

# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ  
ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**Πολυπληθυσμιακά Μοντέλα πρόβλεψης του ρυθμού  
Θνησιμότητας στην Ελλάδα και Επιπτώσεις στα Συνταξιοδοτικά  
Ταμεία**

**Κρατημένου Ελένη**

**ΜΑΕ 17008**

Διπλωματική εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Ιούλιος 2020



**UNIVERSITY OF PIRAEUS**



**DEPARTMENT OF STATISTICS & INSURANCE SCIENCE**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE & RISK  
MANAGEMENT**

**Multi-Population Modelling of Greek Mortality Rates and  
Applications to Pension Plans**

**Kratimenou Eleni**

**MAE 17008**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics & Insurance Science of the University  
of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of

Science in Actuarial Science & Risk Management Piraeus, Greece

Piraeus

July 2020



Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ 6<sup>η</sup>/11.06.2018 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Πιτσέλης Γεώργιος (Επιβλέπων)
- Ψαρράκος Γεώργιος
- Ανθρωπέλος Μιχαήλ

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

*Στην οικογένεια μου και στον Άγγελο*



## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

*Με το πέρας της διπλωματικής μου εργασίας, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Γεώργιο Πιτσέλη για την ευκαιρία που μου έδωσε να ασχοληθώ με το συγκεκριμένο αντικείμενο της εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διδάκτορα του τμήματος κύριο Απόστολο Μποζίκα για την πολύτιμη βοήθειά του. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές κύριο Γεώργιο Ψαρράκο και κύριο Μιχαήλ Ανθρωπέλο για τη συμμετοχή τους στην συμβουλευτική επιτροπή. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την βοήθεια και την υποστήριξη τους σε όλη τη διάρκεια των σπουδών μου.*





## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Μια από τις πιο έντονες προκλήσεις της εποχής μας σε κοινωνικό και οικονομικό επίπεδο είναι η ραγδαία αύξηση της μακροζωίας και η γήρανση του πληθυσμού σε παγκόσμια κλίμακα. Στη προσπάθεια να αντιμετωπιστεί αυτή η πρόκληση αναπτύσσονται συνεχώς μοντέλα με σκοπό την πρόβλεψη του ρυθμού θνησιμότητας. Κύρια πηγή πληροφοριών για την ανάπτυξη αυτών των μοντέλων είναι τα ιστορικά στοιχεία, αλλά κρίνεται απαραίτητη και η κριτική σκέψη ειδικών επιστημόνων. Η παρούσα εργασία παρουσιάζει μερικά από τα κυριότερα μοντέλα θνησιμότητας της βιβλιογραφίας και δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στο μοντέλο Lee-Carter (1992) καθώς είναι ένα μοντέλο ευρέως γνωστό για την πρόβλεψη της θνησιμότητας. Στη συνέχεια, αναλύονται τρία από τα κύρια πολύ-πληθυσμιακά μοντέλα, τα οποία έχουν ως βάση το μοντέλο Lee-Carter (1992) και παρέχουν τη δυνατότητα ταυτόχρονης μοντελοποίησης δύο και άνω πληθυσμών. Με δεδομένα από τον πληθυσμό της Ελλάδας, για άνδρες και γυναίκες, εφαρμόζεται η μεθοδολογία των μοντέλων και για τους δύο πληθυσμούς ταυτόχρονα και υπολογίζονται οι προβλέψεις των δεικτών θνησιμότητας. Έπειτα, κατασκευάζονται πίνακες θνησιμότητας με βάσει τους προβλεβημένους δείκτες θνησιμότητας με σκοπό την τιμολόγηση ασφαλιστικών προϊόντων. Σκοπός της εργασίας είναι να εξετάσει την προβλεπτική ικανότητα των πολύ-πληθυσμιακών μοντέλων θνησιμότητας δύο πληθυσμών σε σύγκριση με τις ανεξάρτητες προβλέψεις μέσω του μοντέλου Lee-Carter (1992).



## **ABSTRACT**

Some of the most far-reaching social and economic challenges of the current age are caused by the rapid increases in longevity and aging of populations across the world. One strand of efforts to meet these challenges has been the development of a wide range of models in order to forecast the future evolution of mortality rates, based on a combination of statistical extrapolation of historical data and expert judgment. This paper presents some of the main mortality models in the literature and emphasizes the Lee-Carter model (1992) as it is a widely known model for predicting mortality. Then, three of the main multi-population mortality models are analyzed, which are based on the Lee-Carter model (1992) and provide the possibility of simultaneous modeling of two or more populations. Given data from the population of Greece, for men and women, the methodology of the models is applied for both populations at the same time and the predictions of mortality rates are calculated. Following this, mortality tables are constructed based on the predicted mortality rates for the purpose of pricing insurance products. The objective of this study is to examine the predictive capacity of multi-population mortality models for two populations compared to independent predictions through the Lee-Carter model (1992).



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....	1
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑ .....	4
1.1. Λίγα λόγια για τη Θνησιμότητα .....	4
1.2. Μοντελοποίηση Θνησιμότητας - Ιστορική Αναδρομή.....	8
1.3. Ανάγκη για Ταυτόχρονη Μοντελοποίηση Πληθυσμών.....	13
1.4. Ταυτόχρονη Μοντελοποίηση Πληθυσμών .....	15
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ.....	20
2.1. Έννοιες και Συμβολισμοί.....	20
2.2. Μοντελοποίηση της Θνησιμότητας με το Μοντέλο Lee-Carter .....	21
2.2.1.Εκτίμηση των Παραμέτρων του Μοντέλου Lee-Carter .....	22
2.2.2.Προβολή Θνησιμότητας με το Μοντέλο Lee-Carter.....	27
2.3. Μοντελοποίηση της Θνησιμότητας με το Μοντέλο Joint-K των Carter-Lee .....	30
2.3.1.Εκτίμηση των Παραμέτρων του Μοντέλου Joint-K των Carter-Lee.....	31
2.3.2.Προβολή Θνησιμότητας με το Μοντέλο Joint-K των Carter-Lee .....	33
2.4. Μοντελοποίηση της Θνησιμότητας με το Μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li - Hardy.....	36
2.4.1.Εκτίμηση των Παραμέτρων του Μοντέλου Co-integrated Lee-Carter των Li - Hardy .....	37
2.4.2.Προβολή Θνησιμότητας με το Μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li - Hardy .....	38
2.5. Μοντελοποίηση της Θνησιμότητας με το Μοντέλο Augmented Common Factor των Li - Lee .....	42
2.5.1.Εκτίμηση των Παραμέτρων του Μοντέλου Augmented Common Factor των Li- Lee .....	43
2.5.2.Προβολή Θνησιμότητας με το Μοντέλο Augmented Common Factor των Li -Lee ..	48
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ.....	51
3.1. Σύγκριση της Προβλεπτικής Ικανότητας των Μοντέλων Θνησιμότητας.....	51
3.2. Έλεγχος Ανθεκτικότητας των Μοντέλων Θνησιμότητας .....	53
3.3. Σύγκριση Αποτελεσμάτων με τη Βιβλιογραφία .....	56
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ .....	57
4.1. Τιμολόγηση Ασφαλιστικών Προϊόντων .....	57
4.2. Ανάλυση Ευαισθησίας σε Επίπεδα Επιτοκίων.....	61
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ .....	64
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	66
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ .....	69

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ο ρυθμός θνησιμότητας έχει πτωτική τάση σε όλες τις ηλικίες σε παγκόσμια κλίμακα με διαφορετική συμπεριφορά ανάλογα την ηλικία και τη χώρα. Η μείωση της θνησιμότητας θεωρείται ως μια θετική εξέλιξη σε ατομικό επίπεδο και ιδιαίτερα σημαντικό επίτευγμα σε κοινωνικό επίπεδο. Ωστόσο, είναι μια πρόκληση όσον αφορά το σχεδιασμό των δημοσίων συνταξιοδοτικών σχημάτων καθώς και των ιδιωτικών προγραμμάτων συνταξιοδότησης. Πέρα από τις συντάξεις γήρατος, επηρεάζονται, επίσης, από τις τάσεις της θνησιμότητας τα συστήματα κοινωνικής ασφάλισης, που συμπεριλαμβάνουν τις παροχές αναπηρίας και επιβίωσης, καθώς και την ιατρική περίθαλψη για τους ηλικιωμένους. Ομοίως, κι άλλα προϊόντα που προσφέρονται από τις ιδιωτικές ασφαλιστικές εταιρίες επηρεάζονται από τη μείωση της θνησιμότητας και αντίστοιχα, τη βελτίωση του προσδόκιμου ζωής. Για παράδειγμα, προγράμματα κάλυψης εξόδων ασθενείας μετά τη συνταξιοδότηση. Εν ολίγοις, η πρόβλεψη της τάσης της θνησιμότητας είναι ένα σημαντικό ζήτημα και απασχολεί ένα ευρύ φάσμα τομέων, όπως το σχεδιασμό συστημάτων κοινωνικής ασφάλισης και υγειονομικής περίθαλψης, τη χρηματοδότηση σχημάτων συνταξιοδότησης, αλλά και τον κλάδο του αναλογισμού, την τιμολόγηση και την αποθεματοποίηση χαρτοφυλακίων προϊόντων ασφαλίσεων ζωής και πιο συγκεκριμένα, προϊόντων που παρέχουν σύνταξη.

Οι πρώτες μελέτες σχετικά με την θνησιμότητα επικεντρώθηκαν στην πρόβλεψη της θνησιμότητας ενός πληθυσμού, ενώ ενδιαφέρον παρουσιάστηκε για την ταυτόχρονη πρόβλεψη της θνησιμότητας παραπάνω του ενός πληθυσμών. Πληθυσμοί που αντιμετωπίζουν κοινά κοινωνικοοικονομικά χαρακτηριστικά, για παράδειγμα ομάδες ατόμων της ίδιας χώρας, ήταν αρκετά πιθανό να αναπτύσσουν κάποιου είδους συσχέτιση ως προς τη θνησιμότητα.

Ένα από τα δημοφιλέστερα μοντέλα που αναπτύχθηκε για την εκτίμηση και την πρόβλεψη της θνησιμότητας ενός πληθυσμού είναι το μοντέλο Lee-Carter (1992) μέσω ενός ειδικού κατά ηλικία και φύλο δείκτη θνησιμότητας. Έπειτα από αυτό, ακολούθησαν αρκετά άλλα μοντέλα, καθώς και μοντέλα πολύ-πληθυσμιακά, τα οποία είχαν ως βάση την αρχική ιδέα των Lee-Carter (1992).

Η μελέτη και η πρόβλεψη του ρυθμού θνησιμότητας για τον πληθυσμό της Ελλάδας με στοχαστικά μοντέλα θνησιμότητας πραγματοποιήθηκε για πρώτη φορά το 2018 (Bozikas A. and Pitselis G., 2018), όπου εφαρμόστηκαν επτά μοντέλα θνησιμότητας για άνδρες και γυναίκες ξεχωριστά. Ο σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η μελέτη της θνησιμότητας

ανδρών και γυναικών ταυτόχρονα με τα δεδομένα της Ελλάδας. Επομένως, σε συνέχεια της προηγούμενης έρευνας αναπτύσσονται για πρώτη φορά πολύ-πληθυσμιακά μοντέλα θνησιμότητας και οι προβλέψεις που παράγονται συγκρίνονται με τις ανεξάρτητες προβλέψεις μέσω του μοντέλου Lee-Carter (1992).

Στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο, αναφέρονται μερικά από τα πιο γνωστά μοντέλα ταυτόχρονης μοντελοποίησης της θνησιμότητας δύο και άνω πληθυσμών. Στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο, αναλύονται λεπτομερώς το κύριο μοντέλο Lee-Carter (1992) και τρία επιπλέον πολύ-πληθυσμιακά μοντέλα. Για τα τέσσερα αυτά μοντέλα θνησιμότητας, το βασικό μοντέλο Lee-Carter (1992) και ακόμα τρία πολύ-πληθυσμιακά μοντέλα, αναλυτικά το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992), το μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011) καθώς και το μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005), πραγματοποιήθηκε η μοντελοποίηση του δείκτη θνησιμότητας με δεδομένα της βάσης Human Mortality Database (2020) για τον πληθυσμό της Ελλάδας και για τα δύο φύλα. Εκτιμάται η θνησιμότητα για τη περίοδο από το 1981 έως το 2000 και έπειτα, προβάλλονται οι δείκτες για επτά έτη, έως το 2017, όπου είναι και τα διαθέσιμα πραγματικά δεδομένα. Για σκοπούς της μοντελοποίησης έγινε χρήση του στατιστικού πακέτου R στην έκδοση «R i386 3.6.1» και συγκεκριμένα, χρησιμοποιήθηκαν τα ενσωματωμένα πακέτα «Demography», «Metrics» και «Lifecontingencies». Στη συνέχεια στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο, πραγματοποιείται σύγκριση της προβλεπτικής ικανότητας των μοντέλων αυτών με δύο τρόπους.

Επίσης, μέσω των προβλέψεων του ρυθμού θνησιμότητας παρέχεται η δυνατότητα κατασκευής πίνακα θνησιμότητας με σκοπό την τιμολόγηση συνταξιοδοτικών προγραμμάτων. Στο 4<sup>ο</sup> κεφάλαιο ακολουθεί η τιμολόγηση ασφαλιστικών προϊόντων μέσω των προβλεπόμενων τιμών του ειδικού κατά ηλικία και φύλο δείκτη θνησιμότητας και έπειτα, η ανάλυση ευαισθησίας των τιμών αυτών σε μεταβολές του επιπέδου των επιτοκίων.

Τέλος, στο 5<sup>ο</sup> κεφάλαιο συγκεντρώνονται τα συμπεράσματα της παρούσας εργασίας σύμφωνα με τα οποία τα πολύ-πληθυσμιακά μοντέλα φαίνεται πως είναι πιο κατάλληλα για την πρόβλεψη της θνησιμότητας δύο και παραπάνω πληθυσμών σε σύγκριση με το μοντέλο Lee-Carter (1992).





## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑ

### 1.1. Λίγα λόγια για τη Θνησιμότητα

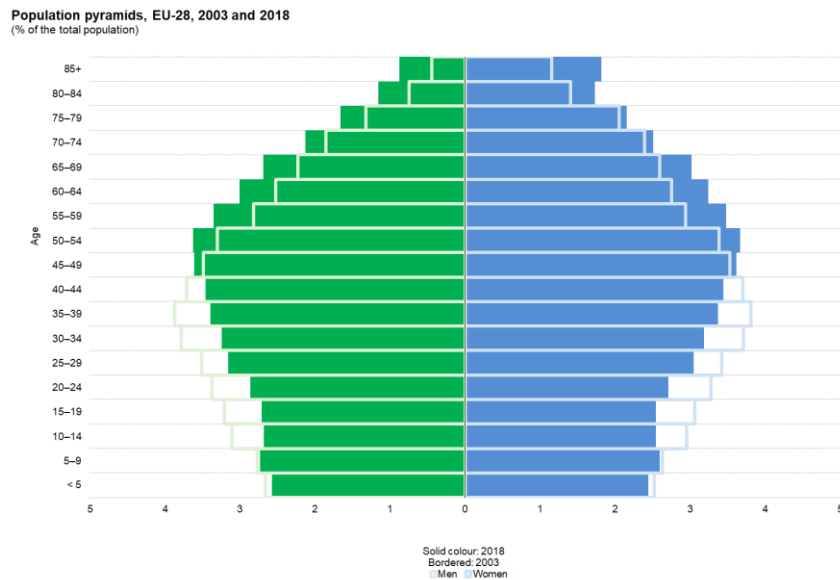
Πριν από 20-30 χρόνια, ο πληθυσμός των ατόμων ηλικίας 65 ετών και άνω ήταν ένα μικρό ποσοστό του συνολικού πληθυσμού. Σήμερα, σε αρκετές χώρες, το ποσοστό των ατόμων ηλικίας 65 ετών και άνω είναι κοντά στο 20% του συνολικού πληθυσμού και πιο συγκεκριμένα, κατά το έτος 2018 το ένα πέμπτο σχεδόν του πληθυσμού της Ευρωπαϊκής Ένωσης ήταν ηλικίας 65 ετών και άνω (βλέπε Eurostat, 2019). Συγκεκριμένα, για την Ελλάδα η μεταβολή του ποσοστού των ατόμων αυτής της ηλικιακής ομάδας από το έτος 2008 στο 2018 ανέβηκε από 19% σε 22%, αύξηση της τάξεως των 3 ποσοστιαίων μονάδων. Σύμφωνα με μελέτη της Eurostat βασισμένη σε στοιχεία του Ιουλίου του 2019 σχετικά με τον αντίκτυπο της δημογραφικής γήρανσης εντός της Ευρωπαϊκής Ένωσης (ΕΕ), η σημαντικότερη αλλαγή θα είναι ίσως η μεγάλη μετάβαση προς έναν κατά πολύ γηραιότερο πληθυσμό. Η δημογραφική γήρανση είναι μια μακροχρόνια τάση που άρχισε πριν από αρκετές δεκαετίες στην Ευρώπη.

Οι πληθυσμιακές πυραμίδες που ακολουθούν δείχνουν την κατανομή του πληθυσμού ανά φύλο και ανά ηλικιακή ομάδα πέντε ετών (Διάγραμμα 1 και Διάγραμμα 2). Κάθε ράβδος αντιστοιχεί στο μερίδιο της κάθε ομάδας ανά φύλο και ηλικία στο σύνολο του πληθυσμού. Η πληθυσμιακή πυραμίδα της ΕΕ-28 την 1η Ιανουαρίου του 2018 (Διάγραμμα 1) είναι στενή στη βάση της και γίνεται ολοένα και πιο ρομβοειδής λόγω της γενιάς της έκρηξης των γεννήσεων που προκύπτει από τα υψηλά ποσοστά γονιμότητας σε πολλές ευρωπαϊκές χώρες στα μέσα της δεκαετίας του 1960 (γνωστή ως «baby boom»). Η εν λόγω γενιά εξακολουθεί να αποτελεί ένα σημαντικό μέρος του πληθυσμού σε ηλικία εργασίας. Οι πρώτοι από αυτή τη μεγάλη ομάδα που γεννήθηκαν σε μια περίοδο 20-30 ετών φθάνουν σήμερα σε ηλικία συνταξιοδότησης, όπως φαίνεται από τη σύγκριση με την πληθυσμιακή πυραμίδα του 2003 (Διάγραμμα 1). Η διόγκωση της γενιάς της έκρηξης των γεννήσεων ανεβαίνει στην πληθυσμιακή πυραμίδα, με αποτέλεσμα το κατώτερο τμήμα του πληθυσμού σε ηλικία εργασίας και η βάση να συρρικνώνεται, όπως φαίνεται στο Διάγραμμα 2. Η αύξηση του σχετικού ποσοστού των ηλικιωμένων ατόμων μπορεί να εξηγηθεί από την αύξηση της διάρκειας ζωής, ένα μοντέλο που εμφανίζεται εδώ και πολλές δεκαετίες καθώς το προσδόκιμο ζωής αυξήθηκε και η εξέλιξη αυτή αναφέρεται συχνά ως «γήρανση στην κορυφή» της πληθυσμιακής πυραμίδας.

Από την άλλη πλευρά, τα συστηματικά χαμηλά επίπεδα γονιμότητας επί σειρά ετών συνέβαλαν στη γήρανση του πληθυσμού, με αποτέλεσμα οι λιγότερες γεννήσεις να οδηγούν σε μείωση της αναλογίας των νέων ατόμων στο σύνολο του πληθυσμού. Η διαδικασία αυτή είναι γνωστή

ως «γήρανση στη βάση» της πληθυσμιακής πυραμίδας και μπορεί να παρατηρηθεί στη συρρικνωμένη βάση της πληθυσμιακής πυραμίδας της μεταξύ 2003 και 2018 (Διάγραμμα 1).

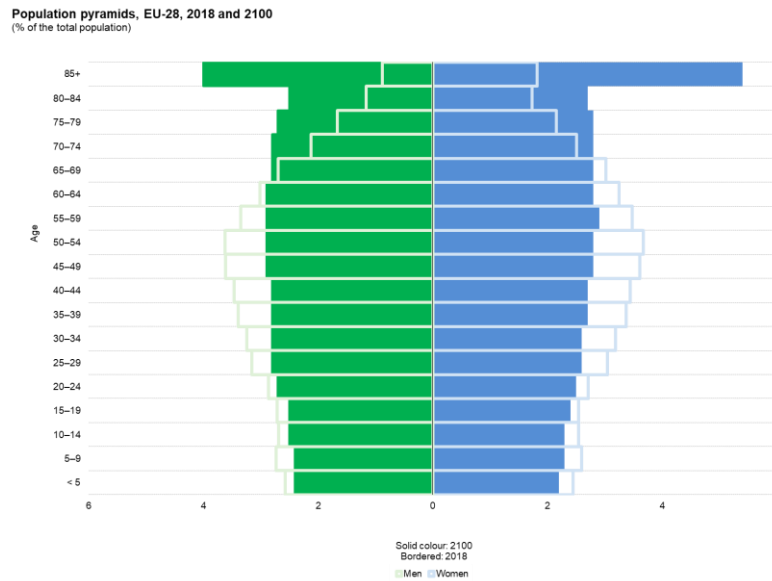
**Διάγραμμα 1** Πληθυσμιακές πυραμίδες, ΕΕ-28, 2003 και 2018 (% του συνολικού πληθυσμού)



Πηγή: Eurostat-Πληθυσμιακή διάρθρωση και δημογραφική γήρανση (2019).

Σε μια προσπάθεια να εξεταστούν οι μελλοντικές τάσεις για την πληθυσμιακή γήρανση, οι πιο πρόσφατες προβολές πληθυσμού της Eurostat κάλυπταν την περίοδο από το 2018 έως το 2100. Η σύγκριση της ηλικιακής πυραμίδας για το 2018 και το 2100 (Διάγραμμα 2) δείχνει ότι ο πληθυσμός της ΕΕ-28 προβλέπεται να συνεχίσει να γηράσκει. Στις επόμενες δεκαετίες, η πολυπληθής «γενιά της έκρηξης των γεννήσεων» (baby boomers) θα διογκώσει τον αριθμό των ηλικιωμένων. Ωστόσο, μέχρι το 2100, η πυραμίδα θα πάρει μάλλον ένα μονοκόμματο σχήμα, το οποίο θα στενεύει σημαντικά στη μέση της πυραμίδας (γύρω από την ηλικιακή ομάδα των 45-54 ετών).

## Διάγραμμα 2 Πληθυσμιακές πυραμίδες, ΕΕ-28, 2018 και 2100 (% του συνολικού πληθυσμού)



Πηγή: Eurostat-Πληθυσμιακή διάρθρωση και δημογραφική γήρανση (2019).

Στις περισσότερες ανεπτυγμένες χώρες, ο μέσος όρος προσδόκιμου ζωής είναι ξεκάθαρα αυξανόμενος (Jodz, 2018). Η εξέλιξη στον κλάδο της ιατρικής καθώς και η βελτίωση των συνθηκών διαβίωσης έχουν οδηγήσει σε υψηλότερα επίπεδα διαβίωσης. Αυτή η βελτίωση είναι μια σοβαρή πρόκληση για τις ασφαλιστικές εταιρίες και τα δημόσια συνταξιοδοτικά συστήματα. Το πρόβλημα παρατηρήθηκε και από το θεσμό της Ευρωπαϊκής Ένωσης και οδήγησε στην οδηγία της Φερεγγυότητας II. Αυτή η οδηγία αναφέρεται, επίσης, και σε μεθόδους διαχείρισης κινδύνου που χρησιμοποιούνται από τις ασφαλιστικές εταιρίες. Αναφορικά στις ασφαλιστικές εταιρίες που προσφέρουν ασφαλίσειες Ζωής, ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες που μπορεί να αυξήσει την πιθανότητα να καταστούν αφερέγγυες είναι η τυχαιότητα της μεταβλητής του προσδόκιμου ζωής. Η συνεχής έρευνα για πιο ακριβείς μεθόδους μοντελοποίησης και καλύτερες προβλέψεις του προσδόκιμου ζωής γεννάται από την ανάγκη να μειωθεί ο κίνδυνος αυτού του στοχαστικού παράγοντα, της θνησιμότητας .

Ένα σκέλος των προσπαθειών για την αντιμετώπιση αυτών των προκλήσεων ήταν η ανάπτυξη ενός ευρέος φάσματος μοντέλων με σκοπό την πρόβλεψη της μελλοντικής εξέλιξης των ποσοστών θνησιμότητας, βάσει ενός συνδυασμού ιστορικών δεδομένων και κρίσης εμπειρογνομώνων. Η διαδικασία πρόβλεψης της θνησιμότητας γενικά περιλαμβάνει τον προσδιορισμό ενός υποκείμενου μοντέλου, το οποίο τροφοδοτείται από ιστορικά δεδομένα και

ένα μοντέλο πρόβλεψης, το οποίο βασίζεται στο υποκείμενο (Booth and Tickle, 2008). Αυτά τα δύο μοντέλα μπορούν να είναι ξεχωριστά ή και να ενοποιηθούν. Συνήθως, οι παράγοντες που χρησιμοποιούνται για τον καθορισμό του υποκείμενου μοντέλου είναι τρεις, η ηλικία, ο χρόνος και η κοορτή. Το πλήθος των παραγόντων που θα χρησιμοποιηθούν καθορίζει εάν το υποκείμενο μοντέλο θα χαρακτηριστεί ως μοντέλο μηδενικών μεταβλητών, μιας μεταβλητής ή δύο μεταβλητών ή τέλος, τριών μεταβλητών. Τα μοντέλα μηδενικών μεταβλητών είναι απλά ένα μέτρο άθροισης ή δείκτες θνησιμότητας ανά ηλικία, όπου κάθε ηλικία θεωρείται ανεξάρτητη από τις άλλες. Κατά μια έννοια, δεν υπάρχει υποκείμενο μοντέλο σε αυτή την περίπτωση. Τα μοντέλα μιας μεταβλητής χειρίζονται τα ποσοστά θνησιμότητας (είτε ανά περίοδο είτε ανά κοορτή) ως μια συνάρτηση της ηλικίας. Αντίστοιχα, τα μοντέλα δύο μεταβλητών χρησιμοποιούν, συνήθως, την ηλικία και το χρόνο. Αρκετά μοντέλα πρόβλεψης της θνησιμότητας είναι αυτού του τύπου. Κατά συνέπεια, τα μοντέλα τριών μεταβλητών λαμβάνουν υπόψη την ηλικία, το χρόνο και τη γενεά.

Η παρέκταση στη στατιστική (γνωστή ως “extrapolation”) είναι από τις πιο συνηθισμένες μεθόδους για την πρόβλεψη των ποσοστών θνησιμότητας. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο, η μελλοντική τάση μιας μεταβλητής επηρεάζεται από τις παρελθούσες τιμές και θεωρείται συνέχεια της. Όσον αφορά την πρόβλεψη της θνησιμότητας, είναι αρκετά λογική η χρήση μιας μεθόδου extrapolation λόγω του ότι υπάρχει μια ομαλότητα στα ιστορικά δεδομένα. Ωστόσο, πάντοτε υπάρχουν εξαιρέσεις, όπως για παράδειγμα την παροδική έξαρση της θνησιμότητας σε νέους εφήβους λόγω της ασθένειας του AIDS, την περίοδο της στασιμότητας της θνησιμότητας τη δεκαετία του 1960 στην Αυστραλία, την αξιοσημείωτη αύξηση του προσδόκιμου ζωής κατά τη γέννηση στις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής κατά τον 20<sup>ο</sup> αιώνα. Οι μέθοδοι extrapolation εξελίσσονται από την απλή γραμμική προβολή σε μεθόδους δύο μεταβλητών, όπως αναφέρθηκε πιο πάνω, όπως την ηλικία και το χρόνο. Μια αρκετά δημοφιλής μέθοδος για την προβολή της θνησιμότητας στα πλαίσια του extrapolation είναι οι χρονοσειρές (Box et al., 1970). Οι χρονοσειρές έχουν το πλεονέκτημα ότι είναι στοχαστικές μέθοδοι που επιτρέπουν τον υπολογισμό ενός πιθανολογικού διαστήματος πρόβλεψης για την προβλεπόμενη τιμή. Στην περίπτωση ενός υποκείμενου μοντέλου μηδενικής μεταβλητής, όπως οι χρονοσειρές του προσδόκιμου ζωής ή των δεικτών θνησιμότητας ανά ηλικία, οι χρονοσειρές αυτές καθαυτές μοντελοποιούνται και προβλέπονται τα ποσοστά θνησιμότητας. Για τα μοντέλα μιας και δύο μεταβλητών, οι χρονοσειρές βάσει των ιστορικών δεδομένων μοντελοποιούνται για το υποκείμενο μοντέλο. Τέτοιου είδους μοντέλο, για παράδειγμα, είναι το απλό Lee-Carter (1992).

## 1.2. Μοντελοποίηση Θνησιμότητας - Ιστορική Αναδρομή

Από τον Malthus (1798), οι δημογραφικές προβλέψεις έγιναν αρκετά δημοφιλείς και η αίσθηση ότι η σύνθεση και η δομή των πληθυσμών θα άλλαζε σημαντικά οδήγησε στην ανάπτυξη της μεθόδου πρόβλεψης θνησιμότητας λαμβάνοντας υπόψη την παράμετρο της κοορτής.

Κατά τις αρχές του εικοστού αιώνα, όσο οι ειδικοί δημογράφοι ανέπτυσαν μεθόδους πρόβλεψης θνησιμότητας με την παράμετρο της κοορτής, οι στατιστικοί εργάστηκαν προς τις διαδικασίες στασιμότητας. Η θεωρία αυτή βασίζεται στο γραμμικό μετασχηματισμό του λευκού θορύβου (white noise). Τα κύρια χαρακτηριστικά αυτής τη μεθοδολογίας τελειοποιήθηκαν κατά τις αρχές της δεκαετίας του 1950 και η πρακτική εφαρμογή της έγινε πιο γνωστή μέσω της δημοσίευσης των Box et al. (1970). Η μεθοδολογία αυτή έγινε δημοφιλής λόγω της ευελιξίας της, της ενσωμάτωσης των επιπτώσεων των μεταβλητών συμπεριφοράς και των κοινωνικό-οικονομικών μεταβλητών για σκοπούς πρόβλεψης καθώς και της κατασκευής διαστημάτων εμπιστοσύνης (Pascariu, 2018).

Μέχρι το 1980, τα μαθηματικά μοντέλα που χρησιμοποιούνταν για την πρόβλεψη της θνησιμότητας ή του προσδόκιμου ζωής ήταν αρκετά απλά στην κατασκευή τους και εμπειρείχαν και ένα βαθμό αντικειμενικής κρίσης. Αργότερα, αρκετές μελέτες αναπτύχθηκαν σχετικά με την πρόβλεψη της θνησιμότητας μέσω στοχαστικών μοντέλων, όπως των Alho (1990), Alho-Spencer (1991), McNown-Rogers (1989, 1992) και Lee-Carter (1992).

Στη μελέτη τους οι McNown και Rogers (1989) συνδέουν ένα παραμετρικό μοντέλο θνησιμότητας με τη μέθοδο χρονοσειρών για να προβλέψουν τη θνησιμότητα των Ηνωμένων Πολιτειών Αμερικής για τη χρονολογία του 2000. Με τη χρήση του μοντέλου αυτού αναπαριστούν την ιστορικότητα της θνησιμότητας ανά φύλο και ανά ηλικία από το 1900 έως το 1985 και με τη χρήση χρονοσειρών προβάλλουν στο μέλλον τα ιστορικά δεδομένα έως το τέλος του 20<sup>ου</sup> αιώνα. Πιο συγκεκριμένα, μέσω εκθετικών μοντέλων με οκτώ και εννιά παραμέτρους δημιούργησαν τις χρονοσειρές για κάθε ηλικία για το ρυθμό θνησιμότητας ανά φύλο ή ανά αιτία θανάτου. Αυτή η μελέτη παρήγαγε μέσου εύρους προβλέψεις θνησιμότητας, οι οποίες ανταποκρίνονται στους ελέγχους καταλληλότητας και ακρίβειας και πλησιάζουν τις προβλέψεις του Ταμείου Κοινωνικής Ασφάλισης. Το πλεονέκτημα αυτής τη μεθόδου ήταν ότι αναπαριστούσε μια λιτή προσέγγιση αναφορικά στον αριθμό των παραμέτρων που χρησιμοποιούσε για την κατανομή των ηλικιών. Ωστόσο, είχαν εντοπιστεί αρκετά

μειονεκτήματα, ένα από αυτά ήταν οι ενδείξεις ότι οι χρονοσειρές είχαν ασταθή συμπεριφορά δημιουργώντας δυσκολία στη πρόβλεψή τους καθώς και το γεγονός ότι οι προβλέψεις που έκαναν ήταν για ένα μικρό χρονικό ορίζοντα δεκαπέντε ετών. Δεν είναι ξεκάθαρο ποια θα ήταν τα αποτελέσματα του μοντέλου για ένα μεγαλύτερο χρονικό ορίζοντα.

Ένα χρόνο μετά περίπου, ο Alho (1990) παρουσίασε μια δημογραφική μέθοδο συμπεριλαμβάνοντας την παράμετρο της κοορτής σε μια στοχαστική εκδοχή για την πρόβλεψη ενός πληθυσμού. Σε αυτό το μοντέλο τα μεγέθη των μελλοντικών ομάδων ηλικίας-φύλου είναι μη γραμμικές συναρτήσεις των τυχαίων μελλοντικών ποσοστών. Τα αποτελέσματα της πρόβλεψης των ποσοστών θνησιμότητας παρουσιάζουν αντικρουόμενα φαινόμενα καθώς η θνησιμότητα μειώνεται, ενώ η γονιμότητα διακυμαίνεται. Το μοντέλο που αναλύεται μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό προσεγγιστικών διαστημάτων πρόβλεψης γεννήσεων κάνοντας χρήση των προβλέψεων από το ντετερμινιστικό μοντέλο με την παράμετρο της κοορτής. Επιπλέον, γίνεται σύγκριση των αποτελεσμάτων του μοντέλου με τα αποτελέσματα που παράγουν απλές τεχνικές extrapolation, όπως χρησιμοποιούνταν στο παρελθόν.

Εν συνεχεία, οι Alho και Spencer (1991) πρότειναν την εφαρμογή των προβλέψεων των πληθυσμών ως βάσεις δεδομένων. Προκύπτουν δύο πλεονεκτήματα από την υλοποίηση των βάσεων δεδομένων. Πρώτον, κάθε χρήστης μπορεί να χρησιμοποιήσει τις προβλέψεις για τις δικές του ανάγκες και δεύτερον, μέσω των διαστημάτων πρόβλεψης που δημιουργούνται μπορεί να κρίνει το επίπεδο αβεβαιότητας των προβλέψεων του μοντέλου.

Το βασικό μοντέλο πρόβλεψης της θνησιμότητας, έτσι όπως προτάθηκε από τους Lee και Carter (1992), σηματοδότησε την αρχή της βιβλιογραφίας σχετικά με τη στοχαστική πρόβλεψη της θνησιμότητας (Cui, 2008) και είναι μια από τις πιο διαδεδομένες και σχετικά απλές τεχνικές. Αποτελεί ένα από τα πιο σημαντικά στατιστικά μοντέλα για την πρόβλεψη της θνησιμότητας (Deaton-Paxson, 2004) και είναι σχεδιασμένο για να δίνει μακροχρόνιες προβλέψεις. Αυτός είναι και ένας από τους λόγους που χρησιμοποιείται κυρίως στην αποτίμηση προϊόντων ζωής και συντάξεων. Στη μελέτη τους αναπτύσσουν ένα μη-γραμμικό μοντέλο για την εκτίμηση της θνησιμότητας ανά φύλο με δεδομένα τα ποσοστά θνησιμότητας ανά ηλικία για τις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής για το χρονικό διάστημα 1933 έως 1988. Έπειτα, αυτό το μοντέλο κάνοντας χρήση της μεθοδολογίας Singular Value Decomposition («SVD») παράγει μια παράμετρο που σχετίζεται με το χρόνο, τον  $kt$ . Συγκεκριμένα, η παράμετρος  $kt$  εκφράζει την ένταση της θνησιμότητας. Μέσω τεχνικών Box-Jenkins εκτιμούν και προβλέπουν τις τιμές της παραμέτρου  $kt$  και στη συνέχεια αυτές οι προβλέψεις

χρησιμοποιούνται για την προβολή των δεικτών θνησιμότητας και του ρυθμού της προσδοκώμενης ζωής ανά ηλικία για το χρονικό διάστημα 1990 έως 2065. Για πιο μακροπρόθεσμες προβλέψεις του δείκτη θνησιμότητας ανά ηλικία χρησιμοποιούνται χρονοσειρές με διαστήματα εμπιστοσύνης. Πιο αναλυτικά, οι λογάριθμοι των δεικτών θνησιμότητας ανά ηλικία διαμορφώνονται ως μια γραμμική συνάρτηση μιας μη παρατηρούμενης παραμέτρου που εξαρτάται από τη χρονική περίοδο και δύο παραμέτρων που σχετίζονται με την ηλικία. Για την πρόβλεψη της παραμέτρου του χρόνου, κt, γίνεται η χρήση χρονοσειρών με την ανάλυση Αυτοπαλινδρομούμενων Ολοκληρωμένων Υποδειγμάτων Κινούμενου Μέσου (Autoregressive Integrated Moving Average-ARIMA). Τα μοντέλα ARIMA εφαρμόζονται σε ορισμένες περιπτώσεις όπου τα δεδομένα δείχνουν μη στασιμότητα. Πιο αναλυτικά, το τμήμα Autoregressive του ARIMA υποδεικνύει ότι η προβλεπόμενη τιμή εισάγεται σε μια παλινδρόμηση με τις δικές της ιστορικές τιμές. Το τμήμα moving average υποδεικνύει ότι το σφάλμα παλινδρόμησης είναι στην πραγματικότητα ένας γραμμικός συνδυασμός των σφαλμάτων, των οποίων οι τιμές εμφανίζονται ταυτόχρονα και σε διάφορες χρονικές στιγμές στο παρελθόν. Τέλος, ο όρος integrated ("ολοκληρωμένο") υποδηλώνει ότι οι τιμές των δεδομένων έχουν αντικατασταθεί με τη διαφορά μεταξύ των τιμών τους και των προηγούμενων τιμών (και αυτή η διαδικασία μπορεί να έχει εκτελεστεί περισσότερες από μία φορές). Ο σκοπός καθενός από αυτά τα χαρακτηριστικά είναι να κάνει το μοντέλο να ταιριάζει με τα δεδομένα όσο το δυνατόν καλύτερα. Οι χρονοσειρές ARIMA εκτιμώνται μέσω της μεθόδου Box-Jenkins (Box et al., 1970).

