

**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ  
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**



**ΠΜΣ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ  
ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**Προσεγγίσεις Τύπου Tijms στο Συλλογικό  
Πρότυπο της Θεωρίας Κινδύνων**

**ΔΟΥΛΓΕΡΑΚΗΣ ΣΤΕΦΑΝΟΣ**

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς,  
Ιούλιος 2020

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Πολίτης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων)
- Ψαρράκος Γεώργιος
- Μπούτσικας Μιχαήλ

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE  
SCIENCE



POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL  
SCIENCE & RISK MANAGEMENT

**Tijms-type approximations in the collective model  
of risk theory**

**DOULGERAKIS STEFANOS**

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science & Risk Management.

Piraeus, Greece

July 2020

*Στους γονείς μου,  
Χαράλαμπο και Αναστασία  
και στη θεία μου Βασιλική*

## Ευχαριστίες

Με την περάτωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας , θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη για την πολύτιμη βοήθεια, υπομονή και υποστήριξη του όλο αυτό το διάστημα. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους καθηγητές Μπούτσικα Μιχαήλ και Γεώργιο Ψαρράκο για την ανάγνωση της εργασίας μου. Ακόμη, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου και ιδιαίτερα την συνάδερφο και φίλη μου Φωτεινή καθώς επίσης και την οικογένειά μου για την εμπύχωση και την ηθική υποστήριξη που μου παρείχαν καθ'όλη την διάρκεια συγγραφής της εργασίας. Τέλος, έχω την ανάγκη να ευχαριστήσω την αείμνηστη γιαγιά μου Αγγελική στην οποία οφείλω πολλά.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην Αναλογιστική Επιστήμη, η Θεωρία Κινδύνου χρησιμοποιεί μαθηματικά μοντέλα για να περιγράψει τον κίνδυνο αφερεγγυότητας ή χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου ενός ασφαλιστή. Σε τέτοια μοντέλα, οι ποσότητες και τα μεγέθη που μας ενδιαφέρουν είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας, η κατανομή του πλεονάσματος αμέσως πριν την χρεοκοπία και του ελλείματος την στιγμή της χρεοκοπίας. Επίσης, ένα ακόμη μέγεθος που μας ενδιαφέρει είναι η συνάρτηση Gerber-Shiu ή αλλιώς αναμενόμενη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής που μελετάει την από κοινού συμπεριφορά των παραπάνω μεγεθών λαμβάνοντας υπόψιν και τον προεξοφλητικό παράγοντα καθώς επίσης και ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Στις περισσότερες περιπτώσεις ενός χαρτοφυλακίου ζημιών, η εύρεση της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας είναι εφικτή μόνο σε λίγες περιπτώσεις κατανομών που όμως στην πραγματικότητα δεν συναντάμε. Για όλα τα παραπάνω, είναι σημαντική η εύρεση προσεγγιστικών τιμών στην περίπτωση όπου ο ακριβής υπολογισμός των παραπάνω πιθανοτήτων δεν είναι εφικτός. Δεδομένου ότι το άθροισμα των κλιμακωτών υψών ακολουθεί μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή, είναι εφικτή η προσέγγιση της ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής χρησιμοποιώντας έναν συνδυασμό δύο εκθετικών κατανομών με την κατάλληλη επιλογή παραμέτρων όπως προτάθηκε από τον Tijms το 1986. Τέλος, θα γίνει εκτενής αναφορά στο μοντέλο διάχυσης και θα μελετήσουμε ξεχωριστά την πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται στον στοχαστικό παράγοντα, δηλαδή σε περιπτώσεις όπου έχουμε π.χ. μεταβολές επιτοκίων, καθώς και την συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας και θα βρούμε αντίστοιχες προσεγγίσεις τύπου Tijms.

## ABSTRACT

In Actuarial Science, Risk Theory makes use of mathematical models to describe the risk of insolvency or ruin of the claims portfolio of an insurer. In such models, the quantities and sizes which are of interest to us are the probability of ruin, the surplus right before ruin and the deficit at the moment of ruin. In addition, another value we are interested in is the Gerber- Shiu function, otherwise known as the expected discounted penalty function which looks into the joint behavior of the above-mentioned values, taking into account the discount factor as well as the Laplace transform of the time of ruin. In most of the cases of a claims portfolio, finding the exact probability of ruin is possible only in a few cases for the claim size distribution which, however, are not encountered in reality. For all the above mentioned reasons, it is important to find approximations in case the accurate calculation of the above - mentioned possibilities is not feasible. Given that the aggregate of the ladder heights follows a compound geometric distribution, estimating such a compound geometric distribution is possible by making use of a combination of two exponential distributions by selecting the right parameters, as proposed by Tijms in 1986. Finally, extensive reference will be made to the diffusion model and we shall be looking into approximations equivalent to those of Tijms.

## Περιεχόμενα

ΠΕΡΙΛΗΨΗ .....	6
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 .....	10
Εισαγωγή στην Θεωρία Χρεοκοπίας .....	10
1.1 Στοχαστικές Ανεξίξεις.....	10
1.2 Το κλασσικό πρότυπο της Θεωρίας Χρεοκοπίας.....	12
1.3 Κλιμακωτά Ύψη και Σωρευτική Απώλεια .....	14
1.4 Θεωρία Αξιοπιστίας & Βαθμίδα Αποτυχίας .....	18
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 .....	21
Προσεγγίσεις πιθανότητας χρεοκοπίας στο κλασσικό πρότυπο & Αριθμητικές Εφαρμογές .....	21
2.1 Εισαγωγή.....	21
2.1.1 Κάποια σημαντικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας .....	21
2.1.2 Ακριβής υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας.....	23
2.1.3 Προσεγγιστικές Μέθοδοι Πιθανότητας Χρεοκοπίας για το Κλασσικό Πρότυπο .....	28
2.1.4 Μετασχηματισμός Laplace .....	31
2.2 Αριθμητικές Εφαρμογές.....	35
2.2.1 Αριθμητική Εφαρμογή για Μείξη Εκθετικών Κατανομών .....	35
2.2.3 Αριθμητική Εφαρμογή για Μείξη Κατανομών Γάμμα(2,2) & Γάμμα(3,2)....	40
2.2.4 Αριθμητική Εφαρμογή προσέγγισης Εκθετικής μέσω Μείξης Erlang(2, $\beta_i$ )....	46
2.2.5 Αριθμητική Εφαρμογή προσέγγισης Pareto(5,4).....	51
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 .....	62
Ποσότητες πριν και μετά την χρεοκοπία & Αριθμητικές Εφαρμογές.....	62
3.1 Εισαγωγή.....	62
3.1.1 Αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu .....	62
3.1.2 Οι κατανομές Ελλείματος και Πλεονάσματος $G(u, y)$ και $P(u, y)$ .....	71
3.1.3 Φράγματα για την περιθώρια κατανομή του Ελλείματος.....	74
3.2 Αριθμητικές Εφαρμογές.....	76
3.2.1 Αριθμητική Εφαρμογή για Μείξη Εκθετικών Κατανομών .....	76



3.2.2 Αριθμητική Εφαρμογή για Γάμμα(2,2) .....	80
3.2.3 Αριθμητική Εφαρμογή για Μείξη Κατανομών Γάμμα(2,2) & Γάμμα(3,2)....	81
3.2.4 Αριθμητική Εφαρμογή για την συνάρτηση Gerber-Shiu.....	84
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4</b> .....	<b>91</b>
Το Μοντέλο Διάχυσης των Dufresne & Gerber & Αριθμητικές Εφαρμογές.....	91
4.1 Εισαγωγή.....	91
4.1.1 Στοχαστική Διαδικασία Πλεονάσματος στο Μοντέλο Διάχυσης.....	91
4.1.2 Κλιμακωτά Ύψη και Σωρευτική Απώλεια στο Μοντέλο Διάχυσης.....	92
4.1.3 Πιθανότητα Χρεοκοπίας στο Μοντέλο Διάχυσης .....	96
4.1.4 Προσεγγίσεις Πιθανότητας Χρεοκοπίας στο Μοντέλο Πλεονάσματος των Dufresne & Gerber.....	99
4.2 Αριθμητικές Εφαρμογές στο Μοντέλο Διάχυσης .....	106
4.2.1 Αριθμητική Εφαρμογή για την Εκθετική με $\beta = 5$ .....	106
4.2.2 Αριθμητική Εφαρμογή για Μείξη 3 Εκθετικών Κατανομών .....	110
4.2.3 Αριθμητική Εφαρμογή για προσέγγιση Pareto μέσω μείξης εκθετικών στο μοντέλο διάχυσης.....	113
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ</b> .....	<b>117</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ</b> .....	<b>156</b>

# ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

## Εισαγωγή στην Θεωρία Χρεοκοπίας

Στο κεφάλαιο αυτό, αρχικά θα κάνουμε μια σύντομη εισαγωγή στις στοχαστικές ανελίξεις. Θα κάνουμε μια εισαγωγή στο κλασικό πρότυπο της Θεωρίας Κινδύνου όπως μελετήθηκε από τον Lundberg στις αρχές του 20<sup>ου</sup> αιώνα και θα μελετήσουμε σε θεωρητικό επίπεδο τα μεγέθη που το θεμελιώνουν. Συγκεκριμένα, θα εισάγουμε την έννοια των κλιμακωτών υψών και της σωρευτικής απώλειας καθώς και του χρόνου χρεοκοπίας και θα μελετήσουμε εκτενώς την πιθανότητα χρεοκοπίας που είναι βασικό αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας μιας και οι προσεγγίσεις που θα μελετήσουμε σε μεταγενέστερα κεφάλαια θα συγκριθούν με την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας προκειμένου να καταλήξουμε σε ασφαλή συμπεράσματα για την προσαρμογή τους. Τέλος θα εισάγουμε την έννοια της βαθμίδας αποτυχίας και του μέσου υπολοιπούμενου χρόνου ζωής και θα κάνουμε μια μικρή αναφορά στις κλάσεις κατανομών που σχετίζονται με την βαθμίδα αποτυχίας.

### 1.1 Στοχαστικές Ανελίξεις

Η θεωρία στοχαστικών διαδικασιών μπορεί να οριστεί ως μία προέκταση της θεωρίας πιθανοτήτων και έχει πλήθος εφαρμογών σε πλήθος επιστημών όπως π.χ. στην βιολογία, χημεία, οικονομία. Η ανάγκη χρήσης τέτοιων ανελίξεων προκύπτει όταν η μεταβλητή ή οι μεταβλητές που μελετάμε, μεταβάλλονται χρονικά. Στο παρόν κεφάλαιο θα κάνουμε μία επισκόπηση βασικών εννοιών στις στοχαστικές ανελίξεις με ιδιαίτερη έμφαση στη στοχαστική ανέλιξη Poisson που είναι η συνήθης ανέλιξη που ακολουθεί το πλήθος ζημιών σε ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων.

Μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών  $\{X_t\}_{t \in T}$ , ονομάζεται στοχαστική ανέλιξη. Το σύνολο  $T$  καλείται δεικτοσύνη και αναπαριστά τον χρόνο.

Αν το σύνολο  $T$  είναι αριθμήσιμο, π.χ.  $T = \{0, 1, 2, \dots\}$ , τότε η στοχαστική ανέλιξη είναι διακριτού χρόνου ενώ αν  $T$  είναι κάποιο διάστημα, π.χ.  $[0, \infty]$ , τότε λέμε ότι είναι συνεχούς χρόνου.

#### Απαριθμήτρια Στοχαστική Ανέλιξη

Έστω  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  το πλήθος των εμφανιζόμενων κινδύνων στο διάστημα  $[0, t]$ . Μια τέτοια διαδικασία ονομάζεται απαριθμήτρια ανέλιξη αν και μόνο αν,

- $N(t) > 0$  και  $N(0) = 0$
- $N(t)$  διακριτή στοχαστική διαδικασία
- Αν  $j \leq t$ , τότε  $N(j) \leq N(t)$  και η τυχαία μεταβλητή  $N(t) - N(j)$ , δηλώνει τον αριθμό των γεγονότων στο διάστημα  $[j, t]$ .

Επίσης, μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία μπορεί να έχει τις εξής ιδιότητες:

- **Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις** αν οι αριθμοί των γεγονότων σε ξένα χρονικά διαστήματα είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.
- **Στάσιμες Προσαυξήσεις** αν η μεταβολή της  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  σε ένα διάστημα  $[t, t + h]$  εξαρτάται μόνο από το πλάτος του διαστήματος  $h$ , και όχι από το σημείο που ξεκινά η απαρίθμηση της στοχαστικής διαδικασίας.

Μια ιδιαίτερη περίπτωση απαριθμητριών στοχαστικών διαδικασιών αποτελεί η στοχαστική ανέλιξη Poisson  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ .

**Ορισμός 1.1.1.** Μία απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  αποτελεί μία στοχαστική ανέλιξη Poisson αν έχει τις παρακάτω ιδιότητες :

1.  $N(0) = 0$
2. Σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα  $h$ , μπορεί να συμβεί το πολύ ένα γεγονός με πιθανότητα ανάλογη του πλάτους του διαστήματος. Δηλαδή,
 
$$P(N(t+h) = n+j | N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h), & k = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h), & k = 0 \\ o(h), & k \geq 2 \end{cases}$$
 όπου το  $o(h)$  υποδηλώνει μια ποσότητα που συγκλίνει στο 0 πιο γρήγορα από το  $h$  όταν  $h \rightarrow 0$  και  $\lambda$  είναι το rate της ανέλιξης Poisson.
3. Ο αριθμός των συμβάντων σε ένα φραγμένο χρονικό διάστημα μετά τη χρονική στιγμή  $t$  είναι ανεξάρτητος των του αριθμού των συμβάντων μέχρι εκείνη την χρονική στιγμή.

### Στοχαστική διαδικασία Wiener

**Ορισμός 1.1.2.** Μια στοχαστική διαδικασία  $\{W(t)\}_{t \geq 0}$  είναι μια διαδικασία Wiener εάν:

$$i) W(0) = 0$$

ii)  $\{W(t)\}_{t \geq 0}$  έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις

$$iii) \forall t > 0, \{W(t)\}_{t \geq 0} \sim N(0, t)$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε την διαδικασία Wiener σε διαδικασία Wiener με όρο διάχυσης στο αντίστοιχο μοντέλο διάχυσης ( Dufresne & Gerber 1991).

Άρα,  $\{\sigma W(t)\}_{t \geq 0}$  είναι μια διαδικασία Wiener με όρο διάχυσης  $\sigma^2 > 0$ .

Και επομένως, η σ.π.π της  $W(t)$  είναι η παρακάτω,

$$f_{W(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}.$$

### Ανανεωτική Ανέλιξη

**Ορισμός 1.1.3.** Μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία  $\{N(t)\}_{t \geq 0}$  στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι  $T_1, T_2, \dots, T_n$  είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές και ισόνομες, ονομάζεται ανανεωτική ανέλιξη.

- Η κατανομή των ενδιαμέσων χρόνων σε μία ανανεωτική ανέλιξη μπορεί να είναι π.χ. Γεωμετρική, Γάμμα, Λογαριθμοκανονική, Weibull, Pareto.
- Σε αυτό το σημείο πρέπει να ορίσουμε την ανανεωτική συνάρτηση  $m(t) = E[N(t)]$ , που δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό γεγονότων στο διάστημα  $[0, t]$ .

## 1.2 Το κλασσικό πρότυπο της Θεωρίας Χρεοκοπίας

Τα θεμέλια της μαθηματικής θεωρίας κινδύνου τέθηκαν το 1903 από τον Σουηδό αναλογιστή Filip Lundberg δημοσιεύοντας την διδακτορική του διατριβή “Approximations of the probability functions/Reinsurance of Collective Risks”, στην οποία εισήγαγε την σύνθετη διαδικασία Poisson. Η εργασία του θεωρήθηκε πρωτοπόρα για την εποχή, καθώς προηγήθηκε της θεμελίωσης της θεωρίας πιθανοτήτων και των στοχαστικών διαδικασιών. Μάλιστα οι Facordi και Fabozzi, περιγράφουν την διατριβή του Lundberg ως καινοτόμο για την εποχή του. Το 1930 ο Σουηδός μαθηματικός και αναλογιστής Harald Cramer προχώρησε στην επέκταση της διδακτορικής διατριβής του Lundberg θεμελιώνοντας και ενσωματώνοντας την θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών. Έτσι, προέκυψε και το περίφημο μοντέλο των Cramer-Lundberg, το οποίο περιγράφει την δυναμική εξέλιξη του πλεονάσματος στον χρόνο, το οποίο ονομάστηκε κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου (Cramer-Lundberg Risk Model). Σε αυτό το μοντέλο παραδεχόμαστε ότι οι συνολικές αποζημιώσεις μεταβάλλονται στον χρόνο σύμφωνα με μία στοχαστική ανέλιξη Poisson και ότι η ένταση ασφαλιστρών  $c > 0$ .

Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος ορίστηκε ως,

$$U(t) = u + P(t) - S(t),$$

όπου  $P(t)$  είναι το συνολικό ασφάλιστρο στο διάστημα  $[0, t]$  και  $S(t)$  είναι η σύνθετη ανέλιξη Poisson. Το  $U(t)$  καλείται αποθεματικό ή πλεόνασμα την χρονική στιγμή  $t$  ενώ το  $U(0) = u$ , λέγεται αρχικό αποθεματικό (initial surplus). Στη θεωρία χρεοκοπίας εξετάζουμε τις συνολικές αποζημιώσεις όπως αυτές εξελίσσονται στον χρόνο. Για αυτό τον σκοπό χρησιμοποιούμε μία στοχαστική ανέλιξη  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . Αρχικά, ορίζουμε ως  $P(t) = ct$ , τα συνολικά ασφάλιστρα ανά μονάδα χρόνου και ως  $c$ , την σταθερά που ονομάζουμε ένταση ασφαλιστρου.

Η στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος ορίζεται ως εξής:

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} x_i, \quad t \geq 0$$

όπου  $u$  είναι το αρχικό αποθεματικό, το κεφάλαιο δηλαδή που βάζει η εταιρία για να αποφύγει μια πιθανή χρεοκοπία του χαρτοφυλακίου της. Το  $U(t)$  είναι το πλεόνασμα την χρονική στιγμή  $t$ . Οι τυχαίες μεταβλητές  $X_i$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Μια υπόθεση που κάνουμε στο κλασσικό μοντέλο είναι ότι  $c > \lambda \mu_1$  η οποία είναι γνωστή ως συνθήκη του καθαρού κέρδους. Εν ολίγοις, τα έσοδα πρέπει να είναι περισσότερα από τα αναμενόμενα έξοδα ώστε το αναμενόμενο κέρδος της εταιρίας να είναι θετικό, δηλαδή να

είναι βιώσιμη η ασφαλιστική εταιρεία. Η παράμετρος  $\lambda$  είναι η ένταση της ανέλιξης Poisson και είναι ίση με  $\lambda = \frac{E[N(t)]}{t}$ , ενώ η  $\mu_1$  είναι η μέση τιμή των αποζημιώσεων.

**Ορισμός 1.2.1** Στο κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας το περιθώριο ασφαλείας ή συντελεστής ασφαλείας  $\theta$  (premium loading factor), ορίζεται από τη σχέση ,

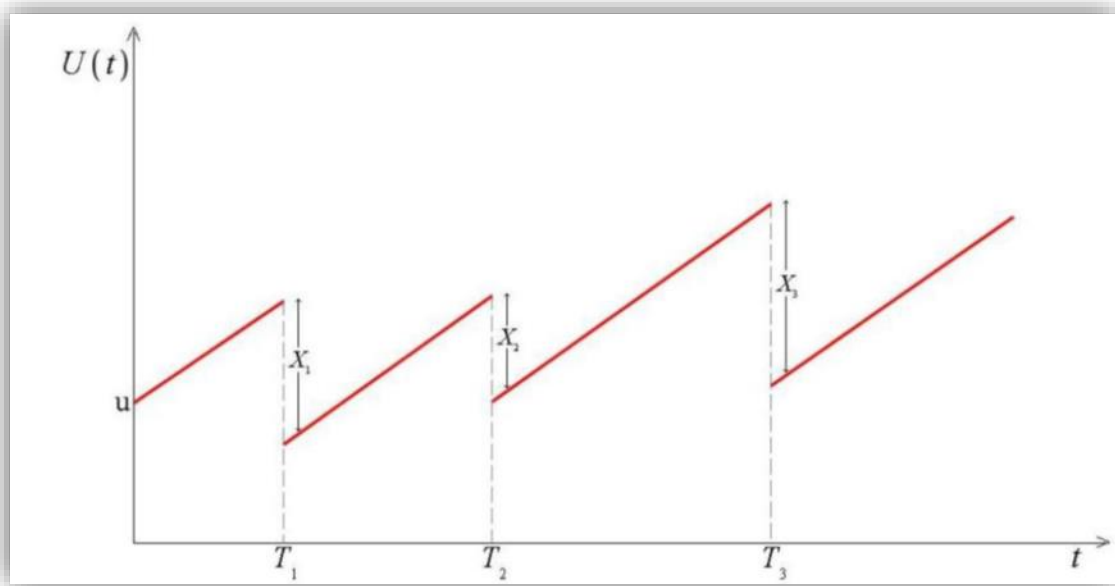
$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu_1} - 1.$$

Ο λόγος που μας ενδιαφέρει η μελέτη αυτής της ποσότητας είναι ότι εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους του ασφαλιστή και συνήθως παίρνει τιμές από 0 έως 1. ( $0 < \theta < 1$ ) ή αλλιώς από 0 έως 100%. Ένα χαρτοφυλάκιο με  $\theta > 100\%$  θεωρείται μη ανταγωνιστικό .

Εδώ να ορίσουμε τον συντελεστή προσαρμογής, ο οποίος ορίζεται ως η θετική σταθερά  $R$  η οποία είναι ρίζα, ως προς  $r$ , της εξίσωσης,

$$M_x(r) = 1 + (1 + \theta)\mu_1 r, \tag{1.2.1}$$

η οποία είναι γνωστή ως εξίσωση του Lundberg.



**Σχήμα 1.2.1** :Η ανέλιξη του πλεονάσματος (www.ScienceDirect.com)

**Ορισμός 1.2.2** . Ορίζουμε ως χρόνο χρεοκοπίας τη χρονική στιγμή που συμβαίνει η χρεοκοπία

$$T = \begin{cases} 0, & \text{inf}\{t: U(t) < 0\} \\ \infty, & \text{αν } U(t) > 0 \forall t \end{cases}$$

Ο χρόνος  $T$  είναι μία ελλειμματική τ.μ (defective random variable), εφόσον,

$$P(T < \infty) < 1 \quad \& \quad P(T = \infty) > 0.$$

**Ορισμός 1.2.3.** Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο με αρχικό αποθεματικό  $u$ , ορίζεται από τη σχέση:

$$\psi(u) = Pr[U(t) < 0, t \geq 0 | U(0) = u] = Pr[T < \infty | U(0) = u].$$

Παρατηρούμε ότι το ενδεχόμενο να είναι το πλεόνασμα αρνητικό για κάποιο  $t$ , ισούται με το ενδεχόμενο ο χρόνος χρεοκοπίας να είναι πεπερασμένος ( $T < \infty$ ).

Σε αυτό το σημείο, είναι απαραίτητο να ορίσουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας

$$\delta(u) = 1 - \psi(u),$$

για  $u \geq 0$  η οποία α) είναι μία αύξουσα συνάρτηση και β)  $\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1$ .

### 1.3 Κλιμακωτά Ύψη και Σωρευτική Απώλεια

Μεγάλο ενδιαφέρον στην Θεωρία Κινδύνου έχει η μελέτη του μεγέθους της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό. Οι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές  $L_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , που εκφράζουν την σταδιακή πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό ονομάζονται κλιμακωτά ύψη (ladder heights). Επίσης, ορίζουμε ως  $K$  το πλήθος των κλιμακωτών υψών ( $L_i$ ). Αποδεικνύεται ότι η τ.μ.  $K$  ακολουθεί γεωμετρική κατανομή και θεωρούμε ως «αποτυχία» την εμφάνιση ενός  $L_i$  δηλαδή την εμφάνιση μιας πτώσης του πλεονάσματος. Με κάθε νέα πτώση του πλεονάσματος, η πιθανότητα να προκύψει ένα καινούργιο  $L_i$  ισούται με την πιθανότητα  $\psi(0)$ . Η μεταβλητή  $K$  μετρά τον αριθμό των αποτυχιών μέχρι την 1<sup>η</sup> επιτυχία και η συνάρτηση πιθανότητας της μεταβλητής  $K$  δίνεται από την εξής σχέση:

$$P(K = k) = [\psi(0)]^k \delta(0) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right). \quad (1.3.1)$$

Στο κλασσικό πρότυπο, ορίζουμε ως  $L$ , την συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό  $u$ , η οποία είναι γνωστή και ως μέγιστη σωρευτική απώλεια και δηλώνει την συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό  $u$ . Έτσι, ορίζουμε την σύνθετη τυχαία μεταβλητή  $L$  ως εξής:

$$L = \begin{cases} L_1 + L_2 + \dots + L_k = \sum_{i=1}^k L_i, & \text{αν } K \geq 1 \\ 0, & \text{αν } K = 0 \end{cases} \quad (1.3.2)$$

Εδώ να σημειώσουμε ότι η πιθανότητα η  $L$  να πάρει την τιμή μηδέν είναι,

$$P(L = 0) = P(K = 0) = \delta(0). \quad (1.3.3)$$

Επίσης ισχύει ότι,

$$P(L \leq u) = \delta(u).$$

Οπότε αντίστοιχα, η πιθανότητα η συνολική πτώση του πλεονάσματος να υπερβαίνει μία σταθερή τιμή  $u$  είναι,

$$P(L > u) = \psi(u).$$

**Πρόταση 1.3.1.** Στο κλασσικό μοντέλο σε περίπτωση πτώσης του πλεονάσματος, τα κλιμακωτά ύψη είναι μεταβλητές ισόνομες και ανεξάρτητες που έχουν ,

- Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ,

$$f_e(x) = \frac{1}{\mu_1}(1 - F(x)).$$

- Συνάρτηση κατανομής (Συνάρτηση Ισορροπίας),

$$F_e(x) = Pr(L \leq x) = \int_0^x \frac{1}{\mu_1}(1 - F(y))dy.$$

**Σημείωση :** Στις ακόλουθες αριθμητικές εφαρμογές του Κεφαλαίου 2 καθώς και στον ορισμό φραγμάτων θα χρησιμοποιείται αντί για τον συμβολισμό  $F_e(x)$  ο πιο συνήθης συμβολισμός  $H(x)$  και αντίστοιχα και για την δεξιά ουρά της κατανομής  $\bar{F}_e(x)$  ο συμβολισμός  $\bar{H}(x)$ .

**Πρόταση 1.3.2.** Η  $\delta(u)$  ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση,

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)f(x)dx,$$

η οποία είναι μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την συνάρτηση  $\delta$ .

**Απόδειξη:**

$$\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty P(\text{μη χρεοκοπίας με αποθεματικό } u | T_1 = t, X_1 = x) b(t) f(x) dx dt$$

Επίσης,

$$P(\text{μη χρεοκοπίας με πλεόνασμα } u | T_1 = t, X_1 = x) = \delta(u + ct - x).$$

Άρα,

$$\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^\infty \delta(u + ct - x) b(t) f(x) dx dt .$$

Όμως, ισχύει ότι

$$u + ct - x \geq 0 \Rightarrow x \leq u + ct.$$

Επομένως , βρίσκουμε ότι,

$$\delta(u) = \int_0^\infty \int_0^{u+ct} \delta(u + ct - x) \lambda e^{-\lambda t} f(x) dx dt.$$

Κάνοντας, αλλαγή μεταβλητής,

$$u + ct = y \Rightarrow t = y - \frac{u}{c},$$

οπότε και

$$d(t) = \frac{d(y)}{c}.$$

Βλέπουμε ότι,

$$\delta(u) = \frac{1}{c} \int_u^\infty \int_0^y \delta(y-x) f(x) \lambda e^{\lambda(y-u)/c} dx dy$$

και

$$\frac{\lambda}{c} \cdot e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_u^\infty \int_0^u \delta(y-x) f(x) \lambda e^{-\lambda y/c} dx dy.$$

Για ευκολία ορίζουμε τις συναρτήσεις  $\delta_1$  και  $\delta_2$ ,

$$\delta_1(u) = \frac{\lambda}{c} e^{-\frac{\lambda u}{c}}$$

και

$$\delta_2(u) = \int_u^\infty \left( \int_0^y \delta(y-x) f(x) e^{-\lambda y} dx \right) dy.$$

Χρησιμοποιούμε παραγωγήσι γινομένου,

$$\delta_1'(u) \delta_2(u) + \delta_1(u) \delta_2'(u) = \delta'(u),$$

και επομένως παίρνουμε ότι,

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c} \delta(u) - \frac{\lambda}{c} e^{\frac{\lambda u}{c}} \int_0^u \delta(u-x) f(x) e^{-\frac{\lambda u}{c}} dx = \frac{\lambda}{c} \delta(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x) f(x) dx.$$

Παρόμοια ,έχουμε την παρακάτω εξίσωση :

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u-x) \bar{F}(x) dx,$$

όπου  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  η ουρά της κατανομής των αποζημιώσεων.

Έχουμε,

$$1 = \lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c} \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \delta(u-x) \bar{F}(x) dx .$$



Όμως,

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u - x) = 1$$

και

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \bar{F}(x) dx = \int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx = \mu_1.$$

Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό  $u = 0$ , είναι ίση με

$$\delta(0) = 1 - \frac{\lambda \mu_1}{c}.$$

Για το περιθώριο ασφαλείας  $\theta$  ισχύει,

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1 \Rightarrow 1 + \theta = \frac{c}{\lambda \mu_1}.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την ποσότητα  $\delta(0)$  συναρτήσει του  $\theta$  :

$$\delta(0) = 1 - \frac{1}{1 + \theta} = \frac{\theta}{1 + \theta}.$$

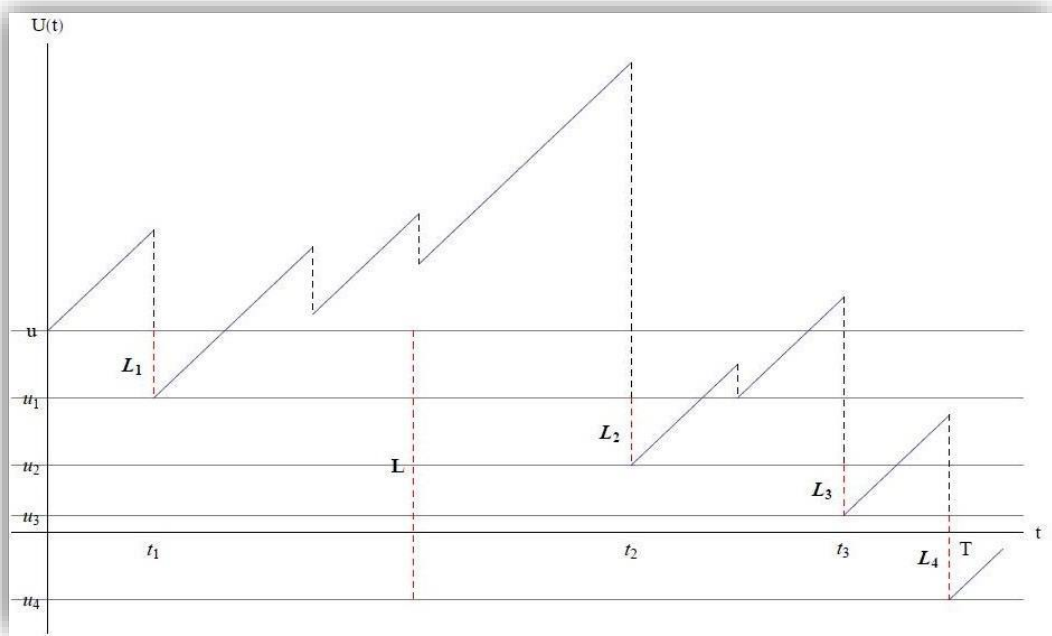
Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό  $u = 0$ , είναι ίση με,

$$\psi(0) = 1 - \delta(0) = \frac{1}{1 + \theta},$$

και μπορούμε να εκφράσουμε την ολοκληρωδιαφορική εξίσωση ως ακολούθως,

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda \mu_1}{c} + \frac{\lambda}{c} \int_0^u \delta(u - x) \bar{F}(x) dx$$

η οποία είναι μία ελλειματική ανανεωτική εξίσωση.



Σχήμα 1.3.1 : (Πολίτης 2017) Κλιμακωτά ύψη και Μέγιστη Σωρευτική Απώλεια

## 1.4 Θεωρία Αξιοπιστίας & Βαθμίδα Αποτυχίας

Θεωρούμε μία τυχαία μεταβλητή  $T$  που αναπαριστά τον χρόνο μέχρι την αποτυχία ενός συστήματος. Για παράδειγμα, αποτυχία για έναν οργανισμό είναι ο θάνατος. Συγκεκριμένα, ως αποτυχία στην περίπτωση μας θεωρούμε την έλευση μίας ασφαλιστικής ζημιάς. Υψίστης σημασίας σε μία ασφαλιστική εταιρεία, είναι η ανάλυση του πάχους της δεξιάς ουράς για την εκτίμηση του κινδύνου. Για αυτό τον σκοπό θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες γνώσεις από την Θεωρία Αξιοπιστίας. Τα παρακάτω αποτελέσματα είναι βασισμένα στην εργασία των Willmot & Lin (1998).

**Ορισμός 1.4.1.** Ως βαθμίδα αποτυχίας (failure rate), ορίζουμε την ποσότητα που εκφράζει τον ρυθμό αποτυχίας μια μονάδας ή ενός συστήματος. Εστω,  $T$  μία συνεχής μη αρνητική τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής  $F(t) = \Pr(T \leq t), T \geq 0$ . Η βαθμίδα αποτυχίας  $\lambda(t)$  ορίζεται ως εξής.

$$\lambda(y) = \frac{f(y)}{1 - F(y)} = \frac{f(y)}{\bar{F}(y)} = -\frac{d \ln(\bar{F}(y))}{dy}, y \geq 0. \quad (1.4.1)$$

Ένας ισοδύναμος ορισμός με τον παραπάνω είναι ο εξής:

**Ορισμός 1.4.2.** Μία τυχαία μεταβλητή  $Y$  έχει  $DFR(IFR)$  κατανομή ,δηλαδή Decreasing Failure rate/Increasing Failure Rate , όταν η δεξιά ουρά της  $\bar{F}(t)$  είναι λογαριθμικά κυρτή(κοίλη) ή αλλιώς όταν  $\forall t, h \geq 0$  η συνάρτηση

$$\frac{\bar{F}(y + h)}{\bar{F}(y)},$$

είναι αύξουσα(φθίνουσα )ως προς  $y$ .

Μια κατανομή με σταθερή βαθμίδα αποτυχίας ( $\lambda(t) = \lambda$ ),  $\forall t$  είναι εξίσου *DFR* & *IFR*.

Από σχέση (1.4.1), ολοκληρώνοντας και τα 2 μέλη,

$$\int_0^y \lambda(t) dt = -\ln \bar{F}(y) \stackrel{y \geq 0}{\implies} \bar{F}(y) = e^{-\int_0^y \lambda(t) dt}$$

**Σημείωση:**

- Μία συνάρτηση  $f(\cdot)$  καλείται κυρτή συνάρτηση αν ισχύει η παρακάτω σχέση

$$f\left(\frac{y+h}{2}\right) \leq \frac{f(y) + f(h)}{2} \quad (1.4.2)$$

- Μία συνάρτηση  $f(\cdot)$  καλείται κοίλη συνάρτηση αν ισχύει η παρακάτω σχέση

$$f\left(\frac{y+h}{2}\right) \geq \frac{f(y) + f(h)}{2} \quad (1.4.3)$$

**Ορισμός 1.4.3.** Μια κατανομή  $F$  ανήκει στην κλάση (*NBU*), δηλαδή New Better Than Used, όταν ισχύει,

$$\bar{F}(y+h) \leq \bar{F}(y)\bar{F}(h) \quad \forall y, h \geq 0$$

και (*NWU*) όταν  $\forall y, h \geq 0$  ισχύει,

$$\bar{F}(y+h) \geq \bar{F}(y)\bar{F}(h).$$

Η κλάση *NWU* δηλώνει την επιβίωση ενός συστήματος μετά τον χρόνο  $y+h$  δεδομένου της επιβίωσης στον χρόνο  $y$  να είναι μεγαλύτερη από την πιθανότητα επιβίωσης  $\bar{F}(h)$  ενός άλλου συστήματος. Η κλάση (*IFR*) περιέχεται στην κλάση (*NBU*) και η κλάση (*DFR*) περιέχεται στη κλάση (*NWU*).

Έχουμε ορίσει ως  $Y$  τον χρόνο ζωής ενός αντικειμένου. Ορίζουμε τις παρακάτω μεταβλητές που θα μας χρειαστούν αργότερα.

- $T = Y - y | Y > y$  είναι η μεταβλητή που δηλώνει την υπολοιπόμενη ζωή του  $Y$ .

**Πρόταση 1.4.4.** Ο μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ζωής του  $Y$  συναρτήσει της βαθμίδας αποτυχίας  $\lambda(y)$ , ικανοποιεί την παρακάτω πρόταση:

$$E(T) := m_Y(y) = \int_0^{\infty} e^{-\int_y^{y+t} \lambda(x) dx} dt, y \geq 0$$

**Απόδειξη :** Έχουμε ότι,

$$\frac{\bar{F}(y+t)}{\bar{F}(y)} = \frac{e^{-\int_0^{y+t} \lambda(x) dx}}{e^{-\int_0^y \lambda(x) dx}} = e^{-\int_0^{y+t} \lambda(x) dx + \int_0^y \lambda(x) dx} = e^{-\int_y^{y+t} \lambda(x) dx}.$$

Οπότε, καταλήγουμε ότι,

$$m_Y(y) = \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(y+t)}{\bar{F}(y)} dt = \int_0^{\infty} e^{-\int_y^{y+t} \lambda(x) dx} dt.$$

Ο μέσος υπολοιπόμενος χρόνος της  $F(y)$ , δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$m_Y(y) = \frac{\int_y^{\infty} \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(y)}. \quad (1.4.4)$$

Οπότε η σχέση (1.4.4) για  $y = 0$  γίνεται,

$$m(0) = E(Y),$$

και η  $F$  είναι IMRL(DMRL) εάν  $m_Y(y)$  είναι αύξουσα ή αντίστοιχα φθίνουσα στο  $y$ . Η κλάση DFR(IFR) περιέχεται στην κλάση IMRL(DMRL).

Άλλες σημαντικές κλάσεις που πρέπει να αναφέρουμε είναι οι NWUE(NBUE), δηλαδή New Worse (Better) than used in Expectation.

Η κλάση NWUE(NBUE) δηλώνει ότι η μέση υπολοιπόμενη ζωή ενός καινούριου συστήματος αναμένεται να είναι μικρότερη(μεγαλύτερη) από ενός παλιού συστήματος.

$$m(y) \geq (\leq) E(Y) \Rightarrow \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(y+h)}{\bar{F}(y)} dh \geq (\leq) \int_0^{\infty} \bar{F}(h) dh = E(Y).$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Προσεγγίσεις πιθανότητας χρεοκοπίας στο κλασικό πρότυπο & Αριθμητικές Εφαρμογές

#### 2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε περιπτώσεις κατανομών όπου η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια όπως στην περίπτωση των Εκθετικών Κατανομών και της μείξης Εκθετικών Κατανομών. Επίσης, θα δούμε προσεγγίσεις αυτών των κατανομών με ιδιαίτερη έμφαση στην μέθοδο του Tijms. Συγκεκριμένα, αφού παρουσιάσουμε τις προσεγγίσεις των Tijms, Willmot, De Vylder, Cramer και Beekman-Bowers, θα εξετάσουμε κάποιες εφαρμογές αυτών κάνοντας σύγκριση με την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας όπου αυτή μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια. Σε αυτή την ενότητα με βάση τους Willmot & Lin (1998), θα παρουσιάσουμε το βασικό αντικείμενο μελέτης της παρούσας εργασίας που είναι η προσέγγιση του Tijms σε σύγκριση με άλλες προσεγγίσεις και την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας για διάφορες κατανομές και μείξεις κατανομών εξετάζοντας εφαρμογές προκειμένου να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για την αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

##### 2.1.1 Κάποια σημαντικά αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας

Ορίζουμε ως  $\psi_1(u)$  την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με την 1<sup>η</sup> απαίτηση όταν το αρχικό αποθεματικό είναι  $u$ .

- Η  $\psi_1(u)$  αποτελεί ένα κάτω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$ , δηλαδή  $\psi_1(u) \leq \psi(u) \forall u \geq 0$ . Αποτελεί ένα δείκτη της πιθανότητας να συμβεί γρήγορα χρεοκοπία σε ένα χαρτοφυλάκιο.
- Πολλές φορές ο κίνδυνος που μελετάμε είναι ένα και μόνο συμβάν το οποίο όμως μπορεί να είναι και καταστροφικό αν και σπάνιο ενδεχομένως. Τότε, η συνάρτηση κατανομής  $F$  είναι η συνολική ζημιά για την εταιρεία από την πραγματοποίηση του συμβάντος. Τότε, αναφερόμαστε σε χρεοκοπία από ένα ζημιολόγο γεγονός.

**Πρόταση 2.1.1.** Στο κλασικό πρότυπο της Θεωρίας Κινδύνου έστω  $\lambda$  η ένταση της ανέλιξης Poisson η οποία εκφράζει την άφιξη των απαιτήσεων και  $c$ , η ένταση της του ασφαλιστρού. Τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας με την 1<sup>η</sup> αποζημίωση δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\psi_1(u) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} \bar{F}(u + ct) dt$$

όπου  $F$  η συνάρτηση κατανομής για το μέγεθος μιας αποζημίωσης.

Στο κλασσικό πρότυπο της Θεωρίας Κινδύνου ,δύο σημαντικές σχέσεις που προκύπτουν από την εξίσωση του Lundberg ,είναι

- η ανισότητα του Lundberg και
- ο ασυμπτωτικός τύπος των Cramer-Lundberg.

Οι σχέσεις αυτές μας δίνουν μία καλή εικόνα της πιθανότητας χρεοκοπίας σε περίπτωση που δεν υπάρχει αναλυτικός τύπος υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(u)$ . Επίσης οι σχέσεις αυτές ισχύουν και στην περίπτωση που οι χρόνοι μεταξύ δύοδιαδοχικών αποζημιώσεων δεν ακολουθούν την Εκθετική κατανομή καθώς και όταν οι αποζημιώσεις δεν είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

### Ανισότητα του Lundberg

Η ανισότητα του Lundberg μας δίνει ένα εκθετικό άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$ ,

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}. \quad (2.1.1)$$

### Ασυμπτωτικός Τύπος των Cramer-Lundberg

**Πρόταση 2.1.2.** Με την προϋπόθεση ότι ,

$$\int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx < \infty,$$

η πιθανότητα χρεοκοπίας παριστάνεται απο την ακόλουθη σχέση

$$\psi(u) \sim C e^{-Ru} \text{ καθώς } u \rightarrow \infty.$$

Δηλαδή, εκφράζοντας το διαφορετικά

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C ,$$

οπου η σταθερά  $C > 0$  υπολογίζεται ως εξής:

$$C = \frac{\theta \mu_1}{R \int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx}.$$

Αρα, καταλήγουμε στον παρακάτω ασυμπτωτικό τύπο για την πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi_{CL}(u) \sim C e^{-Ru} . \quad (2.1.2)$$

### Ενα κάτω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας

Ενα σημαντικό αποτέλεσμα που θα χρησιμοποιήσουμε εκτενώς στις αριθμητικές εφαρμογές που θα δούμε αργότερα, είναι το παρακάτω .

**Πρόταση 2.1.3.** Εστω στο κλασσικό πρότυπο  $H$  είναι η συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών (ή κατανομή ισορροπίας) και  $\theta$  είναι το περιθωριο ασφαλείας. Τότε, ένα κάτω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση ,

$$\psi(u) \geq \frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}, \quad u \geq 0, \quad (2.1.3)$$

όπου  $\bar{H}(u) = 1 - H(u)$ .

## 2.1.2 Ακριβής υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας

### Ακριβής υπολογισμός πιθανότητας χρεοκοπίας για Εκθετικές Αποζημιώσεις

Ο ακριβής υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι δυνατός μόνο σε συγκεκριμένες περιπτώσεις όπου μπορούμε στη σχέση που συνδέει την ροπογεννήτρια των κλιμακωτών υψών με τη ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων να διακρίνουμε κάποια γνωστή κατανομή ή όταν η κατανομή  $F$  είναι εκθετική ή μείξη εκθετικών κατανομών.

**Πρόταση 2.2.1.** Στο κλασσικό πρότυπο, όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι η Εκθετική με παράμετρο  $\beta$ , η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\psi(u) = \psi(0)e^{-Ru} \quad (2.2.1)$$

**Απόδειξη:** Έστω ότι έχουμε μια εκθετική κατανομή με

$$M_X(r) = \frac{\beta}{\beta - r}, \quad r < \beta.$$

Ισχύει για την ροπογεννήτρια των κλιμακωτών υψών ότι,

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1 + \theta - M_X(r)}.$$

Από την σχέση αυτή παίρνουμε διαδοχικά,

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{\theta}{1 + \theta - \frac{\beta}{\beta - r}} - \frac{\theta}{1 + \theta}.$$

Πολλαπλασιάζοντας αριθμητή και παρονομαστή με  $(\beta - r)$ , έχουμε,

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{\theta(\beta - r)}{(1 + \theta)(\beta - r) - \beta} - \frac{\theta}{(1 + \theta)} \frac{(1 + \theta)(\beta - r)}{(1 + \theta)(\beta - r) - \beta} - \frac{\theta}{(1 + \theta)(\beta - r) - \beta}.$$

Κάνοντας πράξεις, παίρνουμε το εξής αποτέλεσμα για την ροπογεννήτρια της τ.μ.  $L$ ,

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} = \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} \left[ \frac{(1 + \theta)(\theta\beta - \theta r) - \theta^2\beta + r\theta + r\theta^2}{\theta\beta - r(1 + \theta)} \right]$$

και

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{1}{1 + \theta} \frac{\theta\beta}{\theta\beta - r(1 + \theta)}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στον παρακάτω τύπο για την ροπογεννήτρια,

$$M_L(r) = \frac{\theta}{1+\theta} + \frac{1}{1+\theta} \frac{\frac{\theta\beta}{1+\theta}}{\frac{\theta\beta}{1+\theta} - r}.$$

Η κατανομή  $L$  έχει ένα διακριτό κομμάτι στο μηδέν και ένα συνεχές τμήμα στο οποίο διακρίνουμε την ροπογεννήτρια της Εκθετικής με παράμετρο  $\frac{\theta\beta}{1+\theta}$  πολλαπλασιασμένη με τον όρο  $\frac{1}{1+\theta}$ .

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής  $L$  δίνεται ως εξής:

$$f_L(x) = \frac{1}{1+\theta} \frac{\theta\beta}{1+\theta} e^{-\left(\frac{\theta\beta}{1+\theta}\right)x} = \frac{1}{1+\theta} R e^{-Rx},$$

με συντελεστή προσαρμογής,

$$R = \frac{\theta\beta}{1+\theta}.$$

Επομένως, καταλήγουμε στην σχέση (2.2.1) η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον τύπο,

$$\psi(u) = P(L > u) = \int_u^{\infty} f_L(x) dx = \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru} = \psi(0)e^{-Ru}.$$

Όταν το  $\theta$  παίρνει μικρές τιμές, η προσέγγιση της πιθανότητας με την ανισότητα του Lundberg είναι καλύτερη.

**Πρόταση 2.2.2.** Ο Gerber (1979), έδειξε ότι αν η κατανομή των αποζημιώσεων  $F(x)$  είναι *IFR*, τότε ισχύει η ανισότητα,

$$\psi(u) \geq \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru}. \quad (2.2.2)$$

ενώ αν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι *DFR*, τότε ισχύει η παρακάτω ανισότητα,

$$\psi(u) \leq \frac{1}{1+\theta} e^{-Ru} \quad (2.2.3)$$

**Θεώρημα 2.2.1:** Σύμφωνα με τον Kalashnikov(1997a, p. 177) , για πεπερασμένες ροπές αποζημιώσεων, παίρνοντας τις 3 πρώτες ροπές των αποζημιώσεων ,

$$\mu_k = \int_0^{\infty} x^k f(x) dx < \infty, \text{ για } k = 1, 2, 3, \dots$$

προκύπτει η ακόλουθη σχέση,



$$\frac{1}{1+\theta} e^{-R_1 u} - K \leq \psi(u) \leq \frac{1}{1+\theta} e^{-R_1 u} + K, \quad (2.2.4)$$

όπου,

$$R_1 = \frac{2\mu_1\theta}{\mu_2(1+\theta)}$$

και

$$K = \frac{4\mu_1\mu_3\theta}{3\mu_2^2(1+\theta)}.$$

Η εξίσωση (2.2.4) δίνει καλές εκτιμήσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το περιθώριο ασφαλείας  $\theta$  είναι μικρό.

### **Ακριβής Υπολογισμός Πιθανότητας Χρεοκοπίας για αποζημιώσεις που ακολουθούν μείξη Εκθετικών Κατανομών.**

Αν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μια κατανομή με πυκνότητα

$$f(x) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \beta_i e^{-\beta_i x},$$

με  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = 1$ , τότε έχουμε μια διακριτή μείξη εκθετικών κατανομών με παραμέτρους  $\beta_i$  και βάρη  $\alpha_i$ .

**Πρόταση 2.2.3.** Όταν οι αποζημιώσεις ακολουθούν μία μείξη εκθετικών κατανομών, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από την σχέση:

$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u} + C_2 e^{-r_2 u} + \dots + C_k e^{-r_k u}, \quad (2.2.5)$$

όπου  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_k$  είναι οι λύσεις της εξίσωσης για τον συντελεστή προσαρμογής και  $C_1, C_2, \dots, C_k$  είναι θετικές σταθερές.

Ισχύει η σχέση:

$$0 < r_1 < \beta_{i_1} < r_2 < \beta_{i_2} < \dots < r_k < \beta_{i_k},$$

όπου τα στοιχεία του συνόλου  $\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$  είναι σε αύξουσα σειρά. Ας δούμε ένα παράδειγμα μείξης 3 εκθετικών κατανομών. Συγκεκριμένα θα υπολογίσουμε την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας για αποζημιώσεις που ακολουθούν μείξη 3 εκθετικών κατανομών.

**Εφαρμογή 2.2.1.** Έστω η σ.π.π μια μείξης 3 εκθετικών κατανομών, με πυκνότητα,

$$f(x) = \alpha_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x} + \alpha_3 \beta_3 e^{-\beta_3 x}.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας από την εξίσωση (2.2.5), θα δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u} + C_2 e^{-r_2 u} + C_3 e^{-r_3 u}.$$

Για  $u = 0$ ,

$$C_1 + C_2 + C_3 = \frac{1}{1+\theta} . \quad (2.2.6)$$

Για να βρούμε μία 2<sup>η</sup> σχέση, βρίσκουμε την 1<sup>η</sup> παράγωγο ,

$$\delta'(u) = \frac{1}{(1+\theta)\mu_1} \delta(u) - \frac{1}{(1+\theta)\mu_1} \int_0^u \delta(u-x)f(x)dx.$$

Θέτοντας  $u = 0$  παίρνουμε,

$$\delta'(0) = \frac{1}{(1+\theta)\mu_1} \delta(0) = \frac{1}{(1+\theta)\mu_1} (1 - C_1 - C_2 - C_3) . \quad (2.2.7)$$

Και την συγκρίνουμε με την εξίσωση,

$$\delta'(u) = C_1 r_1 e^{-r_1 u} + C_2 r_2 e^{-r_2 u} + C_3 r_3 e^{-r_3 u}$$

στο σημείο 0, δηλαδή με την παρακάτω εξίσωση,

$$\delta'(0) = C_1 r_1 + C_2 r_2 + C_3 r_3 . \quad (2.2.8)$$

Για να βρούμε μια 3<sup>η</sup> σχέση απλά ξαναπαραγωγίζουμε την  $\delta'(u)$ . Έτσι, βρίσκουμε την 2<sup>η</sup> παράγωγο στο σημείο 0.

$$\delta''(u) = \frac{\delta'(u)}{(1+\theta)\mu_1} - \frac{\delta(0)f(u)}{(1+\theta)\mu_1} \xrightarrow{(u=0)} \delta''(0) = \frac{\theta}{(1+\theta)^3 \mu_1^2} - \delta'(0)f(0) . \quad (2.2.9)$$

και την εξισώνουμε με την 2<sup>η</sup> παράγωγο της παρακάτω εξίσωσης στο σημείο 0, δηλαδή με την,

$$\delta''(0) = -C_1 r_1^2 - C_2 r_2^2 - C_3 r_3^2 . \quad (2.2.10)$$

Επομένως, λύνοντας το σύστημα των (2.2.6), της (2.2.7) με της (2.2.8) και της (2.2.9) με της (2.2.10), βρίσκουμε τα  $C_i$ .

