ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Τμήμα Στατιστικής
και
Ασφαλιστικής
Επιστήμης
Π.Μ.Σ. στην
« Αναλογιστική Επιστήμη
και Διοικητική Κινδύνου»

Τυχαίες Ευκαιρίες Βέβαιου Κέρδους και Επιπτώσεις του στην Τιμολόγηση Χρηματοοικονομικών Παραγώγων

ΠΟΔΑΡΟΓΙΑΝΝΗ Θ ΣΤΥΛΙΑΝΗ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

Department of Statistics and Insurance Science

MSc in "Actuarial Science and Risk Management"

Stochastic Arbitrage Return and its Linchpin with Pricing of Financial Derivatives

PIRAEUS, JULY 2019

STELLA T. PODAROGIANNI

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη Γ.Σ.Ε.Σ. του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ. 12η /03.07.2017 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αν. Καθ. Β. Σεβρόγλου (Επιβλέπων)
- Καθ. Ν. Μαχαιρά
- Αν. Καθ. Γ. Βερροπούλου

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του Μεταπτυχιακού Προγράμματος Σπουδών «Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου» του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, της Σχολής Χρηματοοικονομικής και Στατιστικής, του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας μου, συνεργάστηκα με ακαδημαϊκούς και μη, οι οποίοι έπαιξαν πολύ σημαντικό ρόλο στην πραγματοποίησή της. Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα κο Β. Σεβρόγλου, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς, για την πολύτιμη καθοδήγησή του καθώς και την εμπιστοσύνη και εκτίμηση που μου έδειξε, στο σύνολο της διπλωματικής μου εργασίας.

Στη συνέχεια, θα ήθελα να εκφράσω τις ευχαριστίες μου προς τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής, κο Ν. Μαχαιρά, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς και την κα Γ. Βερροπούλου, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του ιδίου Τμήματος, για τις χρήσιμες υποδείξεις και τις εύστοχες παρατηρήσεις τους.

Κλείνοντας, ευχαριστώ ειλικρινά τους γονείς μου Ιωάννα και Θεοφάνη, για την διαχρονική συμπαράστασή τους και την υλική και ηθική στήριξη των επιλογών μου.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, σκοπός μας είναι να μελετήσουμε το ρόλο που παίζουν οι τυχαίες ευκαιρίες βέβαιου κέρδους στην τιμολόγηση των χρηματοοικονομικών παραγώγων. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε ένα μη ισορροπημένο μοντέλο για τη δημιουργία ενός στοχαστικού χαρτοφυλακίου και επιλέγουμε μία σταθερή αλλά τυχαία, εργοδική διαδικασία, ταχέως μεταβαλλόμενη ως προς τον χρόνο για τις τυχαίες αποδόσεις βέβαιου κέρδους. Εκμεταλλευόμαστε το γεγονός ότι η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης και οι τυχαίες αποδόσεις βέβαιου κέρδους αλλάζουν σε διαφορετικές κλίμακες χρόνου, το οποίο μας επιτρέπει να αναπτύξουμε μία ασυμπτωτική θεωρία τιμολόγησης η οποία σχετίζεται με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ) για στοχαστικές διαδικασίες. Η μελέτη μας περιορίζεται στο να βρούμε ζώνες τιμολόγησης για τα δικαιώματα προαίρεσης και όχι ακριβείς τιμές. Αποδεικνύουμε ότι οι ζώνες τιμολόγησης που προκύπτουν είναι ανεξάρτητες των λεπτομερών στατιστικών χαρακτηριστικών των αποδόσεων βέβαιου κέρδους. Επιπρόσθετα, παρουσιάζουμε και αναλύουμε την καμπύλη μεταβλητότητας, γνωστή ως καμπύλη «χαμόγελο» (smile effect). Η καμπύλη αυτή απεικονίζει την τεκμαρτή μεταβλητότητα ως συνάρτηση της τιμής εξάσκησης (strike price K) ενός χρηματοοικονομικού παραγώγου, όπως για παράδειγμα ενός δικαιώματος προαίρεσης και μπορεί να εξηγηθεί σε όρους τυχαίων ευκαιριών βέβαιου κέρδους. Τέλος παραθέτουμε εφαρμογές των στοχαστικών μοντέλων μας μέσω αριθμητικών παραδειγμάτων.

Abstract

In this paper, random arbitrage opportunities and their linchpin with the pricing of financial derivatives will be studied. An unbalanced model will be used so as to set up a stochastic portfolio. As it concerns the random arbitrage return, a rapidly changing in time, stationary ergodic random process will be utilized. As option price and random arbitrage returns are changing on different time scales, an asymptotic pricing theory involving the Central Limit Theorem for random processes will be developed. Our study will be limited to finding pricing bands for options rather than accurate values, which are shown to be independent of the detailed statistical characteristics of the arbitrage returns. In addition, the volatility curve, known as the smile effect, will be shown. "Smile" curve illustrates the implied volatility as a function of the strike price of the option and can be explained in terms of the random arbitrage return. Finally, the stochastic models will be applied by using numerical examples.

Εισαγωγή

Είναι γνωστό ότι ο κλασσικός τύπος των Black-Scholes συνδέεται με την τιμολόγηση των εισηγμένων δικαιωμάτων προαίρεσης, για διαφορετική τιμή εξάσκησης και ημερομηνία λήξης, εάν χρησιμοποιούνται διαφορετικές μεταβλητότητες της τιμής μίας μετοχής [12]. Για να εξηγηθεί αυτό το φαινόμενο, το οποίο αναφέρεται ως μεταβλητότητα «χαμόγελο» (volatility "smile"), έχουν προταθεί διάφορα μοντέλα στη χρηματοοικονομική βιβλιογραφία. Αυτά περιλαμβάνουν, μεταξύ των άλλων μοντέλων στοχαστικής μεταβλητότητας [8, 16, 20], το μοντέλο Jump-Diffusion του Merton [17] και τα μη Γκαουσιανά μοντέλα τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης [4, 5]. Κάθε ένα από αυτά βασίζεται στην υπόθεση της απουσίας βέβαιου κέρδους. Ωστόσο, είναι γνωστό ότι στον πραγματικό κόσμο πάντα υπάρχουν ευκαιρίες βέβαιου κέρδους [10,23]. Φυσικά, τα άτομα, που διαπραγματεύονται μεταξύ των χρηματοπιστωτικών αγορών, εξασφαλίζουν ότι οι τιμές των τίτλων δεν ξεπερνούν τις τιμές ισορροπίας τους και επομένως το εικονικό βέβαιο κέρδος έχει πάντα μικρή διάρκεια. Ένας από τους σκοπούς αυτής της εργασίας, λοιπόν, είναι να εξηγήσει το φαινόμενο της μεταβλητότητας «χαμόγελο» όσον αφορά τις τυχαίες ευκαιρίες βέβαιου κέρδους.

Η πρώτη προσπάθεια του να ληφθεί υπόψη το εικονικό βέβαιο κέρδος στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης έγινε από τους φυσικούς [1, 14, 15]. Οι συγγραφείς υποθέτουν ότι υπάρχουν αποδόσεις βέβαιου κέρδους, οι οποίες εμφανίζονται και εξαφανίζονται σε σύντομο χρονικό διάστημα. Συγκεκριμένα, η απόδοση από το χαρτοφυλάκιο Black-Scholes, $\Pi = V - S\frac{\partial V}{\partial S}$, όπου V είναι η τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης επί ενός περιουσιακού στοιχείου, S, δεν είναι ίση με το σταθερό άνευ ρίσκου επιτόκιο r. Στην αναφορά [14, 15], οι συγγραφείς προτείνουν την εξίσωση $\frac{d\Pi}{dt} = \big(r - x(t)\big)\Pi$, όπου $x(t)$ είναι η τυχαία απόδοση βέβαιου κέρδους που ακολουθεί μια διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck. Στην αναφορά [18, 19] η ιδέα αυτή επαναδιατυπώνεται όσον αφορά την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης με το στοχαστικό επιτόκιο. Το κύριο πρόβλημα με αυτή την προσέγγιση είναι ότι το τυχαίο επιτόκιο δεν είναι εμπορεύσιμη ασφάλεια και επομένως η κλασική αντιστάθμιση δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Η δυσκολία αυτή οδηγεί στην εμφάνιση μιας άγνωστης παραμέτρου, της τιμής του κινδύνου, στην εξίσωση τιμολόγησης του παραγώγου [18,19]. Δεδομένου ότι αυτή η παράμετρος δεν είναι διαθέσιμη από τα οικονομικά στοιχεία, πρέπει να προβούμε σε περαιτέρω παραδοχές σχετικά με αυτήν. Μια εναλλακτική προσέγγιση, για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης σε μία ελλιπής αγορά, βασίζεται σε διαδικασίες ελαχιστοποίησης κινδύνου (βλέπε, για παράδειγμα, την αναφορά [2, 6, 7 ,21, 22]. Ενδιαφέρουσες ιδέες για το πώς να συμπεριλάβουμε το βέβαιο κέρδος αναπτύχθηκαν στο [11] όπου το μοντέλο τιμολόγησης Black-Scholes συζητήθηκε σε μια τοποθέτηση κβαντικής φυσικής.

Αφού ολοκληρώσαμε τη σύντομη ιστορική αναδρομή σχετικά με την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης, θα συνεχίσουμε κάνοντας μια μικρή ανασκόπηση σε κάθε κεφάλαιο χωριστά, με σκοπό να βοηθήσουμε τον αναγνώστη να αφομοιώσει καλύτερα το θέμα της παρούσας διπλωματικής εργασίας. Η εργασία μας επομένως, διαρθρώνεται ως εξής:

Στο πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζονται και δίνονται παραδείγματα που αφορούν μαθηματικές έννοιες της θεωρίας των Πιθανοτήτων. Στη συνέχεια του κεφαλαίου εισάγουμε τις έννοιες και τους ορισμούς της στοχαστικής διαδικασίας, ενώ δίνουμε ιδιαίτερη σημασία στην κίνηση Brown, παραθέτοντας την αριθμητική και γεωμετρική κίνηση Brown καθώς και τη διαδικασία Ornestein–Uhlenbeck.

Στο δεύτερο κεφάλαιο συνεχίζουμε με τις έννοιες που αφορούν τα χρηματοοικονομικά παράγωγα προϊόντα, τις κατηγορίες στις οποίες αυτά διακρίνονται, ενώ επικεντρωνόμαστε ιδιαίτερα στα δικαιώματα προαίρεσης. Ένα σημαντικό σημείο που χρήζει ιδιαίτερης σημασίας και προσοχής είναι η τιμολόγηση των παραγώγων, όπου γίνεται μία πρώτη εισαγωγή στο μοντέλο τιμολόγησης των Black-Scholes. Για να γίνουν όλα αυτά σαφή και κατανοητά παρατίθενται διάφορα παραδείγματα.

Στο τρίτο κεφάλαιο, το οποίο θα αποτελέσει και το βασικό αντικείμενο της μελέτης μας, παρουσιάζουμε μια ασυμπτωτική θεωρία τιμολόγησης η οποία βασίζεται στο κεντρικό οριακό θεώρημα (Κ.Ο.Θ) για την τιμολόγηση ενός συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης, λαμβάνοντας υπόψη τη στοχαστική μεταβλητότητα. Εστιάζουμε στην εύρεση ζωνών τιμολόγησης ενός δικαιώματος προαίρεσης οι οποίες εξηγούν τις τυχαίες ευκαιρίες βέβαιου κέρδους. Στο τέλος του κεφαλαίου δίνονται εφαρμογές, αριθμητικά παραδείγματα και γραφικές παραστάσεις ενώ στην συνέχεια ακολουθούν κάποια αξιοσημείωτα συμπεράσματα σχετικά με την μεθοδολογία που εφαρμόστηκε.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΟΡΙΣΜΟΙ

Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να φέρει τον αναγνώστη σε επαφή με τις βασικές μαθηματικές έννοιες που απαιτούνται για την κατανόηση ορισμένων θεμάτων της θεωρίας πιθανοτήτων και της στοχαστικής ανάλυσης. Οι περισσότεροι από τους ορισμούς, που θα συναντήσει ο αναγνώστης, γενικεύουν έννοιες από τη στοιχειώδη θεωρία πιθανοτήτων. Ο λόγος που διαλέξαμε να επισκοπήσουμε τη θεωρία πιθανοτήτων είναι γιατί έτσι θα μπορέσουμε να εισάγουμε έννοιες οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες στις εφαρμογές που ακολουθούν. Θα προσπαθήσουμε σε όλη τη διάρκεια του κεφαλαίου αυτού να παραθέτουμε όσο το δυνατόν περισσότερα παραδείγματα που θα ξεκαθαρίζουν τους ορισμούς που εισάγονται.

1.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Όταν μιλάμε για πιθανότητες, αυτόματα σκεπτόμαστε το πόσο εύκολο ή δύσκολο είναι να συμβεί κάποιο γεγονός. Για να διατυπώσουμε μία μαθηματική θεωρία των πιθανοτήτων θα πρέπει συνεπώς να ορίσουμε κατάλληλα τις έννοιες γεγονός και εύκολο. Αυτός είναι και ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου.

1.1.1 σ-άλγεβρες

Για να ορίσουμε μαθηματικά την έννοια του γεγονότος, ή της συλλογής γεγονότων, θα πρέπει να εισάγουμε την έννοια της σ-άλγεβρας.

Ορισμός 1.1.1 [26] *Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Μία οικογένεια υποσυνόλων του δειγματικού χώρου Ω με τις εξής ιδιότητες:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$
(ii) $\mathrm{F} \in \mathcal{F}$
(iii) $\mathrm{Αν}\ \mathrm{F} \in \mathcal{F}, τότε\ \mathrm{F}' \in \Omega$
(iv) $Αν\ A_1, A_2, \dots \in \mathcal{F}, τότε\ A \coloneqq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

*Λέγεται **σ-πεδίο** ή **σ-άλγεβρα** $\mathcal{F}$ επάνω στο σύνολο Ω.*

Από τον πιο πάνω ορισμό μπορούμε εύκολα να συνάγουμε την παρακάτω ιδιότητα: Αν $\mathcal{F}$ είναι μία σ-άλγεβρα και $A_i \in \mathcal{F}$, τότε

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'\right)' \in \mathcal{F}.$$

Παράδειγμα 1.1.1 Έστω

$$\Omega = \{3,5,7\}$$

Τότε η

$$\mathcal{F} = \{\Omega, \emptyset, \{3\}, \{5,7\}\}$$

είναι μία σ-άλγεβρα αφού μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ικανοποιεί τις συνθήκες του παραπάνω ορισμού.

Παράδειγμα 1.1.2 Έστω

$$\Omega = \{1,2,3,4\}$$

Τότε η

$$\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,3,4\}\}$$

δεν είναι μία σ-άλγεβρα γιατί περιέχει τα υποσύνολα $\{1\}$ και $\{2\}$ αλλά όχι το $\{1\} \cup \{2\} = \{1,2\}$.
Η

$$\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}\}$$

είναι μία σ-άλγεβρα. Είναι μικρότερη από τη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα υποσύνολα του Ω.

Οι σ-άλγεβρες συνήθως χρησιμοποιούνται για να περιγράψουν δομές πληροφορίας. Τα στοιχεία του συνόλου Ω μπορούν να θεωρηθούν σαν οι πιθανές καταστάσεις του κόσμου ή τα πιθανά αποτελέσματα ενός πειράματος. Μία σ-άλγεβρα, η οποία εξ ορισμού είναι ένα σύνολο των υποσυνόλων του Ω είναι κατά κάποιο τρόπο το σύνολο όλων των πιθανών ερωτήσεων που μπορεί κάποιος να θέσει για την κατάσταση του κόσμου ή για το πείραμα αυτό. Στη θεωρία πιθανοτήτων πολλές φορές τα υποσύνολα του Ω ονομάζονται γεγονότα.

Ορισμός 1.1.2 [26] *Η **ελάχιστη σ-άλγεβρα** που ορίζεται από ένα υποσύνολο A, είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το σύνολο A. Η άλγεβρα αυτή συνήθως συμβολίζεται $\sigma(A)$.*

Παράδειγμα 1.1.3 Έστω A_1 , A_2 και A_3 υποσύνολα του Ω τέτοια ώστε

$$A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j \;\kappa\alpha\iota\; A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$$

Η σ-άλγεβρα

$$\{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \cup A_2, A_2 \cup A_3, A_1 \cup A_3, \Omega\}$$

είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα $\sigma(A)$ η οποία περιέχει το $A = \{A_1, A_2, A_3\}$.

Ορισμός 1.1.3 *Η μικρότερη σ-άλγεβρα η οποία περιέχεται σε κάθε σ-άλγεβρα είναι η **τετριμμένη** ή **εκφυλισμένη** σ-άλγεβρα $\sigma = \{\emptyset, \Omega\}$.*

1.1.2 Άλγεβρα Borel

Θα ορίσουμε τώρα μία συγκεκριμένη σ-άλγεβρα η οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην μελέτη της θεωρίας πιθανοτήτων και της στοχαστικής ανάλυσης. Θα θεωρήσουμε $\Omega = \mathbb{R}$ και θα κατασκευάσουμε μία σ-άλγεβρα που αποτελείται από υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Ορισμός 1.1.4 [26] *Η **άλγεβρα Borel**, την οποία συμβολίζουμε σαν $\mathcal{B}$, είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει την κλάση $\complement$ όλων των διαστημάτων της μορφής $(-\infty, x)$, τα οποία μπορεί να θεωρηθούν ως υποσύνολα της πραγματικής ευθείας. Τα στοιχεία του $\mathcal{B}$ ονομάζονται σύνολα Borel.*

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η $\mathcal{B}$ ισούται με την κλάση ισοδυναμίας όλων των διαστημάτων της μορφής (a, b). Περιέχει επίσης όλα τα υποσύνολα που περιέχουν μόνο ένα σημείο (singletons)$\{x\}$ και μετρήσιμες ενώσεις τέτοιων υποσυνόλων (π.χ. το υποσύνολο $\{0,1,2, \ldots\}$ είναι ένα σύνολο Borel). Έτσι το $\mathcal{B}$ περιέχει πρακτικά όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ με τα οποία θα ασχοληθούμε.

Οι έννοιες της άλγεβρας Borel και των συνόλων Borel μπορούν να γενικευθούν και σε υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$, δηλαδή όταν $\Omega = \mathbb{R}^d$. Λέμε ότι ένα παραλληλόγραμμο του $\mathbb{R}^d$ είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$ της μορφής

$$(a, b] = \{x \epsilon \mathbb{R}^d : a_i < x_i < b_i, i = 1,2, \ldots, d\}$$

όπου $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^d$ και $b = (b_1, b_2, \ldots, b_d) \in \mathbb{R}^d$.

Ορισμός 1.1.5 [26] *Η σ-άλγεβρα Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα η οποία περιέχει όλα τα παραλληλόγραμμα της μορφής $(a,b]$ ή με άλλα λόγια τη σ-άλγεβρα που παράγεται από τα παραλληλόγραμμα.*

Κατά αναλογία με τα προηγούμενα η $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ περιέχει πρακτικά όλα τα υποσύνολα του $\mathbb{R}^d$ που θα μας απασχολήσουν.

Πολλές φορές θα χρειαστεί να χρησιμοποιήσουμε τις άλγεβρες Borel που παράγονται από ορισμένα διαστήματα του $\mathbb{R}$ ή γενικότερα του $\mathbb{R}^d$. Αν $d = 1$ και θεωρήσουμε το διάστημα $[a,b]\epsilon\mathbb{R}$ τότε η σ-άλγεβρα που παράγεται από τα διαστήματα που ανήκουν στον $[a,b]$ θα συμβολίζεται με $\mathcal{B}([a,b])$. Η γενίκευση για οποιοδήποτε d είναι προφανής.

1.1.3 Μετρήσιμος χώρος

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια του μετρήσιμου χώρου.

Ορισμός 1.1.6 [26] *Έστω ένα σύνολο Ω και μία σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ που αποτελείται από υποσύνολα του Ω. Το ζεύγος (Ω, $\mathcal{F}$) καλείται **μετρήσιμος χώρος** (measurable space).*

Παράδειγμα 1.1.4

(i) Ας θεωρήσουμε το σύνολο $\Omega = \{4,5,6\}$ και τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_1 = \{\Omega, \emptyset, \{5\}, \{4,6\}\}$. Το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{F}_1)$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος.

(ii) Ας θεωρήσουμε και πάλι το σύνολο Ω όπως και παραπάνω αλλά ας πάρουμε τώρα τη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_2 = \{\Omega, \emptyset, \{5\}, \{4,6\}\}$. Το ζεύγος $(\Omega, \mathcal{F}_2)$ είναι επίσης ένας μετρήσιμος χώρος.

Παράδειγμα 1.1.5

(i) ζεύγος $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος.

(ii) Το ζεύγος $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$ είναι επίσης ένας μετρήσιμος χώρος.

1.1.4 Μέτρο πιθανότητας

Παραπάνω θέσαμε την έννοια του γεγονότος. Θα ασχοληθούμε τώρα με το ερώτημα του πόσο εύκολα μπορεί να συμβεί κάποιο γεγονός. Το εύκολα θα ταυτιστεί με έναν αριθμό ο οποίος θα αντιστοιχεί σε κάποιο γεγονός που όπως είδαμε μέχρι τώρα στην μαθηματική γλώσσα μεταφράζεται σε κάποιο σύνολο που ανήκει σε μία κατάλληλα επιλεγμένη σ-άλγεβρα. Συνεπώς θα εισάγουμε την έννοια συναρτήσεων που παίρνουν ένα σύνολο και το αντιστοιχούν σε κάποιο αριθμό. Τέτοιες συναρτήσεις ονομάζονται

μέτρα. Στην θεωρία πιθανοτήτων θα χρειαστεί να εισάγουμε μία εδική περίπτωση μέτρου, το **μέτρο πιθανότητας**.

Ορισμός 1.1.7 [26] *Ένα **μέτρο πιθανότητας** P επάνω σε ένα μετρήσιμο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ είναι μία απεικόνιση $P : \mathcal{F} \to [0,1]$ με τις ιδιότητες*

(i) $P(\emptyset) = 0, P(\Omega) = 1$

(ii) *Αν $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{F}$ και τα $\{A_i\}$ είναι ανά δύο ξένα, τότε*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

*Αν παραλείψουμε τη συνθήκη $P(\Omega) = 1$ τότε λέμε ότι η P είναι ένα **μέτρο** και όχι ένα **μέτρο πιθανότητας**.*

Από τον παραπάνω ορισμό είναι σαφές ότι ένα μέτρο είναι μία απεικόνιση ενός συνόλου σε έναν πραγματικό αριθμό. Κατά κάποιο τρόπο εκφράζει το μέγεθος ενός συνόλου.

Παράδειγμα 1.1.6 Θεωρούμε ένα αμερόληπτο ζάρι καθώς και τον δειγματικό χώρο $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ ο οποίος μας δείχνει τα δυνατά αποτελέσματα που παίρνουμε από τη ρίψη του ζαριού. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

$$A_1 = \{\acute{\alpha}\rho\tau\iota o\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\} = \{2,4,6\}$$

$$A_2 = \{\pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma\} = \{1,3,5\}$$

Επειδή τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα και ισχύει ο κλασσικός ορισμός της πιθανότητας η πιθανότητα ή η σχετική συχνότητα για κάθε ενδεχόμενο είναι η ίδια και θα ισούται με $\frac{1}{6}$. Πιο συγκεκριμένα εφαρμόζοντας τον κλασσικό ορισμό της πιθανότητας

$$P(A_n) = \frac{N(A_n)}{N(\Omega)},$$

Όπου $N(A_n)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου A_n και $N(\Omega)$ είναι ο αριθμός των στοιχείων του ενδεχομένου Ω, υπολογίζουμε την πιθανότητα για καθένα από τα δύο ενδεχόμενα. Συνεπώς, η πιθανότητα για το πρώτο ενδεχόμενο θα είναι

$$P(A_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

ενώ αντίστοιχα η πιθανότητα για το δεύτερο ενδεχόμενο θα ισούται με

$$P(A_2) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

1.2 ΤΥΧΑΙΕΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ

Θα εισάγουμε τώρα τις βασικές έννοιες που χρειάζονται στον ορισμό των τυχαίων μεταβλητών και κατ' επέκταση των στοχαστικών διαδικασιών.

1.2.1 $\mathcal{F}$- μετρήσιμη συνάρτηση

Θα ξεκινήσουμε εισάγοντας την έννοια της μετρήσιμης συνάρτησης.

Ορισμός 1.2.1 *Έστω Ω κάποιο σύνολο. Η συνάρτηση $H: \Omega \to \mathbb{R}^d$ αποκαλείται **$\mathcal{F}$-μετρήσιμη** αν*

$$H^{-1}(U) = \{\omega \,\epsilon\, \Omega; H(\omega) \epsilon\, U\} \in \mathcal{F}$$

για κάθε ανοικτό σύνολο $U \in \mathbb{R}^d$.

Με άλλα λόγια λέμε ότι η συνάρτηση H είναι $\mathcal{F}$-*μετρήσιμη* αν η αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου του $\mathbb{R}^d$, κάτω από τη συνάρτηση αυτή, ανήκει στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$. Για να απαντήσουμε λοιπόν την ερώτηση αν η συνάρτηση H παίρνει τιμή στο U θα πρέπει να έχουμε στη διάθεσή μας την πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{F}$.

Μετά τα παραπάνω είμαστε έτοιμοι να παρουσιάσουμε την έννοια της τυχαίας μεταβλητής.

1.2.2 Τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός 1.2.2 *Μία (πραγματική)* ***τυχαία μεταβλητή*** *είναι μία $\mathcal{F}$-μετρήσιμη συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}^d$, όπου $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ είναι ένας χώρος πιθανοτήτων.*

Μπορούμε να θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή X σαν μία μεταβλητή που η τιμή της εξαρτάται από την έκβαση ενός τυχαίου πειράματος. Ο ορισμός αυτός μας λέει ότι για κάθε κατάσταση παίρνουμε ένα πραγματικό διάνυσμα $X \in \mathbb{R}^d$ (αν $d = 1$ παίρνουμε έναν αριθμό). Η τιμή που μπορεί να πάρει η μεταβλητή X εξαρτάται από τις εκβάσεις του πειράματος που περιέχονται στη σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$.

Παράδειγμα 1.2.1 [26] Φανταστείτε μία αναποφάσιστη οδοιπόρο σε ένα σταυροδρόμι. Δεν γνωρίζει αν θέλει να στρίψει αριστερά ή δεξιά. Για να βγει από την δύσκολη θέση αποφασίζει να στρίψει ένα νόμισμα. Αν το νόμισμα φέρει γράμματα θα στρίψει αριστερά ενώ αν φέρει κεφάλι θα στρίψει δεξιά. Στην περίπτωση αυτή ο χώρος δειγμάτων είναι $\Omega = \{\Gamma, K\}$ και μπορεί κανείς να ορίσει ένα μέτρο πιθανότητας P κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$P(\Gamma) = \frac{1}{2}, \qquad P(K) = \frac{1}{2}.$$

Η ταχύτητα της οδοιπόρου είναι μία τυχαία μεταβλητή $u : \Omega \to \mathbb{R}^2$ τέτοια ώστε

$$u(K) = (-u, 0), \qquad u(\Gamma) = (u, 0)$$

όπου u είναι το μέτρο της ταχύτητας της οδοιπόρου (το σύστημα συντεταγμένων έχει αρχή στο σταυροδρόμι).

