

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

*ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ*

ΠΟΣΟΤΙΚΑ ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΣΤΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟ

Παπαβασιλείου Βασίλης

Διπλωματική Εργασία

Υποβλήθηκε ως απαίτηση του προγράμματος σπουδών στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Τίτλου Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και τη Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς, Σεπτέμβριος 2019

UNIVERSITY OF PIRAEUS



DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

MASTER OF SCIENCE

IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

QUANTITATIVE MEASURES OF RISK WITH APPLICATIONS IN FINANCE AND ACTUARIAL SCIENCE

by

Papavassiliou Vassilis

Thesis

Submitted to the department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus as a requirement of the curriculum for the acquisition of the Master of Science Diploma in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, September 2019

Όπου Ξ θέλω,
Ξ και μπορώ...

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θα ήθελα να ευχαριστήσω πρωτίστως την οικογένειά μου καθώς και όλους τους κοντινούς μου ανθρώπους για τη στήριξη και συμπαράστασή τους σε κάθε μου βήμα όλα αυτά τα χρόνια. Η συμβολή σας ήταν καθοριστική και ανεκτίμητη για μένα.

Ακολούθως, θα ήθελα να εκφράσω τις πιο θερμές μου ευχαριστίες στον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Σεβρόγλου Βασίλειο, έναν άνθρωπο πολύ βοηθητικό και με πάθος για τη δουλειά του, για την εκπληκτική αυτή συνεργασία που είχαμε στην εκπόνηση αυτής της διπλωματικής. Τέλος, ευχαριστώ τον Καθηγητή κ. Αγιακλόγλου Χρήστο και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Μπούτσικα Μιχαήλ για τις συμβουλές τους καθώς και τη συμμετοχή τους στην επιτροπή.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή μελετώνται ποσοτικά μέτρα κινδύνου τα οποία αποτελούν ένα διαχρονικό, επίκαιρο και σημαντικό αντικείμενο μελέτης της χρηματοοικονομικής και αναλογιστικής επιστήμης. Θα περιγραφεί η θεωρία που έχει αναπτυχθεί γύρω από τα μέτρα κινδύνου, η χρησιμότητά τους στην απεικόνιση κινδύνων, ο διαχωρισμός τους σε διάφορες κλάσεις, καθώς και η σύνδεση αυτών με εποπτικά-ρυθμιστικά πλαίσια του χρηματοπιστωτικού κλάδου. Στη συνέχεια, θα αναλυθούν και θα συγκριθούν τα επικρατέστερα ποσοτικά μέτρα κινδύνου, η «Αξία σε Κίνδυνο» (Value at Risk) και το «Αναμενόμενο Έλλειμμα» (Expected Shortfall). Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, θα αναφερθούν οι διάφορες μέθοδοι εκτίμησης των «Αξία σε Κίνδυνο» και «Αναμενόμενο Έλλειμμα», δίνοντας έμφαση στη παραμετρική μέθοδο και την ανάλυση χρονοσειρών που τη διέπει. Τέλος, θα δοθεί εμπειρική εφαρμογή χρησιμοποιώντας διάφορα μοντέλα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικότητας για την εκτίμηση κινδύνου δύο χρηματιστηριακών δεικτών και θα εξαχθούν συμπεράσματα.

ABSTRACT

In this thesis, quantitative risk measures which consist a timeless, topical and crucial subject of financial and actuarial science, are studied. The theory that has been developed around risk measures, their categorization into several classes, their importance at mapping the risk, as well as, their connection with the regulating-supervisory framework that define financial organizations, are presented. In addition, the most prominent quantitative risk measures, “Value-at-Risk” (VaR) and “Expected Shortfall” (ES), are analyzed and compared. In the framework of this work, the estimation methods of “Value-at-Risk” and “Expected Shortfall” are mentioned, giving emphasis on the parametric method and the time series analysis that defines it. Finally, this thesis ends with an empirical application, using numerous conditional heteroscedasticity models for the risk estimation of two stock indexes and giving some conclusions.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Οι αναλογιστές και οι διαχειριστές κινδύνων είναι οι υπεύθυνοι για την εκτίμηση του κινδύνου των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων. Η περιοχή ευθύνης τους είναι να παρέχουν όσο το δυνατόν αξιόπιστες προβλέψεις, χρησιμοποιώντας διάφορες στατιστικές μεθόδους στα εκάστοτε δεδομένα, έτσι ώστε η διοίκηση κάθε οργανισμού να κάνει τις σωστές στρατηγικές αποφάσεις. Για να επιτευχθεί αυτό, πρέπει αρχικά να εντοπιστούν οι κίνδυνοι στους οποίους είναι εκτεθειμένοι οι οργανισμοί και στη συνέχεια να μετρηθούν, ώστε να παρθούν τα απαραίτητα μέτρα.

Η διπλωματική αυτή πραγματεύεται ποσοτικά μέτρα κινδύνου, δηλαδή, το πως μπορεί ο κίνδυνος που είναι εκτεθειμένος ο οργανισμός να απεικονιστεί – ποσοτικοποιηθεί σε έναν αριθμό ώστε να αποτελέσει ένα χρήσιμο εργαλείο πληροφόρησης. Ακολουθεί η διάρθρωση της διπλωματικής.

Στο πρώτο κεφάλαιο προσπαθούμε να αποτυπώσουμε το γενικό υπόβαθρο του θέματος. Αρχικά, αναφερόμαστε στις διάφορες γενικές έννοιες του κινδύνου και στη συνέχεια συγκεκριμενοποιούμε τους κινδύνους που υπάρχουν στον ασφαλιστικό και τραπεζικό κλάδο. Επιπροσθέτως, επισημαίνουμε τη θεωρία που έχει αναπτυχθεί γύρω από τα ποσοτικά μέτρα κινδύνου και τα σύνολα αποδοχής, επιθυμητές ιδιότητες που πρέπει να κατέχουν αυτά και τέλος τις κλάσεις των συνεκτικών, φασματικών και στρεβλών μέτρων κινδύνου.

Το δεύτερο κεφάλαιο επικεντρώνεται στα μέτρα κινδύνου «Αξία σε Κίνδυνο (Value-at-Risk)» και «Αναμενόμενο Έλλειμμα (Expected Shortfall)». Δίνουμε τους ορισμούς αυτών, τη σύνδεση τους με τα εποπτικά πλαίσια του χρηματοπιστωτικού κλάδου, καθώς και κάνουμε σύγκριση αυτών μέσω παραδειγμάτων για να γίνουν περισσότερο αντιληπτά.

Στο τρίτο κεφάλαιο αναφέρουμε τις μεθόδους εκτίμησης των παραπάνω μέτρων κινδύνου, ανάλογα με τις υποθέσεις που κάνουν για την υποκείμενη κατανομή και τις παραμέτρους που χρησιμοποιούν στα διαθέσιμα δεδομένα. Οι μέθοδοι εκτίμησης είναι η παραμετρική, η μη παραμετρική και η ημι-παραμετρική. Η παρούσα διπλωματική εστιάζεται αποκλειστικά στη

παραμετρική μέθοδο και για το σκοπό αυτό πρέπει να δοθούν και κάποιες βασικές έννοιες από την ανάλυση χρονοσειρών. Ακολουθεί ο προσδιορισμός των μεταβλητών και των παραμέτρων του οικονομετρικού υποδείγματος για τις συνεχώς ανατοκιστέες αποδόσεις. Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός αφορά την υποκείμενη κατανομή των δεδομένων και τη μεταβλητότητα αυτών. Στη περίπτωση της μεταβλητότητας, θα γίνει αναφορά στα διάφορα υποδείγματα της οικογένειας ARCH. Επιπρόσθετα, θα δούμε πως μπορούν να γίνουν προβλέψεις για μια περίοδο μπροστά για τα μέτρα κινδύνου «Αξία σε Κίνδυνο» και «Αναμενόμενο Έλλειμμα» χρησιμοποιώντας όλη τη διαθέσιμη πληροφορία, και τέλος, πώς με τον έλεγχο back-testing εξετάζουμε εάν γίνονται αξιόπιστες προβλέψεις με το μέτρο κινδύνου «Αξία σε Κίνδυνο».

Η διπλωματική καταλήγει σε μια εμπειρική εφαρμογή για την εκτίμηση του κινδύνου των χρηματιστηριακών δεικτών S&P 500 και DAX μέσω του μέτρου κινδύνου «Αξία σε Κίνδυνο». Αρχικά, γίνεται στατιστική ανάλυση των δεδομένων, ακολουθεί η μεθοδολογία που αντλείται κυρίως από το τρίτο κεφάλαιο και τέλος, παρατίθενται κάποια αποτελέσματα και συμπεράσματα.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

1. Εισαγωγικές Έννοιες	
1.1. Γενική Έννοια του Κινδύνου – Βασικοί Ορισμοί.....	8
1.2. Κίνδυνοι στην Χρηματοοικονομική και Αναλογιστική Επιστήμη.....	10
1.2.1. Χρηματοοικονομικός Κίνδυνος	10
1.2.2. Ασφαλιστικός Κίνδυνος.....	11
1.3. Εισαγωγή στη Θεωρία Ποσοτικών Μέτρων Κινδύνου.....	14
1.3.1. Σύνολα Αποδοχής.....	14
1.3.2. Σύνολα Αποδοχής και Μέτρα Κινδύνου.....	16
1.3.3. Ιδιότητες Μέτρων Κινδύνου.....	17
1.4. Κλάσεις Μέτρων Κινδύνου.....	20
1.4.1. Συνεκτικά Μέτρα Κινδύνου.....	20
1.4.1.1. Τεστ Αντοχής και Συνεκτικά Μέτρα Κινδύνου.....	21
1.4.2. Φασματικά Μέτρα Κινδύνου.....	22
1.4.3. Στρεβλά Μέτρα Κινδύνου.....	28
2. Ποσοτικά Μέτρα Κινδύνου	
2.1. Η Αξία σε Κίνδυνο (VaR)	32
2.1.1. Σύντομη Ιστορική αναδρομή.....	32
2.1.2. Ορισμός.....	33
2.1.3. Ιδιότητες και Κριτική του VaR.....	34
2.1.4. VaR και Εποπτικά Πλαίσια.....	36
2.2. Το Αναμενόμενο Έλλειμμα (ES)	39
2.2.1. Ορισμός.....	39
2.2.2. Ιδιότητες.....	44
3. Παραμετρική Μοντελοποίηση των Value-at-Risk & Expected Shortfall	
3.1. Εισαγωγή και διάφοροι μέθοδοι εκτίμησης των VaR και ES.....	49
3.2. Βασικές Έννοιες στην Ανάλυση Χρονοσειρών.....	50
3.3. Προσδιορισμός των Μεταβλητών - Παραμέτρων.....	52
3.3.1. Μοντελοποίηση της Κατανομής.....	54

3.3.2. Υποδείγματα Οικογένειας ARCH.....	55
3.4. VaR – ES της Επόμενης Περιόδου.....	60
3.4.1. Μέθοδος Κινούμενου Παραθύρου.....	61
3.5. Back-testing Value-at-Risk.....	61
3.5.1. Ανεξάρτητη Κάλυψη.....	62
3.5.2. Εξαρτημένη Κάλυψη.....	63
4. Εμπειρική Εφαρμογή: Εκτίμηση Κινδύνου για τους Δείκτες S&P 500 και DAX	
4.1. Εισαγωγή.....	65
4.2. Περιγραφική Στατιστική.....	65
4.3. Μεθοδολογία.....	75
4.4. Αποτελέσματα.....	78
ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	86
ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....	88
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ.....	93

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγικές Έννοιες

1.1. Γενική Έννοια του Κινδύνου – Βασικοί Ορισμοί

Ο άνθρωπος και κατά συνέπεια οι κάθε είδους επιχειρήσεις έρχονται αντιμέτωπες με τον κίνδυνο καθημερινά. Ο κίνδυνος (*risk*) είναι μια λέξη που έχει πολλές σημασίες σε πολλούς και διαφορετικούς ανθρώπους¹. Η έννοια του κινδύνου είναι σημαντική σε πολλά επιστημονικά πεδία παρόλο που δεν υπάρχει συναίνεση για το πώς ορίζεται και ερμηνεύεται. Οι περισσότεροι ορισμοί συγκλίνουν με άλλες έννοιες όπως της *αβεβαιότητας*, *των πιθανοτήτων* και της *αναμενόμενης αξίας*. Η ιστορία για τον ορισμό του κινδύνου ξεκινά από τον 20^ο αιώνα, μια περίοδο ενεργής δράσης και έρευνας στο πεδίο των πιθανοτήτων. Συγκεκριμένα, η έρευνα επικεντρωνόταν στην υποκειμενική και αντικειμενική ερμηνεία της πιθανότητας. Σύμφωνα με την αντικειμενική ερμηνεία, οι πιθανότητες είναι πραγματικές και μπορούμε να τις εκτιμήσουμε μέσα από στατιστικές αναλύσεις. Αντίθετα, η υποκειμενική ερμηνεία υποστηρίζει ότι οι πιθανότητες είναι ανθρώπινες πεποιθήσεις και δεν είναι φυσικές.

Η πρώτη διάσημη έννοια του κινδύνου έγινε από τον οικονομολόγο Frank Knight ο οποίος ήταν αντικειμενιστής. Στο βιβλίο του με τίτλο *Risk, Uncertainty and Profit (1921)* διαχωρίζει την έννοια του κινδύνου με την έννοια της αβεβαιότητας. Υποστήριξε ότι «ο κίνδυνος μπορεί να υπαχθεί σε ποσοτική μέτρηση», εφόσον μπορεί να υπάρχει (ή να υπολογιστεί) η κατανομή πιθανοτήτων που έχει εφαρμογή. Αντίθετα, η αβεβαιότητα (κατά τον Knight) δεν μπορεί να μετρηθεί διότι δεν είναι γνωστή η κατανομή πιθανοτήτων και δεν μπορούν να περιγραφούν όλα τα πιθανά ενδεχόμενα². Δηλαδή, ο κίνδυνος σχετίζεται με αντικειμενικές πιθανότητες και η αβεβαιότητα με υποκειμενικές πιθανότητες. Παρακάτω δίνεται ένας δυνητικός ορισμός σύμφωνα με την ανάλυση του Knight³.

Ορισμός 1.1.1. *Αβεβαιότητα είναι ο μη μετρήσιμος κίνδυνος και ο κίνδυνος είναι η μετρήσιμη αβεβαιότητα.*

Παρακάτω επισημαίνονται κάποιοι ορισμοί για να γίνει περισσότερο κατανοητή η υπόσταση του κινδύνου, διότι όπως έχει αναφέρει η Rosa⁴ το 1998, «παρόλο

που οι ορισμοί δεν είναι ποτέ εντελώς σωστοί ή λανθασμένοι, μας παρέχουν χρήσιμα εργαλεία για να διευκρινιστούν τα σημεία ενδιαφέροντος»:

Ορισμός 1.1.2. *Ο κίνδυνος ισούται με την τριπλέτα (s_i, p_i, c_i) , όπου, s_i είναι ο εντοπισμός και η περιγραφή του σεναρίου, p_i είναι η πιθανότητα του σεναρίου και c_i είναι η συνέπεια του σεναρίου για $i=1,2,\dots,N$ (Kaplan & Garrick 1981)⁵*

Ορισμός 1.1.3. *Κίνδυνος είναι το γινόμενο της πιθανότητας και της σφοδρότητας (Wilson & Crouch 1982)⁶*

Ορισμός 1.1.4. *Κίνδυνος είναι μια τυχαία μεταβλητή που αφορά τη μελλοντική καθαρή θέση (Artzner, Delbaen, Eber, Heath 1998)⁷*

Ορισμός 1.1.5. *Κίνδυνος είναι η επίδραση της αβεβαιότητας στα αντικείμενα. Η επίδραση είναι είτε θετική είτε αρνητική απόκλιση από την αναμενόμενη τιμή (Risk Management, ISO, 2009)⁸*

Συνοψίζοντας, ο κίνδυνος δε μπορεί να περιοριστεί σε ένα μόνο ορισμό. Συνδέεται με τα πιθανά μελλοντικά γεγονότα, τις πιθανές συνέπειες αυτών και τις αποκλίσεις από τις αναμενόμενες αξίες. Σημαντικό να αναφερθεί είναι ότι ο κίνδυνος δεν είναι επιθυμητό στοιχείο, όμως, είναι άρρηκτα συνδεδεμένος με τις οικονομικές δραστηριότητες και το κίνητρο ανάληψής του είναι συνήθως η προσδοκία επίτευξης (μεγαλύτερου) κέρδους⁹. Αφού η έννοια του κινδύνου έγινε περισσότερο κατανοητή, πρέπει τώρα να κατηγοριοποιήσουμε τους κινδύνους στη χρηματοοικονομική και αναλογιστική επιστήμη για να είναι εφικτή η μετέπειτα ποσοτικοποίηση τους.

1.2. Κίνδυνοι στη Χρηματοοικονομική και Αναλογιστική Επιστήμη

Η κατηγοριοποίηση των κινδύνων σε μία επιχείρηση είναι ύψιστης σημασίας στο κομμάτι της *διαχείρισης κινδύνων (risk management)*. Κάθε κίνδυνος πρέπει να μελετηθεί και να προσεγγιστεί ξεχωριστά, αφού οι κίνδυνοι μεταξύ τους μπορεί να ανήκουν ακόμα και σε διαφορετικό επιστημονικό πεδίο. Σε γενικό βαθμό, ο *χρηματοοικονομικός κίνδυνος* λόγω της επενδυτικής δραστηριότητας μπορεί να προκύψει και στον ασφαλιστικό και στον τραπεζικό κλάδο ενώ ο *ασφαλιστικός κίνδυνος* περιορίζεται σχεδόν αποκλειστικά στον ασφαλιστικό κλάδο.

1.2.1. Χρηματοοικονομικός Κίνδυνος

Ο *χρηματοοικονομικός κίνδυνος*⁹ είναι η πιθανότητα ζημιάς από μια ανοιγμένη θέση ή μια τοποθέτηση σε χρηματοπιστωτικά μέσα, λόγω μεταβολής των όρων της θέσης. Συνήθως, χωρίζεται σε 5 μεγάλες κατηγορίες: τον *κίνδυνο αγοράς (market risk)*, τον *πιστωτικό κίνδυνο (credit risk)*, τον *λειτουργικό κίνδυνο (operational risk)*, τον *κίνδυνο ρευστότητας (liquidity risk)* και τον *νομικό - ρυθμιστικό κίνδυνο (legal-regulatory risk)*.

Ο **κίνδυνος αγοράς**¹⁰ αντικατοπτρίζει τον κίνδυνο που πηγάζει από το επίπεδο ή τη μεταβλητότητα των αγοραίων τιμών των χρηματοοικονομικών μέσων που έχουν επίπτωση στην αξία των περιουσιακών στοιχείων και των υποχρεώσεων της επιχείρησης. Σημαντικές κατηγορίες του κινδύνου αγοράς είναι ο *επιτοκιακός κίνδυνος* που αναφέρεται στις μεταβολές των επιτοκίων που μπορεί να έχουν σοβαρές επιπτώσεις στην οικονομική κατάσταση των επιχειρήσεων και ο *συναλλαγματικός κίνδυνος* που οφείλεται σε μεταβολές του επιπέδου ή της μεταβλητότητας των συναλλαγματικών ισοτιμιών.

Ο **πιστωτικός κίνδυνος**⁹ είναι η πιθανή ή αναμενόμενη ζημία που προέρχεται από την αδυναμία του οφειλέτη να ανταπεξέλθει στην αποπληρωμή του χρέους, δηλαδή από την αδυναμία να εκπληρώσει τις συμβατικές του υποχρεώσεις. Στη περίπτωση μερικής ή πλήρους αθέτησης των συμβατικών υποχρεώσεων από μία χώρα τότε μιλάμε για *κίνδυνο χώρας (sovereign risk)*.

Μία άλλη κατηγορία χρηματοοικονομικού κινδύνου είναι ο **κίνδυνος ρευστότητας**. Ο κίνδυνος αυτός, μπορεί να θεωρηθεί ξεχωριστός αν και είναι αποτέλεσμα των παραπάνω κινδύνων. Ο κίνδυνος ρευστότητας είναι η αναμενόμενη ζημία και συνεπώς η μείωση της καθαρής θέσης της επιχείρησης που προκύπτει από ενδεχόμενη αδυναμία προς¹⁰:

- έγκαιρη και πλήρη κάλυψη τρεχουσών και μελλοντικών χρηματοοικονομικών υποχρεώσεων,
- άντληση κεφαλαίων για την κάλυψη αυξημένης ζήτησης δανείων ή επενδυτικών επικερδών τοποθετήσεων,
- διατήρηση επικερδών τοποθετήσεων ή/και επαναχρηματοδότηση τοποθετήσεων με υψηλότερο επιτόκιο,
- έγκαιρη και αποδοτική τοποθέτηση μη αναμενόμενων ή έκτακτων εισροών

Τέλος, υπάρχουν και δύο ακόμα γενικοί κίνδυνοι που ανήκουν και στο χρηματοοικονομικό και στο ασφαλιστικό περιβάλλον. Αυτοί είναι ο **νομικός-ρυθμιστικός κίνδυνος** και ο **λειτουργικός κίνδυνος**. Ο **νομικός-ρυθμιστικός κίνδυνος**¹⁰ αναφέρεται στη συχνή αλλαγή του νομικού πλαισίου που διέπει τη λειτουργία των τραπεζών και των ασφαλιστικών εταιρειών και επηρεάζει την κερδοφορία τους. Ως **λειτουργικό κίνδυνο**¹¹, το εποπτικό πλαίσιο της Φερεγγυότητας ΙΙ, ορίζει ως τον κίνδυνο εμφάνισης ζημιών λόγω ακατάλληλων ή προβληματικών εσωτερικών διαδικασιών, προβλημάτων στα λειτουργικά συστήματα, προβλημάτων στο προσωπικό και εξωτερικών παραγόντων.

1.2.2. Ασφαλιστικός Κίνδυνος

Η αναλογιστική επιστήμη ήταν εξ αρχής προσανατολισμένη στις ανάγκες της ασφαλιστικής αγοράς². Οι κίνδυνοι που προκύπτουν από τις βασικές λειτουργίες των ασφαλιστικών (και αντασφαλιστικών) εταιρειών πέρα από τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους ονομάζονται **ασφαλιστικοί κίνδυνοι**. Οι αναλογιστές αρχικά προσπαθούν να εντοπίσουν τους ενδεχόμενους κινδύνους από τις δύο κατηγορίες όπου οι ασφαλιστικές εταιρείες δραστηριοποιούνται. Η μία κατηγορία είναι της *Ζωής (Life)* στην οποία συμπεριλαμβάνονται ασφαλίζεις ζωής, υγείας, αποταμίευσης, συνταξιοδότησης, προσωπικών ατυχημάτων,

απώλειας εισόδηματος κ.α.¹² και η άλλη κατηγορία είναι των *Γενικών Ασφαλίσεων ή Ασφαλίσεων κατά Ζημιών (Non-Life)* που περιέχει τους κλάδους των ατυχημάτων, των στοιχείων της φύσης (π.χ. ζημιά από πυρκαγιά), των διάφορων χρηματικών απωλειών, της νομικής προστασίας κ.α.¹³ Οι επικρατέστεροι κίνδυνοι σε κάθε μια από αυτές τις κατηγορίες αναγράφονται παρακάτω.

Ο **ασφαλιστικός κίνδυνος ζωής** αφορά στον κίνδυνο που πηγάζει από την ανάληψη ασφαλιστικών κινδύνων ζωής και αναφέρεται τόσο στους καλυπτόμενους κινδύνους όσο και στη διαδικασία που ακολουθείται για τη διεξαγωγή των ασφαλιστικών εργασιών ζωής. Διαχωρίζεται στους επιμέρους κινδύνους¹⁰:

- *Βιομετρικούς (θνησιμότητας), μακροβιότητας και ο κίνδυνος ανικανότητας/νοσηρότητας.* Όλοι αντανakλούν την αβεβαιότητα στην τάση και στις παραμέτρους της θνησιμότητας, στο βαθμό που η πιθανή επιδείνωσή (ή αύξησή) τους προκαλεί ζημίες στην επιχείρηση ή αύξηση των τεχνικών της προβλέψεων.
- *Ακυρωσιμότητας/Εξαγορών* αναφέρεται στη ζημιά ή δυσμενή μεταβολή στην αξία των τεχνικών προβλέψεων που προέρχεται από μεταβολές στο επίπεδο και στην μεταβλητότητα των ρυθμών ακύρωσης/εξαγοράς και ελευθεροποίησης.
- *Εξόδων* όπου προκύπτει από τη μεταβλητότητα των εξόδων εξυπηρέτησης των (αντ)ασφαλιστήριων συμβολαίων.
- *Αναθεώρησης* που κάνει λόγο για τη πιθανότητα αναθεώρησης του ποσού ετήσιας προσόδου (ράντας) ή της κατάστασης της υγείας του ασφαλισμένου.

Ο **ασφαλιστικός κίνδυνος ασφαλίσεων κατά ζημιών** αφορά τον σχετικό ασφαλιστικό κίνδυνο που πηγάζει από τα ασφαλιστήρια συμβόλαια και σχετίζεται με την αβεβαιότητα των τεχνικών αποτελεσμάτων του ασφαλιστή. Περιλαμβάνει την αβεβαιότητα από το ύψος και το χρόνο διακανονισμού των υφιστάμενων ζημιών, τον όγκο των εργασιών και τα ασφάλιστρα που θα εγγραφούν, το ύψος των ασφαλίσεων τα οποία κρίνονται ως αναγκαία για την κάλυψη των υποχρεώσεων από υφιστάμενες εργασίες και την άσκηση δικαιωμάτων προαίρεσης όπως δικαιώματα ανανέωσης ή τερματισμού από

τους ασφαλισμένους. Η αβεβαιότητα αυτή έχει ως αποτέλεσμα τους κάτωθι κινδύνους¹⁰:

- *Κίνδυνος ασφαλίστρων* όπου αφορά στον κίνδυνο τα ασφάλιστρα να μην επαρκούν να καλύψουν έξοδα και τις αποζημιώσεις. Υφίσταται κατά τη στιγμή της έκδοσης του ασφαλιστηρίου συμβολαίου, πριν επισυμβούν ασφαλιστικές περιπτώσεις.
- *Κίνδυνος αποθεμάτων* που αντικατοπτρίζει τον κίνδυνο ζημίας ή δυσμενούς μεταβολής στην αξία των ασφαλιστικών υποχρεώσεων, που προκύπτει από διακυμάνσεις στο χρόνο επέλευσης, στη συχνότητα και στη σφοδρότητα των ασφαλισμένων συμβάντων καθώς και στο χρόνο και στο ποσό διακανονισμού των αποζημιώσεων.
- *Κίνδυνος καταστροφών* που πηγάζει από ακραία ή έκτακτα γεγονότα των οποίων ο κίνδυνος δεν λαμβάνεται επαρκώς υπόψη από τον κίνδυνο ασφαλίστρων και αποθεμάτων καθώς και άσκησης δικαιωμάτων προαίρεσης.

Αφού είδαμε τους επικρατέστερους κινδύνους των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων, θα περάσουμε στη θεωρητική προσέγγιση των μέτρων κινδύνου.

1.3. Εισαγωγή στη Θεωρία Ποσοτικών Μέτρων Κινδύνου

Στη θεωρία των ποσοτικών μέτρων κινδύνου πρωτοπόρησαν οι Artzner, Delbaen & Heath⁷ παρέχοντας μια αξιωματική δομή που βοήθησε στο ξεκαθάρισμα της έννοιας του κινδύνου και των μέτρων αυτού. Η αναγνώριση ήταν μεγάλη σε επιστημονικά πεδία όπως τα μαθηματικά, τη στατιστική και τα οικονομικά αλλά και στις ρυθμιστικές αρχές παγκοσμίως.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να υπενθυμίσουμε τον *ορισμό 1.1.4.* διότι στην ανάλυση που ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε τον κίνδυνο ως τη μεταβλητότητα της μελλοντικής καθαρής αξίας μιας *χρηματοοικονομικής θέσης (financial position)* λόγω των αλλαγών στην αγορά ή γενικότερα κάποιων αβέβαιων συμβάντων. Ως *οικονομική θέση*¹⁴ ορίζεται η κατάσταση των περιουσιακών στοιχείων, των υποχρεώσεων και των ιδίων κεφαλαίων (και η σχέση μεταξύ τους) ενός οργανισμού, όπως αναγράφονται στο καταστατικό του.

Ένα πρώτο και σημαντικό βήμα είναι να καθοριστεί εάν η μελλοντική τιμή μιας οικονομικής θέσης ή ενός χαρτοφυλακίου που εμπεριέχει κίνδυνο ανήκει ή όχι στο υποσύνολο των *επιτρεπτών κινδύνων*. Δηλαδή, δεν αρκεί απλά μια τιμή για το πόσο επικίνδυνη είναι μια θέση αλλά πρέπει να απαντηθεί και το δυκνό ερώτημα αν είναι επιτρεπτή η τιμή αυτή ή όχι. Η απάντηση αυτή δίνεται από τα *σύνολα αποδοχής*. Η παρακάτω ανάλυση υποθέτει ότι είναι γνωστό το σύνολο των καταστάσεων του χρηματοπιστωτικού κόσμου για την περίοδο που θέλουμε να μετρήσουμε τον κίνδυνο. Το σύνολο αυτό μπορεί να αποτελείται από όλες τις τιμές των περιουσιακών στοιχείων και τίτλων και όλες τις συναλλαγματικές ισοτιμίες μεταξύ άλλων. Σημειώνεται ότι για λόγους απλούστευσης δε λαμβάνεται υπόψη η συνολική απόδοση της θέσης ή του χαρτοφυλακίου.

1.3.1. Σύνολα Αποδοχής (Acceptance Sets)

Τα σύνολα αποδοχής καθορίζονται από έναν επόπτη. Για παράδειγμα, στον τραπεζικό και ασφαλιστικό κλάδο τα εποπτικά πλαίσια της *Βασιλείας (Basel)* και της *Φερεγγυότητας (Solvency)*, αντίστοιχα, καθορίζουν αν η τράπεζα ή η ασφαλιστική εταιρεία είναι φερέγγυα ανάλογα με τον κίνδυνο που αναλαμβάνει και τα κεφάλαια που διαθέτει.

