ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Π.Μ.Σ. ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΑΣΦΑΛΙΣΕΩΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΟΔΗΓΙΑ ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑ ΙΙ

Ορέστης Χατζηνώτας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2020

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Π.Μ.Σ. ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΑΣΦΑΛΙΣΕΩΝ ΜΕ ΒΑΣΗ ΤΗΝ ΕΥΡΩΠΑΪΚΗ ΟΔΗΓΙΑ ΦΕΡΕΓΓΥΟΤΗΤΑ ΙΙ

Ορέστης Χατζηνώτας

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή, που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Σταστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Πιτσέλης Γεώργιος (Επιβλέπων)
- Βερροπούλου Γεωργία
- Σεβρόγλου Βασίλειος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

METHODS OF RATEMAKING FOR NON-LIFE INSURANCE BASED ON SOLVENCY II

By

Orestis Chatzinotas

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

September 2020

Ευχαριστίες

Πριν την έναρξη αυτής της εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά αρχικά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Πιτσέλη Γεώργιο για την καθοδήγηση αλλά και την κατανόηση που έδειξε καθ' όλη την διάρκεια της συγγραφής αυτής της εργασίας κι έπειτα τα αξιότιμα μέλη της επιτροπής αξιολόγησης, κα Βερροπούλου Γεωργία και κ. Σεβρόγλου Βασίλειο.

Επιπλέον, ευχαριστώ τους γονείς μου, Γιώργο και Βιολέττα για την στήριξη στην διάρκεια των μεταπτυχιακών σπουδών μου και την Ισαβέλα για τις πολύτιμες συμβουλές της.

Περίληψη

Η τιμολόγηση ενός ασφαλίστρου ζημιών διαφέρει αισθητά από την τιμολόγηση ενός προϊόντος ή μίας υπηρεσίας. Είναι μία περίπλοκη διαδικασία, καθώς λαμβάνει υπόψιν περισσότερες παραμέτρους αλλά και μελλοντικά κόστη τα οποία πρέπει να εκτιμηθούν στο σήμερα. Επιπλέον το γεγονός ότι κάθε είδους ασφάλιση καλείται να διαχειριστεί διαφορετικό είδος κινδύνου, με ανομοιογενείς ομάδες ασφαλισμένων, κάνει το έργο της τιμολόγησης ακόμη πιο δύσκολο.

Στην παρούσα εργασία γίνεται μια εκτενής αναφορά στις θεμελιώδεις έννοιες της ασφάλισης και πιο συγκεκριμένα του κλάδου της ασφάλισης ζημιών, που στοχεύουν στην εξοικείωση του αναγνώστη με την διαδικασία της τιμολόγησης. Έπειτα, παρουσιάζεται συνοπτικά η λειτουργία του κανονιστικού πλαισίου Solvency II και οι προϋποθέσεις που θέτει στους ασφαλιστικούς οργανισμούς αναφορικά με την διατήρηση ενός κεφαλαίου ασφαλείας, το οποίο εγγυάται την φερεγγυότητα του οργανισμού απέναντι στις υποχρεώσεις και τους πελάτες της και ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο της χρεοκοπίας. Επιπλέον, παρουσιάζεται η διαδικασία τιμολόγησης ενός ασφαλίστρου με τον συνυπολογισμό των εξόδων, του κόστους και του στόχου-κέρδους που συνδέονται με το κάθε ασφάλιστρο.

Παρόλο που η ασφάλιση κατά ζημιών μπορεί να περιλαμβάνει διαφορετικά είδη ασφάλισης, όπως ασφάλιση κατά πυρός, ασφάλεια αυτοκινήτου, κλοπής κ.λπ., τα παραδείγματα και η προσομοίωση που χρησιμοποιήθηκαν, εστιάζουν στην ασφάλιση αυτοκινήτων με κοινή μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο (αυτοκίνητο-έτος), ώστε να υπάρχει μια ομοιογένεια αλλά και με σκοπό να γίνουν πιο κατανοητές στον αναγνώστη οι έννοιες που χρησιμοποιούνται καθώς και η σύγκριση μεταξύ των διαφορετικών γραμμικών μοντέλων και κατανομών που εφαρμόζονται. Η προσομοίωση εστιάζει στην εκτίμηση του καθαρού ασφαλίστρου (pure premium).

Στην εφαρμογή της προσομοίωσης των γραμμικών μοντέλων μέσω του στατιστικού πακέτου της R, γίνεται προσπάθεια όχι μόνο για την εκτίμηση του καθαρού ασφαλίστρου, αλλά κυρίως για την αξιολόγηση της αξιοπιστίας του εκάστοτε μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε για την εκτίμηση αυτού. Η αξιολόγηση αυτή επιτυγχάνεται μέσω χρήσης τριών διαφορετικών μέτρων, αρχικά χωρίς χρήση τυχαίων επιδράσεων, έπειτα με την προσθήκη μία σταθεράς τυχαίας επίδρασης και τέλος με την προσθήκης μίας επιπλέον τυχαίας μεταβλητής επίδρασης. Ο στόχος της αξιολόγησης είναι να δούμε αν και κατά πόσο συμφωνούν τα μέτρα εκτίμησης με το μοντέλο των κατανομών πλήθους και μεγέθους ζημιών που όντως προσομοιώθηκε. Αυτό οδηγεί σε μία πιο ολοκληρωμένη εικόνα για το κάθε μοντέλο και τον βαθμό αξιοπιστίας του.

Abstract

Pricing in general insurance differs significantly from pricing of products/goods or other kinds of services. It is a more complicated procedure as it takes into consideration multiple parameters and future costs that need to be calculated to present prices. Moreover, the fact that each kind of insurance has to deal with a different kind of risk (Exposure) with disparate groups of insured makes the whole process of pricing a lot harder.

In this thesis, a reference to the fundamental terms of insurance and more specifically of general insurance is used, in order to familiarize the reader with the pricing procedure. Afterwards, there is a reference to the Solvency II prudential framework and the requirements it establishes to insurance organizations regarding the economic capital required, in order to assure the organization's solvency and to minimize the risk of bankruptcy. Moreover, the process of estimating the pure premium is analysed, while factoring in the expenses, the cost and the target-profit associated with the premium

Despite the fact that general insurance consists of different kinds of insurance programs and therefore premiums, such as fire insurance, vehicle insurance, property insurance etc., the examples and the simulation are centered around vehicle insurance with an unchanged Exposure, in order to help the reader understand the terms used, as well as the comparison between the different linear models and distributions used. The simulation focuses on the estimation of Pure Premium.

In the application of the simulation of linear models through the R project, we try not only to estimate the Pure Premium but to evaluate the credibility of the model used for the pure premium. This evaluation is achieved through the use of three measurements, first without random effects, then with the use of one random effect and last with two random effects. The goal of this evaluation is to test to what degree the evaluation process picks out the same model for frequency and severity as the one used in the simulation. This procedure leads to clear indications regarding the level of the model's credibility.

Πίνακας περιεχομένων

Περίληψη..........

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή **1**

1.1. Αντικείμενο της εργασίας.......... 1

1.2. Είδη γενικών ασφαλίσεων 2

1.2.1. Ασφάλεια οχήματος – (Vehicle insurance) 3

1.2.2. Ασφάλεια κατοικίας – (Home insurance) 4

1.2.3. Ασφάλεια υγείας – (Health insurance) 6

1.2.4. Ναυτασφάλιση – (Marine insurance) 8

1.2.5. Ταξιδιωτική ασφάλεια – (Travel insurance) 10

1.2.6. Λοιπές κατηγορίες 12

Κεφάλαιο 2. Τιμολόγηση & Solvency II **13**

2.1. Η έννοια της τιμολόγησης.......... 13

2.2. Η έννοια του κινδύνου 15

2.3. Η έννοια της φερεγγυότητας 16

2.4. Αξία σε κίνδυνο (Value at Risk).......... 17

2.5. Ο δρόμος από το Solvency I σε Solvnecy II 19

2.6. Αρχές του Solvency II 22

2.6.1. Αρχή της αναλογικότητας (Principle of proportionality) 23

2.6.2. Αρχή του συνετού επενενδυτή 23

2.6.3. Αρχή των τεσσάρων ματιών (four eyes principle) 24

2.6.4. Αρχή του ικανού στελέχους 24

2.7. Οικονομικό Κεφάλαιο 25

2.7.1. Ελάχιστη Κεφαλαιακή Απαίτηση & Κεφαλαιακή Απαίτηση Φερεγγυότητας 26

2.7.2. Μοντέλα υπολογισμού των κινδύνων 28

2.7.3. Κοινή προσέγγιση 29

2.7.4. Εσωτερικό υπόδειγμα.......... 29

2.7.5. Μερικώς εσωτερικό υπόδειγμα 30

Κεφάλαιο 3. Θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας τιμολόγησης **31**

3.1 Βασικές ασφαλιστικές έννοιες.......... 31

3.2. Η διάρκεια ζωής μιας ζημιάς 34

3.3. Ολική ζημιά ... 39
3.4. Θεμελιώδεις τεχνικές τιμολόγησης ... 40
3.5. Βασικοί δείκτες και ορισμοί ... 43
3.6. Συνδυαστικός δείκτης ... 46
3.7. Τιμολόγηση-Ιστορικότητα ... 49
3.7.1. Ενδεικτική τιμή ... 51
3.7.2. Ενδεικτικός συντελεστής (IRF) ... 52
Κεφάλαιο 4. Γραμμικά μοντέλα εκτίμησης ... 54
4.1. Εισαγωγικές έννοιες ... 54
4.2. Το κλασικό γραμμικό μοντέλο ... 55
4.2.1.Εκτίμηση ... 56
4.3. Το γενικευμένο γραμμικό μοντέλο ... 57
4.3.1. Μονοπαραμετρική εκθετική οικογένεια κατανομών ... 58
4.3.2. Στατιστικό μοντέλο ... 60
4.3.3. Εκτίμηση παραμέτρων ... 61
4.3.4. Μελέτη καταλληλόλητας μοντέλου ... 62
4.4. Το γενικευμένο γραμμικό μικτό μοντέλο ... 63
4.5. Μοντέλα για ασφαλιστικά δεδομένα ... 64
4.5.1. Γενικευμένα γραμμικά μοντέλα για την συχνότητα ζημιών ... 64
4.5.2. Γενικευμένα γραμμικά μοντέλα για το μέγεθος ζημιών ... 66
4.6. Προσομοίωση ... 67
4.6.1. Δεδομένα ... 67
4.6.2. Επιδράσεις των παραγόντων ... 69
4.6.3. Πλήθος και μεγέθη ζημιών ... 71
4.6.4. Πραγματικό ασφάλιστρο (pure premium) ... 72
4.6.5. Εκτιμηθέν ασφάλιστρο (estimated premium) ... 73
4.6.6. Αξιολόγηση μοντέλων και επιλογή ... 76
Κεφάλαιο 5. Αριθμητική εφαρμογή ... 77
5.1. Μοντέλο με μία τυχαία επίδραση ... 77
5.1.1. Poisson-Gamma ... 78
5.1.2. Poisson-Inverse Gaussian ... 81
5.1.3. Negative binomial-Gamma ... 83

5.1.4. Negative binomial-Inverse Gaussian 86
5.1.5. Γενικά συμπεράσματα προσομοίωσης 87
5.2. Μοντέλο με δύο τυχαίες επιδράσεις 88
5.2.1. Poisson-Gamma 89
5.2.2. Poisson-Inverse Gaussian 90
5.3. Συμπεράσματα 92
Κεφάλαιο 6. Επίλογος 93
Παράρτημα-Κώδικας **95**
Βιβλιογραφία **126**
Ξένη Βιβλιογραφία 126
Ελληνική Βιβλογραφία 129

Κεφάλαιο 1. Εισαγωγή

1.1. Αντικείμενο της διπλωματικής

Η συγκεκριμένη εργασία ανήκει στο επιστημονικό πλαίσιο της αναλογιστικής επιστήμης και πραγματεύεται ένα από τα πιο βασικά αντικείμενα μίας ασφαλιστικής εταιρίας που δεν είναι άλλο από την τιμολόγηση. Ο σκοπός της τιμολόγησης είναι η διαδικασία καθορισμού τιμών ασφαλιστηρίων συμβολαίων μελλοντικής περιόδου. «Η τιμή που πληρώνει ένας καταναλωτής σε μια ασφαλιστική εταιρία για να ασφαλιστεί από έναν ή περισσότερους κινδύνους ονομάζεται ασφάλιστρο και υπολογίζεται με βάση μια ορισμένη τιμή ανά μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο» (Πιτσέλης, 2020).

Το πιο σημαντικό ερώτημα στην διαδικασία ασφάλισης είναι ο προσδιορισμός του «σωστού ασφαλίστρου». Σωστό ασφάλιστρο θεωρείται εκείνο που εξασφαλίζει στον ασφαλιστικό οργανισμό επαρκή έσοδα και αποθέματα, ώστε να καλυφθούν τουλάχιστον τα έξοδά του, τα οποία αποτελούνται από μελλοντικές αποζημιώσεις προς τους ασφαλισμένους, προμήθειες, φόρους και άδειες, καθώς και λειτουργικά έξοδα.

Ταυτόχρονα, αποτελεί υποχρέωση του ασφαλιστικού οργανισμού, να διατηρεί το ασφάλιστρο «δίκαιο» ως προς τους ασφαλισμένους αλλά και ανταγωνιστικό ως προς την αγορά, το προς ασφάλιση προϊόν και τα κόστη και έξοδα που συνδέονται με το εκάστοτε ασφάλιστρο. Ένα πολύ υψηλό ασφάλιστρο αποθαρρύνει τους εν δυνάμει ασφαλισμένους και τους οδηγεί σε ανταγωνιστικές εταιρίες, ενώ ένα πολύ χαμηλό ασφάλιστρο θέτει σε κίνδυνο το πλεόνασμα του οργανισμού και ενέχει κίνδυνο αφερεγγυότητας. Εάν η ασφαλιστική εταιρία χρεώνει στους πελάτες της το «σωστό ασφάλιστρο», τότε μπορεί να λειτουργεί απρόσκοπτα θεωρητικά «εις το διηνεκές».

Ο κλάδος των γενικών ασφαλίσεων είναι ευρύς και το εκάστοτε είδος διαφέρει ως προς το είδος του κινδύνου που ασφαλίζει. Τα είδη του κλάδου των ασφαλίσεων ζημιών αναλύονται παρακάτω καθώς και το ποιοι είναι οι παράγοντες που επηρεάζουν το ύψος του ασφαλίστρου, ποια είναι τα κόστη που συνδέονται με αυτό αλλά και ποιες οι υποχρεώσεις του ασφαλιστικού οργανισμού απέναντι στον νομοθέτη.

1.2. Είδη γενικών ασφαλίσεων – (Non-life insurance)

Ο κλάδος των γενικών ασφαλίσεων περιλαμβάνει όλα τα είδη ασφάλισης πλην των ασφαλίσεων ζωής (non-life). Τα είδη ασφάλισης που ανήκουν στον συγκεκριμένο κλάδο, κυρίως στις Η.Π.Α., είναι γνωστά και με το όνομα ασφάλεια περιουσίας (property-liability insurance).

Ανάλογα με το εκάστοτε είδος γενικών ασφαλίσεων, λαμβάνονται υπόψιν διαφορετικά χαρακτηριστικά κινδύνου στον τελικό προσδιορισμό του ασφαλίστρου, καθώς η μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο είναι διαφορετική για κάθε είδος. Τα χαρακτηριστικά αυτά χρησιμοποιούνται για κατηγοριοποίηση των ασφαλισμένων σε ομοιογενείς ομάδες κινδύνου, με σκοπό τον πιο εύκολο υπολογισμό του ασφαλίστρου αλλά και την καλύτερη διαχείριση του κινδύνου, στον οποίο είναι εκτεθειμένη η ασφαλιστική εταιρία. Κάθε ομάδα κινδύνου λοιπόν πληρώνει ασφάλιστρο ανάλογο του κινδύνου που διατρέχει, δηλαδή ανάλογο του αναμενόμενου κόστους της. Αυτό σημαίνει ότι κάθε ασφάλιστρο καλύπτει κατά μέσο όρο την ζημιά της ομάδας κινδύνου στην οποία ανιστοιχεί (Πιτσέλης, 2020). Για παράδειγμα, με βάση τα δεδομένα μίας ασφαλιστικής εταιρίας, στο κέντρο της Αθήνας γίνονται περισσότερα ατυχήματα απ' ότι στα βόρεια προάστια. Αυτή η πληροφορία που προκύπτει από τα δεδομένα, θα έχει άμεση επίπτωση στο τελικό ασφάλιστρο ενός αυτοκινήτου, αφού δημιουργεί τουλάχιστον δύο ομάδες με διαφορετικά χαρακτηριστικά κινδύνου, του οδηγούς-κατοίκους κέντρου και τους οδηγούς-κατοίκους βορείων προαστίων. Με βάση το παραπάνω παράδειγμα, το ασφάλιστρο αυτοκινήτου του κατοίκου κέντρου θα είναι μεγαλύτερο απ' ότι του κατοίκου των προαστίων ή ακόμη μεγαλύτερο του κατοίκου επαρχίας.

Παρακάτω παρουσιάζονται αντίστοιχα παραδείγματα, αναφέρονται τα χαρακτηριστικά κατηγοριοποίησης των ομάδων ασφαλισμένων στο εκάστοτε είδος γενικών ασφαλίσεων και αναλύονται οι καλύψεις που είθισται να παρέχει ένας ασφαλιστικός οργανισμός, καθώς και οι εκπτώσεις/ελαφρύνσεις που ενδέχεται να προσφέρει.

1.2.1. Ασφάλεια οχήματος - (Vehicle insurance)

Ασφάλεια οχήματος ονομάζεται η ασφαλιστική κάλυψη αυτοκινήτων, μηχανών, φορτηγών και άλλων μηχανοκίνητων οχημάτων δρόμου. Η κύρια χρήση της είναι η κάλυψη έναντι σωματικής βλάβης ή τραυματισμού οφειλόμενου σε τροχαία ατυχήματα αλλά και έναντι ευθύνης που προκύπτει από τροχαία συμβάντα.

Σε πολλές χώρες, συμπεριλαμβανομένης και της Ελλάδας, είναι πλέον υποχρεωτικό για ένα όχημα να είναι ασφαλισμένο, ώστε να έχει νόμιμη άδεια κυκλοφορίας. Η υποχρεωτική ασφάλιση οχημάτων εμφανίστηκε για πρώτη φορά στο Ηνωμένο Βασίλειο με τον νόμο οδικής κυκλοφορίας το 1930 (Road Traffic Act).

Οι βασικές καλύψεις που παρέχει ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο αυτοκινήτου μετά την εμφάνιση ζημιογόνου ενδεχομένου, αφορούν τα ιατρικά έξοδα του ασφαλισμένου, την ζημιά περιουσίας που προκλήθηκε από τον ίδιο, το ασφαλισμένο όχημα καθώς και τρίτους, είτε πρόκειται για άλλο όχημα και την ζημιά που προκλήθηκε σε αυτό, είτε για τραυματισμό τρίτου που ενεπλάκησε στο ατύχημα. Επίσης, συνηθίζεται το ασφαλιστήριο συμβόλαιο οχήματος να καλύπτει την ρυμούλκηση οχήματος ή το κόστος ενοικίασης εφεδρικού οχήματος.

Επιπλέον καλύψεις σε ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο αυτοκινήτου μπορεί να αφορούν κάλυψη έναντι πυρκαγιάς, κλοπής, φυσικών καταστροφών ή και βανδαλισμών, ανάλογα με τους όρους του εκάστοτε συμβολαίου και την τρέχουσα νομοθεσία.

Το ασφάλιστρο προκύπτει με υπολογισμό του αναλογιστικού τμήματος ανάλογα με παράγοντες που επηρεάζουν το αναμενόμενο κόστος μελλοντικών απαιτήσεων (Werner et al., 2010). Τα χαρακτηριστικά κινδύνου, όπως ονομάζονται, αντλούνται από στατιστικά στοιχεία. Ενδέχεται να αφορούν είτε τον οδηγό: ηλικία, φύλο, χρόνια εμπειρίας, οικογενειακή κατάσταση, τόπος κατοικίας κ.α., είτε το όχημα: έτος κυκλοφορίας, είδος καυσίμου, είδος χρήσης, κυβικά εκατοστά και ιπποδύναμη, είτε το ίδιο το ασφαλιστήριο συμβόλαιο: διάρκεια συμβολαίου και είδος καλύψεων (Insurance Information Institute, 2020). Όλα τα παραπάνω χαρακτηριστικά έχουν σκοπό την κατηγοριοποίηση και τον καθορισμό της ομάδας κινδύνου και άρα το ύψος του ασφαλίστρου που θα κληθεί να πληρώσει ο ασφαλισμένος (AXA, 2020). Τα βασικότερα χαρακτηριστικά κινδύνου για την ασφάλιση οχήματος αναφέρονται παρακάτω.

Όπως αναφέρθηκε και παραπάνω, η περιοχή διαμονής ενός ασφαλισμένου επηρεάζει σημαντικά το τελικό ασφάλιστρο. Περιοχές με υψηλό δείκτη εγκληματικότητας ή πυκνοκατοικημένες περιοχές, οδηγούν σε υψηλότερο ασφάλιστρο. Αντίθετα, επαρχιακές πόλεις ή γειτονιές με χαμηλή κινητικότητα οχημάτων, συνήθως αντιστοιχούν σε χαμηλότερο ασφάλιστρο.

Μέχρι πρόσφατα το φύλο του οδηγού επηρέαζε σημαντικά το ύψος του ασφαλίστρου, εξαιτίας του ότι συνήθως οι νεαροί άνδρες οδηγοί ήταν πιο επιρρεπείς σε οδήγηση με υψηλές ταχύτητες και σε ατυχήματα σε σχέση με τις αντίστοιχες ηλικίες του γυναικείου φύλου. Παρόλο που η διάκριση μεταξύ ανδρών και γυναικών οδηγών έχει κριθεί πλέον μη επιτρεπτή, οι ασφαλιστικές εταιρίες συνεχίζουν να διαχωρίζουν τους οδηγούς με βάση το επάγγελμά τους και ενίοτε το χρησιμοποιούν σαν έμμεσο διαχωρισμό φύλου αναλόγως των επαγγελμάτων που επιλέγουν κατά κύριο λόγο οι άντρες (Palmer, 2015). Πέραν της παραπάνω διάκρισης, κάποιες ασφαλιστικές εταιρίες συνήθως λαμβάνουν υπόψιν το είδος του επαγγέλματος του οδηγού, το πόσο συχνά αυτό απαιτεί μετακίνηση, το είδος της μετακίνησης κι αν το όχημα θα φέρει συχνά φορτίο ή όχι.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό κατηγοριοποίησης των ασφαλισμένων, είναι η ηλικία τους. Γενικά, οι νέοι και οι ηλικιωμένοι οδηγοί, τείνουν να έχουν υψηλότερα ασφάλιστρα σε σχέση με τους οδηγούς μέσης ηλικίας. Επιπλέον, στον καθορισμό του ύψους του ασφαλίστρου παίζει ρόλο και η οικογενειακή κατάσταση του ασφαλισμένου. Βάσει στατιστικών στοιχείων, έχει αποδειχθεί ότι τα παντρεμένα ζευγάρια εμπλέκονται σε λιγότερα ατυχήματα συγκριτικά με ανύπαντρους ασφαλισμένους. Αυτό οδηγεί σε χαμηλότερα ασφάλιστρα για παντρεμένα ζευγάρια (Imbert, 2015)

Πολλές ασφαλιστικές εταιρίες παρέχουν μία άτυπη επιβράβευση, εν είδει έκπτωσης ασφαλίστρου, σε οδηγούς που λαμβάνουν επιπλέον μέτρα ασφαλείας, όπως πυροσβεστήρας αυτοκινήτου, συναγερμός, κάμερα καταγραφής οδήγησης, gps εντοπισμού αυτοκινήτου (Megna, 2020).

1.2.2. Ασφάλεια κατοικίας - (Home insurance)

Η ασφάλεια κατοικίας αποτελεί μία άλλη πολύ μεγάλη κατηγορία των γενικών ασφαλίσεων, η οποία κατά βάση καλύπτει ένα ιδιόκτητο οίκημα και τα περιεχόμενά του. Τα ασφαλιστήρια συμβόλαια κατοικίας παρέχουν ταυτόχρονα καλύψεις για την ίδια την ιδιοκτησία, δηλαδή πιθανές ζημιές στην περιουσία του ασφαλισμένου, αλλά και καλύψεις αστικής ευθύνης για τυχόν τραυματισμούς και υλικές ζημιές που προκαλούνται σε τρίτους.

Οι περισσότερες ασφαλιστικές εταιρίες διαχωρίζουν τις καλύψεις τις οποίες παρέχουν σε ένα συμβόλαιο ασφάλισης κατοικίας σε τρία επίπεδα. Η πρώτη κατηγορία κινδύνων αποτελείται από τους βασικούς κινδύνους που απειλούν έναν ασφαλισμένο και την κατοικία του. Αυτοί συνήθως είναι πυρκαγιά, άμεση πτώση κεραυνού, έκρηξη, καπνός, πτώση αεροσκάφους, σύγκρουση οχήματος, αξία αποκατάστασης καινουργούς και κάλυψη τεχνικής βοήθειας.

Το δεύτερο επίπεδο αποτελείται από μεγαλύτερο εύρος κινδύνων πέραν των καλύψεων του πρώτου επιπέδου που επίσης συμπεριλαμβάνονται. Τέτοιοι κίνδυνοι μπορεί να είναι κακόβουλες ή τρομοκρατικές ενέργειες, πλημμύρα/θύελλα/καταιγίδα/χιόνι/χαλάζι/παγετός, ζημιές και κλοπή από διάρρηξη ή ληστεία, αμοιβές αρχιτεκτόνων – μηχανικών, έξοδα προσωρινής στέγασης ή απώλεια ενοικίων, αστική ευθύνη οικογενειάρχη, κάλυψη θυρίδας τραπέζης και έξοδα εντοπισμού ζημιάς.

Το τρίτο επίπεδο καλύψεων αφορά συμπληρωματικές ή ειδικές καλύψεις όπως σεισμός ή πυρκαγιά σεισμού, κάλυψη έργων τέχνης και κοσμημάτων, κάλυψη υπαίθριων εγκαταστάσεων ή αντικειμένων στον ύπαιθρο (AXA, 2020).

Τα ασφαλιστήρια συμβόλαια κατοικίας, είναι συνήθως ετήσια και αποτελούν μία υπόσχεση αποζημίωσης εκ μέρους της ασφαλιστικής εταιρίας, ώστε η ασφαλισμένη κατοικία και τα περιεχόμενα τα οποία συμπεριλαμβάνονταν στις καλύψεις του συμβολαίου, να επιστραφούν στον ασφαλισμένο στην ίδια ακριβώς κατάσταση σε περίπτωση εκπλήρωσης του ζημιογόνου ενδεχομένου (αξία αποκατάστασης καινουργούς). Αυτό σημαίνει ότι το κόστος του ασφαλίστρου θα προκύψει από το κόστος επιδιόρθωσης της κατοικίας και αντικατάστασης των περιεχομένων της. Όπως και στην ασφάλεια οχήματος, έτσι και στην ασφάλιση κατοικίας το τελικό ασφάλιστρο προκύπτει από τον αναλογιστή με συνυπολογισμό των χαρακτηριστικών κινδύνων της εκάστοτε κατοικίας που ασφαλίζεται.

Τα χαρακτηριστικά της προς ασφάλιση κατοικίας που θεωρούνται χαρακτηριστικά κινδύνου αφορούν την χρονολογία του οικοδομήματος, καθώς όσο παλαιότερο είναι ένα οίκημα τόσο πιο εκτεθειμένο είναι σε φυσικές καταστροφές όπως σεισμός, πυρκαγιά και πλημμύρα, το οποίο με την σειρά του οδηγεί σε υψηλότερο ασφάλιστρο. Ένα άλλο χαρακτηριστικό που επηρεάζει το τελικό ασφάλιστρο, είναι ο όροφος, αν πρόκειται για διαμέρισμα. Ένα διαμέρισμα στον πρώτο όροφο είναι εκτεθειμένο σε μεγαλύτερο κίνδυνο διάρρηξης ή ζημιάς από αναταραχές/επεισόδια. Η διαρρύθμιση, η διακόσμηση και ο εξοπλισμός που υπάρχουν εντός της κατοικίας επηρεάζουν το ασφάλιστρο, καθώς μία κατοικία με υψηλής αξίας αντικείμενα θα οδηγήσει σε μεγαλύτερο κόστος αποκατάστασης εκ μέρους της ασφαλιστικής εταιρίας και κατ' επέκταση σε υψηλότερο ασφάλιστρο. Η γεωγραφική περιοχή αποτελεί ένα ακόμη χαρακτηριστικό κινδύνου. Μία πόλη η οποία στατιστικά πλήττεται περισσότερο από πυρκαγιές, σεισμούς ή πλημμύρες επηρεάζει τον τελικό υπολογισμό του ασφαλίστρου. Αντίστοιχα, μία κατοικία σε μία πόλη ή στην περιοχή μιας πόλης με υψηλή εγκληματικότητα, διατρέχει μεγαλύτερο κίνδυνο διάρρηξης από μία κατοικία στην επαρχία.

Όπως αναφέρθηκε και στην ασφάλιση οχήματος, οι ασφαλιστικές εταιρίες συχνά επιβραβεύουν ασφαλισμένους που ακολουθούν τους κανόνες ασφαλείας ή που λαμβάνουν επιπλέον μέτρα ασφαλείας σχετικά με την προστασία της κατοικίας τους. Έτσι, συχνά ένας ασφαλιστικός οργανισμός παρέχει απαλλαγή ή έκπτωση στο ετήσιο ασφάλιστρο για ασφαλισμένους που επιλέγουν κατοικία κοντά σε πυροσβεστικό σώμα, καθώς αυτό μειώνει τον κίνδυνο καταστροφικής πυρκαγιάς. Αντίστοιχα, επιβραβεύονται και οι ασφαλισμένοι που τηρούν τα πρωτόκολλα ασφαλείας και λαμβάνουν μέτρα όπως η εγκατάσταση συναγερμού, πόρτας ασφαλείας, κιγκαλερίας, ανιχνευτή καπνού και πυροσβεστήρες, αφού συνεισφέρουν στην προστασία από κλοπή, διάρρηξη ή πυρκαγιά (AXA, 2020).

1.2.3. Ασφάλεια υγείας - (Health insurance)

Η ασφάλεια υγείας ανήκει επίσης στον κλάδο των γενικών ασφαλίσεων και καλύπτει ολόκληρο ή μέρος των ιατρικών εξόδων ενός ατόμου ή μίας οικογένειας. Αποτελεί ένα συμβόλαιο μεταξύ του παρόχου της ασφαλιστικής κάλυψης, είτε αυτός είναι ένας ασφαλιστικός οργανισμός είτε μία ολόκληρη κυβέρνηση και του ασφαλισμένου ή του εργοδότη του. Σύμφωνα με την Αμερικάνικη Ένωση Ασφαλίσεων Υγείας (HIAA), η ασφάλιση υγείας ορίζεται ως "η κάλυψη που προβλέπει την καταβολή αποζημιώσεων/παροχών ως αποτέλεσμα ασθένειας ή τραυματισμού και περιλαμβάνει ασφάλιση για απώλειες από ατυχήματα, ιατρικά έξοδα, αναπηρία, θάνατο ή ακρωτηριασμό λόγω ατυχήματος" (Caxton, 2002).

Ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο υγείας μπορεί να ανανεώνεται μηνιαίως, ετησίως ή να έχει ισόβια διάρκεια. Σε μερικές χώρες, συμπεριλαμβανομένης και της Ελλάδας, η ασφάλεια υγείας είναι υποχρεωτική με την μορφή κοινωνικής ασφάλισης.

Στην ιδιωτική μορφή ασφάλισης υγείας, πέραν του τυπικού ασφαλίστρου που καλείται να πληρώσει ο ασφαλισμένος, υπάρχουν επιπλέον υποχρεώσεις έναντι του ασφαλιστή. Το αφαιρετέο ποσό είναι το ποσό που καλείται να πληρώσει ο ασφαλισμένος, πέραν του οποίου ο ασφαλιστικός φορέας καλύπτει την υπόλοιπη δαπάνη. Αντίστοιχα, στο καθεστώς της συν-ασφάλισης ο ασφαλισμένος καλείται να πληρώσει ένα ποσοστό της τελικής ιατρικής/νοσηλευτικής δαπάνης και ο ασφαλιστής το υπόλοιπο. Στις δύο παραπάνω περιπτώσεις, συνήθως ορίζεται ένα ανώτατο όριο, πλέον του οποίου ο ασφαλιστικός οργανισμός παρέχει κάλυψη για όλο το ιατρικό κόστος. Αυτό συμφέρει τον ασφαλιστικό οργανισμό σε μικρές δαπάνες αλλά μπορεί να κοστίσει αρκετά όσο μεγαλύτερη είναι η δαπάνη.

Οι βασικές καλύψεις που προσφέρει ένα ασφαλιστήριο υγείας είναι τα έξοδα νοσηλείας, χειρουργείου και ιατρικής περίθαλψης, τα συνταγογραφούμενα φάρμακα, τα έξοδα μεταφοράς με χρήση ασθενοφόρου, η μαγνητική τομογραφία, το υπερηχογράφημα, έκτακτες καλύψεις, τα έξοδα ιατρικής διακομιδής και έξοδα επαναπατρισμού από απομακρυσμένες περιοχές αλλά και τα έξοδα θεραπείας του καρκίνου.

Αναλόγως με του συμφωνηθέντες όρους του εκάστοτε συμβολαίου, δύναται να καλύπτονται επιπλέον η οδοντιατρική περίθαλψη, οι χρόνιες νόσοι, οι οφθαλμολογικοί έλεγχοι και η συνταγογράφηση γυαλιών οράσεως καθώς και ετήσια τσεκ-απ, έλεγχος εγκυμοσύνης, έλεγχοι ρουτίνας και ταξιδιωτική ασφάλιση (AXA, 2020).

Τα χαρακτηριστικά ομαδοποίησης του κινδύνου και οι παράγοντες επιρροής του ασφαλίστρου στις Η.Π.Α. είναι μόλις πέντε: Η ηλικία είναι η πρώτη παράμετρος που επηρεάζει το ύψος του ασφαλίστρου. Το ασφάλιστρο μπορεί να φτάσει σε τριπλάσια τιμή για έναν ηλικιωμένο συγκριτικά με ένα άτομο ηλικίας 30 ετών. Επιπλέον, το ασφάλιστρο υγείας ενός καπνιστή μπορεί να είναι έως και σε 50% υψηλότερο σε σχέση με αυτό ενός μη-καπνιστή. Ο τόπος διαμονής του ασφαλισμένου επηρεάζει σε μεγάλο βαθμό το τελικό ασφάλιστρο, καθώς σε κάθε πολιτεία επικρατεί διαφορετικό νομοθετικό καθεστώς, διαφορετικό επίπεδο ανταγωνισμού και διαφορετικό κόστος ζωής. Ο αριθμός των ατόμων που καλύπτονται από το ίδιο συμβόλαιο επηρεάζει επίσης το ύψος του. Για την κάλυψη συντρόφου ή τέκνων απαιτείται υψηλότερο ασφάλιστρο. Τέλος, το είδος/εύρος των καλύψεων που επιλέγουν στο ασφαλιστικό πλάνο τους, διαμορφώνει σε μεγάλο βαθμό το τελικό ασφάλιστρο.

Παράγοντες επιρροής δεν αποτελούν πλέον το φύλο του ασφαλισμένου, η τρέχουσα κατάσταση της υγείας του καθώς και το ιστορικό ασθενείας του. Μέχρι πρόσφατα, οι ασφαλιστικοί οργανισμοί χρέωναν υψηλότερα ασφάλιστρα στο γυναικείο φύλο λόγω μεγαλύτερης επισκεψιμότητας σε ιατρούς και νοσοκομεία. Επίσης, ένας ασφαλιστής μπορούσε να αρνηθεί κάλυψη σε άτομο με προϋπάρχουσα ή χρόνια νόσο. Πλέον μετά τον νόμο του affordable care act (ACA, 2010) τέτοιες μέθοδοι έχουν εκλείψει στις Η.Π.Α. (HealthCare.gov, 2020).

1.2.4. Ναυτασφάλιση - (Marine insurance)

Η ναυτασφάλιση είναι η μορφή ασφάλισης, η οποία καλύπτει την απώλεια ή την ζημιά των ναυτιλιακών μέσων μεταφοράς (πλοίων/σκαφών), του φορτίου που μεταφέρουν (ασφάλιση φορτίου – cargo insurance), των τερματικών σταθμών αλλά και όλων των ειδών τα μέσα που μεσολαβούν μεταξύ της αφετηρίας και του τελικού προορισμού, είτε χερσαία είτε υπεράκτια, όπως εξέδρες πετρελαίου και κοντέινερ (Roover, 1945). Η ασφάλεια φορτίου (cargo insurance) αποτελεί μία μεγάλη υποκατηγορία της ναυτασφάλισης.

Η ναυτασφάλιση ήταν από τα πρώτα είδη ασφάλισης και χρονολογείται στην αρχαία Ρώμη, όπου χρησιμοποιούνταν ως μέτρο αντιστάθμισης του κινδύνου για το ναυτικό εμπόριο με την μορφή ναυτικού δανείου μεταξύ του εμπόρου και του ασφαλιστή (Wang, 2016). Στα τέλη του 17^{ου} αιώνα, λόγω του κεντρικού ρόλου της Αγγλίας στο παγκόσμιο ναυτικό εμπόριο, τονίστηκε η ανάγκη για την υπηρεσία της ναυτασφάλισης. Αυτό οδήγησε στην δημιουργία του Lloyd’s coffee house, της πρώτης αγοράς ασφαλειών ναυτικής ασφάλειας που αργότερα μεταμορφώθηκε στην ασφαλιστική εταιρίας Lloyd’s of London.

Συνήθως, η ναυτική ασφάλιση χωρίζεται σε δύο μεγάλες υποκατηγορίες βάσει των καλύψεων που παρέχουν, την ασφάλιση των σκαφών και μηχανημάτων, η οποία είναι γνωστή ως “Hull and Machinery (H&M) insurance” και την ασφάλιση φορτίου (cargo insurance). Μια τρίτη υποκατηγορία του συγκεκριμένου κλάδου είναι η ασφάλεια μεταφορών (shipping insurance), η οποία παρέχει κάλυψη με την μορφή αποζημίωσης έναντι ζημιάς ή απώλειας δεμάτων κατά την μεταφορά τους. Ένα διαφορετικό και περιορισμένο είδος κάλυψης είναι αυτός της ολικής απώλειας "Total Loss Only" (TLO), που συνήθως έχει την μορφή αντασφάλισης και η οποία καλύπτει μόνο τη συνολική απώλεια του σκάφους και όχι μερική απώλεια. Η διάρκεια της κάλυψης μπορεί να είναι είτε ετήσια είτε ανά ταξίδι. Ο όρος «ταξίδι» ορίζεται ως η διέλευση μεταξύ των λιμένων που έχουν συμφωνηθεί στο ασφαλιστήριο συμβόλαιο.

Σε ορισμένες περιπτώσεις στην ναυτασφάλιση, με την εκπλήρωση ζημιογόνου ενδεχομένου, εγείρονται υποχρεώσεις αποζημίωσης έναντι τρίτων. Αυτό μπορεί να συμβεί σε περίπτωση σύγκρουσης με άλλο πλοίο ή σε περίπτωση απομάκρυνσης ναυαγίου. Συνήθως ένας ασφαλιστικός οργανισμός καλύπτει μόνο τα τρία τέταρτα των υποχρεώσεων έναντι τρίτων σε τέτοιες περιπτώσεις. Για τέτοιου είδους λόγους, ακόμη και πριν ισχύσει η κατά τα τρία τέταρτα αποζημίωση έναντι αξιώσεων τρίτων, σχηματίστηκαν οι λεγόμενοι όμιλοι Προστασίας και Αποζημίωσης (Property and Indemnity – P&I clubs) από πλοιοκτήτες με σκοπό τον καταμερισμό (pooling) του κινδύνου και του ύψους των αποζημιώσεων ανάμεσα στα μέλη του ομίλου (Anderson, 1999). «Ο σύλλογος Προστασίας και Αποζημίωσης ή P&I είναι ένας μη κυβερνητικός, μη κερδοσκοπικός, αμοιβαίος ή συνεταιριστικός σύνδεσμος παρόχων θαλάσσιων ασφαλίσεων στα μέλη του, ο οποίος αποτελείται από ιδιοκτήτες πλοίων, χειριστές, ναυλωτές και ναυτικούς υπό τις εταιρείες-μέλη» (Wankhede, 2020). Έτσι λοιπόν, την στιγμή που η ασφαλιστική εταιρία καλύπτει σκάφη, μηχανήματα και φορτίο, ο ασφαλισμένος παρέμενε εκτεθειμένος σε μεγάλο αριθμό άλλων κινδύνων. Αυτούς τους κινδύνους, τους οποίους ήταν απρόθυμοι να ασφαλίσουν οι ασφαλιστές κλήθηκαν να ασφαλίσουν οι όμιλοι P&I. Τέτοιοι κίνδυνοι είναι κίνδυνοι τραυματισμών και απώλειας ζωής, κίνδυνοι σύγκρουσης ή απομάκρυνσης ναυαγίου, κίνδυνοι περιβαλλοντικής καταστροφής (όπως πετρελαιοκηλίδα) ή κίνδυνοι που προκύπτουν από εμπόλεμη κατάσταση (Παπαριστοδήμου, 2005).

Το κεφάλαιο αυτών των ομίλων προέρχεται από ασφάλιστρο των μελών, εν είδει εισφοράς, το ύψος του οποίου προκύπτει από τους κινδύνους έναντι των οποίων απαιτεί κάλυψη το μέλος, την συνολική χωρητικότητα του στόλου του, την έκθεση του στόλου σε κίνδυνο και άλλους παράγοντες, όπως την πιθανότητα υψηλών απαιτήσεων κατά την διάρκεια του επόμενου έτους (Wankhede, 2020). Οι εισφορές αυτές έπειτα χρησιμοποιούνται για κάλυψη ζημιογόνων καταστροφικών ενδεχομένων. Μέχρι σήμερα υπάρχουν παγκοσμίως πάνω από είκοσι όμιλοι P&I, οι οποίοι δραστηριοποιούνται στον ελληνικό τομέα της ναυτασφάλισης (Ναυτικό Επιμελητήριο Ελλάδος, 2020).

1.2.5. Ταξιδιωτική ασφάλεια - (Travel insurance)

Η ταξιδιωτική ασφάλιση καλύπτει απρόοπτα γεγονότα, που μπορούν να συμβούν κατά την διάρκεια ενός ταξιδιού. Οι καλύψεις ενός ασφαλιστηρίου ταξιδιωτικής ασφάλισης αφορούν είτε τον ταξιδιώτη είτε τα υπάρχοντά του.

