ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
Τμήμα Χρηματοοικονομικής & Τραπεζικής Διοικητικής
Π. Μ. Σ Χρηματοοικονομική Ανάλυση για Στελέχη

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

«Δείκτες μέτρησης κινδύνου»

Φοιτήτρια
Παπακώστα Εμμανουέλα

Επιβλέπων καθηγητής
Επικ. Καθηγητής Βολιώτης Δημήτριος

Μέλη επιτροπής
Καθηγητής, Αντζουλάτος Άγγελος

Καθηγητής, Τσιριτάκης Εμμανουήλ

Πειραιάς, Μάιος 2019

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία δίνουμε τους αξιωματικούς ορισμούς για τους δείκτες μέτρησης κινδύνου των Arrow-Pratt, Aumann-Serrano, Foster-Hart και M.Li. Οι δείκτες αποστροφής κινδύνου των Arrow και Pratt έχουν κυριαρχήσει στην χρηματοοικονομική θεωρία άλλα έχουν έναν σαφή υποκειμενικό χαρακτήρα. Πρόσφατα οι Aumann και Serrano ανέπτυξαν έναν νέο δείκτη πιο αντικειμενικό καθώς αφορά μόνο τα χαρακτηριστικά ενός στοιχήματος. Μεταγενέστερα οι Foster-Hart και M.Li, επηρεασμένοι από αυτόν τον ‘‘καινούργιο’’ δείκτη αναπτύσσουν ένα μέτρο επικινδυνότητας πιο ‘‘επιχειρησιακό’’ και έναν δείκτη ελκυστικότητας αντίστοιχα. Γίνεται αναλυτική σύγκριση όλων των μέτρων κινδύνου της βιβλιογραφίας με τον καινούργιο και πιο αντικειμενικό δείκτη των Aumann-Serrano και αναπτύσσονται εφαρμογές των δεικτών σε λοταρίες με σκοπό την σύγκριση των αποτελεσμάτων. Ενώ έχει επικρατήσει ότι οι δείκτες αυτοί είναι ικανοί να μας πληροφορήσουν για το πόσο επικίνδυνο είναι ένα στοίχημα, ώστε ένας πράκτορας να αποφασίσει αν θα το αποδεχτεί ή όχι, στο τέλος της εργασίας, γίνεται μια διαφορετική εφαρμογή των δεικτών Aumann-Serrano και Foster-Hart, και ελέγχουμε το πως αυτοί οι δείκτες είναι ικανοί να μας πληροφορήσουν για την κατάλληλη κατανομή των εισοδημάτων σε μια χώρα συγκρίνοντας τους με τον επίσημο δείκτη άνισης κατανομής εισοδήματος (συντελεστής Gini).

Λέξεις κλειδιά

Αποστροφή κινδύνου, Δείκτης κινδύνου Aumann-Serrano, Δυαδικότητα, Επιχειρησιακό μέτρο επικινδυνότητας, Δείκτης ελκυστικότητας, Λοταρίες, Κατανομή εισοδημάτων

Abstract

In this paper we give the axiomatic characterization of the Arrow-Pratt, Aumann-Serrano, Foster-Hart and M.Li measures of risk-aversion. Arrow-Pratt measures of risk-aversion are predominant in financial theory, but they are clearly subjective. Recently, Aumann and Serrano have developed a new index more objective since it only concerns the attributes of the gamble. Later, Foster-Hart and M.Li, influenced by this "new" index, develop a risk measure more "operational" and an attractiveness index. An analytical comparison of all the risk measures in the literature with the new and more objective Aumann-Serrano index and the application of the indexes to lotteries are developed in order to compare the results. While it has prevailed that these indicators are capable of telling us how dangerous a gamble is for an agent to decide whether to accept it or not, at the end of the work a different application of the Aumann-Serrano and Foster-Hart indicators is made, and we check how these indicators are able to inform us about the appropriate distribution of incomes in a country by comparing them with the official income inequality index (Gini coefficient).

Key words

Risk Aversion, Aumann-Serrano index of riskiness, Duality, Operational measure of riskiness, Attractiveness index, Lotteries, Distribution of incomes

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

Κεφάλαιο 1ο : 5

1.1 Εισαγωγή 5

1.2 Βιβλιογραφική ανασκόπηση 7

Κεφάλαιο 2ο : 14

2.1. Μέτρα αποστροφής κινδύνου κατά Arrow-Pratt 14

2.2. Δείκτης μέτρησης κινδύνου Aumann-Serrano 19

2.3. Ένα μέτρο επικινδυνότητας πιο ‘‘επιχειρησιακό’’ 24

2.4. Δείκτης ελκυστικότητας 30

Κεφάλαιο 3ο: 34

3.1. Σύγκριση δείκτη Aumann-Serrano με το μέτρο αποστροφής κινδύνου Arrow-Pratt 34

3.2. Σύγκριση δείκτη Aumann-Serrano με το μέτρο επικινδυνότητας Foster-Hart 36

3.3. Σύγκριση δείκτη Aumann-Serrano και δείκτη ελκυστικότητας 39

3.4. Σύγκριση δείκτη Aumann-Serrano και διάφορων διαδεδομένων μέτρων επικινδυνότητας 40

Κεφάλαιο 4ο: 46

4.1 Εφαρμογή των δεικτών σε λοταρίες 46

4.2 Εφαρμογή των δεικτών R^{AS} και R^{FH} στην κατανομή των εισοδημάτων της Ελλάδας 55

Παράρτημα Α 62

Βιβλιογραφία 66

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1^{Ο}

1.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ως κίνδυνος στα οικονομικά ορίζεται η μεταβλητότητα των δυνητικών αποτελεσμάτων μιας επένδυσης γύρω από την αναμενόμενη τιμή της. Ο κίνδυνος παίζει σημαντικό ρόλο και επηρεάζει σημαντικά τις αποφάσεις των επενδυτών. Οπότε είναι λογικό η μέτρησή του να αποτελεί ένα βασικό στοιχείο για τη διαχείρισή του.

Ο κίνδυνος και η αβεβαιότητα είναι μέρος της ανθρώπινης δραστηριότητας από τις απαρχές της. Στα αρχαία χρόνια, αντιμετώπιζαν τον κίνδυνο σαν πεπρωμένο και σαν Θεία Πρόνοια. Στα μεσαιωνικά χρόνια, το 1494, ένας Ιταλός μοναχός άρχισε να συζητά για μέτρα κινδύνου, θέτοντας ένα γρίφο που μπέρδεψε τους ανθρώπους για περίπου δύο αιώνες. Η λύση του γρίφου του και οι επακόλουθες εξελίξεις, έθεσαν τα θεμέλια για τα σύγχρονα μέτρα κινδύνου.

Η μοντελοποίηση του κινδύνου, γενικά, είναι κάτι αόριστο. Παρ' όλα αυτά έχουν γίνει αξιόλογες προσπάθειες μοντελοποίησής του. Είναι σημαντικό να γνωρίζουμε πόσο αρνητικός είναι ο κίνδυνος ενός συγκεκριμένου ατόμου. Για το σκοπό αυτό υπάρχει ένα σύνολο εργαλείων για τη μέτρηση του κινδύνου με ποσοτικό τρόπο. Ο κίνδυνος ποσοτικοποιείται με την έννοια του μέτρων κινδύνου που συνδέουν έναν πραγματικό αριθμό με την κατανομή απώλειας του χαρτοφυλακίου. Εξαιτίας της έλλειψης του ορισμού του κινδύνου ως συνάρτηση, δεν υπάρχει τέλειο μέτρο κινδύνου. Ένα μέτρο κινδύνου, καλύπτει μόνο ορισμένα χαρακτηριστικά του και με αυτή την έννοια, το μέτρο δεν είναι πλήρες.

Μια άλλη έννοια που θα μας απασχολήσει είναι η αποστροφή έναντι στον κίνδυνο. Είναι η συμπεριφορά των ανθρώπων ιδιαίτερα των καταναλωτών και των επενδυτών, οι οποίοι, όταν εκτίθενται σε αβεβαιότητα , προσπαθούν να την μειώσουν. Είναι ο δισταγμός ενός ατόμου -πράκτορα- να συμφωνήσει ανάμεσα σε μια κατάσταση με μια άγνωστη ανταμοιβή και μια άλλη κατάσταση με μια πιο προβλέψιμη αποπληρωμή, αλλά ενδεχομένως χαμηλότερη. Για παράδειγμα, ένας επενδυτής που αποστρέφεται τον κίνδυνο μπορεί να επιλέξει να τοποθετήσει τα χρήματά του σε τραπεζικό λογαριασμό με χαμηλό αλλά εγγυημένο επιτόκιο και όχι σε μια μετοχή που μπορεί να έχει υψηλές αναμενόμενες αποδόσεις, αλλά περιλαμβάνει επίσης την πιθανότητα να χάσει αξία.

Το πιο συνηθισμένο και συχνά χρησιμοποιούμενο μέτρο αποστροφής κινδύνου είναι τα μέτρα Arrow(1971,[1]) και Pratt(1964,[23]) της απόλυτης και σχετικής αποστροφής κινδύνου. Αυτά τα μέτρα είναι οι δείκτες αποστροφής κινδύνου που έχουν κυριαρχήσει στην χρηματοοικονομική θεωρία και έχουν έναν σαφή υποκειμενικό χαρακτήρα καθώς αξιοποιούν, όπως θα δούμε παρακάτω υποκειμενικές συναρτήσεις χρησιμότητας. Ωστόσο, έχουν αναπτυχθεί και άλλα μέτρα που μετρούν τον κίνδυνο ή την αποστροφή στον κίνδυνο. Πρόσφατα, οι Aumann-Serrano(2008,[3]) έχουν αναπτύξει έναν εναλλακτικό δείκτη μέτρησης ‘επικινδυνότητας’ αποφάσεων. Ο οικονομικός δείκτης μέτρησης κινδύνου Aumann-Serrano είναι ο δείκτης με τον οποίο θα ασχοληθούμε στην παρούσα εργασία. Σκοπός της εργασίας είναι αρχικά η αναλυτική καταγραφή των διαφορετικών δεικτών Arrow-Pratt και Aumann-Serrano και άλλοι μεταγενέστεροι, καθώς και η σύγκριση όλων των δεικτών της βιβλιογραφίας με τον δείκτη των Aumann-Serrano. Η σύγκριση γίνεται και με ποιοτική ανάλυση αλλά και με παρουσίαση εφαρμογών των δεικτών σε λοταρίες.

Στην συνέχεια του 1ου κεφαλαίου γίνεται βιβλιογραφική ανασκόπηση και αναφέρουμε όλους τους δείκτες με τους οποίους θα ασχοληθούμε στην εργασία. Μέσα από την καταγραφή της αρθρογραφίας θέλουμε να υπογραμμίσουμε την συμβολή του δείκτη των Aumann-Serrano στην ανάπτυξη νέων μέτρων επικινδυνότητας, την αξιολόγηση και την ταξινόμηση αποδόσεων αμοιβαίων κεφαλαίων, την ανάπτυξη νέων μοντέλων CAPM ή ακόμα και τον έλεγχο της διαφοροποίησης του χρόνου. Στο 2ο κεφάλαιο δίνουμε αναλυτικά τους ορισμούς τις ιδιότητες και όλα τα αξιώματα που διέπουν τους δείκτες των Arrow-Pratt , Aumann-Serrano, Foster-Hart και του δείκτη ελκυστικότητας του Li. Στο 3ο κεφάλαιο γίνεται σύγκριση του κάθε δείκτη ξεχωριστά με τον δείκτη των Aumann-Serrano, αλλά γίνεται αναφορά και σε άλλους διαδεδομένους δείκτες που εφαρμόζονται στα οικονομικά. Τέλος στο 4^{ο} κεφάλαιο γίνεται εφαρμογή των δεικτών με σκοπό την σύγκριση των αποτελεσμάτων. Επιπλέον γίνεται εφαρμογή των δεικτών στις κατανομές εισοδημάτων της Ελλάδας με σκοπό τον έλεγχο της επικινδυνότητας, η οποία κατόπιν συγκρίνεται με τον επίσημο δείκτη άνισης κατανομής εισοδήματος (συντελεστής Gini).

1.2 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΗ ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ

Στο βιβλίο του John W. Pratt, "Aversion Risk in the Small and the Large" (1971,[1]), και στο άρθρο του Kenneth Arrow (1965[23]) "The Theory of Risk Aversion", αναπτύχθηκαν οι δείκτες αποστροφής κινδύνου, οι οποίοι αναφέρονταν μόνο στα χαρακτηριστικά του προσώπου και ειδικότερα, στον τρόπο με τον οποίο ένας πράκτορας μπορεί να διακινδυνεύσει. Μπορούμε να πούμε ότι είχαν έναν σαφές υποκειμενικό χαρακτήρα αφού σαν μέτρα αξιοποιούν τις συναρτήσεις χρησιμότητας των εν λόγω ατόμων. Δημιουργείται ωστόσο το ερώτημα: μπορεί κάποιος να μετρήσει την επικινδυνότητα αντικειμενικά ανεξάρτητα από το πρόσωπο ή την οντότητα που αναλαμβάνει τον κίνδυνο;

Την απάντηση στο ερώτημα προσεγγίζουν οι Aumann και Serrano(2008,[3]) στο άρθρο τους “An Economic Index of Riskiness”. Ο δείκτης που αναπτύσσουν αναφέρεται στα χαρακτηριστικά του στοιχήματος και ειδικότερα, το πόσο επικίνδυνο είναι αυτό. Μετρούν την επικινδυνότητα και της δίνουν ένα νούμερο. Όμως η ιδέα των Aumann και Serrano βασίζεται στην αποστροφή κινδύνου δίνοντας στην επικινδυνότητα ένα διπλό χαρακτήρα. Δηλαδή από την μια πλευρά ως δείκτης μας δείχνει την πτυχή ενός στοιχήματος ως προς το πόσο επικίνδυνο είναι , αλλά ταυτόχρονα μας δείχνει και το πως συμπεριφέρεται κάποιος που αποστρέφεται τον κίνδυνο σε ένα επικίνδυνο στοίχημα. Ένα λιγότερο επικίνδυνο στοίχημα δεν είναι πάντα πιο επιθυμητό. Αυτό εξαρτάται από τον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων και από άλλες παραμέτρους εκτός από την επικινδυνότητα . Η επιθυμία είναι υποκειμενική, ανάλογα με τον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων. Ωστόσο, η επικινδυνότητα είναι αντικειμενική: είναι το ίδιο για όλα τα άτομα. Η φράση των Machina and Rothschild (2008,[22]) “risk is what risk-averters hate” είναι αυτή που συνοψίζει όλη την ιδέα των Aumann και Serrano. Χρειάζεται δηλαδή να γνωρίζουμε και το πόσο επικίνδυνη είναι μια απόφαση και την αποστροφή ενός ατόμου στον κίνδυνο. Ο δείκτης βασίζεται σε οικονομικές, θεωρητικές ιδέες απόφασης, όπως η αρχή της δυαδικότητας και η στοχαστική κυριαρχία πρώτης και δεύτερης τάξης.

Οι Dean P. Foster και Sergiu Hart (2009,[9]) δουλεύουν πάνω στον δείκτη των Aumann και Serrano και προσπαθούν να προσφέρουν στον δείκτη μια πιο «επιχειρησιακή» ερμηνεία. Αντ' αυτού, στο άρθρο τους An “Operational Measure of Riskiness”, οδηγούνται σε ένα διαφορετικό μέτρο επικινδυνότητας, σαφές και ισχυρό στο να προσδιοριστεί ακριβώς πότε γίνεται επικίνδυνο να δεχτεί κάποιος ένα στοίχημα. Ο χαρακτήρας του είναι πιο “επιχειρησιακός” καθώς είναι σε θέση να μας ενημερώνει για το αν η αποδοχή ή απόρριψη ενός στοιχήματος θα οδηγεί σε εγγυημένη αποφυγή πτώχευσης καθώς και σε πιθανή αύξηση του πλούτου μακροπρόθεσμα.

Αντίστοιχα και ο Minqiang Li(2014,[20]) μελετά τις θεμελιώδεις θεωρητικές πτυχές του δείκτη κινδύνου Aumann-Serrano και καταλήγει να ορίζει τον αντίστροφό του, δηλαδή έναν δείκτη ελκυστικότητας. Ουσιαστικά θεωρεί ότι το στοίχημα g παίρνει τιμές μη πεπερασμένες τιμές, οι οποίες ανήκουν σε μη φραγμένο σύνολο, δηλαδή τιμές με τις οποίες η μαθηματική σχέση που αφορά τον δείκτη των Aumann-Serrano δεν επαληθεύεται. Πολλά αποτελέσματα δηλώνονται πιο φυσικά από την άποψη του δείκτη ελκυστικότητας. Θα αναφερθούμε αναλυτικά στον δείκτη Foster-Hart και στον δείκτη ελκυστικότητας(κεφ.2) και θα γίνει αναλυτική σύγκριση και των δύο με τον βασικό δείκτη την εργασίας Aumann-Serrano (κεφ3).

Οι Ulrich Homm και Christian Pigorsch(2012,[17]) στο άρθρο τους “Beyond the Sharpe ratio: An application of the Aumann Serrano index to performance measurement” εμπνευσμένοι από τον δείκτη Aumann-Serrano και προτείνουν ένα νέο μέτρο για τις αποδόσεις, μια γενίκευση του Sharpe ratio. Αντί της τυπικής απόκλισης, το οικονομικό μέτρο απόδοσης, χρησιμοποιεί τον δείκτη κινδύνου Aumann και Serrano, προκύπτει δηλαδή από τη διαίρεση της μέσης τιμής μιας επενδυτικής ευκαιρίας από τον οικονομικό δείκτη κινδύνου που πρότειναν οι Aumann και ο Serrano. Καταλήγουν στο ότι το δικό τους οικονομικό μέτρο απόδοσης είναι ισοδύναμο με το Sharpe ratio εάν οι αποδόσεις κατανέμονται κανονικά, καθώς και στο ότι είναι ένα μέτρο κατάλληλο τόσο για τις αποδόσεις χαμηλής όσο και υψηλής συχνότητας, χωρίς κανένα μειονέκτημα, σε σύγκριση με το Sharpe ratio το οποίο είναι αποτελεσματικό για αποδόσεις χαμηλής συχνότητας.

Οι ίδιοι ερευνητές, Ulrich Homm και Christian Pigorsch(2012,[18]), στο άρθρο τους ‘‘An operational interpretation and existence of the Aumann-Serrano index of riskiness’’ παρέχουν μια επιχειρησιακή ερμηνεία του οικονομικού δείκτη κινδύνου των Aumann και Serrano και συζητούν τον υπολογισμό του στην περίπτωση μη πεπερασμένων τυχερών παιχνιδιών. Παρέχεται μια ενδιαφέρουσα σχέση μεταξύ του δείκτη AS και του μέτρου FH από το συντελεστή προσαρμογής, δηλαδή μια πολύ γνωστή παράμετρο για τον υπολογισμό της πιθανότητας καταστροφής μιας ασφαλιστικής εταιρείας. Ως παράδειγμα χρησιμοποιούν τη μέχρι τώρα απαρατήρητη σχέση μεταξύ του συντελεστή προσαρμογής και του δείκτη AS για να αντλήσουν πληροφορίες για συνθήκες ύπαρξης του δείκτη AS σε στοιχήματα με αμέτρητα πολλά αποτελέσματα.