Ακολουθούν μερικά συμπεράσματα που περιλαμβάνουν προβλήματα, περιορισμούς, αλλά και πλεονεκτήματα για το διαδεδομένο μοντέλο Lee-Carter (1992) (Μαυρομάτη, 2012). Ένα από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά του μοντέλου είναι πως είναι κατανοητό και πως οι παράμετροι του μπορούν να εκτιμηθούν. Η απλότητά του είναι ένα από τα κύρια πλεονεκτήματά του. Συγκριτικά με άλλα μοντέλα πρόβλεψης θνησιμότητας, το μοντέλο Lee-Carter (1992) βασίζεται στις προβλέψεις του σε ιστορικά δεδομένα χωρίς να παίρνει επιπλέον παραδοχές ή όρια για τη διάρκεια ζωής και χωρίς να απαιτεί επιπλέον υποκειμενική κρίση. Τα αποτελέσματα των προβλέψεων συγκρίνονται για σκοπούς καταλληλότητας και ακρίβειας με τις πιο απλοϊκές προβλέψεις για το προσδόκιμο ζωής που εκπονήθηκαν από τον Αναλογιστή της Υπηρεσίας Κοινωνικής Ασφάλισης. Επιπλέον, από τα διαστήματα εμπιστοσύνης που προκύπτουν αποδεικνύεται ότι το μοντέλο είναι αποτελεσματικό στην πρόβλεψη των ποσοστών θνησιμότητας. Ωστόσο, ένα μειονέκτημα του μοντέλου είναι πως υποθέτει ότι η αλλαγή στην κατανομή ηλικίας της θνησιμότητας γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε ο ρυθμός



μείωσης σε διαφορετικές ηλικίες να διατηρεί πάντα την ίδια αναλογία μεταξύ τους με την πάροδο των ετών, ενώ υπάρχουν ενδείξεις πως υπάρχει σημαντική αλληλεπίδραση ανάμεσα στο χρόνο και την ηλικία. Αυτό σημαίνει ότι δεν λαμβάνει υπόψη πληροφορίες για παράγοντες που θα διαφοροποιούσαν τη θνησιμότητα στο μέλλον. Σε συνέχεια αυτού, αξίζει να σημειωθεί ότι δεν λαμβάνεται καμία υπόθεση για την προοπτική εξέλιξης στην υγεία ή στο περιβάλλον καθώς η μόνη πληροφορία στην οποία βασίζεται το μοντέλο είναι τα ιστορικά δεδομένα. Με λίγα λόγια, το μοντέλο αδυνατεί να προβλέψει ξαφνικές βελτιώσεις στη θνησιμότητα από νέες ανακαλύψεις σε θεραπείες ή σε φάρμακα. Ομοίως και μελλοντικές χειροτερεύσεις που προέρχονται από επιδημίες, εμφάνιση νέων ασθενειών ή επιδείνωση της μόλυνσης του περιβάλλοντος δεν μπορούν να προβλεφθούν από το μοντέλο. Τέλος, η υπόθεση ότι τα σφάλματα είναι ασυσχέτιστα ανά ηλικία δεν λαμβάνεται υπόψη στο μοντέλο με συνέπεια να επηρεάζονται οι προβλέψεις.

Όπως προαναφέρθηκε, το μοντέλο Lee-Carter είναι ένας τύπος μοντέλου δύο μεταβλητών. Πρόκειται για ένα μοντέλο το οποίο αναγνωρίζει συγκεκριμένα πρότυπα εξέλιξης της θνησιμότητας στις διάφορες ηλικίες και για την πρόβλεψη της θνησιμότητας, τα πρότυπα αυτά θεωρούνται δεδομένα προκειμένου να χρησιμοποιηθούν στις χρονοσειρές για να προβληθεί ο η παράμετρος χρόνου,  $kt$ . Η προσέγγιση αυτή κατά την οποία τα πρότυπα εξέλιξης της θνησιμότητας ανά ηλικία προκύπτουν από ιστορικά δεδομένα είχε αναφερθεί και πριν τους Lee-Carter από τους Bell και Monsell (1991). Το μοντέλο Lee-Carter έχει δώσει ικανοποιητικά αποτελέσματα για τον Καναδά, τη Χιλή, την Αργεντινή, την Ιαπωνία, το Βέλγιο, τη Σουηδία, την Ιταλία και την Ελλάδα (Μποζίκας, 2013). Επίσης, το μοντέλο Lee-Carter εφαρμόστηκε για τη σύγκριση της θνησιμότητας σε επιλεγμένες χώρες της Νότιας, Κεντρικής και Βόρειας Ευρώπης (Μαυρομάτη, 2012). Επίσης, τα αποτελέσματα του Lee-Carter έχουν χρησιμοποιηθεί ως ορόσημα από το US Census Bureau για τις μακροπρόθεσμες προβλέψεις του προσδόκιμου ζωής (Pascariu, 2018).

Κατά το 2002 οι Brouhns, Denuit και Vermunt σε μια δοκιμή εξέλιξης του γνωστού μοντέλου Lee-Carter τροποποίησαν το απλό γραμμικό μοντέλο σε ένα γενικευμένο γραμμικό μοντέλο. Ουσιαστικά, στο αρχικό μοντέλο ενσωματώνεται μια λογαριθμική γραμμική παλινδρόμηση Poisson (log-bilinear), η οποία θεωρείται ιδανική για την πρόβλεψη ποσοστών θνησιμότητας. Το μοντέλο δοκιμάζεται με δεδομένα του Βέλγικου πληθυσμού και πραγματοποιούνται προβλέψεις για κάθε φύλο ξεχωριστά ανά ηλικία. Η πρόβλεψη των ποσοστών θνησιμότητας γίνεται μέσω της πρόβλεψης της παραμέτρου,  $kt$ , που εξαρτάται από το χρόνο με χρονοσειρές

σε ένα μοντέλο ARIMA. Το βασικό μειονέκτημα του απλού μοντέλου Lee-Carter που τονίζεται σε αυτή τη μελέτη είναι η υπόθεση ότι τα σφάλματα χαρακτηρίζονται από ομοσκεδαστικότητα λόγω του ότι η εκτίμηση των παραμέτρων πραγματοποιείται με τη χρήση εκτιμητών ελαχίστων τετραγώνων μέσω της μεθόδου SVD. Αντίθετα για την εξαγωγή συμπερασμάτων θεώρησαν πως τα σφάλματα κατανομούνται κανονικά, κάτι το οποίο είναι μη πραγματικό. Η χρήση του λογαρίθμου της παρατηρούμενης έντασης θνησιμότητας είναι πολύ πιο αξιόπιστη για μεγαλύτερες ηλικίες από ότι για τις μικρότερες λόγω του μικρότερου αριθμού θανάτων στις μεγαλύτερες ηλικίες. Οι θάνατοι είναι μια μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή, επομένως η κατανομή Poisson θεωρείται εύλογη επιλογή. Τα αποτελέσματα είναι σύμφωνα με τα αποτελέσματα που παράγει η SVD, αλλά η προσέγγιση της Poisson επιτρέπει πολλές άλλες εφαρμογές στην ασφάλιση ζωής, και συγκεκριμένα την προβολή των μελλοντικών ταμειακών ροών.

Οι Renshaw και Haberman (2006) επεκτείνουν το μοντέλο Lee-Carter προσθέτοντας την επίδραση της κοορτής, η οποία ενσωματώνει το έτος γέννησης στο μοντέλο στις ήδη υπάρχουσες ηλικιακές και χρονικές επιδράσεις. Τα μοντέλα που αναφέρθηκαν έως τώρα λάμβαναν τις επιδράσεις της ηλικίας και του χρόνου ως παραμέτρους για την μοντελοποίηση και την πρόβλεψη του ρυθμού θνησιμότητας εξαιρώντας το ενδεχόμενο να επηρεάζουν και οι κοορτές το μοντέλο. Στη συγκεκριμένη μελέτη παρουσιάζονται το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992), ένα μοντέλο ηλικίας-κοορτής (Age-Cohort) καθώς και ένα μοντέλο ηλικίας-χρόνου-κοορτής (Age-Period-Cohort). Και τα τρία μοντέλα μοντελοποιούνται με την υπόθεση της κατανομής Poisson για να είναι συνεπής η σύγκρισή τους. Χρησιμοποίησαν τη κλασική μέθοδο των χρονοσειρών για την πρόβλεψη των ποσοστών θνησιμότητας με δεδομένα του Ηνωμένου Βασιλείου από το 1961 έως το 2000 για κάθε φύλο. Για τη σύγκριση των τριών διαφορετικών δομών που παρουσιάζονται σχολιάζονται τα γραφήματα των υπολειμμάτων. Μέσω της γραφικής απεικόνισης των υπολειμμάτων για τον πληθυσμό των γυναικών υπάρχει ένδειξη πως το απλό Lee-Carter (1992), ως μοντέλο που χρησιμοποιεί την ηλικία και το χρόνο (Age-Period), αδυνατεί να απεικονίσει την επίδραση των κοορτών καθώς τα υπολείμματα του έτους γέννησης απεικονίζουν κυματιστά εφέ. Ομοίως, τα διαγράμματα των υπολειμμάτων του μοντέλου ηλικίας-κοορτής (Age-Cohort) αποδεικνύουν μια αποτυχία να συλλάβουν την επίδραση των κοορτών. Όσον αφορά το τρίτο μοντέλο ηλικίας-χρόνου-κοορτής (Age-Period-Cohort), τα διακριτά φαινόμενα κυμάτωσης απομακρύνονται σε μεγάλο βαθμό υποδεικνύοντας τη σχετικά επιτυχημένη κάλυψη και των τριών κύριων επιπτώσεων και αντιπροσωπεύοντας σημαντική βελτίωση σε σύγκριση με το μοντέλο Lee-Carter (1992).

Αντίστοιχα αποτελέσματα παρουσιάστηκαν και για τον πληθυσμό των ανδρών. Η τελική αξιολόγηση της προσθήκης της κοορτής στο μοντέλο δίνεται μέσα από την ανάλυση των υπολειμμάτων. Είναι φανερό, όπως αναφέρθηκε και προηγουμένως, πως με το μοντέλο ηλικίας-χρόνου-κοορτής (Age-Period-Cohort) καταγράφονται στοιχεία που προέρχονται άμεσα και από τις τρεις μεταβλητές. Κατά συνέπεια, με το μοντέλο Lee-Carter (1992) τα στοιχεία αυτά δεν αποτυπώνονται.

### **1.3. Ανάγκη για Ταυτόχρονη Μοντελοποίηση Πληθυσμών**

Οι πληθυσμοί των χωρών όλου του κόσμου συνδέονται πλέον πολύ περισσότερο μέσω της επικοινωνίας, της μετακίνησης, του εμπορίου, της τεχνολογίας, αλλά και των ασθενειών. Ο Wilson (2001) τεκμηρίωσε την παγκόσμια σύγκλιση των επιπέδων θνησιμότητας. Όλο και περισσότερο φαίνεται πως δεν είναι σωστό να εκτιμάται η θνησιμότητα των χωρών μεμονωμένα από τις υπόλοιπες χώρες και ειδικότερα, των περιοχών εντός της ίδιας χώρας. Οι προβλέψεις θνησιμότητας ατομικά για κάθε ένα πληθυσμό, ακόμα και αν βασίζονται σε κοινές μεθόδους, είναι πιθανό να εμφανίσουν αυξημένη απόκλιση στο επίπεδο του προσδόκιμου ζωής μακροπρόθεσμα παρόλο που αναμένουμε και παρατηρούμε μια τάση σύγκλισης ανάμεσα στους πληθυσμούς (Bozikas, 2019).

Κατά το δεύτερο μισό του εικοστού αιώνα παρατηρήθηκε μια παγκόσμια δημογραφική αλλαγή πρωτοφανούς μεγέθους. Λαμβάνοντας υπόψη τον πληθυσμό όλου του κόσμου σαν ένα, η «United Nations Population Division» εκτιμά πως το προσδόκιμο ζωής αυξήθηκε από 46,5 χρόνια κατά τις αρχές της δεκαετίας 1950 σε 65,4 χρόνια κατά τα τέλη του 1990 (Wilson, 2001). Εν συνεχεία, η γονιμότητα μειώθηκε από μια μέση τιμή παγκοσμίως πέντε παιδιών ανά γυναίκα σε 2,7 ανά γυναίκα για την ίδια περίοδο που αναφέρθηκε. Μέσω της μελέτης του, ο Wilson (2001) ήθελε να τονίσει κατά πόσο αυτές οι αλλαγές οδήγησαν σε σύγκλιση δημογραφικών προτύπων σε όλο τον κόσμο. Για να αποδείξει αυτή τη θεώρησή του λαμβάνει υπόψη εκτός των επιπέδων της γονιμότητας και της θνησιμότητας κάθε χώρας σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, αλλά επίσης και του μεγέθους του εκάστοτε πληθυσμού. Το προβάδισμα της μελέτης του Wilson (2001) προήλθε από τον McNicoll (1999), ο οποίος επικεντρώθηκε στη στάθμιση των διαφόρων πληθυσμών παρά των εθνών (Wilson, 2001).

Με τη γραμμικότητα στη μεταβολή του προσδόκιμου ζωής ασχολήθηκαν μέσω μιας διαφορετικής μεθοδολογίας για την πρόβλεψη της θνησιμότητας οι Oerppen-Vaupel (2002) και ο White (2002). Οι Oerppen-Vaupel (2002) απέδειξαν πως το προσδόκιμο ζωής αυξήθηκε γραμμικά από το 1840 σε χώρες που κατείχαν ένα σημαντικό ποσοστό αύξησης («ρεκόρ»). Συγκεκριμένα, το 1840 το ρεκόρ κατείχαν οι Σουηδές, οι οποίες ζούσαν κατά μέσο όρο κάτι λιγότερο από 45 χρόνια. Κατά το 2002, το ρεκόρ κατείχαν οι Ιαπωνέζες με το μεγαλύτερο προσδόκιμο ζωής, σχεδόν 85 χρόνια. Αυτή η αύξηση κατά τέσσερις δεκαετίες είναι αξιοσημείωτα γραμμική ( $R^2=0,992$ ). Αντίστοιχα, γραμμικά αυξήθηκε το προσδόκιμο ζωής και για τους άνδρες, αλλά λιγότερο έντονα ( $R^2=0,980$ ). Ο White (2002), επίσης, έδειξε πως υπάρχει γραμμική σχέση στο προσδόκιμο ζωής 21 χωρών από το 1955 έως το 1995 για μικτούς πληθυσμούς (άνδρες και γυναίκες). Στις αναπτυγμένες χώρες, η γραμμική τάση του προσδόκιμου ζωής αποδείχθηκε ότι αντικατοπτρίζει πιο βέλτιστα την τάση της θνησιμότητας από ότι περίπλοκα μαθηματικά μοντέλα βασισμένα σε ποσοστά θνησιμότητας ανά ηλικία.

Για την τάση του προσδόκιμου ζωής μίλησαν, επίσης, οι Seligman, B., Greenberg, G. και Tuljapurkar, S. (2016), όπου αναφέρουν πως από το 1990 το προσδόκιμο ζωής συνεχίζει να αυξάνεται στις ανεπτυγμένες χώρες με μονοτονικό και γραμμικό τρόπο. Συνολικά, φαίνεται πως η τάση του προσδόκιμου ζωής είναι γραμμική και συνδυαστικά για τα δύο φύλα, αλλά και ξεχωριστά για το κάθε φύλο, για τις χώρες Καναδά, Γερμανία, Γαλλία, Μεγάλη Βρετανία, Ιταλία, Ιαπωνία και Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής. Η άλλη σημαντική τάση στη θνησιμότητα στις ανεπτυγμένες χώρες είναι η σύγκλιση του προσδόκιμου ζωής μεταξύ των φύλων. Από τις αρχές της δεκαετίας του 1970, το χάσμα μεταξύ προσδόκιμου ζωής των ανδρών και των γυναικών, το οποίο διευρύνθηκε, έχει μειωθεί.

Φαίνεται από τα παραπάνω αρκετά σημαντική η συσχέτιση που υπάρχει ανάμεσα στους πληθυσμούς όσον αφορά τη μοντελοποίηση είτε του προσδόκιμου ζωής είτε της θνησιμότητας. Λόγω αυτού, παρουσιάζονται στην επόμενη παράγραφο μερικά από τα πιο γνωστά πολύ-πληθυσμιακά μοντέλα πρόβλεψης της θνησιμότητας. Ειδική εστίαση δίνεται στην παρούσα εργασία, στη μοντελοποίηση δύο πληθυσμών.

#### 1.4. Ταυτόχρονη Μοντελοποίηση Πληθυσμών

Ένα από τα μοντέλα που αναπτύχθηκε ήταν η δεύτερη μεθοδολογία των Carter και Lee (1992), όπου εκτίμησαν μια κοινή παράμετρο  $kt$  για την πρόβλεψη της θνησιμότητας ανδρών και γυναικών. Ενώ, το απλό βασικό μοντέλο τους είχε αποδειχθεί πως δουλεύει αποτελεσματικά για ένα πληθυσμό (ένα φύλο για παράδειγμα ή ένα συνδυασμό των δύο φύλων), υπήρχαν αρκετοί λόγοι που τους ώθησαν στην επιλογή αυτή είτε από δημογραφικής πλευράς είτε στατιστικής. Από δημογραφικής πλευράς, μια κοινή παράμετρος  $kt$  μπορεί να επιφέρει μεγαλύτερη συνοχή ανάμεσα στα δύο φύλα αποφεύγοντας διάφορες ανωμαλίες στα δείγματα. Από στατιστικής πλευράς, μια κοινή παράμετρος  $kt$  είναι ένας σχετικά εύκολος τρόπος να συνδεθεί η θνησιμότητα των δύο φύλων αποφεύγοντας παράλληλα τα πιο περίπλοκα μοντέλα χρονοσειρών. Άλλωστε είναι πιο αποτελεσματικό να υπάρχει μια κοινή παράμετρος  $kt$  για τα δύο φύλα. Επίσης, οι Lee και Carter σκέφτηκαν πως θα ήθελαν ένα μοντέλο για την πρόβλεψη θνησιμότητας δύο πληθυσμών εντός της ίδιας χώρας ή περιοχής προκειμένου να μπορεί να αντικατοπτρίζεται η ίδια τάση αύξησης της θνησιμότητας μέσα στο χρόνο για τους δύο πληθυσμούς. Συνήθως, δύο πληθυσμοί εντός της ίδιας χώρας έχουν πρόσβαση στις ίδιες παροχές υγείας και ζουν με τις ίδιες περιβαλλοντικές συνθήκες. Επομένως, όταν αυτές οι παράμετροι, μαζί και με άλλες, βελτιωθούν, το προσδόκιμο ζωής κάθε πληθυσμού θα αυξηθεί ταυτόχρονα και στο ίδιο επίπεδο. Το μοντέλο αυτό παρέμεινε στη βιβλιογραφία ως Joint-K των Carter-Lee (1992).

Πιο αναλυτικά, η εκτίμηση μιας κοινή παραμέτρου  $kt$  γίνεται συνδυάζοντας τα ποσοστά θνησιμότητας των ανδρών και των γυναικών ανά ηλικία και χρησιμοποιώντας τη μέθοδο, που έχει προαναφερθεί, SVD. Με αυτή τη μεθοδολογία προκύπτει μια κοινή παράμετρος  $kt$  και ξεχωριστές παράμετροι  $ax$  και  $bx$  για κάθε φύλο. Έπειτα, ακολουθεί η επανεκτίμηση της παραμέτρου  $kt$  και προκύπτει μια παράμετρος που είναι συνεπής με τις παρατηρούμενες τιμές. Συγκεκριμένα, μελέτησαν, όπως και στο απλό βασικό μοντέλο, δεδομένα από τις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής από το 1900 έως το 1990. Η υπόλοιπη διαδικασία όσον αφορά την εκτίμηση της παραμέτρου  $kt$  και της πρόβλεψης των ποσοστών θνησιμότητας είναι κοινή με το απλό βασικό μοντέλο.

Ωστόσο, όπως αποδείχθηκε, η πρόβλεψη θνησιμότητας με μια κοινή παράμετρο  $kt$  παράγει μεγαλύτερη απόκλιση στο προσδόκιμο ζωής ανάμεσα στα δύο φύλα από ότι οι ατομικές προβλέψεις ξεχωριστά για κάθε φύλο. Με το Joint-K μοντέλο των Carter-Lee (1992), η πρόβλεψη για το 2065 είναι 80,8 έτη ζωής για άνδρες και 91,4 έτη ζωής για γυναίκες, όπου

προκύπτει διαφορά 10,6 χρόνια. Αντίστοιχα, με μεμονωμένες προβλέψεις για τα δύο φύλα προέκυψαν 82 έτη ζωής για άνδρες και 90,4 έτη ζωής για γυναίκες, όπου η διαφορά ισούται με 8,4 χρόνια. Επίσης, ένα σημαντικό μειονέκτημα του μοντέλου είναι πως υποθέτει τέλεια συσχέτιση ανάμεσα στα ποσοστά θνησιμότητας των πληθυσμών που εξετάζει. Τέλος, παρόλο που η παράμετρος  $kt$  είναι κοινή, η παράμετρος  $b_x$  για κάθε φύλο εξακολουθούσε να παράγει αποτελέσματα πρόβλεψης που δεν έδειχναν κάποια σύγκλιση ανάμεσα στα δύο φύλα.

Συνεχίζοντας, για να αποφευχθεί το τελευταίο μειονέκτημα που αναφέρθηκε για το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992) και αφού δεν λύνεται εντελώς το πρόβλημα της απόκλισης των ποσοστών θνησιμότητας, αναπτύχθηκε μια άλλη προσέγγιση από τους Li-Lee (2005). Θεωρήθηκε απαραίτητη και ικανή συνθήκη για τους πληθυσμούς που ανήκουν σε μια ομάδα (χώρα ή περιοχή) να έχουν κοινή την παράμετρο  $b_x$ , επιπλέον της παραμέτρου  $kt$ . Έτσι, δημιουργήθηκε το αξιοσημείωτο μοντέλο Common Factor από τους Li-Lee (2005). Σε αυτό το μοντέλο, η παράμετρος  $a_x$  εξακολουθεί να εκτιμάται χωριστά για κάθε πληθυσμό (πχ. χώρα ή φύλο), καθώς δεν προκαλεί μακροπρόθεσμη απόκλιση στις προβλέψεις θνησιμότητας και έτσι δεν απαιτείται να είναι ίδια για όλους τους πληθυσμούς. Έπειτα, εκτίμησαν την παράμετρο  $a_x$  χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων (Ordinary Least Squares-OLS). Στο Common Factor model των Li-Lee (2005), η μεταβολή της θνησιμότητας στην πάροδο του χρόνου περιγράφεται από τον όρο ( $BxKt$ ), ο οποίος είναι κοινός για κάθε πληθυσμό εντός της ομάδας που εξετάζεται. Η παράμετρος  $Kt$  εκτιμάται και πάλι με τη χρήση χρονοσειρών και συγκεκριμένα με τυχαίο περίπατο (random walk with a drift). Έπειτα, το ίδιο αυτό μοντέλο εξελίχθηκε ούτως ώστε τα ποσοστά θνησιμότητας του εκάστοτε πληθυσμού να προσδιορίζονται και από έναν παράγοντα που να αντικατοπτρίζει και τα χαρακτηριστικά του. Ο πρόσθετος παράγοντας ονομάζεται augmented και τελικά προέκυψε το μοντέλο Augmented Common factor των Li-Lee (2005). Σε διάφορες περιοχές εντός μιας χώρας, ο κοινός παράγοντας (common factor) χρησιμοποιήθηκε για την επίτευξη της μακροπρόθεσμης σύγκλισης και ο αυξημένος όρος (augmented) χρησιμοποιήθηκε για να διαχωρίσει τα ποσοστά θνησιμότητας για κάθε περιοχή. Οι Li και Lee πίστευαν εξίσου πως υπάρχει παγκόσμια σύγκλιση ανάμεσα στους πληθυσμούς καθώς είναι αρκετά συνδεδεμένοι μέσω της σύγχρονης τεχνολογίας επικοινωνιών. Επομένως, μακροπρόθεσμα τα εκτιμώμενα ποσοστά θνησιμότητας των διαφορετικών πληθυσμών θα συγκλίνουν.

Αυτή η μέθοδος εφαρμόστηκε αρχικά για την πρόβλεψη θνησιμότητας με δεδομένα ατόμων από την Σουηδία από το 1950 έως το 2002 για τα δύο φύλα και έπειτα, εφαρμόστηκε για

δεκαπέντε χώρες ταυτόχρονα. Το Augmented Common factor στοχεύει στη μοντελοποίηση και την πρόβλεψη μιας ομάδας πληθυσμών που συνδέονται μεταξύ τους, λαμβάνοντας υπόψη τα κοινά σημεία από την ιστορική εμπειρία και τα πρότυπα ηλικίας και παράλληλα τις ιδιαιτερότητες του κάθε πληθυσμού στα πρότυπα ηλικίας και την τάση της θνησιμότητας. Οι πληθυσμοί που είναι αρκετά όμοιοι για να ομαδοποιηθούν μπορούν, παρόλα αυτά, να έχουν κάπως διαφορετικές τάσεις θνησιμότητας. Αυτές οι παρελθούσες διαφορές δεν θα πρέπει να μας οδηγήσουν στην αναμενόμενη μακροχρόνια απόκλιση στο μέλλον, αλλά ούτε θα πρέπει να περιμένουμε το μέλλον να εξαλείψει όλες αυτές τις διαφορές.

Ένα ακόμα μοντέλο δημιουργήθηκε από τους Li-Hardy (2011) σε μια έρευνα τους με θέμα τη μέτρηση και την αντιστάθμιση του κινδύνου μακροζωίας. Για να αποτιμήσουν πρώτα τον κίνδυνο, λαμβάνουν ως βάση κινδύνου έναν πληθυσμό που θα χρησιμοποιούσαν για την εφαρμογή της αντιστάθμισης, ενώ ο πληθυσμός που τους ενδιαφέρει είναι διαφορετικός. Ωστόσο, θεώρησαν ότι δεν πρέπει να παραβλέψουν τη εξάρτηση της θνησιμότητας μεταξύ των δύο αυτών πληθυσμών και για αυτό το λόγο χρησιμοποίησαν τέσσερα διαφορετικά μοντέλα ταυτόχρονης πρόβλεψης της θνησιμότητας. Και τα τέσσερα μοντέλα αποτελούν προεκτάσεις του απλού μοντέλου Lee-Carter (1992) και ενσωματώνουν αυτή την εξάρτηση μεταξύ των πληθυσμών. Πιο αναλυτικά, χρησιμοποίησαν, επιπλέον, του απλού μοντέλου Lee-Carter (1992), το Joint-K των Carter-Lee (1992), το Augmented Common factor των Li-Lee (2005) και τέλος, το μοντέλο που πρότειναν οι ίδιοι, το Co-integrated Lee-Carter. Παλαιότερα, τα υπάρχοντα στοχαστικά μοντέλα είχαν σχεδιαστεί έτσι ώστε να μοντελοποιούν και να προβλέπουν τη θνησιμότητα ενός πληθυσμού. Αν και τεχνικά είναι εφικτή η εκτέλεση προσομοιώσεων δύο μοντέλων ανεξάρτητα, το τελικό αποτέλεσμα δεν θα είναι απόλυτα ορθό καθώς δεν λαμβάνονται υπόψη οι θετικές συσχετίσεις ανάμεσα στους ρυθμούς θνησιμότητας. Επομένως, αντί να πραγματοποιηθούν δύο ανεξάρτητοι υπολογισμοί για τον κάθε πληθυσμό μέσω του απλού μοντέλου Lee-Carter (1992), πρότειναν το Co-integrated Lee-Carter καθώς παρατήρησαν πως υπάρχει μια εξάρτηση ανάμεσα στις παραμέτρους του χρόνου,  $k_t$ , των δύο πληθυσμών. Βάσει του νέου αυτού μοντέλου, δημιουργείται μια γραμμική συνάρτηση μεταξύ των δύο παραμέτρων. Η συνάρτηση αυτή περιέχει δύο στοχαστικές πηγές, κάθε μια προέρχεται από την εκάστοτε παράμετρο του χρόνου,  $k(t,1)$  και  $k(t,2)$ . Κάθε διάνυσμα  $k(t,i)$  δεν είναι στάσιμο, αλλά η πρώτη παράγωγος του είναι στάσιμη. Ουσιαστικά, μέσα από αυτή τη διαδικασία φαίνεται ότι υπάρχουν δύο κινητήριες δυνάμεις που διέπουν τη βελτίωση της μακροζωίας των δύο πληθυσμών. Ωστόσο, είναι απολύτως πιθανό αυτές οι δύο κινητήριες δυνάμεις να είναι οι ίδιες. Οι οικονομολόγοι αποκαλούν αυτή την κατάσταση συνένωση

(“Cointegration”). Η συνένωση καθορίζει τη διαδικασία των χρονοσειρών. Πιο συγκεκριμένα, εάν υπάρχει συνένωση, η διαδικασία των χρονολογικών σειρών θα πρέπει να αποτελείται από ένα μόνο, αντί για δύο, τυχαίους περιπάτους. Καθώς η διαδικασία των χρονοσειρών επηρεάζει άμεσα τα αποτελέσματα των προβλέψεων της θνησιμότητας του πληθυσμού, πρέπει να εξεταστεί προσεκτικά.

Η ιδέα της συνένωσης των δύο πληθυσμών έχει αρκετά νοήματα από δημογραφικής άποψης. Πρώτον, χάρις τη γραμμική συνάρτηση που ενώνει τις παραμέτρους χρόνου ακυρώνονται οι τυχαίοι περίπατοι που δημιουργούνται από κάθε παράμετρο ξεχωριστά. Επομένως, η βελτίωση της μακροζωίας των δύο πληθυσμών διέπεται από μια μόνο πηγή και όχι δύο. Δεύτερον, δημιουργείται μια σχέση ισορροπίας ανάμεσα στους ρυθμούς θνησιμότητας των δύο πληθυσμών. Η ισορροπία αυτή καθορίζεται από τη γραμμική συνάρτηση του μοντέλου. Το μόνο πρόβλημα που δημιουργείται είναι πως δεν είναι πάντοτε εύκολο να καθοριστεί η συνένωση των δύο παραμέτρων. Τέλος, πραγματοποιήσαν τη μελέτη τους σε δεδομένα γυναικείου πληθυσμού από τον Καναδά και από τις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής και ανέδειξαν το Augmented Common factor των Li-Lee (2005) ως το καλύτερο μοντέλο από τα τέσσερα βάσει των αποτελεσμάτων τους.

Μια επιπλέον προέκταση του απλού μοντέλου Lee-Carter ήταν το μοντέλο Common Age του Kleinow (2015). Βάσει του μοντέλου αυτού υπάρχουν δύο ζευγάρια παραμέτρων, το ένα αφορά τους παράγοντες που εξαρτώνται από την ηλικία (για παράδειγμα για δύο πληθυσμούς θα υπήρχαν οι  $b_1(x)$  και  $b_2(x)$ , αλλιώς “age effects”) και ακόμα ένα ζευγάρι με τους παράγοντες που εξαρτώνται από το χρόνο, αλλά και τα χαρακτηριστικά του κάθε πληθυσμού (για παράδειγμα για δύο πληθυσμούς θα υπήρχαν οι  $k(t,1)$  και  $k(t,2)$ , αλλιώς “period effects”). Οι παράμετροι που σχετίζονται με την ηλικία είναι κοινά για όλους τους πληθυσμούς του μοντέλου. Ενώ, μια διακριτή διαφορά με τα προαναφερθέντα μοντέλα της βιβλιογραφίας είναι ότι το μοντέλο προϋποθέτει μια παράμετρο για το χρόνο για κάθε πληθυσμό. Κάτι αντίστοιχο ισχύει και για το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992), στο οποίο μοντελοποιείται κάθε πληθυσμός ξεχωριστά με αποτέλεσμα να δημιουργείται ένα παράγοντας για την ηλικία για κάθε πληθυσμό. Με αυτόν τον τρόπο είναι ακόμα πιο δύσκολο να συγκριθούν οι παράμετροι του χρόνου ( $k(t,1)$  και  $k(t,2)$ , “period effects”) των πληθυσμών αυτών καθώς προσαρμόζονται από διαφορετικά αποτελέσματα ηλικίας.

Η ιδέα του μοντέλου προέκυψε από την παρατήρηση πως τα age effects είναι αρκετά όμοια όταν εκτιμώνται για διαφορετικούς πληθυσμούς με κοινά κοινωνικοοικονομικά



χαρακτηριστικά. Αυτό συνεπάγεται πως οι παράμετροι του μοντέλου, και συγκεκριμένα τα age effects μπορούν να μειωθούν όταν η θνησιμότητα διαφορετικών πληθυσμών μοντελοποιείται ταυτόχρονα. Το μοντέλο εφαρμόστηκε σε δεδομένα ανδρών ηλικίας από 18 έως 87 για τις εξής δέκα χώρες, Αυστρία, Αυστραλία, Καναδάς, Ελβετία, Δανία, Γαλλία, Μεγάλη Βρετανία, Νέα Ζηλανδία, Σουηδία και Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής. Η επιλογή αυτών των δέκα χωρών έγινε λόγω του ότι είναι και οι δέκα καλά ανεπτυγμένες και έχουν κοινά κοινωνικοοικονομικά χαρακτηριστικά. Τα ποσοστά θνησιμότητας που χρησιμοποιήθηκαν ήταν από τα έτη 1984 έως 2007.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Στο παρόν κεφάλαιο, αρχικά αναλύονται τέσσερα μοντέλα θνησιμότητας για παραπάνω από έναν πληθυσμούς, τα οποία βασίζονται στο απλό μοντέλο Lee-Carter. Στη συνέχεια, προσαρμόζουμε τα δεδομένα των δεικτών θνησιμότητας από τη βάση δεδομένων Human Mortality Database (2020) για να λάβουμε τις εκτιμώμενες παραμέτρους που μπορούν να εφαρμοστούν στα μοντέλα θνησιμότητας με σκοπό την πρόβλεψη μελλοντικών δεικτών θνησιμότητας.

Πιο αναλυτικά, τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται αφορούν τον πληθυσμό της Ελλάδας και καλύπτουν μια περίοδο παρατήρησης 30 ετών, από το έτος 1981 έως το έτος 2010. Τα δεδομένα περιλαμβάνουν τους δείκτες θνησιμότητας ανδρών και γυναικών ηλικίας από 20 έως 84 ετών. Επιλέχθηκε αυτό το εύρος ηλικιών καθώς αντικατοπτρίζει την ηλικία ενός ενήλικα μέχρι τη μέση ηλικία του προσδόκιμου ζωής των αναπτυγμένων χωρών (Bozikas, 2019). Θεωρούμε για δύο ομάδες ανθρώπων που βιώνουν κοινές κοινωνικοοικονομικές συνθήκες πως υπάρχει συσχέτιση στο ρυθμό θνησιμότητας τους, όπως αναλυτικά αναφέρθηκε στην Παρ. 1.3, και για αυτό μελετάμε τη μοντελοποίηση της θνησιμότητας των δύο πληθυσμών από κοινού.

### 2.1. Έννοιες και Συμβολισμοί

Τα μοντέλα που αναλύονται στις επόμενες παραγράφους εκτιμούν και προβλέπουν τις τιμές του κεντρικού δείκτη θνησιμότητας  $m_{x,t,i}$ , όπου  $x$  είναι η μεταβλητή που δηλώνει την ηλικία,  $t$  η μεταβλητή που δηλώνει το χρόνο και  $i$  η μεταβλητή που δηλώνει τον πληθυσμό. Ο κεντρικός δείκτης θνησιμότητας προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$m_{x,t,i} = \frac{D_{x,t,i}}{E_{x,t,i}}, \quad (2.1.1)$$

όπου στον αριθμητή εμφανίζεται ο παρατηρούμενος αριθμός θανάτων και στον παρονομαστή η έκθεση στον κίνδυνο (ο μέσος πληθυσμός) τον χρόνο  $t$  και σε ηλικία  $x$  για τον πληθυσμό  $i$ .

Επιπλέον, θεωρούμε ως  $\mu_{x,t,i}(s)$  τη συνάρτηση της έντασης θνησιμότητας, η οποία θεωρείται το στιγμιαίο ποσοστό θανάτου για ένα διάστημα ηλικίας  $x$  έως  $x+s$  για το έτος  $t$  ενός ατόμου ηλικίας  $x$ . Με άλλα λόγια, εκφράζει την οριακή τιμή του ειδικού κατά ηλικία συντελεστή

θνησιμότητας του διαστήματος  $[x, x+\Delta x)$ , όπου το  $\Delta x$  είναι απειροελάχιστο. Έχει αποδειχθεί πως ισχύει η παρακάτω σχέση,

$$q_{x,t,i} = 1 - e^{-\int_0^1 \mu_{x,t,i}(s) ds}. \quad (2.1.2)$$

Υπό την υπόθεση της σταθερής έντασης θνησιμότητας για ένα διάστημα ενός έτους, ισχύει η επόμενη σχέση,

$$q_{x,t,i} = 1 - e^{-\mu_{x,t,i}}. \quad (2.1.3)$$

Με βάση την υπόθεση που προαναφέρθηκε αποδεικνύεται πως  $\mu_{x,t,i}(s) \sim m_{x,t,i}$ . Επομένως καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση,

$$q_{x,t,i} \sim 1 - e^{-m_{x,t,i}}. \quad (2.1.4)$$

Χάρη στη σχέση (2.1.4), είναι εφικτό να χρησιμοποιηθούν τα  $m_{x,t,i}$  στα μοντέλα θνησιμότητας που αναλύονται στις επόμενες παραγράφους και έπειτα, να τα μετατρέψουμε στις πιθανότητες θανάτου, εάν χρειαστεί.

## 2.2. Μοντελοποίηση της Θνησιμότητας με το Μοντέλο Lee-Carter

Ένας από τους τρόπους, και συγκεκριμένα ο πιο απλός, για να μοντελοποιηθεί η θνησιμότητα και να προβλεφθούν τα μελλοντικά ποσοστά της για παραπάνω από έναν πληθυσμούς, είναι να επιλεγεί το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992). Με αυτό τον τρόπο, υπολογίζονται χωριστά τα ποσοστά θνησιμότητας του εκάστοτε πληθυσμού.

