

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**  
**Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής**



**Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

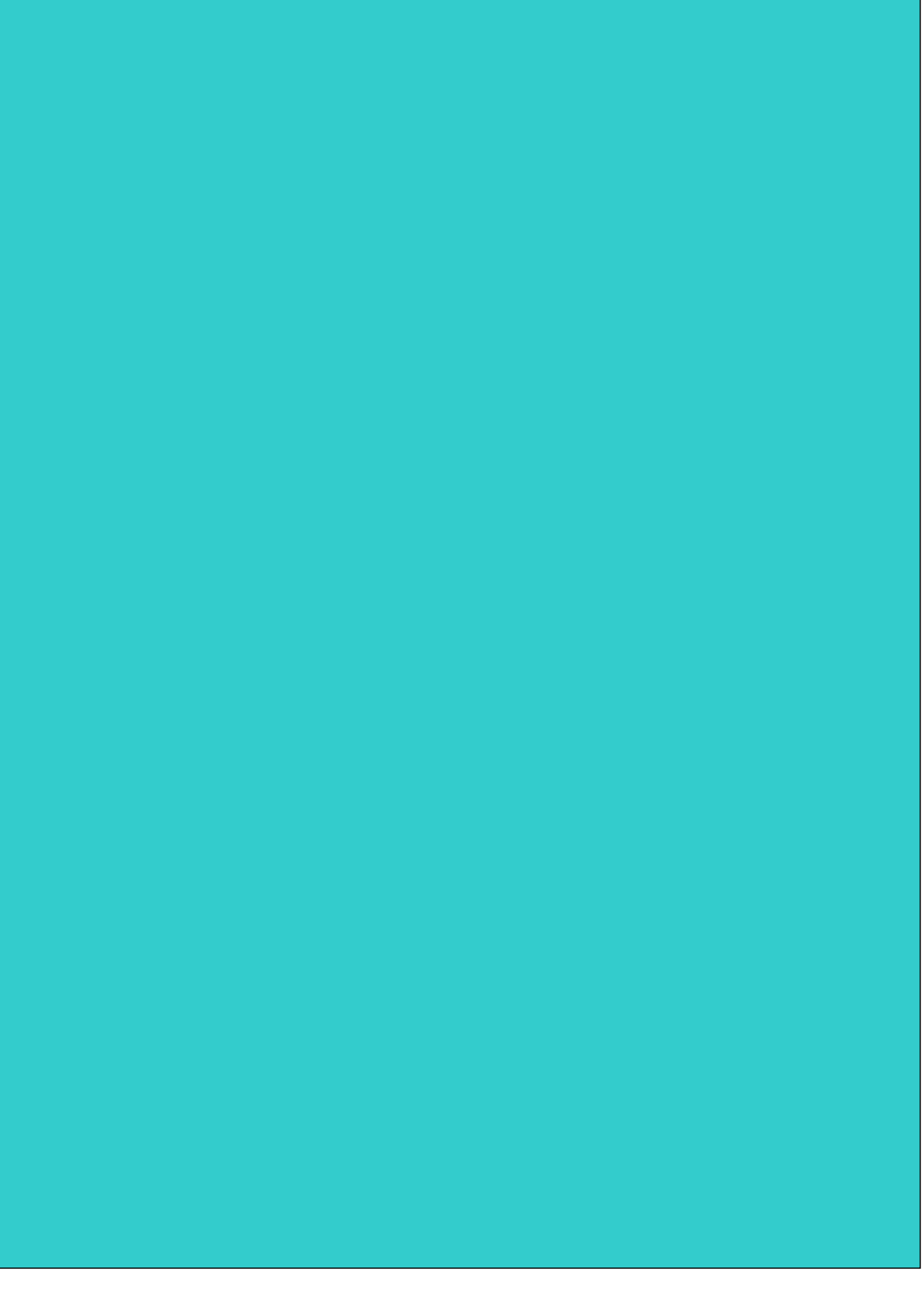
**ΜΗ ΙΣΟΡΡΟΠΗΜΕΝΟΙ**  
**ΥΠΕΡΚΟΡΕΣΜΕΝΟΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ**  
**ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ**

**Αλέξανδρος Χ. Αργυρόπουλος**

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς  
Ιούνιος 2020



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**  
**Σχολή Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής**



**Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ**  
**ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΜΗ ΙΣΟΡΡΟΠΗΜΕΝΟΙ**  
**ΥΠΕΡΚΟΡΕΣΜΕΝΟΙ ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΙ**  
**ΔΥΟ ΕΠΙΠΕΔΩΝ**

**Αλέξανδρος Χ. Αργυρόπουλος**

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής  
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των  
απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού  
Διπλώματος Ειδίκευσης στην *Εφαρμοσμένη Στατιστική*

Πειραιάς  
Ιούνιος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Επίκουρος Καθηγητής Ευαγγελάρας Χαράλαμπος (Επιβλέπων)
- Καθηγητής Κούτρας Μάρκος
- Αναπληρωτής Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**  
**School of Finance and Statistics**



**Department of Statistics and Insurance Science**

**POSTGRADUATE PROGRAM IN  
APPLIED STATISTICS**

**UNBALANCED TWO – LEVEL  
SUPERSATURATED DESIGNS**

By

Alexandros C. Argyropoulos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance  
Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of  
the requirements for the degree of Master of Science in  
Applied Statistics

Piraeus, Greece  
June 2020



*Στην οικογένειά μου*





## Ευχαριστίες

Καταρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον Επιβλέποντα Επίκουρο Καθηγητή κ. Χαράλαμπο Ευαγγελάρα για το ενδιαφέρον του και την υπομονή του, την έμπνευση που μου έδωσε αλλά και την καθοδήγηση του για τη συγγραφή και διεκπεραίωση της διπλωματικής μου εργασίας. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα υπόλοιπα μέλη της Εξεταστικής επιτροπής, τον Καθηγητή κ. Μάρκο Κούτρα και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Πολίτη Κωνσταντίνο. Επιπλέον, θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους τους διδάσκοντες του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών όπου μέσα από τις παρουσιάσεις τους και τις διαλέξεις τους μου μετέδωσαν σημαντικές γνώσεις για την έναρξη της επαγγελματικής μου καριέρας.

Οφείλω να ευχαριστήσω ιδιαίτερα την οικογένεια μου, που πίστεψαν σε μένα, με στήριξαν ψυχικά και οικονομικά ώστε να ολοκληρώσω με επιτυχία τόσο τις μεταπτυχιακές, όσο και τις προπτυχιακές σπουδές μου.



## Περίληψη

Οι πειραματικοί σχεδιασμοί και οι ιδιότητές τους αποτελούν αναπόσπαστο κομμάτι κάθε έρευνας σε αρκετά επιστημονικά πεδία και από την εφαρμογή τους μπορούμε να αποκτήσουμε σημαντική πληροφορία για τη συμπεριφορά ενός συστήματος όταν αυτό τεθεί κάτω από προκαθορισμένες συνθήκες. Η έννοια πείραμα μπορεί να οριστεί ως μία σειρά από διαδοχικούς ελέγχους κατά τους οποίους στοχευμένες αλλαγές στις διάφορες στάθμες των παραγόντων (μεταβλητών) που εξετάζονται, θα καταλήξουν να έχουν αισθητή ή ανεπαίσθητη επιρροή στο αποτέλεσμα του. Ένας σχεδιασμός παραγόντων αντιπροσωπεύει μια ακολουθία πειραμάτων στα οποία εισέρχονται παράγοντες και καθορίζονται τα επίπεδά τους. Ο παραγοντικός σχεδιασμός παίρνει μορφή μέσα από έναν πίνακα του οποίου κάθε στήλη αντιστοιχεί σε έναν παράγοντα (εισερχόμενη μεταβλητή) και κάθε γραμμή να υποδηλώνει μία εκτέλεση του πειράματος. Καθώς ο αριθμός των παραγοντικών επιδράσεων που ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε αυξάνεται, κατά αναλογία και το κόστος για την υλοποίηση ενός πειράματος μεγαλώνει.

Η εφαρμογή παραγοντικών πειραμάτων στα οποία εξετάζονται πολλοί παράγοντες και ταυτόχρονα ο περιορισμός στο κόστος της πραγματοποίησής τους, οδήγησε τους ερευνητές στην κατασκευή των υπερκορεσμένων σχεδιασμών. Η πιο διαδεδομένη χρήση των σχεδιασμών αυτών πραγματοποιείται σε πειράματα κρησαρίσματος, πειράματα κατά τα οποία μελετάται ένας αρκετά μεγάλος αριθμός παραγόντων, ωστόσο αναμένεται μερικοί (λίγοι) να ασκούν σημαντική επίδραση στην απόκριση. Γενικά, στους υπερκορεσμένους σχεδιασμούς ο αριθμός των παραγόντων που εξετάζονται υπερβαίνει το διαθέσιμο πλήθος των πειραματικών εκτελέσεων με αποτέλεσμα να είναι ανέφικτο να αναγνωριστούν και να εκτιμηθούν όλες οι κύριες επιδράσεις. Σημαντική κατηγορία των υπερκορεσμένων σχεδιασμών αποτελούν οι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί με παράγοντες δύο επιπέδων οι οποίοι μελετώνται για αρκετές δεκαετίες και οι ιδιότητές τους έχουν κεντρίσει το ενδιαφέρον πολλών ερευνητών.

Το πρώτο κεφάλαιο αποτελεί εισαγωγή για την παρούσα εργασία καθώς αναφέρονται οι πλήρεις και οι κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί δύο επιπέδων οι οποίες αποτελούν θεμελιώδεις κατηγορίες των πειραματικών σχεδιασμών. Επίσης, αναφέρονται οι κορεσμένοι σχεδιασμοί δύο επιπέδων και το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με την εισαγωγή των υπερκορεσμένων σχεδιασμών.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται το δημοφιλές κριτήριο ελαχιστοποίησης  $E(s^2)$  το οποίο εισήγαγαν οι Booth και Cox (1962) και απαιτεί ισορροπία των επιπέδων στις στήλες του πίνακα σχεδιασμού. Παράλληλα στο ίδιο κεφάλαιο δίνεται το πιο πρόσφατο κατώτερο όριο του  $E(s^2)$  στη βιβλιογραφία, καθώς επίσης μέθοδοι και αλγόριθμοι για την κατασκευή  $E(s^2)$  – βέλτιστων σχεδιασμών. Επιπλέον αναφέρονται μέθοδοι και αλγόριθμοι κατασκευής ισορροπημένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών.

Στο Κεφάλαιο 3 εισάγονται οι μη – ισορροπημένοι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί και δίνονται τα κατώτατα όρια τους όπως δόθηκαν στη βιβλιογραφία. Παρουσιάζεται το κριτήριο  $UE(s^2)$  το οποίο εισήγαγαν οι Jones και Majumdar (2014) με σκοπό την εύρεση βέλτιστων υπερκορεσμένων σχεδιασμών δύο επιπέδων με μη – ισορροπημένες στήλες στον πίνακα σχεδιασμού. Επίσης, γίνεται αναφορά στις μεθόδους κατασκευής  $UE(s^2)$  – βέλτιστων σχεδιασμών από την ίδια εργασία των Jones και Majumdar (2014).

Η εργασία ολοκληρώνεται με το 4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο στο οποίο πραγματοποιούνται παραδείγματα κατασκευής  $UE(s^2)$  – βέλτιστων σχεδιασμών σύμφωνα με τη μέθοδο που παρουσίασαν οι Jones και Majumdar (2014).

# Abstract

Experimental designs and their properties constitute a fundamental part of each scientific research and from their applications we can receive meaningful information about how a system reacts when it's been under predetermined conditions. Experiment could be defined as a series of consecutive tests in which if purposeful alternations are made in the levels of the factors, will result having a significant or negligible impact on the outcome. A factorial design represents a sequence of experiments in which factors are used as input variables and their levels are specified. The factorial design obtains its form through a matrix, in which each column represents a factor (input variable), and each row represents an experimental run. However, as the number of the effects that we are interested to evaluate is increasing, the cost for the implementation of the experiment is rising proportionally.

The realization of factorial experiments in which many factors are investigated and simultaneously the requirement that they are performed with the minimum financial cost, led the researchers to the construction of supersaturated designs. This type of designs is most commonly used in screening procedures, experiments in which a large number of factors is studied, but few of them is expected to present significant effects in the output. In general, in supersaturated designs, the total number of factors tested exceeds the total number of the available experimental runs, thus making the identification and the estimation of all the main effects unfeasible. An important class consists these designs are the supersaturated designs with factors at two levels which have been studied for many decades and their properties have stimulated the interest of many authors.

Chapter 1 is comprising an introduction for this dissertation in which the principal classes of experimental designs two – level full factorial and two – level fractional factorial designs are referred. Additionally, two – level saturated designs are referred, and the chapter is concluding with an introduction of supersaturated designs.

In Chapter 2 is introduced the popular  $E(s^2)$  criterion from Booth and Cox (1962) which requires that the levels are balanced in the columns of the design matrix. Moreover, in this chapter the latest lower bound of  $E(s^2)$  in the literature is given, as well as construction methods and algorithms for  $E(s^2)$  – optimal designs. Also, construction methods and algorithms for balanced supersaturated designs are referred.

In Chapter 3 unbalanced supersaturated designs are introduced along with the lower bounds given in the literature.  $UE(s^2)$  criterion is presented based on the study of Jones and Majumdar (2014) in order to identify  $UE(s^2)$  – optimal two – level designs in which the columns in the design matrix are unbalanced. Also, we present the construction methods of the two – level unbalanced supersaturated designs from the same study presented Jones and Majumdar (2014).

The dissertation is finalized with Chapter 4 in which we proceed by constructing two level  $UE(s^2)$  – optimal designs based on the method introduced by Jones and Majumdar (2014).

# Περιεχόμενα

<b>Κατάλογος Πινάκων</b>	xvii
<b>1. Πειραματικοί σχεδιασμοί</b>	<b>1</b>
1.1 Παραγοντικοί σχεδιασμοί	1
1.2 Πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί δύο επιπέδων – $2^m$	3
1.3 Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί δύο επιπέδων – $2^{m-p}$	4
1.4 Κορεσμένοι σχεδιασμοί δύο επιπέδων	5
1.4.1 Πίνακες Hadamard	6
1.5 Υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί	7
<b>2. Ισορροπημένοι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί δύο επιπέδων</b>	<b>11</b>
2.1 Εισαγωγή	11
2.2 Το κριτήριο $E(s^2)$	11
2.3 Κατώτερα όρια του $E(s^2)$ για ισορροπημένους σχεδιασμούς	12
2.4 Μέθοδοι κατασκευής ισορροπημένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών δύο επιπέδων	14
<b>3. Μη ισορροπημένοι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί δύο επιπέδων</b>	<b>19</b>
3.1 Εισαγωγή	19
3.2 Κατώτερα όρια για την επιλογή μη ισορροπημένων υπερκορεσμένων δύο επιπέδων	20
3.3 Κριτήριο του $UE(s^2)$ για την κατασκευή υπερκορεσμένων σχεδιασμών	22
3.4 Κατώτερα όρια $UE(s^2)$ – βέλτιστων σχεδιασμών	23
3.5 Κατασκευή $UE(s^2)$ – βέλτιστων σχεδιασμών	24
<b>4. Παραδείγματα κατασκευής μη – ισορροπημένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών</b>	<b>27</b>
4.1 Σχεδιασμοί με 16 στήλες	28

4.2	Σχεδιασμοί με 18 στήλες	44
	<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>67</b>



## Κατάλογος Πινάκων

4.1	Hadamard $16 \times 16$ ( $H_{16}$ )	27
4.1.1	Σχεδιασμός $X_1$	28
4.1.2	$X_1'$	29
4.1.3	$X_1'X_1$	29
4.1.4	Σχεδιασμός $X_2$	30
4.1.5	$X_2'$	31
4.1.6	$X_2'X_2$	32
4.1.7	Σχεδιασμός $X_3$	32
4.1.8	$X_3'$	33
4.1.9	$X_3'X_3$	34
4.1.10	$X_4$	34
4.1.11	$X_4'$	35
4.1.12	$X_4'X_4$	36
4.1.13	Σχεδιασμός $X_5$	36
4.1.14	$X_5'$	37
4.1.15	$X_5'X_5$	38
4.1.16	Σχεδιασμός $X_6$	38
4.1.17	$X_6'$	39
4.1.18	$X_6'X_6$	40
4.1.19	Σχεδιασμός $X_7$	40
4.1.20	$X_7'$	41
4.1.21	$X_7'X_7$	41
4.1.22	Σχεδιασμός $X_8$	42
4.1.23	$X_8'$	43
4.1.24	$X_8'X_8$	43
4.2.1	Πίνακας $V_1$	45
4.2.2	Σχεδιασμός $X_1$	46
4.2.3	$X_1'$	46

4.2.4	$X_1'X_1$	47
4.2.5	Πίνακας $V_2$	48
4.2.6	Σχεδιασμός $X_2$	48
4.2.7	$X_2'$	49
4.2.8	$X_2'X_2$	49
4.2.9	Πίνακας $V_3$	50
4.2.10	Σχεδιασμός $X_3$	51
4.2.11	$X_3'$	51
4.2.12	$X_3'X_3$	52
4.2.13	Πίνακας $V_4$	53
4.2.14	Σχεδιασμός $X_4$	53
4.2.15	$X_4'$	54
4.2.16	Πίνακας $X_4'X_4$	54
4.2.17	Πίνακας $V_5$	55
4.2.18	Σχεδιασμός $X_5$	56
4.2.19	$X_5'$	56
4.2.20	Πίνακας $X_5'X_5$	57
4.2.21	Πίνακας $V_6$	58
4.2.22	Σχεδιασμός $X_6$	58
4.2.23	$X_6'$	59
4.2.24	$X_6'X_6$	59
4.2.25	Πίνακας $V_7$	60
4.2.26	Σχεδιασμός $X_7$	61
4.2.27	$X_7'$	61
4.2.28	$X_7'X_7$	62
4.2.29	Πίνακας $V_8$	63
4.2.30	Σχεδιασμός $X_8$	63
4.2.31	$X_8'$	64
4.2.32	$X_8'X_8$	64
4.2.33	Σχεδιασμός $X_8$	65





# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Πειραματικοί σχεδιασμοί

### 1.1 Παραγοντικοί Σχεδιασμοί

Οι παραγοντικοί σχεδιασμοί έχουν αναπτυχθεί με σκοπό να αναγνωριστούν εκείνοι οι παράγοντες, οι οποίοι επιδρούν σημαντικά στο αποτέλεσμα ενός πειράματος. Η διαδικασία κατά την οποία πραγματοποιείται η εύρεση των σημαντικών παραγόντων λέγεται διαδικασία κρησαρίσματος (*screening procedure*) και οι σχεδιασμοί που σχηματίζονται για να υλοποιηθεί η διαδικασία αυτή καλούνται ως σχεδιασμοί ή πειράματα κρησαρίσματος (*screening designs*). Τα πειράματα κρησαρίσματος εκτελούνται κυρίως στα προκαταρκτικά στάδια μίας έρευνας όταν είναι πιθανό οι περισσότεροι από τους παράγοντες που μελετώνται να έχουν μηδενική επίδραση στην απόκριση.

Παράγοντας είναι μία ελεγχόμενη μεταβλητή της οποίας οι διαφορετικές καταστάσεις οι οποίες ονομάζονται επίπεδα, μεταβάλλονται προμελετημένα έτσι ώστε να μελετηθεί η επίδραση των μεταβολών τους στην απόκριση. Επίπεδο ή αλλιώς στάθμη είναι η κατάσταση ενός παράγοντα στην οποία μετριέται η μεταβλητή απόκρισης. Η μεταβλητή απόκρισης είναι το αποτέλεσμα που μετριέται στο πείραμα. Θεραπεία είναι ο συνδυασμός των επιπέδων των παραγόντων που εξετάζονται στο πείραμα. Μία θεραπεία αντιστοιχεί σε μία συγκεκριμένη εκτέλεση του πειράματος. Πειραματική μονάδα είναι το αντικείμενο στο οποίο καταγράφεται μία τιμή για τη μεταβλητή απόκρισης για μία συγκεκριμένη εκτέλεση. Όταν σε όλες τις εκτελέσεις του πειράματος έχουμε τον ίδιο αριθμό παρατηρήσεων, ο πειραματικός σχεδιασμός λέγεται ισορροπημένος (*balanced*), διαφορετικά λέγεται μη – ισορροπημένος (*unbalanced*). Επίδραση καλείται η μεταβολή στην τιμή της μεταβλητής απόκρισης εξαιτίας της αλλαγής επιπέδου του παράγοντα. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η επίδραση αυτή καλείται ως κύρια επίδραση (*main effect*). Σε πειράματα στα οποία μελετώνται δύο και περισσότεροι παράγοντες, υπάρχουν περιπτώσεις κατά τις οποίες η διαφορά στην τιμή της μεταβλητής απόκρισης μεταξύ των επιπέδων ενός παράγοντα να μην είναι ίδια στα επίπεδα των υπόλοιπων παραγόντων. Σε αυτές τις περιπτώσεις λέμε ότι υπάρχει αλληλεπίδραση ανάμεσα στους παράγοντες (*interaction effect*).

Ένας παραγοντικός σχεδιασμός αντιπροσωπεύει μία ακολουθία πειραμάτων τα οποία πρέπει να εκτελεστούν. Οι παράγοντες που πρόκειται να εξεταστούν εισέρχονται στο πείραμα και καθορίζεται ο αριθμός των επιπέδων τους. Η δομή ενός παραγοντικού σχεδιασμού απεικονίζεται από έναν αλγεβρικό πίνακα του οποίου οι γραμμές υποδηλώνουν τις θεραπείες (εκτελέσεις), κάθε στήλη αντιστοιχεί σε ένα παράγοντα, με κάθε στοιχείο του πίνακα να δηλώνει το αντίστοιχο επίπεδο του κάθε παράγοντα σε κάθε θεραπεία.

