



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΑ

ΣΧΟΛΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ  
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ  
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ  
<<ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΩΝ>>

## ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕΣΩ ΤΗΣ R

ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΙΩΑΝΝΗΣ ΦΩΤΟΠΟΥΛΟΣ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΟΛΙΤΗΣ

ΤΡΙΜΕΛΗΣ ΣΥΜΒΟΥΛΕΥΤΙΚΗ ΕΠΙΤΡΟΠΗ:

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΠΟΛΙΤΗΣ

ΕΥΣΤΑΘΙΟΣ ΧΑΤΖΗΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ

ΓΕΩΡΓΙΑ ΒΕΡΡΟΠΟΥΛΟΥ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ, ΙΟΥΛΙΟΣ 2019



# UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF STATISTICS AND FINANCE SCIENCE  
DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE  
POSTGRADUATE PROGRAM IN  
<<ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT >>

## APPROXIMATION METHODS IN COLLECTIVE RISK THEORY USING R

PANAGIOTIS – IOANNIS FOTOPOULOS

SUPERVISOR TEACHER:

KONSTANTINOS POLITIS

QUARTERLY ADVISORY COMMITTEE:

KONSTANTINOS POLITIS

EUSTATHIOS HATZIKONSTANTINIDIS

GEORGIA VERROPOULOU

PIRAEUS, JULY 2019

## ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Στην Μητέρα μου **Αγγελική**, που στα τόσα χρόνια των σπουδών μου με στηρίζει έμπρακτα και με αγαπάει άνευ όρων.

Στον Καθηγητή μου **Κωνσταντίνο Πολίτη**, που ήταν βασικός λόγος να κάνω το συγκεκριμένο Π.Μ.Σ. και πιο συγκεκριμένα για την ορθή και έμπρακτη υποστήριξη του σε εμένα στο να ολοκληρώσω το συγκεκριμένο Π.Μ.Σ. στην <<Αναλογιστική Επιστήμη Και Διοικητική Κινδύνων>>, για την γνώση του που μεταλαμπαδεύει τόσο απλόχερα και ανθρώπινα στους φοιτητές του, για τις αξίες και ιδανικά που επιδεικνύει με τον δικό του τρόπο όπως αυτές είναι οι αξίες και τα ιδανικά της οικογένειας και της φιλίας.

Στον φίλο μου και νέο διδάκτορα του Πανεπιστημίου Πειραιώς **Ιωάννη Μπαντούνα**, για τις συμβουλές του, την κατανόηση του, την έμπρακτη βοήθεια του αλλά και για την ορθή καθοδήγηση του στο να κάνω το συγκεκριμένο Π.Μ.Σ. στην <<Αναλογιστική Επιστήμη Και Διοικητική Κινδύνων>>.

Στον φίλο μου και απόφοιτο του Π.Μ.Σ. στην <<Αναλογιστική Επιστήμη Και Διοικητική Κινδύνων>> **Αθανάσιο Λουκά**, για τις χρήσιμες οδηγίες του σε διάφορα θέματα και για την αναγκαία βοήθεια του που μου προσέφερε στα μαθήματα που βασίζονται στην Οικονομική Επιστήμη.

Τέλος, αυτή τη διπλωματική εργασία την αφιερώνω μαζί με ένα μεγάλο και θερμό ευχαριστώ στον άνθρωπο που με διαπαιδαγώγησε και με ανέθρεψε όσο κανένας άλλος άνθρωπος στην ζωή μου στην Γιαγιά μου **Βικτώρια**, η οποία με το που ξεκίνησα τις σπουδές μου στο Πανεπιστήμιο του Πειραιά στο Τμήμα της Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης με πήρε από το χέρι και στα 18 μου τότε χρόνια, μου άνοιξε ένα τραπεζικό λογαριασμό προσθέτοντας του σε μηνιαία βάση μέρος της σύνταξης της με σκοπό μετά το πέρας των προπτυχιακών σπουδών μου να κάνω ένα μεταπτυχιακό. Συγκεκριμένα δε θα ξεχάσω ποτέ τα λόγια που μου είπε όταν μου άνοιγε το λογαριασμό του μεταπτυχιακού «Τάκη, θα σου δίνω χρήματα κάθε μήνα για να τα καταθέτεις ο ίδιος σε αυτό το λογαριασμό για να κάνεις και ένα μεταπτυχιακό γιατί οι καιροί είναι πολύ δύσκολοι δεν αρκεί πια να έχεις ένα πτυχίο αλλά πολλά περισσότερα για να τα καταφέρεις και είμαι σίγουρη ότι θα τα καταφέρεις».

## ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Στα τόσα χρόνια προπτυχιακών σπουδών μου στο Τμήμα της Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του ΠΑ.ΠΕΙ. και στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου, ιδιαίτερο ενδιαφέρον προς έρευνα μου προκάλεσαν τα εξής ερευνητικά αντικείμενα: Οι Κατανομές Απώλειας , η Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου αλλά και η Θεωρία Χρεωκοπίας. Με την συγκεκριμένη διπλωματική έρευνα καθιστώ εφικτό την μελέτη και την ανάλυση διαφόρων προσεγγίσεων με το υπολογιστικό πρόγραμμα R. Τέτοιες προσεγγίσεις μέσω της R αποτελούν βασικό εργαλείο στις νέες- ανταγωνιστικές εταιρείες και οργανισμούς που ασχολούνται με το κομμάτι της διαχείρισης κινδύνων, χρηματοοικονομικές επενδύσεις και αναλογιστικές έρευνες.

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην παρούσα διπλωματική εξετάζουμε μια σειρά από προσεγγίσεις που έχουν προταθεί και χρησιμοποιούνται στη θεωρία συλλογικού κινδύνου. Συγκεκριμένα, στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων, δύο από τις ποσότητες με το μεγαλύτερο ενδιαφέρον είναι:

(α) η κατανομή των συνολικών αποζημιώσεων για την ασφαλιστική εταιρεία, και

(β) η πιθανότητα χρεοκοπίας ενός χαρτοφυλακίου.

Οι δύο παραπάνω ποσότητες δεν μπορούν να υπολογιστούν αναλυτικά παρά μόνο για συγκεκριμένες κατανομές των ατομικών ζημιών. Για το λόγο αυτό, έχουν προταθεί πολλές προσεγγιστικές μέθοδοι για τον υπολογισμό τους. Πολλές από τις μεθόδους αυτές έχουν ήδη ενσωματωθεί, με τη μορφή κατάλληλων αλγορίθμων στο πακέτο `actuar` της γλώσσας προγραμματισμού R και έτσι η εφαρμογή και η αξιολόγησή τους καθίσταται εφικτή.

## ABSTRACT

In the present dissertation we examine a variety of approximations that have been proposed and are used in collective risk theory. More specifically, in the collective model of risk theory, two of the quantities with primary interest are:

- (a) The distribution of aggregate claims for the insurance company,  
and
- (b) The ruin probability of a certain insurance portfolio.

These two quantities can only be found analytically for certain cases of the individual claim size distribution. For this reason, various approximation methods are employed to calculate them. Many of these methods have been incorporated, in the form of suitable algorithms, in the package `actuar` of the programming language R; therefore, their implementation and assessment becomes feasible.

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### *ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ*

1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ R.....	Σελ.11
1.1.1. Διάφορες Εντολές Και Χρήσεις Της R.....	Σελ.11
1.1.2. Διάφορα Εργαλεία Για Γραφήματα Της R.....	Σελ.13
1.2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ.....	Σελ.14
1.2.1. Διατύπωση Του Συλλογικού Μοντέλου.....	Σελ.14
1.2.2. Η Κατανομή Των Συνολικών Αποζημιώσεων.....	Σελ.15
1.2.3. Η Αναδρομική Μέθοδος Του Panjer Για Τον Υπολογισμό Της Κατανομής Των Συνολικών Αποζημιώσεων.....	Σελ.16
1.3. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ.....	Σελ.18
1.3.1. Η Ανέλιξη Των Συνολικών Απαιτήσεων.....	Σελ.18
1.3.2. Η Στοχαστική Ανέλιξη Του Πλεονάσματος.....	Σελ.19
1.3.3. Η Πιθανότητα Χρεοκοπίας.....	Σελ.20
1.3.4. Ο Συντελεστής Προσαρμογής.....	Σελ.21
1.3.5. Η Ανισότητα Του Lundberg.....	Σελ.21

### *ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΣΤΗ ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ*

2.1. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ.....	Σελ.22
2.1.1. Η Αναδρομική Μέθοδος Η' Μέθοδος Του Panjer.....	Σελ.22
2.1.2. Η Κανονική Μέθοδος.....	Σελ.23
2.1.3. Η Δυναμοκανονική Μέθοδος Ή Μέθοδος Normal Power 2.....	Σελ.23
2.1.4. Η Μέθοδος Των Συνελίξεων.....	Σελ.23
2.1.5. Η Μέθοδος Της Προσομοίωσης.....	Σελ.24
2.1.6. Η Μετατοπισμένη Γάμμα Μέθοδος.....	Σελ.24
2.2. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ.....	Σελ.25

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ  
ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

3.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ.....	Σελ.36
3.2. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ.....	Σελ.37
3.2.1. Διακριτοποίηση Εκθετικής Κατανομής.....	Σελ.37
3.2.2. Διακριτοποίηση Γάμμα Κατανομής.....	Σελ.39
3.2.3. Διακριτοποίηση Βήτα Κατανομής.....	Σελ.41
3.3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ.....	Σελ.44

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΤΗ  
ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ & ΑΠΕΙΡΟΥ Ή ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ & ΣΥΝΕΧΟΥΣ  
ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

4.1. ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ & ΑΠΕΙΡΟ ΧΡΟΝΟ.....	Σελ.54
4.2. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ & ΑΠΕΙΡΟ ΧΡΟΝΟ.....	Σελ.55
4.2.1. Η Ανισότητα Του Lundberg.....	Σελ.55
4.2.2. Η Αναδρομική Μέθοδος.....	Σελ.56
4.3. ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ & ΣΥΝΕΧΗ ΧΡΟΝΟ.....	Σελ.56
4.4. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ & ΣΥΝΕΧΗ ΧΡΟΝΟ.....	Σελ.57
4.4.1. Η Κανονική Μέθοδος.....	Σελ.57
4.5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ.....	Σελ.58

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΤΗ  
ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΥΝΕΧΟΥΣ & ΑΠΕΙΡΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

5.1. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ.....	Σελ.71
5.1.1. Η Μέθοδος Των Cramer – Lundberg.....	Σελ.71
5.1.2. Η Μέθοδος Των Beekman – Bowers.....	Σελ.72



5.1.3. Η Μέθοδος Του Tijms.....	Σελ.73
5.1.4. Η Μέθοδος Του De Vylder.....	Σελ.74
5.1.5. Η Μέθοδος Του Lundberg.....	Σελ.75
5.1.6. Η Εκθετική Μέθοδος Ή Μέθοδος Της Εκθετικής Μορφής.....	Σελ.75
5.1.7. Η Μέθοδος Του Renyi.....	Σελ.76
5.2. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ.....	Σελ.76

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

6.1. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ.....	Σελ.101
---	---------

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7. ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

7.1. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ.....	Σελ.114
7.1.1. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Της Προσομοίωσης.....	Σελ.114
7.1.2. Συμπεράσματα Για Την Κανονική Μέθοδο.....	Σελ.115
7.1.3. Συμπεράσματα Για Την Δυναμοκανονική Μέθοδο.....	Σελ.115
7.1.4. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Των Συνελίξεων.....	Σελ.116
7.1.5. Συμπεράσματα Για Την Αναδρομική Μέθοδο Ή Μέθοδο Του Panjer.....	Σελ.116
7.1.6. Συμπεράσματα Για Την Μετατοπισμένη Γάμμα Μέθοδο.....	Σελ.117
7.1.7. Συμπεράσματα Για Τις Επιπρόσθετες Μεθόδους Για Την Συνάρτηση Κατανομής Των Συνολικών Απαιτήσεων.....	Σελ.118
7.2. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ.....	Σελ.119
7.2.1. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Του Tijms.....	Σελ.119
7.2.2. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Των Cramer – Lundberg.....	Σελ.120
7.2.3. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Του Lundberg.....	Σελ.120
7.2.4. Συμπεράσματα Για Την Εκθετική Μέθοδο.....	Σελ.121

**ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 8/7/2019**  
**ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΙΩΑΝΝΗΣ ΦΩΤΟΠΟΥΛΟΣ**

7.2.5. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Του Renyi.....	Σελ.121
7.2.6. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Των Beekman – Bowers....	Σελ.122
7.2.7. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Του De Vylder.....	Σελ.122
7.2.8. Συμπεράσματα Για Την Κανονική Μέθοδο.....	Σελ.123
7.2.9. Συμπεράσματα Για Την Αναδρομική Μέθοδο.....	Σελ.124
7.2.10. Συμπεράσματα Για Τις Επιπρόσθετες Μεθόδους Για Την Πιθανότητα Χρεοκοπίας.....	Σελ.124
7.3. ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....	Σελ.125
7.3.1. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Της Διακριτοποίησης.....	Σελ.125
7.3.2. Συμπεράσματα Για Την Ανισότητα Του Lundberg.....	Σελ.125
7.3.3. Συμπεράσματα Για Τις Ροπές Του Χρόνου Χρεοκοπίας.....	Σελ.126

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α. ΟΙ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΑΠΩΛΕΙΑΣ.....Σελ.127

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β. ΤΟ ΠΑΚΕΤΟ ACTUAR.....Σελ.141

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ. ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ  
ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ.....Σελ.149

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Δ. ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ  
ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ.....Σελ.156

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Ε. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ R ΓΙΑ ΤΙΣ  
ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ.....Σελ.159

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ ΣΤ. ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ.....Σελ.194

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Η. ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ MATHEMATICA.....Σελ.201

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....Σελ.207

## 1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην συγκεκριμένη διπλωματική εργασία, γίνεται μια έρευνα όσων αφορά τόσο τις προσεγγίσεις στην Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου όσο και τις προσεγγίσεις στην Θεωρία Χρεοκοπίας, με κοινό στοιχείο και στις δύο περιπτώσεις το λογισμικό πρόγραμμα R.

Πιο συγκεκριμένα, στο Κεφάλαιο 1 περιγράφουμε εισαγωγικές έννοιες, ορισμούς και μαθηματικούς τύπους για τις δύο θεωρίες (Συλλογικού Κινδύνου και Χρεοκοπίας) που θα μελετήσουμε.

Στην συνέχεια, ακολουθούν τα Κεφάλαια 2 και 3 που ερευνούμε την αποτελεσματικότητα διαφόρων βασικών μεθόδων στην προσέγγιση της συνάρτησης κατανομής του συλλογικού κινδύνου. Οι προσεγγίσεις εμφανίζονται είτε μεμονωμένες (βλ. Κεφάλαιο 2) είτε σε σύγκριση με άλλες προσεγγίσεις (βλ. Κεφάλαιο 3).

Ενώ, στα Κεφάλαια 4 και 5 κάνουμε έρευνα στην αποτελεσματικότητα διαφόρων βασικών μεθόδων στην προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Οι προσεγγίσεις εμφανίζονται σε σύγκριση με άλλες προσεγγίσεις και στα δύο κεφάλαια.

Επιπροσθέτως, στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε μια εφαρμογή η οποία αποτελεί συγκριτική μελέτη σχεδόν όλων των μεθόδων που χρησιμοποιήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια τόσο για την Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου όσο και για την Θεωρία Χρεοκοπίας.

Στο τελευταίο Κεφάλαιο 7 αποτελεί το σύνολο των συμπερασμάτων τα οποία εξάγαμε μέσα από τις εφαρμογές που ερευνήσαμε κάνοντας χρήση του προγράμματος R.

Τέλος ακολουθούν επτά χρήσιμα Παραρτήματα από τα οποία χρησιμοποιήσαμε για να ολοκληρώσουμε κάποιες εφαρμογές ή για να αναπτύξουμε την θεωρία σε βασικές κατανομές ζημιών, επιπρόσθετες προσεγγίσεις και λογισμικά προγράμματα.

## 1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ R

Το λογισμικό R γράφτηκε αρχικά από τους Ross Ihaka και Robert Gentleman στα μέσα της δεκαετίας του 90. Από το 1997 αναπτύσσεται από το R Development Core Team. Η R είναι λογισμικό ανοικτού κώδικα (open source).

Σαν γλώσσα η R μπορεί να θεωρηθεί ότι αποτελεί μια εφαρμογή της γλώσσας προγραμματισμού S. Οι διαφορές είναι ελάχιστες και έτσι κώδικας που γράφεται για τη γλώσσα S τρέχει σχεδόν αμετάβλητος και στην S και αντίστροφα (Ατζουλάκος, 2017).

Η R είναι τρία πράγματα: ένα έργο, μια γλώσσα και ένα περιβάλλον. Η R προσφέρει ένα ολοκληρωμένο σύνολο υπηρεσιών λογισμικού για ανάλυση δεδομένων, υπολογισμών και γραφημάτων (Αντουλάκος, 2017).

Η ιστοσελίδα της R είναι η <https://www.rproject.org> και αποτελεί την κύρια πηγή πληροφόρησής του. Μια δεύτερη πηγή πληροφόρησης είναι η ιστοσελίδα <https://cran.r-project.org/>

### 1.1.1. Διάφορες Εντολές Και Χρήσεις Της R

Η εντολή εκχώρησης συμβολίζεται ως εξής: “<—” ή “=” .

Π.χ.1.

```
> x <-3+4  
> x  
[1] 7
```

Π.χ.2.

```
> x =2/4  
> x  
[1] 0.5
```

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ 8/7/2019  
ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ – ΙΩΑΝΝΗΣ ΦΩΤΟΠΟΥΛΟΣ

Οι αριθμητικοί και οι λογικοί τελεστές είναι οι εξής:

ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ	ΠΡΑΞΗ	ΛΟΓΙΚΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ	ΕΡΜΗΝΕΙΑ
+	Πρόσθεση	&	Και
-	Αφαίρεση		ή
*	Πολλαπλασιασμός	!	Όχι
/	Διαίρεση	==	Ίσο με
^	Ύψωση σε Δύναμη	!=	Άνισο με
%%	Ακέραιο Μέρος Διαίρεσης	<	Μικρότερο από
%%	Υπόλοιπο Διαίρεσης	<=	Μικρότερο ή ίσο από

Οι βασικές συναρτήσεις είναι οι εξής:

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ	ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ
sqrt(x)	Τετραγωνική ρίζα
abs(x)	Απόλυτη τιμή (ή μέτρο)
sin(x), cos(x), tan(x)	Τριγωνομετρικές συναρτήσεις
asin(x), acos(x), atan(x)	Τόξα τριγωνομετρικών συναρτήσεων
factorial(x)	Παραγοντικό
choose(n,x)	Διωνυμικός συντελεστής (n ανά x)
exp(x)	Εκθετική συνάρτηση
log(x)	Λογάριθμος (φυσικός)
log b(x), log(x,b)	Λογάριθμος με βάση το b
gamma(x)	Συνάρτηση Γάμμα
ceiling(x)	Μικρότερος ακέραιος $\geq x$
floor(x)	Μεγαλύτερος ακέραιος $\leq x$
round(x, digits=n)	Στρογγυλοποίηση
signif(x, digits=6)	Σημαντικά ψηφία

### 1.1.2. Διάφορα Εργαλεία Για Γραφήματα Της R

Τα βασικότερα ορίσματα της συνάρτησης plot είναι τα εξής:

<b>ΕΝΤΟΛΗ</b>	<b>ΕΡΜΗΝΕΙΑ</b>
main="κείμενο"	Τίτλος γραφήματος
xlab="κείμενο"	Τίτλος του άξονα των x
ylab="κείμενο"	Τίτλος του άξονα των y
xlim=c(a,b)	Όρια του άξονα των x (διάστημα [a,b])
ylim=c(a,b)	Όρια του άξονα των y (διάστημα [a,b])
lty="n"	Τύπος γραμμής (n=1,2,...,6)
lwd="a"	Πάχος γραμμής (a>0)
pch="c"	Σύμβολο χαρακτήρα στη θέση των σημείων του γραφήματος
col="χρώμα"	Χρώμα γραμμής ή/και σημείων του γραφήματος (Τα 657 διαθέσιμα χρώματα δίνονται με τη συνάρτηση colors())

Οι βασικές συναρτήσεις χαμηλού επιπέδου (low level functions) είναι οι εξής:

<b>ΕΝΤΟΛΗ</b>	<b>ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ</b>
points(x,y)	Εισάγει νέα σημεία στο γράφημα
lines(x,y)	Εισάγει καμπύλες στο γράφημα
text(x,y,label="abc")	Εισάγει το κείμενο το "abc" στη θέση (x,y)
abline(a,b,h,v,...)	Εισάγει τη γραμμή $y=ax+b$
title("abc")	Εισάγει το κείμενο το "abc" ως τίτλο του γραφήματος
legend(x,y,...)	Εισάγει υπόμνημα στη θέση (X,Y)

## 1.2. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟΥ ΜΟΝΤΕΛΟΥ

### 1.2.1. Διατύπωση Του Συλλογικού Μοντέλου

Στο συλλογικό πρότυπο, οι συνολικές αποζημιώσεις αποτελούν στοχαστική ανέλιξη (σ.α.)  $S(t)$  (είτε σε συνεχή είτε σε διακριτό χρόνο  $t$ ) της μορφής  $S(t) = X_1 + X_2 + \dots + X_{N(t)}$  όπου  $N(t)$  απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη (α.σ.α., counting process) και  $X_i$ ,  $i=1, 2, \dots, N(t)$ , ισόνομες τ.μ. ανεξάρτητες μεταξύ τους και από την α.σ.α.  $N(t)$ . Παρότι κάτι τέτοιο δεν επιβάλλεται από μαθηματικούς λόγους, αρχικά θα περιορισθούμε στην μελέτη των συνολικών αποζημιώσεων που προκύπτουν μέσα σε ένα δεδομένο (και σχετικά βραχύ) χρονικό διάστημα. Η σπουδή των αποζημιώσεων μιας χρονικής περιόδου (π.χ., ενός μήνα ή ενός εξαμήνου, συνήθως δε ενός έτους) μας απαλλάσσει από την ανάγκη θεώρησης του χρόνου  $t$ : οι συνολικές αποζημιώσεις ανάγονται σε  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ , όπου  $S = S(t)$  και  $N = N(1)$  είναι απλά τ.μ. Στην περίπτωση μιας περιόδου, δηλαδή το πρότυπο διαφέρει από το ατομικό μόνον κατά το γεγονός ότι το πλήθος των αποζημιώσεων είναι τ.μ.  $N$ , ενώ στο ατομικό πρότυπο είναι (μη τυχαίος) αριθμός  $n$  (Κουτσόπουλος, 1999). Ένας άλλος λόγος για την (ευρύτατα διαδεδομένη στην αναλογιστική πρακτική) διάκριση των προτύπων σε βραχυχρόνια και μακροχρόνια είναι το γεγονός ότι, για μικρά χρονικά διαστήματα, μπορεί να αγνοηθεί η επίδραση του επιτοκίου.

Θεωρούμε τώρα ένα χαρτοφυλάκιο και το τυχαίο πλήθος,  $N$ , των αποζημιώσεων που θα προκύψουν μέσα σε μια μονάδα χρόνου (συνήθως το οικονομικό έτος (οικονομική χρήση) της ασφαλιστικής επιχείρησης) (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018). Η τ.μ.  $N$  και τα (ισόνομα) ύψη  $X_i$ , των επί μέρους αποζημιώσεων είναι ανεξάρτητες τ.μ. και έχουμε το εξής θεώρημα:

**Θεώρημα 1.1** : Αν  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ , όπου οι τ.μ.  $X_1, X_2, \dots, X_N$ ,  $N$  είναι ανεξάρτητες και οι τ.μ.  $X_1, X_2, \dots, X_N$  ισόνομες, τότε

<p>i. <math>E(S) = E(N)E(X)</math> ii. <math>Var(S) = E(N)Var(X) + (E(X))^2 Var(N)</math> iii. <math>M_S(t) = M_N(\ln M_X(t)) = P_N(M_X(t))</math> IV. <math>P_S(t) = P_N(P_X(t))</math></p>
--



### 1.2.2. Η Κατανομή Των Συνολικών Αποζημιώσεων

Για να προχωρήσουμε πέρα από την εύρεση των  $E(S)$  και  $Var(S)$ , χρησιμοποιούμε, όπως και στο ατομικό πρότυπο, τη μέθοδο των συνελίξεων. Εφόσον οι τ.μ.  $X_1, X_2, \dots$  είναι ανεξάρτητες (και ισόνομες), η σ.π.π. (ή σ.π.) του αθροίσματος  $X_1 + X_2$  είναι  $p * p$  ή  $p^{*2}$ , εκείνη του αθροίσματος  $X_1 + X_2 + X_3$  είναι  $p^{*2} * p = p^{*3}$  κ.ο.κ. Η μόνη διαφορά με το ατομικό πρότυπο είναι ότι το πλήθος των  $X_i$  είναι τυχαίο (και συχνά μη φραγμένο), γεγονός που δεν εμποδίζει την εφαρμογή του «θεωρήματος ολικής πιθανότητας». Εκτός αν είναι βέβαιο, ότι θα υπάρξει τουλάχιστον ένα ζημιογόνο γεγονός (δηλαδή, αν έχουμε  $Pr(N = 0) = 0$  για την «πιθανότητα μη ζημίας», η  $S$  έχει μικτή κατανομή με διακριτή πιθανότητα  $Pr(S = 0) = Pr(N = 0)$  στο  $x = 0$  και, για  $x > 0$ , σ.π.π. που εξαρτάται από τη σ.π.π.  $p(x)$  των  $X_i$  (δηλαδή, η  $p(x)$  είναι η σ.π. ή σ.π.π. της κατανομής των ατομικών ζημιών). Η  $S$  θα έχει μικτή κατανομή ακόμα και στην περίπτωση  $Pr(N = 0) = 0$ , αν οι τ.μ.  $X_1$  μπορούν να πάρουν την τιμή μηδέν (π.χ. λόγω της λειτουργίας «απαλλαγής» στην κάλυψη) και έχουμε το εξής θεώρημα:

**Θεώρημα 1.2** : Αν  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ , όπου οι τ.μ.  $X_1, X_2, \dots, X_N$ ,  $N$  είναι ανεξάρτητες και οι τ.μ.  $X_1, X_2, \dots, X_N$  ισόνομες με σ.π.π.  $p(x)$ , τότε η κατανομή της  $S$  ορίζεται από

$$\begin{cases} f(0) = Pr(N = 0), & x = 0 \\ f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Pr(N = n) p^{*n}(x), & x > 0 \end{cases} \quad 1.1$$

Όπου  $p(x)$ , είναι η σ.π. (ή σ.π.π.) της κατανομής των ατομικών ζημιών.

Οι πιο συνηθισμένες επιλογές για το πλήθος,  $N$ , των ζημιών είναι τ.μ. Poisson και η Αρνητική Διωνυμική τ.μ. Η τ.μ. Poisson επιλέγεται συχνά, όχι μόνο λόγω ορισμένων θεωρητικών πλεονεκτημάτων που θα δούμε αργότερα, αλλά και εξαιτίας ιδιοτήτων που προσδίδουν στη σύνθετη Poisson πρακτική υπεροχή (απλούστευση των υπολογιστικών διαδικασιών). Το γεγονός όμως, ότι η διασπορά της Poisson είναι ίση με το μέσο, αποτελεί μειονέκτημα σε εκείνες τις περιπτώσεις που εμφανίζουν διασπορά (σημαντικά) μεγαλύτερη από το μέσο, αυτό ονομάζεται υπερδιακύμανση (overdispersion). Για τις περιπτώσεις αυτές, η Αρνητική Διωνυμική σ.π. μπορεί να αποβεί καλύτερη επιλογή (Κουτσόπουλος, 1999).

### 1.2.3. Η Αναδρομική Μέθοδος Του Panjer Για Τον Υπολογισμό Της Κατανομής Των Συνολικών Αποζημιώσεων

Η γνωστή αναδρομική σχέση  $p(k) = \frac{\lambda}{k}p(k-1)$  για τη σ.π. Poisson, οδηγεί σε μια αναδρομική μέθοδο για τον υπολογισμό της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων. Η πιο πάνω αναδρομική σχέση δεν αποτελεί μεμονωμένο φαινόμενο : υπάρχουν και άλλες οικογένειες απαριθμητριών τ.μ. για τις οποίες ισχύουν ανάλογες αναδρομικές σχέσεις. Έτσι , αν η σ.π. του πλήθους των ζημιών ανήκει σε μια από τις εν λόγω οικογένειες (και οι τιμές της αποζημίωσης είναι διακριτές και ισαπέχουσες), είναι δυνατός ο αναδρομικός υπολογισμός της σ.κ. των συνολικών αποζημιώσεων (Κουτσόπουλος, 1999).

Υπάρχει και το εξής θεώρημα που κάνει ποιο αναλυτικό τον υπολογισμό της σ.κ. των συνολικών αποζημιώσεων:

**Θεώρημα 1.3** :Έστω σύνθετη κατανομή συνολικών αποζημιώσεων στην οποία (i) η σ.π. του αριθμού των ζημιών ικανοποιεί αναδρομική σχέση της μορφής

$$\pi(k) = (a + \beta/k)\pi(k-1), k = 1, 2, 3, \dots, (a \text{ και } \beta \text{ σταθερές})$$

και (ii) η σ.π. του ύψους της αποζημίωσης είναι  $Pr(X = iC) = p(i), i = 0, 1, \dots, n$  ( $C$  θετική σταθερά). Η σ.π. των συνολικών αποζημιώσεων ικανοποιεί την αναδρομική σχέση:

$$f(0) = \pi(0) \text{ αν } p(0) = 0, f(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \pi(k)[p(0)]^k \text{ αν } p(0) > 0$$

$$f(j) = \frac{1}{1-ap(0)} \sum_{i=1}^M \left(a + \frac{\beta}{j}i\right) p(i)f(j-i), j = 1, 2, 3, \dots, M = \min\{j, n\}$$

Επίσης, αν  $a=0$  και  $\beta=\lambda$ , έχουμε

$$f(j) = \frac{1}{j} \sum_{i=1}^M i\lambda p(i)f(j-i)$$

που είναι η αναδρομική μέθοδος για την σύνθετη Poisson. Άλλες κατανομές που ικανοποιούν ανάλογη αναδρομική σχέση είναι η σύνθετη διωνυμική και η σύνθετη αρνητική διωνυμική (που με  $r=1$  περιλαμβάνει τη σύνθετη γεωμετρική). Είναι δυνατόν να δείχθει, ότι η διωνυμική , η Poisson και η αρνητική διωνυμική είναι οι μόνες κατανομές που ικανοποιούν σχέση της μορφής  $\pi(k) = \left(a + \frac{\beta}{k}\right)\pi(k-1)$  (βλ. Θεώρημα 1.1.), δηλαδή ανήκουν στην

οικογένεια κατανομών  $R(\alpha, \beta, 0)$  (ή κλάση κατανομών του Panjer). Οι δέουσες τιμές των  $\alpha, \beta$  δίδονται στον ακόλουθο Πίνακα:

<b>ΚΑΤΑΝΟΜΗ</b>	<b><math>\alpha</math></b>	<b><math>\beta</math></b>
<i>POISSON</i> ( $\lambda$ )	0	$\lambda$
<i>BERNOULLI</i> ( $p$ )	$-\frac{q}{p}$	$\frac{2q}{p}$
<i>ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ</i> ( $n, p$ )	$-\frac{q}{p}$	$\frac{(n+1)q}{p}$
<i>ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ</i> <sub>0</sub> ( $p$ )	$q$	0
<i>ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ</i> <sub>0</sub> ( $r, p$ )	$q$	$(r-1)q$

Το να επιτρέπεται θετική τιμή του  $p(0) = Pr(X = 0)$  είναι αναγκαίο επειδή η μετατροπή μιας σ.π.π. σε διακριτή σ.π. (προκειμένου να εφαρμοσθεί η αναδρομική σχέση (1.1) συχνά οδηγεί σε  $p(0) > 0$ . Για τις τιμές που παίρνει η πιθανότητα  $f(0)$  για τις σ.π. του παραπάνω Πίνακα σε περίπτωση που  $p(0) > 0$ . Η τάξη μεγέθους του πλήθους των απαιτούμενων αριθμητικών πράξεων (για να ολοκληρωθεί ο υπολογισμός σ.π.  $f(j)$  του θεωρήματος είναι  $5a \binom{n}{c} mp_1$  όπου  $m = E(N)$ ,  $p_1 = E(X)$ ,  $n$  ο αριθμός των δυνατών τιμών του ύψους αποζημίωσης  $X$ ,  $C$  το «βήμα» μεταξύ διαδοχικών τιμών του  $X$  και  $a$  ένας συντελεστής (συνήθως  $\leq 10$ ) που δείχνει σε ποιο πολλαπλάσιο του  $mp_1$  πρέπει να φθάσει η αναδρομή, ώστε η απομένουσα πιθανότητα να είναι αμελητέα.

Για να αποφευχθεί η «υπερχείλιση» (overflow) κατά την εκτέλεση των πράξεων με υπολογιστή, μπορεί να είναι αναγκαία η αλλαγή κλίμακας ή η χρήση λογαρίθμων. Αλλαγή κλίμακας (ακολουθούμενη από επαναφορά στην αρχική κλίμακα) μπορεί να είναι επίσης αναγκαία σε περίπτωση “underflow”, δηλαδή πιθανοτήτων τόσο μικρών (π.χ. όταν το  $\lambda$  μιας Poisson είναι πολύ μεγάλο) που εκλαμβάνονται ως μηδέν και τον υπολογιστή (Κουτσόπουλος, 1999).

Για να μετατραπεί σε διακριτή σ.π. η σ.κ.  $P(x)$  συνεχούς ύψους αποζημίωσης θέτουμε:

$$p(2i - 1) = Pr(X = (2i - 1)C) = P(2iC) - P((2i - 2)C), i = 1, 2, \dots, n \quad (2)$$

(με  $n$  αρκετά μεγάλο ώστε η πιθανότητα  $1 - P(2nC)$  να είναι αμελητέα).

Ένα μειονέκτημα της μεθόδου (όπως γενικά των μεθόδων «διακριτοποίησης») είναι τα «σφάλματα στρογγυλοποίησης» που προκύπτουν στη μέση τιμή και στις ροπές μεγαλύτερης τάξης. (Π.χ. ένας πρόχειρος έλεγχος της ακρίβειας της μετατροπής είναι ακριβώς η σύγκριση των ροπών της διακριτής σ.π. με τις αντίστοιχες ροπές της αρχικής συνεχούς σ.κ.)

Υπάρχει ένας δεύτερος τρόπος μετατροπής που μειώνει τα σφάλματα στρογγυλοποίησης και ταυτόχρονα εξασφαλίζει, ότι ο μέσος της σ.κ. παραμένει αμετάβλητος (η προκύπτουσα διακριτή σ.π. έχει τον μέσο της αρχικής σ.κ.).

Η μέθοδος του Θεωρήματος 1.3. μπορεί να γενικευθεί με «χαλάρωση» σε κάποιο βαθμό των δύο συνθηκών του Θεωρήματος 1.3. π.χ. με επέκταση της μεθόδου σε κατανομές του πλήθους ζημιών που ικανοποιούν την αναδρομική σχέση  $\pi(k) = \left(a + \frac{\beta}{k}\right)\pi(k-1)$  για  $k \geq 1$ . (Κουτσόπουλος, 1999).

### **1.3. ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ**

#### **1.3.1. Η Ανέλιξη Των Συνολικών Απαιτήσεων**

Στο συλλογικό πρότυπο της θεωρίας κινδύνων χρησιμοποιούμε μία τυχαία μεταβλητή  $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ , η οποία έχει μία σύνθετη κατανομή και χρησιμοποιείται για να περιγράψει τις συνολικές απαιτήσεις, που προέρχονται από ένα χαρτοφυλάκιο, προς μια ασφαλιστική εταιρεία. Στη θεωρία χρεοκοπίας εξετάζουμε τις συνολικές αποζημιώσεις που αφορούν ένα χαρτοφυλάκιο όπως αυτές εξελίσσονται στο χρόνο. Για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε μία στοχαστική ανέλιξη,  $\{S(t) : t \geq 0\}$ , και όχι μια τυχαία μεταβλητή για να περιγράψει το συνολικό μέγεθος αυτών των αποζημιώσεων.

Συγκεκριμένα, η (διακριτή) τυχαία μεταβλητή  $N$  η οποία χρησιμοποιείται στο συλλογικό πρότυπο για να μετρά (απαριθμεί) τον αριθμό των απαιτήσεων σε ένα προκαθορισμένο διάστημα, αντικαθίστανται τώρα από μία στοχαστική ανέλιξη (μία απαριθμήτρια ανέλιξη)  $\{N(t) : t \geq 0\}$ , η οποία καταγράφει τον αριθμό των απαιτήσεων προς την εταιρεία στο χρόνο. Με άλλα λόγια, για ένα συγκεκριμένο χρονικό σημείο  $t$  η ποσότητα  $N(t)$  είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία δηλώνει τον αριθμό απαιτήσεων που φτάνουν στην ασφαλιστική εταιρεία στο διάστημα  $[0, t]$ . Είναι σημαντικό να αναφερθεί πως μια απαριθμήτρια στοχαστική ανέλιξη είναι μία στοχαστική ανέλιξη στο χρόνο  $\{X_t : t \geq 0\}$ , όταν καταγράφει (απαριθμεί) το πλήθος των εμφανίσεων ενός γεγονότος

στο χρονικό διάστημα  $[0,t]$ .Μέ άλλα λόγια, για κάθε  $t \geq 0$  , η μεταβλητή  $X_t$  δηλώνει πόσες φορές έχει εμφανιστεί το γεγονός που μας ενδιαφέρει έως τη χρονική στιγμή  $t$  (ΠΟΛΙΤΗΣ,2012) .

Με βάση τα προαναφερθέντα και σε αντιστοιχία με την έννοια της σύνθετης κατανομής, η  $\{S(t) : t \geq 0\}$  είναι μία *σύνθετη (στοχαστική) ανέλιξη* που ορίζεται για κάθε  $t$  από τη σχέση

$$S(t) = \begin{cases} \sum_{i=0}^{N(t)} X_i, & \text{αν } N(t) > 0 \\ 0, & \text{αν } N(t) = 0 \end{cases} \quad 1.2$$

Το σημαντικότερο παράδειγμα μιας σύνθετης ανέλιξης, και αυτό που θα μελετήσουμε αναλυτικά στη συνέχεια, είναι αυτό στο οποίο η  $\{N(t): t \geq 0\}$  είναι μία ανέλιξη Poisson,οπότε λέμε ότι η  $\{S(t) : t \geq 0\}$ , που παριστάνει τις συνολικές αποζημιώσεις καθώς μεταβάλλονται στο χρόνο, ακολουθεί μία *σύνθετη ανέλιξη Poisson* (Πολίτης , 2012).

Ακόμη, θεωρούμε μία συνάρτηση  $P(t)$  η οποία δηλώνει τα συνολικά ασφάλιστρα που εισρέουν στην εταιρεία στο διάστημα  $[0,t]$ .Επισημαίνεται εδώ ότι τα ασφάλιστρα καθορίζονται με ακρίβεια από τον ασφαλιστή, δηλαδή θεωρούμε ότι δεν υπάρχει αβεβαιότητα ως προς την εξέλιξη τους στο χρόνο, για το λόγο αυτό η  $P(t)$  είναι αύξουσα μαθηματική συνάρτηση και όχι μία στοχαστική ανέλιξη.

Στην απλούστερη περίπτωση, την οποία θα εξετάσουμε στη συνέχεια, η  $P(t)$  είναι μία γραμμική συνάρτηση.

### 1.3.2. Η Στοχαστική Ανέλιξη Του Πλεονάσματος

Η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος  $\{U(t) : t \geq 0\}$  ορίζεται για κάθε  $t \geq 0$  από τη σχέση:

$$U(t) = u + P(t) - S(t)$$

$u =$ αποθεματικό που διαθέτει η εταιρεία για το χαρτοφυλάκιο $P(t) =$ συνολικό ασφάλιστρο στο διάστημα $[0, t]$ $S(t) =$ σύνθετη ανέλιξη για τις συνολικές αποζημιώσεις στο διάστημα $[0, t]$
--

Το  $U(t)$  καλείται αποθεματικό ή πλεόνασμα τη χρονική στιγμή  $t$ , ενώ το  $U(0) = u$  λέγεται αρχικό αποθεματικό ή αρχικό πλεόνασμα (initial surplus).

Στην θεωρία της χρεωκοπίας εξετάζουμε τις συνολικές αποζημιώσεις που αφορούν ένα χαρτοφυλάκιο όπως αυτές εξελίσσονται στο χρόνο. Για το λόγο αυτό επιζητούμε μια στοχαστική ανέλιξη  $\{S(t) : t \geq 0\}$ , και όχι μια τυχαία μεταβλητή για να περιγράψει το συνολικό μέγεθος αυτών των αποζημιώσεων.

Επιπροσθέτως, για ένα συγκεκριμένο χρονικό σημείο  $t$  η ποσότητα  $N(t)$  είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία δηλώνει τον αριθμό απαιτήσεων που φθάνουν στην ασφαλιστική εταιρεία στο διάστημα  $[0, t]$ .

Με βάση τα παραπάνω η  $\{S(t) : t \geq 0\}$  είναι μία σύνθετη στοχαστική ανέλιξη που ορίζεται για κάθε  $t$  από τη σχέση 1.2.

Ακόμη θεωρούμε μια συνάρτηση  $P(t)$  η οποία δηλώνει τα συνολικά ασφάλιστρα που εισρέουν στην Εταιρεία στο διάστημα  $[0, t]$ . Στην απλούστερη περίπτωση η  $P(t)$  είναι μια γραμμική συνάρτηση. Συμβολίζουμε με  $c$  το ασφάλιστρο που εισρέει στην εταιρεία στην μονάδα του χρόνου έτσι ώστε το σύνολο των ασφαλίσεων που εισπράττει η εταιρεία στο χρονικό διάστημα  $[0, t]$  είναι  $ct$  (Πολίτης, 2012).

### 1.3.3. Η Πιθανότητα Χρεοκοπίας

**Ορισμός 1.1** : Η πιθανότητα χρεοκοπίας (σε άπειρο χρόνο) με αρχικό αποθεματικό  $u$  ορίζεται από τη σχέση:

$$\psi(u) = \Pr[U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0 \mid U(0) = u]$$

Έστω  $\mu_1 = E(X_i)$  η μέση αποζημίωση και  $\lambda$  η ένταση της ανέλιξης Poisson για τις αφίξεις των αποζημιώσεων.

Επίσης,  $\theta$  είναι το περιθώριο ασφάλειας και ορίζεται ως εξής:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_1} - 1$$

Ένα βασικό αποτέλεσμα, το οποίο δείχνει τη σημασία που έχει η παραπάνω συνάρτηση, είναι το εξής:

Αν  $\theta > 0$  τότε  $\psi(u) = 1$ ,  
δηλαδή η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι βέβαιη,  
όσο μεγάλο είναι το αρχικό αποθεματικό  $u$

Επίσης αν ισχύει  $c > \lambda \cdot \mu_1$  δηλαδή  $\theta > 0$  τότε  $\psi(u) < 1$ ,  $\forall u \geq 0$

### 1.3.4. Ο Συντελεστής Προσαρμογής

**Ορισμός 1.2** : Η θετική σταθερά  $R$  η οποία ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση για  $r$  , ονομάζεται συντελεστής προσαρμογής.

Η εξίσωση είναι:

$$M_X(r) = 1 + (1 + \theta) \cdot \mu_1 \cdot r$$

ως λύση της οποίας προκύπτει ο συντελεστής προσαρμογής ονομάζεται εξίσωση του συντελεστή προσαρμογής, ή συνηθέστερα, εξίσωση του Lundberg.

*Ο συντελεστής προσαρμογής δεν υπάρχει στις περιπτώσεις που η ροπογεννήτρια  $M(r)$  απειρίζεται για κάθε  $r > 0$*

### 1.3.5. Η Ανισότητα Του Lundberg

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει η ροπογεννήτρια (δηλαδή απειρίζεται π.χ. Λογαριθμοκανονική, Pareto, κ.α.) χρησιμοποιούμε ένα άνω φράγμα για το συντελεστή προσαρμογής. Τέτοιο είναι:

$$R < \frac{2 \cdot \theta \cdot \mu_1}{\mu_2} ,$$

όπου  $\mu_1, \mu_2$  είναι οι δυο πρώτες ροπές της κατανομής των αποζημιώσεων.

Επίσης στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι καλύτερο να κάνουμε χρήση της Ανισότητας του Lundberg για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας. Αυτή είναι η ακόλουθη:

$$\psi(u) \leq e^{-R \cdot u}$$

## 2. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΣΤΗ ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο γίνεται έρευνα σχετικά με τις έξι βασικές μεθόδους οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση των συνολικών αποζημιώσεων στην περίπτωση που οι ατομικές ζημιές είναι στην διακριτή περίπτωση. Αρχικά γίνεται η συνοπτική παρουσίαση των μεθόδων και στη συνέχεια κάνουμε εφαρμογές με σκοπό να διαπιστώσουμε την αποτελεσματικότητα κάθε μεθόδου ξεχωριστά.

### 2.1. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ

Η συγκεκριμένη ενότητα παρουσιάζεται πιο αναλυτικά στο Παράρτημά Β' αλλά υπάρχει και κάποια αναφορά στο Κεφάλαιο 1.

#### 2.1.1. Η Αναδρομική Μέθοδος ή Μέθοδος Του Panjer

Είναι γνωστό ότι για κάποιες τάξεις διακριτών κατανομών, ο υπολογισμός της σύνθετης κατανομής (μέσω συνελίξεων) μπορεί να μειωθεί μέσω μιας απλής αναδρομικής σχέσης που εισήγαγε ο Panjer το 1981 και αναφέρεται ως <<Αναδρομική Μέθοδος του Panjer>>.

Κατ' αρχάς, η μέθοδος αυτή σχεδιάστηκε για διακριτές κατανομές κινδύνων. Όμως, για να γίνει χρήση αυτής της μεθόδου για το συλλογικό κίνδυνο, όταν οι ζημιές ακολουθούν συνεχείς κατανομές πρέπει να αντικατασταθούν με διακριτές κατανομές (Διακριτοποίηση).

Σύμφωνα με τον Panjer η συνάρτηση πιθανότητας πυκνότητας (σ.π.π.) των συνολικών κινδύνων δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$g_S(x) = \frac{1}{1 - af_X(0)} \sum_{i=1}^n \left( a + \frac{\beta}{x} i \right) f_X(i) g_S(x - i),$$

όπου  $f_X(i)$  είναι η σ.π.π. των ατομικών ζημιών και  $\alpha, \beta$  είναι παράμετροι της αναδρομικής σχέσης.

Τέλος η <<Αναδρομική Μέθοδος του Panjer>>, περιγράφεται πιο αναλυτικά στο Κεφάλαιο 1 και ειδικότερα στο Θεώρημα 1.3 που γίνεται πιο αναλυτική παρουσίαση των παραμέτρων  $\alpha$  και  $\beta$  σε διάφορες διακριτές κατανομές όπως λ.χ. η κατανομή Poisson.



### 2.1.2. Η Κανονική Μέθοδος

Έστω οι ζημιές  $X_1, X_2, \dots$  που είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες. Σύμφωνα με το ΚΟΘ (Κεντρικό Οριακό Θεώρημα) αναμένεται να προβάλλει μια ικανοποιητική προσέγγιση για το συλλογικό μοντέλο  $S$ . Τότε, οι σύνθετες κατανομές προσεγγίζονται από την Κανονική Μέθοδο με την Μέση Τιμή και την Διακύμανση όπως φαίνεται παρακάτω,

$$G_S \sim \text{Normal} \left( E(S), \sqrt{\text{Var}(S)} \right)$$

Αυτό είναι ασυμπτωτικό αποτέλεσμα και δεν γνωρίζουμε για το σύνολο διαφόρων κατανομών πόσο καλά θα λειτουργήσει αυτή η μέθοδος.

### 2.1.3. Η Δυναμοκανονική Μέθοδος ή Μέθοδος Normal Power 2

Αποτελεί μια εξέλιξη η Δυναμοκανονική Μέθοδος ή Μέθοδος Normal Power 2 της Κανονικής Μεθόδου μόνο που πέρα από την Μέση Τιμή και την Διακύμανση γίνεται και χρήση του συντελεστή ασυμμετρίας  $\gamma$  όπου

$$\gamma = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3}{\left\{ \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \right\}^3},$$

(KAAS & others, 2009).

### 2.1.4. Η Μέθοδος Των Συνελίξεων

Είναι γνωστό ότι η σ.π.π. και η σ.κ. του αθροίσματος δύο ανεξάρτητων συνεχών τυχαίων μεταβλητών  $Y_1 \sim F_1(\cdot)$  και  $Y_2 \sim F_2(\cdot)$ , με σ.π.π.  $f_1(\cdot)$  και  $f_2(\cdot)$ , αντίστοιχα μπορεί να υπολογισθεί μέσω συνελίξεων, δηλαδή

$$f_{Y_1+Y_2}(y) = (f_1 * f_2)(y) = \int f_2(y - y_1) f_1(y_1) dy_1$$

και

$$F_{Y_1+Y_2}(y) = (F_1 * F_2)(y) = \int F_2(y - y_1) f_1(y_1) dy_1$$

Έτσι ο υπολογισμός της συνολικής κατανομής ζημιών  $S$  γίνεται μέσω της Μεθόδου των Συνελίξεων, δηλαδή

$$G(S) = Pr[S \leq s] = \sum_{k=0}^{\infty} Pr[S \leq s / N = n] Pr[N = k] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k F^{(k)*}(s)$$

### 2.1.5. Η Μέθοδος Της Προσομοίωσης

Αυτή η ιδιαίτερη μέθοδος προσομοιώνει ζημιές από διάφορα χαρτοφυλάκια που ακολουθούν μεμιγμένα ιεραρχικά μοντέλα.

Π.χ. έστω το μεμιγμένο ιεραρχικό μοντέλο  $S_{ijt}$  με  $S_{ijt} = X_{ijt1} + \dots + X_{ijtN_{ijt}}$  για  $i=1, \dots, I, j=1, \dots, J_i, t=1, \dots, n_{ij}$  και

$$X_{ijt1} \sim \text{KATANOMH } 1$$

⋮

$$X_{ijtN_{ijt}} \sim \text{KATANOMH } N_{ijt}$$

Αλλά και  $N_{ijt} \sim N - \text{KATANOMH}$

Έτσι χρησιμοποιώντας την παραγωγή τυχαίων αριθμών από μια κατανομή προσομοιώνουμε  $i$  - φορές την κατανομή της  $t$  - ατομικής ζημιάς  $X$  και λαμβάνουμε  $j$  - αποτελέσματα προσομοίωσης.

### 2.1.6. Η Μετατοπισμένη Γάμμα Μέθοδος

Έστω ο συντελεστής ασυμμετρίας της σύνθετης κατανομής της τ.μ.  $Z$ , στην περίπτωση της Poisson οι κατανεμημένες συχνότητες, είναι

$$\frac{E[(Z - E[Z])^3]}{(Var[Z])^{3/2}} = \frac{\lambda E[X^3]}{(\lambda E[X^2])^{3/2}} > 0,$$

που πλησιάζει το μηδέν όσο το  $\lambda$  αυξάνεται όμως απειρίζεται θετικά όσο το  $\lambda > 0$  απειρίζεται. Για να βελτιωθεί η Κανονική Μέθοδος, η σύνθετη ζημιοκατανομή μπορεί να προσεγγιστεί από την Μετατοπισμένη-Γάμμα κατανομή η οποία έχει θετική ασυμμετρία, τότε η  $Z$  προσεγγίζεται από την  $Y + \alpha$ , όπου  $\alpha$  είναι η Μετατόπιση και  $Y$  είναι μια τυχαία παράμετρος από την Γάμμα ( $\alpha, \beta$ ). Οι τρεις παράμετροι αυτής της μεθόδου εκτιμούνται από τον

συνδυασμό της μέσης τιμής, της διακύμανσης και της ασυμμετρίας της προσεγγιστικής κατανομής έτσι έχουμε:

$$\frac{\alpha}{\beta} + k = E[Z], \quad \frac{\alpha}{\beta^2} = Var[Z], \quad \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{E[(Z - E[Z])^3]}{(Var[Z])^{3/2}}.$$

Αν η μετατόπιση της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους  $\alpha, \beta$  συμβολισθεί με την παράμετρο  $k$  τότε έχουμε ένα νέο πιο ικανοποιητικό σύστημα για τον υπολογισμό αυτής της μεθόδου που προσεγγίζει τον συνολικό κίνδυνο  $S$  και το σύστημα αυτό είναι:

$$E(S) = \frac{\alpha}{\beta} + k,$$

$$Var(S) = \frac{\alpha}{\beta^2},$$

$$\gamma_s = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}.$$

Αυτή η προσέγγιση χρειάζεται την ύπαρξη των τριών πρώτων ροπών και έτσι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί αν η τρίτη ροπή δεν υπάρχει.

Χρήσιμη Σημείωση : Αν  $N \sim Poisson(\lambda)$ , τότε:

$$\alpha\beta = \lambda E[X], \quad \alpha\beta^2 = \lambda E[X^2], \quad \frac{2}{\sqrt{\alpha}} = \frac{\lambda E[X^3]}{(\lambda E[X^2])^{3/2}}.$$

## 2.2. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Στη συνέχεια δίνουμε κάποιες αριθμητικές εφαρμογές για τις μεθόδους που αναφέρθηκαν.

Εφαρμογή 2.2.1 / Η Αναδρομική Μέθοδος Η' Μέθοδος Του Panjer (DICKSON, 2005, Σελ. 70) : Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δίνεται ότι η κατανομή του πλήθους των ζημιών ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda=2$  δηλαδή,  $N \sim Pois(2)$  με σ.π.  $p_n = Pr[N = n] = 2^n \frac{e^{-2}}{n!}$  ενώ η κάθε ζημιά στο χαρτοφυλάκιο δίνεται από την σ.π. με  $f_j = 0,6(0,4)^{j-1}$ ,  $j=1,2,\dots$ , άρα είναι κατανοητό ότι  $j \sim Ge_1(0,6)$  δηλαδή ακολουθεί την Γεωμετρική Κατανομή με παράμετρο  $p=0,6$ . Ζητείται να υπολογισθεί η αθροιστική κατανομή  $g_x$  του συνολικού χαρτοφυλακίου ζημιών  $S$  για  $x = 0, 1, 2$  και  $3$ .

ΛΥΣΗ: Γενικά ισχύει ότι  $g_x = \sum_{j=1}^x \left(a + \frac{b}{x}\right) j f_j g_{x-j}$

Αφού  $N \sim \text{Pois}(\lambda) \Rightarrow a = 0$  και  $b = \lambda = 2$

Τότε  $g_x = \frac{2}{x} \sum_{j=1}^x j f_j g_{x-j}$

Για  $x = 0 \Rightarrow g_0 = P_N(f_0) = e^{-2(f_0-1)} = e^{-2(0-1)} = 0,1353$

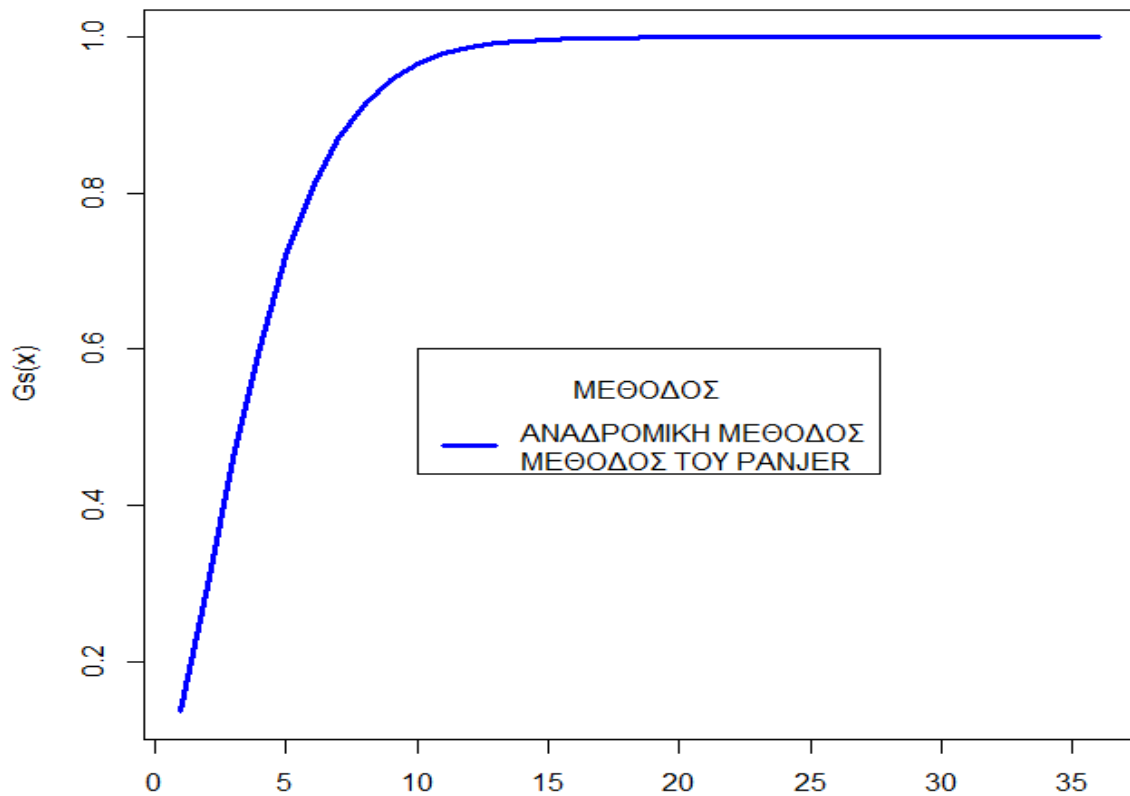
Για  $x = 1 \Rightarrow g_1 = \frac{2}{1} \cdot 1 \cdot f_1 \cdot g_0 = 0,1624$

Για  $x = 2 \Rightarrow g_2 = \frac{2}{2} \cdot (1 \cdot f_1 \cdot g_1 + 2 \cdot f_2 \cdot g_0) = 0,1624$

Για  $x = 3 \Rightarrow g_3 = \frac{2}{3} \cdot (1 \cdot f_1 \cdot g_2 + 2 \cdot f_2 \cdot g_1 + 3 \cdot f_3 \cdot g_0) = 0,1429$

Η λύση μπορεί να δοθεί και με χρήση της R (βλ. Παράρτημα Ε')

### Σ.Κ. ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ S



x  
Γραφήμα 2.2.1.

Στο παραπάνω Γράφημα 2.2.1 παρουσιάζεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) του συνολικού κινδύνου S, η οποία προσεγγίζεται μέσω της Αναδρομικής Μεθόδου. Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι ικανοποιητική στο

διάστημα τιμών της  $x$  ( $x \in [1,40]$  με βήμα  $h=1$ ), αφού με πολύ γρήγορο ρυθμό φτάνει στην μονάδα, ο οποίος είναι και ένας επιθυμητός στόχος της σ.κ. της  $S$ . Όπως είναι αναμενόμενο, η σ.κ. είναι αύξουσα.

Εφαρμογή 2.2.2. / *Η Κανονική Μέθοδος* (KAAS et others, 2009, ΣΕΛ. 31) : Έστω ότι 1000 νεαροί άντρες κάνουν χρήση ενός ασφαλιστικού προγράμματος ζωής για χρονικό ορίζοντα ενός έτους . Η πιθανότητα να πεθάνουν είναι 0,001 για καθέναν και για κάθε θάνατο η πληρωμή είναι 1. Θέλουμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα οι συνολικές πληρωμές να είναι το πολύ 4 νομισματικές μονάδες.

ΛΥΣΗ : Γνωρίζουμε ότι το πλήθος  $N=1000$

Και ότι οι ζημιές  $X \sim Bernouli(p = 0.001)$

Άρα οι συνολικές απαιτήσεις  $S \sim Binomial(N = 1000, p = 0.001)$

Όμως επειδή  $p = 0.001$  είναι πολύ μικρό τότε επιλέγουμε  $S \sim Poisson(Np = 1)$

Επίσης , αντί την πιθανότητα το πολύ 4 χρησιμοποιούμε την 3,5 (για συνεχή διόρθωση)

Έτσι έχουμε  $Pr[S \geq 3,5] = 1 - e^{-1} - e^{-1} - \frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{6}e^{-1} = 0,01899$

Αν κάναμε χρήση της αρχικής κατανομής της  $S$  τότε  $Pr[S \geq 3,5] = 0,01893$

Σύμφωνα με την Κανονική Προσέγγιση για  $\mu = E(S) = 1$  και  $\sigma^2 = Var(S) = 1$ ,

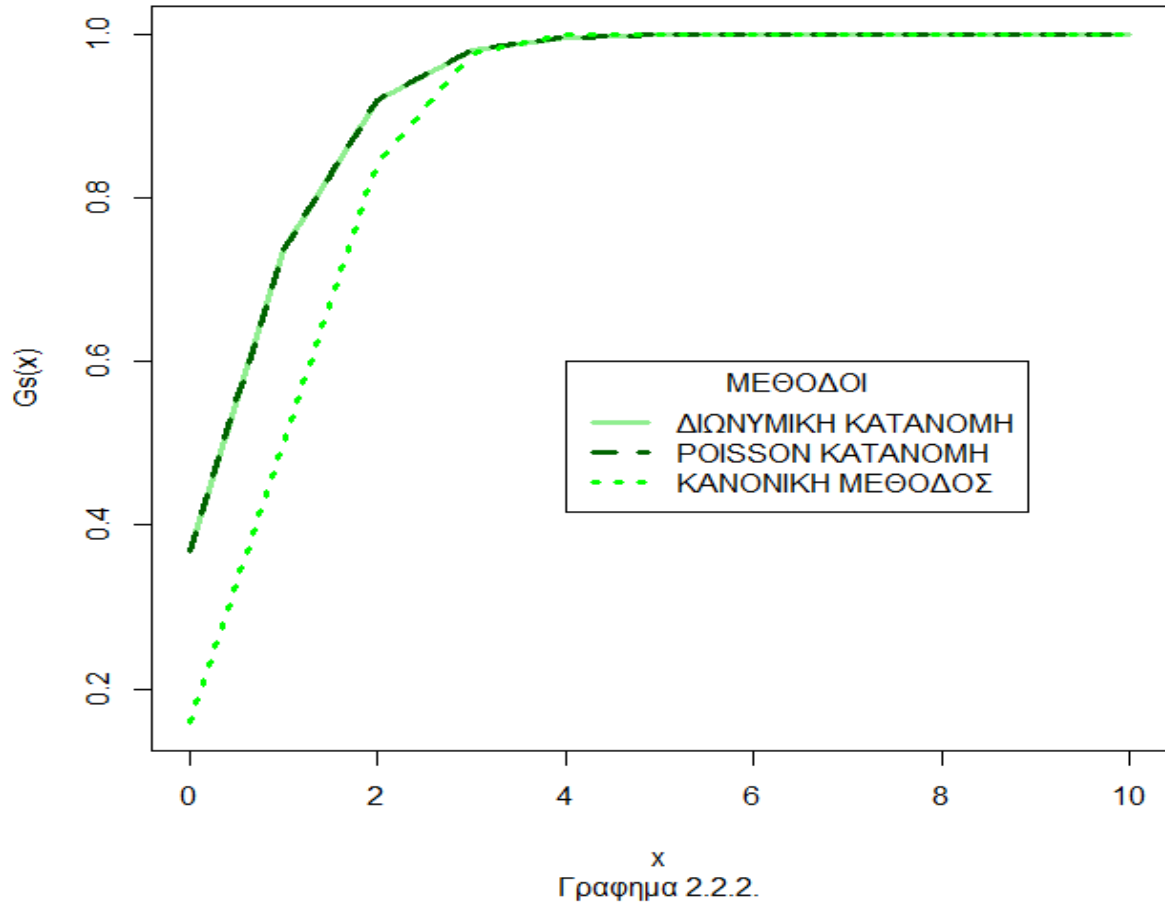
έχουμε :  $Pr[S \geq 3,5] = Pr\left[\frac{S-\mu}{\sigma} \geq \frac{3,5-\mu}{\sigma}\right] \approx 1 - \Phi(2,5) = 0,0062$

Όπως φαίνεται η κανονική προσέγγιση δεν είναι πολύ καλή σε αυτή την περίπτωση και αυτό ευθύνεται στη λοξότητα της  $S$   $\gamma_S = 1$  (αλλά και λόγω της ασυμμετρίας της παραμέτρου της  $X$ )

Χρήσιμο Συμπέρασμα : Οι πιο συμμετρικές κατανομές, οδηγούν σε καλύτερη σύγκλιση των αποτελεσμάτων των προσεγγίσεων.