### Υπολογισμός Πιθανότητας Χρεοκοπίας για κατανομή Γάμμα(a,b)

Στην δημοσίευση των Jan Grandell και C.-O. Segerdahl (1971), αναφέρεται ότι για τις αποζημιώσεις που ακολουθούν μία κατανομή Gamma με παραμέτρους σχήματος  $a$  και κλίμακας  $b$ , με μέση τιμή ίση με 1, μπορεί να υπολογιστεί με ακρίβεια η πιθανότητα χρεοκοπίας όπου  $b \geq 1$ . Η κατανομή των αποζημιώσεων έχει πυκνότητα,

$$f(x) = \frac{1}{b} \frac{\left(\frac{x}{b}\right)^{\left(\frac{1}{b}\right)-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{b}\right)} e^{-\frac{x}{b}},$$

όπου,

$$\Gamma\left(\frac{1}{b}\right) = \int_0^{\infty} x^{\left(\frac{1}{b}\right)-1} e^{-x} dx.$$

Ένα αποτέλεσμα προσέγγισης πιθανότητας χρεοκοπίας είναι το εξής:

$$\psi(u) \sim \frac{\theta(1 - bR)}{1 + (1 + \theta)R - (1 + \theta)(1 - bR)} e^{-Ru}.$$

όπου για  $b = 1$ , έχουμε την εκθετική κατανομή όπου ως γνωστόν η προσέγγιση είναι ακριβής. Η ακριβής προσέγγιση για μια Γάμμα κατανομή με  $b \geq 1$ , είναι η εξής,

$$\psi(u) = \frac{\theta\left(1 - \frac{R}{\alpha}\right)e^{-Ru}}{1 + (1 + \theta)R - (1 + \theta)\left(1 - \frac{R}{\alpha}\right)} + \frac{a \sin(\alpha \cdot \pi)}{\pi} I,$$

όπου,

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^{(1/b)} e^{-\frac{(x+1)u}{b}} dx}{\left(x^{(1/b)} \left(1 + (1 + \theta) \frac{x+1}{b}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{b}\right)\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{b}\right)},$$

το οποίο υπολογίζεται με αριθμητικές μεθόδους.

#### Υπολογισμός πιθανότητας Χρεοκοπίας για Μείξη Εκθετικής Κατανομής & Erlang.

Σύμφωνα με τον Κ.Πολίτη (2017), η κατανομή των αποζημιώσεων που ακολουθεί μια μείξη  $Exp(\beta)$  με  $Erlang(2, \beta)$  με βάρη  $\alpha$  και  $(1 - \alpha)$  αντίστοιχα, έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$f(x) = \alpha \beta e^{-\beta x} + (1 - \alpha) \beta^2 x e^{-\beta x}, x \geq 0.$$

Η εξίσωση για την ροπογεννήτρια των κλιμακωτών υψών είναι ίση με,

$$M_{L_1}(r) = \alpha' \frac{\beta}{\beta - r} + (1 - \alpha') \left(\frac{\beta}{\beta - r}\right)^2,$$

όπου

$$\alpha' = 1/(2 - \alpha),$$

ενώ οι ρίζες της εξίσωσης του συντελεστή προσαρμογής είναι,

$$r_{1,2} = \frac{2(1 + \theta) - \alpha' \pm \sqrt{4(1 + \theta)(1 - \alpha') + \alpha'^2}}{2(1 + \theta)} \cdot \beta$$

και η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας υπολογίζεται από τον τύπο

$$\psi(u) = \frac{(2 - \alpha')\beta - r_1}{(1 + \theta)(r_2 - r_1)} \cdot e^{-r_1 u} + \frac{r_2 - (2 - \alpha')}{(1 + \theta)(r_2 - r_1)} e^{-r_2 u}.$$

### 2.1.3 Προσεγγιστικές Μέθοδοι Πιθανότητας Χρεοκοπίας για το Κλασσικό Πρότυπο Προσεγγιστική Μέθοδος του Tijms

Ο Tijms το 1986 ,πρότεινε την χρήση του συνδυασμού δύο εκθετικών κατανομών με σκοπό την προσέγγιση της ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Οι παράμετροι επιλέχθηκαν έτσι ώστε η μάζα πιθανότητας στο 0 και η μέση τιμή των δύο κατανομών να είναι ίσα. Επεκτείνοντας την ιδέα αυτή, θεωρούμε ότι έχουμε έναν συνδυασμό που αποτελείται από μία εκθετική κατανομή με παράμετρο τον συντελεστή προσαρμογής  $R$ , και μία πιο γενική κατανομή.

Τότε ο συντελεστής προσαρμογής  $R > 0$  ικανοποιεί την εξίσωση του Lundberg , δηλαδή την εξίσωση,

$$\int_0^{\infty} e^{Ry} f(y) dy = \frac{1}{\psi(0)} .$$

Έχουμε για την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής ότι ,

$$\bar{G}(x) \sim C e^{-Rx}, x \rightarrow \infty$$

και για την σταθερά  $C$  ισχύει ότι,

$$C = \frac{1 - \psi(0)}{\psi(0)R \int_0^{\infty} y e^{Ry} f(y) dy} .$$

Η προσέγγιση του Tijms αποτελεί μία βελτίωση του τύπου των Cramer-Lundberg, και ορίζεται ως εξής:

$$\psi_T(u) = (\psi(0) - C)e^{-mu} + C e^{-Ru}, u \geq 0 \quad (2.3.1)$$

με συντελεστή  $m$

$$m = (\psi(0) - C) \left( \frac{1}{\theta_{\mu_1}} \int_0^{\infty} x \bar{F}(x) dx - \frac{C}{R} \right)^{-1}, \quad (2.3.2)$$

με τον περιορισμό ότι ο συντελεστής προσαρμογής  $R < m$  . Στην περίπτωση όπου

$R \geq m$  , η προσέγγιση του Tijms δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Ο 2<sup>ος</sup> όρος της σχέσης (2.3.1) συγκλίνει πιο αργά στο 0 ,άρα για  $u \rightarrow \infty$  ισχύει,

$$\psi_T(u) \sim C e^{-Ru} .$$

Όταν το αρχικό αποθεματικό  $u$  είναι μικρό, υπάρχουν αποκλίσεις από την πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας όμως η προσέγγιση είναι ακριβής  $\forall u \geq 0$  αρκεί να υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής στο μοντέλο και η  $F$  να ακολουθεί,

- Εκθετική κατανομή,
- Μείξη 2 Εκθετικών Κατανομών
- Συνέλιξη 2 Εκθετικών Κατανομών με την ίδια παράμετρο Γάμμα ( $2, \beta$ ) με  $\beta > 0$ ). Επίσης η προσέγγιση του Tijms ,δίνει καλύτερα αποτελέσματα για  $\theta < 4$  ενώ για  $\theta < 1$  η προσέγγιση μπορεί να προσεγγίσει κατανομές με βαριά ουρά.

### Προσεγγιστική Μέθοδος του Willmot

Αποτελεί μία γενίκευση της προσέγγισης του Tijms, χωρίς το μειονέκτημα της ύπαρξης του συντελεστή προσαρμογής. Ο Willmot (1998), πρότεινε την αντικατάσταση της εκθετικής ουράς της σχέσης (2.3.1) με την  $\bar{H}(x)$ ,

$$\psi_w(u) = (\psi(0) - C)\bar{H}(u) + Ce^{-Ru}. \quad (2.3.3)$$

Η προσέγγιση του Tijms είναι ουσιαστικά ειδική περίπτωση για  $\bar{H}(u) = e^{-m_T u}$  όπου ,

$$m_T = (\psi(0) - C) \left( \frac{\psi(0)E(X)}{1 - \psi(0)} - \frac{C}{R} \right)^{-1}. \quad (2.3.4)$$

**Πρόταση 2.3.1.** Έστω  $R > 0$  η σταθερά η οποία ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση ,

$$E(e^{RX}) = \int_0^{\infty} e^{Rx} f(x) dx = \frac{1}{\psi(0)},$$

με  $R \neq \frac{1-\psi(0)}{E(X)}$  και  $C \neq R$ . Εάν η παράμετρος  $m$  δίνεται από την σχέση ,

$$m = \alpha(\psi(0) - C) \left( \frac{\psi(0)E(X)}{1 - \psi(0)} - \frac{C}{R} \right)^{-1} \quad (2.3.5)$$

και η συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής  $X$  είναι *NBUC(NWUC)*, τότε  $\psi(0) - C < (>)0$  και  $m > r$ .

Ο E.Willmot (1998), πρότεινε την αντικατάσταση της  $\bar{H}(x)$  με μια ουρά κατανομής Γάμμα, δηλαδή ,

$$\bar{H}(x) = \int_x^{\infty} \frac{m(mt)^{a-1} e^{-mt}}{G(a)} dt. \quad (2.3.6)$$

όπου η παράμετρος  $m$  δίνεται από την σχέση (2.3.5) και η παράμετρος  $\alpha$  μπορεί να εκτιμηθεί από τον παρακάτω τύπο ως ακολούθως,

$$\alpha = \left( \frac{(\psi(0) - C) \left( \frac{(\psi(0)E(X^2))}{1 - \psi(0)} + 2 \left( \frac{(\psi(0)E(X))}{1 - \psi(0)} \right)^2 - \frac{2C}{R^2} \right)}{\left( \frac{(\psi(0)E(X))}{1 - \psi(0)} - \frac{C}{R} \right)^2} - 1 \right)^{-1}. \quad (2.3.7)$$

Η παραπάνω σχέση (2.3.7) προκύπτει από την 2<sup>η</sup> ροπή της κατανομής των κλιμακωτών υψών ,

$$\frac{\alpha(\alpha + 1)(\psi(0) - C)}{m^2} + \frac{2C}{R^2} = \frac{\psi(0)E(X^2)}{1 - \psi(0)} + 2 \left( \frac{(\psi(0)E(X))}{1 - \psi(0)} \right)^2.$$

Η συγκεκριμένη προσέγγιση που πρότεινε ο Willmot έχει το πλεονέκτημα ότι για

$\alpha \geq 1$ , η  $\bar{H}(x)$  είναι *IFR* ,όπως επίσης ότι οι δύο παράμετροι που έχει η κατανομή ( $m > 0$  και  $\alpha > 0$ ) επιτρέπουν την καλύτερη ευελιξία στον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας. Δηλαδή , εάν  $\alpha$  είναι μια θετική ακέραια παράμετρος, τότε η ουρά της κατανομής των κλιμακωτών υψών πλησιάζει την απλότητα της προσέγγισης του Tijms,

$$\bar{H}(x) = e^{-mx} \sum_{k=0}^{\alpha-1} \frac{(mx)^k}{k!}, \quad k = 1,2,3 \quad (2.3.8)$$

και επιπλέον διατηρεί την σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς  $\alpha > \alpha_0$ .

Επίσης, ορίζουμε ως  $\alpha_0$  την παρακάτω ποσότητα,

$$\alpha_0 = 1 - \frac{\psi(0)(1 - \psi(0) - RE(X))}{(1 - \psi(0))(\psi(0) - C)}.$$

Εάν η εκτιμηθείσα τιμή του  $\alpha$  είναι αρνητική ή μικρότερη του  $\alpha_0$ , τότε μπορούμε να κάνουμε χρήση της μικρότερης θετικής ακέραιας τυχαίας μεταβλητής που είναι μεγαλύτερη ή ίση του  $\alpha_0$  και να την χρησιμοποιήσουμε για την σχέση (2.3.8). Η προσέγγιση ικανοποιεί την μέση τιμή και διατηρεί σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς  $\alpha > \alpha_0$ .

### Προσεγγιστική Μέθοδος των Beekman-Bowers

Αποτελεί μία προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας με την ουρά της κατανομής Γάμμα( $\alpha, \beta$ ). Υποθέτουμε ότι,

$$\psi(u) \cong \frac{1}{1 + \theta} [1 - G_1(u)], \quad (2.3.9)$$

όπου  $G_1$  η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της Γάμμα( $\alpha, \beta$ ). Ο υπολογισμός των παραμέτρων  $\alpha, \beta$  γίνεται εξισώνοντας τις 2 πρώτες ροπές των  $L$  κ  $\Lambda$ . Η προσέγγιση της κατανομής της  $L$  γίνεται από αυτήν της  $\Lambda$ , όπου  $\Lambda$  είναι μια τμ με μάζα  $\frac{\theta}{1+\theta}$  στο 0 και στο

$(0, \infty)$  η  $\Lambda$  ακολουθεί κατανομή Γάμμα. Εφαρμόζοντας μέθοδο ροπών, βρίσκουμε τις δύο παρακάτω εξισώσεις,

$$E(L) = E(\Lambda) \Rightarrow \frac{\mu_2}{2\theta\mu_1} = \frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}$$

και

$$E(\Lambda^2) = E(L^2) \Rightarrow \frac{\mu_3}{3\theta\mu_1} + 2\left(\frac{\mu_2}{2\theta\mu_1}\right)^2 = \frac{1}{1+\theta} \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2},$$

Από τις οποίες εκτιμούμε τις παραμέτρους  $\alpha$  και  $\beta$ .

### Ασυμπτωτικός τύπος των Embrechts-Veraverbeke

Σε κάποιες κατανομές η ροπογεννήτρια απειρίζεται και επομένως δεν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής. Επομένως, σε αυτή την κατηγορία κατανομών που ονομάζονται υποεκθετικές κατανομές δεν μπορεί να εφαρμοστεί καμία από τις παραπάνω προσεγγίσεις που προαναφέραμε γιατί προϋποθέτουν την ύπαρξη του συντελεστή προσαρμογής  $R$ .

**Πρόταση 2.3.2.** Στο κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας Κινδύνου όταν η κατανομή των αποζημιώσεων είναι υποεκθετική, ( $F \in \mathcal{S}$ ) και έστω  $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$ . Τότε, για την συνάρτηση  $H$  των κλιμακωτών υψών οι παρακάτω 3 συνθήκες είναι ισοδύναμες:

- a)  $H \in \mathcal{S}$
- b)  $1 - \psi \in \mathcal{S}$
- c)  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{\bar{H}(u)} = \frac{\psi(0)}{1-\psi(0)}$

Επομένως, προκύπτει ότι, η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να προσεγγιστεί ως εξής:

$$\psi(u) \sim \frac{1}{\theta} \bar{H}(u). \quad (2.3.10)$$

### Παρατηρήσεις:

Αν μια κατανομή  $F \in \mathcal{S}$ , η ροπογεννήτρια  $M_x(r)$  απειρίζεται  $\forall r > 0$  και επομένως δεν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής  $R$ .

Επίσης, αν μια κατανομή  $F \in \mathcal{S}$ , η ουρά της κατανομής συγκλίνει στο μηδέν πιο αργά από οποιαδήποτε εκθετική κατανομή.

### 2.1.4 Μετασχηματισμός Laplace

**Ορισμός 2.4.1.** Έστω  $f(x)$  μια συνεχής συνάρτηση η οποία ορίζεται για  $x \geq 0$ , της οποίας το ολοκλήρωμα υπάρχει για όλα τα  $x > 0$ . Ο μετασχηματισμός Laplace της συγκεκριμένης συνάρτησης ορίζεται ως εξής,

$$\hat{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx, \quad s \geq 0. \quad (2.4.1)$$

Όταν η  $F$  είναι συνάρτηση κατανομής μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής  $X$ , η οποία παίρνει μη αρνητικές ακέραιες τιμές, ο μετασχηματισμός Laplace της  $F$  δίνεται από τη σχέση,

$$L_F(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} P(X = k). \quad (2.4.2)$$

Από σχέση (2.4.1) και τον ορισμό της μέσης τιμής, αν υπάρχει τ.μ.  $X$  με συνεχή συνάρτηση κατανομής  $F$ , τότε ισχύει,

$$L_F(s) = E(e^{-sX}).$$

η οποία αποτελεί επέκταση της παρακάτω ροπογεννήτριας όταν το  $t$  εκτός από θετικές, παίρνει και αρνητικές τιμές.

$$M_X(t) = E(e^{tX}), \quad t \geq 0.$$

Παρακάτω θα δούμε μερικές χρήσιμες ιδιότητες του μετασχηματισμού Laplace :

- 1) Έστω  $f(\cdot)$  και  $g(\cdot)$  είναι 2 κατανομές με μετασχηματισμό Laplace, και έστω  $a$  και  $b$  είναι δύο σταθερές. Τότε,

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} [af(y) + bg(y)] dy = a\hat{f}(s) + b\hat{g}(s).$$

- 2) Έστω  $f(y)$  μια συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση που ορίζεται  $\forall x \geq 0$ . Τότε, ισχύει το εξής:

$$\int_0^{\infty} e^{-sy} f'(y) dy = s\hat{f}(s) - f(0).$$

- 3) Έστω  $\{f_j(\cdot)\}_{j=1}^n$  συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχει ο Μετασχηματισμός Laplace και έστω  $h(x)$  είναι η νιοστή-συνέλιξή τους, δηλαδή  $h(x) = f_1 * f_2 * \dots * f_n(x)$ . Τότε ο μετασχηματισμός Laplace της  $h(x)$  είναι ο εξής:

$$\hat{h}(s) = \prod_{j=1}^n \hat{f}_j(s).$$

Στην συνέχεια, θα δούμε κάποια παραδείγματα τα οποία είναι ιδιαίτερα σημαντικά καθώς θα ασχοληθούμε εκτενώς με αυτά στις αριθμητικές εφαρμογές του κεφαλαίου αυτού και του Κεφαλαίου 3.

Όταν η  $F$  είναι Εκθετική, δηλαδή η συνάρτηση κατανομής είναι η  $F(x) = 1 - e^{-\beta x}$ ,

$\forall x \geq 0$ , τότε ο μετασχηματισμός Laplace της  $F$  δίνεται από τη σχέση,

$$L_F(s) = \frac{\beta}{\beta + s}. \quad (2.4.3)$$



Το ολοκλήρωμα συγκλίνει για όλες τις μη αρνητικές τιμές του  $s$  σε αντίθεση με την ροπογεννήτρια που είναι πεπερασμένη μόνο στο  $[0, \beta]$ .

Όταν η  $F$  είναι Γάμμα  $(\alpha, \beta)$ , με συνάρτηση κατανομής  $F$ , δηλαδή

$$F(x) = \int_0^x \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} dx,$$

τότε για  $s \geq 0$  παίρνουμε ότι ,

$$L_F(s) = \hat{f}(s) = \left( \frac{\beta}{\beta + s} \right)^\alpha . \quad (2.4.4)$$

Ένα βασικό πλεονέκτημα της χρήσης του μετασχηματισμού Laplace έναντι της ροπογεννήτριας είναι ότι στην 1<sup>η</sup> περίπτωση, η συνάρτηση  $F$  δεν είναι απαραίτητο να είναι αθροιστική συνάρτηση κάποιας κατανομής καποιας τυχαίας μεταβλητής αρκεί να είναι αύξουσα και δεξιά συνεχής συνάρτηση. Αντίστοιχα, στη σχέση (2.4.1) η  $f$  αρκεί απλά να είναι τοπικά ολοκληρώσιμη.(βλ. Κ. Πολίτης 2012)

### Παράδειγμα 2.1.1

Ως γνωστόν στο κλασσικό μοντέλο η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση ,

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\theta} \bar{H}(u) + \frac{1}{1+\theta} \int_0^u \psi(u-y) dH(y) . \quad (2.4.5)$$

Η συνάρτηση πυκνότητας των κλιμακωτών υψών δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$f_{L_1}(x) = \frac{1 - F(x)}{\mu_1}.$$

Αλλάζοντας τον συμβολισμό και διαπιστώνοντας ότι το δεξιό μέλος της (2.4.5) είναι μια συνέλιξη ,παίρνουμε μετασχηματισμό Laplace και στα 2 μέλη της σχέσης (2.4.5) και οπότε προκύπτει το εξής.

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(s) &= \frac{1}{1+\theta} (\widehat{\bar{H}})(s) + \frac{1}{1+\theta} \hat{\psi}(s) \hat{h}(s) \xrightarrow{s \geq 0} \\ \hat{\psi}(s) &= \frac{\frac{1}{1+\theta} (\widehat{\bar{H}})(s)}{1 - \frac{1}{1+\theta} \hat{h}(s)}, \end{aligned}$$

και οπότε για  $s \geq 0$ , καταλήγουμε στο παρακάτω τύπο,

$$\hat{\psi}(s) = \frac{(\widehat{\bar{H}})(s)}{1 + \theta - \hat{h}(s)}. \quad (2.4.6)$$

Η παραπάνω σχέση θα χρησιμοποιηθεί εκτενώς σε όλα τα αριθμητικά παραδείγματα που θα μελετήσουμε στη συνέχεια για τον υπολογισμό της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας δεδομένου ότι γνωρίζουμε τους μετασχηματισμούς Laplace των συναρτησεων  $\bar{H}(\cdot)$  και  $h(\cdot)$ .

Παρακάτω, θα δούμε την περίπτωση που έχουμε μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή . Όπως έχουμε δει, η τ.μ.  $L$  στο κλασσικό μοντέλο εκφράζει την μέγιστη σωρευτική απώλεια. Στην περίπτωση αυτή, τα κλιμακωτά ύψη  $\{L_i\}_{i=1}^N$  παριστάνουν το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό και έστω  $N$  παριστάνει το πλήθος αυτών των πτώσεων στο διηνεκές.

Η συνάρτηση πιθανότητας της  $N$  είναι η εξής,

$$\Pr(N = k) = \varphi^k (1 - \varphi) , k = 0, 1, 2 \dots$$

με πιθανότητα επιτυχίας  $p = 1 - \varphi$  .

**Πρόταση 2.4.1.** Έστω  $\{X_i\}_{i=1}^N$  ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με συνάρτηση κατανομής  $F$  και οι τμ  $N$  και  $X_i$  ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Έστω η τυχαία μεταβλητή  $S = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i, & N \geq 1 \\ 0, & N = 0 \end{cases}$  , η οποία ακολουθεί σύνθετη γεωμετρική κατανομή. Η συνάρτηση κατανομής της  $S$  ,ορίζεται ως,

$$G(x) = P(S \leq x) , x \geq 0.$$

Οι μετασχηματισμοί Laplace των  $F$  και  $G$  συνδέονται με την παρακάτω σχέση,

$$L_G(s) = \frac{1 - \varphi}{1 - \varphi L_F(s)} . \quad (2.4.7)$$

Αντίστοιχα στο κλασσικό πρότυπο της Θεωρίας Κινδύνου, γνωρίζουμε ότι  $L$  δηλώνει την σωρευτική απώλεια των κλιμακωτών υψών  $\{L_i\}_{i=1}^N$ , κάθε ένα από τα οποία εκφράζει το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό και  $N$  δηλώνει το πλήθος των πτώσεων στο διηνεκές.

Επομένως, αν αντί για  $S$  έχουμε την τυχαία μεταβλητή  $L$ , τότε η  $\delta(u) = P(L \leq u)$  παίρνει τη θέση της  $G(x)$  και αν αντί για την συνάρτηση  $F(\cdot)$  , έχουμε την συνάρτηση ισορροπίας,

$$H(x) = P(L_1 \leq x).$$

Τότε από σχέση (2.4.7) , ισχύει η παρακάτω σχέση,

$$L_\delta(s) = \frac{1 - \varphi}{1 - \varphi L_H(s)} . \quad (2.4.8)$$

## 2.2 Αριθμητικές Εφαρμογές

Στην παρούσα ενότητα αυτή θα δώσουμε αριθμητικά παραδείγματα με την βοήθεια του πακέτου Mathematica για μια μείξη 3 Εκθετικών Κατανομών και μιας Γάμμα(2,2). Θα χρησιμοποιήσουμε προσεγγίσεις πιθανότητας χρεοκοπίας των Cramer-Lundberg, του Cramer, του Tijms, του Willmot, καθώς και ακριβείς πιθανότητες χρεοκοπίας για διάφορες τιμές του  $\theta$ . Επίσης, θα δοθούν άνω και κάτω φράγματα για τις πιθανότητες αυτές. Στην συνέχεια, θα δοθούν ακριβείς και προσεγγιστικές τιμές για την κατανομή του ελλείματος. Τέλος, θα παρατεθούν συγκριτικά συμπεράσματα σχετικά με τις προσεγγίσεις μας για το ποιά προσέγγιση είναι πιο ικανοποιητική.

### 2.2.1 Αριθμητική Εφαρμογή για Μείξη Εκθετικών Κατανομών

Έχουμε μια μείξη 3 Εκθετικών κατανομών με βάρη  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $a_2 = \frac{1}{3}$ ,  $a_3 = \frac{1}{3}$  και παραμέτρους  $\beta_1 = 3$ ,  $\beta_2 = 6$ ,  $\beta_3 = 7$ . Αρχικά θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου το περιθώριο ασφαλείας  $\theta = 0.5$ . Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η εξής:

$$f(x) = \frac{7e^{-7x}}{3} + 2e^{-6x} + e^{-3x}.$$

Η μέση τιμή είναι

$$\mu_1 = 0.21423,$$

Και η ροπογεννήτρια της κατανομής των αποζημιώσεων,

$$M_x(t) = \frac{7}{3(7-t)} + \frac{1}{3-t} + \frac{2}{6-t}.$$

Εφαρμόζοντας Μετασχηματισμό και Αντίστροφο Μετασχηματισμό Laplace, κάνοντας χρήση της σχέσης (2.4.16), καταλήγουμε στην παρακάτω ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας. (βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, Πίνακες 1-5).

$$\psi_L(u) = 0.0046912e^{-6.64231u} + 0.044442e^{-4.97581u} + 0.617534e^{-1.27077u},$$

όπου,

- $r_1 = 1.2708$ ,  $r_2 = 4.9758$ ,  $r_3 = 6.6423$  οι λύσεις της εξίσωσης της ροπογεννήτριας  $M_x(r) = 1 + (1 + \theta)mr$ .
- $C_1 = 0.0046912$ ,  $C_2 = 0.044442$ ,  $C_3 = 0.617534$ .

Επίσης, με την ακριβή μέθοδο της πιθανότητας χρεοκοπίας για εκθετικές αποζημιώσεις, από Εφαρμογή 2.2.1, λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2.2.6), (2.2.7) με (2.2.8) και (2.2.9) με (2.2.10), βρίσκουμε τα  $C_i$ ,

$$C_1 = 0.617532, C_2 = 0.0444442, C_3 = 0.00469001.$$

Παρακάτω, παραθέτουμε τον πίνακα με όλες τις προσεγγίσεις που προαναφέραμε για διάφορες τιμές του  $u$  και  $\theta = 0.5$ .

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$e^{-R_1 u}$	$\psi(u)$	$\psi_C(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_w(u)$	$\psi_L(u)$
0.1	0.56016	0.88067	0.57328	0.54384	0.57335	0.57513	0.57328
0.25	0.40575	0.72783	0.46316	0.44946	0.46320	0.46623	0.46316
0.5	0.21299	0.52973	0.33099	0.32713	0.33097	0.33378	0.33099
0.75	0.10506	0.38555	0.23919	0.23809	0.23917	0.24251	0.23919
1	0.05062	0.28062	0.17360	0.17329	0.17359	0.17460	0.17360
1.5	0.01146	0.14865	0.09209	0.09179	0.09182	0.09208	0.09209
3	0.00013	0.02210	0.01365	0.01365	0.01365	0.01365	0.01365

Πίνακας 2.5.1

### Παρατηρήσεις:

Καταρχάς, υπολογίσαμε την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας για διάφορες τιμές του  $u$ , με την μέθοδο αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace καθώς και με σύστημα εξισώσεων και παρατηρούμε ότι ταυτίζονται. Επίσης, ενώ όλες οι προσεγγίσεις φράσσονται άνω και κάτω, η προσέγγιση του Cramer μόνο στην περίπτωση όπου  $u = 0.1$  πέφτει κάτω από το κάτω φράγμα ενώ στη συνέχεια βρίσκεται εντός των φραγμάτων, κάτι αναμενόμενο αφού για  $u \rightarrow \infty$ , η προσέγγιση παρουσιάζει καλύτερη προσαρμογή.

Τέλος, παρατηρούμε την εξαιρετικά καλή προσαρμογή της προσέγγισης του Tijms για όλες τις τιμές του αποθεματικού  $u$ .

(Η μώβ γραμμή-προσέγγιση Tijms, βρίσκεται εντός του κάτω και άνω φράγματος).

Ο παρακάτω Πίνακας 2.5.2 περιλαμβάνει 2 ακόμα προσεγγίσεις που θα εξετάσουμε (των Beekman-Bowers και του De-Vylder), καθώς και 2 επιπλέον φράγματα που εξετάσαμε στο Θεώρημα 2.2.1.

$u$	$\psi(0)e^{-\kappa_1 u} - K_2$	$\psi(0)e^{-\kappa_1 u} + K_2$	$\psi_{BB}(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi(u)$
0.1	-0.17020	1.33571	0.60782	0.56177	0.57328
0.25	-0.27668	1.22930	0.50854	0.46297	0.46316
0.50	-0.41270	1.09321	0.36585	0.33538	0.33099
0.75	-0.50987	0.99604	0.25837	0.24296	0.23919
1	-0.57929	0.92661	0.18063	0.17600	0.17360
1.5	-0.66432	0.84159	0.08670	0.09236	0.09209
3	-0.74117	0.76474	0.00897	0.01335	0.01365

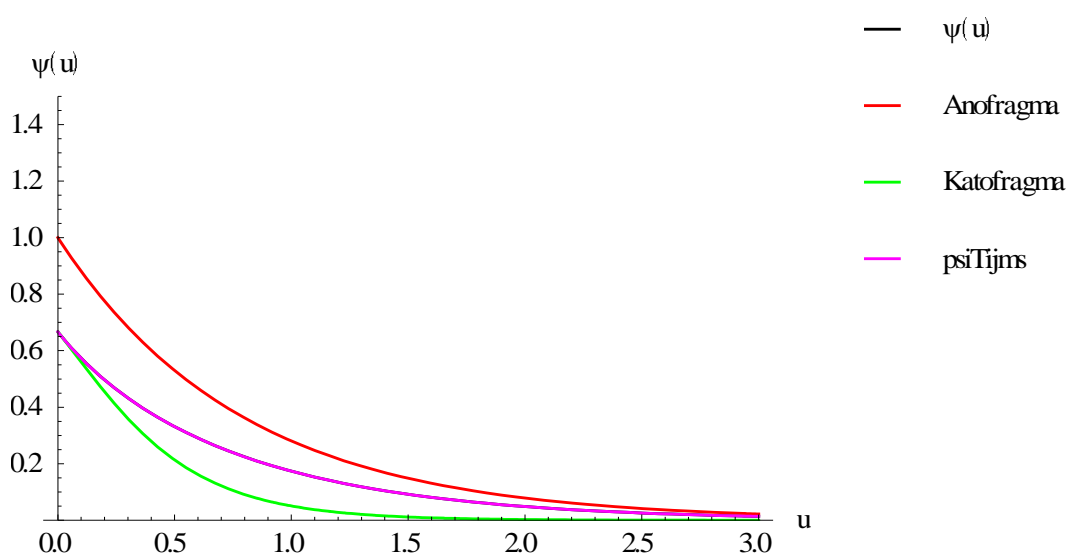
Πίνακας 2.5.2

Από Πίνακα 2.5.2, τα φράγματα που εξετάσαμε δεν δίνουν καθόλου καλά αποτελέσματα. Ως εκ τούτου δεν θα συμπεριληφθούν στις περαιτέρω αναλύσεις μας. Επίσης, θα υπολογίσουμε τις αποκλίσεις των προσεγγίσεων για κάθε  $u$  από την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας.

$u$	$ \psi_T(u) - \psi(u) $	$ \psi_C(u) - \psi(u) $	$ \psi_W(u) - \psi(u) $	$ \psi_{DV}(u) - \psi(u) $	$ \psi_{BB}(u) - \psi(u) $
0.1	<b>0.00008</b>	0.02944	0.00185	0.01150	0.03455
0.25	<b>0.00004</b>	0.01370	0.00307	0.00019	0.04538
0.50	<b>0.00002</b>	0.00386	0.00278	0.00439	0.03486
0.75	<b>0.00002</b>	0.01097	0.00179	0.00376	0.01918
1	<b>0.00001</b>	0.00031	0.00099	0.00239	0.00701
1.5	<b>0.00000</b>	0.00003	0.00026	0.00054	0.00512
3	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	0.00030	0.00467

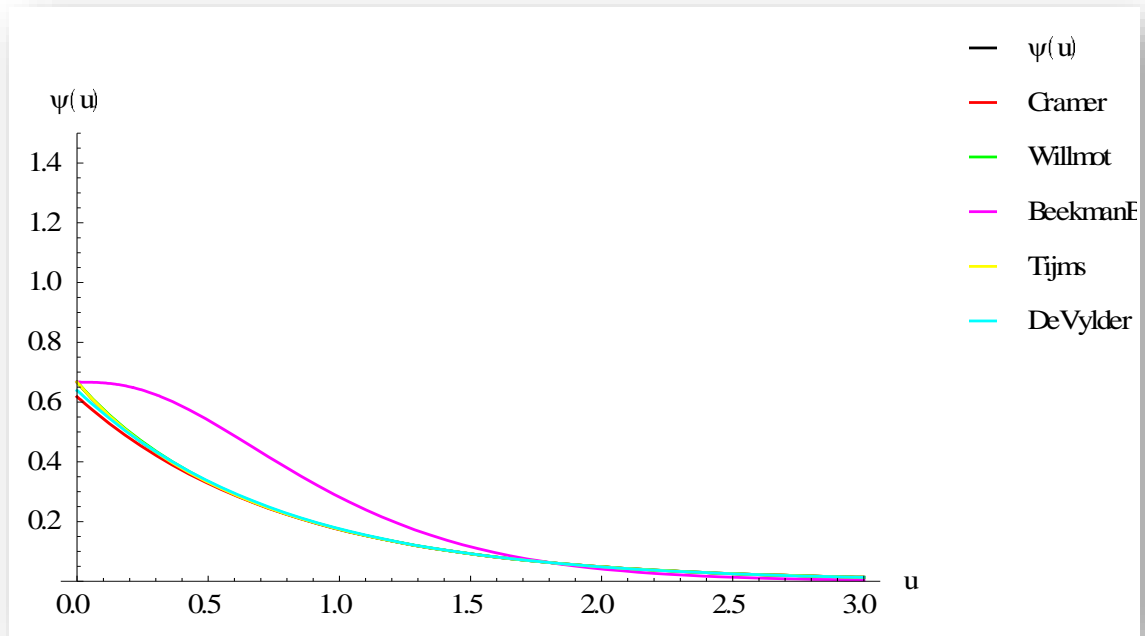
Πίνακας 2.5.3

Επίσης, θα φτιάξουμε ένα γράφημα προκειμένου να κάνουμε μια σύγκριση της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας και της προσέγγισης του Tijms.



Σχήμα 2.5.2 : Γραφική Απεικόνιση  $\psi_L(u)$ ,  $e^{-R_1 u}$ ,  $\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$ ,  $\psi_T(u)$  συναρτήσεων του  $u$

Από (Σχήμα 2.5.2) παρατηρούμε ότι για κάθε τιμή του  $u$  και για δεδομένο  $\theta$ , η προσέγγιση του Tijms έχει εξαιρετικά καλή προσαρμογή, κάτι που άλλωστε φαίνεται και στο γράφημα αφού δεν διακρίνεται η  $\psi(u)$ .



**Σχήμα 2.5.3:** Γραφική παράσταση προσεγγίσεων πιθανότητας χρεοκοπίας για  $\theta = 0.5$

Αρχικά από το γράφημα (Σχήμα 2.5.3) παρατηρούμε την εξαιρετικά καλή προσαρμογή της προσέγγισης του Tijms, για μείξη 3 εκθετικών κατανομών με δεδομένες παραμέτρους και βάρη μείξης, ενώ οι άλλες προσεγγίσεις δίνουν αρκετά ικανοποιητικά αποτελέσματα και προσεγγίζουν αρκετά ικανοποιητικά την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας.

Από τον Πίνακα 2.5.3, παρατηρούμε ότι για όλες τις τιμές του  $u$ , η προσέγγιση του Tijms όπως βλέπουμε με έντονο χρώμα έχει την μικρότερη απόκλιση, άρα και την καλύτερη προσέγγιση της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας. Για  $u = 3$ , οι προσεγγίσεις των Willmot, Cramer και Tijms έχουν εξίσου καλά αποτελέσματα καθώς έχουν εξαιρετικά καλή ασυμπτωτική συμπεριφορά.

Στους παρακάτω πίνακες θα δούμε προσεγγίσεις και την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας για  $\theta = 1$ ,  $\theta = 4$ , καθώς και  $\theta = 0.25$ . Για  $\theta = 1$ , παραθέτουμε τους παρακάτω πίνακες,

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$\psi(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_C(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_W(u)$	$e^{-Ru}$
0.1	0.38904	0.39877	0.39888	0.35652	0.38854	0.40237	0.83299
0.25	0.25451	0.29011	0.29016	0.27105	0.29240	0.29563	0.63329
0.50	0.11919	0.17676	0.17673	0.17165	0.18206	0.18140	0.40106
0.75	0.05544	0.11008	0.11005	0.11005	0.11336	0.11293	0.25398
1	0.02597	0.06922	0.06920	0.06920	0.07058	0.07076	0.16085
1.5	0.00576	0.02764	0.02763	0.02761	0.02736	0.02803	0.06451
3	0.00006	0.00178	0.00178	0.00178	0.00159	0.00179	0.00416

**Πίνακας 2.5.4**

$u$	$ \psi_T(u) - \psi(u) $	$ \psi_C(u) - \psi(u) $	$ \psi_W(u) - \psi(u) $	$ \psi_{DV}(u) - \psi(u) $
0.1	<b>0.00011</b>	0.04225	0.00360	0.01024
0.25	<b>0.00005</b>	0.01907	0.00551	0.00228
0.50	<b>0.00003</b>	0.00510	0.00464	0.00530
0.75	<b>0.00003</b>	0.00037	0.00285	0.00327
1	<b>0.00002</b>	0.00003	0.00155	0.00136
1.5	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	0.00039	0.00027
3	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	0.00019

Πίνακας 2.5.5

Για  $\theta = 4$  επίσης έχουμε,

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$\psi(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_C(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_W(u)$	$e^{-Ru}$
0.1	0.13733	0.13934	0.13942	0.10207	0.13527	0.14489	0.76889
0.25	0.07864	0.08425	0.08428	0.06881	0.08722	0.09177	0.51839
0.50	0.03272	0.03926	0.03923	0.03567	0.04197	0.04477	0.26873
0.75	0.01446	0.01933	0.01931	0.01849	0.02020	0.02244	0.13931
1	0.00662	0.00979	0.00977	0.00959	0.00972	0.01138	0.07222
1.5	0.00145	0.00259	0.00259	0.00258	0.00225	0.00297	0.01941
3	0.00002	0.00005	0.00005	0.00005	0.00002	0.00005	0.00038

Πίνακας 2.5.6

$u$	$ \psi_T(u) - \psi(u) $	$ \psi_C(u) - \psi(u) $	$ \psi_W(u) - \psi(u) $	$ \psi_{DV}(u) - \psi(u) $
0.1	<b>0.00009</b>	0.03727	0.00556	0.00407
0.25	<b>0.00003</b>	0.01544	0.00753	0.00297
0.50	<b>0.00003</b>	0.00359	0.00551	0.00271
0.75	<b>0.00002</b>	0.00084	0.00311	0.00087
1	<b>0.00001</b>	0.00020	0.00159	0.00006
1.5	<b>0.00000</b>	0.00001	0.00038	0.00034
3	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	0.00002

Πίνακας 2.5.7

Και τέλος, θα εξετάσουμε και την περίπτωση όπου  $\theta = 0.25$ . Οπότε, παραθέτουμε τους παρακάτω δύο πίνακες.

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$\psi(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_C(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_W(u)$	$e^{-Ru}$
0.1	0.71808	0.73070	0.73075	0.71344	0.72081	0.73156	0.92469
0.25	0.57727	0.64258	0.64260	0.63439	0.64058	0.64410	0.82223
0.50	0.35118	0.52400	0.52398	0.52162	0.52620	0.52547	0.67607
0.75	0.19015	0.42959	0.42957	0.42889	0.43224	0.43056	0.55588
1	0.09637	0.35285	0.35284	0.35265	0.35507	0.35341	0.45707
1.5	0.02267	0.23843	0.23843	0.23841	0.23959	0.23858	0.30900
3	0.00026	0.07367	0.07367	0.07367	0.07361	0.07367	0.09548

Πίνακας 2.5.8

$u$	$ \psi_T(u) - \psi(u) $	$ \psi_C(u) - \psi(u) $	$ \psi_W(u) - \psi(u) $	$ \psi_{DV}(u) - \psi(u) $
0.1	0.00005	0.01726	0.00086	0.00989
0.25	0.00002	0.00819	0.00153	0.00199
0.50	0.00001	0.00238	0.00147	0.00220
0.75	0.00001	0.00070	0.00097	0.00266
1	0.00000	0.00021	0.00055	0.00221
1.5	0.00000	0.00002	0.00014	0.00116
3	0.00000	0.00000	0.00000	0.00006

Πίνακας 2.5.9

### Συμπέρασμα:

Από όλες τις προσεγγίσεις που μελετήσαμε είναι ξεκάθαρη η υπεροχή της προσέγγισης του Tijms για όλες τις τιμές του αποθεματικού  $u$  και περιθωρίου ασφαλείας  $\theta$ . Φυσικά, για  $\theta = 0.25$  και  $\theta = 0.5$  δεν μπορούμε να παραλείψουμε την υπεροχή της προσέγγισης του Willmot για μικρά  $u \in \{0.1, 0.25, 0.50\}$ , έναντι των προσεγγίσεων Cramer και De Vylder, ενώ για  $u \in \{0.75, 1, 1.5, 3\}$ , βλέπουμε ότι υπερέχει η προσέγγιση του Cramer έναντι των άλλων δύο, μετά φυσικά από την προσέγγιση του Tijms. Επίσης, για  $\theta = 1$ , η καλύτερη προσέγγιση μετά του Tijms είναι του Cramer για όλα τα  $u$  ενώ για μικρά  $u \leq 0.75$  και  $u \geq 3$  και μεταξύ Willmot και De Vylder, καλύτερη προσέγγιση είναι του πρώτου. Τέλος, για  $\theta = 4$ , παρατηρούμε ότι η προσέγγιση του DeVylder υπερέχει έναντι της προσέγγισης του Willmot για  $u \leq 1$  και έναντι του Cramer για  $u \leq 0.50$ , ενώ για  $u \geq 0.50$  υπερέχει η προσέγγιση του Cramer.

### 2.2.3 Αριθμητική Εφαρμογή για Μείξη Κατανομών Γάμμα(2, 2) και Γάμμα(3, 2)

Από Willmot & Lin (1998), σελ (95-96), μπορούμε να υπολογίσουμε με μεγάλη ακρίβεια την πιθανότητα χρεοκοπίας για μείξη Erlang κατανομών στην περίπτωση που έχουν την ίδια παράμετρο κλίμακας  $\beta$ . Έστω η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από τον παρακάτω τύπο.

$$f(x) = \sum_{k=1}^r q_k \frac{\beta^k x^{k-1} e^{-\beta x}}{(k-1)!},$$

όπου  $q_1 + q_2 + \dots + q_r = 1$  και  $X_i \sim \text{Γάμμα}(k_i, \beta)$ ,  $i = 1, \dots$

Η μέση τιμή των αποζημιώσεων που ακολουθούν μια μείξη κατανομών Γάμμα( $k_i, \beta$ ), με παράμετρο σχήματος  $k$  και παράμετρο κλίμακας  $\beta$ , δίνεται από τον παρακάτω τύπο.

$$\mu = \sum_{k=1}^r q_k \frac{k}{\beta}$$

Επίσης, η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής ισορροπίας δίνεται από τον παρακάτω τύπο :



$$f_e(x) = \frac{\bar{F}(x)}{\mu_1} = \sum_{k=1}^r q_k^* \frac{\beta^k x^{k-1} e^{-\beta x}}{(k-1)!},$$

όπου,

$$q_k^* = \frac{\sum_{j=k}^r q_j}{\sum_{j=1}^r j q_j}.$$

Εδώ, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου  $r = 2$ , δηλαδή θα εξετάσουμε προσεγγίσεις για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση μείξης 2 κατανομών Γάμμα με ίδια παράμετρο κλίμακας  $\beta$ . Συγκεκριμένα, θα εξετάσουμε μια μείξη Γάμμα κατανομών με  $q_1 = \frac{1}{2}$  και  $q_2 = \frac{1}{2}$ , καθώς επίσης  $k_1 = 2, k_2 = 3$  και  $b_1 = b_2 = 2$ . Η σ.π.π της μείξης κατανομών Γάμμα που θα εξετάσουμε στην παρούσα εργασία είναι η ακόλουθη:

$$f(x) = 2xe^{-2x} + 2x^2e^{-2x},$$

με  $X_1 \sim Erlang(2,2)$  και  $X_2 \sim Erlang(3,2)$  και μέση τιμή,

$$\mu_1 = 1.25,$$

και ροπογεννήτρια,

$$M_X(t) = \frac{2(t-4)}{(t-2)^3}, \quad t < 2.$$

Επίσης η πυκνότητα της κατανομής ισορροπίας δίνεται ως εξής:

$$f_e(x) = 5.91124(1+x)^2 e^{-2(1+x)}.$$

Παρακάτω, βρίσκουμε και παραθέτουμε την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας που υπολογίστηκε μέσω αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace, καθώς και με προσεγγίσεις που αναφέραμε και σε προηγούμενα παραδείγματα. Έτσι λοιπόν, θα παραθέσουμε πίνακες για διάφορες τιμές του  $\theta$  που ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα και άλλες που όχι, αλλά είναι χρήσιμο για να κάνουμε μια πιο εκτενή μελέτη όχι μόνο της προσέγγισης του Tijms που δίνουμε μια μεγαλύτερη βαρύτητα αλλά και για τις άλλες προσεγγίσεις.

❖ Για  $\theta = 0.25$  έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσεγγίσεων και φραγμάτων,

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$\psi(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_C(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_W(u)$	$e^{-Ru}$
<b>0.1</b>	0.78637	0.78682	0.78714	0.80890	0.80376	0.78344	0.97735
<b>0.25</b>	0.76273	0.76593	0.76636	0.78119	0.77669	0.75930	0.94434
<b>0.50</b>	0.71442	0.72939	0.72963	0.73771	0.73358	0.72068	0.89178
<b>0.75</b>	0.65477	0.69223	0.65548	0.69665	0.69286	0.68374	0.84214
<b>1</b>	0.58463	0.65559	0.63027	0.65787	0.65440	0.64829	0.79527
<b>1.5</b>	0.42425	0.58611	0.58967	0.58668	0.58377	0.58166	0.70921

3	0.07519	0.41607	0.41606	0.41608	0.41442	0.41552	0.50297
---	---------	---------	---------	---------	---------	---------	---------

Πίνακας 2.6.1

❖ Για  $\theta = 0.5$  επίσης, έχουμε τον παρακάτω πίνακα,

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$\psi(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_C(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_W(u)$	$e^{-Ru}$
0.1	0.64795	0.64846	0.64897	0.68452	0.67171	0.64295	0.96162
0.25	0.61646	0.61999	0.62067	0.64550	0.63374	0.60919	0.90679
0.50	0.55571	0.57130	0.57169	0.58533	0.57516	0.55708	0.82227
0.75	0.48673	0.52324	0.52328	0.53077	0.52199	0.50935	0.74563
1	0.41306	0.47735	0.47718	0.48130	0.47379	0.46540	0.67613
1.50	0.26923	0.39475	0.39452	0.39576	0.39022	0.38744	0.55596
3	0.03906	0.22002	0.21999	0.22003	0.21807	0.21911	0.30910

Πίνακας 2.6.2

❖ Ακόμη για  $\theta = 1$ , έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσεγγίσεων,

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$\psi(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_C(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_W(u)$	$e^{-Ru}$
0.1	0.47924	0.47966	0.48035	0.53298	0.50539	0.47177	0.94080
0.25	0.44557	0.44838	0.44932	0.48636	0.46216	0.43291	0.85852
0.50	0.38477	0.39636	0.39692	0.41755	0.39818	0.37595	0.73705
0.75	0.32164	0.34690	0.34699	0.35847	0.34306	0.32693	0.63277
1	0.26029	0.30157	0.30136	0.30775	0.29557	0.28435	0.54324
1.50	0.15556	0.22517	0.22485	0.22683	0.21939	0.21458	0.40040
3	0.01992	0.09081	0.09082	0.09082	0.08973	0.08947	0.16032

Πίνακας 2.6.3

❖ Τέλος, για  $\theta = 4$  έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσεγγίσεων και φραγμάτων,

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$\psi(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_C(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_W(u)$	$e^{-Ru}$
0.10	0.18703	0.18714	0.18788	0.26259	0.20308	0.17702	0.89625
0.25	0.16730	0.16795	0.16900	0.22281	0.17487	0.14808	0.76046
0.50	0.13521	0.13761	0.13830	0.16944	0.13628	0.11128	0.57830
0.75	0.10597	0.11066	0.11083	0.12885	0.10621	0.08476	0.43978
1	0.08085	0.08774	0.08756	0.09798	0.08277	0.06526	0.33444
1.50	0.04403	0.05352	0.05318	0.05666	0.05027	0.03954	0.19341
3	0.00506	0.01090	0.01083	0.01096	0.01126	0.00907	0.03741

Πίνακας 2.6.4

Εν συνεχεία, παραθέτουμε την απόκλιση κάθε προσέγγισης από την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας για διάφορες τιμές του  $\theta$  και για διάφορες τιμές του  $u$ , όπως προέκυψαν από το μαθηματικό λογισμικό Mathematica.