Ο Amnon Schreiber(2014,[25]) στο άρθρο ‘‘Economic Indices of Absolute and Relative Riskiness’’ στηρίζεται προωθεί την ιδέα ότι οι κίνδυνοι που προκύπτουν από επενδύσεις έχουν δύο πτυχές, συγκεκριμένα, απόλυτες και σχετικές. Έτσι χαρακτηρίζει τους δείκτες απόλυτης και σχετικής επικινδυνότητας από την αρχή της δυαδικότητας Aumann-Serrano μεταξύ κινδύνου και αποστροφής κινδύνου. Ο δείκτης απόλυτης επικινδυνότητας είναι απλώς ο δείκτης Aumann-Serrano που εφαρμόζεται στις απόλυτες αποδόσεις και ο δείκτης σχετικής επικινδυνότητας, ο οποίος είναι ένας νέος δείκτης και είναι συνάρτηση των σχετικών αποδόσεων. Παρ 'όλα αυτά, ο δείκτης σχετικής επικινδυνότητας έχει δύο σημαντικά πλεονεκτήματα που κατά τη γνώμη του Schreiber, που τον κάνουν πιο συναφές σε πολλές περιπτώσεις. Εξηγεί ότι πρώτον, είναι πιο πιθανό οι πράκτορες να ενδιαφέρονται για τη σχετική απόδοση παρά για την απόλυτη απόδοση μιας επένδυσης. Στις χρηματιστηριακές αγορές, για παράδειγμα, είναι αρκετά συνηθισμένο να πιστεύουμε ότι μόνο σχετικές αποδόσεις θα πρέπει να επηρεάζουν τις επενδυτικές αποφάσεις. Η τιμή μιας ενιαίας ασφάλειας είναι σχεδόν άσχετη. Και δεύτερον, είναι εύλογο να υποθέτουμε ότι οι επενδυτές έχουν συνάρτηση σταθερής σχετικής αποστροφής CRRA. Για αυτούς τους επενδυτές, ο δείκτης της σχετικής επικινδυνότητας είναι πολύ πιο κατάλληλος.

Εδιαφέρον παρουσιάζει και η έρευνα του Haim Shalit(2013, ,[27]) που σχετίζεται με τον οικονομικό δείκτη κινδύνου Aumann-Serrano. Στο άρθρο "On Pertinent Risk" το χρησιμοποιεί αυτόν τον δείκτη αφού μπορεί και κατατάσσει τα περιουσιακά στοιχεία σύμφωνα με το πόσο επικίνδυνα είναι και ουσιαστικά τον εφαρμόζει στις "lower tail" (το τμήμα που περιέχει τις χαμηλότερες τιμές σε μια κατανομή) των αποδόσεων. Χρησιμοποιεί όλες τις "lower partial moments" (οι στιγμές που οι αποδόσεις πέφτουν κάτω από ένα ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο) και καταλήγει στο συμπέρασμα να παρέχει ένα καλύτερο εργαλείο για την αξιολόγηση του κινδύνου από τα υπάρχοντα μέτρα κινδύνου VaR και CVaR.

Αντίστοιχα, ο ίδιος ερευνητής, Haim Shalit (2014,[28]) στο άρθρο "Measuring Risk in Israeli Mutual Funds: Conditional Value-at-Risk vs. Aumann-Serrano Riskiness Index.", πάλι χρησιμοποιεί το CVaR και τον δείκτη Aumann-Serrano, για την αξιολόγηση και την ταξινόμηση των αποδόσεων των αμοιβαίων κεφαλαίων του Ισραήλ, αντί των διαδεδομένων μέτρων κινδύνου και μέτρων απόδοσης όπως η διακύμανση ή το beta. Έτσι καθιερώνει μια νέα μεθοδολογία για την εκ νέου αξιολόγηση του κινδύνου στις προηγούμενες αποδόσεις των αμοιβαίων κεφαλαίων. Καταλήγει ότι το CVaR είναι πιο κατάλληλο για την αξιολόγηση του κινδύνου που υπάρχει στις "lower tail" της κατανομής, ενώ ο δείκτης Aumann-Serrano παρέχει μια αναμφισβήτητη κατάταξη των επικίνδυνων περιουσιακών στοιχείων για όλους τους επενδυτές που αποστρέφονται τον κίνδυνο.

Οι Chew Soo Hong και Jacob S. Sagi[7] στο άρθρο τους ‘‘A Critical Look at the Aumann-Serrano and Foster-Hart Measures of Riskiness’’ στηρίζονται στο άποψη του Hart(2011,[13]) ότι τα μέτρα κινδύνου του Aumann και Serrano (2008,[3]) και Foster και Hart (2009,[10]) έχουν μια αντικειμενική και παγκόσμια έκκληση σε σχέση με ένα υποσύνολο των αναμενόμενων προτιμήσεων ωφέλειας, U_H. Έτσι δείχνουν ότι τα κριτήρια λήψης αποφάσεων μέσου κινδύνου χρησιμοποιώντας οποιοδήποτε από τα δυο μέτρα παραβιάζουν την αναμενόμενη χρησιμότητα και γενικά δεν συνάδουν με τις βέλτιστες επιλογές χαρτοφυλακίου που πραγματοποιούν οι επενδυτές με προτιμήσεις στην U_H. Ωστόσο προσδιορίζουν άλλα χαρακτηριστικά των μέτρων Aumann-Serrano και Foster-Hart που δημιουργούν ανησυχίες σχετικά με τη λειτουργικότητα και τη χρησιμότητά τους σε διάφορες διαδικασίες λήψης αποφάσεων, διαχείρισης κινδύνου και εκτίμησης κινδύνου. Καταλήγουν όμως ενώ η εφαρμογής τους μπορεί να έχουν σοβαρούς περιορισμούς, μπορούν να συμβάλουν στην εύρωστη προσέγγιση μιας ολοκληρωμένης διαχείρισης κινδύνου και της αντιστάθμισης κινδύνου-απόδοσης.

Ένα εναλλακτικό μοντέλο CAPM που χρησιμοποιεί τον οικονομικό δείκτη Aumann-Serrano προτείνουν οι Jianhua Gang, Zongxin Qian και Fan Chenστο(2016,[11]) στο άρθρο τους "Risk Factors and Asset Pricing: Evidence from China's A-Share Market". Καθώς το κλασσικό μοντέλο CAPM έχει κατηγορηθεί για μεγάλα σφάλματα στην εξήγηση των ασφαλίστρων του μετοχικού κεφαλαίου, δείχνουν ότι μέρος της ανακρίβειας προέρχεται από την ποιότητα της μέτρησης κινδύνου. Έτσι φτιάχνουν το εναλλακτικό μοντέλο CAPM που μετρά τον κίνδυνο με τον δείκτη Aumann-Serrano. Επικεντρώνονται στην εναλλακτική μέτρηση κινδύνου στο μοντέλο τιμολόγησης περιουσιακών στοιχείων για τη χρηματιστηριακή αγορά της Κίνας και δείχνουν ότι το μοντέλο AS-CAPM εξηγεί καλύτερα την ημερήσια απόδοση, καθώς ο δείκτης AS μπορεί να απορροφά τον κίνδυνο υψηλότερης τάξης των περιουσιακών στοιχείων κάτω από ακραία καθεστώτα αγοράς. Έτσι καταλήγουν να απορρίπτουν την ιδέα που επικρατεί, όσο υψηλότερο επίπεδο κινδύνου, τόσο υψηλότερο επίπεδο αναμενόμενης απόδοσης και τόσο χαμηλότερη τιμή του τρέχοντος αποθέματος, αφού η αλλαγή στο CAPM με τον δείκτη A-S συνδέει αρνητικά τον αντιληπτό κίνδυνο με την τρέχουσες αγοραίες τιμές.

Με το μοντέλο CAPM ασχολούνται και οι Yi-Ting Chen, Rachel J. Huang, Pai-Ta Shih, Larry Y. Tzeng(2017,[6]) στο άρθρο "Capital Asset Pricing Models Based on Economic Indices of Riskiness". Αναλύουν την ισορροπία της κεφαλαιακής τιμολόγησης σε ένα πλαίσιο μέσου κινδύνου, λαμβάνοντας υπόψη τους νεοαναπτυγμένους δείκτες κινδύνου από τους Aumann και Serrano (2008,[3]), Foster and Hart (2009,[10]) και Bali et al. (2011,[4]). Προτείνουν ένα νέο μοντέλο CAPM το οποίο υποδηλώνει ότι η αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση ενός κεφαλαίου i ισούται με τον συστηματικό κίνδυνο του περιουσιακού στοιχείου i φορές την αναμενόμενη υπερβάλλουσα απόδοση της αγοράς. Από την άλλη πλευρά, με έναν τρόπο που διαφέρει από το παραδοσιακό CAPM, ο συστηματικός κίνδυνος εξαρτάται από τη συνδιακύμανση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου και από μια μη γραμμική συνάρτηση της απόδοσης του χαρτοφυλακίου της αγοράς, όπου η μη γραμμική συνάρτηση καθορίζεται από δείκτη κινδύνου του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Η εμπειρική μελέτη δείχνει ότι το μοντέλο που προτείνουν καταγράφει καλύτερα την διατομή των αποδόσεων των μετοχών από το παραδοσιακό CAPM μέσης διακύμανσης. Τέλος καταλήγουν ότι το παραδοσιακό πρότυπο τιμολόγησης θα μπορούσε να υπερεκτιμήσει το μέγεθος των μη φυσιολογικών αποδόσεων του χαρτοφυλακίου με την εσφαλμένη αξιολόγηση του συστηματικού κινδύνου.

Η Alaitz Artabe[8] στο άρθρο “Income distribution orderings based on differences with respect to the minimum acceptable income” αναλύει την δυνατότητα να χρησιμοποιηθεί ο δείκτης κινδύνου των Aumann Serrano για να συγκρίνει τις κατανομές εισοδήματος λαμβάνοντας υπόψη τα επίπεδα των εισοδημάτων και τη διασπορά τους. Μέσα από παραδείγματα αλλά και έρευνα στα εισοδήματα της Ισπανίας το 1995 και 2002 καταλήγει ότι ο δείκτης Aumann Serrano πράγματι είναι ικανός να μας ενημερώσει για το πότε η κατανομή των εισοδημάτων σε μια χώρα είναι επικίνδυνη-όχι καλή άρα και μη επιθυμητή. Η σύγκριση των αποτελεσμάτων γίνεται με τον Gini index ο οποίος είναι ο επίσημος δείκτης που μετρά την ανισότητα επίπεδα εισοδήματος(ο μηδενικός εκφράζει την τέλεια ισότητα όπου όλοι έχουν το ίδιο εισόδημα ο μοναδιαίος εκφράζει τη μέγιστη ανισότητα όπου μόνο ένα άτομο έχει όλο το εισόδημα).

Τέλος, η διαφοροποίηση του χρόνου έχει αποτελέσει αντικείμενο έντονων συζητήσεων εδώ και δεκαετίες, δηλαδή αν οι επενδύσεις σε μετοχές είναι πράγματι λιγότερο επικίνδυνες για μεγαλύτερες χρονικές περιόδους παρά για μικρότερες. Αυτό εξετάζεται και στο άρθρο των Richard Lu, Chen-Chen Yang και Wing-Keung Wong(2018,[21]) “Time Diversification: Perspectives from the Economic Index of Riskiness” χρησιμοποιώντας τον δείκτη Aumann και Serrano ως μέτρο κινδύνου. Ελέγχουν τις ημερήσιες αποδόσεις των S&P500, του S&P400 και του NASDAQ για μικρές και μεγάλες περιόδους παραμονής στην επένδυση, με τη χρήση της τεχνικής bootstrapping κατά την προσομοίωση. Καταλήγουν στο συμπέρασμα ότι η επικινδυνότητα της συντομότερης περιόδου είναι στατιστικά μεγαλύτερη από εκείνη της μεγαλύτερης περιόδου και απορρίπτουν την αρχική τους υπόθεση ότι δεν υπάρχει η επίδραση της διαφοροποίησης χρόνου. Με βοήθεια λοιπόν του δείκτη Aumann και Serrano δίνουν χρήσιμες πληροφορίες σχετικά με τη διαφοροποίηση του χρόνου, για τους ακαδημαϊκούς, τους επενδυτές και τους υπεύθυνους για τη χάραξη πολιτικής κατά τη λήψη αποφάσεων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^{Ο}

2.1 ΜΕΤΡΑ ΑΠΟΣΤΡΟΦΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΚΑΤΑ ARROW-PRATT

Μερικές φορές είναι σημαντικό να γνωρίζουμε πόσο αποστρέφεται ένα άτομο τον κίνδυνο . Για τον σκοπό αυτό υπάρχει ένα σύνολο εργαλείων για τη μέτρηση του κινδύνου με ποσοτικό τρόπο. Το πιο συνηθισμένο και συχνά χρησιμοποιούμενο μέτρο αποστροφής κινδύνου είναι τα μέτρα Arrow-Pratt της απόλυτης και σχετικής αποστροφής κινδύνου. Οι Kenneth J.Arrow(1971,[1]) και John W.Pratt(1964,[23]) προτείνουν τα μέτρα αποστροφής κινδύνου τα οποία να μπορούν να παράγουν ποσοτικά αποτελέσματα, αντί απλώς ποιοτικά, στην οικονομική θεωρία. Εισάγουν την έννοια της αποστροφής κινδύνου, η οποία βασίζεται στην υπόθεση αναμενόμενης χρησιμότητας του Bernoulli, και είναι η κατάσταση κατά την οποία ο πράκτορας δεν είναι πρόθυμος να δεχτεί ένα στοίχημα το οποίο δεν είναι αναλογικά δίκαιο προς αυτόν. Συμβολικά γράφουν ότι Y είναι ο πλούτος-χρηματική αξία προϊόντος σε τιμή αγοράς, U(Y) είναι η συνολική χρησιμότητα του πλούτου Y και E(U(Y)) είναι η αναμενόμενη συνολική χρησιμότητα του πλούτου. Ο πράκτορας διαλέγει το προϊόν με την μεγαλύτερη E(U(Y)). Η συνάρτηση U(Y) είναι 2 φορές διαφορίσιμη και η πρώτη παράγωγος U'(Y) μας δείχνει την οριακή χρησιμότητα του πλούτου ενώ η δεύτερη U''(Y) μας δείχνει τον ρυθμό μεταβολής της οριακής χρησιμότητας σε σχέση με τον πλούτο. Για να ορίζεται ο δείκτης των Arrow-Pratt θεωρούμε τις εξής προϋποθέσεις:

i. $U'(Y)>0$,

ii. Τα $\lim_{Y\to 0} \mathrm{U(Y)}$ και $\lim_{Y\to\infty} \mathrm{U(Y)}$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένα,

iii. Το U'(Y) φθίνει όσο το Y αυξάνεται, που είναι η αναγκαία και επαρκή συνθήκη για αποστροφή κινδύνου.

Έτσι ο συντελεστής απόλυτης αποστροφής κινδύνου (absolute risk *aversion*-ARA) ενός πράκτορα i με συνάρτηση χρησιμότητας U και πλούτο Y ορίζεται ως:

$$\textbf{Μέτρο απόλυτης αποστροφής κινδύνου}: \rho_{A,i}(Y) = -\frac{U''(Y)}{U'(Y)}$$

Μπορούμε να πούμε λοιπόν ότι ο πράκτορας i αποστρέφεται τον κίνδυνο το ίδιο ή και περισσότερο από έναν άλλον πράκτορα j αν $\rho_{A,i}(Y) \geq \rho_{A,j}(Y)$.

Ο John W.Pratt(1964,[23]) ερμήνευσε το μέτρο απόλυτης αποστροφής κινδύνου ως τοπική αποστροφή κινδύνου ενός πράκτορα και το σχετίζει με το ύψος των ταμειακών διαθέσιμων του πράκτορα. Δηλαδή αν, για ένα δεδομένο Y, $\rho_{A,i}(Y) > \rho_{A,j}(Y)$ τότε ο i αποστρέφεται τοπικά τον κίνδυνο περισσότερο από τον j. Επίσης, ένας πράκτορας έχει μεγαλύτερη τοπική αποστροφή κινδύνου από έναν άλλον αν το ποσό των διαθεσίμων μετρητών του είναι μικρότερο σε σχέση με του άλλου. Λόγω της μεγάλης αποστροφής κινδύνου, ένας πράκτορας είναι διατεθειμένος να πληρώσει ένα ασφάλιστρο κινδύνου εξαιτίας της ανασφάλειας που νοιώθει, το οποίο θα είναι όλο και μεγαλύτερο όσο αυξάνεται η αποστροφή στον κίνδυνο. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι για ένα συγκεκριμένο ρίσκο το ασφάλιστρο είναι μικρότερο όσο περισσότερα είναι τα περιουσιακά στοιχειά του πράκτορα. Δηλαδή $\rho_A(Y)$ είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του Y αν και μόνο αν τα ταμειακά διαθέσιμα του πράκτορα είναι αρκετά πολλά καθώς και αν το ασφάλιστρο κινδύνου είναι μικρό. Το βασικό συμπέρασμα είναι ότι μειώνεται η ανασφάλεια που νοιώθει ένας πράκτορας όσο περισσότερα περιουσιακά στοιχειά έχει.

Στην συνέχεια ορίζεται ο συντελεστής σχετικής αποστροφής κινδύνου (relative risk aversion-RRA) ενός πράκτορα i με συνάρτηση χρησιμότητας U και πλούτο Y ως:

$$\textbf{Μέτρο σχετικής αποστροφής κινδύνου}: \rho_{R,i}(Y) = -Y\frac{U''(Y)}{U'(Y)}$$

Αυτός ο συντελεστής δηλώνει την συνάρτηση χρησιμότητας ως συνάρτηση του πλούτου. Είναι αδύνατο η στάση προς το κίνδυνο να είναι ανεξάρτητη από τον πλούτο του ανθρώπου, έτσι βλέπουμε και από τον τύπο ότι το ρ είναι ανάλογο του Y. Και τα δυο μέτρα είναι γενικευμένες σταθερές συναρτήσεις του

Y και είναι θετικά. Η σχετική αποστροφή κινδύνου είναι η ελαστικότητα της οριακής χρησιμότητας του πλούτου και είναι αμετάβλητη όχι μόνο ότι αφορά τις αλλαγές στις μονάδες χρησιμότητας αλλά και σε σχέση με τις μεταβολές στις μονάδες του πλούτου και η διακύμανση της σχετικής αποστροφής κινδύνου, λόγω του μεταβαλλόμενου πλούτου, είναι στενά συνδεδεμένη με το όριο της συνάρτησης χρησιμότητας.

Τέλος σημειώνονται περιπτώσεις αποστροφής κινδύνου ανάλογα με την μορφή που έχει η συνάρτηση απόλυτης ή σχετικής αποστροφής κινδύνου. Όλα τα μέτρα αποστροφής κινδύνου είναι συναρτήσεις του Y, αύξουσες, φθίνουσες και σταθερές. Έτσι, κατά αναλογία, οι διάφορες μορφές αποστροφής κινδύνου διακρίνονται σε αύξουσες, φθίνουσες και σταθερές. Η συμπεριφορά αυτών των μέτρων ως προς τις μεταβολές του Y είναι πολύ σημαντική για την πρόβλεψη της οικονομικής αντίδρασης ειδικά όταν η παρουσία της αβεβαιότητας είναι έντονη. Διακρίνουμε λοιπόν σε:

φθίνουσα αποστροφή κινδύνου:

- DARA (decreasing absolute risk aversion): η απόλυτη αποστροφή κινδύνου $\rho_A(Y)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του Y. Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $\frac{1}{a}x^a, a \neq 0$. Η προθυμία συμμετοχής σε στοιχήματα σταθερού μεγέθους αυξάνεται με τον πλούτο, με την έννοια ότι οι ζητούμενες αποδόσεις μειώνονται. Μπορούμε να καταλάβουμε ότι εάν η απόλυτη αποστροφή κινδύνου αυξανόταν με τον πλούτο, αυτό θα οδηγούσε στο γεγονός ότι όταν ένα άτομο γινόταν πλουσιότερο, θα μείωνε σημαντικά το ποσό των επικίνδυνων περιουσιακών στοιχείων που κρατούσε, λόγω της μεγάλης ανασφάλειας. Αυτό όμως βλέπουμε ότι δεν ισχύει.

- DRRA (decreasing relative risk aversion): η σχετική αποστροφή κινδύνου $\rho_A(Y)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του Y. Ο πράκτορας γίνεται λιγότερο αρνητικός για τον κίνδυνο που αναλαμβάνει με την επιλογή ενός στοιχήματος καθώς αυξάνεται ο πλούτος Y. Καταλαβαίνουμε ότι συνάρτηση αυτή ουσιαστικά παρουσιάζει συνεχή μείωση της αποστροφής του σχετικού κινδύνου ανάλογη της αύξησης του Y.

