



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ  
& ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

**Πανεπιστήμιο Πειραιώς**

**Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης**

**Π.Μ.Σ. “Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου”**

**“Η Αξία Κινδύνου και Εφαρμογή της σε  
Προβλήματα Βελτιστοποίησης  
Αναμενόμενων Εσόδων Χαρτοφυλακίου”**

Διπλωματική Εργασία

Υποβλήθηκε στο *Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης* του  
Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του  
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην  
*Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου*

***Γαρυφαλλιά Κυριλή, Πειραιάς 2019***



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ  
& ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

**University of Piraeus**

**Department of Statistics and Insurance Science**

**M.Sc. “Actuarial Science and Risk Management”**

# **“Portfolio Optimization Problems Under C-VaR Constraints”**

MSc Dissertation

Submitted to the *Department of Statistics and Insurance Science* of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science  
in *Actuarial Science and Risk Management*

***Garyfallia Kyrili, Piraeus 2019***

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

*Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Σεβρόγλου Βασίλειο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης για την πολύτιμη βοήθειά του στην εκπόνηση της Διπλωματικής μου Εργασίας, καθώς και τα άλλα δυο μέλη της τριμελούς επιτροπής, τον κ. Τσίμπο Κλέων, Καθηγητή του Τμήματος και την κα. Βερροπούλου Γεωργία, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του Τμήματος. Τέλος θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς την οικογένειά μου για την ψυχολογική και οικονομική στήριξη που απλόχερα μου πρόσφερε όλα αυτά τα χρόνια.*

*Στην Οικογένειά μου*



## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα εργασία μελετάται μία προσέγγιση για την βελτιστοποίηση ή αντιστάθμιση ενός χαρτοφυλακίου χρηματοοικονομικών τίτλων με στόχο τη μείωση του κινδύνου, η αποτελεσματικότητα της οποίας παρουσιάζεται μέσα από παραδείγματα και εφαρμογές. Ιδιαίτερα, επικεντρώνεται στην βελτιστοποίηση της γνωστής ως “Αξίας Κινδύνου υπό συνθήκη” (Conditional Value-at-Risk, (C-VaR)), και γίνεται σύγκριση με την αντίστοιχη βελτιστοποίηση της “Αξίας Κινδύνου” (Value-at-Risk, (VaR)). Η C-VaR ορίζεται ως το αναμενόμενο έλλειμα το οποίο υπερβαίνει τη VaR, και χαρτοφυλάκια με χαμηλό C-VaR έχουν απαραίτητα και χαμηλό VaR. Η κεντρική ιδέα της προσέγγισής μας, στηρίζεται στην βελτιστοποίηση ενός χαρτοφυλακίου, η οποία υπολογίζει τη VaR και συγχρόνως βελτιστοποιεί τη C-VaR με ή χωρίς περιορισμούς. Επίσης παρουσιάζεται εφαρμογή της εν λόγω προσέγγισης για την μεγιστοποίηση των αναμενόμενων αποδόσεων υπό τη θεώρηση συγκεκριμένων περιορισμών της C-VaR. Η εν λόγω μέθοδος της εργασίας μας, χρησιμοποιείται ευρέως από επενδυτικές, μεσιτικές εταιρίες καθώς και από αμοιβαία κεφάλαια ή εταιρείες στις οποίες εμπλέκεται ο κίνδυνος. Τέλος, παρουσιάζεται παράδειγμα της προσέγγισής μας αναφορικά με χαρτοφυλάκιο αποτελούμενο από μετοχές του S&P 100 και δίνονται χρήσιμα σχόλια και συμπεράσματα.

## ABSTRACT

In this paper an optimization or hedging approach for a portfolio of financial securities with view to reducing risk is considered. Effectiveness of this approach through examples and applications is also presented. In particular we focus on the optimization of what is known as "Conditional Value-at-Risk (C-VaR)", and a comparison with the corresponding Value-at-Risk (VaR) optimization will be exploited. C-VaR is defined as the expected loss that exceeds the VaR, and portfolios with low C-VaR have a necessarily and low VaR. The central idea of our approach is to optimize a portfolio that calculates VaR and at the same time optimizes C-VaR with or without limitations. In addition, this approach is applied to maximize expected returns under consideration of specific C-VaR constraints. This method is widely used by investment companies, brokerage firms, as well as by mutual funds or companies in which the risk is involved. Finally, an example as an application of our approach to a portfolio of S&P 100 shares and useful feedback and conclusions will be given.

# ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ</b>	<b>8</b>
<b>1<sup>ο</sup> Κεφάλαιο Εισαγωγή στα Μέτρα Κινδύνου VaR και CVAR</b>	<b>12</b>
1.1 Το Value-at-Risk (VaR) ως Μέτρο Κινδύνου και η Σχέση του με άλλα Ποσοτικά Μέτρα Κινδύνου	12
1.1.1. <i>Value at Risk</i> - Μαθηματικός ορισμός	13
1.1.2. Αναμενόμενο Έλλειμα ( <i>Expected Shortfall</i> (ES)) - Μαθηματικός ορισμός	14
1.1.3. Η Σχέση του <i>Expected Shortfall</i> με την <i>Value at Risk</i>	16
1.1.4. Ποσοστημόρια ( <i>Expectiles</i> ) – Μαθηματικός Ορισμός	17
1.2 Συνεκτικά και Κυρτά Μέτρα Κινδύνου – Μαθηματικοί Ορισμοί	19
1.2.1 <i>Conditional Value at Risk</i> (C-VaR)	21
<b>2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο Προσέγγιση Βελτιστοποίησης της Υπό Συνθήκη Αξίας σε Κίνδυνο (CVaR)</b>	<b>23</b>
2.1. Η Τεχνική της Βελτιστοποίησης Χαρτοφυλακίου μέσω της CVaR	23
2.1.1. Περιγραφή της Προσέγγισης	23
2.1.2. Μία Εφαρμογή για την Βελτιστοποίηση του Χαρτοφυλακίου	27
2.1.3. Εφαρμογή	32
2.1.4. Εφαρμογή για το Hedging	35
2.1.5. Συμπεράσματα	41
<b>3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο Βελτιστοποίηση του Χαρτοφυλακίου κάτω από Περιορισμούς της CVaR</b>	<b>42</b>
3.1. Ανάπτυξη της Προσέγγισης Βελτιστοποίησης της CVaR	42
3.1.1. Αποτελεσματικότητα: Διαφορετικές Τοποθετήσεις	43
3.1.2. Ισοδύναμες Σχέσεις με Βοηθητικές Μεταβλητές	44
3.1.3. Διακριτοποίηση	46
3.1.4. Γραμμοποίηση	46
3.2. Μοντέλο Βελτιστοποίησης Χαρτοφυλακίου μιας Περιόδου με Κόστη Συναλλαγών	47
3.2.1. Ο Περιορισμός $C - VaR$	48
3.2.2. Κόστη Συναλλαγών	48
3.2.3. Περιορισμός στην Τιμή	49
3.2.4. Αλλαγές στις Ατομικές Θέσεις (Περιορισμοί Μεταβλητότητας και Ρευστότητας)	49
3.3. Το Πρόβλημα Βελτιστοποίησης	50
3.3.1. Δημιουργία Σεναρίου	51
3.3.2. Case Study: Χαρτοφυλάκιο S&P100	52
3.3.3. Σύγκριση με τη Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου Μέσης Απόκλισης	56
3.3.4. Συμπεράσματα	61
<b>Βιβλιογραφία</b>	<b>62</b>
<b>Παράρτημα</b>	<b>67</b>

# ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου απέχει πολύ από την τεράστια εργασία του Markowitz (1952), η οποία εισάγει το πλαίσιο διαχείρισης κινδύνων απόδοσης / διακύμανσης. Οι εξελίξεις στη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου διεγείρονται από δύο βασικές απαιτήσεις: (1) επαρκή τροποποίηση των συναρτήσεων χρησιμότητας, των κινδύνων και των περιορισμών, (2) αποτελεσματικότητα, δηλ. Ικανότητα χειρισμού μεγάλου αριθμού εργαλείων και σεναρίων.

Οι ισχύοντες κανονισμοί για τις επιχειρήσεις χρηματοδότησης διατυπώνουν ορισμένες από τις απαιτήσεις διαχείρισης κινδύνου σε όρους εκατοστημορίων των κατανομών ζημιών. Το ανώτερο εκατοστημόριο της κατανομής ζημιών ονομάζεται Value-at-Risk (*VaR*). Για παράδειγμα, το 95% *-VaR* είναι μια εκτίμηση για το ύψος των μέγιστων ζημιών, με πιθανότητα υπέρβασης αυτών 5%. Η δημοτικότητα της *VaR* σχετίζεται κυρίως με μια απλή και κατανοητή αναπαράσταση υψηλών ζημιών. Η *VaR* μπορεί να εκτιμηθεί και να διαχειριστεί αρκετά αποτελεσματικά όταν οι υποκείμενοι παράγοντες κινδύνου ακολουθούν την κανονική κατανομή (ή λογαριθμοκανονική κατανομή). Για μια ολοκληρωμένη εισαγωγή στη διαχείριση κινδύνου χρησιμοποιώντας την *VaR*, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο Jorion, (1997). Πάντως, για μη κανονικές κατανομές, η *VaR* μπορεί να έχει ανεπιθύμητες ιδιότητες (Artzner et al., 1997, (1999)) όπως η έλλειψη υπο-προσθετικότητας, δηλαδή η *VaR* ενός χαρτοφυλακίου με δύο μέσα μπορεί να είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των ατομικών *VaR's* των δύο αυτών μέσων. Επίσης, η *VaR* είναι δύσκολο να ελεγχθεί / βελτιστοποιηθεί για διακριτές κατανομές, όταν υπολογίζεται χρησιμοποιώντας σενάρια. Σε αυτή την περίπτωση, η *VaR* είναι μη κυρτή (βλέπε τον ορισμό της κυρτότητας στο Rockafellar, (1970) και μη ομαλή ως προς τη συνάρτηση των θέσεων και έχει πολλαπλά τοπικά ακραία σημεία. Κυρίως, οι προσεγγίσεις για τον υπολογισμό της *VaR* βασίζονται στη γραμμική προσέγγιση των κινδύνων χαρτοφυλακίου και στην υιοθέτηση μιας κοινής κανονικής κατανομής (ή log-normal) (1996), Pritsker (1997), RiskMetrics (1996), Simons (1996), Stublo Beder (1995), Stambaugh (1996)), ιστορικό ή Monte Carlo (1996), Mauser και Rosen (1991), Pritsker (1997), RiskMetrics (1996), Stublo Beder (1995), Stambaugh (1996). Τα εργαλεία προσομοίωσης χρησιμοποιούνται όταν το χαρτοφυλάκιο περιέχει μη γραμμικά μέσα όπως τα options. Τα προβλήματα βελτιστοποίησης που αφορούν την *VaR* μπορούν να βρεθούν στο Litterman (1997a, 1997b), Kast et al (1998), Lucas a κ. Klaassen (1998)



Αν και η διαχείριση κινδύνου με τις εκατοστημοριακές λειτουργίες είναι ένα πολύ σημαντικό θέμα και παρά τις σημαντικές ερευνητικές προσπάθειες (Andersen and Sornette (1999), Basak and Shapiro (1998), Emmer et al., (2000), Gaivoronski and Pflug (2000), Gourier-oux et al., Grootweld and Hallerbach (1998), Puelz (1999), Tasche (1999)), δεν υπάρχουν ακόμα αποτελεσματικοί αλγόριθμοι βελτιστοποίησης των εκατοστημορίων για λογικές διαστάσεις (πάνω από εκατό όργανα και χίλια σενάρια). Από την άλλη πλευρά, οι υπάρχουσες αποτελεσματικές τεχνικές βελτιστοποίησης για την κατανομή του χαρτοφυλακίου δεν επιτρέπουν τον άμεσο έλεγχο εκατοστημορίων των κατανομών (από την άποψη αυτή μπορούμε να αναφέρουμε τη μέση απόλυτη απόκλιση προσέγγισης (Konno και Yamazaki, (1991)) (Dembo and Rosen, (1999)) και την προσέγγιση minimax (Young, (1998)). Το γεγονός αυτό προκάλεσε την ανάπτυξη των νέων αλγορίθμων βελτιστοποίησης που παρουσιάζονται στη συνέχεια. Σε αυτή την εργασία προτείνεται η χρήση, ως συμπλήρωμα (ή εναλλακτική λύση) της VaR, ενός άλλου ποσοτικού μέτρου κινδύνου το οποίο ονομάζεται Conditional Value-at-Risk. Το μέτρο κινδύνου C-VaR συνδέεται στενά με την VaR. Για συνεχείς κατανομές, η C-VaR ορίζεται ως η υπό όρους αναμενόμενη απώλεια υπό την προϋπόθεση ότι υπερβαίνει την VaR, βλέπε Rockafellar και Uryasev (2000). Για συνεχείς κατανομές, αυτό το μέτρο κινδύνου είναι επίσης γνωστό ως μέση υπερβάλλουσα απώλεια, μέση έλλειψη ή ουρά της αξίας σε κίνδυνο. Ωστόσο, για γενικές κατανομές, συμπεριλαμβανομένων των διακριτών κατανομών, η C-VaR ορίζεται ως ο σταθμισμένος μέσος όρος της VaR και οι απώλειες που υπερβαίνουν αυστηρά την VaR, βλέπε Rockafellar και Uryasev (2000). Πρόσφατα, οι Acerbi κ.ά. (2001), οι Acerbi και Tasche (2001) επαναπροσδιόρισαν το αναμενόμενο έλλειμμα παρόμοιο με την C-VaR.

Για γενικές κατανομές, η C-VaR, η οποία είναι μέτρο κινδύνου παρόμοιο με την VaR, έχει πιο ελκυστικές ιδιότητες από την VaR. Η C-VaR είναι υπο-προσθετικό και κυρτό μέτρο κινδύνου (Rockafellar και Uryasev, (2000)). Επιπλέον, η C-VaR είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου κατά την έννοια του Artzner et al. (1997, 1999). Η συνοχή της C-VaR αποδείχθηκε για πρώτη φορά από την Pflug (2000), βλέπε επίσης Rockafellar and Uryasev (2001), Acerbi et al. (2001), Acerbi και Tasche (2001). Παρόλο που η C-VaR δεν έχει γίνει πρότυπο στη χρηματοοικονομική βιομηχανία, η C-VaR κερδίζει στον ασφαλιστικό κλάδο (Embrechts et al., (1997)). Παρόμοια μέτρα με την C-VaR έχουν εισαχθεί νωρίτερα στοχαστικά, αλλά όχι στο οικονομικό/μαθηματικό πλαίσιο. Οι περιορισμοί της αναμενόμενης προσδοκίας και οι ολοκληρωμένοι περιορισμοί τυχαίων πιέσεων που περιγράφονται στο (Prekopa, (1997)) μπορούν να εξυπηρετήσουν τον ίδιο σκοπό με αυτόν της C-VaR. Τα αριθμητικά πειράματα υποδεικνύουν ότι συνήθως η ελαχιστοποίηση της C-VaR οδηγεί επίσης σε σχεδόν βέλτιστες λύσεις σε όρους VaR, επειδή η VaR δεν υπερβαίνει ποτέ την C-VaR (Rockafellar and Uryasev, (2000)). Επομένως, τα χαρτοφυλάκια με χαμηλό C-VaR πρέπει επίσης να έχουν χαμηλό VaR. Επιπλέον, όταν η κατανομή αποδόσεων είναι φυσιολογική, τα δύο αυτά μέτρα είναι ισοδύναμα

(Rockafellar και Uryasev, (2000)), δηλ. παρέχουν το ίδιο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Ωστόσο, για πολύ “λοξές” κατανομές, τα C-VaR και VaR κινδυνεύουν να έχουν πολύ διαφορετικά χαρτοφυλάκια. Επιπλέον, η ελαχιστοποίηση της VaR μπορεί να τεντώσει την ουρά που υπερβαίνει την VaR επειδή η  $VaR$  δεν ελέγχει τις απώλειες που υπερβαίνουν την VaR, βλέπε Larsen et al. (2002). Επίσης, οι Gaijns και Pflug (2000) έχουν βρει ότι σε ορισμένες περιπτώσεις η βελτιστοποίηση των VaR και C-VaR μπορεί να οδηγήσει σε αρκετά διαφορετικά χαρτοφυλάκια.

Η παρούσα εργασία αφού κάνει μια εισαγωγή στο 1<sup>ο</sup> κεφάλαιο, στα μέτρα κινδύνου VaR και C-VaR, στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο παρουσιάζει μια προσέγγιση για τη βελτιστοποίηση ενός χαρτοφυλακίου και τη μείωση του κινδύνου των υψηλών ζημιών. Η Value-at-Risk ( $VaR$ ) έχει ένα ρόλο στην προσέγγιση, αλλά η έμφαση δίνεται στην υπό συνθήκη Αξία σε Κίνδυνο (C-VaR), η οποία είναι γνωστή και ως Mean Excess Loss, Mean Shortfall ή Tail VaR. Εάν καθορίσουμε ένα συγκεκριμένο επίπεδο πιθανότητας  $\beta$ , το  $\beta - VaR$  ενός χαρτοφυλακίου είναι το χαμηλότερο ποσό  $\alpha$ , τέτοιο ώστε, με πιθανότητα  $\beta$ , η απώλεια να μην υπερβαίνει το  $\alpha$ , ενώ η  $\beta - CVaR$  είναι η αναμενόμενη προσδοκία των ζημιών που υπερβαίνουν το ποσό  $\alpha$ . Οι συνήθεις τιμές του  $\alpha$  που λαμβάνονται υπόψη είναι : 0,90, 0,95 και 0,99. Οι ορισμοί εξασφαλίζουν ότι το  $\beta - VaR$  δεν είναι ποτέ μεγαλύτερο από το  $\beta - CVaR$ , έτσι ώστε τα χαρτοφυλάκια με χαμηλό  $C - VaR$  να έχουν και χαμηλό  $VaR$ . Κεντρικό ρόλο στο 2<sup>ο</sup> κεφάλαιο αυτής της εργασίας κατέχει μια πρακτική τεχνική βελτιστοποίησης της C-VaR και του υπολογισμού της VaR ταυτόχρονα.

Βασιζόμενοι σε όσα έχουμε παρουσιάσει στο 2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο και έχοντας κάνει μια απλή περιγραφή της προσέγγισης για την ελαχιστοποίηση των προβλημάτων C-VaR και βελτιστοποίησης με τους περιορισμούς της C-VaR όπως περιγράφεται και στο (Uryasev, (2000)), επεκτείνουμε αυτή την προσέγγιση σε άλλες κατηγορίες προβλημάτων με τις κατανομές της C-VaR. Αρκετές μελέτες έδειξαν ότι η βελτιστοποίηση του κινδύνου με τη κατανομή της C-VaR και τους περιορισμούς μπορεί να γίνει για μεγάλα χαρτοφυλάκια και για μεγάλο αριθμό σεναρίων με σχετικά μικρούς υπολογιστικούς πόρους. Μια μελέτη σχετικά με την αντιστάθμιση ενός χαρτοφυλακίου options που χρησιμοποιεί την τεχνική ελαχιστοποίησης της C-VaR περιλαμβάνεται στο (Rockfoelar και Uryasev, (2000)). Αυτό το πρόβλημα εξετάστηκε για πρώτη φορά στην εργασία του Mauser και Rosen (1991) με την ελάχιστη αναμενόμενη προσέγγιση παλινδρόμησης (regret approach). Επίσης, εφαρμόστηκε η προσέγγιση ελαχιστοποίησης της C-VaR στη διαχείριση πιστωτικού κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου ομολόγων, βλ. Andersson et al. (1999). Δείχνουμε ότι αυτή η προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τη μεγιστοποίηση των συναρτήσεων απόδοσης (π.χ. αναμενόμενες αποδόσεις) κάτω από περιορισμούς της C-VaR, σε αντίθεση με την ελαχιστοποίηση της C-VaR. Επιπλέον, είναι δυνατό να επιβληθούν πολλοί περιορισμοί στην C-VaR με διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης και να διαμορφωθεί η κατανομή των ζημιών σύμφωνα με τις προτιμήσεις του

υπεύθυνου λήψης αποφάσεων. Αυτές οι προτιμήσεις καθορίζονται απευθείας σε εκατοστημοριακούς όρους, σε σύγκριση με την παραδοσιακή προσέγγιση, η οποία προσδιορίζει τις προτιμήσεις κινδύνου μέσω των συναρτήσεων χρησιμότητας (utility functions). Για παράδειγμα, ενδέχεται να απαιτήσουμε ότι οι μέσες τιμές των χειρότερων απωλειών 1%, 5% και 10% περιορίζονται από ορισμένες τιμές. Αυτή η προσέγγιση παρέχει ένα νέο αποτελεσματικό και ευέλικτο εργαλείο διαχείρισης κινδύνων.

Στο 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο λοιπόν παρουσιάζουμε ένα γενικό θεώρημα για διάφορες ισοδύναμες αναπαραστάσεις αποτελεσματικών συνόρων με κοίλες ανταμοιβές και κυρτές κατανομές κινδύνου. Αυτή η ισοδυναμία είναι γνωστή για τη μέση διακύμανση, βλέπε Steinbach (1999), την μέση-παλινδρόμηση (mean regret), (Dembó και Rosen, (1999)), και για συναρτήσεις απόδοσης (reward functions). Έχουμε δείξει ότι ισχύει για οποιαδήποτε κοίλη απόδοση και κυρτή συνάρτηση κινδύνου, ιδιαίτερα για την κατανομή κινδύνου C-VaR που εξετάζεται σε αυτή την εργασία. Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας βοηθητικές μεταβλητές, παρουσιάζουμε ένα θεώρημα για τη μείωση του προβλήματος με περιορισμούς της C-VaR σε ένα πολύ απλούστερο κυρτό πρόβλημα. Παρόμοιο αποτέλεσμα διατυπώνεται επίσης για την περίπτωση που τόσο η απόδοση όσο και η C-VaR περιλαμβάνονται στη συνάρτηση απόδοσης. Επιπλέον, δείχνουμε πως όταν η κατανομή δίνεται από σταθερό αριθμό σεναρίων και η συνάρτηση απώλειας είναι γραμμική, η συνάρτηση C-VaR μπορεί να αντικατασταθεί από μια γραμμική συνάρτηση και ένα πρόσθετο σύνολο γραμμικών περιορισμών. Αναπτύσσουμε ένα μοντέλο μιας περιόδου για τη βελτιστοποίηση ενός χαρτοφυλακίου αποθεμάτων χρησιμοποιώντας ιστορική δημιουργία σεναρίων. Στη συνέχεια παρουσιάζεται μια μελέτη για τη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου μετοχών S&P100 με περιορισμούς C-VaR.

Τέλος, επίσημες αποδείξεις των θεωρημάτων που έχουμε κάνει χρήση, παρουσιάζονται στο αμέσως ακόλουθο από το 3<sup>ο</sup> κεφάλαιο, παράρτημα.

# 1° Κεφάλαιο

## Εισαγωγή στα Μέτρα Κινδύνου VaR και CVAR

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει μια εισαγωγή στα μέτρα κινδύνου VaR και C- VaR για την πλήρη κατανόηση και ερμηνεία των σημαντικών αυτών μεγεθών που θα παίξουν καθοριστικό ρόλο στη μετέπειτα πορεία της εργασίας μας.

### 1.1 Το Value-at-Risk (VaR) ως Μέτρο Κινδύνου και η Σχέση του με άλλα Ποσοτικά Μέτρα Κινδύνου

Η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk, (VaR)), είναι ίσως το πιο δημοφιλές και ευρέως γνωστό μέτρο κινδύνου. Η ιστορία του ξεκινάει το 1922 όπου το χρηματιστήριο της Νέας Υόρκης υποχρέωσε τις επιχειρήσεις που συμμετείχαν σε αυτό να έχουν κεφάλαιο ίσο με το 10% των περιουσιακών τους στοιχείων. Κατ' επέκταση αυτού, ο Leavens (1945), παρουσίασε ένα ποσοτικό παράδειγμα κάνοντας χρήση για πρώτη φορά της VaR. Στη συνέχεια οι Markowitz και Roy (1952), πρόβαλλαν στα άρθρα τους τη χρήση της VaR ως μέτρο κινδύνου. Παρά την προβολή και την υποστήριξη της χρήσης της VaR από πολλούς και από πολύ νωρίς, οι τεχνικοί περιορισμοί και η δυσκολία υπολογισμού της, ήταν παράγοντες που συντέλεσαν στη μη χρήση της.