❖ Για  $\theta = 0.25$  παραθέτουμε τον παρακάτω πίνακα αποκλίσεων από την  $\psi(u)$ ,

$u$	$ \psi_T(u) - \psi(u) $	$ \psi_C(u) - \psi(u) $	$ \psi_W(u) - \psi(u) $	$ \psi_{DV}(u) - \psi(u) $
0.10	<b>0.00032</b>	0.02168	0.00339	0.01694
0.25	<b>0.00042</b>	0.01526	0.00663	0.01075
0.50	<b>0.00024</b>	0.00832	0.00872	0.00418
0.75	<b>0.00002</b>	0.00442	0.00849	0.00063
1	<b>0.00011</b>	0.00228	0.00729	0.00118
1.50	<b>0.00015</b>	0.00057	0.00445	0.00234
3	0.00002	<b>0.00000</b>	0.00055	0.00037

Πίνακας 2.6.5

❖ Επίσης, για  $\theta = 0.5$  παραθέτουμε τον παρακάτω πίνακα ,

$u$	$ \psi_T(u) - \psi(u) $	$ \psi_C(u) - \psi(u) $	$ \psi_W(u) - \psi(u) $	$ \psi_{DV}(u) - \psi(u) $
0.10	<b>0.00051</b>	0.03606	0.00552	0.02324
0.25	<b>0.00068</b>	0.02550	0.01081	0.01374
0.50	<b>0.00039</b>	0.01403	0.01423	0.00386
0.75	<b>0.00004</b>	0.00753	0.01388	0.00124
1	<b>0.00017</b>	0.00395	0.01195	0.00359
1.50	<b>0.00023</b>	0.00101	0.00731	0.00453
3	0.00003	<b>0.00000</b>	0.00091	0.00195

Πίνακας 2.6.6

❖ Ακόμη, για  $\theta = 1$  παραθέτουμε τον εξής πίνακα,

$u$	$ \psi_T(u) - \psi(u) $	$ \psi_C(u) - \psi(u) $	$ \psi_W(u) - \psi(u) $	$ \psi_{DV}(u) - \psi(u) $
0.10	<b>0.00069</b>	0.05332	0.00789	0.02573
0.25	<b>0.00095</b>	0.03798	0.01547	0.01379
0.50	<b>0.00056</b>	0.02119	0.02041	0.00182
0.75	<b>0.00008</b>	0.01157	0.01997	0.00384
1	<b>0.00021</b>	0.00619	0.01722	0.00600
1.50	<b>0.00032</b>	0.00165	0.01059	0.00577
3	0.00005	<b>0.00001</b>	0.00134	0.00107

Πίνακας 2.6.7

❖ Τέλος , για  $\theta = 4$  παραθέτουμε τον παρακάτω πίνακα αποκλίσεων από την  $\psi(u)$ ,

$u$	$ \psi_T(u) - \psi(u) $	$ \psi_C(u) - \psi(u) $	$ \psi_W(u) - \psi(u) $	$ \psi_{DV}(u) - \psi(u) $
0.10	<b>0.00006</b>	0.07545	0.01012	0.01594
0.25	<b>0.00105</b>	0.05486	0.01987	0.00692
0.50	<b>0.00069</b>	0.03183	0.02633	0.00133
0.75	<b>0.00017</b>	0.01819	0.02590	0.00445
1	<b>0.00018</b>	0.01025	0.02247	0.00497
1.50	<b>0.00037</b>	0.00312	0.01401	0.00327
3	0.00007	<b>0.00006</b>	0.00182	0.00037

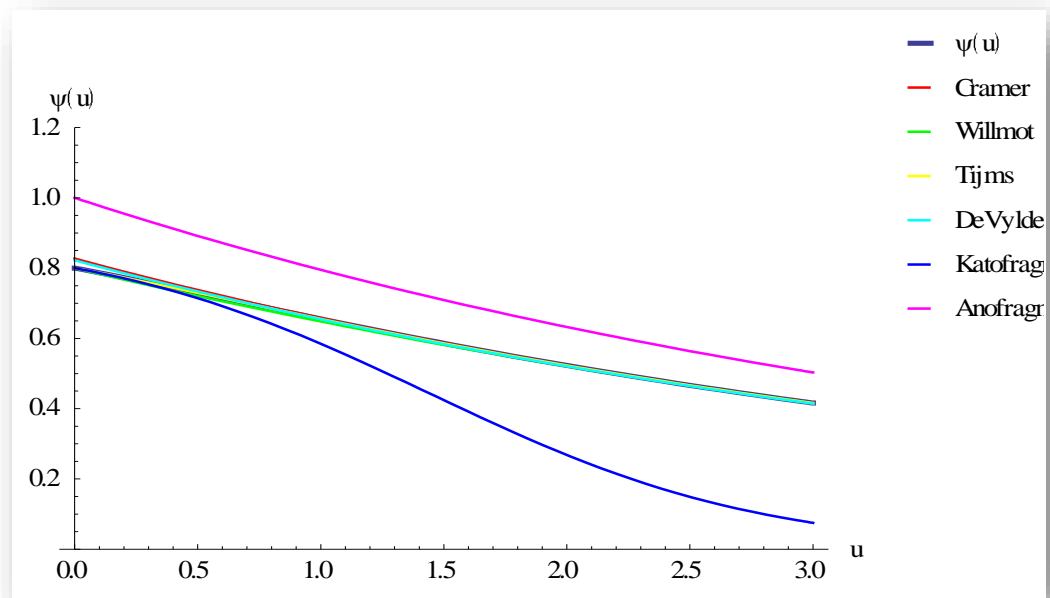
Πίνακας 2.6.8

## Παρατηρήσεις

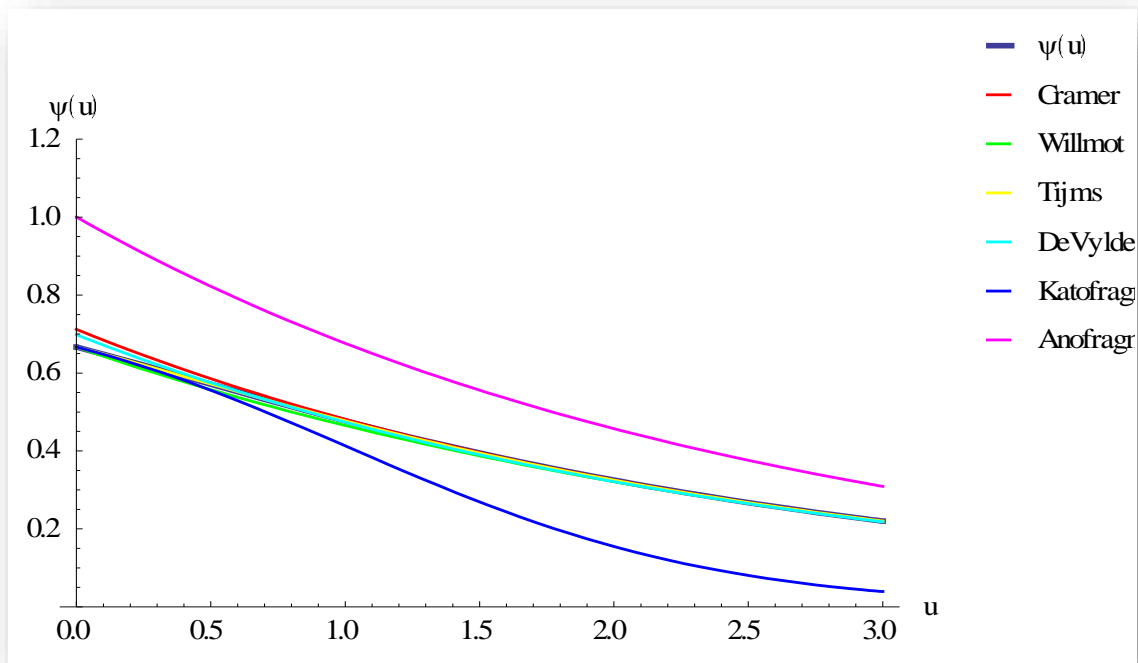
Από Πίνακα 2.6.5, Πίνακα 2.6.6, Πίνακα 2.6.7 και Πίνακα 2.6.8, παρατηρούμε με έντονο μαύρο χρώμα ότι η προσέγγιση του Tijms για όλες τις τιμές του  $\theta$  που πήραμε και για  $u \leq 1.5$ , έχει την μικρότερη απόκλιση από την  $\psi(u)$  επομένως και την καλύτερη προσέγγιση από τις υπόλοιπες προσεγγίσεις, ενώ για μεγάλα  $u$  ( $u \geq 3$ ) όπως ήταν αναμενόμενο, έτσι και σε αυτό το παράδειγμα της μείζης Γάμμα κατανομών, η προσέγγιση του Cramer φαίνεται να είναι καλύτερη με απειροελάχιστη διαφορά.

Ειδικότερα, για μικρά  $u$ , μετά την προσέγγιση του Tijms, η οποία όπως προαναφέραμε έχει την καλύτερη προσέγγιση για κάθε  $u$  και  $\theta$ , η προσέγγιση του De Vylder έχει την καλύτερη προσέγγιση για  $u \in \{0.5, \dots, 1\}$  όταν  $\theta = 0.25$  και  $\theta = 0.50$ , ενώ για  $\theta = 1$  και  $\theta = 4$ , παρατηρούμε ότι έχει την καλύτερη προσέγγιση για  $u \in \{0.25, \dots, 1\}$ . Τέλος, όπως προαναφέραμε για μεγάλα  $u$ , και για όλα τα  $\theta$ , η προσέγγιση του Cramer έχει καλύτερη ασυμπτωτική συμπεριφορά από του Tijms.

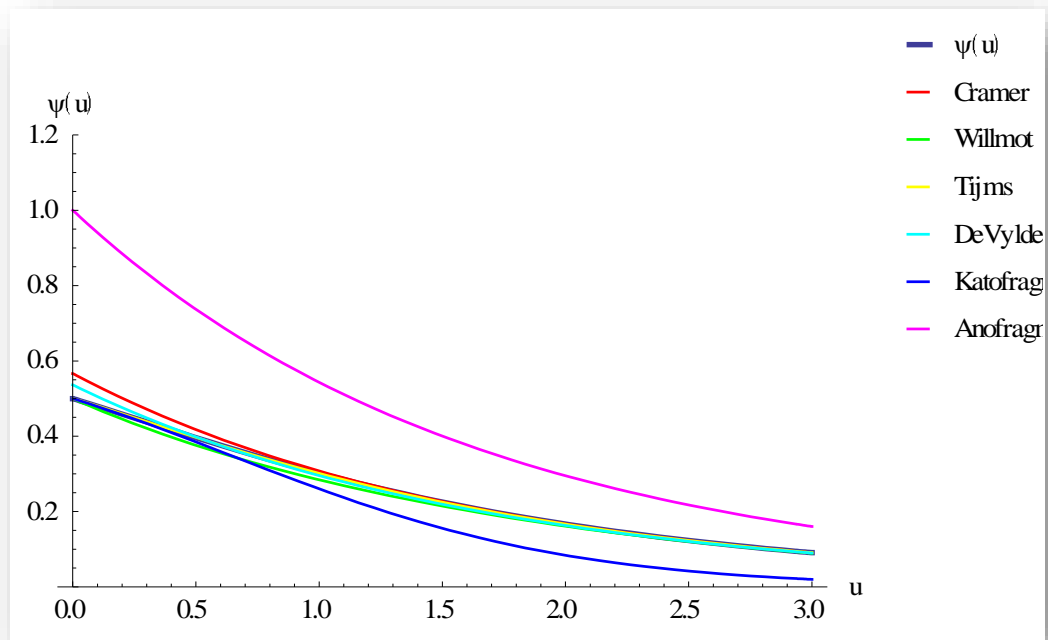
Παρακάτω θα παραθέσουμε γραφικές παραστάσεις της πιθανότητας χρεοκοπίας και των άλλων προσεγγίσεων και των αντίστοιχων φραγμάτων.



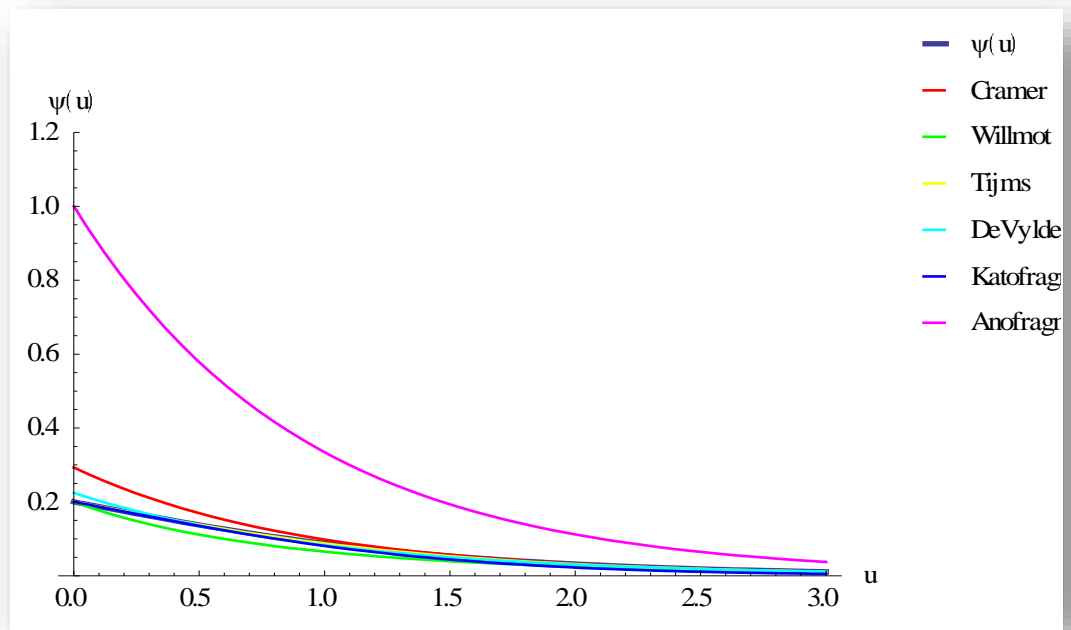
Σχήμα 2.6.1: Γραφική Παράσταση  $\psi(u)$  και προσεγγίσεων και φραγμάτων για  $\theta = 0.25$



Σχήμα 2.6.2: Γραφική Παράσταση  $\psi(u)$  και προσεγγίσεων και φραγμάτων για  $\theta = 0.5$



Σχήμα 2.6.3: Γραφική Παράσταση  $\psi(u)$  και προσεγγίσεων και φραγμάτων για  $\theta = 1$



Σχήμα 2.6.4: Γραφική Παράσταση  $\psi(u)$  και προσεγγίσεων και φραγμάτων για  $\theta = 4$

### Συμπεράσματα

Από Σχήμα 2.6.1 και Σχήμα 2.6.2 , παρατηρούμε ότι όλες οι προσεγγίσεις δεν υπερβαίνουν το άνω και κάτω φράγμα. Ειδικότερα η καμπύλη της προσέγγισης του Tijms (κίτρινη γραμμή) ταυτίζεται με αυτήν της  $\psi(u)$  για όλες τις τιμές του  $\theta$  και του  $u$ .

Επίσης, γίνεται φανερή η απόκλιση της  $\psi_C(u)$  από την  $\psi(u)$  για πολύ μικρά  $u$  και η οποία συνεχίζει να αυξάνεται καθώς μεγαλώνει το  $\theta$ , δηλαδή παίρνει τις τιμές  $\theta = 1$  και  $\theta = 4$ , (Σχήμα 2.6.3 και Σχήμα 2.6.4). Ακόμη, για  $\theta = 0.25$  και  $\theta = 0.5$  , παρατηρούμε ότι για μικρά  $u$  , όλες οι άλλες οι προσεγγίσεις έχουν ελάχιστες αποκλίσεις από την  $\psi(u)$  , ενώ καθώς μεγαλώνει το  $\theta$  και παίρνει τις τιμές  $\theta = 1$  και  $\theta = 4$ , τόσο αυξάνονται οι αποκλίσεις για μικρές τιμές του αποθεματικού  $u$ . Τέλος, είναι φανερό πως καθώς το  $\theta$  αυξάνεται η καμπύλη του κάτω φράγματος πέφτει όλο και πιο κάτω και παράλληλα οι προσεγγίσεις πλησιάζουν το κάτω φράγμα.

### 2.2.4 Αριθμητική Εφαρμογή προσέγγισης Εκθετικής μέσω Μείξης Erlang(2,β<sub>i</sub>)

Οι μείξεις κατανομών Erlang έχουν λάβει μεγάλη προσοχή στο πεδίο της Αναλογιστικής επιστήμης γενικότερα καθώς και στην θεωρία χρεοκοπίας ειδικότερα. Για

παράδειγμα, η μοντελοποίηση δεδομένων σε μεγέθη απαιτήσεων είναι κρίσιμο όταν τιμολογούμε ασφαλιστικά προϊόντα. Τα αναλογιστικά μοντέλα βοηθούν τις ασφαλιστικές να υπολογίσουν το ρίσκο που σχετίζεται με το χαρτοφυλάκιο προκειμένου να καθορίσουν τις τιμές των ασφαλίσεων.

Ο Tijms (1994, p.163), έδειξε ότι η κλάση κατανομών μείξης Erlang με κοινή παράμετρο κλίμακας είναι πυκνή στο διάστημα  $R_+$ . Επίσης, οι Lee & Lin (2010), χρησιμοποίησαν έναν αλγόριθμο που ανέπτυξαν για πεπερασμένες μείξεις, προκειμένου να εκτιμήσουν τις παραμέτρους μιας μείξης Erlang κατανομών με κοινή παράμετρο κλίμακας. Επίσης, πρότειναν μια διαδικασία προσαρμογής προκειμένου να καθορίσουν τον βέλτιστο αριθμό Erlang κατανομών και τις βέλτιστες παραμέτρους σχήματος στη μείξη. Οι παραπάνω αποτυπώνουν την ευελιξία των μείξεων Erlang (ειδική περίπτωση Γάμμα Κατανομής όπου η παράμετρος σχήματος  $k$  είναι ακέραιος αριθμός), να παράγουν δεδομένα από παραμετρικά μοντέλα, όπως ομοιόμορφη κατανομή, lognormal και γενικευμένη κατανομή Pareto και να προσεγγίζουν την κατανομή του δείγματος.

Στην τελευταία εφαρμογή του κεφαλαίου θα μελετήσουμε την περίπτωση μίας μείξης Erlang κατανομών στην οποία έχουμε διαφορετική παράμετρο κλίμακας(scale) για τις  $X_1, X_2$  αλλά ίδια παράμετρο σχήματος ίση με 2. Εστω ότι έχουμε καλές εκτιμήσεις των τριών πρώτων ροπών μιας κατανομής απαιτήσεων. Θέλουμε να εκτιμήσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας καθώς και την κατανομή του ελλείματος (Κεφάλαιο 3), χρησιμοποιώντας συνδυασμό δύο Erlang πυκνοτήτων, δηλαδή θα μελετήσουμε μια κατανομή με πυκνότητα,

$$f(x) = q_1 \beta_1^2 e^{-\beta_1 x} x + q_2 \beta_2^2 e^{-\beta_2 x} x. \quad (2.7.1)$$

Για να βρούμε τις άγνωστες παραμέτρους της  $f(x)$  με τη μέθοδο των ροπών, σύμφωνα με την εργασία των Gerber, Goovaerts και Kaas (1987), πρέπει να βρούμε τα  $q_1, q_2, \beta_1, \beta_2$ , από το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων,

$$q_1 + q_2 = 1 \quad (2.7.2)$$

$$q_1 \left( \frac{2}{\beta_1} \right) + q_2 \left( \frac{2}{\beta_2} \right) = E(X) \quad (2.7.3)$$

$$q_1 \left( \frac{6}{\beta_1^2} \right) + q_2 \left( \frac{6}{\beta_2^2} \right) = E(X^2) \quad (2.7.4)$$

$$q_1 \left( \frac{24}{\beta_1^3} \right) + q_2 \left( \frac{24}{\beta_2^3} \right) = E(X^3) \quad (2.7.5)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορούν να υπολογιστούν πιο απλά κάνοντας τις παρακάτω μετατροπές. Θεωρώντας  $q = q_1$  και  $b_j = 1/\beta_j$  καθώς και

$$A_j = \frac{E(X^j)}{(j+1)!} \quad (2.7.6)$$

Τότε, προκύπτουν οι παρακάτω 3 εξισώσεις,

$$q \left( \frac{2!}{\beta_1} \right) + (1 - q) \left( \frac{2!}{\beta_2} \right) = E(X) \quad (2.7.7)$$

$$q \left( \frac{3!}{\beta_1^2} \right) + (1 - q) \left( \frac{3!}{\beta_2^2} \right) = E(X^2) \quad (2.7.8)$$

$$q \left( \frac{4!}{\beta_1^3} \right) + (1 - q) \left( \frac{4!}{\beta_2^3} \right) = E(X^3) \quad (2.7.9)$$

Υποθέτοντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι,  $\beta_1 \leq \beta_2$ , καθώς και  $q_1 \geq 0, q_2 \geq 0$ , αλλιώς  $f(x)$  αρνητική για μεγάλες τιμές του  $x$ .

Μια επιπλέον απαραίτητη συνθήκη σύμφωνα με Gerber, Goovaerts & Kaas (1987) για την  $f(x)$  προκειμένου να μην παίρνει αρνητικές τιμές είναι να ισχύει η παρακάτω συνθήκη :

- $f(0) > 0$

Η εναλλακτικά να ισχύει η παρακάτω συνθήκη,

- $f(0) = 0$  και  $f'(0) \geq 0$ .

Στην εργασία τους, προκειμένου να βρουν τις παραπάνω παραμέτρους μιας μείξης δύο Γάμμα κατανομών, κάνουν την υπόθεση ότι οι ροπές έχουν εκτιμηθεί από ένα δείγμα το οποίο ακολουθεί Εκθετική κατανομή με παράμετρο 1. Συνεπώς,

$$E(X) = 1, E(X^2) = 2, \text{ και } E(X^3) = 2$$

και επομένως, έλαβαν τις παρακάτω τιμές για τις παραμέτρους της  $f(x)$ .

- $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$
- $\beta_1 = 1.268$  και  $\beta_2 = 4.732$ ,

και κατέληξαν στην παρακάτω ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας για  $\lambda = 1, c = 2$ ,

$$\psi(u) = 0.517e^{-0.506u} - 0.070e^{-1.765u} + 0.089e^{-3.544u} - 0.036e^{-5.685u}.$$

Ενώ, η πιθανότητα χρεοκοπίας για την εκθετική κατανομή με παράμετρο 1 είναι ίση με

$$\psi(u) = 0.5e^{-0.5u}.$$

Η μέγιστη απόκλιση μεταξύ της προσέγγισης της πιθανότητας χρεοκοπίας της Μείξης Γάμμα και της εκθετικής είναι **0.004**.

Ως συνέχεια στο παράδειγμα που προαναφέραμε, θα κάνουμε ένα δικό μας παράδειγμα στο οποίο θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις (2.7.7), (2.7.8) και (2.7.9) και παίρνοντας ως ροπές τις εκτιμήσεις από μία τ.μ.  $Y \sim \text{Exp}(5)$ , κάνοντας χρήση του λογισμικού Mathematica. Ετσι λοιπόν, οι παράμετροι που επιλέγουμε



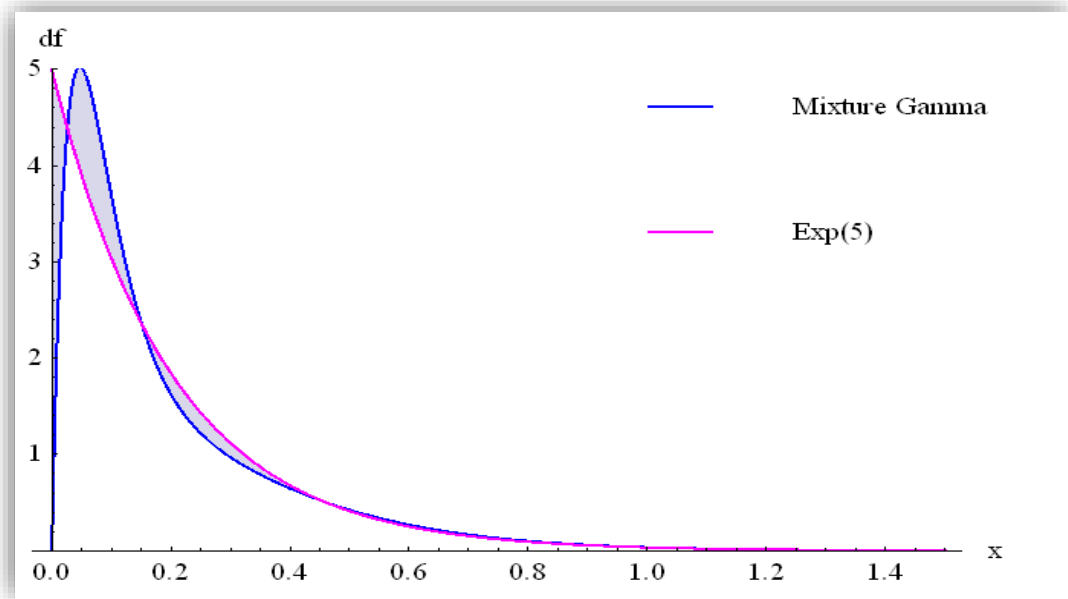
λαμβάνοντας υπόψιν και την συνθήκη  $\beta_1 \leq \beta_2$ , είναι  $\beta_1 = 6.33975$  και  $\beta_2 = 23.6603$  και βάρη μείξης  $q_1 = q_2 = \frac{1}{2}$ .

Οπότε, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας που λαμβάνουμε είναι η ακόλουθη ,

$$f(x) = 279.905e^{-23.6603x}x + 20.0962e^{-6.33975x}.$$

Στο παρακάτω διάγραμμα παριστάνεται η  $f(x)$  και η  $g(x)$  συναρτήσε του  $x$ , όπου,

$$g(x) = 5e^{-5x}.$$



**Σχήμα 2.7.1:** Γραφική Απεικόνιση  $f(x)$  και  $g(x)$ .

Για την  $f(x)$  για  $\theta = 0.5$  παίρνουμε την παρακάτω ροπογεννήτρια ,

$$M_X(t) = \frac{279.905}{(t - 23.6603)^2} + \frac{20.0962}{(t - 6.33975)^2}, \quad t < 6.33975,$$

καθώς και  $r_1 = 1.6741$ ,  $r_2 = 9.21932$ ,  $r_3 = 16.7337$ .

Επομένως, εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε στην παρακάτω συνάρτηση πιθανότητας χρεοκοπίας,

$$\psi(u) = -0.0256426e^{-29.0396u} + 0.074142e^{-16.7337u} - 0.0556354e^{-9.21932u} + 0.673803e^{-1.6741u}.$$

Ακολούθως, καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα πιθανοτήτων για  $\theta = 0.5$ .

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$\psi(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_C(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_W(u)$	$e^{-Ru}$
<b>0.1</b>	0.54308	0.56031	0.56458	0.56994	0.56432	0.56570	0.84585
<b>0.25</b>	0.36869	0.43894	0.43989	0.44337	0.43949	0.44129	0.65802
<b>0.50</b>	0.14625	0.29121	0.29005	0.29175	0.28973	0.29114	0.43299
<b>0.75</b>	0.04386	0.19192	0.19115	0.19197	0.19100	0.19181	0.28491
<b>1</b>	0.01147	0.12632	0.12592	0.12632	0.12592	0.12628	0.18748
<b>1.5</b>	0.00067	0.05470	0.05460	0.05470	0.05472	0.05469	0.08118
<b>3</b>	0.00000	0.00444	0.00444	0.00444	0.00450	0.00444	0.00659

Πίνακας 2.7.1

$u$	$ \psi_T(u) - \psi(u) $	$ \psi_C(u) - \psi(u) $	$ \psi_W(u) - \psi(u) $	$ \psi_{DV}(u) - \psi(u) $	$ \psi(u) - \psi_E(u) $
<b>0.1</b>	0.00427	0.00962	0.00538	<b>0.00401</b>	0.00401
<b>0.25</b>	0.00096	0.00444	0.00235	<b>0.00056</b>	0.00056
<b>0.50</b>	0.00116	0.00054	<b>0.00008</b>	0.00148	0.00148
<b>0.75</b>	0.00077	<b>0.00006</b>	0.00011	0.00092	0.00092
<b>1</b>	0.00040	<b>0.00000</b>	0.00004	0.00040	0.00040
<b>1.5</b>	0.00010	<b>0.00000</b>	0.00000	0.00003	0.00003
<b>3</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	0.00005	0.00005

Πίνακας 2.7.2

Παρατηρούμε ότι η μέγιστη απόκλιση της  $\psi(u)$  της Μείξης από αυτή της  $Exp(5)$ , είναι **0.00148** για  $u = 0.5$ . Επομένως, παρατηρούμε μία εξαιρετική προσαρμογή για την μείξη δύο Γάμμα κατανομών, κάτι που φαίνεται και στο παρακάτω διάγραμμα στο οποίο φαίνεται η καμπύλη της κατανομής Γάμμα να συμπίπτει με αυτή της Εκθετικής στον θετικό ημιάξονα.

Όσο αφορά τις άλλες προσεγγίσεις, παρατηρούμε όπως είναι αναμενόμενο, για μικρές τιμές του αποθεματικού ( $u = 0.1, u = 0.25$ ), η προσέγγιση του De Vylder είναι καλύτερη ενώ για  $u = 0.5$ , η προσέγγιση του Willmot. Για μεγάλα  $u$ , καλύτερη είναι του Cramer, ενώ και η προσέγγιση του Tijms είναι ικανοποιητική.

Εν συνεχεία, θα εξετάσουμε την ίδια περίπτωση για  $\theta = 4$ . Η πιθανότητα χρεοκοπίας που παίρνουμε από το λογισμικό Mathematica είναι η ακόλουθη,

$$\psi(u) = -0.0432104e^{-26.8342u} + 0.076923e^{-20u} - 0.075511e^{-7.94379u} + 0.241798e^{-4.22209u}.$$

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$\psi(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_C(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$\psi_W(u)$	$e^{-Ru}$
<b>0.1</b>	0.12935	0.13186	0.13500	0.15852	0.13406	0.13368	0.65560
<b>0.25</b>	0.06803	0.07425	0.07422	0.08415	0.07358	0.07194	0.34801
<b>0.50</b>	0.02096	0.02787	0.02693	0.02928	0.02707	0.02570	0.12111
<b>0.75</b>	0.00570	0.00999	0.00963	0.01019	0.00996	0.00923	0.04215
<b>1</b>	0.00145	0.00352	0.00341	0.00355	0.00366	0.00330	0.01467
<b>1.5</b>	0.00008	0.00043	0.00042	0.00043	0.00050	0.00042	0.00178
<b>3</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>

Πίνακας 2.7.3

Όπως και πρίν βρίσκουμε τις αποκλίσεις των προσεγγίσεων από την  $\psi(u)$  καθώς και της  $\psi(u)$  από της  $\psi_E(u)$  για  $\theta = 4$ .

$u$	$ \psi_T(u) - \psi(u) $	$ \psi_C(u) - \psi(u) $	$ \psi_W(u) - \psi(u) $	$ \psi_{DV}(u) - \psi(u) $	$ \psi(u) - \psi_E(u) $
<b>0.1</b>	0.00315	0.02666	<b>0.00182</b>	0.00221	0.00221
<b>0.25</b>	<b>0.00003</b>	0.00990	0.00231	0.00067	0.00067
<b>0.50</b>	0.00094	0.00142	0.00216	<b>0.00080</b>	0.00080
<b>0.75</b>	0.00037	0.00020	0.00076	<b>0.00004</b>	0.00004
<b>1</b>	0.00011	<b>0.00003</b>	0.00022	0.00014	0.00014
<b>1.5</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	0.00001	0.00007	0.00007
<b>3</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	<b>0.00000</b>	0.00000

Πίνακας 2.7.4

Παρατηρούμε ότι η μέγιστη απόκλιση της προσέγγισης Γάμμα κατανομών από την Εκθετική είναι **0.00221** για  $u = 1$ . Για τις άλλες προσεγγίσεις, για  $u = 0.1$ , καλύτερη προσέγγιση είναι του Willmot, για  $u = 0.25$ , του Tijms και για  $u = 0.50$ ,  $u = 0.75$  καλύτερη του De-Vylder. Ενώ καθώς αυξάνεται το  $u$ , η προσέγγιση των Cramer και Tijms έχουν εξίσου καλή προσαρμογή.

### 2.2.5 Αριθμητική Εφαρμογή προσέγγισης Pareto(5, 4) Προσέγγιση μέσω Μείξης Erlang

Παρακάτω, θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου θέλουμε να προσεγγίσουμε μια υποεκθετική κατανομή όπως η Pareto μέσω μιας μείξης Γάμμα Κατανομών με παραμέτρους σχήματος ίσες με 2 και οι παράμετροι κλίμακας όπως και τα βάρη, θα εκτιμηθούν από τις εξισώσεις όπως προηγουμένως. Έστω ότι έχουμε εκτιμήσει τις 3 πρώτες ροπές από ένα δείγμα και έχουμε δει ότι προσαρμόζονται σε μια κατανομή Pareto,  $X \sim Pa(5,4)$ , με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$f(x) = \frac{5120}{(4+x)^6},$$

και συνάρτηση κατανομής,

$$F(x) = 1 - \frac{1024}{(4+x)^5}.$$

Οι 3 πρώτες ροπές είναι  $E(X) = 1, E(X^2) = 2.66667$  και  $E(X^3) = 16$ . Λαμβάνοντας υπόψιν τους περιορισμούς, καταλήγουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας της μείξης είναι η εξής:

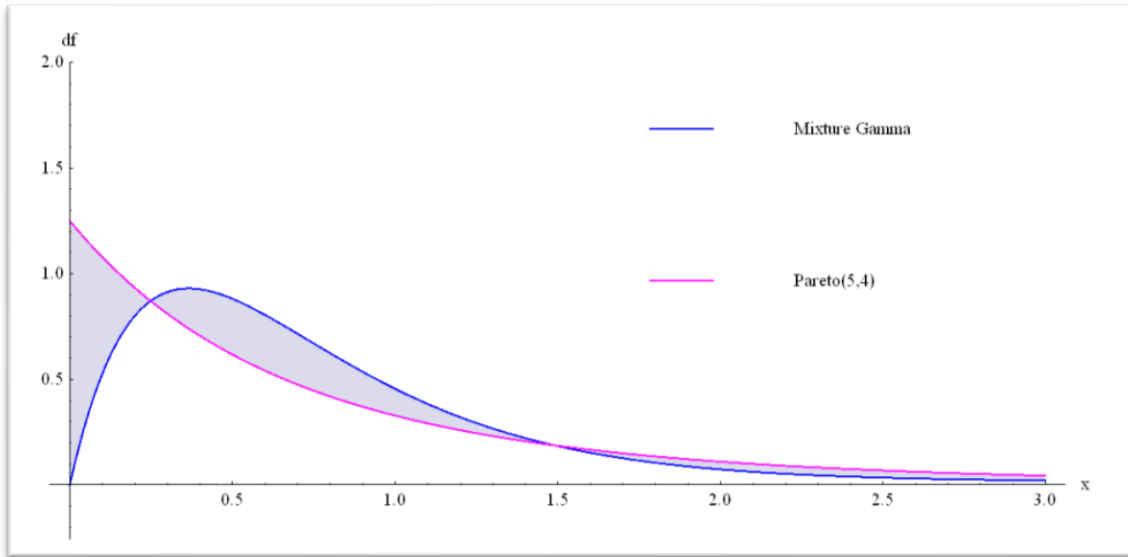
$$f_{Erl}(x) = 6.91224e^{-2.75255x}x + 0.0237245e^{-0.520179x}x,$$

και η συνάρτηση κατανομής η ακόλουθη,

$$F_{Erl}(x) = 1 - e^{-2.75255x}(0.912322 + 2.51121x) - e^{-0.5202x}(0.08768 + 0.045608x),$$

όπου,  $\beta_1 = 0.520179$  και  $\beta_2 = 2.75255$  ενώ τα βάρη μείξης είναι  $q_1 = 0.08768$  και  $q_2 = 0.912322$ .

Στο παρακάτω γράφημα παριστάνεται η καμπύλη της σ.π.π της Μείξης Γάμμα κατανομών και της σ.π.π μιας κατανομής Pareto με παραμέτρους  $c = 5$  και  $d = 4$ .



**Σχήμα 2.8.1:** Γραφική Απεικόνιση σ.π.π Μείξης Γάμμα και Pareto(5,4)

Για  $\theta = 0.5$ , θα υπολογίσουμε με το λογισμικό Mathematica, την πιθανότητα χρεοκοπίας με την προσέγγιση, χρησιμοποιώντας μετασχηματισμό Laplace για διάφορες τιμές του  $u$ , όπως επίσης με την μέθοδο του DeVyllder ( $\psi_{DV}(u)$ ), τόσο για την κατανομή Pareto όσο και για την προσέγγιση της μέσω Μείξης Γάμμα. Το ίδιο θα γίνει και με την προσέγγιση των Embrechts-Veraverbeken ( $\psi_{VE}(u)$ ). (Βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, Πίνακες 6-10).

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$\psi_{Erl}(u)$ <i>Mixture</i>	$\psi_{DV}(u)$ <i>Mixture</i>	$\psi_{DV}(u)$ <i>Pareto</i>	$\psi_{VE}(u)$ <i>Pareto</i>	$\psi_{BB}(u)$ <i>Mixture</i>
<b>0.1</b>	0.64312	0.64392	0.55931	0.55931	1.80202	0.52103
<b>0.25</b>	0.60411	0.60936	0.54162	0.54162	1.52594	0.39870
<b>0.50</b>	0.53544	0.55525	0.51337	0.51337	1.15257	0.26787
<b>0.75</b>	0.47015	0.50810	0.48659	0.48659	0.88734	0.18436
<b>1</b>	0.41379	0.46796	0.46121	0.46121	0.70589	0.12847
<b>1.5</b>	0.33108	0.40450	0.41435	0.41435	0.49494	0.06371
<b>3</b>	0.20246	0.28533	0.30045	0.30045	0.25385	0.08381

Πίνακας 2.8.1

Επίσης, θα υπολογίσουμε τις αποκλίσεις των προσεγγίσεων από την  $\psi(u)$ .

$u$	$ \psi_{DV}(u) - \psi(u) $ <i>Mixture</i>	$ \psi_{DV}(u) - \psi(u) $ <i>Pareto</i>	$ \psi_{VE}(u) - \psi(u) $ <i>Pareto</i>
<b>0.1</b>	<b>0.08461</b>	<b>0.08461</b>	1.16798
<b>0.25</b>	<b>0.06774</b>	<b>0.06774</b>	0.95997
<b>0.50</b>	<b>0.04188</b>	<b>0.04188</b>	0.69334
<b>0.75</b>	<b>0.02150</b>	<b>0.02150</b>	0.49767
<b>1</b>	<b>0.00675</b>	<b>0.00675</b>	0.35124
<b>1.5</b>	<b>0.00985</b>	<b>0.00985</b>	0.15503
<b>3</b>	<b>0.01512</b>	<b>0.01512</b>	0.07209

Πίνακας 2.8.2

Όπως παρατηρούμε από τους παραπάνω πίνακες, η προσέγγιση του De Vylder είναι ίδια και στις 2 κατανομές για κάθε τιμή του  $u$ . Να τονίσουμε εδώ, ότι ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας  $\psi(u)$  είναι εφικτός μόνο όταν υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής. Στην κατανομή Pareto, όπως είναι γνωστό, η ροπογεννήτρια απειρίζεται και ο συντελεστής προσαρμογής δεν υπάρχει. Επομένως, η εκτίμησή της μέσω μιας μείξης Erlang  $(2, \beta_i)$  μας δίνει την δυνατότητα υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας. Επίσης, δεν χρησιμοποιήσαμε την προσέγγιση του Tijms, λόγω αδυναμίας υπολογισμού της σταθεράς του Cramer στην συγκεκριμένη περίπτωση, όπως και των άλλων προσεγγίσεων που περιλαμβάνεται αυτή η σταθερά. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε την καλή προσαρμογή της  $\psi_{DV}(u)$ , (κόκκινη γραμμή) στην  $\psi(u)$  (γαλάζια γραμμή) όπως και την μέθοδο των Embrechts-Veraverbeke και παρατηρούμε ότι όλες συμπίπτουν καθώς  $u \rightarrow \infty$ .

Για  $\theta = 4$  κάνουμε ότι και προηγουμένως και παίρνουμε τους παρακάτω πίνακες,

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$\psi_{Erl}(u)$	$\psi_{DV}(u)$ <i>Mixture</i>	$\psi_{DV}(u)$ <i>Pareto</i>	$\psi_{VE}(u)$ <i>Pareto</i>	$\psi_{BB}(u)$ <i>Mixture</i>
<b>0.1</b>	0.18384	0.18400	0.13686	0.13686	0.22649	0.15631
<b>0.25</b>	0.16019	0.16111	0.12834	0.12834	0.19617	0.11961
<b>0.50</b>	0.12593	0.12877	0.11530	0.11530	0.15607	0.08036
<b>0.75</b>	0.09984	0.10432	0.10359	0.10359	0.12572	0.05531
<b>1</b>	0.08108	0.08643	0.09306	0.09306	0.10240	0.03854
<b>1.5</b>	0.05826	0.06361	0.07511	0.07511	0.06994	0.01912
<b>3</b>	0.03075	0.03419	0.03949	0.03949	0.02666	0.00251

Πίνακας 2.8.3

$u$	$ \psi_{DV}(u) - \psi_{Erl}(u) $ <i>Mixture</i>	$ \psi_{DV}(u) - \psi_{Erl}(u) $ <i>Pareto</i>	$ \psi_{VE}(u) - \psi_{Erl}(u) $ <i>Pareto</i>
<b>0.1</b>	0.04714	0.04714	<b>0.04249</b>
<b>0.25</b>	<b>0.03277</b>	<b>0.03277</b>	0.03505
<b>0.50</b>	<b>0.01347</b>	<b>0.01347</b>	0.02731
<b>0.75</b>	<b>0.00073</b>	<b>0.00073</b>	0.02140
<b>1</b>	<b>0.00663</b>	<b>0.00663</b>	0.01597
<b>1.5</b>	0.11505	0.11505	<b>0.00633</b>
<b>3</b>	<b>0.00531</b>	<b>0.00531</b>	0.00753

Πίνακας 2.8.4

Κατ'αρχάς, είναι φανερό πώς και για  $\theta = 4$ , η προσέγγιση του De Vylder είναι ίδια και για τις δύο κατανομές. Από τον Πίνακα 2.9.4, βλέπουμε ότι για  $u = 0.1$  και για  $u = 1.5$ , η  $\psi_{VE}(u)$  έχει την μικρότερη απόκλιση από την πιθανότητα χρεοκοπίας ενώ για τις υπόλοιπες τιμές του  $u$ , η προσέγγιση του De Vylder έχει την μικρότερη απόκλιση.

### Προσέγγιση μέσω Μείξης Εκθετικών Κατανομών

Θα ήταν ενδιαφέρον εξίσου, να επιχειρήσουμε να προσεγγίσουμε την ίδια κατανομή Pareto, με τις ίδιες παραμέτρους με μία μείξη Εκθετικών. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία, καταλήγουμε στην παρακάτω συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{EM}(x) = 1.10376e^{-1.18301x} + 0.0212341e^{-0.316987x},$$

όπου,

$$q_1 = 0.0669873, q_2 = 0.933013, \beta_1 = 0.316987, \beta_2 = 1.18301$$

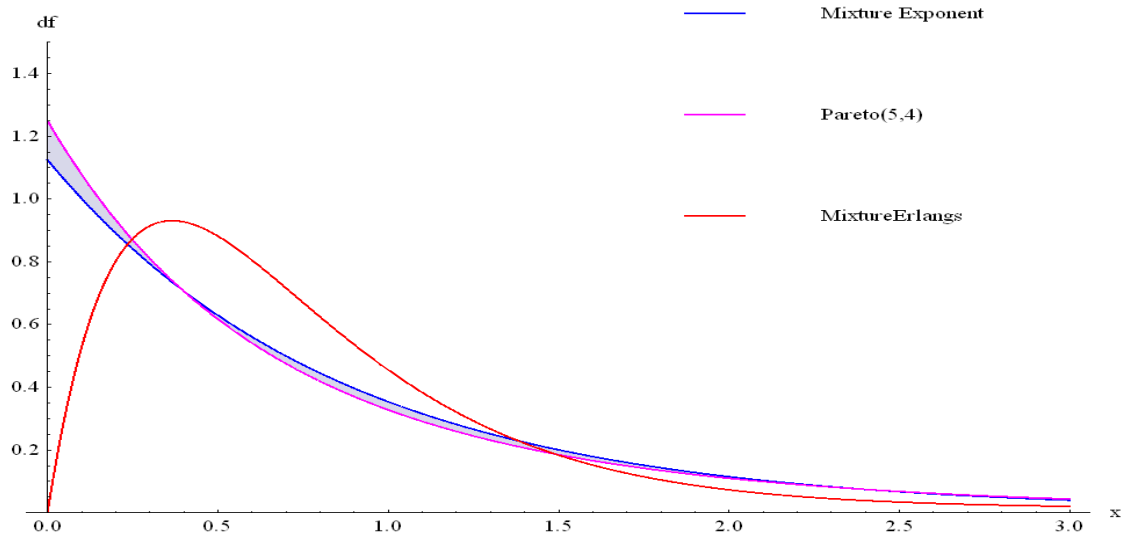
και συνάρτηση κατανομής,

$$F_{EM}(x) = 1 - 0.933013e^{-1.18301x} - 0.0669873e^{-0.316987x},$$

με ροπές

$$E(X) = 1, E(X^2) = 2.66668 \text{ και } E(X^3) = 16.0001.$$

Στο παρακάτω γράφημα παριστάνονται οι σ.π.π της Pareto(5,4) και των 2 προσεγγίσεων της, δηλαδή της μείξης Εκθετικών κατανομών(μπλέ χρώμα) και της μείξης Erlang(κόκκινο χρώμα) στην οποία είναι ξεκάθαρη η καλύτερη προσαρμογή της μείξης Εκθετικών.



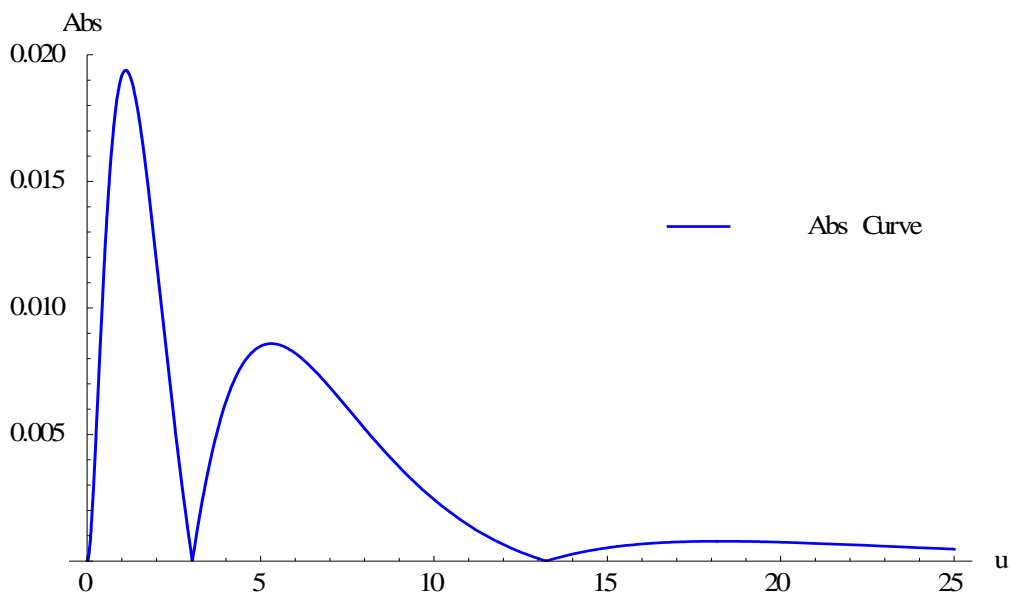
Σχήμα 2.8.2 :Γραφική Απεικόνιση των  $f_{EM}(x)$  ,  $f_{Erl}(x)$  και  $f(x)$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, βρίσκουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi_{EM}(u)$ .

Για περιθώριο ασφαλείας  $\theta = 0.5$  ,παίρνουμε για διάφορες τιμές του  $u$ , τις παρακάτω προσεγγίσεις.(Βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ , Πίνακες 11-14)

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$\psi_{EM}(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_C(u)$	$\psi_W(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$e^{-Ru}$
<b>0.1</b>	0.64423	0.64494	0.64495	0.45037	0.63813	0.55931	0.98057
<b>0.25</b>	0.60998	0.61415	0.61416	0.43731	0.59947	0.54162	0.95214
<b>0.50</b>	0.55232	0.56718	0.56720	0.41638	0.54430	0.51337	0.90656
<b>0.75</b>	0.49565	0.52505	0.52507	0.39645	0.49835	0.48659	0.86317
<b>1</b>	0.44167	0.48714	0.48716	0.37748	0.45950	0.46121	0.82186
<b>1.5</b>	0.34648	0.42196	0.42198	0.34221	0.39718	0.41435	0.74506
<b>3</b>	0.17263	0.28564	0.28565	0.25497	0.27660	0.30045	0.55512

Πίνακας 2.8.5



**Σχήμα 2.8.3:** Γραφική Απεικόνιση της συνάρτησης  $Abs(u) = |\psi_{Erl}(u) - \psi_{EM}(u)|$  για  $\theta = 0.5$

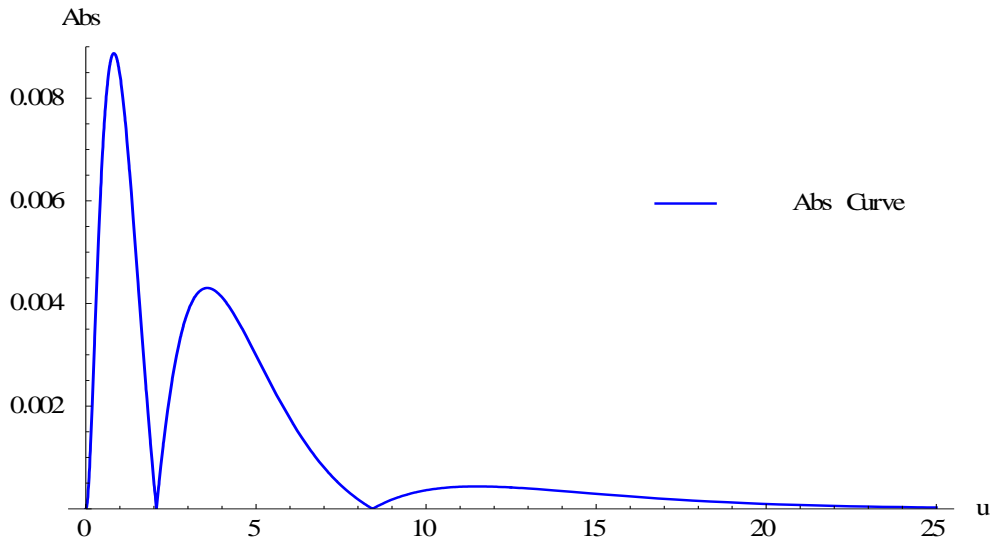
Στο παραπάνω γράφημα (Σχήμα 2.8.3), παρατηρούμε ότι για  $u \in (0,25)$  η μέγιστη απόκλιση της  $\psi(u)$  της προσέγγισης της Erlang από την  $\psi(u)$  της μείξης Εκθετικών είναι περίπου 0.019 για εξαιρετικά μικρά  $u$ , ενώ καθώς  $u \rightarrow \infty$  η διαφορά τους εκμηδενίζεται.

Επίσης, για  $\theta = 4$ , φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα προσεγγίσεων με τιμές που υπολογίστηκαν βάσει του λογισμικού Mathematica.

$u$	$\frac{\bar{H}(u)}{\theta + \bar{H}(u)}$	$\psi_{EM}(u)$	$\psi_T(u)$	$\psi_C(u)$	$\psi_W(u)$	$\psi_{DV}(u)$	$e^{-Ru}$
<b>0.1</b>	0.18457	0.18472	0.18472	0.05545	0.18480	0.13686	0.97045
<b>0.25</b>	0.16353	0.16427	0.16427	0.05301	0.16473	0.12834	0.92774
<b>0.50</b>	0.13361	0.13583	0.13583	0.04918	0.13731	0.11530	0.86071
<b>0.75</b>	0.10940	0.11311	0.11311	0.04563	0.11583	0.10359	0.79852
<b>1</b>	0.08998	0.09489	0.09489	0.04233	0.09884	0.09306	0.74082
<b>1.5</b>	0.06215	0.06831	0.06831	0.03643	0.07431	0.07511	0.63763
<b>3</b>	0.02542	0.03035	0.03035	0.02323	0.03814	0.03949	0.40657

**Πίνακας 2.8.6**





**Σχήμα 2.8.4 :** Γραφική Απεικόνιση της συνάρτησης  $Abs(u) = |\psi_{Erl}(u) - \psi_{EM}(u)|$  για  $\theta = 4$

Όπως παρατηρούμε στο Σχήμα 2.8.4 για  $u \in (0,25)$  και  $\theta = 4$ , η μέγιστη απόκλιση μεταξύ των δύο προσεγγίσεων που παρατηρείται είναι 0.009 περίπου για  $u = 1$ . Δηλαδή, καθώς το περιθώριο ασφαλείας μεγαλώνει, μικραίνει και η μέγιστη απόκλιση μεταξύ των δύο προσεγγίσεων.

### Κριτήριο βαθμίδας Αποτυχίας

Αρχικά, θα εξετάσουμε με το κριτήριο της βαθμίδας αποτυχίας το πόσο καλές είναι οι 2 προσεγγίσεις που παρουσιάσαμε προηγουμένως. Χρησιμοποιώντας την σχέση (1.4.1) της ενότητας 1.4, βρίσκουμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας της κατανομής Pareto(5,4) είναι

$$\lambda_X(y) = \frac{f_X(y)}{\bar{F}_X(y)} = \frac{5}{4+y},$$

καθώς επίσης ορίζουμε ως βαθμίδα αποτυχίας της μείξης Εκθετικών ως

$$\lambda_Y(y) = \frac{f_Y(y)}{\bar{F}_Y(y)},$$

και για την μείξη Erlang,

$$\lambda_Z(y) = \frac{f_Z(y)}{\bar{F}_Z(y)}.$$

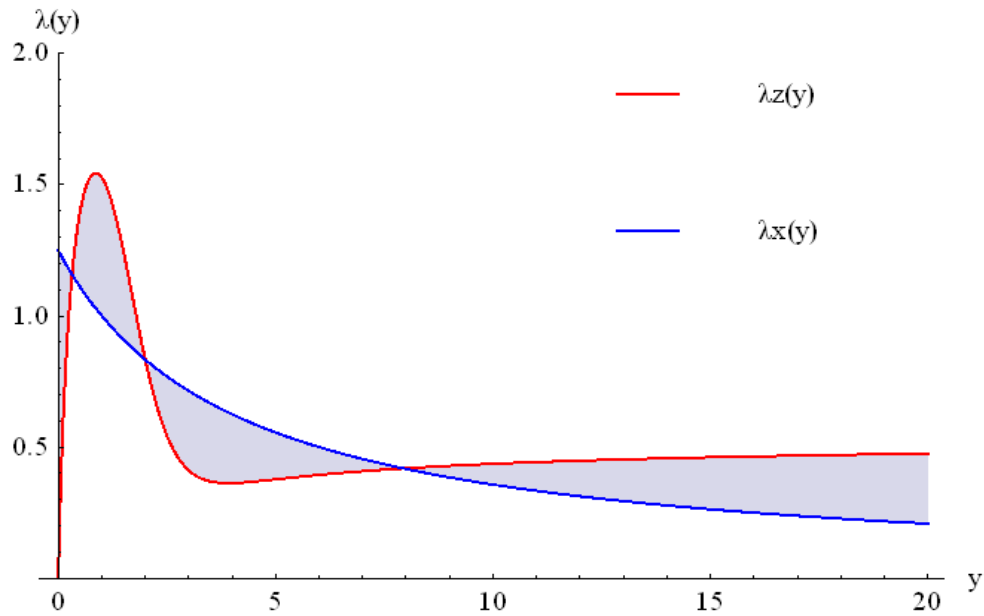
Στα παρακάτω διαγράμματα βλέπουμε ότι για  $y = 1$ , η  $\lambda_Z(y)$  παίρνει την μεγαλύτερη της τιμή ίση με 1.6, ενώ η Pareto(5,4) ίση με 1.25 για  $y = 0$  ενώ για  $y \in (2,8)$  η καμπύλη της  $\lambda_Z(y)$  βρίσκεται κάτω από της  $\lambda_X(y)$ , ενώ στη συνέχεια εξακολουθεί να υπάρχει μια διαφορά αλλά σταθερή.