αύξουσα αποστροφή κινδύνου:

- IARA (increasing absolute risk aversion): η απόλυτη αποστροφή κινδύνου $\rho_R(Y)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του Y. Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $x+ax^2$, $x>0$. Σε αυτήν την περίπτωση αν ο πράκτορας αποδεχτεί ένα στοίχημα για Y πλούτο τότε θα αποδεχτεί το ίδιο στοίχημα για οποιοδήποτε άλλο Y' μικρότερο του Y. Καταλαβαίνουμε ότι το Y λειτουργεί σαν ένα όριο όπου καθιστά το πράκτορα να είναι διατεθειμένο να δεχτεί το στοίχημα για οποιοδήποτε άλλο Y' μικρότερό του Y καθώς ο κίνδυνος που αναλαμβάνει θα είναι πάντα μικρότερος.

- IRRA (increasing relative risk aversion): η σχετική αποστροφή κινδύνου $\rho_R(Y)$ είναι αύξουσα συνάρτηση του Y. Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η εκθετική $-e^{-ax}$, $a > 0$. Εδώ καταλαβαίνουμε, περισσότερο διαισθητικά, ότι εάν ο πλούτος και το μέγεθος του στοιχήματος αυξηθούν το ίδιο ποσοστιαία, η επιθυμία συμμετοχής στο στοίχημα θα μειωθεί. Μπορούμε να το περιγράψουμε με ένα παράδειγμα της νομισματικής οικονομίας. Όσο μεγαλύτερες οι διαταραχές στη ζήτηση χρήματος στην οικονομία μιας χώρας, τόσο περισσότερο αυξάνεται η σχετική αποστροφή κινδύνου των νοικοκυριών μιας χώρας.

σε σταθερή αποστροφή κινδύνου:

- CARA (constant absolute risk aversion): η απόλυτη αποστροφή κινδύνου $\rho_A(Y)$ είναι μια σταθερή συνάρτηση. Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η εκθετική $-e^{-ax}$, $a > 0$. Ένας πράκτορας με CARA συνάρτηση αποστρέφεται τον κίνδυνο με σταθερή παράμετρο α ανεξαρτήτως από τον πλούτο Y. Ουσιαστικά είναι μια συνάρτηση οι οποία αξιολογεί τα στοιχήματα, για το αν θα τα αποδεχτεί ή όχι ο πράκτορας, χωρίς καμία αναφορά στο Y. Στην περίπτωση αυτή ορίζεται μια τιμή α-cutoff σύμφωνα με την οποία ένα στοίχημα θα γίνει αποδεκτό από πράκτορες με παράμετρο συνάρτησης CARA μικρότερο από την τιμή α-cutoff, ενώ θα απορριφτεί από πράκτορες με παράμετρο συνάρτησης CARA μεγαλύτερο από την τιμή α-cutoff.

- CRRA (constant relative risk aversion): η σχετική αποστροφή κινδύνου $\rho_R(Y)$ πολλαπλασιασμένη με το Y είναι μια σταθερή συνάρτηση. Παράδειγμα τέτοιας συνάρτησης είναι η $(Y^{1-\rho} - 1)/(1-\rho)$ και αν ρ=1 προκύπτει η λογαριθμική lnx. Εκφράζει την ιδέα ότι οι πιο πλούσιοι άνθρωποι αποστρέφονται λιγότερο τον κίνδυνο. Ένας πράκτορας με CRRA συνάρτηση, με παράμετρο γ και πλούτο Y, αποδέχεται ένα στοίχημα G αν $Y+\min G>\gamma\cdot\rho_R(Y)$ και απορρίπτει αν $Y+\max G<\gamma\cdot\rho_R(Y)$. Δηλαδή μπορεί να αποδεχτεί το στοίχημα αν οδηγηθεί σε κέρδος και να μπορεί να απορρίψει όταν ξέρει ότι θα οδηγηθεί σε απώλεια χρημάτων.

2.2 ΔΕΙΚΤΗΣ ΜΕΤΡΗΣΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ AUMANN-SERRANO

Η έννοια της "επικινδυνότητας" είναι πανταχού παρούσα στις οικονομικές συζητήσεις. Οι επενδυτές λένε ότι μια επένδυση μπορεί να έχει την ευκαιρία για υψηλές αποδόσεις, αλλά να είναι "επικίνδυνη", ενώ μια άλλη μπορεί να είναι "ασφαλέστερη", αλλά να αποφέρει χαμηλότερες αποδόσεις. Για τα αμοιβαία κεφάλαια δίνονται χαρακτηρισμοί με οικονομικούς όρους ως "ασφαλή" ή "κεφάλαια επιχειρηματικού κινδύνου" ή "μπλε τσιπ", ενώ τα ομόλογα βαθμολογούνται με AAA, AA και ούτω καθεξής. Οι Robert J. Aumann και Roberto Serrano(2008), όπως και οι Kenneth J.Arrow(19671,[1]) και John W.Pratt(1964,[23]), προτείνουν έναν δικό τους δείκτη για την ποσοτικοποίηση της επικινδυνότητας. Δηλαδή να περιγράψουν τον κίνδυνο με αριθμούς και όχι με επίθετα ή γράμματα "βαθμολογίες". Αυτό που λέμε με λόγια "είναι επικίνδυνο για εμένα ενώ κάτι άλλο όχι", το δείχνουν με ένα νούμερο και ορίζουν επικίνδυνο για να μπορούμε να το συγκρίνουμε.

Όπως και στον δείκτη των Arrow-Pratt, έτσι και για τον δείκτη Aumann-Serrano συμβολίζουμε με Y τον πλούτο-χρηματική αξία προϊόντος σε τιμή αγοράς και με U(Y) η συνάρτηση χρησιμότητας του πλούτου Y. Οι Aumann και Serrano(2008,[3]) υποθέτουν ότι η U(Y) είναι μια Von Neumann-Morgenstern συνάρτηση χρησιμότητας και έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

i. αυστηρά μονότονη
ii. αυστηρά κοίλη
iii. συνεχώς διαφορίσιμη δύο φορές
iv. ορίζεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Ακόμη συμβολίζουμε το στοίχημα με g, που ορίζεται ως μια τυχαία μεταβλητή με πραγματική αξία. Οπότε θα λέμε ότι ένας πράκτορας με συνάρτηση χρησιμότητας U δέχεται ένα στοίχημα g για πλούτο Y αν E(U(Y+g))>U(Y), δηλαδή αν τα αναμενόμενα κέρδη από την συμμετοχή στο στοίχημα g είναι περισσότερα από την αξία του πλούτου Y. Σε διαφορετική περίπτωση ο πράκτορας απορρίπτει την συμμετοχή στο στοίχημα g.

Ο δείκτης μέτρησης κινδύνου των Aumann-Serrano συμβολίζεται με R και είναι μια θετική και με πραγματική αξία συνάρτηση. Ο δείκτης R είναι το μέτρο που παραθέτει τα στοιχήματα σε σειρά σύμφωνα με το πόσο επικίνδυνα είναι. Γράφουμε R(g)>R(h) και λέμε ότι το στοίχημα g είναι πιο επικίνδυνο από το στοίχημα h. Ο δείκτης πληρεί δυο αξιώματα, της δυαδικότητας και της θετικής ομοιογένειας για τα οποία γίνεται λόγος παρακάτω.

Σε αυτό το σημείο ορίζεται μια διμελής σχέση "■", η οποία θα μας βοηθήσει να περιγράψουμε τα δυο αξιώματα. Γράφουμε i■j και λέμε ότι ο πράκτορας i είναι ομοιόμορφα αποστρεφόμενος τον κίνδυνο, περισσότερο ή το ίδιο με τον πράκτορα j αν, οπότε ο πράκτορας i δέχεται ένα στοίχημα για ένα Y τότε και ο πράκτορας j δέχεται το ίδιο στοίχημα για οποιοδήποτε Y. Αντίστοιχα γράφουμε i□j και λέμε ότι ο πράκτορας i είναι ομοιόμορφα αποστρεφόμενος τον κίνδυνο περισσότερο από τον πράκτορα j (δηλαδή δεν συμπεριλαμβάνεται η ισότητα της αποστροφής κινδύνου των δυο πρακτόρων). Αυτή η διμελής σχέση έχει ως σκοπό να παραθέτει τους πράκτορες σε μια σειρά σύμφωνα με το πόσο αποστρέφονται το κίνδυνο.

<u>Αξίωμα δυαδικότητας:</u> Αν i□j, ο i δέχεται το στοίχημα g για Y και R(g)>R(h) τότε ο j δέχεται το στοίχημα h για Y.

<u>Αξίωμα θετικής ομοιογένειας:</u> R(t·g)=tR(g) για κάθε θετικό αριθμό t.

Γενικά, το αξίωμα δυαδικότητας μας λέει ότι αν ο πράκτορας που αποστρέφεται περισσότερο τον κίνδυνο δεχτεί το πιο επικίνδυνο στοίχημα τότε και ο πράκτορας που αποστρέφεται λιγότερο τον κίνδυνο θα δεχτεί το πιο ακίνδυνο στοίχημα. Ενώ το αξίωμα θετικής ομοιογένειας ενσωματώνει την θεμελιώδη φύση της επικινδυνότητας. Αν έχω ένα στοίχημα g τότε το 2g είναι 2 φορές πιο επικίνδυνο από το g, και κατ’ επέκταση το tg είναι t φορές πιο επικίνδυνο από το g. Καταλήγουμε να καλούμε τον R(g) ως την επικινδυνότητα του στοιχήματος g. Ο δείκτης R, που ορίζεται έτσι, ικανοποιεί τη δυαδικότητα και τη θετική ομοιογένεια και κάθε δείκτης που ικανοποιεί αυτά τα δύο αξιώματα είναι ένα θετικό πολλαπλάσιο του R. Και τα δύο αξιώματα είναι ουσιώδη, και η παράλειψη κάποιου αφορά δείκτες που δεν είναι θετικά πολλαπλάσια του R. Αλλά η δυαδικότητα είναι μακράν η πιο απαραίτητη, και μαζί μόνο με ορισμένες αδύναμες συνθήκες συνέχειας και μονοτονικότητας - αλλά όχι θετική ομοιογένεια - υποδηλώνει ότι ο δείκτης είναι κανονικά ισοδύναμος με τον R.

Το βασικό αποτέλεσμα των Aumann-Serrano για τον δείκτη μέτρησης κινδύνου R(g) περιγράφεται από ένα θεώρημα ως εξής:

Θεώρημα 2.2.1: Για κάθε στοίχημα g, υπάρχει ένας μοναδικός θετικός αριθμός R(g) τέτοιος ώστε $Ee^{-\frac{g}{R(g)}}=1$.

Στη συνέχεια αναφέρονται κάποιες βασικές ιδιότητες του δείκτη μέτρησης κίνδυνου σύμφωνα με τους Aumann-Serrano(2008,[3]) :

1. Ο κίνδυνος εξαρτάται μόνο από το στοίχημα.
2. Ο κίνδυνος μετράται σε δολάρια.
3. Ο δείκτης είναι μονότονος με σεβασμό στην στοχαστική κυριαρχία πρώτης και δεύτερης τάξης.
4. Ο δείκτης είναι συνεχής.
5. Ισχύει ότι $R(g^p)=R(g)$, με g ένα στοίχημα, p η πιθανότητα με τιμές $0 \le p \le 1$ και g^p σύνθετο στοίχημα που αποδίδει g με πιθανότητα p και 0 με πιθανότητα 1-p.

6. Η τιμή του κινδύνου για συμμετοχή σε δύο στοιχήματα βρίσκεται μεταξύ των τιμών κινδύνου του κάθε στοιχήματος, δηλαδή R(g)>R(g+h)>R(h) αν το g είναι πιο επικίνδυνο από το h.

7. Ισχύει R(g)= $\boldsymbol{Var}g/2\cdot\boldsymbol{E}g$ ή R(g)= $\sigma^2/2\mu$, αν ένα στοίχημα ακολουθεί κανονική κατανομή.

8. Ο κίνδυνος του αθροίσματος δύο στοιχημάτων ισούται με:
R(g+h) =r για δύο ανεξάρτητα στοιχήματα
R(g+h) = 2r για 'απόλυτα' θετικά συσχετισμένα στοιχήματα

R(g+h) ≈0 (ελάχιστος κίνδυνος) για 'απόλυτα' αρνητικά συσχετισμένα στοιχήματα.
Τέλος να σημειωθεί και η περίπτωση όπου g και h δεν είναι ανεξάρτητα R(g+h)≤R(g)+R(h).

9. Ο κίνδυνος θα πάρει τιμές στο διάστημα [0, +∞). Συγκεκριμένα διακρίνουμε τις ακραίες τιμές:
R(g)= 0 όταν δεν υπάρχουν τιμές αρνητικές για την αξία
R(g)= +∞ όταν **E**g≤0 (οι τιμές κατά μέση τιμή είναι αρνητικές)
Έτσι καταλαβαίνουμε ότι για R(g)<0 η βασική μας σχέση δεν έχει λύση.

10. Ο δείκτης είναι ευαίσθητος από την πλευρά ζημίας του στοιχήματος, δηλαδή η ιδέα του κινδύνου συνδέεται με ενδεχόμενη απώλεια και όχι με απόκτηση κέρδους. Ωστόσο δεν γίνεται καθαρή διάκριση μεταξύ ζημιών και κερδών, ο διαχωρισμός προκύπτει φυσικά από την ανάλυση.

Συμπερασματικά, έχουμε ορίσει έναν δείκτη που μετρά αριθμητικά την επικινδυνότητα ενός στοιχήματος με καθορισμένα αποτελέσματα σε δολάρια και καθορισμένες πιθανότητες. Ο δείκτης εκφράζεται σε δολάρια, είναι μονότονος σε σχέση με την στοχαστική κυριαρχία πρώτης και δεύτερης τάξης, είναι συνεχής, είναι θετικά ομοιογενής και ικανοποιεί μια προϋπόθεση δυαδικότητας που λέει, κατά προσέγγιση, ότι οι πράκτορες που είναι ομοιόμορφα πιο αποστρεφόμενοι τον κίνδυνο είναι λιγότερο πιθανό να δεχθούν τα στοίχημα που είναι πιο επικίνδυνα. Είναι ο μόνος δείκτης που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες, όπως θα δούμε και στο κεφάλαιο 3, όπου θα γίνει σύγκριση των δεικτών της βιβλιογραφίας.

Επιπλέον, ο δείκτης μπορεί να χαρακτηριστεί από την άποψη της σταθερής αποστροφής κινδύνου Arrow-Pratt - τόσο απόλυτης (CARA) όσο και σχετικής (CRRA). Η προσέγγιση των Aumann-Serrano γίνεται σφαιρικά, και όχι από την άποψη της τοπικής αντίληψης, και έτσι αναπτύσσουν τις εξής προτάσεις για το πότε ένας πράκτορας έχει CARA και CRRA.

<u>Πρόταση 2.2.1</u>: Ένας πράκτορας i έχει σταθερή απόλυτη αποστροφή κινδύνου (CARA) αν και μόνο αν για οποιοδήποτε τυχερό παιχνίδι g και δύο οποιαδήποτε επίπεδα πλούτου, είτε δέχεται το g σε αμφότερα τα επίπεδα είτε απορρίπτει το g σε αμφότερα τα επίπεδα.

Όπως έχει ήδη αναφερθεί για κάθε στοίχημα g, υπάρχει ακριβώς μια τιμή α-cutoff, έτσι ώστε το g να γίνεται αποδεκτό από πράκτορες CARA με μια μικρότερη παράμετρο α και να απορρίπτεται από πράκτορες CARA με μεγαλύτερη παράμετρο α. Οι Aumann και Serrano (2008) θεωρούν έναν πράκτορα με συνεχή απόλυτη αποστροφή κινδύνου (CARA) με συντελεστή α, ο οποίος είναι αδιάφορος μεταξύ αποδοχής και απόρριψης του g. Από το θεώρημα 2.2.1 και την CARA συνάρτηση $-e^{-ax}$, $a > 0$ έχουμε σαν αποτέλεσμα R(g) = $1/\alpha$. Δηλαδή, η επικινδυνότητα ενός στοιχήματος είναι το αντίστροφο του CARA ενός ατόμου που είναι αδιάφορο μεταξύ του να πάρει και να μην παίρνει αυτό το στοίχημα. Και πράγματι, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

<u>Θεώρημα 2.2.2</u>: Ο κίνδυνος R(g) ενός στοιχήματος g είναι αντίστροφος του αριθμού α τέτοιος ώστε ένα άτομο CARA με την παράμετρο α να είναι αδιάφορο μεταξύ λήψης και μη λήψης του στοιχήματος.

Πρόταση 2.2.2: Ένας πράκτορας i έχει σταθερή σχετική αποστροφή κινδύνου (CRRA) με παράμετρο γ και αρχικό πλούτο Y, και αποδέχεται ένα στοίχημα g αν Y+ ming >γR(g) και το απορρίπτει αν Y+max g<γR(g).

Στη συνέχεια, το $Y_γ(g)$ υποδηλώνει το σημείο cutoff, όποτε είναι σαφώς καθορισμένο, ενός πράκτορα CRRA με την παράμετρο γ να είναι εκείνη στην οποία είναι ακριβώς αδιάφορος μεταξύ της λήψης και της μη λήψης του στοιχήματος g. Τότε για γ≥1, η $Y_γ(g)$ είναι μια συνεχής φθίνουσα συνάρτηση του γ και αποδίδει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.3: $\lim_{\gamma\to\infty} Y_\gamma\,(g)/\gamma$=R(g).

Έτσι, για τους παράγοντες CRRA που αποστρέφονται πολύ τον κίνδυνο, το σημείο cutoff είναι ανάλογο προς την παράμετρο γ, ενώ αυτή η σταθερή αναλογία ισούται με την επικινδυνότητα. Τα αποτελέσματα αυτά πλησιάζουν τον «επιχειρησιακό» χαρακτηρισμό της επικινδυνότητας από την άποψη της γνωστής και ευρέως εφαρμοζόμενης CRRA έννοια.

2.3. ΕΝΑ ΜΕΤΡΟ ΕΠΙΚΙΝΔΥΝΟΤΗΤΑΣ ΠΙΟ ‘‘ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ’’

Οι Dean P. Foster και Sergiu Hart(2009,[10]), επηρεασμένοι από τον δείκτη μέτρησης κινδύνου Aumann-Serrano, προτείνουν ένα μέτρο επικινδυνότητας που είναι αντικειμενικό και εξαρτάται μόνο από το στοίχημα και όχι από τον υπεύθυνο λήψης αποφάσεων. Αυτό το μέτρο προσδιορίζει για κάθε στοίχημα το κρίσιμο επίπεδο πλούτου, κάτω από το οποίο είναι "επικίνδυνο" να αποδεχτεί κάποιος το στοίχημα. Έτσι αναπτύσσουν ένα απλό μοντέλο και δείχνουν ότι για κάθε στοίχημα g υπάρχει ένα μοναδικό κρίσιμο επίπεδο πλούτου R(g) τέτοιο ώστε η αποδοχή των στοιχημάτων g, όταν ο υπάρχων πλούτος είναι κάτω από το αντίστοιχο R(g), οδηγεί σε "κακές" εξελίξεις, όπως η μείωση του πλούτου ακόμη και πτώχευση μακροπρόθεσμα. Αντίθετα, η απόρριψη οδηγεί σε εγγυημένη αποφυγή πτώχευσης καθώς και σε πιθανή αύξηση του πλούτου μακροπρόθεσμα. Συνοπτικά, αυτό που δείχνουν είναι ότι υπάρχει ένας σαφής και ισχυρός τρόπος να προσδιοριστεί ακριβώς πότε γίνεται επικίνδυνο να δεχτείς ένα στοίχημα.

Πρώτο μέλημα των Foster και Hart(2009,[10]) είναι ο ορισμός των τεσσάρων βασικών εννοιών για την ανάπτυξη του μέτρου επικινδυνότητας. Ορίζονται το στοίχημα g, ο πλούτος Y, το κρίσιμου επίπεδο πλούτου, την στρατηγική S_q και η αποφυγή πτώχευσης.