Έστω ότι εξετάζεται ο παράγοντας A ο οποίος διακρίνεται σε k επίπεδα με  $i = 1, \dots, k$ . Στην περίπτωση κατά την οποία εξετάζεται μόνο ένας παράγοντας οι θεραπείες ταυτίζονται με τα επίπεδα του παράγοντα. Έστω  $Y_{ij}$  η τιμή της μεταβλητής απόκρισης στην  $j$ -οστή παρατήρηση όταν ο παράγοντας A βρίσκεται στο  $i$ -οστό επίπεδο. Για να εξετάσουμε αν η μεταβλητή απόκρισης  $Y$  επηρεάζεται από τα διαφορετικά επίπεδα του παράγοντα A προσαρμόζουμε το μοντέλο της σχέσης 1.1 :

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij} \quad (1.1)$$

όπου  $\mu$  είναι ο ολικός μέσος των  $k$  επιπέδων,  $\alpha_i$  είναι η επίδραση του παράγοντα A όταν αυτός βρίσκεται στο  $i$ -οστό επίπεδο, και  $\varepsilon_{ij}$  είναι το σφάλμα της παρατήρησης που εκφράζει την επίδραση που δεν μπορεί να ερμηνευτεί από τον παράγοντα A. Πραγματοποιώντας των ακόλουθο έλεγχο υπόθεσης διαπιστώνεται εάν υπάρχουν ενδείξεις ότι κάποια από τις μεταβολές των επιπέδων του παράγοντα A ασκεί επίδραση στην εξαρτημένη μεταβλητή  $Y_{ij}$ .

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

$$H_1 : \text{κάποιο } \alpha_i \neq 0.$$

Θεωρούμε τώρα και έναν πειραματικό σχεδιασμό στον οποίο μελετάται η επίδραση δύο παραγόντων έστω A, B σε κάποια μεταβλητή απόκρισης  $Y$ . Αν  $a$  είναι ο αριθμός των επιπέδων του παράγοντα A και  $b$  ο αριθμός των επιπέδων του παράγοντα B, τότε μία πλήρης εκτέλεση του σχεδιασμού απαιτεί όλους τους  $a \times b$  συνδυασμούς των επιπέδων. Στην περίπτωση αυτή, ο σχεδιασμός λέγεται πλήρης παραγοντικός σχεδιασμός (*full factorial design*). Το γινόμενο  $a \times b$  δηλώνει το πλήθος των εκτελέσεων μίας επανάληψης του σχεδιασμού, ενώ αν επαναληφθεί  $N$  φορές, τότε το πλήθος ισούται με  $a \times b \times N$ . Στην περίπτωση όπου  $N = 1$ , ο σχεδιασμός είναι μη – επαναλαμβανόμενος (*unreplicated design*).

Είναι προφανές ότι καθώς αυξάνεται ο αριθμός παραγόντων και τα επίπεδα του κάθε παράγοντα ενδέχεται για παράδειγμα να είναι περισσότερα από 3 ή 4, τότε μία πλήρης εκτέλεση του σχεδιασμού απαιτεί τεράστιο πλήθος συνδυασμών επιπέδων, καθιστώντας τη μελέτη χρονοβόρα και το κόστος της έρευνας οικονομικά μη διαχειρίσιμο. Η ανάγκη για την εξέταση πολλών παραγόντων παρότρυνε τους ερευνητές στην ανάπτυξη των  $2^m$  παραγοντικών σχεδιασμών.

## 1.2 Πλήρεις παραγοντικοί σχεδιασμοί δύο επιπέδων – $2^m$

Θεμελιώδης κατηγορία πειραματικών σχεδιασμών αποτελούν οι  $2^m$  σχεδιασμοί στους οποίους μελετάται η επίδραση που ασκούν στην απόκριση  $m$  παράγοντες δύο επιπέδων. Η χρήση των  $2^m$  σχεδιασμών επικεντρώνεται στην αναγνώριση των κύριων επιδράσεων. Σημαντικό χαρακτηριστικό των σχεδιασμών αυτών είναι ότι παρέχουν το μικρότερο αριθμό εκτελέσεων στις οποίες οι  $m$  παράγοντες μπορούν να μελετηθούν σε έναν πλήρη παραγοντικό σχεδιασμό. Επίσης αποτελούν τη βάση των κλασματικών σχεδιασμών τους οποίους θα περιγράψουμε στην επόμενη παράγραφο.

Η επιλογή των δύο επιπέδων μπορεί να μην καλύπτει ολόκληρο το εύρος των πιθανών επιπέδων του κάθε παράγοντα όμως, είναι ικανή να υποδείξει σημαντικές τάσεις και να προσδιορίσει μία υποσχόμενη κατεύθυνση για περαιτέρω έρευνα. Τα επίπεδα μπορούν να διακριθούν σε ποσοτικά, όπως δύο συγκεκριμένες τιμές θερμοκρασίας ή πίεσης, αλλά και σε ποιοτικά, για παράδειγμα δύο μηχανήματα ή ακόμη η παρουσία ή απουσία κάποιου συστατικού. Οι παράγοντες συμβολίζονται με κεφαλαία λατινικά γράμματα (A, B, C, ...) και τα δύο επίπεδα με  $-1$  (χαμηλή στάθμη – *low level*) και  $+1$  (υψηλή στάθμη – *high level*) υποδηλώνοντας την κατάσταση του χαρακτηριστικού που μελετάται. Μία πλήρης επανάληψη ενός  $2^m$  σχεδιασμού απαιτεί  $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^m$  παρατηρήσεις και ο σχεδιασμός ονομάζεται  $2^m$  παραγοντικός σχεδιασμός. Γενικότερα, σε έναν  $2^m$  σχεδιασμό υπάρχουν  $m$  κύριες επιδράσεις,  $\binom{m}{2}$  αλληλεπιδράσεις δύο παραγόντων,  $\binom{m}{3}$  αλληλεπιδράσεις τριών παραγόντων, ..., και μία αλληλεπίδραση  $m$  παραγόντων. Το πλήρες μοντέλο του  $2^m$  σχεδιασμού θα περιέχει συνολικά  $2^m - 1$  συνολικές επιδράσεις.

Ωστόσο, όσο αυξάνεται η τιμή του  $m$  ο αριθμός των εκτελέσεων αυξάνεται γεωμετρικά με αποτέλεσμα να μην αρκούν οι διαθέσιμοι πόροι για τη διεξαγωγή του πειράματος. Για παράδειγμα, όταν  $m = 10$  (10 παράγοντες), μία πλήρης εκτέλεση του σχεδιασμού απαιτεί  $2^{10} = 1,024$  παρατηρήσεις. Για αυτόν το σχεδιασμό, 10 από τους 1,023 διαθέσιμους βαθμούς ελευθερίας χρησιμοποιούνται για την εκτίμηση των κύριων επιδράσεων, 45 βαθμοί ελευθερίας αντιστοιχούν στις αλληλεπιδράσεις 2

παραγόντων, και οι υπόλοιποι 968 αντιστοιχούν σε αλληλεπιδράσεις τριών και περισσότερων παραγόντων. Οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ αρκετών παραγόντων τις περισσότερες των περιπτώσεων θεωρούνται «αδιάφορες» κατά τη διεξαγωγή μιας έρευνας. Για την αντιμετώπιση αυτών των καταστάσεων, ένα προσεκτικά επιλεγμένο υποσύνολο θεραπειών μπορεί να χρησιμοποιηθεί με ελάχιστη ή καθόλου απώλεια πληροφορίας για την εκτίμηση των κύριων επιδράσεων και αλληλεπιδράσεις χαμηλής τάξης.

### 1.3 Κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί δύο επιπέδων – $2^{m-p}$

Θεωρώντας ότι ορισμένες αλληλεπιδράσεις υψηλής τάξης είναι αμελητέες, τότε υπάρχει δυνατότητα να συλλεχθεί σημαντική πληροφορία για τις κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις χαμηλής τάξης εκτελώντας μόνο ένα κλάσμα του πλήρους παραγοντικού σχεδιασμού. Οι σχεδιασμοί αυτοί ονομάζονται κλασματικοί παραγοντικοί σχεδιασμοί (*fractional factorial designs*) και αποτελούν την πιο διαδεδομένη κατηγορία των πειραματικών σχεδιασμών. Το  $1/p$  κλάσμα του  $2^m$  σχεδιασμού συμβολίζεται με  $2^{m-p}$ . Η επιτυχής εφαρμογή των κλασματικών σχεδιασμών βασίζεται σε κάποιες αρχές που αφορούν τις παραγοντικές επιδράσεις:

- ❖ **Αρχή της Ιεραρχίας** (*Hierarchical ordering principle*) : Αλληλεπιδράσεις χαμηλής τάξης ενδέχεται να είναι περισσότερο σημαντικές από αυτές υψηλότερης τάξης.
- ❖ **Αρχή της Σποραδικότητας** (*Effect sparsity principle*) : Σε πειράματα στα οποία εμπλέκονται πολλοί παράγοντες, το σύστημα αναμένεται να επηρεάζεται μόνο από κύριες επιδράσεις και αλληλεπιδράσεις χαμηλής τάξης.
- ❖ **Αρχή της Κληρονομικότητας** (*Effect heredity principle*) : Η κληρονομικότητα είναι η ιδιότητα κατά την οποία η σημαντικότητα των κύριων επιδράσεων παραγόντων μεταφέρεται στις αλληλεπιδράσεις που συμμετέχουν οι συγκεκριμένοι παράγοντες.

Θεωρούμε την περίπτωση κατά την οποία εξετάζονται 3 παράγοντες δύο επιπέδων. Οι πόροι που απαιτούνται δεν επαρκούν για την πραγματοποίηση όλων των  $2^3 = 8$  θεραπειών αλλά για την εκτέλεση τεσσάρων από αυτές. Ο σχεδιασμός που θα προκύψει θα απαρτίζεται μόνο από  $2^{3-1} = 4$  θεραπείες και θα καλείται ως  $1/2$  κλάσμα ενός  $2^3$  σχεδιασμού ή  $2^{3-1}$  σχεδιασμός.

Οι κλασματικοί σχεδιασμοί πειραμάτων έχουν αναπτυχθεί συμβάλλοντας σημαντικά σε αρκετά επιστημονικά πεδία αποτελώντας χρήσιμη επιλογή όταν οι πόροι



δεν επαρκούν για την εκτέλεση πλήρων σχεδιασμών. Η κυριότερη χρήση των κλασματικών σχεδιασμών γίνεται στα πειράματα κρησαρίσματος, πειράματα στα οποία θεωρούνται αρκετοί παράγοντες, και στόχος είναι η εύρεση αυτών που προκαλούν σημαντική επιρροή στη μεταβλητή απόκριση εκτελώντας έναν περιορισμένο αριθμό εκτελέσεων. Έπειτα από τη διαδικασία κρησαρίσματος, οι παράγοντες που κρίνονται σημαντικοί εξετάζονται εκτενέστερα σε επόμενα πειράματα.

Στα πειράματα κρησαρίσματος, ο σκοπός της έρευνας είναι να εκτιμηθούν οι επιδράσεις (αν υπάρχουν) εξετάζοντας ένα σύνολο από αρκετούς παράγοντες. Ουσιαστικά το ενδιαφέρον εστιάζεται μόνο στην εκτίμηση των κύριων επιδράσεων των παραγόντων.

Στην παρούσα εργασία λοιπόν, θα θεωρήσουμε το γραμμικό μοντέλο που περιλαμβάνει μόνο τις κύριες επιδράσεις. Το μοντέλο στο οποίο προσαρμόζουμε τα δεδομένα δίνεται από τη σχέση 1.2 και είναι το εξής:

$$Y = X_1\beta + \varepsilon, \varepsilon \sim N_N(0_N, \sigma^2 I_N), \quad (1.2)$$

όπου  $Y$  είναι το  $N \times 1$  διάνυσμα των παρατηρήσεων της μεταβλητής απόκρισης,  $\beta$  είναι το  $(m + 1) \times 1$  διάνυσμα των παραμέτρων που αντιστοιχούν στο γενικό μέσο και στις κύριες επιδράσεις των παραγόντων και  $\varepsilon$  το τυχαίο σφάλμα, για το οποίο κάνουμε τις συνήθεις υποθέσεις για συμπερασματολογία.

#### 1.4 Κορεσμένοι σχεδιασμοί δύο επιπέδων

Η αναζήτηση οικονομικών – από πλευράς πλήθους εκτελέσεων – σχεδιασμών για την εκτίμηση παραγοντικών επιδράσεων έχει προκαλέσει μία συνεχή έρευνα στην κατασκευή πειραμάτων. Από τις πιο σημαντικές κατηγορίες των κλασματικών σχεδιασμών που έχουν εφαρμογή σε πειράματα κρησαρίσματος αποτελούν οι κορεσμένοι σχεδιασμοί (*saturated designs*). Ένας κλασματικός παραγοντικός σχεδιασμός είναι κορεσμένος όταν το πλήθος των παραγοντικών επιδράσεων που πρόκειται να μελετηθούν ταυτίζεται με το πλήθος των εκτελέσεων του σχεδιασμού. Σε έναν κορεσμένο σχεδιασμό δύο επιπέδων μελετώνται δηλαδή οι κύριες επιδράσεις που ασκούν  $m = N - 1$  παράγοντες σε  $N$  εκτελέσεις του πειράματος. Γενικά, σε έναν οποιονδήποτε παραγοντικό σχεδιασμό δύο επιπέδων στον οποίο εισέρχονται  $m$  παράγοντες, ένας βαθμός ελευθερίας απαιτείται για την εκτίμηση του ολικού μέσου και  $m$  βαθμοί ελευθερίας για την εκτίμηση των  $m$  κύριων επιδράσεων. Για την εκτίμηση της κύριας επίδρασης οι βαθμοί ελευθερίας που χρειάζονται ισοδυναμούν με

τα επίπεδα του παράγοντα μείον 1. Επομένως για την εκτίμηση της κύριας επίδρασης ενός παράγοντα δύο επιπέδων χρειάζεται ένας βαθμός ελευθερίας.

Στο κορεσμένο μοντέλο όλη η διαθέσιμη πληροφορία καταναλώνεται για την εκτίμηση των παραγοντικών επιδράσεων και της επίδρασης του ολικού μέσου, με αποτέλεσμα να μην περισσεύουν βαθμοί ελευθερίας για την εκτίμηση του σφάλματος. Είναι αδύνατο να εκτιμηθεί η μεταβλητότητα των σφαλμάτων δίχως να ληφθούν επιπρόσθετες υποθέσεις, όπως η υπόθεση της σποραδικότητας των επιδράσεων (*effect sparsity principle*) την οποία εισήγαγαν οι Box και Meyer (1986). Αποτελεί την πιο διαδεδομένη αρχή σύμφωνα με την οποία ένα μεγάλο ποσοστό της μεταβλητότητας της διαδικασίας τείνει να ερμηνεύεται από ένα μικρό ποσοστό των μεταβλητών που εξετάζονται. Οι κορεσμένοι σχεδιασμοί κάτω από την αρχή της σποραδικότητας των επιδράσεων προσφέρουν ιδιαίτερα χρήσιμες επιλογές για πειράματα μειωμένου κόστους, και αποτελούν μία ιδανική επιλογή για καταστάσεις όπου τα χρονικά όρια επιβάλλουν την διεξαγωγή των ελάχιστων δυνατών εκτελέσεων.

Κορεσμένοι σχεδιασμοί για «κρησάρισμα» παραγόντων μπορούν να κατασκευαστούν από πίνακες Hadamard.

#### 1.4.1 Πίνακες Hadamard

Ένας πίνακας Hadamard  $H$ , είναι ένας  $N \times N$  πίνακας με στοιχεία  $+1$  και  $-1$  του οποίου οι στήλες και οι γραμμές είναι ανά δύο ορθογώνιες. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε πίνακα  $H_N$  ισχύει ότι  $H_N' H_N = H_N H_N' = N \times I_N$ , όπου  $I_N$  ο μοναδιαίος πίνακας τάξης  $N$ . Ένας πίνακας Hadamard είναι κανονικοποιημένος όταν όλα τα στοιχεία της πρώτης του γραμμής και στήλης είναι  $+1$ . Η κανονικοποίηση οποιουδήποτε πίνακα Hadamard τάξης  $N$  πραγματοποιείται πολλαπλασιάζοντας με  $-1$  οποιαδήποτε γραμμή ή / και στήλη χρειάζεται. Με αυτήν την ενέργεια αποκτούμε έναν ισοδύναμο πίνακα Hadamard  $H_N$ . Η ύπαρξη των πινάκων Hadamard προϋποθέτει ότι το  $N$  πρέπει να είναι πολλαπλάσιο του 4 ( $N \equiv 0 \pmod{4}$ ). Ένας κανονικοποιημένος πίνακας Hadamard τάξης 4 δίνεται παρακάτω στη σχέση

$$H_4 = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & +1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

Αγνοώντας την πρώτη στήλη ενός  $H_N$  πίνακα Hadamard – η οποία αποτελείται μόνο από  $+1$  και δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη παραγόντων – προκύπτει ένας πίνακας διαστάσεων τάξης  $N \times (N - 1)$ , που καλείται σχεδιασμός Hadamard. Οι σχηματισμοί αυτής της μορφής έχουν μελετηθεί σε μεγάλο βαθμό για την εφαρμογή

τους σε πειράματα κρησαρίσματος. Σε αυτούς τους σχεδιασμούς, οποιεσδήποτε δύο στήλες  $c_i, c_j$  είναι ορθογώνιες αφού εξ' ορισμού ισχύει ότι  $c_i'c_j = c_i c_j' = 0$ . Τέτοιοι σχεδιασμοί ονομάζονται ορθογώνιοι και αποτελούν σημαντικό εργαλείο για την αποτίμηση παραγοντικών επιδράσεων, μιας και οι εκτιμήσεις των παραμέτρων του μοντέλου της σχέσης 1.2 είναι ασυσχέτιστες. Αποτελούν επίσης μία από τις βασικές μεθόδους κατασκευής ορισμένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών.

## 1.5 Υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί

Από τις σημαντικότερες κατηγορίες των κλασματικών παραγοντικών σχεδιασμών οι οποίοι έχουν ευρεία εφαρμογή σε πειράματα κρησαρίσματος, αποτελούν οι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί (*SSDs – Supersaturated Designs*). Συγκεκριμένο χαρακτηριστικό των υπερκορεσμένων σχεδιασμών είναι ότι μπορούν να μελετήσουν ένα σχετικά μεγάλο αριθμό παραγόντων, χρησιμοποιώντας ένα μικρό πλήθος εκτελέσεων, μειώνοντας έτσι σημαντικά το κόστος του πειράματος. Το πλήθος των διαθέσιμων εκτελέσεων λοιπόν, δεν επαρκεί για να εκτιμηθούν όλες οι κύριες επιδράσεις. Στα προκαταρκτικά στάδια βιομηχανικών και επιστημονικών πειραμάτων είναι αναγκαία η μελέτη ενός μεγάλου αριθμού παραγόντων, ωστόσο λίγοι από αυτούς καταλήγουν να επηρεάζουν ενεργά την απόκριση. Με βάση την υπόθεση της σποραδικότητας των επιδράσεων, η χρήση των υπερκορεσμένων σχεδιασμών συμβάλλει αισθητά στην αναγνώριση των μερικών «ενεργών» παραγόντων.

Οι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί μπορούν να διακριθούν σε δύο σημαντικές κατηγορίες. Η πρώτη αποτελείται από υπερκορεσμένους σχεδιασμούς δύο επιπέδων (*two – level SSDs*) και οι ιδιότητές τους έχουν κεντρίσει το ενδιαφέρον αρκετών ερευνητών. Η δεύτερη κατηγορία περιλαμβάνει υπερκορεσμένους σχεδιασμούς πολλών επιπέδων (*multi – level SSDs*) με αριθμό επιπέδων  $s > 2$ . Μία πιο γενικευμένη κατηγορία των υπερκορεσμένων σχεδιασμών πολλών επιπέδων αποτελούν οι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί μικτών επιπέδων (*mixed – level SSDs*) οι οποίοι εξετάζουν παράγοντες διαφορετικών επιπέδων στον ίδιο πίνακα σχεδιασμού.

Στους υπερκορεσμένους σχεδιασμούς δύο επιπέδων, ο αριθμός  $m$  των παραγόντων που εξετάζονται υπερβαίνει το διαθέσιμο πλήθος  $N$  των πειραματικών εκτελέσεων και ισχύει ότι  $m > N - 1$ .