Συμβολισμοί:

- Ο χώρος όλων των πιθανών χρηματοοικονομικών θέσεων θα συμβολιστεί με \mathcal{X} και κάθε θέση $X \in \mathcal{X}$ είναι μια πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση σε ένα μετρήσιμο χώρο (Ω, Σ) με πεπερασμένες πρώτες ροπές, όπου Ω είναι ο δειγματικός χώρος (για τη περίπτωση μας *σύνολο αναφοράς*, ή *φυσική κατάσταση*) και Σ είναι η άλγεβρα χώρου γνωστή ως *σ -άλγεβρα*. Ως μετρήσιμη συνάρτηση X θα θεωρήσουμε τη τελική καθαρή αξία μιας θέσης ή ενός χαρτοφυλακίου στο τέλος της περιόδου συναλλαγής (π.χ. τα αποτελέσματα χρήσεως μιας εταιρείας).
- Έστω \mathcal{X}_+ «ο κώνος» των μη-αρνητικών στοιχείων του \mathcal{X} και \mathcal{X}^- το συμπλήρωμά του (αρνητικό του \mathcal{X}_+). Επιπρόσθετα, έστω \mathcal{X}_{++} και \mathcal{X}^-_- οι «κώνοι» των θετικών στοιχείων του \mathcal{X} και των αρνητικών, αντίστοιχα.
- Επίσης, θα συμβολίσουμε με $A_{i,j}$, $j \in J_i$, ένα σύνολο τελικών αξιών, εκφρασμένο σε νόμισμα i , το οποίο στη χώρα i , γίνεται αποδεκτό από τον επόπτη-ρυθμιστή j , όπου J_i θα είναι το σύνολο των εποπτών της χώρας i .
- Τέλος, με A_i θα συμβολίσουμε την τομή $\bigcap_{j \in J_i} A_{i,j}$. Στα παρακάτω αξιώματα για λόγους ευκολίας θα αναφέρεται απλά με A .

Τα αξιώματα σχετικά με το σύνολο αποδοχής A , όπως αυτά αναφέρονται στη μελέτη των Artzner, Delbaen & Heath⁷, είναι τα παρακάτω:

Αξίωμα 1.3.1. *Το σύνολο αποδοχής A περιέχει το \mathcal{X}_+ .*

Αξίωμα 1.3.2. *Το σύνολο αποδοχής A δεν τέμνει το σύνολο \mathcal{X}^-_- .*

Η λογική των δύο αυτών αξιωμάτων είναι ότι μια τελική καθαρή αξία που είναι πάντα μη-αρνητική δε χρειάζεται επιπλέον κεφάλαιο, καθώς, μία τελική καθαρή αξία που είναι πάντα αυστηρά αρνητική, σίγουρα χρειάζεται. Το παρακάτω αξίωμα είναι μια απαίτηση στο σύνολο όλων των αποδεκτών τελικών αξιών και προέρχεται από την ιδιότητα [I.3] που θα αναφερθεί στην επόμενη ενότητα.

Αξίωμα 1.3.3. *Το σύνολο αποδοχής A είναι ένας «κώνος» θετικά ομογενής (positively homogeneous cone).*

Αξίωμα 1.3.4. *Το σύνολο αποδοχής A είναι κυρτό (convex).*

Το τελευταίο αξίωμα αντανακλά την *αποστροφή κινδύνου* (*risk averse*) από τη μεριά του επόπτη. Η θεωρία των ατόμων που αποστρέφονται τον κίνδυνο θα αναφερθεί στην ενότητα 1.4.2. που θα μιλήσουμε για τα *φασματικά μέτρα κινδύνου*.

Το σύνολο αποδοχής A που ορίστηκε σύμφωνα με τα παραπάνω αξιώματα είναι ένα σημαντικό κριτήριο που πρέπει να ληφθεί υπόψιν όταν περιγράφεται η αποδοχή ή απόρριψη του κινδύνου.

1.3.2. Σύνολα Αποδοχής και Μέτρα Κινδύνου

Η έννοια του κινδύνου γίνεται καλύτερα αντιληπτή όταν μπορεί με κάποιο τρόπο να μετρηθεί ώστε να εξαχθούν κάποια συμπεράσματα. Όπως για παράδειγμα, η έννοια της θερμοκρασίας ξεκαθαρίζει με τη χρήση του θερμόμετρου που μας πληροφορεί πως η θερμοκρασία μετριέται και εάν κάποιο άτομο έχει πυρετό ή όχι, έτσι συμβαίνει και με τον χρηματοοικονομικό κίνδυνο και τα ποσοτικά μέτρα κινδύνου. Πρέπει το μέτρο κινδύνου να είναι ικανό να απεικονίσει τον κίνδυνο που περιέχει μια θέση. Οι παρακάτω ορισμοί δίνονται από τους Artzner, Delbaen, Eber και Heath (1998)⁷.

Ορισμός 1.3.1. Το μέτρο κινδύνου είναι μια απεικόνιση, $\mu: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$.

Τα σύνολα αποδοχής θα μας βοηθήσουν να ορίσουμε τα μέτρα κινδύνου περιγράφοντας πόσο «κοντά» ή πόσο «μακριά» βρίσκεται η θέση μας από το να γίνει αποδεκτή. Συγκεκριμένα, όταν ο αριθμός $\mu(X)$ που απεικονίζει το μέτρο μ του κινδύνου $X \in \mathcal{X}$ είναι θετικός ($\mu(X) > 0$), τότε ερμηνεύεται⁷ (βλέπε ορισμό 1.3.2. παρακάτω) ως το ελάχιστο (χρηματικό) ποσό που πρέπει να προστεθεί στην αρχική θέση που εμπεριέχει κίνδυνο ώστε να γίνει αυτή αποδεκτή. Έτσι, όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός $\mu(X)$, τόσο πιο επικίνδυνη θα είναι η θέση X . Το $\mu(X)$ για παράδειγμα, μπορεί να είναι το ποσό το οποίο χρησιμοποιείται για τη μείωση του χρέους στον ισολογισμό μιας εταιρείας.

Ορισμός 1.3.2. Το μέτρο κινδύνου σχετιζόμενο με το σύνολο αποδοχής A είναι μια απεικόνιση $\mu_A: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ και ορίζεται ως :

$$\mu_A(X) = \inf \{m : m + X \in A\} \quad (1.1)$$

Έτσι, όταν έχουμε $\mu(X) < 0$ τότε η απόλυτη τιμή του μπορεί να ερμηνευτεί ως το μέγιστο ποσό που μπορεί να ελαττωθεί η θέση μας και να είναι ακόμα αποδεκτή.

Παρακάτω δίνεται ένας ορισμός των συνόλων αποδοχής σε σχέση με τα μέτρα κινδύνου.

Ορισμός 1.3.2. Το σύνολο αποδοχής A σχετιζόμενο με το μέτρο κινδύνου μ ορίζεται ως :

$$A_\mu = \{X \in \mathcal{A} : \mu(X) \leq 0\} \quad (1.2)$$

Αφού είδαμε τους ορισμούς των μέτρων κινδύνων, επόμενο βήμα είναι να δούμε κάποιες επιθυμητές ιδιότητες αυτών που μετά θα καθορίσουν και την κλάση στην οποία ανήκουν.

1.3.3. Ιδιότητες Μέτρων Κινδύνου

Από αυστηρά μαθηματική άποψη, τα μέτρα κινδύνου πρέπει να κατέχουν κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά, ώστε να είναι αξιόπιστα. Στη βιβλιογραφία, τα χαρακτηριστικά αυτά αναφέρονται και ως αξιώματα αλλά στη διπλωματική αυτή θα τα αναφέρουμε απλά ως *ιδιότητες*. Οι επικρατέστερες ιδιότητες που έχουν προταθεί στο πέρασμα του χρόνου^{15,16,19} είναι οι παρακάτω:

[I.1] Αναλλοίωτη Μεταβατικότητα (Translation Invariance): Για όλα τα $X \in \mathcal{A}$ και όλους τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha \in \mathbb{R}$, έχουμε:

$$\mu(X + \alpha) = \mu(X) - \alpha \quad (1.3)$$

Με την σχέση (1.3) εννοούμε, ότι αν προσθέσουμε ένα ακίνδυνο ποσό (*risk free*) α στην αρχική θέση X , τότε το ποσό που πρέπει να προστεθεί ώστε να γίνει η θέση αυτή αποδεκτή ελαττώνεται κατά α .

[I.2] Μονοτονία (Reverse Monotonicity): Για όλα τα $X, Y \in \mathcal{A}$ με $X \leq Y$ τότε έχουμε:

$$\mu(Y) \leq \mu(X) \quad (1.4)$$

Είναι λογικό να καταβάλουμε μεγαλύτερο χρηματικό ποσό στη θέση X απ' ότι στη Y για να γίνει αποδεκτή, αφού η τελευταία είναι μεγαλύτερη σε αξία και κατά συνέπεια ενέχει χαμηλότερο κίνδυνο¹⁵.

[I.3] Θετική Ομοιογένεια (Positive Homogeneity): Για όλα τα $X \in \mathcal{A}$ και όλα τα $k \geq 0$ τότε:

$$\mu(kX) = k\mu(X) \quad (1.5)$$

Σύμφωνα με την τελευταία, η *μόχλευση (leverage)* ή *απομόχλευση (deleverage)* ενός χαρτοφυλακίου προκαλεί γραμμική αύξηση ή μείωση του κινδύνου, όπου η σταθερά k συμβολίζει το ποσό της *μόχλευσης* (αν $k > 1$) και της *απομόχλευσης* (αν $k < 1$), αντίστοιχα.

[I.4] Υποπροσθετικότητα (Subadditivity): Για όλα τα $X, Y \in \mathcal{A}$, ισχύει ότι:

$$\mu(X+Y) \leq \mu(X) + \mu(Y) \quad (1.6)$$

Η ιδιότητα αυτή είναι μια από τις πιο σημαντικές και κρίνει αν ένα μέτρο κινδύνου είναι αξιόπιστο¹⁵. Ουσιαστικά, αντανακλά την γενική υπόθεση ότι η *διαφοροποίηση (diversification)* των περιουσιακών στοιχείων μέσα στο χαρτοφυλάκιο οδηγεί σε μικρότερο ή ίσο συνολικό κίνδυνο. Με άλλα λόγια, ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο εμπεριέχει άλλα χαρτοφυλάκια θα αντανακλά ποσό κινδύνου το οποίο σε καμία περίπτωση δεν θα ξεπερνάει το συνολικό αθροιστικό ποσό κινδύνου των μεμονωμένων αυτών χαρτοφυλακίων.

[I.5] Κυρτότητα (Convexity): Για $X, Y \in \mathcal{A}$ και για όλα τα $\lambda \in [0,1]$ ισχύει:

$$\mu(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1 - \lambda)\mu(Y) \quad (1.7)$$

Σύμφωνα με τους Föllmer & Schied (2002)¹⁶, Frittelli & Gianin(2002)¹⁷ και Heath & Ku(2004)¹⁸, η ιδιότητα της *κυρτότητας* πρέπει να αντικαταστήσει τις «αυστηρότερες» ιδιότητες της *θετικής ομοιογένειας* και της *υποπροσθετικότητας*. Ο λόγος είναι ότι η ιδιότητα αυτή, πέρα από την επίδραση της *διαφοροποίησης χαρτοφυλακίου* που αναφέρθηκε παραπάνω, προσαρμόζει

επιπλέον και τον πιθανό κίνδυνο ρευστότητας. Όταν επικρατεί ο κίνδυνος της ρευστότητας, η αύξηση της θέσης αυξάνει με μη-γραμμικό τρόπο τον κίνδυνο και όχι γραμμικά όπως υποστηρίζει η ιδιότητα της θετικής ομοιογένειας.

[I.6] Αμεταβλητότητα (Law Invariance): Εάν $X, Y \in \mathcal{X}$ και $X \triangleq Y$ (όπου \triangleq σημαίνει ότι έχουν ίδια κατανομή) τότε:

$$\mu(X) = \mu(Y) \quad (1.8)$$

Αυτή η ιδιότητα μας πληροφορεί ότι ο κίνδυνος $\mu(X)$ ή $\mu(Y)$ εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την συνάρτηση κατανομής της X ή Y . Συνεπώς, ο κίνδυνος μπορεί να εκτιμηθεί από εμπειρικά δεδομένα¹⁹. Οι Föllmer & Knispel (2013)²⁰ αποδεικνύουν ότι ένα μέτρο κινδύνου είναι αμετάβλητο (*law invariant*) εάν και μόνο αν ακολουθεί πρώτη και δεύτερη τάξη στοχαστικής κυριαρχίας (*stochastic dominance*) και ικανοποιεί τη συνθήκη για συμμοτονική κυρτότητα (*comonotonic convexity*).

[I.7] Συμμοτονική Προσθετικότητα (Comonotonic Additivity): Εάν $X, Y \in \mathcal{X}$ είναι συμμοτονικές (*comonotonic*) θέσεις τότε:

$$\mu(X+Y) = \mu(X) + \mu(Y) \quad (1.9)$$

Οι συμμοτονικές (*comonotonic*) τυχαίες μεταβλητές χαρακτηρίζονται από τέλεια εξάρτηση. Για παράδειγμα, εάν οι $X, Y \in \mathcal{X}$ είναι συμμοτονικές, τότε κινούνται πάντα «μαζί» σε όλες τις κατευθύνσεις. Η λογική αυτής της ιδιότητας είναι ότι εάν συγχωνευτούν δύο συμμοτονικές θέσεις $X, Y \in \mathcal{X}$, τότε, δεν θα υπάρξει η επίδραση της διαφοροποίησης και κατά συνέπεια το απαιτούμενο κεφάλαιο για την συνολική θέση $X+Y$ θα είναι ίσο με το άθροισμα των μεμονωμένων απαιτούμενων κεφαλαίων. Έχει υποστηριχθεί ότι για να ενσωματωθεί η αρχή της διαφοροποίησης χαρτοφυλακίου στα μέτρα κινδύνου πρέπει να τηρείται και η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας και της συμμοτονικής προσθετικότητας καθώς η πρώτη δεν συνεπάγει τη δεύτερη (Leirpold, 2015)²¹. Εάν κάποια ιδιότητα από τις δύο δεν ικανοποιείται, τότε υπάρχει περίπτωση εμφάνισης συγχωνεύσεων βέβαιου κέρδους (*merger arbitrage*). Οι συγχωνεύσεις βέβαιου κέρδους είναι μια επενδυτική στρατηγική αντισταθμιστικών αμοιβαίων κεφαλαίων (*hedge fund*) που κερδοσκοπεί, λόγω των διαφορών στη τιμολόγηση των χρηματοοικονομικών προϊόντων που προέρχονται από επιτυχή ολοκλήρωση συγχωνεύσεων και εξαγορών. Η ιδιότητα

αυτή ενώ σε μαθηματικούς όρους έχει βάση, έχει δεχτεί κριτική για τη πρακτικότητά της στον χρηματοοικονομικό κόσμο. Συγκεκριμένα, μία από τις πιο σημαντικές αδυναμίες είναι ότι η *συμμοτονομικότητα* αποτυγχάνει σε έναν κόσμο χωρίς ακίνδυνα περιουσιακά στοιχεία (Pablo Koch-Medina & Cosimo Munari, 2017)²².

1.4. Κλάσεις Μέτρων Κινδύνου

Σε αυτήν την ενότητα θα γίνει αναφορά σε κάποιες από τις δημοφιλέστερες κλάσεις μέτρων κινδύνου που έχουν μελετηθεί διαχρονικά. Ανάλογα τα αξιώματα-ιδιότητες που ικανοποιούν τα μέτρα κινδύνου κατηγοριοποιούνται σε διάφορες κλάσεις.

Αρχικά, αφού το ενδιαφέρον της παρούσας διπλωματικής είναι στην χρηματοοικονομική και αναλογιστική επιστήμη όλα τα μέτρα κινδύνου που θα επισημανθούν είναι *νομισματικά μέτρα κινδύνου*. Κάποιες φορές ο όρος «νομισματικά» θα παραλείπεται διότι θα εννοείται.

Ορισμός 1.4.0. Το νομισματικό μέτρο κινδύνου είναι μια συνάρτηση $\mu: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε για όλες τις θέσεις $X \in \mathcal{X}$ ισχύουν οι ιδιότητες της αναλλοίωτης μεταβατικότητας [I.1] και της αντίστροφης μονοτονίας [I.2].

1.4.1. Συνεκτικά Μέτρα Κινδύνου (Coherent Risk Measures)

Στην αναλογιστική επιστήμη, οι Goovaerts, De Vylder και Haezendonck²³ παρουσίασαν μια πρώτη αξιωματική προσέγγιση στα μέτρα κινδύνου. Οι Artzner et al.⁷ επέκτειναν αυτή τη προσέγγιση στη χρηματοοικονομική επιστήμη και καθόρισαν με μαθηματικό και συνοπτικό τρόπο ορισμένες κοινές αποδεκτές ιδιότητες για ένα αξιόπιστο μέτρο κινδύνου. Ονόμασαν αυτά τα μέτρα κινδύνου *συνεκτικά* και αποτελούν τη βάση για τα ποσοτικά μέτρα κινδύνου. Οι ιδιότητες που ικανοποιεί αυτή η κλάση είναι οι [I.1] - [I.4] που αναφέρθηκαν στην ενότητα 1.3.3. Άμεσα προκύπτει και ο παρακάτω ορισμός:

Ορισμός 1.4.1. Ένα νομισματικό συνεκτικό μέτρο κινδύνου είναι μια απεικόνιση $\rho: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε το ρ να κατέχει τις ιδιότητες της θετικής ομοιογένειας [I.3] και υποπροσθετικότητας [I.4]

1.4.1.1. Τεστ Αντοχής και Συνεκτικά Μέτρα Κινδύνου

Η θεωρία των συνεκτικών μέτρων κινδύνου παρέχει κάποιες ενδιαφέρουσες επιπλοκές με τα τεστ αντοχής (*stress-tests*). Τα τεστ αντοχής²⁴ (*stress tests*) είναι προσομοιώσεις μελλοντικών οικονομικών γεγονότων, που μοντελοποιούν αντίξοα οικονομικά σενάρια (*worst-case scenarios*), σχεδιασμένα για να αξιολογήσουν αν μια τράπεζα ή ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα έχει επαρκή κεφάλαια για να αντέξει τις επιπτώσεις δυνητικών αρνητικών εξελίξεων στην οικονομία.

Τα τεστ αντοχής αποτελούν²⁵ μια βασική διαδικασία που περιέχει το εποπτικό πλαίσιο της Βασιλείας για τις τράπεζες. Συγκεκριμένα, η διαδικασία αυτή είναι υποχρεωτική βάσει του Πυλώνα 1 για τις τράπεζες που χρησιμοποιούν τη μέθοδο των εσωτερικών μοντέλων (*internal-models approach*) για την εκτίμηση του κινδύνου αγοράς και τη μέθοδο IRB (*internal ratings - based approach*) για την εκτίμηση πιστωτικού κινδύνου. Επίσης, γενικά τεστ αντοχής (*general stress tests*) απαιτούνται βάσει του Πυλώνα 2 του ίδιου πλαισίου. Από την άλλη πλευρά, οι ασφαλιστές, όπως αναφέρεται στο πλαίσιο της Φερεγγυότητας 2, πρέπει να έχουν τέτοιο κεφάλαιο ώστε να υπάρχει μονάχα 1 πιθανότητα χρεοκοπίας της ασφαλιστικής εταιρίας σε 200 χρόνια.

Αποδεικνύεται¹⁵ ότι τα αποτελέσματα των (απλών ή γενικών) σεναρίων-τεστ αντοχής, μπορούν να ερμηνευτούν ως συνεκτικά μέτρα κινδύνου. Το αντίστροφο επίσης είναι αληθές, δηλαδή, τα συνεκτικά μέτρα κινδύνου μπορούν να ερμηνευτούν ως αποτελέσματα σεναρίων. Αυτό είναι πολύ χρήσιμο διότι σημαίνει ότι μπορούμε πάντα να εκτιμήσουμε συνεκτικά μέτρα κινδύνου προσδιορίζοντας τα αντίστοιχα σενάρια και στη πορεία να παίρνουμε τον σταθμισμένο με πιθανότητα μέσο όρο ή το ανώτατο όριο (*maxima*) για να προσδιορίσουμε την έκθεσή μας στον κίνδυνο. Τα μόνα που χρειαζόμαστε να γνωρίζουμε είναι τα αποτελέσματα της ζημιάς (τα οποία είναι ποσοστημόρια της ζημιοκατανομής βλέπε ορισμό 1.4.2.1 παρακάτω), τις συναρτήσεις πυκνότητας που θα χρησιμοποιηθούν (οι οποίες δίνουν τις πιθανότητες) και τον τύπο του

συνεκτικού μέτρου κινδύνου που αναζητούμε. Περισσότερες λεπτομέρειες θα αναφερθούν στο κεφάλαιο 2.

1.4.2. Φασματικά Μέτρα Κινδύνου (Spectral Risk Measures)

Η κλάση των φασματικών μέτρων κινδύνου αναπτύχθηκε από τον Acerbi²⁶ και είναι στενά συνδεδεμένη με τα *συνεκτικά μέτρα κινδύνου* και τη *θεωρία αποστροφής κινδύνου* ενός ατόμου-οργανισμού.

Η συμπεριφορά των ατόμων που αποστρέφονται τον κίνδυνο χαρακτηρίζεται από την προτίμησή τους να αποστρέφονται την αβεβαιότητα και τον κίνδυνο και να προτιμούν το βέβαιο εισόδημα με την αντίστοιχη βέβαιη *χρησιμότητα*²⁷. Η συμπεριφορά αυτή εκφράζεται μαθηματικά μέσω *συναρτήσεων χρησιμότητας* οι οποίες είναι συνεχείς, αυστηρά αυξανόμενες και κοίλες συναρτήσεις. Όσο μεγαλύτερη η κοιλότητα της καμπύλης, τόσο μεγαλύτερη θα είναι και η ένταση της αποστροφής του κινδύνου.

Έστω, διάφορα μέτρα κινδύνου M_φ τα οποία είναι σταθμισμένοι μέσοι όροι των ποσοστημορίων της ζημιοκατανομής.

$$M_\varphi = \int_0^1 \varphi(p) q_p dp \quad (1.10)$$

όπου,

- $\varphi(p)$ είναι μια σταθμισμένη συνάρτηση γνωστή ως *φάσμα κινδύνου* ή συνάρτηση αποστροφής κινδύνου η οποία πρέπει να προσδιοριστεί.
- q_p είναι p-ποσοστημόριο της ζημιοκατανομής.

Το M_φ καθορίζει τη κλάση του *βασισμένου σε ποσοστημόριο μέτρου κινδύνου* (*quantile-based risk measure*), και κάθε μεμονωμένο μέτρο κινδύνου σε αυτή τη κλάση χαρακτηρίζεται από τη δική του σταθμισμένη συνάρτηση $\varphi(p)$.

Σε αυτό το σημείο πρέπει να δοθεί ο ορισμός του p-ποσοστημορίου.

Ορισμός 1.4.2.1. Δεδομένης μια συνάρτησης (ζημιο)κατανομής F , η γενικευμένη αντίστροφη (*generalized inverse*) F^- ονομάζεται συνάρτηση

ποσοστημορίου (*quantile function*) της F . Για κάποιο $p \in [0,1]$ το p -ποσοστημόριο της F ορίζεται ως:

$$q_p^-(F) := F^{\leftarrow}(p) = \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq p\}$$
$$q_p^+(F) := \inf \{x \in \mathbb{R} : F(x) > p\} \quad (1.11)$$

Παρατήρηση: Ο διαχωρισμός σε q_p^- και q_p^+ γίνεται μονάχα στην ειδική περίπτωση που δεν είναι συνεχής η γενική αντίστροφη συνάρτηση στο σημείο p . Για λόγους ευκολίας απλά θα αναφέρονται ως q_p στη συνέχεια της εργασίας.

Σημειώνεται, ότι για μια αύξουσα συνάρτηση (*increasing function*) $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η γενικευμένη αντίστροφη της T ορίζεται ως:

$$T^{\leftarrow}(y) := \inf \{x \in \mathbb{R} : T(x) \geq y\} \quad (1.12)$$

Εάν η F είναι συνεχής και αυστηρά αύξουσα, ισχύει ότι $q_p(F) := F^{-1}(p)$, όπου F^{-1} είναι η αντίστροφη (*ordinary inverse*) της F .

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, η ανάλυση έχει σκοπό να συνδέσει τα φασματικά μέτρα κινδύνου με τα συνεκτικά. Συγκεκριμένα, πρέπει να δούμε ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιεί η $\varphi(p)$ ώστε να γίνει το M_φ συνεκτικό μέτρο κινδύνου και συνεπώς να κατέχει τις επιθυμητές ιδιότητες της κλάσης αυτής. Σύμφωνα με Acerbi²⁶ αυτές είναι:

- **Μη-αρνητικότητα (Non-negativity):** $\varphi(p) \geq 0$ για όλα τα $p \in [0,1]$
- **Κανονικότητα (Normalization):** $\int_0^1 \varphi(p) dp = 1$
- **Αύξησης (Increasingness):** $\forall 0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1 \Leftrightarrow \varphi(p_1) \leq \varphi(p_2)$

Τα πρώτα δύο χαρακτηριστικά είναι προφανή, τα βάρη πρέπει να έχουν μη-αρνητικές τιμές και τα σταθμισμένα με πιθανότητα βάρη πρέπει να αθροίζουν στη μονάδα. Το τρίτο είναι το πιο ενδιαφέρον καθώς αντανακλά την αποστροφή κινδύνου και απαιτεί τα βάρη που συνδέονται με μεγαλύτερες ζημιές να είναι

μεγαλύτερα (ή ίσα) με τα βάρη που συνδέονται με χαμηλότερες ζημιές. Εμμέσως, προκύπτει ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 1.4.2.2. Τα φασματικά μέτρα κινδύνου μπορούν να οριστούν ως το υποσύνολο του μέτρου κινδύνου (1.10) που το φάσμα κινδύνου ικανοποιεί τις ιδιότητες της μη-αρνητικότητας, της κανονικότητας και της αύξησης.

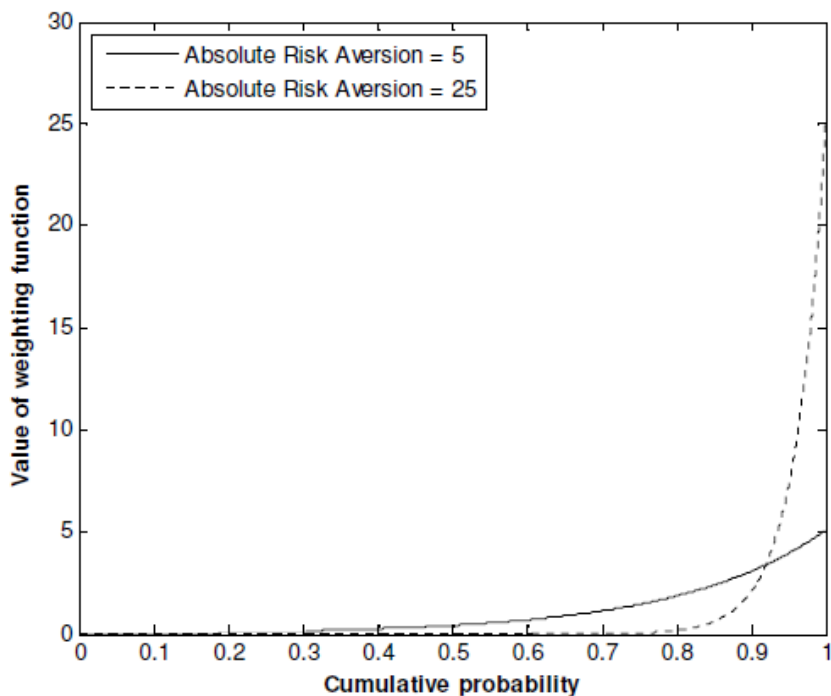
Οι Kusuoka²⁸ και Acerbi²⁶ αποδεικνύουν ότι όλα τα συνεκτικά μέτρα κινδύνου που ικανοποιούν τις δύο επιπλέον ιδιότητες της αμεταβλητότητας και της συμμοτονικής προσθετικότητας είναι και φασματικά μέτρα κινδύνου.

Ακόμα παραμένει το ερώτημα του πώς ακριβώς θα προσδιοριστεί η $\varphi(p)$, δηλαδή, ποια συνάρτηση θα χρησιμοποιηθεί για να εκφραστεί η αποστροφή του κινδύνου ενός ατόμου-οργανισμού. Η απάντηση είναι υποκειμενική αλλά υπάρχουν κάποιες κατευθύνσεις από την οικονομική βιβλιογραφία πάνω στη θεωρία της αποστροφής κινδύνου. Οι Dowd, Cotter και Sorwar²⁹ που ασχολήθηκαν εκτενώς με αυτό το ζήτημα χρησιμοποιούν τις παρακάτω συναρτήσεις:

- *Εκθετική Συνάρτηση Αποστροφής Κινδύνου (Exponential Risk-Aversion Function)*. Η τελική της μορφή είναι η παρακάτω²⁹:

$$\varphi(p) = \frac{ke^{-k(1-p)}}{1-e^{-k}} \quad (1.13)$$

όπου, $k \geq 0$, είναι ο συντελεστής της απόλυτης αποστροφής του κινδύνου.