Η απώλεια αποσκευών, η κλοπή αντικειμένων αξίας και γενικότερα η απώλεια περιουσίας του ταξιδιώτη είναι από τους βασικότερους λόγους που κάποιος επιλέγει ασφαλιστήριο ταξιδιού και γι' αυτό αποτελεί μία από τις βασικότερες παροχές ενός τέτοιου συμβολαίου. Στις καλύψεις κλοπής/απώλειας αντικειμένων συμπεριλαμβάνονται και τα ταξιδιωτικά έγγραφα όπως ταυτότητα, διαβατήριο ή και εισιτήριο του ταξιδιώτη. Επίσης, σε ορισμένες περιπτώσεις ο ασφαλιστικός οργανισμός καλύπτει επιπλέον χρεώσεις ή έξοδα που δύναται να προκύψουν σε ένα ταξίδι λόγω καθυστερήσεων ή ακυρώσεων εκ μέρους του ταξιδιωτικού πρακτορείου, της αεροπορικής εταιρίας κ.λπ. Για παράδειγμα, λόγω ακύρωσης μίας πτήσης, ο ταξιδιώτης είναι υποχρεωμένος να διανυκτερεύσει μία επιπλέον νύχτα σε μία ξένη πόλη ή λόγω καθυστερημένης άφιξης των αποσκευών του είναι υποχρεωμένος να προβεί σε έξοδα ειδών ρουχισμού, έως ότου φτάσουν οι αποσκευές του. Τα παραπάνω έξοδα ενδέχεται να συμπεριλαμβάνονται στις καλύψεις εκτάκτων εξόδων ενός συμβολαίου ταξιδιού αναλόγως τους συμφωνηθέντες όρους του συμβολαίου.

Επιπλέον, σε ένα ασφαλιστήριο ταξιδιώτη καλύπτονται τα έκτακτα έξοδα ιατρικής περίθαλψης. Αυτό σημαίνει ότι σε περίπτωση ασθένειας ή ατυχήματος κατά την διάρκεια του ταξιδιού οι καλύψεις του συμβολαίου ενδέχεται να συμπεριλαμβάνουν επίσκεψη σε εξωτερικούς ιατρούς, χρήση ασθενοφόρου, φαρμακευτική αγωγή, μεταφορά ασθενή, επίσκεψη σε νοσοκομείο σε περίπτωση εισαγωγής, εξετάσεις και άλλα, αναλόγως φυσικά των συμφωνηθέντων όρων του συμβολαίου.

Τα περισσότερα συμβόλαια ταξιδιωτικής ασφάλειας προσφέρουν επίσης αποζημίωση σε περίπτωση ακύρωσης του ταξιδιού λόγω έκτακτων συνθηκών, όπως προβλημάτων υγείας, φυσικών καταστροφών και απεργιών αλλά και κάλυψη αστικής ευθύνης σε περίπτωση τραυματισμού τρίτου με υπαιτιότητα του ασφαλισμένου ή μήνυση κατά του ίδιου.

Η κοστολόγηση του ασφαλίστρου ενός τέτοιου συμβολαίου προκύπτει από τα χαρακτηριστικά κινδύνου, δηλαδή το είδος του ταξιδιού και το είδος του ταξιδιώτη. Το πρώτο χαρακτηριστικό το οποίο επηρεάζει το κόστος λοιπόν, είναι ο προορισμός και το μέσο μεταφοράς. Κάθε χώρα ενέχει διαφορετικό ρίσκο για τον εκάστοτε ασφαλιστικό οργανισμό, το οποίο βασίζεται στα δεδομένα σχετικά με την συχνότητα κλοπών, φυσικών καταστροφών κ.α. Κάτι αντίστοιχο ισχύει και για την μέθοδο ταξιδιού. Ένα ταξίδι με αυτοκίνητο για παράδειγμα, συνοδεύεται από μεγαλύτερους κινδύνους συγκριτικά με ένα αεροπορικό ταξίδι.

Η χρονική διάρκεια του ταξιδιού είναι το δεύτερο χαρακτηριστικό κινδύνου. Όσο μεγαλύτερη είναι η διάρκεια, τόσο μεγαλύτερη είναι και η έκθεση στον κίνδυνο, γεγονός που έχει άμεση συνέπεια στο ύψος του ασφαλίστρου. Γενικά, η διάρκεια ενός τέτοιου ασφαλιστηρίου συμβολαίου είναι όση και η διάρκεια του ταξιδιού. Παρόλα' αυτά σε περίπτωση πολλαπλών ταξιδιών ανά έτος, ο ασφαλισμένος έχει τη δυνατότητα σύναψης ετήσιου συμβολαίου με κάλυψη προκαθορισμένου αριθμού ταξιδιών ορισμένης διάρκειας.

Ένα άλλο χαρακτηριστικό το οποίο επηρεάζει το τελικό ασφάλιστρο, είναι ο αριθμός ατόμων που καλύπτει το συμβόλαιο. Συνήθως τα ανήλικα τέκνα συμπεριλαμβάνονται στις καλύψεις του γονέα, αλλά τα υπόλοιπα μέλη καλύπτονται ξεχωριστά. Επιπλέον, ο εξοπλισμός και τα περιεχόμενα των αποσκευών αποτελούν παράγοντα επιρροής του κόστους. Όσο μεγαλύτερης αξίας είναι τα αντικείμενα με τα οποία ταξιδεύει ο ασφαλισμένος, τόσο μεγαλύτερο είναι και το κόστος σε περίπτωση απώλειας. Παραδείγματος χάριν, ένας σύζυγος που επιλέγει ταξιδιωτική ασφάλιση για τον ίδιο και την σύζυγό του για ένα ταξίδι αναψυχής με τις αποσκευές να αποτελούνται κατά κύριο λόγο από ρούχα, θα έχει αισθητά μικρότερο ασφάλιστρο από έναν επαγγελματία φωτογράφο, που επιλέγει αντίστοιχη ασφάλιση για τον ίδιο και τον συνάδελφό του, η οποία καλύπτει και τον επαγγελματικό φωτογραφικό τους εξοπλισμό (Bird, 2018).

Επιπλέον, το ασφάλιστρο επηρεάζεται και από τον ίδιο τον ασφαλισμένο. Η ηλικία, η κατάσταση υγείας ή προϋπάρχουσες ασθένειες είναι χαρακτηριστικά που λαμβάνει υπόψιν ο ασφαλιστικός οργανισμός στον καθορισμό του κόστους. Συχνά όμως, ο ασφαλιστής δεν καλύπτει όλων των ειδών τις προϋπάρχουσες ασθένειες. Για παράδειγμα η εγκυμοσύνη (ή καλύτερα η προχωρημένη εγκυμοσύνη) συχνά δεν συμπεριλαμβάνεται στις καλύψεις. Το ίδιο ισχύει και για αφροδίσια νοσήματα, εθισμό σε ναρκωτικά ή αλκοόλ κ.α. Αντίθετα, συνήθως καλύπτονται παθήσεις όπως ο ζαχαρώδης διαβήτης και το άσθμα.

Υπάρχουν και άλλες εξαιρέσεις στις προαναφερθείσες καλύψεις. Παρόλο που ο εξοπλισμός καλύπτεται σε περίπτωση κλοπής ή απώλειας, τα ασυνόδευτα αντικείμενα τα οποία εκλάπησαν ή υπέστησαν ζημιά δεν καλύπτονται. Επίσης, δεν καλύπτονται όλων των ειδών οι δραστηριότητες κατά την διάρκεια του ταξιδιού. Συνήθως, τα υψηλού κινδύνου χόμπι (όπως ελεύθερη πτώση ή αναρρίχηση) αποκλείονται από το ασφαλιστήριο. Τέλος, ενώ προβλέπεται αποζημίωση σε περίπτωση ακύρωσης λόγω φυσικής καταστροφής, δεν συμβαίνει το ίδιο για ακύρωση με υπαιτιότητα του ασφαλισμένου ή της αεροπορικής εταιρίας. Στην τελευταία περίπτωση η αεροπορική εταιρία καθίσταται υπεύθυνη για την αποζημίωση των πελατών της, εκτός αν έχει συμφωνηθεί διαφορετικά στους όρους του συμβολαίου (Wylde, 2020).

1.2.6. Υπόλοιπες κατηγορίες

Άλλες κατηγορίες γενικής ασφάλισης είναι η ασφάλεια πυρός, η ασφάλεια κλοπής και η ασφάλεια ατυχημάτων, που όπως είδαμε αποτελούν και υποκατηγορίες άλλων ειδών γενικών ασφαλίσεων, αφού προσφέρονται σαν επιπλέον καλύψεις ενός συμβολαίου.

Τέλος, στον κλάδο των γενικών ασφαλίσεων ανήκουν και οι αγροτικές ασφαλίσεις, όπως η ασφάλεια αγροτικής παραγωγής/σοδειάς που καλύπτει την σοδειά έναντι καταστροφής και ακραίων καιρικών φαινομένων, αλλά και η ασφάλεια ζωικού κεφαλαίου, η οποία καλύπτει την ασφάλιση των εκτρεφόμενων σε οργανωμένες κτηνοτροφικές και πτηνοτροφικές μονάδες ζώων, από τον κίνδυνο θανάτου από οποιαδήποτε ασθένεια, πάθηση ή και ατύχημα (Interamerican, 2020).

Κεφάλαιο 2. Τιμολόγηση & Solvency II

2.1. Η έννοια της τιμολόγησης

Η διαδικασία της τιμολόγησης είναι ο βασικός παράγων κερδοφορίας στον κλάδο των ασφαλίσεων, με αποτέλεσμα να αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα καθήκοντα/υποχρεώσεις ενός αναλογιστή. Η μείζων διαφορά συγκριτικά με την τιμολόγηση των περισσότερων αγαθών/υπηρεσιών είναι, ότι η ασφάλιση αποτελεί μια υπόσχεση για μια πράξη (π.χ. παροχή αποζημίωσης) στο μέλλον, σε περίπτωση που λάβουν χώρα συγκεκριμένα γεγονότα (Werner et al., 2010). Αναλόγως των συνθηκών και του προς ασφάλιση προϊόντος, οι αναλογιστές μπορούν να χρησιμοποιήσουν διαφορετικές μεθόδους τιμολόγησης. Η διαδικασία τιμολόγησης ασφαλιστηρίων συμβολαίων αυτοκινήτων Ι.Χ., για παράδειγμα, διαφέρει κατά πολύ από την αντίστοιχη διαδικασία για ασφάλιση εργατικών ατυχημάτων. Ακόμη όμως και στην ίδια κατηγορία ασφαλίσιμων κινδύνων/ασφαλίσιμου προϊόντος, οι αναλογιστικές τεχνικές τιμολόγησης ενδέχεται να διαφέρουν είτε λόγω απαιτήσεων κανονιστικού πλαισίου (Solvency II) είτε λόγω περιορισμένων δεδομένων. Οι μέθοδοι τιμολόγησης δεν παραμένουν στάσιμες, αλλά εξελίσσονται συνεχώς λόγω τεχνολογικής ανάπτυξης και προόδου της τεχνολογίας.

Η τιμή ενός οποιουδήποτε προϊόντος προκύπτει ως αποτέλεσμα της βασικής οικονομικής σχέσης

$$Τιμή = Κόστος + Επιθυμητό\ Κέρδος,$$

όμως η τιμολόγηση ενός ασφαλιστικού προϊόντος είναι αρκετά πιο περίπλοκη, επειδή τα κόστη που συνδέονται με ένα ασφαλιστικό προϊόν δεν είναι γνωστά κατά την διάρκεια της πώλησής του (Werner et al., 2010). Για τον λόγο αυτό χρειάζεται να εκτιμηθούν όλα τα πιθανά κόστη και να ενσωματωθούν στη διαδικασία της τιμολόγησης. Επομένως, η διαδικασία τιμολόγησης συμπεριλαμβάνει την εκτίμηση των παραμέτρων της θεμελιώδους ασφαλιστικής εξίσωσης, οι οποίες θα εγγυώνται ότι το εκτιμώμενο ασφάλιστρο θα επιφέρει το επιθυμητό κέρδος στην ασφαλιστική εταιρεία, ενώ ταυτόχρονα η εξίσωση παραμένει ισορροπημένη και δίκαιη. Αυτό σημαίνει ότι το ασφάλιστρο δεν θα είναι ούτε πολύ υψηλό, με αποτέλεσμα να μην μπορούν να το καταβάλλουν οι ασφαλισμένοι και να ωθούνται σε ανταγωνίστριες εταιρίες, αλλά ούτε και τόσο χαμηλό, ώστε να μην έχει κέρδος η ασφαλιστική εταιρία, να προσελκύει αφερέγγυους ασφαλισμένους και να είναι αυξημένη και η πιθανότητα χρεοκοπίας της (Πιτσέλης, 2020).

Η διασφάλιση της επαρκώς ισορροπημένης ασφαλιστικής εξίσωσης σημαίνει ότι θα τεθούν τέτοιες τιμές (rates) σε ισχύ, ώστε το ασφάλιστρο να είναι ικανό να καλύψει όλα τα αναμενόμενα κόστη και ταυτόχρονα να επιτύχει τον στόχο του επιθυμητού ασφαλιστικού κέρδους.

Όμως, για τον υπολογισμό του ασφαλίστρου χρειάζονται δεδομένα, τα οποία δεν είναι διαθέσιμα κατά την διαδικασία της τιμολόγησης και αφορούν μελλοντικά κόστη που συνοδεύουν το εκάστοτε ασφαλιστικό προϊόν, δηλαδή τα στοιχεία που απαρτίζουν την ασφαλιστική εξίσωση. «Η τιμολόγηση είναι διαδικασία δυνητική, γιατί οι τιμές (rates) που αφορούν την ασφάλιση περιουσίας και απώλειας (P&I), πρέπει να υπολογιστούν πριν την μεταφορά του κινδύνου» (Casualty Actuarial Society, 1988). Λόγω του παραπάνω χαρακτηριστικού, ο αναλογιστής οφείλει να εκτιμήσει τα μελλοντικά κόστη με τον καλύτερο δυνατό τρόπο.

Για να επιτευχθεί αυτό, τις περισσότερες φορές χρησιμοποιείται η μέθοδος της ιστορικής πρακτικής (historical practice), σύμφωνα με την οποία, ο ασφαλιστής προβλέπει την πορεία των ζημιών του τρέχοντος ή μελλοντικών ετών με βάση ένα μεγάλο δείγμα προηγούμενων ετών. Παρόλο που η συγκεκριμένη πρακτική είναι η πιο συχνή και διαδεδομένη για εκτιμήσεις, δεν σημαίνει ότι δεν υπάρχουν περιορισμοί, καθώς τα ιστορικά στοιχεία θα πρέπει να χρησιμοποιούνται στον βαθμό που όντως συμβάλλουν στην εκτίμηση.

Υπάρχουν πολλοί παράγοντες που επηρεάζουν τα διαφορετικά στοιχεία της βασικής ασφαλιστικής εξίσωσης και που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά την αξιοποίηση των ιστορικών στοιχείων. Για παράδειγμα μεταβολές των επιτοκίων, λειτουργικές αλλαγές, πληθωριστικές πιέσεις ή αλλαγές στη νομοθεσία/στο ασφαλιστικό δίκαιο, είναι παράγοντες επιρροής και θα πρέπει να γίνονται οι απαιτούμενες προσαρμογές για την προβολή των διαφόρων παραγόντων στο αναμενόμενο επίπεδο κατά τη διάρκεια της περιόδου ισχύος των τιμών.

Επιπλέον, όσον αφορά στην επάρκεια ή ανεπάρκεια των τιμών, η ισορροπία της ασφαλιστικής εξίσωσης είναι σημαντικό να επιτυγχάνεται συλλογικά, τμηματικά και ατομικά. Το σημείο ισορροπίας σε συνολικό επίπεδο εξασφαλίζει ότι το συνολικό ασφάλιστρο (premium) όλων των εγγεγραμμένων ασφαλιστηρίων συμβολαίων, είναι αρκετό για να καλύψει τις συνολικές εκτιμώμενες ζημιές και έξοδα, ενώ ταυτόχρονα εξασφαλίζει το επιθυμητό επίπεδο κέρδους. Αν οι τιμές αποδειχθούν πολύ υψηλές ή χαμηλες για την επίτευξη του επιθυμητού κέρδους, η εταιρία ενδέχεται να προχωρήσει σε μείωση ή αύξησή τους αντίστοιχα (Werner et al., 2010).

Κάτι αντίστοιχο ισχύει και στην περίπτωση του ύψους του ασφαλίστρου. Στην σύγχρονη οικονομία και αγορά, μία ασφαλιστική εταιρία είναι υποχρεωμένη να θέτει ανταγωνιστικό ασφάλιστρο συγκριτικά με τις υπόλοιπες ασφαλιστικές. Το τι καθιστά ανταγωνιστικό το ασφάλιστρο φυσικά είναι διαφορετικό ανάλογα με την ομάδα κινδύνου που ασφαλίζεται. «Η τιμή προβλέπει τα κόστη που είναι συνυφασμένα με την ατομική μεταφορά του κινδύνου» (Casualty Actuarial Society, 1988). Αυτό σημαίνει, ότι ένα ασφάλιστρο θα πρέπει να είναι ανάλογο με την πιθανότητα εμφάνισης ζημιών και το ύψος του κινδύνου που ασφαλίζει και κατά μέσο όρο να καλύπτει την ζημιά της ομάδας κινδύνου που ασφαλίζει. Για παράδειγμα, ένας υπάλληλος γραφείου και ένας πυροσβέστης ανήκουν σε διαφορετικές ομάδες κινδύνου, καθώς είναι εκτεθειμένοι σε διαφορετικούς κινδύνους και άρα σε διαφορετικές πιθανές ζημιές, συνεπώς θα πρέπει να ασφαλίζονται με διαφορετικό τρόπο.

Πέραν της δίκαιης τιμολόγησης αναλόγως της ομάδας κινδύνου του ασφαλισμένου, ο ασφαλιστής έχει χρέος να παρέχει κίνητρα για την πρόληψη, εκ μέρους του ασφαλισμένου, έναντι πιθανών κινδύνων. Είναι συνήθης πρακτική λοιπόν, ένας οργανισμός να παρέχει έπτωση ή χαμηλότερο ασφάλιστρο στους ασφαλισμένους που λαμβάνουν επιπλέον μέτρα προστασίας έναντι του κινδύνου για τον οποίο ασφαλίστηκαν. Για παράδειγμα, σε περίπτωση εκπλήρωσης του ζημιογόνου ενδεχομένου της πυρκαγιάς, ο ασφαλισμένος που είχε λάβει τα απαραίτητα μέτρα (σύστημα πυρόσβεσης, έξοδος κινδύνου κ.α.) αναμένεται να έχει διαφορετική μεταχείριση απ' τον ασφαλισμένο που δεν το είχε κάνει (Πιτσέλης, 2020).

Τέλος, τα ασφάλιστρα θα πρέπει σε μεγάλες χρονικές περιόδους να παραμένουν κατά μέσο όρο σταθερά, ώστε να προστατεύουν έναντι ακραίων κινδύνων.

Αποτελεί ευθύνη του αναλογιστή να χρησιμοποιεί μεθόδους τιμολόγησης, οι οποίες είναι εύκολα κατανοητές, καθώς ο ίδιος θα πρέπει να πείσει την διοίκηση της ασφαλιστικής εταιρίας, ότι ο τρόπος τιμολόγησης που επέλεξε είναι ο πιο αποδοτικός, δίκαιος, σωστός και επικερδής.

2.2. Η έννοια του κινδύνου

Η έννοια του κινδύνου στην καθομιλουμένη είναι συνήθως συνυφασμένη με κάτι αρνητικό ή κακό και συνήθως ορίζεται ως η πιθανότητα να συμβεί κάτι αναπάντεχο, συνήθως με αρνητική έκβαση. Σύμφωνα με το Λεξικό της κοινής νεοελληνικής (2018), ως κίνδυνος ορίζεται ό,τι απειλεί τη ζωή, την ακεραιότητα ή την ασφάλεια ενός προσώπου ή ενός πράγματος. Αυτό ισχύει συνήθως και με την αγγλική λέξη risk, όπου ερμηνεύεται ως η πιθανότητα να συμβεί κάτι κακό, δυσάρεστο ή επικίνδυνο ("the possibility that something bad, unpleasant, or dangerous may happen"), σύμφωνα με το λεξικό Longman (2018). Σύμφωνα με το λεξικό Cambridge (2018), ορίζεται ως η πιθανότητα να συμβεί κάτι κακό ("the possibility of something bad happening").

Παρόλα αυτά, όποια ερμηνεία και να αποδοθεί, το σίγουρο είναι ότι ο κίνδυνος αναφέρεται σε ένα μη αναμενόμενο γεγονός και ως τέτοιο, οι άνθρωποι καλούνται να τον διαχειριστούν, καθώς συνήθως είναι συνυφασμένος με αρνητικές συνέπειες.

Η ασφάλιση αποτελεί ένα από τα πιο γνωστά μέσα διαχείρισης του κινδύνου, μέσω μεταφοράς και μείωσής του, αφού οι ασφαλισμένοι ανταλλάσσουν μία αβέβαιη οικονομική απώλεια, που μπορεί να επέλθει από ένα απρόσμενο γεγονός, με μία βέβαιη οικονομική απώλεια, που είναι το ασφάλιστρο.

Όπως αναφέρθηκε, οι ασφαλιστικές εταιρίες ζουν από την ανάληψη κινδύνων, αφού αυτή είναι η βασική τους δραστηριότητα. Έτσι, εκτίθενται σε ασφαλιστικό κίνδυνο. Όμως, εκτίθενται και σε μία σειρά από άλλους κινδύνους που προκύπτουν από τις επενδύσεις τους (κίνδυνος αγοράς), τους αντισυμβαλλόμενούς τους (πιστωτικός κίνδυνος) και τη λειτουργία τους (λειτουργικός κίνδυνος).

Στο ασφαλιστικό περιβάλλον οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις καλούνται οι ίδιες να διαχειριστούν τους κινδύνους στους οποίους εκτίθενται. Η οδηγία Solvency II επιζητά την εφαρμογή ενός πλήρους συστήματος διαχείρισης κινδύνων, με σκοπό τον υπολογισμό του Οικονομικού Κεφαλαίου (Economic Capital), το οποίο λειτουργεί ως το «μαξιλάρι» που απορροφά την οικονομική απώλεια από τους κινδύνους που ενδεχομένως να διαφύγουν του συστήματος αυτού. Η μέθοδος που το Solvency II χρησιμοποιεί, είναι αυτή της αξίας σε κίνδυνο (Value at Risk - VaR), η οποία θα μελετηθεί σε παρακάτω ενότητα.

2.3. Η έννοια της φερεγγυότητας

Οι ασφαλιστικές εταιρίες αναφέρονται στη φερεγγυότητά τους είτε απευθείας είτε μέσω των ασφαλιστικών διαμεσολαβητών τους, στην προσπάθεια προσέλκυσης των πελατών τους, ακόμη και προ της εφαρμογής της ευρωπαϊκής οδηγίας Solvency II. Οι υποψήφιοι προς ασφάλιση αναζητούν φερέγγυες ασφαλιστικές εταιρίες. Ανατρέχοντας πάλι στο λεξικό Cambridge (2018), ως φερεγγυότητα (solvency) ορίζεται η ικανότητα να πληρωθούν όλα τα χρήματα που οφείλονται ("the ability to pay all the money that is owed"). Σύμφωνα με την Investopedia (2018), ως φερεγγυότητα (solvency) ορίζεται ως η ικανότητα μιας εταιρείας να εκπληρώνει τις μακροπρόθεσμες οικονομικές της υποχρεώσεις (solvency is the ability of a company to meet its long-term financial obligations).

Η φερεγγυότητα είναι απαραίτητη για τη διατήρηση της λειτουργίας των επιχειρήσεων, καθώς αποδεικνύει την ικανότητα μιας εταιρείας να συνεχίσει τις δραστηριότητές της στο άμεσο μέλλον. Παρόλο που η ρευστότητα είναι αναγκαία για μία επιχείρηση, η ρευστότητα δεν πρέπει να συγχέεται με τη φερεγγυότητα. Μια εταιρεία που είναι αφερέγγυα συχνά αναγκάζεται να εισέλθει σε πτώχευση. Επομένως, η φερεγγυότητα αναφέρεται στην ικανότητα μίας επιχείρησης να καλύπτει τις μακροχρόνιες υποχρεώσεις της, ενώ η ρευστότητα αφορά κυρίως την ικανότητά της να καλύπτει τις βραχυχρόνιες υποχρεώσεις της, κυρίως σε ορίζοντα ενός έτους (EIOPA, 2015b).

Είναι σαφές, ότι η έκθεση των εταιριών σε κινδύνους μπορεί να πλήξει την φερεγγυότητά τους. Αλλά και αντίστροφα, η φερεγγυότητα μίας εταιρίας απειλείται, όταν επέλθει κάποιος από τους κινδύνους στους οποίους εκτίθεται. Συνεπώς, είναι κατανοητό ότι για να μπορέσει μία εταιρία να διαφυλάξει τη φερεγγυότητά της θα πρέπει να διαθέτει ένα ισχυρό σύστημα διαχείρισης κινδύνων, το οποίο να είναι ενσωματωμένο στις καθημερινές της δραστηριότητες και να προβλέπει εκείνες που ενδέχεται να εμφανίσουν κάποιο κίνδυνο που θα επιφέρει οικονομικές απώλειες.

Οι οικονομικές αυτές απώλειες διαφέρουν τόσο στη σφοδρότητα όσο και στη συχνότητα εμφάνισης. Όμως, η ύπαρξη ενός πλήρους συστήματος διαχείρισης κινδύνων επιτρέπει την αναγνώριση των κινδύνων αλλά και τον υπολογισμό της ζημιάς που μπορούν να επιφέρουν και κατ' επέκταση του κεφαλαίου που απαιτείται για την απορρόφησή τους. Το κεφάλαιο αυτό είναι το Οικονομικό Κεφάλαιο, το οποίο είναι ουσιαστικά το βέλτιστο ύψος κεφαλαίου που απαιτείται για τη διασφάλιση της φερεγγυότητας της επιχείρησης (EIOPA, 2014).

2.4. Αξία σε κίνδυνο (Value at Risk - VaR)

Είναι σαφές ότι αυτό που ενδιαφέρει τις εταιρίες, τις εποπτικές αρχές, αλλά και τους ασφαλισμένους (ή υποψηφίους προς ασφάλιση) είναι να μπορούν να προσδώσουν ένα ποσό στον κίνδυνο και όχι απλά να αναφέρονται σε αυτόν. Υπάρχει μία σειρά από μεθόδους που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου, αλλά η πιο ευρέως χρησιμοποιούμενη είναι αυτή της αξίας σε κίνδυνο, γνωστής και ως Value at Risk (VaR). Η μέθοδος αυτή έγινε ιδιαίτερα δημοφιλής και αποδεκτή μετά τη δημοσίευση του συστήματος Risk Metrics από την JP Morgan to 1994 (JP Morgan/ Reuters, 1996).

Το VaR χρησιμοποιείται κυρίως για την ποσοτικοποίηση κινδύνων της αγοράς. Είναι μέτρο του κινδύνου αγοράς που προσπαθεί να συνδυάσει αντικειμενικά:

- Την ευαισθησία ενός χαρτοφυλακίου στις αλλαγές της αγοράς
- Την πιθανότητα μιας συγκεκριμένης αλλαγής της αγοράς

Είναι πιθανώς η καλύτερη διαθέσιμη τεχνική μέτρησης κινδύνου. Το VaR είναι η τιμή που αναμένεται να χαθεί κατά τη διάρκεια σοβαρών δυσμενών διακυμάνσεων της αγοράς. Δοθείσης μίας (μικρής) πιθανότητας p, το pVaR μετρά το μέγεθος της ζημιάς (απώλειας) μεγαλύτερο του οποίου μπορεί να έχει ένα σύνολο επενδύσεων με πιθανότητα p, σε συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα, όπως η μία μέρα, υπό κανονικές συνθήκες της αγοράς. Αν εξαιρέσουμε τις απώλειες που έχουν μικρότερη πιθανότητα από p, τότε το pVaR είναι η μέγιστη δυνατή ζημιά (απώλεια) μέσα σε αυτή τη χρονική διάρκεια, υπό την υπόθεση της αγοραίας αποτίμησης (mark-to-market) και του ότι δε γίνονται συναλλαγές (trading) στο χαρτοφυλάκιο (Jorion, 2006). Αν για παράδειγμα το p είναι 1%, τότε μια σοβαρή απώλεια είναι μια απώλεια που έχει πιθανότητα 1% να συμβεί σε οποιαδήποτε δεδομένη ημέρα. Μετρώντας τις ημερήσιες απώλειες, αυτό είναι σαν να λέμε ότι κατά μέσο όρο θα χάσουμε το VaR ή περισσότερο σε 2-3 ημέρες το χρόνο.

Η συνηθισμένη υπόθεση είναι ότι οι κινήσεις της αγοράς ακολουθούν μια κανονική κατανομή. Δηλαδή, ότι υπάρχει πιθανότητα 1% οι απώλειες να είναι μεγαλύτερες από τις 2.32 τυπικές αποκλίσεις. Το 99%VaR μπορεί να οριστεί ως $VaR_{99\%} = 2.32 \times \sigma$, όπου σ είναι η τυπική απόκλιση. Να τονιστεί εδώ ότι για συναλλαγές συνήθως έχουμε ορίζοντα μίας ημέρας και σε αυτή την περίπτωση

$$VaR = DEaR\{Daily\ Earnings\ at\ Risk\},$$

δηλαδή τα καθημερινά κέρδη σε κίνδυνο (Holton, 2014).

Παράδειγμα: Έστω χαρτοφυλάκιο μετοχών με καθημερινή τυπική απόκλιση 10 εκατ. δολαρίων. Υποθέτουμε ότι οι αποδόσεις του ακολουθούν την κανονική κατανομή. Το 99% VaR είναι 23,2 εκατ. δολάρια. Αυτό σημαίνει, ότι αναμένουμε ότι οι ζημίες θα είναι μεγαλύτερες από 23,2 εκατ. δολάρια στο 1% των ημερών διαπραγμάτευσης, δηλαδή 2-3 ημέρες το έτος.

Αυτό που πρέπει να τονιστεί ιδιαίτερα είναι ότι το VaR δεν είναι η χειρότερη δυνατή απώλεια. Απώλειες ίσες με το μέγεθος του VaR αναμένεται να συμβαίνουν αρκετές φορές το χρόνο. Επίσης, το VaR δεν είναι ίσο με το Οικονομικό Κεφάλαιο. Ο υπολογισμός του VaR μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους, με τις πιο γνωστές να είναι οι :

- Parametric VaR
- Historical Simulation
- Monte Carlo Simulation

Το VaR, παρά της αποδοχής που έχει τύχει, έχει κάποια χαρακτηριστικά και κάποιους περιορισμούς, κοινούς για όλες τις μεθόδους (Πουφινάς, 2006).

Στην οδηγία Solvency II ο υπολογισμός του VaR γίνεται σε επίπεδο 99,5% για ορίζοντα ενός έτους. Εξετάζεται όμως παράλληλα και η μέγιστη ζημιά που μπορεί να προκύψει εξαιτίας κάποιου καταστροφικού γεγονότος. Σύμφωνα λοιπόν με τον τρόπο υπολογισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων, η αποστροφή κινδύνου βρίσκεται στην πιθανότητα αθέτησης υποχρέωσης μίας ασφαλιστικής εταιρίας 0,5% ή 1 στα 200 έτη.

2.5. Ο δρόμος από το Solvency I στο Solvency II

Το ευρύτερο ασφαλιστικό περιβάλλον, ιδιαίτερα τα τελευταία χρόνια πριν την εφαρμογή του Solvency II, δεν ήταν το πιο ευνοϊκό, καθώς χαρακτηρίστηκε από μία αρκετά μεγάλη, παγκόσμια (και για κάποιες χώρες, όπως η Ελλάδα, μακροχρόνια) κρίση. Εικάζεται ότι ξεκίνησε από τα δάνεια χαμηλής εξασφάλισης στην Αμερική, γρήγορα όμως είχε προεκτάσεις και στα επενδυτικά προϊόντα και μέσω αυτών στις παγκόσμιες αλλά και τοπικές αγορές και οικονομίες και φυσικά και στον ασφαλιστικό χώρο.

Προφανώς, μία κρίση στα στεγαστικά δάνεια μίας χώρας, έστω και αν αυτά ήταν χαμηλής εξασφάλισης, δεν θα μπορούσε να επεκταθεί τόσο γρήγορα και τόσο ευρέως αν το χρηματοπιστωτικό σύστημα λειτουργούσε αποτελεσματικά. Από την κρίση αυτή, οι τράπεζες και στη συνέχεια οι ασφαλιστικοί οργανισμοί ήταν οι πρώτοι που επηρεάστηκαν. Σε ακόμα μεγαλύτερο βαθμό επηρεάστηκαν οι οργανισμοί εκείνοι, οι οποίοι είχαν στα επενδυτικά τους χαρτοφυλάκια προϊόντα συνδεδεμένα με τα εν λόγω δάνεια, οι χρηματιστηριακές αγορές και φυσικά οι οικονομίες των χωρών που βίωσαν τις συνέπειες και την κρίση του δημόσιου χρέους.

Την κρίση αυτή τη βίωσαν οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις και οι ασφαλιστικοί οργανισμοί στο σύνολο των περιουσιακών τους στοιχείων, καθώς αρχικά επηρεάστηκαν οι μετοχές, στη συνέχεια όμως και τα ομόλογα λόγω των παραπάνω συνθηκών που δημιουργήθηκαν. Η κρίση χρέους οδήγησε σε άνοδο των credit spreads και άρα σε πτώση των τιμών των ομολόγων, στα οποία παραδοσιακά οι ασφαλιστικές εταιρίες επενδύουν σημαντικό μέρος του χαρτοφυλακίου τους.

Η προσπάθεια που έκαναν οι κεντρικές τράπεζες να τονώσουν τη ρευστότητα οδήγησε σε μείωση των επιτοκίων, με αποτέλεσμα οι ασφαλιστικές εταιρίες να μην μπορούν να βρουν ομόλογα υψηλής βαθμολογίας πιστοληπτικής ικανότητας με ικανοποιητικές αποδόσεις για να επενδύσουν. Ιδιαίτερα οι ασφαλιστικές εταιρίες ζωής αντιμετώπισαν πιο έντονα το πρόβλημα αυτό, καθώς δεν μπορούσαν να αντιστοιχίσουν τα περιουσιακά τους στοιχεία με τις υποχρεώσεις τους.

Οι ασφαλισμένοι δεν έμειναν ανεπηρέαστοι από τις παραπάνω εξελίξεις. Λόγω της έντονης ανησυχίας τους, δεν εγκατέλειπαν μόνο τις αγορές χρήματος και κεφαλαίου, αλλά και τα μακροχρόνια ασφαλιστήρια, οδηγώντας έτσι σε εξαγορά όσων ασφαλιστηρίων είχαν αξία εξαγοράς, ή σε ακύρωση όσων δεν είχαν, καθώς κάποιοι από αυτούς αδυνατούσαν να καταβάλουν το ασφάλιστρο.

Οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις που τελικά επλήγησαν ήταν σχετικά λίγες σε αριθμό, όμως οι συνθήκες που έζησαν ανέδειξαν τη σημαντικότητα της αναγνώρισης και της διαχείρισης των κινδύνων στους οποίους εκτίθενται. Οι ασφαλιστικές εταιρίες βέβαια, όπως και οι τράπεζες αλλά και οι χρηματοοικονομικοί οργανισμοί, «ζουν» από την ανάληψη κινδύνου. Οι πρώτες αναλαμβάνουν πρωτίστως ασφαλιστικό κίνδυνο, οι δεύτερες κυρίως πιστωτικό κίνδυνο και οι τελευταίες κυρίως κίνδυνο της αγοράς. Όλες όμως είναι εκτεθειμένες και στις υπόλοιπες μορφές κινδύνου.

Οι βασικότεροι λόγοι για τους οποίους κάποιες ασφαλιστικές επιχειρήσεις αθέτησαν τις υποχρεώσεις τους και οδηγήθηκαν σε παύση των εργασιών τους αλλά και ενδεχόμενη χρεοκοπία ήταν (Χαμπάκη, 2016):

i. Ανεπαρκής διαχείριση ρευστότητας, η οποία οφειλόταν κυρίως σε έλλειψη αντιστοίχισης των περιουσιακών στοιχείων με τις υποχρεώσεις τους (Asset Liability Matching – ALM).
ii. Υπό-τιμολόγηση και υπό-αποθεματοποίηση, η οποία οφειλόταν κυρίως σε χρήση λανθασμένων πρακτικών τιμολόγησης προκειμένου να επιτευχθεί μία πρόσκαιρη ανάπτυξη εργασιών και λανθασμένων πρακτικών αποθεματοποίησης για την κάλυψη των μελλοντικών αποζημιώσεων.
iii. Μεγάλη ανοχή στον επενδυτικό κίνδυνο, ο οποίος οφειλόταν κυρίως σε επιλογή περιουσιακών στοιχείων με υψηλό κίνδυνο με την προσδοκία της υψηλότερης απόδοσης.
iv. Ανεπαρκής διοίκηση και διακυβέρνηση, η οποία οφειλόταν σε άστοχο σχεδιασμό του συστήματος εταιρικής διακυβέρνησης και λανθασμένες διοικητικές αποφάσεις.
v. Επέκταση σε άγνωστες και μη συναφείς δραστηριότητες, η οποία οφειλόταν σε εξαγορές ή δραστηριοποίηση σε προϊόντα, κλάδους ή αγορές χωρίς τον απαραίτητο σχεδιασμό.
vi. Άλλοι παράγοντες, όπως η απάτη, καταστροφικά γεγονότα, κατάρρευση αντασφαλιστή, κ.λπ.

Είναι σαφές ότι για τις περισσότερες χρεοκοπίες συνετέλεσαν παραπάνω από ένας από τους παραπάνω λόγους.

Αναφέρθηκε προηγουμένως ότι σε παρόμοια θέση βρέθηκαν επίσης οι εταιρίες του χρηματοοικονομικού και τραπεζικού χώρου. Είναι λοιπόν σαφές, ότι απαιτείται συντεταγμένη προσπάθεια για την αντιμετώπιση των κινδύνων στους οποίους οι εταιρίες αυτές εκτίθενται, τουλάχιστον σε επίπεδο Ευρωπαϊκής Ένωσης. Η Basel III (πλέον) αναφέρεται στην προσπάθεια για την ενδυνάμωση της κεφαλαιακής επάρκειας και ρευστότητας των τραπεζών, μέσω τριών πυλώνων που διασφαλίζουν την λειτουργία του τραπεζικού συστήματος ποσοτικά, ποιοτικά και εποπτικά, ενώ παράλληλα ενισχύουν τη διαφάνεια. Αντίστοιχα, η οδηγία Solvency II έχει την ίδια προσέγγιση και στόχο με την Basel III για τη ρύθμιση της ασφαλιστικής αγοράς, γι' αυτό και συχνά αποκαλείται «η Basel για τους ασφαλιστές». Έτσι, αναπτύχθηκε μία σειρά από κανονισμούς, κατευθυντήριες γραμμές και νομοθετικές πρωτοβουλίες που ενίσχυσαν και συμπλήρωσαν τα παραπάνω νομοθετικά πλαίσια.

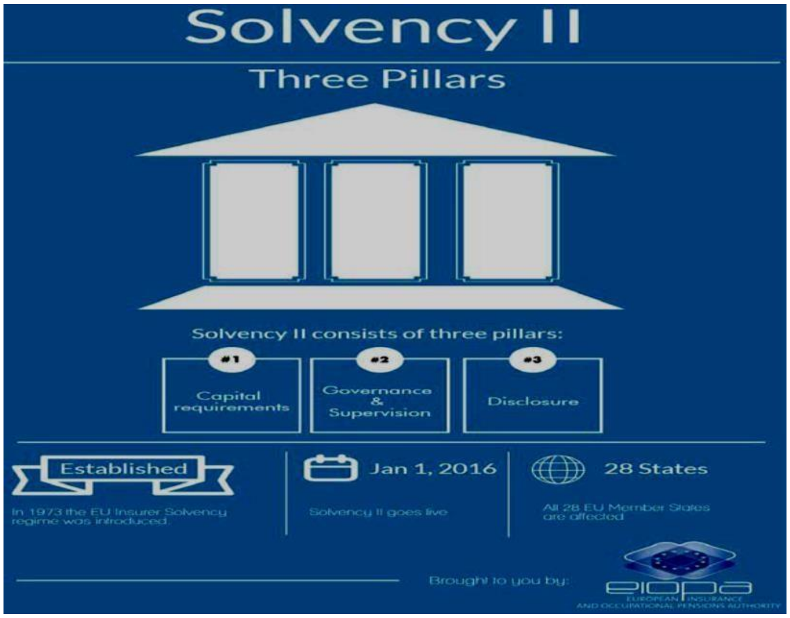
Το Solvency II αποτελεί την προσπάθεια δημιουργίας ενός πλαισίου - συστήματος διαχείρισης κινδύνων τόσο με την εξασφάλιση των απαραίτητων κεφαλαίων, όσο και με την κατάρτιση των απαραίτητων σχετικών διαδικασιών και πολιτικών. Οι βασικοί του στόχοι περιγράφονται ως εξής (Χαμπάκη, 2016):

- Προστασία των καταναλωτών – κατόχων ασφαλιστηρίων
- Ενίσχυση της χρηματοπιστωτικής σταθερότητας
- Δημιουργία ισότητας στης απαιτήσεις λειτουργίας των ασφαλιστικών εταιριών στο πλαίσιο της Ευρωπαϊκής Ένωσης (αναφερόμενου και ως level playing field)
- Ενίσχυση της ανταγωνιστικότητας των ευρωπαϊκών ασφαλιστικών εταιριών σε διεθνές επίπεδο

Η δομή του Solvency II στηρίζεται σε τρεις (3) πυλώνες που δεν απέχουν από αυτούς του Basel II, που αφορά τις τράπεζες. Αυτοί είναι (EIOPA, 2018):

- Πυλώνας I: Ποσοτικές Απαιτήσεις
- Πυλώνας II: Ποιοτικές Απαιτήσεις και Αρχές Εποπτείας
- Πυλώνας III: Δημοσιοποίηση και Διαφάνεια

Η σημαντικότητά των τριών πυλώνων εμφανίζεται στο παρακάτω σχεδιάγραμμα (EIOPA, 2018).



Εικόνα 1: Οι 3 Πυλώνες του Solvency II

2.6. Αρχές του Solvency II

Η οδηγία – πλαίσιο Solvency II συνιστά νομοθεσία βασισμένη σε αρχές. Αυτό σημαίνει πρακτικά ότι καθορίζει τη λογική που διέπει του κανόνες, και όχι τους ίδιους τους κανόνες, με λεπτομερή και δεσμευτικό τρόπο. Συνεπώς, θέτει τα πρότυπα πάνω στα οποία πρέπει να λειτουργούν οι ασφαλιστικές εταιρίες.