Η JP Morgan ήταν αυτή που μέσω του πιο διάσημου εσωτερικού μοντέλου έκανε χρήση της VaR για την ποσοτικοποίηση των κινδύνων που ενδεχομένως θα καλούνταν να αντιμετωπίσει. Η RiskMetrics (1996) ανακοίνωσε την Value at Risk ως μέτρο κινδύνου. Στα πλαίσια της εποπτείας της Βασιλείας και της Φερεγγυότητας, υιοθετήθηκε η χρήση της VaR ως μέτρο κινδύνου με στόχο να καθορίζουν τις κεφαλαιακές τους απαιτήσεις βάσει των κινδύνων που αναλαμβάνουν. Παρακάτω, δίνεται ο ορισμός της VaR μέσω των Linsmeier και Pearson (1996):

«Η αξία σε κίνδυνο είναι ένα απλό, συνοπτικό, στατιστικό ποσοτικό μέτρο των πιθανών ζημιών ενός χαρτοφυλακίου. Συγκεκριμένα, η αξία σε κίνδυνο μετράει τις ζημιές υποθέτοντας κανονικές κινήσεις της αγοράς (κανονική κατανομή). Ζημιές μεγαλύτερες από την αξία σε κίνδυνο υπάρχουν με πολύ μικρή και καθορισμένη πιθανότητα. Λόγω των απλών υποθέσεων που χρησιμοποιεί στους υπολογισμούς του, η αξία στον κίνδυνο συγκεντρώνει όλους τους κινδύνους ενός χαρτοφυλακίου σε

έναν μόνο αριθμό και μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην αίθουσα συνεδριάσεων των επιχειρήσεων, στις εποπτικές αρχές, ή ακόμα και στον ετήσιο ισολογισμό. Καθώς κάποιος περάσει τη στατιστική δυσκολία του μέτρου κινδύνου αυτού, η έννοια του είναι σαφής και ευκολονόητη. Είναι απλά ένας τρόπος να περιγραφεί το μέγεθος των πιθανών ζημιών σε ένα χαρτοφυλάκιο».

Μετά τη γνωστοποίηση και του μαθηματικού ορισμού της VaR, γίνεται λόγος και για τα άλλα μέτρα κινδύνου, όπως το Αναμενόμενο Έλλειμα (Expected Shortfall, (ES)), και τα ποσοστημόρια (Expectiles) αλλά και η σχέση αυτών με την Value at Risk.

### 1.1.1. Value at Risk - Μαθηματικός ορισμός

Τι είναι η Value at Risk;

Έστω ένα χαρτοφυλάκιο επικίνδυνων περιουσιακών στοιχείων και έστω  $T$  ένας σταθερός χρονικός ορίζοντας. Υποθέτουμε ότι η κατανομή των ζημιών που σχετίζεται με το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι η

$$F_L(l) = P(L \leq l), \text{ συνάρτηση κατανομής.}$$

Η μέγιστη δυνατή απώλεια, δηλαδή,  $\inf \{l \in \mathbb{R} : F_L(l) = 1\}$ , είναι ένας παράγοντας που αξιολογεί το επίπεδο κινδύνου του χαρτοφυλακίου, κατά τη χρονική στιγμή  $T$ .

Η VaR λοιπόν, είναι μία επέκταση της μέγιστης δυνατής απώλειας. Συγκεκριμένα είναι η «μέγιστη απώλεια που δεν υπερβαίνει, με μία δεδομένη υψηλή πιθανότητα, το επίπεδο εμπιστοσύνης». Δίνουμε τον κάτωθι ορισμό:

#### Ορισμός 1.1.1.

Η Αξία Κινδύνου VaR ενός χαρτοφυλακίου σε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης  $a \in (0,1)$ , δίνεται από το  $l$  που είναι ο μικρότερος αριθμός, έτσι ώστε να ισχύει πως, η πιθανότητα της απώλειας  $L$  που υπερβαίνει το  $l$  δεν είναι μεγαλύτερη από  $(1 - a)$ ,

$$\begin{aligned} VaR_a &= VaR_a(L) = \inf \{l \in \mathbb{R} : P(L > l) \leq 1 - a\} \\ &= \inf \{l \in \mathbb{R} : F_L(l) \leq a\}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Η VaR είναι ένα μέρος, ένα ποσό, της κατανομής των ζημιών.

Επίσης, γνωρίζουμε ότι με δεδομένο κάποιο  $df L$ , το γενικευμένο αντίστροφο  $F^{\leftarrow}$  ονομάζεται ποσοτική συνάρτηση του  $L$ .

$$q_{\alpha}(L) := F^{\leftarrow}(L) = \inf \{l \in \mathbb{R}: F_L(l) \geq \alpha\} \quad (1.2)$$

επομένως,

$$VaR_{\alpha}(L) = q_{\alpha}(L)$$

Οι συνήθεις τυπικές τιμές του  $\alpha$ , είναι οι:  $\alpha = 0.95, \alpha = 0.99$  ή  $\alpha = 0.1$

Στον κίνδυνο αγοράς, ο χρονικός ορίζοντας  $T$  είναι από 1 έως 10 ημέρες, ενώ όσον αφορά στον πιστωτικό κίνδυνο είναι συνήθως 1 έτος.

Το πλεονέκτημα της *Value at Risk* είναι ότι είναι πολύ διαισθητική και η μεγάλη δημοτικότητα που έχει αυτό το μέτρο κινδύνου, οφείλεται κατά ένα μεγάλο μέρος στην εννοιολογική σαφήνεια.

Παρά τα όσα έχουν αναφερθεί παραπάνω, για τη χρήση και τα πλεονεκτήματα αυτού του μέτρου κινδύνου, πρέπει να σημειωθεί πως η *Value at Risk* έχει και δύο σημαντικά μειονεκτήματα :

- Δεν έχει την ιδιότητα της υπο-αθροιστικότητας
- Δεν έχει ευαίσθητη ουρά. Αυτό σημαίνει πως μας πληροφορεί ότι, με πιθανότητα  $\alpha \times 100\%$ , η ζημιά δεν θα είναι μεγαλύτερη από ένα συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, ωστόσο δεν μας δίνει καμία ένδειξη για το μέγεθος της απώλειας στο υπόλοιπο  $(1 - \alpha) \times 100\%$

### 1.1.2. Αναμενόμενο Έλλειμμα (*Expected Shortfall (ES)*) - Μαθηματικός ορισμός

Το αναμενόμενο έλλειμμα ή αλλιώς το *Expected Shortfall* είναι ένα συνεπές μέτρο κινδύνου και μία καλή εναλλακτική λύση στο μειονέκτημα της *Value at Risk* όπου όπως αναφέρουμε παραπάνω δεν μπορεί να διακρίνει τη μέγιστη δυνατή απώλεια, εξαιτίας των διαφορετικών επιπέδων κινδύνου που ενυπάρχουν μεταξύ των χαρτοφυλακίων.

Στην πραγματικότητα, δεν είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκια με την ίδια *VaR* και τον κίνδυνο σε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης  $(1 - \alpha)\%$  με τις χειρότερες περιπτώσεις και με την μέγιστη δυνατή απώλεια.

Προκειμένου όμως να απαντήσουμε σε ένα πιο ευθύ ερώτημα, δηλαδή, ποια θα μπορούσε να είναι η ελάχιστη ζημιά που προκλήθηκε σε ένα υποτιθέμενο ποσοστό

της μέγιστης δυνατής απώλειας, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την αναμενόμενη απώλεια του τμήματος των ατυχών πιθανοτήτων. Καταλαβαίνουμε επομένως, πως αν η συνάρτηση κατανομής απώλειας είναι συνεχής, τότε η στατιστική ποσότητα αυτού του ερωτήματος, δίνεται, από την αναμενόμενη υποθετική τιμή πάνω από το ποσοστημόριο, η οποία είναι η Υπό όρους Προσδοκία, *Tail Conditional Expectation* (TCE) και δίνεται από την παρακάτω σχέση (Simona Roccioletti (2015)):

$$TCE_a(L) = E \{L|L \geq VaR_a\} \quad (1.3)$$

Ωστόσο, για μία γενικευμένη κατανομή, η παραπάνω σχέση ίσως να μην ικανοποιεί τον σκοπό μας, αφού όταν  $L \geq VaR_a$ , ίσως να έχουμε μία πιθανότητα μεγαλύτερη από αυτή που επιλέξαμε και θέσαμε σαν μέγιστη δυνατή απώλεια. Η *Tail Conditional Expectation* μπορεί επομένως, να μην ικανοποιεί τον κανόνα της υπο-προσθετικότητας, σε μία γενικευμένη κατανομή. Προκειμένου λοιπόν να αποφευχθεί κάτι τέτοιο, αρκεί να επεκτείνουμε τον ορισμό της *TCE*, όπου οδηγούμαστε στην επόμενη σχέση (Simona Roccioletti (2015)):

### **Ορισμός 1.1.2.**

Έστω η απώλεια/ζημιά  $L$ , με  $E(L) < \infty$  και συνάρτηση κατανομής  $F_L$ , τότε, η αναμενόμενη απώλεια, *Expected Shortfall*, σε ένα επίπεδο εμπιστοσύνης

$a \in (0,1)$ , ορίζεται ως:

$$ES_a(L) = \frac{1}{1-\alpha} \cdot \left( E(L; L \geq q_\alpha) + q_\alpha \cdot (1 - \alpha - P(L \geq q_\alpha)) \right) \quad (1.4)$$

όπου,

- $q_\alpha$  είναι το  $\alpha$ -ποσοστημόριο της  $F_L$
- $q_\alpha \cdot (1 - \alpha - P(L \geq q_\alpha))$  είναι ο όρος που πρέπει να προστεθεί στην αναμενόμενη τιμή  $E(L; L \geq q_\alpha)$  όταν το  $L \geq q_\alpha$  έχει πιθανότητα μεγαλύτερη από  $(1 - \alpha)$ .

Στην περίπτωση που  $P(L \geq q_\alpha) = 1 - \alpha$  ( όπως συμβαίνει συνήθως) , τότε ο παραπάνω όρος φεύγει και έχουμε πάλι την αρχική σχέση.

### 1.1.3. Η Σχέση του *Expected Shortfall* με την *Value at Risk*

Έστω μία ενσωματωμένη ζημιά  $L$  με συνεχής συνάρτηση κατανομής,  $F_L$ . Το αναμενόμενο έλλειμα (ES) σε οποιοδήποτε επίπεδο σημαντικότητας  $a \in (0,1)$  δίνεται από (Simona Roccioletti (2015)) :

$$ES_a(L) = \frac{E(L; L \geq q_a(L))}{1-a} = E(L|L \geq VaR_a) \quad (1.5)$$

άρα λόγω της (1.3),

$$ES_a(L) = TCE_a(L) \quad (1.6)$$

Η κατανόηση όμως του  $ES_a$  μπορεί να γίνει αντιληπτή χρησιμοποιώντας έναν ισοδύναμο ορισμό, ο οποίος κάνει χρήση του  $ES_a$  σαν συνδυασμό των αναμενόμενων τιμών. Χρησιμοποιώντας την στενή σχέση της παραμέτρου  $a$  με την συνάρτηση κατανομής  $F_L$ , παίρνουμε:

$$F_L^{\leftarrow}(u) = \inf \{u \in \mathbb{R} : F_L(u) \geq \alpha\} \quad (1.7)$$

Όμως, η  $ES_a$  μπορεί να εκφραστεί και σαν τη μέση τιμή του  $F_L^{\leftarrow}$  σε ένα συγκεκριμένο διάστημα, ως κάτωθι:

$$ES_a(L) = \frac{1}{1-a} \cdot \int_a^1 q_u(FL) du \quad (1.8)$$

Έτσι, η αναμενόμενη απώλεια, συνδέεται με τη  $VaR$  με την εξής σχέση:

$$ES_a(L) = \frac{1}{1-a} \cdot \int_a^1 VaR_u(L) du, \quad (1.9)$$

όπου αυτή είναι και η πιο διαδεδομένη και εύχρηστη σχέση της  $ES_a$ .

Συνοψίζοντας λοιπόν, το *Expected Shortfall* (αναμενόμενο έλλειμμα) αποτελεί ένα *συνεκτικό* μέτρο κινδύνου, το οποίο *συνεκτικό* θα αναλυθεί στην Ενότητα 1.2.



### 1.1.4. Ποσοστημόρια (*Expectiles*) – Μαθηματικός Ορισμός

Τα Ποσοστημόρια (*Expectiles*) είναι ένα μέτρο κινδύνου, το οποίο εμφανίζει ιδιότητες συνοχής (που δεν συναντάμε στην *VaR*) και τη δυνατότητα της “αναγκαστικής χρήσης”. Γνωρίζουμε πως ένα ποσοστημόριο ελαχιστοποιεί μία ασύμμετρη συνάρτηση κατανομής και μπορεί να ορισθεί ως εξής:

$$q_\alpha(L) := \arg \min_{l \in \mathbb{R}} E[\alpha \cdot (L - l)^- + (1 - \alpha) \cdot (L - l)^+] \quad (1.10)$$

#### Ορισμός 1.1.4.

Για κάθε  $0 < \beta < 1$ , το  $\beta - expectile$ , ορίζεται ως:

$$e_\beta(L) = \arg \min_{l \in \mathbb{R}} E[(1 - \beta) \max(L - l, 0)^2 + \beta \max(l - L, 0)^2] \quad (1.11)$$

Πράγματι, το  $\beta - expectile$  είναι η μοναδική λύση στην παρακάτω εξίσωση:

$$(1 - \beta) E[\max(L - l, 0)] = \beta E[\max(l - L, 0)] \quad (1.12)$$

Συνεπώς η  $e_\beta(L)$  ικανοποιεί την παρακάτω σχέση:

$$\frac{\beta E[L \mathbf{1}_{\{L < e_\beta(L)\}}] + (1 - \beta) E[L \mathbf{1}_{\{L \geq e_\beta(L)\}}]}{\beta P[L < e_\beta(L)] + (1 - \beta) P[L \geq e_\beta(L)]} \quad (1.13)$$

Από όλα όσα αναφέρθηκαν παραπάνω σχετικά με τα ποσοστημόρια (*expectiles*), βλέπουμε πως καθορίζονται από τις σταθμισμένες υπό-συνθήκη προσδοκίες της τυχαίας μεταβλητής  $L$ . Τα Ποσοστημόρια είναι ένα μέτρο της δεξιάς ουράς και της αριστερής ουράς των αναμενόμενων τιμών απώλειας  $L$ . Έτσι ενώ η *VaR* δεν λαμβάνει υπόψη της καμία από τις δύο ουρές της συνάρτησης απώλειας, και ενώ το Αναμενόμενο Έλλειμα (*Expected Shortfall*) λαμβάνει υπόψη του μόνο τη μία, τα Ποσοστημόρια (*Expectiles*) αξιολογούν και τις δύο ουρές, με διαφορετικά βάρη. Αυτό που κάνουν ουσιαστικά είναι να εξισορροπήσουν τη δεξιά και την αριστερή ουρά της κατανομής έτσι ώστε ο λόγος μεταξύ των αναμενόμενων θετικών και αρνητικών αποκλίσεων από το  $e_\beta$ , θα είναι ίσος με μία προκαθορισμένη σταθερά:

$$\frac{E[(L - e_\beta(L))^+]}{E[(L - e_\beta(L))^-]} = \frac{\beta}{1 - \beta} \quad (1.14)$$

Υποθέτοντας ότι  $\beta = 1 - \beta = \frac{1}{2}$ , τότε ο παραπάνω λόγος θα είναι (=1) δείχνοντας έτσι, ότι οι μέσες τιμές της δεξιάς και της αριστερής απόκλισης από το  $e_\beta$  είναι ίσες.

Σύμφωνα με το De Rossi (2009) το μέτρο κινδύνου που σχετίζεται με τα Ποσοστημόρια αναφέρεται ως  $EVaR$  και ειδικότερα, για μία ζημιά  $L$  με  $E(L^2) < \infty$  και συνάρτηση κατανομής  $F_L$ , έχουμε,

$$EVaR_\beta(L) = e_\beta(L) \quad (1.15)$$

Ανακεφαλαιώνοντας λοιπόν, όταν αναφερόμαστε στη  $VaR$ , αποδεχόμαστε την περίπτωση που εξετάζουμε όταν :

- η πιθανότητα απώλειας δεν υπερβαίνει ένα σταθερό επίπεδο εμπιστοσύνης  $(1 - \alpha)$ .
- Στην περίπτωση του Αναμενόμενου Ελλείματος (*Expected Shortfall*), αποδεχόμαστε μια εξεταζόμενη περίπτωση εάν η μέση απώλεια στη χειρότερη  $(1 - \alpha)$  100% των περιπτώσεων δεν είναι μεγαλύτερη από 0. Για αυτό και αυτό το μέτρο κινδύνου είναι πιο συντηρητικό και από το  $VaR$
- Τέλος, αναφορικά με το  $EVaR$ , αποδεχόμαστε την εξεταζόμενη περίπτωση εάν ο λόγος του κέρδους/ζημιάς, είναι μεγαλύτερος από την προκαθορισμένη τιμή  $\frac{1 - \beta}{\beta}$ .

## 1.2 Συνεκτικά και Κυρτά Μέτρα Κινδύνου – Μαθηματικοί Ορισμοί

Ένα πολύ σημαντικό βήμα στην μέτρηση του κινδύνου επιτεύχθηκε όταν ο Artzner (1998) πρότεινε τα πρώτα αξιώματα για την μέτρηση του κινδύνου. Τα μέτρα κινδύνου που τηρούν τα παρακάτω αξιώματα ονομάζονται *συνεκτικά* μέτρα κινδύνου. Τα αξιώματα αυτά της συνοχής είχαν αρκετές επιπτώσεις, δεδομένου πως δεν ήταν πλέον δυνατό να δημιουργηθεί αυθαίρετα μια λειτουργία για τη μέτρηση του κινδύνου, παρά μόνο αν τηρούσε τα αξιώματα αυτά. Η *VaR* δεν ήταν μέσα σε αυτά καθώς δεν τηρεί αυτά τα αξιώματα και έτσι δεν χαρακτηρίζεται ως ένα επαρκές μέτρο κινδύνου. Ας δούμε όμως τι είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου (Artzner (1998)) :

### Ορισμός 1.2.α

Έστω  $X$  και  $Y$  η μελλοντική απώλεια δύο χαρτοφυλακίων. Τότε ένα μέτρο κινδύνου  $z$  είναι συνεκτικό, εάν τηρεί τα παρακάτω τέσσερα αξιώματα:

#### 1° Αξίωμα

- Μονοτονία

Εάν  $X > Y$  τότε  $z(X) \leq z(Y)$

#### 2° Αξίωμα

- Θετική Ομοιογένεια

$\forall \tau > 0$ , ισχύει ότι,  $z(\tau X) = \tau z(X)$

#### 3° Αξίωμα

- Υπό-προσθετικότητα

Ισχύει η σχέση:  $z(X + Y) \leq z(X) + z(Y)$

#### 4° Αξίωμα

- Μεταβατική Αμεταβλητότητα (translation invariance)

$\forall m \in \mathbb{R}$  ισχύει,  $z(X + m) = z(X) - m$

Η έννοια του 1ου αξιώματος της Μονοτονίας, είναι πως ο μεγαλύτερος κίνδυνος συνδέεται και με μικρότερη απώλεια. Εάν μία κατάσταση  $X$  είναι καλύτερη από μία

$Y (X < Y)$ , τότε ο κίνδυνος που αφορά το  $Y$  θα πρέπει να είναι μικρότερος από εκείνον του  $X$ .

Η έννοια της Θετικής Ομοιογένειας και του 2ου αξιώματος, διασφαλίζει πως δεν μπορούμε να αυξήσουμε ή να μειώσουμε τον κίνδυνο επενδύοντας για παράδειγμα διαφορετικά ποσά στην ίδια μετοχή/στο ίδιο απόθεμα. Επομένως ο κίνδυνος προκύπτει από το ίδιο το απόθεμα και δεν επηρεάζεται από την ποσότητα, δεν είναι συνάρτηση της ποσότητας.

Η έννοια του 3ου αξιώματος και ίσως του πιο σημαντικού, η έννοια της Υπό-προσθετικότητας, εξασφαλίζει ότι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου λαμβάνει υπόψη του την ανομοιογένεια και διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου. Με αυτό τον τρόπο, ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από πολλά περιουσιακά στοιχεία, καθίσταται αυτόματα λιγότερο επικίνδυνο σε σχέση με το χαρτοφυλάκιο που αποτελείται μόνο από ένα, εάν βέβαια η συσχέτιση των περιουσιακών στοιχείων, στην 1<sup>η</sup> περίπτωση, είναι διαφορετική του ενός.

Όπως αναφέρει ο Artzner et al (1997), (1999) το αξίωμα αυτό, καταγράφει, πως πρέπει να συμπεριφέρεται ένα μέτρο κινδύνου, ιδιαίτερα στην συνάθροιση και στον διαχωρισμό αντίστοιχα, των χαρτοφυλακίων. Βασικό χαρακτηριστικό στην μέτρηση του κινδύνου.

Τέλος, το 4ο αξίωμα, μπορεί να εξηγηθεί από το γεγονός, πως εάν επενδύσουμε παραδείγματος χάρη σε ένα ομόλογο με μηδενικό κίνδυνο, η απώλεια που θα έχουμε θα είναι μηδενική με πιθανότητα 1. Επομένως, πρέπει πάντα να λαμβάνουμε υπόψη μας το αρχικό ποσό που επενδύθηκε. Η αρχική επένδυση, αφαιρείται διότι τα μέτρα κινδύνου, όπως γνωρίζουμε, μετράνε την απώλεια σαν ένα θετικό ποσό. Επομένως, το κέρδος είναι αρνητικό.

Ένα μέτρο κινδύνου, είναι ασθενώς συνεκτικό όταν είναι κυρτό, αμετάβλητο και ομοιογενές. Τα αξιώματα της συνοχής, εξασφαλίζουν πως το μέτρο κινδύνου είναι κυρτό, επομένως, δέχεται βελτίωση. Η  $VaR$  δεν είναι κυρτό μέτρο κινδύνου και διαθέτει πολλά τοπικά ελάχιστα.

Τα κυρτά μέτρα κινδύνου είναι ευρέως γνωστά στο  $L^\infty$ , τον χώρο των οριοθετημένων τυχαίων μεταβλητών. Πράγματι, οι Artzner et al (1998) εισήγαγαν τα βασικά αξιώματα της συνοχής τα οποία στη συνέχεια γενικεύθηκαν για την περίπτωση της κυρτότητας από τους Follmer and Schied (2002).

### Ορισμός 1.2.6

Μία συνάρτηση  $\rho: L^P \rightarrow (-\infty, \infty]$  είναι ένα κυρτό μέτρο κινδύνου στο  $L^P$  αν παρουσιάζει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά (Damir Filipović, Gregor Svindland, (2007)):

- I.  $\rho(0) < \infty$
- II. κυρτότητα:  $\rho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1 - \lambda)\rho(Y)$ , για κάθε  $\lambda \in [0, 1]$
- III. cash-invariance:  $\rho(X + r) = \rho(X) - r$ , για κάθε  $r \in R$
- IV. Μονοτονία:  $X \geq Y$  τότε,  $\rho(X) \leq \rho(Y)$

Εάν επιπλέον,  $\rho(tX) = t\rho(X)$  για κάθε  $t \geq 0$ , ισχύει πως το  $\rho$  είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου.

Το σύνολο αποδοχής ενός κυρτού μέτρου κινδύνου  $\rho$  στο  $L^P$  είναι :

$$A_\rho := \{X \in L^P \mid \rho(X) \leq 0\}$$

#### **1.2.1. Conditional Value at Risk (C-VaR)**

Λαμβάνοντας υπόψη όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για τη συνοχή, τα αξιώματα και την σημασία που έχουν, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η  $VaR$  δεν είναι ένα συνεκτικό μέτρο κινδύνου, βγήκαν στο προσκήνιο και προτάθηκαν νέα συνεκτικά μέτρα κινδύνου, έτσι ώστε να αξιοποιηθούν και τα πλεονεκτήματα της  $VaR$ . Εμφανίστηκε η ανάγκη δημιουργίας ενός μέτρου κινδύνου το οποίο θα μπορούσε να πάρει όλες τις βασικές πληροφορίες του κινδύνου κάνοντας χρήση της πιθανότητας, της απώλειας αλλά και του χρονικού ορίζοντα. Προτάθηκαν αρκετά μέτρα που σχετίζονται με τη  $VaR$  και τη συνεκτικότητα της. Το  $TVaR$  – Tail Value at Risk και η  $C-VaR$  είναι δύο από αυτά.

Η  $C-VaR$  είναι ίσως το πιο δημοφιλές, αφενός λόγω της ομοιότητας της με την  $VaR$  και αφετέρου εξαιτίας της εκτίμησης του πόσο μεγάλη θα είναι η ζημιά εάν η απώλεια υπερβεί την απώλεια  $VaR$  που έχουμε εκτιμήσει. Η  $C-VaR$  επομένως, είναι η αναμενόμενη ζημιά δεδομένου ότι αυτή έχει υπερβεί την απώλεια  $VaR$ .

Για συνεχείς κατανομές, η  $C-VaR$  ορίζεται ως η υπό όρους αναμενόμενη απώλεια υπό την προϋπόθεση ότι υπερβαίνει την  $VaR$ , Rockafellar και Uryasev (1999-2000). Για συνεχείς κατανομές, αυτό το μέτρο κινδύνου είναι επίσης γνωστό ως *Mean Excess Loss*, *Mean Shortfall* ή *Tail Value-at-Risk*. Ωστόσο, για γενικές κατανομές, συμπεριλαμβανομένων των διακριτών διανομών, η  $C-VaR$  ορίζεται ως ο σταθμισμένος μέσος όρος  $VaR$  και οι απώλειες που υπερβαίνουν αυστηρά την  $VaR$ , Rockafellar και Uryasev (1999-2000). Πρόσφατα, οι Acerbi (2001), Acerbi και Tasche (2001) επαναπροσδιόρισαν το αναμενόμενο έλλειμμα παρόμοιο με την  $C - VaR$ .

