ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Ασθενής σύγκλιση μεταβλητών, με εφαρμογές στην θεωρία κινδύνων

Κωνσταντίνος Ν. Θερμογιάννης

Πειραιάς 2019

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

Weak convergence of random variables, with applications in risk theory

Konstantinos N. Thermogiannis

Piraeus 2019

Αφιερώσεις

Στην μητέρα μου Ελένη στον πατέρα μου Νεκτάριο στον αδερφό μου Ευάγγελο και σε όλους εκείνους που έφυγαν νωρίς αλλά μου αποδεικνύουν καθημερινά ότι ένας άνθρωπος ζεί λιγότερο από ό,τι θέλει και περισσότερο από ό,τι νομίζει.

Ευχαριστίες

Κατ'αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα για την παρούσα διπλωματική εργασία κύριο Πολίτη Κωνσταντίνο, Αναπληρωτή Καθηγητή του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για την αμέριστη συμπαράστασή του την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας και την τεράστια υπομονή του σε κάθε απορία μου και σε κάθε προβλημά μου. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κύριο Ψαρράκο Γεώργιο και κύριο Μπούτσικα Μιχαήλ για την επίβλεψή τους. Ακόμη θα ηθέλα να ευχαριστήσω την οικογένεια μου για την ψυχολογική στήριξη κατά κύριο λόγο και την οικονομική διότι χωρίς αυτές η ολοκλήρωση της παρούσας εργασίας θα ήταν αδύνατη. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με την παρούσα εργασία.

Περιεχόμενα

Περίληψη

Βασικός στόχος της παρούσας διπλωματικής εργασίας είναι να αναφέρει τους διάφορους τρόπους σύγκλίσης τυχαίων μεταβλητών και να επικεντρωθεί στην ασθενή σύγκλιση και να δείξει την εφαρμογή αυτού του θεωρητικού μαθηματικού εργαλείου στην Θεωρία των κινδύνων. Στην συνέχεια γίνεται μια αναφορά στην θεωρία χρεοκοπίας και στο κλασικό πρότυπο το οποίο επεκτείνεται στην συνέχεια. Τέλος γίνεται η εφαρμογή της ασθενής σύγκλισης στην θεωρία κίνδυνου.

Abstract

The main aim of this thesis is to address the different ways in which random variables converge and concentrate on the weak convergence and to highlight the application of this theoretical mathematical model in the Theory of Risks. Furthermore, a reference is made to the Ruin Theory and in the classical risk model, which is the extended to the model with diffusion. In conclusion, we have the application of the weak convergence in risk theory.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Στην διπλωματική εργασία που ακολουθεί θα δούμε την ασθενή σύγκλιση και την εφαρμογή αυτής στην θεωρία κίνδυνου. Στο κεφάλαιο 1 αναφέρονται οι ορισμοί και των τεσσάρων τρόπων σύγκλισης και γίνεται ειδική μνεία στην ασθενή σύγκλιση. Δηλαδή εξηγούμε και διαισθητικά με την μορφή σχήματος αλλά και αυστηρά με την χρήση αντιπαραδειγμάτων τον λογό που η συγκεκριμένη σύγκλιση ονομάζεται ασθενής. Επιπλέον γίνεται αναφορά σε δίαφορες ανισότητες οι οποίες είναι γνωστές από την πραγματική ανάλυση. Τέλος γίνεται η αναφορά του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος το οποίο χρησιμοποιείται στην συνέχεια και η αναφορά του Θεωρήματος Glivenko-Cantelli.

Το κεφάλαιο 2 είναι μια επέκταση και μια γενίκευση του κεφαλαίου 1. Εκεί αναφέρονται οι σχέσεις ανάμεσα σε έναν γραμμικό συνδυασμό ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών. Δηλαδή εάν έχουμε μια ακολουθία $\{X_n\}$ από τυχαίες μεταβλητές και μια άλλη ακολουθία $\{Y_n\}$ και η κάθε μία συγκλίνει με έναν συγκλίνει με έναν συγκεκρίμενο (αλλά ίδιο μεταξύ τους) τρόπο τότε τι γίνεται με το άθροισμά τους (βλέπε Θεώρημα 3.1.1) το πηλικό τους (βλέπε Πρόταση 3.1.1) και τον γραμμικό συνδυασμό τους (βλέπε Πρόταση 3.1.1). Τέλος πως συμπεριφέρεται ως προς την σύγκλιση μια συνεχής συνάρτηση που περιέχει μια ακολουθία $\{X_n\}$ από τυχαίες μεταβλητές και μια άλλη ακολουθία $\{Y_n\}$ (βλέπε Θεώρημα 3.1.2).

Στο κεφάλαιο 3 γίνεται η αναφορά στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου και η ανάγκη να δημιουργηθεί ένα νέο μοντέλο διότι το συλλογικό μοντέλο μελετά το χαρτοφυλάκιο μόνο στο τέλος του χρόνου παρατηρησής του. Το νέο μοντέλο που δημιουργείται είναι το κλασικό μοντέλο της χρεοκοπίας το οποίο πλέον καταγράφει και παρατηρεί την πορεία του χαρτοφυλακίου σε κάθε χρονική στιγμή και όχι στο τέλος του. Γι τον λόγο αυτό οι συνολικές ζημιές στο κλασικό μοντέλο ακολουθούν μια σύνθετη ανέλιξη Poisson. Το βασικό όμως πρόβλημα είναι ότι και στο κλασικό μοντέλο οι υποθέσεις που ακολουθούμε το κάνουν λιγότερο ρεαλιστικό. Δηλαδή υποθέτουμε ότι η χρεοκοπία γίνεται μόνο απο απαιτήσεις γι αυτό επεικτείνεται το κλασικό μοντέλο και δημιουργείται το κλασικό μοντέλο με διάχυση το οποίο προσθέτει έναν ακόμα στοχαστικό παράγοντα ο οποίος είναι μια κίνηση Wiener με μετατόπιση(drift)(βλέπε σχέση (4.22)). Στο κλασικό μοντέλο με διάχυση

προστίθενται ακόμα αυτός ο όρος αβεβαιότητας για να κάνει το μοντέλο ακόμα πιο ρεαλιστικό, δηλαδή για παράδειγμα ότι οι όλοι οι πελάτες δεν πληρώνουν στην ώρα τους. Γι αυτό πλέον η χρεοκοπία (η οποία είναι ένας τεχνητός όρος) δεν συμβαίνει μόνο απο απαιτήσεις αλλά και απο διάχυση([2]).
Στο κεφάλαιο 4 γίνεται η σύνδεση των προηγούμενων δύο κεφάλαιων κάτι το οποίο είναι και αυτό που περιμέναμε και βλέπουμε πλέον ότι η ασθενής σύγκλιση είναι ένα πολύ βασικό εργαλείο για την προσέγγιση ή την εύρεση της πιθανότητας χρεοκοπίας σε πεπερασμενο χρόνο κάτι το οποίο είναι πολύ δύσκολο αλλά ταυτόχρονα και πολύ ρεαλιστικό. Επίσης βλέπουμε ότι η κίνηση Wiener με μετατόπιση είναι όριο ενός τυχαίου περιπάτου. Αυτό είναι μια πολύ βασική σχέση για την συνέχεια και για τις διάφορες προσεγγίσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Ως βασικό συμπέρασμα και προϊον διαίσθησης είναι ότι η ασθενής σύγκλιση με την μορφή παραδείγματος μπορεί να μεταφραστεί ως εξης. Εάν ο Andetokunbo έχει πιθανότητα 0.25 να βάλει παραπάνω απο 35 πόντους σε κάθε παιχνίδι της ομάδας του και η πιθανότητα να βρέξει αύριο στην Ελλάδα είναι 0.25, τότε υπαρχεί μια ασθενής σύγκλιση μεταξύ αυτών των δυο. Δηλαδή το προηγούμενο παράδειγμα μας λέει ότι η ασθενής σύγκλιση μπορεί να συμβεί σε διαφορετικούς χώρους σε αντίθεση με τους άλλους τρείς τρόπους οι οποίοι πρέπει να ορίζονται στον ίδιο χώρο.

Κεφάλαιο 2

Σύγκλίσεις τυχαίων μεταβλητών και σχέσεις μεταξύ τους

Βασικός μας στόχος όπως εξάλλου μαρτυρά και ο τίτλος είναι η ασθενής σύγκλιση ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών. Για τον λόγο αυτό θα γίνει αναφορά και στους 4 τρόπους σύγκλισης ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών. Στην συνέχεια θα δοθεί ο ορισμός των 4 τρόπων σύγκλισης . Επίσης θα δώσουμε την διαγραμματική απεικόνιση των τεσσάρων τρόπως σύγκλισης. Ο λόγος ύπαρξης της απεικόνισης αυτής έχει σκοπό να μας δείξει ¨διαισθητικά' τον λόγο που η ασθενής σύγκλιση έχει αυτήν την ονομασία. Επιπλέον θα δώσουμε κάποια παραδείγματα στην ασθενή σύγκλιση και κάποια αντιπαραδείγματα τα οποία επιβεβαιώνουν διάφορες μη συνεπαγωγές που υπάρχουν ανάμεσα στους 4 τρόπους σύγκλισης. Τέλος κάτι το οποίο φαίνεται στα αντιπαραδείγματα όπως και στο διάγραμμα είναι ότι η ασθενής σύγκλιση τελικά είναι ένα τεράστιο εργαλείο στα χέρια μας διότι μπορεί να οριστεί σε διαφόρετικούς χώρους, κάτι το οποίο δεν συμβαίνει σε κανέναν άλλον τρόπο σύγκλισης.

2.1 Τρόποι σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών

Σε αυτή τη παράγραφο θα γίνει μια καταγραφή των ορισμών των τεσσάρων διαφορετικών τρόπων σύγκλισης. Επιπλέον θα εξηγηθεί με μια διαγραμματική απεικόνιση (στην επόμενη παράγραφο) για ποιο λόγο ο ασθενής νόμος ονομάζεται ασθενής.Οι τρόποι σύγκλισης μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών είναι τέσσερις και είναι οι εξής:

1. Σχεδόν βεβαια σύγκλιση (almost surely).
2. Με L_p νόρμα.
3. Με πιθανότητα (in probability) .

4. Κατά κατανομή .

Εμείς θα ασχοληθούμε στην συγκεκριμένη εργασία με τον τρόπο σύγκλισης 4 ο οποίος ονομάζεται και *ασθενής*. Ονομάζεται *ασθενής* γιατί δεν συνεπάγεται κανέναν από τους άλλους τρεις νόμους. Στην συνέχεια θα γίνει εξήγηση με μια διαγραμματική απεικόνιση και θα είναι σχετικά εύκολο να καταλάβει κάποιος γιατί ονομάζεται ασθενής νόμος σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών.
Στην συνέχεια δίνουμε τον ορισμό του μετρικού χώρου καθώς και τον ορισμό της νόρμας σε γενική μορφή όπως ορίζεται σε έναν διανυσματικό χώρο καθώς επίσης και τους ορισμούς και των τεσσάρων τρόπων σύγκλισης. Επίσης δίνουμε τον ορισμό της σ-άλγεβρας καθώς και τον ορισμό του μέτρου πιθανότητας.
Τελος σε αυτην την παράγραφο θα αναφερθουν τρείς πολύ σημαντικές ανισότητες που χρησιμοποιούνται πολύ συχνά στα μαθηματικά και ιδιαίτερα στον κλάδο της πραγματικής ανάλυσης. Επίσης θα γινει αναφορά (λόγω του ότι θα χρησιμοποιηθούν αργοτερα) στις ανισότητες του Markov και του Chebyshev.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα $\mathcal{F}$ ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$). Μια συνάρτηση $\|\bullet\| : V \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* **νόρμα** *αν ισχύουν τα ακολουθα :*
(α) $\|x\| \geq 0 \quad \forall x \in V$ *(Μη αρνητική) .*
(β) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ *(Μηδενικό στοιχείο) .*
(γ) $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathcal{F}, \forall x \in V$ *(Ομογενής) .*
(δ) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$ *(Τριγωνική Ανισότητα).*

Εάν θεωρήσουμε πως το $V = \mathbb{R}^n$ τότε κάθε στοιχείο του V έχει την μορφή $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ όπου $x_i \in \mathbb{R}, \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Η συνήθης νόρμα σε αυτόν τον χώρο είναι η Ευκλείδεια νόρμα δηλαδή η

$$||x||_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} .$$

Ορισμός 2.1.2. *[9] Έστω Ω μη κενό σύνολο και $\mathcal{F}$ μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του Ω. Τότε η $\mathcal{F}$ ονομάζεται* **σ-άλγεβρα** *του Ω αν ισχύουν τα ακόλουθα*
(α) $\emptyset \in \mathcal{F}$
(β) Αν $F \in \mathcal{F}$ τότε και $F^c \in \mathcal{F}$
(γ) Αν $F_1, F_2, F_3, \ldots \in \mathcal{F}$ τότε και $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}$

Ορισμός 2.1.3. *[9] Έστω $\mathcal{F}$ μια σ-άλγεβρα σε έναν δειγματικό χώρο Ω. Η συνάρτηση $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* **μέτρο πιθανότητας** *αν ισχύουν τα ακόλουθα*
(α) $P(F) \geq 0$, για κάθε $F \in \mathcal{F}$
(β) $P(\Omega) = 1$

(γ) *Αν* $F_1, F_2, F_3, \ldots \in \mathcal{F}$ *με* $F_i \bigcap F_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$ *τότε* $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}) = \sum_{n=1}^{\infty} P(F_n)$

Ορισμός 2.1.4. *Την τριάδα* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *την ονομάζουμε* **χώρο πιθανότητας** *όπου* Ω *είναι ο δειγματικός χώρος,* $\mathcal{F}$ *είναι μια σ-άλγεβρα υποσυνόλων του* Ω *και* P *είναι ένα μέτρο πιθανότητας.*

Ορισμός 2.1.5. *Έστω* $p \in [1, \infty)$. *Ο* L_p *είναι ο διανυσματικός χώρος των μετρήσιμων συναρτήσεων για τις οποίες ισχύει ότι :*

$$||f||_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Ο L^p, $p \in [1, \infty)$ *είναι ένας χώρος με νόρμα.*
Στην θεωρία πιθανοτήτων, εάν έχουμε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *τότε για κάθε* $p \geq 1$ *ορίζουμε έναν διανυσματικό χώρο ο οποίος είναι ο εξής :*

$$L^p(\Omega, \mathcal{F}, P) = \{X : E[|X|^p] < \infty\}$$

όπου X *είναι μια τυχαία μεταβλητή.*
Στον $L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *ορίζουμε την νόρμα*

$$||X||_p = E[||X||^p]^{1/p} = \left(\int x^p f(x) dP \right)^{\frac{1}{p}}$$

Το μοναδικό πρόβλημα που προκύπτει εδώ είναι ότι δεν ικανοποιείται απόλυτα ο ορισμός της νόρμας. Δηλαδή ισχύουν απόλυτα οι ιδιότητες (α),(γ),(δ) αλλά δεν ισχύει η ιδιότητα (β) . Επομένως εαν $||X||_p = 0$ *τότε δεν συνεπάγεται οτι* $X = 0$ *αλλά οτι* $Pr(X = 0) = 1$. *Για τον λόγο αυτό ορίζουμε οτι δύο τυχαίες μεταβλητές ειναι ισοδύναμες αν έιναι ίσες με πιθανότητα ένα. Στην πραγματικότητα για να είμαστε σαφείς εδώ μιλάμε για κλάσεις ισοδυναμίας δηλαδή :*

$$X \sim Y \Leftrightarrow Pr(X = Y) = 1.$$

Οπότε στην θεωρία πιθανοτήτων ο $(L^p(\Omega, \mathcal{F}, P), ||X||_p)$ *είναι ένας χώρος με νόρμα.*

Ορισμός 2.1.6. *Έστω ένα μη κενό σύνολο* X. *Μια συνάρτηση* $d{:}X \times X \to \mathbb{R}$ *ονομάζεται μετρική και το ζεύγος* (X, d) *ονομάζεται* **μετρικός χώρος** *αν ισχύουν οι πιο κάτω συνθήκες:*
(α) $d(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$.*(θετική ομοιογένεια)*
(β) *Ισχύει ότι* $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.
(γ) $d(x, y) = d(y, x), \forall x, y \in X$ *(συμμετρία).*

(δ) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z), \forall x,y,z \in X$.*(τριγωνική ανισότητα)*
Λέμε οτι το ζευγάρι (X,d) *αποτελεί ένα μετρικό χώρο. Επίσης την τιμή* $d(x,y)$ *στο ζεύγος* (x,y) *την ονομάζουμε απόσταση ματαξύ των* x,y.

Όπως πολύ εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ένας χώρος με νόρμα είναι ένας μετρικός χώρος με την μετρική $d(x,y) = \|x-y\|$. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Πρόταση 2.1.1. *(Ανισότητα Cauchy-Schwarz) Έστω* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *και* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *δύο* $n-$*άδες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών* $(\mathbb{R})$ *τότε:*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

ή ισοδύναμα όταν οι ακολουθίες είναι άπειρες

$$\sum_{i=1}^{\infty} x_i\, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} y_i^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Πρόταση 2.1.2. *(Ανισότητα αριθμητικού– γεωμετρικού μέσου) Έστω* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *μη–αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί τότε:*

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}. \tag{2.3}$$

Πρόταση 2.1.3. *(Ανισότητα Young). Αν* $a, b \geq 0$ $p, q > 1$ *και* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *τότε :*

$$a\, b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{2.4}$$

Στην συνέχεια δίνουμε τον ορισμό των τεσσάρων τρόπων σύγκλισης που αναφέρθηκαν στην αρχή (στην πρώτη παράγραφο). Καθώς επίσης γίνεται αναφορά σε ένα λήμμα το οποίο είναι πολύ σημαντικό για την συνέχεια.

Ορισμός 2.1.7. *[1] Έστω μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$. *Θα λέμε ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *συγκλίνει σχεδόν βεβαίως (almost surely) στην τυχαία μεταβλητή* X *εάν:*

$$Pr(\lim_{n\to\infty} |X_n - X| = 0) = 1.$$

Συμβολισμός: $X_n \xrightarrow{a.s} X$

Λήμμα 2.1.1. *(Econ 620, Relationship among various modes of convergence page 2)* $X_n \xrightarrow{a.s} X \Leftrightarrow \lim_{m\to\infty} Pr(B_m(\epsilon)) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$ *όπου* $B_m(\epsilon) = \bigcup_{m=n}^{\infty} A_n(\epsilon)$ *και* $A_n(\epsilon) = \{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon\}$

Ορισμός 2.1.8. *[1] Έστω μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$, θα λέμε ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$ συγκλίνει κατά L_p στην τυχαία μεταβλητή X εάν:*

$$E(|X_n - X|^p) \to 0$$

Συμβολισμός : $X_n \xrightarrow{L_p} X$

Ορισμός 2.1.9. *Έστω μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$, θα λέμε ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στην τυχαία μεταβλητή X εάν:*

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - X| > \epsilon) = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Συμβολισμός: $X_n \xrightarrow{p} X$

Ορισμός 2.1.10. *[1] Έστω μια ακολουθία συναρτήσεων κατανομής πιθανότητας $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Θα λέμε ότι η ακολουθία $F_1, F_2, \ldots, F_n$ συγκλίνει ασθενώς στην κατανομή $F(F_n \xrightarrow{d} F)$, εάν :*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

$\forall x$ το οποίο είναι σημείο συνέχειας της F.

Οι τρείς πρώτοι νόμοι σύγκλισης αναφέρθηκαν για τυχαίες μςταβλητές, ενώ ο τελευταίος για συναρτήσεις κατανομής. Για τον λόγο αυτό, η σύγκλιση κατά κατανομή ορίζεται και αυτή συναρτήσει των τυχαίων μεταβλητών όπως στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 2.1.11. *[1] Έστω μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$ και $X_i \sim F_i$. Θα λέμε ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$ συγκλίνει ασθενώς στην τυχαία μεταβλητή X αν $F_n \to F$.*

Συμβολισμός : $X_n \xrightarrow{d} X$

Πρόταση 2.1.4. *(Ανισότητα Markov)Έστω X μια τυχαία μεταβλητή και a>0, τότε*

$$Pr(|X| \geq a) \leq \frac{E[X]}{a}. \tag{2.5}$$

Στη γλώσσα της θεωρίας μέτρου, η ανισότητα Markov δηλώνει ότι αν (X, Σ, μ) είναι ένας χώρος μέτρου, f μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση και $\epsilon > 0$, τότε

$$\mu(\{x \in X : |f(x)| \geq \epsilon\}) \leq \frac{1}{\epsilon} \cdot \int_X |f| d\mu \tag{2.6}$$

Πρόταση 2.1.5. *(Ανισότητα Chebyshev)Δίνεται ότι η τ.μ. έχει πεπερασμένη μέση τιμή ($E[X] < \infty$) και διασπορά $Var[X] < +\infty$. Τότε για κάθε $a > 0$ ισχύει οτι :*

$$Pr\{|X - E[X]| \geq a\} \leq \frac{Var[X]}{a^2}. \tag{2.7}$$

2.2 Σχέσεις μεταξύ των τρόπων σύγκλισης

Σε αυτή την ενότητα θα γίνει μια διαγραμματική απεικόνιση η οποία θα βοηθήσει στην κατανόηση των σχέσεων μεταξύ των τεσσάρων τρόπων σύγκλισης καθώς και τον λόγο για τον οποίο ο τρόπος σύγκλισης κατά κατανομή ονομάζεται και ασθενής. Στην συνέχεια θα γίνουν κάποιες παρατηρήσεις οι οποίες θα έχουν να κάνουν με τις σχέσεις ανάμεσα στους τέσσερις διαφορετικούς τρόπους σύγκλισης.

