

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης

Π.Μ.Σ. στην “Αναλογιστική Επιστήμη και
Διοικητική Κινδύνου”

“Στοχαστική Βελτιστοποίηση Επενδυτικών
Στρατηγικών και Εφαρμογές
σε Συνταξιοδοτικά Σχήματα”

Κατσάρα Ι. Αικατερίνη

Διπλωματική Εργασία

Πειραιάς,

Μάιος 2020

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**SCHOOL OF FINANCE AND
STATISTICS**

**Department of Statistics and Insurance
Science**

M.Sc. in

“Actuarial Science and Risk Management”

**“Stochastic Optimal Investment Strategies
and
Applications in Pension Schemes”**

Katsara I. Aikaterini

Dissertation Thesis

Piraeus,

May 2020

*Στους γονείς μου,
Ιωάννη και Βασιλική*

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα επιθυμούσα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον κο Σεβρόγλου Βασίλειο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης και επιβλέποντα καθηγητή μου στην παρούσα διπλωματική εργασία για την πολύτιμη συνεισφορά του και τη σημαντική καθοδήγηση την οποία μου παρείχε έως την περάτωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας.

Παράλληλα θα ήθελα να ευχαριστήσω τον κο Αγιακλόγλου Χρήστο, Καθηγητή του Τμήματος Οικονομικής Επιστήμης, καθώς και την κα Βερροπούλου Γεωργία, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, για τη συμμετοχή τους στη τριμελή επιτροπή.

Τέλος, θα επιθυμούσα να ευχαριστήσω βαθύτατα και από καρδιάς την οικογένεια μου για την αμέριστη συμπαράσταση τους την οποία μου προσέφεραν όλα αυτά τα χρόνια κατά την διάρκεια των σπουδών μου.

Περίληψη

Στην παρούσα διπλωματική εργασία αναλύουμε τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο σε ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων εισφορών, εφαρμόζοντας τις τεχνικές του δυναμικού προγραμματισμού με απώτατο στόχο την εύρεση μίας βέλτιστης επενδυτικής στρατηγικής για το μέλος του σχήματος. Προβαίνουμε σε χρήση τόσο των ενδιάμεσων στόχων όσο και του τελικού στόχου της συνταξιοδότησης, ο οποίος είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με τον επιθυμητό καθαρό συντελεστή αναπλήρωσης. Επιπροσθέτως, λαμβάνουμε υπόψιν μας τον επενδυτικό κίνδυνο και τον κίνδυνο της προσόδου οι οποίοι αντιμετωπίζονται από το μέλος του συνταξιοδοτικού σχήματος βάσει των οποίων προχωρούμε σε πλήθος διαπιστώσεων. Τα κυριότερα συμπεράσματα στα οποία καταλήγουμε αναφέρονται στην καταλληλότητα και σπουδαιότητα της γνωστής επενδυτικής στρατηγικής του “*lifestyle*” και στην υψηλή μεταβλητότητα του επιπέδου της σύνταξης, το οποίο επιτυγχάνεται από τον ασφαλισμένο στην περίπτωση ενός μεταβλητού συντελεστή μετατροπής της προσόδου.

Abstract

In this thesis, we analyse the financial risk in a defined contribution pension scheme applying dynamic programming techniques with the ultimate goal of finding an optimal investment strategy for the scheme member. We make use of both the interim targets and a target at retirement, which is inextricably linked to the desired net replacement ratio. Furthermore, we take into account the investment risk and the annuitisation risk faced by the member of the pension scheme on the basis of which we make a number of findings. The main conclusions we draw on relate to the appropriateness and importance of the so-called “lifestyle” investment strategy and the large variability of the level of pension achieved by the insured in the event of a variable annuity conversion rate.

Εισαγωγή

Η εξασφάλιση της διαβίωσης ενός ατόμου όταν παύσει η κύρια πηγή εισοδήματός του, πραγματοποιείται μέσω της μορφής της σύνταξης. Η σύνταξη αποτελεί το εισόδημα το οποίο χορηγείται στο άτομο στην περίπτωση που επέλθει η περάτωση του εργασιακού του βίου. Με την αρωγή ενός ασφαλιστικού συστήματος διαμέσου της παροχής της σύνταξης, μετριάζονται και αντιμετωπίζονται οι κίνδυνοι όπως και το αίσθημα της αβεβαιότητας, στοιχεία τα οποία χαρακτηρίζουν το άτομο. Ένα ασφαλιστικό σύστημα προσφέρει ορισμένα συνταξιοδοτικά ασφαλιστικά προγράμματα, τα καθορισμένων εισφορών (*defined contribution, DC*), τα καθορισμένων παροχών (*defined benefit, DB*) ή συνδυασμό τους, τα οποία καλούνται υβριδικά (*hybrids*).

Στην περίπτωση των συνταξιοδοτικών προγραμμάτων/σχημάτων καθορισμένης εισφοράς δεν προσδιορίζεται εξ αρχής το ύψος της παροχής της σύνταξης που θα χορηγηθεί στο μέλος, αλλά εξαρτάται από την επιτυχία των επενδυτικών επιλογών του σχήματος. Αντιθέτως, στα καθορισμένων παροχής αναλαμβάνεται εξ αρχής και με ρητή δέσμευση το ποσό της παροχής στον ασφαλισμένο το οποίο είναι γνωστό εκ των προτέρων. Οι συγκεκριμένες μορφές πλάνων έχουν μελετηθεί εκτενώς στο αναλογιστικό πλαίσιο, καθώς παρά τα οφέλη που προσφέρουν ενέχουν και εκείνα με τη σειρά τους πλήθος κινδύνων. Η πολυεπίπεδη και δυναμική φύση των προβλημάτων των συγκεκριμένων σχημάτων προσεγγίζεται και επιλύεται με χρήση της θεωρίας ελέγχου και του δυναμικού προγραμματισμού.

Οι Haberman και Sung το 1994 [19], ανέλυσαν δύο είδη κινδύνων σε ένα σχήμα καθορισμένων παροχών. Ο πρώτος αναφερόταν στον κίνδυνο του ποσοστού εισφοράς, σε σχέση με τη σταθερότητα του ποσοστού κατά την πάροδο του χρόνου και ο δεύτερος στη φερεγγυότητα, συνυφασμένος με την ασφάλεια του κεφαλαίου. Μελέτησαν ένα μοντέλο διακριτού χρόνου παράγοντας ετήσιους στόχους άρρηκτα συνδεδεμένους τόσο με το κεφάλαιο όσο και με το ποσοστό της εισφοράς. Εφάρμοσαν ένα κριτήριο τετραγωνικής απόδοσης μέσω του οποίου συνέδεσαν τον κίνδυνο της εισφοράς και της φερεγγυότητας με το τετράγωνο της διαφοράς ανάμεσα στο πραγματικό ποσοστό εισφοράς ή στο κεφάλαιο με τους αντίστοιχους στόχους. Το κριτήριο που εισήγαγαν παρουσιάζεται μέσω της μαθηματικής έκφρασης

$$J_t = \sum_{t=s}^{T-1} v^t [(C_t - CT_t)^2 + v\beta(F_{t+1} - FT_{t+1})^2],$$

στην οποία ο κίνδυνος του ποσοστού εισφοράς δίδεται από τον όρο $(C_t - CT_t)^2$ και της φερεγγυότητας μέσω του $(F_{t+1} - FT_{t+1})^2$. Ο συντελεστής β αντικατοπτρίζει τη σχετική σημασία του κινδύνου φερεγγυότητας όσον αφορά το ποσοστό εισφοράς και

ο v αποτελεί το συντελεστή προεξόφλησης. Προέβησαν σε χρήση της θεωρίας ελέγχου για την εύρεση βέλτιστων ποσοστών εισφοράς $\{C_s, C_{s+1}, \dots, C_{T-1}\}$ που ελαχιστοποιούν τη συνάρτηση του κριτηρίου J_T . Ακόμη, επιλύσαν το πρόβλημα σε στοχαστικό περιβάλλον λαμβάνοντας ως δεδομένο ανεξάρτητα και ισόνομα ποσοστά αποδόσεων.

Ο Cairns το 1997 [15], έθεσε μία συνάρτηση απώλειας η οποία γενικεύει σε συνεχή χρονικό ορίζοντα το κόστος του κεφαλαίου στο οποίο κατέληξαν οι Haberman και Sung σε διακριτό. Θεώρησε ότι οι τιμές δύο επικίνδυνων περιουσιακών στοιχείων ακολουθούν τη γεωμετρική κίνηση Brown στο μοντέλο το οποίο δημιούργησε. Τα επικίνδυνα περιουσιακά στοιχεία επιλέχθηκαν καθώς τα συνταξιοδοτικά ταμεία στην πραγματικότητα προτιμούν τη μορφή των μετρητών για βραχυπρόθεσμη ρευστότητα, παρά τα επενδυτικά περιουσιακά στοιχεία. Στόχος του ήταν η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης J_t που έθεσαν οι προαναφερόμενοι, εφαρμόζοντας την στη στοχαστική περίπτωση όπου οι στοχαστικές διαδικασίες δίνουν το ποσοστό της εισφοράς και το ποσοστό της επένδυσης στο πιο επικίνδυνο στοιχείο. Στην έρευνα του ελαχιστοποίησε την ακόλουθη μορφή

$$V(t, x)(C, p) = E \left[\int_t^\infty \exp(-\beta s) L(s, C(s, X(s)), X(s)) ds \mid X(t) = x \right],$$

στην οποία με $C(t, X(t))$ παριστάνεται η στοχαστική διαδικασία που αναφέρεται στο ποσοστό εισφοράς και με $p(t, X(t))$ η διαδικασία που δίδει το ποσοστό του κεφαλαίου το οποίο επενδύεται στο πιο επικίνδυνο περιουσιακό στοιχείο. Μέσω του δυναμικού προγραμματισμού σε συνεχή χρόνο, δηλαδή μέσω των εξισώσεων Hamilton-Jacobi-Bellman κατέληξε σε ένα βέλτιστο συνδυασμό που υποδεικνύει πως τόσο το βέλτιστο ποσοστό εισφοράς, όσο και η κατανομή των στοιχείων ελαττώνονται γραμμικά σε σύγκριση με το ύψος του κεφαλαίου.

Ο Owadally το 1998 [27], εξέτασε ένα πιο διευρυμένο μοντέλο με θεμέλια το έργο των Haberman και Sung. Το διακριτό μοντέλο που μελέτησε, αναφέρεται στην ελαχιστοποίηση των αποκλίσεων του πραγματικού κεφαλαίου με το πραγματικό ποσοστό εισφοράς. Το καινοτόμο στοιχείο που εισήγαγε, εντοπίζεται στην δυνατότητα της επένδυσης του χαρτοφυλακίου μόνο σε δύο περιουσιακά στοιχεία, ένα ακίνδυνο και ένα επικίνδυνο. Παρουσίασε μία εξίσωση ανάπτυξης του κεφαλαίου και έθεσε ως βασικό στόχο την ελαχιστοποίηση του προεξοφλημένου μελλοντικού κόστους από τη στιγμή που ο ασφαλισμένος εισέρχεται στο σχήμα ($t = 0$) έως τη συνταξιοδότηση του ($t = N$). Θεώρησε το ποσοστό εισφοράς c_t και το μερίδιο του χαρτοφυλακίου που επενδύεται στο επικίνδυνο περιουσιακό στοιχείο y_t κατά το χρονικό διάστημα $(t, t + 1)$ και έθεσε το πρόβλημα της εύρεσης του συνόλου των $\{c_t, y_t\}$ για κάθε χρονική στιγμή t ($t = 0, 1, \dots, N - 1$), μέσω του οποίου ελαχιστοποιείται στο χρόνο 0

το μελλοντικό αναμενόμενο κόστος C . Η εξίσωση του κόστους που χρησιμοποίησε είχε τη μορφή

$$C = \sum_{t=1}^N \beta^t C_t,$$

όπου ο στόχος της εισφοράς C_t , προκύπτει μέσω της σχέσης

$$C_t = \sum_{t=1}^N [\theta_1 (f_t - F_t)^2 + \theta_2 (c_t - C_t)^2].$$

Ο όρος F_t παριστάνει το στόχο του κεφαλαίου και τα θ_1, θ_2 αποτελούν τα βάρη του κινδύνου φερεγγυότητας και της εισφοράς αντίστοιχα. Εφαρμόζοντας το βέλτιστο αξίωμα του Bellman, κατέληξε σε μία κλειστή φόρμουλα του βέλτιστου ποσοστού εισφοράς και του βέλτιστου μεριδίου επένδυσης του χαρτοφυλακίου στο επικίνδυνο περιουσιακό στοιχείο. Το βασικό αποτέλεσμα που πάρθηκε αναφέρει πως το ποσοστό του επενδυμένου κεφαλαίου στο επικίνδυνο περιουσιακό στοιχείο ελαττώνεται όσο αυξάνεται το κεφάλαιο, γεγονός που επιβεβαιώνει πως στα σχήματα καθορισμένων παροχών ένα πλεόνασμα ενδεχομένως να είναι τόσο ανεπιθύμητο όσο το έλλειμα. Όταν λοιπόν επιτευχθεί ο στόχος, ο οποίος πιθανό να έγκειται στην αναλογιστική υποχρέωση, η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική απαιτεί την διατήρηση του συγκεκριμένου στόχου.

Στο παρόν εγχειρίδιο, μελετάμε τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο ενός συνταξιοδοτικού σχήματος καθορισμένων εισφορών σε δύο συνιστώσες. Την πρώτη την εντοπίζουμε στον επενδυτικό κίνδυνο που αντιμετωπίζει το μέλος κατά τη διάρκεια της περιόδου συσσώρευσης και τη δεύτερη στον κίνδυνο της προσόδου, όταν δηλαδή εκείνη αποκτάται από τον ασφαλισμένο κατά τη συνταξιοδότηση του. Κατασκευάζουμε ένα μοντέλο μέσω του οποίου μας παρέχεται η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική, με στόχο την ελάττωση του επενδυτικού κινδύνου. Χρησιμοποιούμε τα μαθηματικά εργαλεία του δυναμικού προγραμματισμού που εφαρμόζονται από τους αναλογιστές στα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων παροχών, για τον έλεγχο της αφερεγγυότητας και της αστάθειας του συντελεστή εισφορών. Ακολούθως, ορίζουμε μία κλειστή φόρμουλα την οποία εφαρμόζουμε σε ρεαλιστικά σενάρια καταλήγοντας σε σημαντικά αποτελέσματα. Επιπροσθέτως, αναλύουμε τον κίνδυνο της προσόδου εξετάζοντας τη διαφορά του ποσού της σύνταξης που επιτυγχάνεται, με χρήση ενός σταθερού συντελεστή μετατροπής και εκείνου του ποσού που προκύπτει μέσω ενός μεταβλητού ποσοστού μετατροπής βασισμένο στις εμπειρικές αποδόσεις πριν τη συνταξιοδότηση.

Η διπλωματική εργασία διαρθρώνεται ως εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο παραθέτουμε τις βασικές χρηματοοικονομικές ράντες σε συνδυασμό πλήθους παραδειγμάτων με στόχο την καλύτερη κατανόηση τους. Ακολουθώντας, προχωρούμε στις ράντες ζωής και παρουσιάζουμε εκείνες που θα μας απασχολήσουν στο τελευταίο κεφάλαιο. Ακόμη, κάνουμε λόγο για την κατηγοριοποίηση των συνταξιοδοτικών σχημάτων και διερευνούμε τους κινδύνους ενός σχήματος καθορισμένων εισφορών μιας και θα αποτελέσει τη βάση του μοντέλου μας. Στο τέλος του συγκεκριμένου κεφαλαίου, εμφανίζονται σημαντικά εννοιολογικά στοιχεία για τον καθαρό συντελεστή αναπλήρωσης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο λαμβάνουν χώρα βασικές έννοιες και ορισμοί πιθανοτήτων και στοχαστικών διαδικασιών. Προβαίνουμε σε εκτενή ανάλυση των μαρκοβιανών αλυσίδων διακριτού χρόνου και των ιδιοτήτων τους. Επιπλέον, παραθέτουμε την κίνηση Brown και τις διακρίσεις της σε αριθμητική και γεωμετρική.

Στο τρίτο κεφάλαιο, κατασκευάζουμε το μαθηματικό μοντέλο σε διακριτό χρόνο και σε στοχαστικό περιβάλλον και θέτουμε τους τελικούς και ενδιάμεσους στόχους. Αφού εφαρμόσουμε τη θεωρία του δυναμικού προγραμματισμού, επιλύουμε το πρόβλημα και οδηγούμαστε στη βέλτιστη επενδυτική στρατηγική την οποία εφαρμόζουμε σε ρεαλιστικά δεδομένα υπό τις προϋποθέσεις επτά σεναρίων, δημιουργώντας πλήθος διαγραμμάτων με σκοπό την επεξήγηση της τάσης της. Επιπροσθέτως, αναλύουμε την ευαισθησία των παραμέτρων λαμβάνοντας υπόψιν μας κανονικές τιμές. Τέλος, διερευνούμε τον καθαρό συντελεστή αναπλήρωσης σε σχέση με το μαθηματικό μας μοντέλο.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Περίληψη	5
Εισαγωγή.....	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^ο : Ράντες Πληρωμών και Συνταξιοδοτικά Σχήματα.....	13
1.1 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί	13
1.2 Ληξιπρόθεσμες Ράντες	14
1.3 Προκαταβλητές Ράντες	16
1.4 Διηλεκτές Ράντες	18
1.5 Ράντες Ζωής	20
1.5.1 Ισόβια Προκαταβλητέα Ράντα Ζωής	21
1.5.2 Ισόβια Ληξιπρόθεσμη Ράντα Ζωής	23
1.6 Συνταξιοδοτικά Σχήματα	25
1.6.1 Κατηγοριοποίηση Συνταξιοδοτικών Σχημάτων	25
1.6.2 Κίνδυνοι Συνταξιοδοτικού Σχήματος Καθορισμένων Εισφορών	28
1.6.3 Καθαρός Συντελεστής Αναπλήρωσης	30
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο : Βασικές Μαθηματικές Έννοιες και Στοχαστικές Διαδικασίες.....	32
2.1 Βασικές Έννοιες Πιθανοτήτων	32
2.1.1 σ -Άλγεβρες.....	32
2.1.2 Παραγόμενη σ -Άλγεβρα	34
2.1.3 Χώρος Πιθανοτήτων.....	34
2.1.4 Σύνολα Borel.....	35
2.2 Στοχαστικές Διαδικασίες	36
2.3 Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου	38
2.3.1 Πιθανότητες Μεταβάσεων Καταστάσεων	39
2.3.2 Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov.....	42
2.3.3 Κατηγοριοποίηση Καταστάσεων	42
2.3.4 Οριακό Θεώρημα-Κατανομή Μόνιμης Κατάστασης	44
2.4 Τυχαίος Περίπατος	47
2.5 Κίνηση Brown.....	51

2.5.1 Αριθμητική Κίνηση Brown.....	54
2.5.2 Γεωμετρική Κίνηση Brown.....	60
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο : Στοχαστική Βελτιστοποίηση Επενδυτικών Στρατηγικών.....	64
3.1 Σύντομη Ιστορική Αναδρομή.....	64
3.2 Το Μαθηματικό Μοντέλο.....	65
3.3 Στόχος Κεφαλαίου.....	69
3.4 Ενδιάμεσοι Στόχοι.....	71
3.5 Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος.....	72
3.6 Το Βέλτιστο Αξίωμα του Bellman.....	74
3.7 Επίλυση του Προβλήματος του Δυναμικού Προγραμματισμού.....	77
3.8 Η Βέλτιστη Επενδυτική Στρατηγική y_t^*	83
3.8.1 Σχολιασμός της Βέλτιστης Επενδυτικής Στρατηγικής y_t^*	85
3.9 Γενικό Πλαίσιο και Παράμετροι των Βασικών Σεναρίων.....	88
3.9.1 Ανάλυση Αποτελεσμάτων βάσει δύο Διαφορετικών Οπτικών Γωνιών.....	91
3.10 Η Τάση της Βέλτιστης Επενδυτικής Στρατηγικής y_t^*	92
3.11 Η Ανάλυση Ευαισθησίας των Αποτελεσμάτων.....	106
3.12 Ο Καθαρός Συντελεστής Αναπλήρωσης του Μοντέλου.....	111
3.12.1 Επενδυτικός Κίνδυνος και Κίνδυνος Προσόδου.....	111
3.12.2 Ανάλυση Αποτελεσμάτων Αναμενόμενου και Εμπειρικού Καθαρού Συντελεστή Αναπλήρωσης σε σύγκριση με το Στόχο.....	116
Συμπεράσματα.....	129
Βιβλιογραφία.....	133
Παραρτήματα.....	136

Κεφάλαιο 1^ο

Ράντες Πληρωμών και Συνταξιοδοτικά Σχήματα

Στόχος του πρώτου κεφαλαίου αποτελεί η μελέτη τόσο των βέβαιων ραντών όσο και των ραντών ζωής. Παρουσιάζουμε βασικές έννοιες και τρόπους υπολογισμού των παρουσών και συσσωρευμένων αξιών των ραντών, καθώς συνιστούν ένα σημαντικό στοιχείο το οποίο χρησιμοποιούμε στη μεθοδολογία του τρίτου κεφαλαίου. Ακόμη, αναλύουμε τα είδη των συνταξιοδοτικών σχημάτων και δίδουμε ιδιαίτερη έμφαση σε εκείνο των καθορισμένων εισφορών, καθώς θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα σε όλη τη διάρκεια της μελέτης μας. Παραθέτουμε πλήθος παραδειγμάτων, όπου κρίνουμε σκόπιμο, με σκοπό την καλύτερη κατανόηση των εννοιών.

1.1 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

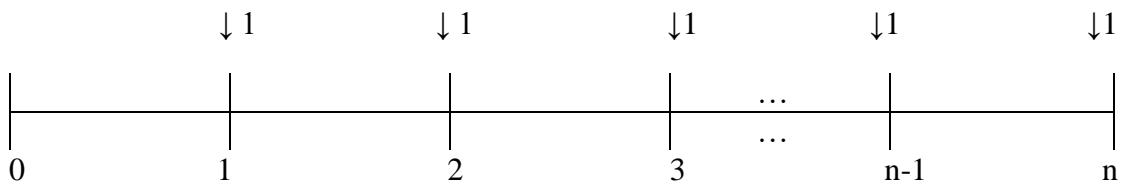
Μία ακολουθία χρηματικών ποσών (εισροών ή εκροών) οι οποίες λήγουν, δηλαδή εισπράττονται ή πληρώνονται, σε ισαπέχουσες μεταξύ τους χρονικές στιγμές ονομάζεται ράντα (*annuity ή rent*) ή χρηματική ροή ή σειρά πληρωμών [10]. Ο όρος ή η δόση (*rent*) μίας ράντας είναι το χρηματικό ποσό το οποίο καταβάλλεται σε ίσα χρονικά διαστήματα. Η χρονική στιγμή της κατάθεσης ή της καταβολής του όρου ονομάζεται λήξη του συγκεκριμένου όρου. Το χρονικό διάστημα το οποίο μεσολαβεί μεταξύ της καταβολής δύο διαδοχικών όρων καλείται περίοδος της ράντας και συνήθως μετριέται σε ακέραια μονάδα του χρόνου (μήνες ή έτη). Ο κάθε όρος της ράντας ανατοκίζεται με ένα προκαθορισμένο επιτόκιο i για τις επόμενες περιόδους. Η αρχή της πρώτης περιόδου της ράντας ονομάζεται αρχή της ράντας ενώ ως τέλος της ράντας καλείται το τέλος της περιόδου στην οποία πραγματοποιείται η τελευταία καταβολή του όρου. Οι ράντες των οποίων ο χρόνος καταβολής των όρων τους είναι μία απαριθμητή μεταβλητή ονομάζονται ασυνεχείς ενώ όταν η μεταβλητή είναι συνεχής χαρακτηρίζονται ως συνεχείς. Ακολούθως, παραθέτουμε τις κατηγορίες των ασυνεχών ραντών.

- **Πρόσκαιρες και διηνεκείς:** Οι πρόσκαιρες ράντες έχουν συγκεκριμένη διάρκεια η οποία είναι γνωστή εκ των προτέρων με πεπερασμένο πλήθος όρων ενώ οι διηνεκείς δεν τελειώνουν ποτέ, η δόση τους πληρώνεται για πάντα και έχουν άπειρο πλήθος όρων.
- **Ληξιπρόθεσμες και προκαταβλητέες:** Ληξιπρόθεσμες ράντες καλούνται εκείνες των οποίων οι όροι καταβάλλονται στο τέλος κάθε χρονικού διαστήματος δηλαδή κάθε περιόδου, ενώ προκαταβλητέες εκείνες των οποίων οι όροι καταβάλλονται στην αρχή.

- **Μεταβλητές και σταθερές:** Μεταβλητές ράντες καλούνται εκείνες των οποίων οι όροι τους μεταβάλλονται ενώ σταθερές όταν οι όροι τους είναι ίσοι. Στην ειδική περίπτωση που όλοι οι όροι της ράντας είναι ίσοι με τη μονάδα τότε η ράντα ονομάζεται μοναδιαία.
- **Άμεσες, μέλλουσες και αρξάμενες:** Άμεσες ράντες καλούνται εκείνες στις οποίες η καταβολή του πρώτου όρου πραγματοποιείται στην αρχή ή στο τέλος της πρώτης περιόδου, μέλλουσες ή επιβραδυνόμενες όταν η καταβολή γίνεται έπειτα από ένα ορισμένο πλήθος περιόδων, ενώ αρξάμενες όταν η καταβολή συμβαίνει πριν από ένα αριθμό περιόδων.
- **Ακέραιες και κλασματικές:** Ακέραιες ράντες καλούνται εκείνες στις οποίες η περίοδος τους ισούται με την περίοδο στην οποία αναφέρεται το επιτόκιο, ενώ κλασματικές ράντες εκείνες στις οποίες η περίοδος τους είναι μικρότερη από την περίοδο στην οποία αναφέρεται το επιτόκιο. Όταν η ράντα έχει περίοδο το έτος χαρακτηρίζεται ως ετήσια.
- **Βέβαιες και αβέβαιες:** Βέβαιες ράντες καλούνται εκείνες στις οποίες η καταβολή του κάθε όρου δεν εξαρτάται από την πραγματοποίηση ενός τυχαίου γεγονότος, ενώ στις αβέβαιες ράντες η καταβολή του κάθε όρου είναι άρρηκτα συνυφασμένη με την πραγματοποίηση του τυχαίου αυτού γεγονότος.

1.2 Ληξιπρόθεσμες Ράντες

Στην παρούσα υποενότητα θα παρουσιάσουμε μια άμεση ληξιπρόθεσμη ράντα (*ordinary annuity*) n -περιόδων στην οποία πραγματοποιούνται πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας στο τέλος της κάθε περιόδου. Απεικονίζουμε τις χρηματοροές της ράντας σε σχέση με το χρόνο δημιουργώντας την ακόλουθη γραφική παράσταση.



Διάγραμμα 1

Το πρώτο βέλος απεικονίζει την έναρξη της πρώτης περιόδου, στο τέλος της οποίας καταβάλλεται η πρώτη πληρωμή και το τελευταίο βέλος υποδεικνύει την τελευταία περίοδο αμέσως μετά την πληρωμή.

Η παρούσα αξία (*present value, PV*) της άμεσης ληξιπρόθεσμης ράντας διάρκειας n περιόδων συμβολίζεται $a_{\overline{n}|}$ και δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} a_{\overline{n}|} &= u + u^2 + u^3 \dots u^n = u(1 + u + u^2 + u^3 + \dots + u^{n-1}) \\ &= u \sum_{i=0}^{n-1} u^i = u \frac{1 - u^n}{1 - u} = u \frac{1 - u^n}{iu} = \frac{1 - u^n}{i} \\ \Rightarrow a_{\overline{n}|} &= \frac{1 - u^n}{i}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

όπου με i συμβολίζουμε το προκαθορισμένο επιτόκιο και με u τον συντελεστή προεξόφλησης για τον οποίο ισχύει ότι

$$u = \frac{1}{1 + i}. \quad (1.2)$$

Η συσσωρευμένη αξία ή μελλοντική αξία (*accumulated value, AV*) της άμεσης ληξιπρόθεσμης ράντας διάρκειας n περιόδων συμβολίζεται $S_{\overline{n}|}$ και υπολογίζεται βάσει του παρακάτω τύπου

$$\begin{aligned} S_{\overline{n}|} &= (1 + i)^{n-1} + (1 + i)^{n-2} + \dots + (1 + i) + 1 \\ &= 1 + (1 + i) + \dots + (1 + i)^{n-2} + (1 + i)^{n-1} \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (1 + i)^j = \frac{1 - (1 + i)^n}{1 - (1 + i)} = \frac{1 - (1 + i)^n}{-i} \\ \Rightarrow S_{\overline{n}|} &= \frac{(1 + i)^n - 1}{i}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Συχνά στους υπολογισμούς χρησιμοποιείται και ο αντίστροφος της συσσωρευμένης αξίας, δηλαδή

$$\frac{1}{S_{\overline{n}|}} = \frac{i}{(1 + i)^n - 1}. \quad (1.4)$$

Παράδειγμα 1.2.1

Θα υπολογίσουμε την παρούσα και τελική αξία μίας άμεσης ληξιπρόθεσμης ράντας, η οποία πληρώνει 1000€ τα οποία καταβάλλονται ετησίως για 10 χρόνια με επιτόκιο $i = 8\%$.

Η παρούσα αξία (PV) της ράντας υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.1), συνεπώς έχουμε

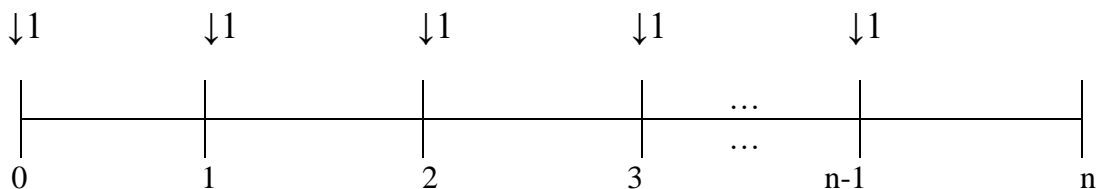
$$1000 a_{\overline{10}|} = 1000 * \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0,08}\right)^{10}}{0,08} = 1000 * \frac{1 - \frac{1}{1,08^{10}}}{0,08} = 6710,08€.$$

Η μελλοντική αξία (AV) της ράντας προκύπτει αντικαθιστώντας στον τύπο (1.3) τα δεδομένα μας, οπότε λαμβάνουμε

$$1000 S_{\overline{10}|} = 1000 * \frac{(1+0,08)^{10} - 1}{0,08} = 14486,56€.$$

1.3 Προκαταβλητές Ράντες

Στη συγκεκριμένη υποενότητα θα αναλύσουμε μία προκαταβλητέα ράντα (*annuity due*) στην οποία πραγματοποιούνται πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας στην αρχή της κάθε περιόδου. Απεικονίζουμε τις χρηματοροές οι οποίες αντιπροσωπεύουν τη ράντα σε σχέση με το χρόνο δημιουργώντας την ακόλουθη γραφική παράσταση.



Διάγραμμα 2

Με τη βοήθεια του πρώτου βέλους απεικονίζεται η έναρξη της πρώτης περιόδου στην οποία πραγματοποιείται η πληρωμή της πρώτης νομισματικής μονάδας και με το τελευταίο βέλος παρουσιάζεται η καταβολή της τελευταίας πληρωμής.

Η παρούσα αξία (*present value, PV*) της προκαταβλητέας ράντας συμβολίζεται $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ και δίνεται από τον τύπο

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + u + u^2 + \dots + u^{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} u^i$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - u^n}{1 - u} = \frac{1 - u^n}{iu} = \frac{1 - u^n}{d} \\
 &\Rightarrow \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1 - u^n}{d},
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

όπου με d συμβολίζουμε το προεξοφλητικό επιτόκιο (*discounted rate*) για το οποίο ισχύει

$$d = 1 - u \tag{1.6}$$

ή

$$d = 1 - \frac{1}{1+i} \Rightarrow d = \frac{i}{1+i}. \tag{1.7}$$

Η συσσωρευμένη αξία ή μελλοντική αξία (AV) της προκαταβλητέας ράντας συμβολίζεται με $\ddot{S}_{\overline{n}|}$ και δίδεται από τον τύπο

$$\begin{aligned}
 \ddot{S}_{\overline{n}|} &= (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \dots + (1+i) \\
 &= (1+i) + \dots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^n \\
 &= (1+i)[1 + (1+i) + \dots + (1+i)^{n-3} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-1}] \\
 &= (1+i) \sum_{j=0}^{n-1} (1+i)^j = (1+i) \frac{1 - (1+i)^n}{1 - (1+i)} \\
 &= (1+i) \frac{1 - (1+i)^n}{i/(1+i)} = \frac{(1+i)^n - 1}{iu} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} \\
 &\Rightarrow \ddot{S}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}.
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

Παράδειγμα 1.3.1

Θα υπολογίσουμε την παρούσα και συσσωρευμένη αξία μίας προκαταβλητέας ράντας διάρκειας 5 ετών, με ετήσιο ανατοκισμό και ετήσιο επιτόκιο 3%, ετήσιου όρου 3000€.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.5) για την παρούσα αξία (PV) της ράντας λαμβάνουμε

$$3000\ddot{a}_{\overline{5}|} = 3000 \frac{1 - \left(\frac{1}{1+0,03}\right)^5}{\frac{0,03}{1,03}} = 14.151,29\text{€}.$$

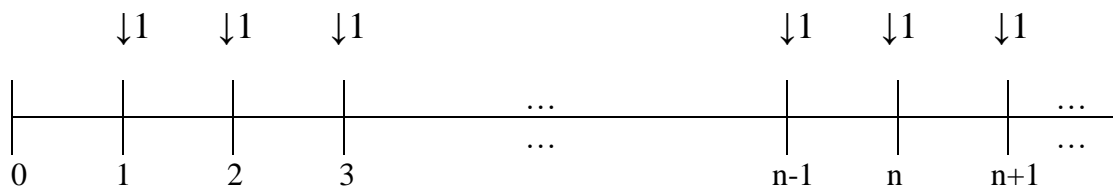
Ακολούθως, για την μελλοντική αξία (AV) της ράντας αντικαθιστούμε τα δεδομένα στον τύπο (1.8) και προκύπτει

$$3000\ddot{S}_{\overline{5}|} = 3000 \frac{(1+0,03)^5 - 1}{\frac{0,03}{1,03}} = 16.405,2\text{€}.$$

1.4 Διηλεκείς Ράντες

Μία διηλεκτής ράντα αποτελείται από άπειρο πλήθος όρων, δηλαδή δε τελειώνουν ποτέ. Στο συγκεκριμένο τύπο ράντας, μας απασχολεί μόνο η εύρεση της παρούσας αξίας της καθώς η τελική δεν υφίσταται. Πρακτικά μία διηλεκτής ράντα πρέπει κάποια στιγμή να τελειώνει, παρά ταύτα το γεγονός ότι η διάρκεια της είναι άπειρη καθορίζει και τον τρόπο της μαθηματικής αντιμετώπισης. Μία διηλεκτής ράντα μπορεί να είναι είτε ληξιπρόθεσμη είτε προκαταβλητέα.

Η διαγραμματική απεικόνιση που ακολουθεί παριστάνει τις χρηματοροές μίας διηλεκτής ληξιπρόθεσμης ράντας με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας σε σχέση με το χρόνο.



Διάγραμμα 3

Η αρχική αξία μίας άμεσης διηλεκτής ληξιπρόθεσμης ράντας συμβολίζεται με $a_{\overline{\infty}|}$ και υπολογίζεται βάσει του του ακόλουθου τύπου

$$\begin{aligned} a_{\overline{\infty}|} &= u + u^2 + u^3 \dots u^n + u^{n+1} + \dots \\ &= u \frac{1 - u^\infty}{1 - u} = \frac{u}{iu} = \frac{1}{i} \\ \Rightarrow a_{\overline{\infty}|} &= \frac{1}{i}, \end{aligned} \tag{1.9}$$

όπου

$$u^\infty = \frac{1}{(1+i)^\infty} = 0.$$

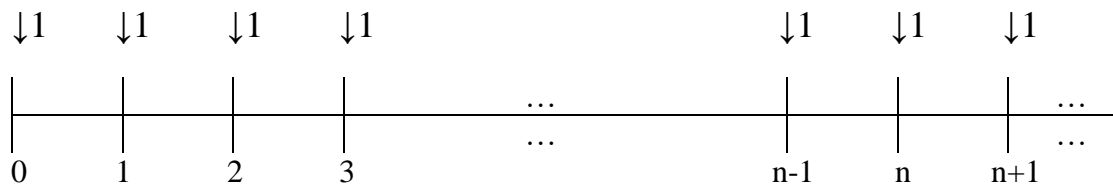
Παράδειγμα 1.4.1

Θα υπολογίσουμε τι ποσό πρέπει να καταθέσει μία επιχείρηση έτσι ώστε στο τέλος κάθε έτους και επ' αόριστον, να έχει τη δυνατότητα να δίνει bonus στους υπαλλήλους της αξίας 3000€. Υποθέτουμε πως ο ανατοκισμός είναι ετήσιος και το επιτόκιο ισούται με 3%.

Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.9) βρίσκουμε την παρούσα αξία της διηνεκούς ράντας ως εξής

$$3000 * a_{\infty|} = 3000 * \frac{1}{0.03} = \frac{3.000}{0.03} = 100.000\text{€}.$$

Ακολούθως, παρουσιάζουμε τις χρηματοροές μίας διηνεκούς προκαταβλητέας ράντας με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας σε σχέση με το χρόνο.



Διάγραμμα 4

Η παρούσα αξία μίας διηνεκούς προκαταβλητέας ράντας ισοδυναμεί με την αξία της αντίστοιχης ληξιπρόθεσμης συν μία επιπλέον δόση.

$$\begin{aligned} \ddot{a}_{\infty|} &= 1 + u + u^2 + u^3 \dots + u^n + u^{n+1} + \dots \\ &= \frac{1}{1-u} = \frac{1-u^\infty}{1-u} = 1 + \frac{1}{i} \\ \Rightarrow \ddot{a}_{\infty|} &= 1 + \frac{1}{i} \end{aligned} \tag{1.10}$$

ή ισοδύναμα

$$\ddot{a}_{\infty|} = \frac{1}{d}. \tag{1.11}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\ddot{a}_{\infty|} = (1+i)a_{\infty|}. \tag{1.12}$$

Παράδειγμα 1.4.2

Έστω ότι ένας επενδυτής έχει προβεί σε σύναψη με μία ασφαλιστική εταιρεία, σύμφωνα με την οποία θα πληρώνει στην αρχή κάθε έτους το ποσό των 1500€ για όσο βρίσκεται εν ζωή. Ενώ στην περίπτωση που αποταμίευε το ποσό θα εισέπραττε ένα ετήσιο επιτόκιο το οποίο ανέρχεται στο 4%.

Η παρούσα αξία λοιπόν της διηνεκούς προκαταβλητέας ράντας βάσει του τύπου (1.10) ισούται με

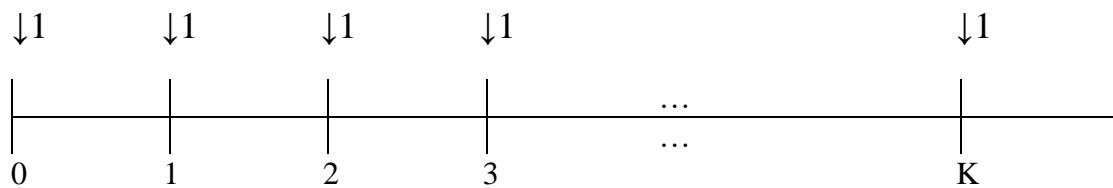
$$1500 * \ddot{a}_{\infty|} = 1500 * \left(1 + \frac{1}{i}\right) = 1500 + \frac{1500}{0.04} = 39.000\text{€}.$$

1.5 Ράντες Ζωής

Στη υποενότητα αυτή, θα μελετήσουμε τις ράντες ζωής (*life annuities*) οι οποίες διαφέρουν από τις ράντες που εξετάζονται στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά καθώς οι καταβολές μίας ράντας ζωής εξαρτάται από την επιβίωση ενός ατόμου ηλικίας x [10]. Συνεπώς η παρούσα αξία Y της ράντας, είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία εξαρτάται από την τυχαία μεταβλητή $T(= T(x))$ και εκφράζει τον υπολειπόμενο χρόνο ζωής ($T(x)$) ενός ατόμου ηλικίας x . Οι ράντες ζωής είναι ειδικά σχεδιασμένα προγράμματα σύμφωνα με τα οποία πραγματοποιείται η πρόβλεψη της καταβολής ή ενός εφάπαξ ποσού ή ισόβιας σύνταξης την οποία λαμβάνει ο ασφαλισμένος από την στιγμή που συνταξιοδοτείται και εφόσον βρίσκεται εν ζωή έως ότου αποβιώσει [10]. Μία ράντα ζωής η οποία είναι μία σειρά πληρωμών σε ίσα τακτά χρονικά διαστήματα κατά τη διάρκεια της ζωής του ασφαλισμένου μπορεί να είναι είτε ισόβια (*life annuity*) είτε πρόσκαιρη (*temporary life annuity*). Στην περίπτωση της ισόβιας με την οποία θα ασχοληθούμε στο παρόν εδάφιο, οι πληρωμές καταβάλλονται καθ' όλη τη διάρκεια της ζωής του ασφαλισμένου ενώ στην περίπτωση της πρόσκαιρης οι πληρωμές πραγματοποιούνται για συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα.

1.5.1 Ισόβια Προκαταβλητέα Ράντα Ζωής

Μία ισόβια προκαταβλητέα ράντα ζωής (*Whole life annuity due*) πληρώνει κάθε χρόνο το χρηματικό ποσό της μίας νομισματικής μονάδας στην αρχή κάθε έτους, δεδομένου ότι το άτομο ηλικίας x βρίσκεται εν ζωή. Ενδεικτικά παρουσιάζουμε την ακόλουθη διαγραμματική απεικόνιση



Διάγραμμα 5

Η παρούσα αξία της συγκεκριμένης ροής των χρημάτων προκύπτει βάσει της ακόλουθης σχέσης

$$\begin{aligned}
 Y &= 1 + u + u^2 + \dots + u^K \\
 &= \frac{1-u^{K+1}}{1-u} = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}, \text{ για } K = 0, 1, 2, 3 \dots
 \end{aligned}
 \tag{1.13}$$

και το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο (ΕΚΑ), συμβολίζεται με \ddot{a}_x και υπολογίζεται μέσω της αναμενόμενης αξίας της Y , συνεπώς

$$\ddot{a}_x = E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} P(K = k) = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x q_{x+k},
 \tag{1.14}$$

όπου

${}_k p_x$: η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να φθάσει στην ηλικία $x + k$,

q_{x+k} : η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας $x + k$ να αποβιώσει πριν φθάσει στην ηλικία $x + k + 1$.

Λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=0}^{\infty} (1 + u + u^2 + \dots + u^k) P(K = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} u^k P(K \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k {}_k p_x, \end{aligned} \quad (1.15)$$

καταλήγουμε στην παρακάτω σχέση

$$\ddot{a}_x = E(Y) = \sum_{k=0}^{\infty} u^k {}_k p_x. \quad (1.16)$$

Χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις μετατροπής [10], προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= 1 + u \frac{l_{x+1}}{l_x} + u^2 \frac{l_{x+2}}{l_x} + \dots \\ &= 1 + \frac{u^{x+1} l_{x+1}}{u^x l_x} + \frac{u^{x+2} l_{x+2}}{u^x l_x} + \dots \\ &= \frac{1}{D_x} \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

όπου

l_x : το πλήθος των ατόμων που βρίσκονται εν ζωή στην ηλικία x .

Αν θέσουμε

$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}, \quad (1.18)$$

προκύπτει άμεσα ότι

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}. \quad (1.19)$$

Παράδειγμα 1.5.1.1

Θα υπολογίσουμε το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο το οποίο πρέπει να καταβάλλει ένας άνδρας ηλικίας 30 ετών στην ασφαλιστική του εταιρεία, έτσι ώστε από την υπογραφή της σύμβασης του και δεδομένου ότι βρίσκεται εν ζωή να λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους το ποσό των 3000€ [8]. Θεωρούμε ότι το επιτόκιο είναι 4%.

Αρχικά για να λαμβάνει ο άνδρας ηλικίας 30 ετών στην αρχή κάθε έτους το ποσό του ενός ευρώ πρέπει να καταβάλει στην εταιρεία το ποσό \ddot{a}_{30} .

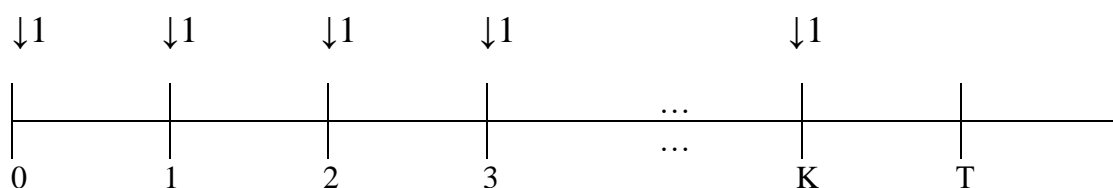
Δηλαδή χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1.19) και το γεγονός ότι $N_{30} = 677106$ και $D_{30} = 29803$ σύμφωνα με τον πίνακα θνησιμότητας των ανδρών των Renshaw-Haberman για $i = 4\%$, προκύπτει ότι

$$\ddot{a}_{30} = \frac{N_{30}}{D_{30}} = \frac{677106}{29803} = 22.71939.$$

Άρα, με σκοπό να λαμβάνει στην αρχή κάθε έτους το ποσό των 3000€ θα πρέπει να καταβάλει στην ασφαλιστική εταιρεία $3000 \cdot 22.71939 = 68158.17\text{€}$.

1.5.2 Ισόβια Ληξιπρόθεσμη Ράντα Ζωής

Μία ισόβια ληξιπρόθεσμη ράντα ζωής (*Whole life immediate annuity*) καταβάλλει το ποσό της μίας νομισματικής μονάδας στο τέλος κάθε έτους, εφόσον το άτομο ηλικίας x βρίσκεται εν ζωή. Ενδεικτικά παραθέτουμε το ακόλουθο διάγραμμα



Διάγραμμα 6

Η παρούσα αξία της ροής των πληρωμών υπολογίζεται από τη σχέση

$$Y = u + u^2 + u^3 + \dots + u^K = a_{\overline{K}|}, \quad (1.20)$$

και το Ενιαίο Καθαρό Ασφάλιστρο (ΕΚΑ) προκύπτει σύμφωνα με τον τύπο

$$\begin{aligned} a_x = E(Y) &= E[a_{\overline{K}|}] = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\overline{k}|} {}_k p_x q_{x+k} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} u^k {}_k p_x. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Παρατηρώντας τις ποσότητες $\ddot{a}_{\overline{K+1}|}$ και $a_{\overline{K}|}$ διαπιστώνουμε πως διαφέρουν μόνο ως προς μία σταθερά 1. Συνεπώς, το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο της ληξιπρόθεσμης ισόβιας ράντας ζωής προκύπτει και από τη σχέση

$$\begin{aligned} a_{\overline{K}|} &= \ddot{a}_{\overline{K+1}|} - 1 \Rightarrow E(a_{\overline{K}|}) = E(\ddot{a}_{\overline{K+1}|}) - 1 \\ &\Rightarrow a_x = \ddot{a}_x - 1, \end{aligned} \quad (1.22)$$

όπου με \ddot{a}_x συμβολίζεται το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο της προκαταβλητέας ράντας, όπως ακριβώς μελετήσαμε στην υποενότητα 1.5.1.

Προβαίνοντας σε χρήση των συναρτήσεων μετατροπής [10], προκύπτει ότι το ενιαίο καθαρό ασφάλιστρο

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{1}{D_x} \sum_{k=1}^{\infty} D_{x+k} \\ &\Rightarrow a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Παράδειγμα 1.5.2.1

Λαμβάνουμε υπόψιν μας τα δεδομένα του παραδείγματος 1.5.1.1 με τη διαφορά ότι ποσό των 3000€ θα λαμβάνεται στο τέλος κάθε έτους.