Γράφημα 1.1 Εκθετική Συνάρτηση Αποστροφής Κινδύνου για $k=5$ και 25 .
 Πηγή: Kevin Dowd, John Cotter & Ghulam Sorwar (2008), *Spectral Risk Measures: Properties and Limitations*

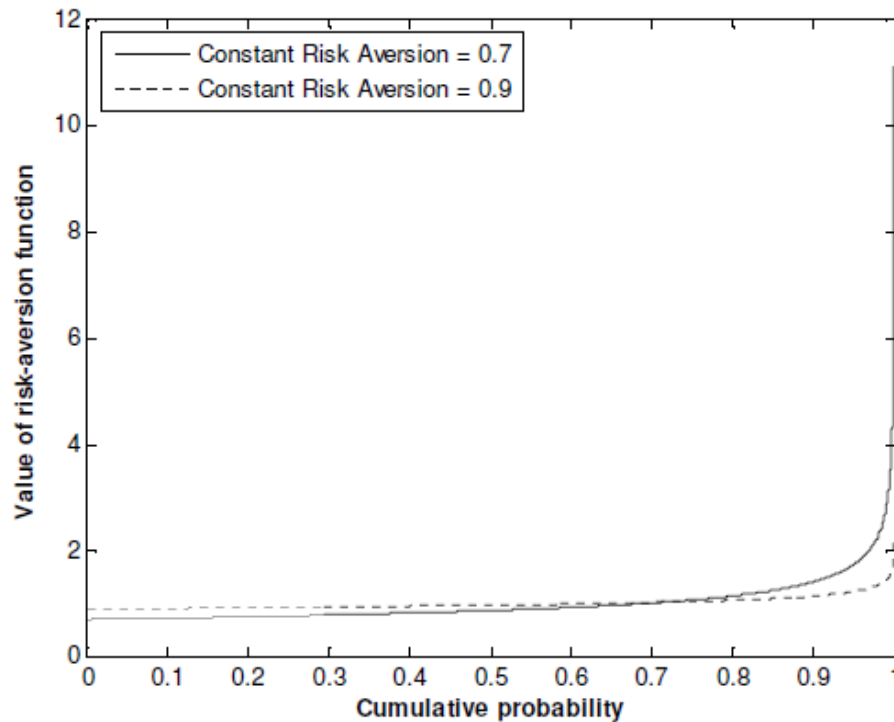
Το παραπάνω γράφημα²⁹ δείχνει τη τιμή της (1.13) για δεδομένες τιμές του συντελεστή k ($k = 5$ και $k = 25$), σε συνάρτηση με την αθροιστική πιθανότητα p . Παρατηρούμε ότι, για μεγαλύτερες τιμές του p (που συνδέονται με μεγαλύτερες ζημιές), τα βάρη είναι μεγαλύτερα και ο ρυθμός αύξησης της $\varphi(p)$ είναι υψηλότερος για μεγαλύτερες τιμές του k .

- *Δυναμική Συνάρτηση Αποστροφής Κινδύνου (Power Risk-Aversion Function)*. Η συνάρτηση αυτή χωρίζεται ανάλογα τις τιμές του σταθερού συντελεστή σχετικής αποστροφής κινδύνου γ .

Για $\gamma < 1$ η τελική της μορφή είναι:

$$\varphi(p) = \gamma(1 - p)^{\gamma-1} \quad (1.14)$$

Για δεδομένες τιμές του συντελεστή γ ($\gamma=0.7$ και $\gamma=0.9$) η (1.14) παίρνει τη παρακάτω μορφή²⁹ σε σχέση με την αθροιστική πιθανότητα p .



Γράφημα 1.2 Δυναμική Συνάρτηση Αποστροφής Κινδύνου για $\gamma=0.7$ και 0.9 .

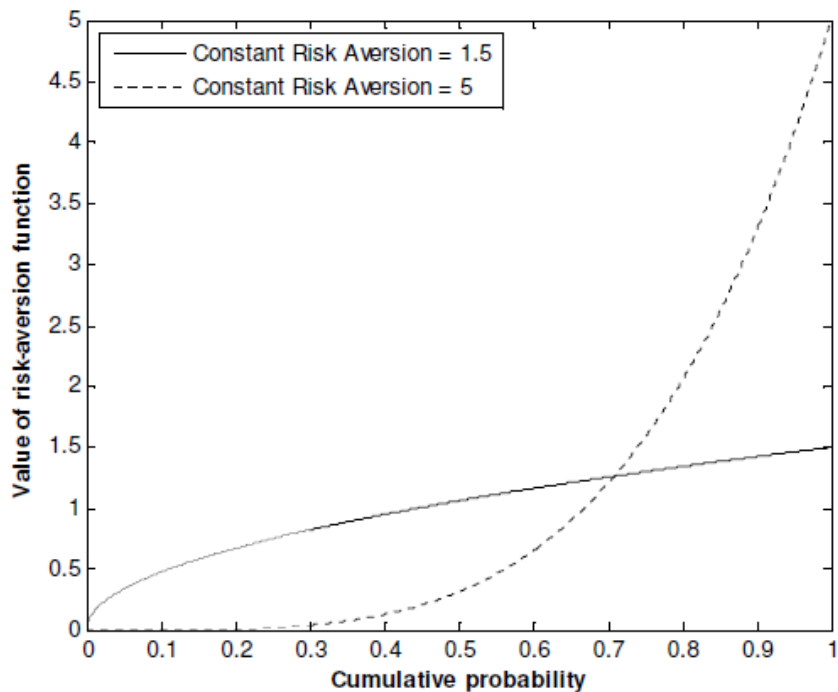
Πηγή: Kevin Dowd, John Cotter & Ghulam Sorwar (2008), *Spectral Risk Measures: Properties and Limitations*

Το Γράφημα 1.2, δείχνει ότι καθώς κινούμαστε δεξιά, η καμπύλη με το μεγαλύτερο γ είναι αρχικά πάνω από την καμπύλη με το χαμηλότερο γ , αλλά μετά βρίσκεται κάτω από αυτή καθώς το p φτάνει σε ένα δεδομένο επίπεδο. Αυτό μεταφράζεται ως εξής: με μεγαλύτερη αποστροφή κινδύνου, δίνεται σχετικά μεγαλύτερο βάρος σε χαμηλότερες ζημιές και σχετικά μικρότερο βάρος σε μεγαλύτερες ζημιές. Συνεπώς, άμα δοθεί αυτή η μορφή $\varphi(p)$ παρόλο που ικανοποιεί τις συνθήκες του Acerbi²⁶ δε θα δώσει ένα αξιόπιστο φασματικό μέτρο κινδύνου²⁹.

Ενώ για $\gamma > 1$ παίρνουμε:

$$\varphi(p) = \gamma p^{\gamma-1} \quad (1.15)$$

Έτσι για $\gamma=1.5$ και $\gamma=5$ έχουμε το παρακάτω διάγραμμα²⁶ της (1.15) σε σχέση με την αθροιστική πιθανότητα p .



Γράφημα 1.3 Δυναμική Συνάρτηση Αποστροφής Κινδύνου για $\gamma=1.5$ και 5.

Πηγή: Kevin Dowd, John Cotter & Ghulam Sorwar (2008), *Spectral Risk Measures: Properties and Limitations*

Σε κάθε περίπτωση, το φάσμα κινδύνου αρχίζει από τη τιμή 0 για $p = 0$ και καταλήγει σε τιμή ίση με το αντίστοιχο γ . Η διαφορά τους είναι στο ότι η $\varphi(p)$ αυξάνεται με φθίνοντα ρυθμό για $\gamma < 2$, ενώ για $\gamma > 2$ η $\varphi(p)$ αυξάνεται με αύξοντα ρυθμό. Εντούτοις, το σχήμα και των δύο καμπυλών είναι ικανοποιητικό.

Τέλος, αφού προσδιοριστεί η κατάλληλη συνάρτηση φάσματος κινδύνου και δοθούν συγκεκριμένες τιμές στους συντελεστές, για να βρεθεί το αντίστοιχο φασματικό μέτρο κινδύνου πρέπει κανείς να αντικαταστήσει και έπειτα να υπολογίσει το μέτρο κινδύνου M_φ μέσω της σχέσης (1.10).

1.4.3. Στρεβλά Μέτρα Κινδύνου (Distortion Risk Measures)

Τα στρεβλά μέτρα κινδύνου έχουν την προέλευσή τους από τη διπλή θεωρία κινδύνου³⁰ (*dual theory risk*) του Yaari (1987). Κάποια χρόνια αργότερα μελετήθηκαν περαιτέρω από τους Denneberg (1990) και Wang (1996) και εφαρμόστηκαν σε διάφορα ασφαλιστικά προβλήματα όπως για παράδειγμα τον καθορισμό των ασφαλίσεων.

Τα μέτρα στρέβλωσης αφορούν την αναμενόμενη ζημιά που προκύπτει μέσω ενός μετασχηματισμού στη συνάρτηση κατανομής της μεταβλητής που περιέχει κίνδυνο, γνωστή και ως *συνάρτηση στρέβλωσης*. Η επιλογή της *συνάρτησης στρέβλωσης* καθορίζει και το μέτρο κινδύνου.

Ορισμός 1.4.3.1. Μια συνάρτηση $g:[0,1] \rightarrow [0,1]$ είναι *συνάρτηση στρέβλωσης* εάν:

- $g(0)=0$ και $g(1)=1$
- η g είναι μια συνεχής και αύξουσα συνάρτηση

Ένας επίσημος ορισμός των στρεβλών μέτρων κινδύνου που υπολογίζονται από ένα μη γραμμικό μετασχηματισμό της συνάρτησης κατανομής είναι ο παρακάτω, σύμφωνα με το Wang³¹:

Ορισμός 1.4.3.2. Το στρεβλό μέτρο κινδύνου $\rho_g(X)$ για μια θέση X που έχει συνάρτηση επιβίωσης $S_X(x)=P(X>x)$ και μια συνάρτηση στρέβλωσης g , ορίζεται ως:

$$\rho_g(X) = \int_{-\infty}^0 [g(S_X(x)) - 1] dx + \int_0^{\infty} g(S_X(x)) dx \quad (1.16)$$

Σημειώνεται ότι³² και τα δύο ολοκληρώματα στην (1.16) είναι καλά ορισμένα και παίρνουν τιμή στο $[0, \infty)$ ή ακόμη και τη τιμή $+\infty$. Δεδομένου ότι τουλάχιστον ένα από τα δύο ολοκληρώματα είναι πεπερασμένο, το αναμενόμενο μέτρο $\rho_g(X)$ είναι καλά ορισμένο και παίρνει τιμή στο $(-\infty, \infty)$ ή απειρίζεται.

Πριν περάσουμε στον προσδιορισμό της συνάρτησης στρέβλωσης g πρέπει να αναφέρουμε κάποιες ιδιότητες που πρέπει να κατέχει αυτή. Μια αξιόπιστη συνάρτηση στρέβλωσης πρέπει να έχει τις ιδιότητες της³²:

- **συνέχειας (continuity)**
- **κοιλότητας (concavity)**
- **διαφορισιμότητας (differentiability)**

Οι Hardy & Wirth (2001)³³ απέδειξαν ότι τα στρεβλά μέτρα κινδύνου $\rho_g(X)$ είναι συνεκτικό εάν και μόνο αν η συνάρτηση στρέβλωσης g είναι κοίλη. Στη συνέχεια οι Gzyl & Mayoral (2006)³⁴ μελέτησαν τη σχέση μεταξύ των φασματικών και στρεβλών μέτρων κινδύνου και βρήκαν ότι εάν η συνάρτηση g είναι κοίλη τότε το ακόλουθο στρεβλό μέτρο κινδύνου είναι και φασματικό.

Διάφορες συναρτήσεις στρέβλωσης έχουν προταθεί με πιο διάσημη τη συνάρτηση Μετασχηματισμού Wang (*Wang Transform*):

Για ένα δεδομένο περιουσιακό στοιχείο X με συνάρτηση κατανομής $F(x)=P(X\leq x)$, ο μετασχηματισμός Wang θα παράγει μια προσαρμοσμένη σε κίνδυνο συνάρτηση κατανομής $g(F(x))=F^*(x)$. Η μορφή του μετασχηματισμού Wang θα είναι:

$$g(F(x)) = F^*(x) = \Phi[\Phi^{-1}(F(x)) + \lambda] \quad (1.17)$$

όπου Φ είναι η τυπική κανονική συνάρτηση κατανομής και λ είναι ένας όρος κινδύνου για τη τιμή της αγοράς (*market price of risk term*). Το λ , αντανακλά το επίπεδο του συστημικού κινδύνου (*systemic risk*), ο οποίος αναφέρεται στο κίνδυνο κατάρρευσης ολόκληρου του χρηματοπιστωτικού συστήματος ή ολόκληρης της αγοράς. Αυτή η συνάρτηση στρέβλωσης είναι παντού συνεχής και διαφορίσιμη και κατά συνέπεια παράγει συνεκτικά μέτρα κινδύνου¹⁵.

Ο Wang (2002b)³⁵ πρότεινε μια χρήσιμη γενίκευση του μετασχηματισμού Wang που έχει την ακόλουθη μορφή:

$$g(F(x)) = F^*(x) = \Phi[b\Phi^{-1}(F(x)) + \lambda] , \text{ με } 0 < b < 1 \quad (1.18)$$

Ο Wang υποστήριξε ότι αυτή η μορφή μπορεί να προσαρμόσει τον «κίνδυνο ούρας» ή κίνδυνο καταστροφών.

Τέλος, μια τρίτη μορφή δίνεται από τον Wang (2002b)³⁵ που αντικαθιστά την συνάρτηση Φ της τυπικής κανονικής με τη συνάρτηση t-κατανομής Student. Μια t-κατανομή Student χρησιμοποιείται όταν η διασπορά και η τυπική απόκλιση μιας τυχαίας μεταβλητής είναι άγνωστη (σε αντίθεση με τη κανονική κατανομή) και πρέπει να κάνουμε εκτιμήσεις που σχετίζονται με πιθανά μελλοντικά αποτελέσματα. Η νέα μορφή του μετασχηματισμού Wang είναι η παρακάτω:

$$g(F(x)) = F^*(x) = Q[\Phi^{-1}(F(x)) + \lambda] \quad (1.19)$$

Όπου Q είναι μια t-κατανομή Student με ν βαθμούς ελευθερίας. Με αυτόν τον τρόπο προσαρμόζεται η αβεβαιότητα που χαρακτηρίζει τις τιμές της αγοράς.

Η συνάρτηση πυκνότητας της t-κατανομής Student:

$$f(t) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\sqrt{\nu\pi} \Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{\frac{-(\nu+1)}{2}} \quad (1.20)$$

όπου ν είναι ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας και Γ είναι η συνάρτηση Γάμμα.

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, θα ορίσουμε τα μέτρα κινδύνου 'Αξία σε Κίνδυνο' (*Value-at-Risk*) και 'Αναμενόμενο Έλλειμμα' (*Expected Shortfall*), θα δούμε τις ιδιότητες που κατέχουν αυτά, καθώς και θα συγκριθούν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ποσοτικά Μέτρα Κινδύνου

2.1. Η Αξία σε Κίνδυνο (VaR)

Ένα από τα πιο δημοφιλή και ευρέως εφαρμόσιμο μέτρο κινδύνου είναι η λεγόμενη *Αξία σε Κίνδυνο (Value at Risk)* ή σε συντομογραφία *VaR*.

2.1.1. Σύντομη Ιστορική Αναδρομή

Η πρώτη έμμεση αναφορά του *VaR* έγινε από το χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης το 1922 που υποχρέωσε τις επιχειρήσεις που συμμετείχαν σε αυτό να κατέχουν κεφάλαιο ίσο με το 10% των περιουσιακών τους στοιχείων. Στη διάρκεια του 1950, οι θεωρητικοί της *θεωρίας χαρτοφυλακίου (portfolio theory)* όπως ο Markowitz και Roy ανέπτυξαν τη μαθηματική μεθοδολογία για το μέτρο *VaR*.

Στα τέλη του 1970 και κατά τη διάρκεια του 1980, τα μεγαλύτερα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα αναζητούσαν εσωτερικά μοντέλα τα οποία θα ποσοτικοποιούσαν ως σύνολο τους ενδεχόμενους κινδύνους που αντιμετώπιζαν. Το πιο διάσημο εσωτερικό μοντέλο αναπτύχθηκε από τη JP Morgan το 1994 το οποίο χρησιμοποιούσε το μέτρο κινδύνου *VaR* σε καθημερινή βάση και μεταφραζόταν ως «η μέγιστη πιθανή ζημιά του χαρτοφυλακίου κατά την επόμενη μέρα κλεισίματος».

Τέλος, η μεγάλη αναγνώριση της *αξίας σε κίνδυνο* έγινε όταν η επιτροπή της *Βασιλείας* ενέκρινε τη χρήση της για τον καθορισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων των τραπεζών ανάλογα με το χρηματοοικονομικό κίνδυνο που αντιμετωπίζουν.

2.1.2. Ορισμός

Η αξία σε κίνδυνο είναι ένα απλό, συνοπτικό, στατιστικό ποσοτικό μέτρο των πιθανών ζημιών μιας θέσης ή ενός χαρτοφυλακίου. Απεικονίζει όλους τους κινδύνους μιας θέσης ή ενός χαρτοφυλακίου σε έναν αριθμό και μεταφράζεται ως η χειρότερη ζημιά, για δεδομένο χρονικό ορίζοντα, της οποίας η τιμή της ζημιάς, θα ξεπεραστεί μονάχα με μια μικρή προκαθορισμένη πιθανότητα (επίπεδο σημαντικότητας).

Για παράδειγμα, το 1% *Value-at-Risk* ορίζεται ως το ποσό των χρημάτων όπου κάποιος μπορεί να είναι 99% σίγουρος ότι ξεπερνάει οποιαδήποτε άλλη ζημιά για ένα χρονικό διάστημα (π.χ. της επόμενης μέρας). Στατιστικά, αυτό μεταφράζεται ως το 1% ποσοστημόριο επειδή το 1% των αποτελεσμάτων είναι μεγαλύτερο και το 99% μικρότερο από το ποσό αυτό.

Ορισμός 2.1.2.1. Δεδομένης μια θέσης $X \in \mathcal{X}$ και μιας πιθανότητας $\alpha \in [0,1]$ ορίζουμε:

$$VaR_{\alpha}(X) = -\inf \{x : P(X \leq x) > \alpha\} \quad (2.1)$$

Σημειώνουμε⁷ ότι ο ορισμός 2.1.2.1. αναφέρεται στο ποσό του επιπρόσθετου κεφαλαίου όπου συνεπάγει ένας υπολογισμός VaR_{α} . Επίσης, επιλέχτηκε το $VaR_{\alpha}(X)$ να είναι ίσο με το ποσοστημόριο $-q_{\alpha}^{+}(X)$ και όχι με το $-q_{\alpha}^{-}(X)$ (παρόλο που στην πράξη πολλές φορές αυτά ταυτίζονται) για να είμαστε συνεπείς με τη βιβλιογραφία⁷.

Εναλλακτικά, η Αξία σε Κίνδυνο μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή:

$$VaR_{\alpha}(X) = \inf \{m : P(X + m < 0) \leq \alpha\} \quad (2.2)$$

Ακολουθώντας, με τη βοήθεια της (2.2) μπορούμε να κατασκευάσουμε το σύνολο αποδοχής για το VaR_{α} :

$$A_{VaR_{\alpha}} = \{X \in \mathcal{X} : P(X < 0) \leq \alpha\} = \{X \in \mathcal{X} : VaR_{\alpha}(X) \leq 0\} \quad (2.3)$$

2.1.3. Ιδιότητες και κριτική του VaR

Το μέτρο κινδύνου *αξία σε κίνδυνο* έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

- 1) Εάν $X \geq 0$, τότε το $VaR_\alpha(X) \leq 0$
- 2) Εάν $X \geq Y$, τότε $VaR_\alpha(X) \leq VaR_\alpha(Y)$
- 3) Για $\lambda \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\lambda \geq 0$, ισχύει ότι $VaR_\alpha(\lambda X) = \lambda VaR_\alpha(X)$
- 4) Για ακίνδυνο ποσό $k \in \mathbb{R}$, προκύπτει ότι $VaR_\alpha(X + k) = VaR_\alpha(X) - k$

Δηλαδή, από τα παραπάνω προκύπτει ότι η *αξία σε κίνδυνο* είναι ένα *μονότονο, ομογενές και αναλλοίωτο μεταβατικά* μέτρο κινδύνου.

Η κριτική που έχει δεχτεί το *VaR* για το αν είναι ένα αξιόπιστο μέτρο κινδύνου εστιάζεται στα παρακάτω δύο προβλήματα:

- Δεν μας πληροφορεί για τη **σφοδρότητα** των ζημιών που ξεπερνάνε τη τιμή του *VaR*.

Η αδυναμία του να συνυπολογίσει τα ακραία σενάρια μπορεί να δώσει λάθος συμπεράσματα. Για παράδειγμα, εάν μια επένδυση με μεγάλη αναμενόμενη απόδοση που όμως ενέχει μεγάλη πιθανότητα σοβαρής ζημιάς, μια απόφαση βασισμένη στους υπολογισμούς του *VaR* μπορεί να ωθήσει τον επενδυτή να κάνει την επένδυση εφόσον οι μεγαλύτερες ζημιές δεν επηρεάζουν το *VaR*. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αφήσει τον επενδυτή εκτεθειμένο σε πολύ υψηλούς κινδύνους.

- Δεν τηρεί την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας και κατά συνέπεια δεν είναι *συνεκτικό* μέτρο κινδύνου (βλ. Παράδειγμα 2.1.). Συγκεκριμένα, το *VaR* είναι υποπροσθετικό μόνο στην περίπτωση¹⁵ που η ζημιοκατανομή είναι ελλειπτικά κατανεμημένη κάτι το οποίο δε συμβαίνει συχνά στον πραγματικό κόσμο.

Παράδειγμα 2.1. Υποθέτουμε ότι μια τράπεζα δανείζει σε μια Εταιρεία Α 100.000 ν.μ. με πιθανότητα αθέτησης του δανείου 0,8%. Επίσης, υποθέτουμε

ότι η εταιρεία A είτε αθετεί ολόκληρο το ποσό δανείου είτε δε το αθετεί. Έστω X_1 το ποσό της αθέτησης του χαρτοφυλακίου. Τότε έχουμε:

$$X_1 = \begin{cases} -100.000 \text{ ν.μ.}, & \text{εάν η Εταιρεία A αθετήσει} \\ 0 \text{ ν.μ.}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.4)$$

Έτσι η κατανομή της X_1 είναι διακριτή και ισχύει ότι:

$$P(X_1 = -100.000 \text{ ν.μ.}) = 0,008 \quad \text{και} \quad P(X_1 = 0 \text{ ν.μ.}) = 0,992 \quad (2.5)$$

Για επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0,01$ το VaR του χαρτοφυλακίου (που περιέχει μόνο αυτό το δάνειο) είναι:

$$\text{VaR}_{0,01}(X_1) = -\inf\{x: P(X_1 \leq x) > 0,01\} = 0 \quad (2.6)$$

Εάν η τράπεζα είχε δανείσει 50.000 ν.μ. στην Εταιρεία A και 50.000 ν.μ. σε μια Εταιρεία B, όπου κάθε εταιρεία έχει την ίδια πιθανότητα αθέτησης 0.8% και, όπως και προηγουμένως, είτε αθετούν ολόκληρο το ποσό δανείου είτε δε το αθετούν, ορίζοντας με X_2 το ποσό αθέτησης, έχουμε:

$$X_2 = \begin{cases} -100.000 \text{ ν.μ.}, & \text{εάν και οι δύο Εταιρείες αθετήσουν} \\ -50.000 \text{ ν.μ.}, & \text{εάν κάποια Εταιρεία αθετήσει} \\ 0 \text{ ν.μ.}, & \text{εάν καμία απο τις Εταιρείες δεν αθετήσει} \end{cases} \quad (2.7)$$

Η κατανομή της X_2 είναι η εξής:

$$P(X_2 = -100.000 \text{ ν.μ.}) = 0,000064, \quad P(X_2 = -50.000 \text{ ν.μ.}) = 0,016 \quad \text{και} \\ P(X_2 = 0 \text{ ν.μ.}) = 0,983936 \quad (2.8)$$

Για το ίδιο επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=0,01$ το VaR του χαρτοφυλακίου είναι:

$$\text{VaR}_{0,01}(X_2) = -\inf\{y : P(X_2 \leq y) > 0,01\} = 50.000 \text{ ν.μ.} \quad (2.9)$$

Με το παράδειγμα αυτό³⁶, αποδεικνύεται ότι η διαφοροποίηση των περιουσιακών στοιχείων οδηγεί σε μεγαλύτερες τιμές του VaR και συνεπώς

παραβιάζεται η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας. Εκτός από την θεωρητική απόδειξη, γεγονότα δείχνουν ότι και στον πραγματικό κόσμο συμβαίνει αυτό. Για παράδειγμα, διαχειριστές κινδύνου έχουν παρατηρήσει κάποιες φορές ότι όταν το χαρτοφυλάκιο του Λονδίνου συνδυαστεί με το χαρτοφυλάκιο της Νέας Υόρκης και σχηματιστεί ένα ενιαίο χαρτοφυλάκιο, το συνολικό VaR αυξάνεται αντί για να μειώνεται³⁷.

2.1.4. VaR και Εποπτικά Πλαίσια

Ανεξάρτητα από την κριτική που του έχει ασκηθεί, το μέτρο κινδύνου “Αξία σε Κίνδυνο” (VaR) είναι κυρίαρχο στα εποπτικά πλαίσια της Βασιλείας και της Φερεγγυότητας. Σε αυτήν την υποενότητα θα δούμε τη φόρμουλα υπολογισμού του εποπτικού κεφαλαίου για το κίνδυνο αγοράς στις τράπεζες υπό το καθεστώς της Βασιλείας II και III. Τέλος, θα αναφέρουμε τη φόρμουλα υπολογισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων φερεγγυότητας για τις ασφαλιστικές εταιρείες.

Βασιλεία II: the New Capital Framework

Υπό αυτό το πλαίσιο, η επιβάρυνση κεφαλαίου (ή *Market Risk Capital, MRC*) για το χαρτοφυλάκιο συναλλαγών για μια συγκεκριμένη μέρα t για τις τράπεζες που χρησιμοποιούν τη προσέγγιση των εσωτερικών μοντέλων πρέπει να υπολογίζεται από την παρακάτω φόρμουλα:

$$MRC_t(X) = \max \left\{ z \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_a(X_{t-i}), VaR_a(X_{t-1}) \right\} \quad (2.10)$$

όπου VaR_t είναι το VaR τη μέρα t και το οποίο συγκρίνεται με το κλιμακωμένο, επί τον εποπτικά καθορισμένο συντελεστή z ($z \geq 3$), κατά μέσο όρο VaR των προηγούμενων 60 ημερών.

Σημειώνεται ότι το παραπάνω μέτρο κινδύνου δεν είναι *συνεκτικό* μέτρο κινδύνου καθώς είναι το μέγιστο δύο *Value-at-Risk* μέτρων, όπου αυτά δεν κατέχουν την ιδιότητα της *υποπροσθετικότητας*.

Βασιλεία III: the Liquidity Coverage Ratio & Liquidity Risk Monitoring Tools

Η οικονομική κρίση που άρχισε το 2007/2008 έκανε αναγκαία τη τροποποίηση του μέτρο κινδύνου της *Βασιλείας II* στο παρακάτω μέτρο της *Βασιλείας III*:

$$MRC'_t(X) = \max \left\{ \frac{z}{60} \sum_{i=1}^{60} VaR_a(X_{t-i}), VaR_a(X_{t-1}) \right\} \\ + \max \left\{ sVaR_a(X_{t-1}), \frac{l}{60} \sum_{i=1}^{60} sVaR_a(X_{t-i}) \right\} \quad (2.11)$$

όπου $sVaR_a$ είναι το *stressed VaR*, δηλαδή το *Value-at-Risk* μέτρο κινδύνου που υπολογίζεται υπό το σενάριο ότι η χρηματοοικονομική αγορά είναι σε ύφεση όπως στην περίπτωση της πρόσφατης οικονομικής κρίσης. Ο δεύτερος αυτός όρος προστέθηκε για να αντισταθμίσει τη *προκυκλικότητα*. Ως *προκυκλικότητα*⁸⁷ αναφερόμαστε στη συμβολή του χρηματοπιστωτικού συστήματος στη μεγέθυνση των κυκλικών οικονομικών διακυμάνσεων και στη δημιουργία αστάθειας στον χρηματοοικονομικό τομέα. Η *προκυκλικότητα* του χρηματοπιστωτικού συστήματος δημιουργεί ενδογενείς πιστωτικούς κύκλους, δηλαδή αύξηση των πιστώσεων σε περιόδους οικονομικής άνθησης και μείωση των πιστώσεων σε περιόδους ύφεσης.

Πάλι το μέτρο κινδύνου που περιγράφεται στη (2.11) δεν είναι *συνεκτικό*, καθώς είναι το άθροισμα δύο *VaR*.

Φερεγγυότητα II (Solvency II)

Η *Φερεγγυότητα II* έχει ως σκοπό να εγγυηθεί ότι οι ασφαλιστικές και αντασφαλιστικές εταιρείες έχουν επαρκές κεφάλαιο ώστε να μειωθεί ο κίνδυνος και οι ζημιές των εταιρειών αυτών, να προστατέψει τους ασφαλισμένους και γενικά να παρέχει μια οικονομική σταθερότητα στον ασφαλιστικό κλάδο.

Οι *Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Φερεγγυότητας (Solvency Capital Requirement)* είναι οι κεφαλαιακές απαιτήσεις που ορίζει το πλαίσιο της *Φερεγγυότητας II*. Το οικονομικό κεφάλαιο αυτό, πρέπει να καλύψει όλους τους πιθανούς κινδύνους που μπορεί να έρθει αντιμέτωπη μια εταιρεία. Σύμφωνα με το *EIOPA*³⁹, η βασική φόρμουλα υπολογισμού του *SCR* αποτελείται από κατηγορίες ακόμα και υποκατηγορίες του συνολικού κινδύνου όπου η εταιρεία είναι εκτεθειμένη. Για κάθε τέτοια κατηγορία ή υποκατηγορία καθορίζεται μια κεφαλαιακή απαίτηση

και αυτές συσσωρεύονται μέσω πινάκων συσχέτισης (correlation matrices) ώστε να παραχθεί η τελική συνολική απαίτηση.

Οι *Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Φερεγγυότητας*³⁹ (*SCR*) για τις ασφαλιστικές και αντασφαλιστικές επιχειρήσεις πρέπει να αντιστοιχούν σε αξία σε κίνδυνο των βασικών ιδίων κεφαλαίων ασφαλιστικής ή αντασφαλιστικής επιχείρησης με επίπεδο εμπιστοσύνης 99,5% για μια περίοδο ενός έτους.

Η βασική φόρμουλα υπολογισμού του *SCR* δίνεται από:

$$\text{Basic SCR} = \sqrt{\sum_i \sum_j \text{Corr} * \text{SCR}_i * \text{SCR}_j} \quad (2.12)$$

όπου, *Corr* είναι ο συντελεστής συσχέτισης και *SCR* υποδηλώνει το απαιτούμενο κεφάλαιο για τις κατηγορίες κινδύνων *i, j*.

Τα *SCR*, πρέπει να καλύπτουν, τουλάχιστον, τους ακόλουθους αναλαμβανόμενους κινδύνους⁴⁰:

1. Ασφάλιση γενικής φύσεως
2. Ασφάλιση ζωής
3. Ασφάλιση ασθένειας
4. Τον κίνδυνο αγοράς
5. Τον πιστωτικό κίνδυνο
6. Τον λειτουργικό κίνδυνο, ο οποίος περιλαμβάνει νομικούς κινδύνους και αποκλείει κινδύνους που απορρέουν από στρατηγικές αποφάσεις, καθώς και τους κινδύνους φήμης.