Ο Satterthwaite (1959) ήταν ο πρώτος που εισήγαγε τη χρήση των υπερκορεσμένων σχεδιασμών σε πειράματα κρησαρίσματος υπό την αρχή της σποραδικότητας των επιδράσεων. Πρότεινε την κατασκευή του πίνακα σχεδιασμού με τυχαίο τρόπο, δημιουργώντας τους περίφημους «τυχαία ισορροπημένους σχεδιασμούς» (*Random Balance Designs*) οι οποίοι έχουν θεωρηθεί ως «γονείς» των υπερκορεσμένων σχεδιασμών. Ιδιαίτερα σημαντική ήταν η συμβολή των Booth και Cox (1962) οι οποίοι

ήταν ανάμεσα στους πρώτους ερευνητές αναφορικά με την κατασκευή και εύρεση βέλτιστων υπερκορεσμένων σχεδιασμών με συστηματικό τρόπο. Εισηγάγαν τα κριτήρια  $E(s^2)$  και  $\text{Max}|s|$  με βάση τα οποία αναζητούσαν βέλτιστους υπερκορεσμένους σχεδιασμούς δύο επιπέδων. Στην έρευνα για την κατασκευή υπερκορεσμένων σχεδιασμών επικεντρώθηκε ο Lin (1993) ο οποίος εισήγαγε μία μέθοδο χρησιμοποιώντας  $\frac{1}{2}$  κλάσματα σχεδιασμών Hadamard. Η μεθόδός του παρέχει απλότητα στην κατασκευή και έχει τη δυνατότητα να εξάγει υπερκορεσμένους σχεδιασμούς για κάθε άρτιο πλήθος εκτελέσεων. Η χρήση πινάκων Hadamard για την κατασκευή υπερκορεσμένων σχεδιασμών εξετάστηκε την ίδια χρονιά και από τον Wu (1993). Αρκετοί είναι οι ερευνητές οι οποίοι παρουσίασαν μεθόδους κατασκευής υπερκορεσμένων σχεδιασμών. Μεταξύ άλλων σημαντική ήταν η συμβολή των Tang και Wu (1993), Liu και Zhang (2000), Lu και Meng (2000), Butler et al. (2001), Bulutoglu και Cheng (2004), Liu, Ryan και Dean (2007) και Bulutoglu (2007).

Ένας υπερκορεσμένος σχεδιασμός απεικονίζεται σε έναν  $N \times m$  πίνακα  $X$ , με  $N > 2$  ο οποίος ονομάζεται πίνακας σχεδιασμού. Οι γραμμές δηλώνουν τις εκτελέσεις, κάθε στήλη συμβολίζει έναν παράγοντα, και κάθε στοιχείο  $(i,j)$  του πίνακα είναι ίσο με  $+1$  ή  $-1$  υποδηλώνοντας το υψηλό και χαμηλό επίπεδο του παράγοντα αντίστοιχα. Επίσης υποθέτουμε ότι για οποιεσδήποτε δύο στήλες  $c_i$  και  $c_j$  με  $i \neq j$  του πίνακα  $X$ , ισχύει ότι  $c_i \neq \pm c_j$  και  $c_i \neq 1_N$  όπου  $1_N$  το  $N \times 1$  διάνυσμα που περιέχει μόνο  $+1$ . Δηλαδή κάθε στήλη του  $X$  θα πρέπει να είναι μοναδική. Ο πίνακας σχεδιασμού μπορεί να επεκταθεί στον πίνακα  $X_1$  του μοντέλου 1.2, προσθέτοντας μία επιπλέον στήλη η οποία θα αναφέρεται στην επίδραση του μέσου αποτελούμενη αποκλειστικά από  $+1$ .

Οι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί μπορούν να διαχωριστούν σε ισορροπημένους και μη ισορροπημένους. Ένας υπερκορεσμένος σχεδιασμός δύο επιπέδων είναι ισορροπημένος εάν σε κάθε στήλη του πίνακα σχεδιασμού  $X$  ο αριθμός εμφάνισης των επιπέδων  $+1$  και  $-1$  είναι ίσος με  $N/2$ . Αυτό προϋποθέτει ότι το  $N$  είναι άρτιο. Στη βιβλιογραφία, οι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί με αυτήν την ιδιότητα ονομάζονται ορθογώνιοι κατά ως προς το μέσο σχεδιασμοί (*mean orthogonal designs*). Γενικά, όπως είδαμε, στους παραγοντικούς σχεδιασμούς δύο επιπέδων δύο στήλες  $c_i, c_j$  είναι ορθογώνιες εάν  $c_i' c_j = c_j' c_i = 0$  ενώ είναι πλήρως συσχετισμένες εάν  $c_i' c_j = c_j' c_i = N$ , και μερικώς συσχετισμένες εάν  $0 < c_i' c_j = c_j' c_i < N$ .

Με τον περιορισμό των δύο επιπέδων και με άρτιο πλήθος εκτελέσεων, μπορεί να προκύψει η ισάριθμη επανάληψη των παραγοντικών επιπέδων με την οποία εξασφαλίζεται η ορθογωνιότητα του κάθε παράγοντα με τον ολικό μέσο.

Σε ένα τυπικό παραγοντικό πείραμα, αν ο πίνακας  $X_1' X_1$  αντιστρέφεται, οι παράμετροι  $\beta$  μπορούν να εκτιμηθούν με τις γνωστές εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων  $\hat{\beta} = (X_1' X_1)^{-1} X_1' Y$ . Στην περίπτωση των υπερκορεσμένων σχεδιασμών η

προσέγγιση αυτή δεν μπορεί να σταθεί ακόμα και για το μοντέλο των κύριων επιδράσεων, καθώς ο αριθμός των παραγόντων είναι μεγαλύτερος από τους βαθμούς ελευθερίας. Συνεπώς ο πίνακας  $X_1'X_1$  δεν είναι αντιστρέψιμος. Οι μεγάλες συσχετίσεις στον πίνακα μοντέλου και η απόκλιση από την ορθογωνιότητα αποτελούν σημαντικά ζητήματα για την αποδοτική αναγνώριση των πραγματικά ενεργών παραγόντων.

Στη βιβλιογραφία, το κύριο ενδιαφέρον έχει επικεντρωθεί στην εύρεση αποδοτικών υπερκορεσμένων σχεδιασμών δύο επιπέδων με βάση το κριτήριο  $E(s^2)$  των Booth και Cox (1962) που αποτελεί ένα μέτρο απόκλισης από την ορθογωνιότητα. Το κριτήριο αυτό έχει ισχύ όταν ο σχεδιασμός είναι ισορροπημένος. Ωστόσο, φαίνεται ότι δεν είναι πάντοτε αναγκαία η επιβολή του περιορισμού της ισορροπίας, αφού η εύρεση ενός υπερκορεσμένου σχεδιασμού με «καλές» ιδιότητες έχει σημασία όσο ελαχιστοποιεί την ορθογωνιότητα συνολικά ανάμεσα στις κύριες επιδράσεις και στην επίδραση του μέσου. Χωρίς τη επιβολή του περιορισμού της ισορροπίας, στη βιβλιογραφία έχει προταθεί το κριτήριο του  $UE(s^2)$  από τους Jones και Majumdar (2014) ως ένα χαρακτηριστικό αποδοτικότητας ενός υπερκορεσμένου σχεδιασμού.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

## Ισορροπημένοι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί δύο επιπέδων

### 2.1 Εισαγωγή

Ένας παράγοντας δύο επιπέδων λέγεται ότι είναι ισορροπημένος εάν η αντίστοιχη στήλη του στον πίνακα σχεδιασμού περιέχει τον ίδιο αριθμό εμφάνισης +1 και -1. Αυτό προφανώς μπορεί να συμβεί εφόσον το πλήθος  $N$  των εκτελέσεων είναι άρτιο. Για περιττό πλήθος  $N$ , ένας παράγοντας λέγεται ότι είναι «σχεδόν» ισορροπημένος» εάν στην στήλη που αντιστοιχείται, ο αριθμός εμφάνισης των +1 και -1 διαφέρει κατά 1. Ένας σχεδιασμός δύο επιπέδων είναι ισορροπημένος (αντίστοιχα σχεδόν ισορροπημένος), εάν όλοι οι παράγοντες του είναι ισορροπημένοι (αντίστοιχα σχεδόν ισορροπημένοι). Είναι δυνατό, όπως είδαμε με τους σχεδιασμούς Hadamard, να κατασκευαστούν ισορροπημένοι κορεσμένοι σχεδιασμοί που οποιεσδήποτε δύο στήλες τους να είναι ορθογώνιες αλλά δε γίνεται να κατασκευαστούν υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί με αυτήν την ιδιότητα της ορθογωνιότητας. Για την αξιολόγηση των υπερκορεσμένων σχεδιασμών και τη μέτρηση της αποδοτικότητας τους, έχουν προταθεί αρκετά κριτήρια βελτιστοποίησης. Επιβάλλοντας τον περιορισμό της ισορροπίας των παραγόντων, έχει προταθεί το κριτήριο του  $E(s^2)$  από τους Booth και Cox (1962), και δεν είναι λίγοι οι ερευνητές που στηρίχτηκαν στο κριτήριο αυτό δίνοντας συνεχείς βελτιώσεις της ελάχιστης τιμής που μπορεί αυτό να λάβει, αλλά και παρέχοντας σημαντικές μεθόδους κατασκευής ισορροπημένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών με «καλές» ιδιότητες.

### 2.2 Το κριτήριο $E(s^2)$

Οι Booth και Cox (1962) ήταν από τους πρώτους ερευνητές που κατασκεύασαν υπερκορεσμένους σχεδιασμούς με συστηματική διαδικασία χρησιμοποιώντας αλγόριθμο αναζήτησης σε ηλεκτρονικό υπολογιστή. Υπό τον περιορισμό της ισορροπίας των επιπέδων των παραγόντων σε κάθε στήλη, εισήγαγαν ένα μέτρο για τη μέτρηση της απόκλισης από την ορθογωνιότητα ανάμεσα στις στήλες του πίνακα σχεδιασμού  $X$ . Το κριτήριο καλείται  $E(s^2)$  και δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$E(s^2) = \frac{1}{m(m-1)} \sum_{1 \leq i < j \leq m} s_{ij}^2 \quad (2.1)$$

Στη σχέση αυτή, το  $s_{ij}$  είναι το  $(i, j)$  στοιχείο του πίνακα  $X'X$  με  $i \neq j$ . Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό, ένας υπερκορεσμένος σχεδιασμός δύο επιπέδων με  $m$  στήλες και  $N$  γραμμές είναι  $E(s^2)$  – βέλτιστος όταν ελαχιστοποιεί την τιμή του  $E(s^2)$ , ανάμεσα σε όλους τους ισορροπημένους σχεδιασμούς με τα συγκεκριμένα  $m, N$ . Το στοιχείο  $s_{ij}$  μετράει την απόκλιση από την ορθογωνιότητα ανάμεσα στις στήλες  $i$  και  $j$  του  $X$ . Αν  $s_{ij} = 0$ , τότε οι στήλες  $i$  και  $j$  είναι ορθογώνιες.

### 2.3 Κατώτερα όρια του $E(s^2)$ για ισορροπημένους σχεδιασμούς

Η εύρεση και κατασκευή  $E(s^2)$  – βέλτιστων υπερκορεσμένων σχεδιασμών έχει κεντρίσει το ενδιαφέρον αρκετών ερευνητών. Ο Nguyen (1996) και σε ανεξάρτητη έρευνα οι Tang και Wu (1997) έδωσαν για συγκεκριμένα  $m, N$  το ακόλουθο κατώτερο όριο για την τιμή του κριτηρίου  $E(s^2)$  :

$$E(s^2) \geq \frac{N^2(m-N+1)}{(N-1)(m-1)} \quad (2.2)$$

Οποιοσδήποτε υπερκορεσμένος σχεδιασμός επιτυγχάνει το κατώτερο όριο της ανίσωσης 2.2 είναι  $E(s^2)$  – βέλτιστος με την προϋπόθεση ότι το  $m$  διαιρείται από το  $N - 1$ . Όταν  $N \equiv 0 \pmod{4}$ , το όριο μπορεί να επιτευχθεί μόνο αν το  $m$  είναι πολλαπλάσιο του  $N - 1$ . Όταν το  $N$  είναι άρτιο αλλά δε διαιρείται από το 4 ( $N \equiv 2 \pmod{4}$ ), το  $m$  πρέπει να είναι άρτιο πολλαπλάσιο του  $N - 1$ .

Ο Cheng (1997) παρουσίασε μία λεπτομερή συζήτηση για τους υπερκορεσμένους σχεδιασμούς δίνοντας επιπλέον αποτελέσματα για τους  $E(s^2)$  – βέλτιστους υπερκορεσμένους σχεδιασμούς. Στην εργασία του, έδειξε ότι βέλτιστοι σχεδιασμοί κατασκευάζονται αφαιρώντας (ή προσθέτοντας) έναν ή δύο παράγοντες στους σχεδιασμούς που επιτυγχάνουν το κατώτερο φράγμα των Nguyen (1996) και Tang και Wu (1997). Επίσης, παρουσίασε πλήρη κατάλογο  $E(s^2)$  – βέλτιστων σχεδιασμών με 8 εκτελέσεις, οι οποίοι μπορούν να μελετηθούν μέχρι και 35 παράγοντες.

Οι Butler et al. (2001) πρότειναν ένα βελτιωμένο όριο για την ανίσωση 2.2 το οποίο γίνεται εφικτό όταν ένας ή δύο ορθογώνιοι (ή «σχεδόν» ορθογώνιοι) παράγοντες προστίθενται ή αφαιρούνται από τον  $E(s^2)$  – βέλτιστο σχεδιασμό. Παράλληλα, παρουσίασαν μία μέθοδο κατασκευής  $E(s^2)$  – βέλτιστων σχεδιασμών για διάφορες τιμές του  $N$  ( $N = 8, 12, 16, 20, 24, 32, 40, 48, 64$ ). Επιπλέον, στην έρευνα τους, οι Butler et al. (2001) έδειξαν ότι ένας  $E(s^2)$  – βέλτιστος σχεδιασμός με  $N$  εκτελέσεις και  $m_0$  παράγοντες μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εξάγει  $E(s^2)$  – βέλτιστους



σχεδιασμούς για επιπλέον αριθμό παραγόντων πολλαπλάσιο του  $N - 1$ , προσθέτοντας έναν πίνακα σχεδιασμού  $X$  ο οποίος είναι κατασκευασμένος από έναν πίνακα Hadamard.

Οι Bulutoglu και Cheng (2004) παρουσίασαν μία μέθοδο για την εύρεση  $E(s^2)$  – βέλτιστων υπερκορεσμένων σχεδιασμών που ικανοποιούν το όριο της ανίσωσης 2.2 χρησιμοποιώντας ηλεκτρονικό υπολογιστή. Εξήγαγαν αποτελέσματα για περιπτώσεις όπου το κατώτερο όριο επιτυγχάνεται για κάθε  $m$  πολλαπλάσιο του  $N - 1$  όταν  $N \equiv 0(\text{mod}4)$ , καθώς επίσης και για κάθε  $m$  πολλαπλάσιο του  $N - 1$  όταν  $N \equiv 2(\text{mod}4)$ .

Οι Ryan και Bulutoglu (2007) έδωσαν ένα πιο βελτιωμένο κατώτατο όριο για υπερκορεσμένους σχεδιασμούς δύο επιπέδων. Το όριο αυτό χρησιμοποιείται για την απόδειξη της  $E(s^2)$  – βελτιστοποίησης σχεδιασμών που κατασκευάζονται μέσω αλγόριθμου για όλες τις περιπτώσεις με  $N = 10, 12, 14$  και  $16$  εκτός της περίπτωσης  $N = 14$  και  $m = 16$ . Μέχρι σήμερα, το πιο πρόσφατο βελτιωμένο κατώτερο όριο στη βιβλιογραφία για την εύρεση  $E(s^2)$  – βέλτιστων υπερκορεσμένων σχεδιασμών το πρότειναν οι Das et al. (2008).

### Θεώρημα 2.1 (Das et al., 2008)

Ένας υπερκορεσμένος σχεδιασμός με  $N$  εκτελέσεις και  $m = q(N - 1) \pm r$  παράγοντες ( $q$  : θετικός ακέραιος,  $0 \leq r \leq N/2$ ), το κατώτερο όριο για το  $E(s^2)$  είναι :

(i) Για  $N \equiv 0(\text{mod}4)$ ,

$$E(s^2) \geq \frac{N^2(m-N+1)}{(N-1)(m-1)} + \frac{N}{m(m-1)} \left\{ D(N, r) - \frac{r^2}{N-1} \right\} \quad (2.3)$$

όπου,

$$D(N, r) = \begin{cases} N + 2r - 3 & \text{για } r \equiv 1(\text{mod}4), \\ 2N - 4 & \text{για } r \equiv 2(\text{mod}4), \\ N + 2r + 1 & \text{για } r \equiv 3(\text{mod}4), \\ 4r & \text{για } r \equiv 0(\text{mod}4). \end{cases}$$

(ii) Για  $N \equiv 2(\text{mod}4)$ ,

$$E(s^2) \geq \max \left\{ \frac{N^2(m-N+1)}{(N-1)(m-1)} + \frac{N}{m(m-1)} \left\{ D(N, r) - \frac{r^2}{N-1} \right\}, 4 \right\} \quad (2.4)$$

a) Όταν το  $q$  είναι άρτιο,

$$D(N, r) = \begin{cases} N + 2r - 3 + \frac{x}{N} & \text{για } r \equiv 1(\text{mod}4) \\ 2N - 4 + \frac{8}{N} & \text{για } r \equiv 2(\text{mod}4) \\ N + 2r + 1 & \text{για } r \equiv 3(\text{mod}4) \\ 4r & \text{για } r \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}$$

b) Όταν το  $q$  είναι περιττό,

$$D(N, r) = \begin{cases} 2r - \frac{8r}{N} + N - \frac{16}{N} + 9 & \text{για } r \equiv 1(\text{mod}4) \\ 4r - \frac{8r}{N} - \frac{8}{N} + 8 & \text{για } r \equiv 2(\text{mod}4) \\ N + 2r + \frac{8}{N} - 3 & \text{για } r \equiv 3(\text{mod}4) \\ 2N - 4 + \frac{x}{N} & \text{για } r \equiv 0(\text{mod}4) \end{cases}$$

Και  $x = 32$  εάν  $\left\{ \frac{m-1-2i}{4} + \left[ \frac{m+(1+2i)(n-1)}{4(n-1)} \right] \right\} \equiv (1-i)(\text{mod}2)$ , για  $i = 0$  ή  $1$ , διαφορετικά  $x = 0$ .

Το  $[z]$ , δηλώνει τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του  $z$ .

Όλες οι ερευνητικές εργασίες στη σχετική βιβλιογραφία αποτελούν αξιοσημείωτη συμβολή στην περιοχή των υπερκορεσμένων σχεδιασμών, ωστόσο η κατασκευή  $E(s^2)$  – βέλτιστων σχεδιασμών παραμένει ένα πολύπλοκο ζήτημα και ο στόχος για τη διαμόρφωση μία πλήρους λίστας από  $E(s^2)$  – βέλτιστους σχεδιασμούς μοιάζει δύσκολη για να επιτευχθεί.

## 2.4 Μέθοδοι κατασκευών ισορροπημένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών δύο επιπέδων

Η κατασκευή των υπερκορεσμένων σχεδιασμών αποτελεί αντικείμενο ιδιαίτερης σημαντικότητας καθώς η συσχέτιση που υπάρχει στις στήλες επηρεάζει δραστικά την ικανότητα εκτίμησης των κύριων επιδράσεων των παραγόντων. Αν και στη βιβλιογραφία έχει μελετηθεί σε μεγάλο βαθμό η θεωρητική κατασκευή βέλτιστων ισορροπημένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών, δεν είναι λίγες οι αναφορές σε μεθόδους παραγωγής τέτοιων σχεδιασμών χρησιμοποιώντας αλγόριθμους αναζήτησης.

Ο Nguyen (1996) περιέγραψε ότι ένας υπερκορεσμένος σχεδιασμός μπορεί να θεωρηθεί ως ένας NOA σχηματισμός (*Near Orthogonal Array* – «Σχεδόν» ορθογώνιος σχηματισμός) με στήλες δύο στοιχείων,  $+1$  και  $-1$ . Εισήγαγε έναν αλγόριθμο τον

επονομαζόμενο NOA (*NOA Algorithm*) ο οποίος αντιπροσωπεύει έναν τυπικό αλγόριθμο ανταλλαγής. Ο αλγόριθμος ξεκινάει από την τυχαία παραγωγή ενός ισορροπημένου σχεδιασμού με πίνακα σχεδιασμού έστω τον  $X$ , στη συνέχεια δημιουργεί τον πίνακα  $X'X$ , και υπολογίζει τη συχνότητα  $f$  όπου  $f = \sum_{i < j} s_{ij}^2$ . Για τη στήλη  $j$  του πίνακα  $X$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ), ο αλγόριθμος αναζητά ένα ζεύγος που να περιέχει διαφορετικό πρόσημο στη συγκεκριμένη στήλη τέτοιο ώστε, η εναλλαγή των δύο αυτών στοιχείων να καταλήξει στη μεγαλύτερη μείωση της  $f$ . Αν η αναζήτηση είναι επιτυχής ενημερώνεται ο σχεδιασμός κάνοντας χρήση αυτού του αποτελέσματος. Η διαδικασία του αλγόριθμου εξακολουθεί να επαναλαμβάνεται έως ότου η συχνότητα  $f$  πάρει την τιμή μηδέν, είτε μέχρι να προσεγγίσει το ελάχιστο όριο της, είτε δε μπορεί να μειωθεί περισσότερο από περαιτέρω εναλλαγή προσήμων.

Στην ίδια εργασία, ο Nguyen (1996) ανέπτυξε μία μέθοδο κατασκευής ισορροπημένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών χρησιμοποιώντας ισορροπημένους σχεδιασμούς μη πλήρων ομάδων (*BIBDs – Balanced Incomplete Block Designs*). Η μέθοδος αυτή αποτελεί μία γενίκευση της μεθόδου που παρείχε ο Lin (1993a), στην οποία έκανε χρήση  $\frac{1}{2}$  κλασμάτων από πίνακες Hadamard (*HFHM – Half Fraction of Hadamard Matrices*) καθώς οι πίνακες Hadamard αποτελούν ιδιαίτερες περιπτώσεις των BIBD σχεδιασμών.