Με σκοπό να λαμβάνει στο τέλος κάθε έτους το ποσό του ενός ευρώ, πρέπει να καταβάλει στην ασφαλιστική εταιρεία το ποσό a_{30} [8]. Μέσω της εξίσωσης (1.23) αντικαθιστούμε τις τιμές $N_{31} = 647303$ και $D_{30} = 29803$ που πάρθηκαν από τον πίνακα θνησιμότητας των ανδρών των Renshaw-Haberman για $i = 4\%$, προκύπτει

$$a_{30} = \frac{N_{30+1}}{D_{30}} = \frac{N_{31}}{D_{30}} = \frac{647303}{29803} = 21.7193.$$

Άρα, προκειμένου η ασφαλιστική να του καταβάλλει το ποσό των 3000€ στο τέλος κάθε έτους, θα πρέπει να καταβάλει το ποσό των $3000 \cdot 21.71939 = 65158.17\text{€}$.

1.6 Συνταξιοδοτικά Σχήματα

Στην υποενότητα αυτή, κάνουμε λόγο για τις κατηγορίες των συνταξιοδοτικών σχημάτων. Θα αναλύσουμε τους κινδύνους τους οποίους αντιμετωπίζει το καθορισμένων εισφορών σχήμα και θα επισημάνουμε την έννοια του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης.

1.6.1 Κατηγοριοποίηση Συνταξιοδοτικών Σχημάτων

Βασικός στόχος ενός συνταξιοδοτικού προγράμματος/σχήματος αποτελεί η παροχή εισοδήματος στους εργαζόμενους όταν εκείνοι αποχωρούν από την ενεργό εργασία τους. Το εισόδημα πρέπει να είναι επαρκές και ανάλογο με τις αμοιβές πριν τη συνταξιοδότηση τους και όχι απλώς να τους προστατεύει από το όριο της φτώχειας. Τα συνταξιοδοτικά σχήματα συνήθως διακρίνονται σε δύο βασικές κατηγορίες. Η πρώτη αναφέρεται σε εκείνα των καθορισμένων εισφορών και η δεύτερη περιλαμβάνει τα καθορισμένων παροχών. Ο τρόπος με τον οποίο αντιμετωπίζεται ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος μεταξύ των δύο αυτών σχημάτων αποτελεί και την ειδοποιό διαφορά τους. Στη συνέχεια παραθέτουμε μία σύντομη ανάλυση σχετικά με τις κατηγορίες των συγκεκριμένων σχημάτων.

➤ Συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένης εισφοράς

Μέσω ενός συνταξιοδοτικού σχήματος καθορισμένης εισφοράς (*defined contribution pension scheme, DC*), οι εισφορές του μέλους πραγματοποιούνται σε τακτά χρονικά διαστήματα και βασίζονται σε μία μαθηματική φόρμουλα η οποία ακολουθεί τους κανόνες του σχήματος (συνήθως αλλά όχι απαραίτητα ως ποσοστό του μισθού του). Δημιουργείται ένας ατομικός λογαριασμός για τον εργαζόμενο, εντός του οποίου φυλάσσονται και επενδύονται οι εισφορές του. Το συσσωρευμένο κεφάλαιο μετασχηματίζεται σε μία ροή συνταξιοδοτικών εισοδημάτων κατά την περίοδο της συνταξιοδότησης του και σπανίως παρέχεται η δυνατότητα των τμηματικών αναλήψεων. Το κεφάλαιο αξιοποιείται για την αγορά της προσόδου, δηλαδή ενός συγκεκριμένου εισοδήματος σύνταξης το οποίο θα παρέχεται στο μέλος έως ότου επέλθει η περάτωση του βίου του. Το επιτευχθέν επίπεδο της σύνταξής του, εξαρτάται από την πορεία των επενδυτικών αποδόσεων κατά τη διάρκεια της ασφαλιστικής του πορείας. Το μέλος γνωρίζει εκ των προτέρων το ποσό το οποίο θα συνεισφέρει στο ταμείο του προγράμματος, όμως δεν καθίσταται ενήμερο όσον αφορά τα μελλοντικά του οφέλη και κατ' επέκταση για το ύψος της σύνταξης που θα του αποδοθεί. Συνεπώς, ο ασφαλισμένος αντιμετωπίζει τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο.

➤ Συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένης παροχής

Ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένης παροχής (*defined benefit pension scheme, DB*) διακρίνεται από τη σταθερότητα ενός κανόνα υπό μορφή μαθηματικού τύπου, βάσει του οποίου καθορίζεται-υπολογίζεται εξαρχής η παροχή την οποία θα λάβει το μέλος κατά την περάτωση της ασφαλιστικής του πορείας. Ειδικότερα, το ύψος της καταβαλλόμενης παροχής στον ασφαλισμένο δεν εξαρτάται από το επίπεδο της εισφοράς, ούτε από τις αποδόσεις των επενδύσεων που έχουν πραγματοποιηθεί, αλλά είναι γνωστό εκ των προτέρων. Η μέθοδος υπολογισμού της παροχής της σύνταξης ανάλογα με το είδος του προγράμματος διακρίνεται σε τέσσερις κατηγορίες [8]

- είτε ως ένα ποσό σε ευρώ για κάθε μήνα και έτος υπηρεσίας (για παράδειγμα, (60€)(12 μήνες)(έτη υπηρεσίας)),
- είτε ως ένα συγκεκριμένο ποσό το οποίο παρέχεται στο μέλος κάθε έτος κατά τη συνταξιοδότηση του (για παράδειγμα, 60000€ αποζημίωση για κάθε έτος),
- είτε ως ένα ποσοστό της τελικής αποζημίωσης (για παράδειγμα, το 1.6% της τελικής μέσης αποζημίωσης),
- είτε ως ένα ποσοστό της μέσης ετήσιας αποζημίωσης.

Δεδομένου ότι οι παροχές είναι εγγυημένες και δεν εξαρτώνται από τις επενδυτικές συνθήκες κατά την περίοδο συσσώρευσης των εισφορών, το ποσοστό εισφοράς αναπροσαρμόζεται τακτικά από τον αναλογιστή, ανάλογα βέβαια με τις εμπειρικές αποδόσεις και το ύψος της σύνταξης που θα καταβληθεί στο μέλος μόλις επέλθει η συνταξιοδότηση του.

Τα περισσότερα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένης παροχής είναι επαγγελματικά και πολύ συχνά ο ασφαλισμένος πληρώνει ένα συγκεκριμένο και σταθερό ποσοστό (π.χ. 5% του μισθού του), ενώ ο εργοδότης καταβάλλει το υπόλοιπο μερίδιο που απομένει για να καλυφθεί το ποσό της εισφοράς στο σχήμα. Ειδικότερα, στην περίπτωση που τα αποτελέσματα των επενδύσεων αποδειχθούν λιγότερα από τα αναμενόμενα, ο εργοδότης θα συνεισφέρει υψηλότερο ποσοστό εισφοράς σε σχέση με το αναμενόμενο. Αντιθέτως, στην περίπτωση που τα αποτελέσματα των επενδυτικών πολιτικών αποδειχθούν υψηλότερα από τα αναμενόμενα, τότε ο εργοδότης θα συνεισφέρει λιγότερο ποσοστό εισφοράς ή ακόμη δε θα συνεισφέρει καθόλου (διακοπή εισφορών). Από την μεριά του μέλους τα δεδομένα είναι ευνοϊκότερα, καθώς γνωρίζει με ακρίβεια το πόσο θα συνεισφέρει στο σχήμα όπως επίσης είναι ταυτόχρονα ενήμερος για τη σύνταξή του, όμως ο εργοδότης δεν καθίσταται ενήμερος σχετικά με το ύψος της συνεισφοράς του. Συμπεραίνουμε λοιπόν, πως σε ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένης παροχής ο εργοδότης έρχεται αντιμέτωπος με τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο.

Συνοψίζοντας, η βασική διαφορά ανάμεσα σε ένα καθορισμένης παροχής και σε ένα καθορισμένης εισφοράς σχήμα, είναι πως στο πρώτο ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος αντιμετωπίζεται από τον εργοδότη, ενώ στο δεύτερο από το μέλος που δε γνωρίζει το ύψος της σύνταξής του, καθώς εξαρτάται από την επενδυτική πορεία κατά τη διάρκεια της ενεργούς του συμμετοχής στο σχήμα [23].

Στο σημείο αυτό, αναφέρουμε πως ένας συνδυασμός μεταξύ των σχημάτων καθορισμένης παροχής και καθορισμένης εισφοράς έχει συμβάλει στη δημιουργία ενός καινούργιου είδους με μεικτό χαρακτήρα, το λεγόμενο υβριδικό (*hybrid*). Πιο συγκεκριμένα, παρατηρείται αλληλεπίδραση σχετικά με το σχεδιασμό των εισφορών και των παροχών με στόχο τον έλεγχο του κόστους χρηματοδότησης και της ευστάθειας του σχήματος. Ένα σχήμα καθορισμένων εισφορών το οποίο προσφέρει ένα ελάχιστο ποσοστό εγγυημένων επενδύσεων πιθανό να είναι υβριδικό. Επιπλέον, ένα σχήμα καθορισμένων παροχών αντίστοιχα μπορεί να είναι υβριδικό όταν ενσωματώνει τις αποδόσεις της αγοράς για την προσαρμογή των παροχών του.

Παράδειγμα 1.6.1.1

Θα υπολογίσουμε την ετήσια παροχή σύνταξης B_r , ενός συμμετέχοντα σε ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένης παροχής ο οποίος έχει 35 έτη υπηρεσίας, 60000€ μέση ετήσια απόδοση (*career average*) και η τελική μέση αποζημίωσή του ανέρχεται στα 120000€ [8]. Τότε η ετήσια παροχή της σύνταξης του μέλους θα ισούται με

- i. $B_r = (60)(12)(35) = 25200\text{€}$, εάν ορίζεται ως 60 ευρώ για κάθε μήνα και για κάθε έτος υπηρεσίας,
- ii. $B_r = (0.016)(60000)(35) = 33600\text{€}$, εάν ορίζεται ως το 1.6% της μέσης ετήσιας αποζημίωσης του ετήσιου μισθού,
- iii. $B_r = (0.016)(120000)(35) = 67200\text{€}$, εάν ορίζεται ως το 1.6% της τελικής ετήσιας αποζημίωσης του ετήσιου τελικού μισθού.

1.6.2 Κίνδυνοι Συνταξιοδοτικού Σχήματος Καθορισμένων Εισφορών

Ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων εισφορών προσφέρει τη δυνατότητα ενός ευέλικτου μηχανισμού εξοικονόμησης κεφαλαίου για τη συνταξιοδότηση των ασφαλισμένων, επιτρέποντας στα μέλη του να μοιράζονται τις αποδόσεις των επενδύσεων. Το σχήμα είναι επαρκώς σχεδιασμένο και ικανό για όσους αλλάζουν εργασία όπως επίσης και για όσους έχουν ακανόνιστη ή διαλείπουσα εργασία [18]. Σε ορισμένες περιπτώσεις, τίθεται ένα ελάχιστο επίπεδο εισφορών το οποίο είναι υποχρεωτικό αλλά συνήθως είναι πιθανή η ύπαρξη πρόσθετων προαιρετικών εισφορών με σκοπό την επίτευξη του επιθυμητού επιπέδου κατά τη συνταξιοδότηση. Παρά ταύτα το συγκεκριμένο σχήμα ενέχει δυνητικά σημαντικούς κινδύνους για τα μεμονωμένα μέλη του. Πέραν του χρηματοοικονομικού κινδύνου που εντοπίσαμε στην προηγούμενη υποενότητα, θα παραθέσουμε όλους τους υπόλοιπους κινδύνους που αντιμετωπίζει το συγκεκριμένο είδος σχήματος. Οι εν λόγω κίνδυνοι κατηγοριοποιούνται ως εξής:

- **Κίνδυνος αγοράς (*market risk*):** Η αξία των επενδύσεων στον ατομικό λογαριασμό του κάθε μέλους, πιθανό να παρουσιάσει διακυμάνσεις και να υποστεί σημαντικές αλλαγές στην αξία του, λόγω των δυσμενών συνθηκών που επικρατούν στην αγορά.
- **Οικονομικός κίνδυνος (*economic risk*):** Οι πραγματικές τιμές των αποδόσεων των επενδύσεων που έχουν πραγματοποιηθεί πιθανό να αποδειχθούν μη ικανοποιητικές, ως απόρροια των δυσμενών οικονομικών καταστάσεων ή της κακής διαχείρισης της οικονομίας. Επί παραδείγματι, λόγω του πληθωρισμού ή της πτωχής οικονομικής ανάπτυξης των τιμών.
- **Κίνδυνος αθέτησης (*default risk*):** Οι επενδύσεις οι οποίες πραγματοποιούνται για λογαριασμό των μελών του σχήματος, μπορεί να αθετηθούν ή να χάσουν την αξία τους, ως αποτέλεσμα των ενδεχόμενων οικονομικών προβλημάτων εντός της εκδότριας εταιρείας.
- **Κίνδυνος αντιστάθμισης ή αναντιστοιχίας (*hedging or mismatching risk*):** Οι διαχειριστές του συνταξιοδοτικού σχήματος πιθανότατα να εκθέσουν τα μέλη τους στον αντίκτυπο των μη αντισταθμισμένων δικαιωμάτων προαίρεσης και άλλων παράγωγων μέσων ή είναι πιθανό να επενδύσουν σε μέσα τα οποία χαρακτηρίζονται από ακατάλληλο κίνδυνο σε σχέση με τα συμφέροντα των συμμετεχόντων.
- **Κίνδυνος διαχείρισης (*management risk*):** Οι διαχειριστές του συνταξιοδοτικού σχήματος είναι πιθανό να εμφανίσουν ανικανότητα ή να παρουσιάσουν εγκληματική αμέλεια, σχετικά με τη διαχείριση των επενδύσεων ή ολόκληρου του σχήματος.

- **Επιτοκιακός κίνδυνος (*interest rate risk*):** Το ύψος της προσόδου το οποίο αποκτάται μέσω της συσσωρευμένης εξοικονόμησης του ατομικού λογαριασμού, εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από το επίπεδο των επιτοκίων τη χρονική στιγμή κατά την οποία το συσσωρευμένο ποσό μετατρέπεται στη μορφή της προσόδου.
- **Κίνδυνος μακροβιότητας (*longevity risk*):** Οι βελτιώσεις του μέσου προσδόκιμου ζωής του πραγματικού αλλά και του αναμενόμενου πληθυσμού των συνταξιούχων, συμπεριλαμβάνονται στις τιμές των συντάξεων και ως εκ τούτου επηρεάζουν το ποσό της προσόδου που λαμβάνεται. Όταν σε κάποιο μέλος επιτρέπεται η χρήση του ατομικού λογαριασμού χωρίς την αγορά της προσόδου, η πιθανότητα της μακροβιότητας ενός άλλου μέλους του σχήματος καθιστά το πρώτο να διατρέχει σοβαρό κίνδυνο εξαντλήσεως των οικονομιών του σε πολύ σύντομο χρονικό διάστημα.
- **Λειτουργικός κίνδυνος (*operational risk*):** Οι διαχειριστές του συνταξιοδοτικού σχήματος πιθανότατα να μην εφαρμόσουν επιτυχώς το πλήθος των λειτουργικών ελέγχων με αποτέλεσμα την απώλεια πληροφοριών οι οποίες σχετίζονται με τις συσσωρευμένες εισφορές του μέλους. Η συγκεκριμένη απώλεια μπορεί να προκύψει από καταστροφή ηλεκτρονικού υπολογιστή, πυρκαγιά, πλημμύρα ή από άλλους φυσικούς κινδύνους. Ο λειτουργικός κίνδυνος επηρεάζει σε υψηλό βαθμό το διαχειριστή των συντάξεων με πολλούς και διαφορετικούς τρόπους.
- **Κίνδυνος αφερεγγυότητας (*insolvency risk*):** Η ασφαλιστική εταιρεία ή η εταιρεία η οποία έχει αναλάβει τη διαχείριση του σχήματος αντιμετωπίζει τον κίνδυνο της αφερεγγυότητας. Ο αντίκτυπος του στις θυγατρικές εταιρείες εξαρτάται από τη νομική υπόσταση του συνταξιοδοτικού σχήματος.
- **Κίνδυνος εξόδων (*expense risk*):** Το ύψος των εξόδων διοίκησης ή οι κρατήσεις που πραγματοποιούνται και αποσκοπούν στη δημιουργία κερδών για την εταιρεία διαχείρισης των συντάξεων μπορεί να είναι ή να μετατραπούν σε υπερβολικά υψηλές, φαινόμενο το οποίο επιβαρύνει αδικώς τις αποταμιεύσεις του μέλους.
- **Ρυθμιστικός κίνδυνος (*regulatory risk*):** Οι ρυθμιστικές αρχές ενδεχομένως να μην εντοπίσουν προβλήματα με την εταιρεία διαχείρισης συντάξεων ή να προβούν στην απόσυρση της άδειας της εταιρείας.
- **Πολιτικός κίνδυνος (*political risk*):** Η κυβέρνηση παρεμβαίνει στη λειτουργία του συνταξιοδοτικού συστήματος, μειώνοντας τα ποσοστά που απαιτούνται για τις εισφορές ή κατευθύνει τις επενδύσεις για πολιτικούς ή κοινωνικούς σκοπούς, ανεξάρτητα από το αν οι επενδύσεις θεωρούνται συμφέρουσες.

1.6.3 Καθαρός Συντελεστής Αναπλήρωσης

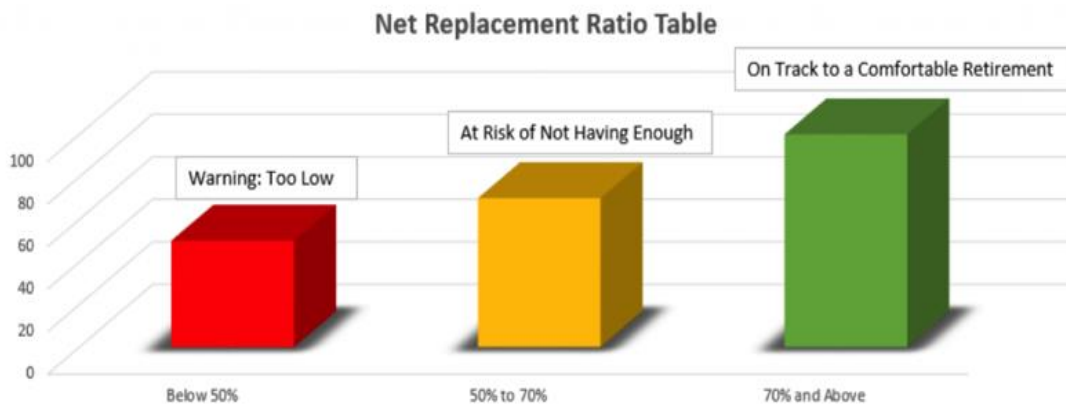
Ο καθαρός συντελεστής αναπλήρωσης (*net replacement ratio, NRR*), αποτελεί ένα χρήσιμο και παράλληλα σημαντικό εργαλείο όσον αφορά την καθοδήγηση των μελών ενός σχήματος σχετικά με το σχεδιασμό της σύνταξής τους. Ο συντελεστής ορίζεται ως το καθαρό συνταξιοδοτικό δικαίωμα διαιρούμενο με τα καθαρά κέρδη προ συνταξιοδότησης, συμπεριλαμβανομένων των φόρων εισοδήματος φυσικών προσώπων και των εισφορών κοινωνικής ασφάλισης που καταβάλλουν οι εργαζόμενοι και οι συνταξιούχοι [36].

Ο μεγαλύτερος κίνδυνος τον οποίο αντιμετωπίζει το μέλος ενός συνταξιοδοτικού ταμείου εντοπίζεται στις ανεπαρκείς συνταξιοδοτικές αποταμιεύσεις οι οποίες αδυνατούν να καλύψουν τις ανάγκες του. Το συγκεκριμένο φαινόμενο συνεπάγεται πως το μέλος δε βρίσκεται σε θέση να ανταπεξέλθει οικονομικά στις μηνιαίες του δαπάνες ή ακόμη το εισόδημα του δεν επαρκεί για τη διατήρηση του τρόπου ζωής του μετά τη συνταξιοδότηση. Ο εν λόγω συντελεστής συνιστά ένα μέσο που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να μετρήσουμε την επάρκεια της τρέχουσας συνταξιοδοτικής αποταμίευσης, εξετάζοντας την προβλεπόμενη σύνταξη του μέλους εκφρασμένη ως ένα ποσοστό του προβλεπόμενου μισθού του κατά τη συνταξιοδότηση [37]. Επιπροσθέτως μέσω του συντελεστή αυτού, μετριέται πόσο αποτελεσματικά ένα συνταξιοδοτικό σύστημα παρέχει ένα εισόδημα συνταξιοδότησης με σκοπό να αντικαταστήσει τις αποδοχές-μισθό που είναι η κύρια πηγή εσόδων πριν τη συνταξιοδότηση του ατόμου [36].

Στην περίπτωση που παρατηρείται χαμηλό ποσοστό αποταμίευσης των ατόμων μίας χώρας, συνεπάγεται αυτόματα πως τα περισσότερα μέλη δε συνεισφέρουν αρκετά στο συνταξιοδοτικό τους ταμείο ή δεν αποταμιεύουν αρκετά χρήματα. Σε συνδυασμό με αυτό, πολλά μέλη εξαργυρώνουν τις αποταμιεύσεις της συνταξιοδότησης τους μόλις μεταβούν σε διαφορετική εργασία όπως και δε διατηρούν τις αποταμιεύσεις τους που έχουν συσσωρευτεί. Το συγκεκριμένο γεγονός επιφέρει βαρυνούσης σημασίας αντίκτυπο στον καθαρό συντελεστή αναπλήρωσης καθώς χάνεται πλήθος αποταμιεύσεων πολλών ετών και κατ' επέκταση επηρεάζεται η βαθμολόγησή του. Επιπλέον σημειώνουμε πως η μη διατήρηση των συνταξιοδοτικών παροχών στην περίπτωση αλλαγής εργασίας, συνιστά ένα ζωτικής σημασίας παράγοντα που συμβάλλει στα χαμηλά επίπεδα του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης μίας χώρας.

Τα μέλη δε χρειάζονται απαραιτήτως το 100% του μισθού τους ως σύνταξη και πολύ συχνά βρίσκονται σε θέση να συνταξιοδοτηθούν με ένα ποσοστό του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης το οποίο ανέρχεται στο 70%. Το προαναφερθέν διαδραματίζεται, καθώς τα έξοδα διαβίωσης είναι συνήθως πολύ χαμηλότερα αφού επέλθει η συνταξιοδότηση, όπως επίσης και τα χρέη είναι εξοφλημένα. Το βασικό ερώτημα με το οποίο έρχονται αντιμέτωπα όλα τα μέλη αναφέρεται στο αν πρέπει να στοχεύσουν σε ένα 75% του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης ή σε ένα 60% ή ακόμη να στοχεύσουν στον πλήρη μισθό τους. Η τιμή του συντελεστή εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τον τρόπο ζωής που επιθυμούμε να ακολουθήσουμε αφού συνταξιοδοτηθούμε. Ως εκ τούτου, ένας αποδεκτός καθαρός συντελεστής αναπλήρωσης εξαρτάται από τον αναμενόμενο τρόπο ζωής μετά τη συνταξιοδότηση.

Σύμφωνα με το παρακάτω ραβδόγραμμα μας παρέχεται η πληροφορία σχετικά με τα ποσοστά του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης σε σχέση με τη σύνταξη μας. Ειδικότερα, εάν ο δείκτης ανέρχεται στο 50% χαρακτηρίζεται ως ιδιαίτερα χαμηλός, ανάμεσα στο 50%-70% θεωρείται ανεπαρκής και εάν εντοπίζεται άνω του 70% τείνουμε να λάβουμε μία επαρκή σύνταξη για τις ανάγκες μας.



Πηγή: “Kwazulu-Natal Joint Municipal Pension/Provident Funds”

Διάγραμμα 7

Ορισμένοι παράγοντες που συμβάλουν στην επίτευξη ενός θετικού καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης είναι

- η αρχή της αποταμίευσης να πραγματοποιείται από νωρίς,
- η αποταμίευση σε σωστά επίπεδα ποσοστού εισφορών,
- η εξασφάλιση του κατάλληλου επενδυτικού χαρτοφυλακίου,
- η μη εξόφληση των παροχών της συνταξιοδότησης στην ενδεχόμενη αλλαγή της εργασίας (διατήρηση της παροχής).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο

Βασικές Μαθηματικές Έννοιες και Στοχαστικές Διαδικασίες

Στην αρχή του δεύτερου κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε βασικές μαθηματικές έννοιες σχετικά με τη σ -άλγεβρα και την παραγόμενη σ -άλγεβρα, καθώς αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο στα στοχαστικά μαθηματικά. Θα παραθέσουμε βασικά παραδείγματα και πλήθος αποδείξεων με στόχο την καλύτερη κατανόηση τους. Στη συνέχεια, θα ασχοληθούμε με τις στοχαστικές διαδικασίες και θα δώσουμε ιδιαίτερη έμφαση στις μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου, μιας και οι ιδιότητες τους θα μας απασχολήσουν ιδιαίτερα στο τρίτο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας. Τέλος, θα μελετήσουμε την κίνηση Brown, αριθμητική και γεωμετρική με σκοπό να παρέχουμε στον αναγνώστη τις κατάλληλες έννοιες στις οποίες βασίζονται τα μοντέλα τα οποία έχουν μελετηθεί στο αναλογιστικό πλαίσιο κατά καιρούς.

2.1 Βασικές Έννοιες Πιθανοτήτων

2.1.1 σ -Άλγεβρες

Ορισμός 2.1.1.1 Έστω X ένα οποιοδήποτε σύνολο. Καλούμε ως σ -άλγεβρα στο X οποιοδήποτε σύνολο \mathcal{A} το οποίο παρουσιάζει τις ακόλουθες ιδιότητες [38].

- i. Τα στοιχεία του \mathcal{A} είναι υποσύνολα του συνόλου X , δηλαδή $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$.
- ii. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.
- iii. Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $X \setminus A \in \mathcal{A}$.
- iv. Αν $A_n \in \mathcal{A} \forall n \geq 1$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Ο όρος \mathcal{A} συνήθως ονομάζεται και οικογένεια διότι τα στοιχεία του είναι σύνολα. Σύμφωνα με τις δύο τελευταίες ιδιότητες συμπεραίνουμε πως η οικογένεια \mathcal{A} είναι κλειστή στα συμπληρώματα και στις αριθμήσιμες ενώσεις.

Παράδειγμα 2.1.1.1

Έστω ότι έχουμε ένα σύνολο X , τότε οι οικογένειες \mathcal{A}_1 και \mathcal{A}_2 είναι σ -άλγεβρες για τις οποίες ισχύει: $\mathcal{A}_1 := \{\emptyset, X\}$ και $\mathcal{A}_2 := \mathcal{P}(X)$. Η \mathcal{A}_1 είναι η ελάχιστη δυνατή ενώ η \mathcal{A}_2 η μέγιστη δυνατή σ -άλγεβρα στο X .

Παράδειγμα 2.1.1.2

Έστω το σύνολο $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Θέτουμε τα συμπληρώματα $B_1 := \{1, 2, 3\}$, $B_2 := \{4, 5, 6\}$ και $B_3 := \{7, 8, 9\}$. Τότε η οικογένεια \mathcal{A} είναι η σ -άλγεβρα στο X και ορίζεται ως εξής

$$\mathcal{A} = \{\emptyset, X, B_1, B_2, B_3, B_1 \cup B_2, B_1 \cup B_3, B_2 \cup B_3\}.$$

Το συμπλήρωμα του B_2 είναι το $B_1 \cup B_3$ το οποίο εμπεριέχεται και αυτό στην οικογένεια \mathcal{A} . Όμως η

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X, B_1, B_2, B_1 \cup B_2\}$$

δεν είναι σ -άλγεβρα καθώς δεν είναι κλειστή σε συμπληρώματα ενώ παράλληλα είναι κλειστή σε ενώσεις. Δεν εμπεριέχονται στην οικογένεια \mathcal{A}_1 τα συμπληρώματα $B_1, B_2, B_1 \cup B_2$.

Παράδειγμα 2.1.1.3

Έστω ένα σύνολο X το οποίο ισούται με το σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή $X = \mathbb{R}$. Τότε η οικογένεια

$$\mathcal{A} := \{A \subset \mathbb{R}: A \text{ αριθμήσιμο ή } \mathbb{R} \setminus A \text{ αριθμήσιμο}\}$$

είναι σ -άλγεβρα του X , καθώς το κενό είναι αριθμήσιμο και το \mathbb{R} έχει αριθμήσιμο σύνολο που είναι το κενό. Συνεπώς, ανήκουν στην \mathcal{A} .

Στο σημείο αυτό θα αποδείξουμε πως αν $\{\mathcal{A}_i: i \in I\}$ αποτελεί ένα σύνολο από σ -άλγεβρες στο σύνολο X , τότε και η τομή τους $\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$ είναι μία σ -άλγεβρα. Για την τομή ισχύει ότι

$$\bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i = \{A \in \mathcal{P}(X): A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I\}. \quad (2.1)$$

Ακολουθως, αποδεικνύουμε τον παραπάνω ισχυρισμό ως εξής.

Τα \emptyset, X εμπεριέχονται στην τομή διότι είναι στοιχεία κάθε σ -άλγεβρας στο X . Αν $A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I$, τότε αφού κάθε \mathcal{A}_i είναι σ -άλγεβρα, συνεπάγεται ότι

$$X \setminus A \in \mathcal{A}_i \forall i \in I.$$

Δηλαδή $X \setminus A \in \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$. Με πανομοιότυπο τρόπο αποδεικνύεται ότι η (2.1) είναι κλειστή σε αριθμήσιμες ενώσεις και έπεται ότι είναι σ -άλγεβρα. ■

2.1.2 Παραγόμενη σ -Άλγεβρα

Θεωρούμε ένα σύνολο \mathcal{C} που έχει ως στοιχεία του ορισμένα υποσύνολα του X , δηλαδή ισχύει ότι $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(X)$ [38]. Ορίζουμε ως

$$\mathcal{H} := \{\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X) : \mathcal{A} \supset \mathcal{C} \text{ και } \eta \mathcal{A} \text{ είναι } \sigma - \text{άλγεβρα}\} \quad (2.2)$$

το σύνολο όλων των σ -αλγεβρών στο X όπου στην καθεμία εμπεριέχεται η οικογένεια \mathcal{C} .

Λαμβάνοντας υπόψιν μας τα παραπάνω παραθέτουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.1.2.1 Ως σ -άλγεβρα η οποία παράγεται από την \mathcal{C} ορίζουμε την τομή όλων των σ -αλγεβρών που περιέχουν την \mathcal{C} και την συμβολίζουμε με $\sigma(\mathcal{C})$. Ειδικότερα,

$$\sigma(\mathcal{C}) := \bigcup_{\mathcal{A} \in \mathcal{H}} \mathcal{A}. \quad (2.3)$$

Η $\sigma(\mathcal{C})$ περιέχει όλα τα σύνολα $B \subset X$ με την ιδιότητα

$$B \in \mathcal{A} \forall \sigma - \text{άλγεβρα } \mathcal{A} \text{ στο } X \text{ με } \mathcal{A} \supset \mathcal{C}. \quad (2.4)$$

Βασιζόμενοι στη (2.1) διακρίνουμε πως η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι μία σ -άλγεβρα η οποία περιέχει τα στοιχεία της \mathcal{C} . Για την ακρίβεια, η $\sigma(\mathcal{C})$ είναι η μικρότερη σ -άλγεβρα που εμπεριέχει την οικογένεια \mathcal{C} καθώς οποιαδήποτε σ -άλγεβρα \mathcal{A} που περιέχει την \mathcal{C} αποτελεί στοιχείο του \mathcal{H} , που ορίσαμε στην (2.2), άρα καταλήγουμε στο ότι $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$. Τέλος, σημειώνουμε πως αν η \mathcal{C} είναι σ -άλγεβρα τότε $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

2.1.3 Χώρος Πιθανοτήτων

Ορισμός 2.1.3.1 Έστω ένα σύνολο Ω , μία σ -άλγεβρα \mathcal{F} επάνω σε αυτό και ένα μέτρο πιθανότητας P . Τότε η τριάδα (Ω, \mathcal{F}, P) καλείται χώρος πιθανοτήτων [1].

Παράδειγμα 2.1.3.1

Έστω $\Omega = \{1,2,3\}$ και $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$ [1]. Ορίζουμε το μέτρο αριθμησης κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$P(\emptyset) = 0, P(\{1\}) = \frac{1}{3}, P(\{2\}) = \frac{1}{3}, P(\{3\}) = \frac{1}{3}, P(\{1,2\}) = \frac{2}{3},$$

$$P(\{1,3\}) = \frac{2}{3}, P(\{2,3\}) = \frac{2}{3}, P(\{1,2,3\}) = 1$$

Η τριάδα (Ω, \mathcal{F}, P) είναι ένας χώρος πιθανοτήτων.

2.1.4 Σύνολα Borel

Θεωρούμε X ένα χώρο του \mathbb{R}^n , δηλαδή ένα μετρικό χώρο, και \mathcal{O} το σύνολο των ανοιχτών (*open*) συνόλων του X [38]. Ορίζουμε ως σύνολα Borel στον X τα στοιχεία εκείνα της σ -άλγεβρας για τα οποία ισχύει το κάτωθι

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O}). \quad (2.5)$$

Η $\mathcal{B}(X)$ είναι η μικρότερη σ -άλγεβρα στην οποία εμπεριέχονται όλα τα ανοιχτά σύνολα. Αναφέρουμε πως η οικογένεια των ανοικτών συνόλων \mathcal{O} δεν είναι μία σ -άλγεβρα και γι' αυτό το λόγο προσπαθούμε να τη μεγαλώσουμε όσο το δυνατό λιγότερο με στόχο να λάβουμε μία σ -άλγεβρα.

Στη συνέχεια παραθέτουμε ορισμένες προτάσεις και προβαίνουμε στην απόδειξη τους μέσω των οποίων εντοπίζουμε τα σύνολα Borel.

Πρόταση 2.1.4.1 *Κάθε ανοικτό ή κλειστό σύνολο υποσύνολο ενός μετρικού χώρου αποτελεί ένα σύνολο Borel.*

Απόδειξη

Σύμφωνα με τη σχέση (2.5) λαμβάνουμε $\mathcal{O} \subset \mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{O})$. Έστω F ένα κλειστό σύνολο τότε $X \setminus F \in \mathcal{B}(X)$ ως ανοικτό σύνολο. Όμως η $\mathcal{B}(X)$ είναι μία σ -άλγεβρα συνεπώς το συμπλήρωμα της $X \setminus F$ πρέπει να περιέχεται στην $\mathcal{B}(X)$. Άρα καταλήγουμε στο ότι $F \in \mathcal{B}(X)$. ■

Πρόταση 2.1.4.2 *Κάθε υποδιάστημα του συνόλου των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} είναι ένα σύνολο Borel.*

Απόδειξη

Παρουσιάζουμε τα δυνατά σενάρια ενός υποδιαστήματος ως εξής

$$(-\infty, \alpha], [\alpha, \infty), (-\infty, \alpha), (\alpha, \infty), (\alpha, b), [a, b], (a, b), [a, b).$$

Τα πρώτα δύο σενάρια είναι κλειστά ενώ τα τρία επόμενα είναι ανοιχτά και το $[a, b]$ κλειστό. Σχετικά με το $(a, b]$ ισχύει ότι $(a, b] = \mathbb{R} \setminus ((-\infty, a] \cup (b, \infty))$. Δεδομένου ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι μία σ -άλγεβρα και $(-\infty, a], (b, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ προκύπτει ότι

$$(-\infty, a] \cup (b, \infty) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

και

$$\mathbb{R} \setminus ((-\infty, a] \cup (b, \infty)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

■

Η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι μία σ -άλγεβρα που περιέχει όλα τα διαστήματα, άρα όταν προχωρούμε στη δημιουργία συνόλων ξεκινώντας από διαστήματα κάνοντας χρήση σε αριθμήσιμο πλήθος φορών τις πράξεις της ένωσης, της τομής και του συμπληρώματος θα αποτελούν στοιχεία της $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2.2 Στοχαστικές Διαδικασίες

Μία στοχαστική διαδικασία είναι ένα φαινόμενο το οποίο εξελίσσεται χρονικά κατά τυχαίο τρόπο. Το φυσικό περιβάλλον, η καθημερινή ζωή και το σύνολο των επιστημών μας προσφέρουν μία πληθώρα τέτοιων φαινομένων ή φαινόμενα τα οποία δύναται να παρασταθούν μίας συναρτήσεως δύο παραγόντων, του χρόνου και της τύχης. Παραδείγματος χάριν, οι τιμές των προϊόντων, το μέγεθος ενός πληθυσμού ή το πλήθος των μεταγραφόμενων σωματιδίων μέσω ενός μετρητή Geiger. Είναι σημαντικό λοιπόν πρώτου ξεκινήσουμε την ανάλυση μας να παραθέσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.1 Μία στοχαστική διαδικασία (stochastic process) είναι μία παραμετρική συλλογή τυχαίων μεταβλητών $\{X_t, t \in T\}$ οι οποίες ορίζονται σε έναν χώρο πιθανοτήτων (Ω, \mathcal{F}, P) και παίρνουν τιμές στον \mathbb{R}^d [1].

Μία στοχαστική διαδικασία λοιπόν μπορεί να θεωρηθεί και ως μία συνάρτηση δύο μεταβλητών οι οποίες είναι η t και η ω .

- $\forall t \in T$ το οποίο θεωρούμε ότι είναι δεδομένο και σταθερό έχουμε μία τυχαία μεταβλητή

$$\omega \rightarrow X_t(\omega); \omega \in \Omega.$$

- Θεωρώντας σταθερό $\omega \in \Omega$ θεωρούμε τη συνάρτηση

$$t \rightarrow X_t(\omega); t \in T,$$

η οποία ονομάζεται τροχιά (path) της X_t .

Μία στοχαστική διαδικασία βάσει των χρονικών στιγμών στις οποίες ανήκει κατατάσσεται σε μία εκ των δύο παρακάτω κατηγοριών:

- **Στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου:** Μία στοχαστική διαδικασία $X(t)$ συνεχούς χρόνου ορίζεται σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή.
- **Στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου:** Μία στοχαστική διαδικασία $X[n]$ διακριτού χρόνου ορίζεται σε διακριτές χρονικές στιγμές.

Επιπροσθέτως, ανάλογα με τις τιμές τις οποίες λαμβάνει μία στοχαστική διαδικασία εντοπίζεται σε μία εκ των δύο παρακάτω κατηγοριών:

- **Συνεχής στοχαστική διαδικασία:** Η τιμή μιας συνεχούς στοχαστικής διαδικασίας είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή.
- **Διακριτή στοχαστική διαδικασία:** Η τιμή μιας διακριτής στοχαστικής διαδικασίας είναι μία διακριτή τυχαία μεταβλητή.

Παράδειγμα 2.2.1

Ως ένα παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας συνεχούς χρόνου, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για την τυχαία μεταβλητή t ισχύει ότι $t \in \mathbb{R}^+$ και για κάθε t ορίζουμε μία τυχαία μεταβλητή X_t η οποία έχει την ακόλουθη κατανομή πιθανότητας [1]

$$P(X_t < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2t}} dy.$$

Άρα, συμπεραίνουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ η X_t είναι μία κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με μέσο $\mu = 0$ και διασπορά $\sigma^2 = t$.

Παράδειγμα 2.2.2

Ως ένα παράδειγμα μίας στοχαστικής διαδικασίας διακριτού χρόνου μπορούμε να θεωρήσουμε το εξής. Έστω ότι ρίχνουμε διαδοχικά ένα νόμισμα και ω_i είναι το αποτέλεσμα της i ρίψης του νομίσματος. Θεωρούμε λοιπόν ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_i λαμβάνουν τις τιμές [1]

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{αν } \omega_i = H \\ -1, & \text{αν } \omega_i = T \end{cases}$$

Το κέρδος ενός παίκτη εμφανίζεται μέσω της τιμής της X_i , δηλαδή εάν ποντάρει 1 νομισματική μονάδα κατά την i ρίψη στο αν το αποτέλεσμα θα είναι κορώνα (*heads*, H) ή γράμματα (*tails*, T). Συνεπώς, συμπεραίνουμε πως η παραμετρική συλλογή των τυχαίων μεταβλητών $\{X_i\}, i \in \mathbb{R}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου της οποίας η τιμή είναι τα κέρδη του παίκτη κατά την διάρκεια του παιχνιδιού.

2.3 Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου

Οι Μαρκοβιανές αλυσίδες οι οποίες έλαβαν το όνομα τους από τον Άντρι Μαρκόφ, αποτελούν στοχαστικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή στοχαστικών συστημάτων. Στις παραγράφους που ακολουθούν θα αναλύσουμε τις μαρκοβιανές αλυσίδες διακριτού χρόνου και θα ασχοληθούμε με τις πιθανότητες μεταβάσεων καταστάσεων τους. Επιπλέον, θα επισημάνουμε την γνωστή μαρκοβιανή ιδιότητα καθώς θα αποτελέσει ένα κομβικό σημείο για την επίλυση του προβλήματος που θα θέσουμε στο τελευταίο κεφάλαιο. Τέλος, θα παραθέσουμε την κατηγοριοποίηση των καταστάσεων τους και την κατανομή μόνιμης κατάστασης.

Έστω μία στοχαστική διαδικασία $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ η οποία λαμβάνει τιμές σε ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο πιθανών τιμών. Το συγκεκριμένο σύνολο των πιθανών αυτών τιμών συμβολίζεται από το σύνολο των μη-αρνητικών ακέραιων αριθμών $\{0, 1, 2, \dots\}$. Εάν $X_n = i$ τότε λέμε πως η στοχαστική διαδικασία τη χρονική στιγμή n βρίσκεται στην κατάσταση i . Προβαίνουμε στην υπόθεση πως οποτεδήποτε η στοχαστική διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i , υπάρχει μία πιθανότητα P_{ij} να βρεθεί ακολούθως στην κατάσταση j . Προχωρούμε λοιπόν στην υπόθεση της παρακάτω εξίσωσης

$$\begin{aligned} P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0\} \\ = P\{X_{n+1} = j \mid X_n = i\} = P_{ij}, \end{aligned} \quad (2.6)$$

η οποία ισχύει για όλες τις καταστάσεις $i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j$ και για όλα τα $n \geq 0$.

Βασιζόμενοι στα παραπάνω καταλήγουμε στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.3.1 Μία στοχαστική διαδικασία $\{X_n, n = 0, 1, 2, \dots\}$ της οποίας οι τιμές εντοπίζονται σε ένα πεπερασμένο ή αριθμήσιμο σύνολο πιθανών τιμών καλείται μαρκοβιανή αλυσίδα ή αλυσίδα Markov (Markov chain) όταν ισχύει η (2.6) [5].

Παρατηρώντας την εξίσωση (2.6) αντιλαμβανόμαστε ότι για μία αλυσίδα Markov η πιθανότητα υπό συνθήκη οποιασδήποτε μελλοντικής κατάστασης της X_{n+1} , δεδομένων των παρελθοντικών καταστάσεων X_0, X_1, \dots, X_{n-1} και της παρούσας κατάστασης X_n είναι ανεξάρτητη των παρελθοντικών καταστάσεων της και εξαρτάται μονάχα από την παρούσα της κατάσταση. Διαφορετικά, μπορούμε να ισχυριστούμε πως η κατάσταση που θα βρεθεί η αλυσίδα στο μέλλον ($X_{n+1} = j$) επηρεάζεται μόνο

από την κατάσταση που βρίσκεται στο παρόν ($X_n = i$) και όχι από το παρελθόν ($X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0$) [7]. Η παραπάνω διαπίστωση αποτελεί τη λεγόμενη Μαρκοβιανή ιδιότητα (*Markovian property*). Με άλλα λόγια η μελλοντική πιθανοθεωρητική συμπεριφορά της αλυσίδας εξαρτάται μόνο από την παρούσα κατάσταση της και όχι από την ιστορία της.

2.3.1 Πιθανότητες Μεταβάσεων Καταστάσεων

Η τιμή P_{ij} καλείται πιθανότητα μετάβασης (*transition probability*) και παριστάνει την πιθανότητα ενώ η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση i , να μεταβεί στη συνέχεια στην κατάσταση j . Η αρχική κατανομή πιθανότητας $P[X_0 = i]$ ορίζει πλήρως την εξέλιξη της διαδικασίας [5]. Στην περίπτωση που οι πιθανότητες μετάβασης είναι ανεξάρτητες του βήματος n τότε η αλυσίδα καλείται ομογενής και ισχύει ότι

$$P_{ij} = P[X_{n+1} = j | X_n = i] \forall n, \quad (2.7)$$

που συμβολίζει την πιθανότητα μετάβασης σε ένα βήμα από την κατάσταση i στην κατάσταση j . Με όμοιο τρόπο οι πιθανότητες μετάβασης σε m βήματα είναι

$$P_{ij}^{(m)} = P[X_{n+m} = j | X_n = i], \quad (2.8)$$

προκύπτει λοιπόν η αναδρομική σχέση

$$P_{ij}^{(m)} = \sum_k P_{ik}^{(m-1)}, m = 2, 3, \dots \quad (2.9)$$

και λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι οι πιθανότητες είναι μη-αρνητικές και η διαδικασία θα μεταβεί σε κάποια κατάσταση προκύπτει ότι

$$P_{ij} \geq 0, \quad i, j \geq 0 \quad (2.10)$$

και

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{ij} = 1, \quad i = 0, 1, \dots \quad (2.11)$$

Ο πίνακας των πιθανοτήτων μετάβασης \hat{P} ενός βήματος P_{ij} ορίζεται ως

$$\hat{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & \cdots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

και περιγράφει τη στοχαστική συμπεριφορά της μαρκοβιανής αλυσίδας. Τα αθροίσματα των γραμμών του πίνακα (2.21) ισούται με τη μονάδα.

Παράδειγμα 2.3.1.1

Έστω ένα αντικείμενο το οποίο κινείται στο χώρο $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ και ξεκινάει από το 0. Αν τη χρονική στιγμή t εντοπίζεται στη θέση i τότε με πιθανότητα p_1 παραμένει στην ίδια θέση, με πιθανότητα p_2 μεταβαίνει στη θέση $(i + 1)$ ενώ με πιθανότητα p_3 στη θέση $(i - 1)$. Η διαδικασία που μόλις περιγράψαμε είναι μία μαρκοβιανή αλυσίδα και πιο συγκεκριμένα καλείται τυχαίος περίπατος όπου οι πιθανότητες p_1, p_2, p_3 είναι οι πιθανότητες μετάβασης για τις οποίες ισχύει ότι $p_1 + p_2 + p_3 = 1$. Την έννοια του τυχαίου περιπάτου θα την αναλύσουμε στην αμέσως επόμενη ενότητα.

Παράδειγμα 2.3.1.2

Υποθέτουμε πως η X_i λαμβάνει δύο δυνατές τιμές είτε 1 είτε 0, ανάλογα με το αν την i -ημέρα παρατηρείται βροχόπτωση ή όχι. Θεωρούμε πως πρόκειται για μία αλυσίδα Markov με πιθανότητες μεταβάσεως [8]

$$P(X_{n+1} = 1 | X_n = 0) = p_{01} = 0.2,$$

$$P(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) = p_{00} = 0.8,$$

$$P(X_{n+1} = 1 | X_n = 1) = p_{11} = 0.6,$$

$$P(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) = p_{10} = 0.4,$$

τότε προκύπτει

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} \\ p_{10} & p_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 2.3.1.3

Θεωρούμε μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $\{X_n, n = 0, 1, \dots\}$ τέτοια ώστε $P(X_n = -1) = P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$ για $n = 0, 1, 2, \dots$. Θα αποδείξουμε ότι η ακολουθία $\{Y_n, n = 0, 1, \dots\}$ για την οποία ισχύει ότι $Y_n = \frac{1}{2}(X_n + X_{n+1})$ για $n = 0, 1, 2, \dots$ δεν έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\{Y_n, n = 0, 1, \dots\}$ δεν έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα καθώς ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P\{Y_n = 1 \mid Y_n = 0\} &= \frac{P\{X_{n+1} + X_{n+2} = 2, X_n + X_{n+1} = 0\}}{P\{X_n + X_{n+1} = 0\}} \\ &= \frac{P\{X_n = -1, X_{n+1} = 1, X_{n+2} = 1\}}{P\{X_n = -1, X_{n+1} = 1\} + P\{X_n = 1, X_{n+1} = -1\}} \\ &= \frac{P\{X_n = -1\}P\{X_{n+1} = 1\}P\{X_{n+2} = 1\}}{P\{X_n = -1\}P\{X_{n+1} = 1\} + P\{X_n = 1\}P\{X_{n+1} = -1\}} \\ &= \frac{0.5^3}{2 * 0.5^2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Η πρώτη ισότητα έχει προκύψει από τον ορισμό της ακολουθίας των τυχαίων μεταβλητών Y_n , ενώ η τρίτη αποτελεί απόρροια της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών X_n .

