ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

Μ.Π.Σ ΣΤΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ ΓΙΑ ΣΤΕΛΕΧΗ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ

‹‹ Αποτίμηση Ενεργειακών Δικαιωμάτων Προαίρεσης Προσαρμοσμένης σε Προθεσμιακές Τιμές ››

Επιβλέπων

Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

Τριμελής Επιτροπή

Επίκουρος Καθηγητής Εγγλέζος Νικόλαος

Καθηγητής Τσιριτάκης Εμμανουήλ

Καθηγητής Χαρδούβελης Γκίκας

Τσιόγκας Γεώργιος ΜΧΑΝ1731

Μάρτιος 2019

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<u>ΠΕΡΙΛΗΨΗ</u>

Η παρούσα διπλωματική πραγματεύεται την δημιουργία ενός μονοπαραγοντικού μοντέλου το οποίο να συμβαδίζει τόσο με τις μεταβλητότητες των μελλοντικών συμβολαίων εκπλήρωσης όσο και με τις ίδιες τις τιμές των συμβολαίων αυτών. Χρησιμοποιούνται διάφορα μοντέλα προκειμένου να αποτιμήσουμε τα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης όπως των Black-Scholes (1973) αλλά και των Clewlow και Strickland (1998), μοντέλο που αποτελεί μια γενίκευση του μοντέλου των Hull και White (1994a,1994b).

Αρχικά, παραθέτουμε το θεωρητικό πλαίσιο το οποίο είναι αναγκαίο ώστε να δομηθούν οι κώδικες μέσω των οποίων θα γίνει η εμπειρική μας μελέτη. Στη συνέχεια, λαμβάνουμε παρατηρήσεις για 20 διαφορετικά ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης και με βάση αυτές τις τιμές εκτιμούμε για διάστημα μίας εβδομάδας τις τιμές των παραμέτρων των παραπάνω μοντέλων με τη χρήση του επαναληπτικού αλγόριθμου των Levenberg και Marquardt. Τέλος, αποτιμούμε τα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης με τη χρήση των μοντέλων αυτών και τα συγκρίνουμε μεταξύ τους αλλά και σε σχέση με τις τιμές της αγοράς.

Η δυσκολία αυτής της διαδικασίας έγκειται από τη μία στην απουσία ιστορικών δεδομένων για τον συγκεκριμένο τύπο ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης αλλά και στην προσομοίωση ενός αντιπροσωπευτικού μονοπατιού για την τιμή του υποκείμενου τίτλου.

<u>Λέξεις-Κλειδιά:</u> ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης, μονοπάτια τιμής, εκτίμηση παραμέτρων, τριωνυμικά δέντρα, μοντέλο Black-Scholes, μοντέλο Hull και White, μοντέλο Clewlow και Strickland.

Abstract

This thesis develops a one factor model which is consistent with forward prices and volatilities observable from the market. Energy options are analytically priced by both the models of Black-Scholes (1973) and Clewlow-Strickland (1998), which is a generalization of the Hull and White model (1994a, 1994b).

Firstly, we demonstrate the theoretical framework which is necessary in order to complete our empirical study. Moreover, we use observations from 20 different energy options of crude oil within a week, and we estimate the parameters of the aforementioned models via the iterative algorithm of Levenberg and Marquardt. In the end, we re-evaluate the energy options using these models and we compare and discuss our findings.

The complexity of this procedure lies both on the absence of historical data for this particular type of energy option and on simulating the proper pricing path for the underlying asset price.

Keywords: energy options; pricing paths; parameter estimation; trinomial trees; Black-Scholes model; Hull and White model; Clewlow and Strickland model.

Κεφάλαιο 1

1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε τα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης, τα προθεσμιακά συμβόλαια, τα χαρακτηριστικά τους καθώς και μια ιστορική αναδρομή για τα μοντέλα αποτίμησης τους.

1.1. Ενεργειακά Δικαιώματα Προαίρεσης & Προθεσμιακά Συμβόλαια

Τα ενεργειακά παράγωγα είναι εξωτικά παράγωγα στα οποία ο υποκείμενος τίτλος βασίζεται σε ενεργειακά προϊόντα όπως πετρέλαιο, φυσικό αέριο και ηλεκτρική ενέργεια, και μπορεί να διαπραγματευτεί είτε στο χρηματιστήριο είτε στην εξωχρηματιστηριακή αγορά.

- **<u>Αργό Πετρέλαιο</u>**

Η αγορά του αργού πετρελαίου είναι η μεγαλύτερη αγορά εμπορευμάτων με την παγκόσμια ζήτηση να φτάνει ημερησίως τα 80 εκατομμύρια βαρέλια. Το αργό πετρέλαιο μπορεί να μετατραπεί σε πολλά παράγωγα όπως βενζίνη, κηροζίνη και πετρέλαιο θέρμανσης. Στην εξωχρηματιστηριακή αγορά πλέον όλα τα παράγωγα αξιόγραφα που χρησιμοποιούνται για μετοχές και δείκτες μετοχών είναι διαθέσιμα και για το αργό πετρέλαιο ως υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο. Τα περισσότερο δημοφιλή είναι τα δικαιώματα προαίρεσης καθώς και τα προθεσμιακά συμβόλαια. Σε κάποια από αυτά τα συμβόλαια ο διακανονισμός γίνεται με πληρωμή σε μετρητά ενώ σε κάποια άλλα με φυσική παράδοση του αργού πετρελαίου(physical delivery).

- **<u>Φυσικό Αέριο</u>**

Η αγορά του φυσικού αερίου σε όλο τον κόσμο πέρασε μια περίοδο απελευθέρωσης και περιορισμού του μονοπωλίου της κυβέρνησης την δεκαετία του 1980-1990. Πλέον οι εταιρείες που παρέχουν το φυσικό αέριο δεν είναι απαραίτητα οι ίδιες εταιρείες που το παράγουν. Όπως και το αργό πετρέλαιο έτσι και το φυσικό αέριο μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως υποκείμενος τίτλος στην εξωχρηματιστηριακή αγορά είτε σε δικαιώματα προαίρεσης είτε σε προθεσμιακά συμβόλαια. Ο πωλητής του φυσικού αερίου είναι υπεύθυνος για την μεταφορά του στην συγκεκριμένη περιοχή μέσω αγωγών καθώς στη λήξη του συμβολαίου απαιτείται φυσική παράδοση. Ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του φυσικού αερίου όπως και του πετρελαίου θέρμανσης είναι η χρήση του ς ως μέσα θέρμανσης. Η ζήτησή τους λοιπόν εξαρτάται από τον καιρό και αλλάζει σημαντικά από εποχή σε εποχή.

- **<u>Ηλεκτρική Ενέργεια</u>**

Η ηλεκτρική ενέργεια είναι ένας ιδιαίτερος τύπος εμπορεύματος λόγω της δυσκολίας αποθήκευσής της. Η πώληση της ηλεκτρικής ενέργειας γίνεται από μια περιοχή σε μια άλλη με την προϋπόθεση ότι υπάρχει η δυνατότητα σύνδεσης των περιοχών αλλά και ότι έχουν καλυφθεί οι ανάγκες της περιοχής-πωλητή. Χαρακτηριστικό της μεταφοράς της ηλεκτρικής ενέργειας είναι τα κόστη που προκύπτουν λόγω της χρήσης των γραμμών σύνδεσης μεταξύ των περιοχών αλλά και οι απώλειες ενέργειας που προκύπτουν κατά την μεταφορά. Όπως και στις περιπτώσεις του πετρελαίου θέρμανσης και του φυσικού αερίου έτσι και η ζήτηση της ηλεκτρικής ενέργειας αλλάζει σημαντικά από εποχή σε εποχή και ιδιαίτερα τους καλοκαιρινούς μήνες όπου παρουσιάζει τη μεγαλύτερη άνοδο. Η αδυναμία αποθήκευσής της μαζί με την εποχικότητα που παρουσιάζει προκαλεί μεγάλες αυξομειώσεις στην τιμή της. Μετά την απελευθέρωση του κυβερνητικού μονοπωλίου η ηλεκτρική ενέργεια χρησιμοποιείται ως υποκείμενος τίτλος για προθεσμιακά συμβόλαια, δικαιώματα προαίρεσης αλλά και για συμφωνίες ανταλλαγής στην εξωχρηματιστηριακή αγορά. Ιδιαίτερη περίπτωση αποτελούν τα δικαιώματα προαίρεσης με υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο την ηλεκτρική ενέργεια. Υπάρχουν δύο τύποι δικαιωμάτων˙ αυτά που έχουν δυνατότητα ημερήσιας εξάσκησης και αυτά που έχουν δυνατότητα μηνιαίας εξάσκησης. Στην πρώτη περίπτωση ο κάτοχος του δικαιώματος μπορεί να επιλέξει οποιαδήποτε μέρα μέσα στον μήνα ώστε να λάβει την ποσότητα ηλεκτρικής ενέργειας στην τιμή εξάσκησης, ενώ στην δεύτερη περίπτωση ο κάτοχος του δικαιώματος θα πρέπει να αποφασίσει στην αρχή του μήνα εάν θα εξασκήσει το δικαίωμα ή όχι. Ένας ιδιαίτερος τύπος ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης είναι τα swing options με υποκείμενο τίτλο την ηλεκτρική ενέργεια ή το φυσικό αέριο. Σε αυτά τα συμβόλαια καθορίζεται το ελάχιστο και το μέγιστο όριο για το ποσό ενέργειας που πρέπει να αγοραστεί από τον κάτοχο του δικαιώματος στην τιμή εξάσκησης ημερησίως αλλά και μηνιαίως . Ο κάτοχος του δικαιώματος μπορεί να αλλάξει το ρυθμό με τον οποίο αγοράζεται η ενέργεια, παρόλα αυτά υπάρχει όριο στις αλλαγές που μπορεί να κάνει.

Τα συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης είναι συμβόλαια για μελλοντικές αγοραπωλησίες χρεογράφων παρόμοια με τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ).Η βασική διαφορά τους είναι ότι δίνουν στον αγοραστή το δικαίωμα και όχι την υποχρέωση να ζητήσει την εκπλήρωση της συμφωνίας· εάν ο κάτοχος του δικαιώματος δεν εξασκήσει χάνει το δικαίωμα.

Οι θέσεις που μπορεί να πάρει ένας επενδυτής είναι είτε να αγοράσει ένα δικαίωμα είτε να το πουλήσει. Ο αγοραστής αποκτά δικαίωμα να αγοράσει ή να πουλήσει έναν υποκείμενο τίτλο σε μια συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή για μια προκαθορισμένη τιμή πληρώνοντας τη τιμή του δικαιώματος χωρίς να έχει καμία άλλη υποχρέωση. Ο πωλητής πουλάει και λαμβάνει την τιμή του δικαιώματος ενώ αποκτά την υποχρέωση να αγοράσει ή να πουλήσει τα υποκείμενα μέσα στην συγκεκριμένη μελλοντική στιγμή και για τη προκαθορισμένη τιμή, εάν απαιτηθεί από τον αγοραστή.

Υπάρχουν δυο τύποι δικαιωμάτων ·τα δικαιώματα αγοράς (call options) και τα δικαιώματα πώλησης(put options).

Προθεσμιακό συμβόλαιο είναι μια συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων-ενός αγοραστή και ενός πωλητή. Ο αγοραστής συμφωνεί να αγοράσει ένα υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο από το άλλο μέρος (πωλητή). Η παράδοση του περιουσιακού στοιχείου πραγματοποιείται σε μεταγενέστερο χρόνο ,αλλά η τιμή καθορίζεται και από την αγορά. Οι όροι του συμβολαίου καθορίζονται από τους αντισυμβαλλόμενους και τα υποκείμενα στοιχεία μπορούν να είναι μετοχές, ομόλογα ,ξένα νομίσματα, εμπορεύματα.

Όλα τα μέρη εκτίθεται σε κίνδυνο αθέτησης του αντισυμβαλλόμενου δηλαδή ένας από τους δύο μπορεί να μην προβεί στην απαιτούμενη παράδοση ή πληρωμή. Οι συναλλαγές πραγματοποιούνται σε μεγάλες ,ιδιωτικές και σε μεγάλο βαθμό ανεξέλεγκτες αγορές.