- Οι Foster και Hart θεωρούν ότι ένα στοίχημα g είναι μια τυχαία μεταβλητή πραγματικής αξίας που μπορεί να πάρει αρνητική τιμή, καθώς η ζημία είναι πιθανή, και έχει θετική προσδοκία. Δηλαδή $P[g<0]>0$ και $E[g]>0$. Επιπλέον, κάθε στοίχημα μπορεί να πάρει πεπερασμένο αριθμό αξιών $x_1, x_2, \ldots, x_n$, με αντίστοιχη θετική πιθανότητα να πάρει την κάθε αξία $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Το σύνολο όλων των στοιχημάτων με αυτά τα χαρακτηριστικά το ονομάζουμε με G.
- Με Y θα συμβολίζεται ο πλούτος και με t οι χρονικές περίοδοι. Αυτός που παίρνει την απόφαση για ένα στοίχημα $g \in G$ έχει υπάρχων πλούτο Y_t και αν δεχτεί το στοίχημα θα έχει $Y_{t+1}=Y_t + g$ ενώ αν το απορρίψει θα έχει $Y_{t+1}=Y_t$. Ακόμη, οι Foster και Hart θεωρούν ότι σε χρόνο t ο υπεύθυνος λήψης αποφάσεων δεν ξέρει τίποτα σχετικά με το ποια μελλοντικά παίγνια που θα αντιμετωπίσει ούτε και πώς θα επηρεάσουν τις αποφάσεις του.
- Το υποψήφιο μέτρο κινδύνου θεωρείται ότι δίνει έναν κανόνα για το πότε να κρίνουμε ένα στοίχημα επικίνδυνο ή όχι. Ο κανόνας δίνεται από μια «οριακή τιμή» που εξαρτάται μόνο από την κατανομή του στοιχήματος. Έτσι χρησιμοποιούμε την συνάρτηση κρίσιμου πλούτου Q για κάθε στοίχημα $g \in G$ και ορίζεται στο διάστημα $Q(g) \in [0,\infty]$ με την ιδιότητα $Q(\lambda g)=\lambda Q(g)$, $\forall$ $\lambda>0$. Ο κανόνας που ισχύει, λοιπόν, είναι: το g είναι

αποδεκτό για Y αν Y≥Q(g) και απορρίπτεται αν Y< Q(g). Οι δύο ακραίες περιπτώσεις είναι αν Q(g)=0 το στοίχημα g γίνεται αποδεκτό για οποιοδήποτε επίπεδο πλούτου Y και αν Q(g)=∞ το στοίχημα πάντα απορρίπτεται.

- Η συμπεριφορά που προκαλείται από τον παραπάνω κανόνα, μέσω της συνάρτησης κρίσιμου πλούτου Q, την ονομάζουμε στρατηγική S_{q}. Έτσι, κάποιος που επιλέγει την στρατηγική S_q δέχεται το g στον πλούτο Q(g) και σε οποιονδήποτε υψηλότερο πλούτο, και απορρίπτει το g για χαμηλότερο πλούτο. Οπότε ακολουθούμε την στρατηγική S_q όταν δεχόμαστε ότι Q(g) είναι ο ελάχιστος πλούτος στον οποίο το g είναι αποδεκτό.
- Δεδομένου ότι ο κίνδυνος έχει να κάνει με την απώλεια χρημάτων και, τελικά, την πτώχευση, οι Foster και Hart μελετούν τον απλό στόχο της αποφυγής της πτώχευσης. Υποθέτουν ότι ο αρχικός πλούτος είναι θετικός και ότι ο δανεισμός δεν επιτρέπεται. Η πτώχευση συμβαίνει όταν ο πλούτος καθίσταται μηδενικός ή, γενικότερα, όταν συγκλίνει στο μηδέν, δηλαδή, $\lim_{t\to\infty} Y_t = 0$. Έτσι η στρατηγική s εγγυάται αποφυγή πτώχευσης για ένα σύνολο στοιχημάτων G και για οποιοδήποτε υπάρχων πλούτο Y_1 αν η πιθανότητα της πτώχευσης είναι 0, δηλαδή, $P(\lim_{t\to\infty} Y_t = 0)=0$. Έτσι, ανεξάρτητα από το ποιος είναι ο αρχικός πλούτος και ποια θα είναι η ακολουθία των στοιχημάτων, η στρατηγική εγγυάται ότι ο πλούτος δεν θα φτάσει ποτέ στο μηδέν (με πιθανότητα ένα).

Εν συνεχεία, μετά τους αναλυτικούς ορισμούς των βασικών εννοιών που χρησιμοποιούν οι Foster και Hart(2009,[10]), καθορίζουν το R(g) ως ένα μέτρο επικινδυνότητας ενός στοιχήματος g. Αναπτύσσουν το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 2.3.1: για κάθε στοίχημα g∈G υπάρχει ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός R(g) τέτοιος ώστε μια απλή στρατηγική $s \equiv s_q$ με συνάρτηση κρίσιμου πλούτου Q εγγυάται την αποφυγή της πτώχευσης αν κι μόνο αν $Q(g) \geq R(g)$ για κάθε στοίχημα $g \in G$. Η $R(g)$ καθορίζεται με μοναδικό τρόπο από την παρακάτω σχέση:

$$E[\log(1 + \frac{1}{R(g)} g)] = 0.$$

Η συνθήκη $Q(g) \geq R(g)$ μας λέει ότι το ελάχιστο επίπεδο πλούτου $Q(g)$, που έχουμε ήδη αναφέρει ότι είναι ο ελάχιστος πλούτος στον οποίο το g είναι αποδεκτό, πρέπει να είναι υψηλότερος ή ίσος με το $R(g)$. Αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το g απορρίπτεται για όλα τα επίπεδα πλούτου κάτω από το $R(g)$, δηλαδή, όταν $Y < R(g)$. Έτσι διατυπώνεται η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.3.1: μια απλή στρατηγική s εγγυάται την αποφυγή της πτώχευσης αν και μόνο αν για κάθε στοίχημα $g \in G$ ισχύει:

η s απορρίπτει το g για όλα τα $Y < R(g)$.

Η παραπάνω πρόταση δεν μας λέει το πότε αποδεχόμαστε ουσιαστικά ένα στοίχημα αλλά μας λέει απλώς πότε μια απλή στρατηγική πρέπει να το απορρίψει με σκοπό να αποφευχθεί η πτώχευση. Έχουμε ήδη αναφερθεί στο ότι ανάλογα με τις τιμές του Q καταλαβαίνουμε αν θα απορρίψουμε ή θα αποδεχτούμε ένα στοίχημα. Έτσι, μια ‘‘minimal’’ στρατηγική ακολουθεί τον κανόνα ότι δεν δεχόμαστε κανένα στοιχήματα, καθώς η τιμή του Q είναι $Q(g)=\infty$ για κάθε στοίχημα g και μια ‘‘maximal’’ στρατηγική ακολουθεί τον κανόνα ότι δεχόμαστε όλα τα στοιχήματα όσο ο πλούτος είναι τουλάχιστον τόσο μεγάλος όσο η επικινδυνότητα του στοιχήματος, καθώς η τιμή του Q είναι $Q(g)=R(g)$ για κάθε στοίχημα g. Αυτές οι δύο στρατηγικές, καθώς και οποιαδήποτε άλλη στρατηγική στο μεταξύ, εγγυώνται την αποφυγή πτώχευσης. Επομένως, το $R(g)$ μπορεί να θεωρηθεί ως ένα είδος ελάχιστου "αποθεματικού" που απαιτείται για το στοίχημα g, ώστε να πούμε ότι αυτό το στοίχημα g θα γίνεται αποδεκτό με σιγουριά.

Στη συνέχεια αναφέρονται κάποιες βασικές ιδιότητες του μέτρου επικινδυνότητας σύμφωνα με τους Foster-Hart (2009,[10]):
Για κάθε στοίχημα $g \in G$ και $h \in G$ ισχύει:

1. Αν g και h ακολουθούν την ίδια κατανομή τότε R(g)=R(h)

2. Η ιδιότητα της ομοιογένειας, δηλαδή $R(\lambda g) = \lambda R(g)$ για κάθε $\lambda > 0$

3. R(g)>L(g), όπου L(g) είναι το μέγιστο απώλεια από το στοίχημα g

4. $R(g+h) \leq R(g)+R(h)$

5. $R(\lambda g+(1-\lambda) h) \leq \lambda R(g)+(1-\lambda) R(h)$ για κάθε $0<\lambda\leq 1$

   Σημειώνεται εδώ, ότι οι ιδιότητες 4 και 5 ταυτίζονται αν και μόνο αν g και h είναι αναλογικά, δηλαδή αν $h= \lambda g$ για κάποιο θετικό λ.

6. Αν g και h είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, τότε ισχύει $\min[R(g),R(g)] < R(g+h) < R(g)+R(h)$

7. $R(\lambda * g) = R(g)$ για κάθε $0<\lambda\leq 1$

   Για την ιδιότητα αυτή δίνεται και ο παρακάτω ορισμός:
   κάθε στοίχημα μπορεί να πάρει τις αξίες $x_1, x_2,..., x_n$, με αντίστοιχη πιθανότητα $p_1, p_2,..., p_n$. Λέμε λ-απομείωση του g όταν για $0<\lambda<1$ ορίζεται $\lambda * g$ το στοίχημα που παίρνει τις ίδιες αξίες $x_1, x_2,..., x_n$ αλλά με αντίστοιχη πιθανότητα $\lambda p_1, \lambda p_2,..., \lambda p_n$

8. Το μέτρο κινδύνου μας είναι μονοτονικό με σεβασμό στην στοχαστική κυριαρχία πρώτης και δεύτερης τάξης, και ισχύει η παρακάτω πρόταση:

Πρόταση 2.3.2: αν το g έχει στοχαστική κυριαρχία πρώτης ή δεύτερης τάξης στο h τότε R(g)<R(h).

9. Το μέτρο είναι συνεχές και ισχύει : Αν $g_n \xrightarrow{D} g \in G$ και $L(g_n) \longrightarrow L(g)$ όσο $n \longrightarrow \infty$, τότε $R(g_n) \longrightarrow R(g)$ όσο $n \longrightarrow \infty$.

   Για αυτήν την ιδιότητα χρειάστηκε να θεωρήσουμε μια ακολουθία στοιχημάτων $(g_n)_{n=1,2,\ldots} \subset G$ με ομοιόμορφα οριοθετημένες τιμές, δηλαδή υπάρχει ένα πεπερασμένο K τέτοιο ώστε $|g_n| \leq K$, για όλα τα n., καθώς μας χρειάζεται και ο παρακάτω ορισμός:
   Μια ακολουθία στοιχημάτων $g_n \subset G$ συγκλίνει στην κατανομή του στοιχήματος $g \in G$ και ορίζεται $g_n \rightarrow g$ αν $E[\varphi(g_n)] \longrightarrow E[\varphi(g)]$ για κάθε πραγματική συνάρτηση φ συνεχώς ομοιόμορφη.

Ανακεφαλαιώνουμε, λοιπόν, ότι μόνο η κατανομή του στοιχήματος καθορίζει την επικινδυνότητα του και είναι αριθμητικά πάντα μεγαλύτερο από την μέγιστη απώλεια. Είναι ένα μέτρο συνεχές και μονοτονικό με σεβασμό στην στοχαστική κυριαρχία πρώτης και δεύτερης τάξης. Ακόμη το μέτρο της επικινδυνότητας είναι θετικά ομοιογενές βαθμού ένα, η λ-απομείωση δεν επηρεάζει την επικινδυνότητα και τέλος η επικινδυνότητα του αθροίσματος των ανεξάρτητων παιχνιδιών βρίσκεται ανάμεσα στο ελάχιστο των δύο κινδύνων και το άθροισμα τους.

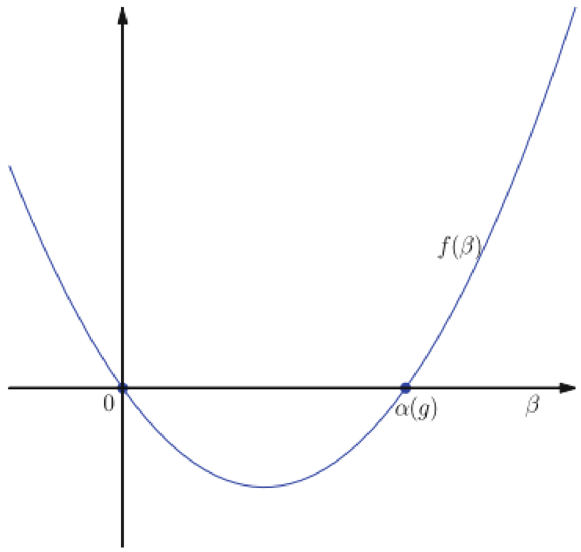
2.4 ΔΕΙΚΤΗΣ ΕΛΚΥΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Μια διαφορετική ματιά στον δείκτη μέτρησης κινδύνου Aumann-Serrano έχει ο Minqiang Li(2014,[20]), ο οποίος απέδειξε ένα γενικευμένο δυαδικό αποτέλεσμα για τον δείκτη.

Αρχικά, όμοια με τους άλλους δείκτες, ο Minqiang Li(2014,[20]) ορίζει την συνάρτηση χρησιμότητας U με τα εξής χαρακτηριστικά:

i. αυστηρά μονότονη
ii. αυστηρά κοίλη
iii. συνεχώς διαφορίσιμη δύο φορές
iv. ορίζεται στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Συνεχίζει με το στοίχημα g, το οποίο ορίζεται ως μια τυχαία μεταβλητή σε έναν χώρο πιθανοτήτων όπου μπορεί να πάρει πραγματικές τιμές και να ισχύει Eg θετικό και πεπερασμένο, και P(g<0)>0. Σε αντίθεση με τον δείκτη των Aumann-Serrano, δεν παίρνει αναγκαστικά τιμές πεπερασμένες, δεν θεωρείται ότι ανήκουν σε φραγμένο σύνολο. Επιπλέον κάθε πράκτορας i λαμβάνει αποφάσεις σχετικά με ένα στοίχημα g ανάλογα με την συνάρτηση χρησιμότητάς του U_i και ακολουθείται η σύμβαση ότι η αποδοχή του στοιχήματος σημαίνει αυστηρή προτίμηση και δεν περιλαμβάνει αδιαφορία. Οπότε, με αυτές τις συνθήκες καταλήγει στο θεώρημα 2.2.1 των Aumann-Serrano και υποθέτει ότι η εξίσωση E$e^{-\frac{g}{R(g)}}$=1 θα μπορούσε και να μην πάρει θετική λύση. Σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε R(g)= +∞**.** Όταν λοιπόν η επικινδυνότητα είναι ίση με το άπειρο, ο M.Li ορίζει τον αντίστροφο του R(g), τον δείκτη ελκυστικότητας του στοιχήματος, α(g)≡ $1/R(g)$. Αν γνωρίζουμε ότι ο δείκτης ελκυστικότητας ενός στοιχήματος είναι μεγαλύτερος από τη τοπική απόλυτη αποστροφή κινδύνου σε όλο το εύρος πλούτου, τότε το στοίχημα είναι αποδεκτό από τον πράκτορα. Αυτό το αποτέλεσμα είναι χρήσιμο στην πράξη, καθώς επιτρέπει τη δυνατότητα γρήγορης απόφασης σχετικά με το αν πρέπει να δεχτούμε ή να απορρίπτουμε ένα στοίχημα χωρίς λεπτομερή υπολογισμό της αναμενόμενης χρησιμότητας. Προσαρμόζοντας τον τύπο του θεωρήματος 2.2.1 δημιουργείται η f(β)≡**E**$e^{-\beta g}$-1. Στη συνέχεια παρουσιάζεται το γράφημα της f(β) για τις διάφορες τιμές καθώς και την σχέση του με το α(g).



ΕΙΚΟΝΑ 1: Γράφημα συνάρτησης f(β) $\equiv \mathbf{E}e^{-\beta g}$-1.

Η f(β) θα πάρει αρνητικές τιμές αν και μόνο αν 0<β<α(g)

Η f(β) θα πάρει θετικές τιμές αν και μόνο αν β<0 ή β>α(g)

Η f(β) θα πάρει την τιμή μηδέν αν και μόνο αν το β=α(g)
Παρατηρούμε ότι στην τρίτη περίπτωση ο δείκτης ελκυστικότητας είναι αυτός που ικανοποιεί το θεώρημα 2.2.1 των Aumann-Serrano.

Σε αυτό το σημείο, με την βοήθεια του δείκτη ελκυστικότητας, αναπτύσσεται μια αναγκαία και επαρκή προϋπόθεση για την αποδοχή ή την απόρριψη ενός στοιχήματος, ώστε να προχωρήσουμε στο γενικευμένο δυαδικό αποτέλεσμα του Minqiang Li. Δέχεται κατά προσέγγιση ότι εάν ένα παίγνιο g είναι αποδεκτό στον πλούτο Yi, τότε η ελκυστικότητά του πρέπει να ξεπεράσει τουλάχιστον ορισμένες τιμές που παίρνει η τοπική αποστροφή κινδύνου στην περιοχή D(Yi, g), όπου D το κλειστό διάστημα [Yi+ess inf g, Yi+ess sup g]. Από την άλλη, αν η ελκυστικότητα του στοιχήματος είναι μεγαλύτερη από όλες τις τιμές που παίρνει η τοπική αποστροφή κινδύνου στην περιοχή D(Yi, g), τότε γίνεται αποδεκτό. Εδώ αναφέρεται ότι αυτό το διάστημα είναι το μικρότερο κλειστό διάστημα των πραγματικών αριθμών που περιέχει ουσιαστικά όλες τις τιμές w + g και ο λόγος που πρέπει να εξετάσουμε τα ευαίσθητα άκρα είναι επειδή αν οι τιμές του g ανήκουν σε μηδενικά σύνολα του $\mathcal{P}$ δεν έχουν καμία επίδραση στον υπολογισμό της αναμενόμενης χρησιμότητας.

Πρόταση 2.4.1: α) Αν ο i δέχεται το στοίχημα g για Yi, τότε υπάρχει $Yi \in D(Yi, g)$ τέτοιο ώστε α(g)>ρ_i(Y).
Συγκεκριμένα πρέπει $a(g) > \inf_{w \in D(Yi,g)} \rho_i(Y)$. Αντίθετα αν ο i απορρίπτει το στοίχημα g για Yi, τότε υπάρχει $Yi \in D(Yi, g)$ τέτοιο ώστε α(g)<ρ_i(Y).
Συγκεκριμένα πρέπει $a(g) < \sup_{w \in D(Yi,g)} \rho_i(Y)$.

β) Αν α(g)≥ρ_i(Y) για κάθε $Yi \in D(Yi, g)$, με αυστηρή ανισότητα για τουλάχιστον ένα Y, τότε ο i δέχεται το στοίχημα g για Yi. Και αντίστοιχα αν α(g)≤ρ_i(Y) για κάθε $Yi \in D(Yi, g)$, με αυστηρή ανισότητα για τουλάχιστον ένα Y, τότε ο i απορρίπτει το στοίχημα g για Yi.

Έχοντας ορίσει, λοιπόν, τον δείκτη ελκυστικότητας και έχοντας δώσει την αναγκαία και επαρκή προϋπόθεση για την αποδοχή ή την απόρριψη ενός στοιχήματος, ο Li καταλήγει στην πρόταση 2.4.2, την γενίκευση του αξιώματος της δυαδικότητας, το οποίο αξίωμα έχει αναφερθεί στην ενότητα 2.2 αναλυτικά. Η γενίκευση αυτή δηλώνει ότι για το αποτέλεσμα της δυαδικότητας δεν είναι απαραίτητη η ομοιόμορφη αποστροφή κινδύνου για όλες τις πραγματικές τιμές, καθώς και ότι δεν είναι απαραίτητο να έχουμε τις δύο αυστηρές ανισότητες στις συνθήκες για τη δυαδικότητα, δηλαδή i□j και R(g)>R(h), με συνέπεια να προκύπτουν πιο ασθενείς οι σχέσεις R(g)≥R(h) και i■j.

Πρόταση 2.4.2: Για g και h στοιχήματα στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ με R(h)≤R(g)<∞, θεωρούμε: $\inf_{Y \in D(Y,g)} \rho_i$(Y) ≥ $\inf_{Y \in D(Y,h)} \rho_j$(Y). Τότε, αν ο i δέχεται το στοίχημα g για Y_i, ο j δέχεται το στοίχημα h για Y_j. Επιπλέον, αν ο j απορρίπτει το στοίχημα h για Y_j, ο i απορρίπτει το στοίχημα g για Y_i.