Παράλληλα ισχύει ότι

$$\begin{aligned} &P\{Y_{n+1} = 1 \mid Y_n = 0, Y_{n-1} = 1\} \\ &= \frac{P\{X_{n+1} + X_{n+2} = 2, X_n + X_{n+1} = 0, X_{n-1} + X_n = 2\}}{P\{X_n + X_{n+1} = 0, X_{n-1} + X_n = 2\}} = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών Y_n για $n = 0, 1, \dots$ δεν έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα.

2.3.2 Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

Μέσω των εξισώσεων Chapman – Kolmogorov μας παρέχεται η δυνατότητα υπολογισμού των πιθανοτήτων n -βημάτων [5]. Οι εξισώσεις δίδονται από την παρακάτω σχέση

$$P_{ij}^{n+m} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{ik}^n P_{kj}^m, \text{ για όλα τα } n, m \geq 0, i, j. \quad (2.13)$$

και προκύπτουν σύμφωνα με τα ακόλουθα

$$\begin{aligned} P_{ij}^{n+m} &= P\{X_{n+m} = j \mid X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{n+m} = j, X_n = k \mid X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P\{X_{n+m} = j \mid X_n = k, X_0 = i\} P\{X_n = k \mid X_0 = i\} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}^m P_{ik}^n. \end{aligned}$$

■

2.3.3 Κατηγοριοποίηση Καταστάσεων

Μία κατάσταση i έχει πρόσβαση σε μία κατάσταση j όταν για κάποιο $n \geq 0$ ισχύει ότι $P_{ij}^n > 0$. Όταν λοιπόν δύο καταστάσεις έχουν πρόσβαση η μία στην άλλη λέμε ότι επικοινωνούν και τις συμβολίζουμε με $i \leftrightarrow j$. Συμπεραίνουμε λοιπόν, πως η επικοινωνία μεταξύ δύο καταστάσεων είναι μία σχέση ισοδυναμίας [5], δηλαδή

- i. $i \leftrightarrow i$,
- ii. εάν $i \leftrightarrow j$ τότε $j \leftrightarrow i$,
- iii. εάν $i \leftrightarrow j$ και $j \leftrightarrow k$ τότε $i \leftrightarrow k$.

Στην περίπτωση που αν από κάθε κατάσταση μας δίνεται η δυνατότητα να φθάσουμε σε οποιαδήποτε άλλη κατάσταση τότε η μαρκοβιανή αλυσίδα καλείται αμειώτη (*irreducible*). Θεωρούμε ένα σύνολο A το οποίο αποτελεί το σύνολο όλων των καταστάσεων της αλυσίδας Markov και ένα σύνολο A_1 το οποίο είναι υποσύνολο του A . Τότε το υποσύνολο A_1 καλείται κλειστό όταν δεν υπάρχει η δυνατότητα της μετάβασης ενός βήματος από οποιαδήποτε κατάσταση του A_1 προς οποιαδήποτε άλλη κατάσταση A_1^c (συμπλήρωμα του A_1).

Όταν το υποσύνολο A_1 περιλαμβάνει μόνο μία κατάσταση τότε η συγκεκριμένη κατάσταση χαρακτηρίζεται ως απορροφητική (*absorbing*). Σημειώνουμε πως για μία αμείωτη αλυσίδα Markov δεν υφίστανται οι απορροφητικές καταστάσεις.

Βάσει της ιδιότητας της έλλειψης μνήμης (*memory-less property*) που περιορίζεται η γενικότητα των διαδικασιών Markov και καθιστά εφικτή την επάνοδο σε μία κατάσταση την οποία έχει ήδη επισκεφθεί η αλυσίδα καταλήγουμε στα ακόλουθα

$$f_j^{(n)} = P[\text{η πρώτη επάνοδος στην κατάσταση } j \text{ πραγματοποιείται έπειτα από } n \text{ βήματα μετά την αναχώρηση από την } j],$$

$$f_j = \sum_{n=1}^{\infty} f_j^{(n)} = P[\text{κάποτε πραγματοποιείται επάνοδος στην κατάσταση } j].$$

Η κατάσταση j μίας αλυσίδας Markov ανάλογα με τις τιμές της πιθανότητας f_j καλείται ως

- επαναληπτική (*recurrent*), αν $f_j = 1$,
- μεταβατική (*transient*), αν $f_j < 1$,
- περιοδική, όταν οι μοναδικοί αριθμοί βημάτων στους οποίους μπορεί να πραγματοποιηθεί η επάνοδος στην j είναι $\gamma, 2\gamma, 3\gamma, \dots$ όπου γ είναι η περίοδος για την οποία ισχύει $\gamma > 1$ και αποτελεί τον μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό για τον οποίο ισχύει το προαναφερθέν.

Ο μέσος χρόνος επανάληψης (*mean recurrence time*) της κατάστασης j , ορίζεται ως

$$M_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_j^{(n)} \quad (2.13)$$

και ανάλογα με την τιμή του η κατάσταση j χαρακτηρίζεται ως μηδενική επαναληπτική (*null recurrent*) για $M_j = \infty$, και ως θετική επαναληπτική (*positive recurrent*) για $M_j < \infty$.

2.3.4 Οριακό Θεώρημα - Κατανομή Μόνιμης Κατάστασης

Έστω $\pi_j^{(n)}$ η πιθανότητα να βρεθεί η διαδικασία στην κατάσταση j κατά το n -οστό βήμα [5], δηλαδή

$$\pi_j^{(n)} = Pr[X_n = j].$$

Θεώρημα 2.3.4.1 Για μία αμείωτη αλυσίδα Markov ισχύει ότι όλες οι καταστάσεις είναι είτε μεταβατικές, είτε θετικές επαναληπτικές, είτε μηδενικές επαναληπτικές. Στην περίπτωση που αναφερόμαστε σε περιοδική τότε όλες έχουν την ίδια περίοδο γ .

Θεώρημα 2.3.4.2 (Οριακό Θεώρημα) Για μία αμείωτη και απεριοδική ομογενή αλυσίδα Markov υπάρχει μία στατιστική κατανομή πιθανοτήτων $\{\pi_j\}$ με τη βοήθεια της οποίας περιγράφεται η πιθανότητα να βρεθεί η διαδικασία στην κατάσταση j σε κάποια μακρινή χρονική στιγμή. Οι οριακές πιθανότητες υφίστανται πάντα και είναι ανεξάρτητες από την αρχική κατανομή πιθανότητας, για τις οποίες ισχύει:

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j^{(n)}. \quad (2.14)$$

Εάν όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές ή όλες μηδενικές επαναληπτικές τότε ισχύει $\pi_j = 0$ και δεν υπάρχει στατιστική κατανομή. Εάν όλες οι καταστάσεις είναι θετικές επαναληπτικές τότε ισχύει $\pi_j > 0$ για όλα τα j και δεν υπάρχει στατιστική κατανομή.

Τότε σε αυτή την περίπτωση ισχύει

$$\pi_j = \frac{1}{M_j}, \quad (2.15)$$

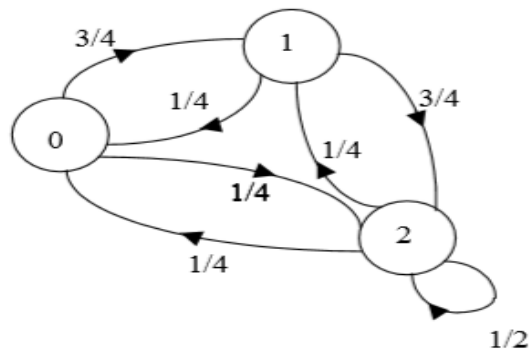
όπου ο καθορισμός των πιθανοτήτων π_j διαδραματίζεται μονοσήμαντα από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} \pi_j = \sum_i \pi_i P_{ij}, \text{ για όλα τα } j \\ \sum_j \pi_j = 1, \end{cases} \quad (2.16)$$

Τέλος, αναφέρουμε πως μία κατάσταση j καλείται εργοδική εάν είναι απεριοδική και παράλληλα θετική επαναληπτική και μία αλυσίδα Markov είναι εργοδική όταν όλες οι καταστάσεις της είναι εργοδικές. Επιπλέον, για μία αμείωτη εργοδική μαρκοβιανή αλυσίδα ισχύει ότι οι πιθανότητες $\{p_j^{(n)}\}$ συγκλίνουν πάντοτε σε μία οριακή στατική κατανομή. Οι παραπάνω παρατηρήσεις συνιστούν την έννοια της εργοδικότητας (*ergodicity*).

Παράδειγμα 2.3.4.1

Έστω μία αλυσίδα Markov η οποία είναι εργοδική καθώς είναι αμείωτη και με πεπερασμένο πλήθος καταστάσεων. Η αλυσίδα περιγράφεται από ένα προσανατολισμένο γράφημα μεταβάσεων (*state-transition graph*) όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα.



Διάγραμμα 8

Παρατηρούμε ότι οι κορυφές του γραφήματος αποτελούν τις καταστάσεις και οι ακμές του τις επιτρεπτές μεταβάσεις. Οι τιμές επάνω στις ακμές αντιπροσωπεύουν τις πιθανότητες μετάβασης P_{ij} . Συνεπώς παρατηρούμε ότι η μήτρα πιθανοτήτων μετάβασης (*transition probability matrix*) είναι

$$\begin{bmatrix} 0 & 3/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

και ότι για τα στοιχεία της μήτρας ισχύει ότι

$$P_{ij} \geq 0 \text{ για όλα τα } i, j \tag{2.17}$$

και

$$\sum_j P_{ij} = 1, \text{ για όλα τα } j. \tag{2.18}$$

Αναφέρουμε πως όταν μία μήτρα ικανοποιεί τις εξισώσεις (2.17) και (2.18) καλείται ως στοχαστική μήτρα. Στη συνέχεια, ορίζουμε το διάνυσμα πιθανοτήτων $\hat{\pi} = [\pi_j]$ και σύμφωνα με το (2.16) καταλήγουμε στη μορφή

$$\hat{\pi} = \hat{\pi} * \hat{P}. \quad (2.19)$$

Συνεπώς προκύπτει το σύστημα:

$$\begin{cases} \pi_0 = 0 * \pi_0 + \frac{1}{4} * \pi_1 + \frac{1}{4} * \pi_2 \\ \pi_1 = \frac{3}{4} * \pi_0 + 0 * \pi_1 + \frac{1}{4} * \pi_2 \\ \pi_2 = \frac{1}{4} * \pi_0 + \frac{3}{4} * \pi_1 + \frac{1}{2} * \pi_2 \end{cases}$$

Η λύση του συστήματος είναι $\pi_0 = 1/5$, $\pi_1 = 7/25$ και $\pi_2 = 13/25$ και αποτελεί παράλληλα τη στατική κατανομή πιθανότητας της μαρκοβιανής αλυσίδας.

Η στατική κατανομή πολλές φορές εντοπίζεται και ως κατανομή μόνιμης κατάστασης (*steady state distribution*) ή και ως κατανομή κατάστασης ισορροπίας (*equilibrium state distribution*).

Αναφέρουμε πως όταν ενδιαφερόμαστε για την εύρεση της κατάστασης j στο χρόνο n τότε χρειαζόμαστε την πιθανότητα $\pi_j^{(n)}$ και ορίζουμε το διάνυσμα

$$\hat{\pi}^{(n)} = [\pi_j^{(n)}]. \quad (2.20)$$

Γενικεύοντας το άνωθεν προκύπτει ότι

$$\hat{\pi}^{(n)} = \hat{\pi}^{(n-1)} * \hat{P}, \text{ για } n = 1, 2, \dots \quad (2.21)$$

και αναδρομικά λαμβάνουμε

$$\hat{\pi}^{(n)} = \hat{\pi}^{(0)} * \hat{P}^n, \text{ για } n = 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

Η οποία μας πληροφορεί για τη γενική μέθοδο επίλυσης στην περίπτωση που γνωρίζουμε την αρχική κατανομή $\hat{\pi}^{(0)}$, και την μήτρα \hat{P} .

Η στατιστική κατανομή λοιπόν εφόσον η αλυσίδα Markov είναι εργοδική προκύπτει με χρήση ορίου ως εξής

$$\hat{\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\pi}^{(n)}.$$

Με χρήση ορίων στην εξίσωση (2.21) καταλήγουμε στην (2.19).

2.4 Τυχαίος Περίπατος

Στην παρούσα παράγραφο θα παρουσιάσουμε την έννοια του τυχαίου περιπάτου μέσω ενός πειράματος με σκοπό την καλύτερη κατανόηση του.

Υποθέτουμε το ακόλουθο πείραμα: Έστω ότι ρίχνουμε ένα νόμισμα το αποτέλεσμα του οποίου μπορεί να είναι είτε κορώνα (h) είτε γράμματα (t). Στην περίπτωση που το αποτέλεσμα της ρίψης είναι κορώνα (h) τότε κάνουμε ένα βήμα εμπρός, ενώ εάν το αποτέλεσμα είναι γράμματα (t) τότε κάνουμε ένα βήμα πίσω [9]. Ορίζουμε ως D το μήκος των βημάτων και παράλληλα υποθέτουμε ότι η πιθανότητα να έρθει κορώνα είναι $P(h) = p$ ενώ η πιθανότητα να έρθει γράμματα είναι $P(t) = 1 - p = q$. Τότε η τυχαία μεταβλητή:

$$U_n = \begin{cases} +D, & \text{αν } \omega = h \text{ με πιθανότητα } p \\ -D, & \text{αν } \omega = t \text{ με πιθανότητα } 1 - p \end{cases} \quad (2.23)$$

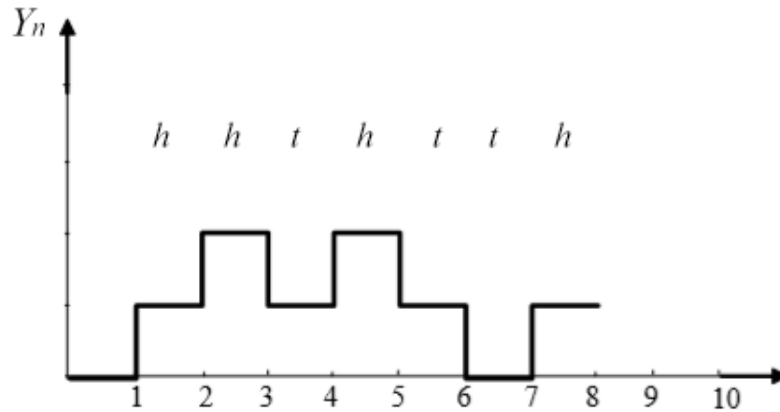
Με $n = 1, 2, \dots$ το οποίο αποτελεί τις διακεκριμένες στιγμές των ρίψεων του νομίσματος μας εμφανίζει την μετατόπιση μας έπειτα από μία δεδομένη ρίψη.

Εάν υποθέσουμε ακόμη ότι ξεκινάμε από την θέση 0, δηλαδή ότι $Y_0 = 0$ η συνολική μετατόπιση μας θα δίνεται από

$$Y_n = \sum_{i=1}^n U_i, n = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Η στοχαστική διαδικασία Y_n με $n = 1, 2, \dots$ ονομάζεται απλός τυχαίος περίπατος (*simple random walk*).

Η ακόλουθη διαγραμματική απεικόνιση μας πληροφορεί για την πιθανή μετατόπιση η οποία θα προκύψει έπειτα από οκτώ στο σύνολο επαναλήψεις του πειράματος μας.



Διάγραμμα 9

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της Y_n δίνεται από

$$\Phi_{Y_n}(\omega) = E(e^{i\omega Y_n}) = pe^{i\omega D} + (1 - q)e^{-i\omega D} = pe^{i\omega D} + qe^{-i\omega D}. \quad (2.25)$$

Είναι γνωστό πως η χαρακτηριστική συνάρτηση του αθροίσματος ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ισούται με το γινόμενο των ατομικών χαρακτηριστικών συναρτήσεων της καθεμίας τυχαίας μεταβλητής.

Επομένως, από την (2.24) προκύπτει ότι

$$\Phi_{Y_n}(\omega) = (pe^{i\omega D} + qe^{-i\omega D})^n. \quad (2.26)$$

Όπου $i^2 = -1$. Εφόσον το μέγεθος των διακεκριμένων χρονικών στιγμών είναι Dt τότε την χρονική στιγμή t ισχύει ότι $n = \frac{t}{Dt}$ [9]. Στο πείραμα το οποίο διεξάγουμε εικάζουμε πως το νόμισμα το οποίο χρησιμοποιούμε είναι αμερόληπτο. Συνεπώς, ισχύει ότι $p = 1 - p = q = \frac{1}{2}$ και $t < \infty$. Τότε,

$$\Phi_{Y_n}(\omega) = \left(\frac{1}{2}e^{i\omega D} + \frac{1}{2}e^{-i\omega D} \right)^{\frac{t}{Dt}}. \quad (2.27)$$

Λαμβάνοντας υπόψιν μας το θεώρημα των ροπών προκύπτει ότι:

$$E(Y_n) = \frac{1}{i} \Phi'_{Y_n}(0) = 0 \quad (2.28)$$

και

$$Var(Y_n) = E(Y_n^2) - [E(Y_n)]^2 = \frac{1}{i^2} \Phi''_{Y_n}(0) = \frac{tD^2}{Dt}. \quad (2.29)$$

Στο σημείο αυτό θα μελετήσουμε τον απλό τυχαίο περίπατο σε συνεχή χρόνο. Ειδικότερα για μία χρονική στιγμή όπου $t < \infty$ θα υπολογίσουμε το όριο του τυχαίου περιπάτου για $Dt \rightarrow \infty$. Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζουμε μία νέα διαδικασία τέτοια ώστε $Y_t \triangleq \lim_{Dt \rightarrow \infty} Y_n$.

Για να αποφύγουμε το αποτέλεσμα της διαδικασίας με άπειρη μεταβλητότητα, κάτι το οποίο θα προκύψει εάν δεν διαχειριστούμε ορθά την απόσταση D θεωρούμε ότι $D_t \rightarrow 0$.

Παίρνουμε λοιπόν το όριο της εξίσωσης και θέτουμε $D = \sigma\sqrt{Dt}$, τότε έχουμε

$$\Phi_{Y_t}(\omega) \triangleq \lim_{Dt \rightarrow \infty} \Phi_{Y_n}(\omega) = \lim_{Dt \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} e^{i\omega\sigma\sqrt{Dt}} + \frac{1}{2} e^{-i\omega\sigma\sqrt{Dt}} \right)^{\frac{t}{Dt}}. \quad (2.30)$$

Στη συνέχεια λογαριθμίζουμε κατά μέλη την εξίσωση και προκύπτει ότι

$$\ln[\Phi_{Y_t}(\omega)] = \ln \left[\lim_{Dt \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} e^{i\omega\sigma\sqrt{Dt}} + \frac{1}{2} e^{-i\omega\sigma\sqrt{Dt}} \right)^{\frac{t}{Dt}} \right] \quad (2.31)$$

ή

$$\ln[\Phi_{Y_t}(\omega)] = \lim_{Dt \rightarrow \infty} \left(\ln \left[\left(\frac{1}{2} e^{i\omega\sigma\sqrt{Dt}} + \frac{1}{2} e^{-i\omega\sigma\sqrt{Dt}} \right)^{\frac{t}{Dt}} \right] \right), \quad (2.32)$$

αφού ο λογάριθμος είναι μία συνεχής συνάρτηση και ισχύει η ιδιότητα $\ln(\lim \dots) = \lim(\ln \dots)$.

Άρα,

$$\ln[\Phi_{Y_t}(\omega)] = t \lim_{Dt \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\frac{1}{2}e^{i\omega\sigma\sqrt{Dt}} + \frac{1}{2}e^{-i\omega\sigma\sqrt{Dt}}\right)}{Dt}. \quad (2.33)$$

Παρατηρούμε ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής τείνουν στο 0 για $Dt \rightarrow \infty$ συνεπώς κάνοντας χρήση του κανόνα de L'Hospital έχουμε

$$\begin{aligned} \ln[\Phi_{Y_t}(\omega)] &= t \lim_{Dt \rightarrow \infty} \frac{\left(\ln\left(\frac{1}{2}e^{i\omega\sigma\sqrt{Dt}} + \frac{1}{2}e^{-i\omega\sigma\sqrt{Dt}}\right)\right)'}{(Dt)'} \\ &= t \lim_{Dt \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2}i\omega\sigma(\sqrt{Dt})'e^{i\omega\sigma\sqrt{Dt}} - \frac{1}{2}i\omega\sigma(\sqrt{Dt})'e^{-i\omega\sigma\sqrt{Dt}}}{\frac{1}{2}e^{i\omega\sigma\sqrt{Dt}} + \frac{1}{2}e^{-i\omega\sigma\sqrt{Dt}}} \\ &= i\omega\sigma t \lim_{Dt \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{Dt}} \frac{e^{i\omega\sigma\sqrt{Dt}} - e^{-i\omega\sigma\sqrt{Dt}}}{e^{i\omega\sigma\sqrt{Dt}} + e^{-i\omega\sigma\sqrt{Dt}}} \right) \\ &= \frac{1}{2}i\omega\sigma t \lim_{Dt \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{Dt}} \frac{2i \sin \omega\sigma\sqrt{Dt}}{2 \cos \omega\sigma\sqrt{Dt}} \right) \\ &= -\frac{1}{2}\omega\sigma t \lim_{Dt \rightarrow \infty} \frac{\tan \omega\sigma\sqrt{Dt}}{\sqrt{Dt}}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Εφαρμόζοντας ξανά τον κανόνα de L'Hospital και λαμβάνοντας υπόψιν μας ότι ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\tan ax}{x} = a,$$

οπότε

$$\ln[\Phi_{Y_n}(\omega)] = -\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2t, \quad (2.35)$$

άρα,

$$\Phi_{Y_n}(\omega) = e^{-\frac{1}{2}\omega^2\sigma^2t}. \quad (2.36)$$

Η οποία είναι μία χαρακτηριστική συνάρτηση μία κανονικής διαδικασίας με μέση τιμή 0 και διασπορά σ^2t . Ο τυχαίος περίπατος έχει ανεξάρτητα τμήματα και άρα το όριο είναι μία διαδικασία Wiener όπως θα διαπιστώσουμε και παρακάτω.

2.5 Κίνηση Brown

Η κίνηση Brown αποτελεί μία από τις σπουδαιότερες στοχαστικές διαδικασίες, πολύ συχνά συναντάται και ως διαδικασία Wiener ή Wiener-Lévy και παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον τόσο από θεωρητικής απόψεως όσο και από πλευράς εφαρμογών. Η συγκεκριμένη στοχαστική διαδικασία διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στη θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και συνιστά έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, όσον αφορά τα μοντέλα σε συνεχή χρόνο [2]. Πέραν όμως της αδιαμφισβήτητης εφαρμογής της στα χρηματοοικονομικά είναι δυνατό να χρησιμοποιηθεί για να περιγράψει πολλά φυσικά φαινόμενα.

Η κίνηση Brown έλαβε το όνομα της από τον Άγγλο Βοτανολόγο Robert Brown, ο οποίος πρώτος περιέγραψε (1827) την «ακανόνιστη» κίνηση ενός μικρού σωματιδίου μέσα σε ένα υγρό ή αέριο. Ο Γερμανός φυσικός Albert Einstein έδειξε (1905) ότι η συγκεκριμένη κίνηση είναι εφικτό να ερμηνευτεί θεωρώντας ότι το σωματίδιο «βομβαρδίζεται» από τα μόρια του υγρού ή του αερίου και για τον λόγο αυτό κινείται ακανόνιστα κατά «τυχαίο» τρόπο στο χώρο [6]. Τέλος, ο Αμερικανός μαθηματικός Nobert Wiener, όρισε αυστηρά και μελέτησε εξονυχιστικά και σε βάθος (1918) την ανέλιξη αυτή, αποδεικνύοντας πλήθος ιδιοτήτων της, γεγονός το οποίο επιβεβαιώνεται από τον χαρακτηρισμό της ως διαδικασία Wiener (*Wiener Process*). Ο θερμικός θόρυβος των ηλεκτρικών κυκλωμάτων όπως και η κίνηση των τιμών του χρηματιστηρίου είναι ορισμένα παραδείγματα μιας διαδικασίας Wiener [9].

Ορισμός 2.5.1 Μία στοχαστική διαδικασία $\{W_t, t \geq 0\}$ ονομάζεται κανονική κίνηση Brown ή διαδικασία Wiener εάν πληρούνται οι ακόλουθες παραδοχές:

- $H \{W_t > 0\}$ αποτελείται από ανεξάρτητα και αμετάβλητα τμήματα.
- $H W_t$ έχει μία κανονική κατανομή για κάθε $t \geq 0$.
- $E(W_t) = 0$ για κάθε $t \geq 0$.
- $P(W_0 = 0) = 1$, δηλαδή $W_0 = 0$ με πιθανότητα 1.

Παρατηρούμε ότι

$$\text{Var}(W_t) = \text{Var}(W_t - W_0) = \text{Var}(W_{t+\tau} - W_\tau) \quad (2.37)$$

και

$$\text{Var}(W_\tau) = \text{Var}(W_\tau - W_0), \quad (2.38)$$

καθώς γνωρίζουμε ότι $W_t = W_t - W_0$ με πιθανότητα 1 και ισχύει ότι $(W_t - W_0) \cong (W_{t+\tau} - W_\tau)$ αφού οι $(W_t - W_0)$, $(W_{t+\tau} - W_\tau)$ έχουν την ίδια στατιστική.

Βάσει των εξισώσεων (2.37) και (2.38) προκύπτει το εξής:

$$\text{Var}(W_t) + \text{Var}(W_\tau) = \text{Var}(W_{t+\tau} - W_\tau) + \text{Var}(W_\tau - W_0) \quad (2.39)$$

καθώς οι $(W_\tau - W_0), (W_{t+\tau} - W_\tau)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες και ασυσχέτιστες. Συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψιν τις ιδιότητες των ασυσχέτιστων διαδικασιών λαμβάνουμε

$$\text{Var}(W_{t+\tau} - W_\tau) + \text{Var}(W_\tau - W_0) = \text{Var}(W_{t+\tau} - W_\tau + W_\tau - W_0) \quad (2.40)$$

άρα,

$$\text{Var}(W_t) + \text{Var}(W_\tau) = \text{Var}(W_{t+\tau} - W_\tau) + \text{Var}(W_\tau - W_0) = \text{Var}(W_{t+\tau}). \quad (2.41)$$

Η τελευταία σχέση (2.41) είναι της μορφής $f(t_1 + t_2) = f(t_1) + f(t_2)$ όπου $f(t) \geq 0, t \geq 0$. Οι μοναδικές συναρτήσεις οι οποίες λαμβάνουν τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} και ικανοποιούν την τελευταία σχέση είναι της μορφής $f(t) = \sigma^2 t, \forall t \geq 0$, όπου $\sigma^2 \in \mathbb{R}$.

Από την (2.41) προκύπτει ότι

$$\text{Var}(W_{t+\tau} - W_\tau) = \text{Var}(W_{t+\tau}) - \text{Var}(W_\tau). \quad (2.42)$$

Θέτουμε στην (2.42) $t + \tau = s$ οπότε

$$\begin{aligned} \text{Var}(W_s - W_\tau) &= \text{Var}(W_s) - \text{Var}(W_\tau) = \sigma^2 s - \sigma^2 \tau \Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Var}(W_s - W_\tau) = \sigma^2(s - \tau). \end{aligned}$$

Γενικεύοντας το τελευταίο αποτέλεσμα λαμβάνουμε

$$\text{Var}(W_s - W_\tau) = \sigma^2|t - \tau|, \text{ με } t > \tau \text{ ή } t \leq \tau. \quad (2.43)$$

Η ποσότητα σ^2 ονομάζεται παράμετρος μεταβλητότητας.

Επιπλέον, η συσχέτιση είναι

$$\begin{aligned} R(t, \tau) &= E(W_t W_\tau) \\ &= E\{[(W_t - W_\tau) + W_\tau] W_\tau\} \\ &= E[(W_t - W_\tau) W_\tau] + E(W_\tau^2) \\ &= 0 + \sigma^2 t, \end{aligned}$$

αφού $W_t = W_\tau - W_0$ και τα τμήματα $(W_t - W_\tau)$ και $(W_\tau - W_0)$ είναι ανεξάρτητα καθώς $t > \tau$.

Γενικότερα προκύπτει ότι η συσχέτιση είναι

$$R(t, \tau) = \sigma^2 \min(t, \tau), \text{ με } t \geq \tau \text{ ή } t \leq \tau.$$

Κρίνουμε σημαντικό στο συγκεκριμένο σημείο να αναφέρουμε τα παρακάτω θεωρήματα [9].

Θεώρημα 2.5.1 Η διαδικασία W_t είναι συνεχής κατά μέσο τετράγωνο αν $\lim_{h \rightarrow 0} W_{t+h} = W_t$.

Θεώρημα 2.5.2 Η διαδικασία W_t είναι συνεχής κατά μέσο τετράγωνο τότε και μόνο τότε αν η $R(t, t)$ είναι συνεχής.

Θεώρημα 2.5.3 Η διαδικασία W_t είναι διαφορίσιμη κατά μέσο τετράγωνο τότε και μόνο τότε αν η $\frac{\partial^2 R(t, \tau)}{\partial t \partial \tau}$ υπάρχει στο σημείο (t, t) .

Θεώρημα 2.5.4 Η διαδικασία W_t είναι Riemann ολοκληρώσιμη κατά μέσο τετράγωνο στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ τότε και μόνον τότε αν η $R(t, t)$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[\alpha, \beta] \times [\alpha, \beta]$.

Βασιζόμενοι στα παραπάνω τέσσερα θεωρήματα, συμπεραίνουμε πως η διαδικασία Wiener

- i. είναι συνεχής κατά μέσο τετράγωνο $\forall t \geq 0$,
- ii. παρά το γεγονός ότι είναι συνεχής, δεν είναι διαφορίσιμη δεδομένου ότι η παράγωγος της $\frac{\partial^2 \min(t,\tau)}{\partial t \partial \tau} \Big|_{(t,t)}$ δεν υπάρχει πουθενά,
- iii. $\forall t \geq 0$ είναι ολοκληρώσιμη κατά μέσο τετράγωνο.

2.5.1 Αριθμητική Κίνηση Brown

Θεωρούμε μία στοχαστική διαδικασία Wiener $W(t)$ στην οποία η διαφορά $dW(t)$ έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 ανά μονάδα χρόνου. Με σκοπό να αποτραπεί η εμφάνιση κάποιου μη μηδενικού μέσου και κάποιας αυθαίρετης διασποράς γενικεύουμε την ανωτέρω δομή και ορίζουμε μία νέα στοχαστική διαδικασία $X(t)$ ως εξής:

$$X(t+h) - X(t) = ah + \sigma Y(t+h)\sqrt{h} \quad (2.44)$$

όπου $Y(t)$ αποτελεί μία τυχαία μεταβλητή από την διωνυμική κατανομή. Η ποσότητα ah ονομάζεται παράγοντας ροπής ή όρος μετατόπισης ή όρος ολίσθησης (*drift term*) και η $\sigma\sqrt{h}$ καλείται παράγοντας θορύβου (*noise term*).

Θεωρούμε $T > 0$ και προχωρούμε στη διαμέριση του κλειστού διαστήματος $[0, T]$ σε n ισομήκη υποδιαστήματα καθένα από τα οποία έχει μήκος h το οποίο ισούται με $\frac{T}{n}$. Τότε προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} X(T) - X(0) &= \sum_{i=1}^n [X(ih) - X((i-1)h)] \\ &= \sum_{i=1}^n \left(a \frac{T}{n} + \sigma Y(ih) \sqrt{\frac{T}{n}} \right) \end{aligned}$$

$$= \alpha T + \sigma \left(\sqrt{T} \sum_{i=1}^n \frac{Y(ih)}{\sqrt{n}} \right). \quad (2.45)$$

Κάνοντας χρήση του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος (Κ.Ο.Θ), η ποσότητα $\sqrt{T} \sum_{i=1}^n \frac{Y(ih)}{\sqrt{n}}$ τείνει να προσεγγίσει την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση T . Συνεπώς η συγκεκριμένη εξίσωση μπορεί να γραφεί ως

$$X(T) - X(0) = \alpha T + \sigma W(t). \quad (2.46)$$

Όπου η $W(t)$ είναι μία στοχαστική διαδικασία Wiener ή κίνηση Brown. Η στοχαστική διαφορική εξίσωση της σχέσης (2.46) είναι:

$$dX(t) = \alpha dt + \sigma dW(t). \quad (2.47)$$

Μια στοχαστική διαδικασία λοιπόν $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ η οποία ικανοποιεί την παραπάνω εξίσωση (2.47) καλείται αριθμητική κίνηση Brown (*arithmetic Brownian motion*) [4]. Ακολουθώντας, προχωράμε στην εύρεση της μέσης τιμής και διασποράς της αριθμητικής κίνησης Brown.

Σε μία αριθμητική κίνηση Brown ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\begin{aligned} E[X(t) - X(0)] &= \alpha t + \sigma * 0 \\ \Rightarrow E[X(t) - X(0)] &= \alpha t \end{aligned} \quad (2.48)$$

και

$$Var[X(t) - X(0)] = \sigma^2 t, \quad (2.49)$$

Προκύπτει λοιπόν ότι

$$X(t) - X(0) \sim N(\alpha t, \sigma^2 t),$$

συνεπώς

$$X(t) \sim N(X(0) + \alpha t, \sigma^2 t).$$

Η παράμετρος α καλείται στιγμιαίος μέσος ανά μονάδα χρόνου ή παράγοντας μετατόπισης (*drift term*) και η παράμετρος σ^2 ονομάζεται στιγμιαία διασπορά ανά μονάδα χρόνου ή στοχαστικός παράγοντας.

Παράδειγμα 2.5.1.1

Έστω μία στοχαστική διαδικασία $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ η οποία είναι αριθμητική κίνηση Brown και ισχύει ότι $X(30) = 2$, $\alpha = 0.435$ και $\sigma = 0.75$. Θα βρούμε την πιθανότητα η ποσότητα $X(34)$ να είναι αρνητική.

Δεδομένου ότι η $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ είναι μία αριθμητική κίνηση Brown τότε ισχύει ότι

$$dX(t) = \alpha dt + \sigma dW(t)$$

και αντικαθιστώντας τα δεδομένα μας προκύπτει

$$dX(t) = 0.435dt + 0.75dW(t).$$

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η

$$\begin{aligned} P(X(34) < 0) &= P(X(34) - E[X(34)] < 0 - E[X(34)]) \\ &= P\left(\frac{X(34) - 3.74}{\sqrt{2.25}} < -\frac{3.74}{\sqrt{2.25}}\right) \\ &= P(\Phi < -2.49) \\ &= 1 - P(\Phi \geq 2.49) \\ &= 0.006387, \end{aligned}$$

όπου

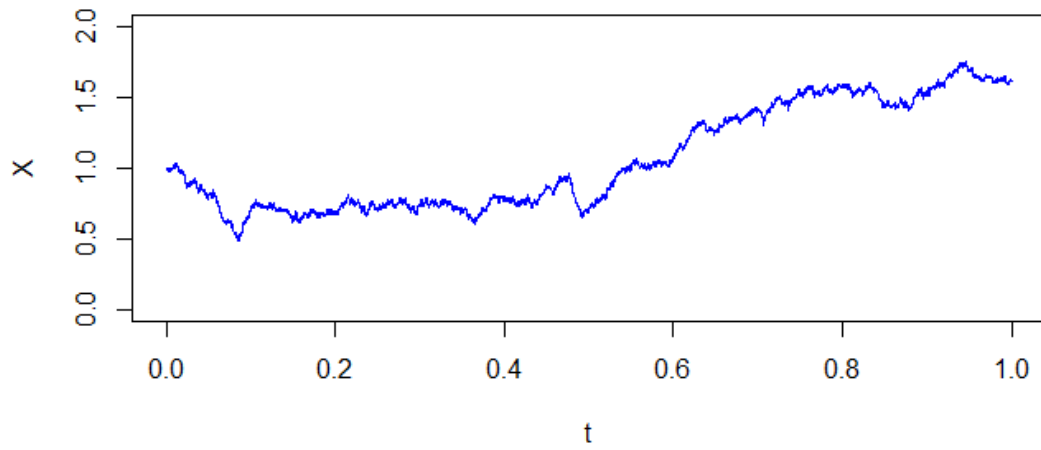
$$E[X(34)] = X(30) + 0.435(34 - 30) = 2 + 4 * 0.435 \cong 3.74$$

και

$$\text{Var}[X(34)] = 0.75^2 * 4 = 2.25.$$

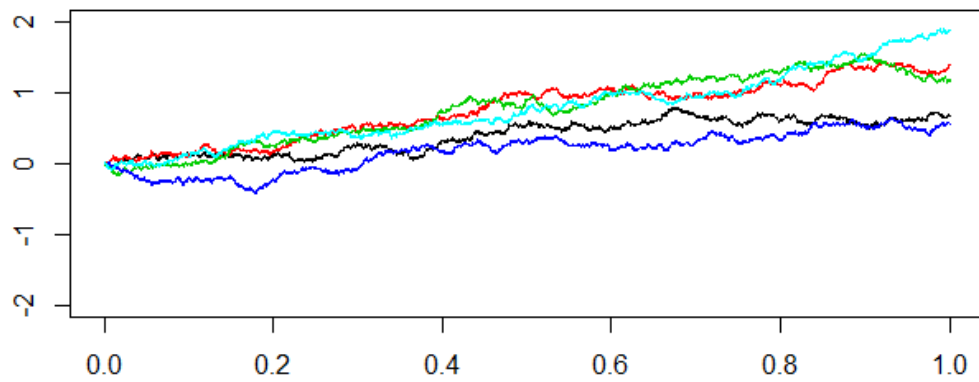
Στη συνέχεια παρουσιάζουμε διαγραμματικές απεικονίσεις τυχαίων διαδρομών της κίνησης Brown, οι οποίες έχουν πραγματοποιηθεί μέσω κατάλληλων προσομοιώσεων με τη χρήση του στατιστικού πακέτου R.

Τυχαία διαδρομή της κίνησης Brown.



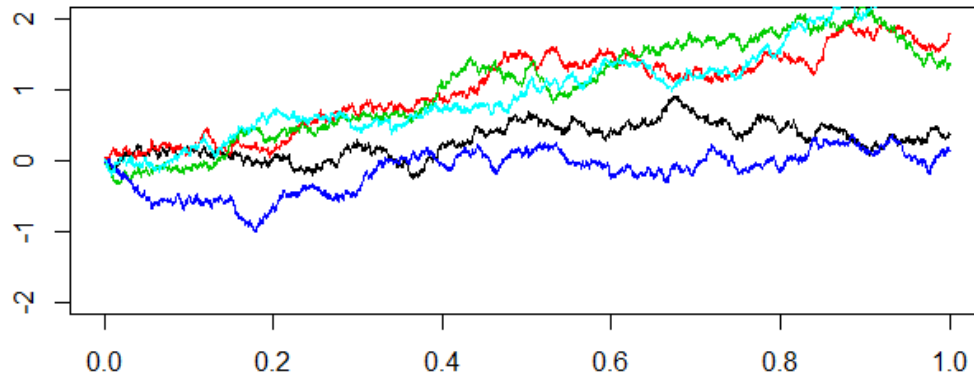
Διάγραμμα 10

Πέντε τυχαίες διαδρομές της κίνησης Brown με παραμέτρους $\alpha = 1$ και $\sigma = 0.5$.



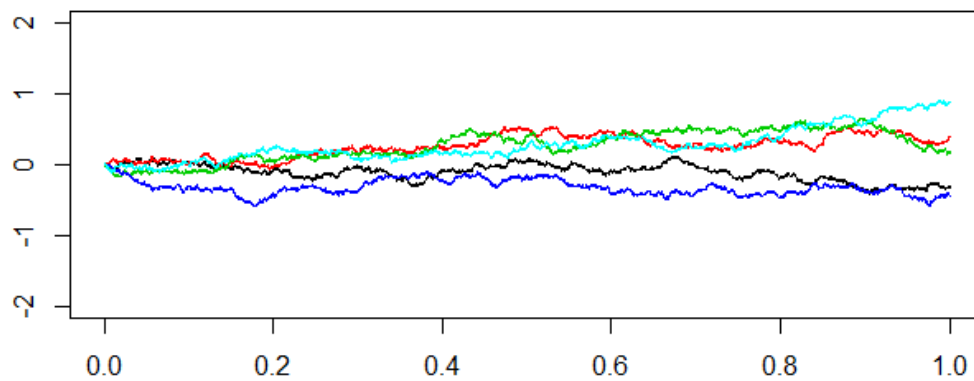
Διάγραμμα 11

Πέντε τυχαίες διαδρομές της κίνησης Brown με παραμέτρους $\alpha = 1$ και $\sigma = 1$.



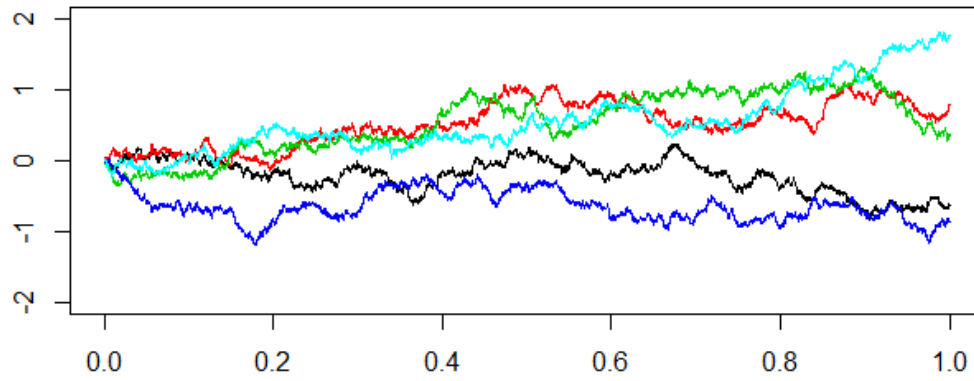
Διάγραμμα 12

Πέντε τυχαίες διαδρομές της κίνησης Brown με παραμέτρους $\alpha = 0$ και $\sigma = 0.5$.



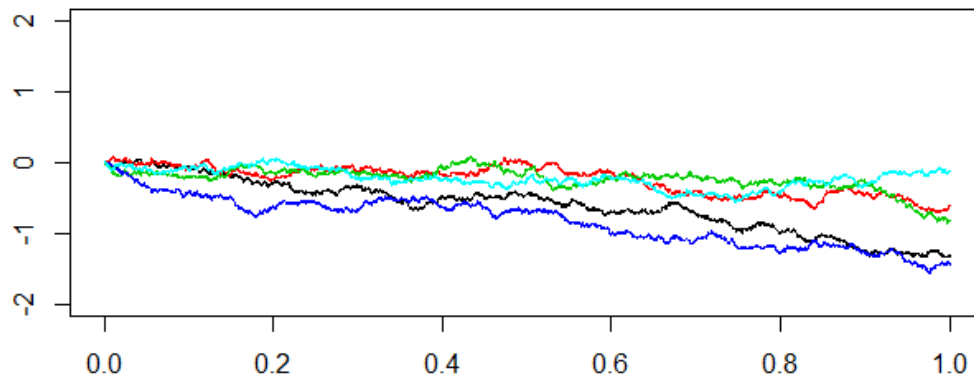
Διάγραμμα 13

Πέντε τυχαίες διαδρομές της κίνησης Brown με παραμέτρους $\alpha = 0$ και $\sigma = 1$.



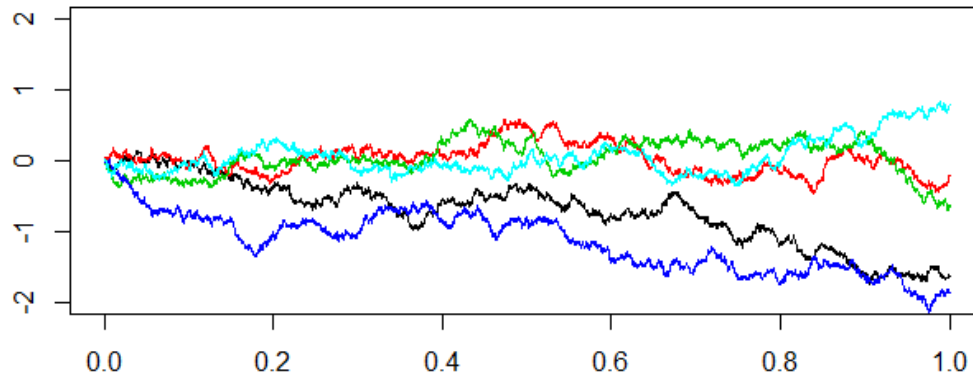
Διάγραμμα 14

Πέντε τυχαίες διαδρομές της κίνησης Brown με παραμέτρους $\alpha = -1$ και $\sigma = 0.5$.



Διάγραμμα 15

Πέντε τυχαίες διαδρομές της κίνησης Brown με παραμέτρους $\alpha = -1$ και $\sigma = 1$.



Διάγραμμα 16

2.5.2 Γεωμετρική Κίνηση Brown

Η αριθμητική κίνηση Brown χαρακτηρίζεται από αρκετά μειονεκτήματα, γι' αυτό εισάγουμε την έννοια της γεωμετρικής κίνησης Brown. Η εξέλιξη των τιμών των αγαθών ή των μετοχών πιθανό να λάβει και αρνητικές τιμές, αυτομάτως η αριθμητική κίνηση Brown καθίσταται ως «φτωχό» μοντέλο για τις τιμές των μετοχών [4]. Επιπροσθέτως, η αυξομείωση στη μέση τιμή και τη διασπορά είναι ανεξάρτητη της τιμής της μετοχής διότι πρόκειται για ένα προσθετικό μοντέλο. Αντίθετα, θα περίμενε κάποιος η ανέλιξη να μπορεί να λάβει και αρνητικές τιμές όπως και στην περίπτωση που διπλασιαστεί η τιμή της μετοχής τότε η μέση απόδοση και η τυπική απόκλιση της απόδοσης να διπλασιαστούν. Συνεπώς, θεωρούμε μία αριθμητική κίνηση Brown $X(t)$, της οποίας ο στιγμιαίος μέσος ανά μονάδα χρόνου και η μεταβλητότητα είναι συναρτήσεις της, δηλαδή είναι της μορφής

$$\alpha = \alpha(X(t)) \tag{2.50}$$

και

$$\sigma = \sigma(X(t)). \tag{2.51}$$

Αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (2.50) και (2.51) στην (2.47) προκύπτει μία στοχαστική διαδικασία της μορφής

$$dX(t) = \alpha(X(t)) + \sigma(X(t))dW(t) \quad (2.52)$$

η οποία είναι μία διαδικασία Itô.

Στην περίπτωση όπου $\alpha(X(t)) = \alpha X(t)$ και $\sigma(X(t)) = \sigma X(t)$ τότε η εξίσωση (2.52) λαμβάνει τη μορφή

$$dX(t) = \alpha X(t) + \sigma(X(t))dW(t) \quad (2.53)$$

ή ισοδύναμα μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{dX(t)}{X(t)} = \alpha dt + \sigma dW(t), \quad (2.54)$$

όπου $W(t)$ είναι μία διαδικασία Wiener. Η στοχαστική διαδικασία (2.54) καλείται γεωμετρική κίνηση Brown (*geometric Brownian motion*) και μας πληροφορεί σχετικά με την ποσοστιαία αλλαγή στην τιμή ενός περιουσιακού στοιχείου, δηλαδή ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή με στιγμιαία μέση τιμή α και στιγμιαία διασπορά σ^2 .

Θεωρώντας μία αυθαίρετη τιμή $X(0)$, οι εξισώσεις (2.53) και (2.54) έχουν ως αναλυτική λύση την

$$X(t) = X(0)e^{(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W(t)}, \quad (2.55)$$

όπου $W(t) \sim N(0, t)$.

Αντιλαμβανόμαστε πως η $X(t)$ δεν είναι κανονικά κατανεμημένη αλλά εκθετικά. Συγκεκριμένα, ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με μέσο

$$E[X(t)] = X(0)e^{\alpha t} \quad (2.56)$$

και διασπορά

$$\text{Var}[X(t)] = X^2(0)e^{2\alpha t}(e^{\sigma^2 t} - 1). \quad (2.57)$$

Συνεπάγεται λοιπόν

$$\ln(X(t)) \sim N\left(\ln(X(0)) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right) \quad (2.58)$$

άρα,

$$\ln(X(t)) = \ln(X(0)) + \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W(t). \quad (2.59)$$

Καταλήγουμε στο συμπέρασμα πως όταν η $X(t)$ ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown τότε η $\ln(X(t))$ ακολουθεί την αριθμητική κίνηση Brown. Ειδικότερα ισχύει ότι

$$d\ln(X(t)) = \left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW(t). \quad (2.60)$$

Παράδειγμα 2.5.2.1

Έστω η $X(t)$ ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown με drift factor $\alpha = 10\%$ και για $h=1/365$ ο λόγος “ratio of the noise term to the drift term” ισούται με 22.926 [4]. Τότε η τυπική απόκλιση της θα ισούται με

$$\frac{\sigma\sqrt{h}}{\alpha h} = 22.926 \Rightarrow \frac{\sigma\sqrt{\frac{1}{365}}}{0.10 * \frac{1}{365}} = 22.926 \Rightarrow \sigma = 0.12.$$

Παράδειγμα 2.5.2.2

Υποθέτουμε ότι η τιμή μίας μετοχής $X(t)$ ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown με $\alpha = 0.1$ και $\sigma^2 = 9\%$. Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα σε 2 έτη από τώρα η τιμή της μετοχής να ξεπερνά τα 200€ [4].

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι

$$\begin{aligned} P(X(2) > 200) &= P(\ln(X(2)) > \ln(2 * 100)) \\ &= P\left(\ln\left(\frac{X(2)}{X(0)}\right) > \ln 2\right). \end{aligned}$$

Όμως $\ln\left(\frac{X(2)}{X(0)}\right) \sim N\left(\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t, \sigma^2 t\right)$ και αντικαθιστώντας τα δεδομένα μας προκύπτει

$$\ln\left(\frac{X(2)}{X(0)}\right) \sim N\left(\left(0.1 - \frac{1}{2} * 0.09\right)2, 0.09 * 2\right),$$

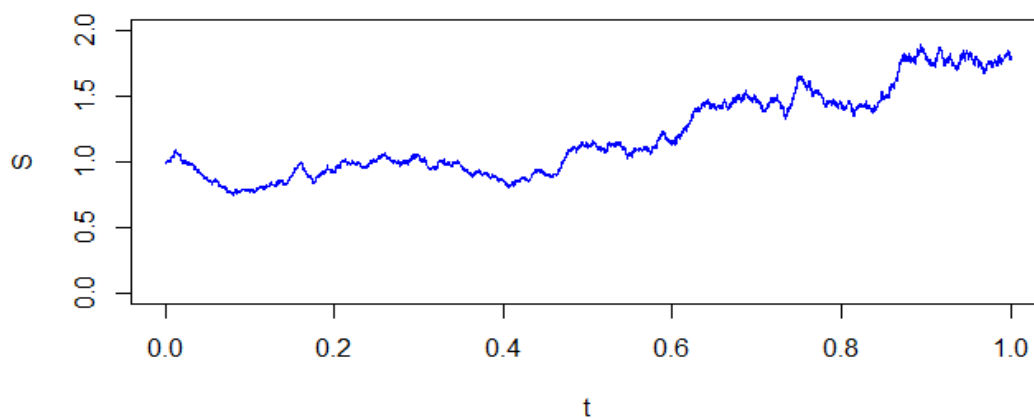
άρα

$$\ln\left(\frac{X(2)}{X(0)}\right) \sim N(0.11, 0.18).$$

Συνεπώς, η πιθανότητα σε 2 έτη από τώρα η τιμή να ξεπερνά τα 200€ είναι

$$\begin{aligned} P(X(2) > 200) &= P\left(\frac{\ln\left(\frac{X(2)}{X(0)}\right) - 0.11}{\sqrt{0.18}} > \frac{\ln 2 - 0.11}{\sqrt{0.18}}\right) \\ &= P(\Phi > 1.37) \\ &= 1 - P(\Phi \leq 1.37) \\ &= 0.085 = 8.5\%. \end{aligned}$$

Σε αυτό το σημείο παραθέτουμε ένα διάγραμμα τυχαίων διαδρομών της γεωμετρικής κίνησης Brown, το οποίο πραγματοποιήθηκε μέσω κατάλληλων προσομοιώσεων με τη χρήση του στατιστικού πακέτου R.



Διάγραμμα 17

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο

Στοχαστική Βελτιστοποίηση Επενδυτικών Στρατηγικών

Στο κεφάλαιο αυτό, πραγματοποιούμε την ανάλυση του χρηματοοικονομικού κινδύνου σε ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων εισφορών (*defined contribution pension scheme, DC*) και χρησιμοποιούμε τις τεχνικές του δυναμικού προγραμματισμού (βλέπε Παράρτημα Γ), με απώτατο στόχο την εύρεση μίας βέλτιστης επενδυτικής στρατηγικής δεδομένου ενός τελικού στόχου ο οποίος είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με τον καθαρό συντελεστή αναπλήρωσης (*net replacement ratio, NRR*) και με ένα σύνολο από ενδιάμεσους στόχους. Τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο θα τον προσεγγίσουμε μέσω του επενδυτικού και του κινδύνου της προσόδου. Ο επενδυτικός και ο κίνδυνος της προσόδου προέρχονται από τον ίδιο τον ασφαλισμένο του συνταξιοδοτικού σχήματος. Με τον όρο επενδυτικός κίνδυνος νοείται εκείνος ο κίνδυνος που μία κακή/φτωχή επενδυτική απόδοση κατά τη διάρκεια της ενεργούς συμμετοχής του μέλους συμβάλει στη δημιουργία ενός χαμηλότερου από το προβλεπόμενο συσσωρευμένο κεφάλαιο. Με τον όρο κίνδυνος προσόδου, εννοούμε τον κίνδυνο εκείνον κατά τον οποίο το χαμηλό ποσοστό μετατροπής που χρησιμοποιείται στην αγορά της προσόδου κατά τη συνταξιοδότηση, οδηγεί σε χαμηλότερο αναμενόμενο ποσοστό σύνταξης.

3.1 Σύντομη Ιστορική Αναδρομή

Η χρήση του δυναμικού προγραμματισμού δεν είναι πρωτοφανής στο αναλογιστικό πλαίσιο. Ο Haberman και ο Sung το 1994, εφάρμοσαν την αρχή της βέλτιστης πρακτικής του Bellman, για να ελαχιστοποιήσουν τόσο τον κίνδυνο εισφοράς όσο και τον κίνδυνο της φερεγγυότητας σε ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων παροχών, όπως επίσης και για να εξάγουν το βέλτιστο ποσοστό εισφοράς [19]. Ακόμη, η συγκεκριμένη αρχή εφαρμόστηκε σε ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων παροχών από τον Cairns το 1997 [15] σε συνεχές χρόνο και από τον Owadally το 1998 [27] σε διακριτό, έτσι ώστε να βρεθεί το βέλτιστο ποσοστό της εισφοράς και η καλύτερη δυνατή απόφαση σε έναν «κόσμο» στον οποίο παρουσιάζεται η δυνατότητα της επένδυσης μόνο σε δύο περιουσιακά στοιχεία.

Το 1998 ο Thomson, έθεσε σε εφαρμογή μεθόδους πολλών περιόδων σε ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων εισφορών καταφέροντας να καθορίσει μία βέλτιστη επενδυτική στρατηγική μεγιστοποιώντας την αναμενόμενη ωφέλεια του κάθε μέλους, δηλαδή του κάθε ασφαλισμένου [30].

Η αναγκαιότητα της πολιτικής του *lifestyle* που θα εντοπίσουμε, έχει απασχολήσει ιδιαίτερα την ερευνητική κοινότητα. Η συγκεκριμένη περιγράφεται από τον Sze το 1993 [29] σε μία συζήτηση της έρευνας του Knox η οποία ονομάζεται “*in*

a *lifestyle investment strategy*”, βάσει της οποίας το κεφάλαιο επενδύεται κυρίως σε μετοχικά κεφάλαια όταν ο ασφαλισμένος βρίσκεται σε νεαρή ηλικία και σταδιακά μετατρέπεται σε ομόλογα και μετρητά όταν πλησιάζει στη συνταξιοδότηση του.

3.2 Το Μαθηματικό Μοντέλο

Στην υποενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε το μαθηματικό μοντέλο που περιγράφει ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων εισφορών (*defined contribution pension scheme*), του οποίου το κεφάλαιο είναι δυνατό να επενδυθεί μόνο σε δύο περιουσιακά στοιχεία των οποίων ο κίνδυνος είναι διαφορετικός, δηλαδή σε ένα περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου (*low risk asset*) και σε ένα αντίστοιχο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου (*high risk asset*).

Αρχικά, αναφέρουμε πως παρέχεται ιδιαίτερη ελευθερία στον διαχειριστή των επενδύσεων (*investment manager*) του σχήματος (ή/και στο μέλος ανάλογα με τους κανόνες του σχήματος) όσον αφορά το επίπεδο του κινδύνου του χαρτοφυλακίου. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι το ποσοστό του κεφαλαίου το οποίο επενδύεται στα εν λόγω δύο περιουσιακά στοιχεία επανεξετάζεται κάθε χρόνο, γεγονός το οποίο βασίζεται στις επενδυτικές αποδόσεις που έχουν πραγματοποιηθεί σε παρελθοντικό χρόνο και στο επίπεδο του κεφαλαίου που συγκρίνεται με ένα προκαθορισμένο στόχο. Η προαναφερθείσα υπόθεση συνάδει με την πραγματικότητα, φαινόμενο το οποίο επιβεβαιώνεται από το ότι οι ασφαλισμένοι ενός συνταξιοδοτικού σχήματος, ενημερώνονται κάθε χρόνο για την εξέλιξη της θέσης τους και τους παρέχεται η δυνατότητα να τροποποιήσουν την επενδυτική τους στρατηγική, με σκοπό την επιλογή της καταλληλότερης λύσης ανατρέχοντας στην παρελθούσα πραγματική εμπειρία. Καθώς οι μεταβολές στη σύνθεση του χαρτοφυλακίου εμφανίζονται σε ετήσια βάση, το μαθηματικό μοντέλο που κατασκευάζουμε εφαρμόζεται σε διακριτό χρόνο.

Οι δαπάνες των προμηθειών και η φορολογία δεν εμπεριέχονται στο μοντέλο μας. Κάθε μέλος συνεισφέρει στο σχήμα σε ετήσια βάση μέσω ενός ποσοστού επί του μισθού του. Στην πραγματικότητα, το μέρος από το μισθό του μέλους, που θα καταβληθεί στο σχήμα κατανέμεται ανάμεσα στον εργαζόμενο και τον εργοδότη. Ειδικότερα, ο εργαζόμενος δεν αποδίδει περισσότερο από το 5% του μισθού του και το υπολειπόμενο αναλαμβάνεται από την εργοδότη εταιρεία. Το ποσοστό είναι σταθερό, όπως συνήθως διαδραματίζεται στα σχήματα καθορισμένης εισφοράς. Παρά ταύτα, σε μία ενδεχόμενη τροποποίηση των κανονισμών του σχήματος και λόγω οικονομικών δυσχερειών του εργοδότη, το προαναφερθέν ποσοστό πιθανό να μεταβάλλεται έως τη συνταξιοδότηση του ατόμου. Ορισμένοι ακόμη λόγοι που δύναται να επηρεάσουν τη σταθερότητα του ποσοστού εντοπίζονται στις μεταβολές σχετικά με τα ποσοστά των αποδόσεων της χρηματοπιστωτικής αγοράς, σε νέους νομοθετικούς κανόνες, στις τροποποιήσεις ως προς την παροχή των κρατικών συντάξεων, σε προτεινόμενες μεταρρυθμίσεις από τους αναλογιστές και στη δημιουργία ενός σχήματος

καθορισμένης παροχής εντός της ίδιας εταιρείας που προσφέρει τη δυνατότητα της επιλογής και της αλλαγής σχήματος από τον εργαζόμενο. Για λόγους απλότητας, προχωρήσαμε στην παραδοχή ότι το ποσοστό εισφοράς του μέλους, δε μεταβάλλεται κατά τη διάρκεια της ενεργούς συμμετοχής στο σχήμα.

Η περίπτωση που μελετάμε δεν περιέχει μειώσεις πέραν της συνταξιοδότησης. Η υπόθεση της απουσίας άλλου είδους μειώσεων διαδραματίζεται για λόγους απλότητας. Σε μία πιο ρεαλιστική και πληρέστερη μελέτη θα συμπεριλαμβάναμε τον παράγοντα της ηλικίας και της κατάστασης της υγείας του ατόμου. Είναι γνωστό πως τα ποσοστά των αποχωρήσεων για μέλη νεαρής ηλικίας είναι ιδιαίτερα υψηλά, για την ακρίβεια ανέρχονται στο 30%, εάν λοιπόν συμπεριλαμβάνεται μόνο ως ενδεχόμενο η μείωση της συνταξιοδότησης, προκύπτουν διαστρεβλωμένα αποτελέσματα ενώ στην περίπτωση των μελών που βρίσκονται κοντά στην ηλικία συνταξιοδότησης η συγκεκριμένη παραδοχή καθίσταται ρεαλιστική. Στην περίπτωση μελών τα οποία δεν είναι νεαρά αλλά παράλληλα απέχουν αρκετά από τη συνταξιοδότηση τους, η σύνταξη λόγω κακής κατάστασης της υγείας τους συνιστά έναν βαρυνούσης σημασίας παράγοντα αναφορικά με τις μειώσεις του σχήματος. Τα ποσοστά αποβίωσης θεωρούνται αμελητέα και το γεγονός ότι δε τα συμπεριλαμβάνουμε στη μελέτη μας δε συμβάλλει στη δημιουργία παραπονημένων αποτελεσμάτων. Αναφέρουμε πως το μέλος εισέρχεται στο συνταξιοδοτικό σχήμα τη χρονική στιγμή $t = 0$, συνεισφέρει για N έτη και έπειτα συνταξιοδοτείται. Καθώς η μεταβλητή N είναι σταθερή και γνωστή εκ των προτέρων, δεν εξετάζουμε τη περίπτωση της πρόωρης συνταξιοδότησης.

Επίσης, εικάζουμε ότι οι εισφορές καταβάλλονται στο σχήμα κάθε χρόνο προκαταβολικά. Η εισφορά είναι ένα σταθερό ποσοστό του μισθού του ασφαλισμένου όπως διαδραματίζεται συνήθως στα περισσότερα συνταξιοδοτικά σχήματα. Το συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων εισφορών που εξετάζουμε ακολουθεί τους νόμους της Ιταλίας εντός του πλαισίου των επαγγελματικών συνταξιοδοτικών σχημάτων (*occupational pension schemes*).

Δεδομένου ότι αναφερόμαστε σε ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων εισφορών, οι θέσεις των μελών θεωρούμε ότι είναι ανεξάρτητες η μία από την άλλη. Στο μοντέλο μας εξετάζουμε μόνο την αύξηση του κεφαλαίου σε σχέση με το κάθε μέλος, ανεξαρτήτως του μεγέθους και της σύνθεσης του σχήματος. Ωστόσο, επισημαίνουμε πως η συγκεκριμένη παραδοχή αποτελεί μία απλοποίηση του πραγματικού κόσμου. Πιο συγκεκριμένα, σε ένα ρεαλιστικό περιβάλλον ολόκληρο το ποσό των εισφορών των μελών του σχήματος επενδύονται στις χρηματοπιστωτικές αγορές και τόσο το μέγεθος του σχήματος όσο και ο μέσος όρος ηλικίας των μελών επηρεάζουν τις επενδυτικές επιλογές.

Στη συνέχεια παραθέτουμε την εξίσωση ανάπτυξης του κεφαλαίου του μέλους του σχήματος και προσδιορίζουμε τις παραμέτρους της.

Το ύψος του κεφαλαίου τη χρονική στιγμή t , ικανοποιεί την αναδρομική σχέση (3.1), η οποία καλείται και εξίσωση ανάπτυξης ή εξέλιξης του κεφαλαίου (*equation of the fund growth*). Για το κεφάλαιο ισχύει ότι

$$f_{t+1} = (f_t + cS_t)[(1 - y_t)e^{\mu t} + y_t e^{\lambda t}], \quad (3.1)$$

όπου

- f_t : το ύψος του κεφαλαίου τη χρονική στιγμή t ,
- c : το ποσοστό εισφοράς,
- S_t : ο μισθός του ασφαλισμένου τη χρονική στιγμή t ,
- y_t : το ποσοστό του κεφαλαίου το οποίο επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου στο χρονικό διάστημα $[t, t + 1]$,
- μ_t : η πραγματική ένταση ανατοκισμού για το περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου στο χρονικό διάστημα $[t, t + 1]$, η οποία θεωρούμε ότι παραμένει σταθερή στο διάστημα αυτό,
- λ_t : η πραγματική ένταση ανατοκισμού για το περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου στο χρονικό διάστημα $[t, t + 1]$, η οποία θεωρούμε ότι παραμένει σταθερή στο διάστημα αυτό.

Δίχως βλάβη της γενικότητας, όπως αναφέραμε και προηγουμένως υποθέσαμε ότι η εισφορά του ασφαλισμένου είναι ένα σταθερό ποσοστό του μισθού του και τούτο συμβαίνει για λόγους απλότητας, αλλά ταυτόχρονα συνάδει και με την πραγματική κατανομή του περιουσιακού στοιχείου το οποίο είναι μέρος του μοντέλου μας.

Η χρήση του όρου πραγματικός αναφέρεται στους πραγματικούς όρους δηλαδή στο καθαρό μετά φόρων εισόδημα γνωστό και ως *In real Terms* ή *Net of Price inflation*. Πιο συγκεκριμένα, τα πραγματικά ποσοστά των εισφορών από τις επενδύσεις που έχουν πραγματοποιηθεί στα δύο περιουσιακά στοιχεία είναι $e^{\mu t} - 1$ και $e^{\lambda t} - 1$.

Στο μαθηματικό μοντέλο που εξετάζουμε, δε λαμβάνουμε υπόψιν μας την πραγματική αύξηση του μισθού του ασφαλισμένου και για λόγους απλότητας θεωρούμε ότι ο μισθός ισούται με τη μονάδα δηλαδή, $S_t = 1$. Συνεπώς, η εξίσωση (3.1) μετατρέπεται στην ακόλουθη σχέση

$$f_{t+1} = (f_t + c)[(1 - y_t)e^{\mu t} + y_t e^{\lambda t}]. \quad (3.2)$$

Οι ετήσιες αποδόσεις των επενδύσεων των δύο περιουσιακών στοιχείων ακολουθούν τη λογαριθμοκανονική κατανομή, συνεπώς η πραγματική ένταση ανατοκισμού (βλέπε Παράρτημα Α) του περιουσιακού στοιχείου χαμηλού κινδύνου (μ_t) και του περιουσιακού στοιχείου υψηλού κινδύνου (λ_t) αντίστοιχα, κατανέμονται κανονικά. Επιπροσθέτως, οι μ_t και λ_t είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Συνεπώς, ισχύει ότι

$$\mu_t \sim N(\mu, \sigma_1^2) \quad \text{και} \quad \lambda_t \sim N(\lambda, \sigma_2^2),$$

όπου

$$\mu \leq \lambda \quad \text{και} \quad \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2.$$

Μία πρόσθετη προϋπόθεση του μοντέλου μας είναι ότι οι τυχαίες μεταβλητές μ_t και λ_t είναι ανεξάρτητες σε κάθε χρονική στιγμή t .

Στο σημείο αυτό αναφέρουμε πως η υπόθεση των λογαριθμοκανονικά κατανεμημένων αποδόσεων έχει διαδραματιστεί με σκοπό να αποφεύγονται αποτελέσματα μικρότερα του -1 γεγονός το οποίο επιφέρει αρνητικές τιμές στο κεφάλαιο.

Υπενθυμίζουμε πως μία απόλυτα συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κανονική κατανομή (*normal distribution*), με παραμέτρους μ και $\sigma^2, \sigma > 0$ (συμβολικά $X \sim N(\mu, \sigma^2)$) αν έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad \text{για } -\infty < x < +\infty$$

με μέση τιμή $E(X) = \mu$ και διασπορά $Var(X) = \sigma^2$.

Ακόμη, η ροπογεννήτρια συνάρτηση της δίνεται από τον τύπο

$$M_X(t) = E(e^{tX}) = e^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

3.3 Στόχος Κεφαλαίου

Θεωρούμε πως ο ασφαλισμένος εισέρχεται και κατ' επέκταση συμμετέχει στο συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων εισφορών τη χρονική στιγμή $t = 0$, και συνεισφέρει με ένα σταθερό και προκαθορισμένο ποσοστό εισφοράς (*contribution rate*) c , έως ότου συνταξιοδοτηθεί στο χρόνο $t = N$, ο οποίος με τη σειρά του είναι και αυτός σταθερός.

Δεδομένου ότι ένα μέρος του κεφαλαίου και των εισφορών επενδύονται μερικώς στο περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου με μέση τιμή μ , και ένα μέρος μερικώς στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου με μέση τιμή λ , κρίνεται λογικό να καταλήξουμε σε μία εξίσωση (3.3), η οποία μας πληροφορεί για το ύψος του τελικού στόχου του κεφαλαίου.

Η εξίσωση του στόχου του κεφαλαίου τη χρονική στιγμή $t = N$, είναι:

$$F_N = f_0 e^{Nr^*} + c \ddot{S}_{\overline{N}|r^*}, \quad (3.3)$$

όπου

$$r^* = \frac{1}{2}(\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)). \quad (3.4)$$

Με r^* συμβολίζουμε τον πραγματικό στόχο των αποδόσεων. Καταλήξαμε στην εξίσωση (3.4) επιλύοντας την σχέση $E(e^{r^*}) = E\left(e^{\frac{\mu_t + \lambda_t}{2}}\right)$. Ειδικότερα,

$$\begin{aligned} E(e^{r^*}) &= E\left(e^{\frac{\mu_t + \lambda_t}{2}}\right) = E\left(e^{\frac{\mu_t}{2}}\right) E\left(e^{\frac{\lambda_t}{2}}\right) \\ &= e^{\frac{1}{2}\left(\mu + \frac{\sigma_1^2}{2}\right)} e^{\frac{1}{2}\left(\lambda + \frac{\sigma_2^2}{2}\right)} \\ &= e^{\frac{1}{2}\left(\mu + \lambda + \frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\right)}. \end{aligned}$$

Άρα, $r^* = \frac{1}{2}(\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2))$.

Αντικαθιστώντας λοιπόν την (3.4) στην (3.3), η τελευταία τροποποιείται βάσει της παρακάτω μορφής

$$F_N = f_0 e^{N \frac{1}{2}(\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2))} + c \ddot{S}_{\overline{N}| \frac{1}{2}(\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2))}. \quad (3.5)$$

Ωστόσο, υποθέτουμε ότι ολόκληρο το τελικό κεφάλαιο μετατρέπεται σε μία άμεση πρόσοδο, έτσι ο ασφαλισμένος ανησυχεί για τον καθαρό συντελεστή αναπλήρωσης (NRR), ο οποίος είναι ο δείκτης μεταξύ των εσόδων της συνταξιοδότησης και του τελικού μισθού. Για το συγκεκριμένο λόγο, ο τελικός στόχος του κεφαλαίου F_N μετατρέπεται στην αναμενόμενη αναλογιστική πρόσοδο, η οποία περιλαμβάνει την αναμενόμενη θνησιμότητα του ατόμου που πρόκειται να συνταξιοδοτηθεί, και χρησιμοποιεί την αναμενόμενη αξία της τυχαίας απόδοσης του περιουσιακού στοιχείου χαμηλού κινδύνου ως ένα ποσοστό μετατροπής του οποίου ο στόχος δίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$B_N = \frac{F_N}{\sum_{n=1}^{\omega-x} {}_nE_x} = \frac{F_N}{a_x}, \quad (3.6)$$

όπου

- x : η ηλικία συνταξιοδότησης του ασφαλισμένου,
- ω : η μέγιστη ηλικία η οποία μελετάται μέσω πινάκων θνησιμότητας,
- B_N : το ποσοστό της σύνταξης το οποίο συμπίπτει με τον καθαρό συντελεστή αναπλήρωσης στην περίπτωση που ισχύει $S_N = 1$ (σημειώνουμε πως υποθέτουμε ότι για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει $S_t = 1$),
- ${}_nE_x$: υπολογίζεται βάσει κατάλληλων πινάκων θνησιμότητας και με χρήση του συντελεστή προεξόφλησης $u = e^{-\mu+0.5\sigma_1^2}$.

Η (3.6) μέσω της (3.5) και του τύπου της ισόβιας ληξιπρόθεσμης ράντας ζωής λαμβάνει τη μορφή

$$B_N = \frac{F_N}{\sum_{n=1}^{\omega-x} {}_nE_x} = \frac{F_N}{a_x} = \frac{f_0 e^{Nr^*} + c \ddot{S}_{\overline{N}|r^*}}{\sum_{n=1}^{\omega-x} u^n {}_n p_x}$$

$$\Rightarrow B_N = \frac{f_0 e^{\frac{N}{2}(\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2))} + c \ddot{S}_{\overline{N}|r^*}^{\frac{1}{2}(\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2))}}{\sum_{n=1}^{\omega-x} (e^{-\mu+0.5\sigma_1^2})^n {}_n p_x}$$

Όπου με ${}_n p_x$ συμβολίζουμε την πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας x να επιζήσει ακόμη για $x+n$ έτη και με $\ddot{S}_{\overline{N}|r^*}$ τη συσσωρευμένη αξία της προκαταβλητέας ράντας η οποία ισούται με

$$\ddot{S}_{\overline{N}|r^*} = \frac{\left(1 + \frac{1}{2}(\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2))\right)^N - 1}{\left(\frac{1}{2}(\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2))\right) / \left(1 + \frac{1}{2}(\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2))\right)}$$

Σημείωση

Αφού έχουμε υποθέσει ότι $\mu_t \sim N(\mu, \sigma_1^2)$, τότε $u = E(e^{-\mu t}) = e^{-\mu + 0.5\sigma_1^2}$.

Η υπόθεση της μετατροπής ολόκληρου του τελικού κεφαλαίου σε μία άμεση πρόσοδο είναι ιδιαίτερα ισχυρή και χρήζει διερεύνησης εντός του πλαισίου των κανόνων των συνταξιοδοτικών σχημάτων και της γενικής νομοθεσίας. Το μέλος ενός ιταλικού επαγγελματικού συνταξιοδοτικού σχήματος, δικαιούται να λάβει ένα τμήμα του κεφαλαίου του υπό τη μορφή ενός εφάπαξ ποσού (με ανώτατο όριο το 50% του κεφαλαίου) και δεν είναι βέβαιο ότι θα αποφασίσει να λάβει ολόκληρη την τελική του παροχή μέσω του εισοδήματος της σύνταξης. Εντούτοις, εμείς προχωρούμε στην προαναφερθείσα παραδοχή εν προκειμένου να διερευνήσουμε τις επιπτώσεις της επενδυτικής στρατηγικής στον καθαρό συντελεστή αναπλήρωσης. Επιπλέον, το μοντέλο μας δεν υποδηλώνει απαραίτητα την μετατροπή του τελικού κεφαλαίου στη μορφή των δόσεων και διαφορετικές παραδοχές θα έπρεπε να προσαρμοσθούν όσον αφορά την ανάλυση της καταλληλότητας των επενδυτικών αποφάσεων για το εν λόγω ζήτημα. Πανομοιότυπες μελέτες διερευνούν τις συγκρίσεις μεταξύ της διαφορετικής αξιοποίησης του τελικού κεφαλαίου σχετικά με την εναλλαγή του σε δόσεις και σε ένα εφάπαξ ποσό [32], όπως επίσης εστιάζουν στη βέλτιστη κατανομή του τελικού κεφαλαίου όσον αφορά την επιλογή ανάμεσα στην πρόσοδο και στο μετοχικό κεφάλαιο κατά τη συνταξιοδότηση [20].

3.4 Ενδιάμεσοι Στόχοι

Όσον αφορά τους ετήσιους στόχους, μόνο οι στόχοι των κεφαλαίων έχουν υπολογιστεί καθώς το κεφάλαιο έχει μετατραπεί σε μία πρόσοδο μόνο κατά τη συνταξιοδότηση.

Οι $\{F_t\}_{t=1, \dots, N-1}$ επιλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να αυξάνονται γραμμικά από το

$$F_1 = (f_0 + c)e^{r^*}$$

έως το F_N , το οποίο δίνεται από τη σχέση (3.3).

Το r^* υπολογίζεται βάσει της παρακάτω σχέσης όπως ακριβώς συμβαίνει και ανωτέρω

$$r^* = \frac{1}{2}(\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)).$$

Για λόγους απλότητας επιλέξαμε τη γραμμική παρεμβολή. Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει το $\log F_t$ ως βάση της γραμμικής παρεμβολής [33]. Κρίνουμε σημαντικό να υπογραμμίσουμε πως η επιλογή των στόχων ήταν εφικτό να πραγματοποιείται όχι τόσο συχνά όσο οι ετήσιοι στόχοι.

Παραδείγματος χάριν, οι στόχοι να επιλέγονται κάθε 3 χρόνια, όπως ακριβώς συμβαίνει και με άλλες αναλογιστικές έρευνες των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένων εισφορών, ή άνω των 3 ετών και στην ακραία περίπτωση κάθε N , δηλαδή όταν θα εξετάζαμε μόνο τον τελικό στόχο F_N .

3.5 Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος

Αφού προσδιορίσαμε τους ετήσιους στόχους $\{F_t\}_{t=1,2,\dots,N}$, είναι τώρα εφικτό να καθορίσουμε τα χαρακτηριστικά στοιχεία του προβλήματος του δυναμικού προγραμματισμού. Ακολουθώντας το έργο των Haberman και Sung (1994) [19] και Owadally (1998) [27] και προσαρμόζοντάς το σε ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων εισφορών, κρίνουμε εφικτό να προσδιορίσουμε το «κόστος» το οποίο υφίσταται το σχήμα τη χρονική στιγμή t , όπως επίσης και σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή t και στο χρόνο N και επιλέγουμε κατάλληλα βάρη (θ_1, θ_0) .

Το κόστος του σχήματος τη χρονική στιγμή t προκύπτει από την ακόλουθη σχέση

$$C(t) = \theta_1(f_t - F_t)^2, \quad \text{για } t = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (3.7)$$

Υπενθυμίζουμε ότι με f_t συμβολίζουμε το πραγματικό κεφάλαιο και με F_t τον προκαθορισμένο μέγιστο στόχο.

Το τελικό κόστος της συνταξιοδότησης δίνεται από τον παρακάτω τύπο

$$C(N) = \theta_0(f_N - F_N)^2. \quad (3.8)$$

Η διαφορά μεταξύ των συντελεστών θ_1 και θ_0 οφείλεται στην πιθανή χαμηλή σπουδαιότητα η οποία αποδίδεται στην επίτευξη των ενδιάμεσων στόχων σε σχέση με την επίτευξη του τελικού στόχου. Επίσης, γίνεται εύκολα αντιληπτό πως για τα βάρη θ_1 και θ_0 ισχύει ότι:

$$\theta_1 \leq \theta_0.$$

Ωστόσο σε μία γενικότερη παρουσίαση της εφαρμογής του συγκεκριμένου προβλήματος που αποτελεί και στόχο της παρούσας εργασίας, είναι πιθανό $\{\theta_1 > \theta_0\}$ στην περίπτωση κατά την οποία υπάρχουν μειώσεις πέραν της συνταξιοδότησης, όπως είναι η συνταξιοδότηση λόγω ασθένειας ή θανάτου, και οι ενδιάμεσοι στόχοι συνδέονταν με τα οφέλη τα οποία προκλήθηκαν λόγω της μείωσης.

Η επιλογή της τετραγωνικής συνάρτησης απώλειας επιβάλλει κυρώσεις στις διαφορές του στόχου του κεφαλαίου ανεξαρτήτως του προσήμου τους, πιο συγκεκριμένα στο κεφάλαιο που έχει συσσωρευτεί και υπερβαίνει το στόχο. Αναγνωρίζουμε πως η προαναφερθείσα υπόθεση πιθανό να μην είναι κατάλληλη για ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων εισφορών, παρά ταύτα χρησιμοποιώντας την καταλήγουμε σε μία πιο ελκυστική μαθηματική λύση.

Το συνολικό μελλοντικό κόστος τη χρονική στιγμή t επιτυγχάνεται με την προεξόφληση των μελλοντικών κοστών μέχρι το χρόνο N . Άρα,

$$G_t = \sum_{s=t}^N \gamma^{s-t} C(s) \quad (3.9)$$

όπου

γ είναι ο διαχρονικός συντελεστής προεξόφλησης, ο οποίος συχνά απαντάται και ως «ψυχολογικός» συντελεστής προεξόφλησης ή απλά συντελεστής προεξόφλησης (Cairns, 1997) [15] που πιθανό να ισούται με τον εκτιμώμενο συντελεστή της προεξόφλησης (Haberman and Sung, 1994; Sung, 1997) [19], [28].

Στη συνέχεια, θέτουμε το X_t ως το σ -πεδίο το οποίο παράγεται μέσω των διαθέσιμων πληροφοριών τη χρονική στιγμή t

$$X_t = \{f_0, f_1, \dots, f_t, y_0, y_1, \dots, y_{t-1}\}.$$

Η συνάρτηση της αξίας μπορεί να προσδιοριστεί από τον ακόλουθο τύπο ως

$$J(X_t) = \min_{\pi_t} E[G_t | X_t], \text{ για } t = 0, 1, \dots, N - 1. \quad (3.10)$$

Με π_t παριστάνουμε το σύνολο των μελλοντικών εφικτών επενδυτικών στρατηγικών, δηλαδή

$$\pi_t = \{\{y_s\}_{s=t, t+1, \dots, N-1}: 0 \leq y_s \leq 1\} = \{\{y_t, y_{t+1}, \dots, y_{N-1}\}: 0 \leq y_s \leq 1\}.$$

Στόχος μας λοιπόν είναι η επιλογή των μελλοντικών επενδυτικών στρατηγικών με τις οποίες ελαχιστοποιείται το προεξοφλημένο μελλοντικό κόστος.

Η διεξαγωγή μίας περαιτέρω έρευνας εξαρτάται από την επιλογή του στόχου. Ο Cairns (1996) πρότείνει ένα σύνολο διαφορετικών στόχων για τα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων εισφορών και τα ταξινομήσε σε δύο διαφορετικές ομάδες. Στην πρώτη ομάδα κατέταξε τους ασφαλισμένους για τους οποίους δίδεται εκ των προτέρων η πληροφορία για τη συνταξιοδότηση τους όσον αφορά το προβλεπόμενο ποσό της μελλοντικής τους σύνταξης, στόχος ο οποίος επιθυμούν να επιτευχθεί.

Στη δεύτερη ομάδα κατέταξε τους ασφαλισμένους οι οποίοι ενημερώνονται για την πραγματική τους σύνταξη, μόνο τη στιγμή της συνταξιοδότησης [14].

Ένα άλλο πιθανό κριτήριο το οποίο προτείνεται για την συγκεκριμένη περίπτωση είναι η μεγιστοποίηση της αναμενόμενης χρησιμότητας του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης στη συνταξιοδότηση, το οποίο δίνει τα παρελθοντικά στοιχεία του κεφαλαίου, για τον προσδιορισμό μίας συνάρτησης ωφελιμότητας.

3.6 Το Βέλτιστο Αξίωμα του Bellman

Εφαρμόζοντας το βέλτιστο αξίωμα του Bellman σε στοχαστικό περιβάλλον, προσπαθούμε να επιλύσουμε το πρόβλημα της βέλτιστης επενδυτικής κατανομής του κεφαλαίου κάθε χρόνο με σκοπό την ελαχιστοποίηση των αποκλίσεων του πραγματικού κεφαλαίου από τους τελικούς και ενδιάμεσους στόχους που θέσαμε. Το συγκεκριμένο ζήτημα συνάδει με το πραγματικό πρόβλημα των επενδυτικών στρατηγικών που αντιμετωπίζουν κάθε χρόνο οι διαχειριστές των επενδύσεων σχετικά με την διαχείριση του κεφαλαίου του κάθε μέλους.

Προβαίνουμε σε χρήση του βέλτιστου αξιώματος του Bellman (*Bellman's optimality principle*), (Bellman and Kalaba, 1965; Cungo and Montrucchio, 1968) [12], [16] και καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση

$$J(X_t) = \min_{\pi_t} E \left[\sum_{s=t}^N \gamma^{s-t} C(s) \mid X_t \right] = \min_{y_t} \left[C(t) + \gamma E[J(X_{t+1}) \mid X_t] \right]. \quad (3.11)$$

Ωστόσο κρίνουμε σημαντικό να σημειώσουμε ότι αφού έχει γίνει η υπόθεση ότι οι $\{\mu_t\}$ και $\{\lambda_t\}$ είναι ανεξάρτητες, η f_t έχει τη Μαρκοβιανή ιδιότητα και ισχύει ότι

$$Pr[f_{t+1} \mid X_t] = Pr[f_{t+1} \mid f_t]$$

και

$$Pr[f_{t+1}, f_{t+2}, \dots, f_N \mid X_t] = Pr[f_{t+1}, f_{t+2}, \dots, f_N \mid f_t],$$

έτσι ώστε

$$Pr[G_t \mid X_t] = Pr[G_t \mid f_t]$$

και

$$J(X_t) = \min_{y_t} E[G_t \mid X_t] = \min_{y_t} E[G_t \mid f_t] = J(f_t, t). \quad (3.12)$$

Επομένως, η εξίσωση του Bellman (3.11) μετατρέπεται στην παρακάτω μορφή η οποία είναι ζωτικής σημασίας για την επίλυση του προβλήματος του δυναμικού προγραμματισμού

$$J(f_t, t) = \min_{y_t} [C(t) + \gamma E[J(f_{t+1}, t+1) | f_t]], t = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.13)$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση του κεφαλαίου (3.2) και το γεγονός ότι οι $\{\mu_t\}$ και $\{\lambda_t\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, όπως επίσης και κανονικά καταναμημένες, είναι εύκολο να αποδειχθεί ότι

$$E[f_{t+1} | f_t] = (f_t + c)[(1 - y_t)e^{\mu+0.5\sigma_1^2} + y_t e^{\lambda+0.5\sigma_2^2}], \quad (3.14)$$

$$E[f_{t+1}^2 | f_t] = (f_t + c)^2 \left\{ (1 - y_t)^2 e^{2\mu+2\sigma_1^2} + y_t^2 e^{2\lambda+2\sigma_2^2} + 2y_t(1 - y_t) e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \right\}, \quad (3.15)$$

$$\text{Var}[f_{t+1} | f_t] = (f_t + c)^2 \left\{ (1 - y_t)^2 e^{2\mu+\sigma_1^2} (e^{\sigma_1^2} - 1) + y_t^2 e^{2\lambda+\sigma_2^2} (e^{\sigma_2^2} - 1) \right\}. \quad (3.16)$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε τις εξισώσεις (3.14), (3.15) και (3.16). Γνωρίζουμε ότι $f_{t+1} = (f_t + c)[(1 - y_t)e^{\mu_t} + y_t e^{\lambda_t}]$ καθώς και ότι $\mu_t \sim N(\mu, \sigma_1^2)$ και $\lambda_t \sim N(\lambda, \sigma_2^2)$, όπου οι μ_t και λ_t είναι ανεξάρτητες και ισόνομα καταναμημένες τυχαίες μεταβλητές και εφαρμόζοντας τη γνωστή ιδιότητα (για την απόδειξη της σχέσης (3.16)) $\text{Var}(X | Y) = E(X^2 | Y) - E(X | Y)^2$ καθώς $\text{Var}(X | Y) = E[(X - E(X | Y))^2 | Y]$ λαμβάνουμε τα εξής:

$$\begin{aligned} E[f_{t+1} | f_t] &= E[(f_t + c)[(1 - y_t)e^{\mu_t} + y_t e^{\lambda_t}] | f_t] \\ &= (f_t + c)E[(1 - y_t)e^{\mu_t} + y_t e^{\lambda_t} | f_t] \\ &= (f_t + c) \left[(1 - y_t)E[e^{\mu_t}] + y_t E[e^{\lambda_t}] \right] \\ &= (f_t + c) \left[(1 - y_t)e^{\mu+\frac{\sigma_1^2}{2}} + y_t e^{\lambda+\frac{\sigma_2^2}{2}} \right] \\ &= (f_t + c)[(1 - y_t)e^{\mu+0.5\sigma_1^2} + y_t e^{\lambda+0.5\sigma_2^2}]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E[f_{t+1}^2 | f_t] &= E \left[(f_t + c)^2 [(1 - y_t)e^{\mu t} + y_t e^{\lambda t}]^2 | f_t \right] \\
 &= (f_t + c)^2 E \left[[(1 - y_t)e^{\mu t} + y_t e^{\lambda t}]^2 | f_t \right] \\
 &= (f_t + c)^2 E \left[(1 - y_t)^2 e^{2\mu t} + y_t^2 e^{2\lambda t} + 2(1 - y_t)y_t e^{\mu t + \lambda t} | f_t \right] \\
 &= (f_t + c)^2 \{ (1 - y_t)^2 E[e^{2\mu t}] + y_t^2 E[e^{2\lambda t}] + 2(1 - y_t)y_t E[e^{\mu t + \lambda t}] \} \\
 &= (f_t + c)^2 \left\{ (1 - y_t)^2 e^{2\mu + \frac{(2\sigma_1)^2}{2}} + y_t^2 e^{2\lambda + \frac{(2\sigma_2)^2}{2}} + 2(1 - y_t)y_t E[e^{\mu t}] E[e^{\lambda t}] \right\} \\
 &= (f_t + c)^2 \left\{ (1 - y_t)^2 e^{2\mu + \frac{4\sigma_1^2}{2}} + y_t^2 e^{2\lambda + \frac{4\sigma_2^2}{2}} + 2(1 - y_t)y_t e^{\mu + \frac{\sigma_1^2}{2}} e^{\lambda + \frac{\sigma_2^2}{2}} \right\} \\
 &= (f_t + c)^2 \{ (1 - y_t)^2 e^{2\mu + 2\sigma_1^2} + y_t^2 e^{2\lambda + 2\sigma_2^2} + 2(1 - y_t)y_t e^{\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \}.
 \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
 Var[f_{t+1} | f_t] &= E[f_{t+1}^2 | f_t] + \{E[f_{t+1} | f_t]\}^2 \\
 &= (f_t + c)^2 \{ (1 - y_t)^2 e^{2\mu + 2\sigma_1^2} + y_t^2 e^{2\lambda + 2\sigma_2^2} + 2(1 - y_t)y_t e^{\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \} \\
 &\quad - \{ (f_t + c) [(1 - y_t)e^{\mu + 0.5\sigma_1^2} + y_t e^{\lambda + 0.5\sigma_2^2}] \}^2 \\
 &= (f_t + c)^2 \{ (1 - y_t)^2 e^{2\mu + 2\sigma_1^2} + y_t^2 e^{2\lambda + 2\sigma_2^2} + 2(1 - y_t)y_t e^{\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \} \\
 &\quad - (f_t + c)^2 [(1 - y_t)e^{\mu + 0.5\sigma_1^2} + y_t e^{\lambda + 0.5\sigma_2^2}]^2 \\
 &= (f_t + c)^2 \{ (1 - y_t)^2 e^{2\mu + 2\sigma_1^2} + y_t^2 e^{2\lambda + 2\sigma_2^2} + 2(1 - y_t)y_t e^{\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \} \\
 &\quad - (f_t + c)^2 \{ (1 - y_t)^2 e^{2\mu + \sigma_1^2} + y_t^2 e^{2\lambda + \sigma_2^2} + 2(1 - y_t)y_t e^{\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \} \\
 &= (f_t + c)^2 \{ (1 - y_t)^2 e^{2\mu + 2\sigma_1^2} + y_t^2 e^{2\lambda + 2\sigma_2^2} + 2(1 - y_t)y_t e^{\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \} \\
 &\quad - (1 - y_t)^2 e^{2\mu + \sigma_1^2} - y_t^2 e^{2\lambda + \sigma_2^2} - 2(1 - y_t)y_t e^{\mu + \lambda + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} \} \\
 &= (f_t + c)^2 \{ (1 - y_t)^2 e^{2\mu + \sigma_1^2} (e^{\sigma_1^2} - 1) + y_t^2 e^{2\lambda + \sigma_2^2} (e^{\sigma_2^2} - 1) \}.
 \end{aligned}$$

■

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θεωρούμε ότι η μεταβλητή θ_0 είναι πολλαπλάσια της θ_1 και ότι η δεύτερη ισούται με 1, έτσι ώστε

$$\theta_1 = 1 \quad \text{και} \quad \theta_0 = \theta,$$

όπου επίσης υποθέτουμε ότι $\theta > 1$.

Κατ' αυτόν τον τρόπο, το πρόβλημα του δυναμικού προγραμματισμού (*dynamic programming problem, DPP*) μετασχηματίζεται στην ακόλουθη μορφή

$$J(f, t) = \min_{y_t} \left[(f_t - F_t)^2 + \gamma E[J(f_{t+1}, t+1) | f_t] \right], \quad (3.17)$$

με συνοριακή συνθήκη (*boundary condition, BC*)

$$J(f_N, N) = \theta(f_N - F_N)^2, \quad (3.18)$$

όπου ο τύπος της F_N δίνεται από την εξίσωση (3.3).

3.7 Επίλυση του Προβλήματος του Δυναμικού Προγραμματισμού

Στο παρόν εδάφιο έχουμε στη διάθεση μας όλα τα στοιχεία εκείνα τα οποία χρειαζόμαστε για να καταλήξουμε στη λύση του προβλήματος του δυναμικού προγραμματισμού που προσδιορίσαμε στην προηγούμενη υποενότητα. Η λύση λοιπόν λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$J(f_t, t) = P_t f_t^2 - 2Q_t f_t + R_t \quad (3.19)$$

για κάποια σύνολα συντελεστών $\{P_t\}$, $\{Q_t\}$ και $\{R_t\}$.

Ακολούθως, αποδεικνύουμε την εξίσωση (3.19) με τη βοήθεια της μαθηματικής επαγωγής.

Θέτοντας στην εξίσωση (3.19) $t = N$ λαμβάνουμε

$$J(f_N, N) = P_N f_N^2 - 2Q_N f_N + R_N$$

και μέσω της συνοριακής συνθήκης (3.18)

$$J(f_N, N) = \theta(f_N - F_N)^2 = \theta(f_N^2 - 2f_N F_N + F_N^2) = \theta f_N^2 - 2\theta f_N F_N + \theta F_N^2,$$

προκύπτει ότι

$$P_N = \theta \text{ και } Q_N = \theta F_N. \quad (3.20)$$

Εν συνεχεία, υποθέτουμε ότι η (3.19) επαληθεύεται για $t + 1$ και έτσι καταλήγουμε στην ακόλουθη επαγωγική υπόθεση

$$J(f_{t+1}, t + 1) = P_{t+1}f_{t+1}^2 - 2Q_{t+1}f_{t+1} + R_{t+1}. \quad (3.21)$$

Θα αποδείξουμε ότι η (3.21) ισχύει και για t .

Τα ακόλουθα αποτελέσματα έχουν χρησιμοποιηθεί στις εξισώσεις (3.21), (3.14) και (3.15).

$$\begin{aligned} & E \left[J(f_{t+1}, t + 1) \mid f_t \right] \\ &= E \left[P_{t+1}f_{t+1}^2 - 2Q_{t+1}f_{t+1} + R_{t+1} \mid f_t \right] \\ &= P_{t+1}E \left[f_{t+1}^2 \mid f_t \right] - 2Q_{t+1}E \left[f_{t+1} \mid f_t \right] + R_{t+1} \\ &= P_{t+1}(f_t + c)^2[(1 - y_t)^2 e^{2\mu + 2\sigma_1^2} \\ &\quad + y_t^2 e^{2\lambda + 2\sigma_2^2} + 2y_t(1 - y_t)e^{\lambda + \mu + 0.5(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}] \\ &\quad - 2Q_{t+1}(f_t + c)[(1 - y_t)e^{\mu + 0.5\sigma_1^2} + y_t e^{\lambda + 0.5\sigma_2^2}] + R_{t+1}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Αναδιατάσσοντας την έκφραση (3.22), προκύπτει η ακόλουθη μορφή

$$E[J(f_{t+1}, t + 1) \mid f_t] = L_t y_t^2 + M_t y_t + N_t = \Psi(y_t), \quad (3.23)$$

όπου οι L_t , M_t και N_t δίνονται από τις παρακάτω εξισώσεις

$$L_t = P_{t+1}(f_t + c)^2 [e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}], \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} M_t &= 2P_{t+1}(f_t + c)^2 [e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - e^{2\mu+2\sigma_1^2}] \\ &\quad - 2Q_{t+1}(f_t + c) [e^{\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{\mu+0.5\sigma_1^2}], \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$N_t = P_{t+1}(f_t + c)^2 e^{2\mu+2\sigma_1^2} - 2Q_{t+1}(f_t + c) e^{\mu+0.5\sigma_1^2} + R_{t+1}. \quad (3.26)$$

Αναλυτικότερα, η έκφραση (3.23) προέκυψε μέσω της (3.22) ως εξής

$$\begin{aligned} &E [J(f_{t+1}, t + 1) | f_t] \\ &= P_{t+1}(f_t + c)^2 [(1 - y_t)^2 e^{2\mu+2\sigma_1^2} \\ &\quad + y_t^2 e^{2\lambda+2\sigma_2^2} + 2y_t(1 - y_t)e^{\lambda+\mu+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}] \\ &\quad - 2Q_{t+1}(f_t + c) [(1 - y_t)e^{\mu+0.5\sigma_1^2} + y_t e^{\lambda+0.5\sigma_2^2}] + R_{t+1} \\ &= P_{t+1}(f_t + c)^2 [e^{2\mu+2\sigma_1^2} - 2y_t e^{2\mu+2\sigma_1^2} + y_t^2 e^{2\mu+2\sigma_1^2} \\ &\quad + y_t^2 e^{2\lambda+2\sigma_2^2} + 2y_t e^{\lambda+\mu+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - 2y_t^2 e^{\lambda+\mu+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}] \\ &\quad - 2Q_{t+1}(f_t + c) [e^{\mu+0.5\sigma_1^2} - y_t e^{\mu+0.5\sigma_1^2} + y_t e^{\lambda+0.5\sigma_2^2}] + R_{t+1} \\ &= P_{t+1}(f_t + c)^2 y_t^2 [e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\lambda+\mu+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}] \\ &\quad + 2P_{t+1}(f_t + c)^2 y_t [e^{\lambda+\mu+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - e^{2\mu+2\sigma_1^2}] \\ &\quad - 2Q_{t+1}(f_t + c) y_t [e^{\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{\mu+0.5\sigma_1^2}] \\ &\quad + P_{t+1}(f_t + c)^2 e^{2\mu+2\sigma_1^2} - 2Q_{t+1}(f_t + c) e^{\mu+0.5\sigma_1^2} + R_{t+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= P_{t+1}(f_t + c)^2 [e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\lambda+\mu+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}] y_t^2 \\
 &+ \{2P_{t+1}(f_t + c)^2 [e^{\lambda+\mu+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - e^{2\mu+2\sigma_1^2}] \\
 &- 2Q_{t+1}(f_t + c) [e^{\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{\mu+0.5\sigma_1^2}]\} y_t \\
 &+ P_{t+1}(f_t + c)^2 e^{2\mu+2\sigma_1^2} - 2Q_{t+1}(f_t + c) e^{\mu+0.5\sigma_1^2} + R_{t+1} \\
 &= L_t y_t^2 + M_t y_t + N_t = \Psi(y_t).
 \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που μπορεί να αποδειχθεί ότι $L_t > 0$, τότε προκύπτει ένα μοναδικό ελάχιστο Z_t^* και μία αντίστοιχη βέλτιστη επενδυτική απόφαση y_t^* , έτσι ώστε:

$$\Psi(y_t^*) = Z_t^*$$

και

$$y_t^* = -\frac{M_t}{2L_t}, \quad (3.27)$$

$$Z_t^* = N_t - \frac{M_t^2}{4L_t}. \quad (3.28)$$

Μέχρι στιγμής εικάζουμε ότι $L_t > 0$. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε πως η συγκεκριμένη ανισότητα ισχύει και πως ορθά την υποθέσαμε.

Αντικαθιστούμε τις εξισώσεις (3.24), (3.25) και (3.26) στην (3.28), συνεπώς προκύπτει

$$Z_t^* = P_t' f_t^2 + Q_t' + R_t', \quad (3.29)$$

όπου

$$P_t' = H P_{t+1} \quad (3.30)$$

και

$$Q_t' = 2HcP_{t+1} + 2KQ_{t+1}, \quad (3.31)$$

με

$$H = \frac{1}{D} [e^{2\mu+2\lambda+\sigma_1^2+\sigma_2^2} (e^{\sigma_1^2+\sigma_2^2} - 1)], \quad (3.32)$$

$$K = \frac{1}{D} e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} (e^{\mu+0.5\sigma_1^2} + e^{\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{\mu+1.5\sigma_1^2} - e^{\lambda+1.5\sigma_2^2}), \quad (3.33)$$

$$D = e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}. \quad (3.34)$$

Η εξίσωση (3.13) μετατρέπεται στην ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned} J(f_t, t) &= \min_{y_t} [C(t) + \gamma E[J(f_{t+1}, t+1) | f_t]] \\ &= \min_{y_t} [(f_t - F_t)^2 + \gamma E[J(f_{t+1}, t+1) | f_t]] \\ &= (f_t - F_t)^2 + \gamma \min_{y_t} [E[J(f_{t+1}, t+1) | f_t]] \\ &= (f_t - F_t)^2 + \gamma Z_t^* \\ &= f_t^2 - 2f_t F_t + F_t^2 + \gamma(P_t' f_t^2 + Q_t' + R_t') \\ &= f_t^2 - 2f_t F_t + F_t^2 + \gamma P_t' f_t^2 + \gamma Q_t' + \gamma R_t' \\ &= (1 + \gamma P_t') f_t^2 - 2(F_t - 0.5\gamma Q_t') f_t + (F_t^2 + \gamma R_t') \\ &= P_t f_t^2 - 2Q_t f_t + R_t, \end{aligned} \quad (3.35)$$

όπου

$$P_t = 1 + \gamma P_t', \quad (3.36)$$

$$Q_t = F_t - 0.5\gamma Q_t', \quad (3.37)$$

$$R_t = F_t^2 + \gamma R_t', \quad (3.38)$$

με την P_t' και την Q_t' να δίδονται από τις (3.30) και (3.31) αντίστοιχα, που είναι ακριβώς η εξίσωση (3.19).

Μένει λοιπόν, να αποδείξουμε ότι $L_t > 0$, ή ισοδύναμα ότι $P_{t+1}[\dots] > 0$ αφού $(f_t + c)^2 > 0$.

Ακολουθώντας,

$$\begin{aligned} & [e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\lambda+\mu+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}] \\ &= (e^{\mu+\sigma_1^2} - e^{\lambda+\sigma_2^2})^2 + 2e^{\mu+\lambda+\sigma_1^2+\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} \\ &= (e^{\mu+\sigma_1^2} - e^{\lambda+\sigma_2^2})^2 + 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}(e^{0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - 1) > 0. \end{aligned}$$

Με τη βοήθεια των εξισώσεων (3.30) και (3.36) μπορούμε να αναλύσουμε το πρόσημο της ποσότητας P_{t+1} . Ειδικότερα,

$$\begin{aligned} P'_t &= HP_{t+1} \xrightarrow{t=t+1} P'_{t+1} = HP_{t+2}, \\ P_t &= 1 + \gamma P'_t \xrightarrow{t=t+1} P_{t+1} = 1 + \gamma P'_{t+1}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στην παρακάτω ισότητα

$$P_{t+1} = 1 + \gamma HP_{t+2}.$$

Παρατηρούμε ότι $H > 0$, $\gamma > 0$ και $P_N = \theta > 0$. Συνεπάγεται λοιπόν ότι

$$P_{t+1} > 0,$$

έτσι

$$L_t > 0$$

για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t .

■

3.8 Η Βέλτιστη Επενδυτική Στρατηγική y_t^*

Στην παρούσα υποενότητα θα ορίσουμε τη βέλτιστη επενδυτική στρατηγική y_t^* , αντικαθιστώντας τις εξισώσεις (3.24) και (3.25) στην (3.27). Συνεπώς, οδηγούμαστε στην εξής έκφραση

$$y_t^* = \frac{Q_{t+1}V}{P_{t+1}(f_t + c)D} - \frac{W}{D}. \quad (3.39)$$

Στην ανωτέρω σχέση, οι ακολουθίες $\{P_t\}_{t=1,\dots,N}$ και $\{Q_t\}_{t=1,\dots,N}$ προκύπτουν αναδρομικά από τις σχέσεις

$$P_t = 1 + \gamma H P_{t+1} \quad (3.40)$$

και

$$Q_t = F_t - \gamma C H P_{t+1} - \gamma K Q_{t+1} \quad (3.41)$$

αντίστοιχα. Με P_N και Q_N δίνονται από την (3.20), η H , K και D από τις (3.32), (3.33) και (3.34), και οι V και W από τις ακόλουθες εξισώσεις

$$V = e^{\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{\mu+0.5\sigma_1^2}, \quad (3.42)$$

$$W = e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - e^{2\mu+2\sigma_1^2}. \quad (3.43)$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε τη σχέση (3.39).

Γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned} M_t &= 2P_{t+1}(f_t + c)^2 [e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - e^{2\mu+2\sigma_1^2}] \\ &\quad - 2Q_{t+1}(f_t + c) [e^{\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{\mu+0.5\sigma_1^2}] \end{aligned}$$

και

$$L_t = P_{t+1}(f_t + c)^2 [e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}].$$

Με αντικατάσταση στην εξίσωση $y_t^* = -\frac{M_t}{2L_t}$ αποδεικνύουμε την εξίσωση (3.39).

$$\begin{aligned}
 y_t^* &= -\frac{M_t}{2L_t} \\
 &= -\left(\frac{2P_{t+1}(f_t + c)^2[e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - e^{2\mu+2\sigma_1^2}]}{2P_{t+1}(f_t + c)^2[e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}]} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{2Q_{t+1}(f_t + c)[e^{\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{\mu+0.5\sigma_1^2}]}{2P_{t+1}(f_t + c)^2[e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}]}\right) \\
 &= -\frac{2P_{t+1}(f_t + c)^2[e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - e^{2\mu+2\sigma_1^2}]}{2P_{t+1}(f_t + c)^2[e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}]} \\
 &\quad + \frac{2Q_{t+1}(f_t + c)[e^{\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{\mu+0.5\sigma_1^2}]}{2P_{t+1}(f_t + c)^2[e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}]} \\
 &= -\frac{e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - e^{2\mu+2\sigma_1^2}}{e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \\
 &\quad + \frac{Q_{t+1}[e^{\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{\mu+0.5\sigma_1^2}]}{P_{t+1}(f_t + c)[e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}]} \\
 &= \frac{Q_{t+1}[e^{\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{\mu+0.5\sigma_1^2}]}{P_{t+1}(f_t + c)[e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}]} \\
 &\quad - \frac{e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - e^{2\mu+2\sigma_1^2}}{e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \\
 &= \frac{Q_{t+1}V}{P_{t+1}(f_t + c)D} - \frac{W}{D} \\
 \Rightarrow y_t^* &= \frac{Q_{t+1}V}{P_{t+1}(f_t + c)D} - \frac{W}{D}.
 \end{aligned}$$

Άρα, η σχέση (3.29) απεδείχθη. ■

3.8.1 Σχολιασμός της Βέλτιστης Επενδυτικής Στρατηγικής y_t^*

Υπάρχει η δυνατότητα να προσδιορίσουμε την εξίσωση (3.39) παραστατικά ως

$$y_t^*(f_t) = \frac{\alpha}{b(f_t + c)} - \frac{e}{d'} \quad (3.44)$$

όπου τα a, b, c, d και e δεν εξαρτώνται από την f_t .

Παρατηρώντας το πρόσημο των συντελεστών a και b , προκύπτει ότι $b > 0$, καθώς το $D > 0$ και το $P_t > 0$ για κάθε t (στην πραγματικότητα ισχύει ότι $P_N > 0$, $H > 0$, ως εκ τούτου $P_t' > 0$ και επίσης σημειώνεται ότι $\gamma > 0$). Αντ' αυτού το πρόσημο του συντελεστή a δεν είναι βέβαιο, δεδομένου ότι εξαρτάται από το πρόσημο του Q_t . Επιπλέον, επισημαίνουμε πως το $V > 0$. Ωστόσο αναφέρουμε πως σε όλους τους υπολογισμούς τους οποίους πραγματοποιούμε, θεωρούμε πως το πρόσημο του Q_t είναι θετικό για κάθε t . Εφαρμόζοντας τους τύπους των μεταβλητών στο στατιστικό πακέτο της R (βλέπε Παράρτημα Δ), και θεωρώντας ότι $\mu = 4\%$, $\lambda = 6\%$, $\sigma_1 = 5\%$ και $\sigma_2 = 15\%$ το οποίο θα αποτελέσει και το βασικό σενάριο της μελέτης μας όπως θα αναφέρουμε παρακάτω διαπιστώνουμε τα εξής: Η τιμή της μεταβλητής D ισούται με 0.02996567 η οποία έχει θετικό πρόσημο. Η μεταβλητή V έχει επίσης θετικό πρόσημο καθώς προκύπτει ότι ισοδυναμεί με 0.02105207. Ακόμη, οι τιμές των H και W είναι 1.057967 και 0.03035519 αντίστοιχα. Οι μεταβλητές λαμβάνουν θετικό πρόσημο όχι μόνο στο βασικό σενάριο, αλλά και για όλο το πλήθος των επτά σεναρίων τα οποία θα παρουσιάσουμε.

Διαφοροποιώντας το y_t^* σε σχέση με το f_t και υποθέτοντας παράλληλα ότι $Q_t > 0$ προκύπτει ότι

$$\frac{\partial y_t^*}{\partial f_t} < 0. \quad (3.45)$$

Επομένως, εστιάζοντας στη βέλτιστη επενδυτική στρατηγική παρατηρούμε πως για ένα σταθερό σημείο και για οποιοδήποτε άλλο το οποίο είναι ίσο με αυτό, το ποσοστό του κεφαλαίου το οποίο επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου μειώνεται καθώς το ίδιο το κεφάλαιο αυξάνεται. Το συγκεκριμένο γεγονός πιθανό να προκαλεί έκπληξη εάν σκεφτούμε τις χαμηλές τιμές του t εστιάζοντας στο αρχικό στάδιο που ασφαλισμένος βρίσκεται στο συνταξιοδοτικό σχήμα, στην περίπτωση εκείνη δηλαδή που το γενικό κριτήριο θα έπρεπε να είναι η όσο το δυνατό περισσότερη αύξηση του κεφαλαίου. Ωστόσο, το συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι εύλογο όταν σκεφτόμαστε την επιλογή των συναρτήσεων του «κόστους» $C(t)$ που ελαχιστοποιούμε τα εξής:

- $(f_t - F_t)^2$, για $t = 1, 2, \dots, N - 1$,
- $\theta(f_N - F_N)^2$, για $t = N$.

Παρατηρούμε πως μία συνάρτηση μη ωφελιμότητας όπως είναι και η συνάρτηση «κόστους» που χρησιμοποιούμε, είναι ανάλογη με μία συνάρτηση ωφελιμότητας. Το αποτέλεσμα αυτό συνάδει με μία σημαντική σχέση που έχει επισημάνει ο Arrow το 1970 [11], ανάμεσα στη συνάρτηση ωφελιμότητας και στο ποσοστό ενός χαρτοφυλάκιο δύο περιουσιακών στοιχείων που επενδύεται στο πιο επικίνδυνο περιουσιακό στοιχείο. Σύμφωνα με το έργο του, ένας επενδυτής που έχει συνάρτηση ωφελιμότητας η οποία είναι φθίνουσα ως προς τον πλούτο επενδύει ένα φθίνον ποσό χαρτοφυλακίου στο επικίνδυνο περιουσιακό στοιχείο όταν ο πλούτος του αυξάνεται.

Διαπιστώνουμε πως μόλις ο ενδιαμέσος στόχος επιτευχθεί, η επενδυτική στρατηγική απαιτεί την διατήρηση του, και αυτό συνεπάγεται ότι το μερίδιο του κεφαλαίου το οποίο πρόκειται να επενδυθεί στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου ελαττώνεται καθώς το f_t αυξάνεται. Η συγκεκριμένη διαπίστωση έχει αναφερθεί επίσης από τον Cairns το 1997 [15] και τον Owadally το 1998 [27], στην περίπτωση της μελέτης ενός συνταξιοδοτικού σχήματος καθορισμένων παροχών.

Ως μία ειδική περίπτωση βέλτιστης επενδυτικής στρατηγικής θεωρούμε την τελευταία επενδυτική απόφαση, η οποία είναι η y_{N-1}^* :

$$y_{N-1}^* = \frac{V}{D} \left[\frac{F_N}{(f_{N-1} + c)} - \frac{W}{V} \right]. \quad (3.46)$$

Σημειώνουμε πως στην παραπάνω εξίσωση έχουμε εφαρμοσθεί τη συνοριακή συνθήκη (3.20), δηλαδή

$$P_N = \theta \text{ και } Q_N = \theta F_N.$$

Στην περίπτωση του περιουσιακού στοιχείου μηδενικού κινδύνου (*risk-free asset*) για το οποίο ισχύει ότι $\sigma_1 = 0$, αναφέρουμε πως για την y_{N-1}^* ισχύει ότι

$$y_{N-1}^* = 0 \text{ αν } F_N = (f_{N-1} + c)e^\mu. \quad (3.47)$$

Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε το μηδενικό αποτέλεσμα της y_{N-1}^* στην (3.47) ως διαισθητικό καθώς θα ήταν μία λογική απόφαση να διακόψουμε αυτομάτως την επένδυση στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου όταν επενδύουμε στο περιουσιακό στοιχείο μηδενικού κινδύνου, δεδομένου ότι θα μας οδηγήσει ακριβώς στον ίδιο τελικό στόχο. Αντίστοιχη διαπίστωση έχει αναφερθεί και σε αυτή την περίπτωση όπως και παραπάνω, από τον Owadally το 1998 [27].

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε τη σχέση (3.47)

$$\begin{aligned}
 y_{N-1}^* &= \frac{V}{D} \left[\frac{F_N}{f_{N-1} + c} - \frac{W}{V} \right] \\
 &= \frac{V}{D} \left[\frac{(f_{N-1} + c)e^\mu}{f_{N-1} + c} - \frac{W}{V} \right] = \frac{V}{D} \left[e^\mu - \frac{W}{V} \right] \\
 &= \frac{V}{D} \left[\frac{e^\mu V - W}{V} \right] = \frac{e^\mu V - W}{D} \\
 &= \frac{e^\mu (e^{\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{\mu+0.5\sigma_1^2}) - (e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} - e^{2\mu+2\sigma_1^2})}{e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \\
 &= \frac{e^{\mu+\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{2\mu+0.5\sigma_1^2} - e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} + e^{2\mu+2\sigma_1^2}}{e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \\
 &= \frac{e^{\mu+\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{2\mu+0.5*0} - e^{\mu+\lambda+0.5(0+\sigma_2^2)} + e^{2\mu+2*0}}{e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \\
 &= \frac{e^{\mu+\lambda+0.5\sigma_2^2} - e^{2\mu} - e^{\mu+\lambda+0.5\sigma_2^2} + e^{2\mu}}{e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \\
 &= \frac{0}{e^{2\mu+2\sigma_1^2} + e^{2\lambda+2\sigma_2^2} - 2e^{\mu+\lambda+0.5(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

■

Αναλύοντας τις εξισώσεις (3.40) και (3.41), και παρατηρώντας επίσης ότι το $K < 0$ (για $\mu = 4\%$, $\lambda = 6\%$, $\sigma_1 = 5\%$ και $\sigma_2 = 15\%$ η τιμή του K ισούται με -1.009963), οδηγούμαστε σε μία ενδιαφέρουσα και συνάμα λογική σχέση μεταξύ του τελικού στόχου F_N και της βέλτιστης επενδυτικής απόφασης y_t^* . Πιο συγκεκριμένα, διαπιστώνουμε ότι καθώς το F_N αυξάνεται, παρουσιάζουν αύξηση και όλοι οι ενδιάμεσοι στόχοι, όπως επίσης αυξάνονται και οι συντελεστές Q_t όταν αυξάνεται, ενώ οι συντελεστές P_t παραμένουν αμετάβλητοι. Επιπροσθέτως, μελετώντας την εξίσωση της βέλτιστης επενδυτικής στρατηγικής (3.39), σημειώνουμε πως τα V , W και D παραμένουν ανεπηρέαστα από οποιαδήποτε μεταβολή του $\{F_t\}$, το ποσοστό του χαρτοφυλακίου το οποίο επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου αυξάνεται όταν αυξάνεται ο τελικός στόχος του κεφαλαίου.

Συγκεκριμένα, αναλύοντας τη βέλτιστη επενδυτική απόφαση y_0^* κατά τον πρώτο χρόνο διαπιστώνουμε ότι είναι ντετερμινιστική, αφού έχουν οριστεί όλοι οι παράμετροι του μοντέλου μας (δεν εξαρτάται από στοχαστικές επενδυτικές αποδόσεις). Ακόμη, επισημαίνουμε πως ένα χαρακτηριστικό του συγκεκριμένου μοντέλου είναι ότι το αρχικό μερίδιο το οποίο επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου όταν ο ασφαλισμένος συμμετέχει στο συνταξιοδοτικό σχήμα αυξάνεται καθώς αυξάνεται ο τελικός στόχος, το οποίο αποτελεί ένα εύλογο αποτέλεσμα.

Αντ' αυτού, είναι πιο δύσκολο να βρεθεί μία σχέση ανάμεσα στην αρχική βέλτιστη επενδυτική στρατηγική απόφαση και στις παραμέτρους των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων, καθώς τροποποιώντας τις τιμές τους επηρεάζονται οι τιμές της y_0^* από την αντίθετη κατεύθυνση. Στην πραγματικότητα, αυξάνοντας τις τιμές των μ , λ , σ_1 και σ_2 καταλήγουμε σε υψηλότερα επίπεδα του τελικού στόχου, και παράλληλα παράγονται υψηλότερες τιμές των συντελεστών $\{Q_t\}$, αλλά οδηγούμαστε ταυτόχρονα και σε υψηλότερες τιμές του H , όπου κατ' αυτόν τον τρόπο παράγονται υψηλότερες τιμές των συντελεστών $\{P_t\}$. Έτσι, επηρεάζεται η δυνατότητα προσδιορισμού της y_0^* σε αντίθετες κατευθύνσεις όπως διαπιστώνουμε κοιτάζοντας την εξίσωση (3.39). Το ίδιο διαδραματίζεται στην περίπτωση που επιλέξουμε να μειώσουμε τα επίπεδα των τιμών των παραμέτρων των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων.

3.9 Γενικό Πλαίσιο και Παράμετροι των Βασικών Σεναρίων

Η θέση των ασφαλισμένων οι οποίοι εμφανίζουν διαφορετικές διάρκειες στις μελλοντικές τους υπηρεσίες αναλύεται σε 10, 20, 30 και 40 χρόνια μέχρι τη συνταξιοδότηση τους, συμπεριλαμβανομένων των διαφορετικών ηλικιακών τους ομάδων. Με την επιλογή διαφορετικών τιμών της μεταβλητής N , μας παρέχεται η δυνατότητα να συγκρίνουμε διαφορετικές γενιές εργαζομένων των οποίων τα έτη έως τη συνταξιοδότηση τους σαφώς και είναι συνυφασμένα με την ηλικία τους. Θεωρούμε πως ο ασφαλισμένος εισέρχεται στο σχήμα την χρονολογία του 2000. Στην περίπτωση που απομένουν 10 έτη έως τη συνταξιοδότηση ο ασφαλισμένος γεννήθηκε το 1948, όταν αναμένονται 20 έτη γεννήθηκε το 1958, με 30 έτη το 1968 και τέλος με 40 έτη το 1978. Σημειώνουμε, πως η ηλικία της συνταξιοδότησης του ασφαλισμένου είναι η ηλικία των 62 ετών.

Για λόγους απλότητας, προχωρήσαμε στην υπόθεση πως παρά τις παρελθοντικές και μελλοντικές υπηρεσίες, οι ασφαλισμένοι εντάσσονται στο συνταξιοδοτικό σχήμα χωρίς τη μεταβίβαση κεφαλαίου, δηλαδή το ύψος του κεφαλαίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι μηδενικό, πιο συγκεκριμένα $f_0 = 0$ σε κάθε περίπτωση. Η προαναφερθείσα υπόθεση αληθεύει μόνο για την περίπτωση όπου η παράμετρος N λαμβάνει την τιμή 40, καθώς θεωρείται απίθανο ο ασφαλισμένος να έχει οποιαδήποτε άλλη παρελθοντική υπηρεσία. Ωστόσο, το ζήτημα της μεταφοράς της παρελθοντικής θέσης του ασφαλισμένου πιθανό να μπορούσε να διευθετηθεί ανεξαρτήτως της μεταβίβασης κεφαλαίου. Επί παραδείγματι, η τοποθέτηση των συσσωρευμένων εισφορών στο προηγούμενο συνταξιοδοτικό σχήμα. Επίσης, τονίζουμε πως σε ορισμένες χώρες όπως είναι και η περίπτωση της Ιταλίας που εξετάζουμε (βλέπε Παράρτημα Β), στις οποίες δεν είχε ολοκληρωθεί η ανάπτυξη των επαγγελματικών συνταξιοδοτικών σχημάτων τη χρονολογία του 2000, όταν ξεκινούσε η λειτουργία τους η κατάλληλη λύση θα ήταν τα νεοεισαχθέντα μέλη στα σχήματα να φέρουν μηδενική μεταβίβαση κεφαλαίου, ανεξάρτητα από την ηλικία τους.

Σχετικά με την τιμή του ποσοστού εισφοράς (*contribution rate, c*), επιλέξαμε να ισούται με 12% για δύο βασικούς λόγους. Πρώτον, με σκοπό να προσαρμόζεται και να συνάδει με παρεμφερείς έρευνες οι οποίες έχουν πραγματοποιηθεί από τον Κνοχ το 1993 [24] και τους Booth και Yakoubov το 1998 [13]. Δεύτερον, οι πιο πρόσφατοι νόμοι της Ιταλίας βάσει των οποίων ρυθμίζεται η ανάπτυξη των επαγγελματικών συνταξιοδοτικών σχημάτων, έχουν οριοθετήσει το 11.43% ως τη μέγιστη τιμή του ποσοστού εισφοράς το οποίο επιτρέπει τη φορολογική ελάφρυνση τόσο του εργοδότη όσο και του εργαζομένου. Επομένως, το ποσοστό 12% το οποίο εφαρμόζουμε στην έρευνα μας, χαρακτηρίζεται ως η μέγιστη τιμή του ποσοστού εισφοράς για τα ιταλικά δεδομένα.

Επιπροσθέτως, η συγκεκριμένη τιμή οδηγεί σε πολύ υψηλά αποτελέσματα στην περίπτωση όπου οι μελλοντικές υπηρεσίες παρουσιάζουν μεγάλες τιμές, λόγω χάριν όταν αναμένονται 40 έτη έως τη συνταξιοδότηση. Παράλληλα, τα ποσοστά των αποδόσεων δεν κυμαίνονται σε χαμηλά επίπεδα γεγονός το οποίο ενδεχομένως να οδηγήσει σε ένα υπερβολικά υψηλό ποσοστό του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης το οποίο θα έχει επιτευχθεί από τον ασφαλισμένο κατά τη συνταξιοδότηση του, παραδείγματος χάριν της τάξεως άνω του 90%. Ακόμη, σε ορισμένες περιπτώσεις προκύπτει ο καθαρός συντελεστής αναπλήρωσης να βρίσκεται άνω του 100%, φαινόμενο το οποίο αδιαμφισβήτητα χαρακτηρίζεται ως μη αποδεκτό και μας ωθεί στην διαπίστωση ότι η υπόθεση της τιμής του ποσοστού εισφοράς ήταν ιδιαίτερα υψηλή.

Όσον αφορά το βάρος του τελικού στόχου θ , αναφέρουμε πως επιλέχθηκε ίσο με 2 καθώς οι ενδιάμεσοι στόχοι παρουσιάζουν βάρος το οποίο ισούται με 1. Οποιαδήποτε άλλη τιμή σχετικά με το βάρος του προαναφερθέντα τελικού στόχου ($\theta = 1$ ή $\theta = 3$) επιφέρει πανομοιότυπα αποτελέσματα, ζήτημα το οποίο θα υποβληθεί και θα αναλυθεί όταν θα εξετάσουμε την ευαισθησία των αποτελεσμάτων.

Επιπλέον σημειώνουμε πως η τιμή του διαχρονικού συντελεστή προεξόφλησης γ προτιμήθηκε να ισούται με 0.95. Όπως και προηγουμένως έτσι και στην συγκεκριμένη περίπτωση, διενεργήσαμε πλήθος δοκιμών σχετικά με τη βέλτιστη τιμή του συντελεστή γ ($\gamma = 0.8$ και $\gamma = 1$) και καταλήξαμε σε παρεμφερή αποτελέσματα.

Η επιλογή των παραμέτρων των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων έχει πραγματοποιηθεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να καθίσταται εφικτή η υλοποίηση των προσομοιώσεων των διαφορετικών τιμών της μέσης τιμής και της διακύμανσης. Υπενθυμίζουμε πως από τον προσδιορισμό του μοντέλου το οποίο πραγματοποιήσαμε, υποθέσαμε ότι η απόδοση του περιουσιακού στοιχείου χαμηλού κινδύνου ακολουθεί την κανονική κατανομή (*normal distribution*) με μέση τιμή (*mean*) μ και με τυπική απόκλιση (*standard deviation*) σ_1 , ενώ η απόδοση του περιουσιακού στοιχείου υψηλού κινδύνου ακολουθεί την κανονική κατανομή (*normal distribution*) με μέση τιμή (*mean*) λ και τυπική απόκλιση (*standard deviation*) σ_2 . Το βασικό σενάριο (*base scenario*) αποτελείται από την υπόθεση των μέσων τιμών $\mu = 4\%$ και $\lambda = 6\%$ και των τυπικών αποκλίσεων $\sigma_1 = 5\%$ και $\sigma_2 = 15\%$. Οι υποθέσεις των παραμέτρων του βασικού σεναρίου επιλέχθηκαν με σκοπό να συνάδουν με την έρευνα των Thornton και Wilson (1992) [31], στην οποία καθορίζεται ως βέλτιστη εκτίμηση (*best estimate*) των πραγματικών αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων οι μέσες τιμές 4% και 6% από τους αναλογιστές στην αποτίμηση των συνταξιοδοτικών σχημάτων του Ηνωμένου Βασιλείου. Ακόμη, αναφέρουμε πως η επιλογή των παραμέτρων των τυπικών αποκλίσεων διαδραματίστηκε ακριβώς έτσι όπως συμβαίνει και στις μελέτες των Knox (1993) [24], Khorasaneh (1995) [21], Cairns (1996) [14] και Luenberger (1998) [25] οι οποίοι χρησιμοποίησαν τα ιστορικά δεδομένα της μεταβλητότητας των μετοχών της Αυστραλίας και του Ηνωμένου Βασιλείου.

Το βασικό σενάριο επίσης αναφέρεται είτε ως «κανονική μεταβλητότητα» είτε ως «κανονική μέση τιμή», γεγονός το οποίο εξαρτάται από ποια οπτική γωνία εξετάζεται. Προχωρήσαμε σε τροποποιήσεις στη μεταβλητότητα και στη μέση τιμή, και κατ' αυτόν τον τρόπο δημιουργήσαμε τα ακόλουθα επτά σενάρια όπου η κανονική περίπτωση αναφέρεται για λόγους απλότητας και πληρότητας της παρούσας εργασίας.

Τα επτά σενάρια τα οποία εξετάζουμε κατηγοριοποιούνται ως εξής:

1. Κανονική μεταβλητότητα (κανονική μέση τιμή) (*Normal volatility or Normal mean*), με $\mu = 4\%$, $\lambda = 6\%$, $\sigma_1 = 5\%$ και $\sigma_2 = 15\%$.
2. Χαμηλή μεταβλητότητα (*Low volatility*), με $\mu = 4\%$, $\lambda = 6\%$, $\sigma_1 = 2.5\%$ και $\sigma_2 = 10\%$.
3. Υψηλή μεταβλητότητα (*High volatility*), με $\mu = 4\%$, $\lambda = 6\%$, $\sigma_1 = 10\%$ και $\sigma_2 = 20\%$.
4. Μεικτή μεταβλητότητα (*Mixed volatility*), με $\mu = 4\%$, $\lambda = 6\%$, $\sigma_1 = 2.5\%$ και $\sigma_2 = 20\%$.
5. Χαμηλή μέση τιμή (*Low mean*), με $\mu = 2\%$, $\lambda = 4\%$, $\sigma_1 = 5\%$ και $\sigma_2 = 15\%$.
6. Μεικτή μέση τιμή (*Mixed mean*), με $\mu = 2\%$, $\lambda = 8\%$, $\sigma_1 = 5\%$ και $\sigma_2 = 15\%$.
7. Μηδενικού κινδύνου και υψηλού κινδύνου (*Riskless & risky*), με $\mu = 2\%$, $\lambda = 6\%$, $\sigma_1 = 0\%$ και $\sigma_2 = 15\%$.

Η επιλογή των τιμών της μεταβλητότητας και της μέσης τιμής έχει πραγματοποιηθεί κατ' αυτόν τον τρόπο έτσι ώστε να καθίσταται δυνατή η απομόνωση της επίδρασης των αλλαγών των επιπέδων του κινδύνου ή των αναμενόμενων αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων. Στην πραγματικότητα, είναι δυνατό με τη σύγκριση των σεναρίων 2 και 4 να μελετήσουμε την επίδραση που μπορεί να επιφέρουν οι αλλαγές στη διακύμανση του περιουσιακού στοιχείου χαμηλού κινδύνου χωρίς να μεταβάλουμε οποιοδήποτε άλλο στοιχείο. Ομοίως, αναλύουμε και την επίδραση των αλλαγών του επιπέδου του περιουσιακού στοιχείου χαμηλού κινδύνου συνδυάζοντας τα σενάρια 3 και 4. Επιπλέον, καθίσταται εφικτή η μελέτη της αλλαγής της μέσης τιμής του περιουσιακού στοιχείου υψηλού κινδύνου μέσω του συνδυασμού των σεναρίων 5 και 6.

3.9.1 Ανάλυση Αποτελεσμάτων βάσει δύο Διαφορετικών Οπτικών Γωνιών

Αρχικά, τονίζουμε πως μέσω των αποτελεσμάτων παράγονται δύο διαφορετικών ειδών αποτελέσματα φαινόμενο το οποίο αιτιολογείται μέσω των διαφορετικών ειδών των αντισυμβαλλόμενων μερών.

Από την μία μεριά, καθίσταται εφικτή η μελέτη της τάσης της y_t^* σε N έτη, η οποία μας ενημερώνει σχετικά με το ποια θα έπρεπε να είναι η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική που πρέπει να υιοθετήσουμε σε ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα και ειδικότερα κάθε χρόνο. Η συγκεκριμένη περίπτωση αναφέρεται σε έναν επενδυτή ενός επαγγελματικού συνταξιοδοτικού σχήματος καθορισμένων εισφορών του οποίου το ενδιαφέρον εντοπίζεται στην ορθή υιοθέτηση της επενδυτικής στρατηγικής την οποία θα ακολουθήσει. Επιπροσθέτως, η παρούσα περίπτωση αναφέρεται εξίσου και σε έναν

ασφαλισμένο ενός *Personal Pension (UK)*, στον οποίο παρέχεται η δυνατότητα της επιλογής του προφίλ του κινδύνου της επενδυτικής του στρατηγικής.

Από την άλλη μεριά, τον ασφαλισμένο ενός συνταξιοδοτικού σχήματος τον απασχολεί η επίτευξη του τελικού στόχου του κεφαλαίου το οποίο θα του αποδοθεί έπειτα από N έτη ($N = 10, 20, 30, 40$) όταν δηλαδή συνταξιοδοτηθεί, όπως επίσης ιδιαίτερο ενδιαφέρον δείχνει (ο ασφαλισμένος) και στο αντίστοιχο ποσοστό της σύνταξης μέσω της μετατροπής του κεφαλαίου στην μορφή της σύνταξης και τελικά στον καθαρό συντελεστή αναπλήρωσης (*NRR*). Βαρυνούσης σημασίας αποτελεί ακόμη το ότι οι διαχειριστές των συνταξιοδοτικών σχημάτων ενδιαφέρονται για τη σύγκριση μεταξύ του υποσχεθέντος, αλλά όχι εγγυημένου καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης και του επιτυγχάνομενου. Οι βασικοί λόγοι που διαδραματίζεται το άνωθεν εντοπίζονται στο ότι οι διαχειριστές ανησυχούν για την αξιοπιστία του συνταξιοδοτικού σχήματος ως προς τα ασφαλισμένα μέλη, αλλά και για να καταστήσουν το σχήμα περισσότερο ανταγωνιστικό σε σχέση με τα υπόλοιπα σχήματα. Επιπροσθέτως, σημαντικό παράγοντα αποτελεί και η επιλογή των κατάλληλων διαχειριστών των επενδύσεων, όπως και η αξιολόγηση της ακρίβειας του μοντέλου.

3.10 Η Τάση της Βέλτιστης Επενδυτικής Στρατηγικής y_t^*

Αρχικά, σημειώνουμε πως για όλο το πλήθος των επτά σεναρίων και για κάθε τιμή της παραμέτρου N παρουσιάζουμε δύο ειδών γραφήματα τα οποία απεικονίζουν τη συμπεριφορά της επενδυτικής στρατηγικής y_t^* κατά το πέρας του χρόνου. Το πρώτο είδος γραφήματος παρουσιάζει το μέγιστο, το ελάχιστο όπως και το 5° , 25° , 50° , 75° και 95° εκατοστημόριο της y_t^* και το δεύτερο τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση. Για όλα τα επτά σενάρια των οποίων τα χαρακτηριστικά αναλύσαμε παραπάνω πραγματοποιήθηκαν και τα αντίστοιχα γραφήματα τους.

Το βασικό αποτέλεσμα το οποίο προέκυψε από την συγκεκριμένη έρευνα εντοπίζεται στο ότι η y_t^* ελαττώνεται κατά το πέρας του χρόνου, για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου N σε κάθε ένα από τα επτά σενάρια που μελετάμε. Τούτο σημαίνει ότι η απορρέουσα βέλτιστη επενδυτική στρατηγική, συνεπάγεται την επένδυση του χαρτοφυλακίου στην αρχή κυρίως στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου, μεταβαίνοντας λίγο-πολύ σταδιακά από το περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου στο περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου έπειτα από κάποια χρόνια και επενδύοντας κυρίως στο περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου όταν πλησιάζουμε προς τη συνταξιοδότηση.

Η εγκυρότητα της γνωστής μεθόδου του “*lifestyle*”, η οποία υιοθετείται ευρέως από τους διαχειριστές των επενδύσεων των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένων εισφορών του Ηνωμένου Βασιλείου επιβεβαιώνεται μέσω του παραπάνω αποτελέσματος. Η συγκεκριμένη προσέγγιση αναφέρει την επένδυση ολόκληρου του κεφαλαίου σε μετοχές κατά την έναρξη του μέλους στο συνταξιοδοτικό σχήμα, και έπειτα την εναλλαγή της επένδυσης από τις μετοχές σε ομόλογα και μετρητά, 5 με 10 χρόνια πριν τη συνταξιοδότηση του μέλους. Τα πρώτα χρόνια οι επενδύσεις που πραγματοποιούνται σε μετοχές αποσκοπούν στην επίτευξη μιας υψηλής αναμενόμενης απόδοσης, και κατά τα τελευταία έτη οι επενδύσεις σε ομόλογα και μετρητά καθώς έχουν χαμηλότερη αναμενόμενη απόδοση αλλά και μικρότερη μεταβλητότητα, στο να αποτραπεί κάποιος περιττός κίνδυνος κατά τη συνταξιοδότηση [35].

Για την ανάλυση των τάσεων των επενδυτικών στρατηγικών και την εξάρτησή τους από τις παραμέτρους N , μ , λ , σ_1 και σ_2 χρησιμοποιήσαμε τα παρακάτω δύο κριτήρια:

1. **Το κριτήριο της επιθετικότητας της επενδυτικής στρατηγικής:** Μία στρατηγική χαρακτηρίζεται ως επιθετική, εάν το μερίδιο το οποίο επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου βρίσκεται πολύ κοντά στο 1 στην αρχή, γεγονός το οποίο συνεπάγεται υψηλά επίπεδα της y_t^* στα πρώτα χρόνια που ο ασφαλισμένος βρίσκεται στο συνταξιοδοτικό σχήμα. Το μερίδιο ελαττώνεται όταν πλησιάζουμε προς τη συνταξιοδότηση λόγω της φθίνουσας τάσης της y_t^* . Στο σημείο αυτό τονίζουμε πως μία επενδυτική στρατηγική θεωρείται ως πιο επιθετική από μία άλλη επενδυτική στρατηγική, εάν η πρώτη απαιτεί την επένδυση ολόκληρου του χαρτοφυλακίου στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου για περισσότερο χρονικό διάστημα από ότι η δεύτερη.
2. **Το κριτήριο της διαφοροποίησης της στρατηγικής ανάμεσα στα δύο περιουσιακά στοιχεία:** Μία στρατηγική χαρακτηρίζεται ως καλά διαφοροποιημένη όταν η καμπύλη της μειώνεται σταδιακά προς το μηδέν, αφού σε αυτήν την περίπτωση η y_t^* βρίσκεται κυρίως ανάμεσα στο 0 και στο 1, γεγονός το οποίο συνεπάγεται την επένδυση του χαρτοφυλακίου και στα δύο περιουσιακά στοιχεία. Η καμπύλη μίας λιγότερο διαφοροποιημένης στρατηγικής φθίνει απότομα από το 1 προς το 0, που σημαίνει ότι στην αρχή το χαρτοφυλάκιο επενδύεται εξολοκλήρου στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου, στη συνέχεια διαφοροποιείται ανάμεσα στα δύο περιουσιακά στοιχεία και στο τέλος επενδύεται το χαρτοφυλάκιο εξολοκλήρου στο περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου. Υπογραμμίζουμε πως όσο πιο απότομη είναι η καμπύλη, τόσο λιγότερος είναι ο αριθμός των ετών στον οποίο το χαρτοφυλάκιο διαφοροποιείται.

Βασιζόμενοι στα παραπάνω δύο κριτήρια καταλήξαμε σε ορισμένα αποτελέσματα τα οποία παρουσιάζουμε και αναλύουμε ακολούθως.

Σχετικά με το κριτήριο της **επιθετικότητας** (*aggressiveness*) διαπιστώσαμε τα ακόλουθα.

1. Οι στρατηγικές είναι πιο επιθετικές όσο το N αυξάνεται.

Παρατηρώντας τα γραφήματα τα οποία παρουσιάζουν την επενδυτική στρατηγική για $N = 40$, είναι εύκολα αντιληπτό πως τουλάχιστον το 5% όλων των στρατηγικών παρουσιάζουν $y_t^* = 1$. Στις περιπτώσεις όπου το $N = 10$ σε όλα τα σενάρια το 75% των στρατηγικών βρίσκεται πολύ πιο κάτω από το 80% από το 3^ο έτος και από το 1^ο έτος και έπειτα ελαττώνεται γρήγορα προς το 0.

Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξαμε είναι εύλογο εάν σκεφτούμε σαφώς πως όσο λιγότερα έτη αναμένονται για τη συνταξιοδότηση του ασφαλισμένου, τόσο λιγότερο χρόνο έχει στη διάθεση του ώστε να καλύψει τα ανεπιθύμητα αποτελέσματα τα οποία προκύπτουν από τα ποσοστά των αποδόσεων, συνεπώς η επενδυτική στρατηγική την οποία θα υιοθετήσει είναι λιγότερο επικίνδυνη και αντιστρόφως.

2. Οι επενδυτικές στρατηγικές είναι πιο επιθετικές όσο η μεταβλητότητα και των δύο περιουσιακών στοιχείων ελαττώνεται.

Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξαμε είναι εφικτό να αιτιολογηθεί παρατηρώντας τα γραφήματα τα οποία παρουσιάζουν την μέση τιμή της $\{y_t^*\}$:

- Στην περίπτωση όπου τα έτη έως τη συνταξιοδότηση είναι 40 δηλαδή $N = 40$, η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ για τα πρώτα 3 έτη ισούται με τη μονάδα στο σενάριο της υψηλής μεταβλητότητας. Στα σενάρια της κανονικής και μεικτής μεταβλητότητας η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ για τα πρώτα 7 έτη ισούται με τη μονάδα. Στο σενάριο της χαμηλής μεταβλητότητας για τα πρώτα 11 έτη η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ ισούται με τη μονάδα.
- Στην περίπτωση όπου τα έτη έως τη συνταξιοδότηση είναι 30 δηλαδή $N = 30$, η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ για τα πρώτα 2 έτη ισούται με τη μονάδα στο σενάριο της υψηλής μεταβλητότητας. Όσον αφορά τα σενάρια της κανονικής και μεικτής μεταβλητότητας η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ για τα πρώτα 4 έτη ισούται με τη μονάδα. Στο σενάριο της χαμηλής μεταβλητότητας για τα πρώτα 6 έτη η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ ισούται με τη μονάδα.
- Στην περίπτωση όπου τα έτη έως τη συνταξιοδότηση είναι 20 δηλαδή $N = 20$, η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ για το 1^ο έτος ισούται με τη μονάδα στο σενάριο της υψηλής μεταβλητότητας. Σχετικά με τη μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ στο σενάριο της κανονικής και μεικτής μεταβλητότητας ισούται με τη μονάδα.

στα 2 πρώτα έτη. Για το σενάριο της χαμηλής μεταβλητότητας εντοπίζουμε πως η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ για τα πρώτα 3 έτη ισούται με τη μονάδα.

- Στην περίπτωση όπου τα έτη έως τη συνταξιοδότηση είναι 10 δηλαδή $N = 10$, η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ λαμβάνει τιμή κάτω από το 0.45 στο σενάριο της υψηλής μεταβλητότητας. Επιπλέον, στο σενάριο της κανονικής και μεικτής μεταβλητότητας είναι κάτω από το 0.7 ενώ με τη χαμηλή μεταβλητότητα η τιμή της μέσης τιμής της $\{y_t^*\}$ κατά τον πρώτο χρόνο ισούται με τη μονάδα.

Οι παραπάνω διαπιστώσεις θεωρούνται εύλογες καθώς όσο υψηλότερη είναι η μεταβλητότητα του περιουσιακού στοιχείου υψηλού κινδύνου, τόσο πιο αβέβαιος καθίσταται ο διαχειριστής των επενδύσεων σχετικά με την επένδυση ολόκληρου του χαρτοφυλακίου του, στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου και αντιστρόφως. Όπως εντοπίσαμε και ανωτέρω στην περίπτωση της κανονικής και μεικτής μεταβλητότητας η επιθετικότητα της επένδυσης παρουσιάζεται και στις δύο με τον ίδιο βαθμό, και ενδιάμεσα στην περίπτωση της υψηλής και χαμηλής μεταβλητότητας. Συνεπώς, συμπεραίνουμε πως η επιθετικότητα του χαρτοφυλακίου συνδέεται άμεσα με την μεταβλητότητα και των δύο περιουσιακών στοιχείων. Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι όσο πιο ασταθές είναι το χαρτοφυλάκιο τόσο λιγότερο επιθετική είναι η επενδυτική στρατηγική.

3. Οι στρατηγικές είναι πιο επιθετικές όσο η μέση τιμή και των δύο περιουσιακών στοιχείων αυξάνεται.

Συγκρίνοντας τα σενάρια της κανονικής μέσης τιμής και χαμηλής μέσης τιμής καταλήγουμε στις ακόλουθες τέσσερες παρατηρήσεις.

- Στην περίπτωση όπου τα έτη έως τη συνταξιοδότηση είναι 40 δηλαδή $N = 40$, η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ ισούται με τη μονάδα για τα πρώτα 7 έτη στο σενάριο της κανονικής μέσης τιμής και στο σενάριο της χαμηλής μέσης τιμής η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ ισούται με την μονάδα για τα πρώτα 6 έτη.
- Στην περίπτωση όπου τα έτη έως τη συνταξιοδότηση είναι 30 δηλαδή $N = 30$, η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ ισούται με τη μονάδα για τα πρώτα 4 έτη στο σενάριο κανονικής μέσης τιμής και στο σενάριο της χαμηλής μέσης τιμής η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ ισούται με τη μονάδα για τα πρώτα 3 έτη.
- Στην περίπτωση όπου τα έτη έως τη συνταξιοδότηση είναι 20 δηλαδή $N = 20$, η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ ισούται με τη μονάδα για τα πρώτα 2 έτη στο σενάριο της κανονικής μέσης τιμής και στο σενάριο της χαμηλής μέσης τιμής η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ ισούται με τη μονάδα για το 1^ο έτος μόνο.
- Στην περίπτωση όπου τα έτη έως τη συνταξιοδότηση είναι 10 δηλαδή $N = 10$, η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ λαμβάνει τιμή κάτω από το 0.7 στο σενάριο της κανονικής μέσης τιμής, ενώ στο σενάριο της χαμηλής μέσης τιμής η μέση τιμή της $\{y_t^*\}$ βρίσκεται κάτω από το 0.6.

Τα αποτελέσματα μας είναι αντίστροφα από εκείνα που εξήγαμε σχετικά με τη μεταβλητότητα. Καθώς ελαττώνουμε τη μέση τιμή των δύο περιουσιακών στοιχείων αφήνοντας ανεπηρέαστη τη μεταβλητότητα τους, ισοδυναμεί με το να αυξήσουμε τη μεταβλητότητα δίχως να τροποποιήσουμε τη μέση τιμή τους, αποτέλεσμα που οφείλεται στη σχέση ανάμεσα στη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων.

4. Οι στρατηγικές είναι πιο επιθετικές όσο η μέση τιμή του περιουσιακού στοιχείου χαμηλού κινδύνου ελαττώνεται και η μέση τιμή του περιουσιακού στοιχείου υψηλού κινδύνου αυξάνεται, δηλαδή όταν η απόκλιση μεταξύ των τιμών του μ και του λ αυξάνεται.

Λαμβάνοντας υπόψιν μας το σενάριο της μεικτής μέσης τιμής για το οποίο ισχύει ότι $\mu = 4\%$ και $\lambda = 8\%$, παρατηρούμε ότι παρουσιάζει την υψηλότερη επιθετικότητα από όλα τα σενάρια. Ακολουθως, το δεύτερο πιο επιθετικό σενάριο είναι εκείνο του μηδενικού και υψηλού κινδύνου για το οποίο ισχύει ότι $\mu = 2\%$ και $\lambda = 6\%$. Η συγκεκριμένη διαπίστωση γίνεται εύκολα αντιληπτή στην περίπτωση όπου $N = 10$, στην οποία τουλάχιστον το 25% της y_t^* βρίσκεται πάνω από το 60% ακόμη και στο 3^ο έτος στο σενάριο της μεικτής μέσης τιμής. Στο σενάριο του μηδενικού και υψηλού κινδύνου βρίσκεται πάνω από το 60% κατά το 2^ο έτος, ενώ στο σενάριο της κανονικής μεταβλητότητας το 95% της y_t^* εντοπίζεται κάτω από το 50% ήδη από τον 2^ο χρόνο.

Το μερίδιο το οποίο επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου αυξάνεται εάν αυξάνεται και η αναμενόμενη απόδοσή του, ενώ παράλληλα η μεταβλητότητα παραμένει ανεπηρέαστη. Επίσης, το μερίδιο το οποίο επενδύεται στο περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου ελαττώνεται εάν η μέση του τιμή ελαττώνεται, ενώ η μεταβλητότητα δεν τροποποιείται. Τέλος, επισημαίνουμε πως ο πολύ καλός βαθμός της διαφοροποίησης που εμφανίζεται στο σενάριο του μηδενικού και υψηλού κινδύνου οφείλεται στην απόκλιση των τιμών μεταξύ των παραμέτρων μ και λ , ακόμη και αν το περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου έχει αυξήσει το επίπεδο του κινδύνου του.

Αναφορικά με το κριτήριο της **διαφοροποίησης** (*diversification*) παραθέτουμε τις ακόλουθες δύο διαπιστώσεις.

1. Οι στρατηγικές καθίστανται περισσότερο διαφοροποιημένες όσο η μεταβλητότητα μεταξύ των περιουσιακών στοιχείων αυξάνεται.

Μελετώντας το σενάριο της υψηλής μεταβλητότητας, διακρίνουμε πως η κλίση των καμπυλών είναι λιγότερο απότομη σε σύγκριση με τα υπόλοιπα σενάρια. Πιο αναλυτικά, οι στρατηγικές σταθεροποιούνται έπειτα από μερικά έτη σε ένα ποσοστό της τάξεως του 25%-30%. Σημειώνουμε πως τα έτη στα οποία οι στρατηγικές αρχίζουν να λαμβάνουν τιμές στο συγκεκριμένο εύρος (25%-30%) αφορούν τα έτη τα οποία αναμένονται ώστε να επέλθει η συνταξιοδότηση, δηλαδή την παράμετρο N . Προκύπτει λοιπόν ότι κατά μέσο όρο το μερίδιο το οποίο πρόκειται να επενδυθεί στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου καταλαμβάνει το 1/4-1/3 του συνολικού χαρτοφυλακίου έως τη συνταξιοδότηση. Επιπλέον, στο σενάριο της χαμηλής μεταβλητότητας οι καμπύλες παρουσιάζουν πολύ απότομη κλίση ενώ στα σενάρια της κανονικής και μεικτής μεταβλητότητας οι καταστάσεις είναι ενδιάμεσες. Η λιγότερο διαφοροποιημένη στρατηγική διαφαίνεται μέσω του σεναρίου του μηδενικού και υψηλού κινδύνου, στο οποίο οι κλίσεις των καμπυλών είναι σχεδόν κάθετες. Στο σενάριο της χαμηλής μεταβλητότητας και των δύο περιουσιακών στοιχείων η βέλτιστη στρατηγική έγκειται στην επένδυση ολόκληρου του κεφαλαίου κατευθείαν στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου με απώτατο σκοπό την προσέγγιση του στόχου του κεφαλαίου. Μόλις επιτευχθεί ο στόχος του κεφαλαίου (γεγονός το οποίο δε χρήζει δυσκολίας λόγω της σχετικά χαμηλής μεταβλητότητας του στοιχείου), κρίνεται προτιμότερο να χρησιμοποιήσουμε το περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου έτσι ώστε να διατηρήσουμε το κεφάλαιο μας πολύ κοντά στον στόχο. Λόγω της χαμηλής μεταβλητότητας την οποία μας προσφέρει το περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου, βρισκόμαστε σε θέση πλέον να υιοθετήσουμε μία πιο αμυντική πολιτική. Στο σημείο αυτό θεωρούμε σημαντικό να αναφέρουμε πως το συγκεκριμένο φαινόμενο καθίσταται ιδιαίτερα εμφανές στο σενάριο του μηδενικού και υψηλού κινδύνου.

Παρατηρώντας το σενάριο της υψηλής μεταβλητότητας των δύο περιουσιακών στοιχείων, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η επένδυση ολόκληρου του χαρτοφυλακίου σε μόνο ένα περιουσιακό στοιχείο δε θεωρείται συνετή. Αρχικά, θεωρείται ιδιαίτερα δύσκολη η επίτευξη του στόχου χρησιμοποιώντας το περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου εξαιτίας της σχετικά μεγάλης μεταβλητότητας του. Δεύτερον, στην περίπτωση που επιλέξουμε να προχωρήσουμε στην επένδυση του κεφαλαίου μας στο περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου η διατήρηση

της θέσης μας δεν είναι εγγυημένη, συνεπώς χαρακτηρίζεται ως αβέβαιη λόγω ξανά της υψηλής μεταβλητότητας του στοιχείου. Εκ παραλλήλου, υπογραμμίζουμε πως μία διαφοροποιημένη στρατηγική είναι κατάλληλη ως προς την μείωση της υψηλής μεταβλητότητας του χαρτοφυλακίου.

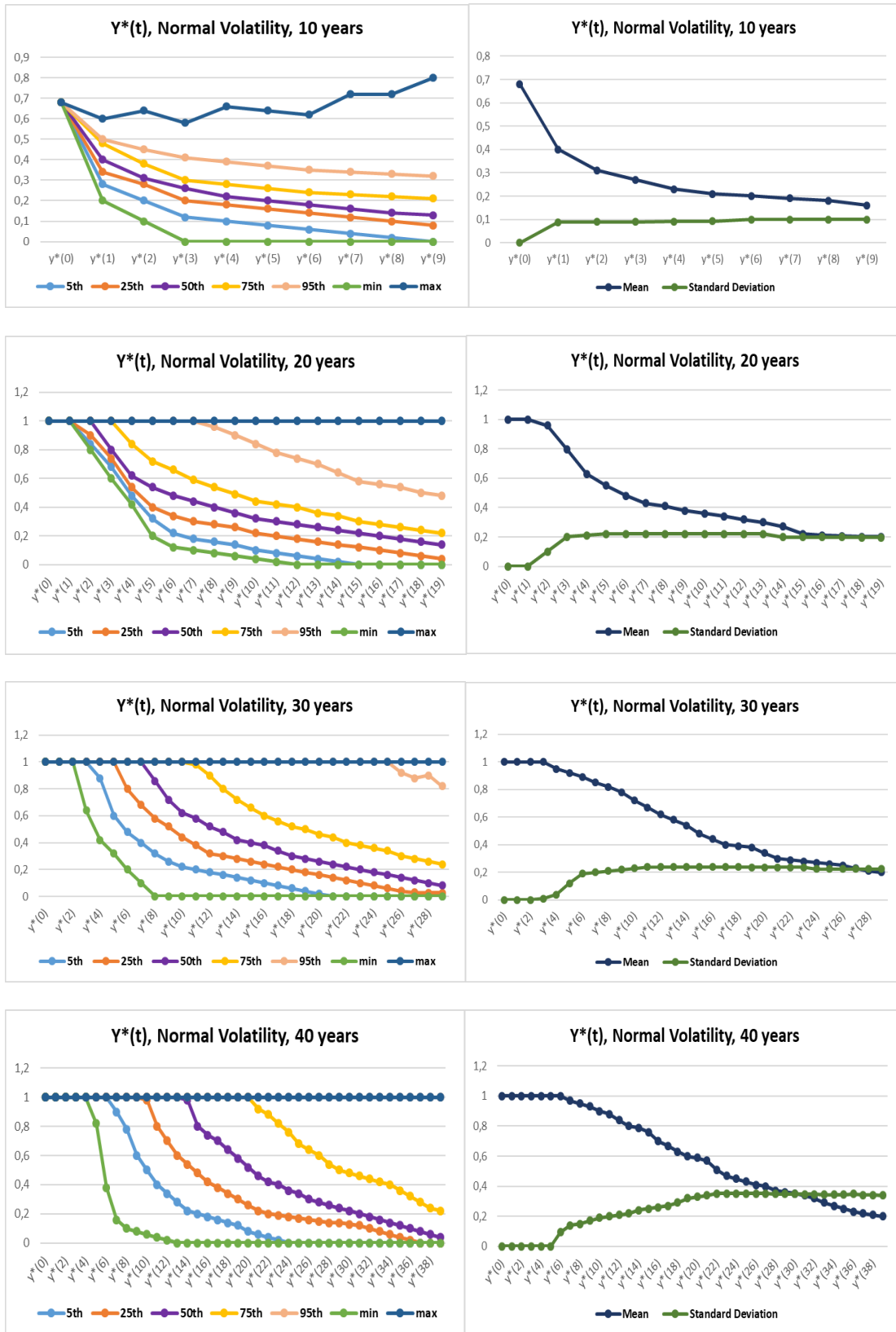
2. Οι στρατηγικές καθίστανται περισσότερο διαφοροποιημένες όσο το N αυξάνεται.

Το παραπάνω συμπέρασμα δημιουργήθηκε έπειτα από την διαπίστωση του ακόλουθου φαινομένου το οποίο επικρατεί και στα επτά σενάρια τα οποία έχουμε υποθέσει. Η κλίση των καμπυλών είναι λιγότερο απότομη όταν τα έτη τα οποία αναμένονται για τη συνταξιοδότηση είναι 10 και 20 ($N = 10, 20$), από ότι όταν είναι 30 και 40 ($N = 30, 40$).

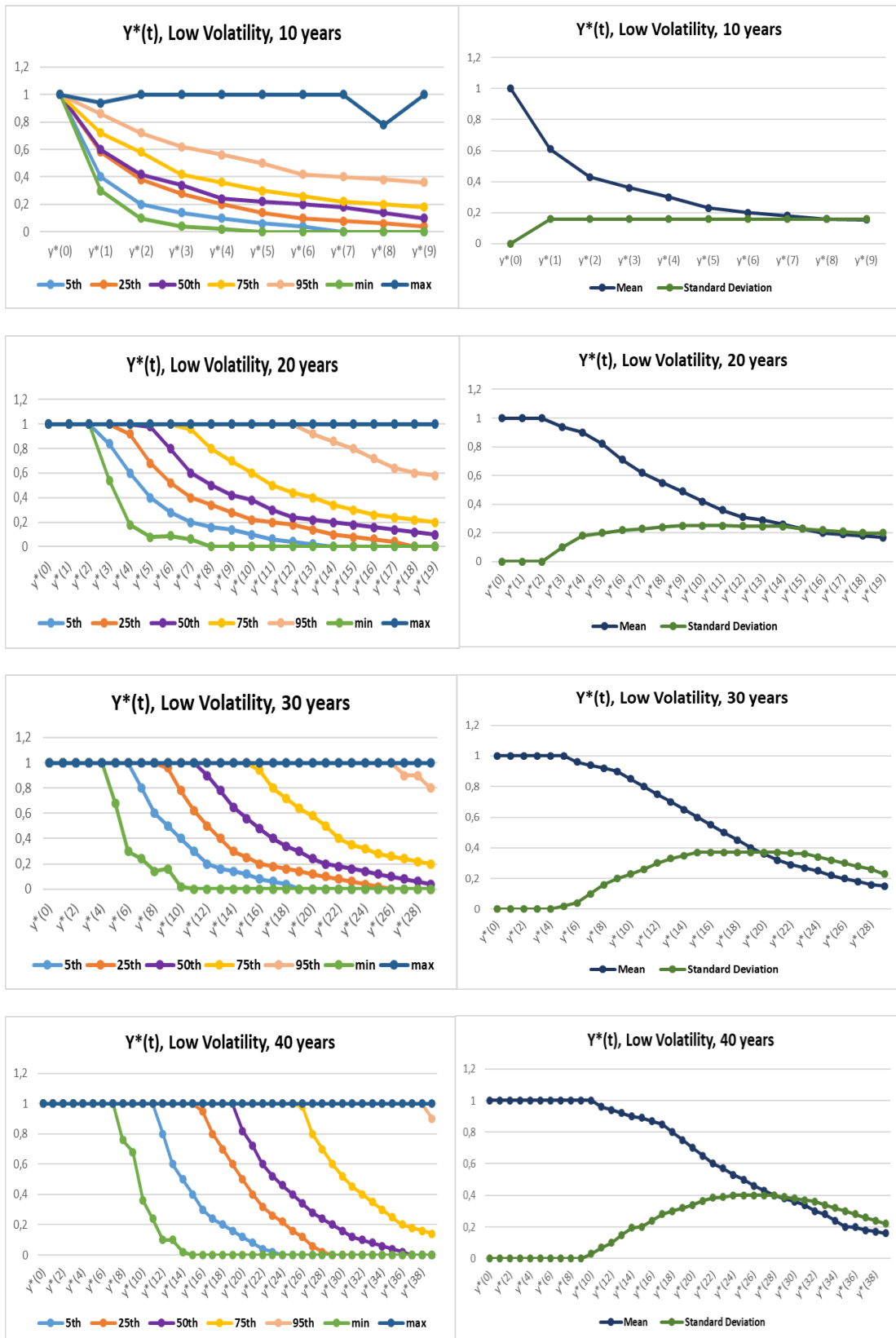
Οι παρατηρήσεις οι οποίες πραγματοποιήθηκαν θεωρούνται εύλογες καθώς όσο λιγότερος είναι ο χρόνος έως τη συνταξιοδότηση, τόσο λιγότερο επιθυμητή είναι η μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου και διαφοροποιώντας την γίνεται εφικτή η μείωση της διακύμανσης του χαρτοφυλακίου.

Εν συνεχεία παραθέτουμε τα διαγράμματα που πάρθηκαν από την ανάλυση μας, στα οποία επιβεβαιώνονται οι διαπιστώσεις που αναφέραμε. Αρχικά, παρουσιάζουμε τα γραφήματα του πρώτου σεναρίου της κανονικής μεταβλητότητας (κανονικής μέσης τιμής). Ακολουθώς, του δεύτερου, τρίτου και τέταρτου σεναρίου της χαμηλής, υψηλής και μεικτής μεταβλητότητας αντίστοιχα. Έπειτα του πέμπτου και έκτου δηλαδή της χαμηλής και μεικτής μέσης τιμής. Τέλος, του έβδομου σεναρίου που περιγράφει την περίπτωση του μηδενικού και υψηλού κινδύνου.

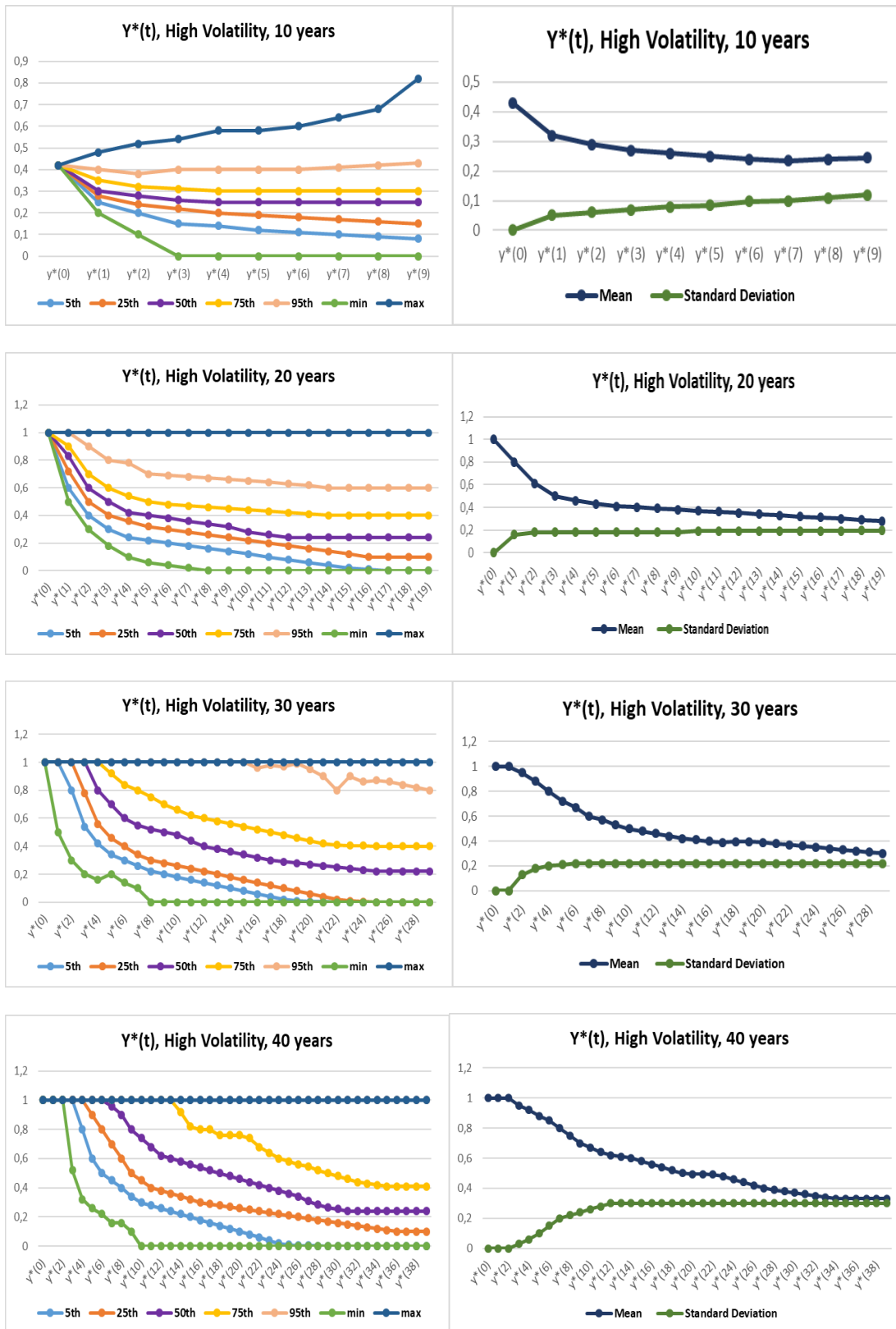
Normal Volatility: Investment Strategies



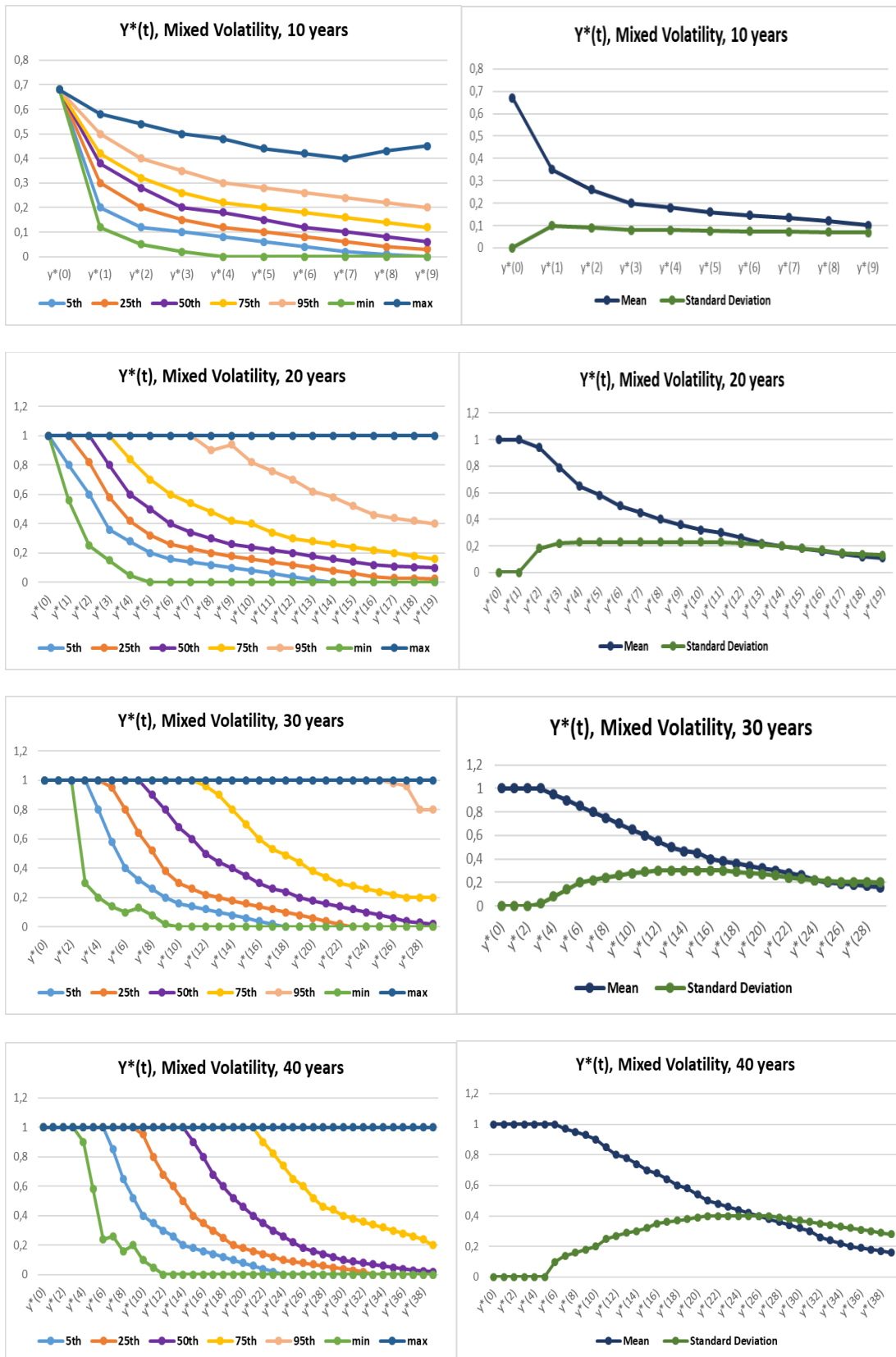
Low Volatility: Investment Strategies



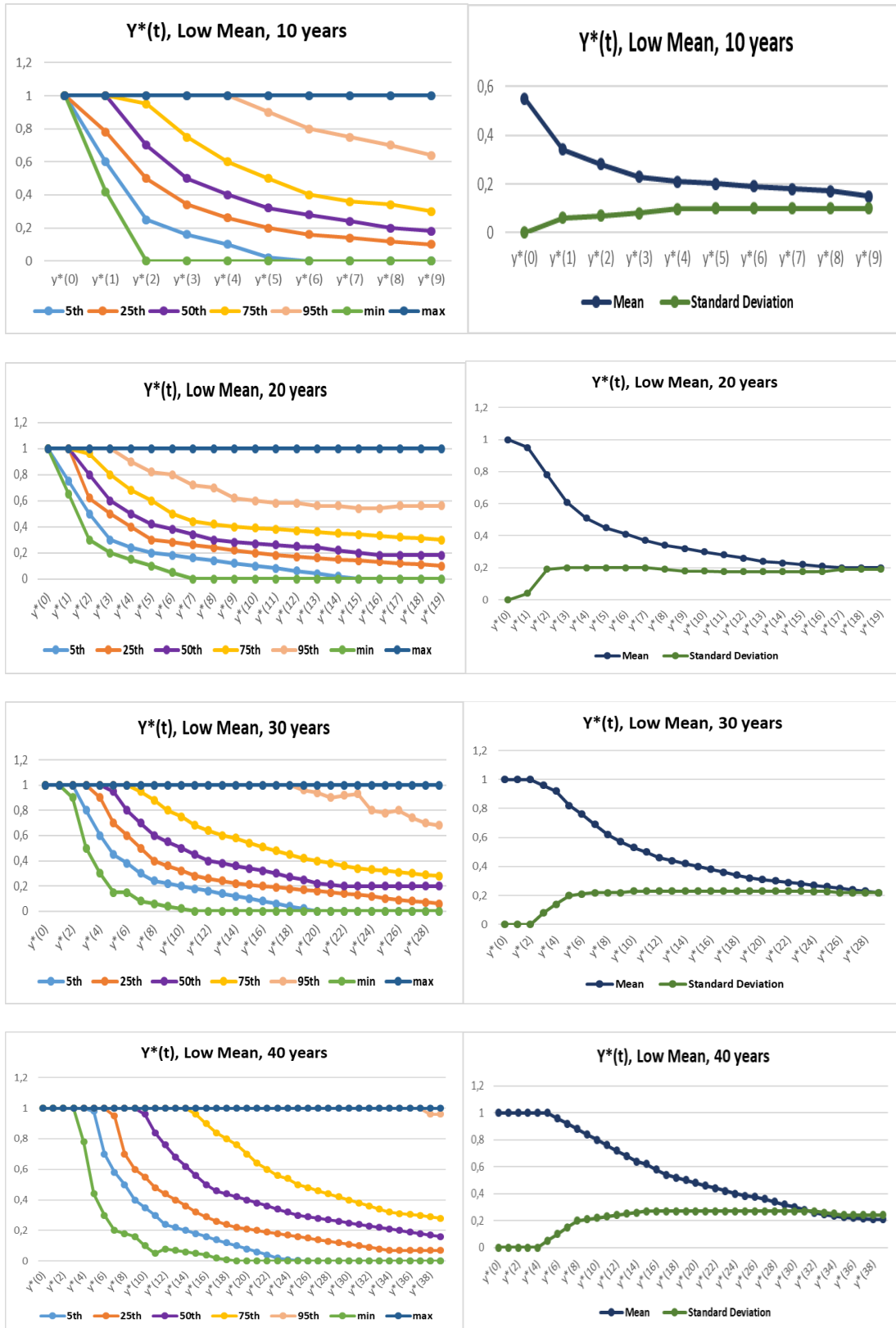
High Volatility: Investment Strategies



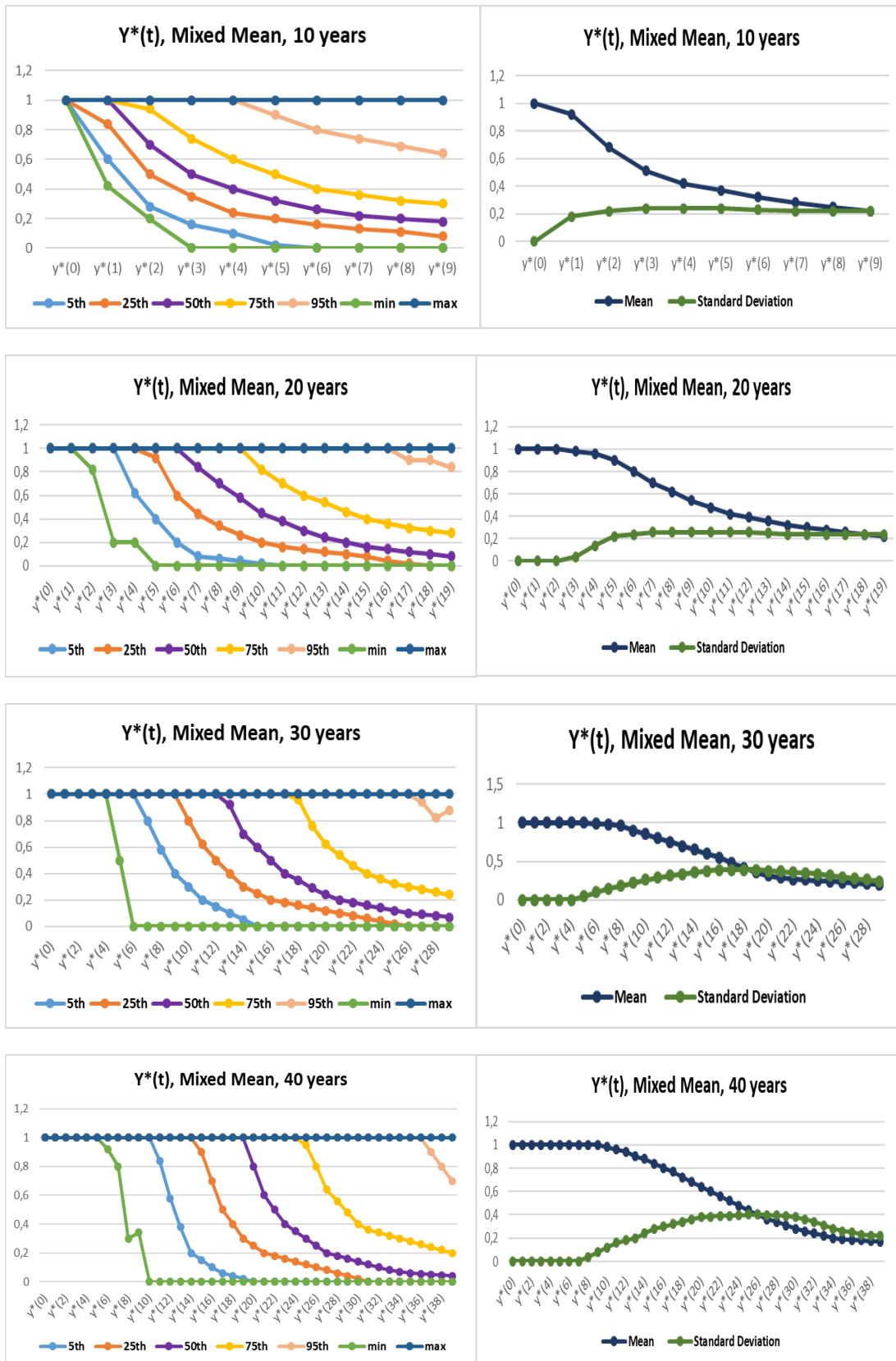
Mixed Volatility: Investment Strategies



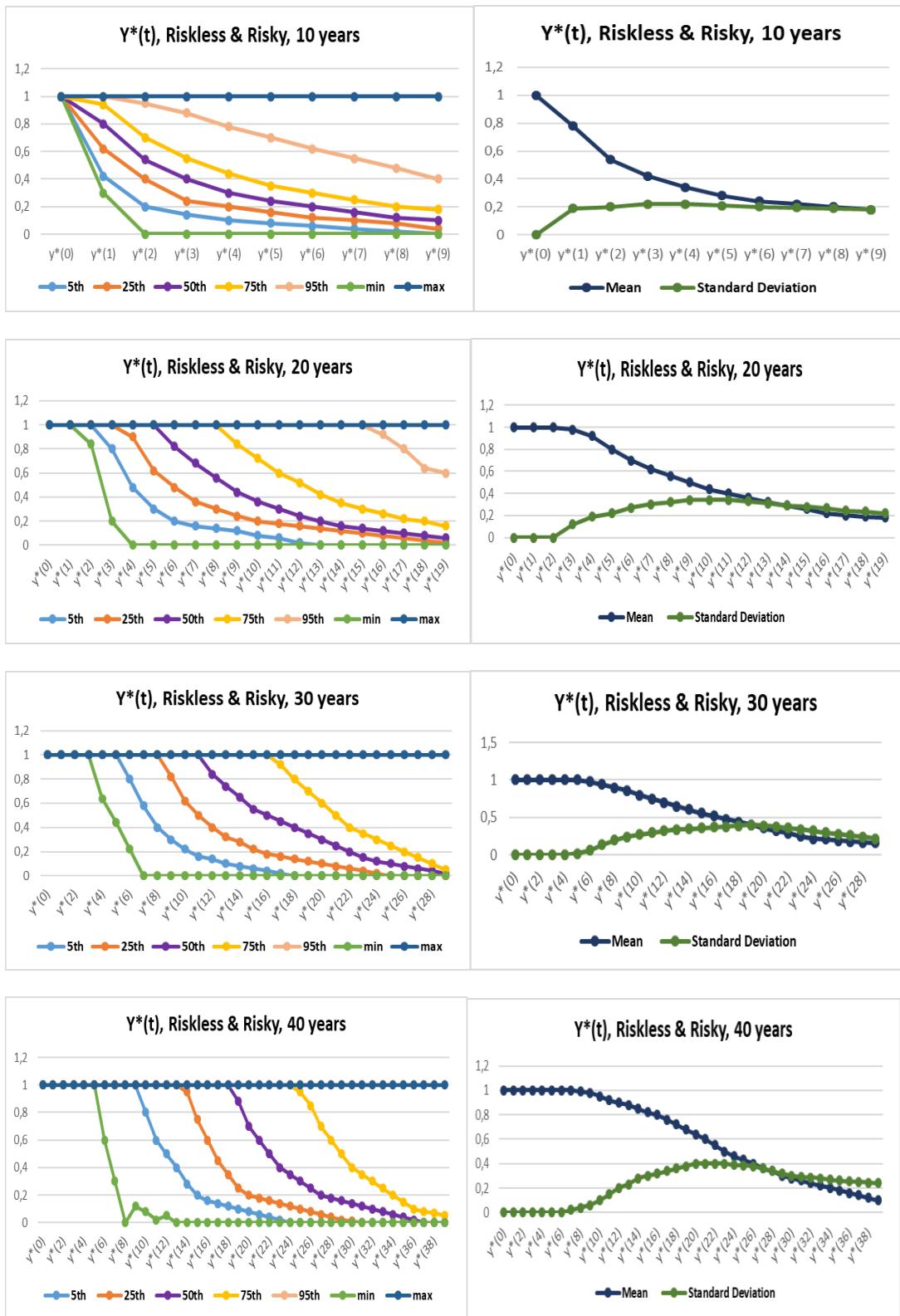
Low mean: Investment Strategies



Mixed mean: Investment Strategies



Riskless and risky: Investment Strategies



3.11 Η Ανάλυση Ευαισθησίας των Αποτελεσμάτων

Στην αρχή της παρούσας ανάλυσης θέσαμε συγκεκριμένες τιμές στις παραμέτρους του μοντέλου μας. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την ανάλυση της ευαισθησίας (*sensitivity analysis*), τροποποιώντας τις τιμές των παραμέτρων για να μπορέσουμε να ελέγξουμε την καταλληλότητα των προηγούμενων επιλογών μας. Εξετάζουμε την ευαισθησία των αποτελεσμάτων μας σε σχέση με την ενδεχόμενη μεταβολή των βασικών μας υποθέσεων. Υπενθυμίζουμε πως οι προκαθορισμένες τιμές των παραμέτρων του μοντέλου ήταν οι εξής: $f_0 = 0$, $c = 12\%$, $\theta = 2$, $\gamma = 0.95$.

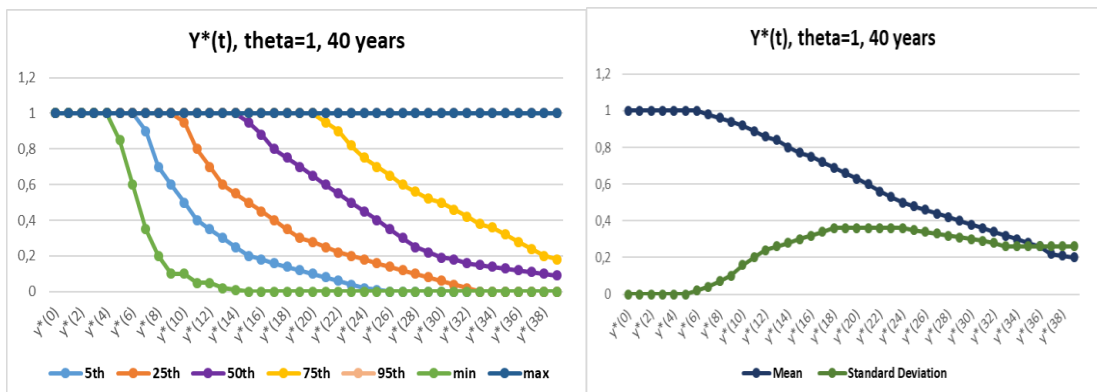
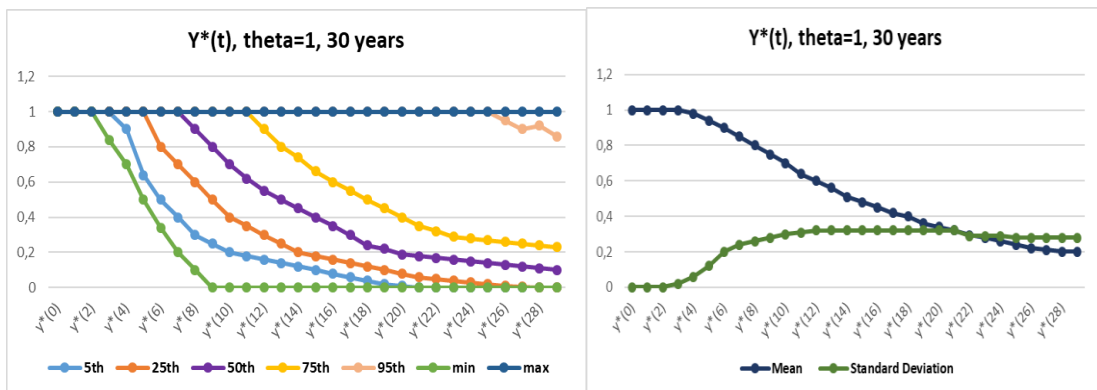
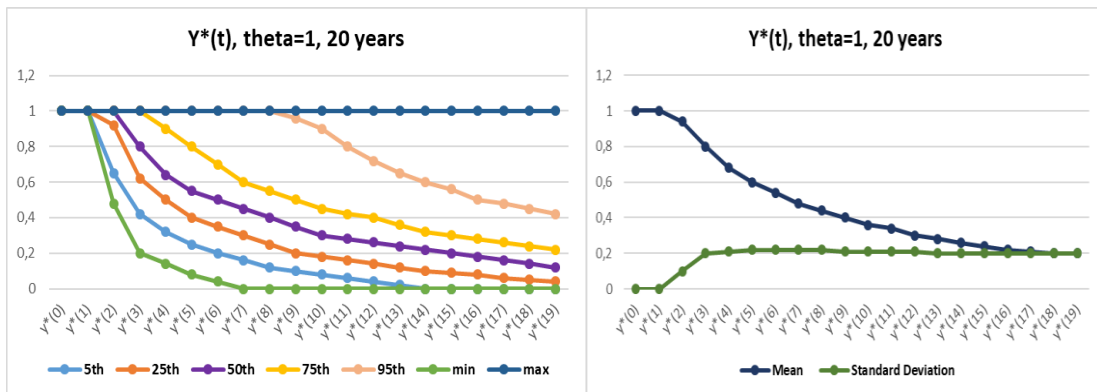
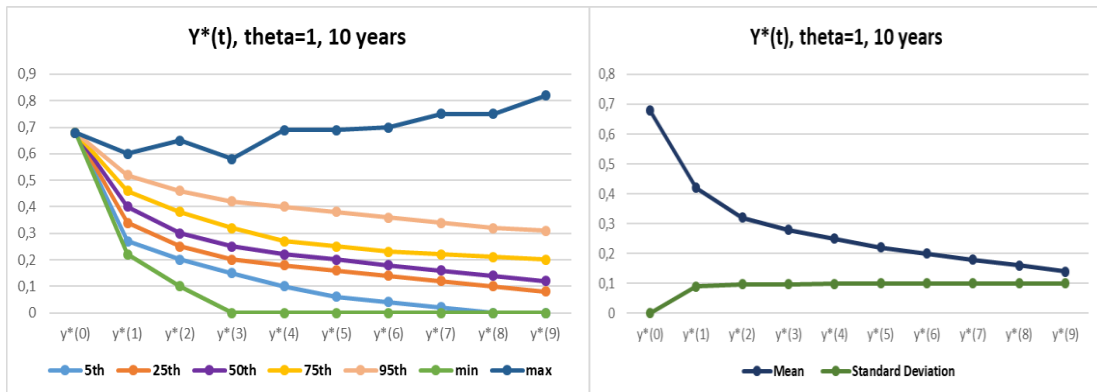
Η ανάλυση της ευαισθησίας των παραμέτρων διενεργήθηκε μεταβάλλοντας τις τιμές των παραμέτρων θ και γ . Ειδικότερα, προχωρήσαμε στην επιλογή των τιμών $\theta = 1, 3$ και $\gamma = 0.8, 1$. Οι γραφικές παραστάσεις των βέλτιστων επενδυτικών στρατηγικών τις οποίες πλέον θα πραγματοποιήσουμε με τη βοήθεια των νέων τιμών των παραμέτρων, στηρίζονται μόνο στο βασικό σενάριο (*base scenario*) δηλαδή στο σενάριο της κανονικής μεταβλητότητας ή κανονικής μέση τιμής (*normal volatility or normal mean*).

Για την κατασκευή και την υλοποίηση των γραφημάτων ακολουθήσαμε ακριβώς την ίδια διαδικασία όπως και προηγουμένως. Πιο συγκεκριμένα, παραθέτουμε τα διαγράμματα τα οποία αφορούν την υπόθεση $\theta = 1$, ακολούθως εκείνα τα οποία έχουν κατασκευαστεί βασισμένα στην υπόθεση $\theta = 3$, έπειτα τα γραφήματα τα οποία ικανοποιούν την παραδοχή $\gamma = 0.8$ και τέλος εκείνα τα οποία συνάδουν με την περίπτωση όπου $\gamma = 1$.

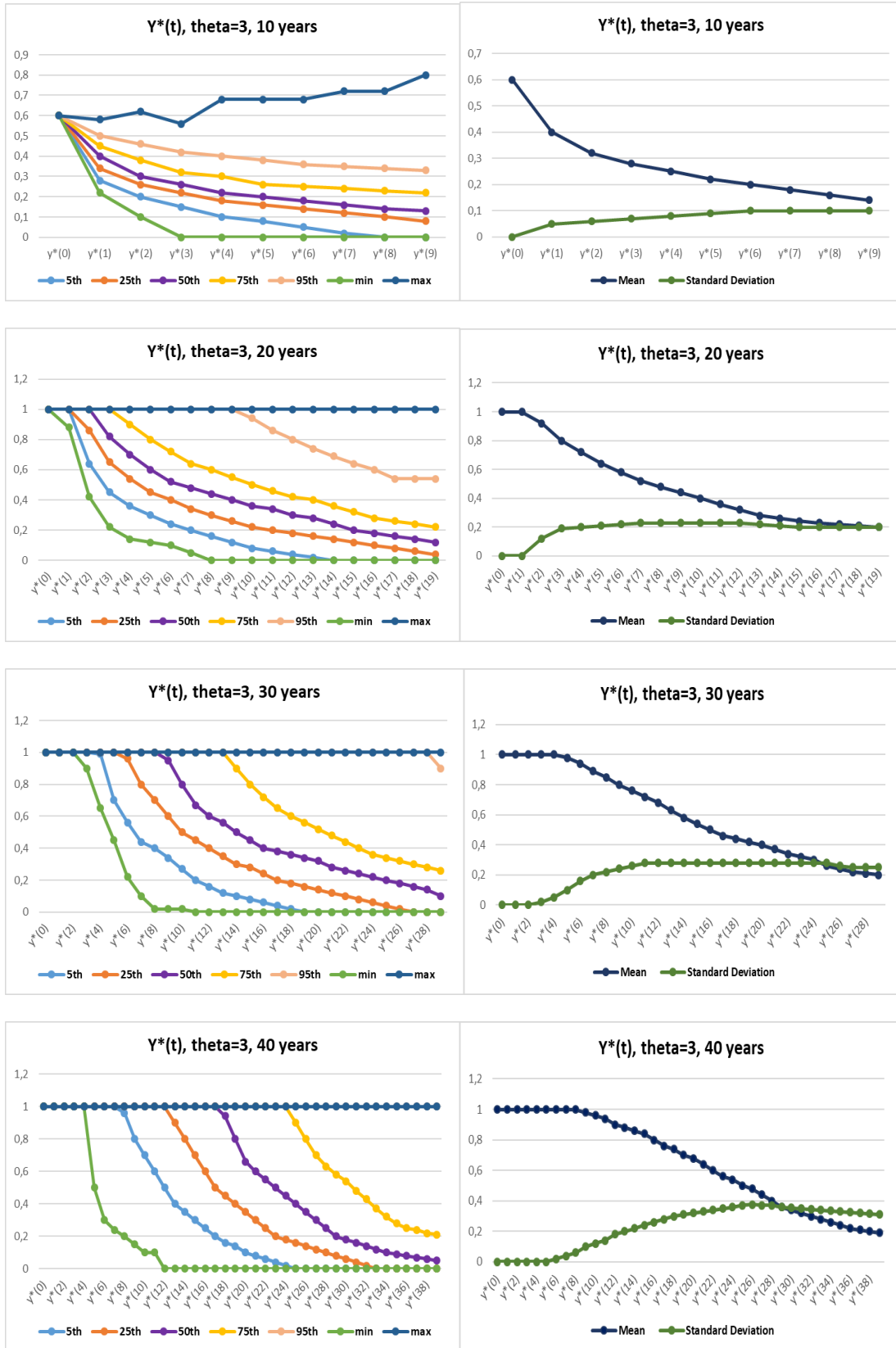
Τα διαγράμματα τα οποία προέκυψαν, παρουσιάζουν την τάση της y_t^* και εξετάζοντάς τα, επιβεβαιώνεται πως οι τάσεις είναι αρκετά συναφής με την περίπτωση της κανονικής μεταβλητότητας (*normal volatility*). Ως εύλογο συμπέρασμα προκύπτει ότι με την επιλογή των συγκεκριμένων παραμέτρων θ και γ δεν επηρεάζεται καθόλου η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική.

Ακολούθως παραθέτουμε τα γραφήματα από την ανάλυση της ευαισθησίας των παραμέτρων την οποία διενεργήσαμε.

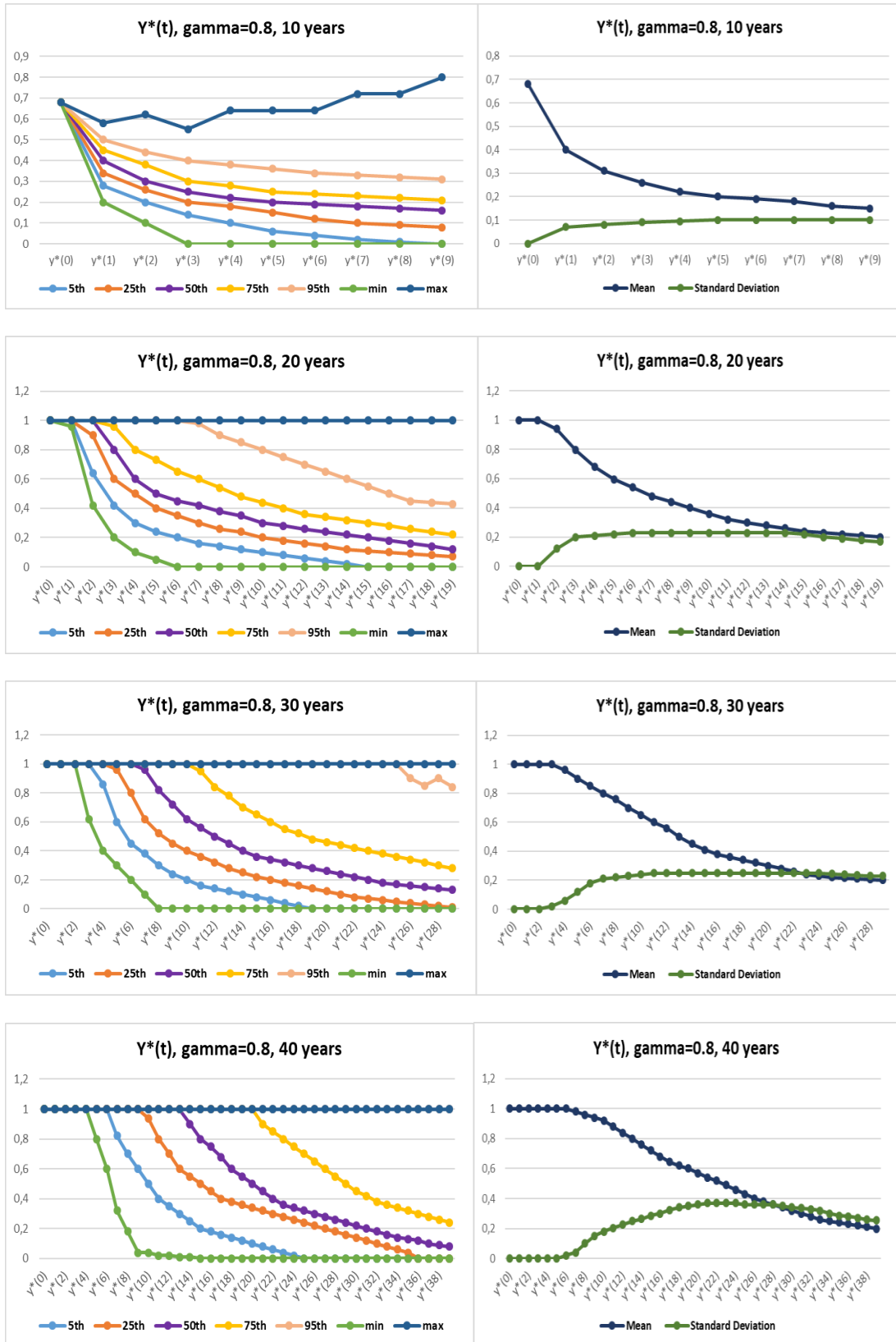
Sensitivity Analysis: theta=1



Sensitivity Analysis: theta=3



Sensitivity Analysis: gamma=0.8



Sensitivity Analysis: gamma=1



3.12 Ο Καθαρός Συντελεστής Αναπλήρωσης του Μοντέλου

Στην υποενότητα αυτή, εξετάζουμε τις επιπτώσεις του επενδυτικού κινδύνου και αναφερόμαστε στον κίνδυνο της προσόδου τον οποίο αντιμετωπίζει ο ασφαλισμένος. Κάνουμε λόγο για δύο διαφορετικούς τρόπους σύγκρισης του πραγματικού καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης με το στόχο. Επιπροσθέτως, αναλύουμε τα αποτελέσματα του αναμενόμενου και εμπειρικού καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης σε σχέση με το στόχο.

3.12.1 Επενδυτικός Κίνδυνος και Κίνδυνος Προσόδου

Μόλις ο ασφαλισμένος του συνταξιοδοτικού σχήματος καθορισμένων εισφορών φτάσει στη συνταξιοδότηση του, το κεφάλαιο μετατρέπεται σε μία άμεση πρόσοδο που είναι και η προκύπτουσα σύνταξή του. Όπως είναι γνωστό (Κnox, 1993, Khorasane, 1998, Booth & Yakoubov, 2000) [24], [22], [13] ο ασφαλισμένος ο οποίος ήδη αντιμετωπίζει τον επενδυτικό κίνδυνο κατά τη διάρκεια της περιόδου συσσώρευσης, τώρα έρχεται αντιμέτωπος με τον κίνδυνο της προσόδου. Ο επενδυτικός κίνδυνος έγκειται στο ότι οι αποδόσεις οι οποίες σημειώθηκαν κατά τη διάρκεια της ενεργούς συμμετοχής του ασφαλισμένου στο σχήμα είναι πολύ χαμηλές και έτσι το επίπεδο του τελικού κεφαλαίου είναι επίσης χαμηλό. Ο κίνδυνος της προσόδου αναφέρεται στο χαμηλό ποσοστό το οποίο χρησιμοποιείται για την μετατροπή του κεφαλαίου στη μορφή της σύνταξης, φαινόμενο το οποίο οδηγεί σε χαμηλό επίπεδο σύνταξης. Κρίνεται βαρυνούσης σημασίας να διευκρινίσουμε πως στην ασφαλιστική ορολογία, η έννοια του κινδύνου της προσόδου αφορά τον κίνδυνο που αντιμετωπίζει η ασφαλιστική εταιρεία στο να καταβάλει το ποσό της σύνταξης στον ασφαλισμένο καθώς βρίσκεται εν ζωή. Στη μελέτη μας, δε χρησιμοποιούμε την έννοια του κινδύνου κατ' αυτόν τον τρόπο αλλά όπως ακριβώς διευκρινίστηκε παραπάνω. Το πραγματικό ποσοστό μετατροπής που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της σύνταξης είναι αυστηρά συνδεδεμένο με τις αποδόσεις της αγοράς. Καθίσταται λοιπόν αντιληπτό πως η σύνταξη εξαρτάται έντονα από τις αποδόσεις της αγοράς όταν βρισκόμαστε πολύ κοντά στα έτη της συνταξιοδότησης. Στόχος μας αποτελεί ο διαχωρισμός του επενδυτικού κινδύνου από τον κίνδυνο της προσόδου.

Η εκτίμηση του βαθμού της επίδρασης που προκαλεί ο επενδυτικός κίνδυνος στα αποτελέσματα μας επιτυγχάνεται μέσω της ανάλυσης του ύψους του τελικού κεφαλαίου f_N το οποίο είναι συνδεδεμένο με τον στόχο F_N . Στην περίπτωση της εμφάνισης δυσμενών αποδόσεων, το αποτέλεσμα το οποίο θα προκύψει θα είναι της μορφής $f_N < F_N$ ενώ ο στόχος θα επιτευχθεί και ακόμη θα ξεπεραστεί στην περίπτωση των κανονικών ή ευνοϊκών αποδόσεων της αγοράς. Ωστόσο η σύγκριση μεταξύ του f_N και του F_N θεωρείται η πιο σωστή καθώς όπως έχουμε αναφέρει και παραπάνω, ο ασφαλισμένος «ανησυχεί» περισσότερο για τη σχέση μεταξύ του

καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης με εκείνον που του είχε υποσχεθεί πριν από N έτη, δηλαδή όταν ξεκινούσε τη συμμετοχή του στο σχήμα. Επομένως, φαίνεται σκόπιμη η μετατροπή τόσο του στόχου όσο και του πραγματικού κεφαλαίου στον αντίστοιχο καθαρό συντελεστή αναπλήρωσης, όπως ακριβώς πραγματοποιήθηκε στην υποενότητα (3.3).

Καθώς οι επιπτώσεις του επενδυτικού κινδύνου διαφαίνονται μόνο στο f_N , μπορούμε να μελετήσουμε τις επιδράσεις του κινδύνου μετατρέποντας το πραγματικό τελικό κεφάλαιο στη μορφή της σύνταξης βάσει του ακόλουθου τύπου:

$$b_N = \frac{f_N}{\sum_{n=1}^{\omega-x} {}_nE_x} = \frac{f_N}{a_x}, \quad (3.48)$$

όπου το καινούργιο στοιχείο b_N ονομάζεται αναμενόμενος καθαρός συντελεστής αναπλήρωσης (*expected net replacement ratio*), αφού η σύνταξη (a_x) υπολογίζεται κάνοντας χρήση του αναμενόμενου ποσοστού απόδοσης του περιουσιακού στοιχείου χαμηλού κινδύνου. Η μεταβλητή b_N είναι τυχαία αφού και η f_N είναι τυχαία μεταβλητή. Όσον αφορά τις μεταβλητές της εξίσωσης (3.48):

- x : η ηλικία συνταξιοδότησης του ασφαλισμένου,
- ω : η μέγιστη ηλικία η οποία μελετάται μέσω πινάκων θνησιμότητας,
- ${}_nE_x$: υπολογίζεται βάσει κατάλληλων πινάκων θνησιμότητας και με χρήση του συντελεστή προεξόφλησης $u = e^{-\mu+0.5\sigma_1^2}$.

Η σύγκριση μεταξύ των b_N και B_N μας προσφέρει μια ένδειξη του επενδυτικού κινδύνου, καθώς μειώνει τη σύγκριση μεταξύ των f_N και F_N , ενώ όλα τα υπόλοιπα παραμένουν ίδια.

Ωστόσο η πραγματική σύνταξη αποδίδεται μέσω ενός ποσοστού μετατροπής το οποίο είναι συνδεδεμένο με την πραγματική απόδοση του περιουσιακού στοιχείου χαμηλού κινδύνου. Επομένως υπολογίζουμε μία άλλη αξία σύνταξης, κάνοντας χρήση του μέσου όρου των εμπειρικών αποδόσεων των τελευταίων 5 ετών πριν τη συνταξιοδότηση, ενώ παράλληλα εισάγουμε ένα ελάχιστο ποσοστό το οποίο ανέρχεται στο 1-2% σε συνάρτηση της αναμενόμενης απόδοσης του περιουσιακού στοιχείου χαμηλού κινδύνου με σκοπό να εξαλείψουμε την επίδραση των πολύ χαμηλών προσομοιωμένων τιμών και την εμπειρική διακύμανση για όλη τη διάρκεια εργασίας του μέλους (δηλαδή για N έτη) για την επιλογή των μ και σ_1^2 . Εκ παραλλήλου, επιλέξαμε να στηριχτούμε στη τελευταία εμπειρία των N ετών παρά στην πιο πρόσφατη περίοδο (παραδείγματος χάριν στα 5 έτη) για να αποφύγουμε τιμές οι οποίες δε θεωρούνται λογικές. Συνεπώς, παρουσιάζουμε τον εμπειρικό καθαρό συντελεστή αναπλήρωσης (*experienced net replacement ratio*):

$$\tilde{b}_N = \frac{f_N}{\sum_{n=1}^{\omega-x} \tilde{E}_x} = \frac{f_N}{\tilde{a}_x}, \quad (3.49)$$

ο δείκτης ${}_n\tilde{E}_x$ υπολογίζεται με τη βοήθεια του $\tilde{u} = e^{-\tilde{\mu} + 0.5\tilde{\sigma}_1^2}$ με

$$\tilde{\mu} = \max(\text{average}(\tilde{\mu}_{N-5}, \tilde{\mu}_{N-4}, \dots, \tilde{\mu}_{N-1}), 2\%) \quad (3.50)$$

στα τέσσερα πρώτα σενάρια που ισχύει $\mu = 4\%$.

Στα τελευταία τρία σενάρια που ισχύει $\mu = 2\%$, προκύπτει ότι

$$\tilde{\mu} = \max(\text{average}(\tilde{\mu}_{N-5}, \tilde{\mu}_{N-4}, \dots, \tilde{\mu}_{N-1}), 1\%). \quad (3.51)$$

Για όλα τα σενάρια ισχύει ότι

$$\tilde{\sigma}_1^2 = \text{variance}(\tilde{\mu}_0, \tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_{N-1}). \quad (3.52)$$

Το $\tilde{\mu}_t$ ανάγεται στην προσομοιωμένη απόδοση του περιουσιακού στοιχείου χαμηλού κινδύνου στο χρονικό διάστημα $[t, t + 1]$.

Το συγκεκριμένο μοντέλο εστιάζει στην οπτική γωνία του ασφαλισμένου μέλους του συνταξιοδοτικού σχήματος. Η συγκεκριμένη προσέγγιση αγνοεί τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο με τον οποίο έρχεται αντιμέτωπος ο ασφαλιστικός φορέας για την αποτελεσματική εγγύηση του επιτοκίου που βασίζεται στον υπολογισμό του \tilde{a}_x .

Η σύγκριση μεταξύ των \tilde{b}_N και B_N μας δίνει ένα μέτρο τόσο του επενδυτικού κινδύνου όσο και του κινδύνου της προσόδου, καθώς συμπεριλαμβάνει τη σύγκριση μεταξύ των f_N και F_N και μεταξύ των \tilde{a}_x και a_x . Συνεπώς καθίσταται ξεκάθαρο πως συγκρίνοντας το \tilde{b}_N με το b_N , είναι εφικτή η απομόνωση της επίδρασης του κινδύνου της προσόδου. Η διαφορά μεταξύ των δύο καθαρών συντελεστών αναπλήρωσης αφορά το συντελεστή προεξόφλησης με τον οποίο μετατρέπεται το τελικό κεφάλαιο σε σύνταξη. Στην πρώτη περίπτωση ο συντελεστής \tilde{u} είναι η προσομοιωμένη τιμή ενώ στη δεύτερη ο u είναι η αναμενόμενη.

Οι υποθέσεις σχετικά με την ηλικία, τη θνησιμότητα και την ημερομηνία συμμετοχής του μέλους στο συνταξιοδοτικό σχήμα για το ιταλικό πλαίσιο είναι πανομοιότυπες με εκείνες τις οποίες εφαρμόσαμε για την εξαγωγή των διαγραμμάτων των βέλτιστων επενδυτικών στρατηγικών. Ο ασφαλισμένος εισέρχεται στο συνταξιοδοτικό σχήμα το ημερολογιακό έτος 2000 και η ηλικία της συνταξιοδότησης του είναι τα 62. Εάν είναι γεννημένος το έτος 1948 απομένουν 10 έτη για τη συνταξιοδότηση του ($N = 10$), το 1958 μένουν άλλα 20 έτη για να συνταξιοδοτηθεί ($N = 20$), το 1968 άλλα 30 ($N = 30$) και το 1978 άλλα 40 έτη ($N = 40$).

Ο παρακάτω πίνακας (Πίνακας 1) περιέχει τις πιθανότητες μη επίτευξης του στόχου για όλα τα σενάρια, τόσο για την περίπτωση του αναμενόμενου όσο και για την περίπτωση του εμπειρικού καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης.

Πίνακας 1: Πιθανότητα μη επίτευξης του στόχου

	Normal Volatility	Low Volatility	High Volatility	Mixed Volatility	Low Mean	Mixed Mean	Riskless & Risky
$\Pr(\tilde{b}_{10} < B_{10})$	54.40%	55.30%	56.90%	66.50%	53.60%	55.70%	91.70%
$\Pr(b_{10} < B_{10})$	64.90%	66.80%	64.40%	87.70%	66.50%	65.80%	91.70%
$\Pr(\tilde{b}_{20} < B_{20})$	55.20%	51.30%	57.90%	65.20%	54.60%	55.40%	57.60%
$\Pr(b_{20} < B_{20})$	59.70%	45.40%	62.80%	74.60%	55.20%	58.20%	57.60%
$\Pr(\tilde{b}_{30} < B_{30})$	55.20%	47.00%	56.00%	62.90%	57.30%	50.60%	50.50%
$\Pr(b_{30} < B_{30})$	44.90%	34.60%	44.90%	41.80%	63.20%	44.00%	50.50%
$\Pr(\tilde{b}_{40} < B_{40})$	55.00%	43.20%	58.30%	57.50%	55.70%	47.00%	51.40%
$\Pr(b_{40} < B_{40})$	49.90%	35.90%	61.30%	55.50%	59.90%	41.90%	51.40%

Παρατηρώντας τις 56 πιθανότητες του Πίνακα 1 που υπολογίσαμε, διαπιστώνουμε ότι οι 51 εξ' αυτών κυμαίνονται στο εύρος 40%-70%, ενώ οι υπόλοιπες 5 λαμβάνουν ποσοστό κοντά στο 35%, 75% και 90%. Συμπεραίνουμε πως οι πιθανότητες μη επίτευξης του στόχου μας είναι ιδιαίτερα υψηλές, γεγονός το οποίο επηρεάζει αρνητικά την αξιοπιστία του συνταξιοδοτικού σχήματος στην περίπτωση που κατά μία έννοια είχε υποσχεθεί ο ασφαλιστικός φορέας στον ασφαλισμένο τους προηγούμενους στόχους που υπολογίσαμε.

Μελετώντας καλύτερα τα αποτελέσματα των πιθανοτήτων μας προσφέρεται η δυνατότητα να εξετάσουμε την συμπεριφορά της πιθανότητας μη επίτευξης του στόχου όταν η παράμετρος N αυξάνεται. Ειδικότερα εντοπίζουμε τα εξής:

- Στην περίπτωση των σεναρίων της χαμηλής και μεικτής μεταβλητότητας και μεικτής μέσης τιμής, η πιθανότητα μη επίτευξης του στόχου ελαττώνεται όσο το N αυξάνεται. Η συγκεκριμένη διαπίστωση εντοπίζεται τόσο για τον αναμενόμενο όσο και για τον εμπειρικό καθαρό συντελεστή αναπλήρωσης.
- Στα σενάρια της κανονικής και υψηλής μεταβλητότητας, η πιθανότητα μη επίτευξης του στόχου σταθεροποιείται γύρω στο 55% όσο το N αυξάνεται στην περίπτωση του εμπειρικού καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης. Ενώ στην περίπτωση του αναμενόμενου, οι πιθανότητες μειώνονται από το $N = 10$ έως το $N = 30$ και στη συνέχεια παρουσιάζουν αύξηση έως το $N = 40$.

- Στο σενάριο του επικίνδυνου και μηδενικού κινδύνου, οι συντελεστές αναπλήρωσης συμπίπτουν καθώς το περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου που χρησιμοποιείται ως συντελεστής μετατροπής καθίσταται τώρα περισσότερο επικίνδυνο και έτσι οδηγούμαστε στο ότι $\tilde{u} = u$. Η πιθανότητα μη επίτευξης του στόχου ελαττώνεται έως το $N = 30$ και έπειτα αυξάνεται ελαφρώς, όπως ακριβώς διαπιστώσαμε και προηγουμένως.
- Για το σενάριο της χαμηλής μέσης τιμής παρατηρούμε ότι η πιθανότητα μη επίτευξης του στόχου σταθεροποιείται κοντά στο 55% όσο το N αυξάνεται, στην περίπτωση του εμπειρικού καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης. Αντίθετα, στην περίπτωση του αναμενόμενου δεν εμφανίζεται κάποια τάση.

Η πτωτική τάση της πιθανότητας μη επίτευξης του στόχου όσο αυξάνεται ο χρόνος της συνταξιοδότησης εξηγείται ως εξής: Ο βασικός λόγος εντοπίζεται στο ότι όσο περισσότερα έτη αναμένονται έως τη συνταξιοδότηση τόσο πιο εύκολα επιτυγχάνεται ο στόχος, καθώς υπάρχει περισσότερος χρόνος ώστε να αντιδράσουμε ορθά στην εμφάνιση δυσμενών σεναρίων της αγοράς. Οι υψηλότερες πιθανότητες του Πίνακα 1 εντοπίζονται στην περίπτωση $N = 10$ όπου το εύρος κυμαίνεται 53.60%-91.70%, με τα υψηλότερα ποσοστά να ανήκουν στο σενάριο του επικίνδυνου και μηδενικού κινδύνου.

Μία σύγκριση είναι επίσης δυνατή μεταξύ των διαφορετικών σεναρίων καθορίζοντας την τιμή της μεταβλητής N , δηλαδή μελετώντας της γραμμές του Πίνακα 1. Ειδικότερα τα αποτελέσματα συνοψίζονται ως εξής:

- Για όλα τα έτη τα οποία αναμένονται για την επέλευση της συνταξιοδότησης εκτός από την περίπτωση όπου $N = 10$, η μικρότερη πιθανότητα μη επίτευξης του στόχου εμφανίζεται στο σενάριο της χαμηλής μεταβλητότητας και για τις δύο περιπτώσεις των συντελεστών αναπλήρωσης. Για την περίπτωση $N = 10$, η μικρότερη τιμή παρουσιάζεται στο σενάριο της χαμηλής μέσης τιμής.
- Τόσο για τον αναμενόμενο όσο και για τον εμπειρικό καθαρό συντελεστή αναπλήρωσης στην περίπτωση που αναμένονται 10 έτη για τη συνταξιοδότηση του ασφαλισμένου, η υψηλότερη πιθανότητα μη επίτευξης του στόχου εντοπίζεται στο επικίνδυνο και μηδενικού κινδύνου σενάριο, η οποία ισούται με 91.70% όπως αναφέρθηκε και ανωτέρω.
- Για $N = 20$ και $N = 30$, η υψηλότερη πιθανότητα μη επίτευξης του στόχου βρίσκεται στο σενάριο της μεικτής μεταβλητότητας. Μοναδική εξαίρεση αποτελεί ο αναμενόμενος καθαρός συντελεστής αναπλήρωσης για $N = 30$, που η μέγιστη τιμή εμφανίζεται στο σενάριο της χαμηλής μέσης τιμής.
- Για $N = 40$, η μέγιστη τιμή της πιθανότητας μη επίτευξης του στόχου φαίνεται στο σενάριο της υψηλής μεταβλητότητας και για του δύο συντελεστές αναπλήρωσης, αναμενόμενο και εμπειρικό.

- Για οποιαδήποτε τιμή της μεταβλητής N συγκρίνοντας το σενάριο της κανονικής μεταβλητότητας με εκείνο της υψηλής, παρατηρούμε ότι τα αποτελέσματα τα οποία προέκυψαν είναι παρόμοια. Σε όλες σχεδόν τις περιπτώσεις οι τιμές του σεναρίου της χαμηλής μέσης τιμής είναι παρόμοιες με την κοινή τιμή.
- Για ορισμένες τιμές του N , οι τιμές του σεναρίου της χαμηλής μεταβλητότητας είναι πανομοιότυπες με εκείνες του σεναρίου της μεικτής μέσης τιμής, ειδικά όταν τα έτη για συνταξιοδότηση ελαττώνονται.

Η εξήγηση της ύπαρξης χαμηλών τιμών πιθανοτήτων στο σενάριο της χαμηλής μεταβλητότητας συμπίπτει με την αιτιολόγηση που παραθέσαμε, όταν εντοπίσαμε πως οι λιγότερο διαφοροποιημένες επενδυτικές στρατηγικές παρουσιάζονται στο σενάριο της χαμηλής μεταβλητότητας. Ειδικότερα τονίζουμε πως με την ύπαρξη της χαμηλής μεταβλητότητας και των δύο περιουσιακών στοιχείων, ο διαχειριστής των επενδύσεων πιθανότατα να προτιμήσει να επενδύσει ολόκληρο το κεφάλαιο του χαρτοφυλακίου του αμέσως στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου με σκοπό να προβεί στην επίτευξη του στόχου. Η επίτευξη του στόχου δεν καθίσταται δύσκολη λόγω της σχετικά χαμηλής μεταβλητότητας του περιουσιακού στοιχείου υψηλού κινδύνου. Έπειτα η διατήρηση του κεφαλαίου μέσω της επένδυσής του στο περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου, δε χρήζει δυσκολίας λόγω ξανά της πολύ χαμηλής μεταβλητότητας του στοιχείου. Μοναδική εξαίρεση της παρούσας εξήγησης αποτελεί η περίπτωση $N = 10$, όταν δηλαδή ο χρόνος για τη συνταξιοδότηση λιγοστεύει. Στην συγκεκριμένη περίπτωση δεν υπάρχει αρκετός χρόνος στη διάθεση μας για να προβούμε στην προαναφερθείσα στρατηγική.

3.12.2 Ανάλυση Αποτελεσμάτων Αναμενόμενου και Εμπειρικού Καθαρού Συντελεστή Αναπλήρωσης σε σύγκριση με το Στόχο

Στην παρούσα υποενότητα παρουσιάζουμε και αναλύουμε τους πίνακες (Πίνακας 2-Πίνακας 17) στους οποίους απεικονίζεται η κατανομή των b_N και \tilde{b}_N για όλες τις τιμές της παραμέτρου N και για τα επτά σενάρια τα οποία μελετάμε. Οι πίνακες αποτελούνται από τη μέση τιμή, την τυπική απόκλιση και τις διάφορες τιμές των εκατοστημορίων (5° , 25° , 50° , 75° και 95°) της παρατηρηθείσας κατανομής. Αναλύονται τόσο οι απόλυτες τιμές των b_N και \tilde{b}_N , όσο και τα ποσοστά $\frac{b_N}{B_N}$ και $\frac{\tilde{b}_N}{B_N}$ που είναι μείζονος σημασίας καθώς υποδεικνύουν το ποσοστό του στόχου το οποίο επιτυγχάνεται κατά τη συνταξιοδότηση, επιτρέποντάς μας τη σύγκριση τους με τις διαφορετικές ηλικίες.

Επιπροσθέτως, στους πίνακες παρατίθενται οι στόχοι που αντιστοιχίζονται για κάθε τιμή της παραμέτρου N και για κάθε σενάριο ξεχωριστά. Οι τιμές των στόχων μεταβάλλονται προφανώς λόγω της ηλικίας αλλά και λόγω του κάθε σεναρίου, καθώς η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του τελικού στόχου. Ειδικότερα, αναφέρουμε πως στα πρώτα τέσσερα σενάρια που διαφοροποιείται μόνο η μεταβλητότητα, οι στόχοι βρίσκονται πολύ κοντά μεταξύ τους για κάθε N , ενώ στα τελευταία τρία σενάρια που η μέση τιμή μεταβάλλεται τα αποτελέσματα των τιμών εκτείνονται σε μεγαλύτερο εύρος. Τούτο αποτελεί απόρροια της υψηλής επίδρασης των επιπέδων της μέσης τιμής στο συντελεστή συσσώρευσης, ο οποίος χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό του F_N και στο συντελεστή προεξόφλησης για την εύρεση του α_x , ενώ η τυπική απόκλιση δεν τους επηρεάζει σημαντικά.

Οι τιμές του στόχου του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης B_N , κυμαίνονται στο εύρος 8%-12% στην περίπτωση όπου $N = 10$. Όταν $N = 20$ λαμβάνει τιμές στο εύρος 19%-33%, ενώ όταν $N = 30$ βρίσκεται ανάμεσα στο 35%-70%. Στην περίπτωση που αναμένονται 40 έτη για τη συνταξιοδότηση ($N = 40$) ο στόχος B_N εντοπίζεται στο εύρος 75%-138%. Οι ελάχιστες τιμές του κάθε εύρους οφείλονται στο σενάριο της χαμηλής μέσης τιμής, εάν σκεφτούμε πως η χαμηλή μέση τιμή των δύο περιουσιακών στοιχείων συμβάλλει στη μείωση του F_N και στην αύξηση του α_x . Το εύρος παρουσιάζει σημαντική αύξηση όταν αυξάνεται η παράμετρος N , αφού έχει γίνει χρήση του εκθετικού νόμου συσσώρευσης.

Εξετάζοντας τα ποσοστά του στόχου B_N σε όλα τα σενάρια για την περίπτωση $N = 40$ παρατηρήσαμε τα εξής: Στα σενάρια 1, 2, 3 και 4 τα ποσοστά είναι ιδιαίτερα υψηλά καθώς ξεπερνούν το 100% και στο σενάριο 6 προσεγγίζεται το 96%. Από πρακτικής απόψεως τα συγκεκριμένα ποσοστά είναι μη αποδεκτά, αφού το μέγιστο ποσοστό του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης που είναι εφικτό να επιτευχθεί στη συνταξιοδότηση κυμαίνεται ανάμεσα στο 70% με 80%. Ο αναλογιστής εάν αντιμετώπιζε το συγκεκριμένο φαινόμενο, θα ελάττωνε το ύψος του ποσοστού εισφοράς με σκοπό να μειώσει τον τελικό στόχο σε μία πιο λογική τιμή. Σημειώνουμε πως δεν έχουμε προβεί σε μείωση του ποσοστού εισφοράς, με στόχο να παραθέσουμε τα μη ρεαλιστικά αποτελέσματα όταν αναμένονται 40 έτη για τη συνταξιοδότηση.

Οι στόχοι προσεγγίστηκαν με στρογγυλοποίηση προς στα κάτω για $N = 20$, $N = 30$, $N = 40$. Αντ' αυτού στην περίπτωση όπου η παράμετρος N λαμβάνει την τιμή 10, η προσέγγιση διατηρείται στο πρώτο δεκαδικό στοιχείο καθώς οι στόχοι βρίσκονται σε χαμηλά επίπεδα (8%-12%) και η στρογγυλοποίηση του 1% είναι ιδιαίτερα υψηλή και πιθανό να επηρεάσει αρνητικά τα αποτελέσματα. Η συγκεκριμένη προσέγγιση χρησιμοποιήθηκε για τον υπολογισμό των προηγούμενων πιθανοτήτων μη επίτευξης του στόχου.

Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα των πινάκων (Πίνακας 2-Πίνακας 17) καταλήξαμε στις ακόλουθες επτά διαπιστώσεις:

1. Η τυπική απόκλιση του \tilde{b}_N εμφανίζει ιδιαίτερα υψηλά επίπεδα σε σχέση με εκείνη του b_N , φαινόμενο το οποίο παρατηρείται για οποιαδήποτε τιμή του N . Η μεταβλητότητα των αποτελεσμάτων του εμπειρικού καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης υποδεικνύει πως με την ύπαρξη ενός μεταβλητού και ταυτόχρονα αντιστοιχιζόμενου με το παρελθόν συντελεστή μετατροπής, η τελική σύνταξη καθορίζεται περισσότερο υψηλή (το 95° και το 75° εκατοστημόριο της κατανομής του \tilde{b}_N πάντα είναι υψηλότερα σε σύγκριση με εκείνα της κατανομής του b_N), αλλά επίσης και πολύ χαμηλότερη (το 5° και το 25° εκατοστημόριο της κατανομής του \tilde{b}_N είναι πάντα λιγότερα από τα αντίστοιχα του b_N). Το στοιχείο αντανακλά την επίδραση του κινδύνου της προσόδου στην τελική σύνταξη, που αποτελεί μία από τις κύριες αιτίες αβεβαιότητας του μέλους του συνταξιοδοτικού σχήματος καθορισμένων εισφορών σχετικά με το εισόδημα που θα προκύψει από τη συνταξιοδότηση του. Το προαναφερθέν αποτελεί το βασικό συμπέρασμα που εξήγαμε από τους πίνακες.
2. Η μέση τιμή των αναλογιών $\frac{b_N}{B_N}$ και $\frac{\tilde{b}_N}{B_N}$ είναι παρόμοια για $N = 10, 20, 30, 40$. Αυτομάτως συμπεραίνουμε πως η πιθανότητα επίτευξης ενός ορισμένου ποσοστού του τελικού στόχου κατά μέσο όρο προσεγγίζεται το ίδιο, ανεξαρτήτως της ηλικίας και της διάρκειας των μελλοντικών υπηρεσιών. Το αποτέλεσμα αυτό μεταξύ των διαφορετικών γενεών πιθανό να προκαλεί έκπληξη, παρά ταύτα επεξηγείται αναλύοντας τη φόρμουλα που εφαρμόζεται για τους τελικούς στόχους βάσει της οποίας συμπεριλαμβάνεται η διάρκεια των μελλοντικών υπηρεσιών.
3. Η τυπική απόκλιση των ποσοστών $\frac{b_N}{B_N}$ και $\frac{\tilde{b}_N}{B_N}$ αυξάνεται όσο αυξάνεται και η παράμετρος N . Διαπιστώνουμε πως το 5° και 25° εκατοστημόριο γενικά ελαττώνεται ενώ το 75° και το 95° αυξάνεται όταν αυξάνεται το N . Άρα, παρατηρούμε πως τα αποτελέσματα μας εξαπλώνονται περισσότερο όσο ο χρόνος για τη συνταξιοδότηση μεγαλώνει. Η εν λόγω διαπίστωση είναι εύλογη καθώς το πιθανό πλήθος συμβάντων αυξάνεται εκθετικά με τη μεταβλητή N .
4. Παράλληλα, η τυπική απόκλιση των λόγων σημειώνει αύξηση όσο η μεταβλητότητα των δύο περιουσιακών στοιχείων αυξάνεται και ειδικότερα του περιουσιακού στοιχείου υψηλού κινδύνου. Η μεταβλητότητα του περιουσιακού στοιχείου υψηλού κινδύνου επηρεάζει τη μεταβλητότητα του τελικού κεφαλαίου f_N , ενώ του περιουσιακού στοιχείου χαμηλού κινδύνου εκείνη της

σύνταξης α_x . Συμπερασματικά η ελάχιστη τυπική απόκλιση των $\frac{b_N}{B_N}$ και $\frac{\tilde{b}_N}{B_N}$ εμφανίζεται στο σενάριο του μηδενικού και υψηλού κινδύνου, η αμέσως επόμενη στο σενάριο της χαμηλής και μεικτής μεταβλητότητας ενώ η υψηλότερη εντοπίζεται στο σενάριο της υψηλής μεταβλητότητας.

Η εμφάνιση των δυσμενών αποτελεσμάτων εντοπίζεται στο 5^ο και 25^ο εκατοστημόριο των κατανομών. Ακολούθως, παραθέτουμε τα αποτελέσματα του εμπειρικού καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης \tilde{b}_N και του αναμενόμενου b_N .

5. Μελετώντας το σενάριο της υψηλής μεταβλητότητας καθώς σε εκείνη βρίσκονται τα πιο δυσμενή αποτελέσματα διαπιστώνουμε πως για $N = 40$, το 5^ο εκατοστημόριο της κατανομής του $\frac{\tilde{b}_N}{B_N}$ κυμαίνεται στο 0.37 και για $N = 10$ στην τιμή 0.56. Άρα, στο 5% των περιπτώσεων ο καθαρός συντελεστής αναπλήρωσης που προέκυψε δεν προσεγγίζει το 40% του στόχου για $N = 40$ και το 60% του στόχου για $N = 10$. Το 25^ο εκατοστημόριο της κατανομής διαφέρει μεταξύ του 63% ($N = 40$) και του 70% ($N = 10$).

- Στην περίπτωση που απομένουν 10 έτη έως τη συνταξιοδότηση, ο στόχος του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης ανέρχεται στο 11.80%. Στο 5% των περιπτώσεων προέκυψε ότι ο συντελεστής βρίσκεται κάτω από το 6.70% και στο 25% λιγότερο από το 8.3%.
- Στην περίπτωση που αναμένονται 20 έτη για τη συνταξιοδότηση, ο στόχος είναι το 32% και από τα αποτελέσματα παράχθηκε ότι στο 5% των περιπτώσεων ο δείκτης βρίσκεται κάτω από το 16% ενώ στο 25% εντοπίζεται κάτω από το 22%.
- Για την περίπτωση των 30 ετών έως τη συνταξιοδότηση, ο στόχος μας είναι το 69%. Στο 5% των περιπτώσεων η τιμή του επιτυγχάνομενου καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης παρατηρείται ότι βρίσκεται κάτω από το 29%, ενώ στο 25% των περιπτώσεων κάτω από το 44%.
- Στο ενδεχόμενο των 40 ετών έως τη συνταξιοδότηση ο στόχος είναι το 138%. Το αποτέλεσμα για το 5% των περιπτώσεων είναι ότι ο καθαρός συντελεστής αναπλήρωσης που προέκυψε σημειώνεται λιγότερο από το 51% ενώ στο 25% των περιπτώσεων λιγότερο από 87%. Ωστόσο, υπενθυμίζουμε πως τα τελευταία στοιχεία είναι ενδεικτικά άρα ο υψηλός στόχος του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης είναι μη ρεαλιστικός.

6. Στο σενάριο της κανονικής μεταβλητότητας εμφανίζονται εξίσου ανεπιθύμητα αποτελέσματα. Οι τιμές του 5^{ου} εκατοστημορίου της κατανομής του $\frac{\tilde{b}_N}{B_N}$ ποικίλουν μεταξύ του 0.49 ($N = 40$) και του 0.66 ($N = 10$). Η ανάλυση που παραθέσαμε παραπάνω είναι δυνατό να εφαρμοστεί και σε αυτή την περίπτωση, η οποία περιλαμβάνει τον στόχο του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης με τον επιτυγχανόμενο.
7. Τα αποτελέσματα βελτιώνονται στην περίπτωση της μεικτής μεταβλητότητας και όσον αφορά το σενάριο της χαμηλής μεταβλητότητας είναι αποδεκτά. Συγκεκριμένα στη τελευταία το 5^ο εκατοστημόριο εντοπίζεται μεταξύ του 66% και του 75%, που συνεπάγεται ότι μόνο στο 5% των περιπτώσεων ο επιτυγχανόμενος καθαρός συντελεστής αναπλήρωσης εμφανίζεται κάτω από το 66% ή το 75% του στόχου. Τα συγκεκριμένα σενάρια διακρίνονται από τη χαμηλή μεταβλητότητα του περιουσιακού στοιχείου χαμηλού κινδύνου, φαινόμενο λογικό εάν σκεφτούμε πως για τη μετατροπή του κεφαλαίου στη μορφή της σύνταξης χρησιμοποιήθηκε η απόδοση του περιουσιακού στοιχείου χαμηλού κινδύνου. Η χαμηλή μεταβλητότητα του συντελεστή μετατροπής οδηγεί σε χαμηλή μεταβλητότητα του τελικού αποτελέσματος.

Scenarios 1, 2, 3, 4: targets, expected, experienced net replacement ratio and their ratios.

Πίνακας 2

	$B_{10}: 11.80\%$				$B_{20}: 31.00\%$			
	\tilde{b}_{10}	$\frac{\tilde{b}_{10}}{B_{10}}$	b_{10}	$\frac{b_{10}}{B_{10}}$	\tilde{b}_{20}	$\frac{\tilde{b}_{20}}{B_{20}}$	b_{20}	$\frac{b_{20}}{B_{20}}$
<i>Normal volatility</i>								
<i>Mean</i>	0.120	1.015	0.114	0.964	0.315	1,016	0.300	0.969
<i>Standard deviation</i>	0.034	0.289	0.011	0.095	0.098	0.316	0.044	0.142
<i>5th</i>	0.078	0.664	0.096	0.815	0.196	0.632	0.230	0.741
<i>25th</i>	0.092	0.778	0.106	0.900	0.241	0.777	0.275	0.888
<i>50th</i>	0.114	0.962	0.114	0.964	0.297	0.959	0.302	0.973
<i>75th</i>	0.142	1.203	0.121	1.026	0.373	1.202	0.327	1.055
<i>95th</i>	0.184	1.558	0.132	1.121	0.499	1.609	0.369	1.192
<i>Minimum</i>	0.055	0.463	0.068	0.579	0.120	0.386	0.116	0.373
<i>Maximum</i>	0.251	2.128	0.152	1.286	0.834	2.689	0.497	1.604

Πίνακας 3

	$B_{30}: 64.00\%$				$B_{40}: 122.00\%$			
	\tilde{b}_{30}	$\frac{\tilde{b}_{30}}{B_{30}}$	b_{30}	$\frac{b_{30}}{B_{30}}$	\tilde{b}_{40}	$\frac{\tilde{b}_{40}}{B_{40}}$	b_{40}	$\frac{b_{40}}{B_{40}}$
<i>Normal volatility</i>								
<i>Mean</i>	0.651	1.017	0.618	0.966	1.264	1.036	1.201	0.984
<i>Standard deviation</i>	0.234	0.365	0.127	0.198	0.520	0.426	0.308	0.253
<i>5th</i>	0.363	0.567	0.378	0.591	0.597	0.490	0.608	0.498
<i>25th</i>	0.484	0.756	0.557	0.870	0.916	0.750	1,06	0.869
<i>50th</i>	0.609	0.951	0.624	0.975	1.171	0.960	1.221	1
<i>75th</i>	0.782	1.221	0.693	1.083	1.52	1.246	1.374	1.126
<i>95th</i>	1.091	1.705	0.806	1.259	2,193	1.797	1.669	1.368
<i>Minimum</i>	0.111	0.173	0.138	0.215	0.147	0.121	0.186	0.153
<i>Maximun</i>	1.903	2.973	1.103	1.723	3.891	3.189	2.496	2.046

Πίνακας 4

	$B_{10}: 11.70\%$				$B_{20}: 30.00\%$			
	\tilde{b}_{10}	$\frac{\tilde{b}_{10}}{B_{10}}$	b_{10}	$\frac{b_{10}}{B_{10}}$	\tilde{b}_{20}	$\frac{\tilde{b}_{20}}{B_{20}}$	b_{20}	$\frac{b_{20}}{B_{20}}$
<i>Low volatility</i>								
<i>Mean</i>	0.116	0.988	0.114	0.976	0.303	1.011	0.300	0.999
<i>Standard deviation</i>	0.018	0.152	0.006	0.055	0.054	0.181	0.028	0.092
<i>5th</i>	0.088	0.752	0.103	0.881	0.225	0.750	0.248	0.827
<i>25th</i>	0.103	0.880	0.111	0.948	0.264	0.881	0.288	0.959
<i>50th</i>	0.115	0.979	0.115	0.981	0.299	0.996	0.302	1.008
<i>75th</i>	0.127	1.083	0.118	1.011	0.334	1.112	0.316	1.052
<i>95th</i>	0.147	1.256	0.124	1.06	0.403	1.345	0.338	1.128
<i>Minimum</i>	0.075	0.637	0.080	0.683	0.154	0.514	0.169	0.563
<i>Maximun</i>	0.178	1.524	0.132	1.127	0.525	1.749	0.384	1.279

Πίνακας 5

	$B_{30}: 60.00\%$				$B_{40}: 113.00\%$			
	\tilde{b}_{30}	$\frac{\tilde{b}_{30}}{B_{30}}$	b_{30}	$\frac{b_{30}}{B_{30}}$	\tilde{b}_{40}	$\frac{\tilde{b}_{40}}{B_{40}}$	b_{40}	$\frac{b_{40}}{B_{40}}$
<i>Low volatility</i>								
<i>Mean</i>	0.615	1.025	0.609	1.015	1.183	1.047	1.169	1.034
<i>Standard deviation</i>	0.129	0.216	0.079	0.132	0.269	0.238	0.184	0.163
<i>5th</i>	0.435	0.725	0.460	0.767	0.752	0.665	0.827	0.732
<i>25th</i>	0.524	0.874	0.575	0.958	1.003	0.888	1.089	0.963
<i>50th</i>	0.608	1.014	0.617	1.029	1.167	1.033	1.182	1.046
<i>75th</i>	0.688	1.146	0.657	1.095	1.357	1.201	1.281	1.134
<i>95th</i>	0.845	1.409	0.721	1.201	1.629	1.442	1.441	1.275
<i>Minimum</i>	0.241	0.401	0.264	0.440	0.399	0.353	0.372	0.329
<i>Maximun</i>	1.171	1.952	0.818	1.364	2.297	2.032	1.88	1.664

Πίνακας 6

	$B_{10}: 11.80\%$				$B_{20}: 32.00\%$			
	\tilde{b}_{10}	$\frac{\tilde{b}_{10}}{B_{10}}$	b_{10}	$\frac{b_{10}}{B_{10}}$	\tilde{b}_{20}	$\frac{\tilde{b}_{20}}{B_{20}}$	b_{20}	$\frac{b_{20}}{B_{20}}$
<i>High volatility</i>								
<i>Mean</i>	0.134	1.136	0.113	0.955	0.367	1.148	0.306	0.958
<i>Standard deviation</i>	0.073	0.622	0.020	0.173	0.230	0.719	0.083	0.258
<i>5th</i>	0.067	0.567	0.082	0.698	0.160	0.499	0.191	0.598
<i>25th</i>	0.083	0.701	0.098	0.833	0.220	0.688	0.253	0.791
<i>50th</i>	0.108	0.913	0.110	0.934	0.288	0.898	0.297	0.927
<i>75th</i>	0.163	1.379	0.124	1.053	0.444	1.389	0.351	1.097
<i>95th</i>	0.292	2.471	0.151	1.28	0.845	2.641	0.458	1.43
<i>Minimum</i>	0.049	0.412	0.064	0.539	0.072	0.225	0.090	0.280
<i>Maximun</i>	0.506	4.287	0.186	1.58	1.673	5.227	0.751	2.346

Πίνακας 7

	$B_{30}: 69.00\%$				$B_{40}: 138.00\%$			
	\tilde{b}_{30}	$\frac{\tilde{b}_{30}}{B_{30}}$	b_{30}	$\frac{b_{30}}{B_{30}}$	\tilde{b}_{40}	$\frac{\tilde{b}_{40}}{B_{40}}$	b_{40}	$\frac{b_{40}}{B_{40}}$
<i>High volatility</i>								
<i>Mean</i>	0.789	1.143	0.651	0.944	1.583	1.147	1.308	0.948
<i>Standard deviation</i>	0.520	0.753	0.214	0.311	1.173	0.850	0.540	0.391
<i>5th</i>	0.293	0.424	0.346	0.501	0.514	0.372	0.558	0.404
<i>25th</i>	0.443	0.642	0.508	0.736	0.871	0.631	0.977	0.708
<i>50th</i>	0.632	0.916	0.634	0.918	1.208	0.875	1.25	0.906
<i>75th</i>	0.973	1.411	0.767	1.112	1.93	1.398	1.547	1.121
<i>95th</i>	1.812	2.626	1.031	1.494	3.755	2.721	2.241	1.624
<i>Minimum</i>	0.112	0.163	0.144	0.208	0.096	0.070	0.127	0.092
<i>Maximun</i>	4.747	6.88	1.593	2.309	10.07	7.297	4.923	3.567

Πίνακας 8

	$B_{10}: 12.20\%$				$B_{20}: 33.00\%$			
	\tilde{b}_{10}	$\frac{\tilde{b}_{10}}{B_{10}}$	b_{10}	$\frac{b_{10}}{B_{10}}$	\tilde{b}_{20}	$\frac{\tilde{b}_{20}}{B_{20}}$	b_{20}	$\frac{b_{20}}{B_{20}}$
<i>Mixed volatility</i>								
<i>Mean</i>	0.115	0.943	0.114	0.932	0.308	0.933	0.304	0.922
<i>Standard deviation</i>	0.019	0.152	0.008	0.065	0.062	0.189	0.040	0.122
<i>5th</i>	0.087	0.715	0.099	0.812	0.216	0.655	0.232	0.703
<i>25th</i>	0.102	0.834	0.109	0.894	0.265	0.802	0.286	0.868
<i>50th</i>	0.113	0.928	0.114	0.938	0.306	0.927	0.312	0.945
<i>75th</i>	0.127	1.038	0.119	0.976	0.347	1.051	0.330	1.001
<i>95th</i>	0.150	1.232	0.126	1.031	0.416	1.262	0.356	1.078
<i>Minimum</i>	0.071	0.580	0.080	0.658	0.090	0.274	0.083	0.252
<i>Maximun</i>	0.183	1.501	0.138	1.128	0.531	1.608	0.396	1.2

Πίνακας 9

	$B_{30}: 70.00\%$				$B_{40}: 137.00\%$			
	\tilde{b}_{30}	$\frac{\tilde{b}_{30}}{B_{30}}$	b_{30}	$\frac{b_{30}}{B_{30}}$	\tilde{b}_{40}	$\frac{\tilde{b}_{40}}{B_{40}}$	b_{40}	$\frac{b_{40}}{B_{40}}$
<i>Mixed volatility</i>								
<i>Mean</i>	0.648	0.925	0.640	0.915	1.286	0.939	1.269	0.927
<i>Standard deviation</i>	0.171	0.244	0.124	0.177	0.395	0.289	0.327	0.239
<i>5th</i>	0.385	0.550	0.414	0.591	0.523	0.381	0.524	0.382
<i>25th</i>	0.538	0.769	0.587	0.838	1.075	0.785	1.154	0.842
<i>50th</i>	0.647	0.924	0.667	0.953	1.309	0.956	1.338	0.977
<i>75th</i>	0.752	1.074	0.717	1.024	1.533	1.119	1.481	1.081
<i>95th</i>	0.942	1.346	0.791	1,13	1.907	1.392	1.659	1.211
<i>Minimum</i>	0.115	0.165	0.146	0.208	0.114	0.083	0.126	0.092
<i>Maximun</i>	1.34	1.914	0.956	1.365	2.59	1.891	2.121	1.548

Scenarios 1, 5, 6, 7: targets, expected, experienced net replacement ratio and their ratios.