1.2. Γενικά Χαρακτηριστικά

Τα δικαιώματα προαίρεσης διαθέτουν ελκυστικά χαρακτηριστικά τόσο για τους αγοραστές όσο και για τους πωλητές. Από τη μεριά τους οι αγοραστές έχουν την δυνατότητα να εξασκήσουν το δικαίωμά τους μόνο εάν τους συμφέρει και αν επιλέξουν να μην εξασκήσουν έχουν πεπερασμένη ζημιά. Από την άλλη οι πωλητές έχουν μη πεπερασμένη ζημιά αν εξασκηθεί το δικαίωμα αλλά ανταμείβονται λαμβάνοντας την παρούσα αξία του δικαιώματος. Υπάρχουν πολλοί τύποι δικαιωμάτων, τα περισσότερο διαδεδομένα είναι τα ευρωπαϊκού τύπου στα οποία η εξάσκηση μπορεί να γίνει μόνο στην λήξη του δικαιώματος και τα αμερικανικού τύπου που επιτρέπουν την εξάσκηση οποιαδήποτε στιγμή μέχρι τη λήξη.

Τα βασικά χαρακτηριστικά που περιέχονται στα συμβόλαια των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης είναι:

- Η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου (spot price): Ο υποκείμενος τίτλος ενός ενεργειακού δικαιώματος προαίρεσης βασίζεται σε ενεργειακά προϊόντα. Η τρέχουσα τιμή του υποκείμενου τίτλου είναι αυτή που καθορίζει τις εισροές και τις εκροές του χρήματος στη λήξη του δικαιώματος αν μιλάμε για ευρωπαϊκού τύπου ή πριν τη λήξη αν μιλάμε για αμερικάνικου τύπου.

- Η τιμή εξάσκησης (strike price): Είναι η τιμή που συμφωνείται όταν υπογράφεται το δικαίωμα προαίρεσης. Αυτή η προκαθορισμένη τιμή είναι η τιμή στην οποία θα γίνει η συναλλαγή εάν τελικά εξασκηθεί το δικαίωμα.

- Ο χρόνος μέχρι τη λήξη του δικαιώματος (maturity): Είναι ο χρόνος που μεσολαβεί μέχρι τη λήξη του δικαιώματος προαίρεσης. Στα δικαιώματα ευρωπαϊκού τύπου συμπίπτει με την ημερομηνία εξάσκησης, ενώ στα δικαιώματα αμερικάνικου η εξάσκηση μπορεί αν γίνει οποιαδήποτε στιγμή μέχρι τη λήξη.

- Μεταβλητότητα υποκείμενου τίτλου(volatility): Μας δείχνει το ποσοστό μεταβολής της τιμής του τίτλου στο μέλλον σε σχέση με την τρέχουσα τιμή. Όσο αυξάνεται η μεταβλητότητα τόσο αυξάνεται η τιμή του δικαιώματος. Συγκεκριμένα, τα ενεργειακά εμπορεύματα χαρακτηρίζονται από εποχικότητα και σε αυτή οφείλεται η μεγάλη μεταβλητότητα που παρουσιάζουν στις τιμές τους από εποχή σε εποχή (weather related price jumps).

- Η τιμή του δικαιώματος (premium):Είναι η τιμή στην οποία ένας επενδυτής αγοράζει ένα δικαίωμα. Το ποσό αυτό δίνεται στον πωλητή για τον κίνδυνο που αναλαμβάνει αν ο αγοραστής εξασκήσει το δικαίωμα.

- Θέση (position): Υπάρχουν δύο είδη θέσεων. Θέση αγοράς(long position) και θέση πώλησης (short position).

- Το μέγεθος του συμβολαίου: Είναι ο αριθμός των μεριδίων του υποκείμενου τίτλου που μπορεί να πουλήσει ή να αγοράσει ο κάτοχος του δικαιώματος.

- Κόστος αποθήκευσης (storage cost) U: Είναι το κόστος αποθήκευσης και φύλαξης του υποκείμενου τίτλου και αποτελεί ποσοστό της τρέχουσας τιμής του περιουσιακού στοιχείου για κάθε λήξη.

- Convenience yield y: Εκφράζει το κέρδος που θα είχε ο κάτοχος του υποκείμενου τίτλου αν τον είχε κρατήσει αντί για το δικαίωμα προαίρεσης ή το προθεσμιακό συμβόλαιο. Αντανακλά τις προσδοκίες της αγοράς αναφορικά με την διαθεσιμότητα του υποκείμενου τίτλου στο μέλλον. Όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα για μειωμένη διαθεσιμότητα τόσο αυξάνεται το convenience yield.

- Ακολουθούν κανονική κατανομή: Οι τιμές των περισσότερων ενεργειακών εμπορευμάτων τείνουν να προσεγγίζουν μια κεντρική τιμή.

1.3. Χρήσεις των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης και των προθεσμιακών συμβολαίων

Υπάρχουν 3 βασικές χρήσεις των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης και των προθεσμιακών συμβολαίων.

- Αντιστάθμιση κινδύνου (Hedging)

Η αντιστάθμιση κινδύνου πραγματοποιείται από εταιρείες, κυβερνήσεις και χρηματοπιστωτικά ιδρύματα με στόχο την μείωση του κινδύνου στις αλλαγές των τιμών του πετρελαίου, φυσικού αερίου ή ηλεκτρικής ενέργειας. Τυπικό παράδειγμα αποτελούν τα ενεργειακά δικαιώματα αγοράς που χρησιμοποιούν αεροπορικές εταιρείες για να μειώσουν τον κίνδυνο που δημιουργείται από τις αλλαγές στην τιμή της κηροζίνης. Τα δικαιώματα αυτά επιτρέπουν στις αεροπορικές εταιρείες να αγοράζουν καύσιμα σε μια συγκεκριμένη τιμή ανεξάρτητα από την εκάστοτε τρέχουσα τιμή στην αγορά και έτσι να έχουν την δυνατότητα υπολογισμού των ναύλων αλλά και των μελλοντικών ταμειακών ροών τους. Υπάρχουν παρόλα αυτά περιορισμοί στην αντιστάθμιση του κινδύνου, αναφορικά με την δυσκολία στην εύρεση ενεργειακών συμβολαίων για συγκεκριμένα καύσιμα. Η δυσκολία αυτή μπορεί να ξεπεραστεί μερικώς με τη χρήση συμβολαίων με υποκείμενους τίτλους παρόμοιους με τους επιθυμητούς με το ρίσκο μια απρόβλεπτης αλλαγής μεταξύ των τιμών του επιθυμητού και του τίτλου που βρίσκεται στο συμβόλαιο.

- Κερδοσκοπία (Speculation)

Τα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης όπως και τα προθεσμιακά συμβόλαια μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους κατόχους τους ώστε να κερδίσουν από τις αλλαγές που ίσως προκύψουν στην τιμή του υποκείμενου τίτλου. Επιπλέον, οι κάτοχοι αυτών των ενεργειακών συμβολαίων μπορούν να ενισχύσουν τα κέρδη τους μέσω της μόχλευσης.

- Διαφοροποίηση χαρτοφυλακίου (Diversification)

Τα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης αλλά και τα προθεσμιακά συμβόλαια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου. Μέσω αυτών το κεφάλαιο τμηματοποιείται και επενδύεται σε διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία και έτσι μειώνεται ο κίνδυνος του να επενδύει κάποιος σε μια και μόνο κατηγορία περιουσιακών στοιχείων. Η διαφοροποίηση με χρήση ενεργειακών παραγώγων είναι μαζί με την αντιστάθμιση κινδύνου οι δύο βασικές τεχνικές για τον περιορισμό του επενδυτικού ρίσκου.

1.4. Ιστορική Αναδρομή

Τα τελευταία 40 έτη τα παράγωγα παίζουν σπουδαίο ρόλο στη παγκόσμια χρηματοοικονομική. Επενδυτές σε όλες τις αγορές του κόσμου χρησιμοποιούν τα παράγωγα είτε για αντιστάθμιση κινδύνου είτε για κερδοσκοπία είτε για αντισταθμιστική κερδοσκοπία (arbitrage).

Πιο συγκεκριμένα, μια από τις πιο γνωστές κατηγορίες παραγωγών είναι τα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης (energy options).Πολλοί ακαδημαϊκοί και οικονομολόγοι έχουν αναπτύξει μία μεγάλη γκάμα μοντέλων σχετικά με την αποτίμηση τους. Αυτό βέβαια δεν ήταν καθόλου εύκολο, διότι υπάρχουν αρκετοί παράγοντες όπως ο χρόνος μέχρι τη λήξη του συμβολαίου ,η εσωτερική αξία, η μεταβλητότητα ,τα επιτόκια και η πληρωμή ή όχι μερισμάτων που επηρεάζουν τη τιμολόγηση αυτών των δικαιωμάτων. Κάποια από αυτά τα μοντέλα ακολουθούν μια στοχαστική αναπαράσταση μεταξύ ενός περιουσιακού στοιχείου μια συγκεκριμένη στιγμή και άλλων μεταβλητών όπως η απόδοση του περιουσιακού στοιχείου και τα επιτόκια. Ενώ υπάρχουν άλλα υποδείγματα τα οποία ακολουθούν τις αλλαγές του γραφήματος της καμπύλης των επιτοκίων των προθεσμιακών συμβολαίων ή των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης. Στη πρώτη περίπτωση πολλές φορές έχουμε τη δυσκολία στη παρατήρηση των μεταβλητών σε αντίθεση με τις τιμές των μελλοντικών συμβολαίων που είναι γνωστές.

Ένα από τα πρώτα μαθηματικά μοντέλα για την τιμολόγηση των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης πάνω στο οποίο βασίστηκαν και οι περισσότερες έρευνες, ήταν των Fischer Black και Myron Scholes (1976). Το μοντέλο αυτό μας δίνει μια θεωρητική εκτίμηση για την τιμή των δικαιωμάτων ευρωπαϊκού τύπου και δείχνει ότι το δικαίωμα έχει μια μοναδική τιμή ανεξάρτητη του ρίσκου και της αναμενόμενης απόδοσης του χρεογράφου.

Το 1997 ο Τσέχος μαθηματικός Oldrich Vasicek εφήυρε ένα μαθηματικό μοντέλο που περιέγραφε τις αλλαγές των επιτοκίων. Χρησιμοποίησε ένα μονοπαραγοντικό υπόδειγμα καθώς περιγράφει τις αλλαγές των επιτοκίων ως αποτέλεσμα του κινδύνου και της αγοράς. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται για την αποτίμηση παραγώγων και θεωρείται ως ένα στοχαστικό επενδυτικό μοντέλο.

Την ίδια χρονιά ο Edward Schwartz εφάρμοσε για πρώτη φορά τη μέθοδο πεπερασμένων διαφορών στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Πρόκειται για μια αριθμητική μέθοδο που χρησιμοποιείται για να τιμολογήσει τα δικαιώματα προσεγγίζοντας τη διαφορική εξίσωση (συνεχή χρόνου) που περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται η τιμή του δικαιώματος με την πάροδο του χρόνου από ένα σύνολο διαφορικών εξισώσεων διακριτού χρόνου. Αυτές οι διακριτές διαφορικές εξισώσεις μπορούν να λυθούν επαναλαμβανόμενα για να υπολογιστεί η τιμή του δικαιώματος.

Οι Sharpe (1978) και οι Cox,Ross και Rubinstein (1979) εισήγαγαν τα δυωνυμικά δέντρα με σκοπό την τιμολόγηση των αμερικάνικων δικαιωμάτων για περιουσιακά στοιχεία που δεν πληρώνουν μέρισμα και άρα δεν είναι βέλτιστο να εξασκηθούν πριν τη λήξη. Αντίθετα, για περιουσιακά στοιχεία τα οποία πληρώνουν μέρισμα η πρόωρη εξάσκηση ίσως είναι βέλτιστη και έτσι η τιμή τέτοιων δικαιωμάτων δεν μπορεί να βρεθεί με το διωνυμικό μοντέλο.

Οι Brennan και Schwartz (1982) εισήγαγαν μια πρώιμη εκδοχή ενός στοχαστικού μοντέλου δύο παραγόντων. Το υπόδειγμά τους στηρίζεται στην μοντελοποίηση τόσο των τρεχουσών επιτοκίων όσο και του συναλλάγματος. Το συνάλλαγμα όντας μια μακροχρόνια απόδοση δίνει κατά κάποιο τρόπο πληροφορίες για το πόσο απότομη θα είναι η καμπύλη.