2.2.1 Σχεδιάγραμμα

Παρουσιάζουμε διαγραμματικά στην συνέχεια τις σχέσεις μεταξύ των τεσσάρων τρόπων σύγκλισης.

$$\begin{array}{ccc}
X_n \xrightarrow{a.s} X & \overset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} & \\
\not\Downarrow\,\not\Uparrow & & X_n \xrightarrow{p} X \overset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} X_n \xrightarrow{d} X \\
X_n \xrightarrow{Lp} X & \overset{\nLeftarrow}{\Rightarrow} &
\end{array}$$

2.2.2 Παρατηρήσεις

1. Όπως φαίνεται στο πιο πάνω σχήμα η σύγκλιση κατά πιθανότητα (p) συνεπάγεται την σύγκλιση κατά κατανομή ($distribution(d)$).

2. Επιπλέον η σχεδόν βεβαία σύγκλιση ($a.s$) όπως και η σύγκλιση κατά νόρμα (L_p) συνεπάγεται την σύγκλιση κατα πιθανότητα (p)

3. **Δεν** υπάρχει γενικά καμία σχέση συνεπαγωγής μεταξύ σχεδόν βεβαίας σύγκλισης ($a.s$) και σύγκλισης κατά νόρμα (L_p).

4. Επίσης η σύγκλιση κατα πιθανότητα (p) **δεν** συνεπάγεται την σχεδόν βεβαία σύγκλιση ($a.s$) όπως και την σύγκλιση κατά νόρμα (L_p).

5. Τέλος η σύγκλιση κατά κατανομή $(distribution(d))$ **δεν** συνεπάγεται ούτε την σύγκλιση κατά πιθανότητα (p) ούτε την σχεδόν βεβαία σύγκλιση $(a.s)$ καθώς επίσης ούτε την σύγκλιση κατά νόρμα (L_p).

Δίνουμε στην συνέχεια την απόδειξη για το ότι η σχεδόν βέβαια σύγκλιση και η σύγκλιση κατά νόρμα συνεπάγονται σύγκλιση κατά πιθανότητα.

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$ ακολουθία τυχαίων μεταβλητών και $p \geq 1$. Τότε ισχύουν τα εξής :*
(α) $X_n \xrightarrow{L_p} X$ (L_p) τότε $X_n \xrightarrow{p} X$ (p).
(β) $X_n \xrightarrow{a.s} X$ $(a.s)$ τότε $X_n \xrightarrow{p} X$ (p).

Απόδειξη (α) Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$Pr(|X_n - X| > \epsilon) = Pr(|X_n - X|^p > \epsilon^p) \overset{(2.5)}{\leq} \frac{1}{\epsilon^p} \cdot E(|X_n - X|^p) \tag{2.8}$$

Τώρα λόγω της υπόθεσης ισχύει οτι

$$\lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) = 0. \tag{2.9}$$

Παίρνοντας τώρα τα όρια στην σχέση (2.8) έχουμε οτι

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - X| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^p} \cdot \lim_{n\to\infty} E(|X_n - X|^p) \overset{(2.9)}{=} 0.$$

Οπότε

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - X| > \epsilon) = 0,$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο.
(β) [7] Έστω $\epsilon > 0$. Επειδή $X_n \xrightarrow{a.s} X$, θα υπάρχει φυσικός αριθμός n έτσι ώστε,

$$Pr[|X_n - X| < \epsilon] \geq Pr[|X_m - X| < \epsilon], \quad \forall m \geq n. \tag{2.10}$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε τα ακόλουθα σύνολα

$$\begin{aligned} A &= \{\omega : X_m(\omega) - X(\omega) < \epsilon\}, \quad \forall m \geq n \\ B &= \{\omega : X_n(\omega) - X(\omega) < \epsilon\} \end{aligned}$$

Προφανώς

$$A \subseteq B$$

Επειδή $X_n \xrightarrow{a.s} X$ έχουμε ότι ,

$$\lim_{n\to\infty} Pr[|X_m - X| < \epsilon] = 1 \;\; \forall m \geq n.$$

Τώρα παίρνοντας όρια στην σχέση (2.10) έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} Pr[|X_n - X| < \epsilon] \geq \lim_{n\to\infty} Pr[|X_m - X| < \epsilon] = 1, \quad \forall m \geq n$$

Οπότε τελικά έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} Pr[|X_n - X| < \epsilon] = 1$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{n\to\infty} Pr[|X_n - X| \geq \epsilon] = 0.$$

Οπότε $X_n \xrightarrow{p} X$ το οποίο είναι και το ζητούμενο. □

2.3 Παραδείγματα

Στην παράγραφο αυτή θα αναφέρουμε κάποια παραδείγματα όπου μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots,$ θα συγκλίνει κατα κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή X . Επιπλέον θα γίνει μια αναφορά στο θεώρημα $DeMoivre - Laplace$ για την ανάγκη της λύσης ενός παραδείγματος.

Παράδειγμα 2.3.1. *[8] Έστω $X_1, X_2, \ldots,$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1). Έστω $Y_n = \max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Θα δείξουμε ότι η $Z_n = n \cdot (1 - Y_n)$ συγκλίνει κατά κατανομή σε μια τυχαία μεταβλητή Z.*

Λύση [8]
Πράγματι έχουμε

$$F_{Z_n}(z) = Pr(Z_n \leq z) = Pr(n \cdot (1 - Y_n) \leq z) = 1 - Pr\left(Y_n \leq 1 - \frac{z}{n}\right), z \leq n.$$

Λόγω της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$ έχουμε οτι,

$$F_{Z_n}(z) = 1 - \prod_{i=1}^{n} Pr\left(X_i \leq 1 - \frac{z}{n}\right) = 1 - Pr\left(X_i \leq \frac{z}{n}\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{z}{n}\right)^n, z \leq n$$

για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$.
Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = 1 - e^{-z} = F_Z(z).$$

Άρα $Z \sim Exp(1)$. Αυτό προκύπτει από το γνωστό όριο

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a. \tag{2.11}$$

Παράδειγμα 2.3.2. *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ακολουθούν την ομοιόμορφη κατανομή στο διάστημα (0,1). Έστω $Y_n = n \cdot \min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$. Τότε η Y_n συγκλίνει κατά κατανομή.*

Λύση

Πράγματι

$$F_{Y_n}(y) = Pr(Y_n \leq y) = 1 - Pr(Y_n > y) = 1 - Pr\left(\min\{X_1, X_2, \ldots, X_n\} > \frac{y}{n}\right)$$

$$= 1 - Pr\left(\bigcap_{i=1}^{\infty}\left\{X_i > \frac{y}{n}\right\}\right)$$

για όλα τα $i = 1, 2, \ldots, n$.
Λόγω της ανεξαρτησίας των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots, X_n$ έχουμε οτι,

$$F_{Y_n}(y) = 1 - \prod_{i=1}^{n} Pr\left(X_i \geq 1 - \frac{y}{n}\right) = 1 - \left(1 - F\left(\frac{y}{n}\right)\right)^n.$$

Όμως $F(x) = x\,, 0 < x < 1$. Η $F(x)$ είναι η κοινή συνάρτηση κατανομής για τα $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Άρα

$$1 - \left(1 - F\left(\frac{y}{n}\right)\right)^n = 1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)^n$$

Τώρα παίρνοντας το όριο έχουμε ,

$$\lim_{n\to\infty} F_{Y_n}(y) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \left(1 - \frac{y}{n}\right)\right)^n \overset{(2.11)}{=} 1 - e^{-y} = F_Y(y).$$

Συνεπώς η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει κατά κατανομή στην εκθετική κατανομή με παράμετρο λ=1 ($Y \sim Exp(1)$).

Πριν αναφέρουμε το επόμενο παράδειγμα θα κάνουμε μια αναφορά σε ένα θεώρημα το οποίο θα μας βοηθήσει στην λύση του παραδείγματος.

Θεώρημα 2.3.1. *[3]* **Θεώρημα De Moivre-Laplace** *Έστω $X_1, X_2, \ldots,$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, και $S_n = \sum_{i=1}^{n}$ με $E(X_i) = 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Εάν $a < b$ καθώς επίσης και $n \to \infty$ τότε*

$$Pr(a \leq \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b) \to \int_a^b (2\,\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

όπου $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Παράδειγμα 2.3.3. *Έστω* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με για τις οποίες ισχύει οτι,*

$$Pr(X_i = -1) = Pr(X_i = 0) = Pr(X_i = 1) = \frac{1}{3}$$

και επιπλέον $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$. *Τότε η* $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ *συγκλίνει κατά κατανομή.*

Λύση

Πράγματι, παρατηρούμε οτι $\mu = E(X_i) = 0$. Επομένως, απο το προηγούμενο θεώρημα έχουμε οτι,

$$F_n(y) = Pr\left(\frac{S_n - n\mu}{\sqrt{n}} \leq y\right) = Pr\left(\frac{S_n - 0}{\sqrt{n}} \leq y\right) \to \int_{-\infty}^{y} (2\,\pi)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad (2.3.1).$$

Παράδειγμα 2.3.4. *Έστω τυχαία μεταβλητή* X *η οποία έχει μια κατανομή* $F(x)$. *Τότε η τυχαία μεταβλητή,*

$$X_n = X + \frac{1}{n^2}$$

συγκλίνει κατά κατανομή στην $F(x)$.

Λύση

Πράγματι,

$$F_n(x) = Pr(X_n \leq x) = Pr\left(X + \frac{1}{n^2} \leq x\right) = F\left(x - \frac{1}{n^2}\right).$$

Τότε,

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) \to F(x^-) = \lim_{z \to x^-} F(z)$$

για κάθε x στο οποίο η F είναι συνεχής.

2.4 Αντιπαραδείγματα

Σε αυτήν την ενότητα θα ανάφερουμε κάποια αντιπαραδείγματα. Πράγμα το οποίο σημαίνει θα δώσουμε κάποιες ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots,$, οι οποίες θα συγκλίνουν ασθενώς αλλά δεν θα συγκλίνουν ούτε κατά πιθανότητα ούτε κατά νόρμα ούτε σχεδόν βέβαια. Επιπλέον θα δώσουμε δυο αντιπαραδειγματα όπου στο πρώτο η ακολουθία θα συγκλίνει κατά νόρμα αλλά όχι σχεδόν βέβαια και στο δεύτερο το αντίστροφο. Τέλος θα δώσουμε ενα αντιπαράδειγμα, όπου η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών θα συγκλίνει κατά κατανομή αλλά όχι κατά πιθανότητα και ούτε σχεδόν βέβαια.

Αντιπαράδειγμα 2.4.1. *Έστω ακολουθία* $\{X_n\}$ *από τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ορίζονται απο την σχεση,*

$$X_n = \begin{cases} n, & \text{με πιθανότητα } \dfrac{1}{n} \\ \\ 0, & \text{με πιθανότητα } 1-\dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Η X_n *συγκλίνει ασθενώς σε μια τυχαία μεταβλητή* X *αλλα δεν συγκλίνει στην* X *κατά νόρμα.*

Απόδειξη Θα δείξουμε πρώτα οτι συγκλίνει ασθενώς. Πράγματι έστω $x \geq 0$,

$$F_n(x) = Pr(X_n \leq n) = 1 - \frac{1}{n}, \forall n > x.$$

Τώρα παίρνοντας το όριο έχουμε οτι,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1, \forall x \geq 0.$$

Άρα $X_n \xrightarrow{d} X$, όπου η X είναι μια τυχαία μεταβλητή με $Pr(X=0)=1$

Τώρα θα δείξουμε ότι η X_n δεν συγκλίνει κατά νορμα.

Πράγματι,

$$\begin{cases} E[X_n] = 0\left(1-\dfrac{1}{n}\right) + n\left(\dfrac{1}{n}\right) = 1 \\ \\ E[X] = E[0] = 0, \text{εφόσον η } X \text{ είναι εκφυλισμένη στο σημείο } x=0 \end{cases}$$

Οπότε,

$$E[|X_n - X|^p] = E[|1-0|^p] = 1 \neq 0$$

Λήμμα 2.4.1. *(Borel-Cantelli) Έστω* $A_1, A_2, \ldots$ *μια ακολουθία ενδεχομένων σε έναν χώρο πιθανότητας* (Ω, f, P) *τότε :*

$$\text{Εάν} \quad \sum_{i=1}^{\infty} Pr(A_n) < +\infty \quad \text{τότε} \quad Pr(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0 \tag{2.12}$$

όπου

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\lambda \geq n}^{\infty} A_\lambda.$$

Αντιπαράδειγμα 2.4.2. *Έστω ακολουθία* $\{X_n\}$ *από τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες ορίζονται από την σχέση*

$$X_n = \begin{cases} n^4, & \textit{με πιθανότητα } \dfrac{1}{n^3} \\ \\ 0, & \textit{με πιθανότητα } 1 - \dfrac{1}{n^3} \end{cases}$$

Τότε $X_n \xrightarrow{a.s} 0$ *αλλά δεν ισχύει ότι* $X_n \xrightarrow{Lp} 0$

Απόδειξη Ορίζουμε

$$A_n = \{X_n = n^4\}.$$

Οπότε έχουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{\infty} Pr(A_n) = \sum_{i=1}^{\infty} Pr\{(X_n = n^4)\} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} < +\infty$$

Το τελευταίο ισχύει απο τον απειροστικό λογισμό λόγω του ότι είναι μια $p-$σειρά με $p > 1$. Άρα λόγω του (2.12)

$$Pr(\limsup_{n\to\infty} A_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{\lambda \geq n}^{\infty} A_\lambda = 0.$$

Οπότε λόγω του λήμματος Borel-Cantelli

$$Pr(\lim_{n\to\infty} X_n = 0) = 1.$$

Επόμενως $X_n \xrightarrow{a.s} 0$.

Τώρα θα δείξουμε ότι η X_n δεν συγκλινει κατά νόρμα.

Πράγματι $\;\forall\; p > 0\;$ έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] = \lim_{n\to\infty} E[|X_n - 0|^p] = \lim_{n\to\infty} E[|X_n|^p] = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^4}{n^3}\right)^p = \infty \neq 0.$$

Άρα η X_n δεν συγκλίνει κατά νόρμα στην X.

Αντιπαράδειγμα 2.4.3. *Έστω ακολουθία* $\{X_n\}$ *από τυχαίες μεταβλητές οι οποίες ορίζονται απο την σχέση,*

$$X_n = \begin{cases} e^n, & \textit{με πιθανότητα } \dfrac{1}{n} \\ \\ 0, & \textit{με πιθανότητα } 1 - \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

Η X_n συγκλίνει κατά πιθανότητα στην $X = 0$ αλλά δεν συγκλίνει στην X κατά νόρμα.

Απόδειξη Θα δείξουμε πρώτα οτι συγκλίνει κατά πιθανότητα. Πράγματι $\forall \epsilon > 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} Pr[|X_n - X| < \epsilon] = \lim_{n\to\infty} Pr[|X_n - 0| < \epsilon] = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

ή ισοδύναμα

$$\lim_{n\to\infty} Pr[|X_n - X| \geq \epsilon] = \lim_{n\to\infty} Pr[|X_n - 0| \geq \epsilon] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Τώρα θα δείξουμε ότι η X_n δεν συγκλίνει κατά την νόρμα L_p.

Πράγματι $\forall\ p > 0$ έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} E[|X_n - X|^p] = \lim_{n\to\infty} E[|X_n - 0|^p] = \lim_{n\to\infty} e^{pn}\frac{1}{n} = \infty.$$

Άρα η X_n δεν συγκλίνει κατά νόρμα στην X.

Αντιπαράδειγμα 2.4.4. *[6] Έστω ο διακριτός χώρος πιθανότητας με δειγματικό χώρο Ω=$\{0, 1\}$ και μάζα πιθανοτητας $\frac{1}{2}$ για κάθε σημείο στο Ω. Έστω μια τυχαία μεταβλητή X και έστω επιπλέον η ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, \ldots$. Υποθέτουμε τα ακόλουθα:*

$$X_n(1) = 1, \quad \kappa\alpha\iota \quad X_n(0) = 0 \ \ \forall n = 1, 2, \ldots$$

και,

$$X(1) = 0, \quad \kappa\alpha\iota \quad X(0) = 1.$$

Η X_n συγκλίνει κατά κατανομή στην X αλλα δεν συγκλίνει στην X κατά πιθανότητα.

Απόδειξη [6] Θα δείξουμε πρώτα ότι η ακολουθία συγκλίνει κατά κατανομή. Πράγματι

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{αν } x < 0 \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{αν } x \geq 1, \end{cases}$$

ενώ η συνάρτηση κατανομής της X είναι

$$F(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{αν} \;\; x < 0 \\ \\ \dfrac{1}{2}, \quad \text{αν} \;\; 0 \leq x < 1 \\ \\ 1, \quad \text{αν} \;\; x \geq 1. \end{cases}$$

Οπότε παίρνοντας όριο έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x).$$

Άρα $X_n \xrightarrow{d} X$.

Τώρα για κάθε $\omega \in \Omega$ και για $\epsilon \in (0,1)^N$ έχουμε,

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n(\omega) - X(\omega)| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} Pr(|1-0| > \epsilon) = 1 \neq 0.$$

Άρα η X_n δεν συγκλίνει κατά πιθανότητα στην X.

Αντιπαράδειγμα 2.4.5. *Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Bernoulli $\left(\frac{1}{n}\right)$, δηλαδή :*

$$X_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \qquad \alpha\nu \;\; x = 1 \\ \\ 1 - \dfrac{1}{n}, \quad \alpha\nu \;\; x = 0. \end{cases}$$

Η X_n συγκλίνει κατά πιθανότητα σε μια τυχαία μεταβλητή X η οποία παίρνει την τιμή μηδέν με πιθανότητα ένα, αλλα δεν συγκλίνει στην X σχεδόν βεβαία.

Απόδειξη Έστω $\epsilon > 0$. Έχουμε οτι,

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - X| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} Pr(|X_n| > \epsilon) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Άρα $X_n \xrightarrow{p} X$.

Τώρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} Pr(B_m(\epsilon)) &= 1 - \lim_{N\to\infty} Pr[X_n = 0 \;\; \forall n \;\; \text{τέτοιο ώστε} \;\; m \leq n \leq N] \\ &= 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\ldots \end{aligned} \tag{2.13}$$

Τώρα παίρνοντας όριο στην σχέση (2.13) έχουμε ότι

$$\lim_{m\to\infty} Pr(B_m(\epsilon)) = \lim_{m\to\infty} 1 - \left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{1}{m+1}\right)\ldots = 1 \neq 0.$$

Άρα λόγω του Λήμματος 2.1.1 η X_n δεν συγκλίνει σχεδόν βέβαια στην X

2.5 Κεντρικό οριακό θεώρημα

Σε αυτή την παράγραφο θα κάνουμε αναφορά στον νόμο των μεγάλων αριθμών καθώς και στο κεντρικό οριακό θεώρημα. Επιπλέον θα γίνει μια διαισθητική προσέγγιση του κεντρικού οριακού θεωρήματος. Τελος θα γίνει και η απόδειξη του νόμου των μεγάλων αριθμών.

Θεώρημα 2.5.1. (Ασθενής νόμος των μεγάλων αριθμών) *Έστω $S_n = X_1 + X_2 +, \ldots, +X_n$ με $X_1, X_2, \ldots, X_n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με $E[X_i] = \mu < \infty \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n$. Τότε ισχύει το εξής :*

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) = 0 \quad \forall \epsilon > 0.$$

Απόδειξη

Έχουμε ότι,

$$Pr\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) \overset{(2.7)}{\leq} \frac{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\epsilon^2}, \tag{2.14}$$

Τώρα

$$Var\left(\frac{S_n}{n}\right) = Var\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var(X_i) = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{2.15}$$

Οπότε η σχέση (2.14) λόγω της (2.15) θα γίνει,

$$Pr\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) \overset{(2.7)}{\leq} \frac{Var\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\epsilon^2} = \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \cdot n}.$$

Παίρνοντας τώρα όριο έχουμε ,

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma^2}{\epsilon^2 \cdot n} = 0.$$

Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \epsilon\right) = 0 \quad \forall \epsilon > 0$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο.

