Πανεπιστήμιο Πειραιώς
University of Piraeus

Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης

Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Οι Κεφαλαιακές Απαιτήσεις για Solvency II και Εκτιμήσεις Μέσω Προσομοίωσης Ελαχίστων Τετραγώνων Monte Carlo

Κουρτελάκης Χρήστος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς
Ιούλιος 2019

Πανεπιστήμιο Πειραιώς

University of Piraeus

Department of Statistics and Insurance Science

Msc in Actuarial Science and Risk Management

Estimation of the Solvency Capital Requirement via the Least-Squares Monte Carlo Method

Kourtelakis Christos

Thesis

which was submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus as part of the requirements for the acquisition of the Msc in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus
July 2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπήπου ορίσθηκε από την ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ΄ αριθμόν 12η/03.07.2017 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της τριμελούς Επιτροπής:

- Καθηγητής Νεκτάριος Μιλτιάδης
- Αναπληρωτής Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος
- Αναπληρωτής Καθηγητής Σεβρόγλου Βασίλειος (Επιβλέπων)

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία θα αναλυθεί ο υπολογισμός των Κεφαλαιακών Απαιτήσεων Φερεγγυότητας υπό το καθεστός της νέας οδηγίας για τις ασφαλιστικές εταιρίες εντός Ευρωπαικής Ένωσης, Solvency II. Οι κεφαλαιακές ανάγκες υπό το Solvency II ορίζονται ως το επιθυμητό κεφάλαιο το οποίο θα πρέπει να κατέχει μια ασφαλιστική εταιρία λαμβάνοντας υπόψη τόσο τους χρηματοοικονομικούς κινδύνους στους οποίους είναι εκτεθειμένη, όσο και τις μη αναμενόμενες ζημιές που θα προκύψουν, με σκοπό να ανταπεξέρχεται στις υποχρεώσεις της. Ωστόσο, πολλές ασφαλιστικές εταιρίες υστερούν με την εφαρμογή της νέας οδηγίας, η οποία οφείλεται εν μέρει στις ανεπαρκείς μεθόδους των αριθμητικών προσεγγίσεων τους. Αφού παρουσιάσουμε τους βασικούς όρους της Φερεγγυότητας II θα αναπτύξουμε ένα εσωτερικό μοντέλο για τον υπολογισμό του Απαιτούμενου Κεφάλαιου Φερεγγυότητας (SCR) και θα αναθεωρήσουμε τις υπάρχουσες μεθόδους υπολογισμού των κεφαλαιακών απαιτήσεων προτείνοντας μια αξιοσημείωτα ταχύτερη προσέγγιση για τον υπολογισμό του απαιτούμενου κεφαλαίου σε κίνδυνο βασιζόμενοι στην παλινδρόμηση των ελαχίστων τετραγώνων και στις προσομοιώσεις Monte Carlo, γνωστή και ως μέθοδος Least-Squares Monte Carlo για τη διάθεση μη ευρωπαϊκών παραγώγων που εισήχθησαν από τους Longstaff και Schwartz. Τέλος γίνεται μία σύντομη εφαρμογή των μεθόδων υπολογισμού των απαιτούμενων κεφαλαίων υπό Solvency II με βάση ορισμένες υποθέσεις, που στο πλαίσιο αυτό μπορεί να χρησιμεύσει ως ένα απλοποιημένο μοντέλο για τη συνολική χρηματοοικονομική εξέλιξη μιας ασφαλιστικής εταιρείας ζωής με συμβόλαια συμμετοχής.

Abstract

In this thesis we will analyze the calculation of the Solvency Capital Requirements under the new Insurance Directive within the European Union,Solvency II. The Solvency Capital requirements are defined as the desired capital that should be held by an insurance company taking into account both the financial risks in which it is exposed and the unexpected losses that will arise in order to meet its obligations. However, many insurance companies are lagging behind in the implementation of the new directive, which is partly due to the inadequate methods of their numerical approaches. After the presentation of the basic terms of Solvency II, we will develop an internal model for calculating the Solvency Capital Requirement (SCR) and we will review the existing methods for the evaluation of capital requirements by proposing a considerably faster approach to calculate the Solvency Capital Requirement based on the regression of Least squares and Monte Carlo simulations, also known as Least-Squares Monte Carlo method for the distibution of non-European derivatives which was introduced by Longstaff and Schwartz. Finally, we briefly apply an application of the Solvency II calculation methods based on some assumptions, which can be used as a simplified model for the overall financial development of a life insurance company with participation contracts.

Εισαγωγή

Στο πλαίσιο της νέας ευρωπαϊκής οδηγίας για τις ασφαλιστικές εταιρίες, Solvency II, οι απαιτήσεις σε κεφάλαια αναθεωρήθηκαν. Η βασικότερη αρχή της νέας οδηγίας είναι ο είναι ο προσδιορισμός του απαιτούμενου κεφαλαίου που βρίσκεται σε κίνδυνο με χρονικό ορίζονται ενός έτους, δηλαδή το ποσό του κεφαλαίου που πρέπει να κατέχει η εταιρεία σε περίπτωση απρόβλεπτων απωλειών κατά τη διάρκεια της περιόδου ενός έτους, βασιζόμενο σε μια συνεπή εκτίμηση της αγοράς για τα περιουσιακά στοιχεία και τις υποχρεώσεις της. Παρόλα αυτά αρκετές ασφαλιστικές εταιρίες υστερούν στην εφαρμογή της νέας οδηγίας, πράγμα που οφείλεται στις μη αποτελεσματικές υπολογιστικές μεθόδους των προσεγγίσεων τους. Αυτό έχει ως συνέπεια πολλές εταιρίες να βασίζουν τους υπολογισμούς τους στα λεγόμενα τυποποιημένα μοντέλα, τα οποία δεν είναι πάντα σε θέση να αποτυπόσουν με ακρίβεια τον κίνδυνο που διατρέχει μία εταιρία και μπορεί να οδηγήσουν σε ανεπαρκή αποτελέσματα. Στην παρούσα εργασία προτείνουμε μία λύση για αυτό το πρόβλημα. Παρουσιάζουμε ένα μαθηματικό πλαίσιο για τον υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων φερεγγυότητας (SCR) με βάση τις αρχές Ενσωματωμένης Αξίας Συνεπής προς την Αγορά (Market Consistent Embedded Value) που εκδόθηκαν από το CFO φόρουμ και συζητάμε τις διάφορες προσεγγίσεις για την αριθμητική υλοποίηση. Πιο συγκεκριμένα, εξετάζουμε λεπτομερώς την εκτίμηση του SCR μέσω εσωτερικών προσομοιώσεων που φαίνεται να είναι η απλή προσέγγιση στις πρακτικές εφαρμογές και στις αναλυτικές προσεγγίσεις. Επιπλέον, προτείνουμε μια εναλλακτική προσέγγιση βασισμένη στην παλινδρόμηση και την προσομοίωση Monte Carlo, γνωστή και ως μέθοδο Least Squares Monte Carlo για την τιμολόγηση μη ευρωπαϊκών παραγώγων που εισήγαγε ο Longstaff και ο Schwartz. Αν και αυτή η μέθοδος παρουσιάζει ομοιότητες με προηγούμενες ιδέες και η εφαρμογή της σε προβλήματα έχει επισημανθεί, τουλάχιστον η εφαρμογή της στο ασφαλιστικό τομέα, όπου φέρει βαθιά πλεονεκτήματα, φαίνεται να είναι νέα. Τα μειονεκτήματα και τα πλεονεκτήματα των διαφορετικών προσεγγίσεων απεικονίζονται με βάση τα αριθμητικά πειράματα χρησιμοποιώντας το συμβόλαιο συμμετοχής που εισήχθη στο [5].

Η παρούσα εργασίας είναι δομημένη ως εξής. Στο κεφάλαιο 1 παρουσίαζεται το πως φτάσαμε στη νέα οδηγία για τις ασφαλιστικές εταιρείες, Solvency II καθώς και τα βασικά της χαρακτηριστικά. Στο κεφάλαιο 2 εισάγεται το μαθηματικό πλαίσιο στο οποίο στηρίζονται οι εκτιμήσεις και περιγράφεται η προσέγγιση των Εσωτερικών Προσομοιώσεων. Συγκεκριμένα, ερευνείται η ποιότητα του προκύπτοντος εκτιμητή αποτελεσμάτων για το SCR. Ακόμα παρέχονται ακριβείς ορισμοί των ποσοτήτων που μας ενδιαφέρουν και παρουσιάζουμε ιδιαίτερα τη σχέση μεταξύ αυτών των ποσοτήτων και της έννοιας μιας Ενσωματωμένης

Αξίας συμβατής με την αγορά (MCEV). Στη συνέχεια,δηλαδή στο κεφάλαιο 3, περιγράφεται πώς η μέθοδος Least-Squares Monte Carlo μπορεί να προσαρμοστεί στο πρόβλημα της αποτίμησης. Τέλος, συνοψίζουμε τα συμπεράσματα και παρέχουμε γενικές πληροφορίες σχετικά με τις απαιτήσεις της Φερεγγυότητας II.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Solvency II

1.1 Εισαγωγή στη Φερεγγυότητα II

Από το 2016, ισχύει στον Ευρωπαϊκό Οικονομικό Χώρο (ΕΟΧ) η νέα κοινοτική οδηγία Φερεγγυότητα II (Solvency II). Ως συνέπεια της εισαγωγής της, ο σημερινός ασφαλιστικός κλάδος υποχρεούται να λειτουργεί υπό ένα πιο απαιτητικό ρυθμιστικό σύστημα με βάση τις δεσμεύσεις για καλύτερη αντιστοίχιση των πραγματικών κινδύνων που αντιμετωπίζουν οι ασφαλιστικές εταιρείες επιβάλλοντας πλέον αυστηρότερα πρότυπα όσον αφορά τον κίνδυνο, την αξία και τη διαχείριση κεφαλαίων των χαρτοφυλακίων τους.

Οι βασικοί στόχοι του Solvency II ήταν να αυξηθεί το επίπεδο εναρμόνισης της φερεγγυότητας σε ολόκληρη την Ευρώπη, να προστατευθούν οι αντισυμβαλλόμενοι, να εισαχθούν σε ευρωπαϊκό επίπεδο κεφαλαιακές απαιτήσεις που είναι πιο ευαίσθητες (από τις προηγούμενες ελάχιστες απαιτήσεις της Φερεγγυότητας I) στους κινδύνους που αναλαμβάνουν οι εταιρείες, και να παρέχουν τα κατάλληλα κίνητρα για καλύτερη διαχείριση του κινδύνου.

Εμπνευσμένο από την τραπεζική οδηγία Βασιλεία II, αναπτύσσεται σε τρεις πυλώνες: ο Πυλώνας 1 αφορά τις ποσοτικές απαιτήσεις, ο Πυλώνας 2 τις ποιοτικές και ο Πυλώνας 3 ρυθμίζει τις υποχρεώσεις διαφάνειας και εποπτείας της εταιρείας. Ο πρώτος πυλώνας αποτελεί τη μεγαλύτερη αλλαγή αυτής της νέας οδηγίας και αφορά τη μετάβαση από τον όγκο των κεφαλαίων σε ένα κεφαλαιακό καθεστώς που βασίζεται στον κίνδυνο.

Προκειμένου να ικανοποιηθούν οι κεφαλαιακές απαιτήσεις που ορίζονται στον πρώτο πυλώνα, κάθε ασφαλιστική εταιρεία οφείλει να πληροί συντελεστή φερεγγυότητας τουλάχιστον 100%. Ο συντελεστής φερεγγυότητας ($SolvencyRatio$) ορίζεται ως εξής:

$$Solvency\ Ratio = \frac{Own\ Funds}{\mathrm{SCR}} \tag{1.1}$$

Τα Own Funds είναι τα ίδια κεφάλαια της εταιρείας που υπολογίζονται ως η αγοραία αξία των περιουσιακών στοιχείων, αφού αφαιρεθεί η βέλτιστη εκτίμηση των υποχρεώσεων (Best Estimate of Liabilities) και το περιθώριο κινδύνου (Risk Margin). Το SCR είναι οι κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας (Solvency Capital Requirements) και υποδεικνύουν το ύψος του κεφαλαίου που απαιτείται για την ανάληψη υποχρεώσεων, έτσι ώστε να είναι σε θέση να αντιμετωπίσει όλες τις πιθανές εκροές (κινδύνους) κατά τους επόμενους 12 μήνες με πιθανότητα 99,5%. Σύμφωνα με την νέα οδηγία, αυτό πρέπει να συνεπάγεται την ικανότητά της εταιρείας να επιβιώσει 199 από 200 χρόνια. Ο υπολογισμός του βασίζεται σε διαφορετικές ενότητες κινδύνου: με αυτόν τον τρόπο, ο νομοθέτης κατάφερε να συμπεριλάβει στον υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων όλους τους πραγματικούς κινδύνους που αντιμετωπίζει μια ασφαλιστική επιχείρηση.

Η οδηγία Φερεγγυότητα ΙΙ περιλαμβάνει τρεις πυλώνες:

Ο Πυλώνας 1 καθορίζει τις ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις που πρέπει να πληρούν οι επιχειρήσεις. Καθορίζει μεθοδολογίες αποτίμησης για στοιχεία ενεργητικού και παθητικού ("τεχνικά αποθεματικά"), βάσει αρχών σύμφωνων με την αγορά. Στο πλαίσιο του Πυλώνα 1 υπάρχουν δύο διαφορετικές κεφαλαιακές απαιτήσεις: οι κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας (SCR) και οι ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις (MCR). Το SCR μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας μια προκαθορισμένη τυποποιημένη μέθοδο ή χρησιμοποιώντας ένα εσωτερικό μοντέλο που θα δημιουργήσει η κάθε εταιρεία, το οποίο πρέπει να εγκριθεί από την εποπτική αρχή. Το SCR και το MCR αντιπροσωπεύουν αμφότερες τις κεφαλαιακές απαιτήσεις που πρέπει να διατηρούνται εκτός από τις τεχνικές προβλέψεις. Οι εποπτικές αρχές μπορούν να αποφασίσουν ότι μια επιχείρηση θα πρέπει να διαθέτει επιπλέον κεφάλαιο (ως πρόσθετο κεφάλαιο) έναντι κινδύνων που είτε δεν καλύπτονται είτε είναι ανεπαρκώς διαμορφωμένοι στον υπολογισμό του SCR.

Ο Πυλώνας 2 περιλαμβάνει τη διαδικασία εποπτικού ελέγχου και τα συστήματα διακυβέρνησης και διαχείρισης κινδύνων. Επίσης, στο πλαίσιο του Πυλώνα 2, κάθε ασφαλιστική εταιρεία καλείται να διενεργήσει τη δική της αξιολόγηση κινδύνων και φερεγγυότητας (Own Risk and Solvency Assessment (ORSA)). Η ORSA απαιτεί από κάθε ασφαλιστική εταιρεία να εντοπίσει τους κινδύνους στους οποίους εκτίθεται, συμπεριλαμβανομένων εκείνων που δεν καλύπτονται από τον Πυλώνα 1, τόσο για τον προσδιορισμό των διαδικασιών διαχείρισης και των ελέγχων που εφαρμόζονται, όσο και για τον ποσοτικό προσδιορισμό της διαρκούς ικανότητάς της εταιρείας να συνεχίσει να ανταποκρίνεται στις κεφαλαιακές απαιτήσεις SCR και MCR.

Ο Πυλώνας 3 περιλαμβάνει το καθεστός γνωστοποίησης και εποπτείας, βάσει του οποίου πρέπει να γίνονται οι καθορισμένες εκθέσεις προς τους ρυθμιστικούς φορείς και το ευρύ κοινό. Αυτός ο συνδυασμός ελάχιστων κεφαλαιακών προτύπων, ποιοτικών απαιτήσεων διαχείρισης κινδύνων, σαφώς καθορισμένης και αυστηρής διαδικασίας αναθεώρησης της φερεγγυότητας των εταιρειών από τις εποπτικές αρχές και η γνωστοποίησή τους σε εποπτικούς φορείς, ασφαλισμένους και επενδυτές έχουν σχεδιαστεί για να παρέχουν ένα πιο σύγχρονο και ασφαλές και ολοκληρωμένο εποπτικό σύστημα.

Σχήμα 1 :Οι τρεις Πυλώνες του Solvency II (πηγή: *Μυρτώ Χαμπάκη, Solvency II*)

1.2 Πώς φτάσαμε στο Solvency II - Ιστορική αναδρομή

Το σχέδιο Solvency II ξεκίνησε το 1998 από την Ευρωπαϊκή Επιτροπή με στόχο την ανανέωση του καθεστώτος εποπτείας της ασφάλισης και την εναρμόνισή του με το τραπεζικό σύστημα στα κράτη μέλη της Ευρωπαϊκής Ένωσης.

Πριν από το ισχύον καθεστώς ασφαλιστικής εποπτείας, τα κύρια στοιχεία της εποπτείας διευθετήθηκαν με τις οδηγίες 73/239 / ΕΟΚ και 88/357 / ΕΟΚ, που ρυθμίζουν τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις Ζημιών και τις οδηγίες 79/267 / ΕΟΚ και 90/619 / ΕΟΚ , για τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις Ζωής. Μολονότι νέες οδηγίες εκδόθηκαν και στη συνέχεια, το 1991 και το 1992, για την ανανέωση του καθεστώτος εποπτείας, οι διακυμάνσεις του ευρωπαϊκού οικονομικού περιβάλλοντος, ιδίως η υλοποίηση της ευρωπαϊκής ενιαίας αγοράς, κατέστησαν αναγκαία την αναδιάταξη των κανονισμών εποπτείας.

Το πρώτο βήμα έγινε το 1994 με την ίδρυση της Επιτροπής Müller, η οποία απαρτίζοταν από διάφορες ευρωπαϊκές εποπτικές αρχές, με καθήκον να ορίσει κατευθυντήριες γραμμές για την ενίσχυση της ευρωπαϊκής εποπτείας της φερεγγυότητας. Από αυτές τις κατευθυντήριες γραμμές δημιουργήθηκε και η Φερεγγυότητα I, η οποία πραγματοποίησε και την σύσταση της επιτροπής Müller, αλλά είχε κάποιες σημαντικές ελλείψεις.

Η Φερεγγυότητα I περιλάμβανε αυστηρότερες απαιτήσεις για τη διασφάλιση της φερεγγυότητας όχι μόνο στο τέλος της χρήσης, όπως προβλεπόταν από τους προηγούμενους κανονισμούς, αλλά σε κάθε χρονική στιγμή. Επιπλέον, από τώρα και στο εξής, εισήχθη ένα περιθώριο φερεγγυότητας με στόχο την κάλυψη των απροσδόκητων ζημιών και των μελλοντικών κινδύνων. Το ελάχιστο ποσό για το ταμείο εγγυήσεων καθορίστηκε στα τρία εκατομμύρια ευρώ για τις εταιρείες ασφάλισης ζημιών, αλλά για τις ασφαλιστικές εταιρείες ζωής, το εγγυητικό κεφάλαιο πρέπει να είναι το ένα τρίτο του περιθωρίου φερεγγυότητας και τουλάχιστον τρία εκατομμύρια ευρώ.

Το κύριο έλλειμμα της Φερεγγυότητας I είναι ότι ακριβώς όπως και οι οδηγίες που εκδόθηκαν προηγουμένως εξακολουθούσε να στοχεύει μόνο στην πλευρά του παθητικού του ισολογισμού, πράγμα που υπονόμευε τους κινδύνους που συνδέονται με τις επενδυτικές δραστηριότητες. Συνεπώς, δεν υπήρχε διασύνδεση μεταξύ περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων, δημιουργώντας συχνά προβλήματα που σχετίζονται με τις εγγυημένες αποδόσεις. Το πρόβλημα αυτό συνδέεται στενά με μια άλλη αδυναμία αυτής της διάταξης, τη μη συνεπή προς την αγορά αποτίμηση των περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων και την ανεπαρκή πρόβλεψη των διασυνδεδεμένων κινδύνων.

Η Ευρωπαϊκή Ένωση έπρεπε τώρα να αντιμετωπίσει μια άλλη πρόκληση: να δημιουργήσει ένα νέο καθεστώς φερεγγυότητας που θα περιλαμβάνει επίσης επενδυτικές οδηγίες σχετικά με τα τεχνικά αποθεματικά και θα πρέπει να είναι σε θέση να παρέχει στις εποπτικές αρχές αποτελεσματικά ποιοτικά και ποσοτικά εργαλεία για την αξιολόγηση και τη ρύθμιση της φερεγγυότητας μιας ασφαλιστικής εταιρείας.

Ως εκ τούτου, το 1998 η Ευρωπαϊκή Επιτροπή άρχισε να επεξεργάζεται ένα νέο και πιο αποτελεσματικό "ρυθμιστικό πλαίσιο" με στόχο "την ενίσχυση της εμπιστοσύνης των καταναλωτών μέσω της προώθησης της ολοκληρωμένης χρηματοπιστωτικής αγοράς διασφαλίζοντας παράλληλα υψηλά επίπεδα προστασίας των καταναλωτών" (Ευρωπαϊκή Επιτροπή, 1998). Το νέο αυτό πλαίσιο, γνωστό ως Φερεγγυότητα II, αναπτύχθηκε σε δύο στάδια: η πρώτη φάση στην οποία διεξήχθησαν αρκετές μελέτες και σχεδιάστηκε ένα γενικό πλαίσιο και η τελική φάση στην οποία οι γενικές κατευθυντήριες γραμμές μεταφράστηκαν σε ειδικούς κανόνες. Κατά τη διάρκεια του πρώτου σταδίου, η μελέτη της KPMG συνέστησε μια δομή ασφαλιστικής εποπτείας σε τρεις πυλώνες. Μία δομή πανομοιότυπη με εκείνη που υιοθετήθηκε από τη Βασιλεία II, το μοντέλο εποπτείας για τις τράπεζες.

Αυτή η οδηγία, παρόμοια με εκείνη της Βασιλείας II, παρείχε μια κατανόηση του κινδύνου, με βάση την ικανότητα φερεγγυότητας. Περιλαμβάνει ποσοτικές απαιτήσεις, εποπτικές δραστηριότητες, εποπτική αναφορά και δημοσιοποίηση. Κάθε μία από αυτές τις δραστηριότητες αποτελεί έναν από τους τρεις πυλώνες που θα δούμε λεπτομερώς αργότερα σε αυτό το κεφάλαιο.

Εκτός από την μελέτη που διεξήγαγε ο όμιλος KPMG, διεξήχθη μια πιο έντονη και δομημένη μελέτη, η έκθεση Sharma. Η έκθεση Sharma υπογράμμισε τις κεντρικές πτυχές που πρέπει να εφαρμοστούν στο δεύτερο στάδιο. Αφού έγινε γνωστό πώς θα μοιάζουν τα θεμελιώδη χαρακτηριστικά του μοντέλου, εκτελέστηκε μια σύνταξη των προδιαγραφών γενικών όρων εντός της Φάσης II. Σε αυτό το στάδιο, η Ευρωπαϊκή Επιτροπή χρησιμοποίησε τέσσερις ομάδες εργασίας για την ανάπτυξη και την εφαρμογή των κανόνων. Αυτές οι ομάδες συγκροτήθηκαν από μέλη είτε της Επιτροπής Ευρωπαϊκών Ασφαλίσεων είτε της CEIOPS (Εποπτική Αρχή Επαγγελματικών Συντάξεων).

Κάθε ομάδα επικεντρώθηκε σε ένα συγκεκριμένο θέμα και κατά συνέπεια ανέπτυξε συγκεκριμένη πρόταση η οποία υποβλήθηκε στο Ευρωπαϊκό Κοινοβούλιο για τη λήψη αποφάσεων. Τα τέσσερα θέματα στα οποία ασχολήθηκαν οι τέσσερις ομάδες είναι:

- Ασφάλιση Ζημιών και Ζωής → Πυλώνας 1
- Ποιοτική Χρηματοοικονομική Εποπτεία → Πυλώνας 2
- Διαφάνεια της αγοράς → Πυλώνας 3
- Επεξηγηματικές ερωτήσεις ανα τομέα

1.2.1 Πυλώνας Ι

Ο Πυλώνας Ι περιγράφει τις ποσοστικές απαιτήσεις σύμφωνα με Φερεγγυότητα ΙΙ πάνω στις οποίες υπολογίζονται η αποτίμηση των περιουσιακών στοιχείων, η αποτίμηση των τεχνικών προβλέψεων, το Best Estimate Liability, το Risk Margin καθώς και το κεφάλαιο που εξασφαλίζει την επιθυμητή φερεγγυότητα των ασφαλιστικών εταιρειών. Επίσης , στο στάδιο αυτό αναλύονται οι έννοιες του Minimum Capital Requirement (MCR) και Solvency Capital requirement (SCR)

Αποτίμηση στοιχείων ενεργητικού

Τα περιουσιακά στοιχεία πρέπει να αποτιμώνται στην αγοραία αξία, με βάση τις άμεσα διαθέσιμες τιμές αγοράς (δηλ. τις τιμές αγοράς στην ενεργή αγορά). Αν δεν υπάρχουν τέτοιες τιμές, τότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι αγοραίες αξίες παρόμοιων στοιχείων, αφού βέβαια γίνουν πρώτα οι απαιτούμενες προσαρμογές ("markt-to-market"). Σε περίπτωση που δεν υπάρχουν ούτε αυτές οι αγοραίες αξίες τότε μπορούν να χρησιμοποιηθούν τεχνικές "markt-to-model" - υπό την προϋπόθεση ότι αυτές είναι σύμφωνες με τη συνολική συνεπή προσέγγιση της αγοράς (ή "εύλογη αξία" ή "οικονομική αξία"), δηλαδή το ποσό στο οποίο μπορούν να ανταλλάσσονται τα περιουσιακά στοιχεία μεταξύ ενήμερων και πρόθυμων μερών. Εδώ πρέπει να αναφέρουμε πως, τόσο η αποτίμηση των στοιχείων του Ενεργητικού αλλά και των στοιχείων του Παθητικού (όχι όμως και των Τεχνικών Προβλέψεων) θα πρέπει να γίνεται σύμφωνα με τα Διεθνή Πρότυπα Χρηματοοικονομικής Πληροφόρησης (IFRS). Αυτή μάλιστα ήταν μια σημαντική αλλαγή για το μεγαλύτερο μέρος των ασφαλιστικών εταιρειών ανά την Ευρώπη, όπου οι λογιστικές αξίες συχνά χρησιμοποιούνταν στο πλαίσιο της Φερεγγυότητας Ι.