Οι αρχές στο Solvency II έχουν τα εξής χαρακτηριστικά (Χαμπάκη, 2016):

- Είναι προσδιορισμένες γενικά και όχι ειδικά
- Είναι προσδιορισμένες ποιοτικά και όχι ποσοτικά
- Εκφράζουν τη λογική που βρίσκεται πίσω από τον κανόνα, επιτρέποντας στις ασφαλιστικές εταιρίες να δημιουργήσουν τους εσωτερικούς τους κανόνες
- Έχουν ευρεία εφαρμογή σε διαφορετικές περιστάσεις

2.6.1. Αρχή της αναλογικότητας (Principle of proportionality)

Η έννοια της αναλογικότητας αναφέρεται στη διαφορετική αντιμετώπιση μικρών, τοπικών ή ειδικευμένων ασφαλιστικών εταιριών που προωθούν απλά προϊόντα ή διαθέτουν απλά κανάλια διανομής. Οι εταιρίες αυτές δεν αναμένεται να αντιμετωπιστούν με τον ίδιο τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζεται ένας μεγάλος ή πολυεθνικός όμιλος με μεγάλο εύρος προϊόντων, πολλαπλά κανάλια διανομής και γεωγραφική διασπορά των πωλήσεων και άρα του κινδύνου. Αυτή η διαπίστωση θεωρείται εύλογη και δεν θεωρείται ότι συνιστά διακριτική μεταχείριση (Tulloch et al., 2009).

Έτσι, στο Solvency II, μέσω της αρχής της αναλογικότητας, λαμβάνεται υπόψη το μέγεθος, η έκταση και η πολυπλοκότητα των εργασιών, επιτρέποντας κεφαλαιακές ελαφρύνσεις, περιορίζοντας τις διαδικαστικές απαιτήσεις ή την πολυπλοκότητα των μεθόδων υπολογισμού, όταν συντρέχει ειδικός λόγος. Εξάλλου, αυτό που ενδιαφέρει σε ένα αποτελεσματικό σύστημα διαχείρισης κινδύνων, είναι η εξέταση των υπαρκτών κινδύνων για κάθε εταιρία ενδιαφέροντος, οι οποίοι προσδιορίζονται τόσο ποσοτικά όσο και ποιοτικά και αντιμετωπίζονται ανάλογα.

Παρά τις σχετικές ανησυχίες που υπήρχαν αρχικά για την εφαρμογή της αρχής αυτής, εκτιμάται ότι θα επιτρέψει σε μικρές και μεσαίες ασφαλιστικές εταιρίες να ανταπεξέλθουν στις απαιτήσεις του Solvency II, αφού αυτές προσαρμοστούν ποσοτικά και ποιοτικά σύμφωνα με τις ιδιαίτερες ανάγκες τους και σε κάθε περίπτωση ύστερα από στενή συνεργασία και συνεννόηση με τις τοπικές εποπτικές αρχές.

2.6.2. Αρχή του συνετού επενδυτή

Στο Solvency II δεν υφίστανται περιορισμοί αναφορικά με τη σύνθεση του χαρτοφυλακίου επενδύσεων της ασφαλιστικής εταιρίας. Παρέχεται έτσι μεγαλύτερη ελευθερία στις επενδυτικές επιλογές (Theaker et al., 2010).

Οι επιλογές αυτές όμως πρέπει να περιλαμβάνουν περιουσιακά στοιχεία και επενδυτικά μέσα, οι κίνδυνοι των οποίων μπορούν να μετρηθούν, να αναγνωριστούν, να παρακολουθηθούν, να διαχειριστούν, να ελεγχθούν και να αναφερθούν.

Επίσης, τα περιουσιακά στοιχεία τα οποία προορίζονται για κάλυψη των τεχνικών αποθεμάτων θα επενδύονται με τρόπο κατάλληλο ως προς τη φύση κα την διάρκεια των ασφαλιστικών υποχρεώσεων.

Καθώς ο επενδυτικός κίνδυνος λαμβάνεται υπόψη στον υπολογισμό των συνολικών αναγκών φερεγγυότητας, θα πρέπει να λαμβάνεται μέριμνα, ώστε κατά την επιλογή των επενδυτικών μέσων να είναι γνωστή η επιβάρυνση που αυτά μπορεί να φέρουν στις κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας.

Οι επενδύσεις θα πρέπει να γίνονται με γνώμονα και την προστασία των ασφαλισμένων – καταναλωτών. Προκειμένου λοιπόν να επιτευχθεί ισορροπία ανάμεσα στην ελευθερία στις επενδυτικές επιλογές και στην προστασία του καταναλωτή, στο Solvency II διασφαλίζεται εφαρμογή τεχνικών, όπως αυτή της διαχείρισης ενεργητικού παθητικού ή αντιστοίχισης περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων (Asset Liability Matching – ALM), της παρακολούθησης ιδιαίτερων επενδύσεων, όπως παράγωγα, Special Purpose Vehicles (SPV) κ.λπ., διαχείρισης της ρευστότητας και της παρακολούθησης του κινδύνου συγκέντρωσης (concentration risk).

Ο συνδυασμός αυτός μεθόδων και τεχνικών διασφαλίζεται όταν ταυτόχρονα υπάρχει και ένα ισχυρό σύστημα εταιρικής διακυβέρνησης.

2.6.3. Αρχή των τεσσάρων ματιών (Four eyes principle)

Η αρχή υποδηλώνει ότι μία συγκεκριμένη δραστηριότητα, απόφαση, επένδυση ή συναλλαγή πρέπει να εγκριθεί ή ελεγχθεί από τουλάχιστον δύο άτομα. Με τον τρόπο αυτό επιτυγχάνεται η εκχώρηση αρμοδιοτήτων, η αύξηση της διαφάνειας ταυτόχρονα με ένα ισχυρό σύστημα εταιρικής διακυβέρνησης.

2.6.4. Αρχή του ικανού στελέχους

Η αρχή αυτή εφαρμόζεται στα πρόσωπα, τα οποία ασκούν ουσιαστική διοίκηση στην επιχείρηση, δηλαδή τα μέλη του διοικητικού, διαχειριστικού οργάνου της επιχείρησης και τα ανώτερα στελέχη. Αυτά είναι τα πρόσωπα τα οποία είναι υπεύθυνα για το υψηλό επίπεδο αποφάσεων, αλλά και για την εφαρμογή των στρατηγικών και πολιτικών, που έχουν εγκριθεί από τα διοικητικά και διαχειριστικά όργανα.

Αυτή η αρχή εφαρμόζεται και σε άτομα τα οποία είναι υπεύθυνα για τις βασικές λειτουργίες που θεωρούνται σημαντικές για το σύστημα διακυβέρνησης και αυτές είναι οι εξής:

- Λειτουργία διαχείρισης κινδύνων
- Λειτουργία κανονιστικής συμμόρφωσης
- Λειτουργία εσωτερικού ελέγχου

- Αναλογιστική λειτουργία

Επίσης εφαρμόζεται σε άτομα τα οποία εκτελούν και άλλα βασικά καθήκοντα, όπως προσδιορίζονται από την επιχείρηση, και σχετίζονται με βασικές δραστηριότητες της ασφαλιστικής εταιρίας. Όλα τα στελέχη που εμπίπτουν στις παραπάνω κατηγορίες θα πρέπει να έχουν διοικητική και επιχειρηματική ικανότητα. Διοικητική ικανότητα σημαίνει ότι έχουν προηγούμενη εμπειρία στον τομέα της διοίκησης, έχουν αντίληψη των εννοιών του Solvency II και είναι σε θέση να λαμβάνουν αποφάσεις συνυπολογίζοντας τους σχετικούς κινδύνους. Επιχειρηματική ικανότητα σημαίνει ότι έχουν τεχνική επάρκεια και εμπειρία στον τομέα τους, η οποία θα πρέπει και να αποδεικνύεται. Παράλληλα είναι σημαντική η καλή φήμη και η ηθική ακεραιότητα των στελεχών αυτών.

2.7. Οικονομικό Κεφάλαιο

Το Οικονομικό Κεφάλαιο είναι η καθαρή αξία την οποία πρέπει να έχει μία εταιρία στην αρχή του έτους για να εξασφαλίσει ότι υπάρχει μικρή μόνο πιθανότητα αθέτησης υποχρεώσεων εντός του έτους. Η καθαρή αξία είναι η αξία των περιουσιακών στοιχείων μείον τις υποχρεώσεις. Η μικρή πιθανότητα είναι η πιθανότητα που αντιστοιχεί στην βαθμολογία πιστοληπτικής ικανότητας στην οποία στοχεύει η εταιρία (Πουφινάς, 2006).

Ο ορισμός του Οικονομικού Κεφαλαίου με τέτοιο τρόπο, μας επιτρέπει να βλέπουμε το μετοχικό κεφάλαιο ως ένα μαξιλάρι έναντι της τυχόν αθέτησης της υποχρέωσης. Το Οικονομικό Κεφάλαιο είναι το ποσό που οι μέτοχοι πρέπει να εισφέρουν στην εταιρία στις αρχές του έτους, έτσι ώστε η εταιρία:

- Να μπορεί να πραγματοποιήσει τις προγραμματισμένες επενδύσεις
- Να διατηρήσει την επιθυμητή πιστοληπτική ικανότητα

Ένας γενικότερος ορισμός (Financial Times Lexicon, 2018) είναι ότι το Οικονομικό Κεφάλαιο είναι το κεφαλαίο κινδύνου που κατέχει μια εταιρεία παροχής χρηματοπιστωτικών υπηρεσιών για να μπορέσει να επιβιώσει σε οποιεσδήποτε δυσκολίες, όπως οι κίνδυνοι αγοράς ή ο πιστωτικός κίνδυνος. Το ποσό καθορίζεται εσωτερικά από την εταιρεία ή από τους μετόχους, συχνά χρησιμοποιώντας ένα μέτρο κινδύνου χαρτοφυλακίου όπως το VaR, δηλαδή η αξία σε κίνδυνο.

Το Οικονομικό Κεφάλαιο θεωρείται ιδιαίτερα σημαντικό για τη φερεγγυότητα των επιχειρήσεων αφού (Χαμπάκη, 2016):

i. Καθορίζει ένα ασφαλές επίπεδο κεφαλαίου για την προστασία των καταναλωτών.

ii. Επιτρέπει στην εταιρία να συσχετίζει το κόστος κινδύνου με μελλοντικές στρατηγικές αποφάσεις, καθιστώντας σαφές ποιες δραστηριότητες επιστρέφουν αξία σε σχέση με τον αναλαμβανόμενο κίνδυνο και ποιες όχι.
iii. Ενισχύει την αποτελεσματική χρήση των κεφαλαίων της εταιρίας, αφήνοντας περιθώρια για ανάληψη πρόσθετων κινδύνων που ενδέχεται να αυξήσουν την κερδοφορία.
iv. Επιτρέπει τη βελτίωση της τιμολόγησης και την ανακατανομή των κεφαλαίων.

Στο Solvency II ορίζεται το Οικονομικό Κεφάλαιο που απαιτείται για την εύρυθμη λειτουργία αλλά και για τη διασφάλιση της φερεγγυότητας των ασφαλιστικών εταιριών μέσω της προτεινόμενης κοινής προσέγγισης (standard formula): της εξίσωσης, που εμπεριέχει τους επιχειρησιακούς κινδύνους που ταυτίζονται με το μοντέλο των ασφαλιστικών εταιριών και που συνυπολογίζονται προκειμένου να οριστεί εσωτερικά αφενός το Ελάχιστο Οικονομικό Κεφάλαιο της κάθε ασφαλιστικής εταιρίας και αφετέρου το Οικονομικό Κεφάλαιο Φερεγγυότητας.

Το Οικονομικό Κεφάλαιο μελετάται από τρεις οπτικές: της εταιρίας και των μετόχων, των οίκων αξιολόγησης και των εποπτών. Στις δύο πρώτες περιπτώσεις το κεφάλαιο κινδύνου υπολογίζεται και ελέγχεται για σκοπούς αποφυγής της χρεοκοπίας ή για την απορρόφηση ζημιών ασφαλιστικής εταιρίας με rating AA, ενώ στην τρίτη περίπτωση το κεφάλαιο κινδύνου ελέγχεται για το αν είναι επαρκές, ώστε να διασφαλίζει τα συμφέροντα και τα οφέλη των ασφαλισμένων.

2.7.1. Ελάχιστη Κεφαλαιακή Απαίτηση & Κεφαλαιακή Απαίτηση Φερεγγυότητας

Το Solvency II απαιτεί τον υπολογισμό δύο διαφορετικών ειδών οικονομικού κεφαλαίου:

1. Την Ελάχιστη Κεφαλαιακή Απαίτηση (Minimum Capital Requirement - MCR)
2. Την Κεφαλαιακή Απαίτηση Φερεγγυότητας (Solvency Capital Requirement - SCR)

Το MCR αποτυπώνει το ελάχιστο ύψος κεφαλαίου το οποίο πρέπει να διατηρεί μία ασφαλιστική εταιρία για να μπορεί να ανταπεξέλθει στις υποχρεώσεις της. Το MCR αντιστοιχεί σε ένα ποσό επιλέξιμων βασικών ιδίων κεφαλαίων, κάτω του οποίου οι αντισυμβαλλόμενοι και δικαιούχοι εκτίθενται σε μη αποδεκτό επίπεδο κινδύνου, αν η ασφαλιστική επιχείρηση συνεχίσει τη δραστηριότητά της.

Αν λοιπόν το διαθέσιμο κεφάλαιο μίας ασφαλιστικής εταιρίας υπολείπεται του MCR, τότε η εποπτική αρχή έχει το δικαίωμα να παρέμβει δυναμικά, λαμβάνοντας σοβαρές αποφάσεις για το μέλλον της ασφαλιστικής εταιρίας.

Οι αποφάσεις αυτές μπορεί να περιλαμβάνουν την απαγόρευση περαιτέρω έκθεσης της εταιρίας σε κίνδυνο μέχρι την εξάντληση (run off) των υποχρεώσεών της και την ανάκληση της αδείας της, τη μεταφορά του χαρτοφυλακίου της σε άλλα μέρη ή και την άμεση ρευστοποίηση του χαρτοφυλακίου της.

Το MCR υπολογίζεται με το VaR επίπεδου εμπιστοσύνης 85% σε χρονικό ορίζοντα ενός έτους. Ποσοστιαία αναλογεί σε 25%-45% του SCR.

Το MCR δεν μπορεί να είναι κάτω από:

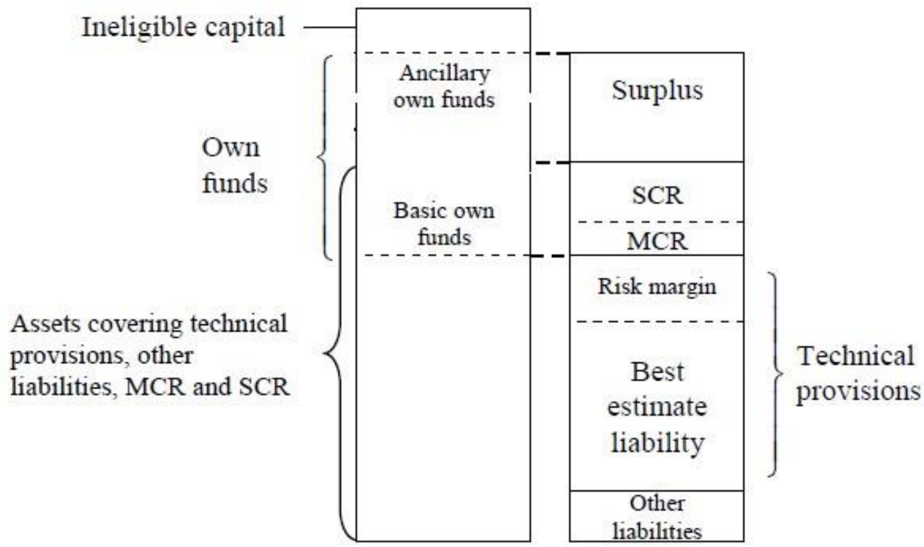
- 2.500.000 ευρώ για ασφαλιστικές εταιρίες Ζημιών
- 3.700.000 ευρώ για ασφαλιστικές εταιρίες Ζωής
- 3.600.000 ευρώ για αντασφαλιστικές εταιρίες

Το SCR δείχνει το κεφάλαιο στο οποίο πρέπει να στοχεύει η ασφαλιστική επιχείρηση για την εύρυθμη λειτουργία της και την ασφαλή συνέχιση των εργασιών της στο μέλλον και υπολογίζεται ούτως ώστε να λαμβάνονται υπόψη όλοι οι ποσοτικοποιημένοι κίνδυνοι στους οποίους εκτίθεται η ασφαλιστική εταιρία. Υπολογίζεται τουλάχιστον μία φορά το έτος και αναφέρεται στις εποπτικές αρχές. Η εταιρία οφείλει να διατηρεί επιλέξιμα ίδια κεφάλαια, τα οποία καλύπτουν το SCR πλήρως.

Σε περίπτωση που διαπιστωθεί απόκλιση από τις παραδοχές του προφίλ κινδύνου που χρησιμοποίησε η ασφαλιστική εταιρία για τον υπολογισμό του SCR, θα πρέπει να γίνει εκ νέου υπολογισμός του και να ενημερωθούν οι εποπτικές αρχές.

Το SCR υπολογίζεται με το VaR επιπέδου εμπιστοσύνης 99,5% σε χρονικό ορίζοντα ενός έτους.

Είναι σαφές ότι κάθε εταιρία έχει το δικό της προφίλ κινδύνου και συνεπώς το ύψος του SCR διαφέρει από εταιρία σε εταιρία. Συνεπώς το SCR, ως απόλυτο ποσό, δεν μπορεί να αποτελέσει μέτρο σύγκρισης της φερεγγυότητας των εταιριών μεταξύ τους. Για να θεωρείται μία ασφαλιστική εταιρία φερέγγυα, θα πρέπει να διατηρεί επιλέξιμα ίδια κεφάλαια ύψους τουλάχιστον ίσου με το SCR. Σχηματικά αυτό παρουσιάζεται στην εικόνα 2 (Institute of Faculty and Actuaries, 2016).



Εικόνα 2: Κεφαλαιακές απαιτήσεις υπο το Solvency II

2.7.2. Μοντέλα υπολογισμού των κινδύνων

Μοντέλα ή υποδείγματα για την ανάλυση, υπολογισμό και αποτύπωση των κινδύνων στους οποίους εκτίθεται μία ασφαλιστική (και όχι μόνο) εταιρία είχαν αναπτυχθεί και προ του Solvency II. Το ενδιαφέρον ήταν (και είναι) όχι μόνο η μέτρηση του κινδύνου, αλλά και ο υπολογισμός της απόδοσης σε σχέση με τον αναλαμβανόμενο κίνδυνο, καθώς αυτό είναι ουσιαστικά που ενδιαφέρει μία εταιρία, τόσο για τους μετόχους της όσο και για τους ασφαλισμένους της και τους εργαζομένους και διαμεσολαβητές της.

Ένα τέτοιο υπόδειγμα πρέπει να συγκεντρώνει κάποια χαρακτηριστικά, όπως είναι τα εξής (Χαμπάκη, 2016):

- Λεπτομερής σχεδιασμός
- Σαφείς παράμετροι
- Υπολογισμός των κινδύνων ενδιαφέροντος
- Υψηλή ποιότητα των δεδομένων με τα οποία τροφοδοτείται
- Διακυβέρνηση του ίδιου του μοντέλου
- Έλεγχος της αποτελεσματικότητάς του

Ένα τέτοιο υπόδειγμα ουσιαστικά αποτυπώνει και αντανακλά την εταιρική στρατηγική στο σύνολό της, αλλά και πιο συγκεκριμένα στην προσέγγιση της διαχείρισης κινδύνου της εταιρίας.

Το Solvency II επιτρέπει τον υπολογισμό του SCR με τη χρήση:

- Της κοινής προσέγγισης (Standard Formula)
- Ενός εσωτερικού υποδείγματος (Internal Model)
- Ενός εν μέρει εσωτερικού υποδείγματος (Partial Internal Model)

2.7.3. Κοινή προσέγιση

Η Standard Formula αποτελεί το προτεινόμενο υπόδειγμα από την εποπτική αρχή, ώστε να μπορεί μία ασφαλιστική εταιρία να λειτουργεί υπό το καθεστώς της απαιτούμενης ολιστικής διαχείρισης κινδύνων και να μπορεί να διασφαλίσει την απαιτούμενη φερεγγυότητα και τη συνέχιση των εργασιών της (EIOPA, 2015a).

Η Standard Formula οδηγεί στον υπολογισμό του SCR με τη χρήση του 99,5% VaR.

Παράλληλα, υπολογίζονται τα ακραία καταστροφικά σενάρια για κάποιες περιπτώσεις κινδύνων, ενώ σε αρκετά σημεία αναγνωρίζεται η διαφοροποίηση και η μεταφορά κινδύνου ως μέθοδος μείωσης της συνολικής έκθεσης στον κίνδυνο.

Επίσης, λαμβάνει υπόψη τη δυνατότητα των τεχνικών αποθεμάτων που τηρούνται από τις ασφαλιστικές εταιρίες, να απορροφούν μέρος των ζημιών.

2.7.4. Εσωτερικό υπόδειγμα

Ένα Internal Model αποτελεί ένα σύστημα καταγραφής και μέτρησης του κινδύνου, το οποίο έχει αναπτυχθεί εσωτερικά από την ασφαλιστική εταιρία με τη θεώρηση ότι μπορεί να αποτυπώσει ορθότερα τη θέση κινδύνου της συγκεκριμένης επιχείρησης, να ποσοτικοποιήσει τους κινδύνους στους οποίους η συγκεκριμένη επιχείρηση εκτίθεται και να καθορίσει τα αναγκαία κεφάλαια που θα επιτρέψουν στην ασφαλιστική εταιρία να αντιμετωπίσει/αντισταθμίσει τους κινδύνους αυτούς (EIOPA, 2014).

Ακόμα και στη χρήση ενός εσωτερικού υποδείγματος, το SCR θα πρέπει να προκύπτει από ένα επίπεδο εμπιστοσύνης 99,5% για χρονικό ορίζοντα ενός έτους. Προκειμένου να μπορέσει μία ασφαλιστική εταιρία να χρησιμοποιήσει ένα εσωτερικό υπόδειγμα, πρέπει:

- Να διενεργήσει τους ελέγχους που προβλέπονται από την Οδηγία για να επιβεβαιώνεται η ορθότητα των αποτελεσμάτων
- Να πληρούνται οι προδιαγραφές για τη χρήση ενός εσωτερικού υποδείγματος
- Να λάβει έγκριση από την εποπτική αρχή

2.7.5. Μερικώς εσωτερικό υπόδειγμα

Το Partial Internal Model αποτελεί ένα υπόδειγμα, το οποίο έχει αναπτυχθεί εσωτερικά από την επιχείρηση, προκειμένου να αποτυπωθεί, να μετρηθεί και να αντιμετωπιστεί κεφαλαιακά ορθότερα ένα κίνδυνος ή μέρος ενός κινδύνου για τη συγκεκριμένη εταιρία.

Προσομοιάζει ουσιαστικά την Standard Formula, αλλά εμφανίζει τροποποιήσεις σε επιμέρους ενότητες ή υπό-ενότητες (modules ή sub-modules) υπολογισμού του κινδύνου, ώστε να είναι όσο το δυνατόν πιο προσαρμοσμένο στην εκάστοτε εταιρία και στο προφίλ κινδύνου αυτής (EIOPA, 2015).

Κεφάλαιο 3. Θεμελιώδεις έννοιες της θεωρίας τιμολόγησης

3.1. Βασικές Ασφαλιστικές Έννοιες

Για την καλύτερη κατανόηση της διαδικασίας της τιμολόγησης είναι αναγκαία η αποσαφήνιση των βασικότερων ασφαλιστικών εννοιών, οι οποίες είναι απαραίτητες για τον υπολογισμό του ασφαλίστρου μέσω της θεμελιώδους ασφαλιστικής εξίσωσης.

Στις ασφαλίσεις κατά ζημιών καλύπτεται συνήθως ένα ευρύ φάσμα ασφαλίσιμων γεγονότων που περιλαμβάνουν: ζημίες σε ένα αυτοκίνητο σε περίπτωση ατυχήματος, οικονομικής ζημίας που προκαλείται από πυρκαγιά σε ακίνητη περιουσία, ασφάλιση αστικής ευθύνης που καλύπτει τις ζημίες που προκαλούνται από τον αντισυμβαλλόμενο λόγω τραυματισμού άλλου προσώπου και ασφάλιση επιχειρήσεων που καλύπτει και οικονομικές απώλειες που προκύπτουν από υλικές ζημιές ή από επαγγελματική ευθύνη. Αυτή η λίστα δεν είναι εξαντλητική.

Σε αντίθεση με τις ασφαλίσεις ζωής που βασίζονται στον θάνατο ή την επιβίωση του ασφαλισμένου σε ένα σχετικά μεγάλο χρονικό διάστημα, οι ασφαλίσεις ζημιών είναι συνήθως ετήσιες και ο ασφαλιστής αντιμετωπίζει μια έκθεση στην οποία υπάρχουν τρεις τυχαίες μεταβλητές. Αυτές είναι, ο αριθμός των ζημιών (συχνότητα), η χρονική στιγμή των ζημιών και το μέγεθος των απαιτήσεων.

Η βασική μονάδα μέτρησης του κινδύνου που βρίσκεται πίσω από το ασφάλιστρο είναι η έκθεση στον κίνδυνο (Exposure), η οποία διαφέρει ανάλογα με το είδος του ασφαλίσιμου κινδύνου. Για παράδειγμα, στον τομέα της ασφάλισης κατοικίας, μία ασφαλισμένη κατοικία για ένα έτος αποτελεί την μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο, ενώ στον τομέα της ασφάλισης εργατικών ατυχημάτων, μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο αποτελεί ο ετήσιος μισθός.

Η έκθεση στον κίνδυνο χωρίζεται σε (Werner et al., 2010) :

i. Εγγεγραμμένες μονάδες έκθεσης (Written Exposures - WE): η συνολική έκθεση στον κίνδυνο που απορρέει από τα ασφαλιστήρια συμβόλαια που έχουν υποβληθεί/εγγραφεί κατά την διάρκεια μιας δεδομένης χρονικής περιόδου (π.χ. ημερολογιακό έτος, εξάμηνο κ.τ.λ.).

ii. Δεδουλευμένες μονάδες έκθεσης (Earned Exposures - EE): αποτελούν το κομμάτι των εγγεγραμμένων μονάδων έκθεσης στον κίνδυνο, για το οποίο έχει ήδη παρασχεθεί κάλυψη σε ένα συγκεκριμένο χρονικό σημείο. Είναι δηλαδή, οι μονάδες έκθεσης που αντιστοιχούν στο δεδουλευμένο ασφάλιστρο ή διαφορετικά, το ποσοστό συμμετοχής ενός ασφαλιστηρίου σε κάποιο έτος.

iii. Μη-δεδουλευμένες μονάδες έκθεσης (Unearned Exposures - UE): αποτελούν το κομμάτι των εγγεγραμμένων μονάδων έκθεση στον κίνδυνο για το οποίο δεν έχει παρασχεθεί ακόμη κάλυψη στο ίδιο χρονικό σημείο.

iv. Εν ισχύ μονάδες έκθεσης στον κίνδυνο (In-force Exposures - IE): οι μονάδες έκθεσης που βρίσκονται εκτεθειμένες σε πιθανή εκπλήρωση ζημιογόνου ενδεχομένου σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή/περίοδο.

Παράδειγμα: Έστω δύο ασφαλιστήρια συμβόλαια αυτοκινήτου, όπως φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Θεωρούμε ότι η μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο είναι το ένα έτος.

Παράδειγμα ασφαλιστηρίων συμβολαίων

Συμβόλαιο #	**Διάρκεια συμβολαίου**	**Πλήθος οχημάτων**
1	1 Ιανουαρίου 2016 έως 30 Ιουνίου 2016	50
2	1 Απριλίου 2016 έως 31 Μαρτίου 2017	100

Από τα στοιχεία του πίνακα παρατηρείται ότι τα ασφαλιστήρια συμβόλαια τύπου 1 είναι εξάμηνα ενώ τα ασφαλιστήρια συμβόλαια τύπου 2 είναι ετήσια. Επομένως, η εγγεγραμμένη έκθεση στον κίνδυνο (WE) το έτος 2016 είναι:

$$WE = \left(50\, x\, \frac{6}{12}\right) + \ (100\, x\, 1) = \ 125\ αυτοκίνητο - έτη.$$

Αντίστοιχα, για τη δεδουλευμένη έκθεση (EE) στον κίνδυνο του έτους 2016 παρατηρούμε ότι τα ασφαλιστήρια τύπου 1 είναι όλα δεδουλευμένα το έτος 2016 ενώ για τα ασφαλιστήρια τύπου 2, τα ¾ είναι η δεδουλευμένη έκθεση στον κίνδυνο το 2016 και τα υπόλοιπα είναι η μη δεδουλευμένη έκθεση στον κίνδυνο. Επομένως,

$$EE = \left(50\, x\, \frac{6}{12}\right) + \left(100\, x\, \frac{9}{12}\right) = 100.$$

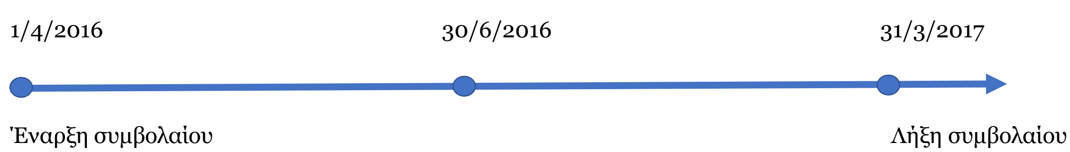
Προφανώς η διαφορά 125 – 100 = 25 είναι η μη δεδουλευμένη έκθεση στον κίνδυνο (UE). Το παραπάνω παράδειγμα, οδηγεί στην σχέση:

$$WE = EE + UE.$$

Αντίστοιχος είναι κι ο διαχωρισμός των ασφαλίστρων. Το ασφάλιστρο (Premium - P) είναι το χρηματικό ποσό που καλείται να πληρώσει ο ασφαλισμένος έναντι ασφαλιστικής κάλυψης και χωρίζεται σε (Werner et al., 2010):

i. Εγγεγραμμένο ασφάλιστρο (Written Premium - WP): Το συνολικό ποσό ασφαλίστρου που αντιστοιχεί σε ασφαλιστήρια συμβόλαια, τα οποία έχουν εγγραφεί κατά την διάρκεια μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου.
ii. (Μη) δεδουλευμένο ασφάλιστρο ((Un)Earned Premium): Αποτελεί το τμήμα του εγγεγραμμένου ασφαλίστρου για το οποίο (δεν) έχει γίνει παροχή ασφαλιστικής κάλυψης στην ίδια χρονική περίοδο.
iii. Ασφάλιστρο εν ισχύ (In-force Premium): είναι το full-term premium για ασφαλιστήρια συμβόλαια που βρίσκονται εν ισχύ κατά την διάρκεια μια συγκεκριμένης χρονικής περιόδου.

Παράδειγμα: Θεωρούμε ένα ασφαλιστήριο αυτοκινήτου το οποίο ξεκινά 1 Απριλίου 2016 και λήγει 31 Μαρτίου 2017. Η ασφαλιστική εταιρία λαμβάνει ασφάλιστρο 500 ευρώ για ένα χρόνο. Το ποσό αυτό αντιστοιχεί στα εγγεγραμμένα ασφάλιστρα (WP). Αν όμως σήμερα ήταν 30 Ιουνίου 2016, τότε ένα ποσό από αυτό το ασφάλιστρο έχει ήδη χρησιμοποιηθεί για την κάλυψη. Ας δούμε το ακόλουθο διάγραμμα:



Είναι προφανές ότι τα δεδουλευμένα ασφάλιστρα την 30 Ιουνίου 2016 είναι 3 μήνες από τους 12 του συμβολαίου. Στην πραγματικότητα η ασφαλιστική εταιρία έχει δεδουλευμένα ασφάλιστρα (EP) το 25% του εγγεγραμμένου ασφαλίστρου, το οποίο μεταφράζεται ως:

25% × 500 € = 125 €. Επομένως, το μη-δεδουλευμένο ασφάλιστρο (UP) είναι η διαφορά:

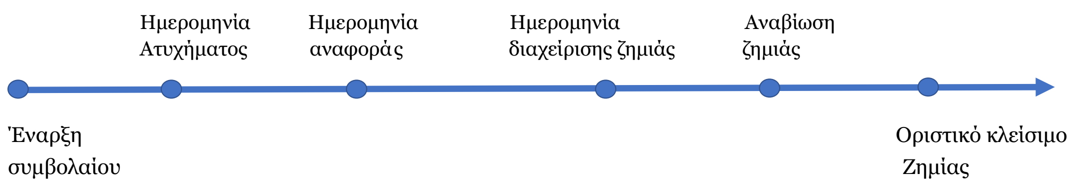
500 – 125 = 375 €. Το παραπάνω παράδειγμα οδηγεί στη δημιουργία της σχέσης

$$WP = EP + UP.$$

Όπου με WP συμβολίζεται το εγγεγραμμένο ασφάλιστρο, με EP το δεδουλευμένο ασφάλιστρο και με UP το μη-δεδουλευμένο ασφάλιστρο.

3.2. Η διάρκεια ζωής μίας ζημιάς

Για τη μελέτη της διαδικασίας εξέλιξης μίας ζημιάς παρουσιάζεται το παρακάτω σχήμα:



Στο παραπάνω σχήμα απεικονίζεται η πορεία «ζωής» μιας ζημίας. Όπως φαίνεται σε συγκεκριμένο χρονικό σημείο ξεκινά το ασφαλιστήριο συμβόλαιο και στη συνέχεια εμφανίζεται μία ζημιά, η οποία προκαλεί οικονομικό κόστος για την ασφαλιστική εταιρία. Ο παθών ενημερώνει την ασφαλιστική εταιρία για το ατύχημα είτε απ' ευθείας είτε μέσω του διαμεσολαβητή του παθόντα (broker) και ξεκινάει η διαχείριση της ζημιάς. Όπως φαίνεται από το σχήμα, η ημερομηνία ατυχήματος δεν είναι απαραιτήτως ίδια με την ημερομηνία αναφοράς του. Αυτό πρακτικά συμβαίνει διότι, όταν μία ζημιά γίνει γνωστή στην ασφαλιστική εταιρία, θεωρείται ως αναφερθείσα απαίτηση (reported claim) και καταγράφεται στη βάση δεδομένων της εταιρίας. Κατά τη διαδικασία επεξεργασίας της ζημιάς οριστικοποιείται η αντίστοιχη απαίτηση, δηλαδή η αξίωση εκ μέρους του ασφαλισμένου ή τρίτου για εκπλήρωση -εκ μέρους του ασφαλιστή- της υπόσχεσης κάλυψης των οικονομικών συνεπειών που προκύπτουν από πραγματοποίηση του ζημιογόνου ενδεχομένου.

Η ταξινόμηση των απαιτήσεων (claims) γίνεται με βάση τα παρακάτω (Werner et al., 2010):

- Ημερομηνία ατυχήματος: η ημερομηνία στην οποία πραγματοποιήθηκε το ζημιογόνο συμβάν
- Ημερομηνία αναφοράς: η ημερομηνία στην οποία γνωστοποιείται το ζημιογόνο συμβάν στην ασφαλιστική εταιρία/στον ασφαλιστή
- Πραγματοποιηθείσες αλλά όχι δηλωθείσες απαιτήσεις (Incurred But Not Reported claims - IBNR): οι απαιτήσεις που έχουν συμβεί αλλά δεν έχουν καταστεί ακόμη γνωστές στον ασφαλιστή
- Δηλωθείσες απαιτήσεις (Reported claims): οι απαιτήσεις που έχουν γνωστοποιηθεί στον ασφαλιστή
- Ανοιχτές απαιτήσεις (Open claims): οι απαιτήσεις που δεν έχουν ακόμη τακτοποιηθεί
- Κλειστές απαιτήσεις (Closed claims): οι απαιτήσεις που έχουν τακτοποιηθεί αλλά ενδέχεται να ξανανοίξουν/επανεκτιμηθούν

Απώλεια/ζημιά (loss): είναι το ποσό της αποζημίωσης που έχει πληρωθεί ή αναμένεται να πληρωθεί στον ενάγοντα, όπως ορίζεται στους όρους του ασφαλιστηρίου συμβολαίου. Αποτελεί δηλαδή το μέγεθος της απαίτησης. Αντίστοιχα με τις απαιτήσεις, οι ζημιές ταξινομούνται ως εξής (Werner et al., 2010):

i. Πληρωθείσες ζημιές(Paid Losses - PL): το ποσό των ζημιών που έχει ήδη πληρωθεί στους αιτούντες/ενάγοντες.
ii. Αποθεματικό διευθέτησης (Case Reserve - CR): αποτελεί μια εκτίμηση του ποσού χρημάτων που θα χρειαστούν ώστε να διευθετηθεί πλήρως μια απαίτηση. Δεν περιλαμβάνει τις πληρωμές που έχουν ήδη γίνει.
iii. Δηλωθείσα ζημιά (Reported Loss - RL): αποτελεί το άθροισμα των εξοφλημένων ζημιών και του τρέχοντος αποθεματικού διευθέτησης. Δηλαδή

$$RL = PL + CS.$$

iv. Εκτιμώμενη ολική ζημιά (Estimated Ultimate Loss - EUL): το ποσό των χρημάτων που απαιτείται για το κλείσιμο και την διευθέτηση όλων των απαιτήσεων. Το συνολικό άθροισμα των δηλωθεισών ζημιών μεταξύ όλων των γνωστών απαιτήσεων, ενδεχομένως να μην ισούται με το σύνολο των συνολικών ζημιών για πολλά χρόνια λόγω των μη-δηλωμένων ή μη-επαρκώς-δηλωμένων απαιτήσεων. Έτσι προκύπτουν τα :

a) Αποθεματικό πραγματοποιημένων αλλά όχι δηλωμένων ζημιών (Incurred But Not Reported reserve - IBNR): το ποσό που εκτιμάται ότι απαιτείται για να διευθετηθούν ολοκληρωτικά οι απαιτήσεις αυτές που δεν έχουν δηλωθεί.
b) Αποθεματικό πραγματοποιημένων αλλά όχι επαρκώς δηλωμένων (Incurred But Not Enough Reported Reserve - IBNER): το απόθεμα για απαιτήσεις, οι οποίες έχουν συμβεί αλλά δεν έχουν δηλωθεί επαρκώς. Υπολογίζεται ως η διαφορά μεταξύ των συνολικών ζημιών που έχουν δηλωθεί την περίοδο εκτίμησης των ζημιών και του συνολικού ποσού που εκτιμάται ότι απαιτείται για να διευθετηθούν ολοκληρωτικά οι απαιτήσεις που έχουν δηλωθεί. Δηλαδή,

$$EUL = RL + IBNR + IBNER.$$

Εκτός από τις ζημιές που εμφανίζονται, υπάρχουν και τα Έξοδα/Κόστη τα οποία συναντώνται στην διαδικασία της τιμολόγησης και επηρεάζουν το ασφάλιστρο και είναι τα εξής (Werner et al., 2010):

i. Έξοδα διακανονισμού (Loss Adjustment Expenses - LAE): τα έξοδα στα οποία εκτίθεται μια ασφαλιστική εταιρία στην διαδικασία διακανονισμού των απαιτήσεων, επιπλέον των χρημάτων που πληρώνονται προς τον αιτούντα/ενάγοντα.
ii. Επιμεριζόμενα έξοδα διακανονισμού (Allocated Loss Adjustment Expenses - ALAE): είναι έξοδα, τα οποία σχετίζονται με μία συγκεκριμένη απαίτηση και μπορούν να αποδοθούν άμεσα σε αυτήν. Για παράδειγμα, το κόστος ενός δικηγόρου στον οποίο έχει ανατεθεί η δικαστική διεκπεραίωση μίας συγκεκριμένης απαίτησης.
iii. Μη-επιμεριζόμενα έξοδα διακανονισμού (Unallocated Loss Adjustment Expenses - ULAE): είναι τα έξοδα που σχετίζονται με τις απαιτήσεις, τα οποία όμως δεν μπορούν να αποδοθούν σε μία συγκεκριμένη απαίτηση. Για παράδειγμα, ο μισθός του προσωπικού που ασχολείται με την διεκπεραίωση απαιτήσεων, δεν μπορεί να αποδοθεί σε μία συγκεκριμένη απαίτηση.

   Τα παραπάνω οδηγούν στη δημιουργία της εξίσωσης

$$LAE = ALAE + ULAE.$$

iv. Ασφαλιστικά έξοδα (Underwriting Expenses - UE): πέραν των εξόδων διακανονισμού, οι ασφαλιστικές εταιρίες υπόκεινται και σε λοιπά έξοδα κατά την διαδικασία της ασφάλισης και της παροχής ασφαλιστηρίων συμβολαίων. Τα έξοδα αυτά συχνά αναφέρονται ως ασφαλιστικά ή λειτουργικά ή διοικητικά έξοδα. Ταξινομούνται με βάση την κατηγορία στην οποία ανήκουν, όπως γενικά έξοδα, προμήθειες και μεσιτίες, φόροι, λοιπά έξοδα.

v. Κέρδος: παρόλο που δεν αποτελεί έξοδο, είναι ένα πολύ βασικό ασφαλιστικό μέτρο, το οποίο επηρεάζει και καθορίζει το ασφάλιστρο και το είδος της τιμολόγησής του σε μεγάλο βαθμό.

vi. Ασφαλιστικό κέρδος (Underwriting Profit - UP): το σύνολο των κερδών που προκύπτουν από το κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο.

vii. Επενδυτικό κέρδος: το κέρδος που προκύπτει από την επένδυση των κεφαλαίων της ασφαλιστικής εταιρίας.

Παράδειγμα: Έστω ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο για το οποίο γνωρίζουμε ότι

a) Ο ασφαλισμένος έχει συνάψει ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο αυτοκινήτου με την ασφαλιστική εταιρία ΑΒΓ που θα ξεκινάει 1 Ιανουαρίου 2017 και θα τελειώνει 31 Δεκεμβρίου 2017.

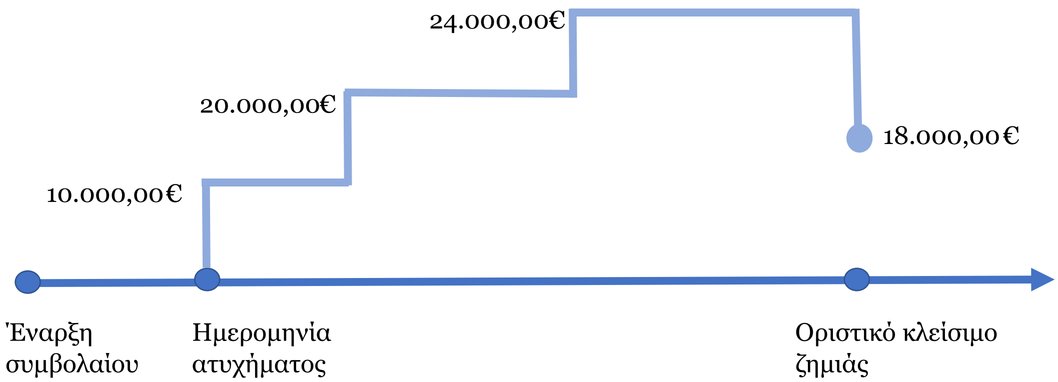
b) Ο ασφαλισμένος κάνει ένα ατύχημα στις 20 Φεβρουαρίου 2017 (ημερομηνία ατυχήματος).

c) Ο ασφαλισμένος ενημερώνει για το ατύχημα αυτό τον διαμεσολαβητή του στις 21 Φεβρουαρίου 2017, ο οποίος με τη σειρά του ενημερώνει την ασφαλιστική εταιρία αμέσως αλλά λόγω διαδικασιών και γραφειοκρατίας ο φάκελος με το ατύχημα γίνεται γνωστός στις 26 Φεβρουαρίου 2017 (ημερομηνία αναφοράς).

d) Ο πραγματογνώμονας ζημιών εκτιμά ότι η ζημιά θα φτάσει τις 12.000 €. Από αυτό το ποσό, μία πληρωμή 2.000 € γίνεται άμεσα για πληρωμές εξόδων, ενώ ταυτόχρονα δημιουργείται το ποσό των 10.000 € ως εκκρεμείς ζημιές.

e) Μία πρόσθετη πληροφορία γίνεται γνωστή όπου οι εκκρεμείς ζημιές αναθεωρούνται, γίνονται 20.000€, εν συνεχεία γίνονται 24.000€ και οριστικοποιούνται στις 18.000€. Για την εν λόγω ζημιά το IBNER είναι η διαφορά μεταξύ της αρχικής τιμής την ημερομηνία αναφοράς και της τελικής εκτιμηθείσας τιμής όπου οριστικοποιείται η ζημιά και διευθετείται.