Η λύση μπορεί να δοθεί και με χρήση της R (βλ. Παράρτημα Ε')

**Σ.Κ. ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ S**



Στο παραπάνω Γράφημα 2.2.2 παρουσιάζεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) του συνολικού κινδύνου S, η οποία προσεγγίζεται μέσω της Κανονικής Μεθόδου, αλλά και οι αθροιστικές συναρτήσεις κατανομών της Σύνθετης Διωνυμικής κατανομής και της Σύνθετης Poisson κατανομής. Παρατηρούμε ότι η Σύνθετη Poisson δίνει πολύ καλύτερη προσέγγιση σε σχέση με την κανονική.

Εφαρμογή 2.2.3. / Η Δυναμοκανονική Μέθοδος (Normal Power 2) (KAAS et others, 2009, Σελ. 33) : Έστω ότι 1000 άτομα ασφαρίζονται με ένα πρόγραμμα για χρονικό ορίζοντα ενός έτους. Οι ατομικές ζημιές ακολουθούν την κανονική κατανομή με  $\mu=10$  και  $\sigma=1$ . Ζητάμε την πιθανότητα ότι το κεφάλαιο 13000 ν.μ. είναι ανεπαρκές για να καλύψει τις συνολικές ζημιές.

ΔΥΣΗ : Γνωρίζουμε ότι το πλήθος  $N=1000$

Και ότι οι ζημιές  $X \sim Normal(\mu = 10, \sigma = 1)$

Άρα οι συνολικές απαιτήσεις  $S \sim Normal(N \cdot \mu = 10000, N \cdot \sigma = 1000)$

Επίσης  $\gamma_s = 0$

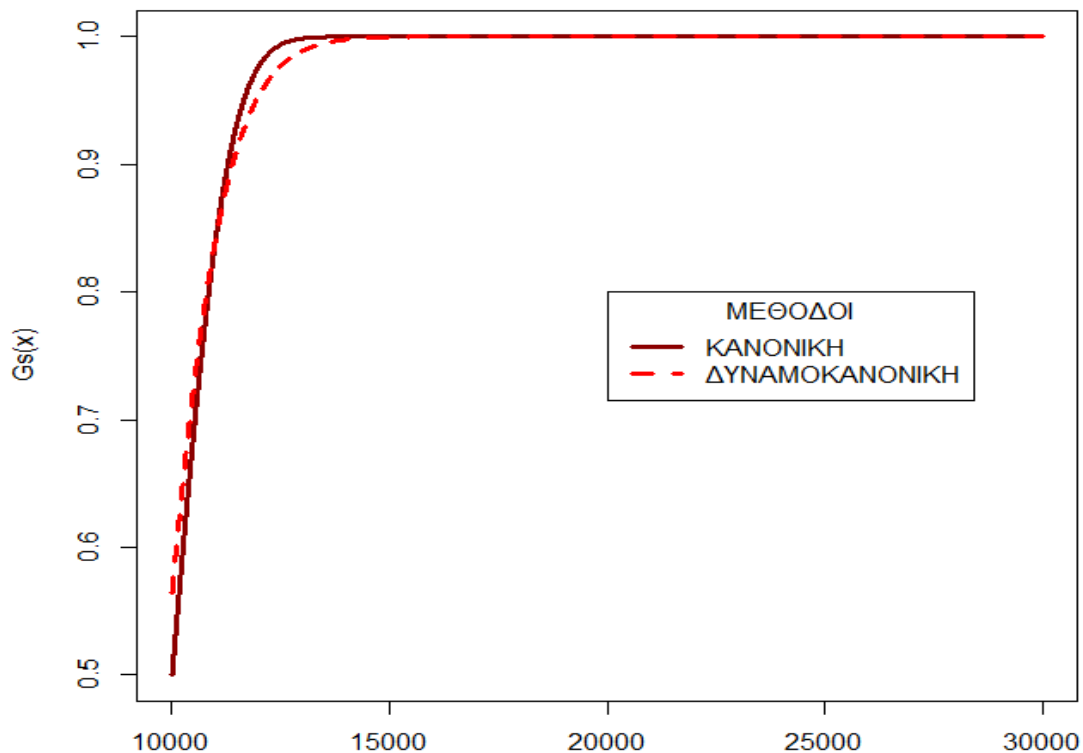
Σύμφωνα με την Μέθοδο Normal Power 2 η ζητούμενη πιθανότητα είναι :

$$Pr[S \geq 13000] = Pr\left[\frac{S-\mu}{\sigma^2} \geq \frac{13000-\mu}{\sigma^2}\right] \approx 1 - \Phi\left(\sqrt{\frac{9}{1^2} + \frac{6 \cdot 3}{1}} + 1 - \frac{3}{1}\right) =$$

$$= 1 - \Phi(2,29) = 0,01$$

Η λύση μπορεί να δοθεί και με χρήση της R (βλ. Παράρτημα Ε')

### Σ.Κ. ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ S



x  
Γραφημα 2.2.3.

Στο παραπάνω Γράφημα 2.2.3 γίνεται μια πρώτη σύγκριση της αθροιστικής συνάρτησης κατανομής (σ.κ.) του συνολικού κινδύνου S, μέσω της Κανονικής Μεθόδου και μέσω της Δυναμοκανονικής Μεθόδου. Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι ικανοποιητική στο διάστημα τιμών της x ( $x \in [10000, 30000]$ ) με βήμα  $h=1000$ ), αφού με εξαιρετικά γρήγορο ρυθμό φτάνουν στην μονάδα και οι δύο μέθοδοι που προσεγγίζουν το συνολικό κίνδυνο S. Όμως πρώτα φτάνει στην μονάδα η σ.κ. της Κανονικής Μεθόδου και μετά από τρία βήματα έρχεται η σ.κ. της Δυναμοκανονικής Μεθόδου, αυτό οφείλεται στο ότι η κατανομή που ακολουθεί η S είναι Κανονική και αυτό συντελεί στο να προσεγγιστεί πιο ικανοποιητικά από την ίδια την σ.κ. της Κανονικής κατανομής. Άρα

καταλαβαίνουμε ότι η Δυναμοκανονική Μέθοδος δεν προσεγγίζει τόσο ικανοποιητικά τη σ.κ. της S, στη συγκεκριμένη εφαρμογή.

Εφαρμογή 2.2.4 / Η Μέθοδος Των Συνελίξεων (ΑΝΤΖΟΥΛΑΚΟΣ, 2017) : Η τ.μ. X έχει συνάρτηση πιθανότητας  $f(1) = 0,25$  και  $f(2) = f(3) = 0,375$  . Έστω  $X_1, X_2, X_3, X_4$  τυχαίο δείγμα μεγέθους 4 από την παραπάνω κατανομή και  $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$  . Να βρεθούν οι πιθανότητες  $Pr[Y = 5]$  και  $Pr[Y \leq 5]$ .

ΛΥΣΗ :

Έστω  $f_{X_1+X_2}(s)$  είναι η συνέλιξη των  $f_{X_1}(x)$  και  $f_{X_2}(x)$  δηλαδή,

$$f_{X_1+X_2}(s) = \sum_x f_{X_2}(s-x)f_{X_1}(x), x = 1,2,3$$

Έστω  $f_{X_1+X_2+X_3}(s)$  είναι η συνέλιξη των  $f_{X_1+X_2}(x)$  και  $f_{X_3}(x)$  δηλαδή,

$$f_{X_1+X_2+X_3}(s) = \sum_x f_{X_3}(s-x)f_{X_1+X_2}(s), x = 1,2,3$$

Έστω  $f_{X_1+X_2+X_3+X_4}(s)$  είναι η συνέλιξη των  $f_{Y=X_1+X_2+X_3+X_4}(x)$  και  $f_{X_4}(x)$  δηλαδή,

$$g_Y(s) = f_{X_1+X_2+X_3+X_4}(s) = \sum_x f_{X_4}(s-x)f_{X_1+X_2+X_3}(s), x = 1,2,3$$

Άρα η  $g_Y(s)$  δίνεται από τον ακόλουθο πίνακα:

s	$g_Y(s)$	s	$g_Y(s)$
0	<b>0.000000</b>	13	<b>0.036770</b>
1	<b>0.000000</b>	14	<b>0.072639</b>
2	<b>0.000000</b>	15	<b>0.117803</b>
3	<b>0.000000</b>	16	<b>0.158285</b>
4	<b>0.000000</b>	17	<b>0.176704</b>
5	<b>0.000000</b>	18	<b>0.163437</b>
6	<b>0.000000</b>	19	<b>0.124098</b>
7	<b>0.000000</b>	20	<b>0.076041</b>
8	<b>0.000015</b>	21	<b>0.036500</b>
9	<b>0.000183</b>	22	<b>0.013036</b>
10	<b>0.001144</b>	23	<b>0.003129</b>
11	<b>0.004807</b>	24	<b>0.000391</b>
12	<b>0.015020</b>		



Οι ζητούμενες πιθανότητες δίνονται από τους εξής τύπους:

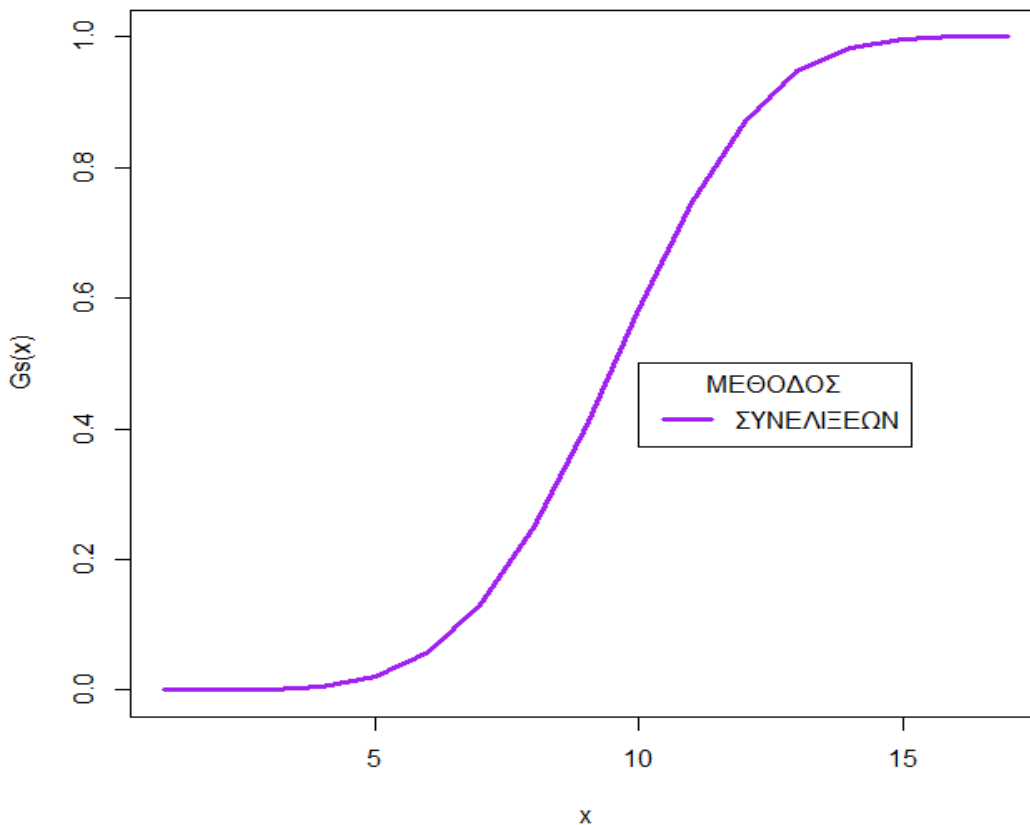
$$g_Y(5) = Pr[Y = 5] = \mathbf{0 \text{ (ή } 3,108624e-17)}$$

$$G_Y(5) = Pr[Y \leq 5] = g_Y(0) + g_Y(1) + g_Y(2) + g_Y(3) + g_Y(4) + g_Y(5) = \mathbf{0}$$

(ή **2,04281e-16**)

Η λύση μπορεί να δοθεί και με χρήση της R (βλ. Παράρτημα Ε')

### Σ.Κ. ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ S



Στο παραπάνω Γράφημα 2.2.4 παρουσιάζεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) του συνολικού κινδύνου S, η οποία προσεγγίζεται μέσω της Μεθόδου των Συνελίξεων. Η συγκεκριμένη μέθοδος στο διάστημα τιμών της x ( $x \in [1,25]$  με βήμα  $h=1$ ), με πολύ αργό ρυθμό φτάνει στην μονάδα, ο οποίος είναι και ένας επιθυμητός στόχος της σ.κ. της S. Επίσης, σίγουρα είναι εμφανές ότι η σ.κ. είναι αύξουσα, αλλά όταν  $x \in [1,3]$  είναι σταθερή στο μηδέν.

Εφαρμογή 2.2.5 / Η Μέθοδος Της Προσομοίωσης (KENNEY, 2010, Σελ. 135) : Έστω ότι μια ασφαλιστική εταιρεία εκτιμάει ότι οι ζημιές για συγκεκριμένη ομάδα ασφαλισμένων ακολουθεί την κατανομή Pareto με

παραμέτρους  $\alpha=2,5$  και  $\theta=4300$ . Το πλήθος των ζημιών εντός ενός έτους ακολουθεί την Αρνητική Διωνυμική με παραμέτρους  $r=12$  και  $p=0,6$ . Μέσω της Μεθόδου της Προσομοίωσης θα εκτιμήσουμε το 95<sup>ο</sup> ποσοστημόριο της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (Δίνεται ότι το αφαιρετέο ποσό είναι 100 και ότι το όριο ίδιας κράτησης είναι 10000).

ΛΥΣΗ :

Στη συγκεκριμένη περίπτωση ζητείται η εξής εκτίμηση  $Q_{95}$  μέσω της πιθανότητας  $Pr[S < Q_{95}] = 0,95$

Η προσομοίωση θα γίνει μέσω της παραγωγής τυχαίων αριθμών από την ομοιόμορφη κατανομή και αυτοί οι αριθμοί θα χρησιμοποιηθούν στην κατανομή των ατομικών ζημιών (Pareto) και στην κατανομή του πλήθους των ζημιών (Αρνητική Διωνυμική).

$$U(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{10000 - x}{10000}, & 0 < x < 10000 \\ 1, & x \geq 10000 \end{cases}$$

$$u = \text{Sort}(U(x))$$

Αφού  $X \sim \text{PARETTO}(\alpha = 5/2, \theta = 4300)$  τότε έχουμε:

$$f_X(x) = \frac{2,5 \cdot \sqrt{4300^5}}{\sqrt{x^7}}, x > 0$$

Και αφού  $N \sim \text{ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ}_0(r = 12, p = 0,6)$  τότε έχουμε:

$$f_N(x) = \binom{12 + u - 1}{u} \left(\frac{6}{10}\right)^{12} \left(\frac{4}{10}\right)^u \text{ για } x = 0, 1, 2, \dots$$

Άρα η  $S \sim \text{ΣΥΝΘΕΤΗ ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ}$  και έχει αθροιστική σ.κ. που δίνεται μέσω της Μεθόδου της Προσομοίωσης από τον εξής τύπο:

$$G_S(x) = \sum_{i=0}^u g_S(i)$$

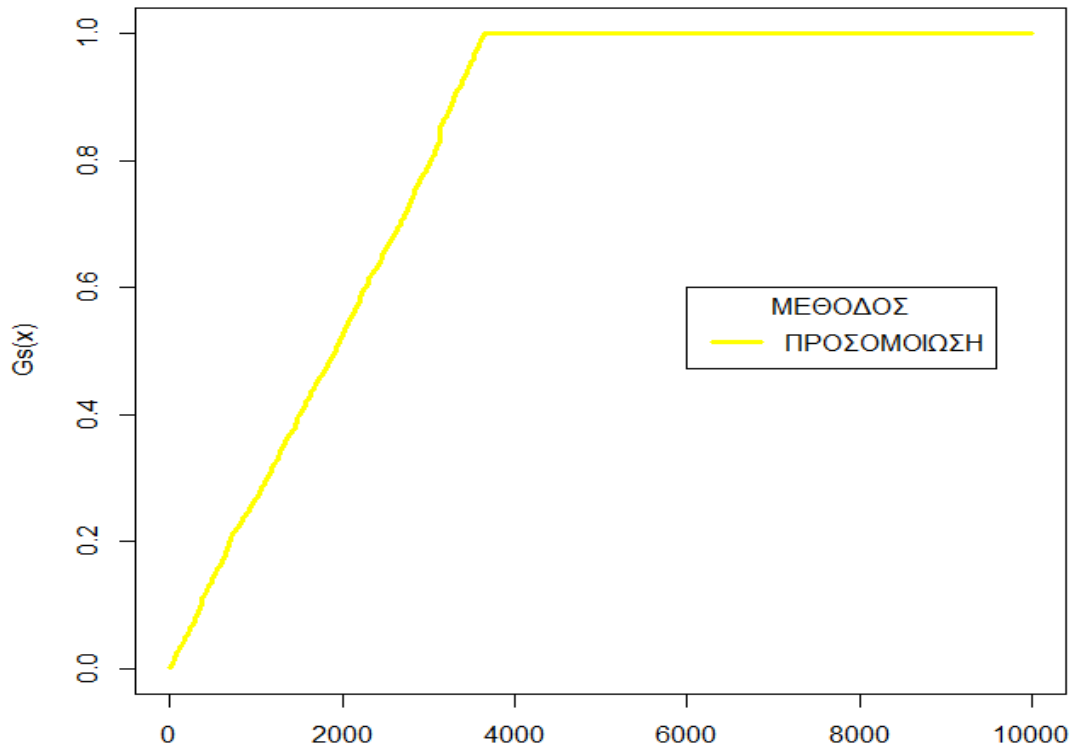
Επειδή η Μέθοδος της Προσομοίωσης συνιστά την παραγωγή τυχαίων αριθμών μέσω μιας κατανομής (όπως γίνεται στην αντίστοιχη περίπτωση του MONTE CARLO) είναι καλύτερα να χρησιμοποιείται κατευθείαν μέσω της R.

Εκτιμούμε το 95<sup>ο</sup> ποσοστημόριο της κατανομής των συνολικών απαιτήσεων λύνοντας το εξής σύστημα:

$$G_S(Q_{95^o}) = 0,95$$

Η λύση μπορεί να δοθεί και με χρήση της R (βλ. Παράρτημα Ε')

### Σ.Κ. ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ S



x  
Γράφημα 2.2.5.

Στο παραπάνω Γράφημα 2.2.5 παρουσιάζεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) του συνολικού κινδύνου S, η οποία προσεγγίζεται μέσω της Μεθόδου της Προσομοίωσης προσομοιώνοντας τυχαία νούμερα από την Ομοιόμορφη κατανομή. Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι αρκετά ικανοποιητική στο διάστημα τιμών της x ( $x \in [0,2500]$  με βήμα  $h=1$ ), αφού με εξαιρετικά γρήγορο ρυθμό αυξάνει. Θα μπορούσε να φτάσει στην μονάδα αλλά λόγω του πεδίου ορισμού τιμών της x δεν είναι εμφανές αυτός ο στόχος, ο οποίος θα ήταν και ένας επιθυμητός στόχος της σ.κ. της S.

Εφαρμογή 2.2.6. / Η Μετατοπισμένη Γάμμα Μέθοδος (ΠΟΛΙΤΗΣ, 2012, Σελ. 149) : Γνωρίζουμε ότι οι τρεις πρώτες ροπές των συνολικών αποζημιώσεων S σε ένα χαρτοφυλάκιο είναι αντίστοιχα ίσες με

$$E(S) = 7, \quad E(S^2) = 58, \quad E(S^3) = 559.$$

Να βρεθούν οι παράμετροι  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$ , της Μετατοπισμένη Γάμμα κατανομής η οποία προσεγγίζει την κατανομή του συνολικού κινδύνου  $S$ .

ΛΥΣΗ : Γενικά ισχύει ότι ο συντελεστής ασυμμετρίας του συνολικού κινδύνου  $S$  δίνεται από τη σχέση:

$$\gamma_s = \frac{E[(S - E[S])^3]}{(Var[S])^{3/2}}$$

Αρχικά, για την διακύμανση παίρνουμε:

$$Var(S) = E(S^2) - [E(S)]^2 = 58 - 7^2 = 9$$

Επίσης, η τρίτη κεντρική ροπή δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} E[(S - E(S))^3] &= E(S^3) - 3E(S)E(S^2) + 2[E(S)]^3 = \\ &= 559 - 3 \cdot 7 \cdot 58 + 2 \cdot 7^3 = 27 \end{aligned}$$

Άρα ο συντελεστής ασυμμετρίας του συνολικού κινδύνου  $S$  με αντικατάσταση γίνεται:

$$\gamma_s = \frac{27}{9^{3/2}} = 1$$

Σύμφωνα με την Ενότητα 2.1.6 έχουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων που προκύπτει για τις παραμέτρους  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $k$ , της Μετατοπισμένη Γάμμα κατανομής, το οποίο είναι:

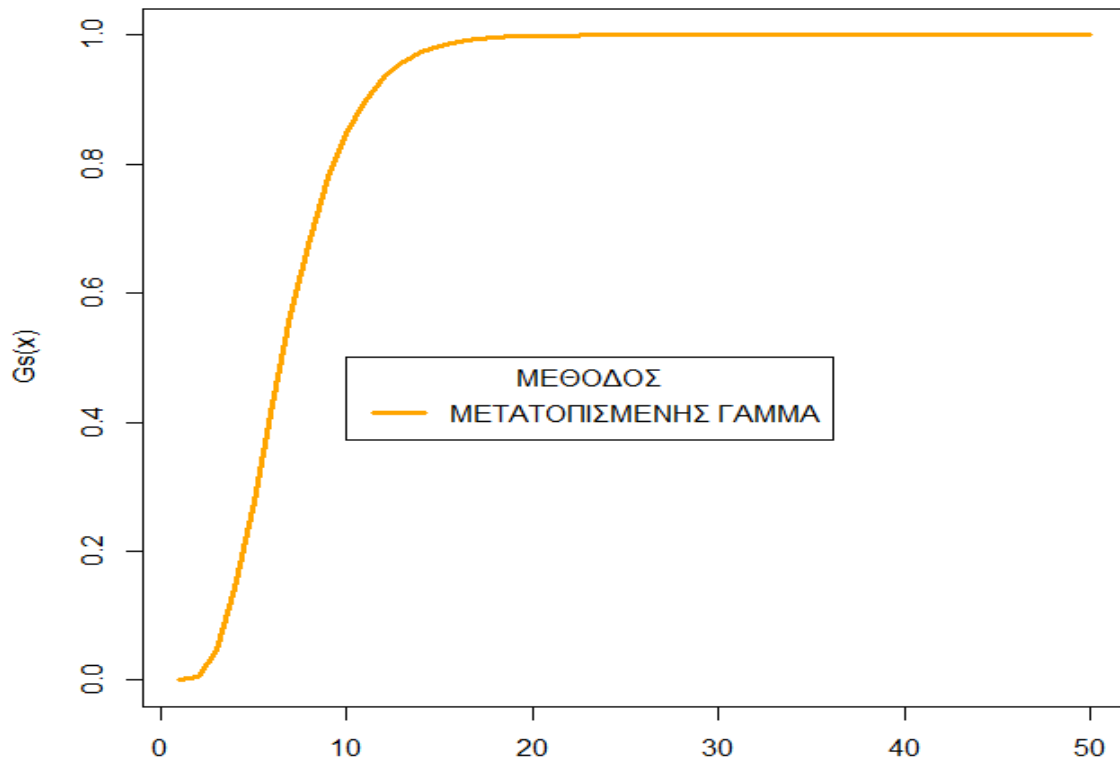
$$E(S) = \frac{\alpha}{\beta} + k, \quad Var(S) = \frac{\alpha}{\beta^2}, \quad \gamma_s = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

Αν αντικαταστήσουμε τα παραπάνω δεδομένα στο σύστημα των τριών εξισώσεων έχουμε ότι:

$$\alpha = 4, \quad \beta = \frac{2}{3}, \quad k = 1.$$

Η λύση μπορεί να δοθεί και με χρήση της R (βλ. Παράρτημα Ε').

**Σ.Κ. ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ S**



x  
Γραφήμα 2.2.6.

Στο παραπάνω Γράφημα 2.2.6 παρουσιάζεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) του συνολικού κινδύνου S, η οποία προσεγγίζεται μέσω της Μετατοπισμένης Γάμμα Μεθόδου με παραμέτρους για την κατανομή της μετατοπισμένης Γάμμα  $\alpha = 4$ ,  $\beta = \frac{2}{3}$ ,  $k = 1$ . Η συγκεκριμένη μέθοδος είναι ικανοποιητική στο διάστημα τιμών της x ( $x \in [1,50]$  με βήμα  $h=1$ ), αφού με πολύ γρήγορο ρυθμό φτάνει στην μονάδα, ο οποίος είναι και ένας επιθυμητός στόχος της σ.κ. της S.

### 3. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ ΣΤΗ ΣΥΝΕΧΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο γίνεται έρευνα σχετικά με κάποιες από τις βασικές μεθόδους οι οποίες αναφέρθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση των συνολικών αποζημιώσεων στην περίπτωση που οι ατομικές ζημιές είναι στην συνεχή περίπτωση. Επίσης θα γίνει εκτενής έρευνα στις τέσσερις μεθόδους διακριτοποίησης σε τρεις συνεχείς κατανομές.

#### 3.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΗΣ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

Μια αριθμητική τεχνική για να υπολογιστεί η κατανομή των συνολικών απαιτήσεων χρειάζεται μια διακριτή αριθμητική κατανομή για το ύψος των ζημιών δηλαδή, μια κατανομή που ορίζεται στα  $0, h, 2h, \dots$  για κάποιο βήμα (ή άνοιγμα ή καθυστέρηση)  $h$ . Το πακέτο της R παρέχει μια λειτουργία για να διακριτικοποιήσει μια συνεχή κατανομή. Η λειτουργία μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για να τροποποιήσει το στήριγμα (support) μιας ήδη διακριτής κατανομής, αλλά αυτό απαιτεί πρόσθετη προσοχή.

Έστω  $F(x)$  υποδηλώνει τη σ.κ. της κατανομής για να διακριτοποιηθεί σε κάποιο διάστημα  $(\alpha, \beta)$  και  $f_x$  υποδηλώνει τη μάζα πιθανότητας στο  $x$  για τη διακριτή κατανομή. Επί του παρόντος, η διακριτοποίηση υποστηρίζει τις ακόλουθες τέσσερις μεθόδους :

**A.** Άνω (upper) διακριτοποίηση ή προωθητική διαφορά (forward difference) της  $F(x)$  :

$$f_x = F(x + h) - F(x) , \text{ για } x = \alpha, \alpha + h, \dots, \beta - h.$$

Η διακριτοποιημένη σ.κ. είναι πάντα πάνω από την αρχική σ.κ.

**B.** Κάτω (lower) διακριτοποίηση ή οπισθοδρομική διαφορά (backward difference) της  $F(x)$  :

$$f_x = \begin{cases} F(\alpha) & , \quad x = \alpha \\ F(x) - F(x - h) & , \quad x = \alpha + h, \dots, \beta \end{cases}$$

Η διακριτοποιημένη σ.κ. είναι πάντα κάτω από την αρχική σ.κ.

Γ. Στρογγυλοποίηση (rounding) της τυχαίας μεταβλητής ή η μέθοδος του μεσαίου σημείου:

$$f_x = \begin{cases} F(\alpha + h/2) & , \quad x = \alpha \\ F(x + h/2) - F\left(x - \frac{h}{2}\right) & , \quad x = \alpha + h, \dots, \beta - h \end{cases}$$

Η αρχική σ.κ. περνάει ακριβώς στα μέσα του βήματος των διακριτοποιημένων σ.κ.

Δ. Αμερόληπτη ή τοπική αντιστοίχιση (unbiased) της μεθόδου της πρώτης ροπής:

$$f_x = \begin{cases} \frac{E[X \wedge \alpha] - E[X \wedge \alpha + h]}{h} + 1 - F(\alpha), & x = \alpha \\ \frac{2E[X \wedge x] - E[X \wedge x - h] - E[X \wedge x + h]}{h} & , \alpha < x < \beta \\ \frac{E[X \wedge \beta] - E[X \wedge \beta - h]}{h} - 1 + F(\beta), & x = \beta \end{cases}$$

Η διακριτοποιημένη και η αληθινή σ.κ. έχουν την ίδια συνολική πιθανότητα και την αναμενόμενη τιμή στο  $(\alpha, \beta)$ .

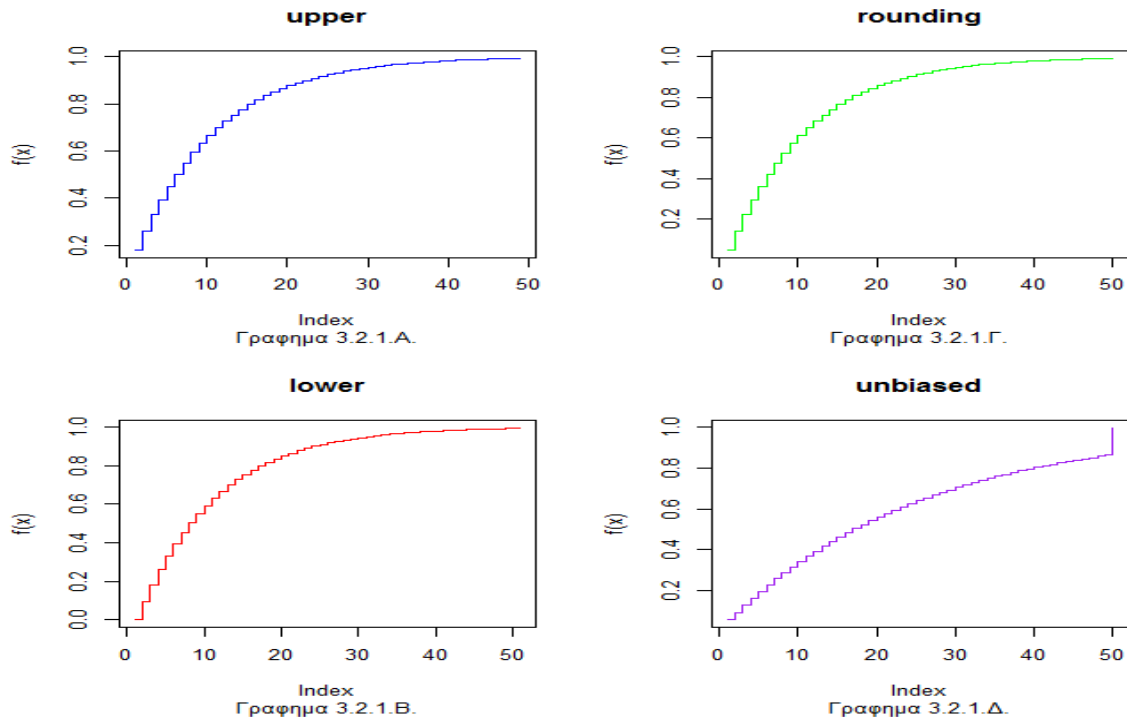
### 3.2. ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Σε αυτό το σημείο θα ερευνήσουμε ποια από τις τέσσερις μεθόδους της διακριτοποίησης είναι πιο αποδοτική μέσω γραφικών παραστάσεων για τρεις βασικές ζημιοκατανομές χρησιμοποιώντας τις αντίστοιχες σ.π.π. τους. Η διακριτοποίηση μπορεί να δοθεί με χρήση της R και είναι η ίδια για όλες τις κατανομές που χρησιμοποιούμε, ενώ στη συνέχεια απλώς αλλάζει η σ.π.π. της κατανομής και οι παράμετροι (βλ. Παράρτημα Ε').

#### 3.2.1. Διακριτοποίηση Εκθετικής Κατανομής

Για την διακριτοποίηση της Εκθετικής κατανομής χρησιμοποιούμε ένα διάστημα  $x$  από 0 έως το 1 με βήμα 0,02. Η παράμετρος της κατανομής είναι  $\eta = 5$ .

Άρα η σ.π. είναι:  $f(x) = 5e^{-5x}$  για  $x > 0$  (βλ. Παράρτημα Α΄).



Στα παραπάνω Γραφήματα 3.2.1.A-Δ διαφαίνονται οι τέσσερις μέθοδοι διακριτοποίησης. Οι συναρτήσεις κατανομής (σ.κ.) των τεσσάρων μεθόδων είναι αύξουσες. Είναι κατανοητό ότι η μέθοδος unbiased δεν η είναι πιο αποδοτική σε σχέση με την upper, την lower και την rounding γιατί φτάνει με ένα ιδιόμορφο τρόπο στην μονάδα.

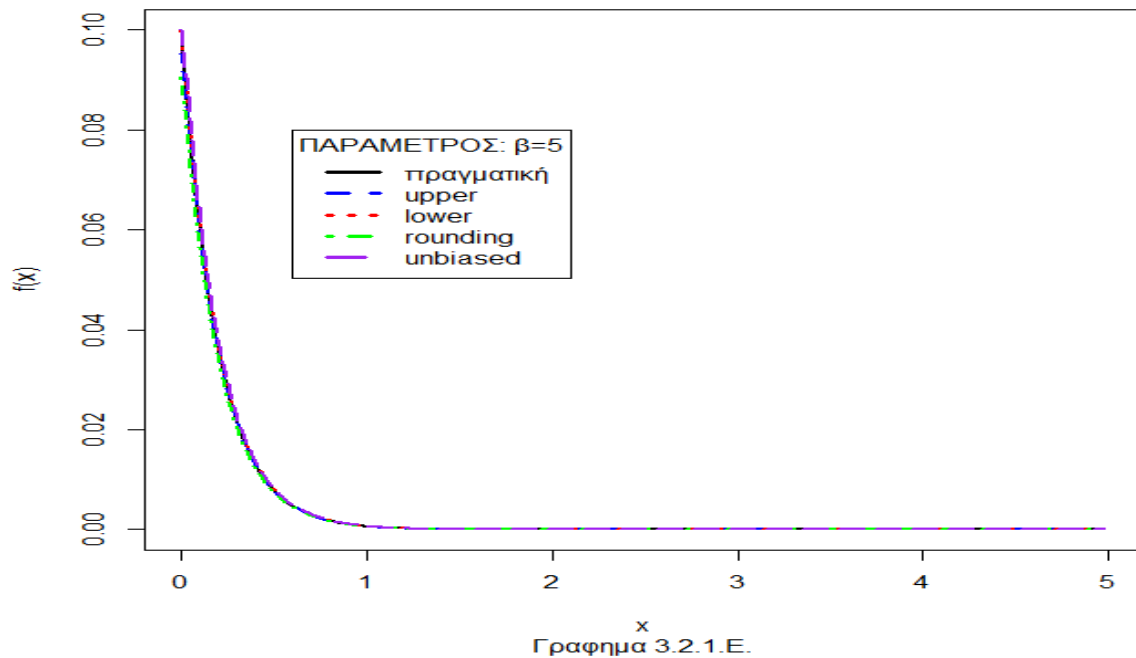
Όσον αφορά τα παρακάτω Γραφήματα 3.2.1.E-ΣΤ μπορούμε να εξαγάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Στο Γράφημα 3.2.1.E παρουσιάζεται η συνάρτηση της αρχικής-συνεχούς Εκθετικής κατανομής σε σχέση με τις σ.π. των τεσσάρων μεθόδων διακριτοποίησης. Οι πέντε συναρτήσεις είναι φθίνουσες, αυτό οφείλεται στην Εκθετική κατανομή που ακολουθούν. Επίσης φαίνεται να έχουν και οι τέσσερις μέθοδοι διακριτοποίησης να έχουν καλή εφαρμογή στην συνάρτηση της συνεχούς Εκθετικής κατανομής.
- Στο Γράφημα 3.2.1.ΣΤ παρουσιάζεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) της αρχικής-συνεχούς Εκθετικής κατανομής σε σχέση με τις σ.κ. των τεσσάρων μεθόδων διακριτοποίησης. Οι πέντε συναρτήσεις είναι αύξουσες, αυτό οφείλεται στην (αθροιστική συνάρτηση) Εκθετική κατανομή που ακολουθούν. Επίσης φαίνεται να έχουν και οι τέσσερις μέθοδοι διακριτοποίησης να έχουν καλή εφαρμογή στην συνάρτηση της συνεχούς Εκθετικής κατανομής. Όμως

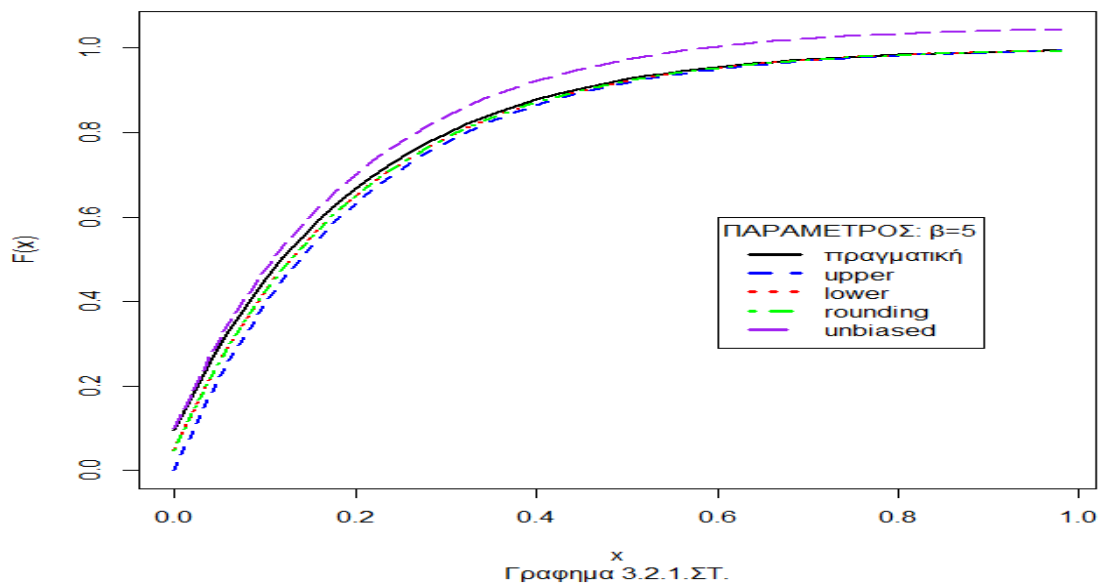


καλύτερη όπως φαίνεται που φτάνει πρώτη στην μονάδα είναι η αμερόληπτη μέθοδος (unbiased).

#### ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ



#### ΣΥΝΑΡΤΙΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ



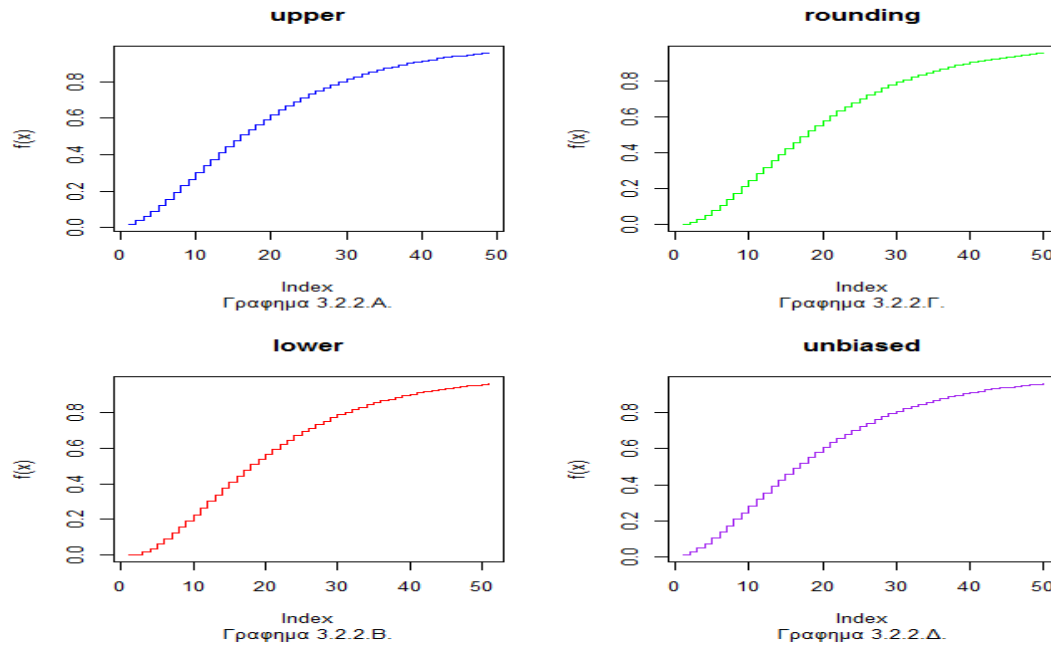
#### 3.2.2. Διακριτοποίηση Γάμμα Κατανομής

Για την διακριτοποίηση της Γάμμα κατανομής χρησιμοποιούμε ένα διάστημα  $x$  από 0 έως το 1 με βήμα 0,02. Οι παράμετροι της κατανομής είναι  $\alpha=2$  και  $\beta=5$ .

Άρα η σ.π. είναι:  $f(x) = \frac{5^2 x^{2-1} e^{-5x}}{\Gamma(2)}$  για  $x > 0$  (βλ. Παράρτημα Α').

Στα Γραφήματα 3.2.2.A-Δ διαφαίνονται οι τέσσερις μέθοδοι διακριτοποίησης. Είναι κατανοητό ότι η μέθοδος upper και η unbiased είναι πιο αποδοτικές σε σχέση με την lower και την rounding.

Στο Γράφημα 3.2.2.E παρουσιάζεται η σ.π.π. της αρχικής-συνεχούς Γάμμα κατανομής σε σχέση με τις σ.π.π. των τεσσάρων μεθόδων διακριτοποίησης.

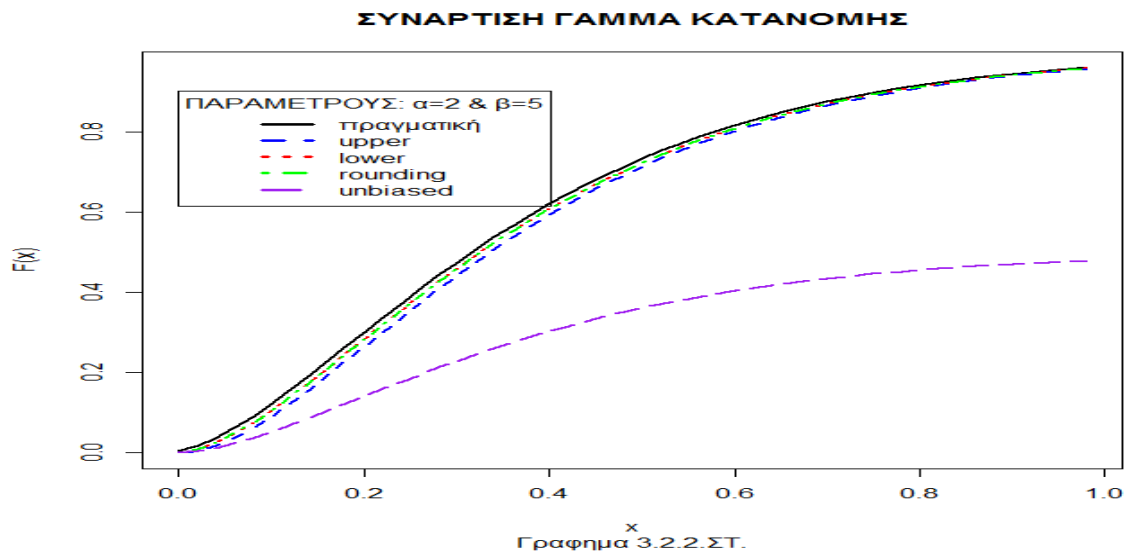
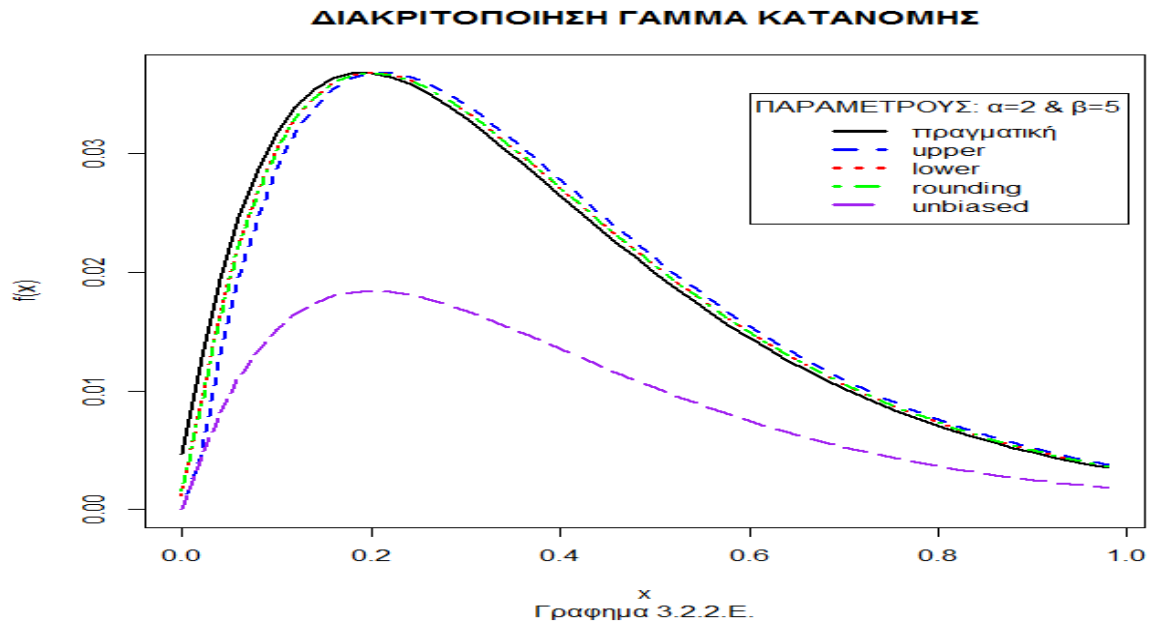


Στα παραπάνω Γραφήματα 3.2.2.A-Δ διαφαίνονται οι τέσσερις μέθοδοι διακριτοποίησης. Οι συναρτήσεις κατανομής (σ.κ.) των τεσσάρων μεθόδων είναι αύξουσες. Είναι κατανοητό ότι η μέθοδος unbiased δεν η είναι πιο αποδοτική σε σχέση με την upper, την lower και την rounding.

Όσον αφορά τα παρακάτω Γραφήματα 3.2.1.E-ΣΤ μπορούμε να εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Στο Γράφημα 3.2.2.E παρουσιάζεται η συνάρτηση της αρχικής-συνεχούς Γάμμα κατανομής σε σχέση με τις σ.π.π. των τεσσάρων μεθόδων διακριτοποίησης. Οι πέντε συναρτήσεις είναι αύξουσες στην αρχή μέχρι να φτάσουν σε ένα σημείο και μετά φθίνουν, αυτό οφείλεται στην Γάμμα κατανομή που ακολουθούν. Επίσης φαίνεται να έχουν και οι τρεις μέθοδοι διακριτοποίησης να έχουν καλή εφαρμογή στην συνάρτηση της συνεχούς Γάμμα κατανομής, εκτός της αμερόληπτης μεθόδου (unbiased).

- Στο Γράφημα 3.2.2.ΣΤ παρουσιάζεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) της αρχικής-συνεχούς Γάμμα κατανομής σε σχέση με τις σ.κ. των τεσσάρων μεθόδων διακριτοποίησης. Οι πέντε συναρτήσεις είναι αύξουσες, αυτό οφείλεται στην (αθροιστική συνάρτηση) Γάμμα κατανομής που ακολουθούν. Επίσης φαίνεται να έχουν και οι τέσσερις μέθοδοι διακριτοποίησης να έχουν καλή εφαρμογή στην συνάρτηση της συνεχούς Γάμμα κατανομής.



### 3.2.3. Διακριτοποίηση Βήτα Κατανομής

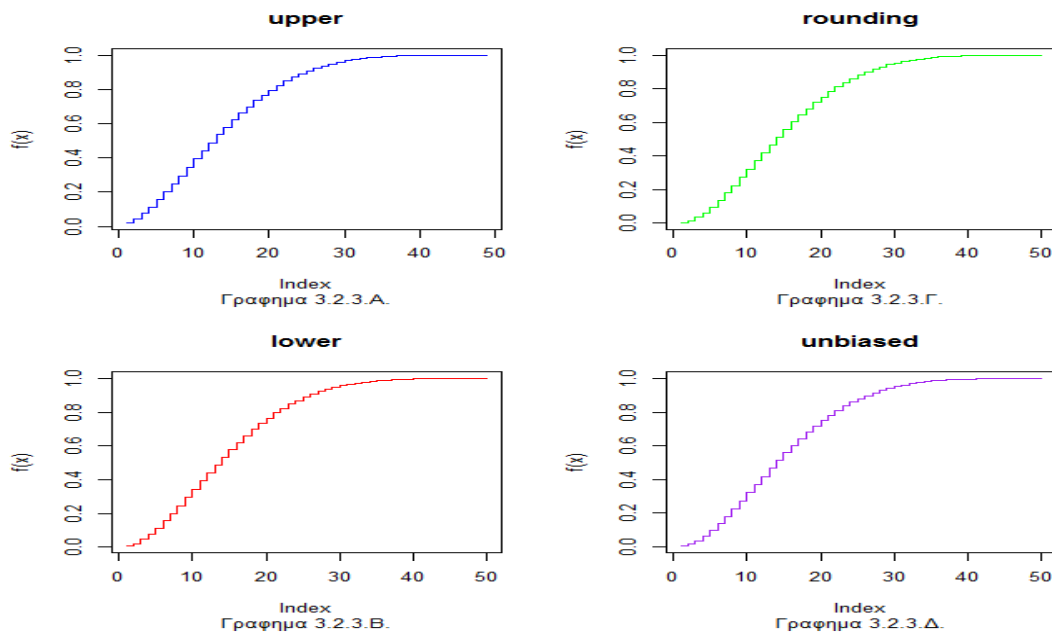
Για την διακριτοποίηση της Βήτα κατανομής χρησιμοποιούμε ένα διάνυσμα  $x$  από 0 έως το 1 με βήμα 0,02. Οι παράμετροι της κατανομής είναι  $\alpha=2$  και  $\beta=5$ .

Άρα η σ.π. είναι:  $f(x) = \frac{1}{B(2,5)} x^{2-1}(1-x)^{5-1}$ ,

για  $0 < x < 1$  (βλ. Παράρτημα Α').

Στα Γραφήματα 3.2.3.A-Δ διαφαίνονται οι τέσσερις μέθοδοι διακριτοποίησης. Είναι κατανοητό ότι η μέθοδος lower, η rounding και η unbiased είναι πιο αποδοτικές σε σχέση με την upper.

Στο Γράφημα 3.2.3.E παρουσιάζεται η σ.π.π. της αρχικής-συνεχούς Βήτα κατανομής σε σχέση με τις σ.π.π. των τεσσάρων μεθόδων διακριτοποίησης.

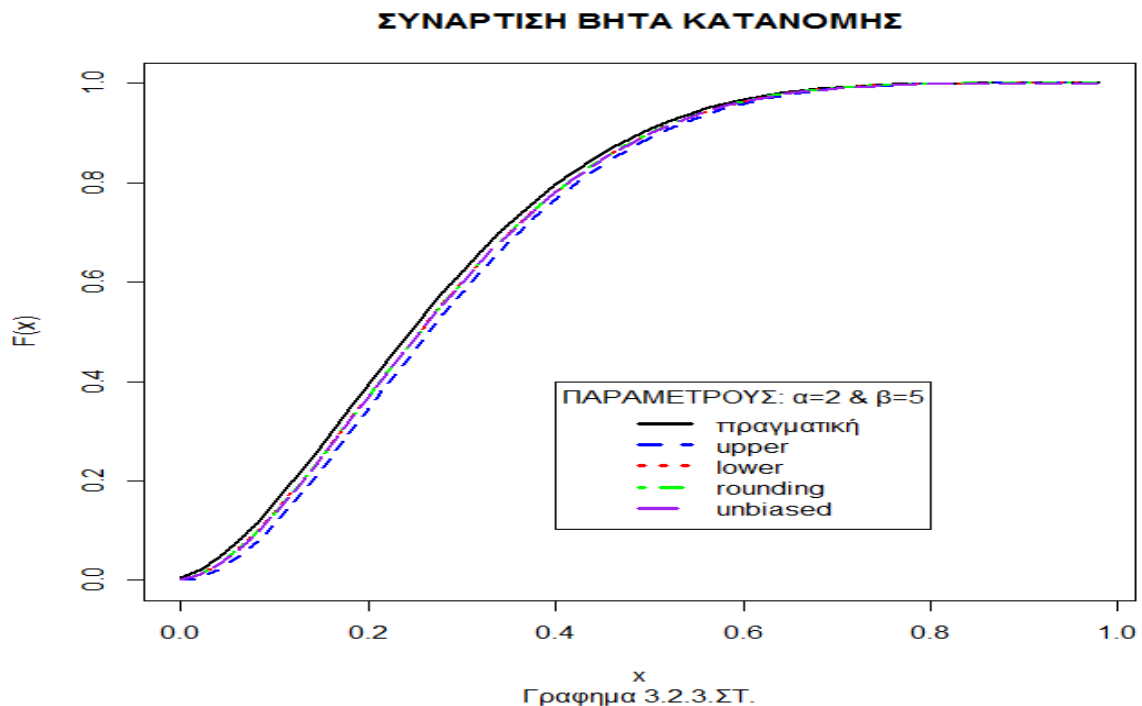
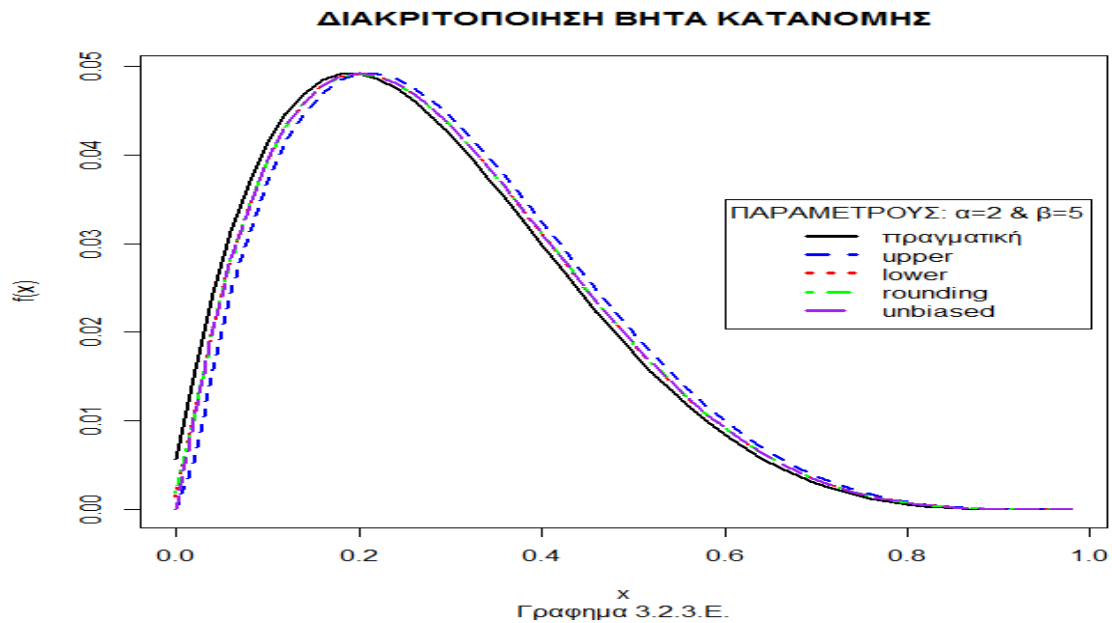


Στα παραπάνω Γραφήματα 3.2.3.A-Δ διαφαίνονται οι τέσσερις μέθοδοι διακριτοποίησης. Οι συναρτήσεις κατανομής (σ.κ.) των τεσσάρων μεθόδων είναι αύξουσες. Είναι κατανοητό ότι η μέθοδος unbiased δεν είναι πιο αποδοτική σε σχέση με την upper, την lower και την rounding.

Όσον αφορά τα παρακάτω Γραφήματα 3.2.3.E-ΣΤ μπορούμε να εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Στο Γράφημα 3.2.3.E παρουσιάζεται η συνάρτηση της αρχικής-συνεχούς Βήτα κατανομής σε σχέση με τις σ.π.π. των τεσσάρων μεθόδων διακριτοποίησης. Οι πέντε συναρτήσεις είναι αύξουσες στην αρχή μέχρι να φτάσουν σε ένα σημείο και μετά φθίνουν, αυτό οφείλεται στην Βήτα κατανομή που ακολουθούν. Επίσης φαίνεται να έχουν και οι τέσσερις μέθοδοι διακριτοποίησης να έχουν καλή εφαρμογή στην συνάρτηση της συνεχούς Βήτα κατανομής.

- Στο Γράφημα 3.2.3.ΣΤ παρουσιάζεται η αθροιστική συνάρτηση κατανομής (σ.κ.) της αρχικής-συνεχούς Βήτα κατανομής σε σχέση με τις σ.κ. των τεσσάρων μεθόδων διακριτοποίησης. Οι πέντε συναρτήσεις είναι αύξουσες. Επίσης φαίνεται να έχουν και οι τέσσερις μέθοδοι διακριτοποίησης να έχουν καλή εφαρμογή στην συνάρτηση της συνεχούς Βήτα κατανομής.



### 3.3. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Στην ενότητα αυτή δίνουμε κάποια αριθμητικά παραδείγματα για την εφαρμογή διαφόρων προσεγγίσεων στην κατανομή των συνολικών ζημιών για το συλλογικό πρότυπο.

Εφαρμογή 3.3.1 : Έστω ένα χαρτοφυλάκιο συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$ , το ύψος των ατομικών απαιτήσεων (ζημιών)  $X$  ακολουθεί την κατανομή Γάμμα με παραμέτρους  $\alpha=2$  και  $\beta=5$ , ενώ το πλήθος των απαιτήσεων (ζημιών)  $N$  ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda=10$ . Θα κάνουμε γραφική απεικόνιση των προσεγγιστικών μεθόδων (1.Κανονική, 2.Normal Power 2, 3.Μετατοπισμένη Γάμμα) που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό της σ.κ. του χαρτοφυλακίου συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$  και βάσει αυτών θα επιλέξουμε την καταλληλότερη προσεγγιστική μέθοδο.

Χρήσιμη Σημείωση : Αν  $N \sim \text{Poisson}(\lambda) \Rightarrow S \sim \text{Σύνθετη Poisson}(\lambda, f(x))$ , όπου  $f(x)$  σ.π. της  $X$

Λύση: Η σ.π. του πλήθους των ζημιών  $N$  είναι:  $f_N(x) = \frac{e^{-10}10^x}{x!}$  για  $x=0,1,\dots$ ,

Η σ.π.π. των ατομικών ζημιών  $X$  είναι:  $f_X(x) = \frac{25x^{2-1}e^{-5x}}{\Gamma(2)}$  για  $x>0$

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο unbiased με βήμα  $h=0,2$  στο διάστημα  $(0,10)$  για να διακριτοποιήσουμε την  $X$ , έτσι έχουμε:

$$f_{DX}(x) = \begin{cases} \frac{E[X \wedge 0] - E[X \wedge 0 + 0,2]}{0,2} + 1 - F(0), & x = 0 \\ \frac{2E[X \wedge x] - E[X \wedge x - 0,2] - E[X \wedge x + 0,2]}{0,2}, & 0 < x < 10 \\ \frac{E[X \wedge 10] - E[X \wedge 10 - 0,2]}{0,2} - 1 + F(10), & x = 10 \end{cases}$$

Όπου  $E[X \wedge \varepsilon] = \int_0^\varepsilon x f_X(x) dx$

Άρα λαμβάνουμε την νέα σ.π.π. της  $X$  η οποία είναι η  $f_{DX}(x)$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε κάποια περιγραφικά μέτρα και μέτρα θέσης για να προσεγγίσουμε την σ.κ. των συνολικών ζημιών. Τέτοια μέτρα είναι:

a)  $E(N) = \text{Var}(N) = \lambda = 10$

b)  $E(X) = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{2}{5} = 0,4$  και  $E(X^2) = \frac{\alpha + \alpha^2}{\beta^2} = 0,24$

c)  $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0,08$

d)  $Skew(N) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 0,3162$

e)  $Skew(X) = \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = 0,8944$

f)  $E(S) = E(N) \cdot E(X) = 4$

g)  $Var(S) = E(N) \cdot E(X^2) = 2,4$

h)  $Skew(S) = \frac{\sqrt{[Skew(N) \cdot Var(N)]^3 \cdot [E(X)]^3 + 3 \cdot E(X) \cdot Var(N) \cdot Var(X) + E(X) \cdot Skew(X) \cdot \sqrt{[Var(X)]^3}}{\sqrt{[Var(S)]^3}} = 0,4325$

(Αντζουλάκος, 2017)

i)  $Z_S(x) = \frac{x - E(S)}{\sqrt{Var(S)}}$  (Τυποποιημένη τ.μ. για τις συνολικές ζημιές)

I. Η αθροιστική σ.κ. της S μέσω της Κανονικής Μεθόδου είναι:

$$G_S(x) = \Phi[Z_S(x)] = \Phi\left[\frac{x - E(S)}{\sqrt{Var(S)}}\right] = \Phi\left[\frac{x - 4}{\sqrt{2,4}}\right]$$

II. Η αθροιστική σ.κ. της S μέσω της Normal Power 2 Μεθόδου είναι:

$$G_S(x) = \Phi\left[\sqrt{\frac{9}{(Skew(S))^2} + \frac{Z_S(x)}{Skew(S)} + 1} - \frac{3}{Skew(S)}\right]$$

III. Η αθροιστική σ.κ. της S μέσω της Μετατοπισμένης Γάμμα Μεθόδου (βλ. Ενότητα 2.1.6) είναι:

$$G_S(x) = F_{Gamma}\left(x - k; a' = \frac{4 \cdot 10 \cdot (E[X^2])^3}{(E[X^3])^2}, \beta' = \frac{2 \cdot E[X^2]}{E[X^3]}\right)$$

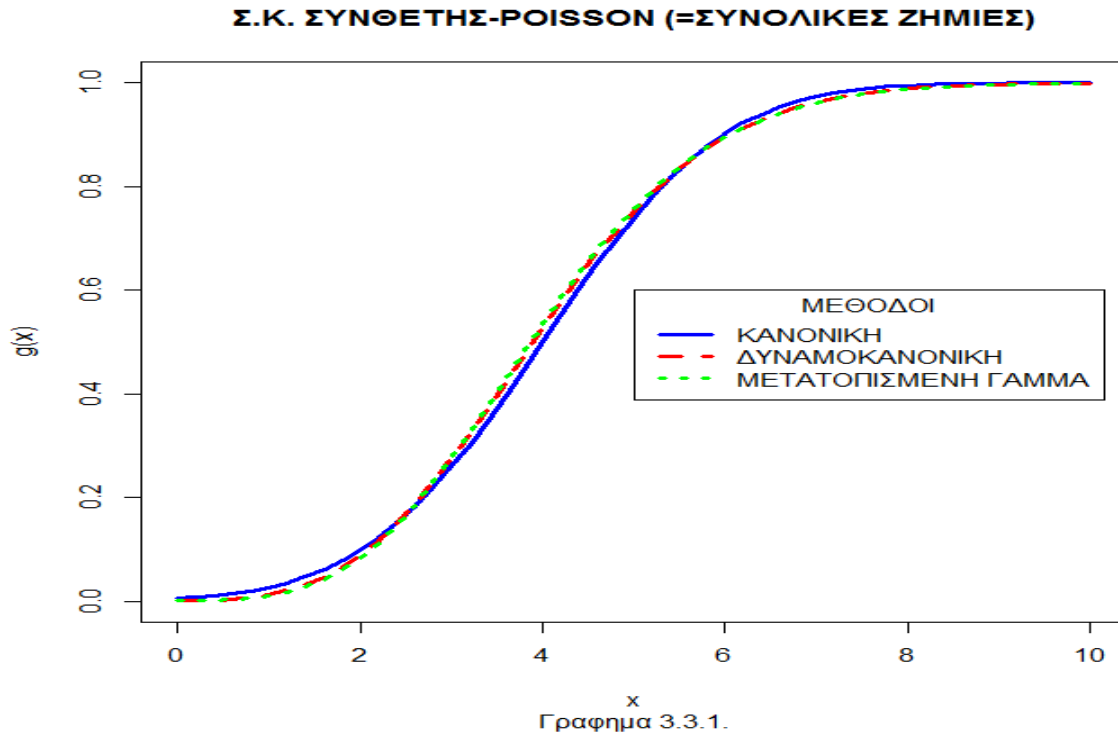
όπου  $k = 10 \cdot \left(E[X] - \frac{2 \cdot (E[X^2])^2}{E[X^3]}\right) = -2$  και  $a' = 15$ ,  $\beta' = 2,5$

Για τον υπολογισμό των παραμέτρων λύσαμε τις εξής δύο εξισώσεις:

$$k = 10 \cdot E[X] - \frac{\alpha'}{\beta'} \quad \alpha' \cdot \beta'^2 = 10 \cdot E[X^2], \quad \frac{2}{\sqrt{\alpha'}} = \frac{10 \cdot E[X^3]}{(10 \cdot E[X^2])^{3/2}}$$

Ο κώδικας των παραπάνω υπολογισμών βρίσκεται στο Παράρτημα Ε΄.