### **Ορισμός 1.2.1.**

Έστω  $X$  συνεχής τυχαία μεταβλητή απώλειας και για  $0 < a < 10$  το  $a - CVaR$  της  $X$  θα είναι:

$$CVaR_a(X) := E[X/X \geq VaR_a(X)] \quad (1.16)$$

Ένας εναλλακτικός ορισμός του  $CVaR$  λέει πως είναι ο μέσος όρος της κατανομής της ουράς των απωλειών του  $VaR$ . Το πλεονέκτημα που έχει το  $C - VaR$  είναι πως μπορεί να ελαχιστοποιηθεί μέσω της βελτιστοποίησης του χαρτοφυλακίου με τον γραμμικό συνδυασμό των βαρών του.

Έστω τώρα,  $X$  η κατανομή απώλειας, και  $F_x(z)$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της  $X$  όπου,  $F_x(z) = P(X \leq z)$

Τότε, η γενικευμένη κατανομή της  $a$ -ουράς ορίζεται ως,

$$F_x(z) := \begin{cases} 0, & z < VaR_a(X) \\ \frac{F_x(z)-a}{1-a}, & z \geq VaR_a(X) \end{cases} \quad (1.17)$$

Τώρα, αν  $X^a$  είναι τυχαία μεταβλητή, με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας  $F_X^a$ , τότε η  $C - VaR$  ορίζεται ως:

$$CVaR_a(X) := E[X^a] \quad (1.18)$$

Για διακριτές ή μη-συνεχείς κατανομές απώλειας οι Rockafellar και Uryasev (2000, 2001) πρότειναν τον υπολογισμό της  $C - VaR$  σαν σταθμισμένο μέσο όρο, όπως βλέπουμε παρακάτω:

$$CVaR_a^+(X) := E \left[ \frac{X}{X} > VaR_a(X) \right] \quad (1.19)$$

## 2° Κεφάλαιο

### Προσέγγιση Βελτιστοποίησης της Υπό Συνθήκη Αξίας σε Κίνδυνο (CVaR)

Στο κεφάλαιο αυτό θα γίνει η παρουσίαση και η ανάλυση μιας προσέγγισης για τη βελτιστοποίηση ενός χαρτοφυλακίου, έτσι ώστε να μειωθεί ο κίνδυνος των υψηλών ζημιών. Στην προσέγγιση αυτή θα χρησιμοποιηθεί η  $VaR$  αλλά η έμφαση δίνεται στην  $C - VaR$ .

#### 2.1. Η Τεχνική της Βελτιστοποίησης Χαρτοφυλακίου μέσω της CVaR

Η  $VaR$  είναι το χαμηλότερο ποσό, σε σχέση με ένα συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης, έτσι ώστε να μην υπερβεί η απώλεια το ποσό αυτό και αντίστοιχα η  $C - VaR$  είναι η υποθετική προσδοκία ζημιών που υπερβαίνουν το ποσό αυτό. Τα δυο αυτά μέτρα επομένως, έχουν άμεσο ακόλουθο πως τα χαρτοφυλάκια με χαμηλό  $C - VaR$ , έχουν και χαμηλό  $VaR$ . Υπολογίζεται η  $VaR$  και ταυτόχρονα βελτιστοποιείται η  $C - VaR$ . Για τον υπολογισμό της  $VaR$  βασιζόμαστε στην γραμμική προσέγγιση και στην κανονική κατανομή. Η παραπάνω προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αξιολόγηση γραμμικών αλλά και μη γραμμικών παραγώγων, κινδύνους αγοράς, πιστώσεων, λειτουργικούς κινδύνους, από εταιρίες για τα επενδυτικά τους έργα ή από χρηματιστήρια.

##### 2.1.1. Περιγραφή της Προσέγγισης

Έστω  $f(x; y)$  η απώλεια που σχετίζεται με το διάνυσμα απόφασης  $x$ , το οποίο επιλέγεται από ένα συγκεκριμένο υποσύνολο  $X \in \mathbb{R}^n$ , και την τυχαία μεταβλητή  $y$ , όπου  $y \in \mathbb{R}^m$ . Το διάνυσμα  $x$  αντιπροσωπεύει ένα χαρτοφυλάκιο, με το  $X$  να είναι το σύνολο των διαθέσιμων χαρτοφυλακίων (σύμφωνα με κάποιους περιορισμούς), αλλά θα μπορούσαν βέβαια, να δοθούν και διάφορες άλλες ερμηνείες για αυτό. Η τυχαία μεταβλητή  $y$  αντιπροσωπεύει την εκάστοτε αβεβαιότητα όπως π.χ. οι διάφοροι παράμετροι της αγοράς που μπορεί να επιφέρουν μια απώλεια.

Για κάθε  $x$ , η απώλεια  $f(x, y)$  είναι μια τυχαία μεταβλητή που έχει κατανομή  $\in \mathbb{R}$ , και εξαρτάται από αυτή του  $y$ .

Η υποκείμενη κατανομή πιθανότητας του  $y \in \mathbb{R}^m$ , θα θεωρηθεί, για ευκολία, πως έχει πυκνότητα ίση με  $p(y)$ . Ωστόσο όπως θα δούμε αργότερα, δεν είναι απαραίτητη μια αναλυτική έκφραση  $p(y)$ , για την εφαρμογή της προσέγγισης. Είναι αρκετό να έχουμε έναν αλγόριθμο που παράγει τυχαία δείγματα από  $p(y)$ . Μπορεί να χρησιμοποιηθεί μια διαδικασία δύο βημάτων για την εξαγωγή αναλυτικών στοιχείων για το  $p(y)$ , ή να κατασκευαστεί ένας κώδικας μέσω της προσομοίωσης *Monte Carlo*.

Η πιθανότητα του  $f(x, y)$  να μην υπερβαίνει ένα όριο  $\alpha$  (threshold), δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$\Psi(x, \alpha) = \int_{f(x,y) \leq \alpha} p(y) dy \quad (2.1)$$

Ως συνάρτηση του  $\alpha$  για σταθερό  $x$ , η  $\Psi(x, \alpha)$ , είναι η συσσωρευτική συνάρτηση κατανομής για τις απώλειες που σχετίζονται με το  $x$ . Καθορίζει πλήρως τη συμπεριφορά της τυχαίας μεταβλητής και είναι θεμελιώδης στον προσδιορισμό της *VaR* και της *C - VaR*.

Η συνάρτηση  $\Psi(x, \alpha)$  δεν μειώνεται ως προς το  $\alpha$  και υποθέτουμε για λόγους απλότητας, ότι η  $\Psi(x, \alpha)$  είναι παντού συνεχής ως προς  $\alpha$ . Σε ορισμένες κοινές καταστάσεις, η συνέχεια προκύπτει από τις ιδιότητες της συνάρτησης απώλειας  $f(x, y)$  και της πυκνότητας  $p(y)$  (Uryasev, (1995)).

Οι τιμές  $\beta - VaR$  και  $\beta - CVaR$ , για την τυχαία μεταβλητή της απώλειας που σχετίζεται με το  $x$  και κάθε προκαθορισμένο επίπεδο σημαντικότητας  $\alpha$  στο  $(0, 1)$  θα δηλώνονται ως  $\alpha_\beta(x)$  και  $\varphi_\beta(x)$ . Θα έχουμε λοιπόν,

$$\alpha_\beta(x) = \min\{\alpha \in \mathbb{R} : \Psi(x, \alpha) \geq \beta\} \quad (2.2)$$

και

$$\varphi_\beta(x) = (1 - \beta)^{-1} \int_{f(x,y) \geq \alpha_\beta(x)} f(x, y) p(y) dy \quad (2.3)$$

Στη σχέση (2.2) το  $\alpha_\beta(x)$  θεωρείται ότι είναι το αριστερό άκρο του μη κενού διαστήματος, που αποτελείται από τις τιμές  $\alpha$  έτσι ώστε να ισχύει  $\Psi(x, \alpha) = \beta$ .

Στην σχέση (2.3) η πιθανότητα ότι  $f(x, y) \geq \alpha_\beta(x)$  είναι ίση με  $1-\beta$ . Έτσι το  $\varphi_\beta(x)$  προκύπτει ως, η υπό συνθήκη αναμενόμενη απώλεια, η οποία σχετίζεται με το



διάνυσμα απόφασης  $\mathbf{x}$ , το οποίο συνδέεται με την απώλεια που είναι ίση με  $\alpha_\beta(\mathbf{x})$  ή μεγαλύτερη.

Το σημαντικό στην προσέγγιση αυτή, είναι ο χαρακτηρισμός των  $\varphi_\beta(\mathbf{x})$  και  $\alpha_\beta(\mathbf{x})$  σε όρους της συνάρτησης  $F_\beta$  σε  $X \times \mathbb{R}$ , η οποία ορίζεται από την παρακάτω σχέση,

$$F_\beta(\mathbf{x}, \alpha) = \alpha + (1 - \beta)^{-1} \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} (f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha)^+ p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.4)$$

όπου  $(t)^+ = \max\{t, 0\}$ . Τα βασικά χαρακτηριστικά της  $F_\beta$  σύμφωνα με τις παραδοχές που έγιναν παραπάνω, είναι τα ακόλουθα. Όσον αφορά στην κυρτότητα, είναι βασική ιδιότητα στην βελτιστοποίηση όπου εξαλείφει την πιθανότητα ένα τοπικό ελάχιστο να είναι διαφορετικό από ένα παγκόσμιο ελάχιστο (Rockafellar (1970), Shor (1985)).

### **Θεώρημα 2.1**

Η  $F_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$  ως μία συνάρτηση του  $\alpha$  είναι κυρτή και συνεχώς διαφορίσιμη. Το  $\beta - CVaR$  της απώλειας, σχετίζεται με οποιοδήποτε  $\mathbf{x} \in X$  και μπορεί να προσδιοριστεί από τη σχέση

$$\varphi_\beta(\mathbf{x}) = \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F_\beta(\mathbf{x}, \alpha) \quad (2.5)$$

Οι τιμές του  $\alpha$  για τις οποίες λαμβάνεται το ελάχιστο, δηλαδή,

$$A_\beta(\mathbf{x}) = \operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} F_\beta(\mathbf{x}, \alpha) \quad (2.6)$$

είναι ένα μη-κενό, κλειστό και φραγμένο διάστημα, και το  $\beta$ -VaR της απώλειας δίνεται από

$$\alpha_\beta(\mathbf{x}) = \text{αριστερό άκρο του } A_\beta(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

Ειδικότερα, έχουμε:

$$\alpha_\beta(\mathbf{x}) \in \operatorname{argmin}_{\alpha \in \mathbb{R}} F_\beta(\mathbf{x}, \alpha) \text{ και } \varphi_\beta(\mathbf{x}) = F_\beta(\mathbf{x}, \alpha_\beta(\mathbf{x})) \quad (2.8)$$

Όσον αφορά στην κυρτότητα, μια βασική ιδιότητα για τη βελτιστοποίηση, η οποία εξαλείφει την πιθανότητα ένα τοπικό ελάχιστο να είναι διαφορετικό από ένα παγκόσμιο ελάχιστο, π.χ. Rockafellar (1970)

Επιπλέον, κάποια άλλα σημαντικά πλεονεκτήματα της  $VaR$  και της  $C - VaR$  βλέπουμε στο επόμενο θεώρημα, κάνοντας χρήση των τύπων του θεωρήματος 2.1, το οποίο αποδείχθηκε και αυτό από τους Rockafellar και Uryasev, (2000)

### **Θεώρημα 2.2**

Επιπροσθέτως, η ελαχιστοποίηση του  $\beta - CVaR$  της απώλειας που σχετίζεται με οποιοδήποτε  $x \in X$  είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση του  $F_\beta(x, \alpha)$  για όλα τα  $(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}$ , δηλαδή:

$$\min_{x \in X} \varphi_\beta(x) = \min_{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}} F_\beta(x, \alpha) \quad (2.9)$$

Όπου, ένα ζεύγος  $(x^*, \alpha^*)$  επιτυγχάνει το 2<sup>ο</sup> ελάχιστο, αν και μόνο αν το  $x^*$  επιτύχει το 1<sup>ο</sup> ελάχιστο και το  $\alpha^* \in A_\beta(x^*)$ .

Ειδικότερα, σε περιπτώσεις όπου το διάστημα  $A_\beta(x^*)$  μειώνεται σε ένα μόνο σημείο, όπως συμβαίνει συνήθως, η ελαχιστοποίηση του  $F(x, \alpha)$  για  $(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}$ , παράγει ένα ζευγάρι  $(x^*, \alpha^*)$  το οποίο δεν είναι απαραίτητα μοναδικό, τέτοιο ώστε το  $x^*$  να ελαχιστοποιεί το  $\beta - CVaR$  και το  $\alpha^*$  να δίνει την αντίστοιχη  $\beta - VaR$ .

Επιπλέον, το  $F_\beta(x, \alpha)$  είναι κυρτό ως προς το  $(x, \alpha)$  και το  $\varphi_\beta(x)$  είναι κυρτό ως προς το  $x$ , τέτοιο ώστε αν οι περιορισμοί είναι τέτοιοι που το  $x$  να είναι ένα κυρτό σύνολο, η ελαχιστοποίηση και των δύο είναι μία περίπτωση ενός κυρτού προγραμματισμού.

Για τον προσδιορισμό ενός  $x$  που αποδίδει ελάχιστο  $\beta - CVaR$  δεν είναι απαραίτητο να δουλεύει κανείς απευθείας με τη συνάρτηση  $\varphi_\beta(x)$ , κάτι που είναι ίσως λίγο δύσκολο λόγω των όρων και του ορισμού της  $VaR$  αλλά και των μαθηματικών ιδιοτήτων της τιμής της. Έχει την ευχέρεια να χρησιμοποιήσει αντί αυτού την  $F_\beta(x, \alpha)$ , με την κυρτότητα στη μεταβλητή  $\alpha$  και σε διάστημα  $(x, \alpha)$ .

Η προσέγγιση βελτιστοποίησης που βασίζεται στο θεώρημα 2.2 μπορεί να συνδυαστεί με πολλές ιδέες όπως π.χ. με την προσέγγιση του ολοκληρώματος του  $F_\beta(x, \alpha)$ . Στο θεώρημα αυτό θα βασιστούμε και για την βελτιστοποίηση του  $\beta - CVaR$

### 2.1.2. Μία Εφαρμογή για την Βελτιστοποίηση του Χαρτοφυλακίου

Στην εφαρμογή αυτή θα χρησιμοποιήσουμε το διάνυσμα  $\mathbf{x}$  ως ένα χαρτοφυλάκιο χρηματοοικονομικών μέσων, με  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  και  $x_j$  να είναι η θέση του τίτλου  $j$ , και:

$$x_j \geq 0 \text{ για } j = 1, \dots, n \text{ με } \sum_{j=1}^n x_j = 1 \quad (2.10)$$

Επιπλέον, με  $y_j$  δηλώνουμε την απόδοση του εκάστοτε  $j$ , ( $j = 1, \dots, n$ ) και παίρνουμε την τυχαία μεταβλητή  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ . Η κατανομή  $\mathbf{y}$  είναι κοινή κατανομή των διάφορων αποδόσεων και είναι ανεξάρτητη από το  $\mathbf{x}$  το οποίο έχει πυκνότητα  $p(\mathbf{y})$ .

Η απόδοση ενός χαρτοφυλακίου  $\mathbf{x}$  είναι το άθροισμα των αποδόσεων των επιμέρους μέσων στο χαρτοφυλάκιο και είναι κλιμακούμενη ανάλογα με τις τιμές  $x_j$ . Η απώλεια, που είναι αρνητική, δίνεται επομένως από την παρακάτω σχέση:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -[x_1 y_1 + \dots + x_n y_n] = -\mathbf{x}^T \mathbf{y} \quad (2.11)$$

Εφόσον το  $p(\mathbf{y})$  είναι συνεχές ως προς  $\mathbf{y}$ , οι συσσωρευτικές συναρτήσεις κατανομών για την απώλεια, που είναι συσχετισμένη με το  $\mathbf{x}$ , θα είναι και αυτή συνεχής (Kan and Kibzun (1996)), (Uryasev (1995)).

Αν και την  $VaR$  αλλά και την  $C - VaR$  τις ορίζουμε συνήθως με συγκεκριμένες νομισματικές τιμές, εδώ αποδίδονται ως ποσοστά των αποδόσεων. Θεωρούμε πως υπάρχει αντιστοιχία μία προς μία μεταξύ της ποσοστιαίας απόδοσης και των νομισματικών τιμών. Κάτι τέτοιο βέβαια δεν ισχύει για τα χαρτοφυλάκια με μηδενική καθαρή επένδυση. Σε αυτό το κεφάλαιο συγκρίνουμε την ελάχιστη μεθοδολογία  $C - VaR$  με την προσέγγιση ελάχιστης διακύμανσης, επομένως για λόγους συνέπειας, θεωρούμε την απώλεια σε ποσοστιαίες μονάδες.

Η συνάρτηση απόδοσης στην οποία εστιάζουμε ως προς το  $\beta - VaR$  και το  $\beta - CVaR$  είναι:

$$F_\beta(\mathbf{x}, \alpha) = \alpha + (1 - \beta)^{-1} \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n} [-\mathbf{x}^T \mathbf{y} - \alpha]^+ p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.12)$$

Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι στην παραπάνω σχέση το  $F_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$  είναι κυρτό ως προς  $(\mathbf{x}, \alpha)$  και όχι μόνο ως προς  $\alpha$ .

Έστω τώρα  $\mu(\mathbf{x})$  και  $\sigma(\mathbf{x})$  να υποδηλώνουν το μέσο όρο και τη διακύμανση της απώλειας, αναφορικά με το χαρτοφυλάκιο  $\mathbf{x}$ .

Έχουμε λοιπόν:

$$\mu(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}^T \mathbf{m} \text{ και } \sigma^2(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{V} \mathbf{x} \quad (2.13)$$

Το  $\mu(\mathbf{x})$  είναι μία γραμμική συνάρτηση του  $\mathbf{X}$  ενώ το  $\sigma(\mathbf{x})$  είναι μία τετραγωνική συνάρτηση του  $\mathbf{X}$ . Ο μόνος περιορισμός που αφορά το χαρτοφυλάκιο μας είναι ότι γίνονται δεκτά μόνο τα χαρτοφυλάκια που αναμένεται να επιστρέψουν τουλάχιστον ένα δεδομένο ποσό  $R$ . Υπάρχει δηλαδή ο παρακάτω γραμμικός περιορισμός,

$$\mu(\mathbf{x}) \leq -R \quad (2.14)$$

και παίρνουμε τον συνδυασμό χαρτοφυλακίων να είναι τέτοιος όπου ικανοποιούνται και οι δύο σχέσεις:

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1 \quad \text{και} \quad \mu(\mathbf{x}) \leq -R \quad (2.15)$$

Το σύνολο  $X$  είναι κυρτό. Το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του  $F_\beta$  σε  $X \times \mathbb{R}$  είναι ακολούθως ένας κυρτός συνδυασμός.

Η  $F_\beta$  λαμβάνεται με τη δειγματοληψία της κατανομής των πιθανοτήτων του  $\mathbf{y}$ . Ένα σύνολο  $y_1, y_2, \dots, y_n$  μας δίνει την προσεγγιστική συνάρτηση

$$\widetilde{F}_\beta(\mathbf{x}, a) = a + \frac{1}{q(1-\beta)} \sum_{k=1}^q [-\mathbf{x}^T \mathbf{y}_k - a]^+ \quad (2.16)$$

Η ελαχιστοποίηση του  $\widetilde{F}_\beta$  στο  $X \times \mathbb{R}$  μπορεί να επιτευχθεί μέσω μίας προσεγγιστικής λύσης, τον κυρτό προγραμματισμό.

Σε όρους πραγματικών βοηθητικών μεταβλητών  $u_k$  με  $k = 1, \dots, r$  ισχύει το εξής,

$$\alpha + \frac{1}{q(1-\beta)} \sum_{k=1}^q u_k \quad (2.17)$$

Όπου υπόκειται στους γραμμικούς περιορισμούς

$$\sum_{j=1}^n x_j = 1, \mu(\mathbf{x}) \leq -R \quad (2.18)$$

αλλά και

$$u_k \geq 0 \quad (2.19)$$

καθώς και

$$\mathbf{x}^T \mathbf{y}_k + a + u_k \geq 0 \quad \text{με } k = 1, \dots, r \quad (2.20)$$

Ας σημειωθεί εδώ ότι η πιθανότητα μιας τέτοιας μείωσης στον γραμμικό προγραμματισμό δεν εξαρτάται από το  $\mathbf{y}$  που έχει μια ειδική κατανομή, όπως μια κανονική κατανομή. Λειτουργεί για μη κανονικές κατανομές το ίδιο καλά.

Μέχρι στιγμής έχει γίνει λόγος για την ελαχιστοποίηση του  $\beta - CVaR$ , ή με άλλα λόγια το εξής πρόβλημα:

1<sup>ο</sup> πρόβλημα      *Ελαχιστοποίηση του  $\varphi_\beta(\mathbf{x})$  για  $\mathbf{x} \in X$*

Αυτό είναι λοιπόν το πρόβλημα που επιλύεται σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2, όταν το  $F_\beta$  ελαχιστοποιείται για  $X \times \mathbb{R}$

Το άλλο πρόβλημα της ανεύρεσης ενός χαρτοφυλακίου που ελαχιστοποιεί το  $\beta - CVaR$ , το οποίο επιλύει το παρακάτω,

2<sup>ο</sup> πρόβλημα      *Ελαχιστοποίηση του  $\alpha_\beta(\mathbf{x})$  για  $\mathbf{x} \in X$*

Το ανωτέρω δεν είναι κάτι που επιλύεται άμεσα. Εφόσον  $\varphi_\beta(\mathbf{x}) \geq \alpha_\beta(\mathbf{x})$ , η λύση στο 1ο πρόβλημα θα είναι το ίδιο καλή και για το 2ο πρόβλημα.

Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.2 η τεχνική ελαχιστοποίησης του  $F_\beta(\mathbf{x}, a)$  πάνω στο  $X \times \mathbb{R}$  για την λύση του 1<sup>ου</sup> προβλήματος καθορίζει επίσης και το  $\beta - CVaR$  του χαρτοφυλακίου  $\mathbf{x}^*$  που ελαχιστοποιεί το  $\beta - CVaR$ . Αυτό βέβαια δεν είναι το ίδιο με τη λύση του προβλήματος 2. Παρατηρούμε όμως πως το 1<sup>ο</sup> πρόβλημα είναι καλύτερο προς επίλυση αναφορικά με την διαχείριση κινδύνου, σε σχέση με το 2<sup>ο</sup> πρόβλημα.

Συγκρίνοντας το 1<sup>ο</sup> και το 2<sup>ο</sup> πρόβλημα, με ένα αρκετά δημοφιλές πρόβλημα, την ελαχιστοποίηση της διακύμανσης

3<sup>ο</sup> πρόβλημα      *Ελαχιστοποίηση του  $\sigma^2(\mathbf{x})$  για  $\mathbf{x} \in X$*

Αυτά τα προβλήματα μπορούν να αποδώσουν, σε μία σημαντική περίπτωση ή αλλιώς κάτω από ένα σημαντικό περιορισμό, το ίδιο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο  $x^*$ . Στη συνέχεια εμείς θα θέσουμε τον παραπάνω περιορισμό και θα το χρησιμοποιήσουμε σε αριθμητικές δοκιμές.

#### Πρόταση 2.1.4.

Έστω ότι η ζημιά παρίσταται με τη μεταβλητή  $x$  η οποία είναι κανονικά κατανοημένη όπως και η μεταβλητή  $y$  η οποία είναι επίσης κανονικά κατανοημένη. Εάν το  $\beta \geq 0,5$  και ο περιορισμός 14 είναι σε ισχύ για τα δύο από τα τρία προβλήματα που έχουμε αναφέρει παραπάνω, τότε οι λύσεις των δύο προβλημάτων αυτών είναι οι ίδιες. Ένα κοινό χαρτοφυλάκιο  $x^*$  είναι το βέλτιστο και από τα δύο κριτήρια.

#### Απόδειξη

Κάνοντας χρήση του προγράμματος MATHEMATICA, κάτω από την υπόθεση της κανονικότητας και με  $\beta \geq 0,5$ , μπορούμε να εκφράσουμε το  $\beta - VaR$  και  $\beta - CVaR$  σε όρους μέσης τιμής και διακύμανσης όπως φαίνεται παρακάτω:

$$a_{\beta}(x) = \mu(x) + c_1(\beta)\sigma(x) \quad (2.21)$$

όπου,

$$c_1(\beta) = \sqrt{2} \operatorname{erf}^{-1}(2\beta - 1) \quad (2.22)$$

και

$$\varphi_{\beta}(x) = \mu(x) + c_2(\beta)\sigma(x) \quad (2.23)$$

όπου,

$$c_2(\beta) = (\sqrt{2\pi} \exp(\operatorname{erf}^{-1}(2\beta - 1))^2(1 - \beta))^{-1} \quad (2.24)$$

Με το  $\exp$  να δηλώνει την εκθετική συνάρτηση και το  $\operatorname{erf}^{-1}$  να δηλώνει το αντίστροφο της συνάρτησης σφάλματος

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \quad (2.25)$$

Όταν ο περιορισμός (2.14) είναι ενεργός, το σύνολο  $X$  μπορεί να αντικατασταθεί στην ελαχιστοποίηση από ένα γενικότερα μικρότερο σύνολο  $X'$ , που παίρνουμε αν αντικαταστήσουμε την εξίσωση  $\mu(x) = -R$  για την ανισότητα  $\mu(x) \leq -R$

Για κάθε  $x \in X'$  λοιπόν έχουμε,

$$a_\beta(x) = -R + c_1(\beta)\sigma(x) \text{ και } \varphi_\beta(x) = -R + c_2(\beta)\sigma(x) \quad (2.26)$$

Όπου οι συντελεστές  $c_1$  και  $c_2$  είναι θετικοί. Η ελαχιστοποίηση μίας από τις παραπάνω εκφράσεις όταν  $x \in X'$  είναι, προφανώς, η ίδια με την ελαχιστοποίηση του  $\sigma^2(x)$  με το  $x \in X'$ .

Έτσι, εάν ο περιορισμός (2.14) είναι ενεργός σε δύο από τα παραπάνω προβλήματα τότε κάθε χαρτοφυλάκιο  $x^*$  που ελαχιστοποιεί το  $\sigma(x)$  με  $x \in X'$ , είναι το βέλτιστο για τα δύο αυτά προβλήματα.

Αυτή η πρόταση μας δίνει τη δυνατότητα να δώσουμε λύση στο 3<sup>ο</sup> πρόβλημα και στην εξέταση της μεθόδου ελαχιστοποίησης του  $C - VaR$  από τις προσεγγίσεις δειγματοληψίας και τη μείωση τους σε γραμμικό μετασχηματισμό, με τις τετραγωνικές ρίζες μετασχηματισμού.

### 2.1.3. Εφαρμογή

Παρακάτω παρουσιάζεται ένα παράδειγμα στο οποίο κατασκευάζεται ένα χαρτοφυλάκιο από τρία εργαλεία: S&P500, ένα χαρτοφυλάκιο μακροπρόθεσμων κρατικών ομολόγων των ΗΠΑ και ένα μικρό χαρτοφυλάκιο σε αποθέματα κεφαλαιοποίησης. Οι αποδόσεις αυτών των εργαλείων διαμορφώνονται φυσικά από μία κοινή κατανομή. Να σημειωθεί σε αυτό το σημείο πως οι υπολογισμοί διενεργήθηκαν από το Carlos Testuri ως μέρος του έργου στο μάθημα Στοχαστικής Βελτιστοποίησης στο Πανεπιστήμιο της Βαρκελώνης στη Φλόριντα.

Ο μέσος  $m$  των μηνιαίων αποδόσεων δίνεται στον **Πίνακα 1**

Ο πίνακας συνδιακύμανσης  $V$  δίνεται στον **Πίνακα 2**

Επιπλέον, θεωρούμε  $R=0,011$  τη μεταβλητή για το αναμενόμενο κέρδος/ζημία.

Αρχικά λύθηκε το 3<sup>ο</sup> πρόβλημα σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα, που αφορούν το χαρτοφυλάκιο  $x^*$  το οποίο βλέπουμε στον **Πίνακα 3**, ως το μοναδικό βέλτιστο χαρτοφυλάκιο σύμφωνα με τον Markowitz.

Η αντίστοιχη διακύμανση ήταν  $\sigma(x^*)^2 = 0,00378529$  και ο μέσος όρος ήταν  $\mu(x^*) = 0,011$ . Έτσι ο περιορισμός  $\mu(x) \leq -R$  ήταν ενεργός σε αυτή την περίπτωση.

Στη συνέχεια υπολογίστηκαν τα  $\beta - VaR$  και τα  $\beta - CVaR$  αυτού του χαρτοφυλακίου  $x^*$  για τις τιμές του  $\beta$  να είναι ίσες με  $0,99$ ,  $0,95$  και  $0,90$  και σύμφωνα με τους τύπους (2.21 – 2.24). Τα αποτελέσματα βρίσκονται στον **Πίνακα 4**. Στη συνέχεια, με βάση αυτές τις τιμές και με βάση την προσέγγιση που περιεγράφηκε στο θεώρημα 2.2, πραγματοποιήθηκε η επίλυση του 1<sup>ου</sup> προβλήματος, ελαχιστοποιώντας την  $F_\beta(x, a)$  με  $(x, a) \in X \times \mathbb{R}$ . Οι υπολογισμοί του γραμμικού μετασχηματισμού έγιναν με τη χρήση του CPLEX solver. Τα τυχαία δείγματα δημιουργήθηκαν με βάση την συμβατική προσέγγιση Monte Carlo αφενός και την τυχαία ακολουθία Sobol αφετέρου. Τα αποτελέσματα από την συμβατική προσέγγιση Monte Carlo βρίσκονται στον **Πίνακα 5** και τα αποτελέσματα από την τυχαία ακολουθία Sobol στον **Πίνακα 6**. Εάν συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του **Πίνακα 5** για την προσέγγιση ελάχιστου  $CVaR$  τα οποία είναι αποτέλεσμα ψευδό-τυχαίας δειγματοληψίας, με τα αντίστοιχα αποτελέσματα του βέλτιστου χαρτοφυλακίου σύμφωνα με την προσέγγιση της ελάχιστης απόκλισης στους **Πίνακες 3** και **4**, παρατηρούμε τα εξής:

- Οι τιμές  $C - VaR$  διαφέρουν μόνο κατά λίγες εκατοστιαίες μονάδες, ανάλογα με τον αριθμό των δειγμάτων
- Ομοίως και οι τιμές  $VaR$  διαφέρουν ελάχιστα



Αξίζει να σημειωθεί πως η σύγκλιση των εκτιμήσεων στον **Πίνακα 5** στις τιμές του **Πίνακα 4** (για τις οποίες μας προϋδεάζει η Πρόταση) είναι εμφανώς αργή. Αυτό ίσως οφείλεται στα σφάλματα της προσομοίωσης Monte-Carlo. Η  $VaR$ , η  $C - VaR$  και η διακύμανση δεν επηρεάζονται από τις αλλαγές καθώς έχουν χαμηλές ευαισθησίες. Τα αποτελέσματα που έχουμε στον **Πίνακα 6** από την ελαχιστοποίηση του  $C - VaR$ , παρουσιάζουν διαφορετική και καλύτερη συμπεριφορά. Υπάρχει γρήγορη σύγκλιση στις τιμές για το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης της διακύμανσης. Όταν το μέγεθος του δείγματος είναι πάνω από 10.000, οι διαφορές στην  $C - VaR$  και στην  $VaR$ , παρατηρήθηκαν όταν η ελαχιστοποίηση της  $C - VaR$  και η ελαχιστοποίηση της διακύμανσης είναι μικρότερες από 1%.

<i>Instrument</i>	<i>Mean Return</i>
<i>S&amp;P</i>	0.0101110
<i>Gov Bond</i>	0.0043532
<i>Small Cap</i>	0.0137058

**Πίνακας 1:** Μέση Απόδοση Χαρτοφυλακίου (Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000) Optimization of Conditional Value- at-Risk)

	<i>S&amp; P</i>	<i>Gov Bond</i>	<i>Small Cap</i>
<i>S&amp;P</i>	0.00324625	0.00022983	0.00420395
<i>Gov Bond</i>	0.00022983	0.00049937	0.00019247
<i>Small Cap</i>	0.00420395	0.00019247	0.00764097

**Πίνακας 2:** Πίνακας Συνδιακύμανσης Χαρτοφυλακίου (Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000) Optimization of Conditional Value- at-Risk)

<i>S&amp;P</i>	<i>Gov Bond</i>	<i>Small Cap</i>
0.452013	0.115573	0.432414

**Πίνακας 3:** Βέλτιστο Χαρτοφυλάκιο με την προσέγγιση της ελάχιστης Διακύμανσης (Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000) Optimization of Conditional Value- at-Risk)

	<i>= 0:90</i>	<i>= 0:95</i>	<i>= 0:99</i>
<i>VaR</i>	0.067847	0.090200	0.132128
<i>C-VaR</i>	0.096975	0.115908	0.152977

**Πίνακας 4:**  $VaR$  και  $C-VaR$  με την προσέγγιση της ελάχιστης Απόκλισης (Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000) Optimization of Conditional Value- at-Risk)

	SmpIs #	S&P	Gov Bond	Small Cap	VaR	VaR Dif(%)	CVaR	CVaR Dif(%)	Iter	Time (min)
0.9	1000	0.35250	0.15382	0.49368	0.06795	0.154	0.09962	2.73	1157	0.0
0.9	3000	0.55726	0.07512	0.36762	0.06537	3.645	0.09511	-1.92	636	0.0
0.9	5000	0.42914	0.12436	0.44649	0.06662	1.809	0.09824	1.30	860	0.1
0.9	10000	0.48215	0.10399	0.41386	0.06622	2.398	0.09503	-2.00	2290	0.3
0.9	20000	0.45951	0.11269	0.42780	0.06629	-2.299	0.09602	-0.98	8704	1.5
0.9	1000	0.53717	0.08284	0.37999	0.09224	2.259	0.11516	-0.64	156	0.0
0.95	3000	0.54875	0.07839	0.37286	0.09428	4.524	0.11888	2.56	652	0.0
0.95	5000	0.57986	0.06643	0.35371	0.09175	1.715	0.11659	0.59	388	0.1
0.95	10000	0.47102	0.10827	0.42072	0.08927	-1.03	0.11467	-1.00	1451	0.2
0.95	20000	0.49038	0.10082	0.40879	0.09136	1.284	0.11719	1.11	2643	0.7
0.99	1000	0.41844	0.12848	0.45308	0.13454	1.829	0.14513	-5.12	340	0.0
0.99	3000	0.6196	0.05116	0.32924	0.12791	-3.187	0.14855	-2.89	1058	0.0
0.99	5000	0.63926	0.04360	0.31714	0.13176	-0.278	0.15122	-1.14	909	0.1
0.99	10000	0.45203	0.11556	0.43240	0.12881	-2.51	0.14791	-3.31	680	0.1
0.99	20000	0.45766	0.11340	0.42894	0.13153	-0.451	0.15334	0.24	3083	0.9

**Πίνακας 5:** Χαρτοφυλάκιο, VaR, και C-VaR από την προσέγγιση της ελάχιστης C-VaR

$\theta$	SmpIs #	S&P	Gov Bond	Small Cap	VaR	VaR Dif(%)	CVaR	CVaR Dif(%)	Iter	Time (min)
0.9	1000	0.43709	0.12131	0.44160	0.06914	1.90	0.09531	-1.71	429	0.0
0.9	3000	0.45425	0.11471	0.43104	0.06762	-0.34	0.09658	-0.41	523	0.0
0.9	5000	0.44698	0.11751	0.43551	0.06784	-0.02	0.09664	-0.35	837	0.1
0.9	10000	0.45461	0.11457	0.43081	0.06806	0.32	0.09695	-0.02	1900	0.3
0.9	20000	0.46076	0.11221	0.42703	0.06790	0.08	0.09692	-0.06	4818	0.6
0.95	1000	0.43881	0.12065	0.44054	0.09001	-0.21	0.11249	-2.95	978	0.0
0.95	3000	0.43881	0.12065	0.44054	0.09001	-0.21	0.11511	-0.69	407	0.0
0.95	5000	0.46084	0.11218	0.42698	0.09036	0.18	0.11516	-0.64	570	0.1
0.95	10000	0.45723	0.11357	0.42920	0.09016	-0.05	0.11577	-0.12	1345	0.2
0.95	20000	0.45489	0.11447	0.43064	0.09023	0.03	0.11577	-0.12	1851	0.7
0.99	1000	0.52255	0.08846	0.38899	0.12490	-5.47	0.14048	-8.17	998	0.0
0.99	3000	0.43030	0.12392	0.44578	0.12801	-3.12	0.15085	-1.39	419	0.0
0.99	5000	0.45462	0.11457	0.43081	0.13073	-1.06	0.14999	-1.95	676	0.1
0.99	10000	0.39156	0.13881	0.46963	0.13288	0.57	0.15208	-0.59	1065	0.2
0.99	20000	0.46065	0.11225	0.42710	0.13198	-0.11	0.15211	-0.57	1317	0.5

**Πίνακας 6:** Το χαρτοφυλάκιο, VaR, και C-VaR, από την προσέγγιση της Min C-VaR

Πίνακας 5 - Πίνακας 6 (Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000) Optimization of Conditional Value- at-Risk))

#### 2.1.4. Εφαρμογή για το Hedging

Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα την προσέγγισή μας, παρουσιάζεται το παρακάτω παράδειγμα με το αντισταθμισμένο χαρτοφυλάκιο της NIKKIE.

Αυτό το πρόβλημα των Mauser & Rosen (1999) μας γνωστοποιήθηκε από την ερευνητική ομάδα Algorithmics Inc. Οι Mauser και Rosen (1999) εξέτασαν δύο τρόπους αντιστάθμισης: Παραμετρικές και τεχνικές προσομοίωσης της  $VaR$ . Σε κάθε περίπτωση η βέλτιστη αντιστάθμιση υπολογίζεται από ένα εργαλείο ελαχιστοποίησης όπως για παράδειγμα κρατώντας μία από τις θέσεις του χαρτοφυλακίου σταθερή κάθε φορά και δίνοντας βάρος σε αυτή τη μία θέση, σε ένα συγκεκριμένο εύρος, μέχρι που η  $VaR$  του χαρτοφυλακίου να είναι όσο το δυνατόν χαμηλότερη.

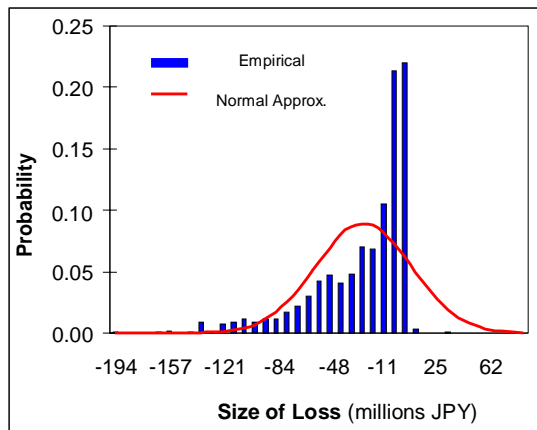
Εδώ φαίνεται για πρώτη φορά πως όταν ακολουθείται η ίδια διαδικασία σύμφωνα με τους όρους της ελαχιστοποίησης της  $C - VaR$ , το ένα εργαλείο αντιστάθμισης που παρατηρήθηκε είναι πολύ κοντά με αυτό που παρατηρήθηκε σύμφωνα με τους όρους ελαχιστοποίησης της  $VaR$ .

Στη συνέχεια δείχνουμε ουσιαστικά πως η ελαχιστοποίηση της  $C - VaR$  έχει το πλεονέκτημα πως είναι πιο πρακτική μέθοδος σε σχέση με τη μέθοδο του ενός εργαλείου που περιγράφηκε παραπάνω.

Μπορεί να υπάρχουν πολλές θέσεις που μπορούν να προσαρμοστούν ταυτόχρονα σε ένα ευρύτερο τρόπο αντιστάθμισης.

Όπως και στην προηγούμενη εφαρμογή για τη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου, οι υπολογισμοί θα μπορούσαν να μειωθούν με γραμμικό μετασχηματισμό ανάλογα με το είδος που περιγράφεται μετά το (2.15) ο οποίος προσθέτει μια επιπλέον μεταβλητή για κάθε σενάριο που εισάγεται. Αυτό θα ήταν πιθανόν να είναι ωφέλιμο για αντισταθμίσεις που συνεπάγονται ταυτόχρονη προσαρμογή των θέσεων σε ένα μεγάλο αριθμό θέσεων (π.χ. > 1000). Αλλά σε αυτό το σημείο αποδεικνύεται ότι για τους αντισταθμιστές που έχουν προσαρμοστεί με σχετικά λίγα εργαλεία, τεχνικές μη βελτιστοποίησης μπορούν να ανταγωνιστούν το γραμμικό μετασχηματισμό. Σε τέτοιες τεχνικές δεν χρειάζεται να προστεθούν επιπλέον μεταβλητές και η διάσταση του προβλήματος παραμένει η ίδια ανεξάρτητα με το πόσα σενάρια καταγράφονται.

Ο **Πίνακας 7** δείχνει ένα χαρτοφυλάκιο που εφαρμόζει ένα πεντάγραμμο περιθώριο στο δείκτη NIKKEI, όπως ήταν την 1<sup>η</sup> Ιουλίου 1997. Εκτός από τις κοινές μετοχές της Komatsu και της Mitsubishi, το χαρτοφυλάκιο περιλαμβάνει πολλά call και put options σε αυτές τις μετοχές. Αυτό το χαρτοφυλάκιο κάνει εκτεταμένη χρήση των επιλογών έτσι ώστε να επιτευχθεί το επιθυμητό προφίλ.



**Σχήμα 1: Η κατανομή των ζημιών για το χαρτοφυλάκιο της ΝΙΚΚΕΙ με την βέλτιστη κανονική προσέγγιση (1000 σεσάρια) που αναπαράγεται από τους Mauser και Rosen (1999) (Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000) Optimization of Conditional Value- at-Risk)).**

Το σχήμα 1 δείχνει την κατανομή των ζημιών μιας ημέρας σε σύνολο 1.000, των σεναρίων Monte Carlo. Αυτό δείχνει ότι η κανονική κατανομή των δεδομένων δεν είναι επαρκής. Επομένως, οι προσεγγίσεις ελαχιστοποίησης της  $C - VaR$  και της ελάχιστης διακύμανσης θα μπορούσαν για την περίπτωση αυτή, να οδηγήσουν σε αρκετά διαφορετικές βέλτιστες λύσεις.

<i>Instrument</i>	<i>Type</i>	<i>Day to Maturity</i>	<i>Strike Price (10<sup>3</sup> JPY)</i>	<i>Position (10<sup>3</sup>)</i>	<i>Value (10<sup>3</sup> JPY)</i>
<i>Mitsubishi EC 6mo 860</i>	<i>Call</i>	<i>184</i>	<i>860</i>	<i>11.5</i>	<i>563,340</i>
<i>Mitsubishi Corp</i>	<i>Equity</i>	<i>n/a</i>	<i>n/a</i>	<i>2.0</i>	<i>1,720,00</i>
<i>Mitsubishi Cjul29 800</i>	<i>Call</i>	<i>7</i>	<i>800</i>	<i>-16.0</i>	<i>-967,280</i>
<i>Mitsubishi Csep30 836</i>	<i>Call</i>	<i>70</i>	<i>836</i>	<i>8.0</i>	<i>382,070</i>
<i>Mitsubishi Psep30 800</i>	<i>Put</i>	<i>70</i>	<i>800</i>	<i>40.0</i>	<i>2,418,012</i>
<i>Komatsu Ltd</i>	<i>Equity</i>	<i>n/a</i>	<i>n/a</i>	<i>2.5</i>	<i>2,100,000</i>
<i>Komatsu Cjul29 900</i>	<i>Call</i>	<i>7</i>	<i>900</i>	<i>-28.0</i>	<i>-11,593</i>
<i>Komatsu Cjun2 670</i>	<i>Call</i>	<i>316</i>	<i>670</i>	<i>22.5</i>	<i>5,150,461</i>
<i>Komatsu Cjun2 760</i>	<i>Call</i>	<i>316</i>	<i>760</i>	<i>7.5</i>	<i>1,020,110</i>
<i>Komatsu Paug31 760</i>	<i>Put</i>	<i>40</i>	<i>760</i>	<i>-10.0</i>	<i>-68,919</i>
<i>Komatsu Paug31 830</i>	<i>Put</i>	<i>40</i>	<i>830</i>	<i>10.0</i>	<i>187,167</i>

**Πίνακας 7:( Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000) Optimization of Conditional Value- at-Risk))**

Για τους 11 παραπάνω χρηματοοικονομικούς τίτλους έστω ότι το  $x$  είναι ο παράγοντας των θέσεων του χαρτοφυλακίου που προσδιορίζεται από τον παράγοντα των αρχικών θέσεων στον **Πίνακα 7** (5<sup>η</sup> στήλη), σε αντίθεση με το  $z$ .

Αυτοί οι παράγοντες ανήκουν στον  $\mathbb{R}^{11}$ .

Στην αντιστάθμιση, μας απασχολούσε η διαφορά ορισμένων από τις θέσεις του  $x$  που ήταν μακριά από αυτές του  $z$ , αλλά θέλαμε να δοκιμάσουμε διαφορετικούς συνδυασμούς. Αυτό μπορεί να γίνει μέσω της επιλογής ενός δείκτη  $J$  μέσα στο σύνολο  $\{1,2, \dots, 11\}$  για να δούμε τα μέσα που είναι προσαρμόσιμα.

Στην περίπτωση αντιστάθμισης ενός μέσου για παράδειγμα, πήραμε τον  $J$  για να ορίσουμε ένα ενιαίο μέσο αλλά συνεχίσαμε διαδοχικά τις διάφορες επιλογές του μέσου.

Έχοντας επιλέξει ένα συγκεκριμένο  $J$ , για την περίπτωση που το  $J$  περιέχει περισσότερους από έναν δείκτες, στις συντεταγμένες  $x_j$  του  $x$ , τους παρακάτω περιορισμούς:

$$-|z_j| \leq x_j \leq |z_j| \quad \text{με } j \in J \quad (2.27)$$

αλλά από την άλλη πλευρά,

$$x_j = z_j \quad j \notin J \quad (2.28)$$

Έτσι παίρνουμε ότι το

$$X = \{\text{σύνολο του } x \text{ που ικανοποιεί τις συνθήκες (2.27) και (2.28)}\} \quad (2.29)$$

Οι περιορισμοί αυτοί (2.28) θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν για την εξάλειψη των μεταβλητών  $x_j$  για  $j \notin J$  από το πρόβλημα, το οποίο κάναμε στην πράξη, αλλά αυτή η διατύπωση απλοποιεί τη σημείωση και διευκολύνει τις συγκρίσεις μεταξύ των διαφορετικών επιλογών του  $J$ . Οι απόλυτες τιμές εμφανίζονται στο (2.27) επειδή είναι σύντομες. Τα μέσα αντιπροσωπεύονται από αρνητικούς αριθμούς.

Έστω  $m$  το διάνυσμα των αρχικών τιμών (ανά μονάδα) των εν λόγω μέσων και έστω  $y$  το τυχαίο διάνυσμα των τιμών μία ημέρα αργότερα. Η απώλεια που πρέπει να αντιμετωπιστεί στο πλαίσιο αυτό είναι η αρχική αξία ολόκληρου του χαρτοφυλακίου μείον την αξία αυτού μία ημέρα αργότερα, δηλαδή

$$f(x, y) = x^T m - x^T y = x^T (m - y) \quad (2.30)$$

Η αντίστοιχη συνάρτηση της προσέγγισης ελαχιστοποίησης του CVaR είναι

$$F_\beta(\mathbf{x}, a) = a + (1 - \beta)^{-1} \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{11}} [\mathbf{x}^T(\mathbf{m} - \mathbf{y}) - a]^+ p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (2.31)$$

Για να λυθεί το πρόβλημα, σύμφωνα με το θεώρημα 2.2 πρέπει να ελαχιστοποιηθεί η  $F_\beta(\mathbf{x}, a)$  πάνω στο  $X \times \mathbb{R}$

Αυτή είναι η ελαχιστοποίηση μιας κυρτής συνάρτησης πάνω σε ένα κυρτό σύνολο.

Για να προσεγγίσουμε το ολοκλήρωμα παράγουμε ένα δείγμα από σημεία  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_q$  και αντικαθιστούμε την  $F_\beta(\mathbf{x}, a)$  με την ακόλουθη συνάρτηση

$$\widetilde{F}_\beta(\mathbf{x}, a) = a + \frac{1}{q(1-\beta)} \sum_{k=1}^q [\mathbf{x}^T(\mathbf{m} - \mathbf{y}_k) - a]^+, \quad (2.32)$$

Μια έκφραση που είναι πάλι κυρτή στο  $\mathbf{x}$  αλλά και γραμμική σε κάποια κομμάτια.

Για την ελαχιστοποίηση λοιπόν του  $\widetilde{F}_\beta(\mathbf{x}, a)$  στο  $X \times \mathbb{R}$  θα μπορούσαμε να εργαστούμε με γραμμικό μετασχηματισμό αλλά αντί αυτού ενεργήσαμε σύμφωνα με τη μη βελτιστοποίηση. Το τελευταίο, σε συνδυασμό με το σύνολο που σχετίζεται με το  $\widetilde{F}_\beta$  στο  $(\mathbf{x}, a)$ , που υπάρχει για όλα τα διανύσματα στον  $\mathbb{R}^{11} \times \mathbb{R}$ , στη σχέση

$$\left( \mathbf{0}, 1 + \frac{1}{q(1-\beta)} \sum_{k=1}^q \lambda_k (\mathbf{m} - \mathbf{y}_k, -1) \right) \quad (2.33)$$

$$\text{με } \begin{cases} \lambda_k = 1 & \text{αν } \mathbf{x}^T(\mathbf{m} - \mathbf{y}_k) - a > 0 \\ \lambda_k \in [0, 1] & \text{αν } \mathbf{x}^T(\mathbf{m} - \mathbf{y}_k) - a = 0 \\ \lambda_k = 0 & \text{αν } \mathbf{x}^T(\mathbf{m} - \mathbf{y}_k) - a < 0 \end{cases} \quad (2.34)$$

Έγινε χρήση του Variable Metric Algorithm όπου αναπτύχθηκε για προβλήματα μη βελτιστοποίησης στο Uryasev το 1991, λαμβάνοντας  $\beta = 0,95$ , η οποία έκανε τις αρχικές τιμές  $\beta - VaR$  και  $\beta - CVaR$  του χαρτοφυλακίου να είναι 657,816 και 2,022,060

Τα αποτελέσματα από τα παραδείγματα αντιστάθμισης που ακολουθήθηκαν στη προσέγγισή μας για την ελαχιστοποίηση του  $\beta - CVaR$  με  $j = \{2\}$  κλπ παρουσιάζονται στον **Πίνακα 8**. Τα βέλτιστα φράγματα που πήραμε είναι κοντά με

αυτά που πήραμε από τους Mauser και το Rosen (1999) ελαχιστοποιώντας το  $\beta - VaR$ . Επειδή το  $J$  αποτελείται από ένα δείκτη, το  $x$  ήταν μονοδιάστατο στις δοκιμές που έγιναν, επομένως η ελαχιστοποίηση σε σχέση με το  $x$  ήταν δισδιάστατη. Ο αλγόριθμος χρειάζεται λιγότερες από 100 επαναλήψεις για να βρει 6 σωστά ψηφία στη συνάρτηση απόδοσης και τις μεταβλητές<sup>1</sup>. Αφού ολοκληρώθηκαν οι δοκιμές του ενός μέσου, έγινε προσπάθεια αντιστάθμισης των τελευταίων 4 από τα 11 μέσα, ταυτόχρονα. Η βέλτιστη αντιστάθμιση που καθορίστηκε με αυτό τον τρόπο, φαίνεται στον **Πίνακα 9**. Η βελτιστοποίηση δεν άλλαξε τις θέσεις των *Komatsu Cjun2 670* και *Komatsu Paug31 760*, αλλά άλλαξαν οι θέσεις των *Komatsu Cjun2 760* και *Komatsu Paug31 830* όχι μόνο σε μέγεθος, αλλά και στο σημείο.

Συγκρίνοντας την αντιστάθμιση του ενός μέσου με την αντιστάθμιση των πολλαπλών μέσων, παρατηρούμε πως η αντιστάθμιση των πολλαπλών μέσων βελτίωσε σημαντικά την  $VaR$  και την  $C - VaR$ . Σε αυτή την περίπτωση, το τελικό  $\beta - VaR$  είναι ίσο με -1.400.000 και το τελικό  $\beta - CVaR$  είναι ίσο με 37.334,6, το οποίο είναι χαμηλότερο από τη βέλτιστη μονοδιάστατη αντιστάθμιση με  $\beta - VaR = -1.200.000$  και  $\beta - CVaR = 363.556$  (πίνακας 8, 9η σειρά). Έξι σωστά ψηφία στη συνάρτηση απόδοσης και στις θέσεις που ελήφθησαν μετά από 400-800 επαναλήψεις, της μεταβλητής μετρικού αλγορίθμου Uryasev (1991), ανάλογα με τις παραμέτρους.

Σε αντίθεση με την εφαρμογή στην προηγούμενη ενότητα, όπου έγινε χρήση από τεχνικές γραμμικού μετασχηματισμού, η διάσταση του προβλήματος μη βελτιστοποίησης δεν αλλάζει με την αύξηση του αριθμού των σεναρίων. Αυτό μπορεί να δώσει κάποια υπολογιστικά πλεονεκτήματα για προβλήματα με ένα πολύ μεγάλο αριθμό σεναρίων. Αυτό το παράδειγμα δείχνει καθαρά, την ανωτερότητα της  $C - VaR$  έναντι της  $VaR$  σχετικά με την καταγραφή του κινδύνου.

Εμφανίζονται χαρτοφυλάκια που έχουν θετικό  $\beta - CVaR$  αλλά αρνητικό  $\beta - VaR$  για το ίδιο επίπεδο  $\beta = 0,95$ . Το χαρτοφυλάκιο που αντιστοιχεί στην πρώτη γραμμή του Πίνακα 8, για παράδειγμα, έχει  $\beta - VaR = -205,927$  αλλά το  $\beta - CVaR = 1,183,040$ . Μια αρνητική απώλεια είναι κέρδος βέβαια. Το χαρτοφυλάκιο θα προκύψει με πιθανότητα 0,95 με κέρδος 205,927 ή περισσότερο. Ο αριθμός αυτός δεν αποκαλύπτει, πόσο σοβαρό είναι το αποτέλεσμα. Το σχήμα της  $C - VaR$  λέει στην πραγματικότητα ότι στις περιπτώσεις όπου το κέρδος είναι τουλάχιστον 205.927, υπάρχει κατά μέσο όρο, μια ζημία των 1.183.040.

<sup>1</sup> Για τις δοκιμές έγινε χρήση του MATHEMATICA του μεταβλητού κώδικα μέτρησης, σε μια μηχανή Pentium II, 450MHz. Οι εκδόσεις FORTRAN και MATHEMATICA του κώδικα είναι διαθέσιμες στην εξής διεύθυνση: (<http://www.ise.ufl.edu/uryasev>).

<i>Instrument</i>	<i>Best Hedge</i>	<i>VaR</i>	<i>CVaR</i>
<i>Mitsubishi EC 6mo 860</i>	7,337.53	-205,927	1,183,040
<i>Mitsubishi Corp</i>	-926.073	-1,180,000	551,892
<i>Mitsubishi Cjul29 800</i>	-18,978.6	-1,170,000	553,696
<i>Mitsubishi Csep30 836</i>	4381.22	-1,150,000	549,022
<i>Mitsubishi Psep30 800</i>	43,637.1	-1,150,000	542,168
<i>Komatsu Ltd</i>	-196.167	-1,180,000	551,892
<i>Komatsu Cjul29 900</i>	-124,939	-1,200,000	593,078
<i>Komatsu Cjun2 670</i>	19,964.9	-1,220,000	385,698
<i>Komatsu Cjun2 760</i>	4,745.20	-1,200,000	363,556
<i>Komatsu Paug31 760</i>	3,1426.3	-1,120,000	538,662
<i>Komatsu Paug31 830</i>	19,356.3	-1,150,000	536,500

**Πίνακας 8:** Καλύτερη Αντιστάθμιση, Αντίστοιχη VaR and CVaR με Προσέγγιση Ελάχιστης CVaR.: Ένα Εργαλείο Αντιστάθμισης (= 0:95) (Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000) Optimization of Conditional Value- at-Risk))

<i>Instrument</i>	<i>Position Portfolio</i>	<i>in Best Hedge</i>
<i>Komatsu Cjun2 670</i>	22,500	22,500
<i>Komatsu Cjun2 760</i>	7,500	-527
<i>Komatsu Paug31 760</i>	-10,000	-10,000
<i>Komatsu Paug31 830</i>	10,000	-10,000

**Πίνακας 9:** Αρχικές Θέσεις και Καλύτερη Αντιστάθμιση με Προσέγγιση Ελάχιστης CVaR: Simultaneous Βελτιστοποίηση ως προς 4 Εργαλεία Αντιστάθμισης (= 0:95; VaR της καλύτερης αντιστάθμισης ίση με -1,400,000, όπου η CVaR είναι ίση με 37334.6. (Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000) Optimization of Conditional Value- at-Risk))



### 2.1.5. Συμπεράσματα

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάσαμε μια νέα προσέγγιση για τον ταυτόχρονο υπολογισμό της  $VaR$  και τη βελτιστοποίηση της  $C - VaR$  για μια ευρεία κατηγορία προβλημάτων. Έχουμε δείξει ότι η  $C - VaR$  μπορεί να ελαχιστοποιηθεί σημαντικά χρησιμοποιώντας τεχνικές Γραμμικού Προγραμματισμού και Βελτιστοποίησης. Αν και τυπικά, η μέθοδος ελαχιστοποιεί μόνο την  $C - VaR$ , τα αριθμητικά πειράματά μας δείχνουν ότι μειώνει επίσης την  $VaR$  επειδή η  $C - VaR \geq VaR$ . Δείξαμε με δύο παραδείγματα ότι η προσέγγιση παρέχει έγκυρα αποτελέσματα. Αυτά τα παραδείγματα έχουν σχετικά μικρές διαστάσεις και αναφέρονται εδώ για επεξηγηματικούς σκοπούς.

Υπάρχει περιθώριο για μεγάλη βελτίωση και ανταπόκριση της προτεινόμενης προσέγγισης. Για παράδειγμα, η υπόθεση ότι υπάρχει μια κοινή πυκνότητα επιστροφής μέσω μπορεί να απλουστευθεί. Επιπλέον, μπορούμε να επεκταθούμε σε προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς της *Conditional Value at Risk*, όπως θα κάνουμε στη συνέχεια της εργασίας μας.

## 3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο

### Βελτιστοποίηση του Χαρτοφυλακίου κάτω από Περιορισμούς της CVaR

Σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιήσουμε πάλι το συμπλήρωμα της Value at Risk, την Conditional Value at Risk. Αυτό το μέτρο κινδύνου που συνδέεται στενά με την VaR.

#### 3.1. Ανάπτυξη της Προσέγγισης Βελτιστοποίησης της CVaR

Θα επεκτείνουμε την προσέγγιση ελαχιστοποίησης C-VaR (Rockafellar and Uryasev, (2000)) σε άλλες κατηγορίες προβλημάτων με συναρτήσεις C-VaR. Δείχνουμε ότι αυτή η προσέγγιση μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τη μεγιστοποίηση των συναρτήσεων απόδοσης (π.χ. αναμενόμενες αποδόσεις) κάτω από τους περιορισμούς C-VaR, σε αντίθεση με την ελαχιστοποίηση της C-VaR. Επιπλέον, είναι δυνατό να τεθούν πολλοί περιορισμοί για την C-VaR, με διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης και να διαμορφωθεί η κατανομή των ζημιών σύμφωνα με τις προτιμήσεις του υπεύθυνου για τη λήψη αποφάσεων. Αυτές οι προτιμήσεις καθορίζονται απευθείας σε εκατοστημοριακούς όρους, σε σύγκριση με την παραδοσιακή προσέγγιση, που καθορίζει τις προτιμήσεις κινδύνου όσον αφορά τις λειτουργίες χρησιμότητας. Για παράδειγμα, ενδέχεται να απαιτήσουμε ότι οι μέσες τιμές των χειρότερων ζημιών 1%, 5% και 10% περιορίζονται από ορισμένες τιμές. Η προσέγγιση αυτή παρέχει ένα νέο αποτελεσματικό και ευέλικτο εργαλείο διαχείρισης κινδύνων. Παρακάτω διαμορφώνουμε ένα γενικό θεώρημα για διάφορες ισοδύναμες αναπαραστάσεις αποτελεσματικών συνόρων με κοίλες αποδόσεις και κυρτές συναρτήσεις κινδύνου. Αυτή η ισοδυναμία είναι γνωστή για τη μέση διακύμανση, βλ. Π.χ. Steinbach (1999), για τη μέση παλινδρόμηση (mean regret), (Dembo και Rosen, (1999)), και για συναρτήσεις απόδοσης. Έχουμε δείξει ότι ισχύει για οποιαδήποτε κοίλη και κυρτή συνάρτηση κινδύνου, ιδιαίτερα για τη λειτουργία κινδύνου C-VaR που εξετάζουμε. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας βοηθητικές μεταβλητές, διαμορφώσαμε ένα θεώρημα για τη μείωση του προβλήματος με τους περιορισμούς C-VaR σε πολύ απλούστερο κυρτό πρόβλημα. Παρόμοιο αποτέλεσμα είναι επίσης διατυπωμένο για την περίπτωση που τόσο η ανταμοιβή όσο και η C-VaR συμπεριλαμβάνονται στη συνάρτηση απόδοσης. Όπως προσδιορίστηκε

προηγουμένως στο Rockafellar and Uryasev,(2000), η βελτιστοποίηση ορίζει αυτόματα τη βοηθητική μεταβλητή σε  $VaR$ , η οποία απλοποιεί σημαντικά τη λύση του προβλήματος. Όταν η κατανομή δίνεται από σταθερό αριθμό σεναρίων και η συνάρτηση απώλειας είναι γραμμική, δείξαμε πώς η συνάρτηση της C-VaR μπορεί να αντικατασταθεί από μια γραμμική συνάρτηση και ένα πρόσθετο σύνολο γραμμικών περιορισμών. Ακολουθώντας, αναπτύσσουμε ένα μοντέλο μίας περιόδου για τη βελτιστοποίηση ενός χαρτοφυλακίου αποθεμάτων χρησιμοποιώντας την δημιουργία σεναρίων. Μια μελέτη για τη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου μετοχών S&P 100 με περιορισμούς C-VaR παρουσιάζεται στο τελευταίο μέρος. Συγκρίναμε την αποτελεσματικότητα της C-VaR και την απόδοση-διακύμανση των χαρτοφυλακίων.

### 3.1.1. Αποτελεσματικότητα: Διαφορετικές Τοποθετήσεις

Στο προηγούμενο κεφάλαιο έγινε ελαχιστοποίηση της C-VaR, με την προϋπόθεση της χρήσης μιας ελάχιστης αναμενόμενης απόδοσης. Εάν λάβουμε υπόψη μας όμως διαφορετικές αναμενόμενες αποδόσεις, μπορούμε να δημιουργήσουμε ένα αποτελεσματικό φράγμα. Εναλλακτικά, μπορούμε επίσης να μεγιστοποιήσουμε τις αποδόσεις, χωρίς να επιτρέπουμε μεγάλους κινδύνους. Επομένως, μπορούμε να ανταλλάξουμε τη συνάρτηση C-VaR και την αναμενόμενη απόδοση στην τυποποίηση προβλημάτων (σε σύγκριση με Rockafellar and Uryasev, (2000)), ελαχιστοποιώντας έτσι την αρνητική αναμενόμενη απόδοση με έναν περιορισμό της C-VaR μπορούμε να δημιουργήσουμε τα αποτελεσματικά φράγματα.

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν τρεις ισοδύναμες σχέσεις για το πρόβλημα της βελτιστοποίησης. Είναι ισοδύναμες με την έννοια ότι παράγουν τα ίδια αποτελεσματικά σύνορα. Το ακόλουθο θεώρημα ισχύει για γενικές συναρτήσεις που πληρούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος.

#### Θεώρημα 3.1

*Ας θεωρήσουμε ότι οι συναρτήσεις  $\varphi(x)$  και  $R(x)$  εξαρτώνται από το δυάνυσμα απόφασης  $x$  και από τα παρακάτω τρία προβλήματα.*

$$\text{Πρόβλημα 1}^\circ \quad \min_x \varphi(x) - \mu_1 R(x), \quad x \in X, \quad \mu_1 \geq 0 \quad (3.1)$$

$$\text{Πρόβλημα 2}^\circ \quad \min_x \varphi(x), \quad R(x) \geq \rho, \quad x \in X \quad (3.2)$$

$$\text{Πρόβλημα 3}^\circ \quad \min_x -R(x), \varphi(x) \leq \omega, \quad x \in X \quad (3.3)$$

Υποθέτουμε ότι οι περιορισμοί  $R(x) \geq \rho, \varphi(x) \leq \omega$  έχουν εσωτερικά σημεία. Αλλάζοντας τις παραμέτρους  $\mu_1, \rho$ , και  $\omega$ , εντοπίζονται τα αποτελεσματικά σύνορα για τα προβλήματα 1 - 3. Αν το  $\varphi(x)$  είναι κυρτό, το  $R(x)$  είναι κοίλο και το σύνολο  $X$  είναι κυρτό, τότε τα τρία προβλήματα 1 - 3 παράγουν το ίδιο αποτελεσματικό φράγμα.

Η απόδειξη του θεωρήματος 3.1 είναι στο **Παράρτημα**.

Η ισοδυναμία μεταξύ των προβλημάτων (1 - 3) είναι γνωστή για την αποτελεσματικότητα μέσης διακύμανσης (Steinbach, (1999)) και μέσης παλινδρόμησης (mean regret) (Dembo and Rosen, (1999)). Έχουμε δείξει ότι ισχύει για κάθε κοίλη απόδοση και κυρτές συναρτήσεις κινδύνου με κυρτούς περιορισμούς. Ακόμη, θεωρούμε ότι η συνάρτηση απώλειας  $f(x, y)$  είναι γραμμική ως προς  $x$ , επομένως το Θεώρημα 2.2 υποδηλώνει ότι η συνάρτηση κινδύνου  $CVaR \varphi(x)$  είναι κυρτή ως προς  $X$ . Επίσης, υποθέτουμε ότι η συνάρτηση απόδοσης,  $R(x)$  είναι γραμμική και οι περιορισμοί είναι γραμμικοί. Οι συνθήκες του Θεωρήματος 2.3 ικανοποιούνται για τη συνάρτηση κινδύνου  $CVaR \varphi(x)$  και τη συνάρτηση ανταμοιβής  $R(x)$ . Ως εκ τούτου, η μεγιστοποίηση της απόδοσης υπό περιορισμό  $C - VaR$ , δημιουργεί τα ίδια αποτελεσματικά σύνορα με την ελαχιστοποίηση του  $C - VaR$  υπό περιορισμό στην απόδοση.

### 3.1.2. Ισοδύναμες Σχέσεις με Βοηθητικές Μεταβλητές

Το Θεώρημα 2.3 μας δείχνει ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε συνθέσεις προβλημάτων (1, 2 και 3) για τη δημιουργία αποτελεσματικών συνόρων με τη συνάρτηση κινδύνου της  $C - VaR \varphi_\beta(x)$  και τη συνάρτηση απόδοσης  $R(x)$ . Το Θεώρημα 2.2 δείχνει ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί η συνάρτηση  $F_\beta(x, \alpha)$  αντί του  $\varphi_\beta(x)$  για την επίλυση του προβλήματος (2). Επιπλέον, αποδεικνύουμε ότι, παρόμοια, η συνάρτηση  $F_\beta(x, \alpha)$  μπορεί να χρησιμοποιηθεί αντί για  $\varphi_\beta(x)$  στα προβλήματα (1) και (3).

#### **Θεώρημα 3.2**

Τα δύο προβλήματα βελτιστοποίησης δίνονται κάτωθι:

$$\text{Πρόβλημα 4}^\circ \quad \min_{x \in X} -R(x), \varphi_\beta(x) \leq \omega, x \in X \quad (3.4)$$

και

$$\text{Πρόβλημα 4}^\circ' \quad \min_{(\alpha, x) \in X \times R} -R(x), F_\beta(x, \alpha) \leq \omega, x \in X \quad (3.5)$$

είναι ισοδύναμα υπό την έννοια ότι οι στόχοι τους επιτυγχάνουν τις ίδιες ελάχιστες τιμές. Επιπλέον, αν ο περιορισμός  $C - VaR$  στο πρόβλημα (4) είναι ενεργός, ένα ζεύγος  $(x^*, \alpha^*)$  επιτυγχάνει το ελάχιστο του προβλήματος (4') αν και μόνο αν  $x^*$  επιτυγχάνει το ελάχιστο του προβλήματος (4) και  $\alpha^* \in A_\beta(x^*)$ . Συγκεκριμένα, όταν το διάστημα  $A_\beta(x^*)$  μειώνεται σε ένα μόνο σημείο, η ελαχιστοποίηση του  $-R(x)$  στο  $(x, \alpha) \in X \times R$  παράγει ένα ζευγάρι  $(x^*, \alpha^*)$  τέτοιο ώστε το  $x^*$  να μεγιστοποιεί την απόδοση και το  $\alpha^*$  να δίνει το αντίστοιχο  $\beta - VaR$ .

### Θεώρημα 3.3

Τα δύο προβλήματα βελτιστοποίησης δίνονται κάτωθι:

$$\text{Πρόβλημα 5}^\circ \quad \min_{x \in X} \varphi_\beta(x) - \mu_1 R(x), \mu_1 \geq 0, x \in X \quad (3.6)$$

$$\text{Πρόβλημα 5}^\circ' \quad \min_{(x, \alpha) \in X \times R} F_\beta(x, \alpha) - \mu_1 R(x), \mu_1 \geq 0, x \in X \quad (3.7)$$

είναι ισοδύναμα υπό την έννοια ότι οι στόχοι τους επιτυγχάνουν τις ίδιες ελάχιστες τιμές. Επιπλέον, ένα ζεύγος  $(x^*, \alpha^*)$  επιτυγχάνει το ελάχιστο του προβλήματος (5') αν και μόνο αν  $x^*$  επιτυγχάνει το ελάχιστο του προβλήματος (5) και  $\alpha^* \in A_\beta(x^*)$ . Συγκεκριμένα, όταν το διάστημα  $A_\beta(x^*)$  μειώνεται σε ένα μόνο σημείο, η ελαχιστοποίηση του  $F_\beta(x, \alpha) - \mu_1 R(x)$  πάνω από  $(x, \alpha) \in X \times R$  παράγει ένα ζεύγος  $(x^*, \alpha^*)$  έτσι ώστε το  $x^*$  να ελαχιστοποιεί το  $\varphi_\beta(x) - \mu_1 R(x)$  και το  $\alpha^*$  να δίνει το αντίστοιχο  $\beta - VaR$ .

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2 και 3.3 είναι στο **Παράρτημα**

### 3.1.3 Διακριτοποίηση

Οι ισοδύναμες συνθέσεις προβλημάτων που παρουσιάζονται στα Θεωρήματα 2.2, 3.2 και 3.3 μπορούν να συνδυαστούν με ιδέες για την προσέγγιση του ολοκλήρου στο  $F_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$ , βλ. (2.4). Αυτό φυσικά μας προσφέρει αρκετές δυνατότητες. Το ολοκλήρωμα στο  $F_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$  μπορεί να προσεγγιστεί με διάφορους τρόπους. Για παράδειγμα, αυτό μπορεί να γίνει με δειγματοληψία της κατανομής πιθανότητας του  $\mathbf{y}$  σύμφωνα με την πυκνότητα του  $p(\mathbf{y})$ . Αν η δειγματοληψία δημιουργεί μια συλλογή από  $y_1, y_2, \dots, y_J$ , τότε η αντίστοιχη προσέγγιση στο  $F_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$  είναι:

$$F_\beta(\mathbf{x}, \alpha) = \alpha + (1 - \beta)^{-1} \int_{\mathbf{y} \in R^n} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha]^+ p(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \quad (3.8)$$

Είναι 
$$\check{F}_\beta(\mathbf{x}, \alpha) = \alpha + (1 - \beta)^{-1} \sum_{j=1}^J \pi_j [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) - \alpha]^+, \quad (3.9)$$

Όπου  $\pi_j$  είναι οι πιθανότητες των σεναρίων  $\mathbf{y}_j$ . Αν η συνάρτηση απώλειας  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  είναι γραμμική ως προς  $\mathbf{x}$  τότε η συνάρτηση  $\check{F}_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$  είναι κυρτή και ανά τμήμα γραμμική.

### 3.1.4 Γραμμικοποίηση

Η συνάρτηση  $F_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$  στα προβλήματα βελτιστοποίησης των θεωρημάτων 2.2, 3.2 και 3.3 μπορεί να προσεγγιστεί από τη συνάρτηση

$$\check{F}_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$$

Ακόμη, χρησιμοποιώντας τυχαίες μεταβλητές  $z_j, j = 1, \dots, J$ , η συνάρτηση  $\check{F}_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$  μπορεί να αντικατασταθεί με τη γραμμική συνάρτηση:

$$\alpha + (1 - \beta)^{-1} \sum_{j=1}^J \pi_j z_j$$

και το σύνολο των γραμμικών περιορισμών

$$z_j \geq f(\mathbf{x}, \mathbf{y}_j) - \alpha, \quad z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, J, \quad \zeta \in R$$

Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα 3.2 μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον περιορισμό  $\varphi_\beta(\mathbf{x}) \leq \omega$

στην βελτιστοποίηση του προβλήματος 4 με τον περιορισμό  $F_\beta(\mathbf{x}, \alpha) \leq \omega$ .

Επιπλέον, ο παραπάνω περιορισμός, μπορεί να προσεγγιστεί από το  $\check{F}_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$

Και μειώνεται στο ακόλουθο σύστημα γραμμικών περιορισμών,

$$\alpha + (1 - \beta)^{-1} \sum_{j=1}^J \pi_j z_j \leq \omega \quad z_j \geq f(x, y_j) - \alpha, \quad z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, J, \quad \zeta \in R$$

Ομοίως, οι προσεγγίσεις με γραμμικούς συνδυασμούς μπορούν να γίνουν στα προβλήματα βελτιστοποίησης των Θεωρημάτων 2.2 και 3.3.

### 3.2. Μοντέλο Βελτιστοποίησης Χαρτοφυλακίου μιας Περιόδου με Κόστη Συναλλαγών

Ας εξετάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο  $n, (i = 1, \dots, n)$  διαφορετικών χρηματοπιστωτικών μέσων στην αγορά, μεταξύ των οποίων υπάρχει ένα μέσο άνευ κινδύνου (μετρητά ή τραπεζικός λογαριασμός κλπ).

Έστω  $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)^T$  είναι οι θέσεις, δηλαδή, ο αριθμός των μετοχών, κάθε μέσου στο αρχικό χαρτοφυλάκιο, και έστω  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  να είναι οι θέσεις στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο που σκοπεύουμε να βρούμε χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο. Οι αρχικές τιμές για τα μέσα δίνονται με  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)^T$ . Επομένως, το εσωτερικό προϊόν  $\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0$  είναι η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου. Οι τιμές που εξαρτώνται από το σενάριο για κάθε μέσο στο τέλος της περιόδου δίδονται από το  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ . Η συνάρτηση απώλειας κατά τη διάρκεια της περιόδου είναι:

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}; \mathbf{x}^0, \mathbf{q}) = -\mathbf{y}^T \mathbf{x} + \mathbf{q}^T \mathbf{x}^0 \quad (3.10)$$

Η συνάρτηση απόδοσης  $R(\mathbf{x})$  είναι η αναμενόμενη αξία του χαρτοφυλακίου στο τέλος της περιόδου:

$$R(\mathbf{x}) = E(\mathbf{y}^T \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n E[y_i] x_i \quad (3.11)$$

Η συνάρτηση απόδοσης  $R(\mathbf{x})$  και η συνάρτηση απώλειας  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  σχετίζονται όπως φαίνεται παρακάτω:

$$R(\mathbf{x}) = E[f(\mathbf{x}, \mathbf{y})] + \mathbf{q}^T \mathbf{x}^0 \quad (3.12)$$

Η συνάρτηση απόδοσης  $R(\mathbf{x})$  είναι γραμμική και ως εκ τούτου και κοίλη στο  $\mathbf{x}$ .

### 3.2.1. Ο Περιορισμός $C - VaR$

Οι ισχύοντες κανονισμοί επιβάλλουν κεφαλαιακές απαιτήσεις στις εταιρείες επενδύσεων, αναλογικές με την  $VaR$  ενός χαρτοφυλακίου. Αυτές οι απαιτήσεις μπορούν να εφαρμοστούν περιορίζοντας την  $C - VaR$  του χαρτοφυλακίου σε διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης, δεδομένου ότι η  $C - VaR \geq VaR$ . Το ανώτερο όριο στην  $C - VaR$  μπορεί να επιλεγεί ως μέγιστο  $VaR$ .

Σύμφωνα με αυτό λοιπόν, παρουσιάζεται ο περιορισμός κινδύνου με την παρακάτω μορφή

$$\varphi_\beta(x) \leq \omega \mathbf{q}^T \mathbf{x}^0 \quad (3.13)$$

όπου, η συνάρτηση κινδύνου  $\varphi_\beta(x)$  ορίζεται ως η  $\beta - CVaR$  για τη συνάρτηση απώλειας που δίνεται από την (3.10), και  $\omega$  είναι ένα ποσοστό της αρχικής αξίας του χαρτοφυλακίου  $\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0$ , ανοιχτό στην έκθεση σε κίνδυνο. Η συνάρτηση απώλειας που δίνεται από την (3.10) είναι γραμμική και συνεπώς κυρτή στο  $\mathbf{x}$

Επομένως, η  $\beta - CVaR$  συνάρτηση  $\varphi_\beta(x)$  είναι επίσης κυρτή στο  $\mathbf{x}$ . Το σύνολο των γραμμικών περιορισμών που αντιστοιχεί στην (3.13), είναι:

$$\alpha + (1 - \beta)^{-1} \sum_{i=1}^J \pi_j z_j \leq \omega \sum_{i=1}^n q_i x_i^0 \quad (3.14)$$

$$z_j \geq \sum_{i=1}^n (-y_{ij} x_i + q_i x_i^0) - \alpha, \quad z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, J \quad (3.15)$$

### 3.2.2. Κόστη Συναλλαγών

Υποθέτουμε ένα γραμμικό κόστος συναλλαγής, ανάλογο με τη συνολική αξία του νομίσματος που αγοράσαμε ή πωλήσαμε.

Για την αντιμετώπιση των μη κυρτών εξόδων συναλλαγής (βλ. Κορρο και Wijayanayake (1999)). Με κάθε μέσο, συνδέουμε ένα κόστος συναλλαγής  $c_i$ . Όταν αγοράζεται ή πωλείται ένα μέσο  $i$ , κάποιος πληρώνει  $c_i$  φορές το ποσό της συναλλαγής. Για μετρητά ορίσαμε  $c_{cash} = 0$ . Δηλαδή, κάποιος πληρώνει μόνο για την αγορά και πώληση του μέσου, και όχι για τη μεταφορά των μετρητών μέσα και έξω από το λογαριασμό. Σύμφωνα με αυτό, θεωρούμε έναν περιορισμό ισορροπίας που διατηρεί τη συνολική αξία του χαρτοφυλακίου, συμπεριλαμβανομένων των εξόδων συναλλαγής

$$\sum_{i=1}^n q_i x_i^0 = \sum_{i=1}^n c_i q_i |x_i^0 - x_i| + \sum_{i=1}^n q_i x_i \quad (3.16)$$



Αυτή η ισότητα όμως μπορεί να αναδιατυπωθεί χρησιμοποιώντας το ακόλουθο σύνολο γραμμικών περιορισμών

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n q_i x_i^0 &= \sum_{i=1}^n c_i q_i (u_i^+ + u_i^-) + \sum_{i=1}^n q_i x_i, & (3.17) \\ x_i - x_i^0 &= u_i^+ - u_i^-, \quad i = 1, \dots, n \\ u_i^+ &\geq 0, \quad u_i^- \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{aligned}$$

### 3.2.3. Περιορισμός στην Τιμή

Δεν επιτρέπουμε ένα μέσο  $i$  να συνιστά περισσότερο από ένα δεδομένο ποσοστό,  $v_i$ , της συνολικής αξίας του χαρτοφυλακίου

$$q_i x_i \leq v_i \sum_{k=1}^n x_k q_k \quad (3.18)$$

Αυτός ο περιορισμός έχει νόημα μόνο όταν δεν επιτρέπονται βραχείες θέσεις

### 3.2.4. Αλλαγές στις Ατομικές Θέσεις (Περιορισμοί Μεταβλητότητας και Ρευστότητας)

Θεωρούμε ότι οι αλλαγές των θέσεων μπορούν να οριοθετηθούν.

Αυτό το όριο μπορεί να είναι, για παράδειγμα, σταθερός αριθμός ή να είναι ανάλογο με την αρχική θέση του μέσου

$$0 \leq u_i^- \leq \underline{u}_i^-, \quad 0 \leq u_i^+ \leq \bar{u}_i^+, \quad i = 1, \dots, n$$

Αυτοί οι περιορισμοί μπορεί να αντανakλούν την περιορισμένη ρευστότητα των μέσων στο χαρτοφυλάκιο καθώς οι μεγάλες συναλλαγές μπορεί να επηρεάσουν σημαντικά την τιμή  $q_i$ .

Πιστεύουμε επίσης ότι οι ίδιες οι θέσεις μπορούν να περιοριστούν ως εξής:

$$\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.19)$$

### 3.3. Το Πρόβλημα Βελτιστοποίησης

Παρακάτω παρουσιάζεται η σχέση του προβλήματος η οποία βελτιστοποιεί τη συνάρτηση απόδοσης σύμφωνα με του περιορισμούς που έχουν περιγραφεί παραπάνω (3.2.1. – 3.2.3)

$$\min_{x, \zeta} \sum_{i=1}^n -E[y_i]x_i \quad (3.20)$$

Τέτοιο ώστε

$$\alpha + (1 - \beta)^{-1} \sum_{i=1}^J \pi_j z_j \leq \omega \sum_{k=1}^n q_k x_k^0 \quad (3.21)$$

$$z_j \geq \sum_{i=1}^n (-y_{ij} x_i + q_i x_i^0) - \zeta, \quad z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, J \quad (3.22)$$

$$q_i x_i \leq v_i \sum_{k=1}^n x_k q_k, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.23)$$

$$\sum_{i=1}^n q_i x_i^0 = \sum_{i=1}^n c_i q_i (u_i^+ + u_i^-) + \sum_{i=1}^n q_i x_i, \quad (3.24)$$

$$x_i - x_i^0 = u_i^+ - u_i^-, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.25)$$

$$0 \leq u_i^- \leq \underline{u}_i^-, \quad 0 \leq u_i^+ \leq \bar{u}_i^+, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.26)$$

$$\underline{x}_i \leq x_i \leq \bar{x}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.27)$$

Λύνοντας το παραπάνω πρόβλημα παίρνουμε το βέλτιστο διάνυσμα  $\mathbf{x}^*$ , την αντίστοιχη  $VaR$  η οποία οποιό ισούται με  $\alpha^*$  και τη μέγιστη αναμενόμενη απόδοση που ισούται με  $E[\mathbf{y}]\mathbf{x}^*/(\mathbf{q}^T \mathbf{x}^0)$ .

Η αποτελεσματική απόδοση του συνόρου της  $C - VaR$  επιτυγχάνεται λαμβάνοντας διαφορετικά επίπεδα ανοχής κινδύνου  $\omega$ .

### 3.3.1. Δημιουργία Σεναρίου

Με την προσέγγισή μας, το ολοκλήρωμα στη συνάρτηση  $C - VaR$  προσεγγίζεται από το σταθμισμένο ποσό για όλα τα σενάρια. Αυτή η προσέγγιση μπορεί να χρησιμοποιηθεί με διαφορετικά σχήματα για τη δημιουργία σεναρίων. Για παράδειγμα, μπορεί κανείς να αναλάβει μια κοινή κατανομή για τη διαδικασία επιστροφής τιμών για όλα τα μέσα και να δημιουργήσει σενάρια σε μια προσομοίωση του Monte Carlo. Επίσης, η προσέγγιση επιτρέπει τη χρήση ιστορικών δεδομένων χωρίς την χρήση μιας συγκεκριμένης κατανομής. Στην μελέτη του παραδείγματός μας, χρησιμοποιήσαμε ιστορικές αποδόσεις για μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο για τη δημιουργία σεναρίου, με το μήκος  $\Delta t$  της περιόδου ίσο με την περίοδο βελτιστοποίησης του χαρτοφυλακίου. Για παράδειγμα, όταν ελαχιστοποιούμε την περίοδο μιας ημέρας, λαμβάνουμε την αναλογία των τιμών κλεισίματος δύο διαδοχικών ημερών,  $p^{t_j}$  και  $p^{t_{j+1}}$ .

Ομοίως, για μια περίοδο δύο εβδομάδων, θεωρούμε ιστορικές αποδόσεις  $p^{t_{j+10}} / p^{t_j}$ .

Με ένα τέτοιο τρόπο, αντιπροσωπεύουμε το σενάριο που έχει οριστεί για την τυχαία μεταβλητή  $y_i$ , η οποία είναι το τέλος της τιμής περιόδου του μέσου  $i$ , με το σύνολο των ιστορικών αποδόσεων  $J$  πολλαπλασιασμένο με την τρέχουσα τιμή  $q_i$ ,

$$y_{ij} = \frac{q_i p_i^{t_j}}{p_i^{t_j}}, j = 1, \dots, J$$

Όπου  $t_1, \dots, t_j$  είναι χρόνοι κλεισίματος για τις συνεχείς εργάσιμες ημέρες.

Επιπλέον, στις αριθμητικές προσομοιώσεις, θεωρούμε μια περίοδο δύο εβδομάδων,  $\Delta t = 10$ . Η αναμενόμενη τιμή στο τέλος της περιόδου του μέσου  $i$  είναι

$$E[y_i] = \sum_{j=1}^J \pi_j y_{ij} = J^{-1} \sum_{j=1}^J y_{ij}$$

Όπου υποθέσαμε ότι όλα τα σενάρια  $y_{ij}$  είναι εξίσου πιθανά ( $\pi_j = 1/J$ ).

### 3.3.2. Case Study: Χαρτοφυλάκιο S&P100

Σε αυτό το σημείο θα παρουσιάσουμε ένα παράδειγμα και θα κατασκευάσουμε τα αποτελεσματικά σύνορα ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από μετοχές του δείκτη S&P100. Μεγιστοποιήσαμε την αξία του χαρτοφυλακίου υπό την επιφύλαξη διαφόρων περιορισμών στο  $C - VaR$ . (Ο αλγόριθμος φτιάχτηκε με τη βοήθεια της C++)

Αυτό το παράδειγμα έχει σχεδιαστεί για να παρουσιαστεί και να περιγραφεί η μεθοδολογία και όχι ως πρακτική σύσταση για επενδύσεις. Για τη δημιουργία σεναρίου χρησιμοποιήθηκαν ιστορικά δεδομένα (ιστορικές αποδόσεις 10 ημερών). Ενώ υπάρχει κάποιο σφάλμα εκτίμησης στο μέτρο κινδύνου, αυτό το σφάλμα είναι πολύ μεγαλύτερο για τις αναμενόμενες αποδόσεις. Οι ιστορικές αποδόσεις κατά τη διάρκεια περιόδου 10 ημερών παρέχουν πολύ λίγες πληροφορίες σχετικά με τις πραγματικές αποδόσεις που πραγματοποιήθηκαν εκτός του δείγματος. Δηλαδή, οι ιστορικές αποδόσεις έχουν ελάχιστες "δυνάμεις πρόβλεψης". Αυτά τα θέματα συζητούνται σε πολλές ακαδημαϊκές μελέτες, μεταξύ των οποίων (Jorion 1996, 2000, Michaud, 1989). Ο πρωταρχικός σκοπός της παρουσιαζόμενης περιπτωσιολογικής μελέτης είναι η επίδειξη της νέας μεθοδολογίας διαχείρισης κινδύνου  $C - VaR$  και η δυνατότητα εφαρμογής της στη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου. Αυτή η τεχνολογία μπορεί να συνδυαστεί με πιο κατάλληλες διαδικασίες δημιουργίας σεναρίων χρησιμοποιώντας γνωμοδοτήσεις εμπειρογνομόνων και προχωρημένες τεχνικές στατιστικής πρόβλεψης, όπως τα νευρωνικά δίκτυα.

Το προτεινόμενο μοντέλο έχει σχεδιαστεί ως ένα στάδιο του πολυετούς επενδυτικού μοντέλου που θα χρησιμοποιηθεί σε ένα ρεαλιστικό επενδυτικό περιβάλλον. Ωστόσο, η συζήτηση αυτού του πολυετούς επενδυτικού μοντέλου και των διαδικασιών δημιουργίας σεναρίων που χρησιμοποιούνται για αυτό το μοντέλο είναι πέρα από το πεδίο εφαρμογής της παρούσης εργασίας.

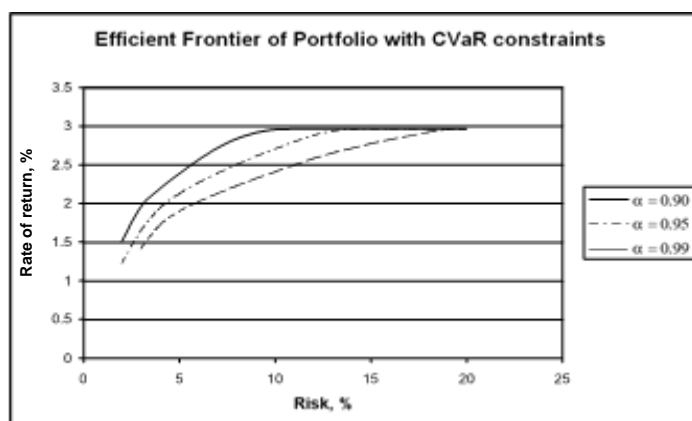
Το σύνολο των επενδυτικών μέσων καθορίστηκε στα αποθέματα του S&P100 από την 1<sup>η</sup> Σεπτεμβρίου 1999. Λόγω ανεπαρκών στοιχείων, έξι από τα αποθέματα αποκλείστηκαν. Η βελτιστοποίηση πραγματοποιήθηκε για περίοδο δύο εβδομάδων, δέκα εργάσιμων ημερών. Για τη δημιουργία σεναρίων χρησιμοποιήσαμε τιμές κλεισίματος για πέντε εκατοντάδες αλληλεπικαλυπτόμενες περιόδους δύο εβδομάδων (1<sup>η</sup> Ιουλίου 1997 – 8<sup>η</sup> Ιουλίου 1999). Στην πραγματικότητα, αυτή ήταν μια βελτιστοποίηση σε δείγμα χρησιμοποιώντας 500 επικαλυπτόμενες αποδόσεις που μετρήθηκαν σε 10 εργάσιμες ημέρες.

Το αρχικό χαρτοφυλάκιο περιείχε μόνο μετρητά και ο αλγόριθμος θα πρέπει να καθορίζει μια βέλτιστη επενδυτική απόφαση που να υπόκειται σε περιορισμούς κινδύνου. Τα όρια των θέσεων ρυθμίστηκαν σε  $\underline{x}_i = 0$  και  $\bar{x}_i = \infty$  αντιστοίχως, δηλ.

δεν επιτρέπονται βραχείες θέσεις. Τα όρια των αλλαγών στις μεμονωμένες θέσεις,  $u^-$  και  $u^+$ , και τα δύο έχουν οριστεί στο άπειρο. Το όριο για το πόσο μεγάλο μέρος της συνολικής αξίας του χαρτοφυλακίου μπορεί να αποτελέσει ένα μεμονωμένο περιουσιακό στοιχείο,  $v_i$ , καθορίστηκε στο 20% για όλα τα  $i$ . Η απόδοση των μετρητών ήταν 0,16% σε διάστημα δύο εβδομάδων. Υπολογίσαμε διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\omega$  σε περιορισμό  $C - VaR$ .

### Αποτελεσματικότητα και ρύθμιση των παραμέτρων του χαρτοφυλακίου

Το σχήμα 1 δείχνει την αποτελεσματικότητα του χαρτοφυλακίου κάτω από τον περιορισμό  $C - VaR$ . Οι τιμές στην κλίμακα κινδύνου αντιπροσωπεύουν το επίπεδο ανοχής  $\omega$ , δηλ. το ποσοστό της αρχικής αξίας χαρτοφυλακίου που επιτρέπεται για την έκθεση σε κίνδυνο. Για παράδειγμα, θέτοντας  $Risk = 10\%$  ( $\omega = 0,10$ ) και  $\alpha = 0,95$  σημαίνει ότι η μέση απώλεια σε 5% χειρότερες περιπτώσεις δεν πρέπει να υπερβαίνει το 10% της αρχικής αξίας του χαρτοφυλακίου. Φυσικά, υψηλότερα επίπεδα ανοχής κινδύνου  $\omega$  σε περιορισμό  $C - VaR$  (3.21) επιτρέπουν την επίτευξη υψηλότερων αναμενόμενων αποδόσεων. Είναι επίσης φανερό από το Σχήμα 1 ότι για κάθε τιμή βαθμού εμπιστοσύνης κινδύνου  $\alpha$  υπάρχει κάποια τιμή  $\omega$ , μετά την οποία ο περιορισμός  $C - VaR$  καθίσταται ανενεργός (δηλ. Μη δεσμευτικός). Μια υψηλότερη αναμενόμενη απόδοση δεν μπορεί να επιτευχθεί χωρίς να χαλαρώσουν άλλους περιορισμούς στο πρόβλημα (3.20) - (3.27), ή χωρίς την προσθήκη νέων οργάνων στο σύνολο βελτιστοποίησης. Σε αυτό το αριθμητικό παράδειγμα, το μέγιστο ποσοστό απόδοσης που μπορεί να επιτευχθεί για το δεδομένο σύνολο μέσων και περιορισμών ισούται με 2,96% σε διάστημα δύο εβδομάδων. Ωστόσο, πολύ μικρές τιμές ανοχής κινδύνου  $\omega$  κάνουν το πρόβλημα βελτιστοποίησης (3.20) - (3.27) μη εφικτό. Με άλλα λόγια, δεν υπάρχει τέτοιος συνδυασμός περιουσιακών στοιχείων που θα ικανοποιούσαν τους περιορισμούς της  $C - VaR$  (3.21) - (3.22) και τους περιορισμούς στις θέσεις (3.23) - (3.27) ταυτόχρονα.



Σχήμα 1: Αποτελεσματικότητα (βελτιστοποίηση με περιορισμούς της CVaR). Ο ρυθμός απόδοσης είναι ο αναμενόμενος ρυθμός απόδοσης του βέλτιστου χαρτοφυλακίου κατά τη διάρκεια μιας περιόδου 2 εβδομάδων. Η κλίμακα

κινδύνου εμφανίζει το επίπεδο ανοχής κινδύνου  $\omega$  στον περιορισμό κινδύνου CVaR ως το ποσοστό της αρχικής αξίας του χαρτοφυλακίου. (Pavlo Krokmal, Jonas Palmquist and Stanislav Uryasev (2001) Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk objective and Constraints).

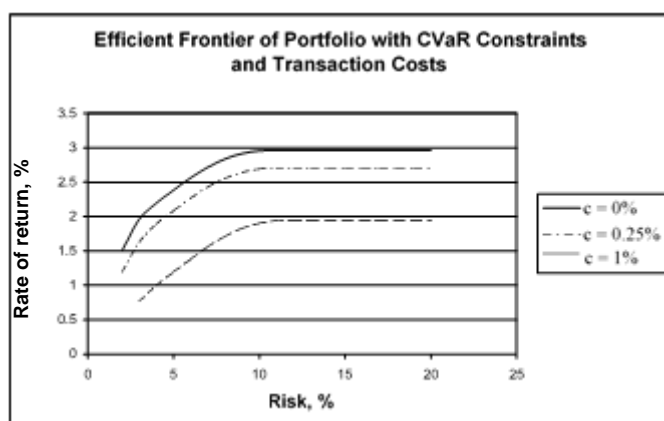
Ο πίνακας 1 παρουσιάζει τη διαμόρφωση του χαρτοφυλακίου για διαφορετικά επίπεδα κινδύνου ( $\alpha = 0,90$ ). Υπενθυμίζουμε ότι τέθηκε ο περιορισμός στο ποσοστό  $\nu$  της συνολικής αξίας του χαρτοφυλακίου που μπορεί να συνιστά ένα απόθεμα (23). Ορίζουμε το  $\nu = 0,2$  δηλαδή ένα μεμονωμένο περιουσιακό στοιχείο δεν μπορεί να αποτελεί περισσότερο από το 20% της συνολικής αξίας του χαρτοφυλακίου. Δείχνει ότι για υψηλότερα επίπεδα επιτρεπόμενου κινδύνου, ο αλγόριθμος μειώνει τον αριθμό των μέσων στο χαρτοφυλάκιο προκειμένου να επιτευχθεί υψηλότερη απόδοση (λόγω των επιβαλλόμενων περιορισμών, ο ελάχιστος αριθμός μέσων του χαρτοφυλακίου, συμπεριλαμβανομένων των μετρητών χωρίς κίνδυνο, ισούται με 5). Αυτό επιβεβαιώνει το πολύ γνωστό γεγονός ότι η "διαφοροποίηση" του χαρτοφυλακίου μειώνει τον κίνδυνο. Η χαλάρωση του περιορισμού του κινδύνου επιτρέπει στον αλγόριθμο να επιλέγει μόνο τα πιο κερδοφόρα αποθέματα. Καθώς πλησιάζουμε το επίπεδο ανοχής κινδύνου, ο αριθμός των μέσων στο χαρτοφυλάκιο αυξάνεται και για περισσότερο «συντηρητική» επένδυση (2% κινδύνου), αποκτούμε ένα χαρτοφυλάκιο με περισσότερα από 15 περιουσιακά στοιχεία, συμπεριλαμβανομένου του περιουσιακού στοιχείου χωρίς κίνδυνο (μετρητά). Τα όργανα που δεν παρουσιάζονται στον πίνακα έχουν μηδενικά βάρη χαρτοφυλακίου για όλα τα επίπεδα κινδύνου.

Risk $\omega$ , %	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Exp.Ret,%	1.508	1.962	2.195	2.384	2.565	2.719	2.838	2.915	2.956
St.Dev.	0.0220	0.0290	0.0333	0.0385	0.0439	0.0486	0.0532	0.0586	0.0637
CVaR	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
<b>Cash</b>	7.7	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>AA</b>	1.1	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>AIT</b>	7.2	11.3	14.4	20.0	19.1	13.1	0	0	0
<b>BEL</b>	2.0	0.8	0	0	0	0	0	0	0
<b>CGP</b>	0.2	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>CSC</b>	1.0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>CSCO</b>	1.0	0.4	9.4	13.3	14.5	20.0	20.0	20.0	20.0
<b>ETR</b>	5.0	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>GD</b>	10.0	9.9	3.9	0	0	0	0	0	0
<b>IBM</b>	13.7	13.7	7.9	1.7	0	1.2	1.4	0	0
<b>LTD</b>	3.6	3.3	0	0	0	0	0	0	0
<b>MOB</b>	4.2	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>MSFT</b>	0	0	0	0	0	0	0	0	13.8
<b>SO</b>	3.7	0	0	0	0	0	0	0	0
<b>T</b>	10.7	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0	10.5	0
<b>TAN</b>	8.4	9.5	12.4	14.6	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0
<b>TXN</b>	0.4	1.7	0.4	0	0	1.4	9.3	20.0	20.0
<b>UCM</b>	20.0	20.0	20.0	13.8	6.4	0	0	0	0
<b>UIS</b>	0.2	6.3	11.6	16.7	20.0	20.0	20.0	20.0	20.0
<b>WMT</b>	0	3.1	0	0	0	4.3	9.2	9.5	6.2

**Πίνακας 1: Διαμόρφωση Χαρτοφυλακίου: τα βάρη των περιουσιακών στοιχείων (%) στο βέλτιστο χαρτοφυλάκιο ανάλογα με το επίπεδο κινδύνου (τα μέσα που δεν περιλαμβάνονται στον πίνακα έχουν μηδενικά βάρη χαρτοφυλακίου (Pavlo Krokmal , Jonas Palmquist and Stanislav Uryasev (2001) Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk objective and Constraints).**

Οι δαπάνες συναλλαγής πρέπει να λαμβάνονται υπόψη κατά την εφαρμογή μιας ενεργού στρατηγικής διαπραγμάτευσης. Οι δαπάνες συναλλαγής αντιπροσωπεύουν ένα τέλος που καταβάλλεται στον μεσίτη / αγορά, τα bid-ask spreads και την κακή ρευστότητα.