Μία ειδική περίπτωση υπερκορεσμένων σχεδιασμών όρισαν οι Deng et al. (1996b), τους «οριακά κορεσμένους σχεδιασμούς» (*MOSD – Marginally Oversaturated Designs*). Στους σχεδιασμούς αυτούς ο αριθμός των μεταβλητών που είναι προς μελέτη είναι κατά ελάχιστα μεγαλύτερος από το πλήθος των πειραματικών εκτελέσεων. Στην εργασία τους οι Deng et al. (1996b), έδειξαν ότι το κριτήριο του  $r$  – rank (*resolution rank*) είναι το καταλληλότερο σε πειράματα κρησαρίσματος.

Έναν αλγόριθμο αναζήτησης με « ανταλλαγή κατά στήλη κατά ζεύγη» (*Columnwise Pairwise exchange Algorithm*) ανέπτυξαν οι Li και Wu (1997) για την κατασκευή υπερκορεσμένων σχεδιασμών δύο επιπέδων. Αντί να αναζητά μεταξύ όλων των υποψήφιων στηλών για ανταλλαγή, ο συγκεκριμένος αλγόριθμος προσαρμόζει μία στήλη επιλέγοντας ένα ζεύγος (ή και περισσότερα) από  $+1$  και  $-1$  ανάμεσα στα στοιχεία της επιλεγμένης στήλης και εναλλάσσει το  $+1$  με  $-1$  και το  $-1$  με  $+1$  αντίστοιχα. Βασικά χαρακτηριστικά της χρήσης του αλγόριθμου αυτού είναι η διατήρηση της ιδιότητας της ισορροπίας στο σχεδιασμό, αλλά και η σημαντική εξοικονόμηση χρόνου.

Ο Lejeune (2003) πρότεινε ένα νέο είδος αλγόριθμου τύπου ανταλλαγής κατά στήλη για την κατασκευή και την αποδοτικότητα υπερκορεσμένων σχεδιασμών, τον αλγόριθμο ανταλλαγής συντεταγμένων κατά στήλη. Ο αλγόριθμος αυτός ξεκινάει με την τυχαία επιλογή ενός σχεδιασμού και στη συνέχεια, για τη θεωρημένη στήλη έστω

η  $k$ , υπολογίζεται η έκφραση  $S_j = \sum_{i=1}^N s_{ij}^2$ . Η στήλη  $k$  καθορίζεται από τη συνάρτηση  $S_k = \max_{j=2,\dots,p} s_{ij}^2$ . Στην επιλεγμένη στήλη αναγνωρίζουμε τις συντεταγμένες (*coordinatewise*) οι οποίες φαίνονται ως καταλληλότερες για τροποποίηση. Ο αλγόριθμος έχει εφαρμογή και για την κατασκευή κορεσμένων και μη κορεσμένων σχεδιασμών.

Οι Ryan και Bulutoglu (2007) έδωσαν μία γενίκευση του αλγόριθμου NOA τον οποίο εισήγαγε ο Nguyen (1996) δίνοντας την ονομασία  $NOA_k$ . Ο προτεινόμενος αλγόριθμος έχει την τάση να βρίσκει  $E(s^2)$  – βέλτιστους σχεδιασμούς. Στην ίδια εργασία τους, παρουσίασαν επιπλέον αλγόριθμους, τους αλγόριθμους εναλλαγής γραμμών (*Row Swapping algorithms*) οι οποίοι χρησιμοποιούνται για την αναζήτηση  $E(s^2)$  – βέλτιστων σχεδιασμών όταν ο αριθμός των παραγόντων είναι μεγάλος. Συνδυάζοντας και τους δύο αλγόριθμους έχει επιτευχθεί η εύρεση  $E(s^2)$  – βέλτιστων υπερκορεσμένων σχεδιασμών για κάθε περίπτωση με πλήθος πειραματικών εκτελέσεων  $N = 10, 12, 14$  και  $16$  (εκτός της περίπτωσης  $N = 14$  και  $m = 16$ ).

Τροποποιήσεις ήδη γνωστών στη βιβλιογραφία αλγόριθμων, παρουσίασαν οι Gupta et al. (2008) ώστε να αποτυπώσουν στη μορφή ενός πίνακα αποδοτικούς υπερκορεσμένους σχεδιασμούς δύο επιπέδων για διάφορες τιμές των  $N$  και  $m$ . Ο αλγόριθμος τους έχει αναπτυχθεί για δύο διαφορετικές καταστάσεις. Στην πρώτη ο σχεδιασμός είναι ισορροπημένος και αποτελεί μία βελτίωση του αλγόριθμου που εισήγαγε ο Nguyen (1996). Για τη δεύτερη περίπτωση ο σχεδιασμός είναι ισορροπημένος και υπάρχει ένα υποσύνολο παραγόντων που μεταξύ τους είναι ορθογώνιοι. Στην εργασία τους, έχουν δημιουργήσει μία λίστα με αποδοτικούς υπερκορεσμένους σχεδιασμούς για πλήθος εκτελέσεων  $10 \leq N \leq 20$  και αριθμό παραγόντων  $N + 2 \leq m \leq 2N$ .

Οι Nguyen και Cheng (2008) πρότειναν μία νέα μέθοδο για την κατασκευή  $E(s^2)$  – βέλτιστων υπερκορεσμένων σχεδιασμών δύο επιπέδων. Στην προσέγγιση τους χρησιμοποιούν μη – πλήρεις σχεδιασμούς κατά μπλοκ (*IBDs – Incomplete Block Designs*). Παράλληλα, κατορθώνουν και ένα κατώτερο φράγμα για το  $E(s^2)$  και στην περίπτωση όπου το  $N$  είναι περιττό και οι συγκεκριμένοι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί προκύπτουν από ισορροπημένους σχεδιασμούς μη – πλήρων ομάδων. Στην ίδια έρευνα διεξήγαγαν αναζήτηση χρησιμοποιώντας ηλεκτρονικό υπολογιστή για την εύρεση υπερκορεσμένων σχεδιασμών οι οποίοι μπορούν να κατασκευαστούν από σχεδιασμούς απλών γραφημάτων (*RGD – Regular Graph Designs*) καλύπτοντας τις περιπτώσεις όπου  $5 \leq N \leq 50$  και  $N \leq m \leq 2N$ . Οι περισσότεροι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί που προκύπτουν από σχεδιασμούς απλών γραφημάτων τυγχάνουν να είναι βέλτιστοι.

Η συγκεκριμένη κλάση των υπερκορεσμένων σχεδιασμών δύο επιπέδων εφαρμόζεται συστηματικά σε πειράματα για κρησάρισμα παραγόντων όπου το πλήθος των εκτελέσεων  $N$  είναι άρτιο και υπάρχει ισορροπία εμφάνισης των δύο επιπέδων  $+1$  και  $-1$ . Στην περίπτωση που το  $N$  είναι περιττό, ο σχεδιασμός δεν περιέχει την ιδιότητα της ισορροπίας. Οι σχεδιασμοί αυτοί αποτελούν την περίφημη κλάση των μη ισορροπημένων σχεδιασμών.

Οι Jones και Majumdar (2014) μελέτησαν την περίπτωση των μη – ισορροπημένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών δύο επιπέδων. Παρουσίασαν το κριτήριο της  $UE(s^2)$  – βελτιστοποίησης (*Unconditional Optimality*) για την εύρεση βέλτιστων σχεδιασμών, το οποίο προκύπτει με τον ίδιο τρόπο όπως το αντίστοιχο του  $E(s^2)$  των Booth και Cox (1962), αγνοώντας την επιβολή του περιορισμού της ισορροπίας στις στήλες του σχεδιασμού.



# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

## Μη ισορροπημένοι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί δύο επιπέδων

### 3.1 Εισαγωγή

Στα περισσότερα βιομηχανικά πειράματα, παρά το γεγονός ότι ο αριθμός των διαθέσιμων παραγόντων είναι μεγάλος, οι ερευνητές έχουν καταλήξει αρκετές φορές στο συμπέρασμα ότι μερικοί παράγοντες είναι αυτοί που τελικά φαίνεται να επηρεάζουν αισθητά το αποτέλεσμα του πειράματος. Μία ιδανική κατάσταση είναι οι ενεργοί παράγοντες να αναγνωρίζονται διεξάγοντας αρκετά λιγότερες πειραματικές εκτελέσεις από τον αριθμό των παραγόντων που εξετάζονται. Αυτή η ενέργεια θα εξασφαλίσει μειωμένο κόστος και λιγότερη χρονική διάρκεια για την υλοποίηση των πειραμάτων.

Ένα δημοφιλές μέτρο για την αξιολόγηση υπερκορεσμένων σχεδιασμών δύο επιπέδων είναι το κριτήριο του  $E(s^2)$  των Booth και Cox (1962). Αυτή η προσέγγιση της  $E(s^2)$  – βελτιστοποίησης μπορεί να θεωρηθεί ως «υπό όρους» (*Conditional  $E(s^2)$  – optimality*) βελτιστοποίηση, καθώς επιβάλλει τον περιορισμό στην εύρεση σχεδιασμών με ισορροπημένες στήλες.

Στο παρόν κεφάλαιο θα γίνει αναφορά σε κατώτερα όρια του κριτηρίου του  $E(s^2)$  για μη – ισορροπημένους υπερκορεσμένους σχεδιασμούς, καθώς και σε περιπτώσεις κατασκευής τέτοιων σχεδιασμών. Τα όρια τα οποία αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο ισχύουν μόνο για την περίπτωση των ισορροπημένων σχεδιασμών. Στην κλάση των μη – ισορροπημένων σχεδιασμών τα όρια αυτά δεν έχουν ισχύ.

Ένας μη – ισορροπημένος υπερκορεσμένος σχεδιασμός δύο επιπέδων αναπαριστάνεται και πάλι από έναν  $N \times m$  πίνακα  $X$  με στοιχεία της μορφής  $+1$  ή  $-1$ , οι στήλες αντιστοιχούν στους παράγοντες του πειράματος, και κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μία πειραματική εκτέλεση.

### 3.2 Κατώτερα όρια του $E(s^2)$ για την επιλογή μη – ισορροπημένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών

Οι Nguyen και Cheng (2008) ήταν ανάμεσα σε αυτούς που παρείχαν ένα κατώτερο όριο για την τιμή του  $E(s^2)$ , δίνοντας μία βελτίωση στο όριο της ανίσωσης 2.2, με σκοπό την εύρεση ενός μη – ισορροπημένου υπερκορεσμένου σχεδιασμού καλύπτοντας και τις δύο περιπτώσεις όπου το πλήθος των πειραματικών εκτελέσεων  $N$  είναι άρτιο ή περιττό. Το κατώτερο όριο που πρότειναν για περιττό πλήθος έχει την ακόλουθη μορφή :

$$E(s^2) \geq \frac{m(N^2 + N - 1) - N^3}{N(m-1)} \quad (3.1)$$

Το όριο αυτό είναι εφικτό μόνον αν  $N \equiv 3(\text{mod}4)$  και ταυτόχρονα το  $m$  να είναι πολλαπλάσιο του  $N$ , ή αν  $N \equiv 1(\text{mod}4)$  και το  $m$  είναι ένα άρτιο πολλαπλάσιο του  $N$ .

Οι Bulutoglu και Ryan (2008) βελτίωσαν το κατώτερο όριο για το  $E(s^2)$  για την αναζήτηση μη – ισορροπημένων σχεδιασμών δύο επιπέδων με περιττό πλήθος εκτελέσεων.

#### Θεώρημα 3.1 (Bulutoglu και Ryan, 2008)

Έστω  $m$  ένας θετικός ακέραιος τέτοιος ώστε  $m > N - 1$ . Τότε υπάρχει ένας μοναδικός ακέραιος αριθμός  $q$  τέτοιος ώστε  $-2N \leq m - qN < 2N$  και  $m + q \equiv 2(\text{mod}4)$ .

Έστω  $g(q) = (m + q)^2N - q^2N^2 - mN^2 - 2qm$ ,  $k(p) = 8p^2 - 8Np + 4N^2 - 4N$ ,

$F(p) = 8p^2 + 4N^2 - 8Np - 4N + 4\max\{|-m(N-1) + qN(N-1)| - 4p^2 - 2N^2 + 4Np + 2N, 0\}$ , και  $F(p^*)$  η ελάχιστη τιμή του  $F(p)$  για  $p \in (0, 1, \dots, (N+1)/2)$ . Τότε,

$$E(s^2) \geq \frac{16[g(q) + k(\frac{N \pm 1}{2} - m(m-1))/16] + m(m-1)}{m(m-1)}, \text{ όταν } |m - qN| < N, \quad (3.2)$$

και

$$E(s^2) \geq \frac{16[g(q) + F(p^*) - m(m-1)]/16 + m(m-1)}{m(m-1)}, \text{ διαφορετικά,} \quad (3.3)$$

Το όριο αυτό το εφάρμοσαν για να αποδείξουν  $E(s^2)$  – βελτιστοποίηση υπερκορεσμένων σχεδιασμών με  $N = 5, 7, 9, 11, 13, 15$  και  $17$  εκτελέσεις.



Το πιο πρόσφατο και το πιο βελτιωμένο όριο για μη – ισορροπημένους σχεδιασμούς που έχει δοθεί στη βιβλιογραφία είναι από την εργασία των Suen και Das (2010) και η μορφή του δίνεται στο παρακάτω θεώρημα :

**Θεώρημα 3.2 (Suen και Das, 2010)**

Για ένα ακέραιο περιττό  $N$  και έναν ακέραιο  $m \geq N$ , έστω  $q$  ένας ακέραιος αριθμός τέτοιος ώστε  $m + q \equiv 2 \pmod{4}$  και  $-2N \leq qN - m \leq 2N$ , και έστω  $g(q) = N(m + q)^2 - 2mq - (m + q^2)N^2$ . Έστω επίσης  $p^* = \lfloor \{N - \sqrt{(|qN - m| - N)(N - 1) + N}\} / 2 \rfloor$ ,  $d = 4p^*(N - p^*) - (2N - |qN - m|)(N - 1)$ , και  $d^* = 4(N + 1 - 2p^*)$ , τότε

(i) Εάν  $|qN - m| \leq N - 1$ ,

$$E(s^2) \geq \frac{1}{m(m-1)} \{2(N-1)^2 + g(q)\} \quad (3.4)$$

(ii) Εάν  $|qN - m| > N - 1$  και  $d \leq d^*/2$ ,

$$E(s^2) \geq \frac{1}{m(m-1)} \{4(N-1)(|qN - m| - N) + 8p^*(N - p^*) + g(q)\}, \quad (3.5)$$

(iii) Εάν  $|qN - m| > N - 1$  και  $d > d^*/2$ ,

$$E(s^2) \geq \frac{1}{m(m-1)} \{4N(N-1) - 8(p^* - 1)(N - p^* + 1) + g(q)\}, \quad (3.6)$$

Οι Marley και Woods (2010) επέκτειναν τον ορισμό του  $E(s^2)$  των Booth και Cox (1962) για την επιλογή ενός βέλτιστου μη – ισορροπημένου υπερκορεσμένου σχεδιασμού συμπεριλαμβάνοντας το εσωτερικό γινόμενο της πρώτης στήλης του πίνακα μοντέλου  $X_1$  με κάθε άλλη στήλη του σχεδιασμού δίνοντας την ακόλουθη σχέση:

$$E(s^2) = \frac{2}{m(m+1)} \sum_{i < j} s_{ij}^2 \quad (3.7)$$

Το  $s_{ij}$  είναι το  $(i, j)$  στοιχείο του πίνακα  $X_1'X_1$  ( $i, j = 1, 2, \dots, m + 1$ ). Το κριτήριο είναι ισοδύναμο για ισορροπημένους υπερκορεσμένους σχεδιασμούς.

Οι Jones και Majumdar (2014) ήταν αυτοί που εισήγαγαν το κριτήριο της  $UE(s^2)$  – βελτιστοποίησης, την «άνευ όρων» βελτιστοποίηση (*Unconditional  $E(s^2)$  - optimality*) όπως την ονόμασαν, ως ένα χαρακτηριστικό αποδοτικότητας των υπερκορεσμένων σχεδιασμών. Ο σκοπός της μελέτης τους είναι η διερεύνηση μιας καινούριας προσέγγισης ώστε να προκύψουν βέλτιστοι υπερκορεσμένοι σχεδιασμοί που

ελαχιστοποιούν το  $E(s^2)$  σε μία ευρύτερη κλάση υπερκορεσμένων σχεδιασμών. Η συνάρτηση που χρησιμοποιήσαν είναι αυτή του  $E(s^2)$  χωρίς τον περιορισμό της ισορροπίας των στηλών.

### 3.3 Κριτήριο του $UE(s^2)$ για την κατασκευή υπερκορεσμένων σχεδιασμών

Θεωρούμε πειράματα στα οποία εξετάζονται  $m$  παράγοντες δύο επιπέδων και παράλληλα έναν «εκ των προτέρων» μοντέλο (*a priori model*) το οποίο περιέχει τις κύριες επιδράσεις και το γενικό μέσο.

Έστω  $s_{ij}$  το  $(i, j)$  στοιχείο του πίνακα  $X_1'X_1$ . Εάν  $s_{ij} = 0$ , οι στήλες  $i$  και  $j$  του  $X_1$  είναι ορθογώνιες. Έστω τώρα η ποσότητα

$$Q(x) = \sum_{i \neq j=1}^{m+1} \sum s_{ij}^2 \quad (3.8)$$

Η  $Q(x)$  μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μέτρο απόκλισης από την ορθογωνιότητα για έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό, καθώς ένας ορθογώνιος έχει  $Q(x) = 0$ . Στο παρόν κεφαλαίο παραθέτουμε την προσέγγιση της «άνευ όρων» βελτιστοποίησης (*Unconditional optimality*), την οποία εισήγαγαν οι Jones και Majumdar (2014), δηλαδή την ελαχιστοποίηση της  $Q(x)$  αποβάλλοντας τον περιορισμό της ισορροπίας των στηλών. Οι Jones και Majumdar (2014) ονόμασαν την προσέγγιση αυτή  $UE(s^2)$  – βελτιστοποίηση για να τη διαχωρίσουν από την κλασσική  $E(s^2)$  – βελτιστοποίηση. Έτσι, για δεδομένα  $m, N$ , ένας υπερκορεσμένος σχεδιασμός είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος εάν ελαχιστοποιεί την  $Q(x)$ .

Ο συμβολισμός  $E(s^2)$  των Booth και Cox (1962) χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί ο μέσος των  $s_{ij}^2$  που προκύπτουν από τις στήλες οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για παράγοντες. Οι Jones και Majumdar (2014) χρησιμοποίησαν το συμβολισμό  $UE(s^2)$  για να δηλώσουν τον μέσο  $s_{ij}^2$  τόσο των στηλών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για παράγοντες, όσο και της στήλης με τις μονάδες, που αντιστοιχεί στον γενικό μέσο. Η τιμή του κριτηρίου  $UE(s^2)$  λοιπόν, διαμορφώνεται ως εξής:

$$UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)} \quad (3.9)$$

### 3.4 Κατώτερα όρια $UE(s^2)$ – βέλτιστων σχεδιασμών

Όπως έχει αναφερθεί και νωρίτερα, τα κατώτερα φράγματα για  $UE(s^2)$  – βέλτιστους σχεδιασμούς έχουν εξαχθεί από τους Jones και Majumdar (2014). Χρησιμοποιώντας τη σχέση 3.9 έχουμε την ακόλουθη σχέση :

$$UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\text{trace}(X'X) - (m+1)N^2}{m(m+1)} = \frac{\text{trace}(XX') - (m+1)N^2}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j} \sum r_{ij}^2 + N(m+1)(m-N+1)}{m(m+1)} \quad (3.10)$$

Τα κατώτερα όρια που δόθηκαν από τους Jones και Majumdar (2014) παρουσιάζονται στο θεώρημα 3.3.

#### Θεώρημα 3.3 (Jones and Majumdar, 2014)

(i) Εάν  $m + 1 \equiv 0(\text{mod}4)$ , τότε

$$UE(s^2) \geq \frac{N(m-N+1)}{m} \quad (3.11)$$

(ii) Εάν  $m + 1$  είναι περιττός, τότε

$$UE(s^2) \geq \frac{N(N-1) + N(m+1)(m-N+1)}{m(m+1)} \quad (3.12)$$

(iii) Εάν  $m + 1 \equiv 2(\text{mod}4)$  και  $N$  είναι άρτιος, τότε

$$UE(s^2) \geq \frac{2N(N-2) + N(m+1)(m-N+1)}{m(m+1)} \quad (3.13)$$

(iv) Εάν  $m + 1 \equiv 2(\text{mod}4)$  και  $N$  είναι περιττός, τότε

$$UE(s^2) \geq \frac{2(N-1)^2 + N(m+1)(m-N+1)}{m(m+1)} \quad (3.14)$$

### 3.5 Κατασκευή $UE(s^2)$ – βέλτιστων υπερκορεσμένων σχεδιασμών

Οι Jones και Majumdar (2014) πρότειναν μία γενική μέθοδο κατασκευής  $UE(s^2)$  – βέλτιστων υπερκορεσμένων σχεδιασμών δύο επιπέδων κάνοντας χρήση πινάκων Hadamard καλύπτοντας όλες τις περιπτώσεις εκτός των  $m + 1 \equiv 2 \pmod{4}$  και  $N = m$ . Η μέθοδος αυτή της κατασκευής χρησιμοποιεί έναν πίνακα Hadamard και διαγράφει κάποιες γραμμές του. Επίσης, εκτός από την διαγραφή γραμμών, προσθέτει ή και αφαιρεί στήλες σε αυτόν. Στην εργασία τους οι Jones και Majumdar (2014) έχουν παρουσιάσει τέσσερα σετ κατασκευών βασισμένα στην τιμή του  $m$ .