Οι Lee και Carter (1992) πρότειναν ένα μοντέλο βάσει του οποίου ο φυσικός λογάριθμος του δείκτη θνησιμότητας ενός πληθυσμού μπορεί να εκφραστεί μέσα από μια συνάρτηση, η οποία αποτελείται από δύο παράγοντες που σχετίζονται με την ηλικία και ένα παράγοντα που σχετίζεται με τον χρόνο. Η συνάρτηση αυτή είναι η εξής:

$$\ln(m_{x,t,i}) = a_{x,i} + b_{x,i} * k_{t,i} + \varepsilon_{x,t,i}, \quad (2.2.1)$$

όπου

$x$ : μεταβλητή, δηλώνει την ηλικία για  $x = x_0, \dots, x_n$

$t$ : μεταβλητή, δηλώνει το χρόνο για  $t = t_0, \dots, t_T$

$i$ : μεταβλητή, δηλώνει τον πληθυσμό για  $i = 1, 2$

$m_{x,t,i}$ : ο παρατηρούμενος δείκτης θνησιμότητας στην ηλικία  $x$  το έτος  $t$  για τον πληθυσμό  $i$

$a_{x,i}$ : παράμετρος ηλικίας, εκφράζει τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία  $x$  του πληθυσμού  $i$

$b_{x,i}$ : παράμετρος ηλικίας, εκφράζει την απόκλιση από τη μέση θνησιμότητα σε μια μεταβολή του δείκτη  $k_{t,i}$  στην ηλικία  $x$  του πληθυσμού  $i$

$k_{t,i}$ : παράμετρος χρόνου, εκφράζει το γενικό επίπεδο θνησιμότητας στο έτος  $t$  πληθυσμού  $i$

$\varepsilon_{x,t,i}$ : η τιμή του σφάλματος στην ηλικία  $x$  το έτος  $t$  για τον πληθυσμό  $i$ , εκφράζει ειδικά πρότυπα ηλικίας και χρόνου που δεν λαμβάνονται υπόψη από το μοντέλο.

### 2.2.1. Εκτίμηση των Παραμέτρων του Μοντέλου Lee-Carter

Για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί κάποια μέθοδος απλής παλινδρόμησης καθώς όλες οι παράμετροι του δεξιού μέλους είναι άγνωστες. Οι πιο διαδεδομένες μέθοδοι εκτίμησης των παραμέτρων είναι η μέθοδος Διάσπασης Ιδιαζουσών Τιμών (Singular Value Decomposition, “SVD”), η μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας Poisson και η μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων. Ωστόσο, έχει αναπτυχθεί μια αλγεβρική προσέγγιση της μεθόδου SVD, η οποία χρησιμοποιείται για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας.

Η προσέγγιση της μεθόδου SVD βασίζεται στους δύο παρακάτω περιορισμούς των παραμέτρων:

$$\sum_{x=x_0}^{x_n} b_{x,i} = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{t=t_0}^{t_T} k_{t,i} = 0. \quad (2.2.2)$$

Χάρη στους δύο περιορισμούς της σχέσης (2.2.2), προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις και βάσει αυτών θα εκτιμηθούν οι παράμετροι του μοντέλου. Υποθέτουμε ότι τα σφάλματα είναι ανεξάρτητα και ότι ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση σταθερή και ίση με  $\sigma^2$  για όλα τα έτη  $t$ , είναι δηλαδή ομοσκεδαστικά. Μέσω της μεθοδολογίας ελαχίστων τετραγώνων για τις παραμέτρους  $a_{x,i}$ ,  $b_{x,i}$  και  $k_{t,i}$ , θεωρούμε την ακόλουθη εξίσωση:

$$f(a_{x,i}, b_{x,i}, k_{t,i}) = \sum_{x,t} [\ln(m_{x,t,i}) - a_{x,i} - b_{x,i} * k_{t,i}]^2. \quad (2.2.3)$$

Για τις τρεις παραμέτρους υπολογίζουμε τη μερική παράγωγο της σχέσης (2.2.3) και την εξισώνουμε με το 0 για να εξασφαλίσουμε ότι υπολογίζουμε την ελάχιστη τιμή (Μποζίκας Α. 2013).

Για την παράμετρο  $a_x$  για ένα πληθυσμό  $i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial a_x} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a_x} = -2 * \sum_t (\ln m_{x,t} - a_x - b_x * k_t) = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial a_x} = \sum_t \ln m_{x,t} - \sum_t a_x - b_x * \sum_t k_t = 0 \\ &\Rightarrow \sum_t a_x = \sum_t \ln m_{x,t} - b_x * \sum_t k_t, \quad \text{όπου } \sum_t k_t = 0 \\ &\Rightarrow \sum_t a_x = \sum_t \ln m_{x,t} \\ &\Rightarrow a_x = \frac{1}{t_T - t_0 + 1} \sum_t \ln m_{x,t} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Για την παράμετρο  $k_t$  για ένα πληθυσμό  $i$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial k_t} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial k_t} = -2 * \sum_x (\ln m_{x,t} - a_x - b_x * k_t) * b_x = 0 \\ &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial k_t} = \sum_x (\ln m_{x,t} - a_x - b_x * k_t) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sum_x \ln m_{x,t} - \sum_x a_x - \sum_x b_x * k_t = 0 \\
&\Rightarrow \sum_x \ln m_{x,t} - \sum_x a_x - k_t \sum_x b_x = 0, \text{ όπου } \sum_x b_x = 1 \\
&\Rightarrow k_t = \sum_x \ln m_{x,t} - \sum_x a_x \tag{2.2.5}
\end{aligned}$$

Για την παράμετρο  $b_x$  για ένα πληθυσμό  $i$ :

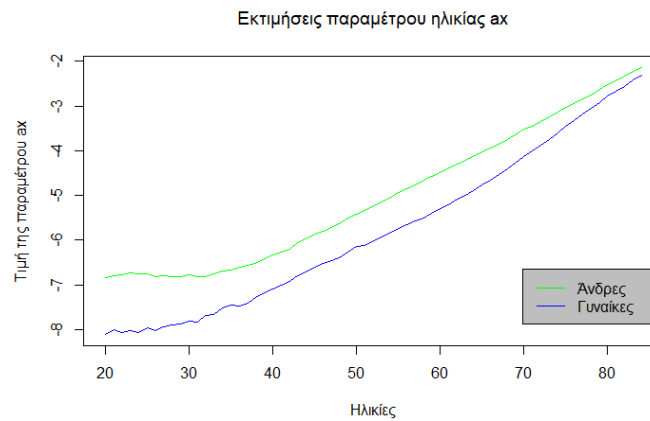
$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial b_x} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial b_x} = -2 * \sum_t (\ln m_{x,t} - a_x - b_x * k_t) * k_t = 0 \\
&\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial b_x} = \sum_t (\ln m_{x,t} - a_x) * k_t - \sum_t b_x * k_t^2 = 0 \\
&\Rightarrow b_x * \sum_t k_t^2 = \sum_t (\ln m_{x,t} - a_x) * k_t \\
&\Rightarrow b_x = \frac{\sum_t (\ln m_{x,t} - a_x) * k_t}{\sum_t k_t^2} \tag{2.2.6}
\end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις, (2.2.4), (2.2.5), (2.2.6), μοντελοποιήθηκαν σε κώδικα προγραμματισμού της R, ο οποίος παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.1. και τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων για τις παραμέτρους  $a_{x,i}$ ,  $b_{x,i}$  και  $k_{t,i}$ , παρουσιάζονται αναλυτικά στο Παράρτημα Α. Πιο συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις των παραμέτρων  $a_{x,i}$  και  $b_{x,i}$  που προκύπτουν από τις σχέσεις (2.2.4) και (2.2.6) αντίστοιχα, δίνονται από τον Πίνακα Α1, ενώ οι εκτιμήσεις για την παράμετρο χρόνου  $k_{t,i}$  που υπολογίζεται βάσει της σχέσης (2.2.5) δίνεται από τον Πίνακα Α2.

Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις που κατασκευάστηκαν για τις τιμές των παραμέτρων ηλικίας  $a_{x,i}$  (Διάγραμμα 3) και  $b_{x,i}$  (Διάγραμμα 4) και της παραμέτρου του χρόνου  $k_{t,i}$  (Διάγραμμα 5) για τους δύο πληθυσμούς μαζί, άνδρες και γυναίκες.

**Διάγραμμα 3** Σύγκριση των εκτιμήσεων της μέσης θνησιμότητας  $a_{x,i}$  για άνδρες και γυναίκες με το μοντέλο Lee-Carter (1992).

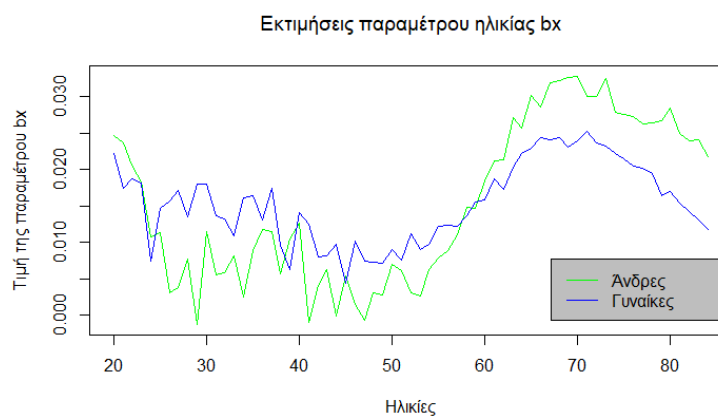
(Πράσινο χρώμα= Άνδρες, Μπλε χρώμα=Γυναίκες)



Στο Διάγραμμα 3 παρατηρούμε πως οι τιμές της παραμέτρου  $a_x$  έχουν την ίδια συμπεριφορά για τους δύο πληθυσμούς που εξετάζουμε, άνδρες και γυναίκες. Ωστόσο, παρατηρούμε πως οι άνδρες τείνουν να εμφανίζουν χαμηλότερες τιμές μέσης θνησιμότητας. Η μεγαλύτερη απόκλιση παρατηρείται στις μικρότερες ηλικίες του δείγματος μας, από 20 έως 30 ετών.

**Διάγραμμα 4** Σύγκριση των εκτιμήσεων της απόκλισης από τη μέση θνησιμότητα  $b_{x,i}$  για άνδρες και γυναίκες με το μοντέλο Lee-Carter (1992).

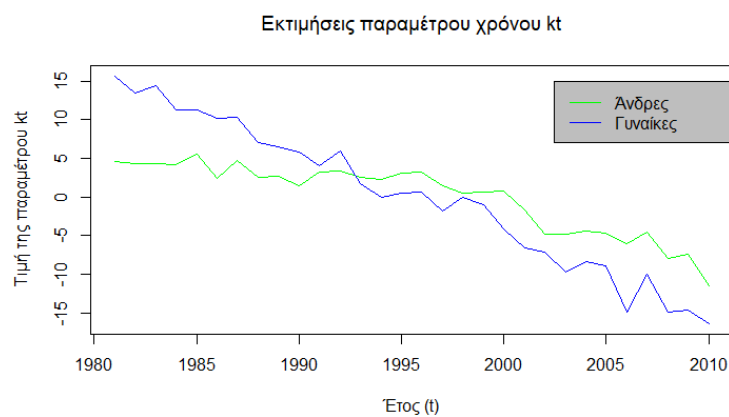
(Πράσινο χρώμα= Άνδρες, Μπλε χρώμα=Γυναίκες)



Στο Διάγραμμα 4 παρατηρούμε, επίσης, πως οι τιμές της παραμέτρου  $b_x$  έχουν την ίδια συμπεριφορά για τους δύο πληθυσμούς που εξετάζουμε, άνδρες και γυναίκες. Η παράμετρος  $b_x$  εκφράζει την τάση της θνησιμότητας (αύξηση ή μείωση) ανά ηλικία όσο αλλάζει το γενικό επίπεδο της θνησιμότητας,  $k_t$ . Ένα συμπέρασμα που θα μπορούσαμε να εξάγουμε είναι πως σε μεγαλύτερες ηλικίες και στα δύο φύλα, η θνησιμότητα τείνει να μεταβάλλεται λίγο πιο έντονα.

**Διάγραμμα 5** Σύγκριση των εκτιμήσεων της παραμέτρου του χρόνου  $k_{t,i}$  για άνδρες και γυναίκες με το μοντέλο Lee-Carter (1992).

(Πράσινο χρώμα= Άνδρες, Μπλε χρώμα=Γυναίκες)



Όπως παρατηρούμε στο Διάγραμμα 5, κατά την περίοδο προσαρμογής που εξετάζουμε από το 1981 έως το 2010, οι τιμές της παραμέτρου  $k_t$  και των δύο φύλων μειώνονται σχεδόν γραμμικά παρουσιάζοντας μικρές αυξομειώσεις κατά διαστήματα. Σημειώνεται πως οι τιμές των γυναικών ξεκινούν από υψηλότερα επίπεδα. Στα τέλη της περιόδου που εξετάζουμε, οι τιμές της παραμέτρου έχουν έντονα αρνητικές τιμές.

Σημειώνεται πως επιπλέον του κώδικα που αναπτύχθηκε με την προσέγγιση της μεθόδου SVD, για το συγκεκριμένο μοντέλο θνησιμότητας χρησιμοποιήθηκε επιπλέον ένα πακέτο της R που ονομάζεται “Demography” για σκοπούς επαλήθευσης των αποτελεσμάτων. Σύμφωνα με το εν λόγω πακέτο, η μοντελοποίηση της θνησιμότητας πραγματοποιείται με την αυθεντική μέθοδο SVD. Τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων για τις παραμέτρους  $a_{x,i}$ ,  $b_{x,i}$  και  $k_{t,i}$  που προέκυψαν είναι πολύ κοντά στις τιμές που προκύπτουν μέσω της προσέγγισης της μεθόδου SVD που προαναφέρθηκε.



### 2.2.2. Προβολή Θνησιμότητας με το Μοντέλο Lee-Carter

Για την πρόβλεψη των ποσοστών θνησιμότητας, έχοντας ως βάση τα δεδομένα που καλύπτουν την περίοδο παρατήρησης των 30 ετών, από το έτος 1981 έως το έτος 2010, προβάλλουμε την παράμετρο του χρόνου του εκάστοτε πληθυσμού για επτά έτη και έπειτα, θα υπολογιστούν οι αντίστοιχες τιμές του δείκτη θνησιμότητας για την περίοδο πρόβλεψης από το έτος 2011 έως το έτος 2017.

Το μοντέλο Lee-Carter (1992) είναι στενά συνδεδεμένο με την ανάλυση χρονολογικών σειρών και πιο συγκεκριμένα, με την ανάλυση Αυτοπαλινδρομούμενων Ολοκληρωμένων Υποδειγμάτων Κινούμενου Μέσου (Autoregressive integrated moving average-ARIMA). Η παράμετρος του χρόνου  $k_t$  θεωρείται τυχαία διαδικασία και για αυτό η εκτίμηση της πραγματοποιείται μέσα από μια χρονοσειρά. Σύμφωνα με τους Lee-Carter (1992), η καλύτερη επιλογή είναι ο τυχαίος περίπατος με μετατόπιση (Random Walk with Drift, RWD), όπως αναλύεται παρακάτω:

$$\hat{k}_t = \hat{k}_{t-1} + \theta + \varepsilon_t, \quad (2.2.7)$$

όπου  $\theta$ : παράμετρος μετατόπισης και  $\varepsilon_t$ : σφάλμα του έτους  $t$ .

Η εκτίμηση της παραμέτρου μετατόπισης  $\theta$  προκύπτει από την ακόλουθη σχέση:

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{k}_{t_T} - \hat{k}_{t_0}}{t_T - t_0}. \quad (2.2.8)$$

Υποθέτουμε ότι τα σφάλματα  $\varepsilon_t$  είναι λευκός θόρυβος και ομοσκεδαστικά, δηλαδή ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση σταθερή και ίση με  $\sigma^2$  για όλα τα έτη  $t$ .

Η σχέση (2.2.7) είναι μια αναδρομική σχέση και διαμορφώνεται ως εξής για κάθε έτος:

$$t=t_1 \quad \hat{k}_{t_1} = \hat{k}_{t_0} + \hat{\theta} + \varepsilon_{t_1}$$

$$t=t_2 \quad \hat{k}_{t_2} = \hat{k}_{t_0} + 2\hat{\theta} + (\varepsilon_{t_2} + \varepsilon_{t_1})$$

$$t=t_3 \quad \hat{k}_{t_3} = \hat{k}_{t_0} + 3\hat{\theta} + (\varepsilon_{t_3} + \varepsilon_{t_2} + \varepsilon_{t_1}), \text{ κ.λ.π.}$$

Επομένως, για μια μεταβολή του χρόνου κατά  $\Delta t$ , προκύπτει η σχέση:

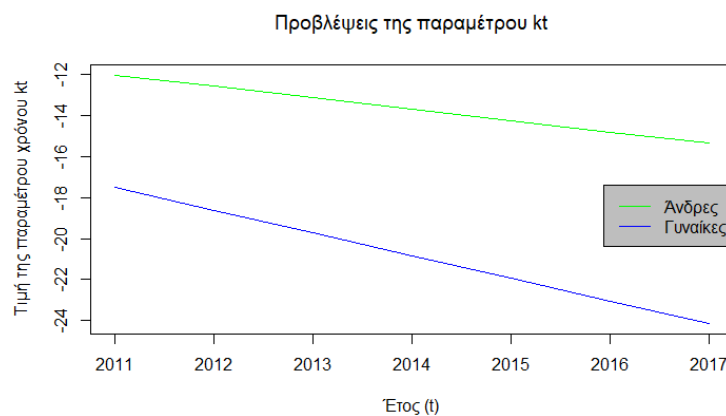
$$\hat{k}_t = \hat{k}_{t-\Delta t} + (\Delta t) * \hat{\theta} + \sum_{t=1}^{\Delta t} \varepsilon_t. \quad (2.2.9)$$

Όπως προαναφέρθηκε, υποθέτουμε ότι τα σφάλματα είναι ανεξάρτητα και ομοσκεδαστικά και με αυτή την υπόθεση μπορούμε να προχωρήσουμε στην απλοποίησή τους. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στην παρακάτω τελική σχέση για τον υπολογισμό του  $\hat{k}_t$  μέσω των σχέσεων (2.2.8) και (2.2.9),

$$\begin{aligned} \hat{k}_{t_T+\Delta t} &= \hat{k}_{t_T} + (\Delta t) * \hat{\theta} \\ \Rightarrow \hat{k}_{t_T+\Delta t} &= \hat{k}_{t_T} + (\Delta t) * \frac{\hat{k}_{t_T} - \hat{k}_{t_0}}{t_T - t_0}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Οι τιμές των προβλέψεων για την παράμετρο χρόνου  $\hat{k}_t$  παρουσιάζονται στον Πίνακα Α3 του Παρατήματος Α και ακολουθεί η γραφική τους παράσταση (Διάγραμμα 6) που κατασκευάστηκε και για τους δύο πληθυσμούς μαζί, άνδρες και γυναίκες.

**Διάγραμμα 6** Προβλέψεις της παραμέτρου του χρόνου  $k_{t,i}$  για άνδρες και γυναίκες για την περίοδο πρόβλεψης από το έτος 2011 έως το έτος 2017 με το μοντέλο Lee-Carter (1992).  
(Πράσινο χρώμα= Άνδρες, Μπλε χρώμα=Γυναίκες)



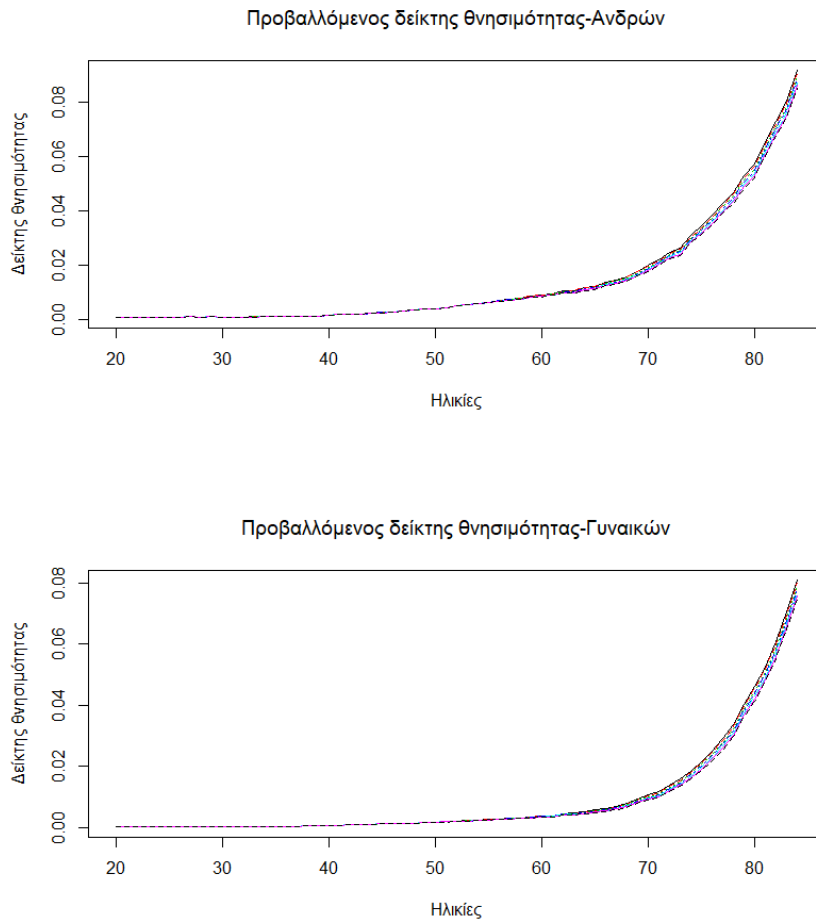
Κατά συνέπεια, ο λογάριθμος του δείκτη θνησιμότητας για έναν πληθυσμό  $i$  για την περίοδο πρόβλεψης των επτά ετών προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$\ln(\hat{m}_{x,t_T+h,i}) = \hat{a}_{x,i} + \hat{b}_{x,i} * \hat{k}_{t_T+h,i} = \ln(\hat{m}_{x,t_T,i}) + \hat{b}_{x,i} * \hat{\theta} * h, \quad (2.2.11)$$

όπου  $h$  είναι η μεταβλητή που δηλώνει τα χρόνια της περιόδου πρόβλεψης και παίρνει τιμές από 1 έως 7.

Οι τιμές των προβλέψεων του δείκτη θνησιμότητας παρουσιάζονται στον Πίνακα Α4 και Πίνακα Α5 του Παρατήματος Α αντίστοιχα για κάθε φύλο και ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις (Διάγραμμα 8) για τους δύο πληθυσμούς, άνδρες και γυναίκες.

**Διάγραμμα 7** Προβλεπόμενος δείκτης θνησιμότητας για άνδρες και γυναίκες για την περίοδο πρόβλεψης από το έτος 2011 έως το έτος 2017 με το μοντέλο Lee-Carter (1992).



### 2.3. Μοντελοποίηση της Θνησιμότητας με το Μοντέλο Joint-K των Carter-Lee

Οι Carter-Lee (1992) πρότειναν το Joint-K μοντέλο προκειμένου να ελέγξουν και να εντάξουν τις συσχετισμένες κινήσεις των ποσοστών θνησιμότητας δύο πληθυσμών σε ένα μοντέλο. Προφανώς, δύο ανεξάρτητα μοντέλα θνησιμότητας δεν λαμβάνουν υπόψη αυτή τη συσχέτιση μεταξύ των πληθυσμών. Οι άνδρες και οι γυναίκες μιας χώρας ζουν στο ίδιο περιβάλλον και τα επίπεδα της θνησιμότητας τούς επηρεάζονται από τους ίδιους παράγοντες. Για να κάνουν πραγματικότητα αυτή τη θεωρία και να συσχετίσουν τον έναν πληθυσμό με τον άλλο, δημιούργησαν το Joint-K μοντέλο (Carter-Lee, 1992). Βάσει αυτού του μοντέλου, η παράμετρος του χρόνου  $k_{t,i}$ , η οποία εκφράζει το γενικό επίπεδο θνησιμότητας στο έτος  $t$ , είναι κοινή για τους δύο πληθυσμούς, που σημαίνει ότι  $k_{t,1} = k_{t,2} = K_t$ . Κατά τα άλλα, το Joint-K μοντέλο κατασκευάζεται όπως και το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992) και μπορεί να εκφραστεί με την ακόλουθη σχέση:

$$\ln(m_{x,t,i}) = a_{x,i} + b_{x,i} * K_t + \varepsilon_{x,t,i}, \quad (2.3.1)$$

όπου

$x$ : μεταβλητή, δηλώνει την ηλικία για  $x = x_0, \dots, x_n$

$t$ : μεταβλητή, δηλώνει το χρόνο για  $t = t_0, \dots, t_T$

$i$ : μεταβλητή, δηλώνει τον πληθυσμό για  $i = 1, 2$

$m_{x,t,i}$ : ο παρατηρούμενος δείκτης θνησιμότητας στην ηλικία  $x$  το έτος  $t$  για τον πληθυσμό  $i$

$a_{x,i}$ : παράμετρος ηλικίας, εκφράζει τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία  $x$  του πληθυσμού  $i$

$b_{x,i}$ : παράμετρος ηλικίας, εκφράζει την απόκλιση από τη μέση θνησιμότητα σε μια μεταβολή του δείκτη  $k(t,i)$  στην ηλικία  $x$  του πληθυσμού  $i$

$K_t$ : παράμετρος χρόνου, εκφράζει το γενικό επίπεδο θνησιμότητας στο έτος  $t$

$\varepsilon_{x,t,i}$ : η τιμή του σφάλματος στην ηλικία  $x$  το έτος  $t$  για τον πληθυσμό  $i$ , εκφράζει ειδικά πρότυπα ηλικίας και χρόνου που δεν λαμβάνονται υπόψη από το μοντέλο.

### 2.3.1. Εκτίμηση των Παραμέτρων του Μοντέλου Joint-K των Carter-Lee

Αντίστοιχα με το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992), για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας χρησιμοποιείται η αλγεβρική προσέγγιση της μεθόδου SVD που έχει αναπτυχθεί.

Η προσέγγιση της μεθόδου SVD βασίζεται στους δύο παρακάτω περιορισμούς των παραμέτρων:

$$\sum_{x=x_0}^{x_n} b_{x,i} = 1 \quad \text{και} \quad \sum_{t=t_0}^{t_T} K_t = 0 . \quad (2.3.2)$$

Χάρη στους δύο της σχέσης (2.3.2), προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις και βάσει αυτών θα εκτιμηθούν οι παράμετροι του μοντέλου. Υποθέτουμε ότι τα σφάλματα είναι ανεξάρτητα και ότι ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση σταθερή και ίση με  $\sigma^2$  για όλα τα έτη  $t$ , είναι δηλαδή ομοσκεδαστικά.

Για την παράμετρο της ηλικίας  $a_x$  ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$a_{x,i} = \frac{1}{t_T - t_0 + 1} \sum_t \ln m_{x,t,i} . \quad (2.3.3)$$

Σε συνέχεια για την κοινή παράμετρο του χρόνου  $K_t$  ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$K_t = \sum_x \ln m_{x,t,i} - \sum_x a_{x,i} . \quad (2.3.4)$$

Για την παράμετρο της ηλικίας  $b_x$  ισχύει η παρακάτω σχέση:

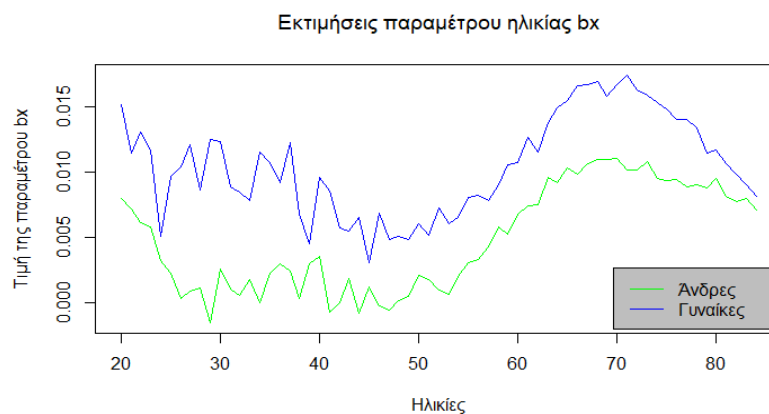
$$b_{x,i} = \frac{\sum_t (\ln m_{x,t,i} - a_{x,i}) * K_t}{\sum_t K_t^2} . \quad (2.3.5)$$

Οι παραπάνω σχέσεις, (2.3.3), (2.3.4), (2.3.5), μοντελοποιήθηκαν σε κώδικα προγραμματισμού της R, ο οποίος παρουσιάζεται στο Παράρτημα Β.1. και τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων για τις παραμέτρους  $b_{x,i}$  και  $K_t$ , παρουσιάζονται αναλυτικά στο Παράρτημα Β. Πιο συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις της παραμέτρου  $b_{x,i}$  που προκύπτει από τη σχέση (2.3.5) δίνονται από τον Πίνακα Β1 και οι εκτιμήσεις για την κοινή παράμετρο χρόνου  $K_t$  που υπολογίζεται βάσει της σχέσης (2.3.4) δίνονται από τον Πίνακα Β2. Σημειώνεται, πως οι τιμές της παραμέτρου  $a_{x,i}$  εξαρτώνται μόνο από τις τιμές του δείκτη θνησιμότητας και την περίοδο που εξετάζουμε. Δεδομένου αυτού, είναι ίδιες με τις εκτιμήσεις που προηγήθηκαν στο απλό μοντέλο Lee-Carter (1992).

Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις που κατασκευάστηκαν για τις τιμές της παραμέτρου ηλικίας  $b_{x,i}$  (Διάγραμμα 8) και για τις τιμές της κοινής παραμέτρου του χρόνου  $K_t$  (Διάγραμμα 9) για τους δύο πληθυσμούς μαζί, άνδρες και γυναίκες.

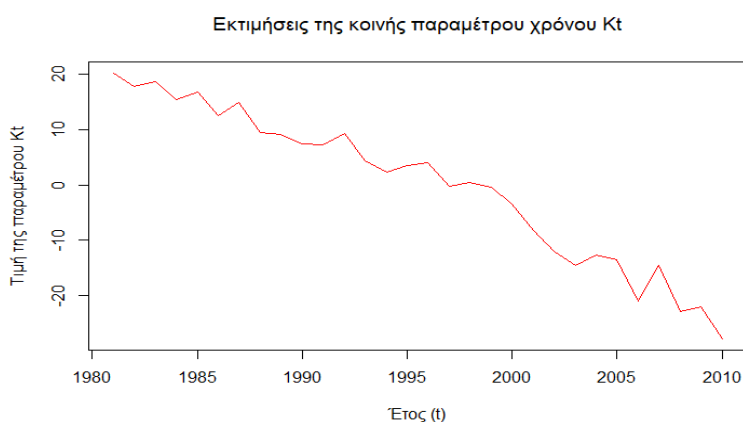
**Διάγραμμα 8** Σύγκριση των εκτιμήσεων της απόκλισης από τη μέση θνησιμότητα  $b_{x,i}$  για άνδρες και γυναίκες με το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992).

(Πράσινο χρώμα= Άνδρες, Μπλε χρώμα=Γυναίκες)



Στο Διάγραμμα 8 παρατηρούμε, εξίσου, πως οι τιμές της παραμέτρου  $b_x$  έχουν την ίδια συμπεριφορά για τους δύο πληθυσμούς που εξετάζουμε, άνδρες και γυναίκες. Η παράμετρος  $b_x$  εκφράζει την τάση της θνησιμότητας (αύξηση ή μείωση) ανά ηλικία όσο αλλάζει το γενικό επίπεδο της θνησιμότητας,  $k_t$ . Όμοια με απλό μοντέλο Lee-Carter (1992), παρατηρούμε πως σε μεγαλύτερες ηλικίες και στα δύο φύλα, η θνησιμότητα τείνει να μεταβάλλεται λίγο πιο έντονα.

**Διάγραμμα 9** Εκτιμήσεις της κοινής παραμέτρου του χρόνου  $K_t$  για άνδρες και γυναίκες με το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992).



Στο Διάγραμμα 9, παρατηρούμε πως η παράμετρος του χρόνου έχει πτωτική τάση με μικρές αυξομειώσεις κατά διαστήματα.

### 2.3.2. Προβολή Θνησιμότητας με το Μοντέλο Joint-K των Carter-Lee

Για την πρόβλεψη των ποσοστών θνησιμότητας, έχοντας ως βάση τα δεδομένα που καλύπτουν την περίοδο παρατήρησης 30 ετών, από το έτος 1981 έως το έτος 2010, προβάλλουμε την κοινή παράμετρο του χρόνου για επτά έτη και θα υπολογιστούν οι αντίστοιχες τιμές του δείκτη θνησιμότητας για την περίοδο πρόβλεψης από το έτος 2011 έως το έτος 2017.

Αντίστοιχα, με το μοντέλο Lee-Carter (1992) χρησιμοποιείται η ανάλυση χρονολογικών σειρών και πιο συγκεκριμένα η ανάλυση Αυτοπαλινδρομούμενων Ολοκληρωμένων Υποδειγμάτων Κινούμενου Μέσου (Autoregressive integrated moving average-ARIMA). Η παράμετρος του χρόνου  $K_t$  θεωρείται τυχαία διαδικασία και για αυτό η εκτίμηση της πραγματοποιείται μέσα από μια χρονοσειρά. Σύμφωνα με τους Lee-Carter (1992), η καλύτερη επιλογή είναι ο τυχαίος περίπατος με μετατόπιση (Random Walk with Drift, RWD), όπως αναλύεται παρακάτω:

$$\hat{K}_t = \hat{K}_{t-1} + \theta + \varepsilon_t, \quad (2.3.6)$$

όπου  $\theta$ : παράμετρος μετατόπισης και  $\varepsilon_t$ : σφάλμα του έτους  $t$ .

Η εκτίμηση της παραμέτρου μετατόπισης  $\theta$  προκύπτει από την ακόλουθη σχέση:

$$\hat{\theta} = \frac{\hat{K}_{t_T} - \hat{K}_{t_0}}{t_T - t_0}. \quad (2.3.7)$$

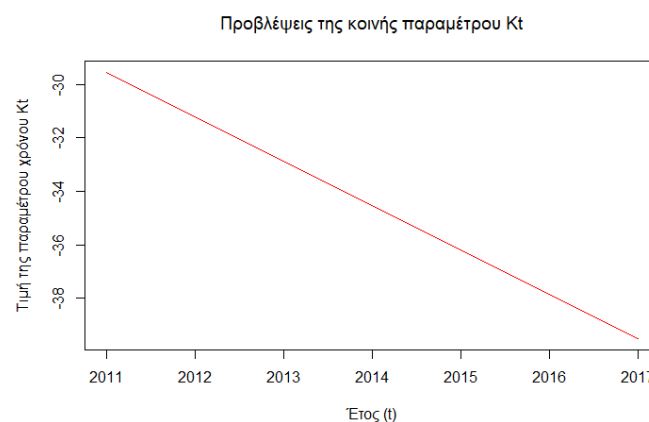
Υποθέτουμε ότι τα σφάλματα  $\varepsilon_t$  είναι λευκός θόρυβος και ομοσκεδαστικά, δηλαδή ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση σταθερή και ίση με  $\sigma^2$  για όλα τα έτη  $t$ .

Με την υπόθεση ότι τα σφάλματα είναι ανεξάρτητα και ομοσκεδαστικά μπορούμε να προχωρήσουμε στην απλοποίησή τους. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε στην παρακάτω τελική σχέση για τον υπολογισμό της κοινής παραμέτρου  $\hat{K}_t$  μέσω των σχέσεων (2.3.6) και (2.3.7).

$$\begin{aligned} \hat{K}_{t_T + \Delta t} &= \hat{K}_{t_T} + (\Delta t) * \hat{\theta} \\ \Rightarrow \hat{K}_{t_T + \Delta t} &= \hat{K}_{t_T} + (\Delta t) * \frac{\hat{K}_{t_T} - \hat{K}_{t_0}}{t_T - t_0}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Οι τιμές των προβλέψεων για την κοινή παράμετρο χρόνου  $\hat{K}_t$  παρουσιάζονται στον Πίνακα Β3 του Παραρτήματος Β και ακολουθεί η γραφική τους παράσταση (Διάγραμμα 10).

**Διάγραμμα 10** Προβλέψεις της κοινής παραμέτρου του χρόνου  $\hat{K}_t$  για άνδρες και γυναίκες για την περίοδο πρόβλεψης από το έτος 2011 έως το έτος 2017 με το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992).