Παράδειγμα 1.2.2 Ας θεωρήσουμε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Έστω $\omega \epsilon \Omega$. Τότε η συνάρτηση $X: \Omega \to \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται κατά τρόπο ώστε

$$X(\omega) = I_A = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ \omega \in A \\ 0, & \alpha\nu\ \omega \notin A \end{cases}$$

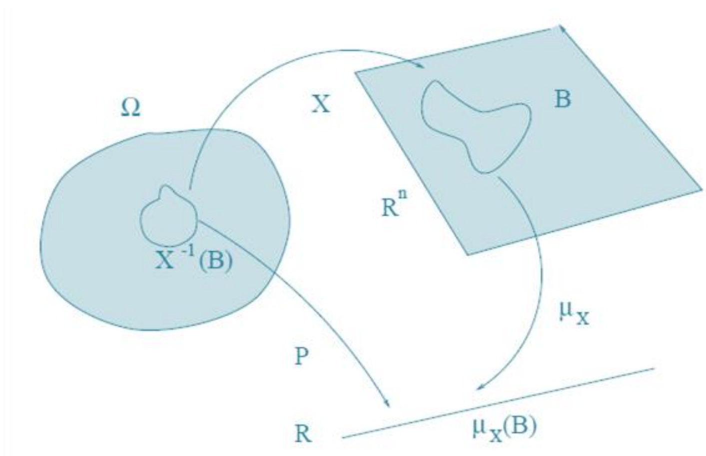
είναι μία τυχαία μεταβλητή αν το σύνολο $A \subset \Omega$ είναι ένα γεγονός ($A \in \mathcal{F}$). Η τυχαία αυτή μεταβλητή ονομάζεται **δείκτρια συνάρτηση** (indicator function) του συνόλου A.

1.2.3 Κατανομή μίας τυχαίας μεταβλητής

Κάθε τυχαία μεταβλητή X επάγει ένα μέτρο μ_X στο $\mathbb{R}^d$, το οποίο ορίζεται σύμφωνα με τη σχέση

$$\mu_X(B) = P\big(X^{-1}(B)\big)$$

για κάποιο σύνολο Borel $\mathcal{B}$ στο $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Το μέτρο αυτό αποκαλείται κατανομή της X. Η κατασκευή αυτή φαίνεται στο παρακάτω Σχήμα 1.1 [26].



Σχήμα 1.1: Η κατασκευή του μέτρου μ_X.

Τώρα ας θεωρήσουμε ότι $d = 1$ και $\mathcal{F} = \mathcal{B}$. Μπορούμε να ορίσουμε τη **συνάρτηση κατανομής** μίας τυχαίας μεταβλητής X, F_X σύμφωνα με τις σχέσεις

$$P(X \leq x) = F_X(x) \tag{1.2.1}$$

$$P(A < x \leq b) = F_X(b) - F_X(a). \tag{1.2.2}$$

Η συνάρτηση F_X καθορίζει το μέτρο πιθανότητας P. Η συνάρτηση F_X ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες

- Η F_X είναι αύξουσα.
- Η F_X είναι δεξιά συνεχής.
- Ισχύει $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$.

Αν η συνάρτηση F_X μπορεί να εκφραστεί σαν το ολοκλήρωμα Riemann μίας μη αρνητικής συνάρτησης $f(x)$ της οποίας το ολοκλήρωμα επάνω σε όλο το $\mathbb{R}$ είναι ίσο με 1, τότε η συνάρτηση $f(x)$ αποκαλείται **πυκνότητα πιθανότητας**. Σε αυτή την περίπτωση

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')dx'$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

Για τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας ισχύει

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx$$

για κάποιο $B \in \mathcal{B}$.

Παράδειγμα 1.2.3 Η συνάρτηση κατανομής μίας τυχαίας μεταβλητής X που είναι ομογενώς κατανεμημένη στο διάστημα $[0,1]$ είναι η συνάρτηση

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \end{cases}$$

Για παραπάνω από μία τυχαίες μεταβλητές μπορούμε να ορίσουμε την **από κοινού συνάρτηση κατανομής**.

Έστω $X_1, \dots, X_d$ τυχαίες μεταβλητές σε κάποιο χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Η από κοινού συνάρτηση κατανομής $F(x_1, \dots, x_d)$ των τυχαίων αυτών μεταβλητών είναι μία συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$F(x_1, \dots, x_d) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_d \leq x_d)$$

Ισχύει ότι

$$\lim_{x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_d\to\infty} F(x_1,\dots,x_d) = F_{X_i}(x_i)$$

όπου $F_{X_i}(x_i)$ είναι η συνάρτηση κατανομής πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής X_i.

1.3 ΑΝΕΞΑΡΤΗΣΙΑ

Η έννοια της ανεξαρτησίας είναι μία έννοια πολύ μεγάλης σημασίας στη θεωρία πιθανοτήτων. Θα ξεκινήσουμε ορίζοντας την έννοια της ανεξαρτησίας για γεγονότα, κατόπιν θα συνεχίσουμε ορίζοντας την έννοια της ανεξαρτησίας για συλλογές γεγονότων, δηλαδή για σ-άλγεβρες και τέλος θα ορίσουμε την έννοια της ανεξαρτησίας για τυχαίες μεταβλητές [29].

1.3.1 Ανεξάρτητα γεγονότα

Ορισμός 1.3.1 *Έστω A, B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Τα A και B λέγονται ανεξάρτητα αν ισχύει $P(A\cap B) = P(AB) = P(A)P(B)$. Χρησιμοποιώντας τη διαίσθησή μας, λέμε ότι δύο γεγονότα είναι ανεξάρτητα αν το ένα δεν επηρεάζει το άλλο.*

Αξίζει να σημειωθεί ότι, αν για το ενδεχόμενο A ισχύει $P(A) = 0$ ή $P(A) = 1$, αυτό θα είναι ανεξάρτητο από κάθε άλλο ενδεχόμενο B του ίδιου δειγματικού χώρου.

Παράδειγμα 1.3.1 Στο τυχαίο πείραμα της ρίψης ενός ζαριού δύο φορές, ας θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα

A: η ένδειξη του πρώτου ζαριού είναι 3,

B: το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών είναι 5.

Καταγράφοντας τα 36 δυνατά αποτελέσματα του πειράματος και μετρώντας πόσα από αυτά ανήκουν στα σύνολα $A, B, A\cap B$, βρίσκουμε

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}\,, P(B) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}, P(A\cap B) = \frac{1}{36}$$

και αφού

$$P(A)P(B) = \frac{1}{6} * \frac{1}{9} = \frac{1}{54} \neq \frac{1}{36} = P(A\cap B)$$

συμπεραίνουμε ότι τα ενδεχόμενα *A, B* δεν είναι ανεξάρτητα. Αν τώρα θεωρήσουμε το ενδεχόμενο

Γ: το άθροισμα των ενδείξεων των δύο ζαριών είναι 7,

μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι ισχύει

$$P(A)P(\Gamma) = \frac{1}{6} * \frac{6}{36} = \frac{1}{36} = P(A \cap \Gamma).$$

Επομένως, τα ενδεχόμενα *Α, Γ* είναι ανεξάρτητα.

Η έννοια της ανεξαρτησίας μπορεί να οριστεί και για περισσότερα των δύο γεγονότων.

Ορισμός 1.3.2 *Έστω $A_1, A_2, \dots, A_\nu, \nu \geq 2$ ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω. Τα $A_1, A_2, \dots, A_\nu$ λέγονται ανεξάρτητα, αν ισχύει η ισότητα*

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \dots A_{i_3}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \dots P(A_{i_\kappa})$$

για κάθε επιλογή κ (διαφορετικών) δεικτών $i_1, i_2, \dots, i_\kappa$ από το σύνολο $\{1,2, \dots, \nu\}$ και για κάθε $\kappa = 2,3, \dots, \nu$.

Από τον ορισμό φαίνεται ότι δεν είναι αρκετό για την ανεξαρτησία περισσότερων των δύο γεγονότων να έχουμε ανεξαρτησία ανά δύο για κάθε ζεύγος.

1.3.2 Ανεξάρτητες σ-άλγεβρες

Ας θεωρήσουμε μία σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ επάνω σε ένα σύνολο Ω.

Ορισμός 1.3.3 *Οι σ-υποάλγεβρες $\mathcal{F}_i, i \in I$ της $\mathcal{F}$ ονομάζονται ανεξάρτητες αν για κάθε υποσύνολο J του I και κάθε σύνολο $A_i \in \mathcal{F}_i$ έχουμε*

$$P\left(\bigcap_{n \in J} A_n\right) = \prod_{n \in J} P(A_n)$$

1.3.3 Ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές

Με βάση τον ορισμό των ανεξάρτητων αλγεβρών μπορούμε να ορίσουμε την έννοια των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 1.3.4 *Οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, i \in I$ ονομάζονται **ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές** αν οι σ-άλγεβρες που παράγονται από τις τυχαίες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες.*

Παράδειγμα 1.3.2 Ας θεωρήσουμε την ρίψη δύο νομισμάτων και ας ονομάσουμε X_1 την τυχαία μεταβλητή

$$X_1 = \begin{cases} 1, & \text{το πρώτο νόμισμα φέρνει κεφάλι} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και X_2 την τυχαία μεταβλητή

$$X_2 = \begin{cases} 1, & \text{το δεύτερο νόμισμα φέρνει κεφάλι} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες.

Στο παραπάνω παράδειγμα, αν η X_2 εξαρτώταν και από το αποτέλεσμα της πρώτης ρίψης, οι X_1 και X_2 δεν θα ήταν ανεξάρτητες.

1.4 ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ

Θα ασχοληθούμε τώρα με την έννοια της μέσης τιμής [29] και της διακύμανσης [29] μίας τυχαίας μεταβλητής.

1.4.1 Μέση τιμή διακριτής τυχαίας μεταβλητής

Ορισμός 1.4.1 *Έστω X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή με σύνολο τιμών $R_x = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ και συνάρτηση πιθανότητας f. Η **μέση τιμή** ή **αναμενομένη τιμή** της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από τη σχέση*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x = x_i) = \sum_{x \in R_X} x P(X = x) = \sum_{x \in R_X} x f(x)$$

με την προϋπόθεση ότι η σειρά που εμφανίζεται συγκλίνει απόλυτα.

Μερικές φορές για τη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής χρησιμοποιούνται και οι όροι **μέσος** της X ή **μαθηματική ελπίδα της** X.

Σύμφωνα με τον ορισμό της μέσης τιμής, για την ύπαρξή της είναι απαραίτητη η απόλυτη σύγκλιση της σειράς $\sum_{i=1}^{\infty} x_i P(x = x_i)$, δηλαδή θα πρέπει να υπάρχει το όριο $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i| P(x = x_i)$ και να είναι πεπερασμένο. Στην περίπτωση που η τυχαία μεταβλητή X έχει πεπερασμένο σύνολο τιμών, δηλαδή $R_x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ η προηγούμενη σειρά ανάγεται σε πεπερασμένο άθροισμα οπότε η μέση τιμή $E(X)$ ορίζεται πάντοτε.

Παράδειγμα 1.4.1 Ένας υπάλληλος ασφαλιστικής εταιρείας ο οποίος απασχολείται στο τμήμα δηλώσεων ζημιών μπορεί να διεκπεραιώσει σε μία ημέρα από 2 έως 5 δηλώσεις. Με βάση τα δεδομένα παλαιοτέρων ετών της εταιρείας, εκτιμήθηκαν οι πιθανότητες διεκπεραίωσης 2, 3, 4 και 5 δηλώσεων όπως δείχνει ο παρακάτω πίνακας. Να υπολογιστεί ο μέσος αριθμός δηλώσεων που διεκπεραιώνει ο υπάλληλος σε μία ημέρα.

Αριθμός δηλώσεων	Πιθανότητα
2	0.15
3	0.30
4	0.35
5	0.20

Αν συμβολίσουμε με X τον αριθμό των δηλώσεων που διεκπεραιώνει ο υπάλληλος σε μια ημέρα, η τυχαία μεταβλητή X θα έχει συνάρτηση πιθανότητας $f(x) = P(X = x), x \in R_X = \{2, 3, 4, 5\}$ η οποία θα δίνεται από τον πίνακα:

x	$f(x)$	$xf(x)$
2	*0.15*	***0.30***
3	*0.30*	***0.90***
4	*0.35*	***1.40***
5	*0.20*	***1.00***
Σύνολο	*1.00*	***3.60***

Επομένως,

$$E(X) = \sum_{x \in R_X} xf(x) = \sum_{x=2}^{5} xf(x) = 2 \cdot (0.15) + 3 \cdot (0.30) + 4 \cdot (0.35) + 5 \cdot (0.20) = 3.60.$$

1.4.2 Μέση τιμή συνεχούς τυχαίας μεταβλητής

Η μέση τιμή μιας συνάρτησης συνεχούς τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται με τύπο ανάλογο αυτού που χρησιμοποιήθηκε για τον ορισμό της μέσης τιμής μίας διακριτής τυχαίας μεταβλητής. Πιο συγκεκριμένα, αντικαθιστώντας στον Ορισμό 1.4.1 το σύμβολο της άθροισης με το σύμβολο της ολοκλήρωσης έχουμε τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 1.4.2 *Έστω X μία συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας f. Η **μέση τιμή** ή **αναμενομένη τιμή** της τυχαίας μεταβλητής X ορίζεται από τον τύπο*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

με την προϋπόθεση ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει απόλυτα, δηλαδή $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$.

Υπάρχουν αρκετές περιπτώσεις όπου η πληροφορία που παρέχεται από τη μέση τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής δεν είναι αρκετή για να προσδιοριστεί ικανοποιητικά η πιθανοθεωρητική συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής. Δημιουργείται συνεπώς η ανάγκη να εισαχθούν και κάποια άλλα ποσοτικά μέτρα, τα λεγόμενα **μέτρα διασποράς.** Ένα μέτρο διασποράς είναι η διακύμανση, η οποία έχει τη δυνατότητα να εκτιμάει τις δυνατές απομακρύνσεις (αποκλίσεις) τιμών της τυχαίας μεταβλητής γύρω από τη μέση τιμή $E(X)$.

1.4.3 Διακύμανση και Εναλλακτικός τύπος υπολογισμού της διακύμανσης

Ορισμός 1.4.3 *Έστω X μία τυχαία μεταβλητή (διακριτή ή συνεχής) για την οποία υπάρχει η μέση τιμή $E(X) = \mu$. Η ποσότητα*

$$\sigma^2 = V(X) = E[(X-\mu)^2] = E[\left(X - E(X)\right)^2]$$

*λέγεται **διακύμανση** της τυχαίας μεταβλητής X. Η ποσότητα $\sigma = \sqrt{V(X)}$ ονομάζεται **τυπική απόκλιση** της τυχαίας μεταβλητής X και εκφράζεται στις ίδιες μονάδες με τη X.*

Η διακύμανση μιας τυχαίας μεταβλητής X δίνεται επίσης από τον τύπο $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. Λαμβάνοντας υπόψη τον Ορισμό 1.4.3, έχουμε διαδοχικά,

$$V(X) = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right]$$

$$= E[X^2 - 2XE(X) + E^2(X)]$$

$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + [E(X)]^2$$

$$= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2$$

$$= E(X^2) - [E(X)]^2.$$

1.5 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΕΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ

Με τον όρο στοχαστική διαδικασία εννοούμε το μαθηματικό εκείνο μοντέλο το προορισμένο να περιγράψει πιθανοθεωρητικά την εξέλιξη στο χρόνο ενός φαινομένου ή ενός πειράματος.

Με βάση τις χρονικές στιγμές στις οποίες ορίζεται μια στοχαστική διαδικασία διακρίνεται σε:

- *Στοχαστικές διαδικασίες συνεχούς χρόνου:* Μια στοχαστική διαδικασία συνεχούς χρόνου ορίζεται σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή και
- *Στοχαστικές διαδικασίες διακριτού χρόνου:* Μια στοχαστική διαδικασία διακριτού χρόνου ορίζεται μόνο σε διακριτές χρονικές στιγμές.

Επιπρόσθετα, ανάλογα με τις τιμές που λαμβάνει μια στοχαστική διαδικασία έχουμε τις ακόλουθες κατηγορίες:

- *Συνεχείς στοχαστικές διαδικασίες:* Η τιμή μιας συνεχούς στοχαστικής διαδικασίας είναι μια συνεχής τυχαία μεταβλητή και
- *Διακριτές στοχαστικές διαδικασίες*: Η τιμή μιας διακριτής στοχαστικής διαδικασίας είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή.

1.5.1 Μαθηματικός ορισμός Στοχαστικών Διαδικασιών

Από τη θεωρία πιθανοτήτων γνωρίζουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή X είναι μια συνάρτηση που καθορίζει έναν αριθμό $X(\omega)$, σε κάθε εξαγόμενο ω ενός τυχαίου πειράματος, που ορίζεται σε χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Μια στοχαστική διαδικασία (stochastic process) $\{X_t(\omega), t \in T\}$ είναι μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε κοινό χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ με παράμετρο την πραγματική μεταβλητή t (χρόνος). Έτσι σε κάθε εξαγόμενο ω του τυχαίου πειράματος ορίζουμε μια συνάρτηση $X_t(\omega)$. Προφανώς $\omega \in \Omega$.

Αν το σύνολο T είναι ο άξονας των πραγματικών τότε η διαδικασία λέγεται διαδικασία συνεχούς χρόνου. Αν το T είναι σύνολο ακεραίων τότε η διαδικασία λέγεται διακεκριμένου χρόνου.

Επί πλέον η διαδικασία $X_t(\omega)$ λέγεται διακεκριμένης κατάστασης αν οι τιμές της είναι μετρητέες (αριθμήσιμες). Άλλως λέγεται συνεχούς κατάστασης.

Επομένως, η στοχαστική διαδικασία συνίσταται από μια οικογένεια συναρτήσεων $X_t(\omega)$. Για δεδομένο ω, η $X_t = X_t(\omega)$ είναι συνάρτηση του χρόνου, ενώ για δεδομένο χρόνο t, η $X(\omega) = X_t(\omega)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή. Συνήθως παραλείπουμε το ω και γράφουμε X_t ή $X(t)$.

Η θεωρία τυχαίων μεταβλητών δεν παρέχει τα μέσα για την εξέταση φαινομένων που είναι τυχαία και εξελίσσονται στο χρόνο, όπως συμβαίνει σε πολλά φυσικά συστήματα. Αυτό είναι το κίνητρο για την ανάπτυξη της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών.

Διαισθητική αντιμετώπιση [26]: Ένας τρόπος να κατανοήσουμε διαισθητικά την έννοια της στοχαστικής διαδικασίας είναι να θεωρήσουμε μία συλλογή σωματιδίων τα οποία τα παρακολουθούμε στον χρόνο. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το t είναι ο «χρόνος», ο οποίος μπορεί να είναι είτε συνεχής είτε διακριτός και το ω αντιστοιχεί σε ένα συγκεκριμένο σωματίδιο ή πείραμα. Μία συγκεκριμένη επιλογή του ω θα ονομάζεται μία πραγματοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας. Τότε $X_t(\omega)$ είναι η θέση του σωματιδίου ω την χρονική στιγμή t ή ισοδύναμα το αποτέλεσμα του πειράματος ω την χρονική στιγμή αυτή. Μπορούμε να ταυτίσουμε το κάθε ω με τη συνάρτηση $t \to X_t(\omega)$ που απεικονίζει $T \to \mathbb{R}^d$. Τότε η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ θα περιέχει τη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ που παράγεται από σύνολα της μορφής $\{\omega; \omega(t_1) \in F_1; \dots; \omega(t_k) \in F_k\}$ $F_i \in \mathbb{R}^d$ σύνολα Borel.

Το παραπάνω σχόλιο μας οδηγεί στην παρακάτω εικόνα:

Μία στοχαστική διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μέτρο πιθανότητας P σε έναν κατάλληλα ορισμένο χώρο του μέτρου, δηλαδή

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ

$\Updownarrow$

ΜΕΤΡΟ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Ας δούμε τώρα μερικά παραδείγματα στοχαστικών διαδικασιών.

Παράδειγμα 1.5.1 Ένα παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας με διακριτό σύνολο δεικτών T (διακριτό χρόνο) είναι το ακόλουθο. Ας θεωρήσουμε ότι ρίχνουμε διαδοχικά ένα νόμισμα και ω_i ας είναι το αποτέλεσμα της i ρίψης. Ας θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές X_i οι οποίες παίρνουν τις τιμές

$$X_i(\omega) = \begin{cases} 1, & \alpha\nu\ \omega_i = H \\ -1, & \alpha\nu\ \omega_i = T \end{cases}$$

Η τιμή της $\mathrm{X_i}$ μπορεί να θεωρηθεί σαν το κέρδος ενός παίκτη, κατά την i ρίψη αν ποντάρει 1 Ευρώ στο αν έρθει κεφάλι ή γράμματα. Η παραμετρισμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών $\{X_i\}, i \in \mathbb{N}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο. Η τιμή της είναι τα κέρδη του παίκτη κατά την διάρκεια του παιχνιδιού.

Παράδειγμα 1.5.2 Σαν ένα δεύτερο παράδειγμα στοχαστικής διαδικασίας σε συνεχή χρόνο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $t \in \mathbb{R}^+$ και για κάθε t ορίζουμε μία τυχαία μεταβλητή X_t η οποία έχει την κατανομή πιθανότητας

$$P(X_t \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

Συνεπώς, η X_t είναι μια στοχαστική διαδικασία και μπορούμε να θεωρήσουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ η X_t είναι μία κανονικά κατανεμημένη τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διασπορά t.

1.5.2 Στοχαστικές Διαφορικές Εξισώσεις (Stochastic Differentiate Equations)

Ορισμός 1.5.1 ***Στοχαστική διαφορική εξίσωση*** *ονομάζουμε μια εξίσωση της μορφής*

$$dX_t = \mu(t, X_t)\, dt + \sigma(t, X_t)\, dB \qquad (1.5.1)$$

όπου $X_o = x_o$, *με* $\mu, \sigma : [0, \infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *μετρήσιμες συναρτήσεις,* $x_o \in \mathbb{R}$, *και* B *(μονοδιάστατη) κίνηση Brown. 'Οταν* $\sigma \equiv 0$, *η (1.5.1) είναι η γενική μορφή της συνήθους διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης.*

Θεωρούμε τη διήθηση $(F_t)_{t\geq0}$ που παράγεται από την κίνηση Brown. Δηλαδή $F_t := \sigma(\{Bs : s \in [0, t]\})$ για κάθε $t \geq 0$. Λύση της (1.5.1) ονομάζουμε κάθε διαδικασία $(X_t)_{t\geq0}$ που

- έχει συνεχή μονοπάτια,

- είναι προσαρμοσμένη στην $(F_t)_{t\geq 0}$,
- για κάθε $t > 0$, με πιθανότητα 1, ισχύει

$$\int_0^t |\mu(s, X_s)|\, ds < \infty, \int_0^t \sigma^2\,(s, X_s)\, ds < \infty$$

- με πιθανότητα 1 ισχύει

$$X_t = x_o + \int_0^t \mu(s, X_s)\, ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)\, dB_s \text{ για κάθε } t > 0. \tag{1.5.2.}$$

Θα σχολιάσουμε τώρα τη σημασία των συναρτήσεων μ, σ. Ας υποθέσουμε ότι είναι και οι δύο τους φραγμένες και συνεχείς συναρτήσεις. Με χρήση της (1.5.2), παίρνουμε

$$E(X_{t+h} - X_t | F_t) = \int_t^{t+h} E(\,\mu(s, X_s)|F_t)ds \approx h\mu(t, X_t),$$

δηλαδή η $\mu(t,x)$ δίνει το ρυθμό της μέσης μεταβολής της X τον χρόνο t δεδομένου του παρελθόντος F_t αν $X_t = x$. Για την ερμηνεία της σ, υπολογίζουμε

$$Var(X_{t+h} - X_t|F_t) = E(\{X_{t+h} - X_t - E(X_{t+h} - X_t|F_t)\}^2|F_t)$$

$$= E\left(\left\{\int_t^{t+h} \{\mu(s, X_s) - E(\,\mu(s, X_s)|F_t)\}ds + \int_t^{t+h} \sigma(s, X_s)dB_s\right\}^2 \middle| F_t\right)$$

$$= o(h) + E\left(\left\{\int_t^{t+h} \sigma(s, X_s)dB_s\right\}^2 \middle| F_t\right) = E\left(\int_t^{t+h} \sigma^2(s, X_s)ds \middle| F_t\right) + o(h)$$

$$= h\sigma^2(t, X_t).$$

Με $o(h)$ συμβολίζουμε μια συνάρτηση $g(h)$ που έχει την ιδιότητα $\lim_{h\to 0}\frac{g(h)}{h} = 0$. 'Αρα, ξέροντας ότι $X_t = x$, για μικρό h, η διασπορά της μεταβολής $X_{t+h} - X_t$ δεδομένου του παρελθόντος F_t είναι ανάλογη του h και η $\sigma^2(t,x)$ είναι η σταθερά αναλογίας.

1.6 ΚΙΝΗΣΗ BROWN

Μία από τις πιο σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες είναι η κίνηση Brown. Η κίνηση Brown (που μπορεί να τη συναντήσει κανείς και με το όνομα διαδικασία Wiener) παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στη θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και αποτελεί έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, όσον αφορά τα μοντέλα σε συνεχή χρόνο.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την κίνηση Brown και θα παρουσιάσουμε τις κυριότερες ιδιότητές της.

1.6.1 Ορισμός της κίνησης Brown

Η κίνηση Brown [26] είναι μία στοχαστική διαδικασία W_t η οποία παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

i. Αν, $t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $W_{t_0}, W_{t_1} - W_{t_0}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους (ανεξάρτητες μεταβολές). Τα $t_0, t_1, \dots, t_n$ είναι μικρά ανεξάρτητα χρονικά διαστήματα στα οποία πραγματοποιείται η κίνηση.

ii. Αν $s, t \geq 0$, τότε

$$P\left(W_{t_{s+t}} - W_{t_s} \in A \right) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right),$$

όπου A κάποιο σύνολο $Borel$, δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι κατανεμημένες με την κανονική κατανομή, με παραμέτρους 0 και s.

iii. Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1, δηλαδή η $t \to W_t$ είναι συνεχής συνάρτηση του t.

Οι τρεις αυτές ιδιότητες ορίζουν μία και μοναδική στοχαστική διαδικασία.

Από τις ιδιότητες της κίνησης Brown μπορούμε να συνάγουμε τις ιδιότητες του μέτρου μ που αυτή επάγει (μέτρο Wiener)

$$\mu_{t_1,t_2,\dots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \int_{A_1} dx_1 \int_{A_2} dx_2 \dots \int_{A_n} dx_n \prod_{i=1}^{n} p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i)$$

όπου $x_0 = x, t_1 = 0$ και

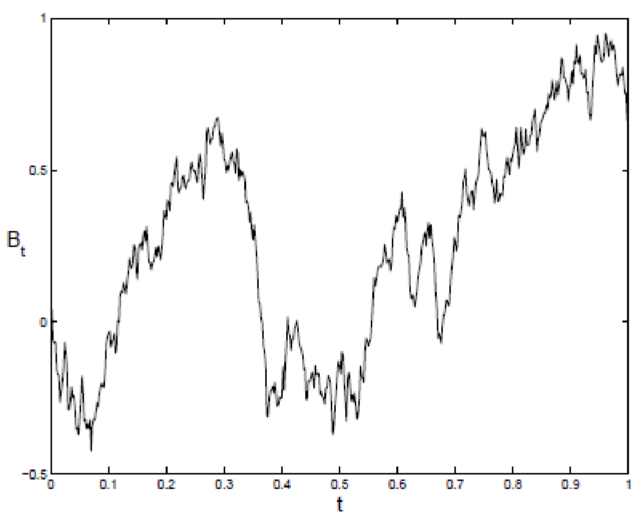
$$p(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right).$$

Η παραπάνω ποσότητα είναι κατά κάποιο τρόπο η πιθανότητα να βρίσκεται η στοχαστική διαδικασία τις χρονικές στιγμές t_i στα υποσύνολα $A_i \in \mathscr{W}(\mathbb{R})$. Μπορούμε να σκεφτούμε τα υποσύνολα αυτά σαν διαστήματα του $\mathbb{R}$ οπότε και η παραπάνω ποσότητα είναι ουσιαστικά η πιθανότητα να βρίσκεται η κίνηση Brown τις χρονικές στιγμές t_i σε συγκεκριμένα διαστήματα του$\mathbb{R}$. Η ποσότητα

$$\mu_{t_1,t_2,\ldots,t_n}(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = P(\mathrm{W}_{t_1} \in A_1, \mathrm{W}_{t_2} \in \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{W}_{t_n} \in \mathrm{A_n})$$

ονομάζεται πεπερασμένης διάστασης κατανομή και η γνώση της είναι πολύ σημαντική στο να κατασκευάσουμε το μέτρο μ.