Έστω ο  $R = XX'$ , ο πίνακας με στοιχεία  $r_{ij}$ , με  $r_{ii} = m + 1$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), διακρίνουμε τις παρακάτω τέσσερις περιπτώσεις:

**Περίπτωση 0 :**  $m + 1 \equiv 0 \pmod{4}$  και  $2 \leq N \leq m$ . Θεωρούμε έναν πίνακα Hadamard τάξης  $m+1$ , έστω τον  $H_{m+1}$ , ο οποίος είναι κανονικοποιημένος εξασφαλίζοντας ότι η πρώτη του στήλη περιέχει αποκλειστικά στοιχεία ίσα με  $+1$ . Έστω  $X$  ο πίνακας με διαστάσεις  $N \times (m+1)$  ο οποίος αποτελείται από οποιεσδήποτε  $N$  γραμμές του  $H_{m+1}$ . Επίκειται ότι  $R = XX' = (m+1) \times I_N$ , όπου  $I_N$  ο ταυτοτικός πίνακας τάξης  $N$ . Ένας σχεδιασμός  $X$  με συγκεκριμένα  $m, N$  που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις της συγκεκριμένης περίπτωσης θα καλείται σχεδιασμός τύπου  $T_0$ .

Το κατώτατο όριο της σχέσης 3.11 στην περίπτωση αυτή κατορθώνεται όταν  $R = (m + 1)I_N$  και επομένως οι σχεδιασμοί τύπου  $T_0$  που επιτυγχάνουν το όριο αυτό είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστοι.

**Περίπτωση 1 :**  $m + 1 \equiv 1 \pmod{4}$ ,  $2 \leq N \leq m$ . Θεωρούμε έναν κανονικοποιημένο πίνακα Hadamard τάξης  $m$ , έστω τον  $H_m$ . Έστω  $V$  ένας  $N \times m$  πίνακας ο οποίος έχει προκύψει διαλέγοντας οποιεσδήποτε  $N$  γραμμές του  $H_m$ . Έστω επίσης  $\phi$  ένα  $N \times 1$  τυχαίο διάνυσμα αποτελούμενο με στοιχεία  $+1$  και  $-1$ . Θεωρούμε ότι ο  $X$  σχηματίζεται από τον πίνακα  $V$  και το διάνυσμα  $\phi$  δηλαδή  $X = (V, \phi)$ . Τότε έχουμε ότι ο  $R = XX' = m \times I_N + \phi\phi'$  είναι ένας πίνακας με διαγώνια στοιχεία ίσα με  $m + 1$ , και στοιχεία εκτός διαγώνιου ίσα με  $+1$  ή  $-1$ . Ένας σχεδιασμός  $X$  με  $m, N$  που θα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της συγκεκριμένης περίπτωσης θα καλείται ως σχεδιασμός τύπου  $T_1$ .

Το κατώτατο όριο της σχέσης 3.12 επιτυγχάνεται όταν ο  $R$  είναι ένας πίνακας με διαγώνια στοιχεία ίσα με  $m + 1$  και σημεία εκτός διαγώνιου ίσα με  $+1$  ή  $-1$ . Εάν  $m + 1 \equiv 1 \pmod{4}$ , τότε οι σχεδιασμοί τύπου  $T_1$  είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστοι.

**Περίπτωση 2 :**  $m + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ ,  $2 \leq N \leq m - 1$ .

*Υποπερίπτωση 2.1 :*  $N$  : άρτιος ( $N = 2k$ ). Θεωρούμε έναν κανονικοποιημένο πίνακα Hadamard τάξης  $m - 1$ , έστω τον  $H_{m-1}$ . Έστω  $X^*$  ένας  $N \times (m - 1)$  πίνακας ο οποίος σχηματίζεται επιλέγοντας οποιεσδήποτε  $N$  γραμμές του  $H_{m-1}$ . Έστω επίσης  $V_1$  ένας  $N \times 2$  πίνακας στον οποίο οι πρώτες  $k$  γραμμές είναι είτε της μορφής  $(+1, +1)$  είτε  $(-1, -1)$ , και οι υπόλοιπες  $k$  γραμμές είναι της μορφής  $(+1, -1)$  ή  $(-1, +1)$ . Υποθέτουμε ότι  $X_0 = (X^*, V_1)$ . Τότε ο πίνακας  $R = XX'$  έχει την ακόλουθη διαγώνια μορφή:

$$R = \begin{bmatrix} S_k & O_{k,k} \\ O_{k,k} & S_k \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

όπου ο συμβολισμός  $O_{a,b}$  ορίζει έναν  $a \times b$  πίνακα με μηδενικά στοιχεία, ο  $S_k$  δηλώνει έναν  $k \times k$  πίνακα με διαγώνια στοιχεία ίσα με  $m + 1$  και μη - διαγώνια ίσα 2 ή με  $-2$ .

Το κατώτατο όριο της 3.13 μπορεί να επιτευχθεί εφόσον οι γραμμές του πίνακα  $X$  μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες μεγέθους  $N/2$  η κάθε μία τέτοια ώστε, αν η γραμμή  $i$  και η γραμμή  $j$  ανήκουν στην ίδια ομάδα, τότε  $|r_{ij}| = 2$ , διαφορετικά  $r_{ij} = 0$ .

*Υποπερίπτωση 2.2 :*  $N$  : περιττός ( $N = 2k + 1$ ). Θεωρούμε έναν κανονικοποιημένο πίνακα Hadamard τάξης  $m - 1$ , έστω τον  $H_{m-1}$ . Θεωρούμε επίσης ότι  $X^*$  είναι ένας  $N \times (m - 1)$  πίνακας που μπορεί να προκύψει από οποιεσδήποτε  $N$  γραμμές του  $H_{m-1}$ . Έστω επίσης  $V_2$  ένας  $N \times 2$  πίνακας του οποίου οι  $k$  πρώτες γραμμές είναι είτε της μορφής  $(+1, +1)$  είτε  $(-1, -1)$ , και κάθε μία από τις  $k + 1$  τελευταίες να είναι της μορφής  $(+1, -1)$  ή  $(-1, +1)$ . Υποθέτοντας ότι  $X = (X^*, V_2)$ , επίκειται ότι ο πίνακας  $R = XX'$  έχει την ακόλουθη διαγώνια μορφή :

$$R = \begin{bmatrix} S_k & O_{k,k+1} \\ O_{k+1,k} & S_{k+1} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Ένας σχεδιασμός  $X$  με  $m, N$  που ικανοποιεί της προϋποθέσεις της περίπτωσης 2, θα καλείται ως σχεδιασμός τύπου  $T_2$ .

Το κατώτατο όριο της ανίσωσης 3.14 επιτυγχάνεται όταν οι γραμμές του  $X$  μπορούν να χωριστούν σε δύο ομάδες μεγέθους  $(N - 1)/2$  και  $(N + 1)/2$  αντίστοιχα τέτοια ώστε, αν οι γραμμές  $i$  και  $j$  ανήκουν στο ίδιο σετ τότε  $|r_{ij}| = 2$ , σε διαφορετική περίπτωση τότε  $r_{ij} = 0$ .

**Περίπτωση 3 :**  $m + 1 \equiv 3(\text{mod}4)$ ,  $2 \leq N \leq m$ . Θεωρούμε έναν κανονικοποιημένο πίνακα Hadamard τάξης  $m + 2$ , έστω  $H_{m+2}$ . Θεωρούμε επίσης έναν  $N \times (m + 2)$  πίνακα έστω  $X^*$ , ο οποίος προκύπτει από οποιοσδήποτε  $N$  γραμμές του  $H_{m+2}$ . Υποθέτουμε ότι η τελευταία στήλη του πίνακα  $X^*$  συμβολίζεται με  $\phi$  και συνεπώς έχουμε ότι  $X^* = (X, \phi)$ . Έτσι, ο  $R = XX' = (m + 2)I_N - \phi\phi'$  είναι ένας πίνακας με διαγώνια στοιχεία ίσα με  $m + 1$ , και μη – διαγώνια ίσα με  $+1$  ή  $-1$ . Ένας σχεδιασμός  $X$  που για συγκεκριμένα  $m, N$  ικανοποιεί τις προϋποθέσεις της περίπτωσης 3 θα καλείται ως σχεδιασμός τύπου  $T_3$ .

Το κατώτατο όριο της ανίσωσης 3.12 επιτυγχάνεται όταν ο  $R$  είναι ένας πίνακας με διαγώνια στοιχεία ίσα με  $m + 1$  και σημεία εκτός διαγώνιου ίσα με  $+1$  ή  $-1$ . Εάν  $m + 1 \equiv 3(\text{mod}4)$ , τότε οι σχεδιασμοί τύπου  $T_3$  είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστοι.

Το αποτέλεσμα αυτό των Jones και Majumdar (2014) παρέχει μία μέθοδο κατασκευής  $UE(s^2)$  – βέλτιστων σχεδιασμών για κάθε ζεύγος  $m, N$  με  $N < m + 1$ . Ωστόσο, για την κατασκευή των  $UE(s^2)$  – βέλτιστων σχεδιασμών θα πρέπει να συμπεριληφθεί ο περιορισμός που χρησιμοποιείται για την κατασκευή των  $E(s^2)$  – βέλτιστων σχεδιασμών, δηλαδή ότι καμία στήλη στο σχεδιασμό δεν θα είναι ίδια ή ακριβώς αντίθετη με οποιαδήποτε άλλη. Συμπεραίνουμε ότι από τη στιγμή που τίθεται σε ισχύ η προϋπόθεση αυτή, η διαγραφή των οποιονδήποτε γραμμών από τον αρχικό πίνακα Hadamard δε θα οδηγήσει απαραίτητα σε βέλτιστους σχεδιασμούς. Η επιλογή των γραμμών που θα αφαιρεθούν θα γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε στήλη στον εναπομένον πίνακα να είναι μοναδική.

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

## Παραδείγματα κατασκευής μη – ισορροπημένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών

Στο κεφάλαιο αυτό θα επιχειρήσουμε την εύρεση και κατασκευή  $UE(s^2)$  – βέλτιστων υπερκορεσμένων σχεδιασμών με μη – ισορροπημένους παράγοντες δύο επιπέδων. Θα γίνει χρήση των μεθόδων κατασκευής όπως τις παρουσίασαν στην εργασία τους οι Jones και Majumdar (2014), καθώς και θα γίνει έλεγχος αν ο κάθε υπερκορεσμένος σχεδιασμός που κατασκευάζεται είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

Για τα παραδείγματα που θα παρουσιαστούν στις παραγράφους 4.1 και 4.2, θα θεωρήσουμε ως αρχικό σχεδιασμό έναν κανονικοποιημένο πίνακα Hadamard τάξης 16 και θα τον συμβολίσουμε με  $H_{16}$ .

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1**

Hadamard  $16 \times 16$  ( $H_{16}$ ).

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1

#### 4.1 Σχεδιασμοί με 16 στήλες

Για την κατασκευή μη – ισορροπημένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών δύο επιπέδων με  $m + 1 = 16$  στήλες, η διαγραφή γραμμών θα πραγματοποιείται με τυχαία επιλογή μειώνοντας σε κάθε δοκιμή κατά μία περισσότερο τις γραμμές, έως ότου οι γραμμές γίνουν ίσες με  $N = 8$ . Η κατασκευή των σχεδιασμών ικανοποιεί τις προϋποθέσεις  $m + 1 \equiv 0(\text{mod}4)$  και  $2 \leq N \leq m$ .

Θα ξεκινήσουμε αφαιρώντας από τον  $H_{16}$  την  $16^{\text{η}}$  γραμμή και θα προκύψει ο  $15 \times 16$  υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_1$ .

Στον πίνακα 4.1.1 φαίνεται ο  $15 \times 16$  υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_1$  ο οποίος υπάγεται στην περίπτωση 0 των μεθόδων κατασκευής των Jones και Majumdar (2014). Ο σχεδιασμός  $X_1$  μελετάει  $m = 15$  παραγοντικές επιδράσεις συν τη μέση επίδραση η οποία αντιπροσωπεύεται από την  $1^{\text{η}}$  στήλη, ήτοι  $m + 1 = 16$  επιδράσεις (στήλες) σε πλήθος πειραματικών εκτελέσεων  $N = 15$  (γραμμές).

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.1**

Σχεδιασμός  $X_1$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1

Στην περίπτωση κατά την οποία οι στήλες του σχεδιασμού είναι της μορφής  $m + 1 \equiv 0(\text{mod}4)$ , δηλαδή το  $m + 1$  είναι πολλαπλάσιο του 4, σύμφωνα με το θεώρημα 3.3 των Jones και Majumdar (2014) το κατώτατο όριο το οποίο μπορεί να κατορθώσει ένας υπερκορεσμένος σχεδιασμός όταν  $N = 15$  ισούται με  $\min UE(s^2) = \frac{N(m-N+1)}{m} = \frac{15}{15} = 1$ .

Για να ελέγξουμε αν ο συγκεκριμένος σχεδιασμός είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος θα χρειαστεί να βρεθεί ο ανάστροφος του  $X_1'$  (πίνακας 4.1.2) και στη συνέχεια να υπολογιστεί ο πίνακας ο  $X_1'X_1$  (πίνακας 4.1.3). Ο πίνακας  $X_1'X_1$  έχει 16 γραμμές και



16 στήλες καθώς επίσης παρατηρούμε ότι η τιμή  $N = 15$  είναι η μοναδική στην κύρια διαγώνιο, ενώ εκατέρωθεν της υπάρχουν 112 στοιχεία «-1» και 128 «+1». Συμπεραίνουμε ότι ο σχεδιασμός  $X_1$  δεν έχει στήλες οι οποίες να είναι ίδιες ή ακριβώς αντίθετες. Η μοναδικότητα στις στήλες του σχεδιασμού αποτελεί σημαντική προϋπόθεση για ενδεχόμενη βελτιστοποίηση.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.2**

$X_1'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.3**

$X_1'X_1$ .

15	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1
-1	15	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1
1	1	15	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	15	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
-1	-1	1	1	15	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1
1	1	-1	-1	1	15	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
-1	-1	1	1	-1	1	15	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1
-1	-1	1	1	-1	1	-1	15	1	1	-1	-1	1	-1	1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	15	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	15	1	1	-1	1	-1	-1
-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	15	-1	1	-1	1	1
-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	15	1	-1	1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	15	1	-1	-1
-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	15	1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	15	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	15

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση της «άνευ όρων» βελτιστοποίησης (*Unconditional optimality*) όπως την περιέγραψαν οι Jones και Majumdar (2014), θα υπολογίσουμε την τιμή του  $UE(s^2)$  για τον  $15 \times 16$  σχεδιασμό  $X_1$  για να ελέγξουμε αν είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος. Όπως αναφέραμε στο κεφάλαιο 3, η τιμή αυτή υπολογίζεται από τη συνάρτηση  $UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)}$ , και για  $m = 15$ ,  $N = 15$  είναι ίση με  $\frac{112(-1)^2 + 128(1)^2}{15 \cdot 16} = 1$ . Η τιμή αυτή συμπίπτει με αυτή του κατώτατου ορίου που υπολογίστηκε παραπάνω, επομένως ο συγκεκριμένος υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_1$  με παραμέτρους  $m + 1 = 16$  και πειραματικές εκτελέσεις  $N = 15$  είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

Στη συνέχεια, θα επιχειρήσουμε να διαγράψουμε από τον  $H_{16}$  δύο γραμμές, τις 3 και 11. Με την ενέργεια αυτή θα προκύψει ο  $14 \times 16$  πίνακας ο οποίος απεικονίζει έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό τον  $X_2$  για τη μελέτη  $m = 15$  παραγόντων δύο επιπέδων πραγματοποιώντας  $N = 14$  εκτελέσεις (γραμμές).

#### ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.4

Σχεδιασμός  $X_2$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1

Το ελάχιστο όριο για έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό όταν το  $m + 1$  είναι πολλαπλάσιο του 4 με πλήθος γραμμών  $N = 14$ , είναι ίσο με  $\min UE(s^2) = \frac{N(m-N+1)}{m} = 1,866667$ . Από την εύρεση του  $X_2'X_2$  (πίνακας 4.1.6) αφού έχει μεσολαβήσει ο υπολογισμός του ανάστροφου  $X_2'$  (πίνακας 4.1.5), παρατηρούμε ότι η τιμή  $N = 14$  είναι η μοναδική τιμή που υπάρχει στην κύρια διαγώνιο. Άνω και κάτω της κύριας διαγώνιου υπάρχουν 48 στοιχεία «-2», 128 στοιχεία ίσα με μηδέν και 64 «+2». Συμπεραίνουμε ότι καμία στήλη

δεν είναι ταυτόσημη με οποιαδήποτε άλλη και έτσι κάθε επίδραση να είναι μοναδική στον  $X_2$  με αποτέλεσμα να έχει νόημα μια ενδεχόμενη βελτιστοποίηση.

Η τιμή του κριτηρίου  $UE(s^2)$  για το σχεδιασμό  $X_2$  είναι ίσο με  $UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)} = \frac{48(-2)^2 + 64(2)^2}{15 \cdot 16} = \frac{448}{240} = 1,866667$ , τιμή η οποία ταυτίζεται με αυτή του κατώτατου ορίου που βρέθηκε προηγουμένως. Συνεπώς ο συγκεκριμένος  $14 \times 16$  υπερκορεσμένος σχεδιασμός είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

### ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.5

$X_2'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.6

$X_2'X_2$ .

14	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	-2	-2	2	2	-2
0	14	-2	2	2	-2	-2	2	2	0	0	0	0	0	0	0
0	-2	14	2	2	-2	-2	2	2	0	0	0	0	0	0	0
0	2	2	14	-2	2	2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0
0	2	2	-2	14	2	2	-2	-2	0	0	0	0	0	0	0
0	-2	-2	2	2	14	-2	2	2	0	0	0	0	0	0	0
0	-2	-2	2	2	-2	14	2	2	0	0	0	0	0	0	0
0	2	2	-2	-2	2	2	14	-2	0	0	0	0	0	0	0
0	2	2	-2	-2	2	2	-2	14	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	14	-2	2	2	-2	-2	2
2	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	14	2	2	-2	-2	2
-2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	14	-2	2	2	-2
-2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	-2	14	2	2	-2
2	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	2	2	14	-2	2
2	0	0	0	0	0	0	0	0	-2	-2	2	2	-2	14	2
-2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	-2	-2	2	2	14

Θα δοκιμάσουμε να αφαιρέσουμε τρεις γραμμές από τον αρχικό σχεδιασμό  $H_{16}$  και να μελετήσουμε αν ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός διάστασης  $13 \times 16$   $X_3$  που θα προκύψει είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος. Από τον  $H_{16}$  αφαιρούμε τις γραμμές 8, 9 και 14 κατασκευάζοντας τον υπερκορεσμένο σχεδιασμό  $X_3$  με  $m + 1 = 16$  συνολικές επιδράσεις (στήλες) και πλήθος εκτελέσεων (γραμμές)  $N = 13$ .

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.7

Σχεδιασμός  $X_3$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1

Το βέλτιστο όριο για έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό με παραμέτρους  $m + 1 = 16$  και εκτελέσεις  $N = 13$  μέσω του θεωρήματος 3.3 είναι ίσο με  $\min UE(s^2) = \frac{N(m-N+1)}{m} = 2,6$ .

Υπολογίζοντας τον ανάστροφο  $X_3'$  (πίνακας 4.1.8) και τον πίνακα  $X_3'X_3$  (πίνακας 4.1.9) παρατηρούμε ότι εκατέρωθεν της κύριας διαγώνιου υπάρχουν 96 στοιχεία «-1» και 96 «+1», 32 στοιχεία «+3» και 16 «-3». Δηλαδή δεν υπάρχουν στήλες που να είναι ίδιες ή ακριβώς αντίθετες στο σχεδιασμό  $X_3$ , προϋπόθεση η οποία αποτελεί σημαντικό κριτήριο για τη βελτιστοποίηση του σχεδιασμού.

Το μέτρο του  $UE(s^2)$  για το συγκεκριμένο υπερκορεσμένο σχεδιασμό είναι ίσο με  $UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)} = \frac{96(-1)^2 + 96(1)^2 + 16(-3)^2 + 32(3)^2}{15 \cdot 16} = \frac{624}{240} = 2,6$ , τιμή η οποία συμπίπτει με αυτή του κατώτατου ορίου του θεωρήματος 3.3. Επομένως, ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_3$  με τον οποίο μελετάμε  $m = 15$  παραγοντικές επιδράσεις πραγματοποιώντας  $N = 13$  πειραματικές εκτελέσεις είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

#### ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.9

$X_3'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.9

$X_3'X_3$ .

13	3	-1	1	1	-1	3	1	1	-1	-1	-3	1	-1	-1	1
3	13	1	-1	-1	1	-3	-1	-1	1	1	3	-1	1	1	-1
-1	1	13	-1	-1	-3	1	-1	-1	1	1	-1	3	1	1	3
1	-1	-1	13	1	-1	-1	1	-3	3	-1	1	1	-1	3	1
1	-1	-1	1	13	-1	-1	-3	1	-1	3	1	1	3	-1	1
-1	1	-3	-1	-1	13	1	-1	-1	1	1	-1	3	1	1	3
3	-3	1	-1	-1	1	13	-1	-1	1	1	3	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	-3	-1	-1	13	1	-1	3	1	1	3	-1	1
1	-1	-1	-3	1	-1	-1	1	13	3	-1	1	1	-1	3	1
-1	1	1	3	-1	1	1	-1	3	13	1	-1	-1	1	-3	-1
-1	1	1	-1	3	1	1	3	-1	1	13	-1	-1	-3	1	-1
-3	3	-1	1	1	-1	3	1	1	-1	-1	13	1	-1	-1	1
1	-1	3	1	1	3	-1	1	1	-1	-1	1	13	-1	-1	-3
-1	1	1	-1	3	1	1	3	-1	1	-3	-1	-1	13	1	-1
-1	1	1	3	-1	1	1	-1	3	-3	1	-1	-1	1	13	-1
1	-1	3	1	1	3	-1	1	1	-1	-1	1	-3	-1	-1	13

Συνεχίζοντας την αναζήτηση για  $UE(s^2)$  – βέλτιστους υπερκορεσμένους σχεδιασμούς θα δοκιμάσουμε να διαγράψουμε επιπλέον στήλες σε σύγκριση με προηγούμενως. Θα αφαιρέσουμε από τον αρχικό σχεδιασμό  $H_{16}$  τέσσερις γραμμές και με αυτόν τον τρόπο θα εξετάσουμε τον υπερκορεσμένο σχεδιασμό με πλήθος εκτελέσεων (γραμμές)  $N = 12$ . Θα επιλέξουμε τις γραμμές 4, 7, 11, 15 για διαγραφή από τον  $H_{16}$  και θα μελετήσουμε το σχεδιασμό  $X_4$  διάστασης  $12 \times 16$ .