Για να εξετάσουμε το αντίκτυπο του κόστους συναλλαγής, υπολογίσαμε τα αποτελεσματικά σύνορα με το ακόλουθο κόστος συναλλαγής,  $c = 0\%, 0,25\%$  και  $1\%$ . Το σχήμα 2 δείχνει ότι το κόστος συναλλαγής μειώνει μη γραμμικά την αναμενόμενη απόδοση. Δεδομένου ότι το κόστος συναλλαγών ενσωματώνεται στο πρόβλημα βελτιστοποίησης, επηρεάζει και την επιλογή των αποθεμάτων.



**Σχήμα 2: Αποτελεσματικότητα του βέλτιστου Χαρτοφυλακίου με περιορισμούς της CVaR λαμβάνοντας υπόψη κόστος συναλλαγής  $c = 0\%, 0,25\%$  και  $1\%$ . Ο ρυθμός απόδοσης είναι ο αναμενόμενος ρυθμός απόδοσης του βέλτιστου χαρτοφυλακίου κατά τη διάρκεια μιας περιόδου 2 εβδομάδων. Η κλίμακα κινδύνου εμφανίζει το επίπεδο ανοχής κινδύνου  $\omega$  στον περιορισμό κινδύνου CVaR ( $\alpha = 0,90$ ) ως το ποσοστό της αρχικής αξίας του χαρτοφυλακίου (Pavlo Krokmal , Jonas Palmquist and Stanislav Uryasev (2001) Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk objective and Constraints).**

### 3.3.3. Σύγκριση με τη Βελτιστοποίηση Χαρτοφυλακίου Μέσης Απόκλισης

Σε αυτή την ενότητα, εικονογραφούμε τη σχέση της αναπτυγμένης προσέγγισης με το πρότυπο πλαίσιο Markowitz μέσης διακύμανσης (MV). Στην Rockafellar και στο Uryasev, 2000, αποδείχθηκε ότι για τις κανονικά κατανεμημένες κατανομές απώλειας οι δύο αυτές μεθοδολογίες είναι ισοδύναμες υπό την έννοια ότι παράγουν τα ίδια αποτελεσματικά σύνορα.

Ωστόσο, στην περίπτωση μη κανονικών και ιδιαίτερα μη συμμετρικών κατανομών, οι προσεγγίσεις βελτιστοποίησης του χαρτοφυλακίου  $C - VaR$  και MV μπορεί να αποκαλύψουν σημαντικές διαφορές.

Πράγματι, η τεχνική βελτιστοποίησης  $C - VaR$  στοχεύει στην αναδιαμόρφωση μιας ουράς του της κατανομής των ζημιών, η οποία αντιστοιχεί σε υψηλές απώλειες και δεν αντιπροσωπεύει την αντίθετη ουρά που αντιπροσωπεύει υψηλά κέρδη. Αντίθετα, η προσέγγιση του Markowitz ορίζει τον κίνδυνο ως τη διακύμανση της κατανομής των ζημιών και δεδομένου ότι η διακύμανση περιλαμβάνει πληροφορίες από αμφότερες τις ουρές, επηρεάζεται από τα υψηλά κέρδη καθώς και από τις υψηλές απώλειες.

Εδώ χρησιμοποιήσαμε τις ιστορικές αποδόσεις ως εισροή σεναρίων για το μοντέλο χωρίς να κάνουμε υποθέσεις σχετικά με τη κατανομή των σεναρίων των μεταβλητών.

Συγκρίναμε τη μεθοδολογία  $C - VaR$  με την προσέγγιση MV, εκτελώντας τους αλγορίθμους βελτιστοποίησης στο ίδιο σύνολο οργάνων και σεναρίων. Το πρόβλημα της βελτιστοποίησης του MV διατυπώθηκε ως εξής (βλ. Markowitz, 1952):

$$\min_x \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \sigma_{ik} x_i x_k \quad (3.28)$$

όπου,

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (3.29)$$

$$\sum_{i=1}^n \mathcal{E}[r_i] x_i = r_p \quad (3.30)$$

με  $0 \leq x_i \leq v_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.31)$

όπου  $x_i$  είναι τα βάρη χαρτοφυλακίου, σε αντίθεση με τα προβλήματα (3.20) - (3.27), όπου  $x_i$  είναι αριθμοί μετοχών αντίστοιχων μέσων.

$r_i$  είναι το ποσοστό απόδοσης του οργάνου  $i$  και  $\sigma_{ik}$  είναι η συνδιακύμανση μεταξύ των αποδόσεων των οργάνων  $i$  και  $k$ :  $\sigma_{ik} = \text{cov}(r_i, r_k)$ .



Ο πρώτος περιορισμός (3.29) είναι ο περιορισμός του προϋπολογισμού

Ο 2<sup>ος</sup> περιορισμός, (3.30) απαιτεί την αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου να είναι ίση με μια προκαθορισμένη τιμή  $r_p$ .

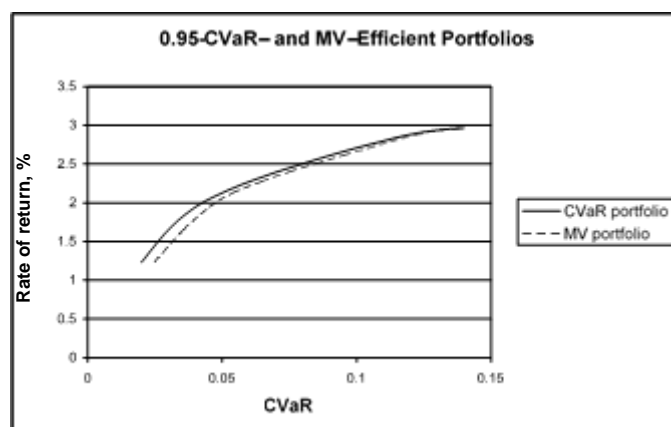
Τέλος ο 3<sup>ος</sup> περιορισμός (3.31) επιβάλλει όρια στα βάρη χαρτοφυλακίου, όπου  $v_i$  είναι τα ίδια με αυτά του (3.23).

Το σύνολο των περιορισμών (3.29) - (3.31) είναι ταυτόσημο με τους περιορισμούς (3.23) - (3.27), εκτός από τους περιορισμούς κόστους συναλλαγής. Οι προσδοκίες και οι συνδιαλλαγές στις (3.28), (3.30) υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τις ιστορικές αποδόσεις των 10 ημερών που χρησιμοποιήθηκαν για τη δημιουργία σεναρίων στο μοντέλο βελτιστοποίησης  $C - VaR$ :

$$r_{ij} = \frac{p_i^{t_j+10}}{p_i^{t_j} - 1}$$

$$E[r_i] = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J r_{ij}, \quad \sigma_{ik} = \frac{1}{J-1} \sum_{j=1}^J (r_{ij} - E[r_i])(r_{kj} - E[r_k])$$

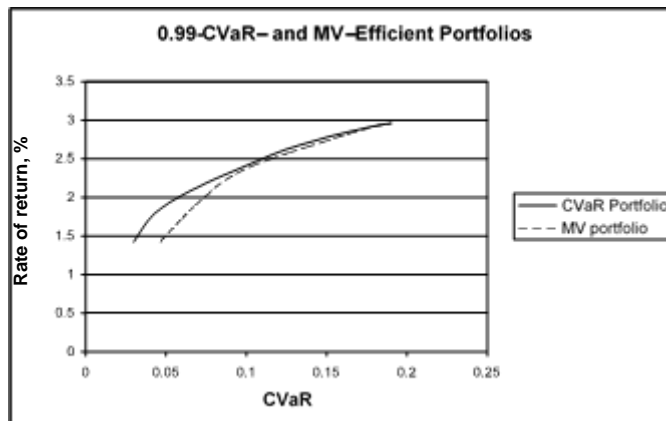
Το σχήμα 3 παρουσιάζει τα αποδοτικά ως προς την  $C - VaR$  χαρτοφυλάκια, στις κλίμακες απόδοση/  $C - VaR$  ( *Return / C - VaR* ) για επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha = 0,95$  (συνεχής γραμμή). Επίσης, για κάθε απόδοση εμφανίζεται η  $C - VaR$  του βέλτιστου χαρτοφυλακίου MV (διακεκομμένη γραμμή). Σημειώστε ότι για μια δεδομένη απόδοση, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο της MV έχει υψηλότερο επίπεδο κινδύνου  $C - VaR$  από το αποδοτικό χαρτοφυλάκιο *Return / C - VaR* .



**Σχήμα 3: Αποτελεσματικότητα των CVaR- και MV-βέλτιστων Χαρτοφυλακίων. Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο CVaR αναδείχθηκε με τη μεγιστοποίηση των αναμενόμενων αποδόσεων υπό τον περιορισμό της CVaR του χαρτοφυλακίου με 95% επίπεδο εμπιστοσύνης ( $\alpha = 0,95$ ). Οι οριζόντιες και κάθετες κλίμακες εμφανίζουν αντίστοιχα το CVaR και το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης ενός**

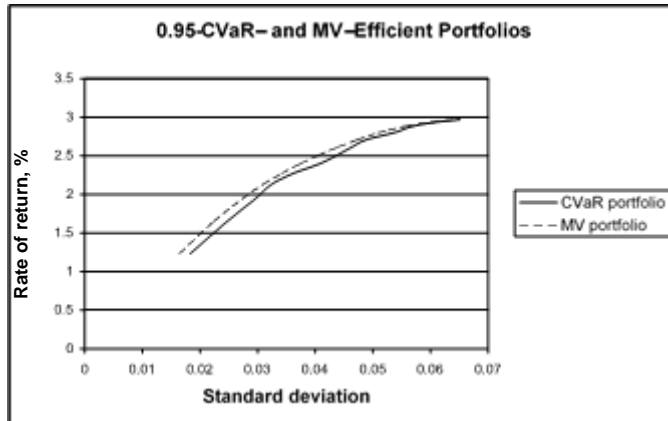
χαρτοφυλακίου σε περίοδο δύο εβδομάδων (Pavlo Krokmal , Jonas Palmquist and Stanislav Uryasev (2001) Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk objective and Constraints).

Το σχήμα 4 παρακάτω, εμφανίζει παρόμοια γραφήματα για  $\alpha = 0,99$ . Η διαφορά μεταξύ των λύσεων  $C - VaR$  και  $MV$  είναι υψηλότερη για το υψηλότερο επίπεδο εμπιστοσύνης.



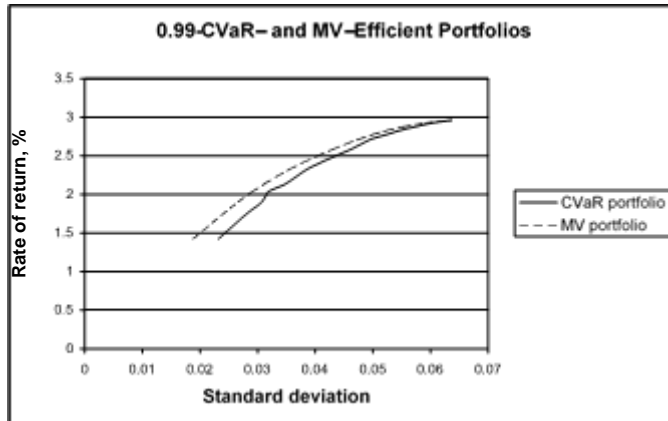
Σχήμα 4: Αποτελεσματικότητα των  $CVaR$ - και  $MV$ - βέλτιστων χαρτοφυλακίων. Το χαρτοφυλάκιο της βέλτιστης  $CVaR$  διαμορφώθηκε με τη μεγιστοποίηση των αναμενόμενων αποδόσεων, υπό τον περιορισμό της  $CVaR$  του χαρτοφυλακίου με 99% επίπεδο εμπιστοσύνης ( $\alpha = 0.99$ ). Οι οριζόντιες και κάθετες κλίμακες εμφανίζουν αντίστοιχα το  $CVaR$  και το αναμενόμενο ποσοστό απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου σε περίοδο δύο εβδομάδων (Pavlo Krokmal , Jonas Palmquist and Stanislav Uryasev (2001) Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk objective and Constraints).

Το σχήμα 5 δείχνει τα αποτελεσματικά σύνορα για αποδοτικά χαρτοφυλάκια  $Return / MV$  (συνεχής γραμμή). Επίσης, για κάθε επιστροφή εμφανίζεται η τυπική απόκλιση του βέλτιστου χαρτοφυλακίου  $C - VaR$  με επίπεδο εμπιστοσύνης  $\alpha = 0,95$  (διακεκομμένη γραμμή). Όπως αναμενόταν, για μια δεδομένη απόδοση, το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο  $C - VaR$  έχει υψηλότερη τυπική απόκλιση από το αποδοτικό χαρτοφυλάκιο  $Return / MV$ . Παρόμοια γραφήματα εμφανίζονται στο Σχήμα 6 για  $\alpha = 0,99$ .



**Σχήμα 5: Αποτελεσματικότητα των CVaR- και MV-βέλτιστων χαρτοφυλακίων. Το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο CVaR διαμορφώθηκε με τη μεγιστοποίηση των αναμενόμενων αποδόσεων υπό τον περιορισμό του CVaR του χαρτοφυλακίου με επίπεδο εμπιστοσύνης 95% ( $\alpha = 0,95$ ). Οι οριζόντιες και κάθετες κλίμακες εμφανίζουν αντίστοιχα την τυπική απόκλιση και τον αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου σε περίοδο δύο εβδομάδων (Pavlo Krokmal , Jonas Palmquist and Stanislav Uryasev (2001) Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk objective and Constraints).**

Η διαφορά μεταξύ των λύσεων  $C - VaR$  και MV είναι υψηλότερη για το υψηλότερο επίπεδο εμπιστοσύνης, παρόμοια με τα σχήματα 3, 4. Ωστόσο, η διαφορά μεταξύ των προσεγγίσεων MV και  $C - VaR$  δεν είναι πολύ μεγάλη. Οι σχετικά στενές γραφικές παραστάσεις των βέλτιστων χαρτοφυλακίων  $C - VaR$  και MV δείχνουν ότι ένα βέλτιστο χαρτοφυλάκιο  $C - VaR$  είναι "σχεδόν βέλτιστο" στην έννοια MV και αντίστροφα, ένα βέλτιστο χαρτοφυλάκιο MV είναι "σχεδόν βέλτιστο" στην έννοια  $C - VaR$ . Ωστόσο, αυτή η συμφωνία μεταξύ των δύο λύσεων δεν θα πρέπει να είναι παραπλανητική όταν αποφασίζει ότι οι συζητούμενες μεθοδολογίες διαχείρισης χαρτοφυλακίου «είναι ίδιες». Τα αποτελέσματα που παρατηρήθηκαν είναι ειδικά για το σύνολο των δεδομένων και η εγγύτητα των λύσεων των προβλημάτων βελτιστοποίησης  $C - VaR$  και MV οφείλεται σε προφανείς κατανομές που πλησιάζουν την κανονικότητα, των ιστορικών αποδόσεων που χρησιμοποιούνται στην περίπτωση μας. Συμπεριλαμβανομένων των επιλογών στο χαρτοφυλάκιο ή του πιστωτικού κινδύνου με λανθασμένες κατανομές επιστροφής μπορεί να οδηγήσει σε αρκετά διαφορετικές βέλτιστες λύσεις των αποτελεσματικών χαρτοφυλακίων MV και  $C - VaR$  (Mausser and Rosen, (1999), Larsen et al., (2002)).



Σχήμα 6: Αποτελεσματικότητα των CVaR- και MV-βέλτιστων χαρτοφυλακίων. Το χαρτοφυλάκιο της βέλτιστης CVaR διαμορφώθηκε με τη μεγιστοποίηση των αναμενόμενων αποδόσεων, υπό τον περιορισμό της CVaR του χαρτοφυλακίου με 99% επίπεδο εμπιστοσύνης ( $\alpha = 0.99$ ). Οι οριζόντιες και κάθετες κλίμακες εμφανίζουν αντίστοιχα την τυπική απόκλιση και τον αναμενόμενο ρυθμό απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου σε περίοδο δύο εβδομάδων (Pavlo Krokmal , Jonas Palmquist and Stanislav Uryasev (2001) Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk objective and Constraints).

### 3.3.4. Συμπεράσματα

Το κεφάλαιο αυτό επεκτείνει την προσέγγιση βελτιστοποίησης του χαρτοφυλακίου (Rockafellar and Uryasev, 2000), η οποία υπολογίζει ταυτόχρονα την  $VaR$  και βελτιστοποιεί την  $C - VaR$ . Αρχικά παρουσιάσαμε (Θεώρημα 2.3) ότι για προβλήματα βελτιστοποίησης κινδύνου-απόδοσης με περιορισμούς, μπορεί κανείς να χρησιμοποιήσει διαφορετικές τεχνικές βελτιστοποίησης. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για το πρόβλημα βελτιστοποίησης  $C - VaR$  που εξετάσαμε. Στη συνέχεια δείξαμε (θεωρήματα 3.2 και 3.3) ότι η προσέγγιση των Rockafellar και Uryasev (2000) μπορεί να επεκταθεί στα αναδιατυπωμένα προβλήματα με τους περιορισμούς  $C - VaR$  και τη σταθμισμένη συνάρτηση απόδοσης  $C - VaR$ . Η βελτιστοποίηση με πολλαπλούς περιορισμούς  $C - VaR$  για διαφορετικά χρονικά πλαίσια και σε διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης επιτρέπει τη διαμόρφωση των κατανομών ανάλογα με τις προτιμήσεις του υπεύθυνου λήψης αποφάσεων. Αναπτύξαμε ένα μοντέλο βελτιστοποίησης για τα χαρτοφυλάκια υπό τους περιορισμούς της  $C - VaR$ , χρησιμοποιώντας ιστορικά σενάρια και παρουσιάσαμε μία μελέτη για τη βελτιστοποίηση του χαρτοφυλακίου των μετοχών της S&P100. Η περίπτωση που μελετήσαμε έδειξε ότι ο αλγόριθμος βελτιστοποίησης, ο οποίος βασίζεται σε τεχνικές γραμμικού προγραμματισμού, είναι πολύ σταθερός και αποτελεσματικός. Η προσέγγιση αυτή μπορεί να λειτουργήσει και με μεγάλο αριθμό μέσων και σεναρίων. Οι περιορισμοί διαχείρισης του  $C - VaR$  (μειωμένοι σε γραμμικούς περιορισμούς ανά περίπτωση) μπορούν να χρησιμοποιηθούν και σε διάφορες εφαρμογές κατανομών απώλειας.

# Βιβλιογραφία

Acerbi, C., Nordio C. and C. Sirtori (2001) Expected shortfall as a tool for financial risk management. Working paper (can be downloaded: <http://www.gloriamundi.org>).

Acerbi, C. and D. Tasche (2001) On the coherence of expected shortfall. Working paper, (download from <http://www.gloriamundi.org>).

Andersen, J. V., and D. Sornette (1999) Have Your Cake and Eat It Too: Increasing Returns While Lowering Large Risks. Working Paper. University of Los Angeles (can be downloaded: <http://www.gloriamundi.org>).

Andersson, F., Mausser, H., Rosen, D. and S. Uryasev (1999) Credit Risk Optimization with Conditional Value-at-Risk. Mathematical Programming, Series B, December 2000.

Artzner, P., Delbaen F., Eber, J. M. and D. Heath (1997) Thinking Coherently. Risk, 10, November, 68–71.

Artzner, P., Delbaen F., Eber, J. M. and D. Heath (1999) Coherent Measures of Risk. Mathematical Finance, 9, 203-228.

Basak, S. and A. Shapiro (1998) Value-at-Risk Based Management: Optimal Policies and Asset Prices. Working Paper. Wharton School, University of Pennsylvania <http://www.gloriamundi.org>.

*Beder, Tanya Styblo. (1995). VAR: Seductive but Dangerous. Financial Analysts Journal, v51, n5, 12{24.*

*Birge, J.R. (1995). Quasi-Monte Carlo Methods Approaches to Option Pricing. Technical report 94-19., Department of Industrial and Operations Engineering, The University of Michigan, 15p.*

*Birge, J.R. and Louveaux, F. (1997). Introduction to Stochastic Programming, Springer Verlag, pp. 448.*

*Boyle, P.P., Broadie, M., and Glasserman, P. (1997). Monte Carlo Methods for Security Pricing Journal of Economic Dynamics and Control. Vol. 21 (8-9), 1267{1321.*

*Bucay, N. and Rosen, D. (1999). Credit Risk of an International Bond Portfolio: a Case Study. ALGO Research Quarterly. Vol.2, 1, 9{29.*

Damir Filipović Gregor Svindland, (2007), «Convex risk measures on  $L^P$ »

De Rossi, G. and Harvey, A. (2009). *Quantiles, expectiles and splines*. *Journal of Econometrics*, 152:179–185

Dembo, R.S. (1995). *Optimal Portfolio Replication*. *Algorithmics Technical paper series*. 95-01.

Dembo, R.S. and King, A.J. (1992). *Tracking Models and the Optimal Regret Distribution in Asset Allocation*. *Applied Stochastic Models and Data Analysis*. Vol. 8, 15-157.

Dembo, R. S. and D. Rosen (1999) The Practice of Portfolio Replication: A Practical Overview of Forward and Inverse Problems. *Annals of Operations Research*, 85, 267–284.

Duarte, A. (1999) Fast Computation of Efficient Portfolios. *Journal of Risk*, 1(4), 71–94.

Duffie, D. and J. Pan (1997) An Overview of Value-at-Risk. *Journal of Derivatives*, 4, 7–49.

Embrechts, P., Kluppelberg, S., and T. Mikosch (1997) *Extremal Events in Finance and Insurance*. Springer Verlag.

Emmer S., Kluppelberg, C. and R. Korn (2000) *Optimal Portfolios with Bounded Capital at Risks*. Working paper. Munich University of Technology, June.

Embrechts, P. (1999). *Extreme Value Theory as a Risk Management Tool*. *North American Actuarial Journal*, 3(2), April 1999.

Ermoliev, Yu. and Wets, R. J-B. (Eds.) (1988). *Numerical Techniques for Stochastic Optimization*, *Springer Series in Computational Mathematics*, 10.

Gaivoronski, A. A. and G. Pflug (2000) *Value at Risk in Portfolio Optimization: Properties and Computational Approach*. Working Paper 00/2, Norwegian University of Science and Technology.

Gourieroux, C., Laurent, J. P. and O. Scaillet (2000) *Sensitivity Analysis of Values-at-Risk*. Working paper. Universite de Louvan, January <http://www.gloriamundi.org> .

Grootweld H. and W. G. Hallerbach (2000) *Upgrading VaR from Diagnostic Metric to Decision Variable: A Wise Thing to Do?* Report 2003 Erasmus Center for Financial Research, June.

Jorion, Ph. (1992) *Portfolio Optimization in Practice*. *Financial Analysts Journal*, 48 (January), 68–74.

Jorion, Ph. (1996) *Value at Risk: A New Benchmark for Measuring Derivatives Risk*. Irwin Professional Pub.

Jorion, Ph. (1997) Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk. McGraw-Hill.

Jorion, Ph. (2000) Risk Management Lessons from LTCM. European Financial Management, 6, 277-300. <http://www.gsm.uci.edu/jorion/papers/lbcm>

Kall, P., and Wallace, S.W. (1995). Stochastic Programming, John Wiley & Sons, pp. 320.

Kast, R., Luciano, E., and Peccati, L. (1998). VaR and Optimization. 2nd International Workshop on Preferences and Decisions, Trento, July 1-3 1998.

Kan, Y.S., and Kibzun, A.I. (1996). Stochastic Programming Problems with Probability and Quantile Functions, John Wiley & Sons, pp. 316.

Konno, H. and Yamazaki, H. (1991). Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market. Management Science. 37, 519{531.

Kreinin, A., Merkoulouitch, L., Rosen, D., and Michael, Z. (1998). Measuring Portfolio Risk Using Quasi Monte Carlo Methods. ALGO Research Quarterly. Vol.1, 1, 17{25.

Kast, R., Luciano, E., and L. Peccati (1998) VaR and Optimization: 2nd International Workshop on Preferences and Decisions. Trento, July 1–3 1998.

Konno, H. and A. Wijayanayake (1999) Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model under Transaction Costs. Departement of IE and Management, Tokyo Institute of Technology.

Konno, H. and H. Yamazaki (1991) Mean Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and Its Application to Tokyo Stock Market. Management Science,37, 519–531.

Larsen, N., Mausser H., and S. Uryasev (2002) Algorithms for Optimization of Value-at-Risk. In: P. Pardalos and V. K. Tsitsiringos, (Eds) Financial Engineering, e-commerce and Supply Chain. Kluwer Academic Publishers, 129-157 <http://www.ise.ufl.edu/uryasev/VaR-minimization.pdf>

Linsmeier, Thomas J. and Neil D. Pearson (1996). Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk, unpublished manuscript.

Litterman, R. (1997a) Hot Spots and Hedges (I). Risk, 10(3), 42–45. Litterman, R. (1997b) Hot Spots and Hedges (II). Risk, 10(5), 38–42.

Lucas, A., and P. Klaassen (1998) Extreme Returns, Downside Risk, and Optimal Asset Allocation. Journal of Portfolio Management, 25(1), 71–79.

McKay, R. and Keefer, T.E. (1996). VaR Is a Dangerous Technique. Corporate Finance Searching for Systems Integration Supplement. Sep., pp. 30.



Markowitz, H.M. (1952) Portfolio Selection. *Journal of finance*, 7(1), 77–91. Mausser, H. and D. Rosen (1991) Beyond VaR: From Measuring Risk to Managing Risk. *ALGO Research Quarterly*, 1(2), 5–20. (can be downloaded:

<http://www.algorithmics.com/research/dec98/arq-beyondvar.pdf>). Mausser, H. and D. Rosen (1999) Efficient Risk/Return Frontiers for

Credit Risk. *ALGO Research Quarterly*, 2(4), 35–48.

