fit, levels = "cohort")$

$\$cohort$

$[\mathbf{1}]\ \mathbf{1946.859 \quad 1543.250}$

4.6 Μέθοδος Bühlmann-Gisler

$fit < -\,cm(\sim cohort + cohort{:}\, state, data = X, ratios$
$= ratio.1{:}\, ratio.12, weights = weight.1{:}\, weight.12, method$
$= "Buhlmann - Gisler")$

$summary(fit)$

$predict(fit)$

Αποτελέσματα πακέτου Actuar

$cohort

$[\mathbf{1}]\ \mathbf{1941.675 \quad 1542.765}$

$state

$[\mathbf{1}]\ \mathbf{2049.733 \quad 1522.032 \quad 1864.280 \quad 1488.504 \quad 1587.097}$

$> summary(fit)$

$\boldsymbol{Call}$:

$cm(formula = \sim cohort + cohort{:}\, state, data = X, ratios = ratio.1{:}\, ratio.12,$

$weights = weight.1{:}\, weight.12, method = "Buhlmann - Gisler")$

Structure Parameters Estimators

$Collective\ premium$: $\mathbf{1742.22}$

$Between\ cohort\ variance$: $\mathbf{87263.7}$
$Within\ cohort/Between\ state\ variance$: $\mathbf{13414.84}$
$Within\ state\ variance$: $\mathbf{139120026}$

Detailed premiums

Level: cohort

$Cohort$	$Indiv.Mean$	$Weight$	$Cred.factor$	$Cred.Premium$
1	1962.45	1.475955	0.9056702	1941.675
2	1524.94	1.720129	0.9179619	1542.765

Level: state

$cohort$	$state$	$Indiv.mean$	$Weight$	$Cred.Factor$	$Cred.premium$
1	1	2060.921	100155	0.9061701	2049.733
2	2	1511.224	19895	0.6573469	1522.032
1	3	1805.843	13735	0.5697845	1864.280
2	4	1352.976	4152	0.2858991	1488.504
2	5	1599.829	36110	0.7768832	1587.097

$> summary(fit, levels = "cohort")$

$\boldsymbol{Call}$:

$$cm(formula = \sim cohort + cohort: state, data = X, ratios = ratio.1: ratio.12,$$
$$weights = weight.1: weight.12, method = "Buhlmann - Gisler")$$

Structure Parameters Estimators

$Collective\ premium$: $\mathbf{1742.22}$

$Between\ cohort\ variance$: $\mathbf{87263.7}$
$Within\ cohort\ variance$: $\mathbf{13414.84}$

Detailed premiums

$Cohort$	$Indiv.mean$	$Weight$	$Cred.factor$	$Cred.Premium$
1	1962.45	1.475955	0.9056702	1941.675
2	1524.94	1.720129	0.9179619	1542.765

$> predict(fit, levels = "cohort")$

$\$cohort$

$[1]\ \mathbf{1941.675}\quad \mathbf{1542.765}$

4.7 Αποτελέσματα μεθόδων

"Iterrative"

Κλάδος Ασφάλισης

i	$\mu(\Theta_i)_{Cred}$
1	1949
2	1543

Ασφαλιστήρια Συμβόλαια

j	$\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)^{Cred}$
1	2048
2	1524
3	1875
4	1497
5	1585

“Ohlsson”

Κλάδος Ασφάλισης

i	$\mu(\Theta_i)_{Cred}$
1	1947
2	1543

Ασφαλιστήρια Συμβόλαια

j	$\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)^{Cred}$
1	2049
2	1523
3	1871
4	1494
5	1586

“Bühlmann-Gisler”

Κλάδος Ασφάλισης

i	$\mu(\Theta_i)_{Cred}$
1	1942
2	1543

Ασφαλιστήρια Συμβόλαια

j	$\mu(\Theta_{ij}, \Theta_i)^{Cred}$
1	2050
2	1522
3	1864
4	1489
5	1587

4.8 Σχόλια και παρατηρήσεις:

Γίνεται άμεσα αντιληπτό ότι το καθαρό ασφάλιστρο, τόσο σε επίπεδο κλάδου της ασφάλισης όσο και σε επίπεδο ασφαλιστηρίου συμβολαίου, εξαρτάται από την μέθοδο που θα χρησιμοποιηθεί. Η διαφορά των μεθόδων έγκειται στον τρόπο που εκτιμούνται οι παράμετροι $a, b\ και\ \sigma^2$. Παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα των μεθόδων "Itterative" και "Ohlsson" είναι σχετικά κοντά. Από την άλλη, όσον αφορά τη μέθοδο " BühlmannGisler", παρατηρούνται μεγαλύτερες διαφορές στο καθαρό ασφάλιστρο με σύγκριση με τις δύο προηγούμενες μεθόδους. Αυτό συμβαίνει γιατί υπάρχει μεροληψία καθώς οι εκτιμητές εκράζονται μόνο με θετικό πρόσημο.

Συμπερασματικά, θα πρέπει να επισημανθεί πως **δεν υπάρχει μέθοδος που να θεωρείται περισσότερο ή λιγότερη σωστή**, καθώς όλα εξαρτώνται από τον τρόπο που μια ασφαλιστική εταιρεία θέλει να εκτιμήσει τις παραμέτρους.