Οι συσχετίσεις στη φόρμουλα (2.12) βασίζονται στις παρακάτω υποθέσεις:

- Οι κατανομές των κινδύνων είναι γραμμικά εξαρτημένες
- Οι παράμετροι συσχέτισης διαλέγονται με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτευχθεί η καλύτερη προσέγγιση του 99,5 % *VaR* για το συνολικό κεφάλαιο απαίτησης σε περίπτωση μη κανονικών κατανομών

Οι δύο αυτές υποθέσεις σπάνια αντιπροσωπεύουν πλήρως τον πραγματικό κόσμο. Οι γραμμικές συσχετίσεις δεν είναι πάντα αρκετές για να περιγράψουν τον βαθμό εξάρτησης μεταξύ των κατανομών και συνήθως οι κίνδυνοι δεν είναι κανονικά κατανομημένοι. Σε αυτή τη περίπτωση, η χρήση της *Αξίας σε Κίνδυνο*

μπορεί να υποεκτιμά ή να υπερεκτιμά το ποσό του *SCR* σε σχέση με τους υποκείμενους κινδύνους.

2.2. Το Αναμενόμενο Έλλειμμα (ES)

Τα μειονεκτήματα της αξίας σε κίνδυνο έρχεται να καλύψει το μέτρο κινδύνου *Αναμενόμενο Έλλειμμα (Expected Shortfall)*, ή απλά *ES*, που αναπτύχθηκε από τους Artzner et al.³⁶ (1997) και Delbaen⁴¹ (2002).

Είναι ένα πολλά υποσχόμενο μέτρο κινδύνου αφού γίνονται αναφορές ότι στο επικείμενο πλαίσιο της *Βασιλείας IV* θα αντικαταστήσει το *VaR* για την μέτρηση του κινδύνου αγοράς. Το *ES* θα είναι σε θέση να ποσοτικοποιεί τους «ακραίους» κινδύνους και θα πληροφορεί τις τράπεζες για τα επαρκή κεφάλαια που θα πρέπει να έχουν στη διάθεση τους σε περιόδους υψηλών διαταραχών της αγοράς.

2.2.1. Ορισμός

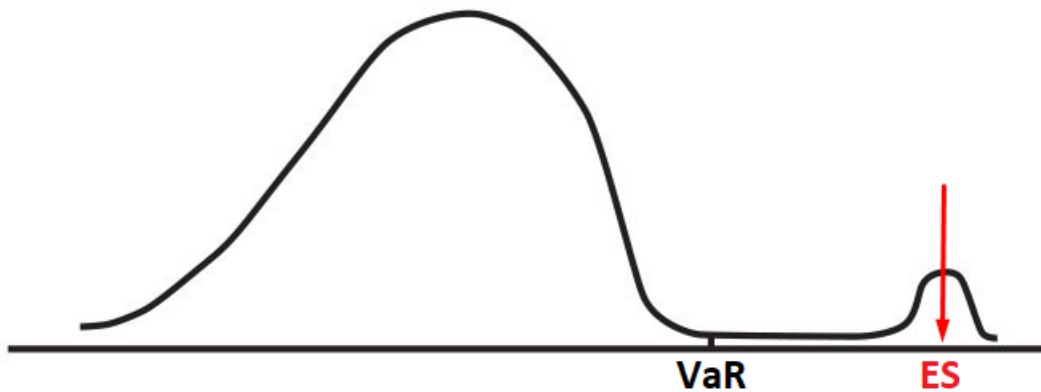
Όπως είδαμε στην υποενότητα 2.1. το μέτρο κινδύνου *Value-at-Risk* δεν είναι υποπροσθετικό και αγνοεί τον «κίνδυνο ουράς» καθώς απαντάει στην ερώτηση:

Ποιά είναι η μικρότερη πιθανή ζημιά στα α 100% χειρότερα σενάρια του χαρτοφυλακίου;

Το αναμενόμενο έλλειμμα (*ES*) έρχεται να απαντήσει στην ερώτηση:

Ποιά είναι η αναμενόμενη ζημιά η οποία συμβαίνει στα α 100% χειρότερα σενάρια στο χαρτοφυλάκιο μας;

Η ερώτηση αυτή είναι πιο λογική, καθώς ένα μέτρο κινδύνου που απαντάει στην ερώτηση αυτή, μας ενημερώνει σε μεγαλύτερο βαθμό για την έκθεση κινδύνου της θέσης μας. Εικονικά, η διαφορά τους μπορεί να παρουσιαστεί από το Γράφημα 2.1 :



Γράφημα 2.1 Η διαφορά της Αξίας σε Κίνδυνο με το Αναμενόμενο Έλλειμμα.

Το *VaR* σε αυτή τη περίπτωση «κρύβει» πληροφορία και αφήνει τους επενδυτές ή οποιαδήποτε εταιρεία εκτεθειμένους σε μεγάλο κίνδυνο. Αντίθετα, το *ES* είναι πιο κατάλληλο για να εκτιμήσει τον κίνδυνο και δεν τον υποεκτιμά.

Ορισμός 2.2.1.1. Δεδομένης μια θέσης $X \in \mathcal{X}$, για $\alpha \in [0,1]$ και για κάποιο $p \in (0,\alpha]$ ορίζουμε με τη βοήθεια της γενικής αντίστροφης:

$$ES_{\alpha}(X) = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} F^{-}(p) dp \quad (2.13)$$

Το *Expected Shortfall* μπορεί, εναλλακτικά, να οριστεί με τη παρακάτω⁴² συνάρτηση κυρτότητας:

Ορισμός 2.2.1.2. Δεδομένης μια θέσης $X \in \mathcal{X}$ και $\alpha \in [0,1]$ το αναμενόμενο έλλειμμα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$ES_{\alpha}(X) = TCE_{\alpha}(X) + (\lambda - 1)(TCE_{\alpha}(X) - VaR_{\alpha}(X)) \quad (2.14)$$

όπου,

- *TCE* είναι το *Tail Conditional Expectation* και ισούται με:

$$TCE_{\alpha}(X) = -E[X | X \leq q_{\alpha}(X)] \quad (2.15)$$

- $\lambda = \frac{P(X \leq q_{\alpha})}{\alpha}$ (2.16)

Σημειώνεται ότι όταν η κατανομή κερδών/ζημιών της θέσης μας είναι *συνεχής*, τότε :

$$ES_{\alpha}(X) = TCE_{\alpha}(X) \quad (2.17)$$

Αυτό διότι σε περίπτωση συνέχειας ισχύει ότι $P(X \leq q_{\alpha}) = \alpha$ και σημαίνει ότι το TCE μπορεί να απαντήσει στην ερώτηση που απαντάει το ES . Σε περίπτωση όμως που δεν είναι συνεχής η κατανομή, το TCE δεν είναι υποπροσθετικό⁴³.

Το σύνολο αποδοχής για το ES με βάση τον παραπάνω ορισμό (2.13) και τον γενικό ορισμό του συνόλου αποδοχής των μέτρων κινδύνου είναι το παρακάτω:

$$A_{ES_{\alpha}} = \left\{ X \in \mathcal{X} : \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} F^{\leftarrow}(p) dp > 0 \right\} = \left\{ X \in \mathcal{X} : ES_{\alpha}(X) \leq 0 \right\} \quad (2.18)$$

Τέλος, το ES αποτελεί ένα υποσύνολο του VaR , οπότε, και ισχύει η παρακάτω σχέση $A_{ES_{\alpha}} \subset A_{VaR_{\alpha}}$.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί θα δούμε μια απλή εφαρμογή των μέτρων κινδύνου *Αξία σε Κίνδυνο* και *Αναμενόμενο Έλλειμμα*.

Παράδειγμα 2.2. Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο όπου η συνάρτηση ζημιών της θέσης μας X ακολουθεί τη τυπική κανονική κατανομή και για $\alpha=0.5$, $\alpha=0.1$, $\alpha=0.05$ και $\alpha=0.01$ θέλουμε να εκτιμήσουμε το VaR και το ES .

Πριν μελετήσουμε το παραπάνω παράδειγμα, ας παρουσιάσουμε τους γενικούς τύπους για την εκτίμηση του VaR και του ES υπό τη συνθήκη κανονικότητας.

Γενικά, όταν η κατανομή ζημίας της θέσης είναι κανονικά κατανομημένη, δηλαδή $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, το *Value-at-Risk* με $\alpha \in [0,1]$ μπορεί να εκτιμηθεί από τον εξής τύπο⁴⁴:

$$VaR_{\alpha}(X) = -(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)) \quad (2.19)$$

όπου μ είναι η μέση τιμή, σ η τυπική απόκλιση και Φ^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής.

Όντως, η (2.19) μπορεί να αποδειχθεί ως εξής: Η κανονική κατανομή είναι συνεχής και αυστηρά αύξουσα οπότε από τον ορισμό της *Αξίας σε Κίνδυνο* και της γενικής αντίστροφης ισχύει ότι:

$$VaR_\alpha(X) = -q_\alpha(X) = -F_X^{-1}(\alpha) \quad (2.20)$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι $F_X^{-1}(\alpha) = \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)$ ή διαφορετικά ότι $F_X(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)) = \alpha$

$$\begin{aligned} F_X(\mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)) &= P(X \leq \mu + \sigma\Phi^{-1}(\alpha)) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \Phi^{-1}(\alpha)\right) = \\ &= P(Z \leq \Phi^{-1}(\alpha)) = \Phi(\Phi^{-1}(\alpha)) = \alpha \end{aligned} \quad (2.21)$$

Στην συνέχεια, θα αποδείξουμε ότι η εκτίμηση του μέτρου κινδύνου *Αναμενόμενο Έλλειμμα (ES)* σε περίπτωση κανονικής κατανομής δίνεται από⁴³:

$$ES_\alpha(X) = -\mu + \sigma \frac{\varphi(\Phi^{-1}(\alpha))}{\alpha} \quad (2.22)$$

όπου φ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής κατανομής.

Όντως από τον ορισμό του *Expected Shortfall* και επειδή έχουμε *συνεχή* κατανομή έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X) &= -\frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha F^{-1}(p) dp = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_p(X) dp = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha -(\mu + \sigma\Phi^{-1}(p)) dp = -\frac{\mu}{\alpha} \int_0^\alpha dp + \frac{\sigma}{\alpha} \int_0^\alpha -\Phi^{-1}(p) dp \end{aligned} \quad (2.23)$$

Αν θέσουμε με, $p = \Phi(u)$ συνεπάγεται ότι $u = \Phi^{-1}(p)$ και $dp = \varphi(u)du$, όπου $\varphi(u)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυπικής κανονικής με τύπο:

$$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\left(\frac{-u^2}{2}\right)} \quad (2.24)$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της τυπικής κανονικής κατανομής $\varphi'(u) = -u\varphi(u)$ έχουμε:

$$\int_0^\alpha -\Phi^{-1}(p) dp = \int_{-\Phi^{-1}(0)}^{\Phi^{-1}(\alpha)} -\Phi^{-1}(\Phi(u))\varphi(u) du = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\alpha)} -u\varphi(u) du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\alpha)} \varphi'(u) du = [\varphi(u)]_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\alpha)} = \varphi(\Phi^{-1}(\alpha)) \quad (2.25)$$

Με αντικατάσταση της (2.25) στην (2.23), προκύπτει εύκολα η (2.24).

Είμαστε έτοιμοι τώρα, να περάσουμε στην επίλυση του παραδείγματος 2.2. Αφού η ζημιοκατανομή της θέσης είναι η τυπική κανονική κατανομή ισχύει ότι $X \sim N(0,1)$.

Συνεπώς, για $\alpha=0,05$, $\mu=0$ και $\sigma=1$ έχουμε την αξία σε κίνδυνο:

$$VaR_{0,05}(X) = -\Phi^{-1}(0,05) = 1,645 \text{ ν. μ.} \quad (2.26)$$

Και το αναμενόμενο έλλειμμα:

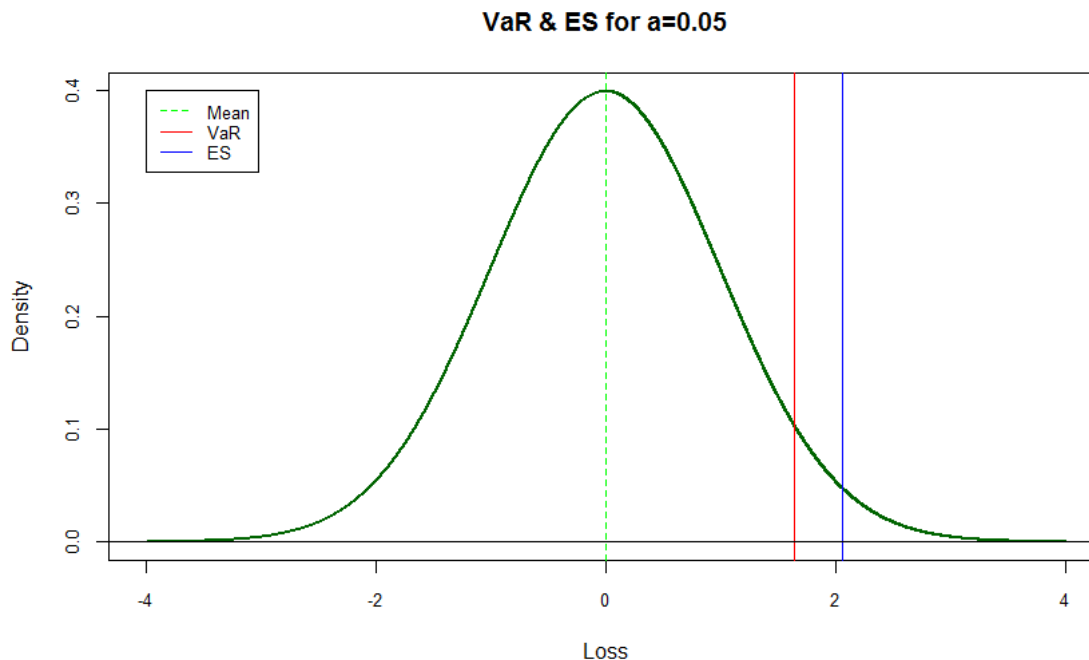
$$ES_{0,05}(X) = \frac{\varphi(\Phi^{-1}(0,05))}{0,05} = \frac{\varphi(-1,645)}{0,05} = 2,063 \text{ ν. μ.} \quad (2.27)$$

Ακολουθούμε αντίστοιχη διαδικασία και για τις υπόλοιπες τιμές του α . Έτσι, καταλήγουμε στον παρακάτω πίνακα που περιέχει τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, το VaR , το ES και την διαφορά αυτών (σε απόλυτη τιμή) για τις διάφορες τιμές του α .

α	Σ.Π.Π.	VaR	ES	VaR-ES
0.50	0.3989423	0	0.7978846	0.7978846
0.10	0.1754983	1.281552	1.754983	0.4734318
0.05	0.103156	1.644854	2.062713	0.4178592
0.01	0.02665214	2.326348	2.665214	0.3388663

Πίνακας 2.1 Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, το VaR , το ES και η απόλυτη διαφορά των VaR και ES για διάφορες τιμές του α και για κανονική κατανομή.

Για $\alpha=0.05$ έχουμε το παρακάτω γράφημα:



Γράφημα 2.2 Η μέση τιμή, το VaR και το ES για κανονική κατανομή και $\alpha=0.05$.

Όπως κανείς παρατηρεί από τον πίνακα και το γράφημα, όσο πιο χαμηλά βρίσκεται η ουρά για τη συγκεκριμένη κατανομή, τόσο πιο κοντά τείνουν να είναι τα μέτρα κινδύνου μεταξύ τους (μικρή η απόκλισή τους).

2.2.2. Ιδιότητες

Το αναμενόμενο έλλειμμα όπως και η αξία σε κίνδυνο κατέχει τις ιδιότητες της μονοτονίας, ομογένειας και της αναλλοίωτης μεταβατικότητας. Στο σημείο που διαφέρει και «υπερτερεί» είναι ότι κατέχει επιπλέον την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας και κατά συνέπεια είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου.

Η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας θα αποδειχτεί με το Παράδειγμα 2.3. που έχει την ίδια εκφώνηση με το Παράδειγμα 2.1. απλά τώρα ο κίνδυνος θα εκτιμηθεί με το *Expected Shortfall*.

Παράδειγμα 2.3. Υποθέτουμε ότι μια τράπεζα δανείζει σε μια Εταιρεία A 100.000 ν.μ. με πιθανότητα αθέτησης του δανείου 0.8%. Επίσης, υποθέτουμε

ότι η εταιρεία A είτε αθετεί ολόκληρο το ποσό δανείου είτε δε το αθετεί. Έστω X_1 το ποσό της αθέτησης του χαρτοφυλακίου. Τότε έχουμε:

$$X_1 = \begin{cases} -100.000 \text{ ν. μ.}, & \text{εάν Εταιρεία A αθετήσει} \\ 0 \text{ ν. μ.}, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.28)$$

Από το Παράδειγμα 2.1. έχουμε ότι:

$$\alpha=0,01, \quad P(X_1 = -100.000 \text{ ν. μ.}) = 0,008, \quad P(X_1 = 0 \text{ ν. μ.}) = 0,992 \quad \text{και} \\ VaR_{0,01}(X_1) = -q_{0,01}(X_1) = 0$$

Σύμφωνα με το τύπο (2.14) ισχύει:

$$ES_a(X_1) = TCE_a(X_1) + (\lambda_1 - 1)(TCE_a(X_1) - VaR_a(X_1))$$

- Για το $TCE_a(X_1)$ από (2.15) έχουμε:

$$TCE_{0,01}(X_1) = -E[X_1 | X_1 \leq q_{0,01}(X_1)] = -E[X_1 | X_1 \leq 0] = 0,008 * 100.000 = 800 \text{ ν. μ.} \quad (2.29)$$

- Αντίστοιχα, από (2.16):

$$\lambda_1 = \frac{P(X_1 \leq q_a)}{a} = \frac{P(X_1 \leq -VaR_{0,01}(X_1))}{0,01} = \frac{P(X_1 \leq 0)}{0,01} = \frac{1}{0,01} = 100 \quad (2.30)$$

Άρα,

$$ES_{0,01}(X_1) = 800 + (100 - 1)(800 - 0) = 80.000 \text{ ν. μ.} \quad (2.31)$$

Παρατηρούμε ότι $X_1 \notin A_{ES_a}$.

Εάν η τράπεζα είχε δανείσει 50.000 ν.μ. στην Εταιρεία A και 50.000 ν.μ. σε μια Εταιρεία B, όπου κάθε εταιρεία έχει την ίδια πιθανότητα αθέτησης 0.8% και, όπως και προηγουμένως, είτε αθετούν ολόκληρο το ποσό δανείου είτε δε το αθετούν, ορίζοντας με X_2 το ποσό αθέτησης, έχουμε:

$$X_2 = \begin{cases} -100.000 \text{ ν. μ.}, & \text{εάν και οι δύο Εταιρείες αθετήσουν} \\ -50.000 \text{ ν. μ.}, & \text{εάν κάποια Εταιρεία αθετήσει} \\ 0 \text{ ν. μ.}, & \text{εάν καμία από τις Εταιρείες δεν αθετήσει} \end{cases} \quad (2.32)$$

Σε αυτή τη περίπτωση είχαμε ότι:

$$P(X_2 = -100.000 \text{ ν.μ.}) = 0,000064, \quad P(X_2 = -50.000 \text{ ν.μ.}) = 0,016 ,$$

$$P(X_2 = 0 \text{ ν.μ.}) = 0,983936 \text{ και } VaR_{0,01}(X_2) = 50.000 \text{ ν.μ.}$$

Χρησιμοποιώντας την ίδια μεθοδολογία έχουμε:

$$\bullet \quad TCE_{0,01}(X_2) = -E[X_2 | X_2 \leq q_{0,01}(X_2)] = -E[X_2 | X_2 \leq -50.000] = 0,000064 * 100.000 + 0,016 * 50.000 = 806,4 \text{ ν.μ.} \quad (2.33)$$

$$\bullet \quad \lambda_2 = \frac{P(X_2 \leq q_a)}{a} = \frac{P(X_2 \leq -VaR_{0,01}(X_2))}{0,01} = \frac{P(X_2 \leq -50.000)}{0,01} = \frac{0,016064}{0,01} = 1,6064 \quad (2.34)$$

Έτσι,

$$ES_{0,01}(X_2) = 806,4 + (1,6064 - 1)(806,4 - 50.000) = -29.024,6 \text{ ν.μ.} \quad (2.35)$$

Η θέση αυτή είναι «επιτρεπτή» και με αυτό το τρόπο το *αναμενόμενο έλλειμμα* αντανakλά την ιδέα ότι η διαφοροποίηση χαρτοφυλακίου οδηγεί σε μείωση του κινδύνου (είναι *υποπροσθετικό*).

Τώρα θα ασχοληθούμε με τη σύνδεση των *VaR - ES* και των *κλάσεων* των μέτρων κινδύνου που είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο.

- Φασματικά Μέτρα Κινδύνου

Ξαναθυμίζουμε ότι *φασματικά* μέτρα κινδύνου χαρακτηρίζονται από τα βάρη που δίνουν στα ποσοστημόρια της ζημιοκατανομής και την *θεωρία αποστροφής κινδύνου*. Είδαμε ότι τα *φασματικά* μέτρα κινδύνου είναι *συνεκτικά* εάν τα βάρη που δίνονται στο *p-ποσοστημόριο* της ζημιοκατανομής είναι μια μη φθίνουσα συνάρτηση του *p*.

Το *ES* αναφέρεται σε όλες τις ζημιές της «ουράς» της κατανομής και δίνει σε αυτές ίδια βάρη. Εάν θεωρήσουμε ότι τα βάρη αντανakλούν τη διάθεση ενός ατόμου ή οργανισμού ως προς τον κίνδυνο, τότε το *αναμενόμενο έλλειμμα* ερμηνεύει το άτομο ή τον οργανισμό *ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο (risk neutral)*, τουλάχιστον ανάμεσα στα αποτελέσματα που δίνει η «ουρά» της κατανομής. Συνεπώς, εάν υποθέσουμε ότι κάποιος αποστρέφεται τον κίνδυνο θα πρέπει να έχουμε μια σταθμισμένη συνάρτηση που να μεγαλώνει όσο το *p* αυξάνεται και έτσι το *ES* δεν θεωρείται κατάλληλο για αυτή την περίπτωση¹⁵.

Οι επιπλοκές για το VaR είναι χειρότερες. Με την αξία σε κίνδυνο δίνουμε μονάχα βάρος στη ζημιά που προέρχεται από μια πιθανότητα α και καθόλου βάρος στις ζημιές που ξεπερνούν την τιμή αυτή. Αυτό ερμηνεύεται ότι το άτομο είναι εραστής του κινδύνου (*risk lovers*) δηλαδή έχει αρνητική αποστροφή στον κίνδυνο «ουράς» κάτι το οποίο είναι σπάνιο στη πραγματικότητα¹⁵.

- Στρεβλά Μέτρα Κινδύνου

Με τη βοήθεια της θεωρίας των στρεβλών μέτρων κινδύνου, το VaR μπορεί να οριστεί ως στρεβλό μέτρο κινδύνου αν χρησιμοποιηθεί ο παρακάτω μετασχηματισμός για επίπεδο σημαντικότητας α :

$$g(u) = \begin{cases} 1, & \text{για } u \geq a \\ 0, & \text{για } u < a \end{cases} \quad (2.36)$$

Παρατηρούμε ότι αυτή η συνάρτηση δεν είναι συνεχής λόγω της μεταπήδησης στο $u = a$ και αφού δεν είναι συνεχής (μια από τις επιθυμητές ιδιότητες των στρεβλών μέτρων κινδύνου) δεν είναι *συνεκτικό*. Έτσι, από την θεωρία των στρεβλών μέτρων κινδύνου, το VaR δεν είναι αξιόπιστο μέτρο κινδύνου γιατί βασίζεται σε μία μη-ελκυστική στρεβλή συνάρτηση¹⁵.

Το ES είναι και αυτό στρεβλό μέτρο κινδύνου που βασίζεται στη στρεβλή συνάρτηση:

$$g(u) = \begin{cases} 1, & \text{για } u \geq a \\ \frac{u}{a}, & \text{για } u \leq a \end{cases} \quad (2.37)$$

Αυτή η συνάρτηση μετασχηματισμού είναι συνεχής άρα το ES είναι *συνεκτικό* μέτρο κινδύνου. Όμως, η (2.37) έχει κάποια μειονεκτήματα. «Πετάει» πιθανώς χρήσιμη πληροφορία γιατί απεικονίζει όλα τα ποσοστημόρια χαμηλότερα α του σε ένα απλό σημείο «0» και δε λαμβάνει πλήρως υπόψιν τη σφοδρότητα των ακραίων ζημιών αφού ενδιαφέρεται για τη μέση τιμή αυτών⁴⁵.

Συμπεραίνοντας, ανάλογα τη φύση του προβλήματος και τις υποθέσεις που κάνουμε ίσως προτιμάται να χρησιμοποιηθούν κάποια μέτρα κινδύνου από τις κλάσεις που είδαμε στο πρώτο κεφάλαιο έναντι των VaR και ES .

Στο επόμενο κεφάλαιο θα περάσουμε στο κομμάτι της εκτίμησης και πρόβλεψης των VaR και ES με τη *παραμετρική* μέθοδο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Παραμετρική Μοντελοποίηση των

Value-at-Risk

και

Expected Shortfall

3.1. Εισαγωγή και διάφοροι Μέθοδοι Εκτίμησης των VaR και ES

Γενικά, οι μέθοδοι εκτίμησης των μέτρων κινδύνου VaR και ES είναι οι παρακάτω:

- *Παραμετρική μέθοδος (parametric approach)*. Ο όρος «παραμετρική» αναφέρεται στην υπόθεση ότι τα δεδομένα του δείγματος που έχουμε στη διάθεσή μας προέρχονται από έναν πληθυσμό που μπορούν να μοντελοποιηθούν-εξηγηθούν ικανοποιητικά με μία συγκεκριμένη κατανομή ή δομή χρησιμοποιώντας ένα σχετικά μικρό αριθμό σταθερών παραμέτρων.
- *Μη-παραμετρική μέθοδος (non-parametric approach)*, όπου είναι μια απλή μέθοδος και δε χρειάζεται να γίνει κάποια υπόθεση για συγκεκριμένη κατανομή των αποδόσεων. Η πιο γνωστή μη παραμετρική μέθοδος είναι η *ιστορική προσομοίωση (historical simulation)* η οποία προβλέπει το VaR προσομοιώνοντας τη συνάρτηση κατανομής χρησιμοποιώντας δεδομένα μιας συγκεκριμένης περιόδου.
- *Ημι-παραμετρική μέθοδος (semi-parametric approach)*, όπως το λέει και το όνομα είναι ένας συνδυασμός των παραπάνω δύο μεθόδων. Μια από τις πιο γνωστές ημι-παραμετρικές μεθόδους είναι η μέθοδος της *θεωρίας ακραίων τιμών (extreme value theory)*. Σύμφωνα με τη *θεωρία ακραίων τιμών*, για να εκτιμηθεί η κατανομή των αποδόσεων χωρίζεται σε δύο μέρη: στο «κεντρικό μέρος» όπου χρησιμοποιούνται *μη-παραμετρικές μέθοδοι* για την εκτίμηση και στο «μέρος της ουράς» όπου χρησιμοποιούνται *παραμετρικές μέθοδοι*.

Στη παρούσα διπλωματική θα εστιάσουμε αποκλειστικά στην *παραμετρική μέθοδο*. Στη μέθοδο αυτή, η επιλογή της κατανομής ή των ερμηνευτικών μεταβλητών γίνεται συνήθως με διάφορα διαγνωστικά στατιστικά τεστ αλλά και από παλιά εμπειρία (γνώση ότι μια συγκεκριμένη κατανομή τείνει να ταιριάζει καλά με παρόμοια δεδομένα των δικών μας ή ένα σύνολο μεταβλητών ερμηνεύει σε μεγάλο βαθμό την εξαρτημένη μεταβλητή μας) κάτι που είναι

πολύ συχνό στο τομέα των χρηματοοικονομικών και του αναλογισμού. Για παράδειγμα, στη τιμολόγηση δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού τύπου (European options) το μοντέλο Black – Scholes χρησιμοποιεί τη λογαριθμοκανονική κατανομή⁴⁶.

Στο κεφάλαιο αυτό θα στήσουμε τα μοντέλα και θα προσδιορίσουμε τις παραμέτρους αυτών, που στη συνέχεια θα μας βοηθήσουν να κάνουμε κάποιες εκτιμήσεις και προβλέψεις για τα μέτρα κινδύνου *VaR* και *ES*. Πρώτα όμως θα κάνουμε μια επισκόπηση σε κάποιες βασικές έννοιες στην *ανάλυση χρονοσειρών* οι οποίες είναι απαραίτητες για το σκοπό αυτής της διπλωματικής.

3.2. Βασικές Έννοιες στην Ανάλυση Χρονοσειρών

Όταν μια μεταβλητή παρατηρείται διαδοχικά στη πάροδο του χρόνου, οι παρατηρήσεις αυτές αποτελούν μια **χρονολογική σειρά** ή **χρονοσειρά (time series)**. Μαθηματικά μπορεί να ορίσει κανείς το φαινόμενο αυτό ως εξής:

Ορισμός 3.2.1. *Χρονοσειρά είναι μια παραμετρική συλλογή παρατηρήσεων (δείγμα) y_1, y_2, \dots, y_T σε ίσα χρονικά διαστήματα, οι οποίες προέρχονται από την ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών (πληθυσμός) Y_1, Y_2, \dots, Y_T . Η ακολουθία των τυχαίων μεταβλητών $\{Y_t, t \in T\}$ οι οποίες ορίζονται σε ένα χώρο πιθανοτήτων αποτελεί μια **στοχαστική διαδικασία**.*

Όπως κανείς φαντάζεται, οι πρόσφατες παρατηρήσεις σε μία συγκεκριμένη χρονοσειρά μπορούν να κρύβουν χρήσιμη πληροφορία για τις μελλοντικές τιμές αυτής. Δηλαδή, έστω ότι ένας δείκτης μετοχής έχει αυτή τη στιγμή τιμή 100, είναι τότε πιο πιθανό στο επόμενο «σύντομο» χρονικό διάστημα να είναι κάπου ανάμεσα στο 90 και στο 110 απ' ότι να πάει ψηλά, έστω, στο 250.