Άλλη μία αλλαγή έχει να κάνει με τις ανακτήσεις που αναμένονται από την αντασφάλιση καθώς πλέον εμφανίζονται ως στοιχείο του ενεργητικού στον ισολογισμό και όχι ως μείωση των ακαθάριστων υποχρεώσεων. Οι ανακτήσεις αυτές πρέπει να προσαρμόζονται κατάλληλα ώστε να επιτρέπουν την βέλτιστη εκτίμηση των αναμενόμενων απωλειών λόγω αθέτησης του αντασφαλιστή. Αυτό υπολογίζεται ως η παρούσα αξία των αναμενόμενων ζημιών σε κάθε μελλοντικό έτος και είναι συνήθως μικρό, καθώς η πιθανότητα αθέτησης αντασφαλιστή θεωρείται κανονικά χαμηλή (ανάλογα, φυσικά, με την πιστοληπτική ικανότητα του αντασφαλιστή).

Αποτίμηση τεχνικών προβλέφεων

Οι τεχνικές προβλέψεις βάση μιας συνεπής προς την αγορά προσέγγιση, πρέπει να αντιπροσωπεύουν το ποσό που θα έπρεπε να πληρώσει η ασφαλιστική εταιρεία προκειμένου να μεταφέρει αμέσως τις υποχρεώσεις της σε άλλη ασφαλιστική εταιρεία. Οι τεχνικές προβλέψεις αποτελούνται από την Best Estimate Liability και το Risk Margin. Ο υπολογισμός τους πρέπει να διαχωρίζεται σύμφωνα με το είδος των ασφαλιστικών προϊόντων (π.χ. διαφορετικοί υπολογισμοί της Best Estimate Liability για ασφαλιστικά προϊόντα ζωής και για ασφαλιστικά προϊόντα γενικών ασφαλίσεων).

Best Estimate Liability

Η Βέλτιστη Εκτίμηση των Υποχρεώσεων (BEL) είναι η παρούσα αξία των αναμενόμενων μελλοντικών ταμειακών ροών, προεξοφλημένων χρησιμοποιώντας την καμπύλη αποδόσεων επιτοκίων "άνευ κινδύνου". Όλες οι υποθέσεις πρέπει να είναι οι καλύτερες εκτιμήσεις, χωρίς να υπάρχουν περιθώρια προληπτικής εποπτείας. Οι προβλέψεις θα πρέπει να επιτρέπουν όλες τις αναμενόμενες μειώσεις και τις ενέργειες των ασφαλισμένων, συμπεριλαμβανομένων των ακυρώσεων. Οι ασφαλιστικές εταιρείες πρέπει να λαμβάνουν υπόψη όλα τα σχετικά διαθέσιμα δεδομένα, εσωτερικά και εξωτερικά, όταν καταλήγουν σε παραδοχές που ανταποκρίνονται καλύτερα στα χαρακτηριστικά του υποκείμενου ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου.

Τα μελλοντικά ασφάλιστρα μπορούν να ληφθούν υπόψη μέχρι το αποδεκτό όριο (contract boundary), το οποίο γενικά ορίζεται ως το σημείο κατά το οποίο μια επιχείρηση μπορεί να καταγγείλει μονομερώς τη σύμβαση, να αρνηθεί να λάβει ασφάλιστρο ή να αλλάξει τα ασφάλιστρα ή τις παροχές κατά τρόπον τέτοιο, ώστε να αντικατοπτρίζονται όλοι οι κίνδυνοι. Για τις ασφαλίσεις ζωής αυτό συνήθως σημαίνει την ωρίμανση ή την ημερομηνία λήξης της σύμβασης ή, σε ορισμένες περιπτώσεις, μια προγενέστερη ημερομηνία κατά την οποία τα ασφάλιστρα ή οι παροχές μπορούν να αναθεωρηθούν έτσι ώστε να αντανακλούν πλήρως τους κινδύνους.

Η αποζημίωση μελλοντικών εξόδων πρέπει να λαμβάνει υπόψη τόσο τα γενικά έξοδα όσο και τα άμεσα αποδιδόμενα έξοδα, καθώς και τον μελλοντικό πληθωρισμό των δαπανών. Δεν απαιτείται αποθεματικό.

Για ορισμένες υποχρεώσεις, συμπεριλαμβανομένων των οικονομικών εγγυήσεων και των δικαιωμάτων προαίρεσης, η προσομοίωση της αγοράς ή η στοχαστική ανάλυση πιθανόν να είναι η πλέον ενδεδειγμένη προσέγγιση υπολογισμού, αν και μια αιτιοκρατική λύση "κλειστής μορφής" θα μπορούσε να γίνει αποδεκτή, ανάλογα με τους κινδύνους που συμμετέχουν.

Οι προβλέψεις ταμειακών ροών πρέπει ιδανικά να πραγματοποιούνται συμβόλαιο προς συμβόλαιο. Ωστόσο, επιτρέπονται προσεγγίσεις και μπορούν να χρησιμοποιηθούν ομαδοποιημένα μοντέλα υπό την προϋπόθεση ότι πληρούνται ορισμένες προϋποθέσεις, συμπεριλαμβανομένης της επικύρωσης της ακρίβειας.

Οι υπολογισμοί πρέπει να αντικατοπτρίζουν ρεαλιστικές διαχειριστικές δράσεις και τη συμπεριφορά των αντισυμβαλλομένων. Τα μελλοντικά οφέλη θα πρέπει να αφορούν μόνο τις κανονικές αναμενόμενες κατανομές μπόνους και δεν πρέπει να περιλαμβάνουν τη διανομή της περιουσίας της εταιρείας εκτός εάν έχει εγκριθεί από την εκάστοτε εποπτική αρχή ένα επίσημο σχέδιο διανομής μπόνους. Η BEL της επιχείρησης για τα κέρδη δεν πρέπει να περιλαμβάνει την αξία των μεταφορών των μετόχων που αφορά μελλοντικές καταβολές bonus. Αυτά δεν περιλαμβάνονται ως υποχρέωση, αλλά θα πρέπει να αποτιμώνται ξεχωριστά (στο βαθμό που οι μεταφορές αυτές σχετίζονται με μελλοντικά διακριτικά οφέλη αναγνωρισμένα στην BEL).

Risk Margin

Το περιθώριο κινδύνου αποσκοπεί στην αύξηση των τεχνικών προβλέψεων στο ποσό που θα έπρεπε να καταβληθεί σε μία άλλη ασφαλιστική εταιρεία προκειμένου να αναλάβει την ευθύνη του BEL. Ως εκ τούτου, αντιπροσωπεύει τη θεωρητική αποζημίωση στην ασφαλιστική εταιρεία τόσο για τον κίνδυνο που μπορεί να προκύψει στο μέλλον, ο οποίος θα είναι μεγαλύτερος από τις εκτιμήσεις του BEL, όσο και για το κόστος κατοχής εποπτικού κεφαλαίου έναντι αυτού του σεναρίου.

Το περιθώριο κινδύνου προσδιορίζεται με τη μέθοδο του «κόστους κεφαλαίου», δηλαδή με βάση το κόστος διακράτησης κεφαλαίου για την υποστήριξη των κινδύνων που δεν μπορούν να αντισταθμιστούν. Αυτά περιλαμβάνουν όλους τους ασφαλιστικούς κινδύνους, τον πιστωτικό κίνδυνο αντασφάλισης, τον λειτουργικό κίνδυνο και τον «υπολειπόμενο κίνδυνο αγοράς».

Ο υπολογισμός του περιθωρίου κινδύνου περιλαμβάνει την πρώτη προβολή του μελλοντικού κεφαλαίου που απαιτείται να κατέχει η εταιρεία στο τέλος κάθε περιόδου προβολής (π.χ. έτος) κατά τη διάρκεια εξέλιξης της επιχειρηματικής δραστηριότητας. Όσον αφορά το Solvency II, η προβλεπόμενη κεφαλαιακή απαίτηση αποτελεί υποσύνολο του SCR (βλέπετε παρακάτω), που αποτελείται από τους κινδύνους που δεν μπορούν να αντισταθμιστούν στις χρηματοπιστωτικές αγορές.

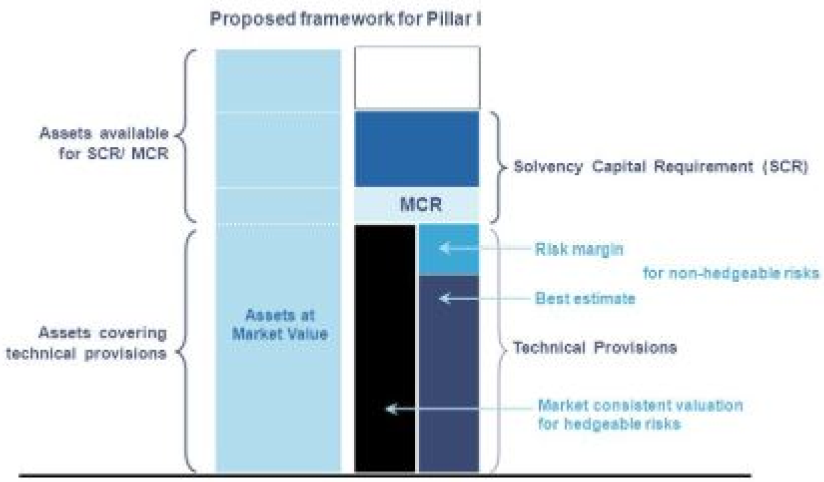
Αυτά τα ποσά των προβλεπόμενων κεφαλαίων πολλαπλασιάζονται κατόπιν με το κόστος του κεφαλαίου. Το ποσοστό αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι αντιπροσωπεύει το κόστος αύξησης του κεφαλαίου πέραν του επιτοκίου άνευ κινδύνου ή, εναλλακτικά, αντιπροσωπεύει το κόστος τριβής που κλειδώνει για την επιχείρηση το κεφαλαίο που μπορεί να κερδίσει ένα ποσοστό μέσω του επιτοκίου άνευ κινδύνου χωρίς να χρειαστεί να επενδύσει ελεύθερα για υψηλότερη απόδοση των επενδύσεων . Για το Solvency II, πρόκειται για σταθερό επιτόκιο 6% ετησίως.

Το κόστους του κεφαλαίου της κεφαλαιακής απαίτησης σε κάθε μελλοντικό σημείο προβολής προεξοφλείται στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας τα προεξοφλητικά επιτόκια άνευ κινδύνου, ώστε να αποδώσει το συνολικό περιθώριο κινδύνου.

Δεδομένου ότι η προβολή του SCR είναι δυνητικά πολύπλοκη, μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφορες απλοποιημένες προσεγγίσεις. Για παράδειγμα, αυτό θα μπορούσε να περιλαμβάνει την επιλογή ενός σημείου αναφοράς (π.χ. αποθέματα) που έχει μια σχεδόν γραμμική σχέση με το απαιτούμενο κεφάλαιο ή τα συστατικά του.

Η αρχική κεφαλαιακή απαίτηση μπορεί να εκφραστεί ως ποσοστό αυτού του μεγέθους και το προβλεπόμενο κεφάλαιο τότε υπολογίζεται ως το ίδιο ποσοστό των προβλεπόμενων τιμών του επιλεγμένου μεγέθους. Στην πράξη, μπορεί να χρειαστεί να χρησιμοποιηθούν πιο εξελιγμένες μέθοδοι.

Αν και το περιθώριο κινδύνου πρέπει να γνωστοποιείται ξεχωριστά για κάθε γραμμή επιχειρηματικής δραστηριότητας, μπορεί να μειωθεί για να ληφθεί υπόψη η διαφοροποίηση μεταξύ των γραμμών έως το επίπεδο της νομικής οντότητας. Η κατανομή του πλεονεκτήματος διαφοροποίησης μπορεί να προσεγγιστεί με την κατανομή του συνολικού διαφοροποιημένου περιθωρίου κινδύνου σε όλες τις γραμμές επιχειρήσεων κατ΄ αναλογία προς το SCR που υπολογίζεται σε αυτόνομη βάση για κάθε γραμμή επιχειρηματικής δραστηριότητας ή με άλλες προσεγγιστικές μεθόδους, εάν κριθεί σκόπιμο, λαμβανομένης υπόψη της σημαντικότητας των αποτελεσμάτων.



Σχήμα 2: Πυλώνας Ι - Ο ισολογισμός του Solvency II (πηγή: *Jabran Noor, Solvency II*)

1.2.2 Οι κεφαλαιακές απαιτήσεις του Solvency II

Solvency Capital Requirement (SCR)

Το SCR είναι ένα μέτρο Αξίας σε Κίνδυνο (VaR) με βάση ένα διάστημα εμπιστοσύνης 99,5% για τη μεταβολή κατά ένα έτος του ποσού των «βασικών ιδίων κεφαλαίων» (περιουσιακά στοιχεία μείον τεχνικές προβλέψεις).

Υπάρχει ένας καθορισμένος κατάλογος των ομάδων κινδύνου που πρέπει να καλύπτει το SCR:

- non-life underwriting risk
- life underwriting risk
- health underwriting risk
- market risk
- counterparty default risk
- operational risk

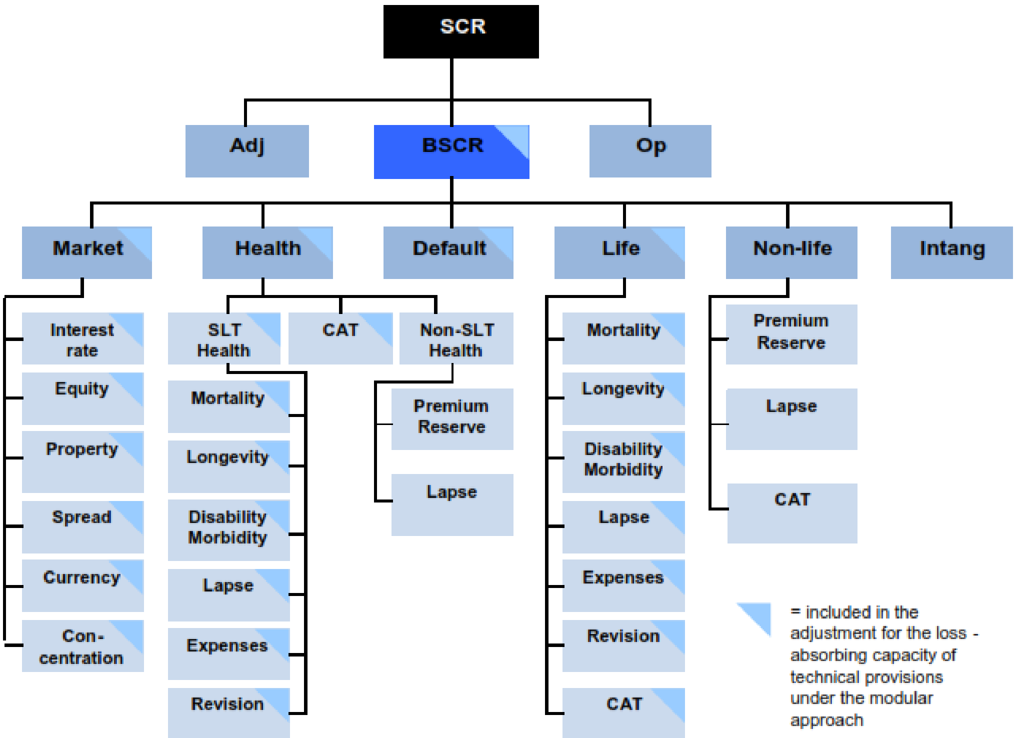
Το SCR μπορεί να υπολογιστεί με τη χρήση πρότυπων stress tests, τα οποία στη συνέχεια συγκεντρώνονται χρησιμοποιώντας πίνακες συσχετισμού. Αυτή η προσέγγιση είναι γνωστή ως η τυποποιημένη μέθοδος.

Το SCR μπορεί εναλλακτικά να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας ένα εσωτερικό μοντέλο, το οποίο πρέπει να εγκριθεί από την εποπτική αρχή της ασφαλιστικής εταιρείας και το οποίο πρέπει να πληροί ορισμένα πρότυπα, συμπεριλαμβανομένου του «δοκιμαστικού ελέγχου». Αυτό απαιτεί ουσιαστικά από την εταιρεία να αποδείξει ότι το εσωτερικό μοντέλο χρησιμοποιείται ευρέως εντός της εταιρείας και διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στις διαδικασίες λήψης αποφάσεων και διακυβέρνησης.

Οι επιχειρήσεις που επιλέγουν να χρησιμοποιούν τυποποιημένη μέθοδο αναμένεται να είναι σε θέση δικαιολογούν ότι αυτή είναι η κατάλληλότερη επιλογή. Οι δύο προσεγγίσεις περιγράφονται λεπτομερέστερα παρακάτω. Μπορεί επίσης να υιοθετηθεί ένας συνδυασμός εσωτερικού μοντέλου και τυποποιημένης μεθόδου. Αυτός ο συνδυασμός αναφέρεται ως μερικό εσωτερικό μοντέλο. Απλουστεύσεις εννοείται πως μπορούν να εφαρμοστούν, εφόσον βέβαια είναι ανάλογες με τη φύση, την κλίμακα και την πολυπλοκότητα των κινδύνων.

Για ορισμένα μέρη της τυποποιημένης μεθόδου, οι ασφαλιστικές εταιρείες μπορούν να ζητήσουν να χρησιμοποιήσουν "την ανάληψη συγκεκριμένων παραμέτρων" (undertaking specific parameters) αντί για τις καθορισμένες παραμέτρους.

Τα οφέλη από τις τεχνικές μετριασμού του κινδύνου μπορούν να αναγνωριστούν στο SCR, υπό τον όρο ότι οποιοσδήποτε βασικός κίνδυνος (δηλαδή αναντιστοιχία μεταξύ του κινδύνου και της τεχνικής μετριασμού του) είναι μη σχετικός ή μπορεί να αντικατοπτρίζεται στο SCR. Θα πρέπει επίσης να αναγνωρίζονται και όλοι οι υπολειπόμενοι κίνδυνοι (π.χ. ο κίνδυνος αντισυμβαλλομένου που προκύπτει από μια μεταφορά κινδύνου). Η δυναμική αντιστάθμιση (dynamic hedging) δεν αναγνωρίζεται στην τυποποιημένη μέθοδο, αλλά μπορεί να επιτραπεί να αναγνωριστεί σε ένα εσωτερικό μοντέλο.



Σχήμα 3: Ο υπολογισμός των Κεφαλαιακών Απαιτήσεων Φερεγγυότητας (SCR) σύμφωνα με την τυποποιημένη μέθοδο (πηγή : *EIOPA, The underlying assumptions in the standard formula for the Solvency Capital Requirement calculation*)

Standard formula

Το σχήμα 2 παραπάνω απεικονίζει τη δομή του υπολογισμού SCR σύμφωνα με την τυποποιημένη μέθοδο.

Το βασικό SCR (BSCR) υπολογίζεται με την εξέταση διαφορετικών ενοτήτων κινδύνων: κίνδυνος αγοράς (κίνδυνος μετοχών, κίνδυνος περιουσίας, κίνδυνος επιτοκίου, κίνδυνος πιστωτικού περιθωρίου, νομισματικός κίνδυνος και κίνδυνος συγκέντρωσης), κίνδυνος αθέτησης αντισυμβαλλομένου, ασφαλιστικός κίνδυνος (ξεχωριστά για τις ασφαλίσεις ζωής, καθώς και κίνδυνος των άυλων περιουσιακών στοιχείων.

Για τις ασφαλίσεις ζωής, η υποενότητα του ασφαλιστικού κινδύνου περιλαμβάνει τους κινδύνους: της θνησιμότητας, της μακροζωίας, της αναπηρίας / νοσηρότητας, της λήξης, των εξόδων, της αναθεώρησης και της καταστροφής (π.χ. πανδημία).

Ο κίνδυνος αναθεώρησης αναφέρεται στον κίνδυνο δυσμενούς διακύμανσης του ποσού του χρηματοοικονομικού προϊόντος σταθερής πληρωμής (annuity) ως αποτέλεσμα απρόβλεπτης αναθεώρησης της διαδικασίας αποζημίωσης και προορίζεται μόνο για την κάλυψη πραγματικών αναθεωρήσιμων annuities , όχι όμως εκείνων που συνδέονται με έναν δείκτη αναφοράς (index-linked).

Οι σοβαρές ασθένειες και η προστασία εισοδήματος ταξινομούνται ως εργασίες ασφάλισης υγείας SLT ("Similar to Life Techniques"), αλλά δεν απαιτείται περαιτέρω γνώση της υπομονάδας του κινδύνου ασφάλισης υγείας. Το SCR υπολογίζεται αρχικά για κάθε ενότητα, όπως αναφέρεται παραπάνω. Για τις μονάδες αγοράς και ασφαλιστικού κινδύνου, κάθε μεμονωμένο ακραίο σενάριο διενεργείται ξεχωριστά σύμφωνα με λεπτομερείς κανόνες.

Η βαθμονόμηση και η εφαρμογή κάθε ακραίου σεναρίου καθορίζεται εντός της τυποποιημένη μεθόδου, π.χ. -25% ακραίο σενάριο στις αξίες των ακινήτων, άμεση και μόνιμη αύξηση κατά 15% των ποσοστών θνησιμότητας.

Το SCR για κάθε μεμονωμένο κίνδυνο προσδιορίζεται στη συνέχεια ως η διαφορά μεταξύ της καθαρής αξίας ενεργητικού (για πρακτικούς λόγους μπορεί να ληφθεί ως περιουσιακά στοιχεία με τις μικρότερες εκτιμήσεις των υποχρεώσεων) στον χωρίς ακραία σενάρια ισολογισμό και την καθαρή αξία ενεργητικού στον ισολογισμό με ακραία σενάρια. Αυτά τα μεμονωμένα ποσά επιχειρηματικού κεφαλαίου συγκεντρώνονται στη συνέχεια σε όλους τους κινδύνους εντός της ενότητας, χρησιμοποιώντας έναν καθορισμένο πίνακα συσχέτισης και της μήτρας πολλαπλασιασμού.

Για την ενότητα κινδύνου αντισυμβαλλομένου η προσέγγιση υπολογισμού είναι παρόμοια, αλλά η ασφαλιστική εταιρεία πρέπει πρώτα να διαφοροποιήσει τις εκθέσεις από τον τύπο 1 (μπορεί να μην διαφοροποιηθεί και ο αντισυμβαλλόμενος πιθανόν να βαθμολογηθεί) και από τον τύπο 2 (συνήθως διαφοροποιείται και ο αντισυμβαλλόμενος είναι απίθανο να βαθμολογηθεί). Διαφορετικές λεπτομερείς προσεγγίσεις καθορίζονται για τον προσδιορισμό του SCR για κάθε τύπο έκθεσης, οι οποίες στη συνέχεια συνδυάζονται χρησιμοποιώντας μία συγκεκριμένη φόρμουλα.

Αφού αποκτήσαμε το SCR για κάθε ενότητα, χρησιμοποιείται ένας ακόμη καθορισμένος πίνακας συσχέτισης για να συνδυάσουμε το κάθε SCR και να δώσουμε το βασικό SCR (BSCR).

Για να ληφθεί η συνολική τιμή SCR, έγιναν δύο προσαρμογές στο BSCR: μια αποζημίωση για τον λειτουργικό κίνδυνο και μια αποζημίωση για την ικανότητα απορρόφησης ζημιών των τεχνικών προβλέψεων και των αναβαλλόμενων φόρων.

Τέλος ο λειτουργικός κίνδυνος είναι ο κίνδυνος απώλειας που προκύπτει από ανεπαρκή ή αποτυχημένη εσωτερική διεργασία από το προσωπικό ή/και τα συστήματα ή από εξωτερικά γεγονότα. Η ενότητα λειτουργικού κινδύνου είναι σχετικά απλή στον ορισμό της, καθώς υπολογίζεται με βάση τα ποσοστά των ασφαλίστρων και των τεχνικών προβλέψεων. Το προκύπτον ποσό κεφαλαίου του λειτουργικού κινδύνου προστίθεται στο BSCR, χωρίς να αναγνωρίζεται καμία μερική συσχέτιση ή διαφοροποίηση με τους άλλους κινδύνους.

Εσωτερικό Μοντέλο

Υπό την προϋπόθεση ότι έχει εγκριθεί από τον ρυθμιστικό φορέα της ασφαλιστικής εταιρείας, ένα εσωτερικό μοντέλο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως πλήρης ή μερική εναλλακτική λύση από την λεπτομερή τυποποιημένη μέθοδο. Για παράδειγμα, αυτό μπορεί να είναι κατάλληλο εάν το προφίλ κινδύνου της επιχείρησης διαφέρει σημαντικά από εκείνο που καλύπτει η τυποποιημένη μέθοδος και / ή εάν η εταιρεία χρησιμοποιεί ήδη ένα τέτοιο μοντέλο για τη διαχείριση κινδύνου ή για άλλους σκοπούς λήψης αποφάσεων (π.χ. τιμολόγηση, επενδυτική στρατηγική). Πράγματι, ο επιβλέπων μπορεί να αναγκάσει μια ασφαλιστική εταιρεία να αναπτύξει ένα εσωτερικό μοντέλο, εάν θεωρεί ότι η τυποποιημένη μέθοδος δεν είναι κατάλληλη για το προφίλ κινδύνου της εταιρείας.

Οι συνολικές κεφαλαιακές απαιτήσεις που προκύπτουν από τη χρήση ενός εσωτερικού υποδείγματος θα διαφέρουν γενικά από το αποτέλεσμα του υπολογισμού της η τυποποιημένης μεθόδου και μπορεί να είναι είτε υψηλότερες είτε χαμηλότερες ανάλογα με τον τρόπο σύγκρισης του προφίλ κινδύνου της επιχείρησης με τις παραδοχές που βασίζεται η τυποποιημένη μέθοδος.

Εντούτοις, το εσωτερικό μοντέλο πρέπει να παράγει ένα SCR με βάση τις δηλωμένες απαιτήσεις, συμπεριλαμβανομένης της κάλυψης όλων των τύπων κινδύνου όπως προαναφέρθηκε και παρέχοντας τουλάχιστον την ισοδύναμη προστασία σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99,5% για ένα έτος.