Επίλογος

Το ιεραρχικό μοντέλο είναι ένα πολύ σημαντικό εργαλείο στον κόσμο των ασφαλίσεων καθώς δίνει την δυνατότητα να γίνει κατανομή των κινδύνων από “πάνω προς τα κάτω”, δηλαδή ιεραρχικά. Η αναφορά μας ξεκίνησε από την Μπεϋζιανή στατιστική, καθώς αυτή αποτελεί βασικό πυλώνα.

Στο Κεφάλαιο 1 ορίσθηκε το θεώρημα του Bayes το οποίο αναλύει τον τρόπο με τον οποίο υπολογίζεται η εκ των υστέρων κατανομή η οποία επηρεάζεται από την παράμετρο θ. Με τον τρόπο αυτό δίνεται βάση στο πόσο σημαντική και καθοριστική είναι η παράμετρος και σε τι βαθμό θα επηρεάσει το ασφάλιστρο αξιοπιστίας. Έπειτα, αναλύθηκε η Εμπειρική Μπεϋζιανή στατιστική, ο τρόπος με τον οποίο χρησιμοποιείται από στον κλάδο των ασφαλίσεων καθώς και οι ομοιότητες και διαφορές με την απλή Μπεϋζιανή στατιστική. Παράλληλα, δόθηκε ο ορισμός τις ιεραρχικής αξιοπιστίας ο οποίος αποτελεί σημαντικό υπόβαθρο στην ανάλυση του μοντέλου αξιοπιστίας που ακολούθησε στο Κεφάλαιο 3.

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε τον ορισμό της αξιοπιστίας χαρτοφυλακίου. Αναλύθηκαν κάποιες εισαγωγικές έννοιες (όπως ο ορισμός του εκτιμώμενου ασφαλίστρου κοκ), οι οποίες μας βοήθησαν να κατανοήσουμε καλύτερα τις αντίστοιχες επακόλουθες του ιεραρχικού μοντέλου. Φυσικά αναφέρθηκε το μοντέλο των Buhlmann και Buhlmann-Straub στο κομμάτι της εκτίμησης του ασφαλίστρου αξιοπιστίας.

Στο Κεφάλαιο 3 αναλύθηκε λεπτομερώς το ιεραρχικό μοντέλο. Σε αρχικό στάδιο είδαμε ότι ένα τέτοιο μοντέλο απεικονίζεται με την μορφή “ιεραρχικού δέντρου» (hierarchical tree). Στην πορεία αναφέρθηκαν οι υποθέσεις που πρέπει να ισχύουν για το ιεραρχικό μοντέλο και αναλύθηκαν οι παράμετροι για δύο και τρία επίπεδα. Έπειτα ορίσθηκε το ιεραρχικό ασφάλιστρο αξιοπιστίας και παρουσιάστηκαν 3 μέθοδοι υπολογισμών των παραμέτρων οι οποίες αλλάζουν και την ποσότητα του ιεραρχικού ασφαλίστρου (“iterrative”,”Ohlsonn” and “ Bühlmann-Gisler”).

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάσθηκαν αριθμητικά παραδείγματα χρησιμοποιώντας δεδομένα του Hachemeister με την βοήθεια του πακέτου της R. Ο κώδικας εκτελέστηκε για κάθε μία από τις προαναφερθείσες μεθόδους σχολιάστηκαν τα αποτελέσματα και συνδέθηκαν με τα αντίστοιχα κομμάτια της θεωρίας του Κεφαλαίου 3.

Στόχος της εργασίας ήταν να αναδειχθεί η αξία της ιεραρχικής αξιοπιστίας. Η συγκεκριμένη μέθοδος ανταποκρίνεται σε μεγάλο βαθμό στην πολύπλοκη δομή που μπορεί να έχει μια ασφαλιστική εταιρεία καθώς διαχωρίζει το χαρτοφυλάκιο σε επίπεδα έχοντας έτσι καλύτερη εικόνα για το πώς θα διαχειριστεί τον κίνδυνο.

Ευελπιστώ η διπλωματική εργασία να έγινε κατανοητή και να κάλυψε σε μεγάλο βαθμό τις απορίες σας. Θεωρώ ότι ήταν μια πολύ ενδιαφέρουσα έρευνα, η οποία δύναται να επεκταθεί σε ακόμη μεγαλύτερο βάθος και έκταση.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΗ

- Bühlmann, H. and Gisler, A. (2005). A Course in Credibility Theory and its Applications, Springer.
- Ohlsson, E. (2005). Simplified estimation of structure parameters in hierarchical credibility.
- Klugman, S.A. (1992): Bayesian statistics in actuarial science: With emphasis on credibility. Boston: Kluwer Academic.
- Herzog, T.N. (1989): Credibility: The Bayesian model versus Buhlmann's model, Vol. 41. Transactions of Society of Actuaries.
- Goovaerts J. and Hoogstad, W. J. (1987). Credibility Theory.
- Belhadj, H., Vincent Goulet, V. and Tommy Ouellet, T., (2009). On Parameter Estimation in Hierarchical Credibility. ASTIN Bulletin, 39(2) 495 - 514.
- The use of collateral data in credibility theory a hierarchical model.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

- Πιτσέλης, Γ. (2018). Πανεπιστημιακές Σημειώσεις - Πανεπιστήμιο Πειραιώς.