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.10

Σχεδιασμός  $X_4$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1

Το κατώτατο άκρο για την τιμή του κριτηρίου  $UE(s^2)$  που προκύπτει από το θεώρημα 3.3 των Jones και Majumdar (2014) όταν  $m + 1 \equiv 0 \pmod{4}$ , ισούται με  $\min UE(s^2) = \frac{N(m-N+1)}{m} = 3,2$ .

Προχωράμε με την εύρεση του ανάστροφου  $X_4'$  (πίνακας 4.1.11) και του  $X_4'X_4$  (πίνακας 4.1.12) για να ελέγξουμε αν ο σχεδιασμός  $X_4$  είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

Ο πίνακας  $X_4'X_4$  είναι ένας πίνακας με 16 στήλες και 16 γραμμές που στην κύρια διαγώνιο εμφανίζεται μόνο ο αριθμός  $N=12$  και εκατέρωθεν της 96 μηδενικά στοιχεία, από 64 «-2» και «+2» και 16 στοιχεία ίσα με «+4». Παρατηρούμε λοιπόν ότι κάθε στήλη στον σχεδιασμό  $X_4$  είναι μοναδική ως προς την κατανομή των επιπέδων +1 και -1.

Το μέτρο του  $UE(s^2)$  για τον σχεδιασμό  $X_4$  που μελετάμε είναι ίσο με  $UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)} = \frac{64(-2)^2 + 64(2)^2 + 16(4)^2}{15 \cdot 16} = \frac{768}{240} = 3,2$ . Συνεπώς ο συγκεκριμένος υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_4$  που έχουμε κατασκευάσει επιτυγχάνει το ελάχιστο άκρο του θεωρήματος 3.3 και είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

#### ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.11

$X_4'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1
1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.12**

Πίνακας  $X_4 \times X_4$ .

12	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	2	4	-2
-2	12	-2	4	2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0
0	-2	12	2	4	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2
2	4	2	12	-2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0
0	2	4	-2	12	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2
-2	0	2	0	-2	12	-2	4	2	0	2	0	-2	0	2	0
0	2	0	-2	0	-2	12	2	4	2	0	-2	0	2	0	-2
2	0	-2	0	2	4	2	12	-2	0	-2	0	2	0	-2	0
0	-2	0	2	0	2	4	-2	12	-2	0	2	0	-2	0	2
-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	12	-2	4	2	0	2	0
0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	-2	12	2	4	2	0	-2
2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	4	2	12	-2	0	-2	0
0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	2	4	-2	12	-2	0	2
-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	-2	12	2	4	2	0
0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	4	-2	12	-2	0	2
2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	12	-2	4
4	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	-2	12	2
-2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	4	2	12

Θα συνεχίσουμε την αναζήτηση  $UE(s^2)$  – βέλτιστων υπερκορεσμένων σχεδιασμών και θα εξετάσουμε την περίπτωση κατά την οποία οι εκτελέσεις του σχεδιασμού θα είναι  $N = 11$  στο πλήθος. Έτσι λοιπόν, από τον αρχικό σχεδιασμό  $H_{16}$  θα διαγράψουμε πέντε γραμμές και ειδικότερα τις γραμμές 1, 2, 8, 15 και 16. Με αυτόν τον τρόπο θα προκύψει ο  $11 \times 16$  πίνακας ο οποίος αντιπροσωπεύει και τον υπερκορεσμένο σχεδιασμό  $X_5$  με τον οποίο μελετάμε  $m = 15$  παράγοντες σε  $N = 11$  εκτελέσεις (γραμμές).

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.13**

Σχεδιασμός  $X_5$ .

1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1



Η ελάχιστη τιμή για το κριτήριο  $UE(s^2)$  που μπορεί να επιτύχει ένας σχεδιασμός με παραμέτρους  $m + 1 = 16$  και  $N = 11$  εκτελέσεις ισούται με  $\min UE(s^2) = \frac{N(m-N+1)}{m} = 3,6667$ . Για να είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος ο σχεδιασμός  $X_5$  του πίνακα 4.1.13, θα πρέπει να βρούμε τον ανάστροφο  $X_5'$  (πίνακας 4.1.14) και έπειτα τον πίνακα  $X_5'X_5$  (πίνακας 4.1.15).

Από την εύρεση του  $X_5'X_5$  παρατηρούμε ότι στην κύρια διαγώνιο εμφανίζονται αποκλειστικά στοιχεία τα οποία είναι ίσα με 11, και εκτός αυτής υπάρχουν 32 στοιχεία «-3», 16 «-5» και από 96 «-1» και «+1». Επομένως μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι κάθε επίδραση στο σχεδιασμό  $X$  είναι ξεχωριστή και δε συγχέεται με οποιαδήποτε άλλη.

Το αριθμητικό αποτέλεσμα για την τιμή του  $UE(s^2)$  του σχεδιασμού  $X_5$  που μελετάμε είναι ίσο με  $UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)} = \frac{32(-3)^2 + 16(-5)^2 + 96(-1)^2 + 96(1)^2}{15 \cdot 16} = \frac{880}{240} = 3,6667$ . Η τιμή αυτή ταυτίζεται με αυτή του θεωρήματος 3.3 συνεπώς ο μη – ισορροπημένος υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_5$  είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

#### ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.14

$X_5'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1
-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1
-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1
-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.15**

Πίνακας  $X_5'X_5$ .

11	1	-1	-1	-3	-1	-3	1	-1	1	-5	-1	1	-1	1	1
1	11	1	1	-1	1	-1	-5	1	-1	1	-3	-1	-3	-1	-1
-1	1	11	-1	1	-1	1	1	-5	1	-1	-1	-3	-1	-3	1
-1	1	-1	11	1	-5	1	1	-1	-3	-1	-1	1	-1	1	-3
-3	-1	1	1	11	1	-5	-1	1	-1	-3	1	-1	1	-1	-1
-1	1	-1	-5	1	11	1	1	-1	-3	-1	-1	1	-1	1	-3
-3	-1	1	1	-5	1	11	-1	1	-1	-3	1	-1	1	-1	-1
1	-5	1	1	-1	1	-1	11	1	-1	1	-3	-1	-3	-1	-1
-1	1	-5	-1	1	-1	1	1	11	1	-1	-1	-3	-1	-3	1
1	-1	1	-3	-1	-3	-1	-1	1	11	1	1	-1	1	-1	-5
-5	1	-1	-1	-3	-1	-3	1	-1	1	11	-1	1	-1	1	1
-1	-3	-1	-1	1	-1	1	-3	-1	1	-1	11	1	-5	1	1
1	-1	-3	1	-1	1	-1	-1	-3	-1	1	1	11	1	-5	-1
-1	-3	-1	-1	1	-1	1	-3	-1	1	-1	-5	1	11	1	1
1	-1	-3	1	-1	1	-1	-1	-3	-1	1	1	-5	1	11	-1
1	-1	1	-3	-1	-3	-1	-1	1	-5	1	1	-1	1	-1	11

Θα συνεχίσουμε την αναζήτηση βέλτιστων μη – ισορροπημένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών, και θα δοκιμάσουμε να διαγράψουμε από τον αρχικό σχεδιασμό  $H_{16}$  έξι γραμμές και να μελετήσουμε ως προς την  $UE(s^2)$  – βελτιστοποίηση σχεδιασμούς με  $N = 10$  πειραματικές εκτελέσεις.

Αφαιρούμε από τον  $H_{16}$  τις γραμμές 2, 3, 9, 10, 13 και 14 και θα προκύψει ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_6$  διάστασης  $10 \times 16$  για τη μελέτη  $m = 15$  επιδράσεων (στηλών) και  $N = 10$  εκτελέσεων (γραμμών).

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.16**

Σχεδιασμός  $X_6$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1

Το κατώτατο άκρο για το  $UE(s^2)$  ενός υπερκορεσμένου σχεδιασμού με παραμέτρους  $m + 1 = 16$  και πλήθος εκτελέσεων  $N = 10$  ισούται με  $\min UE(s^2) = \frac{N(m-N+1)}{m} = 4$ . Για τον έλεγχο μας εάν ο  $X_6$  είναι  $UE(s^2)$ , χρειαζόμαστε τον ανάστροφο  $X_6'$  (πίνακας 4.1.17) και τον πίνακα  $X_6'X_6$  (πίνακας 4.1.18).

Από τον πίνακα  $X_6'X_6$  βλέπουμε ότι η τιμή  $N = 10$  εμφανίζεται μόνο στην κύρια διαγώνιο και εκτός αυτής υπάρχουν 96 στοιχεία «0», 32 «-2», 80 «+2», 16 «-4» και 16 «+4». Εξάγουμε έτσι το συμπέρασμα ότι καμία στήλη στο σχεδιασμό δεν είναι ίδια ή ακριβώς αντίθετη με οποιαδήποτε άλλη στο σχεδιασμό  $X_6$  και να έχει ισχύ μια ενδεχόμενη  $UE(s^2)$  – βελτιστοποίηση.

Το αριθμητικό αποτέλεσμα για την τιμή του μέτρου  $UE(s^2)$  του  $10 \times 16$  σχεδιασμού  $X_6$  είναι ίσο με  $UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)} = \frac{32(-2)^2 + 80(2)^2 + 16(-4)^2 + 16(4)^2}{15 \cdot 16} = \frac{960}{240} = 4$ . Η τιμή του κριτηρίου ταυτίζεται με αυτή του ελάχιστου ορίου, επομένως ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_6$  που έχουμε κατασκευάσει είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

#### ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.17

$X_6'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.18

$X_6 \cdot X_6$ .

10	2	0	0	-2	2	4	0	2	2	0	0	-2	2	-4	0
2	10	0	-4	2	-2	0	0	2	2	0	4	2	-2	0	0
0	0	10	2	-4	0	-2	2	0	0	2	2	4	0	-2	2
0	-4	2	10	0	0	2	-2	0	4	2	2	0	0	2	-2
-2	2	-4	0	10	2	0	0	-2	2	4	0	2	2	0	0
2	-2	0	0	2	10	0	-4	2	-2	0	0	2	2	0	4
4	0	-2	2	0	0	10	2	-4	0	-2	2	0	0	2	2
0	0	2	-2	0	-4	2	10	0	0	2	-2	0	4	2	2
2	2	0	0	-2	2	-4	0	10	2	0	0	-2	2	4	0
2	2	0	4	2	-2	0	0	2	10	0	-4	2	-2	0	0
0	0	2	2	4	0	-2	2	0	0	10	2	-4	0	-2	2
0	4	2	2	0	0	2	-2	0	-4	2	10	0	0	2	-2
-2	2	4	0	2	2	0	0	-2	2	-4	0	10	2	0	0
2	-2	0	0	2	2	0	4	2	-2	0	0	2	10	0	-4
-4	0	-2	2	0	0	2	2	4	0	-2	2	0	0	10	2
0	0	2	-2	0	4	2	2	0	0	2	-2	0	-4	2	10

Θα δοκιμάσουμε τώρα από τον  $H_{16}$  να διαγράψουμε μία επιπλέον γραμμή σε σύγκριση με το πλήθος γραμμών που διαγράψαμε προηγουμένως. Από τον πίνακα Hadamard που θεωρήσαμε στην αρχή του παραδείγματος μας αφαιρούμε επτά γραμμές και συγκεκριμένα τις γραμμές 7, 8, 9, 10, 11, 13 και 14 δημιουργώντας έτσι τον υπερκορεσμένο σχεδιασμό  $X_7$  διάστασης  $9 \times 16$ .

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.19

Σχεδιασμός  $X_7$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1

Το κατώτερο όριο για έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό όπου το  $m + 1$  είναι πολλαπλάσιο του 4 όταν  $N = 9$  είναι το εξής :

$$\min UE(s^2) = \frac{N(m-N+1)}{m} = 4,2.$$

Θα προχωρήσουμε στην εύρεση του ανάστροφου  $X_7'$  και του πίνακα  $X_7'X_7$  για να δούμε αν η δοκιμή μας θα οδηγήσει σε  $UE(s^2)$  – βέλτιστο σχεδιασμό.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.20**

$X_7'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.21**

$X_7'X_7$ .

9	-1	-3	1	3	-1	5	1	3	1	-1	-1	1	1	-1	-1
-1	9	-1	-1	1	1	-1	-1	1	3	1	5	-1	3	1	-3
-3	-1	9	1	-1	-1	1	1	-1	1	3	-1	5	1	3	-1
1	-1	1	9	-1	-1	1	1	-1	5	-1	3	1	-3	-1	3
3	1	-1	-1	9	1	-1	-1	1	-1	5	1	3	-1	-3	1
-1	1	-1	-1	1	9	-1	-1	1	3	1	-3	-1	3	1	5
5	-1	1	1	-1	-1	9	1	-1	1	3	-1	-3	1	3	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	9	-1	-3	-1	3	1	5	-1	3
3	1	-1	-1	1	1	-1	-1	9	-1	-3	1	3	-1	5	1
1	3	1	5	-1	3	1	-3	-1	9	-1	-1	1	1	-1	-1
-1	1	3	-1	5	1	3	-1	-3	-1	9	1	-1	-1	1	1
-1	5	-1	3	1	-3	-1	3	1	-1	1	9	-1	-1	1	1
1	-1	5	1	3	-1	-3	1	3	1	-1	-1	9	1	-1	-1
1	3	1	-3	-1	3	1	5	-1	1	-1	-1	1	9	-1	-1
-1	1	3	-1	-3	1	3	-1	5	-1	1	1	-1	-1	9	1
-1	-3	-1	3	1	5	-1	3	1	-1	1	1	-1	-1	1	9

Ο πίνακας  $X_7'X_7$  έχει 16 γραμμές και 16 στήλες, στην κύρια διαγώνιο εμφανίζεται αποκλειστικά η τιμή  $N = 9$ , και εκατέρωθεν της κύριας διαγώνιου εμφανίζονται 16 στοιχεία με

τιμή «-3», 96 «-1», 80 «+1», 32 «+3» και 16 «+5». Συμπεραίνουμε ότι κάθε επίδραση στον υπερκορεσμένο σχεδιασμό  $X_7$  δε συγχέεται με οποιαδήποτε άλλη και είναι μοναδική. Αυτό αποτελεί σημαντική προϋπόθεση για ενδεχόμενη βελτιστοποίηση.

Υπολογίζοντας την τιμή του  $UE(s^2)$  παρατηρούμε ότι για μία ακόμη φορά συμπίπτει με αυτή του ελάχιστου ορίου.

$$UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)} = \frac{16(-3)^2 + 96(-1)^2 + 80(1)^2 + 32(3)^2 + 16(5)^2}{15 \cdot 16} = \frac{1008}{240} = 4,2.$$

Επομένως, ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_7$  που κατασκευάσαμε είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

Στο σημείο αυτό θα επιχειρήσουμε πάλι με αυθαίρετο τρόπο να διαγράψουμε ακόμη περισσότερες γραμμές από τον  $H_{16}$  μειώνοντας τις γραμμές του ακριβώς στο μισό. Επιλέγουμε τη διαγραφή οχτώ γραμμών από τον  $H_{16}$  και θα κατασκευάσουμε τον υπερκορεσμένο σχεδιασμό  $X_8$  διάστασης  $8 \times 16$  χρησιμοποιώντας τις γραμμές 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 και 12 από τον  $H_{16}$ .

#### ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.22

Σχεδιασμός  $X_8$ .

1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1

Το ελάχιστο κάτω φράγμα του μέτρου  $UE(s^2)$  για έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό με παραμέτρους  $m + 1 = 16$  (στήλες) και  $N = 8$  πειραματικές εκτελέσεις (γραμμές) είναι ίσο με  $\min UE(s^2) = \frac{N(m-N+1)}{m} = 4,266667$ .

Θα προχωρήσουμε στην εύρεση του ανάστροφου  $X_8'$  (πίνακας 4.1.23) και του πίνακα  $X_8'X_8$  (πίνακας 4.1.24) ώστε να ελέγξουμε αν ο συγκεκριμένος υπερκορεσμένος σχεδιασμός που έχουμε δημιουργήσει είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.23

$X_8'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1
-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1	1	-1	-1	1
-1	-1	1	1	1	1	-1	-1
-1	1	-1	1	1	-1	1	-1
-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.1.24

$X_8' X_8$ .

8	0	0	0	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8	0	0
0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8	0
0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-8
-8	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	8	0	0	0	-8	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	-8	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	-8	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0	0	-8	0	0	0
0	0	0	0	0	-8	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-8	0	0	0	8	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	0	8	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	-8	0	0	0	8	0	0	0
0	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	0
0	0	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0
0	0	0	-8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8

Ο πίνακας  $X_8' X_8$  είναι 16 γραμμών και 16 στηλών, η κύρια διαγώνιος αποτελείται αποκλειστικά από στοιχεία ίσα με  $N = 8$ , και εκατέρωθεν της υπάρχουν 224 στοιχεία ίσα με «0». Ωστόσο, παρατηρούμε ότι στον πίνακα  $X_8' X_8$  εμφανίζονται 16 μη – διαγώνια στοιχεία

ίσα με την τιμή «-8». Αυτό μας υποδεικνύει ότι στον σχεδιασμό  $X_8$  που κατασκευάσαμε υπάρχουν στήλες που είναι ίδιες. Η εμφάνιση της τιμής «-8» συναντιέται στα σημεία με συντεταγμένες (1, 5), (2, 14), (3, 15), (4, 16), (5, 1), (6, 10), (7, 11), (8, 12), (9, 13), (10, 6), (11, 7), (12, 8), (13, 9), (14, 2), (15, 3) και (16, 4) του πίνακα  $X_8'X_8$ . Σύμφωνα με το αποτέλεσμα αυτό οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι στο σχεδιασμό  $X_8$  οι στήλες **1 & 5, 2 & 14, 3 & 15, 4 & 16, 6 & 10, 7 & 11, 8 & 12** και **9 & 13** είναι ισοδύναμες και αναφέρονται στην ίδια επίδραση. Η μοναδικότητα των επιδράσεων (στηλών) αποτελεί κριτήριο για έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό σε ενδεχόμενη  $UE(s^2)$  – βελτιστοποίηση. Από τον υπολογισμό του κριτηρίου  $UE(s^2)$  βλέπουμε ότι ο  $X_8$  επιτυγχάνει το κατώτατο φράγμα, ωστόσο δεν μπορεί να χαρακτηριστεί ως  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

Μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η τυχαία διαγραφή γραμμών από τον αρχικό πίνακα Hadamard διάστασης  $N \times N$  δεν είναι απαραίτητο ότι θα οδηγήσει σε  $UE(s^2)$  – βέλτιστους υπερκορεσμένους σχεδιασμούς. Η απαλοιφή των γραμμών πρέπει να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να αποφεύγεται η σύγχυση ανάμεσα στις στήλες του σχεδιασμού.

## 4.2 Σχεδιασμοί με 18 στήλες

Για την κατασκευή μη – ισορροπημένων υπερκορεσμένων σχεδιασμών δύο επιπέδων με αριθμό στηλών  $m + 1 = 18$ , η επιλογή των γραμμών οι οποίες θα διαγράφονται θα πραγματοποιείται με τυχαίο τρόπο. Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, το πλήθος των γραμμών που θα αφαιρούνται από τον  $H_{16}$  θα αυξάνεται κάθε φορά κατά μία γραμμή επιπλέον μέχρις ότου οι εκτελέσεις γίνουν ίσες με  $N = 8$ .

Θα ξεκινήσουμε αφαιρώντας την  $13^{\eta}$  γραμμή του  $H_{16}$ . Ο πίνακας  $V_1$  που προκύπτει είναι διάστασης  $15 \times 16$  και σε αυτόν θα ενώσουμε τον πίνακα  $M_1$  της σχέσης 4.1 ο οποίος έχει 15 γραμμές και 2 στήλες.

$$M_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.1)$$

Στον πίνακα  $M_1$  οι επτά πρώτες γραμμές έχουν τη μορφή (1, 1) ή (-1, -1) και οι οχτώ τελευταίες έχουν τη μορφή (1, -1) ή (-1, 1). Έτσι ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_1$  που σχηματίζεται, έχει  $m + 1 = 18$  στήλες και πραγματοποιείται σε  $N = 15$  πειραματικές εκτελέσεις (γραμμές).



### ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.1

Πίνακας V<sub>1</sub>.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1

Η ελάχιστη τιμή του κατώτατου φράγματος του κριτηρίου  $UE(s^2)$  για έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό με παραμέτρους  $m + 1 = 18$  και  $N = 15$  είναι η εξής:

$$\min UE(s^2) = \frac{2(N-1)^2 + N(m+1)(m-N+1)}{m(m+1)} = 3,928105.$$

Για να διαπιστώσουμε εάν ο σχεδιασμός που κατασκευάσαμε είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος θα βρούμε τον ανάστροφο  $X_1'$  (πίνακας 4.2.3) καθώς και τον πίνακα  $X_1'X_1$  (πίνακας 4.2.4). Ο πίνακας  $X_1'X_1$  έχει 18 στήλες και 18 γραμμές και η κύρια διαγώνιος περιέχει αποκλειστικά την τιμή που ισούται με  $N = 15$ . Εκατέρωθεν της κύριας διαγώνιου παρατηρούνται 126 στοιχεία «-1», 140 «+1», 4 στοιχεία με τιμή «-9», 4 με τιμή «-7», 4 «-5», 12 «-3», 12 «+3», 4 «+5» και 4 «-7». Είναι εμφανές ότι δεν υπάρχουν στήλες στο σχεδιασμό  $X_1$  που να είναι ίδιες ή ακριβώς αντίθετες και κάθε επίδραση είναι μοναδική. Η μοναδικότητα στις στήλες αποτελεί σημαντική προϋπόθεση για ενδεχόμενη βελτιστοποίηση.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.2

Σχεδιασμός  $X_1$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.3

$X_1'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1
-1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1
-1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.4

$X_1'X_1$ .

15	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-3	-3
-1	15	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-7	5
-1	-1	15	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
-1	-1	-1	15	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
-1	-1	-1	-1	15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-3
1	1	1	1	1	15	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-5	-1
1	1	1	1	1	-1	15	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-5	-5
1	1	1	1	1	-1	-1	15	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	3	3
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	15	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-5	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	15	-1	-1	-1	-1	1	1	1	7	-9
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	15	-1	-1	-1	1	1	1	-1	3
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	15	-1	-1	1	1	1	-1	3
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	15	-1	1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	15	-1	-1	-3	-3	
-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	15	-1	-3	-7	
-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	15	5	1	
-3	-7	1	1	1	-5	-5	3	-5	7	-1	-1	-1	-3	-3	5	15	-1	
-3	5	1	1	-3	-1	-5	3	-1	-9	3	3	-1	-3	-7	1	-1	15	

Η αριθμητική τιμή του μέτρου  $UE(s^2)$  για το σχεδιασμό  $X_1$  ισούται με  $UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)} = \frac{126(-1)^2 + 140(1)^2 + 12(-3)^2 + 8(3)^2 + 8(-5)^2 + 4(5)^2 + 2(7)^2 + 2(-9)^2}{17 \cdot 18} = \frac{1202}{306} = 3,928105$ . Η

τιμή αυτή ταυτίζεται με αυτή του κατώτατου ορίου που βρέθηκε παραπάνω επομένως ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός 18 στηλών και 15 γραμμών είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

Θα προχωρήσουμε στη δοκιμή κατά την οποία αφαιρούμε δύο γραμμές από τον  $H_{16}$ , επιλέγοντας τις γραμμές 7 και 14 σχηματίζοντας έτσι τον πίνακα  $V_2$  (πίνακας 4.2.5) διάστασης  $14 \times 16$ . Για να κατασκευάσουμε τον υπερκορεσμένο σχεδιασμό με 18 στήλες και 14 γραμμές θα ενώσουμε τον πίνακα  $M_2$  της σχέσης 4.2 ο οποίος είναι διάστασης  $14 \times 2$ .

$$M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

Στον πίνακα  $M_2$  οι επτά πρώτες γραμμές είναι της μορφής  $(1, 1)$ ,  $(-1, -1)$  και οι επτά υπόλοιπες είναι της μορφής  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$ .

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.5

Πίνακας V<sub>2</sub>.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1

Με την ένωση του πίνακα M<sub>2</sub> έχουμε κατασκευάσει τον υπερκορεσμένο σχεδιασμό X<sub>2</sub> με m + 1 = 18 και N = 14 πειραματικών εκτελέσεων (γραμμών).

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.6

Πίνακας X<sub>2</sub>.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1

Το κατώτατο όριο του UE(s<sup>2</sup>) για έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό όταν m + 1 = 2(mod4) και N είναι άρτιος είναι το ακόλουθο :

$$\min UE(s^2) = \frac{N(N-1)+N(m+1)(m-N+1)}{m(m+1)} = 4,392157.$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.7

$X_2'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	-1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.8

$X_2'X_2$ .

14	0	-2	2	0	0	2	-2	0	-2	0	0	2	2	0	0	2	-4
0	14	0	0	2	2	0	0	-2	0	-2	2	0	0	2	-2	0	-2
-2	0	14	2	0	0	2	-2	0	-2	0	0	2	2	0	0	-2	0
2	0	2	14	0	0	-2	2	0	2	0	0	-2	-2	0	0	2	0
0	2	0	0	14	-2	0	0	2	0	2	-2	0	0	-2	2	0	2
0	2	0	0	-2	14	0	0	2	0	2	-2	0	0	-2	2	-4	-10
2	0	2	-2	0	0	14	2	0	2	0	0	-2	-2	0	0	-2	4
-2	0	-2	2	0	0	2	14	0	-2	0	0	2	2	0	0	-6	4
0	-2	0	0	2	2	0	0	14	0	-2	2	0	0	2	-2	-4	2
-2	0	-2	2	0	0	2	-2	0	14	0	0	2	2	0	0	-2	0
0	-2	0	0	2	2	0	0	-2	0	14	2	0	0	2	-2	0	-2
0	2	0	0	-2	-2	0	0	2	0	2	14	0	0	-2	2	0	2
2	0	2	-2	0	0	-2	2	0	2	0	0	14	-2	0	0	2	0
2	0	2	-2	0	0	-2	2	0	2	0	0	-2	14	0	0	-10	-4
0	2	0	0	-2	-2	0	0	2	0	2	-2	0	0	14	2	4	-2
0	-2	0	0	2	2	0	0	-2	0	-2	2	0	0	2	14	4	-6
2	0	-2	2	0	-4	-2	-6	-4	-2	0	0	2	-10	4	4	14	0
-4	-2	0	0	2	-10	4	4	2	0	-2	2	0	-4	-2	-6	0	14

Από την εύρεση του πίνακα  $X_2'X_2$  παρατηρούμε ότι μοναδική τιμή στην κύρια διαγώνιο είναι η τιμή «14» και εκατέρωθεν της εμφανίζονται 146 στοιχεία ίσα με μηδέν, 60 με την τιμή

«-2», 76 «+2», 4 στοιχεία με τιμή «-10», 4 «-6», 8 «-4» και 8 «+4». Δεν παραβιάζεται ο περιορισμός που απαιτεί ότι καμία στήλη να είναι ίδια ή ακριβώς αντίθετη με οποιαδήποτε άλλη στον σχεδιασμό μας.

Το αριθμητικό αποτέλεσμα του  $UE(s^2)$  για τον σχεδιασμό  $X_2$  είναι ίσο με  $UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)}$   
 $= \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)} = \frac{4(-10)^2 + 4(-6)^2 + 8(-4)^2 + 60(-2)^2 + 76(2)^2 + 8(4)^2}{17 \cdot 18} = \frac{1344}{306} = 4,392157$ . Η τιμή αυτή συμπίπτει με αυτή του ελάχιστου ορίου που υπολογίσαμε προηγουμένως. Συνεπώς, ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_2$  διαστάσεων  $14 \times 18$  είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

Θα προβούμε στη διαγραφή τριών γραμμών από τον  $H_{16}$  και συγκεκριμένα επιλέγονται (τυχαία) για διαγραφή οι γραμμές 3, 10 και 15. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να προκύψει ο πίνακας  $V_3$  διάστασης  $13 \times 16$ .

### ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.9

$V_3$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1

Ενώνοντας τον  $13 \times 2$  πίνακα  $M_3$  (σχέση 4.3) στο τέλος του  $V_3$ , θα προκύψει ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_3$  τον οποίο και θα ερευνήσουμε ως προς την  $UE(s^2)$  – βελτιστοποίηση. Ο  $X_3$  περιλαμβάνει  $m = 17$  παράγοντες και πραγματοποιείται σε  $N = 13$  εκτελέσεις (γραμμές).

$$M_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.3)$$

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.10**

Σχεδιασμός  $X_3$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1

Η τιμή του κατώτερου ορίου του μέτρου  $UE(s^2)$  που μπορεί να επιτύχει ένας υπερκορεσμένος σχεδιασμός όταν το  $m + 1$  είναι άρτιος και δεν είναι πολλαπλάσιο του 4 με το  $N$  να είναι περιττός αριθμός είναι το εξής :

$$\min UE(s^2) = \frac{2(N-1)^2 + N(m+1)(m-N+1)}{m(m+1)} = 4.764706.$$

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.11**

$X_3'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
1	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.12

$X_3'X_3$ .

13	1	3	-3	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	3	1	-1	-5	1
1	13	-1	1	3	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-3	3	-1	5
3	-1	13	3	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-3	-1	1	-3	3
-3	1	3	13	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	3	1	-1	-1	5
-1	3	1	-1	13	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	3	-3	5	3
-1	-1	1	-1	1	13	-1	1	3	-1	-3	3	1	1	-1	1	5	3
1	1	-1	1	-1	-1	13	3	1	-3	-1	1	3	-1	1	-1	-5	1
-1	-1	1	-1	1	1	3	13	-1	3	1	-1	-3	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	1	-1	3	1	-1	13	1	3	-3	-1	-1	1	-1	-1	-3
1	1	-1	1	-1	-1	-3	3	1	13	-1	1	3	-1	1	-1	7	-3
-1	-1	1	-1	1	-3	-1	1	3	-1	13	3	1	1	-1	1	1	-1
1	1	-1	1	-1	3	1	-1	-3	1	3	13	-1	-1	1	-1	3	1
-1	-1	1	-1	1	1	3	-3	-1	3	1	-1	13	1	-1	1	5	3
3	-1	-3	3	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	13	-1	1	1	7
1	-3	-1	1	3	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	13	3	3	-7
-1	3	1	-1	-3	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	3	13	1	-1
-5	-1	-3	-1	5	5	-5	1	-1	7	1	3	5	1	3	1	13	-1
1	5	3	5	3	3	1	-1	-3	-3	-1	1	3	7	-7	-1	-1	13

Ο πίνακας  $X_3'X_3$  έχει 18 στήλες και 18 γραμμές και η κύρια διαγώνιος περιέχει μόνο την τιμή 13 όπου  $N = 13$ . Επίσης, εκτός της κύριας διαγώνιου υπάρχουν 110 στοιχεία «-1» και 110 «+1», ενώ παράλληλα εμφανίζονται 44 «+3» και 22 «-3», 2 «-7», 4 «-5», 10 «+5» και 4 «+7».

Πρακτικά αυτό μας πληροφορεί ότι δεν υπάρχουν επιδράσεις που να συγχέονται στον  $X_3$  και κάθε στήλη είναι ξεχωριστή.

$$\begin{aligned}
 \text{Η τιμή του κριτηρίου } UE(s^2) \text{ για το σχεδιασμό } X_3 \text{ ισούται με } UE(s^2) &= \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)} \\
 &= \frac{2(-7)^2 + 4(-5)^2 + 22(-3)^2 + 110(-1)^2 + 110(1)^2 + 44(3)^2 + 10(5)^2 + 4(7)^2}{17 \cdot 18} = \frac{1458}{306} = 4,764706, \text{ η οποία}
 \end{aligned}$$

ταυτίζεται με αυτή του κατώτερου ορίου που υπολογίστηκε προηγουμένως, επομένως ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_3$  με 18 στήλες και 13 γραμμές είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

Θα συνεχίσουμε την αναζήτηση βέλτιστων υπερκορεσμένων σχεδιασμών και θα μειώσουμε κατά μια γραμμή επιπλέον σε σύγκριση με την προηγούμενη δοκιμή. Θα εξετάσουμε έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό με 12 πειραματικές εκτελέσεις. Αυτό σημαίνει ότι θα αφαιρέσουμε από τον  $H_{16}$  τέσσερις γραμμές, τις 3, 6, 11, και 16 με αποτέλεσμα να προκύψει ο πίνακας  $V_4$  (πίνακας 4.2.13) διάστασης  $12 \times 16$ . Ενώνοντας τον  $12 \times 2$  πίνακα  $M_4$  (σχέση 4.4) στο τέλος του πίνακα  $V_4$  θα δημιουργήσουμε τον υπερκορεσμένο σχεδιασμό  $X_4$  (πίνακας 4.2.14) με  $m + 1 = 18$  επιδράσεις (στήλες) και  $N = 12$  εκτελέσεις (γραμμές).



**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.13**

Πίνακας V<sub>4</sub>.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

Τα στοιχεία στις πρώτες έξι γραμμές του πίνακα M<sub>4</sub> είναι στη μορφή (1, 1) ή (-1, -1), και στις υπόλοιπες έξι είναι (1, -1) ή (-1, 1).

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.14**

Σχεδιασμός X<sub>4</sub>.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1

Το κατώτατο άκρο που μπορεί να κατορθώσει ένας υπερκορεσμένος με παραμέτρους m + 1 = 18 και N = 12 είναι το ακόλουθο :

$$\min UE(s^2) = \frac{2N(N-2) + N(m+1)(m-N+1)}{m(m+1)} = 5,019608.$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.15

$X_4'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1
1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
1	1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1
1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	-1	1	-1	-1

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.16

$X_4' X_4$ .

12	-2	2	0	0	2	-2	0	0	2	2	-4	0	2	2	0	0	0
-2	12	0	2	2	0	-4	2	2	0	0	-2	2	0	0	2	-6	2
2	0	12	2	2	-4	0	2	2	0	0	2	-2	0	0	-2	2	-2
0	2	2	12	0	2	2	0	-4	-2	2	0	0	2	-2	0	4	4
0	2	2	0	12	2	2	-4	0	2	-2	0	0	-2	2	0	0	-4
2	0	-4	2	2	12	0	2	2	0	0	2	-2	0	0	-2	6	2
-2	-4	0	2	2	0	12	2	2	0	0	-2	2	0	0	2	6	-2
0	2	2	0	-4	2	2	12	0	2	-2	0	0	-2	2	0	4	0
0	2	2	-4	0	2	2	0	12	-2	2	0	0	2	-2	0	0	0
2	0	0	-2	2	0	0	2	-2	12	0	2	2	0	-4	2	2	-6
2	0	0	2	-2	0	0	-2	2	0	12	2	2	-4	0	2	-2	2
-4	-2	2	0	0	2	-2	0	0	2	2	12	0	2	2	0	4	4
0	2	-2	0	0	-2	2	0	0	2	2	0	12	2	2	-4	-4	0
2	0	0	2	-2	0	0	-2	2	0	-4	2	2	12	0	2	2	6
2	0	0	-2	2	0	0	2	-2	-4	0	2	2	0	12	2	-2	6
0	2	-2	0	0	-2	2	0	0	2	2	0	-4	2	2	12	0	4
0	-6	2	4	0	6	6	4	0	2	-2	4	-4	2	-2	0	12	0
0	2	-2	4	-4	2	-2	0	0	-6	2	4	0	6	6	4	0	12

Σύμφωνα με τον πίνακα  $X_4' X_4$  το μοναδικό στοιχείο στην κύρια διαγώνιο έχει τιμή ίση με  $N = 12$ , και εκατέρωθεν της υπάρχουν 114 στοιχεία ίσα με μηδέν, 4 έχουν την τιμή «-6», 20

«-4», 40 «-2», 108 «+2», 12 «+4» και 8 «+6». Είναι φανερό ότι στον σχεδιασμό  $X_4$  δεν υπάρχουν στήλες που να είναι ίδιες ή ακριβώς αντίθετες και κάθε επίδραση να είναι μοναδική.

Το αριθμητικό αποτέλεσμα για το  $UE(s^2)$  του  $X_4$  είναι ίσο με  $UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)}$   
 $= \frac{4(-6)^2 + 20(-4)^2 + 40(-2)^2 + 108(2)^2 + 12(4)^2 + 8(6)^2}{17 \cdot 18} = \frac{1536}{306} = 5,019608$ . Η τιμή αυτή ταυτίζεται με αυτή του  $\min UE(s^2)$  με συνέπεια ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_4$  με 12 πειραματικές εκτελέσεις είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

Προχωράμε σε επόμενη δοκιμή κατά την οποία θα διαγράψουμε πέντε γραμμές από τον  $H_{16}$  και να μελετήσουμε έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό με  $N = 11$  πειραματικές εκτελέσεις. Από τον  $H_{16}$  διαγράφουμε τις γραμμές 6, 7, 8, 9 και 12 με αποτέλεσμα να προκύψει ο πίνακας  $V_5$  διάστασης  $11 \times 16$ .

#### ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.17

Πίνακας  $V_5$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1

Στο τέλος του πίνακα  $V_5$  θα ενώσουμε τον πίνακα  $11 \times 2$  πίνακα  $M_5$  της σχέσης 4.5 του οποίου τα στοιχεία των πέντε πρώτων γραμμών είναι της μορφής  $(1, 1)$  ή  $(-1, -1)$  και τα υπόλοιπα έξι έχουν τη μορφή  $(1, -1)$  ή  $(-1, 1)$ .

$$M_5 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.5)$$

Με αυτόν τον τρόπο θα κατασκευαστεί ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_5$  για τη μελέτη  $m = 17$  παραγόντων σε πλήθος  $N = 11$  εκτελέσεων.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.18**

Σχεδιασμός  $X_5$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1

Η ελάχιστη τιμή που μπορεί να επιτύχει ένας υπερκορεσμένος σχεδιασμός όταν το  $m + 1$  είναι άρτιος αριθμός αλλά δε διαιρείται ακριβώς με τον αριθμό 4 και παράλληλα το  $N$  είναι περιττός, είναι το ακόλουθο :

$$\min UE(s^2) = \frac{2(N-1)^2 + N(m+1)(m-N+1)}{m(m+1)} = 5,183007.$$

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.19**

$X_5'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	1	1
1	1	-1	-1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	-1
-1	1	1	1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1
-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.20

$X_5'X_5$ .

11	1	-1	-1	5	3	1	1	-1	-3	-1	-1	1	-1	1	1	1	5
1	11	1	1	-1	1	-1	-1	-3	-1	1	1	3	5	-1	-1	-5	-1
-1	1	11	-1	1	-1	1	-3	-1	1	-1	3	1	-1	5	1	-3	-3
-1	1	-1	11	1	-1	-3	1	-1	1	3	-1	1	-1	1	5	-3	-3
5	-1	1	1	11	-3	-1	-1	1	3	1	1	-1	1	-1	-1	-1	3
3	1	-1	-1	-3	11	1	1	-1	5	-1	-1	1	-1	1	1	1	-3
1	-1	1	-3	-1	1	11	-1	1	-1	5	1	-1	1	-1	3	3	-5
1	-1	-3	1	-1	1	-1	11	1	-1	1	5	-1	1	3	-1	-5	3
-1	-3	-1	-1	1	-1	1	1	11	1	-1	-1	5	3	1	1	5	1
-3	-1	1	1	3	5	-1	-1	1	11	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-5
-1	1	-1	3	1	-1	5	1	-1	1	11	-1	1	-1	1	-3	-3	-3
-1	1	3	-1	1	-1	1	5	-1	1	-1	11	1	-1	-3	1	-3	-3
1	3	1	1	-1	1	-1	-1	5	-1	1	1	11	-3	-1	-1	3	-1
-1	5	-1	-1	1	-1	1	1	3	1	-1	-1	-3	11	1	1	-3	1
1	-1	5	1	-1	1	-1	3	1	-1	1	-3	-1	1	11	-1	-5	3
1	-1	1	5	-1	1	3	-1	1	-1	-3	1	-1	1	-1	11	3	-5
1	-5	-3	-3	-1	1	3	-5	5	-1	-3	-3	3	-3	-5	3	11	-1
5	-1	-3	-3	3	-3	-5	3	1	-5	-3	-3	-1	1	3	-5	-1	11

Ο πίνακας  $X_5'X_5$  έχει 18 γραμμές και 18 στήλες και η κύρια διαγώνιος αποτελείται αποκλειστικά από στοιχεία ίσα με  $N = 11$ . Εκατέρωθεν της υπάρχουν 12 στοιχεία με την τιμή «-5», 36 «-3», 106 «-1», 104 «+1», 28 «+3» και 20 «+5». Συμπεραίνουμε ότι ο σχεδιασμός  $X_5$  δεν περιέχει επιδράσεις που να συγχέονται και κάθε στήλη στον πίνακα σχεδιασμού είναι μοναδική.

Η τιμή του μέτρου  $UE(s^2)$  για τον σχεδιασμό που εξετάζουμε είναι η εξής:

$$UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)} = \frac{12(-5)^2 + 36(-3)^2 + 106(-1)^2 + 104(1)^2 + 28(3)^2 + 20(5)^2}{306} = \frac{1586}{306} =$$

5,183007. Η τιμή του αποτελέσματος αυτού συμπίπτει με αυτήν για το ελάχιστο όριο που υπολογίστηκε προηγουμένως. Επομένως ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_5$  18 στηλών και 11 γραμμών που κατασκευάσαμε είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

Θα δοκιμάσουμε να μειώσουμε περισσότερο τις γραμμές από τον  $H_{16}$  αφαιρώντας από αυτόν έξι γραμμές, και συγκεκριμένα διαγράφουμε τις γραμμές 8, 10, 11, 13, 14 και 15. Από την ενέργεια αυτή προκύπτει ο  $10 \times 16$  πίνακας  $V_6$  (πίνακας 4.2.21). Στον  $V_6$  θα ενώσουμε τον πίνακα  $M_6$  διάστασης  $10 \times 2$  (σχέση 4.6) του οποίου οι πέντε πρώτες γραμμές έχουν τη μορφή  $(1, 1)$  ή  $(-1, -1)$  και οι υπόλοιπες πέντε τη μορφή  $(1, -1)$  ή  $(-1, 1)$ . Έτσι πετυχαίνουμε την κατασκευή του υπερκορεσμένου σχεδιασμού  $X_6$  (πίνακας 4.2.22) με 18 στήλες και 11 γραμμές.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.21**

Πίνακας  $V_6$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1

$$M_6 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.22**

Σχεδιασμός  $X_6$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	1

Το βέλτιστο κατώτατο όριο του μέτρου  $UE(s^2)$  για έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό όταν  $m + 1 \equiv 2 \pmod{4}$  και  $N$  είναι άρτιος, είναι το ακόλουθο :

$$\min UE(s^2) = \frac{2N(N-2) + N(m+1)(m-N+1)}{m(m+1)} = 5,228758.$$

Θα προβούμε ως συνήθως στην εύρεση του ανάστροφου  $X_6'$  (πίνακας 4.2.23) και στη συνέχεια του πίνακα  $X_6'X_6$  (πίνακας 4.2.24) για να διαπιστώσουμε αν ο σχεδιασμός που κατασκευάσαμε μπορεί να επιτύχει το παραπάνω όριο.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.23

$X_6'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1
1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1
1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1
1	1	1	1	-1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1
1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.24

$X_6'X_6$ .