Η πορεία της ζωής της συγκεκριμένης ζημιάς εμφανίζεται αναλυτικά στο παρακάτω σχεδιάγραμμα:



Στο εν λόγω παράδειγμα, αυτό που παρατηρείται είναι μία καθυστέρηση μεταξύ της ημερομηνίας αναφοράς της ζημιάς και της ημερομηνίας διευθέτησης της ζημιάς. Αν αντίστοιχα μελετηθεί η καθυστέρηση μεταξύ της ημερομηνίας ατυχήματος και της ημερομηνίας αναφοράς του ατυχήματος, τότε δημιουργείται και η έννοια του IBNYR δηλαδή των ζημιών που έχουν γίνει αλλά δεν έχουν ακόμα αναφερθεί. Κάτι τέτοιο μπορεί να συμβεί για παράδειγμα στις ασφαλίσεις πλοίων, όπου οι ζημιές σε ένα πλοίο μπορούν να γίνουν στην ανοιχτή θάλασσα και δεν γίνονται γνωστές μέχρι το πλοίο να φτάσει σε λιμάνι, ώστε να γίνει ολοκληρωμένη πραγματογνωμοσύνη. Μια άλλη περίπτωση στην οποία μπορεί να εμφανιστεί μία IBNYR ζημιά, είναι στις ασφαλίσεις υγείας, όπου μία διάγνωση για μία ασθένεια μπορεί να γίνει πολλούς μήνες μετά από ένα αυτοκινητιστικό ατύχημα.

Φυσικά, τα αναλογιστικά τμήματα των εταιριών για να προστατεύσουν την ασφαλιστική εταιρία από ενδεχόμενα προβλήματα ρευστότητας λόγω IBNER και IBNYR ζημιών, οι οποίες θα γίνουν γνωστές πολύ αργότερα, κάνουν εκτιμήσεις για αυτές τις ζημιές. Σύμφωνα με τον ακόλουθο ορισμό, η έννοια του IBNR διασπάται στα εξής δύο κομμάτια:

$$IBNR = IBNYR + IBNER.$$

Η παραπάνω σχέση δηλώνει ότι τα ολικά αποθέματα που πρέπει να διατηρεί μία ασφαλιστική εταιρία διασπώνται σε δύο κομμάτια, δηλαδή στο άθροισμα των αποθεμάτων που αφορούν ζημιές οι οποίες δεν έχουν ακόμα αναφερθεί (IBNYR) και στο απόθεμα για ζημιές που δεν έχουν εκτιμηθεί αρκετά καλά (IBNER).

3.3 Ολική ζημιά

Η ολική ζημιά (Ultimate Claim/Ultimate Loss - UC) είναι το ολικό ποσό που απαιτείται ώστε να διακανονιστεί πλήρως η ζημιά ή ένα γκρουπ από ζημιές σε ένα συγκεκριμένο συμβόλαιο (Werner et al., 2010). Η έννοια της ζημιάς βασίζεται στις ζημιές που έχουν αναφερθεί (Reported Claims - RL) και σε αυτές που δεν έχουν αναφερθεί (IBNR). Όπως παρουσιάστηκε και προηγουμένως ισχύει ότι το ποσό των ζημιών που έχουν αναφερθεί είναι το άθροισμα των πληρωθεισών ζημιών (Cumulative Paid Losses - CPL) και των εκκρεμών ζημιών (Case Reserve- CR) ενώ οι ζημιές που δεν έχουν αναφερθεί είναι οι IBNR. Δηλαδή

$$UL = CPL + CR + IBNR.$$

Παράδειγμα: Έστω ο παρακάτω πίνακας ταξινόμησης των ζημιών για μια ασφαλιστική εταιρεία

	30/6/2015	31/12/2015	30/6/2016	31/12/2016
Αθροιστικές πληρωθείσες ζημιές	0	10.000	25.000	40.000
Εκκρεμείς ζημιές	40.000	70.000	60.000	35.000

Οι τελικές ζημιές ανανεώνονται ετησίως στις 30 Ιουνίου. Η ολική ζημιά για το 2015 εκτιμάται από τον αναλογιστή να είναι 110.000 και 100.000 το 2016. Για να εκτιμηθεί το απόθεμα IBNR για τον ισολογισμό της εταιρίας την 31/12/2015 και την 31/12/2016:

- Για την 31/12/2015, βάσει της σχέσης παραπάνω ισχύει ότι :

  $IBNR\ Reserves_{2015} = \mathrm{UC} - [\mathrm{CPL} + \mathrm{CR}].$

  $IBNR\ Reserves_{2015} = 110.000 - [10.000 + 70.000] = 30.000.$

- Για την 31/12/2016, αντίστοιχα ισχύει ότι:

  $IBNR\ Reserves_{2016} = 100.000 - [40.000 + 35.000] = 25.000.$

3.4. Θεμελιώδεις τεχνικές τιμολόγησης

Η έννοια της τιμολόγησης είναι μια διαδικασία που παρέχει μια εκτίμηση του μελλοντικού κόστους και σχετίζεται με τον κίνδυνο που μεταφέρεται από έναν ασφαλιζόμενο στον ασφαλιστή. Αυτή η διαδικασία είναι προοπτική, αφού τα ποσοστά τιμολόγησης (rates) αναπτύσσονται πριν από την ημερομηνία έναρξης του συμβολαίου.

Η έννοια του τιμής (Rate - R) είναι στενά συνδεδεμένη με την τιμή μίας μονάδας έκθεσης στον κίνδυνο. Ασφάλιστρο (Premium - P) είναι το τελικό κόστος μεταφοράς ενός ρίσκου από τον ασφαλισμένο στον ασφαλιστικό οργανισμό. Επίσης, όπως προαναφέρθηκε, η μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο είναι το πιο σημαντικό μέτρο μέτρησης ενός κινδύνου. Μία μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο για παράδειγμα θα μπορούσε να είναι ένα αυτοκίνητο-έτος σε μία ασφαλιστική εταιρία, ή θα μπορούσε να είναι ένα ποσό 100.000 € για την κάλυψη πυρκαγιάς ενός οικήματος.

Αυτό σημαίνει ότι :

$$P = R\ x\ E,$$

όπου,

- P: το ασφάλιστρο
- R: η τιμή
- E: οι μονάδες έκθεσης στον κίνδυνο.

Παράδειγμα: Αν το rate για την κάλυψη πυρός ενός έτους είναι 300 € για ένα οίκημα αξίας 100.000 €, τότε το ετήσιο ασφάλιστρο για την κάλυψη πυρός ενός οικήματος αξίας 500.000 € είναι ίσο με 5 × 300 € = 1.500 €.

Σύμφωνα με την αναλογιστική βιβλιογραφία υπάρχουν βασικοί κανόνες που χρησιμοποιούνται στη διαδικασία της τιμολόγησης, οι οποίοι ονομάζονται «actuarially sound estimates of insurance rates» (Casualty Actuarial Society, 2015). Οι κανόνες (principles) αυτοί είναι οι ακόλουθοι:

1. Η τιμή είναι μία εκτίμηση των μελλοντικού κόστους

Η αρχή αποτελεί και τη βάση της αρχής της ισοδυναμίας (equivalence principle), η οποία δηλώνει, ότι το ασφάλιστρο είναι ίσο με την παρούσα αξία των μελλοντικών ζημιών. Στις ασφαλίσεις ζωής αυτή η τιμή του καθαρού ασφαλίστρου συναντάται με τον όρο «net premium» ενώ στις ασφαλίσεις κατά ζημιών με τον όρο «pure premium».

2. Η τιμή ενσωματώνει και τα κόστη μεταφοράς του κινδύνου

Η αρχή αυτή δηλώνει ότι η τιμολόγηση θα πρέπει να παρέχει μία ισορροπία μεταξύ της τιμής που θα ζητηθεί και του αντίστοιχου κόστους, ενσωματώνοντας την ευκαιρία της ασφαλιστικής εταιρίας για να πετύχει ένα δίκαιο-τίμιο κέρδος.

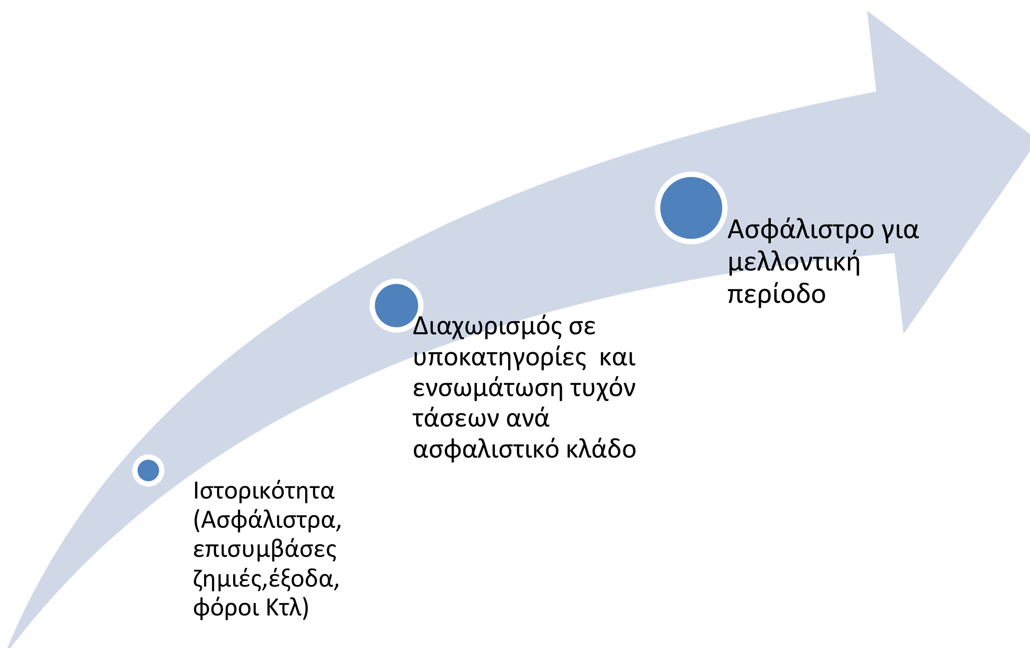
Υπάρχουν γενικά δύο προσεγγίσεις για να εκτιμηθούν τα ασφάλιστρα. Στην πρώτη προσέγγιση, ο αναλογιστής θα αξιολογήσει τα ιστορικά δεδομένα που έχει σχετικά με τα ασφάλιστρα, τις επισυμβείς ζημιές, τα έξοδα, τους φόρους και όποιες άλλες πληροφορίες έχει. Με αυτή τη γνώση θα γίνει η εκτίμηση των ασφαλίστρων. Η υπόθεση που γίνεται εδώ είναι ότι τα ιστορικά δεδομένα αποτελούν έναν αξιόπιστο δείκτη για τις μελλοντικές ζημιές και έξοδα και έτσι βάσει όλων των στοιχείων αυτών θα δημιουργηθεί η τιμή του ασφαλίστρου. Βέβαια, δεν είναι τόσο εύκολο να γίνει χρήση των ιστορικών στοιχείων, ώστε να βρεθούν αξιόπιστες εκτιμήσεις με μεγάλη ακρίβεια, διότι οι ιστορικές τιμές πρέπει να αναπροσαρμοστούν στο σήμερα. Παρόλα αυτά, σύμφωνα με το νόμο των μεγάλων αριθμών, ο αριθμός των ζημιών που θα γίνουν είναι ανεξάρτητος από το ποσό και όσο αυξάνεται, το μέσο κόστος θα είναι ίσο με το αναμενόμενο κόστος της επόμενης περιόδου. Η εμπειρία των ιστορικών ζημιών για μία ατομική ζημιά θα έχει φυσικά μεγαλύτερη διακύμανση σε σχέση με ένα ομογενές χαρτοφυλάκιο ανεξάρτητων κινδύνων. Όσο το μέγεθος των χαρτοφυλακίων αυξάνεται, η εμπειρία για τις ζημιές που αποκτάται είναι περισσότερο σταθερή και ως εκ τούτου έχει μεγαλύτερη προβλεπτική ικανότητα.

Η θεωρία πιθανοτήτων και δειγματοληψίας υποστηρίζει ότι η προβλεπτική τιμή που θα βασιστεί στην ιστορικότητα των ζημιών βελτιώνεται, αν ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλισμένων είναι ομοιογενές (με την αναλογιστική έννοια) και επαρκές. Στην αναλογιστική ορολογία, η προβλεπτική τιμή που προκύπτει από ένα δείγμα δεδομένων δίνει την έννοια της αξιοπιστίας χαρτοφυλακίου (credibility).

Η έταιρη προσέγγιση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ενισχυθεί η αξιοπιστία είναι να διασπαστεί το δείγμα σε ομοιογενείς υποκατηγορίες, όπου κάθε μία έχει παρόμοια χαρακτηριστικά και παρόμοιους παράγοντες. Για παράδειγμα, ένα χαρτοφυλάκιο αυτοκινήτων μπορεί να διασπάται σε 60% χαμηλού κινδύνου οδηγούς και 40% υψηλού κινδύνου οδηγούς. Σε αυτή την περίπτωση, ο κίνδυνος είναι ανάλογος με την πιθανότητα των ατυχημάτων που γίνονται. Αυτό το χαρτοφυλάκιο έχει έλλειψη ομοιογένειας αλλά όταν γίνει αυτός ο διαχωρισμός σε δύο ομοιογενείς κλάσεις κινδύνων, η προβλεπτική ικανότητα κάθε κλάσης αυξάνεται. Ωστόσο, πρέπει να δοθεί ιδιαίτερη προσοχή και στα μεγέθη των υποκατηγοριών διότι το μικρό μέγεθος μπορεί να παράξει αποτελέσματα στατιστικά μη αξιόπιστα.

Εκτός από την ομοιογενοποίηση των κινδύνων σε επαρκούς μεγέθους κλάσεις, ο αναλογιστής πρέπει επίσης να συμπεριλάβει και τις πρόσφατες αλλαγές που υπάρχουν σε χρηματοοικονομικό και οικονομικό περιβάλλον, διότι αυτά επηρεάζουν τον ασφαλιστικό κίνδυνο καθώς και την διαδικασία της τιμολόγησης. Αυτοί οι παράγοντες είναι για παράδειγμα προβλέψεις για τον πληθωρισμό, καθώς και τάσεις του ασφαλιστικού κλάδου που απορρέουν από τον ανταγωνισμό. Επίσης, παρόμοιοι παράγοντες σαν αυτό είναι και η τεχνολογική εξέλιξη που έχει άμεση επιρροή στο επίπεδο των προμηθειών και άλλων εξόδων.

Η Εικόνα 4 παρουσιάζει μία διαγραμματική απεικόνιση αυτής της προσέγγισης.



Εικόνα 4:Προσέγγιση υπολογισμού ασφαλίστρων

3. Η τιμή ενσωματώνει και τον ατομικό κίνδυνο

Ενώ στη δεύτερη αρχή μελετήθηκαν διαφορετικά επίπεδα-κλάσεις συμβολαίων, η αρχή αυτή απαιτεί όλα τα κόστη που σχετίζομαι με έναν συγκεκριμένο ασφαλισμένο να είναι πλήρως υπολογισμένα λογιστικά. Αν η εμπειρία ζημιών για ένα κίνδυνο δεν είναι αξιόπιστη, τότε η εμπειρία της υποκατηγορίας παρόμοιων κινδύνων είναι καταλληλότερη.

Στην πραγματικότητα, η δεύτερη προσέγγιση χρησιμοποιείται για την εκτίμηση του ασφαλίστρου για μία μελλοντική περίοδο και βασίζεται στο συλλογικό μοντέλο κινδύνων, το οποίο βασίζεται στις συνολικές ζημιές. Το άθροισμα των ζημιών είναι το άθροισμα από τυχαία ποσά που προκύπτουν από άγνωστο πλήθος ζημιών. Από τη στιγμή που το πλήθος των ζημιών είναι επίσης άγνωστος, το άθροισμα των ζημιών είναι τυχαίο άθροισμα από τυχαίες μεταβλητές.

3.5. Βασικοί δείκτες και ορισμοί

Οι τρεις πιο σημαντικοί δείκτες που χρησιμοποιούνται στη διαδικασία της τιμολόγησης είναι η συχνότητα ζημιών (frequency - F), η σφοδρότητα ζημιών (severity - S) καθώς και το καθαρό ασφάλιστρο (pure premium - PP) (Werner et al., 2010).

Με την έννοια συχνότητα ζημιών αναφερόμαστε στο μέτρο της συχνότητας με την οποία δημιουργούντα οι απαιτήσεις. Ο αριθμός των ζημιών σχετίζεται άμεσα με τον αριθμό των μονάδων που είναι εκτεθειμένες στον κίνδυνο. Είναι στην πραγματικότητα ο αριθμός των ζημιών που έχει αναφερθεί στην ασφαλιστική εταιρία εκφρασμένος ως ο λόγος προς την δεδουλευμένη έκθεση στον κίνδυνο και αναφέρεται αποκλειστικά στην περίοδο που η κάλυψη είναι εν ισχύ. Η σχέση που δίνει τη συχνότητα ζημιών είναι:

$$F = \frac{C}{E},$$

όπου με F συμβολίζεται η συχνότητα των ζημιών, με C ο αριθμός των ζημιών και με E οι μονάδες δεδουλευμένης έκθεσης στον κίνδυνο.

Με τον όρο σφοδρότητα αναφερόμαστε σε ένα μέτρο του μέσου κόστους των απαιτήσεων (Claims - C), δηλαδή το μέσο κόστος ανά απαίτηση. Η σφοδρότητα μπορεί να αποτελείται είτε από καθαρές απώλειες (χωρίς τα λειτουργικά έξοδα), είτε από προσδιορισμένα έξοδα ρύθμισης ζημιάς, είτε από συνολικά έξοδα.

Η σχέση που δίνει τη σφοδρότητα ζημιών είναι:

$$S = \frac{L}{C},$$

όπου L είναι το συνολικό ποσό ζημιών.

Οι υπολογισμοί για την σφοδρότητα, ενδέχεται να διαφέρουν σημαντικά μεταξύ τους. Δηλαδή, μπορεί να χρησιμοποιηθούν είτε οι πληρωθείσες ζημίες, είτε οι δηλωθείσες ζημίες και απαιτήσεις, είτε με είτε χωρίς τον συνυπολογισμό των ALAE στις ζημίες. Συνεπώς, είναι σημαντικό να τεκμηριώνονται σαφώς οι τύποι ζημιών και απαιτήσεων που χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό αυτής της σχέσης.

Τέλος, με την έννοια καθαρό ασφάλιστρο (Pure Premium - PP), αναφερόμαστε στο ποσό ζημιών ως προς τις μονάδες έκθεσης στον κίνδυνο. Το μέγεθος αυτό υπολογίζεται ως εξής:

$$PP = \begin{cases} F \; x \; S = L/E \\ \dfrac{EP \; x \; LR}{E} \end{cases},$$

όπου με F συμβολίζεται η συχνότητα ζημιών, S η σφοδρότητα ζημιών, L οι ζημιές, E οι μονάδες έκθεσης στον κίνδυνο, EP το δεδουλευμένο ασφάλιστρο και LR ο δείκτης ζημιών.

Συνήθως, για τον υπολογισμό του καθαρού ασφαλίστρου χρησιμοποιούνται οι δηλωθείσες ζημίες στον αριθμητή και οι δεδουλευμένες μονάδες έκθεσης στον κίνδυνο στον παρονομαστή. Παρόλα αυτά, όπως στον υπολογισμό της σφοδρότητας, έτσι κι εδώ, δύναται στις δηλωθείσες ζημιές να συμπεριλαμβάνονται και τα ALAE και τα ULAE, ανάλογα με τις συγκεκριμένες ανάγκες της κάθε ασφαλιστικής εταιρίας. Θα πρέπει όμως να διευκρινίζονται τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για τον υπολογισμό του λόγου. Πέραν των παραπάνω μεγεθών, υπάρχουν και κάποια ακόμα που είναι εξίσου σημαντικά κατά την διαδικασία τιμολόγησης.

a) Μέσο ασφάλιστρο (Average Premium - AP):

$$AP = \frac{P}{E}.$$

b) Δείκτης ζημιών (Loss Ratio - LR): Μετρά το ποσοστό της κάθε μονάδας ασφαλίστρου που χρησιμοποιείται για την αποπληρωμή της ζημιάς

$$LR = \frac{L}{P}.$$

Συνήθως, στον υπολογισμό του δείκτη ζημιών χρησιμοποιούνται οι συνολικές δηλωθείσες ζημιές (άθροισμα εκκρεμών και πληρωθεισών ζημιών) στον αριθμητή και το συνολικό δεδουλευμένο ασφάλιστρο στον παρονομαστή. Υπάρχουν κι εδώ ορισμένες διαφοροποιήσεις, όπως ο συνυπολογισμός ή όχι των εξόδων LAE στις πληρωθείσες ζημιές. Η συνήθης πρακτική είναι η ενσωμάτωση των εξόδων LAE στις πληρωθείσες ζημιές, όμως για να γίνει αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος των αθροιστικών ζημιών κατά τον υπολογισμό των ζημιών, κυρίως για τις οικονομικές και λογιστικές αναφορές. Όπως προαναφέρθηκε, είναι σημαντικό ο κάθε υπολογισμός να συνοδεύεται από τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για πιο σαφή τεκμηρίωσή του.

c) Δείκτης εξόδων (Expense Ratio - ER): Το μεγαλύτερο μέρος των εξόδων ασφάλισης (Underwritting Expenses – UE) πραγματοποιείται εκ των προτέρων και σχετίζεται – από λογιστικής άποψης- με τα εγγεγραμμένα ασφάλιστρα (Written Premium - WP).

$$ER = \frac{UE}{WP}.$$

Ωστόσο, αν τα ασφαλιστικά έξοδα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα κατά τη διάρκεια της λογιστικής περιόδου, τότε υπάρχει μια στενότερη σχέση με τα δεδουλευμένα ασφάλιστρα. Αυτή η περίπτωση είναι γνωστή και ως GAAP λογιστική προσέγγιση, από την οποία προκύπτει ο δείκτης:

$$ER = \frac{UE}{EP}.$$

Παράδειγμα: Για μία ασφαλιστική εταιρεία δίνονται τα παρακάτω στοιχεία
Ασφαλιστικά έξοδα = 310, Εγγεγραμμένο ασφάλιστρο= 1.256, Δεδουλευμένο ασφάλιστρο = 1.185.

Με αυτά τα στοιχεία, ο δείκτης εξόδων είναι: $ER = \frac{310}{1256} = 24{,}68\%$, που σημαίνει ότι τα ασφαλιστικά έξοδα καλύπτονται περίπου από το 25% των δεδουλευμένων ασφαλίστρων.

Αν υποθέσουμε ότι τα έξοδα κατανέμονται ομοιόμορφα στο έτος, τότε προκύπτει ο δείκτης: $ER = \frac{310}{1185} = 26{,}16\%$ (1), το οποίο σημαίνει ότι τα ασφαλιστικά έξοδα καλύπτονται από το 26,16% των δεδουλευμένων ασφαλίστρων (GAAP προσέγγιση).

- Δείκτης εξόδων LAE (LAE Expense Ratio – ER_{LAE}): Τα έξοδα διακανονισμού (LAE) έχουν υπόσταση όταν γίνεται μία ζημιά στην περίοδο της δεδουλευμένης έκθεσης, η οποία βασίζεται στο δεδουλευμένο ασφάλιστρο. Είναι δηλαδή:

$$ER_{LAE} = \frac{LAE}{EP}.$$

Παράδειγμα: Την 31/12/2017, μία ασφαλιστική εταιρία εξέδωσε τις ακόλουθες πληροφορίες

$ALAE$ = 31, $ULAE$ = 35, $Earned\ Premium$ = 1185.

Τότε, $ER_{LAE} = \frac{31+35}{1185} = 5{,}57\%$.

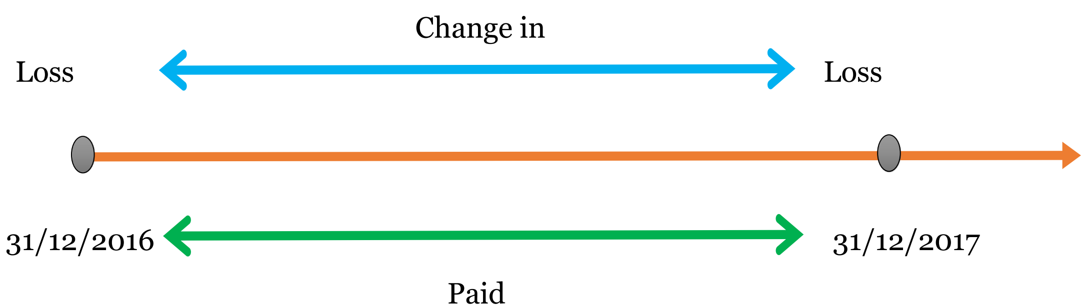
3.6. Συνδυαστικός Δείκτης (Combined Ratio - CR)

Ο δείκτης Combined Ratio είναι ένα μέτρο μελέτης της κερδοφορίας σε μία ασφαλιστική εταιρία που δραστηριοποιείται στον κλάδο ζημιών. Αποτελείται από το άθροισμα δύο επιμέρους δεικτών, του δείκτη εξόδων (expense ratio) και του δείκτη ζημιών (loss ratio) (Werner et al., 2010).

1. **Υφιστάμενες απαιτήσεις (Incurred Claim/Incurred Loss - L) (Werner et al., 2010)**
   Για τη δημιουργία των οικονομικών καταστάσεων, θα πρέπει να αθροιστούν όλες οι ζημιές ανά έτος (calendar year - CY). Ο τρόπος με τον οποίο γίνεται ο υπολογισμός είναι να αθροιστούν οι ζημιές και τα αποθέματα κατά τη διάρκεια του έτους. Αυτό

που πρέπει να τονιστεί είναι ότι δεν παίζει ρόλο το πότε έγινε το ατύχημα. Για παράδειγμα, αν η ημερομηνία ατυχήματος για μία ζημιά ήταν το έτος 2016 ενώ αναφέρθηκε το έτος 2017, αυτή η ζημιά θα ενσωματωθεί στο έτος ατυχήματος 2017.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ζημιές που αναφέρθηκαν το 2017. Πιθανώς, ο ασφαλιστής να κάνει μερικές πληρωμές και να δημιουργηθούν και τα αντίστοιχα αποθέματα. Σε αυτό το σημείο, υπάρχουν πληρωθείσες ζημιές και αποθέματα. Αλλά υπάρχουν κάποιες ζημιές οι οποίες έγιναν το 2016 και δημιουργήθηκαν αποθέματα το 2016 ενώ πληρώθηκαν το 2017. Για να αποφευχθούν διπλό-εγγραφές, θα πρέπει να γίνουν μετατροπές στις πληρωθείσες ζημιές (Paid Claims – PC) του 2017 και να ενσωματωθούν οι αλλαγές στα αποθέματα (Loss Reserves – LR) στο τέλος του έτους και να γίνουν συγκρίσεις στην αρχή του έτους. Τα παραπάνω παρουσιάζονται στο σχεδιάγραμμα που ακολουθεί.



Εικόνα 5 Αθροιστική απεικόνιση ανά έτος για τις οικονομικές καταστάσεις

Από όλες αυτές τις παραπάνω πληροφορίες προκύπτει ότι:

$$\mathbf{L_{CY} = PC_{CY} + (Loss\ Reserves_{CY} - Loss\ Reserves_{CY\text{-}1}),}$$

Όπου L_{CY}: οι υφιστάμενες απαιτήσεις του έτους, PC_{CY}: οι πληρωθείσες ζημιές του τρέχοντος έτους, Loss $Reserves_{CY}$: τα αποθέματα του τρέχοντος έτους, Loss $Reserves_{CY-1}$: τα αποθέματα στο τέλος του προηγούμενου έτους

Παράδειγμα: Για μία εταιρία είναι γνωστά τα ακόλουθα στοιχεία

$PC = 716$, $Loss\ Reserves_{31/12/2017} = 230$, $Loss\ Reserves_{31/12/2016} = 180$.

Με βάση αυτές τις πληροφορίες, προκύπτει ότι

$$L = 716 + (230 - 180) = 766.$$

2. Δεδουλευμένο ασφάλιστρο (EP) (Werner et al., 2010)

Σύμφωνα με όλα όσα παρουσιάστηκαν παραπάνω, τα δεδουλευμένα ασφάλιστρα π.χ. για το έτος 2017, είναι η διαφορά των εγγεγραμμένων ασφαλίστρων από τα μη δεδουλευμένα ασφάλιστρα. Τα μη δεδουλευμένα ασφάλιστρα στο τέλος του 2016 θα είναι φυσικά δεδουλευμένα στο 2017.

Επομένως, προκύπτει η ακόλουθη σχέση:

$$\mathbf{EP_{CY} = WP_{CY} - UP_{CY} + UP_{CY\text{-}1}}\,,$$

όπου EP_{CY} το δεδουλευμένο ασφάλιστρο ανά έτος, UP_{CY} το μη-δεδουλευμένο ασφάλιστρο ανά έτος και UP_{CY-1} το μη δεδουλευμένο ασφάλιστρο στο τέλος του προηγούμενου έτους (CY-1).

Παράδειγμα: Θεωρούμε τα εξής για μία ασφαλιστική εταιρεία

WP = 1.256, $UP_{31/12/2017}$ = 271, $UP_{31/12/2016}$ = 200.

Τότε, τα δεδουλευμένα ασφάλιστρα του 2017 είναι:

$$UP = 1256 - 271 + 200 = 1185.$$

Με τις παραπάνω πληροφορίες μπορεί να γίνει ο υπολογισμούς του δείκτη ζημιάς:

$$Loss\ Ratio(CY) = \frac{Incurred\ Loss(CY)}{Earned\ Premium(CY)}\,.$$

Με τα στοιχεία των παραπάνω παραδειγμάτων, ο δείκτης ζημιάς είναι:

$$LR_{2017} = \frac{766}{1185} = 64{,}64\%\ (2).$$

Εάν στον παραπάνω δείκτη ζημιάς ενσωματωθεί και ο δείκτης εξόδων, τότε προκύπτει ότι:

$$CR = LR + ER\,.$$

Βάσει των παραπάνω παραδειγμάτων, από (1),(2), προκύπτει ότι για το έτος 2017 ο τελικός δείκτης Combined Ratio είναι:

$$CR2017 = 64.64\% + 26.16\% = 90.80\% .$$

Στην περίπτωση που ο δείκτης αυτός είναι μικρότερος από 100%, τότε το ασφαλιστικό κέρδος (Underwritting Profit – UP) είναι θετικό ενώ στην αντίθετη περίπτωση είναι αρνητικό. Στο εν λόγω παράδειγμα, υπάρχει 9,20% κέρδος για την ασφαλιστική εταιρεία.

3.7. Τιμολόγηση-Ιστορικότητα

Η θεωρία της τιμολόγησης βασίζεται σε μία απλή αλλά θεμελιώδη εξίσωση:

$$Τιμή = Κόστος + Κέρδος.$$

Η συγκεκριμένη εξίσωση δηλώνει ότι η τιμή που θα ζητηθεί για μία υπηρεσία πρέπει να ισορροπήσει το κόστος που θα φέρει και το δίκαιο κέρδος, στο οποίο στοχεύει η εταιρία. Σε αντίθεση με τις παραδοσιακές βιομηχανίες όπου το κόστος παραγωγής είναι γνωστό και η τιμή καθορίζεται με μια σχετικά πιο εύκολη διαδικασία που σχετίζεται με το κόστος, η τιμολόγηση στην ασφάλιση βασίζεται κυρίως στην αναμενόμενη μελλοντική ζημία και στα μελλοντικά κόστη. Ως εκ τούτου, υπάρχει μόνο μια αναμενόμενη τιμή και όχι μια διασφάλιση του κέρδους μόνο.

Η αντίστοιχη σχέση που χρησιμοποιείται στην ασφαλιστική επιστήμη είναι η ακόλουθη:

$$P = L + ALAE + ULAE + FE + VE + ACQ + TP,$$

όπου,

- P: το ασφάλιστρο (Premium)
- L: το κόστος των πραγματοποιηθεισών ζημιών (incurred Loss)
- ALAE και ULAE: τα έξοδα (allocated & unallocated loss adjustment expense)
- FE: τα σταθερά έξοδα τιμολόγησης (fixed underwriting expenses)

- VE: τα μεταβλητά έξοδα τιμολόγησης (variable underwriting expenses)
- ACQ: έξοδα προμηθειών (commission and brokerage)
- TP: η πρόβλεψη στόχου για κέρδη (target profit provision)

Οι ακόλουθες παραδοχές είναι χαρακτηριστικές στην αναλογιστική βιβλιογραφία:

a) C: το τελικό κόστος ζημιάς, δηλαδή το άθροισμα των πραγματοποιηθησών ζημιών και των επιμεριζόμενων εξόδων διευθέτησης (L+ALAE).

b) k: το ποσοστό των μη-επιμεριζόμενων εξόδων διευθέτησης (ULAE) των τελικών ζημιών.

c) V: το ποσοστό των μεταβλητών εξόδων τιμολόγησης του ασφαλίστρου.

d) COM: το ποσοστό των εξόδων προμηθειών του ασφαλίστρου.

e) Q: το ποσοστό του κέρδους-στόχου του ασφαλίστρου.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω πληροφορίες προκύπτει ότι:

$$P = \frac{C\ x\ (1+k) + FE}{1 - V - COM - Q}\,.$$

Η σχέση αυτή είναι από τις πιο σημαντικές στις ασφαλίσεις ζημιών (Werner et al., 2010).

Παράδειγμα: Για μια ασφαλιστική εταιρία δίνονται τα ακόλουθα στοιχεία

- Τελικό κόστος με έξοδα ALAE = 300
- ULAE = 5% του τελικού κόστους
- FE = 80
- V = 10% του ασφαλίστρου
- COM = 8% του ασφαλίστρου
- Q = 4% του ασφαλίστρου

Με βάση τα παραπάνω προκύπτει ότι:

$$P = \frac{300x(1+5\%) + 80}{1 - 10\% - 8\% - 4\%} = \frac{395}{0.78} = 506{,}41€\,.$$

3.7.1. Ενδεικτική τιμή (Indicated Rate - IR)

Εκτός από την μελέτη για τον υπολογισμό του ασφαλίστρου, μία πολύ σημαντική έννοια είναι και η έννοια της ενδεικτικής τιμής, η οποία προκύπτει από το πηλίκο του ασφαλίστρου (P) προς τη δεδουλευμένη έκθεση στον κίνδυνο.

$$IR = \frac{PP\ x\ (1+k) + \left(\frac{FE}{EE}\right)}{1 - V - COM - Q}.$$

Η παραπάνω ισότητα είναι γνωστή και ως προσέγγιση δεδουλευμένης έκθεσης (Earned Exposure Approach).

Παράδειγμα: Έστω μία μονάδα έκθεσης στον κίνδυνο είναι ένα αυτοκίνητο ανά έτος, ενώ όλα τα συμβόλαια είναι ετήσια και υπάρχουν συνολικά 2.000 μονάδες έκθεσης στον κίνδυνο (ισχύει η υπόθεση ότι τα ποσά είναι σε χιλιάδες).

Επίσης, παρέχοντα τα ακόλουθα στοιχεία:

- Τελικό κόστος με έξοδα ALAE = 1500
- ULAE = 5% του τελικού κόστους
- FE = 250
- V = 10% του ασφαλίστρου
- COM = 7% του ασφαλίστρου
- Q = 5% του ασφαλίστρου
- Δεδουλευμένη έκθεση στον κίνδυνο = 2

Με βάσει τα παραπάνω στοιχεία, προκύπτει ότι:

$Pure\ Premium = \frac{1500}{2} = 750$ και $\frac{FE}{EE} = \frac{250}{2} = 125.$

Επομένως, προκύπτει ότι:

$$IR = \frac{750x(1+5\%) + 125}{1 - 10\% - 7\% - 5\%} = 1.169{,}872\ .$$

Αυτή είναι η αναγραφόμενη τιμή ή το ποσοστό ανά μονάδα δεδουλευμένης έκθεσης. Για παράδειγμα, αν η μονάδα έκθεσης είναι ένα αυτοκίνητο/έτος, τότε ο αναγραφόμενος συντελεστής 1.169,872 είναι ο ετήσιος ρυθμός ανά ασφαλισμένο αυτοκίνητο.

3.7.2. Ενδεικτικός συντελεστής (IRF)

Χρησιμοποιώντας όλες τις πληροφορίες από τις προηγούμενες ενότητες, είναι σημαντικό να γίνει και ο υπολογισμός μίας ποσότητας που ονομάζεται Indicated Rate Factor (IRF), δηλαδή ενός παράγοντα που συγκρίνει τις ισχύουσες τιμές, με αυτές που θα ισχύουν στο μέλλον. Για παράδειγμα, αν ο IRF=1,10, τότε οι μελλοντικές τιμές (Projected Rate – PR) προκύπτουν με μία αύξηση 10% στις τρέχουσες τιμές (Current Rates – CR) (Werner et al., 2010). Με αυτή τη λογική προκύπτει ότι:

$$PR = CR\ x\ IRF.$$

Για να γίνει ο υπολογισμός του IRF, διαιρούμε τη βασική θεμελιώδη εξίσωση σε κάθε μέρος με το δεδουλευμένο ασφάλιστρο, οπότε:

$$IRF = \frac{CR\ x\ (1+k) + \left(\frac{FE}{EP}\right)}{1 - V - COM - Q},$$

όπου CR: Claims Ratio.

Παράδειγμα: Έστω ότι ισχύουν τα παρακάτω στοιχεία για μια ασφαλιστική εταιρεία, όπως παρουσιάζονται στον πίνακα

Εκτιμώμενες τελικές ζημιές	2.250
Δεδουλευμένα ασφάλιστρα	3.260
% ULAE ως προς τις ζημιές	8,0%
Μεταβλητά έξοδα ως προς τα ασφάλιστρα	10,0%
Σταθερά έξοδα ως προς τα ασφάλιστρα	11,5%
Πρόβλεψη κέρδους ως προς τα ασφάλιστρα	5,0%
Έξοδα προμηθειών ως προς τα ασφάλιστρα	9,0%

Σύμφωνα με την παραπάνω ισότητα, ισχύει ότι:

$$IRF = \frac{\left(\frac{2250}{3260}\right)x(1+8\%)+11{,}5\%}{1-10\%-9\%-5\%} = 1{,}1321.$$

Αφού IRF>1, συμπεραίνουμε ότι τα εκτιμώμενα μελλοντικά rates, αναμένεται να είναι κατά 13,21% υψηλότερα από τα τρέχοντα.

Κεφάλαιο 4. Γραμμικά μοντέλα εκτίμησης

4.1. Εισαγωγικές έννοιες

Ατυχήματα συμβαίνουν καθημερινά με κάποια να είναι πιο σοβαρά από άλλα. Δεν μπορούμε να αποτρέψουμε ατυχήματα από το να συμβούν. Μπορούμε, ωστόσο, να προστατευθούμε από μεγάλες οικονομικές απώλειες, όταν αυτές συμβούν. Ο τρόπος για να το επιτύχουμε αυτό είναι η ασφάλιση. Ο πελάτης από τη δική του πλευρά αναζητά ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο που τον καλύπτει όσο το δυνατόν περισσότερο με το χαμηλότερο δυνατό κόστος. Από την πλευρά του ο ασφαλιστής στοχεύει στο κέρδος και ταυτόχρονα στο να διατηρήσει και να προσελκύσει περισσότερους πελάτες. Όπως έχει αναφερθεί, αν το κόστος της ασφάλισης είναι πολύ υψηλό συγκριτικά με τον ανταγωνισμό, οι πελάτες θα επιλέξουν την πιο συμφέρουσα οικονομικά εταιρία. Εάν η τιμή είναι πολύ χαμηλή, ο ασφαλιστής κινδυνεύει με το ενδεχόμενο λιγότερων εσόδων και κατ' επέκταση αποθεμάτων. Ως αποτέλεσμα, η εταιρεία χάνει χρήματα ή στη χειρότερη περίπτωση, καθίσταται αφερέγγυα. Επιπλέον, άτομα που εμπλέκονται σε πολλά ατυχήματα, συχνά λαμβάνουν υψηλά ασφάλιστρα. Εάν η τιμή της ασφάλισης είναι πολύ χαμηλή, η εταιρία καθίσταται ελκυστική για υψηλού κινδύνου άτομα με υψηλό ποσοστό ζημιών, αφού η τιμή που θα λάμβαναν σε άλλες εταιρείες θα ήταν υψηλότερη.

Υπάρχουν διάφοροι παράγοντες που πρέπει να ληφθούν υπόψη κατά την τιμολόγηση της ασφάλισης. Δεδομένα σχετικά με τους πελάτες είναι σημαντικά, αλλά ένας άκρως σημαντικός παράγοντας είναι η τεχνογνωσία στην αγορά. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετηθεί ο υπολογισμός του καθαρού ασφαλίστρου μέσω γραμμικών μοντέλων.

Τα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα (GLM) είναι ευρέως πλέον χρησιμοποιούμενα στον ασφαλιστικό κλάδο, αλλά βασίζονται σε διάφορες υποθέσεις. Μία από αυτές είναι ότι τα δεδομένα είναι ανεξάρτητα, κάτι το οποίο παραβιάζεται σε πολλά στατιστικά προβλήματα. Τα διαχρονικά δεδομένα (Longitudinal data) για την ασφάλιση ζημιών, για παράδειγμα, αποτελούνται από δεδομένα όπου οι ζημιές που αναφέρονται από τον ίδιο τον ασφαλισμένο είναι συσχετισμένες. Αυτό μπορεί να προκληθεί από τα ατομικά χαρακτηριστικά των ατόμων, όπως η ικανότητα οδήγησης, ταχύτητα αντανακλαστικών, δύναμης συγκέντρωσης ή επιθετικότητας πίσω από το τιμόνι.

Τα Γενικευμένα γραμμικά μικτά μοντέλα (GLMMs) επεκτείνουν τα GLM επιτρέποντας τυχαίες επιδράσεις, που λαμβάνουν υπόψη τη συσχέτιση μεταξύ των δεδομένων από την ίδια ομάδα και μπορούν να είναι μια λύση για να ξεπεραστεί αυτή η υπόθεση. Φυσικά, κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί, αν το GLMM θα μπορούσε να εκτιμήσει με μεγαλύτερη ακρίβεια το καθαρό ασφάλιστρο από το GLM, αλλά αυτό θα αναλυθεί στην συνέχεια με χρήση αριθμητικής εφαρμογής.