([www.algorithmics.com/research/dec99/arq2-4-frontiers.pdf](http://www.algorithmics.com/research/dec99/arq2-4-frontiers.pdf)).

Michaud, R. (1989) The Markowitz Optimization Enigma: Is Optimized Optimal? *Financial Analysts Journal*, 45, 31–42.

*Optimization of Conditional Value at Risk*, R. Tyrrel Rockafeller and Stanislav Uryasev (1999)

*Pflug, G.Ch. (1996). Optimization of Stochastic Model: The Interface Between Simulation and Optimization. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston.*

Pflug, G. (2000) Some Remarks on the Value-at-Risk and the Conditional Value-at-Risk. In: S. Uryasev (Ed) *Probabilistic Constrained Optimization: Methodology and Applications*. Kluwer Academic Publishers.

*Pavlo Krokhmal, Jonas Palmquist and Stanislav Uryasev (2001) Portfolio Optimization with Conditional Value at Risk objective and Constraints.*

Prekopa, A. (1995) *Stochastic Programming*. Kluwer Academic Publishers. Pritsker, M. (1997) Evaluating Value at Risk Methodologies. *Journal of Financial Services Research*, 12(2/3), 201–242.

*Press, W.H., Teukolsky, S.A, Vetterling, W.T., and Flannery, B.P. (1992). Numerical Recipes in C. Cambridge University Press.*

Pshenichnyi, B. N. (1971) *Necessary Conditions for an Extremum*. Dekker, New York.

Puelz, A. (1999) Value-at-Risk Based Portfolio Optimization. Working paper.

Southern Methodist University, November.

RiskMetrics™ (1996) Technical Document, 4–th Edition, New York, NY,

J. P. Morgan Inc., December.

Rockafellar, R. T. (1970) *Convex Analysis*. Princeton Mathematics, Vol. 28, Princeton Univ. Press.

Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2000) Optimization of Conditional Value- at-Risk. *Journal of Risk*, 2, 21–41.

Rockafellar, R. T. and S. Uryasev (2001) Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. Research Report 2001-5. ISE Dept., University of Florida, April, 2001 (Can be downloaded: <http://www.ise.ufl.edu/uryasev/cvar2.pdf>)

Roy, Arthur D., (1952). Safety first and the holding of assets, *Econometrica*, 20 (3), 431-449.

*Shapiro, A. and Wardi, Y. (1994). Nondiifferentiability of the Steady-State Function in Discrete Event Dynamic Systems. IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 39, 1707-1711.*

*Shor, N.Z. (1985). Minimization Methods for Nondifferentiable Functions. Springer-Verlag.*

*Simona Roccioletti (2015). Backtesting Value at Risk and Expected Shortfall*

Simons, K. (1996) Value-at-Risk New Approaches to Risk Management. *New England Economic Review*, Sept/Oct, 3–13.

Stambaugh, F. (1996) Risk and Value-at-Risk. *European Management Journal*, 14(6), 612–621.

Steinbach, M. C. (1999) Markowitz Revisited: Single-Period and Multi-period Mean-Variance Models. Working Paper. Konrad Zuse Zentrum für Informationstechnik Berlin, Preprint SC-99-30, Aug.

Stublo Beder, T. (1995): VAR: Seductive but Dangerous. *Financial Analysts Journal*, Sep.-Oct., 12–24.

Tasche, D. (1999) Risk contributions and performance measurement. Working paper. Munich University of Technology, July.

*Uryasev, S. (1991). New Variable-Metric Algorithms for Nondifferential Optimization Problems. J. of Optim. Theory and Applic. Vol. 71, No. 2, 359-388.*

Uryasev, S. (1995) Derivatives of Probability Functions and Some Applications. *Annals of Operations Research*, 56, 287–311.

Uryasev, S. (2000) Conditional Value-at-Risk: Optimization Algorithms and Applications *Financial Engineering News*, 14, February, 2000.

Young, M. R. (1998) A Minimax Portfolio Selection Rule with Linear Programming Solution. *Management Science*, 44(5), 673–683.

*Zenios, S.A. (Ed.) (1996). Financial Optimization, Cambridge Univ. Pr.*

Ziemba, W. T. and J. M. Mulvey (Eds) (1998) *Worldwide Asset and Liability Modeling*. Cambridge Univ. Pr.

# Παράρτημα

Η κεντρική ιδέα των θεωρημάτων 2.1 και 2.2 είναι το ακόλουθο γεγονός σχετικά με τη συμπεριφορά του  $\alpha$ , σε σχέση με την ολοκληρωτική έκφραση στον ορισμό του  $F_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$ . Βασιζόμαστε στην παραδοχή μας ότι το  $\psi(\mathbf{x}, \alpha)$  είναι συνεχές σε σχέση με το  $\alpha$ , το οποίο είναι ισοδύναμο με το ότι γνωρίζουμε ότι ανεξάρτητα από την επιλογή του  $\mathbf{x}$ , το σύνολο του  $\mathbf{y}$  με  $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha$  έχει πιθανότητα μηδέν :

$$\int_{f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \alpha} p(\mathbf{y}) d(\mathbf{y}) = 0 \quad (\Pi 1)$$

**Λήμμα :** Με  $x$  σταθερό, έστω ότι

$$G(a) = \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m} g(a, \mathbf{y}) p(\mathbf{y}) d(\mathbf{y}) \quad \text{όπου } g(a, \mathbf{y}) = [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - a]^+$$

Τότε το  $G$  είναι κυρτό, συνεχής διαφοροποιήσιμη συνάρτηση με παράγωγο :

$$G'(a) = \psi(\mathbf{x}, a) - 1 \quad (\Pi 2)$$

**Απόδειξη :**

Το Λήμμα αυτό προκύπτει από την Πρόταση 2.1 του Shapiro and Wardi (1994)

**Απόδειξη του θεωρήματος 2.1 :**

Λαμβάνοντας υπόψη τον ορισμό του τύπου  $F_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$  προκύπτει από το λήμμα πως το  $F_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$  είναι κυρτό, συνεχές διαφοροποιήσιμο με τη εξής παράγωγο:

$$\frac{\partial}{\partial a} F_\beta(\mathbf{x}, \alpha) = 1 + (1 - \beta)^{-1} [\psi(\mathbf{x}, \alpha) - 1] = (1 - \beta)^{-1} [\psi(\mathbf{x}, \alpha) - \beta] \quad (\Pi 3)$$

Επομένως, οι τιμές του  $\alpha$  που πετυχαίνουν το ελάχιστο  $F_\beta(\mathbf{x}, \alpha)$ , δηλαδή αυτές που περιλαμβάνουν το σύνολο  $A_\beta(\mathbf{x})$ , είναι ακριβώς εκείνες για τις οποίες ισχύει ότι  $\psi(\mathbf{x}, \alpha) - \beta$ . Δημιουργούν ένα μη κενό κλειστό διάστημα, δεδομένου ότι το  $\psi(\mathbf{x}, \alpha)$  είναι συνεχές και δεν μειώνεται στο  $\alpha$  με όριο 1 όταν το  $\alpha \rightarrow \infty$  και το όριο 0 όταν  $\alpha \rightarrow -\infty$ . Αυτό δίνει την ισχύ του τύπου  $\beta - VaR$ . Ειδικότερα, τότε, εμείς έχουμε :

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F_\beta(\mathbf{x}, \alpha) &= F_\beta(\mathbf{x}, \alpha_\beta(\mathbf{x})) \\ &= \alpha_\beta(\mathbf{x}) + (1 - \beta)^{-1} \int_{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m} [f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - \alpha_\beta(\mathbf{x})]^+ p(\mathbf{y}) d(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

Όπου το ολοκλήρωμα εδώ έχει ως εξής :

$$\int_{f(x,y) \geq \alpha_\beta(x)} [f(x,y) - \alpha_\beta(x)]^+ p(y) d(y) = \int_{f(x,y) \geq \alpha_\beta(x)} f(x,y) p(y) d(y) - \alpha_\beta(x) \int_{f(x,y) \geq \alpha_\beta(x)} p(y) d(y)$$

Όπου το 1<sup>ο</sup> ολοκλήρωμα στα δεξιά είναι από τον ορισμό του  $(1 - \beta) \varphi_\beta(x)$  και το 2<sup>ο</sup> είναι  $1 - \Psi(x, \alpha_\beta(x))$  από την (Π1). Επιπλέον, η  $\Psi(x, \alpha_\beta(x)) = \beta$ . Έτσι,

$$\begin{aligned} \min_{\alpha \in \mathbb{R}} F_\beta(x, \alpha) &= \alpha_\beta(x) + (1 - \beta)^{-1} [(1 - \beta) \varphi_\beta(x) - \alpha_\beta(x)(1 - \beta)] \\ &= \varphi_\beta(x) \end{aligned}$$

Αυτό επιβεβαιώνεται για τον τύπο της  $\beta - CVaR$  στο (2.5)

Το Θεώρημα 2.1 απεδείχθη.

## Απόδειξη του θεωρήματος 2.2 :

Οι πρώτες αξιώσεις που περιβάλλουν τη σχέση (2.9) είναι οι στοιχειώδεις συνέπειες του τύπου για το  $\varphi_\beta(x)$  στο Θεώρημα 2.1 και το γεγονός ότι η ελαχιστοποίηση του  $F_\beta(x, \alpha)$  με  $(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R}$  μπορεί να πραγματοποιηθεί αρχικά ελαχιστοποιώντας υπό τη θεώρηση ότι  $\alpha \in \mathbb{R}$  για σταθερό  $x$  και στη συνέχεια ελαχιστοποιώντας το αποτέλεσμα θεωρώντας  $x \in X$ .

Για την αξίωση της κυρτότητας αρχίσαμε με την παρατήρηση πως το  $F_\beta(x, \alpha)$  είναι κυρτό ως προς το  $(x, \alpha)$  κάθε φορά που το  $[f(x, y) - \alpha]^+$  στη σχέση (2.4) για το  $F_\beta(x, \alpha)$  είναι από μόνο του κυρτό ως προς το  $(x, \alpha)$ . Για κάθε  $y$ , αυτό το μέρος της εξίσωσης είναι η θέση της συνάρτησης  $(x, \alpha) \rightarrow f(x, y) - \alpha$  με την κυρτή (μη μειούμενη) συνάρτηση  $t \rightarrow [t]^+$  έτσι σύμφωνα με τους κανόνες του Rockafellar (1970) και το θεώρημα 5.1, είναι κυρτή όσο η συνάρτηση  $(x, \alpha) \rightarrow f(x, y) - \alpha$  είναι κυρτή. Το τελευταίο ισχύει όταν το  $f(x, y)$  είναι κυρτό ως προς το  $x$ .

Η κυρτότητα της συνάρτησης  $f_\beta(x)$  προκύπτει από το γεγονός ότι η ελαχιστοποίηση μιας κυρτής συνάρτησης εκτεταμένης-πραγματικής αποτίμησης δύο μεταβλητών διανυσμάτων (με ένδειξη που αντιπροσωπεύει περιορισμούς) σε σχέση με μία από αυτές τις μεταβλητές, έχει ως αποτέλεσμα μια κυρτή συνάρτηση των υπόλοιπων μεταβλητών (Rockafellar (1970), σελ. 38-39).

Το Θεώρημα 2.2 απεδείχθη.

### Απόδειξη του θεωρήματος 3.1 :

Η απόδειξη του θεωρήματος 3.1 βασίζεται στις επαρκής και απαραίτητες συνθήκες των Kuhn-Tucker, τις οποίες παραθέτουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

### Θεώρημα A1 (Kuhn-Tacker, Theorem 2.5, (Pshenichnyi, 1971))

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα:

$$\begin{aligned} \min \quad & \psi_0(\mathbf{x}), \\ \psi_i(\mathbf{x}) \leq 0 \quad & i = -m, \dots, -1 \\ \psi_i(\mathbf{x}) = 0 \quad & i = 1, \dots, n \\ & \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

Έστω  $\psi_i(\mathbf{x})$  μία συνάρτηση σε ένα γραμμικό χώρο  $E$ , τέτοιο ώστε  $\psi_i(\mathbf{x})$  να είναι κυρτό για  $i \leq 0$  και γραμμικό για  $i \geq 0$  και  $X$  ένα δοσμένο υποσύνολο του  $E$ . Τότε για να επιτυγχάνει το  $\psi_0(\mathbf{x})$  το ελάχιστό του σημείο στο  $\mathbf{x}^* \in E$ , είναι απαραίτητο ότι υπάρχουν σταθερές  $\lambda_i$   $i = -m, \dots, n$  τέτοιες ώστε

$$\sum_{i=-m}^n \lambda_i \psi_i(\mathbf{x}^*) \leq \sum_{i=-m}^n \lambda_i \psi_i(\mathbf{x})$$

Για όλα τα  $\mathbf{x} \in X$ . Επιπλέον,  $\lambda_i \geq 0$  για κάθε  $i \leq 0$  και  $\lambda_i \psi_i(\mathbf{x}_0) = 0$  για κάθε  $i \neq 0$ .

Αν  $\lambda_0 \geq 0$  τότε οι συνθήκες είναι και πάλι επαρκής.

Παρακάτω ας αναφέρουμε τις απαραίτητες και επαρκής συνθήκες Kuhn-Tucker για τα προβλήματα 1, 2, και 3 (3.1, 3.2, 3.3.) Μετά από κάποιους ισοδύναμους μετασχηματισμούς, αυτές οι συνθήκες μπορούν να αναφερθούν ως εξής:

### Συνθήκες K-T για το 1<sup>ο</sup> Πρόβλημα

$$(KT1) \quad \varphi(\mathbf{x}^*) - \mu_1 R(\mathbf{x}^*) \leq \varphi(\mathbf{x}) - \mu_1 R(\mathbf{x}), \quad \mu_1 \geq 0, \quad \mathbf{x} \in X.$$

### Συνθήκες K-T για το 2<sup>ο</sup> Πρόβλημα

$$(KT2) \quad \begin{aligned} \lambda_0^2 \varphi(\mathbf{x}^*) + \lambda_1^2 (\rho - R(\mathbf{x}^*)) &\leq \lambda_0^2 \varphi(\mathbf{x}) + \lambda_1^2 (\rho - R(\mathbf{x})), \\ \lambda_1^2 (\rho - R(\mathbf{x})) &= 0, \quad \lambda_0^2 > 0, \quad \lambda_1^2 \geq 0, \quad \mathbf{x} \in X \\ \varphi(\mathbf{x}^*) - \mu_2 R(\mathbf{x}^*) &\leq \varphi(\mathbf{x}) - \mu_2 R(\mathbf{x}), \\ \mu_2 (\rho - R(\mathbf{x}^*)) &= 0, \quad \mu_2 \geq 0, \quad \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

### Συνθήκες K-T για το 3<sup>ο</sup> Πρόβλημα

$$(KT3) \quad \begin{aligned} -R(\mathbf{x}^*) + \mu_3 \varphi(\mathbf{x}^*) &\leq -R(\mathbf{x}) + \mu_3 \varphi(\mathbf{x}), \\ \mu_3 (\varphi(\mathbf{x}^*) - \omega) &= 0, \quad \mu_3 \geq 0, \quad \mathbf{x} \in X \end{aligned}$$

Σύμφωνα με τον Steinbach, 1999, ονομάζουμε  $\mu_2$  στο (KT2) τον βέλτιστο πολλαπλασιαστή απόδοσης και στο (KT3) τον πολλαπλασιαστή του ρίσκου. Ακόμη, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες (KT1) και (KT2) δείχνουμε ότι η λύση στο πρόβλημα 1 (Π1) είναι επίσης λύση και για το πρόβλημα 2 (Π2) αλλά και αντίστροφα, η λύση του προβλήματος 2 (Π2) είναι επίσης λύση για το πρόβλημα 1 (Π1).

**Λήμμα A1.** Εάν ένα σημείο  $\mathbf{x}^*$  είναι μια λύση στο πρόβλημα 1 (Π1), τότε το σημείο  $\mathbf{x}^*$  είναι μια λύση στο πρόβλημα 2 (Π2) με παράμετρο  $\rho = R(\mathbf{x}^*)$ . Επίσης, εάν το  $\mathbf{x}^*$  είναι μια λύση στο πρόβλημα 2 (Π2) και  $\mu_2$  είναι ο βέλτιστος πολλαπλασιαστής ανταμοιβής στο (KT2) τότε, το  $\mathbf{x}^*$  είναι η λύση στο πρόβλημα 1 (Π1) με  $\mu_1 = \mu_2$ .

### Απόδειξη του Λήμματος A1:

Ας αποδείξουμε την πρώτη δήλωση του Λήμματος A1.

Εάν  $\mathbf{x}^*$  είναι η λύση στο πρόβλημα 1 (Π1) τότε ικανοποιείται η συνθήκη 1 (KT1).

Προφανώς η λύση του  $\mathbf{x}^*$  ικανοποιεί τη συνθήκη 2 (KT2) με  $\rho = R(\mathbf{x}^*)$  και  $\mu_2 = \mu_1$

Τώρα ας αποδείξουμε τη 2<sup>η</sup> δήλωση:

Υποθέτουμε ότι το  $\mathbf{x}^*$  είναι η λύση στο πρόβλημα 2 (Π2) και η συνθήκη (KT2) ικανοποιείται. Τότε η συνθήκη (KT1) ικανοποιείται με παράμετρο  $\mu_1 = \mu_2$

και  $\mathbf{x}^*$  είναι η λύση του προβλήματος 1 (Π1).

Το Λήμμα A1 αποδείχθη.

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες (KT1) και (KT3), δείχνουμε ότι η λύση του προβλήματος 1 (Π1) είναι επίσης λύση του προβλήματος 3 (Π3) και αντίστροφα, η λύση του προβλήματος 3 (Π3) είναι και λύση του προβλήματος 1 (Π1).

**Λήμμα A2.** Εάν ένα σημείο  $x^*$  είναι η λύση του προβλήματος 1 (Π1) τότε το σημείο  $x^*$  είναι η λύση του προβλήματος 3 (Π3) με παράμετρο  $\omega = \varphi(x)$ . Ακόμη, εάν  $x^*$  είναι μια λύση στο πρόβλημα 3 (Π3) και  $\mu_3$  είναι ο θετικός πολλαπλασιαστής ρίσκου στη συνθήκη (KT3), τότε το  $x^*$  είναι η λύση στο πρόβλημα 1 (Π1) με  $\mu_1 = 1/\mu_3$ .

Απόδειξη του Λήμματος A2:

Αρχικά θα αποδείξουμε την πρώτη πρόταση του Λήμματος A2.

Εάν το  $x^*$  είναι μία λύση στο πρόβλημα 1 (Π1) τότε ικανοποιεί τη συνθήκη (KT1).

Εάν  $\mu_1 > 0$ , τότε η λύση  $x^*$  τότε αυτή η λύση  $x^*$  ικανοποιεί την (KT3) με  $\mu_3 = 1/\mu_1$  και  $\omega = \varphi(x)$ .

Τώρα ας αποδείξουμε την 2<sup>η</sup> πρόταση του Λήμματος A2:

Έστω ότι  $x^*$  είναι η λύση στο πρόβλημα 3 (Π3) και η (KT3) ικανοποιείται όταν  $\mu_3 > 0$ . Τότε η (KT1) ικανοποιείται με την παράμετρο  $\mu_1 = 1/\mu_3$  και η  $x^*$  είναι η λύση στο πρόβλημα 1 (Π1).

Το Λήμμα A2 αποδείχθη.

Το Λήμμα A1 υποδηλώνει ότι τα αποτελεσματικά σύνορα των προβλημάτων (P1) και (P2) συμπίπτουν. Ομοίως, το Λήμμα A2 υποδηλώνει ότι τα αποτελεσματικά σύνορα των προβλημάτων (P1) και (P3) συμπίπτουν. Συνεπώς, τα αποτελεσματικά σύνορα των προβλημάτων (P1), (P2) και (P3) συμπίπτουν.

Το θεώρημα 3.1 αποδείχθη.

### Απόδειξη του θεωρήματος 3.2:

Με το Θεώρημα A1 οι απαραίτητες και επαρκείς συνθήκες για το πρόβλημα (Π4') είναι οι κάτωθι:

$$(KT3') \quad -R(x^*) + \mu_3 F_\beta(x^*, \alpha^*) \leq -R(x) + \mu_3 F_\beta(x, \alpha),$$
$$\mu_3(F_\beta(x^*, \alpha^*) - \omega) = 0, \mu_3 \geq 0, x \in X$$

Έστω ότι  $x^*$  είναι μία λύση του προβλήματος 4 (Π4) και  $\zeta^* \in A_\beta(x^*)$ . Θα δείξουμε πως  $(x^*, \alpha^*)$  είναι μία λύση στο πρόβλημα 4' (Π4').

Κάνοντας χρήση των απαραίτητων επαρκών συνθηκών (KT3) καθώς και του Θεωρήματος 2.1 έχουμε:

$$\begin{aligned} -R(x^*) + \mu_3 F_\beta(x^*, \alpha^*) &= -R(x^*) + \mu_3 \varphi_\beta(x^*) \leq -R(x) + \mu_3 \varphi_\beta(x) \\ &= -R(x) + \mu_3 \min_{\zeta} F_\beta(x, \alpha) \leq -R(x) + \mu_3 F_\beta(x, \alpha) \end{aligned}$$

$$\text{και} \quad \mu_3(F_\beta(x^*, \alpha^*) - \omega) = \mu_3(\varphi_\beta(x^*) - \omega) = 0, \mu_3 \geq 0, x \in X$$

Έτσι, οι συνθήκες (KT3') ικανοποιούνται και το  $(x^*, \alpha^*)$  είναι η λύση στο πρόβλημα 4' (Π4')

Τώρα ας θεωρήσουμε πως το  $(x^*, \alpha^*)$  επιτυγχάνει το ελάχιστο στο πρόβλημα 4' (Π4') και  $\mu_3 \geq 0$ .

Για σταθερό  $x^*$  το σημείο  $\alpha^*$  ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση  $-R(x^*) + \mu_3 F_\beta(x^*, \alpha)$  και κατά συνέπεια τη συνάρτηση  $F_\beta(x^*, \alpha)$ . Τότε το Θεώρημα 2.1 υποδηλώνει ότι το  $\alpha^* \in A_\beta(x^*)$ . Ακόμη εφόσον  $(x^*, \alpha^*)$  είναι η λύση του προβλήματος 4' (Π4'), οι συνθήκες (KT3') και το Θεώρημα 2.1, συνεπάγονται ότι:

$$\begin{aligned} -R(x^*) + \mu_3 \varphi_\beta(x^*) &= -R(x^*) + \mu_3 F_\beta(x^*, \alpha^*) \leq -R(x) + \mu_3 F_\beta(x, \alpha_\beta(x)) \\ &= -R(x) + \mu_3 \varphi_\beta(x) \end{aligned}$$

$$\text{και} \quad \mu_3(\varphi_\beta(x^*) - \omega) = \mu_3(F_\beta(x^*, \alpha^*) - \omega) = 0, \mu_3 \geq 0, x \in X$$

Αποδείξαμε πως οι συνθήκες (KT3) ικανοποιούνται με το  $x^*$  να είναι η λύση του προβλήματος 4 (Π4).

Το Θεώρημα 3.2 απεδείχθη.



### Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3:

Έστω ότι  $x^*$  είναι η λύση του προβλήματος 5 (Π5), τότε:

$$\varphi_{\beta}(x^*) - \mu_1 R(x^*) \leq \varphi_{\beta}(x) - \mu_1 R(x), \quad \mu_1 \geq 0, x \in X$$

και  $\alpha^* \in A_{\beta}(x^*)$ .

Κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 2.1 έχουμε:

$$\begin{aligned} F_{\beta}(x^*, \alpha^*) - \mu_1 R(x^*) &= \varphi_{\beta}(x^*) - \mu_1 R(x^*) \leq \varphi_{\beta}(x) - \mu_1 R(x) \\ &= \min_{\alpha} F_{\beta}(x, \alpha) - \mu_1 R(x) \leq F_{\beta}(x, \alpha) - \mu_1 R(x), \quad x \in X \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν το  $(x^*, \alpha^*)$  είναι η λύση στο πρόβλημα 5 (Π5).

Τώρα ας θεωρήσουμε πως το  $(x^*, \alpha^*)$  είναι η λύση του προβλήματος 5 (Π5).

Για σταθερό  $x^*$ , το  $\alpha^*$  ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση  $F_{\beta}(x^*, \alpha) - \mu_1 R(x)$  και συνεπώς το σημείο  $\alpha^*$  ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση  $F_{\beta}(x^*, \alpha)$ . Τότε, βάσει του Θεωρήματος 2.1 το  $\alpha^* \in A_{\beta}(x^*)$ . Ακόμη, εφόσον το  $(x^*, \alpha^*)$  είναι η λύση στο πρόβλημα 5' (Π5'), το Θεώρημα 2.1 μας οδηγεί στο κάτωθι:

$$\begin{aligned} \varphi_{\beta}(x^*) - \mu_1 R(x^*) &= F_{\beta}(x^*, \alpha^*) - \mu_1 R(x^*) \leq F_{\beta}(x, \alpha_{\beta}(x)) - \mu_1 R(x) \\ &= \varphi_{\beta}(x) - \mu_1 R(x) \end{aligned}$$

Το Θεώρημα 3.3 απεδείχθη.