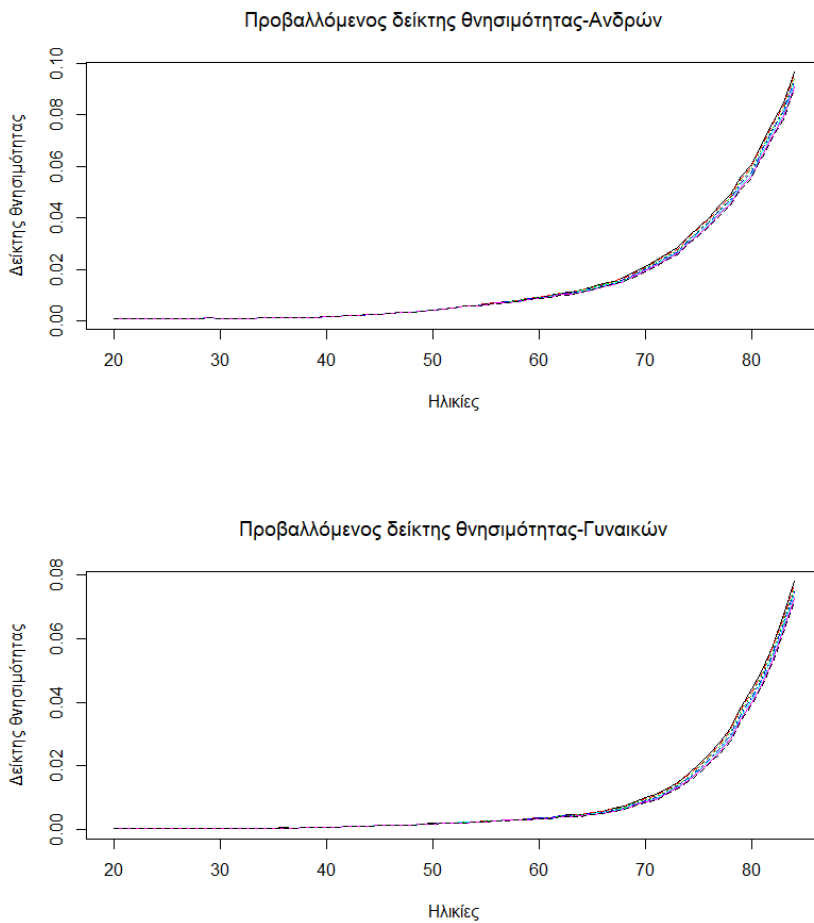
Κατά συνέπεια, ο λογάριθμος του δείκτη θνησιμότητας για έναν πληθυσμό  $i$  για την περίοδο πρόβλεψης των επτά ετών προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$\ln(\hat{m}_{x,t_T+h,i}) = \hat{a}_{x,i} + \hat{b}_{x,i} * \hat{K}_{t_T+h,i} = \ln(\hat{m}_{x,t_T,i}) + \hat{b}_{x,i} * \hat{\theta} * h, \quad (2.3.9)$$

όπου  $h$  είναι η μεταβλητή που δηλώνει τα χρόνια της περιόδου πρόβλεψης και παίρνει τιμές από 1 έως 7.

Οι τιμές των προβλέψεων του δείκτη θνησιμότητας παρουσιάζονται στον Πίνακα Β4 και Πίνακα Β5 του Παραρτήματος Β αντίστοιχα για κάθε φύλο και ακολουθεί η γραφική τους παράσταση (Διάγραμμα 11).

**Διάγραμμα 11** Προβλεπόμενος δείκτης θνησιμότητας για άνδρες και γυναίκες για την περίοδο πρόβλεψης από το έτος 2011 έως το έτος 2017 με το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992).



#### 2.4. Μοντελοποίηση της Θνησιμότητας με το Μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li -Hardy

Σε αντίθεση με το Joint-K μοντέλο των Carter-Lee (1992), το οποίο υποθέτει ότι όλοι οι πληθυσμοί έχουν κοινή παράμετρο χρόνου  $K_t$ , το μοντέλο Co-integrated Lee-Carter που προτάθηκε από τους Li-Hardy (2011) υποθέτει ότι η παράμετρος χρόνου  $k_{t,i}$  του πληθυσμού  $i$  ( $i \geq 2$ ) σχετίζεται γραμμικά με την παράμετρο του χρόνου  $k_{t,1}$ , τον οποίο θεωρούμε ως πληθυσμό βάσης.

Πιο αναλυτικά, θεωρούμε πως τα ποσοστά θνησιμότητας κάθε πληθυσμού μπορούν να εκφραστούν μέσω του απλού μοντέλου Lee-Carter (1992) και επομένως, ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:

$$\ln(m_{x,t,1}) = a_{x,1} + b_{x,1} * k_{t,1} + \varepsilon_{x,t,1} \quad (2.4.1)$$

$$\ln(m_{x,t,2}) = a_{x,2} + b_{x,2} * k_{t,2} + \varepsilon_{x,t,2}, \quad (2.4.2)$$

όπου

$x$ : μεταβλητή, δηλώνει την ηλικία για  $x = x_0, \dots, x_n$

$t$ : μεταβλητή, δηλώνει το χρόνο για  $t = t_0, \dots, t_T$

$m_{x,t,i}$ : ο παρατηρούμενος δείκτης θνησιμότητας στην ηλικία  $x$  το έτος  $t$  για τον πληθυσμό  $i$

$a_{x,i}$ : παράμετρος ηλικίας, εκφράζει τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία  $x$  του πληθυσμού  $i$

$b_{x,i}$ : παράμετρος ηλικίας, εκφράζει την απόκλιση από τη μέση θνησιμότητα σε μια μεταβολή του δείκτη  $k(t,i)$  στην ηλικία  $x$  του πληθυσμού  $i$

$k_{t,i}$ : παράμετρος χρόνου, εκφράζει το γενικό επίπεδο θνησιμότητας στο έτος  $t$  πληθυσμού  $i$

$\varepsilon_{x,t,i}$ : η τιμή του σφάλματος στην ηλικία  $x$  το έτος  $t$  για τον πληθυσμό  $i$ , εκφράζει ειδικά πρότυπα ηλικίας και χρόνου που δεν λαμβάνονται υπόψη από το μοντέλο.

#### 2.4.1. Εκτίμηση των Παραμέτρων του Μοντέλου Co-integrated Lee-Carter των Li - Hardy

Ο πληθυσμός με τον δείκτη 1 είναι ο πληθυσμός των ανδρών και κατ' αντιστοιχία ο πληθυσμός με το δείκτη 2 είναι ο πληθυσμός των γυναικών. Στην παρούσα εργασία, υποθέτουμε ως βάση τον πληθυσμό 2, των γυναικών. Σημειώνεται πως για το εν λόγω μοντέλο εκτιμήθηκαν τα ποσοστά θνησιμότητας δύο φορές. Την πρώτη φορά λάβαμε ως πληθυσμό βάσης τον πληθυσμό των ανδρών και αντίστοιχα τη δεύτερη τον πληθυσμό των γυναικών. Τελικά, επιλέχθηκε ως πληθυσμός βάσης αυτός των γυναικών καθώς παρουσίαζε καλύτερα αποτελέσματα συγκριτικά με τα αντίστοιχα αποτελέσματα με πληθυσμό βάσης τους άνδρες. Επομένως, χρησιμοποιώντας τα δεδομένα της βάσης, υπολογίζονται οι λογάριθμοι των δεικτών θνησιμότητας ξεχωριστά για κάθε πληθυσμό με το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992), όπως στην Παρ. 2.2.1.

Οι εκτίμηση των παραμέτρων πραγματοποιήθηκε σε κώδικα προγραμματισμού της R και τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων για τις παραμέτρους  $a_{x,i}$ ,  $b_{x,i}$  και  $k_{t,i}$ , όπως αναμέναμε, είναι κοινά με τα αντίστοιχα του απλού μοντέλου Lee-Carter (1992). Ο κώδικας προγραμματισμού της R του απλού μοντέλου Lee-Carter (1992) παρουσιάζεται στο Παράρτημα Α.1.

Στη συνέχεια, βάσει του μοντέλου Co-integrated Lee-Carter (2011) υποθέτουμε την παρακάτω γραμμική σχέση μεταξύ των παραμέτρων του χρόνου των δύο πληθυσμών:

$$\hat{k}_{t,1} = \alpha + \beta * \hat{k}_{t,2} + \varepsilon_t . \quad (2.4.3)$$

Επομένως, απαιτείται η επανεκτίμηση της παραμέτρου του χρόνου για τον πληθυσμό 1, των ανδρών. Για να επιτευχθεί η εκτίμηση του δείκτη έγινε χρήση μιας απλής γραμμικής παλινδρόμησης για τη σχέση (2.4.3) καθώς οι παράμετροι  $k_{t,i}$  είναι γνωστοί και παραμένουν άγνωστες οι παράμετροι  $\alpha$  και  $\beta$ . Η γραμμική παλινδρόμηση μέσω του κώδικα προγραμματισμού της R κατέληξε στα παρακάτω αποτελέσματα:

```
Call:
lm(formula = kt_male ~ kt_fem)

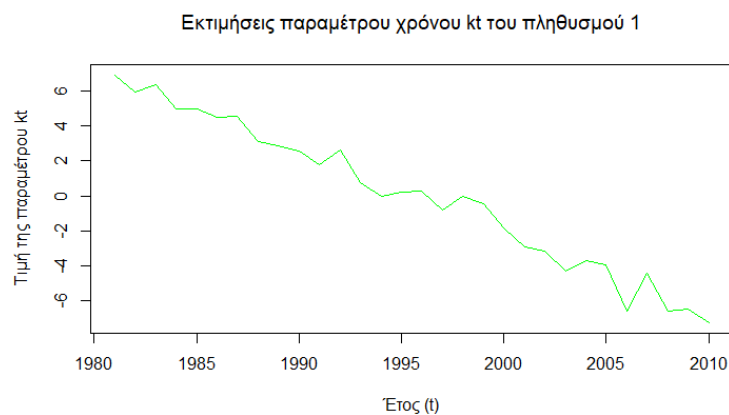
Residuals:
    Min       1Q   Median       3Q      Max
-4.2305 -1.0419 -0.2071  1.1499  2.9547

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) -5.322e-16  3.212e-01   0.00    1
kt_fem       4.414e-01  3.408e-02  12.95  2.4e-13 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.759 on 28 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.857,    Adjusted R-squared:  0.8519
F-statistic: 167.8 on 1 and 28 DF,  p-value: 2.403e-13
```

Εισάγοντας τις τιμές των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$  στη σχέση (2.4.3) προκύπτουν οι νέες τιμές της παραμέτρου  $\hat{k}_{t,1}$  για τον πληθυσμό των ανδρών. Οι τιμές της παραμέτρου του χρόνου που επανεκτιμήθηκε παρουσιάζονται στο Παράρτημα Γ και συγκεκριμένα, στον Πίνακα Γ1. Ο αντίστοιχος κώδικας παρουσιάζεται στο Παράρτημα Γ.1. Επίσης, ακολουθεί η γραφική τους παράσταση (Διάγραμμα 12).

**Διάγραμμα 12** Εκτιμήσεις της παραμέτρου του χρόνου  $k_{t,i}$  για άνδρες (Πληθυσμός 1) μετά την επανεκτίμησή τους με το μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011).



Αντίστοιχα και με τις προηγούμενες διαγραμματικές απεικονίσεις της παραμέτρου του χρόνου, παρουσιάζεται μια πτωτική τάση στην πάροδο των ετών.

Σημειώνεται πως οι υπόλοιπες παράμετροι και για τους δύο πληθυσμούς είχαν ακριβώς τις ίδιες τιμές με το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992).

#### 2.4.2. Προβολή Θνησιμότητας με το Μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li - Hardy

Για την πρόβλεψη των δεικτών θνησιμότητας, έχοντας ως βάση τα δεδομένα που καλύπτουν την περίοδο παρατήρησης των 30 ετών, από το έτος 1981 έως το έτος 2010, προβάλλουμε την παράμετρο του χρόνου του εκάστοτε πληθυσμού για επτά έτη και υπολογίζονται τα αντίστοιχα ποσοστά θνησιμότητας για την περίοδο πρόβλεψης από το έτος 2011 έως το έτος 2017.

Αντίστοιχα, με το μοντέλο Lee-Carter (1992) χρησιμοποιείται η ανάλυση χρονολογικών σειρών και πιο συγκεκριμένα η ανάλυση Αυτοπαλινδρομούμενων Ολοκληρωμένων

Υποδειγμάτων Κινούμενου Μέσου (Autoregressive integrated moving average-ARIMA). Η παράμετρος του χρόνου  $k_{t,i}$  θεωρείται τυχαία διαδικασία και για αυτό η εκτίμηση της πραγματοποιείται μέσα από μια χρονοσειρά. Σύμφωνα με τους Lee-Carter (1992), η καλύτερη επιλογή είναι ο τυχαίος περίπατος με μετατόπιση (Random Walk with Drift, RWD).

Για τον πληθυσμό 2, των γυναικών, η διαδικασία και τα αποτελέσματα είναι κοινά με το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992), ωστόσο για τον πληθυσμό 1 διαφοροποιείται. Επομένως, για τον πληθυσμό 2 ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\hat{k}_{t,2} = \hat{k}_{t-1,2} + \theta_2 + \varepsilon_{t,2}, \quad (2.4.4)$$

όπου  $\theta_2$ : παράμετρος μετατόπισης του πληθυσμού 2 και  $\varepsilon_{t,2}$ : σφάλμα του έτους  $t$  του πληθυσμού 2.

Η εκτίμηση της παραμέτρου μετατόπισης  $\theta_2$  προκύπτει από την ακόλουθη σχέση:

$$\widehat{\theta}_2 = \frac{\hat{k}_{t_T,2} - \hat{k}_{t_0,2}}{t_T - t_0}. \quad (2.4.5)$$

Υποθέτουμε ότι τα σφάλματα  $\varepsilon_{t,2}$  είναι λευκός θόρυβος και ομοσκεδαστικά, δηλαδή ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση σταθερή και ίση με  $\sigma^2$  για όλα τα έτη  $t$ . Με αυτήν την υπόθεση μπορούμε να τα απλοποιήσουμε και καταλήγουμε στην παρακάτω τελική σχέση για τον υπολογισμό του  $\hat{k}_{t,2}$  μέσω των σχέσεων (2.4.4) και (2.4.5),

$$\begin{aligned} \hat{k}_{t_T+\Delta t,2} &= \hat{k}_{t_T,2} + (\Delta t) * \widehat{\theta}_2 \\ \Rightarrow \hat{k}_{t_T+\Delta t,2} &= \hat{k}_{t_T,2} + (\Delta t) * \frac{\hat{k}_{t_T,2} - \hat{k}_{t_0,2}}{t_T - t_0} \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

Για τον πληθυσμό 1, η παράμετρος μετατόπισης υπολογίζεται μέσω της παραμέτρου μετατόπισης του πληθυσμού 2. Κατ' αντιστοιχία με τη σχέση (2.4.5), ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{\hat{k}_{t_T,1} - \hat{k}_{t_0,1}}{t_T - t_0}. \quad (2.4.7)$$

Κάνοντας χρήση της γραμμικής σχέσης που συνδέει τις δύο παραμέτρους του χρόνου, όπως φαίνεται στη σχέση (2.4.3), προκύπτει η παρακάτω ισότητα:

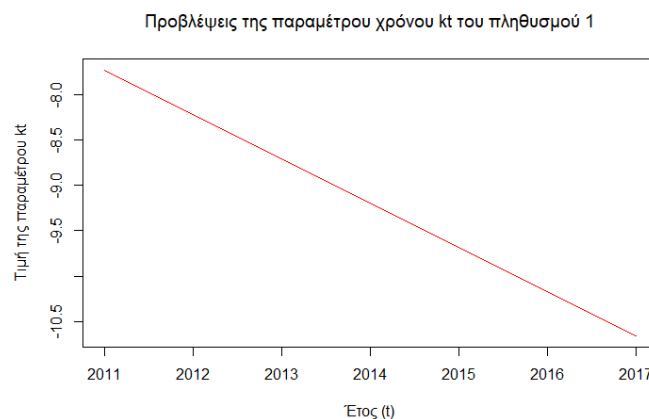
$$\begin{aligned}
 \widehat{\theta}_1 &= \frac{\widehat{k}_{t_T,1} - \widehat{k}_{t_0,1}}{t_T - t_0} \\
 &= \frac{(\alpha + \beta * \widehat{k}_{t_T,2}) - (\alpha + \beta * \widehat{k}_{t_0,2})}{t_T - t_0} \\
 &= \frac{\beta * (\widehat{k}_{t_T,2} - \widehat{k}_{t_0,2})}{t_T - t_0} \\
 &\Rightarrow \widehat{\theta}_1 = \beta * \widehat{\theta}_2.
 \end{aligned} \tag{2.4.8}$$

Επομένως, αντίστοιχα με τον πληθυσμό 2, καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση για την εκτίμηση των μελλοντικών παραμέτρων του χρόνου του πληθυσμού 1:

$$\widehat{k}_{T+\Delta t,1} = \widehat{k}_{T,1} + (\Delta t) * \widehat{\theta}_1 = \widehat{k}_{T,1} + (\Delta t) * \frac{\widehat{k}_{t_T,1} - \widehat{k}_{t_0,1}}{t_T - t_0}. \tag{2.4.9}$$

Οι τιμές των προβλέψεων για την παράμετρο χρόνου  $\widehat{k}_t$  για τον πληθυσμό 1, των ανδρών, παρουσιάζονται στον Πίνακα Γ2 του Παραρτήματος Γ και ακολουθεί η γραφική τους παράσταση (Διάγραμμα 13).

**Διάγραμμα 13** Προβλέψεις της παραμέτρου του χρόνου  $k_{t,i}$  για τους άνδρες για την περίοδο πρόβλεψης από το έτος 2011 έως το έτος 2017 με το μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011).



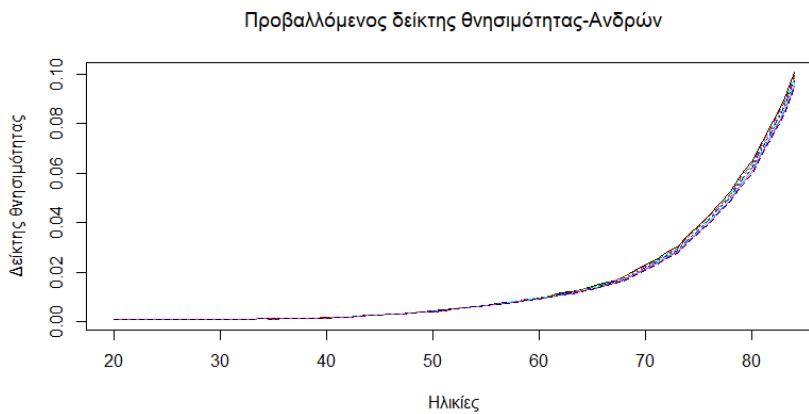
Κατά συνέπεια, ο λογάριθμος του ποσοστού θνησιμότητας για έναν πληθυσμό  $i$  για την περίοδο πρόβλεψης των επτά ετών προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$\ln(\hat{m}_{x,t_T+h,i}) = \hat{a}_{x,i} + \hat{b}_{x,i} * \hat{k}_{t_T+h,i} = \ln(\hat{m}_{x,t_T,i}) + \hat{b}_{x,i} * \hat{\theta} * h, \quad (2.4.10)$$

όπου  $h$  είναι η μεταβλητή που δηλώνει τα χρόνια της περιόδου πρόβλεψης και παίρνει τιμές από 1 έως 7.

Οι τιμές των προβλέψεων του δείκτη θνησιμότητας παρουσιάζονται στον Πίνακα Γ3 του Παραρτήματος Γ για τον πληθυσμό των ανδρών, καθώς για τον πληθυσμό των γυναικών είναι ίδιες με τις αντίστοιχες του μοντέλου Lee-Carter (1992). Ακολουθεί η γραφική παράσταση (Διάγραμμα 14) που κατασκευάστηκε για τις προβλέψεις του δείκτη θνησιμότητας των ανδρών για την περίοδο πρόβλεψης από το έτος 2011 έως το έτος 2017.

**Διάγραμμα 14** Προβλεπόμενος δείκτης θνησιμότητας για άνδρες για την περίοδο πρόβλεψης από το έτος 2011 έως το έτος 2017 με το μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011).



## 2.5. Μοντελοποίηση της Θνησιμότητας με το Μοντέλο Augmented Common Factor των Li – Lee

Οι Li και Lee (2005) για να αντιμετωπίσουν τις αποκλίσεις κατά την πρόβλεψη της θνησιμότητας παραπάνω του ενός πληθυσμού για μακροπρόθεσμο διάστημα πρότειναν το μοντέλο Augmented Common Factor. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, εκτός από το ότι λαμβάνεται υπόψη η συσχέτιση μεταξύ των ποσοστών θνησιμότητας δύο πληθυσμών μέσα από τα ιστορικά δεδομένα που χρησιμοποιούνται, λαμβάνεται παράλληλα υπόψη και η ατομική τάση της θνησιμότητας του κάθε πληθυσμού.

Αρχικά, έχοντας ως βάση το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992) διαμορφώνεται το μοντέλο Common Factor εισάγοντας μία κοινή παράμετρο ηλικίας  $B_x$  και μία κοινή παράμετρο χρόνου  $K_t$  για τους δύο πληθυσμούς. Προκύπτει η ακόλουθη μορφή του μοντέλου:

$$\ln(m_{x,t,i}) = a_{x,i} + B_x * K_t + \varepsilon_{x,t,i}, \quad (2.5.1)$$

όπου

$x$ : μεταβλητή, δηλώνει την ηλικία για  $x = x_0, \dots, x_n$

$t$ : μεταβλητή, δηλώνει το χρόνο για  $t = t_0, \dots, t_T$

$i$ : μεταβλητή, δηλώνει τον πληθυσμό για  $i = 1, 2$

$m_{x,t,i}$ : ο παρατηρούμενος δείκτης θνησιμότητας στην ηλικία  $x$  το έτος  $t$  για τον πληθυσμό  $i$

$a_{x,i}$ : παράμετρος ηλικίας, εκφράζει τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία  $x$  του πληθυσμού  $i$

$B_x$ : παράμετρος ηλικίας, εκφράζει την απόκλιση από τη μέση θνησιμότητα σε μια μεταβολή του δείκτη  $K_t$  στην ηλικία  $x$

$K_t$ : παράμετρος χρόνου, εκφράζει το γενικό επίπεδο θνησιμότητας στο έτος  $t$

$\varepsilon_{x,t,i}$ : η τιμή του σφάλματος στην ηλικία  $x$  το έτος  $t$  για τον πληθυσμό  $i$ , εκφράζει ειδικά πρότυπα ηλικίας και χρόνου που δεν λαμβάνονται υπόψη από το μοντέλο.



### 2.5.1. Εκτίμηση των Παραμέτρων του Μοντέλου Augmented Common Factor των Li– Lee

Αντίστοιχα με το μοντέλο Lee-Carter (1992), για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας χρησιμοποιείται η αλγεβρική προσέγγιση της μεθόδου SVD που έχει αναπτυχθεί στη βιβλιογραφία. Ωστόσο, υπάρχει μια παραλλαγή για το μοντέλο αυτής της ενότητας. Λαμβάνεται υπόψη μια επιπλέον υπόθεση που αφορά το βάρος του κάθε πληθυσμού που συμμετέχει στο μοντέλο στο σύνολο του γενικού πληθυσμού που μελετάμε. Στην παρούσα εργασία για λόγους απλούστευσης, υποθέτουμε πως οι άνδρες και οι γυναίκες στο σύνολο του πληθυσμού της Ελλάδας κατέχουν ίσο μερίδιο, ήτοι 0,5 ο καθένας. Τα ποσοστά που επιλέγονται είναι αρκετά κοντά στην πραγματική εικόνα του πληθυσμού σύμφωνα με την τελευταία μέτρηση στην αρχή του έτους 2019. Κατά την Ελληνική Στατιστική Αρχή (2019), οι άνδρες κατέχουν το 49% του πληθυσμού, ενώ οι γυναίκες το υπόλοιπο 51%.

Η προσέγγιση της μεθόδου SVD βασίζεται στους παρακάτω περιορισμούς των παραμέτρων:

$$\sum_{x=x_0}^{x_n} w_i * B_x = 1, \text{ όπου } w_i=0,5 \text{ για } i=1 \text{ ή } 2$$

$$\sum_{t=t_0}^{t_T} K_t = 0 \text{ και } w_1 + w_2 = 1. \quad (2.5.2)$$

Χάρη στους περιορισμούς της σχέσης (2.5.2), προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις και βάσει αυτών θα εκτιμηθούν οι παράμετροι του μοντέλου. Υποθέτουμε ότι τα σφάλματα είναι ανεξάρτητα και ότι ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση σταθερή και ίση με  $\sigma^2$  για όλα τα έτη  $t$ , είναι δηλαδή ομοσκεδαστικά.

Για την παράμετρο της ηλικίας  $a_x$  ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$a_{x,i} = \frac{1}{t_T - t_0 + 1} \sum_t \ln m_{x,t,i}. \quad (2.5.3)$$

Σε συνέχεια για την κοινή παράμετρο του χρόνου  $K_t$ :

$$K_t = \sum_x w_i * (\ln m_{x,t,i} - a_{x,i}). \quad (2.5.4)$$

Για την κοινή παράμετρο της ηλικίας  $B_x$  ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$B_x = \frac{\sum_t w_i * (\ln m_{x,t,i} - a_{x,i}) * K_t}{\sum_t K_t^2}. \quad (2.5.5)$$

Για ακόμα καλύτερα αποτελέσματα, οι Li και Lee (2005) πρόσθεσαν ακόμα έναν παράγοντα στο μοντέλο Common Factor της σχέσης (2.5.1), ξεχωριστό για κάθε πληθυσμό και έπειτα προέκυψε το Augmented Common Factor. Η μορφή του μοντέλου είναι:

$$\ln(m_{x,t,i}) = a_{x,i} + B_x * K_t + b'_{x,i} * k'_{t,i} + \varepsilon_{x,t,i}, \quad (2.5.6)$$

όπου

$x$ : μεταβλητή, δηλώνει την ηλικία για  $x = x_0, \dots, x_n$

$t$ : μεταβλητή, δηλώνει το χρόνο για  $t = t_0, \dots, t_T$

$i$ : μεταβλητή, δηλώνει τον πληθυσμό για  $i = 1, 2$

$m_{x,t,i}$ : ο παρατηρούμενος δείκτης θνησιμότητας στην ηλικία  $x$  το έτος  $t$  για τον πληθυσμό  $i$

$a_{x,i}$ : παράμετρος ηλικίας, εκφράζει τη μέση θνησιμότητα στην ηλικία  $x$  του πληθυσμού  $i$

$B_x$ : παράμετρος ηλικίας, εκφράζει την απόκλιση από τη μέση θνησιμότητα σε μια μεταβολή του δείκτη  $K_t$  στην ηλικία  $x$

$K_t$ : παράμετρος χρόνου, εκφράζει το γενικό επίπεδο θνησιμότητας στο έτος  $t$

$b'_{x,i}$ : παράμετρος ηλικίας, εκφράζει την απόκλιση από τη μέση θνησιμότητα σε μια μεταβολή του δείκτη  $k(t,i)$  στην ηλικία  $x$  του πληθυσμού  $i$

$k'_{t,i}$ : παράμετρος χρόνου, εκφράζει το γενικό επίπεδο θνησιμότητας στο έτος  $t$  πληθυσμού  $i$

$\varepsilon_{x,t,i}$ : η τιμή του σφάλματος στην ηλικία  $x$  το έτος  $t$  για τον πληθυσμό  $i$ , εκφράζει ειδικά πρότυπα ηλικίας και χρόνου που δεν λαμβάνονται υπόψη από το μοντέλο.

Σημειώνεται πως οι νέες παράμετροι  $b'_{x,i}$  και  $k'_{t,i}$  δεν είναι ίδιες με τις αντίστοιχες του απλού μοντέλου Lee-Carter (1992). Για την εκτίμηση τους, υποθέτουμε έναν πρόσθετο περιορισμό:

$$\sum_{x=x_0}^{x_n} b'_{x,i} = 1. \quad (2.5.7)$$

Βάσει του τελευταίου περιορισμού της σχέσης (2.5.7), προκύπτουν οι ακόλουθες σχέσεις και βάσει αυτών θα εκτιμηθούν οι νέες παράμετροι του μοντέλου.

Για την παράμετρο  $k'_{x,i}$  για ένα πληθυσμό  $i$ :

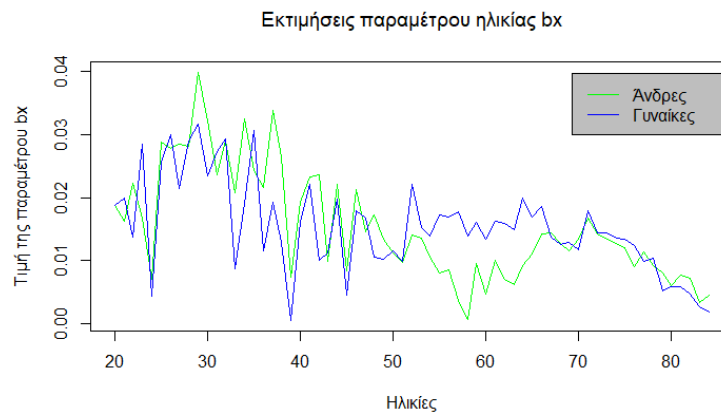
$$k'_{t,i} = \sum_x (\ln m_{x,t} - a_{x,i} - B_x * K_t). \quad (2.5.8)$$

Για την παράμετρο  $b'_{x,i}$  για ένα πληθυσμό  $i$ :

$$b'_{x,i} = \frac{\sum_t (\ln m_{x,t} - a_{x,i} - B_x * K_t) * k'_{t,i}}{\sum_t k'^2_{t,i}}. \quad (2.5.9)$$

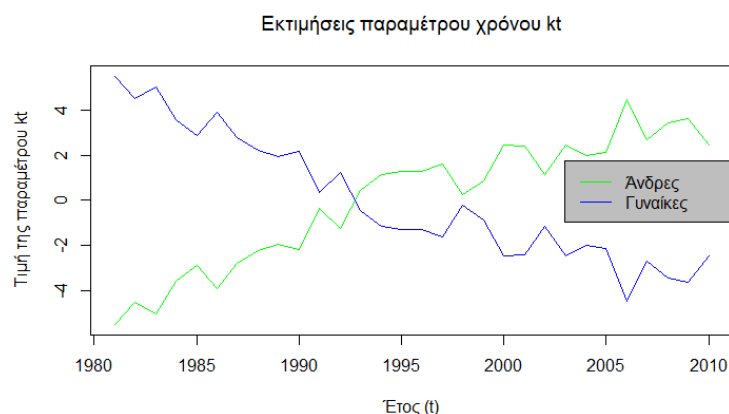
Οι παραπάνω σχέσεις, (2.5.3), (2.5.4), (2.5.5), (2.5.8), (2.5.9), μοντελοποιήθηκαν σε κώδικα προγραμματισμού της R, ο οποίος παρουσιάζεται στο Παράρτημα Δ.1 και τα αποτελέσματα των εκτιμήσεων για τις παραμέτρους  $a_{x,i}$ ,  $B_x$ ,  $K_t$ ,  $b'_{x,i}$  και  $k'_{x,i}$  παρουσιάζονται αναλυτικά στο Παράρτημα Δ. Πιο συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις της παραμέτρου ηλικίας  $b'_{x,i}$  που προκύπτει από τη σχέση (2.5.9) δίνονται από τον Πίνακα Δ1, οι εκτιμήσεις για την κοινή παράμετρο ηλικίας  $B_x$  που προκύπτει από τη σχέση (2.5.5) δίνονται από τον Πίνακα Δ2. Σε συνέχεια, οι εκτιμήσεις για την κοινή παράμετρο χρόνου  $K_t$  που υπολογίζεται βάσει της σχέσης (2.5.4) δίνονται από τον Πίνακα Δ4 και τέλος, οι εκτιμήσεις της παραμέτρου χρόνου  $k'_{x,i}$  παρουσιάζονται στον Πίνακα Δ3. Σημειώνεται, πως οι τιμές της παραμέτρου  $a_{x,i}$  εξαρτώνται μόνο από τις τιμές του δείκτη θνησιμότητας και την περίοδο που εξετάζουμε. Δεδομένου αυτού, είναι ίδιες με τις εκτιμήσεις που προηγήθηκαν στο απλό μοντέλο Lee-Carter (1992). Ακολουθούν οι γραφικές παραστάσεις που κατασκευάστηκαν για τις τιμές των παραμέτρων  $B_x$ ,  $K_t$ ,  $b'_{x,i}$  και  $k'_{x,i}$ .

**Διάγραμμα 15** Σύγκριση των εκτιμήσεων της απόκλισης από τη μέση θνησιμότητα  $b'_{x,i}$  για άνδρες και γυναίκες με το μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005).  
(Πράσινο χρώμα= Άνδρες, Μπλε χρώμα=Γυναίκες)



Στο Διάγραμμα 15 παρατηρούμε πως οι τιμές της παραμέτρου  $b_x$  έχουν παρόμοια συμπεριφορά για τους δύο πληθυσμούς που εξετάζουμε, άνδρες και γυναίκες. Ένα συμπέρασμα που θα μπορούσαμε να εξαγάγουμε είναι πως σε μικρότερες ηλικίες του δείγματος και στα δύο φύλα, η θνησιμότητα τείνει να μεταβάλλεται πιο έντονα.

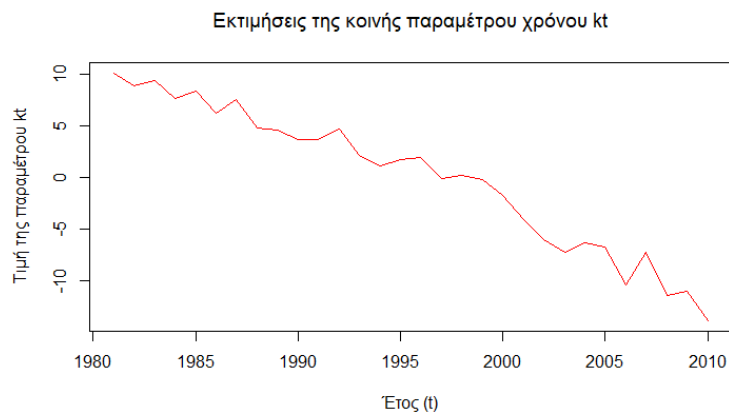
**Διάγραμμα 16** Σύγκριση των εκτιμήσεων της παραμέτρου του χρόνου  $k'_{x,i}$  για άνδρες και γυναίκες με το μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005).  
(Πράσινο χρώμα= Άνδρες, Μπλε χρώμα=Γυναίκες)



Στο Διάγραμμα 16, παρατηρούμε πως παράγονται αντίθετες τιμές για την παράμετρο του χρόνου  $k_i$  για τους δύο πληθυσμούς κατά την προσαρμογή των δεδομένων στο μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005). Αυτό το αποτέλεσμα κρίνεται αναμενόμενο

δεδομένου ότι οι τιμές της παραμέτρου του χρόνου  $k_t$  αφορούν δύο υπό-πληθυσμούς της ίδιας χώρας, άνδρες και γυναίκες από την Ελλάδα. Εάν το πολύ-πληθυσμιακό μοντέλο λάμβανε δεδομένα περισσότερων πληθυσμών από διαφορετικές χώρες, τότε και οι τιμές της παραμέτρου του χρόνου  $k_t$  θα διέφεραν για κάθε υπό-πληθυσμό (φύλο, χώρα).

**Διάγραμμα 17** Εκτιμήσεις της κοινής παραμέτρου του χρόνου  $K_t$  με το μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005).



**Διάγραμμα 18** Εκτιμήσεις της κοινής παραμέτρου ηλικίας  $B_x$  με το μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005).



### 2.5.2. Προβολή Θνησιμότητας με το Μοντέλο Augmented Common Factor των Li - Lee

Για την πρόβλεψη των ποσοστών θνησιμότητας, έχοντας ως βάση τα δεδομένα που καλύπτουν την περίοδο παρατήρησης 30 ετών, από το έτος 1981 έως το έτος 2010, προβάλλουμε τις παραμέτρους του χρόνου για επτά έτη και υπολογίζονται τα αντίστοιχα ποσοστά θνησιμότητας για την περίοδο πρόβλεψης από το έτος 2010 έως το έτος 2017.

Αντίστοιχα, με το μοντέλο Lee-Carter (1992) χρησιμοποιείται η ανάλυση χρονολογικών σειρών και πιο συγκεκριμένα η ανάλυση Αυτοπαλινδρομούμενων Ολοκληρωμένων Υποδειγμάτων Κινούμενου Μέσου (Autoregressive integrated moving average-ARIMA). Οι παράμετροι του χρόνου  $k'_{t,i}$  και  $K_t$  θεωρούνται τυχαία διαδικασία και για αυτό η εκτίμηση τους πραγματοποιείται μέσα από χρονοσειρές. Σύμφωνα με τους Lee-Carter (1992), η καλύτερη επιλογή είναι ο τυχαίος περίπατος με μετατόπιση (Random Walk with Drift, RWD), όπως αναλύεται παρακάτω:

$$\widehat{K}_t = \widehat{K}_{t-1} + \theta + \varepsilon_t \text{ και } \widehat{k}'_t = \widehat{k}'_{t-1} + \theta' + \varepsilon_{t,i}, \quad (2.5.10)$$

όπου  $\theta, \theta'$ : παράμετροι μετατόπισης,  $\varepsilon_t$ : σφάλμα του έτους  $t$  και  $\varepsilon_{t,i}$ : σφάλμα του έτους  $t$  και του πληθυσμού  $i$ .

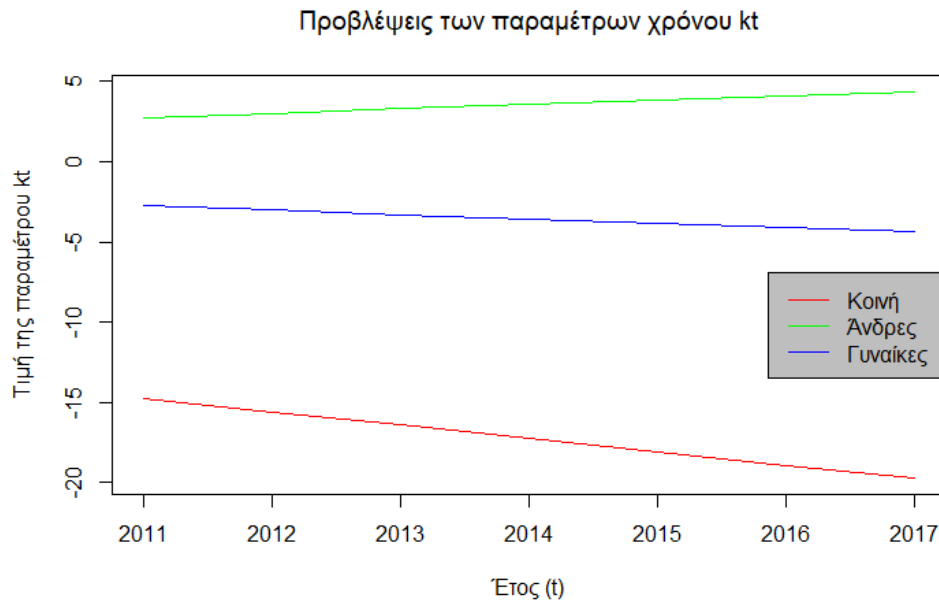
Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων μετατόπισης  $\theta$  και  $\theta'$  προκύπτουν από τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\widehat{\theta} = \frac{\widehat{K}_{t_T} - \widehat{K}_{t_0}}{t_T - t_0} \text{ και } \widehat{\theta}' = \frac{\widehat{k}'_{t_T} - \widehat{k}'_{t_0}}{t_T - t_0}. \quad (2.5.11)$$

Υποθέτουμε ότι τα σφάλματα  $\varepsilon_t$  είναι λευκός θόρυβος και ομοσκεδαστικά, δηλαδή ακολουθούν την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση σταθερή και ίση με  $\sigma^2$  για όλα τα έτη  $t$ .