Τα GLM χρησιμοποιούνται εδώ και αρκετές δεκαετίες στην εφαρμοσμένη στατιστική και η μελέτη αυτών των μοντέλων έχει γίνει διεξοδικά από πολλούς ερευνητές (για παράδειγμα οι μελέτες των Madsen and Thyregod (2010) ή Agresti(2015)). Μια εισαγωγή των GLM στον ασφαλιστικό χώρο μπορεί να βρεθεί στο Ohlsson και το Johansson (2010) ή De Jong et al. (2008). Πολλές μελέτες εφάρμοσαν επίσης τα μοντέλα ασφάλισης για τη μοντελοποίηση των ζημιών. O Zehnwirth (1994) και Murphy et al. (2000) παρέχουν μια πιο λεπτομερή περιγραφή της διαδικασίας τιμολόγησης, δηλαδή την λήψη ασφαλιστικών τιμών. Τέλος, η έννοια των τυχαίων επιδράσεων στο πλαίσιο της αναλογιστικής επιστήμης έχει επίσης χρησιμοποιηθεί σε διάφορες μελέτες. Οι Boucher και Denuit (2006) συγκρίνουν τη χρήση σταθερών και τυχαίων επιδράσεων στην παλινδρόμηση Poisson σε μία μελέτη ενός βέλγικου χαρτοφυλάκιο ασφάλισης αστικής ευθύνης από τρίτους.

4.2. Το κλασικό γραμμικό μοντέλο

Η ανάλυση παλινδρόμησης αποτελεί σημαντικό μέρος της στατιστικής μοντελοποίησης. Ο γενικός στόχος είναι η ανάλυση της σχέσης μεταξύ μιας τυχαίας μεταβλητής, που ονομάζεται μεταβλητή απόκρισης και μίας ή περισσότερων επεξηγηματικών μεταβλητών. Το γραμμικό μοντέλο (LM) έχει ορισμένους περιορισμούς, οι οποίοι το καθιστούν ακατάλληλο σε πολλές περιπτώσεις. Ωστόσο, είναι σημαντικό να γνωρίζουμε τα βασικά του χαρακτηριστικά, ώστε να είναι πιο κατανοητή η μελέτη των υπόλοιπων μοντέλων. Όπως θα γίνει αργότερα αντιληπτό, μπορούν να χρησιμοποιηθούν GLMs και GLMMs και είναι προτιμότερο να αναλύονται δεδομένα ασφαλιστικών εταιριών με αυτά.

Ένα LM είναι της μορφής:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \cdots + \beta_k x_{ik} + \varepsilon_i = \boldsymbol{x}_i \boldsymbol{\beta} + \varepsilon_i, \qquad i = 1,2, \cdots n,$$

όπου $\boldsymbol{x}_i = [1, x_{i1}, \cdots x_{i\kappa}]$ είναι ένα διάνυσμα γραμμής με τις επεξηγηματικές μεταβλητές και ταυτόχρονα $\boldsymbol{\beta} = [\beta_0, \beta_1 \ \cdots, \beta_k]^T$είναι ένα διάνυσμα στήλης με τους συντελεστές του μοντέλου. Το μοντέλο αυτό ονομάζεται γραμμικό, διότι η μεταβλητή απόκρισης Y_i μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των επεξηγηματικών μεταβλητών. Τα σφάλματα ε_i του μοντέλου θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητα και ισόνομα (idd) από μία κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση σ^2.

Σ’ αυτό το σημείο να τονιστεί ότι θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και άλλες κατανομές για τα σφάλματα του μοντέλου αλλά αυτό είναι πολύ σπάνιο στην πράξη. Η υπόθεση της κανονικότητας των σφαλμάτων οδηγεί στο συμπέρασμα ότι και οι μεταβλητές $Y_1, Y_2, \cdots Y_n$ θα ακολουθούν κανονική κατανομή με μέση τιμή και διακύμανση που δίνονται από τους παρακάτω τύπους (Brockett, 2003):

$$E[Y_i|x_i] = \boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta} = \mu_{\boldsymbol{i}}$$

και

$$Var[Y_i|x_i] = \sigma^2.$$

Με πιο απλή μορφή, το παραπάνω μοντέλο μπορεί να γραφεί ως $Y_i \sim N(\boldsymbol{x_i\beta}, \sigma^2)$ ενώ σε μορφή πινάκων το μοντέλο γράφεται ως εξής:

$$\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon},$$

όπου $\boldsymbol{Y} = [Y_1 \ \cdots, Y_n]^T$**,** $\boldsymbol{X} = [\boldsymbol{x}_1^T, \cdots, \boldsymbol{x}_n^T]^T$ και $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \ \cdots, \varepsilon_n]^T$**.** Συνήθως ο πίνακας **X** ονομάζεται πίνακας σχεδιασμού του μοντέλου, ενώ για τα σφάλματα ισχύουν φυσικά οι ίδιες υποθέσεις. Να σημειωθεί ότι το μοντέλο υποθέτει ότι η μεταβλητή **Y** ακολουθεί την πολυδιάστατη κανονική κατανομή με μέση τιμή $\boldsymbol{X\beta}$ και πίνακα διακύμανσης συνδιακύμανσης $\sigma^2\boldsymbol{I_n}$ όπου $\boldsymbol{I_n}$ είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$ με στοιχεία το 1. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιείται για απλότητα ο συμβολισμός $\boldsymbol{Y} \sim N(\boldsymbol{X\beta}, \sigma^2\boldsymbol{I_n})$.

4.2.1. Εκτίμηση

Η συνήθης προσέγγιση για το κανονικό γραμμικό μοντέλο είναι η εκτίμηση των ελαχίστων τετραγώνων (LSE) και θα περιγραφεί σε αυτήν την ενότητα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε παρατηρήσει το δείγμα y = $(y_1, .., y_n)^T$ για το τυχαίο διάνυσμα Y. Η ιδέα πίσω από το LSE είναι να βρούμε έναν εκτιμητή για το **β** που ελαχιστοποιεί το άθροισμα των τετραγώνων των σφαλμάτων:

$$f(\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_\kappa) = \|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{\mu}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \{y_i - (\beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \ \cdots \beta_k x_{ik})\}^2.$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί σε μορφή πινάκων ως εξής:

$$f(\beta_0, \beta_1, \cdots \beta_\kappa) = (\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta})^T(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{X\beta}) = \boldsymbol{y}^T\boldsymbol{y} - \boldsymbol{2y}^T\boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\beta}^T\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X\beta}.$$

Εάν χρησιμοποιηθεί η μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων για να εκτιμηθούν οι άγνωστες παράμετροι, τότε προκύπτει ότι ο εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων είναι ο

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = (\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}^T\boldsymbol{y}.$$

Για τα GLMs και GLMMs οι παράμετροι εκτιμώνται συνήθως χρησιμοποιώντας τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας. Σε αυτή την περίπτωση όμως δεν είναι εφικτό να βρεθούν αναλυτικές εκφράσεις για τον εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας και χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι μεγιστοποίησης (Davis, 1991).

Σχόλιο: Στην περίπτωση που τα σφάλματα του μοντέλου ακολουθούν την κανονική κατανομή, τότε ο εκτιμητής μεγίστης πιθανοφάνειας ταυτίζεται με τον εκτιμητή ελαχίστων τετραγώνων.

4.3. Το γενικευμένο γραμμικό μοντέλο

Τα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα αναπτύχθηκαν από τους John Nelder και Robert Wedderburn το 1972. Σημαντική είναι και η συμβολή του Peter McCullagh, ο οποίος είναι ο συγγραφέας μαζί με τον John Nelder του βιβλίου Generalized Linear Models του 1983. Το μεγαλύτερο μέρος της θεωρίας των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων δεν αποτελεί κάτι καινούργιο στο χώρο της στατιστικής. Αποτελούν μία σύνδεση και επέκταση γνωστών μοντέλων παλινδρόμησης, τα οποία εμφανίζουν κοινές ιδιότητες και έχουν κοινή μέθοδο εκτίμησης παραμέτρων, ωστόσο τα κοινά χαρακτηριστικά των εννοιών που μελετώνται μας οδηγούν στην ομαδοποίηση των τεχνικών και δημιουργούν ένα σύνολο, αυτό των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων, όπου μπορούμε να μελετήσουμε τις κοινές αυτές ιδιότητες ως μία ομάδα στατιστικών μοντέλων. Επίσης, αυτή η ομαδοποίηση δημιούργησε προϋποθέσεις για περαιτέρω μελέτη νέων τεχνικών για την αντιμετώπιση διάφορων θεμάτων και σε συνδυασμό με τη χρήση υπολογιστών μπορούμε να μελετήσουμε προβλήματα τα οποία δεν μπορούσαμε πριν την χρήση γενικευμένων γραμμικών μοντέλων, αλλά και να προχωρήσουμε σε δύσκολους υπολογισμούς.

Στο Γραμμικό μοντέλο μία σημαντική υπόθεση που ξέρουμε, είναι η κανονικότητα της μεταβλητής απόκρισης, δηλαδή οτι ακολουθεί την Κανονική κατανομή. Μια δημοφιλής πρακτική πλέον, που χρησιμοποιείται ακόμη και σε περιπτώσεις στις οποίες η υπόθεση της κανονικότητας δεν ισχύει ούτε προσεγγιστικά, είναι η χρήση των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων (Gerenalized Linear Models- GLM).

4.3.1. Μονοπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών

Έστω μία τυχαία μεταβλητή Y της οποίας η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας εξαρτάται από μία παράμετρο θ. Η κατανομή ανήκει στην εκθετική οικογένεια, αν μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$f(y_i, \theta_i, \varphi) = exp\left(\frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{a(\varphi)} + c(y_i, \varphi)\right).$$

Η παράμετρος θ συνήθως ονομάζεται φυσική ή κανονική παράμετρος (natural or canonical parameter). Αντίστοιχα για την παράμετρο φ γίνεται η υπόθεση ότι είναι γνωστή. Σε περίπτωση που είναι άγνωστη συνήθως ονομάζεται παράμετρος όχλησης (nuisance parameter).

Τονίζεται ότι το στήριγμα της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, δηλαδή το σύνολο S = {y : f(y; θ) > 0} πρέπει να είναι ανεξάρτητο από την παράμετρο θ.

Πολλές γνωστές κατανομές, ανήκουν στην εκθετική οικογένεια. Η Κανονική κατανομή, η κατανομή Poisson και η Διωνυμική κατανομή είναι κάποιες κατανομές που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια, αφού μπορούν να γραφούν στην κανονική μορφή (Mathai, 1966).

Σύμφωνα με την παραπάνω μορφή είναι εφικτό να δειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$I(\theta) = \frac{b''(\theta)}{a(\varphi)},$$

$$E[Y] = b'(\theta)$$

και

$$V[Y] = a(\varphi)\, b''(\theta)\,,$$

όπου I(θ) είναι η πληροφορία Fisher.

Παράδειγμα 1: Κανονική Κατανομή Υ~Ν(μ, σ^2)

Σε αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να δειχθεί ότι

$$f(y,\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(y-\mu)^2} = exp\left\{\frac{y\mu - \frac{1}{2}\mu^2}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{\sigma^2} + log(2\pi\sigma^2)\right]\right\}, y \in \Re.$$

Με το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται ότι θ=μ, b(θ) = ½ θ^2, α(φ) = σ^2 και

$$c(y,\varphi) = -\frac{1}{2}\left[\frac{y^2}{a(\varphi} + log(2\pi\, a(\varphi)\right].$$

Επομένως,

$$E[Y] = b'(\theta) = (½\, \theta^2)' = \theta$$

και

$$V[Y] = a(\varphi)\, b''(\theta) = \sigma^2 * \theta' = \sigma^2.$$

Παράδειγμα 2: Κατανομή Poisson Υ~P(λ)

$$f(y,\lambda) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^y}{y!} = exp\{ylog(\lambda) - \lambda - \log(y!)\}, \qquad y \in \{0,1,2,\dots\}.$$

Με το αποτέλεσμα αυτό φαίνεται ότι $\theta = log(\lambda)$, $b(\theta) = \exp(\theta)$, α(φ) = 1 και

$$c(y,\varphi) = -\log(y!).$$

Επομένως,

$$E[Y] = b'(\theta) = \exp(\theta) = \lambda$$

και

$$V[Y] = a(\varphi)\, b''(\theta) = \lambda.$$

4.3.2. Στατιστικό μοντέλο

Σε μία στατιστική μελέτη πολλές φορές χρειάζεται η πρόβλεψη μιας μεταβλητής, η οποία ονομάζεται μεταβλητή απόκρισης, μέσω κάποιων γνωστών μεταβλητών που ονομάζονται επεξηγηματικές μεταβλητές. Στατιστικό μοντέλο ονομάζεται η δημιουργία μιας μαθηματικής σχέσης μεταξύ αυτών των μεταβλητών. Η διαδικασία αυτής της μελέτης έχει τα σημαντικά βήματα που περιγράφονται παρακάτω.

Το πρώτο βήμα είναι ο προσδιορισμός του μοντέλου. Ένα μοντέλο προσδιορίζεται από δύο μέρη:

i. Μία εξίσωση που συνδέει τη μεταβλητή απόκρισης με την επεξηγηματική μεταβλητή.
ii. Την κατανομή που ακολουθεί η μεταβλητή απόκρισης.

Απαραίτητη είναι στη συνέχεια η εκτίμηση των παραμέτρων που χρησιμοποιούνται στο μοντέλο. Στη συνέχεια δημιουργούμε διαστήματα εμπιστοσύνης και κάνουμε ελέγχους υποθέσεων για τις παραμέτρους του μοντέλου. Επίσης, ερμηνεύουμε τις τιμές των αποτελεσμάτων και ελέγχουμε την επάρκεια του μοντέλου, δηλαδή πόσο καλά ερμηνεύονται τα δεδομένα από το μοντέλο μας.

Σημαντικό ρόλο στα στατιστικά μοντέλα παίζει η Κανονική κατανομή, την οποία θέλουμε να ακολουθεί η μεταβλητή απόκρισης δοθέντων των επεξηγηματικών μεταβλητών. Πολλές φορές αυτό δεν συμβαίνει, καθώς η μεταβλητή απόκρισης μπορεί για παράδειγμα να παίρνει τις τιμές 0 ή 1, δηλαδή αποτυχία ή επιτυχία (ασφάλιση ή μη-ασφάλιση οχήματος). Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι μεταβλητές απόκρισης μπορούν να προέρχονται από μία γενικότερη οικογένεια κατανομών. Στην περίπτωση των γενικευμένων γραμμικών μοντέλων η μεταβλητή Y δοθείσης της τιμής X ακολουθεί κατανομές που ανήκουν στην εκθετική οικογένεια.

Για τον προσδιορισμό του μοντέλου, συνήθως ενδιαφερόμαστε για ένα σύνολο παραμέτρων $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_p)$, όπου $p < N$. Υποθέτουμε ότι $E(Y_i) = \mu_i$, όπου μ_i είναι κάποια συνάρτηση του θ_i. Για ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο υπάρχει μετασχηματισμός του μ_i , τέτοιος ώστε

$$\boldsymbol{g(\mu_i) = X_i^T \beta}.$$

Στην εξίσωση αυτή, η g θεωρείται μονότονη και διαφορίσιμη συνάρτηση που λέγεται συνάρτηση σύνδεσης και το **x** είναι ένα διάνυσμα επεξηγηματικών μεταβλητών.

Η συνάρτηση σύνδεσης (link function) συσχετίζει τη γραμμική παράμετρο με την αναμενόμενη τιμή μ της μεταβλητής απόκρισης y. Στα κλασσικά γραμμικά μοντέλα η μέση τιμή μ ταυτίζεται με τη γραμμική πρόβλεψη. Τότε, είναι εύλογο ότι η ταυτοτική συνάρτηση σύνδεσης μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή. Σε περιπτώσεις όπου έχουμε διακριτές τιμές και η κατανομή που ακολουθούν είναι η Poisson κατανομή, πρέπει να ισχύει $\mu > 0$. Μπορεί στην περίπτωση αυτή η γραμμική παράμετρος να είναι αρνητική τη στιγμή που το μ δεν είναι. Μοντέλα με τέτοιου είδους μεταβλητές, εκφράζονται με τη λογαριθμική συνάρτηση σύνδεσης log(μ), ώστε να υπάρχει γραμμική σχέση.

Για την περίπτωση της διωνυμικής κατανομής, θεωρούμε τρείς βασικές συναρτήσεις σύνδεσης:

- logit: log(μ /(1−μ))
- probit: $\Phi^{-1}(\mu)$, όπου Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής Κανονικής κατανομής N(0, 1)
- complementary log-log: log(−log(1 − μ))

Πίνακας 1: Συνήθεις συναρτήσεις σύνδεσης

Name	Link function: $\eta = g(\mu)$	$\mu = g^{-1}(\eta)$
identity	μ	η
logarithm	$\log(\mu)$	$\exp(\eta)$
logit	$\log(\mu/(1-\mu))$	$\exp(\eta)/(1+\exp(\eta))$
power	μ^k	$\eta^{1/k}$
squareroot	$\sqrt{\mu}$	η^2

4.3.3. Εκτίμηση παραμέτρων

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στα γενικευμένα γραμμικά μοντέλα βασίζονται στη μέθοδο Newton-Raphson και στη μέθοδο των score, την οποία θα εξηγήσουμε παρακάτω.

Θεωρούμε $Y_1, \ldots, Y_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Θέλουμε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους β που σχετίζονται με τα Y_i μέσω των σχέσεων:

$$\boldsymbol{E(Y_i) = \mu_i \ \ \kappa\alpha\iota \ \ g(\mu_i) = X_i^T \beta}.$$

Για κάθε Y_i, η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$l_i = \frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{a(\varphi_i) + c(y_i, \varphi_i)}.$$

Για να βρούμε την εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας για την παράμετρο βj,

χρειαζόμαστε την παράγωγο ως προς βj η οποία μετά από πράξεις είναι η:

$$U_j = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{y_i - \mu_i}{Var(Y_i)} \ x_{ij} \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial \eta_i}\right)\right] \frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{a(\varphi_i) + c(y_i, \varphi_i)}.$$

Η συνάρτηση $U = [U_1, \ldots, U_n]$ ονομάζεται score συνάρτηση. Αντίστοιχα, ο πίνακας διασποράς-συνδιασποράς των U_i έχει όρους $E[U_j U_k]$ και ονομάζεται πίνακας πληροφορίας.

Για την εύρεση των παραμέτρων χρησιμοποιείται η μέθοδος Newton-Raphson.

4.3.4. Μελέτη καταλληλόλητας του μοντέλου

Αφού δημιουργήσουμε ένα μοντέλο, θα πρέπει να εξετάσουμε την ικανότητα του μοντέλου μας να περιγράψει τα δεδομένα που έχουμε. Είναι σημαντική δηλαδή η αξιολόγηση της σημαντικότητας των μεταβλητών στο μοντέλο. Θέλουμε να ερευνήσουμε ποιες μεταβλητές X_i είναι σημαντικές.

Για να επιλέξουμε τις στατιστικά σημαντικές μεταβλητές σε ένα μοντέλο, πραγματοποιούμε στατιστικούς ελέγχους. Αυτοί οι έλεγχοι καταλληλόλητας, θα μας βοηθήσουν να ερευνήσουμε ποιες μεταβλητές δεν συνεισφέρουν στο μοντέλο. Αυτό θα το ελέγξουμε μέσω ελέγχων που αφορούν τους συντελεστές β. Για να ερευνήσουμε την επάρκεια ενός μοντέλου, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η δειγματική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης D, όπως θα δούμε στη συνέχεια. Αυτό γίνεται εκτιμώντας το D από τα δεδομένα και συγκρίνοντας την τιμή με την κατάλληλη $\chi^2_{\mathrm{N-p}}$ κατανομή.

Η στατιστική συνάρτηση deviance, που επίσης ονομάζεται στατιστική συνάρτηση αναλογίας λογαριθμικής πιθανοφάνειας είναι:

$$D = 2\left[l\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{max}}; \boldsymbol{y}\right) - l\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}; \boldsymbol{y}\right)\right].$$

Το αποτέλεσμα του μετασχηματισμού της deviance είναι:

$$D = 2\left[l\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{\boldsymbol{max}}; \boldsymbol{y}\right) - l(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{max}}; \boldsymbol{y})\right] - 2\left[l\left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}; \boldsymbol{y}\right) - l(\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{y})\right] + 2[l(\boldsymbol{\beta}_{\boldsymbol{max}}; \boldsymbol{y}) - l(\boldsymbol{\beta}; \boldsymbol{y})].$$

Ο πρώτος όρος, ακολουθεί την κατανομή χ^2_{m}, όπου m είναι ο αριθμός παραμέτρων του πλήρους μοντέλου. Ο δεύτερος όρος ακολουθεί την κατανομή χ^2_{p}, όπου p είναι ο αριθμός παραμέτρων στο μοντέλο που μας ενδιαφέρει. Ο τρίτος όρος είναι μια θετική σταθερά, η οποία θα είναι κοντά στο μηδέν, αν το μοντέλο που μας ενδιαφέρει περιγράφει τα δεδομένα σχεδόν τόσο καλά, όσο το πλήρες μοντέλο. Το πλήρες μοντέλο είναι ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο που χρησιμοποιεί την ίδια κατανομή και έχει την ίδια συνάρτηση σύνδεσης με το μοντέλο που μας ενδιαφέρει. Ο αριθμός των παραμέτρων στο πλήρες μοντέλο είναι ίσος με τον αριθμό των παρατηρήσεων n. Όταν υπάρχει καλή προσαρμογή στο μοντέλο, ισχύει:

$$D \sim \chi^2_{\mathrm{m-p}}.$$

Αν το μοντέλο είναι κατάλληλο, τότε θα πρέπει η τιμή του D να είναι κοντά στο μέσο της κατανομής. Αν λοιπόν ένα μοντέλο με p παραμέτρους περιγράφει καλά ένα σύνολο από n παρατηρήσεις, έτσι ώστε $D \sim \chi^2_{\mathrm{N-p}}$ τότε θα πρέπει $\mathrm{D} \simeq \mathrm{N} - \mathrm{p}$. Για κάποιες κατανομές όπως η Poisson, η τιμή του D μπορεί να υπολογιστεί απευθείας από τις προσαρμοσμένες τιμές και να συγκριθεί με τους βαθμούς ελευθερίας για να εκτιμηθεί η καλή προσαρμογή (Brockett, 2003).

4.4. Το γενικευμένο γραμμικό μικτό μοντέλο

Τα GLM αποτελούν μια ευρεία κατηγορία στατιστικών μοντέλων. Ωστόσο, υπάρχουν καταστάσεις όπου η υπόθεση ανεξάρτητων παρατηρήσεων δεν πληρείται. Αυτή η ενότητα θα εισαγάγει μια άλλη κατηγορία μοντέλων που είναι πιο κατάλληλη για το χειρισμό διαχρονικών δεδομένων (clustered data).

Τα διαχρονικά δεδομένα προκύπτουν όταν οι παρατηρήσεις μπορούν να χωριστούν σε μικρότερες υποομάδες, όπου οι παρατηρήσεις εντός κάθε υποομάδας είναι περισσότερο «όμοιες» από τις παρατηρήσεις σε όλη τους την ομάδα. Για παράδειγμα, έχουμε συνήθως παρατηρήσεις που λαμβάνονται από το ίδιο αντικείμενο με την πάροδο του χρόνου. Στη συνέχεια, κάθε αντικείμενο αντιπροσωπεύει μία συστάδα (cluster). Συχνά είναι λογικό να υποθέσουμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε αντικειμένου είναι ανεξάρτητες από τα άλλα αντικείμενα.

Οι παρατηρήσεις σε μία συστάδα όμως συσχετίζονται. Η συσχέτιση εντός της ομάδας έρχεται σε αντίθεση με την υπόθεση ανεξαρτησίας για GLM. Ένας τρόπος αντιμετώπισης αυτής της ανεπάρκειας είναι η χρήση των GLMMs (McCulloch, 2001).

Αν επομένως y_{ic} είναι η εξαρτημένη μεταβλητή, τότε για κάθε κλάση-συστάδα c υπάρχουν και πάλι n παρατηρήσεις. Στο νέο μοντέλο θα χρησιμοποιηθεί μία νέα παράμετρος $\boldsymbol{\gamma_i}$ η οποία θα παρουσιάζει την επίδραση του τυχαίου παράγοντα (random effect) και τελικά το μοντέλο θα έχει τη μορφή

$$\boldsymbol{g(\mu_{ic}) = X_{ic}^T\beta + u_{ic}^T\gamma_i \;\; \kappa\alpha\iota \; \mu_{ic} = E[Y_{ic}|\gamma_i]}.$$

Οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες δοθέντος του τυχαίου παράγοντα, ενώ η δεσμευμένη κατανομή είναι μία κατανομή που προέρχεται από την εκθετική οικογένεια κατανομών.

Οι τυχαίες επιδράσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και άγνωστη διακύμανση. Να τονιστεί εδώ ότι θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και άλλες κατανομές για τη μελέτη των τυχαίων επιδράσεων. Οι Lee και Nelder (1996) όρισαν τα μοντέλα αυτά που η κατανομή των τυχαίων επιδράσεων δεν είναι κανονική ως ιεραρχικά γενικευμένα γραμμικά μοντέλα.

Η εκτίμηση των παραμέτρων στα GLMMs απαιτεί συνήθως τη χρήση του εκτιμητή μέγιστης πιθανοφάνειας. Γενικά, μία κλειστή λύση για την μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας δεν υπάρχει και για το λόγο αυτό έχουν προταθεί πολλές προσεγγίσεις. Οι προσεγγίσεις αυτές έχουν υλοποιηθεί σε αρκετά προγράμματα και ένα από αυτό είναι και η R όπου σε διαφορετικά πακέτα υπάρχουν και διαφορετικοί κώδικες.

4.5. Μοντέλα για ασφαλιστικά δεδομένα

Στις προηγούμενες ενότητες παρουσιάσαμε διαφορετικές κατηγορίες γραμμικών μοντέλων. Το LM χρησιμοποιείται ευρέως στην εφαρμοσμένη στατιστική και στον αναλογισμό. Ωστόσο, η υπόθεση κανονικότητας καθιστά το μοντέλο ακατάλληλο για ασφαλιστική μοντελοποίηση. Το πλήθος των ζημιών ακολουθούν μια διακριτή κατανομή, είναι μη αρνητικές και έχουν και θετική ασυμμετρία. Αντίστοιχα, τα μεγέθη των ζημιών από την άλλη πλευρά, ακολουθούν μια συνεχή κατανομή, είναι θετική, και όπως και το πλήθος των ζημιών έχει θετική ασυμμετρία. Τα GLM είναι πιο κατάλληλα για ασφαλιστικά δεδομένα διότι αποτελούν μια ευρύτερη κατηγορία και μπορούν να προσαρμοστούν στα χαρακτηριστικά αυτών των δεδομένων.

Τα GLMM τέλος επιτρέπουν τυχαίες επιδράσεις που υπάρχουν λόγω της συσχέτισης εντός της ομάδας και μπορούν να είναι ίσως η καλύτερη επιλογή για διαχρονικά δεδομένα.

4.5.1. Γενικευμένα γραμμικά μοντέλα για τη συχνότητα ζημιών

Μια θεμελιώδης κατανομή για τη μοντελοποίηση δεδομένων μετρήσεων είναι η κατανομή Poisson. Οι De Jong et al. (2008) και Ohlsson και Johansson (2010), για παράδειγμα, θεωρούν αυτόν τον αριθμό των ζημιών σε περιπτώσεις των γενικών κλάδων ασφάλισης μίας εταιρίας. Μια διακριτή τυχαία μεταβλητή Χ είναι Poisson κατανεμημένη εάν η συνάρτηση πιθανότητάς της δίνεται από τον τύπο

$$f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}, x = 0,1,2 \ldots,$$

έχει μέση τιμή ίση με τη διακύμανση λ, και γράφουμε συνήθως $X \sim Poisson(\lambda)$.

Ο αριθμός των ζημιών αφορά το πλήθος ζημιών που έγιναν σε μία περίοδο ενώ η συχνότητα ζημιών προκύπτει αν διαιρέσουμε αυτό το πλήθος με την έκθεση στον κίνδυνο. Στην περίπτωσή μας, η έκθεση στον κίνδυνο είναι η διάρκεια ενός συμβολαίου ή όλων των συμβολαίων. Είναι τις περισσότερες φορές καταλληλότερο να χρησιμοποιηθεί η συχνότητα ζημιών για τη μοντελοποίηση, παρά το πλήθος των ζημιών και αυτό γιατί η διάρκεια των συμβολαίων δεν είναι η ίδια σε κάθε συμβόλαιο. Χρησιμοποιώντας ως συνάρτηση σύνδεσης το λογάριθμο, το γενικευμένο γραμμικό μοντέλο της κατανομής Poisson γίνεται

$$log\left(\frac{\lambda_i}{t_i}\right) = \boldsymbol{x_i\beta} \Leftrightarrow \lambda_i = t_i \cdot exp(\boldsymbol{x_i\beta}), \quad Y_i \sim Poisson(\lambda_i),$$

όπου $\lambda_i = E[Y_i|x_i]$ και ο όρος t_i ο οποίος λέγεται συνήθως offset παράμετρος.

Πέρα της κατανομής Poisson, η αρνητική διωνυμική κατανομή μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τη μοντελοποίηση της συχνότητας των ζημιών. Σύμφωνα με την κατανομή Poisson αυτό που μπορεί να παρατηρηθεί είναι, ότι η μέση τιμή και η διακύμανση είναι ίσες, κάτι το οποίο δεν ικανοποιείται φυσικά σε πολλά σύνολα δεδομένων. Όταν η διακύμανση είναι μεγαλύτερη από τη μέση τιμή, τότε τα δεδομένα λέγεται ότι είναι overdispersed. Η αρνητική διωνυμική κατανομή υπερκαλύπτει την αδυναμία αυτή που έχει το μοντέλο της κατανομής Poisson, καθώς έχει δύο παραμέτρους και είναι πιο ευέλικτη για την προσαρμογή των δεδομένων.

Αν τότε Y|λ~Poisson(λ) και λ~Γάμμα με μέση τιμή μ παράμετρο μορφής k, τότε η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή με

$$f(y,\mu,\tau) = \frac{\Gamma(y+1/\tau)}{\Gamma(1/\tau)\Gamma(y+1)}\left(\frac{\mu}{\mu+1/\tau}\right)^y\left(\frac{\mu}{\mu+1/\tau}\right)^{1/\tau}, y = 0,1,2 \ldots,$$

όπου $\tau = 1/k$ ονομάζεται παράμετρος διασποράς (dispersion parameter). Η μέση τιμή και η διακύμανση της κατανομής δίνονται από τους τύπους $E[Y] = \mu$ και $V[Y] = \mu + \tau\mu^2$. Φυσικά όσο μεγαλώνει το τ, τόσο μεγαλώνει και η διακύμανση σε σχέση με την κατανομή Poisson, ενώ όταν το τ τείνει στο 0, τότε η αρνητική διωνυμική συγκλίνει στην κατανομή Poisson. Θα χρησιμοποιείται ο συμβολισμός $Y \sim NB(\mu,\tau)$.

Όπως και στο μοντέλο της κατανομής Poisson, έτσι και εδώ χρησιμοποιείται ο λογάριθμος ως συνάρτηση σύνδεσης:

$$\mu_i = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{Y_i}|\boldsymbol{x}_i] = t_i \cdot exp(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta}), \quad Y_i \sim NB(\mu_i,\tau).$$

Για την μοντελοποίηση των δεδομένων, απλοποιούμε τα μοντέλα χρησιμοποιώντας ως έκθεση στον κίνδυνο $t_i = 1$ για κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο.

4.5.2. Γενικευμένα γραμμικά μοντέλα για το μέγεθος ζημιών

Το μέγεθος των ζημιών είναι απλά το κόστος που σχετίζεται με κάθε ζημιά όταν αυτή συμβαίνει. Η πιο συχνή κατανομή που ξεκινούν όλες οι αναλύσεις για το μέγεθος των ζημιών είναι η κατανομή Γάμμα και είναι και αυτή που θα χρησιμοποιηθεί και στην εργασία αυτή για την διαδικασία της προσομοίωσης.

Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή Y θα λέμε ότι ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με μέση τιμή μ και παράμετρο μορφής k, αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της δίνεται από τον τύπο

$$f(y,\mu,k) = \frac{(k/\mu)^k}{\Gamma(k)} e^{-ky/\mu} y^{k-1}, y > 0$$

και θα γράφουμε Y~Γαμμα(μ,k). Η κατανομή αυτή έχει μέση τιμή μ και διακύμανση μ^2/k. Υπάρχουν και άλλες παραμετροποιήσεις της κατανομής Γάμμα αλλά εδώ χρησιμοποιούμε αυτή που παρουσιάζεται και στο βιβλίο του Agresti (2015).

Χρησιμοποιώντας τον λογάριθμο και εδώ ως συνάρτηση σύνδεσης, προκύπτει ότι το γενικευμένο γραμμικό μοντέλο της κατανομής Γάμμα είναι το

$$\mu_i = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{Y_i}|\boldsymbol{x}_i] = exp(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta}), \quad Y_i \sim \Gamma\alpha\mu\mu\alpha(\mu_i, k).$$

Μία άλλη κατανομή που χρησιμοποιούμε για το μέγεθος των ζημιών είναι η αντίστροφη κανονική κατανομή. Όπως και η κατανομή Γάμμα έχει θετική ασυμμετρία αλλά έχει πιο βαριά ουρά. Σύμφωνα με το άρθρο των De Jong et al. (2008), η αντίστροφη κανονική κατανομή είναι μία καλή εναλλακτική κατανομή ειδικά σε περιπτώσεις που υπάρχει μεγάλη λοξότητα και εμφανίζονται πιο ακραίες ζημιές.

Μία συνεχής τυχαία μεταβλητή Y θα λέμε ότι ακολουθεί την αντίστροφη κανονική κατανομή, αν η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητάς της δίνεται από τον τύπο

$$f(y,\mu,\lambda_{IG}) = \left\{\frac{\lambda_{IG}}{2\pi y^3}\right\}^{1/2} exp\left\{-\frac{\lambda_{IG}(y-\mu)^2}{2\mu^2 y}\right\}, y > 0$$

και θα γράφουμε Y~IG(μ, λ_{IG}). Η κατανομή αυτή έχει μέση τιμή μ και διακύμανση μ^3/λ_{IG}.

Χρησιμοποιώντας τον λογάριθμο ως συνάρτηση σύνδεσης, προκύπτει ότι το γενικευμένο γραμμικό μοντέλο της αντίστροφης κανονικής κατανομής είναι το

$$\mu_i = \boldsymbol{E}[\boldsymbol{Y_i}|\boldsymbol{x}_i] = exp(\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{\beta}), \quad Y_i \sim IG(\mu_i, \lambda_{IG}).$$

4.6. Προσομοίωση

Σκοπός μας είναι να δούμε πόσο καλά μπορούν να εκτιμηθούν τα ασφαλιστικά δεδομένα με τη χρήση των GLM και GLMM, τόσο όταν επηρεάζονται από τυχαίες επιδράσεις όσο και όταν δεν επηρεάζονται. Συγκεκριμένα, ο στόχος είναι να γίνει η μελέτη του ασφαλίστρου και πώς αυτό επηρεάζεται ειδικά, όταν υπάρχουν τυχαίες επιδράσεις και χρησιμοποιούνται τα μοντέλα GLM. Ένα άλλο ενδιαφέρον μέρος είναι να συγκρίνουμε τα μοντέλα που δείχνει ο Πίνακας 2 και να δούμε πόσο ταιριάζουν τα δεδομένα μας.

Πίνακας 2: Μοντέλα εκτίμησης καθαρού ασφαλίστρου

#	Μοντέλα για τα πλήθη ζημιών	Μοντέλα για τα μεγέθη ζημιών	Τυχαίες επιδράσεις
(1)	Poisson	Γάμμα	Όχι
(2)	Poisson	Αντίστροφη Κανονική	Όχι
(3)	Αρνητική διωνυμική	Γάμμα	Όχι
(4)	Αρνητική διωνυμική	Αντίστροφη Κανονική	Όχι
(5)	Poisson	Γάμμα	Ναι
(6)	Poisson	Αντίστροφη Κανονική	Ναι
(7)	Αρνητική διωνυμική	Γάμμα	Ναι
(8)	Αρνητική διωνυμική	Αντίστροφη Κανονική	Ναι

Να τονιστεί στο σημείο αυτό ότι τα μοντέλα εκτίμησης που παρουσιάζει ο Πίνακας 2, δεν είναι φυσικά τα μοναδικά που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν. Εδώ, απλώς υλοποιούνται τα συγκεκριμένα μοντέλα, καθώς θα μπορούσαν να θεωρηθούν ίσως τα πιο συχνά χρησιμοποιούμενα στην ασφαλιστική αγορά.

4.6.1. Δεδομένα

Δεδομένου ότι τα δεδομένα προσομοιώνονται από συγκεκριμένα μοντέλα, το πραγματικό μοντέλο πρέπει να δίνει την εκτίμηση που είναι πλησιέστερη στην πραγματική τιμή. Χρήση "λανθασμένων" μοντέλων ενδέχεται να οδηγήσει σε κακές προβλέψεις για μελλοντικές αξιώσεις. Μια σημαντική ερώτηση που πρέπει φυσικά να γίνει είναι κατά πόσο οι εκτιμήσεις για το καθαρό ασφάλιστρο μπορούν να είναι καλές ακόμη και όταν χρησιμοποιούμε τα "λάθος" μοντέλα. Για να απαντήσουμε σε αυτήν την ερώτηση, προσομοιώνουμε σύνολα δεδομένων που αντικατοπτρίζουν την ασφάλιση στην πραγματικότητα, αλλά με κάποιες απλοποιήσεις. Οι μετρήσεις και τα μεγέθη της ζημιάς στη συνέχεια προσαρμόζονται από διαφορετικά μοντέλα για σύγκριση. Ένα πλεονέκτημα αυτών των προσομοιώσεων είναι, ότι το αληθινό premium είναι γνωστό, γεγονός το οποίο μας δίνει τη δυνατότητα να δούμε πόσο οι εκτιμήσεις αποκλίνουν από τις πραγματικές.

Στο πρώτο μέρος της μελέτης, προσομοιώσαμε σύνολα δεδομένων με βάση τα μοντέλα του προηγούμενου πίνακα. Για τα μικτά μοντέλα, αφήνουμε μόνο τον σταθερό όρο να επηρεάζεται από ένα τυχαίο παράγοντα.

Στο δεύτερο μέρος, προσομοιώσαμε δεδομένα από μία πιο γενική μορφή μικτού μοντέλου. Ο στόχος του δεύτερου μέρους είναι να δούμε αν τα GLMM δίνουν αισθητά καλύτερα αποτελέσματα όταν επηρεάζονται από διάφορους τυχαίους παράγοντες.

Για όλες τις προσομοιώσεις και τους αλγορίθμους χρησιμοποιήθηκε το στατιστικό πακέτο R, ενώ για τις εκτιμήσεις του μοντέλου χρησιμοποιείται η συνάρτηση glm από το πακέτο stats και η συνάρτηση glm.nb από το πακέτο του R, MASS (Venables and Ripley, 2002). Για τα GLMM χρησιμοποιούνται οι συναρτήσεις glmer και glmer.nb από το πακέτο lme4 (Bates et al., 2015).

Κάθε σύνολο δεδομένων αποτελείται από προσομοιωμένο πλήθος ζημιών, μέγεθος των ζημιών και φυσικά και έναν πίνακα σχεδιασμού. Η πρώτη στήλη στον πίνακα σχεδιασμού είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα καθώς ενσωματώνουμε την σταθερά στα μοντέλα μας. Οι υπόλοιπες στήλες είναι οι ανεξάρτητες μεταβλητές των μοντέλων παλινδρόμησης. Ο πίνακας σχεδιασμού περιγράφεται με τον αλγόριθμο Α (Παράρτημα Α, σελ. 102, Παράρτημα Β, σελ. 103).

Αλγόριθμος Α. Πίνακας Σχεδιασμού	
Είσοδος: n (πλήθος ασφαλισμένων),	
m (πλήθος ετών)	
1. **X0 = (1,1,1,1,1…)^T**	Διάνυσμα διαστάσεων n*m
2. **X1,…X7 ~ N(1, 0.04)**	Διάνυσμα διαστάσεων n*m
3. **X8 ~ Binomial(0.5)**	Διάνυσμα διαστάσεων n*m
4. **X9 ~ Binomial(0.5)**	Διάνυσμα διαστάσεων n
5. **X10 ~ Multinomial(0.2, 0.3, 0.5)**	Διάνυσμα διαστάσεων n*m
6. **X11 ~ Multinomial(0.2, 0.05, 0.35, 0.1, 0.3)**	Διάνυσμα διαστάσεων n
7. Επανάληψη των **X9** και **X11** m φορές	Διατηρείται το ίδιο έτος
8. Επιστρέφει ο πίνακας σχεδιασμού **X = (X0, …X11)**	n*m γραμμές και 12 στήλες

Για πραγματικά δεδομένα ασφάλισης, οι ανεξάρτητες μεταβλητές μπορούν να είναι είτε συνεχείς είτε διακριτές μεταβλητές. Παραδείγματα των συνεχών μεταβλητών είναι το βάρος του οχήματος, η τιμή του οχήματος, η ιπποδύναμη, η διάρκεια οδήγησης και ηλικία του οδηγού. Στην πράξη, είναι σύνηθες να μετασχηματίζουμε μερικές από τις συνεχείς μεταβλητές σε κατηγοριοποιημένες (διακριτές) μεταβλητές για να χαρακτηρίσουν ένα μη γραμμικό αποτέλεσμα των συντεταγμένων. Ας πάρουμε για παράδειγμα την ηλικία του οδηγού. Όταν οι οδηγοί γίνονται πιο έμπειροι, το ποσοστό ατυχημάτων μειώνεται. Ταυτόχρονα, η τιμή συνήθως θα αυξηθεί ξανά για οδηγούς με μεγαλύτερη ηλικία. Επομένως, η ηλικία μπορεί στη συνέχεια να χωριστεί σε διάφορες ομάδες, με την κάθε ομάδα να σχετίζεται στην απόκριση με τον δικό του συντελεστή.

Παραδείγματα διακριτών μεταβλητών είναι το φύλο, η εθνικότητα και αριθμός παιδιών. Μερικές από τις μεταβλητές παραμένουν συχνά οι ίδιες για τον ασφαλισμένο με την πάροδο των ετών, π.χ. φύλο, γεωγραφική περιοχή και ούτω καθεξής. Για να λάβουμε πιο σύνθετα δεδομένα που μοιάζουν με πραγματικά δεδομένα, αφήνουμε μερικές από τις μεταβλητές να είναι συνεχείς και κάποιες κατηγορηματικές. Αφήνουμε για παράδειγμα τη μεταβλητή X9 (που θα μπορούσε να είναι φύλο) και τη μεταβλητή X11 (που θα μπορούσε να είναι γεωγραφική περιοχή) να παραμείνουν τα ίδια κατά το πέρασμα των ετών.