Το 1986 οι Ho και Lee , κατασκεύασαν ένα μοντέλο το οποίο χρησιμοποιείται ευρέως στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης. Το υπόδειγμα αυτό βασίζεται στην καμπύλη αποδόσεων. Δεδομένου ότι δημιουργεί συμμετρική κατανομή των αποδόσεων στο μέλλον, είναι πιθανές και οι αρνητικές τιμές. Γι' αυτό το λόγο είτε χρησιμοποιείται το μοντέλο των Hull-White σύμφωνα με το οποίο οι αποδόσεις ακολουθούν κανονική κατανομή και οι τιμές των ομολόγων λογαριθμική, είτε το μοντέλο Black-Derman-Toy (1990) που είναι μονοπαραγοντικό με μικρές αποδόσεις. Παρόμοια υποδείγματα ανέπτυξαν ο βραβευμένος με Νόμπελ Robert C. Merton (1973) και οι Cox-Ingersoll-Ross (1987). Ο πρώτος επικεντρώθηκε στην αξιολόγηση του πιστωτικού κινδύνου του χρέους μιας εταιρείας και το πόσο ικανή είναι να ανταποκριθεί στις οικονομικές της υποχρεώσεις. Οι «CIR» ανέπτυξαν έναν τύπο που χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των κινήσεων των επιτοκίων και οδηγείται από μια πηγή κινδύνου αγοράς.

Οι Hull και White (1994a) εισήγαγαν μια ακόμα παράμετρο(drift parameter), τον ρυθμό αναστροφής. Η παράμετρος αυτή εξαρτάται από το χρόνο και δίνει τη δυνατότητα στο μοντέλο να εισάγει στοιχεία σχετικά με την μεταβλητότητα.

Το 1992 οι Heath, Jarrow και Morton επέκτειναν το υπόδειγμα των Ho και Lee δημιουργώντας μια στοχαστική διαδικασία για την εξέλιξη της στιγμιαίας καμπύλης αποδόσεων. Το αρνητικό στο υπόδειγμα αυτό είναι ότι όλη η διαδικασία των Heath, Jarrow και Morton δεν είναι Markov και έτσι η διαδικασία εύρεσης των αποδόσεων για μια μελλοντική στιγμή δεν εξαρτάται μόνο από την προηγούμενη τιμή αλλά και από προγενέστερες.

Μια ακόμα κατηγορία άμεσα συνδεδεμένη με την τιμολόγηση των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι τα δεντροδιαγράμματα, δηλαδή η κατασκευή «δέντρων»-γραφημάτων με τις διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει μια επιλογή σε κάθε κόμβο κάποια χρονική περίοδο. Η αξία της επιλογής εξαρτάται από την πιθανότητα η τιμή του υποκείμενου τίτλου να αυξηθεί ή να μειωθεί.

Τα πρώτα διωνυμικά δέντρα κατασκευάστηκαν από τους Cox, Ross και Rubinstein το 1979. Αργότερα, οι Black, Derman και Toy (1990) χρησιμοποίησαν στο μοντέλο τους διωνυμικά δέντρα μικρών αποδόσεων(short rate trees). Το 1986 ο Phelim Boyle επέκτεινε το διωνυμικό μοντέλο και κατασκεύασε το τριωνυμικό. Τα «δέντρα» αυτά χρησιμοποιούνται για ακριβέστερα αποτελέσματα διότι έχουν λιγότερα χρονικά βήματα από τα διωνυμικά και συνεπώς η υπολογιστική ταχύτητα ή το κόστος μπορεί να είναι ζήτημα.

1.5. Περιγραφή της διπλωματικής

Στην διπλωματική αυτή εργασία, αναπτύσσουμε ένα θεωρητικό πλαίσιο το οποίο χρησιμοποιούμε ως βάση, προκειμένου να τιμολογήσουμε τα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης. Ουσιαστικά, εστιάζουμε στην εκτίμηση παραμέτρων για την κατασκευή του μοντέλου μας, ώστε να το χρησιμοποιήσουμε ως βάση για την τελικά αποτίμηση των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης.

Η μέθοδος που θα χρησιμοποιήσουμε περιλαμβάνει την χρήση της καμπύλης προθεσμιακών συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης. Οι τιμές των προθεσμιακών συμβολαίων γίνονται μέσω αυτών των καμπυλών εύκολα παρατηρήσιμες, και το γεγονός αυτό είναι πολύ χρήσιμο καθώς τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης είναι ευρέως διαδεδομένα σε πολλές οργανωμένες αγορές.

Αρχικά, στο πρώτο κεφάλαιο, εισάγουμε την έννοια των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης, δηλαδή τα δικαιώματα προαίρεσης που έχουν ως υποκείμενους τίτλους, το αργό πετρέλαιο, το φυσικό αέριο και την ηλεκτρική ενέργεια. Παρουσιάζουμε αναλυτικά τα χαρακτηριστικά τους και τις βασικές χρήσεις τους, τόσο στην αντιστάθμιση κινδύνου όσο και στην κερδοσκοπία και στην διαφοροποίηση του χαρτοφυλακίου των κατόχων τους. Στη συνέχεια, παρουσιάζουμε μια ιστορική αναδρομή για το ρόλο των παραγώγων εν γένει στην παγκόσμια χρηματοοικονομική αλλά και συγκεκριμένα των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης.

Στο δεύτερο κεφάλαιο, θα δομήσουμε το θεωρητικό μοντέλο τόσο των Black-Scholes αλλά και το μοντέλο των Clewlow και Strickland που αποτελεί μια γενικευμένη περίπτωση του ειδικότερου μοντέλου των Hull και White. Τονίζονται ιδιαίτερα οι ιδιαιτερότητες του μοντέλου των Clewlow και Strickland όσον αφορά την καμπύλη των προθεσμιακών συμβολαίων, η οποία σε αντίθεση με την προκαθορισμένη μορφή που έχει στο μοντέλο των Hull και White, μπορεί να πάρει οποιαδήποτε μορφή επιβάλλει η αγορά. Παρουσιάζουμε αναλυτικά τις υποθέσεις και τη δομή των μοντέλων που θα χρησιμοποιήσουμε, ενώ παράλληλα θέτουμε τις βάσεις για την τιμολόγηση τόσο των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης όσο και των ενεργειακών δικαιωμάτων σε προθεσμιακά συμβόλαια και σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης. Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού, αναφερόμαστε στα caps, floors και collars που αποτελούν ένα δημοφιλή τύπο δικαιωμάτων όσον αφορά την εξωχρηματιστηριακή αγορά, όπως επίσης και σε ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης σε συμφωνίες ανταλλαγής και δίνονται οι αντίστοιχοι τύποι για την τιμολόγησή τους.

Στο τρίτο κεφάλαιο εξάγουμε τη φόρμουλα τιμολόγησης τόσο των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο το αργό πετρέλαιο όσο και των ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης με υποκείμενο τίτλο επίσης το αργό πετρέλαιο. Δομούμε το τριωνυμικό πλέγμα που αφορά το γενικό μοντέλο των Clewlow και Strickland αλλά και του ειδικότερου μοντέλου των Hull και White. Στη συνέχεια, εισάγουμε την έννοια των state prices Q_{ij} τα οποία θα μας βοηθήσουν προκειμένου να αποτιμήσουμε τα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης στην γενικότερη περίπτωση όπου η καμπύλη αποδόσεων των προθεσμιακών συμβολαίων μπορεί να λάβει οποιαδήποτε μορφή σύμφωνα με τις επιταγές της αγοράς.

Στο τέταρτο κεφάλαιο διεξάγουμε την εμπειρική μας ανάλυση. Αντλούμε δεδομένα από την τρέχουσα περίοδο λόγω της απουσίας ιστορικών δεδομένων για τον συγκεκριμένο τύπο ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο το αργό πετρέλαιο, και άνω σε αυτά τα δεδομένα εφαρμόζουμε τα δύο διαφορετικά μοντέλα των Black-Scholes και των Hull και White. Προκειμένου να προχωρήσουμε στην τιμολόγηση των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης έχει προηγηθεί η εκτίμηση των παραμέτρων, της μεταβλητότητας σ στο μεν πρώτο μοντέλο, και της μεταβλητότητας σ και της παραμέτρου α για το δε δεύτερο μοντέλο. Παραθέτουμε αναλυτικά τον επαναληπτικό αλγόριθμο των Levenberg και

Marquardt που χρησιμοποιούμε για την εκτίμηση των παραμέτρων στην περίπτωση του μοντέλου των Hull και White και αντίστοιχα στο μοντέλο των Clewlow και Strickland. Στο τέλος του κεφαλαίου αυτού παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα μετά τη σύγκριση των δύο μεθόδων που χρησιμοποιήσαμε.

Στο πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο, αφού έχουμε προηγουμένως εφαρμόσει την αριθμητική μας ανάλυση, καταλήγουμε στα συμπεράσματά μας.

Κεφάλαιο 2

2. ΤΟ ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ

2.1. Το μοντέλο Black και Scholes

Το μοντέλο των Black-Scholes που ονομάζεται επίσης μοντέλο των Black-Scholes-Merton είναι το πρώτο διαδεδομένο μοντέλο που χρησιμοποιήθηκε ευρέως για την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης. Χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση της θεωρητικής τιμής ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης χρησιμοποιώντας τρέχουσες τιμές της υποκείμενης μετοχής, αναμενόμενα μερίσματα στην περίπτωση που διανέμονται, την τιμή εξάσκησης του παραγώγου, αναμενόμενα επιτόκια και μεταβλητότητες όπως και τον χρόνο έως τη λήξη.

Η τιμολόγηση δικαιωμάτων προαίρεσης είναι μια πολύπλοκη διαδικασία λόγω της εξάρτησής της από πολλές διαφορετικές παραμέτρους. Η πολυπλοκότητα αυτή μετριάζεται με τη χρήση των <<greek letters>> όπως είναι το delta, το vega, το gamma και άλλα.

Η φόρμουλα αυτή δομήθηκε από τρεις οικονομολόγους- τους Fischer Black, Myron Scholes και Robert Merton και παρουσιάστηκε στην εργασία τους <<The Pricing of Options and Corporate Liabilities>> που δημοσιεύθηκε το 1973 στην <<Journal of Political Economy>>. Για την εργασία τους αυτή βραβεύτηκαν με βραβείο Νόμπελ το 1992 όταν ήδη ο Black είχε αποβιώσει. Το μοντέλο των Black-Scholes-Merton βασίζεται στις παρακάτω υποθέσεις:

- Το ευρωπαϊκό δικαίωμα μπορεί να εξασκηθεί μόνο στη λήξη.
- Τα μερίσματα δεν διανέμονται κατά τη διάρκεια ζωής του δικαιώματος προαίρεσης αλλά μόνο στη λήξη.
- Οι αγορές είναι αποτελεσματικές, δηλαδή οι χρηματαγορές είναι διαρκώς πλήρως ενημερωμένες, επομένως οι παρούσες τιμές των χρεογράφων αντικατοπτρίζουν πλήρως κάθε σχετική και διαθέσιμη

πληροφορία κατά τρόπο αποτελεσματικό. Επιπλέον, αλλάζουν συνεχώς, προκειμένου να ενσωματώσουν οποιαδήποτε πληροφορία προκύψει, και γι΄αυτό το λόγο είναι αδύνατο κάποιος να νικήσει την αγορά.

- Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών και φόροι προκειμένου να γίνουν οι αγοραπωλησίες των παραγώγων.
- Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου και η μεταβλητότητα των υποκείμενων τίτλων είναι γνωστά και σταθερά.
- Οι αποδόσεις των υποκείμενων τίτλων ακολουθούν κανονική κατανομή.
- Η ανοιχτή θέση πώλησης (short- selling) είναι μια διαδικασία που μπορεί να λάβει χώρα.
- Δεν υπάρχουν ευκαιρίες για αντισταθμιστική κερδοσκοπία (arbitrage) Καθώς όπως αναφέραμε πιο πάνω η αγορά είναι αποτελεσματική και οποιαδήποτε ανισορροπία την επαναφέρει σε μηδενικό χρόνο ξανά σε ισορροπία.
- Η τιμή της μετοχής ακολουθεί Γεωμετρική Κίνηση Brown (Brownian motion) με μέση απόδοση μ και τυπική απόκλιση σ οι οποίες όπως αναφέραμε και προηγουμένως είναι σταθερές.

Προκειμένου να καταλήξουμε στους τύπους του μοντέλου των Black-Scholes-Merton θα περιγράψουμε την κίνηση της τιμής της μετοχής με αναμενόμενη απόδοση μ και μεταβλητότητα σ. Κάθε μετοχή, στον πραγματικό κόσμο χαρακτηρίζεται από μεταβλητότητα στην τιμή της. Επομένως, $\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \mu \cdot \Delta\tau + \sigma \cdot \varepsilon_\tau \cdot \sqrt{\Delta\tau} (1)$ όπου τα σφάλματα $\varepsilon_\tau \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Σύμφωνα με τη σχέση αυτή η διακύμανση της μετοχής σ^2 ανά μονάδα χρόνου θα είναι σταθερή και ίση με $\sigma^2 = \frac{1}{\Delta\tau} \cdot Var\left[\frac{S(t+\Delta\tau) - S(t)}{S(t)}\right]$.