Η  $\lambda_Y(y)$  παρουσιάζει μέγιστο για  $x = 0$  με  $\lambda_Y(y) = 1.125$  και ακολουθεί φθίνουσα πορεία όπως και η  $\lambda_X(y)$ . Η διαφορά τους στο μέγιστο σημείο ( $x = 0$ ) είναι 0.125.

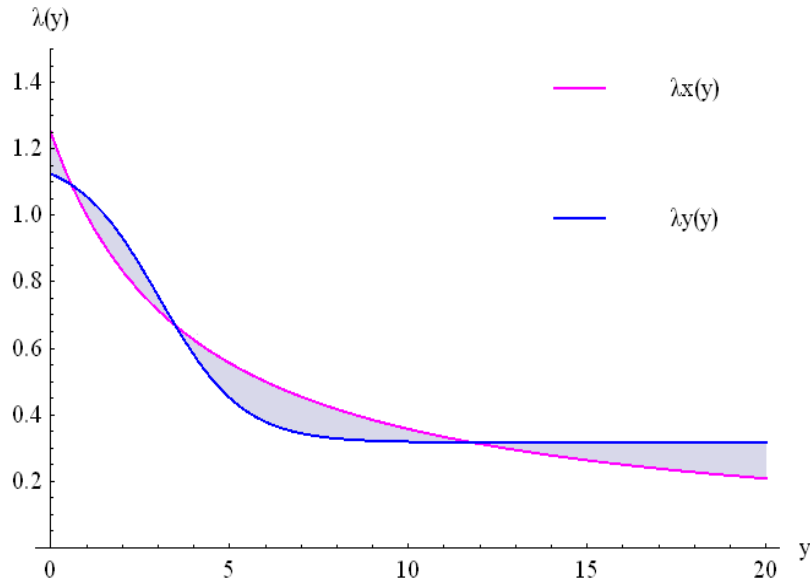
Επίσης,  $\lambda_Y(y) = 1.05674$  για  $y = 1$ . Ωστόσο, αυτό που αξίζει να προσέξουμε είναι ότι για  $y = 8$  έως  $y = 20$  η  $\lambda_Z(y)$  παίρνει μεγαλύτερες τιμές από την  $\lambda_Y(y)$ . Ενδεικτικά, φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα με τιμές:

$y$	$\lambda_Y(y)$	$\lambda_X(y)$	$\lambda_Z(y)$
<b>1</b>	1.057	1.250	1.529
<b>5</b>	0.451	0.555	0.377
<b>8</b>	0.329	0.416	0.419
<b>10</b>	0.319	0.357	0.436
<b>12</b>	0.317	0.313	0.448
<b>20</b>	0.317	0.208	0.476

**Πίνακας 2.8.7**



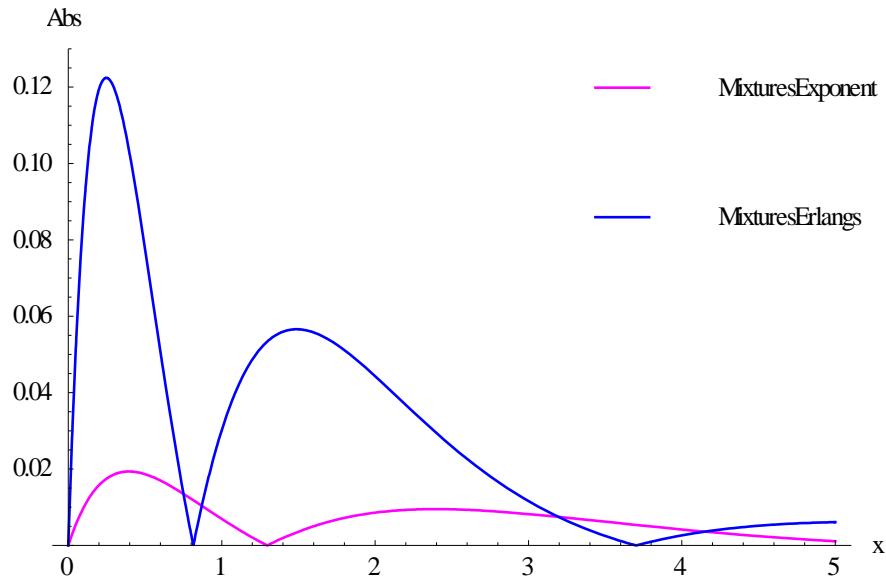
**Σχήμα 2.8.5:** Γραφική απεικόνιση σύγκρισης βαθμίδων αποτυχίας  $\lambda_Z(y)$  και  $\lambda_X(y)$



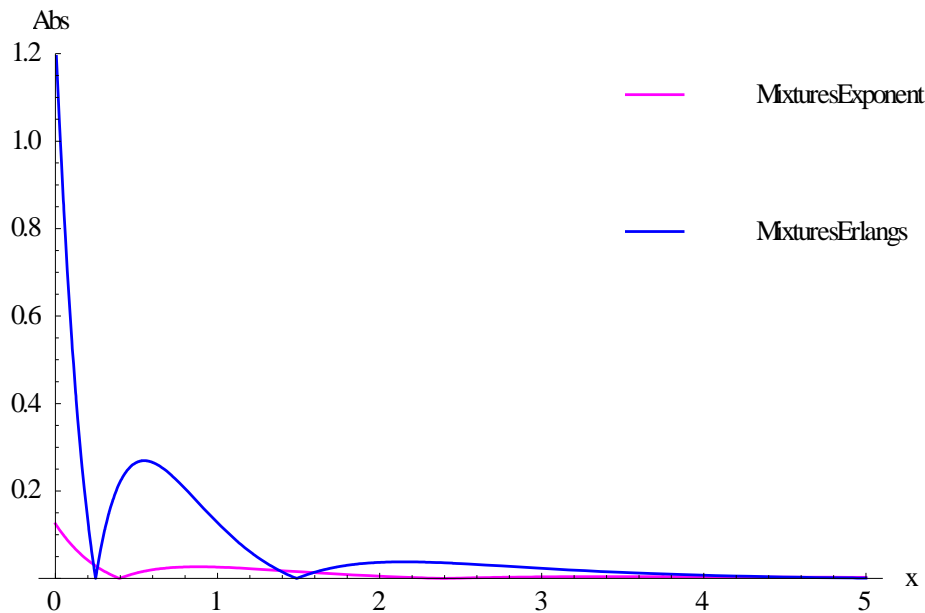
**Σχήμα 2.8.6:** Γραφική απεικόνιση σύγκρισης βαθμίδων αποτυχίας  $\lambda_X(y)$  και  $\lambda_Y(y)$

Από (Σχήμα 2.8.5) και (Σχήμα 2.8.6) παρατηρούμε ότι η  $\lambda_Z(y)$  μέχρι  $y = 1$  είναι αύξουσα ( $y \in IFR$ ) ενώ στο  $y \in (1,3)$  ακολουθεί φθίνουσα πορεία ( $y \in DFR$ ) και στη συνέχεια πάλι αύξουσα. Σε αυτή την περίπτωση αρχικά, η μονάδα έχει μεγάλη πιθανότητα να αποτύχει. Οι  $\lambda_X(y)$  και  $\lambda_Y(y)$  ακολουθούν μια σταθερή φθίνουσα πορεία και για  $y \in (8,20)$ , η  $\lambda_Y(y)$  σταθεροποιείται ενώ η  $\lambda_X(y)$  εξακολουθεί φθίνουσα πορεία. Εν ολίγοις, για την  $\lambda_X(y)$ , αυτό σημαίνει ότι όσο περνά ο χρόνος αυξάνεται η πιθανότητα να αποτύχει η μονάδα ( $y \in DFR$ ), ενώ αντιθέτως για τη  $\lambda_Y(y)$  η πιθανότητα φαίνεται να παραμένει σταθερή όσο περνάει ο χρόνος. Αντιθέτως, για την  $\lambda_Z(y)$  η μονάδα έχει μεγαλύτερη πιθανότητα να αποτύχει καθώς περνάει ο χρόνος, δηλαδή για  $y \in (8,20)$ .

**Κριτήριο της Μέγιστης Απόκλισης της προσεγγιστικής συνάρτησης κατανομής από την αρχική κατανομή**



**Σχήμα 2.8.7 :** Γραφική Απεικόνιση  $Abs_{F_{EM}}(x)$  και  $Abs_{F_{Erl}}(x)$  για  $x \in (0,5)$



**Σχήμα 2.8.8 :** Γραφική Απεικόνιση  $Abs_{f_{EM}}(x)$  και  $Abs_{f_{Erl}}(x)$  για  $x \in (0,5)$

Στα παραπάνω διαγράμματα παρατηρούμε ότι η μέγιστη απόκλιση στο Σχήμα 2.8.7 για την μείξη Erlang είναι 0.12 για  $x = 0.4$  και 0.02 για την μείξη εκθετικών . Στο Σχήμα 2.8.8, η μέγιστη απόκλιση των σ.π.π της μείξης εκθετικών από την Pareto (5,4) είναι 0.125003 για  $x = 0$ , ενώ στη συνέχεια η καμπύλη της απόκλισης ομαλοποιείται σταδιακά μέχρι που εκμηδενίζεται .Για την απόκλιση της μείξης Erlang από την Pareto (5,4), έχουμε ότι η μέγιστη απόκλιση είναι 1.25 για  $x = 0$  .Οι εξισώσεις που χρησιμοποιήθηκαν στο Mathematica, είναι οι ακόλουθες

$$Abs_{f_{EM}}(x) = |f_{EM}(x) - f(x)| \quad \text{και} \quad Abs_{f_{Erl}}(x) = |f_{Erl}(x) - f(x)|$$

$$Abs_{F_{EM}}(x) = |F_{EM}(x) - F(x)| \quad \text{και} \quad Abs_{F_{Erl}}(x) = |F_{Erl}(x) - F(x)|$$

Επομένως, είναι σαφές από τα δύο παραπάνω κριτήρια ότι η μείξη Εκθετικών είναι καλύτερη επιλογή ως προσέγγιση της Pareto(5,4).

### **Συμπέρασμα:**

Εχοντας καταλήξει ότι η μείξη εκθετικών είναι μια καλή επιλογή ως προσέγγιση για μια Pareto(5,4), στην μείξη Εκθετικών η προσέγγιση του Tijms είναι εξαιρετική (Πίνακας 2.8.6), τόσο για  $\theta = 0.5$  όσο και για  $\theta = 4$ , όπως και οι υπόλοιπες προσεγγίσεις ενώ ακόμη, βρήκαμε πλήθος προσεγγίσεων τόσο για την μείξη Erlang όσο και για την μείξη Εκθετικών.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Ποσότητες πριν και μετά την χρεοκοπία & Αριθμητικές Εφαρμογές

#### 3.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο, αρχικά θα κάνουμε μια εισαγωγή στις ελλειμματικές ανανεωτικές εξισώσεις βασισμένοι πάνω στα αποτελέσματα των Willmot & Woo (2017). Θα μελετήσουμε την συνάρτηση Gerber-Shiu, καθώς και τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Βάσει αυτού, θα προσεγγίσουμε την ουρά μέσω της προσέγγισης του Tijms και του Cramer καθώς επίσης θα βρούμε σχετικά φράγματα. Εν συνεχεία, στις ενότητες 3.1.3 και 3.1.4, θα μελετήσουμε την κατανομή του ελλείματος την στιγμή της χρεοκοπίας καθώς και του πλεονάσματος πριν την στιγμή της χρεοκοπίας και θα δώσουμε αναλυτικά παραδείγματα για την περίπτωση που οι απαιτήσεις ακολουθούν Εκθετική Κατανομή, Μείξη Εκθετικών, Γάμμα κατανομή καθώς και Μείξη Γάμμα.

#### 3.1.1 Αναμενόμενη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu

Η συνάρτηση Gerber-Shiu ή αναμενόμενη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής εκφράζει το (αναμενόμενο προεξοφλημένο) οικονομικό κόστος για τον ασφαλιστή την στιγμή που επέρχεται η χρεοκοπία. Θεωρούμε ότι η συνάρτηση ποινής  $w(x, y)$  είναι το κόστος για τον ασφαλιστή πολλαπλασιασμένο με έναν προεξοφλητικό παράγοντα  $e^{-\delta T}$  όπου  $\delta$  είναι η ένταση ανατοκισμού και  $T$  ο χρόνος χρεοκοπίας.

Αρχικά, θα κάνουμε μια σύνδεση μεταξύ των ανανεωτικών εξισώσεων και της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής. Υποθέτουμε ότι  $0 < \varphi < 1$ , και  $F(y)$  είναι συνάρτηση κατανομής των ανεξάρτητων ποσών απαιτήσεων ορισμένη στο  $[0, \infty)$  με  $F(0) = 0$ .

Γνωρίζουμε ότι,  $\bar{F}^{*n}(x)$  είναι η δεξιά ουρά της νιοστής συνέλιξης της  $F$  με τον εαυτό της και θέλουμε να εισάγουμε την δεξιά ουρά μιας μεταβλητής που ακολουθεί σύνθετη Γεωμετρική κατανομή, δηλαδή,

$$\bar{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varphi) \varphi^n \bar{F}^{*n}(x). \quad (3.1.1)$$

Είναι εμφανές ότι  $\bar{G}(0) = \varphi$ , έτσι ώστε η  $G(y)$  έχει μάζα πιθανότητας στο 0 ίση με  $1 - \varphi$ .

**Ορισμός 3.1.1.** Μια ανανεωτική εξίσωση για την άγνωστη συνάρτηση  $m$  είναι μια εξίσωση της μορφής

$$m(x) = \varphi \int_0^x m(x-y)f(y)dy + \eta(x), \quad (3.1.2)$$

όπου  $\eta(x)$  μια φραγμένη συνάρτηση,  $0 < \varphi \leq 1$  και  $f(x)$  μία συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Η γενική λύση μιας ανανεωτικής εξίσωσης δίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

**Θεώρημα 3.1.1.** Η λύση της ανανεωτικής εξίσωσης (3.1.2) όταν  $0 < \varphi < 1$  δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$m(x) = \frac{1}{1-\varphi} \int_0^x \eta(x-y)g(y)dy + \eta(x). \quad (3.1.3)$$

**Απόδειξη:** Από Σχέση (2.1.8) και Σχέση (3.1.1) προκύπτει ότι,

$$\hat{g}(s) = \frac{1-\varphi}{1-\varphi\hat{f}(s)}.$$

Επομένως, από Σχέση (3.1.2) παίρνοντας μετασχηματισμό Laplace και στα δύο μέρη προκύπτει ότι,

$$\int_0^\infty e^{-sx}m(x)dx = \frac{\int_0^\infty e^{-sx}\eta(x)dx}{1-\varphi\hat{f}(s)} = \frac{\hat{g}(s)}{1-\varphi} \int_0^\infty e^{-sx}\eta(x)dx.$$

Εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace καταλήγουμε στην σχέση (3.1.3).

Στην παρούσα ενότητα, το κύριο ενδιαφέρον μας επικεντρώνεται στην δεξιά ουρά της κατανομής των κλιμακωτών υψών. Ως εκ τούτου θα ήταν χρήσιμο να εκφράσουμε την συνάρτηση G-S ως συνάρτηση της δεξιάς ουράς των κλιμακωτών υψών  $\bar{G}(x)$ .

Από Feller (1971, σελ. 435), με εφαρμογή του μετασχηματισμού Laplace έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-sx}\bar{G}(x)dx &= \frac{1}{s} \left( 1 - \frac{(1-\varphi)}{1-\varphi\hat{f}(s)} \right) = \frac{\varphi}{1-\varphi\hat{f}(s)} \left( \frac{1-\hat{f}(s)}{s} \right) = \\ &= \varphi\hat{f}(s) \int_0^\infty e^{-sx}\bar{G}(x)dx + \varphi \left( \frac{1-\hat{f}(s)}{s} \right) \end{aligned}$$

και με αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace, καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση,

$$\bar{G}(x) = \varphi \int_0^x \bar{G}(x-y)f(y)dy + \varphi\bar{F}(x), x \geq 0 \quad (3.1.4)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω σχέση με την σχέση (3.1.2), βλέπουμε ότι η (3.1.4) μπορεί να γραφεί στην μορφή της σχέσης (3.1.2) θέτοντας  $\eta(x) = \varphi\bar{F}(x)$  και επομένως παίρνουμε την δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείματος,

$$\bar{G}(x) = \frac{\varphi}{1-\varphi} \int_0^x \bar{F}(x-y)g(y)dy + \varphi\bar{F}(x), x \geq 0. \quad (3.1.5)$$

**Θεώρημα 3.1.2.** Έστω  $\eta(x)$  διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε η συνάρτηση  $m(x)$  μπορεί να εκφραστεί ως παρακάτω,

$$m(x) = \frac{1}{1-\varphi} \eta(x) - \frac{\eta(0)}{1-\varphi} \bar{G}(x) - \frac{1}{1-\varphi} \int_0^x \bar{G}(x-y)\eta'(y)dy, \quad (3.1.6)$$

όπου,

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i, & N \geq 1 \\ 0, & N = 0, \end{cases}$$

είναι μία σύνθετη τυχαία μεταβλητή και  $G(x)$  είναι η συνάρτηση κατανομής της  $S$ , όπου  $N \sim \text{Geo}(1 - \varphi)$  και  $F_{X_i}$  είναι η συνάρτηση κατανομής των  $X_i$ .

Η σταθερά του Cramer είναι η παρακάτω,

$$C = \frac{1 - \varphi}{\varphi R \int_0^\infty y e^{Ry} f(y) dy}$$

Από την γνωστή προσέγγιση του Tijms, μπορούμε να βρούμε μια προσέγγιση για την συνάρτηση  $m$  στη σχέση (3.1.3) ως ακολούθως,

$$m_T(x) = \frac{1}{1 - \varphi} \int_0^x \eta(x - y) g_T(y) dy + \eta(x),$$

όπου  $g_T(y)$  η σ.π.π της κατανομής της  $S$  με την μέθοδο Tijms. Κάνοντας μερικές πράξεις καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση ,

$$m_T(x) = \frac{1}{1 - \varphi} \eta(x) - \frac{\eta(0)}{1 - \varphi} \bar{G}_T(x) - \frac{1}{1 - \varphi} \int_0^x \bar{G}_T(x - y) \eta'(y) dy \quad (3.1.7)$$

εάν  $\eta(y)$  είναι διαφορίσιμη συνάρτηση και  $\bar{G}_T(y)$  η ουρά της κατανομής της  $S$  με την προσεγγιστική μέθοδο του Tijms.

Οι Gerber-Shiu την δεκαετία του 1990, μελέτησαν την από κοινού συμπεριφορά του χρόνου χρεοκοπίας ( $T$ ), του πλεονάσματος αμέσως πριν την χρεοκοπία  $U(T^-)$  και του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας  $U(T)$ .

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$m_\delta(u) = E[w(U(T^-), |U(T)|) e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u] , \quad (3.1.8)$$

η οποία ονομάζεται αναμενόμενη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής ή συνάρτηση G-S και είναι η από κοινού κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας, του πλεονάσματος αμέσως πριν την χρεοκοπία και του ελλείματος την στιγμή της χρεοκοπίας. Στην παραπάνω σχέση,

- $I(T < \infty) = \begin{cases} 1, & \text{αν συμβεί χρεοκοπία} \\ 0, & \text{αν δεν συμβεί χρεοκοπία} \end{cases}$
- $w(U(T^-), |U(T)|)$ , είναι η συνάρτηση ποινής και εκφράζει το οικονομικό κόστος για τον ασφαλιστή
- $\delta \geq 0$  , είναι η ένταση του επιτοκίου στην αγορά



Στην περίπτωση που συμβεί χρεοκοπία, ο ασφαλιστής έχει κάποιο οικονομικό κόστος, πληρώνει πρόστιμο (penalty) την στιγμή της χρεοκοπίας, όπου το χρηματικό ποσό που θα πληρώσει ο ασφαλιστής δηλώνεται από την συνάρτηση  $w(\cdot)$ . Η δείκτρια  $I(T < \infty)$ , εκφράζει απλά την ενεργοποίηση της ποινής την στιγμή της χρεοκοπίας.

### Ειδικές Περιπτώσεις της συνάρτησης G-S

- Όταν  $\delta = 0$  και  $w(U(T^-), |U(T)|) = 1$ , τότε
 
$$m_\delta(u) = E[I(T < \infty) | U(0) = u] = Pr(T < \infty | U(0) = u) = \psi(u).$$
 Επίσης, όταν  $\delta > 0$  και  $w(U(T^-), |U(T)|) = I(U(T^-) \leq x)I(|U(T)| \leq y)$  τότε,
 
$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(U(T^-) \leq x) I(|U(T)| \leq y) I(T < \infty) | U(0) = u] =$$

$$Pr[U(T^-) \leq x, |U(T)| \leq y, T < \infty | U(0) = u].$$
 Ακόμη, όταν  $\delta = 0$ , προκύπτει
 
$$Pr[U(T^-) \leq x, |U(T)| \leq y, T < \infty | U(0) = u].$$
- Όταν  $\delta > 0$  και
 
$$w(U(T^-), |U(T)|) = I(U(T^-) = x)I(|U(T)| = y),$$
 τότε προκύπτει η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ.  $U(T^-)$  &  $|U(T)|$ , η οποία είναι η εξής:
 
$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u].$$
 Ενώ όταν  $\delta = 0$  προκύπτει,
 
$$m_0(u) = E[I(U(T^-) = x)I(|U(T)| = y)I(T < \infty) | U(0) = u].$$
- Όταν  $\delta > 0$  και
 
$$w(U(T^-), |U(T)|) = I(U(T^-) = x),$$
 τότε προκύπτει η προεξοφλημένη συναρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $U(T^-)$  η οποία ορίζεται ως εξής:
 
$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(U(T^-) = x)I(T < \infty) | U(0) = u].$$
 Ακόμη, όταν  $\delta = 0$  προκύπτει,
 
$$m_0(u) = E[I(U(T^-) = x)I(T < \infty) | U(0) = u].$$
- Όταν  $\delta > 0$  και
 
$$w(U(T^-), |U(T)|) = I(|U(T)| = y),$$
 τότε προκύπτει η προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $|U(T)|$  η οποία ορίζεται ως εξής:
 
$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(|U(T)| = y)I(T < \infty) | U(0) = u].$$
 Επίσης, όταν  $\delta = 0$ ,
 
$$m_0(u) = E[I(|U(T)| = y)I(T < \infty) | U(0) = u].$$
- Όταν  $\delta > 0$  και  $w(U(T^-), |U(T)|) = I(|U(T)| \leq y)$ , τότε η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής της  $|U(T)|$ , είναι η εξής:
 
$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(|U(T)| \leq y)I(T < \infty) | U(0) = u].$$
 Ενώ όταν  $\delta = 0$ , προκύπτει ότι,
 
$$m_0(u) = E[I(|U(T)| \leq y)I(T < \infty) | U(0) = u].$$

- Επιπρόσθετα, όταν έχουμε  $\delta > 0$  και  $w(U(T^-), |U(T)|) = I(U(T^-) \leq x)$ , τότε η προεξοφλημένη συνάρτηση κατανομής της  $U(T^-)$  είναι η εξής:

$$m_\delta(u) = E[e^{-\delta T} I(|U(T)| \leq y) I(T < \infty) | U(0) = u].$$

Τέλος όταν  $\delta = 0$ , προκύπτει ότι,

$$m_0(u) = E[I(U(T^-) = x) I(T < \infty) | U(0) = u].$$

Στη συνέχεια, θα ορίσουμε την θεμελιώδη εξίσωση του Lundberg η οποία αποτελεί γενίκευση της εξίσωσης του Lundberg στο κλασσικό υπόδειγμα. Θεωρούμε την παρακάτω εξίσωση,

$$y_1(s) = \delta + \lambda - cs,$$

και την εξισώνουμε με την συνάρτηση,

$$y_2(s) = \lambda \hat{f}(s).$$

Εάν  $\delta > 0$ , τότε

$$y_2(0) = \lambda + \delta > \lambda = y_1(0).$$

Ομως, επειδή

$$y_1'(x) < 0 \text{ και } y_1''(x) > 0,$$

καταλήγουμε στο ότι ο μετασχηματισμός Laplace έχει μόνο μια θετική ρίζα στον θετικό ημιάξονα την οποία συμβολίζουμε με  $\rho = \rho(\delta)$ . Εάν  $\delta = 0$ , τότε,

$$y_1(0) = y_2(0),$$

και

$$y_1'(0) = -\lambda E(X) > -c = y_2'(0)$$

και επομένως  $\rho = \rho(0) = 0$ .

Οι Gerber και Shiu (1998), έδειξαν ότι η  $m(u)$  ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση,

$$m(u) = \frac{\lambda}{c} \int_0^u m(u-y) \int_y^\infty e^{-\rho(t-y)} f(t) dt dy + \eta(u) \quad (3.1.9)$$

όπου,

$$\eta(u) = \frac{\lambda}{c} e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho y} \int_y^\infty w(y, t-y) f(t) dt dy. \quad (3.1.10)$$

Επίσης ορίζουμε την παρακάτω δεξιά ουρά,

$$\bar{\Phi}(y) = \frac{e^{\rho y} \int_y^{\infty} e^{-\rho t} \bar{F}(t) dt}{\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \bar{F}(t) dt} \quad (3.1.11)$$

και

$$H(u) = \frac{(e^{\rho u} \int_u^{\infty} e^{-\rho x} \int_x^{\infty} w(x, y-x) dF(y) dx)}{\int_0^{\infty} e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy}.$$

Εφόσον για την ένταση ασφαλιστρού έχουμε  $c = \lambda E(X)(1 + \theta)$ , η (3.1.9) μπορεί να γραφεί ως εξής,

$$m_{\delta}(u) = \varphi_{\delta} \int_0^u m_{\delta}(u-y) d\Phi(y) + \eta_{\delta}(u) \quad (3.1.12)$$

όπου,

$$\varphi_{\delta} = \frac{\hat{h}(\rho)}{1 + \theta}.$$

Στη συνέχεια, δίνουμε κάποιες παρατηρήσεις για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

Για κάθε  $\delta > 0$  η συνάρτηση

$$\bar{K}_{\delta}(u) = E(e^{-\delta T} I(T < \infty) | U(0) = u), \quad (3.1.13)$$

είναι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας  $T$  στο σημείο  $\delta$ . Επίσης η συνάρτηση αυτή ικανοποιεί την σχέση, βλ. Gerber-Shiu (1998),

$$\bar{K}_{\delta}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (1 - \varphi) \varphi^n \bar{\Phi}^{*n}(u), \quad (3.1.14)$$

η οποία αποτελεί την ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και  $\bar{\Phi}^{*n}(u)$  είναι η ουρά της  $n$ -οστής συνέλιξης της  $\Phi(u)$ . Εάν επιπλέον, η συνάρτηση ποινής  $w(x, y) = 1$ , τότε,

$$\bar{K}_{\delta}(u) = m_{\delta}(u).$$

Προφανώς, όταν  $\delta = 0$ , ισχύει ότι,

$$\bar{K}_0(u) = \psi(u) = E(I(T < \infty))$$

και επίσης,

$$\varphi_0 = \frac{\hat{h}(0)}{1 + \theta} = \psi(0).$$

Οπότε, στην περίπτωση αυτή ισχύει,

$$\bar{\Phi}(y) = \bar{F}_e(y).$$

Επομένως, όταν  $\delta = 0$ , καταλήγουμε στην γνωστή ουρά της γεωμετρικής κατανομής που γνωρίζουμε,

$$\psi(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right) \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^n \bar{F}_e^{*n}(u).$$

Θέλοντας να εξάγουμε και κάποια αποτελέσματα για την δεξιά ουρά της κατανομής ισορροπίας (Equilibrium Distribution Function), παρόμοια με την σχέση (3.1.11), έχουμε την παρακάτω πρόταση,

$$\bar{F}_e(y) = \frac{\int_y^{\infty} \bar{F}(x) dx}{\int_0^{\infty} \bar{F}(x) dx} = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \bar{G}(y+t) dt}{\int_0^{\infty} e^{-\rho t} \bar{G}(t) dt}. \quad (3.1.15)$$

Από Willmot & Lin (1998) και από σχέση (3.1.12), παίρνουμε μια πιο γενική λύση για την ανανεωτική εξίσωση,

$$m_{\delta}(u) = \frac{1}{1+\nu} \int_0^u m_{\delta}(u-y) d\Phi(y) + \frac{1}{1+\nu} H(u), \quad u \geq 0 \quad (3.1.16)$$

όπου,

$$\nu = \frac{1+\theta}{\int_0^{\infty} e^{-\rho y} f_e(y) dy} - 1, \quad \nu > 0 \quad (3.1.17)$$

και  $\Phi(y) = 1 - \bar{\Phi}(y)$  η συνάρτηση κατανομής με  $\Phi(0) = 0$  και  $H(u)$  συνεχής συνάρτηση  $\forall u \geq 0$ . Τότε ορίζουμε την ουρά της σύνθετης Γεωμετρικής ως εξής:

$$\bar{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{1}{1+\nu}\right)^n \bar{\Phi}^{*n}(u), \quad u \geq 0. \quad (3.1.18)$$

Από σχέση (3.1.11) όταν  $\rho = 0$ , οπότε και  $\delta = 0$ , παίρνουμε την παράγωγο της  $\Phi(x)$ , δηλαδή,

$$\Phi'(x) = F_e'(x) = \frac{\bar{F}(x)}{\mu_1}.$$

Το 1<sup>ο</sup> μέρος της δεξιάς πλευράς της εξίσωσης της ανανεωτικής εξίσωσης της (3.1.9), μπορεί να εκφραστεί ως,

$$\left(\frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy\right) \int_0^u m_{\delta}(u-x) d\Phi(y) \quad (3.1.19)$$

Αρα, από σχέση (3.1.19) και (3.1.11) έχουμε ότι,

$$\frac{1}{1+\nu} = \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy = \frac{1}{1+\theta} \int_0^{\infty} e^{-\rho y} dF_e(y)$$

και επομένως καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση (3.1.17).

Σε αυτό το σημείο, είναι απαραίτητο να μελετήσουμε τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας και να καταλήξουμε σε προσεγγίσεις της ουράς αυτής καθώς και σε φράγματα.

Έστω ότι  $X_i \sim \text{Exp}(\mu)$ , τότε  $\bar{F}(x) = e^{-\mu x}$  και προφανώς από (3.1.11) έχουμε ότι,

$$\bar{\Phi}(x) = e^{-\mu x}.$$

Επομένως, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας μπορεί να δοθεί από την παρακάτω σχέση,

$$\bar{K}(u) = C e^{-Ru}. \quad (3.1.20)$$

όπου ο συντελεστής προσαρμογής ισούται με:

$$R = \frac{\nu\mu}{1+\nu} = \frac{\theta\mu}{1+\theta} + \frac{\rho}{\rho+\mu} \frac{\mu}{1+\theta} \quad (3.1.21)$$

και

$$C = \frac{1}{1+\nu} = \frac{\mu}{\rho+\mu} \frac{1}{1+\theta}, u \rightarrow \infty. \quad (3.1.22)$$

Θέτουμε  $\kappa = -s$  και  $s$  η αρνητική λύση της εξίσωσης του Lundberg. Ένας πιο γενικός τύπος για τον υπολογισμό του συντελεστή των Cramer-Lundberg, δόθηκε από τους Panjer και Willmot (1992) ο οποίος είναι ο ακόλουθος,

$$C = \frac{\nu(\rho + \kappa)}{\kappa(1 + \nu) \left( \frac{\lambda}{c} \int_0^{\infty} x e^{\kappa x} dF(x) - 1 \right)}. \quad (3.1.23)$$

Αφού λοιπόν είναι δυνατός ο υπολογισμός του συντελεστή Cramer, είναι ιδιαίτερα εύκολο να βρούμε μια προσέγγιση με την μέθοδο του Tijms (Tijms 1986 pp.60-61).

Επομένως, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας με την προσέγγιση του Tijms δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$\bar{K}_T(u) = \left( \frac{1}{1+\nu} - C \right) e^{-\gamma u} + C e^{-\kappa u}, u \geq 0. \quad (3.1.24)$$

όπου,

$$\gamma = \frac{\left( \frac{1}{1+\nu} - C \right)}{\left( \frac{\mu_{\Phi,1}}{\nu} - \frac{C}{\kappa} \right)} \quad (3.1.25)$$

και  $\mu_{\phi,1}$  είναι η μέση τιμή της κατανομής  $\Phi$ . Εστω  $\bar{F}_Y(x)$  η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με  $Y \sim \text{Exp}(p\mu)$  όπου  $\mu = 5$ . Οπως γνωρίζουμε, από την (3.1.18), θεωρώντας για χάριν ευκολίας,

$$p = 1 - \varphi_\delta = 1 - \frac{1}{1 + \nu} = \frac{\nu}{1 + \nu} \quad (3.1.26)$$

και επίσης ,

$$q = 1 - p = \frac{1}{1 + \nu},$$

προκύπτει

$$\bar{F}_Y(x) = e^{-\mu p x}.$$

Επομένως, βρίσκουμε τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας ως εξής:

$$\bar{K}_\delta(x) = q \bar{F}_Y(x) = q e^{-\mu p x} = \frac{1}{1 + \nu} e^{-\mu \left(\frac{\nu}{1 + \nu}\right) x}, \quad (3.1.27)$$

όπου από (3.1.17) για τον υπολογισμό της σταθεράς  $\nu$ , είναι δυνατός ο ακριβής υπολογισμός της ουράς.

Επίσης, βρίσκουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας των  $Y_i$ , δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$\bar{F}_Y'(x) = \mu(1 - \varphi) e^{-\mu(1 - \varphi)x}. \quad (3.1.28)$$

Από την σχέση της ανανεωτικής εξίσωσης (3.1.7) παίρνουμε την παρακάτω εξίσωση που είναι προσέγγιση του Tijms για την συνάρτηση G-S.

$$m_{T,\delta}(u) = -\frac{1}{\nu} \int_0^u \bar{K}_T(u-x) \eta(x) dx + \frac{1}{\nu} H(u) - \frac{H(0)}{\nu} \bar{K}(u). \quad (3.1.29)$$

Προφανώς όταν  $\bar{K}_T(u) = \bar{K}(u)$ , τότε  $m_{T,\delta}(u) = m_\delta(u)$ .

Επίσης ένας ασυμπτωτικός τύπος για την συνάρτηση Gerber-Shiu είναι ο παρακάτω ,

$$m_\delta(u) \sim \frac{\int_0^\infty e^{\kappa x} H(x) dx}{\int_0^\infty x e^{\kappa x} \Phi'(x) dx} e^{-\kappa u}, u \rightarrow \infty \quad (3.1.30)$$

Επομένως η  $m_\delta(u)$  έχει καλή ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς η ουρά  $\bar{K}_T(u)$  έχει εξίσου σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά καθώς  $u \rightarrow \infty$ .

Τέλος, ένα άνω φράγμα για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι το παρακάτω,

$$\bar{K}(u) \leq \psi(u). \quad (3.1.31)$$

### 3.1.2 Οι κατανομές Ελλείματος και Πλεονάσματος $G(u, y)$ και $P(u, y)$

Στην Θεωρία Χρεοκοπίας δεν ενδιαφερόμαστε απλά για την πιθανότητα χρεοκοπίας αλλά θέλουμε να γνωρίζουμε πόσο σοβαρή θα είναι η κατάσταση όταν η χρεοκοπία συμβεί. Οι Gerber et al (1987), όρισαν την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό  $u$  και το πλεόνασμα-έλλειμα (negative surplus) να πέσει κάτω από το 0, το πολύ μέχρι  $-y$  τη στιγμή της χρεοκοπίας, δηλαδή την πιθανότητα ,

$$G(u, y) = P(T < \infty, -y < U(T) < 0) = P(T < \infty \text{ \& } |U(T)| < y), u \geq 0, y \geq 0,$$

με σ.π.π

$$g(u, y) = \frac{dG(u, y)}{dy}.$$

Το 1988, οι Willmot και Lin, απέδειξαν την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση,

$$G(u, y) = \frac{1}{\mu_1(1+\theta)} \int_0^u G(u-x, y) \bar{F}(x) dx + \psi(0)(\bar{F}_e(u) - \bar{F}_e(u+y)) \quad (3.2.1)$$

όπου  $\psi(u) = \lim_{y \rightarrow \infty} G(u, y)$ . Στην σχέση (3.2.1), η συνάρτηση κατανομής των κλιμακωτών υψών και  $\bar{F}_e(y)$ , μπορεί να εκφραστεί ως η συνάρτηση κατανομής της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από την προηγούμενη πτώση, δεδομένου ότι συμβαίνει πτώση. Εάν το ποσό της πτώσης είναι  $x$ , όπου  $0 < x \leq u$ , τότε η χρεοκοπία δεν συμβαίνει αλλά η διαδικασία ξεκινάει πιθανοθεωρητικά από ένα καινούριο επίπεδο πλεονάσματος  $u-x$ . Εάν η πτώση του πλεονάσματος είναι μεταξύ  $u$  και  $u+y$ , τότε η χρεοκοπία συμβαίνει και το έλλειμα την στιγμή της χρεοκοπίας είναι μεταξύ 0 και  $y$ . Εάν η πτώση υπερβεί το επίπεδο  $u+y$ , τότε το έλλειμα την στιγμή της χρεοκοπίας υπερβαίνει το  $y$ .

Η παραπάνω εξίσωση είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση με  $\lim_{y \rightarrow \infty} G(u, y) < 1$ , επομένως είναι σωστό να ορίσουμε μία καταλληλότερη μη ελλειμματική συνάρτηση κατανομής η οποία είναι η παρακάτω :

$$G_u(y) = 1 - \bar{G}_u(y) = \frac{G(u, y)}{\psi(u)}, y \geq 0. \quad (3.2.2)$$

Μία δεύτερη συνάρτηση η οποία πρέπει να ορίσουμε είναι η  $P(u, y)$  η οποία είναι η πιθανότητα να προκληθεί χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό  $u$  και το πλεόνασμα αμέσως πριν την στιγμή της χρεοκοπίας να είναι μικρότερο από  $y$ . Τότε, από Willmot & Lin (1998) ισχύει,

$$P(u, y) = G(u-y, y) - \left(1 + \frac{F_e(y)}{\theta}\right) (\psi(u-y) - \psi(u)) \quad u \geq y. \quad (3.2.3)$$

Όταν  $u < y$ , ο τύπος παίρνει μία πιο απλή μορφή που δεν εξαρτάται από το  $G(u, y)$  οπότε η σχέση (3.2.3), μπορεί να εκφραστεί ως εξής,

$$P(u, y) = \left(1 + \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}\right) \psi(u) - \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}. \quad (3.2.4)$$

**Πρόταση 3.2.1.** Μια απλούστερη σχέση της κατανομής του ελλείματος αποτελεί η προσέγγιση της  $G(u, y)$  όπου εκφράζουμε την κατανομή σε όρους της κατανομής της μεταβλητής  $L$  και της πιθανότητας χρεοκοπίας. Η αναλυτική της έκφραση δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$G(u, y) = \psi(u) - \frac{1}{\theta} \int_0^u \bar{F}_e(y + u - x) d\delta(x). \quad (3.2.5)$$

**Απόδειξη:** Γνωρίζουμε ότι η  $\psi(u)$  ικανοποιεί την ελλειματική ανανεωτική εξίσωση

$$\psi(u) = \frac{1}{\mu_1(1+\theta)} \int_0^u \psi(u-x) \bar{F}(x) dx + \frac{\bar{F}_e(u)}{1+\theta}. \quad (3.2.6)$$

Από σχέση (3.2.2), πολλαπλασιάζοντάς την με την εξίσωση (3.2.6), καταλήγουμε στην ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση των Dufresne & Gerber (1991) η οποία εκφράζεται ως εξής :

$$\psi(u) \bar{G}_U(y) = \frac{1}{\mu_1(1+\theta)} \int_0^u \psi(u-x) \bar{G}_{u-x}(y) \bar{F}(x) dx + \frac{\bar{F}_e(u+y)}{(1+\theta)}.$$

Εφαρμόζοντας μετασχηματισμό Laplace στην παραπάνω εξίσωση, παίρνουμε ότι,

$$\int_0^\infty e^{-su} \psi(u) \bar{G}_U(y) du = \frac{1}{\theta} \int_0^\infty e^{-su} \bar{F}_e(u+y) du \int_0^\infty e^{-su} d\delta(u),$$

όπου για το 2<sup>ο</sup> ολοκλήρωμα στο δεξί μέρος της εξίσωσης ισχύει το ακόλουθο,

$$\int_0^\infty e^{-su} d\delta(u) = \left\{ 1 - \frac{1}{\theta} \left( \int_0^\infty e^{-su} dF_e(u) - 1 \right) \right\}^{-1}.$$

και εφαρμόζοντας αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace, καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση:

$$\bar{G}_U(y) = \frac{1}{\theta\psi(u)} \int_0^u \bar{F}_e(y + u - x) d\delta(x) \quad (3.2.7)$$

Αρα,

$$G_u(y) = 1 - \bar{G}_U(y) = 1 - \frac{1}{\theta\psi(u)} \int_0^u \bar{F}_e(y + u - x) d\delta(x),$$

και κατα συνέπεια, κάνοντας χρήση της σχέσης (3.2.3), έχουμε,

$$G(u, y) = \psi(u) G_u(y) = \psi(u) - \frac{1}{\theta} \int_0^u \bar{F}_e(y + u - x) d\delta(x).$$



**Πρόταση 3.2.2.**

$$G(u, y) = F_e(y)\psi(u) + \frac{1+\theta}{\theta}(\bar{F}_e(y)\psi(u) - \psi(u+y)) + \frac{1}{\theta\mu_1} \int_0^y \psi(u+y-x)\bar{F}(x) dx$$

**Απόδειξη:**

Εστω  $Z_y$  τ.μ. ανεξάρτητη της  $L$ , που ορίζεται από την σχέση,

$$\Pr(Z_y > x) = \frac{\bar{F}_e(x+y)}{\bar{F}_e(y)}.$$

Τότε από την σχέση (3.2.7),

$$\bar{G}_u(y) = \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta\psi(u)} \int_0^u \Pr(Z_y > u-x) dPr(L \leq x) \quad (3.2.8)$$

ή διαφορετικά μπορεί να εκφραστεί και ως εξής ,

$$\bar{G}_u(y) = \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta\psi(u)} \{\Pr(L + Z_y > u) - \psi(u)\} \quad (3.2.9)$$

και κάνοντας εναλλαγή των μεταβλητών  $L$  και  $Z_y$ , παίρνουμε την παρακάτω σχέση,

$$\bar{G}_u(y) = \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta\psi(u)} \{\Pr(Z_y > u) + \int_0^u \psi(u-x)dPr(Z_y \leq x) - \psi(u)\}$$

και επομένως,

$$\bar{G}_u(y)\psi(u) = \frac{\bar{F}_e(u+y)}{\theta} + \frac{1}{\theta\mu_1} \int_0^u \psi(u-x)\bar{F}(x)dx - \frac{\bar{F}_e(y)\psi(u)}{\theta} \quad (3.2.10)$$

Κάνοντας αλλαγή μεταβλητών στο ολοκλήρωμα της σχέσης (3.2.10), καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση,

$$\bar{G}_u(y)\psi(u) = \frac{\bar{F}_e(u+y)}{\theta} + \frac{1}{\theta\mu_1} \int_y^{u+y} \psi(u+y-x)\bar{F}(x)dx - \frac{\bar{F}_e(y)\psi(u)}{\theta}$$

και κάνοντας μερικές πράξεις, παίρνουμε,

$$\frac{1}{\theta} \left\{ \int_0^{u+y} \frac{\psi(u+y-x)\bar{F}(x)}{\mu_1} dx + \bar{F}_e(u+y) \right\} - \frac{1}{\theta\mu_1} \int_0^y \psi(u+y-x)\bar{F}(x)dx - \frac{\bar{F}_e(y)\psi(u)}{\theta}$$

και καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση,

$$\bar{G}_u(y)\psi(u) = \frac{1+\theta}{\theta} \psi(u+y) - \frac{\bar{F}_e(y)\psi(u)}{\theta} - \frac{1}{\theta\mu_1} \int_0^y \psi(u+y-x)\bar{F}(x)dx.$$

Επομένως, αξιοποιώντας την κατανομή του ελλείματος ,από σχέση (3.2.2) ,προκύπτει ότι

$$G(u, y) = \left(1 + \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}\right) \psi(u) - \frac{1 + \theta}{\theta} \psi(u + y) + \frac{1}{\theta \mu_1} \int_0^y \psi(u + y - x) \bar{F}(x) dx$$

από το οποίο παίρνουμε τελικώς ότι,

$$\bar{F}_e(y) \psi(u) + \frac{1 + \theta}{\theta} \{ \bar{F}_e(y) \psi(u) - \psi(u + y) \} + \frac{1}{\theta \mu_1} \int_0^y \psi(u + y - x) \bar{F}(x) dx \quad (3.2.11)$$

Η παραπάνω πρόταση μας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη μιας και είναι η εξίσωση που θα χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της κατανομής του ελλείματος στα επόμενα αριθμητικά παραδείγματα με τη βοήθεια του λογισμικού Mathematica και επιπλέον είναι ο τύπος ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί για την προσέγγιση της κατανομής του ελλείματος με την μέθοδο του Tijms.

Οι Willmot και Lin (1998) ,πρότειναν την αντικατάσταση του όρου  $\psi(u + y - x)$  με τον αντίστοιχο του Tijms ,δηλαδή με την πιθανότητα  $\psi_T(u + y - x)$  , προκειμένου να καταλήξουμε σε μία προσέγγιση της κατανομής του ελλείματος. Αυτή την ποσότητα θα χρησιμοποιήσουμε για να προσεγγίσουμε την κατανομή του ελλείματος με την μέθοδο του Tijms στα αριθμητικά παραδείγματα του κεφαλαίου 2.

**Πρόταση 3.2.3.** Για κάθε  $u \geq y$  ισχύει ότι ,

$$P(u, y) = \frac{1}{\theta \mu_1} \int_0^y \psi(u - x) \bar{F}(x) dx - \frac{\bar{F}_e(y) \psi(u)}{\theta}, u \geq y \quad (3.2.12)$$

**Απόδειξη:** Από την σχέση (3.2.3) και από Πρόταση 3.2.2 , έχουμε ότι,

$$P(u, y) = F_e(y) \psi(u - y) + \frac{1 + \theta}{\theta} (\bar{F}_e(y) \psi(u - y) - \psi(u)) + \frac{1}{\theta \mu_1} \int_0^y \psi(u - x) \bar{F}(x) dx - \left(1 + \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}\right) (\psi(u - y) - \psi(u))$$

Κάνοντας μερικές πράξεις, προκύπτει ότι,

$$\frac{1}{\theta \mu_1} \int_u^y \psi(u - x) \bar{F}(x) dx - \left(\frac{1 + \theta}{\theta} - 1 - \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}\right) \psi(u) + \left(F_e(y) + \frac{1 + \theta}{\theta} \bar{F}_e(y) - 1 - \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta}\right) \psi(u - y)$$

από όπου καταλήγουμε στη ζητούμενη εξίσωση (3.2.12).

### 3.1.3 Φράγματα για την περιθώρια κατανομή του Ελλείματος

Από Willmot & Lin (1998) , μπορούμε να πάρουμε φράγματα για την κατανομή του ελλείματος τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε και στις μετέπειτα εφαρμογές μας.

**Πόρισμα 3.3.1 :** Εάν  $A(y) = 1 - \bar{A}(y)$  είναι συνάρτηση κατανομής στο  $(0, \infty)$  και ικανοποιεί την παρακάτω ανίσωση,

$$\frac{\bar{F}_e(x+y)}{\bar{F}_e(x)} \geq (\leq) \bar{A}(y) \quad , x \geq 0, y \geq 0,$$

τότε ισχύει η παρακάτω ανίσωση ,

$$\bar{G}_u(y) \geq (\leq) \bar{A}(y).$$

**Θεώρημα 3.3.1 :** Ένα άνω φράγμα για την δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείμματος κατά την στιγμή της χρεοκοπίας είναι το εξής:

$$\bar{G}_u(y) \leq \frac{1+\theta}{\theta} \left( \frac{\psi(u+y)}{\psi(u)} - \psi(y) \right). \quad (3.3.1)$$

**Απόδειξη:** Χρησιμοποιώντας τη σχέση (3.2.1),

$$\frac{1}{\mu_1} \int_0^y \psi(u+y-x) \bar{F}(x) dx \geq \frac{\psi(u)}{\mu_1} \int_0^y \psi(y-x) \bar{F}(x) dx.$$

Όμως,

$$\frac{\psi(u)}{\mu_1} \int_0^y \psi(y-x) \bar{F}(x) dx = \psi(u) \left( (1+\theta)\psi(y) - \bar{F}_e(y) \right).$$

Άρα έχουμε την παρακάτω ανισότητα,

$$\frac{1}{\mu_1} \int_0^y \psi(u+y-x) \bar{F}(x) dx \geq \psi(u) \left( (1+\theta)\psi(y) - \bar{F}_e(y) \right). \quad (3.3.2)$$

Από την Πρόταση 3.2.2 και την σχέση (3.2.11) έχουμε ότι,

$$G(u, y) \geq F_e(y)\psi(u) + \frac{1+\theta}{\theta} (\bar{F}_e(y)\psi(u) - \psi(u+y)) \\ + \frac{\psi(u)}{\theta} \left( (1+\theta)\psi(y) - \bar{F}_e(y) \right).$$

Κάνοντας μερικές πράξεις στο δεξί μέλος της ανισότητας , βλέπουμε ότι αυτό ισούται με,

$$\left( F_e(y) + \frac{1+\theta}{\theta} \bar{F}_e(y) - \frac{\bar{F}_e(y)}{\theta} \right) \psi(u) - \frac{1+\theta}{\theta} (\psi(u+y) - \psi(u)\psi(y)).$$

Επομένως, προκύπτει η παρακάτω ανίσωση για την κατανομή του Ελλείμματος,

$$G(u, y) \geq \psi(u) - \frac{1+\theta}{\theta} \{ \psi(u+y) - \psi(u)\psi(y) \}$$

και κάνοντας χρήση της σχέσης (3.2.2) , καταλήγουμε στην ζητούμενη σχέση (3.3.1).

**Σημείωση:** Το δεξιό μέλος της ανισότητας θα το συμβολίσουμε στις αριθμητικές εφαρμογές 3.2.1 ,3.2.2 και 3.2.3 με  $J(u, y)$  καθώς θα την χρησιμοποιήσουμε για να βρούμε άνω φράγματα για την δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείματος.

### Πόρισμα 3.3.2. (1996, Dickson & Egidio dos Reis )

- Εάν η κατανομή των αποζημιώσεων  $F(x)$  είναι *DMRL* ,τότε η δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείματος φράσσεται ως εξής:

$$\frac{\bar{F}_e(u+y)}{\bar{F}_e(u)} \leq \bar{G}_u(y) \leq \bar{F}_e(y) \quad (3.3.3)$$

- Εάν η κατανομή των αποζημιώσεων  $F(x)$  είναι *IMRL* ,τότε η δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείματος φράσσεται ως εξής:

$$\bar{F}_e(y) \leq \bar{G}_u(y) \leq \frac{\bar{F}_e(u+y)}{\bar{F}_e(u)} \quad (3.3.4)$$

## 3.2 Αριθμητικές Εφαρμογές

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε ακριβείς καθώς και προσεγγιστικές τιμές για ποσότητες πριν και μετά την χρεοκοπία. Αναλυτικότερα,θα βρούμε ακριβείς τιμές για τις ποσότητες  $G(u, y)$ ,  $G_u(y)$ ,  $\bar{G}_u(y)\psi(u)$  για διάφορες τιμές των  $u, y$  και του  $\theta$  καθώς και τις αντίστοιχες με την μέθοδο του Tijms και του Cramer. Τέλος, θα βρούμε και άνω φράγματα για διαφορες τιμές της  $\bar{G}_u(y)$ . Για αυτό τον σκοπό, θα παραθέσουμε ενα αριθμητικό παράδειγμα μιας κατανομής μείξης 3 εκθετικών κατανομών και μιας Γάμμα (2,2).