Θεώρημα 2.5.2. (Κεντρικό οριακό θεώρημα) *Έστω* $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ *με* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με* $E[X_i] = \mu < \infty, Var[X_i] = \sigma^2 < \infty \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$. *Τότε :*

$$\lim_{n\to\infty} Pr\left(\frac{(S_n - E[S_n])}{\sqrt{Var[S_n]}} \le z\right) = \lim_{n\to\infty} Pr\left(\frac{(S_n - n\mu)}{\sqrt{\sigma^2 n}} \le z\right) = \Phi(z),$$

όπου Φ(z) είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 $(Z \sim N(0,1))$

Μια διαισθητική προσέγγιση του κεντρικού οριακού θεωρήματος είναι ότι για μεγάλα n η S_n ακολουθεί την κατανομή $N(n\mu, \sigma^2 n)$.Θεωρητικά αναφέρεται ότι για $n > 30$ τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα. Δηλαδή οποιαδήποτε κατανομή και να ακολουθούν οι τυχαίες μεταβλητές για ένα πλήθος παρατηρήσεων σχετικά μεγάλο, το άθροισμά τους ακολουθεί την κανονική κατανομή.

2.6 Θεώρημα Glivenko-Cantelli

Σε αυτή την παράγραφο θα ορισουμε την εμπειρική συνάρτηση κατανομής . Στην συνέχεια θα αναφέρουμε το θεωρημα $Glivenko - Cantelli$ καθώς επίσης και τις ιδιότητες του θεωρήματος.

Ορισμός 2.6.1. *(Εμπειρική συνάρτηση κατανομής) Έστω* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *ένα τυχαίο δείγμα από κατανομή* F. *Η εμπειρική συνάρτηση κατανομής του τυχαίου δείγματος ειναι η*

$$F_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^{n} I_{(-\infty,x]}(X_i)}{n}$$

Όπου

$$I_A(X_i) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu \;\; X_i \in A \\ \\ 0, & \alpha\nu \;\; X_i \notin A \end{cases}$$

για κάποιο σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$.

Θεώρημα 2.6.1. *(Θεώρημα Glivenko-Cantelli)[1] Έστω* $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ *ανέξαρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές .Τότε ισχύει ότι, με πιθανότητα ένα*

$$\lim_{n\to\infty} \|F_n - F\|_\infty = \lim_{n\to\infty} \sup |F_n(x) - F(x)| = 0$$

όπου $F_n(x)$ *είναι η εμπειρική συνάρτηση κατανομής*

Παρατήρηση 2.6.1. *Το θεώρημα των Glivenko-Cantelli μας λέει πως αν οι τυχαίες μεταβλητές* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *είναι ανεξάρτητες και ισόνομες με μια* $F(x)$ *τότε η εμπειρική κατάνομή τους* $F_n(x)$ *θα συγκλίνει ομοιόμορφα στην* $F(x)$. *Δηλαδή χωρίς κανέναν περιορισμό για τα σημεία ασυνέχειας* x *της* $F(x)$. *Με λίγα λόγια δεν μας αφορά καθόλου πού είναι συνεχής και πού ασυνεχής η* $F(x)$ *όπως στο Παράδειγμα 2.3.4.*

Κεφάλαιο 3

Ιδιότητες των τρόπων σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών

3.1 Τρόποι σύγκλισης τυχαίων μεταβλητών

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα παραθέσουμε μια σειρά απο θεωρήματα τα οποία αφορούν σχέσεις ανάμεσα στους διάφορους τρόπους σύγκλισης. Με πιο απλά λόγια θα δώσουμε σχέσεις και θα δούμε τι γίνεται όταν έχουμε δύο ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών και συγκλίνουν με κάποιο τρόπο τι κάνει ο γραμμικός συνδυασμός τους η το άθροισμά τους η το πηλίκο τους.

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω $\{X_n\}, \{Y_n\}$ δύο ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών τότε ισχύουν τα ακόλουθα [5]*

1. *Αν $X_n \xrightarrow{a.s} X$ και $Y_n \xrightarrow{a.s} Y$ τότε $X_n + Y_n \xrightarrow{a.s} X + Y$.*
2. *Αν $X_n \xrightarrow{p} X$ και $Y_n \xrightarrow{p} Y$ τότε $X_n + Y_n \xrightarrow{p} X + Y$.*
3. *Αν $X_n \xrightarrow{L_2} X$ και $Y_n \xrightarrow{L_2} Y$ τότε $X_n + Y_n \xrightarrow{L_2} X + Y$.*
4. *Αν $X_n \xrightarrow{d} X$ και $Y_n \xrightarrow{d} c$ τότε $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$.*

Απόδειξη[5] 1) Ορίζουμε τα εξής ενδεχόμενα :

$$A = \{\omega : X_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} X(\omega)\}\ ,\ B = \{\omega : Y_n(\omega) \xrightarrow{n\to\infty} Y(\omega)\}$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε οτι $Pr(A) = Pr(B) = 1$. Έστω $C = A \cap B$ εάν αποδείξουμε οτι $P(C) = 1$ θα δείξουμε και το ζητούμενο. Αρα

$$P(C^c) = P((A \cap B)^c) = P(A^c \cup B^c) \leq P(A^c) + P(B^c) \stackrel{P(A)=P(B)=1}{=} 0.$$

Οπότε απο τον νόμο του De Morgan έχουμε οτι

$$P(C) = 1 - P(C^c) = 1,$$

άρα $X_n + Y_n \xrightarrow{a.s} X + Y$ το οποίο είναι και το ζητούμενο.

2) Για να αποδείξουμε το ζητούμενο θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \epsilon) = 0$$

Επόμενως για να ισχύει ότι $|(X_n+Y_n)-(X+Y)| \geq \epsilon$ τότε θα πρέπει $|X_n - X| \geq \epsilon/2$ ή $|Y_n - Y| \geq \epsilon/2$. Από τριγωνική ανισότητα έχουμε ότι :

$$|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \leq |X_n - X| + |Y_n - Y|.$$

Επειδή $X_n \xrightarrow{p} X$ και $Y_n \xrightarrow{p} Y$ έχουμε οτι :

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|X_n - X| \geq \epsilon/2) = 0 \tag{3.1}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} Pr(|Y_n - Y| \geq \epsilon/2) = 0. \tag{3.2}$$

Τώρα έχουμε

$$\begin{aligned} Pr(|(X_n + Y_n) - (X + Y)| \geq \epsilon) &\leq Pr(\{|X_n - X| \geq \epsilon/2\} \cup |Y_n - Y| \geq \epsilon/2) \\ &\leq Pr(|X_n - X| \geq \epsilon/2) + Pr(|Y_n - Y| \geq \epsilon/2) \\ &\xrightarrow{n\to\infty} 0. \end{aligned}$$

Το τελευταίο βήμα ισχύει λόγω των σχέσεων (3.1) και (3.2)

3) Για να αποδείξουμε το ζητούμενο θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$\lim_{n\to\infty} E[|(X_n + Y_n) - (X + Y)|^2] = 0$$

Επομένως

$$\begin{aligned} E[|(X_n + Y_n) - (X + Y)|^2] &= E[((X_n + Y_n) - (X + Y))^2] \\ &= E[((X_n - X) + (Y_n - Y))^2] \\ &= E[(X_n - X)]^2 + E[(Y_n - Y)]^2 + 2E[(X_n - X)(Y_n - Y)]. \end{aligned}$$

Επειδή $X_n \xrightarrow{L_2} X$ και $Y_n \xrightarrow{L_2} Y$ έχουμε οτι :

$$\lim_{n\to\infty} E[(X_n - X)]^2 = 0 \tag{3.3}$$

και

$$\lim_{n\to\infty} E[(Y_n - Y)]^2 = 0. \tag{3.4}$$

Άρα μένει να δείξουμε ότι $2E[(X_n - X)(Y_n - Y)] \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Επομένως έχουμε ότι ,

$$E[(X_n - X)(Y_n - Y)] \overset{(2.1)}{\leq} \sqrt{E[(X_n - X)]^2 E[(Y_n - Y)]^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \tag{3.5}$$

Το τελευταίο βήμα ισχύει λόγω των σχέσεων (3.3) και (3.4). Άρα λόγω των σχέσεων (3.3),(3.4) και (3.5) έχουμε οτι:

$$\lim_{n\to\infty} E[|(X_n + Y_n) - (X + Y)|^2] = 0$$

το οποίο είναι και το ζητούμενο. Επομένως $X_n + Y_n \xrightarrow{L_2} X + Y$
4)Για να αποδείξουμε το ζητούμενο θα πρέπει να ισχύει ότι :

$$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = F(z),$$

Όπου $F_{Z_n}(z) = Pr(Z_n \leq z)$ και $F(z) = Pr(Z \leq z)$
Θέτοντας $Z_n = X_n + Y_n$ και $Z = X + c$. Οπότε για $Z = X + c$ έχουμε οτι :

$$F_Z(z) = Pr(Z \leq z) = Pr(X + c \leq z) = Pr(X \leq z - c) = F_X(z - c).$$

Οπότε για $Z_n = X_n + Y_n$ έχουμε οτι :

$$\begin{aligned} F_{Z_n}(z) &= Pr(X_n + Y_n \leq z, Y_n \geq c) + Pr(X_n + Y_n \leq z, Y_n < c) \\ &\leq Pr(X_n \leq z - c) + Pr(Y_n < c). \end{aligned}$$

Επειδή $Y_n \xrightarrow{d} c$ έχουμε ότι :

$$\lim_{n\to\infty} Pr(Y_n < c) = \lim_{n\to\infty} 1 - Pr(Y_n = c) = 0.$$

Επομένως

$$\limsup_{n\to\infty} Pr(X_n + Y_n \leq z) \leq F_X(z - c) = F_Z(z).$$

Από την άλλη μεριά έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} Pr(X_n + Y_n > z) &= Pr(X_n + Y_n > z, Y_n > c) + Pr(X_n + Y_n > z, Y_n \leq c) \\ &\leq Pr(Y_n > c) + Pr(X_n > z - c) \\ &= Pr(Y_n > c) + 1 - Pr(X_n \leq z - c) \end{aligned}$$

οπότε έχουμε

$$\liminf_{n\to\infty} Pr(X_n + Y_n \leq z) \geq F_X(z - c) = F_Z(z).$$

Οπότε τελικά έχουμε ότι :

$$F_Z(z) \leq \liminf_{n\to\infty} Pr(X_n + Y_n \leq z) \leq \limsup_{n\to\infty} Pr(X_n + Y_n \leq z) \leq F_Z(z).$$

το οποίο σημαίνει ότι $X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c$ πράγμα το οποίο είναι και το ζητούμενο. Οι πιο πάνω ανισότητες ισχύουν διότι αν έχουμε $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία ισχύει γενικά οτι :

$$inf x_n \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq \liminf_{n\to\infty} x_n \leq sup x_n.$$

Τα όρια ταυτίζονται μόνο όταν η ακολουθία $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει. $\square$

Το επόμενο θεώρημα αποτελεί όπως θα λέγαμε γενίκευση του προηγούμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *συνεχής συνάρτηση και* $\{X_n\}, \{Y_n\}$ *δύο ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών τότε ισχύουν τα ακόλουθα [5]*

1. *Αν* $X_n \xrightarrow{a.s} X$ *και* $Y_n \xrightarrow{a.s} Y$ *τότε* $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{a.s} f(X, Y)$.

2. *Αν* $X_n \xrightarrow{p} X$ *και* $Y_n \xrightarrow{p} Y$ *τότε* $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} f(X, Y)$.

3. *Αν* $X_n \xrightarrow{L_p} X$ *και* $Y_n \xrightarrow{L_p} Y$ *τότε* $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{L_p} f(X, Y)$.

4. *Αν* $X_n \xrightarrow{d} X$ *και* $Y_n \xrightarrow{d} c$ *τότε* $f(X_n, Y_n) \xrightarrow{p} f(X, c)$.

Με αφορμή το προηγούμενο Θεώρημα μπορούμε να διατυπώσουμε την ακόλουθη πρόταση η οποία αφορα τον γραμμικό συνδυασμό.

Πρόταση 3.1.1. *Έστω* $\{X_n\}, \{Y_n\}$ *δύο ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών οι οποίες έιναι ορισμένες στον ίδιο χώρο. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα [5]*

1. *Αν* $X_n \xrightarrow{a.s} X$ *και* $Y_n \xrightarrow{a.s} Y$ *τότε* $aX_n + bY_n \xrightarrow{a.s} aX + bY$.

2. *Αν* $X_n \xrightarrow{p} X$ *και* $Y_n \xrightarrow{p} Y$ *τότε* $aX_n + bY_n \xrightarrow{p} aX + bY$.

3. *Αν* $X_n \xrightarrow{a.s} X$ *και* $Y_n \xrightarrow{a.s} Y$ *τότε* $X_nY_n \xrightarrow{a.s} XY$.

4. *Αν* $X_n \xrightarrow{p} X$ *και* $Y_n \xrightarrow{p} c$ *τότε* $X_nY_n \xrightarrow{p} XY$.

5. *Αν* $X_n \xrightarrow{a.s} X$ *και* $Y_n \xrightarrow{a.s} c$ *τότε* $X_n/Y_n \xrightarrow{a.s} X/Y$.

6. *Αν* $X_n \xrightarrow{p} X$ *και* $Y_n \xrightarrow{p} c$ *τότε* $X_n/Y_n \xrightarrow{p} X/Y$.

Τα δύο τελευταία αποτελέσματα ισχύουν για $Y_n \neq 0$ *και* $Y \neq 0$.

Κεφάλαιο 4

Το συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων: Το κλασικό μοντέλο με και χωρίς διάχυση

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το άθροισμα τυχαίων μεταβλητών. $S_N = X_1 + X_2 + \ldots X_N$. Πράγμα το οποίο σημαίνει ότι θα χρειαστεί να μελετήσουμε ένα άθροισμα τυχαίου αριθμού τυχαίων μεταβλητών. Στην συνέχεια θα γενικεύσουμε για το τι συμβαίνει με το άθροισμα τριών τεσσάρων και περισσοτέρων τυχαίων μεταβλητών όταν η κάθε μια συγκλίνει σε μια τυχαία μεταβλητή με έναν συγκεκριμένο τρόπο. Πρώτα θα αναφερθούμε στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου (Collective Risk Model) καθώς επίσης και στις ιδιότητές του. Στην συνέχεια θα παραθέσουμε ένα θεώρημα για το άθροισμα δυο ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών όταν η καθεμιά συγκλίνει σε μια τυχαία μεταβλητή με έναν συγκεκριμένο τρόπο το όποιο θα μας απαντά εάν η κάθε μια από τις ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών συγκλίνει σε μια τυχαία μεταβλητή με έναν συγκεκριμένο, αλλά ίδιο τρόπο τι γίνεται με το άθροισμά τους.

4.1 Μοντέλο Συλλογικού Κινδύνου

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την περιγραφή του μοντέλου και την εφαρμογή του μοντέλου στην θεωρία κινδύνου.

Έστω

$$S = \begin{cases} X_1 + X_2 + \ldots + X_N, & \text{με} \quad N \geq 1 \\ \\ 0, & \text{με} \quad N = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

όπου,

- $X_i \geq 0 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$ η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μέγεθος των ατομικών ζημιών σε ένα χαρτοφυλάκιο ασφαλίσεων.
- $S \geq 0$ η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το μέγεθος των συνολικών ζημιών.
- $N \geq 0$ η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το πλήθος των ζημιών.
- $X_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$ ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, και ανεξάρτητες απο την τυχαία μεταβλητή N.

Πρόταση 4.1.1. *[11]*
Η μέση τιμή και η διακύμανση των συνολικών ζημιών(S) είναι

1. $E(S) = E(N)E(X)$.
2. $Var(S) = E(N)Var(X) + Var(N)E^2(X)$.

Ως πόρισμα της πρότασης, προκύπτει το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.1.1. *[11] Έστω ότι $N \sim Pois(\lambda)$ τότε ισχύει ότι.*

1. $E(S) = \lambda E(X)$.
2. $Var(S) = \lambda E(X^2)$.

Αποδειξή
Επειδή $N \sim Pois(\lambda)$ τότε

$$E(N) = \lambda$$

και

$$Var(N) = \lambda$$

οπότε λόγω της Πρότασης 4.1.1 έχουμε ότι

$$E(S) = \lambda E(X)$$

και

$$\begin{aligned} Var(S) &= \lambda Var(x) + \lambda E^2(X) \\ &= \lambda(Var(x) + E^2(X)) \\ &= \lambda(E(X^2) - E^2(X) + E^2(X)) = \lambda E(X^2). \end{aligned}$$

Γενικά όταν η $N \sim Pois(\lambda)$ λέμε ότι η S είναι μια σύνθετη Poisson κατανομή και συμβολικά γράφουμε ότι

$$S \sim CP(\lambda, f).$$

Ο πιο πάνω συμβολισμός προκείπτει από τα αρχικά των λέξεων Compound Poisson.

Ο βασικός μας στόχος εδώ είναι να βρούμε την κατανομή που ακολουθεί η τυχαία μεταβλητή που εκφράζει το το μέγεθος των συνολικών ζημιών γι αυτό τον λόγο θα δώσουμε δύο μεθόδους οι οποίες θα μας βοηθήσουν να μπορέσουμε να βρούμε την κατανομή των συνολικών ζημιών(S). Η πρώτη μέθοδος ονομάζεται βασική και γίνεται με την βοήθεια της συνέλιξης ενώ η δεύτερη γίνεται με την βοήθεια των γεννητριών συναρτήσεων. Η S μπορεί να είναι είτε μεικτή τυχαία μεταβλητή είτε συνεχής τυχαία μεταβλητή. Μεικτή τυχαία μεταβλητή ονομάζεται όταν η S έχει μάζα πιθανότητας στο μηδέν. Βασικό ρόλο στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου έχει η τυχαία μεταβλητή N που εκφράζει το πλήθος των ζημιών. Θέτουμε $G(x) = Pr(S \leq x)$ την κατανομή των συνολικών ζημιών, η $G(x)$ ονομάζεται σύνθετη κατανομή. Η τυχαία μεταβλητή N δίνει το όνομά της στην σύνθετη κατανομή, δηλαδή εαν η N ακολουθεί την γεωμτρική κατανομή τότε λέμε ότι η $G(x)$ είναι μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή, αν η N ακολουθεί την διωνυμική κατανομή τότε λέμε ότι η $G(x)$ είναι μια σύνθετη διωνυμική κατανομή και αν η N ακολουθεί την κατανομή Poisson τότε λέμε ότι η $G(x)$ είναι μια σύνθετη κατανομή Poisson. Στην συνέχεια αναφέρουμε δύο θεωρήματα τα οποία είναι σημαντικά για την εύρεση της $G(x)$.

Θεώρημα 4.1.2. *Για $x \geq 0$ ισχύουν τα ακόλουθα [11]*

1. $G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} Pr(N = n)F^{*n}(x)$.

2. $\overline{G}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Pr(N = n)\overline{F}^{*n}(x)$,

όπου $F^{*n}(x)$ είναι η $n-$οστή συνέλιξη την κατανομής των ατομικών ζημιών και $\overline{F}^{*n}(x)$ η δεξιά ουρά της $n-$οστής συνέλιξης των ατομικών ζημιών.

Στο πιο πάνω θεώρημα ανάφερεται η βασική μέθοδος η οποία πολλές φορές δεν είναι χρήσιμη για την επίλυση πολλών προβλημάτων, γι΄ αυτό το λόγο στην συνέχεια αναφέρουμε την μέθοδο με τις γεννήτριες συναρτήσεις η οποία είναι συνήθως πιο εύχρηστη. Πριν όμως το θεώρημα θα αναφέρουμε τον ορισμό του μετασχηματισμου Laplace, τον ορισμό της ροπογεννήτριας και της πιθανογεννήτριας.

Ορισμός 4.1.1. *[8] Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής X είναι η πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής t ,$M_X : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται από την σχέση*

$$M_X(t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} e^{tX} Pr(X = x), & X = \text{διακριτή} \\ \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} f(x)dx, & X = \text{συνεχής}. \end{cases}$$

Όπως φαίνεται απο τον πιο πάνω ορισμό η ροπογεννήτρια συνάρτηση δεν υπάρχει πάντα. Όλες οι κατανομές με βαριά ουρά δεν έχουν ροπογεννήτρια συνάρτηση.

Ορισμός 4.1.2. *[8] Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της διακριτής τυχαίας μεταβλητής X είναι η πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής t , $P_X : A \to \mathbb{R}$, όπου $A \subseteq \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται από την σχέση*

$$P_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^x Pr(X = x).$$

Ορισμός 4.1.3. *Έστω μια συνάρτηση $g(x)$ η οποία έχει πεδίο ορισμού το $(0, +\infty)$.Ο μετασχηματισμός Laplace της $g(x)$ είναι ο εξής :*

$$\hat{g}(r) = \int_0^{\infty} e^{-rx} g(x) dx.$$

Ένα άλλο πάρα πολύ σημαντικό εργαλείο για τον υπολογισμό διαφόρων ποσοτήτων της τυχαίας μεταβλητής S είναι οι γεννήτριες συναρτήσεις της, δηλαδή η ροπογεννήτρια συνάρτηση, η πιθανογεννήτρια συνάρτηση και ο μετασχηματισμός Laplace. Γι αυτό στην συνέχεια θα αναφέρουμε το ακόλουθο θεώρημα όπου με την βοήθεια των γεννήτριων συναρτήσεων πως μπορούμε να βρούμε την κατανομή της S όπου αυτό είναι εφικτό.