Η κατανομή του W_t εξαρτάται από το αρχικό σημείο στο οποίο ξεκινάμε τη διαδικασία, δηλαδή το σημείο W_0. Αν $W_0 = x$ τότε η συνάρτηση κατανομής θα συμβολίζεται $P_x(W_t \in A)$ για κάποιο σύνολο $Borel\, A$. Η μέση τιμή ή η υπό συνθήκη μέση τιμή ως προς το μέτρο αυτό θα συμβολίζεται E_x ή $E_x[\cdot]$ αντιστοίχως.



Σχήμα 1.3 : Μία τροχιά της κίνησης Brown.

Παράδειγμα 1.6.1 Θα υπολογίσουμε τη διακύμανση για την διαφορά

$$W(t) - W(s), \qquad 0 \le s \le t.$$

Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί ως $W(t) - W(s) = W\big(s + (t-s)\big) - W(s)$, οπότε σύμφωνα με την ιδιότητα: «*Αν* $s, t \geq 0$, *τότε* $P\big(W_{t_{s+t}} - W_{t_s} \in A\big) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{1}{2}}} exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right)$, *όπου* A *κάποιο σύνολο* $Borel$, *δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι κατανεμημένες με την κανονική κατανομή, με παραμέτρους* 0 *και s*», προκύπτει ότι η διακύμανση είναι

$$Var(s) = t - s.$$

Παράδειγμα 1.6.2 [27] Θεωρούμε μια κίνηση Brown και το ζητούμενο είναι να υπολογίσουμε την $E[W(4)W(3)]$, δεδομένου ότι $E[W(3)] = 0$.

Για τα $W(4)$ και $W(3)$ έχουμε τα εξής:

$$W(3) = W(3) - W(0)$$

και

$$W(4) = W(4) - W(3) + W(3).$$

Οι διαφορές $W(3) - W(0)$ και $W(4) - W(3) + W(3)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.

Συνεπώς θα έχουμε

$$E[W(4)W(3)] \ = E[W(3)\{W(4) - W(3) + W(3)\}]$$

ισοδύναμα

$$E[W(4)W(3)] = E[\big(W(3)\big)^2] + E[W(3)\ \{W(4) - W(3)\}]$$

ισοδύναμα

$$E[W(4)W(3)] = E[\big(W(3)\big)^2] + E[W(3)]\ E[W(4) - W(3)]$$

ισοδύναμα

$$E[W(4)W(3)] = \ E[\big(W(3)\big)^2] - E^2[W(3)] + E^2[W(3)]\ + E[W(3)]E[W(4) - W(3)]$$

ισοδύναμα

$$E[W(4)W(3)] = Var(W(3)) + E[W(3)]\{E[W(3) + E[W(4) - W(3)]\}$$

ισοδύναμα

$$E[W(4)W(3)] = Var[W(3)].$$

1.6.2 Αριθμητική κίνηση Brown

Στην προηγούμενη ενότητα αναφερθήκαμε στον ορισμό της κίνησης Brown. Στην ενότητα αυτή θα προχωρήσουμε σε μία γενίκευση της κίνησης Brown και συγκεκριμένα στην αριθμητική κίνηση Brown.

Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \geq 0\}$ για την οποία ισχύει:

$$X(t+h) - X(t) = \mu\, h + \sigma\, Y(t+h)\sqrt{h},$$

όπου

$Y(t)$: είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί διωνυμική κατανομή,
μh : είναι η τάση ή διαφορετικά ο όρος ολίσθησης – μετατόπισης (drift term) και
$\sigma\sqrt{h}$: είναι η μεταβλητότητα (statistical noise).

Θεωρούμε επίσης $T > 0$, καθώς και μια διαμέριση του διαστήματος $[0, T]$ σε n ίσα υποδιαστήματα με $h = \frac{T}{n}$. Από τη διαμέριση θα πάρουμε

$$\begin{aligned} &X(T) - X(0) \\ &= [X(h) - X(0)] + [X(2h) - X(h)] + [X(3h) - X(2h)] + \cdots + [X(nh) - X((n-1)h)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} [X(ih) - X((i-1)h)] \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\mu h + \sigma Y(ih)\sqrt{h}) \end{aligned}$$

και για $h = \frac{T}{n}$, θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X(T) - X(0) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\mu \frac{T}{n} + \sigma Y(ih) \sqrt{\frac{T}{n}} \right) \\ &= \mu T \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} + \sigma\sqrt{T} \sum_{i=1}^{n} \frac{Y(ih)}{\sqrt{h}}. \end{aligned}$$

Η ποσότητα $\sum_{i=1}^{n} \frac{Y(ih)}{\sqrt{h}}$ σύμφωνα με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ) ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1 ή διαφορετικά η ποσότητα $\sqrt{T}\sum_{i=1}^{n} \frac{Y(ih)}{\sqrt{h}}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση T. Οπότε

$$X(T) - X(0) = \mu T + \sigma W(t),$$

με $W(t)$ την τυπική κίνηση Brown (σε μια τυπική κίνηση Brown η W ακολουθεί κανονική κατανομή και έχει μέση τιμή 0 και διακύμανση 1).

Η στοχαστική διαφορική μορφή της $X(T) - X(0) = \mu T + \sigma W(t)$ θα είναι

$$dX(t) = \mu\, dt + \sigma\, dW(t).$$

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ που ικανοποιεί την προηγούμενη σχέση, ορίζεται ως **αριθμητική κίνηση Brown,** με μέση τιμή $E[X(t) - X(0)] = \mu\, t$ και διακύμανση $Var[X(t) - X(0)] = \sigma^2 t$. Αυτό σημαίνει ότι η $X(t) - X(0)$ ακολουθεί κανονική κατανομή με παραμέτρους μt και $\sigma^2 t$. Το μ είναι ο στιγμιαίος μέσος ανά μονάδα χρόνου και το σ^2 η στιγμιαία διακύμανση ανά μονάδα χρόνου .

Παράδειγμα 1.6.2 [26] Με βάση την παρακάτω αριθμητική κίνηση Brown θα υπολογίσουμε την τάση μ και την μεταβλητότητα σ:

$$dX(t) = 0.2dt + 0.6dW(t).$$

Είναι προφανές ότι η τάση είναι η στιγμιαία μέση τιμή ανά μονάδα χρόνου η οποία είναι ίση με $\mu = 0.2$ και η μεταβλητότητα είναι η στιγμιαία διακύμανση ανά μονάδα χρόνου που ισούται με $\sigma^2 = 0.6^2 = 0.36$.

1.6.3 Η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck

Η αξία ενός εμπορεύματος δεν είναι πάντα σταθερή. Αντιθέτως, έχει την τάση να αλλάζει προς μία οποιαδήποτε κατεύθυνση και να κινείται πάντα γύρω από την μέση τιμή. Συνεπώς ένα μοντέλο μέσης αναστροφής έχει πιο οικονομική λογική από την αριθμητική κίνηση Brown.

Αυτή η αναστροφή μπορεί να ενσωματωθεί στη σχέση $dX(t) = \mu\, dt + \sigma\, dW(t)$, εάν αλλάξουμε την τάση μ. Έτσι θα έχουμε:

$$dX(t) = \lambda(\mu - X(t))\, dt + \sigma\, dW(t)$$

όπου μ είναι η μέση τιμή όπου η $X(t)$ έχει την τάση να επιστρέφει (σημείο ισορροπίας), σ είναι η μεταβλητότητα, λ είναι η ταχύτητα με την οποία επιστρέφει η $X(t)$ στο σημείο ισορροπίας και $W(t)$ είναι η τυπική κίνηση Brown.

Η στοχαστική διαδικασία Ornestein-Uhlenbeck, προκύπτει με τη λύση της παραπάνω εξίσωσης, ως εξής:

Θεωρούμε $Y(t) = X(t) - \mu$. Οπότε έχουμε:

$$d(Y(t) + \mu) = \lambda(\mu - Y(t) - \mu)dt + \sigma dW(t) \Longrightarrow$$

$$dY(t) = -\lambda Y(t)dt + \sigma dW(t) \Longrightarrow$$

$$dY(t) + \lambda Y(t)dt = \sigma dW(t)$$

η οποία μπορεί να γραφτεί:

$$d\left[e^{\lambda t}Y(t)\right] = e^{\lambda t}\sigma dW(t)$$

Ολοκληρώνοντας από το 0 έως το t παίρνουμε το παρακάτω:

$$e^{\lambda t}Y(t) - Y(0) = \sigma \int_0^t e^{\lambda z} dW(z) \Longrightarrow$$

$$Y(t) = Y(0)e^{-\lambda t} + \sigma e^{-\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda z} dW(z) \Longrightarrow$$

$$Y(t) = Y(0)e^{-\lambda t} + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-z)} dW(z)$$

Αντικαθιστώντας με $Y(t) = X(t) - \mu$, έχουμε τελικά:

$$X(t) = X(0)e^{-\lambda t} + \mu\left(1 - e^{-\lambda t}\right) + \sigma \int_0^t e^{-\lambda(t-z)} dW(z).$$

Μία άλλη ειδική περίπτωση της κίνησης Brown είναι η γεωμετρική κίνηση Brown, με την οποία θα ασχοληθούμε στην επόμενη ενότητα.

1.6.4 Η Γεωμετρική Κίνηση Brown

Στην προηγούμενη ενότητα ασχοληθήκαμε με την αριθμητική κίνηση Brown. Μία άλλη ειδική περίπτωση της κίνησης Brown είναι η γεωμετρική. Το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown είναι πολύ διαδεδομένο στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά και μπορεί να περιγράψει προσεγγιστικά την εξέλιξη της τιμής των μετοχών σε συνεχή χρόνο. Παρακάτω θα ορίσουμε τη γεωμετρική κίνηση Brown [31], μελετώντας την εξέλιξη της τιμής των μετοχών σε συνεχή χρόνο.

Έστω, λοιπόν, $S(t)$ η τιμή της μετοχής που μας ενδιαφέρει στον χρόνο t. Ξεκινώντας την μελέτη της τιμής $S(t)$, το πρώτο που μπορεί κανείς να κάνει είναι να περιγράψει την συμπεριφορά της διαδικασίας $\{S(t), t \geq 0\}$ σε ένα πολύ μικρό διάστημα του χρόνου. Επομένως, χωρίζουμε το χρονικό διάστημα $(0, \tau]$ σε n υποδιαστήματα ίσου πλάτους $\Delta t = \frac{\tau}{n}$ (με Δt «μικρό»). Στο i-οστό διάστημα χρόνου $(t_i, t_i + \Delta t] = ((i-1)\Delta t, i\Delta t]$, θεωρούμε ότι η ποσοστιαία αυξομείωση της S είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή και διασπορά ανάλογη του Δt, και ανεξάρτητη από το παρελθόν της διαδικασίας. Δηλαδή,

$$\frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_i)}{S(t_i)} = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_i$$

όπου $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν κανονική κατανομή με παραμέτρους 0 και 1$\sim N(0,1)$, δηλαδή $\mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_i \sim N(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$ για κάποιες σταθερές μ, σ^2. Οι τυχαίες μεταβλητές $\sqrt{\Delta t} Z_1$, $\sqrt{\Delta t} Z_2$,…. $\sqrt{\Delta t} Z_n$ τώρα μπορούν να θεωρηθούν ως οι προσαυξήσεις μιας κίνησης Brown (γνωρίζουμε ότι οι προσαυξήσεις μιας κίνησης Brown είναι ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές) και επομένως μπορούμε να γράψουμε το εξής:

$$\frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_i)}{S(t_i)} = \mu \Delta t + \sigma \big(W(t_i + \Delta t) - W(t_i)\big)$$

όπου $\{W(t), t \geq 0\}$ μία τυπική κίνηση Brown, και συνεπώς $W(t_i + \Delta t) - W(t_i) \sim N(0, \Delta t)$. Η παραπάνω σχέση μπορεί να γραφτεί:

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \mu \Delta t + \sigma \Delta W(t).$$

Εάν θεωρήσουμε ότι το $\Delta t \to 0$, τότε από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t),$$

ή ισοδύναμα,

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW(t)$$

.

Η παραπάνω εξίσωση είναι μία στοχαστική διαφορική εξίσωση (ΣΔΕ) για τη διαδικασία S και χρησιμοποιείται για να δείξει την «δυναμική» της στοχαστικής διαδικασίας S.

Από τη σχέση $\frac{S(t_i + \Delta t) - S(t_i)}{S(t_i)} = \mu \Delta t + \sigma \big(W(t_i + \Delta t) - W(t_i)\big)$, παρατηρούμε ότι:

$$S(t_i + \Delta t) - S(t_i) = \mu S(t_i) \Delta t + \sigma S(t_i) \big(W(t_i + \Delta t) - W(t_i)\big)$$

και αν αθροίσουμε κατά μέλη έχουμε:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \big(S(t_i + \Delta t) - S(t_i)\big) = \mu \sum_{i=1}^{n-1} S(t_i) \Delta t + \sigma \sum_{i=1}^{n-1} S(t_i) \big(W(t_i + \Delta t) - W(t_i)\big).$$

Επιπρόσθετα, για $\Delta t \to 0$, ισχύει ότι $S(\tau) - S(0) = \mu \int_0^\tau S(t)dt + \sigma \int_0^\tau S(t)dW(t)$, όπου τώρα τα ολοκληρώματα που εμφανίζονται μπορούν φυσιολογικά να ορισθούν ως τα όρια των παραπάνω αθροισμάτων. Συνήθως γράφουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση, που είδαμε παραπάνω, $dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$, όπου, όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η $\{W(t), t \geq 0\}$ είναι μία τυπική κίνηση Brown και η S, που ικανοποιεί την παραπάνω ΣΔΕ αποτελεί μια ειδική περίπτωση μιας διαδικασίας Itô [Παράρτημα 1].

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, η στοχαστική διαδικασία $S = \{S(t), t \geq 0\}$ που περιγράφει την εξέλιξη της τιμής μιας μετοχής θα πρέπει να ικανοποιεί την ΣΔΕ:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$$

(δηλ. την ισοδύναμη στοχαστική ολοκληρωτική εξίσωση). Αποδεικνύεται (χρησιμοποιώντας το γνωστό ως λήμμα του Itô) ότι ο λογάριθμος της διαδικασίας S θα ικανοποιεί την ΣΔΕ

$$d(\ln S(t)) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t), όπου\ W \sim BM(0,1).$$

Από την παραπάνω σχέση, χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση, δηλαδή ολοκληρώνοντας κατά μέλη από 0 έως t, προκύπτει ότι

$$\ln S(t) - \ln S(0) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dW(t),$$

όπου $\ln S(t) \sim N\left(\ln S(0) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$.

Δηλαδή η διαδικασία $\ln S(t) \sim BM\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$ και συνεπώς η S που ικανοποιεί την παραπάνω ΣΔΕ θα είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown.

Σε αυτό το σημείο θα κάνουμε μία σύνοψη των όσων έχουμε μελετήσει μέχρι τώρα. Συγκεκριμένα, στο κεφάλαιο αυτό, είδαμε τις βασικές έννοιες της θεωρίας πιθανοτήτων, τους ορισμούς της στοχαστικής διαδικασίας, της θεωρίας μέτρου, της κίνησης Brown, της αριθμητικής κίνησης Brown καθώς και της γεωμετρικής κίνησης Brown. Στην συνέχεια, παρουσιάσαμε εφαρμογές και παραδείγματα, με σκοπό να τονιστεί η σημαντικότητα αυτών των εννοιών, και να συμβαδίσει με την αφομοίωση τους από τους αναγνώστες. Στο κεφάλαιο που ακολουθεί, θα εστιάσουμε στην αγορά χρηματοοικονομικών παραγώγων και την τιμολόγησή τους. Η κατανόηση τους θα αποτελέσει το εφαλτήριο για το τρίτο κεφάλαιο, το οποίο είναι το αντικείμενο μελέτης της εργασίας μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΩΝ BLACK-SCHOLES ΣΤΗΝ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Τα παράγωγα αποτελούν ένα σύνολο διαφορετικών χρηματοοικονομικών προϊόντων, τα οποία έχουν ένα τουλάχιστον κοινό χαρακτηριστικό, η αξία τους διαμορφώνεται από την αξία άλλων χρηματοοικονομικών αξιών, όπως συναλλάγματος, επιτοκίων, μετοχών, ομολόγων ή χρηματιστηριακών δεικτών. Συνεπώς, τα παράγωγα είναι χρηματοοικονομικά εργαλεία που δημιουργούνται ή διαφορετικά παράγονται από τους συμμετέχοντες στην αγορά, έτσι ώστε να μπορούν να διαπραγματευτούν και να διαχειριστούν πιο αποτελεσματικά το περιουσιακό στοιχείο πάνω στο οποίο είναι βασισμένα. Οι αξίες τους παράγονται εξ'ολοκλήρου από το υποκείμενο μέσο – αγαθό επάνω στο οποίο είναι βασισμένα. Το υποκείμενο μέσο μπορεί να είναι ένα εμπόρευμα ή αγαθό όπως το σιτάρι, το βαμβάκι ή ένα χρηματοοικονομικό προϊόν, όπως έχει ήδη αναφερθεί.

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει αναφορά στους τρόπους κατηγοριοποίησης των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, όπως επίσης και στα είδη αυτών. Ιδιαίτερη έμφαση θα δοθεί στα Δικαιώματα Προαίρεσης όπου θα αναπτυχθούν τα είδη αυτών και θα μελετηθεί αναλυτικά η συμπεριφορά τους μέσα από παραδείγματα. Στο τέλος του κεφαλαίου θα δοθούν αριθμητικές μέθοδοι που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την τιμολόγηση παράγωγων προϊόντων και θα εστιάσουμε κυρίως στην εξίσωση των Black-Scholes.

2.1 ΚΑΤΗΓΟΡΙΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Παραπάνω έγινε μία προσπάθεια να δοθεί ένας ενιαίος ορισμός που να καλύπτει το σύνολο των χρηματοοικονομικών παραγώγων. Ωστόσο κάτι τέτοιο είναι ιδιαίτερα δύσκολο λόγω των πολλών και διαφορετικών ειδών που υπάρχουν. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα να υπάρχουν πολλοί και διαφορετικοί τρόποι ταξινόμησης αυτών.

Κάποιοι από αυτούς είναι:

- Ανάλογα με το είδος των δικαιωμάτων και των υποχρεώσεων που αποκτούν οι συμβαλλόμενοι.
- Ανάλογα με το είδος της υποκείμενης αξίας.
- Ανάλογα με το εάν διαπραγματεύονται σε οργανωμένη αγορά (χρηματιστήριο).
- Ανάλογα με το εάν ο διακανονισμός τους είναι εις είδος ή εις χρήμα.

Από τους πιο σημαντικούς και ορθούς διαχωρισμούς είναι αυτός που γίνεται ανάλογα με το είδος των δικαιωμάτων και των υποχρεώσεων που αποκτούν οι συμβαλλόμενοι. Σύμφωνα με αυτόν προκύπτουν οι ακόλουθες κατηγορίες χρηματοοικονομικών παραγώγων.

2.1.1 Συμβάσεις ανταλλαγής (Swaps)

Οι Συμβάσεις Ανταλλαγής ή αλλιώς Swaps [24] αποτελούν παράγωγα προϊόντα. Συγκεκριμένα πρόκειται για μία συμφωνία μεταξύ δύο συμβαλλομένων για ανταλλαγή μελλοντικών χρηματοροών με τρόπο που έχουν προκαθορίσει μεταξύ τους. Τα χρηματικά ποσά που ανταλλάσσονται είναι σταθερά και μπορεί να αναφέρονται σε διαφορετικά νομίσματα. Διαφορετικά, μπορεί ένα σταθερό ποσό να ανταλλάσσεται με ένα μεταβαλλόμενο, αβέβαιο ποσό ή το ποσό πληρωμής στο ένα νόμισμα να είναι σταθερό ενώ στο άλλο μεταβαλλόμενο. Υπάρχουν 4 διαφορετικές κατηγορίες swap οι οποίες είναι οι εξής:

- Συμβάσεις Ανταλλαγής Επιτοκίων (interest rates swap)
- Συμβάσεις Ανταλλαγής Νομισμάτων (currency swap)
- Συμβάσεις Ανταλλαγής Εμπορευμάτων (commodities swap)
- Συμβάσεις Ανταλλαγής Μετοχών (equity swap)

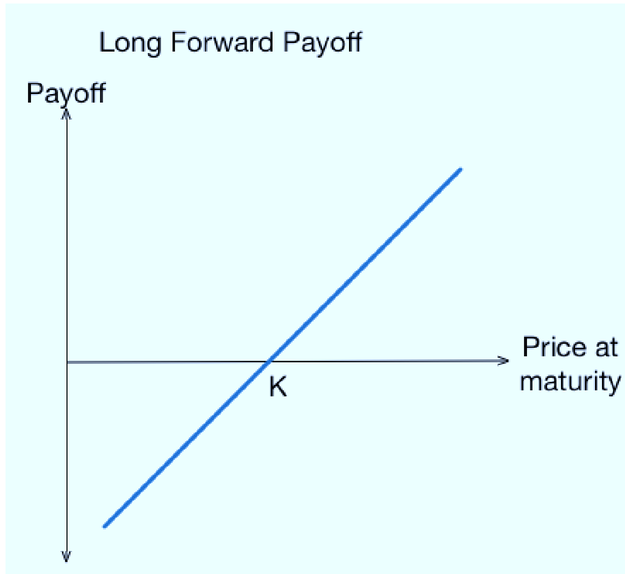
Τα παράγωγα διαχωρίζονται ανάλογα με το αν διαπραγματεύονται ή όχι σε οργανωμένες αγορές. Υπάρχουν παράγωγα τα οποία δεν διαπραγματεύονται στις οργανωμένες αγορές και ονομάζονται Over-the-Counter. Τέτοια παράγωγα προϊόντα είναι και τα swaps ή Συμβάσεις Ανταλλαγής. Στις οργανωμένες αγορές παραγώγων υπάρχουν αυστηροί κανόνες τους οποίους οι επενδυτές πρέπει να υπακούουν. Τα παράγωγα προϊόντα χρησιμοποιούνται κυρίως για δύο λόγους. Ο πρώτος είναι η επίτευξη κέρδους μέσω των μεταβολών στις τιμές των υποκείμενων, μέσω δηλαδή των εμπορευμάτων, των αξιών, των επιτοκίων ή των οικονομικών δεικτών, ενώ ο δεύτερος είναι η προστασία έναντι των οικονομικών κινδύνων.

Οι σημαντικότεροι κίνδυνοι τους οποίος αναλαμβάνουν οι επενδυτές σε τέτοιες συμβάσεις είναι ο Κίνδυνος Υποκείμενου Μέσου, δηλαδή ο κίνδυνος που προέρχεται από τις μεταβολές στην αξία του υποκείμενου μέσου, ο Πιστωτικός Κίνδυνος Αντισυμβαλλομένου, δηλαδή ο κίνδυνος που προέρχεται από τη μη εκπλήρωση από τον αντισυμβαλλόμενο των συμβατικών υποχρεώσεών του και ο Κίνδυνος Διακανονισμού, δηλαδή ο κίνδυνος να μην είναι εγκαίρως δυνατή η εκκαθάριση των προγραμματισμένων συναλλαγών. Η ανασφάλεια που δημιουργεί ο Πιστωτικός Κίνδυνος, έγινε προσπάθεια να αντιμετωπιστεί με την διαμεσολάβηση πιστωτικών ιδρυμάτων στις Συμβάσεις Ανταλλαγής. Η πιο απλή Σύμβαση Ανταλλαγής είναι το Plain Vanilla Interest Rate Swap, όπου ανταλλάσσονται ποσά που καθορίζονται από ένα σταθερό επιτόκιο (swap coupon) και από ένα κυμαινόμενο επιτόκιο επί κάποιου ονομαστικού κεφαλαίου (notional).

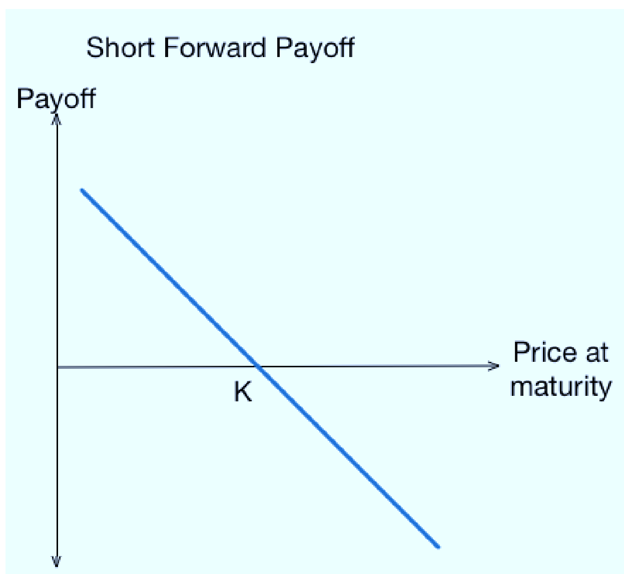
2.1.2 Προθεσμιακά συμβόλαια – ΠΣ (Forward Contracts)

Τα Προθεσμιακά Συμβόλαια (ΠΣ) [24] αποτελούν την απλούστερη μορφή παραγώγου. Τέτοια συμβόλαια συνήθως πραγματοποιούνται μεταξύ μεταξύ δύο μερών για παράδειγμα μεταξύ δύο χρηματοοικονομικών ιδρυμάτων ή μεταξύ δύο μεγάλων εταιρειών και η διαπραγμάτευση τους γίνεται εκτός χρηματιστηριακής αγοράς. Δηλαδή έχουμε μια διαπραγμάτευση της μορφής Over The Counter. Σύμφωνα με τους όρους του συμβολαίου ο ένας αντισυμβαλλόμενος και πιο συγκεκριμένα αυτός που έχει τη θέση αγοράς (long position) συμφωνεί να αγοράσει μια ποσότητα ενός συγκεκριμένου αγαθού, για παράδειγμα μίας μετοχής, σε μια προκαθορισμένη τιμή, K, σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή, T, στο μέλλον. Ο αντισυμβαλλόμενος που σύμφωνα με το συμβόλαιο έχει τη θέση πώλησης (short position), είναι υποχρεωμένος να πουλήσει τη συγκεκριμένη ποσότητα του αγαθού στην προκαθορισμένη τιμή, K, σε συγκεκριμένο χρονικό σημείο, T, στο μέλλον.

Ένας επενδυτής έχει λάβει «long position», όταν έχει λάβει μία θέση που του αποφέρει κέρδος με την αύξηση της τιμής του αγαθού και ζημιά με τη μείωσή του. Αντίθετα, ένας επενδυτής έχει λάβει «short position», όταν του αποφέρει ζημιά η αύξηση της τιμής του αγαθού και κέρδος η μείωσή της.



Εικόνα 2.1 Διάγραμμα αποπληρωμής από την αγορά ενός Προθεσμιακού Συμβολαίου.



Εικόνα 2.2 Διάγραμμα αποπληρωμής από την πώληση ενός Προθεσμιακού Συμβολαίου.

2.1.3 Συμβάσεις Μελλοντικής Εκπλήρωσης – ΣΜΕ (Futures)

Τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ) [24] ανήκουν στην οικογένεια των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ) είναι απρόσωπες συμφωνίες μεταξύ δύο συμβαλλομένων για αγορά ή πώληση μιας συγκεκριμένης ποσότητας ενός υποκείμενου τίτλου σε συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία και σε προκαθορισμένη τιμή που έχει συμφωνηθεί κατά την αγοραπωλησία.

Οι κυριότερες κατηγορίες Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης ανάλογα με τον υποκείμενο τίτλο είναι:

- Bonds Futures (ΣΜΕ με υποκείμενο τίτλο τα ομόλογα).
- Currency Futures (ΣΜΕ με υποκείμενο τίτλο μια συναλλαγματική ισοτιμία).
- Index Futures / Interest Rate Futures (ΣΜΕ με υποκείμενο τίτλο ένα χρηματιστηριακό ή χρηματοοικονομικό δείκτη).
- Commodity Futures (ΣΜΕ με υποκείμενο τίτλο ένα εμπορεύσιμο αγαθό).