Ο **σκοπός** της ανάλυσης χρονοσειρών μπορεί να παρουσιαστεί περιεκτικά ως εξής:

- Περιγραφή των *συνθετικών στοιχείων* χρονοσειρών⁴⁷ και της εξάρτησης των παρατηρήσεων διαχρονικά. Συγκεκριμένα, ο προσδιορισμός της *τάσης (trend)*, *εποχικότητας (seasonality)*, *κυκλικότητας (cyclical component)*, *μη-κανονικότητας (irregular component)* και της *συσχέτισης (correlation)* με προηγούμενες παρατηρήσεις.

Η *τάση* φανερώνει τη *μακροχρόνια εξέλιξη* της χρονοσειράς, η οποία μπορεί να είναι *ανοδική* ή *καθοδική*. Η *κυκλικότητα* αναφέρεται σε *δεδομένα χρονικών περιόδων* μικρότερων του έτους (π.χ. 3-μηνα) όπου παρατηρούνται *εποχικές διακυμάνσεις* που συμπεριφέρονται με την ίδια περίπου μορφή από έτος σε έτος. Η *κυκλικότητα* εμφανίζεται *ακανόνιστα* με *κυματοειδή μορφή* και αποδίδεται κυρίως στους *οικονομικούς κύκλους*, οι οποίοι οφείλονται σε *μεταβαλλόμενες οικονομικές, τεχνολογικές και άλλες συνθήκες*. Το *συνθετικό στοιχείο της μη-κανονικότητας* επηρεάζει τις τιμές των χρονοσειρών κατά ένα *τυχαίο και μη-συστηματικό τρόπο*, ο οποίος δε μπορεί να προσδιοριστεί. Η *συσχέτιση* θα αναφερθεί στη συνέχεια αναλυτικότερα.

- Αξιοποίηση των παραπάνω χαρακτηριστικών της χρονοσειράς για να προβλεφθούν μελλοντικές παρατηρήσεις.

Στη συνέχεια θα ορίσουμε⁴⁸ την **στασιμότητα (stationarity)** η οποία είναι μια απαραίτητη συνθήκη που πρέπει να τηρείται εάν θέλουμε να μιλάμε για αξιόπιστες προβλέψεις σε μια χρονοσειρά.

Ορισμός 3.2.2. Μια χρονοσειρά y_t ονομάζεται *στάσιμη* εάν οι στατιστικές της ιδιότητες παραμένουν σταθερές στο χρόνο. Συγκεκριμένα, αν ισχύουν τα παρακάτω:

$$E[y_t] = \mu \quad (3.1)$$

$$Var[y_t] = E[(y_t - \mu)^2] = \gamma_0 \quad (3.2)$$

$$Cov[(y_t, y_{t-k})] = E[(y_t - \mu)(y_{t-k} - \mu)] = \gamma_k \quad (3.3)$$

Εδώ, τα μ, γ_0, γ_k είναι πεπερασμένοι αριθμοί και είναι ανεξάρτητοι του χρόνου t . Οι σχέσεις (3.1.), (3.2.) και (3.3.) υποδεικνύουν ότι η μέση τιμή, διακύμανση και

συνδιακύμανση μιας χρονοσειράς με προηγούμενες τιμές της, πρέπει να είναι σταθερές στη διάρκεια του χρόνου για να είναι *στάσιμη χρονοσειρά*.

Όπως αναφέραμε προηγουμένως, η *συσχέτιση* μεταξύ διαδοχικών τιμών μιας χρονοσειράς είναι ύψιστης σημασίας για να προβλεφθούν οι μελλοντικές κινήσεις της *χρονοσειράς*. Οι *συσχετίσεις* αυτές ονομάζονται **αυτοσυσχετίσεις (autocorrelations)** αφού μιλάμε για παρατηρήσεις της ίδιας μεταβλητής και ορίζονται παρακάτω.

Ορισμός 3.2.3. Οι αυτοσυσχετίσεις μιας στάσιμης χρονοσειράς ορίζονται ως:

$$\rho_k = \text{Corr}(y_t, y_{t-k}) = \frac{\gamma_k}{\gamma_0}, \quad -1 \leq \rho_k \leq 1 \quad (3.4)$$

Οι *συσχετίσεις* αυτές εκφράζουν τη βραχυπρόθεσμη δυναμική σχέση της χρονοσειράς, σε αντίθεση με τη *τάση*, η οποία αντιστοιχεί στη μακροπρόθεσμη συμπεριφορά της χρονοσειράς⁴⁸. Για τιμή του συντελεστή στο $|1|$ ή κοντά του, έχουμε ισχυρή αυτοσυσχέτιση, ενώ το πρόσημο δηλώνει εάν η συσχέτιση αυτή είναι θετική (+) ή αρνητική (-). Συνεπώς, για τη τιμή 0 δεν υπάρχει κάποια αυτοσυσχέτιση.

Στο επόμενο κομμάτι θα προσδιορίσουμε τις μεταβλητές-παραμέτρους που θα χρησιμοποιήσουμε στην ανάλυσή μας προερχόμενες από τον τομέα της οικονομετρίας.

3.3. Προσδιορισμός των Μεταβλητών – Παραμέτρων

Έστω $y_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ η *συνεχώς ανατοκιστέα απόδοση (continuously compounded rate of return)* των παρατηρούμενων τιμών ενός χαρτοφυλακίου P_t , από το χρόνο $t - 1$ στο χρόνο t . Θα θεωρήσουμε ότι το y_t χωρίζεται σε δύο μέρη, το *συστηματικό-προβλέψιμο*, μ_t , και το *τυχαίο-απρόβλεπτο*, ε_t , μέρος⁴⁹:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t$$

$$\mu_t = \mu(\theta | I_{t-1})$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t Z_t \quad (3.5)$$

$$\sigma_t = g(\theta|I_{t-1})$$

$$z_t \sim f(w; 0,1) \text{ i.i.d. (independent identically distributed)}$$

όπου,

- θ είναι ένα διάνυσμα άγνωστων παραμέτρων
- I_t συμβολίζει το σύνολο της πληροφορίας που είναι διαθέσιμη το χρόνο t . Συγκεκριμένα, υποθέτουμε ότι μια παρατηρούμενη χρονοσειρά προέρχεται από μια διαδικασία η οποία υπάρχει πριν αρχίσουμε να τη παρατηρούμε, δηλαδή, $I_{t-1} = \{y_{t-1}, y_{t-2}, \dots\}$
- $f(\cdot)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας της z_t με $E[z_t] = 0$ και $V[z_t] = 1$
- w είναι το διάνυσμα των παραμέτρων της $f(\cdot)$
- η δεσμευμένη μέση τιμή μ_t και η δεσμευμένη τυπική απόκλιση σ_t είναι συναρτήσεις της συνολικής διαθέσιμης πληροφορίας το χρόνο $t - 1$

Η μ_t συνήθως μοντελοποιείται ως μια Αυτοπαλίνδρομη με Κινητούς Μέσους (Autoregressive Moving Average) διαδικασία, ή απλά, διαδικασία **ARMA(k, l)** :

$$\mu_t = c_0 + \sum_{i=1}^k c_i y_{t-i} + \sum_{i=1}^l d_i \varepsilon_{t-i} \quad (3.6)$$

Μια τέτοια διαδικασία προκύπτει όταν συνδυαστούν τα αυτοπαλίνδρα υποδείγματα $AR(k)$ με υποδείγματα κινητών μέσων $MA(l)$ (βλ. Παράρτημα Α και Β).

Το τυχαίο-απρόβλεπτο μέρος, ε_t , είναι μια διαδικασία Αυτοπαλίνδρομη Υπό Συνθήκη Ετεροσκεδαστικότητας (Autoregressive Conditionally Heteroscedastic), γνωστή και ως **ARCH**, με⁴⁹:

- Σταθερή αδέσμευτη διασπορά: $V[\varepsilon_t(\theta)] = E[\varepsilon_t^2(\theta)] = \sigma^2(\theta)$
- Μηδενική αδέσμευτη μέση τιμή: $E[e_t(\theta)e_{t'}(\theta)] = 0, \forall t \neq t'$
- Η δεσμευμένη διασπορά του e_t είναι μια χρονικά μεταβαλλόμενη, θετική και μετρήσιμη συνάρτηση του I_{t-1} και ορίζεται ως:

$$V[\varepsilon_t(\theta | I_{t-1})] = E[\varepsilon_t^2(\theta) | I_{t-1}] = \sigma_t^2(\theta)$$

Στην επόμενη ενότητα θα αναφέρουμε περισσότερα για τα υποδείγματα **ARCH** και τις γενικεύσεις-παραλλαγές αυτών, αφού προηγηθεί ο προσδιορισμός της υποκείμενης κατανομής.

3.3.1. Μοντελοποίηση της Κατανομής

Η υποενοότητα αυτή επικεντρώνεται στο προσδιορισμό της κατανομής του z_t . Είναι γνωστό από την οικονομετρία ότι η κατανομή των τιμών της εξαρτημένης μεταβλητής καθορίζεται από την κατανομή των τιμών του τυχαίου σφάλματος. Κάποιες από τις πιο διάσημες κατανομές που έχουν προταθεί για το z_t είναι οι παρακάτω:

Ο Engle (1982) υπέθεσε ότι ακολουθεί κανονική κατανομή⁵⁰:

$$f(z_t) = (2\pi)^{\left(-\frac{1}{2}\right)} e^{\left(-\frac{z_t^2}{2}\right)} \quad (3.7)$$

Το 1987 ο Bollerslev, μαθητής του Engle, πρότεινε τη *τυποποιημένη Student-t* κατανομή (*standardized Student-t*) η οποία προσαρμόζει διαδικασίες με «παχιές ουρές»⁵¹. Η τυποποιημένη Student-t κατανομή έχει συνάρτηση πυκνότητας:

$$f(z_t; \nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi(\nu-2)}} \left(1 + \frac{z_t^2}{\nu-2}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \quad (3.8)$$

όπου, $\nu > 2$ είναι οι βαθμοί ελευθερίας και $\Gamma(\nu) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\nu-1} dx$ είναι η συνάρτηση Γάμμα. Η τυποποιημένη Student-t κατανομή είναι συμμετρική γύρω από το 0 και για $\nu > 4$, η υπό συνθήκη κυρτότητα ισούται με $3(\nu - 2)(\nu - 4)^{-1}$, η οποία ξεπερνάει τη τιμή της κανονικής που ισούται με 3. Για $\nu \rightarrow \infty$, η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας συγκλίνει στη τυπική κανονική κατανομή⁴⁹.

Μία ακόμα υποψήφια κατανομή με «παχιά» ουρά είναι η *Generalized Error Distribution (GED)* που πρότεινε ο Nelson (1991). Η συνάρτηση πυκνότητας δίνεται από⁵²:

$$f(z_t; \nu) = \frac{\nu \exp\left(-0.5\left|\frac{z_t}{\lambda}\right|^\nu\right)}{2^{(1+\frac{1}{\nu})}\Gamma(\nu-1)\lambda}, \quad \nu > 0 \quad (3.9)$$

όπου, ν είναι η παράμετρος που δείχνει το «πάχος» της κατανομής και το

$\lambda = \left(\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)}{2^\nu \Gamma\left(\frac{3}{\nu}\right)}\right)^{\frac{1}{2}}$. Για $\nu < 2$, η κατανομή έχει πιο παχιά ουρά από τη κανονική κατανομή, ενώ για $\nu > 2$, έχει λεπτότερη.

Τέλος, πολλοί ειδικοί πρότειναν ασύμμετρες κατανομές καθώς η κατανομή *Student-t* και η *GED* δεν προσαρμόζουν τη παρατηρούμενη λοξότητα (*skewness*) που διακρίνεται στις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές. Οι Lambert, Laurant (2001) εισήγαγαν τη χρήση της τυποποιημένης λοξής *Student-t* κατανομής (*standardized skewed Student-t*)⁵³:

$$f(z_t; \xi, \nu) = \begin{cases} \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} sf(\xi(sz_t + m); \nu), & \text{εάν } z_t < -\frac{m}{s} \\ \frac{2}{\xi + \frac{1}{\xi}} sf\left(\frac{sz_t + m}{\xi}; \nu\right), & \text{εάν } z_t \geq -\frac{m}{s} \end{cases} \quad (3.10)$$

όπου, το $f(\cdot; \nu)$ ορίζεται στην (3.8), ξ είναι ο συντελεστής ασυμμετρίας, ενώ:

$$m = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu-1}{2}\right)\sqrt{\nu-2}}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) \text{ και} \\ s^2 = \left(\xi^2 + \frac{1}{\xi^2} - 1\right) - m^2 \quad (3.11)$$

είναι η μέση τιμή και η διακύμανση, αντίστοιχα, της μη-τυποποιημένης λοξής *Student-t* κατανομής (*non-standardized skewed Student-t*). Η πυκνότητα είναι⁴⁹ λοξή προς τα δεξιά (αριστερά) εάν $\log(\xi) > 0$ (< 0). Επίσης, οι ίδιοι⁵⁴, σχημάτισαν την α -συνάρτηση ποσοστημορίου, $st_{\alpha}^*(z_t; \xi, \nu)$, της μη-τυποποιημένης λοξής *Student-t* κατανομής ως εξής⁴:

$$st_{\alpha}^*(z_t; \xi, \nu) = \begin{cases} \frac{1}{\xi} t_{\alpha}(z_t; \nu) \left(\frac{\alpha}{2}(1 + \xi^2)\right), & \text{εάν } \alpha < -\frac{1}{\alpha + \xi^2} \\ -\xi t_{\alpha}(z_t; \nu) \left(\frac{1-\alpha}{2}(1 + \xi^2)\right), & \text{εάν } \alpha \geq -\frac{1}{\alpha + \xi^2} \end{cases} \quad (3.12)$$

όπου, $t_{\alpha}(z_t; \nu)$ είναι η α -συνάρτηση ποσοστημορίου της *Student-t* κατανομής.

3.3.2. Υποδείγματα Οικογένειας ARCH

Ο σκοπός των επενδύσεων από ορθολογική σκοπιά είναι «η βελτιστοποίηση της συμπεριφοράς μας ώστε να μεγιστοποιήσουμε τα κέρδη και να ελαχιστοποιήσουμε τον κίνδυνο». Γύρω από αυτήν την ιδέα έχουν γραφτεί

αμέτρητα άρθρα, κάποια βραβευμένα με Nobel (π.χ. Markowitz, Black – Scholes). Σε τέτοιου είδους μελέτες, η εκτίμηση της διακύμανσης ενός χαρτοφυλακίου είναι απαραίτητη και συγκεκριμένα η τετραγωνική ρίζα της διακύμανσης, γνωστή και ως **μεταβλητότητα (volatility)**⁵⁵. Η έννοια της **μεταβλητότητας** του χαρτοφυλακίου για μια μελλοντική περίοδο σχετίζεται με τον **κίνδυνο** και έτσι, η πρόβλεψη της **μεταβλητότητας** για μια μελλοντική περίοδο αποτελεί ένα **μέτρο κινδύνου** (με την κυριολεκτική έννοια του όρου).

Παρατηρήθηκε από ιστορικά δεδομένα ότι η **μεταβλητότητα** ενός χαρτοφυλακίου δε παραμένει σταθερή στο χρόνο. Συγκεκριμένα, όταν η διακύμανση των τυχαίων σφαλμάτων σε κάποια σημεία ή διαστήματα των δεδομένων είναι μεγαλύτερη, τότε λέμε ότι τα δεδομένα πάσχουν από **ετεροσκεδαστικότητα**¹¹ (**heteroscedasticity**). Τα υποδείγματα ARCH και GARCH μεταχειρίζονται την **ετεροσκεδαστικότητα** ως μια διασπορά που πρέπει να μοντελοποιηθεί και κάνουν εκτιμήσεις της διασποράς σε όρους τωρινών παρατηρήσεων.

Το 1982 ο Engle⁵⁰ εισήγαγε το ARCH(q) υπόδειγμα όπου η υπο-συνθήκη διακύμανση, σ_t^2 , εκφράζεται ως γραμμική συνάρτηση των q προηγούμενων παρατηρήσεων των τετραγώνων των σφαλμάτων, ε_{t-i}^2 ,

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad (3.13)$$

όπου, οι άγνωστοι παράμετροι a_0, a_1, \dots, a_q αποτελούν «βάρη» τα οποία μπορούν να εκτιμηθούν από τα δεδομένα. Όσο πιο πρόσφατες οι παρατηρήσεις, τόσο μεγαλύτερα και τα βάρη που δίνονται. Για να ισχύει η (3.13), δηλαδή να είναι θετική η διακύμανση, πρέπει $a_0 > 0$ και $a_i \geq 0$ για $i = 1, \dots, q$.

Τα υποδείγματα αυτά παρουσίασαν τα παρακάτω προβλήματα⁴⁹:

- Η τιμή του q δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή
- Το q ενδεχομένως να είναι πολύ μεγάλο για να καλύψει την εξάρτηση της υπό-συνθήκης διακύμανσης.
- Οι θετικοί περιορισμοί των παραμέτρων παραβιάζονται πιο εύκολα απ' ότι σε πιο ευέλικτα υποδείγματα.

Για να αντιμετωπιστούν τα προβλήματα των υποδειγμάτων $ARCH(q)$, ο Bollerslev⁵¹ (1986) πρότεινε μια γενίκευση (Generalized) των $ARCH(q)$ υποδειγμάτων, γνωστά ως $GARCH(p,q)$:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i \sigma_{t-i}^2 \quad (3.14)$$

όπου, $a_0 > 0$, $a_i \geq 0$ για $i = 1, \dots, q$ και $b_i \geq 0$ για $i = 1, \dots, p$. Εάν, $\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{i=1}^p b_i < 1$, τότε η διαδικασία ε_t είναι στάσιμη και η αδέσμευτη μακροπρόθεσμη μέση διακύμανση ισούται με:

$$\sigma^2 = \frac{a_0}{(1 - \sum_{i=1}^q a_i - \sum_{i=1}^p b_i)} \quad (3.15)$$

Το υπόδειγμα της (3.14) αποτελεί και αυτό μια σταθμισμένη μέση τιμή των προηγούμενων παρατηρήσεων των τετραγώνων του τυχαίου σφάλματος αλλά έχει βάρη που εξασθενούν γεωμετρικά και δε μηδενίζονται ποτέ.

Τα υποδείγματα $GARCH$ καταφέρνουν να προσαρμόσουν σε μεγάλο βαθμό τα χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών χρονοσειρών που διακρίνουν τις αποδόσεις⁵⁵:

- Είναι σχεδόν απρόβλεπτες
- Έχουν μεγάλο αριθμό «ακραίων» τιμών, δηλαδή, έχουν κατανομές με παχιά ουρά
- Οι «ακραίες» και «ήσυχες» περίοδοι στη διακύμανση των αποδόσεων παρατηρούνται σε ομάδες στο χρόνο. Αυτό το φαινόμενο μεταφράζεται ως συσσωμάτωση μεταβλητότητας (*volatility clustering*). Όπως είπε ο Mandelbrot⁵⁶ (1963), “οι μεγάλες αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μεγάλες αλλαγές (οποιασδήποτε κατεύθυνσης) και οι μικρές αλλαγές τείνουν να ακολουθούνται από μικρές αλλαγές”.

Το σπουδαιότερο μάλλον $GARCH$ μοντέλο που περιγράφει τη δυναμική μεταβλητότητα σχεδόν όλων των χρηματοοικονομικών χρονοσειρών είναι της τάξης $p=q=1$ ή διαφορετικά $GARCH(1,1)$:

$$\sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2 \quad (3.16)$$

όπου, $a_0 > 0$, $a_1 \geq 0$, $b_1 \geq 0$ και πρέπει $a_1 + b_1 < 1$. Τα βάρη είναι $(1 - a_1 - b_1, b_1, a_1)$ και η αδέσμευτη μακροπρόθεσμη μέση διακύμανση είναι:

$$\sigma^2 = \frac{a_0}{(1 - a_1 - b_1)} \quad (3.17)$$

Έτσι, η (3.16) δεν αποτελεί κάτι άλλο παρά τη σταθμισμένη μέση τιμή τριών διακυμάνσεων⁵⁵: της σταθερής μακροπρόθεσμης, σ^2 , της εκτιμώμενης που έγινε τη προηγούμενη περίοδο, σ_{t-1}^2 , και της τρίτης που αποτελεί τη νέα πληροφορία που δεν ήταν διαθέσιμη τη προηγούμενη περίοδο που κάναμε τη πρόβλεψη, ε_{t-1}^2 .

Παρόλο που το $GARCH(1,1)$ αναφέρεται κυρίως στην πρόβλεψη της διακύμανσης της επόμενης περιόδου, αποδεικνύεται ότι χρησιμοποιώντας την πρόβλεψη μιας περιόδου μπορεί να κατασκευαστεί η πρόβλεψη για δύο περιόδους κ.ο.κ δημιουργώντας μια πρόβλεψη για πολλαπλές περιόδους⁵⁶. Κάθε περίοδο μπροστά, βρισκόμαστε όλο και πιο κοντά στη μακροπρόθεσμη διασπορά και για το λόγο αυτό λέμε ότι τα υποδείγματα $GARCH$ έχουν τη τάση να επανέρχονται στη μακροπρόθεσμη μέση τιμή τους (*mean reversing*).

Στη συνέχεια θα δούμε συνοπτικά άλλες διάσημες γενικεύσεις των $ARCH$ υποδειγμάτων που προτάθηκαν από διάφορους ερευνητές.

Από εμπειρικές εφαρμογές καθημερινών δεδομένων του υποδείγματος $GARCH(p,q)$ έχει παρατηρηθεί ότι $\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{i=1}^p b_i \approx 1$. Η ειδική περίπτωση της οικογένειας $GARCH(p,q)$, “Integrated” $GARCH$, ή, $IGARCH(p,q)$ υπόδειγμα ενσωματώνει αυτό το γεγονός:

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^p b_i \sigma_{t-i}^2 \quad (3.18)$$

όπου, $\sum_{i=1}^q a_i + \sum_{i=1}^p b_i = 1$. Στο $IGARCH(p,q)$ υπόδειγμα η αδέσμευτη διασπορά απειρίζεται και ένα «σοκ» στη δεσμευμένη διασπορά παραμένει σημαντικό για όλες προβλέψεις της δεσμευμένης μεταβλητότητας¹⁰. Ειδική περίπτωση της (3.18) είναι το *Exponentially Weighted Moving Average (EWMA)* που χρησιμοποιεί το RiskMetrics™. Η πρόβλεψη για τη μεταβλητότητα χρησιμοποιώντας το *EWMA* από το RiskMetrics™, υπολογίζεται ως $\sigma_t^2 =$

$\lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda)\varepsilon_{t-1}^2$, όπου χρησιμοποιεί $\lambda = 0.94$ σε καθημερινά δεδομένα και 75 ιστορικές τιμές για να κάνει τη πρόβλεψη.

Οι Taylor⁵⁸ (1986) και Schwert⁵⁹ (1989) υπέθεσαν ότι η δεσμευμένη τυπική απόκλιση είναι μια γραμμική συνάρτηση των προηγούμενων τιμών της καθώς και των σε απόλυτη τιμή σφαλμάτων, προτείνοντας το “Absolute” GARCH ή διαφορετικά το AGARCH(p,q) μοντέλο:

$$\sigma_t = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i |\varepsilon_{t-i}| + \sum_{i=1}^p b_i \sigma_{t-i} \quad (3.19)$$

Με το μοντέλο της (3.19) τα μεγάλα «σοκ» μετριάζονται, δηλαδή, έχουν μικρότερη επίδραση στη δεσμευμένη διασπορά απ’ ότι το GARCH υπόδειγμα.

Στη δομή του GARCH, η διακύμανση εξαρτάται μονάχα από το μέγεθος του ε_t και όχι από το σήμα αυτού (κατεύθυνση). Έχει αποδειχτεί όμως ότι η μεταβλητότητα τείνει να αυξάνεται για αρνητικά νέα ($\varepsilon_t < 0$), και να πέφτει για θετικά νέα ($\varepsilon_t > 0$). Ο Black⁶⁰ (1976) ονόμασε αυτό το φαινόμενο του κινδύνου ως «επίδραση μόχλευσης» (leverage effect). Πάνω σε αυτή τη λογική αναπτύχθηκαν τα ασύμμετρα ARCH μοντέλα (asymmetric ARCH models) και υιοθετούν το γεγονός ότι μια πτώση στη τιμή έχει μεγαλύτερο αντίκτυπο στη μελλοντική μεταβλητότητα απ’ ότι θα είχε μια ισόποση άνοδος. Τα πιο γνωστά ασύμμετρα ARCH μοντέλα είναι του Nelson⁶¹ (1991) το “Exponential” GARCH ή EGARCH(p,q), το GJR-GARCH(p,q) μοντέλο όπου προέρχεται από τους Glosten, Jagannathan και Runkle⁶² (1993) και τέλος το “Asymmetric” GARCH υπόδειγμα του Engle⁶³ (1990):

EGARCH(p,q):

$$\ln(\sigma_t^2) = a_0 + \sum_{i=1}^q \left(a_i \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| + \gamma_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right) + \sum_{i=1}^p b_i \ln(\sigma_{t-i}^2) \quad (3.20)$$

GJR-GARCH(p,q):

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + \sum_{i=1}^p b_i \sigma_{t-i}^2 \quad (3.21)$$

“Asymmetric” GARCH(p,q):

$$\sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^q (a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \varepsilon_{t-1}) + \sum_{i=1}^p b_i \sigma_{t-i}^2 \quad (3.22)$$

Για το *EGARCH* μοντέλο, ο λογαριθμικός μετασχηματισμός διασφαλίζει ότι η διακύμανση θα είναι πάντοτε θετική. Η ασυμμετρία στη διακύμανση ισχύει στη περίπτωση που το $\gamma_i \neq 0$. Ειδικότερα, εάν $\gamma_i = 0$ τότε ένα θετικό γεγονός ($\varepsilon_t > 0$) έχει την ίδια επίδραση στη μεταβλητότητα με ένα αρνητικό γεγονός ($\varepsilon_t < 0$), ενώ όταν $\gamma_i < 0$ τα θετικά νέα «παράγουν» λιγότερη μεταβλητότητα απ' ό,τι τα αρνητικά. Στη περίπτωση του *GJR-GARCH* υποδείγματος, έχουμε $d_t = 1$ εάν $\varepsilon_t < 0$ και $d_t = 0$ διαφορετικά και κατά συνέπεια επιτρέπει μια αντίδραση στη μεταβλητότητα με διαφορετικούς συντελεστές ανάλογα αν τα νέα είναι καλά ή δυσμενή. Τέλος, για το “*Asymmetric*” *GARCH*, μια αρνητική τιμή του γ_i σημαίνει ότι οι θετικές αποδόσεις αυξάνουν τη μεταβλητότητα λιγότερο απ' ό,τι οι αρνητικές αποδόσεις.

Οι άγνωστοι παράμετροι όλων των προαναφερθεισών υποδειγμάτων υπολογίζονται από τα δεδομένα με τη Μέθοδο της Μέγιστης Πιθανοφάνειας (*Maximum Likelihood*) (βλ. Παράρτημα Γ).

3.4. VaR - ES της Επόμενης Περιόδου

Αφού παρουσιάστηκαν τα υποδείγματα της οικογένειας *ARCH*, μπορούμε να περάσουμε στην εκτίμηση του *VaR* της επόμενης περιόδου (*one-step-ahead VaR*) ανεξαρτήτως κατανομής⁴⁹:

$$VaR_a^{t+1|t} = -(\mu_{t+1|t} + q_a(z_t; \xi^t, v^t) \sigma_{t+1|t}) \quad (3.23)$$

όπου, $q_a(z_t; \xi^t, v^t)$ είναι το α -ποσοστημόριο της δεδομένης κατανομής, η οποία, έχει υπολογιστεί με βάση τη *συνολική διαθέσιμη πληροφορία* στο χρόνο t , και $\mu_{t+1|t}, \sigma_{t+1|t}$ είναι οι προβλέψεις για τη δεσμευμένη μέση τιμή και τη δεσμευμένη τυπική απόκλιση για το χρόνο $t + 1$, δεδομένης της συνολικής πληροφορίας στο χρόνο t , αντίστοιχα.

Η πρόβλεψη για το ES επόμενης περιόδου για συνεχείς κατανομές και για *long trading* θέσεις δίνεται ως⁴⁹:

$$ES_a^{t+1|t} = -E\left(y_{t+1} \mid (y_{t+1} \leq VaR_a^{t+1|t})\right) \quad (3.24)$$

3.4.1. Μέθοδος Κινούμενου Παραθύρου

Η μέθοδος κινούμενου παραθύρου (*rolling window estimate*) αποτελεί μια μέθοδο εκτίμησης του VaR της επόμενης περιόδου χρησιμοποιώντας ένα σταθερό και «κινούμενο» ανά μια περίοδο, αριθμό παρατηρήσεων ενός δείγματος. Αρχικά, επιλέγεται ένας σταθερός αριθμός παρατηρήσεων από μια χρονοσειρά $\{1, \dots, n\}$ (ο οποίος ονομάζεται *παράθυρο*) και σύμφωνα με τη διαθέσιμη πληροφορία και το υπόδειγμα $ARCH$ που χρησιμοποιείται, γίνεται πρόβλεψη για το VaR μίας περιόδου μπροστά, VaR_a^{n+1} , για δεδομένο a . Στη συνέχεια, η παλιότερη χρονικά παρατήρηση, 1, θα αντικατασταθεί από τη $n + 1$ και έτσι θα χρησιμοποιηθεί το $\{2, \dots, n + 1\}$ για γίνει η πρόβλεψη για το VaR_a^{n+2} κ.ο.κ.

Σημαντικό να ξεκαθαριστεί είναι ότι η $n + 1$ στο πρώτο βήμα δεν αποτελεί πρόβλεψη αλλά είναι η πραγματική τιμή από το δείγμα. Επίσης, δίνεται η δυνατότητα, ανά κάποιο συγκεκριμένο αριθμό παρατηρήσεων, οι παράμετροι του υποδείγματος ετεροσκεδαστικότητας να αναπροσαρμόζονται ώστε να είναι πιο σχετικοί με τις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις.

3.5. Back-Testing Value-at-Risk

Ένας χρηματοπιστωτικός οργανισμός όταν εκτιμάει τον κίνδυνο δε πρέπει ούτε να τον *υποεκτιμά* αλλά ούτε και να τον *υπερεκτιμά* διότι έτσι δεσμεύει ένα λανθασμένο ποσό κεφαλαίου. Στη περίπτωση της *υποεκτίμησης*, το κεφάλαιο που δεσμεύεται δεν είναι αρκετό για να καλύψει τους ενδεχόμενους κινδύνους και όταν *υπερεκτιμάται*, το κεφάλαιο υπερκαλύπτει τους κινδύνους και έτσι μειώνεται η απόδοση του οργανισμού.