Οι δοκιμές που πρέπει να περάσει το μοντέλο προτού μπορέσει να λάβει έγκριση είναι:

- Ο «δοκιμαστικός έλεγχος» (*use test*) - οι επιχειρήσεις πρέπει να αποδείξουν ότι το εσωτερικό τους υπόδειγμα χρησιμοποιείται ευρέως σε όλους τους σχετικούς τομείς της επιχείρησης και ότι διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην εσωτερική διακυβέρνηση, στη διαχείριση κινδύνων και στις διαδικασίες λήψης αποφάσεων, καθώς και στις εκτιμήσεις κεφαλαίου φερεγγυότητας και τις διαδικασίες κατανομής κεφαλαίων.

- Στατιστικά πρότυπα ποιότητας - πρέπει να πληρούνται ορισμένα ελάχιστα πρότυπα ποιότητας όσον αφορά τις παραδοχές και τα δεδομένα, συμπεριλαμβανομένης της πρόβλεψης της κατανομής πιθανότητας, της αξιολόγησης των εμπειρογνωμόνων, των εκτιμήσεων σημαντικότητας και των μεθόδων συγκέντρωσης.

- Πρότυπα βαθμονόμησης - αυτά τα πρότυπα αποσκοπούν στην εκτίμηση του εάν το SCR που προέρχεται από το εσωτερικό μοντέλο έχει βαθμονόμηση ισοδύναμη με την αξία σε κίνδυνο με 99,5% διάστημα εμπιστοσύνη για ένα έτος.

- Κατανομή κερδών και ζημιών - περιλαμβάνει την απαίτηση να αποδειχθεί πώς η κατηγοριοποίηση του κινδύνου που θα επιλεγεί στο εσωτερικό μοντέλο θα χρησιμοποιηθεί για να εξηγήσει τα αίτια και τις πηγές πραγματικών κερδών και ζημιών.

- Πρότυπα επικύρωσης - το εσωτερικό μοντέλο πρέπει να έχει επικυρωθεί πλήρως από την ασφαλιστική εταιρεία και πρέπει να υπόκειται σε τακτική ανασκόπηση , συμπεριλαμβανομένων των αποτελεσμάτων των δοκιμών έναντι της προκύπτουσας εμπειρίας.

- Πρότυπα τεκμηρίωσης - οι σχεδιαστικές και επιχειρησιακές πτυχές του εσωτερικού μοντέλου πρέπει να είναι σαφώς και λεπτομερώς τεκμηριωμένες.

Ο «δοκιμαστικός έλεγχος» (use test) θεωρείται ως μία από τις πιο προκλητικές πτυχές της απόκτησης ενός εγκεκριμένου εσωτερικού μοντέλου. Εκτός από την ενσωμάτωση του μοντέλου σε όλη την εταιρεία και την ανάπτυξη μιας αποτελεσματικής κουλτούρας κινδύνου, οι εταιρείες πρέπει να είναι σε θέση να αποδείξουν ότι όντως αυτό συμβαίνει.

Η ποιότητα των δεδομένων και των υποθέσεων μπορεί επίσης να είναι ένα ζήτημα. Μια βασική πρόκληση είναι ότι τα ιστορικά δεδομένα που είναι διαθέσιμα για τη βαθμονόμηση ακραίων συμβάντων είναι περιορισμένα. Στην πράξη, έχει προκύψει κάποια συναίνεση του κλάδου για ορισμένες από τα ακραία σενάρια π.χ. τα πιστωτικά περιθώρια και τις κινήσεις στην αγορά ακινήτων.

Θα πρέπει επίσης να αναγνωριστεί ότι ένας συνδυασμός συγκεκριμένων γεγονότων που συμβαίνουν ταυτόχρονα, με συνολική πιθανότητας 1 στα 200 σε ετήσιο επίπεδο, μπορεί να δημιουργήσει υψηλότερη κεφαλαιακή απαίτηση από το συνδυασμό όλων των μεμονομένων κεφαλαιακών απαιτήσεων για αυτό το ξεχωριστό 1 σε 200 συμβάντα χρησιμοποιώντας ένα πίνακα συσχέτισης. Αυτό οφείλεται στη "μη γραμμικότητα" και τη "μη διαχωρισιμότητα" των επιμέρους κινδύνων.

Επιπλέον, ένα εσωτερικό μοντέλο μπορεί να διαρθρωθεί με οποιοδήποτε τρόπο που επιλέγει η εταιρεία, υπό την προϋπόθεση ότι πληρούνται οι παραπάνω δοκιμές. Δεν χρειάζεται να ακολουθήσει τη δομή της τυποποιημένης μεθόδου και μπορεί για παράδειγμα να βασίζεται σε στοχαστικές προσομοιώσεις και όχι σε stress tests και σε μήτρα συσχέτισης, ίσως χρησιμοποιώντας *copulas* σε μοντέλα εξαρτημένων δομών .

Η βαθμονόμηση τέτοιων μοντέλων θα απαιτήσει επίσης προσοχή και εμπειρογνωμοσύνη. Συγκεκριμένα, η κατανομή πιθανότητας που χρησιμοποιείται θα πρέπει να αναπαράγει σωστά την πιο ακραία συμπεριφορά της μεταβλητής που διαμορφώνεται, μεριμνώντας ώστε να μην υποτιμά τη συχνότητα των πιο ακραίων αποτελεσμάτων.

Πολλές ρυθμιστικές αρχές (π.χ. στο Ηνωμένο Βασίλειο) επέλεξαν να δημιουργήσουν μια πιο ανεπίσημη προσέγγιση (αποκαλούμενη "προ-εφαρμογή"), ενθαρρύνοντας τις επιχειρήσεις να συμμετάσχουν νωρίς στις διαδικασίες ανάπτυξης και βελτίωσης των μοντέλων τους - μολονότι δεν ήταν δυνατή η επίσημη τελική έγκριση έως ότου τεθούν σε ισχύ οι κανονισμοί Solvency II.

Minimum Capital Requirements

Το MCR ορίζεται ως ένας απλός γραμμικός τύπος που βασίζεται σε συντελεστές, ο οποίος στοχεύει σε ένα μέτρο Αξίας σε Κίνδυνο για ένα έτος με 85% επίπεδο εμπιστοσύνης. Για τις επιχειρήσεις ασφάλισης ζωής, ο τύπος βασίζεται σε τεχνικές προβέψεις και εκτεθημένα κεφάλαια σε κίνδυνο θανάτου ή αναπηρίας, πολλαπλασιασμένα με συγκεκριμένους παράγοντες.

Το MCR έχει ένα κατώτατο όριο 25% και ένα ανώτατο όριο του 45% του SCR, και αυτό μπορεί να διαφέρει για ένα σημαντικό αριθμό ασφαλιστικών εταιρειών ζωής.

Υπάρχει μια απόλυτη ελάχιστη κεφαλαιακή απαίτηση ύψους 3.7 εκατομμυρίων για τις ασφαλιστικές εταιρείες ζωής (ο λόγος αυτός είναι διαφορετικός για τους αντασφαλιστές και τους ασφαλιστές εκτός κλάδου ζωής).

1.2.3 Πυλώνας II

Ο δεύτερος Πυλώνας καθορίζει τις απαιτήσεις για τους ρόλους και τις ευθύνες βασικών λειτουργιών στο πλαίσιο της επιχείρησης, ενώ το διοικητικό συμβούλιο φέρει τη γενική ευθύνη για τη συνεχή συμμόρφωση με τη Φερεγγυότητα ΙΙ. Για την ολοκλήρωση του Πυλώνα 2 η Κομισιόν βασίστηκε στο Sharma report της Διάσκεψης των Ευρωπαϊκών Εποπτικών Αρχών Ασφαλίσεων (Conference of European Insurance Supervisory Authorities (EISA)). Βάσει της έκθεσης Sharma τέθηκαν οι αρχές που υποχρεώσαν όλες τις ασφαλιστικές εταιρείες να διαθέτουν λειτουργία διαχείρισης κινδύνου, αναλογιστική λειτουργία, λειτουργία συμμόρφωσης και λειτουργία εσωτερικού ελέγχου. Η οργανωτική δομή πρέπει να έχει σαφή διαχωρισμό αρμοδιοτήτων, τα ελάχιστα επίπεδα των οποίων καθορίζονται στο πλαίσιο του Πυλώνα 2.

Own Risk and Solvency Assessment (ORSA)

Εκτός από τον υπολογισμό του MCR και του SCR στο πλαίσιο του Πυλώνα 1, κάθε ασφαλιστική εταιρεία καλείται να διενεργήσει την αξιολόγηση ιδίων κινδύνων και φερεγγυότητας (ORSA). Η ORSA έχει οριστεί από την EIOPA[1] ως: "το σύνολο των διαδικασιών που χρησιμοποιούνται για τον εντοπισμό, την αξιολόγηση, την παρακολούθηση, τη διαχείριση και την αναφορά των βραχυπρόθεσμων και μακροπρόθεσμων κινδύνων που αντιμετωπίζει ή μπορεί να αντιμετωπίσει η ασφαλιστική επιχείρηση και να καθορίσει τα ίδια κεφάλαια που είναι αναγκαία για να εξασφαλιστεί ότι οι συνολικές ανάγκες φερεγγυότητας της επιχείρησης ικανοποιούνται ανά πάσα στιγμή".

Κάθε ασφαλιστική εταιρεία απαιτείται να προσδιορίζει όλους τους κινδύνους στους οποίους υπόκειται και τις σχετικές διαδικασίες και ελέγχους διαχείρισης κινδύνου. Αυτό περιλαμβάνει και ορισμένους ποιοτικούς κινδύνους που δεν έχουν αναθεωρηθεί απαραίτητα στο πλαίσιο του πρώτου πυλώνα, όπως π.χ. ο κίνδυνος φήμης. Η εταιρεία πρέπει επίσης να ποσοτικοποιήσει την ικανότητά της να συνεχίσει να πληροί τα MCR και SCR στον επιχειρηματικό ορίζοντα (συνήθως τρία έως πέντε έτη), επιτρέποντας νέες εργασίες. Αυτό δεν πρέπει να είναι σε ένα προκαθορισμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, αλλά σε ένα επίπεδο που αισθάνεται η εταιρεία ότι είναι σκόπιμο, παραδείγματος χάριν όσον αφορά τη δική της risk apetite ("όρεξη για κίνδυνο") για ανάληψη κινδύνου ή / και την επίτευξη μιας στοχοθετημένης πιστοληπτικής ικανότητας. Η ORSA είναι ένα από τα στοιχεία που εξετάζει ο επιβλέπων όταν καθορίζει εάν απαιτείται πρόσθετο κεφάλαιο "add-on".

Οι ασφαλιστικές εταιρείες οφείλουν να προσκομίζουν αποδείξεις στον επιβλέποντα, που να δείχνουν ότι η ORSA χρησιμοποιείται από τα ανώτερα διοικητικά στελέχη, συμπεριλαμβανομένων, παραδείγματος χάρη, για τη λήψη στρατηγικών αποφάσεων.

Εποπτεία Εσωτερικών Μοντέλων

Όσον αφορά τον έλεγχο και την εποπτεία των εσωτερικών μοντέλων, προτείνεται η χρήση των μεθόδων του Stress testing (υπολογισμός των επιπτώσεων

[1] Η Ευρωπαϊκή Αρχή Ασφαλίσεων και Επαγγελματικών Συντάξεων (European Insurance and Occupational Pensions Authority) είναι η ρυθμιστική αρχή ασφαλίσεων ευρωπαϊκού επιπέδου, η οποία αναπτύσσει και ελέγχει την εφαρμογή της Οδηγίας του Solvency II εκ μέρους της Ευρωπαϊκής Επιτροπής, του ευρωπαϊκού Συμβουλίου και Κοινοβουλίου.

δραματικών και αντίξοων σεναρίων στο χαρτοφυλάκιο όπως π.χ τρομοκρατική επίθεση , οικονομική ύφεση κλπ) και του Back testing (χρήση ιστορικών στοιχείων για την δημιουργία εκτιμήσεων). Παράλληλα , η εποπτική αρχή εξετάζει τόσο τις μεθόδους εσωτερικού ελέγχου των εταιρειών όσο και την ορθότητα των λογιστικών εγγραφών. Η επενδυτική πολιτική της κάθε εταιρείας πλέον υπόκειται σε έγκριση από την εποπτική αρχή. Προελέγχονται επίσης οι πίνακες θνησιμότητας που χρησιμοποιούνται για την κοστολόγηση των ασφαλιστικών προϊόντων.

1.2.4 Πυλώνας ΙΙΙ

Ο τρίτος πυλώνας , έχει να κάνει με την άυξηση της πειθαρχίας της αγοράς (market discipline) και την οριοθέτηση των κανονισμών δημοσίευσης των οικονομικών στοιχείων τα οποία είναι ίδια σε όλη την ενιαία πλέον ασφαλιστική αγορά. Ο τρίτος πυλώνας εξασφαλίζει την διαφάνεια και την ομοιομορφία τόσο σε επίπεδο αξιολόγησης κινδύνων όσο και λογιστικό επίπεδο αλλά και στη δημοσίευση που αφορά τον ασφαλιστικό κλάδο.

Γνωστοποίηση και υποβολή εκθέσεων

Οι απαιτήσεις γνωστοποίησης αποσκοπούν στην αύξηση της διαφάνειας και, ως εκ τούτου, είναι εκτενέστερες από το προηγούμενο καθεστώς αναφοράς «Φερεγγυότητα I». Τα αποτελέσματα του υπολογισμού της φερεγγυότητας και των λεπτομερειών της διαδικασίας ORSA και των διαδικασιών διαχείρισης κινδύνου πρέπει να γνωστοποιούνται ιδιαιτέρως στον επιβλέποντα στην τακτική εποπτική έκθεση (Regular Supervisory Report (RSR)), η οποία περιλαμβάνει τόσο ποιοτικές πληροφορίες όσο και Ποσοτικά Πρότυπα Αναφοράς (Quantitative Reporting Templates (QRT)). Το RSR, συμπεριλαμβανομένου του QRT, πρέπει να υποβάλλεται ετησίως, αν και υπό ορισμένες προϋποθέσεις είναι αποδεκτή μια σύνοψη (ουσιαστικές αλλαγές) του RSR. Ένα υποσύνολο του QRT (για τη στήριξη του υπολογισμού MCR) απαιτείται σε τριμηνιαία βάση. Εκτός από ορισμένα στοιχεία που μπορεί να είναι εμπιστευτικού χαρακτήρα, αποσπάσματα από το QRT και ορισμένες από τις ποιοτικές πληροφορίες του RSR αποκαλύπτονται επίσης σε μια δημόσια Έκθεση Φερεγγυότητας και Οικονομικής Κατάστασης (Solvency and Financial Condition Report (SFCR)), που δημοσιεύεται ετησίως. Οι τοπικές εποπτικές αρχές επιτρέπεται να επιβάλλουν πρόσθετες απαιτήσεις υποβολής εκθέσεων στις ασφαλιστικές εταιρείες με τη μορφή "εθνικών ειδικών προτύπων".

Κεφάλαιο 2

Μαθηματική Μοντελοποίηση για τον υπολογισμό SCR Φερεγγυότητας II

Με βάση την Φερεγγυότητα II είναι επιτακτικό κάθε ασφαλιστική εταιρία να υπολογίζει τις κεφαλαιακές απαιτήσεις της σε βάθος ενός έτους. Για τον υπολογισμό αλλά και την τελική σύγκριση με την μέθοδο Least-Squares Monte Carlo των Διαθέσιμων Κεφαλαίων αναλύουμε στην συνέχεια τη μαθηματική μοντελοποίηση του εσωτερικού μας μοντέλου, δηλαδή το μοντέλο των *Εσωτερικών Προσομοιώσεων.*

2.1 Εισαγωγή στο Εσωτερικό Μοντέλο

Η ποσοτική εκτίμηση της θέσης φερεγγυότητας μιας ασφαλιστικής εταιρείας μπορεί να είναι χωρισμένη σε δύο συνιστώσες, το Διαθέσιμο Κεφαλαίο (AC) και τις Κεφαλαιακών Απαιτήσεων Φερεγγυότητας (SCR).

2.1.1 Διαθέσιμο κεφάλαιο

Το Διαθέσιμο Κεφάλαιο ή αλλιώς Available Capital (AC) (που ονομάζεται επίσης «ίδια κεφάλαια» στο πλαίσιο της Φερεγγυότητας II) αντιστοιχεί με το ποσό των διαθέσιμων οικονομικών πόρων τη χρονική στιγμή t=0 το οποίο μπορεί να χρησιμεύσει ως αποθεματικό μέσο ($buffer$) ενάντια στους κινδύνους και να απορροφήσει τις οικονομικές ζημιές. Προέρχεται από μια συνεπή προς την αγορά εκτίμηση και ορίζεται ως η διαφορά μεταξύ της αγοραίας αξίας των περιουσιακών στοιχείων και της αγοραίας αξίας των υποχρεώσεων. Η συνεπής προς την αγορά αποτίμηση των περιουσιακών στοιχείων είναι συνήθως αρκετά απλή για το τυπικό επενδυτικό χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστικής εταιρείας δεδομένου ότι οι αγοραίες αξίες είναι είτε άμεσα διαθέσιμες (mark-to-market, επίπεδο 1) είτε μπορούν να εξαχθούν από πρότυπα μοντέλα με εισροές παρατηρήσιμες από την αγορά (mark-to-model, επίπεδο 2). Η πρώτη δεν είναι η περίπτωση για τις υποχρεώσεις μιας ασφαλιστικής εταιρείας.

Επιπλέον, λόγω της σχετικά περίπλοκης χρηματοοικονομικής διάρθρωσης των συμβάσεων ασφάλισης ζωής που ενσωματώνουν δικαιώματα προαιρέσεως και εγγυήσεις, η συνεπής προς την αγορά αποτίμηση των υποχρεώσεων δεν μπορεί γενικά να γίνει σε κλειστή μορφή. Ως εκ τούτου, οι ασφαλιστικές εταιρείες ζωής ακολουθούν συνήθως μία mark-to-model προσέγγιση που βασίζεται σε προσομοιώσεις.

Για να μειωθεί το βέβαιο κέρδος στην επιλογή του υποδείγματος στο οποίο στηρίζεται η αποτίμηση, δηλαδή να εξασφαλιστεί η συγκρισιμότητα των αποτελεσμάτων μεταξύ των εταιρειών, κατά την τελευταία δεκαετία, ο κλάδος ασφάλισης ζωής ανέπτυξε αρχές για την συνεπή προς την αγορά αξία των περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων μιας εταιρείας ασφάλισης ζωής από την άποψη των μετόχων. Αυτή είναι η αποκαλούμενη Ενσωματωμένη Αξία Συνεπής προς την Αγοράς (Market Consistent Embedded Value(MCEV))[1] που αντιστοιχεί στη σημερινή αξία του μεριδίου των μετόχων στα κέρδη το οποίο μπορεί να αποδοθεί από περιουσιακά στοιχεία που υποστηρίζουν την επιχείρηση, μετά την καταβολή του ποσού που αφορούν τους συνολικούς κινδύνους σε ένα χαρτοφυλάκιο ασφάλισης ζωής. Είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι το MCEV δεν αντικατοπτρίζει την επιλογή πώλησης των μετοχών από τους μετόχους περιορισμένης ευθύνης. Πιο συγκεκριμένα, θεωρείται ότι οι μέτοχοι θα το κάνουν εάν δεν υπάρξει ανώτατο όριο για το έλλειμμα. Συνεπώς, η σταθερή αξία των ασφαλιστικών υποχρεώσεων μπορεί να προκύψει έμμεσα ως η διαφορά μεταξύ της αγοραίας αξίας των περιουσιακών στοιχείων και του MCEV. Συνολικά, το διαθέσιμο κεφάλαιο (AC) που προκύπτει από τις αρχές της Φερεγγυότητας II είναι συνήθως πολύ παρόμοιο με το MCEV, έτσι ώστε για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας (χωρίς απώλεια της γενικότητας) θα υποθέσουμε ότι οι δύο ποσότητες συμπίπτουν. Συνεπώς, τη χρονική στιγμή t = 0 έχουμε:

$$AC_0 := MCEV_0 \tag{2.1}$$

όπου AC_0 είναι το Διαθέσιμο Κεφάλαιο την χρονική στιγμή t=0 και $MCEV_0$ η Ενσωματωμένη Αξία Συνεπής προς την Αγορά την χρονική στιγμή t=0.

2.1.2 Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Φερεγγυότητας

Για την εξαγωγή του SCR, η ποσότητα ενδιαφέροντος είναι το Διαθέσιμο Κεφάλαιο την χρονική στιγμή t = 1, AC_1. Υποθέτουμε ότι το κέρδος του πρώτου έτους X_1 δεν έχει καταβληθεί στους μέτοχους, η Ενσωματωμένη Αξία Συνεπής προς την Αγορά την χρονική στιγμή t=1 είναι $MCEV_1$ και το AC_1 μπορεί να περιγραφεί από :

$$AC_1 := MCEV_1 + X_1 \tag{2.2}$$

Διαισθητικά, μια ασφαλιστική εταιρεία θεωρείται φερέγγυα, στο πλαίσιο της Φερεγγυότητας II, εάν το Διαθέσιμο Κεφάλαιο τη χρονική στιγμή t = 1, δηλαδή AC_1, όπως φαίνεται στην χρονική στιγμή t = 0 είναι θετικό με πιθανότητα τουλάχιστον 99, 5%:

$$P(AC_1 \geq 0 | AC_0 = x) \geq 99,5\% \tag{2.3}$$

Το SCR θα ορίζεται στη συνέχεια ως η μικρότερη ποσότητα x που ικανοποιεί αυτήν την σχέση. Αυτός είναι ένας ανεπίσημος ορισμός του SCR που εξασφαλίζει ότι το Διαθέσιμο κεφάλαιο τη χρονική στιγμή t = 0 (AC_0)είναι μεγαλύτερο ή ίσο με τις Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Φερεγγυότητας (SCR). Στη συνέχεια η πιθανότητα ότι το Διαθέσιμο Κεφάλαιο τη χρονική στιγμή t = 1 είναι θετικό πρέπει να είναι τουλάχιστον 99,5%.

Ωστόσο, στις πρακτικές εφαρμογές, συνήθως βασίζεται σε μια απλούστερη, αλλά σχεδόν ισοδύναμη έννοια του SCR, η οποία αποφεύγει τον άνεπίσημο χαρακτήρα του ορισμού που δίνεται παραπάνω. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε L ως τη συνάρτηση απώλειας ενός έτους, που εκτιμάται την χρονική στιγμή t = 0 ως:

$$\mathrm{L} := AC_0 - \frac{AC_1}{1+i} \tag{2.4}$$

όπου i είναι το ετήσιο άνευ κινδύνου επιτόκιο την χρονική στιγή t = 0. Το SCR ορίζεται στη συνέχεια ως το a-ποσοστημόριο της συνάρτησης απώλειας L, όπου το επίπεδο εμπειστοσύνης a είναι ίσο με 99,5%:

$$\begin{aligned} SCR &:= argmin_x \left\{ P\left(AC_0 - \frac{AC_1}{1+i} > x \right) \leq 1 - a \right\} \qquad (2.5) \\ &= argmin_x \left\{ P\left(MCEV_0 - \frac{MCEV_1 + X_1}{1+i} > x \right) \leq 1 - a \right\} \end{aligned}$$

Η πιθανότητα ότι η απώλεια ενός έτους υπερβαίνει το SCR είναι μικρότερη ή ίση με $1-a$, δηλαδή πρέπει να υπολογίσουμε την ετήσια αξία σε κίνδυνο (VaR). Η υπέρβαση κεφαλαίου (Excess Capital) τη χρονική στιγμή $\mathrm{t}=0$, από την άλλη πλευρά, ορίζεται ως $AC_0 - SCR$ και ικανοποιεί την ακόλουθη σχέση :

$$P(\frac{AC_1}{1+i} > AC_0 - SCR) \geq a \tag{2.6}$$

Έτσι η πιθανότητα (που εκτιμάται στην χρονική στιγμή $\mathrm{t}=0$) ότι το Διαθέσιμο Κεφάλαιο την χρονική στιγμή $\mathrm{t}=1$ είναι μεγαλύτερη ή ίση με την υπέρβαση κεφαλαίου είναι τουλάχιστον a (π.χ. 99,5%). Σημειώνουμε ότι κάτω από αυτόν τον ορισμό το SCR εξαρτάται από την πραγματική ποσότητα του κεφαλαίου που διατηρείται την χρονική στιγμή $\mathrm{t}=0$ και μπορεί επίσης να περιλαμβάνει κεφάλαιο για την κάλυψη ζημιών που προκύπτουν από τα περιουσιακά στοιχεία που υποστηρίζουν την υπέρβαση κεφαλαίου. Με βάση αυτόν τον ορισμό, ο δείκτης φερεγγυότητας μπορεί να υπολογίζεται ως AC_0/SCR.

2.1.3 Φόρμουλα Ενσωμάτωσης SCR

Στα τυποποιημένα μοντέλα, το SCR υπολογίζεται μέσω ενός τύπου αθροίσματος σε μία αρθρωτή προσέγγιση. Σύμφωνα με τις υποθέσεις ότι η συνολική απώλεια L ενός έτους είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των τυχαίων μεταβλητών απώλειας $\mathrm{L}_i, 1 < i < d \in N$ που αποδίδονται σε d μονάδες κινδύνου,δηλαδή $\mathrm{L} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{d} \mathrm{L}_i$, και ότι τα $\mathrm{L_i}$ είναι από κοινού κανονικά κατανεμημένα, παίρνουμε για το SCR το λεγόμενο «τύπο της τετραγωνικής ρίζας» :

$$\mathrm{SCR}{=}\sum_{\mathrm{i}=1}^{d} \mu_\mathrm{i} + \sqrt{\sum_{\mathrm{i}=1}^{d}(\mathrm{SCR_i} - \mu_\mathrm{i})^2 + 2\sum_{1<\mathrm{i}<j<d} \rho_{\mathrm{i}j}(\mathrm{SCR_i} - \mu_\mathrm{i})(\mathrm{SCR}_j - \mu_j)} \tag{2.7}$$

όπου $\mu_\mathrm{i} = E[\mathrm{L_i}], \mathrm{SCR_i}$ και SCR_j είναι η επιβάρυνση κινδύνου για τον κίνδυνο i και j αντίστοιχα (δηλαδή το 99,5% ποσοστημόριο της συνάρτησης απώλειας L_i) και ρ_{ij} είναι η γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών κινδύνου $\mathrm{L_i}$ και L_j, $1 < \mathrm{i} \neq j < d$. Οι μεμονωμένες χρεώσεις κινδύνου υπολογίζονται χρησιμοποιώντας σε μοντέλα βασισμένα σε παράγοντες ή βασισμένα σε σενάρια [16].