Τέλος, όσον αφορά την έκθεση στον κίνδυνο, γίνεται η υπόθεση ότι θα είναι ίση με 1 για όλα τα συμβόλαια, για λόγους ευκολίας. Αυτό στην πραγματικότητα σημαίνει ότι όλα τα συμβόλαια είναι ίδιας διάρκειας (π.χ. εξάμηνα, ετήσια) αλλά θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και διαφορετικές προσεγγίσεις. Παρόλα αυτά, αυτό δεν αποτελεί παράγοντα που θα άλλαζε τα αποτελέσματα των αλγορίθμων.

4.6.2. Επιδράσεις των παραγόντων

Οι επιδράσεις των μοντέλων βασίζονται σε 3 διαφορετικά μοντέλα:

i. $\mu = \exp(x\beta)$.
ii. $\mu = \exp(x\beta + \gamma)$.
iii. $\mu = \exp(x\beta + u\gamma)$.

Το πρώτο μοντέλο είναι ένα μοντέλο χωρίς τυχαίες επιδράσεις, το δεύτερο μοντέλο είναι ένα μοντέλο με τυχαία σταθερά, ενώ το τρίτο μοντέλο, που είναι και γενικότερο, είναι ένα μοντέλο με διάφορους τυχαίους παράγοντες. Προφανώς όταν προσθέτουμε στο μοντέλο τυχαίες επιδράσεις απαιτούνται περισσότεροι υπολογισμοί και χρόνος. Για το λόγο αυτό επιτρέπουμε μόνο σε δύο ανεξάρτητες μεταβλητές να είναι τυχαίες.

Για να προσομοιώσουμε τα πλήθη των ζημιών καθώς και τα μεγέθη αυτών, χρειάζονται οι συντελεστές $\boldsymbol{\beta}^N$ και $\boldsymbol{\beta}^Z$ καθώς και οι τυχαίες επιδράσεις $\boldsymbol{\gamma}^N=(\gamma_0^N, \gamma_1^N)$ και $\boldsymbol{\gamma}^Z=(\gamma_0^Z, \gamma_1^Z)$. Φυσικά οι παράμετροι αυτές χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του πραγματικού ασφαλίστρου. Οι συντελεστές με το συμβολισμό Ν χρησιμοποιούνται για το πλήθος των ζημιών και οι συντελεστές με το συμβολισμό Ζ για τα μεγέθη των ζημιών.

Επίσης, επειδή κάποιες κατηγορικές μεταβλητές κατηγοριοποιούνται σε μία κατηγορία λιγότερη από δίτιμες μεταβλητές, το συνολικό πλήθος των στηλών στον πίνακα σχεδιασμού τελικά είναι 16. Τους συντελεστές με τις μη τυχαίες επιδράσεις παρουσιάζει ο Πίνακας 3 (Παράρτημα Α, σελ. 102).

Να τονιστεί ότι σε ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο με συνάρτηση σύνδεσης τον λογάριθμο, ισχύει ότι

$$\mu = exp(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k) = exp(\beta_0) \cdot exp(\beta_1 x_1) \cdot \cdots \cdot exp(\beta_k x_k).$$

Από αυτή τη σχέση παρατηρείται ότι μεγάλες τιμές κάποιου $\beta_i x_i$ θα αυξήσει δραματικά την τελική τιμή του μ και για το λόγο αυτό επιλέγονται λογικές τιμές για τους συντελεστές $\beta_0, \ldots, \beta_{15}$.

Πίνακας 3: Μη τυχαίοι συντελεστές του μοντέλου

$\boldsymbol{\beta}^N$ = [-2,26, 0,32, 0,34, 0,24, 0,71, -0,52, 0,22, -0,13, 0,12, -0,13, 0,49, 0,61, -0,42, -0,62, 1,20, 0,21]

$\boldsymbol{\beta}^Z$ = [-2,32, 0,31, -0,19, 0,27, 0,31, -0,22, 0,43, 0,23, 0,28, 0,26, 0,23, 0,31, -0,21, 0,12, 0,64, 0,22]

Οι τυχαίες επιδράσεις του μοντέλου θα υποθέσουμε ότι προέρχονται από κανονικές κατανομές με μηδενική μέση τιμή και διακυμάνσεις γνωστές. Επίσης, θα γίνει η υπόθεση ότι είναι ασυσχέτιστες. Συγκεκριμένα, θα ισχύει ότι:

$$\gamma_0^N \sim N(0, u_1^2), \gamma_1^N \sim N(0, u_2^2), \gamma_0^Z \sim N(0, u_3^2), \gamma_1^Z \sim N(0, u_4^2).$$

Για να γίνει ακόμα πιο αισθητή η παρουσία των τυχαίων επιδράσεων και για να δημιουργηθεί μια πιο πλήρης εικόνα για την επίπτωσή τους στην αξιοπιστία του μοντέλου, θα επιτρέψουμε στις διακυμάνσεις να παίρνουν τις τιμές 0, 0.1, 0.2 και 0.4.

4.6.3. Πλήθος και μεγέθη ζημιών

Τέλος, για το πλήθος των ζημιών το μικτό μοντέλο παίρνει τη μορφή,

$$\lambda = exp\left({\beta_0}^N + {\beta_1}^N x_1 + \cdots + {\beta_{15}}^N x_{15} + \gamma_0^N + u_1\gamma_1^N\right),$$

ενώ για το μέγεθος,

$$\mu = exp\left({\beta_0}^Z + {\beta_1}^Z x_1 + \cdots + {\beta_{15}}^Z x_{15} + \gamma_0^Z + u_1\gamma_1^Z\right).$$

Σύμφωνα με αυτά, δημιουργείται ο αλγόριθμος Β για την προσομοίωση των δεδομένων. Τα μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την προσομοίωση των δεδομένων αναφέρονται και ως αληθινά μοντέλα.

Αλγόριθμος Β. Δημιουργία δεδομένων

Είσοδος: n,m, β, u	
1. Παίρνουμε τον **X**	Από τον Αλγόριθμο Α
2. Αν το μοντέλο δεν έχει τυχαίες επιδράσεις τότε:	Μοντέλα (1), (2), (3) και (4)
3. **$\lambda = \exp(X\beta^N)$**	
4. **$\mu = \exp(X\beta^Z)$**	
5. Αν το μοντέλο είναι μικτό, τότε:	Μοντέλα (5), (6), (7) και (8)
6. Βρες $\gamma_0^N \sim N(0, u_1^2), \gamma_1^N \sim N(0, u_2^2)$,	
7. Βρες $\gamma_0^Z \sim N(0, u_3^2), \gamma_1^Z \sim N(0, u_4^2)$	
8. Επανέλαβε $\gamma_0^N, \gamma_1^N, \gamma_0^Z, \gamma_1^Z$ m φορές	Για τα έτη
9. Θέσε **$U_0 = X_0$** και **$U_1 = X_1$**	
10. $\lambda = exp(\boldsymbol{X\beta}^N + \boldsymbol{U}_0\boldsymbol{\gamma}_0^N + \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\gamma}_1^N)$	
11. $\mu = exp(\boldsymbol{X\beta}^Z + \boldsymbol{U}_0\boldsymbol{\gamma}_0^Z + \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{\gamma}_1^Z)$	
12. Προσομοίωσε **N = (**$N_1,..N_{n*m}$)	Από Poisson(λ) ή NB(λ,τ)
13. Για i = 1 έως n*m	
14. Αν N_i>0 τότε	
15. Προσομοίωσε Z_{Ni} =(Z_1,…, Z_N)	Από Gamma(λ,κ) ή IG(λ_{IG})
16. Επέστρεψε **N,Z**	Προσομοιωμένα πλήθη και μεγέθη ζημιών

4.6.4. Πραγματικό ασφάλιστρο (pure premium)

Με κάθε ασφαλιστήριο συμβόλαιο συνδράμει και η πιθανότητα ο ασφαλιστής να καταβάλλει αποζημίωση στον ασφαλισμένο, όταν καλύπτονται ζημιές κατά τη διάρκεια της περιόδου ασφάλισης. Η αναμενόμενη πληρωμή αντιπροσωπεύεται από το καθαρό ασφάλιστρο (pure premium). Με απλή χρήση μαθηματικών υπολογισμών, το ασφάλιστρο είναι παρόμοιο για όλους τους αντισυμβαλλόμενους, κάτι το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε να απλοποιήσουμε το καθαρό ασφάλιστρο Π_{ic}^{pu} (αυτό είναι το δεσμευμένο ασφαλιστήριο συμβόλαιο i για τη u ομάδα ασφάλισης) και να το γράψουμε ως Π^{pu}. Επομένως, το καθαρό ασφάλιστρο για έναν ασφαλισμένο δίνεται από τη σχέση (Parodi, 2015):

$$\Pi^{pu} = E[N|\boldsymbol{x}] \times E[Z|\boldsymbol{x}],$$

όπου $E[N|\boldsymbol{x}]$ είναι η δεσμευμένη μέση τιμή του αριθμού των ζημιών κατά τη διάρκεια μίας περιόδου και $E[Z|\boldsymbol{x}]$ είναι η δεσμευμένη μέση τιμή του κόστους των ζημιών κατά τη διάρκεια μίας περιόδου. Η σχέση αυτή προκύπτει από την ακόλουθη σχέση:

$$\Pi^{pu} = E\left[\sum_{i=1}^{N} Z_i|\boldsymbol{x}\right] = E\left\{E\left[\sum_{i=1}^{N} Z_i|N, \boldsymbol{x}\right]|\boldsymbol{x}\right\} = E\left\{\left[\sum_{i=1}^{N} E[Z_i|\ \boldsymbol{x}]\right]|\boldsymbol{x}\right\}$$
$$= E\{N \cdot E[Z|\ \boldsymbol{x}]|\boldsymbol{x}\} = E[N|\boldsymbol{x}] \times E[Z|\boldsymbol{x}].$$

Επομένως, για να γίνει ο υπολογισμός του πραγματικού ασφαλίστρου απαιτείται ο υπολογισμός των ποσοτήτων $E[N|\boldsymbol{x}]$ και $E[Z|\boldsymbol{x}]$. Προφανώς αυτές οι ποσότητες πρέπει να υπολογιστούν ατομικά. Για τα μοντέλα χωρίς τυχαίες επιδράσεις, έχουμε ότι:

$$E[N|\boldsymbol{x}] = E[\lambda|\boldsymbol{x}] = exp(\boldsymbol{x\beta^N})$$

και

$$E[Z|\boldsymbol{x}] = E[\mu|\boldsymbol{x}] = exp(\boldsymbol{x\beta^Z}) .$$

Για τα μικτά μοντέλα, με λ και μ προκύπτει ότι

$$E[N|\boldsymbol{x}] = E[\lambda|\boldsymbol{x}] = exp(\boldsymbol{x\beta^N} + \gamma_0^N + u_1\gamma_1^N|\boldsymbol{x}) =$$
$$= exp(\boldsymbol{x\beta}^N)E[exp(\gamma_0^N + u_1\gamma_1^N|\boldsymbol{x})] = exp(\boldsymbol{x\beta}^N) \cdot exp\left(\frac{u_1^2}{2}\right) \cdot exp\left(\frac{u_1^2u_2^2}{2}\right).$$

Αντίστοιχα, για το μέγεθος των ζημιών ισχύει ότι:

$$E[Z|\boldsymbol{x}] = E[\mu|\boldsymbol{x}] = exp(\boldsymbol{x\beta^Z} + \gamma_0^Z + u_1\gamma_1^Z|\boldsymbol{x}) =$$
$$= exp(\boldsymbol{x\beta}^Z)E[exp(\gamma_0^Z + u_1\gamma_1^Z|\boldsymbol{x})] = exp(\boldsymbol{x\beta}^Z) \cdot exp\left(\frac{u_3^2}{2}\right) \cdot exp\left(\frac{u_3^2u_4^2}{2}\right).$$

Έχοντας γνωστές τις παραμέτρους $\boldsymbol{\beta}^N$, $\boldsymbol{\beta}^Z$, $u_1^2, u_2^2, u_3^2, u_4^2$ και φυσικά τις ανεξάρτητες μεταβλητές **x**, τότε το ασφάλιστρο μπορεί να υπολογιστεί από τον πολλαπλασιασμό των δύο μέσων τιμών $E[N|\boldsymbol{x}] \times E[Z|\boldsymbol{x}]$. Να παρατηρηθεί ότι στις παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιήθηκε η ροπογεννήτρια των τυχαίων μεταβλητών. Ο Αλγόριθμος Γ παρουσιάζει τη διαδικασία υπολογισμού του καθαρού ασφαλίστρου.

Αλγόριθμος Γ. Δημιουργία πραγματικού ασφαλίστρου

Είσοδος: n,m, $\boldsymbol{\beta}^N$, $\boldsymbol{\beta}^Z$, $u_1^2, u_2^2, u_3^2, u_4^2$

1. Παίρνουμε τον **X** — Από τον Αλγόριθμο Β
2. Αν το μοντέλο δεν έχει τυχαίες επιδράσεις τότε:
3. $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{true}} = \mathbf{exp}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{N}})$
4. $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{true}} = \mathbf{exp}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}^{\mathbf{Z}})$
5. Αν το μοντέλο είναι μικτό, **τότε:**
6. $\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{true}} = exp(\boldsymbol{x\beta}^N) \cdot exp\left(\frac{u_1^2}{2}\right) \cdot exp\left(\frac{u_1^2 u_2^2}{2}\right)$
7. $\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{true}} = exp(\boldsymbol{x\beta}^Z) \cdot exp\left(\frac{u_3^2}{2}\right) \cdot exp\left(\frac{u_3^2 u_4^2}{2}\right)$
8. $\Pi_{true}^{pu} = \boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{true}} \times \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{true}}$
9. Επέστρεψε Π_{true}^{pu} — Διάνυσμα καθαρών ασφαλίστρων

4.6.5. Εκτιμηθέν ασφάλιστρο (estimated premium)

Για να γίνει η εκτίμηση του ασφαλίστρου, απαιτώνται οι εκτιμήσεις των παραμέτρων $\boldsymbol{\beta}^N$, $\boldsymbol{\beta}^Z$, $u_1^2, u_2^2, u_3^2, u_4^2$. Για το λόγο αυτό θα χρησιμοποιηθούν οι συναρτήσεις της R που εκτιμούν τις παραμέτρους των μοντέλων GLM και GLMM σύμφωνα με τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας. Να τονιστεί για ακόμα μία φορά ότι δεν υπάρχει κλειστός τύπος που προκύπτουν οι εκτιμήσεις των παραμέτρων και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούνται αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης.

Αλγόριθμος Δ. Δημιουργία εκτιμηθέντος ασφαλίστρου	
Είσοδος: n,m, $\boldsymbol{\beta}^N$, $\boldsymbol{\beta}^Z$, $u_1^2, u_2^2, u_3^2, u_4^2$	
1. Δημιουργία των **N, Z**	
2. Προσαρμογή των **N,Z**	
3. Αν το μοντέλο είναι GLM, **τότε:**	Μοντέλα (1), (2), (3) και (4)
4. $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = exp(\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^N)$, $\widehat{\boldsymbol{\mu}} = exp(\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^Z)$	
5. Αν το μοντέλο είναι GLMM, **τότε:**	Μοντέλα (5), (6), (7) και (8)
6. $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = exp(\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^N) \cdot exp\left(\frac{\hat{u}_1^2}{2}\right) \cdot exp\left(\frac{\hat{u}_1^2\hat{u}_2^2}{2}\right)$	
7. $\widehat{\boldsymbol{\mu}} = exp(\boldsymbol{x}\widehat{\boldsymbol{\beta}}^Z) \cdot exp\left(\frac{\hat{u}_3^2}{2}\right) \cdot exp\left(\frac{\hat{u}_3^2\hat{u}_4^2}{2}\right)$	
8. $\widehat{\Pi} = \hat{\boldsymbol{\lambda}} \times \widehat{\boldsymbol{\mu}}$	
9. Επέστρεψε . $\widehat{\Pi}$	Διάνυσμα εκτιμηθέντων καθαρών ασφαλίστρων

Επίσης, τονίζεται ότι ο βασικός τρόπος υπολογισμού είναι η μέθοδος που βασίζεται στο σκορ του Fisher.

Οι συναρτήσεις glmer και glmer.nb χρησιμοποιούνται και γίνονται οι εκτιμήσεις (βλ. Liu και Pierce, 1994). Με βάση αυτές τις πληροφορίες, ο Αλγόριθμος Δ παρουσιάζει τα βήματα εκτίμησης του καθαρού ασφαλίστρου.

Ο αλγόριθμος επιστρέφει τις τιμές των εκτιμήσεων από ένα προσαρμοσμένο μοντέλο. Προφανώς οι συνδυασμοί μοντέλων είναι αρκετοί, δηλαδή είναι συγκεκριμένα 8 διαφορετικά αποτελέσματα για κάθε πραγματικό μοντέλο. Επίσης, όταν τα δεδομένα προσομοιώνονται από ένα μοντέλο με τυχαία σταθερά τότε δεν υπάρχουν εκτιμήσεις για τις παραμέτρους u_2 και u_4.

Τέλος, για να υπάρχει ένα σταθερό μοτίβο προσομοιώσεων, οι στοχαστικές προσομοιώσεις γίνονται αρκετές φορές, ειδικά τώρα που υπάρχει δυνατότητα με τη χρήση των υπολογιστών.

Πίνακας 4: Τιμές παραμέτρων που χρησιμοποιούνται

Αριθμός προσομοιώσεων 500
Αριθμός ασφαλισμένων n=1000
Έτη m = 5
Μοντέλα έτσι όπως παρουσιάζει ο Πίνακας 2
Y ~ Poisson(λ) όπου λ είναι rate παράμετρος
Y ~ NB(λ,τ) όπου λ είναι η μέση τιμή και τ=0.2
Y ~ Γάμμα(μ,κ) όπου μ είναι η μέση τιμή και κ=6
Y ~ IG(μ, λIG) όπου μ είναι η μέση τιμή και λIG=8
$\gamma_0^N \sim N(0, u_1^2)$ όπου έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 0.1, 0.2 ή 0.4
$\gamma_1^N \sim N(0, u_2^2)$ όπου έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 0.1, 0.2 ή 0.4
$\gamma_0^Z \sim N(0, u_3^2)$ όπου έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 0.1, 0.2 ή 0.4
$\gamma_1^Z \sim N(0, u_4^2)$ όπου έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 0.1, 0.2 ή 0.4

Ο Πίνακας 4 δίνει κάποιες προδιαγραφές των μοντέλων καθώς και τις τιμές των παραμέτρων που θα χρησιμοποιηθούν κατά τη διαδικασία της προσομοίωσης των δεδομένων (Παράρτημα Α, σελ. 102).

4.6.6. Αξιολόγηση μοντέλων και επιλογή

Για να γίνει σωστά και καλά η εκτίμηση του καθαρού ασφαλίστρου, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν καλά μοντέλα για το πλήθος των ζημιών όπως και για το κόστος των ζημιών. Για το λόγο αυτό, η αξιολόγηση των μοντέλων γίνεται βάσει διαφόρων κριτηρίων, τα οποία είναι η μεροληψία (bias), η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (RMSE), καθώς επίσης και το μέσο απόλυτο σφάλμα (MAE). Οι σχέσεις που ακολουθούν δίνουν τα παραπάνω μέτρα ελέγχου:

$$bias = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left(\widehat{\Pi}_j - \Pi_j\right),$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left(\widehat{\Pi}_j - \Pi_j\right)^2},$$

$$MAE = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J}\left|\widehat{\Pi}_j - \Pi_j\right|.$$

Η μεροληψία ως μέτρο χρησιμοποιείται κυρίως όταν ο ερευνητής θέλει να δει κατά μέσο όρο, πόσο κοντά είναι οι εκτιμήσεις στην πραγματική τιμή, δηλαδή το μέσο σφάλμα. Αρνητική μεροληψία σημαίνει ότι η πραγματική τιμή έχει υποεκτιμηθεί, ενώ θετική μεροληψία σημαίνει ότι έχει υπερεκτιμηθεί. Όμως, εξαιτίας του γεγονότος ότι θετικές και αρνητικές τιμές στην μεροληψία αλληλο-εξουδετερώνονται, η μεροληψία δεν είναι το καταλληλότερο μέτρο επιλογής του καλύτερου μοντέλου. Για το λόγο αυτό προτείνονται τα μέτρα RMSE και MAE , με το πρώτο να λαμβάνει υπόψη το τετράγωνο των αποκλίσεων και το δεύτερο την απόλυτη τιμή αυτών. Με αυτό τον τρόπο εξαλείφονται οι όποιες διαγραφές θετικών και αρνητικών σφαλμάτων. Για την προσομοίωση που γίνεται στην εν λόγω εργασία, θα γίνει ο υπολογισμός των μέτρων αυτών κατά μέσο όρο για όλα τα 500 σύνολα δεδομένων που χρησιμοποιούνται, δηλαδή θα υπολογιστούν οι ποσότητες

$$bias = \frac{bias_1 + \cdots bias_{500}}{500},$$

$$RMSE = \frac{RMSE_1 + \cdots RMSE_{500}}{500},$$

$$MAE = \frac{MAE_1 + \cdots MAE_{500}}{500}.$$

Κεφάλαιο 5. Αριθμητική εφαρμογή

Στην ενότητα αυτή γίνεται η εφαρμογή των προσομοιώσεων και η εκτίμηση του καθαρού ασφαλίστρου χρησιμοποιώντας διάφορα μοντέλα από το Κεφάλαιο 4. Παρακάτω ακολουθούν διαφορετικά μοντέλα που δείχνουν την προσαρμογή των κατανομών.

5.1. Μοντέλο με μία τυχαία επίδραση

Στο πρώτο μέρος προσομοιώσαμε δεδομένα χωρίς τυχαίες επιδράσεις αλλά σε αυτά συμπεριλήφθηκε στον σταθερό όρο η τυχαία επίδραση. Χρησιμοποιήθηκαν τα μοντέλα που δείχνει ο Πίνακας 2. Στη συνέχεια προσαρμόστηκε από τα μοντέλα του Πίνακα 3. Η τιμή των τυπικών αποκλίσεων για τις τυχαίες επιδράσεις κυμαίνονται μεταξύ 0,1, 0,2 και 0,4 για να δούμε πώς οι τυχαίες επιδράσεις επηρεάζουν το ασφάλιστρο.

Τα αποτελέσματα εμφανίζονται παρακάτω και το συμβολισμό αυτών περιγράφει ο Πίνακας 5.

Πίνακας 5: Μοντέλα που χρησιμοποιούνται

u^N: τυπική απόκλιση των τυχαίων επιδράσεων για το μοντέλο του πλήθος ζημιών
u^Z: τυπική απόκλιση των τυχαίων επιδράσεων για το μοντέλο του μεγέθους ζημιών
***PG:* Poisson - gamma (GLMs)**
***PIG:* Poisson - inverse Gaussian (GLMs)**
***NBG:* negative binomial - gamma (GLMs)**
***NBIG:* negative binomial - inverse Gaussian (GLMs)**

Για να ξεχωρίσουμε τα μοντέλα GLMM, θα χρησιμοποιηθεί ο δείκτης M. Για παράδειγμα για το προσαρμοσμένο μοντέλο GLMM για το ζευγάρι Poisson-Gamma θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό PG_M. Το γράμμα P χρησιμοποιείται για την κατανομή Poisson, τα γράμματα NB χρησιμοποιούνται για την αρνητική διωνυμική κατανομή, το γράμμα G χρησιμοποιείται για την κατανομή Γάμμα και τέλος τα γράμματα IG χρησιμοποιούνται για την αντίστροφη κανονική κατανομή.

5.1.1 Poisson-Gamma

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων, όπου το πλήθος των ζημιών ακολουθεί την κατανομή Poisson και το μέγεθος των ζημιών ακολουθεί την κατανομή Γάμμα παρουσιάζει ο Πίνακας 6 (Παράρτημα Γ, σελ. 103).

Πίνακας 6: Poisson-Gamma fixed effects

	Generalized linear models				*Generalized linear mixed models*			
	PG	**PIG**	**NBG**	**NBIG**	**PG_M**	**PIG_M**	**NBG_M**	**$NBIG_M$**
Bias	6.1	8.7	6.2	8.7	6.2	8.7	6.5	9.0
RMSE	539.8	547.0	539.8	546.9	539.9	547.0	540.9	547.8
MAE	276.3	278.9	276.3	278.9	276.3	278.9	276.7	279.2

Για τις προσομοιώσεις του μοντέλου Poisson-Gamma χωρίς τυχαίες επιδράσεις υπάρχουν γενικά μικρές διαφορές στα 3 διαφορετικά μέτρα ελέγχου bias, RMSE και MAE. Ωστόσο, τα GLM είναι ελαφρώς καλύτερα από τα GLMM, το οποίο είναι αναμενόμενο καθώς τα δεδομένα έχουν προσομοιωθεί χωρίς να έχουν τυχαίες επιδράσεις. Τα αποτελέσματα από το PG_M είναι σχετικώς παρόμοια με τα μοντέλα PG, δηλαδή PIG_M σε σχέση με τα PIG, NBG_M ως προς το NBG και το $NBIG_M$ ως προς το NBIG. Αυτό είναι λογικό, αφού τα GLM είναι όπως και τα GLMM χωρίς τις τυχαίες επιδράσεις. Από τα παραπάνω μοντέλα, το $NBIG_M$ δίνει τα χειρότερα αποτελέσματα, το οποίο επίσης είναι λογικό καθώς αυτό είναι το μοντέλο το οποίο διαφέρει εντελώς συγκριτικά με το προσομοιωμένο αληθινό μοντέλο. Το καλύτερο από τα μοντέλα αυτά δείχνει να είναι το PG , γεγονός αναμενόμενο καθώς είναι και το μοντέλο από το οποίο προέρχονται τα προσομοιωμένα δεδομένα. Στην συγκεκριμένη περίπτωση λοιπόν, η αξιολόγηση του μοντέλου μέσω των τριών μέτρων κρίνεται επιτυχής εφόσον το επιλεχθέν μοντέλο συμπίπτει με το μοντέλο προέλευσης των δεδομένων.

Συμπεριλαμβάνοντας τυχαίες επιδράσεις με τιμές των τυπικών αποκλίσεων $u^N = 0.1$ και $u^Z = 0.1$, οι διαφορές στα αποτελέσματα παραμένουν αρκετά μικρές στα μοντέλα. Στην περίπτωση αυτή, το μοντέλο PG_M είναι καλύτερο από το μοντέλο PG, κάτι που είναι λογικό, ενώ το μοντέλο NBG είναι καλύτερο από το μοντέλο NBG_M και το μοντέλο NBIG είναι καλύτερο από το μοντέλο $NBIG_M$. Αυτό θα μπορούσε να εξηγηθεί ίσως επειδή οι τυπικές αποκλίσεις είναι πολύ μικρές και δεν δίνουν ιδιαίτερη επιρροή στο μοντέλο και επομένως το GLM δίνει μερικές φορές καλύτερα αποτελέσματα από το GLMM, ακόμα και αν τα δεδομένα έχουν προκύψει από διαδικασία με τυχαίους παράγοντες.

Το χειρότερο μοντέλο είναι το $NBIG_M$ παρόλα αυτά δίνει παρόμοια αποτελέσματα με τα υπόλοιπα μοντέλα. Τα καλύτερα αποτελέσματα παρουσιάζονται από το μοντέλο PG_M, το οποίο είναι λογικό.

Πίνακας 7: Poisson-Gamma mixed effect

	Generalized linear models				*Generalized linear mixed models*			
	PG	PIG	NBG	NBIG	PG_M	PIG_M	NBG_M	$NBIG_M$
Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.1$ $u^Z = 0.1$								
Bias	4.4	7.1	4.4	7.1	4.4	7.0	4.7	7.3
RMSE	555.6	562.1	555.5	562.0	555.3	561.8	556.1	562.7
MAE	283.5	285.9	283.4	285.9	283.4	285.8	283.8	286.2
Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.2$ $u^Z = 0.2$								
Bias	0.7	3.3	0.7	3.3	0.2	2.8	0.5	3.1
RMSE	612.0	616.8	611.9	616.6	610.7	615.4	611.2	615.9
MAE	310.1	311.8	310.0	311.7	309.4	311.1	309.6	311.3
Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.2$ $u^Z = 0.4$								
Bias	−4.2	1.2	−4.6	0.8	−59.6	−64.5	−59.7	−64.6
RMSE	885.7	887.3	882.8	884.1	836.0	831.1	836.1	831.1
MAE	438.4	439.6	437.2	438.3	417.5	416.7	417.6	416.8

Σε περίπτωση που υπάρχουν τυχαίες επιδράσεις με τυπική απόκλιση 0.2, τότε όλα τα GLMM μοντέλα δείχνουν ξεκάθαρα καλύτερα αποτελέσματα από τα GLM, παρόλο που δεν είναι τεράστιες οι διαφορές στα μέτρα που χρησιμοποιούνται. Αυτό δεν είναι κάτι που δεν περιμέναμε, καθώς γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τυχαίες επιδράσεις. Για τα GLMM, τα μοντέλα για πλήθος ζημιών κατανομής P, δείχνουν να δουλεύουν καλύτερα από το μοντέλα της NB, κάτι το οποίο επίσης δεν είναι παράξενο, καθώς η κατανομή των ζημιών είναι η Poisson και υπάρχει και η επιρροή των τυχαίων επιδράσεων.

Για τα μοντέλα GLM, το μοντέλο της NB δίνει παρόμοια αποτελέσματα με το μοντέλο P. Αυτό θα μπορούσε να είναι αποτέλεσμα της παραμέτρου διασποράς που έχει η αρνητική διωνυμική κατανομή και για το λόγο αυτό κάνει τα μοντέλα NB GLM πιο ευέλικτα σε σχέση με το P GLM. Τέλος, το μοντέλο PIG διαφέρει πάρα πολύ από τα δεδομένα που έχουν προσομοιωθεί και αυτό φαίνεται και στα αποτελέσματα που είναι τα χειρότερα από όλα. Προφανώς, το μοντέλο PG_M, που είναι και το αληθινό μοντέλο, δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα όπως αναμενόταν.

Αυξάνοντας τις τυπικές αποκλίσεις στην τιμή 0.4 στα δεδομένα που προσομοιώθηκαν, είναι σαφές ότι τα μοντέλα GLMM υποεκτιμούν το πραγματικό ασφάλιστρο κατά μέσο όρο. Αυτό φαίνεται από από τις αρνητικές τιμές που λαμβάνει η μεροληψία. Όταν προσαρμόζονται τα προσομοιωμένα δεδομένα σε GLMM τότε παρατηρείται στην οθόνη της R μία προειδοποίηση για προβλήματα στην μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας, καθώς υπάρχουν γενικά προβλήματα σύγκλισης. Δυστυχώς, δεν είναι εύκολο να βρεθεί μία γενική λύση στο πρόβλημα αυτό της σύγκλισης. Επίσης, τα προβλήματα αυτά δείχνουν να αυξάνονται καθώς αυξάνεται και η τιμή των τυπικών αποκλίσεων. Η μεγάλη διαφορά στην τιμή της μεροληψίας ανάμεσα στα μοντέλα GLM και GLMM υποθέτουμε ότι υπάρχει λόγω αυτού του προβλήματος σύγκλισης.

Από την άλλη πλευρά, το RMSE και το MAE είναι μικρότερα για τα GLMM σε σχέση με τα GLM. Αυτό δίνει μικρότερη μεταβλητότητα στις εκτιμήσεις των GLMM παρόλο που υπάρχουν προβλήματα σύγκλισης. Το NBIG δίνει μία εκτίμηση, η οποία είναι πολύ κοντά στην πραγματική τιμή κατά μέσο όρο, αλλά δίνει ταυτόχρονα και μεγαλύτερη διασπορά συγκρίνοντάς το με τα GLMM. Με όλα αυτά, είναι δύσκολο να αποφασιστεί το καλύτερο και το χειρότερο μοντέλο καθώς από τα δύο κριτήρια προκύπτουν διαφορετικά συμπεράσματα.

Το μοντέλο NB φαίνεται να δίνει επίσης παρόμοια αποτελέσματα με το P είτε για την περίπτωση των GLM είτε για την περίπτωση των GLMM. Αυτό θα μπορούσε να συμβαίνει γιατί η κατανομή Poisson μπορεί να παρουσιαστεί ως μία κατανομή που συγκλίνει στην αρνητική διωνυμική κατανομή καθώς η αρνητική διωνυμική συγκλίνει στην κατανομή Poisson, όταν η παράμετρος διασποράς συγκλίνει στο μηδέν. Επομένως, το μοντέλο της NB είναι μία καλή εναλλακτική επιλογή για τα δεδομένα της κατανομής Poisson.

Τα μοντέλα που περιλαμβάνουν την G δείχνουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με αυτά που περιλαμβάνουν την IG χωρίς τυχαίες επιδράσεις, ειδικά στην περίπτωση που η τυπική απόκλιση είναι ίση με 0.1. ή 0.2. Αυτό θα μπορούσε να συμβαίνει επειδή τα μεγέθη των ζημιών ακολουθούν την κατανομή Γάμμα. Στην περίπτωση που η τυπική απόκλιση των τυχαίων επιδράσεων αυξηθεί σε 0.4, τότε το μοντέλο IG δίνει καλύτερα αποτελέσματα όσον αφορά στο μέτρο της μεροληψίας σε σχέση με το μοντέλο G κατά μέσο όρο στα GLM, αλλά ταυτόχρονα δίνει και μεγαλύτερη διασπορά. Το αντίθετο συμβαίνει για τα GLMM, τα οποία είναι χειρότερα κατά μέσο όρο για τα IG αλλά με μικρότερη διασπορά.

Η αντίθετη συμπεριφορά μπορεί να προκληθεί από τις τυχαίες επιδράσεις, οι οποίες είναι πολύ μεγάλες και δημιουργούν ίσως μερικές φορές και προβλήματα στον αλγόριθμο. Τα RMSE και MAE αυξάνονται καθώς οι τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις αυξάνονται και αυτό είναι λογικό αφού με αυτό είναι σαν να προσθέτουμε νέες πηγές μεταβλητότητας στα δεδομένα μας.

5.1.2. Poisson-Inverse Gaussian

Ο Πίνακας 8 και ο Πίνακας 9 παρουσιάζουν τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων όταν ο αριθμός των ζημιών είναι και πάλι κατανομή Poisson, ενώ τα μεγέθη των ζημιών αυτή τη φορά είναι αντίστροφη κανονική κατανομή (Παράρτημα Δ, σελ. 106). Σε συνέχεια των προηγούμενων πινάκων, παρουσιάζονται τα αποτελέσματα με τα μοντέλα GLM στην αρχή και τα μοντέλα GLMM στη συνέχεια.

Πίνακας 8: Poisson-Inverse Gaussian fixed effects

	Generalized linear models				*Generalized linear mixed models*			
	PG	**PIG**	**NBG**	**NBIG**	**PG_M**	**PIG_M**	**NBG_M**	**$NBIG_M$**
Bias	−6.1	−5.9	−6.1	−5.9	−6.1	−5.9	−6.2	−6.0
RMSE	525.4	524.4	525.5	524.5	525.5	524.4	527.7	526.5
MAE	268.9	268.3	269.0	268.4	268.9	268.3	270.0	269.3

Πίνακας 9: Poisson- Inverse Gaussian mixed effect

	Generalized linear models				*Generalized linear mixed models*			
	PG	PIG	NBG	NBIG	PG_M	PIG_M	NBG_M	$NBIG_M$
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.1$ $u^Z = 0.1$							
Bias	−0.2	−0.3	−0.2	−0.2	−0.3	−0.3	−0.2	−0.2
RMSE	540.3	538.6	540.4	538.8	540.6	539.0	542.9	541.4
MAE	274.0	273.1	274.0	273.1	274.2	273.3	275.1	274.2
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.2$ $u^Z = 0.2$							
Bias	−9.0	−8.1	−9.0	−8.1	−8.9	−8.0	−8.7	−7.8
RMSE	606.8	604.6	606.2	604.0	605.0	602.9	605.3	603.1
MAE	306.2	304.8	306.0	304.6	305.7	304.3	305.7	304.3
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.2$ $u^Z = 0.4$							
Bias	−13.3	−11.4	−13.3	−11.5	−58.2	−89.1	−58.3	−89.2
RMSE	881.6	871.3	877.2	866.8	833.8	825.4	833.7	825.3
MAE	431.4	427.6	429.5	425.5	411.3	407.0	411.2	406.9

Για προσομοιώσεις χωρίς τυχαίες επιδράσεις τα αποτελέσματα είναι σχεδόν παρόμοια για όλα τα μοντέλα, το οποίο σημαίνει ότι τα GLMM δουλεύουν πρακτικά το ίδιο σε σχέση με τα GLM. Τα GLM είναι το ίδιο ή ελάχιστα καλύτερα από τα GLMM σε αυτή την περίπτωση. Το NBG_M διαφέρει περισσότερο σε σχέση με τα υπόλοιπα από το αληθινό μοντέλο και είναι και το μοντέλο με τα χειρότερα αποτελέσματα. Με προσομοιωμένα δεδομένα από το μοντέλο Poisson-Inverse Gaussian, είναι λογικό τα μοντέλα PIG και PIG_M να δίνουν τα καλύτερα αποτελέσματα, αφού επαληθεύεται όπως και προηγουμένως το μοντέλο προέλευσης των δεδομένων.

Με τυπική απόκλιση 0.1 για τις τυχαίες επιδράσεις, δεν υπάρχουν σημαντικές διαφορές ανάμεσα στα αποτελέσματα των διαφορετικών μοντέλων. Τα GLM δουλεύουν ελαφρώς καλύτερα από τα GLMM. Οι τυχαίες επιδράσεις είναι ίσως τόσο μικρές, που δεν μπορούν να επηρεάσουν τα μοντέλα. Το μοντέλο NBG_M μπορεί και σε αυτή την περίπτωση να θεωρηθεί ως το χειρότερο μοντέλο από όλα και το μοντέλο PIG ως το καλύτερο. Αυτό προφανώς είναι κάτι που ήταν αναμενόμενο, καθώς τα δεδομένα προέρχονται από το συγκεκριμένο μοντέλο.

Όταν οι τυχαίες επιδράσεις αυξάνονται στην τιμή 0.2 για τις τυχαίες επιδράσεις, τότε τα αποτελέσματα είναι περισσότερο ίδια με τα συγκρινόμενα μοντέλα. Τα GLMM δίνουν πλέον καλύτερες εκτιμήσεις σε σχέση με τα GLM οπότε, καθώς αυξάνεται η τιμή της τυπικής απόκλισης, επηρεάζονται πολύ οι τιμές των μέτρων που χρησιμοποιούνται και μας οδηγούν στο ότι τα μοντέλα GLMM είναι καλύτερα από τα μοντέλα GLM.

Το μοντέλο PG είναι το χειρότερο μοντέλο από όλα παρόλο που οι ζημιές ακολουθούν την κατανομή Poisson. Το NBG δίνει σχεδόν παρόμοια αποτελέσματα με το μοντέλο PG με μία ελαφρώς μικρότερη διασπορά. Αυτό υποθέτουμε ότι οφείλεται στην παράμετρο της αρνητικής διωνυμικής, η οποία δίνει ένα επιπλέον ποσό στην διασπορά. Τα μοντέλα PIG_M και $NBIG_M$ δίνουν καλύτερες εκτιμήσεις σε σχέση με άλλα μοντέλα. Αυτό δεν είναι εντυπωσιακό, αφού τα δεδομένα έχουν προσομοιωθεί από το μοντέλο Poisson –Inverse Gaussian με απουσία τυχαίων επιδράσεων.

Αυξάνοντας ακόμα περισσότερο τις τυπικές αποκλίσεις στις τυχαίες επιδράσεις στην τιμή 0.4, τότε τα αποτελέσματα τείνουν να γίνουν ίδια όπως και στην περίπτωση της Poisson-Γάμμα. Όλα τα μοντέλα υποεκτιμούν το ασφάλιστρο, ειδικά τα GLMM για τα οποία υποθέτουμε ότι συμβαίνει λόγω των προβλημάτων σύγκλισης του αλγορίθμου. Για τα GLMM μοντέλα που περιλαμβάνουν την IG φαίνεται να εμφανίζεται η μικρότερη μεροληψία σε σχέση με τα μοντέλα που περιλαμβάνουν την G αλλά εμφανίζουν μικρότερη διασπορά. Ο λόγος και πάλι ίσως είναι οι παράμετροι, οι οποίες κάποιες φορές ίσως εκτιμώνται σωστά και κάποιες άλλες φορές όχι, με αποτέλεσμα να δημιουργείται αυτού του είδους η διασπορά.

Σχετικά με τη διασπορά, τα καλύτερα μοντέλα είναι τα PIG_M και $NBIG_M$, αποτέλεσμα αναμενόμενο. Παρόλα αυτά, αυτά τα μοντέλα έχουν τη χειρότερη μεροληψία κατά μέσο όρο. Το μοντέλο PIG δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα για το μέσο όρο της μεροληψίας, αλλά έχει μία πιο μεγάλη διασπορά σε σχέση με τα GLMM. Το να επιλεγεί το καλύτερο και χειρότερο μοντέλο, είναι και σε αυτή την περίπτωση αρκετά δύσκολο.

Το να γίνει η προσαρμογή δεδομένων που ακολουθούν την κατανομή Poisson με την αρνητική διωνυμική κατανομή είναι κάτι το οποίο συμβαίνει αρκετές φορές και τα αποτελέσματα δεν διαφέρουν πολύ. Αυτό δηλαδή σημαίνει για ακόμα μία φορά ότι η αρνητική διωνυμική κατανομή είναι μία καλή προσέγγιση της κατανομής Poisson. Επίσης, από τα αποτελέσματα προκύπτει ότι τα μοντέλα που περιέχουν την IG είναι ελαφρώς καλύτερα από αυτά με την G. Αυτό ερμηνεύεται λόγω των προσομοιωμένων δεδομένων που προέρχονται από την IG. Αντίθεση υπάρχει μόνο στην περίπτωση των GLMM, όπου οι τυπικές αποκλίσεις των τυχαίων επιδράσεων είναι μεγάλες και σε αυτή την περίπτωση κάναμε την υπόθεση προβλημάτων του αλγορίθμου σύγκλισης.

5.1.3. Negative binomial-gamma

Ένα ακόμα μοντέλο που χρησιμοποιείται για προσομοιωμένα δεδομένα είναι το μοντέλο της αρνητικής διωνυμικής κατανομής με την κατανομή Γάμμα (Παράρτημα Ε, σελ. 109). Ο Πίνακας 10 και ο Πίνακας 11 παρουσιάζουν τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων.