Για να αποφευχθούν λανθασμένες εκτιμήσεις του VaR έχουν προταθεί διάφορες στατιστικές τεχνικές που ονομάζονται *back-testing* και έχουν ως σκοπό τη μέτρηση της *ευστοχίας (accuracy)* των μοντέλων εκτίμησης του VaR . Κάποιες από τις γνωστότερες στατιστικές τεχνικές *back-testing* είναι η *ανεξάρτητη κάλυψη (unconditional coverage)* του Κυρίε⁶⁴ (1995) και *εξαρτημένη κάλυψη (conditional coverage)* του Christoffersen⁶⁵ (1998). Τα τεστ αυτά έχουν ως σκοπό:

- να ελέγξουν εάν το ποσοστό αποτυχίας είναι στατιστικά ίδιο με το αναμενόμενο (*ανεξάρτητη κάλυψη*)
- οι παραβιάσεις του VaR είναι ανεξάρτητα κατανεμημένες και όχι ως συσσωμάτωση (*εξαρτημένη κάλυψη*)

Στη συνέχεια θα δούμε αναλυτικότερα τα στατιστικά αυτά τεστ.

3.5.1. Ανεξάρτητη Κάλυψη

Έστω $N = \sum_{t=1}^T I_t$ ο αριθμός των ημερών, σε ένα χρονικό ορίζοντα T , όπου η ζημιά ξεπερνούσε τις εκτιμήσεις του VaR όπου:

$$I_{t+1} = \begin{cases} 1, & \text{εαν } y_{t+1} < VaR_a^{t+1|t} \\ 0, & \text{εαν } y_{t+1} \geq VaR_a^{t+1|t} \end{cases} \quad (3.25)$$

Σύμφωνα με τον Κυρίε⁶⁴ (1995), ο αριθμός των παραβιάσεων ακολουθεί διωνυμική κατανομή, $N \sim B(T, p)$, όπου p είναι ο αναμενόμενος ρυθμός παραβίασης για ένα δεδομένο επίπεδο εμπιστοσύνης. Ο έλεγχος μπορεί να πάρει τη παρακάτω μορφή:

$$\begin{aligned} H_0: \frac{N}{T} &= p \\ H_1: \frac{N}{T} &\neq p \end{aligned} \quad (3.26)$$

Μια πιθανότητα (*p-value*) μικρότερη από ένα επίπεδο εμπιστοσύνης (*significance level*) οδηγεί σε απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, δηλαδή ο ρυθμός παραβιάσεων δεν είναι στατιστικά ίδιος με τον αναμενόμενο.

Η κριτική τιμή δίνεται συνήθως από το παρακάτω likelihood ratio statistic:

$$LR_{uc} = 2 \ln \left(\left(1 - \frac{N}{T}\right)^{T-N} \left(\frac{N}{T}\right)^N \right) - 2 \ln \left((1-p)^{T-N} p^N \right) \quad (3.27)$$

και ακολουθεί την χ^2 κατανομή με ένα βαθμό ελευθερίας.

Το τεστ αυτό δε λαμβάνει υπόψη καθόλου την ανεξαρτησία των παραβιάσεων και την αδυναμία αυτή ήρθε να καλύψει το επόμενο σε σειρά τεστ.

3.5.2. Εξαρτημένη Κάλυψη

Ο Christoffersen⁶⁵ (1998) ανέπτυξε ένα *conditional coverage* τεστ, όπου εξετάζει ταυτόχρονα εάν ο αριθμός των παραβιάσεων είναι στατιστικά ισοδύναμος με τον αναμενόμενο και ότι οι παραβιάσεις αυτές του *VaR* είναι ανεξάρτητες. Το τεστ απεικονίζεται παρακάτω:

$$\begin{aligned} H_0: \frac{N}{T} = p \text{ και } \pi_{01} = \pi_{11} = p \\ H_1: \frac{N}{T} \neq p \text{ και } \pi_{01} \neq \pi_{11} \neq p \end{aligned} \quad (3.28)$$

Το κατάλληλο likelihood ratio statistic για τον έλεγχο αυτό είναι το παρακάτω:

$$\begin{aligned} LR_{uc} = -2 \ln((1-p)^{T-N} p^N) \\ + 2 \ln((1-\pi_{01})^{n_{00}} \pi_{01}^{n_{01}} (1-\pi_{11})^{n_{10}} \pi_{11}^{n_{11}}) \end{aligned} \quad (3.29)$$

όπου n_{ij} είναι ο αριθμός των παρατηρήσεων με τιμή i που ακολουθείται από τη τιμή j , για $i, j = 0, 1$ και $\pi_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_j n_{ij}}$ είναι οι αντίστοιχες πιθανότητες. Το $i, j = 1$ υποδηλώνει ότι έγινε μια παραβίαση, ενώ το $i, j = 0$ το ανάποδο. Εάν η ακολουθία του I_t είναι ανεξάρτητη, τότε πρέπει οι πιθανότητες, είτε για παραβίαση είτε για μη, την επόμενη περίοδο να είναι ίσες, δηλαδή, $\pi_{01} = \pi_{11} = p$. Σε αντίθεση με το *unconditional coverage* τεστ, το *conditional coverage* τεστ μπορεί να απορρίψει ένα μοντέλο υπολογισμού *VaR* επειδή παράγει είτε αρκετά περισσότερες είτε αρκετά λιγότερες συσσωματωμένες παραβιάσεις από τις αναμενόμενες.

Στο επόμενο και τελευταίο κεφάλαιο θα περάσουμε σε μια εμπειρική εφαρμογή για την εκτίμηση του *VaR* μέσω παραμετρικών μεθόδων για τους δείκτες *S&P 500* και *DAX*.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Εμπειρική Εφαρμογή:
Εκτίμηση Κινδύνου για
τους Δείκτες S&P 500
και DAX

4.1. Εισαγωγή

Οι ασφαλιστικές εταιρείες και οι τράπεζες είναι από τις μεγαλύτερες επενδυτικές πηγές μέσα σε μια οικονομία λόγω του χαρακτήρα τους. Οι αναλογιστές και οι διαχειριστές κινδύνων πρέπει ανά τακτά χρονικά διαστήματα να εκτιμούν πόσο θα διακυμανθεί η τιμή του επενδυτικού τους χαρτοφυλακίου. Συνεπώς, η ποσοτικοποίηση του κινδύνου αγοράς αποτελεί ένα μείζον θέμα στο χρηματοπιστωτικό κλάδο και για αυτό επιλέχθηκε ως εμπειρική εφαρμογή αυτής της διπλωματικής.

Συγκεκριμένα, θα εκτιμήσουμε το *VaR* για τις ημερήσιες αποδόσεις των δεικτών *S&P 500* και *DAX* χρησιμοποιώντας κάποια από τα *ARCH* μοντέλα και τη μέθοδο του κινούμενου παραθύρου που αναφέρθηκαν στο Κεφάλαιο 3. Θα αρχίσουμε κάνοντας μια περιγραφική στατιστική στα δεδομένα μας, στη συνέχεια θα δούμε την μεθοδολογία που θα ακολουθηθεί για την εκτίμηση του *VaR* και στο τέλος θα εξάγουμε κάποια συμπεράσματα.

Πριν περάσουμε στην περιγραφική στατιστική, ας παρουσιάσουμε σύντομα τους δείκτες που θα χρησιμοποιηθούν. Η ιστορία του δείκτη *Standard & Poor's 500* ή *S&P 500* ξεκινάει από το 1923 και περιλαμβάνει τις 500 κορυφαίες αμερικάνικες εισηγμένες εταιρείες (π.χ. *Apple*, *Microsoft* κ.α.). Από την άλλη πλευρά, ο δείκτης *DAX*, όπου δημιουργήθηκε το 1987, είναι ο βασικός δείκτης της αγοράς μετοχών στη Γερμανία και παρακολουθεί την απόδοση των 30 μεγαλύτερων γερμανικών εισηγμένων εταιρειών (π.χ. *Adidas*, *BMW*, *Siemens* κ.α.). Οι δείκτες αυτοί είναι από τους πιο σημαντικούς και απεικονίζουν την οικονομία της Αμερικής και της Ευρώπης αντίστοιχα.

4.2. Περιγραφική Στατιστική

Τα δεδομένα της ανάλυσής μας αντλήθηκαν από το *Yahoo Finance* και περιέχουν τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος των δεικτών *S&P 500* και *DAX* για το χρονικό διάστημα 01/01/2005 – 31/12/2018. Το δείγμα για το *S&P 500* είναι στις 3521 παρατηρήσεις ενώ για το *DAX* στις 3551. Η ανάλυση έγινε με το στατιστικό

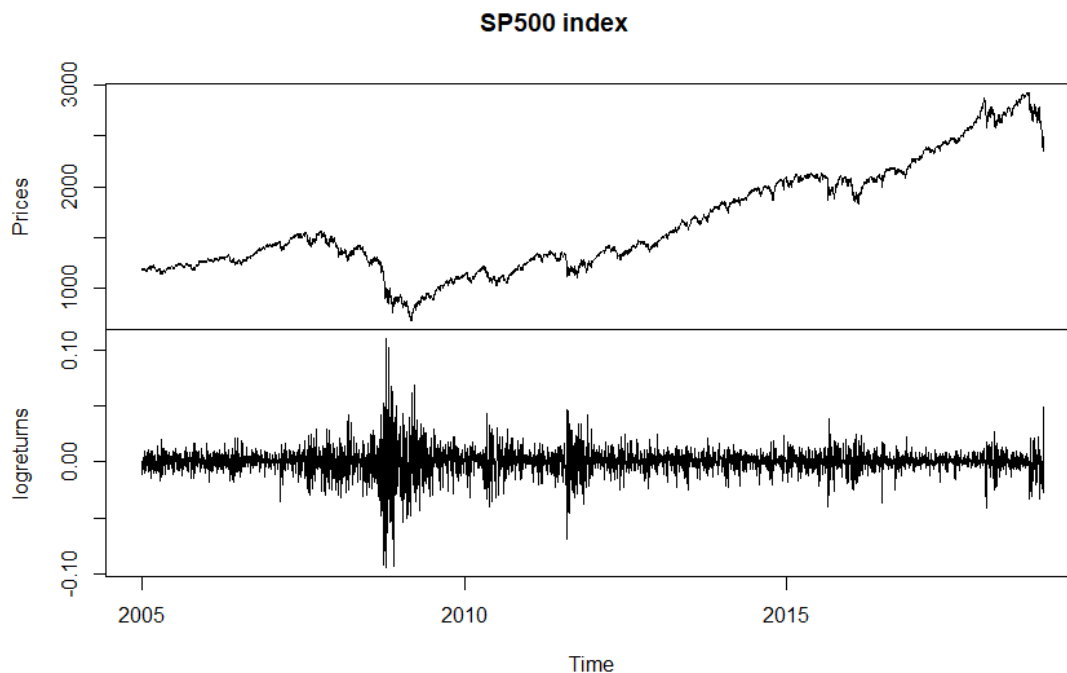
λογισμικό R και χρησιμοποιήθηκαν οι βιβλιοθήκες xts , $tseries$, $PerformanceAnalytics$ και $rugarch$.

Στη συνέχεια, με βάση τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος προσομοιώσαμε και φτιάξαμε τις *συνεχώς ανατοκιστέες αποδόσεις* (ή *λογαριθμικές αποδόσεις*) για τον κάθε δείκτη ξεχωριστά με τον εξής τρόπο:

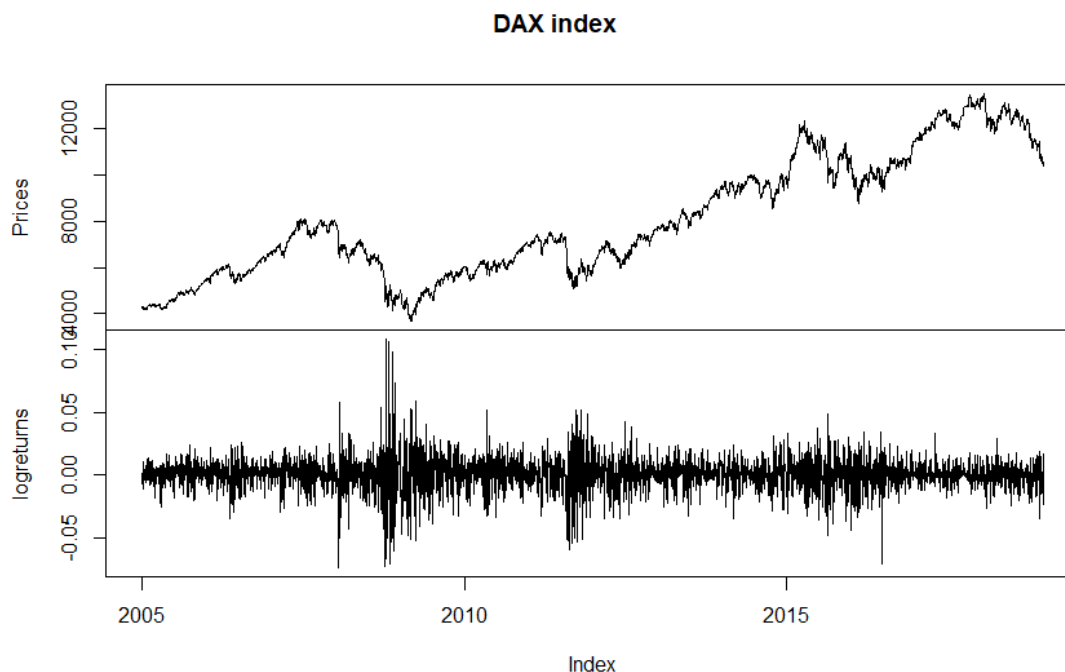
$$y_t^{Index} = \ln\left(\frac{Index_t}{Index_{t-1}}\right) \quad (4.1)$$

όπου, $Index_t$ είναι η τιμή του δείκτη *S&P 500* ή του *DAX* τη χρονική στιγμή t σε κάθε ξεχωριστή περίπτωση.

Στα παρακάτω γραφήματα βλέπουμε για το κάθε δείκτη, για την δεδομένη χρονική περίοδο, τις ημερήσιες τιμές κλεισίματος (*Prices*) και τις λογαριθμικές αποδόσεις αυτών (*logreturns*).



Γράφημα 4.1 Ημερήσιες τιμές κλεισίματος και οι λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη *S&P 500* τη χρονική περίοδο 01/01/2005 – 31/12/2018 .



Γράφημα 4.2 Ημερήσιες τιμές κλεισίματος και οι λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη *DAX* τη χρονική περίοδο 01/01/2005 – 31/12/2018.

Μόλις δει κανείς αυτά τα γραφήματα παρατηρεί ότι:

- δεν ισχύει σε καμία περίπτωση η *στασιμότητα* για τις ημερήσιες τιμές των δεικτών, ενώ για τις λογαριθμικές αποδόσεις φαίνεται να ισχύει. Οι λογαριθμικές αποδόσεις είναι κεντραρισμένες γύρω από το 0, παρόλο που οι τιμές πηγαίνουν «πάνω-κάτω».
- στις λογαριθμικές αποδόσεις φαίνεται ξεκάθαρα το φαινόμενο της *συσσωμάτωσης μεταβλητότητας (volatility clustering)*.
- η μεταβλητότητα είναι υψηλότερη όταν οι τιμές πέφτουν. Το 2008, τη περίοδο έναρξης της κρίσης, παρατηρείται η μεγαλύτερη πτώση τιμών σε κάθε δείκτη και κατά συνέπεια η μεγαλύτερη μεταβλητότητα.

Με τη βοήθεια της στατιστικής θα προσπαθήσουμε να αποδείξουμε τα χαρακτηριστικά που διακρίνουν τις χρηματοοικονομικές χρονοσειρές για τις αποδόσεις, που αναφέραμε στο Κεφάλαιο 3. Ξαναθυμίζουμε, αυτά είναι οι *παχιές ουρές*, οι *σχεδόν απρόβλεπτες αποδόσεις* και η *συσσωμάτωση μεταβλητότητας*.

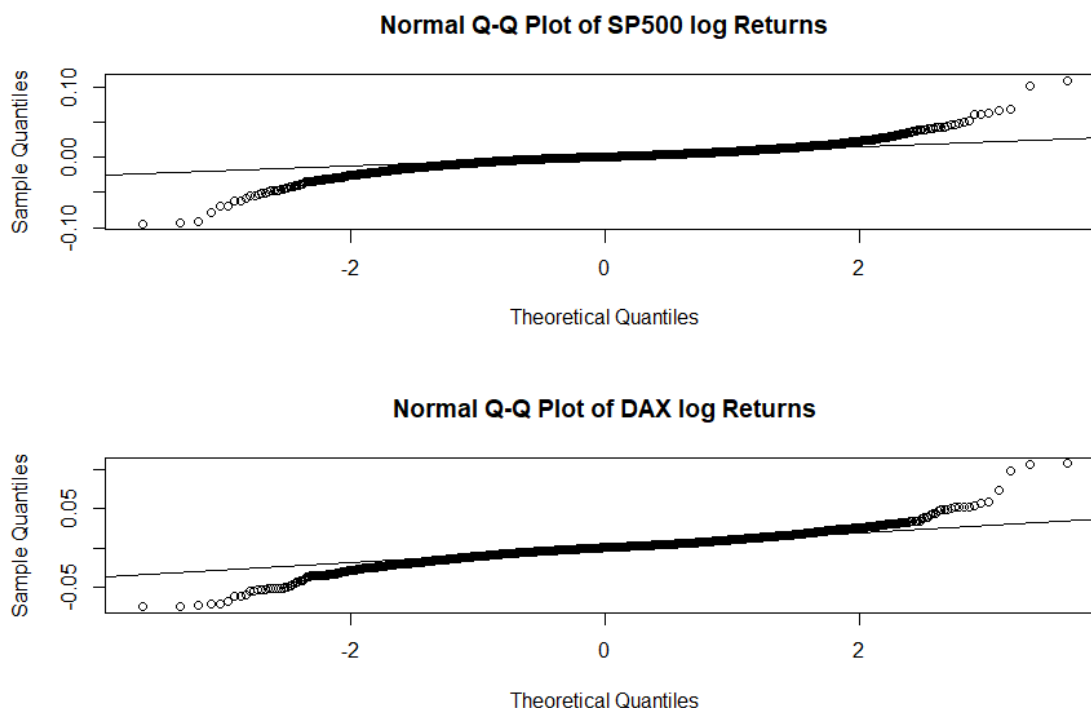
Αρχικά, να δούμε κάποια βασικά στατιστικά μέτρα για τις λογαριθμικές αποδόσεις κάθε δείκτη.

	S&P 500	DAX
Μέση Τιμή	0.00	0.00
Τυπική Απόκλιση	0.01	0.01
Λοξότητα	-0.36	-0.05
Κυρτότητα	11.67	6.43

Πίνακας 4.1 Βασικά στατιστικά μέτρα για τις λογαριθμικές αποδόσεις των δεικτών *S&P 500* και *DAX*.

Οι μέσες τιμές και οι τυπικές αποκλίσεις και για τους δύο δείκτες είναι προσεγγιστικά ίδιες. Για κάθε trading μέρα (ημέρες που είναι ανοικτό το χρηματιστήριο), οι μέσες τιμές και τυπικές αποκλίσεις είναι 0 και 0.01 αντίστοιχα. Κατά προσέγγιση, η ετήσια μεταβλητότητα είναι της τάξης του $\sqrt{252} * 0.01 = 16\%$ (252 είναι προσεγγιστικά ο αριθμός των ημερών που είναι ανοικτό το χρηματιστήριο). Η λοξότητα είναι αρνητική και για τους δύο δείκτες (περισσότερο για το δείκτη *S&P 500*) που υποδεικνύει ελαφρά αρνητική ασυμμετρία, καθώς η τιμή λοξότητας για τη κανονική κατανομή είναι 0. Επιπλέον, η κυρτότητα, που μετρά το πόσο παχιά είναι η ουρά της κατανομής, ξεπερνάει κατά πολύ τη τιμή της κανονικής κατανομής που είναι 3.

Τα παραπάνω στατιστικά είναι ένδειξη ότι οι λογαριθμικές αποδόσεις των δεδομένων μας δεν είναι κανονικά κατανεμημένες. Για να υποστηρίξουμε την άποψη αυτή κάναμε δύο στατιστικά τεστ κανονικότητας για κάθε δείκτη, το ένα είναι το διαγραμματικό *Q-Q plot* που αναπαριστά τα ποσοστημόρια (quantiles) της κατανομής των δεδομένων και το άλλο είναι το *Jarque-Bera*. Τα *Q-Q plot* είναι τα εξής:



Γράφημα 4.3 Q-Q Plots για κανονική κατανομή των λογαριθμικών αποδόσεων των δεικτών *S&P 500* και *DAX*.

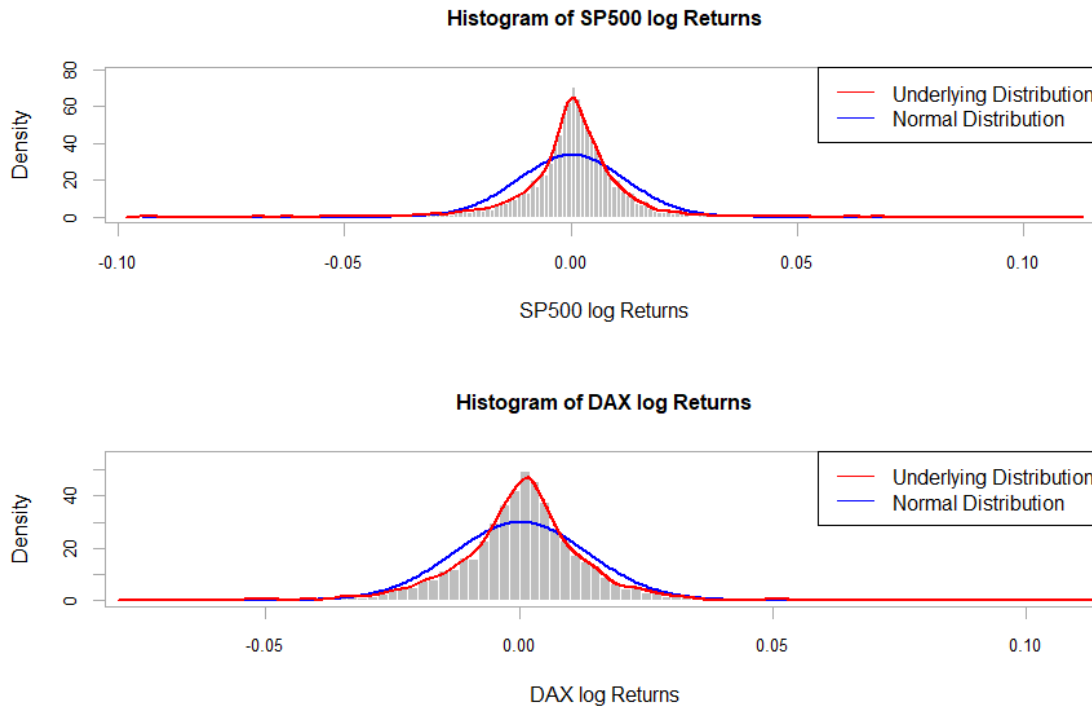
Εάν οι λογαριθμικές αποδόσεις των δεικτών ήταν κανονικά κατανομημένες, τότε έπρεπε να βρίσκονται πάνω στην ευθεία γραμμή. Στη περίπτωση μας, έχουμε το φαινόμενο του «ανεστραμμένου S (inverted S)» που δείχνει ότι έχουμε πιο παχιές ουρές από αυτές της κανονικής κατανομής.

Ομοίως, το *Jarque-Bera* τεστ απορρίπτει τη κανονικότητα αφού οι αντίστοιχες *p-value* είναι σχεδόν μηδενικές όπως δείχνει ο Πίνακας 4.2.

Jarque-Bera test for Normality	S&P 500	DAX
Statistic	20076	6134.5
p-value	< 2.2e-16	< 2.2e-16

Πίνακας 4.2 Jarque-Bera τεστ για τη κανονικότητα των δεικτών *S&P 500* και *DAX*.

Άλλη μια επιβεβαίωση για τη μη κανονικότητα των δεδομένων μας είναι το γράφημα 4.4 που δείχνει το ιστογράμμα για την υποκείμενη κατανομή των λογαριθμικών αποδόσεων του κάθε δείκτη σε αντιπαραβολή με τη κανονική κατανομή.



Γράφημα 4.4 Ιστογράμματα των λογαριθμικών αποδόσεων του κάθε δείκτη σε αντιπαραβολή με τη κανονική κατανομή.

Πριν μελετήσουμε τα επόμενα χαρακτηριστικά πρέπει να δούμε αν ισχύει η συνθήκη της στασιμότητας. Για την εξέταση της στασιμότητας των δεδομένων μας εφαρμόσαμε το στατιστικά τεστ *Augmented Dickey – Fuller (ADF test)* που παρουσιάζονται στο Πίνακα 4.3.

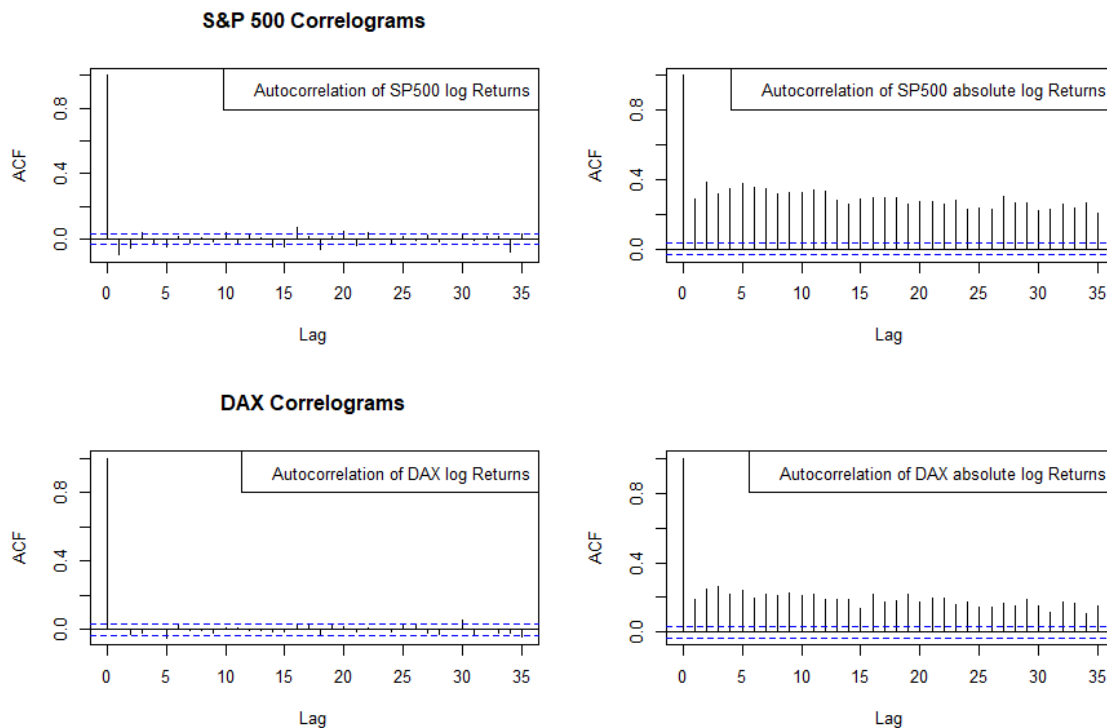
ADF test		
	S&P 500	DAX
Lag order	15	15
Statistic	-15.237	-15.103
p-value	0.01	0.01

Πίνακας 4.3 ADF test για τη στασιμότητα των λογαριθμικών αποδόσεων των δεικτών *S&P 500* και *DAX*.

Βλέπουμε ότι στις λογαριθμικές αποδόσεις και των δύο δεικτών, απορρίπτουμε τη μηδενική υπόθεση. Συνεπώς, έχουμε σοβαρές ενδείξεις ότι ισχύει η στασιμότητα στα δεδομένα μας.

Η εξέταση των χαρακτηριστικών των *σχεδόν απρόβλεπτων αποδόσεων* και της *συσσωμάτωσης μεταβλητότητας* γίνεται χρησιμοποιώντας τις *αυτοσυσχετίσεις*. Πρώτα, θα χρησιμοποιήσουμε το *κορελόγραμμα (ACF plot)* που απεικονίζει διαγραμματικά τις αυτοσυσχετίσεις και μετά θα συνεχίσουμε με το στατιστικό test *Ljung-Box*.

Η *προβλεψιμότητα* των αποδόσεων λέμε ότι ισχύει εάν έχουμε σημαντικές *αυτοσυσχετίσεις* στις αποδόσεις, ενώ η *συσσωμάτωση μεταβλητότητας* όταν έχουμε σημαντικές *αυτοσυσχετίσεις* στις απόλυτες τιμές αυτών των αποδόσεων⁵⁵.



Γράφημα 4.5 Κορελόγραμμα των λογαριθμικών αποδόσεων και των απόλυτων τιμών των λογαριθμικών αποδόσεων για κάθε δείκτη.