Πολλαπλασιάζοντας την σχέση (1) με $S(t)$ έχουμε:

$$\Delta S(t) = \mu \cdot S(t) \cdot \Delta\tau + \sigma \cdot S(t) \cdot \varepsilon_\tau \cdot \sqrt{\Delta\tau} .$$

Η εξίσωση αυτή μπορεί να διακριτοποιηθεί μόνο για μικρά Δτ καθώς σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση υποθέτουμε πως η τιμή της μετοχής την στιγμή t είναι ίδια με την τιμή της μετοχής την στιγμή t+Δτ. Διακριτοποιώντας λοιπόν για μικρά Δτ έχουμε τελικά την εξίσωση:

$dS(t) = \mu \cdot S(t) \cdot dt + \sigma \cdot S(t) \cdot dz(t)$ η οποία αποτελεί μία Γεωμετρική Κίνηση Brown με μ και σ σταθερές.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Ito προκύπτει ότι η διαδικασία που ακολουθείται από τη συνάρτηση $G = G(t,S)$ των S και t είναι:

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial S}\mu S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial S}\sigma S dz$$

Στη συνέχεια θα προσπαθήσουμε να καταλήξουμε στην διαδικασία της συνάρτησης lnG. Ορίζουμε G=lnS και έχουμε $\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}$, $\frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2}$, $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$

$$dG = \left(0 + \frac{1}{S}\mu S - \frac{1}{2}\frac{1}{S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{1}{S}\sigma S dz$$
$$dG = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz$$

Αφού τα μ και σ είναι σταθερές τότε η G ακολουθεί μια γενικευμένη Wiener και μπορεί να διακριτοποιηθεί για μεγάλα Δτ, με ρυθμό τάσης $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right)$ και σταθερή διακύμανση σ^2.

Η μεταβολή της G=lnS μεταξύ 0 και T ακολουθεί κανονική κατανομή:

$$\ln S_T \sim N\left[\ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma\sqrt{T} \right]$$

$$\ln S_T \sim \ln S_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\cdot N(0,1)$$

$$\ln \frac{S_T}{S_0} = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \varepsilon \cdot \sigma\sqrt{T}$$

$$S_T = S_0 \cdot e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \varepsilon\cdot\sigma\sqrt{T}}$$

όπου η μέση απόδοση της μετοχής είναι: $E(S_t) = S_0 \cdot e^{\mu t}$

και η διακύμανσή της δίνεται από τον τύπο: $Var(S_t) = S_0^2 \cdot e^{2\mu t} \cdot \left(e^{\sigma^2 t} - 1\right)$

Τελικά, η αξία του Ευρωπαικού δικαιώματος αγοράς θα είναι :

$c = e^{-rT} \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \max\left\{ S_0 \cdot e^{\sigma\sqrt{T}\varepsilon_i + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} - K, 0 \right\}$ σε κόσμο ουδέτερου κινδύνου.

Στη συνέχεια του κεφαλαίου χρησιμοποιούμε το μοντέλο αυτό ώστε να αποτιμήσουμε ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο προθεσμιακά συμβόλαια και συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης αργού πετρελαίου.

2.2. Η ενεργειακή καμπύλη προθεσμιακών συμβολαίων

Μέχρι πρόσφατα, οι καμπύλες προθεσμιακών συμβολαίων ήταν σχεδόν άγνωστες στην ευρωπαϊκή αγορά των ενεργειακών εμπορευμάτων όπως του πετρελαίου, του φυσικού αερίου και της ηλεκτρικής ενέργειας. Σήμερα, παρόλα αυτά αποτελεί έναν από τους βασικούς παράγοντες για την απόφαση αγοράς και πώλησης τέτοιων ενεργειακών εμπορευμάτων. Προκειμένου να ξεκινήσουμε την ανάλυσή μας θα πρέπει να μελετήσουμε την εξέλιξη της καμπύλης προθεσμιακών συμβολαίων F(t,T) με την πάροδο του χρόνου.

Η καμπύλη προθεσμιακών συμβολαίων είναι μία γραφική συνάρτηση που χρησιμοποιείται στην χρηματοοικονομική και καθορίζει την τιμή στην οποία ένα προθεσμιακό συμβόλαιο ή συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης μπορεί να συναφθεί σήμερα για μελλοντική παράδοση ή πληρωμή. Συγκεκριμένα, η καμπύλη προθεσμιακών συμβολαίων ή συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης είναι μία συνάρτηση από τις τιμές σε χρονικό διάστημα ανάμεσα στο τώρα και στην ημερομηνία λήξης του συμβολαίου με τρέχουσα τιμή την τιμή στο τώρα, δηλαδή την t=0.

Στην ευρωπαϊκή αγορά ενεργειακών εμπορευμάτων οι τιμές του πετρελαίου, του φυσικού αερίου αλλά και της ηλεκτρικής ενέργειας παρουσιάζουν διαχρονικά υψηλή μεταβλητότητα. Για αυτό το λόγο εταιρείες που χρησιμοποιούν την ενέργεια, προκειμένου να προστατευθούν από τις μεγάλες και απρόβλεπτες αλλαγές στις τιμές των ενεργειακών εμπορευμάτων, συνάπτουν προθεσμιακά συμβόλαια για μεγάλα χρονικά διαστήματα, μειώνοντας έτσι το ρίσκο το οποίο αναλαμβάνουν. Επιπλέον, αποκτούν την δυνατότητα πρόβλεψης των ταμειακών τους ροών.

Η κατασκευή της καμπύλης προθεσμιακών συμβολαίων όπως έχουμε ήδη αναφέρει αφορά την αποτύπωση των τρεχουσών τιμών των προθεσμιακών συμβολαίων με την πάροδο του χρόνου. Οι αναλυτές βασιζόμενοι τόσο στην στατιστική ανάλυση ιστορικών δεδομένων όσο και στην εμπειρική ανάλυση, μπορούν δεδομένης της τιμής του προθεσμιακού συμβολαίου για μια συγκεκριμένη χρονιά να υπολογίσουν τις τιμές για μεμονωμένους μήνες, μέρες ακόμη και ώρες της ίδιας χρονιάς. Η αποτύπωση αυτών των τιμών των προθεσμιακών συμβολαίων συγκροτεί την καμπύλη προθεσμιακών συμβολαίων για ενεργειακά εμπορεύματα. Καθώς οι τιμές των ενεργειακών εμπορευμάτων μεταβάλλονται συνεχώς έτσι και η καμπύλη που τα αφορά θα αλλάζει κάθε στιγμή.

Όσον αφορά τα προθεσμιακά συμβόλαια με υποκείμενους τίτλους ενεργειακά εμπορεύματα υπάρχουν κάποιοι παράγοντες που επηρεάζουν την καμπύλη προθεσμιακών συμβολαίων λόγω του απρόβλεπτου και ευμετάβλητου χαρακτήρα των τιμών τους. Μερικοί από αυτούς τους παράγοντες είναι οι κανονισμοί με βάση τους οποίους δομείται η αγορά και επηρεάζουν τα επίπεδα τιμών των ενεργειακών εμπορευμάτων. Επίσης, η εποχικότητα που χαρακτηρίζει τα ενεργειακά προϊόντα αλλά και στοχαστικοί παράγοντες όπως οι καιρικές συνθήκες επηρεάζουν τις τιμές των προθεσμιακών συμβολαίων με υποκείμενους τίτλους το πετρέλαιο, το φυσικό αέριο ή την ηλεκτρική ενέργεια και κατ’ επέκταση και την καμπύλη αυτών των προθεσμιακών συμβολαίων.

Οι καμπύλες προθεσμιακών συμβολαίων είναι ιδιαίτερα σημαντικές για διάφορους λόγους οι οποίοι ποικίλλουν ανάλογα και με την ιδιότητα του κάθε επενδυτή. Συγκεκριμένα, για τα φυσικά πρόσωπα η καμπύλη προθεσμιακών συμβολαίων αντικατοπτρίζει την ποσότητα των αποθεμάτων του ενεργειακού εμπορεύματος σε σχέση με την ικανότητα αποθήκευσης και φύλαξής του. Για τις εταιρείες που ασχολούνται με την μεταφορά και αποθήκευση δεξαμενών η καμπύλη προθεσμιακών συμβολαίων μας δίνει πληροφορίες σχετικά με τη ζήτηση των δεξαμενών τους. Η υψηλή ζήτηση παρουσιάζεται σχηματικά με το <<contango>> ενώ η χαμηλή ζήτηση με το <<backwardation>>. Τέλος, για εμπόρους συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης η καμπύλη χρησιμοποιείται για την κερδοσκοπία μέσω των spread των ενεργειακών εμπορευμάτων.

Επιπλέον, οι καμπύλες προθεσμιακών συμβολαίων αντανακλούν την τρέχουσα τιμή του ενεργειακού προϊόντος. Σύμφωνα με αυτές τις καμπύλες εάν ένας επενδυτής αγοράζει/πουλάει ακριβότερα/φθηνότερα από την τρέχουσα τιμή τότε χάνει χρήματα. Χρησιμοποιούνται λοιπόν οι καμπύλες όχι μόνο για αγοραπωλησίες χονδρικού εμπορίου αλλά και λιανικής πώλησης ως το όριο πάνω/κάτω από το οποίο ένας επενδυτής πρέπει να πουλάει/αγοράζει τον υποκείμενο τίτλο. Ειδικότερα, στα ενεργειακά προϊόντα που χαρακτηρίζονται από υψηλή μεταβλητότητα οι καμπύλες προθεσμιακών συμβολαίων είναι ένας κύριος παράγοντας που επηρεάζουν την τιμή των υποκείμενων περιουσιακών στοιχείων.

Μια άλλη σημαντική χρήση των καμπυλών προθεσμιακών συμβολαίων είναι το <<marking to market>>. Το <<marking to market>> είναι η διαδικασία κατά την οποία στο τέλος κάθε ημέρας οι ανοιχτές θέσεις κάθε επενδυτή τιμολογούνται με βάση τις τρέχουσες τιμές της αγοράς. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία καθημερινά αποδεικνύεται εάν το χαρτοφυλάκιο του επενδυτή έχει κερδίσει ή έχει χάσει.

Παρόλα αυτά πολλές φορές οι καμπύλες προθεσμιακών συμβολαίων χρησιμοποιούνται από τους επενδυτές λανθασμένα για πρόβλεψη των μελλοντικών τιμών των συμβολαίων. Οι τιμές που παρουσιάζονται στην καμπύλη είναι μία αποτύπωση της παρούσας κατάστασης δεδομένων τωρινών πληροφοριών που δεν αφορούν το μέλλον, και αποτελούν την καλύτερη προσέγγιση για την τιμή των συμβολαίων των ενεργειακών εμπορευμάτων. Σε κάθε περίπτωση επειδή σε αυτά τα συμβόλαια επενδύονται μεγάλα χρηματικά ποσά ακόμα και αν η καμπύλη αποτελεί την καλύτερη προσέγγιση έστω και η μικρή νέα πληροφορία μπορεί να αλλάξει την εικόνα της καμπύλης φέρνοντας τα αντίθετα αποτελέσματα.

Σε ένα περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου οι επενδυτές αναμένουν ότι το προθεσμιακό συμβόλαιο θα έχει αξία στη λήξη όσο η μελλοντική αξία του την στιγμή της λήξης T προεξοφλημένη κατά το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου r. Δεδομένου ότι τα προθεσμιακά συμβόλαια δεν απαιτούν κάποια αρχική επένδυση καθώς τη στιγμή της σύναψης του συμβολαίου δεν λαμβάνει χώρα καμία συναλλαγή η αναμενόμενη από τους επενδυτές αλλαγή στην τιμή του προθεσμιακού συμβολαίου είναι μηδέν. Όπως εξηγούν στο άρθρο τους οι Clewlow και Strickand για να ακολουθούν οι τιμές των προθεσμιακών συμβολαίων με υποκείμενους τίτλους ενεργειακά προϊόντα μαρκοβιανή διαδικασία θα πρέπει η μεταβλητότητα των τιμών τους να έχει αρνητική εκθετική μορφή. Με αυτόν τον τρόπο διασφαλίζεται το γεγονός πως η πρόβλεψη για την τιμή στο μέλλον εξαρτάται μόνο από τις παρούσες πληροφορίες και καθόλου από το παρελθόν και από τον τρόπο με τον οποίο έχει κινηθεί η τιμή στο παρελθόν. Έτσι, η στοχαστική ισότητα που μας δίνει την τιμή της καμπύλης προθεσμιακών συμβολαίων δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{dF\left(t,T\right)}{F\left(t,T\right)} = \sigma \cdot e^{-\alpha(T-t)} dz\left(t\right)$$

Η ισότητα αυτή είναι μια πιο γενικευμένη μορφή της ισότητας του ενός παράγοντα που παρουσίασε ο Schwartz στο άρθρο του το 1997 για την συμπεριφορά των τιμών των ενεργειακών εμπορευμάτων όπως το πετρέλαιο.