Πίνακας 10: Negative binomial-gamma fixed effects

	Generalized linear models				*Generalized linear mixed models*			
	PG	**PIG**	**NBG**	**NBIG**	**PG_M**	**PIG_M**	**NBG_M**	**$NBIG_M$**
Bias	−2.0	−0.0	−2.1	−0.1	−2.1	−0.1	1.5	3.5
RMSE	601.9	606.4	598.0	602.5	601.4	605.8	619.9	624.2
MAE	302.5	304.4	301.1	303.0	302.3	304.2	311.1	313.0

Πίνακας 11: Negative binomial-gamma mixed effect

	Generalized linear models				*Generalized linear mixed models*			
	PG	PIG	NBG	NBIG	PG_M	PIG_M	NBG_M	$NBIG_M$
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.1$ $u^Z = 0.1$							
Bias	−3.3	−1.4	−3.4	−1.5	−3.2	−1.3	−0.7	1.1
RMSE	625.4	630.0	621.8	626.3	625.1	629.6	640.1	644.2
MAE	313.1	315.1	311.7	313.7	313.0	315.0	320.2	321.9
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.2$ $u^Z = 0.2$							
Bias	−5.8	−2.6	−5.7	−2.5	−5.6	−2.4	−2.6	0.6
RMSE	682.0	683.4	678.8	680.2	679.0	680.3	695.3	697.0
MAE	337.4	338.3	335.9	336.9	336.2	337.1	343.2	344.3
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.2$ $u^Z = 0.4$							
Bias	−10.7	−5.5	−10.4	−5.2	−64.0	−63.6	−62.6	−62.3
RMSE	955.7	958.0	946.2	948.8	911.1	903.4	916.5	909.4
MAE	463.3	464.7	459.0	460.5	444.6	443.0	447.3	446.2

Αρχικά, σε αυτά τα προσομοιωμένα δεδομένα, κοιτάζουμε τις προσομοιώσεις χωρίς τυχαίες επιδράσεις. Εκτός από το μοντέλο NBG_M και το μοντέλο $NBIG_M$, ο Πίνακας 10 δείχνει παρόμοια αποτελέσματα. Τα μοντέλα NBG_M και $NBIG_M$ δείχνουν να έχουν μεγαλύτερη διασπορά σε σχέση με τα άλλα μοντέλα. Όταν γίνεται η προσαρμογή των δεδομένων με GLMM, η συνάρτηση glmer.nb είναι λίγο πιο αργή. Αυτό ίσως και να υποδηλώνει ότι η εκτίμηση των παραμέτρων ίσως είναι μία πρόκληση και δημιουργεί μεγαλύτερη αβεβαιότητα. Σύμφωνα με τους Bolker et al. (2017), η ρουτίνα αυτή είναι κάπως αργή αν συγκριθεί με κάποιες άλλες ρουτίνες σε άλλα πακέτα. Ωστόσο, το πρόβλημα της μεγαλύτερης διασποράς φαίνεται να μην υπάρχει στην περίπτωση που η ρουτίνα χρησιμοποιηθεί για ζημιές που προέρχονται από κατανομή Poisson. Επομένως, η συνάρτηση glmer.nb υποθέτουμε ότι δεν είναι τόσο ευέλικτη για την αρνητική διωνυμική κατανομή, καθώς μιλάμε για δεδομένα με μεγαλύτερη διασπορά σε σχέση με την κατανομή Poisson.

Κάποιος ίσως αναμένει ότι το μοντέλο PIG_M θα δώσει τα χειρότερα αποτελέσματα καθώς αυτό διαφέρει πιο πολύ από το αληθινό προσομοιωμένο μοντέλο. Ωστόσο, αυτό δεν είναι αλήθεια. Αυτό που προκύπτει είναι ότι το μοντέλο $NBIG_M$ δίνει τις χειρότερες εκτιμήσεις σε αυτή τη μελέτη προσομοίωσης. Από τη στιγμή που τα NBG_M και $NBIG_M$ δίνουν μεγαλύτερες τιμές για το RMSE και MAE σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα, αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση glmer.nb ίσως και να μην είναι τόσο αξιόπιστη σε σχέση με τις υπόλοιπες συναρτήσεις που χρησιμοποιούμε στα δεδομένα μας. Το μοντέλο NBG θα έπρεπε να δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα αφού είναι και το μοντέλο από τα οποία προέρχονται τα δεδομένα. Παρόλα αυτά, δείχνει τη μικρότερη διασπορά, αλλά όχι την πιο καλή μεροληψία.

Ενσωματώνοντας τυχαίες επιδράσεις στο μοντέλο ίσες με 0.1, αυτό το οποίο παρατηρείται είναι ότι τα μοντέλα GLMM δίνουν ελαφρώς καλύτερα αποτελέσματα ιδιαίτερα όσον αφορά στη μεροληψία κατά μέσο όρο, παρόλο που οι διαφορές είναι αρκετά μικρές. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς τα δεδομένα έχουν προσομοιωθεί με τυχαίες επιδράσεις αλλά αρκετά μικρές. Εκτός από το NBG_M και $NBIG_M$ η διασπορά είναι ελαφρώς μικρότερη για τα GLMM σε σχέση με τα GLM. Η μεγάλη διασπορά των μοντέλων NBG_M και $NBIG_M$ υποθέτουμε και πάλι ότι οφείλεται στον αλγόριθμο. Το NBG_M και $NBIG_M$ δίνουν τις πιο κοντινές τιμές για το ασφάλιστρο κατά μέσο όρο αλλά ταυτόχρονα δίνουν μεγάλη διασπορά.

Για προσομοιώσεις με τυπική απόκλιση 0.2 για τις τυχαίες επιδράσεις, τα συμπεράσματα είναι παρόμοια σε σχέση με αυτά που η τιμή της τυπικής απόκλισης είναι 0.1. Συγκεκριμένα, υπάρχουν μικρές διαφορές στα αποτελέσματα στα συγκρινόμενα μοντέλα Το μοντέλο PG θα μπορούσε να επιλεγεί ως το χειρότερο μοντέλο, καθώς όλα τα μέτρα ελέγχου είναι αρκετά εκτός των αναμενόμενων τιμών. Συγκεκριμένα έχει τη χειρότερη μεροληψία κατά μέσο όρο, και η διασπορά δεν φαίνεται να διαφέρει σε σχέση με τα υπόλοιπα μοντέλα εκτός από τα μοντέλα NBG_M και $NBIG_M$. Το μοντέλο $NBIG_M$ είναι το χειρότερο μοντέλο όσον αφορά στην διασπορά αλλά αντίθετα έχει την καλύτερη μεροληψία. Άρα, ο προσδιορισμός του καλύτερου μοντέλου για ακόμα μία φορά είναι μία δύσκολη περίπτωση και εξαρτάται από το αν θα δοθεί έμφαση στη μέση τιμή ή τη διασπορά

Για την περίπτωση που οι τυπικές αποκλίσεις των τυχαίων επιδράσεων είναι 0.4, τότε είναι ξεκάθαρο ότι τα μοντέλα GLMM υποεκτιμούν το ασφάλιστρο αλλά οι εκτιμήσεις έχουν μικρότερη διασπορά σε σχέση με τα μοντέλα GLM. Η ίδια ακριβώς τάση εμφανίστηκε και στα προηγούμενα μοντέλα Poisson-Gamma και Poisson-Inverse Gaussian. Αυτό ενισχύει την υπόθεση ότι το πρόβλημα σύγκλισης είναι πρόκληση για τα GLMM όταν οι τυπικές αποκλίσεις είναι μεγάλες.

Μεγαλύτερες τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις είναι σαν να προσθέτουμε στα δεδομένα επιπλέον μεταβλητότητα. Όπως και προηγουμένως, αυτό οδηγεί στο σημείο να υπάρχουν μεγαλύτερες τιμές για τα μέτρα RMSE και MAE. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι τα μέτρα RMSE και MAE είναι υψηλότερα γενικά όταν το πλήθος των ζημιών έχει προσομοιωθεί από την αρνητική διωνυμική κατανομή. Να υπενθυμίσουμε ότι σύμφωνα με το μοντέλο της αρνητικής διωνυμικής κατανομής, η διακύμανση μπορεί να εκφραστεί ως $\mu + \tau\mu^2$ αντί του μ που περιγράφεται στην κατανομή Poisson. Στις προσομοιώσεις που έχουμε κάνει, επιλέγουμε την τιμή του τ να είναι θετική, ώστε η διακύμανση της κατανομής να είναι μεγαλύτερη σε σχέση με αυτή της κατανομής Poisson. Με αυτή τη διαδικασία καταφέρνουμε να αποβάλλουμε το βασικό αρνητικό χαρακτηριστικό που έχει η κατανομή Poisson, το οποίο είναι ότι η μέση της τιμή είναι ίδια με τη διακύμανσή της.

5.1.4. Negative binomial-inverse Gaussian

Συνδυάζοντας την αρνητική διωνυμική κατανομή για το πλήθος των ζημιών και την αντίστροφη κανονική κατανομή για το μέγεθος των ζημιών (Παράρτημα ΣΤ, σελ. 111), προκύπτουν τα αποτελέσματα που δίνει ο Πίνακας 12 και ο Πίνακας 13.

Πίνακας 12: Negative binomial- inverse Gaussian fixed effects

	Generalized linear models				*Generalized linear mixed models*			
	PG	**PIG**	**NBG**	**NBIG**	**PG_M**	**PIG_M**	**NBG_M**	**$NBIG_M$**
Bias	−1.6	−1.7	−1.5	−1.5	−1.7	−1.7	2.9	2.8
RMSE	573.5	570.2	570.6	567.1	573.0	569.6	593.7	590.2
MAE	288.7	287.4	287.6	286.2	288.6	287.3	297.9	296.5

Πίνακας 13: Negative binomial- inverse Gaussian mixed effect

	Generalized linear models				*Generalized linear mixed models*			
	PG	PIG	NBG	NBIG	PG_M	PIG_M	NBG_M	$NBIG_M$
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.1$ $u^Z = 0.1$							
Bias	−3.3	−2.8	−3.8	−3.3	−3.4	−3.0	−1.3	−0.8
RMSE	593.8	590.0	591.0	587.2	593.7	589.8	614.1	610.7
MAE	299.4	298.0	298.1	296.7	299.3	297.8	307.9	306.7
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.2$ $u^Z = 0.2$							
Bias	−9.2	−8.4	−9.4	−8.6	−9.1	−8.3	−6.2	−5.5
RMSE	661.3	657.3	657.7	653.8	658.8	654.9	674.2	670.6
MAE	329.0	327.1	327.4	325.5	328.1	326.2	334.7	332.9
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.2$ $u^Z = 0.4$							
Bias	−2.1	1.1	−1.7	1.5	−51.2	−79.6	−49.1	−77.6
RMSE	952.3	945.7	941.8	934.8	894.7	881.7	905.3	891.4
MAE	467.5	464.0	463.0	459.4	444.1	437.2	448.9	441.6

Όταν γίνεται προσομοίωση δεδομένων από την αρνητική διωνυμική κατανομή και την αντίστροφη κανονική κατανομή χωρίς τυχαίες επιδράσεις, τα αποτελέσματα δεν διαφέρουν σημαντικά για τα διαφορετικά μοντέλα. Αυτό που αξίζει εδώ να συζητηθεί είναι κυρίως τα μοντέλα NBG_M και $NBIG_M$. Ο λόγος είναι για την αβεβαιότητα των εκτιμήσεων με την συνάρτηση glmer.nb καθώς δεν δίνει τόσο αξιόπιστα αποτελέσματα. Αν εξαιρεθούν τα αποτελέσματα των μοντέλων NBG_M και $NBIG_M$, όλα τα υπόλοιπα αποτελέσματα είναι παρόμοια εκτός από τα μοντέλα PG και PG_M που είναι ελαφρώς χειρότερα. Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς τα δεδομένα προέρχονται από την αρνητική διωνυμική κατανομή. Το μοντέλο NBIG που είναι και το αληθινό μοντέλο, όντως δίνει και τα καλυτέρα αποτελέσματα. Αντίστοιχα αποτελέσματα προκύπτουν και στην περίπτωση που αυξηθεί η τυπική απόκλιση των τυχαίων επιδράσεων.

5.1.5. Γενικά συμπεράσματα προσομοίωσης

Στις ενότητες που προηγήθηκαν έγινε προσομοίωση δεδομένων χωρίς τυχαίες επιδράσεις εκτός από την τυχαία σταθερά. Αυξάνοντας την τυπική απόκλιση των τυχαίων επιδράσεων παρατηρήσαμε ότι όσο αυτή αυξάνεται τόσο μεγαλώνει και η αβεβαιότητα των εκτιμήσεων και αυτό είναι λογικό καθώς προστίθεται μεγαλύτερη αβεβαιότητα στο μοντέλο.

Γενικά, τα GLM δίνουν ελαφρώς καλύτερα αποτελέσματα από τα GLMM όταν τα δεδομένα έχουν προσομοιωθεί χωρίς τυχαίες επιδράσεις. Με τις τυπικές αποκλίσεις να είναι 0.1 για τις τυχαίες επιδράσεις, είναι δύσκολο να επιλεγεί το καλύτερο μοντέλο ανάμεσα στα GLM και GLMM. Αυξάνοντας όμως τις τυπικές αποκλίσεις στην τιμή 0.2, αυτό που παρατηρείται είναι ότι τα GLMM δίνουν καλύτερα αποτελέσματα.

Τα GLMM γενικά φαίνεται ότι υποεκτιμούν το ασφάλιστρο κατά μέσο όρο σε όλες τις περιπτώσεις με τις τυπικές αποκλίσεις να είναι 0.4. Επειδή υπάρχουν προβλήματα σύγκλισης αρκετά συχνά όταν αυξάνουμε την τυπική απόκλιση, κάνουμε την υπόθεση ότι υπάρχουν προβλήματα με τον αλγόριθμο στη σύγκλισή του. Υπενθυμίζουμε ότι ένα μοντέλο με τυχαία σταθερά εκφράζεται από τον τύπο

$$\mu = \boldsymbol{x\beta} + \gamma, \qquad \gamma \sim N(0, u^2).$$

Μία μεγάλη τιμή για τη διακύμανση u^2 σε σχέση με το $\boldsymbol{x\beta}$ μπορεί να οδηγήσει την τυχαία μεταβλητότητα να είναι μεγάλη ώστε το μοντέλο να μην μπορεί να προσαρμόσει τα δεδομένα και να εκτιμήσει τις παραμέτρους. Σε όλες τις περιπτώσεις που οι τυπικές αποκλίσεις είναι 0.4, το GLMM δίνει τη χειρότερη μεροληψία κατά μέσο όρο σε σχέση με το GLM αλλά έχει μικρότερη διασπορά. Είναι επομένως δύσκολο να αποφασιστεί ποιο μοντέλο είναι το καλύτερο καθώς υπάρχει μία διαφορετική προσέγγιση με κάθε κριτήριο.

Ένα ακόμα θέμα προς συζήτηση είναι ότι η συνάρτηση glmer.nb από το πακέτο lme4 όπως αναφέρεται και στο άρθρο των Bolker et al., (2017), είναι αρκετά αργή και δείχνει να έχει προβλήματα με τη σύγκλισή της κυρίως στην περίπτωση που το πλήθος των ζημιών ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή.

Υπάρχουν μικρές διαφορές ανάμεσα στα αποτελέσματα P και NB. Επίσης, οι διαφορές στα μοντέλα G και IG είναι εξίσου μικρές. Στην πραγματικότητα, το GLM και GLMM δίνουν σχεδόν παρόμοια αποτελέσματα. Από πρακτικής πλευράς, επιλέγοντας το λάθος μοντέλο για τα δεδομένα σημαίνει ότι δεν θα υπάρχουν και ουσιαστικά μεγάλες συνέπειες όσον αφορά στα αποτελέσματα. Τα μοντέλα GLMM είναι σαφώς πιο χρονοβόρα υπολογιστικά και απαιτούν περισσότερο χρόνο σε σχέση με τα GLM. Η μόνη περίπτωση που τα GLMM προτιμώνται σε σχέση με τα GLM είναι σύμφωνα με τα αποτελέσματα η περίπτωση του ζεύγους Poisson-Gamma όταν η τυπική απόκλιση των τυχαίων επιδράσεων είναι 0.2. Ακόμα και εκεί όμως, τα αποτελέσματα είναι παρόμοια.

Από την πλευρά της ασφαλιστικής εταιρίας, ένας καλός εκτιμητής για το ασφάλιστρο είναι σημαντικός. Για να διατηρήσει εαυτόν φερέγγυα, το ασφάλιστρο πρέπει να ικανοποιεί τις υποχρεώσεις που έχει η ασφαλιστική εταιρία για την αποζημίωση των ασφαλισμένων της. Μία μικρότερη διασπορά σημαίνει ότι υπάρχει μικρότερη αβεβαιότητα στην εκτίμηση αλλά στην πραγματικότητα εκεί η μεροληψία είναι χειρότερη και κάνει τα μοντέλα GLMM αποδεκτά σε σχέση με τα GLM.

5.2. Μοντέλο με δύο τυχαίες επιδράσεις

Σε αυτή την ενότητα θα γίνει προσομοίωση ενός νέου συνόλου δεδομένων με πολλαπλές τυχαίες επιδράσεις. Σε αυτή την περίπτωση πέραν της σταθεράς που θα επηρεάζεται από τυχαίες επιδράσεις, μία επιπλέον μεταβλητή θα επηρεάζεται από τις ανεξάρτητες μεταβλητές του μοντέλου. Πιο συγκεκριμένα, επιτρέπουμε στη σταθερά και στην ανεξάρτητη μεταβλητή X_1 να επηρεάζεται από τυχαίες επιδράσεις. Λόγω του γεγονότος ότι ο αλγόριθμος αργεί πάρα πολύ να γεννήσει αποτελέσματα, επιλέγουμε να προσομοιώσουμε δεδομένα βάσει των μοντέλων Poisson-Gamma και Poisson-Inverse Gaussian. Προφανώς αυτό που έχει το βασικό ενδιαφέρον και εδώ είναι κατά πόσο τα μοντέλα GLMM θα δώσουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τα GLM. Επίσης, προσομοιώνουμε δεδομένα ώστε να ελέγξουμε την επίδραση που έχουν τα δεδομένα με τις τυχαίες επιδράσεις στα διαφορετικά μοντέλα.

5.2.1. Poisson-Gamma

Τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων όπου το πλήθος των ζημιών ακολουθεί την κατανομή Poisson και το μέγεθος των ζημιών ακολουθεί την κατανομή Γάμμα, όταν έχουμε προσομοιώσει δεδομένα με δύο τυχαίες επιδράσεις παρουσιάζει ο Πίνακας 14 (Παράρτημα Ι, σελ. 122).

Πίνακας 14: Poisson-Gamma fixed effects

	Generalized linear models				*Generalized linear mixed models*			
	PG	**PIG**	**NBG**	**NBIG**	**PG_M**	**PIG_M**	**NBG_M**	**$NBIG_M$**
Bias	4.4	6.7	4.4	6.7	−32.0	−27.3	−32.1	−27.4
RMSE	541.7	546.6	541.7	546.6	545.4	565.6	545.4	565.5
MAE	276.2	278.3	276.3	278.3	279.9	288.0	279.9	288.0

Για τις προσομοιώσεις του μοντέλου Poisson-Gamma χωρίς τυχαίες επιδράσεις, τα μοντέλα GLM φαίνεται να δίνουν αισθητά καλύτερα αποτελέσματα από τα GLMM. Οι διαφορές στις διακυμάνσεις είναι σχετικά μικρές αλλά τα GLMM φαίνεται κι εδώ να υποεκτιμούν το πραγματικό ασφάλιστρο κατά μέσο όρο. Συγκρίνοντας τα αποτελέσματα με την προηγούμενη ενότητα, θα μπορούσαμε να πούμε ότι τα GLMM δεν δουλεύουν όσο καλά θα περιμέναμε, λαμβάνοντας υπόψη την ύπαρξη δύο ή και παραπάνω τυχαίων παραγόντων επίδρασης.

Για δεδομένα που επηρεάζονται από δύο τυχαίους παράγοντες, τα GLM δίνουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τα GLMM. Όμως όταν οι τυπικές αποκλίσεις των τυχαίων επιδράσεων αυξάνονται, τότε οι διαφορές σχετικά με τη μεροληψία ανάμεσα στα GLM και GLMM αυξάνεται. Αυτό αποδεικνύει ότι οι μεγαλύτερες τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις οδηγούν τα GLMM να λάβουν υπόψη τους τις τυχαίες επιδράσεις σε μεγαλύτερο βαθμό και συνεπώς να παράγουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τα GLM. Τα αποτελέσματα αυτά φαίνονται στον Πίνακα 15.

Πίνακας 15: Poisson-Gamma mixed effect

	Generalized linear models				Generalized linear mixed models			
	PG	PIG	NBG	NBIG	PG_M	PIG_M	NBG_M	$NBIG_M$
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.1$ $u^Z = 0.1$							
Bias	4.4	7.1	4.4	7.1	4.4	7.0	4.7	7.3
RMSE	555.6	562.1	555.5	562.0	555.3	561.8	556.1	562.7
MAE	283.5	285.9	283.4	285.9	283.4	285.8	283.8	286.2
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.2$ $u^Z = 0.2$							
Bias	0.7	3.3	0.7	3.3	0.2	2.8	0.5	3.1
RMSE	612.0	616.8	611.9	616.6	610.7	615.4	611.2	615.9
MAE	310.1	311.8	310.0	311.7	309.4	311.1	309.6	311.3
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις $u^N = 0.2$ $u^Z = 0.4$							
Bias	−4.2	1.2	−4.6	0.8	−59.6	−64.5	−59.7	−64.6
RMSE	885.7	887.3	882.8	884.1	836.0	831.1	836.1	831.1
MAE	438.4	439.6	437.2	438.3	417.5	416.7	417.6	416.8

Από την άλλη πλευρά, παρατηρούμε και εδώ τα ίδια προβλήματα που εμφανίστηκαν και στην προηγούμενη ενότητα με τον αλγόριθμο στα GLMM μοντέλα, δηλαδή παρατηρούνται και εδώ προβλήματα σύγκλισης. Μια επιπλέον παρατήρηση είναι, ότι σε αυτή την περίπτωση δημιουργούνται μεγαλύτερες τιμές για τις διακυμάνσεις σε σχέση με τα δεδομένα με μία τυχαία επίδραση. Αυτό προκύπτει από τις επιπλέον διακυμάνσεις που έχουν έχουν ενσωματωθεί στο μοντέλο. Τέλος, αυξάνοντας τις τυπικές αποκλίσεις των τυχαίων επιδράσεων, αυξάνονται και οι ολικές διακυμάνσεις.

5.2.2. Poisson-Inverse Gaussian

Με δεδομένα που γεννήθηκαν από το μοντέλο Poisson-Inverse Gaussian, τα αποτελέσματα δεν διαφέρουν πολύ σε σχέση με αυτά του μοντέλου Poisson-Gamma χωρίς τυχαίες επιδράσεις. Τα GLM παράγουν καλύτερα αποτελέσματα σε σχέση με τα GLMM και ταυτόχρονα τα GLMM υποεκτιμούν το πραγματικό ασφάλιστρο κατά μέσο όρο. Ο Πίνακας 16 παρουσιάζει αυτά τα αποτελέσματα (Παράρτημα Κ, σελ. 124).

Για δεδομένα που προσομοιώθηκαν από το μοντέλο Poisson-Inverse Gaussian με δύο τυχαίες επιδράσεις, η τάση είναι όμοια με αυτήν της περίπτωσης Poisson-Gamma. Αυτό που φαίνεται ξανά είναι ότι τα GLM εμφανίζουν καλύτερα αποτελέσματα, όταν όμως οι τυπικές αποκλίσεις αυξάνονται τότε η μεροληψία επίσης αυξάνεται. Παρατηρούνται και πάλι προβλήματα σύγκλισης του αλγορίθμου.

Πίνακας 16: Poisson- Inverse Gaussian fixed effects

	Generalized linear models				*Generalized linear mixed models*			
	PG	**PIG**	**NBG**	**NBIG**	**PG_M**	**PIG_M**	**NBG_M**	**$NBIG_M$**
Bias	3.6	3.6	3.6	3.6	−20.9	−27.9	−21.0	−28.0
RMSE	526.1	522.8	526.1	522.9	527.5	525.9	527.5	525.9
MAE	266.3	264.8	266.3	264.8	267.5	267.2	267.5	267.2

Πίνακας 17: Poisson- Inverse Gaussian mixed effect

	Generalized linear models				*Generalized linear mixed models*			
	PG	PIG	NBG	NBIG	PG_M	PIG_M	NBG_M	$NBIG_M$
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις u^N = 0.1 u^Z = 0.1							
Bias	3.1	3.8	3.1	3.8	−61.2	−62.5	−61.5	−62.8
RMSE	574.1	572.0	574.1	571.9	574.9	571.3	575.1	571.5
MAE	288.4	287.4	288.4	287.3	289.7	289.7	289.9	289.9
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις u^N = 0.2 u^Z = 0.2							
Bias	0.6	2.0	0.3	1.6	−177.3	−139.8	−179.2	−141.6
RMSE	720.7	714.3	719.3	712.8	713.4	690.7	714.5	691.4
MAE	354.1	351.2	353.5	350.5	361.7	351.0	362.2	351.4
	Τυπικές αποκλίσεις για τις τυχαίες επιδράσεις u^N = 0.2 u^Z = 0.4							
Bias	−19.8	−15.5	−20.2	−15.9	−747.9	−522.5	−750.2	−524.8
RMSE	1440.7	1400.6	1426.5	1386.2	1558.4	1324.9	1561.7	1327.4
MAE	682.7	666.3	676.9	660.4	832.4	696.5	834.1	697.8

5.3. Συμπεράσματα

Αυτό το οποίο προκύπτει σαν συμπέρασμα είναι ότι οι τυχαίες επιδράσεις από την εμπειρία που έχουμε στην πράξη, οδηγούν στο να χρησιμοποιηθούν τα μοντέλα GLMM έναντι των GLM, κάτι το οποίο όμως εδώ δεν αποδεικνύεται και έρχεται σε αντίθεση με τα αποτελέσματα των κριτηρίων αξιολόγησης του μοντέλου. Παρατηρήθηκε και στο μοντέλο δύο τυχαίων επιδράσεων, ότι τα GLM δίνουν γενικότερα καλύτερα αποτελέσματα, αλλά θα μπορούσε να πει κανείς ότι όλα αυτά οφείλονται κατά βάση στα προβλήματα σύγκλισης που δημιουργούνται. Με περισσότερους τυχαίους παράγοντες να προστίθενται στα δεδομένα, το μοντέλο θα είναι πολύπλοκο και παρόλο που όσο αυξάνονται οι τυχαίοι παράγοντες, τα GLMM θα έπρεπε να κρίνονται πιο αξιόπιστα, στην πράξη δεν θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί. Επομένως, δεν έχει νόημα να γίνουν επιπλέον προσομοιώσεις.

Παρόλο που η προσομοίωση έγινε δύσκολη στην εκτέλεση λόγω της προσθήκης των τυχαίων επιδράσεων, μας βοήθησε να οδηγηθούμε σε χρήσιμα συμπεράσματα όσον αφορά στα μοντέλα και τον βαθμό αξιοπιστίας του καθενός.

Η αξιολόγηση του μοντέλου που χρησιμοποιείται για τον καθορισμό του ασφαλίστρου, έγινε διότι συχνά η ανεπάρκεια των δεδομένων ή η χρήση "λανθασμένων" μοντέλων ενδέχεται να παρέχουν κακές προβλέψεις για μελλοντικές αξιώσεις. Αυτό με την σειρά του οδηγεί σε μεγαλύτερη έκθεση του ασφαλιστικού οργανισμού σε κίνδυνο αθέτησης των υποχρεώσεών του και κατ’ επέκταση χρεοκοπίας. Ο καθορισμός λοιπόν ενός ορθού μοντέλου εκτίμησης του ασφαλίστρου με βάση τα υπάρχοντα δεδομένα, είναι ένας εξίσου σημαντικός παράγοντας στην διαδικασία της τιμολόγησης.

Κεφάλαιο 6. Επίλογος

Η τιμολόγηση ασφαλιστικών προϊόντων γενικών ασφαλίσεων είναι μία πολύπλοκη διαδικασία του κλάδου των γενικών ασφαλίσεων. Ο αναλογιστής καλείται αρχικά να διαχειριστεί τον μεγάλο όγκο δεδομένων και να ομαδοποιήσει τους ασφαλισμένους βάσει των διαφορετικών χαρακτηριστικών κινδύνων τους. Στην συνέχεια αναλόγως του εκάστοτε είδους ασφαλιστικού προϊόντος και της ασφαλιστικής εταιρίας, ο αναλογιστής πρέπει να συνυπολογίσει τις κεφαλαιακές απαιτήσεις που έχουν οριστεί από την ευρωπαϊκή οδηγία Φερεγγυότητα ΙΙ και τον στόχο κέρδους της εταιρίας, ενώ ταυτόχρονα παράγει ένα δίκαιο και ανταγωνιστικό ασφάλιστρο. Τα παραπάνω χαρακτηριστικά, καθιστούν την τιμολόγηση ως την πιο θεμελιώδη διαδικασία στις ασφαλίσεις ζημιών.

Στην παρούσα εργασία αρχικά έγινε μία συνοπτική αναφορά στα διαφορετικά είδη γενικών ασφαλίσεων και έπειτα ορίστηκαν οι συνυφασμένες με την τιμολόγηση έννοιες, καθώς και τα μεγέθη που χρησιμοποιούνται σε αυτήν. Με αυτό τον τρόπο ο αναγνώστης μπορεί να έχει μία ολοκληρωμένη εικόνα για την διαδικασία της τιμολόγησης ασφαλίστρων γενικών ασφαλίσεων.

Η συχνότητα και η σφοδρότητα ζημιών, είναι τα μεγέθη τα οποία κρίνουν σε μεγάλο βαθμό το τελικό ασφάλιστρο. Επιπλέον, η ευρωπαϊκή οδηγία Φερεγγυότητα ΙΙ, αποτελεί πλέον αναπόσπαστο κομμάτι του αναλογιστικού τμήματος, αφού είναι αυτή που θέτει το πλαίσιο κανόνων, κάτω από το οποίο πρέπει να λειτουργεί ο οργανισμός για να εξασφαλίσει την ομαλή λειτουργία της, μακριά από την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ελλείψει πραγματικών δεδομένων λόγω προστασίας προσωπικών δεδομένων από τις ασφαλιστικές εταιρίες, δημιουργήθηκε μία προσομοίωση για παραγωγή δεδομένων, δηλαδή ένα στατιστικό μοντέλο παραγωγής δεδομένων με την χρήση γενικευμένου γραμμικού μοντέλου (GLM) και γενικευμένου γραμμικού μικτού μοντέλου (GLMM), από το οποία προέκυπταν εκτιμηθέντα μεγέθη και ύψη ζημιών, τα οποία με την σειρά τους «γεννούσαν» ένα διάνυσμα εκτιμηθέντων καθαρών ασφαλίστρων.

Στη συνέχεια τα αποτελέσματα της προσομοίωσης αξιολογήθηκαν με βάση τρία διαφορετικά κριτήρια αξιολόγησης. Ο στόχος αυτής της προσομοίωσης ήταν να κριθεί κατά πόσο η χρήση τυχαίων επιδράσεων καθιστούσε το μοντέλο περισσότερο ή λιγότερο αξιόπιστο και κατ' επέκταση το αν η χρήση παραπάνω τυχαίων επιδράσεων οδηγούσε στο (αναμενόμενο) συμπέρασμα της ανωτερότητας του GLMM όσο αυξάνονται οι επιδράσεις. Τελικά, κάτι τέτοιο δεν αποδείχτηκε, πιθανώς λόγω προβλημάτων σύγκλισης.

Η παραπάνω προσομοίωση ήταν μία ευκαιρία να δούμε τα προβλήματα που ενδεχομένως να συναντήσει ένας αναλογιστής στην διαδικασία του υπολογισμού του ασφαλίστρου. Πρακτικά, η εκτίμηση του ασφαλίστρου χωρίς πραγματικά δεδομένα είναι αδύνατη, εκτός εάν χρησιμοποιηθούν εξωτερικά δεδομένα, τα οποία ενδεχομένως να μην αντικατοπτρίζουν τα προφίλ κινδύνου που έχει θέσει η ασφαλιστική εταιρία που θα τα χρησιμοποιήσει. Επιπλέον, η χρήση περιορισμένων δεδομένων είναι εξίσου λάθος επιλογή, καθώς το δείγμα δεν θα είναι αντιπροσωπευτικό για να γίνει εκτίμηση του κόστους που συνοδεύει τον κάθε ασφαλίσιμο κίνδυνο.

Ακόμη όμως και σε περίπτωση που ο ασφαλιστικός οργανισμός έχει επαρκή εσωτερικά ιστορικά δεδομένα, η παραπάνω εργασία θίγει το ερώτημα του κατά πόσο ένα στατιστικό μοντέλο μπορεί να θεωρηθεί αξιόπιστο, χωρίς πρώτα να αξιολογηθεί το αποτέλεσμα που παράγει. Είναι λοιπόν πιθανό, μία ασφαλιστική εταιρεία να μην χρησιμοποιεί το βέλτιστο μοντέλο για τον υπολογισμού τους ύψους του ασφαλίστρου, με αποτέλεσμα να είναι εκτεθειμένη σε μεγαλύτερο κίνδυνο αθέτησης υποχρεώσεων μακροπρόθεσμα.

Παράρτημα-Κώδικας

```
#install.packages("MASS")
#install.packages("statmod")
#install.packages("lme4")
library(MASS) #for use of negbin
library(nlme) #for use of arithmetic methods and converges
library(statmod) #for use of inverse gaussian
library(lme4)
```

```
#### Παράρτημα A: model specifications ####
sim = 500 #500 simulations
years=5 #policies over 5 years
J=1000*years #1000 policies over 5 years
id=seq(1:(J/years)) #id for i=1,..,1000 policyholders
v_n = 0.2 #standard deviation for random effect in claim counts
v_z = 0.2 #standard deviation for random effect in claim sizes
tau = 0.2 #choose a tau for negbin
k_gamma=6 #choose a shape parameter k for gamma sizes
lambda_ig=8 #choose a lambda for inverse gaussian sizes
#choose beta_n for claim counts and beta_z for claim sizes
beta_n = rbind(-2.26,0.32,0.34,0.24,0.71,-0.52,0.22,-0.13,0.12,-0.13,0.49,0.61,
-0.42,-0.62,1.20,0.21)
beta_z = rbind(-2.32,0.31,-0.19,0.27,0.31,-0.22,0.43,0.23,0.28,0.26,0.23,0.31,
-0.21,0.12,0.64,0.22)
```

Παράρτημα B: function (simulate covariates)

```
cov = function() {
#covariates x9 and x11 remain the same for the policyholders each year
x0=rep(1,J)
x1=rnorm(J,1,0.2)
x2=rnorm(J,1,0.2)
x3=rnorm(J,1,0.2)
x4=rnorm(J,1,0.2)
x5=rnorm(J,1,0.2)
x6=rnorm(J,1,0.2)
x7=rnorm(J,1,0.2)
x8=rbinom(J,1,0.5)
x9=rep(rbinom(J/years,1,0.5), years) #e.g gender, same for policies over 5 years
#multinomial with 3 categorial
x10=t(rmultinom(J,1,prob=c(0.2,0.3,0.5)))[,-1]
#multinomial with 5 categorial
x11=t(rmultinom(J/years,1,prob=c(0.2,0.05,0.35,0.1,0.3)))[,-1]
x11=matrix(rep(t(x11),years),ncol=ncol(x11),byrow=TRUE)
cov16=cbind(x0,x1,x2,x3,x4,x5,x6,x7,x8,x9,x10,x11) #matrix with 16 columns
return(cov16)
}
```

Παράρτημα Γ: function 1 (poisson+gamma part 1)

```
claims_pg=function(){
#J, id, years, k_gamma from program
#exposure t_i = 1 for all policies for simplicity
cov16=cov() #draw covariates
#simulate claim counts
r = rep(rnorm(J/years,0,v_n),years) #same effect for same policy over 5 years
lambda = exp(cov16%*%beta_n + r) #mean value for claim counts with log-link
claim_counts = rpois(J,lambda) #true model for claim counts
mat = cbind(id,cov16,claim_counts) #matrix: id, covariates, claim counts
mat = data.frame(mat) #make data frame
#GLMs and GLMMs for claim counts
mod_p=glm(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=mat,family=poisson(log))
mod_pr=glmer(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id),data=mat,family=poisson(log),nAGQ=5,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
mod_nb=glm.nb(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=mat,link=log)
mod_nbr=glmer.nb(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id),data=mat,link=log,nAGQ=5,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
#simulate claim sizes
r = rep(rnorm(J/years,0,v_z),years) #same effect for same policy over 5 years
mu = exp(cov16%*%beta_z + r) #mean value for claim sizes with log-link
claim_sizes =matrix(NaN,J,max(claim_counts)) #row=J, col=max number of claims
#simulate gamma claim sizes for each policy N_ij
for(i in 1:J){
if(claim_counts[i] >0){ #when claim_counts[i] = 0, go to next loop
z_i = mu[i]*rgamma(claim_counts[i],k_gamma)/k_gamma #1 claim = 1 size
```

```
claim_sizes[i,1:length(z_i)] = z_i #insert z_i in matrix claim_sizes
}
}
claim_sizes=as.vector(t(claim_sizes)) #convert matrix to vector
claim_sizes = claim_sizes[!is.nan(claim_sizes)] #remove nan values
mat_new=mat[mat$claim_counts>0,] #remove all rows where claim numbers is zero
#insert new line for policy with more than one claim
j=1 #new variable
for (i in mat_new$claim_counts){ #i is size of claim numbers for policy i
if (i > 1){ #if test whenever claim numbers larger than one
for (a in 1:(i-1)) { #only when claim numbers larger than one
#insert new line for same policy
mat_new = rbind(mat_new[1:j,],mat_new[j,],mat_new[-(1:j),])
}
j = j+i# #plus i lines of same policy
} else{
j = j+1 #jump to next policy
}
}
mat_new$claim_counts = claim_sizes #don't need claim numbers
colnames(mat_new)[18]="claim_sizes" #change column name in mat_new
mat_new=data.frame(mat_new) #make data frame
#GLMs and GLMMs for claim sizes
mod_g=glm(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=mat
_new,family=Gamma(log))
mod_gr=glmer(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+
V17+(1|id),data=mat_new,family=Gamma(log),nAGQ=5,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",
optCtrl=list(maxfun=10e5)))
```

```
mod_ig=glm(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=ma
t_new,family=inverse.gaussian(log))
mod_igr=glmer(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id
),data=mat_new,family=inverse.gaussian(log),nAGQ=5,control=
glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
var_pr=VarCorr(mod_pr); var_nbr=VarCorr(mod_nbr)
var_gr=VarCorr(mod_gr); var_igr=VarCorr(mod_igr)
var_sim = cbind(var_pr,var_nbr,var_gr,var_igr) #estimated var. random effects
var_sim = as.numeric(var_sim) #numerical vector
#return cov, parameters, true premium, estimated variance of random effects
count_sim=c(coef(mod_p),coef(mod_nb),fixef(mod_pr),fixef(mod_nbr))
size_sim=c(coef(mod_g),coef(mod_ig),fixef(mod_gr),fixef(mod_igr))
pi_true = exp(cov16%*%beta_n+v_n^2/2)*exp(cov16%*%beta_z+v_z^2/2) #true premium
return(list(cov16=cov16,beta_sim=c(count_sim,size_sim), pi_true=pi_true,
var_sim=var_sim))
}
```

Παράρτημα Δ: function 2 (poisson+inverse gaussian part 1)

```
claims_pig=function(){
#J, id, years, lambda_ig from program
#exposure t_i = 1 for all policies for simplicity.
cov16=cov() #draw covariates
#simulate claim counts
r = rep(rnorm(J/years,0,v_n),years) #same effect for same policy over 5 years
lambda = exp(cov16%*%beta_n + r) #mean value for claim counts with log-link
claim_counts = rpois(J,lambda) #true model for claim counts
mat = cbind(id,cov16,claim_counts) #matrix: id, covariates, claim counts
```

```
mat = data.frame(mat) #make data frame
#GLMs and GLMMs for claim counts
mod_p=glm(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=mat,family=poisson(log))
mod_pr=glmer(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id),data=mat,family=poisson(log),nAGQ=5,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
mod_nb=glm.nb(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=mat,link=log)
mod_nbr=glmer.nb(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id),data=mat,link=log,nAGQ=5,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
#simulate claim sizes
r = rep(rnorm(J/years,0,v_z),years) #same effect for same policy over 5 years
mu = exp(cov16%*%beta_z + r) #mean value for claim sizes with log-link
claim_sizes =matrix(NaN,J,max(claim_counts))#row=J, col=max number of claims
#simulate inverse gaussian claim sizes for each policy N_ij
for(i in 1:J){
if(claim_counts[i] >0){ #when claim_counts[i] = 0, go to next loop
z_i = rinvgauss(claim_counts[i],mu[i],shape=lambda_ig)#1 claim = 1 size
claim_sizes[i,1:length(z_i)] = z_i #insert z_i in matrix claim_sizes
}}
claim_sizes=as.vector(t(claim_sizes)) #convert matrix to vector
claim_sizes = claim_sizes[!is.nan(claim_sizes)] #remove nan values
mat_new=mat[mat$claim_counts>0,] #remove all rows where claim numbers is zero
#insert new line for policy with more than one claim
j=1 #new variable
for (i in mat_new$claim_counts){ #i is size of claim numbers for policy i
if (i > 1){ #if test whenever claim numbers larger than one
for (a in 1:(i-1)) { #only when claim numbers larger than one
```

```
#insert new line for same policy
mat_new = rbind(mat_new[1:j,],mat_new[j,],mat_new[-(1:j),])
}j
= j+i# #plus i lines of same policy
} else{
j = j+1 #jump to next policy
}}
mat_new$claim_counts = claim_sizes #don't need claim numbers
colnames(mat_new)[18]="claim_sizes" #change column name in mat_new
mat_new=data.frame(mat_new) #make data frame
#GLMs and GLMMs for claim sizes
mod_g=glm(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=mat
_new,family=Gamma(log))
mod_gr= lmer(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+
V17+(1|id),data=mat_new,family=Gamma(log),nAGQ=5,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",
optCtrl=list(maxfun=10e5)))
mod_ig=glm(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=ma
t_new,family=inverse.gaussian(log))
mod_igr=glmer(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id
),data=mat_new,family=inverse.gaussian(log),nAGQ=5,control=
glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
var_pr=VarCorr(mod_pr); var_nbr=VarCorr(mod_nbr)
var_gr=VarCorr(mod_gr); var_igr=VarCorr(mod_igr)
var_sim = cbind(var_pr,var_nbr,var_gr,var_igr) #estimated var. random effects
var_sim = as.numeric(var_sim) #numerical vector
#return cov, parameters, true premium, estimated variance of random effects
count_sim=c(coef(mod_p),coef(mod_nb),fixef(mod_pr),fixef(mod_nbr))
size_sim=c(coef(mod_g),coef(mod_ig),fixef(mod_gr),fixef(mod_igr))
pi_true = exp(cov16%*%beta_n+v_n^2/2)*exp(cov16%*%beta_z+v_z^2/2)
```

```
#true premium
return(list(cov16=cov16,beta_sim=c(count_sim,size_sim), pi_true=pi_true,
var_sim=var_sim))
}
```