Ένα Συμβόλαιο Μελλοντικής Εκπλήρωσης όπως προαναφέρθηκε, μπορεί να αγοραστεί και να πωληθεί, άρα υπάρχει η θέση αγοράς (long position) και η θέση πώλησης (short position). Ο αγοραστής του υποκείμενου τίτλου λαμβάνει τη θέση «long position» και αναμένει άνοδο της τιμής του υποκείμενου τίτλου ή προϊόντος ενώ ο πωλητής λαμβάνει τη θέση «short position», δηλαδή αναμένει την μείωση της τιμής του υποκείμενου τίτλου ή του προϊόντος. Η διαφορά στην τιμή πώλησης και στην τιμή αγοράς αποτελεί το κέρδος ή τη ζημιά του επενδυτή. Ο αγοραστής (Long Futures) έχει περιορισμένη ενδεχόμενη ζημία και απεριόριστο ενδεχόμενο κέρδος ενώ ο πωλητής (Short Futures) περιορισμένο ενδεχόμενο κέρδος και απεριόριστη ενδεχόμενη ζημία. Πιο συγκεκριμένα, ο αγοραστής, αν η τιμή αγοράς του ΣΜΕ είναι μικρότερη από την τρέχουσα τιμή, μπορεί να εισπράξει κέρδος ίσο με τη διαφορά. Όσο πιο μικρή είναι η τιμή που αγοράζει και όσο πιο μεγάλη η τιμή που έχει ο υποκείμενος τίτλος στην τρέχουσα αγορά τόσο μεγαλύτερο κέρδος έχει. Τα κέρδη και ζημίες αντιπροσωπεύουν ένα παίγνιο μηδενικού αθροίσματος (zero sum game), που σημαίνει ότι, για κάθε ευρώ που κερδίζει ο ένας των αντισυμβαλλόμενων, ο άλλος πρέπει να το χάσει. Ο επενδυτής ενός ΣΜΕ μπορεί να το αφήσει να εκπνεύσει, δηλαδή αν έχει θέση αγοράς υποχρεούται να αγοράσει το υποκείμενο προϊόν ενώ αν έχει θέση πώλησης θα πρέπει να το πουλήσει σε συγκεκριμένη τιμή συγκεκριμένη ποσότητα ή μπορεί να επιλέξει να κλείσει τη θέση του. Το κλείσιμο μιας θέσης σε ΣΜΕ γίνεται απλώς αναλαμβάνοντας μια αντίθετη θέση στο ίδιο συμβόλαιο.

Τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης είναι τυποποιημένα, υποκείμενα διαπραγμάτευσης σε οργανωμένες ή ρυθμιζόμενες αγορές και σε αντίθεση με τα Προθεσμιακά Συμβόλαια υπάρχει εγγύηση του Χρηματιστηρίου Παραγώγων για την εκπλήρωση τους. Αυτό σημαίνει πως ο επενδυτής (αγοραστής – πωλητής μιας σύμβασης μελλοντικής εκπλήρωσης) υποχρεούται να διατηρεί έναν λογαριασμό περιθωρίων (margin account). Σε αυτόν τον λογαριασμό ο επενδυτής καταθέτει ένα ποσοστό (5% έως 10%) της ονομαστικής αξίας του συμβολαίου ως περιθώριο ασφάλισης (maintenance margin) το οποίο έχει καθοριστεί από το Χρηματιστήριο

Παραγώγων. Το ποσό αυτό αποτελεί την ασφάλεια σε περίπτωση που ο επενδυτής δεν μπορεί να αντεπεξέλθει στις υποχρεώσεις που προκύπτουν από τον ημερήσιο διακανονισμό. Το απαιτούμενο ποσό για να γίνει μια συναλλαγή ονομάζεται αρχικό περιθώριο (initial margin). Το απαιτούμενο αυτό περιθώριο μεταβάλλεται από τις μεταβολές στην τιμή του υποκειμένου και από τις προσδοκίες των επενδυτών.

Τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης χρησιμοποιούνται για την προστασία του χαρτοφυλακίου από το ενδεχόμενο πτώσης των τιμών, αλλά και ως βραχυχρόνια εργαλεία για την λήψη μοχλευμένης θέσης στην αγορά. Πιο αναλυτικά χρησιμοποιούνται ως:

- Μέσο αντιστάθμισης κινδύνου για την προστασία του χαρτοφυλακίου από τις απρόβλεπτες κινήσεις της αγοράς (Hedging). Είναι η διαδικασία εξάλειψης ή ελαχιστοποίησης του κινδύνου μιας επένδυσης, μέσω της εκτέλεσης μιας αντίθετης επενδυτικής πράξης. Η διαδικασία αυτή διευκολύνεται με το άνοιγμα μιας αντίθετης θέσης με τα κατάλληλα χρηματοοικονομικά προϊόντα (όπως είναι τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης σε μετοχές και τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης σε δείκτες).
- Μέσο συναλλαγής (Trading).
- Μέσο για διενέργεια Arbitrage. Είναι η διενέργεια αγοράς αγαθών (καθώς και ξένου συναλλάγματος, τίτλου, χρυσού) σε χαμηλές τιμές και η ταυτόχρονη μεταπώλησή τους σε άλλη αγορά, όπου τα αγαθά αυτά έχουν υψηλότερες τιμές, ώστε να επωφεληθεί ο έμπορος από τη διαφορά.

Παράδειγμα 2.1.1 Ένας επενδυτής λαμβάνει θέση «short position», συνεπώς πουλάει ένα ΣΜΕ με υποκείμενο τίτλο εκατό (100) μετοχές των ΕΛΠΕ με τιμή συναλλαγής $K = €6.89$, την μετοχή. Η ημερομηνία λήξεως είναι σε τρεις μήνες. Ταυτόχρονα, κάποιος άλλος επενδυτής λαμβάνει θέση «long position» και αγοράζει το ίδιο ΣΜΕ. Ο πωλητής και ο αγοραστής ανοίγουν έναν λογαριασμό περιθωρίων καταθέτοντας το 12% της ονομαστικής αξίας του συμβολαίου, δηλαδή $12\% * (K * 100) = €82.68$. Αν η τιμή της μετοχής ανέβει στα €7.23, τότε εάν ο αγοραστής αποφασίσει να κλείσει την ανοικτή του θέση, θα έχει κέρδος €0.34, ανά μετοχή.

2.1.4 Χρηματοοικονομικά Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

Οι Συμβάσεις Δικαιωμάτων Προαίρεσης [24] αποτελούν μια από τις πιο γνωστές κατηγορίες παραγώγων. Είναι παρόμοιες συμβάσεις με τις Συμβάσεις Μελλοντικής

Εκπλήρωσης με τη διαφορά ότι οι πρώτες δίνουν στον αγοραστή το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, έναντι καταβολής τιμήματος να αγοράσει ή να πουλήσει μία υποκείμενη αξία σε μία συγκεκριμένη τιμή (τιμή εξάσκησης) έως μία καθορισμένη ημερομηνία λήξης. Από την άλλη ο πωλητής του δικαιώματος, είναι υποχρεωμένος, έναντι είσπραξης τιμήματος να αναλάβει ή παραδώσει την υποκείμενη αξία στον αγοραστή αν αυτός ασκήσει το δικαίωμά του. Οι συμβάσεις δικαιωμάτων προαίρεσης είναι αντικείμενο διαπραγμάτευσης τόσο σε ρυθμιζόμενες αγορές, όσο και Over-The-Counter.

Τα βασικά στοιχεία των δικαιωμάτων είναι επιγραμματικά τα παρακάτω:

1. **Το είδος του δικαιώματος**.
2. **Ο Υποκείμενος Τίτλος**.
3. **Μέγεθος συμβολαίου.**
4. **Ημερομηνία λήξης (Maturity)**.
5. **Τιμή εκτέλεσης/εξάσκησης (Strike / Exercise Price).**
6. **Ασφάλιστρο ή Τιμή Δικαιώματος (Premium)**.

Τα δικαιώματα προαίρεσης κατηγοριοποιούνται ανάλογα με τον χρόνο άσκησής τους. Όταν παρέχεται η δυνατότητα άσκησης του δικαιώματος προαίρεσης ανά πάσα στιγμή έως την ημερομηνία λήξης ονομάζεται αμερικάνικου τύπου (American), ενώ όταν το δικαίωμα παρέχεται μόνο στην λήξη της συναλλαγής ονομάζεται ευρωπαϊκού τύπου (European). Κατηγοριοποίηση των δικαιωμάτων προαίρεσης γίνεται και ανάλογα με το υποκείμενο μέσο σε:

- Συμβάσεις Δικαιωμάτων Προαίρεσης με υποκείμενο μέσο ένα χρηματιστηριακό δείκτη (Index Options).
- Συμβάσεις Δικαιωμάτων Προαίρεσης με υποκείμενο μέσο μία μετοχή (Stock Options).
- Συμβάσεις Δικαιωμάτων Προαίρεσης με υποκείμενο μέσο μία ισοτιμία (Currency Options).
- Συμβάσεις Δικαιωμάτων Προαίρεσης με υποκείμενο μέσο ένα επιτόκιο αναφοράς (Interest Rate Options).
- Συναλλαγές Κατώτατου επιτοκίου (Interest Rate Floor).
- Συναλλαγές Ανώτατου επιτοκίου (Interest Rate Cap).
- Συμβάσεις Δικαιωμάτων Προαίρεσης με υποκείμενο μέσο ένα εμπορεύσιμο αγαθό (Commodity Options).

2.2 ΤΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΑ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΜΕΣΑ ΑΠΟ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Όπως αναφέραμε και στην προηγούμενη ενότητα Δικαίωμα Προαίρεσης καλείται μία συμφωνία μεταξύ δύο μερών, δηλαδή του αγοραστή και του πωλητή του δικαιώματος, με τη μεσολάβηση του Χρηματιστηρίου Παραγώγων. Η συμφωνία αυτή δίνει στον αγοραστή το δικαίωμα - και όχι την υποχρέωση να αγοράσει (ή να πωλήσει, ανάλογα με το είδος του δικαιώματος) από τον πωλητή του δικαιώματος ένα συγκεκριμένο αγαθό Α σε μία προκαθορισμένη τιμή, K, κατά τη διάρκεια μίας χρονικής περιόδου $[0, T]$ ή σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή, T, στο μέλλον.

Το Δικαίωμα Προαίρεσης είναι πιο σύνθετο παράγωγο από τα ΣΜΕ και τα ΠΣ διότι τώρα ο αγοραστής του δικαιώματος (holder) δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμά του παρά μόνο εάν τον συμφέρει.

Ένα Δικαίωμα Προαίρεσης χαρακτηρίζεται από τα εξής:

1. **Το είδος του δικαιώματος**. Δικαίωμα αγοράς – call option ή δικαίωμα πώλησης – put option.
2. **Ο Υποκείμενος Τίτλος**. Ο υποκείμενος τίτλος μπορεί να ένας τίτλος, μια μετοχή, ένας χρηματιστηριακός δείκτης, ένα αγαθό βάσει του οποίου συνάπτεται το δικαίωμα. Είναι δηλαδή το προϊόν, το οποίο ο κάτοχος του δικαιώματος αγοράς δικαιούται να αγοράσει και ο κάτοχος του δικαιώματος πώλησης δικαιούται να πουλήσει.
3. **Μέγεθος συμβολαίου.** Το μέγεθος των συμβολαίων δικαιωμάτων περιλαμβάνει τον αριθμό των μετοχών που καλύπτει το κάθε δικαίωμα. Στο Χ.Π.Α. ένα συμβόλαιο μετοχικών δικαιωμάτων αποτελείται από 100 μετοχές το καθένα (π.χ. ένα συμβόλαιο με υποκείμενο τίτλο τη μετοχή του ΟΤΕ, μπορεί να αντιστοιχεί σε 100 μετοχές του ΟΤΕ).
4. **Ημερομηνία λήξης (Maturity)**. Αναφέρεται στο χρονικό πλαίσιο μέσα στο οποίο ένα δικαίωμα θα εξασκηθεί. Είναι δηλαδή ο χρόνος μέχρι την λήξη.
5. **Τιμή εκτέλεσης/εξάσκησης (Strike / Exercise Price) – $\boldsymbol{K}$.** Είναι η προκαθορισμένη τιμή στην οποία ο κάτοχος ενός δικαιώματος αγοράς/πώλησης μπορεί να αγοράσει/πωλήσει τον τίτλο (εάν επιλέξει να εξασκήσει το δικαίωμα).
6. **Ασφάλιστρο ή Τιμή Δικαιώματος (Premium) – $\boldsymbol{C}$**. Είναι η χρηματική αξία που πρέπει να καταβάλλει ο αγοραστής του δικαιώματος στον πωλητή του δικαιώματος ανεξάρτητα αν το δικαίωμα εκτελεστεί ή όχι, σαν εγγύηση για την παραχώρηση του δικαιώματος να αγοράσει ή να πουλήσει την υποκείμενη αξία. Το ποσό αυτό καθορίζεται από την προσφορά και τη ζήτηση στην αγορά την οποία διαπραγματεύεται.

2.2.1 Τα είδη των Χρηματοοικονομικών Δικαιώματων Προαίρεσης

Το δικαίωμα αγοράς (call option). [30] ΄Ενα συμβόλαιο το οποίο επιτρέπει σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή, T, στον κάτοχο του, εφόσον το επιθυμεί, την αγορά ενός υποκείμενου τίτλου, όπως για παράδειγμα μιας μετοχής, σε καθορισμένη τιμή, K, (η οποία ονομάζεται strike price) όποια και αν είναι η τιμή της μετοχής στο χρηματιστήριο, ονομάζεται δικαίωμα αγοράς.

Το δικαίωμα αγοράς μπορεί να αγοραστεί ή να πωληθεί σε μια χρηματοοικονομική αγορά, την αγορά παραγώγων, οποιαδήποτε χρονική στιγμή t πριν απο την λήξη του, T. Αυτός που έχει στην κατοχή του το συμβόλαιο μπορεί εφόσον θελήσει να αγοράσει την μετοχή την χρονική στιγμή T, για το ποσό K, ενώ αυτός που το έχει πουλήσει έχει την υποχρέωση να δώσει την μετοχή στον αγοραστή για το ποσό K.

Ποιά θα είναι η απολαβή από το συμβόλαιο αυτό για τον κάτοχό του, την στιγμή της λήξης; Η απολαβή θα εξαρτάται από την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $T, S(T)$ (η οποία είναι μια τυχαία μεταβλητή). Αν $S(T) > K$ τότε ο κάτοχος του συμβολαίου έχει συμφέρον να εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς και να αγοράσει την μετοχή για K, κερδίζοντας έτσι την διαφορά $S(T) - K$. Αυτό είναι και η απολαβή απο το συμβόλαιο σε αυτή την περίπτωση. Αν αντίθετα $S(T) \leq K$, τότε ο κάτοχος του συμβολαίου δεν έχει συμφέρον να εξασκήσει το δικαίωμα, εφόσον η εξάσκηση του δεν του αποκομίζει κανένα όφελος και έτσι η απολαβή από το συμβόλαιο αυτό θα είναι στην περίπτωση αυτή 0. Η απολαβή από το δικαίωμα αγοράς θα είναι λοιπόν η τυχαία μεταβλητή $F_B = (S(T) - K)^+$.

Για τον πωλητή του συμβολαίου θα ισχύει ακριβώς η αντίθετη θέση, εφόσον θα έχει την υποχρέωση να παρέχει την μετοχή στον κάτοχο του για το ποσό K εφόσον αυτός το επιθυμεί. Κατά συνέπεια η «απολαβή» για τον πωλητή του συμβολαίου θα είναι η τυχαία μεταβλητή $F_S = (S(T) - K)^+$.

Παρατηρούμε ότι η απολαβή θα εξαρτάται από την τυχαία μεταβλητή $S(T)$, η οποία είναι η τιμή της μετοχής, και έτσι δικαιολογείται και η ορολογία παράγωγο συμβόλαιο.

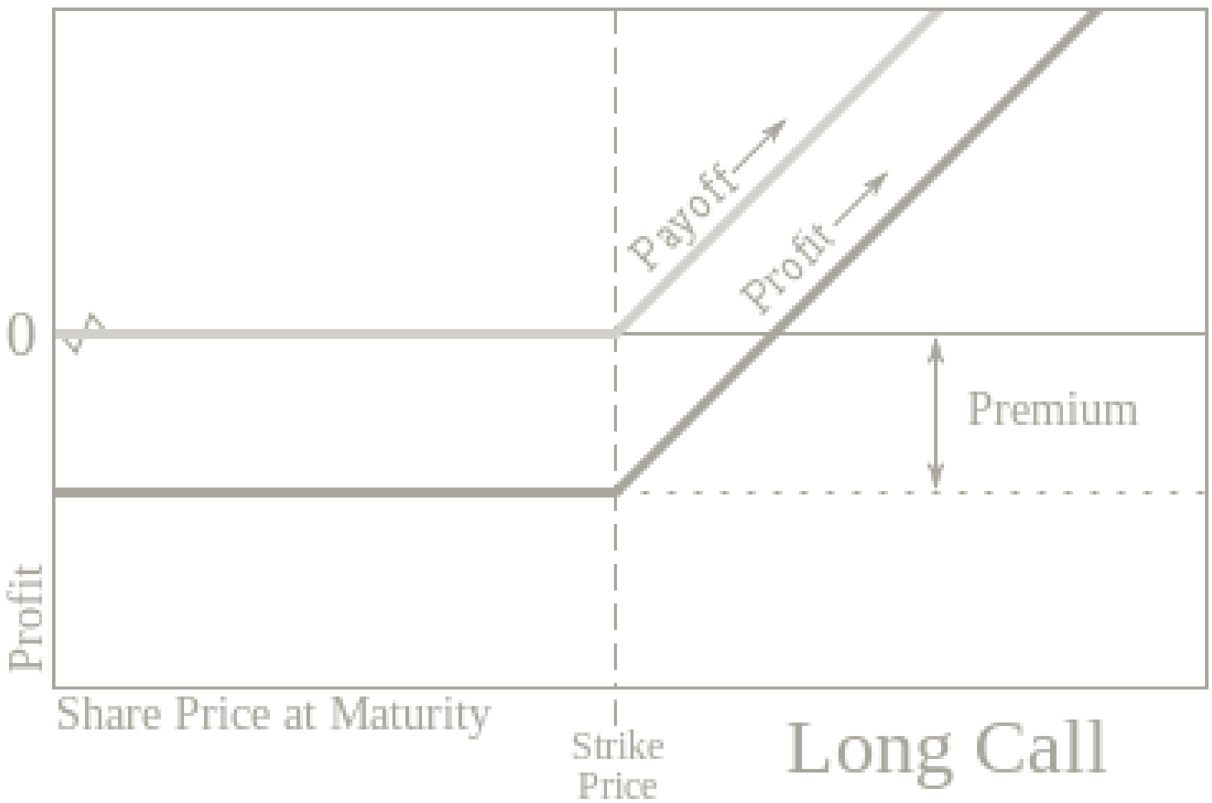
Το δικαίωμα πώλησης (Put option). [30] Ένα άλλο χρήσιμο παράγωγο συμβόλαιο είναι το δικαίωμα πώλησης ενός υποκείμενου τίτλου, όπως για παράδειγμα μιας μετοχής, τη χρονική στιγμή T στην τιμή K όποια και αν είναι η τιμή της μετοχής στο χρηματιστήριο αξιών. Ακολουθώντας την ίδια λογική, μπορούμε να δούμε ότι η απολαβή για τον αγοραστή είναι η τυχαία μεταβλητή $F_B = (S(T) - K)^+$ ενώ για τον πωλητή είναι η τυχαία μεταβλητή $F_S = (S(T) - K)^+$.

Ας δούμε τα παραπάνω μέσα από κάποια παραδείγματα. Ας υποθέσουμε γενικά ότι υπάρχει στην αγορά μια μετοχή ΑΑΑ η οποία στις 4 Ιανουαρίου έχει χρηματιστηριακή αξία €95. Επίσης διατίθενται στην αγορά παραγώγων διάφορα δικαιώματα αγοράς και πώλησης, Ευρωπαϊκού τύπου, επί της μετοχής αυτής. Έστω ότι υπάρχουν δικαιώματα αγοράς και δικαιώματα πώλησης επί 50 μετοχών ΑΑΑ με ημερομηνία λήξης τον Φεβρουάριο, τον Μάρτιο, τον Απρίλιο και τον Μάιο, ενώ για κάθε ημερομηνία λήξης υπάρχουν δικαιώματα με strike price K = €80, €90, €100, €110, €120, δηλαδή 4×5 = 20 διαφορετικά είδη (20 option series, το σύνολο τους καλείται και option class). Το ασφάλιστρο C διαμορφώνεται από την προσφορά και τη ζήτηση του κάθε δικαιώματος και προφανώς θα είναι διαφορετικό σε κάθε είδος δικαιώματος (option series). Ας δούμε ως παράδειγμα την στρατηγική που ακολουθούν γύρω από τη μετοχή ΑΑΑ και με βάση αυτά που πιστεύουν τέσσερις επενδυτές, οι Α, Β, Γ και Δ.

Παράδειγμα 2.2.1 [30] <u>Ο επενδυτής Α (Αγορά Δικαιώματος Αγοράς - Long call)</u>. Ο επενδυτής Α έχει πληροφορίες για ανοδική τάση της μετοχής ΑΑΑ τους επόμενους μήνες. Ωστόσο ενώ προσδοκά άνοδο, δεν επιθυμεί να ρισκάρει την αγορά μετοχών και εναλλακτικά αποφασίζει να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς επί της μετοχής αυτής. Έτσι τελικά, ο επενδυτής αυτός αγοράζει, γίνεται holder (λαμβάνει long position) στις 4 Ιανουαρίου ένα δικαίωμα αγοράς (call option) λήξης Μαρτίου επί της μετοχής ΑΑΑ με τιμή άσκησης (strike price) $K = €100$ καταβάλλοντας κάποιο αντίτιμο, C. Ο συγκεκριμένος επενδυτής μπορεί τώρα, αν τον συμφέρει, να αγοράσει την μετοχή ΑΑΑ (δηλ. 50 μετοχές ΑΑΑ, αφού το μέγεθος του συμβολαίου είναι 50) τον μήνα Μάρτιο (από τον πωλητή του δικαιώματος) στην τιμή €100 ανά μετοχή. Αν τώρα η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής ΑΑΑ την ημερομηνία της λήξης του δικαιώματος ανέβει στα €120 τότε ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς προφανώς θα εξασκήσει το δικαίωμα του και θα αγοράσει στην τιμή €100. Ο αγοραστής θα έχει κέρδος $€120 - €100 = €20$ ανά μετοχή (μείον το ασφάλιστρο C) διότι θεωρητικά μπορεί να πουλήσει αμέσως τις μετοχές ΑΑΑ που αγόρασε με 100 ευρώ στην τιμή των 120 ευρώ. Αντίθετα, αν η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής ΑΑΑ την ημερομηνία της λήξης του δικαιώματος είναι €80 τότε ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς προφανώς δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα, διότι αν θέλει μπορεί να αγοράσει φθηνότερα από την αγορά. Σε αυτή την περίπτωση ο αγοραστής δεν θα έχει κανένα κέρδος (αντίθετα έχει ζημία C από το ασφάλιστρο). Γενικά, αν συμβολίσουμε με S_T την χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής ΑΑΑ στο χρόνο εξάσκησης T τότε το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος αγοράς (call option) για τον αγοραστή (long position) θα είναι:

$$(S_T - K)_+ = \max\{S_T - K, 0\} = \begin{cases} S_T - K, & \alpha\nu\ \ S_T - K > 0 \Rightarrow S_T > K \\ 0, & \alpha\nu\ \ S_T - K \leq 0 \Rightarrow S_T < K \end{cases}$$

ενώ αν συνυπολογιστεί και το ασφάλιστρο C θα είναι $(S_T - K)_+ - C$. Έτσι ο επενδυτής Α, αν τελικά αυξηθεί η τιμή της μετοχής όπως προσδοκά, θα κερδίσει χωρίς να ρισκάρει να χάσει αν η τιμή της μετοχής πέσει, κάτι που θα γίνονταν αν αντί του δικαιώματος αγόραζε τις πραγματικές μετοχές ΑΑΑ. Δηλαδή μπορεί να θεωρηθεί ότι εξασφαλίζεται από τον κίνδυνο πτώσης της τιμής της μετοχής ΑΑΑ και για αυτό καταβάλλει το «ασφάλιστρο» C.

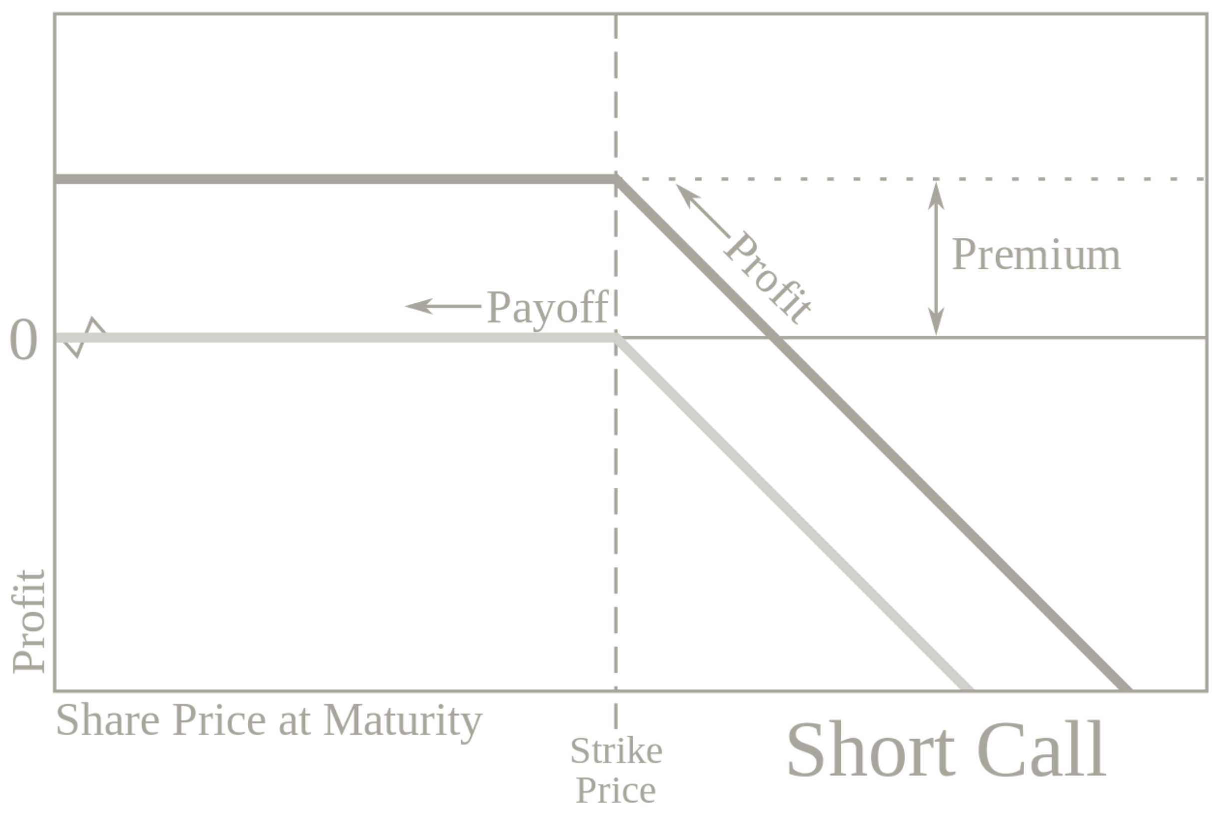


Εικόνα 2.3 Η διαγραμματική απεικόνιση του Long Call Option.