Από τη σχέση $\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sigma \cdot e^{-a(T-t)} dz(t)$ για $\sigma(t,T) = \sigma \cdot e^{-a(T-t)}$

Έχουμε ότι οι τιμές των forwards ικανοποιούν την παρακάτω ισότητα:

$$\frac{dF(t,T)}{F(t,T)} = \sigma(t,T) dz(t)$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Ito για G=lnA=lnF(t,T) έχουμε:

$$\frac{\partial G}{\partial \mathrm{A}} = \frac{1}{F(t,T)}, \frac{\partial^2 G}{\partial A^2} = -\frac{1}{A^2} = -\frac{1}{F^2(t,T)}, \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial F}\mu F + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial F^2}\sigma^2 F^2\right)dt + \frac{\partial G}{\partial F}\sigma F dz$$

$$dG = \left(\frac{1}{F(t,T)}\mu F + 0 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{F^2(t,T)}\sigma^2 F^2(t,T)\right)dt + \frac{1}{F(t,T)}\sigma F dz$$

Παραγωγίζοντας έχουμε:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \left[\frac{\partial \ln F(0,T)}{\partial t} - \int_0^t \sigma(u,t)\cdot\frac{\partial\sigma(u,t)}{\partial t}du + \int_0^t \frac{\partial\sigma(u,t)}{\partial t}dz(u)\right]dt + \sigma(t,t)dz(t)$$

όπου $\sigma(t,T) = \sigma \cdot e^{-a(T-t)}$ και $\frac{\partial\sigma(t,T)}{\partial T} = -a\cdot\sigma\cdot e^{-a(T-t)}$

Η σχέση αυτή είναι μια Brownian motion με αναμενόμενο ρυθμό ανάπτυξης (growth rate)

$y(t)=\frac{\partial \ln F(0,T)}{\partial t}-\int_0^t \sigma(u,t)\cdot\frac{\partial \sigma(u,t)}{\partial t}du+\int_0^t \frac{\partial \sigma(u,t)}{\partial t}dz(u)$ και αναμενόμενο ρυθμό μεταβολής $\sigma(t,t)$.

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$y(t)=\frac{\partial \ln F(0,t)}{\partial t}+a\sigma^2\int_0^t e^{-2a(t-u)}du - a\int_0^t(\sigma\cdot e^{-a(t-u)})dz(u)$$

Από τη σχέση έχουμε:

$$\ln(\frac{F(t,T)}{F(0,T)})=-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma(u,T)^2du+\int_0^t \sigma(u,T)^2dz(u)$$

$$\ln F(t,T)-\ln F(0,T)=-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma(u,T)^2du+\int_0^t \sigma(u,T)^2dz(u)$$

$$\ln F(t,T)-\ln F(0,T)=-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma(u,T)^2du+\int_0^t \sigma(u,T)^2dz(u)$$

$$\ln S(t)=\ln F(0,t)-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2\cdot e^{-2a(t-u)}du+\int_0^t \sigma\cdot e^{-a(t-u)}dz(u)$$

Λύνοντας ως προς $\int_0^t \sigma\cdot e^{-a(t-u)}dz(u)$ και έχουμε:

$\int_0^t \sigma\cdot e^{-a(t-u)}=\ln S(t)-\ln F(0,t)+\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2\cdot e^{-2\alpha(t-u)}$ ενώ αντικαθιστώντας στην y(t) έχουμε:

$$y(t)=\frac{\partial \ln F(0,t)}{\partial t}+a\sigma^2\int_0^\tau e^{-2a(t-u)}du-a\left[\ln S(t)-\ln F(0,t)+\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{-2a(t-u)}du\right]$$

Λύνουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^t e^{-2a(t-u)}du=\frac{1}{2a}\left[1-e^{-2at}\right]$ και άρα:

$$\frac{dS(t)}{S(t)}=\left[\frac{\partial \ln F(0,t)}{\partial t}+a(\ln F(0,t)-\ln S(t))+\frac{\sigma^2}{4}(1-e^{-2at})\right]dt+\sigma dz(t)$$

.

Σύμφωνα με το μονοπαραγοντικό μοντέλο του Schwartz:

$$\frac{dS(t)}{S(t)}=a\left[\mu-\ln S\right]dt+\sigma dz(t)$$

όπου $\mu(t)=\dfrac{\partial \ln F(0,t)}{\partial t}+\ln F(0,t)+\dfrac{\sigma^2}{4}(1-e^{-2at})$

Η σχέση αυτή παραμένει συνεπής ,με την αρχική προθεσμιακή καμπύλη F(0,T) μετατρέποντας το μ σε μία συνάρτηση χρόνου μ(t).

$$F(t,T)=F(0,T)\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha(T-u)}du+\int_0^t \sigma e^{-a(T-u)}dz(u)\right]$$

Βρίσκοντας το ολοκλήρωμα $\int_0^t \sigma^2 e^{-2a(T-u)}du=\dfrac{\sigma^2}{2\alpha}e^{-2aT}\left[e^{-2at}-1\right]$ και όπως δείξαμε προηγουμένως:

$$S(t)=F(0,t)\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha(t-u)}du+\int_0^t \sigma e^{-a(t-u)}dz(u)\right] \text{ και}$$

$\int_0^t \sigma^2 e^{-2\alpha(t-u)}du=\dfrac{\sigma^2}{2\alpha}\left[1-e^{-2at}\right]$ οπότε λύνοντας ως προς $\int_0^t \sigma e^{-a(t-u)}dz(u)$

έχουμε: $\int_0^t \sigma e^{-a(t-u)}dz(u)=\ln S(t)-\ln F(0,t)+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sigma^2}{2\alpha}\left[1-e^{-2\alpha t}\right]$

$$\int_0^t \sigma e^{-a(t-u)}dz(u)=\ln\left(\frac{S(t)}{F(0,t)}\right)+\frac{\sigma^2}{4\alpha}\left[1-e^{-2at}\right].$$

Επίσης, $\int_0^t \sigma e^{-a(T-u)}dz(u)=\int_0^t \sigma e^{-aT}e^{au}dz(u)=\dfrac{e^{-aT}}{e^{-at}}\int_0^t \sigma e^{-a(t-u)}dz(u)$

Αντικαθιστώντας έχουμε: $\int_0^t \sigma e^{-a(T-u)}dz(u)=e^{-\alpha(T-t)}\left[\ln\left(\dfrac{S(t)}{F(0,t)}\right)+\dfrac{\sigma^2}{4\alpha}\left[1-e^{-2at}\right]\right]$

οπότε : $F(t,T)=F(0,T)\left(\dfrac{S(t)}{F(0,t)}\right)^{\exp[-a(T-t)]}\cdot\exp\left[\dfrac{-\sigma^2}{4a}e^{-aT}(e^{2at}-1)\cdot(e^{-aT}-e^{-at})\right]$

Επομένως, η προθεσμιακή καμπύλη σε οποιαδήποτε στιγμή στο μέλλον είναι μία συνάρτηση της τρέχουσας τιμής της αρχικής προθεσμιακής καμπύλης και της συνάρτησης των παραμέτρων μεταβλητότητας. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ βοηθητικό όταν τιμολογούμε παράγωγα χρησιμοποιώντας δέντρα, καθώς σημαίνει πως μπορούμε να αξιολογούμε τα παράγωγα αναλυτικά.

2.3. Τιμολόγηση Ευρωπαϊκών Ενεργειακών Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε την τιμολόγηση Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων τόσο στα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης όσο και στα προθεσμιακά συμβόλαια με υποκείμενους τίτλους ενεργειακά προϊόντα.

2.3.1. Ενεργειακά Δικαιώματα

Σε περιβάλλον ουδέτερου κινδύνου, όπως έδειξε και η εργασία των Cox και Ross (1976) η τιμολόγηση των ενεργειακών δικαιωμάτων, C(t, S(t); θ) είναι μια σχέση της αναμενόμενης απόδοσης προεξοφλημένης με το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου.

C(t, S(t); θ)=E_t [(P(t,T) C(T,S(T);θ)] όπου C είναι η τιμή του δικαιώματος στη λήξη που είναι γνωστή και ίση με max(0,S(T)-K) και $P(t,T)=\exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)$

η τιμή τη χρονική στιγμή t ενός ομολόγου το οποίο λήγει την T και πληρώνει μέρισμα 1 μονάδα. Με άλλα λόγια είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας (discount factor) την χρονική περίοδο (t,T) και θ ένα διάνυσμα από σταθερές παραμέτρους.

Ως εκ τούτου, η τιμή ενός Ευρωπαϊκού Δικαιώματος αγοράς τη στιγμή t με τιμή εξάσκησης K και λήξη T δίνεται από τον τύπο:

c(t,S(t);K,T)=E_t [P(t,T)max(0,S(T)-K)].

Όπως έχουμε αναφέρει προηγουμένως, $F(t,T)=F(0,T)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{-2a(T-u)}du+\int_0^t \sigma e^{-a(T-u)}dz(u)\right]$ και για T=t έχουμε

$$S(t)=F(t,t)=F(0,t)\exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{-2a(t-u)}du+\int_0^t \sigma e^{-a(t-u)}dz(u)\right].$$

Παίρνοντας ln έχουμε: $\ln\left(\frac{F(t,t)}{F(0,t)}\right)=\left[-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{-2a(t-u)}du+\int_0^t \sigma e^{-a(t-u)}dz(u)\right]$ και

άρα $\ln F(t,t)-\ln F(0,t)=\left[-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{-2a(t-u)}du+\int_0^t \sigma e^{-a(t-u)}dz(u)\right]$.

Από την παραπάνω σχέση έχουμε ότι S(T) ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή και διασπορά τις ακόλουθες:

$\ln S(T) \sim N\left[\ln F(0,T)-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 e^{-2a(t-u)}du,\int_0^t \sigma^2 e^{-2a(t-u)}dz(u)\right]$,όπου

$\int_0^{\mathrm{T}} \sigma^2 e^{-2\alpha(\mathrm{T}-u)}du=\frac{\sigma^2}{2\alpha}\left[1-e^{-2aT}\right]$. Σύμφωνα με την φόρμουλα των Black-Scholes-Merton για τα δικαιώματα αγοράς(call) και πώλησης(put) έχουμε:

$$c=S_0N(d_1)-Ke^{-rT}N(d_2)$$
$$p=Ke^{-rT}N(-d_2)-S_0N(-d_1)$$

όπου $d_1=\dfrac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)\mathrm{T}}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}$ και $d_2=\dfrac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{\mathrm{T}}}=d_1-\sigma\sqrt{T}$

και N(x) η κανονική κατανομή.

Η σχέση για την τιμή των Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων γίνεται $c=e^{-rT}\left[S_0N(d_1)e^{rT}-KN(d_2)\right]$.

Επειδή τα επιτόκια είναι ντετερμινιστικά και η lnS(T) ακολουθεί κανονική κατανομή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω φόρμουλα και έτσι για το Ευρωπαϊκό Ενεργειακό Δικαίωμα αγοράς να έχουμε:

$c(t,S(t);K,T)=P(t,T)(F(t,T)N(h)-KN(h-\sqrt{w})$ όπου $h=\dfrac{\ln\left(\frac{F(t,T)}{K}\right)+\frac{1}{2}w}{\sqrt{w}}$

και $w=\frac{\sigma^2}{2\alpha}\left[1-e^{-2a(T-t)}\right]$.

Στην ειδική περίπτωση όπου σ(t,T)=σ έχουμε $w=\sigma^2(T-t)$, ο γνωστός περιορισμός του Amin.

Όσον αφορά τα ενεργειακά δικαιώματα πώλησης έχουμε τη σχέση $p(t,S(t);K,T) = P(t,T)(KN(\sqrt{w}-h) - F(t,T)N(-h))$.