Παράρτημα Ε: function 3 (negbin+gamma+random part 1)

```
claims_nbg=function(){
#J, id, years, tau, k_gamma from program
#exposure t_i = 1 for all policies for simplicity
cov16=cov() #draw covariates
#simulate claim counts
r = rep(rnorm(J/years,0,v_n),years) #same effect for same policy over 5 years
lambda = exp(cov16%*%beta_n + r) #mean value for claim counts with log-link
claim_counts = rnegbin(J,lambda,1/tau) #true model for claim counts
mat = cbind(id,cov16,claim_counts) #matrix: id, covariates, claim counts
mat = data.frame(mat) #make data frame
#GLMs and GLMMs for claim counts
mod_p=glm(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=mat,family=poisson(log))
mod_pr=glmer(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id),data=mat,family=poisson(log),nAGQ=5,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
mod_nb=glm.nb(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=mat,link=log)
mod_nbr=glmer.nb(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id),data=mat,link=log,nAGQ=5,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
```

```
#simulate claim sizes
r = rep(rnorm(J/years,0,v_z),years) #same effect for same policy over 5 years
mu = exp(cov16%*%beta_z + r) #mean value for claim sizes with log-link
claim_sizes =matrix(NaN,J,max(claim_counts)) #row=J, col=max number of claims
#simulate gamma claim sizes for each policy N_ij
for(i in 1:J){
if(claim_counts[i] >0){ #when claim_counts[i] = 0, go to next loop
z_i = mu[i]*rgamma(claim_counts[i],k_gamma)/k_gamma #1 claim = 1 size
claim_sizes[i,1:length(z_i)] = z_i #insert z_i in matrix claim_sizes
}}
claim_sizes=as.vector(t(claim_sizes)) #convert matrix to vector
claim_sizes = claim_sizes[!is.nan(claim_sizes)] #remove nan values
mat_new=mat[mat$claim_counts>0,] #remove all rows where claim numbers is zero
#insert new line for policy with more than one claim
j=1 #new variable
for (i in mat_new$claim_counts){ #i is size of claim numbers for policy i
if (i > 1){ #if test whenever claim numbers larger than one
for (a in 1:(i-1)) { #only when claim numbers larger than one
#insert new line for same policy
mat_new = rbind(mat_new[1:j,],mat_new[j,],mat_new[-(1:j),])
}
j= j+i# #plus i lines of same policy
} else{
j = j+1 #jump to next policy
}}
mat_new$claim_counts = claim_sizes #don't need claim numbers
colnames(mat_new)[18]="claim_sizes" #change column name in mat_new
mat_new=data.frame(mat_new) #make data frame
```

```
#GLMs and GLMMs for claim sizes
mod_g=glm(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=mat
_new,family=Gamma(log))
mod_gr=glmer(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+
V17+(1|id),data=mat_new,family=Gamma(log),nAGQ=5,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",
optCtrl=list(maxfun=10e5)))
mod_ig=glm(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=ma
t_new,family=inverse.gaussian(log))
mod_igr=glmer(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id
),data=mat_new,family=inverse.gaussian(log),nAGQ=5,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",o
ptCtrl=list(maxfun=10e5)))
var_pr=VarCorr(mod_pr); var_nbr=VarCorr(mod_nbr)
var_gr=VarCorr(mod_gr); var_igr=VarCorr(mod_igr)
var_sim = cbind(var_pr,var_nbr,var_gr,var_igr) #estimated var. random effects
var_sim = as.numeric(var_sim) #numerical vector
#return cov, parameters, true premium, estimated variance of random effects
count_sim=c(coef(mod_p),coef(mod_nb),fixef(mod_pr),fixef(mod_nbr))
size_sim=c(coef(mod_g),coef(mod_ig),fixef(mod_gr),fixef(mod_igr))
pi_true = exp(cov16%*%beta_n+v_n^2/2)*exp(cov16%*%beta_z+v_z^2/2)
#true premium
return(list(cov16=cov16,beta_sim=c(count_sim,size_sim), pi_true=pi_true,
var_sim=var_sim))
}
```

Παράρτημα ΣΤ: function 4 (negbin+inverse gaussian part 1)

```
claims_nbig=function(){
#J, id, years, tau, lambda_ig from program
#exposure t_i = 1 for all policies for simplicity.
cov16=cov() #draw covariates
```

```
#simulate claim counts
r = rep(rnorm(J/years,0,v_n),years) #same effect for same policy over 5 years
lambda = exp(cov16%*%beta_n + r) #mean value for claim counts with log-links
claim_counts = rnegbin(J,lambda,1/tau) #true model for claim counts
mat = cbind(id,cov16,claim_counts) #matrix: id, covariates, claim counts
mat = data.frame(mat) #make data frame
#GLMs and GLMMs for claim counts
mod_p=glm(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,
data=mat,family=poisson(log))
mod_pr=glmer(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|i
d),data=mat,family=poisson(log),nAGQ=5,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(
maxfun=10e5)))
mod_nb=glm.nb(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,dat
a=mat,link=log)
mod_nbr=glmer.nb(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17
+(1|id),data=mat,link=log,nAGQ=5,control=glmerControl(
optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
#simulate claim sizes
r = rep(rnorm(J/years,0,v_z),years) #same effect for same policy over 5 years
mu = exp(cov16%*%beta_z + r) #mean value for claim sizes with log-link
claim_sizes =matrix(NaN,J,max(claim_counts)) #row=J, col=max number of claims
#simulate inverse gaussian claim sizes for each policy N_ij
for(i in 1:J){
if(claim_counts[i] >0){ #when claim_counts[i] = 0, go to next loop
z_i = rinvgauss(claim_counts[i],mu[i],shape=lambda_ig)#1 claim = 1 size
claim_sizes[i,1:length(z_i)] = z_i #insert z_i in matrix claim_sizes
}}
claim_sizes=as.vector(t(claim_sizes)) #convert matrix to vector
claim_sizes = claim_sizes[!is.nan(claim_sizes)] #remove nan values
mat_new=mat[mat$claim_counts>0,] #remove all rows where claim counts is zero
```

```
#insert new line for policy with more than one claim
j=1 #new variable
for (i in mat_new$claim_counts){ #i is size of claim counts for policy i
if (i > 1){ #if test whenever claim counts larger than one
for (a in 1:(i-1)) { #only when claim counts larger than one
#insert new line for same policy
mat_new = rbind(mat_new[1:j,],mat_new[j,],mat_new[-(1:j),])
}
j= j+i# #plus i lines of same policy
} else{
j = j+1 #jump to next policy
}}
mat_new$claim_counts = claim_sizes #don't need claim numbers
colnames(mat_new)[18]="claim_sizes" #change column name in mat_new
mat_new=data.frame(mat_new) #make data frame
#GLMs and GLMMs for claim sizes
mod_g = glm(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,
data=mat_new,family=Gamma(log))
mod_gr=glmer(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id)
,data=mat_new,family=Gamma(log),nAGQ=5,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=lis
t(maxfun=10e5)))
mod_ig=glm(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=ma
t_new,family=inverse.gaussian(log))
mod_igr=glmer(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id
),data=mat_new,family=inverse.gaussian(log),nAGQ=5,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",o
ptCtrl=list(maxfun=10e5)))

var_pr=VarCorr(mod_pr); var_nbr=VarCorr(mod_nbr)
var_gr=VarCorr(mod_gr); var_igr=VarCorr(mod_igr)
var_sim = cbind(var_pr,var_nbr,var_gr,var_igr) #estimated var. random effects
```

```
var_sim = as.numeric(var_sim) #numerical vector
#return cov, parameters, true premium, estimated variance of random effects
count_sim=c(coef(mod_p),coef(mod_nb),fixef(mod_pr),fixef(mod_nbr))
size_sim=c(coef(mod_g),coef(mod_ig),fixef(mod_gr),fixef(mod_igr))
pi_true = exp(cov16%*%beta_n+v_n^2/2)*exp(cov16%*%beta_z+v_z^2/2) #true premium
return(list(cov16=cov16,beta_sim=c(count_sim,size_sim), pi_true=pi_true,
var_sim=var_sim))
}
```

Παράρτημα Ζ: function (premium part 1)

```
premium = function(cov16,beta_sim,pi_true,var_r.e){
beta_hat_p = beta_sim[,1:16] #row 1, col 1:16
beta_hat_nb = beta_sim[,17:32] #row 2, col 17:32
beta_hat_pr = beta_sim[,33:48]
beta_hat_nbr = beta_sim[,49:64]
beta_hat_g = beta_sim[,65:80]
beta_hat_ig = beta_sim[,81:96]
beta_hat_gr = beta_sim[,97:112]
beta_hat_igr = beta_sim[,113:128]
lambda_hat_p=lambda_hat_nb=lambda_hat_pr=lambda_hat_nbr = matrix(NaN,J,sim)
mu_hat_g=mu_hat_ig=mu_hat_gr=mu_hat_igr = matrix(NaN,J,sim)
var_r.e_pr=var_r.e[,1]; var_r.e_nbr=var_r.e[,2]
var_r.e_gr=var_r.e[,3]; var_r.e_igr=var_r.e[,4]
#Expected premium for GLMs and GLMMs
j=1
for (i in 1:sim){
mat=cov16[j:(i*J),]
```

```
lambda_hat_p[,i] = exp(mat%*%beta_hat_p[i,]) #dim(row=J, col=sim)
lambda_hat_nb[,i] = exp(mat%*%beta_hat_nb[i,])
lambda_hat_pr[,i] = exp(mat%*%beta_hat_pr[i,] + (var_r.e_pr[i]/2) )
lambda_hat_nbr[,i] = exp(mat%*%beta_hat_nbr[i,] + (var_r.e_nbr[i]/2) )
mu_hat_g[,i] = exp(mat%*%beta_hat_g[i,])
mu_hat_ig[,i] = exp(mat%*%beta_hat_ig[i,])
mu_hat_gr[,i] = exp(mat%*%beta_hat_gr[i,] + (var_r.e_gr[i]/2) )
mu_hat_igr[,i] = exp(mat%*%beta_hat_igr[i,] + (var_r.e_igr[i]/2) )
j = j+J
}
#bias
diff_pi_pg= colMeans(lambda_hat_p*mu_hat_g - pi_true)
diff_pi_pig= colMeans(lambda_hat_p*mu_hat_ig - pi_true)
diff_pi_nbg= colMeans(lambda_hat_nb*mu_hat_g - pi_true)
diff_pi_nbig= colMeans(lambda_hat_nb*mu_hat_ig - pi_true)
diff_pi_pgr= colMeans(lambda_hat_pr*mu_hat_gr - pi_true)
diff_pi_pigr= colMeans(lambda_hat_pr*mu_hat_igr - pi_true)
diff_pi_nbgr= colMeans(lambda_hat_nbr*mu_hat_gr - pi_true)
diff_pi_nbigr= colMeans(lambda_hat_nbr*mu_hat_igr - pi_true)
#root-mean-squared error
rmse_pi_pg= sqrt(colMeans((lambda_hat_p*mu_hat_g - pi_true)^2 ))
rmse_pi_pig= sqrt(colMeans((lambda_hat_p*mu_hat_ig - pi_true)^2))
rmse_pi_nbg= sqrt(colMeans((lambda_hat_nb*mu_hat_g - pi_true)^2))
rmse_pi_nbig= sqrt(colMeans((lambda_hat_nb*mu_hat_ig - pi_true)^2))
rmse_pi_pgr= sqrt(colMeans((lambda_hat_pr*mu_hat_gr - pi_true)^2))
rmse_pi_pigr= sqrt(colMeans((lambda_hat_pr*mu_hat_igr - pi_true)^2))
rmse_pi_nbgr= sqrt(colMeans((lambda_hat_nbr*mu_hat_gr - pi_true)^2))
rmse_pi_nbigr= sqrt(colMeans((lambda_hat_nbr*mu_hat_igr - pi_true)^2))
#mean absolute error
```

```
mae_pi_pg= colMeans(abs(lambda_hat_p*mu_hat_g - pi_true))
mae_pi_pig= colMeans(abs(lambda_hat_p*mu_hat_ig - pi_true))
mae_pi_nbg= colMeans(abs(lambda_hat_nb*mu_hat_g - pi_true))
mae_pi_nbig= colMeans(abs(lambda_hat_nb*mu_hat_ig - pi_true))
mae_pi_pgr= colMeans(abs(lambda_hat_pr*mu_hat_gr - pi_true))
mae_pi_pigr= colMeans(abs(lambda_hat_pr*mu_hat_igr - pi_true))
mae_pi_nbgr= colMeans(abs(lambda_hat_nbr*mu_hat_gr - pi_true))
mae_pi_nbigr= colMeans(abs(lambda_hat_nbr*mu_hat_igr - pi_true))
diff = cbind(diff_pi_pg, diff_pi_pig, diff_pi_nbg, diff_pi_nbig,
diff_pi_pgr, diff_pi_pigr, diff_pi_nbgr, diff_pi_nbigr)
rmse = cbind(rmse_pi_pg, rmse_pi_pig, rmse_pi_nbg, rmse_pi_nbig,
rmse_pi_pgr, rmse_pi_pigr, rmse_pi_nbgr, rmse_pi_nbigr)
mae = cbind(mae_pi_pg, mae_pi_pig, mae_pi_nbg, mae_pi_nbig,
mae_pi_pgr, mae_pi_pigr, mae_pi_nbgr, mae_pi_nbigr)
return(list(diff=diff,rmse=rmse,mae=mae))
}
```

Παράρτημα Η: function (write to file part 1)

```
write_to_file = function(){
sink('output.txt', append=TRUE, split=TRUE)
cat("=============================\n")
cat(sprintf("v_n = %0.1f and v_z = %0.1f \n", v_n, v_z) )
cat("=============================\n")
cat("pg diff",pg_mean_diff,"\n")
cat("pg rmse",pg_mean_rmse,"\n")
cat("pg mae ",pg_mean_mae, "\n")
cat("pg std ",pg_mean_std, "\n")
```

```
cat("\n")
cat("pig diff",pig_mean_diff,"\n")
cat("pig rmse",pig_mean_rmse,"\n")
cat("pig mae ",pig_mean_mae, "\n")
cat("pig std ",pig_mean_std, "\n")
cat("\n")
cat("nbg diff",nbg_mean_diff,"\n")
cat("nbg rmse",nbg_mean_rmse,"\n")
cat("nbg mae ",nbg_mean_mae, "\n")
cat("nbg std ",nbg_mean_std, "\n")
cat("\n")
cat("nbig diff",nbig_mean_diff,"\n")
cat("nbig rmse",nbig_mean_rmse,"\n")
cat("nbig mae ",nbig_mean_mae, "\n")
cat("nbig std ",nbig_mean_std, "\n")
cat("\n")
cat("\n")
sink()
}
```

Παράρτημα Θ: (main program part 1)

```
#---------------------------------------------------------------1
beta_pg = matrix(NaN,sim,(8*16)) #estimates of beta: 8 models*16 beta
cov_pg = matrix(NaN,sim*J,16) #covariates from different simulations
pi_true_pg = matrix(NaN,J,sim) #pure premium vector
variance_pg = matrix(NaN,sim,4) #est. var. from GLMMs, need for premium
j=1
```

```
error_pg = 0
for(i in 1:sim){
repeat{ #repeat simulation if error occured
func=try(claims_pg(), silent = TRUE)
if(is.character(func)){ #if error occured, "error in func="character")
error_pg = error_pg + 1 #counting number of error occured
print("error occured")
}else{ # when func returned a list (no error occured)
print(i)
beta_pg[i,] = func$beta_sim
cov_pg[j:(i*J),] = func$cov16
pi_true_pg[,i] = func$pi_true
variance_pg[i,] = func$var_sim
j=j+J
break #break the repeat
}
}
}
prem_pg = premium(cov_pg,beta_pg,pi_true_pg,variance_pg)
pg_mean_diff = colMeans(prem_pg$diff)*1e4
pg_mean_rmse = colMeans(prem_pg$rmse)*1e4
pg_mean_mae = colMeans(prem_pg$mae) *1e4
pg_mean_std = colMeans(sqrt(variance_pg))
#------------------------------------------------------------------2
beta_pig = matrix(NaN,sim,(8*16)) #estimates of beta: 8 models*16 beta
cov_pig = matrix(NaN,sim*J,16) #covariates from different simulations
pi_true_pig = matrix(NaN,J,sim) #pure premium vector
variance_pig = matrix(NaN,sim,4) #est. var. from GLMMs, need for premium
j=1
```

```
error_pig = 0

for(i in 1:sim){

repeat{ #repeat simulation if error occured

func=try(claims_pig(), silent = TRUE)

if(is.character(func)){ #if error occured, "error in func="character")

error_pig = error_pig + 1 #counting number of error occured

print("error occured")

}else{ # when func returned a list (no error occured)

print(i)

beta_pig[i,] = func$beta_sim

cov_pig[j:(i*J),] = func$cov16

pi_true_pig[,i] = func$pi_true

variance_pig[i,] = func$var_sim

j=j+J

break #break the repeat

}

}

}

prem_pig = premium(cov_pig,beta_pig,pi_true_pig,variance_pig)

pig_mean_diff = colMeans(prem_pig$diff)*1e4

pig_mean_rmse = colMeans(prem_pig$rmse)*1e4

pig_mean_mae = colMeans(prem_pig$mae) *1e4


pig_mean_std = colMeans(sqrt(variance_pig))

#----------------------------------------------------------------3

beta_nbg = matrix(NaN,sim,(8*16)) #estimates of beta: 8 models*16 beta

cov_nbg = matrix(NaN,sim*J,16) #covariates from different simulations

pi_true_nbg = matrix(NaN,J,sim) #pure premium vector

variance_nbg = matrix(NaN,sim,4) #est. var. from GLMMs, need for premium
```

```
j=1
error_nbg = 0
for(i in 1:sim){
repeat{ #repeat simulation if error occured
func=try(claims_nbg(), silent = TRUE)
if(is.character(func)){ #if error occured, "error in func="character")
error_nbg = error_nbg + 1 #counting number of error occured
print("error occured")
}else{ # when func returned a list (no error occured)
print(i)
beta_nbg[i,] = func$beta_sim
cov_nbg[j:(i*J),] = func$cov16
pi_true_nbg[,i] = func$pi_true
variance_nbg[i,] = func$var_sim
j=j+J
break #break the repeat
}
}
}
prem_nbg = premium(cov_nbg,beta_nbg,pi_true_nbg,variance_nbg)
nbg_mean_diff = colMeans(prem_nbg$diff)*1e4
nbg_mean_rmse = colMeans(prem_nbg$rmse)*1e4
nbg_mean_mae = colMeans(prem_nbg$mae) *1e4
nbg_mean_std = colMeans(sqrt(variance_nbg))
#---------------------------------------------------------------4
beta_nbig = matrix(NaN,sim,(8*16)) #estimates of beta: 8 models*16 beta
cov_nbig = matrix(NaN,sim*J,16) #covariates from different simulations
pi_true_nbig = matrix(NaN,J,sim) #pure premium vector
variance_nbig = matrix(NaN,sim,4) #est. var. from GLMMs, need for premium
```

```
j=1
error_nbig = 0
for(i in 1:sim){
repeat{ #repeat simulation if error occured
func=try(claims_nbig(), silent = TRUE)
if(is.character(func)){ #if error occured, "error in func="character")
error_nbig = error_nbig + 1 #counting number of error occured
print("error occured")
}else{ # when func returned a list (no error occured)
print(i)
beta_nbig[i,] = func$beta_sim
cov_nbig[j:(i*J),] = func$cov16
pi_true_nbig[,i] = func$pi_true
variance_nbig[i,] = func$var_sim
j=j+J
break #break the repeat
}
}
}
prem_nbig = premium(cov_nbig,beta_nbig,pi_true_nbig,variance_nbig)
nbig_mean_diff = colMeans(prem_nbig$diff)*1e4
nbig_mean_rmse = colMeans(prem_nbig$rmse)*1e4
nbig_mean_mae = colMeans(prem_nbig$mae) *1e4
nbig_mean_std = colMeans(sqrt(variance_nbig))
write_to_file()

# uncorrelated random effects: (x1+x2||id) = (1|id)+(0+x1|id)+(0+x2|id)
```

Παράρτημα I: function 1 (poisson+gamma part 2)

```
claims_pg=function(){
#J, id, years, k_gamma from program
#exposure t_i = 1 for all policies for simplicity
cov16=cov() #draw covariates
r0 = rep(rnorm(J/years,0,v_n),years) #first random effect for counts
r1 = rep(rnorm(J/years,0,v_n),years) #second random effect for counts
#covariates Z = (z0,z1) = (x0,x1) Z is a subset of X
z0 = cov16[,1]
z1 = cov16[,2]
lambda = exp(cov16%*%beta_n + z0*r0 + z1*r1 ) #mean value for claim counts
claim_counts = rpois(J,lambda) #true model for claim counts
mat = data.frame(cbind(id,cov16,claim_counts)) #matrix: id, cov, claim counts
#GLMs and GLMMs for claim counts
mod_p=glm(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=mat,family=poisson(log))
mod_pr=glmer(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id)+(0+x1|id),data=mat,family=poisson(log),control=glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
mod_nb=glm.nb(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=mat,link=log)
mod_nbr=glmer.nb(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id)+(0+x1|id),data=mat,link=log,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
r0 = rep(rnorm(J/years,0,v_z),years)
r1 = rep(rnorm(J/years,0,v_z),years)
mu = exp(cov16%*%beta_z + z0*r0 + z1*r1 ) #mean value for claim sizes
claim_sizes =matrix(NaN,J,max(claim_counts)) #row=J, col=max number of claims
#simulate gamma claim sizes for each policy N_ij
```

```
for(i in 1:J){
if(claim_counts[i] >0){ #when claim_counts[i] = 0, go to next loop
z_i = mu[i]*rgamma(claim_counts[i],k_gamma)/k_gamma
claim_sizes[i,1:length(z_i)] = z_i #insert z_i in matrix
}}
claim_sizes=as.vector(t(claim_sizes)) #convert matrix to vector
claim_sizes = claim_sizes[!is.nan(claim_sizes)]
mat_new=mat[mat$claim_counts>0,] #remove all rows where claim numbers is zero
#insert new line for policy with more than one claim
j=1 #new variable
for (i in mat_new$claim_counts){ #i is size of claim numbers for policy i
if (i > 1){ #if test whenever claim numbers larger than one
for (a in 1:(i-1)) { #only when claim numbers larger than one
mat_new = rbind(mat_new[1:j,],mat_new[j,],mat_new[-(1:j),])
}j
= j+i# #plus i lines of same policy
} else{
j = j+1 #jump to next policy
}}
mat_new$claim_counts = claim_sizes
colnames(mat_new)[18]="claim_sizes"
mat_new=data.frame(mat_new)
#GLMs and GLMMs for claim sizes
mod_g=glm(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,
data=mat_new,family=Gamma(log))
mod_gr=glmer(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+
V17+(1|id)+(0+x1|id),data=mat_new,family=Gamma(log),control=glmerControl(optimizer="bobyq
a",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
```

```
mod_ig=glm(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=ma
t_new,family=inverse.gaussian(log))
mod_igr=glmer(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id
)+(0+x1|id),data=mat_new,family=inverse.gaussian(log),control=glmerControl(optimizer="bobyqa
",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
v_pr = c( VarCorr(mod_pr)[1], VarCorr(mod_pr)[2])
v_nbr= c( VarCorr(mod_nbr)[1],VarCorr(mod_nbr)[2])
v_gr = c( VarCorr(mod_gr)[1], VarCorr(mod_gr)[2])
v_igr= c( VarCorr(mod_igr)[1],VarCorr(mod_igr)[2] )
var_sim = cbind(v_pr,v_nbr,v_gr,v_igr)
var_sim = as.numeric(var_sim) #make the list to be a numeric vector
#return estimate,true premium and variance of the random effects
count_sim=c(coef(mod_p),coef(mod_nb),fixef(mod_pr),fixef(mod_nbr))
size_sim=c(coef(mod_g),coef(mod_ig),fixef(mod_gr),fixef(mod_igr))
lambda_true = exp( cov16%*%beta_n + (z0^2*v_n^2/2) + (z1^2*v_n^2/2) )
mu_true = exp( cov16%*%beta_z + (z0^2*v_z^2/2) + (z1^2*v_z^2/2) )
pi_true = lambda_true*mu_true #true pure premium
return(list(cov16=cov16,beta_sim=c(count_sim,size_sim),pi_true=pi_true,
var_sim=var_sim))
}
```

Παράρτημα Κ: function 2 (poisson+inverse gaussian part 2)

```
claims_pig=function(){
#J, id, years, k_gamma from program
#exposure t_i = 1 for all policies for simplicity
cov16=cov()
r0 = rep(rnorm(J/years,0,v_n),years)
```

```
r1 = rep(rnorm(J/years,0,v_n),years)
#covariates Z = (z0,z1) = (x0,x1) Z is a subset of X
z0 = cov16[,1]
z1 = cov16[,2]
lambda = exp(cov16%*%beta_n + z0*r0 + z1*r1 ) #mean value for claim counts
claim_counts = rpois(J,lambda) #true model for claim counts
mat = data.frame(cbind(id,cov16,claim_counts))
#GLMs and GLMMs for claim counts
mod_p=glm(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=m
at,family=poisson(log))
mod_pr=glmer(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|i
d)+(0+x1|id),data=mat,family=poisson(log),control=glmerControl(
optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
mod_nb=glm.nb(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,dat
a=mat,link=log)
mod_nbr=glmer.nb(claim_counts~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17
+(1|id)+(0+x1|id),data=mat,link=log,control=glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfu
n=10e5)))
r0 = rep(rnorm(J/years,0,v_z),years)
r1 = rep(rnorm(J/years,0,v_z),years)
mu = exp(cov16%*%beta_z + z0*r0 + z1*r1 ) #mean value for claim sizes
claim_sizes =matrix(NaN,J,max(claim_counts))
#simulate gamma claim sizes for each policy N_ij
for(i in 1:J){
if(claim_counts[i] >0){ #when claim_counts[i] = 0, go to next loop
z_i = rinvgauss(claim_counts[i],mu[i],shape=lambda_ig)
claim_sizes[i,1:length(z_i)] = z_i #insert z_i in matrix
}}
claim_sizes=as.vector(t(claim_sizes)) #convert matrix to vector
claim_sizes = claim_sizes[!is.nan(claim_sizes)]
```

```
mat_new=mat[mat$claim_counts>0,] #remove all rows where claim numbers is zero
#insert new line for policy with more than one claim
j=1 #new variable
for (i in mat_new$claim_counts){ #i is size of claim numbers for policy i
if (i > 1){ #if test whenever claim numbers larger than one
for (a in 1:(i-1)) { #only when claim numbers larger than one
mat_new = rbind(mat_new[1:j,],mat_new[j,],mat_new[-(1:j),])
}
j= j+i# #plus i lines of same policy
} else{
j = j+1 #jump to next policy
}}
mat_new$claim_counts = claim_sizes
colnames(mat_new)[18]="claim_sizes"
mat_new=data.frame(mat_new)
#GLMs and GLMMs for claim sizes
mod_g=glm(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=mat_new,family=Gamma(log))
mod_gr=glmer(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+
V17+(1|id)+(0+x1|id),data=mat_new,family=Gamma(log),control=glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
mod_ig=glm(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17,data=mat_new,family=inverse.gaussian(log))
mod_igr=glmer(claim_sizes~x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+V12+V13+V14+V15+V16+V17+(1|id)+(0+x1|id),data=mat_new,family=inverse.gaussian(log),control=glmerControl(optimizer="bobyqa",optCtrl=list(maxfun=10e5)))
v_pr = c( VarCorr(mod_pr)[1], VarCorr(mod_pr)[2])
v_nbr= c( VarCorr(mod_nbr)[1],VarCorr(mod_nbr)[2])
v_gr = c( VarCorr(mod_gr)[1], VarCorr(mod_gr)[2])
v_igr= c( VarCorr(mod_igr)[1],VarCorr(mod_igr)[2])
```

```
var_sim = cbind(v_pr,v_nbr,v_gr,v_igr)
var_sim = as.numeric(var_sim)
#return estimate,true premium and variance of the random effects
count_sim=c(coef(mod_p),coef(mod_nb),fixef(mod_pr),fixef(mod_nbr))
size_sim=c(coef(mod_g),coef(mod_ig),fixef(mod_gr),fixef(mod_igr))
lambda_true = exp( cov16%*%beta_n + (z0^2*v_n^2/2) + (z1^2*v_n^2/2) )
mu_true = exp( cov16%*%beta_z + (z0^2*v_z^2/2) + (z1^2*v_z^2/2) )
pi_true = lambda_true*mu_true #true pure premium
return(list(cov16=cov16,beta_sim=c(count_sim,size_sim),pi_true=pi_true,
var_sim=var_sim)) }
```

Παράρτημα Λ: function (premium part 2)

```
premium = function(cov16,beta_sim,pi_true,var_r.e){
beta_hat_p = beta_sim[,1:16] #row 1, col 1:16
beta_hat_nb = beta_sim[,17:32] #row 2, col 17:32
beta_hat_pr = beta_sim[,33:48]
beta_hat_nbr = beta_sim[,49:64]
beta_hat_g = beta_sim[,65:80]
beta_hat_ig = beta_sim[,81:96]
beta_hat_gr = beta_sim[,97:112]
beta_hat_igr = beta_sim[,113:128]
lambda_hat_p=lambda_hat_nb=lambda_hat_pr=lambda_hat_nbr=matrix(NaN,J,sim)
mu_hat_g = mu_hat_ig = mu_hat_gr = mu_hat_igr = matrix(NaN,J,sim)
var_r.e_pr = cbind(var_r.e[,1], var_r.e[,2]);
var_r.e_nbr = cbind(var_r.e[,3], var_r.e[,4]);
var_r.e_gr = cbind(var_r.e[,5], var_r.e[,6]);
var_r.e_igr = cbind(var_r.e[,7], var_r.e[,8]);
```

```
#Expected premium for GLMs and GLMMs
j=1; i = 1
for (i in 1:sim){
mat=cov16[j:(i*J),]
z0 = mat[,1]
z1 = mat[,2]
lambda_hat_p[,i] = exp(mat%*%beta_hat_p[i,]) #dim(row=J, col=sim)
lambda_hat_nb[,i] = exp(mat%*%beta_hat_nb[i,])
lambda_hat_pr[,i] = exp(mat%*%beta_hat_pr[i,] + (z0^2*var_r.e_pr[i,1]/2) +
(z1^2*var_r.e_pr[i,2]/2) )
lambda_hat_nbr[,i]= exp(mat%*%beta_hat_nbr[i,] + (z0^2*var_r.e_nbr[i,1]/2) +
(z1^2*var_r.e_nbr[i,2]/2) )
mu_hat_g[,i] = exp(mat%*%beta_hat_g[i,])
mu_hat_ig[,i] = exp(mat%*%beta_hat_ig[i,])
mu_hat_gr[,i] = exp(mat%*%beta_hat_gr[i,] + (z0^2*var_r.e_gr[i,1]/2) +
(z1^2*var_r.e_gr[i,2]/2) )
mu_hat_igr[,i] = exp(mat%*%beta_hat_igr[i,] + (z0^2*var_r.e_igr[i,1]/2) +
(z1^2*var_r.e_igr[i,2]/2) )
j = j+J
}
#bias
diff_pi_pg= colMeans(lambda_hat_p*mu_hat_g - pi_true)
diff_pi_pig= colMeans(lambda_hat_p*mu_hat_ig - pi_true)
diff_pi_nbg= colMeans(lambda_hat_nb*mu_hat_g - pi_true)
diff_pi_nbig= colMeans(lambda_hat_nb*mu_hat_ig - pi_true)
diff_pi_pgr= colMeans(lambda_hat_pr*mu_hat_gr - pi_true)
diff_pi_pigr= colMeans(lambda_hat_pr*mu_hat_igr - pi_true)
diff_pi_nbgr= colMeans(lambda_hat_nbr*mu_hat_gr - pi_true)
diff_pi_nbigr= colMeans(lambda_hat_nbr*mu_hat_igr - pi_true)
```

```
#root-mean-squared error
rmse_pi_pg= sqrt(colMeans((lambda_hat_p*mu_hat_g - pi_true)^2 ))
rmse_pi_pig= sqrt(colMeans((lambda_hat_p*mu_hat_ig - pi_true)^2))
rmse_pi_nbg= sqrt(colMeans((lambda_hat_nb*mu_hat_g - pi_true)^2))
rmse_pi_nbig= sqrt(colMeans((lambda_hat_nb*mu_hat_ig - pi_true)^2))
rmse_pi_pgr= sqrt(colMeans((lambda_hat_pr*mu_hat_gr - pi_true)^2))
rmse_pi_pigr= sqrt(colMeans((lambda_hat_pr*mu_hat_igr - pi_true)^2))
rmse_pi_nbgr= sqrt(colMeans((lambda_hat_nbr*mu_hat_gr - pi_true)^2))
rmse_pi_nbigr= sqrt(colMeans((lambda_hat_nbr*mu_hat_igr - pi_true)^2))
#mean absolute error
mae_pi_pg= colMeans(abs(lambda_hat_p*mu_hat_g - pi_true))
mae_pi_pig= colMeans(abs(lambda_hat_p*mu_hat_ig - pi_true))
mae_pi_nbg= colMeans(abs(lambda_hat_nb*mu_hat_g - pi_true))
mae_pi_nbig= colMeans(abs(lambda_hat_nb*mu_hat_ig - pi_true))
mae_pi_pgr= colMeans(abs(lambda_hat_pr*mu_hat_gr - pi_true))
mae_pi_pigr= colMeans(abs(lambda_hat_pr*mu_hat_igr - pi_true))
mae_pi_nbgr= colMeans(abs(lambda_hat_nbr*mu_hat_gr - pi_true))
mae_pi_nbigr= colMeans(abs(lambda_hat_nbr*mu_hat_igr - pi_true))
diff = cbind(diff_pi_pg, diff_pi_pig, diff_pi_nbg, diff_pi_nbig,
diff_pi_pgr, diff_pi_pigr, diff_pi_nbgr, diff_pi_nbigr)
rmse = cbind(rmse_pi_pg, rmse_pi_pig, rmse_pi_nbg, rmse_pi_nbig,
rmse_pi_pgr, rmse_pi_pigr, rmse_pi_nbgr, rmse_pi_nbigr)
mae = cbind(mae_pi_pg, mae_pi_pig, mae_pi_nbg, mae_pi_nbig,
mae_pi_pgr, mae_pi_pigr, mae_pi_nbgr, mae_pi_nbigr)
return(list(diff=diff,rmse=rmse,mae=mae))
}
```

Παράρτημα M: function (write to file part 2)

```
write_to_file = function(){
sink('output_part2.txt', append=TRUE, split=TRUE)
cat("==============================\n")
cat(sprintf("kode del 2: v_n = %0.1f and v_z = %0.1f \n", v_n, v_z) )
cat("==============================\n")
cat("pg diff",pg_mean_diff,"\n")
cat("pg rmse",pg_mean_rmse,"\n")
cat("pg mae ",pg_mean_mae, "\n")
cat("pg std ",pg_mean_std, "\n")
cat("\n")
cat("pig diff",pig_mean_diff,"\n")
cat("pig rmse",pig_mean_rmse,"\n")
cat("pig mae ",pig_mean_mae, "\n")
cat("pig std ",pig_mean_std, "\n")
sink()
}
```

Παράρτημα N: main program part 2

```
#------------------------------------------------------------1
beta_pg = matrix(NaN,sim,(8*16))
cov_pg = matrix(NaN,sim*J,16)
pi_true_pg = matrix(NaN,J,sim)
variance_pg = matrix(NaN,sim,2*4)
j=1
error_pg = 0
for(i in 1:sim){
```

```
repeat{ #repeat simulation if error occured
func=try(claims_pg(), silent = TRUE)
if(is.character(func)){ #if error occured, "error in func = "character")
error_pg = error_pg + 1 #counting number of error occured
print("error occured")
}else{ # when func returned a list (no error occured)
print(i)
beta_pg[i,] = func$beta_sim
cov_pg[j:(i*J),] = func$cov16
pi_true_pg[,i] = func$pi_true
variance_pg[i,] = func$var_sim
j=j+J
break #break the repeat
}}}
prem_pg = premium(cov_pg,beta_pg,pi_true_pg,variance_pg)
pg_mean_diff = colMeans(prem_pg$diff)*1e4
pg_mean_rmse = colMeans(prem_pg$rmse)*1e4
pg_mean_mae = colMeans(prem_pg$mae) *1e4
pg_mean_std = colMeans(sqrt(variance_pg))
#-----------------------------------------------------------------2
beta_pig = matrix(NaN,sim,(8*16))
cov_pig = matrix(NaN,sim*J,16)
pi_true_pig = matrix(NaN,J,sim)
variance_pig = matrix(NaN,sim,2*4)
j=1
error_pig = 0
for(i in 1:sim){
repeat{ #repeat simulation if error occured
func=try(claims_pig(), silent = TRUE)
```

```
if(is.character(func)){ #if error occured, "error in func = "character")
error_pig = error_pig + 1 #counting number of error occured
print("error occured")
}else{ # when func returned a list (no error occured)
print(i)
beta_pig[i,] = func$beta_sim
cov_pig[j:(i*J),] = func$cov16
pi_true_pig[,i] = func$pi_true
variance_pig[i,] = func$var_sim
j=j+J
break #break the repeat
}}}
prem_pig = premium(cov_pig,beta_pig,pi_true_pig,variance_pig)
pig_mean_diff = colMeans(prem_pig$diff)*1e4
pig_mean_rmse = colMeans(prem_pig$rmse)*1e4
pig_mean_mae = colMeans(prem_pig$mae) *1e4
pig_mean_std = colMeans(sqrt(variance_pig))
write_to_file()
```

Βιβλιογραφία

Ξένη Βιβλιογραφία

Agresti, A. (2015). Foundations of linear and generalized linear models. John Wiley & Sons.

Anderson, P. (1999). The Mariner's Guide to Marine Insurance.

AXA insurance online (2020). Retrieved from: https://www.axa.gr/.

Bates, D., Mächler, M., Bolker, B., and Walker, S. (2015). Fitting linear mixed-effects models using lme4. Journal of Statistical Software, 67(1): p. 1–48.

Bates, D., Maechler, M., Bolker, B., Walker, S., Christensen, R. H. B., Singmann, H., Dai, B., Grothendieck, G., Green, P., and Bolker, M. B. (2017), CRAN-Package 'lme4'. Retrieved from: https://cran.r-project.org/web/packages/lme4/index.html (last access 14/11/2019).

Bolker, B. (2014). lme4 convergence warnings: troubleshooting. Retrieved from: http://rpubs.com/bbolker/lme4trouble1 (last access 14/11/2019).

Boucher, J.-P. and Denuit, M. (2006). Fixed versus random effects in poisson regression models for claim counts: A case study with motor insurance. ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA, 36(1): p. 285–301.

Bird, J. (2018). How to buy the best travel insurance. Retrieved from: https://www.choice.com.au/.

Brockett, P. (2003). Modern Actuarial Risk Theory (Modern ART). Journal of risk and insurance.

Cambridge Dictionary online. Retrieved from: https://www.dictionary.cambridge.org.

Caxton, G. (2002). How Private Insurance Works: A Primer. Retrieved from: https://www.kff.org/.

Casualty Actuarial Society (1988). Statement of Principles Regarding Property and Casualty Insurance Ratemaking. Retrieved from: https://www.casact.org/.

Davis, C. S. (1991). Regression Estimators: A Comparative Study. Journal of the American Statistical Association.

De Jong, P., Heller, G. Z., et al. (2008). Generalized linear models for insurance data. Cambridge University Press Cambridge.

EIOPA (2014). Guidelines on the use of internal models, EIOPA-BoS-14/180 EN. Retrieved from: https://www.eiopa.europa.eu.

EIOPA (2015a). Guidelines on reporting and public disclosure, EIOPA-BoS-15/109 EN. Retrieved from: https://www.eiopa.europa.eu.

EIOPA (2015b). Guidelines on own risk and solvency assessment. Retrieved from: https://www.eiopa.europa.eu.

Holton, G. A. (2014). Value-at-Risk: Theory and Practice.

HealthCare online (2020). Retrieved from: https://www.healthcare.gov/.

Imbert, F. (2015). The one time when being married may cost you less. Retrieved from: https://www.cnbc.com.

Institute of Faculty and Actuaries (2016). Solvency II – Life Insurance. Retrieved from: https://www.actuaries.org.uk.

Insurance Information Institute (2020). "What determines the price of an auto insurance policy?". Retrieved from: https://www.iii.org/.

Interamerican online (2020). Retrieved from: https://www.interamerican.gr/.

Investopedia online. Retrieved from: https://www.investopedia.com/.

Jorion, P. (2006). Value at Risk: The New Benchmark for Managing Financial Risk.

JPMorgan/Reuters (1996). RiskMetrics—Technical Document.

Lee, Y. and Nelder, J. A. (1996). Hierarchical generalized linear models. Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological), p. 619–678.

Liu, Q. and Pierce, D. A. (1994). A note on gauss—hermite quadrature. Biometrika, 81(3): p. 624–629.

Luck, R. W. (2008). Solvency II – A view from the US, Casualty Loss Reserve Seminar. Retrieved from: https://www.slideserve.com.

Madsen, H. and Thyregod, P. (2010). Introduction to general and generalized linear models.

Mathai, A. (1966). Some characterisations of the one parameter family of probability distributions. Canad. Math. Bull.

Megna, M. (2020). Auto insurance discounts to ask for: complete guide. Retrieved from: https://www.insurance.com/.

McCullogh, C. E. (2001). Generalized, Linear, and Mixed Models. John Wiley& Sons, INC.

Murphy, K. P., Brockman, M. J., and Lee, P. K. (2000). Using generalized linear models to build dynamic pricing systems. In Casualty Actuarial Society Forum, Winter, p. 107–139.

Ohlsson, E. and Johansson, B. (2010). Non-life insurance pricing with generalized linear models. Springer.

Palmer, K. (2015). Men are still charged more than women for car insurance, despite EU rule change. Retrieved from: https://www.telegraph.co.uk/.

Parodi, P. (2015). Pricing in General Insurance. CRC Press.

Roover, F. D. (1945). "Early Examples of Marine Insurance", *Journal of Economic History* Vol. 5, p. 172–200.

Theaker, D. and Rae, D. (2010). A closer look at Solvency II. Retrieved from: https://www.actuaries.org.uk.

Tulloch, D. and Morrissey, B. (2009). Solvency II Technical Provisions, Society of Actuaries in Ireland. Retrieved from: https://.web.actuaries.ie.

Vandenabeele, T. (2014). Solvency II in a nutshell. Retrieved from: https://nl.milliman.com/nl-nl/.

Venables, W. N. and Ripley, B. D. (2002). Modern Applied Statistics with S. Springer.

Wankhede, A. (2020). The Importance of P&I club in shipping. Retrieved online from: https://www.marineinsight.com/.

Wang, D. (2016). How Maritime Insurance Helped Build Ancient Rome. Retrieved from: https://www.flexport.com/.

Werner, G. and Modlin, C. (2010). Basic Ratemaking. Casualty Actuarial Society.

Wylde, E. (2020). Travel Insurance. Retrieved from: https://www.comparetravelinsurance.com.au.

Zehnwirth, B. (1994). Ratemaking: from bailey and simon (1960) to generalised linear regression models, p. 615–659. Retrieved from:https://www.casact.org/.

Ελληνική Βιβλιογραφία

Ναυτικό Επιμελητήριο Ελλάδος online. Retrieved from: https://nee.gr/.

Παπαριστοδήμου, Γ. (2005). Ναυτική Ασφάλιση, διπλωματική εργασία.

Πιτσέλης, Γ. (2020). Μαθηματικά των Γενικών Ασφαλίσεων.

Πουφινάς, Θ. (2006). Risk Management Notes.

Χαμπάκη, Μ. (2016). Solvency II – Η «Μεγάλη Εικόνα». Insurance Innovation.