Σύμφωνα με τα παραπάνω λαμβάνουμε το ακόλουθο γράφημα μέσω R:



Σύμφωνα με το Γράφημα 3.3.Γ και οι τρεις μέθοδοι είναι εξίσου καλές στην προσέγγιση της σ.κ. της σύνθετης-Poisson (δηλ. των συνολικών ζημιών). Επίσης και οι τρεις μέθοδοι είναι αύξουσες αυτό οφείλεται στην κατανομή του συνολικού κινδύνου  $S$  που προσεγγίζουν, δηλαδή την Σύνθετη Poisson.

Εφαρμογή 3.3.2 : Έστω ένα χαρτοφυλάκιο συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$ , το ύψος των ατομικών απαιτήσεων (ζημιών)  $X$  ακολουθεί την κατανομή Μείξη Εκθετικών με παραμέτρους  $\beta_1 = 3$  και  $\beta_2 = 5$  με βάρη  $w_i = \frac{1}{2}$ ,  $i = 1,2$  ενώ το πλήθος των απαιτήσεων (ζημιών)  $N$  ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda=5$ . Επιθυμούμε να κάνουμε γραφική απεικόνιση των προσεγγιστικών μεθόδων (1.Αναδρομική, 2.Συνελίξεων, 3.Προσομείωσης) που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό της σ.κ. του χαρτοφυλακίου συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$  και βάσει αυτών να επιλέξουμε την καταλληλότερη προσεγγιστική μέθοδο.



Λύση: Η σ.π.π. του πλήθους των ζημιών  $N$  είναι:  $f_N(x) = \frac{e^{-5}5^x}{x!}$  για  $x=0, 1, \dots$ ,

Η σ.π. των ατομικών ζημιών  $X$  είναι:

$$f_X(x) = \frac{1}{2} \cdot (3 \cdot e^{-3 \cdot x}) + \frac{1}{2} \cdot (5 \cdot e^{-5 \cdot x}) \text{ για } x > 0$$

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο unbiased με βήμα  $h=0,2$  στο διάστημα  $(0,10)$  για να διακριτοποιήσουμε την  $X$ , έτσι έχουμε:

$$f_{DX}(x) = \begin{cases} \frac{E[X \wedge 0] - E[X \wedge 0 + 0,2]}{0,2} + 1 - F(0), & x = 0 \\ \frac{2E[X \wedge x] - E[X \wedge x - 0,2] - E[X \wedge x + 0,2]}{0,2}, & 0 < x < 10 \\ \frac{E[X \wedge 10] - E[X \wedge 10 - 0,2]}{0,2} - 1 + F(10), & x = 10 \end{cases}$$

Όπου  $E[X \wedge \varepsilon] = \int_0^\varepsilon x f_X(x) dx$

Αρα λαμβάνουμε την νέα σ.π.π. της  $X$  η οποία είναι η  $f_{DX}(x)$

- I. Η σ.π. της  $S$  μέσω της Αναδρομικής Μεθόδου ή Μεθόδου του Panjer (βλ. Κεφάλαιο 1. / Θεώρημα 1.3) είναι:

$$g_S(x=0) = f_N(x=0) = e^{-5}$$

$$g_S(x) = \frac{x}{\lambda} \sum_{i=1}^x i \cdot f_{DX}(i) \cdot g_S(x-i), \quad i=1, 2, 3, \dots,$$

ενώ η αθροιστική σ.κ. της  $S$  μέσω της Αναδρομικής Μεθόδου είναι:

$$G_S(x) = \sum_{i=0}^x g_S(i) .$$

- II. Η σ.π. της  $S$  μέσω της Μεθόδου των Συνελίξεων είναι:

$$g_S(x) = f_{DX_1+DX_2+\dots+DX_N}(s) = \sum_{j=0}^x f_{DX_i}(x-j) \cdot f_{DX_{i-1}}(j),$$

$x = 0,1,2, \dots, 10$ ,  $j \in (0,10)$  και  $i = 1,2, \dots, N$

Ενώ η αθροιστική σ.κ. της  $S$  μέσω της Μεθόδου των Συνελίξεων είναι:

$$G_S(x) = \sum_{i=0}^x g_S(i).$$

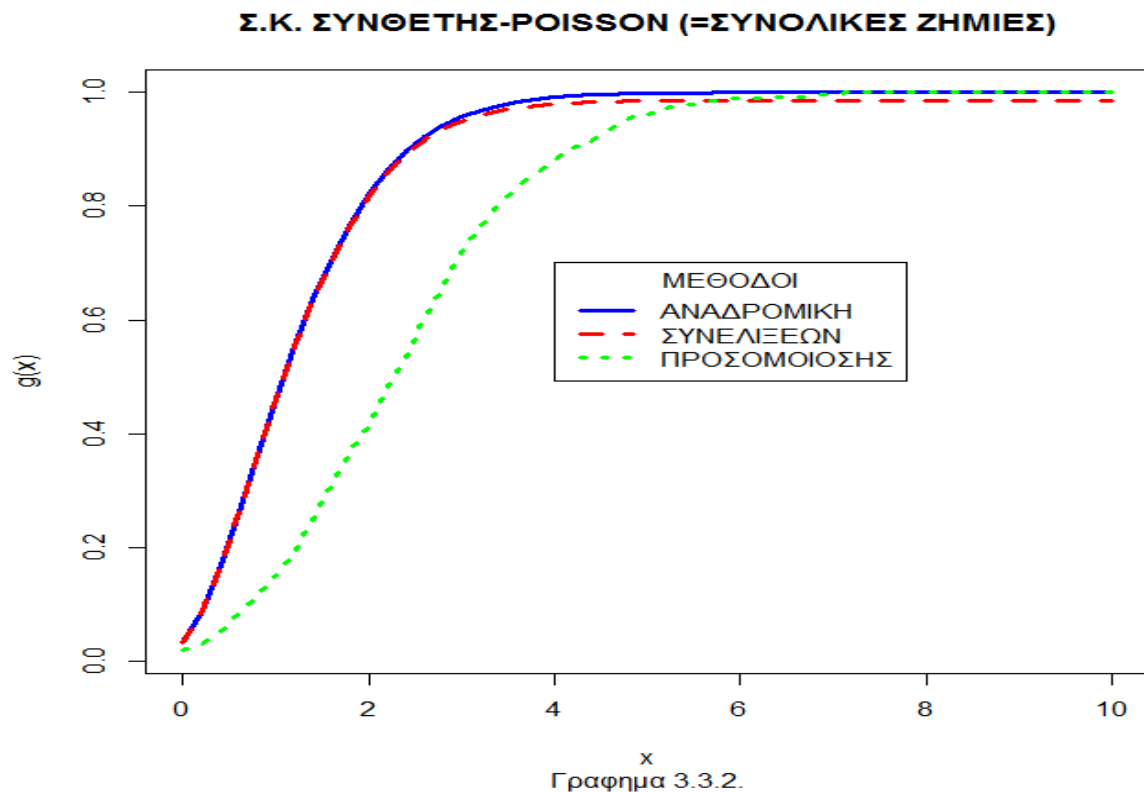
III. Επειδή η Μέθοδος της Προσομοίωσης συνιστά την παραγωγή τυχαίων αριθμών μέσω μιας κατανομής (όπως γίνεται στην αντίστοιχη περίπτωση του MONTE CARLO) είναι καλύτερα να χρησιμοποιείται κατευθείαν μέσω της R. Στη συγκεκριμένη περίπτωση ζητείται  $g_S(x)$  μέσω παραγωγής τυχαίων αριθμών από την Ομοιόμορφη κατανομή.

Στη συνέχεια η αθροιστική σ.κ. της S μέσω της Μεθόδου Προσομοίωσης βρίσκεται από τη σχέση:

$$G_S(x) = \sum_{i=0}^x g_S(i).$$

Ο κώδικας των παραπάνω υπολογισμών βρίσκεται στο Παράρτημα Ε΄.

Σύμφωνα με τα παραπάνω λαμβάνουμε το ακόλουθο γράφημα μέσω R:



Σύμφωνα με το Γράφημα 3.3.ΣΤ και οι τρεις μέθοδοι είναι καλές στην προσέγγιση της σ.κ. της Σύνθετης Poisson (δηλ. των συνολικών ζημιών) αλλά

αυτή της προσομοίωσης φαίνεται να δίνει κάπως διαφορετικά αποτελέσματα από τις άλλες.

Εφαρμογή 3.3.3 : Έστω ένα χαρτοφυλάκιο συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$ , το ύψος των ατομικών απαιτήσεων (ζημιών)  $X$  ακολουθεί την κατανομή Εκθετική με παράμετρο  $\lambda = 2$  ενώ το πλήθος των απαιτήσεων (ζημιών)  $N$  ακολουθεί την Τροποποιημένη στο Σημείο 0 Γεωμετρική (βλ. Παράρτημα ΣΤ') με παράμετρο  $p = 1/2$ . Επιθυμούμε να κάνουμε γραφική απεικόνιση των προσεγγιστικών μεθόδων (1. Μετασχηματισμό Laplace, 2. Haldane, 3. Wilson – Hilferty, βλ. Παράρτημα Β') που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό της σ.κ. του χαρτοφυλακίου συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$  και βάσει αυτών θα επιλέξουμε την καταλληλότερη προσεγγιστική μέθοδο.

Λύση: Η σ.π.π. του πλήθους των ζημιών  $N$  είναι:  $f_N(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{x-1}$ , για  $x = 1, 2, \dots$ ,

Η σ.π. των ατομικών ζημιών  $X$  είναι:

$$f_X(x) = 2 \cdot e^{-2 \cdot x}, \text{ για } x > 0$$

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο unbiased με βήμα  $h=0,2$  στο διάστημα  $(1, 10)$  για να διακριτοποιήσουμε την  $X$ , έτσι έχουμε:

$$f_{DX}(x) = \begin{cases} \frac{E[X \wedge 0] - E[X \wedge 0 + 0,2]}{0,2} + 1 - F(0), & x = 0 \\ \frac{2E[X \wedge x] - E[X \wedge x - 0,2] - E[X \wedge x + 0,2]}{0,2}, & 0 < x < 10 \\ \frac{E[X \wedge 10] - E[X \wedge 10 - 0,2]}{0,2} - 1 + F(10), & x = 10 \end{cases}$$

Όπου  $E[X \wedge \varepsilon] = \int_0^\varepsilon x f_X(x) dx$

Άρα λαμβάνουμε την νέα σ.π.π. της  $X$  η οποία είναι η  $f_{DX}(x)$

- I. Η σ.π. της  $S$  μέσω της Μεθόδου του Μετασχηματισμού Laplace (βλ. Παράρτημα Γ') είναι:

$$\hat{h}_S(s) = P_N(\hat{h}_X(s))$$

Κατ' αρχάς θα υπολογίσουμε το Μετασχηματισμό Laplace της σ.π. των ατομικών ζημιών  $X$ , η οποία δίνεται από το εξής τύπο:

$$\hat{h}_X(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot f_X(x) dx =$$
$$2 \cdot \int_0^{\infty} e^{-(s+2)x} dx = \frac{2}{2+s}$$

Ενώ η πιθανογενήτρια της σ.π.π. του πλήθους των ζημιών  $N$  είναι:

$$P_N(t) = \frac{p \cdot t}{1 - p \cdot t} = \frac{\frac{1}{2} \cdot t}{1 - \frac{1}{2} \cdot t}$$

Άρα η  $S$  μέσω της μεθόδου του Μετασχηματισμού Laplace είναι:

$$\hat{h}_S(s) = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2+s}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{2+s}} = \frac{1}{1+s}, s > 1$$

Είναι προφανές ότι από το Μετασχηματισμό Laplace της  $S$  ότι η  $S$  ακολουθεί Εκθετική Κατανομή με παράμετρο  $\lambda' = 1$

Χρήσιμη Σημείωση : Αν  $N \sim \text{Γεωμετρική}(p) \Rightarrow S \sim \text{Σύνθετη Γεωμετρική}$ , στη συγκεκριμένη περίπτωση  $N \sim \text{Γροποποιημένη στο Σημείο } 0 \text{ Γεωμετρική}(p)$  και  $X \sim \text{Εκθετική}(\lambda)$  τότε  $S \sim \text{Εκθετική}(\lambda \cdot p)$  (Χατζηκωνσταντινίδης, 2018).

Η σ.π. της  $S$  μέσω της Μεθόδου του Μετασχηματισμού Laplace είναι:

$$g_S(x) = e^{-x}.$$

Ενώ η αθροιστική σ.κ. της  $S$  μέσω της Μεθόδου του Μετασχηματισμού Laplace είναι:

$$G_S(x) = 1 - e^{-x}.$$

II. Η αθροιστική σ.κ. της  $S$  μέσω της Μεθόδου Haldane (βλ. Παράρτημα Γ') είναι:

$$G_S(x) = \Pr(S \leq x) = \Phi \left[ \frac{\left( \frac{x}{E_S(x)} \right)^h - E_H(x)}{\sqrt{\text{Var}_H(x)}} \right]$$

Κατ' αρχάς θεωρούμε την τ.μ.  $H = \left( \frac{x}{E_S(x)} \right)^h$ , όπου  $S$  είναι γνωστό ότι ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παράμετρο  $\lambda' = \lambda \cdot p = 1$ , έτσι προκύπτει ότι  $E_S(x) = 1$ .

Όσων αφορά τον εκθέτη  $h$  που υπάρχει στην τ.μ.  $H = \left(\frac{S}{E_S(x)}\right)^h$  υπολογίζεται αν θέσουμε την λοξότητα της  $H$  ίση με το 0, δηλαδή έχουμε:

$$Skew_H(x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{E \left[ (H - E_H(x))^3 \right]}{\left( \sqrt{Var_H(x)} \right)^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{E \left[ (H - E_H(x))^3 \right]}{\left\{ \sqrt{E \left[ (H - E_H(x))^2 \right]} \right\}^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{E_S(x^{3h}) - 3 \cdot E_S(x^{2h}) \cdot E_S(x) + 2 \cdot [E_S(x^h)]^3}{\{E_S(x^{2h}) - [E_S(x^h)]^2\}^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Η τιμή της  $h$  για την οποία ισχύει η παραπάνω σχέση είναι ίση με 1 (παίρνουμε το ακέραιο μέρος).

Επίσης έχουμε ότι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της τ.μ.  $H$  είναι αντίστοιχα:

$$E_H(x) = E \left[ \left( \frac{S}{E_S(x)} \right)^h \right] = \frac{E_S(x^h)}{[E_S(x)]^h} = 1$$

$$\sqrt{Var_H(x)} = \sqrt{E_S(x^{2h}) - [E_S(x^h)]^2} = 1$$

Η αθροιστική σ.κ. της  $S$  μέσω της Μεθόδου Haldane είναι:

$$G_S(x) = Pr \left[ H \leq \left( \frac{x}{E_S(x)} \right)^h \right] = \Phi \left[ \frac{\left( \frac{x}{E_S(x)} \right)^h - E_H(x)}{\sqrt{Var_H(x)}} \right] \Leftrightarrow$$

$$G_S(x) = \Phi[x - 1] .$$

III. Η αθροιστική σ.κ. της  $S$  μέσω της Μεθόδου Wilson – Hilferty (βλ. Παράρτημα Γ') είναι:

$$G_S(x) = Pr(S \leq x) = \Phi \left[ c_1 + c_2(Z_S(x) + c_3)^{\frac{1}{3}} \right]$$

Στη συνέχεια υπολογίζουμε κάποια περιγραφικά μέτρα και μέτρα θέσης για να προσεγγίσουμε την σ.κ. των συνολικών ζημιών. Τέτοια μέτρα είναι:

a.  $E_N(x) = \frac{1}{p} = 2$

b.  $Var_N(x) = \frac{1}{p^2} = 4$

c.  $E_X(x) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2}$

d.  $E_X(x^k) = \frac{k!}{\lambda^k}$  για  $x=2$  έχουμε:  $E_X(x^2) = \frac{2!}{\lambda^2} = \frac{1}{2}$

e.  $E_S(x) = E_N(x) \cdot E_X(x) = 1$

f.  $Var_S(x) = Var_N(x) \cdot E_X(x) + E_N(x) \cdot [E_X(x)]^2 = 1$

g.  $Skew_S(x) = \frac{E[(S-E_S(x))^3]}{(\sqrt{Var_S(x)})^3} = 2$

Επίσης θα υπολογίσουμε τους παραμέτρους  $c_1, c_2, c_3$  και  $Z_S(x)$  οι οποίες δίνονται από τους εξής τύπους:

a.  $Z_S(x) = \frac{x-E_S(x)}{\sqrt{Var_S(x)}}$  (Τυποποιημένη τ.μ. για τις συνολικές ζημιές)

b.  $c_1 = \frac{Skew_S(x)}{6\sqrt{Var_S(x)}} - \frac{6\sqrt{Var_S(x)}}{Skew_S(x)} = -2,666667$

c.  $c_2 = 3 \left( \frac{2\sqrt{Var_S(x)}}{Skew_S(x)} \right)^{\frac{2}{3}} = 1$

d.  $c_3 = \frac{2\sqrt{Var_S(x)}^3}{Skew_S(x)} = 3$

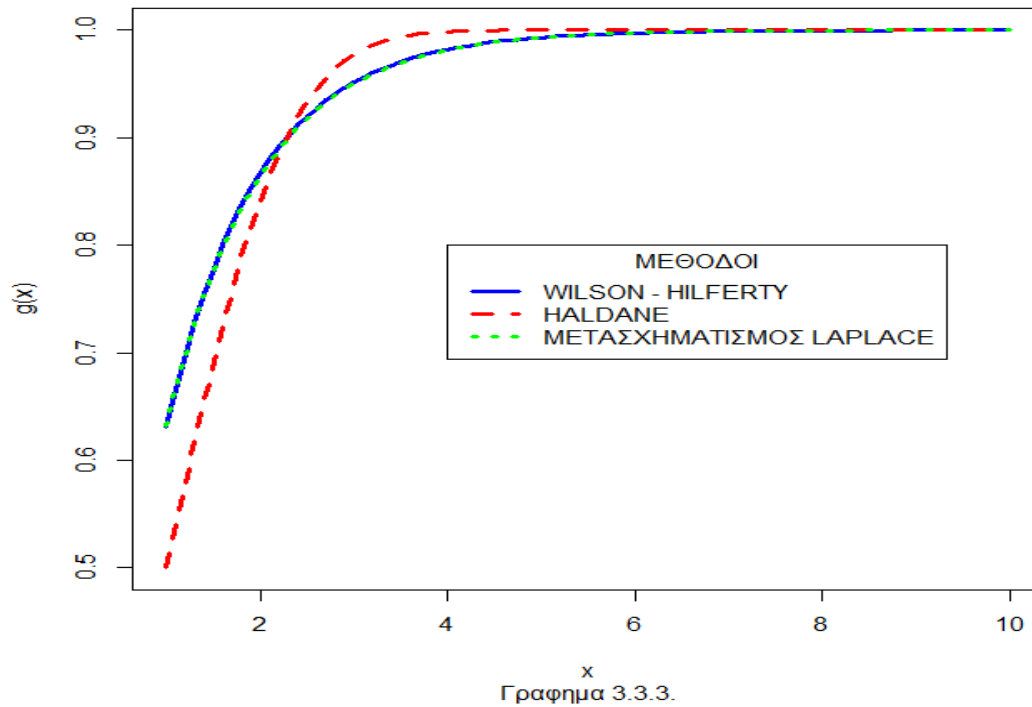
Η αθροιστική σ.κ. της S μέσω της Μεθόδου Wilson – Hilferty είναι:

$$G_S(x) = \Phi \left[ -2,666667 + (x + 2)^{\frac{1}{3}} \right].$$

Ο κώδικας των παραπάνω υπολογισμών βρίσκεται στο Παράρτημα Ε΄.

Σύμφωνα με τα παραπάνω λαμβάνουμε το ακόλουθο γράφημα μέσω R:

**Σ.Κ. ΣΥΝΘΕΤΗΣ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ)**



Σύμφωνα με το Γράφημα 3.3.1 οι δυο μέθοδοι (Μετασχηματισμό Laplace και Wilson – Hilferty) δίνουν παρόμοια αποτελέσματα, ενώ με την Μέθοδο του Haldane διαφέρουν. Επομένως βλέπουμε ότι η μέθοδος των Wilson – Hilferty είναι πολύ ικανοποιητική σε αυτή την περίπτωση.

#### 4. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΥ & ΑΠΕΙΡΟΥ Ή ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟΥ & ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο γίνεται έρευνα σχετικά με τις τρεις βασικές μεθόδους οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση που οι ζημιές ακολουθούν διακριτή κατανομή (Διακριτή Περίπτωση) αλλά και ο χρόνος χρεοκοπίας είναι στην διακριτή ή πεπερασμένη περίπτωση. Αρχικά γίνεται μια ανάλυση σχετικά με το κλασικό πρότυπο χρεοκοπίας τόσο σε διακριτό όσο και σε πεπερασμένο χρόνο. Επίσης γίνεται η συνοπτική παρουσίαση των μεθόδων και στη συνέχεια κάνουμε εφαρμογές με σκοπό να διαπιστώσουμε την αποτελεσματικότητα κάθε μεθόδου ξεχωριστά.

##### 4.1. ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ & ΑΠΕΙΡΟ ΧΡΟΝΟ

Θεωρούμε την περίπτωση κατά την οποία οι πληρωμές των ζημιών (αποζημιώσεων) γίνονται σε διακριτό χρόνο (π.χ. μια φορά το μήνα, τρίμηνο, τετράμηνο, εξάμηνο). Δηλαδή εννοούμε το μοντέλο για διακριτό χρόνο (Πολίτης, 2012).

**Ορισμός 4.1.1** : Έστω  $u$  το αποθεματικό της εταιρείας τη χρονική στιγμή  $n=0$  (δηλ. στην αρχή της λειτουργίας του χαρτοφυλακίου). Τότε, το πλεόνασμα της εταιρείας τη χρονική στιγμή  $n$  δίνεται από την σχέση:

$$U_n = u + c \cdot n - S_n, \text{ για } n=0,1,2,3,\dots \quad (4.1.1)$$

όπου  $c$  είναι το συνολικό ασφάλιστρο (που εισπράττει η εταιρεία μεταξύ των χρονικών στιγμών  $i-1$  και  $i$ ).

Το  $S_n$  είναι το χαρτοφυλάκιο συνολικών ζημιών και ισχύει:

$$S_n = W_1 + W_2 + \dots + W_n$$

όπου  $W_i$  είναι το συνολικό μέγεθος των απαιτήσεων στο χρονικό διάστημα  $(i-1, i]$  και οι  $W_i$  ανά δύο είναι ανεξάρτητες.

Επίσης όλες οι  $W_i$  ακολουθούν την ίδια κατανομή και ισχύει:

$$W_i = \sum_{k=1}^{N_i} X_{ik} \text{ για } i=1,2,3,\dots$$

όπου  $X_{ik}$  είναι οι ατομικές ζημιές (απαιτήσεις) και  $N_i$  είναι ο αριθμός των αποζημιώσεων στο χρονικό διάστημα  $(i-1, i]$ .



Επίσης το πλεόνασμα με μια μικρή αλλαγή των όρων στο μοντέλο μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$U_n = u + (c - W_1) + (c - W_2) + \dots + (c - W_n) \text{ για } n=0,1,2,3,\dots$$

Η ερμηνεία του παραπάνω τύπου είναι ότι η ποσότητα  $c - W_i$  εκφράζει, για  $i=1,2,3,\dots$ , το κέρδος που έχει η εταιρεία, δηλαδή την αύξηση του πλεονάσματος (ή την ελάττωση στην περίπτωση που η ποσότητα είναι αρνητική, οπότε έχουμε ζημιά), μεταξύ των χρονικών στιγμών  $i-1$  και  $i$  (Πολίτης, 2012).

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε διακριτό χρόνο ορίζεται από τη σχέση:

$$\tilde{\psi}(u) = Pr(U_n \leq 0, \text{ για κάποιο } n = 0,1,2, \dots / U_0 = u)$$

Επίσης η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να περιγραφεί και από τη σχέση:

$$\tilde{\psi}(u) = Pr(\tilde{T} < \infty / U_0 = u),$$

όπου  $\tilde{T}$  ο χρόνος χρεοκοπίας για το μοντέλο σε διακριτό χρόνο και ισούται με:

$$\tilde{T} = \min\{n \geq 1 : U_n \leq 0\}.$$

## 4.2. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ ΣΕ ΔΙΑΚΡΙΤΟ & ΑΠΕΙΡΟ ΧΡΟΝΟ

Στη συγκεκριμένη ενότητα γίνεται η συνοπτική παρουσίαση των δύο βασικών μεθόδων στην περίπτωση που το πλεόνασμα της εταιρίας δίνεται από την σχέση (4.1.1), δηλαδή εξετάζουμε το μοντέλο σε διακριτό χρόνο.

### 4.2.1. Η Ανισότητα Του Lundberg

Ο συντελεστής προσαρμογής για την ανέλιξη πλεονάσματος σε διακριτό χρόνο συμβολίζεται με  $\tilde{R}$ , και ορίζεται ως η θετική ρίζα της εξίσωσης

$$e^{-c \cdot r} \cdot M_W(r) = 1$$

όπου  $M_W(r)$  είναι η ροπογεννήτρια των  $W_i$ .

Η Ανισότητα του Lundberg για το Διακριτό Μοντέλο, η οποία δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε διακριτό χρόνο είναι:

$$\tilde{\psi}(u) \leq e^{-\tilde{R} \cdot u}, \text{ για κάθε } u \geq 0$$

#### 4.2.2. Η Αναδρομική Μέθοδος Για Την Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Για  $i=1,2,3,\dots$ , η συνάρτηση πιθανότητας των  $W_i$  συμβολίζεται με  $f_k$  με  $k = 1,2, \dots$ , δηλαδή

$$f_k = \Pr(W_1 = k) \quad \mu\epsilon \quad k = 1,2, \dots,$$

Ενώ η αντίστοιχη σ.κ. είναι:

$$F(x) = \Pr(W_1 \leq k), \quad x \geq 0.$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σε διακριτό χρόνο μέσω της Αναδρομικής Μεθόδου ικανοποιεί τη σχέση:

$$\tilde{\psi}(u) = \sum_{m=1}^{u+c} f_{u+c-m} \cdot \tilde{\psi}(m) + [1 - F(u+c-1)]$$

(Dickson, 2005).

### 4.3. ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ & ΣΥΝΕΧΗ ΧΡΟΝΟ

Το κλασικό πρότυπο, έτσι όπως έχει οριστεί, αναφέρεται σε άπειρο χρονικό ορίζοντα, και η πιθανότητα χρεοκοπίας στο μοντέλο αυτό έχει οριστεί σε άπειρο χρόνο. Σε πολλές περιπτώσεις, βέβαια, είναι πιο ρεαλιστικό να μας ενδιαφέρει η πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρονικό ορίζοντα.

Από μαθηματική άποψη, το πρόβλημα είναι τώρα δυσκολότερο εφόσον η πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση που ο χρόνος είναι πεπερασμένος, εξαρτάται όχι μόνο από το αρχικό αποθεματικό,  $u$ , αλλά και από το χρονικό ορίζοντα  $t$  και ορίζεται από τη σχέση:

$$\psi(u, t) = \Pr(U(\tau) < 0, \text{ για κάποιο } \tau \in [0, t])$$

**Θεώρημα 4.3.1** : Έστω  $\delta(u, t)$  η πιθανότητα μη-χρεοκοπίας, στο διάστημα  $[0, t]$  τότε για  $u=0$  έχουμε ένα άνω φράγμα που δίνεται από τη σχέση:

$$\delta(0, t) \leq \frac{\theta}{1 + \theta} + \frac{E[X^2]}{\theta \cdot E[X]} \cdot \frac{1}{c \cdot t}$$

όπου  $\theta$  είναι το περιθώριο ασφάλειας και για το  $\delta(u, t)$  ισχύει:

$$\delta(u, t) = 1 - \psi(u, t).$$

#### 4.4. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΜΕΘΟΔΟΥ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ & ΣΥΝΕΧΗ ΧΡΟΝΟ

Στη συγκεκριμένη ενότητα γίνεται η συνοπτική παρουσίαση της συνηθέστερης προσεγγιστικής μεθόδου στην περίπτωση που ο χρόνος χρεοκοπίας είναι στην πεπερασμένη και συνεχή περίπτωση.

##### 4.4.1. Η Κανονική Μέθοδος

Μια σχέση που συνδέει την πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο με αυτήν σε άπειρο (συνεχή) χρόνο είναι:

$$\psi(u, t) = \psi(u) \cdot Pr(T \leq t / T < \infty, U(0) = u) \quad (4.4.1)$$

Εφόσον ο υπολογισμός της παραπάνω συνάρτησης δεν είναι σχεδόν ποτέ εφικτός με αναλυτικές μεθόδους, χρησιμοποιούμε αριθμητικές ή προσεγγιστικές μεθόδους.

Για μεγάλες τιμές του  $u$ , ισχύει ότι:

$$Pr(T \leq t / T < \infty, U(0) = u) \cong \Phi\left(\frac{t - \mu_T}{\sigma_T}\right) \quad (4.4.2),$$

όπου  $\mu_T = E[T/T < \infty]$  και  $\sigma_T^2 = VAR[T/T < \infty]$  είναι, αντίστοιχα η δεσμευμένη μέση τιμή και διακύμανση του χρόνου χρεοκοπίας γνωρίζοντας ότι θα συμβεί χρεοκοπία (Πολίτης, 2012).

Όπως είναι σαφές και από παραπάνω, η γνώση των ροπών του χρόνου χρεοκοπίας είναι απαραίτητη για την υλοποίηση της προσέγγισης. Οι Lin & Willmot (2000) έδωσαν μία αναδρομική μέθοδο για τον υπολογισμό της ροπής  $k$ -τάξης του χρόνου χρεοκοπίας, δοθέντος ότι θα συμβεί χρεοκοπία. Η δέσμευση εδώ είναι απαραίτητη, υπενθυμίζεται ότι η τυχαία μεταβλητή  $T$  είναι ελλειμματική, εφόσον μπορεί να πάρει την τιμή άπειρο με θετική πιθανότητα (αν δεν συμβεί χρεοκοπία).

Συγκεκριμένα, η δεσμευμένη μέση τιμή του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται από την σχέση:

$$\mu_T = E(T/T < \infty) = \frac{\psi_1(u)}{\psi(u)},$$

$$\text{όπου } \psi_1(u) = \frac{1}{\lambda\mu_1\theta} \left\{ \int_0^u \psi(u-x)\psi(x)dx + \int_u^\infty \psi(x)dx - \frac{\mu_2}{2\mu_1\theta} \psi(u) \right\}$$

(Lin & Willmot, 2000).

Επιπλέον η δεσμευμένη διακύμανση του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται από την σχέση:

$$\sigma_T^2 = V(T/T < \infty) = \mu_{2,T} - (\mu_T)^2$$

Γενικότερα, η δεσμευμένη k-ροπή του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται από την σχέση:

$$\mu_{k,T} = E(T^k/T < \infty) = \frac{\psi_k(u)}{\psi(u)},$$

όπου

$$\psi_k(u) = \frac{k}{\lambda\mu_1\theta} \left\{ \int_0^u \psi(u-x)\psi_{k-1}(x)dx + \int_u^\infty \psi_{k-1}(x)dx - \psi(u) \int_0^\infty \psi_{k-1}(x)dx \right\}$$

(Lin & Willmot, 2000).

Από τις σχέσεις (4.4.1) και (4.4.2), η Κανονική Μέθοδος μπορεί να χρησιμοποιηθεί προσεγγιστικά για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο είναι:

$$\psi(u, t) \cong \psi(u) \cdot \Phi\left(\frac{t - \mu_T}{\sigma_T}\right).$$

Η παραπάνω προσέγγιση είναι ασυμπτωτική, για μικρές τιμές του u, τα αποτελέσματα δεν είναι ικανοποιητικά (Πολίτης, 2012).

#### 4.5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Εφαρμογή 4.5.1 / Η Κανονική Μέθοδος : Έστω το περιθώριο ασφαλείας  $\theta = \frac{1}{4}$  και το αρχικό αποθεματικό u παίρνει μεγάλες τιμές. Επίσης ο χρονικός ορίζοντας t τον οποίο εξετάζουμε παίρνει τιμές στο πεδίο ορισμού [0,30] με βήμα h=1. Θέλουμε να προσεγγίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω της Κανονικής Μεθόδου όταν το ύψος των ατομικών απαιτήσεων (ζημιών) X ακολουθεί την κατανομή:

- 1) Εκθετική ( $\beta=2$ )
- 2) Γάμμα ( $\alpha=5, \beta=10$ )
- 3) Βήτα ( $\alpha=5, \beta=5$ )

Λύση: Το αρχικό αποθεματικό u παίρνει τιμές από ένα διάστημα τιμών (0,1,2,...,50).

Με βάση την Κανονική Μέθοδο για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε πεπερασμένο χρόνο είναι:

$$\psi(u, t) \cong \psi(u) \cdot \Phi\left(\frac{t - \mu_T}{\sigma_T}\right),$$

όπου  $\psi(u)$  είναι μια προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε συνεχή χρόνο, στη συγκεκριμένη περίπτωση θα χρησιμοποιήσουμε την Μέθοδο Του Renyi δηλαδή,

$$\psi(u) = \psi_R(u) = \frac{1}{1 + \theta} \cdot e^{-\frac{2 \cdot \mu_1 \cdot \theta \cdot u}{\mu_2 \cdot (1 + \theta)}}$$

όπου  $\mu_1$  και  $\mu_2$ , είναι οι ροπές της κατανομής των εκάστοτε ατομικών απαιτήσεων (ζημιών) X

Από υπόθεση το περιθώριο ασφαλείας  $\theta = \frac{1}{4}$

Και επίσης  $\Phi\left(\frac{t - \mu_T}{\sigma_T}\right)$  είναι η σ.κ. της κανονικής κατανομής για το χρόνο χρεοκοπίας (βλ. Ενότητα 4.3.1).

Όσον αφορά το ύψος των ατομικών απαιτήσεων (ζημιών) X:

1) Για Εκθετική( $\beta=2$ ) η σ.π.π. είναι:

$$f(x) = 2e^{-2x} \text{ για } x > 0 \text{ (βλ. Παράρτημα Α')}.$$

Με μέση τιμή  $\mu_1 = E(X) = \frac{1}{2} = 0,5$

Με δεύτερη ροπή  $\mu_2 = E(X^2) = \frac{2}{2^2} = 0,5$

2) Για Γάμμα( $\alpha=5, \beta=10$ ) η σ.π.π. είναι:

$$f(x) = \frac{10^5 x^{5-1} e^{-10x}}{\Gamma(5)} \text{ για } x > 0 \text{ (βλ. Παράρτημα Α')}.$$

Με μέση τιμή  $\mu_1 = E(X) = \frac{5}{10} = 0,5$

Με δεύτερη ροπή  $\mu_2 = E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2 = 0,3$

3) Για Βήτα( $\alpha=5, \beta=5$ ) η σ.π.π. είναι:

$$f(x) = \frac{1}{B(5,5)} x^{5-1} (1-x)^{5-1}, \text{ για } 0 < x < 1 \text{ (βλ. Παράρτημα Α')}.$$

Με μέση τιμή  $\mu_1 = E(X) = \frac{5}{5+5} = 0,5$

Με δεύτερη ροπή  $\mu_2 = E(X^2) = Var(X) + [E(X)]^2 = 0,2727273$

Όσον αφορά την Μέθοδο Του Renyi για καθεμία από τις ατομικές απαιτήσεις (ζημιές) X:

1) Για Εκθετική( $\beta=2$ ) η προσέγγιση είναι:

$$\psi_R(u) = \frac{4}{5} e^{-2u/5} \text{ (βλ. Ενότητα 5.1.7).}$$

2) Για Γάμμα( $\alpha=5, \beta=10$ ) η προσέγγιση είναι:

$$\psi_R(u) = \frac{4}{5} e^{-2u/3} \text{ (βλ. Ενότητα 5.1.7).}$$

3) Για Βήτα( $\alpha=5, \beta=5$ ) η προσέγγιση είναι:

$$\psi_R(u) = \frac{4}{5} e^{-11u/15} \text{ (βλ. Ενότητα 5.1.7).}$$

Όσον αφορά τις δεσμευμένες ροπές (τρεις πρώτες ροπές) του χρόνου χρεοκοπίας για καθεμία από τις ατομικές απαιτήσεις (ζημιές) X:

1) Για Εκθετική( $\beta=2$ ) έχουμε:

$$\psi_1(u) = 8\left(\frac{2}{5} e^{-2u/5} + \frac{16}{25} e^{-2u/5} u\right) \text{ (βλ. Ενότητα 4.4.3.1).}$$

$$\psi_2(u) = \frac{128}{125} e^{-2u/5} (125 + 16u(15 + 2u)) \text{ (βλ. Ενότητα 4.4.3.1).}$$

$$\psi_3(u) = \frac{512}{625} e^{-2u/5} (16875 + 8u(4125 + 4u(165 + 8u))) \text{ (βλ. Ενότητα 4.4.3.1).}$$

2) Για Γάμμα( $\alpha=5, \beta=10$ ) η προσέγγιση είναι:

$$\psi_1(u) = 8\left(\frac{6}{25} e^{-2u/3} + \frac{16}{25} e^{-2u/3} u\right).$$

$$\psi_2(u) = \frac{128}{125} e^{-2u/3} (45 + 16u(9 + 2u)).$$

$$\psi_3(u) = \frac{512}{625} e^{-2u/3} (3645 + 8u(1485 + 4u(99 + 8u))).$$

3) Για Βήτα( $\alpha=5, \beta=5$ ) η προσέγγιση είναι:

$$\psi_1(u) = 8\left(\frac{12}{55}e^{-11u/15} + \frac{16}{25}e^{-11u/15}u\right).$$

$$\psi_2(u) = \frac{512e^{-11u/15}(1125+88u(45+11u))}{15125}.$$

$$\psi_3(u) = \frac{4096e^{-11u/15}(455625+484u(3375+22u(45+4u)))}{831875}.$$

Υπολογίζουμε τώρα τη δεσμευμένη μέση τιμή και τη δεσμευμένη διακύμανση του χρόνου χρεοκοπίας για καθεμία από τις ατομικές απαιτήσεις (ζημιές) Χ:

1) Για Εκθετική( $\beta=2$ ) έχουμε:

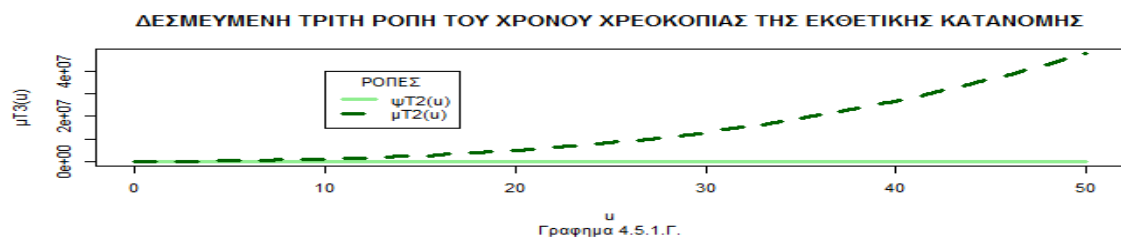
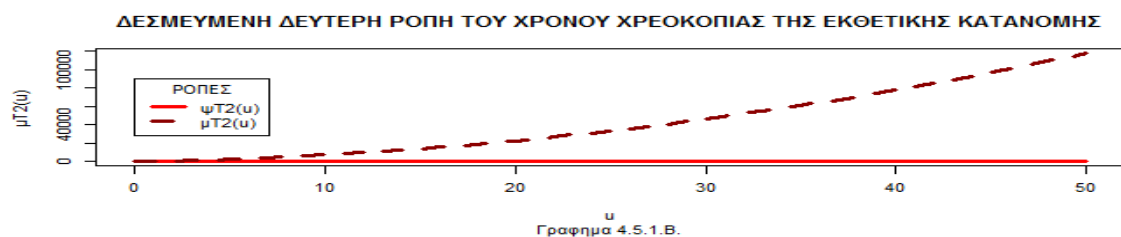
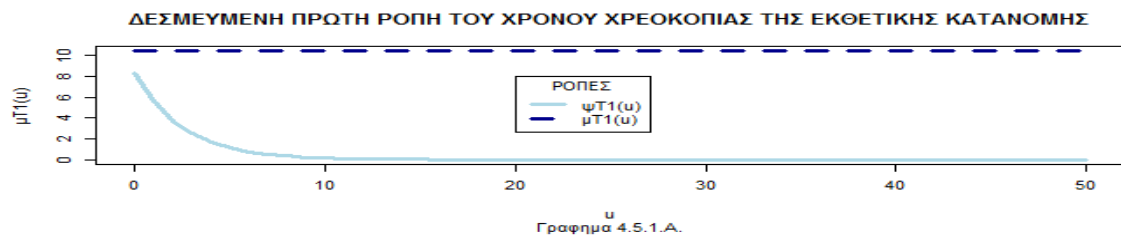
$$\mu_T = \frac{\psi_1(u)}{\psi_R(u)} = 10e^{2u/5}\left(\frac{2}{5}e^{-2u/5} + \frac{16}{25}e^{-2u/5}u\right) \text{ (βλ. Ενότητα 4.4.3.1).}$$

$$\mu_{2,T}(u) = \frac{\psi_2(u)}{\psi_R(u)} = \frac{32}{25}(125 + 16u(15 + 2u)) \text{ (βλ. Ενότητα 4.4.3.1).}$$

$$\begin{aligned} \sigma_T^2 &= \mu_{2,T}(u) - (\mu_T)^2 = -100e^{4u/5}\left(\frac{2}{5}e^{-2u/5} + \frac{16}{25}e^{-2u/5}u\right)^2 + \\ &+ 20e^{2u/5}\left(-32e^{-2u/5} + \frac{64}{25}e^{-2u/5}u + \frac{256}{125}e^{-2u/5}u^2 + \frac{8}{5}e^{-2u/5}(25 + 8u)\right) \end{aligned}$$

(βλ. Ενότητα 4.4.3.1).

Στα παρακάτω γραφήματα γίνεται σύγκριση της δεσμευμένης με την μη δεσμευμένη ροπή του χρόνου χρεοκοπίας μόνο για την Εκθετική κατανομή για τις τρεις πρώτες ροπές.



2) Για Γάμμα( $\alpha=5, \beta=10$ ) έχουμε:

$$\mu_T = \frac{\psi_1(u)}{\psi_R(u)} = 10e^{2u/3} \left( \frac{6}{25} e^{-2u/3} + \frac{16}{25} e^{-2u/3} u \right).$$

$$\mu_{2,T}(u) = \frac{\psi_2(u)}{\psi_R(u)} = \frac{32}{25} (45 + 16u(9 + 2u)).$$

$$\sigma_T^2 = \mu_{2,T}(u) - (\mu_T)^2 = -100e^{4u/3} \left( \frac{6}{25} e^{-2u/3} + \frac{16}{25} e^{-2u/3} u \right)^2 + 20e^{2u/3} \left( -\frac{288}{25} e^{-2u/3} + \frac{192}{125} e^{-2u/3} u + \frac{256}{125} e^{-2u/3} u^2 + \frac{24}{25} e^{-2u/3} (15 + 8u) \right).$$

3) Για Βήτα( $\alpha=5, \beta=5$ ) έχουμε:

$$\mu_T = \frac{\psi_1(u)}{\psi_R(u)} = 10e^{11u/15} \left( \frac{12}{55} e^{-11u/15} + \frac{16}{25} e^{-11u/15} u \right).$$

$$\mu_{2,T}(u) = \frac{\psi_2(u)}{\psi_R(u)} = \frac{128(1125+88u(45+11u))}{3025}.$$

$$\sigma_T^2 = \mu_{2,T}(u) - (\mu_T)^2 = -100e^{22u/15} \left( \frac{12}{55} e^{-11u/15} + \frac{16}{25} e^{-11u/15} u \right)^2 + 20e^{11u/15} \left( -\frac{1152}{121} e^{-11u/15} + \frac{384}{275} e^{-11u/15} u + \frac{256}{125} e^{-11u/15} u^2 + \frac{96}{605} e^{-11u/15} (75 + 44u) \right).$$

Η Κανονική Μέθοδος για την πιθανότητα χρεοκοπίας με σταθερό πλεόνασμα ( $u = 0, u = 5, u = 30$ ) σε πεπερασμένο χρόνο για καθεμία από τις ατομικές απαιτήσεις (ζημιές)  $X$ :

1) Για Εκθετική( $\beta=2$ ) η προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι:

$$\psi(0, t) \cong \psi_R(0) \cdot \Phi \left( \frac{t - \mu_T}{\sigma_T} \right) = 0,8 \cdot \Phi \left( \frac{t - \mu_T}{\sigma_T} \right).$$

$$\psi(5, t) \cong \psi_R(5) \cdot \Phi \left( \frac{t - \mu_T}{\sigma_T} \right) = 0,1082682 \cdot \Phi \left( \frac{t - \mu_T}{\sigma_T} \right).$$

2) Για Γάμμα( $\alpha=5, \beta=10$ ) έχουμε:

$$\psi(0, t) \cong \psi_R(0) \cdot \Phi \left( \frac{t - \mu_T}{\sigma_T} \right) = 0,8 \cdot \Phi \left( \frac{t - \mu_T}{\sigma_T} \right).$$

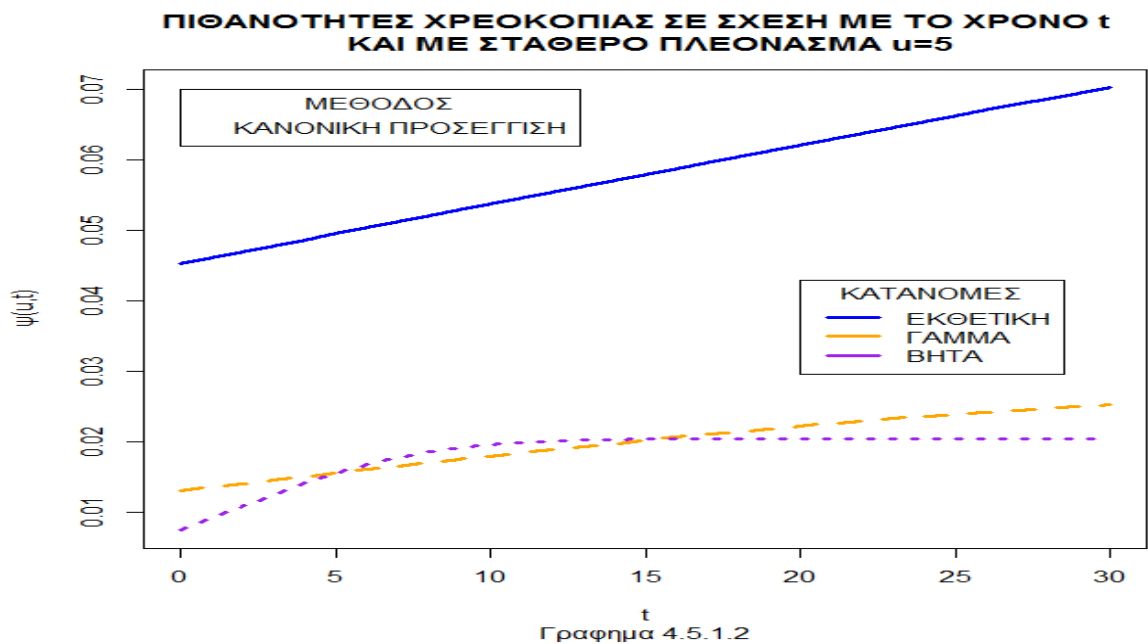
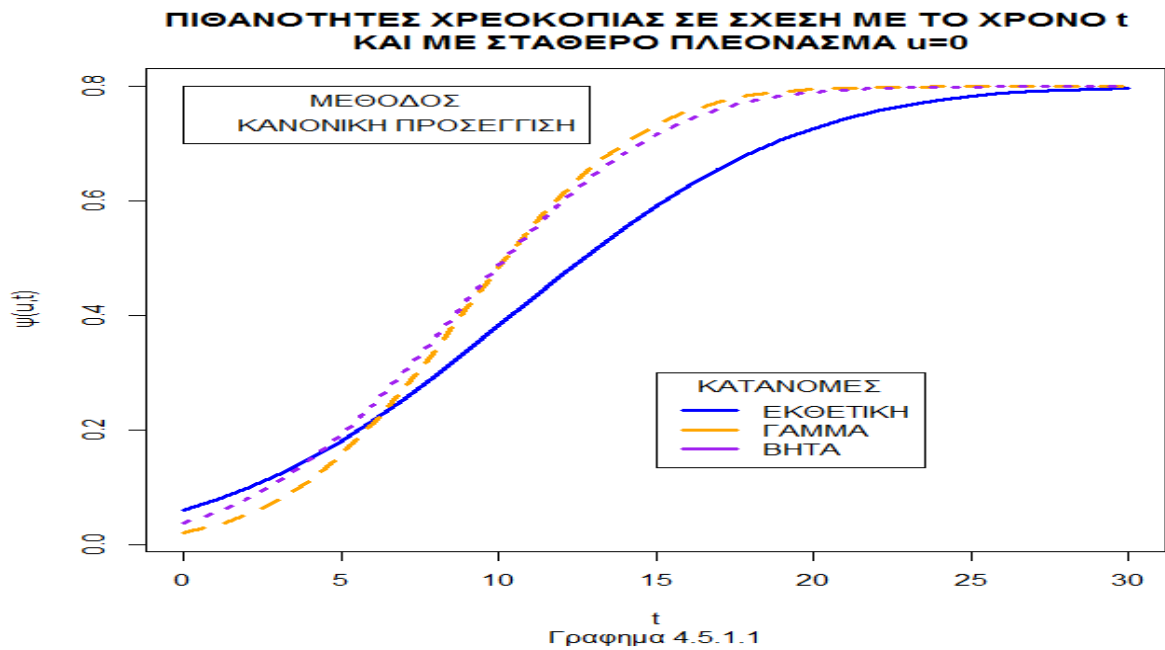


$$\psi(5, t) \cong \psi_R(5) \cdot \Phi\left(\frac{t-\mu_T}{\sigma_T}\right) = 0,02853919 \cdot \Phi\left(\frac{t-\mu_T}{\sigma_T}\right).$$

3) Για Βήτα(α=5,β=5) έχουμε:

$$\psi(0, t) \cong \psi_R(0) \cdot \Phi\left(\frac{t-\mu_T}{\sigma_T}\right) = 0,8 \cdot \Phi\left(\frac{t-\mu_T}{\sigma_T}\right).$$

$$\psi(5, t) \cong \psi_R(5) \cdot \Phi\left(\frac{t-\mu_T}{\sigma_T}\right) = 0,02044923 \cdot \Phi\left(\frac{t-\mu_T}{\sigma_T}\right) \text{ (βλ. Ενότητα 4.4.3.1).}$$



Σύμφωνα με τα Γραφήματα 4.5.1.1-3 , τα οποία απεικονίζουν πιθανότητες χρεοκοπίας με την χρήση της Κανονικής Μεθόδου των τριών κατανομών ζημιών (α. Εκθετική, β. Γάμμα, γ. Βήτα) σε σχέση με το χρόνο  $t$  ( $t \in [0,30]$  με βήμα  $h=1$ ) και με σταθερό πλεόνασμα  $u$  (ανάλογα το γράφημα) προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Για σταθερό πλεόνασμα  $u=0$  το Γράφημα 4.5.1.1 παρουσιάζει και τις τρεις κατανομές ζημιών, σύμφωνα με την Κανονική Μέθοδο που προσεγγίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας, να έχουν αυξητική τάση. Οι πιθανότητες χρεοκοπίας που αντιστοιχούν στη Βήτα και τη Γάμμα κατανομή είναι αρκετά κοντά η μια στην άλλη, ενώ παρατηρούμε ότι, για  $t \geq 7$  η Εκθετική κατανομή δίνει τη μικρότερη πιθανότητα χρεοκοπίας. Για την Γάμμα κατανομή παρατηρούμε τα εξής: 1. Για  $t=0$  η πιθανότητα χρεοκοπίας παίρνει την χαμηλότερη τιμή κοντά στο μηδέν, σε σχέση με τις άλλες δυο κατανομές. 2. Είναι η πρώτη που φτάνει στην τιμή 0,8 (οριακή τιμή για όλες τις πιθανότητες χρεοκοπίας) πιο γρήγορα σε σχέση με τις άλλες δυο κατανομές.
- Για σταθερό πλεόνασμα  $u=5$  το Γράφημα 4.5.1.2 παρουσιάζει τις δύο από τις τρεις κατανομές ζημιών, σύμφωνα με την Κανονική Μέθοδο που προσεγγίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας, να έχουν αυξητική τάση. Πιο συγκεκριμένα η Βήτα κατανομή φαίνεται να είναι η κατανομή που αφότου δείχνει μια αυξητική τάση στην αρχή, μετά αρχίζει να είναι περίπου σταθερή σε σχέση με το χρόνο.

Η Κανονική Μέθοδος για την πιθανότητα χρεοκοπίας με σταθερό πλεόνασμα ( $t = 3$  ,  $t = 5$  ,  $t = 15$ ) σε πεπερασμένο χρόνο για καθεμία από τις ατομικές απαιτήσεις (ζημιές)  $X$ :

- 1) Για Εκθετική( $\beta=2$ ) η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι:

$$\psi(u, 3) \cong \psi_R(u) \cdot \Phi\left(\frac{3-\mu_T}{\sigma_T}\right) = \frac{4}{5} e^{-2u/5} \cdot \Phi\left(\frac{3-\mu_T}{\sigma_T}\right).$$

$$\psi(u, 5) \cong \psi_R(u) \cdot \Phi\left(\frac{5-\mu_T}{\sigma_T}\right) = \frac{4}{5} e^{-2u/5} \cdot \Phi\left(\frac{5-\mu_T}{\sigma_T}\right).$$

$$\psi(u, 30) \cong \psi_R(u) \cdot \Phi\left(\frac{30-\mu_T}{\sigma_T}\right) = \frac{4}{5} e^{-2u/5} \cdot \Phi\left(\frac{30-\mu_T}{\sigma_T}\right).$$

- 2) Για Γάμμα( $\alpha=5, \beta=10$ ) έχουμε:

$$\psi(u, 3) \cong \psi_R(u) \cdot \Phi\left(\frac{3-\mu_T}{\sigma_T}\right) = \frac{4}{5} e^{-2u/3} \cdot \Phi\left(\frac{3-\mu_T}{\sigma_T}\right).$$

$$\psi(u, 5) \cong \psi_R(u) \cdot \Phi\left(\frac{5-\mu_T}{\sigma_T}\right) = \frac{4}{5} e^{-2u/3} \cdot \Phi\left(\frac{5-\mu_T}{\sigma_T}\right).$$

$$\psi(u, 30) \cong \psi_R(u) \cdot \Phi\left(\frac{30-\mu_T}{\sigma_T}\right) = \frac{4}{5} e^{-2u/3} \cdot \Phi\left(\frac{30-\mu_T}{\sigma_T}\right).$$

3) Για Βήτα(α=5,β=5) έχουμε:

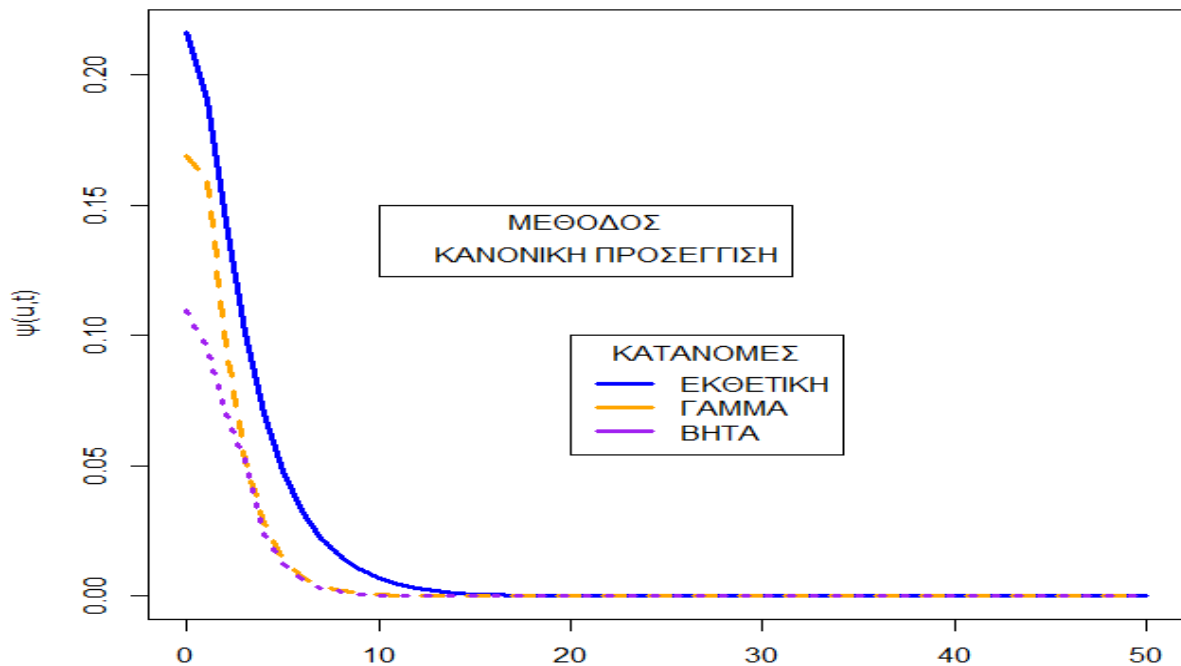
$$\psi(u, 3) \cong \psi_R(u) \cdot \Phi\left(\frac{3-\mu_T}{\sigma_T}\right) = \frac{4}{5} e^{-11u/15} \cdot \Phi\left(\frac{3-\mu_T}{\sigma_T}\right).$$

$$\psi(u, 5) \cong \psi_R(u) \cdot \Phi\left(\frac{5-\mu_T}{\sigma_T}\right) = \frac{4}{5} e^{-11u/15} \cdot \Phi\left(\frac{5-\mu_T}{\sigma_T}\right).$$

$$\psi(u, 30) \cong \psi_R(u) \cdot \Phi\left(\frac{30-\mu_T}{\sigma_T}\right) = \frac{4}{5} e^{-11u/15} \cdot \Phi\left(\frac{30-\mu_T}{\sigma_T}\right).$$

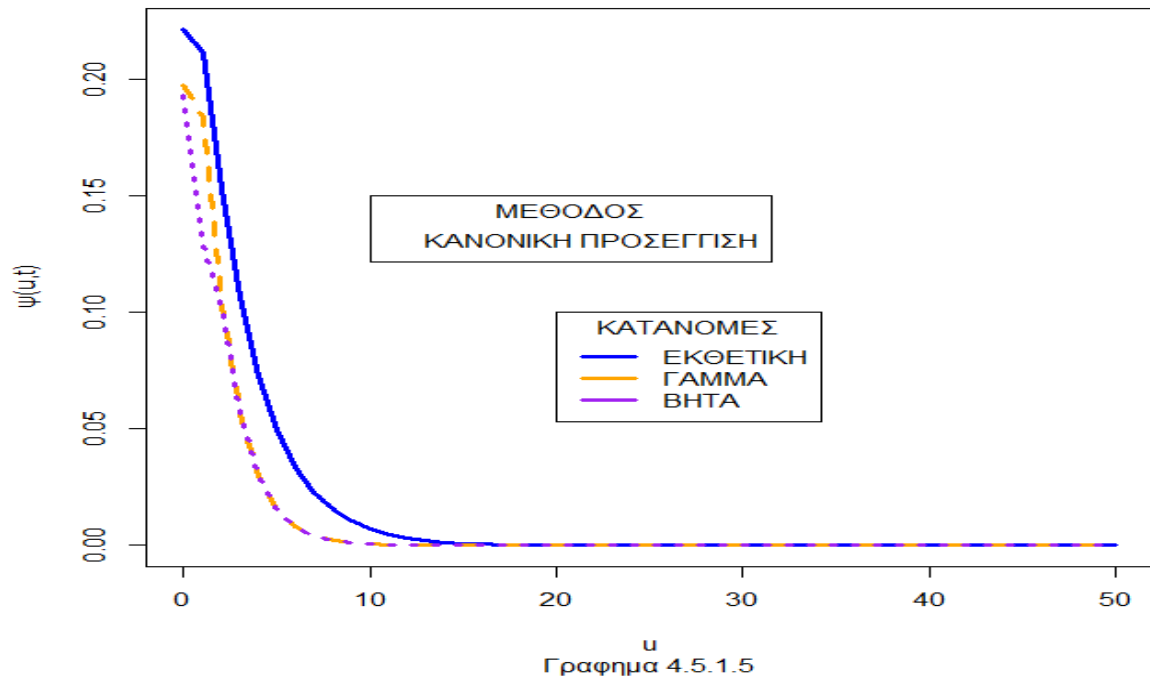
Ο κώδικας όλων των παραπάνω υπολογισμών βρίσκεται στο Παράρτημα Ε΄.

**ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ u  
ΚΑΙ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΧΡΟΝΟ t=3**

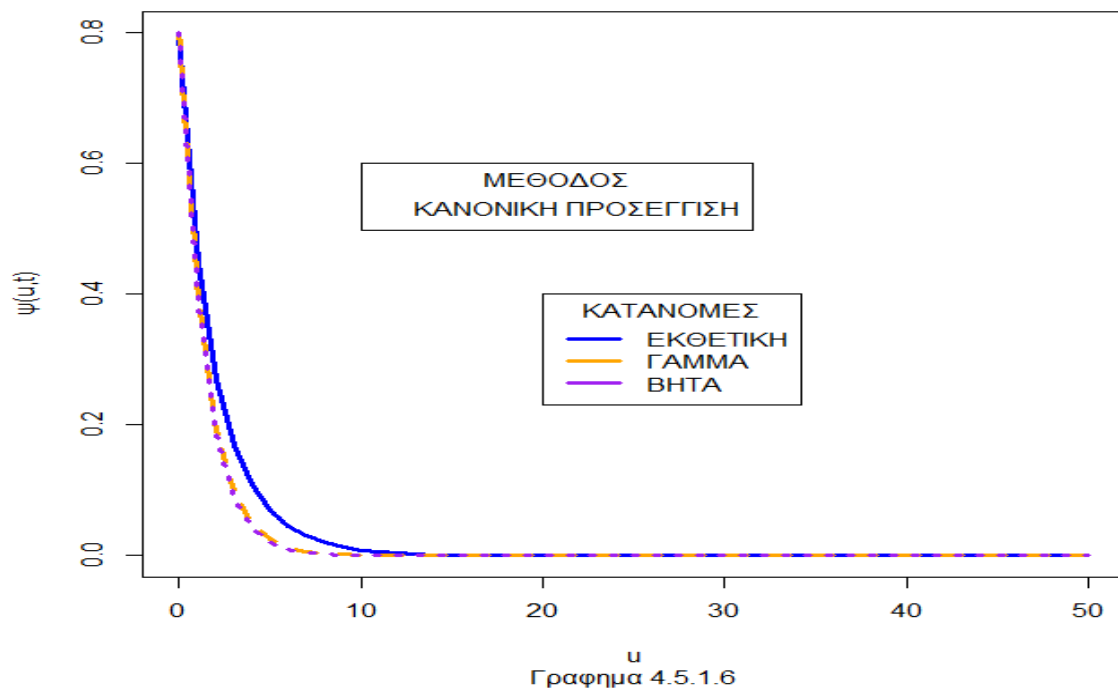


u  
Γραφήμα 4.5.1.4

**ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ  $u$   
ΚΑΙ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΧΡΟΝΟ  $t=5$**



**ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ  $u$   
ΚΑΙ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΧΡΟΝΟ  $t=30$**



Σύμφωνα με τα Γραφήματα 4.5.1.4-6 , τα οποία απεικονίζουν πιθανότητες χρεοκοπίας με την χρήση της Κανονικής Μεθόδου των τριών κατανομών ζημιών (α. Εκθετική, β. Γάμμα, γ. Βήτα) σε σχέση με το πλεόνασμα  $u$  ( $u \in [0,50]$  με βήμα  $h=1$ ) και με σταθερό χρόνο  $t$  (ανάλογα το γράφημα) προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- Για σταθερό χρόνο  $t=3$  το Γράφημα 4.5.1.4 παρουσιάζει και τις τρεις κατανομές ζημιών, σύμφωνα με την Κανονική Μέθοδο που προσεγγίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας, να έχουν φθίνουσα τάση. Πιο συγκεκριμένα η Βήτα κατανομή φαίνεται να δίνει τη μικρότερη πιθανότητα χρεοκοπίας σε σχέση με τις άλλες δύο κατανομές. Για την επιλογή της Βήτα κατανομής ως ικανοποιητικότερης κατανομής σε σχέση με τις άλλες δύο το αναδεικνύουν δύο στοιχεία: 1. Για  $u=0$  η πιθανότητα χρεοκοπίας παίρνει την χαμηλότερη τιμή κοντά στο μηδέν, σε σχέση με τις άλλες δύο κατανομές. 2. Είναι η πρώτη που φτάνει στην τιμή 0 (μια αναγκαία συνθήκη για όλες τις πιθανότητες χρεοκοπίας) πιο γρήγορα σε σχέση με τις άλλες δύο κατανομές.
- Για σταθερό πλεόνασμα  $t=5$  το Γράφημα 4.5.1.5 παρουσιάζει τις δύο από τις τρεις κατανομές ζημιών, σύμφωνα με την Κανονική Μέθοδο που προσεγγίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας, να έχουν φθίνουσα τάση.
- Για σταθερό πλεόνασμα  $t=30$  (πολύ μεγάλο) το Γράφημα 4.5.1.6 παρουσιάζει και τις τρεις κατανομές ζημιών, σύμφωνα με την Κανονική Μέθοδο που προσεγγίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας, να έχουν μια σταθερή αλλά με πολύ γρήγορο ρυθμό φθίνουσα τάση (μια αναγκαία συνθήκη για όλες τις πιθανότητες χρεοκοπίας).

Εφαρμογή 4.5.2 / Η Ανισότητα Του Lundberg (Πολίτης, 2012, Σελ.300): Έστω μια διακριτή διαδικασία πλεονάσματος  $U_n = u + c \cdot n - S_n$ , στην οποία υποθέτουμε ότι οι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές  $Z_i, i=1, 2, \dots$ , εκφράζουν το κέρδος του ασφαλιστή ανά χρονική μονάδα. Θεωρούμε ότι οι  $Z_i$  μπορούν να πάρουν δύο τιμές, σύμφωνα με την σ.π.

$$\Pr\left(Z_i = -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \text{ και } \Pr\left(Z_i = \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}, i=1, 2, \dots,$$

- a) Θα δείξουμε ότι ο συντελεστής προσαρμογής για το συγκεκριμένο πρότυπο ισούται με:

$$\tilde{R} = \ln(10 + 6\sqrt{3})$$

- b) Επίσης, ζητείται να δοθεί ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω της Ανισότητας του Lundberg.

Λύση:

a) Χρησιμοποιούμε την εξίσωση:  $M_Z(-r) = 1$

$$\text{Έτσι έχουμε: } E(e^{-r \cdot Z_i}) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot e^{\frac{r}{3}} + \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{2r}{3}} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{r}{3}} + 2 \cdot e^{-\frac{2r}{3}} = 3$$

$$\text{Θέτουμε: } e^{\frac{r}{3}} = y \Rightarrow y^3 - 3 \cdot y^2 + 2 = 0$$

Η μια ρίζα είναι  $y = 1$ , η οποία απορρίπτεται γιατί μας δίνει  $r = 0$ .

Οι άλλες δύο ρίζες της εξίσωσης είναι:  $y_1 = 1 - \sqrt{3}$  και  $y_2 = 1 + \sqrt{3}$

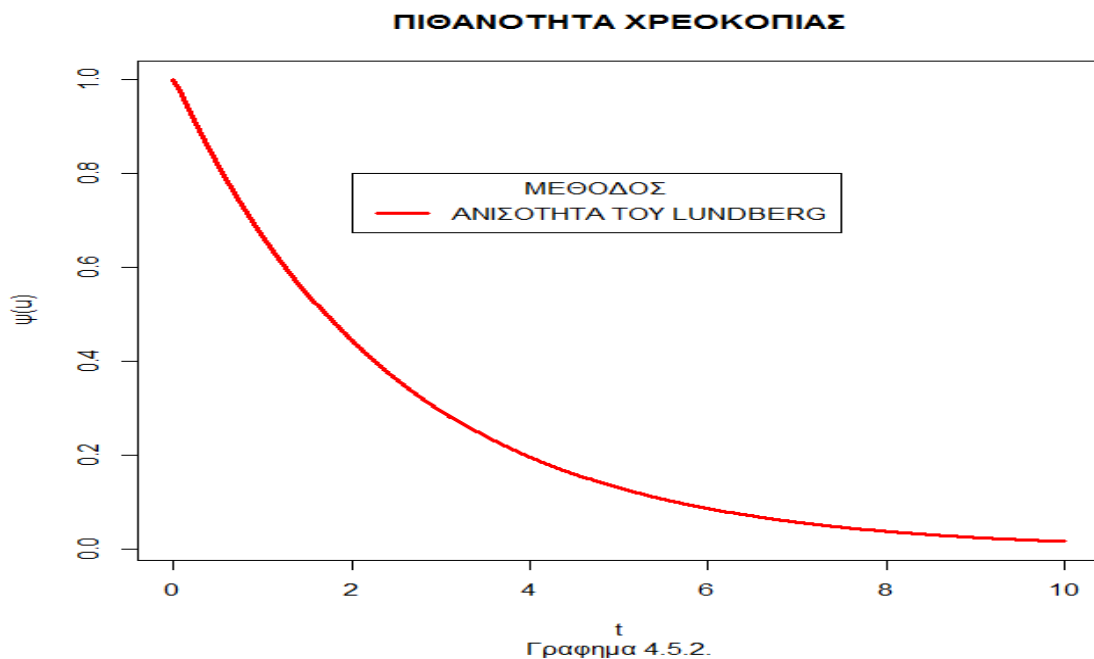
Άρα παίρνουμε:  $e^{\frac{\tilde{R}}{3}} = 1 + \sqrt{3} \Leftrightarrow \tilde{R} = 3 \cdot \ln(1 + \sqrt{3}) = \ln(1 + \sqrt{3})^3$

Ο συντελεστής προσαρμογής ισούται με:  $\tilde{R} = \ln(10 + 6\sqrt{3}) = 3,015158$ .

b) Ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε διακριτό χρόνο είναι:

$$\tilde{\psi}(u) \leq e^{-3,015158 \cdot u}, \quad \text{για κάθε } u \geq 0$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω λαμβάνουμε το ακόλουθο γράφημα μέσω R:



Σύμφωνα με το Γράφημα 4.5.2 το συμπέρασμα που προκύπτει, είναι ότι το άνω φράγμα στην ανισότητα του Lundberg φθίνει πολύ γρήγορα. Ανάλογα με το διάστημα τιμών που δίνουμε για το αρχικό κεφάλαιο  $u$ , η ανισότητα του Lundberg δίνει ένα ικανοποιητικό άνω φράγμα για την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση του Διακριτού και Άπειρου Χρόνου που δεν μπορούμε να υπολογίσουμε την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας.

Εφαρμογή 4.5.3 / Η Αναδρομική Μέθοδος (Πολίτης, 2012, Σελ.307): Έστω ότι η κατανομή των ζημιών έχει σ.π.

$$\Pr(W_1 = 0) = q, \quad \Pr(W_1 = k) = p \cdot (1 - a) \cdot a^k \quad \text{για } k = 1, 2, \dots$$

έτσι ώστε  $0 < a < 1, 0 < p < 1, p + q = 1$  και  $E(W_1) < 1$ . Αν το ασφάλιστρο στη μονάδα του χρόνου είναι  $c = 1$ , ζητείται η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\tilde{\psi}(u)$ .

Λύση: Είναι φανερό ότι  $W_1 \sim \text{Γενικευμένη Γεωμετρική}(p)$

Η σ.κ. είναι:  $F(k) = Pr(W_1 \leq k) = \sum_{i=0}^k Pr(W_1 \leq i) = 1 - p \cdot a^k, k = 0, 1, 2, \dots$

Η μέση τιμή είναι:  $E(W_1) = \sum_{i=0}^{\infty} [1 - F(k)] = \sum_{i=0}^{\infty} [p \cdot a^i] = \frac{p}{1-a}$ .

Επίσης ισχύει ότι:  $E(W_1) = \psi(0)$

Άρα έχουμε ότι  $\psi(0) = \frac{p}{1-a}$

Χρησιμοποιώντας την αναδρομική σχέση, που είδαμε στην Ενότητα 4.2 :

$$\tilde{\psi}(u) = \sum_{m=1}^{u+c} f_{u+c-m} \cdot \tilde{\psi}(m) + [1 - F(u + c - 1)]$$

έχουμε ότι:

$$\tilde{\psi}(u) = \sum_{m=1}^{u+1} p \cdot a^m \cdot \tilde{\psi}(u - m) + \sum_{m=u}^{\infty} p \cdot a^m \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\psi}(u) = \sum_{m=1}^{u+1} p \cdot a^{u-m} \cdot \tilde{\psi}(m) + \sum_{m=u}^{\infty} p \cdot a^m \quad (4.5.3.1)$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση το  $u$  με  $u + 1$ , έχουμε:

$$\tilde{\psi}(u + 1) = \sum_{m=1}^{u+1} p \cdot a^{u+1-m} \cdot \tilde{\psi}(m) + \sum_{m=u+1}^{\infty} p \cdot a^m \quad (4.5.3.2)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (4.5.3.1) με  $a$  και αφαιρούμε κατά μέλη την (4.5.3.1) με (4.5.3.2) τότε έχουμε:

$$\tilde{\psi}(u + 1) - a \cdot \tilde{\psi}(u) = p \cdot \tilde{\psi}(u + 1) \Leftrightarrow$$

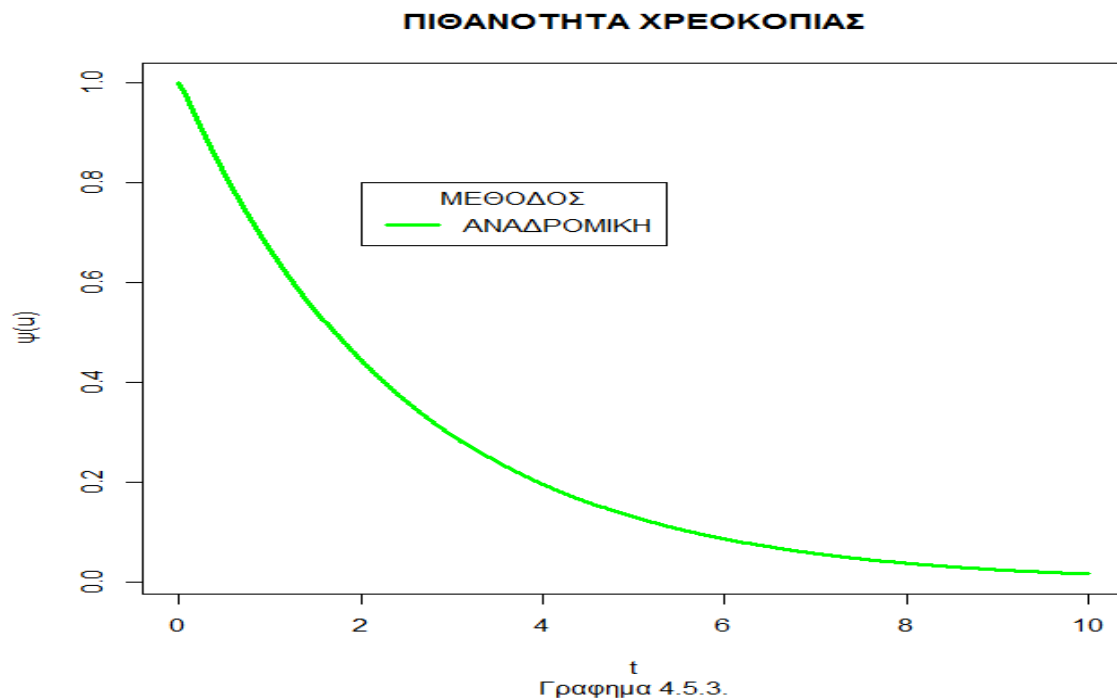
$$\tilde{\psi}(u + 1) = \frac{a}{q} \cdot \tilde{\psi}(u) \Leftrightarrow$$

$$\tilde{\psi}(u) = \left(\frac{a}{q}\right)^u \cdot \tilde{\psi}(0), \quad u = 0, 1, 2, \dots$$

Και αφού ισχύει ότι  $\psi(0) = \frac{p}{1-a}$  έχουμε ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας σε διακριτό χρόνο μέσω της Αναδρομικής Μεθόδου ικανοποιεί τη σχέση:

$$\tilde{\psi}(u) = \left(\frac{a}{q}\right)^u \cdot \frac{p}{1-a}, \quad u = 0, 1, 2, \dots$$

Σύμφωνα με τα παραπάνω, για  $p = 1/2$  και για  $a = 1/2$  λαμβάνουμε το ακόλουθο γράφημα μέσω R:



Σύμφωνα με το Γράφημα 4.5.3 το συμπέρασμα που προκύπτει, είναι ότι η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\tilde{\psi}(u)$  που προκύπτει από την Αναδρομική Μέθοδο είναι φθίνουσα συνάρτηση του αποθεματικού  $u$ .



## 5. ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΤΗ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ ΣΥΝΕΧΟΥΣ & ΑΠΕΙΡΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο γίνεται έρευνα σχετικά με τις επτά βασικές μεθόδους οι οποίες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση που ο χρονικός ορίζοντας που εξετάζουμε είναι συνεχής και άπειρος. Η ανάλυση σχετικά με το κλασικό πρότυπο χρεοκοπίας τόσο σε συνεχή όσο και σε άπειρο χρόνο γίνεται αναλυτικά στο Κεφάλαιο 1. Αρχικά γίνεται η συνοπτική παρουσίαση των μεθόδων και στη συνέχεια κάνουμε εφαρμογές με σκοπό να διαπιστώσουμε την αποτελεσματικότητα κάθε μεθόδου ξεχωριστά και των μεθόδων στο σύνολο.

### 5.1. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΜΕΘΟΔΩΝ

Στη συγκεκριμένη ενότητα γίνεται η συνοπτική παρουσίαση των επτά βασικών μεθόδων στην περίπτωση που έχουμε συνεχή και άπειρο χρόνο.

#### 5.1.1. Η Μέθοδος Των Cramer – Lundberg

Έστω  $F(x)$  η αθροιστική σ.κ. των αποζημιώσεων και  $R$  ο συντελεστής προσαρμογής στο κλασικό μοντέλο. Τότε ισχύει το εξής:

**Θεώρημα 5.1** : Έστω ότι  $\int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx < \infty$  , τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi(u)$  στο Κλασικό Πρότυπο ικανοποιεί την ασυμπτωτική σχέση:

$$\psi(u) \sim C e^{-Ru} \text{ καθώς } u \rightarrow \infty$$

δηλαδή  $\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\psi(u)}{e^{-Ru}} = C$ , όπου  $C$  είναι μια σταθερά με τύπο υπολογισμού:

$$C = \frac{\theta \mu_1}{R \int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx}$$

Τέλος, η προσεγγιστική πιθανότητα χρεοκοπίας συμβολίζεται με  $\psi_{CL}(u)$  η οποία αποτελεί την (ασυμπτωτική) προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας (Μέθοδος Των Cramer – Lundberg) και ισούται με (Πολίτης,2012):

$$\psi_{CL}(u) = C \cdot e^{-R \cdot u}.$$

### 5.1.2. Η Μέθοδος Των Beekman – Bowers

Σύμφωνα με τη μέθοδο αυτή, μπορούμε να προσεγγίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας με την ουρά μιας κατανομής Γάμμα με παραμέτρους  $\alpha, \beta$ , δηλαδή θεωρούμε την προσέγγιση:

$$\psi_{BB}(u) \cong \frac{1}{1+\theta} \cdot [1 - G_1(u)]$$

όπου  $G_1$  είναι η αθροιστική συνάρτηση της Γάμμα( $\alpha, \beta$ )

Για τον υπολογισμό των  $\alpha, \beta$  ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία:

- Θεωρούμε μία τ.μ  $L$  με μάζα  $\theta/(1+\theta)$  στο μηδέν, ενώ στο  $(0, \infty)$  η  $L$  είναι συνεχής με πυκνότητα την πυκνότητα της Γάμμα( $\alpha, \beta$ ) πολλαπλασιασμένη επί  $1/(1+\theta)$ . Σύμφωνα με την παραπάνω εξίσωση προσεγγίζουμε την κατανομή της μέγιστης σωρευτικής απώλειας,  $L$ , από αυτήν της  $\Lambda$ . Για τον υπολογισμό των παραμέτρων  $\alpha, \beta$  της κατανομής Γάμμα, εξισώνουμε τις δύο πρώτες ροπές των  $L$  και  $\Lambda$ , δηλαδή χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$E(L) = E(\Lambda) \quad \text{και} \quad Var(L) = Var(\Lambda)$$

όπου οι δύο ροπές για την  $L$  δίνονται από τις σχέσεις:

$$E(L) = \frac{1}{\theta} \cdot \frac{\mu_2}{2\mu_1} \quad \text{και} \quad Var(L) = \frac{\mu_3}{3\theta\mu_1} + \left(\frac{\mu_2}{2\theta\mu_1}\right)^2$$

- Επειδή το συνεχές τμήμα της  $L$  είναι μία κατανομή Γάμμα( $\alpha, \beta$ ) διαιρεμένη με  $1+\theta$  η μέση τιμή και η διακύμανση της  $L$  θα είναι:

$$E(\Lambda) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \frac{\alpha}{\beta}, \quad Var(\Lambda) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^2 \cdot \frac{\alpha}{\beta^2}$$

- Συνεπώς οι παράμετροι  $\alpha, \beta$  υπολογίζονται επιλύοντας το σύστημα

$$\frac{\mu_2}{2\theta\mu_1} = \frac{\alpha}{(1+\theta)\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\mu_3}{3\theta\mu_1} + \left(\frac{\mu_2}{2\theta\mu_1}\right)^2 = \frac{\alpha}{(1+\theta)^2\beta^2}$$

Το σύστημα αυτό είναι μη γραμμικό ως προς  $\alpha, \beta$ . Μπορεί όμως να επιλυθεί εύκολα αν διαιρέσουμε τις δύο παραπάνω εξισώσεις κατά μέλη, οπότε απαλείφουμε το  $\alpha$  και παίρνουμε μία απλή γραμμική εξίσωση ως προς  $\beta$  (Πολίτης, 2012).

### 5.1.3. Η Μέθοδος Του Tijms

Ο Η. Tijms πρότεινε η πιθανότητα χρεοκοπίας, στην περίπτωση που δεν μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά, να προσεγγίζεται από την αντίστοιχη πιθανότητα που αντιστοιχεί σε μία μείξη εκθετικών κατανομών, δηλαδή:

$$\Psi_T(u) = \left( \frac{1}{1+\theta} - C \right) e^{-\gamma u} + C e^{-Ru}$$

όπου R είναι ο συντελεστής προσαρμογής και C είναι η σταθερά του ασυμπτωτικού τύπου των Cramer - Lundberg

Επίσης για το  $\gamma$  ισχύει η σχέση:

$$\gamma = \left( \frac{1}{1+\theta} - C \right) \left( \frac{1}{\theta \mu_1} \int_0^{\infty} x \bar{F}(x) dx - \frac{C}{R} \right)^{-1}$$

Δύο σημαντικές ιδιότητες για αυτήν την προσέγγιση είναι οι εξής:

1. Επειδή στον παραπάνω τύπο για το  $\Psi_T(u)$  ισχύει ότι  $R < \gamma$ , άρα ο δεύτερος όρος συγκλίνει πιο αργά στο 0 απ' τον πρώτο όρο, δηλαδή:

$$\Psi_T(u) \sim C e^{-Ru}$$

Συγκρίνοντας τον παραπάνω τύπο με τον ασυμπτωτικό τύπο των Cramer – Lundberg βλέπουμε ότι η προσέγγιση  $\Psi_T(u)$  για την πιθανότητα χρεοκοπίας  $\Psi(u)$  έχει πάντα την σωστή ασυμπτωτική συμπεριφορά (αρκεί βέβαια να υπάρχει ο συντελεστής προσαρμογής R στο μοντέλο).

2. Θέτοντας  $u=0$  στον τύπο του  $\Psi_T(u)$ , έχουμε:

$$\Psi_T(0) = \left( \frac{1}{1+\theta} - C \right) + C = \frac{1}{1+\theta}$$

Δηλαδή αυτή η προσέγγιση είναι πάντα ακριβής για  $u=0$ .

Ένα σημαντικό μειονέκτημα που έχει η προσέγγιση αυτή είναι ότι για να εφαρμοστεί θα πρέπει να υπάρχει αλλά και να είναι γνωστός αναλυτικά ο R δηλαδή ο συντελεστής προσαρμογής στο μοντέλο.

Από την άλλη πλευρά αν ισχύει αυτό τότε εκτός από τις δύο ιδιότητες που αναφέρθηκαν παραπάνω, αξίζει να τονιστεί ότι η προσέγγιση αυτή είναι ακριβής για όλες τις τιμές του  $u$ , όταν η κατανομή των αποζημιώσεων F ανήκει σε μία από τις τρεις οικογένειες κατανομών :

- a) Εκθετική,

- b) Μίξη δύο εκθετικών κατανομών,
- c) Συνέλιξη δύο εκθετικών κατανομών με την ίδια παράμετρο, δηλαδή όταν η F είναι μία Γάμμα(2,β) κατανομή για κάποιο β>0.

#### 5.1.4. Η Μέθοδος Του De Vylder

Σύμφωνα με τη προσέγγιση αυτή, αντικαθιστούμε την ανέλιξη πλεονάσματος  $\{U(t): t \geq 0\}$  με μία ανέλιξη  $\{\tilde{U}(t): t \geq 0\}$  η οποία έχει περιθώριο ασφαλείας  $\tilde{\theta}$ , ένταση της ανέλιξης Poisson  $\tilde{\lambda}$  και για την οποία θεωρούμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων είναι εκθετική. Η  $\psi(u)$  δηλαδή η πιθανότητα χρεοκοπίας για την  $U(t)$  και για μία δοσμένη κατανομή αποζημιώσεων προσεγγίζεται από την πιθανότητα χρεοκοπίας  $\psi_{DV}(u)$  για την ανέλιξη  $\{\tilde{U}(t) : t \geq 0\}$  με εκθετικές αποζημιώσεις. Η συνάρτηση  $\psi_{DV}(u)$  έχει τύπο:

$$\psi_{DV}(u) = \frac{1}{1 + \tilde{\theta}} \cdot e^{-\tilde{R}_{DV} \cdot u}$$

όπου  $\tilde{R}_{DV}$  είναι ο “εκθέτης De Vylder” και ισούται με:

$$\tilde{R}_{DV} = \frac{\tilde{\theta}}{(1 + \tilde{\theta})} \cdot \frac{1}{\tilde{\mu}_1}$$

και  $\tilde{\mu}_1$  είναι η μέση τιμή της εκθετικής κατανομής που χρησιμοποιείται στη προσέγγιση.

Για τον υπολογισμό των  $\tilde{\mu}_1$ ,  $\tilde{\theta}$  και  $\tilde{\lambda}$  η συνθήκη που έθεσε ο De Vylder είναι ότι για  $t \geq 0$  οι τρεις πρώτες ροπές του πλεονάσματος,  $U(t)$  για την αρχική ανέλιξη και  $\tilde{U}(t)$  για την προσεγγιστική ανέλιξη, να είναι ίσες. Δηλαδή πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$E[U(t)^k] = E[\tilde{U}(t)^k] \quad \text{για } k = 1, 2, 3.$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να δούμε ότι προκύπτει το σύστημα τριών εξισώσεων (με αγνώστους τα  $\tilde{\mu}_1$ ,  $\tilde{\theta}$  και  $\tilde{\lambda}$ ):

- $\tilde{\theta} \tilde{\lambda} \tilde{\mu}_1 = \theta \lambda \mu_1$
- $2 \tilde{\lambda} \tilde{\mu}_1^2 = \lambda \mu_2$
- $6 \tilde{\lambda} \tilde{\mu}_1^3 = \lambda \mu_3$ .

Αν τώρα διαιρέσουμε τις δύο τελευταίες σχέσεις κατά μέλη έχουμε:

$$3\tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_3}{\mu_2} \Leftrightarrow \tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_3}{3\mu_2}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η παράμετρος της εκθετικής στην προσέγγιση είναι:

$$3\mu_2/\mu_3.$$

Κάνοντας αντικατάσταση της τελευταίας σχέσης στην  $6\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_1^3 = \lambda\mu_3$  προκύπτει το εξής:

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda\mu_3}{6\tilde{\mu}_1^3} = \frac{\lambda\mu_3}{6\left(\frac{\mu_3}{3\mu_2}\right)^3}$$

Κάνοντας αντικατάσταση στην  $\tilde{\theta}\tilde{\lambda}\tilde{\mu}_1 = \theta\lambda\mu_1$  προκύπτει το εξής:

$$\tilde{\theta} = \frac{2\mu_1\mu_3\theta}{3\mu_2^2}$$

#### 5.1.5. Η Μέθοδος Του Lundberg

Ο ακόλουθος τύπος, που ονομάζεται προσέγγιση Lundberg, προέρχεται από (Grandell, 2000). Απαιτεί τις τρεις πρώτες ροπές να είναι πεπερασμένες. Η πιθανότητα χρεοκοπίας για αυτή τη μέθοδο είναι:

$$\psi_L(u) = \left\{ 1 + \left( \theta \cdot u - \frac{\mu_2}{2 \cdot \mu_1} \right) \cdot \frac{4 \cdot \theta \cdot \mu_1^2 \cdot \mu_3}{3 \cdot (\mu_2)^3} \right\} \cdot e^{-\frac{2 \cdot \mu_1 \cdot \theta \cdot u}{\mu_2}}.$$

#### 5.1.6. Η Εκθετική Μέθοδος Ή Μέθοδος Της Εκθετικής Μορφής

Αυτή η προσέγγιση προτάθηκε και προέρχεται από τον De Vylder (1996). Απαιτεί τις τρεις πρώτες ροπές να είναι πεπερασμένες. Η πιθανότητα χρεοκοπίας για αυτή τη μέθοδο είναι:

$$\psi_E(u) = \exp \left\{ -1 - \frac{2 \cdot \mu_1 \cdot \theta \cdot u - \mu_2}{\sqrt{(\mu_2)^2 + \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \theta \cdot \mu_1 \cdot \mu_3}} \right\}.$$

### 5.1.7. Η Μέθοδος Του Renyi

Η προσέγγιση Renyi (Grandell, 2000), βασίζεται στη μέθοδο των Beekman-Bowers όταν αντικαθιστούμε την κατανομή Γάμμα με μια Εκθετική, που ταιριάζουν μόνο στην πρώτη ροπή. Ως εκ τούτου, μπορεί να θεωρηθεί ως απλοποιημένη έκδοση της προσέγγισης Beekman-Bowers. Απαιτεί τις δύο πρώτες ροπές να είναι πεπερασμένες. Η πιθανότητα χρεοκοπίας για αυτή τη μέθοδο είναι:

$$\psi_R(u) = \frac{1}{1+\theta} \cdot e^{-\frac{2 \cdot \mu_1 \cdot \theta \cdot u}{\mu_2 \cdot (1+\theta)}}, \quad u \geq 0 .$$

## 5.2. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ

Στην ενότητα αυτή δίνουμε κάποια αριθμητικά παραδείγματα για τις προσεγγίσεις που αναφέρθηκαν.

Εφαρμογή 5.2.1 : Η Μέθοδος Των Cramer – Lundberg / (Πολίτης, 2012, Σελ. 211) : Θεωρούμε ότι η κατανομή των αποζημιώσεων έχει πυκνότητα

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot e^{-x} + \frac{2}{3} \cdot e^{-2 \cdot x} + e^{-3 \cdot x}, \quad x \geq 0$$

Αν είναι γνωστό ότι  $\lambda=c=4$ , θα εξετάσουμε την προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας με τον ασυμπτωτικό τύπο των Cramer – Lundberg.

Λύση : Σύμφωνα με την σ.π. του ύψους των ατομικών απαιτήσεων  $X$  είναι κατανοητό ότι η  $f(x)$  είναι Μείξη Εκθετικών κατανομών με βάρος για την κάθε κατανομή  $w_i = \frac{1}{3}$ ,  $i = 1,2,3$  και έτσι μπορεί να γραφεί η σ.π. στη μορφή

$$f(x) = \frac{1}{3} \cdot (e^{-x} + 2 \cdot e^{-2 \cdot x} + 3 \cdot e^{-3 \cdot x}), \quad x \geq 0$$

$$\mu\epsilon \quad X_1 \sim \text{Exp}(1), \quad X_2 \sim \text{Exp}(2), \quad X_3 \sim \text{Exp}(3).$$

Άρα για να κάνουμε χρήση της μεθόδου αυτής χρειαζόμαστε την πρώτη ροπή:

$$\mu_1 = E(X) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot E(X_i) = \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{11}{18} = 0,6111 .$$

Επίσης χρειαζόμαστε και την ροπογεννήτρια:

$$M_X(r) = E(e^{-r \cdot x}) = \sum_{i=1}^n w_i \cdot E(e^{-r \cdot x_i}) = \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{1-r} + \frac{2}{2-r} + \frac{3}{3-r} \right)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{(2-r) \cdot (3-r) + 2 \cdot (1-r) \cdot (3-r) + 3 \cdot (1-r) \cdot (2-r)}{(1-r) \cdot (2-r) \cdot (3-r)} \right).$$

Η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας είναι:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_1} - 1 = \frac{4}{4 \cdot \frac{11}{18}} - 1 = \frac{7}{11} = 0,63636 \text{ .}$$

Η εξίσωση του Lundberg για τον συντελεστή προσαρμογής είναι:

$$M_X(r) = 1 + (1 + \theta) \cdot \mu_1 \cdot r$$
$$\Leftrightarrow \frac{(2-r) \cdot (3-r) + 2 \cdot (1-r) \cdot (3-r) + 3 \cdot (1-r) \cdot (2-r)}{(1-r) \cdot (2-r) \cdot (3-r)} = 1 + r \text{ .}$$

Μετά από πράξεις προκύπτει η εξίσωση 4<sup>ου</sup> βαθμού:

$$3 \cdot r^4 - 15 \cdot r^3 + 21 \cdot r^2 - 7 \cdot r = 0 \text{ .}$$

Για την επίλυση της εξίσωσης χρησιμοποιούμε το Mathematica και έτσι έχουμε:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 0,48513, \quad r_3 = 1,72235, \quad r_4 = 2,79252 \text{ .}$$

Από αυτές, μόνο η μικρότερη ρίζα  $r_2$  είναι στο επιτρεπτό διάστημα (0,1), συνεπώς η ρίζα αυτή θα είναι και ο συντελεστής προσαρμογής:

$$R = 0,48513$$

Τώρα θα υπολογίσουμε το C που είναι μια σταθερά με τύπο υπολογισμού:

$$C = \frac{\theta \mu_1}{R \int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx} \text{ .}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος που βρίσκεται στον παρανομαστή χρησιμοποιούμε το Mathematica και έτσι έχουμε:

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{Rx} \cdot \bar{F}(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot e^{Rx} \cdot \frac{1}{3} \cdot (e^{-x} + e^{-2 \cdot x} + e^{-3 \cdot x}) dx$$
$$= \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{3} \cdot (e^{-(1-R) \cdot x} + e^{-(2-R) \cdot x} + e^{-(3-R) \cdot x}) dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[ \left( \frac{1}{1-R} \right)^2 + \left( \frac{1}{2-R} \right)^2 + \left( \frac{1}{3-R} \right)^2 \right] = 1,4554$$

Άρα αν χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των  $\mu_1, \theta$  και  $R$  έχουμε:

$$C = \frac{0,63636 \cdot 0,6111}{0,48513 \cdot 1,4554} = 0,55079 .$$

Τέλος, η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με την Μέθοδο Των Cramer – Lundberg είναι:

$$\psi_{CL}(u) = C \cdot e^{-R \cdot u} = 0,55079 \cdot e^{-0,48513 \cdot u} .$$

Από την άλλη, γνωρίζουμε ότι η ακριβής συνάρτηση  $\psi_{EXACT}(u)$  για Μείξη Τριών Εκθετικών έχει τύπο:

$$\psi_{EXACT}(u) = C_1 \cdot e^{-R_1 \cdot u} + C_2 \cdot e^{-R_2 \cdot u} + C_3 \cdot e^{-R_3 \cdot u},$$

όπου τα  $C_1, C_2, C_3$  προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος των εξισώσεων:

$$C_1 + C_2 + C_3 = \psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}$$

$$C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2 + C_3 \cdot R_3 = \delta'(0) = \frac{\theta}{(1 + \theta)^2 \cdot \mu_1}$$

$$C_1 \cdot R_1^2 + C_2 \cdot R_2^2 + C_3 \cdot R_3^2 = \delta''(0) = \frac{\theta}{(1 + \theta)^3 \cdot \mu_1^2},$$

εδώ τα  $R_1, R_2, R_3$  είναι οι θετικές ρίζες της εξίσωσης του Lundberg, δηλαδή

$$R_1 = 0,48513, \quad R_2 = 1,72235, \quad R_3 = 2,79252$$

Για την επίλυση του συστήματος που βρίσκεται παραπάνω χρησιμοποιούμε το Mathematica και έτσι έχουμε:

$$C_1 = 0,550786, \quad C_2 = 0,043702, \quad C_3 = 0,016623$$

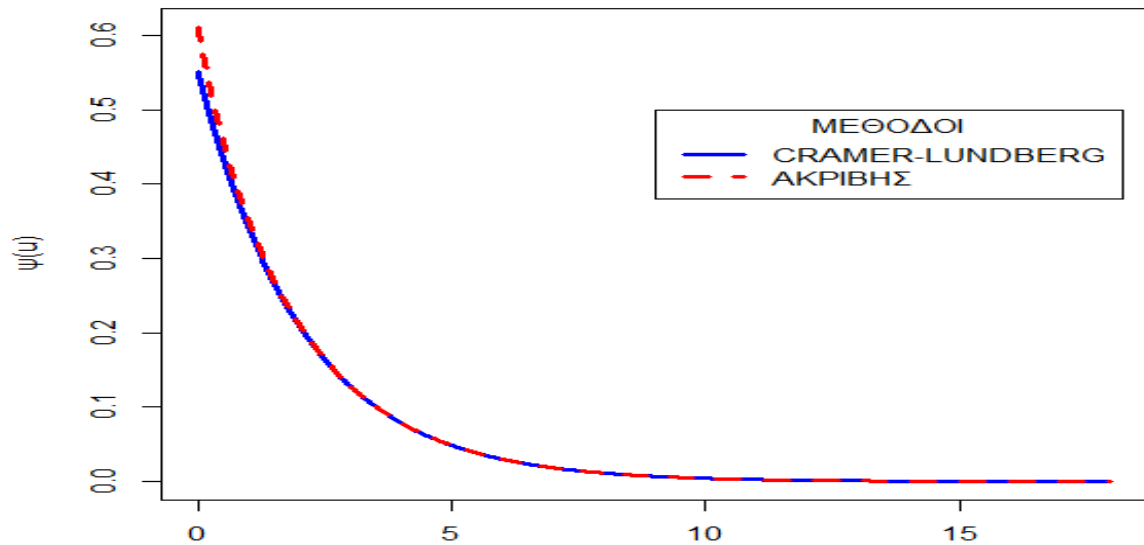
Άρα η ακριβής συνάρτηση  $\psi_{EXACT}(u)$  είναι η εξής:

$$\psi_{EXACT}(u) = 0,550786 \cdot e^{-0,48513 \cdot u} + 0,043702 \cdot e^{-1,72235 \cdot u} + 0,016623 \cdot e^{-2,79252 \cdot u}$$

Ο κώδικας των παραπάνω υπολογισμών βρίσκεται στο Παράρτημα Ε'. Σύμφωνα με τις παραπάνω πιθανότητες χρεοκοπίας λαμβάνουμε για  $u \in [0,18]$  με βήμα 0,02 το ακόλουθο γράφημα μέσω R:



**ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ**



Γραφήμα 5.2.1.

Σύμφωνα με το Γράφημα 5.2.1 καταλαβαίνουμε ότι η μέθοδος των *Cramer – Lundberg* είναι ικανοποιητική στο να προσεγγίσει την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας. Ανάλογα με το διάστημα τιμών που δίνουμε για το αρχικό κεφάλαιο  $u$  και πιο συγκεκριμένα με ένα πολύ μικρό βήμα  $h$  (στην συγκεκριμένη περίπτωση  $h=0,02$ ) η μέθοδος των *Cramer – Lundberg* σχεδόν ταυτίζεται ,όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε με την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας.

Εφαρμογή 5.2.2 : Η Μέθοδος Του *Tijms* / (Πολίτης, 2012, Σελ. 211) : Ίδια δεδομένα και ζητούμενα με την Εφαρμογή 5.2.1 απλώς θέλουμε να βρεθεί η προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας με την Μέθοδο του *Tijms*.

Λύση : Σύμφωνα με την Εφαρμογή 5.2.1 οι ποσότητες  $\mu_1, \theta, R$  και  $C$  που απαιτούνται για τον υπολογισμό αυτής της μεθόδου έχουν υπολογισθεί.

Άρα πρέπει μόνο να βρούμε το  $\gamma$ , το οποίο δίνεται από την σχέση:

$$\gamma = \left( \frac{1}{1 + \theta} - C \right) \left( \frac{1}{\theta \mu_1} \int_0^{\infty} x \bar{F}(x) dx - \frac{C}{R} \right)^{-1}.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος που βρίσκεται στην παρένθεση χρησιμοποιούμε το *Mathematica* και έτσι έχουμε:

$$\int_0^{\infty} x \bar{F}(x) dx = \frac{1}{3} \cdot \int_0^{\infty} x \cdot (e^{-x} + e^{-2 \cdot x} + e^{-3 \cdot x}) dx$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right) = \frac{49}{108} .$$

Μετά από πράξεις έχουμε ότι το  $\gamma$  ισούται με:

$$\gamma = 1,925725$$

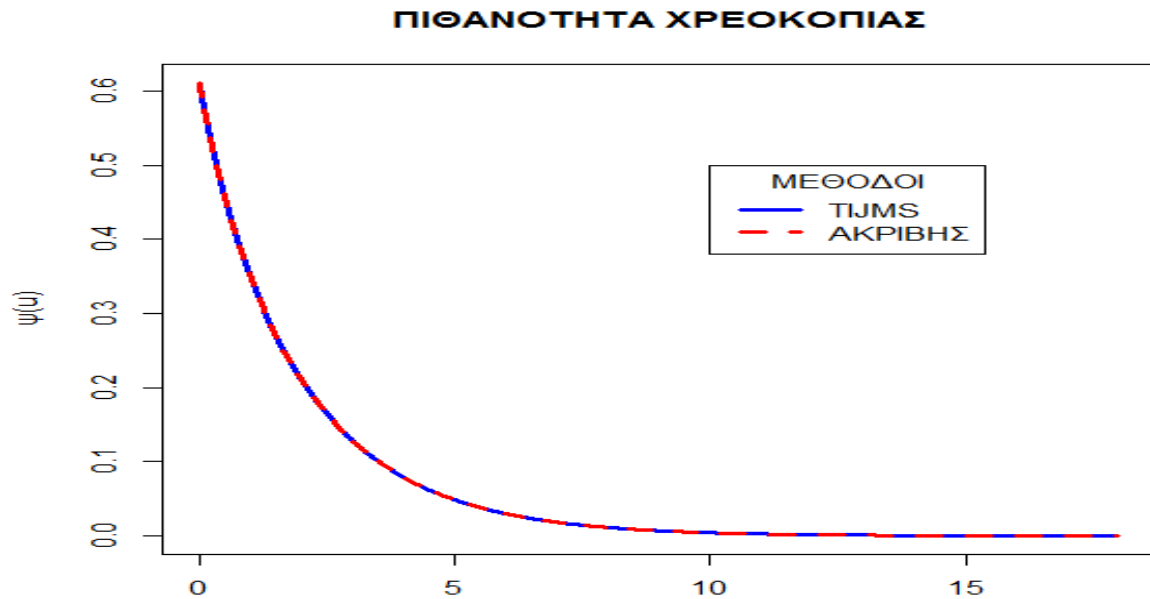
Τέλος, η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με την Μέθοδο του Tijms είναι:

$$\psi_T(u) = \left(\frac{1}{1+\theta} - C\right) \cdot e^{-\gamma u} + C \cdot e^{-Ru} = 0,0603 \cdot e^{-1,9257 \cdot u} + 0,5507 \cdot e^{-0,4851 \cdot u} .$$

Επίσης η ακριβής συνάρτηση  $\psi_{EXACT}(u)$  (σύμφωνα με την Εφαρμογή 5.2.1) είναι η εξής:

$$\psi_{EXACT}(u) = 0,550786 \cdot e^{-0,48513 \cdot u} + 0,043702 \cdot e^{-1,72235 \cdot u} + 0,016623 \cdot e^{-2,79252 \cdot u} .$$

Ο κώδικας των παραπάνω υπολογισμών βρίσκεται στο Παράρτημα Ε'. Σύμφωνα με τις παραπάνω πιθανότητες χρεοκοπίας λαμβάνουμε για  $u \in [0,18]$  το ακόλουθο γράφημα μέσω R:



Γραφήμα 5.2.2.

Σύμφωνα με το Γράφημα 5.2.1 καταλαβαίνουμε επίσης, ότι η μέθοδος του Tijms είναι πιο ικανοποιητική στο να προσεγγίσει την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας, ακόμα και σε σχέση με τη μέθοδο των Cramer – Lundberg που βρίσκεται στην Εφαρμογή 5.2.1. Ανάλογα με το διάστημα τιμών που δίνουμε για το αρχικό κεφάλαιο  $u$  και πιο συγκεκριμένα με ένα πολύ μικρό βήμα  $h$  (στην συγκεκριμένη περίπτωση  $h=0,02$ ) η μέθοδος του Tijms ταυτίζεται

ακριβώς, όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε, με την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας.

Εφαρμογή 5.2.3 : Η Μέθοδος Του De Vylder / (DICKSON, 2005, Σελ. 153) : Στο συγκεκριμένο παράδειγμα δίνεται ότι  $f(x) = 4 \cdot x \cdot e^{-2 \cdot x}$ ,  $x > 0$  και έστω ότι  $c = 1,2 \cdot \lambda$ . Θέλουμε να προσεγγίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας με την Μέθοδο του De Vylder για  $u=0,3,6,\dots,18$  και να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας.

Λύση : Σύμφωνα με την σ.π. τους ύψους των ατομικών απαιτήσεων  $X$  είναι κατανοητό ότι η  $f(x)$  ακολουθεί την κατανομή Γάμμα( $\alpha=2$ ,  $\beta=2$ ).

Άρα για να κάνουμε χρήση της μεθόδου αυτής χρειαζόμαστε τις τρεις πρώτες ροπές:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= E(X) = \frac{a}{b} = \frac{2}{2} = 1 \\ \mu_2 &= E(X^2) = \frac{\alpha + \alpha^2}{\beta^2} = \frac{2 + 2^2}{2^2} = \frac{3}{2} = 1,5 \\ \mu_3 &= E(X^3) = \int_0^{+\infty} x^3 \cdot f(x) dx = \dots = 3\end{aligned}$$

Έπειτα υπολογίζουμε τις παραμέτρους  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\theta}$  και  $\tilde{\mu}_1$  της μεθόδου του De Vylder

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_1 &= \frac{3 \cdot \mu_2}{\mu_3} = \frac{3}{2} = 1,5, \\ \tilde{\lambda} &= \frac{\lambda \cdot \mu_3}{6 \cdot \tilde{\mu}_1^3} = \frac{9 \cdot \lambda \cdot 1,5^2}{2 \cdot 9} = \frac{27 \cdot \lambda}{16}, \\ \tilde{\theta} &= \frac{\mu_1 \cdot \theta \cdot \lambda}{\tilde{\mu}_1 \cdot \tilde{\lambda}} = \frac{53 \cdot \lambda}{40}.\end{aligned}$$

Τέλος υπολογίζουμε τον  $\tilde{R}_{DV}$  που είναι ο “εκθέτης De Vylder” και ισούται με:

$$\tilde{R}_{DV} = \frac{\tilde{\theta}}{(1 + \tilde{\theta})} \cdot \frac{1}{\tilde{\mu}_1} = \frac{12}{53}.$$

Η συνάρτηση  $\psi_{DV}(u)$  έχει τύπο:

$$\tilde{\psi}_{DV}(u) = \frac{1}{1 + \tilde{\theta}} \cdot e^{-\tilde{R}_{DV} \cdot u} = \frac{45}{53} \cdot e^{-\frac{12}{53} u}.$$

Ενώ η ακριβής συνάρτηση  $\psi_{EXACT}(u)$  για Μείξη Γάμμα θα υπολογιστεί μέσω της Μεθόδου Μετασχηματισμού Laplace (βλ. Παράρτημα Γ') για αυτό ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1<sup>ο</sup>: Υπολογισμός της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της  $F(x)$  και της Δεξιάς Ουράς της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της  $\bar{F}(x)$

$$F(x) = 1 - \sum_{h=0}^{\alpha-1} \frac{(\beta \cdot x)^h}{h!} \cdot e^{-\beta \cdot x} = 1 - (e^{-2 \cdot x} + 2 \cdot x \cdot e^{-2 \cdot x})$$

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = e^{-2 \cdot x} + 2 \cdot x \cdot e^{-2 \cdot x} = (1 + 2 \cdot x) \cdot e^{-2 \cdot x}$$

Βήμα 2<sup>ο</sup>: Υπολογισμός της Δεξιάς Ουράς της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της  $\bar{H}(x)$  και του Μετασχηματισμού Laplace της  $\widehat{\bar{H}}(x)$

$$\bar{H}(x) = 1 - \frac{1}{\mu_1} \cdot \int_0^x \bar{F}(x) dx = e^{-2 \cdot x} \cdot (1 + x)$$

Ο Μετασχηματισμός Laplace του  $\widehat{\bar{H}}(x)$  υπολογίζεται μέσω του Mathematica και έτσι έχουμε:

$$\widehat{\bar{H}}(s) = \frac{1}{(2 + s)^2} + \frac{1}{2 + s}$$

Βήμα 3<sup>ο</sup>: Υπολογισμός της Συνάρτησης Ισορροπίας της  $f_e(x)$  και του Μετασχηματισμού Laplace της  $\widehat{f_e}(x)$

$$f_e(s) = \frac{1}{\mu_1} \cdot F(s) = 1 - (1 + 2 \cdot x) \cdot e^{-2 \cdot x} .$$

Ο Μετασχηματισμός Laplace του  $f_e(s)$  υπολογίζεται μέσω του Mathematica και έτσι έχουμε:

$$\widehat{f_e}(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{(2 + s)^2} - \frac{1}{2 + s} .$$

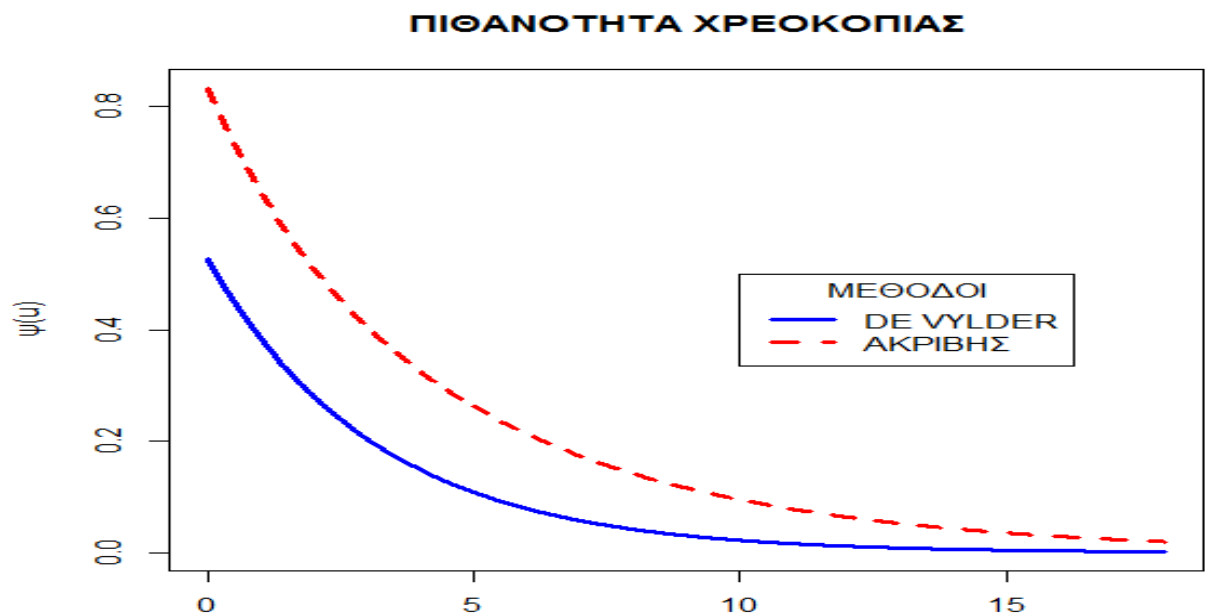
Βήμα 4<sup>ο</sup>: Υπολογισμός του Μετασχηματισμού Laplace της Ακριβούς Πιθανότητας Χρεοκοπίας  $\widehat{\psi_{EXACT}}(s)$  και της Ακριβούς Πιθανότητας Χρεοκοπίας  $\psi_{EXACT}(u)$

$$\begin{aligned}\widehat{\psi}_{EXACT}(s) &= \frac{\widehat{H}(s)}{1 + \theta - \widehat{f}_e(s)} = \\ &= \frac{s \cdot (3 + s)}{-4 + 4,8 \cdot s + 4,8 \cdot s^2 + 1,2 \cdot s^3}.\end{aligned}$$

Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της Ακριβούς Πιθανότητας Χρεοκοπίας  $\psi_{EXACT}(u)$  υπολογίζεται μέσω του Mathematica και έτσι έχουμε:

$$\psi_{EXACT}(u) = 0,6627403 \cdot e^{-0,194871 \cdot u} + 0,170593 \cdot e^{-0,523462 \cdot u}.$$

Ο κώδικας των παραπάνω υπολογισμών βρίσκεται στο Παράρτημα Ε'. Σύμφωνα με τις παραπάνω πιθανότητες χρεοκοπίας λαμβάνουμε το ακόλουθο γράφημα μέσω R:



Γραφήμα 5.2.3.

Σύμφωνα με το Γράφημα 5.2.3 το συμπέρασμα που προκύπτει, είναι ότι η μέθοδος του *De Vylder* δεν είναι τόσο ικανοποιητική στο να προσεγγίσει την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας,. Ανάλογα με το διάστημα τιμών που δίνουμε για το αρχικό κεφάλαιο  $u$  η μέθοδος του *De Vylder* δίνει στην πραγματικότητα κάτω φράγμα , όπως μπορούμε να διαπιστώσουμε για την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας. Επιπροσθέτως η μέθοδος του *De Vylder* είναι ικανοποιητική για πολύ μεγάλες τιμές του  $u$  και εφόσον η κατανομή των ζημιών ανήκουν στις εκθετικές οικογένειες κατανομών (βλ. Παράρτημα ΣΤ').

Εφαρμογή 5.2.4 : Έστω ότι  $f(x) = 2 \cdot e^{-4 \cdot x} + 3 \cdot e^{-6 \cdot x}$  για  $x > 0$  και έστω ότι  $\lambda=4$  και  $c=1$ , να βρεθεί για την πιθανότητα χρεοκοπίας: α) η Ανισότητα του Lundberg β) η Μέθοδος του Lundberg γ) η Μέθοδος των Cramer – Lundberg. Επίσης, θα κάνουμε γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων μας και να τα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας.

Λύση : Σύμφωνα με την σ.π. τους ύψους των ατομικών απαιτήσεων  $X$  είναι κατανοητό ότι η  $f(x)$  ακολουθεί την Μείξη Εκθετικών κατανομών με  $\alpha=4$  και  $\beta=6$ , και  $w_1 = w_2 = 1/2$  δηλαδή:

$$f(x) = w_1 \cdot f_1(x) + w_2 \cdot f_2(x) = \frac{\alpha}{2} \cdot e^{-\alpha \cdot x} + \frac{\beta}{2} \cdot e^{-\beta \cdot x} \quad \text{για } x > 0$$

Άρα για να κάνουμε χρήση των παραπάνω μεθόδων που μας ζητούνται για να προσεγγίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας χρειαζόμαστε τις τρεις πρώτες ροπές της  $f(x)$ , δηλαδή έχουμε:

$$M_X(t) = w_1 \cdot \frac{\alpha}{(\alpha - t)} + w_2 \cdot \frac{\beta}{(\beta - t)}, \quad \text{για } t < \alpha$$

$$\mu_1 = E(X) = w_1 \cdot \frac{1}{\alpha} + w_2 \cdot \frac{1}{\beta} = 0,2083333 \quad ,$$

$$\mu_2 = E(X^2) = w_1 \cdot \frac{2!}{\alpha^2} + w_2 \cdot \frac{2!}{\beta^2} = 0,09027778 \quad ,$$

και

$$\mu_3 = E(X^3) = w_1 \cdot \frac{3!}{\alpha^3} + w_2 \cdot \frac{3!}{\beta^3} = 0,06076389$$

Η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας είναι:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_1} - 1 = \frac{1}{4 \cdot 0,2083} - 1 = 0,2 \quad .$$

α) Η Ανισότητα του Lundberg

Αρχικά χρειαζόμαστε τον συντελεστή προσαρμογής, ο οποίος προκύπτει ως λύση της εξίσωσης:

$$M_X(r) = 1 + (1 + \theta) \cdot \mu_1 \cdot r$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{4 - r} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{6 - r} = 1 + (1 + 0,2) \cdot 0,2083 \cdot r$$

Μετά από πράξεις προκύπτει η εξίσωση 3<sup>ου</sup> βαθμού:

$$\Leftrightarrow -0,2499 \cdot r^3 + 1,499 \cdot r^2 - 0,9999 \cdot r = 0 \quad ,$$

οι ρίζες της οποίας είναι:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 0,763931, \quad r_3 = 5,236067$$

Από αυτές, μόνο η μικρότερη ρίζα  $r_2$  είναι στο επιτρεπτό διάστημα  $(0,4)$ , συνεπώς η ρίζα αυτή θα είναι και ο συντελεστής προσαρμογής:

$$R = 0,763931.$$

Άρα σύμφωνα με την Ανισότητα του Lundberg ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας είναι:

$$\psi(u) \leq e^{-R \cdot u} = e^{-0,763931 \cdot u}$$

β) Η Μέθοδος του Lundberg είναι:

Η πιθανότητα χρεοκοπίας για αυτή τη μέθοδο είναι:

$$\psi_L(u) = \left\{ 1 + \left( \theta \cdot u - \frac{\mu_2}{2 \cdot \mu_1} \right) \cdot \frac{4 \cdot \theta \cdot \mu_1^2 \cdot \mu_3}{3 \cdot (\mu_2)^3} \right\} \cdot e^{-\frac{2 \cdot \mu_1 \cdot \theta \cdot u}{\mu_2}}$$

$$\psi_L(u) = [1 + 0,9554 \cdot (0,2 \cdot u - 0,2166)] \cdot e^{-0,923 \cdot u}$$

γ) Η Μέθοδος των Cramer – Lundberg είναι:

Θα υπολογίσουμε το C που είναι μια σταθερά με τύπο υπολογισμού:

$$C = \frac{\theta \mu_1}{R \int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx}.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος που βρίσκεται στον παρανομαστή χρησιμοποιούμε το Mathematica και έτσι έχουμε:

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{Rx} \cdot \bar{F}(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot e^{Rx} \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{-4 \cdot x} + e^{-6 \cdot x}) dx$$

$$= \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{2} \cdot (e^{-(4-R) \cdot x} + e^{-(6-R) \cdot x}) dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left[ \left( \frac{1}{4-R} \right)^2 + \left( \frac{1}{6-R} \right)^2 \right] = 0,06820901.$$

Άρα αν χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των  $\mu_1, \theta$  και R έχουμε:

$$C = \frac{0,2 \cdot 0,2083}{0,763931 \cdot 0,06820901} = 0,826614 .$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με την Μέθοδο Των Cramer – Lundberg είναι:

$$\psi_{CL}(u) = C \cdot e^{-R \cdot u} = 0,826614 \cdot e^{-0,763931 \cdot u}$$

Ενώ η ακριβής συνάρτηση  $\psi_{EXACT}(u)$  για Μείξη δύο Εκθετικών έχει τύπο:

$$\psi_{EXACT}(u) = C_1 \cdot e^{-R_1 \cdot u} + C_2 \cdot e^{-R_2 \cdot u} ,$$

όπου τα  $C_1, C_2$  προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος των εξισώσεων:

$$C_1 + C_2 = \psi(0) = \frac{1}{1 + \theta}$$

$$C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2 = \delta'(0) = \frac{\theta}{(1 + \theta)^2 \cdot \mu_1}$$

εδώ τα  $R_1, R_2$  είναι οι θετικές ρίζες της εξίσωσης του Lundberg, δηλαδή

$$R_1 = 0,763931 \quad \text{και} \quad R_2 = 5,236067 .$$

Για τον επίλυση του συστήματος που βρίσκεται παραπάνω χρησιμοποιούμε το Mathematica και έτσι έχουμε:

$$C_1 = 0,550786 \quad \text{και} \quad C_2 = 0,043702$$

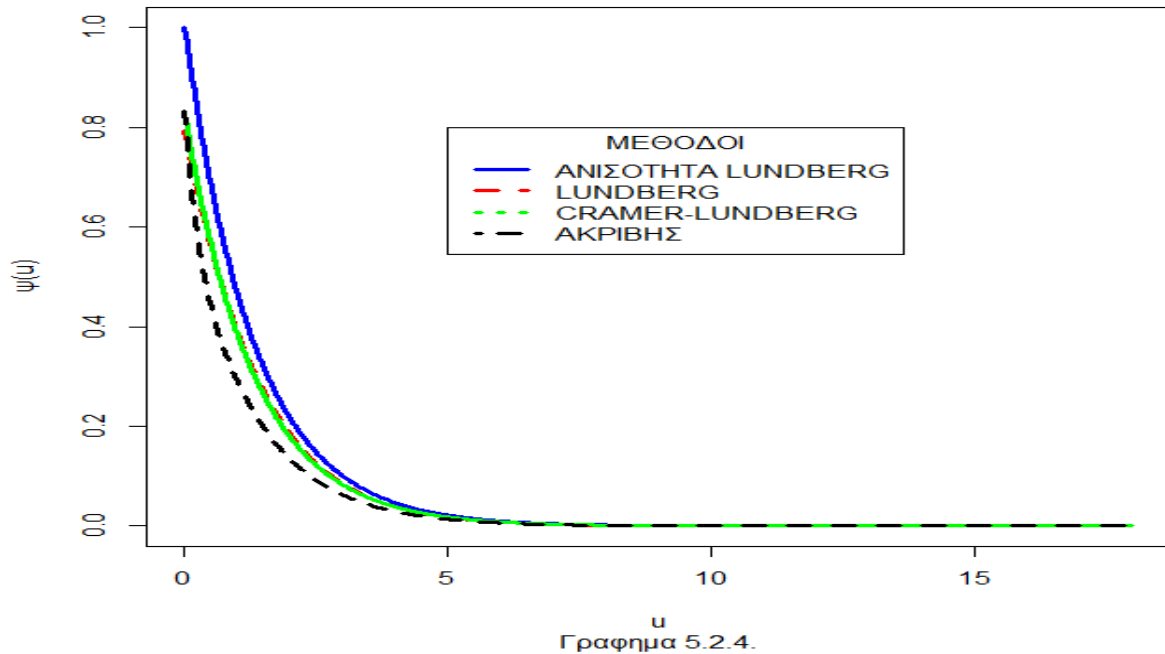
Άρα η ακριβής συνάρτηση  $\psi_{EXACT}(u)$  είναι η εξής:

$$\psi_{EXACT}(u) = 0,621251 \cdot e^{-0,763931 \cdot u} + 0,212081 \cdot e^{-5,236067 \cdot u} .$$

Ο κώδικας των παραπάνω υπολογισμών βρίσκεται στο Παράρτημα Ε'. Σύμφωνα με τις παραπάνω πιθανότητες χρεοκοπίας λαμβάνουμε το ακόλουθο γράφημα μέσω R:



**ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ**



Σύμφωνα με το Γράφημα 5.2.4 συμπεραίνουμε ότι από τις τρεις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε (α. η ανισότητα του Lundberg, β. η μέθοδος του Lundberg και γ. η μέθοδος των Cramer – Lundberg) η πιο ικανοποιητική στο να προσεγγίσει την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η μέθοδος των Cramer – Lundberg και μετά ακολουθεί η μέθοδος του Lundberg η οποία δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα στην προσέγγιση, ενώ λιγότερο ικανοποιητική μέθοδος είναι η ανισότητα του Lundberg. Πιο συγκεκριμένα για τις προσεγγιστικές μεθόδους για την πιθανότητα χρεοκοπίας, ανάλογα με το διάστημα τιμών που δίνουμε για το αρχικό κεφάλαιο  $u$  και με ένα πολύ μικρό βήμα  $h$  (στην συγκεκριμένη περίπτωση  $h=0,02$ ) εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω της μεθόδου των Cramer – Lundberg για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή, για  $u=0$ ) ισούται με την τιμή της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας.
- Η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω της μεθόδου του Lundberg για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή, για  $u=0$ ) είναι μικρότερη από την τιμή της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας. Ενώ η συγκεκριμένη μέθοδος σε πολλά σημεία ταυτίζεται με την μέθοδο των Cramer – Lundberg πριν γίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας ίση με το μηδέν. Επίσης, είναι και αυτή είναι φθίνουσα όπως και η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας.
- Η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω της ανισότητας του Lundberg για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή, για  $u=0$ ) ισούται με

την μονάδα, δηλαδή έχουμε βέβαιη χρεοκοπία. Η μέθοδος αυτή δίνει ένα άνω φράγμα που μας βοηθάει να περιορίσουμε όσο τις τιμές της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας πριν πάρει την τιμή ίση με το μηδέν, τόσο για τις τιμές των άλλων δυο προσεγγίσεων μέχρι και αυτές να πάρουν και αυτές τη τιμή ίση με το μηδέν. Επίσης, είναι ολοφάνερο πως και αυτή είναι φθίνουσα όπως και η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας.

Εφαρμογή 5.2.5 : Έστω ότι έχουμε τέσσερις κατηγορίες ζημιών  $X$  οι οποίες σταθμίζονται με 10%, 20%, 30% και 40% αντίστοιχα και ακολουθούν κάθε μια ξεχωριστά μια Εκθετική κατανομή με παράμετρο  $i$ , για  $i=1,2,3,4$ . Ισχύει ότι  $\lambda=2$  και  $c=1$ . Ζητάμε να βρεθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας με: α) την Μέθοδο των Cramer – Lundberg β) την Μέθοδο των Beekman – Bowers γ) την Μέθοδο του Tijms δ) την Μέθοδο του De Vylder. Επίσης, ζητείται να κάνουμε γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων μας και να τα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας.