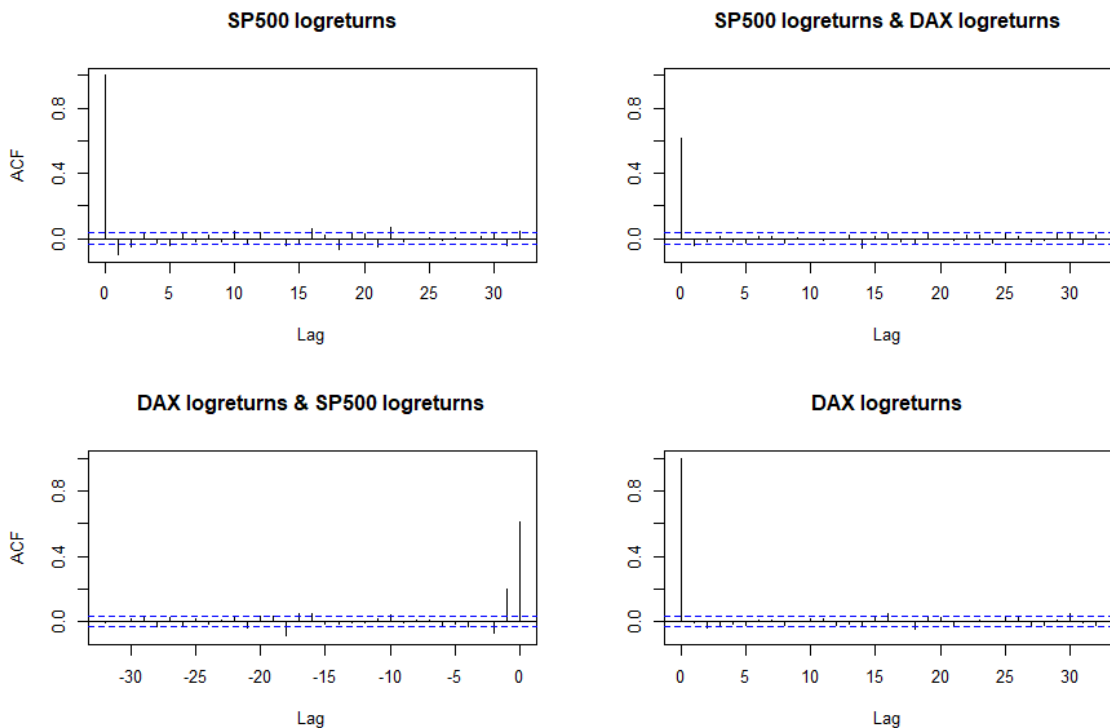
Οι διακεκομμένες μπλε γραμμές σε ένα κορελόγραμμα δείχνουν το 95% διάστημα εμπιστοσύνης. Όταν ο αριθμός των σημαντικών υστερημένων τιμών (lags) που ξεπερνάνε τη μπλε γραμμή είναι πάνω από 5% των συνολικών υστερημένων τιμών, λέμε ότι η χρονοσειρά είναι συσχετισμένη. Σημειώνουμε ότι η υστερημένη τιμή 0 (με τον εαυτό της), όπως είναι λογικό, έχει πάντα συσχέτιση 1. Το φαινόμενο του *volatility clustering* είναι ξεκάθαρο αφού οι αυτοσυσχετίσεις στις απόλυτες τιμές των αποδόσεων είναι όλες θετικές και ξεπερνάνε τη διακεκομμένη γραμμή. Δε μπορούμε να πούμε το ίδιο όμως και για τις τιμές των αποδόσεων, τουλάχιστον με μια πρώτη ματιά και για τους δύο δείκτες. Τί γίνεται με αυτές που ξεπερνάνε τη διακεκομμένη γραμμή, μπορούμε άραγε να πάρουμε πληροφορίες από αυτές τις τιμές; Την απάντηση θα τη δώσει το στατιστικό τεστ *Ljung-Box*.

Ljung-Box test				
	S&P 500 logreturns	S&P 500 absolute logreturns	DAX logreturns	DAX absolute logreturns
Degrees of Freedom	22	22	22	22
Statistic	138.36	7596.2	34.518	3298.9
p-value	< 2.2e-16	< 2.2e-16	0.04347	< 2.2e-16

Πίνακας 4.4 Ljung-Box τεστ για τις λογαριθμικές αποδόσεις και τις απόλυτες τιμές των λογαριθμικών αποδόσεων των δεικτών *S&P 500* και *DAX*.

Όπως περιμέναμε, στις απόλυτες τιμές των αποδόσεων η μηδενική υπόθεση ότι οι απόλυτες τιμές των αποδόσεων είναι ανεξάρτητες απορρίπτεται. Το τεστ έδειξε όμως ότι το ίδιο συμβαίνει (σε μικρότερο βαθμό) και για τις αποδόσεις. Άρα, κρύβεται πληροφορία στις προηγούμενες-υστερημένες τιμές των αποδόσεων και πρέπει με κάποιο τρόπο να αξιοποιηθεί.

Πριν κλείσουμε την ενότητα, θα θέλαμε να απαντήσουμε σε κάποια ενδιαφέροντα ερωτήματα. Υπάρχει σχέση μεταξύ του αμερικάνικου δείκτη και του ευρωπαϊκού; Αν ναι, σε ποιο βαθμό; Για να απαντήσουμε, θα χρησιμοποιήσουμε πάλι το *ACF plot* αλλά αυτή τη φορά θα δούμε πόσο σχετίζεται ο ένας δείκτης με προηγούμενες τιμές (ή επόμενες) τιμές του άλλου. Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Γράφημα 4.6.



Γράφημα 4.6 Κορελόγραμμα των λογαριθμικών αποδόσεων μεταξύ των δεικτών *S&P 500* και *DAX*.

Το πρώτο που παρατηρούμε ότι υπάρχει σχετικά ισχυρή θετική συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων των δεικτών, της τάξης του 0.61 ή 61% , που σημαίνει ότι η απόδοση του ενός δείκτη στο τέλος της μέρας κινήθηκε κατά 61% των περιπτώσεων, στην ίδια κατεύθυνση με του άλλου. Το άλλο που παρατηρούμε, στο κάτω αριστερά γράφημα, είναι ότι στη -1 υστερημένη τιμή (δηλαδή τη μια μέρα μετά) του δείκτη *DAX* και τη προηγούμενη αυτής του δείκτη *S&P 500*, υπάρχει μια θετική συσχέτιση (0.198 σε τιμή) που ξεπερνάει τη διακεκομμένη μπλε γραμμή. Αυτό μπορεί να μεταφραστεί ως ότι υπάρχει ένδειξη ότι οι αγορές της Ευρώπης τείνουν να ακολουθούν αυτές της Αμερικής, ή διαφορετικά, ότι υπάρχει θετική συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων της Αμερικής μιας ημέρας και των αποδόσεων της Ευρώπης της επομένης.

Στην επόμενη ενότητα θα αναφέρουμε τη μεθοδολογία και τα μοντέλα που θα χρησιμοποιηθούν με βάση των αποτελεσμάτων της περιγραφικής στατιστικής που ακολουθήθηκε στην ενότητα αυτή.

4.2. Μεθοδολογία

Ο αρχικός στόχος είναι να επιλέξουμε κάποια αντιπροσωπευτικά μοντέλα για τα δεδομένα μας. Θεωρήσαμε ότι με το $AR(1)$ θα «τραβήξουμε» το κομμάτι της αυτοσυσχέτισης από τις αποδόσεις και με τα υποδείγματα ετεροσκεδαστικότητας $GARCH(1,1)$, $IGARCH(1,1)$ και $GJR-GARCH(1,1)$ θα εξαλείψουμε το κομμάτι των αυτοσυσχετίσεων στις απόλυτες τιμές των αποδόσεων, παρέχοντας αξιόπιστες προβλέψεις. Τέλος, όπως έδειξαν τα ιστογράμματα για τις υποκείμενες κατανομές των δεδομένων, μια λεπτόκυρτη κατανομή φαίνεται να προσαρμόζει καλά τα δεδομένα μας και επειδή είχαμε και ελαφρά ασυμμετρία, πιστεύουμε ότι η *τυποποιημένη λοξή Student-t* είναι μια καλή επιλογή δοκιμάζοντας βέβαια και τη *κανονική* κατανομή για κάθε μοντέλο. Συγκεκριμένα, τα μοντέλα είναι τα παρακάτω και θα δοκιμαστούν και για τους δύο δείκτες ξεχωριστά:

- $AR(1)GARCH(1,1)$ με Κανονική (Normal)

$$\begin{aligned} y_t &= c_0 + c_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= a_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2 \\ z_t &\sim N(0,1) \end{aligned} \tag{4.2}$$

- $AR(1)GARCH(1,1)$ με λοξή (Skewed) Student-t

$$\begin{aligned} y_t &= c_0 + c_1 y_{t-1} + \varepsilon_t \\ \varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= a_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2 \\ z_t &\sim st(0,1; \xi, \nu) \end{aligned} \tag{4.3}$$

- $AR(1)IGARCH(1,1)$ με Κανονική (Normal)

$$y_t = c_0 + c_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_t &= \sigma_t z_t \\ \sigma_t^2 &= a_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2\end{aligned}\quad (4.4)$$

$$\text{όπου, } \alpha_1 + b_1 = 1$$

$$z_t \sim N(0,1)$$

- *AR(1)IGARCH(1,1) με λοξή (Skewed) Student-t*

$$y_t = c_0 + c_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2\quad (4.5)$$

$$\text{όπου, } \alpha_1 + b_1 = 1$$

$$z_t \sim st(0,1; \xi, \nu)$$

- *AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική (Normal)*

$$y_t = c_0 + c_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + b_1 \sigma_{t-1}^2\quad (4.6)$$

όπου, $d_{t-1} = 1$ εάν $\varepsilon_{t-1} < 0$ και $d_{t-1} = 0$ διαφορετικά

$$z_t \sim N(0,1)$$

- *AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή (Skewed) Student-t*

$$y_t = c_0 + c_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$\sigma_t^2 = a_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma_1 \varepsilon_{t-1}^2 d_{t-1} + b_1 \sigma_{t-1}^2\quad (4.7)$$

όπου, $d_{t-1} = 1$ εάν $\varepsilon_{t-1} < 0$ και $d_{t-1} = 0$ διαφορετικά

$$z_t \sim st(0,1; \xi, \nu)$$

Σημειώνουμε ότι όπου αναφέρουμε *λοξή (Skewed) Student-t* κατανομή εννοούμε τη τυποποιημένη *λοξή Student-t* κατανομή, απλά ο όρος παραλείπεται για λόγους ευκολίας.

Καθώς αρχίσαμε να θέτουμε σε πράξη τα παραπάνω μοντέλα παρατηρήσαμε ότι υπήρχε αυτοσυσχέτιση είτε στα κατάλοιπα είτε στις απόλυτες τιμές αυτών (ο έλεγχος αυτός έγινε σε κάθε περίπτωση με το *Ljung-Box* τεστ). Δηλαδή, τα κατάλοιπα δεν αποτελούσαν *λευκό θόρυβο*. Το ενδιαφέρον είναι ότι διαλέγοντας ένα υποσύνολο των δεδομένων και δοκιμάζοντας τα ίδια μοντέλα δεν ίσχυε το παραπάνω φαινόμενο. Ενδεικτικά και εντελώς τυχαία, θα σας δείξουμε το τεστ για το μοντέλο *AR(1)GARCH(1,1)* με *λοξή (Skewed) Student-t* για τον δείκτη *S&P 500* για το σύνολο των δεδομένων (3521 παρατηρήσεις) και για ένα υποσύνολο αυτού (1500 παρατηρήσεις). Τονίζουμε ότι, η αυτοσυσχέτιση είτε στα κατάλοιπα είτε στις απόλυτες τιμές αυτών στο σύνολο των δεδομένων και η μη συσχέτιση των ίδιων σε ένα υποσύνολο, ισχύει και για τα άλλα μοντέλα και για τον άλλο δείκτη.

Ljung-Box τεστ για τα κατάλοιπα			
Για το σύνολο των δεδομένων		Για υποσύνολο	
Statistic	35.864	Statistic	32.825
Df	22	Df	22
p-value	<u>0.0314</u>	p-value	<u>0.06437</u>

Ljung-Box τεστ για τις απόλυτες τιμές των καταλοίπων			
Για το σύνολο των δεδομένων		Για υποσύνολο	
Statistic	30.743	Statistic	28.659
Df	22	Df	22
p-value	0.1015	p-value	0.1549

Πίνακας 4.5 Ljung-Box τεστ για τα σφάλματα και τις απόλυτες τιμές των καταλοίπων για το σύνολο των δεδομένων και για ένα υποσύνολο των δεδομένων, για κάθε δείκτη χρησιμοποιώντας το μοντέλο *AR(1)GARCH(1,1)* με *λοξή (Skewed) Student-t*.

Αυτό ήταν και το κίνητρο να δοκιμάσουμε τη μέθοδο του *κινούμενου παραθύρου* χρησιμοποιώντας ως *παράθυρο* 1760 παρατηρήσεις και ανά 500 παρατηρήσεις θα έχουμε *επανεκτίμηση των παραμέτρων* του κάθε μοντέλου. Με το τρόπο αυτό καταφέραμε να κάνουμε, σε κάθε περίπτωση, τα κατάλοιπα *λευκό θόρυβο*.

Αφού τρέξουμε τα μοντέλα αυτά με τη μέθοδο του *κινούμενου παραθύρου*, για κάθε δείκτη, θα κρατήσουμε τα τρία εκείνα από κάθε δείκτη που κατάφεραν το χαμηλότερο *Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (Mean Squared Error - MSE)* στη δειγματική διακύμανση.

Το ποιο είναι το καλύτερο από τα τρία (για κάθε δείκτη) θα εξαρτηθεί από το πόσο ακριβείς θα είναι οι ημερήσιες εκτιμήσεις *Αξία σε Κίνδυνο (VaR)* που θα κάνει. Συγκεκριμένα, θα πρέπει γίνει ο έλεγχος *Back-Testing* και σε τελικό στάδιο να δούμε από αυτά που θα περάσουν τον έλεγχο, ποιο υποεκτιμά ή υπερεκτιμά τον κίνδυνο σε μικρότερο βαθμό.

Στην επόμενη ενότητα θα περάσουμε στα αποτελέσματα μέσω της μεθοδολογίας που περιγράψαμε προηγουμένως.

4.3. Αποτελέσματα

Οι τιμές του *MSE* για το κάθε μοντέλο και το κάθε δείκτη, με ταξινόμηση από το καλύτερο στο χειρότερο (όσο μικρότερη η τιμή *MSE*, τόσο το καλύτερο), απεικονίζονται στο Πίνακα 4.6:

Μοντέλα για δείκτη S&P 500	Τιμή MSE	Μοντέλα για δείκτη DAX	Τιμή MSE
<u>AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική</u>	<u>2.012417e-08</u>	<u>AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική</u>	<u>6.226992e-08</u>
<u>AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t</u>	<u>2.090637e-08</u>	<u>AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t</u>	<u>6.327824e-08</u>
<u>AR(1)GARCH(1,1) με Κανονική</u>	<u>2.141196e-08</u>	<u>AR(1)GARCH(1,1) με λοξή Student-t</u>	<u>6.362144e-08</u>
AR(1)GARCH(1,1) με λοξή Student-t	2.152909e-08	AR(1)GARCH(1,1) με Κανονική	6.367266e-08
AR(1)IGARCH(1,1) με λοξή Student-t	2.170657e-08	AR(1)IGARCH(1,1) με λοξή Student-t	6.415616e-08
AR(1)IGARCH(1,1) με Κανονική	2.191101e-08	AR(1)IGARCH(1,1) με Κανονική	6.462409e-08

Πίνακας 4.6 Η τιμή του Μέσου Τετραγωνικού σφάλματος για κάθε μοντέλο και για κάθε δείκτη.

Με υπογράμμιση είναι τα μοντέλα που τελικά θα κρατήσουμε και θα ερευνήσουμε αν θα περάσουν τον έλεγχο *Back-Testing*. Ανεξαρτήτως κατανομής και δείκτη, από τα αποτελέσματα φαίνεται ότι το μοντέλο *AR(1)IGARCH(1,1)* θα αποκλειστεί.

Πριν δείξουμε τα αποτελέσματα του *Back-Testing* θα θέλαμε να κάνουμε μια διευκρίνηση σχετικά με την *Αξία σε Κίνδυνο*. Στο Κεφάλαιο 2 ορίσαμε το *VaR* με αρνητικό πρόσημο, με την έννοια ότι αντικατοπτρίζει το *επιπλέον κεφάλαιο* που πρέπει να προσθέσουμε στη θέση μας ώστε να είναι αυτή αποδεκτή. Στην εφαρμογή δε θα κάνουμε χρήση του αρνητικού πρόσημου, δηλαδή, μεταφράζοντάς το απλά ως *ποσό ζημιάς* (είναι δηλαδή αρνητική τιμή).

Θα δούμε τώρα τα αποτελέσματα *Back-Testing* του *Kuriec*⁶⁴ και του *Christoffersen*⁶⁵, όπου α είναι το *επίπεδο σημαντικότητας* και *Backtest Length* είναι το διάστημα που γίνεται ο έλεγχος (δηλαδή ο αριθμός των προβλέψεων). Θα δοκιμάσουμε για *επίπεδο σημαντικότητας* 0.05 και 0.01. Διαγραμματικά οι παραβιάσεις βρίσκονται στο Παράρτημα Θ.

S&P 500 VaR Backtest Report, alpha=5%, Backtest Length: 1761			
<u>Unconditional Coverage (Kupiec)</u>			
<u>Null Hypothesis:</u>			
<u>Correct Exceedances</u>			
	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t	AR(1)GARCH(1,1) με Κανονική
LR.uc Statistic:	0.798	2.868	0
LR.uc p- value:	0.372	0.09	0.996
Reject Null:	NO	NO	NO
<u>Conditional Coverage (Christoffersen)</u>			
<u>Null-Hypothesis:</u>			
<u>Correct Exceedances and Independence of Failures</u>			
	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t	AR(1)GARCH(1,1) με Κανονική
LR.cc Statistic	0.837	2.868	0.585
LR.cc p- value	0.658	0.238	0.746
Reject Null:	NO	NO	NO

Πίνακας 4.7 Back-testing της Αξίας σε Κίνδυνο με τις μεθόδους της εξαρτημένης και ανεξάρτητης κάλυψης, για $\alpha=0.05$ και διάστημα ελέγχου ίσο με 1761 παρατηρήσεις για το δείκτη S&P 500 και για τα μοντέλα AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική, AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t και AR(1)GARCH(1,1) με Κανονική.

DAX VaR Backtest Report, alpha=5%, Backtest Length: 1791			
<u>Unconditional Coverage (Kupiec)</u>			
<u>Null Hypothesis:</u>			
<u>Correct Exceedances</u>			
	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t	AR(1)GARCH(1,1) με λοξή Student-t
LR.uc Statistic:	0.004	0.025	2.033
LR.uc p-value:	0.952	0.875	0.154
Reject Null:	NO	NO	NO
<u>Conditional Coverage (Christoffersen)</u>			
<u>Null-Hypothesis:</u>			
<u>Correct Exceedances and Independence of Failures</u>			
	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t	AR(1)GARCH(1,1) με λοξή Student-t
LR.cc Statistic	0.568	0.057	3.608
LR.cc p-value	0.753	0.972	0.165
Reject Null:	NO	NO	NO

Πίνακας 4.8 Back-testing της *Αξίας σε Κίνδυνο* με τις μεθόδους της εξαρτημένης και ανεξάρτητης κάλυψης, για $\alpha=0.05$ και διάστημα ελέγχου ίσο με 1791 παρατηρήσεις για το δείκτη DAX και για τα μοντέλα AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική, AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t και AR(1)GARCH(1,1) με λοξή Student-t.

Βλέπουμε ότι όλα τα μοντέλα πέρασαν τον έλεγχο *Back-Testing* για $\alpha=0.05$, δηλαδή, σε κάθε περίπτωση, η μηδενική υπόθεση δεν μπορούσε να απορριφθεί.

Μένει να εξετάσουμε ποια δύο μοντέλα (ένα για κάθε δείκτη), υπό αυτές τις προϋποθέσεις, υποεκτιμούν ή υπερεκτιμούν τον κίνδυνο στον ελάχιστο δυνατό βαθμό. Συνεπώς, όσο πιο μικρή είναι η απόλυτη διαφορά μεταξύ του επιπέδου σημαντικότητας και τις συχνότητας των παραβιάσεων του *VaR* (*coverage*) τόσο το καλύτερο. Στην περίπτωση τις, αφού έχουμε ορίσει το επίπεδο σημαντικότητας 5%, αναμένουμε το 5% του συνολικού αριθμού των προβλέψεων που κάνει το κάθε μοντέλο να ξεπεράσει το αντίστοιχο *VaR* (δηλαδή να «πέσει έξω»). Έτσι, εάν το *coverage* \gg α τότε έχουμε τις παραβιάσεις και ο κίνδυνος **υποεκτιμάται**, ενώ στην ανάποδη περίπτωση έχουμε πολύ λίγες παραβιάσεις και ο κίνδυνος **υπερεκτιμάται**.

SP&500, Coverage vs Alpha		
AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t	AR(1)GARCH(1,1) με Κανονική
<i>Alpha=0.05</i>	<i>Alpha=0.05</i>	<i>Alpha=0.05</i>
<i>Coverage=0.04542873</i>	<i>Coverage=0.04145372</i>	<i>Coverage=0.04997161</i>
<i>Absolute difference=0.00457127</i>	<i>Absolute difference=0.00854628</i>	<i>Absolute difference=0.00002839</i>

Πίνακας 4.9 Σύγκριση του $\alpha=0.05$ με την κάλυψη για τα μοντέλα AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική, AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t και AR(1)GARCH(1,1) με Κανονική για το δείκτη S&P 500.

DAX, Coverage vs Alpha		
AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t	AR(1)GARCH(1,1) με λοξή Student-t
<i>Alpha=0.05</i>	<i>Alpha=0.05</i>	<i>Alpha=0.05</i>
<i>Coverage= 0.04969291</i>	<i>Coverage= 0.0508096</i>	<i>Coverage= 0.05750977</i>
<i>Absolute difference= 0.00030709</i>	<i>Absolute difference= 0.0008096</i>	<i>Absolute difference= 0.00750977</i>

Πίνακας 4.10 Σύγκριση του $\alpha=0.05$ με την κάλυψη για τα μοντέλα AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική, AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t και AR(1)GARCH(1,1) με λοξή Student-t για το δείκτη DAX.

Για τον δείκτη S&P 500 τη μικρότερη απόλυτη διαφορά την πέτυχε το μοντέλο AR(1)GARCH(1,1) με Κανονική κατανομή με διαφορά από τις υπόλοιπες, ενώ στην περίπτωση του DAX την πέτυχε το AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική

κατανομή. Βέβαια, και τα αποτελέσματα των άλλων μοντέλων ήταν ικανοποιητικά, και κυρίως για τον DAX δείκτη, η κατανομή για το μοντέλο $AR(1)GJR-GARCH(1,1)$ δε φάνηκε να είχε ιδιαίτερη σημασία υπό αυτές τις συνθήκες.

Πάμε τώρα να εξετάσουμε τι συμβαίνει για επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=1\%$.

S&P 500 VaR Backtest Report, alpha=1%, Backtest Length: 1761			
<u>Unconditional Coverage (Kupiec)</u>			
<i>Null Hypothesis:</i>			
<i>Correct Exceedances</i>			
	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t	AR(1)GARCH(1,1) με Κανονική
LR.uc Statistic:	6.227	0.153	10.807
LR.uc p- value:	0.013	0.695	0.001
Reject Null:	NO	NO	YES
<u>Conditional Coverage (Christoffersen)</u>			
<i>Null-Hypothesis:</i>			
<i>Correct Exceedances and Independence of Failures</i>			
	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t	AR(1)GARCH(1,1) με Κανονική
LR.cc Statistic	12.668	2.394	15.879
LR.cc p- value	0.002	0.302	0
Reject Null:	YES	NO	YES

Πίνακας 4.11 Back-testing της Αξίας σε Κίνδυνο με τις μεθόδους της εξαρτημένης και ανεξάρτητης κάλυψης, για $\alpha=0.01$ και διάστημα ελέγχου ίσο με 1761 παρατηρήσεις για το δείκτη S&P 500 και για τα μοντέλα $AR(1)GJR-GARCH(1,1)$ με Κανονική, $AR(1)GJR-GARCH(1,1)$ με λοξή Student-t και $AR(1)GARCH(1,1)$ με Κανονική.

DAX VaR Backtest Report, alpha=1%, Backtest Length: 1791			
<u>Unconditional Coverage (Kupiec)</u>			
<u>Null Hypothesis:</u>			
<u>Correct Exceedances</u>			
	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t	AR(1)GARCH(1,1) με λοξή Student-t
LR.uc Statistic:	0.88	0.213	0.506
LR.uc p-value:	0.348	0.644	0.477
Reject Null:	NO	NO	NO
<u>Conditional Coverage (Christoffersen)</u>			
<u>Null-Hypothesis:</u>			
<u>Correct Exceedances and Independence of Failures</u>			
	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t	AR(1)GARCH(1,1) με λοξή Student-t
LR.cc Statistic	1.427	0.502	0.759
LR.cc p-value	0.49	0.778	0.684
Reject Null:	NO	NO	NO

Πίνακας 4.12 Back-testing της *Αξίας σε Κίνδυνο* με τις μεθόδους της εξαρτημένης και ανεξάρτητης κάλυψης, για $\alpha=0.01$ και διάστημα ελέγχου ίσο με 1791 παρατηρήσεις για το δείκτη DAX και για τα μοντέλα AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική, AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t και AR(1)GARCH(1,1) με λοξή Student-t.

Από τον Πίνακα 4.11 βλέπουμε ότι μονάχα το μοντέλο *AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t* κατανομή πέρασε τον έλεγχο *Back-Testing* για τον δείκτη S&P 500, οπότε αυτό μονάχα παρέχει αξιόπιστες προβλέψεις VaR.

Για το *DAX* δείκτη όλα τα μοντέλα πέρασαν τον έλεγχο *Back-Testing* και θα συγκρίνουμε το *coverage* με το επίπεδο σημαντικότητας για να δούμε ποιο πέτυχε τη μικρότερη απόλυτη διαφορά.

DAX, Coverage vs Alpha		
AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική	AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t	AR(1)GARCH(1,1) με λοξή Student-t
<i>Alpha=0.01</i>	<i>Alpha=0.01</i>	<i>Alpha=0.01</i>
<i>Coverage= 0.01228364</i>	<i>Coverage= 0.008933557</i>	<i>Coverage= 0.008375209</i>
<i>Absolute difference= 0.00228364</i>	<i>Absolute difference= <u>0.001066443</u></i>	<i>Absolute difference= 0.001624791</i>

Πίνακας 4.13 Σύγκριση του $\alpha=0.01$ με την κάλυψη για τα μοντέλα AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική, AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t και AR(1)GARCH(1,1) με λοξή Student-t για το δείκτη *DAX*.

Βλέπουμε ότι το μοντέλο AR(1)GJR-GARCH(1,1) με λοξή Student-t είχε τη μικρότερη δυνατή απόλυτη διαφορά για το δείκτη *DAX* και για επίπεδο σημαντικότητας 1%. Δεύτερο ήρθε το AR(1)GARCH(1,1) με λοξή Student-t και τέλος το AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Από την εμπειρική εφαρμογή του Κεφαλαίου 4 μπορούμε να εξάγουμε κάποια συμπεράσματα ως προς τη κατανομή των αποδόσεων και την ευστοχία των μοντέλων. Στη περίπτωση του επιπέδου σημαντικότητας 5%, παρατηρήσαμε ότι όλα τα μοντέλα (πλην του $AR(1)/GARCH(1,1)$ που δεν εξετάστηκε σε καμία περίπτωση) ήταν αξιόπιστα. Για τον δείκτη *S&P 500* κρίθηκε το $AR(1)GARCH(1,1)$ με Κανονική κατανομή, δηλαδή το πιο απλό μοντέλο, το καλύτερο από όλα, ενώ για το δείκτη *DAX*, με μικρές διαφορές, το καλύτερο ήταν το $AR(1)GJR-GARCH(1,1)$ με Κανονική επίσης κατανομή. Παρόλο που αποδείξαμε ότι οι αποδόσεις δεν ακολουθούσαν κανονική κατανομή, τα μοντέλα με κανονική κατανομή πέτυχαν τα καλύτερα αποτελέσματα στο επίπεδο σημαντικότητας 5%. Στη περίπτωση του επιπέδου σημαντικότητας 1% είχαμε παντελώς διαφορετικά αποτελέσματα. Συγκεκριμένα, και για τους δύο δείκτες, το πιο σύνθετο μοντέλο, $AR(1)GJR-GARCH(1,1)$ με Λοξή *Student-t* κατανομή, πέτυχε τα καλύτερα αποτελέσματα (στον *SP&500* ήταν και το μόνο αξιόπιστο). Συνεπώς, στη περίπτωση που θέλουμε να πετύχουμε λίγες παραβιάσεις (μικρό επίπεδο σημαντικότητας), πρέπει τα μοντέλα να είναι ικανά να προσαρμόσουν στο μεγαλύτερο δυνατό βαθμό τα χαρακτηριστικά των χρηματοοικονομικών χρονοσειρών και δύναται τα πιο σύνθετα μοντέλα να προτιμώνται έναντι των πιο απλών.

Η εφαρμογή βασίστηκε σε κάποιες παραδοχές η όποια παραλλαγή αυτών είναι πιθανό να φέρει διαφορετικά αποτελέσματα. Αρχικά, η τάξη των μοντέλων ετεροσκεδαστικότητας επιλέχθηκε αυθαίρετα ως $p=q=1$ επειδή η τάξη αυτή τείνει να ταιριάζει σε ικανοποιητικό βαθμό σε μεγάλο αριθμό εφαρμογών στην ανάλυση χρονοσειρών. Επίσης, χρησιμοποιήθηκε το Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα για κριτήριο πρώτης ταξινόμησης των μοντέλων ενώ υπάρχουν αρκετά εναλλακτικά κριτήρια. Στη συνέχεια, στη μέθοδο του κινούμενου παραθύρου χωρίστηκαν τα δεδομένα σε δύο δείγματα για το κάθε δείκτη (που είναι περίπου στη μέση), δηλαδή το ένα δείγμα για να τροφοδοτηθεί το μοντέλο (*in sample*) και τα άλλο για να κάνει προβλέψεις (*out of sample*) καθώς και επαναπροσδιορισμό των παραμέτρων κάθε 500 παρατηρήσεις. Τέλος, ο έλεγχος *back-testing* συγκρίνει μονάχα εάν ο αριθμός των πραγματικών παραβιάσεων

διαφέρει σημαντικά με τον εκτιμώμενο αριθμό παραβιάσεων και δε μετράει καθόλου τη διαφορά ανάμεσα στη πραγματική ζημιά και του εκτιμώμενου *VaR* για τις ίδιες χρονικές στιγμές.