### 3.2.1 Αριθμητική Εφαρμογή για Μείξη Εκθετικών Κατανομών

Για  $\theta = 0.5$ , φτιάχνουμε αντίστοιχα με την εφαρμογή (2.2.2), πίνακα με την ακριβή τιμή της κατανομής του ελλείματος, την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας,την δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείματος, και το άνω φράγμα της κατανομής του ελλείματος για μια μείξη εκθετικών κατανομών με παραμέτρους  $\beta_1 = 3, \beta_2 = 6, \beta_3 = 7$  και βάρη μείξης  $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{3}$ .

Παρακάτω ,θα παραθέσουμε πίνακα με την ακριβή ποσότητα του ελλείματος  $G(u, y)$ , την δεξιά ουρά της ποσότητας του ελλείματος  $\bar{G}_u(y)$  καθώς και ένα άνω φράγμα της δεξιάς ουράς της κατανομής του ελλείματος  $J(u, y)$  καθώς είναι ιδιαίτερα σημαντικό στη μελέτη μας να ξέρουμε την ανώτατη τιμή που μπορεί να πάρει το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας.(βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, Πίνακες 29-31)

- ❖ Για  $\theta = 0.5$  παραθέτουμε τον παρακάτω πίνακα,

$y$	$u$	$G(u, y)$	$G_u(y)$	$\overline{G}_u(y)$	$\psi(u)$	$J(u, y)$
<b>0.10</b>	0.10	0.19886	0.34693	0.65307	0.57328	0.87899
	0.25	0.15338	0.33116	0.66884	0.46316	0.89743
	0.50	0.10535	0.31829	0.68171	0.33099	0.91248
	0.75	0.07493	0.31325	0.68675	0.23919	0.91838
<b>0.25</b>	0.10	0.36588	0.63822	0.36178	0.57328	0.72505
	0.25	0.28644	0.61846	0.38154	0.46316	0.75443
	0.50	0.19934	0.60227	0.39773	0.33099	0.77847
	0.75	0.14253	0.59590	0.40410	0.23919	0.78792
<b>0.5</b>	0.10	0.47793	0.85113	0.14887	0.57328	0.52684
	0.25	0.38810	0.83795	0.16205	0.46316	0.55632
	0.50	0.27376	0.82710	0.17290	0.33099	0.58052
	0.75	0.19680	0.82281	0.17719	0.23919	0.59007
<b>0.75</b>	0.10	0.53552	0.93414	0.06586	0.57328	0.38318
	0.25	0.42942	0.92715	0.07286	0.46316	0.40690
	0.50	0.30497	0.92138	0.07862	0.33099	0.42641
	0.75	0.21984	0.91909	0.08091	0.23919	0.43412

**Πίνακας 3.4.1**

Από τη Πρόταση 3.2.2 και από τις σχέσεις (3.2.2) και (3.3.11), σύμφωνα με τους Willmot & Lin ,(1998) μπορούμε να πάρουμε για την κατανομή του Ελλείμματος, προσεγγίσεις τύπου Tijms ως εξής:

$$G_T(u, y) = F_e(y)\psi(u) + \frac{1+\theta}{\theta} (\overline{F}_e(y)\psi(u) - \psi(u+y)) + \frac{1}{\theta\mu_1} \int_0^y \psi_T(u+y-x)\overline{F}(x) dx \quad (3.4.1)$$

και

$$G_{T,u}(y) = \frac{G_T(u,y)}{\psi(u)}. \quad (3.4.2)$$

Επίσης , μπορούμε να πάρουμε και προσεγγίσεις τύπου Cramer για το Έλλειμμα ως εξής:

$$G_C(u, y) = F_e(y)\psi(u) + \frac{1+\theta}{\theta} (\overline{F}_e(y)\psi(u) - \psi(u+y)) + \frac{1}{\theta\mu_1} \int_0^y \psi_C(u+y-x)\overline{F}(x) dx \quad (3.4.3)$$

και

$$G_{C,u}(y) = \frac{G_C(u,y)}{\psi(u)}. \quad (3.4.4)$$

Οι σχέσεις (3.4.1), (3.4.2), (3.4.3),(3.4.4) είναι αναγκαίες όταν η  $F(x)$  δεν είναι απλής μορφής και επομένως δεν έχουμε αναλυτική έκφραση για την κατανομή του ελλείμματος.

Από Πίνακα 3.4.1 παρατηρούμε καταρχάς, ότι η δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείματος μειώνεται σημαντικά καθώς το  $y$  αυξάνεται από 0.10 σε 0.75 . Επίσης, αξίζει να αναφερθεί, ότι για όλες τις τιμές του  $u$  και του  $y$ , η δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείματος είναι μικρότερη του άνω φράγματος  $J(u, y)$ . Παρακάτω, θα παραθέσουμε πίνακα με την κατανομή του ελλείματος,την δεξιά ουρά του καθώς και τα αντίστοιχα με

τις προσεγγίσεις των Cramer και Tijms για διάφορες τιμές του  $\theta$ . Αρχικά, θα παραθέσουμε πίνακα για  $\theta = 0.5$ .

$y$	$u$	$G(u, y)$	$G_T(u, y)$	$G_C(u, y)$	$\bar{G}_u(y)$	$\bar{G}_{T,u}(y)$	$\bar{G}_{C,u}(y)$	$J(u, y)$
<b>0.1</b>	0.10	0.19886	0.19894	0.18250	0.65307	0.65298	0.68165	0.87899
	0.25	0.15338	0.15340	0.14575	0.66884	0.66881	0.68532	0.89743
	0.50	0.10535	0.10534	0.10320	0.68171	0.68176	0.68822	0.91248
	0.75	0.07493	0.07491	0.07431	0.68675	0.68681	0.68931	0.91838
<b>0.25</b>	0.10	0.36588	0.36593	0.34663	0.36178	0.38155	0.39535	0.72505
	0.25	0.28644	0.28644	0.27746	0.38154	0.39783	0.40095	0.75443
	0.50	0.19934	0.19931	0.19680	0.39773	0.39783	0.40542	0.77847
	0.75	0.14253	0.14251	0.14181	0.40410	0.40419	0.40713	0.78792
<b>0.50</b>	0.10	0.47793	0.48793	0.47638	0.14887	0.14888	0.16903	0.52684
	0.25	0.38810	0.38807	0.38269	0.16205	0.16212	0.17373	0.55632
	0.50	0.27376	0.27373	0.27223	0.17290	0.17726	0.17754	0.58052
	0.75	0.19680	0.19679	0.19637	0.17719	0.17891	0.17902	0.59007

**Πίνακας 3.4.2**

Για  $\theta = 1$ , έχουμε τον παρακάτω πίνακα με τις προσεγγίσεις του ελλείμματος,

$y$	$u$	$G(u, y)$	$G_T(u, y)$	$G_C(u, y)$	$\bar{G}_u(y)$	$\bar{G}_{T,u}(y)$	$\bar{G}_{C,u}(y)$	$J(u, y)$
<b>0.1</b>	0.10	0.13811	0.13815	0.12648	0.65366	0.65357	0.68284	0.81653
	0.25	0.09533	0.09534	0.09008	0.67138	0.67135	0.68950	0.83645
	0.50	0.05525	0.05523	0.05384	0.68744	0.68751	0.69542	0.85450
	0.75	0.03363	0.03362	0.03325	0.69451	0.69460	0.69797	0.86244
<b>0.25</b>	0.10	0.25421	0.25424	0.24075	0.36251	0.36244	0.39627	0.60853
	0.25	0.17850	0.17849	0.17241	0.38473	0.38475	0.40573	0.63830
	0.50	0.10518	0.10516	0.10354	0.40494	0.40506	0.41421	0.66536
	0.75	0.06452	0.06451	0.06408	0.41386	0.41399	0.41789	0.67730
<b>0.50</b>	0.10	0.33922	0.33921	0.33132	0.14887	0.14888	0.16916	0.37876
	0.25	0.24248	0.24246	0.23890	0.16205	0.16212	0.17653	0.40538
	0.50	0.14534	0.14532	0.14438	0.17290	0.17726	0.18319	0.42967
	0.75	0.08986	0.08985	0.08960	0.17719	0.17891	0.18611	0.44042

**Πίνακας 3.4.3**

Για  $\theta = 4$  έχουμε επίσης τον ακόλουθο πίνακα,

$y$	$u$	$G(u, y)$	$G_T(u, y)$	$G_C(u, y)$	$\bar{G}_u(y)$	$\bar{G}_{T,u}(y)$	$\bar{G}_{C,u}(y)$	$J(u, y)$
<b>0.1</b>	0.10	0.04810	0.04811	0.04561	0.65478	0.65474	0.67268	0.71554
	0.25	0.02724	0.02724	0.02621	0.67662	0.67662	0.68890	0.73842
	0.50	0.01177	0.01177	0.01153	0.70012	0.70019	0.70625	0.76302
	0.75	0.00556	0.00556	0.00551	0.71218	0.71227	0.71511	0.77565
<b>0.25</b>	0.10	0.08863	0.08863	0.08586	0.36392	0.36388	0.38380	0.44649
	0.25	0.05128	0.05128	0.05013	0.39130	0.39133	0.40497	0.47716
	0.50	0.02274	0.02273	0.02247	0.42087	0.42099	0.42772	0.51028
	0.75	0.01090	0.01090	0.01084	0.43611	0.43624	0.43938	0.52734
<b>0.50</b>	0.10	0.11839	0.11839	0.11687	0.15029	0.15031	0.16126	0.21499
	0.25	0.07005	0.07004	0.06941	0.16856	0.16863	0.17612	0.23778
	0.50	0.03186	0.03186	0.03171	0.18838	0.18848	0.19219	0.26249
	0.75	0.01549	0.01549	0.01546	0.19865	0.19874	0.20047	0.27528

**Πίνακας 3.4.4**

Και τέλος, για  $\theta = 0.25$  παραθέτουμε τον παρακάτω πίνακα με τις προσεγγίσεις,

$y$	$u$	$G(u, y)$	$G_T(u, y)$	$G_C(u, y)$	$\bar{G}_u(y)$	$\bar{G}_{T,u}(y)$	$\bar{G}_{C,u}(y)$	$J(u, y)$
<b>0.1</b>	0.10	0.25383	0.25389	0.23450	0.65262	0.65254	0.67908	0.93254
	0.25	0.21399	0.21401	0.20481	0.66698	0.66695	0.68126	0.94988
	0.50	0.16888	0.16886	0.16621	0.67771	0.67775	0.68281	0.96284
	0.75	0.13682	0.13680	0.13604	0.68150	0.68155	0.68333	0.96743
<b>0.25</b>	0.10	0.46676	0.46682	0.44384	0.36122	0.36114	0.39258	0.83532
	0.25	0.39890	0.39890	0.38800	0.37921	0.37922	0.39618	0.86444
	0.50	0.31822	0.31818	0.31503	0.39271	0.39279	0.39879	0.88627
	0.75	0.25883	0.25880	0.25789	0.39750	0.39757	0.39968	0.89400
<b>0.50</b>	0.10	0.62220	0.62219	0.60823	0.14849	0.14851	0.16761	0.69047
	0.25	0.53944	0.53940	0.53278	0.16050	0.16056	0.17086	0.72272
	0.50	0.43516	0.43512	0.43321	0.16954	0.16962	0.17326	0.74696
	0.75	0.35537	0.35535	0.35480	0.17277	0.17282	0.17410	0.75557

**Πίνακας 3.4.5**

### Συμπεράσματα

Παρατηρούμε ότι η δεξιά ουρά του ελλείματος όλων των προσεγγίσεων επαληθεύει το Θεώρημα 3.1.6 για όλα τα  $\theta$  και όλα τα  $u, y$ . Επίσης, για  $\theta = 0.25$  και  $\theta = 0.5$  παρατηρούμε ότι η  $G_T(u, y)$ , λαμβάνει παρόμοιες τιμές με την  $G(u, y)$  για όλα τα  $u$  και  $y$ . Η  $G_C(u, y)$  για μικρά  $u$  έχει κάποια μικρή απόκλιση από την ακριβή τιμή του ελλείματος όταν το αποθεματικό λαμβάνει κυρίως τιμές μικρότερες ή ίσες από 0.25, όμως για μεγάλα  $u$ , λόγω της καλής ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του προσεγγίζει εξαιρετικά την ακριβή κατανομή του ελλείματος.

### 3.2.2 Αριθμητική Εφαρμογή για Γάμμα(2,2)

Παρακάτω, παραθέτουμε τον πίνακα για  $\theta = 4$  με την κατανομή του ελλείματος  $G(u, y)$ , την  $G_u(y)$ , την δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείματος  $\bar{G}_u(y)$ , καθώς και ένα άνω φράγμα της δεξιάς ουράς του ελλείματος  $J(u, y)$ , όπως προκύπτει από το Θεώρημα 3.3.1. Στον πίνακα παραθέτουμε τις ακριβείς τιμές που έχουν προκύψει από το λογισμικό Mathematica.

Για  $\theta = 4$  παραθέτουμε τους παρακάτω 2 πίνακες (Πίνακας 3.5.1 και Πίνακας 3.5.2).

$y$	$u$	$G(u, y)$	$G_u(y)$	$\bar{G}_u(y)$	$\psi(u)$	$J(u, y)$
0.10	0.10	0.01963	0.10676	0.89324	0.18393	0.91224
	0.25	0.01849	0.11534	0.88466	0.16032	0.90356
	0.50	0.01560	0.12524	0.87476	0.12461	0.89356
	0.75	0.01251	0.13170	0.86830	0.09498	0.88703
0.25	0.10	0.04699	0.25548	0.74452	0.18394	0.78757
	0.25	0.04350	0.27137	0.72863	0.16032	0.77121
	0.50	0.03610	0.28970	0.71038	0.12462	0.75233
	0.75	0.02865	0.30167	0.69833	0.09498	0.74001
0.50	0.10	0.08548	0.46473	0.53527	0.18394	0.60539
	0.25	0.07760	0.48400	0.51599	0.16032	0.58478
	0.50	0.06308	0.50624	0.49375	0.12462	0.56100
	0.75	0.04946	0.52076	0.47924	0.09498	0.54548

Πίνακας 3.5.1

$y$	$u$	$G_T(u, y)$	$\bar{G}_{T,u}(y)$	$G_C(u, y)$	$\bar{G}_{C,u}(y)$	$J(u, y)$
0.10	0.10	0.01963	0.89324	0.02086	0.88659	0.91224
	0.25	0.01849	0.88466	0.01932	0.87945	0.90356
	0.50	0.01560	0.87476	0.01605	0.87121	0.89356
	0.75	0.01251	0.86830	0.01274	0.86583	0.88703
0.25	0.10	0.04699	0.74452	0.04947	0.73104	0.78757
	0.25	0.04350	0.72863	0.04520	0.71806	0.77121
	0.50	0.03610	0.71038	0.03699	0.70309	0.75233
	0.75	0.02865	0.69833	0.02913	0.69332	0.74001
0.50	0.10	0.08548	0.53527	0.08898	0.51669	0.60539
	0.25	0.07760	0.51599	0.07993	0.50144	0.58478
	0.50	0.06308	0.49375	0.06432	0.48383	0.56100
	0.75	0.04946	0.47924	0.05011	0.47234	0.54548

Πίνακας 3.5.2

Αρχικά, παρατηρούμε ότι η ποσότητα του ελλείματος με την προσέγγιση του Tijms δίνει ίδιες τιμές με την ακριβή ποσότητα του ελλείματος, το οποίο είναι αναμενόμενο αφού η προσέγγιση του Tijms είναι ακριβής στην περίπτωση Γάμμα(2,  $\beta$ ),  $\beta > 0$ . Η προσέγγιση του Cramer ως γνωστόν ως ασυμπτωτικός τύπος αναμένουμε για μεγαλύτερα  $u$ , να έχει καλύτερη προσέγγιση ενώ για μικρότερα  $u$  όχι τόσο καλή. Επίσης, οι ποσότητες



$\bar{G}_u(y), \bar{G}_{T,u}(y), \bar{G}_{C,u}(y)$  δεν ξεπερνάνε το άνω φράγμα  $J(u, y)$  για καμιά τιμή των  $u, y$  και για  $\theta = 4$ .

Για  $\theta = 0.5$  παραθέτουμε τους παρακάτω 2 πίνακες,

$y$	$u$	$G(u, y)$	$G_u(y)$	$\bar{G}_u(y)$	$\psi(u)$	$J(u, y)$
<b>0.10</b>	0.10	0.06863	0.10659	0.89341	0.64383	0.95828
	0.25	0.06958	0.11441	0.88559	0.60819	0.95018
	0.50	0.06712	0.12234	0.87766	0.54863	0.94196
	0.75	0.06228	0.12660	0.87340	0.49194	0.93755
<b>0.25</b>	0.10	0.16428	0.25516	0.74484	0.64383	0.89759
	0.25	0.16399	0.26964	0.73036	0.60819	0.88161
	0.50	0.15599	0.28433	0.71567	0.54863	0.86541
	0.75	0.14375	0.29222	0.70778	0.49194	0.85670
<b>0.50</b>	0.10	0.29896	0.46342	0.53566	0.64383	0.80268
	0.25	0.29310	0.48191	0.51809	0.60819	0.78065
	0.50	0.27417	0.49973	0.50027	0.54863	0.75832
	0.75	0.25054	0.50930	0.49070	0.49194	0.74632

Πίνακας 3.5.3

$y$	$u$	$G_T(u, y)$	$\bar{G}_{T,u}(y)$	$G_C(u, y)$	$\bar{G}_{C,u}(y)$	$J(u, y)$
<b>0.10</b>	0.10	0.06863	0.89341	0.07335	0.88607	0.95858
	0.25	0.06958	0.88559	0.07266	0.88053	0.95018
	0.50	0.06712	0.87766	0.06862	0.87492	0.94196
	0.75	0.06228	0.87340	0.06301	0.87191	0.93755
<b>0.25</b>	0.10	0.16428	0.74484	0.17367	0.73025	0.89759
	0.25	0.16399	0.73036	0.17011	0.72031	0.88161
	0.50	0.15599	0.71567	0.15897	0.71024	0.86541
	0.75	0.14375	0.70778	0.14521	0.70482	0.85670
<b>0.50</b>	0.10	0.29896	0.53566	0.31150	0.51617	0.80268
	0.25	0.29310	0.51809	0.30126	0.50467	0.78065
	0.50	0.27417	0.50027	0.27815	0.49301	0.75832
	0.75	0.25054	0.49070	0.25249	0.48675	0.74632

Πίνακας 3.5.4

Και σε αυτή την περίπτωση, όπου  $\theta = 0.5$ , παρατηρούμε από Πίνακα 3.5.3 και Πίνακα 3.5.4, ότι η ποσότητα του ελλείματος με την προσέγγιση του Tijms,  $G_T(u, y)$ , δίνει ίδιες τιμές με την ακριβή ποσότητα του ελλείματος. Επίσης, η τιμή του ελλείματος με την προσέγγιση του Cramer δίνει μια εξίσου καλή προσέγγιση της ακριβούς τιμής του ελλείματος. Επίσης και σε αυτή την περίπτωση ικανοποιείται το Θεώρημα 3.3.1.

### 3.2.3 Αριθμητική Εφαρμογή για Μείξη Κατανομών Γάμμα(2, 2) & Γάμμα(3, 2)

Παρακάτω θα παραθέσουμε πίνακες με την κατανομή του ελλείματος για την μείξη κατανομών Γάμμα για  $\theta = 0.25$ ,  $\theta = 0.50$ ,  $\theta = 1$  και  $\theta = 4$  και θα παραθέσουμε πίνακες που θα περιλαμβάνουν την ακριβή κατανομή του ελλείματος καθώς και με τις

προσεγγίσεις των Tijms και Cramer όπως ακριβώς κάναμε και με τα προηγούμενα παραδείγματα. Επίσης, θα παραθέσουμε την δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείματος  $\bar{G}_u(y)$ , καθώς και με τις προσεγγίσεις των Cramer και Tijms και τέλος του άνω φράγματος  $J(u, y)$  που είδαμε στο Θεώρημα 3.3.1.

Για  $\theta = 0.25$  έχουμε τον παρακάτω πίνακα,

$y$	$u$	$G(u, y)$	$G_T(u, y)$	$G_C(u, y)$	$\bar{G}_u(y)$	$\bar{G}_{T,u}(y)$	$\bar{G}_{C,u}(y)$	$J(u, y)$
<b>0.1</b>	0.10	0.06684	0.06696	0.07301	0.91506	0.91319	0.90721	0.97815
	0.25	0.06991	0.07003	0.07423	0.90873	0.90495	0.90308	0.97161
	0.50	0.07196	0.07202	0.07431	0.90134	0.89569	0.89812	0.96397
	0.75	0.07147	0.07146	0.07271	0.89676	0.89014	0.89497	0.95923
	1	0.06949	0.06945	0.07013	0.89401	0.88686	0.89303	0.95639
<b>0.25</b>	0.10	0.16283	0.16314	0.17568	0.79305	0.78849	0.77672	0.97815
	0.25	0.16831	0.16858	0.17728	0.78026	0.77120	0.76854	0.97161
	0.5	0.17108	0.17118	0.17592	0.76545	0.75208	0.75882	0.96397
	0.75	0.16865	0.16861	0.17119	0.75637	0.74079	0.75270	0.95923
	1	0.16327	0.16316	0.16457	0.75096	0.73418	0.74898	0.95639
<b>0.50</b>	0.10	0.30641	0.30690	0.32506	0.61057	0.60212	0.58687	0.89361
	0.25	0.31189	0.31218	0.32479	0.59286	0.57630	0.57595	0.87191
	0.50	0.31172	0.31180	0.31863	0.57263	0.54845	0.56316	0.84708
	0.75	0.30430	0.30416	0.30790	0.56040	0.56062	0.55521	0.83204
	1	0.29291	0.29270	0.29474	0.55320	0.55353	0.55042	0.82316

**Πίνακας 3.6.1**

Αντίστοιχα, για  $\theta = 0.5$ , ο πίνακας που έχουμε είναι ο εξής,

$y$	$u$	$G(u, y)$	$G_T(u, y)$	$G_C(u, y)$	$\bar{G}_u(y)$	$\bar{G}_{T,u}(y)$	$\bar{G}_{C,u}(y)$	$J(u, y)$
<b>0.1</b>	0.10	0.05510	0.05520	0.06024	0.91503	0.91488	0.90710	0.96732
	0.25	0.05669	0.05679	0.06031	0.90857	0.90840	0.90273	0.96068
	0.50	0.05667	0.05670	0.05865	0.90081	0.90072	0.89733	0.95270
	0.75	0.05453	0.05452	0.05559	0.89579	0.89579	0.89376	0.94754
	1	0.05125	0.05122	0.05181	0.89263	0.89269	0.89147	0.94429
<b>0.25</b>	0.10	0.13424	0.13449	0.14496	0.79300	0.79261	0.77645	0.91850
	0.25	0.13460	0.13666	0.14397	0.77993	0.77958	0.76778	0.90442
	0.50	0.13461	0.13469	0.13871	0.76438	0.76423	0.75720	0.88764
	0.75	0.12849	0.12846	0.13067	0.75443	0.75449	0.75027	0.87691
	1	0.12019	0.12011	0.12132	0.74821	0.74839	0.74585	0.87020
<b>0.50</b>	0.10	0.25258	0.25298	0.26821	0.61049	0.60988	0.58640	0.83933
	0.25	0.25270	0.25298	0.26361	0.59241	0.59196	0.57481	0.81793
	0.50	0.24499	0.24504	0.25088	0.57116	0.57109	0.56086	0.79273
	0.75	0.23140	0.23129	0.23450	0.55776	0.55797	0.55184	0.77682
	1	0.21505	0.21488	0.21665	0.54949	0.54984	0.54615	0.76698

**Πίνακας 3.6.2**

Για  $\theta = 1$ , παίρνουμε αντίστοιχα τον παρακάτω πίνακα,

$y$	$u$	$G(u, y)$	$G_T(u, y)$	$G_C(u, y)$	$\bar{G}_u(y)$	$\bar{G}_{T,u}(y)$	$\bar{G}_{C,u}(y)$	$J(u, y)$
<b>0.1</b>	0.10	0.04078	0.04084	0.04458	0.91499	0.91485	0.90705	0.95394
	0.25	0.04109	0.04116	0.04379	0.90836	0.90820	0.90233	0.94718
	0.50	0.03960	0.03963	0.04109	0.90010	0.90009	0.89631	0.93874
	0.75	0.03661	0.03661	0.03742	0.89447	0.89447	0.89212	0.93299
	1	0.03296	0.03294	0.03339	0.89070	0.89076	0.88926	0.92914
<b>0.25</b>	0.10	0.09933	0.09950	0.10730	0.79292	0.79256	0.77630	0.88540
	0.25	0.09886	0.09902	0.10451	0.77952	0.77917	0.76693	0.87122
	0.50	0.09395	0.09401	0.09707	0.76296	0.76281	0.75509	0.85370
	0.75	0.08610	0.08609	0.08779	0.75179	0.75184	0.74693	0.84188
	1	0.07709	0.07704	0.07798	0.74437	0.74455	0.74141	0.83402
<b>0.50</b>	0.10	0.18688	0.18716	0.19856	0.61039	0.60981	0.58605	0.77571
	0.25	0.18301	0.18321	0.19124	0.59183	0.59138	0.57349	0.75466
	0.50	0.17074	0.17078	0.17525	0.56922	0.56912	0.55785	0.72898
	0.75	0.15466	0.15459	0.15708	0.55417	0.55437	0.54720	0.71187
	1	0.13743	0.13731	0.13867	0.54429	0.54467	0.54007	0.70061

Πίνακας 3.6.3

και τέλος για  $\theta = 4$ ,

$y$	$u$	$G(u, y)$	$G_T(u, y)$	$G_C(u, y)$	$\bar{G}_u(y)$	$\bar{G}_{T,u}(y)$	$\bar{G}_{C,u}(y)$	$J(u, y)$
<b>0.1</b>	0.10	0.01592	0.01594	0.01728	0.91493	0.91483	0.90768	0.93032
	0.25	0.01545	0.01548	0.01644	0.90799	0.90786	0.90212	0.92331
	0.50	0.01394	0.01395	0.01450	0.89872	0.89864	0.89459	0.91398
	0.75	0.01198	0.01198	0.01230	0.89174	0.89173	0.88881	0.90694
	1	0.00996	0.00996	0.01014	0.88648	0.88653	0.88440	0.90163
<b>0.25</b>	0.10	0.03878	0.03883	0.04164	0.79279	0.79253	0.77748	0.82863
	0.25	0.03716	0.03721	0.03924	0.77873	0.77847	0.76638	0.81426
	0.50	0.03299	0.03302	0.03419	0.76019	0.76004	0.75151	0.79529
	0.75	0.02807	0.02807	0.02875	0.74634	0.74635	0.74021	0.78113
	1	0.02316	0.02315	0.02354	0.73598	0.73613	0.73165	0.77052
<b>0.50</b>	0.10	0.07294	0.07303	0.07721	0.61020	0.60978	0.58745	0.67208
	0.25	0.06873	0.06879	0.07180	0.59075	0.59038	0.57246	0.65162
	0.50	0.05980	0.05982	0.06156	0.56542	0.56529	0.55264	0.62498
	0.75	0.05016	0.05014	0.05115	0.54676	0.54689	0.53778	0.60535
	1	0.04098	0.04095	0.04153	0.53295	0.53329	0.52664	0.59080

Πίνακας 3.6.4

### Συμπεράσματα:

Αρχικά παρατηρούμε ότι η δεξιά ουρά της κατανομής του ελλείμματος καθώς και οι υπόλοιπες προσεγγίσεις της ουράς του ελλείμματος ικανοποιούν το Θεώρημα 3.3.1, για όλα τα  $u$  και  $y$  για τα  $\theta = 0.25$ ,  $\theta = 0.50$  και  $\theta = 1$  και  $\theta = 4$ . Η δεξιά ουρά της

προσέγγισης της κατανομής του ελλείματος με την προσέγγιση του Tijms για όλα τα  $\theta$  και για κάθε  $u, y$ , προσεγγίζει ικανοποιητικά την ακριβή κατανομή του ελλείματος καθώς λαμβάνει παρόμοιες τιμές.

Όσο αφορά την προσέγγιση του Cramer, είναι ξεκάθαρο ότι καθώς αυξάνεται το  $\theta$ , για δεδομένο  $y$  και  $u$  αυξάνεται η απόκλιση της προσέγγισης της δεξιάς ουράς του Cramer από την ακριβή δεξιά ουρά. Ωστόσο, για όλες τις τιμές των  $u$  και  $y$  παραμένει εντός του φράγματος και για καμία τιμή του δεν το ξεπερνάει, ενώ προσεγγίζει ικανοποιητικά την  $\bar{G}_u(y)$  καθώς  $u \rightarrow \infty$ .

### 3.2.4 Αριθμητική Εφαρμογή για την συνάρτηση Gerber-Shiu

Σκοπός μας είναι για διάφορες τιμές του  $\delta$ , να βρούμε την συνάρτηση Gerber-Shiu και τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας  $\bar{K}_\delta(u)$ . Αρχικά, θεωρούμε ότι  $X_i \sim \text{Exp}(5)$ , άρα και

$$f(x) = 5e^{-5x}.$$

Για  $\lambda = 1$ ,  $c = 1$  και  $\mu_1 = 0.2$ , βρίσκουμε  $\theta = 4$ . Η συνάρτηση πυκνότητας των κλιμακωτών υφών είναι ίση με

$$f_e(x) = 5e^{-5x}.$$

Η κατανομή ισοροπίας είναι ίση με,

$$F_e(x) = 1 - e^{-5x}.$$

Επίσης ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας  $f(x)$  ισούται με,

$$\hat{f}(s) = \frac{5}{5 + s}.$$

Από την γενικευμένη εξίσωση του Lundberg,

$$\lambda \hat{f}(s) = \delta + \lambda + cs.$$

- Για  $\delta = 0$ , έχουμε αντίστοιχα ότι  $\rho_1 = 0$  και  $s_1 = -4$
- Για  $\delta = 0.5$ , έχουμε  $\rho_2 = 0.608495$  και  $s_2 = -4.1085$
- Για  $\delta = 1$ , έχουμε  $\rho_3 = 1.19258$  και  $s_3 = -4.19258$
- Για  $\delta = 1.5$ , έχουμε  $\rho_4 = 1.7604$  και  $s_4 = -4.2604$

όπου  $\rho_i, i = 1, 2, 3, 4$  είναι οι θετικές ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης του Lundberg και  $s_i, i = 1, 2, 3, 4$  οι αρνητικές. Από (3.1.11) υπολογίζουμε την ουρά  $\bar{\Phi}(x)$  για τις παραπάνω θετικές ρίζες του Lundberg. Επίσης, από σχέση (3.1.10), υπολογίζουμε τις  $\eta(u)$  και την  $H(u)$  από τον παρακάτω τύπο,

$$H(u) = \frac{(e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho x} \int_x^\infty w(x, y-x) dF(y) dx)}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy} = \frac{e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho x} \int_x^\infty e^{-\rho(y-x)} dF(y) dx}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y) dy}.$$

Επομένως, κάνοντας τους υπολογισμούς στο Mathematica, καταλήγουμε στις παρακάτω ποσότητες. (βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Πίνακες 15-28).

Για  $\rho_1 = 0$ , έχουμε  $\eta_1(u) = \frac{e^{-5u}}{5}$  και  $H_1(u) = e^{-5u}$ .

Για  $\rho_2 = 0.608495$  έχουμε  $\eta_2(u) = 0.158956e^{-5u}$  και  $H_2(u) = 0.891505e^{-5u}$ .

Για  $\rho_3 = 1.19258$  έχουμε  $\eta_3(u) = 0.130385e^{-5u}$  και  $H_3(u) = 0.807418e^{-5u}$ .

Για  $\rho_4 = 1.7604$  έχουμε  $\eta_3(u) = 0.109402e^{-5u}$  και  $H_3(u) = 0.739601e^{-5u}$ .

Εν συνεχεία, βρίσκουμε την συνάρτηση πυκνότητας της ουράς  $\bar{\Phi}(x) = 1 - \Phi(x)$ , δηλαδή για  $\rho_1 = 0$ ,

$$\Phi'_1(x) = \frac{5}{5+u}.$$

Αντίστοιχα, βρίσκουμε και για τα υπόλοιπα  $\rho_i, i = 1, 2, 3, 4$  τις συναρτήσεις  $\Phi'_i(x)$ . Από την σχέση (3.1.12), βρίσκουμε την συνάρτηση Gerber-Shiu και επομένως για  $\rho_1 = 0$ ,

$$m_{\delta,1}(u) = 0.2e^{-4u}.$$

Αντίστοιχα για τα υπόλοιπα  $\rho_i$ , βρίσκουμε,

$$m_{\delta,2}(u) = 0.158956e^{-4.1085u}, m_{\delta,3}(u) = 0.130385e^{-4.19258u}$$

και

$$m_{\delta,4}(u) = 0.109402e^{-4.2604u},$$

ενώ

$$\varphi_\delta = \frac{\hat{f}_e(p)}{1+\theta}.$$

Άρα, παίρνουμε για τις διάφορες τιμές του  $\delta$ ,

$$\varphi_1 = \frac{\hat{f}_e(0)}{1+\theta} = 0.2, \varphi_2 = \frac{\hat{f}_e(0.608495)}{1+\theta} = 0.178301,$$

καθώς και

$$\varphi_3 = \frac{\hat{f}_e(1.19258)}{1+\theta} = 0.161484, \varphi_4 = \frac{\hat{f}_e(1.7604)}{1+\theta} = 0.14792.$$

Επίσης, σκοπός μας είναι και ο υπολογισμός του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Από (3.1.23), βρήκαμε ότι  $v = \frac{1+\theta}{\int_0^\infty e^{-\rho y} f_e(y) dy} - 1$ , και από τις σχέσεις (3.1.31) και (3.1.32), βρίσκουμε για  $\delta = 0$ , όπου η συνάρτηση Gerber-Shiu συμπίπτει με την  $\psi(u)$ ,

$$\bar{K}_1(u) = m_{\delta,1}(u) = 0.2e^{-4u}.$$

Όπως επίσης και για  $\delta = 0.5$ ,  $\delta = 1$ ,  $\delta = 1.5$ , από την σχέση (3.1.27), έχουμε τις εξής ποσότητες:

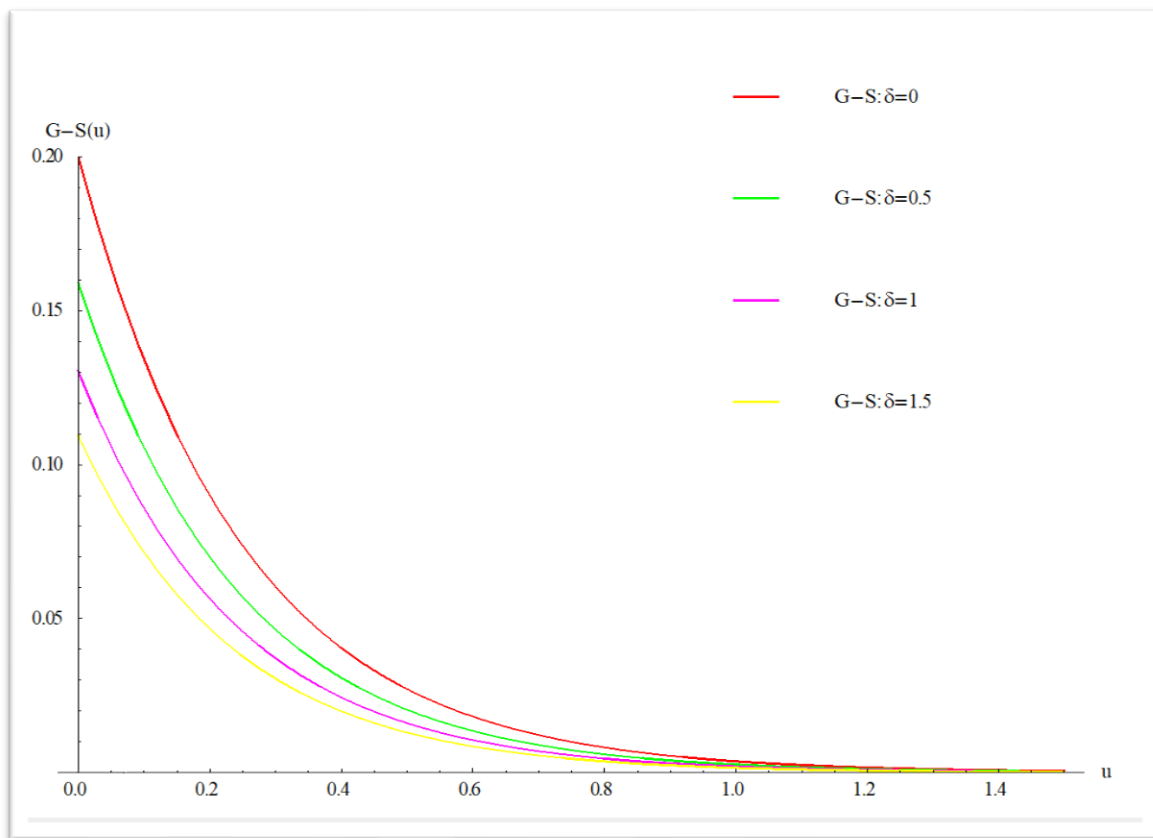
$$\bar{K}_2(u) = 0.178301e^{-4.1085u}, \quad \bar{K}_3(u) = 0.161484e^{-4.19258u}$$

και

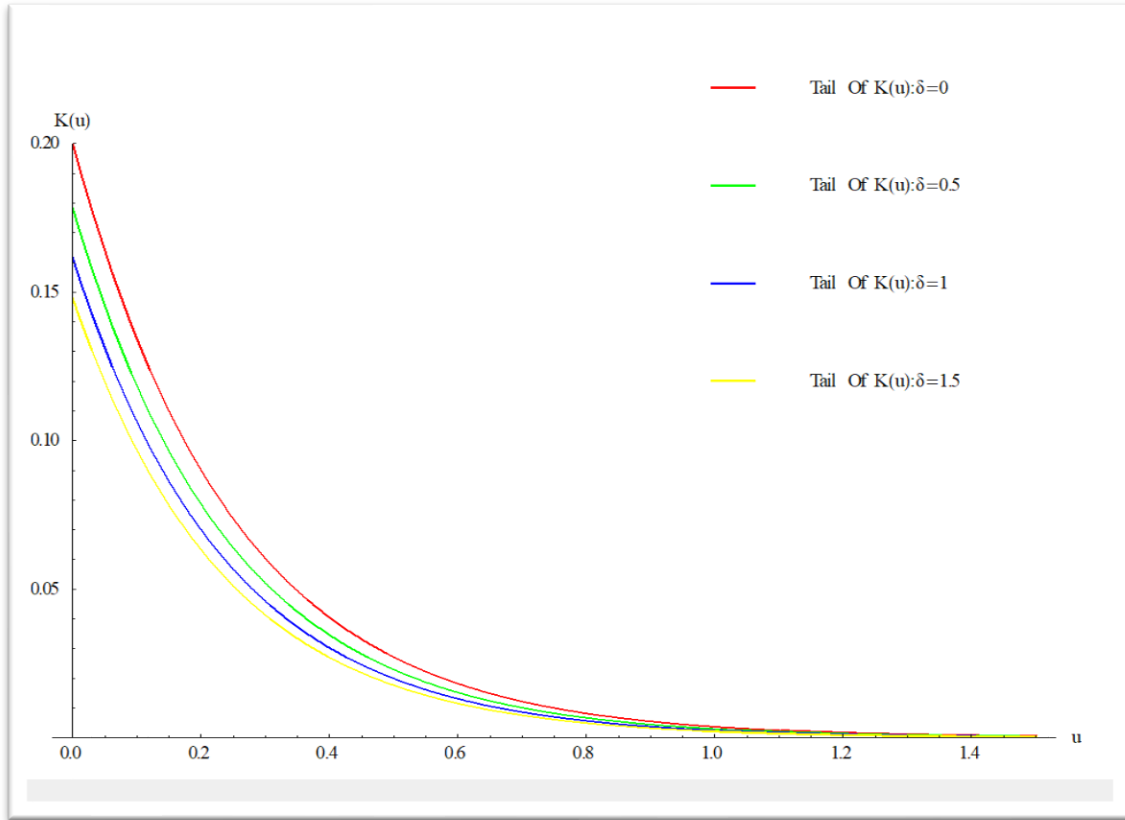
$$\bar{K}_4(u) = 0.14792e^{-4.2604u},$$

όπου,  $\nu_1 = 4, \nu_2 = 4.6085, \nu_3 = 5.19258$  και  $\nu_4 = 5.7604$ , για τα παραπάνω  $\rho_i, i = 1, 2, 3, 4$ .

Παρακάτω, θα δούμε γραφικές παραστάσεις τόσο για την συνάρτηση Gerber-Shiu όσο και για την  $\bar{K}_\delta(u)$  για διάφορες τιμές του  $\delta$ .



Σχήμα 3.7.1



**Σχήμα 3.7.2**

Στη συνέχεια, θα βρούμε προσεγγίσεις για την συνάρτηση G-S όσο και για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας. Από σχέση (3.1.27) και ορίζοντας τις λύσεις της εξίσωσης του Lundberg ως  $\kappa_i = -s_i$ , καταλήγουμε στις παρακάτω τιμές για τον συντελεστή Cramer,

$$C_1 = \frac{\nu_1(\rho_1 + \kappa_1)}{\kappa_1 \left( (1 + \nu_1) \left( \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty x e^{x\kappa_1} f(x) dx - 1 \right) \right)} = 0.2,$$

Με τον ίδιο τρόπο, βρίσκουμε  $C_2 = 0.178299$ ,  $C_3 = 0.161485$  και  $C_4 = 0.14792$ . Επίσης, βρίσκουμε από την σχέση (3.1.25) τα  $r_i$ . Αρχικά για την  $r_1$ , έχουμε,

$$r_1 = \frac{\nu_1 \mu}{\nu_1 + 1} = \frac{20}{4 + 1} = 4.$$

Αντίστοιχα,

$$r_2 = \frac{\nu_2 \mu}{\nu_2 + 1} = 4.1085, r_3 = \frac{\nu_3 \mu}{\nu_3 + 1} = 4.19258,$$

και

$$r_4 = \frac{\nu_4 \mu}{\nu_4 + 1} = 4.2604.$$

Οπότε, παίρνουμε τις παρακάτω προσεγγίσεις για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας,

$$\bar{K}_{C_1}(u) = C_1 e^{-r_1 u} = 0.2 e^{-4u}, \bar{K}_{C_2}(u) = C_2 e^{-r_2 u} = 0.178299 e^{-4.1085u}$$

καθώς επίσης και

$$\bar{K}_{C_3}(u) = C_3 e^{-r_3 u} = 0.161485 e^{-4.19258u}, \bar{K}_{C_4}(u) = C_4 e^{-r_4 u} = 0.14792 e^{-4.2604u}.$$

Σε αυτό το σημείο, ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα έχει να εξετάσουμε και την προσέγγιση του Tijms για την προσέγγιση της  $\bar{K}_\delta(u)$ . Αρχικά από (3.1.29), υπολογίζουμε τον συντελεστή  $\gamma$  για τις προαναφερθείσες τιμές του  $\delta$ . Συγκεκριμένα, έχουμε

$$\gamma_2 = 3.76862, \gamma_3 = 3.87409,$$

και

$$\gamma_4 = 3.57243.$$

Οπότε, βρίσκουμε αντίστοιχα με του Cramer, προσεγγίσεις τύπου Tijms για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας ως εξής:

$$\bar{K}_{T_2}(u) = \left( \left( \frac{1}{1 + \nu_2} \right) - C_2 \right) e^{-\gamma_2 u} + C_2 e^{-\kappa_2 u} = 0.178299 e^{-4.1085u} + 2.29144 * 10^{(-6)} e^{-3.76862u},$$

$$\bar{K}_{T_3}(u) = \left( \left( \frac{1}{1 + \nu_3} \right) - C_3 \right) e^{-\gamma_3 u} + C_3 e^{-\kappa_3 u} = 0.161485 e^{-4.19258u} - 9.79258 * 10^{-7} e^{-3.87409},$$

$$\bar{K}_{T_4}(u) = \left( \left( \frac{1}{1 + \nu_4} \right) - C_4 \right) e^{-\gamma_4 u} + C_4 e^{-\kappa_4 u} = 0.14792 e^{-4.2604u} + 5.54373 * 10^{-7} e^{-3.57243u}.$$

Για να βρούμε αντίστοιχες προσεγγίσεις και για την συνάρτηση Gerber-Shiu, από την σχέση (3.1.34), βρίσκουμε προσεγγίσεις τύπου Cramer, οι οποίες είναι οι παρακάτω,

$$m_{C,0}(u) \sim \frac{\int_0^\infty e^{\kappa_1 x} H_1(x) dx}{\int_0^\infty x e^{\kappa_1 x} \Phi_1'(x) dx} e^{-\kappa_1 u} = \frac{e^{-4u}}{5},$$

$$m_{C,0.5}(u) \sim \frac{\int_0^\infty e^{\kappa_2 x} H_2(x) dx}{\int_0^\infty x e^{\kappa_2 x} \Phi_2'(x) dx} e^{-\kappa_2 u} = 0.158955 e^{-4.1085u},$$

$$m_{C,1}(u) \sim \frac{\int_0^\infty e^{\kappa_3 x} H_3(x) dx}{\int_0^\infty x e^{\kappa_3 x} \Phi_3'(x) dx} e^{-\kappa_3 u} = 0.130385 e^{-4.19258u},$$



$$m_{C,1.5}(u) \sim \frac{\int_0^\infty e^{\kappa_4 x} H_4(x) dx}{\int_0^\infty x e^{\kappa_4 x} \Phi_4'(x) dx} e^{-\kappa_4 u} = 0.109402 e^{-4.2604u}.$$

Και από την εξίσωση (3.1.33) μπορούμε να βρούμε προσεγγίσεις τύπου Tijms για την συνάρτηση Gerber-Shiu, αξιοποιώντας τις προσεγγίσεις που βρήκαμε για τον μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

$$m_{T,0.5}(u) = -\frac{1}{v_2} \int_0^u \bar{K}_{T_2}(u-x) \eta_{0.5}(x) dx + \frac{1}{v_2} H_{0.5}(u) - \frac{H_{0.5}(0)}{v_2} \bar{K}_{T_2}(u),$$

$$m_{T,1}(u) = -\frac{1}{v_3} \int_0^u \bar{K}_{T_3}(u-x) \eta_1(x) dx + \frac{1}{v_3} H_1(u) - \frac{H_1(0)}{v_3} \bar{K}_{T_3}(u),$$

$$m_{T,1.5}(u) = -\frac{1}{v_4} \int_0^u \bar{K}_{T_4}(u-x) \eta_{1.5}(x) dx + \frac{1}{v_4} H_{1.5}(u) - \frac{H_{1.5}(0)}{v_4} \bar{K}_{T_4}(u),$$

Για  $\delta = 0$ , η συνάρτηση  $m_\delta(u)$  και η  $\bar{K}_\delta(u)$  ταυτίζονται με την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$ . Επομένως, δεν υπάρχει πρακτικός λόγος παράθεσης σχετικών προσεγγίσεων για την συγκεκριμένη τιμή του  $\delta$ .

$u$	$m_0(u)$	$\bar{K}_0(u)$	$\psi(u)$
<b>0.1</b>	0.13406	0.13406	0.13406
<b>0.25</b>	0.07358	0.07358	0.07358
<b>0.50</b>	0.02707	0.02707	0.02707
<b>0.75</b>	0.00996	0.00996	0.00996
<b>1</b>	0.00366	0.00366	0.00366
<b>1.5</b>	0.00050	0.00050	0.00050
<b>3</b>	0.00000	0.00000	0.00000

**Πίνακας 3.7.1**

Για  $\delta = 0.5$  και  $\theta = 4$ , παραθέτουμε τον παρακάτω πίνακα με τις προσεγγίσεις των Cramer και Tijms για την συνάρτηση Gerber-Shiu και για τον μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας.

$u$	$m_{0.5}(u)$	$m_{C,0.5}(u)$	$m_{T,0.5}(u)$	$\bar{K}_{0.5}(u)$	$\bar{K}_{C,0.5}(u)$	$\bar{K}_{T,0.5}(u)$
<b>0.1</b>	0.10540	0.10540	0.10540	0.11823	0.11823	0.11829
<b>0.25</b>	0.05691	0.05691	0.05691	0.06383	0.06384	0.06384
<b>0.50</b>	0.02038	0.02038	0.02038	0.02286	0.02286	0.02286
<b>0.75</b>	0.00730	0.00730	0.00730	0.00818	0.00818	0.00818
<b>1</b>	0.00261	0.00261	0.00261	0.00293	0.00293	0.00293
<b>1.5</b>	0.00033	0.00033	0.00033	0.00038	0.00038	0.00038
<b>3</b>	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

**Πίνακας 3.7.2**

Για  $\delta = 1$  και  $\theta = 4$  όπως και προηγουμένως, παραθέτουμε τον παρακάτω πίνακα.

$u$	$m_1(u)$	$m_{C,1}(u)$	$m_{T,1}(u)$	$\bar{K}_1(u)$	$\bar{K}_{C,1}(u)$	$\bar{K}_{T,1}(u)$
<b>0.1</b>	0.08573	0.08573	0.08573	0.10618	0.10618	0.10618
<b>0.25</b>	0.04571	0.04571	0.04571	0.05661	0.05661	0.05661
<b>0.50</b>	0.01603	0.01603	0.01603	0.01985	0.01985	0.01985
<b>0.75</b>	0.00562	0.00562	0.00562	0.00696	0.00696	0.00696
<b>1</b>	0.00197	0.00197	0.00197	0.00244	0.00244	0.00244
<b>1.5</b>	0.00024	0.00024	0.00024	0.00030	0.00030	0.00030
<b>3</b>	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

**Πίνακας 3.7.3**

Τέλος, παραθέτουμε για  $\delta = 1.5$ , συγκεντρωτικά τον παρακάτω πίνακα με τις προσεγγίσεις.

$u$	$m_{1.5}(u)$	$m_{C,1.5}(u)$	$m_{T,1.5}(u)$	$\bar{K}_{1.5}(u)$	$\bar{K}_{C,1.5}(u)$	$\bar{K}_{T,1.5}(u)$
<b>0.1</b>	0.07145	0.07145	0.07145	0.09661	0.09661	0.09661
<b>0.25</b>	0.03771	0.03771	0.03771	0.05099	0.05099	0.05099
<b>0.50</b>	0.01300	0.01300	0.01300	0.01757	0.01757	0.01757
<b>0.75</b>	0.00448	0.00448	0.00448	0.00606	0.00606	0.00606
<b>1</b>	0.00154	0.00154	0.00154	0.00209	0.00209	0.00209
<b>1.5</b>	0.00018	0.00018	0.00018	0.00025	0.00025	0.00025
<b>3</b>	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000

**Πίνακας 3.7.4**

Από τη σχέση (3.1.35) παίρνουμε ένα άνω φράγμα για αυτή την εφαρμογή. Είναι ξεκάθαρο ότι για όλες τις τιμές των  $u$  και  $\delta$ , ισχύει  $\bar{K}_\delta(u) \leq \psi(u)$ . Παρατηρούμε ότι για κάθε τιμή του συντελεστή προεξόφλησης ( $\delta$ ), οι προσεγγίσεις για κάθε τιμή του  $u$  έχουν εξαιρετικά καλή προσαρμογή.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Το Μοντέλο Διάχυσης των Dufresne & Gerber & Αριθμητικές Εφαρμογές

#### 4.1 Εισαγωγή

Ο Gerber (1970) μελέτησε εκτενώς το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου και το επέκτεινε, προσθέτοντας έναν στοχαστικό όρο που αποτελεί μια διαδικασία Wiener ανεξάρτητος από τη σύνθετη διαδικασία Poisson. Οι Francois Dufresne και Hans U. Gerber (1991), μελέτησαν ξεχωριστά τρεις πιθανότητες, την πιθανότητα χρεοκοπίας που σχετίζεται με την έλευση μιας ζημιάς, την πιθανότητα χρεοκοπίας εξαιτίας του όρου διάχυσης καθώς και την συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας, δηλαδή την αθροιστική πιθανότητα των δύο προαναφερθέντων πιθανοτήτων. Εδειξαν ότι οι πιθανότητες χρεοκοπίας (είτε από την διάχυση είτε από τις απαιτήσεις) ικανοποιούν συγκεκριμένες ανανεωτικές εξισώσεις. Κάτω από αυτή την προσέγγιση επομένως, η χρεοκοπία μπορεί να επέλθει με δύο τρόπους, είτε από απαιτήσεις για αποζημιώσεις το οποίο μπορεί να οδηγήσει σε μη μηδενικό έλλειμα την στιγμή της χρεοκοπίας είτε από ταλάντωση της στοχαστικής διαδικασίας Wiener που οφείλεται σε λόγους όπως μη ακριβή εκτίμηση ή μέτρηση του κινδύνου, αποκλίσεις σε ασφάλιστρα και αποζημιώσεις, μεταβολές στα επιτόκια κλπ. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος είναι μία τυπική στοχαστική διαδικασία Levy. Επομένως, θα μελετήσουμε τη κατανομή των ατομικών απαιτήσεων στις περιπτώσεις όπου ακολουθούν εκθετική κατανομή και μείξη εκθετικών και θα δώσουμε αναλυτικές εκφράσεις για τις προσεγγίσεις των Cramer και Tijms καθώς και των προσεγγίσεων De Vylder και Beekman-Bowers.