Από τη σχέση put-call parity έχουμε:

$$
\begin{aligned}
&c + Ke^{-rT} = p + S_0 \\
&S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2) + Ke^{-rT} = p + S_0 \\
&S_0 N(d_1) - S_0 - Ke^{-rT}(N(d_2) - 1) = p \\
&p = -S_0(-N(d_1) + 1) + Ke^{-rT}(-N(d_2) + 1) \\
&p = -S_0 N(-d_1) + Ke^{-rT}(N(-d_2))
\end{aligned}
$$

2.3.2. Ενεργειακά Δικαιώματα σε Προθεσμιακά Συμβόλαια και σε Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης

Στην αγορά ενεργειακών προϊόντων, συχνό φαινόμενο αποτελεί η χρήση δικαιωμάτων προαίρεσης σε προθεσμιακά συμβόλαια και συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης. Στην παράγραφο αυτή θα αναλύσουμε την τιμολόγηση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης Κ και λήξη Τ, πάνω σε ένα προθεσμιακό συμβόλαιο με λήξη τη στιγμή S≠T. Η διαδικασία αυτή είναι μια επέκταση της προηγούμενης για την τιμολόγηση ευρωπαϊκών δικαιωμάτων. Γενικεύει τα αποτελέσματα της εργασίας του Schwartz(1997) και περιλαμβάνει όλους τους συνδυασμούς προθεσμιακών συμβολαίων και δικαιωμάτων που μπορούν να έχουν είτε την ίδια καταληκτική ημερομηνία είτε διαφορετική. Όπως δείξαμε στην προηγούμενη παράγραφο,

$$c(t,F(t,s):K,T,s) = E_t\left[P(t,T)\max(0,F(T,s)-K)\right]$$

με τη διαφορά ότι η τιμή του δικαιώματος αγοράς εξαρτάται και από την ημερομηνία λήξης και του forward. Επίσης, η τιμή του call στη λήξη δεν είναι το max((S(T)-K),0) αλλά το max(0,(F(t,s)-K)).

Όπως και πριν, τη χρονική στιγμή t $c(t,F(t,s);K,T,s) = P(t,T)\left[F(t,s)N(h) - KN(h-\sqrt{w})\right]$

όπου $h = \dfrac{\ln\left(\dfrac{F(t,s)}{K}\right) + \dfrac{1}{2}w}{\sqrt{w}}$ και $w^2(t,T,s) = \int_t^T \sigma^2 e^{-2a(s-u)} du = \dfrac{\sigma^2}{2\alpha}(e^{-2a(s-T)} - e^{-2a(s-t)}$.

Αυτό μπορούμε να το δείξουμε αφού όπως πριν

$$\ln F(t,T,s) \sim N\left[\ln F(t,T,s) - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma^2 e^{-2a(s-u)} du, \int_t^T \sigma^2 e^{-2a(s-u)} du\right]$$

$$\int_t^T \sigma^2 e^{-2a(s-u)} du = \sigma^2 \int_\tau^{\mathrm{T}} e^{-2a(s-u)} du = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\int_\tau^{\mathrm{T}} -\left(e^{-2a(s-u)}\right)' du = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left[e^{-2a(s-u)}\right]_t^T = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(e^{-2a(s-T)} - e^{-2a(s-t)}\right)$$

2.3.3. Ενεργειακά Δικαιώματα Προαίρεσης Caps, Floors Και Collars

Ένας δημοφιλής τύπος δικαιώματος που χρησιμοποιείται στην εξωχρηματιστηριακή αγορά και προσφέρεται από χρηματοπιστωτικά ιδρύματα είναι τα interest rate caps, floors και collars. Λόγω της υψηλής μεταβλητότητας στις τιμές των ενεργειακών προϊόντων που οφείλεται στην εποχικότητα που τα χαρακτηρίζει, τα ενεργειακά παράγωγα χρησιμοποιούνται ευρέως για τον περιορισμό και τη διαχείριση του ρίσκου. Ο σχεδιασμός τους παρέχει ασφάλεια στις διακυμάνσεις που μπορεί να έχει το επιτόκιο καθώς θέτει ένα όριο στην τιμή την οποία ο κάτοχος του παραγώγου πρέπει να πληρώσει για την αγορά του ενεργειακού υποκείμενου τίτλου. Αυτό το όριο είναι γνωστό ως cap rate. Για να κατανοήσουμε καλύτερα την έννοια των caps, υποθέτουμε ένα χρεόγραφο μεταβλητού επιτοκίου, όπου το επιτόκιο αλλάζει περιοδικά ανά συγκεκριμένο χρονικό διάστημα(tenor). Ανεξάρτητα από το πόσο μεγάλες μπορεί να είναι οι μεταβολές των επιτοκίων, η χρήση των caps περιορίζει τα ποσά των πληρωμών στις προκαθορισμένες ημερομηνίες T+iΔt, i=1,...,N κάτω από ένα συγκεκριμένο όριο K (cap rate). Έτσι το cap είναι ένα χαρτοφυλάκιο από συγκεκριμένα ευρωπαϊκά δικαιώματα αγοράς και η τιμή του υπολογίζεται από τον τύπο :

$$Cap\left(t;K,T,N,\Delta T\right) = \sum_{i=1}^{N} c\left(t, F(t,T+i\Delta T\right);K,T+i\Delta T,T+i\Delta t)$$

Αντίστοιχα τα floor περιέχουν ευρωπαϊκά ενεργειακά δικαιώματα πώλησης και θέτουν ένα όριο στην τιμή που ο κάτοχος του προϊόντος μπορεί να λάβει. Τέλος, τα collars περιέχουν ευρωπαϊκά ενεργειακά δικαιώματα πώλησης και αγοράς.

2.3.4. Ενεργειακά Δικαιώματα Προαίρεσης σε συμφωνίες ανταλλαγής

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με την τιμολόγηση των ενεργειακών δικαιωμάτων ανταλλαγής(energy swaption). Τα δικαιώματα αυτά παρέχουν στον κάτοχο το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να πραγματοποιήσει την υποκείμενη ανταλλαγή. Στην ουσία πρόκειται για ανταλλαγή επιτοκίων σταθερής απόδοσης με κυμαινόμενη απόδοση.

Έστω ότι έχουμε ένα swaption με λήξη T την χρονική στιγμή t. H συμφωνία αυτή ανταλλάσει μία σειρά από κυμαινόμενες αποδόσεις στα διαστήματα T+iΔt με σταθερή τιμή εξάσκησης K. H τιμή του swap δίνεται από τον τύπο:

$$Swpn(t;K,T,s,N,\Delta T) = P(t,T)E_t\left[\max\left(0,\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}F(T,T+i\Delta T)\right\}-K\right)\right]$$

Έστω S* η λύση της $\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}}F(S^*,T,T+i\Delta t)=K$ και K_i δίνεται από τη σχέση

$$K_i = F(S^*,T,T+i\Delta t), i=1,...,N$$

Εφόσον, η προθεσμιακή τιμή (forward price) F(S(T),T,s) είναι γνησίως αύξουσα (monotonically increasing) έχουμε:

$$Swpn(t;K,T,s,N,\Delta T) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}c(t,F(t,T+i\Delta T));K_i,T,T+i\Delta T)$$

όπου, F(S*,T,s) είναι η τιμή του προθεσμιακού συμβολαίου τη χρονική στιγμή T για διάρκεια έως τη λήξη S όταν η τρέχουσα τιμή (spot price) την χρονική στιγμή T είναι S* και δίνεται από τον τύπο : $\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} F(S^*,T,T+i\Delta T)=K$.

Κεφάλαιο 3

3. ΤΡΙΩΝΥΜΙΚΟ ΠΛΕΓΜΑ ΓΙΑ ΤΡΕΧΟΥΣΕΣ ΤΙΜΕΣ

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι με την χρήση τριωνυμικών πλεγμάτων να μπορέσουμε να κατασκευάσουμε μια διαδικασία η οποία με πραγματικά δεδομένα της αγοράς θα δίνει επαρκή και με μεγάλη ακρίβεια αποτελέσματα σχετικά με τις τιμές που μπορεί να πάρει ένα δικαίωμα προαίρεσης ανάλογα με τον κόμβο στον οποίο θα βρίσκεται η τιμή του υποκείμενου τίτλου κάθε χρονική στιγμή.

Ο Amin (1995) έδειξε ότι για να πετύχουμε μεγάλη ακρίβεια με το διωνυμικό δέντρο θέλουμε σταθερή μεταβλητότητα των τιμών των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης. Στην ενότητα αυτή, θα επικεντρωθούμε στα τριωνυμικά πλέγματα και θα βασιστούμε στο χρηματοοικονομικό θεώρημα, ότι η τρέχουσα τιμή του περιουσιακού στοιχείου που μελετάμε καθώς και οι αποδόσεις του, παίρνουν τιμές πολύ κοντά στο μέσο των προηγούμενων τιμών.

Τα δέντρα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν για Ευρωπαϊκού και Αμερικάνικου τύπου δικαιώματα, αλλά και για δικαιώματα η τιμή των οποίων εξαρτάται και από το μονοπάτι που ακολούθησαν κατά τη διάρκεια της πορείας του μέχρι τον τελικό κόμβο(Path dependent). Οι τύποι για τα δικαιώματα Αμερικάνικου αλλά και Ευρωπαϊκού τύπου παρατίθενται στη συνέχεια και είναι αντίστοιχα : $C(t) = Max\,\tilde{E}_t\left[\exp\left(-\int_t^{\theta} r(u)d(u)g(\theta)\right)\right]$ όπου $g(\theta)$ η τιμή εξόφλησης (payoff) τη χρονική στιγμή θ ,με $t \le \theta \le T$ και $\Psi[t,T]$ το σύνολο των πιθανών πρόωρων εξασκήσεων, και $C(0) = Max\{S_T - K, 0\}$.

3.1. Η διαδικασία κατασκευής του δέντρου

Από την παράγραφο 2.1 έχουμε δείξει ότι η $x(t)=\ln(S(t))$ με τη χρήση του λήμματος του $\hat{\mathrm{I}}to$ γίνεται

$$dx(t)=\left[\frac{\partial \ln F(0,t)}{\partial t}+a\left(\ln F(0,t)-x(t)+\frac{\sigma^2}{4}\left(1-e^{-2at}\right)-\frac{1}{2}\sigma^2\right]dt+dz(t)$$

η οποία μπορεί στη συνέχεια να γραφεί ως $dx(t)=\left[\theta(t)-\alpha x(t)\right]dt+\sigma dz(t)$

όπου $\theta(t)=\left(\frac{\partial \ln F(0,t)}{\partial t}+a\ln F(0,t)+\frac{\sigma^2}{4}(1-e^{-2\alpha t})-\frac{1}{2}\sigma^2\right)$. Στο πρώτο στάδιο θεωρούμε ότι $\theta(t)=0$ $\forall$ χρονική στιγμή t και ότι η αρχική αξία του x είναι μηδέν. Επομένως, η διαδικασία για την καινούργια μεταβλητή (μετά τις υποθέσεις) $\bar{x}$ δίνεται από τον τύπο $d\bar{x}(t)=-a\bar{x}(t)dt+\sigma dz(t)$.

Οι χρονικές στιγμές (από κόμβο σε κόμβο) του δέντρου είναι ισοδύναμα χωρισμένες και έχουν την μορφή t_j=jΔt, όπου j>0. Τα επίπεδα που αφορούν το $\overline{x}$ έχουν τη μορφή $\overline{x_{ij}}=i\Delta x$ όπου Δx είναι το χωρικό βήμα(πόσο θα μετακινηθεί από τον ήδη υπάρχων κόμβο στον οποίο βρίσκεται) και το i παίρνει τιμές στο διάστημα $\left[-i_{\min},i_{\max}\right]$ με $i_{\min}=-i_{\max}$.Κάθε κόμβος αναπαρίσταται με δύο παραμέτρους. Την i που δείχνει κατά πόσα επίπεδα θα μετακινηθούμε και την j που μετράει τον χρόνο. Στο τριωνυμικό δέντρο αυτό, επιλέγουμε τους τρεις επόμενους κόμβους στους οποίους θα βρεθεί η τιμή του προϊόντος με στόχο η αναμενόμενη τιμή του $\overline{x}$ τη χρονική στιγμή t να είναι όσο το δυνατόν πιο κοντά στον μεσαίο κόμβο από τους τρεις επόμενους τη χρονική στιγμή t+1. Οι τρεις κόμβοι που μπορούν να βρεθούν από τον (i,j) κόμβο είναι (k-1,j-1), (k,j+1) και (k+1,j+1) όπου το k επιλέγεται με σκοπό να πληροί τον παραπάνω στόχο.