Οι τιμές των προβλέψεων για τις παραμέτρους χρόνου παρουσιάζονται στον Πίνακα Δ5 του Παραρτήματος Δ και ακολουθεί η γραφική τους παράσταση και για τους δύο πληθυσμούς μαζί, άνδρες και γυναίκες.

**Διάγραμμα 19** Προβλέψεις των παραμέτρων του χρόνου για την περίοδο πρόβλεψης από το έτος 2011 έως το έτος 2017 με το μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005). (Πράσινο χρώμα=Άνδρες, Μπλε χρώμα=Γυναίκες, Κόκκινο χρώμα=Κοινή παράμετρος χρόνου).



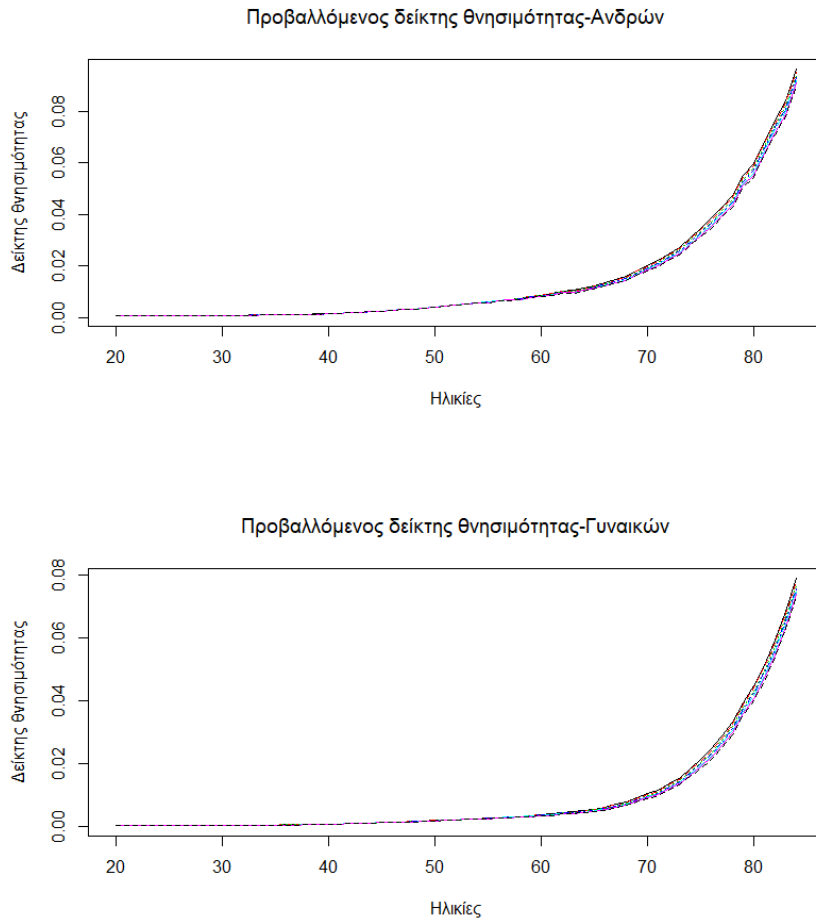
Κατά συνέπεια, ο λογάριθμος του δείκτη θνησιμότητας για έναν πληθυσμό  $i$  για την περίοδο πρόβλεψης των επτά ετών προκύπτει από την παρακάτω σχέση:

$$\begin{aligned} \ln(\hat{m}_{x,t_T+h,i}) &= \hat{a}_{x,i} + \hat{B}_{x,i} * \hat{K}_{t_T+h,i} + \hat{b}'_{x,i} * \hat{K}'_{t_T+h,i} \\ &= \ln(\hat{m}_{x,t_T,i}) + (\hat{B}_{x,i} * \hat{\theta} + \hat{b}'_{x,i} * \hat{\theta}') * h \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

Όπου  $h$  είναι η μεταβλητή που δηλώνει τα χρόνια της περιόδου πρόβλεψης και παίρνει τιμές από 1 έως 7.

Οι τιμές των προβλέψεων για τους δείκτες θνησιμότητας παρουσιάζονται στους Πίνακες Δ6 και Δ7 του Παραρτήματος Δ και ακολουθεί η γραφική τους παράσταση και για τους δύο πληθυσμούς μαζί, άνδρες και γυναίκες (Διάγραμμα 20).

**Διάγραμμα 20** Προβλέψεις του δείκτη θνησιμότητας για άνδρες και γυναίκες για την περίοδο πρόβλεψης από το έτος 2011 έως το έτος 2017 με το μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005).



**Πίνακας 1** Σύνοψη Πολύ-πληθυσμιακών Μοντέλων Θνησιμότητας.

Μοντέλο	Δομή	Βιβιογραφία
LC (M <sub>1</sub> )	$\ln(m_{x,t,i}) = a_{x,i} + b_{x,i} * k_{t,i} + \varepsilon_{x,t,i}$	Lee-Carter (1992)
LC <sub>joint-K</sub> (M <sub>2</sub> )	$\ln(m_{x,t,i}) = a_{x,i} + b_{x,i} * K_t + \varepsilon_{x,t,i}$	Carter-Lee (1992)
LC <sub>coin</sub> (M <sub>3</sub> )	$\ln(m_{x,t,i}) = a_{x,i} + b_{x,i} * k^*_{t,i} + \varepsilon_{x,t,i}$	Li-Hardy (2011)
LC <sub>acf</sub> (M <sub>4</sub> )	$\ln(m_{x,t,i}) = a_{x,i} + B_x * K_t + b'_{x,i} * k'_{t,i} + \varepsilon_{x,t,i}$	Li-Lee (2005)



### ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΜΟΝΤΕΛΩΝ ΘΝΗΣΙΜΟΤΗΤΑΣ

Στο παρόν κεφάλαιο πραγματοποιείται σύγκριση των τιμών των δεικτών θνησιμότητας για την περίοδο πρόβλεψης σε σχέση με τις αντίστοιχες πραγματικές τιμές από τη βάση Human Mortality Database (2020). Για σκοπούς της σύγκρισης αυτής υπολογίζονται μέτρα αξιολόγησης προκειμένου να συγκριθούν ως προς την προβλεπτική τους ικανότητα τα πολύ-πληθυσμιακά μοντέλα με το αντίστοιχο μοντέλο Lee-Carter (1992) για κάθε πληθυσμό ανεξάρτητα. Επιπλέον, πραγματοποιήθηκε εκτίμηση των λογαρίθμων των δεικτών θνησιμότητας για κάθε μοντέλο για δύο διαφορετικές περιόδους προσαρμογής προκειμένου να ελεγχθεί η ανθεκτικότητα των μοντέλων (robustness).

#### 3.1. Σύγκριση της Προβλεπτικής Ικανότητας των Μοντέλων Θνησιμότητας

Η προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων που χρησιμοποιήθηκαν εκτιμάται μέσα από την μέτρηση των διαφορών των παρατηρούμενων τιμών με τις προβλεπόμενες τιμές των δεικτών θνησιμότητας για την περίοδο πρόβλεψης των επτά ετών, από το 2011 έως το 2017. Οι διαφορές αυτές αποκαλούνται σφάλματα. Συγκεκριμένα, υπολογίστηκαν τέσσερα διαφορετικά μέτρα αξιολόγησης των μοντέλων, τα οποία αναλύονται παρακάτω.

Το πρώτο ονομάζεται Mean Absolute Error (“MAE”) και εκφράζει τη μέση απόλυτη απόκλιση ανάμεσα στα πραγματικά επίπεδα του δείκτη θνησιμότητας με τα αντίστοιχα προβαλλόμενα. Λόγω της απόλυτης τιμής του οι θετικές τιμές δεν αναιρούνται από τις αρνητικές και επίσης, το σφάλμα είναι στην ίδια κλίμακα με τα δεδομένα. Το εν λόγω μέτρο θεωρείται απλό και εύκολο ως προς την ερμηνεία του. Υπολογίζεται βάσει του παρακάτω τύπου:

$$MAE = \frac{\sum_h \sum_x |\hat{m}_{x,t_T+h,i} - m_{x,t_T+h,i}|}{x_n - x_0 + 1}. \quad (3.1.1)$$

Το επόμενο μέτρο ονομάζεται Mean Absolute Percentage Error (“MAPE”) και είναι, επίσης, ένα μέτρο που εκφράζει την ακρίβεια της πρόβλεψης του μοντέλου. Συνήθως εκφράζεται σε ποσοστό και γίνεται εύκολα κατανοητό στο ευρύ κοινό. Λόγω του ποσοστού έχει την δυνατότητα να συγκρίνει υποδείγματα σε διαφορετικής κλίμακας δεδομένα. Είναι ένα εξίσου απλό μέτρο στην εφαρμογή του, ωστόσο εμφανίζει μερικά μειονεκτήματα. Για παράδειγμα, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί εάν στις τιμές που λαμβάνει υπάρχουν μηδενικά. Επίσης, για προβλέψεις που είναι πολύ χαμηλές, το ποσοστό σφάλματος δεν μπορεί να υπερβαίνει το

100%, αλλά για προβλέψεις που είναι πολύ υψηλές δεν υπάρχει ανώτερο όριο στο ποσοστό σφάλματος.

$$MAPE = \frac{1}{x_n - x_0 + 1} \sum_h \sum_x \left| \frac{\widehat{m}_{x,t_T+h,i} - m_{x,t_T+h,i}}{m_{x,t_T+h,i}} \right|. \quad (3.1.2)$$

Εν συνεχεία, υπολογίστηκε το Mean Squared Error (“MSE”) και εκφράζει το μέσο τετράγωνο της διαφοράς ανάμεσα στα πραγματικά επίπεδα του δείκτη θνησιμότητας με τα αντίστοιχα προβαλλόμενα. Το MSE είναι ένα μέτρο της ποιότητας της πρόβλεψης του μοντέλου και είναι πάντα μη αρνητικό. Όσο οι τιμές του πλησιάζουν το μηδέν είναι καλύτερες. Δεν είναι το ίδιο εύκολο ως προς την ερμηνεία του σε σχέση με τα δύο προαναφερθέντα μέτρα, αλλά θεωρείται ένα καλό μέτρο όσον αφορά τα σφάλματα.

$$MSE = \frac{1}{x_n - x_0 + 1} \sum_h \sum_x (\widehat{m}_{x,t_T+h,i} - m_{x,t_T+h,i})^2. \quad (3.1.3)$$

Τέλος, υπολογίστηκε το Root Mean Squared Error (“RMSE”), δηλαδή η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος και παρουσιάζει τις ίδιες ιδιότητες με αυτές του μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Το πλεονέκτημα αυτού σε σχέση με το MSE είναι ότι βρίσκεται στην ίδια κλίμακα με τα δεδομένα οπότε είναι και πιο εύκολα ως προς την κατανόηση του. Υπολογίζεται με την παρακάτω σχέση:

$$RMSE = \sqrt{MSE} = \sqrt{\frac{1}{x_n - x_0 + 1} \sum_h \sum_x (\widehat{m}_{x,t_T+h,i} - m_{x,t_T+h,i})^2}. \quad (3.1.4)$$

Στον παρακάτω πίνακα ακολουθεί η παρουσίαση των τιμών των μέτρων που προαναφέρθηκαν. Ο κώδικας της R για τον υπολογισμό των μέτρων αξιολόγησης παρουσιάζεται στα Παραρτήματα Α.1, Β.1, Γ.1 και Δ.1, αντίστοιχα για κάθε μοντέλο θνησιμότητας.

**Πίνακας 2** Τιμές των μέτρων MAE, MAPE, MSE και RMSE για την περίοδο πρόβλεψης 2011 με 2017 με βάση τα δεδομένα της περιόδου 1981 έως 2010 από τα τέσσερα μοντέλα θνησιμότητας.

Fit Period: 1981 - 2010, Forecast Period: 2011-2017

Άνδρες				
Σφάλμα	LC	LCjoint-K	LCcoin	LCacf
MAE	0,001241	0,000992	0,001174	0,001099
MAPE	0,168371	0,183885	0,177099	0,170510
MSE	0,000005	0,000002	0,000004	0,000003
RMSE	0,002187	0,001575	0,002075	0,001807

Fit Period: 1981 - 2010, Forecast Period: 2011-2017

Γυναίκες				
Σφάλμα	LC	LCjoint-K	LCcoin	LCacf
MAE	0,000706	0,000615	0,000706	0,000645
MAPE	0,148918	0,149001	0,148918	0,152090
MSE	0,000002	0,000001	0,000002	0,000001
RMSE	0,001331	0,001114	0,001331	0,001167

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα, κατά πλειοψηφία οι καλύτερες τιμές των σφαλμάτων, που σημαίνει οι μικρότερες, παρατηρούνται στα πολύ-πληθυσμιακά μοντέλα που εφαρμόστηκαν σε σύγκριση με τις αντίστοιχες τιμές του απλού μοντέλου Lee-Carter (1992) για κάθε πληθυσμό ξεχωριστά. Πιο αναλυτικά, το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992) κατέχει τις μικρότερες τιμές σε όλα τα μέτρα σφαλμάτων εκτός από το MAPE. Όσον αφορά το MAPE, η μικρότερη τιμή του προέρχεται για τους άνδρες από το μοντέλο Lee-Carter (1992), ενώ για τις γυναίκες από τα μοντέλα Lee-Carter (1992) και Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011), καθώς συμπίπτουν.

### 3.2. Έλεγχος Ανθεκτικότητας των Μοντέλων Θνησιμότητας

Ένας ακόμα έλεγχος που μπορεί να διεξαχθεί είναι η προσαρμογή των μοντέλων και η ικανότητα πρόβλεψης αυτών σε διαφορετικές χρονικές περιόδους από αυτήν που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο. Μια σημαντική ιδιότητα ενός μοντέλου είναι η ανθεκτικότητα (robustness) των εκτιμήσεων των παραμέτρων του μοντέλου σε διαφορετικές περιόδους προσαρμογής. Αυτό σημαίνει πως οι εκτιμήσεις των παραμέτρων δεν θα πρέπει να διαφέρουν σημαντικά όταν αλλάζει η περίοδος των δεδομένων που αντλούνται. Συνεπώς, η έλλειψη αυτής

της ιδιότητας για ένα μοντέλο μας δείχνει πως είναι ευαίσθητο στις αλλαγές της περιόδου των δεδομένων που χρησιμοποιούνται και γεννά ερωτηματικά ως προς την καταλληλότητα του για τη χρήση σε προβλέψεις ή σε οποιαδήποτε άλλη εφαρμογή (Bozikas, 2019).

Αν και για τον πληθυσμό της Ελλάδας δεν υπάρχουν πολλά δεδομένα, όπως απαιτείται για έναν τέτοιο έλεγχο, πραγματοποιούμε τον εν λόγω έλεγχο όπως αναφέρεται και στη βιβλιογραφία. Πιο αναλυτικά για τον έλεγχο του robustness των μοντέλων, επιλέχθηκαν δεδομένα από τον ίδιο πληθυσμό, δηλαδή την Ελλάδα και για τα δύο φύλα, άνδρες και γυναίκες, για δύο επιπλέον χρονικές περιόδους. Προσαρμόσαμε τα δεδομένα στα μοντέλα που αναφέρθηκαν στο κεφάλαιο 2, το μοντέλο Lee-Carter (1992), το Joint-K των Carter-Lee (1992), το Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011) και τέλος το Augmented Common Factor των Li-Lee (2005). Αντίστοιχα με την αρχική περίοδο προσαρμογής των τριάντα ετών, από το 1981 έως το 2010, υπολογίστηκαν οι κεντρικοί δείκτες θνησιμότητας για μια περίοδο πρόβλεψης ίση με τα υπολειπόμενα έτη μέχρι το 2017. Επομένως, κρατώντας σταθερό το τελευταίο έτος πρόβλεψης, το 2017, επιλέγονται δύο επιπλέον περιόδοι προσαρμογής. Η πρώτη περίοδος είναι είκοσι έτη (1981-2000) και η δεύτερη εικοσιπέντε έτη (1981-2005). Έπειτα, υπολογίστηκαν τα μέτρα σφαλμάτων, όπως στην προηγούμενη παράγραφο, και παρουσιάζονται στον παρακάτω πίνακα.

**Πίνακας 3** Τιμές των μέτρων MAE, MAPE, MSE και RMSE για την περίοδο πρόβλεψης 2006 με 2017 με βάση τα δεδομένα της περιόδου 1981 έως 2005 και για την περίοδο πρόβλεψης 2001 με 2017 με βάση τα δεδομένα της περιόδου 1981 έως 2000 από τα τέσσερα μοντέλα θνησιμότητας.

Fit Period: 1981 - 2000, Forecast Period: 2001-2017				
Άνδρες				
Σφάλμα	LC	LCjoint-K	LCcoin	LCacf
MAE	0,002453	0,001932	0,002613	0,001899
MAPE	0,198455	0,219985	0,200476	0,224790
MSE	0,000026	0,000017	0,000030	0,000016
RMSE	0,005146	0,004066	0,005435	0,004012

Fit Period: 1981 - 2000, Forecast Period: 2001-2017

Γυναίκες				
Σφάλμα	LC	LCjoint-K	LCcoin	LCacf
MAE	0,001162	0,001146	0,001162	0,001150
MAPE	0,169968	0,171362	0,169968	0,168992
MSE	0,000006	0,000006	0,000006	0,000006
RMSE	0,002513	0,002471	0,002513	0,002503

Fit Period: 1981 - 2005, Forecast Period: 2006-2017

Ανδρες				
Σφάλμα	LC	LCjoint-K	LCcoin	LCacf
MAE	0,001575	0,001629	0,002184	0,001477
MAPE	0,154311	0,171795	0,171841	0,169438
MSE	0,000010	0,000011	0,000020	0,000009
RMSE	0,003236	0,003296	0,004429	0,002981

Fit Period: 1981 - 2005, Forecast Period: 2006-2017

Γυναίκες				
Σφάλμα	LC	LCjoint-K	LCcoin	LCacf
MAE	0,001108	0,000949	0,001108	0,001042
MAPE	0,157266	0,152064	0,157266	0,158815
MSE	0,000005	0,000004	0,000005	0,000005
RMSE	0,002273	0,001923	0,002273	0,002136

Παρατηρώντας τους παραπάνω πίνακες σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα του Πίνακα 2 συμπεραίνουμε πως οι χαμηλότερες τιμές των σφαλμάτων παρατηρούνται στην περίοδο προσαρμογής από το έτος 1981 έως το 2010, την περίοδο δηλαδή που είχαμε αρχικά επιλέξει για να εξάγουμε τα συμπεράσματα μας. Πιο αναλυτικά, αυτό ισχύει για όλα τα μοντέλα θνησιμότητας που μελετάμε στην παρούσα εργασία. Εξαιρέση αποτελεί το μέτρο MAPE για τον πληθυσμό των ανδρών, το οποίο εμφανίζει την μικρότερη τιμή του στην δεύτερη περίοδο προσαρμογής 1981 έως 2005.

Όσον αφορά την ανθεκτικότητα των μοντέλων (robustness), συμπεραίνουμε πως όλα τα μοντέλα θνησιμότητας που αναλύσαμε είναι ανθεκτικά σε αλλαγές της περιόδου προσαρμογής και κρίνονται κατάλληλα για την εξαγωγή προβλέψεων. Επίσης, σημειώνεται πως ένα από τα τέσσερα μοντέλα κρίνεται πιο ανθεκτικό από τα υπόλοιπα και αυτό είναι το Joint-K των Carter-Lee (1992). Το αμέσως επόμενο μοντέλο που ακολουθεί, εάν τα κατατάσσαμε, είναι το Augmented Common Factor των Li-Lee (2005).

### 3.3. Σύγκριση Αποτελεσμάτων με τη Βιβλιογραφία

Σε αυτή την παράγραφο αναφέρονται μερικές παρατηρήσεις των αποτελεσμάτων της παρούσας εργασίας σε σύγκριση με δημοσιευμένες μελέτες. Συγκεκριμένα, οι παρατηρήσεις αυτές αφορούν τη διαγραμματική απεικόνιση των παραμέτρων των μοντέλων θνησιμότητας με βάση τη μελέτη των Li-Hardy (2011) στην οποία χρησιμοποιούνται τα ίδια μοντέλα ταυτόχρονης πρόβλεψης της θνησιμότητας. Οι Li-Hardy (2011) θέλησαν να προβλέψουν τη θνησιμότητα για δύο πληθυσμούς ταυτόχρονα, γυναίκες από τον Καναδά και από τις Ηνωμένες Πολιτείες Αμερικής, με περίοδο προσαρμογής από το 1968 έως το 1995 και περίοδο πρόβλεψης από το 1996 έως το 2005.

Αναφορικά στα διαγράμματα των παραμέτρων του μοντέλου Lee-Carter (1992),  $a_{x,i}$ ,  $b_{x,i}$  και  $k_{t,i}$ , της μελέτης των Li-Hardy (2011), παρατηρούμε συγκριτικά με τα αντίστοιχα της παρούσας εργασίας (βλ. Διάγραμμα 3, Διάγραμμα 4 και Διάγραμμα 5) πως έχουν κοινή συμπεριφορά και ειδικά για τις ηλικίες 70 ετών και άνω, οι τιμές των παραμέτρων είναι πολύ κοντά και κινούνται στα ίδια όρια.

Αντίστοιχα, για το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992), παρατηρούμε πως το διάγραμμα της παραμέτρου  $b_{x,i}$  στη μελέτη των Li-Hardy (2011) έχει ίδια συμπεριφορά με το Διάγραμμα 8 και οι τιμές της παραμέτρου πλησιάζουν τις αντίστοιχες της παρούσας εργασίας. Επίσης, σχετικά με το διάγραμμα της κοινής παραμέτρου  $K_t$  παρατηρούμε εξίσου πτωτική τάση με τη διαφορά πως στο αντίστοιχο Διάγραμμα 9, οι τιμές καταλήγουν να είναι έντονα αρνητικές.

Συνεχίζοντας με το μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005), παρατηρούμε πως τα διαγράμματα των κοινών παραμέτρων  $K_t$  και  $B_x$  στη μελέτη των Li-Hardy (2011) έχουν κοινή συμπεριφορά με τα Διαγράμματα 17 και 18, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα για τις ηλικίες από 70 έως 84, οι τιμές της παραμέτρου  $B_x$  παρατηρείται πως είναι αρκετά κοντά (βλ. Διαγράμματα 18). Όμοια με προηγουμένως, παρατηρείται μια διαφορά συγκριτικά με το Διάγραμμα 17 στις τιμές της παραμέτρου  $K_t$ , οι οποίες από το 2000 και μετά, είναι αρνητικές.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 - ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΩΝ ΠΡΟΪΟΝΤΩΝ

Σκοπός του παρόντος κεφαλαίου είναι η τιμολόγηση ασφαλιστικών προϊόντων. Βασιζόμενοι σε δεδομένα πληθυσμού της Ελλάδας υπολογίστηκαν οι προβλεπόμενοι δείκτες θνησιμότητας κάνοντας χρήση των μοντέλων θνησιμότητας που παρουσιάστηκαν σε προηγούμενα κεφάλαια. Έπειτα από την τιμολόγηση, παρουσιάζεται η ευαισθησία των τιμών των ασφαλιστικών προϊόντων σε διαφορετικά επίπεδα επιτοκίου.

### 4.1. Τιμολόγηση Ασφαλιστικών Προϊόντων

Τα ιστορικά δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν προέρχονται από τον πληθυσμό της Ελλάδας για το χρονικό διάστημα από το 1981 έως το 2017, τα οποία είναι όλα τα διαθέσιμα δεδομένα από τη βάση Human Mortality Database (2020). Στη συνέχεια, προσαρμόζουμε τα δεδομένα στα τέσσερα μοντέλα θνησιμότητας και κάνουμε πρόβλεψη των δεικτών θνησιμότητας για είκοσι χρόνια, δηλαδή έως το 2037. Σημειώνεται πως αντίστοιχα με την ανάλυση του κεφαλαίου 2, οι ηλικίες που λαμβάνονται υπόψη είναι από 20 έως 84 ετών καθώς το εύρος αυτό αντικατοπτρίζει την ηλικία ενός ενήλικα μέχρι τη μέση ηλικία του προσδόκιμου ζωής των αναπτυγμένων χωρών. Για την τιμολόγηση των προϊόντων επιλέξαμε να χρησιμοποιήσουμε μόνο τις προβλεπόμενες τιμές των δεικτών θνησιμότητας, που σημαίνει από το 2018 έως το 2037.

Όπως αναλύσαμε σε προηγούμενες παραγράφους, μέσω των μοντέλων θνησιμότητας παράγουμε δείκτες θνησιμότητας για το μέλλον βασιζόμενοι σε ιστορικά δεδομένα. Ωστόσο, για σκοπούς τιμολόγησης, κρίνεται απαραίτητο να προχωρήσουμε από τους δείκτες θνησιμότητας σε πιθανότητες θανάτου και μετά, στην κατασκευή πίνακα θνησιμότητας. Για να επιτευχθεί αυτό, κάνουμε χρήση της σχέσης (2.1.4) του Κεφ. 2, σύμφωνα με την οποία έχει αποδειχθεί πως μπορούμε να μετατρέψουμε τους δείκτες θνησιμότητας σε πιθανότητες θανάτου ( $q_{x,t,i} \sim 1 - e^{-m_{x,t,i}}$ ). Αφού υπολογιστούν οι πιθανότητες θανάτου, κατασκευάζεται ένας πίνακας θνησιμότητας κοορτής (“cohort mortality table”). Με αυτόν τον τρόπο παρατηρούμε μια συγκεκριμένη ομάδα ατόμων ηλικίας  $x$ , που έχουν γεννηθεί την ίδια χρονολογία, και πως αυτή εξελίσσεται στην πάροδο του χρόνου. Στο Σχήμα 1 απεικονίζεται το πως προκύπτει ένας πίνακας κοορτής και πως αντίστοιχα ένας πίνακας περιόδου.

**Σχήμα 1** Παρουσίαση ενός πίνακα θνησιμότητας κοορτής και ενός πίνακα θνησιμότητας περιόδου.

year age	$t_0$	$t_0 + 1$	...	$t_0 + m$	
$x_0$	$q_{x_0, t_0, i}$	$q_{x_0, t_0+1, i}$	...	$q_{x_0, t_0+m, i}$	period mortality
$x_0 + 1$	$q_{x_0+1, t_0, i}$	$q_{x_0+1, t_0+1, i}$	...	$q_{x_0+1, t_0+m, i}$	cohort mortality
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
$x_0 + n$	$q_{x_0+n, t_0, i}$	$q_{x_0+n, t_0+1, i}$	...	$q_{x_0+n, t_0+m, i}$	

Η χρήση ενός πίνακα κοορτής σε αντίθεση με έναν πίνακα περιόδου, θεωρείται πιο κατάλληλη για την εκτίμηση του προσδόκιμου ζωής κατά μέσο όρο ενός ατόμου ηλικίας  $x$ . Σε έναν πίνακα περιόδου χρησιμοποιούνται οι πιθανότητες θανάτου ενός συγκεκριμένου έτους και θεωρούμε ότι ισχύουν για τα επόμενα έτη. Με αυτόν τον τρόπο δεν λαμβάνονται υπόψη όλες οι μελλοντικές αλλαγές της θνησιμότητας (Office for National Statistics, 2019).

Η τιμολόγηση πραγματοποιήθηκε σε τρεις τύπους ασφαλιστικών προϊόντων. Αρχικά, υπολογίστηκαν οι τιμές μιας πρόσκαιρης ασφάλισης σε περίπτωση θανάτου διάρκειας  $n$  ετών. Πιο αναλυτικά, υπολογίστηκε το ενιαίο μαθηματικό ασφάλιστρο που πρέπει να καταβάλει ο ασφαλιζόμενος ηλικίας  $x$  ετών, έτσι ώστε αν ο θάνατος του επέλθει στα πρώτα  $n$  έτη, η ασφαλιστική εταιρία να καταβάλει στους δικαιούχους του 1 νομισματική μονάδα (Πιτσέλης, 2018). Ο μαθηματικός τύπος αυτού του τύπου ασφάλισης είναι:

$$A_{x^{1:n}|} = \frac{1}{D_x} \sum_{t=0}^{n-1} C_{x+t} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}. \quad (4.1.1)$$

Ο παραπάνω τύπος παρουσιάζεται με χρήση συναρτήσεων μετατροπής, για τις οποίες ισχύει:

$$D_x = u^x * l_x$$

$$M_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} C_{x+t}$$

$$C_{x+t} = u^{x+1} * d_x,$$



όπου  $u^x$  είναι ο συντελεστής προεξόφλησης για ένα επιτόκιο  $i$  και στην ηλικία  $x$ ,  $l_x$  είναι το πλήθος των ατόμων που είναι εν ζωή στην ηλικία  $x$  και  $d_x$  είναι το πλήθος των ατόμων στην ηλικία  $x$  που απεβίωσαν στο διάστημα ηλικίας  $x$  έως  $x+1$ .

Στη συνέχεια, υπολογίστηκαν οι τιμές μιας πρόσκαιρης ράντα ζωής, η οποία ορίζεται ως το πρόγραμμα κατά το οποίο οι πληρωμές θα καταβάλλονται από την ασφαλιστική εταιρία στον ασφαλιζόμενο για προκαθορισμένο αριθμό περιόδων εφόσον βρίσκεται εν ζωή. Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο μιας πρόσκαιρης προκαταβλητέας ράντας ζωής είναι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει ένα άτομο ηλικίας  $x$  τη στιγμή που ασφαλιζεται, έτσι ώστε να λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους για  $n$  έτη και εφόσον βρίσκεται εν ζωή, 1 νομισματική μονάδα. Οι πληρωμές είναι διακριτές, δηλαδή καταβάλλονται στις 1, 2, ...,  $n$  χρονικές στιγμές (συνήθως έτη) (Πιτσέλης, 2018). Η παρούσα αξία είναι ίση με:

$$a_{x:n|}^{\ddot{}} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x} . \quad (4.1.2)$$

Ο παραπάνω τύπος παρουσιάζεται αντίστοιχα με χρήση συναρτήσεων μετατροπής, όπου ισχύει:

$$N_x = \sum_{t=0}^{\omega-x-1} D_{x+t}.$$

Σημειώνεται πως για τον υπολογισμό όλων των ασφαλιστικών προϊόντων χρησιμοποιήθηκε επιτόκιο ίσο με 4%, για τις πρόσκαιρη ασφάλιση και πρόσκαιρη προκαταβλητέα ράντα ζωής, θεωρήσαμε ένα άτομο ηλικίας 50 ετών και διάρκεια ασφάλισης ίση με δέκα έτη.

Συνηθίζεται να εφαρμόζονται οι προβλέψεις των δεικτών θνησιμότητας στην τιμολόγηση συνταξιοδοτικών προϊόντων (Bozikas, 2019). Για το σκοπό αυτό, υπολογίστηκε μια ισόβια ράντα προκαταβλητέα κλασματική με μηνιαίες πληρωμές. Το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο είναι το ποσό που πρέπει να καταβάλλει ένα άτομο ηλικίας  $x$  τη στιγμή που ασφαλιζεται, έτσι ώστε να λαμβάνει στην αρχή κάθε μήνα και εφόσον βρίσκεται στη ζωή,  $1/12$  νομισματικής μονάδας. Για την ισόβια ράντα προκαταβλητέα κλασματική με μηνιαίες πληρωμές, έχει δημιουργηθεί ο εξής προσεγγιστικός μαθηματικός τύπος (Πιτσέλης, 2018):

$$a_x^{(\ddot{m})} \approx \frac{N_x}{D_x} - \frac{m-1}{2m} , \quad (4.1.3)$$

όπου  $m$  είναι οι περίοδοι μέσα στο έτος, στην περίπτωση μας για μηνιαίες πληρωμές το  $m$  ισούται με 12.

Για τον υπολογισμό της ισόβιας ράντας θεωρήσαμε την ηλικία του ασφαλισμένου ίση με 65, ως μια μέση ηλικία συνταξιοδότησης για τα δύο φύλα σύμφωνα με την πρόσφατη Ελληνική νομοθεσία. Το επιτόκιο, επίσης, τέθηκε ίσο με 4%.

Ακολουθεί ένας συνοπτικός πίνακας των αποτελεσμάτων της τιμολόγησης από τα τέσσερα μοντέλα θνησιμότητας και για τα δύο φύλα. Ο κώδικας της τιμολόγησης των ασφαλιστικών προϊόντων παρουσιάζεται στο Παράρτημα Ε και οι πίνακες θνησιμότητας που κατασκευάστηκαν για χάρη της τιμολόγησης παρουσιάζονται στο Παράρτημα Ζ.

**Πίνακας 4** Τιμολόγηση μιας πρόσκαιρης ασφάλισης 10 ετών και μιας πρόσκαιρης προκαταβλητέας ράντας ζωής 10 ετών για άτομο ηλικίας 50 ετών χρησιμοποιώντας τις προβλεπόμενες τιμές των δεικτών θνησιμότητας για το χρονικό διάστημα από το 2018 έως το 2037.

	Άνδρες	
	Πρόσκαιρη Ασφάλιση Ζωής	Πρόσκαιρη Προκαταβλητέα Ράντα Ζωής
LC	0,046424	8,259664
LCjoint-K	0,045989	8,259743
LCcoin	0,046954	8,257652
LCacf	0,043993	8,264307

	Γυναίκες	
	Πρόσκαιρη Ασφάλιση Ζωής	Πρόσκαιρη Προκαταβλητέα Ράντα Ζωής
LC	0,018113	8,364009
LCjoint-K	0,018245	8,363700
LCcoin	0,018113	8,364009
LCacf	0,017814	8,364781

Από τις παραπάνω τιμές, παρατηρούμε πως οι μικρότερες τιμές των ασφαλιστρών προέρχονται από τα πολύ-πληθυσμιακά μοντέλα σε σχέση με το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992). Πιο συγκεκριμένα, στην πρόσκαιρη ασφάλιση ζωής παρατηρούμε πως με το μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005) λαμβάνονται οι χαμηλότερες τιμές ασφαλιστρών. Αυτό δικαιολογείται από τις τιμές των πιθανοτήτων θανάτου των μοντέλων όπου παρατηρούμε πως

από το μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005) έχουν προκύψει οι μικρότερες πιθανότητες θανάτου. Αντίθετα, στην πρόσκαιρη προκαταβλητέα ράντα ζωής, οι χαμηλότερες τιμές ασφαλιστρών προέρχονται από το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992) για τις γυναίκες και το μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011) για τους άνδρες. Εξίσου δικαιολογούνται οι χαμηλές τιμές ασφαλιστρών από τα χαμηλά επίπεδα των πιθανοτήτων επιβίωσης των μοντέλων Joint-K των Carter-Lee (1992) και Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011).

**Πίνακας 5** Τιμολόγηση μιας ισόβιας ράντας προκαταβλητέας κλασματικής με μηνιαίες πληρωμές για άτομο ηλικίας 65 ετών χρησιμοποιώντας τις προβλεπόμενες τιμές των δεικτών θνησιμότητας για το χρονικό διάστημα από το 2018 έως το 2037.

	Ισόβια Προκαταβλητέα Ράντα Ζωής (Μηνιαίων Πληρωμών)	
	Άνδρες	Γυναίκες
LC	11,850690	12,978230
LCjoint-K	11,892230	12,992480
LCcoin	11,781680	12,978230
LCacf	12,023100	12,963720

Αντίστοιχα, με τον προηγούμενο πίνακα, τα πολύ-πληθυσμιακά μοντέλα παράγουν μικρότερες τιμές ασφαλιστρών σε σχέση με το απλό μοντέλο Lee-Carter. Κυρίως, από τα μοντέλα Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011) για τους άνδρες και Augmented Common Factor των Li-Lee (2005) για τις γυναίκες παρατηρούνται οι χαμηλότερες τιμές ασφαλιστρών.

#### 4.2. Ανάλυση Ευαισθησίας σε Επίπεδα Επιτοκίων

Σε συνέχεια της τιμολόγησης των ασφαλιστικών προϊόντων που αναφέραμε, προχωρήσαμε σε ανάλυση ευαισθησίας των τιμών των ασφαλιστρών σε διακυμάνσεις του επιπέδου των επιτοκίων. Επιλέχθηκαν δύο επιτόκια μικρότερα από το αρχικό που είχε χρησιμοποιηθεί (4%) και αντίστοιχα δύο επιτόκια μεγαλύτερα. Παρακάτω παρουσιάζονται οι πίνακες των αποτελεσμάτων για άνδρες και γυναίκες ξεχωριστά.

**Πίνακας 6** Τιμολόγηση μιας πρόσκαιρης ασφάλισης 10 ετών για έναν άνδρα ηλικίας 50 ετών για διαφορετικές τιμές επιτοκίου χρησιμοποιώντας τις προβλεπόμενες τιμές των δεικτών θνησιμότητας για το χρονικό διάστημα από το 2018 έως το 2037.

	Πρόσκαιρη Ασφάλιση Ζωής			
ΑΝΔΡΕΣ	LCcoin	LC	LCjoint-K	LCacf
$i= 1,25\%$	0,055056	0,054435	0,053868	0,051420
$i= 2,50\%$	0,051149	0,050573	0,050070	0,047841
$i= 4,00\%$	0,046954	0,046424	0,045989	0,043993
$i= 4,50\%$	0,045663	0,045148	0,044733	0,042808
$i= 5,00\%$	0,044421	0,043920	0,043525	0,041668

**Πίνακας 7** Τιμολόγηση μιας πρόσκαιρης προκαταβλητέας ράντας ζωής 10 ετών για έναν άνδρα ηλικίας 50 ετών για διαφορετικές τιμές επιτοκίου χρησιμοποιώντας τις προβλεπόμενες τιμές των δεικτών θνησιμότητας για το χρονικό διάστημα από το 2018 έως το 2037.

	Πρόσκαιρη Προκαταβλητέα Ράντα Ζωής			
ΑΝΔΡΕΣ	LCacf	LCjoint-K	LC	LCcoin
$i= 1,25\%$	9,259362	9,253796	9,253635	9,251252
$i= 2,50\%$	8,783276	8,778195	8,778075	8,775870
$i= 4,00\%$	8,264307	8,259743	8,259664	8,257652
$i= 4,50\%$	8,102869	8,098464	8,098397	8,096445
$i= 5,00\%$	7,946810	7,942557	7,942502	7,940606

**Πίνακας 8** Τιμολόγηση μιας πρόσκαιρης ασφάλισης 10 ετών για μια γυναίκα ηλικίας 50 ετών για διαφορετικές τιμές επιτοκίου χρησιμοποιώντας τις προβλεπόμενες τιμές των δεικτών θνησιμότητας για το χρονικό διάστημα από το 2018 έως το 2037.

	Πρόσκαιρη Ασφάλιση Ζωής			
ΓΥΝΑΙΚΕΣ	LCjoint-K	LCcoin	LC	LCacf
$i= 1,25\%$	0,021299	0,021137	0,021137	0,020774
$i= 2,50\%$	0,019827	0,019680	0,019680	0,019348
$i= 4,00\%$	0,018245	0,018113	0,018113	0,017814
$i= 4,50\%$	0,017757	0,017630	0,017630	0,017342
$i= 5,00\%$	0,017288	0,017166	0,017166	0,016887

**Πίνακας 9** Τιμολόγηση μιας πρόσκαιρης προκαταβλητέας ράντας ζωής 10 ετών για μια γυναίκα ηλικίας 50 ετών για διαφορετικές τιμές επιτοκίου χρησιμοποιώντας τις προβλεπόμενες τιμές των δεικτών θνησιμότητας για το χρονικό διάστημα από το 2018 έως το 2037.

Πρόσκαιρη Προκαταβλητέα Ράντα Ζωής				
ΓΥΝΑΙΚΕΣ	LCacf	LC	LCcoin	LCjoint-K
$i= 1,25\%$	9,378701	9,377771	9,377771	9,377394
$i= 2,50\%$	8,893527	8,892674	8,892674	8,892329
$i= 4,00\%$	8,364781	8,364009	8,364009	8,363700
$i= 4,50\%$	8,200331	8,199584	8,199584	8,199286
$i= 5,00\%$	8,041375	8,040652	8,040652	8,040364

Ένα γενικό συμπέρασμα που εξάγεται είναι, όπως αναμέναμε, ότι σε μια αύξηση του επιτοκίου, η τιμή του ασφαλιστρού μιας ασφάλισης ζωής ή μιας ράντας ζωής μειώνεται. Επιπλέον, αντίστοιχα με την προηγούμενη παράγραφο, μπορούμε να εξάγουμε μερικά συμπεράσματα ως προς την διάταξη που παρατηρείται στις τιμές των ασφαλιστρών η οποία είναι κοινή ανά επιτόκιο που χρησιμοποιείται. Πιο αναλυτικά, για τον πληθυσμό των ανδρών στον Πίνακα 6 παρατηρείται πως οι χαμηλότερες τιμές ασφαλιστρών προέρχονται από το Augmented Common Factor των Li-Lee (2005), έπειτα ακολουθούν το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992) και το μοντέλο Lee-Carter (1992) και τέλος, οι υψηλότερες τιμές προέρχονται από το Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011). Ακριβώς η αντίστροφη διάταξη ισχύει για τον Πίνακα 7.

Αντίστοιχα για τον πληθυσμό των γυναικών, στον Πίνακα 8 παρατηρείται πως οι χαμηλότερες τιμές ασφαλιστρών προέρχονται από το Augmented Common Factor των Li-Lee (2005), έπειτα ακολουθούν το μοντέλο Lee-Carter (1992) και Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011), των οποίων οι τιμές συμπίπτουν, και τέλος, οι υψηλότερες τιμές προέρχονται από το Joint-K των Carter-Lee (1992). Ακριβώς η αντίστροφη διάταξη ισχύει για τον Πίνακα 9.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 - ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στην παρούσα εργασία, μελετήσαμε για πρώτη φορά την ταυτόχρονη μοντελοποίηση δύο πληθυσμών με τα δεδομένα της Ελλάδας μέσω στοχαστικών πολύ-πληθυσμιακών μοντέλων θνησιμότητας βασισμένων στο μοντέλο Lee-Carter (1992). Συγκεκριμένα, επιλέχθηκαν δεδομένα ανδρών και γυναικών για το χρονικό διάστημα 1981 έως 2010 και για τις ηλικίες από 20 έως 84. Με βάση τα ιστορικά αυτά δεδομένα, προχωρήσαμε σε προβολή της θνησιμότητας έως το 2017. Τα μοντέλα που αναπτύχθηκαν ήταν τέσσερα, το μοντέλο Lee-Carter (1992), το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992), το μοντέλο Co-integrated των Li-Hardy (2011) και τέλος, το μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005).

Σκοπός της εργασίας ήταν να συγκρίνει την προβλεπτική ικανότητα και τα αποτελέσματα των πολύ-πληθυσμιακών μοντέλων σε σχέση με την ανεξάρτητη μοντελοποίηση δύο πληθυσμών με το μοντέλο Lee-Carter (1992). Για το σκοπό αυτό, υπολογίστηκαν τα μέτρα αξιολόγησης MAE, MAPE, MSE, RMSE. Το μοντέλο με τις μικρότερες τιμές των μέτρων αξιολόγησης κρίνεται πιο ικανό για να προβλεφθεί η θνησιμότητα. Πράγματι, τα πολύ-πληθυσμιακά μοντέλα εμφάνισαν μικρότερα σφάλματα σε σχέση με το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992) και συγκεκριμένα στα περισσότερα μέτρα τη χαμηλότερη τιμή απέδωσε το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992). Εξαιρέση αποτελούν οι τιμές του στατιστικού μέτρου MAPE για το οποίο παρατηρήθηκαν χαμηλότερες τιμές με το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992) και το Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011). Αναλυτικά, για τους άνδρες η μικρότερη τιμή του μέτρου προέρχεται από το μοντέλο Lee-Carter (1992), ενώ για τις γυναίκες από τα μοντέλα Lee-Carter (1992) και Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011), καθώς συμπίπτουν.

Στη συνέχεια, πραγματοποιήθηκε η μοντελοποίηση της θνησιμότητας των ίδιων πληθυσμών σε δύο ακόμα περιόδους προσαρμογής προκειμένου να ελεγχθεί η ανθεκτικότητα των μοντέλων (robustness). Η πρώτη χρονική περίοδος αφορά το διάστημα από το 1981 έως το 2000 και αντίστοιχα, η δεύτερη το διάστημα από το 1981 έως το 2005. Στη συνέχεια, υπολογίστηκαν τα μέτρα αξιολόγησης MAE, MAPE, MSE και RMSE. Παρατηρούμε πως και στις δύο διαφορετικές περιόδους προσαρμογής, τα πολύ-πληθυσμιακά μοντέλα εμφάνισαν μικρότερα σφάλματα σε σχέση με το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992). Συγκεκριμένα, το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992) κρίνεται πιο ανθεκτικό από τα υπόλοιπα και το αμέσως επόμενο που ακολουθεί είναι το μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005). Επίσης, παρατηρήθηκε πως κατά βάση οι χαμηλότερες τιμές των σφαλμάτων παρατηρούνται

στην περίοδο προσαρμογής από το έτος 1981 έως το 2010, την πρώτη περίοδο που επιλέξαμε για σκοπούς της παρούσας εργασίας.

Ένα επιπλέον βήμα ήταν η τιμολόγηση ασφαλιστικών προϊόντων βασιζόμενοι στις προβλεπόμενες τιμές του δείκτη θνησιμότητας. Για τους ίδιους πληθυσμούς που προαναφέρθηκαν, επιλέχθηκε η περίοδος προσαρμογής από το έτος 1981 έως το 2017 και προβλέφθηκε ο δείκτης θνησιμότητας για είκοσι έτη, έως το 2037. Η τιμολόγηση πραγματοποιήθηκε για τρία προϊόντα, μια πρόσκαιρη ασφάλιση ζωής, μια πρόσκαιρη προκαταβλητέα ράντα ζωής και μια ισόβια ράντα προκαταβλητέα κλασματική με μηνιαίες πληρωμές για τα δύο φύλα. Από τη σύγκριση των τιμών που προέκυψαν, παρατηρήσαμε πως οι μικρότερες τιμές των ασφαλιστρών προέρχονται από τα πολύ-πληθυσμιακά μοντέλα θνησιμότητας σε σχέση με το απλό μοντέλο Lee-Carter (1992). Πιο συγκεκριμένα, στην πρόσκαιρη ασφάλιση ζωής παρατηρούμε πως με το μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005) λαμβάνονται οι χαμηλότερες τιμές ασφαλιστρών, ενώ στην πρόσκαιρη προκαταβλητέα ράντα ζωής οι χαμηλότερες τιμές ασφαλιστρών προέρχονται από το μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992) για τις γυναίκες και το μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011) για τους άνδρες. Αντίστοιχα για την ισόβια ράντα προκαταβλητέα κλασματική με μηνιαίες πληρωμές, τα μοντέλα Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011) για τους άνδρες και Augmented Common Factor των Li-Lee (2005) για τις γυναίκες είχαν τις χαμηλότερες τιμές ασφαλιστρών.

Τέλος, μετά την τιμολόγηση ακολούθησε η ανάλυση ευαισθησίας των τιμών των ασφαλιστικών προϊόντων σε μεταβολές του επιπέδου των επιτοκίων. Όπως ήταν αναμενόμενο, σε μια αύξηση του επιτοκίου, η τιμή μιας ασφάλισης ζωής ή μιας ράντας ζωής μειώνεται.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Ξένη Βιβλιογραφία

1. Alho, J. M. 1990. Stochastic methods in population forecasting. *International Journal of Forecasting* 6 (4), 521–530.
2. Alho, J. M. and Spencer, B. D. 1991. A population forecast as a database: implementing the stochastic propagation of error. *Journal of Official Statistics* 7 (3), 295.
3. Bell, W. R. and Monsell, B. 1991. Using principal components in time series modeling and forecasting of age-specific mortality rates. *Proceedings of the Social Statistics Section 154 – 159. Atlanta, GA. Alexandria, VA: American Statistical Association.*
4. Booth H. and Tickle L. 2008. Mortality modelling and forecasting: A review of methods. *Australian Demographic & Social Research Institute.*
5. Bozikas, A. E. 2019. Actuarial Models in Demography. PhD Thesis. *University of Piraeus.*
6. Bozikas, A. and Pitselis, G. 2018. An Empirical Study on Stochastic Mortality Modelling under the Age-Period-Cohort Framework: The Case of Greece with Applications to Insurance Pricing. *Risks* 2018, 6(2), 44
7. Box, G. E., Jenkins G. M., Reinsel G. C., and Ljung G. M. 1970. Time series analysis: forecasting and control. *John Wiley & Sons* 2015.
8. Brouhns, N., Denuit, M. and Vermunt, J. K. 2002. A Poisson log-bilinear regression approach to the construction of projected lifetables. *Insurance: Mathematics and Economics* 31 (3), 373–393.
9. Carter, L. R and Lee, R. D. 1992. Modeling and forecasting US sex differentials in mortality. *International Journal of Forecasting* 8 (1992) 393-411.
10. Cui, J. 2008. Longevity risk pricing. *Netspar Discussion paper, 001.*  
<https://www.netspar.nl/publicatie/longevity-risk-pricing/>
11. Deaton, A. S. and Paxson, C. 2004. Mortality, income, and income inequality over time in Britain and the United States. University of Chicago Press. *In Perspectives on the Economics of Aging: 247-286.*
12. Eurostat. 2019. Statistics Explained. Πληθυσμιακή διάρθρωση και δημογραφική γήρανση.  
[https://ec.europa.eu/eurostat/statisticsexplained/index.php?title=Population\\_structure\\_and\\_ageing/el](https://ec.europa.eu/eurostat/statisticsexplained/index.php?title=Population_structure_and_ageing/el)
13. Human Mortality Database. 2020. University of California, Berkeley (USA) and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany).  
<https://www.mortality.org/>



14. Jodz, K. 2018. Mortality in a heterogeneous population - Lee-Carter's methodology.
15. Kleinow, T. 2015. A common age effect model for the mortality of multiple populations. *Insurance: Mathematics and Economics* 63, 147–152.
16. Lee, R. D. and Carter, L. R. 1992. Modeling and forecasting US mortality. *Journal of the American Statistical Association* 87 (419), 659–671.
17. Li, N. and Lee, R. 2005. Coherent mortality forecasts for a group of populations: An extension of the Lee-Carter method. *Demography* 42 (3), 575–594.
18. Li, J. S.H. and Hardy, M. R. 2011. Measuring basis risk in longevity hedges. *North American Actuarial Journal* 15 (2), 177–200.
19. Malthus, T. R. 1798. An Essay on the Principle of Population. London. J. Johnson.
20. McNown, R. and Rogers, A. 1989. Forecasting mortality: A parameterized time series approach. *Demography* 26 (4), 645–660.
21. McNown, R. and A. Rogers. 1992. Forecasting cause-specific mortality using time series methods. *International Journal of Forecasting* 8 (3), 413–432.
22. Oeppen, J. and Vaupel, J. W. 2002. Broken limits to life expectancy. *Science* 296 (5570), 1029–1031.
23. Office for National Statistics. 2019. Period and cohort life expectancy explained. <https://www.ons.gov.uk/peoplepopulationandcommunity/birthsdeathsandmarriages/lifeexpectancies/methodologies/periodandcohortlifeexpectancyexplained>
24. Pascariu, M. 2018. Modelling and forecasting mortality. PhD Thesis. *University of Southern Denmark*.
25. Renshaw, A. E. and Haberman, S. 2006. A cohort-based extension to the Lee–Carter model for mortality reduction factors. *Insurance: Mathematics and Economics* 38 (3), 556–570.
26. Seligman, B., Greenberg, G. and Tuljapurkar, S. 2016. Convergence in male and female life expectancy: Direction, age pattern, and causes. *Demographic research Volume 34, article 38, 1063–1074*.
27. Wilson, C. 2001. On the Scale of Global Demographic Convergence 1950-2000. *Population and Development Review, Vol. 27, No. 1 (Mar., 2001), 155-171*.
28. White, K. M. 2002. Longevity advances in high-income countries, 1955–96. *Population and Development Review* 28 (1), 59–76.

## Ελληνική Βιβλιογραφία

1. Μαυρομμάτη, Ε. 2012. Μοντελοποίηση και πρόβλεψη θνησιμότητας: το μοντέλο του Lee-Carter και προεκτάσεις του (Διπλωματική εργασία). *Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς*
2. Μποζίκας, Α. 2013. Προβολή θνησιμότητας για προγράμματα κοινωνικής ασφάλισης στην Ελλάδα (Διπλωματική εργασία). *Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.*
3. Πιτσέλης, Γ. 2018. *Μαθηματικά των συνταξιοδοτικών ταμείων και πίνακες επιβίωσης-θνησιμότητας. Εκδόσεις Παπαζήση.*
4. Ελληνική Στατιστική Αρχή. 2019. Υπολογιζόμενος Πληθυσμός κατά φύλο, στην 1<sup>η</sup> και στο μέσον του έτους-Σύνολο Χώρας (2001-2019)  
<https://www.statistics.gr/el/statistics/-/publication/SPO18/-EXCEL%2009>

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

### Παράρτημα Α - Μοντέλο Lee-Carter (1992)

#### A.1. Κώδικας της Μοντελοποίησης της Θνησιμότητας με το Μοντέλο Lee-Carter (1992)

Ο κώδικας που παρουσιάζεται είναι κοινός για τους δύο πληθυσμούς και λόγω αυτού στο παρόν παράρτημα παρουσιάζεται μόνο ο πληθυσμός των ανδρών.

```
library(demography)
#Downloading data for Greek population
#Setting parameters
#Ages range, x1, x2
#Years range, y1, y2
#Time periods, t1, t2, tend

#Logarithm of mx rates, log(mxt)
p=mxt_male
logp= log(p)

#Calculateing ax
slogp=c()
for (i in 1:(x2-x1+1)) {slogp[i]=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1))
  {slogp[i]=slogp[i]+logp[i,j]}}
ax_male=(1/(t2-t1+1))%*%slogp

#Calculating kt
kt_male=c()
for (j in 1:(y2-y1+1)){kt_male[j]=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1)) {kt_male[j]=kt_male[j]+(logp[i,j]-ax_male[i])}}

#Calculating bx
blogp=c()
for (i in 1:(x2-x1+1)) {blogp[i]=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1)) {blogp[i]=blogp[i]+(logp[i,j]-ax_male[i])%*%kt_male[j]}
blogp[i]=blogp[i]/sum(kt_male^2)}
bx_male=blogp

fit_logp=matrix(data=0, nrow=(x2-x1+1), ncol=(y2-y1+1))
for (i in 1:(x2-x1+1)) {for (j in 1:(y2-y1+1))
{fit_logp[i,j]=fit_logp[i,j]+ax_male[i]+cbind(bx_male[i])%*%kt_male[j]}}

#Calculation of predicted kt for h years ahead
future=tend-t2
theta_1=(kt_male[(y2-y1+1)]-kt_male[1])/(y2-y1)
```

```

kt_male_for=c(0)
for (h in 1:future)
{kt_male_for[h]=kt_male[(y2-y1+1)]+theta_1*h}

#Calculation of predicted log(mxt) for h years ahead
mul_1=cbind(bx_male)*theta_1
for_logp=matrix(0, nrow=(x2-x1+1), ncol = future)
for (h in 1:future) {
for (i in 1:(x2-x1+1) ) {for_logp[i,h]=fit_logp[i,(y2-y1+1)]+mul_1[i]*h} }

library(Metrics)
#Backtesting predicted with actual mortality rates
num_ml=data$rate$male[x1:x2, (y2+1):(y2+future)]
num_fm=data$rate$female[x1:x2,(y2+1):(y2+future)]

mae(num_ml,exp(for_logp))
mse(num_ml,exp(for_logp))
mape(num_ml,exp(for_logp))
rmse(num_ml,exp(for_logp))

```

Πίνακας Α1-Εκτιμήσεις των παραμέτρων ηλικίας				
Ηλικία	Εκτιμήσεις παραμέτρου ηλικίας a(x)		Εκτιμήσεις παραμέτρου ηλικίας b(x)	
	Άνδρες	Γυναίκες	Άνδρες	Γυναίκες
20	-6,833947	-8,115900	0,024628	0,022161
21	-6,807227	-8,005841	0,023615	0,017467
22	-6,775822	-8,058781	0,020567	0,018756
23	-6,739916	-8,030314	0,018359	0,018210
24	-6,745368	-8,061092	0,010741	0,007381
25	-6,764700	-7,954726	0,011273	0,014708
26	-6,827480	-8,029289	0,003019	0,015699
27	-6,787182	-7,942433	0,003871	0,017105
28	-6,816139	-7,908178	0,007694	0,013479
29	-6,820253	-7,873803	-0,001279	0,018028
30	-6,780666	-7,805914	0,011515	0,017975
31	-6,810628	-7,825349	0,005576	0,013663
32	-6,809766	-7,680714	0,005867	0,013243
33	-6,745596	-7,663511	0,008107	0,010926
34	-6,695808	-7,526514	0,002495	0,016049
35	-6,669966	-7,463265	0,008835	0,016463
36	-6,611266	-7,467514	0,011712	0,013103
37	-6,565943	-7,406817	0,011465	0,017459
38	-6,517069	-7,273989	0,005672	0,009643
39	-6,421990	-7,188420	0,010410	0,006263
40	-6,325039	-7,102823	0,012627	0,014114
41	-6,277643	-6,999614	-0,001012	0,012435
42	-6,194117	-6,926803	0,004127	0,008018
43	-6,060495	-6,795389	0,006304	0,008183
44	-5,978889	-6,717456	-0,000098	0,009736
45	-5,867877	-6,616366	0,005353	0,004453
46	-5,791941	-6,519558	0,001424	0,010131
47	-5,714640	-6,461148	-0,000667	0,007390
48	-5,629213	-6,391946	0,003036	0,007359
49	-5,513074	-6,277598	0,002799	0,007070
50	-5,411501	-6,151064	0,006957	0,008980
51	-5,330111	-6,111132	0,006159	0,007639
52	-5,237859	-6,021195	0,003048	0,011195
53	-5,140121	-5,936965	0,002613	0,009068
54	-5,053106	-5,842155	0,006212	0,009763
55	-4,942697	-5,735686	0,007837	0,012149
56	-4,847967	-5,661942	0,008937	0,012380
57	-4,763207	-5,579616	0,011118	0,012203
58	-4,668007	-5,507041	0,014820	0,013663
59	-4,575927	-5,402408	0,014702	0,015595
60	-4,486329	-5,289593	0,018397	0,015874
61	-4,391085	-5,217498	0,021214	0,018683
62	-4,297134	-5,082888	0,021329	0,017245
63	-4,214836	-4,998029	0,027061	0,020347
64	-4,130842	-4,900243	0,025657	0,022191
65	-4,027110	-4,768897	0,030179	0,022858
66	-3,945577	-4,662272	0,028646	0,024324
67	-3,850490	-4,534289	0,031868	0,024078
68	-3,752186	-4,414333	0,032154	0,024389
69	-3,632947	-4,275156	0,032680	0,023028
70	-3,522632	-4,126419	0,032828	0,023998
71	-3,449784	-4,005688	0,029997	0,025315
72	-3,343666	-3,872788	0,030030	0,023599
73	-3,243188	-3,743046	0,032495	0,023224
74	-3,142741	-3,601440	0,027808	0,022163
75	-3,037509	-3,456817	0,027516	0,021487
76	-2,934077	-3,325491	0,027285	0,020437
77	-2,839110	-3,183327	0,026248	0,020114
78	-2,743385	-3,047155	0,026475	0,019411
79	-2,619419	-2,919145	0,026698	0,016458
80	-2,518479	-2,774642	0,028442	0,016980
81	-2,428984	-2,674481	0,024884	0,015459
82	-2,331332	-2,553995	0,023876	0,014183
83	-2,233051	-2,422499	0,024028	0,013086
84	-2,129147	-2,309971	0,021739	0,011729

Πίνακας Α2-Εκτιμήσεις παραμέτρου χρόνου k(t)		
Έτος	Άνδρες	Γυναίκες
1981	4,639949	15,663734
1982	4,366781	13,436925
1983	4,352455	14,391213
1984	4,114195	11,264759
1985	5,519043	11,262368
1986	2,340118	10,163688
1987	4,710216	10,310976
1988	2,570942	6,997708
1989	2,633285	6,501090
1990	1,517637	5,875878
1991	3,278580	3,981610
1992	3,400247	5,890322
1993	2,574727	1,717230
1994	2,287653	-0,010641
1995	3,032536	0,480459
1996	3,264074	0,700876
1997	1,482872	-1,783521
1998	0,462734	-0,013556
1999	0,646980	-1,058291
2000	0,712619	-4,173271
2001	-1,714828	-6,517112
2002	-4,841359	-7,158436
2003	-4,796846	-9,741868
2004	-4,399130	-8,342833
2005	-4,673849	-8,925166
2006	-6,033826	-14,946249
2007	-4,598722	-10,015409
2008	-7,961652	-14,875922
2009	-7,414504	-14,668445
2010	-11,472933	-16,408115

Πίνακας Α3-Προβλέψεις της παραμέτρου χρόνου k(t)		
Έτος	Άνδρες	Γυναίκες
2011	-12,02855	-17,51404
2012	-12,58417	-18,61997
2013	-13,13978	-19,72589
2014	-13,69540	-20,83182
2015	-14,25102	-21,93774
2016	-14,80663	-23,04367
2017	-15,36225	-24,14960

Πίνακας Α4-Προβλέψεις του δείκτη θνησιμότητας Ανδρών							
	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
20	0,000801	0,000790	0,000779	0,000768	0,000758	0,000748	0,000737
21	0,000832	0,000821	0,000811	0,000800	0,000790	0,000779	0,000769
22	0,000891	0,000881	0,000871	0,000861	0,000851	0,000841	0,000832
23	0,000948	0,000939	0,000929	0,000920	0,000910	0,000901	0,000892
24	0,001034	0,001028	0,001021	0,001015	0,001009	0,001003	0,000997
25	0,001007	0,001001	0,000995	0,000989	0,000983	0,000976	0,000970
26	0,001045	0,001043	0,001041	0,001040	0,001038	0,001036	0,001034
27	0,001077	0,001075	0,001072	0,001070	0,001068	0,001065	0,001063
28	0,000999	0,000995	0,000991	0,000986	0,000982	0,000978	0,000974
29	0,001108	0,001109	0,001110	0,001111	0,001112	0,001112	0,001113
30	0,000989	0,000982	0,000976	0,000970	0,000964	0,000958	0,000951
31	0,001031	0,001027	0,001024	0,001021	0,001018	0,001015	0,001012
32	0,001028	0,001024	0,001021	0,001018	0,001014	0,001011	0,001008
33	0,001067	0,001062	0,001057	0,001052	0,001048	0,001043	0,001038
34	0,001200	0,001198	0,001196	0,001195	0,001193	0,001191	0,001190
35	0,001141	0,001135	0,001129	0,001124	0,001118	0,001113	0,001107
36	0,001168	0,001161	0,001153	0,001146	0,001138	0,001131	0,001124
37	0,001226	0,001218	0,001211	0,001203	0,001195	0,001188	0,001180
38	0,001381	0,001376	0,001372	0,001368	0,001363	0,001359	0,001355
39	0,001434	0,001426	0,001418	0,001409	0,001401	0,001393	0,001385
40	0,001539	0,001528	0,001517	0,001506	0,001496	0,001485	0,001475
41	0,001901	0,001902	0,001903	0,001904	0,001905	0,001906	0,001907
42	0,001943	0,001938	0,001934	0,001929	0,001925	0,001920	0,001916
43	0,002163	0,002155	0,002148	0,002140	0,002133	0,002125	0,002118
44	0,002535	0,002535	0,002535	0,002535	0,002535	0,002535	0,002535
45	0,002652	0,002645	0,002637	0,002629	0,002621	0,002613	0,002606
46	0,003000	0,002998	0,002995	0,002993	0,002991	0,002988	0,002986
47	0,003324	0,003325	0,003326	0,003328	0,003329	0,003330	0,003331
48	0,003463	0,003457	0,003451	0,003445	0,003439	0,003433	0,003428
49	0,003900	0,003894	0,003888	0,003882	0,003876	0,003870	0,003864
50	0,004106	0,004091	0,004075	0,004059	0,004043	0,004028	0,004012
51	0,004498	0,004482	0,004467	0,004452	0,004436	0,004421	0,004406
52	0,005120	0,005112	0,005103	0,005094	0,005086	0,005077	0,005069
53	0,005676	0,005667	0,005659	0,005651	0,005643	0,005635	0,005626
54	0,005929	0,005909	0,005889	0,005868	0,005848	0,005828	0,005808
55	0,006493	0,006465	0,006437	0,006409	0,006381	0,006354	0,006326
56	0,007045	0,007010	0,006975	0,006941	0,006906	0,006872	0,006838
57	0,007469	0,007423	0,007378	0,007332	0,007287	0,007242	0,007198
58	0,007858	0,007793	0,007729	0,007666	0,007603	0,007541	0,007479
59	0,008628	0,008558	0,008488	0,008419	0,008350	0,008282	0,008215
60	0,009026	0,008934	0,008844	0,008754	0,008665	0,008577	0,008489
61	0,009597	0,009485	0,009374	0,009264	0,009155	0,009048	0,008942
62	0,010528	0,010404	0,010282	0,010160	0,010041	0,009922	0,009806
63	0,010670	0,010510	0,010354	0,010199	0,010047	0,009897	0,009749
64	0,011802	0,011635	0,011471	0,011308	0,011148	0,010990	0,010835
65	0,012399	0,012193	0,011990	0,011791	0,011595	0,011402	0,011212
66	0,013703	0,013487	0,013274	0,013064	0,012858	0,012655	0,012455
67	0,014497	0,014242	0,013992	0,013747	0,013506	0,013269	0,013036
68	0,015939	0,015657	0,015380	0,015108	0,014840	0,014577	0,014319
69	0,017845	0,017524	0,017208	0,016899	0,016595	0,016296	0,016003
70	0,019891	0,019531	0,019178	0,018831	0,018491	0,018157	0,017829
71	0,022135	0,021769	0,021409	0,021055	0,020707	0,020365	0,020028
72	0,024603	0,024196	0,023796	0,023402	0,023015	0,022634	0,022259
73	0,026409	0,025936	0,025472	0,025016	0,024569	0,024129	0,023697
74	0,030893	0,030419	0,029953	0,029493	0,029041	0,028596	0,028157
75	0,034442	0,033919	0,033404	0,032898	0,032398	0,031907	0,031423
76	0,038301	0,037725	0,037157	0,036598	0,036047	0,035505	0,034971
77	0,042645	0,042028	0,041419	0,040820	0,040229	0,039646	0,039072
78	0,046801	0,046118	0,045444	0,044781	0,044127	0,043483	0,042848
79	0,052836	0,052058	0,051291	0,050536	0,049792	0,049059	0,048336
80	0,057234	0,056337	0,055454	0,054584	0,053729	0,052886	0,052057
81	0,065329	0,064432	0,063548	0,062675	0,061814	0,060966	0,060129
82	0,072910	0,071949	0,071001	0,070065	0,069142	0,068230	0,067331
83	0,080292	0,079227	0,078176	0,077140	0,076117	0,075107	0,074111
84	0,091571	0,090471	0,089385	0,088312	0,087252	0,086204	0,085169

Πίνακας Α5-Προβλέψεις του δείκτη θνησιμότητας Γυναικών							
	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
20	0,000203	0,000198	0,000193	0,000188	0,000184	0,000179	0,000175
21	0,000246	0,000241	0,000236	0,000232	0,000227	0,000223	0,000219
22	0,000228	0,000223	0,000218	0,000214	0,000210	0,000205	0,000201
23	0,000237	0,000232	0,000227	0,000223	0,000218	0,000214	0,000210
24	0,000277	0,000275	0,000273	0,000271	0,000268	0,000266	0,000264
25	0,000271	0,000267	0,000263	0,000258	0,000254	0,000250	0,000246
26	0,000247	0,000243	0,000239	0,000235	0,000231	0,000227	0,000223
27	0,000263	0,000258	0,000254	0,000249	0,000244	0,000240	0,000235
28	0,000290	0,000286	0,000282	0,000278	0,000274	0,000270	0,000266
29	0,000278	0,000272	0,000267	0,000261	0,000256	0,000251	0,000246
30	0,000297	0,000291	0,000286	0,000280	0,000275	0,000269	0,000264
31	0,000314	0,000310	0,000305	0,000301	0,000296	0,000292	0,000287
32	0,000366	0,000361	0,000356	0,000350	0,000345	0,000340	0,000335
33	0,000388	0,000383	0,000379	0,000374	0,000370	0,000365	0,000361
34	0,000407	0,000399	0,000392	0,000386	0,000379	0,000372	0,000366
35	0,000430	0,000422	0,000415	0,000407	0,000400	0,000393	0,000386
36	0,000454	0,000448	0,000441	0,000435	0,000429	0,000422	0,000416
37	0,000447	0,000439	0,000430	0,000422	0,000414	0,000406	0,000398
38	0,000586	0,000579	0,000573	0,000567	0,000561	0,000555	0,000549
39	0,000677	0,000672	0,000667	0,000663	0,000658	0,000654	0,000649
40	0,000643	0,000633	0,000623	0,000613	0,000604	0,000594	0,000585
41	0,000734	0,000724	0,000714	0,000704	0,000694	0,000685	0,000676
42	0,000853	0,000845	0,000838	0,000830	0,000823	0,000816	0,000808
43	0,000970	0,000961	0,000952	0,000944	0,000935	0,000927	0,000918
44	0,001020	0,001009	0,000998	0,000988	0,000977	0,000966	0,000956
45	0,001238	0,001232	0,001226	0,001220	0,001214	0,001208	0,001202
46	0,001235	0,001221	0,001207	0,001194	0,001180	0,001167	0,001154
47	0,001373	0,001362	0,001351	0,001340	0,001329	0,001318	0,001308
48	0,001472	0,001460	0,001449	0,001437	0,001425	0,001414	0,001402
49	0,001659	0,001646	0,001633	0,001621	0,001608	0,001596	0,001583
50	0,001821	0,001803	0,001785	0,001768	0,001750	0,001733	0,001716
51	0,001940	0,001924	0,001908	0,001892	0,001876	0,001860	0,001844
52	0,001995	0,001970	0,001946	0,001922	0,001898	0,001875	0,001852
53	0,002252	0,002230	0,002208	0,002186	0,002164	0,002142	0,002121
54	0,002446	0,002420	0,002394	0,002368	0,002343	0,002318	0,002293
55	0,002610	0,002575	0,002541	0,002507	0,002473	0,002440	0,002408
56	0,002798	0,002760	0,002723	0,002686	0,002649	0,002613	0,002578
57	0,003048	0,003007	0,002967	0,002927	0,002888	0,002849	0,002811
58	0,003194	0,003147	0,003099	0,003053	0,003007	0,002962	0,002918
59	0,003429	0,003370	0,003313	0,003256	0,003200	0,003145	0,003092
60	0,003820	0,003753	0,003688	0,003624	0,003561	0,003499	0,003438
61	0,003908	0,003828	0,003750	0,003673	0,003598	0,003524	0,003452
62	0,004585	0,004499	0,004414	0,004330	0,004248	0,004168	0,004089
63	0,004727	0,004622	0,004519	0,004419	0,004320	0,004224	0,004130
64	0,005047	0,004925	0,004806	0,004689	0,004575	0,004464	0,004356
65	0,005689	0,005547	0,005408	0,005273	0,005142	0,005013	0,004888
66	0,006169	0,006005	0,005845	0,005690	0,005539	0,005392	0,005249
67	0,007041	0,006856	0,006676	0,006500	0,006330	0,006163	0,006001
68	0,007895	0,007685	0,007481	0,007282	0,007088	0,006899	0,006716
69	0,009293	0,009059	0,008832	0,008610	0,008393	0,008182	0,007976
70	0,010602	0,010324	0,010054	0,009790	0,009534	0,009284	0,009041
71	0,011689	0,011367	0,011053	0,010748	0,010451	0,010162	0,009882
72	0,013758	0,013404	0,013059	0,012722	0,012394	0,012075	0,011764
73	0,015767	0,015368	0,014978	0,014598	0,014228	0,013867	0,013516
74	0,018507	0,018059	0,017621	0,017195	0,016778	0,016372	0,015976
75	0,021641	0,021133	0,020637	0,020152	0,019679	0,019217	0,018765
76	0,025136	0,024575	0,024025	0,023488	0,022963	0,022450	0,021948
77	0,029141	0,028500	0,027873	0,027260	0,026660	0,026073	0,025500
78	0,033806	0,033088	0,032385	0,031697	0,031024	0,030365	0,029720
79	0,040462	0,039732	0,039015	0,038311	0,037620	0,036942	0,036275
80	0,046326	0,045465	0,044619	0,043789	0,042974	0,042174	0,041390
81	0,052590	0,051698	0,050822	0,049960	0,049113	0,048281	0,047462
82	0,060664	0,059720	0,058790	0,057875	0,056975	0,056088	0,055215
83	0,070531	0,069517	0,068518	0,067534	0,066564	0,065607	0,064664
84	0,080831	0,079789	0,078760	0,077745	0,076743	0,075754	0,074778



## Παράρτημα Β - Μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992)

### B.1. Κώδικας της Μοντελοποίησης της Θνησιμότητας με το Μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992).

```
library(demography)
#Downloading data for Greek population
#Setting parameters
#Ages range, x1, x2
#Years range, y1, y2
#Time periods, t1, t2, tend

#Logarithm of mx rates, log(mxt)
#Males
p=mxt_male
logp= log(p)
#Females
e=mxt_female
loge=log(e)

#Calculating ax
#Males
slogp=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1)) {slogp[i]=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1)) {slogp[i]=slogp[i]+logp[i,j] } }
ax_male=(1/(t2-t1+1))%*%slogp

#Females
sloge=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1)){sloge[i]=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1)){sloge[i]=sloge[i]+loge[i,j] } }
ax_fem=(1/(t2-t1+1))%*%sloge

#Calculating kt
#Joint kt for both Males & Females
jkt=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1)){jkt[j]=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1)){jkt[j]=jkt[j]+(logp[i,j]-ax_male[i])+(loge[i,j]-ax_fem[i]) } }

#Calculating bx
#Males
jlogp=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1)){jlogp[i]=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1)){jlogp[i]=jlogp[i]+(logp[i,j]-ax_male[i])%*%jkt[j] }
jlogp[i]=jlogp[i]/sum(jkt^2) }
jbx_male=jlogp
```

```

#Females
jloge=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1)){jloge[i]=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1)){jloge[i]=jloge[i]+(loge[i,j]-ax_fem[i])%*%jkt[j]}
jloge[i]=jloge[i]/sum(jkt^2)}
jbx_fem=jloge

#Males
jfit_logp=matrix(data=0, nrow=(x2-x1+1), ncol=(y2-y1+1))
for (i in 1:(x2-x1+1)) {
for (j in 1:(y2-y1+1)) {jfit_logp[i,j]=jfit_logp[i,j]+ax_male[i]+cbind(jbx_male[i])%*%jkt[j]}
}}

#Females
jfit_loge=matrix(data=0, nrow=(x2-x1+1), ncol=(y2-y1+1))
for (i in 1:(x2-x1+1)) {
for (j in 1:(y2-y1+1)) {jfit_loge[i,j]=jfit_loge[i,j]+ax_fem[i]+cbind(jbx_fem[i])%*%jkt[j]}
}}

#Calculation of predicted joint-kt for h years ahead
#Parameter for the years to predict
future=tend-t2
#Males&Females
theta_j=(jkt[(y2-y1+1)]-jkt[1])/(y2-y1)
jkt_for=c(0)
for (h in 1:future){jkt_for[h]=jkt[(y2-y1+1)]+theta_j*h}

#Calculation of predicted log(mxt) for h years ahead

#Males
jmul_1=cbind(jbx_male)*theta_j
jfor_logp=matrix(0, nrow=(x2-x1+1), ncol = future)
for (h in 1:future) {for (i in 1:(x2-x1+1) ) {jfor_logp[i,h]=jfit_logp[i,(y2-
y1+1)]+jmul_1[i]*h}}

#Females
jmul_2=cbind(jbx_fem)*theta_j
jfor_loge=matrix(0, nrow=(x2-x1+1), ncol = future)
for (h in 1:future) {for (i in 1:(x2-x1+1) ) {jfor_loge[i,h]=jfit_loge[i,(y2-
y1+1)]+jmul_2[i]*h}}

#Backtesting predicted with actual mortality rates
num_ml=data$rate$male[x1:x2, (y2+1):(y2+future)]
num_fm=data$rate$female[x1:x2,(y2+1):(y2+future)]

#Males, #Females
mae(num_ml, exp(jfor_logp)), mse(num_ml, exp(jfor_logp)), mape(num_ml,
exp(jfor_logp)), rmse(num_ml, exp(jfor_logp))
mae(num_fm, exp(jfor_loge)), mse(num_fm, exp(jfor_loge)), mape(num_fm,
exp(jfor_loge)), rmse(num_fm, exp(jfor_loge))

```

Πίνακας Β1-Εκτιμήσεις παραμέτρου ηλικίας b(x)		
Ηλικία	Άνδρες	Γυναίκες
20	0,008036	0,015211
21	0,007189	0,011508
22	0,006150	0,013127
23	0,005793	0,011725
24	0,003277	0,005107
25	0,002261	0,009664
26	0,000371	0,010455
27	0,000881	0,012087
28	0,001144	0,008621
29	0,001521	0,012494
30	0,002594	0,012381
31	0,001110	0,008888
32	0,000553	0,008500
33	0,001833	0,007864
34	0,000004	0,011538
35	0,002300	0,010717
36	0,003002	0,009234
37	0,002404	0,012289
38	0,000371	0,006772
39	0,003013	0,004514
40	0,003567	0,009635
41	0,000671	0,008540
42	0,000016	0,005725
43	0,001908	0,005488
44	0,000767	0,006554
45	0,001255	0,003054
46	0,000207	0,006916
47	0,000555	0,004847
48	0,000220	0,005134
49	0,000490	0,004876
50	0,002081	0,006077
51	0,001809	0,005160
52	0,001024	0,007288
53	0,000704	0,006107
54	0,002049	0,006539
55	0,003060	0,008065
56	0,003339	0,008237
57	0,004321	0,007886
58	0,005871	0,009071
59	0,005284	0,010566
60	0,006783	0,010746
61	0,007434	0,012690
62	0,007506	0,011561
63	0,009597	0,013782
64	0,009195	0,014983
65	0,010332	0,015543
66	0,009866	0,016673
67	0,010699	0,016683
68	0,011007	0,016968
69	0,011018	0,015850
70	0,011053	0,016700
71	0,010157	0,017475
72	0,010164	0,016333
73	0,010807	0,015940
74	0,009505	0,015352
75	0,009376	0,014840
76	0,009441	0,014060
77	0,008934	0,014045
78	0,009071	0,013431
79	0,008806	0,011457
80	0,009521	0,011721
81	0,008195	0,010709
82	0,007769	0,009828
83	0,008020	0,009054
84	0,007104	0,008168

Πίνακας Β2-Εκτιμήσεις της κοινής παραμέτρου χρόνου K(t)	
Έτος	Τιμές K
1981	20,303684
1982	17,803707
1983	18,743668
1984	15,378954
1985	16,781411
1986	12,503806
1987	15,021192
1988	9,568651
1989	9,134376
1990	7,393515
1991	7,260190
1992	9,290569
1993	4,291958
1994	2,277012
1995	3,512996
1996	3,964951
1997	-0,300648
1998	0,449177
1999	-0,411311
2000	-3,460651
2001	-8,231940
2002	-11,999795
2003	-14,538714
2004	-12,741964
2005	-13,599015
2006	-20,980076
2007	-14,614131
2008	-22,837575
2009	-22,082949
2010	-27,881048

Πίνακας Β3-Προβλέψεις της κοινής παραμέτρου χρόνου K(t)	
Έτος	Τιμές K
2011	-29,54259
2012	-31,20413
2013	-32,86568
2014	-34,52722
2015	-36,18876
2016	-37,85030
2017	-39,51185

Πίνακας Β4-Προβλέψεις του δείκτη θνησιμότητας Ανδρών							
	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
20	0,0008491	0,0008378	0,0008267	0,0008157	0,0008049	0,0007943	0,0007837
21	0,0008942	0,0008836	0,0008731	0,0008627	0,0008525	0,0008423	0,0008323
22	0,0009515	0,0009418	0,0009322	0,0009228	0,0009134	0,0009041	0,0008949
23	0,0009967	0,0009872	0,0009777	0,0009683	0,0009591	0,0009499	0,0009408
24	0,0010678	0,0010620	0,0010562	0,0010505	0,0010448	0,0010391	0,0010335
25	0,0010792	0,0010752	0,0010712	0,0010671	0,0010631	0,0010592	0,0010552
26	0,0010718	0,0010711	0,0010704	0,0010698	0,0010691	0,0010685	0,0010678
27	0,0010992	0,0010975	0,0010959	0,0010943	0,0010927	0,0010911	0,0010895
28	0,0010595	0,0010575	0,0010555	0,0010535	0,0010515	0,0010495	0,0010475
29	0,0011416	0,0011445	0,0011474	0,0011503	0,0011532	0,0011561	0,0011591
30	0,0010518	0,0010472	0,0010427	0,0010382	0,0010338	0,0010293	0,0010249
31	0,0010664	0,0010645	0,0010625	0,0010606	0,0010586	0,0010566	0,0010547
32	0,0010851	0,0010841	0,0010831	0,0010821	0,0010811	0,0010801	0,0010791
33	0,0011141	0,0011107	0,0011073	0,0011039	0,0011006	0,0010972	0,0010939
34	0,0012362	0,0012363	0,0012363	0,0012363	0,0012363	0,0012363	0,0012363
35	0,0011851	0,0011806	0,0011761	0,0011716	0,0011671	0,0011627	0,0011583
36	0,0012310	0,0012248	0,0012188	0,0012127	0,0012067	0,0012006	0,0011947
37	0,0013110	0,0013058	0,0013006	0,0012954	0,0012902	0,0012851	0,0012800
38	0,0014619	0,0014610	0,0014601	0,0014592	0,0014583	0,0014574	0,0014565
39	0,0014870	0,0014795	0,0014722	0,0014648	0,0014575	0,0014502	0,0014430
40	0,0016118	0,0016022	0,0015928	0,0015833	0,0015740	0,0015647	0,0015554
41	0,0019154	0,0019176	0,0019197	0,0019219	0,0019240	0,0019262	0,0019283
42	0,0020404	0,0020404	0,0020403	0,0020403	0,0020402	0,0020401	0,0020401
43	0,0022054	0,0021984	0,0021914	0,0021845	0,0021776	0,0021707	0,0021638
44	0,0025896	0,0025929	0,0025963	0,0025996	0,0026029	0,0026062	0,0026095
45	0,0027259	0,0027202	0,0027146	0,0027089	0,0027033	0,0026976	0,0026920
46	0,0030708	0,0030718	0,0030729	0,0030739	0,0030750	0,0030761	0,0030771
47	0,0033518	0,0033549	0,0033580	0,0033611	0,0033642	0,0033673	0,0033704
48	0,0035682	0,0035669	0,0035656	0,0035643	0,0035630	0,0035617	0,0035604
49	0,0039757	0,0039725	0,0039693	0,0039660	0,0039628	0,0039596	0,0039563
50	0,0041987	0,0041842	0,0041698	0,0041554	0,0041410	0,0041267	0,0041125
51	0,0045915	0,0045777	0,0045639	0,0045503	0,0045366	0,0045230	0,0045094
52	0,0051534	0,0051446	0,0051359	0,0051272	0,0051184	0,0051097	0,0051011
53	0,0057365	0,0057298	0,0057231	0,0057164	0,0057097	0,0057031	0,0056964
54	0,0060142	0,0059937	0,0059733	0,0059530	0,0059328	0,0059126	0,0058925
55	0,0065186	0,0064855	0,0064526	0,0064199	0,0063874	0,0063550	0,0063227
56	0,0071074	0,0070681	0,0070290	0,0069901	0,0069514	0,0069129	0,0068747
57	0,0075150	0,0074612	0,0074078	0,0073548	0,0073022	0,0072500	0,0071981
58	0,0078956	0,0078190	0,0077431	0,0076679	0,0075935	0,0075197	0,0074468
59	0,0088085	0,0087315	0,0086552	0,0085796	0,0085046	0,0084302	0,0083565
60	0,0092169	0,0091136	0,0090114	0,0089104	0,0088106	0,0087118	0,0086142
61	0,0099448	0,0098227	0,0097022	0,0095831	0,0094654	0,0093492	0,0092345
62	0,0109012	0,0107661	0,0106327	0,0105009	0,0103708	0,0102422	0,0101153
63	0,0111274	0,0109514	0,0107781	0,0106076	0,0104398	0,0102747	0,0101122
64	0,0122469	0,0120612	0,0118783	0,0116982	0,0115208	0,0113462	0,0111741
65	0,0131367	0,0129131	0,0126933	0,0124772	0,0122649	0,0120561	0,0118509
66	0,0144501	0,0142151	0,0139840	0,0137566	0,0135329	0,0133129	0,0130964
67	0,0155052	0,0152320	0,0149636	0,0146999	0,0144409	0,0141864	0,0139365
68	0,0169520	0,0166448	0,0163431	0,0160469	0,0157561	0,0154706	0,0151902
69	0,0190928	0,0187465	0,0184064	0,0180725	0,0177447	0,0174228	0,0171067
70	0,0212972	0,0209096	0,0205291	0,0201555	0,0197887	0,0194286	0,0190750
71	0,0235211	0,0231275	0,0227405	0,0223599	0,0219857	0,0216178	0,0212560
72	0,0261489	0,0257110	0,0252804	0,0248570	0,0244408	0,0240315	0,0236290
73	0,0283691	0,0278643	0,0273684	0,0268814	0,0264030	0,0259331	0,0254716
74	0,0325969	0,0320861	0,0315834	0,0310885	0,0306014	0,0301219	0,0296500
75	0,0363519	0,0357899	0,0352367	0,0346919	0,0341557	0,0336277	0,0331078
76	0,0402357	0,0396095	0,0389929	0,0383860	0,0377886	0,0372004	0,0366214
77	0,0449116	0,0442499	0,0435978	0,0429554	0,0423224	0,0416988	0,0410843
78	0,0492250	0,0484887	0,0477634	0,0470490	0,0463452	0,0456520	0,0449691
79	0,0561581	0,0553424	0,0545385	0,0537463	0,0529656	0,0521962	0,0514380
80	0,0608243	0,0598696	0,0589299	0,0580049	0,0570945	0,0561984	0,0553163
81	0,0691776	0,0682421	0,0673192	0,0664088	0,0655107	0,0646248	0,0637508
82	0,0772382	0,0762475	0,0752696	0,0743041	0,0733511	0,0724103	0,0714815
83	0,0845868	0,0834671	0,0823623	0,0812721	0,0801963	0,0791347	0,0780872
84	0,0964231	0,0952917	0,0941736	0,0930686	0,0919765	0,0908973	0,0898307

Πίνακας Β5-Προβλέψεις του δείκτη θνησιμότητας Γυναικών							
	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
20	0,0001906	0,0001859	0,0001812	0,0001767	0,0001723	0,0001680	0,0001638
21	0,0002374	0,0002329	0,0002285	0,0002241	0,0002199	0,0002157	0,0002117
22	0,0002146	0,0002100	0,0002055	0,0002010	0,0001967	0,0001925	0,0001883
23	0,0002302	0,0002257	0,0002214	0,0002171	0,0002129	0,0002088	0,0002048
24	0,0002714	0,0002691	0,0002668	0,0002646	0,0002623	0,0002601	0,0002579
25	0,0002638	0,0002596	0,0002555	0,0002514	0,0002474	0,0002435	0,0002396
26	0,0002392	0,0002351	0,0002310	0,0002271	0,0002231	0,0002193	0,0002155
27	0,0002486	0,0002437	0,0002388	0,0002341	0,0002294	0,0002249	0,0002204
28	0,0002850	0,0002810	0,0002770	0,0002731	0,0002692	0,0002653	0,0002616
29	0,0002631	0,0002577	0,0002524	0,0002472	0,0002421	0,0002372	0,0002323
30	0,0002825	0,0002768	0,0002711	0,0002656	0,0002602	0,0002549	0,0002497
31	0,0003072	0,0003027	0,0002983	0,0002939	0,0002896	0,0002854	0,0002812
32	0,0003591	0,0003541	0,0003491	0,0003442	0,0003394	0,0003346	0,0003299
33	0,0003723	0,0003675	0,0003627	0,0003580	0,0003533	0,0003487	0,0003442
34	0,0003830	0,0003758	0,0003686	0,0003616	0,0003548	0,0003480	0,0003414
35	0,0004181	0,0004107	0,0004034	0,0003963	0,0003893	0,0003824	0,0003757
36	0,0004349	0,0004283	0,0004218	0,0004154	0,0004090	0,0004028	0,0003967
37	0,0004223	0,0004137	0,0004054	0,0003972	0,0003891	0,0003813	0,0003736
38	0,0005676	0,0005613	0,0005550	0,0005488	0,0005426	0,0005366	0,0005306
39	0,0006610	0,0006560	0,0006511	0,0006463	0,0006414	0,0006366	0,0006319
40	0,0006190	0,0006091	0,0005995	0,0005899	0,0005806	0,0005713	0,0005623
41	0,0007088	0,0006988	0,0006890	0,0006793	0,0006697	0,0006603	0,0006510
42	0,0008285	0,0008206	0,0008128	0,0008051	0,0007975	0,0007900	0,0007825
43	0,0009514	0,0009428	0,0009342	0,0009258	0,0009174	0,0009090	0,0009008
44	0,0009967	0,0009859	0,0009752	0,0009646	0,0009542	0,0009438	0,0009336
45	0,0012228	0,0012166	0,0012105	0,0012043	0,0011982	0,0011922	0,0011861
46	0,0012019	0,0011881	0,0011746	0,0011611	0,0011479	0,0011348	0,0011218
47	0,0013545	0,0013436	0,0013328	0,0013221	0,0013115	0,0013010	0,0012906
48	0,0014393	0,0014270	0,0014149	0,0014029	0,0013910	0,0013792	0,0013674
49	0,0016260	0,0016128	0,0015998	0,0015869	0,0015741	0,0015614	0,0015488
50	0,0017809	0,0017631	0,0017453	0,0017278	0,0017104	0,0016933	0,0016762
51	0,0019044	0,0018881	0,0018720	0,0018560	0,0018402	0,0018245	0,0018089
52	0,0019566	0,0019331	0,0019098	0,0018868	0,0018641	0,0018417	0,0018195
53	0,0022042	0,0021819	0,0021599	0,0021381	0,0021165	0,0020951	0,0020740
54	0,0023927	0,0023668	0,0023412	0,0023159	0,0022909	0,0022661	0,0022416
55	0,0025442	0,0025103	0,0024769	0,0024439	0,0024114	0,0023793	0,0023476
56	0,0027250	0,0026879	0,0026514	0,0026153	0,0025798	0,0025447	0,0025101
57	0,0029896	0,0029507	0,0029123	0,0028743	0,0028369	0,0028000	0,0027635
58	0,0031041	0,0030576	0,0030119	0,0029668	0,0029224	0,0028787	0,0028356
59	0,0032976	0,0032402	0,0031838	0,0031284	0,0030740	0,0030205	0,0029679
60	0,0036718	0,0036068	0,0035430	0,0034803	0,0034187	0,0033582	0,0032987
61	0,0037261	0,0036483	0,0035722	0,0034977	0,0034247	0,0033533	0,0032833
62	0,0044076	0,0043237	0,0042414	0,0041607	0,0040816	0,0040039	0,0039277
63	0,0044932	0,0043915	0,0042921	0,0041949	0,0040999	0,0040071	0,0039164
64	0,0047821	0,0046645	0,0045498	0,0044379	0,0043288	0,0042224	0,0041185
65	0,0053637	0,0052269	0,0050937	0,0049638	0,0048373	0,0047139	0,0045937
66	0,0057713	0,0056136	0,0054602	0,0053110	0,0051659	0,0050247	0,0048874
67	0,0065573	0,0063780	0,0062036	0,0060340	0,0058691	0,0057086	0,0055525
68	0,0073312	0,0071274	0,0069293	0,0067367	0,0065494	0,0063673	0,0061903
69	0,0087088	0,0084824	0,0082619	0,0080472	0,0078380	0,0076343	0,0074358
70	0,0098549	0,0095853	0,0093229	0,0090678	0,0088197	0,0085783	0,0083435
71	0,0108678	0,0105567	0,0102546	0,0099612	0,0096761	0,0093992	0,0091302
72	0,0128384	0,0124947	0,0121602	0,0118346	0,0115178	0,0112094	0,0109093
73	0,0147874	0,0144009	0,0140245	0,0136579	0,0133009	0,0129533	0,0126147
74	0,0173356	0,0168990	0,0164733	0,0160584	0,0156540	0,0152597	0,0148754
75	0,0203383	0,0198429	0,0193596	0,0188880	0,0184280	0,0179791	0,0175412
76	0,0237337	0,0231856	0,0226503	0,0221272	0,0216163	0,0211172	0,0206296
77	0,0273713	0,0267399	0,0261231	0,0255205	0,0249318	0,0243568	0,0237949
78	0,0319385	0,0312337	0,0305444	0,0298703	0,0292111	0,0285664	0,0279360
79	0,0384795	0,0377539	0,0370420	0,0363435	0,0356581	0,0349857	0,0343260
80	0,0441161	0,0432652	0,0424307	0,0416123	0,0408097	0,0400226	0,0392507
81	0,0502433	0,0493571	0,0484866	0,0476314	0,0467913	0,0459660	0,0451553
82	0,0581720	0,0572298	0,0563028	0,0553908	0,0544936	0,0536110	0,0527426
83	0,0678818	0,0668682	0,0658697	0,0648862	0,0639173	0,0629630	0,0620228
84	0,0779805	0,0769293	0,0758922	0,0748691	0,0738598	0,0728641	0,0718818

## Παράρτημα Γ - Μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011)

### Γ.1. Κώδικας της Μοντελοποίησης της Θνησιμότητας με το Μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011).

Η εκτίμηση των παραμέτρων του πληθυσμού βάσης, εδώ των γυναικών, είναι κοινή με το μοντέλο Lee-Carter (1992). Επομένως, παρουσιάζεται στο παρόν παράρτημα, η εκτίμηση των παραμέτρων του πληθυσμού των ανδρών. Συγκεκριμένα, παρουσιάζεται ο κώδικας της επανεκτίμησης της παραμέτρου του χρόνου, καθώς οι παράμετροι ηλικίας παραμένουν ίδιες.

```
#Assumption: The females is the base population
#Linear regression for kt males, re-estimating kt males
res=lm(kt_male~kt_fem)

kt_male_re=c1+c2*kt_fem

#Calculation of predicted kt for h years ahead
#Parameter for the years to predict
future=tend-t2

#Males
theta_re=c2*theta_1

#Forecast the kt for males with the re-estimated kt (kt_male_re)
kt_pro=c(0)
for (h in 1:future){ kt_pro[h]=kt_male_re[(y2-y1+1)]+theta_re*h}

#Calculation of predicted log(mxt) for h years ahead
#Males
mul_1=cbind(bx_male)*theta_re
co_male=matrix(0, nrow=(x2-x1+1), ncol = future)
for (h in 1:future) {
for (i in 1:(x2-x1+1) ) {co_male[i,h]=fit_logp[i,(y2-y1+1)]+mul_1[i]*h}
}
library(Metrics)

#Backtesting predicted with actual mortality rates
num_ml=data$rate$male[x1:x2, (y2+1):(y2+future)]

#Males
mae(num_ml,exp(co_male)), mse(num_ml,exp(co_male)), mape(num_ml,exp(co_male)),
rmse(num_ml,exp(co_male))
```

Πίνακας Γ1-Εκτιμήσεις παραμέτρου χρόνου του μοντέλου $k(t)$	
Έτος	Άνδρες
1981	6,913972
1982	5,931058
1983	6,352281
1984	4,972264
1985	4,971209
1986	4,486251
1987	4,551264
1988	3,088788
1989	2,869581
1990	2,593612
1991	1,757482
1992	2,599988
1993	0,757985
1994	-0,004697
1995	0,212074
1996	0,309366
1997	-0,787246
1998	-0,005984
1999	-0,467129
2000	-1,842081
2001	-2,876653
2002	-3,159734
2003	-4,300060
2004	-3,682526
2005	-3,939568
2006	-6,597274
2007	-4,420801
2008	-6,566232
2009	-6,474651
2010	-7,242542

Πίνακας Γ2-Προβλέψεις της παραμέτρου χρόνου $k(t)$	
Έτος	Άνδρες
2011	-7,730698
2012	-8,218853
2013	-8,707009
2014	-9,195165
2015	-9,683320
2016	-10,171476
2017	-10,659632



Πίνακας Γ3-Προβλέψεις του δείκτη θνησιμότητας Ανδρών							
	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
20	0,0008900	0,0008793	0,0008688	0,0008584	0,0008482	0,0008380	0,0008280
21	0,0009212	0,0009107	0,0009002	0,0008899	0,0008797	0,0008696	0,0008597
22	0,0009733	0,0009636	0,0009539	0,0009444	0,0009350	0,0009256	0,0009164
23	0,0010262	0,0010171	0,0010080	0,0009990	0,0009901	0,0009813	0,0009725
24	0,0010826	0,0010769	0,0010713	0,0010657	0,0010601	0,0010546	0,0010491
25	0,0010575	0,0010517	0,0010459	0,0010402	0,0010345	0,0010288	0,0010231
26	0,0010586	0,0010570	0,0010555	0,0010539	0,0010524	0,0010508	0,0010493
27	0,0010949	0,0010928	0,0010908	0,0010887	0,0010866	0,0010846	0,0010825
28	0,0010327	0,0010288	0,0010249	0,0010211	0,0010173	0,0010134	0,0010096
29	0,0011023	0,0011030	0,0011037	0,0011044	0,0011051	0,0011057	0,0011064
30	0,0010388	0,0010330	0,0010272	0,0010214	0,0010157	0,0010100	0,0010044
31	0,0010555	0,0010526	0,0010498	0,0010469	0,0010441	0,0010412	0,0010384
32	0,0010540	0,0010510	0,0010480	0,0010450	0,0010420	0,0010390	0,0010361
33	0,0011046	0,0011002	0,0010959	0,0010916	0,0010873	0,0010830	0,0010787
34	0,0012125	0,0012110	0,0012095	0,0012080	0,0012066	0,0012051	0,0012036
35	0,0011847	0,0011796	0,0011745	0,0011695	0,0011644	0,0011594	0,0011544
36	0,0012287	0,0012217	0,0012147	0,0012078	0,0012009	0,0011941	0,0011872
37	0,0012881	0,0012809	0,0012738	0,0012667	0,0012596	0,0012526	0,0012456
38	0,0014146	0,0014107	0,0014068	0,0014029	0,0013990	0,0013951	0,0013913
39	0,0014997	0,0014921	0,0014846	0,0014770	0,0014695	0,0014621	0,0014547
40	0,0016243	0,0016143	0,0016044	0,0015946	0,0015848	0,0015750	0,0015654
41	0,0018926	0,0018935	0,0018945	0,0018954	0,0018963	0,0018973	0,0018982
42	0,0019773	0,0019733	0,0019693	0,0019654	0,0019614	0,0019575	0,0019535
43	0,0022223	0,0022154	0,0022086	0,0022018	0,0021951	0,0021883	0,0021816
44	0,0025336	0,0025337	0,0025338	0,0025339	0,0025341	0,0025342	0,0025343
45	0,0027142	0,0027071	0,0027000	0,0026930	0,0026860	0,0026789	0,0026720
46	0,0030186	0,0030165	0,0030144	0,0030123	0,0030102	0,0030081	0,0030061
47	0,0033144	0,0033155	0,0033166	0,0033176	0,0033187	0,0033198	0,0033209
48	0,0035081	0,0035029	0,0034977	0,0034925	0,0034873	0,0034822	0,0034770
49	0,0039473	0,0039419	0,0039366	0,0039312	0,0039258	0,0039205	0,0039151
50	0,0042311	0,0042168	0,0042025	0,0041882	0,0041740	0,0041599	0,0041458
51	0,0046183	0,0046044	0,0045906	0,0045768	0,0045631	0,0045494	0,0045357
52	0,0051879	0,0051802	0,0051725	0,0051648	0,0051571	0,0051494	0,0051418
53	0,0057398	0,0057325	0,0057252	0,0057179	0,0057106	0,0057033	0,0056960
54	0,0060899	0,0060714	0,0060530	0,0060347	0,0060164	0,0059982	0,0059801
55	0,0067159	0,0066902	0,0066647	0,0066392	0,0066139	0,0065886	0,0065635
56	0,0073206	0,0072887	0,0072570	0,0072254	0,0071940	0,0071626	0,0071315
57	0,0078350	0,0077925	0,0077504	0,0077084	0,0076667	0,0076252	0,0075839
58	0,0083744	0,0083140	0,0082541	0,0081946	0,0081355	0,0080769	0,0080186
59	0,0091905	0,0091248	0,0090595	0,0089947	0,0089304	0,0088665	0,0088031
60	0,0097689	0,0096816	0,0095950	0,0095092	0,0094242	0,0093399	0,0092564
61	0,0105136	0,0104053	0,0102981	0,0101920	0,0100870	0,0099830	0,0098802
62	0,0115390	0,0114194	0,0113012	0,0111841	0,0110683	0,0109536	0,0108402
63	0,0119857	0,0118284	0,0116732	0,0115200	0,0113688	0,0112196	0,0110724
64	0,0131782	0,0130142	0,0128522	0,0126922	0,0125343	0,0123783	0,0122242
65	0,0141164	0,0139100	0,0137066	0,0135061	0,0133086	0,0131140	0,0129222
66	0,0154982	0,0152830	0,0150707	0,0148615	0,0146551	0,0144516	0,0142509
67	0,0166248	0,0163682	0,0161155	0,0158668	0,0156218	0,0153807	0,0151433
68	0,0183017	0,0180166	0,0177360	0,0174598	0,0171879	0,0169202	0,0166567
69	0,0205357	0,0202107	0,0198909	0,0195761	0,0192662	0,0189613	0,0186612
70	0,0229046	0,0225405	0,0221821	0,0218295	0,0214825	0,0211409	0,0208049
71	0,0251805	0,0248144	0,0244537	0,0240982	0,0237479	0,0234027	0,0230625
72	0,0279925	0,0275851	0,0271837	0,0267881	0,0263983	0,0260141	0,0256355
73	0,0303670	0,0298891	0,0294187	0,0289557	0,0285000	0,0280515	0,0276100
74	0,0348145	0,0343451	0,0338821	0,0334252	0,0329745	0,0325299	0,0320913
75	0,0387653	0,0382481	0,0377378	0,0372343	0,0367375	0,0362473	0,0357637
76	0,0430665	0,0424966	0,0419344	0,0413795	0,0408320	0,0402918	0,0397587
77	0,0477381	0,0471303	0,0465303	0,0459379	0,0453530	0,0447756	0,0442056
78	0,0524415	0,0517681	0,0511034	0,0504471	0,0497994	0,0491599	0,0485286
79	0,0592602	0,0584928	0,0577354	0,0569879	0,0562500	0,0555216	0,0548027
80	0,0646765	0,0637847	0,0629052	0,0620378	0,0611824	0,0603388	0,0595068
81	0,0727038	0,0718260	0,0709587	0,0701020	0,0692555	0,0684193	0,0675932
82	0,0807889	0,0798528	0,0789274	0,0780128	0,0771088	0,0762153	0,0753321
83	0,0890274	0,0879892	0,0869631	0,0859490	0,0849467	0,0839561	0,0829771
84	0,1005391	0,0994778	0,0984277	0,0973886	0,0963606	0,0953434	0,0943369

## Παράρτημα Δ - Μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005)

### Δ.1. Κώδικας της Μοντελοποίησης της Θνησιμότητας με το Μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005).

```
library(demography)
#Downloading data for Greek population
#Setting parameters
#Ages range, x1, x2
#Years range, y1, y2
#Time periods, t1, t2, tend

#Logarithm of mx rates, log(mxt)
#Males
p=mxt_male
logp= log(p)
#Females
e=mxt_female
loge=log(e)

#Calculating ax
#Males
slogp=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1)) {slogp[i]=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1)) {slogp[i]=slogp[i]+logp[i,j] } }
ax_male=(1/(t2-t1+1))%*%slogp

#Females
sloge=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1)){sloge[i]=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1)){sloge[i]=sloge[i]+loge[i,j] } }
ax_fem=(1/(t2-t1+1))%*%sloge

#Calculate joint kt
#Weight of each gender, we set w1=w2=0.5 (assumption)
w1=0.5
w2=0.5

#Joint kt for both Males & Females
kt_1=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1)) {kt_1[j]=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1))
{kt_1[j]=kt_1[j]+w1*(logp[i,j]-ax_male[i])+w2*(loge[i,j]-ax_fem[i]) } }

#Calculate joint bx
bx_1=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1)) { bx_1[i]=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1))
```

```

{bx_1[i]=bx_1[i]+w1%*((logp[i,j]-ax_male[i])%*kt_1[j])+w2%*((loge[i,j]-
ax_fem[i])%*kt_1[j])}
bx_1[i]=bx_1[i]/sum(kt_1^2)}

#Calculate the extra kt
#Males
kt_2=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1)) { kt_2[j]=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1)) { kt_2[j]=kt_2[j]+(logp[i,j]-ax_male[i]-cbind(bx_1[i])%*kt_1[j]) } }

#Females
kt_3=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1))
{kt_3[j]=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1)){kt_3[j]=kt_3[j]+(loge[i,j]-ax_fem[i]-cbind(bx_1[i])%*kt_1[j]) } }

#Calculate the extra ax
#Males
ax_2=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1)) {ax_2[i]=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1))
{ax_2[i]=ax_2[i]+((logp[i,j]-ax_male[i]-(cbind(bx_1[i])%*kt_1[j]))%*cbind(kt_2[j]))}
ax_2[i]=ax_2[i]/sum(kt_2^2)}

#Females
ax_3=c(0)
for (i in 1:(x2-x1+1)) {ax_3[i]=c(0)
for (j in 1:(y2-y1+1))
{ax_3[i]=ax_3[i]+(loge[i,j]-ax_fem[i]-(cbind(bx_1[i])%*kt_1[j]))%*cbind(kt_3[j])}
ax_3[i]=ax_3[i]/sum(kt_3^2)}

#Males
fit_acf1=matrix(data=0, nrow=(x2-x1+1), ncol=(y2-y1+1))
for (i in 1:(x2-x1+1)) {for (j in 1:(y2-y1+1))
{fit_acf1[i,j]=fit_acf1[i,j]+ax_male[i]+cbind(bx_1[i])%*kt_1[j]+cbind(ax_2[i])%*kt_2[j] } }

#Females
fit_acf2=matrix(data=0, nrow=(x2-x1+1), ncol=(y2-y1+1))
for (i in 1:(x2-x1+1)) {for (j in 1:(y2-y1+1))
{fit_acf2[i,j]=fit_acf2[i,j]+ax_fem[i]+cbind(bx_1[i])%*kt_1[j]+cbind(ax_3[i])%*kt_3[j] } }

#Calculation of forecasted kts for h years ahead
#Joint Theta for Males & Females
theta_both=(kt_1[(y2-y1+1)]-kt_1[1])/(y2-y1)

#Theta for Males
theta_mal=(kt_2[(y2-y1+1)]-kt_2[1])/(y2-y1)

```

```

#Theta for Females
theta_fem=(kt_3[(y2-y1+1)]-kt_3[1])/(y2-y1)

#Parameter for the years to predict
future=tend-t2

#Joint Kt
kt_1_for=c(0)
for (h in 1:future)
{kt_1_for[h]=kt_1[(y2-y1+1)]+theta_both*h}

#Extra kt for Males
kt_2_for=c(0)
for (h in 1:future)
{kt_2_for[h]=kt_2[(y2-y1+1)]+theta_mal*h}

#Extra kt for Females
kt_3_for=c(0)
for (h in 1:future)
{kt_3_for[h]=kt_3[(y2-y1+1)]+theta_fem*h}

#Calculation of predicted log(mxt) for h years ahead
par_1=cbind(bx_1)*theta_both

#Males
par_2=cbind(ax_2)*theta_mal
acf_males=matrix(0, nrow=(x2-x1+1), ncol = future)
for (h in 1:future) {
for (i in 1:(x2-x1+1) )
{acf_males[i,h]=fit_acf1[i,(y2-y1+1)]+(par_1[i]+par_2[i])*h} }

#Females
par_3=cbind(ax_3)*theta_fem
acf_fem=matrix(0, nrow=(x2-x1+1), ncol = future)
for (h in 1:future) {
for (i in 1:(x2-x1+1) )
{acf_fem[i,h]=fit_acf2[i,(y2-y1+1)]+(par_1[i]+par_3[i])*h} }

library(Metrics)
#Backtesting predicted with actual mortality rates
num_ml=data$rate$male[x1:x2, (y2+1):(y2+future)]
num_fm=data$rate$female[x1:x2,(y2+1):(y2+future)]

#Males
mae(num_ml,exp(acf_males)),mse(num_ml,exp(acf_males)),
mape(num_ml,exp(acf_males)), rmse(num_ml,exp(acf_males))

#Females
mae(num_fm,exp(acf_fem)), mse(num_fm,exp(acf_fem)),
mape(num_fm,exp(acf_fem)), rmse(num_fm,exp(acf_fem))

```

Πίνακας Δ1-Εκτιμήσεις παραμέτρου ηλικίας b(x)		
Ηλικία	Άνδρες	Γυναίκες
20	0,018705	0,018835
21	0,016203	0,019898
22	0,022188	0,013738
23	0,016782	0,028507
24	0,007014	0,004330
25	0,028801	0,025637
26	0,027703	0,029908
27	0,028504	0,021458
28	0,028198	0,028985
29	0,039865	0,031648
30	0,032201	0,023443
31	0,023539	0,027327
32	0,029017	0,029318
33	0,020697	0,008773
34	0,032505	0,019138
35	0,024339	0,030668
36	0,021583	0,011568
37	0,033770	0,019204
38	0,026443	0,012983
39	0,007449	0,000534
40	0,019239	0,016234
41	0,023197	0,022107
42	0,023570	0,010083
43	0,009855	0,011184
44	0,022111	0,019771
45	0,008422	0,004628
46	0,021339	0,017865
47	0,014661	0,016799
48	0,017332	0,010548
49	0,013420	0,010323
50	0,011167	0,011518
51	0,009728	0,009844
52	0,014149	0,022048
53	0,013555	0,015195
54	0,010557	0,013989
55	0,008151	0,017315
56	0,008647	0,016874
57	0,003795	0,017688
58	0,000713	0,013994
59	0,009624	0,016092
60	0,004781	0,013346
61	0,010063	0,016341
62	0,007114	0,015845
63	0,006305	0,014984
64	0,009310	0,019884
65	0,011123	0,016949
66	0,014272	0,018644
67	0,014464	0,013769
68	0,012776	0,012571
69	0,011551	0,012942
70	0,013490	0,011814
71	0,016725	0,017884
72	0,014179	0,014493
73	0,013375	0,014391
74	0,012716	0,013518
75	0,012083	0,013375
76	0,009071	0,012352
77	0,011373	0,009946
78	0,009233	0,010384
79	0,008040	0,005294
80	0,006080	0,005923
81	0,007697	0,005899
82	0,007315	0,004813
83	0,003476	0,002739
84	0,004614	0,001866

Πίνακας Δ2-Εκτιμήσεις της κοινής παραμέτρου ηλικίας B(x)	
Ηλικία	Τιμές B
20	0,023247
21	0,018697
22	0,019276
23	0,017518
24	0,008384
25	0,011925
26	0,010827
27	0,012968
28	0,009764
29	0,010973
30	0,014975
31	0,009998
32	0,009053
33	0,009696
34	0,011533
35	0,013017
36	0,012236
37	0,014693
38	0,007143
39	0,007528
40	0,013202
41	0,007869
42	0,005741
43	0,007396
44	0,005788
45	0,004309
46	0,006709
47	0,004292
48	0,005353
49	0,005366
50	0,008158
51	0,006969
52	0,008312
53	0,006811
54	0,008588
55	0,011125
56	0,011576
57	0,012207
58	0,014942
59	0,015850
60	0,017529
61	0,020124
62	0,019067
63	0,023378
64	0,024178
65	0,025875
66	0,026540
67	0,027383
68	0,027975
69	0,026868
70	0,027753
71	0,027632
72	0,026497
73	0,026747
74	0,024857
75	0,024217
76	0,023501
77	0,022979
78	0,022501
79	0,020263
80	0,021243
81	0,018904
82	0,017597
83	0,017074
84	0,015272

Πίνακας Δ3-Εκτιμήσεις της παραμέτρου χρόνου k(t)		
Έτος	Άνδρες	Γυναίκες
1981	-5,511892	5,511892
1982	-4,535071	4,535071
1983	-5,019379	5,019379
1984	-3,575282	3,575282
1985	-2,871662	2,871662
1986	-3,911785	3,911785
1987	-2,800380	2,800380
1988	-2,213383	2,213383
1989	-1,933902	1,933902
1990	-2,179120	2,179120
1991	-0,351514	0,351514
1992	-1,245037	1,245037
1993	0,428748	-0,428748
1994	1,149147	-1,149147
1995	1,276038	-1,276038
1996	1,281599	-1,281599
1997	1,633197	-1,633197
1998	0,238145	-0,238145
1999	0,852635	-0,852635
2000	2,442945	-2,442945
2001	2,401142	-2,401142
2002	1,158538	-1,158538
2003	2,472511	-2,472511
2004	1,971851	-1,971851
2005	2,125658	-2,125658
2006	4,456212	-4,456212
2007	2,708343	-2,708343
2008	3,457135	-3,457135
2009	3,626970	-3,626970
2010	2,467591	-2,467591

Πίνακας Δ4-Εκτιμήσεις της κοινής παραμέτρου χρόνου K(t)	
Έτος	Τιμές K
1981	10,151842
1982	8,901853
1983	9,371834
1984	7,689477
1985	8,390705
1986	6,251903
1987	7,510596
1988	4,784325
1989	4,567188
1990	3,696757
1991	3,630095
1992	4,645284
1993	2,145979
1994	1,138506
1995	1,756498
1996	1,982475
1997	-0,150324
1998	0,224588
1999	-0,205655
2000	-1,730326
2001	-4,115970
2002	-5,999897
2003	-7,269357
2004	-6,370982
2005	-6,799507
2006	-10,490038
2007	-7,307065
2008	-11,418787
2009	-11,041474
2010	-13,940524

Πίνακας Δ5-Προβλέψεις των παραμέτρων του χρόνου			
Έτος	Άνδρες	Γυναίκες	Κοινή K
2011	2,742746	-2,742746	-14,77130
2012	3,017900	-3,017900	-15,60207
2013	3,293055	-3,293055	-16,43284
2014	3,568210	-3,568210	-17,26361
2015	3,843364	-3,843364	-18,09438
2016	4,118519	-4,118519	-18,92515
2017	4,393673	-4,393673	-19,75592







## Παράρτημα Ε - Κώδικας Τιμολόγησης Ασφαλιστικών Προϊόντων

Ο κώδικας είναι κοινός για το εκάστοτε μοντέλο θνησιμότητας. Για σκοπούς του παρόντος παραρτήματος, παρουσιάζεται ο κώδικας με τις μεταβλητές του μοντέλου Lee-Carter (1992). Με την αλλαγή του κεντρικού δείκτη θνησιμότητας, του εύρους των ηλικιών και του επιτοκίου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για οποιοδήποτε μοντέλο θνησιμότητας.

```
#Function for actuarial table
#Modification of central mortality rates to probabilities of death

prob_males= 1 - exp(-exp(for_logp))
prob_fem= 1 - exp(-exp(for_loge))

#Males
qx_males=c(diag(prob_males[31:65,]),1)
px_males=1-qx_males

lx_males = c()
for (i in 2:length(px_males)) { lx_males[1] = 1
lx_males[i] = lx_males[i-1]*px_males[i-1]}

x=c(50:70)
newdata_males=data.frame(x,lx_males)
irate= 0.04

newlifetableM=with(newdata_males, new("actuarialtable",interest= irate,
x=x,lx=lx_males))

#Females
qx_fem=c(diag(prob_fem[31:65,]),1)
px_fem=1-qx_fem

lx_fem = c()
for (i in 2:length(px_fem)) { lx_fem[1] = 1
lx_fem[i] = lx_fem[i-1]*px_fem[i-1]}

x=c(50:70)
newdata_fem=data.frame(x,lx_fem)
irate= 0.04

newlifetableF=with(newdata_fem, new("actuarialtable",interest= irate, x=x,lx=lx_fem))

#Pricing Insurance products

#Term Life insurance
Axn(newlifetableM, x=50, n=10)
Axn(newlifetableF, x=50, n=10)

#Life annuity for n years
axn(newlifetableM, x=50, n=10)
```

```

axn(newlifetableF, x=50, n=10)

#Pricing pension plan

#Males
qx_malesv1=c(diag(prob_males[46:65,]),1)
px_malesv1=1-qx_malesv1

lx_malesv1 = c()
for (i in 2:length(px_malesv1)){lx_malesv1[i] = 1
lx_malesv1[i] = lx_malesv1[i-1]*px_malesv1[i-1]}

xv1=c(65:85)
newdata_malesv1=data.frame(xv1,lx_malesv1)
irate= 0.04

newlifetableMv1=with(newdata_malesv1, new("actuarialtable",interest= irate,
x=xv1,lx=lx_malesv1))

#Females
qx_femv1=c(diag(prob_fem[46:65,]),1)
px_femv1=1-qx_femv1

lx_femv1 = c()
for (i in 2:length(px_femv1)) {lx_femv1[i] = 1
lx_femv1[i] = lx_femv1[i-1]*px_femv1[i-1]}

xv1=c(65:85)
newdata_femv1=data.frame(xv1,lx_femv1)
irate= 0.04

newlifetableFv1=with(newdata_femv1, new("actuarialtable",interest= irate,
x=xv1,lx=lx_femv1))

#Whole Life annuity at age 65 with monthly payments
axn(newlifetableMv1, x=65, k=12)
axn(newlifetableFv1, x=65, k=12)

```

## Παράρτημα Ζ - Πίνακες Θνησιμότητας

### Z.1.1. Μοντέλο Lee-Carter (1992) - Πληθυσμός Ανδρών

Actuarial table generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	50	1.0000000	0.14071262	1.94063582	0.0005296309	0.06607278	1.24720240
2	51	0.9960855	0.13477096	1.79992321	0.0005484897	0.06554315	1.18112962
3	52	0.9918695	0.12903897	1.66515225	0.0005852522	0.06499466	1.11558648
4	53	0.9871910	0.12349068	1.53611328	0.0006209223	0.06440940	1.05059182
5	54	0.9820287	0.11812012	1.41262259	0.0006599438	0.06378848	0.98618242
6	55	0.9763226	0.11291709	1.29450247	0.0006605382	0.06312854	0.92239394
7	56	0.9703829	0.10791359	1.18158538	0.0006901998	0.06246800	0.85926540
8	57	0.9639282	0.10307287	1.07367179	0.0007509208	0.06177780	0.79679740
9	58	0.9566248	0.09835761	0.97059892	0.0007301643	0.06102688	0.73501960
10	59	0.9492392	0.09384446	0.87224132	0.0007564247	0.06029671	0.67399273
11	60	0.9412818	0.08947863	0.77839686	0.0007565365	0.05954029	0.61369601
12	61	0.9330050	0.08528061	0.68891823	0.0007485939	0.05878375	0.55415572
13	62	0.9244875	0.08125199	0.60363762	0.0007497939	0.05803516	0.49537197
14	63	0.9156151	0.07737712	0.52238563	0.0007441226	0.05728536	0.43733681
15	64	0.9064575	0.07365695	0.44500851	0.0007505913	0.05654124	0.38005145
16	65	0.8968509	0.07007340	0.37135156	0.0007237388	0.05579065	0.32351021
17	66	0.8872175	0.06665453	0.30127816	0.0007833670	0.05506691	0.26771956
18	67	0.8763732	0.06330753	0.23462362	0.0007421745	0.05428354	0.21265264
19	68	0.8656883	0.06013045	0.17131609	0.0007521842	0.05354137	0.15836910
20	69	0.8544260	0.05706556	0.11118564	0.0007506442	0.05278919	0.10482773
21	70	0.8427373	0.05412008	0.05412008	0.0520385420	0.05203854	0.05203854

Actuarial table generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	65	1.0000000	0.07813272	0.96212751	0.0009572808	0.04112782	0.64131481
2	66	0.9872579	0.07417033	0.88399479	0.0010137959	0.04017054	0.60018700
3	67	0.9732238	0.07030383	0.80982445	0.0009858218	0.03915674	0.56001646
4	68	0.9590311	0.06661402	0.73952062	0.0010021449	0.03817092	0.52085972
5	69	0.9440263	0.06304980	0.67290660	0.0010136675	0.03716877	0.48268880
6	70	0.9282419	0.05961114	0.60985680	0.0010178757	0.03615511	0.44552003
7	71	0.9117579	0.05630052	0.55024567	0.0010366985	0.03513723	0.40936492
8	72	0.8942975	0.05309842	0.49394514	0.0010159055	0.03410053	0.37422769
9	73	0.8765030	0.05004027	0.44084672	0.0010181325	0.03308463	0.34012716
10	74	0.8579561	0.04709751	0.39080645	0.0010324119	0.03206649	0.30704254
11	75	0.8383968	0.04425366	0.34370894	0.0011039456	0.03103408	0.27497604
12	76	0.8166457	0.04144765	0.29945529	0.0011398489	0.02993014	0.24394196
13	77	0.7932888	0.03871366	0.25800764	0.0011909677	0.02879029	0.21401183
14	78	0.7679083	0.03603370	0.21929398	0.0012066787	0.02759932	0.18522154
15	79	0.7411644	0.03344111	0.18326028	0.0012149443	0.02639264	0.15762222
16	80	0.7131601	0.03093997	0.14981917	0.0012814525	0.02517770	0.13122958
17	81	0.6824414	0.02846852	0.11887919	0.0013069921	0.02389624	0.10605189
18	82	0.6498572	0.02606659	0.09041067	0.0013725759	0.02258925	0.08215564
19	83	0.6142692	0.02369145	0.06434409	0.0013510370	0.02121668	0.05956639
20	84	0.5778385	0.02142920	0.04065264	0.0013815616	0.01986564	0.03834972
21	85	0.5390946	0.01922344	0.01922344	0.0184840769	0.01848408	0.01848408

### Z.1.2. Μοντέλο Lee-Carter (1992) - Πληθυσμός Γυναικών

Actuarial table generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	50	1.0000000	0.14071262	2.01029451	0.0002319385	0.06339360	1.27757886
2	51	0.9982858	0.13506865	1.86958189	0.0002487616	0.06316166	1.21418527
3	52	0.9963736	0.12962494	1.73451324	0.0002340344	0.06291290	1.15102361
4	53	0.9945027	0.12440533	1.60488830	0.0002438708	0.06267886	1.08811072
5	54	0.9924752	0.11937664	1.48048296	0.0002501215	0.06243499	1.02543185
6	55	0.9903126	0.11453511	1.36110632	0.0002569655	0.06218487	0.96299686
7	56	0.9880019	0.10987295	1.24657121	0.0002700700	0.06192790	0.90081200
8	57	0.9854762	0.10537700	1.13669826	0.0002710904	0.06165783	0.83888409
9	58	0.9828396	0.10105295	1.03132126	0.0002709442	0.06138674	0.77722626
10	59	0.9800990	0.09689535	0.93026831	0.0002709299	0.06111580	0.71583952
11	60	0.9772489	0.09289768	0.83337297	0.0002718532	0.06084487	0.65472372
12	61	0.9742747	0.08905283	0.74047529	0.0002607893	0.06057302	0.59387885
13	62	0.9713075	0.08536694	0.65142246	0.0002697788	0.06031223	0.53330583
14	63	0.9681151	0.08181381	0.56605552	0.0002617402	0.06004245	0.47299361
15	64	0.9648940	0.07840539	0.48424171	0.0002636174	0.05978071	0.41295116
16	65	0.9615201	0.07512618	0.40583632	0.0002608594	0.05951709	0.35317045
17	66	0.9580479	0.07197585	0.33071014	0.0002539169	0.05925623	0.29365336
18	67	0.9545329	0.06895363	0.25873429	0.0002611019	0.05900231	0.23439713
19	68	0.9507738	0.06604047	0.18978066	0.0002711993	0.05874121	0.17539482
20	69	0.9467132	0.06322925	0.12374019	0.0002864189	0.05847001	0.11665361
21	70	0.9422532	0.06051094	0.06051094	0.0581835935	0.05818359	0.05818359

Actuarial table generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	65	1.0000000	0.07813272	1.05021376	0.0003795296	0.03773988	0.68285072
2	66	0.9949482	0.07474809	0.97208104	0.0003783919	0.03736035	0.64511084
3	67	0.9897101	0.07149477	0.89733295	0.0003925302	0.03698196	0.60775048
4	68	0.9840589	0.06835244	0.82583819	0.0004089492	0.03658943	0.57076852
5	69	0.9779358	0.06531455	0.75748575	0.0004322491	0.03618048	0.53417909
6	70	0.9712050	0.06237020	0.69217120	0.0004391841	0.03574823	0.49799861
7	71	0.9640926	0.05953216	0.62980099	0.0004431380	0.03530905	0.46225037
8	72	0.9566292	0.05679933	0.57026883	0.0004704820	0.03486591	0.42694132
9	73	0.9483882	0.05414426	0.51346950	0.0004883340	0.03439543	0.39207541
10	74	0.9394925	0.05157345	0.45932524	0.0005281332	0.03390710	0.35767998
11	75	0.9294868	0.04906172	0.40775179	0.0005554356	0.03337896	0.32377289
12	76	0.9185431	0.04661930	0.35869007	0.0006280022	0.03282353	0.29039392
13	77	0.9056746	0.04419825	0.31207077	0.0007002765	0.03219552	0.25757040
14	78	0.8907511	0.04179804	0.26787253	0.0007390205	0.03149525	0.22537487
15	79	0.8743720	0.03945140	0.22607449	0.0008526893	0.03075623	0.19387963
16	80	0.8547176	0.03708135	0.18662309	0.0009166552	0.02990354	0.16312340
17	81	0.8327438	0.03473849	0.14954174	0.0010590316	0.02898688	0.13321986
18	82	0.8063414	0.03234336	0.11480325	0.0011693228	0.02792785	0.10423298
19	83	0.7760233	0.02993006	0.08245989	0.0012832129	0.02675853	0.07630513
20	84	0.7414215	0.02749569	0.05252983	0.0014040337	0.02547532	0.04954660
21	85	0.7020473	0.02503413	0.02503413	0.0240712819	0.02407128	0.02407128



### Z.2.1. Μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992) - Πληθυσμός Ανδρών

Actuarial table Generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	50	1.0000000	0.14071262	1.94277445	0.0005335989	0.06599052	1.24790026
2	51	0.9960562	0.13476699	1.80206183	0.0005530841	0.06545692	1.18190973
3	52	0.9918049	0.12903056	1.66729484	0.0005880281	0.06490384	1.11645281
4	53	0.9871041	0.12347982	1.53826428	0.0006257522	0.06431581	1.05154897
5	54	0.9819018	0.11810484	1.41478446	0.0006579133	0.06369006	0.98723316
6	55	0.9762132	0.11290444	1.29667961	0.0006537047	0.06303214	0.92354311
7	56	0.9703349	0.10790825	1.18377517	0.0006827594	0.06237844	0.86051096
8	57	0.9639498	0.10307518	1.07586692	0.0007328884	0.06169568	0.79813252
9	58	0.9568218	0.09837786	0.97279174	0.0007046416	0.06096279	0.73643684
10	59	0.9496943	0.09388945	0.87441388	0.0007388335	0.06025815	0.67547405
11	60	0.9419220	0.08953949	0.78052443	0.0007273945	0.05951932	0.61521590
12	61	0.9339640	0.08536827	0.69098494	0.0007241507	0.05879192	0.55569658
13	62	0.9257246	0.08136072	0.60561668	0.0007242921	0.05806777	0.49690466
14	63	0.9171540	0.07750717	0.52425596	0.0007055307	0.05734348	0.43883689
15	64	0.9084714	0.07382059	0.44674879	0.0007145697	0.05663795	0.38149341
16	65	0.8993258	0.07026677	0.37292819	0.0006909606	0.05592338	0.32485546
17	66	0.8901286	0.06687324	0.30266142	0.0007443670	0.05523242	0.26893208
18	67	0.8798283	0.06355683	0.23578818	0.0007078531	0.05448805	0.21369966
19	68	0.8696334	0.06040448	0.17223135	0.0007093750	0.05378020	0.15921161
20	69	0.8590122	0.05737186	0.11182687	0.0007102357	0.05307082	0.10543141
21	70	0.8479527	0.05445501	0.05445501	0.0523605878	0.05236059	0.05236059

Actuarial table Generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	65	1.0000000	0.07813272	0.96537223	0.0009433493	0.04100302	0.64275460
2	66	0.9874434	0.07418427	0.88723951	0.0009935246	0.04005967	0.60175159
3	67	0.9736899	0.07033750	0.81305525	0.0009695915	0.03906615	0.56169192
4	68	0.9597309	0.06666262	0.74271775	0.0009781932	0.03809655	0.52262577
5	69	0.9450847	0.06312048	0.67605512	0.0009916972	0.03711836	0.48452922
6	70	0.9296423	0.05970107	0.61293464	0.0009974880	0.03612666	0.44741086
7	71	0.9134885	0.05640739	0.55323357	0.0010202762	0.03512918	0.41128419
8	72	0.8963048	0.05321760	0.49682618	0.0010012655	0.03410890	0.37615502
9	73	0.8787666	0.05016950	0.44360858	0.0010013231	0.03310763	0.34204612
10	74	0.8605259	0.04723858	0.39343908	0.0010179152	0.03210631	0.30893848
11	75	0.8412413	0.04440380	0.34620050	0.0010831559	0.03108840	0.27683217
12	76	0.8198998	0.04161280	0.30179670	0.0011145238	0.03000524	0.24574378
13	77	0.7970619	0.03889779	0.26018389	0.0011705907	0.02889072	0.21573854
14	78	0.7721156	0.03623113	0.22128611	0.0011791115	0.02772012	0.18684782
15	79	0.7459826	0.03365851	0.18505498	0.0011973240	0.02654101	0.15912770
16	80	0.7183846	0.03116663	0.15139646	0.0012481542	0.02534369	0.13258669
17	81	0.6884641	0.02871976	0.12022983	0.0012886866	0.02409554	0.10724300
18	82	0.6563363	0.02632647	0.09151007	0.0013529191	0.02280685	0.08314746
19	83	0.6212579	0.02396099	0.06518361	0.0013284460	0.02145393	0.06034061
20	84	0.5854364	0.02171097	0.04122262	0.0013642844	0.02012548	0.03888668
21	85	0.5471769	0.01951165	0.01951165	0.0187611991	0.01876120	0.01876120

## Z.2.2. Μοντέλο Joint-K των Carter-Lee (1992) - Πληθυσμός Γυναικών

Actuarial table Generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	50	1.0000000	0.14071262	2.00988532	0.0002313091	0.06340933	1.2774221
2	51	0.9982904	0.13506928	1.86917270	0.0002498324	0.06317802	1.2140127
3	52	0.9963700	0.12962448	1.73410342	0.0002357208	0.06292819	1.1508347
4	53	0.9944857	0.12440320	1.60447894	0.0002435667	0.06269247	1.0879065
5	54	0.9924607	0.11937490	1.48007574	0.0002507053	0.06244890	1.0252140
6	55	0.9902930	0.11453285	1.36070085	0.0002598634	0.06219820	0.9627651
7	56	0.9879563	0.10986787	1.24616800	0.0002726859	0.06193834	0.9005669
8	57	0.9854061	0.10536950	1.13630013	0.0002751367	0.06166565	0.8386286
9	58	0.9827302	0.10104169	1.03093062	0.0002738084	0.06139051	0.7769629
10	59	0.9799606	0.09688166	0.92988893	0.0002746222	0.06111671	0.7155724
11	60	0.9770717	0.09288082	0.83300727	0.0002750080	0.06084208	0.6544557
12	61	0.9740630	0.08903348	0.74012644	0.0002654204	0.06056707	0.5936136
13	62	0.9710430	0.08534369	0.65109297	0.0002732672	0.06030165	0.5330466
14	63	0.9678094	0.08178797	0.56574928	0.0002668520	0.06002839	0.4727449
15	64	0.9645254	0.07837543	0.48396130	0.0002706464	0.05976154	0.4127165
16	65	0.9610614	0.07509035	0.40558587	0.0002660236	0.05949089	0.3529550
17	66	0.9575205	0.07193623	0.33049552	0.0002575298	0.05922487	0.2934641
18	67	0.9539555	0.06891192	0.25855929	0.0002639770	0.05896734	0.2342392
19	68	0.9501550	0.06599749	0.18964737	0.0002741131	0.05870336	0.1752719
20	69	0.9460508	0.06318501	0.12364988	0.0002899469	0.05842925	0.1165685
21	70	0.9415359	0.06046487	0.06046487	0.0581392986	0.05813930	0.0581393

Actuarial table Generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	65	1.0000000	0.07813272	1.05132736	0.0003778444	0.03769705	0.68330954
2	66	0.9949706	0.07474977	0.97319464	0.0003752738	0.03731921	0.64561249
3	67	0.9897757	0.07149951	0.89844487	0.0003886040	0.03694393	0.60829328
4	68	0.9841810	0.06836092	0.82694536	0.0004049571	0.03655533	0.57134935
5	69	0.9781177	0.06532670	0.75858444	0.0004286611	0.03615037	0.53479402
6	70	0.9714428	0.06238547	0.69325774	0.0004321219	0.03572171	0.49864364
7	71	0.9644448	0.05955391	0.63087227	0.0004364376	0.03528959	0.46292193
8	72	0.9570942	0.05682694	0.57131836	0.0004626444	0.03485315	0.42763234
9	73	0.9489905	0.05417864	0.51449143	0.0004803714	0.03439051	0.39277919
10	74	0.9402398	0.05161447	0.46031279	0.0005175292	0.03391014	0.35838868
11	75	0.9304351	0.04911177	0.40869831	0.0005437227	0.03339261	0.32447854
12	76	0.9197221	0.04667914	0.35958654	0.0006181440	0.03284889	0.29108593
13	77	0.9070555	0.04426564	0.31290740	0.0006878209	0.03223074	0.25823705
14	78	0.8923975	0.04187530	0.26864176	0.0007273891	0.03154292	0.22600631
15	79	0.8762762	0.03953732	0.22676646	0.0008384870	0.03081553	0.19446339
16	80	0.8569492	0.03717817	0.18722915	0.0009072675	0.02997704	0.16364786
17	81	0.8352004	0.03484097	0.15005098	0.0010537075	0.02906978	0.13367081
18	82	0.8089308	0.03244722	0.11521001	0.0011653612	0.02801607	0.10460103
19	83	0.7787154	0.03003389	0.08276279	0.0012815564	0.02685071	0.07658497
20	84	0.7441582	0.02759719	0.05272890	0.0014040448	0.02556915	0.04973426
21	85	0.7047838	0.02513171	0.02513171	0.0241651066	0.02416511	0.02416511



### Z.3.1. Μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011) - Πληθυσμός Ανδρών

Actuarial table Generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	50	1.0000000	0.14071262	1.93912353	0.0005371366	0.06613094	1.24656658
2	51	0.9960301	0.13476346	1.79841092	0.0005559246	0.06559380	1.18043564
3	52	0.9917569	0.12902432	1.66364746	0.0005915577	0.06503788	1.11484183
4	53	0.9870279	0.12347029	1.53462314	0.0006268976	0.06444632	1.04980395
5	54	0.9818160	0.11809453	1.41115285	0.0006651288	0.06381942	0.98535763
6	55	0.9760651	0.11288731	1.29305832	0.0006687584	0.06315430	0.92153820
7	56	0.9700515	0.10787673	1.18017101	0.0006985791	0.06248554	0.85838391
8	57	0.9635184	0.10302905	1.07229428	0.0007572410	0.06178696	0.79589837
9	58	0.9561535	0.09830915	0.96926524	0.0007396535	0.06102972	0.73411141
10	59	0.9486719	0.09378837	0.87095609	0.0007660795	0.06029006	0.67308170
11	60	0.9406130	0.08941505	0.77716771	0.0007674086	0.05952398	0.61279163
12	61	0.9322172	0.08520860	0.68775266	0.0007611329	0.05875658	0.55326765
13	62	0.9235571	0.08117021	0.60254406	0.0007630783	0.05799544	0.49451107
14	63	0.9145274	0.07728520	0.52137385	0.0007579925	0.05723236	0.43651563
15	64	0.9051992	0.07355470	0.44408864	0.0007644185	0.05647437	0.37928327
16	65	0.8954156	0.06996126	0.37053394	0.0007389937	0.05570995	0.32280889
17	66	0.8855791	0.06653145	0.30057268	0.0007969154	0.05497096	0.26709894
18	67	0.8745473	0.06317563	0.23404123	0.0007567266	0.05417404	0.21212798
19	68	0.8636529	0.05998907	0.17086560	0.0007664209	0.05341732	0.15795394
20	69	0.8521775	0.05691538	0.11087653	0.0007651745	0.05265090	0.10453662
21	70	0.8402625	0.05396115	0.05396115	0.0518857223	0.05188572	0.05188572

Actuarial table Generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	65	1.0000000	0.07813272	0.95673623	0.0009934236	0.04133517	0.63876797
2	66	0.9867769	0.07413419	0.87860351	0.0010461530	0.04034175	0.59743280
3	67	0.9722948	0.07023672	0.80446932	0.0010218054	0.03929560	0.55709105
4	68	0.9575841	0.06651351	0.73423260	0.0010382145	0.03827379	0.51779545
5	69	0.9420392	0.06291708	0.66771909	0.0010517082	0.03723558	0.47952166
6	70	0.9256624	0.05944548	0.60480201	0.0010570589	0.03618387	0.44228609
7	71	0.9085439	0.05610206	0.54535653	0.0010730121	0.03512681	0.40610222
8	72	0.8904719	0.05287128	0.48925446	0.0010533044	0.03405380	0.37097541
9	73	0.8720223	0.04978446	0.43638319	0.0010550163	0.03300049	0.33692161
10	74	0.8528035	0.04681466	0.38659873	0.0010676562	0.03194548	0.30392112
11	75	0.8325765	0.04394644	0.33978407	0.0011361342	0.03087782	0.27197564
12	76	0.8101911	0.04112006	0.29583763	0.0011698231	0.02974169	0.24109782
13	77	0.7862201	0.03836869	0.25471757	0.0012173502	0.02857186	0.21135613
14	78	0.7602773	0.03567562	0.21634888	0.0012302940	0.02735451	0.18278427
15	79	0.7330100	0.03307319	0.18067326	0.0012373612	0.02612422	0.15542976
16	80	0.7044891	0.03056378	0.14760007	0.0012994727	0.02488686	0.12930554
17	81	0.6733384	0.02808878	0.11703628	0.0013205091	0.02358739	0.10441868
18	82	0.6404172	0.02568793	0.08894750	0.0013806243	0.02226688	0.08083130
19	83	0.6046205	0.02331931	0.06325957	0.0013561726	0.02088625	0.05856442
20	84	0.5680513	0.02106624	0.03994026	0.0013819897	0.01953008	0.03767817
21	85	0.5292954	0.01887401	0.01887401	0.0181480894	0.01814809	0.01814809

### Z.3.2. Μοντέλο Co-integrated Lee-Carter των Li-Hardy (2011) - Πληθυσμός Γυναίκών

Actuarial table Generic life table interest rate 4 %

	x	lx	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	50	1.0000000	0.14071262	2.01029451	0.0002319385	0.06339360	1.27757886
2	51	0.9982858	0.13506865	1.86958189	0.0002487616	0.06316166	1.21418527
3	52	0.9963736	0.12962494	1.73451324	0.0002340344	0.06291290	1.15102361
4	53	0.9945027	0.12440533	1.60488830	0.0002438708	0.06267886	1.08811072
5	54	0.9924752	0.11937664	1.48048296	0.0002501215	0.06243499	1.02543185
6	55	0.9903126	0.11453511	1.36110632	0.0002569655	0.06218487	0.96299686
7	56	0.9880019	0.10987295	1.24657121	0.0002700700	0.06192790	0.90081200
8	57	0.9854762	0.10537700	1.13669826	0.0002710904	0.06165783	0.83888409
9	58	0.9828396	0.10105295	1.03132126	0.0002709442	0.06138674	0.77722626
10	59	0.9800990	0.09689535	0.93026831	0.0002709299	0.06111580	0.71583952
11	60	0.9772489	0.09289768	0.83337297	0.0002718532	0.06084487	0.65472372
12	61	0.9742747	0.08905283	0.74047529	0.0002607893	0.06057302	0.59387885
13	62	0.9713075	0.08536694	0.65142246	0.0002697788	0.06031223	0.53330583
14	63	0.9681151	0.08181381	0.56605552	0.0002617402	0.06004245	0.47299361
15	64	0.9648940	0.07840539	0.48424171	0.0002636174	0.05978071	0.41295116
16	65	0.9615201	0.07512618	0.40583632	0.0002608594	0.05951709	0.35317045
17	66	0.9580479	0.07197585	0.33071014	0.0002539169	0.05925623	0.29365336
18	67	0.9545329	0.06895363	0.25873429	0.0002611019	0.05900231	0.23439713
19	68	0.9507738	0.06604047	0.18978066	0.0002711993	0.05874121	0.17539482
20	69	0.9467132	0.06322925	0.12374019	0.0002864189	0.05847001	0.11665361
21	70	0.9422532	0.06051094	0.06051094	0.0581835935	0.05818359	0.05818359

Actuarial table Generic life table interest rate 4 %

	x	lx	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	65	1.0000000	0.07813272	1.05021376	0.0003795296	0.03773988	0.68285072
2	66	0.9949482	0.07474809	0.97208104	0.0003783919	0.03736035	0.64511084
3	67	0.9897101	0.07149477	0.89733295	0.0003925302	0.03698196	0.60775048
4	68	0.9840589	0.06835244	0.82583819	0.0004089492	0.03658943	0.57076852
5	69	0.9779358	0.06531455	0.75748575	0.0004322491	0.03618048	0.53417909
6	70	0.9712050	0.06237020	0.69217120	0.0004391841	0.03574823	0.49799861
7	71	0.9640926	0.05953216	0.62980099	0.0004431380	0.03530905	0.46225037
8	72	0.9566292	0.05679933	0.57026883	0.0004704820	0.03486591	0.42694132
9	73	0.9483882	0.05414426	0.51346950	0.0004883340	0.03439543	0.39207541
10	74	0.9394925	0.05157345	0.45932524	0.0005281332	0.03390710	0.35767998
11	75	0.9294868	0.04906172	0.40775179	0.0005554356	0.03337896	0.32377289
12	76	0.9185431	0.04661930	0.35869007	0.0006280022	0.03282353	0.29039392
13	77	0.9056746	0.04419825	0.31207077	0.0007002765	0.03219552	0.25757040
14	78	0.8907511	0.04179804	0.26787253	0.0007390205	0.03149525	0.22537487
15	79	0.8743720	0.03945140	0.22607449	0.0008526893	0.03075623	0.19387963
16	80	0.8547176	0.03708135	0.18662309	0.0009166552	0.02990354	0.16312340
17	81	0.8327438	0.03473849	0.14954174	0.0010590316	0.02898688	0.13321986
18	82	0.8063414	0.03234336	0.11480325	0.0011693228	0.02792785	0.10423298
19	83	0.7760233	0.02993006	0.08245989	0.0012832129	0.02675853	0.07630513
20	84	0.7414215	0.02749569	0.05252983	0.0014040337	0.02547532	0.04954660
21	85	0.7020473	0.02503413	0.02503413	0.0240712819	0.02407128	0.02407128



#### Z.4.1. Μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005) - Πληθυσμός Ανδρών

Actuarial table generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	50	1.0000000	0.14071262	1.94940017	0.0005278084	0.06573569	1.25039295
2	51	0.9960990	0.13477278	1.80868755	0.0005585832	0.06520788	1.18465726
3	52	0.9918054	0.12903063	1.67391477	0.0005748982	0.06464929	1.11944939
4	53	0.9872096	0.12349302	1.54488414	0.0006146300	0.06407440	1.05480009
5	54	0.9820997	0.11812866	1.42139112	0.0006300831	0.06345977	0.99072570
6	55	0.9766518	0.11295516	1.30326247	0.0006240335	0.06282968	0.92726593
7	56	0.9710403	0.10798670	1.19030730	0.0006549104	0.06220565	0.86443625
8	57	0.9649157	0.10317845	1.08232060	0.0006759398	0.06155074	0.80223060
9	58	0.9583415	0.09853411	0.97914215	0.0006442742	0.06087480	0.74067986
10	59	0.9518246	0.09410006	0.88060804	0.0006852741	0.06023052	0.67980506
11	60	0.9446158	0.08979556	0.78650797	0.0006542545	0.05954525	0.61957454
12	61	0.9374580	0.08568763	0.69671242	0.0006616819	0.05889100	0.56002929
13	62	0.9299294	0.08173027	0.61102479	0.0006617665	0.05822931	0.50113829
14	63	0.9220986	0.07792503	0.52929452	0.0006213187	0.05756755	0.44290897
15	64	0.9144523	0.07430659	0.45136949	0.0006349166	0.05694623	0.38534143
16	65	0.9063262	0.07081373	0.37706290	0.0006231599	0.05631131	0.32839520
17	66	0.8980315	0.06746697	0.30624916	0.0006455705	0.05568815	0.27208389
18	67	0.8890948	0.06422651	0.23878220	0.0006318297	0.05504258	0.21639573
19	68	0.8799985	0.06112443	0.17455569	0.0006212144	0.05441075	0.16135315
20	69	0.8706972	0.05815228	0.11343125	0.0006366783	0.05378954	0.10694240
21	70	0.8607831	0.05527897	0.05527897	0.0531528597	0.05315286	0.05315286

Actuarial table generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	65	1.0000000	0.07813272	0.97559651	0.0008809441	0.04060978	0.64773122
2	66	0.9882740	0.07424667	0.89746379	0.0009029270	0.03972883	0.60712145
3	67	0.9757747	0.07048810	0.82321711	0.0008951140	0.03882591	0.56739261
4	68	0.9628879	0.06688191	0.75272901	0.0008937674	0.03793079	0.52856670
5	69	0.9495058	0.06341576	0.68584710	0.0009182141	0.03703703	0.49063591
6	70	0.9352077	0.06005848	0.62243134	0.0009231426	0.03611881	0.45359889
7	71	0.9202579	0.05682539	0.56237286	0.0009422292	0.03519567	0.41748008
8	72	0.9043886	0.05369757	0.50554747	0.0009429068	0.03425344	0.38228441
9	73	0.8878727	0.05068937	0.45184990	0.0009457482	0.03331053	0.34803097
10	74	0.8706444	0.04779404	0.40116052	0.0009726994	0.03236478	0.31472043
11	75	0.8522164	0.04498310	0.35336649	0.0010153220	0.03139209	0.28235565
12	76	0.8322114	0.04223766	0.30838338	0.0010540510	0.03037676	0.25096356
13	77	0.8106126	0.03955909	0.26614572	0.0011211497	0.02932271	0.22058680
14	78	0.7867200	0.03691643	0.22658663	0.0011189312	0.02820156	0.19126409
15	79	0.7619208	0.03437764	0.18967020	0.0011900127	0.02708263	0.16306253
16	80	0.7344913	0.03186541	0.15529256	0.0012038600	0.02589262	0.13597990
17	81	0.7056326	0.02943596	0.12342715	0.0012969656	0.02468876	0.11008728
18	82	0.6732984	0.02700684	0.09399120	0.0013591870	0.02339179	0.08539852
19	83	0.6380575	0.02460893	0.06698436	0.0013456235	0.02203261	0.06200673
20	84	0.6017728	0.02231681	0.04237543	0.0013998454	0.02068698	0.03997412
21	85	0.5625161	0.02005862	0.02005862	0.0192871370	0.01928714	0.01928714

#### Z.4.2. Μοντέλο Augmented Common Factor των Li-Lee (2005) - Πληθυσμός Γυναίκων

Actuarial table Generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	50	1.0000000	0.14071262	2.01120262	0.0002317503	0.06335867	1.27793692
2	51	0.9982871	0.13506884	1.87049001	0.0002435614	0.06312692	1.21457826
3	52	0.9964150	0.12963032	1.73542117	0.0002310881	0.06288336	1.15145134
4	53	0.9945677	0.12441345	1.60579084	0.0002457304	0.06265227	1.08856798
5	54	0.9925247	0.11938259	1.48137739	0.0002510164	0.06240654	1.02591571
6	55	0.9903543	0.11453994	1.36199479	0.0002503273	0.06215552	0.96350918
7	56	0.9881033	0.10988423	1.24745486	0.0002634769	0.06190519	0.90135365
8	57	0.9856393	0.10539443	1.13757063	0.0002637088	0.06164172	0.83944846
9	58	0.9830745	0.10107709	1.03217620	0.0002628359	0.06137801	0.77780674
10	59	0.9804159	0.09692668	0.93109910	0.0002632097	0.06111517	0.71642873
11	60	0.9776470	0.09293552	0.83417243	0.0002645786	0.06085196	0.65531356
12	61	0.9747524	0.08909650	0.74123691	0.0002499905	0.06058738	0.59446160
13	62	0.9719080	0.08541972	0.65214041	0.0002615292	0.06033739	0.53387421
14	63	0.9688133	0.08187281	0.56672069	0.0002493007	0.06007586	0.47353682
15	64	0.9657453	0.07847456	0.48484788	0.0002475985	0.05982656	0.41346095
16	65	0.9625763	0.07520871	0.40637332	0.0002486858	0.05957897	0.35363439
17	66	0.9592662	0.07206738	0.33116461	0.0002509451	0.05933028	0.29405542
18	67	0.9557923	0.06904461	0.25909723	0.0002581697	0.05907933	0.23472514
19	68	0.9520755	0.06613088	0.19005262	0.0002683260	0.05882116	0.17564581
20	69	0.9480579	0.06331906	0.12392174	0.0002810323	0.05855284	0.11682465
21	70	0.9436818	0.06060268	0.06060268	0.0582718065	0.05827181	0.05827181

Actuarial table Generic life table interest rate 4 %

	x	$l_x$	Dx	Nx	Cx	Mx	Rx
1	65	1.0000000	0.07813272	1.04908027	0.0003713674	0.03778348	0.68247175
2	66	0.9950568	0.07475625	0.97094755	0.0003783661	0.03741211	0.64468827
3	67	0.9898191	0.07150264	0.89619130	0.0003911366	0.03703375	0.60727616
4	68	0.9841880	0.06836140	0.82468866	0.0004071249	0.03664261	0.57024241
5	69	0.9780922	0.06532499	0.75632725	0.0004275157	0.03623548	0.53359980
6	70	0.9714351	0.06238498	0.69100226	0.0004434167	0.03580797	0.49736432
7	71	0.9642542	0.05954214	0.62861728	0.0004521594	0.03536455	0.46155635
8	72	0.9566388	0.05679990	0.56907514	0.0004787155	0.03491239	0.42619180
9	73	0.9482536	0.05413657	0.51227524	0.0004966978	0.03443368	0.39127941
10	74	0.9392055	0.05155770	0.45813867	0.0005435295	0.03393698	0.35684573
11	75	0.9289082	0.04903118	0.40658097	0.0005804879	0.03339345	0.32290875
12	76	0.9174708	0.04656488	0.35754980	0.0006456787	0.03281296	0.28951530
13	77	0.9042401	0.04412824	0.31098492	0.0007284157	0.03216728	0.25670234
14	78	0.8887169	0.04170259	0.26685668	0.0007673701	0.03143887	0.22453506
15	79	0.8717095	0.03933127	0.22515409	0.0008773568	0.03067150	0.19309619
16	80	0.8514866	0.03694117	0.18582282	0.0009344529	0.02979414	0.16242469
17	81	0.8290861	0.03458590	0.14888165	0.0010600322	0.02885969	0.13263055
18	82	0.8026588	0.03219565	0.11429574	0.0011696195	0.02779966	0.10377086
19	83	0.7723330	0.02978773	0.08210010	0.0012683914	0.02663004	0.07597121
20	84	0.7381308	0.02737366	0.05231237	0.0013821182	0.02536164	0.04934117
21	85	0.6993713	0.02493871	0.02493871	0.0239795263	0.02397953	0.02397953