Ωστόσο, προφανώς προκύπτουν προβλήματα με αυτή τη φόρμουλα εάν οι μεμονωμένοι κίνδυνοι δεν κατανέμονται κανονικά. Από τη μία πλευρά, η λοξότητα ή υπερβάλλουσα κύρτωση των περιθώριων κατανομών μπορεί να οδηγήσει σε σημαντικά ασταθή αποτελέσματα της παραπάνω Εξίσωσης (2.7) (βλέπετε [16]). Από την άλλη πλευρά, οι δομές εξάρτησης πέραν των επιπτώσεων γραμμικής συσχέτισης μπορούν να δώσουν καταστάσεις όπου ο τύπος τετραγωνικής ρίζας υποτιμά σοβαρά το πραγματικό SCR (βλέπετε [15]). Επιπλέον, ακόμη και αν η επίδραση των διαφόρων παραγόντων κινδύνου μπορεί να αντιπροσωπεύεται από κανονικές τυχαίες μεταβλητές όπως σε ορισμένα τυποποιημένα μοντέλα περιουσιακών στοιχείων, η επίδρασή τους στη συνολική απώλεια γενικά δεν θα είναι πρόσθετη.

Ως εκ τούτου, προκειμένου να επιτευχθούν ακριβέστερα αποτελέσματα όσον αφορά τη θέση φερεγγυότητας της εταιρείας, είναι γενικά απαραίτητο να βασίζονται σε αριθμητικές μεθόδους για την ταυτόχρονη εκτίμηση όλων των παραγόντων κινδύνου σε μια προσέγγιση πολλαπλών μεταβλητών. Σύμφωνα με την σχέση (2.5), το MCEV μπορεί να χρησιμεύσει ως βάση για τον προσδιορισμό των απαιτήσεων κεφαλαίων βάσει κινδύνου στο πλαίσιο της Φερεγγυότητας II σε μια τέτοια προσέγγιση. Ως εκ τούτου, στην επόμενη ενότητα, παρέχουμε έναν ακριβέστερο ορισμό του MCEV.

2.2 Μαθηματικός Ορισμός του MCEV

Σύμφωνα με τις Αρχές της Ενσωματωμένης Αξίας Συνεπούς προς την Αγορά (βλέπετε [1]), το MCEV ορίζεται ως το άθροισμα της Αναπροσαρμοσμένης Καθαρής Αξίας Ενεργητικού (Adjusted Net Asset Value (ANAV)) και της Παρούσας Αξίας των Μελλοντικών Κερδών (Present Value of Future Profits (PVFP)) μείον το κόστος του Κεφαλαίου (Cost of Capital, (CoC)):

$$\text{MCEV} = \text{ANAV} + \text{PVFP} - \text{CoC} \tag{2.8}$$

Το ANAV προέρχεται από την Καθαρή Αξία Ενεργητικού (Net Asset Value (NAV)) και περιλαμβάνει προσαρμογές για άυλα περιουσιακά στοιχεία, μη πραγματοποιηθέντα κέρδη και ζημίες από περιουσιακά στοιχεία κ.λπ. Αποτελείται από δύο μέρη, το ελεύθερο πλεόνασμα και το απαιτούμενο κεφάλαιο (βλέπετε αρχές 4 και 5 στο [1]). Στις περισσότερες περιπτώσεις, το ANAV μπορεί να υπολογιστεί από τα νόμιμα στοιχεία του ισολογισμού και την αγοραία αξία των περιουσιακών στοιχείων. Ως εκ τούτου, ο υπολογισμός δεν απαιτεί προσομοιώσεις.

Το PVFP αντιστοιχεί στην παρούσα αξία των ταμειακών ροών μετά φόρων των μετόχων από μια επιχείρηση που βρίσκεται σε δραστηριότητα και τα περιουσιακά στοιχεία που υποστηρίζουν τις υποχρεώσεις. Συγκεκριμένα, περιλαμβάνει επίσης την χρονική αξία των οικονομικών δικαιωμάτων προαίρεσης και εγγυήσεων (βλέπετε αρχές 6 και 7 στο [1]). Ο καθορισμός του PVFP είναι αρκετά δύσκολος αφού εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τη μελλοντική εξέλιξη της χρηματοπιστωτικής αγοράς, δηλαδή από την εξέλιξη της καμπύλης αποδόσεων, των αποδόσεων των μετοχών, των πιστωτικών περιθωρίων κλπ. Επομένως, το

PVFP πρέπει να προσδιοριστεί με βάση τα στοχαστικά μοντέλα, όπου, γενικά, εφαρμόζονται προσεγγίσεις αποτίμησης με ουδέτερο ρίσκο.

Το CoC είναι το άθροισμα του κόστους τριβής του απαιτούμενου κεφαλαίου και του κόστους των υπολειπόμενων μη αντισταθμιστικών κινδύνων (βλέπετε αρχές 8 και 9 στο [1]). Ο υπολογισμός του CoC μπορεί να βασιστεί σε μια σειρά από αιτιοκρατικές ή στοχαστικές προσεγγίσεις (που βασίζονται στην προσομοίωση), οι οποίες δεν εμπίπτουν στο πεδίο εφαρμογής της παρούσας εργασίας.

Με βάση αυτές τις αρχές, μπορεί να προσδιοριστεί το MCEV και, κατά συνέπεια, η φερεγγυότητα μιας ασφαλιστικής εταιρείας ζωής στο πλαίσιο της Φερεγγυότητας II. Για το σκοπό αυτό, δεν χρειάζεται μόνο να υπολογίσουμε το MCEV τη χρονική στιγμή t = 0, αλλά πρέπει επίσης να αξιολογήσουμε την κατανομή του MCEV κατά τη χρονική στιγμή t = 1 όπως φαίνεται από τη χρονική στιγμή t = 0. Τα μέτρα κινδύνου όπως Value-at -Risk (VaR) (ή Tail-Value-at-Risk (TVaR)) στη συνέχεια προκύπτουν βάσει αυτής της κατανομής προκειμένου να υπολογιστεί το απαιτούμενο επιχειρηματικό κεφάλαιο.

2.3 Μαθηματική Δομή Εσωτερικού μοντέλου

Υποθέτουμε ότι οι επενδυτές μπορούν να ανταλλάσσουν συνεχώς σε μια χρηματοοικονομική αγορά χωρίς κόστη τριβών και αφήνουμε την ωριμότητα της μακροπρόθεσμης πολιτικής σε ένα χαρτοφυλάκιο μιας ασφαλιστής ζωής να είναι T. Αν $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathbb{F} = (Ft)$ με $t \in [0, T]$ είναι ένας πλήρης φιλτραρισμένος χώρος πιθανότητας στον οποίο υπάρχουν όλες οι σχετικές ποσότητες, όπου δηλώνει το χώρο όλων των πιθανών καταστάσεων στη χρηματοπιστωτική αγορά και το $\mathcal{P}$ είναι το αποκαλούμενο πραγματικό (φυσικό) μέτρο. Το $\mathcal{F}_t$ αντιπροσωπεύει όλες τις πληροφορίες σχετικά με την οικονομική αγορά μέχρι τη χρονική στιγμή t, και το $\mathbb{F}$ θεωρείται ότι ικανοποιεί τις συνήθεις συνθήκες.

Η αβεβαιότητα σχετικά με τα μελλοντικά κέρδη της ασφαλιστικής εταιρείας προκύπτει από την αβέβαιη εξέλιξη ορισμένων παραγόντων που τα επηρεάζουν, όπως οι αποδόσεις μετοχών, τα επιτόκια ή τα πιστωτικά περιθώρια. Εισαγάγουμε την d-διάστατη, επαρκώς κανονική διαδικασία Markov, $Y = (Y_t)_{t \in [0,T]} = (Y_{t,1}, ..., Y_{t,d})_{t \in [0,T]}$, για να απεικονίσει την αβεβαιότητα της χρηματοπιστωτικής αγοράς, δηλαδή όλα τα επικίνδυνα περιουσιακά στοιχεία στην αγορά μπορούν να εκφράζονται με όρους Y. Συγκεκριμένα, υποθέτουμε την ύπαρξη μιας διαδικασίας ουδέτερης στον κίνδυνο, $(B_t)_{t \in [0,T]}$ (τραπεζικός λογαριασμός) με $B_t = exp \int_0^T r_u \, \mathrm{d}u$, όπου $r_t = r(Y_t)$ είναι το στιγμιαίο επιτόκιο άνευ κινδύνου την χρονική στιγμή t.

Σε αυτή την αγορά , θεωρούμε δεδομένη την ύπαρξη μέτρου πιθανότητας ουδέτερου σε κίνδυνο $\mathcal{Q}$ ισοδύναμου με το $\mathcal{P}$, σύμφωνα με το οποίο οι ροές πληρωμών μπορούν να αποτιμώνται ως οι αναμενόμενες προεξοφλημένες ταμειακές ροές σε σχέση με την αριθμητική διαδικασία $(B_t)_{t\in[0,T]}$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι υπάρχει μοντέλο προβολής ταμειακών ροών της ασφαλιστικής εταιρείας, δηλαδή υπάρχουν λειτουργίες $f_1...f_T$ που αποκομίζουν τα μελλοντικά κέρδη σε χρόνο t από την εξέλιξη της χρηματοπιστωτικής αγοράς μέχρι τη χρονική στιγμή t $(t = 1, ..., T)$. Αυτό το μοντέλο ταμειακών ροών αντικατοπτρίζει νομικές και κανονιστικές απαιτήσεις, καθώς και κανόνες διαχείρισης. Επομένως, διαμορφώνουμε τα μελλοντικά κέρδη λόγω της δραστηριότητας της επιχείρησης ως ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X = (X_1, ...X_T)$ όπου $X_t = f_t(Y_s, s \in [0, T])$.

Προκειμένου η εργασία μας να είναι στοχευμένη, περιορίζουμε την προσοχή μας στον κίνδυνο αγοράς, δηλαδή οι μη αντισταθμισμένοι κίνδυνοι καθώς και οι αντίστοιχες χρεώσεις κόστους κεφαλαίου αγνοούνται. Ωστόσο, οι παράγοντες μη χρηματοοικονομικού κινδύνου, όπως ο δείκτης θνησιμότητας, θα μπορούσαν επίσης να ενσωματωθούν στη διαδικασία. Οι αντίστοιχες επιβαρύνσεις κόστους κεφαλαίου καθώς και άλλα κόστη τριβής θα μπορούσαν τότε να ληφθούν υπόψη με την κατάλληλη επιλογή του $\mathcal{Q}$ και $f_i, 1 \leq i \leq T$.

2.3.1 Διαθέσιμο Κεφάλαιο τη χρονική στιγμή t=0

Σύμφωνα με την φόρμουλα αποτίμησης ουδέτερης σε κίνδυνο, μπορούμε να προσδιορίσουμε το PVFP τη χρονική στιγμή t=0, που συμβολίζεται με V_0, ως το προβλεπόμενο άθροισμα των προεξοφλημένων μελλοντικών κερδών $X_t, t = 1, ..., T$, υπό το ουδέτερο σε ρίσκο μέτρο $\mathcal{Q}$:

$$V_0 = E^Q \left[\sum_{t=1}^{T} \exp(-\int_0^t r_u du) X_t \right] \tag{2.9}$$

Επιπλέον, ορίζουμε σ_0 την τυπική τη χρονική στιγμή t=0:

$$\sigma_0 = \sqrt{Var^Q \left[\sum_{t=1}^{T} \exp(-\int_0^t r_u du) X_t \right]} \tag{2.10}$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις, το V_0 δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά λόγω της πολυπλοκότητας της αλληλεπίδρασης μεταξύ της εξέλιξης των μεταβλητών της χρηματοπιστωτικής αγοράς Y_t και των υποχρεώσεων ή, πιο συγκεκριμένα, των κερδών των μετόχων X_t. Έτσι, πρέπει να βασιστούμε σε αριθμητικές μεθόδους για να υπολογίσουμε το V_0.

Μια κοινή προσέγγιση είναι να χρησιμοποιήσουμε προσομοιώσεις Monte Carlo ανεξάρτητων τροχιών $(Y_t^{(k)})_{t\in[0,T]}$, $k = 1, ..., K_0$, της υποκείμενης διεργασίας Y υπό το μέτρο ουδέτερο στον κίνδυνο $\mathcal{Q}$. Με βάση αυτά τα διαφορετικά σενάρια για τη χρηματοπιστωτική αγορά, αντλούμε πρώτα τις προκύπτουσες ταμειακές ροές $X_t^{(k)}, (t = 1, ..., T; k = 1, ..., K_0)$ χρησιμοποιώντας το μοντέλο προβολής ταμειακών ροών. Στη συνέχεια, προεξοφλούμε τις ταμειακές ροές με τον κατάλληλο συντελεστή προεξόφλισης και παίρνουμε τον μέσο όρο για όλες τις τροχιές K_0, δηλαδή:

$$\widetilde{V}_0(K_0) = \frac{1}{K_0}\sum_{k=1}^{K_0}\sum_{t=1}^{T}\exp\left(-\int_0^t r_u^k du\right) X_t^k \tag{2.11}$$

όπου το $r_u^{(k)}$ υποδηλώνει το στιγμιαίο άνευ κινδύνου επιτόκιο την χρονική στιγμή t στην τροχιά k.

Από την στιγμή που το $ANAV$ μπορεί να οριστεί από τον ισολογισμό μιάς εταιρίας, ένας εκτιμητής για το AC_0 δίνεται από:

$$\widetilde{AC}_0 = ANAV_0 + \tilde{V}_0 \tag{2.12}$$

2.3.2 Διαθέσιμο Κεφάλαιο την χρονική στιγμή t=1

Για τον υπολογισμό των κεφαλαιακών απαιτήσεων φερεγγυότητας, εκτός από το διαθέσιμο κεφάλαιο τη χρονική στιγμή $t = 0$, πρέπει να εκτιμήσουμε την κατανομή του διαθέσιμου κεφαλαίου τη χρονική στιγμή $t = 1$. Υποθέτοντας ότι τα κέρδη του πρώτου έτους, X_1, δεν έχουν ακόμη καταβληθεί στους μετόχους, πρέπει να προσδιορίσουμε την κατανομή $\mathcal{P}$ της μετρήσιμης τυχαίας μεταβλητής $\mathcal{F}_1$ (βλέπετε Εξισώσεις (2.2) και (2.8)) :

$$AC_1 = ANAV_1 + \underbrace{E^Q\left[\sum_{t=2}^{T}\exp\left(-\int_0^t r_u du\right) X_t | Y_s, s\in[0,1]\right]}_{V_1} + X_1 \tag{2.13}$$

Η πολυπλοκότητα της παραπάνω εκτίμησης προκύπτει κυρίως από τη δομή του V_1. Ωστόσο, στις πρακτικές εφαρμογές, το V_1 συνήθως δεν εξαρτάται από "ολόκληρο" το ιστορικό της χρηματοπιστωτικής αγοράς μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 1$. Τα μοντέλα συνολικής προβολής περιουσιακών στοιχείων και υποχρεώσεων βασίζονται στην ταυτόχρονη παρέκταση ενός πεπερασμένου αριθμού στοιχείων ή λογαριασμών που αντιπροσωπεύουν τόσο παράγοντες της αγοράς όσο και θέσεις υποχρεώσεων. Εάν από την άλλη πλευρά η οικονομική κατάσταση της εταιρείας προβάλλεται σε ενιαία ή σε αντιπροσωπευτική βάση, κάθε σύμβαση θα εκφραστεί και πάλι με έναν πεπερασμένο αριθμό καταχωρήσεων στο σύστημα λογιστικής του ασφαλιστή (βλέπετε [3]) . Συνεπώς, όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για την προβολή των ταμειακών ροών περιέχονται σε μια πεπερασμένη συλλογή των μεταβλητών κατάστασης Markov (Y_1, D_1), όπου $D_1 = (D_1^{(1)}, ..., D_1^{(m)})$ και μπορούμε να γράψουμε:

$$V_1 = E^Q \left[\sum_{t=2}^{T} \exp\left(- \int_1^t r_u du \right) X_t | (Y_1, D_1) \right] \tag{2.14}$$

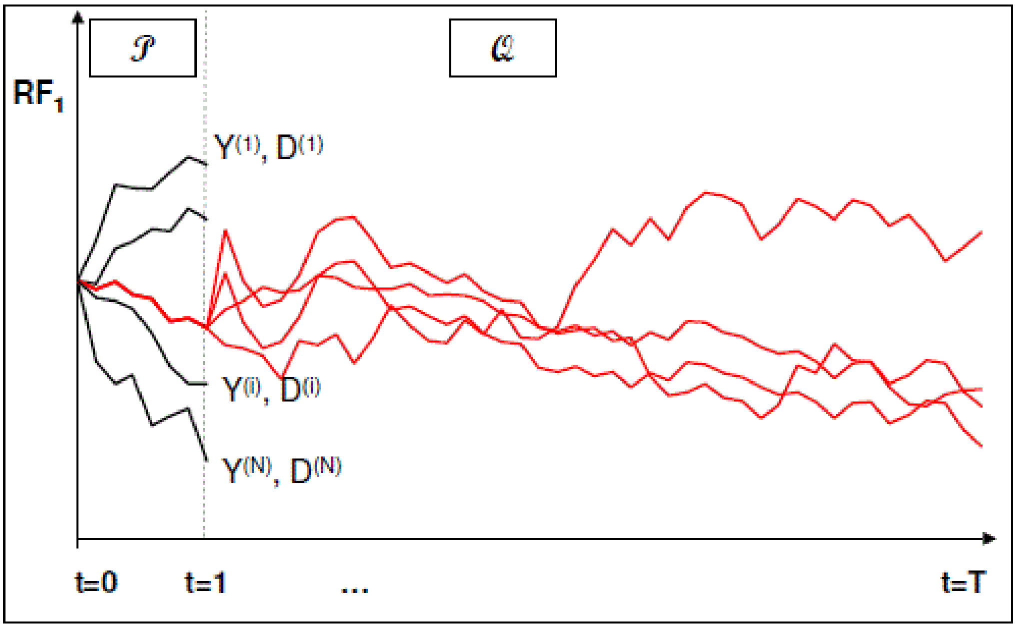
Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τη κατανομή του AC_1 από την αντίστοιχη εμπειρική κατανομή. Δίνονται $N \in \mathbb{N}$, οι τροχιές $(Y_s^{(\mathrm{i})})_{s\in[0,1]}$ για την ανάπτυξη της χρηματοπιστωτικής αγοράς με το πραγματικό μέτρο $\mathcal{P}$ με αντίστοιχες μεταβλητές $(Y_1^{(\mathrm{i})}, D_1^{(\mathrm{i})})$, $\mathrm{i} \in 1, ..., N$, η $PVFP$ την χρονική στιγμή $t = 1$ εξαρτάται από την κατάσταση της χρηματοπιστωτικής αγοράς στο σενάριο i και μπορεί να περιγραφεί από:

$$V_1^{(\mathrm{i})} = E^Q \left[\underbrace{\sum_{t=2}^{T} \exp(- \int_1^t r_u du) X_t | (Y_1, D_1) = (Y_1^{(\mathrm{i})}, D_1^{(\mathrm{i})})}_{PV_1^{(\mathrm{i})}} \right] \tag{2.15}$$

Επιπλέον, ορίζουμε:

$$\sigma_1^{(\mathrm{i})} = \sqrt{Var^Q \left[\sum_{t=2}^{T} \exp(- \int_1^t r_u du) X_t | (Y_1, D_1) = (Y_1^{(\mathrm{i})}, D_1^{(\mathrm{i})}) \right]} \tag{2.16}$$

Παρατηρήσετε ότι το $\sigma_1^{(\mathrm{i})}$ μπορεί να διαφέρει σημαντικά για κάθε διαφορετικό σενάριο i, δηλαδή κάτω από διαφορετικές υλοποιήσεις των μεταβλητών $(Y_1^{(\mathrm{i})}, D_1^{(\mathrm{i})})$, οι προεξοφλημένες χρηματικές ροές $\sum_{t=2}^{T} \exp(- \int_1^t r_u du) X_t$ συνήθως δεν κατανέμονται πανομοιότυπα.



Σχήμα 4 : Απεικόνιση της Προσέγγισης των Εσωτερικών Προσομοιώσεων

Επιπλέον, οι εφαρμογές για τα υπόλοιπα συστατικά των AC_1, X_1 και $ANAV_1$, μπορούν εύκολα να υπολογιστούν για κάθε μία από τις τροχιές του πρώτου έτους N. Επομένως, θα λάβουμε N εφαρμογές του AC_1 από

$$AC_1^{(\mathrm{i})} = ANAV_1^{(\mathrm{i})} + V_1^{(\mathrm{i})} + X_1^{(\mathrm{i})} \tag{2.17}$$

Παρατηρήσετε ότι αυτές οι $\mathcal{F}_1$ μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές $AC_1^{(\mathrm{i})}$, $1 \leq \mathrm{i} \leq N$, είναι ανεξάρτητες και ισόνομες ως εφαρμογές Monte Carlo.

Όπως και την χρονική στιγμή μηδέν, έτσι και εδώ, το πρόβλημα αποτίμησης των σχέσεων (2.14) και (2.15) γενικά δεν μπορεί να επιλυθεί αναλυτικά. Σε σχέση με την ενότητα 2.3.1, μπορούμε να βασιστούμε στις προσομοιώσεις Monte Carlo. Όπως απεικονίζεται στο Σχήμα 4, με βάση την κατάσταση $(Y_1^{(\mathrm{i})}, D_1^{(\mathrm{i})})$ στο σενάριο $\mathrm{i} \in \{1, ..., N\}$ προσωμοιώνονται $K_1^{(\mathrm{i})} \in \mathbb{N}$ ουδέτερα σε κίνδυνο σενάρια κάτω από $(Y_s^{(\mathrm{i},k)})_{s\in[1,T]}$. Στην συνέχεια ερμηνεύοντας τα αποτελέσματα των μελλοντικών κερδών $X_t^{(\mathrm{i},k)}$ $(t = 2, ..., T; k = 1, ..., K_1^{(\mathrm{i})}; \mathrm{i} = 1, ..., N)$ και του μέσου όρου όλων των $K_1^{(\mathrm{i})}$ τροχιών για κάθε πρώτο έτος διαδρομής $\mathrm{i} \in 1, ..., N$, λαμβάνουμε εκτιμήσεις Monte Carlo για το $V_1^{(\mathrm{i})}$:

$$\widetilde{V}_1^{(\mathrm{i})}(K_1^{(\mathrm{i})}) := \frac{1}{K_1^{(\mathrm{i})}} \sum_{k=1}^{K_1^{(\mathrm{i})}} \sum_{t=2}^{T} exp- \left(\int_1^t r_u^{(\mathrm{i},k)} \, \mathrm{d}u \right) X_t^{(\mathrm{i},k)}, \mathrm{i} \in \{1, ..., N\} \tag{2.18}$$

Ο αριθμός των προσομοιώσεων στο i πραγματικό σενάριο μπορεί να εξαρτάται από το i δεδομένου ότι για διαφορετικές τυπικές αποκλίσεις $\sigma_1^{(\mathrm{i})}$, μπορεί να είναι απαραίτητος ένας διαφορετικός αριθμός προσομοιώσεων για την επίτευξη αποδεκτών αποτελεσμάτων. Λαμβάνουμε το ακόλουθο δείγμα τυπικής απόκλισης για το $PV_1^{(\mathrm{i})}$:

$$\tilde{\sigma}_1^{(\mathrm{i})}(K_1^{(\mathrm{i})}) = \sqrt{\frac{1}{K_1^{(\mathrm{i})}-1}\sum_{k=1}^{K_1^{(\mathrm{i})}}\left(PV_1^{(\mathrm{i},k)} - \tilde{V}_1^{(\mathrm{i})}(K_1^{(\mathrm{i})})\right)^2} \tag{2.19}$$

Τώρα μπορούμε να υπολογίσουμε N πραγματοποιήσεις για το AC_1 με:

$$\widetilde{AC}_1^{(\mathrm{i})}(K_1^{(\mathrm{i})}) := ANAV_1^{(\mathrm{i})} + \tilde{V}_1^{(\mathrm{i})}(K_1^{(\mathrm{i})}) + X_1^{(\mathrm{i})}, \mathrm{i} = 1, ...N \tag{2.20}$$

2.4 Solvency Capital Requirement (SCR)

Από την εξίσωση (2.5), προκύπτει ότι το SCR είναι το α - ποσοστημόριο της τυχαίας μεταβλητής $\mathrm{L} = AC_0 - \frac{AC_1}{1+i}$. Δεδομένου ότι το AC_0 προσεγγίζεται από τον αμερόληπτο εκτιμητή $\widetilde{AC}_0$ και το i είναι γνωστό τη χρονική στιγμή $t = 0$, το μόνο παραμένον τυχαίο στοιχείο είναι το AC_1 και σκοπός είναι να εκτιμηθεί το α - ποσοστημόριο του $-AC_1$.

Με βάση την προσομοίωση του εσωτερικού μοντέλου που έχει περιγραφεί στην προηγούμενη ενότητα, λαμβάνουμε N εκτιμώμενες πραγματοποιήσεις της τυχαίας μεταβλητής $Z = -AC_1$, την οποία εκφράζουμε με $\tilde{z}_1,...,\tilde{z}_N$. Ο αντίστοιχος order statistic σημειώνεται με $\tilde{Z}_1,...,\tilde{Z}_N$ με πραγματοποιήσεις $\tilde{z}_1,...,\tilde{z}_N$.

Μία απλή προσέγγιση για τον υπολογισμό του z_a είναι να βασιστούμε στο αντίστοιχο εμπειρικό εκτιμητή: $\tilde{z}_a = \tilde{z}_{(m)}$, όπου $m = \lfloor N \cdot a + 0.5 \rfloor$.
Το SCR μπορεί να υπολογιστεί από

$$\widetilde{\mathrm{SCR}} = \widetilde{AC}_0 + \frac{\tilde{z}_{(m)}}{1+i} \tag{2.21}$$

Εναλλακτικά, θα μπορούσε να εφαρμοστεί η θεωρία ακραίων τιμών για να ληφθεί μια ισχυρή εκτίμηση του ποσοστημορίου (βλέπετε [7]).

2.5 Ποιότητα του Εκτιμητή και Επιλογή των K_0, K_1 και N

Στο πλαίσιο της διαδικασίας εκτίμησης, έχουμε τρεις πηγές σφαλμάτων. Πρώτον, υπολογίζουμε το Διαθέσιμο Κεφάλαιο τη χρονική στιγμή $t = 0$ (AC_0) με τη βοήθεια των τροχιών K_0. Δεύτερον, χρησιμοποιούμε μόνο πραγματικά σενάρια για να υπολογίσουμε τη συνάρτηση κατανομής και, τρίτον, το Διαθέσιμο Κεφάλαιο την χρονική στιγμή $t = 1$ (AC_1) υπολογίζεται με τη βοήθεια τροχιών K_1 σε κάθε σενάριο. Ως συνέπεια του τελευταίου, η Εξίσωση (2.21) δεν παρουσιάζει απαραιτήτως μια εκτίμηση για την ποσότητα της συνάρτησης κατανομής της "πραγματικής" $\mathcal{F}_1$-μετρήσιμης απώλειας

$$\mathrm{L} = \mathrm{L}(Y_1, D_1) = AC_0 - \tfrac{AC_1}{1+i} = AC_0 - \tfrac{ANAV_1 + V_1 + X_1}{1+i}$$

αλλά αντίθετα, εξετάζουμε την κατανομή της εκτιμώμενης ζημίας

$$\widetilde{\mathrm{L}}(Y_1, D_1) = \widetilde{AC}_0 - \frac{ANAV_1 + \left(\frac{1}{K_1}\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{t=2}^{T} e^{-\int_1^t r_u^{(k)} du} X_t^{(k)} | (Y_1, D_1)\right) + X_1}{1+i} \tag{2.22}$$

Ειδικότερα, το $\widetilde{\mathrm{L}}(Y_1, D_1)$ δεν είναι μετρήσιμο σε όρους $\mathcal{F}_1$ λόγω του τυχαίου σφάλματος δειγματοληψίας που προκύπτει από την εκτίμηση του AC_0 και την εσωτερική προσομοίωση.

$$\widetilde{\mathrm{L}}(Y_1, D_1) \to L(Y_1, D_1) \quad \text{σχεδόν πάντα}, \quad \text{όσο} \quad K_0, K_1 \to \infty$$

από τον Νόμο των μεγάλων αριθμών. Παρόλα αυτά, βασίζουμε την εκτίμηση του SCR σε διαταραγμένα δείγματα. Για να αναλύσουμε την επίδραση αυτής της ανακρίβειας στην πραγματική εκτίμηση του $\widetilde{\mathrm{SCR}}$, αποσυνθέσαμε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα (MSE) στη διακύμανση του εκτιμητή μας και σε μια μεροληψία:

$$MSE = E\left[(\widetilde{\mathrm{SCR}} - \mathrm{SCR})^2\right] = Var(\widetilde{\mathrm{SCR}}) + \left[\underbrace{E(\widetilde{\mathrm{SCR}}) - \mathrm{SCR}}_{\mu\varepsilon\rho o\lambda\eta\psi\acute{\iota}\alpha}\right]^2 \tag{2.23}$$

Δεδομένου ότι ο $\widetilde{AC}_0$ είναι ένας αμερόληπτος εκτιμητής του AC_0 και δεδομένου ότι είναι ανεξάρτητος από το $\tilde{z}_{(m)}$, η σχέση (2.23) απλοποιεί την παρακάτω εξίσωση

$$MSE = Var(\widetilde{AC_0}) + Var\left(\frac{\tilde{z}_{(m)}}{1+i}\right) + \left[E\left(\frac{\tilde{z}_{(m)}}{1+i}\right) - \frac{z_{(a)}}{1+i}\right]^2 \tag{2.24}$$

Προφανώς, $Var(\widetilde{AC_0}) = \frac{\sigma_0^2}{K_0}$, και θα επικεντρωθούμε στη δεύτερο και τρίτο όρο τις σχέσης (2.24). Ας αφήσουμε (σύμφωνα με το [11])

$$\begin{aligned} Z^{K_1}(Y_1, D_1) &= \frac{ANAV_1 + \left(\frac{1}{K_1}\sum_{k=1}^{K_1}\sum_{t=2}^{T} e^{-\int_1^t r_u^{(k)}du} X_t^{(k)} | (Y_1, D_1)\right) + X_1}{1+i} \\ &- \frac{ANAV_1 + V_1 + X_1}{1+i} \end{aligned} \tag{2.25}$$

που υποδηλώνει τη διαφορά μεταξύ της εκτιμώμενης ζημίας και της ”πραγματικής” τιμής υπό την παραδοχή ότι το $\widetilde{AC}_0$ είναι ακριβές. Επιπλέον, ορίζεται η από κοινού συνάρτηση κατανομής του L, $g_{K_1}(.)$ και $\tilde{Z}^{K_1} := Z^{K_1}\sqrt{K_1}$.

Στη συνέχεια, κάτω από κάποιες ομαλές συνθήκες, και από την Πρόταση 2 του [11] έχουμε

$$E\left[\frac{\tilde{z}_{(m)}}{1+i}\right] - \frac{z_a}{1+i} = \frac{\theta_a}{K_1 f(SCR)} + O_{K_1}(\frac{1}{K_1}) + O_N(\frac{1}{N}) + O_{K_1}(1)O_N(\frac{1}{N}),$$

$$Var\left(\frac{\tilde{z}_{(m)}}{1+i}\right) = \frac{a(1-a)}{(N-2)f^2(\mathrm{SCR})} + O_N(\frac{1}{N^2})O_{K_1}(1)O_N(\frac{1}{N})$$

όπου $f(.)$ υποδηλώνει την συνάρτηση πυκνότητας της L, $O_{K_1}(.)$ και $O_N(.)$ τους ”big O”[2] συμβολισμούς των αντίστοιχων όρων και

$$\begin{aligned} \theta_a &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left[f(u)E[Var(\tilde{Z}^{K_1}|Y_1, D_1)|\mathrm{L} = u]\right]|_{u=\mathrm{SCR}} \\ &= -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} z^2 \frac{\partial}{\partial u} g_{K_1}(u, z)dz|_{u=\mathrm{SCR}} \end{aligned} \tag{2.26}$$

[2]Για περισσότερες πληροφορίες για τους big O συμβολισμούς ανατρέξτε στην ιστοσελίδα *https://en.wikipedia.org/wiki/Big_O_notation*

Το σύμβολο του θ_a - και, ως εκ τούτου, η κατεύθυνση της μεροληψίας - τελικά θα καθοριστεί από το σύμβολο του $\frac{\partial}{\partial u} g_{K_1}(u,z)dz$. Δεδομένου ότι το SCR βρίσκεται στην δεξιά ουρά της κατανομής και δεδομένου ότι η $\frac{g_{K_1}(u,z)}{\int_{-\infty}^{\infty} g_{K_1}(u,l)dl}$ είναι συνάρτηση πυκνότητας, το $\frac{\partial}{\partial u} g_{K_1}(u,z)|_{u=\mathrm{SCR}}$ θα είναι γενικά αρνητικό και επομένως αναμένουμε να υπερεκτιμήσουμε το SCR, δηλαδή την πιθανότητα ότι η εταιρεία είναι φερέγγυα μετά από ένα έτος θα είναι κατά μέσο όρο υψηλότερη από $a = 99,5\%$.

Για να βελτιστοποιήσουμε την εκτίμησή μας, θα θέλαμε να επιλέξουμε K_0, K_1 και N έτσι ώστε το MSE να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο. Αν παραβλέψουμε τους χαμηλότερους όρους , αυτό δίνει το ακόλουθο πρόβλημα βελτιστοποίησης για τα K_0, K_1 και N

$$\frac{\sigma_0^2}{K_0} + \frac{\theta_a^2}{K_1^2 f^2(\mathrm{SCR})} + \frac{a(1-a)}{(N+2)f^2(SCR)} \rightarrow min$$

με τον περιορισμό $K_0 + NK_1 = \Gamma$. Χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές $Lagrange$, για κάθε επιλογή του Γ έχουμε,

$$N \approx \frac{a(1-a)K_1^2}{2\theta_a^2} \tag{2.27}$$

$$K_0 \approx \frac{\sigma_0 K_1 f(\mathrm{SCR})}{\theta_a} \sqrt{\frac{NK_1}{2}} \tag{2.28}$$

δηλαδή δεδομένης οποιασδήποτε επιλογής του K_1, μπορούμε να προσδιορίσουμε την επιλογή θ_a και στη συνέχεια να επιλέξουμε ένα βέλτιστο N και K_0.

Παρακάτω θα αποδειχθούν οι σχέσεις (2.27) και (2.28)

Έστω η συνάρτηση

$$H(N, K_0, K_1) = \frac{\sigma_0^2}{K_0} + \frac{\theta_a^2}{K_1^2 f^2(\mathrm{SCR})} + \frac{a(1-a)}{(N+2)f^2(\mathrm{SCR})} \tag{2.29}$$

και περιορισμός της συνάρτησης αυτής $K_0 + K_1 N - \Gamma = 0$. Έστω

$$h(N, K_0, K_1) = K_0 + K_1 N - \Gamma \tag{2.30}$$

Για την απόδειξη θα γίνει χρήση πολλαπλασιαστών *Lagrange* όπως αναφέρθηκε και παραπάνω.

$$\frac{\partial H}{\partial N} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{f^2(\mathrm{SCR})} \cdot (-\frac{1}{(N+2)^2}) \tag{2.31}$$
$$\frac{\partial H}{\partial K_0} = -\frac{\sigma_0^2}{K_0^2} \tag{2.32}$$
$$\frac{\partial H}{\partial K_1} = \frac{1}{f^2(\mathrm{SCR})} \cdot \frac{2\theta_a \frac{\partial \theta_a}{\partial K_1} K_1^2 - \theta_a^2 \cdot 2K_1}{K_1^4} \tag{2.33}$$

Όσο αφορά την $h(N, K_0, K_1)$ έχουμε:

$$\frac{\partial h}{\partial N} = \lambda \cdot K_1 \tag{2.34}$$
$$\frac{\partial h}{\partial K_0} = \lambda \tag{2.35}$$
$$\frac{\partial h}{\partial K_1} = \lambda \cdot N \tag{2.36}$$

Ισχύει ότι $\nabla H{=}\lambda\nabla h$. Επομένως

$$\left(\frac{\alpha(1-\alpha)}{f^2(\mathrm{SCR})(N+2)^2}, -\frac{\sigma_0^2}{K_0^2}, \frac{1}{f^2(\mathrm{SCR})} \cdot \frac{2\theta_a \frac{\partial \theta_a}{\partial K_1} K_1^2 - \theta_a^2 \cdot 2K_1}{K_1^4}\right) = (\lambda K_1, \lambda, \lambda N) \tag{2.37}$$

Άρα ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$\lambda K_1 = \frac{\alpha(1-\alpha)}{f^2(\mathrm{SCR})} \cdot (-\frac{1}{(N+2)^2}) \tag{2.38}$$
$$\lambda = -\frac{\sigma_0^2}{K_0^2} \tag{2.39}$$
$$\lambda \cdot N = \frac{1}{f^2(\mathrm{SCR})} \cdot \frac{2\theta_a \frac{\partial \theta_a}{\partial K_1} K_1^2 - \theta_a^2 \cdot 2K_1}{K_1^4} \tag{2.40}$$

Από την σχέση (2.40) έχουμε:

$\frac{2\theta_a}{f^2(\mathrm{SCR})K_1^2} \cdot \frac{\partial \theta_a}{\partial K_1} - \frac{2\theta_a^2}{f^2(\mathrm{SCR})K_1^3} = \lambda N$

Λύνοντας ως προς λ έχουμε:

$\lambda = \frac{2\theta_a}{Nf^2(\mathrm{SCR})K_1^2} \cdot \frac{\partial\theta_a}{\partial K_1} - \frac{2\theta_a^2}{Nf^2(\mathrm{SCR})K_1^3}$

Αντικαθιστούμε από την σχέση (2.39) το λ με $-\frac{\sigma_0^2}{K_0^2}$. Άρα η σχέση μας γράφεται:

$-\frac{\sigma_0^2}{K_0^2} = \frac{2\theta_a}{Nf^2(\mathrm{SCR})K_1^2} \cdot \frac{\partial\theta_a}{\partial K_1} - \frac{2\theta_a^2}{Nf^2(\mathrm{SCR})K_1^3}$

Σύμφωνα με την θεωρία των κατώτερων όρων, ο πρώτος όρος του δεύτερου μέρους της παραπάνω εξίσωσης ισούται με το μηδέν. Οπότε η παραπάνω σχέση γράφεται:

$-\frac{\sigma_0^2}{K_0^2} = -\frac{2\theta_a^2}{Nf^2(\mathrm{SCR})K_1^3}$

Στην συνέχεια κάνοντας πράξεις έχουμε:

$2\theta_a^2 K_0^2 = \sigma_0^2 Nf^2(\mathrm{SCR})K_1^3$

Λύνοντας ως προς K_0 τελικά καταλήγουμε :

$K_0 \approx \frac{\sigma_0 Nf(\mathrm{SCR})K_1}{\theta_a} \cdot \sqrt{\frac{NK_1}{2}}$ (2.28)

Για τον υπολογισμό του N (σχέση 2.27) θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση (2.28):

$K_0 \approx \frac{\sigma_0 Nf(\mathrm{SCR})K_1}{\theta_a} \cdot \sqrt{\frac{NK_1}{2}}$

Με την βοήθεια της σχέσης (2.39) και της σχέσης (2.28) η σχέση (2.38) γράφεται:
$\frac{-\sigma_0^2 2\theta_a^2 K_1}{\sigma_0^2 Nf^2(\mathrm{SCR})K_1^3} = \frac{a(1-a)}{f^2(\mathrm{SCR})} \cdot \left(-\frac{1}{(N+2)^2}\right)$

Κάνοντας μαθηματικές πράξεις έχουμε:
$\frac{\alpha(1-\alpha)}{(N+2)^2} \cdot K_1^2 = \frac{2\theta_a}{N}$

Τελικά καταλήγουμε στην σχέση 2.27 που θέλαμε να αποδείξουμε:

$N \approx \frac{a(1-a)K_1^2}{2\theta_a^2}$ (2.27)

Σε πρακτικές εφαρμογές, τα f, σ_0 και θ_a είναι άγνωστα, αλλά μπορούν να εκτιμηθούν σε πιλοτική προσομοίωση με μικρό μόνο αριθμό τροχιών. Ωστόσο, η εκτίμηση του θ_a γενικά θα είναι αρκετά ανακριβής για μεγάλο α επειδή είναι απαραίτητο να εκτιμηθεί ένα παράγωγο (derivative) στην ουρά της κατανομής.

Επιπλέον, σημειώνεται ότι παρόλο που υπάρχουν πολλές παράμετροι μεταξύ της εκτίμησης του VaR ενός χαρτοφυλακίου χρηματοοικονομικών παραγώγων και του VaR ενός ασφαλιστικού χαρτοφυλακίου, υπάρχει τουλάχιστον μία σημαντική διαφορά. Σε ένα χαρτοφυλάκιο χρηματοοικονομικών παραγώγων, τα μεμονωμένα μέσα μπορούν να αποτιμηθούν ανεξάρτητα και συνεπώς τα σφάλματα των τιμών διαφοροποιούνται όταν το χαρτοφυλάκιο είναι μεγάλο. Αυτό δεν συμβαίνει γενικά για ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο. Λόγω των κανόνων διαχείρισης που εφαρμόζονται σε εταιρικό επίπεδο (π.χ. η κατανομή των στρατηγικών στοιχείων ενεργητικού και η συμμετοχή στα κέρδη), οι ταμειακές ροές των διαφόρων ασφαλιστικών συμβάσεων μπορεί να εξαρτώνται η μία από την άλλη. Επομένως, πρέπει να προσομοιώνουμε ολόκληρο το χαρτοφυλάκιο με βάση τα ίδια στοχαστικά σενάρια. Έτσι, τα σφάλματα τιμολόγησης στην εσωτερική προσομοίωση δεν θα διαφοροποιούνται γενικά όταν το χαρτοφυλάκιο είναι μεγάλο και επομένως ο απαιτούμενος αριθμός εσωτερικών προσομοιώσεων δεν θα μειωθεί αναγκαστικά για μεγάλα χαρτοφυλάκια.

Κεφάλαιο 3

Αριθμητική Προσέγγιση Monte Carlo για Solvency II

Μέχρι στιγμής, έχουμε διευκρινίσει το Διαθέσιμο Κεφάλαιο (AC) - και κατά συνέπεια το SCR - με βάση τις ταμειακές ροές από την πλευρά των μετόχων. Όπως έχει ήδη αναφερθεί, μια εναλλακτική προσέγγιση είναι ο υπολογισμός του Διαθέσιμου Κεφαλαίου ως διαφορά της αγοραίας αξίας των περιουσιακών στοιχείων και της αγοραίας αξίας των υποχρεώσεων, δηλαδή με την εξέταση των ταμειακών ροών από την άποψη των ασφαλισμένων.

3.1 Εναλλακτική εκτίμηση του SCR

Εναλλακτική εκτίμηση λοιπόν αποτελεί η προσέγγιση Ελαχίστων Τετραγώνων Monte-Carlo. Για την προσέγγιση Monte-Carlo, και για αυτήν των εσωτερικών προσομοιώσεων μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ισοδύναμες, με την έννοια ότι η ποσότητα που εκτιμάται είναι η ίδια. Ωστόσο οι δύο μέθοδοι μπορεί να αποφέρουν διαφορετικές εκτιμήσεις για το SCR. Συγκεκριμένα, η ποιότητα της προκύπτουσας εκτίμησης μπορεί να διαφέρει σημαντικά, πράγμα που εξαρτάται κυρίως από τις προδιαγραφές του μοντέλου που ο εκτιμητής είναι βέλτιστος.

Η ποιότητα του εναλλακτικού εκτιμητή μπορεί να εκτιμηθεί με τρόπο ανάλογο με την ενότητα 2.5, οπότε παραλείπουμε την παρουσίαση χάριν συντομίας. Συνεχίζουμε να περιορίζουμε στην εργασία μας στην περιγραφή που παρουσιάζεται από την αρχή αυτης της ενότητας, καθώς είναι περισσότερο σύμφωνη με τις αρχές Ενσωματωμένης Αξίας συνεπής προς την αγορά MCEV. Ωστόσο, στις εφαρμογές μας θα βασιστούμε και στις δύο προσεγγίσεις .

Το πρωταρχικό πρόβλημα με τις προσεγγίσεις που παρουσιάζονται σε αυτή την ενότητα είναι η εσωτερική δομή προσομοίωσης. Για να επιτευχθούν ακριβή αποτελέσματα απαιτείται ένας μεγάλος αριθμός συνολικών προσομοιώσεων. Οι δυνατότητες αύξησης της αποτελεσματικότητας είναι τεχνικές μείωσης της διακύμανσης όπως είναι οι μεταβλητές ελέγχου ή οι τεχνικές μείωσης της μεροληψίας, όπως οι διαδικασίες του Jackknife[11].

3.2 Αναλυτικές προσεγγίσεις του SCR

Στην Ενότητα 2.1.3, επισημάναμε ότι υπάρχουν σοβαρά προβλήματα με την φόρμουλα ενσωμάτωσης του SCR όπως εφαρμόζεται σε τυποποιημένα μοντέλα. Προκειμένου να βρεθεί μια «ρεαλιστική» εναλλακτική λύση, ας υποθέσουμε γενικότερα ότι στην Ενότητα 2.1.3 η συνολική απώλεια L μπορεί να εκπροσωπείται ως μια συνεχής, αυστηρά μονότονη αύξουσα συνάρτηση g των υποκείμενων παραγόντων κινδύνου $(Y_1, ...Y_d)' = (Y_{1,1}...Y_{1,d})'$,δηλαδή

$$\mathrm{L} = g(Y_1, ...Y_d) \tag{3.1}$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι μας δίνεται η από κοινού συνάρτηση κατανομής F του $(Y_1, ...Y_d)'$, η οποία, για παράδειγμα, μπορεί να αναπαρασταθεί μέσω των περιθώριων κατανομών $F_Y(.)$, $1 \leq \mathrm{i} \leq d$ και της αντίστοιχης συνάρτησης copula $C : [0, 1]^d \to [0, 1]$ από το Θεώρημα του $Sklar$ (βλέπε [9]). Ακόμα

$$\mathrm{SCR} = \inf\{x : \mathcal{P}(g(Y_1, ...Y_d) \leq x) \geq \alpha\} \tag{3.2}$$

και έχουμε την ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση

Ισχύει ότι:

$$min\{g(y_1, ...y_d)|F(y_1, ...y_d) \geq \alpha\} \geq SCR \tag{3.3}$$

Απόδειξη

Εάν $(Y_1, ...Y_d) \leq (y_1, ...y_d)$ τότε $g(Y_1, ...Y_d) \leq g(y_1, ...y_d)$ δεδομένου ότι η g γνησίως αύξουσα. Επομένως,

$$F(y_1, ...y_d) = \mathcal{P}(Y_1 \leq y_1, ...Y_d \leq y_d) \leq \mathcal{P}(g(Y_1, ...Y_d) \leq g(y_1, ...y_d),$$

και ως εκ τούτου,

$$\min_{y_1,...y_d:F(y_1,...y_d)\geq\alpha} \mathcal{P}(g(Y_1, ...Y_d) \leq g(y_1, ...y_d) \geq \alpha$$

Καθώς η $\mathcal{P}(g(Y_1, ...Y_d) \leq .)$ είναι αύξουσα

$$\min_{y_1,...y_d:F(y_1,...y_d)\geq\alpha} \{g(y_1, ...y_d)\} \geq \inf\{x|\mathcal{P}(g(Y_1, ...Y_d) \leq x) \geq \alpha\} = \text{SCR}$$

Σημειώνεταιι ότι σε περίπτωση που είναι αυστηρά αυξουσα, η συνεχής συνάρτηση κατανομής, λόγω της μονοτονίας της g, διαβάζεται ως

$$min\{g(y_1, ...y_d)|F(y_1, ...y_d) = \alpha\} \geq \text{SCR} \tag{3.4}$$

Επομένως, στην περίπτωση που η πολλαπλή $\{(y_1, ...y_d)|F(y_1, ...y_d) = \alpha\}$ μπορεί να εκφραστεί σε μια ρητή μορφή - π.χ. αν οι συντελεστές κινδύνου κατανέμονται κανονικά - η λύση της σχέσης (3.4) μπορεί να δώσει μια ρεαλιστική και συντηρητική προσέγγιση για το SCR. Ωστόσο, η προσέγγιση μπορεί να μην είναι τόσο ακριβής.

3.3 Προσέγγιση Ελαχίστων Τετραγώνων Monte-Carlo

Κύριος στόχος είναι να προσδιοριστούν οι Κεφαλαιακές Απαιτήσεις Φρεγγυότητας (SCR). Για να συμβεί αυτό φτάνει να προσδιριστεί η κατανομή της ποσότητας

$$AC_1 = ANAV_1 + V_1 + X_1 = ANAV_1 + E^Q \left[\sum_{t=2}^{T} exp(-\int_1^t r_u du)X_t|(Y_1, D_1) \right] \tag{3.5}$$

Εδώ, η υπό όρους μέση τιμή προκαλεί την πρωταρχική δυσκολία ανάπτυξης μιας κατάλληλης τεχνικής Monte Carlo. Αυτό είναι ανάλογο με την τιμολόγηση των Bermudan options, όπου «οι υπό όρους προβλέψεις που ενέχονται στις επαναλήψεις του δυναμικού προγραμματισμού προκαλούν την κύρια δυσκολία για την ανάπτυξη των τεχνικών Monte Carlo»(βλέπετε [8]). Μια κατάλληλη λύση στο πρόβλημα αυτό προτάθηκε από τους Longstaff και Schwartz (βλέπετε [13]), που χρησιμοποίησαν παλινδρόμηση ελαχίστων τετραγώνων σε ένα κατάλληλο πεπερασμένο σύνολο συναρτήσεων για να προσεγγιστεί η προσδοκώμενη πρόβλεψη.

Ο αλγόριθμος αποτελείται από δύο διαφορετικούς τύπους προσεγγίσεων. Στο πρώτο βήμα προσέγγισης, η μέση τιμή υπό όρους αντικαθίσταται από έναν πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό συναρτήσεων βάσης. Ως δεύτερη προσέγγιση, χρησιμοποιούνται προσομοιώσεις Monte Carlo και παλινδρόμηση ελαχίστων τετραγώνων για την προσέγγιση του γραμμικού συνδυασμού που δίνεται στο πρώτο βήμα. Γίνεται αντιληπτό ότι κάτω από ορισμένες υποθέσεις με βάση τις συναρτήσεις βάσης, ο αλγόριθμος συγκλίνει, δηλαδή παρουσιάζει μια έγκυρη και σε σύγκριση με τις εσωτερικές προσομοιώσεις πολύ πιο σίγουρη προσέγγιση στο πρόβλημα της τιμολόγησης.

Στη συνέχεια, εκμεταλλευόμαστε αυτήν την αναλογία μεταφέροντας την στο πρόβλημά μας.

3.4 Αλγόριθμος Ελαχίστων Τετραγώνων

Ως πρώτη προσέγγιση, αντικαθιστούμε την υπό όρους μέση τιμή, V_1, από έναν πεπερασμένο συνδυασμό συναρτήσεων βάσης $(e_k(Y_1, D_1))_{k\in\{1,\ldots,M\}}$, με

$$V_1 \approx \tilde{V_1}^M(Y_1, D_1) = \sum_{k=1}^{M} \alpha_k e_k(Y_1, D_1) \tag{3.6}$$

υποθέτοντας ότι η ακολουθία $(e_k(Y_1, D_1))_{k\geq 1}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητη στον χώρο Hilbert $L^2(\Omega, \sigma(Y_1, D_1), \mathcal{P})$.

Στη συνέχεια, προσδιορίζουμε τις προσεγγίσεις $\mathcal{P}$ της V_1 χρησιμοποιώντας Monte Carlo προσομοιώσεις. Δημιουργούμε N ανεξάρτητες τροχιές (Y_t^1, D_t^1), $(Y_t^2, D_t^2), \ldots, (Y_t^N, D_t^N)$ για $t \in (0, T]$, όπου παράγουμε τις Μαρκοβιανές αυξήσεις βάσει του φυσικού μέτρου $\mathcal{P}$ για το πρώτο έτος και βάσει του μέτρου ουδέτερου κινδύνου $\mathcal{Q}$ για τις υπόλοιπες περιόδους. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τις πραγματοποιηθείσες σωρευμένες ταμιακές ροές προεξόφλησης

$$PV_1^{(\mathrm{i})} = \sum_{t=2}^{T} exp(-\int_1^t r_u^{(\mathrm{i})} du) X_t^{(\mathrm{i})}, 1 \leq \mathrm{i} \leq N \tag{3.7}$$

Εδώ, σαφώς το r_t^{i} και το X_t^{i} δηλώνουν το επιτόκιο και την ταμειακή ροή κατά τη χρονική στιγμή t κάτω από την τροχιά $(Y_t^{\mathrm{i}}, D_t^{\mathrm{i}})_{t\in(0,T]}$, αντίστοιχα, για $\mathrm{i} = 1, \ldots, N$.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε αυτές τις πραγματοποιήσεις για να καθορίσουμε τους συντελεστές $\alpha = (\alpha_1, \ldots \alpha_M)$ στην εκτίμηση $\hat{V}_1^{(M)}$ με παλινδρόμηση ελαχίστων τετραγώνων:

$$\hat{\alpha}^{(N)} = argmin_{a\in\mathbb{R}^M} \left\{ \sum_{t=1}^{N} \left[PV_1^{(\mathrm{i})} - \sum_{k=1}^{M} \alpha_k \cdot e_k(Y_1^{(\mathrm{i})}, D_1^{(\mathrm{i})}) \right]^2 \right\} \tag{3.8}$$

Αντικαθιστώντας το α με $\hat{\alpha}^{(N)}$ λαμβάνουμε την δεύτερη προσέγγιση:

$$V_1 \approx \widehat{V}_1^{(M)}(Y_1, D_1) \approx \widehat{V}_1^{(M,N)}(Y_1, D_1) = \sum_{k=1}^{M} \hat{\alpha}^{(N)} e_k(Y_1^{(i)}, D_1^{(\mathrm{i})}) \tag{3.9}$$

Μέσω αυτής της προσέγγισης, μπορούμε να υπολογίσουμε τις πραγματοποιήσεις για το AC_1 που βασίζεται στις προηγούμενες παραχθείσες τροχιές $(Y_t^{(\mathrm{i})}, D_t^{(\mathrm{i})})$, $\mathrm{i} = 1, ..., N$,ή πιο συγκεκριμένα, στις ”υπο-τροχιές” για το πρώτο έτος, αξιολογώντας:

$$\widehat{AC}_1^{(\mathrm{i})} = ANAV_1^{(\mathrm{i})} + \widehat{V}_1^{(M,N)}(Y_1^{(\mathrm{i})}, D_1^{(\mathrm{i})}) + X_1^{(\mathrm{i})} \tag{3.10}$$

όπου σαφώς $ANAV_1^{(\mathrm{i})}$ και $X_1^{(\mathrm{i})}$ υποδηλώνει το $ANAV_1$ και το X_1 για σενάριο $\mathrm{i} \in \{1, ..., N\}$

Με βάση αυτές τις πραγματοποιήσεις, μπορούμε τώρα να καθορίσουμε μια αντίστοιχη εμπειρική συνάρτηση κατανομής και, κατά συνέπεια, τις κεφαλαιακές απαιτήσεις φερεγγυότητας (SCR). Δηλώνουμε την εκτιμώμενη SCR που προκύπτει από τη προσέγγιση Least-Squares Monte Carlo (LSM) με $\widehat{SCR}$.

3.5 Επιλογή Συνάρτησης Παλινδρόμησης

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε βάση στην επιλογή της κατάλληλης συνάρτησης παλινδρόμησης. Παρόλο που είναι διαθέσιμες αρκετές απλές μέθοδοι για τη επιλογή μεταβλητής σε μοντέλα παλινδρόμησης στη στατιστική και οικονομετρική βιβλιογραφία, κοινά κριτήρια όπως η παράμετρος πολυπλοκότητας Mallow (Cp), το κριτήριο πληροφοριών Akaike (AIC) ή απλουστεύσεις του κριτηρίου πληροφοριών Schwarz (SIC) επικαλούνται τις μάλλον περιοριστικές υποθέσεις ομοσκεδαστικότητας και / ή κανονικά κατανεμημένων σφαλμάτων. Ωστόσο, αυτές οι υποθέσεις ενδέχεται να παραβιαστούν στην τρέχουσα υπόθεση. Για παράδειγμα, πολλά μοντέλα περιουσιακών στοιχείων έχουν την υπό όρους διακύμανση στην παλινδρόμηση για την V_1 να εξαρτάται από την πορεία του πρώτου έτους των στοιχείων του ενεργητικού.

Για να αποκτηθεί ένα γενικευμένο κριτήριο επιλογής, σημειώνεται :

$$E_1\left[\sum_{t=1}^{N}\left(PV_1^{(\mathrm{i})} - \hat{V}_1^{(M,N)}(Y_1^{(\mathrm{i})}, D_1^{(\mathrm{i})})\right)^2\right]$$

$$= tr\left[Cov_1((PV_1^{(\mathrm{i})}, ..., PV_1^{(N)})' - (\hat{V}_1^{(M,N)}(Y_1^{(\mathrm{i})}, D_1^{(\mathrm{i})}), ..., \hat{V}_1^{(M,N)}(Y_1^{(N)}, D_1^{(N)}))')\right]$$

$$+\sum_{t=1}^{N}\left(E_1[PV_1^{(\mathrm{i})}] - E_1[\hat{V}_1^{(M,N)}(Y_1^{(\mathrm{i})}, D_1^{(\mathrm{i})})]\right)^2$$

$$= tr[(I - \mathcal{E}(\mathcal{E}'\mathcal{E})^{-1}\mathcal{E}')Cov_1((X^{(1)}, ..., X^{(N)})')]$$

$$+\sum_{\mathrm{i}=1}^{N}(V_1^{(\mathrm{i})} - E_1[\hat{V}_1^{(M,N)}(Y_1^{(\mathrm{i})}, D_1^{(\mathrm{i})})])^2$$

$$= \underbrace{\sum_{\mathrm{i}=1}^{N} E_1[V_1^{(\mathrm{i})}\hat{V}_1^{(M,N)}(Y_1^{(\mathrm{i})}, D_1^{(\mathrm{i})})]^2}_{=SMSE} + \sum_{\mathrm{i}=1}^{N}\sigma_1^{(\mathrm{i})}$$

$$-2tr(\mathcal{E}(\mathcal{E}'\mathcal{E})^{-1}\mathcal{E}'diag(\sigma_1^{(1)}, ..., \sigma_1^{(N)}))$$

όπου E_1 και Cov_1 υποδηλώνουν την υπό όρους μέση τιμή και την συνδιακύμανση τη χρονική στιγμή $t = 1$, αντίστοιχα, $e_\mathrm{i} = (e_\mathrm{i}(Y_1^{(1)}, D_1^{(1)}), ..., e_\mathrm{i}(Y_1^{(N)}, ..., D_1^{(N)}))'$, $1 \leq \mathrm{i} \leq M$, και $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_M)$ είναι η μήτρα επεξηγηματικών μεταβλητών. Επιπλέον, I είναι η ταυτότητα και $diag(\sigma_1^{(1)}, ..., \sigma_1^{(N)})$ είναι ένας διαγώνιος πίνακας με καταχωρήσεις $\sigma_1^{(1)}, ..., \sigma_1^{(N)}$. Μια γενικευμένη παράμετρος πολυπλοκότητας μπορεί τώρα να οριστεί μέσω της εμπειρικής εκτίμησης του Αθροίσματος των Τετραγωνικών Σφαλμάτων ($SMSE$),

$$\widehat{SMSE} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{N}(PV_1^{(\mathrm{i})} - \hat{V}_1^{(M,N)}(Y_1^{(\mathrm{i})}, D_1^{(\mathrm{i})}))^2 - \sum_{\mathrm{i}=1}^{N}\tilde{\sigma}_1^{(\mathrm{i})}$$

$$+2tr(\mathcal{E}(\mathcal{E}'\mathcal{E})^{-1}\mathcal{E}'diag(\tilde{\sigma}_1^{(1)}, ..., \tilde{\sigma}_1^{(N)}))$$

δεδομένου ότι οι διαφορετικές $PV_1^{(\mathrm{i})}$ είναι ανεξάρτητες ως πραγματοποιήσεις του Monte Carlo. Το πρωταρχικό πρόβλημα με αυτό το κριτήριο είναι ότι απαιτεί τη γνώση ή την εκτίμηση της υπό όρους διακύμανσης, όπου και πάλι θα απαιτούσε εσωτερικές προσομοιώσεις. Εδώ προτείνεται μια γενικευμένη εκδοχή της παράμετρου πολυπλοκότητας Cp του Mallow για ετεροσκεδαστικά δεδομένα. Διαχωρίζοντας τα δεδομένα σε μικρότερες ομάδες μπορεί να υποτεθεί ομοσκεδαστικότητα σε μία ομάδα. Στη συνέχεια εκτιμώνται οι διακυμάνσεις για κάθε ομάδα και σύμφωνα με το [7] η γενικευμένη έκδοχη του Cp (GCp) του Mallow προέρχεται από τους προκύπτοντες σταθμισμένους εκτιμητές ελαχίστων τετραγώνων. Αυτοί "δείχνουν μέσω μελέτης προσομοίωσης ότι το GCp επιλέγει το σωστό μοντέλο πιο συχνά από το Cp για δεδομένα με σημαντική ετεροσκεδαστικότητα". Ωστόσο, για ομοοσκεδαστικά δεδομένα, η Cp δίνει καλύτερα αποτελέσματα, δηλαδή εξαρτάται από το βαθμό ετεροσκεδαστικότητας, αν η χρήση της Cp του Mallow εξακολουθεί να είναι κατάλληλη ή αν πρέπει να εφαρμοστούν πιο εξελιγμένα κριτήρια.

3.6 Σύγκλιση

Βασικό κριτήριο για την εφαρμογή του μοντέλου μας αποτελεί η σύγλιση που παρουσιάζει η συνάρτηση παλινδρόμησης. Από τις παραδοχές σχετικά με την ακολουθία συναρτήσεων βάσης που αναφέρθηκαν προηγουμένως, αποκτάμε αυτόματα τη μέση τετραγωνική σύγκλιση του

$$\widehat{V}_1^{(M)} \to \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \epsilon_k(Y_1, D_1) = V_1, \ \mu\epsilon \ M \to \infty \tag{3.11}$$

και, ως εκ τούτου, τη σύγκλιση της κατανομής. Επομένως, αρκεί να το δείξουμε ότι:

$$\widehat{V}_1^{(M,N)} \to \widehat{V}_1^{(M)}, \ N \to \infty \tag{3.12}$$

Το μοναδικό ζήτημα που μας κρατά από την εφαρμογή αποτελεσμάτων από την οικονομετρική πλευρά είναι η αλλαγή μέτρου την χρονική στιγμή $t = 1$ και οι δομικές επιπτώσεις για τον θεωρούμενο χώρο πιθανότητας. Ωστόσο, μια πιθανή λύση θα είναι η κατασκευή ενός εναλλακτικού μέτρου πιθανότητας, έστω $\widetilde{\mathcal{P}}$, σε ένα πανομοιότυπο αντίγραφο του φιλτραρισμένου μετρήσιμου χώρου, έστω $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathbb{F}})$, έτσι ώστε

$$E^Q[Y(\omega)|\mathcal{F}_1] = E^{\tilde{\mathcal{P}}}[Y(\tilde{\omega})|\tilde{\mathcal{F}}_1]$$

για όλες τις τυχαίες μεταβλητές Y, και

$$\mathcal{P}(Z(\omega) \le z) = \tilde{\mathcal{P}}(Z(\tilde{\omega}) \le z) \ \forall \ z \in \mathbb{R}$$

για όλες τις $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές Z, $0 \le t \le 1$. Στη συνέχεια, αφού οι πραγματοποιήσεις των συναρτήσεων βάσης βρίσκονται μέσα από τα μονοπάτια, μπορούμε να προχωρήσουμε σύμφωνα με το θεώρημα 3.5 του [18] υπό ομαλές συνθήκες κανονικότητας,

$$\hat{V}_1^{(M,N)} \to \hat{V}_1^{(M)}, N \to \infty,$$

στον χώρο $L^2(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{P}})$ και ως εκ τούτου στην κατανομή.

Για τη γενικευμένη εξίσωση Black-Scholes που εξετάζεται παρακάτω, ένα τέτοιο μέτρο $\tilde{\mathcal{P}}$ μπορεί να κατασκευαστεί εύκολα με κατάλληλο χειρισμό των ορίων μετατόπισης. Για παράδειγμα, στην κλασσική αγορά Black-Scholes, το στοιχείο ενεργητικού S εξελίσσεται σύμφωνα με τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

$$dS_t = S_t(\mu dt, \sigma dW_t),\ S_0 > 0$$

$$dS_t = S_t(r dt, \sigma dZ_t),\ S_0 > 0$$

όπου $\mu \in R$ είναι ο συντελεστής ολίσθησης (drift term) , $r \in R$ είναι το επιτόκιο, $\sigma > 0$ είναι η τυπική απόκλιση, και W και Z είναι κινήσεις $Brown$ υπό τα μέτρα $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$, αντίστοιχα. Τώρα, εάν αφήσουμε το $\widetilde{W}$ να είναι μια κίνηση $Brown$ στον χώρο $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{P}})$, και το S εξελίσσεται σύμφωνα με

$$dS_t = S_t(\tilde{\mu} dt, \sigma d\widetilde{W_t}),\ S_0 > 0$$

όπου $\tilde{\mu} = \mu \cdot 1_{\{0 \leq t \leq 1\}} + r \cdot 1_{\{0 < t < \infty\}}$, τότε το $\tilde{\mathcal{P}}$ ικανοποιεί τις απαιτούμενες ιδιότητες και, επομένως, παρουσιάζεται η σύγκλιση σε αυτή την ειδική περίπτωση.

Ενώ φαίνεται εφικτό να κατασκευαστεί ένα κανονικό μέτρο πιθανότητας $\tilde{\mathcal{P}}$ για πολύ πιο γενικές ρυθμίσεις με διαχωρισμό των γεγονότων σε ένα F_1-μετρήσιμο και ορθογώνιο τμήμα που μετράται με $\mathcal{P}$ και $\mathcal{Q}$, αντίστοιχα δεν δίνουμε βάση στην συγκεκριμένη περίπτωση . Σε τελική ανάλυση, η δοκιμή ενός τέτοιου αλγορίθμου είναι ' πόσο καλά εκτελείται χρησιμοποιώντας ένα ρεαλιστικό αριθμό τροχιών και συναρτήσεων βάσης ' σε ένα ρεαλιστικό πλαίσιο.

3.7 Εφαρμογή του Μοντέλου

Ως εφαρμογή του πλαισίου για τις εκτιμήσεις, χρησιμοποιούμε το μοντέλο για ένα συμβόλαιο σταθερού συμβολαίου που εισήχθη στο [5]. Όπως υπογραμμίστηκε στο [12], με ορισμένες υποθέσεις, το πλαίσιο αυτό μπορεί να χρησιμεύσει ως ένα απλοποιημένο μοντέλο για τη συνολική οικονομική εξέλιξη μιας ασφαλιστικής εταιρείας ζωής που προσφέρει συμβόλαια με συμμετοχή στα κέρδη.

3.7.1 Παρουσίαση Εφαρμογής

Για να παρουσιαστεί η οικονομική κατάσταση μιας ασφαλιστικής εταιρείας χρησιμοποιείται ένας απλουστευμένος ισολογισμός (βλέπετε Πίνακα 1). Σε αυτό το σημείο, η τιμή A_t είναι η αγοραία αξία των περιουσιακών στοιχείων του χαρτοφυλακίου της ασφαλιστικής εταιρίας, L_t είναι το νόμιμο υπόλοιπο του ασφαλιστή και το $R_t = A_t - L_t$ είναι τα ελεύθερα κεφάλαια (που επίσης αναφέρονται ως «απόθεμα») κατά τη χρονική στιγμή t.

Περιουσιακά Στοιχεία	Υποχρεώσεις
A_t	L_t
	R_t
A_t	A_t

Πίνακας 1 : Απλοποιημένος Ισολογισμός

Αν δεν ληφθεί υπόψη η χρηματοδότηση του χρέους, το συνολικό ενεργητικό A_0 τη χρονική στιγμή μηδέν προέρχεται από δύο συνιστώσες, το υπόλοιπο του λογαριασμού του αντισυμβαλλομένου (υποχρεώσεις) και την εισφορά κεφαλαίου των μετόχων (ίδια κεφάλαια). Παραβλέποντας τις χρεώσεις καθώς και τα μη πραγματοποιηθέντα κέρδη ή ζημίες, αυτά τα στοιχεία είναι ίσα με το ενιαίο ασφάλιστρο L_0 και το απόθεμα την χρονική στιγμή $t=0$, R_0, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, τα κεφάλαια των μετόχων είναι διαθέσιμα για την κάλυψη δυνητικών ζημιών, δηλαδή είναι εκτεθειμένα σε κίνδυνο. Έτσι, ως αποζημίωση για τον αναλαμβανόμενο κίνδυνο, θεωρείται ότι τα μερίσματα d_t μπορούν να καταβληθούν στους μετόχους κάθε περιόδο. Επιπλέον, οι μέτοχοι μπορούν να επωφεληθούν από μια ευνοϊκή εξέλιξη της εταιρείας, δεδομένου ότι η αγοραία αξία της εισφοράς κεφαλαίου τους αυξάνεται. Συγκεκριμένα, μπορούν να συνειδητοποιήσουν ότι η απόδοση της επένδυσης (Return on Investment, ROI) στο τέλος της περιόδου προβολής (που επίσης αναφέρεται ως "ωρίμανση") T είναι

$$ROI_T := R_T - exp(\int_0^T r_u du)R_0 \tag{3.13}$$

Για το σύστημα διανομής μπόνους, δηλαδή για τη μοντελοποίηση της εξέλιξης των υποχρεώσεων, βασίζουμε την λεγόμενη περίπτωση MUST (βλέπετε [5]). Αυτός ο μηχανισμός διανομής περιγράφει ότι οι ασφαλιστές υποχρεούνται να μεταβιβάσουν στους αντισυμβαλλόμενους σύμφωνα με τις γερμανικές ρυθμιστικές και νομικές απαιτήσεις: αφενός, οι εταιρείες υποχρεούνται να εγγυώνται ένα ελάχιστο επιτόκιο g στο λογαριασμό του αντισυμβαλλομένου, αφετέρου, σύμφωνα με τον κανονισμό σχετικά με τις ελάχιστες επιστροφές ασφαλίστρων στη γερμανική ασφάλιση ζωής, ένα ελάχιστο ποσοστό συμμετοχής δ των κερδών από τις λογιστικές αξίες που πρέπει να πιστώνεται στο λογαριασμό του αντισυμβαλλομένου. Δεδομένου ότι τα κέρδη από τις λογιστικές αξίες συνήθως δεν συμπίπτουν με τα κέρδη στις αγοραίες αξίες που οφείλονται σε λογιστικούς κανόνες, υποθέτουμε ότι τα κέρδη από τις λογιστικές αξίες ανέρχονται σε ένα τμήμα y του τελευταίου.

Σε περίπτωση που οι αποδόσεις των περιουσιακών στοιχείων είναι τόσο χαμηλές όσο η πίστωση του εγγυημένου επιτοκίου g στο λογαριασμό του ασφαλισμένου θα οδηγήσει σε αρνητικό απόθεμα R_t, ο ασφαλιστής θα χρεωκοπήσει λόγω της περιορισμένης ευθύνης των μετόχων . Ωστόσο, όπως επισημάνθηκε στο τμήμα 2.1.1, το MCEV δεν θα πρέπει να αντικατοπτρίζει το put-option των μετόχων, δηλαδή το MCEV θα πρέπει να υπολογίζεται υπό την προϋπόθεση ότι οι μέτοχοι καλύπτουν οποιοδήποτε έλλειμμα. Σύμφωνα με αυτή την υπόθεση, υποθέτουμε ότι η εταιρεία λαμβάνει πρόσθετη εισφορά c_t από τους μετόχους της σε περίπτωση τέτοιου ελλείματος.

Ως εκ τούτου, τα κέρδη από τις αγοραίες αξίες είναι ίσες με $A_t^- - A_{t-1}^+$ όπου A_t^- και $A_t^+ = A_t^- - d_t + c_t$ περιγράφουν την αγοραία αξία του χαρτοφυλακίου των περιουσιακών στοιχείων λίγο πριν και μετά τις πληρωμές μερισμάτων d_t και τις εισφορές κεφαλαίου c_t κατά τη χρονική στιγμή t, αντίστοιχα. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$L_t = (1+g)L_{t-1} + [\delta y(A_t^- - A_{t-1}^+) - gL_{t-1}]^+, 1 \leq t \leq T.$$

Υποθέτοντας ότι το υπόλοιπο μέρος των κερδών από τις λογιστικές αξίες καταβάλλεται ως μερίσματα,

$$\begin{aligned} d_t &= (1-\delta)y(A_t^- - A_{t-1}^+)1_{\{\delta(A_t^- - A_{t-1}^+) > gL_{t-1}\}} \\ &\quad +[y(A_t^- - A_{t-1}^+) - gL_{t-1}]1_{\{\delta(A_t^- - A_{t-1}^+) \leq gL_{t-1} \leq y(\delta(A_t^- - A_{t-1}^+)\}} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Προφανώς, οι πληρωμές μερισμάτων είναι ίσες με μηδέν όταν απαιτείται εισφορά κεφαλαίου. Επομένως, η εισφορά κεφαλαίου κατά τη χρονική στιγμή t μπορεί να περιγραφεί ως

$$c_t = max\{L_t - A_t^-, 0\} \tag{3.15}$$

3.7.2 Ορισμός Σχετικών Ποσοτήτων

Για την κατανόηση του μοντέλου των περιουσιακών στοιχείων που χρησιμοποιούμε στο μοντεό μας είναι αναγκαίο να ορισθούν κάποιες ποσότητες. Έτσι, δεδομένου ότι αγνοούμε τα μη πραγματοποιηθέντα κέρδη και μη πραγματοποιηθέντες ζημίες από στοιχεία ενεργητικού καθώς και άλλες προσαρμογές, έχουμε ότι $ANAV_0 = NAV_0 = R_0$. Επομένως, το Διαθέσιμο Κεφάλαιο τη χρονική στιγμή $t = 0$ μπορεί να περιγραφεί ως εξής:

$$
\begin{aligned}
AC_0 &= ANAV_0 + V_0 \\
&= R_0 + E^Q[\sum_{t=1}^{T} exp(-\int_0^t r_u du)(d_t - c_t) + exp(-\int_0^T r_u du) ROI_t] \\
&= R_0 + E^Q[\sum_{t=1}^{T} exp(-\int_0^t r_u du)(d_t - c_t) + exp(-\int_0^T r_u du) R_T - R_0] \\
&= E^Q[\sum_{t=1}^{T} exp(-\int_0^t r_u du) X_t \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

όπου

$$
X_t = \begin{cases} d_t - c_t & , \alpha\nu \ t \in \{1, ..., T-1\} \\ d_T - c_T + R_T & , \alpha\nu \ t = T \end{cases} \qquad (3.17)
$$

Μέχρι στιγμής, έχει περιγραφεί το AC_0 με βάση τις ταμειακές ροές από την μεριά των μετόχων. Όπως ήδη αναφέρθηκε, μπορεί επίσης να εκφράστεί το AC_0 με βάση τις ταμειακές ροές από την μεριά των ασφαλισμένων, δηλαδή

$$
AC_0 = A_0 - E^Q[exp(-\int_0^T r_u du) L_T] \qquad (3.18)
$$

Όπως θα αναλυθεί σε παρακάτω ενότητα, η ποιότητα των δύο διαφορετικών προσεγγίσεων εκτίμησης διαφέρει σημαντικά.

Ομοίως,

$$
AC_1 = ANAV_1 + V_1 + X_1 = E^Q[\textstyle\sum_{t=2}^{T} exp(-\int_1^t r_u du) X_t | \mathcal{F}_1] + X_1
$$

και

$$
AC_1 = A_1^+ - E^Q[exp(-\textstyle\int_1^T r_u du) L_T | \mathcal{F}_1] + X_1
$$

3.7.3 Μοντέλο Περιουσιακών Στοιχείων

Για την εξέλιξη της χρηματοπιστωτικής αγοράς, στο μοντέλου μας γίνεται η υπόθεση ενός γενικευμένου μοντέλου Black-Scholes με στοχαστικά επιτόκια. Η διαδικασία των περιουσιακών στοιχείων και η διαδικασία βραχυπρόθεσμου επιτοκίου (Vasicek,1977,[17]) εξελίσσονται σύμφωνα με τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

$$dA_t = \mu A_t dt + \rho\sigma_A A_t dW_t + \sqrt{1-\rho^2}\ \sigma_A A_t dZ_t, A_0 > 0$$

$$dr_t = \kappa(\xi - r_t)dt + \sigma_r dW_t$$

όπου το $\rho \in [-1,1]$ περιγράφει τη συσχέτιση τους, $\mu \in \mathbb{R}$ είναι ο drift term, σ_A είναι η μεταβλητότητα των περιουσιακών στοιχείων, κ είναι η ταχύτητα επαναφοράς (speed of reversion) και χαρακτηρίζει την ταχύτητα με την οποία αυτές οι τροχιές θα συγκεντρωθούν γύρω από το ξ, όπου ξ είναι η μακροπρόθεσμη αξία ισορροπίας (long term mean level) προς την οποία επανέρχεται το επιτόκιο r. Ακόμα $\sigma_r > 0$ είναι η μεταβλητότητα των υποχρεώσεων και οι W και Z είναι δύο ανεξάρτητες κινήσεις Brown υπό το πραγματικό μέτρο $\mathcal{P}$. Επομένως, η αγοραία αξία των περιουσιακών στοιχείων την χρονική στιγμή $t=1$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$A_1^- = A_0 \cdot exp(\mu - \tfrac{\sigma_A^2}{2} + \rho\sigma_A W_1 + \sqrt{1-\rho^2}\ \sigma_A Z_1)$$

και για τη διαδικασία βραχυχρόνιου επιτοκίου,

$$r_1 = e^{-\kappa} r_0 + \xi(1-e^{-\kappa}) + \textstyle\int_0^1 \sigma_r e^{-\kappa(t-s)} dW_t$$

Επιπλέον, γίνεται η υπόθεση ότι η αγοραία τιμή του επιτοκίου κινδύνου είναι σταθερή και υποδηλώνεται με λ. Στη συνέχεια, υπάρχει η ακόλουθη δυναμική κάτω από το μέτρο ουδέτερο στον κίνδυνο $\mathcal{Q}$:

$$dA_t = \mu A_t dt + \rho\sigma_A A_t d\tilde{W}_t + \sqrt{1-\rho^2}\ \sigma_A A_t d\tilde{Z}_t, A_0 > 0$$

$$dr_t = \kappa(\tilde{\xi} - r_t)dt + \sigma_r d\tilde{W}_t$$

όπου $\tilde{\xi} = \xi - \frac{\lambda\sigma_r}{k}$ και $\tilde{W}$ και $\tilde{Z}$ είναι δύο ανεξάρτητες κινήσεις *Brown* κάτω από το μέτρο $\mathcal{Q}$. Ως εκ τούτου, κάτω από $\mathcal{Q}$, είναι:

$$A_t^- = A_{t-1}^+ exp\left(\int_{t-1}^t r_s ds - \frac{\sigma_A^2}{2} + \rho\sigma_A(\tilde{W}_t - \tilde{W}_{t-1}) + \sqrt{1-\rho^2}\sigma_A(\tilde{Z}_t - \tilde{Z}_{t-1})\right) \tag{3.19}$$

$$r_t = e^{-k} r_{t-1} + \tilde{\xi}(1-e^{-k}) + \int_{t-1}^t \sigma_r e^{-k(t-s)} d\tilde{W}_s \tag{3.20}$$

και

$$\int_{t-1}^{t} r_s ds = \frac{r_{t-1} - \tilde{\xi}}{k}(1 - e^{-k}) + \tilde{\xi} + \frac{\sigma_r}{k} \int_{t-1}^{t} (1 - e^{-k(t-s)}) d\tilde{W}_s \qquad (3.21)$$

που μπορούν να χρησιμοποιηθούν εύκολα σε αλγόριθμους Monte Carlo (βλέπετε [19]).

Οι παράμετροι για το μοντέλο του ενεργητικού μας εκτιμήθηκαν από γερμανικά δεδομένα από τον Ιούνιο του 1998 έως τα μέσα του 2008 (βλέπετε [4]). Οι παράμετροι για το χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων βαθμονομούνται σε δείκτη που αποτελείται από 80% REXP[3] και 20% DAX[4]. Για τη διαδικασία των βραχυχρόνιων επιτοκίων χρησιμοποιούμε επιτόκια για κρατικά ομόλογα με διάρκεια 3 μηνών, 1, 3, 5 και 10 ετών. Λαμβάνουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα: ο drift term των στοιχείων του ενεργητικού είναι μ=4,25% και η μεταβλητότητα τους είναι $\sigma_A = 4.28\%$. Για την βραχυπρόθεσμη διαδικασία $\kappa = 14,49\%$, $\xi = 3,64\%$ και $\sigma_r = 0.6\%$. Η αρχική τιμή του βραχυχρόνιου επιτοκίου είναι $r_0 = 4.19\%$. Η εκτιμώμενη συσχέτιση είναι $\rho = -0,0597$ και η αγοραία τιμή του επιτοκίου κινδύνου είναι l=-0,5061.

Για το ασφαλιστήριο συμβόλαιο, το ελάχιστο εγγυημένο επιτόκιο είναι $g =$ 3,5%, ένα ελάχιστο ποσοστό συμμετοχής είναι $\delta = 90\%$, ένα αρχικό ασφάλιστρο $L_0 = 10.000$ και ωριμότητα (maturity) T = 10. Επιπλέον, υποθέτουμε y = 50% των κερδών σε αγοραίες αξίες και δηλώνεται ως κέρδος σε λογιστικές αξίες με αρχική ποσόστωση αποθέματος να ισούται με $x_0 = \frac{R_0}{L_0} = 10\%$, δηλαδή $R_0 = x_0 \cdot L_0 = 1.000$.

3.8 Αποτελέσματα

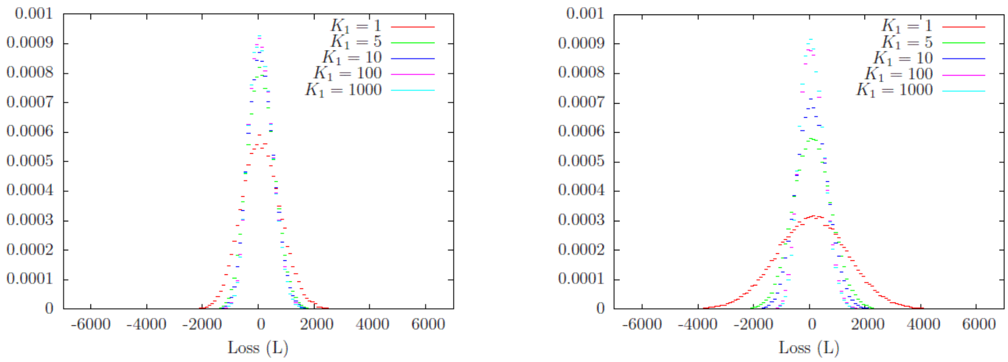
Σε προηγούμενες ενότητες παρουσιάστηκαν διαφορετικές μέθοδοι για τον τρόπο εκτίμησης του SCR στο δικό μας μοντέλο. Στη συνέχεια, τους εφαρμόζουμε στο μοντέλο που περιγράφεται στην προηγούμενη ενότητα. Συγκεκριμένα, εστιάζουμε στην εξέταση των παγίδων, των μειονεκτημάτων, καθώς και των πλεονεκτημάτων των διαφόρων μεθόδων. Για τους υπολογισμούς και στις 2 προσεγγίσεις, δηλαδή στην Προσέγγιση Εσωτερικών Προσομοιώσεων και στην Προσέγγιση Least Squares Monte Carlo χρησιμοποιήθηκε η γλώσσα προγραμματισμού C++.

[3]Το REXP περιλαμβάνει 30 συνθετικά γερμανικά κρατικά ομόλογα με σταθερή ληκτότητα και σταθερό κουπόνι.

[4]Ο DAX (γερμανικά: Deutscher Aktienindex, Γερμανικός Χρηματιστηριακός Δείκτης) είναι ένας χρηματιστηριακός δείκτης blue chip εταιριών, ο οποίος αποτελείται από 30 μεγάλες γερμανικές εταιρίες που διαπραγματεύονται στο Χρηματιστήριο της Φρανκφούρτης.

3.8.1 Προσέγγιση Εσωτερικών Προσομοιώσεων

Όπως υποδεικνύεται στο Κεφάλαιο 3.4, η εκτίμηση του SCR που χρησιμοποιεί τις εσωτερικές προσομοιώσεις είναι μεροληπτική. Αυτή η μεροληψία εξαρτάται κυρίως από την επιλογή του εκτιμητή και τον αριθμό των εσωτερικών προσομοιώσεων. Ως εκ τούτου, για να αναπτύξουμε μια ιδέα για το μέγεθος αυτής της μεροληψίας, αναλύουμε τα αποτελέσματα για τον εκτιμητή με βάση τις ταμειακές ροές από την άποψη των αντισυμβαλλομένων και από την πλευρά των μετόχων και επιλέγουμε διαφορετικούς αριθμούς εσωτερικών προσομοιώσεων. Αρχικά, θέτουμε $K_0 = 250.000$ διαδρομές δειγμάτων για την εκτίμηση του $V_0, N = 100.000$ πραγματώσεις για την προσομοίωση κατά το πρώτο έτος και επιλέγεται $K_1^{(\mathrm{i})} = K_1 \ \forall\ 1 \leq \mathrm{i} \leq N$.



Σχήμα 5: Εμπειρική συνάρτηση πυκνότητας για διαφορετικές επιλογές του K_1 για τον εκτιμητή βάσει των ταμειακών ροών των ασφαλισμένων (αριστερά) και των ταμειακών ροών των μετόχων (δεξιά), με N=100.000 και K_0=250.000.

Στο Σχήμα 5, οι εμπειρικές συναρτήσεις πυκνότητας για τους δύο εκτιμητές και τις διαφορετικές επιλογές του K_1 σχεδιάζονται γραφικά. Όπως αναμενόταν, και για τους δύο εκτιμητές η κατανομή είναι περισσότερο διασκορπισμένη για το μικρό K_1, γεγονός που έχει τεράστιο αντίκτυπο στο πρόβλημά μας για την εκτίμηση του α-quantile της ουράς. Υπερεκτιμούμε σημαντικά το SCR για τις μικρές επιλογές του K_1. Αυτό μπορεί επίσης να παρατηρηθεί στον Πίνακα 2, όπου εμφανίζεται η εκτιμώμενη τιμή SCR για διαφορετικές επιλογές του K_1. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι η κατανομή που προέρχεται από τον εκτιμητή βάσει των ταμειακών ροών των μετόχων είναι περισσότερο διασκορπισμένη από τον εκτιμητή για τις ταμειακές ροές των αντισυμβαλλομένων για το ίδιο K_1. Δεδομένου ότι η μεροληψία εξαρτάται κυρίως από τη διακύμανση του $\tilde{V}_1^{(\mathrm{i})}(K_1^{(\mathrm{i})}), 1 \leq \mathrm{i} \leq N$, αυτό υποδεικνύει ότι αυτός ο εκτιμητής έχει υψηλότερες διακυμάνσεις και έτσι χρειαζόμαστε περισσότερες εσωτερικές προσομοιώσεις για να έχουμε αξιόπιστα αποτελέσματα. Αυτό μπορεί επίσης να παρατηρηθεί στον Πίνακα 2, όπου το SCR που υπολογίζεται μέσω των ταμειακών ροών των μετόχων υπερβαίνει πάντοτε το SCR που προέρχεται από τις ταμειακές ροές των ασφαλισμένων. Περαιτέρω αναλύσεις δείχνουν ότι στη βάση μας, ο εκτιμητής που βασίζεται σε ταμειακές ροές από την άποψη των ασφαλισμένων είναι πάντα ανώτερος από αυτόν που βασίζεται στις ταμειακές ροές των μετόχων εκτός από ορισμένες πολύ ακραίες (και μη ρεαλιστικές) παραμέτρους επιλογής στο μοντέλο σύμβασης. Ως εκ τούτου, θα βασιστούμε στον εκτιμητή με βάση τις ταμειακές ροές από την άποψη των αντισυμβαλλομένων στο υπόλοιπο της παρούσας εργασίας.

K_1	Χρηματικές Ροές Πελατών		Χρηματικές Ροές Μετόχων	
	$\widetilde{\mathrm{SCR}}$	$\widetilde{AC_0}/\ \widetilde{\mathrm{SCR}}$	$\widetilde{\mathrm{SCR}}$	$\widetilde{AC_0}/\ \widetilde{\mathrm{SCR}}$
1	1.994,0	94%	3.432,5	55%
5	1.404,7	134%	1.874,6	100%
10	1.332,7	141%	1.606,5	117%
100	1.261,2	149%	1.279,1	147%
1.000	1.246,3	151%	1.254,6	149%

Πίνακας 2 : Εκτίμηση του SCR και εκτίμηση του δείκτη Φερεγγυότητας για διαφορετικές επιλογές του K_1 με $K_0 = 250.000$ και N=100.000

Τα παραπάνω αποτελέσματα δείχνουν ότι η σωστή κατανομή των πόρων, δηλαδή η προσεκτική επιλογή των K_0, K_1 και N, είναι αναπόφευκτη για την επίτευξη ακριβών αποτελεσμάτων. Για να βρούμε (κατά προσέγγιση) τους βέλτιστους συνδυασμούς των K_0, K_1 και N, υπολογίζουμε τις άγνωστες ποσότητες σ_0, f και θ_a (αναφέρθηκαν στο 2.5) από πιλοτική προσομοίωση με $\tilde{K}_0 = 250.000$ διαδρομές δείγματος για την εκτίμηση της AC_0, $\tilde{N} = 100.000$ πραγματικά σενάρια και $\tilde{K}_1 = 200$ εσωτερικές προσομοιώσεις. Με βάση αυτά τα σενάρια, υπολογίζουμε τις εμπειρικές διακυμάνσεις $\tilde{\sigma}_1^{(\mathrm{i})}$ για κάθε πραγματικό σενάριο i, $\mathrm{i} = 1, ..., \tilde{N}$ και εκτιμούμε την αναμενόμενη υποθετική διακύμανση μέσω μιας ανάλυσης παλινδρόμησης. Πιο συγκεκριμένα, υποθέτουμε

$$E^Q\left[Var\left(\tilde{Z}^{K_1}|Y_1, D_1\right)|L\right] \approx \beta_0 + \beta_1 L + \beta_2 L^2 \tag{3.22}$$

και υπολογίζονται $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ από τα αποτελέσματά μας. Οι αναλύσεις ευαισθησίας δείχνουν ότι η βέλτιστη επιλογή των K_0, K_1 και N είναι μάλλον μη ευαίσθητη στις διαφορετικές επιλογές της συνάρτησης παλινδρόμησης. Σε ένα δεύτερο βήμα, ορίζεται η εμπειρική συνάρτηση πυκνότητας και προσεγγίζεται το παράγωγο (derivative) της με τον μέσο όρο των αριστερών και δεξιών πεπερασμένων διαφορών. Στην περίπτωση αυτή, οι αναλύσεις ευαισθησίας δείχνουν ότι τα αποτελέσματα που λαμβάνονται δεν είναι ακριβή λόγω του μάλλον μικρού αριθμού παρατηρήσεων στην ουρά. Παρ΄ όλα αυτά, οι εκτιμήσεις παρέχουν μια γενική ιδέα του βέλτιστου δείκτη. Η προκύπτουσα εκτίμηση για το θ_a δίνεται από το $\widetilde{\theta}_a \approx 0,027$. Το σ_0 προσεγγίζεται από την εμπειρική τυπική απόκλιση.

Για να ληφθεί μια ακριβής εκτίμηση του ποσοστού 99,5% βάσει της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής, επιλέγεται ένας σχετικά μεγάλος αριθμός εσωτερικών προσομοιώσεων, δηλαδή $K_1 = 300$. Στη συνέχεια, διαπιστώνεται ότι μια επιλογή $N = 320.000$ και $K_0 = 1.500.000$ είναι η βέλτιστη, με αποτέλεσμα ένα συνολικό προϋπολογισμό Γ= 97.500.000 προσομοιώσεων. Σε αυτή τη περίπτωση, έχουμε $\widetilde{SCR} = 1.249{,}7$ και δείκτη φερεγγυότητας 150%. Εκ πρώτης όψεως, θα μπορούσε να είναι εκπληκτικό το γεγονός ότι το K_0 πρέπει να επιλεγεί τόσο μεγάλο σε σύγκριση με τις δύο άλλες παραμέτρους. Αλλά η μείωση της διακύμανσης του AC_0 είναι σχετικά πιο εύκολη σε σύγκριση με τη μείωση της διακύμανσης του $z_{(m)}$ επειδή κάθε φορά που αυξάνεται το N, πρέπει αυτόματα να γίνονται K_1 εσωτερικές προσομοιώσεις για κάθε επιπλέον πραγματικό σενάριο. Ως εκ τούτου, είναι εύλογο να διατεθεί ένας αρκετά μεγάλος προϋπολογισμός στο K_0.

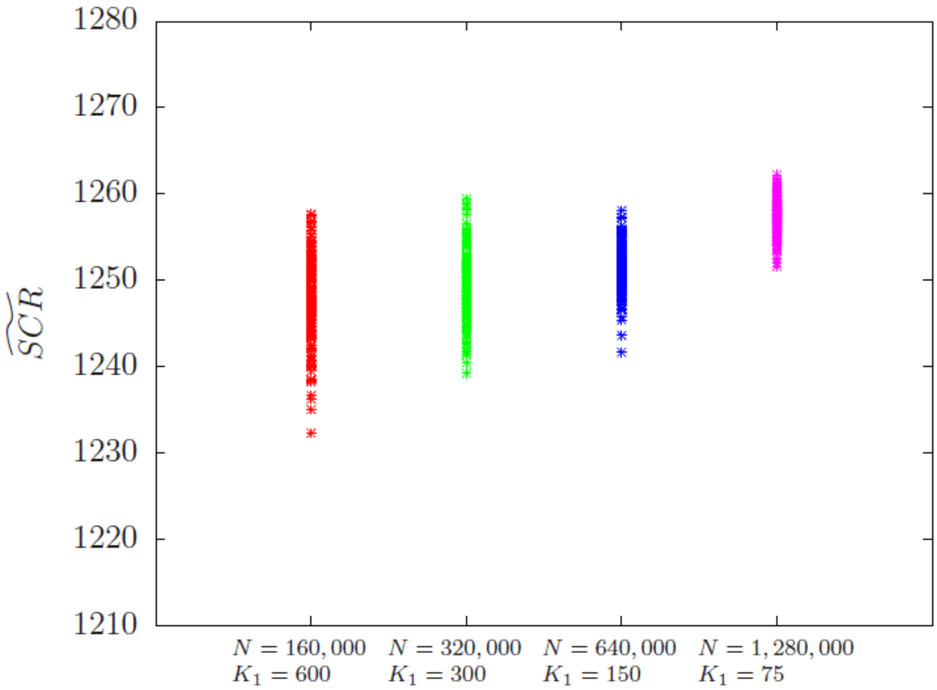
Για να αποδειχθεί όμως αυτό, δεδομένου τον συνολικού προϋπολογισμού Γ = 97.500.000, καθώς αυτή η επιλογή είναι κατά προσέγγιση επαρκής, υπολογίζεται το SCR 150 φορές για σταθερό K_0 και διαφορετικούς συνδυασμούς των N και K_1, όπου κάθε συνδυασμός αντιστοιχεί σε ένα συνολικό προϋπολογισμό 97.500.000 προσομοιώσεων. Υπολογίζεται η μεροληψία από $\frac{\bar{\theta_a}}{K_1 \cdot \bar{f}(\widetilde{SCR})}$, όπου $\bar{\theta_a}$ και $\bar{f}$ υποδηλώνουν το μέσο όρο των εκτιμήσεων που προκύπτουν από τις 150 διαδικασίες εκτίμησης όπως εξηγείται παραπάνω. Το MSE στη συνέχεια υπολογίζεται από το άθροισμα της εμπειρικής διακύμανσης και της τετραγωνικής εκτιμώμενης μεροληψίας. Αυτό μας επιτρέπει να διορθώσουμε τον μέσο από την εκτιμώμενη μεροληψία. Το σχήμα 6 και ο πίνακας 3 δείχνουν τα αποτελέσματά.

N	K_1	Μέσος $\widetilde{SCR}$	Εμπειρική διακύμανση	Υπολογισμένη μεροληψία	Υπολογισμένο MSE	Διορθωμένος Μέσος
160.000	600	1.247,7	24,6	1,4	26,6	1.246,3
320.000	**300**	**1.249,3**	**15,8**	**2,9**	**24,0**	**1.246,4**
640.000	150	1.251,3	7,9	5,7	40,6	1.245,6
1.280.000	75	1.257,4	4,2	11,4	133,1	1.246,1

Πίνακας 3 : Επιλογή των N και K_1 για την προσέγγιση Εσωτερικών Προσομοιώσεων με K_0=1.500.000

Όπως αναμένεται, ο μέσος όρος των εκτιμώμενων SCR αυξάνεται καθώς το K_1 μειώνεται λόγω της αυξημένης μεροληψίας. Σε αντίθεση με αυτό, η εμπειρική διακύμανση μειώνεται προφανώς όσο αυξάνεται το N. Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι η επιλογή των N και K_1 δίνει το μικρότερο εκτιμώμενο MSE

από τους συνδυασμούς που δίνονται στον Πίνακα 3. Συνεπώς, η επιλογή φαίνεται εύλογη στο πλαίσιο που παρουσιάστηκε. Επιπλέον, είναι αξιοσημείωτο ότι αν διορθώσουμε τους μέσους όρους στον Πίνακα 3 με την αντίστοιχη μεροληψία, η διαφορά μεταξύ των αποτελεσμάτων για τους διάφορους συνδυασμούς είναι σχεδόν αμελητέα.



Σχήμα 6: 150 προσομοιώσεις για διαφορετικές επιλογές N και K_1, με $K_0 = 1.500.000$ Εσωτερικές Προσομοιώσεις

Επομένως, θα χρησιμοποιήσουμε για $N = 320.000$ και $K_1 = 300$ στο υπόλοιπο μέρος της εργασίας. Ο διορθωμένος εκτιμητής μεροληψίας $\widetilde{SCR}_{cor} = 1.246{,}4$ που φαίνεται παραπάνω αποτελεί τη βάση για συγκρίσεις με τη μέθοδο Least Squares Monte Carlo.

3.8.2 Προσέγγιση Least Squares Monte Carlo

Όπως περιγράφτηκε στην προηγούμενη παράγραφο, για να επιτευχθούν ακριβή αποτελέσματα, η Προσέγγιση των Εσωτερικών Προσομοιώσεων απαιτεί μεγάλο αριθμό προσομοιώσεων και συνεπώς είναι χρονοβόρα. Κατά συνέπεια, αυτή η προσέγγιση μπορεί να μην είναι εφικτή για πιο περίπλοκες προδιαγραφές. Για την Προσέγγιση Least Squares Monte Carlo, από την άλλη πλευρά, απαιτούνται σημαντικά λιγότερες προσομοιώσεις για την επίτευξη ακριβών αποτελεσμάτων. Ωστόσο, το μειονέκτημα αυτής της μεθόδου έγκειται στην επιλογή της συνάρτησης παλινδρόμησης.

Λόγω της κατασκευής του συμβολαίου μας και του μοντέλου περιουσιακών στοιχείων, οι ακόλουθες μεταβλητές είναι φυσικές επιλογές για τις παλινδρομήσεις: A_1^+, r_1, L_1 και $x_1 = R_1/L_1$. Δεδομένου ότι υπάρχει ήδη μια καλή προσέγγιση της επιθυμητής κατανομής από την προσέγγιση των Εσωτερικών Προσομοιώσεων, επιλέγουμε πρώτα τη συνάρτηση παλινδρόμησης με βάση αυτή τη γνώση. Χρησιμοποιούμε ένα σχέδιο από τη βάση προς τα πάνω ξεκινώντας από μία μόνο παλινδρόμηση. Με την ανάλυση των υπολοίπων, προσθέτουμε διαδοχικά περισσότερες παλινδρομήσεις. Δεδομένου ότι οι χαμηλότερες διακυμάνσεις $\sigma_1^{(\mathrm{i})}, 1 \leq \mathrm{i} \leq N$ έχουν ως αποτέλεσμα την καλύτερη εκτίμηση των ελαχίστων τετραγώνων, χρησιμοποιούμε και πάλι τον εκτιμητή που βασίζεται σε χρηματική ροή από την άποψη των αντισυμβαλλομένων. Επιπλέον, χρησιμοποιείται N = 320.000 σενάρια πραγματικών συνθηκών και $K_0 = 1.500.000$. Εκτελούνται 150 εκτιμήσεις του SCR για κάθε συνάρτηση παλινδρόμησης. Στη συνέχεια, υπολογίζουμε τον μέσο όρο των 150 εκτιμήσεων. Ο Πίνακας 4 παρουσιάζει τα αποτελέσματά μας για διαφορετικές συναρτήσεις παλινδρόμησης.

A/A	Συνάρτηση Παλινδρόμησης	Μέσο $\widehat{\mathrm{SCR}}$
1	$\hat{a_0}^N + \hat{a_1}^N \cdot A_1$	1.007,3
2	$\hat{a_0}^N + \hat{a_1}^N \cdot A_1 + \hat{a_2}^N \cdot A_1^2$	1.165,5
3	$\hat{a_0}^N + \hat{a_1}^N \cdot A_1 + \hat{a_2}^N \cdot A_1^2 + \hat{a_3}^N \cdot r_1$	1.272,6
4	$\hat{a_0}^N + \hat{a_1}^N \cdot A_1 + \hat{a_2}^N \cdot A_1^2 + \hat{a_3}^N \cdot r_1 + \hat{a_4}^N \cdot r_1^2$	1.276,5
5	$\hat{a_0}^N + \hat{a_1}^N \cdot A_1 + \hat{a_2}^N \cdot A_1^2 + \hat{a_3}^N \cdot r_1 + \hat{a_4}^N \cdot r_1^2 + \hat{a_5}^N \cdot L_1$	1.233,2
6	$\hat{a_0}^N + \hat{a_1}^N \cdot A_1 + \hat{a_2}^N \cdot A_1^2 + \hat{a_3}^N \cdot r_1 + \hat{a_4}^N \cdot r_1^2 + \hat{a_5}^N \cdot L_1 + \hat{a_6}^N \cdot x_1$	1.233,9
7	$\hat{a_0}^N + \hat{a_1}^N \cdot A_1 + \hat{a_2}^N \cdot A_1^2 + \hat{a_3}^N \cdot r_1 + \hat{a_4}^N \cdot r_1^2 + \hat{a_5}^N \cdot L_1 + \hat{a_6}^N \cdot x_1$ $+\hat{a_7}^N \cdot A_1 \cdot e^{r_1}$	1.241,3
8	$\hat{a_0}^N + \hat{a_1}^N \cdot A_1 + \hat{a_2}^N \cdot A_1^2 + \hat{a_3}^N \cdot r_1 + \hat{a_4}^N \cdot r_1^2 + \hat{a_5}^N \cdot L_1 + \hat{a_6}^N \cdot x_1$ $+\hat{a_7}^N \cdot A_1 \cdot e^{r_1} + \hat{a_8}^N \cdot L_1 \cdot e^{r_1}$	1.244,5
9	$\hat{a_0}^N + \hat{a_1}^N \cdot A_1 + \hat{a_2}^N \cdot A_1^2 + \hat{a_3}^N \cdot r_1 + \hat{a_4}^N \cdot r_1^2 + \hat{a_5}^N \cdot L_1 + \hat{a_6}^N \cdot x_1$ $+\hat{a_7}^N \cdot A_1 \cdot e^{r_1} + \hat{a_8}^N \cdot L_1 \cdot e^{r_1} + \hat{a_9}^N \cdot e^{A_1/10.000}$	1.245,9

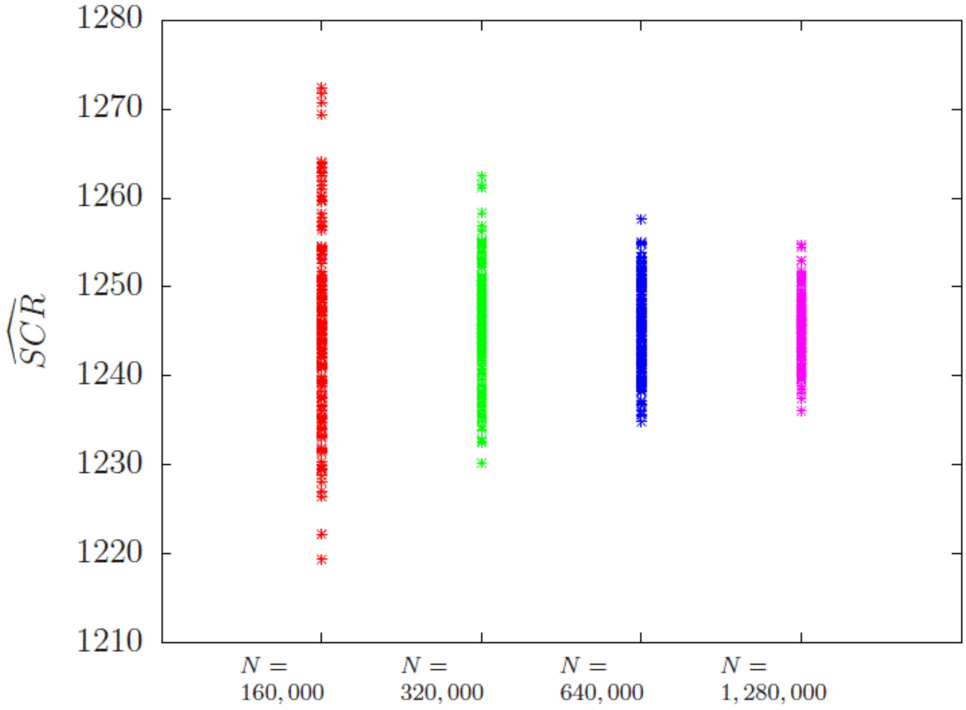
Πίνακας 4 : Υπολογισμένο SCR για διαφορετικές επιλογές της συνάρτησης παλινδρόμησης με K_0=1.500.000 και N=320.000

Διαπιστώνουμε ότι οι δύο τελευταίες επιλογές για τις συναρτήσεις παλινδρόμησης στον Πίνακα 4 (8 και 9) προσεγγίζουν αρκετά καλά την τιμή που επιτυγχάνεται μέσω των εσωτερικών προσομοιώσεων. Σε σύγκριση με το αποτέλεσμα από το προηγούμενο τμήμα, οι διαφορές είναι 1,9 και 0,5, αντίστοιχα.

Ωστόσο, είναι σημαντικό να σημειωθεί ότι η εν λόγω εικόνα εν μέρει βασίζεται στις προηγουμένως πραγματοποιηθείσες προσομοιώσεις. Εναλλακτικά, μπορούμε να βασιστούμε στα κριτήρια που εισάγονται στην Ενότητα 3.5. Παρόλο που οι υποκείμενες υποθέσεις δεν ικανοποιούνται, χρησιμοποιούμε την Cp του $Mallow$ για να επιλέξουμε ένα κατάλληλο μοντέλο. Τα αντίστοιχα αποτελέσματα και επιλογές εμφανίζονται στον Πίνακα του Παραρτήματος Α'. Διαπιστώνουμε ότι η χαμηλότερη τιμή Cp επιτυγχάνεται όταν επιλέγουμε 5 παλινδρομήσεις. Στην περίπτωση αυτή, η μέση εκτιμώμενη τιμή του SCR για 150 διαδρομές είναι 1.245,9, δηλαδή παρόλο που έχουμε ετεροσκεδασμό, η Cp του $Mallow$ οδηγεί σε μια λογική επιλογή της συνάρτησης παλινδρόμησης. Έτσι, τα αποτελέσματά μας δείχνουν ότι, αφενός, η επιλογή των παλινδρομήσεων φαίνεται να έχει μεγάλη σημασία αφού τα αποτελέσματα αποκλίνουν σημαντικά όταν εφαρμόζουν μια αυθαίρετη λειτουργία παλινδρόμησης. Για παράδειγμα, η συνάρτηση παλινδρόμησης 4 στον Πίνακα 4 δίνει μια εκτίμηση αρκετά πάνω από το επιθυμητό επίπεδο, ενώ το αποτέλεσμα της συνάρτησης 5 είναι σημαντικά χαμηλότερο. Από την άλλη πλευρά, πολλές μεταβλητές φαίνεται να συσχετίζονται σε μεγάλο βαθμό, έτσι ώστε να μην φαίνεται να υπάρχει μια μοναδική βέλτιστη επιλογή, δηλαδή οι καταγραφείς μπορούν να αντικατασταθούν χωρίς απώλεια ακρίβειας. Συνεπώς, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για να έχουμε ακριβή αποτελέσματα, είναι σημαντικό να μην χρησιμοποιείται μια αυθαίρετη συνάρτηση παλινδρόμησης, αλλά φαίνεται επαρκείς για να βασιστεί σε μια συνολικά συνεκτική μέθοδο για τον προσδιορισμό μιας κατάλληλης επιλογής.

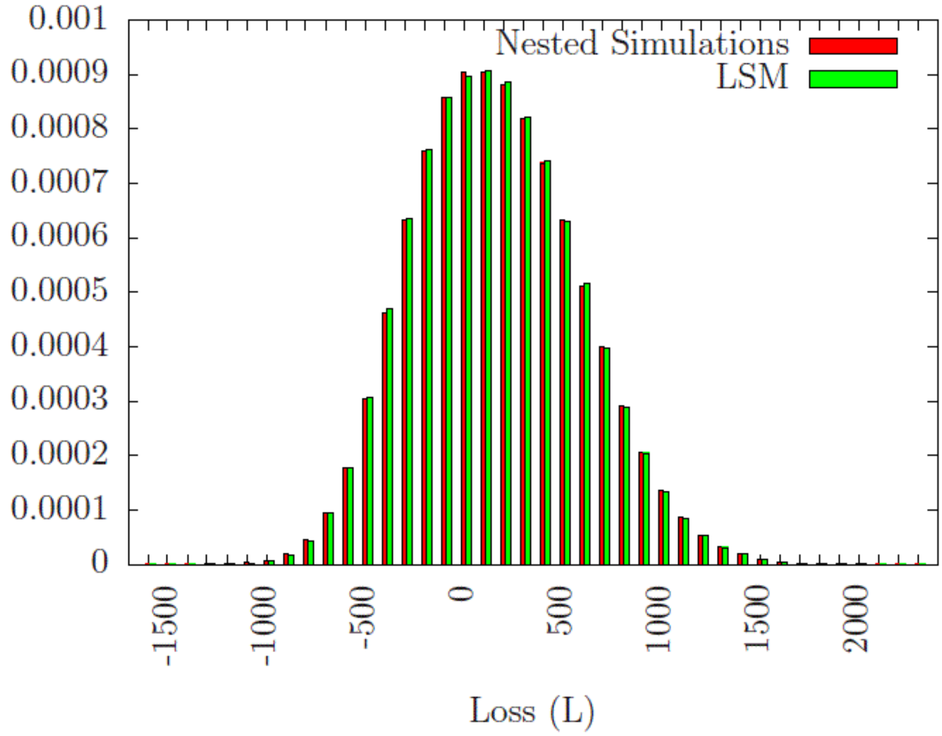
Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε τη συνάρτηση παλινδρόμησης 9 από τον Πίνακα 4 για περαιτέρω υπολογισμούς.

Το κύριο πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι ότι, στον ίδιο υπολογιστή, χρειάζονται μόνο περίπου 25 δευτερόλεπτα για να εκτιμηθεί το SCR βάσει 320.000 πραγματικών σεναρίων με την προσέγγιση LSM.



Σχήμα 7: 150 προσομοιώσεις για διαφορετικές επιλογές N στην LSM

Προκειμένου να αναλυθεί η σταθερότητα του εκτιμητή LSM σε σχέση με το N, πραγματοποιούμε τη διαδικασία προσομοίωσης 150 φορές για διαφορετικούς αριθμούς πραγματικών σεναρίων και υπολογίζουμε και πάλι τον μέσο όρο του εκτιμώμενου SCR. Το σχήμα 7 απεικονίζει τα αποτελέσματά. Ο Πίνακας 5 δείχνει ότι ο μέσος όρος είναι αρκετά σταθερός και πολύ κοντά στο αποτέλεσμα της προσέγγισης των Εσωτερικών Προσομοιώσεων. Η εμπειρική διακύμανση, από την άλλη πλευρά, είναι σημαντικά υψηλότερη απ'οτι στην προσέγγιση των Εσωτερικών προσομοιώσεων. Εντούτοις, πρέπει να έχουμε κατά νου ότι έχουμε μόνο N διαδρομές δειγμάτων για το χρονικό διάστημα $(1, T]$ στην προσέγγιση LSM, ενώ η προσέγγιση των Εσωτερικών προσομοιώσεων απαιτεί διαδρομές $N \cdot K_1$.Θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν πολλά περισσότερα σενάρια πραγματικού κόσμου τελικά αποδίδοντας μια σημαντικά χαμηλότερη εμπειρική διακύμανση.



Σχήμα 8: Συναρτήσεις Πυκνότητας πιθανότητας για N=320.000 και K_1=300

Δεδομένου ότι μπορεί επίσης να προκύψει ενδιαφέρον για άλλα ποσοτικά στοιχεία ή περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τη κατανομή, όπως εναλλακτικά μέτρα κινδύνου, αναλύεται τώρα η ποιότητα της προσέγγισης ολόκληρης της κατανομής. Το Σχήμα 8 δείχνει τις εμπειρικές συναρτήσεις πυκνότητας για τη προσέγγιση Εσωτερικών Προσομοιώσεων και τη προσέγγιση LSM για μία διαδρομή με σταθερά δεδομένα. Διαπιστώνουμε ότι οι δύο κατανομές είναι πολύ παρόμοιες και ως εκ τούτου, η προσέγγιση LSM παρέχει μια αποτελεσματική εναλλακτική λύση στις Εσωτερικές Προσομοιώσεις.

N	Μέσο $\widehat{\text{SCR}}$	Εμπειρική διακύμανση	Δείκτης Φερεγγυότητας
160.000	1.254,4	110,9	151%
320.000	**1.254,9**	**39.1**	**151%**
640.000	1.245,3	24.0	151%
1.280.000	1.254,4	12,1	151%

Πίνακας 5 : Αποτελέσματα του LSM εκτιμητή

Επιπλέον, στην πράξη, το SCR πρέπει να υπολογίζεται σε τριμηνιαία, μηνιαία ή και εβδομαδιαία βάση για λόγους διαχείρισης του κινδύνου. Σε αυτή την περίπτωση, θα ήταν θεμιτό να αποφευχθεί ο καθορισμός νέων παλινδρομήσεων, αλλά αντ άυτού να χρησιμοποιηθούν οι ίδιες παλινδρομήσεις όπως στην προηγούμενη περίοδο. Ως εκ τούτου, είναι ενδιαφέρον να αναλυθεί πόσο μικρές αλλαγές στις παραμέτρους σε σχέση με την επιρροή της ποιότητας της εκτίμησης LSM υπάρχουν όταν χρησιμοποιούνται οι ίδιοι ρεγρεσορς όπως και πριν.

Ένας από τους σημαντικότερους παράγοντες που επηρεάζουν αυτό το μοντέλο είναι η μεταβλητότητα σ_A της διαδικασίας του ενεργητικού. Το σχήμα 8 δείχνει τις εκτιμήσεις για τις δύο προσεγγίσεις για διαφορετικές επιλογές αυτής της μεταβλητότητας. Φυσικά, το SCR αυξάνεται σε σ_A, καθώς η υψηλότερη μεταβλητότητα επιβάλλει μεγαλύτερο κίνδυνο στην ασφαλιστική εταιρεία. Επιπλέον, διαπιστώνουμε ότι το σ_A έχει πολύ ισχυρό αντίκτυπο στον εκτιμώμενο λόγο Φερεγγυότητας. Συνολικά, διαπιστώνουμε ότι η προσέγγιση LSM εξακολουθεί να είναι πολύ κοντά στην αξία που προκύπτει από το Εσωτερικές Προσομοιώσεις.

Επιπλέον, το επίπεδο της καμπύλης αποδόσεων επηρεάζει τις εκτιμήσεις μας. Ως εκ τούτου, μετατοπίσαμε ολόκληρη την καμπύλη αποδόσεων, δηλαδή αυξήσαμε ή μειώσαμε το αρχικό επιτόκιο r_0 και το μέσο επίπεδο αντιστροφής ξ με την ίδια ποσότητα. Παρατηρούμε ότι το SCR είναι σχεδόν σταθερό όταν μετατοπίζεται η καμπύλη αποδόσεων. Προφανώς, τόσο η AC_0 όσο και η AC_1 αυξάνονται για τα υψηλότερα επιτόκια, καθώς μειώνεται η αξία των εγγυήσεων. Αλλά όταν αφαιρούμε το προεξοφλημένο AC_1 από το AC_0, η απόλυτη τιμή του SCR είναι σχεδόν η ίδια. Ωστόσο, η ανοδική μετατόπιση της καμπύλης αποδόσεων έχει θετικό αντίκτυπο στον δείκτη φερεγγυότητας της ασφαλιστικής εταιρείας, επειδή αυξάνεται το AC_0. Ως εκ τούτου, ο λόγος φερεγγυότητας είναι σημαντικά υψηλότερος όταν η καμπύλη αποδόσεων μετατοπίζεται προς τα πάνω. Και πάλι, διαπιστώνουμε ότι το LSM παρέχει μια καλή προσέγγιση.

3.9 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία δώσαμε μια λεπτομερή περιγραφή για τον προσδιορισμό των Κεφαλαιακών Απαιτήσεων Φερεγγυότητας στο πλαίσιο του Solvency II. Ενώ οι περισσότερες εταιρείες χρησιμοποιούν για τον υπολογισμό των Κεφαλαιακών τους Απαιτήσεων την Τυποποιημένη Μέθοδο (Standard Formula), εμείς παρουσιάσαμε δύο διαφορετικές προσεγγίσεις για τον τρόπο αντιμετώπισης του προβλήματος με αριθμητικό τρόπο: την Προσέγγιση Εσωτερικών Προσομοιώσεων και την Προσεγγίση Ελαχίστων Τετραγώνων Monte Carlo (LSM). Με αυτόν τον τρόπο είναι πιθανό μία εταιρεία να απελευθερώσει κάποια κεφάλαια που την προκυμένη στιγμή δεσμεύονται λόγω της Τυποποιημένης Μεθόδου. Με βάση τα αριθμητικά σενάρια, διαπιστώσαμε ότι η Προσέγγιση Εσωτερικών Προσομοιώσεων είναι πολύ χρονοβόρα και, επιπλέον, ο εκτιμητής που προκύπτει είναι μεροληπτικός. Αντίθετα, η Προσεγγίση Ελαχίστων Τετραγώνων Monte Carlo είναι πιο αποτελεσματική και παρέχει καλές προσεγγίσεις του Solvency Capital Requirement(SCR), παρόλο που η επιλογή της συνάρτησης παλινδρόμησης έχει σημαντικό αντίκτυπο και μπορεί να θεωρηθεί ως μειονέκτημα αυτής της μεθόδου.

Μια άλλη ελπιδοφόρα σκέψη για μελλοντική έρευνα είναι ο συνδυασμός και των δύο προσεγγίσεων. Με τη διεξαγωγή προσομοιώσεων με ένα μικρό $K_1 > 1$ και, στη συνέχεια, την εφαρμογή μιας παλινδρόμησης για την εκτίμηση της συνάρτησης απώλειας, θα πρέπει να είμαστε σε θέση να μειώσουμε τη διακύμανση των παλινδρομήσεων και ως εκ τούτου αναμένουμε να βελτιώσουμε την Προσεγγίση Ελαχίστων Τετραγώνων Monte Carlo (LSM). Επιπλέον, μπορεί να δωθεί μεγαλύτερη έμφαση σε συγκεκριμένο μέρος της κατανομής χρησιμοποιώντας ένα επαναληπτικό σύστημα. Για παράδειγμα μια πιθανή προσέγγιση μπορεί να είναι η ταξινόμηση των πραγματικών σεναρίων με τη βοήθεια εκτιμήσεων και, στη συνέχεια, να βελτιωθούν οι εκτιμήσεις για τα σχετικά σενάρια στην ουρά. Με αυτόν τον τρόπο αναμένουμε να λάβουμε καλύτερες εκτιμήσεις με τον ίδιο (ή ακόμα και μικρότερο) αριθμό προσομοιώσεων. Επιπλέον, θα προσπαθήσουμε να αντλήσουμε διαστήματα εμπιστοσύνης για το SCR και θα αναλύσουμε πώς οι τεχνικές μείωσης της διακύμανσης μπορούν να βελτιώσουν τα αποτελέσματά.

Τέλος, μπορούμε να διερευνήσουμε περαιτέρω τις πραγματιστικές προσεγγίσεις που εισήχθησαν στην Ενότητα 3.2 για να προσφέρουμε μια έγκυρη εναλλακτική λύση στις τρέχουσες, άριστες λύσεις. Μακροπρόθεσμα, ωστόσο, πιστεύουμε ότι οι προηγμένες αριθμητικές προσεγγίσεις, όπως παρουσιάζονται εδώ, θα πρέπει να επιτρέπουν μια αξιόπιστη και επαρκώς ακριβή εκτίμηση της θέσης Φερεγγυότητας μιας ασφαλιστικής εταιρείας ζωής.

Βιβλιογραφία

[1] *CFO Forum Market Consistent Embedded Value Principles. http://www.cfoforum.nl/pdf/mcev principles and guidance.pdf, 2008.*

[2] *Institute and Faculty of Actuaries, SOLVENCY II AND LIFE INSURANCE, 2016.*

[3] D. Bauer, D. Bergmann, kai R. Kiesel. On the risk-neutral valuation of life insurance contracts with numerical methods in view. Working paper,Georgia State University and Ulm University, 2008.

[4] D. Bauer,Daniela Bergmann,Andreas Reuss.Solvency II and Nested Simulations − a Least-Squares Monte Carlo Approach, 2010.

[5] D. Bauer, R. Kiesel, A. Kling, and J. Rub. Risk-neutral valuation of participating life insurance contracts. Insurance: Mathematics and Economics,39:171−183, 2006.

[6] D. Bauer,Andreas Reuss, kai Daniela Singer,On the Calculation of the Solvency Capital Requirement Based on Nested Simulations, https://www.actuaries.asn.au/Library/Events/ASTINAFIRERMColloquium/2015/11bBauerReussSinger.pdf, 2015.

[7] S. Beak, F. Kraman, and H. Ahn. Variable selection for heteroscedastic data through variance estimation. Communications in Statistics- Simulation and Computation, 2005

[8] E. Clement, D. Lamberton, and P. Protter. An analysis of a least squares regression method for American option pricing. Finance and Stochastics, 6:449−471, 2002.

[9] F. Durante, Copula-based dependence models: properties, applicability and pitfalls,2015.

[10] P. Embrechts, C. Klauppelberg, and T. Mikosch. Modelling Extremal Events for Insurance and Finance. Springer, 1997

[11] M.B. Gordy and S. Juneja. Nested simulations in portfolio risk measurement. Management Science, 2009.

[12] A. Kling, A. Richter, and J. Rub. The interaction of guarantees, surplus distribution, and asset allocation in with profit life insurance policies. Insurance: Mathematics and Economics, 40:164−178, 2007.

[13] F.A. Longstaff and E.S. Schwartz. Valuing American options by simulation: A simple least-squares approach. The Review of Financial Studies, 14:113−147, 2001.

[14] M. Papi, Luca Torzi, An Analysis of Solvency II Standard Formula for Calculation of SCR, possible corrections and a comparison with an internal model, 2015.

[15] D. Pfeifer and D. Strassburger. Solvency II: stability problems with the SCR aggregation formula. Scandinavian Actuarial Journal, 2008/1:61−77, 2008.

[16] A. Sandstrom. Solvency II: Calibration for skewness. Scandinavian Actuarial Journal, 2007/2:126−134, 2007.

[17] O.Vasicek, "An equilibrium characterization of the term structure". Journal of Financial Economics, 1977.

[18] H. White. Asymptotic Theory for Econometricians. Academic Press, New York, 1984.

[19] K. Zaglauer and D. Bauer. Risk-neutral valuation of participating life insurance contracts in a stochastic interest rate environment. Insurance: Mathematics and Economics, 43:29−40, 2008.

Παράρτημα Α΄

A/A	A_1	L_1	x_1	r_1	A_1^2	A_1^3	L_1^2	L_1^3	x_1^2	x_1^3	r_1^2	r_1^3	$A_1 \cdot L_1$	$A_1 \cdot x_1$	$A_1 \cdot e^{r_1}$	$L_1 \cdot e^{r_1}$	$x_1 \cdot e^{r_1}$	$A_1 \cdot L_1 \cdot x_1$	$A_1 \cdot x^2$	$L_1^2 \cdot x_1$	$A_1 \cdot e^{2r_1}$	$A_1^2 \cdot e^{r_1}$	$L_1 \cdot e^{2r_1}$	$L_1^2 \cdot e^{r_1}$	$A_1 \cdot x_1 \cdot e^{r_1}$	$A_1^2 \cdot x_1$	Cp
1				x																							11.822,99
2						x															x						513,91
3				x																				x		x	52,13
4				x							x									x		x					7,90
5			x			x					x										x	x					3,72
6	x					x					x		x								x	x					4,33
7	x					x			x		x						x								x		4,54
8				x		x					x			x		x					x	x		x			5,48
9	x	x				x	x				x		x					x		x	x	x					6,44
10	x	x					x	x					x			x	x		x	x	x						5,35
11	x	x			x		x	x					x			x	x		x		x						3,90
12	x	x			x		x	x					x	x		x	x		x		x					x	4,98
13	x	x			x		x	x		x			x			x	x	x	x		x					x	6,17
14	x	x	x		x		x	x					x	x			x	x	x			x	x	x		x	6,91
15	x	x			x		x	x		x			x	x	x					x	x	x	x	x	x		7,54
16	x	x			x		x	x		x			x	x	x		x			x	x	x	x	x	x		9,03
17	x	x		x	x		x	x		x	x		x			x			x	x	x	x		x	x		10,51
18	x	x		x	x		x	x		x	x		x			x				x	x	x	x	x	x		12,05
19	x	x			x		x	x	x	x	x	x	x	x					x	x	x	x	x	x	x	x	13,92
20	x	x			x		x	x	x		x	x	x	x					x	x	x	x	x	x	x	x	15,86
21	x	x	x	x	x		x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x		x		x	x			x	17,59
22	x	x	x	x	x		x	x		x			x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	19,37
23	x	x	x	x	x		x	x		x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	21,24
24	x	x	x	x	x		x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	23,13
25	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x		x	x	x	x	x	x	x	x	25,04

Πίνακας Α : Επιλογή συνάρτησης παλινδρόμησης μέσω του Cp του Mallow

Παράρτημα Β΄

Κώδικας Vasicek σε C++

```
#include <cmath>
using namespace std;

double term_structure_discount_factor_vasicek(const double& time,
                                              const double& r,
                                              const double& k,
                                              const double& ksi,
                                              const double& sigma){
  double A,B;
  double sigma_sqr = sigma*sigma;
  double kk = k*k;
  if (k==0.0){
     B = time;
     A = exp(sigma_sqr*pow(time,3))/6.0;
  }
  else {
  B = (1.0 - exp(-k*time))/k;
  A = exp( ((B-time)*(kk*ksi-0.5*sigma_sqr))/kk -((sigma_sqr*B*B)/(4*k)));
  };
  double d = A*exp(-B*r);
  return d;
  }



#ifndef _TERM_STRUCTURE_CLASS_VASICEK_
#define _TERM_STRUCTURE_CLASS_VASICEK_

#include "term_structure_class.h"

class term_structure_class_vasicek : public term_structure_class {
private:
    double r_ ;
    double k_ ;
    double ksi_ ;
    double sigma ;
public:
    term structure_class_vasicek(const double& r,
```

```
                                    const double& k,
                                      const double& ksi,
                                      const double& sigma);
    virtual double discount_factor(const double& T) const;
};

#endif

#include "term_structure_class_vasicek.h"

#include "fin_recipes.h"

term_structure_class_vasicek::term_structure_class_vasicek(const double& r,
                                                          const double& k,
                                                          const double& ksi,
                                                          const double& sigma)
{
    r_ = r;  k_ = k;  ksi_ = ksi;  sigma_ = sigma;
};
double term_structure_class_vasicek::discount factor(const double& T) const{
  return term_structure_discount_factor_vasicek(T,r_,k_ ,ksi_ ,sigma_ );
};
```

Κώδικας τιμολόγησης American option σε C++

```
#include <cmath>
#include <algorithm>
#include <vector>
using namespace std;

double option_price_call_american( const double& S,
                                                          const double& X,
                                                          const double& r,
                                                          const double& sigma,
                                                          const double& t,
                                                          const int& steps) {
   double R = exp(r*(t/steps));
   double Rinv = 1.0/R;
   double u = exp(sigma*sqrt(t/steps));
   double uu = u*u;
   double d = 1.0/u;
   double p_up = (R-d)/(u-d);
   double p_down = 1.0-p_up;
```

```
  vector<double> prices(steps+1);
  vector<double> call_values(steps+1);

  prices[0] = S*pow(d, steps);
  for (int i=1; i<=steps; ++i) prices[i] = uu*prices[i-1];
  for (int i=0; i<=steps; ++i) call_values[i] = max(0.0, (prices[i]-X));
  for (int step=steps-1; step>=0; --step) {
      for (int i=0; i<=step; ++i) {
          call values[i] = (p up*call_values[i+1]+p down*call_values[i])*Rinv;
          prices[i] = d*prices[i+1];
          call values[i] = max(call_values[i],prices[i]-X); // check for exercise
      };
  };
  return call values[0];
};
```