Θεώρημα 4.1.3. *[11] Ισχύουν τα ακόλουθα*

1. $M_S(t) = P_N[M_X(t)]$.
2. $P_S(t) = P_N[P_X(t)]$ *(στην περίπτωση που οι X_i είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές).*
3. $M_S(t) = M_N[lnM_X(t)]$.
4. $\hat{g}(r) = P_N[\hat{f}(r)]$.

όπου $\hat{g}(r)$ είναι μετασχηματισμός Laplace της $g(x)$(συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των συνολικών ζημιών), P_N είναι η η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της N,$\hat{f}(r)$ είναι μετασχηματισμός Laplace της $f(x)$(συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ατομικών ζημιών), P_X είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση των ατομικών ζημιών και $M_X(t)$ είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση των ατομικών ζημιών.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως οι κατανομές με βαριά ουρά δεν έχουν ροπογεννήτρια συνάρτηση δηλαδή η ροπογεννήτρια απειρίζεται σε όλο το θετικό ημιάξονα σε αντίθεση με τον μετασχηματισμό Laplace ο οποίος υπάρχει πάντα για όλες τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Γι' αυτό τον λόγο χρησιμοποιείται περισσότερο ο μετασχηματισμός Laplace για όλες τις περιπτώσεις

Στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου όμως το μειονέκτημα είναι ότι έχουμε εικόνα μόνο στο τέλος για το χαρτοφυλάκιο και όχι σε κάθε χρονική στιγμή. Έτσι δημιουργήθηκε η ανάγκη να φτιάξουμε το κλασικό μοντέλο στο οποίο έχουμε εικόνα κάθε χρονική στιγμή για το χαρτοφυλάκιο και πλέον η S δεν έχει μια σύνθετη κατανομή αλλά μια σύνθετη ανέλιξη. Γι΄ αυτό ακολουθούν οι επόμενες ενότητες.

4.2 Το κλασικό μοντέλο

Στην παρούσα ενότητα θα αναφέρουμε κάποιους εισαγωγικούς ορισμούς οι οποίοι είναι χρήσιμοι για τον ορισμό του κλασικού μοντελου. Στην συνέχεια θα ορίσουμε το κλασικό μοντέλο, θα επεξηγήσουμε ακριβώς τι ορίζει κάθε μεταβλητή και θα κάνουμε όλες τι υποθέσεις που ισχύουν στο μοντέλο μας και θα θέσουμε μια βασική προυπόθεση για την συνέχεια. Επιπλέον θα ορίσουμε όλες τις συναρτήσεις οι οποίες είναι απαραίτητες για τον ορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας.Τέλος θα ορίσουμε τον συντελεστή προσαρμογής και θα δώσουμε ένα φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας η οποία σε πολλές περιπτώσεις είναι αρκετά δύσκολο έως αδύνατο να υπολογιστεί αναλυτικά.
Πριν ξεκινήσουμε την αναφορά στο κλασικό μοντέλο θα δώσουμε κάποιους ορισμούς και κάποιους συμβολισμούς οι οποίοι είναι σημαντικοί για την συνέχεια.

4.2.1 Προαπαιτούμενα για το κλασικό μοντέλο

Πριν περάσουμε στο ορισμό του κλασικού μοντέλου , αναφέρουμε κάποιες βασικές έννοιες που θα μας χρειαστούν στην περιγραφή του.

Ορισμός 4.2.1. *Μια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ ονομάζεται* ***ανέλιξη Poisson*** *αν ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *$N(0) = 0$ με πιθανότητα ένα.*
2. $Pr(N(t+h) = n+\kappa | N(t) = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h), & \kappa = 1 \\ 1 - \lambda h + o(h), & \kappa = 0 \\ o(h), & \kappa \geq 2. \end{cases}$

   Εδώ το σύμβολο $o(h)$ δηλώνει ότι μια ποσότητα συγκλίνει πιο γρήγορα στο μηδέν από οτι το h καθώς το $h \to 0$.
3. *Για κάθε $t < s$ η τυχαία μεταβλητή $N(s) - N(t)$ είναι ανεξάρτητη της τυχαίας μεταβλητής $N(t)$.*

Ορισμός 4.2.2. *Μια εξίσωση ονομάζεται εξίσωση ανανεωτικής μορφής αν έχει την ακόλουθη μορφή*

$$Z(t) = g(t) + \phi \int_0^t Z(t-x)dF(x), \tag{4.2}$$

όπου

- *Το ϕ είναι μια σταθερά τέτοια ώστε $0 < \phi \leq 1$.*
- *Η g είναι μια φραγμένη συνάρτηση.*
- *Η F είναι μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής.*
- *η Z είναι μια άγνωστη συνάρτηση.*

Ορισμός 4.2.3. *Μια ανέλιξη Poisson ορίζει μια ακολουθία απο τυχαίες μεταβλητές $Y_1, Y_2, \ldots,$. Η ακολουθία $Y_1, Y_2, \ldots,$ ονομάζεται ακολουθία χρόνων άφιξης και ορίζεται ως έξης :*

$$Y_1 = min\{t : N(t) = 1\}.$$
$$Y_2 = min\{t : N(t) = 2\}.$$
$$\ldots$$
$$Y_k = min\{t : N(t) = k\}.$$

Από τον ορισμό βλέπουμε ότι η τυχαία μεταβλητή Y_k αντιπροσωπεύει το χρόνο εμφάνισης του $k-$ γεγονότος στην ανέλιξη.

Ορισμός 4.2.4. *Με βάση τον προηγούμενο ορισμό μπορούμε να ορίσουμε την ακολουθία $\{T_k : k = 1, 2, 3, \ldots\}$*

$$T_1 = Y_1.$$
$$T_2 = Y_2 - Y_1.$$
$$T_3 = Y_3 - Y_2.$$
$$\ldots$$
$$T_k = Y_k - Y_{k-1}.$$

Παρατήρηση 4.2.1. *Πολύ σημαντικό είναι να αναφέρουμε ότι Y_i, T_i είναι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές ενώ η $N(t)$ είναι διακριτή τυχαία μεταβλητή. Επίσης οι $T_1, T_2, \ldots$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ενώ οι $Y_1, Y_2, \ldots$ δεν είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.*

Οι μεταβλητές T_k ονομάζονται ενδιάμεσοι χρόνοι.

4.2.2 Εισαγωγή στο κλασικό μοντέλο

Στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου η τυχαία μεταβλητή $S \geq 0$ που εκφράζει το μέγεθος των συνολικών ζημιών λέμε οτι ακολουθεί μια σύνθετη κατανομή και η τυχαία μεταβλητή $S \geq 0$ ονομάζεται σύνθετη τυχαία μεταβλητή. Το βασικό πρόβλημα εδώ είναι ότι για το συνολικό χαρτοφυλάκιο έχουμε εικόνα μόνο στο τέλος της χρονική περιόδου και όχι σε κάθε χρονικής στιγμή. Γι΄ αυτό τον λόγο δημιουργήσαμε την σύνθετη στοχαστική ανέλιξη. Δηλαδή με πιο απλά λόγια η τυχαία μεταβλητή N η οποία εκφράζει το πλήθος των ζημιών στο συλλογικό μοντέλο αντικαθίσταται από μια στοχαστική ανέλιξη $\{N(t) : t \geq 0\}$ η οποία καταγράφει τις απαιτήσεις στο χρόνο. Άρα η σύνθετη τυχαία μεταβλητή $S \geq 0$ αντικαθίσταται απο μια σύνθετη στοχαστική ανέλιξη $\{S(t) : t \geq 0\}$, όπου για $t \geq 0$

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & \text{αν} \;\; N(t) \geq 1 \\ \\ 0, & \text{αν} \;\; N(t) = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Στις περισσότερες περιπτώσεις η $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη Poisson, οπότε η $\{S(t) : t \geq 0\}$ είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson.
Έχοντας ορίσει τον αριθμό των αποζημιώσεων, το αμέσως επόμενο βήμα είναι να ορίσουμε το πλεόνασμα. Το πλεόνασμα μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή είναι η διαφορά μεταξύ των εσόδων και των εξόδων αφού ληφθεί υπόψη το αρχικό αποθεματικό. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος περιγράφει την εξέλιξη των τιμών του πλεονάσματος στην πορεία του χρόνου. Το ύψος του πλεονάσματος, για δεδομένη χρονική στιγμή, εξαρτάται από το αρχικό αποθεματικό έστω u, το ποσό των ασφαλίστρων που έχουν εισπραχτεί μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή και το ποσό των αποζημιώσεων που έχουν καταβληθεί μέχρι εκείνη την χρονική στιγμή. Οπότε με βάση όλα τα προηγούμενα είμαστε σε θέση να ορίσουμε το πλεόνασμα της εταιρίας για δεδομένη χρονική στιγμή. Με βάση όλα αυτά που αναφέραμε πιο πάνω είμαστε σε θεση να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.2.5. *Έστω $t \geq 0$. Τότε το πλεόνασμα της εταιρίας την χρονική στιγμή t συμβολίζεται με $U(t)$ και δίνεται από την ακόλουθη σχέση*

$$U(t) = u + P(t) - S(t), \quad t \geq 0 \tag{4.4}$$

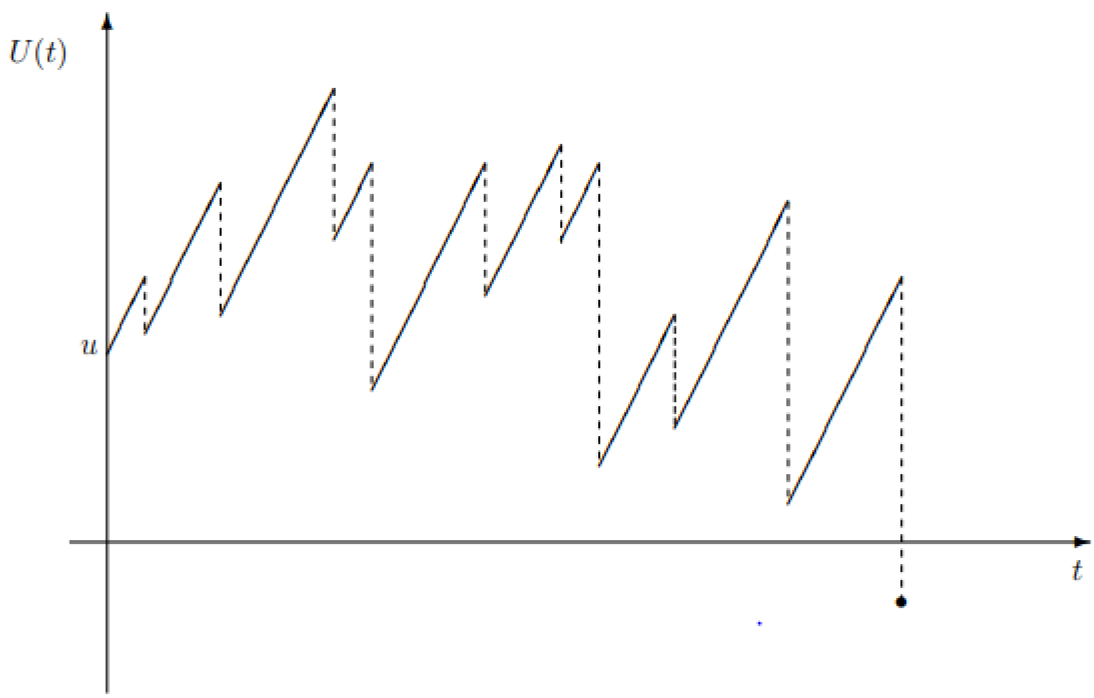
με u το αρχικό αποθεματικό, $P(t)$ το ποσό των ασφαλίστρων που έχουν εισπραχθεί μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή t και $S(t)$ η σύνθετη στοχαστική ανέλιξη για το ποσό των αποζημιώσεων που έχουν καταβληθεί μέχρι εκείνη την χρονική στιγμή. Η στοχαστική ανέλιξη $\{U(t) : t \geq 0\}$ ονομάζεται ανέλιξη του πλεονάσματος. Αν ισχύουν τα ακόλουθα

- *$P(t) = ct$ για κάποιο $c > 0$, δηλαδή η $P(t)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση του t.*

- *Οι τυχαίες μεταβλητές X_i που δηλώνουν το μέγεθος των ατομικών ζημιών όπως και στο μοντέλο συλλογικού κινδύνου είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και επιπλέον είναι και ανέξαρτητες με τον αριθμό των ζημιών.*

- *Η $\{N(t) : t \geq 0\}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη Poisson,*

τότε μιλάμε για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, το οποίο μελετήθηκε για πρώτη φορά απο τον Lundberg στις αρχές του εικοστού αιώνα.



Σχήμα 4.1: Ανέλιξη πλεονάσματος, [10]

.

4.2.3 Βασική προϋπόθεση στο κλασικό μοντέλο

Για να φτάσουμε στην βασική προϋπόθεση για το κλασικό μοντέλο θα πρέπει να αναφέρουμε και να εξηγήσουμε κάποιους συμβολισμούς που θα εμφανιστούν στην συνέχεια.

- $F(x)$ συνάρτηση κατανομής των ατομικών ζημιών.

- $f(x)$ συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των ατομικών ζημιών.

- λ η ένταση της ανέλιξης Poisson.

- μ η μέση τιμή των ατομικών ζημιών.

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως $P(t) = ct$ οπότε $c = \frac{P(t)}{t}$ δηλαδή το c εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής του συνολικού ποσού των ασφαλίστρων για τον λόγο αυτό ονομάζεται ένταση ασφαλίστρου.
Φτάνοντας λοιπον στο ζητούμενο το οποίο είναι και ο τίτλος της παραγράφου, η βασική προυπόθεση στο κλασικό μοντέλο είναι

$$c > \lambda\mu. \tag{4.5}$$

Αν προσπαθήσουμε να εξηγήσουμε με λόγια την πιο πάνω ανισότητα θα δούμε ότι στο αριστερό μέλος της βρίσκεται όπως αναφέραμε πιο πάνω ο ρυθμός μεταβολής του συνολικού ποσού των ασφαλίστρων δηλαδή με άλλα λόγια ο ρυθμός μεταβολής των εσόδων. Από την άλλη μεριά στο δεξιό μέλος της ανισότητας εμφανίζεται η μέση αποζημίωση πολλαπλασιασμένη με τον μέσο ρυθμό μεταβολής των αποζημιώσεων. Άρα είναι ισοδύναμο να πούμε οτι στο δεξιό μέλος έχουμε τα αναμενόμενα έξοδα ενώ στο αριστερό τα έσοδα. Γι΄ αυτό η ανισότητα ονομάζεται συνθήκη καθαρού κέρδους. Σε οτιδήποτε αναφέρουμε θα θεωρούμε πάντα οτι ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους.

4.2.4 Η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ και το περιθώριο ασφαλείας θ στο κλασικό μόντελο

Ο βασικός μας στόχος είναι να προσπαθήσουμε και να δούμε κατά πόσο θα είναι ασφαλές ή όχι το χαρτοφυλάκιό μας. Αυτό θα γίνει αν μπορέσουμε να αποφανθούμε κατά πόσο είναι εύκολο ή όχι να συμβεί χρεοκοπία δηλαδή το πλεόνασμα $U(t)$ να γίνει κάποια χρονική στιγμή αρνητικό. Γι αυτό λοιπόν η ποσότητα με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι η πιθανότητα χρεοκοπιας.

Ορισμός 4.2.6. *Η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u ορίζεται ως εξής*

$$\psi(u) = Pr[U(t) \leq 0, \quad \textit{για κάποιο} \;\; t \geq 0 | U(0) = u].$$

Ένα πρώτο αποτέλεσμα από τον πιο πάνω ορισμό είναι ότι εάν δεν ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους τότε η $\psi(u) = 1$ δηλαδή η χρεοκοπία είναι βέβαιη. Αυτό είναι και ένα αποτέλεσμα λογικό δηλαδή εάν τα έξοδα είναι περισσότερα απο τα έσοδα τότε η χρεκοπία είναι βέβαιη ακόμα και εάν το αρχικό αποθεματικό είναι τεράστιο. Επίσης η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μια φθίνουσα συνάρτηση ως προς u δηλαδή

$$\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0.$$

Ένα άλλο πολύ ενδιαφερόν ερώτημα είναι στην περίπτωση στην οποία έχουμε κέρδος πώς θα δούμε πόσο είναι μεγαλύτερα τα έσοδα απο τα έξοδα κατά μέσο όρο. Γι΄ αυτό λοιπόν ορίζουμε το περιθώριο ασφάλειας θ, το οποίο εκφράζει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους για την ασφαλιστική εταιρεία.

Ορισμός 4.2.7. *Το περιθώριο ασφάλειας θ ορίζεται από την σχέση*

$$\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1. \tag{4.6}$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας όπως την ορίσαμε πιο πάνω αναφέρεται σε συνεχή και άπειρο χρόνο. Μεγαλύτερο ενδιαφέρον θα είχε να την ορίσουμε σε πεπερασμένο χρόνο. Αύτο είναι ένα πιο πραγματικό αλλά δυσκολότερο σενάριο από το προηγούμενο. Γι αυτό ορίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο ως εξής

$$\psi(u,t) = Pr[U(\tau) < 0, \ \ \text{για κάποιο} \ \ 0 \leq \tau \leq t].$$

Η $\psi(u,t)$ σαν συνάρτηση του t είναι αύξουσα ενώ σαν συνάρτηση του u είναι φθίνουσα. Για πεσισσότερες λεπτομέρειες βλέπε [10].

4.2.5 Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u)$ στο κλασικό μοντέλο

Όπως η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι μια ενδιάφερουσα ποσότητα για το κλασικό μοντέλο έτσι είναι σημαντικό να οριστεί και η πιθανότητα μη χρεοκοπίας. Έστω $\delta(u)$ η πιθανότητα μη χρεοκοπίας, τότε η σχέση που συνδέει όπως είναι λογικό την πιθανότητα χρεοκοπίας και μη χρεοκοπίας είναι $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ και αυτό συμβαίνει διότι ή θα χρεοκοπήσει ένα χαρτοφυλάκιο ή δεν θα χρεοκοπήσει. Επιπλέον είναι σημαντικό γιατί πολλές φορές μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα μη χρεοκοπίας και μετά μέσω της σχέσης που την συνδέει να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας. Έτσι για $u \geq 0$ έχουμε

$$\delta(u) = 1 - \psi(u),$$

όπου $\delta(u)$ είναι η πιθανότητα να μην υπάρξει χρεοκοπία με αρχικό αποθεματικό u. Η $\delta(u)$ είναι μια μεικτή κατανομή διότι στο μηδέν έχει μάζα πιθανότητας. Αυτό συμβαίνει διότι για αρχικό αποθεματικό μηδέν η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι διάφορη του μηδένος. Οπότε $\delta(0) > 0$ ενώ στο υπόλοιπο διάστημα η $\delta(u)$ είναι συνεχής. Γι αυτό τον λόγο είναι μεικτή κατανομή. Για όλους τους λόγους που αναφέρθηκαν πιο πάνω αλλά και εξ΄ορισμού η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι μια αύξουσα συνάρτηση ως προς u οπότε θα έχουμε

$$\lim_{u \to \infty} \delta(u) = 1,$$

κάτι το οποίο θα λέγαμε είναι φυσικό αποτέλεσμα διότι όσο μεγαλύτερο είναι το απόθεμα τόσο μεγαλύτερη είναι και η πιθανότητα μη χρεοκοπίας.
Μια σχέση για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας προκύπτει απο την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2.1. *[10] Στο κλασικό μοντέλο η πιθανότητα μη χρεοκοπίας δίνεται από την σχέση*

$$\delta'(u) = \frac{\lambda}{c}\delta(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x) f(x) dx. \tag{4.7}$$

Η πιο πάνω έκφραση είναι μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση για την συνάρτηση μη χρεοκοπίας.

Στην συνέχεια αναφέρουμε μια ακόμη πρόταση η οποία θα μας βοηθήσει να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό μηδέν.

Πρόταση 4.2.2. *Στο κλασικό μοντέλο η πιθανότητα μη χρεοκοπίας δίνεται από την σχέση*

$$\delta(u) = \delta(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)[1-F(x)]dx, \tag{4.8}$$

όπου $F(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής των ατομικών ζημιών.