Παράδειγμα 2.2.2 [30] <u>Ο επενδυτής Β (Πώληση Δικαιώματος Αγοράς - Short Call)</u>. Ο επενδυτής Β που είναι κάτοχος ενός αριθμού μετοχών της εταιρίας ΑΑΑ προβλέπει στάσιμη ή ελαφρά καθοδική τάση στην τιμή της μετοχής αυτής. Προκειμένου λοιπόν να αυξήσει την αξία του χαρτοφυλακίου του, πωλεί ένα δικαίωμα αγοράς λήξης Μαρτίου επί της μετοχής ΑΑΑ με τιμή άσκησης (strike price) K = €100 εισπράττοντας το ασφάλιστρο C. Αν η χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής ΑΑΑ την ημερομηνία της λήξης του δικαιώματος παραμείνει στάσιμη (κάτω από τα €100) τότε ο αγοραστής του δικαιώματος δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του διότι δεν τον συμφέρει και επομένως ο πωλητής θα έχει κερδίσει το ασφάλιστρο C. Στην αντίθετη περίπτωση που η τιμή της μετοχής ΑΑΑ αυξηθεί πάνω από €100 ευρώ, π.χ. €120, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος θα εξασκήσει το δικαίωμά του και ο πωλητής θα υποχρεωθεί να πουλήσει στην τιμή των €100 χάνοντας $€120 - €100 = €20$ (αφού θα μπορούσε να είχε πουλήσει στην αγορά στην τιμή των €120 αντί €100 που υποχρεώνεται τώρα). Γενικά, αν συμβολίσουμε με S_T την χρηματιστηριακή τιμή της μετοχής ΑΑΑ στο χρόνο εξάσκησης Τ τότε το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος αγοράς (call option) για τον πωλητή (short position) θα είναι:

$$-(S_T - K)_+ = -\max\{S_T - K, 0\} = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ \ S_T - K \geq 0 \Rightarrow S_T > K \\ S_T - K, & \alpha\nu\ \ S_T - K < 0 \Rightarrow S_T < K \end{cases}$$

ενώ αν συνυπολογιστεί και το ασφάλιστρο C θα είναι $C - (S_T - K)_+$. Έτσι ο επενδυτής Β, αν τελικά μείνει στάσιμη η τιμή της μετοχής όπως προσδοκά, θα κερδίσει από το ασφάλιστρο που θα εισπράξει. Με αυτή όμως την στρατηγική αυξάνει το ρίσκο που έχει λάβει, ιδιαίτερα αν δεν κατέχει τις μετοχές ΑΑΑ αλλά περιμένει να τις αγοράσει την ημέρα της εξάσκησης για να τις δώσει στον αγοραστή του δικαιώματος.

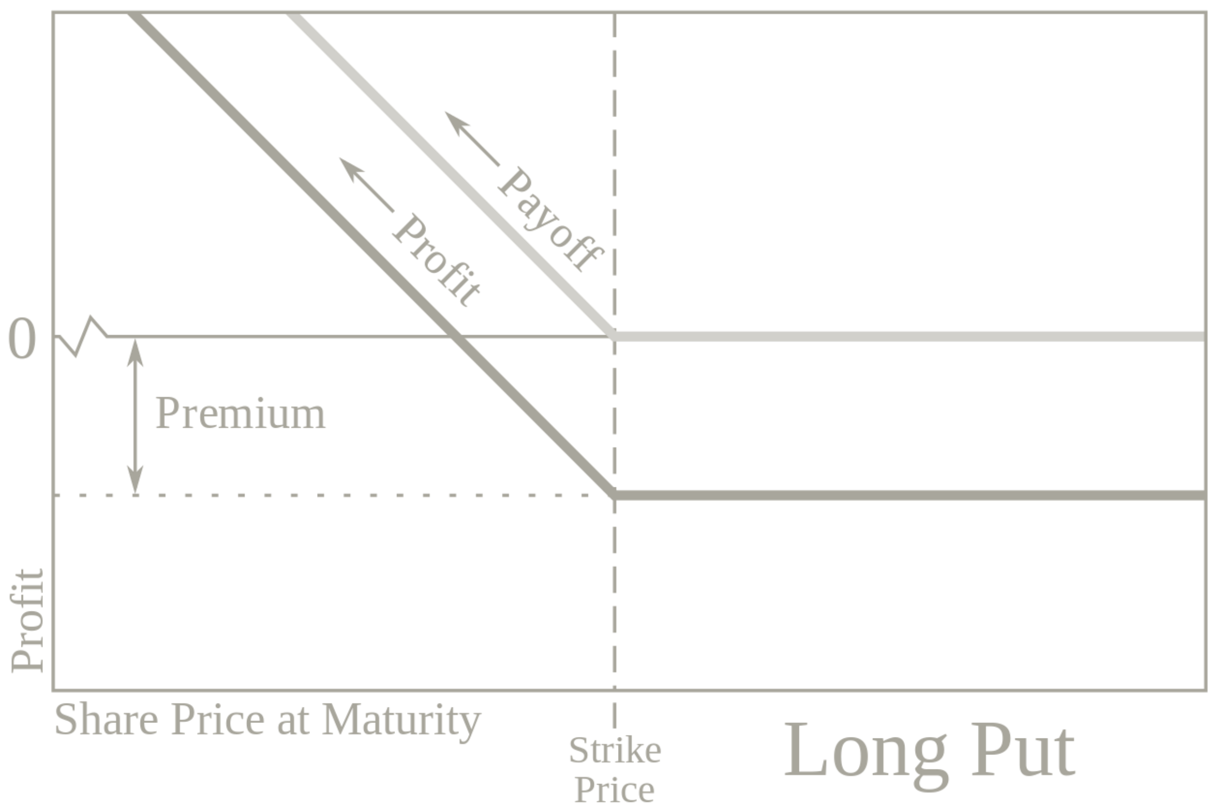


Εικόνα 2.4 Η διαγραμματική απεικόνιση του Short Call Option.

Παράδειγμα 2.2.3 [30] Ο επενδυτής Γ (Αγορά Δικαιώματος Πώλησης - Long Put). Ο επενδυτής Γ κατέχει έναν αριθμό μετοχών της ΑΑΑ και έχει πληροφορίες για καθοδική τάση στην μετοχή ΑΑΑ τους επόμενους μήνες. Δεν επιθυμεί όμως να πωλήσει ακόμη τις μετοχές και εναλλακτικά αποφασίζει να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης λήξης Μαρτίου επί της μετοχής ΑΑΑ με τιμή άσκησης (strike price) $K = €100$ καταβάλλοντας αντίτιμο C. Ο συγκεκριμένος επενδυτής μπορεί τώρα, αν τον συμφέρει, να πωλήσει την μετοχή ΑΑΑ (δηλ. 50 μετοχές ΑΑΑ) τον μήνα Μάρτιο στην τιμή €100 ανά μετοχή. Αν η τιμή της μετοχής ΑΑΑ την ημερομηνία της λήξης γίνει €80 τότε ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης θα εξασκήσει το δικαίωμα του και θα πωλήσει (στον πωλητή του δικαιώματος) στην τιμή €100. Ο αγοραστής θα έχει κέρδος $€100 - €80 = €20$ ανά μετοχή (μείον το ασφάλιστρο) διότι θεωρητικά μπορεί να αγοράσει αμέσως τις μετοχές ΑΑΑ που πώλησε στην τιμή των 100 ευρώ καταβάλλοντας μόνο €80, διατηρεί έτσι το ίδιο χαρτοφυλάκιο και έχει και το κέρδος από τη διαφορά $€100 - €80$. Αντίθετα, αν η τιμή της μετοχής ΑΑΑ γίνει €120 τότε ο αγοραστής του δικαιώματος πώλησης προφανώς δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα καθώς μπορεί να πωλήσει τις μετοχές στην αγορά υψηλότερα από K. Σε αυτή την περίπτωση ο αγοραστής δεν θα έχει κανένα κέρδος από το δικαίωμα, αντιθέτως έχει ζημία C από το ασφάλιστρο. Γενικά, αν S_T είναι η τιμή της μετοχής ΑΑΑ στο χρόνο εξάσκησης T τότε το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος πώλησης (put option) για τον αγοραστή (long position) θα είναι

$$(K - S_T)_+ = \max\{K - S_T, 0\} = \begin{cases} 0, & \alpha\nu \;\; K - S_T > 0 \Longrightarrow S_T \geq K \\ K - S_T, & \alpha\nu \;\; K - S_T < 0 \Longrightarrow S_T < K \end{cases}$$

ενώ αν συνυπολογιστεί και το ασφάλιστρο θα είναι $(K - S_T)_+ - C$. Έτσι ο επενδυτής Γ μπορεί να θεωρηθεί ότι εξασφαλίζει μια ελάχιστη τιμή στην οποία μπορεί να πωλήσει την μετοχή ΑΑΑ (μειώνει τον κίνδυνο που διαχειρίζεται και για αυτό καταβάλλει ασφάλιστρο C).

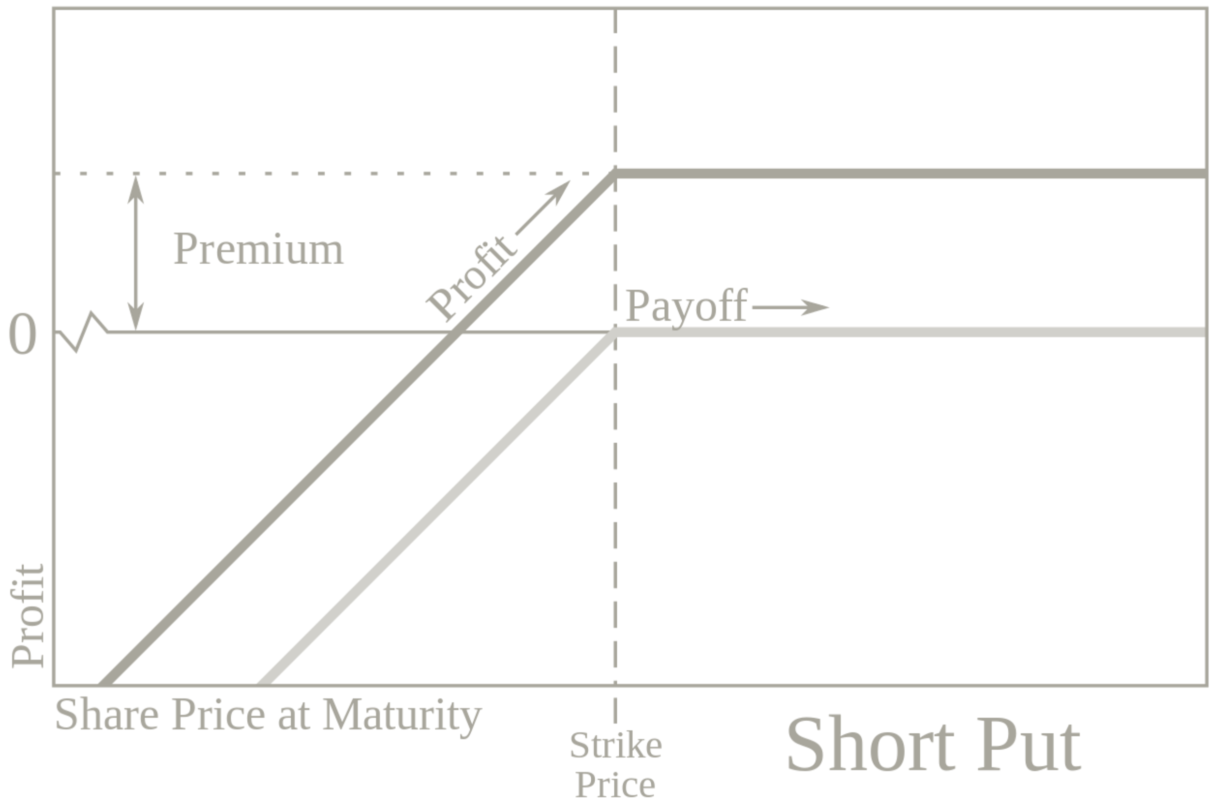


Εικόνα 2.5 Η διαγραμματική απεικόνιση του Long Put Option.

Παράδειγμα 2.2.4 [30] <u>Ο επενδυτής Δ (Πώληση Δικαιώματος πώλησης - Short put)</u>. Ο επενδυτής Δ προβλέπει στάσιμη ή ελαφρά ανοδική τάση στην μετοχή αυτή κι έτσι πωλεί ένα δικαίωμα πώλησης λήξης Μαρτίου επί της μετοχής ΑΑΑ με τιμή άσκησης (strike price) $K\ = €100$ εισπράττοντας το ασφάλιστρο C. Αν η τιμή της μετοχής ΑΑΑ την ημέρα της λήξης του δικαιώματος είναι ελαφρώς πάνω από τα €100 ή παραμείνει στάσιμη τότε ο αγοραστής του δικαιώματος δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του και επομένως ο πωλητής θα έχει κερδίσει το ασφάλιστρο C. Στην αντίθετη περίπτωση που η τιμή της μετοχής ΑΑΑ πέσει κάτω από €100, π.χ. €80 ευρώ, τότε ο αγοραστής του δικαιώματος θα εξασκήσει το δικαίωμά του και ο Δ θα υποχρεωθεί να αγοράσει στην τιμή των €100 χάνοντας $€100\ - €80 = €20$ ανά μετοχή, αφού στην αγορά θα τις έβρισκε τις μετοχές στα €80. Γενικά, αν S_T είναι η τιμή της μετοχής ΑΑΑ στο χρόνο εξάσκησης Τ τότε το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος πώλησης (put option) για τον πωλητή (short position) θα είναι

$$-(K - S_T)_+ = -\max\{K - S_T, 0\} = \begin{cases} 0, & \alpha\nu\ \ K - S_T > 0 \Longrightarrow S_T \geq K \\ S_T - K, & \alpha\nu\ \ K - S_T < 0 \Longrightarrow S_T < K \end{cases}$$

ενώ αν συνυπολογιστεί και το ασφάλιστρο C θα είναι $C - (K - S_T)_+$. Έτσι ο επενδυτής Δ, αν τελικά μείνει περίπου στάσιμη η τιμή της μετοχής όπως προσδοκά, θα κερδίσει από το ασφάλιστρο που θα εισπράξει. Όπως όμως και ο επενδυτής Β, ο επενδυτής Δ αναλαμβάνει μεγάλο ρίσκο με αυτή την κίνηση.



Εικόνα 2.6 Η διαγραμματική απεικόνιση του Short Put Option.

Στον Πίνακα 2.1 δίνονται συνοπτικά οι θέσεις των επενδυτών και οι προσδοκίες τους ως προς την αγορά ανάλογα με την θέση που έχουν πάρει. Επίσης φαίνεται για κάθε δικαίωμα εάν είναι ευνοϊκό ή όχι το πέρασμα του χρόνου και η αύξηση της μεταβλητότητας καθώς και το πόσο περιορισμένο ή όχι είναι το κέρδος και η ζημιά σε κάθε περίπτωση.

Πίνακας 2.1 Περίληψη Θέσεων.

ΘΕΣΗ	ΠΡΟΣΔΟΚΙΑ ΩΣ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΓΟΡΑ	ΑΥΞΗΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ	ΠΕΡΑΣΜΑ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ	ΚΕΡΔΟΣ	ΖΗΜΙΑ
Αγορά δικαιώματος αγοράς	Μεγάλη αύξηση τιμών	Ευνοϊκή	Μη ευνοϊκό	Μη περιορισμένο	Περιορισμένη
Πώληση δικαιώματος αγοράς	Μικρή μείωση τιμών	Μη ευνοϊκή	Ευνοϊκό	Περιορισμένο	Μη περιορισμένη
Αγορά δικαιώματος πώλησης	Μεγάλη μείωση τιμών	Ευνοϊκή	Μη ευνοϊκό	Μη περιορισμένο	Περιορισμένη
Πώληση δικαιώματος πώλησης	Μικρή αύξηση τιμών	Μη ευνοϊκή	Ευνοϊκό	Περιορισμένο	Μη περιορισμένη

2.2.2 Τιμή Δικαιώματος - Ασφάλιστρο

Τιμή δικαιώματος (option premium) ή ασφάλιστρο (margin) είναι το χρηματικό ποσό που καταβάλλει ο επενδυτής για να αγοράσει ένα δικαίωμα. Οι παράγοντες που διαμορφώνουν αυτή την τιμή είναι η εσωτερική αξία (intrinsic value) και η αξία του χρόνου [30].

Η εσωτερική αξία του δικαιώματος ισούται με την διαφορά ανάμεσα στην τιμή του υποκείμενου τίτλου, S_T, την χρονική στιγμή, T και την τιμή εξάσκησης, K, του δικαιώματος. Πιο συγκεκριμένα:

- Η εσωτερική αξία ενός δικαιώματος αγοράς δίνεται από τον τύπο:

$$(S_T - K)_+ = \max\{S_T - K, 0\}$$

- Η εσωτερική αξία ενός δικαιώματος πώλησης δίνεται από τον τύπο:

$$(K - S_T)_+ = \max\{K - S_T, 0\}$$

Ένα δικαίωμα, στον χρόνο εξάσκησης, T, μπορεί να επιφέρει στον κάτοχο (holder) του δικαιώματος θετικό, αρνητικό (ζημιά) ή μηδενικό κέρδος και θεωρείται αντίστοιχα *in-the-money*, *out-of-the-money* και *at-the-money*.

Ειδικότερα, ένα δικαίωμα αγοράς (call option) θεωρείται:

- ***in-the-money*** και έχει εσωτερική αξία μεγαλύτερη του μηδενός (0) ή διαφορετικά επιφέρει θετικό κέρδος στον επενδυτή, εάν $S_T > K$,
- ***at-the-money*** και έχει εσωτερική αξία ίση του μηδενός (0) ή διαφορετικά επιφέρει μηδενικό κέρδος στον επενδυτή, όταν ισχύει $S_T = K$ και
- ***out-of-the-money*** και έχει εσωτερική αξία μικρότερη του μηδενός (0) ή διαφορετικά επιφέρει ζημιά στον επενδυτή, εάν $S_T < K$.

Είναι σαφές ότι με σταθερές την αξία του χρόνου και την τιμή άσκησης, για ένα δικαίωμα αγοράς, όσο μεγαλώνει η τιμή του υποκείμενου τίτλου μεγαλώνει και η τιμή του δικαιώματος. Ενώ, δεδομένης της τιμής του υποκείμενου τίτλου και την αξία του χρόνου σταθερή, για ένα δικαίωμα αγοράς όσο υψηλότερη είναι η τιμή άσκησης, τόσο χαμηλότερη είναι η τιμή του δικαιώματος.

Αντίστοιχα, ένα δικαίωμα πώλησης (put option) είναι:

- ***in-the-money*** και έχει εσωτερική αξία μεγαλύτερη του μηδενός (0) ή διαφορετικά επιφέρει θετικό κέρδος στον επενδυτή, εάν $S_T < K$,
- ***at-the-money*** και έχει εσωτερική αξία ίση του μηδενός (0) ή διαφορετικά επιφέρει μηδενικό κέρδος στον επενδυτή, όταν ισχύει $S_T = K$ και
- ***out-of-the-money*** και έχει εσωτερική αξία μικρότερη του μηδενός (0) ή διαφορετικά επιφέρει ζημιά στον επενδυτή, εάν $S_T > K$.

Είναι σαφές ότι με σταθερές την αξία του χρόνου και την τιμή άσκησης, για ένα δικαίωμα πώλησης, όσο πιο χαμηλή είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου, τόσο υψηλότερη είναι η τιμή του δικαιώματος. Ενώ, δεδομένης της τιμής του υποκείμενου τίτλου και την αξία του χρόνου σταθερή, για ένα δικαίωμα πώλησης, όσο υψηλότερη είναι η τιμή άσκησης, τόσο υψηλότερη είναι και η τιμή του δικαιώματος.

Προφανώς, ένα δικαίωμα εξασκείται από τον κάτοχό του (holder) μόνο αν βρίσκεται *in-the-money*.

2.3 ΣΤΑΤΗΓΙΚΕΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ

Στην προηγούμενη παράγραφο έγινε αναφορά στις τέσσερις κατηγορίες των Δικαιωμάτων Προαίρεσης καθώς και στις αντίστοιχες συναρτήσεις κέρδους που θα έχει ένας επενδυτής λαμβάνοντας την αντίστοιχη θέση του αγοραστή ή του πωλητή σε ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης ενός υποκείμενου τίτλου. Η αγορά ενός δικαιώματος αγοράς και η πώληση ενός δικαιώματος πώλησης θεωρούνται αισιόδοξες επενδύσεις.

Ωστόσο, ένας επενδυτής μπορεί να «εξασφαλιστεί» ακόμη περισσότερο λαμβάνοντας πιο σύνθετες θέσεις χρησιμοποιώντας είτε περισσότερα από ένα δικαίωμα προαίρεσης ταυτόχρονα είτε συνδυάζοντας την αγορά ή την πώληση του υποκείμενου αγαθού (π.χ. μίας μετοχής) με ένα δικαίωμα επί αυτού.

Σε αυτή την ενότητα θα εστιάσουμε σε τέσσερις βασικές στρατηγικές που αφορούν μία μετοχή και ένα δικαίωμα επί της ίδιας μετοχής [30].

(α) Η πρώτη αφορά **την πώληση ενός δικαιώματος αγοράς (short call, π.χ. επί της μετοχής του ΟΤΕ) και την παράλληλη αγορά της μετοχής του ΟΤΕ (covered call)**. Με την αγορά της μετοχής ο επενδυτής «καλύπτει» την περίπτωση απότομης αύξησης της τιμής της μετοχής (αν είχε λάβει μόνο τη θέση short call θα είχε μεγάλη ζημιά). Στο πρώτο γράφημα αριστερά φαίνεται το κέρδος από την χρήση του δικαιώματος αγοράς (short call) σε σχέση με την τιμή της μετοχής S_T στο χρόνο εξάσκησης T, στο μεσαίο γράφημα φαίνεται το κέρδος από την αγορά της μετοχής (σήμερα, στην τιμή S_0) σε σχέση με την τιμή της μετοχής S_T στο χρόνο εξάσκησης T και στο δεξιό γράφημα φαίνεται το συνολικό κέρδος (άθροισμα) από τις δύο αυτές παράλληλες τοποθετήσεις στην αγορά (συνεχής γραμμή).

Παρατηρούμε ότι το γράφημα του κέρδους από το συνδυασμό των δύο παραπάνω τοποθετήσεων (covered call) είναι όμοιο με το γράφημα του κέρδους που προκύπτει από την πώληση ενός δικαιώματος πώλησης (short put). (β) Η δεύτερη στρατηγική είναι η αντίθετη της (α): αφορά την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς (long call, π.χ. της εταιρίας ΑΑΑ) και την παράλληλη πώληση της μετοχής ΑΑΑ (short selling). Τα αντίστοιχα γραφήματα του κέρδους σε σχέση με την τιμή ST της μετοχής ΑΑΑ την ημέρα λήξης του δικαιώματος είναι τα εξής:

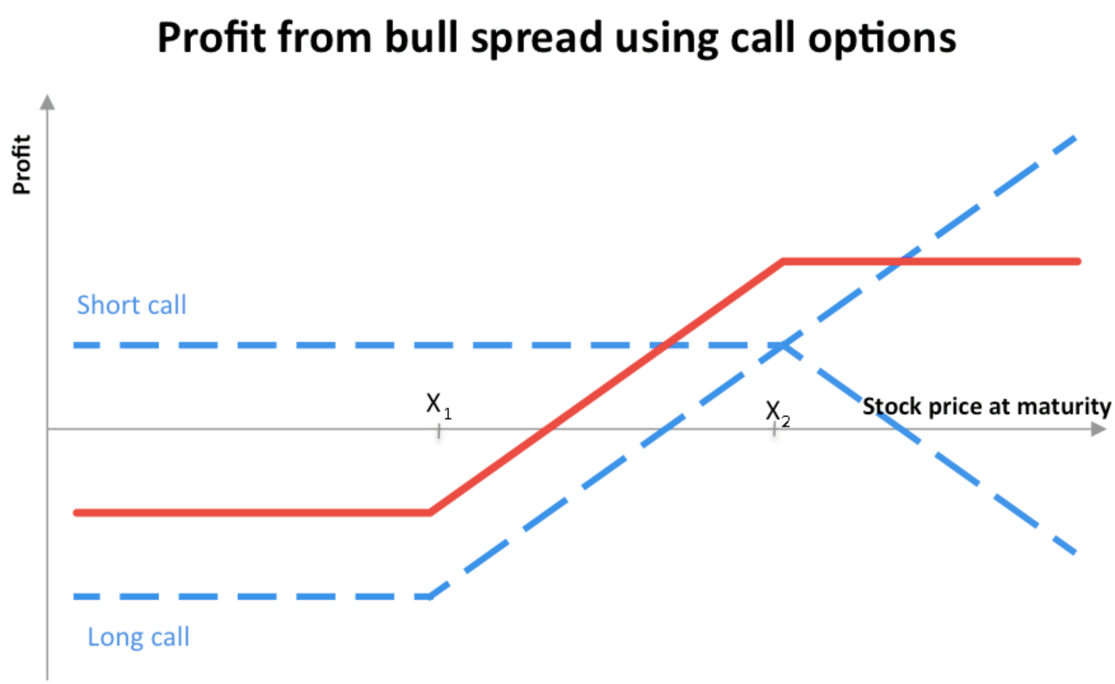
Παρατηρούμε ότι το γράφημα του κέρδους από το συνδυασμό των δύο παραπάνω τοποθετήσεων είναι όμοιο με το γράφημα του κέρδους που προκύπτει από την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης (long put). (γ) Η τρίτη στρατηγική αφορά την αγορά ενός δικαιώματος πώλησης (long put, π.χ. της εταιρίας ΑΑΑ) και την παράλληλη αγορά της μετοχής ΑΑΑ (protective put). Τα αντίστοιχα γραφήματα του κέρδους σε σχέση με την τιμή ST της μετοχής ΑΑΑ την ημέρα λήξης του δικαιώματος είναι τα εξής:

Παρατηρούμε ότι το γράφημα του κέρδους από το συνδυασμό των δύο παραπάνω τοποθετήσεων είναι όμοιο με το γράφημα του κέρδους που προκύπτει από την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς (long call). (δ) Η τέταρτη στρατηγική είναι η αντίθετη της (γ): αφορά την πώληση ενός δικαιώματος πώλησης (short put, π.χ. της εταιρίας ΑΑΑ) και την παράλληλη πώληση της μετοχής ΑΑΑ (short selling). Τα αντίστοιχα γραφήματα του κέρδους σε σχέση με την τιμή ST της μετοχής ΑΑΑ την ημέρα λήξης του δικαιώματος είναι τα εξής:

Παρατηρούμε ότι το γράφημα του κέρδους από το συνδυασμό των δύο παραπάνω τοποθετήσεων είναι όμοιο με αυτό που προκύπτει από την πώληση ενός δικαιώματος αγοράς (short call).

2.3.1. Στρατηγικές που αφορούν δικαιώματα προαίρεσης ιδίου τύπου επί της ιδίας μετοχής

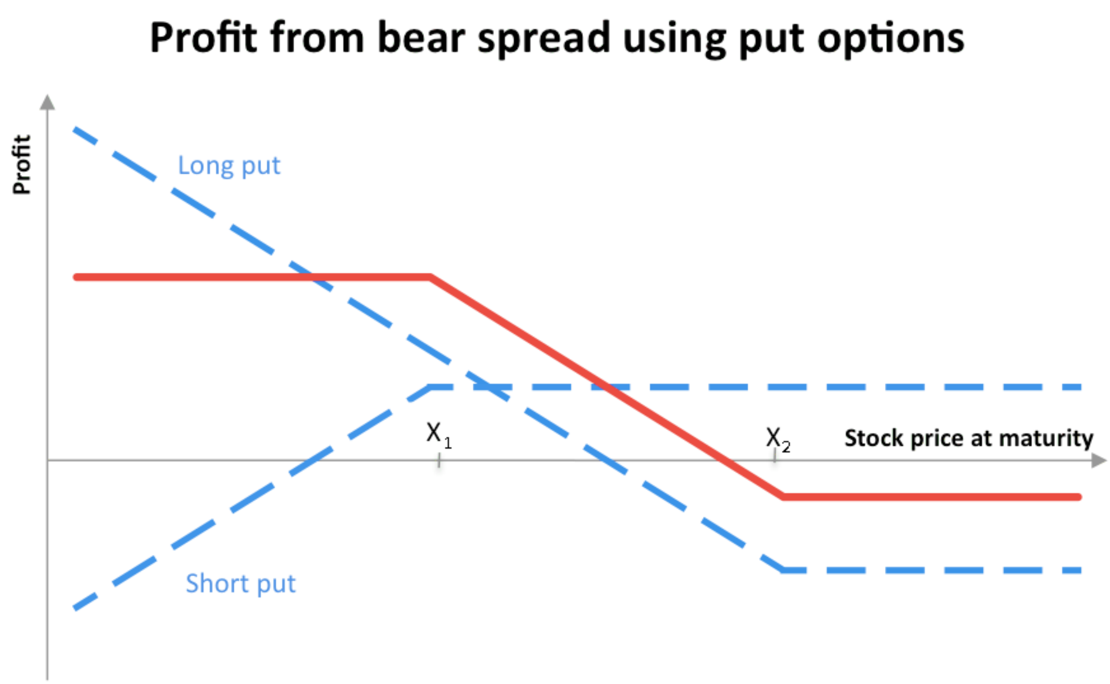
(α) Bull spread – Ανοδικό άνοιγμα. Η στρατηγική αυτή αφορά την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς (long call) με τιμή εξάσκησης K_1 και την παράλληλη πώληση ενός δικαιώματος αγοράς (short call) με τιμή εξάσκησης $K_2 > K_1$ (επί της ίδιας μετοχής και με ίδια ημερομηνία εξάσκησης με το πρώτο). Το κέρδος από την τοποθέτηση αυτή φαίνεται στο επόμενο γράφημα. Με διακεκομμένες γραμμές φαίνεται το κέρδος για καθένα από τα δύο δικαιώματα ενώ με τη συνεχή γραμμή φαίνεται το συνολικό κέρδος (άθροισμα των κερδών από τα δυο δικαιώματα).



Εικόνα 2.7 Η διαγραμματική απεικόνιση της Bull Spread στρατηγικής.

Στην Εικόνα 2.7 [24] η μία μπλέ διακεκομμένη γραμμή απεικονίζει το κέρδος από την αγορά του δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης X_1 και τιμή δικαιώματος C_1, ενώ η δεύτερη απεικονίζεται το κέρδος από την πώληση του δικαιώματος αγοράς με X_2 και C_2 και η κόκκινη γραμμή εκφράζει το κέρδος που αποφέρει στον επενδυτή ο συνδυασμός των παραπάνω, δηλαδή το κέρδος της στρατηγικής bull spread.

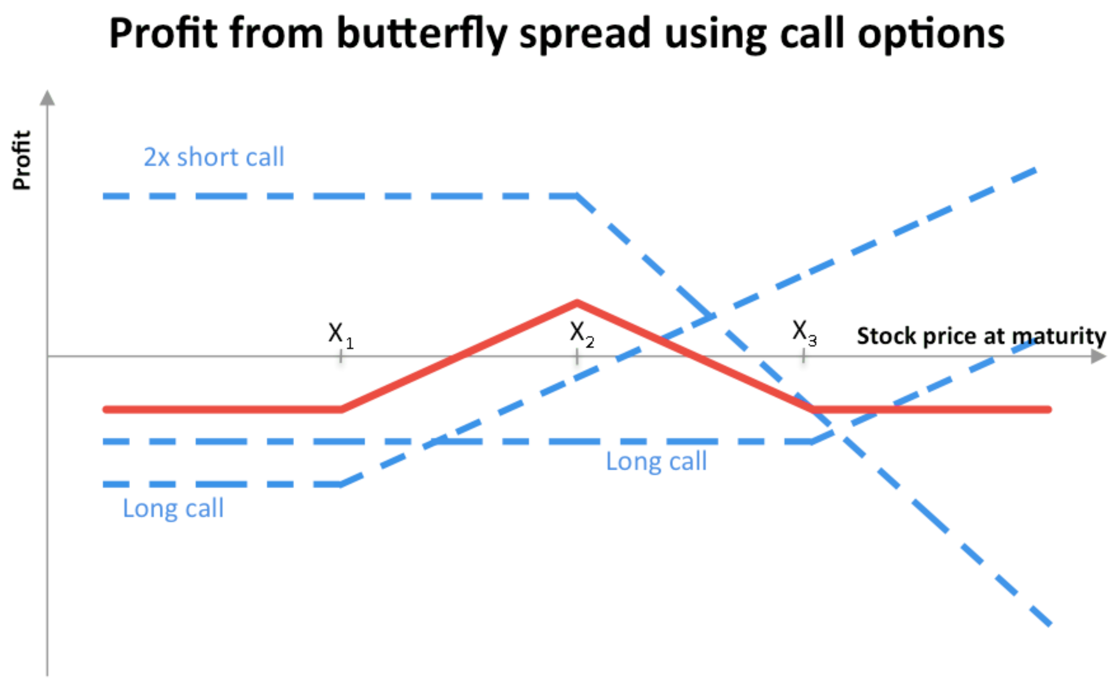
(β) Bear spread – Καθοδικό άνοιγμα. Την συγκεκριμένη στρατηγική την εφαρμόζει ο επενδυτής που πιστεύει ότι η αγορά δεν θα έχει ανοδική πορεία, αλλά θέλει και να περιορίσει τον κίνδυνο. Θα μπορούσε να χαρακτηριστεί ως συντηρητική στρατηγική από κάποιον που πιστεύει ότι η αγορά είναι πολύ πιθανότερο να πέσει παρά να ανέβει. Εφαρμόζεται με την αγορά ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_1 και την παράλληλη πώληση ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης K_2, με $K_1 > K_2$ επί της ίδιας της μετοχής και με την ίδια ημερομηνία λήξης. Επιπρόσθετα, η εφαρμογή αυτής της στρατηγικής μπορεί να γίνει εάν αντί για δικαιώματα αγοράς χρησιμοποιήσουμε δικαιώματα πώλησης. Η στρατηγική bear spread διαφέρει από την bull spread στο σημείο της διαφοράς των τιμών εξάσκησης των δικαιωμάτων. Θυμίζουμε ότι στην bull spread ισχύει $K_2 > K_1$.



Εικόνα 2.8 Η διαγραμματική απεικόνιση της Bear Spread στρατηγικής.

Στην Εικόνα 2.8 [24] η μία μπλε γραμμή απεικονίζει το κέρδος από την αγορά του δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης X_1 και τιμή δικαιώματος C_1, η δεύτερη μπλε απεικονίζεται το κέρδος από την πώληση του δικαιώματος αγοράς με X_2 και C_2, ενώ η κόκκινη γραμμή εκφράζει το κέρδος που αποφέρει στον επενδυτή ο συνδυασμός των παραπάνω, δηλαδή το κέρδος της στρατηγικής bear spread.

(γ) <u>Butterfly spread – Πεταλούδα αγοράς.</u> Ο επενδυτής εφαρμόζει τη συγκεκριμένη στρατηγική όταν πιστεύει πως η αγορά δεν θα είναι πολύ μεταβλητή, επιθυμεί ωστόσο να περιορίσει τον κίνδυνο. Ο επενδυτής που εφαρμόζει τη στρατηγική αυτή, αγοράζει δύο δικαιώματα αγοράς με τιμές εξάσκησης K_1 και K_3, με $K_1 < K_3$ και ταυτόχρονα πουλάει δύο δικαιώματα αγοράς με τιμή εξάσκησης K_2, τέτοιο ώστε $K_1 < K_2 < K_3$ (συνήθως λαμβάνεται $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$), επί της ίδιας μετοχής και με την ίδια ημερομηνία εξάσκησης.



Εικόνα 2.9 Η διαγραμματική απεικόνιση της Butterfly Spread στρατηγικής.

Στο παραπάνω γράφημα [24] με μπλε απεικονίζονται τα κέρδη από την αγορά των δύο δικαιωμάτων αγοράς με τιμή εξάσκησης X_1 και τιμή δικαιώματος C_1 και X_3 και C_3, αντίστοιχα, με μπλε επίσης απεικονίζεται το κέρδος από την πώληση των δύο δικαιωμάτων αγοράς με X_2 και τιμή δικαιώματος C_2. Η κόκκινη γραμμή απεικονίζει το κέρδος της στρατηγικής butterfly spread, δηλαδή το κέρδος του επενδυτή από τον συνδυασμό των παραπάνω.

Οι στρατηγικές που περιγράψαμε παραπάνω είναι από τις πιο σημαντικές. Εκτός βέβαια από αυτές υπάρχουν και άλλες. Ο κάθε επενδυτής μπορεί να συνδυάσει με όποιον τρόπο επιθυμεί τα διαφορετικά είδη παραγώγων και να προσαρμόσει το χαρτοφυλάκιό του ανάλογα με τις ανάγκες του.

2.4 ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΣΥΜΒΟΛΑΙΩΝ

Η σωστή διαχείριση των διαφόρων κινδύνων απαιτεί μία καλή κατανόηση των παραγώγων προϊόντων που υπάρχουν στην αγορά, καθώς και μία καλή μεθοδολογία για την τιμολόγησή τους.

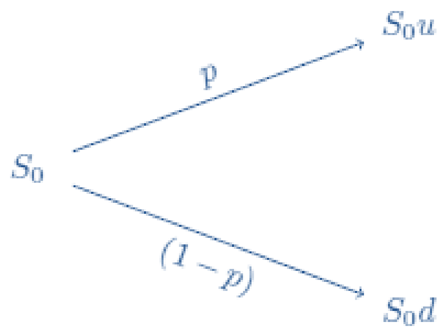
Με τον όρο τιμολόγηση εννοούμε τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να προσδιοριστεί η τιμή ενός προϊόντος, ενός αγαθού ή μιας υπηρεσίας. Οι αντικειμενικοί σκοποί της τιμολόγησης είναι η μεγιστοποίηση του κέρδους και των πωλήσεων, η ελαχιστοποίηση ζημιάς της επιχείρησης και η πώληση αγαθών σε περισσότερες αγορές [10]. Στην ενότητα αυτή θα εστιάσουμε στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης και πιο συγκεκριμένα στην τιμολόγηση παραγώγων ευρωπαϊκού τύπου.

Εφόσον ένα παράγωγο συμβόλαιο είναι ένα συμβόλαιο που η απολαβή του αγοραστή του ή η υποχρέωση του πωλητή του προς τον αγοραστή του την χρονική στιγμή T, είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία εξαρτάται απο την τιμή της μετοχής $S(T)$, για να υπολογίσουμε την τιμή του την χρονική στιγμή $t < T$ θα πρέπει με κάποιο τρόπο να «προβλέψουμε» την τιμή $S(T)$ την χρονική στιγμή t, έτσι ώστε να έχουμε μια πρόβλεψη της πιθανής απολαβής την χρονική στιγμή T. Στον σκοπό αυτό μπορεί να μας βοηθήσουν τα στοχαστικά μοντέλα.

2.4.1 Το διωνυμικό υπόδειγμα μίας περιόδου

Θα ξεκινήσουμε με την χρήση του διωνυμικού μοντέλου. Θεωρούμε, λοιπόν, ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από Δ μερίδια μίας μετοχής σε ένα δικάιωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου της μετοχής αυτής, με αξία V. Τα Δ μερίδια της μετοχής θα υπολογίζονται έτσι ώστε το χαρτοφυλάκιο να μην περιέχει κίνδυνο. Είτε λοιπόν η τιμή της μετοχής πέσει είτε ανέβει η απόδοση του χαρτοφυλακίου δεν μεταβάλλεται, αλλά εξαρτάται μόνο από το χωρίς κίνδυνο επιτόκιο, r.

Αν S_0 είναι η αρχική τιμή της μετοχής η πιθανή τιμή ανόδου της θα είναι S_0u, όπου $u > 1$, με πιθανότητα p και η τιμή καθόδου της αντίστοιχα θα είναι S_0d, όπου $d < 1$, με πιθανότητα $1 - p$. Η ποσοστιαία αύξηση της μετοχής σε πιθανή ανοδική κίνηση θα είναι $u - 1$ ενώ η ποσοστιάία μείωση της τιμής της μετοχής σε πιθανή πτώση θα είναι $1 - d$. Στην Εικόνα 2.10 φαίνεται η κίνηση της μετοχής με βάση την περιγραφή του διωνυμικού μοντέλου ενός επιπέδου.



Εικόνα 2.10 Η κίνηση της μετοχής σε μία μονάδα χρόνου.

Αν μας ενδιαφέρει, τώρα, μια μελλοντική τιμή T τότε η S_T θα είναι μια τυχαία μεταβλητή που μπορεί να λάβει μόνο δυο πιθανές τιμές s_1, με πιθανότητα p και s_2 με πιθανότητα $1-p$ και έστω $s_1 > s_2$. Η απόδοση ενός ευρωπαϊκού παραγώγου με χρόνο ωρίμανσης T θα είναι επίσης τυχαία μεταβλητή η οποία θα μπορεί να πάρει μόνο δύο τιμές $C_u = f(s_1)$ και $C_d = f(s_2)$ με πιθανότητες p και $1-p$ αντίστοιχα.

Για να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο με απόδοση f θα χρησιμοποιήσουμε το ίδιο χαρτοφυλάκιο, αποτελούμενο από Δ μέρη μίας μετοχής σε ένα δικαίωμα αγοράς ευρωπαϊκού τύπου επί της μετοχής αυτής. Η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού στη λήξη θα είναι:

$$S_0 u\, \Delta - C_u,$$

στην περίπτωση ανοδικής κίνησης της μετοχής και

$$S_0 d\, \Delta - C_d,$$

στην περίπτωση καθοδικής κίνησης της μετοχής. Θα πρέπει όμως η αξία του χαρτοφυλακίου σε κάθε περίπτωση να είναι σταθερή για να ισχύει η αρχή της μη επιτηδειότητας. Συνεπώς

$$S_0 u\, \Delta - C_u = S_0 d\, \Delta - C_d$$

Από όπου προκύπτει ότι

$$\boldsymbol{\Delta = \frac{C_u - C_d}{S_0\, u - S_0\, d}}.$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι ο αριθμός του μεριδίου των μετοχών είναι ουσιαστικά ο ρυθμός μεταβολής της τιμής του δικαιώματος προς τη μεταβολή της τιμής της μετοχής στις δύο πιθανές κινήσεις.

Το κόστος δημιουργίας του χαρτοφυλακίου θα είναι $S_0\Delta - V$ ενώ η αξία στη χρονική στιγμή, T με ένα χωρίς ρίσκο επιτόκιο, r θα είναι $(S_0 u\,\Delta - C_u)e^{-rT}$.

Αν εξισώσουμε τα παραπάνω θα έχουμε:

$$S_0 u\,\Delta - C_u = (S_0 u\,\Delta - C_u)e^{-rT}$$

$$V = S_0\Delta(1 - ue^{-rT}) + e^{-rT}C_u$$

Και αν αντικαταστήσουμε την τιμή του Δ από την παραπάνω εξίσωση θα έχουμε:

$$V = e^{-rT}(qC_u + (1-q)C_d = e^{-rT}E^q[f(S_T)],$$

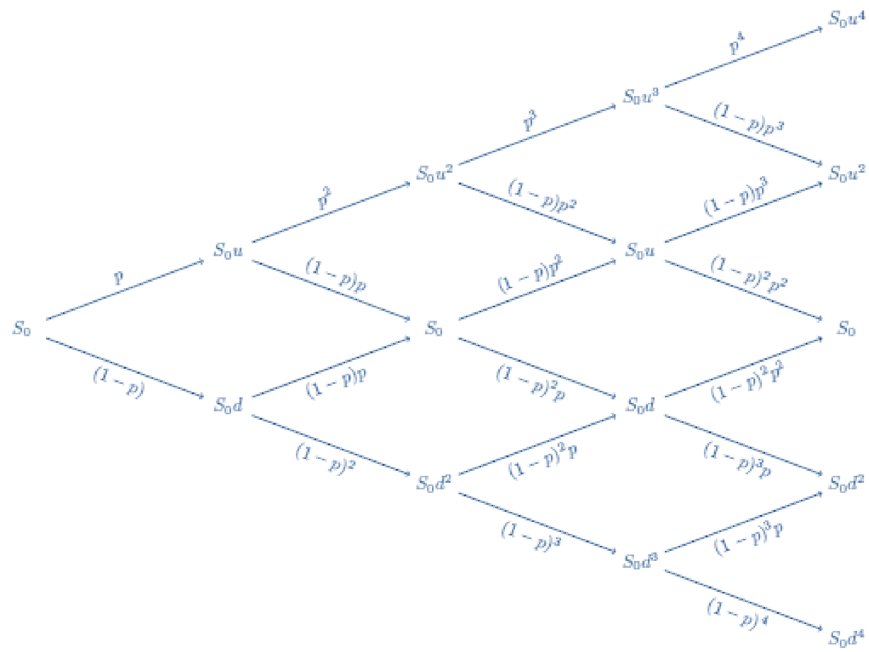
όπου $q = \frac{e^{-rT}-d}{u-d}$.

Οι δύο τελευταίες εξισώσεις δίνουν την δυνατότητα αποτίμησης ενός δικαιώματος προαίρεσης όταν οι πιθανές κινήσεις της μετοχής είναι γνωστές με τη μορφή ενός διωνυμικού δέντρου.

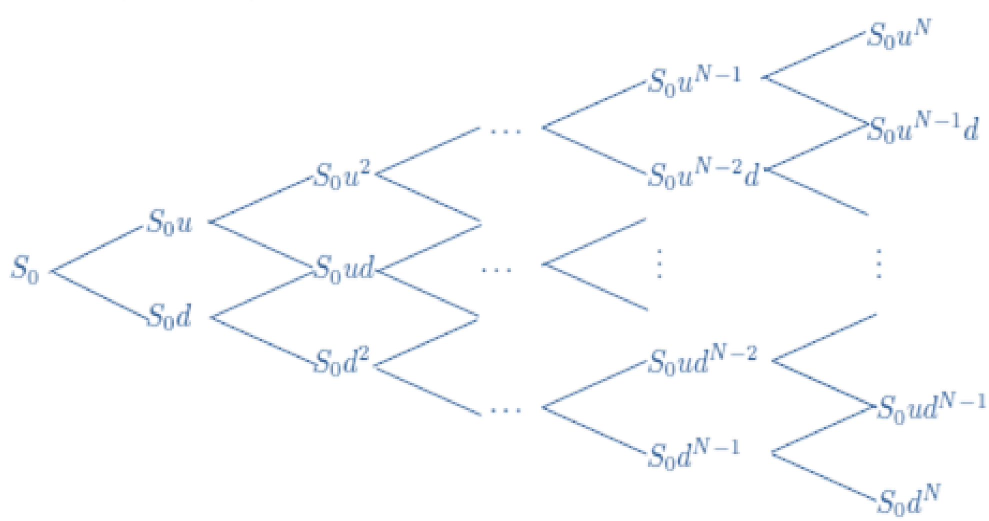
Αυτό που είναι αξιοπρόσεκτο είναι ότι η τελική αποτίμηση του παραγώγου δεν περιέχει τις πιθανότητες της ανόδου ή της καθόδου της τιμής της μετοχής. Όποια και αν είναι δηλαδή η τιμή της πιθανότητας της ανόδου της μετοχής η τιμή του δικαιώματος δεν αλλάζει. Ο λόγος που αυτό συμβαίνει είναι επειδή η τιμή του δικαιώματος υπολογίζεται με βάση την τιμή της υποκείμενης μετοχής η οποία περιλαμβάνει τις πιθανότητες μελλοντικής καθόδου ή ανόδου.

2.4.2 Το διωνυμικό υπόδειγμα πολλών περιόδων

Το διωνυμικό μοντέλο μίας περιόδου μπορεί να γενικευτεί για πολλά περισσότερα βήματα. Το υπόδειγμα πολλών περιόδων που θα περιγράψουμε αναφέρεται ως υπόδειγμα Cox, Ross & Rubinstein (CRR) καθώς προτάθηκε από τους παραπάνω το 1979 για την τιμολόγηση ομολόγων. Στην Εικόνα 2.11 μπορεί κανείς να δει ένα δέντρο 5 επίπεδων για την αποτίμηση ενός δικαιώματος προαίρεσης μίας μετοχής με αρχική τιμή S_0 και πιθανότητα ανόδου της τιμής της p ενώ στην Εικόνα 2.12 φαίνεται διαγραμματικά το υπόδειγμα για n περιόδους. Όπως και στο υπόδειγμα της μίας περιόδου έτσι και εδώ ισχύει η παραδοχή ότι σε μία μονάδα χρόνου ΔT η αγορά μπορεί να πάει σε μία από τις δύο γνωστές καταστάσεις. Ένα δικαίωμα προαίρεσης επί της μετοχής θα μπορεί να πάρει δύο τιμές C_u και C_d αν ανέβει ή πέσει η τιμή της μετοχής, αντίστοιχα, που είναι η απόδοση του δικαιώματος σε κάθε μία από τις δύο περιπτώσεις.



Εικόνα 2.11 Η κίνηση της μετοχής σε πέντε μονάδες χρόνου.



Εικόνα 2.12: Διαγραμματική απεικόνιση του διωνυμικού υποδείγματος n περιόδων.

Η αρχική τιμή της μετοχής στο χρόνο μηδέν είναι S_0. Μετά από χρόνο ΔT υπάρχουν δύο δυνατές εκδοχές για την τιμή της μετοχής, όπως και στο διωνυμικό μοντέλο μίας περιόδου που είδαμε παραπάνω και είναι οι S_0u και S_0d. Σε χρόνο $2\Delta T$

υπάρχουν τρεις πιθανές εκδοχές για την τιμή της μετοχής κ.ο.κ. Συνεπώς σε i χρόνο θα έχουμε ότι οι $i+1$ πιθανές τιμές της μετοχής θα έχουν την μορφή:

$$S_0 u^j d^{i-j}\,, \qquad j = 0,1,\dots$$

2.4.3 Ανάλυση του διωνυμικού υποδείγματος n περιόδων

Συνήθως θέλουμε να τιμολογήσουμε παράγωγα σε ένα χρονικό ορίζοντα T (χρόνος ωρίμανσης). Για να το κάνουμε αυτό διαμερίζουμε το χρονικό διάστημα $[0,T]$ σε n μικρότερα διαστήματα που θεωρούμε ίσα. Κάθε διάστημα θα έχει εύρος $h = \frac{T}{n}$ και τα άκρα των διαστημάτων αυτών θα είναι $t_k = kh\ , k = 0,1,\dots.,n$. Οι πιθανές εκδοχές της αξίας της μετοχής στο διάστημα $[0,T]$ είναι 2^n όσοι και οι διαφορετικοί συνδυασμοί των u και d σε κάθε βήμα του δέντρου.

Αν θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε σε ένα χώρο πιθανότητας Ω τότε κάθε σημείο του Ω αντιστοιχεί σε ένα από τα πιθανά σενάρια εξέλιξης της αγοράς. Αν για παράδειγμα $n = 3$ τότε οι διαφορετικές τιμές που ανήκουν στο Ω μπορεί να είναι οι ακόλουθες:

$$\omega_1 \rightarrowtail (u,u,u)$$

$$\omega_2 \rightarrowtail (d,d,d)$$

$$\omega_3 \rightarrowtail (u,u,d)$$

$$\omega_4 \rightarrowtail (u,d,d)$$

$$\omega_5 \rightarrowtail (u,d,u)$$

$$\omega_6 \rightarrowtail (d,d,u)$$

$$\omega_7 \rightarrowtail (d,u,u)$$

$$\omega_8 \rightarrowtail (d,u,d)$$

Επίσης η πιθανότητα εμφάνισης καθενός από τα παραπάνω σενάρια θα δίνεται από το μέτρο πιθανότητας P, δηλαδή $P(\{\omega_3\}) = p^2(1-p)$, με p την πιθανότητα ανόδου της τιμής.

2.5 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ BLACK – SCHOLES

Το μοντέλο Black – Scholes είναι ένα μοντέλο σε συνεχή χρόνο για την αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων. Το μοντέλο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η γενίκευση του διωνυμικού μοντέλου αν θεωρήσουμε ότι η χρονική διάρκεια μεταξύ συναλλαγών $\delta t \to 0$ και ο αριθμός των περιόδων συναλλαγής $n \to \infty$, με $T = n\delta t$.

Θεωρούμε μία χρηματοοικονομική αγορά στο χρονικό διάστημα $[0, T]$. Συμβολίζουμε με Ω, το σύνολο των δυνατών καταστάσεων της αγοράς σε αυτό το χρονικό διάστημα με $\mathcal{F}$, τον χώρο των ενδεχομένων του και με P, το μέτρο πιθανότητας στον χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ έτσι στην αγορά θεωρούμε τους παρακάτω τίτλους:

(i) Ένα ομόλογο επί μίας χρηματικής μονάδας με σταθερό επιτόκιο το οποίο στον χρόνο t έχει αξία e^{rt}.
(ii) Μία μετοχή η οποία στον χρόνο t έχει αξία S_t. Θεωρούμε ότι η S_t, $t \in [0, T]$ ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown $[GBM(\mu, \sigma^2)]$ και έχει αρχική τιμή S_0.
(iii) Ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού τύπου με χρόνο λήξης T και τελική αξία D_T. Η τελική του αξία δίνεται συναρτήσει της S_T ή της διαδρομής $\{S_t, t \in [0, T]\}$.

Αν ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού τύπου με χρόνο λήξης T έχει τελική αξία D_T, τότε στον χρόνο t θα έχει αξία $D_t = e^{-rT}E_Q(D_T)$, υπό τη συνθήκη απουσίας βέβαιου κέρδους (*no-arbitrage*) και υπό το μέτρο πιθανότητας Q η $\{S_t, t \geq 0\} \sim GBM(\mu' = r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$. Ισχύει ότι υπό το μέτρο πιθανότητας Q, η τυχαία μεταβλητή $\log\left(\frac{S_t}{S_0}\right) \sim N\left(r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2\right)$ και η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής δίνεται από τον τύπο $E_Q(S_t) = S_0 e^{t\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \frac{1}{2}t\sigma^2} = S_0 e^{rt}$. Δηλαδή η αξία της μετοχής είναι ίση με την απόδοση του ομολόγου στον χρόνο t.

Το μέτρο P είναι το μέτρο πιθανότητας στον πραγματικό κόσμο ενώ το μέτρο Q είναι το μέτρο σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου (risk neutral probability measure).

Στην συνέχεια θα κατασκευάσουμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο με τελική αξία ίση με την αξία του παραγώγου D_T στον χρόνο λήξης T. Θεωρούμε λοιπόν το χαρτοφυλάκιο αυτό το οποίο αποτελείται από y_t ομόλογα και Δ_t μετοχές με σύνθεση που δίνεται από το διάνυσμα $x_t = (y_t, \Delta_t)$ [10]. Άρα η αξία, Π_t, του χαρτοφυλακίου στον χρόνο $t \in [0, T]$ δίνεται από τον τύπο

$$\Pi_t = e^{rt} y_t + \Delta_t S_t$$

επειδή το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο ισχύει η παρακάτω στοχαστική διαφορική εξίσωση,

$$d\Pi_t = y_t de^{rt} + \Delta_t dS_t$$

μέσω της οποίας συμπεραίνουμε ότι η απειροστή μεταβολή στην αξία του χαρτοφυλακίου στο χρονικό διάστημα $[t, t+dt]$ εξαρτάται μόνο από την μεταβολή της αξίας του ομολόγου (de^{rt}) και την μεταβολή της αξίας της μετοχής dS_t.

Ο τύπος των Black-Scholes

Ας υποθέσουμε ένα δικαίωμα αγοράς του οποίου η δίκαιη αξία δίνεται από τον τύπο,

$$C = e^{-rT} E_Q((S_T - K)_+)$$

με $S = \{S_t, t \geq 0\} \sim GBM(\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$, μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή.

Στο μοντέλο Black-Scholes, η *no-arbitrage* τιμή ενός δικαιώματος αγοράς (call option) Ευρωπαϊκού τύπου με ημερομηνία λήξης T και τιμή εξάσκησης K στο χρόνο t είναι ίση με

$$C(t, S_t) = S_t \Phi(d_1) - K e^{-r(T-t)} \Phi(d_2),$$

όπου:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\ ,$$

Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της κανονικής κατανομής, $N(0,1)$,

σ η μεταβλητότητα (volatility) της τιμής της υποκείμενης μετοχής και

r το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς.