Η αναμενόμενη τιμή του $\overline{x}$ είναι η $\overline{x_{i,j}}-\alpha\cdot\overline{x_{i,j}}\cdot\Delta t$. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι είμαστε στον κόμβο Α με (i,j). Βλέπω ότι τη χρονική στιγμή θα έχω j+1 βήματα όσον αφορά το χρόνο. Έτσι, πρέπει να δω ποιος κόμβος τη χρονική στιγμή αυτή προσεγγίζει την $\overline{x_{i,j}} - \alpha \cdot \overline{x_{i,j}} \cdot \Delta t$. Παρατηρώ ότι αυτό επιτυγχάνεται στον κόμβο Γ. Άρα στην ουσία αναζητούμε αυτό το k ώστε το (k,j+1) να είναι ο μεσαίος επόμενος κόμβος. Επομένως Β(k,j+1) και Δ(k-1,j+1).

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε την τεχνική του τριωνυμικού δέντρου απαιτείται μια σχέση που να συνδέει το χρονικό βήμα (j) με το χωρικό βήμα (i), δηλαδή το Δt με το Δx. Σύμφωνα με τους Hull και White οι μεταβλητές Δx και Δt πρέπει να επιλέγονται έτσι ώστε να βρίσκονται ανάμεσα στο $\sigma \frac{\sqrt{3\Delta t}}{2}$ και $2\sigma\sqrt{\Delta t}$. Προκειμένου όμως να έχουμε τα πλεονεκτήματα που επιφέρει η επιλογή του $\Delta x = \sigma\sqrt{3\Delta t}$ επιλέγουμε αυτήν την τιμή για το Δx. Στη συνέχεια, θα βρούμε τις πιθανότητες μετατόπισης στον κάτω, στον μεσαίο και στον πάνω κλάδο από τον κόμβο (i,j). Στη συνέχεια βρίσκουμε την αναμενόμενη τιμή πρώτης και δεύτερης τάξης για την Δx έχουμε:

$$\mathrm{E}[\Delta x] = -\alpha \cdot x_{i,j} \cdot \Delta t (1)$$
$$\mathrm{E}[\Delta x^2] = \sigma^2 \cdot \Delta t + \mathrm{E}[\Delta x]^2 (2)$$

Έστω ότι $p_{u,i,j}$ η πιθανότητα μετακίνησης του x προς τα πάνω, $p_{d,i,j}$ η πιθανότητα μετακίνησης του x προς τα κάτω και $p_{m,i,j}$ η πιθανότητα μετακίνησης του x στον μεσαίο κόμβο. Από την σχέση (1) παίρνουμε

$$p_{u,i,j}\left(\left(k+1\right)-i\right)\Delta x + p_{m,i,j}\left(k-i\right)\Delta x + p_{d,i,j}\left(\left(k-1\right)-i\right)\Delta x = -ax_{i,j}\Delta t\left(3\right)$$

ενώ από την σχέση (2) παίρνουμε

$$p_{u,i,j}\left(\left(k+1\right)-i\right)^2 \Delta x^2 + p_{m,i,j}\left(k-i\right)^2 \Delta x^2 + p_{d,i,j}\left(\left(k-1\right)-i\right)^2 \Delta x^2 = \sigma^2 \Delta t + (-ax_{i,j}\Delta t)^2 \left(4\right)$$

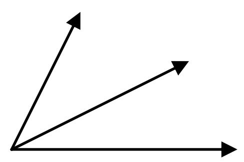
Οι $p_{u,i,j}$, $p_{d,i,j}$, $p_{m,i,j}$ αθροίζουν στην μονάδα, επομένως $p_{u,i,j} + p_{d,i,j} + p_{m,i,j} = 1\left(5\right)$. Από τις σχέσεις (3),(4),(5) παίρνουμε ότι

$$p_{u,i,j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma^2\Delta t + \alpha^2 x_{i,j}^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} + (k-i)^2 - \frac{a x_{i,j}\Delta t}{\Delta x}\big(1-2(k-i)\big) - (k-i)\right]$$
$$p_{d,i,j} = \frac{1}{2}\left[\frac{\sigma^2\Delta t + a^2 x_{i,j}^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} + (k-i)^2 + \frac{a x_{i,j}\Delta t}{\Delta x}\big(1+2(k-i)\big) + (k-i)\right]$$
$$p_{m,i,j} = 1 - \left(p_{u,i,j} + p_{d,i,j}\right)$$

Στο δεύτερο στάδιο θα δούμε τις αλλαγές που έχουμε στην κατασκευή των δέντρων μας όταν $\theta(t) \neq 0$.Συνήθως, δεν χρησιμοποιείται και το θεωρούμε μηδέν λόγω της εξάρτησής του από το t και κατ' επέκταση της συνεχούς μεταβολής του εξαιτίας των οποίων παύει να είναι συνεπής ως προς τις παρατηρούμενες προθεσμιακές τιμές. Για τον λόγο αυτό εισάγουμε έναν νέο παράγοντα α_j, ο οποίος μετατοπίζει κατάλληλα κατά α_j τους κόμβους κάθε χρονική στιγμή $j\Delta t$ για κάποιο j>0.

Έτσι, οι αναμενόμενες τιμές του $\bar{x}$ αποδίδονται από τους κόμβους του προηγούμενου δέντρου μετατοπισμένο κατά α_j. Οι πιθανότητες μετατόπισης $p_{u,i,j}, p_{m,i,j}, p_{d,i,j}$ παραμένουν ίδιες. Στόχος μας είναι εισάγοντας τον παράγοντα α_j να βεβαιωθούμε ότι χρησιμοποιώντας το τριωνυμικό δέντρο θα πάρουμε τις σωστές τιμές που προκύπτουν από την καμπύλη αποδόσεων προθεσμιακών συμβολαίων.

Μια εναλλακτική μέθοδος για την εύρεση των πιθανοτήτων σύμφωνα με τους Hull και White είναι ο διαχωρισμός των πιθανοτήτων ανάλογα με την κίνηση που ακολουθεί η τιμή της μετοχής στο πλέγμα. Πιο συγκεκριμένα, όταν βρισκόμαστε στο τελευταίο επίπεδο $i_{\min}$ η κίνηση της μετοχής θα είναι αναγκαστικά ευθεία-μια φορά πάνω-δύο φορές πάνω, όπως δείχνει το σχήμα παρακάτω:

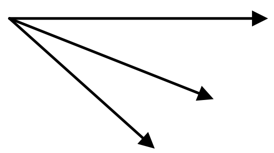


Σχήμα 1

με πιθανότητες:

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(a^2 i^2 \Delta t + ai\Delta t)\right)$$
$$p_m = -\frac{1}{3} - \alpha^2 i^2 \Delta t^2 - 2\alpha i \Delta t \ .$$
$$p_d = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}\left(a^2 i \Delta t^2 + 3ai\Delta t\right)$$

Όταν βρισκόμαστε στο ανώτερο επίπεδο $i_{\max}$ τότε η κίνηση της μετοχής θα είναι υποχρεωτικά ευθεία-μία φορά κάτω-δύο φορές κάτω όπως δείχνει το επόμενο σχήμα:

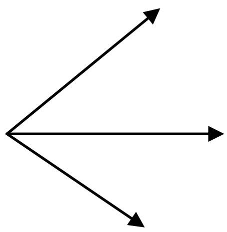


Σχήμα 2

Οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι:

$$p_u = \frac{7}{6} + \frac{1}{2}\left(a^2 i \Delta t^2 - 3ai\Delta t\right)$$
$$p_m = -\frac{1}{3} - \alpha^2 i^2 \Delta t^2 + 2\alpha i \Delta t \ .$$
$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(a^2 i^2 \Delta t - ai\Delta t)\right)$$

Σε οποιοδήποτε άλλο επίπεδο i του πλέγματος και αν βρεθούμε η τιμή της μετοχής θα κινηθεί ευθεία-μία φορά πάνω-μία φορά κάτω όπως δείχνει το τελευταίο σχήμα:



Σχήμα 3

με αντίστοιχες πιθανότητες:

$$p_u = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(a^2 i \Delta t^2 - ai\Delta t\right)$$

$$p_m = \frac{2}{3} - \alpha^2 i^2 \Delta t^2$$

$$p_d = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\left(a^2 i^2 \Delta t + ai\Delta t)\right)$$

- Η σχέση η οποία συνδέει και σε αυτήν τη μέθοδο τις πιθανότητες ανόδου, καθόδου και μεσαίας πορείας είναι $p_u + p_m + p_d = 1$.
- Προκειμένου να έχουμε πάντα θετικές πιθανότητες ανόδου, καθόδου και μεσαίας πορείας $p_u, p_m, p_d > 0$,πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω δύο σχέσεις:

  $\frac{0.184}{\alpha \cdot \Delta t} < i_{\max} < \frac{0.816}{a \cdot \Delta t}$ και $-\frac{0.186}{\alpha \cdot \Delta t} < i_{\min} < -\frac{0.814}{a \cdot \Delta t}$.
- Τέλος, ισχύει και σε αυτήν την ειδική περίπτωση όπως και στην γενικευμένη που παρουσιάσαμε νωρίτερα, ότι $\Delta x = \sigma\sqrt{3\Delta t}$.

Ορίζουμε ως $Q_{i,j}$ την τιμή, τη χρονική στιγμή t=0 ενός χρεογράφου που πληρώνει μια μονάδα αν ο υποκείμενος τίτλος βρεθεί στον κόμβο (i,j) αλλιώς πληρώνει μηδέν μονάδες. Πιο συγκεκριμένα, έστω ένα αξιόγραφο Y του οποίου η τρέχουσα τιμή είναι ίση με $Q_{i,j}$ το οποίο πληρώνει:

$$Y_{i',j} = \begin{cases} 1, & i' = i \\ 0, & i' \neq i \end{cases}$$

Τότε $Q_{i,j} = e^{-r(j\Delta t)} \cdot \hat{E}[Y_{i',j}] = e^{-r(j\Delta t)} \cdot p_{i,j} \cdot 1$ όπου $p_{i,j}$ είναι η πιθανότητα να βρεθούν στο επίπεδο iΔx τη χρονική στιγμή jΔt.

Η χρήση αυτών των τιμών καθώς και η εισαγωγή των προθεσμιακών συμβολαίων γίνεται ώστε μέσω του τριωνυμικού πλέγματος να βρεθούν οι τρέχουσες προθεσμιακές τιμές της αγοράς. Οι τιμές αυτές αποτελούν δομικούς λίθους όλων των χρεογράφων. Ειδικότερα, η τρέχουσα τιμή των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων $C(0)$ καθώς και η συνάρτηση αποπληρωμής $C(S)$ τη χρονική στιγμή i συνδέονται με τον τύπο: $C(0) = \sum_j Q_{ij} C(S_{ij})$ όπου το άθροισμα αφορά όλους τους κόμβους i στο χρονικό βήμα j.

Έχοντας ως δεδομένη την τιμή Q_{ij} τη χρονική στιγμή $t = 0$ μέσω μιας διακριτοποιημένης μορφής της εξίσωσης προθεσμιακών συμβολαίων του Kolmogorov υπολογίζουμε τα Q_{ij} τα επόμενα χρονικά βήματα από τη σχέση :

$Q_{i,j+1} = \sum_{i'} Q_{i'j} p_{i'i} P\left(j\Delta t, (j+1)\Delta t\right)$, όπου:

- $p_{i'i}$ η πιθανότητα μετακίνησης από τον κόμβο (i', j) στον κόμβο $(i, j+1)$
- $P\left(j\Delta t, (j+1)\Delta t\right)$ δείχνει την τιμή τη χρονική στιγμή $j\Delta t$ ενός ομολόγου που κάνει μόνο μία πληρωμή κεφαλαίου και τόκου (pure discount bond) με λήξη την χρονική στιγμή $(j+1)\Delta t$.

Ο δείκτης i μετράει όλους τους κόμβους την χρονική στιγμή j.

Ειδικότερα,

$$Q_{i,j+1} = e^{-r(j+1)\Delta t} \mathrm{P}_{i,j+1} = e^{-rt_{j+1}} \Pr ob(x_{t_{j+1}} = i\Delta x) =$$
$$e^{-rt_{j+1}} \sum_{i'=0}^{M} \Pr ob(x_{t_{j+1}} = i\Delta x \mid x_{t_j} = i'\Delta x) \cdot \Pr ob(x_{t_j} = i'\Delta x) =$$
$$e^{-r(t_{j+1}-t_j)} \sum_{i=0}^{M} \Pr ob(x_{t_{j+1}} = i\Delta x \mid x_{t_j} = i'\Delta x) \cdot e^{-rt_j} \Pr ob(x_{t_j} = i'\Delta x) =$$
$$p(j\Delta t, (j+1)\Delta t) \cdot p_{i',i} \cdot Q_{i',j}$$

Με σκοπό να χρησιμοποιήσουμε τα Q_{ij} (state prices) για την καμπύλη αποδόσεων χρησιμοποιούμε τον ακόλουθο τύπο που προκύπτει από την σχέση (1) : $P(0, j\Delta t)\cdot F(0, j\Delta t) = \sum_i Q_{ij}S_{ij}$. Γράφοντας την τρέχουσα τιμή S_{0j} ως X_{0j} έχουμε $P(0, j\Delta t)\cdot F(0, j\Delta t) = \sum_i Q_{ij}e^{X_{ij}} = \sum_i Q_{ij}e^{(\bar{x}_{ij}+a_i)}$.