Λύση : Σύμφωνα με την σ.π.π. τους ύψους των ατομικών απαιτήσεων  $X$  είναι κατανοητό ότι η  $f(x)$  ακολουθεί μια Μείξη Εκθετικών κατανομών με  $f_i(x) \sim \text{Exp}(i)$  για  $i=1,2,3,4$  και  $w_1 = 10\%$ ,  $w_2 = 20\%$ ,  $w_3 = 30\%$  και  $w_4 = 40\%$  δηλαδή:

$$f(x) = \sum_{i=1}^4 w_i f_i(x) = \frac{1}{10} \cdot e^{-x} + \frac{2 \cdot 2}{10} \cdot e^{-2 \cdot x} + \frac{3 \cdot 3}{10} \cdot e^{-3 \cdot x} + \frac{4 \cdot 4}{10} \cdot e^{-4 \cdot x} \text{ για } x > 0$$

Άρα για να κάνουμε χρήση των παραπάνω μεθόδων που μας ζητούνται για να προσεγγίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, χρειαζόμαστε τις τρεις πρώτες ροπές της  $f(x)$ . Για τις ροπές αυτές βρίσκουμε τα εξής:

$$\mu_1 = E(X) = \frac{1}{10} \cdot 1 + \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{10} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{10} = 0,4$$

$$\mu_2 = E(X^2) = \frac{1}{10} \cdot 2 + \frac{2}{10} \cdot \frac{2!}{2^2} + \frac{3}{10} \cdot \frac{2!}{3^2} + \frac{4}{10} \cdot \frac{2!}{4^2} = 0,4166667$$

$$\mu_3 = E(X^3) = \frac{1}{10} \cdot 3 + \frac{2}{10} \cdot \frac{3!}{2^3} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3!}{3^3} + \frac{4}{10} \cdot \frac{3!}{4^3} = 0,8541667$$

Η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας είναι:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_1} - 1 = \frac{1}{4 \cdot 0,4} - 1 = 0,25 .$$

α) Η Μέθοδος των Cramer – Lundberg είναι:

Αρχικά χρειαζόμαστε τον συντελεστή προσαρμογής, ο οποίος προκύπτει ως λύση της εξίσωσης:

$$M_X(r) = 1 + (1 + \theta) \cdot \mu_1 \cdot r$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{1-r} + \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{2-r} + \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{3-r} + \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{4-r} = 1 + (1 + 0,25) \cdot 0,4 \cdot r$$

Μετά από πράξεις προκύπτει η εξίσωση 5<sup>ου</sup> βαθμού:

$$\Leftrightarrow -0,5 \cdot r^5 + 4 \cdot r^4 - 10,5 \cdot r^3 + 10 \cdot r^2 - 2,4 \cdot r = 0.$$

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$r_1 = 0, \quad r_2 = 0,355567, \quad r_3 = 1,456087, \\ r_4 = 2,543912, \quad r_5 = 3,644432.$$

Από αυτές, μόνο η μικρότερη ρίζα  $r_2$  είναι στο επιτρεπτό διάστημα (0,1), συνεπώς η ρίζα αυτή θα είναι και ο συντελεστής προσαρμογής:

$$R = 0,355567.$$

Θα υπολογίσουμε το C που είναι μια σταθερά με τύπο υπολογισμού:

$$C = \frac{\theta \mu_1}{R \int_0^{\infty} x e^{Rx} \bar{F}(x) dx}.$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος που βρίσκεται στον παρανομαστή χρησιμοποιούμε το Mathematica και έτσι έχουμε:

$$\int_0^{\infty} x \cdot e^{Rx} \cdot \bar{F}(x) dx = \int_0^{\infty} x \cdot e^{Rx} \cdot \frac{1}{10} \cdot (e^{-x} + 2 \cdot e^{-2x} + 3 \cdot e^{-3x} + 4 \cdot e^{-4x}) dx \\ = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{10} \cdot (e^{-(1-R)x} + 2 \cdot e^{-(2-R)x} + 3 \cdot e^{-(3-R)x} + 4 \cdot e^{-(4-R)x}) dx \\ = \frac{1}{10} \cdot \left[ \left( \frac{1}{1-R} \right)^2 + 2 \cdot \left( \frac{1}{2-R} \right)^2 + 3 \cdot \left( \frac{1}{3-R} \right)^2 + 4 \cdot \left( \frac{1}{4-R} \right)^2 \right] = 3,454022.$$

Άρα αν χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των  $\mu_1, \theta$  και R έχουμε:

$$C = \frac{0,25 \cdot 0,4}{0,355567 \cdot 3,454022} = 0,7252786$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με την Μέθοδο Των Cramer – Lundberg είναι:

$$\psi_{CL}(u) = C \cdot e^{-R \cdot u} = 0,7252786 \cdot e^{-0,355567 \cdot u} .$$

β) Η Μέθοδος των Beekman – Bowers:

Οι παράμετροι  $\alpha$ ,  $\beta$  που χρειάζονται για την  $G_1$  που είναι η αθροιστική συνάρτηση της Γάμμα( $\alpha$ ,  $\beta$ ), υπολογίζονται επιλύοντας το σύστημα

$$\frac{\mu_2}{2\theta\mu_1} = \frac{\alpha}{(1+\theta)\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\mu_3}{3\theta\mu_1} + \left(\frac{\mu_2}{2\theta\mu_1}\right)^2 = \frac{\alpha}{(1+\theta)^2\beta^2}$$

Μετά από πράξεις έχουμε ότι τα  $\alpha$ ,  $\beta$  είναι ίσα με:

$$\alpha = 0,6038647 \quad \text{και} \quad \beta = 0,2318841 .$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με την Μέθοδο των Beekman – Bowers είναι:

$$\psi_{BB}(u) \cong \frac{1}{1+\theta} \cdot [1 - G_1(u)] = 0,8 - 0,8 \cdot \frac{\gamma(0.6038, 0.2318 \cdot u)}{\Gamma(0.6038)} .$$

Όπου  $\gamma(s, x) = \int_0^x t^{s-1} \cdot e^{-t} dt$  είναι η μη-πλήρης συνάρτηση Γάμμα, ενώ  $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} \cdot e^{-t} dt$  είναι η συνάρτηση Γάμμα.

γ) Η Μέθοδος του Tijms

Πρέπει μόνο να βρούμε το  $\gamma$ , το οποίο δίνεται από την σχέση:

$$\gamma = \left( \frac{1}{1+\theta} - C \right) \left( \frac{1}{\theta\mu_1} \int_0^\infty x \bar{F}(x) dx - \frac{C}{R} \right)^{-1} .$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος που βρίσκεται στην παρένθεση χρησιμοποιούμε το Mathematica και έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x \bar{F}(x) dx &= \frac{1}{10} \cdot \int_0^\infty x \cdot (e^{-x} + 2 \cdot e^{-2x} + 3 \cdot e^{-3x} + 4 \cdot e^{-4x}) dx \\ &= \frac{1}{10} \cdot \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = 0,20833333 . \end{aligned}$$

Τέλος μετά από πράξεις έχουμε ότι το  $\gamma$  ισούται με:

$$\gamma = 1,715647 .$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με την Μέθοδο του Tijms είναι:

$$\Psi_T(u) = \left( \frac{1}{1 + \theta} - C \right) \cdot e^{-\gamma u} + C \cdot e^{-Ru} ,$$

συνεπώς εδώ παίρνουμε,

$$\Psi_T(u) = 0,07472139 \cdot e^{-1,715647 \cdot u} + 0,7252786 \cdot e^{-0,355567 \cdot u}$$

δ) Η Μέθοδος του De Vylder

Υπολογίζουμε τις παραμέτρους  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\theta}$  και  $\tilde{\mu}_1$  που χρησιμοποιούνται στην προσέγγιση:

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{3 \cdot \mu_2}{\mu_3} = 1,404878$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda \cdot \mu_3}{6 \cdot \tilde{\mu}_1^3} = 0,1026846$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\mu_1 \cdot \theta \cdot \lambda}{\tilde{\mu}_1 \cdot \tilde{\lambda}} = 1,386391$$

Τέλος υπολογίζουμε τον  $\tilde{R}_{DV}$  που είναι ο “εκθέτης De Vylder” και ισούται με:

$$\tilde{R}_{DV} = \frac{\tilde{\theta}}{(1 + \tilde{\theta})} \cdot \frac{1}{\tilde{\mu}_1} = 0,4135286$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με την Μέθοδο του De Vylder είναι:

$$\tilde{\psi}_{DV}(u) = \frac{1}{1 + \tilde{\theta}} \cdot e^{-\tilde{R}_{DV} \cdot u} = 0,4190427 \cdot e^{-0,4135286 \cdot u}$$

Επίσης, η ακριβής συνάρτηση  $\psi_{EXACT}(u)$  για Μείξη Τεσσάρων Εκθετικών έχει τύπο:

$$\psi_{EXACT}(u) = C_1 \cdot e^{-R_1 \cdot u} + C_2 \cdot e^{-R_2 \cdot u} + C_3 \cdot e^{-R_3 \cdot u} + C_4 \cdot e^{-R_4 \cdot u} ,$$

όπου τα  $C_1, C_2, C_3, C_4$  προκύπτουν ως λύσεις του συστήματος των εξισώσεων:

$$C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = \psi(0) = \frac{1}{1 + \theta} ,$$

$$C_1 \cdot R_1 + C_2 \cdot R_2 + C_3 \cdot R_3 + C_4 \cdot R_4 = \delta'(0) = \frac{\theta}{(1 + \theta)^2 \cdot \mu_1} ,$$

$$C_1 \cdot R_1^2 + C_2 \cdot R_2^2 + C_3 \cdot R_3^2 + C_4 \cdot R_4^2 = \delta''(0) = \frac{\theta}{(1 + \theta)^3 \cdot \mu_1^2},$$

$$C_1 \cdot R_1^3 + C_2 \cdot R_2^3 + C_3 \cdot R_3^3 + C_4 \cdot R_4^3 = \delta'''(0) = \frac{\theta}{(1 + \theta)^4 \cdot \mu_1^3}.$$

Εδώ τα  $R_1, R_2, R_3, R_4$  είναι οι θετικές ρίζες της εξίσωσης του Lundberg, δηλαδή

$$R_1 = 0,355567, \quad R_2 = 1,456087, \quad R_3 = 2,543912, \quad R_4 = 3,644432.$$

Για τον επίλυση του συστήματος που βρίσκεται παραπάνω χρησιμοποιούμε το Mathematica και έτσι έχουμε:

$$C_1 = 1,010327 \quad \text{και} \quad C_2 = -0,642689$$

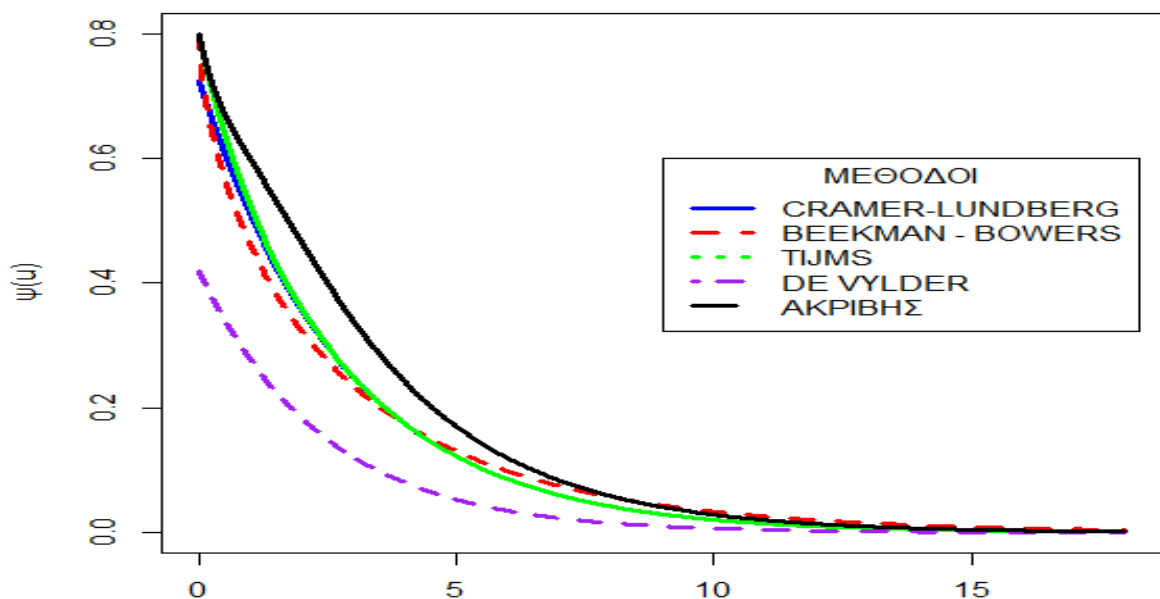
$$C_3 = 0,544416 \quad \text{και} \quad C_4 = -0,112055.$$

Άρα η ακριβής συνάρτηση  $\psi_{EXACT}(u)$  είναι η εξής:

$$\psi_{EXACT}(u) = 1,010327 \cdot e^{-0,355567 \cdot u} - 0,642689 \cdot e^{-1,456087 \cdot u} + 0,544416 \cdot e^{-2,543912 \cdot u} - 0,112055 \cdot e^{-3,644432 \cdot u}.$$

Ο κώδικας των παραπάνω υπολογισμών βρίσκεται στο Παράρτημα Ε'. Σύμφωνα με τις παραπάνω πιθανότητες χρεοκοπίας λαμβάνουμε για  $u \in [0,18]$  με βήμα 0,02 το ακόλουθο γράφημα μέσω R:

### ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ



u  
Γραφήμα 5.2.5.

Σύμφωνα με το Γράφημα 5.2.5 συμπεραίνουμε ότι από τις τέσσερις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε (α. την μέθοδο των Cramer – Lundberg, β. την μέθοδο των Beekman – Bowers, γ. την μέθοδο του Tijms και δ. την μέθοδο του De Vylder) η πιο ικανοποιητική στο να προσεγγίσει την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η μέθοδος του Tijms, και ακολουθεί η μέθοδος των Cramer – Lundberg ενώ λιγότερο ικανοποιητική είναι η μέθοδος των Beekman – Bowers, τέλος σχετικά ικανοποιητική μέθοδος είναι η μέθοδος του De Vylder. Πιο συγκεκριμένα για τις προσεγγιστικές μεθόδους για την πιθανότητα χρεοκοπίας, ανάλογα με το διάστημα τιμών που δίνουμε για το αρχικό κεφάλαιο  $u$  και με ένα πολύ μικρό βήμα  $h$  (στην συγκεκριμένη περίπτωση  $h=0,02$ ) εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω της μεθόδου του Tijms για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή, για  $u=0$ ) ισούται με την τιμή της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας.
- Η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω της μεθόδου των Cramer – Lundberg για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή, για  $u=0$ ) δεν ισούται με την τιμή της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας, για αυτό το λόγο δεν είναι τόσο ικανοποιητική μέθοδος.
- Η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω της μεθόδου των Beekman – Bowers για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή, για  $u=0$ ) είναι μικρότερη από την τιμή της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας. Ενώ η συγκεκριμένη μέθοδος αρχικά σε ένα σημείο συμπίπτει με τη μέθοδο του Tijms και με την μέθοδο των Cramer – Lundberg αλλά αργότερα συμπίπτει με την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας πριν γίνει η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας ίση με το μηδέν. Επίσης, είναι και αυτή είναι φθίνουσα όπως και η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας.
- Η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω της μεθόδου του De Vylder για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή, για  $u=0$ ) είναι πολύ μικρή σε σχέση με τις άλλες τρεις προσεγγιστικές μεθόδους και της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας. Η μέθοδος αυτή αποτελεί ένα ικανοποιητικό κάτω φράγμα που μας βοηθάει να περιορίσουμε τόσο τις τιμές της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας πριν πάρει την τιμή ίση με το μηδέν, όσο για τις τιμές των άλλων τριών προσεγγίσεων μέχρι και αυτές να πάρουν και αυτές τη τιμή ίση με το μηδέν. Επίσης, είναι ολοφάνερο πως και αυτή είναι φθίνουσα όπως και η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας.

Εφαρμογή 5.2.6 : Έστω ότι έχουμε:

$$f(x) = \frac{1}{4} \cdot x \cdot e^{-x} \cdot \left(3 + \frac{1}{2} \cdot x\right), \quad \text{για } x > 0.$$

Ας υποθέσουμε ότι  $\lambda=1$  και  $c=3$ , να βρεθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας με: α) την Μέθοδο του De Vylder β) την Εκθετική Μέθοδο γ) την Μέθοδο του Renyi. Επίσης, ζητείται να κάνουμε γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων μας και να τα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά της ακριβούς πιθανότητα χρεοκοπίας.

Λύση : Σύμφωνα με την σ.π. τους ύψους των ατομικών απαιτήσεων  $X$  είναι κατανοητό ότι η  $f(x)$  ακολουθεί την Μείξη Γάμμα κατανομών με  $f_i(x) \sim \text{Gamma}(a_i, \beta_i)$  για  $i=1,2$  με  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = 3$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 1$  και  $w_1 = 75\%$ ,  $w_2 = 25\%$ .

Άρα για να κάνουμε χρήση των παραπάνω μεθόδων που μας ζητούνται για να προσεγγίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας, χρειαζόμαστε τις τρεις πρώτες ροπές της  $f(x)$ , για τις οποίες έχουμε:

$$\mu_1 = E(X) = \frac{3}{4} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 3 = \frac{9}{4} = 2,25$$

$$\mu_2 = E(X^2) = \dots = 7,5$$

$$\mu_3 = E(X^3) = \dots = 33.$$

Η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας είναι:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_1} - 1 = \frac{3}{1 \cdot 2,25} - 1 = 0,33333.$$

α) Η Μέθοδος του De Vylder είναι:

Υπολογίζουμε τις παραμέτρους  $\tilde{\lambda}$ ,  $\tilde{\theta}$  και  $\tilde{\mu}_1$

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{3 \cdot \mu_2}{\mu_3} = 0,2045455$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda \cdot \mu_3}{6 \cdot \tilde{\mu}_1^3} = 642,6776$$

$$\tilde{\theta} = \frac{\mu_1 \cdot \theta \cdot \lambda}{\tilde{\mu}_1 \cdot \tilde{\lambda}} = 0,005705297.$$

Τέλος υπολογίζουμε τον  $\tilde{R}_{DV}$  που είναι ο “εκθέτης De Vylder” και ισούται με:



$$\tilde{R}_{DV} = \frac{\tilde{\theta}}{(1 + \tilde{\theta})} \cdot \frac{1}{\tilde{\mu}_1} = 0,02773433$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με την Μέθοδο του De Vylder είναι:

$$\tilde{\psi}_{DV}(u) = \frac{1}{1 + \tilde{\theta}} \cdot e^{-\tilde{R}_{DV} \cdot u} = 0,9943271 \cdot e^{-0,02773433 \cdot u}$$

β) Η Εκθετική Μέθοδος είναι:

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με την Εκθετική Μέθοδο είναι:

$$\psi_E(u) = \exp \left\{ -1 - \frac{2 \cdot \mu_1 \cdot \theta \cdot u - \mu_2}{\sqrt{(\mu_2)^2 + \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \theta \cdot \mu_1 \cdot \mu_3}} \right\} = 0,8137388 \cdot e^{-0,1587768 \cdot u} .$$

γ) Η Μέθοδος του Renyi είναι:

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με την Μέθοδο του Renyi είναι:

$$\psi_R(u) = \frac{1}{1 + \theta} \cdot e^{-\frac{2 \cdot \mu_1 \cdot \theta \cdot u}{\mu_2 \cdot (1 + \theta)}} = 0,75 \cdot e^{-0,15 \cdot u} .$$

Ενώ η ακριβής συνάρτηση  $\psi_{EXACT}(u)$  για Μείξη Γάμμα θα υπολογιστεί μέσω της Μεθόδου Μετασχηματισμού Laplace (βλ. Παράρτημα Γ') γι' αυτό ακολουθούμε τα εξής βήματα:

Βήμα 1<sup>ο</sup>: Υπολογισμός της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της  $F(x)$  και της Δεξιάς Ουράς της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής  $\bar{F}(x)$

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{3}{4} \cdot \left( 1 - \sum_{h=0}^{a_1-1} \frac{(\beta_1 \cdot x)^h}{h!} \cdot e^{-\beta_1 \cdot x} \right) + \frac{1}{4} \cdot \left( 1 - \sum_{k=0}^{a_2-1} \frac{(\beta_2 \cdot x)^k}{k!} \cdot e^{-\beta_2 \cdot x} \right) \\ &= \frac{3}{4} \cdot [1 - (e^{-x} + x \cdot e^{-x})] + \frac{1}{4} \cdot \left[ 1 - \left( e^{-x} + x \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot e^{-x} \right) \right] \\ &= 1 - e^{-x} - x \cdot e^{-x} - \frac{1}{8} \cdot x^2 \cdot e^{-x} \\ \bar{F}(x) &= 1 - F(x) = e^{-x} + x \cdot e^{-x} + \frac{1}{8} \cdot x^2 \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

Βήμα 2<sup>ο</sup> : Υπολογισμός της Δεξιάς Ουράς της Αθροιστικής Συνάρτησης Κατανομής της  $\bar{H}(x)$  και του Μετασχηματισμού Laplace της  $\widehat{\bar{H}(s)}$

$$\bar{H}(x) = 1 - \frac{1}{\mu_1} \cdot \int_0^x \bar{F}(y) dy = 1 - 0,4444444 \cdot \left\{ \frac{9}{4} - \frac{1}{8} \cdot e^{-x} \cdot [18 + x \cdot (10 + x)] \right\}$$

Ο Μετασχηματισμός Laplace του  $\widehat{\bar{H}(x)}$  υπολογίζεται μέσω του Mathematica και έτσι έχουμε:

$$\widehat{\bar{H}(s)} = \frac{0,1111111}{(1+s)^3} + \frac{0,555555}{(1+s)^2} + \frac{1}{1+s} .$$

Βήμα 3<sup>ο</sup> : Υπολογισμός της Συνάρτησης Ισοροποίας της  $f_e(x)$  και του Μετασχηματισμού Laplace της  $\widehat{f_e(s)}$

$$f_e(x) = \frac{1}{\mu_1} \cdot f(x) = 0,4444444(1 - e^{-x} - e^{-x} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot e^{-x} \cdot x^2)$$

Ο Μετασχηματισμός Laplace του  $\widehat{f_e(x)}$  τον υπολογίζουμε μέσω του Mathematica και έτσι έχουμε:

$$\widehat{f_e(s)} = 0,4444444 \cdot \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{4 \cdot (1+s)^3} - \frac{1}{(1+s)^2} - \frac{1}{1+s} \right]$$

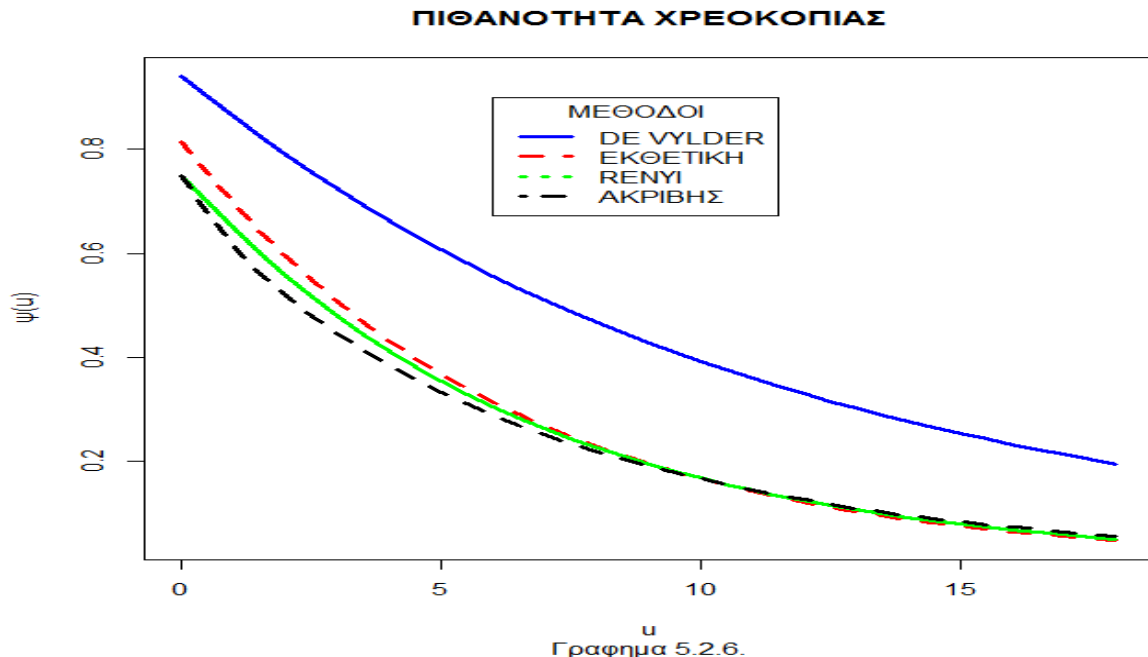
Βήμα 4<sup>ο</sup> : Υπολογισμός του Μετασχηματισμού Laplace της Ακριβούς Πιθανότητας Χρεοκοπίας  $\widehat{\psi_{EXACT}(s)}$  και της Ακριβούς Πιθανότητας Χρεοκοπίας  $\psi_{EXACT}(u)$

$$\begin{aligned} \widehat{\psi_{EXACT}(s)} &= \frac{\widehat{\bar{H}(s)}}{1 + \theta - \widehat{f_e(s)}} = \\ &= \frac{s \cdot (1+s)^3 \cdot \left[ \frac{0,1111111}{(1+s)^3} + \frac{0,555555}{(1+s)^2} + \frac{1}{1+s} \right]}{-0,4444444 + s + 4 \cdot s^2 + 4 \cdot s^3 + 1,3333333 \cdot s^4} \end{aligned}$$

Ο Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace της Ακριβούς Πιθανότητας Χρεοκοπίας  $\psi_{EXACT}(u)$  υπολογίζεται μέσω του Mathematica και έτσι έχουμε:

$$\psi_{EXACT}(u) = 0,53945 \cdot e^{-0,128955 \cdot u} + 0,06422 \cdot e^{-1,252589 \cdot u} + 0,14632 \cdot e^{-0,215583 \cdot u}$$

Ο κώδικας των παραπάνω υπολογισμών βρίσκεται στο Παράρτημα Ε'. Σύμφωνα με τις παραπάνω πιθανότητες χρεοκοπίας λαμβάνουμε για  $u \in [0,18]$  με βήμα 0,5 το ακόλουθο γράφημα μέσω R:



Σύμφωνα με το Γράφημα 5.2.6 συμπεραίνουμε ότι από τις τρεις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε (α. την μέθοδο του De Vylder, β. την Εκθετική μέθοδο και γ. την μέθοδο του Renyi) η πιο ικανοποιητική στο να προσεγγίσει την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η μέθοδος του Renyi, και ακολουθεί η Εκθετική μέθοδος, ενώ καθόλου ικανοποιητική είναι η μέθοδος του De Vylder. Πιο συγκεκριμένα οι προσεγγιστικές μεθόδους για την πιθανότητα χρεοκοπίας, ανάλογα με το διάστημα τιμών που δίνουμε για το αρχικό κεφάλαιο  $u$  και με ένα πολύ μικρό βήμα  $h$  (στην συγκεκριμένη περίπτωση  $h=0,02$ ) εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω της μεθόδου του Renyi για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή, για  $u=0$ ) ισούται με την τιμή της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας. Επίσης, είναι φθίνουσα όπως και η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας.
- Η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω της Εκθετικής μεθόδου για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή, για  $u=0$ ) είναι μεγαλύτερη από την τιμή της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας, για αυτό το λόγο δεν είναι τόσο ικανοποιητική μέθοδος. Ενώ η συγκεκριμένη μέθοδος αρχικά σε ένα σημείο συμπίπτει τόσο με τη μέθοδο του Renyi όσο και με την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας πριν γίνει η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας ίση με το μηδέν. Επίσης, είναι και αυτή φθίνουσα όπως και η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας.

- Η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω της μεθόδου του De Vylder για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή, για  $u=0$ ) είναι πολύ μεγάλη σε σχέση με τις άλλες δύο προσεγγιστικές μεθόδους και της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας. Η μέθοδος αυτή αποτελεί ένα ικανοποιητικό άνω φράγμα που μας βοηθάει να περιορίσουμε τόσο τις τιμές της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας (χωρίς κάποιο σχετικό περιορισμό σε σχέση με προηγούμενες περιπτώσεις που κάναμε χρήση της έννοιας φράγματος για αυτήν την μέθοδο), όσο και για τις τιμές των άλλων δύο προσεγγίσεων. Η στιγμή που η πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω της μεθόδου του De Vylder γίνεται για πρώτη φορά ίση με το μηδέν, δεν είναι εμφανής στο γράφημα σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους, για αυτό άλλωστε αποτελεί καθόλου ικανοποιητική προσεγγιστική μέθοδο. Επίσης, είναι ολοφάνερο πως και αυτή είναι φθίνουσα (όμως φθίνει με πιο αργό ρυθμό σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους) όπως και η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας.

Εφαρμογή 5.2.7 : Έστω ότι  $f(x) = 2 \cdot e^{-2x}$  για  $x > 0$  και έστω ότι  $\lambda = c = 1$ , ζητείται να βρεθεί η πιθανότητα χρεοκοπίας με: α) την Μέθοδο Heavy Traffic β) την Μέθοδο Light Traffic γ) την Μέθοδο Heavy - Light Traffic. Επίσης, ζητείται να κάνουμε γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων μας και να τα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με αυτά της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας.

Λύση : Σύμφωνα με την σ.π.π. του ύψους των ατομικών απαιτήσεων  $X$  είναι κατανοητό ότι η  $f(x)$  ακολουθεί την κατανομή Εκθετική( $\beta=2$ ).

Άρα για να κάνουμε χρήση των παραπάνω μεθόδων που μας ζητούνται για να προσεγγίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας χρειαζόμαστε τις δύο πρώτες ροπές της  $f(x)$ , δηλαδή έχουμε:

$$\mu_1 = E(X) = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$\mu_2 = E(X^2) = \frac{2!}{\beta^2} = \frac{2}{4} = 0,5 .$$

Η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας είναι:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_1} - 1 = \frac{1}{1 \cdot 0,5} - 1 = 1 .$$

α) Η Μέθοδος Heavy Traffic είναι:

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με την Μέθοδο Heavy Traffic είναι:

$$\psi_{HT}(u) = \exp\left(-\frac{2 \cdot \theta \cdot \mu_1 \cdot u}{\mu_2}\right) = e^{-2 \cdot u}$$

β) Η Μέθοδος Light Traffic είναι:

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος που βρίσκεται στην πιθανότητα χρεοκοπίας χρησιμοποιούμε το Mathematica και έτσι έχουμε:

$$\int_u^{\infty} \bar{F}_X(x) dx = \int_u^{\infty} e^{-2 \cdot x} dx = \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot u}$$

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με την Μέθοδο Light Traffic είναι:

$$\psi_{LT}(u) = \frac{1}{(1 + \theta) \cdot \mu_1} \cdot \int_u^{\infty} \bar{F}_X(x) dx = \frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot u} .$$

γ) Η Μέθοδος Heavy - Light Traffic είναι:

Η πιθανότητα χρεοκοπίας σύμφωνα με την Μέθοδο Heavy - Light Traffic είναι:

$$\psi_{HLT}(u) = \frac{1}{1 + \theta} \cdot \psi_{LT}\left(\frac{\theta \cdot u}{1 + \theta}\right) + \frac{1}{(1 + \theta)^2} \cdot \psi_{HT}(u),$$

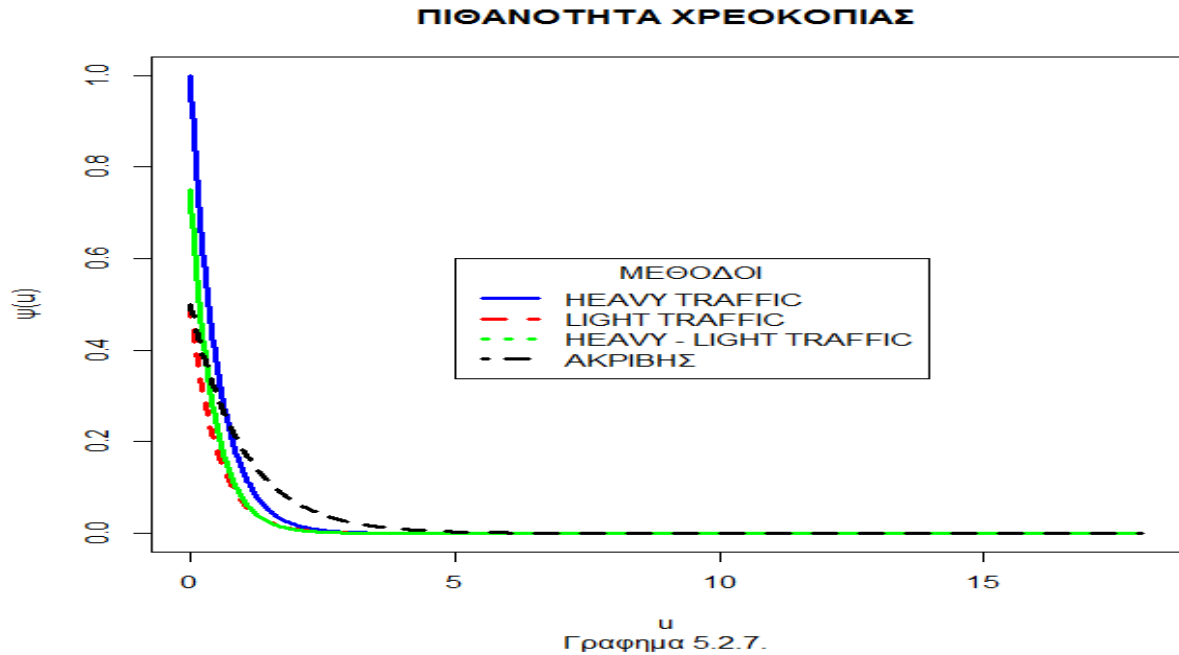
από όπου, με αντικατάσταση παίρνουμε ότι

$$\psi_{HLT}(u) = 0,5 \cdot \psi_{LT}(0,5 \cdot u) + 0,25 \cdot \psi_{HT}(u),$$

ενώ η ακριβής συνάρτηση  $\psi_{EXACT}(u)$  για Εκθετική( $\beta=2$ ) έχει τύπο:

$$\psi_{EXACT}(u) = \frac{1}{1 + \theta} \cdot e^{-\frac{\theta \cdot \beta}{1 + \theta} \cdot u} = 0,5 \cdot e^{-u} .$$

Ο κώδικας των παραπάνω υπολογισμών βρίσκεται στο Παράρτημα Ε'. Σύμφωνα με τις παραπάνω πιθανότητες χρεοκοπίας λαμβάνουμε για  $u \in [0,18]$  με βήμα 0,02 το ακόλουθο γράφημα μέσω R:



Σύμφωνα με το Γράφημα 5.2.7 συμπεραίνουμε ότι από τις τρεις μεθόδους που χρησιμοποιήσαμε (α. την μέθοδο Heavy Traffic, β. την μέθοδο Light Traffic και γ. την μέθοδο Heavy - Light Traffic) η πιο ικανοποιητική στο να προσεγγίσει την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η μέθοδος Light Traffic, και ακολουθεί η μέθοδος Heavy - Light Traffic με την μέθοδο Heavy Traffic. Πιο συγκεκριμένα οι προσεγγιστικές μεθόδους για την πιθανότητα χρεοκοπίας, ανάλογα με το διάστημα τιμών που δίνουμε για το αρχικό κεφάλαιο  $u$  και με ένα πολύ μικρό βήμα  $h$  (στην συγκεκριμένη περίπτωση  $h=0,02$ ) εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- Η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω της μεθόδου Light Traffic για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή, για  $u=0$ ) ισούται με την τιμή της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας. Επίσης, είναι φθίνουσα όπως και η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας.
- Η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω της μεθόδου Heavy - Light Traffic για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή, για  $u=0$ ) είναι μεγαλύτερη από την τιμή της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας, για αυτό το λόγο δεν είναι τόσο ικανοποιητική μέθοδος. Επίσης, είναι και αυτή είναι φθίνουσα όπως και η ακριβής πιθανότητα χρεοκοπίας.
- Η τιμή της πιθανότητας χρεοκοπίας μέσω της μεθόδου της Heavy Traffic για μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή, για  $u=0$ ) είναι πολύ πιο μεγάλη σε σχέση με τις άλλες δύο προσεγγιστικές μεθόδους και της ακριβούς πιθανότητας χρεοκοπίας. Επίσης, είναι ολοφάνερο πως φθίνει με πολύ πιο γρήγορο ρυθμό σε σχέση με τις άλλες δύο μεθόδους και την ακριβή πιθανότητα χρεοκοπίας.

## 6. ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΩΝ ΜΕΘΟΔΩΝ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο γίνεται σύγκριση, μέσω μιας εφαρμογής σχετικά με τις προσεγγιστικές μεθόδους που είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Πιο συγκεκριμένα κάνουμε σύγκριση στις προσεγγιστικές μεθόδους για την συνάρτηση κατανομής του συνολικού κινδύνου  $S$  (βάσει των μεθόδων που είδαμε στα κεφάλαια 1, 2 και 3), άλλα κάνουμε και σύγκριση στις προσεγγιστικές μεθόδους για την πιθανότητα χρεοκοπίας του κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας (βάσει των μεθόδων που είδαμε στα κεφάλαια 1 και 5.

### 6.1. ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΜΕ ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΩΝ

Εφαρμογή 6.1 : Έστω ένα χαρτοφυλάκιο συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$ , το ύψος των ατομικών απαιτήσεων (ζημιών)  $X$  ακολουθεί την Εκθετική κατανομή με παραμέτρο  $\beta = 2$  , ενώ η συχνότητα των απαιτήσεων (ζημιών)  $N$  ακολουθεί την κατανομή Poisson με παράμετρο  $\lambda = 2$ . Αν είναι γνωστό ότι  $c = 3$  και ότι ισχύουν οι υποθέσεις του κλασικού μοντέλου χρεοκοπίας, σε συνεχή & άπειρο χρόνο, ζητούνται τα εξής:

- a) Να κάνουμε γραφική απεικόνιση των προσεγγιστικών μεθόδων (1.Αναδρομική, 2.Συνελίξεων, 3.Προσομοίωσης, 4.Κανονικής, 5.Δυναμοκανονικής, 6.Μετατοπισμένης Γάμμα, 7.Wilson – Hilferty, 8.Haldane) που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό της συνάρτησης κατανομής του χαρτοφυλακίου συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$  και βάσει αυτών να επιλέξουμε την καταλληλότερη προσεγγιστική μέθοδο.
- b) Να κάνουμε γραφική απεικόνιση των προσεγγιστικών μεθόδων (1.Lundberg, 2.De Vylder, 3.Beekman - Bowers, 4.Εκθετική, 5.Renyi, 6.Heavy Traffic, 7.Light Traffic, 8.Heavy - Light Traffic) που χρησιμοποιήσαμε για τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας του χαρτοφυλακίου συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$  και βάσει αυτών να επιλέξουμε την καταλληλότερη προσεγγιστική μέθοδο.

Λύση : Η σ.π.π. του πλήθους των ζημιών  $N$  είναι:  $f_N(x) = \frac{e^{-2} 2^x}{x!}$  για  $x=0, 1, \dots$  ,

Η σ.π. των ατομικών ζημιών  $X$  είναι:  $f_X(x) = 2e^{-2x}$  για  $x>0$ .

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο unbiased με βήμα  $h=0,5$  στο διάστημα  $(0,20)$  για να διακριτοποιήσουμε την  $X$ , έτσι έχουμε:

$$f_{DX}(x) = \begin{cases} \frac{E[X \wedge 0] - E[X \wedge 0 + 0,5]}{0,5} + 1 - F(0), & x = 0 \\ \frac{2E[X \wedge x] - E[X \wedge x - 0,5] - E[X \wedge x + 0,5]}{0,5}, & 0 < x < 20 \\ \frac{E[X \wedge 20] - E[X \wedge 20 - 0,5]}{0,5} - 1 + F(20), & x = 20 \end{cases}$$

Όπου  $E[X \wedge \varepsilon] = \int_0^\varepsilon x f_X(x) dx$

Άρα λαμβάνουμε την νέα σ.π.π. της  $X$  η οποία είναι η  $f_{DX}(x)$ .

Η κατανομή του χαρτοφυλακίου των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$  που θα προκύψει σύμφωνα με τα παραπάνω δεδομένα θα είναι Σύνθετη Poisson.

- a) Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούμε για να προσεγγίσουμε την συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$  είναι οι εξής:

1. Αναδρομική Μέθοδος ή Μέθοδος του Panjer:

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο (βλ. Χατζικωνσταντινίδης, 2018) έχουμε:

$$g_S(x) = \begin{cases} P_N(f_{DX}(0)), & \text{για } x = 0 \\ \frac{1}{1 - a f_{DX}(0)} \sum_{i=1}^n \left( a + \frac{\beta}{x} i \right) f_{DX}(i) g_S(x - i), & \text{για } x > 0 \end{cases}$$

Αφού  $N \sim \text{Poisson}(\lambda = 2)$  τότε  $a = 0$  και  $\beta = \lambda = 2$  άρα η παραπάνω συνάρτηση γίνεται:

$$g_S(x) = \begin{cases} P_N(0) = e^{-2}, & \text{για } x = 0 \\ \frac{2}{x} \sum_{i=1}^n i f_{DX}(i) g_S(x - i), & \text{για } x > 0 \end{cases}$$

Ενώ η αθροιστική σ.κ. της  $S$  μέσω της Αναδρομικής Μεθόδου είναι:

$$G_S(x) = \sum_{i=0}^x g_S(i).$$

2. Μέθοδος των Συνελίξεων:

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο (βλ. Χατζικωνσταντινίδης, 2018) έχουμε:



$$g_S(x) = f_{DX_1+DX_2+\dots+DX_N}(x) = \sum_{j=0}^x f_{DX_i}(x-j) \cdot f_{DX_{i-1}}(j),$$

$$x = 0,1,2, \dots, 20, \quad j \in (0,20), \quad \text{step} = 0,5 \text{ και } i = 1,2, \dots, N$$

Ενώ η αθροιστική σ.κ. της S μέσω της Μεθόδου των Συνελίξεων είναι:

$$G_S(x) = \sum_{i=0}^x g_S(i).$$

### 3. Μέθοδος της Προσομοίωσης:

Επειδή η Μέθοδος της Προσομοίωσης συνιστά την παραγωγή τυχαίων αριθμών μέσω μιας κατανομής (όπως γίνεται στην αντίστοιχη περίπτωση του MONTE CARLO) είναι καλύτερα να χρησιμοποιείται κατευθείαν μέσω της R. Στη συγκεκριμένη περίπτωση παράγουμε τυχαίους αριθμούς μέσω της Εκθετικής κατανομής με παράμετρο 2.

$$U(x) = 1 - e^{-2x}, \quad \text{για } x = 0,1,2, \dots, 20$$

$$G_S(x) = \sum_{i=0}^u g_S(i)$$

$$\text{με } u = \text{Sort}(U(x)) \text{ step} = 0,5 \text{ και } i \in (0,20)$$

### 4. Κανονική Μέθοδος:

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο (βλ. Κουτσόπουλος, 1999) έχουμε:

$$g_S(x) = f_{\text{Κανονική}}(Z_S(x)),$$

όπου  $f_{\text{Κανονική}}(x)$  είναι η σ.π. της Κανονικής κατανομής με παραμέτρους  $\mu, \sigma^2$  και  $Z_S(x)$  η τυποποιημένη τ.μ. της S, δηλαδή:

$$Z_S(x) = \frac{x - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}}.$$

Η μέση τιμή και η διακύμανση της S δίνονται από τους παρακάτω τύπους:

$$E(S) = E(N) \cdot E(X) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$\text{Var}(S) = E(N) \cdot E(X^2) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Άρα η τυποποιημένη τ.μ. της S γίνεται:

$$Z_S(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{0,5}}$$

Επίσης, η σ.κ. της S δίνεται από τη σχέση:

$$g_S(x) = f_{\text{Κανονική}}\left(\frac{x - 1}{\sqrt{1}}\right),$$

Ενώ η αθροιστική σ.κ. της S μέσω της Κανονικής Μεθόδου είναι:

$$G_S(x) = \Phi[Z_S(x)] = \Phi\left[\frac{x - 1}{\sqrt{1}}\right],$$

5. Δυναμοκανονική Μέθοδος ή Normal Power 2:

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο (βλ. Κουτσόπουλος, 1999) έχουμε:

$$g_S(x) = f_{\text{Κανονική}}(NP_S(x)),$$

όπου  $f_{\text{Κανονική}}(x)$  είναι η σ.π.π. της Κανονικής κατανομής με παραμέτρους  $\mu, \sigma^2$  και  $NP_S(x)$  η τ.μ. της S μέσω της Δυναμοκανονικής Μεθόδου, δηλαδή:

$$NP_S(x) = \sqrt{\frac{9}{(\text{Skew}(S))^2} + \frac{Z_S(x)}{\text{Skew}(S)} + 1} - \frac{3}{\text{Skew}(S)}$$

όπου  $Z_S(x)$  η τυποποιημένη τ.μ. της S (η οποία έχει υπολογισθεί προηγουμένως), ενώ  $\text{Skew}(S)$  είναι η κυρτότητα της S (βλ. Αντζουλάκος, 1999), δηλαδή:

$$\begin{aligned} \text{Skew}(S) &= \\ &= \frac{\sqrt{[\text{Skew}(N) \cdot \text{Var}(N)]^3 \cdot [E(X)]^3 + 3 \cdot E(X) \cdot \text{Var}(N) \cdot \text{Var}(X) + E(X) \cdot \text{Skew}(X) \cdot \sqrt{[\text{Var}(X)]^3}}}{\sqrt{[\text{Var}(S)]^3}} \\ &= 1,125 \end{aligned}$$

Άρα η τ.μ. της S μέσω της Δυναμοκανονικής Μεθόδου, γίνεται:

$$NP_S(x) = \sqrt{\frac{9}{(1,125)^2} + \frac{Z_S(x)}{1,125} + 1} - \frac{3}{1,125} = \sqrt{8,111111 + \frac{Z_S(x)}{1,125}} - 2,666667$$

Επίσης, η σ.κ. της S δίνεται από τη σχέση:

$$g_S(x) = f_{\text{κανονική}} \left( \sqrt{8,111111 + \frac{Z_S(x)}{1,125}} - 2,666667 \right),$$

Ενώ η αθροιστική σ.κ. της S μέσω της Δυναμοκανονικής Μεθόδου είναι:

$$G_S(x) = \Phi[NP_S(x)] = \Phi \left[ \sqrt{8,111111 + \frac{Z_S(x)}{1,125}} - 2,666667 \right],$$

#### 6. Μετατοπισμένη Γάμμα Μέθοδος:

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο (βλ. Πολίτης, 2012) έχουμε:

$$g_S(x) = f_{\text{Μετατοπισμένη Γάμμα}}(x - k),$$

όπου  $f_{M\Gamma}(x - k)$  είναι η σ.π. της Μετατοπισμένης Γάμμα κατανομής με παραμέτρους  $\alpha', \beta'$  και  $k$ .

Αφού η  $S \sim \text{Σύνθετη Poisson}(\lambda, f_{DX}(x))$  οι παραμέτροι αυτής της μεθόδου υπολογίζονται, με την επίλυση του συστήματος, ως εξής:

$$\alpha' + \beta' = \lambda E[X], \quad \alpha' \beta'^2 = \lambda E[X^2], \quad k = \frac{2}{\sqrt{\alpha'}} = \frac{\lambda E[X^3]}{(\lambda E[X^2])^{3/2}}.$$

Έτσι έχουμε μετά από πράξεις:

$$\alpha' = 8,888889, \quad \beta' = 1,333333, \quad k = -1,666667$$

Επίσης, η σ.κ. της S δίνεται από τη σχέση:

$$g_S(x) = f_{M\Gamma}(x + 1,666667),$$

Ενώ η αθροιστική σ.κ. της S μέσω της Μετατοπισμένης Γάμμα Μεθόδου είναι:

$$G_S(x) = F_{M\Gamma}(x + 1,666667; \alpha' = 8,888889, \beta' = 1,333333)$$

#### 7. Μέθοδος των Wilson – Hilferty:

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο (βλ. Παράρτημα ΣΤ') έχουμε:

$$g_S(x) = f_{\text{κανονική}} \left( c_1 + c_2(Z_S(x) + c_3)^{\frac{1}{3}} \right),$$

όπου  $f_{\text{Κανονική}}(x)$  είναι η σ.π. της Κανονικής κατανομής με παραμέτρους  $\mu, \sigma^2$  και  $Z_S(x)$  η τυποποιημένη τ.μ. της  $S$ , επιπροσθέτως χρησιμοποιούμε και τις παράμετρους  $c_1, c_2, c_3$  οι οποίοι υπολογίζονται ως εξής:

$$c_1 = \frac{\text{Skew}(S)}{6 \sqrt{\text{Var}(S)}^3} - \frac{6 \sqrt{\text{Var}(S)}^3}{\text{Skew}(S)} = -5,145833$$

$$c_3 = \frac{2 \sqrt{\text{Var}(S)}^3}{\text{Skew}(S)} = 1,777778$$

$$c_2 = 3 \left( \frac{2 \sqrt{\text{Var}(S)}^3}{\text{Skew}(S)} \right)^{\frac{2}{3}} = 3.$$

Επίσης, η σ.κ. της  $S$  δίνεται από τη σχέση:

$$g_S(x) = f_{\text{Κανονική}} \left( -5,145833 + 3(Z_S(x) + 1,777778)^{\frac{1}{3}} \right),$$

Η αθροιστική σ.κ. της  $S$  μέσω της Μεθόδου των Wilson – Hilferty είναι:

$$G_S(x) = \Phi \left[ c_1 + c_2(Z_S(x) + c_3)^{\frac{1}{3}} \right] = \Phi \left[ -5,145833 + 3 \left( \frac{x-1}{\sqrt{0,5}} + 1,777778 \right)^{\frac{1}{3}} \right].$$

#### 8. Μέθοδος του Haldane:

Σύμφωνα με αυτή την μέθοδο (βλ. Παράρτημα ΣΤ') έχουμε:

$$g_S(x) = f_{\text{Κανονική}}(H_S(x)),$$

όπου  $f_{\text{Κανονική}}(x)$  είναι η σ.π. της Κανονικής κατανομής με παραμέτρους  $\mu, \sigma^2$  και  $H_S(x)$  η τυποποιημένη τ.μ. της  $S$  μέσω της μεθόδου του Haldane, δηλαδή:

$$H_S(x) = \frac{\left( \frac{x}{E(S)} \right)^h - E(H)}{\sqrt{\text{Var}(H)}}$$

Για την τ.μ.  $H$  ισχύει ότι  $H \sim \left( \frac{S}{E(S)} \right)^h$ , ενώ για τον υπολογισμό του εκθέτη  $h$  πρέπει να θέσουμε την λοξότητα της  $H$  ίση με το 0, δηλαδή έχουμε:

$$\text{Skew}(H) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{E[(H - E(H))^3]}{(\sqrt{\text{Var}(H)})^3} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{E[(H - E(H))^3]}{\left\{ \sqrt{E[(H - E(H))^2]} \right\}^3} = 0$$

Η τιμή της  $h$  για την οποία ισχύει η παραπάνω σχέση είναι ίση με 1, έτσι η τυποποιημένη τ.μ. της  $S$  μέσω της μεθόδου του Haldane, γίνεται:

$$H_S(x) = \frac{\left(\frac{x}{1}\right)^1 - 1}{\sqrt{0,5}} = Z_S(x)$$

Άρα έχουμε ότι η τυποποιημένη τ.μ. της  $S$  μέσω της μεθόδου του Haldane ισούται με την τυποποιημένη τ.μ. της  $S$  μέσω της κανονικής κατανομής.

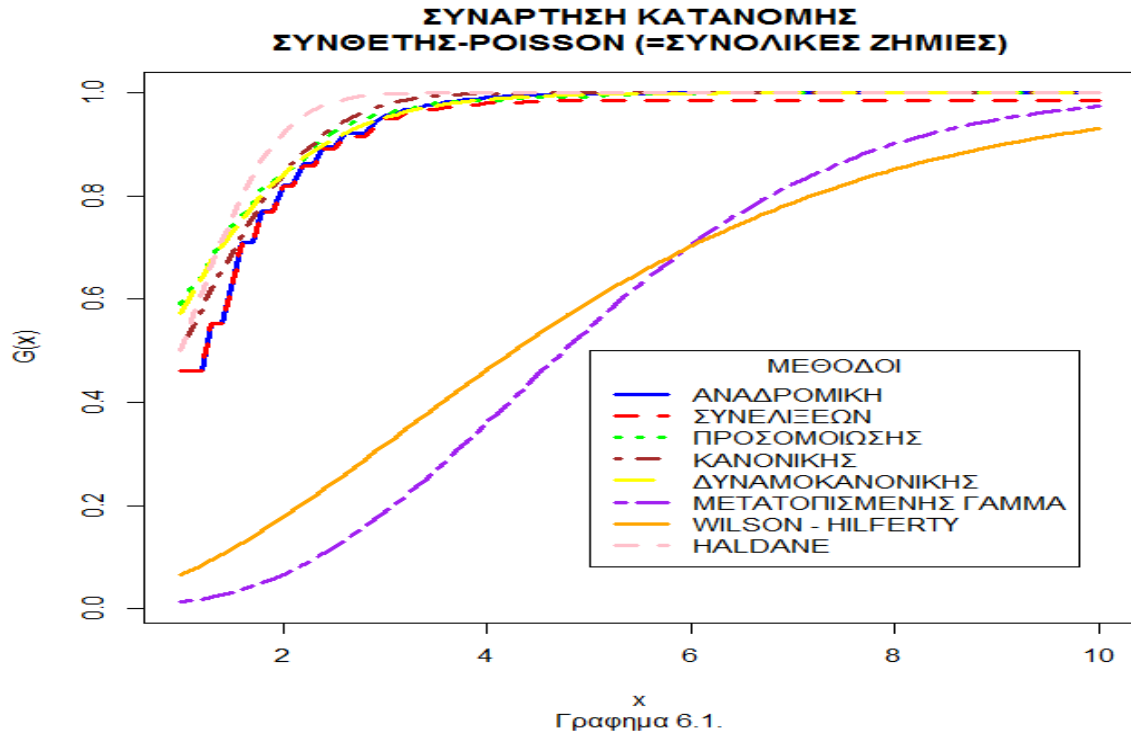
Επίσης, η σ.κ. της  $S$  δίνεται από τη σχέση:

$$g_S(x) = f_{\text{Κανονική}}(Z_S(x)),$$

Ενώ η αθροιστική σ.κ. της  $S$  μέσω της Μεθόδου του Haldane είναι:

$$G_S(x) = \Phi[H_S(x)] = \Phi\left[\frac{x-1}{\sqrt{0,5}}\right],$$

Σύμφωνα με όλες τις παραπάνω αθροιστικές σ.κ. και των οχτώ μεθόδων λαμβάνουμε το ακόλουθο γράφημα μέσω R:



Σύμφωνα με το Γράφημα 6.1 και οι οχτώ μέθοδοι είναι αρκετά καλές στην προσέγγιση της σ.κ. της Σύνθετης Poisson, δηλαδή των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$ , με καταλληλότερη προσεγγιστική μέθοδο την Μέθοδο της Προσομοίωσης σε σχέση με τις υπόλοιπες μεθόδους.

- b) Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούμε για να προσεγγίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$ , σύμφωνα με το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας, είναι οι εξής:

#### 1. Μέθοδος του Lundberg:

Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\psi_L(u) = \left\{ 1 + \left( \theta \cdot u - \frac{\mu_2}{2 \cdot \mu_1} \right) \cdot \frac{4 \cdot \theta \cdot \mu_1^2 \cdot \mu_3}{3 \cdot (\mu_2)^3} \right\} \cdot e^{-\frac{2 \cdot \mu_1 \cdot \theta \cdot u}{\mu_2}},$$

Για τον υπολογισμό αυτής της πιθανότητας χρεοκοπίας χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε τις παράμετρους  $\theta, \mu_2, \mu_3$ .

Η τιμή του περιθωρίου ασφαλείας είναι:

$$\theta = \frac{c}{\lambda \cdot \mu_1} - 1 = \frac{3}{2 \cdot 1} - 1 = 0,5.$$

Η τιμή της δεύτερης ροπής είναι:

$$\mu_2 = \lambda \cdot E(X^2) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Η τιμή της τρίτης ροπής είναι:

$$\mu_3 = \lambda \cdot E(X^3) = 2 \cdot \frac{3}{4} = 1,75.$$

Άρα αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω τιμές στις παράμετρους, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω αυτής της μεθόδου είναι:

$$\psi_L(u) = \{1 + (0,5 \cdot u - 0,5)\} \cdot e^{-u}.$$

## 2. Μέθοδος του De Vylder:

Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\tilde{\psi}_{DV}(u) = \frac{1}{1 + \tilde{\theta}} \cdot e^{-\tilde{R}_{DV} \cdot u}$$

Όπου  $\tilde{R}_{DV}$  είναι ο “εκθέτης De Vylder” και ισούται με:

$$\tilde{R}_{DV} = \frac{\tilde{\theta}}{(1 + \tilde{\theta})} \cdot \frac{1}{\tilde{\mu}_1}$$

Για τον υπολογισμό του “εκθέτη De Vylder” χρειάζεται να υπολογίσουμε τις παραμέτρους  $\tilde{\mu}_1, \tilde{\theta}$ . Δηλαδή, έχουμε:

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_3}{3\mu_2} = 2$$

$$\tilde{\theta} = \frac{2\mu_1 \mu_3 \theta}{3\mu_2^2} = 8$$

Άρα ο “εκθέτης De Vylder”, γίνεται:

$$\tilde{R}_{DV} = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{2} = 0,4444444$$

Άρα αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω τιμές στους παράμετρους, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω αυτής της μεθόδου είναι:

$$\tilde{\psi}_{DV}(u) = 0,1111111 \cdot e^{-0,4444444 \cdot u},$$

## 3. Μέθοδος των Beekman - Bowers:

Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\psi_{BB}(u) \cong \frac{1}{1+\theta} \cdot [1 - G_1(u)],$$

Όπου  $G_1$  είναι η αθροιστική συνάρτηση της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους  $\alpha, \beta$ . Για τον υπολογισμό των παραμέτρων  $\alpha, \beta$  επιλύουμε το παρακάτω σύστημα:

$$\frac{\mu_2}{2\theta\mu_1} = \frac{\alpha}{(1+\theta)\beta} \quad \text{και} \quad \frac{\mu_3}{3\theta\mu_1} + \left(\frac{\mu_2}{2\theta\mu_1}\right)^2 = \frac{\alpha}{(1+\theta)^2\beta^2}$$

Οι μοναδικές τιμές που ικανοποιούν το παραπάνω σύστημα είναι  $\alpha = 0,5$  και  $\beta = 0,3333333$ .

Άρα αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω τιμές στους παράμετρους, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω αυτής της μεθόδου είναι:

$$\psi_{BB}(u) \cong 0,6666667 \cdot [1 - G_1(u; \alpha = 0,5, \beta = 0,3333333)] .$$

#### 4. Εκθετική Μέθοδος:

Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\psi_E(u) = \exp \left\{ -1 - \frac{2 \cdot \mu_1 \cdot \theta \cdot u - \mu_2}{\sqrt{(\mu_2)^2 + \left(\frac{4}{3}\right) \cdot \theta \cdot \mu_1 \cdot \mu_3}} \right\} .$$

Άρα αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω τιμές οι οποίες έχουν υπολογισθεί προηγουμένως στους παράμετρους, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω αυτής της μεθόδου είναι:

$$\psi_E(u) = e^{-1 - \frac{u-1}{1,414214}},$$

#### 5. Μέθοδος του Renyi:

Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον εξής τύπο:



$$\psi_R(u) = \frac{1}{1 + \theta} \cdot e^{-\frac{2 \cdot \mu_1 \cdot \theta \cdot u}{\mu_2 \cdot (1 + \theta)}} .$$

Άρα αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω τιμές οι οποίες έχουν υπολογισθεί προηγουμένως στις παράμετρους, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω αυτής της μεθόδου είναι:

$$\psi_R(u) = 0,6666667 \cdot e^{-0,6666667 \cdot u} .$$

#### 6. Μέθοδος Heavy Traffic:

Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\psi_{HT}(u) = \exp\left(-\frac{2 \cdot \theta \cdot \mu_1 \cdot u}{\mu_2}\right),$$

Άρα αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω τιμές οι οποίες έχουν υπολογισθεί προηγουμένως στους παράμετρους, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω αυτής της μεθόδου είναι:

$$\psi_{HT}(u) = e^{-u} .$$

#### 7. Μέθοδος Light Traffic:

Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\psi_{LT}(u) = \frac{1}{(1 + \theta) \cdot \mu_1} \cdot \int_u^{\infty} \bar{G}_S(x) dx .$$

Άρα αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω τιμές οι οποίες έχουν υπολογισθεί προηγουμένως στους παράμετρους, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω αυτής της μεθόδου είναι:

$$\psi_{LT}(u) = 0,3333333 \cdot e^{-2 \cdot u} .$$

#### 8. Μέθοδος Heavy - Light Traffic:

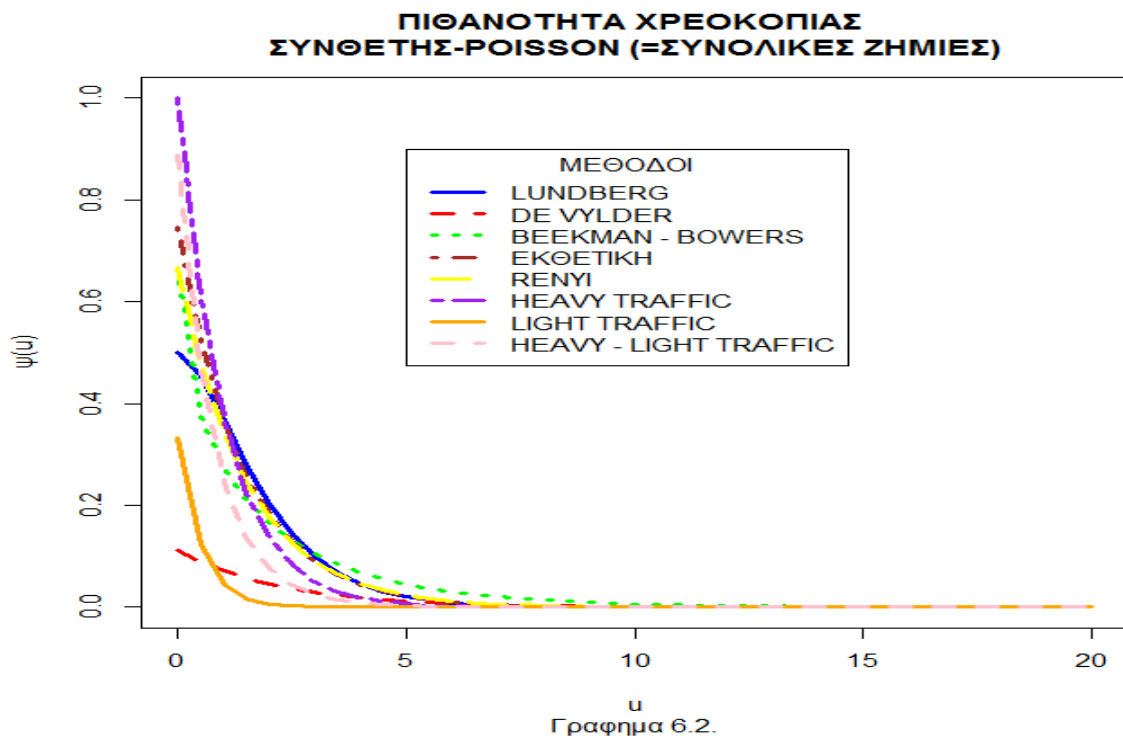
Σύμφωνα με αυτήν την μέθοδο η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τον εξής τύπο:

$$\psi_{HLT}(u) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \psi_{LT}\left(\frac{\theta \cdot u}{1+\theta}\right) + \frac{1}{(1+\theta)^2} \cdot \psi_{HT}(u) .$$

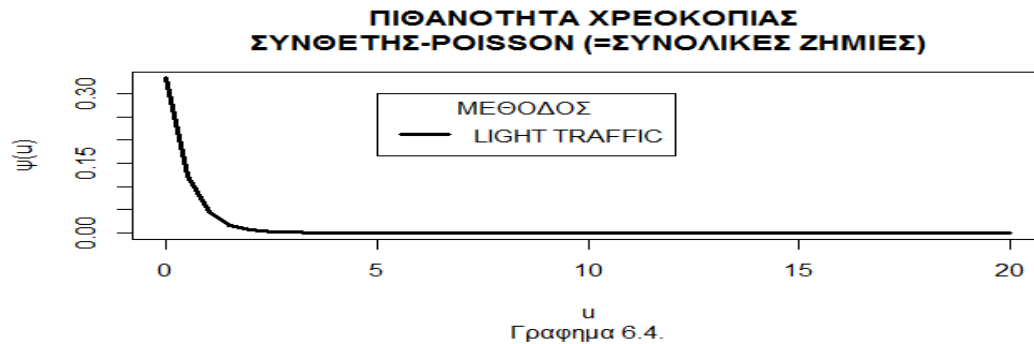
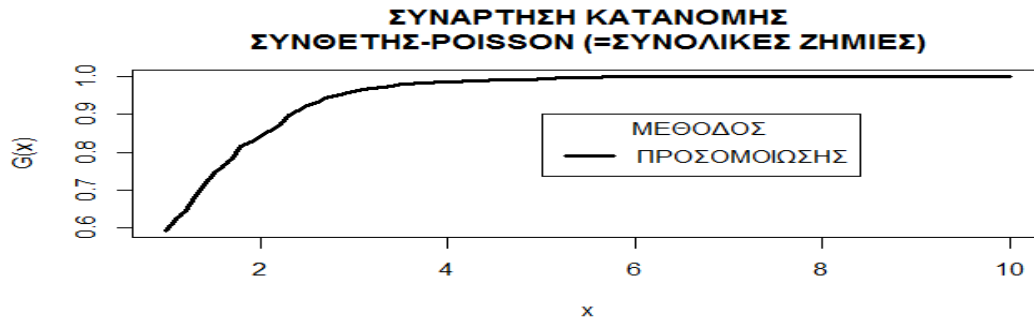
Άρα αν αντικαταστήσουμε τις παραπάνω τιμές οι οποίες έχουν υπολογισθεί προηγουμένως στις παράμετρους, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω αυτής της μεθόδου είναι:

$$\psi_{HLT}(u) = 0,6666667 \cdot \psi_{LT}(0,3333333 \cdot u) + 0,4444445 \cdot \psi_{HT}(u),$$

Σύμφωνα με όλες τις παραπάνω πιθανότητες χρεοκοπίας και των οχτώ μεθόδων λαμβάνουμε το ακόλουθο γράφημα μέσω R:



Σύμφωνα με το Γράφημα 6.2 και οι οχτώ μέθοδοι είναι αρκετά καλές στην προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας της Σύνθετης Poisson, δηλαδή των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) S σύμφωνα με το κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας, με καταλληλότερη προσεγγιστική μέθοδο την Μέθοδο Light Traffic .



Σύμφωνα με το Γράφημα 6.3 παρατηρούμε με ακρίβεια (μόνη της χωρίς την σύγκριση άλλων μεθόδων) την αθροιστική σ.κ. των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$  μέσω της Μεθόδου της Προσομοίωσης, η οποία αποτελεί και την ικανοποιητικότερη προσέγγιση.

Επίσης στο Γράφημα 6.4 παρατηρούμε, πάλι με ακρίβεια (μόνη της χωρίς την σύγκριση άλλων μεθόδων) την πιθανότητα χρεοκοπίας των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών)  $S$  μέσω της Μεθόδου Light Traffic, η οποία αποτελεί και την ικανοποιητικότερη προσέγγιση.

Ο κώδικας των παραπάνω υπολογισμών βρίσκεται στο Παράρτημα Ε΄.

## 7. ΤΕΛΙΚΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο γίνεται η τελική συμπερασματολογία σχετικά με τις προσεγγιστικές μεθόδους οι οποίες παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια ή σε κάποια παραρτήματα ενδεχομένως, που είναι ικανές να χρησιμοποιηθούν για την προσέγγιση, τόσο στην συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $S$  στην διακριτή ή συνεχή περίπτωση, όσο και για την πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση που ο χρονικός ορίζοντας που εξετάζουμε είναι συνεχής ή άπειρος, αλλά και όταν είναι διακριτός ή και πεπερασμένος.

### 7.1. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ

Στη συγκεκριμένη ενότητα αναφέρουμε τα κυριότερα αποτελέσματα που εξάγαμε για κάθε μια από τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για την προσέγγιση στην συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $S$  στην διακριτή ή συνεχή περίπτωση.

#### 7.1.1. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Της Προσομοίωσης

Σύμφωνα με την Μέθοδο της Προσομοίωσης την οποία αρχικά είδαμε μόνη της στην διακριτή περίπτωση, στην Εφαρμογή 2.2.5 στο Κεφάλαιο 2, είναι εύκολο να εξάγουμε το εξής συμπέρασμα ότι ανταποκρίνεται πολύ γρήγορα και ικανοποιητικά στο να προσεγγίσει την συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $S$ , κάνοντας χρήση τυχαία αποτελέσματα (προσομοιώσεις) από την Ομοιόμορφη συνάρτηση κατανομής.

Επίσης όταν αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται στην συνεχή περίπτωση, στην Εφαρμογή 3.3.2 στο Κεφάλαιο 3 (σε σύγκριση πάντα με την Αναδρομική Μέθοδο και την Μέθοδο των Συνελίξεων), αφότου έχουμε κάνει χρήση της μεθόδου της διακριτοποίησης για την συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $X$  (μετατρέπει την τ.μ.  $X$  από συνεχή κατανομή σε διακριτή κατανομή), είναι φανερό πως και σε αυτήν την περίπτωση αυτή η μέθοδος λειτουργεί πολύ ικανοποιητικά.

Άλλο ένα παράδειγμα στο πόσο γρήγορα και ικανοποιητικά προσεγγίζει την συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $S$ , είναι στην Εφαρμογή 6.1 στο Κεφάλαιο 6 (σε σύγκριση πάντα με άλλες εφτά μεθόδους).

### 7.1.2. Συμπεράσματα Για Την Κανονική Μέθοδο

Την Κανονική Μέθοδο την είδαμε αρχικά μόνη της στην διακριτή περίπτωση, στην Εφαρμογή 2.2.2 στο Κεφάλαιο 2, σύμφωνα με αυτήν την εφαρμογή μπορούμε να καταλάβουμε ότι είναι μια ικανοποιητικότερη μέθοδος στο να προσεγγίσει την συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $S$ .

Επιπροσθέτως, όταν αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται στην συνεχή περίπτωση, στην Εφαρμογή 3.3.1 στο Κεφάλαιο 3 (σε σύγκριση πάντα με την Δυναμοκανονική Μέθοδο και την Μετατοπισμένη Γάμμα Μέθοδο), αφότου έχουμε κάνει χρήση της μεθόδου της διακριτοποίησης για την συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $X$  (μετατρέπει την τ.μ.  $X$  από συνεχή κατανομή σε διακριτή κατανομή), είναι σίγουρο πως και σε αυτήν την περίπτωση αυτή η μέθοδος λειτουργεί ικανοποιητικά.

Σημαντικό παράδειγμα στο πόσο γρήγορα και ικανοποιητικά προσεγγίζει την συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $S$ , είναι στην Εφαρμογή 6.1 στο Κεφάλαιο 6 (σε σύγκριση πάντα με τις άλλες έξι μεθόδους, αν εξαιρέσουμε την Μέθοδο της Προσομοίωσης η οποία ακόμα και σε αυτήν την εφαρμογή είναι καλύτερη). Σε αυτήν την εφαρμογή μπορούμε να εξάγουμε το συμπέρασμα ότι αν γνωρίζουμε τις κατανομές, εκ των προτέρων, που ακολουθούν οι ατομικές απαιτήσεις (ζημιές)  $X$  και η συχνότητα των απαιτήσεων (ζημιών)  $N$ , τότε μπορούμε να βρούμε την μέση τιμή και την διακύμανση της  $S$  με απώτερο σκοπό την κατασκευή της τυποποιημένης συνάρτησης για την τ.μ.  $S$ .

Μέσω του προγράμματος της  $R$  (αλλά και γενικά χωρίς κάποιο λογισμικό), είναι εύκολο να χρησιμοποιήσουμε την Κανονική σ.π. μέσω της τυποποιημένης συνάρτησης για την τ.μ.  $S$ , άρα όντως αυτή η μέθοδος είναι πολύ εύκολη στην χρήση.

### 7.1.3. Συμπεράσματα Για Την Δυναμοκανονική Μέθοδο

Ένα είναι σίγουρο για την Δυναμοκανονική Μέθοδο, ότι και αυτή η μέθοδος είναι πολύ εύκολη στην χρήση.

Πιο συγκεκριμένα, με την χρήση αυτής της μεθόδου στην Εφαρμογή 2.2.3, στην Εφαρμογή 3.3.3 και στην Εφαρμογή 6.1 που βρίσκονται στα κεφάλαια 2, 3 και 6 αντίστοιχα καταλαβαίνουμε ότι έχει πολλά κοινά με αυτά της Κανονικής Μεθόδου.

Τα κοινά στοιχεία είναι η τυποποιημένη συνάρτηση για την τ.μ.  $S$  και η χρήση της Κανονικής σ.π. , δύο σημαντικά στοιχεία για αυτήν την προσέγγιση. Ένα στοιχείο το οποίο διαφοροποιεί αυτή τη μέθοδο με την Κανονική Μέθοδο είναι ότι γίνεται χρήση της κυρτότητας και ανάλογα την κυρτότητα που έχει η τ.μ.  $S$  δίνει ικανοποιητικά ή μη αποτελέσματα για την συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $S$ .

Επίσης, σύμφωνα με τις προαναφερθείσες εφαρμογές αυτή η μέθοδος, είναι άλλη μια ικανοποιητική προσέγγιση για την  $S$ , αλλά σε σύγκριση με την Κανονική Μέθοδο είναι και στις τρεις εφαρμογές λιγότερο ικανοποιητική. Άλλωστε από τα στοιχεία που σχηματίζουν αυτήν την μέθοδο διαπιστώνουμε ότι η Δυναμοκανονική Μέθοδος αποτελεί μετεξέλιξη της Κανονικής Μεθόδου, άρα έχει και περισσότερες προϋποθέσεις (το κριτήριο της κυρτότητας) στο να αναδειχθεί ικανοποιητική προσεγγιστική μέθοδος.

#### 7.1.4. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Των Συνελίξεων

Μια μέθοδος η οποία βασίζεται στην κατανομή στην οποία ακολουθεί η συχνότητα των απαιτήσεων (ζημιών)  $N$ , γιατί η Μέθοδος των Συνελίξεων παράγει συνελίξεις (συγκεκριμένου αριθμού ή όχι) ανάλογα με την τιμή της τ.μ.  $N$ .

Όταν η  $N$  δεν είναι τυχαία μεταβλητή, δηλαδή η συχνότητα στην οποία επέρχονται οι ζημίες είναι συγκεκριμένος αριθμός τότε και οι συνελίξεις που θα κάνουμε μέσω αυτής της μεθόδου θα είναι συγκεκριμένες. Ερευνήσαμε την συγκεκριμένη περίπτωση στην Εφαρμογή 2.2.4 στο Κεφάλαιο 2 και το αποτέλεσμα που λάβαμε ήταν μη ικανοποιητικό, δηλαδή στην αρχή της η συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $S$ , είναι ίση με το μηδέν και αργότερα αυξάνει προς την μονάδα (ο οποίος είναι και ο σκοπός της αθροιστικής σ.κ.). Μπορούμε να εξάγουμε το εξής συμπέρασμα, όταν η  $N$  είναι συγκεκριμένος αριθμός, ότι χρειαζόμαστε να είναι πολύ μεγάλο το πλήθος των απαιτήσεων (αριθμός των ζημιών) με σκοπό να γίνονται περισσότερες συνελίξεις οι οποίες θα είναι ικανοποιητικές για αυτήν τη μέθοδο.

#### 7.1.5. Συμπεράσματα Για Την Αναδρομική Μέθοδο Ή Μέθοδο Του Panjer

Όταν η κατανομή της συχνότητας των απαιτήσεων (ζημιών)  $N$  ανήκει στην οικογένεια κατανομών  $R(\alpha, \beta, 0)$  ή στην κλάση κατανομών του Panjer (δηλαδή

Poisson, Bernouli, Διωνυμική, Γεωμετρική, Αρνητική Διωνυμική ή Polya, βλ. Παράρτημα Α' και εννοείται οι Αποκομμένες και Τροποποιημένες Κατανομές Στο Σημείο 0, βλ. Παράρτημα ΣΤ'), τότε μπορούμε να κάνουμε χρήση της Αναδρομικής Μεθόδου (βλ. Κεφάλαιο 1 και 2).

Αυτή η μέθοδος δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα, αν θυμηθούμε τη χρήση της με δύο τρόπους βάσει του προγράμματος της R, στην Εφαρμογή 2.2.1 στο Κεφάλαιο 2. Αυτό αναδεικνύει ότι είναι μια από τις βασικές μεθόδους και εύκολες στην χρήση στο να προσεγγίσει την συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της S.

Στις εφαρμογές 3.3.2 και 6.1 (βλ. κεφάλαια 3 και 6 αντίστοιχα), χρησιμοποιούμε την Αναδρομική Μέθοδο και εξάγουμε το συμπέρασμα ότι λειτουργεί πιο ικανοποιητικά και στις δύο περιπτώσεις σε σύγκριση με την Μέθοδο των Συνελίξεων και αυτό οφείλεται στο ότι η κατανομή που ακολουθεί η N είναι η Poisson (με παράμετρο  $\lambda=5$  και  $\lambda=2$ , αντίστοιχα στις προαναφερθείσες εφαρμογές) και ενισχύει στην παραγωγή ικανοποιητικών αποτελεσμάτων.

Ένα χρήσιμο συμπέρασμα που προκύπτει ως προς την Αναδρομική Μέθοδο είναι ότι όταν η N ανήκει στην οικογένεια κατανομών  $R(\alpha, \beta, 0)$  τότε η S ακολουθεί ίδια Σύνθετη (Compound) κατανομή με την κατανομή της N. Είναι μια χρήσιμη πληροφορία γιατί μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορα στατιστικά μέτρα που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον υπολογισμό και άλλων μεθόδων.

#### 7.1.6. Συμπεράσματα Για Την Μετατοπισμένη Γάμμα Μέθοδο

Σύμφωνα με όλες τις εφαρμογές που χρησιμοποιήσαμε την Μετατοπισμένη Γάμμα Μέθοδο (εφαρμογές 2.2.6, 3.3.1 και 6.1 που ανήκουν στα κεφάλαια 2, 3 και 6 αντίστοιχα), είναι εύλογο στο να αποφανθούμε ότι έχει μια άξια θέση στις έξι (οι πέντε είναι οι προηγούμενες που αναφέραμε) πιο βασικές μεθόδους που προσεγγίζουν την συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της S.

Η Μετατοπισμένη Γάμμα Μέθοδος κάνει χρήση της σ.π. της Μετατοπισμένης (κατά k παράμετρο μετατόπισης) Γάμμα κατανομής με παραμέτρους  $\alpha'$  και  $\beta'$  οι οποίοι μαζί με το k υπολογίζονται μέσω ενός συστήματος εξισώσεων. Ένα χρήσιμο συμπέρασμα που προκύπτει ως προς την Μετατοπισμένη Γάμμα Μέθοδο είναι ότι όταν η N ακολουθεί την Poisson κατανομή είναι ότι η λύση του συστήματος είναι εύκολη (εννοείται πώς το ίδιο ισχύει και όταν η κατανομή της N ανήκει στην οικογένεια κατανομών του Panjer).

Αυτή η μέθοδος εφαρμόζει ακόμα καλύτερα στην προσέγγιση της  $S$  όταν οι ατομικές απαιτήσεις (ζημιές) της  $X$  ανήκουν στην Οικογένεια Εκθετικών Κατανομών (βλ. Παράρτημα ΣΤ'), αφότου πρώτα έχει εφαρμοσθεί στην  $X$  η μέθοδος της διακριτοποίησης.

#### 7.1.7. Συμπεράσματα Για Τις Επιπρόσθετες Μεθόδους Για Την Συνάρτηση Κατανομής Των Συνολικών Απαιτήσεων

Πέρα από τις έξι βασικές μεθόδους που ερευνήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια (συγκεκριμένα στα κεφάλαια 1, 2, 3 και 6), κάναμε χρήση και κάποιων άλλων προσεγγιστικών μεθόδων που άξιζε να ερευνήσουμε, αν και δεν ανήκουν λόγω της πολυπλοκότητας των πράξεων τους στις βασικές μεθόδους. Αυτές είναι ο Μετασχηματισμός Laplace, η Μέθοδος των Wilson – Hilferty και η Μέθοδος του Haldane.

Όσον αφορά τον Μετασχηματισμό Laplace, είναι εύκολη η χρήση αυτής της μεθόδου, όταν η κατανομή της  $S$  είναι γνωστή κατανομή και υπάρχει τύπος για την ροπογεννήτρια συνάρτηση της (βλ. Παράρτημα Α') όπως και ερευνήσαμε στην Εφαρμογή 3.3.3 στο Κεφάλαιο 3 με ικανοποιητικά αποτελέσματα. Επιπροσθέτως, ο Μετασχηματισμός Laplace είναι υπερβολικά ικανοποιητικός στο να προσεγγίσει την  $S$  όταν και η  $X$  αλλά και η  $N$  ακολουθούν κάποια γνωστή συνεχή κατανομή.

Όσον αφορά την Μέθοδο των Wilson – Hilferty την οποία ερευνήσαμε μέσα από τις εφαρμογές 3.3.3 και 6.1 που υπάρχουν στα κεφάλαια 3 και 6 αντίστοιχα, είναι σε θέση να προσεγγίζει την συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $S$ . Δεν δίνει και τα πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα όπως ερευνήσαμε σε σχέση με τις άλλες μεθόδους που συγκρίναμε.

Όσον αφορά την Μέθοδο του Haldane την οποία ερευνήσαμε και αυτήν μέσα από τις εφαρμογές 3.3.3 και 6.1 που υπάρχουν στα κεφάλαια 3 και 6 αντίστοιχα, είναι σε καλύτερη θέση να προσεγγίζει την συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $S$ . Ανάλογα τη κατανομή που ακολουθεί η  $X$ , η  $N$  αλλά και η  $S$ , η μέθοδος αυτή μπορεί και δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα όπως ερευνήσαμε σε σχέση με τις άλλες δύο προαναφερθείσες επιπρόσθετες μεθόδους που συγκρίναμε, μέσω της επίλυσης ενός πολύπλοκου συστήματος με παράμετρο τον "εκθέτη του Haldane" κάνει χρήση της τυποποιημένης τ.μ. της  $S$  μέσω του Haldane αλλά και της Κανονικής σ.π., κάτι που είναι χρήσιμο μέσω του προγράμματος της R. Επίσης μπορεί για συγκεκριμένη τιμή του "εκθέτη του Haldane" να ταυτιστεί με την Κανονική Μέθοδο.



Στο Παράρτημα ΣΤ΄ γίνεται λόγος και για άλλες προσεγγιστικές μεθόδους οι οποίες λόγω της υπερβολικής πολυπλοκότητας τις ερευνήσαμε περαιτέρω μέσω εφαρμογών απλώς κάνουμε μια αναφορά.

## **7.2. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΣΤΙΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ**

Στη συγκεκριμένη ενότητα αναφέρουμε τα κυριότερα αποτελέσματα που εξάγαμε για κάθε μια από τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας στην περίπτωση που ο χρονικός ορίζοντας που εξετάζουμε είναι συνεχής ή άπειρος, αλλά και όταν είναι διακριτός ή και πεπερασμένος.

### **7.2.1. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Του Tijms**

Η συγκεκριμένη μέθοδος αποτελεί ίσως την πιο ικανοποιητική μέθοδο σε σχέση με τις επτά βασικούς μεθόδους στη συνεχή περίπτωση (βλ. Κεφάλαιο 5) για την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Αρχικά, είδαμε μόνη της (σε σύγκριση πάντα με την ακριβή μορφή της πιθανότητας χρεοκοπίας), στην Εφαρμογή 5.2.2 στο Κεφάλαιο 5, και αν εξαιρέσουμε την επιπρόσθετη χρήση του προγράμματος Mathematica σε συνδυασμό με το πρόγραμμα της R, λόγω της πολυπλοκότητας στην επίλυση της εξίσωσης του Lundberg για την εύρεση του συντελεστή προσαρμογής, του παραμέτρου  $\gamma$ , αλλά και διαφόρων ολοκληρωμάτων, ένα είναι σίγουρο ότι προσεγγίζει με υψηλή ακρίβεια (υπάρχει ταύτιση) την πιθανότητα χρεοκοπίας από την αρχική τιμή του πλεονάσματος (ίσο με το μηδέν), μέχρι την στιγμή που φτάνει στο μηδέν (βασικό στοιχείο καταλληλότητας μεθόδου).

Επίσης, στην Εφαρμογή 5.2.5 στο Κεφάλαιο 5, η Μέθοδος του Tijms σε σύγκριση με τρεις άλλες μεθόδους (α. την Μέθοδο των Cramer – Lundberg, β. την Μέθοδο των Beekman – Bowers, γ. την Μέθοδο του De Vylder και σε σύγκριση πάντα με την ακριβή μορφή της πιθανότητας χρεοκοπίας), αποτελεί την πιο ικανοποιητική μέθοδο που προσεγγίζει με υψηλή ακρίβεια (υπάρχει ταύτιση) την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Τέλος, ένα σημαντικό θέμα που ανακύπτει μέσω της Μεθόδου του Tijms είναι ότι χρειάζεται το πρόγραμμα Mathematica για τον υπολογισμό των πολύπλοκων πράξεων, άρα ίσως καλύτερα να γίνεται κατευθείαν μέσω αυτού του προγράμματος εξολοκλήρου όλη αυτή η μέθοδος, για να έχει καλύτερη εφαρμογή, παρά μέσω της R.

### 7.2.2. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Των Cramer - Lundberg

Η Μέθοδος των Cramer - Lundberg αποτελεί και αυτή (μαζί με την Μέθοδο του Tijms) την πιο ικανοποιητική μέθοδο σε σχέση με τις επτά βασικούς μεθόδους στη συνεχή περίπτωση (βλ. Κεφάλαιο 5) για την προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας. Όταν, την είδαμε μόνη της (σε σύγκριση πάντα με την ακριβή μορφή της πιθανότητας χρεοκοπίας), στην Εφαρμογή 5.2.1 στο Κεφάλαιο 5, είναι σίγουρο ότι προσεγγίζει ικανοποιητικά την πιθανότητα χρεοκοπίας, όχι όμως από την αρχική τιμή του πλεονάσματος (ίσο με το μηδέν), αλλά σε μεταγενέστερες τιμές μέχρι και την στιγμή που φτάνει στο μηδέν (βασικό στοιχείο καταλληλότητας μεθόδου).

Επίσης, στην Εφαρμογή 5.2.4 και στην Εφαρμογή 5.2.5 στο Κεφάλαιο 5, η Μέθοδος των Cramer – Lundberg σε σύγκριση με τρεις άλλες μεθόδους (τρεις διαφορετικές σε καθεμία από τις δύο προαναφερθείσες εφαρμογές και σε σύγκριση πάντα με την ακριβή μορφή της πιθανότητας χρεοκοπίας), αποτελεί την πιο ικανοποιητική μέθοδο που προσεγγίζει πολύ ικανοποιητικά (υπάρχει ταύτιση σε πολλά σημεία, εκτός των αρχικών τιμών για το πλεόνασμα) με την πιθανότητα χρεοκοπίας, μέχρι την στιγμή που φθίνει η πιθανότητα χρεοκοπίας και τελικά φτάνει στο μηδέν. Σε σύγκριση με τις άλλες μεθόδους αποτελεί την μέθοδο όχι με τις περισσότερες πράξεις.

Ένα σημαντικό θέμα που προκύπτει μέσω της Μεθόδου των Cramer - Lundberg είναι ότι χρειάζεται μόνο το πρόγραμμα Mathematica για τον υπολογισμό των πολύπλοκων πράξεων, στην επίλυση της εξίσωσης του Lundberg άρα ίσως και για αυτήν την μέθοδο καλύτερα να γίνεται κατευθείαν μέσω αυτού του προγράμματος εξολοκλήρου, για να έχει καλύτερη εφαρμογή, παρά μέσω της R.

### 7.2.3. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Του Lundberg

Σύμφωνα με όλες τις εφαρμογές που χρησιμοποιήσαμε η Μέθοδος του Lundberg (εφαρμογές 5.2.4 και 6.1 που ανήκουν στα κεφάλαια 5 και 6 αντίστοιχα), καταλαβαίνουμε ότι έχει μια άξια θέση στις επτά πιο βασικές μεθόδους που προσεγγίζουν την πιθανότητα χρεοκοπίας, κατά την συνεχή περίπτωση.

Η Μέθοδος του Lundberg κάνει χρήση μόνο των τριών πρώτων ροπών της συνάρτησης κατανομής των κινδύνων. Αυτό δείχνει το πόσο απλουστευμένη μέθοδος είναι σε σχέση με τις δύο (πιο ικανοποιητικές) προαναφερθείσες μεθόδους που υπάρχουν στην συνεχή περίπτωση, άλλωστε αποτελεί και την

πιο απλουστευμένη μορφή της Μεθόδου των Cramer – Lundberg, αφού δεν κάνει χρήση του συντελεστή προσαρμογής.

Πιο συγκεκριμένα, πληρεί όλες τις προϋποθέσεις για να είναι μια ικανοποιητική μέθοδος, δηλαδή οι τιμές της πιθανότητας χρεοκοπίας φθίνουν σε σχέση με τις τιμές του πλεονάσματος και επίσης ταυτίζεται λίγο αργότερα με την ακριβή μορφή της πιθανότητας χρεοκοπίας (όπως είδαμε στην Εφαρμογή 5.2.4 στο Κεφάλαιο 5) όταν φτάνει στο μηδέν. Ενώ στην Εφαρμογή 6.1 στο Κεφάλαιο 6, αν εξαιρέσουμε την πιο ικανοποιητική προσέγγιση εκείνης της εφαρμογής που είναι η Μέθοδος Light – Traffic , τότε είναι η αμέσως μετά πιο ικανοποιητική προσέγγιση για μια Σύνθετη κατανομή κινδύνων όπως είναι η Σύνθετη Poisson.

#### 7.2.4. Συμπεράσματα Για Την Εκθετική Μέθοδο

Σύμφωνα με όλες τις εφαρμογές που χρησιμοποιήσαμε την Μέθοδο του Lundberg (εφαρμογές 5.2.6 και 6.1 που ανήκουν στα κεφάλαια 5 και 6 αντίστοιχα), καταλαβαίνουμε ότι έχει και αυτή μια άξια θέση στις επτά πιο βασικές μεθόδους που προσεγγίζουν την πιθανότητα χρεοκοπίας κατά την συνεχή περίπτωση.

Η Εκθετική Μέθοδος, όπως η Μέθοδος του Lundberg κάνει χρήση μόνο των τριών πρώτων ροπών της συνάρτησης κατανομής των κινδύνων. Αυτό δείχνει το πόσο απλουστευμένη μέθοδος και αυτή είναι σε σχέση με τη Μέθοδο του Tijms και τη Μέθοδο των Cramer - Lundberg που υπάρχουν στην συνεχή περίπτωση. Επίσης σε σχέση με τις δύο προαναφερθείσες μεθόδους, δεν κάνει χρήση του συντελεστή προσαρμογής.

#### 7.2.5. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Του Renyi

Η Μέθοδος του Renyi, όπως έχουμε αναφέρει (βλ. Κεφάλαιο 5), αποτελεί απλοποιημένη έκδοση της προσεγγιστικής Μεθόδου των Beekman - Bowers.

Απαιτεί μόνο τις δύο πρώτες ροπές να είναι πεπερασμένες, άρα είναι μια μέθοδος που μπορεί να χρησιμοποιηθεί πολύ εύκολα σε σχέση με όλες τις υπόλοιπες μεθόδους.

Όσον αφορά, την Εφαρμογή 5.2.6 στο Κεφάλαιο 5 αλλά και την Εφαρμογή 6.1 στο Κεφάλαιο 6 ερευνήσαμε το πόσο εύχρηστη και λειτουργική σε σχέση με άλλες μεθόδους για να προσεγγίσει την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω του

προγράμματος R, ανεξαρτήτως αν η κατανομή των κινδύνων είναι συνεχής ή διακριτή, κατά αντιστοιχία των δύο εφαρμογών.

#### 7.2.6. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Των Beekman - Bowers

Με βάση όλες τις εφαρμογές που χρησιμοποιήσαμε η Μέθοδος των Beekman - Bowers (εφαρμογές 5.2.5 και 6.1 που ανήκουν στα κεφάλαια 5 και 6 αντίστοιχα), είναι εύλογο στο να αποφανθούμε ότι έχει και αυτή μια άξια θέση στις επτά πιο βασικές μεθόδους που προσεγγίζουν την πιθανότητα χρεοκοπίας, κατά την συνεχή περίπτωση.

Η Μέθοδος των Beekman – Bowers, κάνει χρήση της σ.κ. της Γάμμα κατανομής με παραμέτρους  $\alpha'$  και  $\beta'$  οι οποίοι μαζί με το k υπολογίζονται μέσω ενός συστήματος εξισώσεων. Αρνητικό συμπέρασμα αποτελεί η περίπλοκη επίλυση του συστήματος για τον εντοπισμό των παραμέτρων  $\alpha'$  και  $\beta'$ , οι οποίες μπορεί να μην παίρνουν ακέραιες τιμές.

Ένα χρήσιμο συμπέρασμα που προκύπτει ως προς την Μέθοδο των Beekman - Bowers είναι ότι αυτή η μέθοδος εφαρμόζει ακόμα καλύτερα στην προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας, όταν οι ατομικές απαιτήσεις (ζημιές) της X ανήκουν στην Οικογένεια Εκθετικών Κατανομών (βλ. Παράρτημα ΣΤ), όπως και διαπιστώσαμε στην Εφαρμογή 5.2.5 στο Κεφάλαιο 5.

Ένα επιπλέον αρνητικό συμπέρασμα που προκύπτει ως προς την Μέθοδο των Beekman - Bowers είναι ότι αυτή η μέθοδος δεν εφαρμόζει ικανοποιητικά στην προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας, όταν οι ατομικές απαιτήσεις (ζημιές) της X, αλλά και των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της S δεν ανήκουν στην Οικογένεια Εκθετικών Κατανομών (βλ. Παράρτημα ΣΤ), όπως και διαπιστώσαμε στην Εφαρμογή 6.1 στο Κεφάλαιο 6.

#### 7.2.7. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Του De Vylder

Για τη Μέθοδο του De Vylder, αν και χρησιμοποιήθηκε στις περισσότερες εφαρμογές (5.2.1, 5.2.5, 5.2.6 στο Κεφάλαιο 5, αλλά και την 6.1 στο Κεφάλαιο 6) σε σχέση με όλες τις μεθόδους που ερευνήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια, μπορούμε με σιγουριά να εξάγουμε τρία συμπεράσματα.

Το πρώτο συμπέρασμα είναι ότι αποτελεί μια αρκετή πολύπλοκη μέθοδο σε σύγκριση με όλες τις έξι προαναφερθείσες μεθόδους.

Ένα δεύτερο συμπέρασμα που μπορούμε να εξάγουμε, είναι ότι στις περισσότερες περιπτώσεις δεν προσεγγίζει καθόλου ικανοποιητικά την πιθανότητα χρεοκοπίας, αφού δεν φτάνει με γρήγορο ρυθμό (όσο η πιθανότητα φθίνει) στο μηδέν. Μιας και αυτός είναι ένας σημαντικός λόγος για να επιλέξουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση η οποία μέθοδος δεν Καταφέρνει να κάνει.

Τρίτο συμπέρασμα είναι ότι αυτή η μέθοδος δεν εφαρμόζει ικανοποιητικά στην προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας, όταν οι ατομικές απαιτήσεις (ζημιές) της  $X$ , αλλά και των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $S$  δεν ανήκουν στην Οικογένεια Εκθετικών Κατανομών (βλ. Παράρτημα ΣΤ'), όπως και για άλλη μια φορά διαπιστώσαμε στην Εφαρμογή 6.1 στο Κεφάλαιο 6.

#### 7.2.8. Συμπεράσματα Για Την Κανονική Μέθοδο

Η Κανονική Μέθοδος αποτελεί την μοναδική μέθοδο, όταν ο χρόνος χρεοκοπίας είναι πεπερασμένος και συνεχής, που μελετήσαμε στο Κεφάλαιο 4 και πιο συγκεκριμένα στην Εφαρμογή 4.5.1 κατά την οποία αναλύσαμε αυτήν την μέθοδο στην προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπία όταν οι ζημιές ακολουθούν τρεις διαφορετικές κατανομές (Εκθετική, Γάμμα και Βήτα).

Όταν κρατήσαμε σταθερό το χρόνο χρεοκοπίας  $t$  και μεταβάλαμε το πλεόνασμα  $u$ , η προσέγγιση δεν είναι καθόλου ικανοποιητική και για τις τρεις διαφορετικές κατανομές, αν εξαιρέσουμε μόνο την περίπτωση για  $u = 0$ . Δηλαδή, καταλαβαίνουμε ότι ανεξαρτήτως της συνεχής κατανομής που ακολουθούν οι ζημιές, η προσέγγιση παίρνει πολύ χαμηλές τιμές κοντά στο μηδέν και δεν είναι καθόλου ικανοποιητική για την πιθανότητα χρεοκοπίας.

Όταν κρατήσαμε σταθερό το πλεόνασμα  $u$  και μεταβάλαμε το χρόνο χρεοκοπίας  $t$ , η προσέγγιση είναι πολύ ικανοποιητική και για τις τρεις διαφορετικές κατανομές, και ακόμα πιο ικανοποιητική στην περίπτωση που το  $t$  είναι πολύ μεγάλο.

Το μόνο αρνητικό που έχει αυτή η μέθοδος, είναι ότι επειδή έχει μεγάλη πολυπλοκότητα στις πράξεις και πιο συγκεκριμένα στο να υπολογίσει τις διάφορες ροπές του χρόνου χρεοκοπίας, είναι καλύτερα να γίνεται αυτό κατευθείαν μέσω του προγράμματος Mathematica εξολοκλήρου, για να έχει καλύτερη εφαρμογή, παρά μέσω της R.

#### 7.2.9. Συμπεράσματα Για Την Αναδρομική Μέθοδο

Η μέθοδος αυτή, σίγουρα πρέπει να γίνεται κατευθείαν μέσω του προγράμματος Mathematica εξολοκλήρου, για να έχει καλύτερη εφαρμογή, παρά μέσω της R. Αυτό το αναδεικνύει η όλη (πολύπλοκη) αλγοριθμική φόρμουλα που πρέπει να επιλυθεί για να γίνει χρήση αυτής της προσέγγισης.

Σημαντικό συμπέρασμα, είναι ότι αυτή η μέθοδος εφαρμόζει ικανοποιητικά στην προσέγγιση της πιθανότητας χρεοκοπίας, όταν οι ατομικές απαιτήσεις (ζημιές) της  $X$ , να ακολουθούν μια διακριτή κατανομή.

#### 7.2.10. Συμπεράσματα Για Τις Επιπρόσθετες Μεθόδους Για Την Πιθανότητα Χρεοκοπίας

Πέρα από τις έξι βασικές μεθόδους που ερευνήσαμε στα προηγούμενα κεφάλαια (συγκεκριμένα στα κεφάλαια 1, 2, 3 και 6), κάναμε χρήση και κάποιων άλλων προσεγγιστικών μεθόδων που άξιζε να ερευνήσουμε, αν και δεν ανήκουν λόγω της πολυπλοκότητας των πράξεων τους στις βασικές μεθόδους. Αυτές είναι η Μέθοδος Light Traffic, η Μέθοδος Heavy Traffic και η Μέθοδος Heavy – Light Traffic.

Όσον αφορά την Μέθοδο Light Traffic, είναι εύκολη η χρήση αυτής της μεθόδου, όταν η κατανομή της  $S$  είναι γνωστή κατανομή και υπάρχει τύπος για την δεξιά συνάρτηση κατανομής της (βλ. Παράρτημα Α') όπως και ερευνήσαμε στην Εφαρμογή 5.2.7 στο Κεφάλαιο 5 με ικανοποιητικά αποτελέσματα.

Όσον αφορά την Μέθοδο Heavy Traffic την οποία ερευνήσαμε μέσα από τις εφαρμογές 5.2.7 και 6.1 που υπάρχουν στα κεφάλαια 5 και 6 αντίστοιχα, είναι σε θέση να προσεγγίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας. Δεν δίνει και τα πιο ικανοποιητικά αποτελέσματα όπως ερευνήσαμε σε σχέση με τις άλλες μεθόδους που συγκρίναμε, αλλά ανεξαρτήτως της κατανομής που ακολουθεί η  $X$ , είναι εύχρηστη η  $S$  μέσω της απλής αντικατάστασης των παραμέτρων που έχει στο τύπο της χωρίς την επίλυση ενός πολύπλοκου συστήματος με παραμέτρους όπως άλλες μεθόδους, κάτι που είναι χρήσιμο μέσω του προγράμματος της R.

Όσον αφορά την Μέθοδο Heavy – Light Traffic την οποία ερευνήσαμε και αυτήν μέσα από τις εφαρμογές 5.2.7 και 6.1 που υπάρχουν στα κεφάλαια 5 και 6 αντίστοιχα, είναι σε καλύτερη θέση να προσεγγίζει την πιθανότητα χρεοκοπίας. Ανάλογα τη κατανομή που ακολουθεί η  $X$ , αλλά και η  $S$  μπορεί

και δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα όπως ερευνήσαμε σε σχέση με τις άλλες δύο προαναφερθείσες επιπρόσθετες μεθόδους που συγκρίναμε, άλλωστε αποτελεί μια μείξη των μεθόδων Heavy Traffic και Light Traffic.

### **7.3. ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΑ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ**

Στη συγκεκριμένη ενότητα αναφέρουμε κάποια επιπρόσθετα συμπεράσματα για κάποια “βοηθητικά εργαλεία” που χρησιμοποιήθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια για να χρησιμοποιηθούν καλύτερα οι προσεγγιστικές μέθοδοι.

#### **7.3.1. Συμπεράσματα Για Την Μέθοδο Της Διακριτοποίησης**

Η Μέθοδος της Διακριτοποίησης (βλ. Κεφάλαιο 3), αποτελεί ένα βασικό “βοηθητικό εργαλείο” στην περίπτωση που θέλουμε να προσεγγίσουμε την συνάρτηση κατανομής των συνολικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $S$  και η συνάρτηση κατανομής των ατομικών απαιτήσεων (ζημιών) της  $X$  ακολουθεί μια κατανομή μη-διακριτή (είτε συνεχής, είτε μείξη κατανομών).

Η μέθοδος αυτή κάνει χρήση τεσσάρων υπο-μεθόδων (α. άνω “upper” διακριτοποίηση, β. κάτω “lower” διακριτοποίηση, γ. στρογγυλοποίηση “rounding” της τυχαίας μεταβλητής και δ. αμερόληπτη “unbiased” της μεθόδου της πρώτης ροπής) για να διακριτοποιήσει την εκάστοτε μη-διακριτή κατανομή και μπορεί με ευκολία να χρησιμοποιηθεί μέσω του προγράμματος R.

#### **7.3.2. Συμπεράσματα Για Την Ανισότητα Του Lundberg**

Η Ανισότητα του Lundberg (βλ. Κεφάλαιο 1), ανάλογα σε ποια περίπτωση χρησιμοποιείται μπορεί να χαρακτηριστεί είτε ως “βοηθητικό εργαλείο” για μια προσέγγιση, είτε ως η ίδια προσέγγιση.

Στην Εφαρμογή 5.2.4 στο Κεφάλαιο 5, τελικά διαπιστώνουμε ότι αποτελεί ένα φράγμα (“βοηθητικό εργαλείο”) για την πιθανότητα χρεοκοπίας που μέσα σε αυτό δεσμεύονται οι τιμές από τις υπόλοιπες προσεγγίσεις και καταλαβαίνουμε ποια από όλες τις προσεγγίσεις είναι η καλύτερη (δηλαδή, η προσέγγιση που είναι πιο κοντά σε αυτό το φράγμα).

Στην Εφαρμογή 4.5.2 στο Κεφάλαιο 4, η χρήση της είναι καθαρά ως προσέγγιση για την πιθανότητα χρεοκοπίας (στην περίπτωση που ο χρόνος χρεοκοπίας είναι πεπερασμένος και συνεχής) και διαπιστώνουμε ότι αποτελεί

μια πολύ ικανοποιητική προσέγγιση στην περίπτωση που δεν μπορεί να υπολογιστεί η ακριβής μορφή της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Επίσης, είτε ως “βοηθητικό εργαλείο”, είτε ως προσέγγιση, η Ανισότητα του Lundberg μπορεί με ευκολία να χρησιμοποιηθεί μέσω του προγράμματος R.

### 7.3.3. Συμπεράσματα Για Τις Ροπές Του Χρόνου Χρεοκοπίας

Οι Ροπές του Χρόνου Χρεοκοπίας αποτελούν ένα βασικό “βοηθητικό εργαλείο” στην περίπτωση που θέλουμε να προσεγγίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας μέσω της Κανονικής Μεθόδου, στην περίπτωση που ο χρόνος χρεοκοπίας είναι πεπερασμένος και συνεχής.

Σύμφωνα με το Κεφάλαιο 4 αυτό το “βοηθητικό εργαλείο”, λειτουργεί πολύ ικανοποιητικά στην περίπτωση που οι ζημιές ανήκουν στην Οικογένεια Εκθετικών Κατανομών (βλ. Παράρτημα ΣΤ') και λόγω της πολυπλοκότητας των πράξεων στο υπολογισμό των Ροπών του Χρόνου Χρεοκοπίας καλύτερα αυτοί οι υπολογισμοί να γίνονται κατευθείαν μέσω του προγράμματος Mathematica εξολοκλήρου.

Επίσης, οι Ροπές του Χρόνου Χρεοκοπίας αποτελούν από τα πιο ενδιαφέροντα ερευνητικά αντικείμενα στην Θεωρία Χρεοκοπίας και τα αποτελέσματα που εξάγουμε από αυτές τις ροπές σίγουρα βοηθούν στην κατανόηση όχι μόνο της πιθανότητας χρεοκοπίας, αλλά και της χρονικής στιγμής που θα επέλθει αυτή η χρεοκοπία.



## A. ΟΙ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΑΠΩΛΕΙΑΣ

Το παρακάτω παράρτημα παρουσιάζεται στο ΠΙΤΣΕΛΗΣ Γ. , **ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ Π.Μ.Σ. «ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ» ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΖΗΜΙΟΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΑΠΩΛΕΙΑΣ, ΠΕΙΡΑΙΑΣ, 2018** . Αλλά και στην ηλεκτρονική σελίδα [https://en.wikipedia.org/wiki/Probability\\_distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_distribution)

### A.1. ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

#### A.1.1. ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ

σ.π.π.  $f(x) = \frac{1}{k}$  για  $x=1,2,\dots,k$ .

Μέση τιμή  $E(X) = \frac{(k+1)}{2}$

Διακύμανση  $Var(X) = \frac{(k^2-1)}{12}$

Ροπογεννήτρια  $M_X(t) = \sum_x e^{ix} \frac{1}{k}$

#### A.1.2. BERNOULLI

σ.π.π.  $f(x) = p^x(1-p)^{1-x}$  για  $x \in \{0,1\}$ ,  $0 < p < 1$

Μέση τιμή  $E(X) = p$

Διακύμανση  $Var(X) = p(1-p)$

Ροπογεννήτρια  $M_X(t) = e^t p + (1-p)$

#### A.1.3. ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ

σ.π.π.  $f(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x}$  για  $x=0,1,\dots,n$ ,  $0 \leq p \leq 1$

Μέση τιμή  $E(X) = np$

Διακύμανση  $Var(X) = np(1-p)$

Ροπογεννήτρια  $M_X(t) = [e^t p + (1-p)]^n$

#### A.1.4. POISON

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} \text{ για } x=0,1,\dots, \lambda>0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \lambda$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \lambda$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = e^{\lambda(e^t-1)}$$

#### A.1.5. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ

$$\sigma.π.π. f(x) = p(1-p)^{x-1} \text{ για } x=1,2,3,\dots, 0 \leq p \leq 1$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \frac{p}{1-qe^t}$$

#### A.1.6. ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ

$$\sigma.π.π. f(x) = \binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r} \text{ για } x=r,r+1,r+2,\dots, 0 \leq p \leq 1$$

$$\text{ή } f(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x \text{ για } x=0,1,2,\dots$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{r(1-p)}{p}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{r(1-p)}{p^2}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \left( \frac{p}{1-qe^t} \right)^r$$

#### A.1.7. ΥΠΕΡΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{\binom{k}{x} \binom{N-k}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ για } x=0,1,2,\dots,n, 0 \leq k \leq N, 1 \leq n \leq N$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = n \frac{k}{N}$$

$$\text{Διακύμανση } \text{Var}(X) = n \frac{k}{N} \frac{N-k}{N} \frac{N-n}{N-1}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \frac{\binom{N-k}{n} {}_2F_1(-n, -K; N-K-n+1; e^t)}{\binom{N}{n}}$$

$$\text{όπου } {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n z^n}{(b_1)_n \dots (b_q)_n n!},$$

$$\text{με } (\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) \dots (\alpha+n-1), n \geq 1$$

#### A.1.8. ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΗ

$$\text{σ.π.π. } f(x) = \frac{n!}{x_1! \dots x_k!} p_1! \dots p_k! \text{ για } n > 0, 1 \geq p_1, \dots, p_k \geq 0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X_i) = np_i$$

$$\text{Διακύμανση } \text{Var}(X_i) = np_i(1-p_i)$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_{X_i}(t) = \left( \sum_{i=1}^k p_i e^{t_i} \right)^n$$

#### A.1.9. ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ

$$\text{σ.π.π. } f(x) = \frac{-1}{\ln(1-p)} \frac{p^x}{x} \text{ για } 1 \geq p \geq 0, x \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{-1}{\ln(1-p)} \frac{p}{1-p}$$

$$\text{Διακύμανση } \text{Var}(X) = -p \frac{p + \ln(1-p)}{(1-p)^2 (\ln(1-p))^2}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \frac{\ln(1-pe^t)}{\ln(1-p)}$$

#### A.1.10. ΒΗΤΑ-ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ

$$\text{σ.π.π. } f(x) = \binom{n}{x} \frac{B(x+\alpha, n-x+\beta)}{B(\alpha, \beta)} \text{ για } x \in \{0, \dots, n\}, n \in N_0, \alpha, \beta > 0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{n\alpha}{\alpha+\beta}$$

$$\text{Διακύμανση } \text{Var}(X) = \frac{n\alpha\beta(\alpha+\beta+n)}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = {}_2F_1(-n, \alpha; \alpha+\beta; 1-e^t)$$

A.1.11. ΖΗΤΑ

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{x^{-s}}{\zeta(s)} \text{ για } x \in \{1,2,3, \dots\}, s \in (1, \infty)$$

$$\text{όπου } \zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, s \in (1, \infty)$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{\zeta(s)\zeta(s-2) - \zeta(s-1)^2}{\zeta(s)^2}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = = \frac{1}{\zeta(s)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{tk}}{k^s}$$

A.1.12. ZIPF

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{x^{-s}}{H_{N,s}} \text{ για } s \geq 0, N \in \{1,2,3, \dots\}, x \in \{1,2,3, \dots, N\}$$

$$\text{όπου } H_{k,s} = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i^s}, k \in \{1,2,3, \dots, N\}, s \in (1, \infty)$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{H_{k,s}}{H_{N,s}}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = = \frac{1}{H_{N,s}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{tk}}{k^s}$$

A.1.13. DELAPORTE

$$\sigma.π.π. f(x) = \sum_{i=0}^x \frac{\Gamma(\alpha+i)\beta^i \lambda^{x-i} e^{-\lambda}}{\Gamma(\alpha) i! (1+\beta)^{\alpha+i} (x-i)!} \text{ για } x \in \{0,1,2, \dots\}, \lambda, \alpha, \beta > 0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \lambda + \alpha\beta$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \lambda + \alpha\beta(1 + \beta)$$

A.1.14. YULE – SIMON

$$\sigma.π.π. f(x) = \rho B(x, \rho + 1) = \frac{\rho \Gamma(\rho+1)}{(x+\rho)^{\rho+1}} \text{ για } \rho > 0, x \in \{1,2, \dots\}$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{\rho}{\rho-1}$$

$$\text{Διακύμανση } \text{Var}(X) = \frac{\rho^2}{(\rho-1)^2(\rho-1)}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \frac{\rho}{\rho+1} {}_2F_1(1,1; \rho+2; e^t)e^t$$

#### A.1.15. SKELLAM

$$\text{σ.π.π. } f(x) = e^{-(\mu_1+\mu_2)} \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^{x/2} I_x(2\sqrt{\mu_1\mu_2}) \text{ για } \mu_1, \mu_2 \geq 0, x \in \{0,1,2, \dots\}$$

$$\text{όπου } I_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}, \alpha > 0, x \in \{0,1,2, \dots\}$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \mu_1 - \mu_2$$

$$\text{Διακύμανση } \text{Var}(X) = \mu_1 + \mu_2$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = e^{-(\mu_1+\mu_2)+\mu_1 e^t+\mu_2 e^{-t}}$$

#### A.1.16. CONWAY – MAXWELL – POISSON

$$\text{σ.π.π. } f(x) = \frac{\lambda^x}{(x!)^\nu Z(\lambda, \nu)} \text{ για } x \in \{0,1,2, \dots\} \lambda > 0, \nu \geq 0$$

$$\text{όπου } Z(\lambda, \nu) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{(j!)^\nu}, \lambda > 0, \nu \geq 0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i\lambda^i}{(i!)^\nu Z(\lambda, \nu)}$$

$$\text{Διακύμανση } \text{Var}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^2 \lambda^i}{(i!)^\nu Z(\lambda, \nu)} - \left( \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i\lambda^i}{(i!)^\nu Z(\lambda, \nu)} \right)^2$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \frac{Z(\lambda e^t, \nu)}{Z(\lambda, \nu)}$$

#### A.1.17 GAUSS – KUZMIN

$$\text{σ.π.π. } f(x) = -\log_2 \left[ 1 - \frac{1}{(x-2)^2} \right] \text{ για } x \in \{1,2, \dots\}$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = +\infty$$

$$\text{Διακύμανση } \text{Var}(X) = +\infty$$

#### A.1.18. ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΗ

για  $k > 0$ ,  $1 \geq p_i \geq 0$ ,  $x \in \{1, 2, \dots, k\}$  έχουμε:

i)  $p(x = i) = p_i$

ii)  $p(x) = p_1^{[x=1]} \dots p_k^{[x=k]}$

iii)  $p(x) = [x = 1]p_1 + \dots + [x = k]p_k$

όπου  $[x = i] = \begin{cases} 1, & \text{αν } i = \text{true} \\ 0, & \text{αν } i = \text{false} \end{cases}$

## A.2. ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

### A.2.1. ΟΜΟΙΟΜΟΡΦΗ

σ.π.π.  $f(x) = \frac{1}{b-a}$  για  $a < x < b$ ,  $a, b > \mathbb{R}$

Μέση τιμή  $E(X) = \frac{a+b}{2}$

Διακύμανση  $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Ροπογεννήτρια  $M_X(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{(b-a)t}$

### A.2.2. ΚΑΝΟΝΙΚΗ / GAUSSIAN

σ.π.π.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$  για  $x \in (-\infty, +\infty)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$

Μέση τιμή  $E(X) = \mu$

Διακύμανση  $Var(X) = \sigma^2$

Ροπογεννήτρια  $M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

### A.2.3. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΚΑΝΟΝΙΚΗ

σ.π.π.  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}$  για  $x > 0$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$

Μέση τιμή  $E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}}$

Διακύμανση  $Var(X) = e^{2(\mu + \sigma^2)}(e^{\sigma^2} - 1)$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

#### A.2.4. ΕΚΘΕΤΙΚΗ

$$\text{σ.π.π. } f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \text{ για } x > 0, \lambda > 0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \frac{\lambda}{(\lambda - t)}$$

#### A.2.5. ΓΑΜΜΑ

$$\text{σ.π.π. } f(x) = \frac{b^a x^{a-1} e^{-bx}}{\Gamma(a)} \text{ για } x > 0, a, b > 0$$

$$\text{ή } f(x) = \frac{x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}}{b^a \Gamma(a)} \text{ για } x > 0, a, b > 0$$

$$\text{όπου } \Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx \text{ για } x > 0, a > 0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{a}{b}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{a}{b^2}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \left(\frac{b}{b-t}\right)^a$$

#### A.2.6. $\chi^2$

$$\text{σ.π.π. } f(x) = \frac{x^{\frac{v-2}{2}} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{v}{2}} \Gamma(\frac{v}{2})} \text{ για } x > 0, v = \text{βαθμοί ελευθερίας}$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = v$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = 2v$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = (1 - 2t)^{-\frac{v}{2}}$$

#### A.2.7. ΒΗΤΑ

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{1}{B(a,b)} x^{a-1} (1-x)^{b-1}, \text{ για } 0 < x < 1, \alpha, b > 0$$

$$\text{όπου } B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 \frac{x^{a-1}}{(1+x)^{a+b}} dx$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{a}{a+b}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{ab}{(a+b)(a+b+1)}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \prod_{r=0}^{k-1} \frac{a+r}{a+b+r} \right) \frac{t^k}{k!}$$

#### A.2.8. WEIBULL

$$\sigma.π.π. f(x) = \lambda \gamma x^{\gamma-1} e^{-\lambda x^\gamma}, \text{ για } x > 0, \lambda, \gamma > 0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{\Gamma(\frac{1}{\gamma}+1)}{\lambda^{\frac{1}{\gamma}}}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \lambda^2 \left[ \Gamma\left(\frac{2}{\gamma} + 1\right) - \left(\Gamma\left(\frac{1}{\gamma} + 1\right)\right)^2 \right]$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \sum_n^{\infty} \frac{t^n \lambda^n}{n!} \Gamma\left(\frac{n}{\gamma} + 1\right) = \lambda^{-t} \cdot \Gamma\left(\frac{t}{\gamma} + 1\right), \text{ για } \gamma > 1$$

#### A.2.10. PARETO TYPE I

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{x^{\alpha+1}}, \text{ για } x > 0, \alpha, \lambda > 0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{\alpha \lambda}{\alpha-1}, \text{ για } \alpha > 1$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{\alpha \lambda^2}{\alpha-2} - \left(\frac{\alpha \lambda}{\alpha-1}\right)^2, \text{ για } \alpha > 2$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = a(-\lambda t)^\alpha B(-\alpha, -\lambda t), \text{ για } t > 0$$



#### A.2.9. PARETO TYPE II

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{\alpha x^\alpha}{(x+\lambda)^{\alpha+1}}, \text{ για } x>0, \alpha, \lambda>0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{\lambda}{\alpha-1}, \text{ για } \alpha > 1$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}, \text{ για } \alpha > 2$$

#### A.2.11. BURR

$$\sigma.π.π. f(x) = \alpha \gamma \lambda^\alpha x^{\gamma-1} (x^\gamma + \lambda)^{-\alpha-1} \text{ για } x>0, \alpha, \gamma, \lambda>0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lambda^\gamma \Gamma\left(1 + \frac{\lambda}{\gamma}\right) \Gamma\left(\alpha - \frac{\lambda}{\gamma}\right)$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{2\lambda^2}{\gamma} B\left(\frac{2}{\gamma}, \alpha - \frac{2}{\gamma}\right) - \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \left[B\left(\frac{1}{\gamma}, \alpha - \frac{1}{\gamma}\right)\right]^2$$

#### A.2.12. LAPLACE

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|x-\mu|}{b}} \text{ για } x>0, b>0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \mu$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = 2b^2$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \frac{e^{\mu t}}{1-b^2 t^2}$$

#### A.2.13. CAUCHY

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{1}{\pi \gamma \left[1 + \left(\frac{x-\lambda}{\gamma}\right)^2\right]} \text{ για } x>0, \gamma, \lambda>0$$

#### A.2.14. ΛΟΓΙΣΤΙΚΗ

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{e^{-\frac{x-\mu}{s}}}{s \left(1 + e^{-\frac{x-\mu}{s}}\right)^2} \text{ για } x \in (-\infty, \infty), \mu \in \mathbb{R}, s>0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \mu$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{\pi^2 s^2}{3}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = e^{\mu t} B(1 - st, 1 + st)$$

#### A.2.15. BENKTANDER TYPE I

$$\text{σ.π.π. } f(x) = \left\{ \left[ \left( 1 + \frac{2b \log x}{a} \right) (1 + a + 2b \log x) \right] - \frac{2b}{a} \right\} x^{-(2+a+b \log x)}$$

για  $x \geq 1$ ,  $a, b > 0$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = 1 + \frac{1}{a}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{-\sqrt{b} + a e^{\frac{(a-1)^2}{4b}} \sqrt{\pi} \operatorname{erfc}\left(\frac{a-1}{2\sqrt{b}}\right)}{a^2 \sqrt{b}}$$

#### A.2.16. BENKTANDER TYPE II

$$\text{σ.π.π. } f(x) = e^{\frac{a}{b}(1-x^b)} x^{b-2} (a x^b - b + 1) \text{ για } x \geq 1, a > 0, 1 \geq b > 0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = 1 + \frac{1}{a}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{-b + 2a e^{\frac{a}{b}} E_{1-\frac{1}{b}}\left(\frac{a}{b}\right)}{a^2 b}$$

$$\text{όπου } E_n(x) = \int_1^\infty \frac{e^{-xt}}{t^n} dt, x \in \mathbb{R}^*$$

#### A.2.17. IRWIN – HALL

$$\text{σ.π.π. } f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} (-1)^k \binom{n}{k} (x-k)^{n-1} \text{ για } n \in \mathbb{N}_0, x \in [0, n]$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{n}{2}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{n}{12}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \left( \frac{e^t - 1}{t} \right)^n$$

A.2.17. ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΙΑΚΗ

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}} \text{ για } x \in [0,1]$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{1}{2}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{1}{8}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( \prod_{r=0}^{k-1} \frac{2r+1}{2r+2} \right) \frac{t^k}{k!}$$

A.2.18. STUDENT'S t

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{\Gamma(\frac{v+1}{2})}{\sqrt{v\pi}\Gamma(\frac{v}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{v}\right)^{-\frac{v+1}{2}} \text{ για } x \in [-\infty, +\infty], v = \text{βαθμοί ελευθερίας}$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = 0, \text{ αν } v > 1$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \begin{cases} \infty, & \text{αν } 1 < v \leq 2 \\ \frac{v}{v-2}, & \text{αν } v > 2 \end{cases}$$

A.2.19. WIGNER (ΗΜΙΚΥΚΛΙΚΗ)

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{2}{\pi R^2} \sqrt{R^2 - x^2} \text{ για } x \in [-R, +R], R > 0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = 0$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{R^2}{4}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = 2 \frac{I_1(Rt)}{Rt}$$

$$\text{όπου } I_\alpha(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!\Gamma(m+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+\alpha}$$

A.2.20. FRÉSHET

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{a}{s} \left(\frac{x-m}{s}\right)^{-1-a} e^{-\left(\frac{x-m}{s}\right)^{-a}} \text{ για } a, s \in (0, \infty), m \in (-\infty, \infty), x > m$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = 0$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \begin{cases} \infty, \alpha < 2 \\ s^2 \left( \Gamma\left(1 - \frac{2}{a}\right) - \left(\Gamma\left(1 - \frac{1}{a}\right)\right)^2 \right), \alpha > 2 \end{cases}$$

#### A.2.21. GOMPERTZ

$$\sigma.π.π. f(x) = b\eta e^{bx} e^{\eta} e^{-\eta e^{bx}} \text{ για } \eta, b > 0, x \in [0, \infty)$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{1}{b} e^{\eta} Ei(-\eta)$$

$$\text{όπου } Ei(z) = \int_{-z}^{\infty} \frac{e^{-u}}{u} du, z > 0$$

Διακύμανση

$$Var(X) = \left(\frac{1}{b}\right)^2 e^{\eta} \left\{ -2\eta {}_3F_3(1,1,1; 2,2,2; -\eta) + \gamma^2 + \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + 2\gamma \ln(\eta) + [\ln(\eta)]^2 - e^{\eta} [Ei(-\eta)]^2 \right\}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \eta e^{\eta} E_{\frac{t}{b}}(\eta)$$

$$\text{όπου } E_{\frac{t}{b}}(\eta) = \int_1^{\infty} e^{-\eta u} e^{-\frac{t}{b}} du, t > 0$$

#### A.2.22. ERLANG

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} \text{ για } k, \lambda > 0, x \in [0, \infty)$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{k}{\lambda}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{k}{\lambda^2}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \left(1 - \frac{t}{\lambda}\right)^{-k}$$

#### A.2.23. SHEDECOR'S F

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{\sqrt{\frac{(d_1 x)^{d_1} d_2^{d_2}}{(d_1 x + d_2)^{d_1 + d_2}}}}{xB\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)} \text{ για } d_1, d_2 = \text{βαθμοί ελευθερίας}, x \in [0, \infty)$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{d_2}{d_2 - 2}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{2d_2^2(d_1 + d_2 - 2)}{d_1(d_2 - 2)^2(d_2 - 4)}$$

#### A.2.24. FLORY – SCHULZ

$$\sigma.π.π. f(x) = a^2 x(1-a)^{x-1} \text{ για } 1 > a > 0, x \in \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{2}{a} - 1$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{2-2a}{a^2}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = \frac{a^2 e^t}{((a-1)e^t + 1)^2}$$

#### A.2.25. ΛΟΓΑΡΙΘΜΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗ

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}}{\left(1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^\beta\right)^2} \text{ για } \alpha, \beta > 0, x \in [0, \infty)$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{\alpha \frac{\pi}{\beta}}{\sin\left(\frac{\pi}{\beta}\right)}$$

$$\text{Διακύμανση } Var(X) = \frac{\alpha^2 2 \frac{\pi}{\beta}}{\sin\left(2 \frac{\pi}{\beta}\right)} - \left[ \frac{\alpha \frac{\pi}{\beta}}{\sin\left(\frac{\pi}{\beta}\right)} \right]^2$$

#### A.2.26. ΑΜΟΙΒΑΙΑ (=RECIPROCAL)

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{1}{x[\ln(\beta) - \ln(a)]} \text{ για } \beta > a > 0, \alpha, \beta \in R, x \in [\alpha, \beta]$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{\beta - \alpha}{[\ln(\beta) - \ln(a)]}$$

#### A.2.27. VOIGHT

$$\sigma.π.π. f(x) = \frac{Re[w(z)]}{\sigma \sqrt{2\pi}} \text{ για } \sigma > 0, x \in (-\infty, \infty)$$

$$\text{όπου } w(z) = \frac{x+i\gamma}{\sigma \sqrt{2}}, \sigma, \gamma > 0, x \in (-\infty, \infty)$$

#### A.2.28. BATES

$$\sigma.π.π. f(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{k}{n}\right)^{n-1} \text{sgn}\left(\frac{x-a}{b-a} - \frac{k}{n}\right)$$

$$\text{για } n \geq 1, -\infty < a < b < +\infty, x \in [a, b]$$

$$\text{όπου } \text{sgn}(nx - k) = \begin{cases} -1, & \text{αν } nx < k \\ 0, & \text{αν } nx = k \\ 1, & \text{αν } nx > k \end{cases}$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{1}{2} (a + b)$$

$$\text{Διακύμανση } \text{Var}(X) = \frac{1}{12n} (b - a)^2$$

#### A.2.29. GUMBEL TYPE I

$$\text{σ.π.π. } f(x) = abe^{-(be^{-ax}+ax)} \text{ για } a, b \in \mathbb{R}, x \in (-\infty, \infty)$$

#### A.2.30. GUMBEL TYPE II

$$\text{σ.π.π. } f(x) = abx^{-a-1}abe^{-bx^{-a}} \text{ για } a, b \in \mathbb{R}, x \in (0, \infty)$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = b^{\frac{1}{a}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{a}\right)$$

$$\text{Διακύμανση } \text{Var}(X) = b^{\frac{2}{a}} \left[ \Gamma\left(1 - \frac{1}{a}\right) - \left( \Gamma\left(1 - \frac{1}{a}\right) \right)^2 \right]$$

#### A.2.31. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΓΑΜΑ

$$\text{σ.π.π. } f(x) = \frac{b^a x^{-a-1} e^{-\frac{b}{x}}}{\Gamma(a)} \text{ για } x > 0, a, b > 0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \frac{b}{a-1}$$

$$\text{Διακύμανση } \text{Var}(X) = \frac{b^2}{(a-1)^2(a-2)}$$

#### A.2.32. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ / GAUSSIAN

$$\text{σ.π.π. } f(x) = \left[ \frac{\lambda}{2\pi x^3} \right]^{1/2} e^{-\frac{\lambda(x-\mu)^2}{2x\mu^2}} \text{ για } x > 0, \lambda, \mu > 0$$

$$\text{Μέση τιμή } E(X) = \mu \text{ ή } E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Διακύμανση } \text{Var}(X) = \frac{\mu^3}{\lambda} \text{ ή } \text{Var}\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{\mu\lambda} + \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\text{Ροπογεννήτρια } M_X(t) = e^{\left[ \frac{\lambda}{\mu} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{2\mu^2 t}{\lambda}} \right) \right]}$$

## B. ΤΟ ΠΑΚΕΤΟ ACTUAR

Το παρακάτω παράρτημα παρουσιάζεται στο *Goulet V. Dutang C. Milhaud X. Ouellet T. Parent A. Pigeon M. Pouliot L.-P, PACKAGE 'ACTUAR' , 2018 .*

### B.1. ΣΥΝΟΠΤΙΚΗ ΠΑΡΟΥΣΙΑΣΗ ΤΟΥ ΠΑΚΕΤΟΥ ACTUAR

Το **actuar** είναι ένα πακέτο που παρέχει πρόσθετη λειτουργικότητα στις αναλογιστικές επιστήμες όσων αφορά τη λειτουργικότητα στα στατιστικά στοιχεία μέσω του R Υπολογιστικού Συστήματος.

Το έργο ξεκίνησε το 2005 και το πακέτο είναι διαθέσιμο στο *Comprehensive R Archive Network* από τον Φεβρουάριο του 2006. Η τρέχουσα έκδοση του πακέτου περιέχει λειτουργίες για χρήση στα μοντέλα κατανομών απώλειας ,στη θεωρία κινδύνου (συμπεριλαμβανομένης της θεωρίας της χρεοκοπίας), προσομοίωση σύνθετων ιεραρχικών μοντέλων και θεωρία αξιοπιστίας.

Όσο το δυνατόν περισσότερο, οι προγραμματιστές προσπάθησαν να διατηρήσουν το «*user interface*» του διάφορες λειτουργίες του πακέτου με συνεπή τρόπο. Επιπλέον, το πακέτο ακολουθεί τη γενική φιλοσοφία της R εργασίας με διάφορα αντικείμενα μοντελοποίησης.

Ένα σημαντικό καθήκον των αναλογιστών είναι η μοντελοποίηση των κατανομών ποσών απαιτήσεων για εκλογές ,την αποκατάσταση ζημιών ή άλλους σκοπούς αξιολόγησης κινδύνου. Το πακέτο **actuar** διαθέτει πολλές λειτουργίες για μοντελοποίηση όλων αυτών των εργασιών που πρέπει να ανταποκριθεί ένας σύγχρονος αναλογιστής.

Η R περιλαμβάνει ήδη λειτουργίες για τον υπολογισμό της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας (*pdf*), η σωρευτική (*cdf*) και τη συνάρτηση *quantile* ενός δίκαιου αριθμού νόμων πιθανότητας, όπως καθώς και λειτουργίες για τη δημιουργία παραλλαγών από αυτούς τους νόμους. Για κάποιες ρίζες *foo*, οι συναρτήσεις ωφελιμότητας ονομάζονται *dfoo*, *rfoo*, *qfoo* και *rfoo*, αντίστοιχα.

Το πακέτο **actuar** παρέχει λειτουργίες-συναρτήσεις *d*, *p*, *q* και *r* για όλους τους νόμους πιθανότητας που είναι χρήσιμοι για μοντέλο σφοδρότητας της απώλειας και που δεν υπάρχουν ήδη στη βάση R, εξαιρουμένου της αντίστροφης Κανονικής ή Gaussian ,όπως επίσης της λογαριθμολογιστικής της  $\chi^2$  και άλλων σημαντικών κατανομών.

Στον ακόλουθο πίνακα γίνεται αναφορά στις πιο σημαντικές κατανομές που προσφέρονται μέσω του πακέτου **actuar** :

<u>ΚΑΤΑΝΟΜΗ</u>	<u>ΡΙΖΑ/ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ</u>
Burr	<i>burr</i>
Λογαριθμολογιστική	<i>llogis</i>
Pareto Type II	<i>pareto</i>
Αντίστροφη Γάμα	<i>invgamma</i>
Αντίστροφη Κανονική ή Gaussian	<i>invnormal</i>
Pareto Type I	<i>pareto1</i>

## B.2. Η ΕΝΤΟΛΗ `aggregateDist`

Υπολογίζει το σωρευτικό ποσό της σωρευτικής κατανομής ενός χαρτοφυλακίου για μια περίοδο χρησιμοποιώντας μία από τις πέντε μεθόδους:

```
aggregateDist(method = c("recursive", "convolution", "normal",  
"npower", "simulation"),  
model.freq = NULL, model.sev = NULL, p0 = NULL,  
x.scale = 1, convolve = 0, moments, nb.simul, ...,  
tol = 1e-06, maxit = 500, echo = FALSE)
```

- *##1 method for class 'aggregateDist'*  
*print(x, ...)*
- *##2 method for class 'aggregateDist'*  
*plot(x, xlim, ylab = expression(F[S](x)),  
main = "Aggregate Claim Amount Distribution",  
sub = comment(x), ...)*
- *##3 method for class 'aggregateDist'*  
*summary(object, ...)*
- *## 4 method for class 'aggregateDist'*  
*mean(x, ...)*
- *##5 method for class 'aggregateDist'*  
*diff(x, ...)*

### B.2.1. Ορίσματα

*method*

- μέθοδο που πρέπει να χρησιμοποιηθεί



*model.freq*

- για τη μέθοδο "αναδρομικής": μια συμβολοσειρά χαρακτήρων που δίνει το όνομα μιας κατανομής για τις οικογένειες των κατανομών (a; b; 0) ή (a; b; 1). Για τη μέθοδο "συνέλιξης": χρειάζεται διάνυσμα των πιθανών αριθμών αιτήσεων. Για τη μέθοδο "προσομοίωσης": μια συχνότητα από το μοντέλο προσομοίωσης. Για τη μέθοδο "κανονική" ή "npower" δε χρησιμοποιείται.

*model.sev*

- για μεθόδους "αναδρομικής" και "συνέλιξης": ένας φορέας πιθανών ποσών. Για τη μέθοδο "προσομοίωσης": μοντέλο προσομοίωσης σφοδρότητας ή κενό. Για τη μέθοδο "κανονική" ή "npower" δε χρησιμοποιείται.

*p0*

- αυθαίρετη πιθανότητα στο μηδέν για τη κατανομή συχνοτήτων. Δημιουργεί ένα μηδενικό τροποποιημένο ή μηδενική περικομμένη της κατανομής αν δεν είναι κενό. Χρησιμοποιείται μόνο με "αναδρομικό" μέθοδο.

*x.scale*

- αξία ενός ποσού στο μοντέλο σφοδρότητας (νομισματική μονάδα). Χρησιμοποιείται μόνο με μεθόδους όπως της "αναδρομικής" και της "συνέλιξης".

*convolve*

- πλήθος φορών που χρησιμοποιείται για την συνέλιξη της προκύπτουσα διανομή με τον εαυτό της. Χρησιμοποιείται μόνο με "αναδρομική" μέθοδο.

*moments*

- φορέας των αληθινών στιγμών της κατανομής της συνολικής ποσότητας απαιτήσεων: χρησιμοποιείται μόνο με τις μεθόδους "κανονική" ή "npower".

*nb.simul*

- αριθμός προσομοιώσεων για τη μέθοδο "προσομοίωσης".

...

- παραμέτρους της κατανομής της συχνότητας για τη μέθοδο "αναδρομική". περαιτέρω τα επιχειρήματα να μεταβιβάζονται προς ή από άλλες μεθόδους.

*tol*

- η προκύπτουσα αθροιστική κατανομή στην "αναδρομική" μέθοδο θα μειωθεί από ό, τι μακριά από το 1.

*maxit*

- μέγιστος αριθμός επαναλήψεων στην "αναδρομική" μέθοδο.

*echo*

- λογικός; εμφανίζει τις αναδρομές στην οθόνη με τη μέθοδο "αναδρομικό".

*x, object*

- ένα αντικείμενο της κατηγορίας "aggregateDist".

*xlim*

- αριθμητικό μήκος 2. τα όρια x του plot.

*ylab*

- ετικέτα του άξονα y.

*main*

- κύριος τίτλος.

*sub*

- υπότιτλος, που παραβιάζει τη μέθοδο υπολογισμού.

### B.3. ΟΙ ΠΕΝΤΕ ΜΕΘΟΔΟΙ ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΕΝΤΟΛΗΣ *aggregateDist*

Η "αναδρομική" μέθοδος υπολογίζει το cdf χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο Panjer. Η μέθοδος "συνέλιξης" χρησιμοποιεί συνέλιξεις. Η "κανονική" μέθοδος που χρησιμοποιεί κανονική προσέγγιση. Η μέθοδος "npower" χρησιμοποιεί την προσέγγιση Normal Power 2. Η μέθοδος "προσομοίωσης" χρησιμοποιεί προσομοιώσεις.

#### B.3.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ "ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ" - "RECURSIVE"

Η κατανομή συχνότητας πρέπει να είναι μέλος των ομάδων (a; b; 0) ή (a; b; 1) διακριτών κατανομών.

Για να χρησιμοποιηθεί μια κατανομή από την οικογένεια (a; b; 0), το *model.freq* πρέπει να είναι από "διωνυμική", "γεωμετρική", "αρνητική διωνυμική" ή "poisson" και το  $\rho_0$  πρέπει να είναι κενό (NULL).

Για να χρησιμοποιηθεί μηδενική αποκομμένη κατανομή από την οικογένεια (a; b; 1), το *model.freq* μπορεί να είναι μία από τις χορδές παραπάνω μαζί με το  $\rho_0 = 0$ . Ως συντόμευση, το *model.freq* μπορεί επίσης να είναι ένα από τα "μη αποκομμένη διωνυμική", "μηδενικά κολοβή γεωμετρική", "μηδενική κολοβή αρνητική διωνυμική", "μηδενική κολοβή poisson" ή "λογαριθμική", και το  $\rho_0$  αγνοείται.

Για να χρησιμοποιήσετε μηδενικά τροποποιημένη κατανομή από την οικογένεια (a; b; 1), το *model.freq* μπορεί να είναι ένα από τα πρότυπα οι κατανομές συχνοτήτων που αναφέρθηκαν παραπάνω με  $\rho_0$  που έχουν ορισμένη πιθανότητα ότι η κατανομή παίρνει τιμή 0. Είναι ισοδύναμο, αλλά πιο σαφές, να ορίσετε το *model.freq* σε ένα από τα "μηδενική τροποποιημένη διωνυμική", "μηδενική τροποποιημένη γεωμετρική", "μηδενική τροποποιημένη αρνητική διωνυμική", "μηδενική τροποποιημένη poisson" ή "μηδενική τροποποιημένη λογαριθμική".

Εάν το μήκος του  $\rho_0$  είναι μεγαλύτερο από ένα, χρησιμοποιείται μόνο το πρώτο στοιχείο, με προειδοποίηση. Το *model.sev* είναι ένας φορέας της κατανομής ποσών (διακριτοποιημένων) τιμών της X. το πρώτο στοιχείο πρέπει να είναι:

$$f_x(0) = Pr[X = 0]$$

#### B.3.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ "ΣΥΝΕΛΙΞΗ" - "CONVOLUTION"

Η σωρευτική λειτουργία κατανομής (cdf)  $F_S(x)$  του συνολικού ποσού απαιτήσεων ενός χαρτοφυλακίου το μοντέλο συλλογικού κινδύνου είναι:

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_X^{*n}(x) p_n$$

Για  $x=0,1,2,\dots$  και  $p_n = Pr(N)$  είναι η συνάρτηση μάζας πιθανότητας συχνότητας και  $F_X^{*n}(x)$  είναι το cdf της  $n$ -οστής συνέλιξης της (διακεκριμένης) ποσότητας της τυχαίας μεταβλητής.

Το `model.freq` είναι ο φορέας  $p_n$  του αριθμού πιθανών αξιώσεων δηλαδή το πρώτο στοιχείο πρέπει να είναι  $Pr(N = 0)$

Το `model.sev` είναι ο φορέας  $F_X(x)$  της κατανομής της (διακριτικής) κατανομής των απαιτήσεων δηλαδή το πρώτο στοιχείο πρέπει να είναι  $F_X(0)$

### B.3.3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ "ΚΑΝΟΝΙΚΗ" - "NORMAL"

Η κανονική προσέγγιση μιας αθροιστικής συνάρτησης κατανομής (cdf)  $F(x)$  με μέση τιμή  $\mu$  και τυπική απόκλιση  $\sigma$  είναι:

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

### B.3.4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ "ΔΥΝΑΜΟΚΑΝΟΝΙΚΗ" - "NORMAL POWER 2"

Η "NORMAL POWER 2" προσέγγιση της συνάρτησης αθροιστικής κατανομής (cdf)  $F(x)$  με το μέσο  $\mu$ , τυπική απόκλιση  $\sigma$  και ασυμμετρία  $\gamma$  είναι:

$$F(x) = \Phi\left(-\frac{3}{\gamma} + \sqrt{\frac{9}{\gamma^2} + 1 + \frac{6x - \mu}{\gamma\sigma}}\right)$$

### B.3.5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ "ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ" - "SIMULATION"

Αυτή η μέθοδος επιστρέφει τη συνάρτηση εμπειρικής κατανομής ενός δείγματος μεγέθους `nb.simul` του συνόλου διανομή ποσού αξίωσης που καθορίζεται από τα `model.freq` και `model.sev`. Η `rcomphierarc` χρησιμοποιείται για την προσομοίωση των ποσών απαιτήσεων, επομένως τόσο τα μοντέλα συχνότητας όσο και της σφοδρότητας μπορεί να είναι μείξης των κατανομών.

#### B.4. Η ΕΝΤΟΛΗ `discretize`

Υπολογίζει μια διακριτή συνάρτηση μάζας πιθανότητας από μια συνεχή αθροιστική συνάρτηση κατανομής (cdf) με διάφορες μεθόδους.

```
discretize(cdf, from, to, step = 1,  
method = c("upper", "lower", "rounding", "unbiased"),  
lev, by = step, xlim = NULL)
```

```
discretise(cdf, from, to, step = 1,  
method = c("upper", "lower", "rounding", "unbiased"),  
lev, by = step, xlim = NULL)
```

#### B.5.1. Ορίσματα

`cdf`

- μια έκφραση γραμμένη ως συνάρτηση του  $x$ , ή εναλλακτικά το όνομα μιας συνάρτησης, δίνοντας το `cdf` να διακριθεί.

`from, to`

- το εύρος στο οποίο θα διακριθεί η λειτουργία.

`step`

- αριθμητικός: το βήμα διακριτοποίησης (ή το άνοιγμα ή την υστέρηση).

`method`

- μέθοδο διακριτοποίησης για χρήση.

`lev`

- μια έκφραση γραμμένη ως συνάρτηση του  $x$ , ή εναλλακτικά το όνομα μιας συνάρτησης, για να υπολογίσει την περιορισμένη αναμενόμενη τιμή της κατανομής που αντιστοιχεί στο `cdf`.

by

- ένα ψευδώνυμο για βήμα.

xlim

- αριθμητικό μήκος 2: αν ορίζεται, χρησιμεύει ως προεπιλογή για διάνυσμα c(από, έως).

## Γ. ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΤΩΝ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΑΠΑΙΤΗΣΕΩΝ

Το παρακάτω παράρτημα παρουσιάζεται στο SHEVCHENKO P. V. , **CALCULATION OF AGGREGATE LOSS DISTRIBUTIONS** , 2010. Επίσης και στο ΚΟΥΤΣΟΠΟΥΛΟΣ Κ. Ι. , **ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕΡΟΣ Ι ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ** , ΕΔΟΣΕΙΣ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ , ΑΘΗΝΑ, 1999. Αλλά και στο ΧΑΤΖΗΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ Ε. , **ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ Π.Μ.Σ. «ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ» ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ Ι** , ΠΕΙΡΑΙΑΣ, 2018

### Γ.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ VaR (ΚΛΕΙΣΤΗ ΦΟΡΜΑ)

Έχοντας υπολογίσει την σύνθετη ζημιοκατανομή, ο κίνδυνος υπολογίζεται μέσω της Τιμής-στο-Κίνδυνο ή Value-at-Risk (=VaR). Ποιο αναλυτικά το VaR για την σύνθετη ζημιοκατανομή υπολογίζεται ως την αντίστροφη σ.κ. της σύνθετης ζημιοκατανομής, δηλαδή

$$VaR_{\alpha}[Z] = H^{-1}(a) = \inf\{z \in R : \Pr[Z > z] \leq 1 - a\}$$

Αν οι ζημιές  $X_1, X_2, \dots, X_N$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες κατανεμημένες στην Υπό-Εκθετική (βαριάς ουράς) κατανομή  $F(x)$  και η σ.κ. ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 + \varepsilon)^n \Pr[N = n] < \infty$$

για κάποια  $\varepsilon > 0$ , τότε η ουρά της σύνθετης κατανομής  $H(z)$ , ουρά της σύνθετης ζημιοκατανομής  $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_N$ , σχετίζεται με την ουρά των ατομικών ζημιών , δηλαδή

$$1 - H(z) \rightarrow E[N](1 - F(z)), \quad \text{για } z \rightarrow \infty,$$

Η μεταβλητότητα από αυτό το ασυμπτωτικό αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί για τις περιπτώσεις που το πλήθος των ζημιών  $N$  κατανέμεται στην Poisson, στη Διωνυμική και στην Αρνητική-Διωνυμική. Αυτή η μέθοδος χρησιμοποιείται για την εύρεση του ποσοστημορίου της ετήσιας ζημιάς, δηλαδή

$$VaR_{\alpha}[Z] \rightarrow F^{-1}\left(1 - \frac{1-\alpha}{E[N]}\right), \quad \text{για } \alpha \rightarrow 1,$$

Χρήσιμη Σημείωση : Έστω η βαριά ουρά της  $S \sim \text{Σύνθετη Poisson}(\lambda, f(x))$  , όπου  $f(x)$  σ.π.π. της  $X$  με παραμέτρους  $\beta$  και  $\xi$  , τότε

$$\text{Var}_\alpha[Z] \rightarrow \frac{\beta}{\xi} \left( \frac{\lambda}{1-\alpha} \right)^\xi, \text{ για } \alpha \rightarrow 1$$

## Γ.2. Ο ΓΡΗΓΟΡΟΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Ο Γρήγορος Μετασχηματισμός Fourier ή Fast Fourier Transform(=FFT) είναι μια άλλη αποτελεσματική μέθοδος για τον υπολογισμό των κατανομών σύνθεσης μέσω την αντιστροφή της χαρακτηριστική συνάρτησής τους. Η μέθοδος είναι γνωστή για πολλές δεκαετίες και προέρχεται από την περιοχή επεξεργασίας σημάτων. Η ύπαρξη του αλγόριθμου έγινε γενικά γνωστός στα μέσα της δεκαετίας του 1960, αλλά ήταν ανεξάρτητος ανακαλύφθηκε από πολλούς ερευνητές πολύ νωρίτερα. Ένα από τα πρώτα βιβλία για το FFT είναι ο Brigham (1974). Λεπτομερής εξήγηση της εφαρμοζόμενης αυτής της μεθόδου για τη συγκέντρωση της κατανομής των ζημιών μπορεί να βρεθεί στο Robertson (1992). Για την γενική εμπειρία, οι επαγγελματίες του κινδύνου στην τραπεζική θεωρούν τη μέθοδο πως τη χρησιμοποιούν και σπάνια τη χρησιμοποιούν στην πράξη. Στην πραγματικότητα, είναι ένας πολύ απλός αλγόριθμος να εφαρμόσει, αν και να το κάνει πραγματικά αποτελεσματικό, ειδικά για βαριά ουρά κατανομής, απαιτούνται κάποιες βελτιώσεις. Παρακάτω περιγράφονται τα ουσιώδη τα βήματα και η θεωρία που απαιτείται για την επιτυχή υλοποίηση του FFT για το λειτουργικό κίνδυνο.

Όπως συμβαίνει με την περίπτωση του Panjer, ο FFT λειτουργεί με διακριτές ζημιές και βασίζεται επί του Διακριτού Μετασχηματισμού Fourier όπως ορίζεται παρακάτω.

### Γ.2.1. Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier

Για μια ακολουθία  $f_0, f_1, \dots, f_{M-1}$ , ο Διακριτός Μετασχηματισμός Fourier ή Discrete Fourier Transformation(=DFT) ορίζεται ως,

$$\varphi_k = \sum_{m=0}^{M-1} f_m \exp\left(\frac{2\pi i}{M} mk\right), \quad k = 0, 1, \dots, M-1$$

και η αρχική ακολουθία της  $f_k$  μπορεί να ανακτηθεί από την  $\varphi_k$  από τον αντίστροφο μετασχηματισμό:

$$f_k = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} \varphi_m \exp\left(-\frac{2\pi i}{M} mk\right), \quad k = 0, 1, \dots, M-1.$$



Εδώ το  $M$ , είναι κάποιο μεταβατικό σημείο. Είναι εύκολο να γίνει κατανοητό ότι για να υπολογίσουμε τα  $M$  σημεία της  $\varphi_m$ , ο αριθμός των πράξεων είναι της σειράς των  $M^2$ , κλπ  $O(M^2)$ .

Αν  $M$  είναι δύναμη του 2, τότε ο DFT μπορεί να υπολογισθεί αποτελεσματικά από τον FFT αλγόριθμο με αριθμό των υπολογισμών  $O(M \log_2 M)$ . Αυτό συμβαίνει λόγω της συνθήκης ότι του DFT το μήκος μπορεί να αναπαραχθεί ως άθροισμα του DFT για περαιτέρω σημεία  $\varphi_k^e$  και ως άθροισμα του DFT για περιέργα σημεία  $\varphi_k^o$ :

$$\varphi_k = \varphi_k^e + \exp\left(\frac{2\pi i}{M} k\right) \varphi_k^o,$$
$$\varphi_k^e = \sum_{m=0}^{M/2-1} f_{2m} \exp\left(\frac{2\pi i}{M} mk\right),$$
$$\varphi_k^o = \sum_{m=0}^{M/2-1} f_{2m+1} \exp\left(\frac{2\pi i}{M} mk\right),$$

Στη συνέχεια, κάθε ένα από αυτά τα δύο DFTs μπορεί να υπολογιστεί ως ένα άθροισμα των δύο DFTs μήκους  $M/4$ . Για παράδειγμα,  $\varphi_k^e$  υπολογίζεται ως άθροισμα των  $\varphi_k^{ee}$  και  $\varphi_k^{eo}$ . Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται μέχρι τους μετασχηματισμούς του μήκους 1. Ο τελευταίος είναι απλά μια ταυτοτητική λειτουργία. Έτσι κάθε αποκτηθείσα μοντέλα για περαιτέρω και παράξενα DFTs θα είναι  $f_m$  για κάποια  $m$ :

$$\varphi_k^{eo\dots ooe} = f_m.$$

Η διαδικασία αναστροφής δυαδικών ψηφίων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να βρεθούν  $m$  που αντιστοιχεί σε συγκεκριμένο μοντέλο. Αυτό γίνεται για  $e=0$  και  $o=1$ , τότε το αντίστροφο μοντέλο των  $e$  και  $o$  είναι η τιμή του  $m$  σε δυαδικό. Έτσι τα λογικά βήματα του FFT είναι τα εξής:

### ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Γ.2.1.

1. Ταξινομήστε τα δεδομένα σε μια σειρά αντίστροφα. Τα σημεία που έχουν ληφθεί είναι μετασχηματισμοί ενός σημείου.
2. Συνδυάστε τα γειτονικά σημεία σε μη αλληλεπικαλυπτόμενα ζευγάρια για να κάνετε μετασχηματισμούς δύο σημείων. Στη συνέχεια, συνδυάστε μετασχηματισμούς δύο σημείων σε μετασχηματισμούς 4 σημείων και συνεχίστε στη συνέχεια μέχρι να επιτευχθεί ο μετασχηματισμός σημείου  $M$ . Έτσι, υπάρχουν επαναλήψεις  $\log_2 M$  και κάθε επανάληψη περιλαμβάνει τη σειρά των  $M$  πράξεων.

Η εφαρμογή ενός βασικού αλγόριθμου FFT είναι πολύ απλή με αντίστοιχους κωδικούς στις γλώσσες προγραμματισμού C ή Fortran.

### Γ.2.2. Σύνθετη Ζημιοκατανομή μέσω FFT

Ο υπολογισμός της σύνθετης ζημιοκατανομής μέσω FFT μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα λογικά βήματα:

#### ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΣ Γ.2.2.

1. Διακριτοποίηση ατομικών ζημιών για να λάβουμε:

$$f_0, f_1, \dots, f_{M-1},$$

όπου  $M = 2^r$  με τα  $r$  και  $M$  να είναι τα μετατοπισμένα σημεία της κατανομής των συνολικών κινδύνων.

2. Χρησιμοποιώντας την FFT, υπολογίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση της ατομικής ζημιάς

$$\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_{M-1},$$

3. Υπολογισμός της χαρακτηριστικής συνάρτησης της σύνθετης ζημιοκατανομής χρησιμοποιώντας

$$x_m = \psi(\varphi_m), \quad m = 0, 1, \dots, M - 1.$$

4. Εκτελέστε αντίστροφη FFT (η οποία είναι η ίδια με την FFT εκτός από την αλλαγή σημείου κάτω από τον εκθέτη και παράγοντα  $1/M$ ) που εφαρμόζεται  $x_0, x_1, \dots, x_{M-1}$ , για να λάβουμε τη σύνθετη ζημιοκατανομή  $h_0, h_1, \dots, h_{M-1}$ .

### Γ.3. Η ΑΜΕΣΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

Στην περίπτωση των μη αρνητικών ζημιών, η κατανομή των συνολικών ζημιών δίνεται από τη σχέση:

$$H(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re}[\chi(t)] \frac{\sin(tz)}{t} dt, \quad z \geq 0,$$

όπου  $\chi(t)$  είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής των συνολικών ζημιών που υπολογίζεται μέσω της  $\varphi(t)$  η οποία είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση των ατομικών ζημιών, δηλαδή

$$\chi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi(t))^k p_k = \psi(\varphi(t)) \quad \text{και} \quad \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{itx} dx$$

όπου  $\psi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k$ ,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $p_k = P[N = k]$

και  $f(x)$  η σ.π.π. των ατομικών ζημιών.

Επίσης  $Re[\chi(t)]$  είναι η ρητή έκφραση της χαρακτηριστικής συνάρτησης της κατανομής των συνολικών ζημιών. Για παράδειγμα, η ρητή έκφραση για Poisson( $\lambda$ ) είναι:

$$Re[\chi(t)] = e^{-\lambda} \exp(\lambda Re[\varphi(t)]) \cdot \cos(\lambda Im[\varphi(t)])$$

Συνεπώς, ο άμεσος υπολογισμός της σ.κ. για ετήσιες ζημιές  $Z$  μέσω της  $H(z)$  αναφέρεται ως Άμεση Αριθμητική Ολοκλήρωση ή Direct Numerical Integration (=DNI). Το καθήκον της χαρακτηριστικής συνάρτησης της αντίστροφης είναι αναλυτικά απλό, αλλά αριθμητικώς δύσκολο όσον αφορά την επίτευξη υψηλής ακρίβειας και υπολογιστικής απόδοσης ταυτόχρονα. Για αυτό είναι αναγκαίοι δύο μέθοδοι για την επίτευξη αυτού του στόχου οι οποίες είναι:

#### Γ.3.1. Προς Τα Εμπρός Ολοκλήρωση

$$Re[\varphi(t)] = \int_0^{\infty} f(x) \cos(tx) dx \quad \text{και} \quad Im[\varphi(t)] = \int_0^{\infty} f(x) \sin(tx) dx.$$

#### Γ.3.2. Αντίστροφη Ολοκλήρωση

$$H(z) = \int_0^{\infty} G(x, z) \sin(x) dx, \quad \text{όπου} \quad G(x, z) = \frac{2 Re[\chi(x/z)]}{x}$$

### Γ.4. Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας τυχαίας μεταβλητής δεν υπάρχει (δεν συγκλίνει) πάντοτε. Έτσι, ένα αρκετά πιο χρήσιμο εργαλείο για συνεχείς ή και μικτού τύπου τυχαίες μεταβλητές είναι ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας, ο οποίος υπάρχει πάντοτε. Ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται όχι μόνο για συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας τυχαίων μεταβλητών, αλλά γενικότερα και για συνεχείς ή και τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις (ΧΑΤΖΗΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ, 2018).

Έστω  $h(x)$  μια συνάρτηση που ορίζεται για  $x > 0$ . Ο μετασχηματισμός Laplace ή Laplace transform της  $h(x)$  συμβολίζεται με  $\hat{h}(s)$  και ορίζεται ως:

$$\hat{h}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot h(x) dx, \quad s > 0$$

Επίσης θεωρούμε ότι το  $s$  είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

Γενικότερα, ο μετασχηματισμός Laplace μπορεί επίσης να ορισθεί όταν το  $s$  είναι ένας μιγαδικός αριθμός με θετικό πραγματικό μέρος (ΧΑΤΖΗΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ, 2018), δηλαδή να είναι της μορφής:

$$s = a + b \cdot i, \quad \text{με } a > 0 \text{ και } i = \sqrt{-1}$$

Μπορεί εύκολα να δείχτεί ότι ο μετασχηματισμός Laplace  $\hat{h}(s)$  υπάρχει (δηλαδή είναι πεπερασμένος) αν η  $h(x)$  είναι συνεχής (ή τμηματικά συνεχής) συνάρτηση και υπάρχουν  $a_1, a_2$  και  $\beta > 0$  τέτοια ώστε να ισχύει:

$$|h(x)| < a_1 \cdot e^{a_2 \cdot x} \text{ για κάθε } x > \beta$$

Άρα, όταν γνωρίζουμε το μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης, ο υπολογισμός της αντίστροφης συνάρτησης ουσιαστικά μας οδηγεί στον υπολογισμό της συνάρτησης, δηλαδή από τον μετασχηματισμό Laplace μιας συνάρτησης μπορούμε να βρούμε και την ίδια τη συνάρτηση.

Ο γενικός τύπος της αντίστροφης συνάρτησης που αντιστοιχεί σε ένα δοθέντα μετασχηματισμό Laplace, είναι αρκετά πολύπλοκος και θα τον παραλείψουμε. Γενικά, αν και η εύρεση του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace είναι ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα, για τις περιπτώσεις που ασχολούμαστε στη Θεωρία Κινδύνων είναι σχετικά απλή (ΧΑΤΖΗΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ, 2018).

Μια από τις πλέον συνήθεις μεθόδους αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace  $\hat{h}(s)$  για να βρούμε τη συνάρτηση  $h(x)$  είναι η ΤΕΧΝΙΚΗ ΤΩΝ ΜΕΡΙΚΩΝ ΚΛΑΣΜΑΤΩΝ, η οποία μπορεί να εφαρμοσθεί μόνο όταν ο  $\hat{h}(s)$  είναι ρητή συνάρτηση ως προς  $s$  (δηλαδή είναι πηλίκιο πολυωνύμων) και ο βαθμός του πολυωνύμου του αριθμητή είναι μικρότερος του βαθμού του πολυωνύμου του παρονομαστή (ΧΑΤΖΗΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΙΔΗΣ, 2018).

## Γ.5. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ HALDANE

Η προσεγγιστική Μέθοδος του Haldane προσδιορίζει μια σταθερά  $h$  τέτοια, ώστε η τ.μ.  $\left(\frac{S}{\mu}\right)^h$ , όπου  $\mu = E_S(x)$  και να έχει (λοξότητα)  $Skew(x) = 0$ , υπολογίζει το μέσο  $\mu'$  και τη διασπορά  $\sigma'^2$  της  $\left(\frac{S}{\mu}\right)^h$  και θέτει:

$$G_S(x) = \Pr(S \leq x) = \Phi \left[ \frac{\left(\frac{x}{\mu}\right)^h - \mu'}{\sigma'} \right]$$

(ΚΟΥΤΣΟΠΟΥΛΟΣ, 1999)

### Γ.6. Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ WILSON – HILFERTY

Η προσεγγιστική Μέθοδος των Wilson – Hilferty είναι η εξής:

$$G_S(x) = \Pr(S \leq x) = \Phi \left[ c_1 + c_2(\tilde{x} + c_3)^{\frac{1}{3}} \right]$$

όπου  $\tilde{x} = \frac{x-\mu}{\sigma}$ , με  $\mu = E_S(x)$  και  $\sigma = \sqrt{Var_S(x)}$

$$\text{και } c_1 = \frac{Skew_S(x)}{6\sigma^3} - \frac{6\sigma^3}{Skew_S(x)}, c_2 = 3 \left( \frac{2\sigma^3}{Skew_S(x)} \right)^{\frac{2}{3}}, c_3 = \frac{2\sigma^3}{Skew_S(x)}$$

(ΚΟΥΤΣΟΠΟΥΛΟΣ, 1999)

#### Δ. ΕΠΙΠΡΟΣΘΕΤΕΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Το παρακάτω παράρτημα παρουσιάζεται στην ηλεκτρονική σελίδα [http://sfb649.wiwi.huberlin.de/fedc\\_homepage/xplore/tutorials/stfhtmlnode96.html](http://sfb649.wiwi.huberlin.de/fedc_homepage/xplore/tutorials/stfhtmlnode96.html). Αλλά και στο BURNECKI K. , MISTA P. , WERON A. , **A NEW GAMMA TYPE APPROXIMATION OF THE RUIN PROBABILITY**, 2005

##### Δ.1. Η ΜΕΘΟΔΟΣ HEAVY TRAFFIC

Ο όρος *HEAVY TRAFFIC* ή «βαριά κυκλοφορία» προέρχεται από την θεωρία αναμονής. Στη θεωρία κινδύνου αυτό σημαίνει ότι, κατά μέσο όρο, τα ασφάλιστρα υπερβαίνουν ελαφρώς μόνο τις αναμενόμενες απαιτήσεις. Συνεπάγεται ότι το περιθώριο ασφάλειας  $\theta$  (θήτα) παίρνει θετική και μικρή τιμή. Ο Asmussen (2000) προτείνει την ακόλουθη προσέγγιση:

$$\psi_{HT}(u) = \exp\left(-\frac{2 \cdot \theta \cdot \mu_1 \cdot u}{\mu_2}\right)$$

Η μέθοδος αυτή απαιτεί την ύπαρξη των δύο πρώτων ροπών της κατανομής των συνολικών αποζημιώσεων. Αριθμητικά στοιχεία δείχνουν ότι η προσέγγιση είναι λογική για τιμές του περιθωρίου ασφαλείας περίπου 10 - 20% και τα  $u$  να είναι μικρά ή μέτρια, ενώ η προσέγγιση μπορεί να είναι πολύ ικανοποιητική για μεγάλα  $u$ .

##### Δ.2. Η ΜΕΘΟΔΟΣ LIGHT TRAFFIC

Όσο για τη «βαριά κυκλοφορία», ο όρος «ελαφριά κυκλοφορία» προέρχεται από την θεωρία αναμονής, αλλά έχει μια προφανή ερμηνεία επίσης στη θεωρία κινδύνου, δηλαδή, κατά μέσο όρο, τα ασφάλιστρα είναι πολύ μεγαλύτερα από τις αναμενόμενες απαιτήσεις, ή με άλλα λόγια, οι απαιτήσεις εμφανίζονται λιγότερο συχνά από ό, τι αναμενόταν. Συνεπάγεται ότι περιθώριο ασφάλειας  $\theta$  (θήτα) είναι θετικό και μεγάλο. Επίσης μπορεί να λάβει τον ακόλουθο ασυμπτωτικό τύπο:

$$\psi_{LT}(u) = \frac{1}{(1 + \theta) \cdot \mu_1} \cdot \int_u^{\infty} \bar{F}_X(x) dx$$

Στη θεωρία του κινδύνου η «βαριά κυκλοφορία» είναι πιο συχνά η χαρακτηριστική περίπτωση που υποστηρίζεται και όχι η «ελαφριά κυκλοφορία». Ωστόσο, η «ελαφριά κυκλοφορία» είναι πιο ενδιαφέρουσα ως συμπλήρωμα σε σχέση με τη «βαριά κυκλοφορία», καθώς και ότι είναι απαραίτητο για την προσέγγιση παρεμβολής. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτή η

μέθοδος δίνει ακριβή αποτελέσματα μόνο για τεράστιες τιμές του περιθωρίου ασφαλείας, (Asmussen, 2000).

### Δ.3. Η ΜΕΘΟΔΟΣ HEAVY - LIGHT TRAFFIC

Η βασική ιδέα αυτής της προσέγγισης είναι να συνδυάσει τις προσεγγίσεις των βαριών και ελαφριών κυκλοφοριών (Asmussen, 2000).

$$\psi_{HLT}(u) = \frac{1}{1+\theta} \cdot \psi_{LT}\left(\frac{\theta \cdot u}{1+\theta}\right) + \frac{1}{(1+\theta)^2} \cdot \psi_{HT}(u)$$

Τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά αυτής της προσέγγισης είναι ότι είναι ακριβής για την εκθετική κατανομή και ασυμπτωτικά ακριβής τόσο στην ελαφριά όσο και στην βαριά κυκλοφορία.

### Δ.4. Η ΜΕΘΟΔΟΣ 4-MOMENT GAMMA DE VYLDER

Η προσέγγιση αυτή προτάθηκε πρώτα από τους Burneck, Mista και Weron (2005), είναι βασισμένη στην ιδέα του De Vylder να αντικαταστήσει τη διαδικασία των συνολικών απαιτήσεων  $S_t$  με ένα άλλο  $\bar{S}_t$  για το οποίο η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι σαφής. Αυτή τη φορά έχουμε υπολογίσει τις παραμέτρους της νέας διαδικασίας με Γάμμα κατανομής απαιτήσεις να διανέμεται και εφαρμόζουμε τον ακριβή τύπο για την πιθανότητα πτώχευσης. Επίσης αξ σημειωθεί ότι η διαδικασία απαιτήσεων  $\bar{S}_t$  με μια διαδικασία γάμμα απαιτήσεων χρειάζεται τέσσερις παραμέτρους ( $\bar{\lambda}, \bar{\theta}, \bar{\mu}, \bar{\mu}_2$ ) άρα έχουμε να συνδυάσουμε τις τέσσερις ροπές της  $S_t$  με την  $\bar{S}_t$ .

$$\bar{\lambda} = \frac{2 \cdot \lambda \cdot (\mu_2)^2}{\mu_1 \cdot (\mu_3 + \mu_2 \cdot \mu_1)}, \bar{\theta} = \frac{\theta \cdot \mu_1 \cdot (\mu_3 + \mu_2 \cdot \mu_1)}{2 \cdot (\mu_2)^2}, \bar{\mu}_1 = \mu_1, \bar{\mu}_2 = \frac{\mu_1 \cdot (\mu_3 + \mu_2 \cdot \mu_1)}{2 \cdot (\mu_2)^2}$$

Συνολικά, η 4-στιγμή Γάμμα De Vylder προσέγγιση δίνεται από:

$$\psi_{4MGDV}(u) = \frac{\bar{\theta} \cdot \left(1 - \frac{R}{\bar{\alpha}}\right) \cdot e^{-\left(\frac{\bar{\beta} \cdot R}{\bar{\alpha}}\right) \cdot u}}{1 + (1 + \bar{\theta}) \cdot R - (1 + \bar{\theta}) \cdot \left(1 - \frac{R}{\bar{\alpha}}\right)} + \frac{\bar{\alpha} \cdot \bar{\theta} \cdot \sin(\bar{\alpha} \cdot \pi)}{\pi} \cdot I$$

όπου,  $I = \int_0^\infty \frac{x^{\bar{\alpha}} \cdot e^{-(x+1) \cdot \bar{\beta} \cdot u}}{[x^{\bar{\alpha}} \cdot \{1 + \bar{\alpha} \cdot (1 + \bar{\theta}) \cdot (x+1)\} - \cos(\bar{\alpha} \cdot \pi)]^2 + \sin^2(\bar{\alpha} \cdot \pi)} dx$  και  $\bar{\alpha} = \frac{\bar{\mu}_1^2}{(\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1^2)}$ ,  $\bar{\beta} = \frac{\bar{\mu}_1}{(\bar{\mu}_2 - \bar{\mu}_1^2)}$

Στην Εκθετική και Γάμμα περίπτωση η μέθοδος αυτή δίνει το ακριβές αποτέλεσμα. Για άλλες κατανομές προκειμένου να εφαρμόσει την

προσέγγιση, οι πρώτες τέσσερεις (ή τρεις στην απλούστερη περίπτωση) στιγμές (ροπές) πρέπει να υπάρχουν οι Burneckí, Mista και Weron (2003) έδειξαν αριθμητικά ότι η μέθοδος δίνει μια μικρή διόρθωση για την προσέγγιση De Vylder, η οποία θεωρείται συχνά ως η καλύτερη μεταξύ των «απλών» προσεγγίσεων.

#### **Δ.5. Η ΥΠΟΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ**

Αν η κατανομή των απαιτήσεων  $X$  ανήκουν στην οικογένεια των Υποεκθετικών Κατανομών, δηλαδή  $F \in \mathcal{S}$  (βλ. Παράρτημα ΣΤ'), τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση:

$$\psi_S(u) = \frac{1}{\theta\mu} \left( \mu - \int_0^u \bar{F}(x) dx \right)$$

Αυτή η μέθοδος είναι ασυμπτωτική, για μεγάλες τιμές του πλεονάσματος  $u$ .



## Ε. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ R ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

Στο συγκεκριμένο παράρτημα παρουσιάζονται όλα τα προγράμματα που χρησιμοποιήθηκαν μέσω της R για διάφορες εφαρμογές σε όλη την εργασία.

### Εφαρμογή 2.2.1

```
> g1<-aggregateDist(method = c("recursive"),
+ model.freq =expression(rpois(2)), model.sev =expression(rgeom(0.6),
+ p0 = NULL, x.scale = 1, tol = 1e-06, maxit = 500, echo = FALSE)
+ round(c(g1[1],g1[2],g1[3],g1[4]), digits=8)
```

### 2<sup>ος</sup> ΤΡΟΠΟΣ :

```
> Panjer.Poisson <- function (f, lambda)
+ { if (sum(f)>1||any(f<0)) stop("f parameter not a density")
+ if (lambda * sum(f) > 727) stop("Underflow")
+ g <- exp(-lambda*sum(f))
+ r <- length(f)
+ x <- 0
+ repeat { x <- x+1
+ m <- min(x, r)
+ last <- (lambda/x)*sum(1:m*head(f,m)*rev(tail(g,m)))
+ g <- c(g,last)
+ cumul <- sum(g)
+ if (cumul > 0.99999999) break
+ }
+ return(g) }
> ##ΒΑΣΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##
> n <- 50
> p <- 0.6
> l<-2
```

```
> x <- 1:n
> ##ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ PANJER##
> ##1.ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ##
> f1 <- p*(1-p)^(x-1)
> g1<- Panjer.Poisson(f1,l)
> round(c(g1[1],g1[2],g1[3],g1[4]), digits=8)
> ###ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
> plot( cumsum(g1), type="l",
+ ylab=c("Gs(x)", xlab=c("x"),
+ lty=c(1), col=c("blue"), lwd=c(3),
+ main=c("Σ.Κ. ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ S"),
+ sub="Γραφημα 2.2.1.")
> legend(10, 0.6, c("ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ
+ ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ PANJER"),
+ lty=c(1),col=c("blue"),
+ title="ΜΕΘΟΔΟΣ", lwd=c(3))
```

### Εφαρμογή 2.2.2

```
> ##ΒΑΣΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##
> x <- 3.5;
> mu <- 1;
> sig <- 1;
> gam <- 1;
> z <- (x-mu)/sig
> ##2.1.ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ##
> s1<-1-pbinom(x, 1000, 0.001) ; s1
> ##2.2.POISSON##
> s2<-1-ppois(x,1) ; s2
```

```
> ##ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ##  
> s3<-1-pnorm(z) ; s3  
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##  
> j<-0:10  
> J <- t(rbind(j,j,j))  
> G <- t(rbind(pbinom(j, 1000, 0.001),ppois(j,1),pnorm((j-mu)/sig)))  
> matplot(J, G, type="l",  
+ ylab=c("Gs(x)"), xlab=c("x"),  
+ lty=c(1,2,3), col=c("light green","dark green","green"), lwd=c(3),  
+ main=c("Σ.Κ. ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ S"),  
+ sub="Γραφημα 2.2.2.")  
> legend(4, 0.6, c("ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ","POISSON  
ΚΑΤΑΝΟΜΗ","ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ"),  
+ lty=c(1,2,3),col=c("light green","dark green","green"),  
+ title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))
```

### Εφαρμογή 2.2.3

```
> ##ΒΑΣΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##  
> x <- 13000;  
> mu <- 10000;  
> sig <- 1000;  
> gam <- 1;  
> z <- (x-mu)/sig  
> ##3.ΚΑΝΟΝΙΚΗ##  
> s1<-1-pnorm(z) ; s1  
> ##ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ NORMAL POWER 2##  
> S2<-1-pnorm(sqrt(9/(gam^2) + (6*z)/gam + 1) - 3/gam) ; S2  
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
```

```
> j <- mu:30000
> s1 <- (j-mu)/sig
> s2 <- sqrt((9/(gam^2))+((6*s1)/gam)+ 1) - (3/gam)
> J <- t(rbind(j,j))
> G <- t(rbind(pnorm(s1),pnorm(s2)))
> matplot(J, G, type="l",
+ ylab=c("Gs(x)", xlab=c("x"),
+ lty=c(1,2), col=c("dark red", "red"), lwd=c(3),
+ main=c("Σ.Κ. ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ S"),
+ sub="Γραφημα 2.2.3.")
> legend(20000, 0.8, c("ΚΑΝΟΝΙΚΗ", "ΔΥΝΑΜΟΚΑΝΟΝΙΚΗ"),
+ lty=c(1,2), col=c("dark red", "red"),
+ title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))
```

#### Εφαρμογή 2.2.4

```
> ##ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΥΝΕΛΙΞΕΩΝ##
> fx1<- c(0,0.25,0.375,0.375)
> fx2<-convolve(fx1,rev(fx1),type="o")
> fx3<-convolve(fx2,rev(fx2),type="o")
> fx4<-convolve(fx3,rev(fx3),type="o")
> round(fx4,digits=6)
> ##Pr[Y=5]##
> fx4[6]
> round(fx4[6],digits=6)
> ##Pr[Y<=5]##
> sum(fx4[1:6])
> round(sum(fx4[1:6]),digits=6)
>##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
```

```
>G<-round(cumsum(fx4),digits=6)
>plot(G[9:25], type="l",
>ylab=c("Gs(x)", xlab=c("x"),
>lty=c(1), col=c("purple"), lwd=c(3),
>main=c("Σ.Κ. ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ S"),
>sub="Γραφημα 2.2.4.")
>legend(10, 0.5, c("ΣΥΝΕΛΙΞΕΩΝ"),
>lty=c(1),col=c("purple"),
>title="ΜΕΘΟΔΟΣ", lwd=c(3))
```

### Εφαρμογή 2.2.5

```
> ##ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΑΤΟΜΙΚΩΝ ΖΗΜΙΩΝ##
> U<-runif(10000)
> paret<-4300*((1-U)^(-0.4)-1)
> ##ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΛΗΘΟΣ ΖΗΜΙΩΝ##
> U<-runif(10000)
> expon<-log(1-U)
> lambda<-rep(1,10000)%*%t((12:111)*log(0.6))
> expon<--log(1-U)
> expon<-expon/lambda
> exponSum<-apply(expon,1,cumsum)
> ##ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΣΥΝΟΛΙΚΩΝ ΖΗΜΙΩΝ##
> agr<-rowSums(paret*(t(exponSum)<1))
> ##ΕΚΤΗΜΗΣΗ 95ο ΠΟΣΟΣΤΗΜΟΡΙΟΥ##
> quantile(agr,0.95)
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
> G <- sort(cumsum(agr))/10^9
> for (i in 1:length(G)){
```

```
+ if (G[i]>=1)G[i]<-1}
> plot(G, type="l",
+ ylab=c("Gs(x)", xlab=c("x"),
+ lty=c(1), col=c("yellow"), lwd=c(3),
+ main=c("Σ.Κ. ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ S"),
+ sub="Γραφημα 2.2.5.")
> legend(6000, 0.6, c("ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ"),
+ lty=c(1),col=c("yellow"),
+ title="ΜΕΘΟΔΟΣ", lwd=c(3))
```

### Εφαρμογή 2.2.6

```
>> ##ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##
> E <- 7
> E2 <- 58
> E3 <- 559
> ##ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ##
> Var <- E2 - (E)^2
> m3 <- E3 - 3*E*E2 + 2*(E)^3
> gam <- m3/((Var)^(3/2)) ;gam
> ##ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΗΣ ΓΑΜΜΑ
ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##
> a <- (2/gam)^2 ;a
> b <- sqrt(a/Var) ;b
> k <- E - (a/b) ;k
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
> x<-1:50
> G<-pgamma(x-k,a,b)
> plot(G, type="l",
```

```
+ ylab=c("Gs(x)", xlab=c("x"),  
+ lty=c(1), col=c("orange"), lwd=c(3),  
+ main=c("Σ.Κ. ΣΥΝΟΛΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ S"),  
+ sub="Γραφημα 2.2.6.")  
> legend(10, 0.5, c("ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΗΣ ΓΑΜΜΑ"),  
+ lty=c(1),col=c("orange"),  
+ title="ΜΕΘΟΔΟΣ", lwd=c(3))
```

### 3.2.1. Διακριτοποίηση Εκθετικής Κατανομής

```
> a<-0; b<-5; h<-0.02  
> x=seq(0,by=h,b-h)  
> ##ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΜΕ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟ β=5##  
> fexp<-pexp(x, 5)  
> c<-cumsum(fexp);c[-1]  
> ##Upper and Lower discretization##  
> fexpu <- discretize(pexp(x, 5), method = "upper",  
+ from = 0, to = 1, step = 0.02)  
> c1<-cumsum(fexpu);c1[-1]  
> fexpl <- discretize(pexp(x, 5), method = "lower",  
+ from = 0, to = 1, step = 0.02)  
> c2<-cumsum(fexpl);c2  
> ##Rounding (or midpoint) discretization##  
> fexpr <- discretize(pexp(x, 5), method = "rounding",  
+ from = 0, to = 1, step = 0.02)  
> c3<-cumsum(fexpr);c3  
> ##Unbiased (or first moment matching)discretization##  
> fexpb <- discretize(pexp(x, 5), method = "unbiased",  
+ lev = levexp(x, 2), from = 0, to = 1, step = 0.02)
```

```
> c4<-cumsum(fexpb);c4[-1]
> ##ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ##
> par(mfcol=c(2,2))
> plot(c1[-1], type="s", main="upper",lwd=c(1),
+ ylab="f(x)",col=c("blue"),sub="Γραφημα 3.2.1.A.")
> plot(c2, type="s", main="lower",lwd=c(1),
+ ylab="f(x)",col=c("red"),sub="Γραφημα 3.2.1.B.")
> plot(c3, type="s", main="rounding",lwd=c(1),
+ ylab="f(x)",col=c("green"),sub="Γραφημα 3.2.1.Γ.")
> plot(c4[-1], type="s", main="unbiased",lwd=c(1),
+ ylab="f(x)",col=c("purple"),sub="Γραφημα 3.2.1.Δ.")
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ
ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##
> exp5=5*exp(-5*x)*h
> f1<-discretise(pexp(x,5),method="upper", from=0, to=b, step=h)
> f2<-discretise(pexp(x,5),method="lower", from=0, to=b, step=h)
> f3<-discretise(pexp(x,5),method="rounding", from=0, to=b, step=h)
> f4<-discretise(pexp(x,5),method="unbiased", from=0, to=b,
+ lev=levexp(x,5),step=h)
> mexp<-t(rbind(f1,f2[1:m],f3,f4[1:m],exp5))
> grid<-t(rbind(x,x,x,x,x))
> matplot(grid, mexp, type="l", main="ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ
ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ",
+ col=c("black","blue","red","green","purple"),xlab="x",lwd=c(2),
+ ylab="f(x)",sub="Γραφημα 3.2.1.E.")
> legend(0.6, 0.08, c("πραγματική","upper","lower","rounding", "unbiased"),
+ lty=c(1,2,3,4,5),col=c("black","blue","red","green","purple"),
```



```
+ title="ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ: β=5",lwd=c(3))
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΣΥΝΑΡΤΙΣΗ
ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##
> c1=cumsum(f1)
> c2=cumsum(f2)
> c3=cumsum(f3)
> c4=cumsum(f4)
> distexp=cumsum(exp5)
> cdfexp5approx<-t(rbind(c1,c2[1:m],c3,c4[1:m],distexp))
> matplot(grid, cdfexp5approx, type="l",xlab="x",
+ col=c("black","blue","red","green","purple"),lwd=c(2),
+ ylab="F(x)",sub="Γραφημα 3.2.1.ΣΤ.",main="ΣΥΝΑΡΤΙΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ
ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ")
> legend(0.6, 0.6, c("πραγματική","upper","lower","rounding", "unbiased"),
+ lty=c(1,2,3,4,5),col=c("black","blue","red","green","purple"),
+ title="ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ: β=5",lwd=c(3))
```

### Εφαρμογή 3.3.1

```
> h <- 0.2
> x <- seq(0,10,h)
> n <- length(x)
> ##Σ.Κ. POISSON (=ΠΛΗΘΟΣ ΖΗΜΙΩΝ)##
> fn<-ppois(x, 10)
> summary(Fn)
> Sn<-cumsum(Fn)
> ##Σ.Κ. ΓΑΜΜΑ (=ΑΤΟΜΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ)##
> fx <- (25*x*exp(-5*x))/gamma(2))*h
> summary(fx)
```

```
> ##ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΓΑΜΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ Unbiased##
> fdx <- discretize(pgamma(x, 2, 5), method = "unbiased",
+ from = 0, to = 10, step = 0.2, lev = levgamma(x, 2, 5))
> summary(fdx)
> ##ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##
> En <- Vn <- 10; Ex <- mgamma(1,2,5); Ex2 <- mgamma(2,2,5);
> Vx <- mgamma(2,2,5) - (mgamma(1,2,5)^2); Ex3 <- mgamma(3,2,5);
> SKx <- 2/sqrt(2); SKn <- 1/sqrt(10);
> Es <- En*Ex; Vs <- En*Ex2; gam <- 1;
> z <- (x-Es)/ sqrt(Vs); k <- x-(Es-2*Vs/gam);
> gam <- (SKn*Vn^(3/2)*Ex^3+3*Vn*Ex*Vx+Ex*SKx*Vx^(3/2))/(Vs^(3/2))
> ##1)Σ.Κ. ΣΥΝΘΕΤΗΣ-POISSON (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ) ΜΕ ΤΗ
ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟ##
> fs1 <- pnorm(z)
> summary(fs1)
> ##2)Σ.Κ. ΣΥΝΘΕΤΗΣ-POISSON (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ)
> ΜΕ ΤΗ NORMAL POWER 2 ΜΕΘΟΔΟ##
Error: unexpected symbol in "ME TH"
> fs2 <- pnorm(sqrt(9/(gam^2) + 6*z/(gam) + 1) - 3/gam)
> summary(fs2)
> ##3)Σ.Κ. ΣΥΝΘΕΤΗΣ-POISSON (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ) ΜΕ ΤΗΝ
ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΗ ΓΑΜΜΑ ΜΕΘΟΔΟ##
> k <- 10*(Ex-((2*(Ex2)^2)/Ex3));k
> x-k
> alpha<-(40*(Ex2)^3)/((Ex3)^2)
> beta<-(2*Ex2)/(Ex3)
> fs3 <- pgamma(x-k, alpha, beta)
> summary(fs3)
```

```
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##  
> G <- t(rbind(fs1,fs2,fs3))  
> W <- t(rbind(x,x,x))  
> matplot(W, G,type="l" ,lwd=c(3) ,lty=c(1,2,3),  
+ main="Σ.Κ. ΣΥΝΘΕΤΗΣ-POISSON (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ  
ΖΗΜΙΕΣ)",col=c("blue","red","green"),  
+ ylab="g(x)", xlab="x", sub="Γραφημα 3.3.1.")  
> legend(5, 0.6, c("ΚΑΝΟΝΙΚΗ","ΔΥΝΑΜΟΚΑΝΟΝΙΚΗ","ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΗ  
ΓΑΜΜΑ"),  
+ lty=c(1,2,3),col=c("blue","red","green"),title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))
```

### Εφαρμογή 3.3.2

```
> h <- 0.2  
> x <- seq(0,10,h)  
> n <- length(x)  
> ##Σ.Κ. POISSON (=ΠΛΗΘΟΣ ΖΗΜΙΩΝ)##  
> fn <- ppois(x,5)  
> Fn <- cumsum(fn)  
> summary(fn)  
> ##Σ.Κ. ΜΕΙΞΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ (=ΑΤΟΜΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ)##  
> fx <- ((1/2)*3*exp(-x*3)+(1/2)*5*exp(-x*5))*h  
> Fx <- cumsum(fx)  
> summary(fx)  
> ##ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΜΕΙΞΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΜΕ ΤΗ  
ΜΕΘΟΔΟ Unbiased##  
> fdx1 <- discretize(pexp(x,3), method="unbiased",  
+ from=0, to=10, step=h, lev=levexp(x,3))  
> fdx2 <- discretize(pexp(x,5), method="unbiased",  
+ from=0, to=10, step=h, lev=levexp(x,5))
```

```
> fdx <- (1/2)*fdx1+(1/2)*fdx2
> summary(fdx)
> ##1)Σ.Κ. ΣΥΝΘΕΤΗΣ-POISSON (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ) ΜΕ ΤΗ
ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟ##
> gs1<-aggregateDist("recursive", model.freq="poisson",
+ model.sev=fdx, lambda=5, x.scale=h)
> summary(gs1(1:51))
> Gs1<-cumsum(gs1(1:51))
> summary(Gs1)
> ##2)Σ.Κ. ΣΥΝΘΕΤΗΣ-POISSON (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ) ΜΕ ΤΗ
ΜΕΘΟΔΟ ΣΥΝΕΛΙΞΕΩΝ##
> gs2<-aggregateDist("convolution", model.freq=dpois(0:10,5),
+ model.sev=fdx, lambda=5, x.scale=h)
> summary(gs2(1:51))
> Gs2<-cumsum(gs2(1:51))
> summary(Gs2)
> ##3)Σ.Κ. ΣΥΝΘΕΤΗΣ-POISSON (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ) ΜΕ ΜΕΘΟΔΟ
ΠΡΟΣΩΜΕΙΩΣΗΣ##
> gs3<-aggregateDist("simulation", model.freq=expression(data=rpois(5)),
+ model.sev=expression(data=rweibull(2,3)), nb.simul=551, x.scale=h)
> summary(gs3(1:51))
> Gs3<-cumsum(gs3(1:51))
> summary(Gs3)
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
> w<-t(rbind(x,x,x))
> g<-t(rbind(gs1(x),gs2(x),gs3(1:51)))
> matplot(w, g, type="l",lwd=c(3),lty=c(1,2,3),
+ main="Σ.Κ. ΣΥΝΘΕΤΗΣ-POISSON (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ)",
```

```
+ col=c("blue","red","green"),ylab="g(x)",  
+ xlab="x", sub="Γραφημα 3.3.2.")  
> legend(4, 0.7, c("ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ","ΣΥΝΕΛΙΞΕΩΝ","ΠΡΟΣΟΜΕΙΟΣΗΣ"),  
+ lty=c(1,2,3),col=c("blue","red","green"),  
+ title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))
```

### Εφαρμογή 3.3.3

```
> j <- 0.1  
> x <- seq(1,10,j)  
> n <- length(x)  
> ##Σ.Κ. ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ (=ΠΛΗΘΟΣ ΖΗΜΙΩΝ)##  
> p<-1/2  
> fn<-p*(1-p)^(x-1)  
> summary(fn)  
> ##Σ.Κ. ΕΚΘΕΤΙΚΗ (=ΑΤΟΜΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ)##  
> l<-2  
> fx <- (l*exp(-l*x))^j  
> summary(fx)  
> ##ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ  
Unbiased##  
> fdx <- discretize(pexp(x, l), method = "unbiased",  
+ from = 0, to = 10, step = j, lev = levexp(x, l))  
> summary(fdx)  
> ##ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##  
> En<-1/p;En  
> Vn<-(1-p)/(p^2);Vn  
> SKn<-(-2-p)/sqrt(1-p);SKn  
> Ex<-mexp(1,l);Ex
```

```
> Vx<-mexp(2,l)-(Ex)^2;Vx
> SKx<-2;SKx
> Es<-En*Ex;Es
> Vs<-En*Vx+Vn*(Ex)^2;Vs
> STDs<-sqrt(Vs);STDs
> SKs<-2;SKs

> ##1)Σ.Κ. ΣΥΝΘΕΤΗΣ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ) ΜΕ ΤΗ
ΜΕΘΟΔΟ WILSON - HILFERTY##
> z<-(x-Es)/STDs
> c1<-(SKs/(6*(STDs^3)))-((6*(STDs^3))/SKs);c1
> c3<-(2*(STDs^3))/SKs;c2
> c2<-3*(STDs^3)^(2/3);c3
> WH<-c1+c2*(z+c3)^(1/3)
> fs1 <- pnorm(WH)
> Fs1<-cumsum(fs1)
> summary(fs1)

> ##2)Σ.Κ. ΣΥΝΘΕΤΗΣ-POISSON (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ) ΜΕ ΤΗ
ΜΕΘΟΔΟ HALDANE##
> h<-1
> H<-(x/Es)^h
> Eh<-1
> Vh<-1
> HALD<-(H-Eh)/sqrt(Vh)
> fs2 <- pnorm(HALD)
> Fs2<-cumsum(fs2)
> summary(fs2)

> ##3)Σ.Κ. ΣΥΝΘΕΤΗΣ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ)ΜΕ ΤΗ
ΜΕΘΟΔΟ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE##
```

```
> fs3 <- pexp(x,1)
> Fs3<-cumsum(fs3)
> summary(fs3)
> G <- t(rbind(fs1,fs2,fs3))
> W <- t(rbind(x,x,x))
> matplot(W, G,type="l" ,lwd=c(3) ,lty=c(1,2,3),
+ main="Σ.Κ. ΣΥΝΘΕΤΗΣ-ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ
ZΗΜΙΕΣ)",col=c("blue","red","green"),
+ ylab="g (x)", xlab="x", sub="Γραφημα 3.3.3.")
> legend(4, 0.8, c("WILSON -
HILFERTY","HALDANE","ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE"),
+ lty=c(1,2,3),col=c("blue","red","green"),title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))
```