Τέλος, ο Minqiang Li(2014) αναπτύσσει έναν εναλλακτικό χαρακτηρισμό των DARA και IARA συναρτήσεων χρησιμότητας, οι οποίοι αποδεικνύονται με χρήση του οικονομικού δείκτη των Aumann και Serrano και με βάση την έννοια της ελκυστικότητας. Ο χαρακτηρισμός ανά διαστήματα είναι πιθανώς πιο χρήσιμος στην περίπτωση αυτή, καθώς ορισμένοι οικονομολόγοι έχουν επιφυλάξεις για αυτές τις συναρτήσεις χρησιμότητας.

Πρόταση 2.4.3: Μια συνάρτηση χρησιμότητας είναι DARA αν και μόνο αν κάθε στοίχημα που γίνεται αποδεκτό σε ένα επίπεδο Y, θα γίνεται αποδεκτό σε όλα τα υψηλοτέρα επίπεδα Y΄, Y΄>Y. Γενικότερα θεωρούμε ότι για $Y_k<Y_r$, μια συνάρτηση χρησιμότητας απόλυτης αποστροφής κινδύνου είναι φθίνουσα στο $[Y_k,Y_r]$ αν και μόνο αν κάθε στοίχημα g γίνεται αποδεκτό σε ένα επίπεδο Y_L,θα γίνεται αποδεκτό και σε κάθε υψηλότερο επίπεδο Y_H, όσο $D(Y_L,g)\in [Y_k,Y_r]$ και $D(Y_H,g)\in [Y_k,Y_r]$.

Πρόταση 2.4.4: Μια συνάρτηση χρησιμότητας είναι IARA αν και μόνο αν κάθε στοίχημα που γίνεται αποδεκτό σε ένα επίπεδο Y, θα γίνεται αποδεκτό σε οποιοδήποτε μικρότερο επίπεδο Y΄, Y>Y΄. Γενικότερα θεωρούμε ότι για $Y_k<Y_r$, μια συνάρτηση χρησιμότητας απόλυτης αποστροφής κινδύνου είναι αύξουσα στο $[Y_k,Y_r]$ αν και μόνο αν κάθε στοίχημα g γίνεται αποδεκτό σε ένα επίπεδο Y_H,θα γίνεται αποδεκτό και σε οποιοδήποτε μικρότερο επίπεδο Y_L, όσο $D(Y_L,g)\in [Y_k,Y_r]$ και $D(Y_H,g)\in [Y_k,Y_r]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^{Ο}

3.1 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΕΙΚΤΗ AUMANN-SERRANO ΜΕ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΑΠΟΣΤΡΟΦΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ARROW-PRATT

Αφού ορίσαμε αναλυτικά τους δείκτες της βιβλιογραφίας στο 2^{ο} κεφάλαιο, και μετά την αναλυτική περιγραφή των ιδιοτήτων τους, εξετάζουμε σε αυτήν τη ενότητα ομοιότητες και διαφορές. Αρχικά θα κάνουμε μια σύγκριση ανάμεσα στον δείκτη μέτρησης κινδύνου των Aumann και Serrano και το μέτρο αποστροφής κινδύνου Arrow και Pratt. Αναφέρουμε ότι το μέτρο αποστροφής κινδύνου Arrow-Pratt παρουσιάζεται ως ρ^{AP} και ο δείκτης κινδύνου του Aumann και Serrano ως R^{AS}.

Εννοιολογικά, το αν ένα άτομο δέχεται ένα στοίχημα εξαρτάται από δύο ξεχωριστούς παράγοντες:

(i) τα χαρακτηριστικά του στοιχήματος και, ειδικότερα, το πόσο επικίνδυνο είναι και

(ii) τα χαρακτηριστικά του προσώπου και, ειδικότερα, τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να διακινδυνεύσει.

Η προσέγγιση των Arrow(1971,[1]) και Pratt(1964,[23]) αναφέρεται στο στοιχείο ii με τον ορισμό της αποστροφής έναντι του κινδύνου, η οποία είναι μια ‘‘προσωπική’’, υποκειμενική έννοια, ανάλογα με τη συνάρτηση χρησιμότητας του εν λόγω ατόμου. Έτσι λέμε ότι οι δείκτες αποστροφής κινδύνου που ανέπτυξαν οι Arrow και Pratt έχουν έναν σαφές υποκειμενικό χαρακτήρα, καθώς αξιοποιούν υποκειμενικές συναρτήσεις χρησιμότητας. Όμως αυτό που δεν ορίζουν είναι, ουσιαστικά, την επικινδυνότητα, δηλαδή, δεν αναφέρονται καθόλου στο στοιχείο i. Είναι σαν να μιλάμε για υποκειμενική αντίληψη χρόνου για παράδειγμα "αυτή η ταινία ήταν πολύ μεγάλη" χωρίς να έχει αντικειμενικό μέτρο χρόνου δηλαδή "3 ώρες" ή για αποστροφή θερμότητας ή κρύου για παράδειγμα "κάνει πολύ κρύο εδώ" χωρίς αντικειμενικό μέτρο θερμοκρασία "5 βαθμούς κελσίου". Αντίθετα η προσέγγιση των Aumann και Serrano(2008,[3]) αναφέρεται στο στοιχείο i: αναπτύσσει ένα δείκτη κινδύνου των στοιχημάτων. Και αύτη μπορούμε να πούμε ότι είναι η βασική διαφορά των δυο προσεγγίσεων. Η ιδέα των Aumann και Serrano βασίζεται στην αποστροφή κινδύνου και στο ότι αναμένουμε από τα άτομα που αποστρέφονται λιγότερο κίνδυνο να δέχονται τα πιο επικίνδυνα στοιχήματα. Χαρακτηρίζουμε, λοιπόν, το ρ^{AP} υποκειμενικό μέτρο ενώ ο R^{AS} θεωρείται αντικειμενικός δείκτης, καθώς η επικινδυνότητα, σαν έννοια, είναι αντικειμενική, είναι η ίδια για όλα τα άτομα. Εξ' αιτίας αυτής της διαφοράς παρατηρούμε ότι το ρ^{AP} σαν τύπος, είναι συνάρτηση του πλούτου Y και της συνάρτησης χρησιμότητας u(Y) ενώ ο R^{AS} εξαρτάται μόνο από το στοίχημα g. Μια ακόμη διαφορά μεταξύ των ρ^{AP}-R^{AS} , είναι ότι ενώ και οι δυο θέτουν τους πράκτορες σε μια σειρά ανάλογα με το πόσο αποστρέφονται τον κίνδυνο, ο ρ^{AP} μεν, πραγματοποιεί την διάταξη για ένα συγκεκριμένο και δοσμένο επίπεδο πλούτου, ο R^{AS} δε, πραγματοποιεί την διάταξη για οποιοδήποτε επίπεδο πλούτου. Το ότι ο δείκτης των Aumann και Serrano δίνει αποτέλεσμα για οποιοδήποτε επίπεδο πλούτου επιτυγχάνεται μέσω του αξιώματος της δυαδικότητας που διέπει τον δείκτη R^{AS} και αποτελεί βασικό χαρακτηριστικό του. Η αποστροφή κινδύνου Arrow-Pratt είναι μια «τοπική» αντίληψη σε ότι αφορά τη στάση ενός πράκτορα απ' έναντι στα απεριόριστα μικρά στοιχήματα με συγκεκριμένο πλούτο. Αντίθετα, η έννοια της αποστροφής κινδύνου των Aumann και Serrano είναι «παγκόσμια» από δύο απόψεις: ο R^{AS} (i)εφαρμόζεται σε στοιχήματα αυθαίρετου πεπερασμένου μεγέθους, (ii)τα οποία μπορούν να ληφθούν σε οποιοδήποτε πλούτο. Έτσι ο δείκτης R^{AS} φαίνονται πιο άμεσος, απλός και φυσικός, αφού δεν υπάρχει καμία κατάσταση περιορισμού. Τέλος, σημειώνουμε την διαφορά ότι ο ρ^{AP} έχει μια ολική διάταξη, αφού οι Arrow και Pratt ορίζουν έναν αριθμητικό δείκτη ενώ από τον δείκτη R^{AS} παίρνουμε μερική διάταξη.

3.2 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΕΙΚΤΗ AUMANN - SERRANO ΜΕ ΤΟ ΜΕΤΡΟ ΕΠΙΚΙΝΔΥΝΟΤΗΤΑΣ FOSTER - HART

Συγκεκριμένα, σε αυτή την ενότητα, θα κάνουμε μια σύγκριση ανάμεσα στον δείκτη μέτρησης κινδύνου των Aumann και Serrano και το μέτρο επικινδυνότητας των Foster και Hart. Αναφέρουμε επίσης ότι θα παρουσιάζονται το R^{FH} ως το μέτρο της επικινδυνότητας Foster και Hart και το R^{AS} ως ο δείκτης κινδύνου του Aumann και Serrano.

Οι προσεγγίσεις του Aumann και του Serrano(2008,[3]) βασίζονται σε ένα αξίωμα δυαδικότητας, το οποίο ουσιαστικά υποστηρίζει ότι οι πράκτορες που αποστρέφονται λιγότερο το κίνδυνο αποδέχονται τα πιο επικίνδυνα στοιχήματα. Μαζί με τη θετική ομοιογένεια πρώτου βαθμού, οδηγούνται στον ορισμό του δείκτη R^{AS} με μοναδικό τρόπο:

$$\mathrm{E}e^{-\frac{g}{R^{AS}(g)}}=1 \qquad (1)$$

Οι Aumann και Serrano αναπτύσσουν τον δείκτη τους, ο οποίος συνδέει το κάθε στοίχημα $g \in G$ με έναν μοναδικό θετικό αριθμό $R^{AS}>0$. Θεωρούν έναν πράκτορα με συνεχή απόλυτη αποστροφή κινδύνου (CARA) με συντελεστή α, ο οποίος είναι αδιάφορος μεταξύ αποδοχής και απόρριψης του g και έχει συνάρτηση χρησιμότητας $-e^{-ax},\ a > 0$ με αποτέλεσμα $R^{AS}=1/α$.

Αντίστοιχα, και οι Foster και Hart(2009,[10]) δείχνουν ότι για κάθε στοίχημα υπάρχει ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός $R^{FH}>0$ ο οποίος ορίζεται με μοναδικό τρόπο από την παρακάτω εξίσωση:

$$\mathrm{E}[\log(1+\frac{1}{R^{FH}(\mathrm{g})}\mathrm{g})]=0 \qquad (2)$$

Το R^{FH} είναι αριθμός τέτοιος ώστε μια απλή στρατηγική με συνάρτηση κρίσιμου πλούτου Q να εγγυάται ότι δεν υπάρχει πτώχευση εάν και μόνο αν $Q \geq R^{FH}$. Η συνθήκη αυτή λέει ότι το ελάχιστο επίπεδο πλούτου Q στο οποίο το στοίχημα g γίνεται αποδεκτό πρέπει να είναι R^{FH} ή μεγαλύτερο, και κατά συνέπεια απορρίπτεται αν είναι μικρότερο του R^{FH} .

Οι δύο προσεγγίσεις φαίνονται αρκετά διαφορετικές από πολλές απόψεις, τόσο από εννοιολογική όσο και από πρακτική άποψη. Έτσι κάνοντας την σύγκριση των δύο φυσικών μέτρων κινδύνου αποδίδονται οι ακόλουθες διαφορές:

1) Ο R^{AS} είναι ένας δείκτης επικινδυνότητας, ο οποίος βασίζεται στη σύγκριση των στοιχημάτων από την άποψη της επικινδυνότητας. Ο R^{FH} είναι ένα μέτρο της επικινδυνότητας, που καθορίζεται ξεχωριστά για κάθε τυχερό παιχνίδι.

2) Ο R^{AS} βασίζεται σε πράκτορες με αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας που αποστρέφονται τον κίνδυνο. Ο R^{FH} δεν ασχολείται καθόλου με τις συναρτήσεις χρησιμότητας και την αποστροφή κινδύνου και συγκρίνει μόνο δύο καταστάσεις: πτώχευση έναντι μη πτώχευσης ή, ακόμη καλύτερα χρεοκοπία έναντι συνεχούς ανάπτυξης ή απώλεια έναντι μη απώλειας.

3) Ο R^{AS} βασίζεται στο κρίσιμο επίπεδο αποφυγής κινδύνου, ενώ ο R^{FH} βασίζεται στο κρίσιμο επίπεδο πλούτου. Επιπλέον, στο των Aumann και Serrano, η σύγκριση ανάμεσα στους πράκτορες, για το αν αποστρέφονται "περισσότερο" ή "λιγότερος" τον κίνδυνο, πρέπει να γίνει για όλα τα επίπεδα πλούτου. Έχουμε λοιπόν μια ενδιαφέρουσα "δυαδικότητα": ο R^{AS} αναζητά τον κρίσιμο συντελεστή αποστροφής κινδύνου ανεξάρτητα από τον πλούτο, ενώ ο R^{FH} αναζητά τον κρίσιμο πλούτο ανεξάρτητα από την αποστροφή κινδύνου.

4) Ο R^{FH} αποδίδει ένα νούμερο το οποίο είναι ένα καλά καθορισμένο μέτρο, ενώ οι Aumann και Serrano για να καθορίσουν τον R^{AS} δίνουν την ελευθερία στην επιλογή οποιουδήποτε θετικού πολλαπλάσιου του R^{AS}. Επιπλέον, ο αριθμός R^{FH} έχει μια σαφή επιχειρησιακή ερμηνεία σε σχέση με το R^{AS}.

5) Ότι αφορά τις ιδιότητες των R^{FH} και R^{AS} υπάρχουν διαφορές ως προς την συνέχεια του κάθε δείκτη, δηλαδή ο δείκτης των Aumann και Serrano είναι πάντα συνεχής ενώ το μέτρο των Foster και Hart είναι συνεχής με αναγκαία την συνθήκη $L(g_n)$ να συγκλίνει στο L(g). Επιπλέον παρατηρείται διαφορά και στην περίπτωση που εξετάζεται το τι συμβαίνει στη επιλογή δυο ανεξάρτητων στοιχημάτων g και h από τον ίδιο πράκτορα, δηλαδή: $\min[R^{FH}(g), R^{FH}(g)] < R^{FH}(g+h) < R^{FH}(g) + R^{FH}(h)$ και $R^{AS}(g) < R^{AS}(g+h) < R^{AS}(h)$.

Ωστόσο οι δύο προσεγγίσεις έχουν πολλές κοινές ιδιότητες και μπορούν και δίνουν σχεδόν παρόμοιες απαντήσεις για στοιχήματα με μεγάλη επικινδυνότητα, όπως θα δείξουμε και παρακάτω. Έτσι R^{FH} και R^{AS} εκφράζονται σε δολάρια, είναι μονότονοι σε σχέση με την στοχαστική κυριαρχία πρώτης και δεύτερης τάξης και είναι θετικά ομοιογενείς. Τέλος, για να επαληθεύσουμε τα παρόμοια αποτελέσματα ελέγχουμε τις σειρές Taylor των (1),(2):

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{E}e^{-\frac{g}{R^{AS}(g)}}=1 \\[2ex] \mathrm{E}\left[\log\left(1+\frac{\mathrm{g}}{R^{FH}(\mathrm{g})}\right)\right]=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 1-e^{-\frac{g}{R^{AS}(g)}}=0 \\[2ex] \log\left(1+\frac{\mathrm{g}}{R^{FH}(\mathrm{g})}\right)=0 \end{array}\right\} \xLeftrightarrow{g/R(g)=x}$$

$$\left.\begin{array}{l} 1-e^{(-x)} = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3-\frac{1}{24}x^4+\cdots \\[2ex] \mathrm{Log}(1+x) = x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+\cdots \end{array}\right\}$$

Οι δύο σειρές διαφέρουν μόνο από τους όρους τρίτης τάξης και μετά. Αυτό υποδηλώνει ότι όταν το g/R(g) είναι μικρό - δηλαδή, όταν η επικινδυνότητα είναι μεγάλη σε σχέση με το στοίχημα - οι δύο προσεγγίσεις μπορούν να δώσουν παρόμοιες απαντήσεις.

3.3 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΕΙΚΤΗ AUMANN - SERRANO ΚΑΙ ΔΕΙΚΤΗ ΕΛΚΥΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Για να ολοκληρώσουμε την σύγκριση των δεικτών της εργασίας, προχωράμε στην περιγραφή των διαφορών του δείκτη μέτρησης κινδύνου των Aumann-Serrano και του δείκτη ελκυστικότητας. Ο Minqiang Li(2014,[20]) θέλει να εξετάσει περιπτώσεις που δεν προϋποθέτει ο δείκτης μέτρησης κινδύνου των Aumann-Serrano R^{AS}. Έτσι ορίζει τον δείκτη ελκυστικότητας $α=1/R^{AS}$ και εξετάζει στοιχήματα με διαφορετικά χαρακτηριστικά, από αυτά των στοιχημάτων που εφαρμόζεται ο δείκτης των Aumann και Serrano R^{AS}. Οπότε καταλαβαίνουμε ότι είναι διαφορετικοί εξ ορισμού, παρ' όλο που και οι δυο δείκτες έχουν ως σκοπό να βοηθήσουν τον πράκτορα στην απόφαση της αποδοχής ή απόρριψης ενός στοιχήματος. Έτσι αποδίδονται οι εξής διαφορές:

1) Ο Minqiang Li εξετάζει στοιχήματα με τιμές μη πεπερασμένες, οι οποίες ανήκουν σε μη φραγμένο σύνολο και απαραίτητα η αναμενόμενη τιμή τους είναι πεπερασμένη και θετική, ενώ ο δείκτης R^{AS} αφορά στοιχήματα με πεπερασμένες θετικές τιμές. Αυτή η ουσιαστική διαφορά στην έρευνά του, τον οδηγεί στην ανάπτυξη του δείκτη ελκυστικότητας.

2) Ο R^{AS} βασίζεται στη σύγκριση των στοιχημάτων από την άποψη της επικινδυνότητας με αποτέλεσμα να μπορούν οι πράκτορες να αποφασίσουν αν θα δεχτούν ή θα απορρίψουν τα στοιχήματα. Για το ίδιο αποτέλεσμα, ο α απαιτεί να ελέγξουμε και την ελκυστικότητα του κάθε στοιχήματος σε σχέση με την απόλυτη αποστροφή κινδύνου που έχει ο κάθε πράκτορας.

3) Ο δείκτης των Aumann και Serrano, R^{AS} είναι ομοιογενής βαθμού 1 ενώ ο δείκτης ελκυστικότητας, α, είναι ομοιογενής βαθμού -1, καθώς είναι ο αντίστροφος του R^{AS}.

4) Τέλος, απαραίτητες προϋποθέσεις για την δυαδικότητα, που πληρεί ο R^{AS}, είναι η ομοιόμορφη αποστροφή κινδύνου των πρακτόρων για όλες τις πραγματικές τιμές , καθώς και οι δύο αυστηρές ανισότητες i□j και R(g)>R(h). Διαφορετική όμως παρουσιάζεται η προσέγγιση του Li. Για το αποτέλεσμα της δυαδικότητας δεν είναι απαραίτητη η ομοιόμορφη αποστροφή κινδύνου για όλες τις πραγματικές τιμές αλλά αρκεί να ισχύει για ένα διάστημα. Επίσης δεν είναι απαραίτητες οι δύο αυστηρές ανισότητες. Ουσιαστικά οι Aumann και Serrano απαιτούν μια κατάσταση όπου μπορούμε να εφαρμόσουμε τη δυαδικότητα σε ολόκληρη την πραγματική γραμμή, ενώ η προσέγγιση του Li αρκείται στο να εφαρμόζει τη δυαδικότητα σε ένα διάστημα.

3.4 ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΔΕΙΚΤΗ AUMANN - SERRANO ΚΑΙ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΔΙΑΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΜΕΤΡΩΝ ΕΠΙΚΙΝΔΥΝΟΤΗΤΑΣ

Σε αυτή την ενότητα εξετάζουμε κάποιους άλλους διαδεδομένους δείκτες, και τους συγκρίνουμε με τον βασικό δείκτη της εργασίας, τον δείκτη μέτρησης κινδύνου των Aumann-Serrano. Εκ των προτέρων θα αναφέρουμε ότι οι δείκτες που θα παρουσιαστούν δεν είναι μονοτονικοί σε σχέση με την κυριαρχία πρώτης τάξης, χαρακτηριστική διαφορά όλων, με τον δείκτη Aumann-Serrano.