#### 4.1.1 Στοχαστική Διαδικασία Πλεονάσματος στο Μοντέλο Διάχυσης

Στην ενότητα αυτή, θα δείξουμε ότι οι πιθανότητες χρεοκοπίας (είτε λόγω διάχυσης είτε από εισροή απαιτήσεων) ικανοποιούν κάποιες ελλειματικές ανανεωτικές εξισώσεις από τις οποίες θα εξάγουμε αναλυτικά αποτελέσματα (ασυμπτωτικά και ακριβή) για την πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται στον όρο διάχυσης καθώς και για την συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας.

**Ορισμός 4.1.1.** Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος  $\{V(t)\} t \geq 0$  ορίζεται ως εξής:

$$V(t) = u + ct - S(t) + \sigma W(t), t \geq 0, \quad (4.1.1)$$

όπου  $\sigma > 0$  η τυπική απόκλιση και  $\{W(t): t \geq 0\}$  είναι μια διαδικασία Wiener ανεξάρτητη της σύνθετης διαδικασίας Poisson  $\{S(t): t \geq 0\}$  με μέση τιμή 0 και διακύμανση  $2\sigma^2$ . Επομένως, για κάθε  $t > 0$ , η τυχαία μεταβλητή  $W(t)$  ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση  $2\sigma^2 t$ .

Εδώ ο χρόνος χρεοκοπίας ορίζεται ως,

$$T = \inf\{t: U(t) \leq 0\}.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως

$$\psi(u) = \Pr(T < \infty | V(0) = u) = \psi_d(u) + \psi_s(u), \quad (4.1.2)$$

όπου ,

- $\psi_d(u)$  είναι η πιθανότητα που προκαλείται εξαιτίας του όρου διάχυσης. Την στιγμή της χρεοκοπίας το πλεόνασμα είναι μηδενικό.
- $\psi_s(u)$  είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας που προκαλείται από εμφάνιση απαίτησης. Το πλεόνασμα την στιγμή της χρεοκοπίας είναι αρνητικό .
- $\psi(u)$  είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας που προκύπτει είτε από τον όρο διάχυσης είτε από εμφάνιση απαίτησης.
- $V(t) = U(t) + \sigma W(t)$  .Ο παράγοντας διάχυσης  $W(t), t \geq 0$  εκφράζει την επιπρόσθετη αβεβαιότητα των συνολικών απαιτήσεων . Διαφορετικά , μπορεί να διατυπωθεί και ως η επιπλέον αβεβαιότητα στο ποσό των ασφαλιστρών που θα εισπραχθεί από την ασφαλιστική εταιρεία.

#### 4.1.2 Κλιμακωτά Ύψη και Σωρευτική Απώλεια στο Μοντέλο Διάχυσης

Οι Dufresne & Gerber το 1990 μελέτησαν τις παραπάνω πιθανότητες και παρουσίασαν τις αντίστοιχες ελλειματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Όπως και στο κλασσικό μοντέλο μας ενδιαφέρει η μελέτη της συνάρτησης επιβίωσης ή πιθανότητα μη χρεοκοπίας.

$$\delta(u) = \Pr(U(t) \geq 0, \forall t \geq 0) \quad (4.2.1)$$

και φυσικά της πιθανότητας χρεοκοπίας ,

$$\psi(u) = 1 - \delta(u). \quad (4.2.2)$$

Θα αρχίσουμε την ανάλυση μας από την ολοκληρωδιαφορική εξίσωση που εισήγαγαν οι Dufresne & Gerber (1990). Αλλάζοντας τον συμβολισμό της  $\delta(\cdot)$  με  $D(\cdot)$ , έχουμε ότι,

$$\frac{\sigma^2}{2} D''(u) + cD'(u) = \lambda D(u) - \lambda \int_0^u D(u-x)f(x)dx. \quad (4.2.3)$$

Θεωρούμε ένα απειροελάχιστο μεσοδιάστημα μήκους  $dt$  και διακρίνουμε σχετικά με το εάν υπάρχει απαίτηση ή όχι στο μεσοδιάστημα αυτό. Τότε, από τον νόμο των ολικών πιθανοτήτων, έχουμε,

$$D(u) = (1 - \lambda dt)E(D(u + cdt + W(dt))) + \lambda dt \int_0^u D(u-x) f(x)dx. \quad (4.2.4)$$

Κάνουμε αντικατάσταση για την  $E(\cdot)$  ,ως ακολούθως,

$$E\left(D(u + cdt + W(dt))\right) = D(u) + cdtD'(u) + \frac{\sigma^2}{2} dtD''(u). \quad (4.2.5)$$

Αντικαθιστώντας την σχέση (4.2.5) στη σχέση (4.2.4), προκύπτει η παρακάτω εξίσωση,

$$D(u) = (1 - \lambda dt)(D(u) + cdtD'(u) + \frac{\sigma^2}{2} dtD''(u)) + \lambda dt \int_0^u D(u-x) f(x) dx.$$

Κάνοντας πράξεις στο δεξιό μέλος, φεύγουν τα  $D(u)$  από τα δύο μέρη της εξίσωσης και διαιρώντας με  $dt$ , καταλήγουμε στην εξίσωση (4.2.3). Έπειτα, ολοκληρώνουμε τη σχέση (4.2.3) ως προς  $u$ . Οπως γνωρίζουμε,  $\delta(0) = D(0) = 0$ . Οπότε έχουμε ότι,

$$\frac{\sigma^2}{2} D'(u) + cD(u) = \frac{\sigma^2}{2} D'(0) + \lambda dt \int_0^u D(u-y) f(y) dy, u \geq 0. \quad (4.2.6)$$

Για  $u \rightarrow \infty$ , η σχέση (4.2.6) παίρνει την παρακάτω μορφή,

$$c = \frac{\sigma^2}{2} D'(0) + \lambda \mu.$$

Από το οποίο προκύπτει ότι,

$$D'(0) = \frac{2(c - \lambda \mu_1)}{\sigma^2} = q\zeta.$$

Και δεδομένου ότι,

$$q = \frac{c - \lambda \mu_1}{c},$$

καταλήγουμε ότι η παράμετρος  $\zeta$  δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$\zeta = \frac{2c}{\sigma^2}.$$

Διαιρώντας με  $\frac{\sigma^2}{2}$  την σχέση (4.2.6), καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση,

$$D'(u) + \zeta D(u) = q\zeta + \frac{2\lambda}{\sigma^2} \int_0^u D(u-y) \bar{F}'(y) dy, u \geq 0 \quad (4.2.7)$$

Εν συνεχεία, πολλαπλασιάζοντας την σχέση (4.2.7) με τον παράγοντα  $e^{\zeta u}$  και ολοκληρώνοντας από 0 έως  $x$ , παίρνουμε,

$$e^{\zeta x} D(x) = q(e^{\zeta x} - 1) + \frac{2\lambda}{\sigma^2} \int_0^x \int_0^u e^{\zeta u} D(u-y) \bar{F}'(y) dy du, x \geq 0. \quad (4.2.8)$$

Σε αυτό το σημείο εισάγουμε τις πυκνότητες των κλιμακωτών υψών

$$h_1(x) = \zeta e^{-\zeta x}, x > 0 \quad (4.2.9)$$

και

$$h_2(x) = \frac{1}{\mu_1} \bar{F}(x), x > 0. \quad (4.2.10)$$

Επομένως καταλήγουμε στην παρακάτω ανανεωτική εξίσωση για την  $D(x)$ ,

$$D(x) = qH_1(x) + (1 - q) \int_0^x D(z)h_1 * h_2(x - z)dz, x \geq 0. \quad (4.2.11)$$

Στο μοντέλο διάχυσης η σωρευτική απώλεια δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$L = \max \{t \geq 0, L(t) = u - V(t)\},$$

ή μπορεί να αναλυθεί ως εξής:

$$L = L_0^{(1)} + \sum_{i=1}^N (L_i^{(1)} + L_i^{(2)}), \quad (4.2.12)$$

όπου οι τυχαίες μεταβλητές,

- $L_i^{(1)} = \max\{L(t), t < t_{i+1}\} - L(t_i), i = 0, 1, \dots, N$
- $L_i^{(2)} = L(t_i) - L(t_i - 1) - L_{i-1}^{(1)}, i = 1, \dots, N,$

αναπαριστούν τις ποσότητες που προκύπτουν στα ύψη ρεκόρ  $i + 1$  και  $i$  της στοχαστικής διαδικασίας  $\{L(t)\}_{t \geq 0}$ , εξαιτίας του όρου διάχυσης και της έλευσης απαιτήσεων αντίστοιχα. Η στοχαστική διαδικασία  $\{L(t)\}_{t \geq 0}$  είναι μια στοχαστική διαδικασία Levy και έχουμε ότι  $\{L_i^{(1)}\}_{i=0}^{\infty}$ , και  $\{L_i^{(2)}\}_{i=1}^{\infty}$  είναι *iid* τυχαίες μεταβλητές. Οι  $\{L_i^{(1)}\}_{i=0}^{\infty}$  είναι το μέγεθος των υψών ρεκόρ ή ιστορικών υψών αλλιώς (record heights), που προκαλούνται από τη ταλάντευση του στοχαστικού όρου και  $\{L_i^{(2)}\}_{i=1}^{\infty}$  το μέγεθος των υψών ρεκόρ από τις απαιτήσεις. Επίσης, ορίζουμε ως  $N$  το πλήθος των ρεκόρ υψών. Επίσης, για την τ.μ.  $L$  δίνουμε μια πιο αναλυτική μορφή της σχέσης (4.2.12) ως εξής,

$$L = \begin{cases} L_0^{(1)} + L_1^{(2)} + L_1^{(1)} + \dots + L_N^{(2)} + L_N^{(1)}, N = 1, 2, \dots \\ L_0^{(1)}, N = 0 \end{cases} \quad (4.2.13)$$

Το πλήθος των ιστορικών υψών  $N$  ακολουθεί την Γεωμετρική Κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $P(N = n) = (1 - p)^n p, \forall n = 0, 1, \dots$  όπου  $p$  είναι η πιθανότητα να μην υπάρξουν ύψοι ρεκόρ που προκαλούνται από απαιτήσεις. Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας δίνεται ως εξής:

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1 - p)^n H^{(1)*n}(u) H^{(2)*n}(u), \quad (4.2.14)$$

όπου  $H^{(1)}$  και  $H^{(2)}$  δηλώνουν τις συναρτήσεις κατανομών των  $L_i^{(1)}$  και  $L_i^{(2)}$  αντίστοιχα.

**Πόρισμα 4.2.1.** Η αναμενόμενη σωρευτική απώλεια και η διακύμανσή της δίνεται από τους παρακάτω τύπους,

$$E[L] = \frac{\sigma^2}{2c} + \frac{\lambda\mu_1 \left( \frac{\sigma^2}{2c} + \frac{\mu_2}{2\mu_1} \right)}{c \left( 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c} \right)}, \quad (4.2.15)$$

$$Var(L) = \frac{\sigma^2}{4c^2} + \frac{\lambda\mu_1\left(\frac{\sigma^2}{2c} + \frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)}{c\left(1 - \frac{\lambda\mu_1}{c}\right)^2} + \frac{\lambda\mu_1\left(\frac{\sigma^4}{4c^2}\right) - \left(\frac{\mu_2^2}{4\mu_1^2}\right) + \left(\frac{\mu_3}{3\mu_1}\right)}{c\left(1 - \frac{\lambda\mu_1}{c}\right)} \quad (4.2.16)$$

### Απόδειξη:

Από (4.2.12) και (4.2.13) παίρνοντας μέση τιμή και διακύμανση καταλήγουμε στις δύο παρακάτω σχέσεις,

$$E[L] = E[L_0^{(1)}] + E[N] \left( E[L_i^{(1)}] + E[L_i^{(2)}] \right), \quad (4.2.17)$$

$$Var[L] = Var[L_0^{(1)}] + E[N](Var[L_i^{(1)}] + Var[L_i^{(2)}]) + Var[N](E[L_i^{(1)}] + E[L_i^{(2)}])^2. \quad (4.2.18)$$

Εδώ, η μέση τιμή και διακύμανση των ιστορικών ύψων που οφείλονται στον στοχαστικό όρο, δίνεται από τους παρακάτω δύο τύπους:

$$E[L_i^{(1)}] = \frac{1}{\zeta}, \quad (4.2.19)$$

και

$$Var[L_i^{(1)}] = \frac{1}{\zeta^2}. \quad (4.2.20)$$

Ενώ αντίστοιχα για τα κλιμακωτά ύψη που οφείλονται στις απαιτήσεις, λαμβάνουμε για την μέση τιμή και διακύμανση τις παρακάτω δύο ποσότητες,

$$E[L_i^{(2)(k)}] = \frac{\mu_{k+1}}{(\kappa + 1)\mu_1}, \quad (4.2.21)$$

$$Var[L_i^{(2)}] = \frac{\mu_3}{3\mu_1} - \left(\frac{\mu_2}{2\mu_1}\right)^2. \quad (4.2.22)$$

Γνωρίζουμε για τα ζημιών ότι η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο,

$$E[N] = \frac{1 - q}{q} \quad (4.2.23)$$

και η διακύμανση του ύψους των ζημιών,

$$Var[N] = \frac{1 - q}{q^2}. \quad (4.2.24)$$

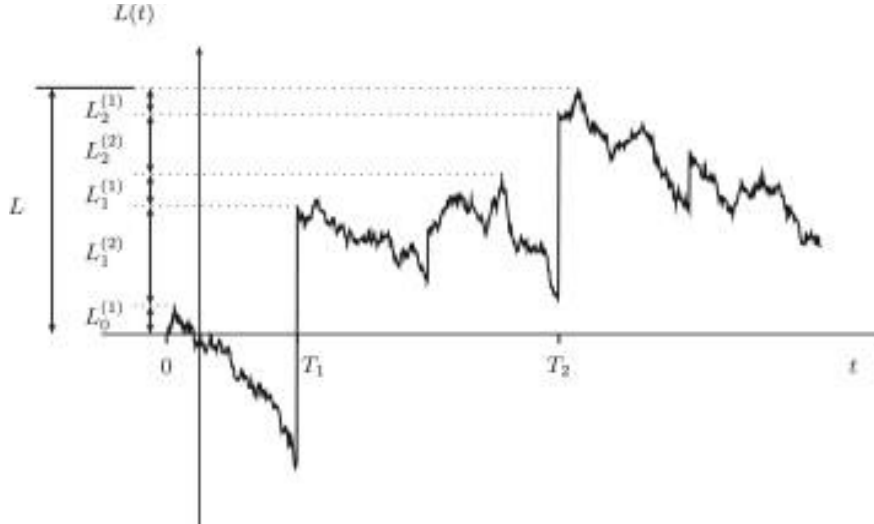
Επειδή,

$$q = D(0) = 1 - \frac{\lambda\mu_1}{c} = \frac{\theta}{1 + \theta} \quad (4.2.25)$$

και

$$\zeta = \frac{2c}{\sigma^2},$$

προκύπτουν οι εξισώσεις (4.2.17) και (4.2.18).



**Σχήμα 4.2:** Στο παραπάνω διάγραμμα απεικονίζεται μια τυπική διαδρομή της  $\{L(t)\}_{t \geq 0}$  με  $\sigma > 0$  και τα αντίστοιχα ύψη ρεκόρ  $\{L_0^{(1)}, L_0^{(1)} + L_1^{(2)}, L_0^{(1)} + L_1^{(2)} + L_1^{(1)}, L_0^{(1)} + L_1^{(2)} + L_1^{(1)} + L_2^{(2)}$  και  $L_0^{(1)} + L_1^{(2)} + L_1^{(1)} + L_2^{(2)} + L_2^{(1)}\}$ .

(Πηγή: Dos Reis & Seixas (2012))

### 4.1.3 Πιθανότητα Χρεοκοπίας στο Μοντέλο Διάχυσης

Παρόμοια, αναλυτικούς τύπους μπορούμε να εξάγουμε και για την πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται στις απαιτήσεις  $\psi_s(u)$ , για την πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται στον όρο διάχυσης  $\psi_d(u)$  και τέλος για την συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$ .

Από (4.2.5), αντικαθιστώντας την  $D(u)$  με την  $\psi_d(u)$ , παίρνουμε την παρακάτω ανανεωτική εξίσωση,

$$\frac{\sigma^2}{2} \psi_d''(u) + c\psi_d'(u) = \lambda\psi_d(u) - \lambda \int_0^u \psi_d(u-x)f(x)dx, \quad u \geq 0. \quad (4.3.1)$$

Μετά από ολοκλήρωση και στα δύο μέρη έχουμε,

$$\psi_d'(u) + \zeta\psi_d(u) = \frac{\lambda}{\sigma^2} \int_0^u \psi_d(u-y)\bar{F}(y)dy, \quad u \geq 0. \quad (4.3.2)$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέρη με τον παράγοντα  $e^{\zeta u}$ , και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση από 0 έως  $x$ , καταλήγουμε στην παρακάτω ανανεωτική εξίσωση για την  $\psi_d(u)$ ,



$$\psi_d(x) = 1 - H_1(x) + (1 - q) \int_0^x \psi_d(x - z) h_1 * h_2(z) dz. \quad (4.3.3)$$

Παραγωγίζοντας την ανανεωτική εξίσωση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας (4.2.11), η (4.2.11) παίρνει την ακόλουθη μορφή,

$$D'(x) = q h_1(x) + (1 - q) \int_0^x D'(z) h_1 * h_2(x - z) dz, x \geq 0. \quad (4.3.4)$$

Από (4.2.9), για την  $h_1(x)$  και συγκρίνοντας (4.3.3) και (4.3.4), βρίσκουμε την μοναδική λύση της ανανεωτικής εξίσωσης (4.3.4) η οποία είναι η ακόλουθη,

$$D'(x) = q \zeta \psi_d(x) = \frac{2(c - \lambda \mu_1)}{\sigma^2} \psi_d(x). \quad (4.3.5)$$

Επομένως, εάν γνωρίζουμε την  $\delta(x) = D(x)$ , μπορούμε εύκολα να βρούμε την  $\psi_d(x)$  από την σχέση (4.3.5).

**Ορισμός 4.3.1.** Η πιθανότητα χρεοκοπίας στο μοντέλο διάχυσης δίνεται ως ακολούθως,

$$\psi(u) = \psi_d(u) + \psi_s(u) \quad (4.3.6)$$

όπου,

$$\psi_d(u) = P(T < \infty, V(T) = 0 | V(0) = u), \quad (4.3.7)$$

είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας λόγω του όρου διάχυσης και

$$\psi_s(u) = P(T < \infty, V(T) < 0 | V(0) = u), \quad (4.3.8)$$

είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας που εμφανίζεται από ατομικές απαίτησεις ζημιών.

Επομένως, από κανονικότητα της διαδικασίας Wiener, έχουμε

$$\psi(0) = \psi_d(0) = 1, \quad (4.3.9)$$

άρα και  $\psi_s(0) = 0$ .

**Παρατήρηση :** Χρεοκοπία εξαιτίας μιας απαίτησης είναι πιο σημαντική από τη χρεοκοπία λόγω του όρου διάχυσης, επειδή στην 1<sup>η</sup> περίπτωση το έλλειμα είναι μεγάλο ενώ στην 2<sup>η</sup> περίπτωση θα είναι μηδενικό.

Από Dos Reis et al.(2012), η πιθανότητα χρεοκοπίας η οποία προκαλείται από τον όρο διάχυσης και η πιθανότητα χρεοκοπίας που προκαλείται από απαιτήσεις αποζημιώσεων, καθώς και η συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιούν τις παρακάτω ανανεωτικές εξισώσεις.

Για την  $\psi_d(u)$ , έχουμε ότι,

$$\psi_d(u) = 1 - H_1(u) + (1 - q) \int_0^u \psi_d(u - x) h_1 * h_2(x) dx, u \geq 0 \quad (4.3.10)$$

ενώ για την  $\psi_s(u)$  έχουμε ότι,

$$\psi_s(u) = (1 - q)[H_1(u) - H_1 * H_2(u)] + (1 - q) \int_0^u \psi_s(u - x) h_1 * h_2(x) dx . \quad (4.3.11)$$

Τέλος, η συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$ , ικανοποιεί την παρακάτω ανανεωτική εξίσωση,

$$\psi(u) = q[1 - H_1(u)] + (1 - q)[1 - H_1 * H_2(u)] + (1 - q) \int_0^u \psi(u - x) h_1 * h_2(x) dx . \quad (4.3.12)$$

**Ορισμός 4.3.2.** Στο μοντέλο διάχυσης των Dufresne & Gerber, η ροπογεννήτρια της σωρευτικής απώλειας δίνεται από την παρακάτω εξίσωση,

$$M_L(x) = \frac{x\zeta(c - \lambda\mu_1)}{\lambda\zeta + cx(\zeta - x) - \lambda\zeta M_x(x)} . \quad (4.3.13)$$

Επίσης, ο συντελεστής προσαρμογής  $R$ , είναι η μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης,

$$\lambda M_x(R) + \frac{\sigma^2}{2} R^2 = \lambda + cR . \quad (4.3.14)$$

Τέλος, ένα άνω φράγμα για την συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$ , είναι το παρακάτω,

$$\psi(u) < e^{-Ru} . \quad (4.3.15)$$

Ως αρχικό παράδειγμα θα εξετάσουμε την περίπτωση όπου οι απαιτήσεις ακολουθούν μια μείξη εκθετικών, οπότε θα βγάλουμε συμπεράσματα και ειδικότερα για την εκθετική κατανομή. Θεωρούμε λοιπόν ότι έχουμε μια πυκνότητα της μορφής,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n q_i \beta_i e^{-\beta_i x},$$

με

$$\sum_{i=1}^n q_i = 1, \quad \forall x > 0.$$

Οπότε, η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u) = 1 - \delta(u)$  δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$\psi(u) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k e^{-r_k u}, \quad u \geq 0, \quad (4.3.16)$$

όπου οι σταθερές  $C_k$ , υπολογίζονται από τον παρακάτω τύπο,

$$C_h = \prod_{i=1}^n \left( \frac{r_h - \beta_i}{\beta_i} \right) \prod_{k=1, k \neq h}^{n+1} \left( \frac{r_k}{r_h - r_k} \right), \quad h = 1, \dots, n+1 \quad (4.3.17)$$

με

$$\sum_{i=1}^n C_h = 1 \quad (4.3.18)$$

και  $r_1, r_2, \dots, r_{n+1}$  οι λύσεις της εξίσωσης

$$\lambda \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\beta_i - r} + \frac{\sigma^2 r}{2} = c. \quad (4.3.19)$$

Προφανώς για  $n = 1$ , έχουμε την περίπτωση της εκθετικής κατανομής με παράμετρο  $\beta$ . Από τη σχέση (4.2.6), εάν αντικαταστήσουμε την  $D(x)$  με  $1 - \psi(x)$ , καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση,

$$\frac{\sigma^2}{2} \psi'(x) + c\psi(x) = \lambda \int_0^x \psi(x-y)\bar{F}(y)dy + \lambda \int_x^\infty \bar{F}(y)dy. \quad (4.3.20)$$

Αντικαθιστώντας την (4.3.16) στη (4.3.20), καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση,

$$\begin{aligned} & -\frac{\sigma^2}{2} \sum_{k=1}^{n+1} C_k r_k e^{-r_k x} + c \sum_{k=1}^{n+1} C_k e^{-r_k x} \\ & = \lambda \sum_{k=1}^{n+1} \sum_{i=1}^n \frac{q_i C_k}{\beta_i - r_k} (e^{-r_k x} - e^{-\beta_i x}) + \lambda \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{\beta_i} e^{-\beta_i x}. \end{aligned}$$

από όπου βλέπουμε κάνοντας μια σύγκριση των συντελεστών της  $e^{-\beta_i x}$ , ότι οι λύσεις της εξίσωσης  $r_i$  δίνονται από την (4.3.19). Η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται στον στοχαστικό όρο διάχυσης, δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$\psi_d(u) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k^d e^{-r_k u}, u \geq 0, \quad (4.3.21)$$

με

$$C_h^d = \frac{r_h}{q\zeta} C_h = \frac{\prod_{i=1}^n (r_h - \beta_i)}{\prod_{k=1, k \neq h}^{n+1} (r_h - r_k)}, h = 1, \dots, n+1. \quad (4.3.22)$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας λόγω απαιτήσεων, υπολογίζεται από τον τύπο (4.3.6) αντικαθιστώντας την (4.3.16) και (4.3.21).

#### 4.1.4 Προσεγγίσεις Πιθανότητας Χρεοκοπίας στο Μοντέλο Πλεονάσματος των Dufresne & Gerber

Στο μοντέλο διάχυσης είναι ιδιαίτερα σημαντικό να βρούμε προσεγγίσεις αντίστοιχα με το απλό κλασσικό πρότυπο για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Στην εργασία των Dufresne & Gerber (1990) καθώς και από Dos Reis et al (2012), παίρνουμε αναλυτικές εκφράσεις για

την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω γνωστών μεθόδων οι οποίες παρουσιάστηκαν στο κεφάλαιο 2 της παρούσας εργασίας.

### 1) Προσέγγιση Cramer

Εάν ο συντελεστής προσαρμογής  $R$  υπάρχει, τότε καθώς  $u \rightarrow \infty$ , η πιθανότητα χρεοκοπίας λόγω διάχυσης, ασυμπτωτικά μπορεί να εκφραστεί ως ακολούθως,

$$\psi_d(u) \sim C_d e^{-Ru}, \quad (4.4.1)$$

όπου η σταθερά Cramer για τον όρο διάχυσης, δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$C_d = \frac{\int_0^{\infty} e^{Rx} \bar{H}_1(x) dx}{(1-q) \int_0^{\infty} x e^{Rx} h_1 * h_2(x) dx}. \quad (4.4.2)$$

Επίσης, η πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται στις απαιτήσεις δίνεται ασυμπτωτικά από τον παρακάτω τύπο,

$$\psi_s(u) \sim C_s e^{-Ru}, \quad (4.4.3)$$

όπου η σταθερά Cramer δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$C_s = \frac{\int_0^{\infty} e^{Rx} (1-q)(H_1(x) - H_1 * H_2(x)) dx}{(1-q) \int_0^{\infty} x e^{Rx} h_1 * h_2(x) dx}. \quad (4.4.4)$$

Αθροίζοντας την (4.4.2) και (4.4.4) βρίσκουμε την σταθερά Cramer για την συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας,

$$C = C_s + C_d,$$

και οπότε η συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας προσεγγίζεται από τον παρακάτω τύπο,

$$\psi(u) \sim C e^{-Ru}. \quad (4.4.5)$$

### 2) Προσέγγιση De-Vylder

Η στοχαστική διαδικασία  $V(t)$  αντικαθίσταται από την παρακάτω στοχαστική διαδικασία,

$$V^*(t) = u + c^*t - S^*(t) + \sigma^*W^*(t),$$

με παραμέτρους  $\beta, c^*, \lambda^*$  και  $\sigma^{*2}$ , οι οποίες δίνονται υποθέτοντας τις 4 πρώτες ροπές της εκθετικής κατανομής και λύνοντας το ακόλουθο σύστημα εξισώσεων:

$$u + ct - \lambda t \mu_1 = u + c^*t - \lambda^*t \frac{1}{\beta} \quad (4.4.6)$$

$$\sigma^2 t + \lambda t \mu_2 = \sigma^{*2} t + \frac{2\lambda t}{\beta^2} \quad (4.4.7)$$

$$-\lambda t \mu_3 = -\frac{6\lambda^* t}{\beta^2} \quad (4.4.8)$$

$$\begin{aligned} & \lambda t \mu_4 + 3\lambda^2 t^2 \mu_2^2 + 6\lambda t^2 \mu_2 \sigma^2 + 3\sigma^4 t^2 \\ &= \frac{24\lambda^* t}{\beta^4} + 3\lambda^{*2} t^2 \left(\frac{2}{\beta^2}\right)^2 + 6\lambda^* t^2 \frac{2}{\beta^2} \sigma^{*2} + 3\sigma^{*4} t^2. \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Από το παραπάνω σύστημα εξισώσεων βρίσκουμε τις παρακάτω παραμέτρους,

$$\beta = \frac{4\mu_3}{\mu_4}, \quad \lambda^* = \frac{32\lambda\mu_3^4}{3\mu_4^3}, \quad c^* = \frac{8\lambda\mu_3^3}{3\mu_4^2} + c - \lambda\mu_1, \quad \sigma^{*2} = \sigma^2 + \lambda\mu_2 - 4\lambda \left(\frac{\mu_3^2}{3\mu_4}\right).$$

Επομένως, η προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας του De-Vylder, δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$\psi_{DV}(u) = C_1 e^{-r_1} + C_2 e^{-r_2} \quad (4.4.10)$$

όπου,

$$C_1 = \frac{r_1 - \beta}{\beta} \frac{r_2}{r_1 - r_2}, \quad (4.4.11)$$

και

$$C_2 = \frac{r_2 - \beta}{\beta} \frac{r_1}{r_2 - r_1}, \quad (4.4.12)$$

Καθώς και  $r_1, r_2$ , λύσεις της εξίσωσης,

$$\frac{r\sigma^{*2}}{2} + \frac{\lambda^*}{\beta - r} = c^*.$$

Επίσης, μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας λόγω του όρου διάχυσης ως ακολούθως,

$$\psi_{d,DV}(u) = C_{1,d} e^{-r_1 u} + C_{2,d} e^{-r_2 u}, \quad (4.4.13)$$

όπου οι σταθερές  $C_{1,d}$  και  $C_{2,d}$  δίνονται ως εξής,

$$C_{1,d} = \frac{r_1}{q^* \zeta^*} C_1 \quad (4.4.14)$$

και

$$C_{2,d} = \frac{r_2}{q^* \zeta^*} C_2. \quad (4.4.15)$$

Οι παράμετροι  $q^*, \zeta^*$  δίνονται ως ακολούθως,

$$q^* = 1 - \frac{\lambda^*}{\beta c^*} \quad (4.4.16)$$

και

$$\zeta^* = \frac{2c^*}{\sigma^{*2}} . \quad (4.4.17)$$

Επομένως, μπορούμε να βρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας λόγω απαιτήσεων,

$$\psi_{s,DV}(u) = \psi_{DV}(u) - \psi_{a,DV}(u) \quad (4.4.18)$$

## 2) Διαστήματα Εμπιστοσύνης για την πιθανότητα χρεοκοπίας

Η μέθοδος αυτή αναπτύχθηκε από τους Dufresne & Gerber (1989) ,και παράγει άνω και κάτω όρια για την πιθανότητα χρεοκοπίας και είναι πολύ χρήσιμη σε περιπτώσεις μελέτης της ακρίβειας άλλων προσεγγίσεων που δεν βρίσκουν ακριβή υπολογισμό πιθανότητας χρεοκοπίας. Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση (4.2.14), προκειμένου να πάρουμε άνω και κάτω φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Δεδομένου ότι η  $\delta(u)$  είναι μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή, μπορούμε να κάνουμε χρήση του αναδρομικού τύπου του Panjer (1981). Αρχίζουμε την ανάλυσή μας εφαρμόζοντας διακριτικοποίηση της σωρευτικής απώλειας . Επομένως, από (4.2.12), καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση,

$$L^i = L_0^{i,(1)} + \sum_{j=1}^N (L_j^{i,(1)} + L_j^{i,(2)}), \quad (4.4.19)$$

όπου  $L^i = L_0^{i,1}$  εάν  $N = 0$  και  $i = l, u$  .Επίσης, ορίζουμε  $\{k = 1, i = 0, \dots, N\}$  και  $\{k = 2, i = 1, \dots, N\}$ . Ακόμη, με  $l$  συμβολίζουμε το κάτω φράγμα και  $u$  το άνω φράγμα. Τα κλιμακωτά ύψη για το κάτω φράγμα σε αυτή την περίπτωση παίρνουν την ακόλουθη μορφή,

$$L_j^{l,(k)} = a \left[ \frac{L_j^{(k)}}{\alpha} \right], \alpha \in (0,1).$$

Ενώ για το άνω φράγμα ,

$$L_j^{u,(k)} = a \left[ \frac{L_j^{(k)} + \alpha}{\alpha} \right], \alpha \in (0,1),$$

για

$$L^l = [L_1] + [L_2] + \dots + [L_N]$$

και

$$L^u = [L_1 + 1] + [L_2 + 1] + \dots [L_N + 1].$$

Τότε έχουμε,

$$L^l \leq L \leq L^u,$$

οπότε παίρνοντας πιθανότητες, παίρνουμε την παρακάτω ανισότητα,

$$Pr(L^l \geq u) \leq \psi(u) \leq Pr(L^u \geq u) . \quad (4.4.20)$$

Οι συναρτήσεις πυκνότητας για τα διακριτικοποιημένα κλιμακωτά ύψη δίνονται από τους παρακάτω τύπους :

$$h_k^{(l)} = H(k+1) - H(k), k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.4.21)$$

και

$$h_k^{(u)} = H(k) - H(k-1), k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.4.22)$$

Επίσης, παίρνουμε για τις διακριτές τυχαίες μεταβλητές  $L_j^{l,(1)}, L_j^{l,(2)}, L_j^{u,(1)}, L_j^{u,(2)}$  αντίστοιχες πυκνότητες, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.4.21) και (4.4.22). Αρχικά για την 1<sup>η</sup> τυχαία μεταβλητή λαμβάνουμε τον παρακάτω τύπο,

$$h_{1,k}^l = Pr(L_j^{l,(1)} = k\alpha) = H_1(k\alpha + \alpha) - H_1(k\alpha), k = 0, 1, \dots$$

Αντίστοιχα για το 2<sup>ο</sup> κλιμακωτό ύψος,

$$h_{2,k}^l = H_2(k\alpha + \alpha) - H_2(k\alpha), k = 0, 1 \dots$$

Επίσης, για την 3<sup>η</sup> τυχαία μεταβλητή λαμβάνουμε την παρακάτω πυκνότητα,

$$h_{1,k}^u = Pr(L_j^{u,(1)} = k\alpha) = H_1(k\alpha) - H_1(k\alpha - \alpha), k = 0, 1 \dots$$

και για την 4<sup>η</sup> τυχαία μεταβλητή αντίστοιχα έχουμε,

$$h_{2,k}^u = Pr(L_j^{u,(2)} = k\alpha) = H_2(k\alpha) - H_2(k\alpha - \alpha), k = 0, 1 \dots$$

Επίσης, εάν ορίσουμε τις συναρτήσεις πιθανότητας  $L^l$  και  $L^u$  ως ακολούθως,

$$f_k^l = Pr(L^l = k\alpha),$$

έχουμε την ακόλουθη σχέση για τα όρια της  $\psi(u)$ ,

$$1 - \sum_{k=0}^{m-1} f_k^l \leq \psi(m\alpha) \leq 1 - \sum_{k=0}^m f_k^u, m = 0, 1 \dots, \frac{u}{\alpha}, u = 0, 1 \dots,$$

Οι σταθερές  $f_k^l$  και  $f_k^u$  βρίσκονται από τις παρακάτω σχέσεις,

$$f_k^l = \begin{cases} \frac{qh_{1,0}^l}{1 - (1-q)h_{1,0}^l h_{2,0}^l}, & k = 0 \\ \frac{1}{1 - (1-q)h_{1,0}^l h_{2,0}^l} \left[ qh_{1,k}^l + (1-q)h_{1,0}^l \sum_{i=1}^k f_{k-i}^l h_{2,i}^l + (1-q) \sum_{j=1}^k \sum_{i=0}^{k-j} f_{k-j-i}^l h_{1,j}^l h_{2,i}^l \right] & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

και

$$f_k^u = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ qh_{1,1}^u, & k = 1 \\ h_{1,k}^u + (1-q) \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} f_{k-j-i}^l h_{1,j}^u h_{2,i}^u, & k = 2,3 \end{cases}$$

### 3) Προσέγγιση Beekman-Bowers

Η κύρια ιδέα αυτής της προσέγγισης είναι η χρήση της ουράς μιας κατανομής Γάμμα( $\alpha, \beta$ ) για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας. Για να προσαρμοστεί η προσέγγιση αυτή στο μοντέλο διάχυσης, αντί να αντικατασταθεί όλο το ολοκλήρωμα από μια κατανομή Γάμμα, υιοθετήθηκε η ιδέα της αντικατάστασης της συνέλιξης  $\delta * h_2(\cdot)$  από μία αθροιστική συνάρτηση κατανομή Γάμμα( $\alpha, \beta$ ) η οποία είναι η παρακάτω,

$$H_3(u) = \frac{\int_0^u \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx}{\Gamma(\alpha)}. \quad (4.4.23)$$

Παίρνοντας την αρχική προσέγγιση των B-B για την  $\delta(u)$ ,

$$\delta(u) = qH_1(u) + (1-q)h_1 * \delta * h_2(u), \quad (4.4.24)$$

και αντικαθιστώντας στην (4.4.24) όπου,  $\delta * h_2(u) = H_3(u)$ , βρίσκουμε την παρακάτω προσέγγιση των Beekman-Bowers,

$$\delta_{BB}(u) = qH_1(u) + (1-q)h_1 * H_3(u). \quad (4.4.25)$$

Προκειμένου να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους  $\alpha$  και  $\beta$ , εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace στην παραπάνω εξίσωση (4.4.25),

$$\bar{\delta}_{BB}(s) = q\bar{h}_1(s) + (1-q)\bar{h}_1(s)\bar{h}_3(s), \quad (4.4.26)$$

όπου, ο μετασχηματισμός Laplace της  $\delta_{BB}(u)$ , δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$\bar{\delta}_{BB}(s) = \int_0^\infty e^{-sy} d\delta_{BB}(y).$$

Επίσης, ο μετασχηματισμός Laplace της  $h_1(y)$  στην (4.4.26), δίνεται ως εξής,

$$\bar{h}_1(s) = \int_0^\infty e^{-sy} h_1(y) dy = \frac{\zeta}{\zeta + s} \quad (4.4.27)$$

και τέλος για την  $h_3(y)$ ,

$$\bar{h}_3(s) = \int_0^\infty e^{-sy} h_3(y) dy = \left(\frac{\beta}{\beta + s}\right)^\alpha. \quad (4.4.28)$$



Επομένως , κάνοντας αντικατάσταση των σχέσεων (4.4.27) και (4.4.28) στην (4.4.26), καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση,

$$\bar{\delta}_{BB}(s) = q \left( \frac{\zeta}{\zeta + s} \right) + (1 - q) \left( \frac{\zeta}{\zeta + s} \right) \left( \frac{\beta}{\beta + s} \right)^a. \quad (4.4.29)$$

Παίρνουμε τις 2 πρώτες παραγώγους στο σημείο 0,

$$\frac{d}{ds}|_{s=0} \bar{\delta}_{BB}(s) = -\frac{q}{\zeta} - (1 - q) \left( \frac{\beta + \alpha\zeta}{\beta\zeta} \right) \quad (4.4.30)$$

$$\frac{d^2}{ds^2}|_{s=0} \bar{\delta}_{BB}(s) = \frac{2q}{\zeta^2} + \frac{(1 - q)(2\beta^2 + 2\alpha\beta\zeta + \alpha(1 + \alpha)\zeta^2)}{\beta^2\zeta^2} \quad (4.4.31)$$

Και εξισώνοντας το δεξιό μέλος της εξίσωσης (4.4.30) με την (4.2.17) αλλά με αρνητικό πρόσημο ( $E[-L]$ ) και την (4.4.31) με την  $E[L^2]$  , βρίσκουμε τις παραμέτρους  $\alpha$  και  $\beta$ .

#### 4) Προσέγγιση του Tijms

Ο Tijms το 1994, πρότεινε μια προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας στο μοντέλο διάχυσης το οποίο όπως και στο κλασικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνου έχει πλεονέκτημα στην ασυμπτωτική του συμπεριφορά για μεγάλα αποθεματικά  $u$ , και προσαρμόζεται ικανοποιητικά για μικρά  $u$ , προσθέτοντας έναν εκθετικό παράγοντα στην γνωστή ασυμπτωτική σχέση  $\psi(u) \sim Ce^{-Ru}$  για να βελτιώσει την προσέγγιση για μικρά  $u$ . Απαιτείται όμως η ύπαρξη του συντελεστή προσαρμογής  $R$ .

Η προσέγγιση δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\psi_T(u) = Ce^{-Ru} + Ae^{-Su}, u \geq 0. \quad (4.4.32)$$

Για αρχικό αποθεματικό  $u = 0$ , έχουμε,

$$\psi_T(0) = \psi(0) = C + A. \quad (4.4.33)$$

Αν  $\psi(0) = 1$  έχουμε,

$$A = 1 - C.$$

Επειδή,

$$E(L) = \int_0^{\infty} \psi_T(u) du = \int_0^{\infty} (Ce^{-Ru} + Ae^{-Su}) du,$$

προκύπτει ,

$$E[L] = \frac{C}{R} + \frac{1 - C}{S} \quad (4.4.34)$$

και επομένως λύνοντας ως προς  $S$  την (4.4.34), παίρνουμε,

$$S = \frac{R(1 - C)}{RE[L] - C} . \quad (4.4.35)$$

## 4.2 Αριθμητικές Εφαρμογές στο Μοντέλο Διάχυσης

Στην ενότητα αυτή, θα μελετήσουμε εκτενώς την εφαρμογή των διάφορων προσεγγίσεων που εξετάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο για μία Εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\beta = 5$ , για μια μείξη 2 εκθετικών κατανομών ,μια Γάμμα κατανομή με παράμετρο μορφής ίση με 2 και κλίμακας ίση με 3, καθώς και της μείξης 2 εκθετικών που χρησιμοποιήθηκε ως προσέγγιση της Pareto(5,4). Σε όλες τις παρακάτω εφαρμογές ,θα υποθέσουμε ότι η ένταση του ασφαλιστρού  $c = 1$ , η παράμετρος Poisson ίση με  $\lambda = 1$ , και το volatility ( $\sigma^2$ ) επίσης ίσο με 1.

### 4.2.1 Αριθμητική Εφαρμογή για την Εκθετική με $\beta = 5$

Σε αυτή την ενότητα, θα εξετάσουμε μια κατανομή με σ.π.π,

$$f(x) = 5e^{-5x}.$$

Κάνοντας χρήση των παραπάνω παραμέτρων λαμβάνουμε το  $\theta = 9$ . Αν και δεν είναι ρεαλιστικό το σενάριο της χρήσης του συγκεκριμένου  $\theta$ , χρησιμοποιείται για λόγους απλούστευσης των εφαρμογών. Επίσης λαμβάνουμε μεσω Mathematica,

$$E(X) = 0.2, E(X^2) = 0.08 \text{ και } E(X^3) = 0.048.$$

Η πυκνότητα των κλιμακωτών υψών είναι ίση με

$$f_e(x) = 5e^{-5x}.$$

Η παράμετρος  $\zeta = \frac{2c}{\sigma^2} = 4$  και επομένως,

$$h_1(x) = \zeta e^{-\zeta x} = 4e^{-4x}$$

και

$$H_1(x) = 1 - e^{-4x}.$$

Επίσης, από σχέση (4.3.19), βρίσκουμε  $r_1 = 3$  και  $r_2 = 6$ . Ακόμη, από σχέση (4.3.17), για  $n = 1$  βρίσκουμε ,

$$C_1 = \left(\frac{r_1 - 5}{5}\right) \left(\frac{r_2}{r_1 - r_2}\right) = \frac{4}{5}$$

και

$$C_2 = \left(\frac{r_2 - 5}{5}\right) \left(\frac{r_1}{r_2 - r_1}\right) = \frac{1}{5}.$$

Από σχέση (4.3.16), η πιθανότητα χρεοκοπίας που προκύπτει είναι η ακόλουθη,

$$\psi(u) = C_1 e^{-r_1 u} + C_2 e^{-r_2 u} = \frac{1}{5} e^{-6u} + \frac{4}{5} e^{-3u}.$$

Για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας που οφείλεται στον όρο διάχυσης βρίσκουμε αρχικά από (4.3.22),

$$C_1^d = \frac{r_1}{q\zeta} C_1 = 0.666667$$

και

$$C_2^d = \frac{r_2}{q\zeta} C_2 = 0.333333$$

Οπότε από την σχέση (4.3.21), βρίσκουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας λόγω του όρου διάχυσης είναι η παρακάτω,

$$\psi_d(u) = C_1^d e^{-r_1 u} + C_2^d e^{-r_2 u} = 0.666667 e^{-3u} + 0.333333 e^{-6u}.$$

Η συνέλιξη των  $h_1(\cdot)$  με της  $f_e(\cdot)$  είναι η παρακάτω,

$$h_1 * f_e(u) = \int_0^u h_1(u-y) f_e(y) dy = 20(e^{-4u} - e^{-5u}).$$

Λαμβάνοντας υπόψιν ότι μια συνέλιξη δύο αθροιστικών κατανομών όπου οι μεταβλητές  $X$  και  $Y$  είναι 2 συνεχείς και ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ορισμένες στο  $(0, \infty)$ , δίνεται από την παρακάτω σχέση,

$$F_z(z) = F_X * F_Y(z) = \int_0^z F_X(z-y) f_Y(y) dy = \int_0^z F_Y(z-x) f_X(x) dx,$$

τότε η συνέλιξη των  $H_1(\cdot)$  με την  $f_e(\cdot)$ , δίνεται ως εξής,

$$H_1 * F_e(u) = \int_0^u H_1(u-y) f_e(y) dy = 1 - 5e^{-4u} + 4e^{-5u}.$$

Από σχέση (4.4.2), βρίσκουμε ,

$$C_d = \frac{\int_0^\infty e^{r_1 x} \overline{H_1}(x) dx}{(1-q) \int_0^\infty x e^{r_1 x} h_1 * f_e(x) dx} = 0.666667$$

και άρα από τη σχέση (4.4.1), έχουμε,

$$\psi_{C_d}(u) = 0.666667 e^{-3u}.$$

Από τη σχέση (4.4.4) έχουμε,

$$C_s = \frac{\int_0^{\infty} e^{r_1 x} (1 - q)(H_1(x) - H_1 * f_e(x)) dx}{(1 - q) \int_0^{\infty} x e^{r_1 x} h_1 * f_e(x) dx} = 0.13333.$$

Αθροίζοντας  $C_s$  και  $C_d$  βρίσκουμε τη σταθερά  $C = C_s + C_d$  και επομένως από (4.4.5),

$$\psi_C(u) = C e^{-r_1 u} = 0.8 e^{-3u}.$$

Από (4.2.17), η αναμενόμενη σωρευτική απώλεια  $E(L) = 0.3$ , και αντικαθιστώντας στη σχέση (4.4.35), βρίσκουμε ότι,

$$S = \frac{r_1(1 - C)}{r_1 E[L] - C} = 6.$$

Επομένως, η πιθανότητα χρεοκοπίας βάσει της προσέγγισης του Tijms, δίνεται ως εξής,

$$\psi_T(u) = C e^{-r_1 u} + (1 - C) e^{-Su} = 0.2 e^{-6u} + 0.8 e^{-3u}.$$

Από (4.4.27) βρίσκουμε ότι  $\hat{h}_1(s) = \frac{4}{4+s}$  και  $\hat{h}_3(s) = \frac{b}{(b+s)^a}$ .

Ακολουθώντας τον αλγόριθμο που περιγράψαμε στο κεφάλαιο 4.1.4 για την προσέγγιση των Beekman-Bowers, βρίσκουμε για τις παραμέτρους  $a = 4.66805$  και  $b = 9.3361$  και επομένως η (4.4.23) και από την συνέλιξη  $h_1 * H_3(u)$ , αντικαθιστώντας τις παραμέτρους και κάνοντας χρήση της εξίσωσης (4.4.25), βρίσκουμε την  $\psi_{BB}(u)$ .

Παρακάτω, έχουμε φτιάξει πίνακες τόσο για την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας (συνολικής καθώς και για τον όρο διάχυσης και ποσοστό επί της συνολικής πιθανότητας χρεοκοπίας) αλλά και των παραπάνω προσεγγίσεων που αναφέραμε συγκρίνοντας τις με την  $\psi(u)$ .

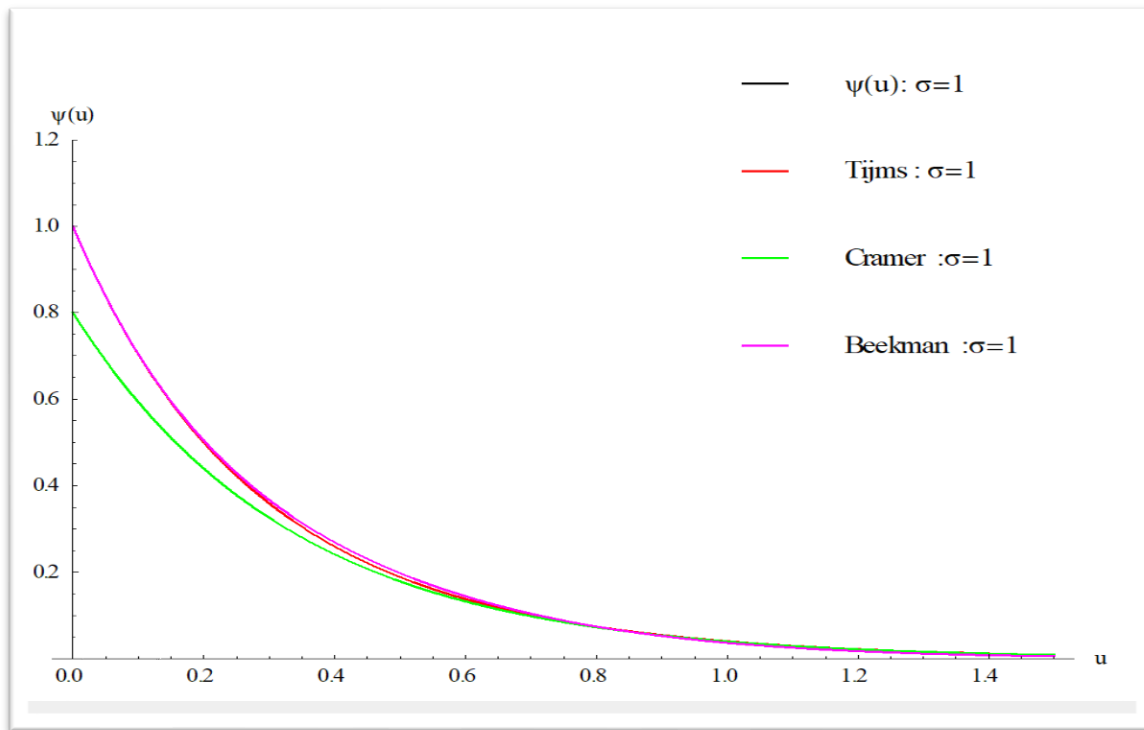
$u$	$\psi(u)$ (I)	$\psi_d(u)$ (II)	$\frac{II}{I}$	$\psi_C(u)$ (III)	$\psi_{C_d}(u)$ (IV)	(IV)/(III)
<b>0.1</b>	0.70242	0.67682	96.36%	0.59266	0.49388	83.33%
<b>0.25</b>	0.42252	0.38929	92.13%	0.37789	0.31491	83.33%
<b>0.5</b>	0.18846	0.16535	87.74%	0.17850	0.14875	83.33%
<b>0.75</b>	0.08654	0.07397	85.47%	0.08432	0.07026	83.33%
<b>1</b>	0.04033	0.03402	84.36%	0.03983	0.03319	83.33%
<b>1.5</b>	0.00891	0.00745	83.56%	0.00887	0.00741	83.33%
<b>3</b>	0.00010	0.00008	83.34%	0.00010	0.00008	83.33%
<b>4</b>	0.00000	0.00000	83.33%	0.00000	0.00000	83.33%
<b>5</b>	0.00000	0.00000	83.33%	0.00000	0.00000	83.33%

**Πίνακας 4.5.1**

$u$	$\psi(u)$ (I)	$\psi_T(u)$ (II)	(I)/(II)	$\psi_C(u)$ (III)	(I)/(III)	$\psi_{BB}(u)$ (IV)	(I)/(IV)
<b>0.1</b>	0.70242	0.70242	1.00000	0.59266	1.18520	0.70325	0.99881
<b>0.25</b>	0.42252	0.42252	1.00000	0.37789	1.11809	0.42871	0.98555
<b>0.5</b>	0.18846	0.18846	1.00000	0.17850	1.05578	0.19742	0.95460
<b>0.75</b>	0.08654	0.08654	1.00000	0.08432	1.02635	0.08801	0.98335
<b>1</b>	0.04033	0.04033	1.00000	0.03983	1.01245	0.03658	1.10241
<b>1.5</b>	0.00891	0.00891	1.00000	0.00887	1.00278	0.00547	1.63055
<b>3</b>	0.00010	0.00010	1.00000	0.00010	1.00003	0.00013	7.10550
<b>4</b>	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	19.3128
<b>5</b>	0.00000	0.00000	1.00000	0.00000	1.00000	0.00000	52.4975

Πίνακας 4.5.2

Τέλος, θα δούμε και ένα γράφημα για συνολική σύγκριση και των 3 προσεγγίσεων για την πιθανότητα χρεοκοπίας,



Σχήμα 5.1: Γραφική αναπαράσταση  $\psi(u)$  και  $\psi_T(u)$ ,  $\psi_{BB}(u)$ ,  $\psi_C(u)$

Από Πίνακα 4.5.1 και Πίνακα 4.5.2, διαπιστώνουμε την φτωχή προσαρμογή της προσέγγισης των Beekman-Bowers για  $\theta = 9$ , καθώς έχει σημαντική απόκλιση από την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας στο μοντέλο διάχυσης ,ειδικότερα καθώς αυξάνεται το αποθεματικό . Η προσέγγιση του Tijms φαίνεται να έχει εξαιρετικά καλή προσαρμογή καθώς ισούται με την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας για κάθε τιμή του αποθεματικού. Η προσέγγιση του Cramer εμφανίζει ασυμπτωτικά πολύ καλή προσαρμογή ενώ για  $u \geq 4$ , ταυτίζεται με την  $\psi(u)$  .Τέλος, για την πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται στον όρο

διάχυσης  $\psi_a(u)$ , βλέπουμε ότι για  $u \geq 4$ , ταυτίζεται με την  $\psi_{c_d}(u)$  και αποτελούν το 83.33% της συνολικής πιθανότητας χρεοκοπίας.

#### 4.2.2 Αριθμητική Εφαρμογή για Μείξη 3 Εκθετικών Κατανομών

Από την Αριθμητική εφαρμογή που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 2.2.1, παίρνουμε την σ.π.π μιας μείξης 3 Εκθετικών κατανομών η οποία είναι η εξής.

$$f(x) = \frac{7e^{-7x}}{3} + 2e^{-6x} + e^{-3x},$$

με βάρη μείξης,

$$q_1 = \frac{1}{3}, q_2 = \frac{1}{3}, q_3 = \frac{1}{3}.$$

Παίρνοντας τις ίδιες παραμέτρους με πριν και την μέση τιμή της μείξης έχουμε,

$$\theta = 8.3333 \text{ και } q = \frac{\theta}{1+\theta} = 0.892857.$$

Επίσης, για  $\sigma = 1$ , έχουμε πάλι,

$$\zeta = 4.$$

Από (4.3.14) και (4.3.19), έχουμε την εξίσωση,

$$\lambda \left( \frac{q_1}{c_1 - r} + \frac{q_2}{c_2 - r} + \frac{q_3}{c_3 - r} \right) + \frac{\sigma^2}{2} r = c,$$

από όπου βρίσκουμε  $r_1 = 2.45108, r_2 = 4.0592, r_3 = 6.23062$  και  $r_4 = 7.25909$ .

Από (4.3.17), για  $n = 3$ , βρίσκουμε αντίστοιχα,

$$C_1 = 0.441849, C_2 = 0.476022, C_3 = 0.0389277, C_4 = 0.0432007.$$

Αρα η συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας από σχέση (4.3.16) είναι η παρακάτω,

$$\psi(u) = 0.0432007e^{-7.25909u} + 0.0389277e^{-6.23062u} + 0.476022e^{-4.0592u} + 0.441849e^{-2.45108u}.$$

Επίσης βρίσκουμε από (4.3.22), ότι,

$$C_1^d = 0.303242, C_2^d = 0.541036, C_3^d = 0.0679123, C_4^d = 0.0878074$$

και από (4.3.21), έχουμε για την πιθανότητα χρεοκοπίας λόγω του όρου διάχυσης,

$$\psi_d(u) = 0.087807e^{-7.25909u} + 0.067912e^{-6.23062u} + 0.541036e^{-4.0592u} + 0.303242e^{-2.45108u}.$$

Ακόμη,

$$\psi_C(u) = 0.44185e^{2.45108u}$$

και από (4.3.21),

$$\psi_{C_d}(u) = 0.303243e^{-2.45108u}.$$

Από (4.2.17), η  $E(L) = 0.309735$  και άρα η σταθερά  $S = 4.3111$ . Επομένως,

$$\psi_T(u) = 0.55815e^{-4.3111u} + 0.44185e^{-2.45108u}.$$

Προκειμένου να βρούμε προσέγγιση De-Vylder, αρχικά βρίσκουμε τις 4 πρώτες ροπές

$$E(X) = 0.214286, E(X^2) = 0.106198, E(X^3) = 0.089164 \text{ και } E(X^4) = 0.10827.$$

Λύνοντας το σύστημα εξισώσεων (4.4.6), (4.4.7), (4.4.8) και (4.4.9), βρίσκουμε τις παραμέτρους,

$$\beta = \frac{4\mu_3}{\mu_4} = 3.29414$$

και

$$\lambda^* = \frac{32\lambda\mu_3^4}{3\mu_4^3} = 0.531208,$$

καθώς επίσης,

$$c^* = \frac{8\lambda\mu_3^3}{3\mu_4^2} + c - \lambda\mu_1 = 1.94697 \text{ και } \sigma^{*2} = \sigma^2 + \lambda\mu_2 - 4\lambda\left(\frac{\mu_3^2}{3\mu_4}\right) = 1.00829,$$

Από την εξίσωση,

$$\frac{\kappa\sigma^{*2}}{2} + \frac{\lambda^*}{\beta - \kappa} = c^*,$$

βρίσκουμε τις λύσεις,

$$\kappa_1 = 2.51301$$

και

$$\kappa_2 = 4.64305.$$

Από (4.4.11), και (4.4.12), έχουμε τις παρακάτω σταθερές,

$$C_1 = 0.516887$$

και

$$C_2 = 0.483113.$$

και επομένως από (4.4.10), έχουμε ότι η συνολική πιθανότητα χρεοκοπίας με την μέθοδο του DeVlyder δίνεται ως εξής,

$$\psi_{DV}(u) = 0.516887e^{-4.64305u} + 0.483113e^{-2.51301u}.$$

Από (4.4.14) και (4.4.15), αφού πρώτα από τις (4.4.16) και (4.4.17) βρίσκουμε ότι,

$$q^* = 0.917175$$

και

$$\zeta^* = 11.9013.$$

Έχουμε,

$$C_{1,d} = 0.27895$$

και

$$C_{2,d} = 0.55713.$$

Οπότε, καταλήγουμε στην παρακάτω πιθανότητα:

$$\psi_{d,DV}(u) = 0.55713e^{-4.64305u} + 0.279895e^{-2.51301u}.$$

Για την προσέγγιση Beekman-Bowers, βρίσκουμε τις παραμέτρους της κατανομής Γάμμα. Δηλαδή, βρίσκουμε  $\alpha = 7.46018$  και  $b = 13.3808$ . Αντικαθιστώντας στην (4.4.23) και αφού βρούμε την συνέλιξη  $h_1 * H_3(u)$ , τότε από την (4.4.26), βρίσκουμε την  $\psi_{BB}(u)$ .

Παρακάτω, παραθέτουμε πίνακες για την  $\psi(u)$  και την  $\psi_d(u)$  καθώς και για όλες τις προσεγγίσεις που προαναφέραμε για διάφορες τιμές του  $u$  (βλ. ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ, Πίνακες 32-40).

$u$	$\psi(u)$ (I)	$\psi_d(u)$ (II)	$\frac{II}{I}$
<b>0.1</b>	0.76824	0.67676	88.09%
<b>0.25</b>	0.47043	0.38903	82.70%
<b>0.5</b>	0.21811	0.16546	75.86%
<b>0.75</b>	0.10579	0.07502	70.92%
<b>1</b>	0.05300	0.03567	67.31%
<b>1.5</b>	0.01418	0.00891	62.82%
<b>3</b>	0.00033	0.00020	59.06%
<b>4</b>	0.00003	0.00002	58.75%
<b>5</b>	0.00000	0.00000	58.68%

**Πίνακας 4.6.1**



$u$	$\psi(u)$ (I)	$\psi_T(u)$ (II)	(I)/(II)	$\psi_C(u)$	$\psi_{DV}(u)$ (III)	(I)/(III)	$\psi_{BB}(u)$
<b>0.1</b>	0.76824	0.70848	1.08435	0.34580	0.70570	1.08862	0.70564
<b>0.25</b>	0.47043	0.42938	1.09559	0.23942	0.42711	1.10143	0.43505
<b>0.5</b>	0.21811	0.19438	1.12205	0.12973	0.19454	1.12116	0.21171
<b>0.75</b>	0.10579	0.09230	1.14616	0.07029	0.09335	1.13328	0.09887
<b>1</b>	0.05300	0.04558	1.16292	0.03809	0.04653	1.13907	0.04119
<b>1.5</b>	0.01418	0.01205	1.17688	0.01118	0.01238	1.14575	0.00594
<b>3</b>	0.00033	0.00028	1.17302	0.00028	0.00028	1.21131	0.00001
<b>4</b>	0.00003	0.00002	1.17072	0.00002	0.00002	1.28279	0.00000
<b>5</b>	0.00000	0.00000	1.17004	0.00000	0.00000	1.36333	0.00000

Πίνακας 4.6.2

$u$	$\psi_C(u)$ (I)	$\psi_{C_d}(u)$ (II)	$\psi_{DV}(u)$ (III)	$\psi_{DV_d}(u)$ (IV)	(II)/(I)	(IV)/(III)
<b>0.1</b>	0.34580	0.23732	0.70570	0.56790	68.63%	88.34%
<b>0.25</b>	0.23942	0.16431	0.42711	0.32385	68.63%	84.15%
<b>0.5</b>	0.12973	0.08903	0.19454	0.13434	68.63%	77.89%
<b>0.75</b>	0.07029	0.04824	0.09335	0.05963	68.63%	72.96%
<b>1</b>	0.03809	0.02614	0.04653	0.02804	68.63%	69.44%
<b>1.5</b>	0.01118	0.00767	0.01238	0.00698	68.63%	65.62%
<b>3</b>	0.00028	0.00019	0.00028	0.00015	68.63%	63.44%
<b>4</b>	0.00002	0.00002	0.00002	0.00001	68.63%	63.36%
<b>5</b>	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	68.63%	63.35%

Πίνακας 4.6.3

Από Πίνακα 4.6.2, παρατηρούμε ότι η προσέγγιση του Tijms έχει ασυμπτωτικά σχετικά καλή προσαρμογή και καλύτερη από του De-Vylder καθώς  $u \rightarrow \infty$ , ενώ των Beekman-Bowers την χειρότερη προσαρμογή. Τέλος, από Πίνακα 4.6.3, η  $\psi_C(u)$  παράγει τα χειρότερα αποτελέσματα για μικρότερα  $u$ , ενώ βελτιώνεται καθώς  $u \rightarrow \infty$ . Τέλος, από Πίνακα 4.6.1, το ποσοστό της πιθανότητας χρεοκοπίας που οφείλεται στον όρο διάχυσης κυμαίνεται από 88.09% για  $u = 0.1$  έως 58.68% για αποθεματικό  $u = 5$ . Μέσα σε αυτά τα όρια κυμαίνονται και οι προσεγγίσεις για  $u \in (0.1, 5)$ .

### 4.2.3 Αριθμητική Εφαρμογή για προσέγγιση Pareto μέσω μείξης εκθετικών στο μοντέλο διάχυσης

Εχουμε βρεί από Ενότητα 2.2.5, ότι η σ.π.π της μείξης εκθετικών που προκύπτει για την προσέγγιση της *Pareto*(5,4) μέσω της μεθόδου των ροπών είναι η ακόλουθη,

$$f_{EM}(x) = 1.10376e^{-1.18301x} + 0.0212341e^{-0.316987x},$$

με βάρη μείξης  $q_1 = 0.0669873$  και  $q_2 = 0.933013$  και παραμέτρους

$$c_1 = 0.316987 \text{ και } c_2 = 1.18301.$$

Για μέση τιμή ίση με  $E(X) = 1$ , έχουμε ότι  $\theta = 0.999996$ . Από εξίσωση (4.3.19), έχουμε,

$$\lambda \left( \frac{q_1}{c_1 - r} + \frac{q_2}{c_2 - r} \right) + \frac{\sigma^2}{2} r = c.$$

Επομένως,  $r_1 = 0.241566$ ,  $r_2 = 0.677795$  και  $r_3 = 4.58064$ .

Από (4.3.17), έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} C_1 &= \left( \frac{r_1 - c_1}{c_1} \right) \left( \frac{r_1 - c_2}{c_2} \right) \left( \frac{r_2}{r_1 - r_2} \right) \left( \frac{r_3}{r_1 - r_3} \right) = 0.310577, \\ C_2 &= \left( \frac{r_2 - c_1}{c_1} \right) \left( \frac{r_2 - c_2}{c_2} \right) \left( \frac{r_1}{r_2 - r_1} \right) \left( \frac{r_3}{r_2 - r_3} \right) = 0.315928, \\ C_3 &= \left( \frac{r_3 - c_1}{c_1} \right) \left( \frac{r_3 - c_2}{c_2} \right) \left( \frac{r_1}{r_3 - r_1} \right) \left( \frac{r_2}{r_3 - r_2} \right) = 0.373493. \end{aligned}$$

Αρα από (4.3.16), η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται ως εξής,

$$\psi(u) = 0.373494e^{-4.58064u} + 0.315928e^{-0.677795u} + 0.310577e^{-0.241566u},$$

ενώ η πιθανότητα χρεοκοπίας λόγω του όρου διάχυσης δίνεται ως εξής,

$$\begin{aligned} \psi_d(u) &= C_1^d e^{-r_1 u} + C_2^d e^{-r_2 u} + C_3^d e^{-r_3 u} \\ &= 0.85542e^{-4.58064u} + 0.10707e^{-0.677795u} + 0.03751e^{-0.241566u}. \end{aligned}$$

Για την προσέγγιση του De-Vylder, βρίσκουμε τις 4 πρώτες ροπές και με βάση αυτές παίρνουμε,

$$\beta = \frac{4\mu_3}{\mu_4} = 0.375, \quad \lambda^* = \frac{32\lambda\mu_3^4}{3\mu_4^3} = 0.140625,$$

καθώς και

$$c^* = \frac{8\lambda\mu_3^3}{3\mu_4^2} + c - \lambda\mu_1 = 1.375, \quad \sigma^{*2} = \sigma^2 + \lambda\mu_2 - 4\lambda \left( \frac{\mu_3^2}{3\mu_4} \right) = 1.66667.$$

Από την εξίσωση,

$$\frac{\kappa\sigma^{*2}}{2} + \frac{\lambda^*}{\beta - \kappa} = c^*,$$

βρίσκουμε  $\kappa_1 = 0.254109$  και  $\kappa_2 = 1.77089$  και οπότε,

$$C_{1,DV} = \frac{\kappa_1 - \beta}{\beta} \frac{\kappa_2}{\kappa_1 - \kappa_2} = 0.376384$$

και

$$C_{2,DV} = \frac{\kappa_2 - \beta}{\beta} \frac{\kappa_1}{\kappa_2 - \kappa_1} = 0.623616.$$

Επομένως,

$$\psi_{DV}(u) = C_1 e^{-\kappa_1 u} + C_2 e^{-\kappa_2 u} = 0.376384 e^{-1.77089u} + 0.623616 e^{-0.254109u}.$$

Οι παράμετροι  $q^*$ ,  $\zeta^*$  δίνονται ως ακολούθως,

$$q^* = 1 - \frac{\lambda^*}{\beta c^*} = 0.727272$$

και

$$\zeta^* = \frac{2c^*}{\sigma^{*2}} = 1.41961.$$

Εχουμε από (4.4.14) και (4.4.15) ότι οι σταθερές  $C_{1,d}$  και  $C_{2,d}$  δίνονται ως εξής,

$$C_{1,d} = \frac{r_1}{q^* \zeta^*} C_1 = 0.0595845$$

και

$$C_{2,d} = \frac{r_2}{q^* \zeta^*} C_2 = 0.16167.$$

Επομένως,

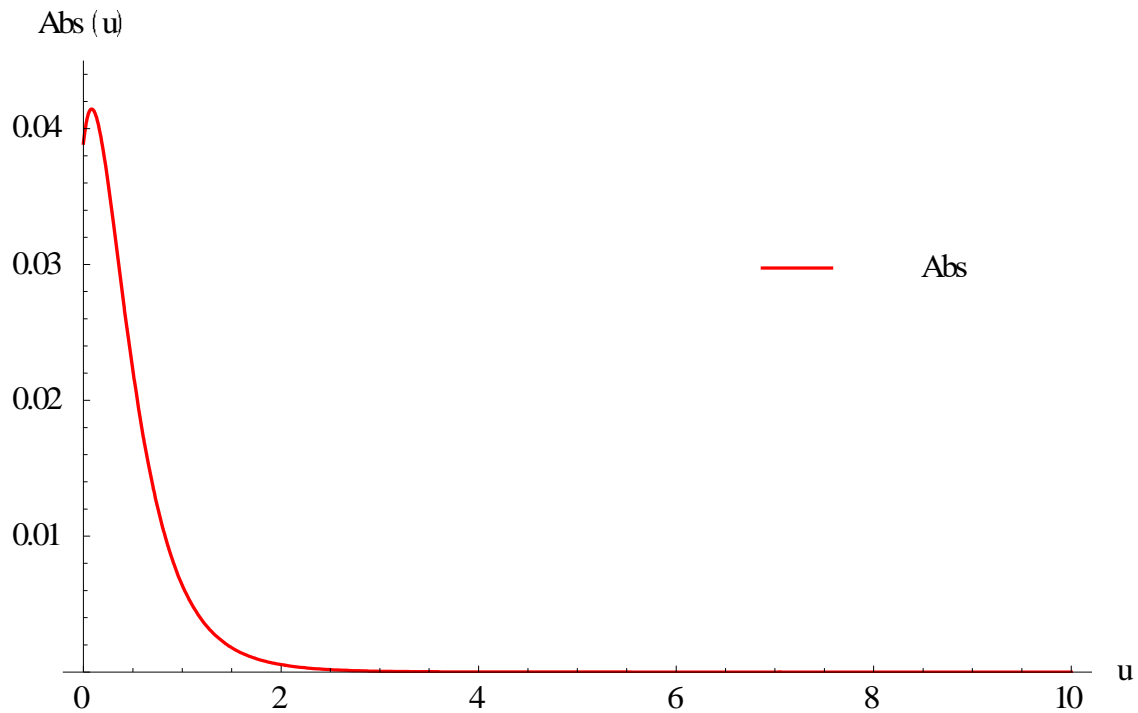
$$\psi_{d,DV}(u) = C_{1,d} e^{-\kappa_1 u} + C_{2,d} e^{-\kappa_2 u} = 0.16167 e^{-1.77089u} + 0.0595845 e^{-0.254109u}.$$

Καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα με τις ακριβείς πιθανότητες απόλυτης χρεοκοπίας για την προσέγγιση. Λόγω αδυναμίας υπολογισμού του συντελεστή Cramer από το λογισμικό Mathematica δεν ήταν εφικτός ο υπολογισμός της προσέγγισης του Tijms.

$u$	$\psi(u)$ (I)	$\psi_d(u)$ (II)	$\frac{II}{I}$	$\psi_{DV}(u)$ (III)	$\psi_{DV_d}(u)$ (IV)	$\frac{III}{IV}$	$\frac{I}{III}$
<b>0.1</b>	0.83463	0.67773	81.20%	0.88935	0.33773	37.98%	1.33400
<b>0.25</b>	0.67790	0.39787	58.69%	0.75376	0.27273	36.18%	1.32612
<b>0.5</b>	0.53817	0.19613	36.44%	0.58874	0.19524	33.16%	1.38556
<b>0.75</b>	0.46117	0.12325	26.73%	0.47631	0.14424	30.28%	1.47204
<b>1</b>	0.40816	0.09260	22.68%	0.39805	0.11032	27.71%	1.54771
<b>1.5</b>	0.33086	0.06573	19.87%	0.30088	0.07173	23.84%	1.62187
<b>3</b>	0.19182	0.03219	16.78%	0.17869	0.03526	19.74%	1.47730
<b>4</b>	0.13917	0.02139	15.37%	0.13673	0.02640	19.31%	1.35054
<b>5</b>	0.10348	0.01482	14.33%	0.10573	0.02031	19.21%	1.26285
<b>6</b>	0.07831	0.01064	13.59%	0.08195	0.01573	19.19%	1.20833
<b>7</b>	0.06000	0.00785	13.08%	0.06355	0.01219	19.19%	1.17708
<b>8</b>	0.04636	0.00590	12.73%	0.04929	0.00946	19.19%	1.16142

<b>9</b>	0.03602	0.00451	12.51%	0.03823	0.00733	19.19%	1.15608
<b>10</b>	0.02810	0.00347	12.36%	0.02965	0.00569	19.19%	1.15758

**Πίνακας 4.7.1**



**Σχήμα 4.7.1:** Γραφική αναπαράσταση  $|Abs(u) = |\psi_{DV}(u) - \psi(u)|$  για  $u \in (0,10)$

Παρατηρούμε από Σχήμα 4.7.1, ότι η απόκλιση μειώνεται εκθετικά για την προσέγγιση De-Vylder καθώς το  $u \rightarrow \infty$ , κάτι που διαπιστώνουμε και από τελευταία στήλη του Πίνακα 4.7.1. Επίσης η πιθανότητα χρεοκοπίας που οφείλεται στον όρο διάχυσης έχει μεγάλη διακύμανση, από 81.20% για  $u = 0.1$ , σε 12.36 % για  $u = 10$ . Αντίστοιχα , η προσέγγιση του De-Vylder που οφείλεται στον όρο διάχυσης αποτελεί πάλι ένα μικρό ποσοστό της συνολικής πιθανότητας αλλά έχει μικρότερη διακύμανση στο ίδιο εύρος του  $u$ , από 37.98 % για  $u = 0.1$ , σε 19.19% για  $u = 6$  όπου και σταθεροποιείται.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Στο παράρτημα παρουσιάζονται κάποιες από τις βασικές εντολές που δόθηκαν στο αλγεβρικό πακέτο Wolfram Mathematica για τις εφαρμογές των Κεφαλαίων 2, 3 & 4.

### Κεφάλαιο 2

1) Για την Αριθμητική Εφαρμογή της μείξης τριών εκθετικών κατανομών παραθέτουμε τους παρακάτω πίνακες για  $\theta = 1$ .

```
f[x_] := (1/3) * (3 * Exp[-3 * x]) + (1/3) * (6 * Exp[-6 * x]) + (1/3) * (7 * Exp[-7 * x])  
f[x]
```

$$\frac{7 e^{-7x}}{3} + 2 e^{-6x} + e^{-3x}$$

```
theta = 1
```

```
1
```

```
m2 = Integrate[(x^2) * f[x], {x, 0, Infinity}] // N
```

```
m2
```

```
0.106198
```

```
0.106198
```

```
m3 = Integrate[(x^3) * f[x], {x, 0, Infinity}] // N
```

```
m3
```

```
0.0891642
```

```
0.0891642
```

```
M[t_] := Integrate[Exp[y * t] * f[y], {y, 0, Infinity}, Assumptions -> t < 3]
```

```
M[t]
```

$$\frac{7}{21 - 3t} + \frac{1}{3 - t} - \frac{2}{-6 + t}$$

```
Solve[M[t] == 1 + (1 + theta) * m * t, t]
```

```
{{t -> 0.}, {t -> 1.82731}, {t -> 5.16759}, {t -> 6.67177}}
```

```
R1 = 1.82731
```

```
1.82731
```

```
R2 = 5.16759
```

```
R3 = 6.67177
```

```
5.16759
```

```
6.67177
```

### Πίνακας 1

```

F[x_] := Integrate[f[y], {y, 0, x}]
F[x]

$$\frac{1}{3} e^{-7x} (-1 - e^x - e^{4x} + 3 e^{7x})$$


Tailoff[x_] := 1 - F[x]
Tailoff[x]

$$1 - \frac{1}{3} e^{-7x} (-1 - e^x - e^{4x} + 3 e^{7x})$$


Fe[x_] := Integrate[Tailoff[y], {y, 0, x}, Assumptions -> x > 0] / m
Fe[x]

$$0.037037 e^{-7x} (-6 - 7 e^x - 14 e^{4x} + 27 e^{7x})$$


fe[x_] := D[Fe[x], x]
fe[x]

$$-0.259259 e^{-7x} (-6 - 7 e^x - 14 e^{4x} + 27 e^{7x}) + 0.037037 e^{-7x} (-7 e^x - 56 e^{4x} + 189 e^{7x})$$


TailoffFe[x_] := 1 - Fe[x]
TailoffFe[x]

$$1 - 0.037037 e^{-7x} (-6 - 7 e^x - 14 e^{4x} + 27 e^{7x})$$


LaplaceH1[s_] := LaplaceTransform[1 - Fe[t], t, s]
LaplaceH1[s]

$$0. + \frac{0.518519}{3 + s} + \frac{0.259259}{6 + s} + \frac{0.222222}{7 + s}$$


Laplacefe[s_] := LaplaceTransform[fe[t], t, s]
Laplacefe[s]

$$0. + \frac{1.55556}{3 + s} + \frac{1.55556}{6 + s} + \frac{1.55556}{7 + s}$$


LaplaceTransformPsi[s] = LaplaceH1[s] / (1 + theta - Laplacefe[s])


$$\frac{0. + \frac{0.518519}{3 + s} + \frac{0.259259}{6 + s} + \frac{0.222222}{7 + s}}{2. - \frac{1.55556}{3 + s} - \frac{1.55556}{6 + s} - \frac{1.55556}{7 + s}}$$


psi2[u_] := InverseLaplaceTransform[LaplaceTransformPsi[s], s, u]
psi2[u]

$$0.00832636 e^{-6.67177 u} + 0.0636702 e^{-5.16759 u} + 0.428003 e^{-1.82731 u}$$


Anofragma[u_] := Exp[-R1 * u]
Anofragma[3]
0.00416129

psi[0] = 1 / (1 + theta)

$$\frac{1}{2}$$


```

## Πίνακας 2

```

Clear[C1, C2, C3]

(*Cramer-Lundberg Approximation*)
Delta[u_] = 1 - C1 * Exp[-R1 * u] - C2 * Exp[-R2 * u] - C3 * Exp[-R3 * u]
Delta[u]
1 - C3 e-6.67177 u - C2 e-5.16759 u - C1 e-1.82731 u
1 - C3 e-6.67177 u - C2 e-5.16759 u - C1 e-1.82731 u

Delta0 = 1 - psi[0]
Delta0

1
2

1
2

FirstDerivofDelta[u_] := Derivative[1][Delta][u]
FirstDerivofDelta[u]
6.67177 C3 e-6.67177 u + 5.16759 C2 e-5.16759 u + 1.82731 C1 e-1.82731 u

FirstDerivofDelta[0]
1.82731 C1 + 5.16759 C2 + 6.67177 C3

SecondDerivofDelta[u_] := Derivative[2][Delta][u]
SecondDerivofDelta[u]
-44.5125 C3 e-6.67177 u - 26.704 C2 e-5.16759 u - 3.33906 C1 e-1.82731 u

SecondDerivofDelta[0]
-3.33906 C1 - 26.704 C2 - 44.5125 C3

protiparagogosdelta0 = theta / ((1 + theta) ^ 2) * m
1.16667

deyteriparagogosdelta0 = protiparagogosdelta0 / ((1 + theta) * m) -
(Delta0 * f[0]) / ((1 + theta) * m)
-3.5

Solve[{C1 + C2 + C3 == psi[0], FirstDerivofDelta[0] == 1.16667,
SecondDerivofDelta[0] == -3.5}]
{{C1 -> 0.428002, C2 -> 0.0636746, C3 -> 0.00832372}}

C1 = 0.428002
C2 = 0.0636746
C3 = 0.00832372

0.428002

0.0636746

0.00832372

psi[u_] := C1 * Exp[-R1 * u] + C2 * Exp[-R2 * u] + C3 * Exp[-R3 * u]
psi[u]
0.00832372 e-6.67177 u + 0.0636746 e-5.16759 u + 0.428002 e-1.82731 u

```

### Πίνακας 3

```

psi[3]
0.00178105

(*Proseggish Cramer*)
Cramer = (theta * m) / (R1 * Integrate[x * Exp[R1 * x] * Tailoff[x], {x, 0, Infinity}])
Cramer

0.428001

psiCram[u_] := Cramer * (Exp[-R1 * u])
psiCram[3]

0.00178103

(*proseggish Tijms)
g = (psi[0] - Cramer) /
  ((1 / (theta * m)) * (Integrate[y * Tailoff[y], {y, 0, Infinity}]) - (Cramer / R1))
5.30538

psiwill[u_] = ((psi[0] - Cramer) * Tailoffe[u]) + (Cramer * Exp[-R1 * u])
psiwill[3]
0.428001 e-1.82731 u + 0.0719994 (1 - 0.037037 e-7 u (-6 - 7 eu - 14 e4 u + 27 e7 u))

0.00178564

(*Ano kai kato fragma *)
k1 = (2 * m * theta) / (m2 * (1 + theta))
k2 = (4 * (m * (m3 * theta))) / (3 * ((m2^2) * (1 + theta)))

psikatofragma[u_] := (psi[0] * Exp[-k1 * u]) - k2
psikatofragma[0.25]

psianofragma[u_] := (psi[0] * Exp[-k1 * u]) + k2
psianofragma[0.25]

2.01779
1.12943
-0.827512
1.43135

```

#### Πίνακας 4

2) Για την προσέγγιση της Pareto(5,4) παραθέτουμε για  $\theta = 4$ , τους πίνακες πρώτα για την μείξη Erlang,





(\*Meiksi Erlang\*)

k1 = 2

k2 = 2

Clear[b1, b2, q1, q2, g]

f2[x\_] := (q1 \* ((b1^k1) \* (x^(k1 - 1)) \* Exp[-b1\*x]) / ((k1 - 1)!) + (q2 \* ((b2^k2) \* (x^(k2 - 1)) \* Exp[-b2 \* x]) / ((k2 - 1)!) +

f2[x]

2

$b_1^2 e^{-b_1 x} q_1 x + b_2^2 e^{-b_2 x} q_2 x$

(\*Katanomi pareto(5,4)\*)

f1[x\_] := (c \* (d^c)) / ((x + d)^(c + 1))

c = 5

d = 4

f1[x]

5

4

$\frac{5120}{(4 + x)^6}$

$\mu = \text{Integrate}[x * f1[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$

$\mu$

1

1

$\mu_2 = \text{Integrate}[(x^2) * f1[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$

$\mu_2 // N$

$\frac{8}{3}$

3

## Πίνακας 5

F1[x\_] := Integrate[f1[y], {y, 0, x}, Assumptions -> x > -4]

F1[x]

$$1 - \frac{1024}{(4+x)^5}$$

TailoffF1[x\_] := 1 - F1[x]

TailoffF1[x]

$$\frac{1024}{(4+x)^5}$$

Fe1[x\_] := Integrate[TailoffF1[y], {y, 0, x}, Assumptions -> x > -4] / μ

Fe1[x]

$$1 - \frac{256}{(4+x)^4}$$

fe1[x\_] := D[Fe1[x], x]

fe1[x]

$$\frac{1024}{(4+x)^5}$$

TailoffFe1[x\_] := 1 - Fe1[x]

TailoffFe1[x]

$$\frac{256}{(4+x)^4}$$

bathmidaapotyias1[y\_] := f1[y] / TailoffF1[y]

bathmidaapotyias1[y]

ropi1 = (q1 \* (2 / b1)) + (q2 \* (2 / b2))

$$\frac{2 q1}{b1} + \frac{2 q2}{b2}$$

ropi2 = q1 \* (6 / (b1^2)) + q2 \* (6 / (b2^2))

$$\frac{6 q1}{b1^2} + \frac{6 q2}{b2^2}$$

ropi3 = q1 \* (24 / (b1^3)) + q2 \* (24 / (b2^3))

$$\frac{24 q1}{b1^3} + \frac{24 q2}{b2^3}$$

theta = 4

4

## Πίνακας 6

```
m = Integrate[x * f2[x], {x, 0, Infinity}]
```

```
m
```

```
1.
```

```
1.
```

```
m2 = Integrate[(x^2) * f2[x], {x, 0, Infinity}]
```

```
m2
```

```
2.66667
```

```
2.66667
```

```
m3 = Integrate[(x^3) * f2[x], {x, 0, Infinity}]
```

```
16.
```

```
16.000008102104953`
```

```
16.
```

```
m4 = Integrate[(x^4) * f2[x], {x, 0, Infinity}]
```

```
145.609
```

```
 $\mu^4$ 
```

```
256
```

```
AbsErlang[x_] := Abs[f1[x] - f2[x]]
```

```
AbsErlang[0]
```

```
Abs[-6.91224 e-2.75255 x - 0.0237245 e-0.520179 x +  $\frac{5120}{(4+x)^6}$ ]
```

```
Clear[b1, b2, q1, q2]
```

```
NSolve[{q1 + q2 == 1, ropi1 ==  $\mu$ , ropi2 ==  $\mu^2$ , ropi3 ==  $\mu^3$ }]
```

```
{{b1 -> 2.75255, b2 -> 0.520179, q1 -> 0.912322, q2 -> 0.0876781}, {b1 -> 0.520179, b2 -> 2.75255, q1 -> 0.0876781, q2 -> 0.912322}}
```

```
b1 = 0.520179
```

```
0.520179
```

```
b2 = 2.75255
```

```
2.75255
```

```
q1 = 0.0876781
```

```
0.0876781
```

```
q2 = 0.912322
```

```
0.912322
```

## Πίνακας 7

M2[t\_] = Integrate[Exp[y \* t] \* f2[y], {y, 0, Infinity}, Assumptions -> t < 0.520179]

M2[t]

ConditionalExpression[ $\frac{b1^2 q1}{(b1 - t)^2} + \frac{b2^2 q2}{(b2 - t)^2}$ , t < Re[b1] && Re[b2] > t]

M2[t]

M[t]

M[t]

M[t]

o = Solve[ $\frac{6.912236373423804}{(-2.75255 + t)^2} + \frac{0.023724483204389996}{(-0.520179 + t)^2} == 1 + (1 + \text{theta}) * m * t$ , t]

o

{{t -> 2.5 \* 10<sup>-8</sup>}, {t -> 0.404345}, {t -> 0.616317}, {t -> 1.9503}, {t -> 3.3745}}

{{t -> 2.5 \* 10<sup>-8</sup>}, {t -> 0.404345}, {t -> 0.616317}, {t -> 1.9503}, {t -> 3.3745}}

R1 = 2.5 \* 10<sup>-8</sup>

2.5 \* 10<sup>-8</sup>

R2 = 0.404345

0.404345

F2[x\_] := Integrate[f2[y], {y, 0, x}]

F2[x]

1. + e<sup>-2.75255 x</sup> (-0.912322 - 2.51121 x) + e<sup>-0.520179 x</sup> (-0.0876781 - 0.0456083 x)

TailoffF2[x\_] := 1 - F2[x]

TailoffF2[x]

-1. \* 10<sup>-7</sup> - e<sup>-2.75255 x</sup> (-0.912322 - 2.51121 x) - e<sup>-0.520179 x</sup> (-0.0876781 - 0.0456083 x)

bathmidaapotyias2[y\_] := f2[y] / TailoffF2[y]

bathmidaapotyias2[y]

$\frac{6.91224 e^{-2.75255 y} + 0.0237245 e^{-0.520179 y}}{-1. \times 10^{-7} - e^{-2.75255 y} (-0.912322 - 2.51121 y) - e^{-0.520179 y} (-0.0876781 - 0.0456083 y)}$

Fe2[x\_] := Integrate[TailoffF2[y], {y, 0, x}] / m

Fe2[x]

1. (1. + e<sup>-2.75255 x</sup> (-0.662892 - 0.912322 x) + e<sup>-0.520179 x</sup> (-0.337107 - 0.0876781 x) - 1. \* 10<sup>-7</sup> x)

fe2[x\_] := D[Fe2[x], x]

fe2[x]

1. (-1. \* 10<sup>-7</sup> - 0.912322 e<sup>-2.75255 x</sup> - 0.0876781 e<sup>-0.520179 x</sup> - 2.75255 e<sup>-2.75255 x</sup> (-0.662892 - 0.912322 x) - 0.520179 e<sup>-0.520179 x</sup> (-0.337107 - 0.0876781 x))

TailoffFe2[x\_] := 1 - Fe2[x]

TailoffFe2[x]

1 - 1. (1. + e<sup>-2.75255 x</sup> (-0.662892 - 0.912322 x) + e<sup>-0.520179 x</sup> (-0.337107 - 0.0876781 x) - 1. \* 10<sup>-7</sup> x)

## Πίνακας 8

Katofragma[u\_] := TailofFe[u] / (theta + TailofFe[u])

Katofragma[0.75]

0.0998428

Anofragma[u\_] := Exp[-R1\*u]

Anofragma[0.1] // N

1.

LaplaceH2[s\_] := LaplaceTransform[TailofFe2[t], t, s]

LaplaceH2[s]

$$-\frac{1.11022 \times 10^{-16}}{s^2} - \frac{1.}{s} + \frac{0.0669873}{(0.316987 + s)^2} + \frac{0.42265}{0.316987 + s} + \frac{0.933013}{(1.18301 + s)^2} + \frac{1.57735}{1.18301 + s}$$

Laplacefe2[s\_] := LaplaceTransform[fe2[t], t, s]

Laplacefe2[s]

$$1. \left( -\frac{1. \times 10^{-7}}{s} + \frac{0.0456083}{(0.520179 + s)^2} + \frac{0.0876781}{0.520179 + s} + \frac{2.51121}{(2.75255 + s)^2} + \frac{0.912322}{2.75255 + s} \right)$$

LaplaceTransformPsi2[s\_] := LaplaceH2[s] / (1 + theta - Laplacefe2[s])

LaplaceTransformPsi2[s]

$$\frac{1. \times 10^{-7}}{s^2} - \frac{2.22045 \times 10^{-16}}{s} + \frac{0.0876781}{(0.520179 + s)^2} + \frac{0.337108}{0.520179 + s} + \frac{0.912322}{(2.75255 + s)^2} + \frac{0.662892}{2.75255 + s}$$

$$5 - 1. \left( -\frac{1. \times 10^{-7}}{s} + \frac{0.0456083}{(0.520179 + s)^2} + \frac{0.0876781}{0.520179 + s} + \frac{2.51121}{(2.75255 + s)^2} + \frac{0.912322}{2.75255 + s} \right)$$

psi4[u\_] := InverseLaplaceTransform[LaplaceTransformPsi2[s], s, u]

psi4[u]

$$1. - 0.0640354 e^{-3.3745 u} + 0.183838 e^{-1.9503 u} - 0.0701971 e^{-0.616317 u} + 0.150394 e^{-0.404345 u} - 1. e^{-2.5 \times 10^{-8} u}$$

psi4[3]

0.0341886

Plot[{bathmidaapotyxiass2[x], bathmidaapotyxiass1[x]}, {x, 0, 20},

PlotRange -> {0, 2},

AxesLabel -> {"y", "λ(y)"},

PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 0, 1]},

PlotLegend -> {"λz(y)", "λx(y)"},

LegendPosition -> {.1, 0},

LegendTextSpace -> 2,

LegendLabel -> "",

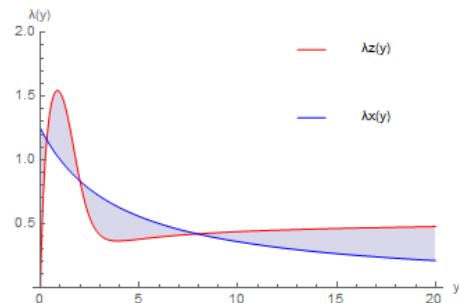
LegendLabelSpace -> .2,

LegendOrientation -> Vertical,

LegendBackground -> GrayLevel[1],

LegendShadow -> None,

Background -> None, Filling -> {1 -> {2}}



## Πίνακας 9

```
f2[x]
6.91224 e-2.75255 x x + 0.0237245 e-0.520179 x x
```

```
psi4[3]
```

```
psi4[3]
```

```
psiverb[u_] := (Tailoffe[u] / theta)
```

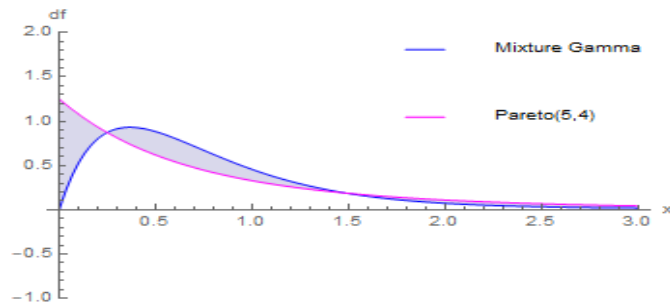
```
psiverb[0.25]
```

```
0.190742
```

```
<< Graphics`Legend`;
```

```
Plot[{f[x], f1[x]}, {x, 0, 3},
  PlotRange -> {-1, 2},
  AxesLabel -> {"x", "df"},
  PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[1, 0, 1]},
  PlotLegend -> {"Mixture Gamma", "Pareto(5,4)"},
  LegendPosition -> {.1, 0},
  LegendTextSpace -> 2,
  LegendLabel -> "",
  LegendLabelSpace -> .2,
  LegendOrientation -> Vertical,
  LegendBackground -> GrayLevel[1],
  LegendShadow -> None,
  Background -> None, Filling -> {1 -> {2}}]
```

General::obspkg: Graphics`Legend` is now obsolete. The legacy version beir



```
Abspsidvylid1[u_] := Abs[psidvylid1[u] - psi4[u]]
```

```
Abspsidvylid1[0.1]
```

```
0.0846052
```

```
AbsVerave1[u_] := Abs[psiverb1[u] - psi4[u]]
```

```
AbsVerave1[3]
```

```
0.0720861
```

```
AbsVerave[u_] := Abs[psiverb[u] - psi4[u]]
```

```
AbsVerave[3]
```

```
0.0314795
```

## Πίνακας 10

Επειτα, για την μείξη εκθετικών κατανομών για την προσέγγιση της Pareto, έχουμε τον παρακάτω κώδικα:

```
f[x_] := q1 * b1 * Exp[-b1 * x] + q2 * b2 * Exp[-b2 * x]
Clear[q1, q2, b1, b2]
f[x]
b1 e-b1 x q1 + b2 e-b2 x q2

q2 = 1 - q1
1 - q1

mo1 = MomentEvaluate[Moment[1], ExponentialDistribution[b1]] * q1 + q2 * MomentEvaluate[Moment[1], ExponentialDistribution[b2]]
 $\frac{1 - q1}{b2} + \frac{q1}{b1}$ 

mo2 = MomentEvaluate[Moment[2], ExponentialDistribution[b1]] * q1 + q2 * MomentEvaluate[Moment[2], ExponentialDistribution[b2]]
 $\frac{2(1 - q1)}{b2^2} + \frac{2q1}{b1^2}$ 

mo3 = MomentEvaluate[Moment[3], ExponentialDistribution[b1]] * q1 + q2 * MomentEvaluate[Moment[3], ExponentialDistribution[b2]]
 $\frac{6(1 - q1)}{b2^3} + \frac{6q1}{b1^3}$ 

f1[x_] := (c * (d^c)) / ((x + d)^(c + 1))
c = 5
d = 4
f1[x]
5
4
 $\frac{5120}{(4 + x)^6}$ 

μ = Integrate[x * f1[x], {x, 0, Infinity}]
μ
1
```

## Πίνακας 11

```

μ2 = Integrate[(x^2) * f1[x], {x, 0, Infinity}]
μ2 // N

$$\frac{8}{3}$$

2.66667

μ3 = Integrate[(x^3) * f1[x], {x, 0, Infinity}]
μ3
16
16

F1[x_] := Integrate[f1[y], {y, 0, x}, Assumptions -> x > -4]
F1[x]

$$1 - \frac{1024}{(4+x)^5}$$


TailofF1[x_] := 1 - F1[x]
TailofF1[x]

$$\frac{1024}{(4+x)^5}$$


bathapotyx1[y_] := f1[y] / TailofF1[y]
bathapotyx1[y]

$$\frac{5}{4+y}$$


NSolve[q1 + q2 == 1 && mo1 == μ && mo2 == μ2 && mo3 == μ3, {q1, b1, b2}]
{{q1 -> 0.0669873, b1 -> 0.316987, b2 -> 1.18301}, {q1 -> 0.933013, b1 -> 1.18301, b2 -> 0.316987}}

q1 = 0.0669873
0.0669873

q2 = 1 - q1
0.933013

b1 = 0.316987
0.316987

b2 = 1.18301
1.18301

f[x]

$$1.10376 e^{-1.18301 x} + 0.0212341 e^{-0.316987 x}$$



$$1.30576 e^{-1.18301 x} x + 0.00673093 e^{-0.316987 x} x$$


theta = 4
4

m = Integrate[x * f[x], {x, 0, Infinity}]
m
1.
1.

m2 = Integrate[(x^2) * f[x], {x, 0, Infinity}]
m2
2.66668
2.66668

```

## Πίνακας 12



```

m3 = Integrate[ (x^3) * f[x], {x, 0, Infinity}]
16.0001

M[t_] = Integrate[Exp[y*t] * f[y], {y, 0, Infinity}, Assumptions -> t < 0.316987]
M[t]
- 1.10376 / (-1.18301 + t) - 0.0212341 / (-0.316987 + t)

M[t]

Solve[ ((-1.10376) / (t - 1.18301)) - ((0.0212341) / (t - 0.316987)) = 1 + (1 + theta) * m * t, t]
{{t -> -7.11406 * 10^-7}, {t -> 0.3}, {t -> 0.999998}}

R1 = 0.3
0.3

R2 = 0.999998
0.999998

```

```

F[x_] := Integrate[f[y], {y, 0, x}]
F[x]

1. - 0.933013 e^-1.18301 x - 0.0669873 e^-0.316987 x

Tailoff[x_] := 1 - F[x]
Tailoff[x]

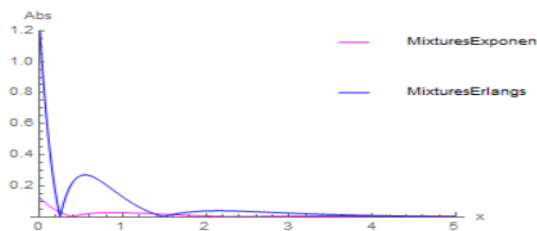
0. + 0.933013 e^-1.18301 x + 0.0669873 e^-0.316987 x

bathapoty2[y_] := f[y] / Tailoff[y]
bathapoty2[20]

0.316987

Plot[{ps, ps1}, {x, 0, 5},
PlotRange -> {0, 1.2},
AxesLabel -> {"x", "Abs"},
PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 1], RGBColor[0, 0, 1]},
PlotLegend -> {"MixturesExponent", "MixturesErlangs"},
LegendPosition -> {.2, 0},
LegendTextSpace -> 2,
LegendLabel -> "",
LegendLabelSpace -> .2,
LegendOrientation -> Vertical,
LegendBackground -> GrayLevel[1],
LegendShadow -> None,
Background -> None]

```



```

p[x_] := Abs[f2[x] - f1[x]]

p[0]
1.25

```

### Πίνακας 13

```

Fe[x_] := Integrate[TailoffF[y], {y, 0, x}] / m
Fe[x]
0.999998 (1. - 0.788677 e-1.18301 x - 0.211325 e-0.316987 x)

fe[x_] := D[Fe[x], x]
fe[x]
0.999998 (0.933013 e-1.18301 x + 0.0669873 e-0.316987 x)

TailoffFe[x_] := 1 - Fe[x]
TailoffFe[x]
1 - 0.999998 (1. - 0.788677 e-1.18301 x - 0.211325 e-0.316987 x)

psi0 = 1 / (1 + theta)
1
5

Cramer = (theta * m) / (R1 * Integrate[x * (Exp[R1 * x] * TailoffF[x]), {x, 0, Infinity}])
Cramer
0.057141
0.057141

psiCramer[u_] := Cramer * Exp[-R1 * u]

psiCramer[3]
0.0232318

y = (psi0 - Cramer) / ((1 / (theta * m)) * (Integrate[y * TailoffF[y], {y, 0, Infinity}]) - (Cramer / R1))
0.999966

psiIjms[u_] := (psi0 - Cramer) * Exp[-(y * u)] + (Cramer * Exp[-(R1 * u)])
psiIjms[3]
0.030345

psiwill[u_] := ((psi0 - Cramer) * TailoffFe[u]) + (Cramer * Exp[-R1 * u])
psiwill[3]
0.030345

```

```

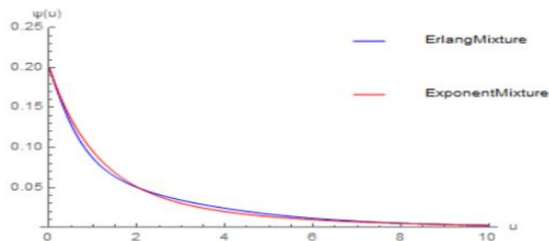
<< Graphics`Legend` ;
General::obspkg: Graphics`Legend` is now obsolete. The legacy version being li

```

```

Plot[{psig[u], psi[u]}, {u, 0, 10},
PlotRange -> {0, 0.25},
AxesLabel -> {"u", "ψ(u)"},
PlotLegend -> {"ErlangMixture", "ExponentMixture"},
PlotStyle -> {RGBColor[0, 0, 1], RGBColor[1, 0, 0]},
LegendPosition -> {-2, 0},
LegendTextSpace -> 2,
LegendLabel -> "",
LegendLabelSpace -> .2,
LegendOrientation -> Vertical,
LegendBackground -> GrayLevel[1],
LegendShadow -> None,
Background -> None]

```



Πίνακας 14

### Κεφάλαιο 3

Αρχικά, παραθέτουμε τον κώδικα για την  $\text{Exp}(5)$  για την συνάρτηση G-S.

```
f1[x_] := 5 * Exp[-5 * x]
f1[x]
5 e-5x

lambda = 1
c = 1
1
1

theta = (c / (lambda * m)) - 1
m = Integrate[x * f1[x], {x, 0, Infinity}] // N
m
4.
0.2
0.2

m2 = Integrate[(x^2) * f1[x], {x, 0, Infinity}] // N
m2
0.08
0.08

m3 = Integrate[(x^3) * f1[x], {x, 0, Infinity}] // N
m3
0.048
0.048

M1[t_] := Integrate[Exp[y * t] * f1[y], {y, 0, Infinity}, Assumptions -> t < 3]
M1[t]

$$-\frac{5}{-5+t}$$


Solve[M1[t] == 1 + (1 + theta) * m * t, t]
{{t -> 0.}, {t -> 4.}}

b = 5
5

beta1 = ((1 + theta) / Integrate[Exp[-p1 * y] * fe[y], {y, 0, Infinity}]) - 1
4.
beta2 = ((1 + theta) / Integrate[Exp[-p2 * y] * fe[y], {y, 0, Infinity}]) - 1
4.6085
beta3 = ((1 + theta) / Integrate[Exp[-p3 * y] * fe[y], {y, 0, Infinity}]) - 1
5.19258
beta4 = ((1 + theta) / Integrate[Exp[-p4 * y] * fe[y], {y, 0, Infinity}]) - 1
5.7604
```

Πίνακας 15

$$r1 = (\beta1 * b) / (1 + \beta1)$$

4.

$$r2 = (\beta2 * b) / (1 + \beta2)$$

4.1085

$$r3 = (\beta3 * b) / (1 + \beta3)$$

4.19258

$$r4 = (\beta4 * b) / (1 + \beta4)$$

4.2604

$$k1 = -s1$$

4

$$k2 = -s2$$

4.1085

$$k3 = -s3$$

4.19258

$$k4 = -s4$$

4.2604

Cramer1 =

$$\frac{(\beta1 * (p1 + k1))}{(k1 * ((1 + \beta1) * (((\lambda / c) * \text{Integrate}[x * \text{Exp}[k1 * x] * f1[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]) - 1)))}$$

0.2

Cramer2 =

$$\frac{(\beta2 * (p2 + k2))}{(k2 * ((1 + \beta2) * (((\lambda / c) * \text{Integrate}[x * \text{Exp}[k2 * x] * f1[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]) - 1)))}$$

0.178299

Cramer3 =

$$\frac{(\beta3 * (p3 + k3))}{(k3 * ((1 + \beta3) * (((\lambda / c) * \text{Integrate}[x * \text{Exp}[k3 * x] * f1[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]) - 1)))}$$

0.161485

Cramer4 =

$$\frac{(\beta4 * (p4 + k4))}{(k4 * ((1 + \beta4) * (((\lambda / c) * \text{Integrate}[x * \text{Exp}[k4 * x] * f1[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]) - 1)))}$$

0.14792

## Πίνακας 16

```

psiCramer1[u_] := Cramer1 * Exp[-r1 * u]
psiCramer1[u]
0.2 e-4. u

psiCramer2[u_] := Cramer2 * Exp[-r2 * u]
psiCramer2[3]
7.91148 × 10-7

K2[1]
K2[1]

psiCramer3[u_] := Cramer3 * Exp[-r3 * u]
psiCramer3[3]
5.56782 × 10-7

K3[u]
K3[u]

psiCramer4[u_] := Cramer4 * Exp[-r4 * u]
psiCramer4[1.5]
0.000248099

K4[0.1]
0.0966053

R = ((theta * b) / (1 + theta)) + ((p2 / (p2 + b)) * (b / (1 + theta)))
4.1085

k1 = -s1
4

dphi3[x_] := D[Phi3[x], x]
dphi3[x]
5. e-5. x

dphi1[x_] := D[Phi1[x], x]
dphi1[x]
5 e-5 x

dphi2[x_] := D[Phi2[x], x]
dphi2[x]
5. e-5. x

dphi4[x_] := D[Phi4[x], x]

dphi4[x]
5. e-5. x

```

## Πίνακας 17

```

μ1 = Integrate[x * dphi1[x], {x, 0, Infinity}]
1
5

μ2 = Integrate[x * dphi2[x], {x, 0, Infinity}]
0.2

μ3 = Integrate[x * dphi3[x], {x, 0, Infinity}]
0.2

μ4 = Integrate[x * dphi4[x], {x, 0, Infinity}]
0.2

γ1 = ((1 / (1 + β1)) - Cramer1) / ((μ1 / β1) - (Cramer1 / k1))
Power::infy: Infinite expression  $\frac{1}{0}$  encountered. >>
Infinity::indet: Indeterminate expression 0.ComplexInfinity encountered. >>
Indeterminate

γ2 = ((1 / (1 + β2)) - Cramer2) / ((μ2 / β2) - (Cramer2 / k2))
3.76862

γ3 = ((1 / (1 + β3)) - Cramer3) / ((μ3 / β3) - (Cramer3 / k3))
3.87409

γ4 = ((1 / (1 + β3)) - Cramer4) / ((μ3 / β3) - (Cramer4 / k4))
3.57243

psiTijms1[u_] := (((1 / (1 + β1)) - Cramer1) * Exp[-γ1 * u]) + (Cramer1 * Exp[-k1 * u])
psiTijms1[u]
Indeterminate

psiTijms2[u_] := (((1 / (1 + β2)) - Cramer2) * Exp[-γ2 * u]) + (Cramer2 * Exp[-k2 * u])
psiTijms2[0.5]
0.0228563

K[0.5]
0.0228563

psiTijms3[u_] := (((1 / (1 + β3)) - Cramer3) * Exp[-γ3 * u]) + (Cramer3 * Exp[-k3 * u])

psiTijms3[1.5]
0.000299851

psiTijms4[u_] := (((1 / (1 + β4)) - Cramer4) * Exp[-γ4 * u]) + (Cramer4 * Exp[-k4 * u])
psiTijms4[1.5]
0.000248101

K4[0.5]
0.0175749

K3[1]
0.00243957

```

## Πίνακας 18

```

psi[0] = 1 / (1 + theta)
0.2

F[x_] := Integrate[f1[y], {y, 0, x}]
F[x]
1 - e-5x

Tailoff[x_] := 1 - F[x]
Tailoff[x]
e-5x

Fe[x_] := Integrate[Tailoff[y], {y, 0, x}, Assumptions -> x > 0] / m
Fe[x]
1. (1 - e-5x)

TailoffFe[x_] := 1 - Fe[x]
TailoffFe[x]

1 - 1. (1 - e-5x)

fe[x_] := D[Fe[x], x]
fe[x]
5. e-5x

LaplaceTransformOffe[x_] := LaplaceTransform[fe[y], y, x]
LaplaceTransformOffe[x]

$$\frac{5.}{5 + x}$$


LaplaceTransformOff1[x_] := LaplaceTransform[f1[y], y, x]
LaplaceTransformOff1[x]

$$\frac{5}{5 + x}$$


LaplaceH1[s_] := LaplaceTransform[1 - Fe[t], t, s]
LaplaceH1[s]

$$0. + \frac{1.}{5 + s}$$


Laplacefe[s_] := LaplaceTransform[fe[t], t, s]
Laplacefe[s]

$$\frac{5.}{5 + s}$$


LaplaceTransformPsi[s] = LaplaceH1[s] / (1 + theta - Laplacefe[s])

$$0. + \frac{1.}{5 + s}$$


$$5. - \frac{5.}{5 + s}$$


psi2[u_] := InverseLaplaceTransform[LaplaceTransformPsi[s], s, u]
psi2[1]
0.00366313

```

## Πίνακας 19

```

GerberShiu2[0.1]
0.

GerberShiu
0.464479

sigma1 = 0
0

sigma2 = 0.5
0.5

sigma3 = 1
1

sigma4 = 1.5
1.5

NSolve[sigma1 + lambda - (c * s) == lambda * LaplaceTransformOff1[s], s]
{{s -> -4.}, {s -> 0.}}

p1 = 0
0

s1 = -4
-4

NSolve[sigma2 + lambda - (c * s) == lambda * LaplaceTransformOff1[s], s]
{{s -> -4.1085}, {s -> 0.608495}}

p2 = 0.608495
0.608495

s2 = -4.1085
-4.1085

NSolve[sigma3 + lambda - (c * s) == lambda * LaplaceTransformOff1[s], s]
{{s -> -4.19258}, {s -> 1.19258}}

p3 = 1.19258
1.19258

s3 = -4.19258
-4.19258

NSolve[sigma4 + lambda - (c * s) == lambda * LaplaceTransformOff1[s], s]
{{s -> -4.2604}, {s -> 1.7604}}

p4 = 1.7604
1.7604

s4 = -4.2604
-4.2604

Phi1[y_] :=
1 - (Exp[p1 * y] * Integrate[Exp[-p1 * t] * Tailoff[t], {t, y, Infinity}]) /
Integrate[Exp[-p1 * t] * Tailoff[t], {t, 0, Infinity}]

Phi1[y]
1 - e-5y

Phi2[y_] :=
1 - (Exp[p2 * y] * Integrate[Exp[-p2 * t] * Tailoff[t], {t, y, Infinity}]) /
Integrate[Exp[-p2 * t] * Tailoff[t], {t, 0, Infinity}]

Phi2[y]
1 - 1. e-5. y

```

## Πίνακας 20



```

Phi3[y_] :=
  1 - (Exp[p3*y] * Integrate[Exp[-p3*t] * Tailoff[t], {t, y, Infinity}]) /
    Integrate[Exp[-p3*t] * Tailoff[t], {t, 0, Infinity}]

Phi3[y]
1 - 1. e-5. y

Phi4[y_] :=
  1 - (Exp[p4*y] * Integrate[Exp[-p4*t] * Tailoff[t], {t, y, Infinity}]) /
    Integrate[Exp[-p4*t] * Tailoff[t], {t, 0, Infinity}]

Phi4[y]
1 - 1. e-5. y

v1[u_] :=
  FullSimplify[(lambda / c) * Exp[p1*u] *
    Integrate[Exp[-p1*y] * Integrate[f1[t] * Exp[-p1*(t-y)], {t, y, Infinity}],
    {y, u, Infinity}]

v1[u]

$$\frac{e^{-5u}}{5}$$


He1[u_] :=
  (Exp[-p1*u] *
    Integrate[Exp[-p1*x] * Integrate[f1[y] * Exp[-p1*(y-x)], {y, x, Infinity}],
    {x, u, Infinity}) / (Integrate[Exp[-p1*y] * Tailoff[y], {y, 0, Infinity}])

He1[u]
e-5u

GSCramer1[u_] := ((Integrate[Exp[k1*x] * He1[x], {x, 0, Infinity}]) * Exp[-k1*u]) /
  Integrate[x * Exp[k1*x] * dphi1[x], {x, 0, Infinity}]

GSCramer1[0.75]
0.00995741

v2[u_] :=
  FullSimplify[(lambda / c) * Exp[p2*u] *
    Integrate[Exp[-p2*y] * Integrate[f1[t] * Exp[-p2*(t-y)], {t, y, Infinity}],
    {y, u, Infinity}]

v2[u]
0.158956 e-5. u

He2[u_] :=
  (Exp[p2*u] *
    Integrate[Exp[-p2*x] * Integrate[f1[y] * Exp[-p2*(y-x)], {y, x, Infinity}],
    {x, u, Infinity}) / (Integrate[Exp[-p2*y] * Tailoff[y], {y, 0, Infinity}])

He2[u]
0.891505 e-5. u

GSCramer2[u_] := ((Integrate[Exp[k2*x] * He2[x], {x, 0, Infinity}]) * Exp[-k2*u]) /
  Integrate[x * (Exp[k2*x] * dphi2[x]), {x, 0, Infinity}]

GSCramer2[3]
7.05307 × 10-7

```

## Πίνακας 21

```
GSTijms2[u_] :=
  ((-1/β2) * (Integrate[psiTijms2[u - x] * (D[He2[x], x]), {x, 0, u}])) +
  ((1/β2) * He2[u]) - ((He2[0] / β2) * psiTijms2[u])
```

```
GSTijms2[3]
7.05323 × 10-7
```

```
GerberShiu2[1]
GerberShiu2[1]
```

```
v3[u_] :=
  FullSimplify[(lambda / c) * Exp[p3 * u] *
    Integrate[Exp[-p3 * y] * Integrate[f1[t] * Exp[-p3 * (t - y)], {t, y, Infinity}],
    {y, u, Infinity}]]
```

```
v3[u]
0.130385 e-5. u
```

```
He3[u_] :=
  (Exp[p3 * u] *
    Integrate[Exp[-p3 * x] * Integrate[f1[y] * Exp[-p3 * (y - x)], {y, x, Infinity}],
    {x, u, Infinity}) / (Integrate[Exp[-p3 * y] * Tailoff[y], {y, 0, Infinity}])
```

```
He3[u]
0.807418 e-5. u
```

```
GCramer3[u_] := ((Integrate[Exp[k3 * x] * He3[x], {x, 0, Infinity}]) * Exp[-k3 * u]) /
  Integrate[x * (Exp[k3 * x] * dphi3[x]), {x, 0, Infinity}]
```

```
GCramer3[3]
4.49557 × 10-7
```

```
GSTijms3[u_] :=
  ((-1/β3) * (Integrate[psiTijms3[u - x] * (D[He3[x], x]), {x, 0, u}])) +
  ((1/β3) * He3[u]) - ((He3[0] / β3) * psiTijms3[u])
```

```
GSTijms3[1.5]
0.000242105
```

```
GerberShiu3[3]
4.49553 × 10-7
```

```
v4[u_] :=
  FullSimplify[(lambda / c) * Exp[p4 * u] *
    Integrate[Exp[-p4 * y] * Integrate[f1[t] * Exp[-p4 * (t - y)], {t, y, Infinity}],
    {y, u, Infinity}]]
```

```
v4[u]
0.109402 e-5. u
```

## Πίνακας 22

```

He4[u_] :=
  (Exp[p4 * u] *
   Integrate[Exp[-p4 * x] * Integrate[f1[y] * Exp[-p4 * (y - x)], {y, x, Infinity}],
   {x, u, Infinity}) / (Integrate[Exp[-p4 * y] * Tailoff[y], {y, 0, Infinity}])

He4[u]
0.739601 e-5. u

GSCramer4[u_] := ((Integrate[Exp[k4 * x] * He4[x], {x, 0, Infinity}]) * Exp[-k4 * u]) /
  Integrate[x * (Exp[k4 * x] * dphi4[x]), {x, 0, Infinity}]

GSCramer4[0.5]
0.0129984

GSTijms4[u_] :=
  ((-1 / β4) * (Integrate[psiTijms4[u - x] * (D[He4[x], x]), {x, 0, u}])) +
  ((1 / β4) * He4[u]) - ((He4[0] / β4) * psiTijms4[u])

GSTijms4[0.1]
0.0714494

GerberShiu4[1]
0.00154439

LaplaceTransform[v1[x], x, u]

$$\frac{1}{5(5 + u)}$$


LaplaceTransform[v2[x], x, u]

$$\frac{0.158956}{5. + u}$$


LaplaceTransform[v3[x], x, u]

$$\frac{0.130385}{5. + u}$$


LaplaceTransform[v4[x], x, u]

$$\frac{0.109402}{5. + u}$$


FirstDerivativeOfPhi1[x_] := FullSimplify[Derivative[1][Phi1][x]]
LaplaceTransform[FirstDerivativeOfPhi1[x], x, u]

$$\frac{5}{5 + u}$$


FirstDerivativeOfPhi2[x_] := FullSimplify[Derivative[1][Phi2][x]]
LaplaceTransform[FirstDerivativeOfPhi2[x], x, u]

$$\frac{5.}{5. + u}$$


FirstDerivativeOfPhi3[x_] := FullSimplify[Derivative[1][Phi3][x]]
LaplaceTransform[FirstDerivativeOfPhi3[x], x, u]

$$\frac{5.}{5. + u}$$


FirstDerivativeOfPhi4[x_] := FullSimplify[Derivative[1][Phi4][x]]
LaplaceTransform[FirstDerivativeOfPhi4[x], x, u]

$$\frac{5.}{5. + u}$$


```

## Πίνακας 23

```

LaplaceTransformGerberShiu1[s_] :=
  FullSimplify[LaplaceTransform[v1[x], x, s] /
    (1 - ((lambda * m * LaplaceTransformOffe[p1]) / c) *
      LaplaceTransform[FirstDerivativeOfPhi1[x], x, s])]

LaplaceTransformGerberShiu1[u]

$$\frac{0.2}{4. + u}$$


GerberShiu1[u_] :=
  FullSimplify[InverseLaplaceTransform[LaplaceTransformGerberShiu1[s], s, u]]

GerberShiu1[u]

$$0.2 e^{-4. u}$$


psi2[1]
0.00366313

LaplaceTransformGerberShiu2[s_] :=
  FullSimplify[LaplaceTransform[v2[x], x, s] /
    (1 - ((lambda * m * LaplaceTransformOffe[p2]) / c) *
      LaplaceTransform[FirstDerivativeOfPhi2[x], x, s])]

LaplaceTransformGerberShiu2[u]

$$\frac{0.158956}{4.1085 + u}$$


GerberShiu2[u_] :=
  FullSimplify[InverseLaplaceTransform[LaplaceTransformGerberShiu2[s], s, u]]

GerberShiu2[3]

$$7.05321 \times 10^{-7}$$


LaplaceTransformGerberShiu3[s_] :=
  FullSimplify[LaplaceTransform[v3[x], x, s] /
    (1 - ((lambda * m * LaplaceTransformOffe[p3]) / c) *
      LaplaceTransform[FirstDerivativeOfPhi3[x], x, s])]

GerberShiu3[u_] :=
  FullSimplify[InverseLaplaceTransform[LaplaceTransformGerberShiu3[s], s, u]]

GerberShiu3[u]

$$0.130385 e^{-4.19258 u}$$


LaplaceTransformGerberShiu4[s_] :=
  FullSimplify[LaplaceTransform[v4[x], x, s] /
    (1 - ((lambda * m * LaplaceTransformOffe[p4]) / c) *
      LaplaceTransform[FirstDerivativeOfPhi4[x], x, s])]

LaplaceTransformGerberShiu4[s]

$$\frac{0.109402}{4.2604 + s}$$


GerberShiu4[u_] :=
  FullSimplify[InverseLaplaceTransform[LaplaceTransformGerberShiu4[s], s, u]]

GerberShiu4[3]

$$3.07767 \times 10^{-7}$$


b = 5
5

```

## Πίνακας 24

```

LaplaceTransformOffe [p1]
LaplaceTransformOffe [0]

LaplaceTransformOffe [p2]
LaplaceTransformOffe [0.608495]

LaplaceTransformOffe [p3]
0.807418

LaplaceTransformOffe [p4]
0.739601

φ1 = LaplaceTransformOffe [p1] / (1 + theta)
0.2 LaplaceTransformOffe [0]

φ2 = LaplaceTransformOffe [p2] / (1 + theta)
0.178301

φ3 = LaplaceTransformOffe [p3] / (1 + theta)
0.161484

φ4 = LaplaceTransformOffe [p4] / (1 + theta)
0.14792

1 - φ1
0.8

1 - φ2
0.821699

1 - φ3
0.838516

1 - φ4
0.85208

f21[x_] := (1 - φ1) * b * Exp[-(1 - φ1) * b * x]
f21[x]
4. e-4. x

F21[x_] := Integrate[f21[y], {y, 0, x}]
F21[x]
1 - e5 x (-1+φ1)

TailofF21[x_] := 1 - F21[x]
TailofF21[x]
0. + 1. e-4. x

K1[x_] := φ1 * TailofF21[x]
K1[3]
1.22884 × 10-6

psi2[5]
4.12231 × 10-10

```

## Πίνακας 25

$$f22[x_] := (1 - \phi_2) * b * \text{Exp}[-(1 - \phi_2) * b * x]$$

$$f22[x]$$

$$5 e^{5x(-1+\phi_2)} (1 - \phi_2)$$

$$F22[x_] := \text{Integrate}[f22[y], \{y, 0, x\}]$$

$$F22[x]$$

$$1 - e^{5x(-1+\phi_2)}$$

$$\text{TailoffF22}[x_] := 1 - F22[x]$$

$$\text{TailoffF22}[x]$$

$$0. + 1. e^{-4.1085 x}$$

$$K2[x_] := \phi_2 * \text{TailoffF22}[x]$$

$$K2[x]$$

$$0.178301 (0. + 1. e^{-4.1085 x})$$

$$f23[x_] := (1 - \phi_3) * b * \text{Exp}[-(1 - \phi_3) * b * x]$$

$$f23[x]$$

$$4.19258 e^{-4.19258 x}$$

$$F23[x_] := \text{Integrate}[f23[y], \{y, 0, x\}]$$

$$F23[x]$$

$$\text{TailoffF23}[x_] := 1 - F23[x]$$

$$1. - 1. e^{-4.19258 x}$$

$$\text{TailoffF23}[x]$$

$$0. + 1. e^{-4.19258 x}$$

$$K3[x_] := \phi_3 * \text{TailoffF23}[x]$$

$$K3[x]$$

$$0.161484 (0. + 1. e^{-4.19258 x})$$

$$f24[x_] := (1 - \phi_4) * b * \text{Exp}[-(1 - \phi_4) * b * x]$$

$$f24[x]$$

$$4.2604 e^{-4.2604 x}$$

$$F24[x_] := \text{Integrate}[f24[y], \{y, 0, x\}]$$

$$\text{TailoffF24}[x_] := 1 - F24[x]$$

$$\text{TailoffF24}[x]$$

$$0. + 1. e^{-4.2604 x}$$

$$K4[x_] := \phi_4 * \text{TailoffF24}[x]$$

$$K4[3]$$

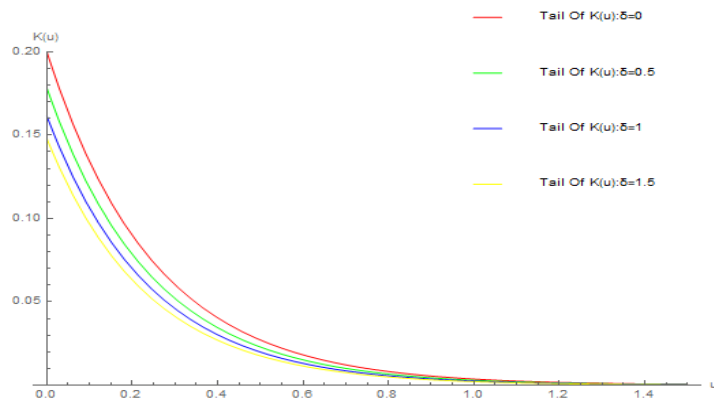
$$4.16126 \times 10^{-7}$$

## Πίνακας 26

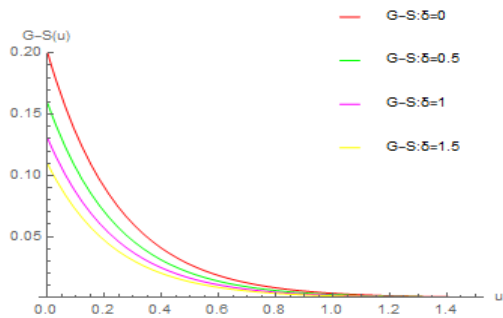
<< Graphics`Legend`;

General::obspkg: Graphics`Legend` is now obsolete. The legacy version being loaded may conflict with current Mathematica functionality. See the Compatibility Guide for updating information. >>

```
Plot[{K1[u], K2[u], K3[u], K4[u]}, {u, 0, 1.5}, PlotRange -> {0, 0.2},
  AxesLabel -> {"u", "K(u)"},
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[0, 0, 1],
    RGBColor[1, 1, 0]},
  PlotLegend -> {"Tail Of K(u):δ=0", "Tail Of K(u):δ=0.5", "Tail Of K(u):δ=1",
    "Tail Of K(u):δ=1.5"},
  LegendPosition -> {.2, 0},
  LegendTextSpace -> 2,
  LegendLabel -> "",
  LegendLabelSpace -> .2,
  LegendOrientation -> Vertical,
  LegendBackground -> GrayLevel[1],
  LegendShadow -> None,
  Background -> None]
```



```
Plot[{GerberShiu1[u], GerberShiu2[u], GerberShiu3[u], GerberShiu4[u]},
  {u, 0, 1.5}, PlotRange -> {0, 0.2}, AxesLabel -> {"u", "G-S(u)"},
  PlotStyle -> {RGBColor[1, 0, 0], RGBColor[0, 1, 0], RGBColor[1, 0, 1],
    RGBColor[1, 1, 0]},
  PlotLegend -> {"G-S:δ=0", "G-S:δ=0.5", "G-S:δ=1", "G-S:δ=1.5"},
  LegendPosition -> {.2, 0},
  LegendTextSpace -> 2,
  LegendLabel -> "",
  LegendLabelSpace -> .2,
  LegendOrientation -> Vertical,
  LegendBackground -> GrayLevel[1],
  LegendShadow -> None,
  Background -> None]
```



D[f1[x], x]

$-25 e^{-5x}$

```

Laplaceofdf1[s_] := LaplaceTransform[D[f1[x], x], x, s]
Laplaceofdf1[s]

$$-\frac{25}{5+s}$$

asymptoticGS[q_] :=
FullSimplify[
(Integrate[Integrate[Exp[-p2*y] * (Exp[-s2*x] - Exp[-p2*x]) * f1[x+y],
{x, 0, Infinity}], {y, 0, Infinity}] / (-lambda * Laplaceofdf1[s2] - c)) *
Exp[s2*q]]
asymptoticGS[1] // N
0.000511062
GerberShiu2[1]
0.00261204
K2[1]
0.0032657
psi2[1]
0.00366313

```

## Πίνακας 28

2) Για την κατανομή του ελλείματος και των προσεγγίσεών της για την μείξη Εκθετικών Κατανομών,

(\*Η κατανομή του ελλείματος G(u,y)\*)

```

G1[u_, y_] := Fe[y] * psi[u] + ((1 + theta) / theta) * (TailofFe[y] * psi[u] - psi[u + y]) +
((1 / (theta * m)) * (Integrate[psi[u + y - x] * TailofF[x], {x, 0, y}]))
G1[u, y]
G1[0.75, 0.5]

```

```

4.66667 (-0.00845314 e-6.67177 u-7. y - 0.011583 e-5.16759 u-7. y - 0.0275809 e-1.82731 u-7. y +
0.00356724 e-6.67177 u-6.67177 y + 0.00413024 e-6.67177 u-6. y - 0.0254981 e-5.16759 u-6. y -
0.0341907 e-1.82731 u-6. y + 0.0272892 e-5.16759 u-5.16759 y + 0.00075565 e-6.67177 u-3. y +
0.00979192 e-5.16759 u-3. y - 0.121658 e-1.82731 u-3. y + 0.18343 e-1.82731 u-1.82731 y) +
0.037037 e-7 y (0.00832372 e-6.67177 u + 0.0636746 e-5.16759 u + 0.428002 e-1.82731 u)
(-6 - 7 ey - 14 e4 y + 27 e7 y) +
2 (-0.00832372 e-6.67177 (u+y) - 0.0636746 e-5.16759 (u+y) - 0.428002 e-1.82731 (u+y) +
(0.00832372 e-6.67177 u + 0.0636746 e-5.16759 u + 0.428002 e-1.82731 u)
(1 - 0.037037 e-7 y (-6 - 7 ey - 14 e4 y + 27 e7 y)))

```

0.0898574

```

j[u_, y_] := ((1 + theta) / theta) * ((psi[u + y] / psi[u]) - psi[y])
j[u, y]
j[0.1, 0.1]
0.816532

```

## Πίνακας 29



Gu1[u\_, y\_] := G1[u, y] / psi[u]  
 Gu1[0.1, 0.5]

0.850647

TailofGu1[u\_, y\_] := 1 - Gu1[u, y]  
 TailofGu1[0.75, 0.5]

0.183725

(\*Η κατανομή του ελλείματος G(u,y) με την προσέγγιση Tijms\*)

G2[u\_, y\_] :=  
 (Fe[y] \* psi[u]) + ((1 + theta) / theta) \* ((TailofFe[y] \* psi[u]) - psi[u + y]) +  
 ((1 / (theta \* m)) \* (Integrate[psiTijms[u + y - x] \* Tailoff[x], {x, 0, y}]))  
 G2[u, y]  
 G2[0.75, 0.5]

4.66667 (-0.0141624 e<sup>-5.30538 u-7. y</sup> - 0.0275808 e<sup>-1.82731 u-7. y</sup> -  
 0.0345511 e<sup>-5.30538 u-6. y</sup> - 0.0341906 e<sup>-1.82731 u-6. y</sup> + 0.0383032 e<sup>-5.30538 u-5.30538 y</sup> +  
 0.0104103 e<sup>-5.30538 u-3. y</sup> - 0.121658 e<sup>-1.82731 u-3. y</sup> + 0.183429 e<sup>-1.82731 u-1.82731 y</sup>) +  
 0.037037 e<sup>-7 y</sup> (0.00832372 e<sup>-6.67177 u</sup> + 0.0636746 e<sup>-5.16759 u</sup> + 0.428002 e<sup>-1.82731 u</sup>)  
 (-6 - 7 e<sup>y</sup> - 14 e<sup>4 y</sup> + 27 e<sup>7 y</sup>) +  
 2 (-0.00832372 e<sup>-6.67177 (u+y)</sup> - 0.0636746 e<sup>-5.16759 (u+y)</sup> - 0.428002 e<sup>-1.82731 (u+y)</sup> +  
 (0.00832372 e<sup>-6.67177 u</sup> + 0.0636746 e<sup>-5.16759 u</sup> + 0.428002 e<sup>-1.82731 u</sup>)  
 (1 - 0.037037 e<sup>-7 y</sup> (-6 - 7 e<sup>y</sup> - 14 e<sup>4 y</sup> + 27 e<sup>7 y</sup>)))

0.0898462

Gu2[u\_, y\_] := G2[u, y] / psi[u]  
 Gu2[u, y]  
 Gu2[0.1, 0.1]

(4.66667 (-0.0141624 e<sup>-5.30538 u-7. y</sup> - 0.0275808 e<sup>-1.82731 u-7. y</sup> -  
 0.0345511 e<sup>-5.30538 u-6. y</sup> - 0.0341906 e<sup>-1.82731 u-6. y</sup> + 0.0383032 e<sup>-5.30538 u-5.30538 y</sup> +  
 0.0104103 e<sup>-5.30538 u-3. y</sup> - 0.121658 e<sup>-1.82731 u-3. y</sup> + 0.183429 e<sup>-1.82731 u-1.82731 y</sup>) +  
 0.037037 e<sup>-7 y</sup> (0.00832372 e<sup>-6.67177 u</sup> + 0.0636746 e<sup>-5.16759 u</sup> + 0.428002 e<sup>-1.82731 u</sup>)  
 (-6 - 7 e<sup>y</sup> - 14 e<sup>4 y</sup> + 27 e<sup>7 y</sup>) +  
 2 (-0.00832372 e<sup>-6.67177 (u+y)</sup> - 0.0636746 e<sup>-5.16759 (u+y)</sup> - 0.428002 e<sup>-1.82731 (u+y)</sup> +  
 (0.00832372 e<sup>-6.67177 u</sup> + 0.0636746 e<sup>-5.16759 u</sup> + 0.428002 e<sup>-1.82731 u</sup>)  
 (1 - 0.037037 e<sup>-7 y</sup> (-6 - 7 e<sup>y</sup> - 14 e<sup>4 y</sup> + 27 e<sup>7 y</sup>))) /  
 (0.00832372 e<sup>-6.67177 u</sup> + 0.0636746 e<sup>-5.16759 u</sup> + 0.428002 e<sup>-1.82731 u</sup>)

0.346427

TailofGu2[u\_, y\_] := 1 - Gu2[u, y]  
 TailofGu2[u, y]  
 TailofGu2[0.75, 0.5]

1 - (4.66667 (-0.0141624 e<sup>-5.30538 u-7. y</sup> - 0.0275808 e<sup>-1.82731 u-7. y</sup> -  
 0.0345511 e<sup>-5.30538 u-6. y</sup> - 0.0341906 e<sup>-1.82731 u-6. y</sup> + 0.0383032 e<sup>-5.30538 u-5.30538 y</sup> +  
 0.0104103 e<sup>-5.30538 u-3. y</sup> - 0.121658 e<sup>-1.82731 u-3. y</sup> + 0.183429 e<sup>-1.82731 u-1.82731 y</sup>) +  
 0.037037 e<sup>-7 y</sup> (0.00832372 e<sup>-6.67177 u</sup> + 0.0636746 e<sup>-5.16759 u</sup> + 0.428002 e<sup>-1.82731 u</sup>)  
 (-6 - 7 e<sup>y</sup> - 14 e<sup>4 y</sup> + 27 e<sup>7 y</sup>) +  
 2 (-0.00832372 e<sup>-6.67177 (u+y)</sup> - 0.0636746 e<sup>-5.16759 (u+y)</sup> - 0.428002 e<sup>-1.82731 (u+y)</sup> +  
 (0.00832372 e<sup>-6.67177 u</sup> + 0.0636746 e<sup>-5.16759 u</sup> + 0.428002 e<sup>-1.82731 u</sup>)  
 (1 - 0.037037 e<sup>-7 y</sup> (-6 - 7 e<sup>y</sup> - 14 e<sup>4 y</sup> + 27 e<sup>7 y</sup>))) /  
 (0.00832372 e<sup>-6.67177 u</sup> + 0.0636746 e<sup>-5.16759 u</sup> + 0.428002 e<sup>-1.82731 u</sup>)

0.183827

## Πίνακας 30

```

(*Η κατανομή του ελλείματος G(u,y) με προσέγγιση Cramer*)
G3[u_, y_] :=
  (Fe[y] * psi[u]) + ((1 + theta) / theta) * ((TailofFe[y] * psi[u]) - psi[u + y]) +
  ((1 / (theta * m)) * (Integrate[psiCram[u + y - x] * TailofF[x], {x, 0, y}]))
G3[u, y]
G3[0.75, 0.5]
0.037037 e-7y (0.00832372 e-6.67177u + 0.0636746 e-5.16759u + 0.428002 e-1.82731u)
  (-6 - 7 ey - 14 e4y + 27 e7y) + 4.66667 e-1.82731u-16.y
  (-0.0275808 e9.y - 0.0341906 e10.y - 0.121658 e13.y + 0.183429 e14.1727y) +
  2 (-0.00832372 e-6.67177(u+y) - 0.0636746 e-5.16759(u+y) - 0.428002 e-1.82731(u+y) +
  (0.00832372 e-6.67177u + 0.0636746 e-5.16759u + 0.428002 e-1.82731u)
  (1 - 0.037037 e-7y (-6 - 7 ey - 14 e4y + 27 e7y)))
0.0895954

Gu3[u_, y_] := G3[u, y] / psi[u]
Gu3[u, y]
Gu3[0.5, 0.1]
(*Δεξιά ουρά Cramer*)
TailofGu3[u_, y_] := 1 - Gu3[u, y]
TailofGu3[u, y]
TailofGu3[0.10, 0.25]
(0.037037 e-7y (0.00832372 e-6.67177u + 0.0636746 e-5.16759u + 0.428002 e-1.82731u)
  (-6 - 7 ey - 14 e4y + 27 e7y) + 4.66667 e-1.82731u-16.y
  (-0.0275808 e9.y - 0.0341906 e10.y - 0.121658 e13.y + 0.183429 e14.1727y) +
  2 (-0.00832372 e-6.67177(u+y) - 0.0636746 e-5.16759(u+y) - 0.428002 e-1.82731(u+y) +
  (0.00832372 e-6.67177u + 0.0636746 e-5.16759u + 0.428002 e-1.82731u)
  (1 - 0.037037 e-7y (-6 - 7 ey - 14 e4y + 27 e7y))) /
  (0.00832372 e-6.67177u + 0.0636746 e-5.16759u + 0.428002 e-1.82731u)
0.304581
1 - (0.037037 e-7y (0.00832372 e-6.67177u + 0.0636746 e-5.16759u + 0.428002 e-1.82731u)
  (-6 - 7 ey - 14 e4y + 27 e7y) + 4.66667 e-1.82731u-16.y
  (-0.0275808 e9.y - 0.0341906 e10.y - 0.121658 e13.y + 0.183429 e14.1727y) +
  2 (-0.00832372 e-6.67177(u+y) - 0.0636746 e-5.16759(u+y) - 0.428002 e-1.82731(u+y) +
  (0.00832372 e-6.67177u + 0.0636746 e-5.16759u + 0.428002 e-1.82731u)
  (1 - 0.037037 e-7y (-6 - 7 ey - 14 e4y + 27 e7y))) /
  (0.00832372 e-6.67177u + 0.0636746 e-5.16759u + 0.428002 e-1.82731u)
0.396268

```

### Πίνακας 31

## Κεφάλαιο 4

Για την Αριθμητική Εφαρμογή της Μείξης 3 Εκθετικών, εκτελέσαμε τις παρακάτω εντολές:

```
DiffusionMixExponential.nb - Wolfram Player
File Edit Window Help
WOLFRAM Player | Find | 100%
(*Mixture 3 Exponentials*)
c = 2
σ = 1
2
1

f[x_] := (1/3) * (3 * Exp[-3 * x]) + (1/3) * (6 * Exp[-6 * x]) + (1/3) * (7 * Exp[-7 * x])
f[x]

$$\frac{7 e^{-7x}}{3} + 2 e^{-6x} + e^{-3x}$$


F[x_] := Integrate[f[y], {y, 0, x}]
F[x]

$$\frac{1}{3} e^{-7x} (-1 - e^x - e^{4x} + 3 e^{7x})$$


q1 = 1 / 3

$$\frac{1}{3}$$


q2 = 1 / 3

$$\frac{1}{3}$$


q3 = 1 - q1 - q2

$$\frac{1}{3}$$


q1 + q2 + q3
1
```

Πίνακας 32

```

c1 = 3
3

c2 = 6
6

c3 = 7
7

z = (2 * c) / (σ^2)
4

h1[x_] := z * Exp[-z * x]
h1[x]
4 e-4x

H1[x_] := 1 - Exp[-z * x]
H1[x]
1 - e-4x

TailofH1[x] := 1 - H1[x]
TailofH1[x]
e-4x

TailofF[x_] := 1 - F[x]
TailofF[x]
1 - F[x]

Fe[x_] := Integrate[TailofF[y], {y, 0, x}] / m
Fe[x]
 $\frac{1}{27} e^{-7x} (-6 - 7 e^x - 14 e^{4x} + 27 e^{7x})$ 

fe[x_] := D[Fe[x], x]
fe[x]
 $-\frac{7}{27} e^{-7x} (-6 - 7 e^x - 14 e^{4x} + 27 e^{7x}) + \frac{1}{27} e^{-7x} (-7 e^x - 56 e^{4x} + 189 e^{7x})$ 

TailofFe[x_] := 1 - Fe[x]
TailofFe[x]
 $1 - \frac{1}{27} e^{-7x} (-6 - 7 e^x - 14 e^{4x} + 27 e^{7x})$ 

```

### Πίνακας 33

q = theta / (1 + theta) // N

0.892857

NSolve[lambda \* ((q1 / (c1 - r)) + (q2 / (c2 - r)) + (q3 / (c3 - r))) + (sigma^2 / 2) \* r == c]  
{ {r -> 7.25909}, {r -> 6.23062}, {r -> 4.0592}, {r -> 2.45108} }

r1 = 2.45108

2.45108

r2 = 4.0592

4.0592

r3 = 6.23062

6.23062

r4 = 7.25909

7.25909

C1 = ((r1 - c1) / c1) \* ((r1 - c2) / c2) \* ((r1 - c3) / c3) \* (r2 / (r1 - r2)) \*  
(r3 / (r1 - r3)) \* (r4 / (r1 - r4))

0.441849

C2 = ((r2 - c1) / c1) \* ((r2 - c2) / c2) \* ((r2 - c3) / c3) \* (r1 / (r2 - r1)) \*  
(r3 / (r2 - r3)) \* (r4 / (r2 - r4))

0.476022

C3 = ((r3 - c1) / c1) \* ((r3 - c2) / c2) \* ((r3 - c3) / c3) \* (r1 / (r3 - r1)) \*  
(r2 / (r3 - r2)) \* (r4 / (r3 - r4))

0.0389277

C4 = ((r4 - c1) / c1) \* ((r4 - c2) / c2) \* ((r4 - c3) / c3) \* (r1 / (r4 - r1)) \*  
(r2 / (r4 - r2)) \* (r3 / (r4 - r3))

0.0432007

psi[u\_] := C1 \* Exp[-r1 \* u] + C2 \* Exp[-r2 \* u] + C3 \* Exp[-r3 \* u] + C4 \* Exp[-r4 \* u]

psi[u]

0.0432007 e<sup>-7.25909 u</sup> + 0.0389277 e<sup>-6.23062 u</sup> + 0.476022 e<sup>-4.0592 u</sup> + 0.441849 e<sup>-2.45108 u</sup>

Cd1 = (r1 / (z \* q)) \* C1

0.303242

### Πίνακας 34

```

Cd2 = (r2 / (z * q)) * C2
0.541036

Cd3 = (r3 / (z * q)) * C3
0.0679123

Cd4 = (r4 / (z * q)) * C4
0.0878074

psid[u_] := Cd1 * Exp[-r1 * u] + Cd2 * Exp[-r2 * u] + Cd3 * Exp[-r3 * u] + Cd4 * Exp[-r4 * u]
psid[u]
0.0878074 e-7.25909 u + 0.0679123 e-6.23062 u + 0.541036 e-4.0592 u + 0.303242 e-2.45108 u

pososto[u_] := psid[u] / psi[u]

pososto[5]
0.586831

(*Tijms Methodos*)
h1fe[u_] := Integrate[h1[u - y] * fe[y], {y, 0, u}]
h1fe[u]
 $\frac{28}{27} e^{-7u} (-2 - 3 e^u - e^{3u} + 6 e^{4u})$ 

Cd = Integrate[(Exp[r1 * x] * TailofH1[x]), {x, 0, Infinity}] /
((1 - q) * (Integrate[x * (Exp[r1 * x] * h1fe[x]), {x, 0, Infinity}]))
0.303243

H1Fe[u_] := Integrate[H1[u - y] * fe[y], {y, 0, u}]
H1Fe[u]
 $\frac{1}{27} e^{-7u} (8 + 14 e^u + 7 e^{3u} - 56 e^{4u} + 27 e^{7u})$ 

TailofH1Fe[u_] := 1 - H1Fe[u]
TailofH1Fe[u]
 $1 - \frac{1}{27} e^{-7u} (8 + 14 e^u + 7 e^{3u} - 56 e^{4u} + 27 e^{7u})$ 

```

### Πίνακας 35

```

Cs = Integrate[ (Exp[r1 * x] * ((1 - q) * (H1[x] - H1Fe[x]))), {x, 0, Infinity}] /
  ((1 - q) * (Integrate[x * (Exp[r1 * x] * h1fe[x]), {x, 0, Infinity}])))
0.138607

```

```

Cramer = Cs + Cd
0.44185

```

```

psiCramer[u_] := Cramer * Exp[-r1 * u]
psiCramer[0.1]
0.345801

```

```

psiCramerd[u_] := Cd * Exp[-r1 * u]
psiCramerd[u]
0.303243 e-2.45188 u

```

```

pososto5[u_] := psiCramerd[u] / psiCramer[u]
pososto5[u]
0.686304

```

```

soreytikiapolia =
  ((σ2) / (2 * c)) + ((lambda * m) * (((σ2) / (2 * c)) + ((m2) / (2 * m)))) /
  (c * (1 - ((lambda / c) * m))) // N
0.309735

```

```

S = (r1 * (1 - Cramer)) / ((r1 * soreytikiapolia) - Cramer)
4.3111

```

```

psiTijms[u_] := Cramer * Exp[-r1 * u] + (1 - Cramer) * Exp[-S * u]
psiTijms[1]
0.0455773

```

```

pososto2[u_] := psi[u] / psiTijms[u]
pososto2[5]
1.00023

```

### Πίνακας 36

```

(*De Vylde*)
m3 // N
0.0891642

m4 = Integrate[(x^4) * f[x], {x, 0, Infinity}] // N
0.10827

b2 = 4 * (m3 / m4)
3.29414

lambda2 = 32 * (lambda * ((m3^4) / (3 * (m4^3))))
0.531208

ce2 = 8 * (lambda * ((m3^3) / (3 * (m4^2)))) + c - (lambda * m)
1.94697

sigma2 = sigma^2 + (lambda * m2) - (4 * (lambda * ((m3^2) / (3 * m4))))
1.00829

NSolve[(((sigma2 / 2) * k) + (lambda2 / (b2 - k)) = ce2]
({k -> 4.64305}, {k -> 2.51301})

k1 = 2.51301
2.51301

k2 = 4.64305
4.64305

C1 = ((k1 - b2) / b2) * (k2 / (k1 - k2))
0.516887

C2 = ((k2 - b2) / b2) * (k1 / (k2 - k1))
0.483113

psidv[u_] := C1 * Exp[-k1 * u] + C2 * Exp[-k2 * u]
psidv[u]
0.476022 e-4.64305 u + 0.441849 e-2.51301 u

pososto3[u_] := psi[u] / psidv[u]
pososto3[5]
1.36333

```

### Πίνακας 37



```

(*Due to Oscillation DeVlylder*)
qe2 = 1 - ((lambda2 / ce2) * (1 / b2)) // N
0.917175

z2 = 2 * (c2 / sigma2) // N
11.9013

Cdv1 = (k1 / (q2 * z2)) * C1
0.279895

Cdv2 = (k2 / (q2 * z2)) * C2
0.55713

psidvdiff[u_] := Cdv1 * Exp[-k1 * u] + Cdv2 * Exp[-k2 * u]
psidvdiff[5]
9.77424 * 10^-7

pososto6[u_] := psidvdiff[u] / psidv[u]
pososto6[5]
0.633475

(*Η πιθανότητα χρεοκοπίας εξαιτίας έλευσης ζημιάς μέσω DeVlylder*)
psidvclaims[u_] := psidv[u] - psidvdiff[u]
psidvclaims[1]
0.0123413

(*Beekman-Bowers*)
Clear[a1, b1]
H3[u_] := Integrate[ ((b1^a1) * (x^(a1 - 1)) * Exp[-(b1) * x]) / ((a1 - 1)!),
{x, 0, u}, Assumptions -> Re[a1] > 0]
H3[u]

$$\frac{b1^{a1} u^{a1} (b1 u)^{-a1} (\text{Gamma}[a1] - \text{Gamma}[a1, b1 u])}{(-1 + a1)!}$$

h1H3[u_] := Integrate[h1[u - y] * H3[y], {y, 0, u}]
h1H3[u]
ConditionalExpression[

$$\frac{1}{\text{Gamma}[3 + a1]} (-4 + b1)^{-a1} e^{-4u} \left( (-b1^{a1} + (-4 + b1)^{a1} e^{4u}) \text{Gamma}[3 + a1] + \right.$$


$$\left. a1 (1 + a1) (2 + a1) (b1^{a1} \text{Gamma}[a1, (-4 + b1) u] - (-4 + b1)^{a1} e^{4u} \text{Gamma}[a1, b1 u]) \right),$$

Re[a1] > -1 && u > 0]
Deltabb[u_] := q * H1[u] + ((1 - q) * (h1H3[u]))
Deltabb[0.1]
ConditionalExpression[0.294357 + 0.107143 (1. +

$$\frac{-1. \text{Gamma}[a1, 0.1 b1] + 0.67032 (-4. + b1)^{-1. a1} b1^{a1} \text{Gamma}[0. + 1. a1, -0.4 + 0.1 b1]}{\text{Gamma}[a1]}),$$

Re[a1] >
0]

```

### Πίνακας 38

1 - Deltabb[1]

ConditionalExpression[0.123496 -

$$\frac{0.107143 \left( \Gamma[a1] + \frac{(-4+b1)^{-a1} b1^{a1} (-\Gamma[a1+\Gamma[a1,-4+b1]] - \Gamma[a1, b1])}{e^4} - \Gamma[a1, b1] \right)}{\Gamma[a1]}, \text{Re}[a1] > -1]$$

Laplaceh1[s\_] := (z / (z + s))

Laplaceh1[s]

$$\frac{z}{z + s}$$

Laplaceh3[s\_] := (b1 / (b1 + s))^a1

Laplaceh3[s]

$$\left( \frac{b1}{b1 + s} \right)^{a1}$$

Eksisosi1[s\_] = (q \* Laplaceh1[s]) + (1 - q) \* (Laplaceh1[s] \* Laplaceh3[s])

Eksisosi1[s]

$$\frac{3.57143}{4 + s} + \frac{0.428571 \left( \frac{b1}{b1 + s} \right)^{a1}}{4 + s}$$

$$\frac{3.57143}{4 + s} + \frac{0.428571 \left( \frac{b1}{b1 + s} \right)^{a1}}{4 + s}$$

FirstDerivBB[0] = -(q / z) - (((1 - q) \* (b1 + (a1 \* z))) / (b1 \* z))

$$-0.223214 - \frac{0.0267857 (4 a1 + b1)}{b1}$$

protiparagagos[s\_] := Derivative[1][Eksisosi1][s]

protiparagagos[0]

$$-0.25 - \frac{0.107143 a1}{b1}$$

deyteriparagagos[s\_] := Derivative[2][Eksisosi1][s]

deyteriparagagos[0]

$$0.125 + \frac{0.214286 a1}{b1^2} + \frac{0.107143 (-1 + a1) a1}{b1^2} + \frac{0.0535714 a1}{b1}$$

FirstDerivBB[0] = -(q / z) - (((1 - q) \* (b1 + (a1 \* z))) / (b1 \* z))

$$-0.223214 - \frac{0.0267857 (4 a1 + b1)}{b1}$$

SecondDerivBB[0] =

$$\left( \frac{2q}{z^2} \right) + \left( \frac{(1 - q) * (2 * (b1)^2 + (2 * (a1 * (b1 * z))) + (a1 * ((1 + a1) * (z^2))))}{(b1^2 * (z^2))} \right) /$$

$$0.111607 + \frac{0.00669643 (16 a1 (1 + a1) + 8 a1 b1 + 2 b1^2)}{b1^2}$$

diakymansiklimakoton =

$$\left( \frac{\sigma^4}{4 * (c^2)} \right) + \left( (\lambda * m) * \left( \left( \frac{\sigma^2}{2 * c} \right) + \left( \frac{m2}{2 * m} \right) \right)^2 \right) /$$
$$\left( c * \left( 1 - \left( \frac{\lambda}{c} * m \right) \right)^2 \right) +$$
$$\left( \left( (\lambda * m) * \left( \frac{\sigma^4}{4 * (c^2)} \right) - \left( \frac{m2}{2 * m} \right)^2 + \left( \frac{m3}{3 * m} \right) \right) / \right.$$
$$\left. \left( c * \left( 1 - \left( \frac{\lambda}{c} * m \right) \right) \right) \right)$$

0.0967003

deyteriopisoreytikh = diakymansiklimakoton + (soreytikiapolia)^2

0.192636

## Πίνακας 39

```
Solve[{-soreytikiapolia == protiparagogos[0],
      deyteriropisoreytikh == deyteriparagogos[0]}, {a1, b1}] // N
```

Solve::ratnz: Solve was unable to solve the system with inexact coefficients. The answer was obtained by solving a corresponding exact system and numericizing the result. >>

```
{ {a1 -> 7.46018, b1 -> 13.3808} }
```

```
a1 = 7.46018
```

```
7.46018
```

```
b1 = 13.3808
```

```
13.3808
```

```
H3[u]
```

```
1. - 0.00057741 Gamma[7.46018, 13.3808 u]
```

```
h1H3[u]
```

```
1. - 1. e-4u + e-4.u (-13.1473 + 0.00816881 Gamma[7.46018, 9.3808 u]) -
0.00057741 Gamma[7.46018, 13.3808 u]
```

```
Deltabb1[u_] := q * H1[u] + ((1 - q) * (h1H3[u]))
```

```
Deltabb1[u]
```

```
0.892857 (1 - e-4u) +
0.107143 (1. - 1. e-4u + e-4.u (-13.1473 + 0.00816881 Gamma[7.46018, 9.3808 u]) -
0.00057741 Gamma[7.46018, 13.3808 u])
```

```
psibb1[u_] := 1 - Deltabb1[u]
```

```
psibb1[u]
```

```
1 - 0.892857 (1 - e-4u) -
0.107143 (1. - 1. e-4u + e-4.u (-13.1473 + 0.00816881 Gamma[7.46018, 9.3808 u]) -
0.00057741 Gamma[7.46018, 13.3808 u])
```

## Πίνακας 40

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

### Ελληνική

Πολίτης, Κ.,(2017). Εισαγωγή στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου , Εκδόσεις Σταμούλη, Αθήνα, Β΄ Έκδοση.

Χρυσοφίνου Ο.(2011). Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίζεις , Εκδόσεις Πανεπιστημίου Αθηνών.

### Ξένη

Dickson, D.,1992.On the distribution of surplus prior to ruin. Insurance: Mathematics & Economics 11, 191-207.

Dufresne, F.,Gerber , H.U.,(1988). The probability and severity of ruin for combinations of exponential claim amount distributions and their translations, Insurance :Mathematics & Economics 7,75-80.

Dufresne, F.,Gerber, H.U., (1989).Three methods to calculate the probability of ruin, ASTIN Bulletin, 19,71-90

Dufresne, F. ,Gerber H.U.,(1991), Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion, Insurance: Mathematics & Economics 10 ,51-59

Gerber, H., Goovaerts, MJ, Kaas, R.(1987). On the probability and severity of ruin, Astin Bulletin 17, 151-163.

Gerber, H., Shiu, E.,(1998). On the time value of ruin, Actuarial Research Clearing House 145-149

Seixas, M.J , Dos Reis, A., (2012). Some simple and classical approximations to ruin probabilities applied to the perturbed model.Technical University of Lisboa.

Tsai, C. , Willmot, G.E, (2002). On the moments of the surplus process perturbed by diffusion, Insurance : Mathematics & Economics 31, 327-350.

Willmot, G.E., Woo, J.K., Surplus Analysis of Sparre Andersen Insurance Risk Process, Springer Actuarial, Chapters 2 & 3.

Willmot, G.E., Lin, X.S, Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications, Springer Actuarial.

Willmot, G.E., Lin, X.S., (1998). Exact and approximate properties of the distribution of surplus before and after ruin ,Insurance: Mathematics & Economics 23 , 91-110

Willmot,G.E., Lin, X.S., (1999) . Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory , Insurance : Mathematics & Economics 25 , 63-84