2.5.1 Αποτίμηση αξίας δικαιωμάτων προαίρεσης, Call-Put Options

Στο μοντέλο των Black-Scholes η no-arbitrage αξία ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαικού τύπου στον χρόνο $t_0 = 0$ είναι:

$$C = e^{-rT} E_Q((S_T - K)_+)$$

δεδομένου ότι η παραπάνω μέση τιμή, E_Q, λαμβάνεται υπό το μέτρο πιθανότητας Q ουδέτερου ρίσκου. Υπό το μέτρο αυτό η στοχαστική διαδικασία $S = \{S_t, t \geq 0\}$ περιγράφει την κίνηση της τιμής της μετοχής η οποία ακολουθεί την γεωμετρική κίνηση Brown (GBM) με παραμέτρους $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$ *(τάση-drift)* και μεταβλητότητα (*volatility*) σ^2, ο λογάριθμος της οποίας ακολουθεί την κίνηση Brown με τις ίδιες παραμέτρους [12]. Αποδεικνύεται ότι η no-arbitrage αξία ενός δικαιώματος αγοράς (*call option*) δίνεται από τον τύπο

$$C_{call\ option} = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2).$$

Συνεπώς, η αξία ενός δικαιώματος πώλησης (*put option*) δίνεται από τον τύπο (*put-call parity*)

$$C_{put\ option} = C_{call\ option} - S_0 + K e^{-rT}.$$

Παράδειγμα 2.4.1 Θεωρούμε ένα δικαίωμα αγοράς (*call option*) διάρκειας 6 μηνών με τιμή εξάσκησης $K = €50$, επί μίας μετοχής η οποία διαπραγματεύεται στο χρηματιστήριο στην τιμή $S_0 = €52$. Το κόστος του δικαιώματος είναι €4,5. Θα εξετάσουμε εάν μας συμφέρει να αγοράσουμε το δικαίωμα αυτό, δεδομένου ότι το ετήσιο άνευ κινδύνου (*risk-free*) επιτόκιο είναι $r = 5\%$ και η ετήσια τυπική απόκλιση της απόδοσης της μετοχής είναι $\sigma = 12\%$.

Θα πρέπει λοιπόν να καθορίσουμε την αξία του δικαιώματος αγοράς χρησιμοποιώντας το μοντέλο τιμολόγησης Black-Scholes και στη συνέχεια να τη συγκρίνουμε με την τρέχουσα τιμή του δικαιώματος ώστε να αποφασίσουμε εάν μας συμφέρει να το αγοράσουμε.

Υπολογίζουμε αρχικά τα d_1 και d_2:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T - t)}{\sigma\sqrt{T - t}} = \frac{\ln\left(\frac{60}{50}\right) + \left(0.05 + \frac{0.12^2}{2}\right)(0.5)}{0.12\sqrt{0.5}} = 0.7993$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T - t} = 0.7993 - 0.12\sqrt{0.5} = 0.7144$$

Το επόμενο βήμα είναι να βρούμε την πιθανότητα της τυποποιημένης κανονικής κατανομής - *χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση του Microsoft Excel, =NORMSDIST( )*:

$$\Phi(d_1) = 0.7879$$

και

$$\Phi(d_2) = 0.7625.$$

Οπότε, από τον τύπο Black-Scholes παίρνουμε:

$$C_{call\ option} = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-rT}\Phi(d_2) = €52 \times 0.7879 - €50 \times e^{-0,05\times0,5} \times 0.7625 = €3.788$$

Η τιμή του δικαιώματος αγοράς, σύμφωνα με το μοντέλο, είναι χαμηλότερη από αυτή που διακινείται τώρα στην αγορά. Αυτό μπορεί να οφείλεται στο γεγονός ότι το δικαίωμα είναι υπερτιμημένο ή επειδή η εκτίμηση της μεταβλητότητας είναι χαμηλότερη.

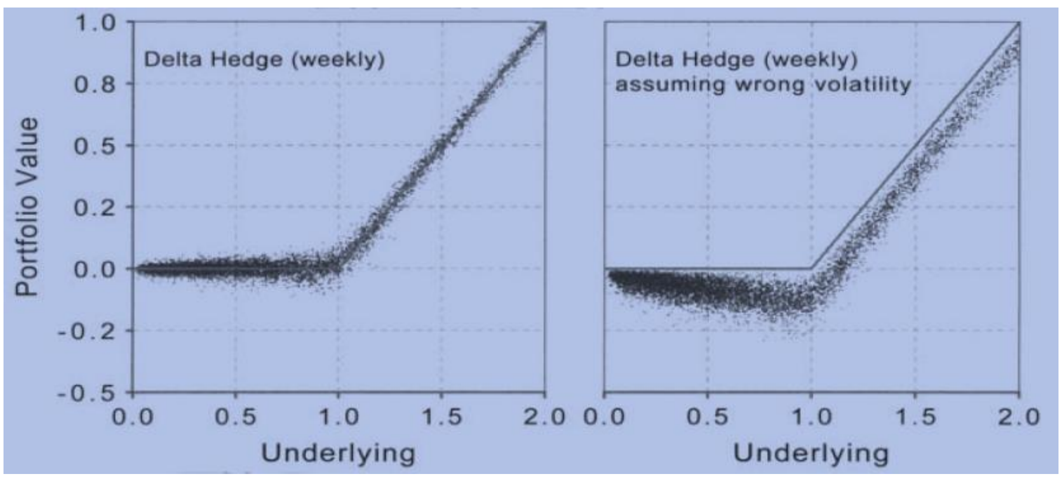
2.5.2 Τα Ελληνικά γράμματα (Greeks)

Όπως φαίνεται και από τον τύπο των Black-Scholes, η τιμή ενός δικαιώματος είναι συνάρτηση κάποιων παραμέτρων. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι αλλαγές στις τιμές αυτών των παραμέτρων να επηρεάζουν και την τιμή του δικαιώματος. Οι ποσότητες Δέλτα *(Delta)*, Γάμμα *(Gamma)*, Βήτα *(Vega)*, Θήτα *(Theta)* και Ρο *(Rho)* εκφράζουν την επίδραση και την ευαισθησία της τιμής ενός δικαιώματος ως προς τις αλλαγές στις τιμές των παραμέτρων από τις οποίες εξαρτάται. Η ονομασία που έχει επικρατήσει για την αναφορά σε αυτές τις ποσότητες είναι *τα Ελληνικά (the Greeks)*.

Κάθε μία από αυτές τις μεταβλητές – τα Ελληνικά – συνδέεται με έναν αριθμό, ο οποίος αποτελεί μία ένδειξη για τον επενδυτή σχετικά με τον κίνδυνο του δικαιώματος. Ο αριθμός ή η τιμή που σχετίζεται με τα Ελληνικά μπορεί να αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Ως εκ τούτου, οι έμπειροι επενδυτές μπορούν να υπολογίζουν καθημερινά αυτές τις αξίες για να αξιολογήσουν τυχόν αλλαγές που ενδέχεται να επηρεάσουν τις θέσεις ή τις προοπτικές τους ή να ελέγξουν εάν το χαρτοφυλάκιό τους πρέπει να ανασυσταθεί. Τα Ελληνικά (Delta, Vega, Theta, Gamma και Rho) υπολογίζονται από τη μερική παράγωγο ενός μοντέλου τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης, όπως για παράδειγμα, του μοντέλου Black-Scholes. Παρακάτω παρουσιάζονται τα βασικότερα Ελληνικά.

1. $Delta: \Delta = \frac{dC}{dS_0} = \Phi(d_1) > 0$

Είναι η πρώτη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς την τιμή της μετοχής. Εκφράζει την επίδραση που έχει στην τιμή του δικαιώματος η αλλαγή της τιμής της μετοχής. Για ένα δικαίωμα αγοράς (πώλησης) η αύξηση της τιμής της μετοχής σημαίνει και την ταυτόχρονη αύξηση (μείωση) της τιμής του δικαιώματος. Η συγκεκριμένη παράμετρος χρησιμοποιείται κατά την δημιουργία ενός χαρτοφυλακίου εξασφάλισης, όπου δείχνει τον αριθμό των μετοχών που πρέπει να υπάρχουν κάθε χρονική στιγμή στο χαρτοφυλάκιο (delta hedging). Πρέπει να αναφερθεί το γεγονός ότι η αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης στην πράξη δεν μπορεί γίνεται σε «κάθε» χρονική στιγμή, δεδομένου ότι στην πραγματικότητα υπάρχουν κόστη συναλλαγών. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα, η αναπροσαρμογή να γίνεται σε τακτά χρονικά διαστήματα (ανά εβδομάδες ή ακόμα και μέρες) αλλά όχι συνεχώς όπως είχε υποτεθεί στην εφαρμογή του μοντέλου. Στην Εικόνα 2.13 απεικονίζεται ένα δικαίωμα αγοράς και οι τιμές της Εξασφάλισης Δέλτα (Delta Hedging) με εβδομαδιαίες αναπροσαρμογές. Στο πρώτο σχήμα η εφαρμογή έγινε δεδομένου της σωστής μεταβλητότητας, ενώ στο δεύτερο έγινε με μεταβλητότητα μικρότερης της πραγματικής. Όπως διαπιστώνεται στην δεύτερη περίπτωση η μέση τιμή του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης είναι συστηματικά κάτω από την γραμμή που δίνει το όφελος του δικαιώματος.



Εικόνα 2.13

2. $Gamma = \Gamma = \frac{d^2C}{dS_0^2} = \frac{\Phi\prime(d_1)}{S_0\sigma\sqrt{T}} > 0$

Είναι η δεύτερη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς την τιμή της μετοχής. Εκφράζει την «ευαισθησία» του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης στις αλλαγές της τιμής της μετοχής ή διαφορετικά, μετρά την επίδραση που έχει στο Delta η αλλαγή της τιμής της μετοχής. Εάν η τιμή του Gamma είναι μικρή τότε το Delta θα αλλάζει αργά. Αυτό σημαίνει ότι η αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης μπορεί να γίνεται σε αραιά χρονικά διαστήματα χωρίς να προκαλούνται ζημιές. Αντίθετα, εάν η τιμή του Gamma είναι μεγάλη τότε υποδηλώνεται μεγάλη «ευαισθησία» του Delta ως προς την τιμή της μετοχής. Σε αυτή την περίπτωση, η αναπροσαρμογή του χαρτοφυλακίου θα πρέπει να γίνεται συνεχώς. Η τιμή του Gamma αναφέρεται και ως κυρτότητα (curvature).

3. $Vega = V = \frac{dC}{d\sigma} = S_0\sqrt{T}\Phi'(d_1) > 0$

Είναι η πρώτη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς τη μεταβλητότητα, σ. Εκφράζει ένα μέτρο ευαισθησίας της τιμής του παραγώγου ως προς τις αλλαγές στην τιμή της μεταβλητότητας. Στις υποθέσεις που έχουν γίνει μέχρι τώρα η μεταβλητότητα θεωρείται σταθερή. Στην πράξη όμως κάτι τέτοιο δεν ισχύει. Όταν αυξάνεται (μειώνεται) η μεταβλητότητα αυξάνεται (μειώνεται) και η τιμή του παραγώγου. Μεγάλες τιμές του vega δηλώνουν και μεγάλη ευαισθησία της τιμής του παραγώγου σε μικρές αλλαγές του σ. Αντίθετα, μικρές τιμές του vega δηλώνουν τη μικρή επιρροή της σ στην τιμή του παραγώγου. Δεδομένου ότι μία από τις υποθέσεις για την εφαρμογή του μοντέλου Black and Scholes είναι η σταθερή μεταβλητότητα, θα περίμενε κανείς ότι ο υπολογισμός του vega απευθείας από το μοντέλο να δίνει λάθος αποτελέσματα. Εν συνεχεία αυτού, θα περίμενε ότι ο σωστός υπολογισμός της παραμέτρου να δίνεται από ένα μοντέλο όπου θεωρεί τη μεταβλητότητα ως στοχαστική. Ωστόσο, στην πράξη τα αποτελέσματα και στις δύο περιπτώσεις είναι αρκετά κοντα. Αυτό σημαίνει ότι και το μοντέλο των Black and Scholes δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα για τον υπολογισμό της παραμέτρου vega, χωρίς να χρειάζεται να καταφύγει κάποιος στον δύσκολο υπολογισμό αυτής, μέσω μοντέλων με στοχαστική μεταβλητότητα.

4. $Theta = \Theta = \frac{dC}{dT} = -\frac{S\sigma}{2\sqrt{T}}\Phi'^{(d_1)} - Kre^{-rT}\Phi(d_2) < 0$

Είναι η πρώτη παράγωγος της τιμής του παραγώγου ως προς το πέρασμα του χρόνου. Εκφράζει την αλλαγή που παρατηρείται στην τιμή του παραγώγου καθώς περνάει ο χρόνος. Όταν μειώνεται (αυξάνεται) ο χρόνος εξάσκησης για ένα δικαίωμα αγοράς τότε η τιμή του αυξάνεται (μειώνεται). Η τιμή της συγκεκριμένης παραμέτρου είναι πάντα αρνητική. Το theta χρησιμοποιείται από τους επενδυτές κυρίως ως ένα χρήσιμο περιγραφικό στατιστικό εργαλίο και όχι ως κάτι παραπάνω. Δεν έχει την ίδια σημασία σε σχέση με τα υπόλοιπα "Greeks", αφού δεν παρουσιάζει κανένα ενδιαφέρον και δεν έχει κανένα νόημα να κατασκευασθεί για παράδειμα μια στρατηγική theta hedging για την εξασφάλιση έναντι των αλλαγών στη μονάδα του χρόνου. Αντίθετα, έχει μεγάλη σημασία να κατασκευασθεί για παράδειγμα μια στρατηγική delta hedging για την εξασφάλιση έναντι αλλαγών που παρουσιάζονται στις τιμές της μετοχής.

5. $Rho = \rho = \frac{dC}{dr} = TKe^{-rT}\Phi(d_2)$

Είναι η πρώτη παράγωγος της τιμής του παραγώγου ως προς την τιμή του επιτοκίου (r). Εκφράζει ένα μέτρο ευαισθησίας της τιμής του παραγώγου ως προς τις αλλαγές στην τιμή του επιτοκίου της αγοράς. Σε περίπτωση αύξησης (μείωσης) του επιτοκίου η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς αυξάνεται (μειώνεται).

Από τη σχέση των Black and Scholes προκύπτει και η σχέση μεταξύ των Greeks η οποία είναι:

$$rC = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma + rS\Delta + \Theta$$

Στην παραπάνω σχέση διαπιστώνεται η αλληλεξάρτηση της τιμής S του προϊόντος, πάνω στο οποίο δημιουργήθηκε το παράγωγο (π.χ. μετοχής), του ασφαλίστρου C του παραγώγου, του επιτοκίου της αγοράς r καθώς και της μεταβλητότητας σ με τις παραμέτρους gamma, delta και theta.

Συνοψίζοντας το δεύτερο κεφάλαιο, εισαγάγαμε την έννοια των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων. Συγκεκριμένα, παρουσιάσαμε τις βασικές έννοιες και τις κατηγορίες των παραγώγων, ενώ παραθέσαμε και εδώ παραδείγματα με σκοπό να γίνει περισσότερο κατανοητή η χρήση και η εφαρμογή τους. Σε αυτό το κεφάλαιο επίσης, ένα σημείο που χρήζει ιδιαίτερης προσοχής είναι η τιμολόγηση των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων και ιδιαίτερα το μοντέλο Black-Scholes, το οποίο αποτελεί ένα σημαντικό εργαλείο για το τρίτο κεφάλαιο που είναι και το βασικό θέμα μελέτης της εργασίας μας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗΣ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΜΕ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ

Στο κεφάλαιο αυτό η προσέγγιση που ακολουθούμε για την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης, βασίζεται στη στοχαστικότητα της μεταβλητότητας. Περιοριζόμαστε στο να βρούμε ζώνες τιμολόγησης για τα δικαιώματα προαίρεσης, οι οποίες θα είναι ανεξάρτητες των λεπτομερών στατιστικών χαρακτηριστικών της τυχαίας απόδοσης βέβαιου κέρδους. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης και της τυχαίας απόδοσης βέβαιου κέρδους αλλάζουν σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες, αναπτύσσουμε μία ασυμπτωτική θεωρία τιμολόγησης χρησιμοποιώντας το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ) για στοχαστικές διαδικασίες.

3.1 *ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΥΧΑΙΑΣ ΑΠΟΔΟΣΗΣ ΒΕΒΑΙΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ*

Θεωρούμε το μοντέλο αγοράς (S, B, V) το οποίο αποτελείται από μία μετοχή αξίας S, ένα ομόλογο αξίας B και ένα ευρωπαϊκό δικαίωμα προαίρεσης με τιμή V, επί της μετοχής. Λαμβάνουμε υπόψη μας τις τυχαίες ευκαιρίες βέβαιου κέρδους, υποθέτοντας ότι το μοντέλο αγοράς επηρεάζεται από τους εξής δύο παράγοντες αβεβαιότητας:

α) Την τυχαία διακύμανση της απόδοσης της μετοχής αξίας S, η οποία μοντελοποιείται από τη στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$$

ή ισοδύναμα

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \tag{3.1.1}$$

όπου W είναι η στοχαστική διαδικασία Wiener και μ ο συντελεστής ολίσθησης.

β)Την τυχαία απόδοση βέβαιου κέρδους του ομολόγου αξίας B, η οποία περιγράφεται από τη σχέση:

$$\frac{\mathrm{dB}}{\mathrm{B}} = \mathrm{rdt} + \xi(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

ή ισοδύναμα

$$\mathrm{dB} = \mathrm{rBdt} + \xi(\mathrm{t})\mathrm{Bdt} \tag{3.1.2}$$

όπου r το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (risk free rate) και $\xi(t)$ μία τυχαία διαδικασία η οποία περιγράφει τις διακυμάνσεις της απόδοσης γύρω από το rdt. Η ίδια απεικόνιση σε μοντέλο με στοχαστικό επιτόκιο χρησιμοποιείται στην Αναφορά[15, 14, 18], όπου η $\xi(t)$ ακολουθεί τη διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck. Το χαρακτηριστικό του μοντέλου μας είναι ότι η $\xi(t)$ δεν υπακούει σε δεδομένη στοχαστική διαφορική εξίσωση.

Υποθέτουμε, επίσης, ότι η κλίμακα μέτρησης των τυχαίων διακυμάνσεων των αποδόσεων βέβαιου κέρδους $\xi(t)$ είναι οι ώρες. Σημειώνουμε με $\tau_{arbitrage}$ την ενδιάμεση χρονική στιγμή μεταξύ της χρονικής κλίμακας της τυχαίας απόδοσης μίας μετοχής (απείρως γρήγορες διακυμάνσεις της κίνησης Brown) και της διάρκειας ζωής T ενός παραγώγου, με $0 \ll \tau_{arbitrage} \ll T$. Εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης και οι τυχαίες αποδόσεις βέβαιου κέρδους αλλάζουν σε διαφορετικές χρονικές κλίμακες, αναπτύσσουμε μία ασυμπτωτική θεωρία τιμολόγησης η οποία σχετίζεται με το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα (ΚΟΘ) για στοχαστικές διαδικασίες.

Δημιουργούμε ένα χαρτοφυλάκιο Π, θεωρώντας ότι η θέση του επενδυτή είναι αρχικά μηδενική. Το χαρτοφυλάκιο Π συνίσταται από την αγορά (long position) ενός ομολόγου, B και Δ μεριδίων μίας μετοχής, S και την πώληση (short position) ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης, V, με τιμή εξάσκησης, K και λήξη, T. Η αξία του χαρτοφυλακίου είναι:

$$\Pi = B - \Delta S + V \tag{3.1.3}$$

$$d\Pi = dB - \Delta dS + dV \tag{3.1.4}$$

Η δυναμική του μοντέλου Black-Scholes για το χαρτοφυλάκιο δίδεται από τις δύο εξισώσεις [12]:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0 \tag{3.1.5}$$

και

$$\Pi = 0 \tag{3.1.6}$$

Η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης, V εξαρτάται από την τιμή της μετοχής, S, με $\mathrm{dS} = \mathrm{\mu Sdt} + \mathrm{\sigma SdW}$.

Από το λήμμα Itô έχουμε ότι:

$$dV = \left[\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW \qquad (3.1.7)$$

Η σχέση (3.1.4), με τη βοήθεια των σχέσεων (3.1.1), (3.1.2) για $\xi(t) = 0$ και (3.1.7), γίνεται:

$$d\Pi = dB - \Delta dS + dV \quad \Longrightarrow$$

$$d\Pi = rBdt + \xi(t)Bdt - \Delta[\mu Sdt + \sigma SdW] + \left[\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW \ \Longrightarrow$$

$$d\Pi = \left[rB + \xi(t)B - \Delta\mu S + \frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt + \left[-\Delta\sigma S + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}\right] dW \qquad (3.1.8)$$

Σε αυτό το σημείο, αν θέσουμε $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, η στοχαστική μερική διαφορική εξίσωση (3.1.8) παίρνει τη μορφή:

$$d\Pi = \left[rB + \xi(t)B - \frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt + \left[-\frac{\partial V}{\partial S}\sigma S + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}\right] dW \Longrightarrow$$

$$d\Pi = \left[rB + \xi(t)B + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt \xRightarrow{[\text{και για } \xi(t)=0]}$$

$$d\Pi = \left[rB + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] dt \qquad (3.1.9)$$

Επίσης, η σχέση (3.1.5) γράφεται

$$\partial\Pi = 0 \qquad (3.1.10)$$

και λόγω της σχέσης (3.1.6) η σχέση (3.1.3) γίνεται:

$$0 = B - \Delta S + V \Longrightarrow$$

$$B = \Delta S - V \Longrightarrow$$

$$B = \frac{\partial V}{\partial S} S - V \qquad (3.1.11)$$

Εξισώνοντας τα δεξιά μέλη των σχέσεων (3.1.9) και (3.1.10) και λαμβάνοντας υπόψη τη σχέση (3.1.11), έχουμε:

$$0 = \left[r(\frac{\partial V}{\partial S} S - V) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt \Longrightarrow$$

$$r\frac{\partial V}{\partial S} S - rV + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = 0 \qquad (3.1.12)$$

Η παραπάνω σχέση μας δίνει την κλασική εξίσωση των Black-Scholes.

Η φυσική γενίκευση της εξίσωσης $\frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$ είναι η απλή μη ισορροπημένη εξίσωση

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\frac{\Pi}{\tau_{arbitrage}} \qquad (3.1.13)$$

όπου $\tau_{arbitrage}$ είναι η χαρακτηριστική χρονική στιγμή κατά την οποία η ευκαιρία βέβαιου κέρδους παύει να υπάρχει [1].

Υπό τη συνθήκη αυτοχρηματοδότησης του χαρτοφυλακίου, $d\Pi = dB - \Delta dS + dV$ και με τη βοήθεια του λήμματος Itô και των σχέσεων (3.1.1) και (3.1.2), οδηγούμαστε στην εξίσωση που περιλαμβάνει την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης $V(t,S)$ και την αξία του χαρτοφυλακίου $\Pi(t,S)$.

Συγκεκριμένα:

$$d\Pi = dB - \Delta dS + dV$$

Θεωρούμε $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$, συνεπώς η παραπάνω σχέση γίνεται:

$$d\Pi = rBdt + \xi(t)Bdt - \frac{\partial V}{\partial S}[\mu S dt + \sigma S dW] + \left[\mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} dW \Longrightarrow$$

$$d\Pi = \left[rB + \xi(t)B - \frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\partial V}{\partial S}\mu S + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt + \left[-\sigma S \frac{\partial V}{\partial S} + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S} \right] dW \Longrightarrow$$

$$d\Pi = \left[rB + \xi(t)B + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt \Longrightarrow$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ισχύει η σχέση:

$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = \frac{-\Pi}{\tau_{arbitrage}}$ (3.1.13) ή ισοδύναμα $\partial \Pi = \frac{-\Pi}{\tau_{arbitrage}} \partial t$ έχουμε:

$$\frac{-\Pi}{\tau_{arbitrage}} dt = \left[rB + \xi(t)B + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right] dt \Longrightarrow$$

$$\frac{-\Pi}{\tau_{arbitrage}} = \left[rB + \xi(t)B + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] \Rightarrow$$

Λύνοντας τη σχέση (3.1.3) ως προς Β έχουμε:

$B = \Pi + \Delta S - V$, με $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ οπότε:

$$\frac{-\Pi}{\tau_{arbitrage}} = r\left(\Pi + \frac{\partial V}{\partial S}S - V\right) + \xi(t)\left(\Pi + \frac{\partial V}{\partial S}S - V\right) + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Rightarrow$$

$$\frac{-\Pi}{\tau_{arbitrage}} = r\Pi + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV + \xi(t)\Pi + \xi(t)S\frac{\partial V}{\partial S} - \xi(t)V + \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Rightarrow$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV + r\Pi + +\xi(t)\Pi + \xi(t)\left(S\frac{\partial V}{\partial S} - V\right) + \frac{\Pi}{\tau_{arbitrage}} = 0. \quad (3.1.14)$$

Επισημαίνουμε ότι η εξίσωση (3.1.14) μας δίνει την εξίσωση (3.1.12) όταν ισχύει $\Pi = 0$ και $\xi(t) = 0$.

Στο σημείο αυτό θα εισάγουμε την έννοια του χρόνου χωρίς διαστάσεις

$$\tau = \frac{T-t}{T}, 0 \le \tau \le 1 \quad (3.1.15)$$

και της μικρής παραμέτρου

$$\varepsilon = \frac{\tau_{arbitrage}}{T} \ll 1. \quad (3.1.16)$$

Αυτή η παράμετρος παίζει πολύ σημαντικό ρόλο σε ό,τι ακολουθεί. Στο όριο $\varepsilon \to 0$, η στοχαστική απόδοση βέβαιου κέρδους, ξ, γίνεται μια συνάρτηση που μεταβάλλεται γρήγορα με το χρόνο. Είναι βολικό να χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο συμβολισμό, $\xi(\frac{\tau}{\varepsilon})$ [20]. Από τη σχέση (3.1.13) προκύπτει ότι η αξία του χαρτοφυλακίου Π, μειώνεται στο μηδέν κατά $e^{-\frac{t}{\varepsilon T}}$. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Pi = 0$, όταν $\varepsilon \to 0$. Βρίσκουμε από τη (3.1.14) ότι η σχετική τιμή δικαιώματος προαίρεσης, $V^{\varepsilon}(\tau, S)$, υπακούει στην ακόλουθη στοχαστική ΜΔΕ:

$$\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^{\varepsilon}}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S} - rV^{\varepsilon} + \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\left(S\frac{\partial V^{\varepsilon}}{\partial S} - V^{\varepsilon}\right) \quad (3.1.17)$$

υπό την προϋπόθεση της αρχικής συνθήκης $V^{\varepsilon}(0, S) = \max(S - K, 0)$, για ένα δικαίωμα αγοράς, όπου K είναι η τιμή εξάσκησης του δικαιώματος. Εδώ, για απλότητα, διατηρούμε τον ίδιο συμβολισμό για τη χωρίς διαστάσεις μεταβλητότητα σ και το επιτόκιο r.

3.2 Ασυμπτωτικη Αναλυση: Ζωνες Τιμολογησης για τα Δικαιωματα Προαιρεσης

Προκειμένου να αναλύσουμε τη στοχαστική ΜΔΕ Σχ(3.1.17), πρέπει πρώτα να καθορίσουμε τις στατιστικές ιδιότητες της τυχαίας απόδοσης βέβαιου κέρδους ξ. Ας υποθέσουμε ότι η $\xi(\tau)$ είναι μία στατική εργοδική διαδικασία [24] με μέση τιμή μηδέν (0), δηλαδή $E_\xi = \langle \xi(\tau) \rangle = 0$, έτσι ώστε

$$D = \int_0^\infty \langle \xi(\tau + s)\xi(\tau) \rangle \, ds \tag{3.2.1}$$

είναι πεπερασμένο.