#### Εφαρμογή 4.5.1

```
> u=seq(0,50,1)
> θ=1/4
> ##ΟΙ ΡΟΠΕΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##
> μ1=mexp(1,2);μ1
> μ12=mexp(2,2);μ12
> ##Η Π.Χ. ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ RENVYI##
> ψR1=(1/(1+θ))*exp((-2*μ1*θ*u)/(μ12*(1+θ)))
> ##ΟΙ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΡΟΠΕΣ (ΤΡΕΙΣ ΠΡΩΤΕΣ) ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ
ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##
> ψT11=8*((2/5)*exp(-2*u/5)+(16/25)*exp(-2*u/5))
> ψT12=((128/125)*exp(-2*u/5))*(125+16*u*(15+2*u))
> ψT13=((512/625)*exp(-2*u/5))*(16875+8*u*(4125+4*u*(165+8*u)))
> ##ΟΙ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ
ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##
> μT1=ψT11/ψR1
```

```
> μ2T1=ψT12/ψR1
> μ3T1=ψT13/ψR1
> σT1=μ2T1-(μT1)^2
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
> hu<-t(rbind(u,u))
> g1<-t(rbind(ψT11,μT1))
> g2<-t(rbind(ψT12,μ2T1))
> g3<-t(rbind(ψT13,μ3T1))
> par(mfcol=c(3,1))
> matplot(hu,g1, type="l",lwd=c(3),xlab="u",
+ ylab="μT1(u)",col=c("light blue","dark blue"),sub="Γραφημα 4.5.1.A.",
+ main="ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΠΡΩΤΗ ΡΟΠΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΤΗΣ
ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ")
> legend(20, 8, c("ψT1(u)","μT1(u)"),
+ lty=c(1,2),col=c("light blue","dark blue"),
+ title="ΡΟΠΕΣ",lwd=c(3))
> matplot(hu,g2, type="l",lwd=c(3),xlab="u",
+ ylab="μT2(u)",col=c("red","dark red"),sub="Γραφημα 4.5.1.B.",
+ main="ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΔΕΥΤΕΡΗ ΡΟΠΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ
ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ")
> legend(0, 90000, c("ψT2(u)","μT2(u)"),
+ lty=c(1,2),col=c("red","dark red"),
+ title="ΡΟΠΕΣ",lwd=c(3))
> matplot(hu,g3, type="l",lwd=c(3),xlab="u",
+ ylab="μT3(u)",col=c("light green","dark green"),sub="Γραφημα 4.5.1.Γ.",
+ main="ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΤΡΙΤΗ ΡΟΠΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΤΗΣ
ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ")
> legend(10,4e+07 ,
```



```
+ c("ψT2(u)","μT2(u)",
+ lty=c(1,2),col=c("light green","dark green"),
+ title="ΡΟΠΕΣ",lwd=c(3))
> matplot(w, g, type="l" ,lwd=c(3) ,lty=c(1,2,3),
+ main="ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΧΡΟΝΟ t ΚΑΙ
ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ u=0",
+ col=c("blue","orange","purple"),
+ ylab="ψ(u,t)",
+ xlab="u", sub="Γραφημα 4.5.1.A")
> legend(15,0.3,lty=c(1),
+ c("ΕΚΘΕΤΙΚΗ","ΓΑΜΜΑ","ΒΗΤΑ"),
+ col=c("blue","orange","purple"),
+ title="ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ", lwd=c(3))
> legend(0,0.8,c("ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ"),title="ΜΕΘΟΔΟΣ")
> ##ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ##
> t=seq(0,30,1)
> u=seq(0,50,1)
> θ=1/4
> t=30
> ##ΟΙ ΡΟΠΕΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##
> μ1=mexp(1,2);μ1
> μ12=mexp(2,2);μ12
> ##Η Π.Χ. ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ RENVYI##
> ψR1=(1/(1+θ))*exp((-2*μ1*θ*u)/(μ12*(1+θ)))
> ##ΟΙ ΡΟΠΕΣ ΤΗΣ ΓΑΜΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##
> μ2=mgamma(1,5,10);μ2
> μ22=mgamma(2,5,10);μ22
```

```
> ##Η Π.Χ. ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ RENVY##  
> ψR2=(1/(1+θ))*exp((-2*μ2*θ*u)/(μ22*(1+θ)))  
> ##ΟΙ ΡΟΠΕΣ ΤΗΣ ΒΗΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##  
> μ3=mbeta(1,5,5);μ3  
> μ32=mbeta(2,5,5);μ32  
> ##Η Π.Χ. ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΤΟΥ RENVY##  
> ψR3=(1/(1+θ))*exp((-2*μ3*θ*u)/(μ32*(1+θ)))  
> ##ΟΙ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΡΟΠΕΣ (ΤΡΕΙΣ ΠΡΩΤΕΣ) ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ  
ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##  
> ψT11=8*((2/5)*exp(-2*u/5)+(16/25)*exp(-2*u/5))  
> ψT12=((128/125)*exp(-2*u/5))*(125+16*u*(15+2*u))  
> ψT13=((512/625)*exp(-2*u/5))*(16875+8*u*(4125+4*u*(165+8*u)))  
> ##ΟΙ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΡΟΠΕΣ (ΤΡΕΙΣ ΠΡΩΤΕΣ) ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ  
ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΤΗΣ ΓΑΜΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##  
> ψT21=8*((6/25)*exp(-2*u/3)+(16/25)*exp(-2*u/3))  
> ψT22=((128/125)*exp(-2*u/3))*(45+16*u*(9+2*u))  
> ψT23=((512/625)*exp(-2*u/3))*(3645+8*u*(1485+4*u*(99+8*u)))  
> ##ΟΙ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΕΣ ΡΟΠΕΣ (ΤΡΕΙΣ ΠΡΩΤΕΣ) ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ  
ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΤΗΣ ΒΗΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##  
> ψT31=8*((12/55)*exp(-11*u/15)+(16/25)*exp(-11*u/15))  
> ψT32=((512/15125)*exp(-11*u/15))*(1125+8*u*(45+u))  
> ψT33=((409/831875)*exp(-  
11*u/15))*(455625+484*u*(3375+22*u*(45+4*u)))  
> ##ΟΙ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ  
ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##  
> μT1=(ψT11)/(ψR1)  
> μ2T1=(ψT12)/(ψR1)  
> σT1=μ2T1-(μT1)^2
```

```
> ##ΟΙ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ
ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΤΗΣ ΓΑΜΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##
> μT2=(ψT21)/(ψR1)
> μ2T2=(ψT22)/(ψR1)
> σT2=μ2T2-(μT2)^2
> ##ΟΙ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΚΑΙ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ
ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΤΗΣ ΒΗΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##
> μT3=(ψT31)/(ψR1)
> μ2T3=(ψT32)/(ψR1)
> σT3=μ2T3-(μT3)^2
> ##ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##
> z1=(t-μT1)/(sqrt(abs(σT1)))
> z2=(t-μT2)/(sqrt(abs(σT2)))
> z3=(t-μT3)/(sqrt(abs(σT3)))
> ###Η Π.Χ. ΤΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ##
> ψ1=ψR1*pnorm(z1)
> ψ2=ψR2*pnorm(z2)
> ψ3=ψR3*pnorm(z3)
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
> h<-t(rbind(u,u,u))
> w<-t(rbind(t,t,t))
> g<-t(rbind(round(ψ1,9),round(ψ2,9),round(ψ3,9)))
> matplot(h, g, type="l" ,lwd=c(3) ,lty=c(1,2,3),
+ main="ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΕ ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΤΟ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ u
+ ΚΑΙ ΜΕ ΣΤΑΘΕΡΟ ΧΡΟΝΟ t=30",
+ col=c("blue","orange","purple"),
+ ylab="ψ(u,t)",
+ xlab="u", sub="Γραφημα 4.5.1.6")
```

```
> legend(20, 0.4, lty=c(1),
+ c("ΕΚΘΕΤΙΚΗ", "ΓΑΜΜΑ", "ΒΗΤΑ"),
+ col=c("blue", "orange", "purple"),
+ title="ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ", lwd=c(3))
> legend(10, 0.6, c("ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ"), title="ΜΕΘΟΔΟΣ")
```

#### Εφαρμογή 4.5.2

```
> u=seq(0, 10, 0.02)
> ##ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ##
> R<-log(10+6*sqrt(3));R
> ##ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ LUNDBERG#
> ψAR <- exp(-R*u)
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
> plot(u, ψREC, type="l", lwd=c(3), lty=c(1), main="ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ",
+ col=c("green"), ylab="ψ(u)", xlab="t", sub="Γραφημα 4.5.1.")
> legend(2, 0.8, lty=c(1), c("ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ LUNDBERG"), col=c("green"),
+ title="ΜΕΘΟΔΟΣ", lwd=c(3))
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
> plot(u, ψREC, type="l", lwd=c(3), lty=c(1), main="ΑΝΩ ΦΡΑΓΜΑ ΓΙΑ ΤΗΝ
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ",
+ col=c("green"), ylab="ψ(u)", xlab="t", sub="Γραφημα 4.5.1.")
> legend(2, 0.8, lty=c(1), c("ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ LUNDBERG"), col=c("red"),
+ title="ΜΕΘΟΔΟΣ", lwd=c(3))
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
> plot(u, ψREC, type="l", lwd=c(3), lty=c(1), main="ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ
ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ",
+ col=c("red"), ylab="ψ(u)", xlab="t", sub="Γραφημα 4.5.1.")
> legend(2, 0.8, lty=c(1), c("ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ LUNDBERG"), col=c("red"),
```

```
+ title="ΜΕΘΟΔΟΣ", lwd=c(3))
```

### Εφαρμογή 4.5.3

```
> u=seq(0,10,0.02)
```

```
> ##ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##
```

```
> a <- 1/3
```

```
> p <- 1/2
```

```
> ##ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΣΧΕΣΗ##
```

```
> ψREC <- (p/(1-p))*(a/(1-p))^u
```

```
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
```

```
> plot(u, ψREC ,type="l" ,lwd=c(3) ,lty=c(1),main="ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ  
ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ",
```

```
+ col=c("green"),ylab="ψ(u)",xlab="t", sub="Γραφημα 4.4.3.")
```

```
> legend(2, 0.8, lty=c(1),c("ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ"),col=c("green"),
```

```
+ title="ΜΕΘΟΔΟΣ", lwd=c(3))
```

### Εφαρμογή 5.2.1

```
> u <- seq(0,18,0.02)
```

```
> ##ΡΟΠΕΣ ΜΕΙΞΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ##
```

```
> μ1 <- mexp(1,1) ;μ1
```

```
> μ2 <- mexp(1,2) ;μ2
```

```
> μ3 <- mexp(1,3) ;μ3
```

```
> μ <- (1/3)*(μ1+μ2+μ3) ;μ
```

```
> ##ΒΑΣΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##
```

```
> λ <- 4
```

```
> c <- 4
```

```
> θ <- (c/(λ*μ))-1 ;θ
```

```
> ##ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ##
```

```
> R <- 0.48513 ;R
```

```
> ##ΣΤΑΘΕΡΑ##  
> C <- (θ*μ)/(R*1.4554) ;C  
> ##ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ CRAMER-  
LUNDBERG##  
> ψCL <- C*exp(-(R*u))  
> ##ΑΚΡΙΒΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ##  
> ψ <- 0.550786*exp(-0.48513*u)+ 0.043702*exp(-1.72235*u)+  
0.016623*exp(-2.79252*u)  
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##  
> X <- t(rbind(u,u))  
> Y <- t(rbind(ψCL,ψ))  
> matplot(X, Y,type="l",ylab=c("ψ(u)"),xlab=c("u"),  
+ lty=c(1,2),col=c("blue","red"),lwd=c(3),  
+ main=c("ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ"),sub="Γραφημα 5.2.1.")  
> legend(9, 0.5, c("CRAMER-LUNDBERG","ΑΚΡΙΒΗΣ"),  
+ lty=c(1,2),col=c("blue","red"),  
+ title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))
```

### Εφαρμογή 5.2.2

```
> u <- seq(0,18,0.02)  
> ##ΡΟΠΕΣ ΜΕΙΞΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ##  
> μ1 <- mexp(1,1) ;μ1  
> μ2 <- mexp(1,2) ;μ2  
> μ3 <- mexp(1,3) ;μ3  
> μ <- (1/3)*(μ1+μ2+μ3) ;μ  
> ##ΒΑΣΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##  
> λ <- 4  
> c <- 4  
> θ <- (c/(λ*μ))-1 ;θ
```

```
> ##ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ##  
> R <- 0.48513 ;R  
> ##ΣΤΑΘΕΡΑ##  
> C <- (θ*μ)/(R*1.4554) ;C  
> ##ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ##  
> ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ <- 49/108  
> γ <- (((1/(1+θ))-C)*(((1/(μ*θ))*ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ)-(C/R))(-1)) ;γ  
> ##ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΙJMS##  
> ψT <- (((1/(1+θ))-C)*exp(-(γ*u)))+C*exp(-(R*u))  
> ##ΑΚΡΙΒΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ##  
> ψ <- 0.550786*exp(-0.48513*u)+ 0.043702*exp(-1.72235*u)+  
0.016623*exp(-2.79252*u)  
  
##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##  
X <- t(rbind(u,u))  
Y <- t(rbind(ψT,ψ))  
matplot(X, Y,type="l",ylab=c("ψ(u)"),xlab=c("u"),  
lty=c(1,2),col=c("blue","red"),lwd=c(3),  
main=c("ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ"),sub="Γραφημα 5.2.2.")  
legend(10, 0.5, c("ΤΙJMS","ΑΚΡΙΒΗΣ"),  
lty=c(1,2),col=c("blue","red"),  
title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))  
Εφαρμογή 5.2.3  
> u <- seq(0,18,0.02)  
> ##ΡΟΠΕΣ ΓΑΜΜΑ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##  
> μ1 <- mgamma(1,2,2) ;μ1  
> μ2 <- mgamma(2,2,2) ;μ2  
> μ3 <- mgamma(3,2,2) ;μ3  
> ##ΒΑΣΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##
```

```
> λ <- 7/54
> c <- 1.2*λ
> θ <- 0.2 ;θ
> μDV <- (3*μ2)/μ3 ;μDV
> λDV <- (λ*μ3)/(6*(μDV^3)) ;λDV
> θDV <- (μ1*θ*λ)/(μDV*λDV) ;θDV
> ##ΕΚΘΕΤΗΣ DE VYLDER##
> RDV <- (θDV/(1+θDV))*(1/μDV) ;RDV
> ##ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΜΕ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ DE VYLDER##
> ψDV <- (1/(1+θDV))*exp(-(RDV*u))
> ##ΑΚΡΙΒΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ##
> ψ <- 0.6627403*exp(-0.194871*u)+0.170593*exp(-0.523462*u)
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
> X <- t(rbind(u,u))
> Y <- t(rbind(ψDV,ψ))
> matplot(X, Y,type="l",ylab=c("ψ(u)"),xlab=c("u"),
+ lty=c(1,2),col=c("blue","red"),lwd=c(3),
+ main=c("ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ"),sub="Γραφημα 5.2.3.")
> legend(10, 0.5, c("DE VYLDER","ΑΚΡΙΒΗΣ"),
+ lty=c(1,2),col=c("blue","red"),
+ title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))
```

#### Εφαρμογή 5.2.4

```
> u <- seq(0,18,0.02)
> ##ΡΟΠΕΣ ΜΕΙΞΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ##
> μ1 <- 0.5*mexp(1,4)+0.5*mexp(1,6) ;μ1
> μ2 <- 0.5*mexp(2,4)+0.5*mexp(2,6) ;μ2
> μ3 <- 0.5*mexp(3,4)+0.5*mexp(3,6) ;μ3
```



```
> ##ΒΑΣΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##  
> λ <- 4  
> c <- 1  
> θ <- (c/(λ*μ1))-1 ;θ  
> ##ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ##  
> R <- 0.763931  
> ##ΣΤΑΘΕΡΑ##  
> ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ <- 0.5*(((1/(4-R))^2)+((1/(6-R))^2))  
> C <- (θ*μ1)/(R*ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ) ;C  
> ##Α. ΑΝΗΣΟΤΗΤΑ ΤΟΥ LUNDBERG##  
> ψAL <- exp(-R*u)  
> ##Β. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ LUNDBERG##  
> ψL <- (1+(θ*u-(μ2/(2*μ1)))*((4*θ*(μ1^2)*μ3)/(3*(μ2^3))))*exp(((  
2*μ1*θ)/μ2)*u)  
> ##Γ. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ CRAMER-LUNDBERG##  
> ψCL <- C*exp(-R*u)  
> ##ΑΚΡΙΒΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ##  
> ψ <- 0.621251 *exp(-0.763931*u)+ 0.212081*exp(-5.236067*u)  
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##  
> X <- t(rbind(u,u,u,u))  
> Y <- t(rbind(ψAL,ψL,ψCL,ψ))  
> matplot(X, Y,type="l",ylab=c("ψ(u)"),xlab=c("u"),  
+ lty=c(1,2),col=c("blue","red","green","black"),lwd=c(3),  
+ main=c("ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ"),sub="Γραφημα 5.2.4.")  
> legend(5, 0.8, c("ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ LUNDBERG","LUNDBERG","CRAMER-  
LUNDBERG","ΑΚΡΙΒΗΣ"),  
+ lty=c(1,2,3,4),col=c("blue","red","green","black"),  
+ title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))
```

Εφαρμογή 5.2.5

```
> u <- seq(0,18,0.02)
> ##ΡΟΠΕΣ ΜΕΙΞΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ##
> μ1 <-
(1/10)*mexp(1,1)+(2/10)*mexp(1,2)+(3/10)*mexp(1,3)+(4/10)*mexp(1,4) ;μ1
> μ2 <-
(1/10)*mexp(2,1)+(2/10)*mexp(2,2)+(3/10)*mexp(2,3)+(4/10)*mexp(2,4) ;μ2
> μ3 <-
(1/10)*mexp(3,1)+(2/10)*mexp(3,2)+(3/10)*mexp(3,3)+(4/10)*mexp(3,4) ;μ3
> ##ΒΑΣΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##
> λ <- 2
> c <- 1
> θ <- (c/(λ*μ1))-1 ;θ
> ##ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ##
> R <- 0.355567
> ##ΣΤΑΘΕΡΑ##
> ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ <- (1/10)*(((1/(1-R))^2)+(2*(1/(2-R))^2)+(3*(1/(3-
R))^2)+(4*(1/(4-R))^2))
> C <- (θ*μ1)/(R*ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ) ;C
> ##Α. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ CRAMER-LUNDBERG##
> ψCL <- C*exp(-R*u)
> ##ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗΣ ΓΑΜΜΜΑ##
> k <- (μ3/(3*θ*μ1))+(μ2/(2*θ*μ1))^2
> b <- μ2/((1+θ)*2*θ*μ1*k) ;b
> a <- (μ2*(1+θ)*b)/(2*θ*μ1) ;a
> ##Β. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ BEEKMAN - BOWERS##
> ψBB <- (1/(1+θ))*(1-pgamma(u,a,b))
> ##ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΣ##
```

```
> ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ2 <- (1/10)*(1+(1/2)+(1/3)+(1/4))
> γ <- (((1/(1+θ))-C)*(((1/(μ1*θ))*ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ2)-(C/R))^(1-1) ;γ
> ##Γ. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ ΤΙJMS##
> ψT <- (((1/(1+θ))-C)*exp(-(γ*u)))+C*exp(-(R*u))
> ##ΕΚΘΕΤΗΣ DE VYLDER##
> μDV <- (3*μ1)/μ3 ;μDV
> λDV <- (λ*μ3)/(6*(μDV^3)) ;λDV
> θDV <- (μ1*θ*λ)/(μDV*λDV) ;θDV
> RDV <- (θDV/(1+θDV))*(1/μDV) ;RDV
> ##Δ. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ DE VYLDER##
> ψDV <- (1/(1+θDV))*exp(-(RDV*u))
> ##ΑΚΡΙΒΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ##
> ψ <- 1.010327*exp(-0.355567*u)-0.642689*exp(-
1.456087*u)+0.544416*exp(-2.543912*u)-0.112055*exp(-3.644432*u)
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
> X <- t(rbind(u,u,u,u,u))
> Y <- t(rbind(ψCL,ψBB,ψT,ψDV,ψ))
> matplot(X, Y,type="l",ylab=c("ψ(u)"),xlab=c("u"),
+ lty=c(1,2),col=c("blue","red","green","purple","black"),lwd=c(3),
+ main=c("ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ"),sub="Γραφημα 5.2.5.")
> legend(9, 0.6, c("CRAMER-LUNDBERG","BEEKMAN -
BOWERS","ΤΙJMS","DE VYLDER","ΑΚΡΙΒΗΣ"),
+ lty=c(1,2,3,4,5),col=c("blue","red","green","purple","black"),
+ title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))
```

### Εφαρμογή 5.2.6

```
> u <- seq(0,18,0.5)
> ##ΡΟΠΕΣ ΜΕΙΞΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ##
> μ1 <- (3/4)*mgamma(1,2,1)+(1/4)*mgamma(1,3,1) ;μ1
```

```
> μ2 <- (3/4)*mgamma(2,2,1)+(1/4)*mgamma(2,3,1) ;μ2
> μ3 <- (3/4)*mgamma(3,2,1)+(1/4)*mgamma(3,3,1) ;μ3
> ##ΒΑΣΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##
> λ <- 1
> c <- 3
> θ <- (c/(λ*μ1))-1 ;θ
> ##ΕΚΘΕΤΗΣ DE VYLDER##
> μDV <- (3*μ2)/μ3 ;μDV
> λDV <- (λ*μ3)/(6*(μDV^3)) ;λDV
> θDV <- (μ1*θ*λ)/(μDV*λDV) ;θDV
> RDV <- (θDV/(1+θDV))*(1/μDV) ;RDV
> ##Α. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ DE VYLDER##
> ψDV <- (1/(1+θDV))*exp(-(RDV*u))
> ##Β. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ##
> ψE <- exp(-1-((2*μ1*θ*u-μ2)/(sqrt((μ2^2)+(4/3)*θ*μ1*μ3))))
> exp(-1)*exp(μ2/(sqrt((μ2^2)+(4/3)*θ*μ1*μ3)))
> ((2*μ1*θ)/(sqrt((μ2^2)+(4/3)*θ*μ1*μ3)))
> ##Γ. ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΟΥ RENVYI##
> ψR <- (1/(1+θ))*exp(-((θ*μ1^2)/((1+θ)*μ2))*u)
> ##ΑΚΡΙΒΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ##
> ψ <- 0.0642279*exp(-1.25259*u)+0.14632*exp(-
0.215583*u)+0.5394521*exp(-0.128955*u)
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ##
> X <- t(rbind(u,u,u,u))
> Y <- t(rbind(ψDV,ψE,ψR,ψ))
> matplot(X, Y,type="l",ylab=c("ψ(u)"),xlab=c("u"),
+ lty=c(1,2),col=c("blue","red","green","black"),lwd=c(3),
```

```
+ main=c("ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ"),sub="Γραφημα 5.2.6.")
> legend(6, 0.9, c("DE VYLDER","ΕΚΘΕΤΙΚΗ","RENYI","ΑΚΡΙΒΗΣ"),
+ lty=c(1,2,3,4),col=c("blue","red","green","black"),
+ title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))
```

### Εφαρμογή 5.2.7

```
> u <- seq(0,18,0.02)
> ###ΡΟΠΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ##
> μ1 <- mexp(1,2) ;μ1
> μ2 <- mexp(2,2) ;μ2
> ###ΒΑΣΙΚΟΙ ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##
> λ <- 1
> c <- 1
> θ <- (c/(λ*μ1))-1 ;θ
> ##Α. HEAVY TRAFFIC##
> ψHT <- exp(-((2*θ*μ1)/μ2)*u)
> ##Β. LIGHT TRAFFIC##
> ψLT <- (1/((1+θ)*μ1))*(1/2)*exp(-2*u)
> ##Γ. HEAVY - LIGHT TRAFFIC##
> ψHLT <- (1/(1+θ))*(1/((1+θ)*μ1))*exp(-5*(θ/(1+θ))*u) + (1/(1+θ)^2)*exp(-
((2*θ*μ1)/μ2)*u)
> ##ΑΚΡΙΒΗΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ##
> ψ <- (1/(1+θ))*exp(-(((θ*2)/(1+θ))*u))
> ##ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΡΑΣΤΑΣΗ##
> X <- t(rbind(u,u,u,u))
> Y <- t(rbind(ψHT,ψLT,ψHLT,ψ))
> matplot(X, Y,type="l",ylab=c("ψ(u)"),xlab=c("u"),
+ lty=c(1,2),col=c("blue","red","green","black"),lwd=c(3),
```

```
+ main=c("ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ"),sub="Γραφημα 5.2.7.")  
> legend(5, 0.6, c("HEAVY TRAFFIC","LIGHT TRAFFIC","HEAVY - LIGHT  
TRAFFIC","ΑΚΡΙΒΗΣ"),  
+ lty=c(1,2,3,4),col=c("blue","red","green","black"),  
+ title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))
```

### Εφαρμογή 6.1

```
> end = 20  
> x = seq(0,end,stepn)  
> fn = ppois(x,2)  
> length(fn)  
> fx = (2*exp(-2*x))*stepn  
> length(fx)  
> fdx = discretize(pexp(x,2), method="unbiased",  
+ from=0, to=end, step=stepn, lev=levexp(x,2))  
> length(fdx)  
> ##ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ##  
> ##ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##  
> En = Vn = 2;  
> Ex = mexp(1,2);  
> Ex2 = mexp(2,2);  
> Vx = mexp(2,2) - (mexp(1,2)^2);  
> Ex3 = mexp(3,2);  
> SKx = 2;  
> SKn = 1/sqrt(2);  
> k = 10*(Ex-((2*(Ex2)^2)/Ex3));k  
> Es = En*Ex;  
> Vs = En*Ex2;
```

```
> z = (x-Es)/ sqrt(Vs);
> SKs = gam =
(SKn*Vn^(3/2)*Ex^3+3*Vn*Ex*Vx+Ex*SKx*Vx^(3/2))/(Vs^(3/2));SKs
> NPOWER2 = sqrt(9/(gam^2) + 6*z/(gam) + 1) - 3/gam
> kappa = x-k
> alpha = (40*(Ex2)^3)/((Ex3)^2);alpha
> beta = (2*Ex2)/(Ex3);beta
> c1 = (SKs/(6*(sqrt(Vs)^3)))-((6*(sqrt(Vs)^3))/SKs);c1
> c3 = (2*(sqrt(Vs)^3))/SKs;c3
> c2 = 3*(sqrt(Vs)^3)^(2/3);c2
> WH = c1+c2*(z+c3)^(1/3)
> h = 1
> H = (x/Es)^h
> Eh = 1
> Vh = 0.5
> HALD = (H-Eh)/sqrt(Vh)
>##ΜΕΘΟΔΟΙ##
> "ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ"
> gs1 = aggregateDist("recursive", model.freq="poisson",
+ model.sev=fdx, lambda=2, x.scale=stepn)
> summary(gs1(x))
> "ΣΥΝΕΛΙΞΕΩΝ"
> gs2 = aggregateDist("convolution", model.freq=dpois(x,2),
+ model.sev=fdx, lambda=2, x.scale=stepn)
> summary(gs2(x))
> "ΠΡΟΣΩΜΕΙΩΣΗΣ"
> gs3 = aggregateDist("simulation", model.freq=expression(data=rpois(2)),
```

```
+ model.sev=expression(data=rexp(2)), nb.simul=51, x.scale=stepn)
> summary(gs3(x))
> "ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ"
> gs4 = pnorm(z)
> summary(gs4)
> "ΔΥΝΑΜΟΚΑΝΟΝΙΚΗΣ"
> gs5 = pnorm(NPOWER2)
> summary(gs5)
> "ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΗΣ ΓΑΜΜΑ"
> gs6 = pgamma(kappa, alpha, beta)
> summary(gs6)
> "WILSON - HILFERTY"
> gs7 = pnorm(WH)
> summary(gs7)
> "HALDANE"
> gs8 = pnorm(HALD)
> summary(gs8)
> ##ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ##
> w = t(rbind(x,x,x,x,x,x,x,x))
> g = t(rbind(gs1(x) ,gs2(x) ,gs3(x) ,gs4 ,gs5 ,gs6 ,gs7 ,gs8 ))
> matplot(w, g, type="l" ,lwd=c(3) ,lty=c(1,2,3,4,5,6,7,8),
+ main="ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ
+ ΣΥΝΘΕΤΗΣ-POISSON (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ)",
+ col=c("blue","red","green","brown","yellow",
+ "purple","orange","pink","light blue"),ylab="G(x)",
+ xlab="x", sub="Γραφημα 6.1.")
> legend(8, 0.5, c("ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ", "ΣΥΝΕΛΙΞΕΩΝ", "ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ",
```



```
+ "ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ", "ΔΥΝΑΜΟΚΑΝΟΝΙΚΗΣ", "ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΜΕΝΗΣ ΓΑΜΜΑ",  
+ "WILSON - HILFERTY", "HALDANE"),  
+ lty=c(1,2,3,4,5,6,7,8),col=c("blue","red","green","brown","yellow",  
+ "purple","orange","pink"),  
+ title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))  
> ##ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ##  
> ##ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ##  
> u = seq(0,20,0.5)  
> c = 3  
> λ = 2  
> μ1 = Es ;μ1  
> θ = (c/(λ*μ1))-1 ;θ  
> μ2 = En*mexp(2,2) ;μ2  
> μ3 = En*mexp(3,2) ;μ3  
> upperboundR = R = (2*θ*μ1)/μ2 ;R  
> μDV = (3*μ1)/μ3 ;μDV  
> λDV = (λ*μ3)/(6*(μDV^3)) ;λDV  
> θDV = (μ1*θ*λ)/(μDV*λDV) ;θDV  
> RDV = (θDV/(1+θDV))*(1/μDV) ;RDV  
> kBB = (μ3/(3*θ*μ1))+(μ2/(2*θ*μ1))^2 ;kBB  
> bBB = μ2/((1+θ)*2*θ*μ1*kBB) ;bBB  
> aBB = (μ2*(1+θ)*bBB)/(2*θ*μ1) ;aBB  
> ##LUNDBERG##  
> ψL = (1+(θ*u-(μ2/(2*μ1)))*((4*θ*(μ1^2)*μ3)/(3*(μ2^3))))*exp(((  
-2*μ1*θ)/μ2)*u)  
> ##DE VYLDER##  
> ψDV = (1/(1+θDV))*exp(-(RDV*u))
```

```
> ##BEEKMAN - BOWERS##
> ψBB = (1/(1+θ))*(1-pgamma(u,aBB,bBB))
> ##ΕΚΘΕΤΙΚΗ##
> ψE = exp(-1-((2*μ1*θ*u-μ2)/(sqrt((μ2^2)+(4/3)*θ*μ1*μ3))))
> ##RENYI##
> ψR = (1/(1+θ))*exp(-((θ*μ1^2)/((1+θ)*μ2))*u)
> ##HEAVY TRAFFIC##
> ψHT = exp(-((2*θ*μ1)/μ2)*u)
> ##LIGHT TRAFFIC##
> ψLT = (1/((1+θ)*μ1))*(1/2)*exp(-2*u)
> ##HEAVY - LIGHT TRAFFIC##
> ψHLT = (1/(1+θ))*(1/((1+θ)*μ1))*exp(-5*(θ/(1+θ))*u) + (1/(1+θ)^2)*exp(-
((2*θ*μ1)/μ2)*u)
> ##ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ##
> τ = t(rbind(u,u,u,u,u,u,u,u))
> ψ = t(rbind(round(ψL,4),round(ψDV,4),round(ψBB,4),round(ψE,4),
+ round(ψR,4),round(ψHT,4),round(ψLT,4),round(ψHLT,4)))
> matplot(τ, ψ, type="l",lwd=c(3),lty=c(1,2,3,4,5,6,7,8),
+ main="ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ
+ ΣΥΝΘΕΤΗΣ-POISSON (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ)",
+ col=c("blue","red","green","brown","yellow",
+ "purple","orange","pink"),ylab="ψ(u)",
+ xlab="u", sub="Γραφημα 6.2.")
> legend(5, 0.9, c("LUNDBERG","DE VYLDER",
+ "BEEKMAN - BOWERS","ΕΚΘΕΤΙΚΗ","RENYI","HEAVY TRAFFIC",
+ "LIGHT TRAFFIC","HEAVY - LIGHT TRAFFIC"),
+ lty=c(1,2,3,4,5,6,7,8),
```

```
+ col=c("blue","red",  
+ "green","brown","yellow",  
+ "purple","orange","pink"),  
+ title="ΜΕΘΟΔΟΙ", lwd=c(3))  
>##ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ##  
> par(mfcol=c(2,1))  
> plot(x, gs3(x), type="l" ,lwd=c(3) ,lty=c(1),  
+ main="ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ  
+ ΣΥΝΘΕΤΗΣ-POISSON (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ)",  
+ col=c("black"),ylab="G(x)",  
+ xlab="x", sub="Γραφημα 6.3")  
> legend(5, 0.5, c("ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ"),  
+ lty=c(1),col=c("black"),  
+ title="ΜΕΘΟΔΟΣ", lwd=c(3))  
> plot(u, ψLT, type="l" ,lwd=c(3) ,lty=c(1),  
+ main="ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ  
+ ΣΥΝΘΕΤΗΣ-POISSON (=ΣΥΝΟΛΙΚΕΣ ΖΗΜΙΕΣ)",  
+ col=c("black"),ylab="ψ(u)",  
+ xlab="u", sub="Γραφημα 6.4.")  
> legend(5, 0.3, c("LIGHT TRAFFIC"),  
+ lty=c(1),col=c("black"),  
+ title="ΜΕΘΟΔΟΣ", lwd=c(3))
```

## ΣΤ. ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Το παρακάτω παράρτημα παρουσιάζεται στο ΠΟΛΙΤΗΣ Κ. , **ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΥΛΛΟΓΙΚΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ - ΤΟ ΣΥΛΟΓΙΚΟ ΠΡΟΤΥΠΟ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ**, ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ , ΑΘΗΝΑ, 2012. Επίσης και στο ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ Γ. , **ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΚΤΙΜΗΣΗΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΩΝ ΜΕ ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΙ ΜΕ ΔΙΑΣΤΗΜΑ Β'ΕΚΔΟΣΗ** , ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ, ΑΘΗΝΑ, 2013. Αλλά και στο ΑΤΖΟΥΛΑΚΟΣ Δ. , **ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ Π.Μ.Σ. «ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ» ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΓΛΩΣΣΑ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ R ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΟΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΜΟ** , ΠΕΙΡΑΙΑΣ, 2017

### ΣΤ.1. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Οι Εκθετικές Οικογένειες είναι (σχετικά) απλές στο χειρισμό τους και γι' αυτόν το λόγο χρησιμοποιούνται ως στατιστικά μοντέλα σε πολλές εφαρμογές. (ΗΛΙΟΠΟΥΛΟΣ, 2013)

#### ΣΤ.1.1. ΜΟΝΟΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

**Ορισμός ΣΤ.1.1** : Η οικογένεια κατανομών του τ.δ.  $\chi = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  είναι μια Μονοπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών (ΜΕΟΚ) αν έχει πυκνότητας πιθανότητας που μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$f(\chi; \theta) = \exp\{A(\theta) + B(\chi) + C(\theta) \cdot D(\chi)\},$$
$$, \forall \theta \in \theta, \chi \in S := \{\chi: f(\chi; \theta) > 0\},$$

και το στήριγμα  $S$  δεν εξαρτάται από το  $\theta$ .

**Παράδειγμα ΣΤ.1.1** : Έστω το τ.δ.  $\chi = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{POISSON}(\theta)$ ,  $\theta \in \theta = (0, \infty)$

Έχουμε  $X_i \sim f(x; \theta) = \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!} I_{Z_+}(x)$

$$\chi \sim f(\chi; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{e^{-\theta} \theta^{x_i}}{x_i!} I_{Z_+}(x_i) =$$
$$= \exp\left(-n \cdot \theta + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \log \theta - \log \prod_{i=1}^n x_i!\right) I_{Z_+^n}(\chi)$$

Άρα η οικογένεια κατανομών του  $\chi$  είναι μια ΜΕΟΚ, γιατί έχει πυκνότητες της μορφής

$$f(\chi; \theta) = \exp\{A(\theta) + B(\chi) + C(\theta) \cdot D(\chi)\},$$

$$, \forall \theta \in \Theta, \chi \in S := Z_+^n$$

με  $A(\theta) = -n \cdot \theta$ ,  $B(\chi) = -\log \prod_{i=1}^n x_i!$ ,  $C(\theta) = \log \theta$ ,  $D(\chi) = \sum_{i=1}^n x_i$

### ΣΤ.1.2. ΠΟΛΥΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

**Ορισμός ΣΤ.1.2**: Η οικογένεια κατανομών του τ.δ.  $\chi = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  είναι μια  $k$ -Πολυπαραμετρική Εκθετική Οικογένεια Κατανομών ( $k$ -ΠΕΟΚ) αν έχει πυκνότητες πιθανότητας που μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$f(\chi; \theta) = \exp \left\{ A(\theta) + B(\chi) + \sum_{j=1}^k C_j(\theta) D_j(\chi) \right\},$$

$$, \forall \theta \in \Theta, \chi \in S := \{\chi: f(\chi; \theta) > 0\},$$

και το στήριγμα  $S$  δεν εξαρτάται από το  $\theta$ .

**Παράδειγμα ΣΤ.1.2**: Έστω το τ.δ.  $\chi = (X_1, X_2, \dots, X_n) \sim \text{ΚΑΝΟΝΙΚΗ}(\mu, \sigma^2)$ ,  $\theta = (\mu, \sigma^2) \in \Theta = \mathcal{R} \times (0, \infty)$

Έχουμε  $X_i \sim f(x; \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{\mathcal{R}}(x)$

$$\chi \sim f(\chi; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}} I_{\mathcal{R}}(x_i) =$$

$$= \exp \left\{ -n \cdot \log \sigma - \frac{n}{2} \cdot \log 2\pi - \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2 \cdot \sigma^2} + \frac{\mu \cdot \sum_{i=1}^n x_i}{\sigma^2} - \frac{n \cdot \mu^2}{2 \cdot \sigma^2} \right\},$$

$$\forall \chi \in S = \mathcal{R}^2, \theta \in \Theta$$

Άρα η οικογένεια κατανομών του  $\chi$  είναι μια 2-ΠΕΟΚ, γιατί έχει πυκνότητες της μορφής

$$f(\chi; \theta) = \exp \left\{ A(\theta) + B(\chi) + \sum_{j=1}^2 C_j(\theta) D_j(\chi) \right\},$$

$$, \forall \theta \in \Theta, \chi \in S$$

με  $A(\theta) = -n \cdot \log \sigma - \frac{n}{2} \cdot \log 2\pi - \frac{n \cdot \mu^2}{2 \cdot \sigma^2}$ ,  $B(\chi) = 0$

$$(C_1(\theta), C_2(\theta)) = \left( \frac{\mu}{\sigma^2}, -\frac{1}{2\sigma^2} \right), (D_1(x), D_2(x)) = \left( \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)$$

### ΣΤ.1.3. ΥΠΟΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

Οι Υποεκθετικές Κατανομές (Υ.Κ.) είναι μια ειδική κατηγορία κατανομών με βαριά ουρά. Οι Υ.Κ. χρησιμοποιούνται στην αναλογιστική επιστήμη ως μοντέλα για την κατανομή των αποζημιώσεων σε ειδικές κατηγορίες ασφαλίσεων (ασφαλίσεις πυρός, ασφαλίσεις έναντι φυσικών καταστροφών π.χ. σεισμοί, τυφώνες, πλημύρες, κ.α.) όπου οι αποζημιώσεις παίρνουν πολύ μεγάλες τιμές με όχι πολύ μικρή πιθανότητα. (ΠΟΛΙΤΗΣ, 2012)

**Ορισμός ΣΤ.1.3 :** Έστω η ακολουθία  $X_1, X_2, \dots, X_n$  οι οποίες είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ., παίρνουν θετικές τιμές και έχουν συνάρτηση κατανομής  $F$ , για την οποία ισχύει  $F(x) < 1$  για κάθε  $x > 0$ . Ορίζουμε την ουρά της κατανομής

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x), \quad x \geq 0$$

Ενώ η συνάρτηση

$$\bar{F}^{*n}(x) = 1 - F^{*n}(x), \quad x \geq 0$$

είναι η ουρά της n-τάξης συνέλιξης της  $F$  με τον εαυτό της.

Τότε η κατανομή  $F$  λέγεται Υποεκθετική Κατανομή αν ικανοποιεί μια από τις δύο παρακάτω ισοδύναμες συνθήκες:

a.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}^{*n}(x)}{\bar{F}(x)} = n \quad \text{για κάθε } n \geq 2$

b.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + X_2 + \dots + X_n > x)}{P(\max(X_1, X_2, \dots, X_n) > x)} = 1 \quad \text{για κάθε } n \geq 2$

**Πρόταση ΣΤ.1.3 :** Έστω μια κατανομή  $F \in \mathcal{S}$  (όπου  $\mathcal{S}$  σημαίνει subexponential δηλαδή υποεκθετική). Τότε ισχύουν:

a. Για κάθε  $\varepsilon > 0$ ,  $\int_0^\infty e^{\varepsilon x} dF(x) = \infty$

b. Για κάθε  $\varepsilon > 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\bar{F}(x)}{e^{-\varepsilon x}} = \infty$

Στις Υποεκθετικές Κατανομές ανήκουν η Λογαριθμοκανονική, η Pareto και η Weibull (για παράμετρο  $c < 1$ ), κ.α.

#### ΣΤ.1.4. ΜΕΙΞΗ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

**Ορισμός ΣΤ.1.4** : Η κατανομή  $F$  μιας τ.μ.  $X_i \sim \text{ΕΚΘΕΤΙΚΗ}(\beta_i)$  θα λέμε ότι είναι μια Μείξη Εκθετικών Κατανομών (ΜΕΚ), ή μια Μεριγμένη Εκθετική Κατανομή αν ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη:

Η  $F$  γράφεται στη μορφή

$$F(x) = \sum_{i=1}^n a_i \cdot F_{X_i}(x),$$

για κάποιες μεταβλητές  $X_1, X_2, \dots, X_n$  έτσι ώστε η  $X_i$  έχει σ.κ.  $F_{X_i}(x)$ , και για κάποιες θετικές σταθερές  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  (ή βάρη) τέτοιες ώστε:

$$\sum_{i=1}^n a_i = 1$$

**Πρόταση ΣΤ.1.4** : Έστω  $X = \alpha_1 \cdot X_1 + \alpha_2 \cdot X_2 + \dots + \alpha_n \cdot X_n$ , με  $X_i \sim \text{ΕΚΘΕΤΙΚΗ}(\beta_i)$ , για  $i = 1, 2, \dots, n$ . Τότε ισχύουν:

a.  $F(x) = \alpha_1 \cdot F_{X_1}(x) + \alpha_2 \cdot F_{X_2}(x) + \dots + \alpha_n \cdot F_{X_n}(x)$

b.  $E(X^k) = \alpha_1 \cdot E(X_1^k) + \alpha_2 \cdot E(X_2^k) + \dots + \alpha_n \cdot E(X_n^k)$ , για  $k \geq 1$

### ΣΤ.2. ΑΠΟΚΟΜΜΕΝΕΣ ΚΑΙ ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ 0

#### ΣΤ.2.1. ΑΠΟΚΟΜΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ 0

**Ορισμός ΣΤ.2.1**: Έστω  $X$  μια διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας  $p_k = Pr(X = k)$ , για  $k = 0, 1, \dots$ . Προκύπτει από τη  $X$  με αποκοπή της πιθανότητας  $p_0$  στο 0, ικανοποιώντας ταυτοχρόνως τη σχέση:

$$p_k^{(T)} = c \cdot p_k, \text{ για } k = 1, 2, \dots$$

Έτσι έχουμε

$$p_k^{(T)} = Pr(X^{(T)} = k) = \begin{cases} 0 & , k = 0 \\ \frac{1}{1-p_0} \cdot p_k & , k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Η  $X^{(T)}$  λέγεται Κατανομή Αποκομμένη στο 0 (Zero-Truncated Distribution).

Τέτοιες κατανομές είναι:

- *BERNOULLI*( $p$ )
- *ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ*( $n, p$ )
- *ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ*( $p$ )
- *ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ*( $r, p$ )

### ΣΤ.2.2. ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΣΤΟ ΣΗΜΕΙΟ 0

**Ορισμός ΣΤ.2.2** : Έστω  $X$  μια διακριτή τ.μ. με συνάρτηση πιθανότητας  $p_k = Pr(X = k)$ , για  $k = 0, 1, \dots$ . Προκύπτει από τη  $X$  ορίζοντας αυθαίρετα  $p_0^{(M)} = Pr(X^{(M)} = 0)$  την πιθανότητα στο σημείο 0, ικανοποιώντας ταυτοχρόνως τη σχέση:

$$p_k^{(M)} = c \cdot p_k, \text{ για } k = 1, 2, \dots$$

Έτσι έχουμε

$$p_k^{(M)} = Pr(X^{(M)} = k) = \begin{cases} p_0^{(M)}, & k = 0 \\ \frac{1 - p_0^{(M)}}{1 - p_0} \cdot p_k = (1 - p_0^{(M)}) \cdot p_k^{(T)}, & k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Η  $X^{(M)}$  λέγεται Κατανομή Τροποποιημένη στο 0 (Zero-Modified Distribution).

Τέτοιες κατανομές είναι:

- *BERNOULLI*( $p$ )
- *ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ*( $n, p$ )
- *ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ*( $p$ )
- *ΑΡΝΗΤΙΚΗ ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ*( $r, p$ )
- *ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ*( $p$ )



### ΣΤ.3. ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΕΣ ΚΑΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΕΝΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ

**Ορισμός ΣΤ.3 :** Έστω  $X$  μια συνεχής τυχαία μεταβλητή με σ.π.π.  $f_X(x)$  και σύνολο τιμών  $R_X = (0, \infty)$ . Η τ.μ.  $Y = X^{1/\tau}$ , για  $\tau \neq 0$  έχει σύνολο τιμών  $R_Y = (0, \infty)$  με σ.π.π.  $f_Y(x)$  που δίνεται από τον τύπο:

$$f_Y(x) = \begin{cases} \tau \cdot y^{\tau-1} \cdot f_X(y^\tau) & , \tau > 0 \\ -\tau \cdot y^{\tau-1} \cdot f_X(y^\tau) & , \tau < 0 \end{cases}$$

Η κατανομή της  $Y$  ονομάζεται:

- Μετασχηματισμένη (Trasnformed) για  $\tau > 0$
- Αντίστροφη (Inverse) για  $\tau = -1$
- Αντίστροφη-Μετασχηματισμένη (Inverse- Trasnformed) για  $\tau < 0$  όμως πρέπει  $\tau \neq -1$

### ΣΤ.4. ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΑΠΟ ΤΗΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

#### ΣΤ.4.1. Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΧΙ-ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

**Ορισμός ΣΤ.4.1 :** Έστω  $X_1, X_2, \dots, X_n$ , για  $n \geq 1$ , ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τυπική κανονική κατανομή  $N(0, 1)$ . Η κατανομή της τ.μ.

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i^2$$

ονομάζεται κατανομή χι-τετράγωνο με  $n$  βαθμούς ελευθερίας, συμβολικά  $\chi_n^2$ .

Η  $\chi_n^2$  συμπίπτει με την κατανομή ΓΑΜΜΑ  $\left(\frac{n}{2}, 2\right)$ , για  $n=1$  έχουμε

$$\text{σ.π.π. } f(x) = \frac{2^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} \cdot e^{-2 \cdot x}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

Μέση τιμή  $E(X) = n$

Διακύμανση  $Var(X) = 2 \cdot n$

Ροπογεννήτρια  $M_X(t) = (1 - 2 \cdot t)^{-\frac{n}{2}}, t < \frac{1}{2}$

#### ΣΤ.4.2. Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ $t$

**Ορισμός ΣΤ.4.2** : Έστω  $X \sim N(0, 1)$  και  $Y \sim \chi_n^2$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. , τότε η κατανομή της τ.μ.

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$$

ονομάζεται κατανομή  $t$  με  $n$  βαθμούς ελευθερίας, συμβολικά  $t_n$ .

Η  $t_n$  συμπίπτει με την κατανομή *CAUSHY*(0, 1) για  $n=1$

Επίσης ισχύει ότι  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n \sim N(0, 1)$

$$\text{σ.π.π. } f_n(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{n \cdot \pi} \cdot \Gamma(\frac{n}{2})} \cdot \frac{1}{(1+x^2/n)^{(n+1)/2}} \cdot I_{\mathcal{R}}(x)$$

Μέση τιμή  $E(X) = 0$  ,  $n > 1$

Διακύμανση  $Var(X) = \frac{n}{n-2}$  ,  $n > 2$

#### ΣΤ.4.3. Η ΚΑΤΑΝΟΜΗ $\mathcal{F}$

**Ορισμός ΣΤ.4.3** : Έστω  $Y_1 \sim \chi_{n_1}^2$  και  $Y_2 \sim \chi_{n_2}^2$  είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. , τότε η κατανομή της τ.μ.

$$K = \frac{Y_1/n_1}{Y_2/n_2}$$

ονομάζεται κατανομή  $\mathcal{F}$  με  $n_1$  και  $n_2$  βαθμούς ελευθερίας, συμβολικά  $\mathcal{F}_{n_1, n_2}$ .

Επίσης ισχύει ότι:

- Αν  $X \sim t_n$  ΤΟΤΕ  $X^2 \sim \mathcal{F}_{1, n}$ .
- Αν  $X \sim \mathcal{F}_{n_1, n_2}$  ΤΟΤΕ  $1/X \sim \mathcal{F}_{n_2, n_1}$ .
- Αν  $X \sim \mathcal{F}_{n_1, n_2}$  ΤΟΤΕ  $\frac{n_1 \cdot X/n_2}{1+n_1 \cdot X/n_2} \sim BHTA(n_1, n_2)$ .

$$\text{σ.π.π. } f_{n_1, n_2}(x) = \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2}) \cdot (n_1/n_2)^{n_1/2}}{\Gamma(\frac{n_1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{n_2}{2})} \cdot \frac{x^{\frac{n_1}{2}-1}}{(1+n_1 \cdot x/n_2)^{(n_1+n_2)/2}} \cdot I_{(0, \infty)}(x)$$

Μέση τιμή  $E(X) = \frac{n_2}{(n_2-2)}$  ,  $n_2 > 2$

Διακύμανση  $Var(X) = \frac{2 \cdot n_2^2 \cdot (n_1+n_2-2)}{n_1 \cdot (n_2-2)^2 \cdot (n_2-4)}$  ,  $n_2 > 4$

## Η. ΤΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ MATHEMATICA

Το παρακάτω παράρτημα παρουσιάζεται στο ΔΕΡΜΙΤΖΑΚΗΣ Β. , ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ Π.Μ.Σ. «ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ» ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ & ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ ΓΙΑ ΤΟ ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ II , ΠΕΙΡΑΙΑΣ, 2018

### Η.1. ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Το Mathematica δεν αποτελεί μια γλώσσα προγραμματισμού με την αυστηρή έννοια του όρου. Είναι ένα πολύ ισχυρό εργαλείο για την επεξεργασία μαθηματικών προβλημάτων και χρησιμοποιείται σε μια ευρεία γκάμα επιστημονικών πεδίων όπως για παράδειγμα τα Μαθηματικά, τη Φυσική, τα Χρηματοοικονομικά, την Ανάλυση Δεδομένων κ.α. Ο τρόπος λειτουργίας του είναι σχετικά απλός. Αν για παράδειγμα θέλαμε να μελετήσουμε μια συνάρτηση ή γενικότερα ένα αντικείμενο που μπορεί να διατυπωθεί με μαθηματικούς όρους, αφού κάνουμε εισαγωγή στο Mathematica του μαθηματικού αντικειμένου με συγκεκριμένο και προκαθορισμένο τρόπο στη συνέχεια, με τις κατάλληλες εντολές ερευνούμε τις ιδιότητες και τα χαρακτηριστικά που χρειαζόμαστε. Ιδιαίτερη αναφορά θα πρέπει να γίνει και στη βοήθεια (help menu) που διαθέτει ενσωματωμένη στο μενού του το Mathematica που εκτός από τον τρόπο εισαγωγής ενός αντικειμένου, μπορεί κάποιος να βρει και μια σύντομη περιγραφή της μαθηματικής έννοιας.

### Η.2. ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΤΟΛΕΣ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Το Mathematica εκτός των άλλων μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για την εκτέλεση όλων των βασικών αριθμητικών πράξεων όπως για παράδειγμα : πρόσθεση, αφαίρεση, πολλαπλασιασμός, διαίρεση, πράξεις με παρενθέσεις, δυνάμεις ενός αριθμού κλπ.

#### Η.2.1 Πρόσθεση – Αφαίρεση

```
In[1]:= 5 + 3 - 9  
Out[1]= -1
```

#### Η.2.2 Πολλαπλασιασμός – Διαίρεση

```
In[2]:= 5*3  
Out[2]= 15  
In[3]:= 5 3  
Out[3]= 15  
In[4]:= 6/3  
Out[4]= 2  
In[5]:= Divide[8, 4]
```

Out[5]= 2

H.2.3 *Τετραγωνική Ρίζα*

In[6]:= Sqrt[4]

Out[6]= 2

H.2.4 *Απόλυτη Τιμή*

In[7]:= Abs[-2]

Out[7]= 2

H.2.5 *Δύναμη ενός αριθμού*

In[8]:= 2^3

Out[8]= 8

In[9]:= 2^(1 + 1)

Out[9]= 4

H.2.6 *Μέγιστο – Ελάχιστο*

In[10]:= Max[-1, -2, -3]

Out[10]= -1

In[11]:= Min[2, 3, 4, 0]

Out[11]= 0

### **H.3. ΒΑΣΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ**

Για να εισάγουμε μια συνάρτηση στο Mathematica, υπάρχουν δύο τρόποι είτε να χρησιμοποιήσουμε κάποια από τις ενσωματωμένες συναρτήσεις που διαθέτει ή να δημιουργήσουμε εμείς μια συνάρτηση.

H.3.1 *Απόλυτη τιμή*

In[30]:= Abs[z] // N

Out[30]= 5.

In[31]:= Abs[x] // N

Out[31]= 1.

H.3.2 *Τετραγωνική Ρίζα*

In[32]:= Sqrt[z] // N

Out[32]= 2.23607

In[33]:= Sqrt[y] // N

Out[33]= 1.41421

H.3.3 *Εκθετική Συνάρτηση*

In[34]:= Exp[z] // N

Out[34]= 148.413

In[35]:= Exp[y] // N

Out[35]= 7.38906

H.3.4 Λογαριθμική Συνάρτηση

In[36]:= Log[z] // N

Out[36]= 1.60944

In[37]:= Log[y] // N

Out[37]= 0.693147

In[38]:= Log[Exp[y + z]] // N

Out[38]= 7.

In[39]:= Log[5, 10] // N

Out[39]= 1.43068

H.3.5 Ολοκλήρωμα Συνάρτησης

**Integrate[f,x]**

**Integrate[f,{x, xmin, xmax}]**

In[69]:= Integrate[k[x], x]

Out[69]=  $x + (3 x^2)/2$

In[70]:= Integrate[k[x], {x, 0, 10}]

Out[70]= 160

## H.4. ΕΠΙΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε τρόπους για να επιλύουμε εξισώσεις και συστήματα εξισώσεων.

H.4.1 Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων

**NSolve[expr,vars]**

In[78]:= NSolve[ $x^3 - 2x - 1 == 0$ , x]

Out[78]= {{x -> -1.}, {x -> -0.618034}, {x -> 1.61803}}

**FindRoot[f,{x,Subscript[x, 0]}**

In[79]:= FindRoot[x^3 - 2\*x - 1 == 0, {x, 0}]

Out[79]= {x -> -0.618034}

In[80]:= Clear[s, y, x]

H.4.2 Μετασχηματισμός Laplace και αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace

**LaplaceTransform[expr,t,s]**

**InverseLaplaceTransform[expr,s,t]**

In[81]:= LaplaceTransform[Exp[-x\*a], x, s]

Out[81]= 1/(s + a)

In[82]:= InverseLaplaceTransform[1/(s + a), s, x]

Out[82]= E^(-x a)

## **H.5. ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΑ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ MATHEMATICA ΓΙΑ ΤΙΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΩΝ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ**

H.5.1. Υπολογισμός Δεσμευμένων Ροπών Και Διακύμανσης Χρόνου Χρεοκοπίας Στην Εφαρμογή 4.5.1 (Για Εκθετική Κατανομή)

In[1]:= l := 1

In[2]:= θ := 1/4

In[3]:= θ // N

Out[3]= 0.25

In[4]:= f[x\_] := 2\*Exp[-2\*x]

In[5]:= f[x]

Out[5]= 2 E^(-2 x)

In[6]:= m1 := Integrate[x\*f[x], {x, 0, Infinity}]

In[7]:= m1

Out[7]= 1/2

In[8]:= m2 := Integrate[(x^2)\*f[x], {x, 0, Infinity}]

In[9]:= m2

Out[9]= 1/2

In[10]:= **psirenyi[w\_] := (1/(1 +  $\theta$ ))\*Exp[(-2\*m1\* $\theta$ \*w)/(m2 (1 +  $\theta$ ))]**

In[11]:= psirenyi[u]

Out[11]= 4/5 E<sup>(-2 u/5)</sup>

In[12]:= **psi1[y\_] := (1/(l\*m1\* $\theta$ ))\*(Integrate[psirenyi[y - x]\*psirenyi[x], {x, 0, y}] + Integrate[psirenyi[x], {x, y, Infinity}] - (m2/(2\*m1\* $\theta$ ))\*psirenyi[y])**

In[13]:= psi1[u]

Out[13]= 8 (2/5 E<sup>(-2 u/5)</sup> + 16/25 E<sup>(-2 u/5)</sup> u)

In[14]:=  **$\mu$ 1[u\_] := psi1[u]/psirenyi[u]**

In[15]:=  $\mu$ 1[u]

Out[15]= 10 E<sup>(2 u/5)</sup> (2/5 E<sup>(-2 u/5)</sup> + 16/25 E<sup>(-2 u/5)</sup> u)

In[16]:= **psi2[k\_] := (2/(l\*m1\* $\theta$ ))\*(Integrate[psirenyi[k - g]\*psi1[g], {g, 0, k}] + Integrate[psi1[g], {g, k, Infinity}] - Integrate[psi1[g], {g, 0, Infinity}])\*psirenyi[k]**

In[17]:= FullSimplify[psi2[u]]

Out[17]= 128/125 E<sup>(-2 u/5)</sup> (125 + 16 u (15 + 2 u))

In[18]:=  **$\mu$ 2[u\_] := psi2[u]/psirenyi[u]**

In[19]:= FullSimplify[ $\mu$ 2[u]]

Out[19]= 32/25 (125 + 16 u (15 + 2 u))

In[20]:=  **$\sigma$ [u\_] :=  $\mu$ 2[u] - ( $\mu$ 1[u])<sup>2</sup>**

In[21]:=  $\sigma$ [u]

Out[21]= -100 E<sup>(4 u/5)</sup> (2/5 E<sup>(-2 u/5)</sup> + 16/25 E<sup>(-2 u/5)</sup> u)<sup>2</sup> + 20 E<sup>(2 u/5)</sup> (-32 E<sup>(-2 u/5)</sup> + 64/25 E<sup>(-2 u/5)</sup> u + 256/125 E<sup>(-2 u/5)</sup> u<sup>2</sup> + 8/5 E<sup>(-2 u/5)</sup> (25 + 8 u))

In[22]:= **psi3[h\_] := (3/(l\*m1\* $\theta$ ))\*(Integrate[psirenyi[h - j]\*psi2[j], {j, 0, h}] + Integrate[psi2[j], {j, h, Infinity}] - Integrate[psi2[j], {j, 0, Infinity}])\*psirenyi[h]**

In[23]:= FullSimplify[psi3[u]]

Out[23]= 512/625 E<sup>(-2 u/5)</sup> (16875 + 8 u (4125 + 4 u (165 + 8 u)))

Η.5.2. Υπολογισμός Συντελεστή Προσαρμογής  $R$  Και Του Ολοκληρώματος Που Βρίσκεται Στο Παρανομαστή Του Τύπου Στη Σταθερά  $C$  Στην Εφαρμογή 5.2.1 (Για Μείξη Εκθετικών Κατανομών)

In[1]:=  $f[x_] := 1/3*(\text{Exp}[-x] + 2*\text{Exp}[-2*x] + 3*\text{Exp}[-3*x])$

In[2]:=  $f[x]$

Out[2]=  $1/3 (3 E^{(-3 x)} + 2 E^{(-2 x)} + E^{-x})$

In[3]:=  $c := 4$

In[4]:=  $l := 4$

In[5]:=  $m1 := \text{Integrate}[x*f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$

In[6]:=  $\theta := (c/(l*m1)) - 1$

In[7]:=  $\theta // N$

Out[7]= 0.636364

In[8]:=  $\text{NSolve}[\text{Integrate}[\text{Exp}[x*r]*f[x], \{x, 0, \text{Infinity}\}] == 1 + (1 + \theta)*m1*r, r]$

Out[8]=  $\{\{r \rightarrow 0.\}, \{r \rightarrow 0.485131\}\}$

In[9]:=  $R := 0.4851310615612835`$

In[10]:=  $F[t_] := \text{Integrate}[f[x], \{x, 0, t\}]$

In[11]:=  $F[x]$

Out[11]=  $1/3 (3 - E^{(-3 x)} - E^{(-2 x)} - E^{-x})$

In[12]:=  $\text{ολοκληρωμα} := \text{Integrate}[x*\text{Exp}[R*x]*(1 - F[x]), \{x, 0, \text{Infinity}\}]$

In[13]:=  $\text{ολοκληρωμα}$

Out[13]= 1.45539



## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

### **A. Ελληνική**

Αντζουλάκος Δ. , Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Π.Μ.Σ. «Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου» Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης Πανεπιστήμιο Πειραιώς Στο Μάθημα Γλώσσα Προγραμματισμού R Με Εφαρμογές Στον Αναλογισμό , Πειραιάς, 2017

Δερμιτζάκης Β. , Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Π.Μ.Σ. «Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου» Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης Πανεπιστήμιο Πειραιώς Για Το Εργαστήριο Στο Μάθημα Θεωρία Κινδύνου II , Πειραιάς, 2018

Ηλιόπουλος Γ. , Βασικές Μέθοδοι Εκτίμησης Παραμέτρων Με Σημείο Και Με Διάστημα Β΄ Έκδοση , Εκδόσεις Σταμούλης, Αθήνα, 2013

Κουτσόπουλος Κ. Ι. , Αναλογιστικά Μαθηματικά Μέρος I Θεωρία Των Κινδύνων, Εκδόσεις Συμμετρία , Αθήνα, 1999

Πιτσέλης Γ. , Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Π.Μ.Σ. «Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου» Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης Πανεπιστήμιο Πειραιώς Στο Μάθημα Ζημιοκατανομές Απώλειας, Πειραιάς, 2018

Πολίτης Κ. , Εισαγωγή Στη Θεωρία Συλλογικού Κινδύνου - Το Συλογικό Πρότυπο Και Θεωρία Χρεοκοπίας, Εκδόσεις Σταμούλης , Αθήνα, 2012

Χατζηκωνσταντινίδης Ε. , Πανεπιστημιακές Σημειώσεις Π.Μ.Σ. «Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου» Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης Πανεπιστήμιο Πειραιώς Στο Μάθημα Θεωρία Κινδύνου I , Πειραιάς, 2018

### **B. Ξενόγλωσση**

Burnecki K. , Mista P. , Weron A. , A New Gamma Type Approximation Of The Ruin Probability, *Acta Physica Polonica B*, vol 36,1473-1483, 2005

Dickson D. C. M. , *Insurance Risk And Ruin* , Cambridge University Press, Cambridge, 2005

Dutang C. , Goulet V. , Pigeon M. , actuar: An R Package for Actuarial Science, *Journal of Statistical Software*, vol 25, Issue 7, 2008

Grandell J., Simple Approximations Of Ruin Probabilities, *Insurance Mathematics and Economics*, vol 26, 157—173, 2000

Kaas R. Goovaerts M. Dhaene J. Denuit M. , *Modern Actuarial Risk Theory Using R* , Springer, 2009

Kenney T. , Further Probability With Applications To Actuarial Science, *ACSC/STAT 4703, Actuarial Models I In Class Examples*, 2015

Lin X. S. , Willmot G. E. , The Moments Of The Time Of Ruin, The Surplus Before Ruin, And The Deficit At Ruin, *Insurance Mathematics and Economics*, vol 27, 19—44, 2000

Shevchenko P. V. , Calculation Of Aggregate Loss Distributions , *The Journal of Operational Risk*, vol 5, 3-40, 2010

### **Γ. Διαδίκτυο**

Dutang C. , Goulet V. , Pigeon M., *Inventory Of Continuous And Discrete Distributions Provided In Actuar* , 2008. Διαθέσιμο στο <https://cran.r-project.org/web/packages/actuar/vignettes/distributions.pdf>

Dutang C. , Goulet V. , Pigeon M. , *Risk and ruin theory features of actuar*, 2008. Διαθέσιμο στο <https://cran.r-project.org/web/packages/actuar/vignettes/risk.pdf>

Dutang C. , Goulet V. , Pigeon M. , Milhaud X. , Ouellet T. , Parent A. , Pouliot L.P., *Package 'Actuar'*, 2018. Διαθέσιμο στο <https://cran.r-project.org/web/packages/actuar/actuar.pdf>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Probability\\_distribution](https://en.wikipedia.org/wiki/Probability_distribution)

(Τελευταία Επίσκεψη: 11/3/2019)

[http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de/fedc\\_homepage/xplore/tutorials/stfhtmlnode96.html](http://sfb649.wiwi.hu-berlin.de/fedc_homepage/xplore/tutorials/stfhtmlnode96.html)

(Τελευταία Επίσκεψη: 11/3/2019)