Ως δείκτες κινδύνου έχουν προταθεί πολλά ***μέτρα διασποράς*** όπως:

- η τυπική απόκλιση - σ
- η διακύμανση - σ^2,
- η μέση απόλυτη απόκλιση - $E|g\text{-}E(g)|$,
- το ενδοτεταρτημοριακό εύρος- Q_3 - Q_1

Αυτοί οι δείκτες μετράνε μόνο τη διασπορά της τιμής ενός συγκεκριμένου περιουσιακού στοιχείου ή ενός χαρτοφυλακίου ή ενός στοιχήματος, λαμβάνοντας ελάχιστα υπόψη τις πραγματικές τους αξίες, όπως συμβαίνει με τον δείκτη R^{AS}. Δηλαδή αν θεωρήσουμε δύο στοιχήματα g και g+c, c=θετική σταθερά, τότε τα μέτρα διασποράς ως δείκτες θα μετρήσουν το g+c τόσο επικίνδυνο όσο και το g, παρά το γεγονός ότι θα αποδώσει σίγουρα περισσότερο από το g. Μπορούν να βαθμολογήσουν ένα στοίχημα g πιο επικίνδυνο από το h ακόμα κι αν το h είναι σίγουρο ότι θα αποδώσει περισσότερο από το g.

Ένας ακόμα πιο ξένος δείκτης είναι η ***εντροπία***. Υπολογίζεται από τον τύπο $[-\sum_{\kappa} \rho_k log_2 \rho_k]$, με ρ_κ να είναι οι πιθανότητες των διαφορετικών τιμών ενός στοιχήματος. Η εντροπία αγνοεί εντελώς τις τιμές του στοιχήματος καθώς λαμβάνει υπόψη μόνο τις πιθανότητες τους. Έτσι ένα στοίχημα με τρεις εξίσου πιθανές (αλλά διαφορετικές) τιμές έχει εντροπία $\log_2 3$, ανεξάρτητα από αυτές τις τιμές. Φαίνεται ότι είναι προφανές ότι τέτοιου είδους μέτρα διασποράς δεν μπορούν να ενσωματωθούν εύκολα στα οικονομικά. Έτσι, όπως ανέφεραν οι Hanoch και Levy (1970,[12]) η αναγνώριση της επικινδυνότητας με οποιοδήποτε μέτρο διασποράς κρίνεται ως μη ασφαλής επιλογή.

Στη συνέχεια θα δούμε τον δείκτη ***τυπική απόκλιση/μέση τιμή***, ο οποίος σχετίζεται με τον δείκτη Sharpe, ένα μέτρο των "προσαρμοσμένων στους κινδύνους αποδόσεων" που χρησιμοποιείτε συχνά για την αξιολόγηση της επιλογής χαρτοφυλακίου(Welch 2008,[29]). Συγκεκριμένα, λέμε ότι κάθε χαρτοφυλάκιο ταυτίζεται με ένα στοίχημα g. Ο δείκτης Sharpe του χαρτοφυλακίου ορίζεται ως σ/μ, όπου μ είναι η μέση τιμή των τιμών που παίρνει το g και σ η τυπική απόκλισή τους. Αυτός ο δείκτης δεν είναι μονοτονικός σε σχέση με την κυριαρχία πρώτης τάξης, σε αντίθεση με τον δείκτη R^{AS}. Ας δούμε με ένα απλό παράδειγμα:

θεωρούμε στοιχήματα g και h με τα εξής δεδομένα:

$$\text{το g αποδίδει} \begin{cases} -1\$ \text{ με πιθανότητα } 0.02 \\ 1\$ \text{ με πιθανότητα } 0.98 \end{cases} \text{, και } \mu=0.96,\ \sigma=0.28 \text{ άρα } \sigma/\mu \cong 0.29$$

$$\text{το h αποδίδει} \begin{cases} -1\$ \text{ με πιθανότητα } 0.02 \\ 1\$ \text{ με πιθανότητα } 0.49 \text{, και } \mu=1.45,\ \sigma=7\sqrt{3}/\ 20 \text{ άρα } \sigma/\mu \cong 0.42 \\ 2\$ \text{ με πιθανότητα } 0.49 \end{cases}$$

Επομένως το h χαρακτηρίζεται πιο επικίνδυνο από το g παρόλο που h έχει στοχαστική κυριαρχία πρώτης τάξης στο g. Επιπλέον, για ένα ε θετικό αλλά μικρό, το h + ε είναι βέβαιο ότι θα αποδώσει περισσότερο από το g αλλά σε κάθε διαφορετική περίπτωση θεωρείται πιο επικίνδυνο από το g.

Ένας άλλος δείκτης που χρησιμοποιείται ευρέως από τις τράπεζες και τους επαγγελματίες του χρηματοπιστωτικού τομέα για τη διαχείριση του κινδύνου χαρτοφυλακίου είναι ο ***VaR*** (value at risk). Στα οικονομικά και στα χρηματοοικονομικά, είναι μια μέτρηση που δηλώνει πώς η αξία στην αγορά ενός περιουσιακού στοιχείου ή χαρτοφυλακίου περιουσιακών στοιχείων είναι πιθανόν να μειωθεί στη διάρκεια μιας συγκεκριμένης χρονικής περιόδου υπό συγκεκριμένες συνθήκες. Εξαρτάται από την παράμετρο που ονομάζεται επίπεδο εμπιστοσύνης. Το VaR, με περίοδο διακράτησης *χ* ημερών και διάστημα εμπιστοσύνης *ψ*%, ορίζει την πιθανότητα οι απώλειες δεδομένου χαρτοφυλακίου να υπερβούν ένα συγκεκριμένο ποσό σε συνηθισμένες συνθήκες αγοράς δεδομένης μιας χρονικής περιόδου. Για να γίνει πιο κατανοητή η έννοια δίνεται το εξής παράδειγμα:

> Έστω ένα χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων. Η αξία του στην ευρωπαϊκή αγορά σήμερα είναι γνωστή, αλλά η αυριανή αξία του άγνωστη. Η επενδυτική τράπεζα που διαχειρίζεται το χαρτοφυλάκιο μπορεί να αναφέρει πως έχει VaR 1-ημέρας ίσο με €5 εκατομμύρια σε

95% διάστημα εμπιστοσύνης. Αυτό σημαίνει πως η τράπεζα αναμένει, με πιθανότητα 95%, η αξία του χαρτοφυλακίου να μην μειωθεί περισσότερο από €5 εκατομμύρια κατά τη διάρκεια 1 ημέρας, με άλλα λόγια: υπάρχει πιθανότητα 5% να μειωθεί η αξία του χαρτοφυλακίου περισσότερο από €5 εκατομμύρια κατά τη διάρκεια μιας ημέρας. Πιο απλά, η τράπεζα μπορεί να αναμένει πως στις 95 περίπου από τις 100 ημέρες συνηθισμένων συναλλαγών, το χαρτοφυλάκιο θα έχει απόδοση είτε θετική είτε αρνητική (αλλά οι ζημίες δεν θα είναι μεγαλύτερες από €5 εκ. την ημέρα). Αυτό σημαίνει από την άλλη, ότι η τράπεζα πρέπει να αναμένει ότι οι απώλειες θα είναι μεγαλύτερες από €5 εκ. σε 5 από κάθε 100 ημέρες συνηθισμένων συναλλαγών.

Αυτός ο δείκτης αγνοεί πλήρως την πλευρά κέρδους του στοιχήματος, και αυτή είναι με σημαντική διαφορά του VaR με τον R^{AS}. Και ακόμη και στην πλευρά των ζημιών, επικεντρώνεται μόνο σε εκείνη την απώλεια που «χτυπά» το επίπεδο εμπιστοσύνης. Επιπλέον, εξαρτάται από το επίπεδο εμπιστοσύνης που είναι μια παράμετρος της οποίας η "κατάλληλη" τιμή δεν είναι σαφής, σε αντίθεση με τον R^{AS} ο οποίος παίρνει καθορισμένες τιμές ώστε να δώσει την επικινδυνότητα του κάθε στοιχήματος. Τέλος, το VaR παραβιάζει και αυτό την μονοτονία σε σχέση με την κυριαρχία πρώτης τάξης, μια ιδιότητα που έχει ο R^{AS}.

Τέλος, πολλοί από αυτούς που μελετούσαν τα διάφορα μέτρα κινδύνου, συμφώνησαν ότι κάποιες ιδιότητες έπρεπε να ικανοποιούνται από κοινού. Έτσι ο Artzner et al. (1999,[2]) ομαδοποίησε κάποια μέτρα κινδύνου και τα ονόμασε συνεκτικά. Τα ***συνεκτικά μέτρα κινδύνου***, λοιπόν, ορίζονται ως εξής: ένα μέτρο κινδύνου ονομάζεται συνεκτικό όταν ικανοποιεί τις εξής τέσσερεις ιδιότητες:

I. Αν $X \geq 0$ τότε $\rho(X) \leq 0$ για κάθε X (Μονοτονία). Η ιδιότητα της μονοτονίας μας λέει ότι αν η απόδοση μιας κατάστασης Y είναι μεγαλύτερη μιας άλλης κατάστασης της κατάστασης X, τότε ο κίνδυνος που ενέχει η Y θα πρέπει να είναι μικρότερος του κινδύνου της κατάστασης X.

II. $\rho(X+Y) \leq \rho(X)+\rho(Y)$ για κάθε X, Y (subadditivity). Το αξίωμα της subadditivity είναι φυσική απαίτηση. Γίνεται καλύτερα αντιληπτό με παραδείγματα όπου θεωρήσουμε ότι ο πράκτορας είναι μια ‘‘επιχείρηση’’ και πρέπει να λάβει αποφάσεις: Αν μια εταιρεία αναγκάζεται να απαιτήσει επιπλέον κεφάλαιο που δεν ικανοποιεί αυτή την ιδιότητα, τότε υπάρχει πιθανότητα η εταιρεία να χωριστεί σε δύο ξεχωριστές θυγατρικές εταιρείες ή μπορούμε να υποθέσουμε ότι δύο υπάλληλοι σε μία εταιρεία υπολογίζουν με αποκεντρωτικό τρόπο, τα μέτρα $\rho(X)$, $\rho(Y)$ των κινδύνων που έχουν λάβει. Αν η συνάρτηση ρ έχει αυτή την ιδιότητα, ο υπεύθυνος των δύο υπαλλήλων μπορεί να βασιστεί στο ότι η ποσότητα $\rho(X) + \rho(Y)$ είναι μια εφικτή εγγύηση που σχετίζεται στο παγκόσμιο κίνδυνο X+Y.

III. $\rho(\lambda X)=\lambda\rho(X)$ για κάθε X και $\lambda>0$ (θετική ομοιογένεια). Το αξίωμα την θετικής ομοιογένειας μας διασφαλίζει ότι ο κίνδυνος του στοιχήματος ή του χαρτοφυλακίου θα είναι ανάλογος με το μέγεθός του.

IV. $\rho(X+m) = \rho(X)-m$ για κάθε X και m πραγματικό αριθμό (translation invariance). Η ιδιότητα της translation invariance είναι αυτή που μας εξασφαλίζει ότι πράγματι, θα είναι η μικρότερη ποσότητα που αν προστεθεί στη κατάσταση X, αυτή θα ανήκει στο σύνολο αποδεκτών καταστάσεων.

Παρατηρώντας τις ιδιότητες των συνεκτικών μέτρων κινδύνου, καταγράφουμε ομοιότητες αλλά και διαφορές με τον δείκτη των Aumann και Serrano, R^{AS}. Η ομοιότητα που έχουν είναι να υπακούν στην ιδιότητα της μονοτονίας και στα αξιώματα της θετικής ομοιογένειας και της subadditivity. Επίσης εκφράζονται και μετράνε τον κίνδυνο σε δολάρια. Τέλος, θα αναφέρουμε τις διαφορές τους. Τα συνεκτικά μέτρα κινδύνου παραβιάζουν το αξίωμα της δυαδικότητας των Aumann και Serrano(2008,[3]), καθώς και την μονοτονία σε σχέση με την κυριαρχία πρώτης και δεύτερης τάξης, μια από τις βασικές ιδιότητες του R^{AS}. Τα στοιχήματα που ελέγχουν συνεκτικά μέτρα κινδύνου μπορούν να πάρουν αρνητικές τιμές, κάτι που για τον R^{AS} δεν ισχύει, αφού αφορά στοιχήματα με μόνο θετικές αξίες. Παρατηρούμε ότι ο δείκτης των Aumann και Serrano, R^{AS}, δεν έχει την ιδιότητα iv των συνεκτικών μέτρων κινδύνου, τα οποία όμως με αυτές τις τέσσερεις ιδιότητες είναι αρκετά μακριά από το να μπορούν να καθορίσουν ένα συγκεκριμένο δείκτη για την μέτρηση της επικινδυνότητας, έναν ενιαίο δείκτη, αλλά ουσιαστικά, ως μέτρα, λαμβάνουν τη μορφή οικογενειών.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο}

4.1 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΔΕΙΚΤΏΝ ΣΕ ΛΟΤΑΡΙΕΣ

Πιο κατανοητοί θέλουμε να γίνουν οι δείκτες μέσα από απλές εφαρμογές σε διάφορες λοταρίες με διαφορετικά ενδεχόμενα κάθε φορά και διαφορετικές πιθανότητες να συμβεί το κάθε ενδεχόμενο. Θα δούμε λοταρίες με δυο ενδεχόμενα, για τις οποίες θα υπολογίσουμε τους δείκτες R-AS (Aumann and Serrano 2008,[3]), R-FH(Foster and Hart 2009,[10]) και την αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας Arrow(1971,[1]) and Pratt(1964,[23]) EU-AP, και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα. Στη συνέχεια θα δούμε λοταρίες με τρία και τέσσερα πιθανά ενδεχόμενα για τα οποία θα υπολογιστούν οι ίδιοι δείκτες και θα τα βάλουμε σε μια σειρά επικινδυνότητας. Έτσι θα μπορούμε να δούμε αν πράγματι όλοι οι δείκτες μπορούν να μας ενημερώσουν για το ποια περίπτωση είναι η πιο επικίνδυνη και ποια περίπτωση είναι η πιο ασφαλής για έναν πράκτορα.

Οι δείκτες Aumann-Serrano και Foster-Hart προκύπτουν από την επίλυση των εξισώσεων

$$\mathrm{E}e^{-\frac{g}{R^{AS}(g)}}=1 \quad \text{και} \quad \mathrm{E}[\log(1+\frac{1}{R^{FH}(\mathrm{g})}\mathrm{g})]=0, \text{ αντίστοιχα.}$$

Το g εμφανίζει την πιθανή απόδοση της λοταρίας κάθε φορά. Ότι αφορά το μέτρο αποστροφής κινδύνου Arrow και Pratt, καθώς ο ίδιος ο τύπος μας δείχνει το πόσο αποστρέφεται ο κάθε πράκτορας τον κίνδυνο ενός συγκεκριμένου στοιχήματος, μας εξυπηρετεί να υπολογίζουμε την αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας της κάθε λοταρίας για να δούμε αν, η ωφέλεια που θα έχει η κάθε μια, μπορεί να συμφωνήσει με το ύψος της επικινδυνότητας που της προσδίδουν οι δείκτες R-AS και R-FH. Θα υποθέσουμε έναν επενδυτή με σταθερή σχετική αποστροφή κινδύνου CRRA, θα χρησιμοποιήσουμε την συνάρτηση U(g)= $\frac{g^{1-\rho}-1}{1-\rho}$ και θα βρούμε για κάθε λοταρία την αναμενόμενη ωφέλεια EU-AP. Η παράμετρος ρ μετρά το βαθμό αποστροφής του σχετικού κινδύνου και στην εφαρμογή αυτή θα οριστεί ρ=4 καθώς δεν θέλουμε να πάρουμε ακραίες τιμές. Εμπειρικές μελέτες βασισμένες στην πραγματική συμπεριφορά των ατόμων έδωσαν σταθερά εκτιμήσεις στην περιοχή 1 έως 4 για το συντελεστή αποστροφής σχετικού κινδύνου, με μέση την τιμή 2.

Οι αποδόσεις στις λοταρίες μετρούνται σε ευρώ. Οι αρνητικές εμφανίζονται με κόκκινο και οι θετικές με πράσινο. Εμφανίζονται αναλυτικά για τι ποσοστό είναι πιθανό να πραγματοποιηθεί το κάθε ενδεχόμενο. Σε κάθε παράδειγμα τα κελιά με πράσινο χρώμα μας πληροφορούν για το ποια περίπτωση λοταρίας είναι πιο ασφαλής να επενδύσουμε.

Λοταρίες με δύο ενδεχόμενα

- Με ίδια πιθανότητα να συμβούν 0,5-0,5

1ο ενδεχόμενο 0,5	2ο ενδεχόμενο 0,5	R-AS	R-FH	EU-AP
-2	10	2,9584	2,4997	0,354
-2	3	6,0324	5,9151	0,348

- Με πιθανότητα να συμβούν 0,3-0,7 (αυξάνεται η πιθανότητα να συμβεί το καλό ενδεχόμενο)

1ο ενδεχόμενο 0,3	2ο ενδεχόμενο 0,7	R-AS	R-FH	EU-AP
-2	10	1,6629	2,0321	0,3456
-2	3	1,9101	2,3429	0,3372

- Με πιθανότητα να συμβούν 0,7-0,3 (αυξάνεται η πιθανότητα να συμβεί το κακό ενδεχόμενο)

1° ενδεχόμενο 0,7	**2° ενδεχόμενο 0,3**	**R-AS**	**R-FH**	**EU-AP**
-2	10	7,1171	5,6287	0,3624
-2	3	668,3120	330,5515	0,3588

Στην περίπτωση αυτή που έχουμε να επιλέξουμε ανάμεσα σε 2 λοταρίες των οποίων τα ενδεχόμενα πραγματοποιούνται με αντίστοιχη πιθανότητα, παρατηρούμε ότι πράγματι όλοι οι δείκτες συμφωνούν για το ποια λοταρία θα διάλεγε ένας πράκτορας. Φαίνονται με έντονο χρώμα στους πίνακες ότι σε κάθε περίπτωση, η χαμηλότερη επικινδυνότητά που αποδίδεται από τους R-AS και R-FH συμφωνεί με την πιο υψηλή αναμενόμενη ωφέλεια της λοταρίας. Μια παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε σε ότι αφορά το ύψος της επικινδυνότητας είναι ότι:

Συμπέρασμα 1: όσο η απόσταση των τιμών του καλού και του κακού σεναρίου μεγαλώνει, η επικινδυνότητα μικραίνει ενώ όσο η απόσταση αυτή μικραίνει η επικινδυνότητα ενός στοιχήματος αυξάνεται.

Δηλαδή οι δείκτες επικινδυνότητας R-AS και R-FH μπορούν να μας πληροφορήσουν για το ότι ‘δεν αξίζει’ να συμμετέχουμε σε ένα στοίχημα με μεγάλη πιθανότητα μικρού κέρδους δεδομένης της πιθανότητας να χάσουμε έστω και λίγα χρήματα.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση που ένας πράκτορας συμμετέχει σε μια λοταρία της οποίας τα ενδεχόμενα παίρνουν ίδιες τιμές αποδόσεων αλλά με διαφορετική κατανομή πιθανών ενδεχόμενων.

	1ο ενδεχόμενο -2	2ο ενδεχόμενο 10	R-AS	R-FH	EU-AP
Πιθανότητα	0.5	0,5	2,9584	2,4997	0,354
	0,3	0,7	1,6629	2,0321	0,3456
	0,7	0,3	7,1171	5,6287	0,3624

Σε αυτήν την περίπτωση βλέπουμε ότι οι δείκτες R-AS και R-FH συμφωνούν στο ποια λοταρία είναι πιο επικίνδυνη και ποια είναι πιο ασφαλής. Όμως η αναμενόμενη ωφέλεια που αποδίδεται σε κάθε λοταρία δεν συμφωνεί με αυτά τα αποτελέσματα.

Συμπέρασμα 2: η αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας αποδίδει μεγαλύτερη ωφέλεια σε ένα στοίχημα που δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα να χάσει ένας πράκτορας 2 ευρώ, ενώ αποδίδει μικρότερη ωφέλεια σε ένα στοίχημα που δίνει μισές πιθανότητες να χάσει τα ίδια χρήματα.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε αυτά τα συμπεράσματα σε λοταρίες τριών και τεσσάρων ενδεχομένων για να επαληθεύσουμε αν οι R-AS, R-FH δεν συμφωνούν στα αποτελέσματά τους με την EU-AP. Παίρνουμε τυχαίες τιμές με τυχαίες κατανομές κάθε φορά.