Τώρα παίρνοντας όρια στην σχεση (4.8) έχουμε ότι

$$\lim_{u\to\infty} \delta(u) = 1$$

επίσης

$$\lim_{u\to\infty} \delta(u-x) = 1$$

και

$$\lim_{u\to\infty} \int_0^u [1-F(x)]dx = \mu$$

όπου μ είναι η μέση τιμή των ατομικών ζημιών. Τώρα αλλάζοντας την σειρά ορίου και ολοκληρώματος κάτι το οποίο επιτρέπεται εδώ,στην (4.8) έχουμε

$$\begin{aligned} 1 =& \delta(0) + \frac{\lambda\mu}{c} \iff \\ \iff \delta(0) =& 1 - \frac{\lambda\mu}{c}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Τώρα απο την σχέση (4.6) έχουμε ότι

$$1+\theta = \frac{c}{\lambda\mu}.$$

Οπότε η πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό μηδεν $\delta(0)$ είναι

$$\delta(0) = 1 - \frac{1}{1+\theta} = \frac{\theta}{1+\theta}. \tag{4.10}$$

Συνεπώς

$$\psi(0) = 1-\delta(0) = 1 - \left(1 - \frac{1}{1+\theta}\right) = \frac{1}{1+\theta}. \tag{4.11}$$

Οπότε η σχέση (4.8) λόγω της (4.9) γίνεται

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \delta(u-x)[1-F(x)]dx. \tag{4.12}$$

Τώρα ορίζουμε μια συνάρτηση κατανομής, έστω $H(x)$, για την οποία ισχύει ότι

$$H(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x [1 - F(y)]dy$$

Οπότε η (4.12) γίνεται με την βοήθεια της $H(x)$ γίνεται για $u \geq 0$

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} + \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^u \delta(u-x)h(x)dx, \tag{4.13}$$

όπου $h(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $H(x)$. Η (4.13) είναι μια ανανεωτική εξίσωση, σύμφωνα με τον Ορισμό 4.2.2.
Μπορούμε επίσης να βρούμε μια ανανεωτική εξίσωση για την πιθανότητα χρεοκοπίας

$$\psi(u) = 1 - \delta(u) \stackrel{(4.13)}{=} \frac{\lambda\mu}{c} - \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^u \delta(u-x)h(x)dx. \tag{4.14}$$

Αντικαθιστώντας $\delta(u-x) = 1 - \psi(u-x)$ και μετά από πράξεις προκύπτει ότι

$$\psi(u) = \frac{\lambda\mu}{c}[1 - H(x)] + \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^u \psi(u-x)h(x)dx. \tag{4.15}$$

4.2.6 Ο συντελεστής προσαρμογής και οι ασυμπτωματικές σχέσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ στο κλασικό μοντέλο

Ο συντελεστής προσαρμογής είναι ένα πολύ ενδιαφέρον και με τεράστια σημασία μέγεθος στο κλασικό μοντέλο. Όπως ανάφεραμε και προηγουμένως, στις περισσότερες των περιπτώσεων είναι πολύ δύσκολο να βρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας εκτός απο κάποιες μεμωνομένες περιπτώσεις που γνωρίζουμε την κατανομή που ακολουθούν οι ατομικές αποζημιώσεις. Στα μαθηματικά γενικότερα σε πολλές περιπτώσεις είναι πάρα πολύ δύσκολο να βρούμε ακριβώς κάποιες συγκεκριμένες ποσότητες οι οποίες είναι πόλυ σημαντικές για την εξαγωγή διαφόρων συμπεράσματων, για τον λόγο αυτό όταν είναι αδύνατο να βρούμε κάτι ακριβώς, είτε προσπαθούμε να βρούμε ενα άνω φράγμα είτε μια προσέγγιση για τη συνάρτηση που ψάχνουμε. Ο συντελεστής προσαρμογής είναι μια ποσότητα η οποία θα μας βοηθήσει να ορίσουμε ένα άνω φράγμα και μια προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Γι΄ αυτό δίνουμε τον παρακάτω ορισμό του συντελεστή προσαρμογής.

Ορισμός 4.2.8. *Ο συντελεστής προσαρμογής R είναι η μικρότερη θετική λύση της εξίσωσης*

$$-\frac{1}{R} + \frac{1}{R}M(R) = \frac{c}{\lambda} \tag{4.16}$$

όπου $M(r)$ είναι η ροπογεννήτρια των ατομικών αποζημιώσεων δηλαδή

$$M(r) = \int_0^{+\infty} e^{rx} f(x) dx.$$

Επίσης αν χρησιμοποιήσουμε την σχέση για το περιθώριο ασφαλείας θ δηλαδή $\theta = \frac{c}{\lambda\mu} - 1$ προκύπτει το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.2.1. *Μια ισοδύναμη εξίσωση με την* (4.16) *για το συντελεστή προσαρμογής είναι*

$$M(R) = (1+\theta)\mu R + 1. \tag{4.17}$$

Οι πιο πάνω σχέσεις είναι ενα αποτέλεσμα που προκύπτει απο την εξίσωση του Lundberg

$$\int_0^{\infty} e^{Rx} h(x) dx = \frac{c}{\lambda\mu} = 1 + \theta$$

[10]

Λόγω αυτών που αναφέραμε και παραπάνω ο συντελεστής προσαρμογής είναι ιδιαίτερα σημαντικός και για τους δύο λόγους οι οποίοι ακολουθούν δηλαδή μας δίνει τα ακόλουθα ενδιαφέροντα αποτελέσματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$

1. η ανισότητα Lundberg για κάθε $u \geq 0$

$$\psi(u) \leq e^{-Rx}.$$

2. Ο ασυμπτωματικός τύπος

$$\psi(u) \sim Ce^{-Rx} \quad \text{όταν} \quad u \to \infty,$$

   το οποίο σημαίνει ότι για $C > 0$

$$\lim_{u \to \infty} \frac{\psi(u)}{Ce^{-Rx}} = 1.$$

Οι δύο πιο πάνω σχέσεις είναι πολύ σημαντικές για το κλασικό μοντέλο διότι μας βοηθούν όταν δεν έχουμε κανέναν τρόπο να βρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας να έχουμε μια εικόνα για το πού περίπου κυμαίνεται.

4.2.7 Τα κλιμακωτά ύψη και η μέγιστη σωρευτική απώλεια στο κλασικό μοντέλο

Μια σημαντική ποσότητα στο κλασικό μοντέλο είναι τα κλιμακωτά ύψη. Αυτό συμβαίνει διότι θα διαπιστώσουμε ότι μια μεταβλητή που θα παρουσίαζε τεράστιο ενδιαφέρον είναι το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από αρχικό αποθεματικό u. Αυτή η τυχαία μεταβλητή συμβολίζεται με L_1. Η τιμή που παίρνει η τυχαία μεταβλητή L_1 είναι $L_1 = u - u_1$ όπου u είναι το αρχικό αποθεματικό και u_1 είναι το νέο απόθεμα μετά την πρώτη πτώση απο το αρχικό αποθεματικό u. Αντίστοιχα με την L_1 μπορούμε να ορίσουμε και την L_2,L_3 και επαγωγικά να συνεχίσουμε. Ένα εύλογο ερώτημα εδώ είναι το πλήθος των $L_1, L_2, L_3, \dots$ δηλαδή αν μπορούν να είναι άπειρα στο πλήθος. Η απάντηση είναι αρνητική και είναι απόρροια της συνθήκης καθαρού κέρδους. Η συνθήκη αυτή μας εξασφαλίζει και την ανεξαρτησία ανάμεσα στα κλιμακωτά ύψη. Αφού εξασφαλίσουμε την ανεξαρτησία και το πεπερασμένο πλήθος έχει ενδιαφέρον να ορίσουμε το πλήθος των κλιμακωτών υψών. Είναι προφανές ότι το πλήθος είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή εφόσον παίρνει ακέραιες και μη αρνητικές τιμές. Επίσης επειδή ψάχνουμε να βρούμε το πρώτο κλιμακωτό ύψος δηλαδή πότε θα πέσουμε κάτω από συγκεκριμένο αποθεματικό u, η τυχαία μεταβλητή έστω Κ που μετρά το πλήθος των κλιμακωτών υψών ακολουθεί μια γεωμετρική κατανομή. Δηλαδή η τυχαία μεταβλητή Κ μετρά το πλήθος των αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία. Συνεπώς για την Κ ισχύει ότι

$$Pr(K = k) = p(1-p)^k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Δηλαδή κάθε φορά που προκύπτει ένα νέο L_i η πιθανότητα να εμφανιστεί και νέο δηλαδη L_{i+1} είναι ίση με $\psi(0)$. Οπότε αν ορίσουμε με πιθανότητα αποτυχίας την εμφάνιση νέου L_i τότε θα έχουμε ότι

$$p = \delta(0), 1 - p = \psi(0).$$

Εφόσον δείξαμε ότι $\psi(0) = \frac{1}{1+\theta}$ και $\delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$, θα έχουμε

$$Pr(K = k) = \delta(0)[\psi(0)]^k, \qquad k = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Αφού ορίσαμε την τυχαία μεταβλητή που μετρά το πλήθος των L_i τώρα είμαστε σε θέση να ορίσουμε το εξής:
Στο κλασικό μοντέλο θεωρούμε την σύνθετη τυχαία μεταβλητή

$$L = \begin{cases} L_1 + L_2 + L_3 + \ldots + L_K, & \text{όταν} \quad K \geq 1 \\ \\ 0, \quad \text{όταν} \quad K = 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Το L παριστά την συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u.Το L ονομάζεται μέγιστη σωρευτική απώλεια.
Η κατανομή του L είναι μια μεικτή κατανομή, δηλαδή στο μηδέν έχει μάζα πιθανότητας ενώ στο $(0, \infty)$ είναι συνεχής. Οπότε η κατανομή του L είναι μια σύνθετη γεωμετρική κατανομή εφόσον η K ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή.
Η τυχαία μεταβλητή L είναι μια σημαντική ποσότητα για το κλασικό μοντέλο διότι συνδέεται άμεσα με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Παρατηρούμε οτι

$$Pr(L = 0) = Pr(K = 0) = \delta(0).$$

Τώρα η ποσότητα $Pr(L > u)$ εκφράζει την πιθανότητα η μέγιστη συσσωρευτική απώλεια να υπερβαίνει το αρχικό αποθεματικό u, αυτό όμως είναι ίδιο με την πιθανότητα χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u. Οπότε ισχύει ότι

$$Pr(L > u) = \psi(u),$$

επίσης λόγω του ότι $\delta(u) = 1 - \psi(u)$ έχουμε

$$Pr(L \leq u) = \delta(u).$$

4.3 Η κίνηση Wiener

Η κίνηση Wiener είναι μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου η οποία πήρε το ονομά της απο τον Norbert Wiener. Έχει τεράστια εφαρμογή στα μαθηματικά και ειδικά στον κλάδο του αναλογισμού, στα οικονομικά όπως επίσης στην χημεία και στην φυσική. Στην περίπτωσή μας αναφέρεται διότι προσθέτει στην στοχαστική διαδικασία του πλεονάσματος έναν επιπλέον παράγοντα αβεβαιότητας (διάχυση). Στην πραγματικότητα θεωρούμε ότι το κλασικό μοντέλο διαταράσσεται από έναν επιπλέον όρο διάχυσης. Στην συνέχεια δίνουμε τον ορισμό της κίνησης Wiener.

Ορισμός 4.3.1. *[1] Μια στοχαστική διαδικασία $\{W(t) : t \geq 0\}$ ονομάζεται Wiener αν ισχύουν τα ακόλουθα*

1. $W(0) = 0$.
2. *$W(t)$ είναι σχεδόν παντού συνεχής.*
3. $W(t_2) - W(t_1) \sim N(0, t_2 - t_1) \quad \forall \quad 0 \leq t_1 \leq t_2$.
4. *Εάν $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$ τότε $W(t_1) - W(t_2)$ και $W(t_3) - W(t_4)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Δηλάδή η $W(t)$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*

Το σημαντικό πλεονέκτημα που μας προσφέρει αυτός ο επιπλέον παράγοντας αβεβαιότητας είναι ότι το μοντέλο πλέον γίνεται πιο ρεαλιστικό. Αυτό συμβαίνει διότι πλέον η χρεοκοπία μπορεί να προκύψει όχι μόνο απο απαιτήσεις όπως θεωρούσαμε στο κλασικό μοντέλο αλλά και απο μη καταβολή των ασφαλίστρων στον κατάλληλο χρόνο συμφωνίας. Δηλαδή με πιο απλά λόγια το μοντέλο ανταποκρίνεται στις πραγματικές ανάγκες που προκύπτουν βέβαια από τις πραγματικές συνθήκες.
Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι η κίνηση Wiener προκύπτει ως όριο τυχαίου περιπάτου. Με την έννοια της ασθενούς σύγκλισης όπως ορίστηκε στο κεφάλαιο 2 η $S(t)$ συγκλίνει ασθενώς στην $W(t)$(κίνηση Wiener). Δηλαδή έχουμε ότι

$$S(t) \xrightarrow{d} W(t).$$

Με βάση τον προηγούμενο ορισμό είμαστε σε θέση να ορίσουμε πλέον (κάτι το οποίο χρησιμοποιείται στην συνέχεια) την κίνηση Wiener με μετατόπιση (drift). Έτσι λοιπόν ορίζουμε την ακόλουθη στοχαστική διαδικασία X_t

$$X_t = \mu t + \sqrt{D} W_t, \tag{4.19}$$

η οποία καλείται στοχαστική διαδικασία (ή κίνηση) Wiener με μετατόπιση μ και απειροελάχιστη διακύμαση D.

Ορισμός 4.3.2. *[4] Ορίζουμε ως τυπική στοχαστική διαδικασία Wiener $\{W(t) : t \geq 0\}$ να είναι η διαδικασία με σταθερές και στάσιμες προσαυξήσεις τετοία ώστε $W(1)$ να είναι κανονικά κατανεμημένη με $E[W(1)] = 0$ και $Var[W(1)] = 1$*

4.4 Το κλασικό μοντέλο με διάχυση

Το κλασικό μοντέλο συλλογικού κινδύνου μπορεί να επεκταθεί και να γίνει μια στοχαστική διασικασία πλεονάσματος στην οποία η χρεοκοπία μπορεί να συμβεί από αποζημιώσεις αλλά και απο διάχυση. Στην συνέχεια θα παρουσιάσουμε ότι αυτό συνεπάγεται πως προκύπτουν δύο πιθανότητες χρεοκοπίας (από διάχυση και από αποζημιώσεις) οι οποίες ικανοποιούν ελαττωματικές ανανεωτικές εξισώσεις. Επιπλέον θα παρουσιάσουμε έναν τρόπο υπολογισμού της πιθανότητας μη-χρεοκοπίας η οποία προκύπτει από μια ολοκληροδιαφορική εξίσωση και η λύση της τελικά είναι με την βοήθεια της συνέλιξης.Τέλος θα δείξουμε πως αν το ύψος των ατομικών ζημιών ακολουθεί την εκθετική κατανομή τότε υπάρχει ο τρόπος αναλυτικού υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας.

4.4.1 Διαφορές με το κλασικό μοντέλο

Γνωρίζουμε ότι στο κλασικό μοντέλο, το πλεόνασμα μια δεδομένη χρονική στιγμή t δίνεται από την έκφραση :

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0. \tag{4.20}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$c > \lambda\mu \quad \text{(συνθήκη καθαρού κέρδους)}$$

δηλαδή τα έσοδα είναι μεγαλύτερα απο τα αναμενόμενα έξοδα
Επίσης στην συνέχεια ορίζουμε το συντελεστή ασφάλειας έστω q (το οποίο είναι η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό μηδέν όπως την ορίσαμε στο κλασικό μοντέλο)

$$q = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}, \tag{4.21}$$

το q ειναι ανάμεσα απο 0 και 1.
Τώρα θα επεκτείνουμε το κλασικό μοντέλο στο κλασικό μοντέλο με διάχυση. Έπομένως ο πλεόνασμα την χρονική στιγμή t μπορεί να γραφεί τώρα ως

$$U(t) = u + ct - S(t) + W(t), \quad t \geq 0. \tag{4.22}$$

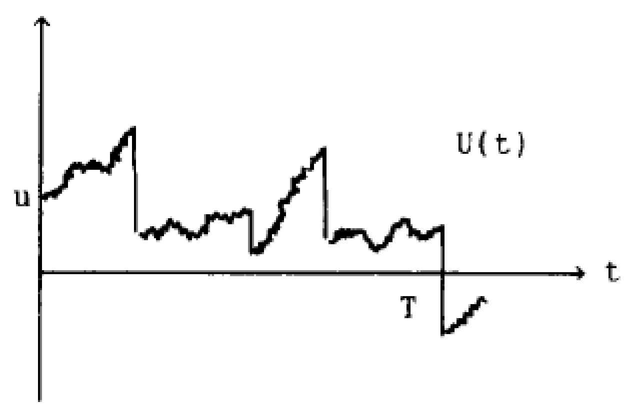
Εδώ σε αντίθεση με το κλασικό μοντέλο έχουμε έναν επιπλέον όρο αβεβαιότητας (όπως αναφέραμε και στη προηγούμενη ενότητα) ο οποίος επιτυγχάνει διόρθωση στις υποθέσεις που έχουμε στο κλασικό μοντέλο. Η $W(t)$ είναι μια ανέλιξη Wiener με απειροελάχιστη μετατόπιση 0 και απειροελάχιστη διακύμανση $2D > 0$. Δηλαδή, για κάθε $t > 0$ η τυχαία μεταβλητή $W(t)$ έχει κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση $2Dt$. Επίσης οι ανελίξεις $S(t)$ και $W(t)$ είναι ανεξάρτητες. Το κλασικό μοντέλο με διάχυση με λίγα λόγια μας προσθέτει μια επιπλέον αβεβαιότητα. Στο κλασικό μόντελο βασικός μας στόχος ήταν να βρούμε την πιθανότητα χρεοκοπίας και την πιθανότητα μη-χρεοκοπίας.Οπότε ορίζουμε την πιθανότητα μη-χρεοκοπίας

$$\delta(u) = Pr(U(t) \geq 0 \ \text{ για κάθε } \ t \geq 0), \tag{4.23}$$

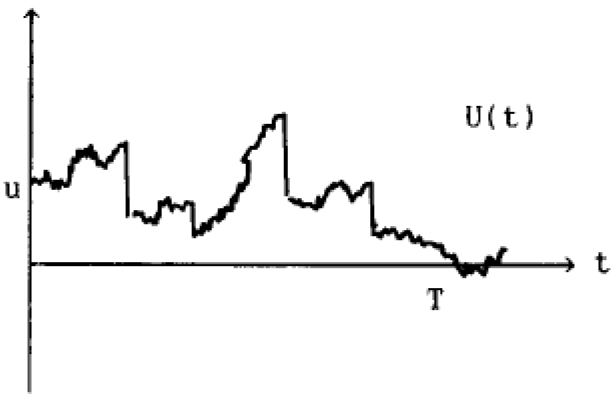
και η πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u) = 1 - \delta(u)$. Έδω όμως λόγω της ανέλιξης Wiener μπορούμε να αναλύσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας ως εξής

$$\psi(u) = \psi_d(u) + \psi_s(u), \tag{4.24}$$

όπου $\psi_d(u)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας από διάχυση π.χ. το πλεόνασμα την στιγμή της χρεοκοπίας να είναι μηδέν και $\psi_s(u)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας να συμβαίνει λόγω κάποιας αποζημίωσης π.χ. το πλεόνασμα την στιγμή της χρεοκοπίας να είναι αρνητικό. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνονται τα είδη χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο με διάχυση.



Σχήμα 4.2: χρεοκοπία από απαίτηση, πηγή : [2]



Σχήμα 4.3: χρεοκοπία από διάχυση, πηγη: [2]

Στο μοντέλο αυτό ισχύουν

$$\delta(0) = \psi_s(0) = 0, \quad \psi(0) = \psi_d(0) = 1. \tag{4.25}$$

4.4.2 Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας $\delta(u)$ στο κλασικό μόντελο με διάχυση

Η πιθανότητα μη χρεοκοπίας όπως είδαμε πιο πάνω ορίζεται από την σχέση

$$\delta(u) = 1 - \psi(u), \qquad u \geq 0.$$

Το $\delta(u)$ είναι η πιθανότητα να μην υπάρξει χρεοκοπία όταν το αρχικό αποθεματικό ειναι u.
Είναι λογικό ότι η $\delta(u)$ είναι και πάλι μια αθροιστική συνάρτηση κατανομής και μάλιστα είναι αύξουσα και συνεχής από δεξιά. Οπότε ισχύει ότι :

$$\lim_{u \to \infty} \delta(u) = 1.$$

Η $\delta(u)$ είναι μια μεικτή κατανομή διότι στο μηδέν έχει μάζα πιθανότητας και στο $(0, \infty)$ έχει πυκνότητα.
Στο κλασικό μοντέλο με διάχυση, η συνάρτηση $\delta(u)$ ικανοποιεί την πιο κάτω ολοκληροδιαφορική εξίσωση που μπορεί να παραχθεί από το ανανεωτικό επιχείρημα ([2]) :

$$D\delta^{''}(u) + c\delta^{'}(u) = \lambda\delta(u) - \lambda \int_0^u \delta(u-x)dF(x). \tag{4.26}$$

Παίρνουμε ένα απειροελάχιστο χρονικό διάστημα μήκους dt και εξετάζουμε το αν υπάρχει ή όχι απαίτηση σε αυτό το διάστημα. Έτσι από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε ότι :

$$\delta(u) = (1-\lambda dt)E[\delta(u+cdt+W(dt))] + \lambda dt\int_0^u \delta(u-x)dF(x). \tag{4.27}$$

Τώρα έχουμε ([2])

$$E[\delta(u+cdt+W(dt))] = \delta(u) + c\cdot dt\delta^{'}(u) + D\cdot dt\delta^{''}(u). \tag{4.28}$$

Εάν αντικαταστήσουμε την (4.28) στην (4.27) και αφαιρέσουμε από την (4.27) το $\delta(u)$ και από τα δύο μέλη και διαιρέσουμε με dt τότε παίρνουμε την (4.26).
Στην συνέχεια ολοκληρώνουμε την (4.26) από 0 έωςς u. Επιπλεόν η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό μηδέν είναι ίση με μηδέν(κάτι το οποίο προκύπτει απο τον ορισμό της κίνησης Wiener) δηλαδή $\delta(0) = 0$, επομένως έχουμε ότι :

$$D\delta^{'}(u) + c\delta(u) = D\delta^{'}(0) + \lambda\int_0^u \delta(u-x)[1-F(x)]dx. \tag{4.29}$$

Παίρνοντας όρια, για $u \to \infty$ και στα δύο μέλη της (4.29) έχουμε οτι

$$\lim_{u\to\infty}\delta(u) = 1.$$

Στην συνέχεια παρατηρούμε οτι

$$\lim_{u\to\infty}\delta(u-x) = 1$$

και

$$\lim_{u\to\infty}\int_0^u [1-F(x)]dx = \mu.$$

Αλλάζοντας την σειρά όριου ολοκληρώματος (κάτι που είναι επιτρεπτό εδώ) παίρνουμε ότι $c = D\delta^{'}(0) + \lambda\mu$. Λύνοντας ως προς $\delta^{'}(0)$ παίρνουμε οτι

$$\delta^{'}(0) = \frac{c-\lambda\mu}{D} = q\zeta, \tag{4.30}$$

όπου $\zeta = \dfrac{c}{D}$.
Έτσι η σχέση (4.29) γίνεται

$$\delta^{'}(u) + \zeta\delta(u) = q\zeta + \frac{\lambda}{D}\int_0^u \delta(u-x)[1-F(x)]dx, \quad u \geq 0. \tag{4.31}$$

Τώρα πολλαπλασιάζοντας την σχέση (4.31) με $e^{\zeta u}$ έχουμε ότι :

$$e^{\zeta u}\delta^{'}(u) + e^{\zeta u}\zeta\delta(u) = e^{\zeta u}q\zeta + \frac{\lambda}{D}\int_0^u e^{\zeta u}\delta(u-x)[1-F(x)]dx, \quad u \geq 0 \tag{4.32}$$

και στην συνέχεια ολοκληρώνοντας και τα δύο μέλη απο 0 έως y έχουμε ότι :

$$e^{\zeta y}\delta(y) = q(e^{\zeta y} - 1) + \frac{\lambda}{D}\int_0^y \int_0^u e^{\zeta u}\delta(u-x)[1-F(x)]dxdu, \quad y \geq 0. \tag{4.33}$$

Ορίζουμε στην συνέχεια τις ακόλουθες συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας

$$\begin{aligned} h_1(y) &= \zeta \cdot e^{-\zeta y}, \quad y > 0 \\ h_2(y) &= \frac{1}{\mu}[1-F(y)], \quad y > 0 \end{aligned} \tag{4.34}$$

και επιπλέον θεωρούμε ότι $H_1(y)$ και $H_2(y)$ είναι οι αντίστοιχες αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής. Έτσι η σχέση (4.33) με την βοήθεια της (4.34) γίνεται

$$\delta(y) = qH_1(y) + (1-q)\int_0^y \delta(z)h_1 * h_2(y-z)dz, \quad y \geq 0. \tag{4.35}$$

Η συνάρτηση $\delta(y)$ της σχέσης (4.35) μπορεί να γραφεί και ως

$$\delta(x) = qH_1(x) + (1-q)\int_0^x \delta(z)h_1 * h_2(x-z)dz, \quad x \geq 0. \tag{4.36}$$

Η (4.36) είναι μια **ανανεωτική** εξίσωση για την συναρτηση $\delta(x)$(βλέπε ορισμό 4.2.2). Παίρνοντας για $r > 0$ τώρα τον μετασχηματισμό Laplace στην σχέση (4.36) έχουμε ότι :

$$\begin{aligned} \widehat{L}(r) &= \int_0^\infty e^{-rx}\delta'(x)dx. \\ \widehat{L_1}(r) &= \int_0^\infty e^{-rx}h_1(x)dx = \frac{\zeta}{\zeta + r}. \\ \widehat{L_2}(r) &= \int_0^\infty e^{-rx}h_2(x)dx = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-rx}[1-F(x)]dx = \frac{1}{\mu r}\left(1 - \int_0^\infty e^{-rx}f(x)dx\right). \end{aligned} \tag{4.37}$$

Οπότε η σχέση (4.36) γίνεται

$$\widehat{L}(r) = q\widehat{L_1}(r) + (1-q)\widehat{L}(r)\widehat{L_1}(r)\widehat{L_2}(r). \tag{4.38}$$

Στην συνέχεια λύνοντας ως προς $\widehat{L}(r)$ έχουμε ότι

$$\widehat{L}(r) = \frac{q\widehat{L_1}(r)}{1-(1-q)\widehat{L_1}(r)\widehat{L_2}(r)}. \tag{4.39}$$

Επομένως από (4.36) ή αν αναπτύξουμε την (4.39) σε γεωμετρική σειρά βλέπουμε ότι

$$\delta(x) = \sum_{n=0}^\infty q(1-q)^n H_1^{*(n+1)} * H_2^{*n}(x). \tag{4.40}$$

Περιμένουμε ότι η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της παραμέτρου D, αυτό προκύπτει από την (4.40). Για να το δούμε αυτό θεωρούμε τον συμβολισμό $\delta(x, D)$ και $H_1(x, D)$. Θεωρούμε ότι $0 < D_1 < D_2$, έχουμε ότι η $H_1(x, D_1) \geq H_1(x, D_2)$ για κάθε x, η $H_1(\cdot, D1)$ είναι μικρότερη από την $H_1(\cdot, D_2)$. Επομένως έχουμε ότι

$$H_1^{*(n+1)}(x, D_1) \geq H_1^{*(n+1)}(x, D_2) \quad \forall x, n.$$

Άρα λόγω της (4.40) έχουμε ότι

$$\delta(x, D_1) \geq \delta(x, D_2).$$

Τώρα εάν θέλουμε να υπολογίσουμε το $\delta(x)$, μια καλή λύση είναι να αντικαταστήσουμε τις $H_1(x)$ και $H_2(x)$ με κατάλληλες διακριτές κατανομές σύμφωνα με τη μέθοδο του κατώτερου και ανώτερου φράγματος, βλέπε Dufresne and Gerber (1991).

4.4.3 Οι πιθανότητες χρεοκοπίας στο κλασικό μοντέλο με διάχυση

Στην παράγραφο αυτή θα ακολουθήσουμε παρόμοια προσέγγιση οπως και στην περίπτωση της πιθανότητας μη χρεοκοπίας. Δηλαδή θα κάνουμε παρόμοιους υπολογισμούς όπως και για τις συναρτήσεις $\psi(u), \psi_d(u), \psi_s(u)$.

Στο κλασικό μοντέλο με διάχυση, η συνάρτηση $\psi_d(u)$ ικανοποιεί την πιο κάτω ολοκληροδιαφορική εξίσωση ([2]) :

$$D\psi_d^{''}(u) + c\psi_d^{'}(u) = \lambda\psi_d(u) - \lambda \int_0^u \psi_d(u-x)dF(x). \tag{4.41}$$

Μετά από πράξεις όπως και προηγουμένως προκύπτει ότι:

$$D\psi_d^{'}(u) + c\psi_d(u) = \lambda \int_0^u \psi_d(u-x)[1-F(y)]dy. \tag{4.42}$$

Εάν πολλαπλασιάσουμε με $e^{\zeta u}$ την (4.42) και ολοκληρώσουμε από 0 έως x σε αντίστοιχη περίπτωση με την (4.36) παίρνουμε ότι :

$$\psi_d(x) = 1 - H_1(x) + (1-\theta) \int_0^x \psi_d(x-z) h_1 * h_2(z)dz, \quad x \geq 0. \tag{4.43}$$

Η (4.43) είναι μια ακόμη **ανανεωτική** εξίσωση για την συνάρτηση $\psi_d(x)$. Στην συνέχεια θα βρούμε μια σχέση ανάμεσα στην $\delta(u)$ και στην $\psi_d(x)$. Πράγματι εάν παραγωγίσουμε την σχέση (4.36) έχουμε ότι :

$$\delta^{'}(x) = qh_1(x) + (1-q) \int_0^x \delta^{'}(z) h_1 * h_2(x-z)dz, \quad x \geq 0. \tag{4.44}$$

Επιπλέον θυμίζουμε ότι

$$h_1(x) = \zeta e^{-\zeta x} = \zeta[1 - H_1(x)].$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (4.44) και (4.43) και λαμβάνοντας υπόψιν μας την παραπάνω σχέση προκύπτει (λόγω της μοναδικότητας της λύσης των ανανεωτικών εξισώσεων) ότι

$$\delta^{'}(x) = q\zeta\psi_d(x) \overset{(4.30)}{=} \left[\frac{(c-\lambda\mu)}{D}\right]\psi_d(x). \tag{4.45}$$

Άρα, καταλήγοντας, εάν έχει καθοριστεί $\delta(x)$ μετά μπορούμε να υπολογίσουμε το $\psi_d(x)$ μέσω της (4.45). Επίσης γνωρίζουμε ότι $\psi(x) = 1 - \delta(x)$ και $\psi_s(x) = \psi(x) - \psi_d(x)$.

4.4.4 Η μέγιστη σωρευτική απώλεια στο κλασικό μοντέλο με διάχυση

Όπως στο κλασικό μοντέλο έτσι και εδώ μας ενδιαφέρει να ορίσουμε μια τυχαία μεταβλητή η οποία είναι χρήσιμη για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας καθώς επίσης και για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Η μεταβλητή αυτή είναι η μέγιστη σωρευτική απώλεια L. Αντίστοιχα με πριν είναι σημαντική γιατί συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας. Εδώ βέβαια επειδή έχει προστεθεί στο μοντέλο μας ένας επιπλέον όρος αβεβαιότητας (διάχυση) και τα πράγματα αλλάζουν σημαντικά σε σύγκριση με το κλασικό μοντέλο(η διαφορά φαίνεται παρακάτω), αυτό όμως που δεν αλλάζει είναι η σχέση που συνδέεται η μέγιστη σωρευτική απώλεια με την πιθανότητα χρεοκοπίας και την πιθανότητα μη χρεοκοπίας.
Επομένως ορίζουμε

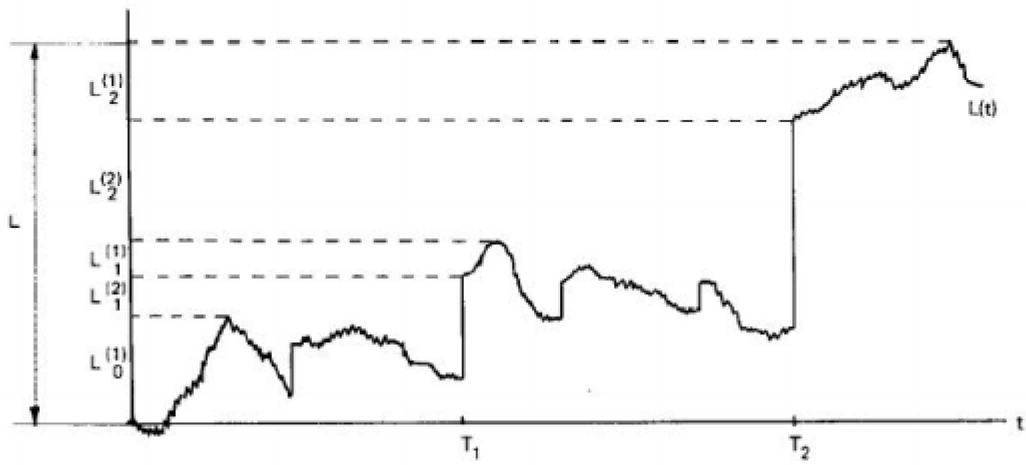
$$L(t) = S(t) - ct - W(t), \quad t \geq 0 \tag{4.46}$$

και επίσης

$$L = max\{L(t) : t \geq 0\}. \tag{4.47}$$

Για μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t, η ποσότητα $L(t)$ εκφράζει την διαφορά ¨έξοδα-έσοδα' στο διάστημα $[0, t]$ χρησιμοποιώντας και έναν επιπλέον στοχαστικό όρο $W(t)$, με μέση τιμή μηδέν, και αγνοώντας το αρχικό αποθεματικό u. Στο κλασικό μοντέλο γνωρίζουμε οτι

$$\delta(u) = Pr(L(t) \leq u : \forall t \geq 0) = Pr(L \leq u). \tag{4.48}$$



Σχήμα 4.4: Ερμηνεία της σχέσης (4.49) πηγή: [2]

Το $\delta(u)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής L.
Η τυχαία μεταβλητή L έχει την μορφή

$$L = L_0^{(1)} + L_1^{(2)} + L_1^{(1)} + \ldots + L_N^{(2)} + L_N^{(1)}, \tag{4.49}$$

με την προυπόθεση ότι έαν $N = 0$ τότε $L = L_0^{(1)}$. Το N είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή η οποία μετρά τον αριθμό των μεγίστων (record values) που παρουσιάζονται στη στοχαστική ανέλιξη $\{L(t) : t \geq 0\}$. Η τυχαία μεταβλητή αυτή ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή. Επιπλέον ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $T_1, \ldots, T_N$ οι οποίες περιγράφουν τους χρόνους που προκύπτουν οι μέγιστες τιμές οι οποίες οφείλονται σε αποζημιώσεις. Θέτουμε $T_0 = 0$ και $T_{N+1} = \infty$. Οπότε έχουμε

$$L_k^{(1)} = max\{L(t) : t < T_{k+1}\} \quad k = 0, 1, \ldots, N \tag{4.50}$$

και

$$L_k^{(2)} = L(T_k) - L(T_{k-1}) - L_{k-1}^{(1)}. \tag{4.51}$$

Όπως αναφέραμε και πιο πάνω η τυχαία μεταβλητή N ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή οπότε έχουμε

$$Pr(N = n) = p(1-p)^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.52}$$

όπου p είναι η πιθανότητα μεγίστου (record high) της διαδικασίας $L(t)$ η οποία οφείλεται σε αποζημίωση. Οι τυχαίες μεταβλητές $L_0^{(1)}, L_1^{(1)}, \ldots$ είναι ισόνομες με κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έστω, $g_1(x)$. Οι τυχαίες μεταβλητές $L_1^{(2)}, L_2^{(2)}, \ldots$ είναι ισόνομες με κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας έστω

$g_2(x)$. Τέλος οι τυχαίες μεταβλητές $N, L_0^{(1)}, L_1^{(1)}, L_1^{(2)}, L_2^{(2)}, \ldots$ είναι ανεξάρτητες. Επομένως από όλα αυτά προκύπτει ότι

$$\delta(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n G_1^{*(n+1)} * G_2^{*n}(u). \tag{4.53}$$

Από την σχέση (4.40) υποψιαζόμαστε ότι

$$p = q, \quad G_1(x) = H_1(x), \quad G_2(x) = H_2(x). \tag{4.54}$$

Τώρα θα προσπαθήσουμε να εξετάσουμε την ισχύ της σχέσης (4.54). Αρχικά από το θεώρημα ολικής πιθανότητας έχουμε τις ακόλουθες εξισώσεις

$$\psi_d(x) = 1 - G_1(x) + (1-p)\int_0^x \psi_d(x-z) g_1 * g_2(z)dz, \quad x \geq 0 \tag{4.55}$$

και

$$\delta(x) = pG_1(x) + (1-p)\int_0^x \delta(z) g_1 * g_2(x-z)dz. \tag{4.56}$$

Εάν παραγωγίσουμε την σχέση (4.56) έχουμε ότι :

$$\delta^{'}(x) = pg_1(x) + (1-p)\int_0^x \delta^{'}(z) g_1 * g_2(x-z)dz \tag{4.57}$$

Από τις σχέσεις (4.45),(4.55) και (4.57) προκύπτει οτι $q\zeta[1 - G_1(x)] = pg_1(x)$. Οπότε έχουμε

$$g_1(x) = \alpha\zeta e^{\alpha\zeta x}, \quad x > 0 \tag{4.58}$$

με $\alpha = \dfrac{q}{p}$.

Απο την σχέση (4.44) βλέπουμε ότι

$$\delta^{''}(0) = qh_1^{'}(0). \tag{4.59}$$

Απο την σχέση (4.57) βλέπουμε ότι

$$\delta^{''}(0) = pg_1^{'}(0). \tag{4.60}$$

Από τις σχέσεις (4.59) και (4.60) εάν θεωρήσουμε $q = p$ προκύπτει ότι $g_1(x) = h_1(x)$ κάτι το οποίο φαίνεται και από την σχέση (4.58). Τέλος εάν πάρουμε μετασχηματισμο Laplace στις σχέσεις (4.43) και (4.56) προκύπτει ότι $g_2(x) = h_2(x)$. Συνεπώς πράγματι αληθεύει η σχέση (4.54). Τώρα είναι σχετικά εύκολο με όλα αυτά να δώσουμε μια εκφραση για τις συναρτήσεις $\psi_s(x)$ και $\psi_d(x)$ αντίστοιχα οπως στην περίπτωση της $\psi_d(x)$ και της $\delta(x)$. Οπότε έχουμε

$$\psi_s(x) = (1-q)[H_1(x) - H_1 * H_2(x)] + (1-q)\int_0^x \psi_s(x-z) h_1 * h_2(z)dz \tag{4.61}$$

και

$$\psi(x) = q[1 - H_1(x)] + (1-q)[1 - H_1 * H_2(x)] + (1-q)\int_0^x \psi(x-z) h_1 * h_2(z)dz. \tag{4.62}$$

4.4.5 Ο συντελεστής προσαρμογής στο κλασικό μοντέλο με διάχυση

Στην παράγραφο αυτή θα δούμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή προσαρμογής καθώς επίσης θα δώσουμε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας αλλά και έναν ασυμπτωματικό τύπο για τις $\psi_d(u), \psi_s(u)$ και $\psi(u)$. Επίσης θεωρούμε οτι η κατανομή των αποζημιώσεων δεν έχει βαριά δεξιά ουρά πράγμα το οποίο σημαίνει ότι η ροπογεννήτρια των αποζημιώσεων υπάρχει και έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε τον συντελεστή προσαρμογής.

$$E[e^{-r_1 U(t)}] = e^{-r_1 u} exp\left[-r_1 ct + \lambda t \left\{\int_0^\infty e^{r_1 u} f(x)dx - 1\right\} + D r_1^2 t\right]. \quad (4.63)$$

Από την σχέση (4.63) ορίζουμε τον συντελεστή προσδιορισμού R να είναι η μικρότερη θετική λύση της εξίσωσης

$$\lambda \int_0^\infty e^{-r_1 x} f(x)dx + D r_1^2 = \lambda + c r_1. \quad (4.64)$$

Τότε η διαδικασία $e^{-r_1 R(t)}$ είναι *martingale* και αν τη σταματήσουμε στη χρονική στιγμή T (στιγμή της χρεοκοπίας), έχουμε από το θεώρημα βέλτιστης ανακοπής (optional stopping).

$$e^{-Ru} = E[e^{-RU(T)}|T < \infty]\psi(u) = \psi_d(u) + E[e^{-RU(T)}|T < \infty, U(T) < 0]\psi_s(u). \quad (4.65)$$

Από την σχέση (4.65) είναι προφανές ότι προκύπτει

$$e^{-Ru} > \psi_d(u) + \psi_s(u) = \psi(u), \quad u > 0 \quad (4.66)$$

το οποίο δίνει την ανισότητα Lundberg για το συγκεκριμένο μοντέλο.
Επίσης ο συντελεστής προσαρμογής βρίσκεται και στους παρακάτω ασυμπτωτικούς τύπους

$$\psi_d(u) \sim C^d e^{-Ru} \quad \text{όταν} \quad u \to \infty \quad (4.67)$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi_d(u)}{e^{-Ru}} = C^d$$

και

$$\psi_s(u) \sim C^s e^{-Ru} \quad \text{όταν} \quad u \to \infty \quad (4.68)$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi_s(u)}{e^{-Ru}} = C^s$$

και

$$\psi(u) \sim Ce^{-Ru} \quad \text{όταν} \quad u \to \infty \tag{4.69}$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C$$

όπου $C = C^s + C^d$.

Στην συνέχεια θα παραθέσουμε δύο παραδείγματα στα οποία θα έχουμε εκθετικές αποζημιώσεις. Επειδή οι υπολογισμοί είναι περίπλοκοι θα κάνουμε χρήση του πακέτου Mathematica.

Παράδειγμα 4.4.1. *Έστω ότι $f(x) = 4e^{-4x}$ δηλαδή οι αποζημιώσεις είναι εκθετικές με παράμετρο 4. Να βρεθεί ο συντελεστής προσαρμογής.*

Λύση
Από την σχέση (4.64) γνωρίζουμε πως ο συντελεστής προσδιορισμού στο κλασικό μοντέλο με διάχυση δίνεται ως η μικρότερη θετική λύση της εξίσωσης

$$\lambda \int_0^\infty e^{-r_1 x} f(x)dx + Dr_1^2 = \lambda + cr_1$$

Με την βοήθεια του Mathematica βρίσκουμε την λύση της εξίσωσης και επιλέγουμε την μικρότερη θετική λύση.

```
In[10]:= f[x_] := 4*Exp[-4*x]

In[11]:= f[x]
Out[11]= 4 e^(-4 x)

In[12]:= Integrate[f[x], {x, 0, Infinity}]
Out[12]= 1

In[13]:= k[x_] := Exp[-r*x]*f[x]

In[14]:= k[x]
Out[14]= 4 e^(-4 x-r x)

In[15]:= M[r_] := Integrate[k[x], {x, 0, Infinity}, Assumptions → r > -4]

In[16]:= M[r]
Out[16]= 4/(4 + r)

In[17]:= R[r_] := 4/(4 + r)

In[18]:= Solve[λ*R[r] + D*r^2 == λ + c*r, r]
```

$$\text{Out[18]= } \left\{\{r \to 0\}, \left\{r \to \frac{c - 4D - \sqrt{c^2 + 8cD + 16D^2 + 4D\lambda}}{2D}\right\}, \left\{r \to \frac{c - 4D + \sqrt{c^2 + 8cD + 16D^2 + 4D\lambda}}{2D}\right\}\right\}$$

Η αποδεκτή λύση είναι η δεύτερη όπως φαίνεται και πιο πάνω διότι είναι μεγαλύτερη του μηδενός άρα θετική και μικρότερη από την τρίτη λύση.

Παράδειγμα 4.4.2. *Έστω ότι $f(x) = e^{-2x} + 2e^{-4x}$ δηλαδή οι αποζημιώσεις είναι μείξη εκθετικών με παραμέτρους 2 και 4. Να βρεθεί ο συντελεστής προσαρμογής.*

Λύση

Από την σχέση (4.64) όπως ακριβώς και πριν γνωρίζουμε πως ο συντελεστής προσδιορισμού στο κλασικό μοντέλο με διάχυση δίνεται ως η μικρότερη θετική λύση της εξίσωσης

$$\lambda \int_0^\infty e^{-r_1 x} f(x)dx + Dr_1^2 = \lambda + cr_1.$$

Με την βοήθεια του Mathematica βρίσκουμε την λύση της εξίσωσης και επιλέγουμε την μικρότερη θετική λύση

```
In[2]:= b[t_] := Exp[-2 * t] + 2 * Exp[-4 * t]

In[3]:= b[t]
```

Out[3]= $2\,e^{-4t} + e^{-2t}$

```
In[4]:= Integrate[b[t], {t, 0, Infinity}]
```

Out[4]= 1

```
In[5]:= k[t_] := Exp[-1 r * t] * b[t]

In[6]:= k[t]
```

Out[6]= $e^{-rt}\left(2\,e^{-4t} + e^{-2t}\right)$

```
In[7]:= M[r_] := Integrate[k[t], {t, 0, Infinity}, Assumptions → r > -2]

        M[r]
```

Out[8]= $\frac{1}{2+r} + \frac{2}{4+r}$

In[9]:= R[r_] := $\frac{1}{2+r} + \frac{2}{4+r}$

```
In[10]:= R[r]
```

Out[10]= $\frac{1}{2+r} + \frac{2}{4+r}$

```
Solve[λ*R[r] + D*r^2 == λ + (c*r), r]
```

$$\Bigg\{\{r\to 0\},\ \Bigg\{r\to \frac{\sqrt[3]{2c^3+18Dc^2+36D^2c+9D\lambda c+27D^2\lambda+\sqrt{4(-c^2-6Dc-12D^2-3D\lambda)^3+(2c^3+18Dc^2+36D^2c+9D\lambda c+27D^2\lambda)^2}}}{3\sqrt[3]{2}\,D}-$$

$$\frac{6D-c}{3D}-\frac{\sqrt[3]{2}\,(-c^2-6Dc-12D^2-3D\lambda)}{3D\sqrt[3]{2c^3+18Dc^2+36D^2c+9D\lambda c+27D^2\lambda+\sqrt{4(-c^2-6Dc-12D^2-3D\lambda)^3+(2c^3+18Dc^2+36D^2c+9D\lambda c+27D^2\lambda)^2}}}\Bigg\},$$

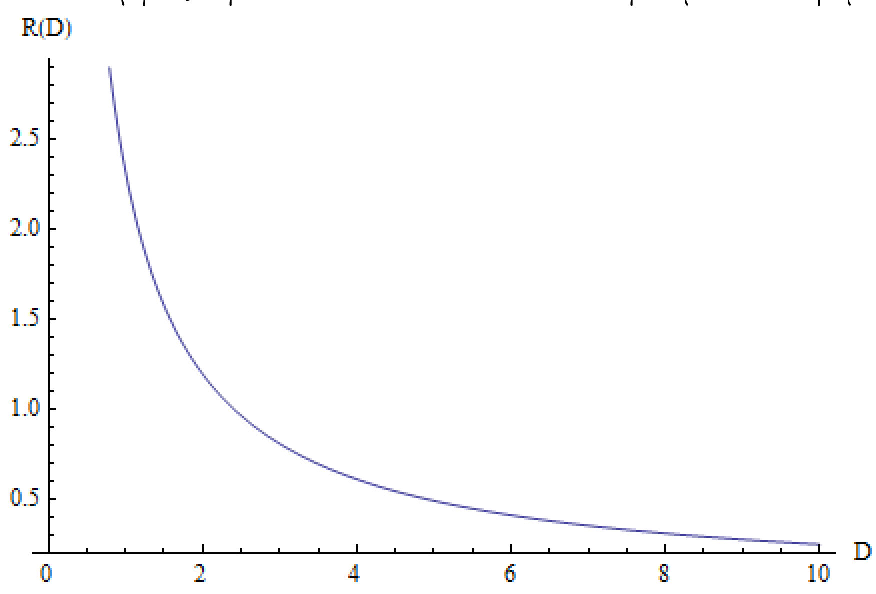
$$\Bigg\{r\to -\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\sqrt[3]{2c^3+18Dc^2+36D^2c+9D\lambda c+27D^2\lambda+\sqrt{4(-c^2-6Dc-12D^2-3D\lambda)^3+(2c^3+18Dc^2+36D^2c+9D\lambda c+27D^2\lambda)^2}}}{6\sqrt[3]{2}\,D}-\frac{6D-c}{3D}-$$

$$\frac{\left(i\sqrt{3}+1\right)(-c^2-6Dc-12D^2-3D\lambda)}{3\,2^{2/3}\,D\sqrt[3]{2c^3+18Dc^2+36D^2c+9D\lambda c+27D^2\lambda+\sqrt{4(-c^2-6Dc-12D^2-3D\lambda)^3+(2c^3+18Dc^2+36D^2c+9D\lambda c+27D^2\lambda)^2}}}\Bigg\},$$

$$\Bigg\{r\to -\frac{\left(i\sqrt{3}+1\right)\sqrt[3]{2c^3+18Dc^2+36D^2c+9D\lambda c+27D^2\lambda+\sqrt{4(-c^2-6Dc-12D^2-3D\lambda)^3+(2c^3+18Dc^2+36D^2c+9D\lambda c+27D^2\lambda)^2}}}{6\sqrt[3]{2}\,D}-\frac{6D-c}{3D}-$$

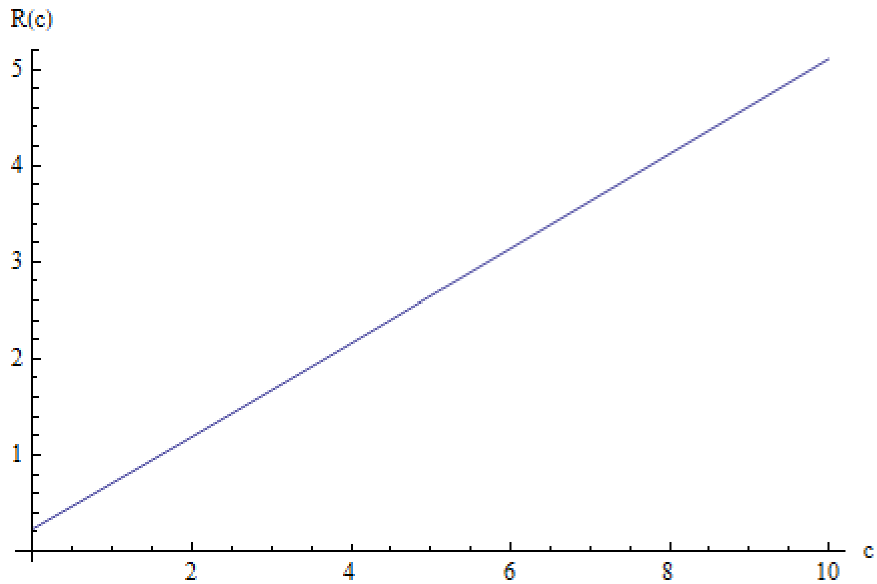
$$\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)(-c^2-6Dc-12D^2-3D\lambda)}{3\,2^{2/3}\,D\sqrt[3]{2c^3+18Dc^2+36D^2c+9D\lambda c+27D^2\lambda+\sqrt{4(-c^2-6Dc-12D^2-3D\lambda)^3+(2c^3+18Dc^2+36D^2c+9D\lambda c+27D^2\lambda)^2}}}\Bigg\}\Bigg\}$$

Η αποδεκτή λύση είναι όπως και πριν η δεύτερη όπως φαίνεται και πιο πάνω διότι είναι μεγαλύτερη του μηδενός άρα θετική και μικρότερη από την τρίτη λύση. Στην συνέχεια θα δώσουμε τα τέσσερα διαγράμματα τα οποία προκύπτουν απο τα δύο προηγούμενα παραδείγματα. Δηλαδή με άλλα λόγια στην περίπτωση της εκθετικής θα δούμε πως μεταβάλεται ο συντελεστής προσαρμογής όταν είναι σταθερό το c και μεταβάλεται το D και όταν είναι σταθερό το D και μεταβάλεται το c. Ακριβώς την ίδια διασικασία θα ακολουθήσουμε και στην μείξη εκθετικών.



Σχήμα 4.5: Διάγραμμα μεταβολής του συντελεστή προσαρμογής στην εκθετική περίπτωση με σταθερό $c = 2$ και $\lambda = 2$

Όπως φαίνεται ξεκάθαρα στο σχήμα η σχέση ανάμεσα στον συντελεστή προσαρμογής και στο D κατά κάποιο τρόπο αντιστρόφως ανάλογη δηλαδή για μέγαλο D έχουμε μικρό συντελεστή προσαρμογής και για μεγάλο συντελεστή προσαρμογής έχουμε μικρό D.

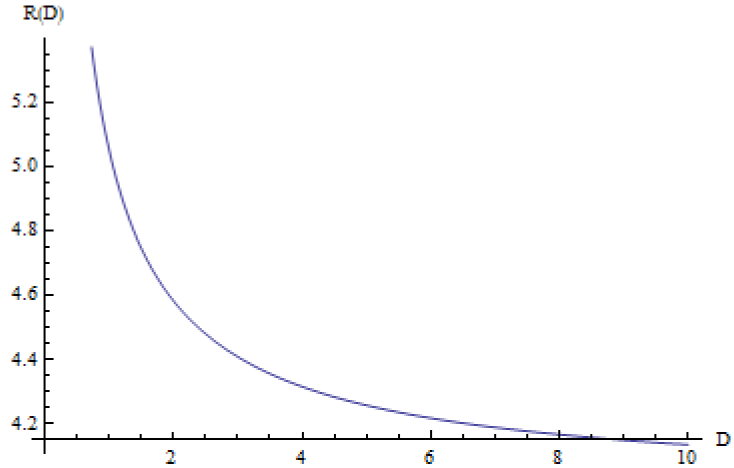


Σχήμα 4.6: Διάγραμμα μεταβολής του συντελεστή προσαρμογής στην εκθετική περίπτωση με σταθερό $D = 2$ και $\lambda = 2$

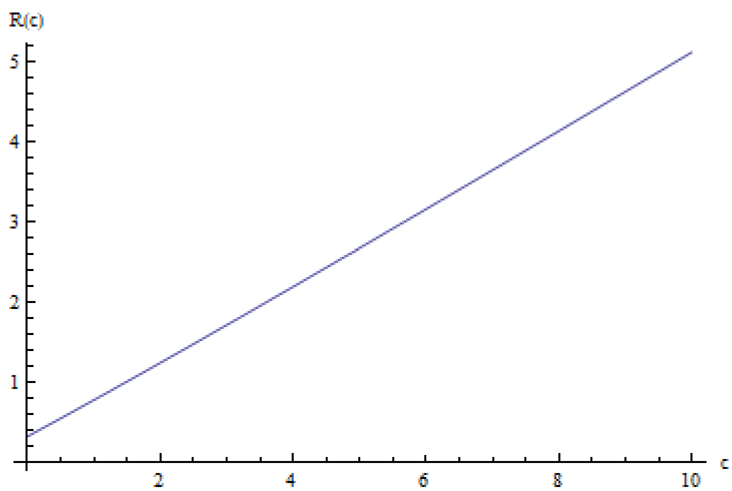
Στο συγκεκριμένο διάγραμμα βλέπουμε ότι η σχέση του συντελεστή προσαρμογής και του c είναι κατά κάποιο ανάλογη δηλαδή για μεγάλο c έχουμε μεγάλο συντελεστή προσαρμογής και για μικρό c έχουμε μικρό συντελεστή προσαρμογής. Στο συγκεκρίμενο σχήμα όπως και στο προηγούμενο φαίνεται όπως και στο κλασικό μοντέλο ότι ο συντελεστής προσαρμογής δεν μπορεί να πάρει αρνήτικές τιμές αλλά ούτε και την τιμή μηδέν.

Στην συνέχεια δίνουμε και τα αντίστοιχα διαγράμματα για την μείξη εκθετικών όπου ο σχολιάσμος είναι ο ίδιος απλά αλλάζουν οι διάφορες τιμές τιμές για τον συντελεστη προσαρμογής.

Μια μικρή παρατήρηση είναι στην περίπτωση του σταθερού D το διάγραμμα ανάμεσα σε συντελεστή προσαρμογής και ένταση ασφαλίστρου είναι γραμμικο. Για μεγάλη τιμή όμως του σταθερού D π.χ $D = 100$ το διάγραμμα παύει να είναι γραμμικό. Όμως θα ήταν λάθος να βάλουμε μεγάλη τιμή για το D γιατί θα παραβιαζόταν η συνθήκη καθαρού κέρδους



Σχήμα 4.7: Διάγραμμα μεταβολής του συντελεστή προσαρμογής στην περίπτωση της μείξης εκθετικών με σταθερό $c = 2$ και $\lambda = 2$



Σχήμα 4.8: Διάγραμμα μεταβολής του συντελεστή προσαρμογής στην περίπτωση της μείξης εκθετικών με σταθερό $D = 2$ και $\lambda = 2$

Κεφάλαιο 5

Προσεγγίσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας με χρήση της κίνησης Wiener

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα γίνει η σύνδεση ανάμεσα στην ασθενής σύγκλιση τυχαίων μεταβλητών και στο κλασικό μοντέλο με διάχυση. Επίσης με την βοήθεια της ασθενής σύγκλισης όπου αποτελεί το βασικό μας μαθηματικό εργαλείο θα βρούμε προσεγγίσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο και για δίαφορες σημαντικές ποσότητες. Πριν όμως γίνουν όλα αυτά κάνουμε την αναφορά ένος πολύ σημαντικού ορισμού για την συνέχεια. Τέλος η ανάλυση στο παρόν κεφάλαιο προέρχεται σε μεγάλο βαθμό απο το άρθρο του Grandell.

Στην συνέχεια δίνουμε έναν ορισμό ο οποίος είναι πολύ σημαντικός για την συνέχεια.

Ορισμός 5.0.1. *[12] Έστω $\mu, (\mu_n)_{n\geq 1}$ μέτρα πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Θα λέμε ότι η $(\mu_n)_n \geq 0$ συγκλίνει ασθενώς στο μ αν*

$$\mu_n((-\infty, x]) \to \mu((-\infty, x])$$

καθώς $n \to \infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\mu(\{x\}) = 0$. Τότε γράφουμε ότι $\mu_n \Rightarrow \mu$

5.1 Προσεγγίσεις στο κλασικό μοντέλο με διάχυση

Στο κεφάλαιο αυτό βασικός μας στόχος είναι να δώσουμε μια λογική σύνδεση ανάμεσα στην ασθενή σύγκλιση που εξετάσαμε στα Κεφάλαια 2 και 3 και στο κλασικό μόντελο με διάχυση. Αυτό είναι κάτι το οποίο είχαμε αναφέρει ελάχιστα στην κίνηση Wiener. Δηλαδή η κίνηση Wiener αποτελεί όριο ενός τυχαίου

περιπάτου. Με λίγα λόγια θα προσπαθήσουμε όσο αυτό γίνεται να ορίσουμε μια προσέγγιση η αλλιώς σύγκλιση από την σύνθετη στοχαστική διαδικασία του Poisson (όπως την είχαμε ορίσει στο προηγούμενο κεφάλαιο) στην κίνηση Wiener. Το βασικό μαθηματικό εργαλείο το οποίο έχουμε στα χέρια μας είναι η ασθενής σύγκλιση.
Στην συνέχεια δίνουμε τον ορισμό ο οποίος είναι πολύ χρήσιμος για την συνέχεια Επιπλέον όλες οι στοχαστικές διαδικασίες που θα αναφέρουμε στην συνέχεια έχουν ως χώρο παρατήρησης τον χώρο $\mathcal{D}$ ο οποίος περιέχει όλες τις δεξιά συνεχείς συναρτήσεις. Επιπλεόν θα θεωρήσουμε την συνάρτηση s_T η οποία ορίζεται στον $\mathcal{D}$ και έτσι θα ορίσουμε την εξής σχέση

$$s_T X = \sup_{0 \leq t \leq T} X(t). \tag{5.1}$$

Ορίζουμε ως $X(t)$ την στοχαστική διαδικασία $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ η οποία δίνεται από την ακόλουθη σχέση :

$$X(t) = Y(t) - ct, \tag{5.2}$$

όπου $Y(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \widetilde{Y_i}$ η σύνθετη στοχαστική διαδικασία. Τώρα $\widetilde{Y_1}, \widetilde{Y_2}, \ldots$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες δηλώνουν το μέγεθος των ατομικών ζημιών, και για τα οποία ισχύει ότι $E\widetilde{Y_i} = \mu$ και $Var\widetilde{Y_i} = \sigma^2 < \infty$. Επιπλέον εάν προηγουμένως ορίζαμε την στοχαστική διαδικασία $\widetilde{Y} = \{\widetilde{Y}(t) : t \geq 0\}$ και θεωρήσουμε ότι $\widetilde{Y_1}, \widetilde{Y_2}, \ldots$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές μεταξύ τους αλλά και με N(στοχαστική διαδικασία η οποία καταγράφει τις απαιτήσεις στο χρόνο όπως ακριβώς το ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο) έτσι έχουμε $\widetilde{Y}(t) = \sum_{i=1}^{[t]} \widetilde{Y_i}$ όπου $\widetilde{Y}(t)$ είναι τα πληρωτέα ποσά στο χρόνο (στο ακέραιο μέρος του). Οπότε όπως είναι λογικό $Y(t) = \widetilde{Y} \circ N(t)$(είναι το $S(t)$ που είχαμε ορίσει στο προηγούμενο κεφάλαιο).Το $X(t)$ εδώ μπορεί να ονομαστεί ως ανέλιξη ¨χρεοκοπίας¨(είναι το $U(t)$ που είχαμε ορίσει στο προηγούμενο κεφάλαιο) . Μια διαφορετική έκφραση για την συνθήκη καθαρού κέρδους είναι η ακόλουθη

$$s_t X < U,$$

όπου U είναι η ανέλιξη του πλεονάσματος.
Η βασική ιδέα όπως αναφέραμε και πιο πάνω είναι να ¨βρούμε' όπως θα λέγαμε μια προσέγγιση του X για την κίνηση $Wiener$. Έτσι λοιπόν ορίζουμε $W = \{W(t) : t \geq 0\}$ την γνωστή ως κίνηση $Wiener$ όπως την ορίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.
Συνήθως το συνολικό ασφάλιστρο επιλέγεται να είναι μεγάλο με σκοπό το X να έχει αρνητική μετατόπιση. Έτσι δεν θα μας προκαλέσει καμία έκπληξη πως η κίνηση $Wiener$ με αρνητική μετατόπιση αποτελεί όριο η αλλιώς όπως είπαμε

προηγουμένως προσέγγιση του X. Έτσι για $x > 0$ και $\gamma > 0$ έχουμε (Grandell, 1991)

$$Pr\{\sup_{0\leq t\leq T}(W(t) - \gamma t) > x\} = 1 - \Phi\left(\frac{\gamma T + \kappa}{\sqrt{T}}\right) + e^{-2\gamma x}\Phi\left(\frac{\gamma T - \kappa}{\sqrt{T}}\right). \quad (5.3)$$

Η πιο πάνω πιθανότητα δεν είναι και τόσο δύσκολο να υπολογιστεί και αποτελεί όπως θα λέγαμε την βάση για τις προσεγγίσεις που θα ακολουθήσουν στην συνέχεια. Επίσης ¨διαισθητικά' μπορούμε να πούμε ότι το δεξιό μέλος της πιο πάνω έκφρασης με τις κατάλληλες παραμέτρους αποτελεί προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο. Αυτό είναι αρκετά χρήσιμο διότι ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο είναι πολυ δύσκολο να γίνει αναλυτικά και για αυτό είναι σημαντικό να βρούμε μια προσέγγιση για τον υπολογισμό της. Έτσι λοιπόν αν θεωρήσουμε $X_1, X_2, \ldots$ στοχαστικές διαδικασίες τέτοιες ώστε $X_n \xrightarrow{d} Z$ όπου Z είναι η κίνηση $Wiener$ με μετατόπιση (4.19). Η Z έχει συνεχείς παρατηρούμενες τιμές (δηλαδή τιμές που πραγματικά συμβαίνουν) με $Pr\{Z(T-) = Z(T)\} = 1$ και επίσης για κάθε $x > 0$ $Pr(s_T Z > x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Όποτε έχουμε $Pr(s_T X_n > x) \rightarrow Pr(s_T Z > x)$ για κάθε $x > 0$ και σε πεπερασμένο χρόνο T.

Ορισμός 5.1.1. *[4] Έστω X η στοχαστική διαδικασία χρεοκοπίας και Z η κίνηση $Wiener$ με μετατόπιση. Θα λέμε ότι το X μπορεί να προσεγγίσει το Z αν η ακολουθία $X_1, X_2, \ldots$ είναι τέτοια ώστε $X_n \xrightarrow{d} X$ και X αντιστοιχεί σε X_n για $n \rightarrow \infty$ να μπορεί να κατασκευαστεί.*

Τώρα θα δούμε πως η ακολουθία που αναφέραμε πιο πάνω μπορεί να κατασκευαστεί. Αν υπάρχει όπως θα λέγαμε μια ελπίδα το X να προσεγγίσει μια κίνηση $Wiener$ αυτό θα ήταν δυνατό με την βοήθεια του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος. Εφόσον το Y είναι το μοναδικό κομμάτι του X το οποίο είναι στοχαστικό (βλέπε σχέση (4.19)) εμείς θα μπορούσαμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να το θεωρήσουμε Y. Με άλλα λόγια όπως και να έχει θα πρέπει να αθροίσουμε μερικές απο τις $\widetilde{Y}_i$ οι οποίες είναι οι τυχαίες μεταβλητές τις οποίες ορίσαμε πιο πάνω. Για να γίνει αυτό όμως που αναφέραμε πιο πάνω η μοναδική λύση είναι να γίνει σε πεπερασμένο χρόνο. Συνεπώς αν θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία Y_n σε πεπερασμένο χρόνο και με την βοήθεια του Κεντρικού Οριακού Θεωρήματος έχουμε

$$Y_n(t) = \frac{Y(nt) - \alpha nt}{b\sqrt{n}} \quad (5.4)$$

και επιπλέον υποθέτουμε ότι

$$Y_n \xrightarrow{d} W, \quad (5.5)$$

για κάποια α και $b > 0$.

Στην σύνεχεια βασικός μας στόχος είναι να βρούμε μια προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο. Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο είναι η εξής:

$$\psi(u, T) = Pr(s_T X > u).$$

Τώρα λόγω της (5.5) και με κατάλληλα $\alpha^{'}$ και $b^{'} > 0$ έχουμε το εξής :

$$\begin{aligned} X_n(t) &= \frac{X(nt) - \alpha^{'} nt}{b^{'}\sqrt{n}} \\ &= \frac{Y(nt) - cnt - \alpha^{'} nt}{b^{'}\sqrt{n}} \\ &= \frac{b}{b^{'}} \frac{Y(nt) - \alpha nt}{b\sqrt{n}} + \frac{(\alpha - c - \alpha^{'})nt}{b^{'}\sqrt{n}}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Όπως είναι πολύ εύκολο να δούμε, εμείς μπορούμε να επιλέξουμε $b = b^{'}$ και έτσι πρέπει να επιλέξουμε $\alpha^{'} = \alpha - c$. Γι αυτό τον λόγο και με τις πιο πάνω επιλογές για τις σταθερές έχουμε ότι

$$X_n \xrightarrow{d} W,$$

πράγμα το οποίο σημαίνει ότι

$$Pr(s_t X_n > x) = Pr(s_t W > x).$$

Τώρα

$$\begin{aligned} Pr(s_t X_n > x) &= Pr\{\sup_{0 \le s \le t} (X(ns) - \alpha^{'} ns) > xb\sqrt{n}\} \\ &= Pr\{\sup_{0 \le s \le tn} (X(s) - \alpha^{'} s) > xb\sqrt{n}\}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Αλλά στην σχέση (5.6) βλέπουμε ότι δεν έχουμε την πιθανότητα την οποία έχουμε ως σκοπό να προσεγγίσουμε εκτός απο την περίπτωση στην οποία $c = \alpha$. Στην περίπτωση αυτή όμως δεν ισχύει η συνθήκη καθαρού κέρδους πράγμα το οποίο σημαίνει πως πρέπει να την απορρίψουμε αμέσως.
Παρόλα αυτά βέβαια μπορούμε να θεωρήσουμε μια ¨κάπως' πιο γενική οριακή περίπτωση στην οποία η στοχαστική διαδικασία της χρεοκοπίας θα εξαρτάται απο το n. Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι θα θεωρήσουμε πως καθ΄ όλη την διάρκεια της οριακής αυτής διαδικασίας δεν μεταβάλλεται καθόλου το Y και επίσης το συνολικό ασφάλιστρο εξαρτάται και αυτό απο το n.
Το πιο κάτω θεώρημα αναφέρεται με σκοπό να μας βοηθήσει να εξάγουμε προσεγγίσεις για τις πιθανότητες χρεοκοπίας. Ο όρος πιθανότητες χρεοκοπίας είναι τεχνητός και αναφερόμαστε στην πιθανότητα χρεοκοπίας τόσο σε πεπερασμένο όσο και σε άπειρο χρόνο.

Θεώρημα 5.1.1. *[4] Έστω οτι $Y_n \xrightarrow{d} W$ και ορίζουμε $X_n(t) = \frac{Y(nt) - c_n nt}{b\sqrt{n}}$ και $Z(t) = W(t) - \gamma t$. Τότε $X_n \xrightarrow{d} Z$ αν και μόνο αν $(c_n - \alpha) \to \gamma b$.*

Οι σταθερές που αναφέρονται στο πιο πάνω θεώρημα θεωρούνται παράμετροι οι οποίες ¨χαρακτηρίζουν' όπως θα λέγαμε το χαρτοφυλάκιό μας. Το α μπορεί να ερμηνευτεί ως το καθαρό ασφάλιστρο και το b ως μέτρο κινδύνου. Ο συντελεστής ασφάλειας $\lambda = c - \alpha$ και το πλεόνασμα u μπορούν να θεωρηθούν ως μεταβλητές απόφασης. Με λίγα λόγια η εταιρία αναλαμβάνει έναν συγκεκριμένο κίνδυνο για συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Άρα η εταιρία επιλέγει το λ και το u ανάλογα τον κίνδυνο τον οποίο αναλαμβάνει. Έστω $\psi(\lambda, u, T)$ η πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο. Με πιο απλά λόγια αν η εταιρία δεχτεί μια πιθανότητα χρεοκοπίας έστω p σε πεπερασμένο χρόνο T θα επιλέξει λ και u τέτοια ώστε $\psi(\lambda, u, T) = p$.
Στην συνέχεια θα δώσουμε το Θεώρημα το οποίο είναι όπως θα λέγαμε βάση για τις προσεγγίσεις τις οποίες αναφέραμε.

Θεώρημα 5.1.2. *[4] Υποθέτουμε ότι $Y_n \xrightarrow{d} W$ και έστω οι σταθερές δ, x και t. Τότε* $\lim_{n\to\infty} \psi\left(\frac{\delta}{\sqrt{n}}, x\sqrt{n}, tn\right) = 1 - \Phi\left(\frac{\delta t + x}{b\sqrt{t}}\right) + e^{-2\delta x/b^2}\Phi\left(\frac{\delta t - x}{b\sqrt{t}}\right)$.

Απόδειξη[4] Έχουμε

$$\begin{aligned}
\psi\left(\frac{\delta}{\sqrt{n}}, x\sqrt{n}, tn\right) &= Pr\left\{\sup_{0\le s\le tn}\left(Y(s) - \left(\alpha + \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)s\right) > x\sqrt{n}\right\} \\
&= Pr\left\{\sup_{0\le s\le t}\left(Y(ns) - \left(\alpha + \frac{\delta}{\sqrt{n}}\right)ns\right) > x\sqrt{n}\right\} \\
&= Pr\left\{\sup_{0\le s\le t}\frac{Y(ns) - (\alpha + (\frac{\delta}{\sqrt{n}}))ns}{b\sqrt{n}} > \frac{x}{b}\right\}.
\end{aligned}$$

Τώρα λόγω του Θεωρήματος 5.1.1 έχουμε ότι

$$\psi\left(\frac{\delta}{\sqrt{n}}, x\sqrt{n}, tn\right) \to Pr\left(s_t Z > \frac{x}{b}\right),$$

όπου $Z(t) = W(t) - \left(\frac{\delta}{b}\right)t$. Τώρα στο Θεώρημα 5.1.2 αν αντικαστήσουμε όπου $\delta = \lambda n$, $x = \frac{u}{\sqrt{n}}$ και $t = \frac{T}{n}$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty}\psi(\lambda, u, T) = 1 - \Phi\left(\frac{\lambda T + u}{b\sqrt{n}}\right) + e^{-2\lambda u/b^2}\Phi\left(\frac{\lambda T - u}{b\sqrt{n}}\right).$$

Οπότε επιλέγοντας το n έχουμε την ακόλουθη προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπεράσμενο χρόνο

$$\psi(\lambda, u, T) \approx 1 - \Phi\left(\frac{\lambda T + u}{b\sqrt{n}}\right) + e^{-2\lambda u/b^2}\Phi\left(\frac{\lambda T - u}{b\sqrt{n}}\right). \tag{5.8}$$

Από το πιο πάνω θεώρημα φαίνεται να μοιάζει όπως θα λέγαμε πολύ λογικό ότι εάν το λ είναι μικρό το u θα πρέπει να είναι μεγάλο και το T θα είναι πολύ μεγαλύτερο.

Ο λόγος που μοιάζει λογικό το παραπάνω επιχείρημα είναι το λ^{-1} το u και το $\sqrt{T}$ θα πρέπει να είναι σε μια σχετική ισορροπία μεταξύ τους. Εάν αναλύσουμε διαισθητικά την πιο πάνω προσέγγιση θα διαπιστώσουμε ότι ότι μας είναι άχρηστη για πολύ μικρή πιθανότητα χρεοκοπίας. Ο λόγος της πιο πάνω διαίσθησης πηγάζει από το ότι για μεγάλες αποκλίσεις κάνουμε πάντα χρήση του κεντρικού οριακού θεωρήματος.
Στο πάνω θεώρημα αν θεωρήσουμε όχι πεπερασμένο χρόνο όπως πριν αλλά άπειρο τότε έχουμε

$$\lim_{T\to\infty} \Phi\left(\frac{\lambda T + u}{b\sqrt{n}}\right) = 1$$

και

$$\lim_{T\to\infty} \Phi\left(\frac{\lambda T - u}{b\sqrt{n}}\right) = 1.$$

Τα πιο πάνω ισχύουν διότι οι προαναφερθήσες συναρτήσεις είναι συναρτήσεις κατανομής.
Οπότε προκύπτει ότι η προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο έιναι

$$\psi(\lambda, u) \approx e^{-2\lambda u/b^2}. \tag{5.9}$$

Το βασικό πρόβλημα εδώ είναι ότι $X_n \xrightarrow{d} Z$ εν γένει δεν συνεπάγεται ότι $\sup\limits_{t\geq 0} X_n(t) \xrightarrow{d} \sup\limits_{t\geq 0} Z(t)$. Με πιο απλά λόγια το βασικό μας πρόβλημα εδώ είναι πως είναι πιθανό ο χρόνος της χρεοκοπίας να τείνει στο άπειρο την στιγμή της οριακής διαδικασίας.

5.2 Η περίπτωση σύνθετης διαδικασίας Poisson

Στην παράγραφο που ακολουθεί θα αναφέρουμε την περίπτωση του *Poisson*. Οπότε $E(Y(t)) = \mu t$ και $Var(Y(t)) = (\mu^2 + \sigma^2)t$ Άρα από την σχέση (5.4) έχουμε

$$\frac{Y(t) - \mu t}{\sqrt{(\mu^2 + \sigma^2)t}} \xrightarrow{d} W(1)$$

συνεπώς

$$\frac{Y(t) - \mu t}{\sqrt{(\mu^2 + \sigma^2)}} \xrightarrow{d} \sqrt{t}W(1) \overset{d}{=} W(t).$$

Λόγω της περίπτωσης Poisson η σχέση (5.8) γίνεται

$$\psi\left(\lambda, u, T\right) \approx 1 - \Phi\left(\frac{\lambda T + u}{\sqrt{T(\mu^2 + \sigma^2)}}\right) + e^{-2\lambda u/(\mu^2+\sigma^2)}\Phi\left(\frac{\lambda T - u}{\sqrt{T(\mu^2 + \sigma^2)}}\right). \tag{5.10}$$

Αντίστοιχα η σχέση (5.9) θα γίνει

$$\psi(\lambda, u) \approx e^{-2\lambda u/(\mu^2+\sigma^2)}. \tag{5.11}$$

Ορίζουμε την συνάρτηση

$$f(u) = E(e^{u\widetilde{Y}_i}) < \infty,$$

για $|u| <$ από κάποια θετική αυθαίρετη σταθερά. Επίσης το u είναι μια πραγματική μεταβλητή. Η $f(u)$ έχει τις εξής ιδιότητες

1. Η f είναι αναλυτική και ομαλή (regular) για $0 < u \leq r$.

2. $1 + (\mu + \lambda)u > f(u)$ για $0 < u \leq r$.

Στην συνέχεια παραθέτουμε δύο θεωρήματα τα οποία αφορούν την πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο.

Θεώρημα 5.2.1. *[4] Υποθέτουμε ότι $f(u) = E(e^{u\widetilde{Y}_i}) < \infty$ για $|u| <$ από κάποια θετική αυθαίρετη σταθερά. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $n > 0$ τέτοιο ώστε $\lambda \leq n$ να ισχύει*

$$\psi(\lambda, u) \leq e^{-\frac{2(1-\epsilon)\lambda U}{\mu^2+\sigma^2}}.$$

Θεώρημα 5.2.2. *[4] Υποθέτουμε ότι $f(u) = E(e^{u\widetilde{Y}_i}) < \infty$ για $|u| <$ από κάποια θετική αυθαίρετη σταθερά. Έστω δ και x αυθαίρετές σταθερές. Τότε ισχύει το ακόλουθο αποτέλεσμα*

$$\lim_{n\to\infty} \psi\left(\frac{\delta}{\sqrt{n}}, x\sqrt{n}\right) = e^{-\frac{2\delta x}{\mu^2+\sigma^2}}$$

Ένα πολύ ενδιαφέρον ερώτημα το οποίο προκύπτει εδώ είναι τελικά πόσο καλές είναι όλες αυτές οι προσεγγίσεις. Πολλές φορές στα μαθηματικά γενικότερα είναι αδύνατο εώς και ακατόρθωτο να υπολογίσουμε κάποιες ποσότητες με απόλυτη ακρίβεια, γι αυτό τον λόγο πολλές φορές για να έχουμε μια εικόνα γι αυτο που ψάχνουμε είτε χρησιμοποιούμε προσεγγίσεις είτε κάποια φράγματα αρκεί να έχουν μια βάση και να ανταποκρίνονται στην πραγματικότητα. Στην δικιά μας περίπτωση τώρα για να δώσουμε μια απάντηση στο προηγούμενο ερώτημα κάνουμε σύγκριση ανάμεσα στην ακριβή τιμή και στην τιμή προσέγγισης με την βοήθεια του σχετικού σφάλματος το οποίο ορίζεται ως εξής

$$\text{σχετικό σφάλμα} = \frac{\text{προσεγγιστική-ακριβής τιμή}}{\text{ακριβής τιμή}}.$$

Στην συνέχεια δίνουμε ένα απλό παράδειγμα στον υπολογισμό του σχετικού σφάλματος και να δούμε και πόσο καλή είναι η προσέγγιση η οποία ακολουθούμε.

Παράδειγμα 5.2.1. *Έστω ότι οι ατομικές ζημιές ακολουθούν την εκθετική κατανομή. Να υπολογιστεί το σχετικό σφάλμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρόνο.*

Λύση

Γνωρίζουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπιάς σε άπειρο χρόνο όταν οι ατομικές ζημιές ακολουθούν την εκθετική κατανομή δίνεται από την σχέση (βασίζεται στην σχέση (5.11) και όχι στα διάφορα θεωρήματα που ανάφερθηκαν πιο πάνω)

$$\psi(\lambda, u) = \frac{1}{1+\lambda} e^{-\frac{\lambda u}{1+\lambda}}.$$

Η προσέγγιση δίνεται απο την σχέση

$$\psi(\lambda, u) \approx e^{-\lambda u}.$$

Έτσι το σχετικό σφάλμα είναι το ακόλουθο

$$\frac{e^{-\lambda u} - \frac{1}{1+\lambda} e^{-\frac{\lambda u}{1+\lambda}}}{\frac{1}{1+\lambda} e^{-\frac{\lambda u}{1+\lambda}}}.$$

Βιβλιογραφία

Ξενόγλωσση

[1] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures.* John Wiley & Sons, 2013.

[2] Francois Dufresne and Hans U Gerber. "Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion". In: *Insurance: mathematics and economics* 10.1 (1991), pp. 51–59.

[3] Rick Durrett. *Probability: theory and examples.* Vol. 49. Cambridge university press, 2019.

[4] Jan Grandell. "A class of approximations of ruin probabilities". In: *Scandinavian Actuarial Journal* 1977.sup1 (1977), pp. 37–52.

[5] Maxim Raginsky. *Preservation of Stochastic Convergence under Transformations ECE 534: Random Processes.* 2012. URL: http://maxim.ece.illinois.edu/teaching/fall12/handouts/transformations.pdf.

[6] George G. Roussas. *A First Course in Mathematical Statistics.* Addison-Wesley, 1973.

[7] David A. Stephens. *556: Mathematical Statistics I Stochastic Convergence.* 2014. URL: http://www.math.mcgill.ca/~dstephens/OldCourses/556-2006/Math556-ModesOfConvergence.pdf.

Ελληνική

[8] Θεοδόσιος Δημητράκος. *Σημειώσεις Πιθανοτήτων*. Sept. 2014. URL: http://www.samos.aegean.gr/math/dimitheo/PITHAN4.pdf.

[9] Νικόλαος Μαχαιράς. *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης, Π.Μ.Σ. «Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου»*. 2016.

[10] Κωνσταντίνος Πολίτης. *Εισαγωγή στην Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου, Το Συλλογικό Πρότυπο και Θεωρία Χρεοκοπίας*. Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης, 2012.

[11] Ευστάθιος Χατζηκωνσταντινίδης. *Σημειώσεις Θεωρία Κινδύνου I, Π.Μ.Σ. «Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου»*. 2015.

[12] Δημήτριος Χελιώτης. *Σημειώσεις Πιθανότητες II*.