Πίνακας 10

	$B_{10}: 11.80\%$				$B_{20}: 31.00\%$			
	\tilde{b}_{10}	$\frac{\tilde{b}_{10}}{B_{10}}$	b_{10}	$\frac{b_{10}}{B_{10}}$	\tilde{b}_{20}	$\frac{\tilde{b}_{20}}{B_{20}}$	b_{20}	$\frac{b_{20}}{B_{20}}$
<i>Normal mean</i>								
<i>Mean</i>	0.120	1.015	0.114	0.964	0.315	1.016	0.300	0.969
<i>Standard deviation</i>	0.034	0.289	0.011	0.095	0.098	0.316	0.044	0.142
<i>5th</i>	0.078	0.664	0.096	0.815	0.196	0.632	0.230	0.741
<i>25th</i>	0.092	0.778	0.106	0.900	0.241	0.777	0.275	0.888
<i>50th</i>	0.114	0.962	0.114	0.964	0.297	0.959	0.302	0.973
<i>75th</i>	0.142	1.203	0.121	1.026	0.373	1.202	0.327	1.055
<i>95th</i>	0.184	1.558	0.132	1.121	0.499	1.609	0.369	1.192
<i>Minimum</i>	0.055	0.463	0.068	0.579	0.120	0.386	0.116	0.373
<i>Maximun</i>	0.251	2.128	0.152	1.286	0.834	2.689	0.497	1.604

Πίνακας 11

	$B_{30}: 64.00\%$				$B_{40}: 122.00\%$			
	\tilde{b}_{30}	$\frac{\tilde{b}_{30}}{B_{30}}$	b_{30}	$\frac{b_{30}}{B_{30}}$	\tilde{b}_{40}	$\frac{\tilde{b}_{40}}{B_{40}}$	b_{40}	$\frac{b_{40}}{B_{40}}$
<i>Normal mean</i>								
<i>Mean</i>	0.651	1.017	0.618	0.966	1.264	1.036	1.201	0.984
<i>Standard deviation</i>	0.234	0.365	0.127	0.198	0.520	0.426	0.308	0.253
<i>5th</i>	0.363	0.567	0.378	0.591	0.597	0.490	0.608	0.498
<i>25th</i>	0.484	0.756	0.557	0.870	0.916	0.750	1.06	0.869
<i>50th</i>	0.609	0.951	0.624	0.975	1.171	0.960	1.221	1
<i>75th</i>	0.782	1.221	0.693	1.083	1.52	1.246	1.374	1.126
<i>95th</i>	1.091	1.705	0.806	1.259	2.193	1.797	1.669	1.368
<i>Minimum</i>	0.111	0.173	0.138	0.215	0.147	0.121	0.186	0.153
<i>Maximun</i>	1.903	2.973	1.103	1.723	3.891	3.189	2.496	2.046

Πίνακας 12

	$B_{10}: 8.40\%$				$B_{20}: 19.00\%$			
	\tilde{b}_{10}	$\frac{\tilde{b}_{10}}{B_{10}}$	b_{10}	$\frac{b_{10}}{B_{10}}$	\tilde{b}_{20}	$\frac{\tilde{b}_{20}}{B_{20}}$	b_{20}	$\frac{b_{20}}{B_{20}}$
<i>Low mean</i>								
<i>Mean</i>	0.088	1.047	0.081	0.967	0.202	1.064	0.187	0.982
<i>Standard deviation</i>	0.025	0.297	0.008	0.091	0.064	0.336	0.026	0.136
<i>5th</i>	0.061	0.731	0.069	0.820	0.132	0.692	0.146	0.768
<i>25th</i>	0.069	0.826	0.076	0.910	0.158	0.831	0.171	0.901
<i>50th</i>	0.081	0.960	0.081	0.967	0.185	0.972	0.187	0.985
<i>75th</i>	0.100	1.195	0.086	1.024	0.235	1.235	0.202	1.064
<i>95th</i>	0.136	1.62	0.094	1.121	0.328	1.724	0.228	1.198
<i>Minimum</i>	0.049	0.585	0.056	0.661	0.074	0.389	0.084	0.440
<i>Maximun</i>	0.240	2.857	0.118	1.399	0.586	3.082	0.290	1.526

Πίνακας 13

	$B_{30}: 35.00\%$				$B_{40}: 58.00\%$			
	\tilde{b}_{30}	$\frac{\tilde{b}_{30}}{B_{30}}$	b_{30}	$\frac{b_{30}}{B_{30}}$	\tilde{b}_{40}	$\frac{\tilde{b}_{40}}{B_{40}}$	b_{40}	$\frac{b_{40}}{B_{40}}$
<i>Low mean</i>								
<i>Mean</i>	0.362	1.035	0.331	0.946	0.598	1.031	0.550	0.948
<i>Standard deviation</i>	0.128	0.366	0.061	0.173	0.208	0.359	0.114	0.196
<i>5th</i>	0.215	0.613	0.229	0.654	0.326	0.563	0.342	0.589
<i>25th</i>	0.279	0.796	0.300	0.857	0.460	0.793	0.496	0.856
<i>50th</i>	0.328	0.937	0.334	0.954	0.551	0.950	0.555	0.956
<i>75th</i>	0.422	1.207	0.364	1.039	0.703	1.213	0.616	1.062
<i>95th</i>	0.599	1.71	0.430	1.229	0.998	1.721	0.723	1.247
<i>Minimum</i>	0.079	0.226	0.090	0.257	0.113	0.195	0.129	0.223
<i>Maximun</i>	1.531	4.376	0.652	1.864	1.587	2.737	1.035	1.785

Πίνακας 14

	$B_{10}: 9.50\%$				$B_{20}: 25.00\%$			
	\tilde{b}_{10}	$\frac{\tilde{b}_{10}}{B_{10}}$	b_{10}	$\frac{b_{10}}{B_{10}}$	\tilde{b}_{20}	$\frac{\tilde{b}_{20}}{B_{20}}$	b_{20}	$\frac{b_{20}}{B_{20}}$
<i>Mixed mean</i>								
<i>Mean</i>	0.099	1.039	0.091	0.961	0.262	1.047	0.243	0.970
<i>Standard deviation</i>	0.027	0.287	0.009	0.096	0.079	0.315	0.032	0.128
<i>5th</i>	0.069	0.731	0.076	0.797	0.173	0.690	0.181	0.724
<i>25th</i>	0.079	0.836	0.086	0.909	0.208	0.834	0.228	0.912
<i>50th</i>	0.092	0.964	0.092	0.965	0.238	0.951	0.245	0.979
<i>75th</i>	0.113	1.185	0.097	1.022	0.300	1.198	0.261	1.045
<i>95th</i>	0.149	1.572	0.105	1.103	0.423	1.693	0.289	1.158
<i>Minimum</i>	0.044	0.465	0.045	0.471	0.110	0.441	0.106	0.423
<i>Maximun</i>	0.284	2.988	0.132	1.385	0.778	3.11	0.385	1.54

Πίνακας 15

	$B_{30}: 50.00\%$				$B_{40}: 96.00\%$			
	\tilde{b}_{30}	$\frac{\tilde{b}_{30}}{B_{30}}$	b_{30}	$\frac{b_{30}}{B_{30}}$	\tilde{b}_{40}	$\frac{\tilde{b}_{40}}{B_{40}}$	b_{40}	$\frac{b_{40}}{B_{40}}$
<i>Mixed mean</i>								
<i>Mean</i>	0.553	1.106	0.505	1.011	1.08	1.125	0.990	1.031
<i>Standard deviation</i>	0.184	0.367	0.077	0.154	0.367	0.382	0.164	0.171
<i>5th</i>	0.347	0.695	0.376	0.753	0.706	0.735	0.765	0.796
<i>25th</i>	0.429	0.858	0.474	0.947	0.829	0.864	0.919	0.957
<i>50th</i>	0.498	0.997	0.507	1.014	0.988	1.029	0.983	1.024
<i>75th</i>	0.642	1.284	0.546	1.091	1.247	1.299	1.071	1.115
<i>95th</i>	0.914	1.827	0.620	1.24	1.79	1.864	1.248	1,3
<i>Minimum</i>	0.179	0.358	0.182	0.363	0.198	0.206	0.223	0.233
<i>Maximun</i>	1.479	2.958	0.818	1.636	3.797	3.955	2.12	2.208

Πίνακας 16

	$B_{10}: 9.00\%$				$B_{20}: 22.00\%$			
	\tilde{b}_{10}	$\frac{\tilde{b}_{10}}{B_{10}}$	b_{10}	$\frac{b_{10}}{B_{10}}$	\tilde{b}_{20}	$\frac{\tilde{b}_{20}}{B_{20}}$	b_{20}	$\frac{b_{20}}{B_{20}}$
<i>Riskless and risky</i>								
<i>Mean</i>	0.085	0.947	0.085	0.947	0.211	0.960	0.211	0.960
<i>Standard deviation</i>	0.006	0.064	0.006	0.064	0.020	0.089	0.020	0.089
<i>5th</i>	0.074	0.828	0.074	0.828	0.170	0.773	0.170	0.773
<i>25th</i>	0.084	0.931	0.084	0.931	0.209	0.949	0.209	0.949
<i>50th</i>	0.087	0.964	0.087	0.964	0.218	0.992	0.218	0.992
<i>75th</i>	0.089	0.987	0.089	0.987	0.223	1.011	0.223	1.011
<i>95th</i>	0.090	1.003	0.090	1.003	0.225	1.022	0.225	1.022
<i>Minimum</i>	0.042	0.466	0.042	0.466	0.091	0.412	0.091	0.412
<i>Maximun</i>	0.093	1.029	0.093	1.029	0.241	1.095	0.241	1.095

Πίνακας 17

	$B_{30}: 42.00\%$				$B_{40}: 75.00\%$			
	\tilde{b}_{30}	$\frac{\tilde{b}_{30}}{B_{30}}$	b_{30}	$\frac{b_{30}}{B_{30}}$	\tilde{b}_{40}	$\frac{\tilde{b}_{40}}{B_{40}}$	b_{40}	$\frac{b_{40}}{B_{40}}$
<i>Riskless and risky</i>								
<i>Mean</i>	0.400	0.953	0.400	0.953	0.712	0.950	0.712	0.950
<i>Standard deviation</i>	0.050	0.120	0.050	0.120	0.100	0.134	0.100	0.134
<i>5th</i>	0.277	0.658	0.277	0.658	0.473	0.631	0.473	0.631
<i>25th</i>	0.402	0.958	0.402	0.958	0.727	0.969	0.727	0.969
<i>50th</i>	0.420	1	0.420	1	0.750	0.999	0.750	0.999
<i>75th</i>	0.425	1.011	0.425	1.011	0.755	1.007	0.755	1.007
<i>95th</i>	0.427	1.017	0.427	1.017	0.759	1.012	0.759	1.012
<i>Minimum</i>	0.110	0.263	0.110	0.263	0.143	0.190	0.143	0.190
<i>Maximun</i>	0.449	1.068	0.449	1.068	0.819	1.092	0.819	1.092

Συμπεράσματα

Στην παρούσα διπλωματική εργασία, ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος ενός συνταξιοδοτικού σχήματος καθορισμένων εισφορών ερευνήθηκε σε δύο συνιστώσες. Η πρώτη αναφερόταν στον επενδυτικό κίνδυνο με τον οποίο έρχεται αντιμέτωπος ο ασφαλισμένος κατά την διάρκεια της περιόδου συσσώρευσης και η δεύτερη στον κίνδυνο της προσόδου, όταν δηλαδή η πρόσοδος αποκτάται κατά τη διάρκεια της συνταξιοδότησης.

Κατασκευάστηκε ένα μοντέλο το οποίο παρέχει τη βέλτιστη επενδυτική στρατηγική με σκοπό την ελάττωση του επενδυτικού κινδύνου. Χρησιμοποιήσαμε τα μαθηματικά εργαλεία της θεωρίας του δυναμικού προγραμματισμού που εφαρμόζονται από τους αναλογιστές σε συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων παροχών, για τον έλεγχο του κινδύνου αφερεγγυότητας και την αστάθεια του συντελεστή εισφορών. Βασιζόμενοι λοιπόν στο προαναφερθέν, προσαρμόσαμε κατάλληλα τις συγκεκριμένες μεθόδους στο συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων εισφορών που μελετήσαμε με στόχο τον έλεγχο του επενδυτικού κινδύνου. Ορίσαμε μία κλειστή φόρμουλα και την εφαρμόσαμε σε ρεαλιστικά σενάρια καταλήγοντας σε σημαντικά αποτελέσματα. Η κύρια διαπίστωση που πάρθηκε, αναφέρει πως η βέλτιστη επενδυτική στρατηγική έγκειται στην επένδυση στο περιουσιακό στοιχείο υψηλού κινδύνου στην αρχή της ενεργούς συμμετοχής του μέλους στο σχήμα, προβαίνοντας στην επένδυση στο περιουσιακό στοιχείο χαμηλού κινδύνου καθώς ο χρόνος περνά και το μέλος προσεγγίζει τη συνταξιοδότηση του.

Βάσει των αποτελεσμάτων κρίνουμε πως είναι απαραίτητη η ύπαρξη της γνωστής στρατηγικής του *lifestyle* με σκοπό την όσο το δυνατό περισσότερη ελάττωση της εμφάνισης του επενδυτικού κινδύνου. Κρίνουμε απαραίτητο να επισημάνουμε πως τα συγκεκριμένα αποτελέσματα δε συνάδουν με τα αντίστοιχα των Booth και Yakoubov (2000) [13] τα οποία έχουν εξάγει στην έρευνα τους, όμως επιβεβαιώνουν μία επιστημονική και ταυτόχρονα αυστηρή προσέγγιση κατά την οποία η επενδυτική στρατηγική καθίσταται έγκυρη, στοιχείο το οποίο υιοθετείται από τους αναλογιστές και τους διαχειριστές επενδύσεων των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένων εισφορών του Ηνωμένου Βασιλείου.

Διερευνήσαμε τον κίνδυνο της προσόδου εξετάζοντας τη διαφορά του επιτυγχανόμενου ποσού της σύνταξης, χρησιμοποιώντας ένα σταθερό συντελεστή μετατροπής και εκείνου του ποσού που επιτυγχάνεται χρησιμοποιώντας έναν μεταβλητό συντελεστή μετατροπής βασιζόμενο στις εμπειρικές αποδόσεις πριν από τη συνταξιοδότηση. Το βασικό συμπέρασμα σχετικά με τον κίνδυνο της προσόδου το οποίο πάρθηκε από την παραπάνω εκτενή ανάλυση, εντοπίζεται στο ότι με την ύπαρξη της υψηλής μεταβλητότητας του επιπέδου της σύνταξης το οποίο επιτυγχάνεται κατά τη συνταξιοδότηση στην περίπτωση που πραγματοποιείται χρήση του μεταβλητού

ποσοστού μετατροπής για τον υπολογισμό της σύνταξης, ενδυναμώνεται ο αντίκτυπος του κινδύνου της προσόδου στην τελική παροχή.

Το τελευταίο συμπέρασμα μας γνωστοποιεί πως ο έλεγχος του επενδυτικού κινδύνου κρίνεται απαραίτητος, αλλά δεν αρκεί για την εξασφάλιση ενός επαρκούς επιπέδου σύνταξης, παράλληλα πρέπει να ελέγχεται και ο κίνδυνος της προσόδου για την αποφυγή δυσμενών αποτελεσμάτων. Στο σημείο αυτό υπογραμμίζουμε πως δεν παρουσιάζουμε οποιαδήποτε πρόταση σχετικά με την ελάττωση του κινδύνου της προσόδου στα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων εισφορών. Η έρευνα του εν λόγω σχετικού προβλήματος πιθανό να πραγματοποιηθεί μελλοντικά, δεδομένου ότι εντοπίζεται έντονη η πεποίθηση στο αναλογιστικό πλαίσιο πως τα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων εισφορών θα διαδραματίζουν κατά την πάροδο των ετών έντονο, σημαντικό και παράλληλα κεντρικό ρόλο στα συνταξιοδοτικά συστήματα πολλών χωρών.

Η μελέτη μας πραγματοποιήθηκε με ένα πλήθος απλουστευμένων παραδοχών που καθιστούν εφικτή την μαθηματική αντιμετώπιση του μοντέλου μας. Ως εκ τούτου, το μοντέλο μας διακρίνεται από αρκετούς περιορισμούς αλλά μπορεί να αποδειχθεί. Παρακάτω, παραθέτουμε εν συντομία τους συγκεκριμένους περιορισμούς και προχωρούμε σε περαιτέρω προτάσεις για τη διεξαγωγή ερευνών.

Οι τιμές των παραμέτρων της κατανομής των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων επιλέχθηκαν χωρίς κάποια αναφορά σε ιστορικές παρατηρήσεις, και η διεξαγωγή της ανάλυσης της ευαισθησίας των συγκεκριμένων παραμέτρων βασίστηκε σε ορισμένες «κανονικές» τιμές. Μέσω της μελέτης ιστορικών στοιχείων των πραγματικών εμπειρικών αποδόσεων σε χώρες που εφαρμόζουν τα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων εισφορών η έρευνα θα ήταν εφικτό να συνεχιστεί, όπως για παράδειγμα έχει διαδραματιστεί από τους Knox το 1993, Ludvik το 1994, Khorasaneh το 1995, Booth και Yakoubov το 1998 [24], [26], [21], [13].

Σε ένα πραγματικό περιβάλλον οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων δεν είναι απαραίτητα ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, όπως επίσης δεν είναι αναγκαίο να κατανέμονται λογαριθμοκανονικά. Πλην αυτού, οι αποδόσεις του ίδιου περιουσιακού στοιχείου σε διαφορετικές χρονικές περιόδους δεν είναι ανεξάρτητες όπως υποθέσαμε στο μοντέλο μας. (Khorasaneh, 1995; Booth and Yakoubov, 2000). [21], [13]. Σχετικά με τη μοντελοποίηση της δυναμικής των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων, κρίνεται σκόπιμο να χρησιμοποιηθούν αυτορρυθμιζόμενα μοντέλα [17]. Επιπρόσθετα, η αρχική μας υπόθεση της ύπαρξης δηλαδή δύο μόνο περιουσιακών στοιχείων για όλη την διάρκεια της εργασιακής περιόδου του ασφαλισμένου φαίνεται να είναι πολύ ισχυρή. Τα διαφορετικά σενάρια για τις τιμές της διακύμανσης τα οποία υποθέσαμε πιθανό να υποδεικνύουν διαφορετικές κατηγορίες περιουσιακών στοιχείων.

Εύλογα λοιπόν εικάζουμε πως για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα το κεφαλαίο επενδύεται σε μόνο δύο περιουσιακά στοιχεία. Συνεπώς, είναι πιο απλουστευμένη η υπόθεση ότι τα περιουσιακά στοιχεία στα οποία επενδύεται το κεφάλαιο παραμένουν ίδια κατά την διάρκεια της περιόδου ύπαρξης του ασφαλισμένου στο συνταξιοδοτικό σχήμα. Επισημαίνουμε, πως ιδιαίτερο ενδιαφέρον θα αποτελούσε η διερεύνηση της βέλτιστης επενδυτικής στρατηγικής όταν επενδύεται το κεφάλαιο σε n το πλήθος περιουσιακά στοιχεία.

Ακόμη, ο προσδιορισμός του στόχου F_t θα διαφοροποιηθεί στην περίπτωση που συμπεριλάβουμε και άλλους περιορισμούς. Παραδείγματος χάριν, η εγγύηση ενός ελάχιστου οφέλους για το μέλος του σχήματος όπως διαδραματίζεται στα περισσότερα συνταξιοδοτικά σχήματα καθορισμένων εισφορών στην Ιταλία.

Ένα πιο γενικό μοντέλο μπορεί να προκύψει διαφοροποιώντας το ποσοστό εισφοράς κατά τη διάρκεια της συμμετοχής του μέλους στο σχήμα. Λόγου χάριν, θεωρώντας μία *step function* $c(t) = c_j$ για $I_j \leq t \leq I_{j+t}$, όπου τα διαστήματα $[I_j, I_{j+t}]$ ($j = 0, K - 1$, με $I_0 = 0$ και $I_K = N$) αποτελούν διαμέριση του διαστήματος $[0, N]$.

Επιπλέον, άλλου είδους περιορισμοί απαντώνται στην απουσία των εξόδων και των επιβαρύνσεων ως προς τη τιμολόγηση των προσόδων. Η επιλογή μας να χρησιμοποιήσουμε ολόκληρο το τελικό κεφάλαιο για την αγορά της προσόδου κατά τη συνταξιοδότηση, ενδεχομένως να μεταβαλλόταν σε ένα πιο γενικευμένο μοντέλο το οποίο θα περιελάμβανε άλλες χρήσεις του κεφαλαίου όπως είναι το εφάπαξ ποσό.

Μία ισχυρή υπόθεση στην οποία προβήκαμε αποτελεί η επιλογή του στόχου. Όπως έχουμε αναφέρει, σε ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων παροχών ένα πιθανό πλεόνασμα είναι τόσο ανεπιθύμητο όσο ένα πιθανό έλλειμα, με την προφανή διαφορά ότι ένα υψηλό έλλειμα είναι πολύ πιο ανεπιθύμητο από ένα υψηλό πλεόνασμα. Έτσι λοιπόν, η διακύμανση συνιστά ένα κατάλληλο μέτρο κινδύνου στα σχήματα καθορισμένων παροχών. Επομένως, μία συνάρτηση απώλειας που επιβάλλει κυρώσεις τόσο στο πλεόνασμα όσο και στο έλλειμα αποτελεί την προτεινόμενη λύση στα καθορισμένων παροχών σχήματα.

Από την άλλη μεριά, σε ένα συνταξιοδοτικό σχήμα καθορισμένων εισφορών που εξετάσαμε δεν αληθεύει η παραπάνω διαπίστωση. Ο κύριος στόχος εντοπίζεται στην όσο το δυνατό περισσότερη αύξηση του συσσωρευμένου κεφαλαίου και συνεπώς του επιπέδου των παροχών. Η συνάρτηση απώλειας που χρησιμοποιήσαμε στο πλαίσιο της εργασίας μας, επιβάλλει κυρώσεις στο κεφάλαιο που έχει συσσωρευτεί πάνω από το στόχο, καταλήγοντας σε πιθανές στρεβλώσεις των πραγματικών στόχων των διαχειριστών και περιορίζοντας δραματικά τη δυνατότητα των συνταξιοδοτικών σχημάτων

καθορισμένων εισφορών, στο να προσφέρουν στα μέλη τους το κέρδος από υψηλότερες από τις αναμενόμενες αποδόσεις της αγοράς. Ωστόσο, για το μέλος του σχήματος θα αποτελεί μία λογική στρατηγική η επένδυση για την επίτευξη ενός στόχου που βασίζεται σε συγκεκριμένη φόρμουλα. Επιπροσθέτως, το παραπάνω ζήτημα ενδεχομένως να διευθετηθεί σκεπτόμενοι ένα μη ρεαλιστικό υψηλό τελικό στόχο, όπως η τελική σύνταξη να ισούται με το 400% του τελικού μισθού. Κατ' αυτόν τον τρόπο ο στόχος που δημιουργείται εντοπίζεται στην μεγιστοποίηση του τελικού κεφαλαίου.

Τέλος, αναφέρουμε πως ένα εναλλακτικό μέσο αντιμετώπισης του προβλήματος είναι η τροποποίηση της συνάρτησης απώλειας, έτσι ώστε με την αύξηση του κεφαλαίου πάνω από ένα συγκεκριμένο δείκτη να μην επιβάλλονται κυρώσεις. Η συγκεκριμένη προσέγγιση πιθανό να καθίσταται πιο ρεαλιστική στην αντιμετώπιση των προβλημάτων των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένης εισφοράς [34].

Βιβλιογραφία

Α. Ελληνική Βιβλιογραφία

- [1] Γιαννακόπουλος Α.Ν. (2003), «Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στη Χρηματοοικονομική», Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής.
- [2] Γιαννακόπουλος Α.Ν. (2018), «Στοχαστικές Διαδικασίες II», Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Στατιστικής.
- [3] Δημητράκος Θ. (2019), Πανεπιστημιακές Σημειώσεις στο μάθημα «Δυναμικός Προγραμματισμός», Πανεπιστήμιο Αιγαίου, Τμήμα Μαθηματικών.
- [4] Σεβρόγλου Β. (2018), Πανεπιστημιακές Σημειώσεις στο μάθημα «Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά Πρότυπα», Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης Π.Μ.Σ Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου.
- [5] Μάγκλαρης Β., Παπαβασιλείου Σ., Παπαγιάννη Χ. (2015), Πανεπιστημιακές Σημειώσεις στο μάθημα «Συστήματα Αναμονής», Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο.
- [6] Μπούτσικας Μ. (2005-7), Πανεπιστημιακές Σημειώσεις στο μάθημα «Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα», Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.
- [7] Μπούτσικας Μ. (2011), «Σύντομη Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελιξίες», Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.
- [8] Πιτσέλης Γ. (2018), Πανεπιστημιακές Σημειώσεις «Μαθηματικά Συνταξιοδοτικών Ταμείων και Πίνακες Επιβίωσης-Θνησιμότητας», Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης Π.Μ.Σ Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου.
- [9] Φύλης Γ. (2006), «Στοχαστικές Διαδικασίες», Πολυτεχνείο Κρήτης.
- [10] Χατζόπουλος Π.Φ. (2011), Μαθηματικά Ασφαλίσεων Ζωής.

B. Ξενόγλωσση Βιβλιογραφία

- [11] Arrow, K. (1970), *Essays in the Theory of Risk Bearing*, North-Holland, Amsterdam, pp. 90-120.
- [12] Bellman, R., Kalaba R., (1965), *Dynamic Programming and Modern Control Theory*, Academic Press, New York.
- [13] Booth P., Yakoubov, Y., (2000), *Investment policy for defined contribution pension scheme members close to retirement: an analysis of the “lifestyle” concept*, North American Actuarial Journal 4 (2), 1-19.
- [14] Cairns, A.J., (1996), *An introduction to stochastic pension fund management*. Discussion Paper PI-9607. The Pension Institute, Birbeck College, University of London, UK.
- [15] Cairns, A.J., (1997), *A comparison of Optimal and Dynamic Control Strategies for Continuous-Time Pension Fund Models*, AFIR 1997.
- [16] Cungo, F., Montrucchio, L., (1998), *Scelte Intertemporali Teoria e Modelli*. Carocci, Roma.
- [17] Daykin C.D., Pentikainen, T., Pesonen, M., (1994), *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman Hall.
- [18] Daykin C.D., (2002), *Risk management and regulation of defined contribution schemes*, International Social Security Association, Seminar for Social Security Actuaries and Statisticians: Actuarial Aspects of Pension Reform, Moscow.
- [19] Haberman S., Sung J.-H., (1994), *Dynamic approaches to pension funding*, Insurance: Mathematics & Economics 15, 151-162.
- [20] Kapur, S., Orszag, M., (1999), *A Portfolio Approach to Investment and Annuitization During Retirement*, Presented at the Third International Congress on Insurance: Mathematics & Economics (IME), 19th -21th July 1999, City University, London.
- [21] Khorasanee, M.Z., (1995), *Simulation of investment returns for a money purchase fund*. Journal of Actuarial Practice 3 (1), 93-115.
- [22] Khorasanee, M.Z., (1998), *Deterministic modelling of defined-contributions pension funds*. North American Actuarial Journal 1 (4), 83-103.
- [23] Khorasanee, M.Z., (1999), *Actuarial Modelling of Defined Contribution Pension Schemes*, Ph.D. Thesis, City University, London, UK.

- [24] Knox, D.M., (1993), *A critique of defined contribution plans using a simulation approach*. Journal of Actuarial Practice 1 (2), 49-66.
- [25] Luenberger, D.G., (1998), *Investment Science*, Oxford University Press.
- [26] Ludvik, P., (1994), *Investment strategy for defined contribution plans*. In: Proceedings of the Fourth AFIR international Colloquium, Vol. 3, pp. 1389-1400.
- [27] Owadally, M.J., (1998), *The dynamics and control of pension funding*. Ph.D. Thesis. City University, London, UK.
- [28] Sung, J.-H., (1997), *Dynamic approaches to pension funding*. Ph.D. Thesis, City University, London, UK.
- [29] Sze, M., (1993), Discussion of David Knox's *A critique of defined contribution plans using a simulation approach*. Journal of Actuarial Practice 1 (2), 67-68.
- [30] Thomson, R.J., (1998), *The use of utility functions for investment channel choice in defined contribution retirement funds*. In: Trans. 16th Conf. Int. Assoc. Cons. Act.
- [31] Thornton, P.N., Wilson, A.F., (1992), *A realistic approach to pension funding*. Journal of the Institute of Actuaries 119, 229-286.
- [32] Vigna E., (1998), *Convenienza finanziaria dei fondi pensione: confront tra lavoratore aderente e lavoratore non aderente a un fondo aziendale*, INPDAP Rivista 4/98, 121-132.
- [33] Vigna E., (1999), *Defined contribution pension schemes: optimal investment strategies*. Tesi di Dottorato. Univerita degli Studi di Trieste, Italy.
- [34] Vigna E., Haberman S., (2001), *Optimal investment strategy for defined contribution pension schemes*, Insurance: Mathematics & Economics 28, 233-262.
- [35] Vigna E., Arts B. (2003), *A switch criterion for defined contribution pension schemes*, Center for Research on Pensions and Welfare Policies.

Γ. Διαδικτυακές Πηγές

- [36] Organisation for Economic Co-operation and Development-OECD Data, *Net pension replacement rates*.
- [37] KwaZulu-Natal Joint Municipal Pension/Provident Funds, *The NRR is a useful tool which can guide members in their retirement planning*.
- [38] e-class, *Borel Sets*, University of Athens.

Παραρτήματα

Α. Ένταση ανατοκισμού

Ως ένταση ανατοκισμού τη χρονική στιγμή t , ορίζουμε την σχετική μεταβολή της συνάρτησης συσσώρευσης ανά μονάδα χρόνου, ή ισοδύναμα τον σχετικό στιγμιαίο ρυθμό της συνάρτησης συσσώρευσης, ανά μονάδα χρόνου:

$$\delta_t = \frac{\frac{d}{dt}A(t)}{A(t)} = \frac{\frac{d}{dt}a(t)}{a(t)}$$
$$\Rightarrow \delta_t = \frac{d}{dt} \ln A(t) = \frac{d}{dt} \ln a(t)$$

ή ισοδύναμα

$$\delta_t = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(t+h) - a(t)}{a(t)} \frac{1}{h}$$

Δηλαδή, η ένταση ανατοκισμού είναι το πραγματικό επιτόκιο το οποίο κερδίσαμε την «μικρή» εκείνη χρονική περίοδο h δια το εύρος αυτής της περιόδου, είναι ένα είδος «στιγμιαίου» επιτοκίου και εκφράζεται ως *ρυθμός ανά μονάδα χρόνου* [10]. Επιπλέον, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta_t dt = \ln \left\{ \frac{a(t_2)}{a(t_1)} \right\} \Rightarrow a(t_2) = a(t_1) \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \delta_\tau dt \right\}$$

ή ισοδύναμα

$$A(t_2) = A(t_1) \exp \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \delta_\tau dt \right\}$$
$$\Rightarrow A(t) = A(0) \exp \left\{ \int_0^t \delta_t dt \right\}$$
$$\Rightarrow a(t) = \exp \left\{ \int_0^t \delta_t dt \right\}.$$

Έτσι αν γνωρίζουμε τη συναρτησιακή μορφή του δ_t τότε καθίσταται δυνατό να βρεθεί η συσσωρευμένη αξία του αρχικού κεφαλαίου για οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

B. Οι τάσεις της Ιταλίας το 2000

Στην Ιταλία υπάρχουν δύο είδη συνταξιοδοτικών ταμείων, τα λεγόμενα «κλειστά» των οποίων η φύση είναι παρόμοια με τα επαγγελματικά συνταξιοδοτικά σχήματα, που απευθύνονται σε άτομα που εργάζονται σε μία συγκεκριμένη επιχείρηση ή κλάδο και στα «ανοιχτά» τα οποία δεν παρουσιάζουν περιορισμούς σχετικά με τη συμμετοχή των μελών τους. Καθώς ο δεύτερος τύπος ενδεχομένως να είναι είτε καθορισμένων παροχών είτε καθορισμένων εισφορών, ο πρώτος απαραίτητως πρέπει να είναι καθορισμένων εισφορών βάσει νόμου. Αντιθέτως, στο Ηνωμένο Βασίλειο τα περισσότερα επαγγελματικά συνταξιοδοτικά σχήματα είναι καθορισμένης εισφοράς. Η επιλογή της ιταλικής νομοθεσίας την περίοδο του 2000 η οποία εντοπίζεται στην ενίσχυση των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένων εισφορών, αιτιολογείται μέσω της σταδιακής και συνεχούς αντικατάστασης των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένων παροχών από εκείνα των καθορισμένων εισφορών, φαινόμενο το οποίο διαδραματιζόταν στις περισσότερες χώρες. Οι βασικοί λόγοι του συγκεκριμένου φαινομένου συνοψίζονται ως εξής [24]:

- η μείωση των κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι εργοδότες,
- η αύξηση της νομοθεσίας,
- η εμφάνιση πλεονάσματος και υπερβάλλοντος κεφαλαίου,
- τα υψηλά ποσοστά αποδόσεων που παρατηρήθηκαν την περίοδο του 1980,
- η τάση για ανάληψη της ευθύνης από τους εργαζόμενους,
- η φορολογική δομή που ενθαρρύνει την ανάπτυξη των συνταξιοδοτικών σχημάτων καθορισμένων εισφορών.

Γ. Δυναμικός προγραμματισμός

Ο Richard Bellman το 1957, εισήγαγε τη θεωρία του δυναμικού προγραμματισμού (*dynamic programming*), σύμφωνα με την οποία μία αναδρομική διαδικασία υπολογίζει βέλτιστες τιμές συναρτήσεων κέρδους ή κόστους με τη βοήθεια μίας κατάλληλης συναρτησιακής εξίσωσης. Η εφαρμογή του εντοπίζεται σε προβλήματα είτε πεπερασμένου είτε άπειρου χρονικού ορίζοντα, στα οποία πραγματοποιείται έλεγχος μίας στοχαστικής διαδικασίας μέσω μίας ακολουθίας ενεργειών. Βασικός στόχος αποτελεί η εύρεση ενός κανόνα επιλογής των συγκεκριμένων ενεργειών που μπορεί να ελέγξει τη διαδικασία με βέλτιστο τρόπο. Ο Bellman εισήγαγε τις μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων ως αποτέλεσμα της θεωρίας των Μαρκοβιανών διαδικασιών και του δυναμικού προγραμματισμού οι οποίες εφαρμόζονται σε πλήθος πεδίων της επιστήμης.

Μέσω μίας στοχαστικής διαδικασίας X_n , $n = 0, 1, 2 \dots$ αναπαρίσταται η κατάσταση ενός συστήματος τη χρονική στιγμή n . Το σύνολο όλων των καταστάσεων του συστήματος είναι πεπερασμένο ή άπειρο αριθμήσιμο και η επιθεώρησή του διαδραματίζεται στις ισαπέχουσες χρονικές στιγμές $t = 0, 1, 2 \dots$. Παρατηρούμε την κατάσταση του συστήματος κάθε χρονική στιγμή επιθεώρησης και επιλέγουμε μία ενέργεια από ένα σύνολο εναλλακτικών ενεργειών. Στην περίπτωση που υπάρχει ένας σταθερός αριθμός $N \geq 1$, έτσι ώστε οι ενέργειες για τον έλεγχο του συστήματος να επιλέγονται τις χρονικές στιγμές $0, 1, 2, \dots, N - 1$ και η διαδικασία να σταματά τη χρονική στιγμή N , τότε λέμε εξετάζουμε ένα σύστημα πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα N βημάτων. Αντίστοιχα, μελετάμε ένα σύστημα σε άπειρο χρονικό ορίζοντα όταν το σύνολο των χρονικών στιγμών επιλογής ενέργειας είναι άπειρο.

Παρατηρούμε την εξέλιξη της στοχαστικής διαδικασίας X_n , $n = 0, 1, 2 \dots$ τις χρονικές στιγμές $t = 0, t = 1, \dots, t = N, t = N - 1$. Θεωρούμε πως το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i τη χρονική στιγμή επιθεώρησης t , και επιλέγουμε μία ενέργεια a από ένα πεπερασμένο σύνολο εναλλακτικών ενεργειών $A(i)$. Το συγκεκριμένο σύστημα αποτελεί μία Μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων σε διακριτό χρόνο (*Markov decision process in discrete time*) αν υπάρχει ένα κόστος $C(i, a)$ που εξαρτάται μόνο από την κατάσταση i και την ενέργεια a . Επίσης, αν το σύστημα την επόμενη χρονική στιγμή βρίσκεται στην κατάσταση j με πιθανότητα $p_{ij}(a)$ που εξαρτάται από την ενέργεια a και τις καταστάσεις i και j .

Το πρόβλημα που δημιουργείται εντοπίζεται στην εύρεση μίας πολιτικής που για κάθε αρχική κατάσταση της διαδικασίας ελαχιστοποιεί μία προκαθορισμένη συνάρτηση κόστους. Η συνάρτηση του κόστους καθορίζει το κριτήριο βελτιστοποίησης (*optimality criterion*) του προβλήματος. Τα κριτήρια βελτιστοποίησης αναφέρονται είτε στην ελαχιστοποίηση του συνολικού αναμενόμενου

(αποπληθωρισμένου) κόστους είτε στην ελαχιστοποίηση του μακροπρόθεσμου αναμενόμενου μέσου κόστους ανά μονάδα χρόνου.

Σε ένα μοντέλο πεπερασμένου χρονικού ορίζοντα επιθεωρούμε το σύστημα τις χρονικές στιγμές $t = 0, t = 1, \dots, t = N, t = N - 1, t = N$. Θεωρούμε πως το σύστημα βρίσκεται κάποια χρονική στιγμή στην κατάσταση i , επιλέγουμε μία ενέργεια/απόφαση $a \in A(i)$ υπό την επίδραση της οποίας η κατάσταση της διαδικασίας την επόμενη χρονική στιγμή επιθεώρησης θα είναι j με πιθανότητα $p_{ij}(a)$ [3]. Η συγκεκριμένη μεταπήδηση επιφέρει ένα κόστος του οποίου η μέση (αναμενόμενη) τιμή ισοδυναμεί με $C(i, a)$. Συνεπώς, το πρόβλημα που δημιουργείται εντοπίζεται στη εύρεση ενός κανόνα επιλογής ενεργειών, δηλαδή μίας πολιτικής που ελαχιστοποιεί το αναμενόμενο κόστος που παράγεται από τη χρονική στιγμή $t = 0$ έως τη χρονική στιγμή $t = N$.

Θέτουμε με $V(i, t), t = 0, \dots, N$ το ελάχιστο κόστος που παράγεται από τη χρονική στιγμή t έως τη N , εάν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i τη χρονική στιγμή t . Αν $t = N$ τότε ισχύει ότι $V(i, N) = 0$. Ακόμη, αν $t = N - 1$ τότε ισχύει $V(i, N - 1) = \min_{a \in A(i)} C(i, a)$, δηλαδή τη χρονική στιγμή $t = N - 1$ η βέλτιστη πολιτική επιλέγει την ενέργεια που ελαχιστοποιεί το δεξιό μέλος της $V(i, N - 1)$. Εάν το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i τη χρονική στιγμή t και επιλέγουμε την ενέργεια a , τότε λαμβάνουμε ένα κόστος $C(i, a)$ και η αμέσως επόμενη κατάσταση είναι η j με πιθανότητα $p_{ij}(a)$. Βασιζόμενοι στην έννοια του αναμενόμενου κόστους αν τη χρονική στιγμή t επιλέξουμε την ενέργεια a , τότε το καλύτερο που μπορούμε να πετύχουμε ισούται με $C(i, a) + \sum_j p_{ij}(a)V(j, t + 1)$ [3].

Σύμφωνα με τα παραπάνω και δεδομένου ότι $V(i, t)$ είναι ότι καλύτερο μπορούμε να πετύχουμε, καταλήγουμε στην ακόλουθη εξίσωση η οποία αποτελεί την εξίσωση του δυναμικού προγραμματισμού (*dynamic programming equation*) ή διαφορετικά εξίσωση βελτιστοποίησης σύμφωνα με την οποία μας παρέχεται η δυνατότητα υπολογισμού του $V(i, 0)$ αναγωγικά. Η εξίσωση λοιπόν, λαμβάνει τη μορφή

$$V(i, t) = \min_{a \in A(i)} \left[C(i, a) + \sum_j p_{ij}(a)V(j, t + 1) \right].$$

Δ. Κώδικας R-Studio

Διάγραμμα 10

```
T=1;alpha=1;sigma=0.5;n=10000;h=T/n;X0=1;t=seq(0,T,h);X=rep(0,n+1);
X[1]=X0;for(i in 1:n) {X[i+1]=X[i]+alpha*h+sigma*h^0.5*rnorm(1,0,1)}
plot(t,X,type="l",ylim=c(0,2),col="blue")
```

Διάγραμμα 11

```
k=5;T=1;alpha=1;sigma=0.5;n=5000;h=T/n;X0=0;t=seq(0,T,h);
X=rep(0,n+1);set.seed(1000)
plot(NULL,xlim=c(0,T),ylim=c(-2,2),ylab="",xlab="")
for(j in 1:k){X[1]=X0;for (i in 1:n){X[i+1]=X[i]+alpha*h+sigma*h^0.5*rnorm(1,0,1)}
lines(t,X,col=j,ylim=c(-1,3))}
```

Διάγραμμα 12

```
k=5;T=1;alpha=1;sigma=1;n=5000;h=T/n;X0=0;t=seq(0,T,h);
X=rep(0,n+1);set.seed(1000)
plot(NULL,xlim=c(0,T),ylim=c(-2,2),ylab="",xlab="")
for(j in 1:k){X[1]=X0;for (i in 1:n){X[i+1]=X[i]+alpha*h+sigma*h^0.5*rnorm(1,0,1)}
lines(t,X,col=j,ylim=c(-1,3))}
```

Διάγραμμα 13

```
k=5;T=1;alpha=0;sigma=0.5;n=5000;h=T/n;X0=0;t=seq(0,T,h);
X=rep(0,n+1);set.seed(1000)
plot(NULL,xlim=c(0,T),ylim=c(-2,2),ylab="",xlab="")
for(j in 1:k){ X[1]=X0;for (i in 1:n){X[i+1]=X[i]+alpha*h+sigma*h^0.5*rnorm(1,0,1)}
lines(t,X,col=j,ylim=c(-1,3))}
```

Διάγραμμα 14

```
k=5;T=1;alpha=0;sigma=1;n=5000;h=T/n;X0=0;t=seq(0,T,h);  
X=rep(0,n+1);set.seed(1000)  
plot(NULL,xlim=c(0,T),ylim=c(-2,2),ylab="",xlab="")  
for(j in 1:k) { X[1]=X0; for (i in 1:n){X[i+1]=X[i]+alpha*h+sigma*h^0.5*rnorm(1,0,1)}  
lines(t,X,col=j,ylim=c(-1,3))}
```

Διάγραμμα 15

```
k=5;T=1;alpha=-1;sigma=0.5;n=5000;h=T/n;X0=0;t=seq(0,T,h);  
X=rep(0,n+1);set.seed(1000)  
plot(NULL,xlim=c(0,T),ylim=c(-2,2),ylab="",xlab="")  
for(j in 1:k){ X[1]=X0; for (i in 1:n){X[i+1]=X[i]+alpha*h+sigma*h^0.5*rnorm(1,0,1)}  
lines(t,X,col=j,ylim=c(-1,3))}
```

Διάγραμμα 16

```
k=5;T=1;alpha=-1;sigma=1;n=5000;h=T/n;X0=0;t=seq(0,T,h);  
X=rep(0,n+1);set.seed(1000)  
plot(NULL,xlim=c(0,T),ylim=c(-2,2),ylab="",xlab="")  
for(j in 1:k){ X[1]=X0;for (i in 1:n){X[i+1]=X[i]+alpha*h+sigma*h^0.5*rnorm(1,0,1)}  
lines(t,X,col=j,ylim=c(-1,3))}
```

Διάγραμμα 17

```
T=1;mu=0.5;sigma=0.4;n=10000;h=T/n;S0=1;t=seq(0,T,h);  
S=rep(1,n+1);S[1]=S0;for(i in 1:n){S[i+1]=S[i]*exp(mu*h+sigma*h^0.5*rnorm(1,0,1))}  
plot(t,S,type="l",ylim=c(0,2),col="blue")
```

Για την εύρεση των τιμών των μεταβλητών V , W , D , K και H του βασικού σεναρίου, όπως επίσης και για τον στόχο των αποδόσεων, του κεφαλαίου και του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης, ο κώδικας που χρησιμοποιήσαμε παρουσιάζεται παρακάτω. Εναλλάσσοντας τις τιμές των μ , λ , σ_1 και σ_2 για τα υπόλοιπα έξι σενάρια και προσαρμόζοντάς τες στις ακόλουθες εντολές λάβαμε τις αντίστοιχες τιμές των V , W , D , K , H καθώς και του στόχου των αποδόσεων, του κεφαλαίου και του καθαρού συντελεστή αναπλήρωσης σε κάθε περίπτωση.

$\mu < -0.04;$

$\lambda < -0.06;$

$\sigma_1 < -0.05;$

$\sigma_2 < -0.15;$

$V < - \exp(\lambda + 0.5 * ((\sigma_1)^2)) - \exp(\mu + 0.5 * ((\sigma_1)^2));$ V

$W < - \exp(\mu + \lambda + 0.5 * (((\sigma_1)^2) + ((\sigma_2)^2))) - \exp(2 * \mu + 2 * ((\sigma_1)^2));$ W

$D < - \exp(2 * \mu + 2 * ((\sigma_1)^2)) + \exp(2 * \lambda + 2 * ((\sigma_2)^2)) - 2 * \exp(\mu + \lambda + 0.5 * (((\sigma_1)^2) + ((\sigma_2)^2)));$ D

$K < -$

$(1/D) * (\exp(\mu + \lambda + 0.5 * (((\sigma_1)^2) + ((\sigma_2)^2)))) * (\exp(\mu + 0.5 * ((\sigma_1)^2)) + \exp(\lambda + 0.5 * ((\sigma_2)^2))) - \exp(\mu + 1.5 * ((\sigma_1)^2)) - \exp(\lambda + 1.5 * ((\sigma_2)^2));$ K

$H < - (1/D) * (\exp(2 * \mu + 2 * \lambda + ((\sigma_1)^2) + ((\sigma_2)^2))) * (\exp(((\sigma_1)^2) + ((\sigma_2)^2)) - 1);$ H

$c < -0.12;$

$f_0 < -0;$

$N < -10;$

$r < - (1/2) * (\mu + \lambda + 0.5 * (((\sigma_1)^2) + ((\sigma_2)^2)));$ r

$S < - (((1 + (1/2) * (\mu + \lambda + 0.5 * (((\sigma_1)^2) + ((\sigma_2)^2))))^N) -$

$1) / ((1/2) * (\mu + \lambda + 0.5 * (((\sigma_1)^2) + ((\sigma_2)^2))) / (1 + (1/2) * (\mu + \lambda + 0.5 * (((\sigma_1)^2) + ((\sigma_2)^2))));$ S

$Fund_target < - ((f_0 * \exp(N * r)) + (c * S));$ $Fund_target$

$u < - \exp(-\mu + 0.5 * ((\sigma_1)^2));$ u

$B10 < - Fund_target / (((u)^N) * (0.204954228));$ $B10$