Λοταρίες με τρία ενδεχόμενα

	1ο ενδεχόμενο	2ο ενδεχόμενο	3ο ενδεχόμενο	R-AS	R-FH	EU-AP
Α	-2 με πιθανότητα 0,3	-1 με πιθανότητα 0,3	11 με πιθανότητα 0,4	3,083	2,416	0,44573
Β	-2 με πιθανότητα 0,1	-1 με πιθανότητα 0,6	7 με πιθανότητα 0,3	3,749	2,919	0,5372
Γ	20 με πιθανότητα 0,1	-1 με πιθανότητα 0,8	10 με πιθανότητα 0,1	4,765	2,728	0,5999

Στην περίπτωση αυτή βλέπουμε ότι η Α λοταρία σε σχέση και με τις άλλες δύο είναι η λιγότερο επικίνδυνη σύμφωνα με τους R-AS και R-FH ενώ η Γ φαίνεται να έχει την μεγαλύτερη αναμενόμενη ωφέλεια σύμφωνα με την EU-AP. Συγκρίνοντας τις λοταρίες Β και Γ, βλέπουμε ότι και οι R-AS και R-FH δεν συμφωνούν στο ποια είναι πιο επικίνδυνη.

Συμπέρασμα 3: Τα δυο θετικά σενάρια επιδρούν αρνητικά στην μέτρηση επικινδυνότητας R-FH κάνοντάς την να μειώνεται, ακόμα και όταν το αρνητικό σενάριο είναι πιο πιθανό αλλά μικρότερης αξίας.

Σημειώνουμε εδώ ότι η βασική δουλεία του δείκτη R-FH είναι να μας δείχνει πόσο επικίνδυνο είναι η λοταρία να μας οδηγήσει σε κανονική πτώχευση και όχι απλά να συγκρίνει μεταξύ τους κάποιες λοταρίες για να γίνει η διάταξη από την πιο ασφαλή στην πιο επικίνδυνη.

Ωστόσο, συνεχίζοντας την ίδια σύγκριση ανάμεσα στις λοταρίες Β και Γ, παρατηρούμε ότι συμφωνούν ο R-FH με την EU-AP. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι το μεγάλο κέρδος με μικρή πιθανότητα έναντι μιας πιο πιθανής αλλά μικρής ζημίας ίσως και να μην μας βλάψει τόσο. Ο R-FH το εκφράζει με την πολύ μικρή επικινδυνότητα να οδηγηθούμε σε πτώχευση ενώ η EU-AP το εκφράζει με την όχι μικρή ωφέλεια που θα έχουμε αν επενδύσουμε στην Γ λοταρία.

Στην συνέχεια θα αναπτύξουμε ένα παράδειγμα ακόμα, με λοταρίες τριών ισοπίθανων ενδεχομένων, για να γίνει πιο κατανοητό το συμπέρασμα 1.

	1ο ενδεχόμενο 1/3	**2ο ενδεχόμενο 1/3**	**3ο ενδεχόμενο 1/3**	**R-AS**	**R-FH**	**EU-AP**
Δ	-2	2	9	2,0912	2,2345	0,3331
Ε	-5	2	9	7,6582	8,0338	0,3201
Ζ	-2	-1	9	4,18	3,241	0,4581
Η	-2	2	6	2,1393	2,3609	0,3328

Σε αυτό το παράδειγμα, στις Ε,Ζ και Η έχουμε μειώσει κάθε φορά το επίπεδο ενός από τα ενδεχόμενα στο ίδιο ποσό. Στην Ε το χειρότερο σενάριο μειώθηκε κατά 3. Στη Ζ το δεύτερο χειρότερο ενδεχόμενο μειώθηκε κατά 3 και στην Η το υψηλότερο πιθανό κέρδος μειώθηκε κατά 3. Μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι όταν η αλλαγή γίνεται στο χαμηλότερο επίπεδο δηλαδή εκεί που προβλέπεται ζημιά ή μικρό κέρδος, οι δείκτες R-AS και R-FH αυξάνονται περισσότερο από ό, τι στις άλλες περιπτώσεις. Επομένως, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

Συμπέρασμα 4: οι δείκτες R-AS και R-FH είναι πολύ πιο ευαίσθητοι στην αύξηση της ζημιάς παρά σε μια αντίστοιχη μείωση στα κέρδη.

Για την αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας βλέπουμε ότι επαληθεύεται και σε αυτό το παράδειγμα το παράδοξο συμπέρασμα 2. Στο στοίχημα Ζ που δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα να χάσει ένας πράκτορας αποδίδει την μεγαλύτερη ωφέλεια. Θα το δούμε πιο αναλυτικά στο επόμενο παράδειγμα.

Λοταρίες με τέσσερα ενδεχόμενα

	1º ενδεχόμενο	2º ενδεχόμενο	3º ενδεχόμενο	4º ενδεχόμενο	R-AS	R-FH	EU-AP
Θ	-2 με πιθανότητα 0,3	5 με πιθανότητα 0,1	4 με πιθανότητα 0,25	1 με πιθανότητα 0,35	2,287	2,551	0,2276
Ι	-2 με πιθανότητα 0,5	5 με πιθανότητα 0,1	4 με πιθανότητα 0,25	1 με πιθανότητα 0,15	5,767	5,456	0,3426
Κ	-1 με πιθανότητα 0,25	-2 με πιθανότητα 0,25	7 με πιθανότητα 0,25	5 με πιθανότητα 0,25	2,392	2,323	0,4262
Λ	-1 με πιθανότητα 0,25	-2 με πιθανότητα 0,25	1 με πιθανότητα 0,25	2 με πιθανότητα 0,25	38,499	25,230	0,3333

Εξετάζουμε και την περίπτωση όπου οι λοταρίες έχουν 4 πιθανά ενδεχόμενα. Θα βάλουμε με σειρά προτίμησης τις λοταρίες.

Σύμφωνα με τον R-AS: Θ>Κ>Ι>Λ

Σύμφωνα με τον R-FH: Κ>Θ>Ι>Λ

Σύμφωνα με την EU-AP: Κ>Ι>Λ>Θ

Παρατηρούμε ότι η διάταξη για τις Ι,Κ,Λ είναι ίδια για όλους τους δείκτες, συμφωνούν δηλαδή για το ποια λοταρία είναι η πιο επικίνδυνη και ποια λιγότερο.

Συγκρίνοντας τις λοταρίες Κ και Λ, ισχύει και για τους τρείς δείκτες Κ>Λ. Μιλάμε για δυο λοταρίες με ισοπίθανα ενδεχόμενα που οι τιμές των καλών σεναρίων αλλάζουν. Το γεγονός αυτό επαληθεύει ότι όσο οι τιμές των πιθανών ενδεχομένων έχουν μικρή απόσταση αριθμητικά τόσο αυξάνεται οι επικινδυνότητά και μειώνεται η ωφέλεια ταυτόχρονα.

Το ίδιο παρατηρούμε αν δούμε τις λοταρίες Ι και Λ, , ισχύει και για τους τρείς δείκτες Ι>Λ. Εδώ και οι δυο λοταρίες δίνουν μισές πιθανότητες ζημιάς και μισές πιθανότητες κέρδους. Όμως η Ι δίνει πιθανό κέρδος μεγαλύτερο αριθμητικά από την κατά απόλυτη τιμή της ζημιάς. Έτσι ο R-FH συμφωνεί με την EU-AP και βλέπουμε ότι για την Ι η ωφέλεια είναι μεγαλύτερη και ο κίνδυνος να οδηγήσει σε πτώχευση μικρότερος ενώ για την Λ η ωφέλεια μειώνεται και οι δείκτες επικινδυνότητας αυξάνονται σημαντικά. Θα μπορούσαμε να πούμε με απλά λόγια ότι δεν αξίζει να ρισκάρεις λίγα με την πιθανότητα να κερδίσεις λίγα.

Αυτό που προβληματίζει στο παράδειγμά μας, είναι η λοταρία Θ. Διευκολύνει η σύγκριση με την λοταρία Ι. Η Θ δίνει ένα ενδεχόμενο ζημιάς με πιθανότητα 30% και τρία ενδεχόμενα κέρδους με τις υπόλοιπες πιθανότητες, ενώ η Ι δίνει πάλι το ίδιο ενδεχόμενο ζημίας αλλά με αυξημένη πιθανότητα στο 50% και μειώνει την πιθανότητα να συμβούν τα υπόλοιπα 3 ενδεχόμενα κέρδους. Εύκολα θα λέγαμε ότι, αφού έχουμε τις ίδιες τιμές για τα ενδεχόμενα απλά στη μια λοταρία αυξάνεται η πιθανότητα ζημίας, θα διαλέγαμε αυτή που είναι λιγότερο πιθανό να χάσουμε. Οι δείκτες R-AS, R-FH συμφωνούν με αυτή την άποψη και προσδίδουν μεγαλύτερη επικινδυνότητα στην Ι. Παρατηρούμε όμως το εξής ‘παράδοξο’ όπως έχει σημειωθεί και στο συμπέρασμα 2: η αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας EU-AP δείχνει ότι η λοταρία με τις περισσότερες πιθανότητες να συμβεί το κακό σενάριο έχει μεγαλύτερη αναμενόμενη ωφέλεια από την άλλη. Το επαληθεύουμε και με άλλα παραδείγματα:

	1^{ο} ενδεχόμενο	**2^{ο} ενδεχόμενο**	**3^{ο} ενδεχόμενο**	**4^{ο} ενδεχόμενο**	**R-AS**	**EU-AP**
Μ	-1 με πιθανότητα 0,2	2 με πιθανότητα 0,2	10 με πιθανότητα 0,1	1,5 με πιθανότητα 0,5	0,645	0,3422
Ν	-1 με πιθανότητα 0,5	2 με πιθανότητα 0,2	10 με πιθανότητα 0,1	1,5 με πιθανότητα 0,2	1,950	0,4719

	1ο ενδεχόμενο	2ο ενδεχόμενο	3ο ενδεχόμενο	4ο ενδεχόμενο	R-AS	EU-AP
Ξ	-3 με πιθανότητα 0,2	2 με πιθανότητα 0,4	20 με πιθανότητα 0,3	4 με πιθανότητα 0,1	2,108	0,3186
Ο	-3 με πιθανότητα 0,6	2 με πιθανότητα 0,2	20 με πιθανότητα 0,1	4 με πιθανότητα 0,1	24,426	0,3319

Και σε αυτά τα παραδείγματα βλέπουμε ότι ενώ για τον δείκτη R-AS ισχύει Μ>Ν και Ξ>Ο, σύμφωνα με την αναμενόμενη ωφέλεια προκύπτει το αντίθετο. Ωστόσο, μην ξεχνάμε ότι μιλάμε για την αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας και για πράκτορες με σταθερή σχετική αποστροφή κινδύνου. Αυτό σημαίνει ότι τα αποτελέσματά μας αφορούν αποκλειστικά και μόνο πράκτορες με βαθμό αποστροφής κινδύνου 4. Στην συνάρτησή μας το ρ είναι αυτό που φανερώνει τον βαθμό αποστροφής κινδύνου κάθε ατόμου. Όσο μεγαλώνει το ρ τόσο πιο πολύ ένα άτομο αποστρέφεται τον κίνδυνο. Έτσι αντί να αναφερόμαστε σε 'παράδοξο' γεγονός, φτάνει να πούμε ότι ένα άτομο με ρ=4 δεν φοβάται να αποδεχτεί ένα στοίχημα, με μεγαλύτερη αντικειμενικά επικινδυνότητα, αναμένοντας να επωφεληθεί από αυτό το στοίχημα τόσο όσο η αναμενόμενη ωφέλεια που του υπολογίζει η EU-AP.

Θα υπολογίσουμε τις λοταρίες Μ και Ν για πράκτορες με μεγαλύτερα ρ, που αποστρέφονται δηλαδή περισσότερο τον κίνδυνο.

ΛΟΤΑΡΙΑ	P=8	P=20	P=100	P=500
Μ	0,167	0,063	0,012	0,002
Ν	0,281	0,105	0,02	0,003

Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι πράκτορες που αποστρέφονται τον κίνδυνο πολύ παραπάνω έχουν για τις ίδιες λοταρίες με ίδια πιθανά ενδεχόμενα μικρότερη ωφέλεια από αυτά. Όσο η αποστροφή τους θα αυξάνεται καταλήγουν να είναι αδιάφοροι για αυτά τα δύο στοιχήματα παρόλο που οι δείκτες R-AS, R-FH θα μας δίνουν συγκεκριμένη επιλογή για το πιο από τα δυο είναι πιο επικίνδυνο.

Τελικά, είδαμε ότι και στις 3 περιπτώσεις μέτρησης κινδύνου, με τους δείκτες R-AS, R-FH και την αναμενόμενη συνάρτηση χρησιμότητας Arrow-Pratt EU-AP, οι λοταρίες μπαίνουν σε μια σειρά από την πιο ασφαλή στην πιο επικίνδυνη, όμως δεν είναι η ίδια καθώς έχει πολύ μεγάλη σημασία η φύση του κάθε μέτρου. Δηλαδή ο R-AS μπορεί και βάζει σε αυτήν την σειρά τις λοταρίες. Το ίδιο και ο R-FH. Μην ξεχνάμε όμως ότι για τον δεύτερο απαραίτητο είναι ο ορισμός ενός κρίσιμου επίπεδου πλούτου σύμφωνα με το όποιο είναι πιθανό να απορριφθούν ακόμα και όλες οι επιλογές που έχει ένας πράκτορας. Ενώ στην περίπτωση της EU-AP είδαμε ότι αποκλίνει πολύ από τις τελικές κατατάξεις που δίνουν οι άλλοι δυο δείκτες και αυτό οφείλεται καθαρά στην φύση της συνάρτησης. Μιλάμε για μια συνάρτηση η οποία εξαρτάται από τον πράκτορα. Έτσι η επιλογή μια λοταρίας από έναν πράκτορα γίνει με βάση την EU-AP, εξαρτάται αποκλειστικά από τον βαθμό αποστροφής του κινδύνου του.

4.2 ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΤΩΝ ΔΕΙΚΤΏΝ R^{AS} ΚΑΙ R^{FH} ΣΤΗΝ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΩΝ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΩΝ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ

Η κατανομή του εισοδήματος έχει μελετηθεί σε πολλά έγγραφα, επειδή οι οικονομολόγοι θέλουν να μάθουν ποια κατανομή είναι πιο κατάλληλη. Έχουν χρησιμοποιηθεί διάφοροι τύποι δεικτών για την αξιολόγηση των κατανομών του εισοδήματος. Μερικοί από αυτούς, όπως ο δείκτης του Atkinson, ενσωματώνουν τις προτιμήσεις των ατόμων και λαμβάνουν υπόψη μια συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας. Άλλοι δείκτες, όπως ο δείκτης Gini δεν κατασκευάζονται λαμβάνοντας υπόψη οποιαδήποτε συνάρτηση κοινωνικής ευημερίας, αλλά ενσωματώνουν σιωπηρά ορισμένες κοινωνικές προτιμήσεις, δεδομένου ότι προσδίδουν διαφορετικά ποσοστά στους καταναλωτές.

Στην ενότητα αυτή ελέγχουμε το κατά πόσο οι δείκτες κινδύνου των Aumann-Serrano και Foster-Hart είναι ικανοί να μας πληροφορήσουν για την κατάλληλη κατανομή των εισοδημάτων σε μια χώρα. Σε όλη την παρούσα εργασία έχουμε αναλύσει ότι οι δείκτες αυτοί χρησιμοποιούνται για τη μέτρηση της επικινδυνότητας των περιουσιακών στοιχείων, λαμβάνοντας υπόψη τις πιθανές αξίες που μπορεί να λάβει το περιουσιακό στοιχείο και χρησιμοποιώντας ως αρχικό σημείο το αρχικό επίπεδο πλούτου. Έτσι και στην ανάλυσή μας ορίζουμε το επιπέδου του εισοδήματος που θα χρησιμοποιηθεί ως σημείο σύγκρισης.

Στηριζόμαστε στην άποψη ότι για να επιτευχθεί ένα ικανοποιητικό επίπεδο ζωής είναι απαραίτητο να υπάρχει ένα ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος και ότι αυτό το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος είναι μεγαλύτερο από το επίπεδο εισοδήματος που απαιτείται για την επιβίωση. Το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος θα είναι το επίπεδο εισοδήματος που χρησιμοποιείται ως σημείο σύγκρισης. Οι διαφορές των εισοδημάτων στην κατανομή θα υπολογιστούν σε σχέση με αυτό το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος και αυτές οι διαφορές θα χρησιμοποιηθούν για τον καθορισμό των δεικτών. Τα άτομα μπορούν να έχουν κέρδη ή ζημίες σε σχέση με το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος (τα εισοδήματα μπορεί να είναι υψηλότερα ή χαμηλότερα από το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος).

Η κύρια διαφορά αυτής της εφαρμογής σε σχέση με την περίπτωση με τις λοταρίες είναι ότι στην περίπτωση των λοταριών το άτομο πρέπει να αποφασίσει να δεχθεί ή να μην δεχθεί ένα επικίνδυνο περιουσιακό στοιχείο. Ακόμα και αν απορρίψει το περιουσιακό στοιχείο, το άτομο θα μείνει με το αρχικό επίπεδο του πλούτου του. Αλλά στην περίπτωση των κατανομών εισοδήματος όλα τα πιθανά επίπεδα εισοδήματος θα συμβούν. Θεωρούμε ότι οι κατανομές εισοδήματος αξιολογούνται από την άποψη ενός ατόμου με επίπεδο εισοδήματος ίσο με αυτό το επίπεδο εισοδήματος που χρησιμοποιείται ως σημείο σύγκρισης. Το άτομο δεν γνωρίζει τη διαφορά ανάμεσα στο επίπεδο εισοδήματος που χρησιμοποιείται ως σημείο σύγκρισης και στο επίπεδο εισοδήματος που θα αποκτήσει και αυτή η διαφορά μπορεί να είναι θετική ή αρνητική. Το άτομο γνωρίζει μόνο την πιθανότητα απόκτησης κάθε επιπέδου εισοδήματος.

Ας δηλώσουμε το "ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος" Y. Σημειώνουμε εδώ ότι ίσως να μην είναι εύκολο να γνωρίζουμε ποιο επίπεδο εισοδήματος είναι το ελάχιστο αποδεκτό σε μια συγκεκριμένη κοινωνία. Οι δείκτες που πρόκειται να παρουσιάσουμε καθορίζονται χρησιμοποιώντας αυτό το "ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο" ως σημείο αναφοράς. Υπάρχει επίσης ένα «ελάχιστο επίπεδο εισοδήματος που απαιτείται για να επιβιώσει κάποιος», Y^{ε}, δηλαδή χαμηλότερο από το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος $Y>Y^{\varepsilon}$. Το επίπεδο εισοδήματος ενός ατόμου i είναι το Y_i και η διαφορά μεταξύ του επιπέδου εισοδήματος του ατόμου i και του "ελάχιστου αποδεκτού επιπέδου εισοδήματος", $|Y-Y_i|$, θα είναι g_i. Θα θεωρούμε ότι $E(Y_i)>Y$ ή ισοδύναμα $E(g)>0$, έτσι το μέσο επίπεδο εισοδήματος της κοινωνίας θέλουμε να είναι υψηλότερο από το "ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος". Αυτή η προϋπόθεση είναι απαραίτητη για να έχουμε μια λύση για κάθε δείκτη. Θεωρούμε επίσης ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα άτομο του οποίου το επίπεδο εισοδήματος είναι χαμηλότερο από το "ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος", $\min(g)<0$.

Ο ένας δείκτης που θα εφαρμόσουμε είναι ο δείκτης A-S για να ταξινομήσουμε τις κατανομές εισοδήματος λαμβάνοντας υπόψη τη διαφορά του εισοδήματος σε σχέση με το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος. ο τύπος είναι $\mathrm{E}e^{-\frac{g}{R^{AS}(g)}}=1$ όπου το g δίνεται από τις διαφορές μεταξύ των πιθανών τιμών που μπορούν να λάβουν τα επίπεδα εισοδήματος και του ελάχιστου αποδεκτού επιπέδου εισοδήματος. Για να ταξινομήσουμε διαφορετικές κατανομές εισοδήματος λαμβάνοντας υπόψη αυτόν τον δείκτη, πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή του $R^{AS}(g)$ για κάθε κατανομή εισοδήματος. Όσο υψηλότερη είναι η τιμή του δείκτη, τόσο χειρότερη είναι η κατανομή του εισοδήματος.