10	0	-2	-2	0	-4	2	2	4	2	0	0	2	2	0	0	-6	0
0	10	0	0	2	2	0	0	2	4	2	2	-4	0	-2	-2	0	-2
-2	0	10	2	0	0	2	2	0	2	4	-4	2	-2	0	0	2	-4
-2	0	2	10	0	0	2	2	0	2	-4	4	2	-2	0	0	-2	0
0	2	0	0	10	2	0	0	2	-4	2	2	4	0	-2	-2	-4	-6
-4	2	0	0	2	10	0	0	2	0	-2	-2	0	4	2	2	4	-2
2	0	2	2	0	0	10	2	0	-2	0	0	-2	2	4	-4	-2	4
2	0	2	2	0	0	2	10	0	-2	0	0	-2	2	-4	4	2	0
4	2	0	0	2	2	0	0	10	0	-2	-2	0	-4	2	2	0	-6
2	4	2	2	-4	0	-2	-2	0	10	0	0	2	2	0	0	-2	0
0	2	4	-4	2	-2	0	0	-2	0	10	2	0	0	2	2	0	-2
0	2	-4	4	2	-2	0	0	-2	0	2	10	0	0	2	2	-4	2
2	-4	2	2	4	0	-2	-2	0	2	0	0	10	2	0	0	-6	-4
2	0	-2	-2	0	4	2	2	-4	2	0	0	2	10	0	0	-2	4
0	-2	0	0	-2	2	4	-4	2	0	2	2	0	0	10	2	0	2
0	-2	0	0	-2	2	-4	4	2	0	2	2	0	0	2	10	4	-2
-6	0	2	-2	-4	4	-2	2	0	-2	0	-4	-6	-2	0	4	10	0
0	-2	-4	0	-6	-2	4	0	-6	0	-2	2	-4	4	2	-2	0	10

Ο πίνακας  $X_6'X_6$  είναι διάστασης  $18 \times 18$  και το μοναδικό στοιχείο στην κύρια διαγώνιο είναι ίσο με  $N = 10$ . Επιπλέον, παρατηρούμε ότι άνω και κάτω της κύριας διαγώνιου εμφανίζονται 8 στοιχεία «-6», 24 «-4», 48 «-2», 114 «0», 88 «+2» και 24 «+4». Συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχουν ισοδύναμες στήλες στον σχεδιασμό  $X_6$  και κάθε επίδραση δε συγχέεται με οποιαδήποτε άλλη.

Το αριθμητικό αποτέλεσμα της τιμής του κριτηρίου  $UE(s^2)$  είναι το εξής :

$$UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)} = \frac{8(-6)^2 + 24(-4)^2 + 48(-2)^2 + 88(2)^2 + 24(4)^2}{17 \cdot 18} = \frac{1600}{306} = 5,228758.$$

Το αποτέλεσμα αυτό ισούται με το κατώτατο όριο του θεωρήματος 3.3 των Jones και Majumdar (2014) και συνεπώς ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_6$  με  $m + 1 = 18$  και  $N = 10$  είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

Θα επιχειρήσουμε επιπλέον μείωση γραμμών κατά μία παραπάνω σε σύγκριση με την προηγούμενη δοκιμή αφαιρώντας από τον  $H_{16}$  επτά γραμμές. Οι γραμμές που αφαιρούνται είναι οι 1, 4, 5, 6, 14, 15 και 16. Με αυτόν τον τρόπο προκύπτει ο πίνακας  $V_7$  διάστασης  $9 \times 16$ .

#### ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.25

Πίνακας  $V_7$ .

1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1

Στον  $V_7$  θα ενώσουμε τον  $9 \times 2$  πίνακα  $M_7$  της σχέσης 4.7 και έτσι να σχηματίσουμε τον υπερκορεσμένο σχεδιασμό  $X_7$  με  $m = 17$  παράγοντες ήτοι  $m + 1 = 18$  στήλες και  $N = 9$  πειραματικές εκτελέσεις (γραμμές).

$$M_7 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.7)$$



Ο  $M_7$  αποτελείται από γραμμές στις οποίες οι τέσσερις πρώτες είναι της μορφής (1, 1) και (-1, -1) και υπόλοιπες πέντε (1, -1) και (-1, 1).

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.26**

Σχεδιασμός  $X_7$ .

1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1

Η ελάχιστη τιμή του  $UE(s^2)$  για έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό με παραμέτρους  $m + 1 = 18$  και το πλήθος εκτελέσεων  $N$  να είναι περιττός αριθμός είναι το παρακάτω :

$$\min UE(s^2) = \frac{2(N-1)^2 + N(m+1)(m-N+1)}{m(m+1)} = 5,183007.$$

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.27**

$X_7'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	-1	1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	1
1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1
-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1
-1	1	1	-1	-1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	1	1	1	-1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1
1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	1	1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.28

$X_7' X_7$ .

9	-1	3	1	-3	-3	-3	-1	-1	-3	1	-1	3	-1	-1	1	-3	3
-1	9	1	-1	-1	3	-1	1	-3	-1	-1	-3	-3	-3	1	3	3	1
3	1	9	-1	-1	-1	3	-3	1	-1	-1	-3	-3	1	-3	-1	-1	-3
1	-1	-1	9	1	1	-3	3	-1	-3	-3	-1	-1	3	-1	-3	-3	3
-3	-1	-1	1	9	-3	1	-1	3	-3	-3	-1	-1	-1	3	1	1	-1
-3	3	-1	1	-3	9	1	-1	-1	-3	1	3	-1	-1	-1	-3	1	-5
-3	-1	3	-3	1	1	9	-1	-1	1	-3	-1	3	-1	-1	-3	1	-5
-1	1	-3	3	-1	-1	-1	9	1	3	-1	-3	1	-3	-3	-1	3	5
-1	-3	1	-1	3	-1	-1	1	9	-1	3	1	-3	-3	-3	-1	3	-3
-3	-1	-1	-3	-3	-3	1	3	-1	9	1	-1	-1	3	-1	1	1	3
1	-1	-1	-3	-3	1	-3	-1	3	1	9	-1	-1	-1	3	-3	-3	-1
-1	-3	-3	-1	-1	3	-1	-3	1	-1	-1	9	1	1	-3	3	3	-3
3	-3	-3	-1	-1	-1	3	1	-3	-1	-1	1	9	-3	1	-1	-1	1
-1	-3	1	3	-1	-1	-1	-3	-3	3	-1	1	-3	9	1	-1	-5	1
-1	1	-3	-1	3	-1	-1	-3	-3	-1	3	-3	1	1	9	-1	-5	1
1	3	-1	-3	1	-3	-3	-1	-1	1	-3	3	-1	-1	-1	9	5	3
-3	3	-1	-3	1	1	1	3	3	1	-3	3	-1	-5	-5	5	9	-1
3	1	-3	3	-1	-5	-5	5	-3	3	-1	-3	1	1	1	3	-1	9

Ο πίνακας  $X_7' X_7$  έχει 18 γραμμές και 18 στήλες, και στην κύρια διαγώνιο επικρατεί αποκλειστικά η τιμή  $N = 9$ . Εκατέρωθεν της κύριας διαγώνιου εμφανίζονται 8 στοιχεία «-5», 76 «-3», 106 «-1», 64 «+1», 48 «+3» και 4 «+5». Από τα στοιχεία αυτά καταλαβαίνουμε ότι στον σχεδιασμό  $X_7$  δεν υπάρχουν ταυτόσημες στήλες που να ορίζουν την ίδια παραγοντική επίδραση. Αυτό αποτελεί προϋπόθεση για να έχει νόημα ενδεχόμενη  $UE(s^2)$  – βελτιστοποίηση.

Η τιμή του μέτρου  $UE(s^2)$  για τον σχεδιασμό  $X_7$  ισούται με  $UE(s^2) = \frac{Q(x)}{m(m+1)} = \frac{\sum_{i \neq j=1}^m \sum s_{ij}^2}{m(m+1)}$   
 $= \frac{8(-5)^2 + 76(-3)^2 + 106(-1)^2 + 64(1)^2 + 48(3)^2 + 4(5)^2}{306} = \frac{1586}{306} = 5,183007$ . Το αποτέλεσμα αυτό συμπίπτει με την ελάχιστη τιμή του ορίου που βρέθηκε παραπάνω επομένως ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_7$  είναι  $UE(s^2)$  – βέλτιστος.

Θα δοκιμάσουμε να αφαιρέσουμε τις μισές ακριβώς γραμμές από τον  $H_{16}$  κρατώντας τις γραμμές 2,3,4,5,6,7,8 και 9 σχηματίζοντας τον πίνακα  $V_8$  διάστασης  $8 \times 16$ . Στο τέλος του  $V_8$  (πίνακας 4.2.29) θα ενώσουμε τον  $8 \times 2$  πίνακα  $M_8$  (σχέση 4.2) με αποτέλεσμα να κατασκευάσουμε τον υπερκορεσμένο σχεδιασμό  $X_8$  (πίνακας 4.2.30) με 18 στήλες και 8 γραμμές.

$$M_8 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.29**

Πίνακας  $V_8$ .

1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.30**

Σχεδιασμός  $X_8$ .

1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1

Η τιμή του κατώτατου ορίου για έναν υπερκορεσμένο σχεδιασμό όταν το  $m + 1$  είναι άρτιος αλλά δεν είναι πολλαπλάσιο του αριθμού 4 και το  $N$  να είναι άρτιος είναι η ακόλουθη :

$$\min UE(s^2) = \frac{2N(N-2)+N(m+1)(m-N+1)}{m(m+1)} = 5,019608.$$

Όπως σε κάθε περίπτωση θα προβούμε στην εύρεση του ανάστροφου πίνακα  $X_8'$  και στη συνέχεια του πίνακα  $X_8'X_8$  για να εξετάσουμε αν ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_8$  που έχουμε κατασκευάσει επιτυγχάνει το κατώτερο φράγμα που υπολογίστηκε παραπάνω.

Από την εύρεση του πίνακα  $X_8'X_8$  παρατηρούμε ότι δεν ικανοποιείται η προϋπόθεση για την μοναδικότητα των στηλών του σχεδιασμού. Παρατηρούμε ότι η τιμή  $N = 8$  της κύριας διαγώνιου εμφανίζεται σε δύο σημεία επιπλέον του  $X_8'X_8$  που βρίσκονται εκτός της κύριας διαγώνιου. Τα σημεία αυτά του πίνακα έχουν συντεταγμένες  $(4,18)$  και  $(18,4)$  δηλαδή τοποθετούνται στην 4<sup>η</sup> γραμμή και 18<sup>η</sup> στήλη, και στην 18<sup>η</sup> γραμμή και 4<sup>η</sup> στήλη αντίστοιχα. Μέσω των σημείων αυτών συμπεραίνουμε ότι οι στήλες 4 και 18 στο σχεδιασμό  $X_8$  είναι ταυτόσημες.

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.31

$X_8'$ .

1	1	1	1	1	1	1	1
-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1
-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1
-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1
-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1
-1	1	-1	-1	1	-1	1	1
1	1	1	-1	-1	-1	-1	1
1	1	-1	1	-1	-1	1	-1
-1	1	1	1	1	-1	-1	-1
1	1	-1	-1	1	1	-1	-1
-1	1	1	-1	-1	1	1	-1
-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
1	-1	1	-1	-1	-1	1	-1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1

ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.32

$X_8' X_8$ .

8	-2	2	2	-2	2	-2	-2	-6	0	0	0	0	0	0	0	-2	2
-2	8	0	0	0	0	0	0	0	-6	-2	-2	2	-2	2	2	0	0
2	0	8	0	0	0	0	0	0	-2	-6	2	-2	2	-2	-2	0	0
2	0	0	8	0	0	0	0	0	-2	2	-6	-2	2	-2	-2	0	8
-2	0	0	0	8	0	0	0	0	2	-2	-2	-6	-2	2	2	0	0
2	0	0	0	0	8	0	0	0	-2	2	2	-2	-6	-2	-2	4	0
-2	0	0	0	0	0	8	0	0	2	-2	-2	2	-2	-6	2	-4	0
-2	0	0	0	0	0	0	8	0	2	-2	-2	2	-2	2	-6	4	0
-6	0	0	0	0	0	0	0	8	-2	2	2	-2	2	-2	-2	4	0
0	-6	-2	-2	2	-2	2	2	-2	8	0	0	0	0	0	0	-2	-2
0	-2	-6	2	-2	2	-2	-2	2	0	8	0	0	0	0	0	2	2
0	-2	2	-6	-2	2	-2	-2	2	0	0	8	0	0	0	0	2	-6
0	2	-2	-2	-6	-2	2	2	-2	0	0	0	8	0	0	0	-2	-2
0	-2	2	2	-2	-6	-2	-2	2	0	0	0	0	8	0	0	-2	2
0	2	-2	-2	2	-2	-6	2	-2	0	0	0	0	0	8	0	2	-2
0	2	-2	-2	2	-2	2	-6	-2	0	0	0	0	0	0	8	-6	-2
-2	0	0	0	0	4	-4	4	4	-2	2	2	-2	-2	2	-6	8	0
2	0	0	8	0	0	0	0	0	-2	2	-6	-2	2	-2	-2	0	8

Ο σχεδιασμός  $X_8$  παρόλο που επιτυγχάνει το κατώτερο φράγμα του θεωρήματος 3.3 των Jones και Majumdar (2014) δεν μπορεί να θεωρηθεί  $UE(s^2)$  – βέλτιστος καθώς υπάρχουν

στήλες στον πίνακα σχεδιασμού του που είναι ταυτόσημες και υπάρχει σύγχυση των παραγοντικών επιδράσεων. Παρακάτω δίνεται ο υπερκορεσμένος σχεδιασμός  $X_8$  τονίζοντας τις στήλες 4 και 18 οι οποίες είναι ισοδύναμες.

**ΠΙΝΑΚΑΣ 4.2.33**

Σχεδιασμός  $X_8$ .

1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1
1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	1	1	1	1	-1	-1
1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	1
1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	-1	-1
1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	1
1	1	1	1	1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	-1	1
1	-1	1	-1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	1	-1
1	-1	-1	1	1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	1	-1	1

Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η οποιαδήποτε αφαίρεση γραμμών από τον αρχικό πίνακα Hadamard δεν είναι απαραίτητο ότι θα οδηγήσει σε βέλτιστους υπερκορεσμένους σχεδιασμούς. Η απαλοιφή των γραμμών πρέπει να γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε να μην προκύπτουν στήλες στο σχεδιασμό που θα εξεταστεί οι οποίες θα είναι ισοδύναμες.



# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

## Ελληνική

- Ευαγγελάρας, Χ. (2004). *Ορθογώνιοι σχηματισμοί και προβολικές ιδιότητες*, Διδακτορική Διατριβή. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών.
- Ευαγγελάρας, Χ. (2012). *Σημειώσεις ΠΜΣ στην «Εφαρμοσμένη Στατιστική» για το μάθημα Πειραματικοί Σχεδιασμοί*, Πανεπιστήμιο Πειραιά.
- Μαντάς, Π. (2005). *Συμβολή στην κατασκευή και ανάλυση των βέλτιστων υπερκορεσμένων σχεδιασμών*, Διδακτορική Διατριβή. Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο, Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών και Φυσικών Επιστημών.

## Ξένη

- Booth, K.H.V. and Cox, D.R. (1962). *Some systematic supersaturated designs*. *Technometrics*, **4**, 489 – 495.
- Box, G. E.P. and Meyer, R. D. (1986). *An Analysis for Unreplicated Fractional Factorials*, *Technometrics*, R. Daniel, 11 – 18.
- Bulutoglu, D. A. and Cheng, C. S. (2004). *Construction of  $E(s^2)$  – optimal supersaturated designs*, *The annals of Statistics*, **32:4**, 1662 – 1678.
- Bulutoglu, D.A. (2007). *Cyclically constructed  $E(s^2)$ -optimal supersaturated designs*. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **137**, 2413 – 2428.
- Bulutoglu, D. A. and Ryan, K. J. (2008).  *$E(s^2)$  – Optimal Supersaturated Designs with good minimax properties when  $N$  is odd*, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138**, 1754 – 1762.
- Butler, N. A., Mead R., Eskridge, K. M. and Gilmour, S. G. (2001). *A general method of constructing  $E(s^2)$  – optimal supersaturated designs*, *Royal Statistical Society*, **3**, 621 – 632.
- Cheng, C. S. (1997).  *$E(s^2)$  - optimal Supersaturated designs*, *Statistica Sinica*, **7**, 929-939.
- Das, A., Dey, A., Chan, L. Y. and Chatterjee, K. (2008). *On  $E(s^2)$  – optimal supersaturated designs*, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **138**, 3749 – 3757.
- Deng, L. Y., Lin, D. K. J. and Wang, J. (1996). *Marginally oversaturated designs*, *Communications in Statistics – Theory and Methods*, **25:11**, 2557 – 2573.
- Fontana, R., Rapallo, F. and Rogantin, M. P. (2013) *A characterization of saturated designs for factorial experiments*. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **147**, 204 – 211.
- Georgiou, S.D. (2014). *Supersaturated designs: A review of their construction and analysis*, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **144**, 92 – 109.

- Gupta, V. K., Parsad, R., Kole, B. and Bhar, L. (2008). *Computer – Generated Efficient Two – Level Supersaturated Designs*, Journal of Indian Society of Agricultural Statistics **62**, 183 – 194.
- Jones, B. and Majumdar, D. (2014). *Optimal Supersaturated Designs*, Journal of the American Statistical Association, **109:508**, 1592 – 1600.
- Kole, B., Gangwani, J., Gupta, V.K. and Parsad, R. (2010). *Two level supersaturated designs: a review*. Journal of Statistical Theory and Practice, **4**, 598 – 608.
- Lejeune, M. A. (2003). *A “Coordinate – Columnwise” exchange algorithm for the construction of supersaturated, saturated, and non – saturated experimental designs*, American Journal of Mathematical and Management Sciences, **23:1-2**, 109 – 142.
- Li, W. W. and Wu, C. F. J. (1997). *Columnwise – Pairwise Algorithms with Applications to the Construction of Supersaturated Designs*, Technometrics, **39:2**, 171 – 179.
- Lin, D. K. J. (1993). *A new class of supersaturated designs*, Technometrics, **35**, 28 – 31.
- Liu, M. and Zhang, R. (2000). *Construction of  $E(s_2)$  optimal supersaturated designs using cyclic BIBDs*. Journal of Statistical Planning and Inference, **91**, 139 – 150.
- Liu, Y., Ryan, S. and Dean, A.M. (2007). *Construction and analysis of  $E(s_2)$  efficient supersaturated designs*. Journal of Statistical Planning and Inference, **137**, 1516 – 1529.
- Lu, X. and Meng, Y. (2000). *A new method in the construction of two-level supersaturated designs*. Journal of Statistical Planning and Inference, **86**, 229 – 238.
- Montgomery, D.C. (2012). *Design and Analysis of Experiments 8<sup>th</sup> Edition*, John Wiley & Sons, New York.
- Nguyen, N. K. (1996). *An algorithmic approach to constructing supersaturated designs*, Technometrics, **38:1**, 69 – 73.
- Nguyen, N. K. and Cheng, C. S. (2008). *New  $E(s^2)$  – Optimal Supersaturated Designs Constructed from Incomplete Block Designs*, Technometrics, **50:1**, 26 – 31.
- Plackett, R. L. and Burman, J. P. (1946), *The design of optimum multifactorial experiments*, *Biometrika*, **33**, 303 – 325.
- Ryan, K. J. and Bulutoglu, D. A. (2007).  *$E(s^2)$  – Optimal supersaturated designs with good minimax properties*, Journal of Statistical Planning and Inference, **137**, 2250 – 2262.
- Satterthwaite, F. E. (1959), *Random Balance Experimentation*. Technometrics **1:2**, 111–137
- Singh, R. and Das, A. (2015). *On optimal two – level supersaturated designs*. Indian Institute of Technology Bombay.
- Suen, C.S. and Das, A. (2010).  *$E(s^2)$ -optimal supersaturated designs with odd number of runs*. Journal of Statistical Planning and Inference, **140**, 1398 –1409.
- Tang, B. and Wu, C. F. J. (1997). *A method for constructing supersaturated designs and its  $E(s^2)$ -optimality*, Canadian J. Statist., **25**, 191 – 201.
- Tang, B. and Wu, C.F.J. (1993). *A method for constructing supersaturated designs and its  $E(s_2)$ -optimality*. IIQP Research Report, RR-93 – 05, University of Waterloo.



Wu, C. F. J. (1993). *Construction of supersaturated designs through partially aliased interactions*, *Biometrika*, **80**, 661 – 669.