Σύμφωνα με το νόμο των μεγάλων αριθμών, η σχετική τιμή δικαιώματος προαίρεσης, $V^\varepsilon(\tau, S)$, συγκλίνει στην πιθανότητα με την τιμή των Black-Scholes, $V_{BS}(\tau, S)$, καθώς το $\varepsilon \to 0$. Κάποιος μπορεί να διαχωρίσει την τιμή $V^\varepsilon(\tau, S)$, ως το άθροισμα της τιμής των Black-Scholes, $V_{BS}(\tau, S)$ και του τυχαίου πεδίου $Z^\varepsilon(\tau, S)$ επί τον συντελεστή κλιμάκωσης $\sqrt{\varepsilon}$, δίνοντας τη σχέση

$$V^\varepsilon(\tau, S) = V_{BS}(\tau, S) + \sqrt{\varepsilon} Z^\varepsilon(\tau, S). \tag{3.2.2}$$

Αντικαθιστώντας τη σχέση (3.2.2) στη σχέση (3.1.17) και χρησιμοποιώντας την εξίσωση για την τιμή $V_{BS}(\tau, S)$, παίρνουμε την ακόλουθη στοχαστική ΜΔΕ για το $Z^\varepsilon(\tau, S)$,

$$\frac{\partial Z^\varepsilon}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Z^\varepsilon}{\partial S^2} + \left(r + \xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)\right)\left(S\frac{\partial Z^\varepsilon}{\partial S} - Z^\varepsilon\right) + \frac{\xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)}{\sqrt{\varepsilon}}\left(S\frac{\partial V_{BS}}{\partial S} - V_{BS}\right). \tag{3.2.3}$$

Στόχος μας είναι να βρούμε την ασυμπτωτική εξίσωση για $V^\varepsilon(\tau, S)$, καθώς το $\varepsilon \to 0$. Παρατηρούμε ότι η εξίσωση (3.2.3) περιλαμβάνει δύο στοχαστικούς όρους ανάλογους του $\xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$ και $\varepsilon^{-\frac{1}{2}}\xi\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$. Η εργοδική θεωρία υποδηλώνει ότι ο πρώτος όρος, στην ολοκληρωμένη μορφή του, συγκλίνει στο μηδέν, όταν $\varepsilon \to 0$, ενώ ο δεύτερος όρος συγκλίνει ασθενώς στον λευκό Γκαουσιανό θόρυβο (white Gaussian noise - WGN), $\eta(\tau)$, με τη συνάρτηση συσχέτισης

$$\langle \eta(\tau_1)\eta(\tau_2) \rangle = 2D\delta(\tau_1 - \tau_2) \tag{3.2.4}$$

όπου η ένταση του λευκού θορύβου, D, καθορίζεται από τη σχέση (3.2.1) [9]. Έτσι, στο όριο $\varepsilon \to 0$, το τυχαίο πεδίο, $Z^\varepsilon(\tau, S)$, συγκλίνει ασθενώς στο πεδίο $Z(\tau, S)$, που υπακούει στην ασυμπτωτική στοχαστική ΜΔΕ:

$$\frac{\partial Z}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 Z}{\partial S^2} + r\left(S\frac{\partial Z}{\partial S} - Z\right) + \left(S\frac{\partial V_{BS}}{\partial S} - V_{BS}\right)\eta(\tau) \tag{3.2.5}$$

με την αρχική συνθήκη $Z(0,S)=0$. Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί με βάση την κλασσική συνάρτηση Black – Scholes Green, $G(S,S_1,\tau,\tau_1)$, για να δώσει την

$$Z(\tau,S)=\int_0^{\tau}\int_0^{\infty} G(S,S_1,\tau,\tau_1)\left(S_1\frac{\partial V_{BS}}{\partial S_1}-V_{BS}(\tau_1,S_1)\right)\eta(\tau_1)dS_1 d\tau_1, \quad \text{.........(3.2.6)}$$

όπου,

$$G(S,S_1,\tau,\tau_1)=\frac{e^{-r(\tau-\tau_1)}}{S_1\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau-\tau_1)}}e^{\frac{\left[\ln\left(\frac{S}{S_1}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(\tau-\tau_1)\right]^2}{2\sigma^2(\tau-\tau_1)}} \quad (3.2.7)$$

Από τη σχέση (3.2.6), δεδομένου ότι η $\eta(t)$ είναι ο Γκαουσιανός θόρυβος (*Gaussian noise*) με μηδενική μέση τιμή, προκύπτει ότι η $Z(\tau,S)$ είναι επίσης Γκαουσιανό πεδίο με μηδενική μέση τιμή. Η συνδιακύμανση

$$R(\tau,S,Y)=\langle Z(\tau,S)Z(\tau,Y)\rangle \quad (3.2.8)$$

ικανοποιεί την ντετερμινιστική ΜΔΕ

$$\frac{\partial R}{\partial \tau}=\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2R}{\partial S^2}+\frac{1}{2}\sigma^2Y^2\frac{\partial^2R}{\partial Y^2}+r\left(S\frac{\partial R}{\partial S}+Y\frac{\partial R}{\partial Y}-2R\right)$$
$$+2D\left(S\frac{\partial V_{BS}}{\partial S}-V_{BS}(\tau,S)\right)\left(Y\frac{\partial V_{BS}}{\partial Y}-V_{BS}(\tau,Y)\right) \quad (3.2.9)$$

με $R(0,S,Y)\equiv 0$. Οι ζώνες τιμολόγησης των δικαιωμάτων προαίρεσης για την περίπτωση των ευκαιριών βέβαιου κέρδους μπορεί να δοθεί από την παρακάτω σχέση

$$V_{BS}(\tau,S)\pm 2\sqrt{\varepsilon U(\tau,S)}, \quad (3.2.10)$$

όπου

$$U(\tau,S)=R(\tau,S,S). \quad (3.2.11)$$

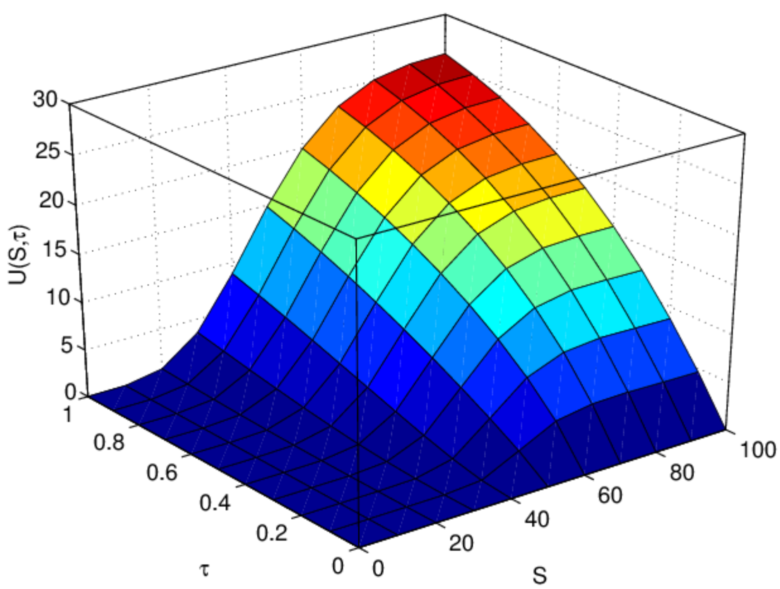
Η διακύμανση $U(\tau,S)$ ποσοτικοποιεί τις διακυμάνσεις γύρω από την κλασική Black-Scholes τιμή. Πρέπει εδώ να σημειωθεί ότι είναι ανεξάρτητη από τα στατιστικά χαρακτηριστικά της απόδοσης βέβαιου κέρδους. Η μόνη παράμετρος που χρειάζεται να υπολογίσουμε είναι η ένταση του θορύβου D, η οποία αποτελεί το αναπόσπαστο χαρακτηριστικό της τυχαίας απόδοσης βέβαιου κέρδους [Βλέπε σχέση (3.2.1)]. Μπορεί κανείς να συμπεράνει ότι ο επενδυτής, που πραγματεύεται τις ζώνες αντιστάθμισης των ευκαιριών βέβαιου κέρδους, πουλάει το δικαίωμα προαίρεσης για $V_{BS}(\tau,S)+2\sqrt{\varepsilon U(\tau,S)}$, όπου από τις σχέσεις (3.2.6) ή (3.2.9) η $U(\tau,S)$ είναι ίση με

$$U(\tau,S) = 2D\int_0^{\tau}\left[\int_0^{\infty} G(S,S_1,\tau,\tau_1)\left(S_1\frac{\partial V_{BS}}{\partial S_1} - V_{BS}(\tau_1,S_1)\right)dS_1\right]^2 d\tau_1 \qquad (3.2.12)$$

Από την παραπάνω σχέση (3.2.12) ή από τη σχέση (3.2.5) διαπιστώνουμε ότι οι μεγάλες διακυμάνσεις της $Z(\tau,S)$ συμβαίνουν όταν η συνάρτηση $\left(S\frac{\partial V_{BS}}{\partial S} - V_{BS}\right)$ παίρνει τη μέγιστη τιμή. Δηλαδή, $S\frac{\partial^2 V_{BS}}{\partial S^2} = 0$ (το ελληνικό $\Gamma = 0$).

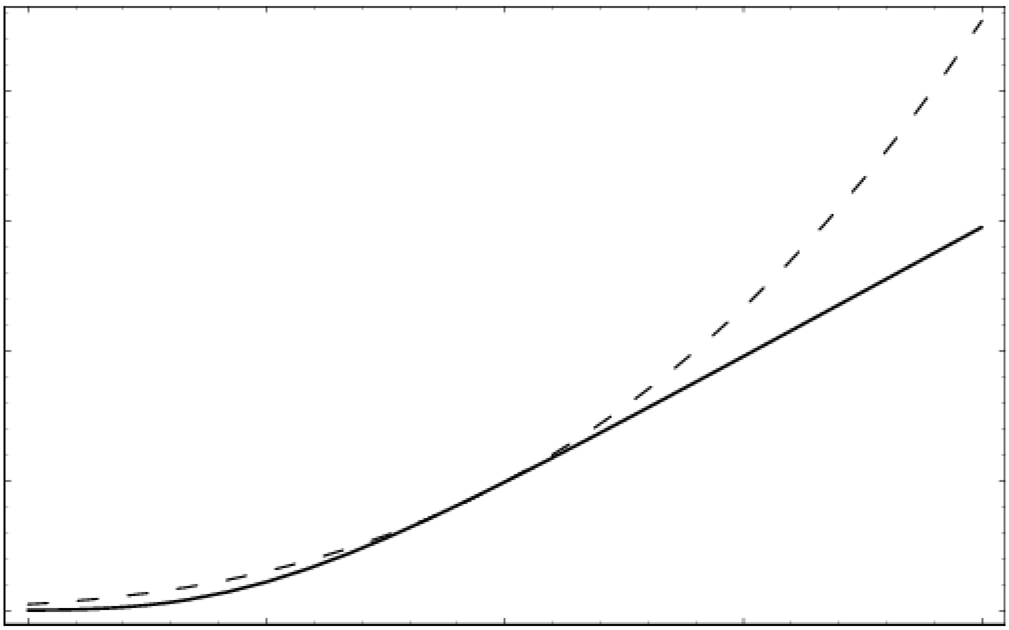
3.3 Αριθμητικα Αποτελεσματα

Για να καθορίσουμε τον τρόπο με τον οποίο οι τυχαίες ευκαιρίες βέβαιου κέρδους επηρεάζουν την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης, λύσαμε αριθμητικά την εξίσωση (3.2.8). Το Σχήμα 3.1 [7] δείχνει μια γραφική παράσταση της διακύμανσης, $U(\tau,S) = R(\tau,S,S)$ ως συνάρτηση τόσο του χρόνου, τ, όσο και της τιμής του περιουσιακού στοιχείου, S. Από αυτό το γράφημα, παρατηρούμε ότι το η αβεβαιότητα σχετικά με την τιμή του δικαιώματος προαίρεσης είναι μεγαλύτερη για τα deep-in-the-money δικαιώματα προαίρεσης. Η διαπίστωση αυτή είναι σύμφωνη με το εμπειρικό έργο που δίδεται στην αναφορά [3].



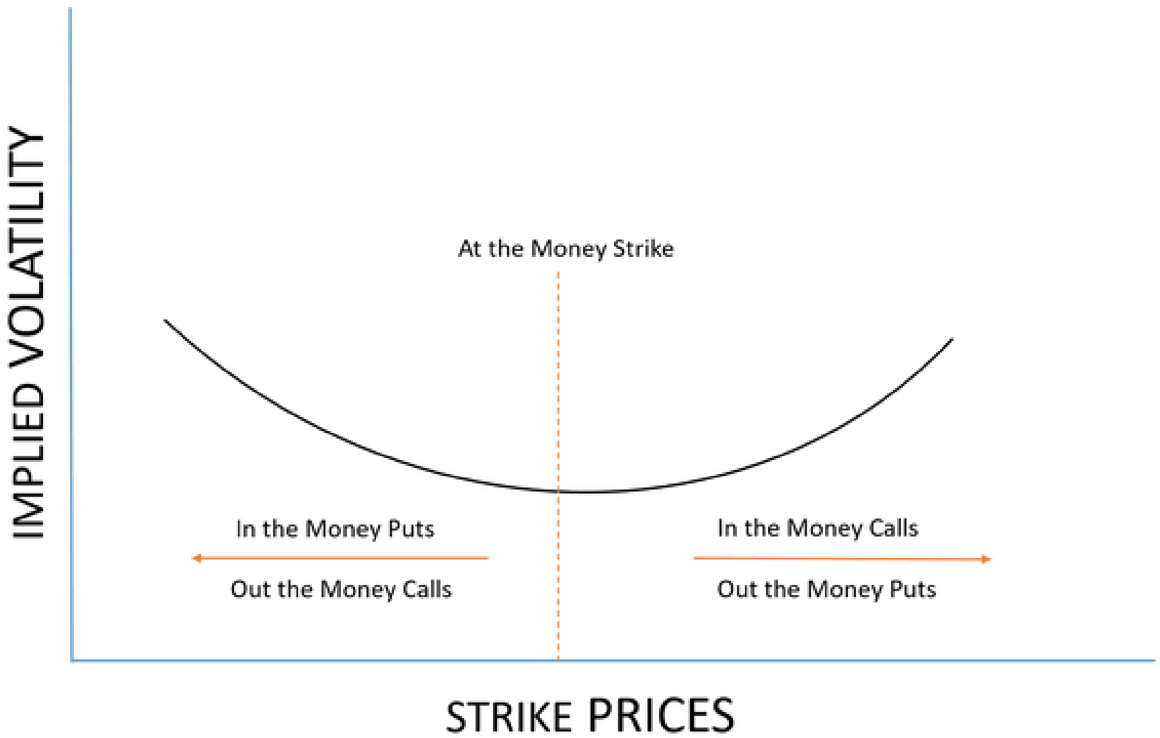
Σχήμα 3.1 Διακύμανση $U(S,\tau)$, όπου S η τιμή της μετοχής και τ ο χρόνος. Η τιμή άσκησης θα είναι $K = 20$, η μεταβλητότητα $\sigma = 0.4$, το επιτόκιο $r = 0.1$ και το $D = 0.1$.

Στο σχήμα 3.2, σχεδιάζουμε τον αποτελεσματικό λόγο αντιστάθμισης ο οποίος δίνεται από την σχέση (3.2.10), για $\varepsilon = 0.1$, και το συγκρίνουμε με τον συνηθισμένο λόγο αντιστάθμισης των Black-Scholes. Σημειώνουμε ότι οι μέγιστες αποκλίσεις από το συνηθισμένο λόγο αντιστάθμισης Black-Scholes είναι στην περιοχή «at the money $(K = S_T)$», ενώ μειώνονται όταν κινούμαστε στις περιοχές γνωστές και ως «in and out of the money $(K < S_T)$ και $(K > S_T)$».



Σχήμα 3.2 Αποτελεσματική τιμή δικαιώματος προαίρεσης (διακεκομμένη γραμμή) και τιμή Black-Scholes (συνεχής γραμμή). Εδώ $\varepsilon = 0.1$, και οι σταθερές K, σ, r και D λαμβάνονται όπως στο σχήμα 3.1

Τώρα είμαστε σε θέση να συζητήσουμε το αποτέλεσμα του «χαμόγελου», δηλαδή της τεκμαρτής μεταβλητότητας. Η καμπύλη «χαμόγελο» ή διαφορετικά η καμπύλη τεκμαρτής μεταβλητότητας είναι ένα κοινό σχήμα γραφήματος που προκύπτει από την απεικόνιση της τιμής εξάσκησης, K και της τεκμαρτής μεταβλητότητας, $\sigma^{\varepsilon}(K, \tau)$ μιας ομάδας δικαιωμάτων προαίρεσης, επί του ίδιου υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου και με την ίδια ημερομηνία λήξης, τ. Το χαμόγελο της μεταβλητότητας ονομάζεται έτσι επειδή μοιάζει με ένα χαμογελαστό στόμα, όπως απεικονίζεται και παρακάτω, στο Σχήμα 3.3 [13].



Σχήμα 3.3 Η καμπύλη «χαμόγελο» ή καμπύλη τεκμαρτής μεταβλητότητας.

Όπως παρατηρούμε στο Σχήμα 3.3 [13] η τεκμαρτή μεταβλητότητα αυξάνεται όταν το υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο ενός δικαιώματος θεωρείται «out of the money» ή «in the money», σε σύγκριση με ένα δικαίωμα «at the money».

Η σχέση (3.2.10) για την αποτελεσματική τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης υποδηλώνει

$$V_{BS}(\tau, S; \sigma^{\varepsilon}(K,\tau), K) = V_{BS}(\tau, S; \sigma, K) + 2\sqrt{\varepsilon U(\tau, S; K)}. \tag{3.3.1}$$

Αυτή η εξίσωση μπορεί να λυθεί για $\sigma^{\varepsilon}(K,\tau)$, με S και ε σταθερά. Συνεπάγεται από την (3.2.10) ότι $\sigma^{\varepsilon}(K,\tau) \to \sigma$, καθώς $\varepsilon \to 0$.

3.4 *ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ*

Στην παρούσα εργασία, ερευνήσαμε την επίδραση των τυχαίων αποδόσεων βέβαιου κέρδους στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Χρησιμοποιήσαμε μια σταθερή εργοδική διαδικασία για τη μοντελοποίηση της τυχαίας απόδοσης βέβαιου κέρδους και εξετάσαμε την περίπτωση όπου η απόδοση βέβαιου κέρδους κυμαίνεται σε διαφορετική χρονική κλίμακα από εκείνη της τιμής του δικαιώματος προαίρεσης. Αυτό μας επέτρεψε να χρησιμοποιήσουμε μία ασυμπτωτική ανάλυση ώστε να βρούμε ζώνες τιμολόγησης για τα δικαιώματα προαίρεσης και όχι ακριβής εξίσωση για την τιμή του δικαιώματος. Η ασυμπτωτική εξίσωση, στην οποία καταλήξαμε, ποσοτικοποιεί τις διακυμάνσεις γύρω από την κλασική τιμή Black-Scholes και δείχνει ότι είναι ανεξάρτητη από τα λεπτομερή στατιστικά χαρακτηριστικά της απόδοσης βέβαιου κέρδους. Τέλος, δείξαμε ότι ο κίνδυνος από την τυχαία απόδοση βέβαιου κέρδους είναι μεγαλύτερος για τα «out of/in the money» δικαιώματα προαίρεσης. Αυτό δίνει μια εξήγηση του αποτελέσματος «χαμόγελο» που παρατηρείται στην αγορά όσον αφορά την τυχαία απόδοση βέβαιου κέρδους.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

Αφού ολοκληρώσαμε το αντικείμενο μελέτης μας, θα κάνουμε μια σύντομη αναφορά σε συγκεκριμένες μαθηματικές έννοιες οι οποίες έπαιξαν καθοριστικό ρόλο στην καλύτερη κατανόηση της εργασίας μας από τους αναγνώστες.

1. *Το ολοκληρωμα του Itô*

Το λήμμα του Itô είναι το πιο σημαντικό αποτέλεσμα του στοχαστικού διαφορικού λογισμού. Υποθέτουμε ότι η $X(t)$ είναι μία στοχαστική ανέλιξη, της οποίας η στοχαστική διαφορική εξίσωση δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW,$$

Έστω $Z(t)$ μία μία καινούργια διαδικασία με $Z(t) = f(X(t), t)$ και η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε η Z θα έχει την εξής στοχαστική διαφορική εξίσωση:

$$df(X(t), t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mu \frac{\partial f}{dX} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 f}{\partial X^2}\right) dt + \sigma \frac{\partial f}{\partial X} dW$$

Ουσιαστικά ο Itô (1951) αυτό που απέδειξε είναι ότι κάθε τυχαία μεταβλητή που είναι συνάρτηση μιας άλλης μεταβλητής, η οποία ακολουθεί την ανέλιξη του Itô, θα ακολουθεί και αυτή μια Itô ανέλιξη.

2. *Συναρτησεις Green*

Η συνάρτηση Green είναι ο πυρήνας ενός ολοκληρωτικού τελεστή, ο οποίος παριστάνει τον αντίστροφο ενός διαφορικού τελεστή, ενώ από φυσικής ερμηνείας, είναι η απόκριση ενός συστήματος όταν σε αυτό εφαρμόσουμε μια μοναδιαία σημειακή πηγή.

Έστω $p \in C^1([a,b])$ με $p(x) > 0$ για $x \in [a,b]$ και $q \in C([a,b])$, όπου (a,b) φραγμένο διάστημα στον $\mathbb{R}$.

Θεωρούμε τον γραμμικό συνήθη διαφορικό τελεστή 2ης τάξης

$$Au \equiv (-pu')' + qu = f,\ a < x < b, \tag{1}$$

ο οποίος ονομάζεται τελεστής Sturm-Liouville και τις χωριζόμενες ομογενείς συνοριακές συνθήκες

$$\begin{cases}\alpha_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0 \\ \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0\end{cases} \tag{2}$$

Ορίζοντας τον *αντίστροφο τελεστή* ενός συστήματος $Lu = f$, με u, f διανύσματα και L τετραγωνικά αντιστρέψιμο πινάκα, μπορούμε να βρούμε την λύση $u = L^{-1} f$, με L^{-1} τον αντίστροφο πινάκα του L. Έτσι ο L^{-1} αποτελεί και τον αντίστροφο τελεστή του L που δίνεται από τον τύπο

$$(L^{-1} f)(x) = \int_a^b g(x, \xi) f(\xi) d\xi \tag{3}$$

με πυρήνα g. Αν υπάρχει ο αντίστροφος τελεστής L^{-1} του τελεστή L, τότε ο πυρήνας $g(x, \xi)$ στην (3) λέγεται συνάρτηση Green που αντιστοιχεί στον L.

Θα διατυπώσουμε τώρα ένα θεώρημα το όποιο δίνει ακριβώς μια παράσταση της συνάρτησης Green:

«Θεωρούμε ένα πρόβλημα Sturm-Liouville της μορφής (1) και υποθέτουμε ότι $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμη του τελεστή L. Τότε θα υπάρχει ο αντίστροφος τελεστής L^{-1} που δίνεται από την σχέση (3), όπου

$$g(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{u_1(x) u_2(\xi)}{p(\xi) W(\xi)}, & x < \xi \\ -\frac{u_1(\xi) u_2(x)}{p(\xi) W(\xi)}, & x > \xi \end{cases}. \tag{4}$$

Εδώ οι u_1, u_2 είναι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της ομογενούς διαφορικής εξίσωσης $Au \equiv (-pu')' + qu$ με $\alpha_1 u(a) + a_2 u'(a) = 0$ και $\beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0$ και $W = u_1 u_2' - u_1' u_2$ είναι η ορίζουσα Wronski».

Σημειώνουμε ακόμα ότι όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση Green g, τότε μπορούμε να γράψουμε την μοναδική λύση του μη-ομογενούς προβλήματος (1) στην μορφή:

$$u(x) = \int_a^b g(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ

[1] A.N. Adamchuk, S.E. Esipov, *Collectively fluctuating assets in the presence of arbitrage opportunities and option pricing*, Phys. Usp. 40 (12) (1997) 1239–1248.
[2] E. Aurell, S. Simdyankin, *Pricing risky options simply*, Int. J. Theor. Appl. Finance 1 (1) (1998) 1–23.
[3] G. Bakshi, C. Cao, Z. Chen, *Empirical performance of alternative option pricing models*, J. Finance (1997) 2003–2049.
[4] L. Borland, J.-P. Bouchaud, *Non-Gaussian option pricing model with skew*, cond-mat/0403022, 2004.
[5] L. Borland, *Theory of non-Gaussian option pricing, Quant*. Finance 2 (2002) 415–431.
[6] J.P. Bouchaud, D. Sornette, *The Black–Scholes option pricing problem in mathematical finance: generalization and extensions for a large class of stochastic processes*, J. Phys. 4 (I) (1994) 863–881.
[7] S. Fedotov, S. Panayides, *Stochastic arbitrage return and its implication for option pricing*, Department of Mathematics, Manchester, UK, 2004.
[8] J.P. Fouque, G. Papanicolaou, K.R. Sircar, *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
[9] M.I. Freidlin, A.D. Wentzell, *Random Perturbations of Dynamical Systems*, Springer, New York, 1984.
[10] D. Galai, *Tests of market efficiency and the Chicago board option exchange*, J. Bus. 50 (1997)167–197.
[11] E. Haven, *A discussion on embedding the Black–Scholes option pricing model in a quantum physics setting*, Physica A (2002) 507–524.
[12] J.C. Hull, Options, *Futures and Other Derivatives*, Fourth ed., Prentice-Hall, London, 2000.
[13] Investopedia.
[14] K. Ilinski, A. Stepanenko, *Derivative pricing with virtual arbitrage*, preprint, cond-mat/9902046.
[15] K. Ilinski, *How to account for the virtual arbitrage in the standard derivative pricing*, preprint, condmat/9902047.
[16] Lewis, *Option Valuation under Stochastic Volatility*, Finance Press, Newport Beach, CA, 2000.
[17] R.C. Merton, *Continuous Time Finance*, Blackwell, Oxford, 1992.
[18] M. Otto, *Stochastic relaxational dynamics applied to finance: towards non equilibrium option pricing theory*, Eur. Phys. J. B 14 (2000) 383–394.

[19] M. Otto, *Towards non-equilibrium option pricing theory*, Int. J. Theor. Appl. Finance 3 (3) (2000) 565.
[20] G.C. Papanicolaou, K.R. Sircar, *Stochastic volatility, smiles and asymptotics*, Appl. Math. Finance 6 (1999) 107–145.
[21] M. Scha¨ l, *On quadratic cost criteria for option hedging*, Math. Oper. Res. 19 (1994) 121–131.
[22] M. Schweizer, *Variance-optimal hedging in discrete time*, Math. Oper. Res. 20 (1995) 1–32.
[23] G. Sofianos, *Index arbitrage profitability*, NYSE working paper 90-04, J. Derivatives 1 (N1) (1993).
[24] Wikipedia.

ΕΛΛΗΝΙΚΗ

[25] Αγγελόπουλος Π.Χ. (2005), *Εισαγωγή στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα (financial derivatives)*, Εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα.
[26] Γιαννακόπουλος Α.Ν., «*Στοχαστική Ανάλυση και Εφαρμογές στην Χρηματοοικονομική, Τόμος Ι: Εισαγωγή στην Στοχαστική Ανάλυση*», τμήμα Στατιστικής και Αναλογιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, 2003.
[27] Διαμαντόπουλος Σ., «*Διαχείριση Χαρτοφυλακίου Ασφαλιστηρίων Ζωής*», Πανεπιστήμιο Πειραιά, τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου, (Πειραιάς, Μάιος 2015).
[28] Καταραχιά Α., «*Άρχες Μάρκετινγκ*», Τεχνικό Εκπαιδευτικό Ίδρυμα Δυτικής Μακεδονίας, τμήμα Λογιστικής και Χρηματοοικονομικής.
[29] Κούτρας Μάρκος Β., *Εισαγωγή στις Πιθανότητες*, Εκδόσεις Σταμούλης, Ελλάδα, 2002.
[30] Μπούτσικας Μ., «*ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ (Εισαγωγή στη Στοχαστική Χρηματοοικονομική Ανάλυση)*», Πανεπιστήμιο Πειραιώς, τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης (2006-2007).
[31] Μπούτσικας Μ., Σημειώσεις μαθήματος «*Μέθοδοι Προσομοίωσης και Στατιστικές Υπολογιστικές Τεχνικές*».