Ο άλλος δείκτης που θα εφαρμόσουμε είναι ο δείκτης Foster-Hart με τύπο $\mathrm{E}[\log(1+\frac{1}{R^{FH}(\mathrm{g})}\mathrm{g})]=0.$ Έχει να κάνει με την ιδέα της πτώχευσης.

Το άτομο χρησιμοποιεί έναν κανόνα αποδοχής έτσι ώστε η εφαρμογή αυτού του κανόνα σε μια σειρά στοιχημάτων να αποφεύγει την πτώχευση. Σε περίπτωση των στοιχημάτων, το κέρδος που λαμβάνεται μετά από τη συμμετοχή σε ένα στοίχημα είναι το σημείο εκκίνησης για την αξιολόγηση του επόμενου στοιχήματος. Στην περίπτωση της κατανομής εισοδημάτων, όμως, όλα τα εισοδήματα μπορούν να υπάρξουν. Και με αυτόν τον δείκτη ισχύει ότι όσο υψηλότερη είναι η τιμή του $R^{FH}(g)$, η κατανομή των εισοδημάτων θα είναι χειρότερη. Αν η διαφορά μεταξύ του ελάχιστου αποδεκτού επιπέδου εισοδήματος και του ελαχίστου επιπέδου επιβίωσης είναι χαμηλότερη από την τιμή του δείκτη, το $R^{FH}>Y-Y^{\varepsilon}$, η κατανομή του εισοδήματος δεν θα ήταν αποδεκτή για μια ισότιμη κοινωνία με άτομα πίσω από το πέπλο της άγνοιας και με ένα εισόδημα, για κάθε άτομο, ίσο με το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος.

Υπάρχουν διάφοροι δείκτες που χρησιμοποιούνται για τη σύγκριση των κατανομών εισοδήματος. Ένας από τους πιο διάσημους δείκτες είναι ο δείκτης του Gini, που σχετίζεται με την καμπύλη Lorenz. Ο δείκτης Gini / Lorenz, όπως και οι δείκτες που αναλύουμε, είναι ένας δείκτης συνολικής διάταξης, διότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συγκρίνει οποιοδήποτε ζεύγος διαφορετικών κατανομών εισοδήματος. Ωστόσο, σημειώνουμε, ότι ο δείκτης Gini δεν αναφέρεται σε ένα ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος. Ο συντελεστής Gini ορίζεται ως ο λόγος των αθροιστικών μεριδίων του πληθυσμού, κατανεμημένου ανάλογα με το ύψος του εισοδήματος, προς το αθροιστικό μερίδιο του συνολικού ποσού που λαμβάνουν. Η τιμή του κυμαίνεται από 0 (πλήρης ισότητα) έως 1 (πλήρης εισοδηματική ανισότητα). Αν όλο το εθνικό εισόδημα ήταν συγκεντρωμένο σε ένα άτομο, ο συντελεστής Gini θα ήταν 1. Αν ο συντελεστής Gini ήταν π.χ. 0,30, το εισόδημα 2 τυχαίων ατόμων αναμένουμε να διαφέρει κατά 30% του μέσου ισοδύναμου διαθέσιμου εισοδήματος.

Έτσι, το τελευταίο μέρος της εργασίας είναι η εφαρμογή αυτών των δύο δεικτών κινδύνου στις κατανομές του εισοδήματος της Ελλάδας. Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται έχουν ληφθεί από την ιστοσελίδα της ΕΛΣΤΑΤ, δημοσιευμένα στις 22/6/2018. Τα στοιχεία αυτά περιλαμβάνουν τις κατανομές εισοδημάτων των ετών 2008 έως 2017, σε διαστήματα ελάχιστου μισθού. Για να μπορέσουμε να συγκρίνουμε τους δείκτες αυτών των ετών, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος για τον υπολογισμό αυτών. Θα θεωρήσουμε ότι το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος είναι μισθός του χαμηλότερου επιπέδου του έτους 2008. (7.280 ευρώ).

Η ποσοστιαία μεταβολή του πληθωρισμού των ετών που εξετάζουμε είναι πολύ μικρή ώστε να μπορεί να επηρεάσει τα αποτελέσματα των δεικτών. Έτσι παίρνουμε σταθερό το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος. Ωστόσο, σημειώνουμε ότι αν η έρευνα γινόταν σε κατανομές εισοδημάτων παλαιότερων ετών, θα έπρεπε οπωσδήποτε να συνυπολογιστεί η μεταβολή του πληθωρισμού. Για παράδειγμα την 5ετία 1990-1995 οι ετήσιες μεταβολές του πληθωρισμού άγγιξαν το 20,4%, και καταλαβαίνουμε ότι για εκείνες τις χρόνιες θα συνυπολογίζαμε αυτό το ποσοστό στην τιμή του ελάχιστου αποδεκτού επιπέδου εισοδήματος.

Όλοι οι πίνακες με τα διαστήματα των εισοδημάτων, σύμφωνα με τα οποία υπολογίστηκαν οι δείκτες R^{AS} και R^{FH}, παρουσιάζονται αναλυτικά για κάθε χρονιά στο Παράρτημα Α.

Τέλος, στον πίνακα 1, παρουσιάζονται συγκεντρωμένες όλες οι μετρήσεις μας για τους δύο δείκτες, για κάθε χρονιά ξεχωριστά, ξεκινώντας από το 2008 φτάνοντας μέχρι το πιο πρόσφατο 2017. Επιπλέον, παρουσιάζονται και οι τιμές του επίσημου συντελεστή Gini για κάθε αντίστοιχη χρονιά όπως αυτός είναι δημοσιευμένος από την ΕΛΣΤΑΤ. Σημειώνεται δίπλα από κάθε νούμερο με “↓↓” όταν ο δείκτης παρουσιάζει πτώση σε σχέση με την προηγούμενη χρονιά και με “↑↑” όταν ο δείκτης παρουσιάζει άνοδο.

YEAR	R-AS	Αύξηση/μείωση		Gini	Αύξηση/μείωση		R-FH
2008	1599,871			33,4			1776,92
2009	1453,252	↓↓	↓↓	33,1	↓↓	↓↓	1635,65
2010	1442,145	↓↓	↓↓	32,9	↓↓	↓↓	1266,77
2011	1605,496	↑↑	↑↑	33,5	↑↑	↑↑	1291,04
2012	1985,55	↑↑	↑↑	34,3	↑↑	↑↑	1300,97

2013	2287,48	↑↑	↑↑	34,4	↑↑	↑↑	1318,82
2014	2647,35	↑↑	↑↑	34,5	↑↑	↑↑	1456,39
2015	2620,45	↓↓	↓↓	34,2	↓↓	↓↓	1428,24
2016	2646,04	↑↑	↑↑	34,3	↑↑	↑↑	1674,27
2017	2547,20	↓↓	↓↓	33,4	↓↓	↓↓	1486,56

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.

Συμπέρασμα: Βλέπουμε ότι και οι δυο δείκτες που αναλύουμε διατάσσουν τις κατανομές εισοδήματος με τον ίδιο τρόπο όπως ο δείκτης Gini για όλα τα χρόνια.

Δηλαδή, οι δείκτες των Aumann-Serrano και Foster-Hart δείχνουν ότι η κατανομή του εισοδήματος του έτους 2017, για παράδειγμα, είναι καλύτερη από την κατανομή του εισοδήματος του 2016, επειδή οι δείκτες είναι χαμηλότεροι. Ο δείκτης Gini δείχνει ότι η κατανομή του εισοδήματος του 2017 είναι πιο ισότιμη από την κατανομή του έτους 2016.

Η ερμηνεία των δεικτών γίνεται πάντα σύμφωνα με το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδήματος. Δηλαδή η επικινδυνότητα υπολογίζεται από χρονιά σε χρονιά σύμφωνα με το πόσο ‘‘καλά’’ είναι κατανεμημένα τα εισοδήματα στα άτομα μιας χώρας, με την προϋπόθεση ότι για να ζουν αξιοπρεπώς χρειάζονται χρήματα ίσα με αυτό το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο. Μπορούμε να πούμε ότι και οι δύο δείκτες απαντούν στο εξής ερώτημα: με δεδομένο ότι για να ζουν οι πολίτες μιας χώρας αξιοπρεπώς χρειάζονται χρήματα ίσα με το ελάχιστο αποδεκτό επίπεδο εισοδημάτων, πόσο επικίνδυνη είναι η κατανομή των εισοδημάτων στην χώρα αυτή από χρονιά σε χρονιά; Οπότε με δεδομένο ότι για να ζει κάποιος αξιοπρεπώς στην Ελλάδα χρειάζεται 7.280 ευρώ για τον δείκτη Aumann-Serrano η επικινδυνότητα το 2015 έφτασε 2620,45 το 2016 βλέπουμε ότι παρουσιάζει μια μικρή αύξηση στα 2620,45 ενώ το 2017 παρουσιάζει πτώση στα 2547,20. Και ο δείκτης Foster-Hart ακολουθεί την ίδια πορεία και ερμηνεύεται παρομοίως. Όμως ενδιαφέρον παρουσιάζει για τον δείκτη Foster-Hart ότι αν μπορούσαμε να δώσουμε και ένα επίπεδο εισοδήματος που αρκεί για την επιβίωση ενός ατόμου, ας πούμε ενδεικτικά το ποσό των 4000 ευρώ ανά έτος, θέλουμε πάντα R^{FH}<3280 (3280=7280-4000). Όσο πιο χαμηλός είναι ο δείκτης προφανώς τόσο πιο καλά κατανεμημένα είναι τα εισοδήματα, όμως όταν αρχίσει ο δείκτης να αυξάνεται και ειδικά όσο πλησιάζει το νούμερο 3280 μπορεί να μας πληροφορήσει και για το πότε η κατανομή εισοδημάτων της χώρας είναι άκρως επικίνδυνη για την διασφάλιση μιας κοινωνίας όπου όλα τα άτομα μπορούν να ζουν ισάξια.

Τέλος όπως αναλύθηκε και στο πρώτο κεφάλαιο, η συμβολή του δείκτη Aumann-Serrano αφορά την ανάπτυξη νέων μέτρων επικινδυνότητας, την αξιολόγηση και την ταξινόμηση αποδόσεων αμοιβαίων κεφαλαίων, την ανάπτυξη νέων μοντέλων CAPM ή ακόμα και τον έλεγχο της διαφοροποίησης του χρόνου. Μέσα από αυτήν την εργασία καταλήγουμε, μέσα από αναλυτικές εφαρμογές, ότι ο δείκτης Aumann-Serrano, αλλά και ο Foster-Hart, δεν είναι ικανοί μόνο να μπορούν να μας ενημερώσουν για το πότε είναι ασφαλές να δεχτούμε ή όχι ένα στοίχημα. Άλλα βλέπουμε ότι μπορούν να μας ενημερώσουν ακόμα και για την επικινδυνότητα που μπορεί να έχει για μια χώρα η κατανομή των εισοδημάτων στους πολίτες της.

Παράρτημα Α

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΑΠΟΔΕΚΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ					7.280				
2008					ΔΙΑΦΟΡΑ	R-AS	1.599,87	R-FH	1776,92
ΔΙΑΣΤΗΜΑ		Μ.Ο.	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ %					
0	7280	3640	0,096	9,6	-3.640				
7280	10800	9040	0,179	17,9	1.760				
10.800	15680	13240	0,256	25,6	5.960				
15.680	15680<	19320,0	0,469	46,9	12.040				

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΑΠΟΔΕΚΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ					7.280				
2009					ΔΙΑΦΟΡΑ	R-AS	1.453,25	R-FH	1.635,65
ΔΙΑΣΤΗΜΑ		Μ.Ο.	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ %					
0	8000	4000	0,098	9,8	-3.280				
8000	11496	9748	0,18	18	2.468				
11.496	16625	14060,5	0,255	25,5	6.781				
16.625	16625<	20625,0	0,467	46,7	13.345				

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΑΠΟΔΕΚΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ					7.280				
2010					ΔΙΑΦΟΡΑ	R-AS	1.442,15	R-FH	1.266,77
ΔΙΑΣΤΗΜΑ		Μ.Ο.	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ %					
0	7976	3988	0,099	9,9	-3.292				
7976	11963	9969,5	0,179	17,9	2.690				
11.963	17000	14481,5	0,257	25,7	7.202				
17.000	17000<	20988,0	0,465	46,5	13.708				

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΑΠΟΔΕΚΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ					7.280				
2011					ΔΙΑΦΟΡΑ	R-AS	1.605,50	R-FH	1.291,04
ΔΙΑΣΤΗΜΑ		Μ.Ο.	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ					
0	7176	3588	0,094	9,4	-3.692				
7176	10.985	9080,5	0,177	17,7	1.801				
10.985	15.809	13397	0,262	26,2	6.117				
15.809	15809<	19397,0	0,467	46,7	12.117				

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΑΠΟΔΕΚΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ					7280				
2012					ΔΙΑΦΟΡΑ	R-AS	1985,553	R-FH	1300,968716
ΔΙΑΣΤΗΜΑ		Μ.Ο.	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ %					
0	5944	2972	0,094	9,4	-4308				
5944	9513	7728,5	0,177	17,7	448,5				
9513	13489	11501	0,262	26,2	4221				
13489	13489<	16461	0,467	46,7	9181				

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΑΠΟΔΕΚΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ					7280				
2013					ΔΙΑΦΟΡΑ	R-AS	2287,485	R-FH	1318,824383
ΔΙΑΣΤΗΜΑ		Μ.Ο.	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ %					
0	5250	2625	0,089	8,9	-4655				
5250	8371	6810,5	0,178	17,8	-469,5				
8371	11692	10031,5	0,263	26,3	2751,5				
11692	11692<	14317	0,471	47,1	7037				

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΑΠΟΔΕΚΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ					7280				
2014					ΔΙΑΦΟΡΑ	R-AS	2647,349	R-FH	1456,38646
ΔΙΑΣΤΗΜΑ		Μ.Ο.	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ %					
0	4988	2494	0,09	9	-4786				
4988	7680	6334	0,176	17,6	-946				
7680	11000	9340	0,258	25,8	2060				
11000	11000<	13494	0,476	47,6	6214				

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΑΠΟΔΕΚΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ					7280				
2015					ΔΙΑΦΟΡΑ	R-AS	2620,448	R-FH	1428,240095
ΔΙΑΣΤΗΜΑ		Μ.Ο.	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ %					
0	4924	2462	0,089	8,9	-4818				
4924	7520	6222	0,179	17,9	-1058				
7520	10860	9190	0,26	26	1910				
10860	10860<	13322	0,472	47,2	6042				

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΑΠΟΔΕΚΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ **7280**

2016					ΔΙΑΦΟΡΑ	R-AS	2646,041	R-FH	1674,271255
ΔΙΑΣΤΗΜΑ		Μ.Ο.	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ %					
0	4930	2465	0,089	8,9	-4815				
4930	7500	6215	0,179	17,9	-1065				
7500	11000	9250	0,26	26	1970				
11000	11000<	13465	0,472	47,2	6185				

ΕΛΑΧΙΣΤΟ ΑΠΟΔΕΚΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ **7280**

2017					ΔΙΑΦΟΡΑ	**R-AS**	**2547,2**	**R-FH**	**1486,561762**
ΔΙΑΣΤΗΜΑ		Μ.Ο.	ΠΟΣΟΣΤΟ	ΠΟΣΟΣΤΟ %					
0	5187	2593,5	0,093	9,3	-4686,5				
5187	7600	6393,5	0,18	18	-886,5				
7600	10933	9266,5	0,261	26,1	1986,5				
10933	10.933<	13526,5	0,466	46,6	6246,5				

Βιβλιογραφία

1. Arrow, Kenneth J. (1971). Essays in the Theory of Risk Bearing. *Chicago, Markham*

2. Artzner, Philippe, Freddy Delbaen, Jean-Marc Eber, and David Heath. 1999. “Coherent Measures of Risk.” Math. Finance 9:203–28.

3. Aumann, Robert J., and Roberto Serrano. (2008). An Economic Index of Riskiness. *J.P.E. 116:810–36*

4. Bali, Cakici, and Chabi-Yo (2011). A generalized measure of riskiness. *Management science 57 (8), 1406–1423*

5. Bali, Turan, Cakici ,Nusret and Chabi-Yo, Fousseni. (2011). Riskiness Measures and Expected Returns. *Available at SSRN: http://ssrn.com/abstract=1806349Ulrich*

6. Chen Yi-Ting, Huang J. Rachel, Shih Pai-Ta and Tzeng Y. Larry.(2017). Capital Asset Pricing Models Based on Economic Indices of Riskiness. *Working Paper.*

7. Chew S. H. and Sagi S. J. A Critical Look at the Aumann-Serrano and Foster-Hart Measures of Riskiness. *Working Paper.*

8. Echevarria Alaitz Artabe. Income distribution orderings based on differences with respect to the minimum acceptable income. *Working Paper.*

9. Foster, Dean P., and Sergiu Hart. (2007). An Operational Measure of Riskiness. *Discussion Paper no. 454, Center Study Rationality, Hebrew Univ. Jerusalem.*

10. Foster, Dean P., and Sergiu Hart. (2009). An operational measure of riskiness. *Journal of Political Economy, 117, 785-814.*

11. Gang J., Qian Z. and Chen F.(2016). Risk Factors and Asset Pricing: Evidence from China's A Share Market.

12. Hanoch, Giora, and Haim Levy. 1970. "Relative Effectiveness of Efficiency Criteria for Portfolio Selection." J. Financial and Quantitative Analysis 5:63–76

13. Hart S., (2011), Risk by Acceptance and Rejection. *Journal of Political Economy, 119(4), 617–638.*

14. Hellman Z., Schreiber A,(2016). Indexing gamble desirability by extending proportional stochastic dominance. *This Version is available at: http://hdl.handle.net/10419/173743.*

15. Hellmann T., and F. Riedel, (2013). The Foster-Hart Measure of Riskiness for General Gambles. *Social Science Research Network Working Paper Series* .

16. Hens Thorsten, and Rieger Marc Olivie,(2014). Financial Economics- Concise Introduction to Classical and Behavioral Finance. *Springer.*

17. Homm U. and Pigorsch C. (2012), Beyond the Sharpe ratio: An application of the Aumann-Serrano index to performance measurement, *Journal of Banking & Finance 36(8), 2274-2284.*

18. Homm U. and Pigorsch C. (2012). An operational interpretation and existence of the Aumann-Serrano index of riskiness *Economics Letters, Vol 114, Issue 3, p. 265-267.*

19. Jargalsaikhan, Bolor (2010). The measure of risk aversion. *Working Paper.*

20. Li M., (2014), On Aumann and Serrano's economic index of risk. *Economic Theory, 55(2), 415-437.*

21. Lu , Yang and Wong (2018). Time Diversification: Perspectives from the Economic Index of Riskiness.

22. Machina, Mark, and Michael Rothschild. 2008. “Risk.” *In The New Palgrave Dictionary of Economics*, 2nd ed., edited by Steven N. Durlauf and Lawrence E. Blume. London: Macmillan
23. Pratt John. (1964). Risk Aversion in the Small and in the Large. *Econometrica 32:122–36.*
24. Schreiber A. (2013). Comparing local risks by acceptance and rejection. *Math. Finance, forthcoming* .
25. Schreiber A. (2013). Economic indices of absolute and relative riskiness*. Economic Theory 56, 309–331*.
26. Schulze K., (2014), Existence and computation of the Aumann-Serrano index of riskiness and its extension. *Journal of Mathematical Economics, 50, 219-224.*
27. Shalit H., (2013). On Pertinent Risk. *Monaster Center Working Paper.*
28. Shalit H., (2014). Measuring risk in Israeli mutual funds: conditional value-at risk vs. Aumann-Serrano riskiness index. *Monaster Center Working Paper.*
29. Welch, Ivo. 2008. Corporate Finance: An Introduction. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall.