

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ
ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ**

**ΣΥΝΔΥΑΣΜΕΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΤΗ
ΔΙΑΣΠΟΡΑ**

Κωνσταντίνος Φουντουκίδης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς

Σεπτέμβριος 2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν 6 /11-6-2018 συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της τριμελούς επιτροπής ήταν:

Αντζουλάκος Δημήτριος, Αναπληρωτής Καθηγητής (Επιβλέπων)

Πολίτης Κωνσταντίνος, Αναπληρωτής Καθηγητής

Ευαγγελάρας Χαράλαμπος, Επίκουρος Καθηγητής

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



**DEPARTMENT OF STATISTIC AND INSURANCE SCIENCE
POSTGRADUATE PROGRAM IN APPLIED STATISTICS**

COMBINED CHARTS FOR MEAN AND VARIANCE

By

Konstantinos Fountoukidis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in fulfillment
of the requirements for the degree of Master of Science
in Applied Statistics.

Piraeus

September 2019

Περίληψη

Τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται ευρέως για την παρακολούθηση ή την επιτήρηση των διεργασιών στη βιομηχανία. Αυτές οι γραφικές παραστάσεις έχουν σχεδιαστεί για να επιτρέπουν σε έναν επαγγελματία να προσδιορίσει αν μια διεργασία είναι υπό έλεγχο ή εκτός ελέγχου, λαμβάνοντας δείγματα σε καθορισμένα διαστήματα δειγματοληψίας και σχεδιάζοντας τιμές ορισμένων στατιστικών συναρτήσεων σε μια γραφική παράσταση που περιλαμβάνει γραμμές απόφασης που ονομάζονται όρια ελέγχου. Η συντριπτική πλειονότητα των διαγραμμάτων ελέγχου έχουν σχεδιαστεί για την παρακολούθηση μιας μεμονωμένης παραμέτρου της διεργασίας, όπως η μέση τιμή ή η διακύμανση, αλλά είναι συχνά επιθυμητό να παρακολουθείται η μέση και η διακύμανση ταυτόχρονα, καθώς και οι δύο μπορούν να μετατοπιστούν την ίδια στιγμή, και αφού μια αλλαγή στη διακύμανση μπορεί να επηρεάσει τα όρια ελέγχου του διαγράμματος ελέγχου για τη μέση τιμή.

Σε αυτή τη διατριβή παρουσιάζουμε μια επισκόπηση των διαγραμμάτων ελέγχου για την κοινή παρακολούθηση της μέσης και της διακύμανσης. Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε συνοπτικά τη γενική θεωρία των διαγραμμάτων ελέγχου. Εστιάζουμε κυρίως στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart, CUSUM και EWMA για μεταβλητές. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε λεπτομερώς τα συνδυασμένα διαγράμματα ελέγχου και την απόδοσή τους. Σε αυτά τα διαγράμματα ελέγχου σχεδιάζεται μια μόνο στατιστική συνάρτηση για την παρακολούθηση τόσο της μέσης τιμής όσο και της τυπικής απόκλισης της διεργασίας. Επιπλέον, υπολογίζουμε το μέσο μήκος ροής των συνδυασμένων διαγραμμάτων ελέγχου. Τέλος, στο Κεφάλαιο 3 συγκρίνουμε τα διαγράμματα ελέγχου με βάση το μέσο μήκος ροής και προτείνουμε ποιο διάγραμμα ελέγχου είναι το πιο κατάλληλο για την ανίχνευση ενός σήματος εκτός ελέγχου για διάφορες μετατοπίσεις της μέσης τιμής ή/και της τυπικής απόκλισης.

Abstract

Control charts are widely used in monitoring or surveillance of processes in a variety of industries. These graphical displays are designed to allow a practitioner to determine whether a process is in-control or out-of-control by taking samples at specified sampling intervals and plotting values of some statistics on a graphical interface which includes decision lines called control limits. The vast majority of control charts are designed to monitor a single process parameter, such as the mean or the variance, but it is often desirable to monitor the mean and the variance simultaneously, since both may shift at the same time and since a change in the variance can affect the control limits of the mean chart.

In this thesis we present an overview of control charts for joint monitoring of mean and variance. More specifically, in Chapter 1 we briefly present the general theory of control charts. We focus mainly on Shewhart, CUSUM and EWMA control charts for variables. In Chapter 2 we present elaborately the combined control charts and their performance. In these control charts a single statistic is plotted for monitoring both the process mean and standard deviation. In addition, we compute the average run length of the combined control charts. Finally, in chapter 3 we compare the control charts based on the Average run length (ARL) and we propose which control chart is most suitable for detecting an out of control signal for various shifts in process mean and/or standard deviation.

Ευχαριστίες

Στο σημείο αυτό θέλω να ευχαριστήσω θερμά :

- Τον κ. Δημήτριο Αντζουλάκο (επιβλέποντα καθηγητή) για την άψογη συνεργασία και την πραγματική βοήθεια που μου προσέφερε για την ολοκλήρωση της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καθώς επίσης και τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής τον κ. Ευαγγελάρα Χαράλαμπο και τον κ. Πολίτη Κωνσταντίνο για την επίβλεψή της.
- Την οικογένεια μου, που με στηρίζει ηθικά και υλικά όλα αυτά τα χρόνια, και είναι δίπλα μου σε κάθε επιλογή μου.
- Τους φίλους μου και όλους εκείνους που με στηρίζουν να πραγματοποιώ τους στόχους μου και να ακολουθώ τις επιλογές μου.

Πίνακας Περιεχομένων

1. Διαγράμματα Ελέγχου	13
1.1 Εισαγωγή	13
1.2 Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου	15
1.3 Διαγράμματα Φάσης I και Φάσης II	17
1.4 Ταξινόμηση διαγραμμάτων ελέγχου	18
1.5 Εκτίμηση της μέσης τιμής και της διασποράς	19
1.5.1 Η περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων	19
1.5.2 Η περίπτωση των δειγμάτων	20
1.6 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τη μέση τιμή	21
1.6.1 Διάγραμμα ελέγχου Φάσης II	22
1.6.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I	22
1.7 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τη διασπορά	25
1.7.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II	25
1.7.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I	27
1.8 Διαγράμματα ελέγχου με μνήμη	29
1.8.1 Διαγράμματα ελέγχου CUSUM	29
1.8.2 Διαγράμματα ελέγχου EWMA	32
1.9 Μέσο μήκος ροής (ARL)	35
2. Συνδυασμένα Διαγράμματα Ελέγχου	39
2.1 Εισαγωγή	39
2.2 Το ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου	40
2.3 Το Max διάγραμμα ελέγχου	51
2.4 Το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου	60
2.5 Το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου	70
2.6 Το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου	78
2.7 Το Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου	86
2.8 Το SS-CUSUM διάγραμμα ελέγχου	93
3. Σύγκριση των Συνδυασμένων Διαγραμμάτων Ελέγχου	99
3.1 Εισαγωγή	99

3.2 Max-Chart, Max-EWMA, Max-CUSUM: Σύγκριση	99
3.3 Ημικυκλικό και SC-EWMA διάγραμμα ελέγχου: Σύγκριση.....	103
3.4 SS-CUSUM και SS-EWMA: Σύγκριση.....	107
3.5 Σύγκριση όλων των διαγραμμάτων ελέγχου.....	110
Βιβλιογραφία	116
Κ. Κώδικες για τα Συνδυασμένα Διαγράμματα Ελέγχου	118
K.1 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του <i>ARL1</i> για το Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου.....	118
K.2 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του <i>ARL1</i> για το Max διάγραμμα ελέγχου.	118
K.3 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του <i>ARL1</i> για το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου.....	119
K.4 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του <i>ARL1</i> για το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου.....	120
K.5 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του <i>ARL1</i> για το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου.....	121
K.6 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του <i>ARL1</i> για το Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου.....	122
K.7 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του <i>ARL1</i> για το SS-CUSUM διάγραμμα ελέγχου.....	123

Πίνακες

Πίνακας 1.1. Δεδομένα για τη διάμετρο της στεφάνης του εμβόλου.....	24
Πίνακας 1.2. Δεδομένα για την επίδειξη διαγράμματος Cusum: $k = 5, h = 5$	31
Πίνακας 1.3. Δεδομένα για την επίδειξη διαγράμματος EWMA: $\lambda = 0.1, L = 2.7$	34
Πίνακας 2.1. Τιμές του q για $a = 0.0054$	42
Πίνακας 2.2. Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου: ARL_1 για $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$ και $\sigma_1 = b\sigma_0$	44
Πίνακας 2.3. Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου: ARL_1 για $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$	45
Πίνακας 2.4. Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου: ARL_1 για $\sigma_1 = b\sigma_0$	46
Πίνακας 2.5. Τα δεδομένα του Van Nuland (1992-93).....	47
Πίνακας 2.6. Κεντρική γραμμή και άνω όριο ελέγχου του Max διαγράμματος ελέγχου για διάφορες τιμές του a	52
Πίνακας 2.7. Max διάγραμμα ελέγχου: ARL_1 για $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$ και $\sigma_1 = b\sigma_0$	54
Πίνακας 2.8. $X - S$ διάγραμμα ελέγχου: ARL_1 για $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$ και $\sigma_1 = b\sigma_0$	55
Πίνακας 2. 9. Τα δεδομένα των DeVor et al. (1992)	57
Πίνακας 2.10. Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου: Συνδυασμοί (λ, K) για μέγεθος δείγματος $n = 5$	63
Πίνακας 2. 11. Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου: ARL_1 για $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$ και $\sigma_1 = b\sigma_0$	65
Πίνακας 2.12. Τιμές του : ARL_1 για το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου αρχικής κατάστασης για $n = 5$	72
Πίνακας 2.13. Τιμές του ARL_1 για το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου σταθερής κατάστασης για $n = 5$	73
Πίνακας 2. 14. SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου σταθερής κατάστασης: Συνδυασμοί (λ, K) για μέγεθος δείγματος $n = 5$	74
Πίνακας 2. 15. Τιμές του ARL_1 για το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου αρχικής κατάστασης για $n = 5$ ($ARL_0 = 250$).....	81
Πίνακας 2. 16. Τιμές του ARL_1 για το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου αρχικής κατάστασης για $n = 5$ ($ARL_0 = 250$).....	81
Πίνακας 2. 17. Τιμές του ARL_1 για το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου αρχικής κατάστασης για $n = 5$ ($ARL_0 = 370$).....	82
Πίνακας 2. 18. Τιμές του ARL_1 για το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου αρχικής κατάστασης για $n = 5$ ($ARL_0 = 500$).....	82

Πίνακας 2. 19. EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου σταθερής κατάστασης: Συνδυασμοί (λ, K) για μέγεθος δείγματος $n = 5$	83
Πίνακας 2. 20. Τιμές του ARL για το Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου με $ARL_0 = 250$ και $k=0.50$	89
Πίνακας 2. 21. Τιμές του ARL για το SS-CUSUM διάγραμμα ελέγχου με $ARL_0 = 250$ και $k=0.50$	94

Πίνακας Σχημάτων

Σχήμα 1.1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart.....	16
Σχήμα 1.2. : \bar{X} διάγραμμα ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1.....	25
Σχήμα 1.3. Cusum διάγραμμα ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 1.2.....	32
Σχήμα 1.4. EWMA διάγραμμα ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 1.2.....	35
Σχήμα 1.5. Καμπύλη ARL για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1.....	37
Σχήμα 2. 1. Το ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου για $\alpha = 0.0054$ (DSC δεδομένα).....	48
Σχήμα 2. 2. X διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ (DSC δεδομένα).....	49
Σχήμα 2. 3. S διάγραμμα ελέγχου ορίων πιθανότητας $\alpha = 0.0027$ (DSC δεδομένα).....	49
Σχήμα 2. 4. Το (X, S) διάγραμμα ελέγχου (DSC δεδομένα).....	50
Σχήμα 2. 5. S και X διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα των DeVor et al. (1992).....	58
Σχήμα 2. 6. Max διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα των DeVor et al. (1992).....	59
Σχήμα 2. 7. Max-EWMA διαγράμματα ελέγχου για $\lambda=0.30$ και $K=2.989$	68
Σχήμα 2. 8. Max-EWMA διαγράμματα ελέγχου για $\lambda=1$ και $K=3.1$	69
Σχήμα 2. 9. Κυκλικό SS-EWMA διαγράμματα ελέγχου για $\lambda = 0.32$ και $K = 4.3011$	76
Σχήμα 2. 10. SS-EWMA διαγράμματα ελέγχου για $\lambda = 0.32$ και $K = 4.3011$	78
Σχήμα 2. 11. Τα διαγράμματα ελέγχου EWMA-SC για την αρχική και την σταθερή κατάσταση.....	85
Σχήμα 2. 1. Τα διαγράμματα ελέγχου EWMA-SC στην σταθερή κατάσταση.....	86
Σχήμα 2. 13. Το πρώτο Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα των DeVor et al.(1992).....	91
Σχήμα 2. 14. Το δεύτερο Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου για τα περικομμένα δεδομένα των DeVor et al. (1992).....	92
Σχήμα 2. 15. Το τρίτο Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου για τα περικομμένα δεδομένα των DeVor et al. (1992).....	93
Σχήμα 2. 16. Το πρώτο SS-CUSUM για τα δεδομένα DeVor et al. (1992).....	97
Σχήμα 2. 17. Το δεύτερο SS-CUSUM για τα δεδομένα DeVor et al. (1992).....	98
Σχήμα 3. 1. Max-Chart, Max-EWMA, Max-CUSUM: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις του a όταν $b = 1$	100
Σχήμα 3. 2. Max-Chart, Max-EWMA, Max-CUSUM: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις του b όταν $a = 0$	101

Σχήμα 3. 3. Max-Chart, Max-EWMA, Max-CUSUM: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $a = 0.5$ και $1 \leq b \leq 2$	102
Σχήμα 3. 4. Max-Chart, Max-EWMA, Max-CUSUM: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $0 \leq a \leq 2$ και $b = 1.5$	103
Σχήμα 3. 5. Ημικυκλικό και SC-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $0 \leq a \leq 2$ και $b = 1$	104
Σχήμα 3. 6. Ημικυκλικό και SC-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $a = 0$ και $1 \leq b \leq 2$	105
Σχήμα 3. 7. Ημικυκλικό και SC-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $a = 0.5$ και $1 \leq b \leq 2$	106
Σχήμα 3. 8. Ημικυκλικό και SC-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις για μετατοπίσεις $0 \leq a \leq 2$ και $b = 1.5$	107
Σχήμα 3. 9. SS-CUSUM και SS-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $0 \leq a \leq 2$ και $b = 1$	108
Σχήμα 3. 10. SS-CUSUM και SS-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις του b όταν $a = 0$	108
Σχήμα 3. 11. SS-CUSUM και SS-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $a = 0.5$ και $0 \leq b \leq 2$	109
Σχήμα 3. 12. SS-CUSUM και SS-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις για μετατοπίσεις $0 \leq a \leq 2$ και $b = 1.5$	110
Σχήμα 3. 13. Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις για μετατοπίσεις $0 \leq a \leq 2$ και $b = 1$	111
Σχήμα 3. 14. Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις για μετατοπίσεις $a = 0$ και $0 \leq b \leq 2$	111
Σχήμα 3. 15. Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις για μετατοπίσεις $a = 0.5$ και $0 \leq b \leq 2$	112
Σχήμα 3. 16. Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις για μετατοπίσεις $a = 0.5$ και $1 \leq b \leq 2$	113

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Διαγράμματα Ελέγχου

1.1 Εισαγωγή

Κάθε άνθρωπος που αποφασίζει να αγοράσει ένα προϊόν (ή υπηρεσία) αντιμετωπίζει το πρόβλημα της επιλογής ανάμεσα σε ομοειδή προϊόντα που ικανοποιούν την ίδια ανάγκη. Η επιλογή του προϊόντος από τον καταναλωτή καθορίζεται κυρίως από δύο παράγοντες, την ποιότητα και την τιμή του.

Η αναγνώριση αυτών των δύο κύριων παραγόντων οι οποίοι καθορίζουν τις αγοραστικές συνήθειες των καταναλωτών οδήγησε τις επιχειρήσεις στην αναζήτηση επιχειρηματικών τακτικών που θα οδηγήσουν στη βέλτιστη δυνατή ποιότητα των παραγόμενων προϊόντων με το ελάχιστο δυνατό κόστος. Η αναζήτηση αυτή οδήγησε σε μια σειρά παρεμβάσεων στο επιχειρηματικό περιβάλλον οι οποίες τελικά διαμόρφωσαν νέα πλαίσια λειτουργίας και διοίκησης των επιχειρήσεων με τελικό στόχο και σκοπό τη διαρκή βελτίωση της ποιότητας.

Σημαντικό ρόλο στις διαδικασίες αυτές κατέχει ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας (*Statistical Quality Control*). Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελεί την παλαιότερη και γνωστότερη μέθοδο ελέγχου παραγωγικών διεργασιών για τη βελτίωση της ποιότητας των παραγόμενων προϊόντων. Ένας από τους βασικούς στόχους του είναι η έγκαιρη ανακάλυψη μη συμμορφωμένων με τις προδιαγραφές παραγόμενων προϊόντων η οποία σηματοδοτεί τη λήψη διορθωτικών ενεργειών για την απομάκρυνση των αιτιών που είναι υπεύθυνες για τις αποκλίσεις, συμβάλλοντας έτσι στη διατήρηση της ποιότητας των προϊόντων. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας επηρεάζει σημαντικά αποφάσεις σχετικές με τις προδιαγραφές, την παραγωγή και τον έλεγχο των παραγόμενων προϊόντων μιας επιχείρησης.

Ο Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας αποτελείται από ένα σύνολο μεθόδων ανάλυσης στατιστικών δεδομένων, τα οποία κατανέμονται σε τρία βασικά υποσύνολα που το καθένα περιέχει στατιστικές μεθόδους προσανατολισμένες σε διαφορετικές φάσεις της παραγωγικής διεργασίας. Τα τρία υποσύνολα είναι τα ακόλουθα:

1. Σχεδιασμός και Ανάλυση Πειραμάτων (Design of Experiments)
2. Στατιστικός Έλεγχος Διεργασιών (Statistical Process Control)
3. Δειγματοληψία Αποδοχής (Acceptance Sampling)

Στην παρούσα εργασία θα εστιάσουμε μόνο στον Στατιστικό Έλεγχο Διεργασιών που αποσκοπεί στην ανακάλυψη αλλαγών στη μεταβλητότητα της παραγωγικής διεργασίας.

Η μεταβλητότητα μίας διεργασίας μπορεί να κατηγοριοποιηθεί σε δυο κλάσεις, την ειδική αιτία μεταβλητότητας και την φυσική αιτία μεταβλητότητας. Σε κάθε παραγωγική διεργασία ανεξάρτητα από το πόσο καλά σχεδιασμένη είναι και το πόσο προσεκτικά επιβλέπεται και συντηρείται, θα υπάρχει πάντα μια μορφή φυσικής μεταβλητότητας που θα τη συνοδεύει. Η ειδική αιτία μεταβλητότητας είναι η μεταβλητότητα στην διεργασία η οποία ευθύνεται από αλλαγές σε διάφορους παράγοντες της παραγωγικής διαδικασίας όπως φθορές μηχανών, ανειδίκευτο προσωπικό, διαφορετικές πρώτες ύλες, κ.λπ. Η διεργασία θεωρείται ότι είναι εντός στατιστικού ελέγχου αν υπάρχει μόνο η φυσική μεταβλητότητα και η διεργασία θεωρείται εκτός στατιστικού ελέγχου αν υπάρχει ειδική αιτία μεταβλητότητας. Ο κύριος στόχος του Στατιστικού Ελέγχου Διεργασιών είναι η ανίχνευση της παρουσίας ειδικών αιτιών μεταβλητότητας ώστε να παρθούν σωστές κινήσεις για να τις εξαλείψουμε. Αυτό το στόχο υπηρετούν τα διαγράμματα ελέγχου, στο να μπορούν δηλαδή να εντοπίζουν διεργασίες με παρουσία μόνο φυσική μεταβλητότητα και διεργασίες όπου παρουσιάζεται ειδική αιτία μεταβλητότητας.

Τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart, που είναι τα πρώτα που εμφανίστηκαν ιστορικά, έχουν κάποιες αδυναμίες. Πρώτον, λειτουργούν αποτελεσματικά αν η κατανομή του ποιοτικού χαρακτηριστικού είναι κανονική και οι παρατηρήσεις είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανομημένες. Σε κάποιες περιπτώσεις αυτό δεν ισχύει και τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart δεν είναι κατάλληλα. Δεύτερον, τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart δεν είναι αποτελεσματικά στο να εντοπίζουν μικρές μετατοπίσεις στη διεργασία. Τα διαγράμματα της νεότερης γενιάς, τα CUSUM και τα EWMA διαγράμματα ελέγχου, δεν έχουν αυτή την αδυναμία στις μικρές μετατοπίσεις, αλλά δεν είναι το ίδιο αποτελεσματικά στο να εντοπίζουν μεγάλες μετατοπίσεις. Ειδικότερα τα EWMA διαγράμματα ελέγχου είναι ανθεκτικά στην παραβίαση της κανονικότητας των

δεδομένων. Τέλος, σε κάποιες περιπτώσεις η μετατόπιση μπορεί να συμβεί και στο μέσο και στην τυπική απόκλιση και σε αυτή την περίπτωση χρειάζονται δύο διαγράμματα ελέγχου, άλλο για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και άλλο για την τυπική απόκλιση.

Ο κύριος στόχος αυτής της εργασίας είναι η μελέτη διαγραμμάτων ελέγχου τα οποία ταυτόχρονα παρακολουθούν και το μέσο και τη μεταβλητότητα της διεργασίας απεικονίζοντας μόνο μια στατιστική συνάρτηση σε αυτά. Αυτό τα διαγράμματα είναι ικανά στο να εντοπίζουν γρήγορα και μικρές και μεγάλες μετατοπίσεις στο μέσο και στην μεταβλητότητα στη διεργασία.

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν εν συντομία τα κλασικά διαγράμματα ελέγχου Shewhart, Cusum και EWMA, όπως και η βασική θεωρία των διαγραμμάτων ελέγχου. Στα επόμενα δύο κεφάλαια θα παρουσιαστούν τα βασικά αποτελέσματα που αφορούν τα συνδυασμένα διαγράμματα ελέγχου που είναι και ο στόχος της παρούσας εργασίας

1.2 Περιγραφή και χρήση ενός διαγράμματος ελέγχου

Σε μία παραγωγική διεργασία μας ενδιαφέρει η παρακολούθηση της συμπεριφοράς μιας κρίσιμης ποσότητας ενός χαρακτηριστικού X το οποίο είναι τυχαία μεταβλητή, δηλαδή ένα χαρακτηριστικό των προϊόντων που παράγονται. Η διαδικασία παρακολούθησης αυτής της ποσότητας βασίζεται σε μετρήσεις του χαρακτηριστικού X , όπως προκύπτουν από την επιλογή τυχαίων δειγμάτων προϊόντων από την παραγωγή σε διαφορετικές χρονικές στιγμές στα οποία αντιστοιχούν τυχαία δείγματα τιμών του χαρακτηριστικού X έστω τα $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$. Συνεπώς χρησιμοποιώντας τα τυχαία δείγματα $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ υπολογίζουμε την τιμή $W_t = g(\mathbf{X}_t)$ ($t = 1, 2, \dots$) μιας κατάλληλης στατιστικής συνάρτησης που εκτιμά την κρίσιμη ποσότητα που μας ενδιαφέρει. Συνεπώς, η διαχρονική παρακολούθηση της συμπεριφοράς της κρίσιμης ποσότητας επιτυγχάνεται με την παρακολούθηση των τιμών που λαμβάνει η στατιστική συνάρτηση W στα διάφορα δείγματα.

Ας υποθέσουμε ότι ενδιαφερόμαστε να παρακολουθήσουμε τη συμπεριφορά της μέσης τιμής διαμέτρου X των κυλίνδρων που παράγει μια μηχανή. Λαμβάνουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n ($n > 1$) από την παραγωγή της μηχανής σε διαφορετικά χρονικά διαστήματα και χρησιμοποιούμε την στατιστική συνάρτηση $W_t = g(\mathbf{X}_t) = (X_{t1} + X_{t2} + \dots + X_{tn})/n$, η οποία είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια του μέσου για την παρακολούθηση

της συμπεριφοράς της μέσης τιμής. Ένα τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart είναι μια γραφική παράσταση με την ακόλουθη μορφή.



Σχήμα 1. 1. Τυπικό διάγραμμα ελέγχου Shewhart

Στο παραπάνω διάγραμμα παρατηρούμε ότι όλες οι τιμές W_t είναι εντός των ορίων ελέγχου το οποίο σημαίνει ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Επίσης το σχήμα έχει κεντρική γραμμή η οποία παριστάνει το μέσο επίπεδο της διεργασίας και συνήθως είναι η μέση τιμή της W όπως προκύπτει από την λειτουργία μιας εντός ελέγχου διεργασίας. Στην περίπτωση που τιμές της W_t βρεθούν εκτός των ορίων ελέγχου τότε η διεργασία θεωρείται ότι είναι εκτός ελέγχου και θα πρέπει να ελέγξουμε για ειδικές αιτίες μεταβλητότητας. Επιπλέον, σε ένα διάγραμμα ελέγχου δεν ελέγχουμε μόνο αν τα σημεία είναι εντός των ορίων ελέγχου αλλά και την περίπτωση που όλα τα σημεία του διαγράμματος συμπεριφέρονται με ένα συστηματικό ή μη τυχαίο τρόπο. Ακόμη και σε αυτή την περίπτωση θεωρούμε ότι υπάρχει ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου χρησιμοποιείται συνήθως το μοντέλο ορίων σίγμα (sigma limits), το οποίο παρουσιάζεται στο παρακάτω πλαίσιο.

Μοντέλο ορίων L σίγμα
$UCL = \mu_W + L\sigma_W$
$CL = \mu_W$
$LCL = \mu_W - L\sigma_W$

Όπου τα μ_W και σ_W δηλώνουν τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της στατιστικής συνάρτησης W που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου. Ο αριθμός L δηλώνει την απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή σε μονάδες τυπικής απόκλισης. Όταν $L=3$ τότε αναφερόμαστε για όρια ελέγχου τριών σίγμα (3σ). Για μεγάλες τιμές του L η απόσταση των ορίων ελέγχου από την κεντρική γραμμή μεγαλώνει και έτσι μειώνεται η πιθανότητα να βρεθεί ένα σημείο του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου. Σε αναλογία με την ορολογία που χρησιμοποιείται στους ελέγχους στατιστικών υποθέσεων, λέμε ότι μειώνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου I (ή ρίσκο α), αλλά ταυτόχρονα αυξάνεται η πιθανότητα του σφάλματος τύπου II (ή ρίσκο β). Για μικρές τιμές του L έχουμε τα αντίθετα αποτελέσματα.

Εκτός από το μοντέλο ορίων σίγμα για την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου υπάρχει και το μοντέλο ορίων πιθανότητας που παρουσιάζεται στο ακόλουθο πλαίσιο όταν η στατιστική συνάρτηση W έχει κανονική κατανομή (το w_α συμβολίζει το άνω α -ποσοστιαίο σημείο της W).

Μοντέλο ορίων πιθανότητας α
$UCL = w_{\alpha/2} = \mu_W + z_{\alpha/2}\sigma_W$
$CL = w_{0.5} = \mu_W$
$LCL = w_{1-\alpha/2} = \mu_W - z_{\alpha/2}\sigma_W$

1.3 Διαγράμματα Φάσης I και Φάσης II

Σε μία παραγωγική διεργασία υπάρχουν δύο φάσεις για τον έλεγχο της ο οποίος γίνεται με την χρήση διαγραμμάτων ελέγχου. Παρακάτω έχουμε αναλύσει τις φάσεις:

- **Φάση I:** Σε αυτή τη φάση συλλέγεται ένα σύνολο δεδομένων από τη διεργασία που αναλύονται όλα μαζί ταυτόχρονα, για να καθοριστεί αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο συλλογής των δεδομένων. Σε αυτή την φάση

τα διαγράμματα ελέγχου βοηθούν τον διαχειριστή της διαδικασίας να “φέρει” τη διεργασία εντός στατιστικού ελέγχου με τη χρησιμοποίηση δοκιμαστικών ορίων ελέγχου. Όταν αυτό επιτευχθεί τα διαγράμματα ελέγχου που προκύπτουν (κεντρική γραμμή και όρια ελέγχου) είναι κατάλληλα για την παρακολούθηση της μελλοντικής συμπεριφοράς της διεργασίας (Φάση II). Αυτή η χρήση των διαγραμμάτων ελέγχου αναφέρεται και ως αναδρομική (retrospective). Γενικά πολύ περισσότερες δράσεις και σκέψεις εξελίσσονται κατά την διάρκεια αυτής της φάσης πλην της απλής διαγραμματοποίησης κάποιων δεδομένων. Ο διαχειριστής της διαδικασίας μελετά σε βάθος τη διεργασία και αυτό γιατί δεν είναι εύκολο να αποφασίσει αν η διεργασία ήταν εντός ή εκτός στατιστικού ελέγχου κατά τη χρονική περίοδο που συλλέχθηκαν τα δεδομένα.

- **Φάση II:** Σε αυτή τη φάση τα διαγράμματα ελέγχου χρησιμοποιούνται προκειμένου να ελέγχουμε συνεχώς αν η διαδικασία παραμένει εντός ελέγχου. Στη φάση αυτή ο διαχειριστής έχει στα χέρια του ένα πολύτιμο εργαλείο μέσω του οποίου είναι δυνατόν να παρακολουθεί συνεχώς την παραγωγική διεργασία και να ανιχνεύει εγκαίρως μια πιθανή αλλαγή στο μέσο επίπεδο των χαρακτηριστικών που καθορίζουν την ποιότητα του παραγόμενου προϊόντος. Δηλαδή σε κάθε χρονική περίοδο που ένα δείγμα λαμβάνεται από την διεργασία ο διαχειριστής δίνει άμεσα μια απάντηση στο ερώτημα “παραμένει η διεργασία εντός ελέγχου;”. Σε αυτή την φάση ο διαχειριστής αδιαφορεί για τον τρόπο με τον οποίο το μέσο επίπεδο της διεργασίας είχε εκτιμηθεί, ή αν αυτό ήταν εκ των προτέρων γνωστό.

1.4 Ταξινόμηση διαγραμμάτων ελέγχου

Τα διαγράμματα ελέγχου έχουν διάφορα χαρακτηριστικά και μπορούν να ταξινομηθούν με βάση αυτά τα χαρακτηριστικά σε διάφορες κατηγορίες.

- 1) Ανάλογα με το είδος της μεταβλητής που περιγράφει το ποιοτικό χαρακτηριστικό έχουμε διαγράμματα ελέγχου για **μεταβλητές** (control charts for variables) και διαγράμματα ελέγχου για **ιδιότητες** (control charts for attributes)
- 2) Εάν το μέγεθος των δειγμάτων μετρήσεων είναι μεγαλύτερο της μονάδας αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **δείγματα** ή **ομάδες** (control charts for rational subgroups), ενώ αν λαμβάνονται δείγματα μετρήσεων μεγέθους ένα τότε

αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **μεμονωμένες παρατηρήσεις** (control charts for individual observations).

- 3) Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται σε κάθε χρονική στιγμή t είναι εξαρτημένες από τις μετρήσεις που λαμβάνονται σε προηγούμενες χρονικές στιγμές τότε αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **αυτοσυσχετιζόμενες διεργασίες** (control charts for autocorrelated processes), ενώ αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται σε κάθε χρονική στιγμή t είναι ανεξάρτητες από τις μετρήσεις που λαμβάνονται στο χρόνο $t - 1$ αναφερόμαστε σε διαγράμματα ελέγχου για **ασυσχέτιστες διεργασίες** (control charts for uncorrelated processes).
- 4) Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται αφορούν ένα ποιοτικό χαρακτηριστικό αναφερόμαστε σε **μονομεταβλητά** διαγράμματα ελέγχου, ενώ αν οι μετρήσεις αναφέρονται σε περισσότερα χαρακτηριστικά αναφερόμαστε σε **πολυμεταβλητά** διαγράμματα ελέγχου.
- 5) Αν οι μετρήσεις που λαμβάνονται ακολουθούν μια γνωστή κατανομή τότε αναφερόμαστε σε **παραμετρικά** διαγράμματα ελέγχου, ενώ στην αντίθετη περίπτωση αναφερόμαστε σε **μη-παραμετρικά** διαγράμματα ελέγχου.
- 6) Ανάλογα με την στατιστική θεωρία που στηρίζει την κατασκευή ενός διαγράμματος ελέγχου διακρίνουμε τις εξής κατηγορίες:
 - a. Διαγράμματα ελέγχου τύπου **Shewhart** (Shewhart type control charts)
 - b. Διαγράμματα ελέγχου τύπου **Cusum** (Cumulative Sum - CUSUM type control charts).
 - c. Διαγράμματα ελέγχου τύπου **EWMA** (Exponentially weighted moving average-EWMA type control charts)).

1.5 Εκτίμηση της μέσης τιμής και της διασποράς

1.5.1 Η περίπτωση των μεμονωμένων παρατηρήσεων

Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από ένα πληθυσμό με άγνωστη μέση τιμή μ και άγνωστη διακύμανση σ^2 . Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της μέσης τιμής είναι ο δειγματικός μέσος:

$$\hat{\mu} = \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$$

και μια αμερόληπτη εκτιμήτρια της διακύμανση είναι η δειγματική διακύμανση

$$\sigma^2 = S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Αν υποθέσουμε τώρα ότι το τυχαίο δείγμα προέρχεται από κανονικό πληθυσμό $N(\mu, \sigma^2)$, μπορούμε να βρούμε τις ακόλουθες αμερόληπτες εκτιμήτριες της τυπικής απόκλισης σ ,

$$\hat{\sigma} = \frac{R}{d_2} = \frac{X_{(n)} - X_{(1)}}{d_2}$$

και

$$\hat{\sigma} = \frac{S}{c_4} = \frac{\sqrt{S^2}}{c_4}.$$

Επίσης

$$\sigma_R = \sqrt{V(R)} = \sigma d_3, \quad \sigma_S = \sqrt{V(S)} = \sigma \sqrt{(1 - c_4^2)}.$$

Οι ποσότητες d_2, d_3 και c_4 είναι σταθερές που εξαρτώνται από το μέγεθος του δείγματος και οι τιμές δίνονται σε ειδικούς πίνακες. Επίσης

1.5.2 Η περίπτωση των δειγμάτων

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε στη διάθεση μας m τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα από έναν κανονικό πληθυσμό $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ με άγνωστη μέση τιμή και διακύμανση, έστω τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, για $1 \leq i \leq m$.

- **Εκτίμηση της μέσης τιμής**

Έστω $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_m$ οι δειγματικοί μέσοι των m δειγμάτων. Θέτουμε

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m} = \frac{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij}}{mn}.$$

Η ποσότητα $\bar{\bar{X}}$ ακολουθεί κατανομή $N(\mu, \frac{\sigma^2}{mn})$ και χρησιμοποιείται ως εκτιμήτρια της ποσότητας μ (αμερόληπτη και συνεπής εκτιμήτρια του μ), δηλαδή $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}}$.

- **Εκτίμηση της διακύμανσης σ (μέθοδος R)**

Έστω R_1, R_2, \dots, R_m τα εύρη των m δειγμάτων, δηλαδή

$$R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτουμε

$$\bar{R} = \frac{R_1 + R_2 + \dots + R_m}{m}$$

Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ είναι η στατιστική συνάρτηση

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}$$

- **Εκτίμηση της διακύμανσης σ (Μέθοδος S)**

Έστω S_i η δειγματική τυπική απόκλιση του i δείγματος, δηλαδή

$$S_i = \sqrt{S_i^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτουμε

$$\bar{S} = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_m}{m}$$

Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ είναι η στατιστική συνάρτηση

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}$$

- **Εκτίμηση της διακύμανσης σ (Μέθοδος S^2)**

Έστω $S_1^2, S_2^2, \dots, S_m^2$ οι δειγματικές διασπορές των m δειγμάτων, δηλαδή

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Θέτουμε

$$\bar{S}^2 = \frac{S_1^2 + S_2^2 + \dots + S_m^2}{m}$$

Μια αμερόληπτη εκτιμήτρια του σ είναι η στατιστική συνάρτηση

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}$$

η οποία αν και δεν είναι αμερόληπτη, χρησιμοποιείται αρκετές φορές (λόγω του ότι έχει μικρότερο μέσο τετραγωνικό σφάλμα από την \bar{S}/c_4).

1.6 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τη μέση τιμή

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τη μέση τιμή στην περίπτωση των δειγμάτων, τόσο στη Φάση I όσο και στη Φάση II.

1.6.1 Διάγραμμα ελέγχου Φάσης II

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με γνωστές παραμέτρους και έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$, ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από το χαρακτηριστικό X . Θέτουμε

$$\bar{X}_i = \frac{X_{i1} + X_{i2} + \dots + X_{in}}{n}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Το διάγραμμα ελέγχου, με όρια ελέγχου 3σ , που χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση του μέσου της διεργασίας είναι το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου στο οποίο απεικονίζονται οι δειγματικές μέσες τιμές \bar{X}_i ($i = 1, 2, \dots$). Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο.

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = \mu + A\sigma$
$CL = \mu$
$LCL = \mu - A\sigma$

όπου $A = \frac{3}{\sqrt{n}}$

1.6.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I

Σε αυτή την περίπτωση ουσιαστικά η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση είναι άγνωστες οπότε πρέπει να εκτιμηθούν. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε m ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα, τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ $i = 1, 2, \dots, m$ για να εκτιμήσουμε τις ποσότητες μ και σ , και υποθέτουμε ότι η επιλογή των προκαταρκτικών δειγμάτων έγινε όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου. Οι εκτιμήσεις των παραμέτρων προκύπτουν συνήθως από 20 έως 25 προκαταρκτικά δείγματα μεγέθους 4 έως 6 το καθένα.

Για την εκτίμηση της μέσης τιμής χρησιμοποιείται η στατιστική συνάρτηση (αμερόληπτη εκτιμήτρια)

$$\mu = \bar{\bar{X}}$$

και για την εκτίμηση του σ έχουμε τις τρεις ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}.$$

Συνεπώς, ανάλογα με την στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιούμε για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης προκύπτει διαφορετικό διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμή. Σε κάθε περίπτωση στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζονται οι δειγματικές μέσες τιμές \bar{X}_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Έτσι έχουμε τα τρία ακόλουθα διαγράμματα ελέγχου:

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ Μέθοδος R
$UCL = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R}$

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ Μέθοδος S
$UCL = \bar{\bar{X}} + A_3 \bar{S}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A_3 \bar{S}$

\bar{X} διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ Μέθοδος S²
$UCL = \bar{\bar{X}} + A \sqrt{\bar{S}^2}$ $CL = \bar{\bar{X}}$ $LCL = \bar{\bar{X}} - A \sqrt{\bar{S}^2}$

Στα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου έχουμε ότι

$$A_2 = \frac{3}{d_2\sqrt{n}}, \quad A_3 = \frac{3}{c_4\sqrt{n}}, \quad A = \frac{3}{\sqrt{n}}.$$

- **Εφαρμογή**

Στον ακόλουθο πίνακα παρουσιάζονται οι μετρήσεις ενός χαρακτηριστικού που περιγράφεται από μία συνεχή τυχαία μεταβλητή που δηλώνει την εσωτερική διάμετρος μιας στεφάνης ενός εμβόλου όπως προέκυψαν από την επιλογή 10 τυχαίων δειγμάτων μεγέθους $n = 2$ από την παραγωγή.

Πίνακας 1. 1. Δεδομένα για τη διάμετρο της στεφάνης του εμβόλου

Δείγμα	1 ^η Μέτρηση	2 ^η Μέτρηση	Μέση τιμή
1	9.84422	9.62656	9.73539
2	9.80879	9.93767	9.87323
3	10.50880	9.37680	9.94280
4	9.94629	10.2645	10.10540
5	9.55296	10.09280	9.82288
6	9.58023	9.71789	9.64906
7	9.40171	10.15210	9.77691
8	9.59285	9.95854	9.77570
9	9.54142	9.62176	9.58159
10	10.66530	10.23660	10.45095

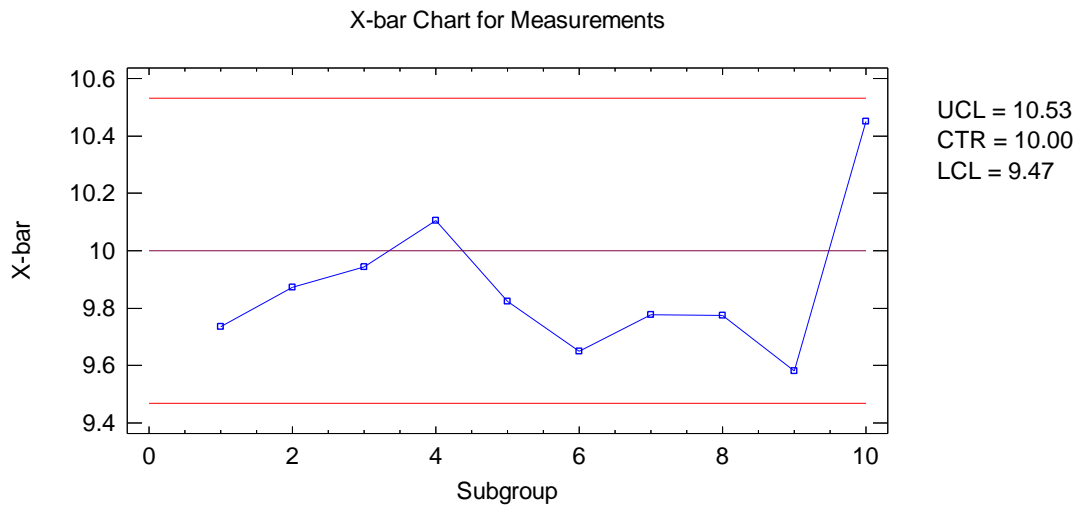
Έστω ότι υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας, η κατανομή του χαρακτηριστικού X είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή $\mu = 10$ και τυπική απόκλιση $\sigma = 0.25$.

Για το \bar{X} διάγραμμα ελέγχου Φάσης II με όρια ελέγχου 3σ έχουμε

$$UCL = \mu_W + 3\sigma_W = 10 + 3 \frac{0.25}{\sqrt{2}} = 10.5303$$

$$CL = \mu_W = 10$$

$$LCL = \mu_W - 3\sigma_W = 10 - 3 \frac{0.25}{\sqrt{2}} = 9.4697$$



Σχήμα 1. 2: \bar{X} διάγραμμα ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1

Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία του διαγράμματος βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου οπότε μπορούμε να ισχυριστούμε ότι ο μέσος δεν έχει μετατοπιστεί και επομένως η διεργασία είναι εντός ελέγχου.

1.7 Διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τη διασπορά

Σε αυτή την ενότητα θα παρουσιάσουμε τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart για τη διασπορά στην περίπτωση των δειγμάτων, τόσο στη Φάση I όσο και στη Φάση II.

1.7.1 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης II

Ας υποθέσουμε ότι η κατανομή του χαρακτηριστικού X των προϊόντων που παράγονται ακολουθεί κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$ με γνωστές παραμέτρους και έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$, $i \geq 1$, ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από το χαρακτηριστικό X . Για την παρακολούθηση της διασποράς έχουν προταθεί τρία διαφορετικά διαγράμματα ελέγχου ανάλογα με τη στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα.

Αρχικά θέτουμε

$$W_i = R_i = X_{i(n)} - X_{i(1)}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Είναι γνωστό ότι $\mu_{R_i} = E(R) = \sigma d_2$ και $\sigma_{R_i} = \sqrt{V(R_t)} = \sigma d_3$ όπου οι ποσότητες d_2 και d_3 εξαρτώνται μόνο από το μέγεθος του δείγματος. Το διάγραμμα ελέγχου, με όρια ελέγχου 3σ , που χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση της διασποράς είναι το R διάγραμμα ελέγχου στο οποίο απεικονίζονται οι δειγματικές εκτάσεις R_i ($i = 1, 2, \dots$). Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο.

R διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = D_2\sigma$
$CL = d_2\sigma$
$LCL = D_1\sigma$

Στο παραπάνω πλαίσιο $D_1 = d_2 - 3d_3$ και $D_2 = d_2 + 3d_3$. Επειδή $D_1 < 0$ για $n \leq 6$, σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε $D_1 = 0$.

Ένα εναλλακτικό διάγραμμα προκύπτει θέτοντας

$$W_i = S_i = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Είναι γνωστό ότι $\mu_{S_i} = E(S_i) = \sigma c_4$ και $\sigma_{S_i} = \sqrt{V(S_i)} = \sigma \sqrt{1 - c_4^2}$. Το διάγραμμα ελέγχου, με όρια ελέγχου 3σ , που χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση της διασποράς είναι το S διάγραμμα ελέγχου στο οποίο απεικονίζονται οι δειγματικές τυπικές αποκλίσεις S_i ($i = 1, 2, \dots$). Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο.

S διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = B_6\sigma$
$CL = c_4\sigma$
$LCL = B_5\sigma$

Στο παραπάνω πλαίσιο $B_6 = c_4 + 3\sqrt{1 - c_4^2}$ και $B_5 = c_4 - 3\sqrt{1 - c_4^2}$. Επειδή $B_5 < 0$ για $n \leq 5$ σε αυτές τις περιπτώσεις θέτουμε $B_5 = 0$.

Το τρίτο διάγραμμα χρησιμοποιεί τη στατιστική συνάρτηση

$$S_i^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (X_{ij} - \bar{X}_i)^2, \quad i = 1, 2, \dots$$

Γνωρίζουμε ότι $E(S_i^2) = \sigma^2$ και $\frac{(n-1)S_i^2}{\sigma^2} \sim \chi_{n-1}^2$, οπότε

$$P\left(\frac{(n-1)S_i^2}{\sigma^2} \chi_{n-1; 1-\frac{\alpha}{2}}^2 \leq S_i^2 \leq \frac{(n-1)S_i^2}{\sigma^2} \chi_{n-1; \alpha/2}^2\right) = 1 - \alpha$$

Το διάγραμμα ελέγχου, με όρια ελέγχου πιθανότητας α , που χρησιμοποιείται για την παρακολούθηση της διασποράς είναι το S^2 διάγραμμα ελέγχου στο οποίο απεικονίζονται οι δειγματικές διασπορές S_i^2 ($i = 1, 2, \dots$). Τα όρια ελέγχου και η κεντρική γραμμή του διαγράμματος δίνονται στο ακόλουθο πλαίσιο.

S^2 διάγραμμα ελέγχου
Φάση II - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$UCL = \frac{(n-1)}{\sigma^2} \chi_{n-1; \alpha/2}^2$ $CL = \sigma^2$ $LCL = \frac{(n-1)}{\sigma^2} \chi_{n-1; 1-\alpha/2}^2$

1.7.2 Διαγράμματα ελέγχου Φάσης I

Σε αυτή την περίπτωση ουσιαστικά η τυπική απόκλιση είναι άγνωστη οπότε πρέπει να εκτιμηθεί. Για το σκοπό αυτό παίρνουμε m ανεξάρτητα προκαταρκτικά τυχαία δείγματα μεγέθους n το καθένα, τα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in})$ $i = 1, 2, \dots, m$ για να εκτιμήσουμε την τυπική απόκλιση σ , και υποθέτουμε ότι η επιλογή των προκαταρκτικών δειγμάτων έγινε όταν η διεργασία ήταν εντός ελέγχου.

Για την εκτίμηση της τυπική απόκλισης έχουμε τις τρεις ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις

$$\hat{\sigma} = \frac{\bar{R}}{d_2}, \quad \hat{\sigma} = \frac{\bar{S}}{c_4}, \quad \hat{\sigma} = \sqrt{\bar{S}^2}.$$

Συνεπώς, ανάλογα με την στατιστική συνάρτηση που χρησιμοποιούμε για την εκτίμηση της τυπικής απόκλισης και την αντίστοιχη στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου, προκύπτει διαφορετικό διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση της διασποράς. Έτσι έχουμε τα τρία ακόλουθα διαγράμματα ελέγχου

R διάγραμμα ελέγχου
Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = D_4 \bar{R}$ $CL = \bar{R}$ $LCL = D_3 \bar{R}$

S διάγραμμα ελέγχου
Φάση I - Όρια ελέγχου 3σ
$UCL = B_4 \bar{S}$ $CL = \bar{S}$ $LCL = B_3 \bar{S}$

s² διάγραμμα ελέγχου
Φάση I - Όρια ελέγχου πιθανότητας α
$UCL = \frac{\bar{S}^2}{(n-1)} \chi_{n-1; a/2}^2$ $CL = \bar{S}$ $LCL = B_3 \frac{\bar{S}^2}{(n-1)} \chi_{n-1; 1-a/2}^2$

Στα παραπάνω διαγράμματα ελέγχου έχουμε ότι

$$D_3 = 1 - 3 \frac{d_3}{d_2}, \quad D_4 = 1 + 3 \frac{d_3}{d_2}, \quad B_3 = 1 - \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}, \quad B_4 = 1 + \frac{3}{c_4} \sqrt{1 - c_4^2}.$$

1.8 Διαγράμματα ελέγχου με μνήμη

Στα διαγράμματα ελέγχου που παρουσιάστηκαν στις προηγούμενες παραγράφους απεικονίζονται τιμές που βασίζονται στις μετρήσεις ενός δείγματος (του τρέχοντος) χωρίς να λαμβάνονται υπόψη μετρήσεις από προηγούμενα δείγματα. Για το λόγο αυτό τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart χαρακτηρίζονται ως διαγράμματα ελέγχου χωρίς μνήμη. Τα διαγράμματα ελέγχου Shewhart είναι πολύ χρήσιμα στην ανίχνευση μεγάλων μετατοπίσεων του μέσου, πάνω 1.5σ .

Στην περίπτωση που θέλουμε να εντοπίσουμε μικρές μετατοπίσεις έχουμε μια άλλη κατηγορία διαγραμμάτων τα διαγράμματα ελέγχου με μνήμη. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM, τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA και τα διαγράμματα ελέγχου κινούμενου μέσου (MA). Τα διαγράμματα ελέγχου με μνήμη χρησιμοποιούνται κυρίως στην Φάση II, όταν δηλαδή θέλουμε να παρακολουθούμε συνεχώς τη συμπεριφορά ενός χαρακτηριστικού μιας παραγωγικής διεργασίας, του οποίου οι παράμετροι είναι ήδη γνωστές ή έχουν εκτιμηθεί σε προηγούμενο στάδιο.

Τα διαγράμματα ελέγχου με μνήμη, ονομάζονται έτσι διότι ο σχεδιασμός ενός σημείου στο διάγραμμα ελέγχου βασίζεται σε πληροφορίες που δίνει όχι μόνο το πρόσφατο δείγμα αλλά και προγενέστερα δείγματα. Τις τελευταίες δεκαετίες οι ερευνητές δίνουν μεγάλη βαρύτητα στα διαγράμματα ελέγχου με μνήμη. Τα διαγράμματα αυτά εμφανίζουν πολύ καλές ιδιότητες στην απόδοση τους όσον αφορά την παρακολούθηση της παραγωγικής διεργασίας, και κυριότερα λόγω του ότι ανιχνεύουν γρηγορότερα πολύ μικρές μετατοπίσεις. Στην παρούσα θέση θα αναπτύξουμε ένα πλαίσιο που καλύπτει τα διαγράμματα ελέγχου με μνήμη. Η χρήση των συμβολισμών και των παραδειγμάτων στην παρούσα παράγραφο βασίστηκε στις σημειώσεις του Αντζουλάκου (2010).

1.8.1 Διαγράμματα ελέγχου CUSUM

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μια διεργασία που περιγράφεται από κατανομή με εντός ελέγχου μέσο μ_0 και τυπική απόκλιση σ . Από την διεργασία λαμβάνονται μεμονωμένες παρατηρήσεις $X_t, t \geq 1$, και μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας της μορφής $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$ ($\delta > 0$). Στα διαγράμματα ελέγχου CUSUM, που εισήχθησαν από τον Page (1954), απεικονίζονται ταυτοχρόνως οι δυο ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις

$$S_t^+ = \max[0, X_t - (\mu_0 + K) + S_{t-1}^+], \quad S_0^+ = 0$$

$$S_t^- = \min[0, X_t - (\mu_0 - K) + S_{t-1}^-], \quad S_0^- = 0.$$

Οι τιμές των ποσοτήτων S_0^+ και S_0^- ονομάζονται τιμές εκκίνησης (headstart values). Η ποσότητα $K (\geq 0)$ ονομάζεται τιμή αναφοράς και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$K = \frac{\sigma\delta}{2} = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = k\sigma, \quad k = \delta/2.$$

Η ποσότητα S_t^+ μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0: \mu_1 = \mu_0 \quad \text{έναντι της} \quad H_1^+: \mu = \mu_1 = \mu_0 + \delta\sigma$$

αφού μεγάλες θετικές τιμές της S_t^+ οδηγούν στην αποδοχή της H_1^+ .

Ανάλογα η ποσότητα S_t^- μπορεί να θεωρηθεί κατάλληλη για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0: \mu_1 = \mu_0 \quad \text{έναντι της} \quad H_1^-: \mu = \mu_1 = \mu_0 - \delta\sigma$$

αφού μικρές αρνητικές τιμές της S_t^- οδηγούν στην αποδοχή της H_1^- .

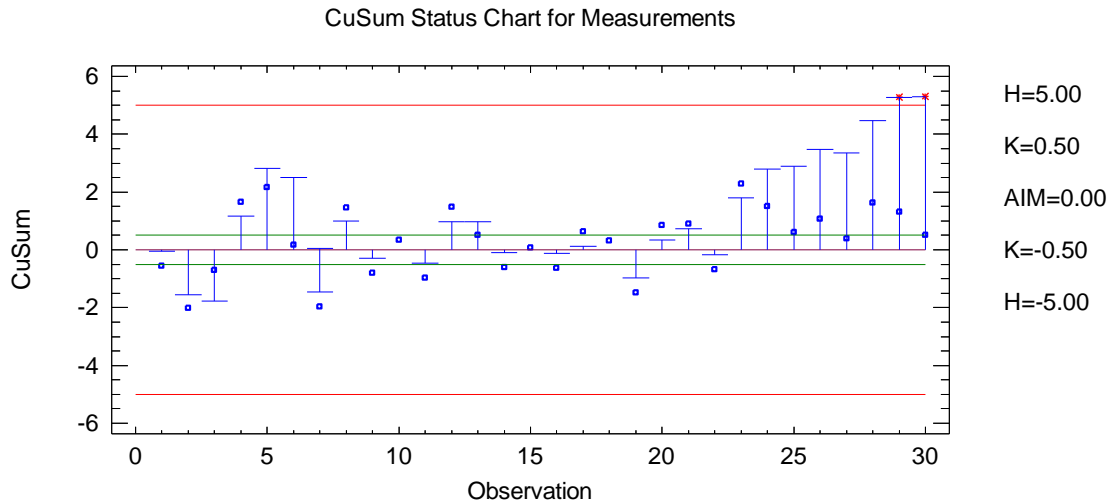
Για το ποια από τις δυο εναλλακτικές υποθέσεις θα αποδεχθούμε ή όχι σε κάθε βήμα της διαδικασίας, η απόφαση θα εξαρτηθεί από το αν ισχύει η σχέση $S_t^+ > H$, ή η σχέση $S_t^- < H$, όπου H μια θετική σταθερά που δίνεται από την σχέση $H = h\sigma$. Η ποσότητα H ονομάζεται διάστημα απόφασης (decision interval). Φυσικά αν μία από τις δύο εναλλακτικές υποθέσεις H_1^+ ή H_1^- γίνει αποδεκτή, τότε θεωρούμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο ή χαμηλότερο επίπεδο, αντίστοιχα.

Για την επίδειξη του διαγράμματος ελέγχου τύπου CUSUM θα χρησιμοποιήσουμε 30 παρατηρήσεις από την κανονική κατανομή (βλ. Montgomery 2005), οι πρώτες 20 παρατηρήσεις ακολουθούν την $N(10,1)$ ενώ οι τελευταίες 10 παρατηρήσεις προέρχονται από την $N(11,1)$. Στον Πίνακα 1.2 παρατίθενται τα δεδομένα αυτά και τα αποτελέσματα για τις ποσότητες S_t^+ και S_t^- για $K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = \frac{|10 - 11|}{2} = 0.5$ και $H = 5$ (επίσης $k = 0.5$ και $h = 5$).

Πίνακας 1. 2: Δεδομένα για την επίδειξη διαγράμματος Cusum: $k = 5, h = 5$

Δείγμα	X_t	$X_t - (\mu_0 + K)$	S_t^+	$X_t - (\mu_0 - K)$	S_t^-
1	9.45	-1.05	0	-0.05	-0.05
2	7.99	-2.51	0	-1.51	-1.56
3	9.29	-1.21	0	-0.21	-1.77
4	11.66	1.16	1.16	2.16	0
5	12.16	1.66	2.82	2.66	0
6	10.18	-0.32	2.5	0.68	0
7	8.04	-2.46	0.04	-1.46	-1.46
8	11.46	0.96	1	1.96	0
9	9.2	-1.3	0	-0.3	-0.3
10	10.34	-0.16	0	0.84	0
11	9.03	-1.47	0	-0.47	-0.47
12	11.47	0.97	0.97	1.97	0
13	10.51	0.01	0.98	1.01	0
14	9.4	-1.1	0	-0.1	-0.1
15	10.08	-0.42	0	0.58	0
16	9.37	-1.13	0	-0.13	-0.13
17	10.62	0.12	0.12	1.12	0
18	10.31	-0.19	0	0.81	0
19	8.52	-1.98	0	-0.98	-0.98
20	10.84	0.34	0.34	1.34	0
21	10.9	0.4	0.74	1.4	0
22	9.33	-1.17	0	-0.17	-0.17
23	12.29	1.79	1.79	2.79	0
24	11.5	1	2.79	2	0
25	10.6	0.1	2.89	1.1	0
26	11.08	0.58	3.47	1.58	0
27	10.38	-0.12	3.35	0.88	0
28	11.62	1.12	4.47	2.12	0
29	11.31	0.81	5.28	1.81	0
30	10.52	0.02	5.3	1.02	0

Για τα δεδομένα του παραπάνω πίνακα έχουμε το ακόλουθο διάγραμμα ελέγχου Cusum.



Σχήμα 1. 3: Cusum διάγραμμα ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 1.2

Από το παραπάνω διάγραμμα προκύπτει ότι $S_{29}^+ > 5$ και συνεπώς η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο επίπεδο.

Στις περιπτώσεις που το μέγεθος δείγματος είναι μεγαλύτερο του 1 χρησιμοποιούμε την μέση τιμή του δείγματος, δηλαδή η ποσότητα X_t θα πρέπει να αντικατασταθεί με την ποσότητα \bar{X}_t και η ποσότητα σ με την ποσότητα $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Έτσι στο δίπλευρο συμμετρικό διάγραμμα ελέγχου τύπου CUSUM απεικονίζονται οι στατιστικές συναρτήσεις

$$S_t^+ = \max[0, \bar{X}_t - (\mu_0 + K) + S_{t-1}^+, \quad S_0^+ = 0$$

$$S_t^- = \max[0, \bar{X}_t - (\mu_0 - K) + S_{t-1}^-, \quad S_0^- = 0$$

όπου

$$K = k \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \quad H = h \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

1.8.2 Διαγράμματα ελέγχου EWMA

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μια διεργασία που περιγράφεται από κατανομή με εντός ελέγχου μέσο μ_0 και τυπική απόκλιση σ . Από την διεργασία λαμβάνονται μεμονωμένες παρατηρήσεις $X_t, t \geq 1$, και μας ενδιαφέρει να ανιχνεύσουμε μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας της μορφής $\mu_1 = \mu_0 \pm \delta\sigma$ ($\delta > 0$). Στα διαγράμματα ελέγχου εκθετικά σταθμισμένου κινούμενου μέσου ή αλλιώς διαγράμματα ελέγχου EWMA (Exponentially Weighted Moving Average), τα οποία εισήχθησαν από τον Roberts (1959), απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση

$$Z_t = (1 - \lambda)Z_{t-1} + \lambda X_t, t \geq 1, \quad 0 < \lambda \leq 1$$

Για την εκκίνηση του παραπάνω σχεδίου απαιτείται ο καθορισμός της τιμής εκκίνησης Z_0 , η οποία συνήθως λαμβάνεται ίση μ_0 . Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τον παραπάνω τύπο παίρνουμε:

$$Z_t = (1 - \lambda)^t Z_0 + \lambda \sum_{i=1}^t (1 - \lambda)^{t-i} X_i, \quad t \geq 1.$$

Η μέση τιμή και η διακύμανση της στατιστικής συνάρτησης Z_t είναι

$$\mu_{Z_t} = \mu_0$$

και

$$\sigma_{Z_t}^2 = \sigma^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2t}].$$

Επομένως, συνυπολογίζοντας και την φιλοσοφία κατασκευής ενός διαγράμματος ελέγχου τύπου Shewhart, στο διάγραμμα ελέγχου τύπου EWMA απεικονίζεται η τιμή της στατιστικής συνάρτησης Z_t και τα όρια ελέγχου δίνονται από τις σχέσεις.

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2t}]},$$

$$CL = \mu_0,$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda} [1 - (1 - \lambda)^{2t}]}.$$

Παρατηρούμε ότι τα όρια ελέγχου του παραπάνω διαγράμματος είναι μεταβλητά. Ωστόσο καθώς το t αυξάνει η ποσότητα $(1 - \lambda)^{2t}$ τείνει στο μηδέν σχετικά γρήγορα, οπότε τα όρια ελέγχου σταθεροποιούνται στις ακόλουθες τιμές,

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}, \quad LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}}.$$

Αν και η μέθοδος των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου EWMA αναπτύχθηκε για μεμονωμένες παρατηρήσεις μπορεί να τροποποιηθεί άμεσα έτσι ώστε να καλύψει και την περίπτωση όπου έχουμε δείγματα. Σε αυτήν την περίπτωση η ποσότητα X_t θα πρέπει να αντικατασταθεί με την ποσότητα \bar{X}_t και η τυπική απόκλιση σ με την ποσότητα σ/\sqrt{n} . Συνεπώς στο διάγραμμα ελέγχου απεικονίζεται η ποσότητα

$$Z_t = (1 - \lambda)Z_{t-1} + \lambda \bar{X}_t, \quad 0 < \lambda \leq 1,$$

με όρια ελέγχου

$$UCL = \mu_0 + L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}]},$$

$$CL = \mu_0,$$

$$LCL = \mu_0 - L \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{\lambda}{2-\lambda} [1 - (1-\lambda)^{2t}]}.$$

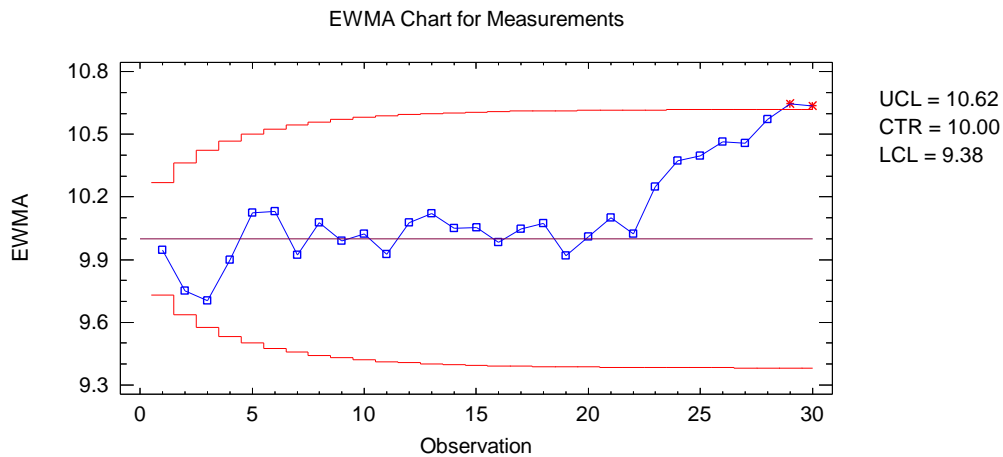
Τα διαγράμματα ελέγχου τύπου EWMA χρησιμοποιούνται, όπως και τα διαγράμματα ελέγχου τύπου CUSUM, όταν θέλουμε να εντοπίσουμε μικρές μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας. Το πλεονέκτημα των διαγραμμάτων ελέγχου EWMA έναντι των CUSUM είναι ότι δεν είναι ευαίσθητα στην υπόθεση της κανονικότητας των παρατηρήσεων και για το λόγο αυτό είναι ιδανικά στην περίπτωση που έχουμε μεμονωμένες παρατηρήσεις.

Για την επίδειξη ενός διαγράμματος EWMA θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του Πίνακα 1.2 με $Z_0 = \mu_0 = 10$, $\sigma = 1$, $\lambda = 0.1$ και $L = 2.7$. Στον ακόλουθο πίνακα δίνονται οι τιμές της στατιστικής συνάρτησης Z_t που θα απεικονιστεί στο διάγραμμα ελέγχου EWMA.

Πίνακας 1. 3. Δεδομένα για την επίδειξη διαγράμματος EWMA: $\lambda = 0.1$, $L = 2.7$

Δείγμα	X_t	Z_t	Δείγμα	X_t	Z_t
1	9.45	9.45	16	9.37	9.98426
2	7.99	9.495	17	10.62	10.0478
3	9.29	9.0355	18	10.31	10.074
4	11.66	9.992	19	8.52	9.9186
5	12.16	10.253	20	10.84	10.0108
6	10.18	10.307	21	10.9	10.0997
7	8.04	9.2167	22	9.33	10.0227
8	11.46	10.755	23	12.29	10.2495
9	9.2	9.8796	24	11.5	10.3745
10	10.34	10.232	25	10.6	10.3971
11	9.03	9.2384	26	11.08	10.4654
12	11.47	10.9785	27	10.38	10.4568
13	10.51	10.1216	28	11.62	10.5731
14	9.4	10.0495	29	11.31	10.6468
15	10.08	10.0525	30	10.52	10.6341

Το διάγραμμα ελέγχου EWMA είναι το ακόλουθο.



Σχήμα 1. 4. EWMA διάγραμμα ελέγχου Φάσης II για τα δεδομένα του Πίνακα 1.2

Στο συγκεκριμένο διάγραμμα παρατηρούμε ότι μετά το 23^ο δείγμα διαφαίνεται μια μετατόπιση του μέσου της διεργασίας σε υψηλότερο επίπεδο η οποία γίνεται αντιληπτή στην 29^ο δείγμα όπου έχουμε ένδειξη για εκτός ελέγχου διεργασία. Σημειώνουμε ότι στο διάγραμμα σημειώνονται τα σταθεροποιημένα όρια ελέγχου ($t \rightarrow \infty$),

$$UCL = \mu_0 + L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} = 10 + (2.7)(1) \sqrt{\frac{0.1}{2 - 0.1}} = 10.62,$$

$$LCL = \mu_0 - L\sigma \sqrt{\frac{\lambda}{2 - \lambda}} = 10 - (2.7)(1) \sqrt{\frac{0.1}{2 - 0.1}} = 9.38.$$

1.9 Μέσο μήκος ροής (ARL)

Μια βασική έννοια που σχετίζεται με τα διαγράμματα ελέγχου είναι το μέσο μήκος ροής ARL (average run length). Η τυχαία μεταβλητή T που δηλώνει το πλήθος των σημείων που πρέπει να σχεδιαστούν σε ένα διάγραμμα ελέγχου έως ότου πάρουμε ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου ονομάζεται μήκος ροής (run length) του διαγράμματος. Η ποσότητα ARL δηλώνει τον αναμενόμενο αριθμό των σημείων (δειγμάτων) που πρέπει να σχεδιαστούν στο διάγραμμα έως ότου λάβουμε για πρώτη ένδειξη ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου, δηλαδή $ARL = E(T)$. Στα διαγράμματα ελέγχου Shewhart με απεικονιζόμενη ποσότητα την W ή οποία έχει εντός ελέγχου μέση

τιμή μ , τυπική απόκλιση σ και συνάρτηση κατανομής $F_0(\cdot)$, έχουμε ότι η πιθανότητα α εμφάνισης ενός σημείου του διαγράμματος εκτός των ορίων ελέγχου είναι ίση με

$$\alpha = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_0(\mu + L\sigma) + F_0(-(\mu - L\sigma)).$$

Το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$$

αφού το μήκος ροής ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή με πιθανότητα επιτυχίας α . Για μια διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μεγάλη τιμή για το ARL_0 έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των λανθασμένων ενδείξεων εκτός ελέγχου διεργασίας ή αλλιώς ο αριθμός των λανθασμένων συναγερωμών.

Για μια εκτός ελέγχου διεργασία, όπου η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής W είναι η $F_1(\cdot)$, έχουμε ότι η πιθανότητα $1 - \beta$ εμφάνισης ενός σημείου εκτός των ορίων ελέγχου του διαγράμματος είναι ίση με

$$1 - \beta = 1 - P(LCL \leq W \leq UCL) = 1 - F_1(\mu + L\sigma) + F_1(-(\mu - L\sigma)).$$

Η πιθανότητα να βρεθεί σε αυτή την περίπτωση ένα σημείο του διαγράμματος ελέγχου εντός των ορίων ελέγχου είναι ίσο με β . Το εκτός μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}.$$

Προφανώς για μία διεργασία που βρίσκεται εκτός ελέγχου θέλουμε να έχουμε μικρή τιμή για το ARL_1 , έτσι ώστε να μειωθεί ο αριθμός των δειγμάτων (και συνεπώς ο χρόνος) που απαιτούνται για να γίνει αντιληπτό ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

Αν για την τυχαία μεταβλητή W είναι γνωστό ότι $W \sim N(\mu, \sigma^2)$, τότε έχουμε ότι το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\Phi(-L)},$$

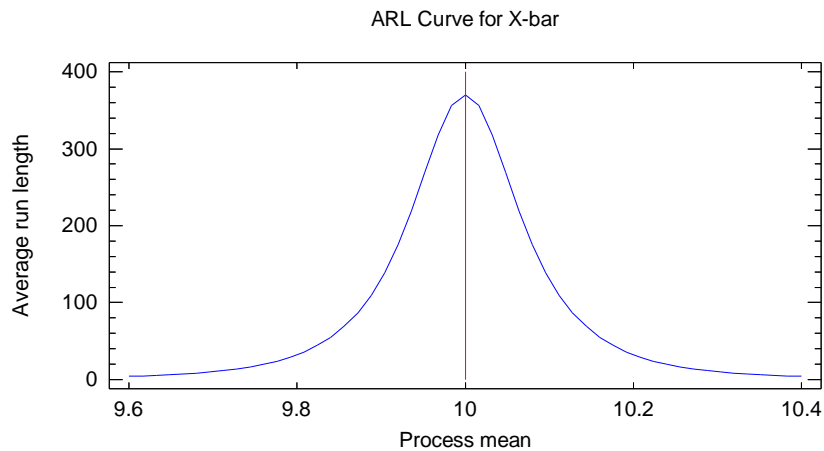
Για μια διεργασία που βρίσκεται εντός ελέγχου και στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε 3σ όρια ελέγχου και η κατανομή της W είναι κανονική, έχουμε ότι το εντός όριο ελέγχου μέσο μήκος ροής είναι ίσο με

$$ARL_0 = \frac{1}{0.0027} \cong 370.$$

Αν κατά την διάρκεια της διεργασίας η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής W μετατοπιστεί από μ σε $\mu^* = \mu + \delta\sigma$, και η διακύμανση της δεν αλλάζει τότε έχουμε

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta} = \frac{1}{2 - \Phi(L - \delta) - \Phi(L + \delta)}.$$

Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση του ARL για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1.



Σχήμα 1. 5. Καμπύλη ARL για τα δεδομένα του Πίνακα 1.1

Η χρήση του *ARL* ως μέτρου για την περιγραφή της απόδοσης μιας διεργασίας έχει υποστεί αρκετή κριτική τα τελευταία χρόνια γιατί το *ARL* που παρατηρείται στην πράξη διαφέρει συνήθως αρκετά από το “θεωρητικό” *ARL* (είτε είναι αρκετά μεγαλύτερο είτε είναι αρκετά μικρότερο). Αυτό συμβαίνει γιατί η κατανομή του μήκους ροής T είναι μια γεωμετρική κατανομή και συνεπώς η μέση τιμή της δεν μπορεί να θεωρηθεί ως αντιπροσωπευτικό μέτρο κεντρικής τάσης της κατανομής, ιδίως για μικρές τιμές του p , αφού σε αυτήν την περίπτωση η διακύμανση της γεωμετρικής κατανομής είναι αρκετά μεγάλη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Συνδυασμένα Διαγράμματα Ελέγχου

2.1 Εισαγωγή

Στα πρόσφατα χρόνια ο Smiley Cheng και οι συνεργάτες του επικεντρώθηκαν στην ανάπτυξη διαγραμμάτων ελέγχου τα όποια χρησιμοποιούν μόνο μια στατιστική συνάρτηση για την ταυτόχρονη παρακολούθηση του μέσου και της τυπικής απόκλισης μιας διεργασίας και ένα μόνο διάγραμμα ελέγχου στο οποίο αυτή απεικονίζεται. Η τεχνική που ακολούθησαν είναι ο μετασχηματισμός των κλασικών στατιστικών συναρτήσεων που χρησιμοποιούνται για την παρακολούθηση του μέσου και της τυπικής απόκλισης μιας διεργασίας.

Το πρώτο διάγραμμα ελέγχου που θα μελετήσουμε σε αυτό το κεφάλαιο το πρότειναν οι Chao & Cheng (1996 [3]), οι οποίοι ανέπτυξαν ένα διάγραμμα ελέγχου που το ρόλο των ορίων ελέγχου παίζει ένα ημικύκλιο (ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου). Όταν ένα εκτός ελέγχου σήμα συμβεί, το διάγραμμα δείχνει ποια παράμετρος, μέσος ή/και τυπική απόκλιση, έχει μετατοπιστεί από την τιμή στόχο. Το μειονέκτημα αυτού του διαγράμματος είναι ότι χάνεται η χρονική ακολουθία των σημείων που σχεδιάζονται σε αυτό.

Στη συνέχεια μελετάμε το Max διάγραμμα ελέγχου το όποιο το πρότειναν οι Chen & Cheng (1998 [6]), στο οποίο απεικονίζεται το μέγιστο μεταξύ δύο απολύτων τιμών στατιστικών συναρτήσεων που η μια αφορά το μέσο και η άλλη την τυπική απόκλιση. Όταν ένα εκτός ελέγχου σήμα συμβεί, το διάγραμμα δείχνει ποια παράμετρος έχει μετατοπιστεί όπως και την κατεύθυνση της μετατόπισης. Το Max διάγραμμα είναι αποτελεσματικό στην εντόπιση μεγάλων μετατοπίσεων στο μέσο και/ή στην τυπική απόκλιση, ωστόσο δεν είναι το ίδιο αποτελεσματικό στην εντόπιση μικρών μετατοπίσεων.

Το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου που πρότειναν οι Chen et al. (2001, [7]) συνδυάζει επαρκώς τα συνηθισμένα \bar{X} και S διαγράμματα ελέγχου σε ένα μόνο διάγραμμα χρησιμοποιώντας EWMA στατιστικές συναρτήσεις. Το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου αντιμετωπίζει αυτόματα το πρόβλημα του μεταβλητού μεγέθους δείγματος και είναι ικανό να εντοπίζει αυξήσεις ή/και μειώσεις στο μέσο και στη μεταβλητότητα της διεργασίας.

Το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου που πρότεινε ο Xie (1999, [14]) βασίζεται στο άθροισμα των τετραγώνων των EWMA στατιστικών συναρτήσεων του Max-EWMA διαγράμματος ελέγχου. Αυτό το διάγραμμα είναι εύκολο στην κατασκευή του και είναι εύκολο να εντοπίσουμε τη χρονική στιγμή που έγινε η μετατόπιση όπως και την πηγή και την κατεύθυνση της μετατόπισης αυτής όταν ένα εκτός ελέγχου σήμα εντοπιστεί. Επίσης μελετάμε και το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου που πρότειναν οι Chen et al. (2004, [8]) εφαρμόζοντας τις EWMA τεχνικές στις στατιστικές συναρτήσεις που χρησιμοποιήθηκαν στο ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου. Το διάγραμμα αυτό είναι πολύ ευαίσθητο σε μικρές μετατοπίσεις στο μέσο και/ή στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.

Στη συνέχεια μελετούμε το Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου που πρότειναν οι Chen & Thaga (2010, [4]). Αυτό το διάγραμμα ελέγχου βασίζεται στις γνωστές διαδικασίες τυποποίησης της κανονικής κατανομής και χρησιμοποιεί CUSUM στατιστικές συναρτήσεις. Είναι ικανό να εντοπίζει γρήγορα και μικρές και μεγάλες μετατοπίσεις στο μέσο και/ή στην τυπική απόκλιση, και αντιμετωπίζει με επιτυχία το πρόβλημα με τα μεταβλητά μεγέθη δειγμάτων. Επίσης, ο Thaga (2003, [13]) πρότεινε και το SS-CUSUM διάγραμμα ελέγχου, το οποίο βασίζεται στο άθροισμα τετραγώνων των μέγιστων τυπικών CUSUM τιμών. Οι ιδιότητες αυτού του διαγράμματος είναι παρόμοιες με εκείνες του Max-CUSUM. Ωστόσο έχει ένα επιπλέον πλεονέκτημα, ότι είναι εύκολο στην εφαρμογή και είναι ικανό να εντοπίζει γρήγορα την παράμετρο που μετατοπίστηκε όπως και τη χρονική στιγμή που η διεργασία βγήκε εκτός ελέγχου.

2.2 Το ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου

Το ημικυκλικό (semi-circle) διάγραμμα ελέγχου προτάθηκε από τους Chao & Cheng (1996, [3]) και είναι ένα διάγραμμα με το οποίο μπορούμε να παρακολουθήσουμε ταυτόχρονα το μέσο και την τυπική απόκλιση της κατανομής των μετρήσεων της

διεργασίας που μας ενδιαφέρει και να εντοπίσουμε ποιο από αυτά τα δύο χαρακτηριστικά της κατανομής μετατοπίστηκε.

Ας υποθέσουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή των μετρήσεων που παρακολουθούμε είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_0 και διασπορά σ_0^2 . Από τη διεργασία επιλέγουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n σε τακτά χρονικά διαστήματα. Έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$ το δείγμα που πήραμε στην i -οστή δειγματοληψία ($i = 1, 2, \dots$). Σύμφωνα με τα παραπάνω, όταν η διεργασία λειτουργεί υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας, τότε $X_{ij} \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, $i = 1, 2, \dots$ και $j = 1, 2, \dots, n_i$.

Μια εκτός ελέγχου τιμή για το μέσο θα εκφράζεται ως $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$, και μια εκτός ελέγχου τιμή για την τυπική απόκλιση ως $\sigma_1 = b\sigma_0$ ($b \geq 0$), όπου οι τιμές $a = 0$ και $b = 1$ οδηγούν στις εντός ελέγχου τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.

Ας υποθέσουμε ότι το τυχαίο δείγμα $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ είναι ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$. Ορίζουμε τις ποσότητες

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n},$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$$S^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{(n-1)S^2}{n}.$$

Οι Chao & Cheng (1996, [3]) πρότειναν να απεικονιστεί στο ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου η στατιστική συνάρτηση

$$T = (\bar{X} - \mu)^2 + S^{*2}.$$

Κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας η στατιστική συνάρτηση $\frac{n}{\sigma^2}T$ ακολουθεί την κατανομή χι τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας, δηλαδή

$$\frac{n}{\sigma^2}T \sim \chi_n^2.$$

Πράγματι

$$\frac{n}{\sigma^2}T = \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{nS^{*2}}{\sigma^2} = \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}.$$

Ο πρώτος όρος στην παραπάνω σχέση ακολουθεί την κατανομή χ_1^2 , ο δεύτερος όρος την κατανομή χ_{n-1}^2 , και γνωρίζουμε ότι οι στατιστικές συναρτήσεις \bar{X} και S^2 είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς προκύπτει ότι $\frac{n}{\sigma^2}T \sim \chi_n^2$.

Οι Chao & Cheng (1996, [3]) πρότειναν να απεικονίζονται στο ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου από κάθε δείγμα τα σημεία (\bar{X}_i, S_i^*) ($i \geq 1$). Το τετράγωνο της απόστασης d_i ($i \geq 1$) κάθε σημείου (\bar{X}_i, S_i^*) από το σημείο $(\mu, 0)$ είναι προφανώς ίσο με

$$d_i^2 = (\bar{X}_i - \mu)^2 + (S_i^* - 0)^2 = T_i.$$

Αν το σημείο (\bar{X}_i, S_i^*) βρεθεί εκτός κύκλου ακτίνας r και κέντρου $(\mu, 0)$ είναι εύλογο να υποθέσουμε ότι η κατανομή των μετρήσεών μας έχει αλλάξει και επομένως η διεργασία λειτουργεί υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας. Αφού $S_i^* \geq 0$, όταν σχεδιάζουμε τα σημεία (\bar{X}_i, S_i^*) πάνω στο επίπεδο (\bar{X}, S^*) , ένα ημικύκλιο είναι αρκετό.

Η ακτίνα r του ημικυκλικού διαγράμματος θα υπολογιστεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να έχουμε προκαθορισμένη πιθανότητα σφάλματος τύπου I ίση με α , δηλαδή από τη σχέση

$$1 - \alpha = P(T < r^2).$$

Αφού

$$P(T < r^2) = P\left(\frac{n}{\sigma^2} T < \frac{n}{\sigma^2} r^2\right)$$

προκύπτει άμεσα ότι

$$r = \sigma \sqrt{\frac{\chi_{n;1-\alpha}^2}{n}} = \sigma q$$

όπου $\chi_{n;1-\alpha}^2$ είναι το άνω $100(1-\alpha)\%$ ποσοστιαίο σημείο της κατανομής χ_n^2 .

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται ενδεικτικές τιμές της ποσότητας q ($r = \sigma q$) για $\alpha = 0.0054$.

Πίνακας 2. 1. Τιμές του q για $\alpha = 0.0054$.

n	q	n	q	n	q
2	2.2850	7	1.6937	12	1.5295
3	2.0553	8	1.6489	13	1.5086
4	1.9161	9	1.6117	14	1.4900
5	1.8202	10	1.5802	15	1.4733
6	1.7491	11	1.5531	16	1.4582

Στην περίπτωση που δεν γνωρίζουμε το μ και το σ^2 θα τα εκτιμήσουμε με τη βοήθεια m ανεξάρτητων δειγμάτων με τις σχέσεις

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\bar{X}_1 + \bar{X}_2 + \dots + \bar{X}_m}{m}$$

και

$$\bar{S}^{*2} = \frac{S_1^{*2} + S_2^{*2} + \dots + S_m^{*2}}{m}$$

αντιστοίχως.

- **Υπολογισμός του ARL**

Είναι γνωστό ότι η πιθανότητα του σφάλματος τύπου I, α , καθορίζει το εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής ARL_0 ενός διαγράμματος ελέγχου, σύμφωνα με τον τύπο

$$ARL_0 = \frac{1}{\alpha}$$

Για τον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής ARL_1 χρησιμοποιείται ο τύπος

$$ARL_1 = \frac{1}{1 - \beta}$$

όπου β είναι η πιθανότητα του σφάλματος τύπου II. Ας υποθέσουμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου στη θέση $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$ και της τυπικής απόκλισης στην τιμή $\sigma_1 = b\sigma_0$. Τότε

$$\beta = P(T < r^2) = P\left(\frac{n}{\sigma_1^2}T < \frac{n}{\sigma_1^2}r^2\right) = P\left(\frac{n}{\sigma_1^2}T < \frac{n}{b^2}q^2\right)$$

αφού $\sigma_1 = b\sigma_0$ και $r^2 = q^2\sigma_0^2$. Όμως

$$\begin{aligned} \frac{n}{\sigma_1^2}T &= \left(\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}\right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma_1}\right)^2 = \left(\frac{\bar{X} - \mu_1 + \mu_1 - \mu_0}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}}\right)^2 + \frac{(n-1)S^2}{\sigma_1^2} \\ &= \left(\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma_1/\sqrt{n}} + \frac{\mu_1 - \mu_0}{\sigma_1/\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{(n-1)S^2}{\sigma_1^2} = \left(Z + \sqrt{n}\frac{a}{b}\right)^2 + U \end{aligned}$$

όπου Z και U είναι ανεξάρτητες τ.μ. με $Z \sim N(0,1)$ και $U \sim \chi_{n-1}^2$. Έτσι η στατιστική συνάρτηση $\frac{n}{\sigma_1^2}T$ ακολουθεί την μη κεντρική κατανομή χι τετράγωνο με n βαθμούς ελευθερίας και παράμετρο μη κεντρικότητας $\lambda = n(a/b)^2$, δηλαδή

$$\frac{n}{\sigma_1^2}T \sim \chi_{n,\lambda}^2$$

Επομένως στην περίπτωση που έχουμε μετατόπιση και στο μέσο και στην τυπική απόκλιση για τον υπολογισμό της πιθανότητας σφάλματος τύπου II θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις

$$\beta = P\left(\frac{n}{\sigma_1^2}T < n(q/b)^2\right), \quad \frac{n}{\sigma_1^2}T \sim \chi_{n,n(a/b)^2}^2$$

Στην περίπτωση που έχουμε μόνο μετατόπιση του μέσου ($\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$, $b = 1$), για τον υπολογισμό της πιθανότητας σφάλματος τύπου II θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις

$$\beta = P\left(\frac{n}{\sigma_0^2}T < nq^2\right), \quad \frac{n}{\sigma_0^2}T \sim \chi_{n, na^2}^2.$$

Στην περίπτωση που έχουμε μόνο μετατόπιση της τυπικής απόκλισης ($a = 0$, $\sigma_1 = b\sigma_0$), για τον υπολογισμό της πιθανότητας σφάλματος τύπου II θα χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις

$$\beta = P\left(\frac{n}{\sigma_1^2}T < n(q/b)^2\right), \quad \frac{n}{\sigma_1^2}T \sim \chi_n^2.$$

Στον επόμενο πίνακα δίνονται τιμές του ARL_1 στην περίπτωση που έχουμε μετατόπιση και στο μέσο και στην τυπική απόκλιση για $\alpha = 0.0054$. Σημειώνεται ότι η πιθανότητα του σφάλματος τύπου II, β , εξαρτάται μόνο από τις τιμές n, a, b (δεν εξαρτάται από τις εκάστοτε τιμές των μ_0, σ_0).

Πίνακας 2. 2. Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου: ARL_1 για $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$ και $\sigma_1 = b\sigma_0$

n	a/b									
	0.5/1.5	0.5/2.0	1.0/0.75	1.0/1.5	1.0/1.2	1.5/0.5	1.5/0.75	1.5/1.0	1.5/1.5	1.5/2.0
2	8.08	3.41	81.64	4.95	9.07	59.55	11.01	5.55	3.02	2.21
3	5.99	2.53	61.47	3.63	6.64	25.46	6.64	3.77	2.23	1.70
4	4.79	2.06	48.36	2.89	5.23	13.42	4.56	2.85	1.81	1.44
5	4.0	1.77	39.29	2.43	4.31	8.14	3.42	2.31	1.56	1.29
6	3.44	1.57	32.70	2.11	3.67	5.47	2.72	1.96	1.40	1.19
7	3.02	1.44	27.74	1.88	3.20	3.97	2.26	1.72	1.29	1.13
8	2.71	1.34	23.89	1.71	2.84	3.05	1.95	1.55	1.22	1.09
9	2.46	1.26	20.83	1.58	2.56	2.47	1.72	1.42	1.16	1.06
10	2.26	1.21	18.37	1.48	2.33	2.07	1.56	1.33	1.12	1.04
11	2.09	1.16	16.34	1.40	2.15	1.79	1.44	1.26	1.09	1.03
12	1.95	1.13	14.65	1.33	2.00	1.59	1.34	1.20	1.06	1.02
13	1.84	1.10	13.23	1.28	1.87	1.45	1.27	1.16	1.05	1.01
14	1.74	1.08	12.01	1.23	1.77	1.34	1.21	1.12	1.03	1.01
15	1.66	1.06	10.97	1.20	1.68	1.26	1.17	1.10	1.02	1.0
16	1.58	1.05	10.07	1.17	1.60	1.19	1.13	1.08	1.02	1.0
17	1.52	1.04	9.29	1.14	1.53	1.15	1.10	1.06	1.01	1.0
18	1.47	1.03	8.60	1.12	1.47	1.11	1.08	1.05	1.01	1.0
19	1.42	1.02	7.99	1.10	1.42	1.08	1.06	1.04	1.0	1.0
20	1.38	1.02	7.45	1.08	1.38	1.06	1.05	1.03	1.0	1.0

Στη περίπτωση που μετατοπίζεται μόνο ο μέσος έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για $\alpha = 0.0054$.

Πίνακας 2. 3. Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου: ARL_1 για $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$

n	a									
	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
2	13.61	10.66	8.47	6.81	5.55	4.59	3.85	3.27	2.81	2.45
3	9.77	7.50	5.85	4.66	3.77	3.11	2.62	2.24	1.95	1.73
4	7.54	5.71	4.43	3.51	2.85	2.37	2.01	1.75	1.55	1.40
5	6.09	4.58	3.55	2.82	2.31	1.94	1.67	1.48	1.33	1.23
6	5.09	3.82	2.96	2.37	1.96	1.67	1.46	1.31	1.21	1.13
7	4.36	3.27	2.55	2.05	1.72	1.48	1.32	1.21	1.13	1.08
8	3.80	2.86	2.24	1.83	1.55	1.36	1.23	1.14	1.08	1.04
9	3.37	2.55	2.01	1.66	1.42	1.26	1.16	1.09	1.05	1.02
10	3.03	2.30	1.83	1.53	1.33	1.20	1.11	1.06	1.03	1.01
11	2.76	2.11	1.69	1.43	1.26	1.15	1.08	1.04	1.02	1.00
12	2.53	1.95	1.58	1.35	1.20	1.11	1.06	1.02	1.01	1.00
13	2.34	1.82	1.49	1.28	1.16	1.08	1.04	1.01	1.00	1.00
14	2.18	1.71	1.41	1.23	1.12	1.06	1.03	1.01	1.00	1.00
15	2.05	1.61	1.35	1.19	1.10	1.04	1.02	1.00	1.00	1.00
16	1.93	1.53	1.30	1.16	1.08	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00
17	1.83	1.47	1.25	1.13	1.06	1.02	1.01	1.00	1.00	1.00
18	1.74	1.41	1.22	1.11	1.05	1.02	1.00	1.00	1.00	1.00
19	1.67	1.36	1.18	1.09	1.04	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00
20	1.60	1.32	1.16	1.07	1.03	1.01	1.00	1.00	1.00	1.00

Στη περίπτωση που μετατοπίζεται μόνο η τυπική απόκλιση έχουμε τα ακόλουθα αποτελέσματα για $\alpha = 0.0054$.

Πίνακας 2. 4 Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου: ARL_1 για $\sigma_1 = b\sigma_0$

n	b						
	1.10	1.15	1.20	1.25	1.50	1.75	2.0
2	74.82	51.83	37.56	28.26	10.18	5.50	3.68
3	66.92	44.50	31.18	22.84	7.63	4.04	2.72
4	61.11	39.34	26.86	19.27	6.13	3.23	2.21
5	56.51	35.40	23.67	16.70	5.12	2.71	1.88
6	52.71	32.25	21.17	14.74	4.41	2.35	1.67
7	49.49	29.65	19.16	13.18	3.87	2.09	1.52
8	46.70	27.45	17.49	11.92	3.45	1.90	1.40
9	44.25	25.57	16.09	10.87	3.12	1.75	1.32
10	42.07	23.93	14.89	9.98	2.85	1.62	1.25
11	40.11	22.48	13.85	9.22	2.63	1.53	1.20
12	38.34	21.20	12.94	8.56	2.44	1.45	1.16
13	36.73	20.05	12.13	7.99	2.29	1.38	1.13
14	35.26	19.01	11.41	7.48	2.15	1.33	1.10
15	33.90	18.08	10.77	7.03	2.04	1.28	1.08
16	32.64	17.22	10.20	6.63	1.93	1.24	1.07
17	31.48	16.44	9.67	6.27	1.84	1.21	1.05
18	30.39	15.73	9.20	5.95	1.77	1.18	1.04
19	29.38	15.07	8.77	5.65	1.70	1.15	1.03
20	28.43	14.45	8.37	5.39	1.63	1.13	1.03

Σημειώνουμε ότι οι παραπάνω ακριβείς τιμές του ARL_1 στους Πίνακες 2.2, 2.3 και 2.4 διαφέρουν από τις αντίστοιχες τιμές που έδωσαν οι Chao & Cheng (1996) αφού οι τελευταίοι χρησιμοποίησαν προσομοίωση για να τις εξάγουν.

- **Διαδικασία κατασκευής του ημικυκλικού διαγράμματος ελέγχου**

Η διαδικασία κατασκευής του ημικυκλικού διαγράμματος όταν έχουμε στη διάθεσή μας m το πλήθος ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n είναι η ακόλουθη:

1. Υπολογίζουμε τα \bar{X}_i και S_i^2 για κάθε δείγμα ($1 \leq i \leq m$).
2. Υπολογίζουμε τα S_i^{*2} σύμφωνα με τον τύπο $S_i^{*2} = \frac{(n-1)S_i^2}{n}$ ($1 \leq i \leq m$).
3. Υπολογίζουμε τις ποσότητες $\bar{\bar{X}} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \bar{X}_i$ και $\bar{\bar{S}}^* = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m S_i^*$.
4. Υπολογίζουμε την ακτίνα $\hat{r} = q\bar{\bar{S}}^*$ για το συγκεκριμένο μέγεθος δείγματος n .
5. Σχεδιάζουμε το ημικύκλιο με κέντρο το σημείο $(\bar{\bar{X}}, 0)$ και ακτίνα \hat{r} .
6. Σχεδιάζουμε τα σημεία (\bar{X}_i, S_i^*) .

Αν κάποια σημεία βρεθούν εκτός του ημικυκλίου θα πρέπει να γίνει έλεγχος για ύπαρξη ειδικής αιτίας μεταβλητότητας. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να προσδιορίσουμε αν αυτό οφείλεται σε μετατόπιση του μέσου ή/και της τυπικής απόκλισης. Επειδή θέλουμε να είναι ο δειγματικός μέσος κοντά στην τιμή \bar{X} , όταν ένα σημείο έχει μεγάλη απόσταση από την κάθετη γραμμή $x = \bar{X}$, αυτό δείχνει ότι μετατοπίστηκε ο μέσος. Επιπλέον θέλουμε η τυπική απόκλιση να είναι όσο το δυνατόν πιο μικρή. Έτσι αν ένα σημείο έχει μεγάλη απόσταση από την οριζόντια γραμμή $y = 0$ αυτό μας δείχνει μετατόπιση της τυπικής απόκλισης.

Ένα σημαντικό μειονέκτημα του ημικυκλικού διαγράμματος ελέγχου είναι ότι δεν αποκαλύπτει τη χρονική σειρά λήψης των δειγμάτων με αποτέλεσμα να μην γνωρίζουμε σε ποιο κατά σειρά δείγμα οφείλεται μια ένδειξη εκτός ελέγχου διεργασίας.

- **Παράδειγμα**

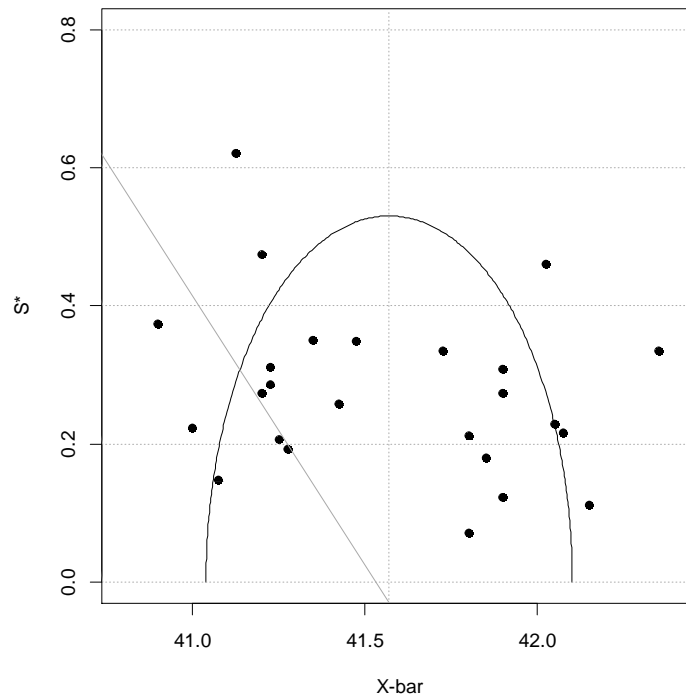
Για επιδείξουμε το ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του ακόλουθου πίνακα από τον Van Nuland (1992-93) που αναφέρονται σε μια συσκευή DSC.

Πίνακας 2. 5. Τα δεδομένα του Van Nuland (1992-93)

X_1	X_2	X_3	X_4	\bar{X}	S	S^*
42.2	42.3	42.0	42.1	42.150	0.129	0.112
41.9	42.1	41.8	41.6	41.850	0.208	0.180
41.7	41.8	41.8	41.9	41.800	0.082	0.071
41.5	42.0	41.7	42.0	41.800	0.245	0.212
41.7	42.2	42.2	41.5	41.900	0.356	0.308
42.2	41.5	42.1	41.8	41.900	0.316	0.274
41.8	42.1	41.8	41.9	41.900	0.141	0.122
42.4	41.8	41.9	42.1	42.050	0.265	0.229
42.2	41.9	42.5	42.8	42.350	0.387	0.335
41.8	42.6	41.4	42.3	42.025	0.532	0.460
42.4	42.0	41.8	42.1	42.075	0.250	0.217
41.0	41.1	41.4	41.5	41.250	0.238	0.206
42.0	41.4	40.7	40.4	41.125	0.718	0.622
40.9	41.1	41.3	40.7	41.000	0.258	0.224
41.1	40.9	41.0	41.3	41.075	0.171	0.148
41.0	41.6	41.3	40.9	41.200	0.316	0.274
41.7	41.7	41.0	41.0	41.350	0.404	0.350
41.3	41.0	40.9	41.7	41.225	0.359	0.311
41.4	41.0	40.9	41.6	41.225	0.330	0.286
40.9	40.5	40.7	41.5	40.900	0.432	0.374

40.9	41.5	41.8	41.7	41.475	0.403	0.349
41.8	40.9	41.5	40.6	41.200	0.548	0.474
41.2	41.9	42.1	41.7	41.725	0.386	0.334
41.5	41.7	41.5	41.0	41.425	0.299	0.259
41.5	41.0	41.4	41.2	41.275	0.222	0.192

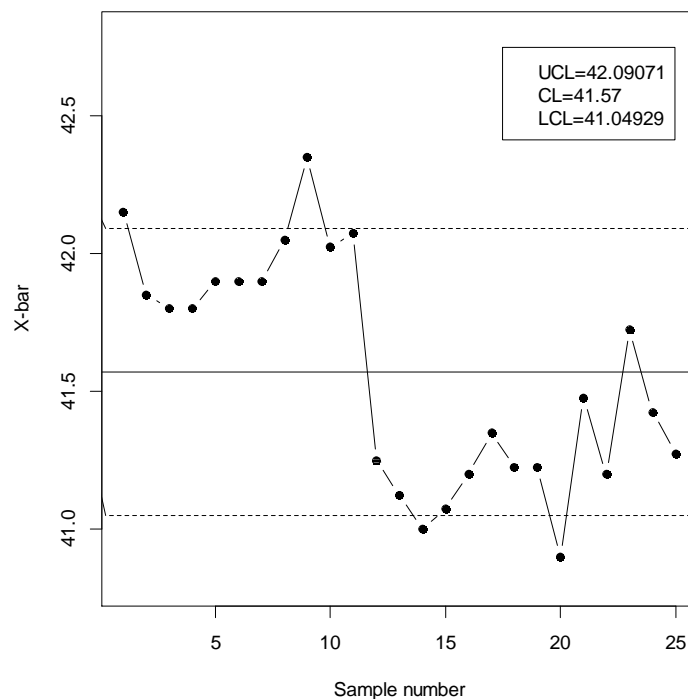
Για την κατασκευή του ημικυκλικού διαγράμματος ελέγχου (για $\alpha = 0.0054$) έχουμε ότι $\bar{X} = 41.57$, $\bar{S}^* = 0.277$, και από τον Πίνακα 2.1 έχουμε ότι $\hat{r} = q\bar{S}^* = (1.9161)(0.277) = 0.531$. Το διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο.



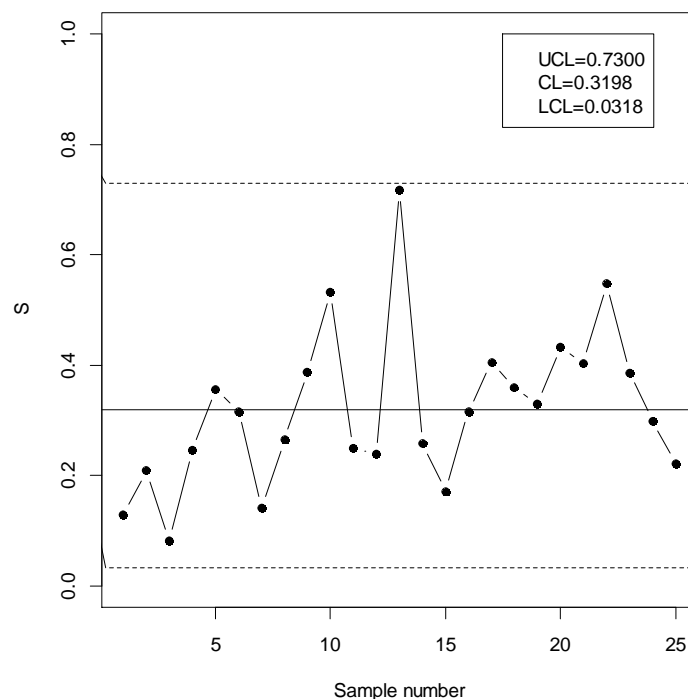
Σχήμα 2. 2. Το ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου για $\alpha = 0.0054$ (DSC δεδομένα)

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε από το παραπάνω σχήμα έχουμε ότι 8 σημεία βρίσκονται εκτός του ημικυκλίου που συνεπάγεται ότι έχουμε ενδείξεις ότι η διεργασία είναι εκτός στατιστικού ελέγχου.

Το αντίστοιχο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ (δείτε Παράγραφο 1.6.2) και το αντίστοιχο S διάγραμμα ελέγχου με όρια πιθανότητας $\alpha = 0.0027$ (δείτε Παράγραφο 1.7.2) είναι τα ακόλουθα.



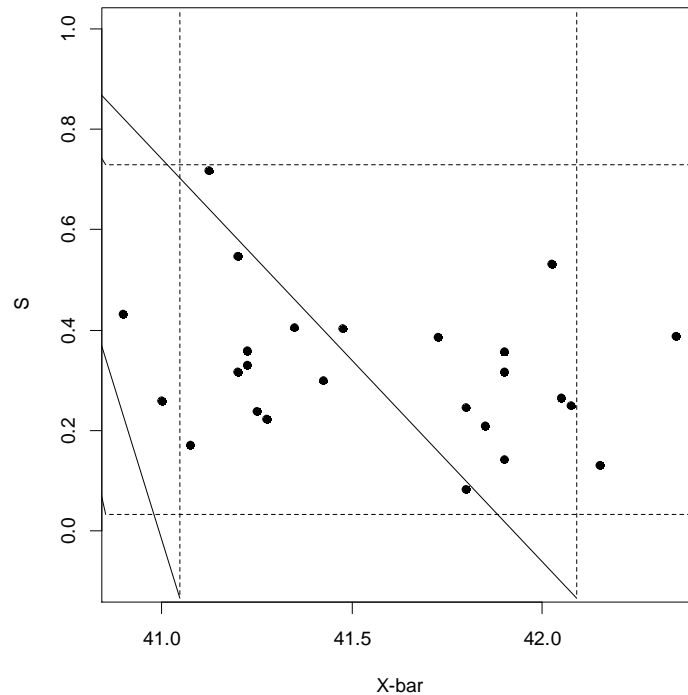
Σχήμα 2. 3. \bar{X} διάγραμμα ελέγχου ορίων 3σ (DSC δεδομένα)



Σχήμα 2. 4. S διάγραμμα ελέγχου ορίων πιθανότητας $\alpha = 0.0027$ (DSC δεδομένα)

Όπως μπορούμε να παρατηρήσουμε στο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου έχουμε ότι 4 σημεία βρίσκονται εκτός των ορίων ελέγχου, ενώ στο S διάγραμμα ελέγχου έχουμε ότι όλα τα σημεία βρίσκονται εντός των ορίων ελέγχου

Το «διπλό» (\bar{X}, S) διάγραμμα ελέγχου είναι το ακόλουθο



Σχήμα 2. 5. Το (\bar{X}, S) διάγραμμα ελέγχου (DSC δεδομένα)

Σημειώνουμε ότι η ταυτόχρονη χρήση των δύο προαναφερθέντων διαγραμμάτων ελέγχου δίνει πιθανότητα σφάλματος τύπου I ίση με

$$\alpha = 1 - (1 - 0.0027)^2 = 0.0053927 \cong 0.0054$$

ίδια δηλαδή με αυτή του ημικυκλικού διαγράμματος ελέγχου.

Από το παραπάνω διπλό διάγραμμα προκύπτει ότι υπάρχουν κάποια σημεία που βρίσκονται κοντά στα όρια ελέγχου και ενδεχομένως αυτά να έδωσαν τα περισσότερα σημεία εκτός των ορίων ελέγχου στο ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε ότι το ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου των Chao & Cheng (1996) είναι μια εναλλακτική λύση έναντι των διαγραμμάτων ελέγχου τύπου Shewhart για την ταυτόχρονη παρακολούθηση της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης μιας διεργασίας. Είναι εύκολο στη χρήση και την εφαρμογή του. Επίσης είναι εύκολο να εντοπίσει το διάγραμμα σήματα εκτός ελέγχου και να τους αποδοθεί η αιτία στην οποία οφείλεται το σήμα, δηλαδή μετατόπιση στο μέσο ή/και στην τυπική απόκλιση. Ένα μειονέκτημα του ημικυκλικού διαγράμματος ελέγχου είναι ότι χάνουμε την χρονική ακολουθία των σημείων που σχεδιάζονται σε αυτό το οποίο μπορεί να διορθωθεί ορίζοντας σε κάθε σημείο έναν αριθμό που να αποκαλύπτει αυτή τη χρονική ακολουθία.

2.3 Το Max διάγραμμα ελέγχου

Το Max διάγραμμα ελέγχου που προτάθηκε από τους Chen & Cheng (1998, [6]), είναι ένα διάγραμμα ελέγχου με το οποίο μπορούμε να παρακολουθήσουμε ταυτόχρονα το μέσο και την τυπική απόκλιση της κατανομής των μετρήσεων ενός χαρακτηριστικού X και να εντοπίσουμε ποίο από τα δύο χαρακτηριστικά μετατοπίστηκε.

Ας υποθέσουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή των παρατηρήσεων είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_0 και διακύμανση σ_0^2 . Από την διεργασία επιλέγουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n σε τακτά χρονικά διαστήματα. Έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$ το δείγμα που πήραμε στην i -οστή δειγματοληψία ($i = 1, 2, \dots$). Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι όταν η διεργασία λειτουργεί υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας, τότε $X_{ij} \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n_i$.

Μια εκτός ελέγχου τιμή για το μέσο θα εκφράζεται ως $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$, και μια εκτός ελέγχου τιμή για την τυπική απόκλιση ως $\sigma_1 = b\sigma_0$ ($b \geq 0$), όπου οι τιμές $a = 0$ και $b = 1$ οδηγούν στις εντός ελέγχου τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.

Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, και έστω οι στατιστικές συναρτήσεις

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n},$$
$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Οι Chen & Cheng (1998, [6]) όρισαν τις ακόλουθες δύο στατιστικές συναρτήσεις

$$U = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}},$$
$$V = \Phi^{-1} \left\{ H_{n-1} \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \right) \right\},$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής ($N(0,1)$), και $H_n(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της χι-τετράγωνο κατανομής με n βαθμούς ελευθερίας (χ_n^2).

Οι στατιστικές συναρτήσεις U, V είναι ανεξάρτητες αφού οι στατιστικές συναρτήσεις \bar{X} και S^2 είναι ανεξάρτητες. Προφανώς έχουμε ότι $U \sim N(0,1)$ και $V \sim N(0,1)$ αφού η στατιστική συνάρτηση $H_{n-1} \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \right)$ έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα

(0,1). Οι Chen & Cheng (1998, [6]) πρότειναν ένα διάγραμμα ελέγχου όπου η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση είναι η

$$M(n) = \max\{|U|, |V|\}.$$

Η στατιστική $M(n)$ θα παίρνει μεγάλες τιμές όταν ο μέσος της διεργασίας μετατοπιστεί ή/και η μεταβλητότητα της διεργασίας αυξηθεί ή μειωθεί. Από την άλλη, η στατιστική συνάρτηση $M(n)$ θα παίρνει μικρές τιμές όταν ο μέσος και η μεταβλητότητα της διεργασίας παραμένουν κοντά στις εντός ελέγχου τιμές τους. Αφού η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση είναι το μέγιστο μεταξύ δύο στατιστικών συναρτήσεων για αυτό το λόγο έδωσαν στο διάγραμμα ελέγχου την ονομασία Max διάγραμμα ελέγχου.

Το άνω όριο ελέγχου UCL του διαγράμματος ελέγχου θα υπολογιστεί με τέτοιο τρόπο έτσι ώστε να έχουμε προκαθορισμένη πιθανότητα σφάλματος τύπου I ίση με α , όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου, δηλαδή θα υπολογιστεί από τη σχέση

$$1 - \alpha = P(M(n) \leq UCL)$$

όπου $X \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$. Όμως

$$\begin{aligned} P(M(n) \leq y) &= P(\max(|U|, |V|) \leq y) = P(|U| \leq y, |V| \leq y) \\ &= P(|U| \leq y)P(|V| \leq y) = P(-y \leq U \leq y)P(-y \leq V \leq y) \\ &= (\Phi(y) - \Phi(-y))^2 = [P(\chi_1^2 \leq y^2)]^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς, στο Max διάγραμμα ελέγχου έχουμε ότι

$$UCL = \sqrt{\chi_{1;1-\sqrt{1-\alpha}}^2}, \quad CL = \sqrt{\chi_{1;0.5}^2} = 1.051796$$

όπου $\chi_{1;\gamma}^2$ είναι το άνω γ ποσοστιαίο σημείο της κατανομής χ_1^2 . Στον παρακάτω πίνακα δίνονται για το Max διάγραμμα ελέγχου ενδεικτικές τιμές του άνω ορίου ελέγχου για διάφορες τιμές της πιθανότητας του σφάλματος τύπου I.

Πίνακας 2. 6. Κεντρική γραμμή και άνω όριο ελέγχου του Max διαγράμματος ελέγχου για διάφορες τιμές του α .

α	0.001	0.002	0.0054	0.0027	0.00135
UCL	3.480689	3.290386	2.999565	3.204939	3.399445

- **Υπολογισμός του ARL**

Ας υποθέσουμε ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου λόγω μετατόπισης του μέσου στην τιμή $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$ και της τυπικής απόκλισης στην τιμή $\sigma_1 = b\sigma_0$. Τότε για $y = UCL$ έχουμε ότι η πιθανότητα σφάλματος τύπου II είναι ίση με

$$\begin{aligned}\beta &= P(M(n) \leq y) = P(\max(|U|, |V|) \leq y) = P(|U| \leq y)P(|V| \leq y) \\ &= P(-y \leq U \leq y)P(-y \leq V \leq y).\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}P(-y \leq U \leq y) &= P\left(-y \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}} \leq y\right) = P\left(-\frac{y}{b} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{b\sigma_0}{\sqrt{n}}} \leq \frac{y}{b}\right) \\ &= P\left(-\frac{y}{b} - \frac{a\sigma_0}{\frac{b\sigma_0}{\sqrt{n}}} \leq \frac{\bar{X} - \mu_0 - a\sigma_0}{\frac{b\sigma_0}{\sqrt{n}}} \leq \frac{y}{b} - \frac{a\sigma_0}{\frac{b\sigma_0}{\sqrt{n}}}\right) \\ &= P\left(-\frac{y}{b} - \sqrt{n}\frac{a}{b} \leq \frac{\bar{X} - \mu_1}{\frac{\sigma_1}{\sqrt{n}}} \leq \frac{y}{b} - \sqrt{n}\frac{a}{b}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{y}{b} - \sqrt{n}\frac{a}{b}\right) - \Phi\left(-\frac{y}{b} - \sqrt{n}\frac{a}{b}\right)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}P(-y \leq V \leq y) &= P\left(-y \leq \Phi^{-1}\left\{H_{n-1}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right)\right\} \leq y\right) \\ &= P\left(\Phi(-y) \leq H_{n-1}\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}\right) \leq \Phi(y)\right) \\ &= P\left(\chi_{n-1, \Phi(-y)}^2 \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2} \leq \chi_{n-1, \Phi(y)}^2\right) \\ &= P\left(\frac{\chi_{n-1, \Phi(-y)}^2}{b^2} \leq \frac{(n-1)S^2}{\sigma_1^2} \leq \frac{\chi_{n-1, \Phi(y)}^2}{b^2}\right) \\ &= H_{n-1}\left(\frac{\chi_{n-1, \Phi(y)}^2}{b^2}\right) - H_{n-1}\left(\frac{\chi_{n-1, \Phi(-y)}^2}{b^2}\right).\end{aligned}$$

Συνεπώς η πιθανότητα σφάλματος τύπου II υπολογίζεται από τη σχέση

$$\beta = \left\{ \Phi\left(\frac{y}{b} - \sqrt{n}\frac{a}{b}\right) - \Phi\left(-\frac{y}{b} - \sqrt{n}\frac{a}{b}\right) \right\} \times \left\{ H_{n-1}\left(\frac{\chi_{n-1, \Phi(y)}^2}{b^2}\right) - H_{n-1}\left(\frac{\chi_{n-1, \Phi(-y)}^2}{b^2}\right) \right\}.$$

Στον επόμενο πίνακα δίνονται οι τιμές του $ARL_1 = 1/(1 - \beta)$ για πιθανότητα σφάλματος τύπου I ίση με $\alpha = 0.0054$.

Πίνακας 2. 7. Max διάγραμμα ελέγχου: ARL_1 για $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$ και $\sigma_1 = b\sigma_0$

n	b	a				
		0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
4	0.25	13.19	13.19	13.18	1.86	1.00
	0.50	94.96	94.68	30.22	1.98	1.02
	1.00	185.19	39.30	6.21	1.99	1.19
	1.50	8.60	6.17	3.24	1.86	1.30
	2.00	2.71	2.48	2.00	1.57	1.29
5	0.25	4.81	4.81	4.79	1.07	1.00
	0.50	51.33	51.12	12.25	1.31	1.00
	1.00	185.19	30.68	4.45	1.56	1.08
	1.50	7.33	5.19	2.69	1.58	1.17
	2.00	2.29	2.11	1.72	1.39	1.18
7	0.25	1.52	1.52	1.46	1.00	1.00
	0.50	18.37	18.24	3.56	1.03	1.00
	1.00	185.19	20.25	2.75	1.20	1.01
	1.50	5.59	3.92	2.04	1.29	1.06
	2.00	1.79	1.67	1.41	1.19	1.07
10	0.25	1.02	1.02	1.00	1.00	1.00
	0.50	6.14	6.07	1.45	1.00	1.00
	1.00	185.19	12.42	1.77	1.04	1.00
	1.50	4.05	2.87	1.56	1.11	1.01
	2.00	1.42	1.34	1.19	1.07	1.02

Προκειμένου να γίνει άμεση σύγκριση του ARL_1 του Max διαγράμματος ελέγχου για $\alpha = 0.0054$, με το αντίστοιχο ARL_1 που αντιστοιχεί στην ταυτόχρονη χρήση του \bar{X} διαγράμματος ελέγχου ορίων 3σ (δείτε Παράγραφο 1.6.2) και του S διαγράμματος ελέγχου με όρια πιθανότητας $\alpha = 0.0027$ (δείτε Παράγραφο 1.7.2) δίνεται ο ακόλουθος πίνακας. Σημειώνουμε ότι η ταυτόχρονη χρήση των δύο προαναφερθέντων διαγραμμάτων ελέγχου δίνει πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι ίση με

$$\alpha = 1 - (1 - 0.0027)^2 = 0.0053927 \cong 0.0054$$

ίδια δηλαδή με αυτή του Max διαγράμματος ελέγχου.

Πίνακας 2. 8. \bar{X} - S διάγραμμα ελέγχου: ARL_1 για $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$ και $\sigma_1 = b\sigma_0$

n	b	a				
		0.0	0.5	1.0	1.5	2.0
4	0.25	13.20	13.20	13.20	1.86	1.00
	0.50	95.09	94.81	30.28	1.98	1.02
	1.00	185.44	39.34	6.21	1.99	1.19
	1.50	8.61	6.17	3.24	1.86	1.31
	2.00	2.71	2.48	2.00	1.57	1.29
5	0.25	4.81	4.81	4.79	1.07	1.00
	0.50	51.40	51.18	12.27	1.31	1.00
	1.00	185.44	30.71	4.45	1.56	1.08
	1.50	7.34	5.19	2.69	1.58	1.17
	2.00	2.30	2.11	1.72	1.39	1.18
7	0.25	1.52	1.52	1.46	1.00	1.00
	0.50	18.39	18.26	3.56	1.03	1.00
	1.00	185.44	20.27	2.75	1.20	1.01
	1.50	5.59	3.92	2.04	1.29	1.06
	2.00	1.79	1.67	1.41	1.19	1.07
10	0.25	1.02	1.02	1.00	1.00	1.00
	0.50	6.15	6.08	1.45	1.00	1.00
	1.00	185.44	12.43	1.77	1.04	1.00
	1.50	4.05	2.88	1.56	1.11	1.01
	2.00	1.42	1.34	1.19	1.07	1.02

Για τον υπολογισμό του ARL_1 χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $ARL_1 = 1/(1 - \beta_{\bar{X}}\beta_S)$, όπου $\beta_{\bar{X}}$ (β_S) η πιθανότητα σφάλματος τύπου II στο \bar{X} (S) διάγραμμα ελέγχου.

Από τη σύγκριση των δύο παραπάνω πινάκων προκύπτει ότι το Max διάγραμμα ελέγχου έχει σχεδόν την ίδια συμπεριφορά με το συνδυασμό των διαγραμμάτων ελέγχου \bar{X} και S .

- **Διαδικασία κατασκευής του MAX διαγράμματος ελέγχου**

Η διαδικασία κατασκευής του Max διαγράμματος όταν έχουμε στη διάθεσή μας m το πλήθος ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n_i ($i = 1, 2, \dots, m$) είναι η ακόλουθη:

Περίπτωση 1. Τα μ, σ είναι γνωστά.

1. Για κάθε δείγμα υπολογίζουμε τις στατιστικές συναρτήσεις U_i, V_i και $M(n_i)$.
2. Βρίσκουμε την κεντρική γραμμή και το άνω όριο ελέγχου του διαγράμματος από τον Πίνακα 2.6 για το επιθυμητό α και κατασκευάζουμε το διάγραμμα ελέγχου.
3. Όταν $M(n_i) \leq UCL$ τότε σχεδιάζουμε ένα σημείο έναντι του i . Όταν όμως $M(n_i) > UCL$ εξετάζουμε τις δύο στατιστικές συναρτήσεις $|U_i|, |V_i|$. Αν $|U_i| > UCL$, όταν

$U_i > 0$ τότε σχεδιάζουμε το σημείο ως “m+” (1) για να δείξουμε ότι η μέση τιμή της διεργασίας μετατοπίστηκε σε υψηλότερο επίπεδο, αλλιώς όταν $U_i < 0$ τότε σχεδιάζουμε το σημείο ως “m-”(2) για να δείξουμε ότι η μέση τιμή της διεργασίας μετατοπίστηκε σε χαμηλότερο επίπεδο. Αν $|V_i| > UCL$, τότε αν $V_i > 0$ σχεδιάζουμε το σημείο ως “v+”(3) για να δείξουμε ότι η μεταβλητότητα της διεργασίας μετατοπίστηκε σε υψηλότερο επίπεδο, ενώ αν $V_i < 0$ τότε σχεδιάζουμε το σημείο ως “v-”(4) για να δείξουμε ότι η μεταβλητότητα της διεργασίας μετατοπίστηκε σε χαμηλότερο επίπεδο. Όταν όμως και οι δύο στατιστικές συναρτήσεις $|U_i|$ και $|V_i|$ είναι μεγαλύτερες από το άνω όριο ελέγχου, σχεδιάζουμε τα σημεία στο διάγραμμα ως “++”(5), “+-”(6), “-+”(7) ή “--”(8) ανάλογα με το αν $U_i > 0$ και $V_i > 0$, $U_i > 0$ και $V_i < 0$, $U_i < 0$ και $V_i > 0$ και $U_i < 0$ και $V_i < 0$, αντίστοιχα.

4. Εξετάζουμε αν υπάρχουν ειδικές αιτίες μεταβλητότητας σε κάθε σημείο του διαγράμματος που βρίσκεται εκτός ελέγχου.

Περίπτωση 2. Τουλάχιστον ένα από τα μ , σ είναι άγνωστα.

1. Εκτιμούμε τις άγνωστες παραμέτρους της διεργασίας. Αν η μέση τιμή μ είναι άγνωστη τότε την εκτιμούμε με το $\bar{\bar{X}}$. Αν το σ είναι άγνωστο τότε το εκτιμούμε με το $\frac{\bar{R}}{d_2}$ ή με το $\frac{\bar{S}}{c_4}$.
2. Ακολουθούμε τα βήματα που περιγράψαμε στην Περίπτωση 1.

Παρατήρηση

Όταν το μέγεθος δείγματος είναι μεταβλητό χρησιμοποιούμε το σταθμισμένο μέσο για να υπολογίσουμε τα $\bar{\bar{X}}$ και \bar{S} . Αν n_i είναι ο αριθμός του των παρατηρήσεων του i -οστού δείγματος τότε

$$\bar{\bar{X}} = \frac{\sum_{i=1}^m n_i \bar{X}_i}{\sum_{i=1}^m n_i}$$

και

$$\bar{S} = \left[\frac{\sum_{i=1}^m (n_i - 1) S_i^2}{\sum_{i=1}^m n_i - m} \right]^{1/2}.$$

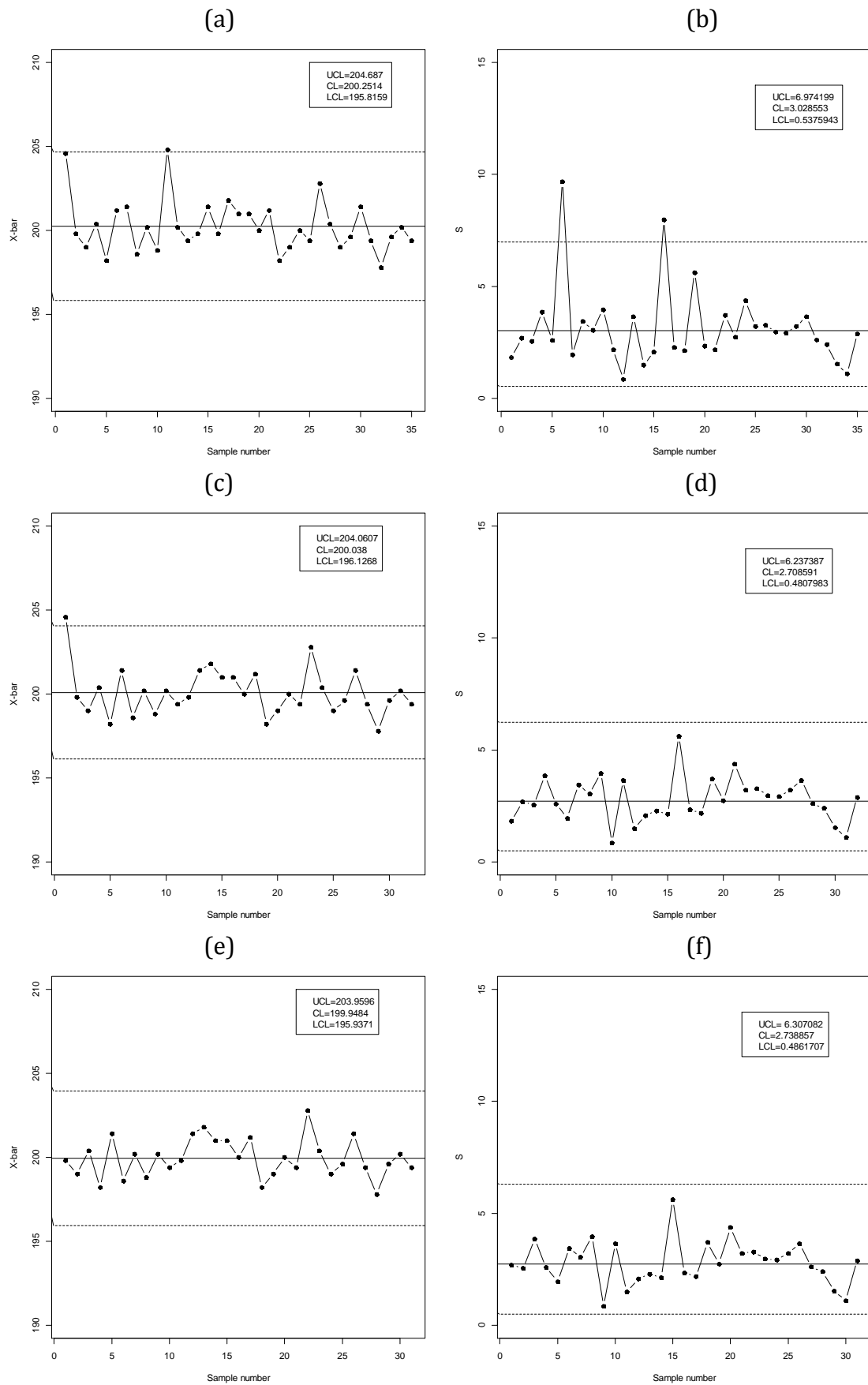
- **Παράδειγμα**

Για επιδείξουμε το Max διάγραμμα ελέγχου θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του ακόλουθου πίνακα των DeVor et al. (1992) που αναφέρονται σε μετρήσεις της εσωτερικής διαμέτρου κυλίνδρων.

Πίνακας 2. 9. Τα δεδομένα των DeVor et al. (1992)

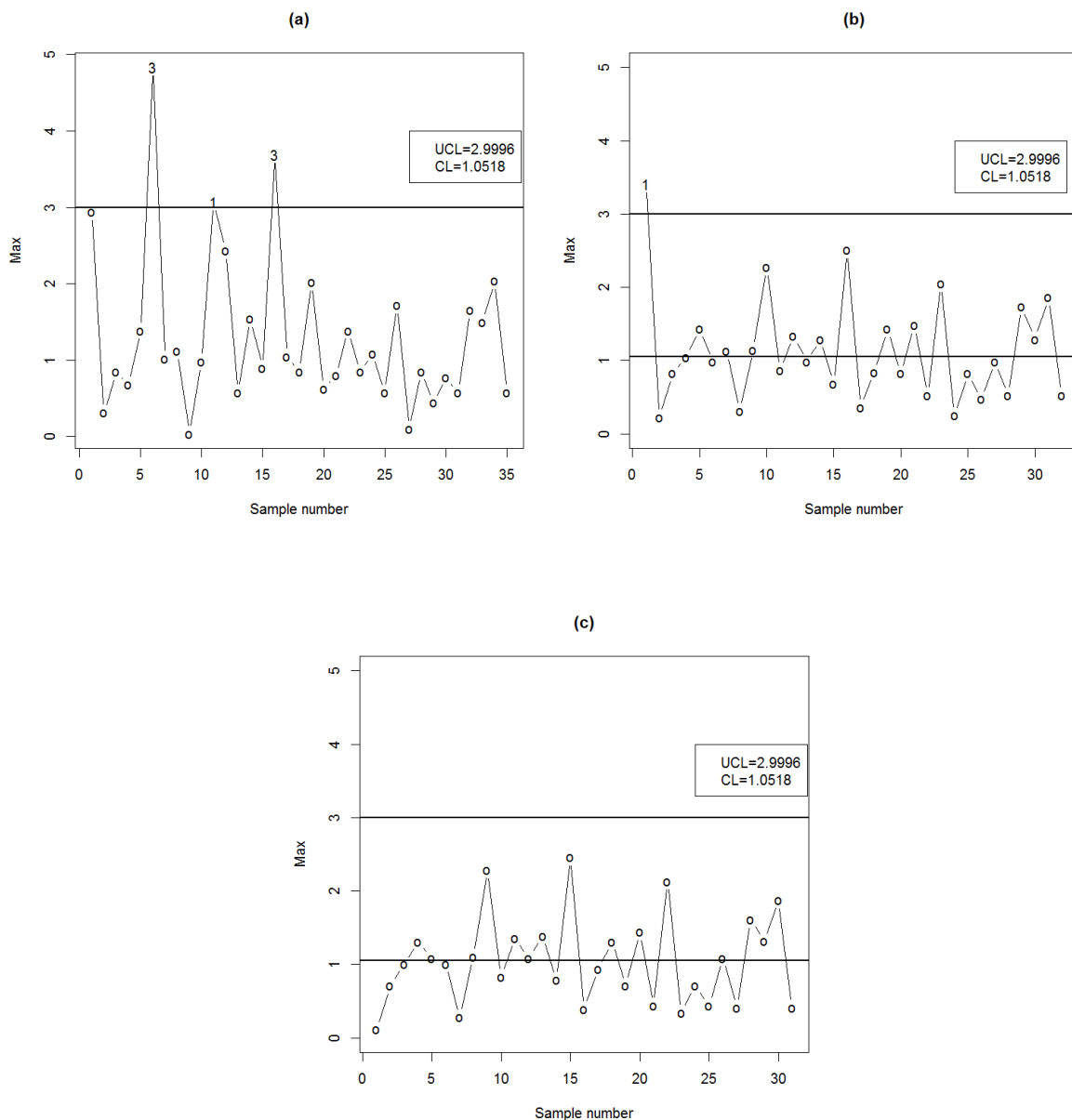
i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	i	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	205	202	204	207	205	19	207	206	194	197	201
2	202	196	201	198	202	20	200	204	198	199	199
3	201	202	199	197	196	21	203	200	204	199	200
4	205	203	196	201	197	22	196	203	197	201	194
5	199	196	201	200	195	23	197	199	203	200	196
6	203	198	192	217	196	24	201	197	196	199	207
7	202	202	198	203	202	25	204	196	201	199	197
8	197	196	196	200	204	26	206	206	199	200	203
9	199	200	204	196	202	27	204	203	199	199	197
10	202	196	204	195	197	28	199	201	201	194	200
11	205	204	202	208	205	29	201	196	197	204	200
12	200	201	199	200	201	30	203	206	201	196	201
13	205	196	201	197	198	31	203	197	199	197	201
14	202	199	200	198	200	32	197	194	199	200	199
15	200	200	201	205	201	33	200	201	200	197	200
16	201	187	209	202	200	34	199	199	201	201	201
17	202	202	204	198	203	35	200	204	197	197	199
18	201	198	204	201	201						

Τα διαγράμματα (a) και (b) του Σχήματος 2.5 αντιστοιχούν στο S διάγραμμα ελέγχου Φάσης I με όρια ελέγχου πιθανότητας $\alpha = 0.0027$ και στο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου Φάσης I με όρια ελέγχου 3σ ($\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = 200.2514$, $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4 = 3.306049$), αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι έχουμε 2 σημεία εκτός των ορίων ελέγχου στο S διάγραμμα ελέγχου που αντιστοιχούν στα δείγματα 6 και 16, και ένα σημείο εκτός των ορίων ελέγχου στο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου που αντιστοιχεί στο δείγμα 11. Όταν τα δείγματα 6, 11 και 16 αφαιρεθούν, τα νέα διαγράμματα ελέγχου, βασισμένα πλέον στα 32 δείγματα ($\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = 200.0938$, $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4 = 2.956771$), είναι τα (c) και (d). Αυτή τη φορά μόνο ένα σημείο είναι εκτός των ορίων ελέγχου στο \bar{X} διάγραμμα ελέγχου που αντιστοιχεί στο δείγμα 1. Όταν το δείγμα 1 αφαιρεθεί από τα δεδομένα, τα νέα διαγράμματα ελέγχου, βασισμένα πλέον στα 31 εναπομείναντα δείγματα ($\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = 199.9484$, $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4 = 2.989809$), είναι τα (e) και (f), όπου παρατηρούμε ότι κανένα σημείο πλέον δεν βρίσκεται εκτός των ορίων ελέγχου.



Σχήμα 2. 6. S και \bar{X} διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα των DeVor et al. (1992)

Στο επόμενο σχήμα δίνονται τα Max διαγράμματα ελέγχου για πιθανότητα σφάλματος τύπου Ι ίση με $\alpha = 0.0054$ που προκύπτουν κατά την ανάλυση Φάσης Ι. Στο διάγραμμα (α) παρατηρούμε ότι έχουμε 3 σημεία εκτός ελέγχου (δείγματα 6, 11, 16) όπου τα δείγματα 6 και 16 σχετίζονται με αλλαγές (αύξηση) στη μεταβλητότητα της διεργασίας ενώ το δείγμα 11 σχετίζεται με αλλαγή (αύξηση) του μέσου της διεργασίας. Όταν τα δείγματα αυτά αφαιρεθούν από τα δεδομένα προκύπτει το διάγραμμα (b), όπου ένα σημείο (δείγμα 1) είναι εκτός του άνω ορίου ελέγχου και το δείγμα σχετίζεται με αλλαγή (αύξηση) του μέσου της διεργασίας. Όταν το αφαιρέσουμε και αυτό από τα δεδομένα προκύπτει το διάγραμμα (c) όπου κανένα σημείο δεν είναι εκτός του ορίων ελέγχου.



Σχήμα 2. 7. Max διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα των DeVor et al. (1992)

Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι το Max διάγραμμα ελέγχου είναι ισοδύναμο με το συνδυασμό των \bar{X} και S διαγραμμάτων ελέγχου. Το κύριο πλεονέκτημα είναι ότι μπορούμε να παρακολουθήσουμε το μέσο και τη μεταβλητότητα της διεργασίας χρησιμοποιώντας ένα μόνο διάγραμμα ελέγχου.

2.4 Το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου

Ο εκθετικά σταθμισμένος κινούμενος μέσος (Exponentially Weighted Moving Average, EWMA) χρησιμοποιήθηκε από τον Roberts (1959) προκειμένου να κατασκευαστεί το ομώνυμο διάγραμμα ελέγχου για την παρακολούθηση του μέσου μιας διεργασίας. Το διάγραμμα ελέγχου EWMA παρέχει μεγαλύτερη ευαισθησία στις μικρές μετατοπίσεις του μέσου, συγκρινόμενο με το κλασσικό διάγραμμα ελέγχου τύπου Shewhart \bar{X} , αλλά δεν είναι τόσο αποτελεσματικό για μεγάλες μετατοπίσεις του μέσου. Συνήθως χρειάζονται δύο EWMA διαγράμματα ελέγχου για την παρακολούθηση της μέσης τιμής και της διακύμανσης της διεργασίας. Το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου που προτάθηκε από τους Chen et al. (2001, [7]), συνδυάζει αποτελεσματικά αυτά τα δύο συνήθη διαγράμματα ελέγχου EWMA σε ένα διάγραμμα ελέγχου, με το οποίο μπορούμε να παρακολουθήσουμε ταυτόχρονα το μέσο και την τυπική απόκλιση της κατανομής των μετρήσεων ενός χαρακτηριστικού X των προϊόντων, και να εντοπίσουμε ποίο από τα δύο χαρακτηριστικά μετατοπίστηκε.

Ας υποθέσουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή των παρατηρήσεων είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_0 και διακύμανση σ_0^2 . Από την διεργασία επιλέγουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n σε τακτά χρονικά διαστήματα. Έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$ το δείγμα που πήραμε στην i -οστή δειγματοληψία ($i = 1, 2, \dots$). Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι όταν η διεργασία λειτουργεί υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας τότε $X_{ij} \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, $i = 1, 2, \dots$ και $j = 1, 2, \dots, n_i$.

Ως συνήθως μια εκτός ελέγχου τιμή για το μέσο θα εκφράζεται ως $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$, και μια εκτός ελέγχου τιμή για την τυπική απόκλιση ως $\sigma_1 = b\sigma_0$ ($b \geq 0$), όπου οι τιμές $a = 0$ και $b = 1$ οδηγούν στις εντός ελέγχου τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.

Έστω $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ ένα τυχαίο δείγμα μεγέθους n από την κανονική κατανομή $N(\mu, \sigma^2)$, και έστω οι στατιστικές συναρτήσεις

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n},$$

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Οι Chen & Cheng (1998, [6]) όρισαν τις ακόλουθες δύο στατιστικές συναρτήσεις

$$U = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\sigma/\sqrt{n}},$$

$$V = \Phi^{-1} \left\{ H_{n-1} \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \right) \right\},$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής ($N(0,1)$), και $H_n(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της χι-τετράγωνο κατανομής με n βαθμούς ελευθερίας (χ_n^2).

Οι στατιστικές συναρτήσεις U, V είναι ανεξάρτητες αφού οι στατιστικές συναρτήσεις \bar{X} και S^2 είναι ανεξάρτητες. Προφανώς $U \sim N(0,1)$ και $V \sim N(0,1)$, αφού η στατιστική συνάρτηση $H_{n-1} \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \right)$ έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$.

Οι Chen et al. (2001), θεωρώντας ότι έχουμε στη διάθεσή μας δείγματα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$ ($i = 1, 2, \dots$) από μια διεργασία που όταν λειτουργεί υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητα ισχύει ότι $X_{ij} \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, όρισε τις ακόλουθες δύο στατιστικές συναρτήσεις

$$Y_i = (1 - \lambda)Y_{i-1} + \lambda U_i, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$$Z_i = (1 - \lambda)Z_{i-1} + \lambda V_i, \quad 0 < \lambda \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots,$$

όπου

$$U_i = \frac{(\bar{X}_i - \mu_0)}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}}}, \quad V_i = \Phi^{-1} \left\{ H_{n-1} \left(\frac{(n-1)S_i^2}{\sigma_0^2} \right) \right\}$$

και Y_0 και Z_0 κατάλληλες αρχικές τιμές. Προφανώς οι τιμές των Y_i (Z_i) είναι οι τιμές που απεικονίζονται σε ένα κλασικό EWMA διάγραμμα ελέγχου που βασίζεται στις τιμές της στατιστικής συνάρτησης U_i (V_i).

Οι Chen et al. (2001, [7]) πρότειναν ένα διάγραμμα ελέγχου όπου η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση είναι η

$$M_i = \max\{|Y_i|, |Z_i|\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Η στατιστική συνάρτηση M_i παίρνει μεγάλες τιμές όταν ο μέσος της διεργασίας μετατοπιστεί ή/και η μεταβλητότητα της διεργασίας αυξηθεί ή μειωθεί. Από την άλλη, η

στατιστική συνάρτηση M_i θα παίρνει μικρές τιμές όταν ο μέσος και η μεταβλητότητα της διεργασίας παραμένουν κοντά στις εντός ελέγχου τιμές τους. Αφού η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση είναι το μέγιστο μεταξύ δύο στατιστικών συναρτήσεων για αυτό το λόγο έδωσαν την ονομασία Max-EWMA στο διάγραμμα ελέγχου.

Το άνω όριο ελέγχου UCL του διαγράμματος ελέγχου (δεν έχει νόημα να υπολογιστεί κάτω όριο ελέγχου επειδή $M_i > 0$) υπολογίζεται με χρήση της κλασικής σχέσης

$$UCL = E(M_i) + K\sqrt{Var(M_i)}$$

όπου $E(M_i)$ είναι η μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης M_i και $Var(M_i)$ είναι η διακύμανσή της (όταν φυσικά $a = 0$ και $b = 1$), και K είναι μια σταθερά που μαζί με το λ καθορίζουν την απόδοση του διαγράμματος.

- **Υπολογισμός του άνω ορίου ελέγχου και του ARL**

Έστω ότι η διεργασία είναι εντός ελέγχου, δηλαδή $X_{ij} \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, $i = 1, 2, \dots$ και $j = 1, 2, \dots, n_i$. Τότε έχουμε $U_i \sim N(0, 1)$ και $V_i \sim N(0, 1)$, και οι στατιστικές συναρτήσεις U_i και V_i είναι ανεξάρτητες. Για τη στατιστική συνάρτηση Y_i έχουμε ότι μπορεί να γραφτεί στην ακόλουθη μορφή

$$Y_i = (1 - \lambda)Y_{i-1} + \lambda U_i = \dots = \lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j U_{i-j} + (1 - \lambda)^i Y_0.$$

Έτσι, για $Y_0 = 0$,

$$E(Y_i) = E\left(\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j U_{i-j} + (1 - \lambda)^i Y_0\right) = 0$$

και

$$\begin{aligned} \sigma_{Y_i}^2 &= Var(Y_i) = Var\left(\lambda \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^j U_{i-j}\right) = \lambda^2 \sum_{j=0}^{i-1} (1 - \lambda)^{2j} \\ &= \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}]. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ότι $Y_i \sim N(0, \sigma_{Y_i}^2)$, όταν $Y_0 = 0$. Ομοίως, για $Z_0 = 0$, έχουμε ότι $Z_i \sim N(0, \sigma_{Z_i}^2)$ όπου

$$\sigma_{Z_i}^2 = \sigma_{Y_i}^2 = \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda}\right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}],$$

ενώ οι τυχαίες μεταβλητές Y_i και Z_i είναι ανεξάρτητες.

Τώρα, η (εντός ελέγχου) συνάρτηση κατανομής $F_i(m)$, $m \geq 0$, της M_i είναι

$$\begin{aligned} F_i(m) &= P(M_i \leq m) = P(|Y_i| \leq m, |Z_i| \leq m) \\ &= P(|Y_i| \leq m)P(|Z_i| \leq m) = P(-m \leq Y_i \leq m)P(-m \leq Z_i \leq m). \end{aligned}$$

Όμως

$$P(-m \leq Y_i \leq m) = P(-m \leq Z_i \leq m) = 2\Phi(r_i m) - 1$$

όπου $r_i = \sqrt{\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}]}$. Επομένως

$$F_i(m) = (2\Phi(r_i m) - 1)^2.$$

Έτσι, η συνάρτηση πυκνότητας $f_i(m)$, $m \geq 0$, της M_i είναι

$$f_i(m) = \frac{dF_i(m)}{dm} = 4r_i\Phi(r_i m)\{2\Phi(r_i m) - 1\}, \quad m \geq 0.$$

Από τη στιγμή που γνωρίζουμε τη συνάρτηση πυκνότητας της M_i μπορούμε να βρούμε (με προγραμματισμό) τη μέση τιμή και τη διακύμανσή της και να υπολογίσουμε το άνω όριο ελέγχου του Max-EWMA διαγράμματος ελέγχου για δεδομένες τιμές των λ και K , επιτυγχάνοντας δεδομένη τιμή για το ARL .

Ο Πίνακας 2.9 δίνει διάφορες επιλογές ζευγών (λ, K) που επιτυγχάνουν $ARL_0 = 185$ και 250.

Πίνακας 2. 10. Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου: Συνδυασμοί (λ, K) για μέγεθος δείγματος $n = 5$

Εντός Ελέγχου $ARL_0 = 185$										
λ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.80	1.00
K	2.23	2.57	2.76	2.86	2.93	2.97	3.03	3.06	3.10	3.10
Εντός Ελέγχου $ARL_0 = 250$										
λ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.80	1.00
K	2.45	2.78	2.94	3.03	3.10	3.14	3.19	3.22	3.25	3.26

Σε μια εκτός ελέγχου διεργασία με χαρακτηριστικά $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma$ και $\sigma_1 = b\sigma_0$ έχουμε ότι

$$U_i = \frac{\bar{X}_i - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}} = b \frac{\bar{X}_i - \mu_1}{\sigma_1/\sqrt{n}} + a\sqrt{n}$$

οπότε $U_i \sim N(a\sqrt{n}, b^2)$. Επίσης αφού

$$\frac{(n-1)S_i^2}{\sigma_0^2} = b^2 \frac{(n-1)S_i^2}{\sigma_1^2} = b^2 T,$$

όπου $T \sim \chi_{n-1}^2$, προκύπτει ότι ούτε και η V_i ακολουθεί τυποποιημένη κανονική κατανομή.

Έτσι για τον υπολογισμό του εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής είναι δύσκολο να βρεθεί κλειστός τύπος για τον υπολογισμό του και στην πράξη χρησιμοποιείται προσομοίωση.

Στον παρακάτω πίνακα, για μέγεθος δείγματος $n = 5$ και $ARL_0 = 185$, δίνονται τιμές για το ARL_1 για διάφορες τιμές των a, b . Τιμές για το ARL_1 που αντιστοιχεί στην ταυτόχρονη χρήση του \bar{X} διαγράμματος ελέγχου ορίων 3σ και του S διαγράμματος ελέγχου με όρια πιθανότητας $\alpha = 0.0027$ δίνονται στις τελευταίες γραμμές του πίνακα.

Πίνακας 2. 11. Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου: ARL_1 για $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$ και $\sigma_1 = b\sigma_0$

		<i>a</i>					
		<i>b</i>	0.0	0.25	0.50	1.0	2.0
$\lambda=0.05$ K=2.354	0.25	1.5	1.5	1.5	1.4	1.0	
	0.5	3.4	3.5	3.2	1.8	1.0	
	1.0	185	17.2	5.6	2.0	1.0	
	1.5	4.1	3.7	3.0	1.8	1.1	
	2.0	1.7	1.7	1.6	1.4	1.1	
$\lambda=0.10$ K=2.649	0.25	1.7	1.6	1.7	1.6	1.0	
	0.5	3.9	3.8	3.6	2.0	1.0	
	1.0	185.3	20.3	6.2	2.1	1.0	
	1.5	4.5	4.1	3.3	2.0	1.1	
	2.0	1.9	1.8	1.7	1.5	1.1	
$\lambda=0.20$ K=2.890	0.25	1.8	1.8	1.8	1.7	1.0	
	0.5	4.4	4.3	4.1	2.1	1.0	
	1.0	184.8	26.3	7.2	2.3	1.1	
	1.50	4.8	4.4	3.5	2.1	1.1	
	2.0	2.0	1.9	1.8	1.5	1.1	
$\lambda=0.30$ K=2.989	0.25	1.8	1.8	1.8	1.8	1.0	
	0.5	4.9	4.9	4.6	2.2	1.0	
	1.0	185.2	33.8	8.0	2.4	1.1	
	1.5	5.0	4.5	3.7	2.1	1.1	
	2.0	2.0	2.0	1.9	1.6	1.2	
$\lambda=0.50$ K=3.073	0.25	2.0	2.0	2.0	1.9	1.0	
	0.5	7.2	7.1	7.0	2.5	1.0	
	1.0	185.5	50.6	11.1	2.6	1.1	
	1.50	5.5	5.0	3.9	2.2	1.1	
	2.0	2.1	2.0	1.9	1.6	1.2	
$\lambda=0.80$ K=3.098	0.25	2.5	2.5	2.5	2.4	1.0	
	0.5	21.0	21.0	21.0	4.2	1.0	
	1.0	185.1	77.7	20.0	3.3	1.1	
	1.5	6.4	5.8	4.5	2.4	1.2	
	2.0	2.2	2.1	2.0	1.6	1.2	
$\lambda=1.00$ K=3.095	0.25	4.7	4.7	4.7	4.7	1.0	
	0.5	51.1	50.7	49.7	11.9	1.0	
	1.0	185.1	96.0	30.2	4.4	1.1	
	1.5	7.3	6.7	5.2	2.7	1.2	
	2.0	2.3	2.2	2.1	1.7	1.2	
$\bar{X} - S$ Chart	0.25	4.8	4.81	4.79	1.07	1.00	
	0.5	51.40	51.18	12.27	1.31	1.00	
	1.0	185.44	30.71	4.45	1.56	1.08	
	1.5	7.34	5.19	2.69	1.58	1.17	
	2.0	2.30	2.11	1.72	1.39	1.18	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου έχει καλύτερη απόδοση από το συνδυασμό των διαγραμμάτων ελέγχου \bar{X} και S στην

ανίχνευση μικρών και μεσαίων μετατοπίσεων της μέσης τιμής ή/και της τυπικής απόκλισης της διεργασίας.

- **Διαδικασία κατασκευής του Max-EWMA διαγράμματος ελέγχου**

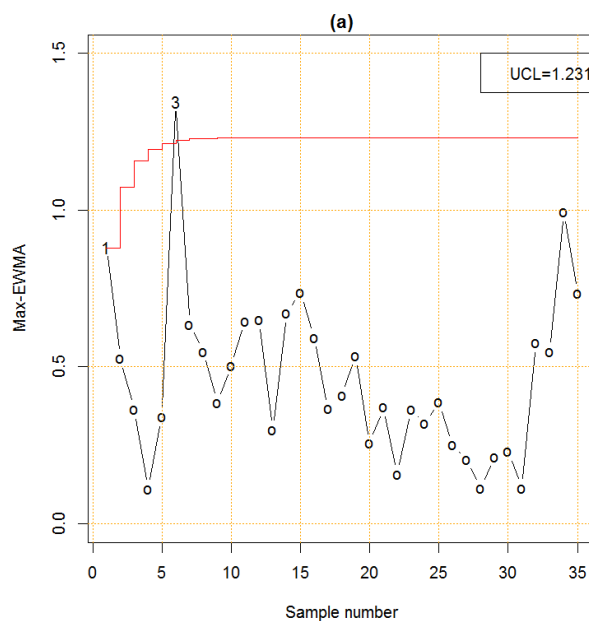
Η διαδικασία κατασκευής του Max-EWMA διαγράμματος ελέγχου όταν έχουμε στη διάθεσή μας m το πλήθος ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n_i ($i = 1, 2, \dots, m$) είναι η ακόλουθη:

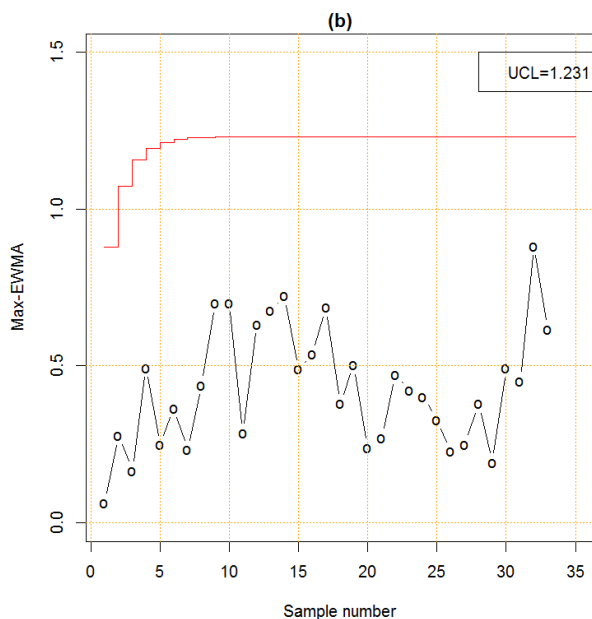
1. Εκτιμούμε τις άγνωστες παραμέτρους της διεργασίας. Αν η μέση τιμή μ είναι άγνωστη τότε την εκτιμούμε με το \bar{X} . Αν το σ είναι άγνωστο τότε το εκτιμούμε με το $\frac{\bar{R}}{d_2}$ ή με το $\frac{\bar{S}}{c_4}$.
2. Επιλέγουμε τον απαιτούμενο συνδυασμό (λ, K) από τον Πίνακα 2.9 και υπολογίζουμε τις στατιστικές συναρτήσεις U_i, V_i, Y_i, Z_i και M_i για κάθε δείγμα χρησιμοποιώντας για αρχικές τιμές τις $Y_0 = Z_0 = 0$.
3. Υπολογίζουμε το άνω όριο ελέγχου (UCL).
4. Όταν $M_i \leq UCL$ σχεδιάζουμε ένα σημείο έναντι του i . Όταν όμως $M_i > UCL$ εξετάζουμε τις δύο στατιστικές συναρτήσεις $|Y_i|, |Z_i|$. Αν $|Y_i| > UCL$, όταν $U_i > 0$ τότε σχεδιάζουμε το σημείο ως "m+"(1) για να δείχνει ότι η μέση τιμή της διεργασίας μετατοπίστηκε σε υψηλότερο επίπεδο, αλλιώς όταν $U_i < 0$ τότε σχεδιάζουμε το σημείο ως "m-"(2) για να δείξουμε ότι η μέση τιμή της διεργασίας μετατοπίστηκε σε χαμηλότερο επίπεδο. Αν $|Z_i| > UCL$, τότε αν $V_i > 0$, τότε σχεδιάζουμε το σημείο ως "v+"(3) για να δείξουμε ότι η μεταβλητότητα της διεργασίας μετατοπίστηκε σε υψηλότερο επίπεδο, ενώ αν $V_i < 0$ τότε σχεδιάζουμε το σημείο ως "v-"(4) για να δείξουμε ότι η μεταβλητότητα της διεργασίας μετατοπίστηκε σε χαμηλότερο επίπεδο. Αν και οι δύο στατιστικές συναρτήσεις $|Y_i|$ και $|Z_i|$ είναι μεγαλύτερες από το άνω όριο ελέγχου, σχεδιάζουμε τα σημεία στο διάγραμμα ως "++"(5), "+-"(6), "-+"(7) ή "--"(8) ανάλογα με το αν $U_i > 0$ και $V_i > 0$, $U_i > 0$ και $V_i < 0$, $U_i < 0$ και $V_i > 0$ και $U_i < 0$ και $V_i < 0$, αντίστοιχα..
5. Εξετάζουμε αν υπάρχουν ειδικές αιτίες μεταβλητότητας σε κάθε σημείο του διαγράμματος που βρίσκεται εκτός ελέγχου.

- **Παράδειγμα**

Για επιδείξουμε το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα των DeVor et al. (1992) (δείτε Παράγραφο 2.3).

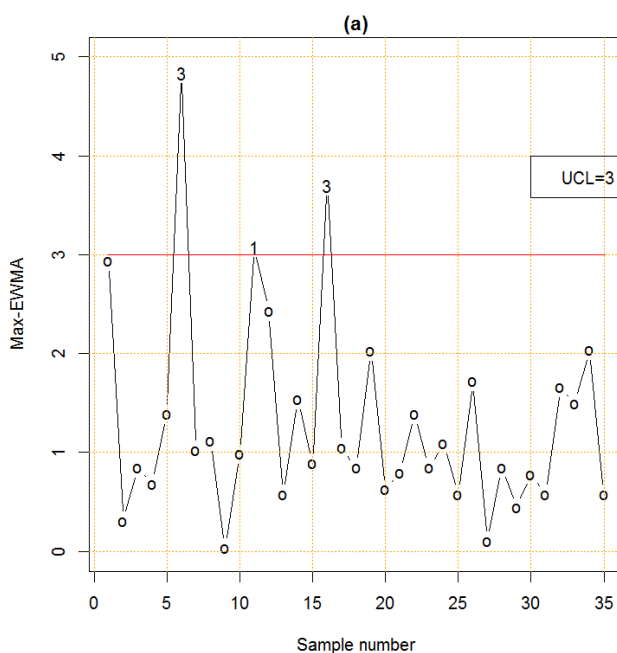
Καταρχήν $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = 200.2514$ και $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4 = 3.306049$. Με βάση αυτές τις εκτιμήσεις και επιλέγοντας $ARL_0 = 185$, $\lambda = 0.30$ και $K = 2.989$ (δείτε Πίνακα 2.9), προκύπτει το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου (α) του Σχήματος 2.7. Παρατηρούμε ότι δυο σημεία είναι εκτός του άνω ορίου ελέγχου (δείγματα 1 και 6), όπου το δείγμα 1 σχετίζεται με αύξηση του μέσου της διεργασίας και το δείγμα 6 σχετίζεται με αύξηση της μεταβλητότητα της διεργασίας. Αφαιρούμε τα δύο δείγματα και πλέον έχουμε ότι $\bar{\bar{X}} = 200.091$ και $\frac{\bar{S}}{c_4} = 3.136$. Το νέο Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου που προκύπτει είναι το διάγραμμα ελέγχου (β) του Σχήματος 2.7. Παρατηρούμε ότι δεν υπάρχει πλέον κάποιο σημείο πάνω από το άνω όριο ελέγχου.

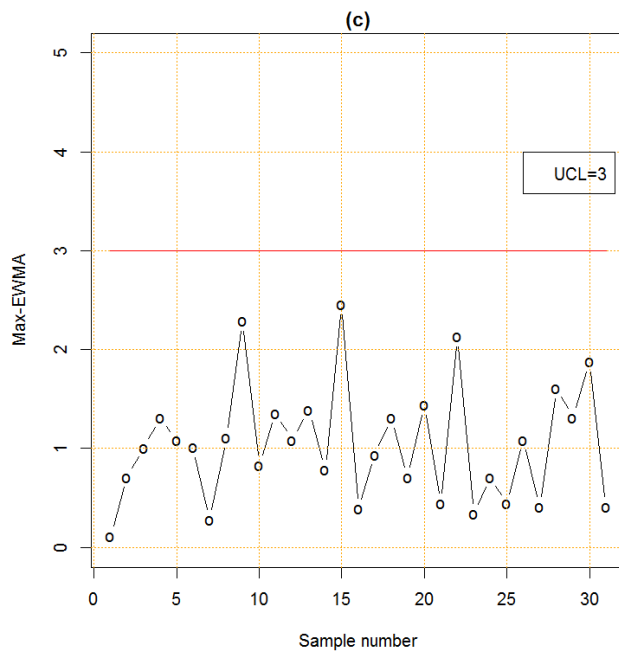
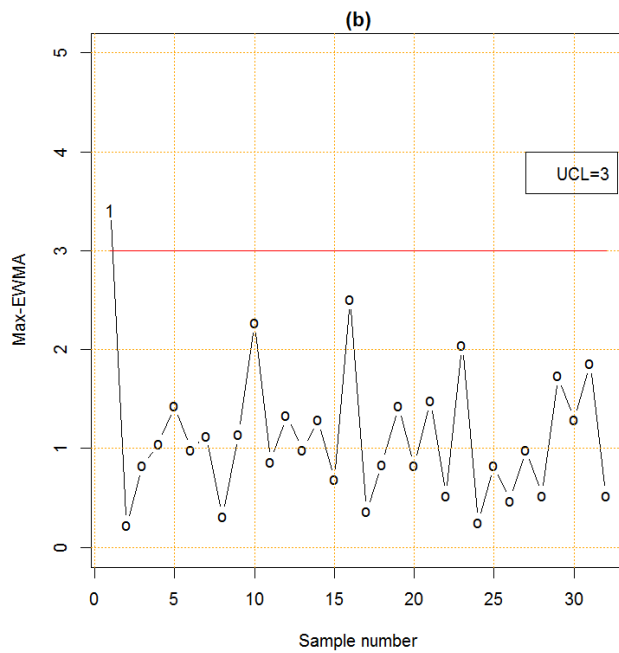




Σχήμα 2. 8. Max-EWMA διαγράμματα ελέγχου για $\lambda=0.30$ και $K=2.989$

Επιπλέον εφαρμόσαμε το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου με $ARL_0 = 185$, $\lambda = 1.00$ και $K = 3.10$ (δείτε Πίνακα 2.9), στα ίδια δεδομένα καθώς όταν το $\lambda=1$ το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου συνδυάζει ένα Shewhart διάγραμμα ελέγχου για τη μέση τιμή και ένα Shewhart διάγραμμα ελέγχου για τη μεταβλητότητα της διεργασίας. Αρχικά προκύπτει το διάγραμμα (α) του Σχήματος 2.8, όπου τα δείγματα 6, 11 και 16 είναι εκτός ελέγχου. Τα δείγματα 6 και 16 σχετίζονται με αύξηση της μεταβλητότητα της διεργασίας και το δείγμα 11 με αύξηση του μέσου της διεργασίας. Αφαιρώντας κάθε φορά τα εκτός ελέγχου σημεία παίρνουμε κατά σειρά τα διαγράμματα (b) και (c) του Σχήματος 2.8.





Σχήμα 2. 9. Max-EWMA διαγράμματα ελέγχου για $\lambda=1$ και $K=3.1$

Παρατηρούμε από τα παραπάνω αποτελέσματα ότι ένα εκτός ελέγχου σήμα δεν το εντοπίζουμε όταν χρησιμοποιούμε το Max-EWMA για $\lambda=0.30$ και $K=2.97$, ενώ το εντοπίζουμε στο Shewhart διάγραμμα ελέγχου. Αυτό γίνεται διότι αν η διεργασία μετατοπιστεί προσωρινά, γεγονός το οποίο επηρεάζει μόνο ένα σημείο, τότε θα περιμέναμε το Shewhart διάγραμμα ελέγχου να είναι καλύτερο στον εντοπισμό αυτής της μετατόπισης. Αν η διεργασία περνάει από διαρκείς μικρές αλλαγές, τότε θα περιμέναμε το EWMA διάγραμμα να είναι καλύτερο.

Συμπερασματικά, το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου συνδυάζει αποτελεσματικά τα συνήθη \bar{X} και S διαγράμματα ελέγχου σε ένα νέο διάγραμμα ελέγχου. Το κύριο πλεονέκτημα στη χρήση του Max-EWMA διαγράμματος ελέγχου είναι ότι μπορούμε να παρακολουθήσουμε το μέσο της διεργασίας και τη μεταβλητότητά της με ένα διάγραμμα ελέγχου. Ακόμη ένα πλεονέκτημα του Max-EWMA διαγράμματος ελέγχου είναι ότι αντιμετωπίζει αυτόματα την περίπτωση δειγμάτων με διαφορετικό μέγεθος. Επίσης άλλο ένα πλεονέκτημα είναι η ισορροπημένη απόδοση στην ανίχνευση αύξησης ή μείωσης του μέσου και της μεταβλητότητας της διεργασίας.

2.5 Το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου

Ο Xie (1999, [14]) πρότεινε μια παραλλαγή του Max-EWMA διαγράμματος ελέγχου που παρουσιάστηκε στην προηγούμενη παράγραφο. Ακολουθώντας το θεωρητικό πλαίσιο της Παραγράφου 2.4, θεωρούμε ότι έχουμε δείγματα $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$ ($i = 1, 2, \dots$) από μια διεργασία που όταν λειτουργεί υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητα ισχύει ότι $X_{ij} \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$. Ο Xie (1999, [14]), όρισε τις ακόλουθες δύο στατιστικές συναρτήσεις

$$\begin{aligned} Y_i &= (1 - \lambda)Y_{i-1} + \lambda U_i, & 0 < \lambda \leq 1, & \quad i = 1, 2, \dots, \\ Z_i &= (1 - \lambda)Z_{i-1} + \lambda V_i, & 0 < \lambda \leq 1, & \quad i = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

όπου

$$U_i = \frac{(\bar{X}_i - \mu_0)}{\frac{\sigma_0}{\sqrt{n_i}}}, \quad V_i = \Phi^{-1} \left\{ H_{n-1} \left(\frac{(n-1)S_i^2}{\sigma_0^2} \right) \right\}$$

και Y_0 και Z_0 κατάλληλες αρχικές τιμές. Ο Xie (1999, [14]) πρότεινε ένα διάγραμμα ελέγχου όπου η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση είναι η

$$SS_i = Y_i^2 + Z_i^2, \quad i = 1, 2, \dots$$

Η στατιστική συνάρτηση SS_i παίρνει μεγάλες τιμές όταν ο μέσος της διεργασίας μετατοπιστεί ή/και η μεταβλητότητα της διεργασίας αυξηθεί ή μειωθεί. Από την άλλη, η στατιστική συνάρτηση SS_i παίρνει μικρές τιμές όταν ο μέσος και η μεταβλητότητα της διεργασίας παραμένουν κοντά στις εντός ελέγχου τιμές τους.

Το άνω όριο ελέγχου UCL του διαγράμματος ελέγχου (δεν έχει νόημα να υπολογιστεί κάτω όριο ελέγχου επειδή $SS_i > 0$) υπολογίζεται με χρήση της κλασικής σχέσης

$$UCL = E(SS_i) + K\sqrt{Var(SS_i)}$$

όπου $E(SS_i)$ είναι η μέση τιμή της στατιστικής συνάρτησης SS_i , $V(SS_i)$ είναι η διακύμανση της και K είναι μια σταθερά που μαζί με το λ καθορίζουν την απόδοση του διαγράμματος.

Από την Παράγραφο 2.4 έχουμε ότι $Y_i \sim N(0, \sigma_{Y_i}^2)$, όταν $Y_0 = 0$, και $Z_i \sim N(0, \sigma_{Z_i}^2)$, όταν $Z_0 = 0$, όπου

$$\sigma^2 = \sigma_{Y_i}^2 = \sigma_{Z_i}^2 = \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}].$$

Οι τυχαίες μεταβλητές Y_i και Z_i είναι ανεξάρτητες, οπότε

$$\frac{SS_i}{\sigma^2} = \frac{Y_i^2}{\sigma_{Y_i}^2} + \frac{Z_i^2}{\sigma_{Z_i}^2} \sim \chi_2^2$$

και επομένως

$$E(SS_i) = 2\sigma^2,$$

$$Var(SS_i) = 4\sigma^4.$$

Συνεπώς το άνω όριο ελέγχου αρχικής κατάστασης (initial state) για το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου δίνεται από τον τύπο

$$UCL = 2\sigma^2(1 + K) = 2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) [1 - (1 - \lambda)^{2i}] (1 + K).$$

Για μεγάλες τιμές του i έχουμε ότι το άνω όριο ελέγχου σταθερής κατάστασης (steady-state) για το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου δίνεται από τον τύπο

$$UCL \cong \frac{2\lambda}{2 - \lambda} (1 + K).$$

- **Υπολογισμός του ARL**

Για τον υπολογισμό του εντός και εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του SS – EWMA διαγράμματος ελέγχου χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι προσομοίωσης και προέκυψαν τα αποτελέσματα των δύο ακόλουθων πινάκων.

Πίνακας 2. 12. Τιμές του ARL_1 για το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου αρχικής κατάστασης για $n = 5$

		ARL_0							
		a							
b		0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
0.25	λ	0.050	0.050	0.050	0.050	0.105	1.00	1.00	1.00
	K	3.105	3.105	3.105	3.105	3.698	4.529	4.529	4.529
	ARL	1.75	1.70	1.54	1.07	1.00	1.00	1.00	1.00
0.50	λ	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.065	1.00	1.00
	K	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.322	4.529	4.529
	ARL	4.06	3.64	2.80	1.60	1.05	1.00	1.00	1.00
1.00	λ	0.205	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.070
	K	4.126	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.382
	ARL	249.92	18.85	6.11	2.09	1.28	1.04	1.00	1.00
1.25	λ	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.090
	K	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.580
	ARL	12.11	8.30	4.54	2.00	1.31	1.07	1.01	1.00
1.50	λ	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050
	K	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105
	ARL	4.20	3.78	2.93	1.79	1.29	1.09	1.02	1.00
2.00	λ	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050
	K	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105
	ARL	1.78	1.74	1.64	1.40	1.21	1.09	1.03	1.01
2.50	λ	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050
	K	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105
	ARL	1.30	1.29	1.27	1.20	1.13	1.07	1.04	1.01
3.00	λ	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050	0.050
	K	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105	3.105
	ARL	1.14	1.14	1.13	1.11	1.08	1.05	1.03	1.02

Πίνακας 2. 13. Τιμές του ARL_1 για το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου σταθερής κατάστασης για $n = 5$

		ARL_0							
		a							
b		0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
0.25	λ	0.430	0.460	0.510	0.840	1.00	1.00	1.00	1.00
	K	4.428	4.441	4.465	4.522	4.528	4.528	4.528	4.528
	ARL	2.51	2.42	2.19	1.48	1.00	1.00	1.00	1.00
0.50	λ	0.195	0.205	0.265	0.485	0.905	1.00	1.00	1.00
	K	4.074	4.103	4.240	4.460	4.523	4.528	4.528	4.528
	ARL	5.96	5.37	4.17	2.32	1.26	1.00	1.00	1.00
1.00	λ	0.090	0.060	0.170	0.416	0.760	0.925	0.975	1.00
	K	3.510	3.141	3.991	4.415	4.523	4.524	4.528	4.528
	ARL	249.91	24.40	8.83	3.07	1.62	1.11	1.01	1.00
1.25	λ	0.175	0.190	0.265	0.555	0.815	0.905	1.00	1.00
	K	4.008	4.060	4.240	4.482	4.517	4.523	4.528	4.528
	ARL	17.11	11.67	6.58	2.78	1.59	1.15	1.02	1.00
1.50	λ	0.4515	0.415	0.460	0.690	0.795	0.925	0.985	1.00
	K	4.415	4.415	4.441	4.516	4.519	4.524	4.528	4.528
	ARL	5.93	5.26	4.08	2.33	1.52	1.17	1.04	1.01
2.00	λ	0.780	0.770	0.755	0.845	0.895	0.940	0.950	0.960
	K	4.521	4.522	4.522	4.523	4.524	4.527	4.527	4.527
	ARL	2.17	2.12	1.98	1.62	1.34	1.16	1.06	1.02
2.50	λ	0.875	0.900	0.915	0.915	0.900	0.910	0.950	0.950
	K	4.524	4.523	4.522	4.522	4.523	4.524	4.525	4.526
	ARL	1.45	1.43	1.40	1.30	1.20	1.12	1.06	1.02
3.00	λ	0.950	0.930	0.955	0.920	0.960	0.975	0.960	0.995
	K	4.524	4.525	4.526	4.523	4.526	4.528	4.526	4.528
	ARL	1.21	1.20	1.20	1.16	1.12	1.08	1.05	1.03

Ο Πίνακας 2.13 δίνει διάφορες επιλογές ζευγών (λ, K) που επιτυγχάνουν $ARL_0 = 185$ και 250.

Πίνακας 2. 14. SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου σταθερής κατάστασης: Συνδυασμοί (λ, K) για μέγεθος δείγματος $n = 5$

$ARL_0 = 185$										
λ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.80	1.00
K	2.58	3.23	3.55	3.74	3.87	3.96	4.08	4.14	4.21	4.22
$ARL_0 = 250$										
λ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.80	1.00
K	2.96	3.60	3.91	4.09	4.22	4.30	4.40	4.47	4.52	4.53

- **Διαδικασία κατασκευής του διαγράμματος**

Η κατασκευή του SS-EWMA διαγράμματος ελέγχου για δεδομένο ζεύγος (λ, K) είναι πολύ απλή. Το διάγραμμα έχει μόνο άνω όριο ελέγχου UCL και σε αυτό απεικονίζονται τα σημεία (i, SS_i) , $i = 1, 2, \dots$. Με αυτή όμως τη διαδικασία δεν γνωρίζουμε αν ένα σημείο πάνω από το UCL δηλώνει μετατόπιση του μέσου ή/και της διασποράς.

Εναλλακτικά μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα κύκλο κέντρου στο $(0,0)$ με ακτίνα \sqrt{UCL} και να σχεδιάσουμε τα σημεία (Y_i, Z_i) . Σημεία εκτός του κύκλου δίνουν σήμα για εκτός ελέγχου διεργασία. Αναλυτικά η διαδικασία κατασκευής του SS-EWMA διαγράμματος ελέγχου είναι η ακόλουθη:

Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας m το πλήθος ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Τότε

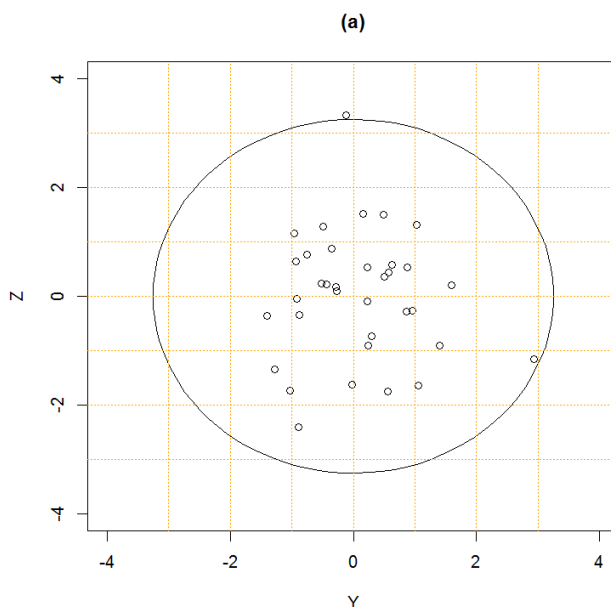
1. Εκτιμούμε τις άγνωστες παραμέτρους της διεργασίας. Αν η μέση τιμή μ είναι άγνωστη τότε την εκτιμούμε με το $\bar{\bar{X}}$. Αν το σ είναι άγνωστο τότε το εκτιμούμε με το $\frac{\bar{R}}{d_2}$ ή με το $\frac{\bar{S}}{c_4}$.
2. Επιλέγουμε από πίνακες τον απαιτούμενο συνδυασμό (λ, K) για το επιθυμητό εντός ελέγχου ARL_0 , και υπολογίζουμε τις στατιστικές συναρτήσεις U_i, V_i, Y_i, Z_i και SS_i για κάθε δείγμα χρησιμοποιώντας για αρχικές τιμές τις $Y_0 = Z_0 = 0$.
3. Υπολογίζουμε το άνω όριο ελέγχου (UCL).
4. Κατασκευάζουμε κύκλο κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας \sqrt{UCL} και σχεδιάζουμε τα σημεία (Y_i, Z_i) .
5. Σημεία που βρίσκονται στο εξωτερικό του κύκλου θεωρούνται ότι ενδεχομένως αντιστοιχούν σε εκτός στατιστικού ελέγχου δείγματα.

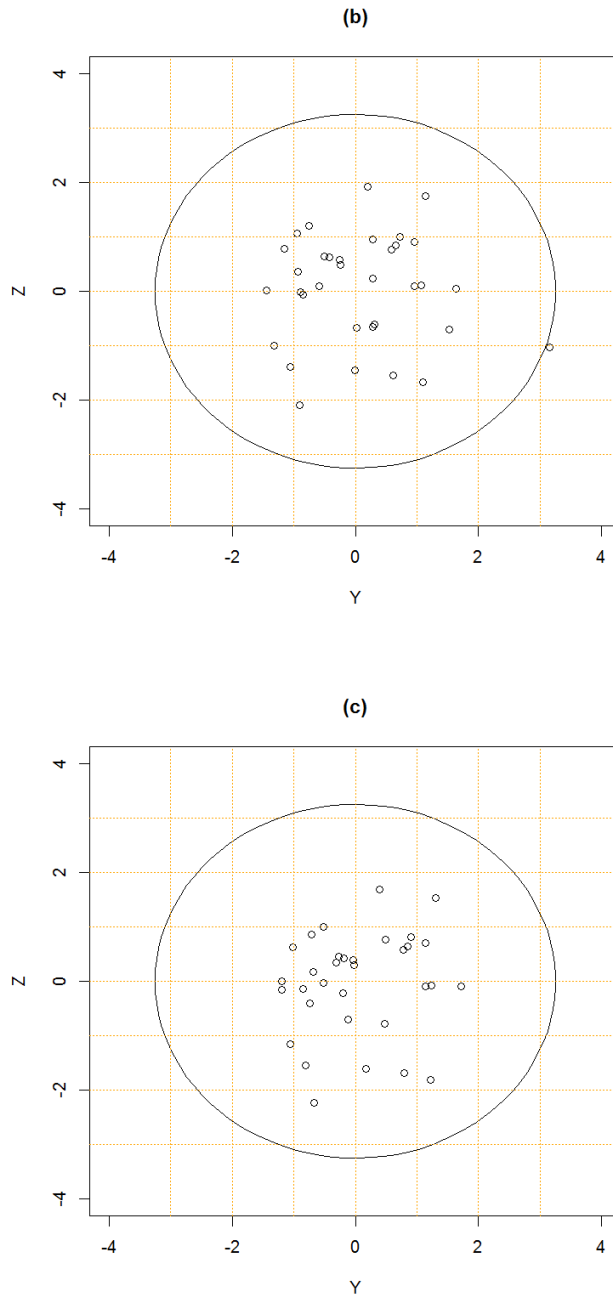
6. Διερευνούμε την αιτία που σχετίζεται με κάθε σήμα εκτός ελέγχου.

- **Παράδειγμα**

Για να επιδείξουμε το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του ακόλουθου πίνακα των DeVor et al. (1992) που αναφέρονται σε μετρήσεις της εσωτερικής διαμέτρου κυλίνδρων.

Καταρχήν $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = 200.2514$ και $\hat{\sigma} = \bar{s}/c_4 = 3.306049$. Με βάση αυτές τις εκτιμήσεις και επιλέγοντας $ARL_0 = 250$, $\lambda = 0.32$ και $K = 4.301$, προκύπτει το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου (a) του Σχήματος 2.9. Παρατηρούμε ότι έχουμε ένα σημείο εκτός του ορίου ελέγχου(δείγμα 6) και ένα σημείο το οποίο είναι οριακά εντός ελέγχου(δείγμα 1). Το σημείο που είναι εκτός σχετίζεται με την μεταβλητότητα της διεργασίας. Αφαιρούμε το δείγμα 6 και πλέον έχουμε ότι $\bar{\bar{X}} = 200.22$ και $\frac{\bar{s}}{c_4} = 3.10$. Το νέο SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου που προκύπτει είναι το διάγραμμα ελέγχου (b) του Σχήματος 2.9. Παρατηρούμε ένα σημείο εκτός ελέγχου (δείγμα 1) το οποίο σχετίζεται με το μέσο της διεργασίας. Αφαιρούμε το δείγμα και πλέον έχουμε ότι $\bar{\bar{X}} = 200.09$ και $\frac{\bar{s}}{c_4} = 3.19$. Στο νέο SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου που προκύπτει παρατηρούμε ότι κανένα σημείο δεν είναι εκτός ελέγχου συνεπώς η διεργασία είναι πλέον εντός ελέγχου.

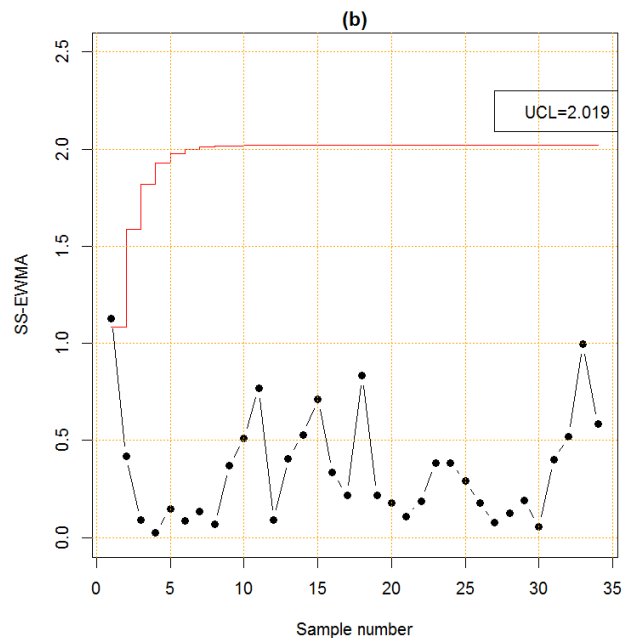
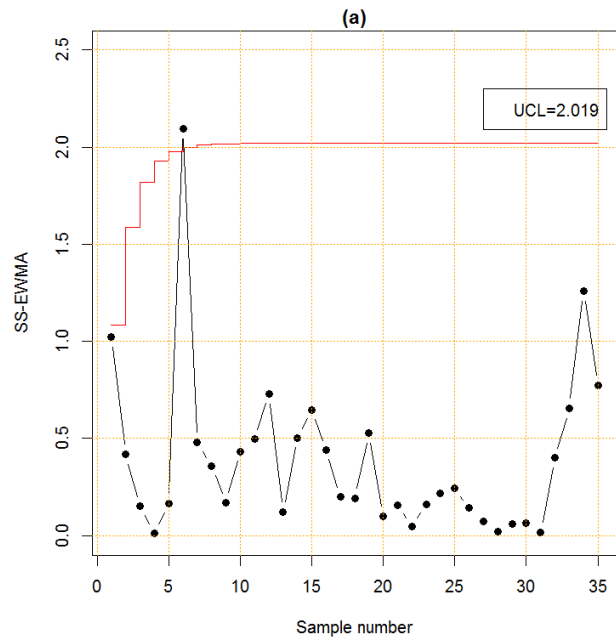


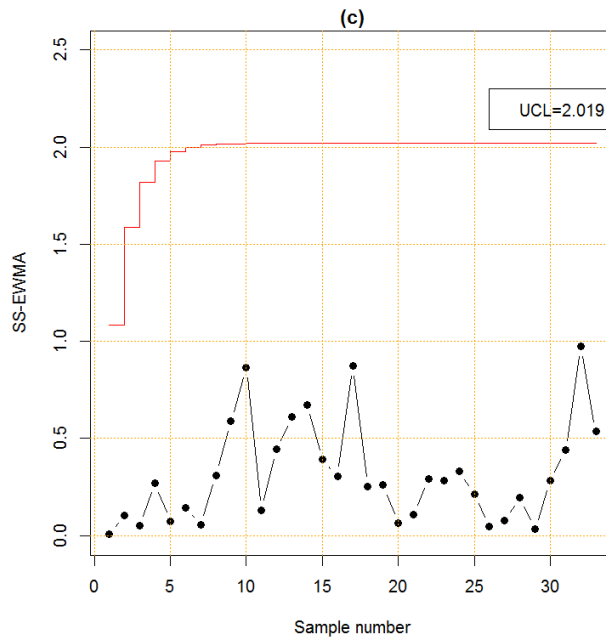


Σχήμα 2. 10. Κυκλικό SS-EWMA διαγράμματα ελέγχου για $\lambda = 0.32$ και $K = 4.3011$

Τώρα θα κατασκευάσουμε το διάγραμμα ελέγχου με την στατιστική συνάρτηση $SS_i = y_i^2 + z_i^2$ να απεικονίζεται στο διάγραμμα. Αντίστοιχα έχουμε $\hat{\mu} = \bar{\bar{X}} = 200.2514$ και $\hat{\sigma} = \bar{s}/c_4 = 3.306049$. Με βάση αυτές τις εκτιμήσεις και επιλέγοντας $ARL_0 = 250$, $\lambda = 0.32$ και $K = 4.301$, προκύπτει το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου (a) του Σχήματος 2.10. Παρατηρούμε ότι έχουμε ένα σημείο εκτός ελέγχου (δείγμα 6) το οποίο σχετίζεται με τη μεταβλητότητα της διεργασίας. Αφαιρούμε το δείγμα και έχουμε πλέον ότι $\bar{\bar{X}} = 200.22$ και $\frac{\bar{s}}{c_4} = 3.10$. Το νέο SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου που προκύπτει είναι το διάγραμμα

ελέγχου (b) του Σχήματος 2.10. Παρατηρούμε ότι έχουμε ένα σημείο εκτός ελέγχου(δείγμα 1) το οποίο σχετίζεται με το μέσο της διεργασίας. Αφαιρούμε το δείγμα και έχουμε πλέον ότι $\bar{\bar{X}} = 200.09$ και $\frac{\bar{s}}{c_4} = 3.13$. Στο νέο SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου που προκύπτει παρατηρούμε ότι κανένα σημείο δεν είναι εκτός ελέγχου και συνεπώς η διεργασία είναι πλέον εντός ελέγχου.





Σχήμα 2. 11. SS-EWMA διαγράμματα ελέγχου για $\lambda = 0.32$ και $K = 4.3011$

Συμπερασματικά οι ιδιότητες του SS-EWMA διαγράμματος ελέγχου είναι όμοιες με αυτές του Max-EWMA, αλλά έχει ένα επιπλέον πλεονέκτημα είναι ότι μπορούμε να το κατασκευάσουμε πιο εύκολα το οποίο μας δίνει την δυνατότητα για μεγαλύτερη ευελιξία από την συνήθη προσέγγιση.

2.6 Το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου

Το ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου που είδαμε στην Παράγραφο 2.2 που πρότειναν οι Chao & Cheng (1996, [3]) είναι μια εναλλακτική των διαγραμμάτων ελέγχου \bar{X} και S και είναι ουσιαστικά ένα δισδιάστατο διάγραμμα το οποίο είναι πολύ εύκολο να το χρησιμοποιήσουμε. Ωστόσο το ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου δεν είναι τόσο ευαίσθητο για μικρές μετατοπίσεις των παραμέτρων της διεργασία. Έτσι ο Xie (1999, [14]) εφάρμοσε την τεχνική EWMA στην στατιστική συνάρτηση του ημικυκλικού διαγράμματος ελέγχου και πρότεινε το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου το οποίο έχει μεγάλη ευαισθησία σε μικρές μετατοπίσεις και είναι ικανό για την ταυτόχρονη παρακολούθηση του μέσου και της μεταβλητότητας της διεργασίας.

Ας υποθέσουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή των παρατηρήσεων είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_0 και διακύμανση σ_0^2 . Από την διεργασία επιλέγουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n σε τακτικά χρονικά διαστήματα. Έστω $\mathbf{X}_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$ το

δείγμα που πήραμε στην i -οστή δειγματοληψία ($i = 1, 2, \dots$). Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι όταν η διεργασία λειτουργεί υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας, τότε $X_{ij} \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n_i$.

Μια εκτός ελέγχου τιμή για το μέσο θα εκφράζεται ως $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$, και για την τυπική απόκλιση ως $\sigma_1 = b\sigma_0$, όπου οι τιμές $a = 0$ και $b = 1$ οδηγούν στις εντός ελέγχου τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.

Κάτω από τις ίδιες υποθέσεις που είδαμε στην Παράγραφο 2.2, η στατιστική συνάρτηση του ημικυκλικού διαγράμματος είναι η

$$T_i = (\bar{X}_i - \mu_0)^2 + \frac{n-1}{n} S_i^2, \quad i = 1, 2, \dots$$

και έστω

$$T_i^* = \frac{n}{\sigma_0^2} T_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

Η στατιστική συνάρτηση που πρότεινε ο Xie (1999) είναι η

$$Q_i = (1 - \lambda)Q_{i-1} + \lambda T_i^* \quad i = 1, 2, \dots$$

με $Q_0 = n$.

Επειδή η στατιστική συνάρτηση Q_i βασίζεται στη στατιστική συνάρτηση T_i^* του ημικυκλικού διαγράμματος ελέγχου το διάγραμμα ελέγχου στο οποίο απεικονίζεται η στατιστική συνάρτηση Q_i ονομάστηκε EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου. Επειδή $Q_i > 0$ το διάγραμμα ελέγχου θα έχει μόνο ένα άνω όριο ελέγχου.

Το άνω όριο ελέγχου UCL_1 του διαγράμματος ελέγχου θα υπολογιστεί από τη σχέση

$$UCL_1 = E(Q_i) + K\sqrt{V(Q_i)}$$

όπου $E(Q_i)$ είναι η μέση τιμή της Q_i , $V(Q_i)$ είναι η διακύμανση της Q_i όταν $a = 0$ και $b = 1$, και K είναι ένας πολλαπλασιαστής ο οποίος μαζί με το λ ελέγχουν την απόδοση του διαγράμματος.

Για την αναμενόμενη τιμή και την διακύμανση της στατιστικής συνάρτησης Q_i έχουμε ότι αφού $T_i^* \sim \chi_n^2$ (όταν $a = 0$ και $b = 1$), παίρνουμε ότι

$$E(Q_i) = ET_i^* = n,$$

$$\text{Var}(Q_i) = \frac{\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda} \text{Var}(T_i^*) = \frac{2n\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}.$$

Συνεπώς το άνω όριο ελέγχου αρχικής κατάστασης (initial state) για το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου δίνεται από τον τύπο

$$UCL_1 = n + K \sqrt{\frac{2n\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}}.$$

Για μεγάλες τιμές του i έχουμε ότι το άνω όριο ελέγχου σταθερής κατάστασης (steady-state) για το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου δίνεται από τον τύπο

$$UCL_1 \cong n + K \sqrt{\frac{2n\lambda}{2 - \lambda}}.$$

Η στατιστική συνάρτηση Q_i μπορεί επίσης να γραφτεί στη μορφή

$$Q_i = U_i + V_i + n$$

όπου τα U_i και V_i δίνονται από τις σχέσεις

$$U_i = (1 - \lambda)U_{i-1} + \lambda \left[\frac{n(\bar{X}_i - \mu_0)^2}{\sigma_0^2} - 1 \right],$$

$$V_i = (1 - \lambda)V_{i-1} + \lambda \left[(n - 1) \left(\frac{S_i^2}{\sigma_0^2} - 1 \right) \right],$$

με $U_0 = V_0 = 0$. Το αντίστοιχο UCL_2 αρχικής κατάστασης (initial state), όταν στο διάγραμμα απεικονιστεί το ζεύγος (U_i, V_i) , δίνεται από τον τύπο

$$UCL_2 = K \sqrt{\frac{2n\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}{2 - \lambda}}.$$

Το αντίστοιχο UCL_2 σταθερής κατάστασης (steady state), όταν στο διάγραμμα απεικονιστεί το ζεύγος (U_i, V_i) , δίνεται από τον τύπο

$$UCL_2 = K \sqrt{\frac{2n\lambda}{2 - \lambda}}.$$

- **Υπολογισμός τους ARL**

Για τον υπολογισμό του εντός και εκτός ελέγχου μέσου μήκους ροής του EWMA-SC διαγράμματος ελέγχου χρησιμοποιήθηκαν μέθοδοι προσομοίωσης και προέκυψαν τα αποτελέσματα των τεσσάρων ακόλουθων πινάκων ($Q_0 = 5$).

Πίνακας 2. 15. Τιμές του ARL_1 για το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου αρχικής κατάστασης για $n = 5$ ($ARL_0 = 250$)

$ARL_0 = 250$								
a								
b	0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	λ	0.40	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	K	3.4054	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180
	ARL	249.94	66.30	22.7	3.61	1.61	1.12	1.01
1.25	λ	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	K	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180
	ARL	7.53	6.61	4.74	2.38	1.46	1.13	1.02
1.50	λ	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	K	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180
	ARL	3.07	2.92	2.57	1.82	1.35	1.12	1.03
2.00	λ	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	K	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180
	ARL	1.56	1.54	1.49	1.34	1.20	1.10	1.04
2.50	λ	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	K	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180
	ARL	1.23	1.22	1.21	1.17	1.11	1.06	1.03
3.00	λ	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	K	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180	2.1180
	ARL	1.11	1.11	1.10	1.09	1.06	1.04	1.02

Πίνακας 2. 16. Τιμές του ARL_1 για το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου σταθερής κατάστασης για $n = 5$ ($ARL_0 = 250$)

$ARL_0 = 250$								
a								
b	0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	λ	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05	0.05
	K	1.8799	1.8799	1.8799	1.8799	3.4058	3.7568	3.8718
	ARL	250.0	73.46	22.60	5.16	2.11	1.25	1.03
1.25	λ	0.05	0.50	0.50	0.30	0.4650	0.70	0.90
	K	1.8799	1.8799	1.8799	3.1864	3.4909	3.7568	3.8666
	ARL	9.43	8.50	6.51	3.22	1.79	1.23	1.05
1.50	λ	0.2250	0.2650	0.2650	0.4100	0.5700	0.730	0.8850
	K	3.0781	3.1050	3.1050	3.4058	3.6301	3.7805	3.8620
	ARL	4.17	3.96	3.44	2.30	1.56	1.20	1.06
2.00	λ	0.4650	0.50	0.50	0.590	0.70	0.7950	0.8850
	K	3.4909	3.5416	3.5416	3.6516	3.7568	3.8222	3.8620
	ARL	1.87	1.84	1.76	1.52	1.30	1.14	1.06
2.50	λ	0.6550	0.6550	0.70	0.70	0.7950	0.8600	0.910
	K	3.7168	3.7168	3.7568	3.8222	3.8532	3.8532	3.8694
	ARL	1.34	1.33	1.31	1.24	1.16	1.10	1.05
3.00	λ	0.7950	0.7950	0.7950	0.8250	0.860	0.8850	0.9350
	K	3.8222	3.8222	3.8222	3.8378	3.8532	3.8620	3.8751
	ARL	1.16	1.16	1.15	1.13	1.09	1.06	1.04

Πίνακας 2. 17. Τιμές του ARL_1 για το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου σταθερής κατάστασης για $n = 5$ ($ARL_0 = 370$)

$ARL_0 = 370$									
a									
b		0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	λ	0.050	0.050	0.050	0.05	0.4650	0.6550	0.90	0.980
	K	1.9479	1.9479	1.9479	1.9479	3.5794	3.9957	4.1576	4.1428
	ARL	369.99	78.75	23.66	5.33	2.26	1.30	1.04	1.00
1.25	λ	0.050	0.050	0.050	0.2650	0.4650	0.6750	0.8850	0.9750
	K	1.94790	1.94790	1.94790	3.3458	3.7551	4.0153	4.1528	4.1724
	ARL	9.80	8.80	6.73	3.47	1.89	1.27	1.06	1.01
1.50	λ	0.050	0.050	0.2750	0.3650	0.5550	0.70	0.870	0.950
	K	1.94790	1.94790	3.3749	3.5794	3.8846	4.0391	4.1472	4.1707
	ARL	4.48	4.28	3.71	2.44	1.64	1.24	1.07	1.01
2.00	λ	0.4650	0.4650	0.4850	0.5550	0.6550	0.7850	0.880	0.950
	K	3.7551	3.7551	3.7879	3.8846	3.9957	4.1041	4.1510	4.1693
	ARL	1.96	1.93	1.84	1.58	1.33	1.16	1.07	1.03
2.50	λ	0.6550	0.6550	0.6550	0.6750	0.7550	0.8450	0.880	0.980
	K	3.9957	3.9957	3.9957	4.0153	4.0842	4.1363	3.1510	4.1655
	ARL	1.38	1.35	1.37	1.27	1.18	1.11	1.06	1.02
3.00	λ	0.7750	0.7850	0.7850	0.8150	0.8450	0.880	0.930	0.930
	K	4.0977	4.1041	4.1041	4.1214	4.1363	4.1510	4.1655	4.1655
	ARL	1.18	1.17	1.17	1.14	1.10	1.07	1.04	1.02

Πίνακας 2. 18. Τιμές του ARL_1 για το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου σταθερής κατάστασης για $n = 5$ ($ARL_0 = 500$)

$ARL_0 = 500$									
a									
b		0.00	0.25	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00
1.00	λ	0.050	0.050	0.050	0.050	0.3250	0.6550	0.8950	0.9850
	K	1.9848	1.9848	1.9848	1.9848	3.6776	4.2068	4.3776	4.3954
	ARL	499.99	80.96	24.08	5.42	2.37	1.34	1.05	1.00
1.25	λ	0.050	0.050	0.050	0.050	0.4650	0.6550	0.8550	0.9750
	K	1.9848	1.9848	1.9848	1.9848	3.95256	4.2068	4.3616	4.3947
	ARL	9.95	8.93	6.82	3.63	1.97	1.30	1.07	1.01
1.50	λ	0.050	0.050	0.050	0.3250	0.500	0.6750	0.8450	0.9600
	K	1.9848	1.9848	1.9848	3.6777	4.0106	4.22752	4.3567	4.3930
	ARL	4.54	4.34	3.85	2.56	1.69	1.26	1.08	1.02
2.00	λ	0.4650	0.4650	0.4650	0.5700	0.6750	0.7750	0.8450	0.9300
	K	3.9525	3.9525	3.9525	4.1093	4.2275	4.3161	4.3557	4.3876
	ARL	2.04	2.00	1.90	1.63	1.36	1.18	1.07	1.02
2.50	λ	0.6300	0.6300	0.6550	0.6750	0.7500	0.8150	0.9000	0.9300
	K	4.1802	4.1802	4.2068	4.2275	4.29857	4.34115	4.37936	4.38762
	ARL	1.41	1.40	1.38	1.29	1.20	1.12	1.06	1.03
3.00	λ	0.7300	0.7750	0.7850	0.7850	0.8450	0.8450	0.9050	0.9300
	K	4.28130	4.31610	4.3230	4.3230	4.35674	4.35674	4.38117	4.3876
	ARL	1.19	1.19	1.18	1.15	1.11	1.08	1.05	1.03

Ο Πίνακας 2.18 δίνει διάφορες επιλογές ζευγών (λ, K) που επιτυγχάνουν $ARL_0 = 250, 370$ και 500 .

Πίνακας 2. 19. EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου σταθερής κατάστασης: Συνδυασμοί (λ, K) για μέγεθος δείγματος $n = 5$

$ARL_0 = 250$										
λ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.80	1.00
K	1.88	2.45	2.74	2.93	3.08	3.19	3.39	3.54	3.82	3.88
$ARL_0 = 370$										
λ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.80	1.00
K	1.95	2.65	2.98	3.17	3.32	3.44	3.65	3.81	4.11	4.17
$ARL_0 = 500$										
λ	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.80	1.00
K	1.98	2.78	3.16	3.36	3.51	3.62	3.84	4.01	4.33	4.40

- **Διαδικασία κατασκευής του διαγράμματος**

Για την κατασκευή του EWMA-SC υπάρχουν δύο επιλογές. Η πρώτη επιλογή είναι να απεικονιστεί η στατιστική συνάρτηση Q_i ενάντια στο i και ο δεύτερος είναι να απεικονιστεί το ζεύγος (U_i, V_i) σε ένα δισδιάστατο διάγραμμα. Από τους δύο τρόπους ο δεύτερος είναι ο προτιμότερος επειδή μπορούμε να εντοπίσουμε απευθείας από την τοποθεσία των σημείων στο διάγραμμα την πηγή της αιτίας που οφείλεται η αλλαγή στη διεργασία. Αναλυτικά η διαδικασία κατασκευής του EWMA-SC διαγράμματος είναι η ακόλουθη:

Έστω ότι έχουμε στη διάθεσή μας m το πλήθος ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Τότε

1. Εκτιμούμε τις άγνωστες παραμέτρους της διεργασίας. Αν η μέση τιμή μ είναι άγνωστη τότε την εκτιμούμε με το $\bar{\bar{X}}$. Αν το σ είναι άγνωστο τότε το εκτιμούμε με το $\frac{\bar{R}}{d_2}$ ή με το $\frac{\bar{S}}{c_4}$.
2. Για κάθε δείγμα υπολογίζουμε τα U_i και V_i με αρχικές τιμές $U_0 = V_0 = 0$.
3. Στην αρχική κατάσταση, αν θέλουμε να εντοπίσουμε γρήγορα συγκεκριμένες αλλαγές στο μέσο και τη μεταβλητότητα της διεργασίας, θέτουμε $ARL_0 = 250$ και

επιλέγουμε το κατάλληλο συνδυασμό (λ, K) από τον Πίνακα 2.6.1. Για να αποφύγουμε αρκετές παράλληλες γραμμές υπολογίζουμε τις ποσότητες

$$U'_i = U_i \sqrt{\frac{2 - \lambda}{2n\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}}$$

$$V'_i = V_i \sqrt{\frac{2 - \lambda}{2n\lambda[1 - (1 - \lambda)^{2i}]}}$$

για $i=1,2,3,4,5$, και απεικονίζουμε τα σημεία (U'_i, V'_i) στο $U' - V'$ επίπεδο. Σχεδιάζουμε τη γραμμή $U'_i + V'_i = K$ ως όριο της περιοχής ελέγχου.

4. Για να εντοπίσουμε συγκεκριμένες αλλαγές στον μέσο και τη μεταβλητότητα της διεργασίας στη σταθερή κατάσταση επιλέγουμε τον κατάλληλο συνδυασμό (λ, K) από τους Πίνακες 2.15-2.17. Αν δεν είναι προφανές τι αλλαγές στο μέσο και τη μεταβλητότητα της διεργασίας θέλουμε να ανιχνεύσουμε, επιλέγουμε τον επιθυμητό συνδυασμό (λ, K) από τον Πίνακα 2.18. Σχεδιάζουμε τα U_i και V_i στο επίπεδο $U - V$ με όριο περιοχής ελέγχου τη γραμμή $U + V = K\sqrt{(2n\lambda)/(2 - \lambda)}$.
5. Ελέγχουμε αν κάποιο σημείο είναι εκτός της περιοχής ελέγχου. Για το εκτός ελέγχου σημείο βρίσκουμε την πηγή και την κατεύθυνση την αλλαγής σύμφωνα με την τοποθεσία του σημείου στο διάγραμμα.
6. Τέλος ελέγχου με την αιτίες που σχετίζονται με κάθε εκτός ελέγχου σήμα.

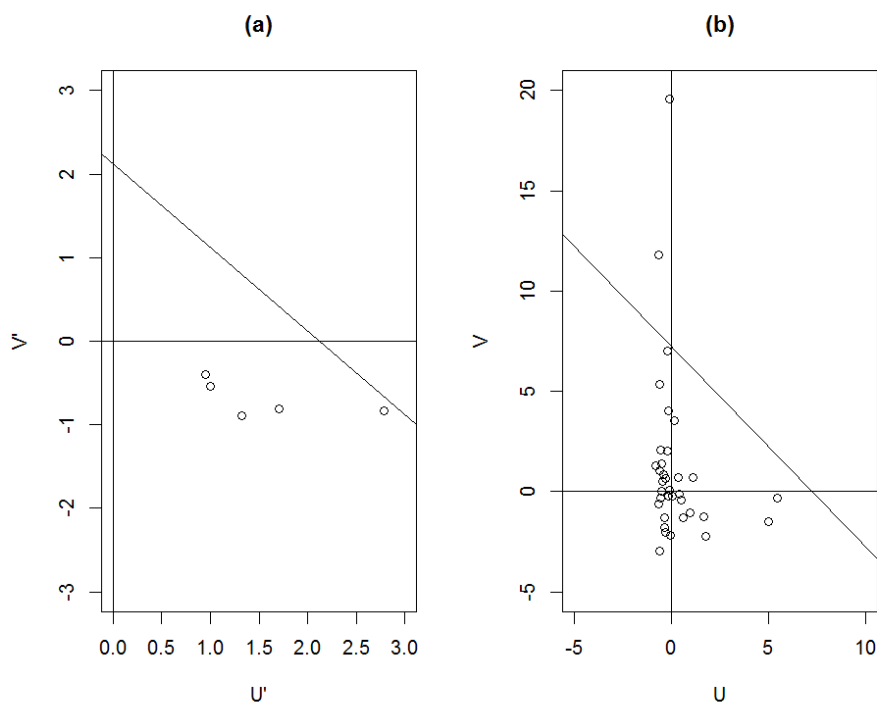
• Παράδειγμα

Για να επιδείξουμε το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του πίνακα των DeVor et al. (1992) που αναφέρονται σε μετρήσεις της εσωτερικής διαμέτρου κυλίνδρων.

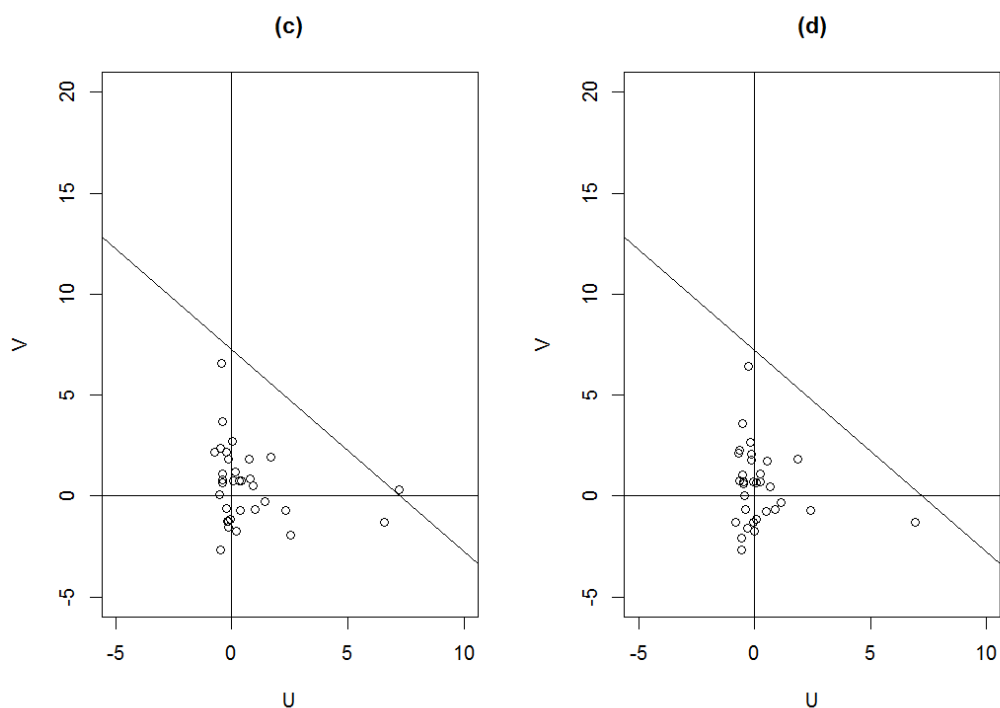
Καταρχήν $\hat{\mu} = \bar{X} = 200.24$ και $\hat{\sigma} = \bar{S}/c_4 = 3.312166$. Με βάση αυτές τις εκτιμήσεις το πρώτο EWMA-SC διάγραμμα περιέχει τα πρώτα πέντε σημεία για την αρχική κατάσταση με $ARL_0 = 250$, $\lambda = 0.05$ και $K = 2.118$ και τα άλλα τριάντα σημεία για τη σταθερή κατάσταση με $\lambda = 0.57$ και $K = 3.630$. Το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου είναι αυτό του Σχήματος 2.11. Παρατηρούμε στο (α) διάγραμμα δεν έχουμε κανένα σημείο εκτός της περιοχής ελέγχου παρόλο που παρατηρούμε ένα σημείο (δείγμα 1) το οποίο είναι πολύ κοντά στη γραμμή της περιοχής ελέγχου.

Στο δεύτερο διάγραμμα της σταθερής κατάστασης (διάγραμμα (b)) παρατηρούμε ότι έχουμε δύο σημεία πάνω από την περιοχή ελέγχου (δείγματα 6 και 16). Τα δύο σημεία

είναι αρκετά μακριά από τον U άξονα και επομένως σχετίζονται με αύξηση στη μεταβλητότητα της διεργασίας. Όταν αφαιρέσουμε αυτά τα δύο δείγματα έχουμε $\bar{X} = 200.22$ και $\frac{\bar{s}}{c_4} = 2.93$. Στο διάγραμμα (c) σταθερής κατάστασης του Σχήματος 2.12 παρατηρούμε ένα σημείο εκτός ελέγχου(δείγμα 11) το οποίο σχετίζεται με μετατόπιση του μέσου της διεργασίας καθώς το σημείο αποκλίνει εμφανώς από τον άξονα V . Αφού αφαιρέσουμε και αυτό το δείγμα, παίρνουμε $\bar{X} = 200.08$ και $\frac{\bar{s}}{c_4} = 2.95$. Το νέο διάγραμμα σταθερής κατάστασης που προκύπτει είναι το (d) διάγραμμα ελέγχου στο οποίο δεν έχουμε κανένα σημείο εκτός ελέγχου.



Σχήμα 2. 12. Τα διαγράμματα ελέγχου EWMA-SC για την αρχική και την σταθερή κατάσταση.



Σχήμα 2. 13. Τα διαγράμματα ελέγχου EWMA-SC στην σταθερή κατάσταση.

Συμπερασματικά το διάγραμμα ελέγχου EWMA-SC σχεδιάστηκε για να εντοπίζει αποτελεσματικά μετατοπίσεις του μέσου της διεργασίας που συνοδεύονται και από αυξήσεις στη μεταβλητότητά της. Ωστόσο μειώσεις της μεταβλητότητας της διεργασίας μπορούν να ανιχνευθούν από την θέση των σημείων πάνω στο διάγραμμα ελέγχου. Επιπλέον, ένα πλεονέκτημα του διαγράμματος ελέγχου EWMA-SC είναι ότι παρακολουθεί ταυτόχρονα τη μέση τιμή και τη μεταβλητότητα της διεργασίας, διατηρώντας τις επιθυμητές ιδιότητες ενός EWMA διαγράμματος. Ένα ακόμη πλεονέκτημα είναι ότι η κατασκευή του διαγράμματος είναι αποτελεσματική και εύκολη στην εφαρμογή, έτσι ώστε να μπορεί να εντοπιστεί γρήγορα η πηγή και η κατεύθυνση της μετατόπισης της διεργασίας από τη θέση ενός σημείου που είναι εκτός ελέγχου.

2.7 Το Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου

Τα CUSUM διαγράμματα ελέγχου είναι, όπως και τα διαγράμματα ελέγχου EWMA, ευαίσθητα σε μικρές μετατοπίσεις στο μέσο και/ή στη τυπική απόκλιση της κατανομής του ποιοτικού χαρακτηριστικού που παρακολουθούμε. Γενικά στην βιβλιογραφία

υπάρχουν ξεχωριστά διαγράμματα ελέγχου CUSUM για τις δύο προαναφερθείσες κρίσιμες ποσότητες. Οι Cheng & Thaga (2010, [4]) πρότειναν ένα εναλλακτικό CUSUM διάγραμμα ελέγχου το οποίο ταυτόχρονα παρακολουθεί το μέσο και την τυπική απόκλιση της διεργασίας χρησιμοποιώντας μία μόνο στατιστική συνάρτηση. Τα πλεονεκτήματα αυτού του διαγράμματος είναι ότι είναι ικανό να εντοπίσει τόσο μικρές όσο και μεγάλες μετατοπίσεις στο μέσο και/ή στην τυπική απόκλιση. Επιπλέον, αντιμετωπίζει τις περιπτώσεις για μεταβλητά μεγέθη δειγμάτων και εντοπίζει την παράμετρο που μετατοπίστηκε αλλά και την κατεύθυνση της μετατόπισης.

Ας υποθέσουμε ότι η εντός ελέγχου κατανομή των παρατηρήσεων είναι η κανονική κατανομή με μέση τιμή μ_0 και διακύμανση σ_0^2 . Από την διεργασία επιλέγουμε τυχαία δείγματα μεγέθους n_i ($i = 1, 2, \dots$) σε τακτικά χρονικά διαστήματα. Έστω $X_i = (X_{i1}, X_{i2}, \dots, X_{in_i})$ το δείγμα που πήραμε στην i -οστή δειγματοληψία ($i = 1, 2, \dots$). Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε ότι όταν η διεργασία λειτουργεί υπό συνθήκες φυσικής μεταβλητότητας, τότε $X_{ij} \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$, $i = 1, 2, \dots, j = 1, 2, \dots, n_i$.

Μια εκτός ελέγχου τιμή για το μέσο θα εκφράζεται ως $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$, και για την τυπική απόκλιση ως $\sigma_1 = b\sigma_0$, όπου οι τιμές $a = 0$ και $b = 1$ οδηγούν στις εντός ελέγχου τιμές της μέσης τιμής και της τυπικής απόκλισης.

Έστω $\bar{X}_i = (X_{i1} + \dots + X_{in_i})/n_i$ και $S_i^2 = \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 / (n_i - 1)$ ο δειγματικός μέσος και η δειγματική διακύμανση του i -οστού δείγματος, αντίστοιχα, που είναι ανεξάρτητες τ.μ. Το CUSUM διάγραμμα βασίζεται στις στατιστικές συναρτήσεις

$$U_i = \sqrt{n_i} \frac{(\bar{X}_i - \mu_0)}{\sigma_0}$$

και

$$V_i = \Phi^{-1} \left\{ H_{n-1} \left(\frac{(n-1)S_i^2}{\sigma_0^2} \right) \right\},$$

όπου $\Phi(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυπικής κανονικής κατανομής και $H_n(\cdot)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της χι-τετράγωνο κατανομής με n βαθμούς ελευθερίας (χ_n^2).

Οι στατιστικές συναρτήσεις U, V είναι ανεξάρτητες αφού οι στατιστικές συναρτήσεις \bar{X} και S^2 είναι ανεξάρτητες. Προφανώς $U \sim N(0,1)$ και $V \sim N(0,1)$ αφού η στατιστική συνάρτηση $H_{n-1} \left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \right)$ έχει την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα $(0,1)$.

Οι Cheng & Thaga (2010, [4]) όρισαν τις ακόλουθες στατιστικές συναρτήσεις

$$C_i^+ = \max[0, U_i - k + C_{i-1}^+],$$

$$C_i^- = \max[0, -k - U_i + C_{i-1}^-],$$

και

$$S_i^+ = \max[0, V_i - k + S_{i-1}^+],$$

$$S_i^- = \max[0, -k - V_i + S_{i-1}^-],$$

αντίστοιχα, όπου C_0, S_0 είναι κατάλληλες αρχικές τιμές.

Οι Cheng & Thaga (2010, [4]) πρότειναν να απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου η παρακάτω στατιστική συνάρτηση

$$M_i = \max\{C_i^+, C_i^-, S_i^+, S_i^-\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

Η στατιστική συνάρτηση M_i παίρνει μεγάλες τιμές όταν ο μέσος της διεργασίας όταν ο μέσος της διεργασίας μετατοπιστεί ή/και η μεταβλητότητα της διεργασίας αυξηθεί ή μειωθεί. Από την άλλη, η στατιστική συνάρτηση M_i θα παίρνει μικρές τιμές όταν η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Επειδή η στατιστική συνάρτηση M_i είναι μη αρνητική θα έχουμε μόνο ένα (άνω) όριο ελέγχου. Αφού η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση είναι το μέγιστο μεταξύ τεσσάρων CUSUM στατιστικών συναρτήσεων, για αυτό το λόγο δόθηκε η ονομασία Max-CUSUM στο διάγραμμα ελέγχου.

Το άνω όριο ελέγχου h βρίσκεται με προσομοίωση αφού πρώτα οριστεί το ARL_0 και το k .

- **Υπολογισμός του ARL**

Υπενθυμίζουμε ότι σε ένα διάγραμμα ελέγχου CUCUM το h είναι το διάστημα απόφασης και k είναι η τιμή αναφοράς του. Στον Πίνακα 2.19 δίνονται ενδεικτικές περιπτώσεις υπολογισμού του ARL με προσομοίωση (δείτε Ajadi & Riaz (2017) , [1]).

Πίνακας 2. 20. Τιμές του ARL για το Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου με $ARL_0 = 250$ και $k=0.50$.

		<i>a</i>								
<i>b</i>		0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
<i>h=5.07</i> <i>n=3</i>	0.25	4.59	4.59	4.59	4.58	4.62	3.50	2.99	2.50	2.00
	0.50	10.36	10.40	9.46	6.60	4.67	3.58	2.96	2.50	2.10
	0.75	59.04	42.23	13.50	7.07	4.77	3.63	2.98	2.52	2.20
	1.00	254.73	48.64	13.31	7.05	4.86	3.71	3.01	2.57	2.26
	1.25	29.09	20.27	10.79	6.80	4.81	3.73	3.06	2.61	2.30
	1.50	10.94	9.72	7.59	5.81	4.56	3.68	3.05	2.62	2.33
	1.75	6.49	6.26	5.88	4.78	4.06	3.46	2.97	2.59	2.30
	2.00	4.76	4.65	4.33	3.98	3.56	3.18	2.80	2.53	2.26
<i>h=5.05</i> <i>n=4</i>	0.25	3.48	3.48	3.48	3.48	3.39	2.98	2.54	2.00	2.00
	0.50	7.10	7.10	6.80	5.28	3.88	3.06	2.53	2.08	2.00
	0.75	31.46	24.79	10.24	5.72	3.97	3.09	2.53	2.18	2.01
	1.00	252.21	36.43	10.32	5.78	4.05	3.13	2.60	2.23	2.02
	1.25	22.11	15.90	8.82	5.61	4.05	3.17	2.28	2.27	2.03
	1.50	8.41	7.66	6.24	4.84	3.85	3.13	2.64	2.29	2.03
	1.75	5.14	4.98	4.52	3.99	3.44	2.94	2.56	2.27	2.04
	2.00	3.81	3.72	3.27	2.99	2.70	2.41	4.37	2.19	1.97
<i>h=5.05</i> <i>n=5</i>	0.25	2.96	5.61	21.40	2.95	2.90	2.80	2.02	2.00	2.00
	0.50	5.63	5.65	5.51	4.51	3.41	2.75	2.17	2.00	1.98
	0.75	21.27	18.07	8.42	4.91	3.48	2.75	2.27	2.03	1.92
	1.00	251.93	29.69	8.72	4.99	3.55	2.77	2.33	2.05	1.88
	1.25	17.98	13.21	7.61	4.92	3.57	2.84	2.35	2.37	1.85
	1.50	6.91	6.39	5.39	4.29	3.42	2.80	2.37	2.07	1.85
	1.75	4.39	4.25	3.91	3.48	3.03	2.63	2.31	2.05	1.83
	2.00	3.26	3.23	3.09	2.89	2.65	2.42	2.18	1.98	1.79

• **Διαδικασία κατασκευής του διαγράμματος**

Η διαδικασία κατασκευής τους διαγράμματος Max-CUSUM είναι παρόμοια με τη συνήθη διαδικασία κατασκευής διαγραμμάτων ελέγχου CUSUM. Οι τιμές των M_i σχεδιάζονται ενάντια στο αριθμό δείγματος. Αν ένα σημείο πέφτει εκτός του διαστήματος απόφασης, η διεργασία είναι εκτός ελέγχου. Μια τυπική διαδικασία κατασκευής του διαγράμματος ελέγχου είναι η ακόλουθη.

1. Καθορίζουμε τις ποσότητες ARL_0 , h και k .
2. Για κάθε δείγμα υπολογίζουμε τα U_i, V_i .
3. Για κάθε δείγμα υπολογίζουμε τα $C_i^+, C_i^-, S_i^+, S_i^-$.
4. Υπολογίσουμε τα M_i και τα συγκρίνουμε με το διάστημα απόφασης h .
5. Αν $M_i \leq h$ σχεδιάζουμε το σημείο έναντι του αριθμού του δείγματος.

6. Αν $M_i > h$, τότε
- i. Αν $C_i^+ > h$, τότε σχεδιάζουμε $C +$ (1). Αυτό δείχνει αύξηση στο μέσο της διεργασίας.
 - ii. Αν $C_i^- > h$, τότε σχεδιάζουμε $C -$ (2). Αυτό δείχνει μείωση στο μέσο της διεργασίας.
 - iii. Αν $S_i^+ > h$, τότε σχεδιάζουμε $S +$ (3). Αυτό δείχνει αύξηση της τυπικής απόκλισης.
 - iv. Αν $S_i^- > h$, τότε σχεδιάζουμε $S -$ (4). Αυτό δείχνει μείωση της τυπικής απόκλισης.
 - v. Αν και τα δύο $C_i^+ > h$ και $S_i^+ > h$, σχεδιάζουμε $B + +$ (5). Αυτό δείχνει αύξηση στο μέσο και στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.
 - vi. Αν $C_i^+ > h$ και $S_i^- > h$, σχεδιάζουμε $B + -$ (6). Αυτό δείχνει αύξηση στο μέσο και μείωση στη τυπική απόκλιση της διεργασίας.
 - vii. Αν $C_i^- > h$ και $S_i^+ > h$, σχεδιάζουμε $B - +$ (7). Αυτό δείχνει μείωση στο μέσο και αύξηση στη τυπική απόκλιση της διεργασίας.
 - viii. Αν $C_i^- > h$ και $S_i^- > h$, σχεδιάζουμε $B - -$ (8). Αυτό δείχνει μείωση στο μέσο και στη τυπική απόκλιση της διεργασίας.
7. Ερευνούμε τις αιτίες της μετατόπισης για κάθε εκτός ελέγχου σημείο του διαγράμματος και εκτελούμε τα απαραίτητα διορθωτικά μέτρα για να φέρουμε τη διεργασία εντός ελέγχου.

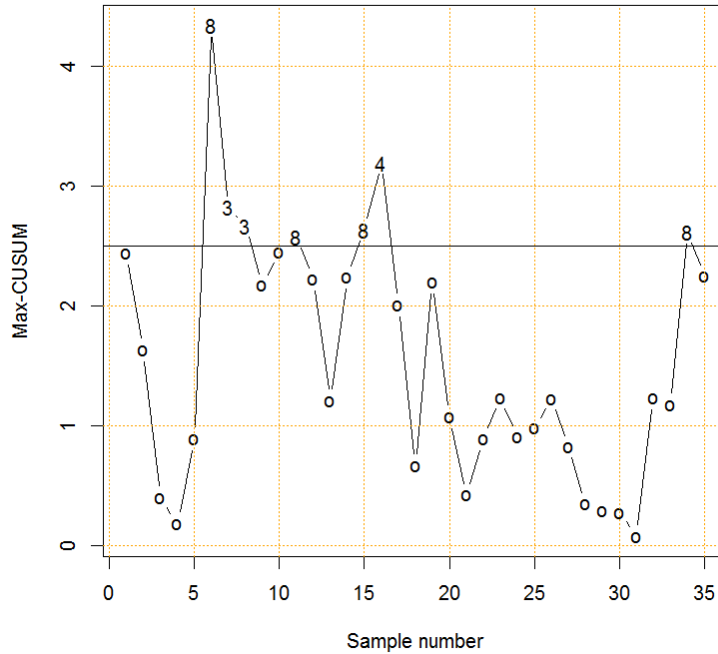
• Παράδειγμα

Για να επιδείξουμε το Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα των DeVor et al. (1992) που αναφέρονται σε μετρήσεις της εσωτερικής διαμέτρου κυλίνδρων.

Καταρχήν έχουμε τις εκτιμήσεις για της παραμέτρους $\bar{\bar{X}} = 200.25$ και $\frac{\bar{S}}{C_4} = 3.306049$.

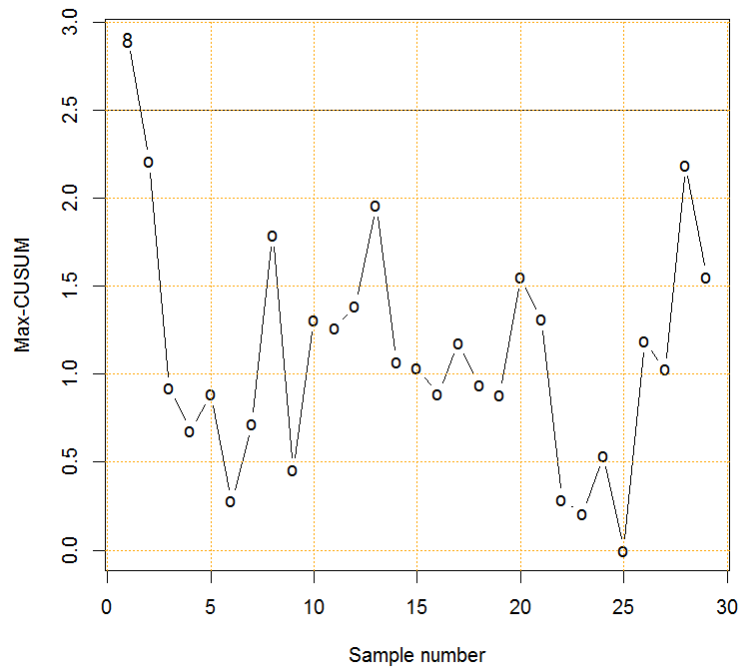
Το Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου του Σχήματος 2.13, με χαρακτηριστικά $ARL = 250$, $k = 0.5$ και $h = 2.475$, περιέχει 35 σημεία με αρκετά από αυτά να είναι πάνω από το άνω όριο ελέγχου. Το δείγμα 6 σχετίζεται με μείωση στο μέσο και στη τυπική απόκλιση της διεργασίας. Τα δείγματα 7 και 8 σχετίζονται με αύξηση της τυπικής απόκλισης, τα δείγματα 11 και 15 σχετίζονται με μείωση στο μέσο και στην τυπική απόκλιση της

διεργασίας. Το δείγμα 16 σχετίζεται με μείωση της τυπικής απόκλισης και το δείγμα 34 σχετίζεται με ταυτόχρονη μείωση του μέσου και της τυπικής απόκλισης της διεργασίας.



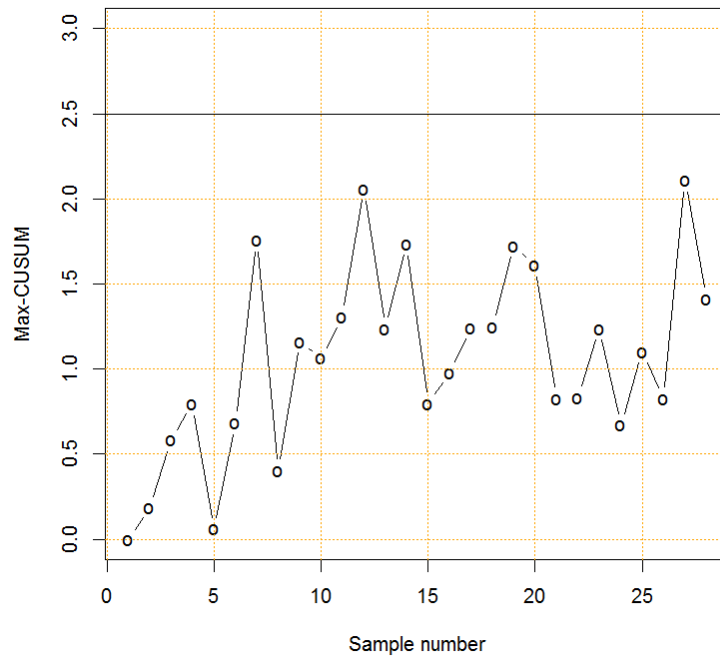
Σχήμα 2. 14. Το πρώτο Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου για τα δεδομένα των DeVor et al. (1992)

Όταν αυτά τα δείγματα αφαιρεθούν από τα δεδομένα, έχουμε ότι $\bar{\bar{X}} = 200.05$ και $\frac{\bar{s}}{C_4} = 2.989047$. Το αναθεωρημένο διάγραμμα δίνεται στο Σχήμα 2.14. Στο διάγραμμα παρατηρούμε ότι έχουμε ένα σημείο εκτός ελέγχου. Αυτό είναι το δείγμα 1, το οποίο σχετίζεται με μείωση του μέσου και της τυπικής απόκλισης της διεργασίας.



Σχήμα 2. 15. Το δεύτερο Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου για τα περικομμένα δεδομένα των DeVor et al. (1992)

Όταν αφαιρέσουμε το δείγμα 1 από τα δεδομένα έχουμε ότι $\bar{X} = 199.89$ και $\frac{S}{C_4} = 2.922407$. Το νέο Max-CUSUM διάγραμμα δίνεται στο Σχήμα 2.14. Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία είναι εντός του διαστήματος απόφασης το οποίο σημαίνει ότι η διεργασία είναι εντός στατιστικού ελέγχου.



Σχήμα 2. 16. Το τρίτο Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου για τα περικομμένα δεδομένα των DeVor et al. (1992).

Συμπερασματικά για το Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου μπορούμε να πούμε ότι ένα πλεονέκτημα του διαγράμματος είναι η ικανότητα να εντοπίζει γρήγορα και μικρές και μεγάλες μετατοπίσεις στο μέσο ή/και την τυπική απόκλιση της διεργασίας. Επιπλέον, ένα πλεονέκτημα του Max-CUSUM είναι ότι μπορούμε να παρακολουθήσουμε και το μέσο και την μεταβλητότητα χρησιμοποιώντας ένα διάγραμμα. Τέλος, το Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου έχει εύκολη διαδικασία κατασκευής.

2.8 Το SS-CUSUM διάγραμμα ελέγχου

Σε αυτή την παράγραφο μελετάμε το SS-CUSUM διάγραμμα ελέγχου που πρότεινε ο Thaga (2009) και αποτελεί τροποποίηση του διαγράμματος ελέγχου CUSUM. Ακολουθώντας τους ορισμούς της Παραγράφου 2.7 για τις ποσότητες $\bar{X}_i, S_i^2, U_i, V_i, C_i^+, C_i^-, S_i^+$ και S_i^- ($i = 1, 2, \dots$) ορίζουμε τις στατιστικές συναρτήσεις

$$M_i = \max\{C_i^+, C_i^-\},$$

$$N_i = \max\{S_i^+, S_i^-\},$$

και

$$SS_i = M_i^2 + N_i^2.$$

Η στατιστική συνάρτηση SS_i ορίζει έναν κύκλο, αλλά επειδή και τα M_i, N_i είναι μη αρνητικά σχεδιάζουμε τα σημεία (N_i, M_i) στο μέρος του κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας h που αντιστοιχεί στο πρώτο τεταρτημόριο μόνο (1^ο τεταρτοκύλιο). Ο άξονας των M σχετίζεται με το μέσο της διεργασίας και ο άξονας των N σχετίζεται με την τυπική απόκλιση της διεργασίας. Αν κάποιο σημείο πέφτει εκτός του τεταρτοκυλίου σημαίνει ότι η διεργασία είναι εκτός ελέγχου.

- **Υπολογισμός του ARL**

Στον Πίνακα 2.20 δίνονται ενδεικτικές περιπτώσεις υπολογισμού του ARL με προσομοίωση (δείτε Ajadi & Riaz (2017)).

Πίνακας 2. 21. Τιμές του ARL για το SS-CUSUM διάγραμμα ελέγχου με $ARL_0 = 250$ και $k=0.50$.

		<i>a</i>									
		b	0	0.25	0.5	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.00
<i>h=28.03</i> <i>n=3</i>		0.25	4.78	4.75	4.57	4.04	3.49	3.01	2.76	2.19	2.00
		0.5	10.77	10.64	8.45	5.89	4.37	3.48	2.95	2.52	2.13
		0.75	60.53	41.03	12.88	6.98	4.78	3.70	3.04	2.58	2.25
		1.00	251.9	47.90	13.24	7.13	4.91	3.79	3.08	2.62	2.31
		1.25	27.94	19.62	10.39	6.61	4.71	3.72	3.07	2.63	2.34
		1.50	10.24	9.22	7.13	5.54	4.36	3.54	3.00	2.59	2.31
		1.75	6.24	5.87	5.20	4.48	3.77	3.24	2.84	2.52	2.68
	2.00	4.45	4.32	4.11	3.67	3.31	2.96	2.65	2.39	2.17	
<i>h=27.9</i> <i>n=4</i>		0.25	3.62	3.61	3.48	3.14	2.87	2.50	2.04	2.00	1.99
		0.5	7.38	7.22	6.08	4.60	3.58	2.96	2.47	2.08	2.00
		0.75	32.40	23.80	9.67	5.62	3.99	3.12	2.60	2.22	2.03
		1.00	248.04	36.41	10.54	5.88	4.11	3.20	2.65	2.28	2.06
		1.25	21.03	14.82	8.37	5.44	3.98	3.16	2.63	2.29	2.05
		1.50	7.92	7.23	5.76	4.52	3.64	3.00	2.57	2.24	2.01
		1.75	4.87	4.67	4.26	3.72	3.18	2.77	2.42	2.16	1.95
	2.00	3.64	3.55	3.36	3.07	2.78	2.50	2.26	2.06	1.88	
<i>h=27.9</i> <i>n=5</i>		0.25	3.05	3.04	2.95	2.76	2.38	2.03	2.00	1.99	1.98
		0.5	5.87	5.75	4.92	3.88	3.11	2.59	2.12	2.00	1.98
		0.75	22.10	16.88	7.91	4.83	3.51	2.78	2.29	2.05	1.95
		1.00	252.48	29.55	8.76	5.06	3.63	2.85	2.36	2.09	1.92
		1.25	17.40	12.56	7.25	4.73	3.51	2.82	2.37	2.09	1.88
		1.50	6.60	6.10	5.01	3.98	3.22	2.67	2.29	2.05	1.83
		1.75	4.22	4.04	3.64	3.22	2.79	2.46	2.19	1.95	1.76
	2.00	3.12	3.07	2.92	2.70	2.46	2.23	2.02	1.84	1.69	

- **Κατασκευή του διαγράμματος**

Η διαδικασία κατασκευής του διαγράμματος SS-CUSUM είναι αρκετά απλή. Αντί να σχεδιάσουμε τη στατιστική συνάρτηση SS_i έναντι του αριθμού του δείγματος, σχεδιάζουμε τα ζεύγη (N_i, M_i) στο διάγραμμα. Η θέση του σημείου πάνω στο σχήμα δείχνει την κατεύθυνση της πηγής της αιτίας μεταβλητότητας.

Η παρακάτω διαδικασία χρησιμοποιείται για την κατασκευή του διαγράμματος:

1. Καθορίζουμε τις ποσότητες ARL_0 , h και k .
2. Εκτιμούμε τις άγνωστες παραμέτρους της διεργασίας. Αν η μέση τιμή μ είναι άγνωστη τότε την εκτιμούμε με το \bar{X} . Αν το σ είναι άγνωστο τότε το εκτιμούμε με το $\frac{\bar{R}}{d_2}$ ή με το $\frac{\bar{s}}{c_4}$.
3. Για κάθε δείγμα υπολογίζουμε τα U_i, V_i .
4. Για κάθε δείγμα υπολογίζουμε τα $C_i^+, C_i^-, S_i^+, S_i^-$.
5. Για κάθε δείγμα υπολογίζουμε τα N_i, M_i .
6. Σχεδιάζουμε το πρώτο τεταρτοκύκλιο κύκλου κέντρου $(0,0)$ και ακτίνας $r = h$.
7. Σχεδιάζουμε τα σημεία (N_i, M_i) .
8. Αν κάποια από τα ζεύγη (N_i, M_i) είναι μεγαλύτερο από το διάστημα απόφασης, τότε αν $M_i > r$ και $N_i \leq r$,
 - i. Αν $C_i^+ > r$, τότε σχεδιάζουμε C + (1). Αυτό δείχνει αύξηση στο μέσο της διεργασίας.
 - ii. Αν $C_i^- > r$, τότε σχεδιάζουμε C+ (2). Αυτό δείχνει μείωση στο μέσο της διεργασίας.Αν $N_i > r$ και $M_i \leq r$ τότε
 - iii. Αν $S_i^+ > r$, τότε σχεδιάζουμε S+ (3). Αυτό δείχνει αύξηση της τυπικής απόκλισης.
 - iv. Αν $S_i^- > r$, τότε σχεδιάζουμε S- (4). Αυτό δείχνει μείωση της τυπικής απόκλισης.Αν $M_i > r$ και $N_i > r$, τότε
 - v. Αν και τα δύο $C_i^+ > r$ και $S_i^+ > r$, σχεδιάζουμε B++ (5). Αυτό δείχνει αύξηση στο μέσο και στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.
 - vi. Αν $C_i^+ > r$ και $S_i^- > r$, σχεδιάζουμε B+- (6). Αυτό δείχνει αύξηση στο μέσο και μείωση στη τυπική απόκλιση της διεργασίας.

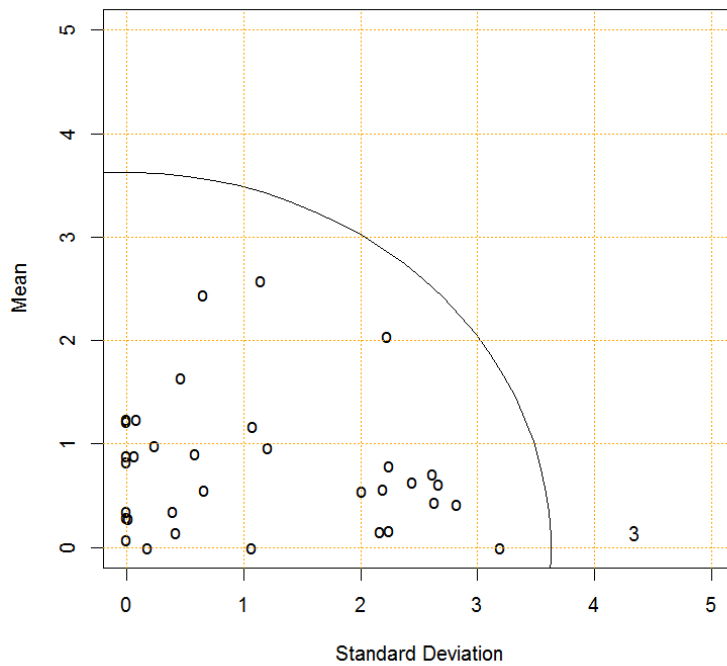
- vii. Αν $C_i^- > r$ και $S_i^+ > r$, σχεδιάζουμε B-+ (7). Αυτό δείχνει μείωση στο μέσο και αύξηση στη τυπική απόκλιση της διεργασίας.
- viii. Αν $C_i^- > r$ και $S_i^- > r$, σχεδιάζουμε B-- (8). Αυτό δείχνει μείωση στο μέσο και στη τυπική απόκλιση της διεργασίας.

9. Αν κάποια από τα ζεύγη (N_i, M_i) είναι μεγαλύτερο από το διάστημα απόφασης, Ερευνούμε τις αιτίες της μετατόπισης για κάθε εκτός ελέγχου σημείο του διαγράμματος και εκτελούμε τα απαραίτητα διορθωτικά μέτρα για να φέρουμε την διεργασία εντός ελέγχου.

- **Παράδειγμα**

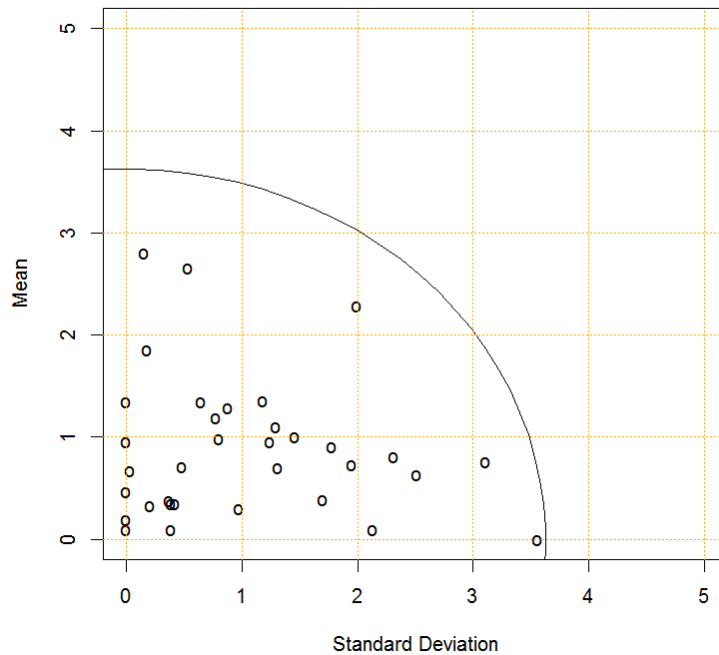
Για να επιδείξουμε το SS-CUSUM διάγραμμα ελέγχου θα χρησιμοποιήσουμε τα δεδομένα του ακόλουθου πίνακα των DeVor et al. (1992) που αναφέρονται σε μετρήσεις της εσωτερικής διαμέτρου κυλίνδρων.

Καταρχήν έχουμε τις εκτιμήσεις για της παραμέτρους $\bar{X} = 200.25$ και $\bar{S}/c_4 = 3.306049$. Το SS-CUSUM διάγραμμα ελέγχου στο σχήμα 2.8.1 στο οποίο σχεδιάζουμε 35 παρατηρήσεις με παραμέτρους $k=0.5$ και $r=h=3.625$ δείχνει ένα σημείο εκτός ελέγχου. Το σημείο αυτό είναι το δείγμα 6 και δείχνει μία αύξηση στην τυπική απόκλιση της τυπικής απόκλισης της διεργασίας.



Σχήμα 2. 17. Το πρώτο SS-CUSUM για τα δεδομένα DeVor et al. (1992).

Αφού αφαιρέσουμε το δείγμα 6 από τα δεδομένα έχουμε τις νέες εκτιμήσεις για τις παραμέτρους $\bar{X} = 200.2235$ και $\bar{S}/c_4 = 3.100406$. Το νέο διάγραμμα εμφανίζεται στο Σχήμα 2.8.2 όπου όλα τα σημεία είναι εντός του διαστήματος απόφασης, συνεπώς η διεργασία είναι εντός ελέγχου. Παρατηρούμε ότι ένα σημείο είναι αρκετά κοντά στο διάστημα απόφασης το οποίο είναι το δείγμα 15.



Σχήμα 2. 18. Το δεύτερο SS-CUSUM για τα δεδομένα DeVor et al. (1992).

Συμπερασματικά το SS-CUSUM διάγραμμα ελέγχου, παρέχει μια εναλλακτική για τα συνηθισμένα διαγράμματα που χρησιμοποιούνται για την ταυτόχρονη παρακολούθηση του μέσου και της μεταβλητότητας της διεργασίας. Αυτό το διάγραμμα είναι εύκολο στη χρήση και στην εντόπιση σε μικρές και μεγάλες μετατοπίσεις στο μέσο και στην τυπική απόκλιση. Επιπλέον, το SS-CUSUM διάγραμμα έχει το πλεονέκτημα ότι είναι ευαίσθητο σε μειώσεις στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Σύγκριση των Συνδυασμένων Διαγραμμάτων Ελέγχου

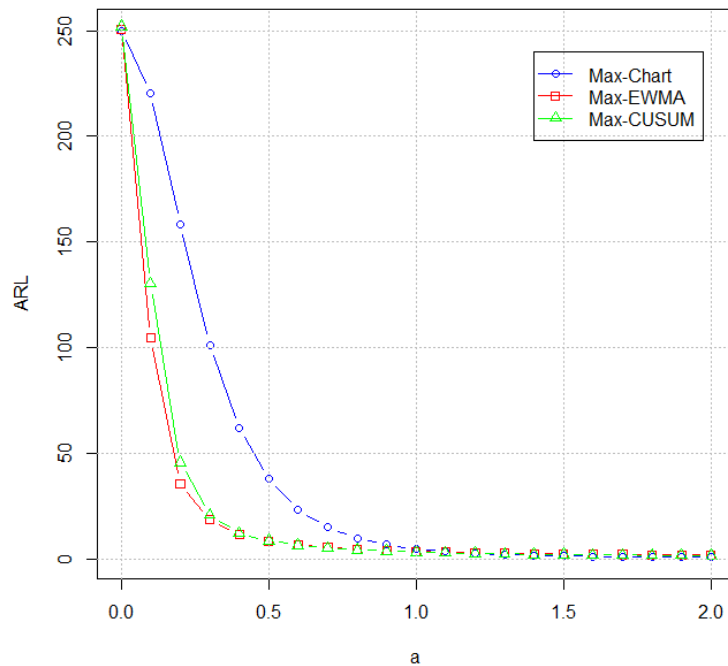
3.1 Εισαγωγή

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να απαντήσει στο ερώτημα ποιο από τα συνδυασμένα διαγράμματα ελέγχου που παρουσιάστηκαν στο Κεφάλαιο 2 έχει την καλύτερη συμπεριφορά στο να εντοπίζει μετατοπίσεις στο μέσο ή/και στην τυπική απόκλιση μιας διεργασίας όσο το δυνατό πιο γρήγορα. Για να κάνουμε αυτή τη σύγκριση θα χρησιμοποιήσουμε ως μέτρο σύγκρισης το μέσο μήκος ροής (ARL). Για διάφορες μετατοπίσεις στο μέσο και στη διασπορά θα εντοπίζουμε ποιο διάγραμμα ελέγχου έχει το μικρότερο εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Για να μπορέσουμε να τα συγκρίνουμε τα διαγράμματα μεταξύ τους πρώτα από όλα θα πρέπει να έχουν το ίδιο εντός ελέγχου μέσο μήκος ροής. Εδώ θα χρησιμοποιηθεί η συνήθης περίπτωση $ARL_0 = 250$. Επιπλέον θα κάνουμε ομαδοποιήσεις στα διαγράμματα ελέγχου για να συγκριθούν με βάση τη στατιστική συνάρτηση που απεικονίζεται σε αυτά. Έτσι η μία ομάδα θα αποτελείται από τα Max-Chart, Max-EWMA και Max-CUSUM, μία άλλη ομάδα θα είναι το ημικυκλικό διάγραμμα και το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου, και η τελευταία ομάδα θα είναι τα SS-EWMA και το SS-CUSUM.

3.2 Max-Chart, Max-EWMA, Max-CUSUM: Σύγκριση

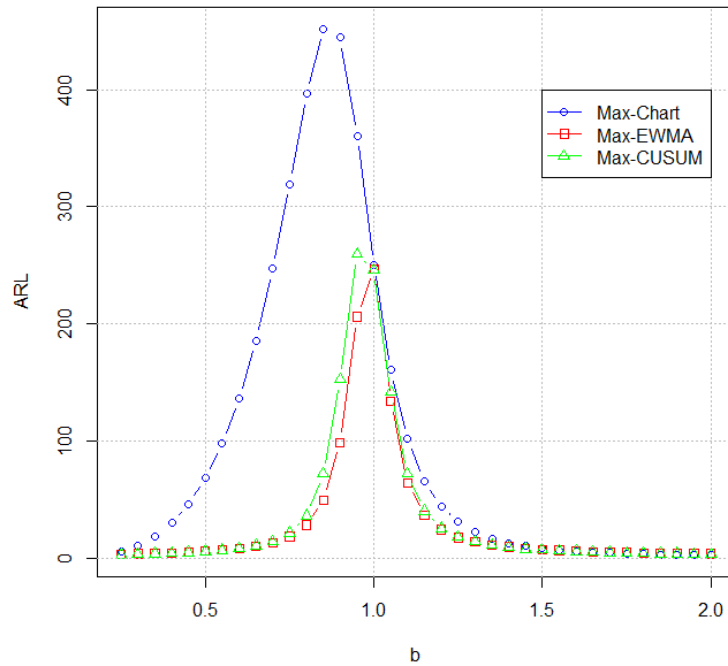
Σε αυτή την παράγραφο θα συγκρίνουμε τα διαγράμματα ελέγχου που η απεικονιζόμενη στατιστική συνάρτηση βασίζεται στις μέγιστες απόλυτες τιμές του τυποποιημένου μέσου και της τυπικής απόκλισης. Όπως αναφέραμε και στο δεύτερο κεφάλαιο οι στατιστικές συνάρτησης που απεικονίζεται στα διαγράμματα ελέγχου

παίρνει μεγάλες τιμές όταν ο μέσος ή/και η μεταβλητότητα της διεργασίας αυξηθεί ή μειωθεί, αντίστοιχα η στατιστική θα παίρνει μικρές τιμές όταν ο μέσος και η μεταβλητότητα της διεργασίας παραμένουν κοντά στις εντός ελέγχου τιμές τους. Επίσης για και τα τρία αυτά διαγράμματα ελέγχου έχουν μόνο ένα άνω όριο ελέγχου καθώς οι στατιστικές είναι μη αρνητικές.



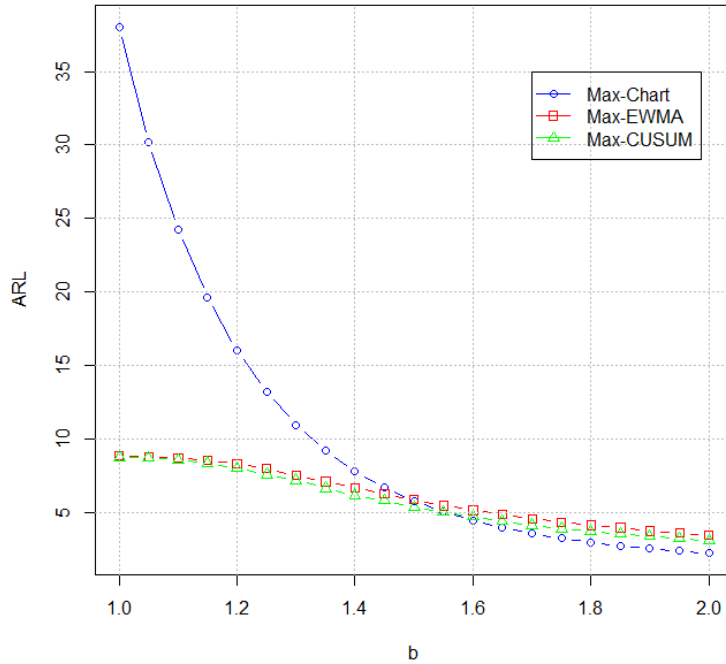
Σχήμα 3. 1. Max-Chart, Max-EWMA, Max-CUSUM: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις του a όταν $b = 1$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι για μικρές μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας δηλαδή για $a \leq 0.8$ τα διαγράμματα ελέγχου Max-EWMA και Max-CUSUM εντοπίζουν πιο γρήγορα τις μετατοπίσεις του μέσου. Επιπλέον για μετατοπίσεις μεγαλύτερης της μονάδας στο μέσο και τα τρία διαγράμματα ελέγχου έχουν σχεδόν το ίδιο ARL_1 .



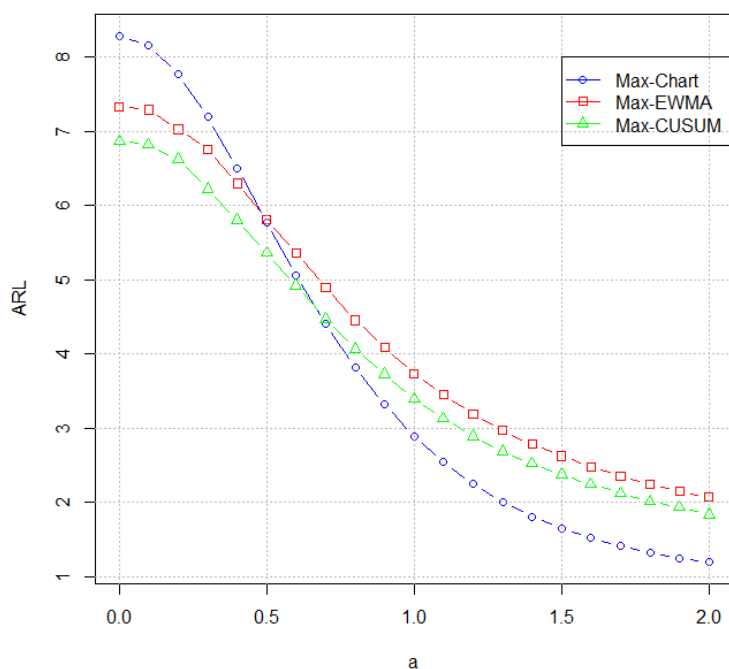
Σχήμα 3. 2. Max-Chart, Max-EWMA, Max-CUSUM: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις του b όταν $a = 0$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι για μειώσεις στη μεταβλητότητα της διεργασίας το διάγραμμα που τις εντοπίζει πιο άμεσα είναι το Max-EWMA. Βέβαια βλέπουμε ότι και το Max-CUSUM εντοπίζει τη μείωση στην μεταβλητότητα της διεργασίας στον ίδιο περίπου βαθμό. Το Max-Chart βλέπουμε ότι εντοπίζει παρά πολύ αργά αυτές τις μετατοπίσεις. Επίσης για αυξήσεις στη μεταβλητότητα της διεργασίας παρατηρούμε ότι και τα τρία διαγράμματα ελέγχου εντοπίζουν τις μετατοπίσεις γρήγορα όπου πάλι τα διαγράμματα Max-EWMA και Max-CUSUM υπερτερούν ελαφρώς έναντι του Max-Chart.



Σχήμα 3. 3. Max-Chart, Max-EWMA, Max-CUSUM: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $a = 0.5$ και $1 \leq b \leq 2$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι όταν έχουμε ταυτόχρονη μικρή μετατόπιση του μέσου και μικρή αύξηση της μεταβλητότητας της διεργασίας, πιο συγκεκριμένα για $a = 0.5$ και $1 \leq b \leq 1.5$, τα διαγράμματα Max-EWMA και Max-CUSUM εντοπίζουν παρά πολύ γρήγορα τις μετατοπίσεις, με το Max-CUSUM να υπερτερεί ελαφρώς. Ωστόσο για μεγαλύτερες αυξήσεις στη μεταβλητότητα της διεργασίας υπερτερεί το Max-Chart.



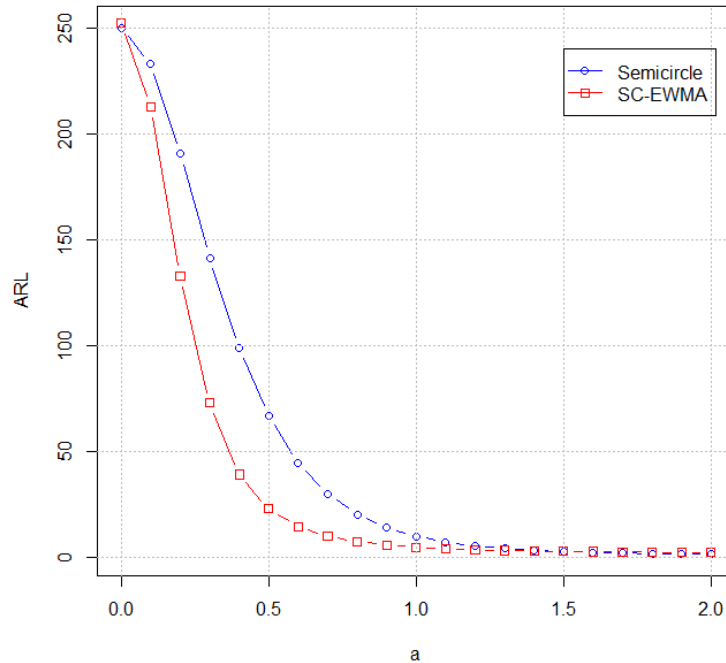
Σχήμα 3. 4. Max-Chart, Max-EWMA, Max-CUSUM: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $0 \leq a \leq 2$ και $b = 1.5$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι όταν έχουμε ταυτόχρονη μικρή μετατόπιση του μέσου και μικρή αύξηση της μεταβλητότητας της διεργασίας, πιο συγκεκριμένα $0 \leq a \leq 0.5$ και $b = 1.5$, τα διαγράμματα Max-EWMA και Max-CUSUM εντοπίζουν παρά πολύ γρήγορα τις μετατοπίσεις, με το Max-CUSUM να υπερτερεί ελαφρώς. Ωστόσο για μεγαλύτερες αυξήσεις του μέσου υπερτερεί το Max-Chart

3.3 Ημικυκλικό και SC-EWMA διάγραμμα ελέγχου: Σύγκριση

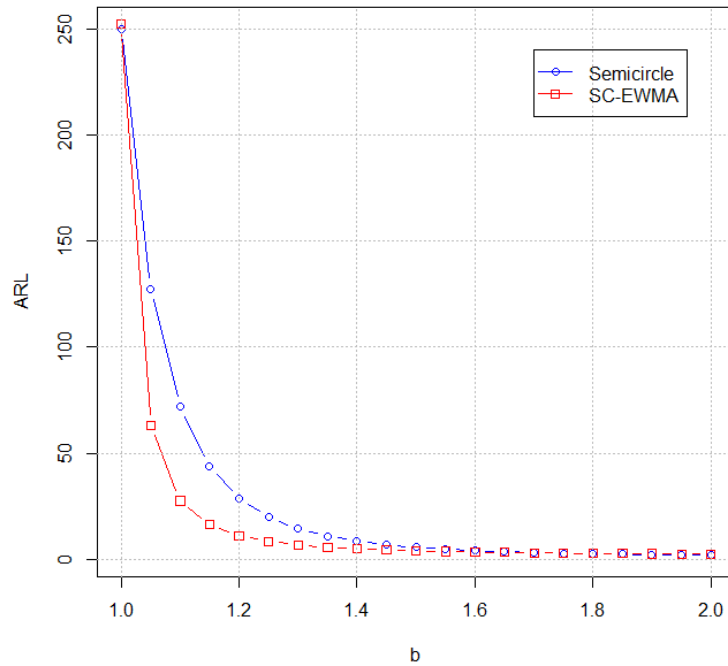
Στην παρούσα παράγραφο θα συγκρίνουμε το Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου και το SC-EWMA διάγραμμα ελέγχου για να μελετήσουμε πιο είναι ποιο ικανό στο να εντοπίζει μετατοπίσεις στο μέσο ή/και την μεταβλητότητα της διεργασίας. Στο προηγούμενο κεφάλαιο αναφέραμε ότι τα Ημικυκλικό και το SC-EWMA διαγράμματα ελέγχου είναι ικανά να εντοπίζουν αυξήσεις στην μεταβλητότητα της διεργασίας και όχι μειώσεις. Επιπλέον η στατιστική συνάρτηση των διαγραμμάτων αυτόν δημιουργεί ένα ημικόκλιο στο διάγραμμα ελέγχου όπου και πήραν την ονομασία τους. Για να γίνει η σύγκριση για

το SC-EWMA χρησιμοποιήσαμε προσομοίωση για να πάρουμε το ARL_1 για διάφορες μετατοπίσεις στο μέσο ή/και στην μεταβλητότητα της διεργασίας.



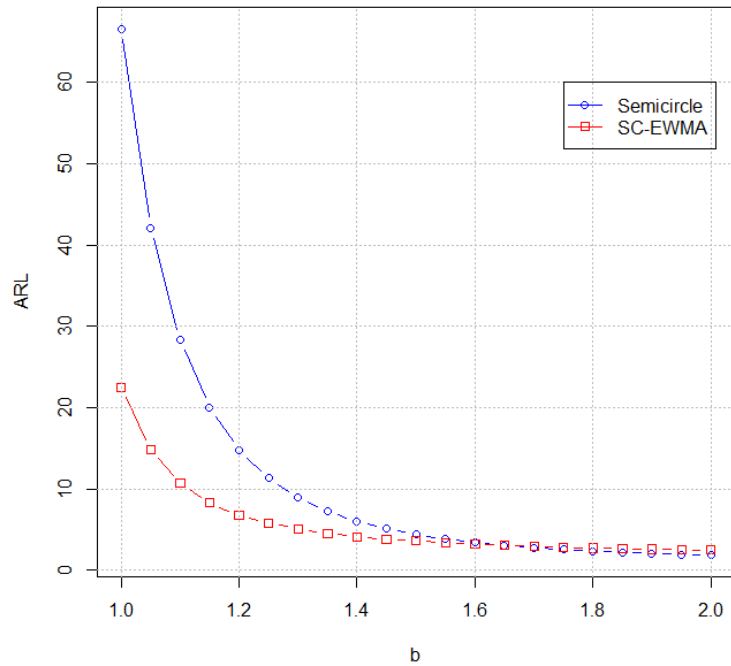
Σχήμα 3. 5. Ημικυκλικό και SC-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $0 \leq a \leq 2$ και $b = 1$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι για όλες τις μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας το SC-EWMA διάγραμμα ελέγχου εντοπίζει πιο γρήγορα τις μετατοπίσεις από ότι το Ημικυκλικό. Ωστόσο για μετατοπίσεις μεγαλύτερης της μονάδας στο μέσο και τα δύο διαγράμματα ελέγχου έχουν περίπου ίδια απόδοση.



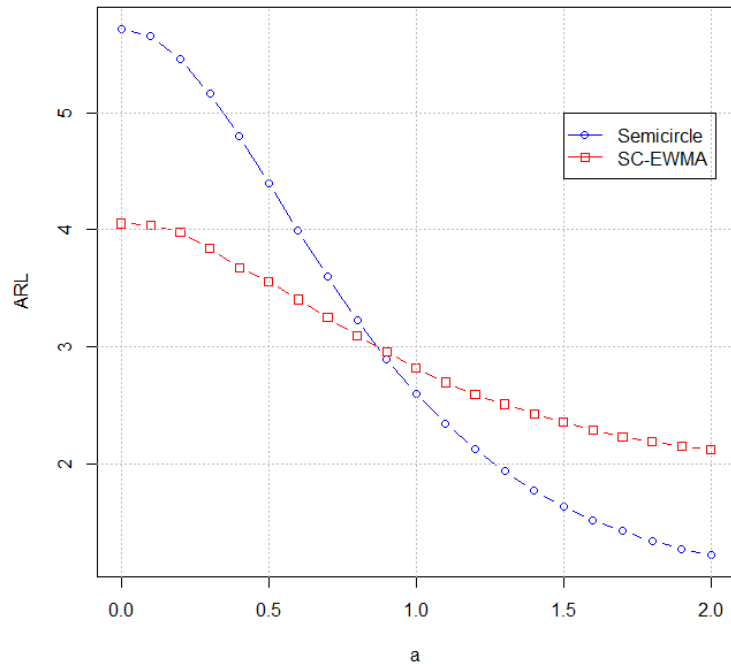
Σχήμα 3. 6. Ημικυκλικό και SC-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $a = 0$ και $1 \leq b \leq 2$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι όταν ο μέσος παραμένει σταθερός και αυξηθεί η μεταβλητότητα τη διεργασίας, τότε το SC-EWMA διάγραμμα ελέγχου εντοπίζει πιο γρήγορα τις μετατοπίσεις στην τυπική απόκλιση από ότι το Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου. Ωστόσο για αρκετά μεγάλες μετατοπίσεις στην μεταβλητότητα της διεργασίας, $b \geq 1.5$ τα δύο διαγράμματα εντοπίζουν το ίδιο γρήγορα την μετατόπιση αυτή.



Σχήμα 3. 7. Ημικυκλικό και SC-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $a = 0.5$ και $1 \leq b \leq 2$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι όταν έχουμε ταυτόχρονη μικρή μετατόπιση του μέσου και μικρή αύξηση της μεταβλητότητας της διεργασίας, πιο συγκεκριμένα $a = 0.5$ και $1 \leq b \leq 1.5$, το SC-EWMA διάγραμμα ελέγχου εντοπίζει γρηγορότερα τις μετατοπίσεις από ότι το Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου. Ωστόσο για μεγαλύτερες αυξήσεις στη μεταβλητότητα της διεργασίας τα δύο διαγράμματα εντοπίζουν το ίδιο γρήγορα τις μετατοπίσεις αυτές.

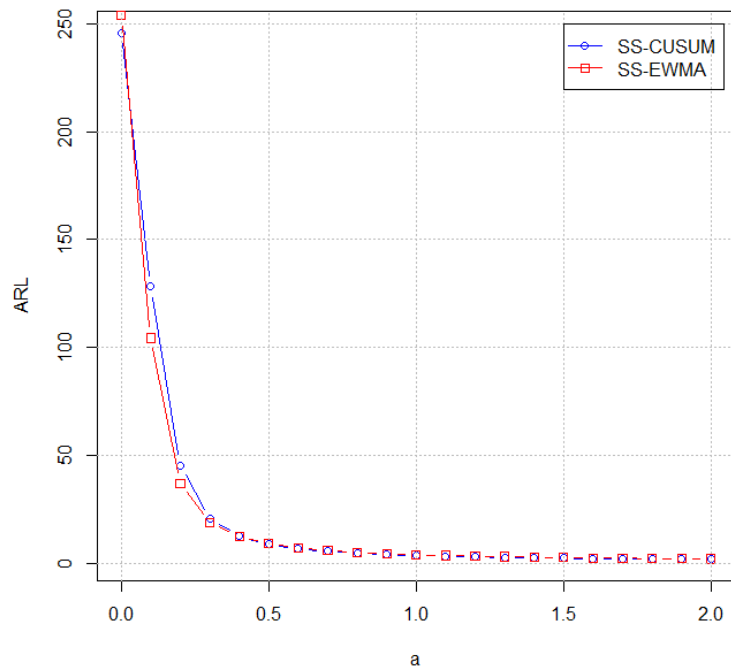


Σχήμα 3. 8. Ημικυκλικό και SC-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις για μετατοπίσεις $0 \leq a \leq 2$ και $b = 1.5$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι όταν έχουμε ταυτόχρονη μικρή μετατόπιση του μέσου και μικρή αύξηση της μεταβλητότητας της διεργασίας, πιο συγκεκριμένα $0 \leq a \leq 0.8$ και $b = 1.5$, το SC-EWMA διάγραμμα ελέγχου εντοπίζει πιο γρήγορα αυτές τις μετατοπίσεις από ότι το Ημικυκλικό. Ωστόσο για μεγαλύτερες αυξήσεις του μέσου υπερτερεί το Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου.

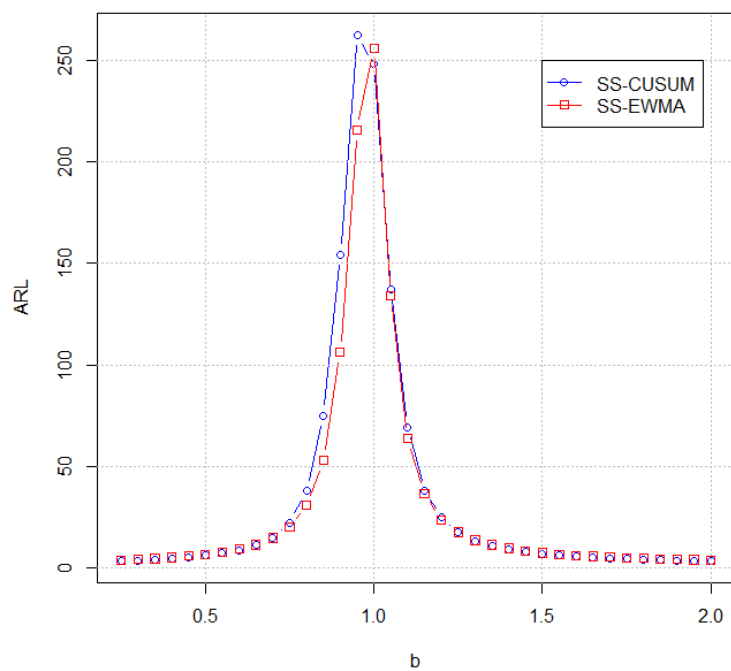
3.4 SS-CUSUM και SS-EWMA: Σύγκριση

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε τα διαγράμματα ελέγχου SS-CUSUM και SS-EWMA σε όρους ARL_1 . Τα οποία βασίζονται στο άθροισμά τετραγώνων των μέγιστων τυπικών τιμών στατιστικών συναρτήσεων που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, οι οποίες ορίζουν έναν κύκλο. Για να κάνουμε τις συγκρίσεις θα χρησιμοποιήσουμε προσομοίωση για να υπολογίσουμε τα ARL_1 για διάφορες μετατοπίσεις στο μέσο ή/και στην μεταβλητότητα της διεργασίας.



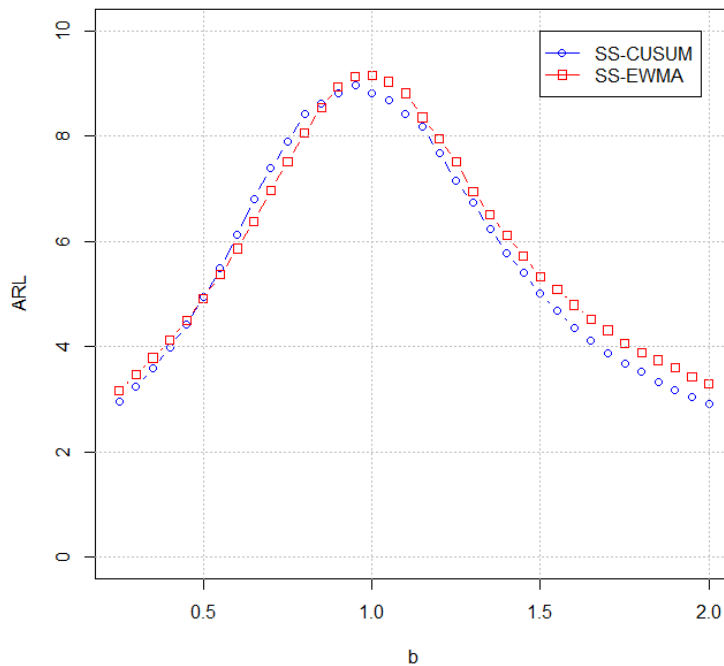
Σχήμα 3. 9. SS-CUSUM και SS-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $0 \leq a \leq 2$ και $b = 1$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι για όλες τις μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας τα δύο διαγράμματα έχουν την ίδια απόδοση. Ωστόσο για μικρές SS-EWMA υπερτερεί ελαφρώς του SS-CUSUM.



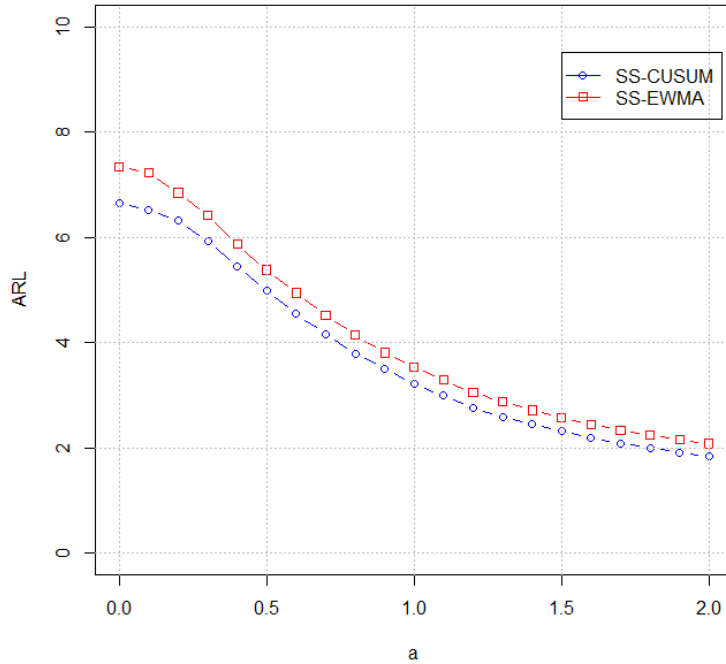
Σχήμα 3. 10. SS-CUSUM και SS-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις του b όταν $a = 0$.

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι για αυξήσεις στη μεταβλητότητα της διεργασίας τα δύο διαγράμματα ελέγχου εντοπίζουν ακριβώς το ίδιο γρήγορα τις μετατοπίσεις αυτές. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που έχουμε μείωση στη μεταβλητότητα με το SS-EWMA να υπερτερεί ελαφρώς.



Σχήμα 3. 11. SS-CUSUM και SS-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $a = 0.5$ και $0 \leq b \leq 2$.

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι όταν έχουμε ταυτόχρονη μικρή μετατόπιση του μέσου και μικρή αύξηση της μεταβλητότητας της διεργασίας, πιο συγκεκριμένα $a = 0.5$ και $1 \leq b \leq 2$, το SS-CUSUM διάγραμμα ελέγχου εντοπίζει γρηγορότερα τις μετατοπίσεις από ότι το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου. Ωστόσο για μειώσεις στη μεταβλητότητα της διεργασίας ισχύουν τα αντίθετα συμπεράσματα.

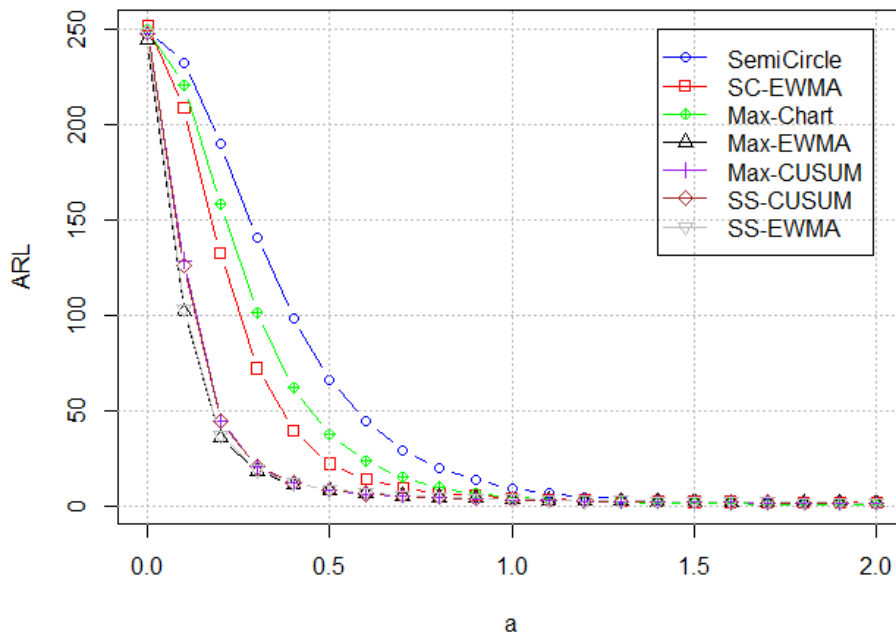


Σχήμα 3. 12. SS-CUSUM και SS-EWMA: Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις για μετατοπίσεις $0 \leq a \leq 2$ και $b = 1.5$

Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει ότι όταν έχουμε ταυτόχρονα αύξηση του μέσου και αύξηση της μεταβλητότητας της διεργασίας το SC-CUSUM διάγραμμα ελέγχου εντοπίζει πιο γρήγορα τις μετατοπίσεις από ότι το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου.

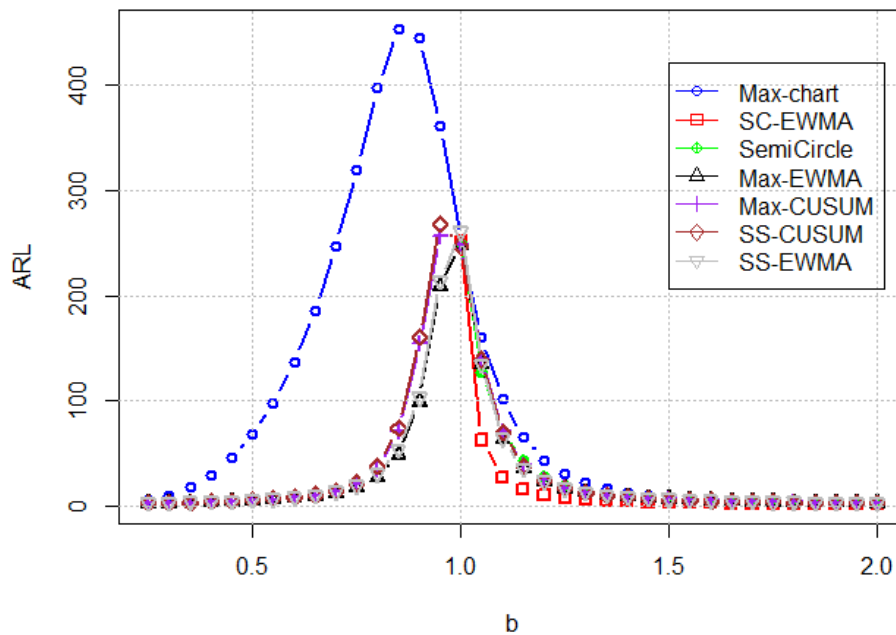
3.5 Σύγκριση όλων των διαγραμμάτων ελέγχου

Στη συνέχεια θα συγκρίνουμε όλα τα συνδυασμένα διαγράμματα μαζί με βάση το εκτός ελέγχου μέσο μήκος ροής για διάφορες μετατοπίσεις στο μέσο και/ή στην τυπική απόκλιση της διεργασίας.



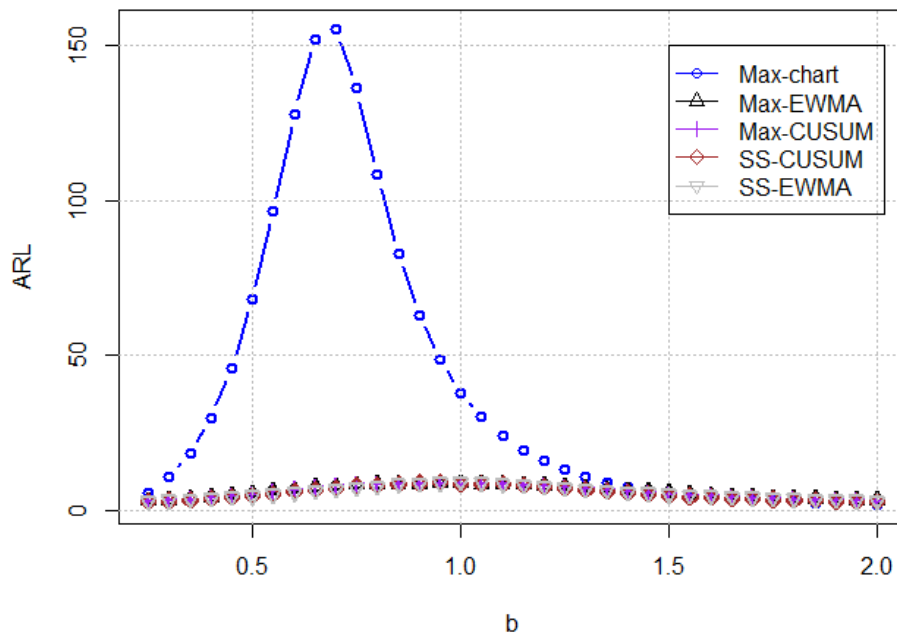
Σχήμα 3. 13. Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $0 \leq a \leq 2$ και $b = 1$

Παρατηρούμε ότι για μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασίας $0 \leq a \leq 2$ όταν η μεταβλητότητα είναι σταθερή $b = 1$ τα SS-CUSUM, SS-EWMA και Max-EWMA εντοπίζουν πιο γρήγορα από τα υπόλοιπα διαγράμματα ελέγχου. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι για μεγάλες μετατοπίσεις στο μέσο όλα τα διαγράμματα εντοπίζουν το ίδιο γρήγορα τις μετατοπίσεις.



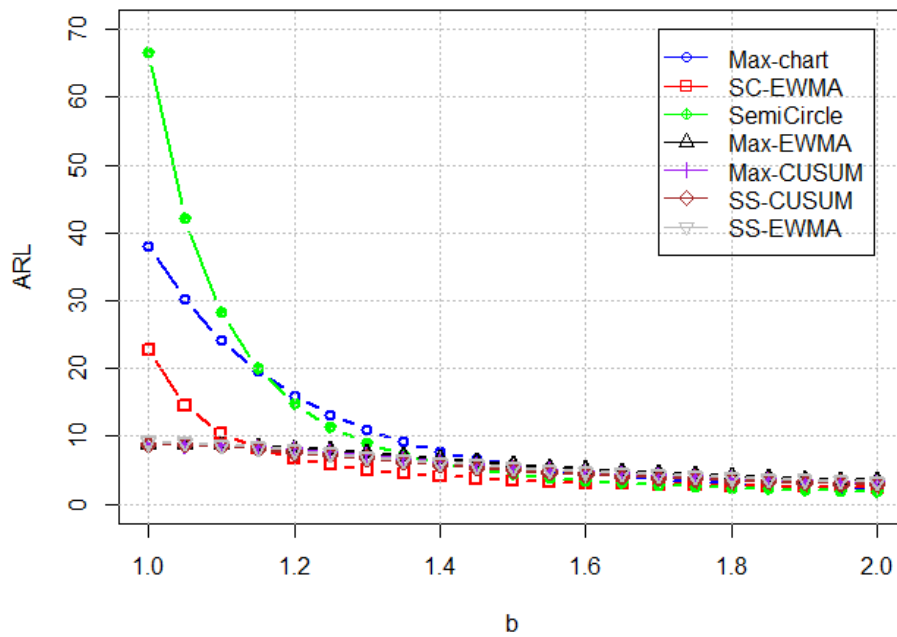
Σχήμα 3. 14. Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $a = 0$ και $0 \leq b \leq 2$

Παρατηρούμε ότι για μείωση στην μεταβλητότητα της διεργασίας για $0 \leq b \leq 1$ τα Max-EWMA και SS-EWMA εντοπίζουν πιο γρήγορα τη μείωση της μεταβλητότητας. Για αύξηση στην μεταβλητότητα της διεργασίας, $1 \leq b \leq 1.5$, το SC-EWMA εντοπίζει πιο γρήγορα την μετατόπιση. Ωστόσο, για μεγάλες μετατοπίσεις στην μεταβλητότητα όλα τα διαγράμματα εντοπίζουν το ίδιο γρήγορα τις μετατοπίσεις.



Σχήμα 3. 15. Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $a = 0.5$ και $0 \leq b \leq 2$

Παρατηρούμε ότι όλα τα διαγράμματα ελέγχου εκτός από το Max-chart εντοπίζουν το ίδιο γρήγορα την ταυτόχρονη μετατόπιση στο μέσο και στην μεταβλητότητα της διεργασίας.



Σχήμα 3. 16. Εκτός ελέγχου ARL για μετατοπίσεις $a = 0.5$ και $1 \leq b \leq 2$

Παρατηρούμε ότι για μετατοπίσεις $1.2 \leq b \leq 2$ το SC-EWMA διάγραμμα ελέγχου και το Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου εντοπίζουν πιο γρήγορα τις μετατοπίσεις στο μέσο και στην μεταβλητότητα της διεργασίας.

Συμπερασματικά από τις παραπάνω συγκρίσεις που κάναμε για τα συνδυασμένα διαγράμματα ελέγχου μπορούμε να βγάλουμε συμπέρασμα πιο από τα διαγράμματα είναι καλύτερο στο να εντοπίζει πιο γρήγορα τις μετατοπίσεις στο μέσο και /ή στην μεταβλητότητα της διεργασίας. Συνεπώς, σύμφωνα με την πρώτη ομαδοποίηση που κάναμε με βάση την στατιστική που απεικονίζεται στο διάγραμμα ελέγχου τα διαγράμματα Max-EWMA και Max-CUSUM υπερτερούν στον να εντοπίζουν γρήγορα μικρές μετατοπίσεις στο μέσο ή/και στη μεταβλητότητα της διεργασίας. Ωστόσο για μεγάλες μετατοπίσεις στο μέσο της διεργασία το Max-Chart είναι ικανότερο να εντοπίζει γρήγορα τις μετατοπίσεις. Στη συνέχεια για τα διαγράμματα Ημικυκλικό και SC-EWMA για όλες τις μετατοπίσεις στο μέσο ή/και στη μεταβλητότητα της διεργασίας το SC-EWMA εντοπίζει γρηγορότερα τις μετατοπίσεις. Επιπλέον για τα SS-CUSUM και SS-EWMA διαγράμματα ελέγχου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι είναι ισοδύναμα για διάφορες μετατοπίσεις στο μέσο ή στην μεταβλητότητα της διεργασίας. Ενώ όταν έχουμε μικρή μετατόπιση στο μέσο και μικρή αύξηση στην μεταβλητότητα το SS-CUSUM εντοπίζει πιο γρήγορα την μετατόπιση. Επίσης όταν έχουμε ταυτόχρονη αύξηση στο μέσο και στην μεταβλητότητα της διεργασίας το SS-CUSUM εντοπίζει πιο γρήγορα την μετατόπιση.

Τέλος από την σύγκριση που κάναμε με όλα τα διαγράμματα ελέγχου που μελετήσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο μπορούμε να βγάλουμε τα εξής συμπεράσματα. Για μετατόπιση στο μέσο της διεργασίας όταν η μεταβλητότητα είναι σταθερή τα SS-CUSUM και SS-EWMA διαγράμματα εντοπίζουν πιο γρήγορα την μετατόπιση. Όταν έχουμε μετατόπιση στην μεταβλητότητα της διεργασίας και ο μέσος μένει σταθερός πιο συγκεκριμένα για μείωση στην μεταβλητότητα τα Max-EWMA και SS-EWMA διαγράμματα ελέγχου εντοπίζουν πιο γρήγορα την μετατόπιση, ενώ για αύξηση στην μεταβλητότητα το SC-EWMA εντοπίζει πιο γρήγορα την μετατόπιση. Επίσης όταν έχουμε μικρή μετατόπιση στο μέσο και ταυτόχρονα διάφορες μετατοπίσεις στην μεταβλητότητα της διεργασίας όλα τα διαγράμματα ελέγχου εντοπίζουν γρήγορα την μετατόπιση εκτός από τα Max-Chart, SC-EWMA και το Ημικυκλικό.

Βιβλιογραφία

Ξένη Βιβλιογραφία

- [1] Ajadi J.O. and M.Riaz (2017). New memory-type control charts for monitoring process mean and dispersion. *Scientia Iranica* 24(6), 3423-3438.
- [2] Brook D. and Evans D.A. (1972). An approach to the probability distribution of cusum run length. *Biometrika*, 59, 3, 539-549.
- [3] Chao M.T. and Cheng S.W. (1996) . Semicircle control chart for variables data. *Quality Engineering*. 8:441-6.
- [4] Cheng S.W. and Thaga K. (2010) . Max-CUSUM chart. *Front Statist Qual Contr.* 9:85-98.
- [5] Cheng S.W. and Thaga K. (2006). Single variables control charts: an overview. *Quality Reliability Engineering Int.* 22(7):811-20.
- [6] Chen G. and Cheng S.W. (1998). Max-chart: combining X-Bar chart and S chart. *Statistica Sinica*. 8:263-71.
- [7] Chen G., Cheng S.W. and Xie H. (2001). Monitoring process mean and variability with one EWMA chart. *Journal of Quality and Technology*. 33:223-33.
- [8] Chen G., Cheng S.W. and Xie H. (2004). A new EWMA control chart for monitoring both location and dispersion. *International Journal of Quality Quantitative Management*. 1(2):217-31.
- [9] Crowder, S.V. (1987). Design of Exponentially Weighted Moving Average Schemes. *Journal of Quality Technology* 21, pp, 155-162.
- [10] Domangue R. and Patch S.C. (1991). Some omnibus exponentially weighted moving average statistical process monitoring schemes. *Technometrics*. 33:299-313.
- [11] Lucas M. J. and Saccucci M. S. (1990). Exponentially Weighted Moving Average Control Schemes: Properties and Enhancements. *Technometrics*, vol. 32, No. 1 , pp, 1-12.
- [12] Montgomery, D. C. (2001). Introduction to Statistical Quality Control 4th edition. *John Wiley and Sons, Inc., New York*.
- [13] Thaga K. (2003). Contributions to statistical process control tools. PhD Thesis, *University of Manitoba, Winnipeg, Canada*.
- [14] Van Nuland, Y. (1992-93). ISO 9002 and the Circle technique. *Quality Engineering*, 5, 269-291.
- [15] Xie H. (1999). Contributions to qualimetry. *PhD Thesis, University of Manitoba, Winnipeg, Canada*.

Ελληνική Βιβλιογραφία

- [1] Αντζουλάκος, Δ. (2010). Πανεπιστημιακές σημειώσεις: Στατιστικός Έλεγχος Ποιότητας, *Πανεπιστήμιο Πειραιώς*, Μ.Δ.Ε Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Παράρτημα

Κ. Κώδικες για τα Συνδυασμένα Διαγράμματα Ελέγχου

Κ.1 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου.

Αυτός ο κώδικας υπολογίζει το ARL_1 για το Ημικυκλικό διάγραμμα ελέγχου με εντός ελέγχου $ARL = 250$.

```
n <- 2
a=1.5
b=0.5
alpha <- 0.0054
ncpar <- n*(a/b)^2
x <- n*(q/b)^2
beta <- pchisq(x,df=n,ncp=ncpar)
ARL <- 1/(1-beta)
Αποτέλεσμα: 59.55
```

Ο παρακάτω κώδικας υπολογίζει το ARL_1 για την περίπτωση για $\mu_1 = \mu_0 + a\sigma_0$:

```
n <- 2
a=1.2
b=1
alpha <- 0.0054
ncpar <- n*(a/b)^2
x <- n*(q/b)^2
beta <- pchisq(x,df=n,ncp=ncpar)
ARL <- 1/(1-beta)
Αποτέλεσμα: 10.66
```

Κ.2 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το Max διάγραμμα ελέγχου.

Αυτός ο κώδικας υπολογίζει το ARL_1 για το Max διάγραμμα ελέγχου με εντός ελέγχου $ARL = 185$.

```
n <- 5
a <- 0.5
b <- 1
U <- UCL[1];U
(a1 <- (U/b)-(a/b)*sqrt(n))
```

```

(a2 <- (-U/b)-(a/b)*sqrt(n))
(p1 <- pnorm(a1,0,1)-pnorm(a2,0,1))
(c1 <- pnorm(U,0,1))
(c2 <- pnorm(-U,0,1))
(d1 <- qchisq(c1,n-1))
(d2 <- qchisq(c2,n-1))
(p2 <- pchisq(d1/b^2,n-1)-pchisq(d2/b^2,n-1))
beta <- p1*p2;beta
ARL <- 1/(1-beta)
options(digits=3)
ARL
Αποτέλεσμα: 30.7

```

K.3 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου.

Αυτός ο κώδικας υπολογίζει το ARL_1 για το Max-EWMA διάγραμμα ελέγχου με εντός ελέγχου $ARL = 185$.

```

#λ=L
#K1=K
L <- 0.3
K <- 2.989
simu <- 10000
cycle <- 1000
n=5
a <- 0.25
b <- 1.5
m0 <- 0
s0 <- 1
m1 <- m0+a*s0
s1 <- b*s0
Υπολογισμός μέσης τιμής και διακύμανσης της στατιστικής MAX
va <- rep(0, times=cycle)
r <- rep(0, times=cycle)
for (i in 1:cycle) {
  va[i] <- (L/(2-L))*(1-(1-L)^(2*i))
  r[i] <- sqrt(1/va[i])
}
meanvalue <- rep(0, times=cycle)
meanx2 <- rep(0, times=cycle)
varvalue <- rep(0, times=cycle)
lim <- Inf
for (i in 1:cycle) {
  densx <- function(x) {
    x*4*r[i]*dnorm(r[i]*x,0,1)*(2*pnorm(r[i]*x,0,1)-1)
  }
  densx2 <- function(x) {

```

```

      (x^2)*4*r[i]*dnorm(r[i]*x,0,1)*(2*pnorm(r[i]*x,0,1)-1)
    }
    meanvalue[i] <- integrate(densx,0,lim)$value
    meanx2[i] <- integrate(densx2,0,lim)$value
    varvalue[i] <- meanx2[i]-(meanvalue[i])^2
  }
# meanvalue[i]   # E(M_i)
# varvalue[i]   # Var(M_i)
Υπολογισμός του άνω ορίου ελέγχου
UCL <- rep(0, times=cycle)
for (i in 1:cycle) {
  UCL[i] <- meanvalue[i]+K*sqrt(varvalue[i])
}
counter <- rep(0, times=simu)
for (j in 1:simu) {
  u <- rep(0, times=cycle)
  v <- rep(0, times=cycle)
  H <- rep(0, times=cycle)
  y <- rep(0, times=(cycle+1))
  z <- rep(0, times=(cycle+1))
  MAX <- rep(0, times=cycle)
  for (i in 1:cycle) {
    counter[j] <- counter[j]+1
    x <- rnorm(n,m1,s1)
    u[i] <- (sqrt(n))*(mean(x)-m0)/(s0)
    H[i] <- pchisq(((n-1)*var(x))/(s0^2),n-1)
    v[i] <- qnorm(H[i],0,1)
    y[i+1] <- (1-L)*(y[i])+L*(u[i])
    z[i+1] <- (1-L)*(z[i])+L*(v[i])
    MAX[i] <- pmax(abs(y[i+1]),abs(z[i+1]))
    if (MAX[i]>UCL[i]) break
  }
}
ARL <- mean(counter)
Αποτέλεσμα: 4.56

```

Κ.4 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου.

Αυτός ο κώδικας υπολογίζει το ARL_1 για το SS-EWMA διάγραμμα ελέγχου με εντός ελέγχου $ARL = 250$.

```

l <- 0.05
K <- 3.105
simu <- 10000 # Αριθμός διαγραμμάτων ελέγχου
cycle <- 3000
#####
n=5

```



```

a <- 0.25
b <- 0.25
m0 <- 0 # Εντός ελέγχου μέση τιμή
s0 <- 1 # Εντός ελέγχου τυπικά απόκλιση
m1 <- m0+a*s0 # Εκτός ελέγχου μέση τιμή
s1 <- b*s0 # Εκτός ελέγχου τυπική απόκλιση
#####
UCL=rep(0,times=cycle) # Initial state
for(i in 1:cycle){
UCL[i]=((2*l)*(1-(1-l)^(2*i))*(1+K))/(2-l)
}
# UCL
# UCL1=((2*l)*(1+K))/(2-l) #steady state
#####
counter <- rep(0, times=simu)
for (j in 1:simu) {
u <- rep(0, times=cycle)
v <- rep(0, times=cycle)
H <- rep(0, times=cycle)
y <- rep(0, times=(cycle+1))
z <- rep(0, times=(cycle+1))
ss <- rep(0, times=cycle)
for (i in 1:cycle) {
counter[j] <- counter[j]+1
x <- rnorm(n,m1,s1)
u[i] <- (sqrt(n))*(mean(x)-m0)/(s0)
H[i] <- pchisq(((n-1)*var(x))/(s0^2),n-1)
v[i] <- qnorm(H[i],0,1)
y[i+1] <- (1-l)*(y[i])+l*(u[i])
z[i+1] <- (1-l)*(z[i])+l*(v[i])
ss[i] <- (y[i+1]^2)+(z[i+1]^2)
if (ss[i]>UCL[i]) break
}
}
ARL <- mean(counter)
Αποτέλεσμα: 1.7

```

K.5 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου.

Αυτός ο κώδικας υπολογίζει το ARL_1 για το EWMA-SC διάγραμμα ελέγχου με εντός ελέγχου $ARL = 250$.

```

#λ=L
L <- 0.05
K <-2.1180
simu <- 10000 # Αριθμός διαγραμμάτων ελέγχου
cycle <- 1000

```

```
#####
n=5
a <- 0.5
b <- 1
m0 <- 0 # Εντός ελέγχου μέση τιμή
s0 <- 1 # Εντός ελέγχου τυπικά απόκλιση
m1 <- m0+a*s0 # Εκτός ελέγχου μέση τιμή
s1 <- b*s0 # Εκτός ελέγχου τυπική απόκλιση
#####
UCL=rep(0,times=cycle)
for (i in 1:cycle){
UCL[i]=n+K*sqrt(((2*n*L)*(1-(1-L)^(2*i)))/(2-L)) # initial state
}
UCL1=n+K*sqrt((2*n*L)/(2-L))# staeady state
#####
counter <- rep(0, times=simu)
for (j in 1:simu) {
T<-rep(0,times=cycle)
T1<-rep(0,times=cycle)
Q<-c(5,rep(0,times=(cycle-1)))
for(i in 1:cycle){
counter[j]<-counter[j]+1
x<-rnorm(n,m1,s1)
T[i]<-((mean(x)-m0)^2)+((n-1)/n)*var(x)
T1[i]<-(n/(s0^2))*T[i]
Q[i+1]<-(1-L)*Q[i]+L*T1[i]
if(Q[i]>UCL[i]) break
}
}
ARL<-mean(counter)
ARL
Αποτέλεσμα: 22.7
```

K.6 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου.

Αυτός ο κώδικας υπολογίζει το ARL_1 για το Max-CUSUM διάγραμμα ελέγχου με εντός ελέγχου $ARL = 250$.

```
simu <- 10000 # Αριθμός διαγραμμάτων ελέγχου
cycle <- 3000 # Μέγιστος αριθμός σημείων αν διάγραμμα ελέγχου (ας πούμε 5 φορές το
πραγματικό ARL)
#####
n=5
a <- 0.25
b <- 0.75
m0 <- 0 # Εντός ελέγχου μέση τιμή
s0 <- 1 # Εντός ελέγχου τυπικά απόκλιση
```

```

m1 <- m0+a*s0 # Εκτός ελέγχου μέση τιμή
s1 <- b*s0 # Εκτός ελέγχου τυπική απόκλιση

m0;s0;m1;s1
k <- 0.5
h <- 5.05
# counter: Number of points in each chart (simu charts in total) until the ooc signal
# ARL: Μέση τιμή των τιμών counter
#####
counter <- rep(0, times=simu)

for (j in 1:simu) {
  u <- rep(0, times=cycle)
  v <- rep(0, times=cycle)
  H <- rep(0, times=cycle)
  Cp <- rep(0, times=(cycle+1))
  Cm <- rep(0, times=(cycle+1))
  Sp <- rep(0, times=(cycle+1))
  Sm <- rep(0, times=(cycle+1))
  MAX <- rep(0, times=cycle)
  for (i in 1:cycle) {
    counter[j] <- counter[j]+1
    x <- c()
    x <- rnorm(n,mean=m1,sd=s1)
    u[i] <- (sqrt(n))*(mean(x)-m0)/(s0)
    H[i] <- pchisq(((n-1)*var(x))/(s0^2),n-1)
    v[i] <- qnorm(H[i],mean=0,sd=1)
    Cp[i+1] <- max(0,Cp[i]+u[i]-k)
    Cm[i+1] <- max(0,Cm[i]-u[i]-k)
    Sp[i+1] <- max(0,Sp[i]+v[i]-k)
    Sm[i+1] <- max(0,Sm[i]-v[i]-k)
    MAX[i] <- max(Cp[i+1],Cm[i+1],Sp[i+1],Sm[i+1])
    if (MAX[i]>h) break
  }
}
ARL <- mean(counter)
Αποτέλεσμα: 18.07

```

K.7 Κώδικας στην R για τον υπολογισμό του ARL_1 για το SS-CUSUM διάγραμμα ελέγχου.

Αυτός ο κώδικας υπολογίζει το ARL_1 για το SS-CUSUM διάγραμμα ελέγχου με εντός ελέγχου $ARL = 250$.

```

#####
simu <- 10000 # Αριθμός διαγραμμάτων ελέγχου
cycle <- 3000 # Μέγιστος αριθμός σημείων αν διάγραμμα ελέγχου (ας πούμε 5 φορές το
πραγματικό ARL)

```

```
#####
n=3
a <- 0.25
b <- 0.75
m0 <- 0 # Εντός ελέγχου μέση τιμή
s0 <- 1 # Εντός ελέγχου τυπικά απόκλιση
m1 <- m0+a*s0 # Εκτός ελέγχου μέση τιμή
s1 <- b*s0 # Εκτός ελέγχου τυπική απόκλιση

m0;s0;m1;s1
k <- 0.5
h <- 28.03

#####
# counter: Number of points in each chart (simu charts in total) until the ooc signal
# ARL: Μέση τιμή των τιμών counter
#####
counter <- rep(0, times=simu)

for (j in 1:simu) {
  u <- rep(0, times=cycle)
  v <- rep(0, times=cycle)
  H <- rep(0, times=cycle)
  Cp <- rep(0, times=(cycle+1))
  Cm <- rep(0, times=(cycle+1))
  Sp <- rep(0, times=(cycle+1))
  Sm <- rep(0, times=(cycle+1))
  M <- rep(0, times=cycle)
  p <- rep(0, times=cycle)
  SS <- rep(0, times=cycle)
  for (i in 1:cycle) {
    counter[j] <- counter[j]+1
    x <- c()
    x <- rnorm(n, mean=m1, sd=s1)
    u[i] <- (sqrt(n))*(mean(x)-m0)/(s0)
    H[i] <- pchisq(((n-1)*var(x))/(s0^2), n-1)
    v[i] <- qnorm(H[i], mean=0, sd=1)
    Cp[i+1] <- max(0, Cp[i]+u[i]-k)
    Cm[i+1] <- max(0, Cm[i]-u[i]-k)
    Sp[i+1] <- max(0, Sp[i]+v[i]-k)
    Sm[i+1] <- max(0, Sm[i]-v[i]-k)
    M[i] <- max(Cp[i+1], Cm[i+1])
    p[i] <- max(Sp[i+1], Sm[i+1])
    SS[i] <- (M[i]^2)+(p[i]^2)
    if (SS[i]>h) break
  }
}
ARL <- mean(counter)
Αποτέλεσμα: 40.2
```