Εν κατακλείδι, οι παραδοχές που κάνουν οι διαχειριστές κινδύνου και οι αναλογιστές πρέπει να είναι ρεαλιστικές και σε πλήρη αρμονία με το εποπτικό πλαίσιο, τη διάθεση και την αντοχή που έχει το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα στο κίνδυνο. Κατά αυτό το τρόπο, τα μέτρα κινδύνου θα μπορούν να αξιοποιήσουν όλη τη διαθέσιμη πληροφορία και να επιλέγονται οι καλύτερες δυνατές αποφάσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- 1: Adams J. (2014), *Managing Risk: Framing your problems*, BoeringerIngelheim Alumni Seminar, SchlossGracht, Cologne 9-11
- 2: Τήνιος Π. (2017), *Πανεπιστημιακές Σημειώσεις στο μάθημα « Οικονομικά της Ασφάλισης»*
- 3: Knight F. H. (1921), *Risk, Uncertainty, and Profit*. Boston, MA: Hart, Schaffner & Marx; Houghton Mifflin Company
- 4: Rosa E. (1998), *Meta theoretical foundations for post-normal risk*. Journal of Risk Research, 1,15–44
- 5: Kaplan S. and Garrick B.J. (1981), *On the quantitative definition of risk*. Risk Analysis, 1(1),11-27
- 6: Wilson R. and Crouch, E.A.C. (1982), *Risk-Benefit analysis Cambridge*, MA: Ballinger 218 pp
- 7: Artzner P., Delbaen F., Eber J.M. and Heath D. (1998), *Coherent measures of risk*
- 8: ISO (2009), *Risk Management – Principles and guidelines*, ISO 31000:2009.
- 9: Κούτρας Μ. (2018), *Πανεπιστημιακές Σημειώσεις στο μάθημα «Πιστωτικός Κίνδυνος»*
- 10: Χατζηβασίλογλου Ι. και Καπόπουλος Π. (2017), *Πανεπιστημιακές Σημειώσεις στο μάθημα «Διαχείριση Κινδύνων»*
- 11: Νόμος 4364/2016
- 12: <http://www.eaee.gr/cms/basic-page/78/asfaliseis>
- 13: <http://www.opengov.gr/minfin/?p=5764>
- 14: <http://www.businessdictionary.com/definition/financial-position.html>

- 15: Dowd K. and Blake D. (2006), *After VaR: The theory, estimation and insurance applications of quantile-based risk measures*
- 16: Föllmer H. and Schied A. (2002), *Convex Measures of Risk and Trading Constraints*, Finance and Stochastics 6:4, 429-447
- 17: Frittelli M. and Gianin E.R. (2002), *Putting Order in Risk Measures*, Journal of Banking and Finance 26:7, 1473–1486
- 18: Heath D. and Ku H. (2004), *Pareto Equilibria with Coherent Measures of Risk*, Mathematical Finance 14:2, 163–172.
- 19: Shigeo K. (2001), *On Law Invariant Coherent Risk Measures*, Advances in Mathematical Economics 3, 83–95
- 20: Föllmer H. and Knispel T. (2013), *Convex Risk Measures: Basic Facts, Law-Invariance and Beyond, Asymptotics for Large Portfolios*, In Leonard C. MacLean and William T. Ziemba, eds., Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making, Part II, 507-554. Singapore: World Scientific.
- 21: Leippold M. (2015), *Value-at-Risk and Other Risk Measures*
- 22: Medina P.K., Munari C. and Svindlad G. (2017), *Comonotonic risk measures in a world without risk-free assets*
- 23: Goovaerts M.J., Vyllder F.D. and Haezendonck J. (1984), *Insurance Premiums*, Amsterdam: North-Holland.
- 24: <https://www.euretirio.com/trapezika-test-antoxis-stress-tests/>
- 25: McNeil A.J. (2014), *Scenario Sets, Risk Measures and Stress Testing*
- 26: Acerbi C. (2002), *Spectral measures of risk: A coherent representation of subjective risk aversion*
- 27: Παλαιολόγος Γ. (2009), *Σύγχρονη Μικροοικονομική Θεωρία*
- 28: Kusuoka S. (2001), *On Law Invariant Coherent Risk Measures*
- 29: Dowd K., Cotter J. and Sorwar G. (2008), *Spectral Risk Measures: Properties and Limitations*

- 30: Yaari M.E. (1987), *The Dual Theory of Choice under Risk*
- 31: Wang S.S., Young V.R. and Panjer H.H. (1997), *Axiomatic characterisation of insurance prices*, Insurance: Mathematics and Economics 21, 173-183
- 32: Guegan D. and Hassani B. (2014), *Distortion Risk Measures or the Transformation of Unimodal Distributions into Multimodal Functions*
- 33: Hardy M.R. and Wirch J. (2001), *Distortion risk measures: coherence and stochastic dominance*
- 34: Gzyl H. and Mayoral S. (2006), *On a relationship between distorted and spectral risk measures*
- 35: Wang S.S. (2002b), *A set of New Methods and Tools for Enterprise Risk Capital Management and Portfolio Optimization: Working paper*, SCOR Reinsurance Co, Itasca, IL
- 36: Acerbi C. and Tasche D. (2002), *Expected Shortfall, A Natural Coherent Alternative to Value-at-Risk*, Economic Notes, (31):379–388
- 37: Hull J. (2006), *Risk management and financial institutions*, Prentice Hall
- 38: Μόσχος Δ. και Χορταρέας Γ. (2011), *Χρηματοπιστωτικό σύστημα και οικονομική δραστηριότητα*
- 39: European System of Financial Supervision (2014), *The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation*.
<https://eiopa.europa.eu/Publications>
- 40: http://www.cylaw.org/nomoi/enop/non-ind/2016_1_38/sub-sub-division-ssdcc4e04f-9c31-40c7-857c-0c75c620276d.html
- 41: Delbaen F. (2002), *Coherent Risk Measures on General Probability Spaces. Advances in Finance and Stochastics: Essays in Honour of Dieter Sondermann*, Berlin: Springer-Verlag, 1-38.
- 42: Rockafellar T. and Uryasev S. (2001), *Conditional value-at-risk for general loss distributions*.

- 43: Acerbi C. and Tasche D. (2002), *On the coherence of Expected Shortfall*.
- 44: Filippova D. (2018), *From value-at-risk to Expected Shortfall*, Seminar Paper
- 45: Wang S. (2002), *A risk measure that goes beyond coherence*, 12th AFIR International Colloquium, Mexico
- 46: Black F., Scholes M. and Merton R. (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy
- 47: Αγιακλόγλου Χ. και Οικονόμου Γ. (2004), *Μέθοδοι προβλέψεων και ανάλυσης αποφάσεων*, Β' Έκδοση, Αθήνα
- 48: Heij C., Boer P.D., Franses P.H., Kloek T. and Dijk H.K.V. (2004), *Econometric Methods with Applications in Business and Economics*, Oxford University Press
- 49: Angelidis T. and Degiannakis S. (2006), *Econometric Modeling of Value-at-Risk*
- 50: Engle R.F (1982), *Autoregressive Conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of U.K. inflation*, Econometrica
- 51: Bollers T. (1986), *Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity*, Journal of Econometrics
- 52: Nelson D. (1991), *Conditional heteroscedasticity in asset returns: A new approach*, Econometrica
- 53: Lambert P. and Laurent S. (2001), *Modeling financial time series using garch-type models and a skewed student Density*, Universiten de Lienge, Mimeo
- 54: Lambert P. and Laurent S. (2000), *Modeling skewness dynamics in series of financial data*, Institut de Statistique, Louvain-la-Neuve, Discussion Paper
- 55: Engle R.F. (2003), *Risk and volatility: Econometric models and financial practice*, NYU Working Paper
- 56: Engle R.F. (2001), *GARCH 101: An Introduction to the Use of Arch/Garch Models in Applied Econometrics*, NYU Working Paper
- 57: Mandelbrot B. (1963), *The variation of certain speculatives prices*, Journal of Business

- 58: Taylor S. (1986), *Modeling Financial Time Series*
- 59: Schwert G.W. (1989), *Why does stock market volatility change over time?*, Journal of Finance, 44, 1115-1153
- 60: Black F. (1976), *Studies of stock market volatility changes*, Proceedings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section, 177-181
- 61: Nelson D. (1991), *Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach*, Econometrica, 59, 347-370
- 62: Glosten L., Jagannathan R. and Runkle D. (1993), *On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks*, Journal of Finance, 48, 1779-1801
- 63: Engle R.F. (1990), *Discussion: Stock Market Volatility and the Crash of '87*, Review of Financial Studies, 3, 103-106
- 64: Kupiec P.H. (1995), *Techniques for verifying the accuracy of risk measurement models*, Journal of Derivatives, 3, 73-84
- 65: Christoffersen J. (1998), *Evaluating Interval Forecasts*, International Economic Review, 39, 841-862
- 66: <https://www.rdocumentation.org/packages/aTSA/versions/3.1.2/topics/adf.test>

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

A. Αυτοπάλινδρα Υποδείγματα (Autoregressive Models)

Γενικά, εάν κ παρελθοντικές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής y_t προστεθούν στο μοντέλο παλινδρόμησης ως ερμηνευτικές μεταβλητές, τότε έχουμε:

$$y_t = c_0 + c_1 y_{t-1} + c_2 y_{t-2} + \dots + c_\kappa y_{t-\kappa} + u_t, \quad t = \kappa + 1, 2, \dots, n \quad (\text{Π1})$$

όπου, c_0, \dots, c_κ είναι άγνωστοι παράμετροι και το τυχαίο σφάλμα u_t αποτελεί λευκό θόρυβο³ (*white noise*), έχει δηλαδή τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\text{Μηδενική Μέση Τιμή:} \quad E[u_t] = 0, \quad \text{για όλα τα } t$$

$$\text{Ομοσκεδαστικότητα:} \quad E[u_t^2] = \sigma^2, \quad \text{για όλα τα } t \quad (\text{Π2})$$

$$\text{Ασυσχέτιστο:} \quad E[u_t u_{t'}] = 0, \quad \text{για κάθε } t \neq t'$$

Καθώς η y_t παρατηρείται για $t = 1, 2, \dots, n$, η χρονικά υστερημένη μεταβλητή $y_{t-\kappa}$ είναι διαθέσιμη μονάχα από τη χρονική περίοδο $t = \kappa + 1$ και ύστερα. Το υπόδειγμα αυτό ονομάζεται *αυτοπάλινδρο υπόδειγμα* τάξης κ , ή απλά, *AR*(κ).

Ένα χαρακτηριστικό των στάσιμων υποδειγμάτων *AR* είναι ότι ο *συντελεστής αυτοσυσχέτισης* ρ_κ «φθίνει» στο 0 εκθετικά, που υποδηλώνει ότι τα τυχαία σφάλματα των πιο μακρινών παρατηρήσεων δεν έχουν μεγάλη επίδραση στις πρόσφατες παρατηρήσεις⁴⁸.

B. Υποδείγματα Κινητών Μέσων (Moving Average Models)

Μία διαδικασία y_t ονομάζεται διαδικασία *κινητού μέσου* τάξης l ή *MA*(l) εάν:

$$y_t = c_0 + u_t + d_1 u_{t-1} + \dots + d_l u_{t-l} \quad (\text{Π3})$$

όπου, το τυχαίο σφάλμα u_t αποτελεί λευκό θόρυβο.

Ένα χαρακτηριστικό των υποδειγμάτων αυτών είναι ότι είναι πάντα *στάσιμα*⁴⁸. Επίσης, ο συντελεστής αυτοσυσχέτισης ρ_k ενός $MA(l)$ τείνει στο 0 για κάθε $k > l$.

Γ. Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας (Maximum Likelihood Estimation)

Η Μέθοδος Μέγιστης Πιθανοφάνειας είναι η πιο γνωστή μέθοδος για εκτίμηση των παραμέτρων μιας διαδικασίας ARCH. Έστω $\psi = (\theta', w')$ το σύνολο των παραμέτρων που πρέπει να εκτιμηθούν για την υπό συνθήκη μέση τιμή, διακύμανση και τη συνάρτηση πυκνότητας. Ο *εκτιμητής μέγιστης πιθανοφάνειας* μπορεί να βρεθεί εάν μεγιστοποιηθεί η λογαριθμική συνάρτηση πιθανότητας της $y_t(\psi)$ για ένα δείγμα T παρατηρήσεων⁴⁹:

$$L_T(\{y_t\}; \psi) = \sum_{t=1}^T \left(\ln \left(f \left(\frac{e_t(\theta)}{\sigma_t(\theta)}; \xi, \nu \right) \right) - \frac{1}{2} \ln (\sigma_t^2(\theta)) \right) \quad (\text{Π4})$$

Δ. Λοξότητα – Κυρτότητα

Η *λοξότητα* S και η *κυρτότητα* K ενός τυχαίου δείγματος δίνονται από⁴⁸:

$$S = m_3/m_2^{3/2}, \quad K = m_4/m_2^2 \quad (\text{Π5})$$

όπου, $m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k$ είναι η k κεντρική ροπή.

Η *λοξότητα* μετράει την συμμετρία σε σχέση με τη δειγματική μέση τιμή της και η οποία μας λέει το πόσο αποκλίνει από την οριζόντια συμμετρία. Η *κυρτότητα* μετράει το πόσο παχιά είναι η ουρά της δειγματικής κατανομής και περιγράφει πόσο ψηλή και απότομη είναι η κορυφή. Η κανονική κατανομή έχει μηδενική *λοξότητα* και *κυρτότητα* ίση με 3.

Ε. Jarque Bera τεστ

Το *Jarque Bera* τεστ εξετάζει τη κανονικότητα. Η απόκλιση από τη κανονική κατανομή μετρείται ως εξής⁴⁸:

$$JB = n \left(\frac{1}{6} S^2 + \frac{1}{24} (K - 3) \right) \approx \chi^2(2) \quad (\text{Π6})$$

όπου, S είναι η λοξότητα, K η κυρτότητα, n είναι το μέγεθος του δείγματος και $\chi^2(2)$ η ασυμπτωτική χ^2 κατανομή με δύο βαθμούς ελευθερίας.

Για μεγάλες τιμές του JB η μηδενική υπόθεση της κανονικότητας απορρίπτεται.

ΣΤ. ADF τεστ

Το ADF τεστ εξετάζει εάν μια χρονοσειρά είναι στάσιμη. Συγκεκριμένα, το τεστ αυτό κοιτά εάν υπάρχει *μοναδιαία ρίζα (unit root)* η οποία μπορεί να προκαλέσει απρόβλεπτα αποτελέσματα στην ανάλυση χρονοσειρών. Η μηδενική υπόθεση είναι ότι υπάρχει *μοναδιαία ρίζα*.

Το ADF τεστ ενσωματώνει τρία διαφορετικά μοντέλα γραμμικής παλινδρόμησης⁶⁶.

Το πρώτο μοντέλο είναι γραμμικό και χωρίς σταθερό όρο (*drift term*) και γραμμική τάση (*linear trend*) σε σχέση με το χρόνο:

$$\Delta y_t = \rho y_{t-1} + \beta_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \beta_{nlag-1} \Delta y_{t-nlag+1} + e_t \quad (\text{Π7})$$

όπου, Δ δηλώνει τη πρώτης τάξης διαφορά $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$, e_t είναι το τυχαίο σφάλμα και είναι $nlag$ ο αριθμός των υστερημένων τιμών που δίνεται από τον μαθηματικό τύπο $nlag = \text{floor}(4 * (\frac{n}{100})^{\frac{2}{9}})$ για n το σύνολο των παρατηρήσεων της χρονοσειράς.

Το δεύτερο μοντέλο είναι γραμμικό και με σταθερό όρο χωρίς γραμμική τάση:

$$\Delta y_t = w + \rho y_{t-1} + \beta_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \beta_{nlag-1} \Delta y_{t-nlag+1} + e_t \quad (\text{Π8})$$

Το τρίτο μοντέλο έχει και σταθερό όρο και γραμμική τάση:

$$\Delta y_t = w + \beta t + \rho y_{t-1} + \beta_1 \Delta y_{t-1} + \dots + \beta_{nlag-1} \Delta y_{t-nlag+1} + e_t \quad (\text{Π9})$$

Η τιμή του στατιστικού τεστ ορίζεται ως:

$$ADF = \frac{\hat{\rho}}{s.e.(\hat{\rho})} \quad (\text{Π10})$$

όπου, $\hat{\rho}$ είναι ο συντελεστής εκτίμησης και $s.e.(\hat{\rho})$ είναι το *standard error* για κάθε μοντέλο. Όσο πιο αρνητική είναι η τιμή του *ADF* τόσο μεγαλύτερη ένδειξη έχουμε να απορρίψουμε τη μηδενική υπόθεση.

Z. Ljung-Box τεστ

Με το *Ljung-Box* τεστ εξετάζεται η από κοινού αυτοσυσχέτιση μιας χρονοσειράς. Η μηδενική υπόθεση και η εναλλακτική ορίζονται ως εξής:

$$\begin{aligned} H_0: \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0 \\ H_1: \rho_i \neq 0, \text{ για κάποιο } i \in (1, \dots, m) \end{aligned} \quad (\text{Π11})$$

Η στατιστική τιμή του τεστ δίνεται από²:

$$Q(m) = n(n+2) \sum_l^m \frac{r_l^2}{n-l} \quad (\text{Π12})$$

όπου, ρ_l είναι η αυτοσυσχέτιση της υστερημένης τιμής l , n είναι ο αριθμός του δείγματος, m είναι ο αριθμός των υστερημένων τιμών που εξετάζουμε και r_l είναι η δειγματική αυτοσυσχέτιση της υστερημένης τιμής l . Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται εάν $Q(m) > \chi_\alpha^2$, όπου χ_α^2 είναι το $(1-\alpha)$ ποσοστημόριο της χ^2 κατανομής με m βαθμούς ελευθερίας.

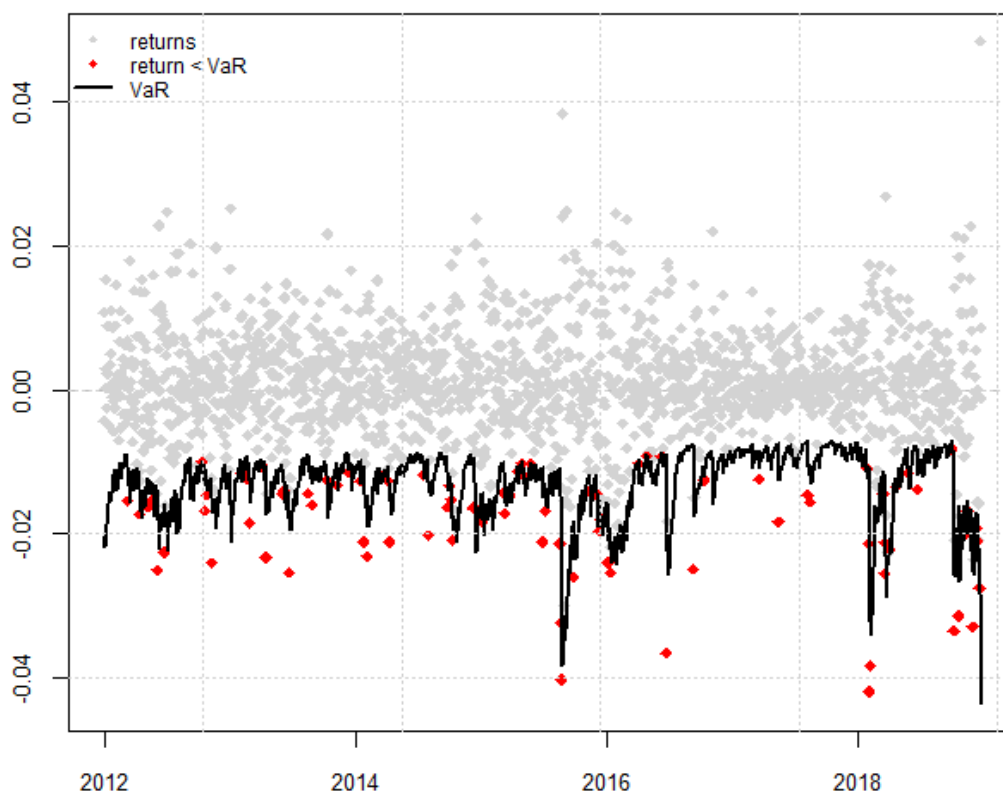
Η. Μέσο Τετραγωνικό Σφάλμα (MSE) για τη εκτιμώμενη διακύμανση

Το *MSE* είναι ένα μέτρο ευστοχίας των μοντέλων. Όσο μικρότερη είναι η τιμή του *MSE* τόσο το καλύτερο. Δίνεται από:

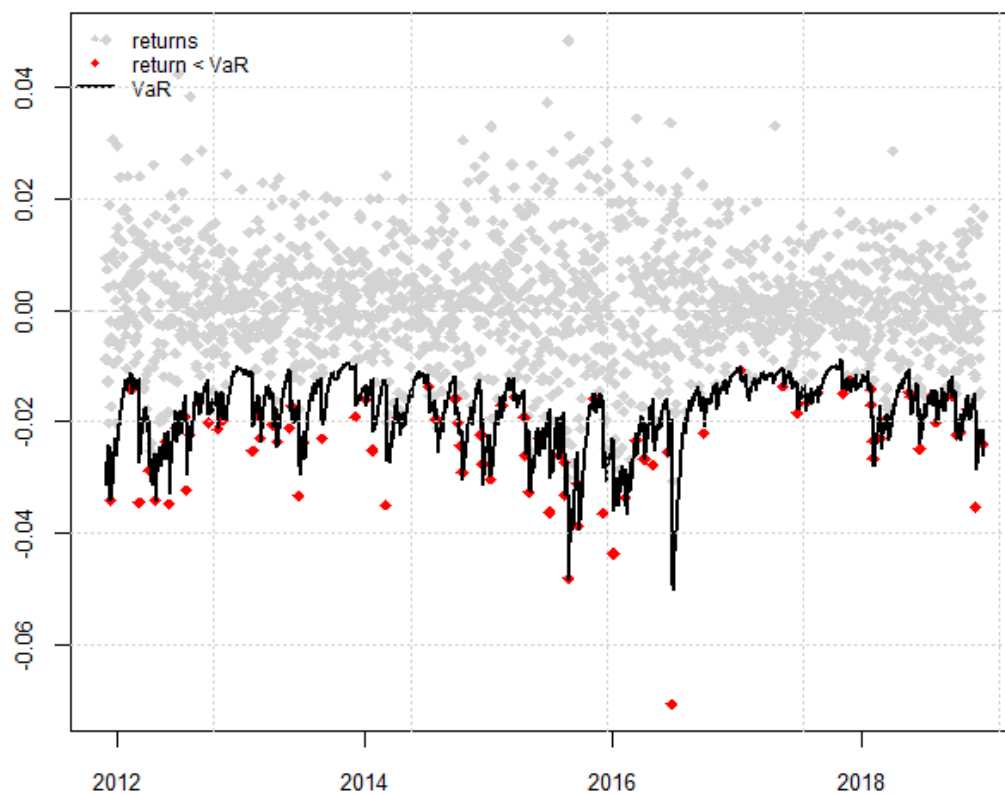
$$MSE = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (e_t^2 - \hat{\sigma}_t^2)^2 \quad (\text{Π13})$$

όπου, T είναι το δείγμα της χρονοσειράς, e_t είναι τα σφάλματα των προβλέψεων και $\hat{\sigma}_t^2$ είναι η πρόβλεψη για τη διακύμανση τη χρονική στιγμή t .

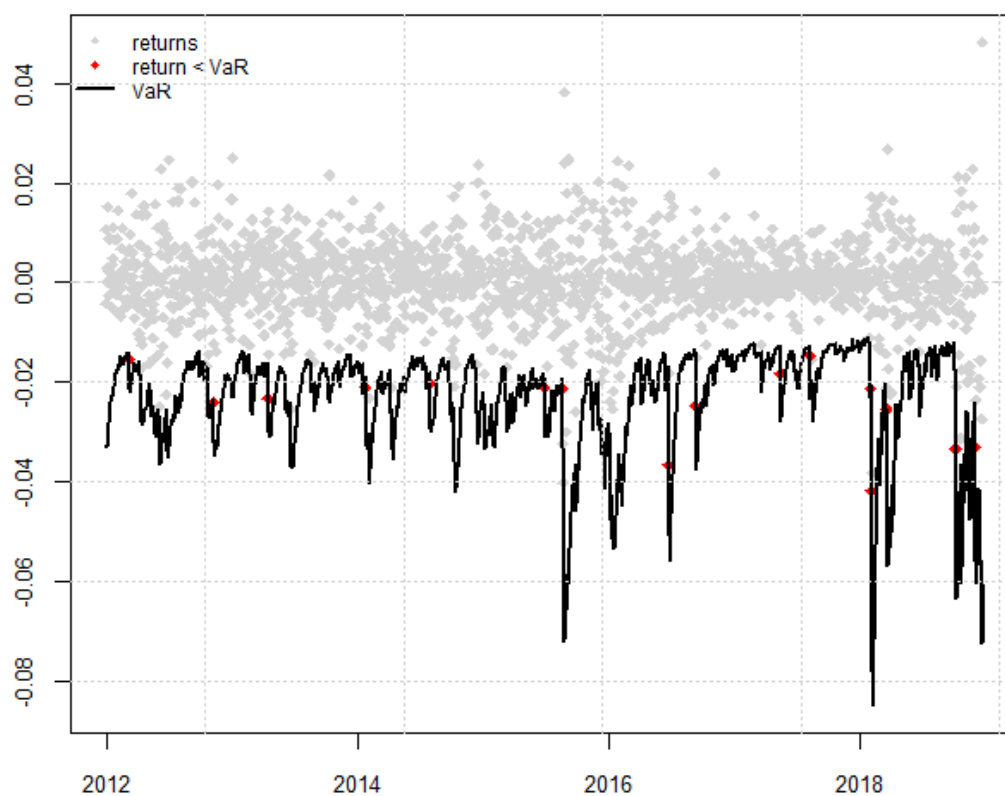
Θ. Επιπρόσθετα Γραφήματα (Back-Testing)



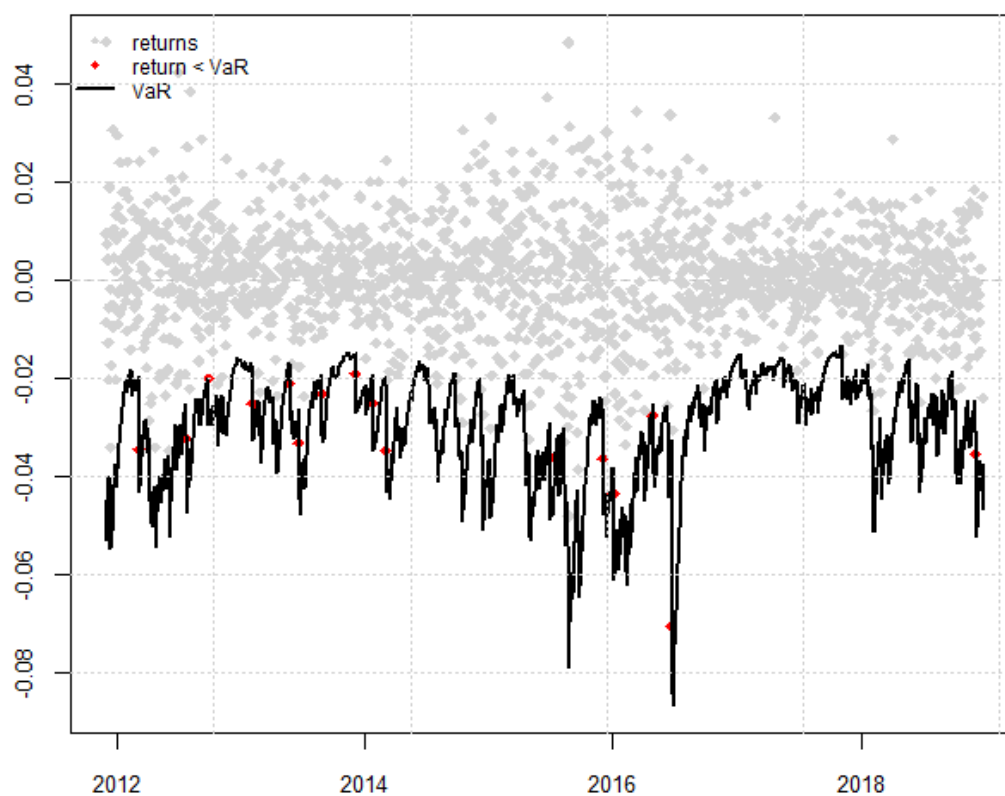
Γράφημα Π1. Οι παραβιάσεις του VaR του μοντέλου AR(1)GARCH(1,1) με Κανονική κατανομή για το δείκτη S&P 500 και με επίπεδο σημαντικότητας 5%.



Γράφημα Π2. Οι παραβιάσεις του VaR του μοντέλου AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Κανονική κατανομή για το δείκτη DAX και με επίπεδο σημαντικότητας 5%.



Γράφημα Π3. Οι παραβιάσεις του VaR του μοντέλου AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Λοξή Student-t κατανομή για το δείκτη S&P 500 και με επίπεδο σημαντικότητας 1%.



Γράφημα Π4. Οι παραβιάσεις του VaR του μοντέλου AR(1)GJR-GARCH(1,1) με Λοξή Student-t κατανομή για το δείκτη DAX και με επίπεδο σημαντικότητας 1%.

Η. Δείγμα του κώδικα R-Studio που χρησιμοποιήθηκε

```
# Data Preparation for S&P 500 index
```

```
SP500_xts<-  
xts(SP500_data_new,order.by=as.Date(SP500_data_new[,1]),by="days")
```

```
SP500_xts$Prices<-apply(SP500_xts,2,as.numeric)
```

```
SP500_xts<-SP500_xts[,-1]
```

```
SP500_xts$logreturns<-diff(log(SP500_data$Close))
```

```
# AR(1)GJR-GARCH(1,1) with skewed standardized student-t & Rolling Window
```

```
SP500argjrgarchspec<-ugarchspec(mean.model=list(armaOrder=c(1,0)),
```

```
      variance.model = list(model="gjrGARCH"),
```

```
      distribution.model = "sstd")
```

```
SP500argjrgarchroll<-
```

```
ugarchroll(SP500argjrgarchspec,data=SP500_xts$logreturns,n.start=1760,
```

```
      refit.window="moving",refit.every = 500)
```

```
argjrpreds<-as.data.frame(SP500argjrgarchroll)
```

```
e4<-argjrpreds$Realized-argjrpreds$Mu
```

```
d1<-e4^2-argjrpreds$Sigma^2
```

```
mean(d1^2) # MSE variance
```

```
# Value-at-Risk & Backtesting
```

```
argjrgarchVaR<-quantile(SP500argjrgarchroll,0.01)
```

```
actual2<-xts(as.data.frame(SP500argjrgarchroll)$Realized,time(argjrgarchVaR))  
VaRplot(alpha=0.01,actual=actual2,VaR=argjrgarchVaR)  
report(SP500argjrgarchroll, type = "VaR", VaR.alpha = 0.01, conf.level = 0.99)  
mean(actual2<argjrgarchVaR)
```