Άρα,

$$P(0, j\Delta t)\cdot F(0, j\Delta t) = e^{a_j}\sum_i Q_{ij}e^{\bar{x}_{ij}}$$

με $a_j = \ln\left(\dfrac{P(0, j\Delta t)\cdot F(0, j\Delta t)}{\sum_i Q_{ij}e^{\bar{x}_{ij}}}\right)$ όπου

$x(t) = \ln(S(t))$, $e^{x(t)} = S(t)$, $e^{\bar{x}+a_j} = S$ όπου $x = \bar{x} + a_j$ με την μετατόπιση a_j του κόμβου.

Κεφάλαιο 4

4. ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Η εμπειρική μελέτη που πραγματοποιήσαμε στηρίζεται στην ικανότητα των μοντέλων Black-Scholes, Clewlow και Strickland και Hull και White να αποτιμήσουν ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο το αργό πετρέλαιο. Τα βήματα που θα ακολουθήσουμε είναι τα εξής:

- Θα αντλήσουμε δεδομένα για τρέχοντα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης για χρονικό ορίζοντα 5 ημερών.
- Θα υπολογίσουμε μέσω του υπολογιστικού προγράμματος Matlab τις παραμέτρους των μοντέλων που δίνουν το καλύτερο αποτέλεσμα σε σχέση με τις πραγματικές τιμές της αγοράς.
- Θα αποτιμήσουμε τα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης και θα τα συγκρίνουμε με τα παρατηρηθέντα ενεργειακά δικαιώματα της αγοράς.

4.1. Δεδομένα μελέτης και εφαρμογής

Προκειμένου να διεξάγουμε την εμπειρική μας μελέτη θα αντλήσουμε δεδομένα για τα ενεργειακά δικαιώματα με υποκείμενο τίτλο το αργό πετρέλαιο. Λόγω της απουσίας ιστορικών δεδομένων για την συγκεκριμένη κατηγορία δικαιωμάτων, λάβαμε δεδομένα για τρέχοντα ενεργειακά δικαιώματα για διάστημα 5 ημερών και πάνω σε αυτά εφαρμόσαμε την ανάλυσή μας.

Ο υποκείμενος τίτλος που επιλέξαμε είναι το αργό πετρέλαιο έναντι του φυσικού αερίου και της ηλεκτρική ενέργειας, καθώς είναι ο πιο δημοφιλής τίτλος όσον αφορά τα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης και ως αποτέλεσμα υπήρχε πληθώρα τέτοιων συμβολαίων σε πολλές οργανωμένες αγορές.

Για κάθε ημέρα, έχουμε παρατηρήσεις για 20 διαφορετικά δικαιώματα προαίρεσης και αντίστοιχες παρατηρήσεις για 20 συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, με 5 διαφορετικές τιμές εξάσκησης και 4 διαφορετικές ληκτότητες. Οι ληκτότητες που έχουμε επιλέξει είναι από 1 μήνα, 2 μήνες , 3 μήνες και 4 μήνες ενώ οι τιμές για τις τιμές εξάσκησης είναι ίσες με την τρέχουσα τιμή του δικαιώματος(ATM) και σε επίπεδα 5% γύρω από την τρέχουσα τιμή, πάνω από αυτήν(OTM) και κάτω από αυτή(ITM). Συνολικά, θα μελετήσουμε δεδομένα από 7/3/2019 έως 18/3/2019.

Τα δικαιώματα επιλέχθηκαν από τη βάση δεδομένων της Bloomberg. Χρησιμοποιήσαμε την εντολή OMON η οποία ανακαλεί από τη βάση δεδομένων όλους τους τύπους δικαιωμάτων προαίρεσης και χρησιμοποιείται προκειμένου να τιμολογήσουμε τα δικαιώματα προαίρεσης. Τα δικαιώματα που επιλέξαμε είναι δικαιώματα αγοράς και αφορούν όπως είπαμε το αργό πετρέλαιο. Λόγω αυτού, έχουν κοινό ticker CL ,το πρώτο είναι το CLJ9 με ληκτότητα τον Απρίλιο, το δεύτερο είναι το CLK9 με ληκτότητα τον Μάιο, το τρίτο είναι το CLM9 με ληκτότητα τον Ιούνιο και το τελευταίο είναι το CLN9 με ληκτότητα τον Ιούλιο. Όλα τα δικαιώματα αγοράς που επιλέξαμε έχουν μέγεθος 1000 δικαιωμάτων προαίρεσης.

Τέλος, το επιτόκιο που χρησιμοποιήσαμε για να ολοκληρώσουμε την εμπειρική μας μελέτη, το λάβαμε από την βάση δεδομένων της Datastream και ισούται με το δεκαετές επιτόκιο των έντοκων γραμματίων του αμερικάνικου δημοσίου.

4.2. Τριωνυμικό μοντέλο αποτίμησης ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης αγοράς με τη χρήση του τριωνυμικού μοντέλου των Hull και White που όπως έχουμε ήδη αναφέρει αποτελεί μια ειδική περίπτωση του γενικευμένου μοντέλου των Clewlow και Strickland. Στη συνέχεια αποτιμούμε τα ενεργειακά δικαιώματα αγοράς με το μοντέλο των Black-Scholes και τελικά θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα αυτών των δύο μεθόδων και θα εξάγουμε τα συμπεράσματά μας.

4.2.1. Δεδομένα εμπειρικής μελέτης

Τα δεδομένα που χρειαστήκαμε για να διεξάγομε την εμπειρική μας μελέτη είναι τα εξής:

- 4 ενεργειακά δικαιώματα αγοράς, ενεργά, λόγω απουσίας ιστορικών δεδομένων για τον συγκεκριμένο τύπο δικαιωμάτων, με 4 διαφορετικές ληκτότητες.
- 4 συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης με τον ίδιο υποκείμενο τίτλο με αυτόν των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης, και τις ίδιες ληκτότητες, αντίστοιχες των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης.
- 5 ημερήσιες παρατηρήσεις για τις τιμές τόσο των υποκείμενων τίτλων αλλά και των ίδιων των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης. Το διάστημα αυτό είναι από 8/3/2019 έως 18/3/2019.

4.2.2. Εκτίμηση παραμέτρων

Η διαδικασία εκτίμησης των παραμέτρων που θα ακολουθήσουμε σε αυτή τη διπλωματική εργασία αλλά και σε κάθε εμπειρική μελέτη, περιλαμβάνει την εύρεση τιμών για αυτές τις παραμέτρους του μοντέλου, ώστε τα τετράγωνα των διαφορών μεταξύ των τιμών των ενεργειακών δικαιωμάτων που εξάγονται από το μοντέλο μας και των τιμών της αγοράς να ελαχιστοποιούνται.

Με άλλα λόγια,

$$\hat{\theta} = \arg\min \sum_{i=1}^{N} \left(f_i^{market}\left(T_i, K_i\right) - f^{model}\left(T_i, K_i\right) \right)^2$$

όπου $\hat{\theta}$ είναι το διάνυσμα των παραμέτρων που χρησιμοποιούμε για το μοντέλο μας, στη συγκεκριμένη περίπτωση της μεταβλητότητας σ και του παράγοντα α, ενώ το N είναι ο αριθμός των 20 διαφορετικών ενεργειακών δικαιωμάτων που χρησιμοποιούμε για τη μελέτη μας.

Μέσω του υπολογιστικού προγράμματος Matlab θα εισάγουμε τις τρέχουσες τιμές της αγοράς για τα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης και μέσω του επαναληπτικού αλγόριθμου των Levenberg και Marquardt αλλά και με τη βοήθεια της έτοιμης εντολής από το Matlab, lsqnonlin, θα βρούμε τις τιμές για τις παραμέτρους σ και α. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε τις παραμέτρους αυτές για να υπολογίσουμε τις πιθανότητες p_d, p_m, p_u ώστε να βρούμε την πορεία που θα ακολουθήσει η τιμή του υποκείμενου τίτλου και τέλος, με τη βοήθεια αυτών των πιθανοτήτων θα υπολογίσουμε τα state prices Q, ώστε τελικά να τιμολογήσουμε τα ενεργειακά δικαιώματα προαίρεσης και στη συνέχεια θα συγκρίνουμε αυτές τις τιμές με τις τιμές της αγοράς.

Ο επαναληπτικός αλγόριθμος των Levenberg και Marquardt είναι μια διαδεδομένη μέθοδος ελαχιστοποίησης μη γραμμικών square curve fitting problems. Έστω, ότι έχουμε Ν παρατηρήσεις y_i με i=1,2,…,N και μία συνάρτηση $g: R^n \to R$ με επίσης n παραμέτρους $x_1, x_2, ..., x_n$ κάτω από την υπόθεση ότι $N \geq n$. Στην περίπτωσή μας οι παρατηρήσεις y_i είναι οι τιμές των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης που έχουμε λάβει από την αγορά.

Με τη βοήθεια του μοντέλου μας θα υπολογίσουμε τις εκτιμηθείσες τιμές $g(x) = \hat{y}_i$ και τέλος αφαιρώντας τις εκτιμηθείσες τιμές με τις πραγματικές τιμές της αγοράς υπολογίζουμε τα κατάλοιπα $r_i(x) = \hat{y}_i - y_i$. Τα κατάλοιπα αυτά από i=1,…,N τα αποθηκεύουμε σε ένα διάνυσμα $R = (r_1, r_2 ..., r_n)^T$ το οποίο είναι διάστασης Ν. Θέλουμε να ελαχιστοποιήσουμε την παρακάτω συνάρτηση:

$$\min_x f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} r_i^2(x) = \frac{1}{2} R(x)^T R(x)$$

Ο επαναληπτικός αλγόριθμος των Levenberg και Marquardt προτείνει μια λύση για το curve fitting problem συνδυάζοντας δύο μεθόδους, αυτή της Steepest decent και των Gauss-Newton.

Συγκεκριμένα, ο Levenberg(1944) εισήγαγε την έννοια μιας κατεύθυνσης αναζήτησης d_k η οποία προκύπτει ως λύση της προσαρμοσμένης εξίσωσης των Newton-Gauss

$$\left(R'\left(x^k\right)^T R'\left(x^k\right)+\lambda_k I\right)d_k=-\left(R'\left(x^k\right)^T R'\left(x^k\right)\right)$$

Ο πίνακας I είναι ένας πίνακας με μονάδες στα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ενώ σε όλα τα άλλα είναι μηδέν, και λ_k είναι μία από τις παραμέτρους απόσβεσης και εξ υποθέσεως $\lambda_k > 0$. Το αριστερό μέλος της εξίσωσης, είναι μία θετική ποσότητα και επομένως η τιμή του d_k είμαστε βέβαιοι ότι θα οδηγεί σε μια λογική κατεύθυνση της συνάρτησης f για κάθε θετική τιμή των παραμέτρων απόσβεσης λ_k.

Όταν το λ_k παίρνει μικρές τιμές τότε ο επαναληπτικός αλγόριθμος των Levenberg και Marquardt προσομοιάζει την επαναληπτική διαδικασία των Gauss-Merton και εξάγει έναν ρυθμό σύγκλισης των επικρατουσών x^k που συγκλίνει στο x^*. Όταν οι επαναλήψεις που πραγματοποιούμε βρίσκονται μακριά από το βέλτιστο, τότε η τιμή της παραμέτρου απόσβεσης λ_k είναι πολύ υψηλή και η κατεύθυνση αναζήτησης d_k δίνεται από έναν διαφορετικό τύπο:

$$d_k \approx \frac{1}{\lambda_k} R'\left(x^k\right)^T R'\left(x^k\right)$$

Άγεται λοιπόν το συμπέρασμα πως οι διάφορες τιμές της παραμέτρου απόσβεσης λ_k επηρεάζουν τόσο την τιμή της κατεύθυνσης αναζήτησης όσο και τη διάρκεια κάθε επαναληπτικού βήματος του αλγόριθμου Levenberg και Marquardt. Συμπεραίνουμε λοιπόν, πως η επιλογή της παραμέτρου απόσβεσης λ_k αλλά και το βήμα της επανάληψης έχουν μεγάλη επίδραση στην σταθερότητα και αποτελεσματικότητα της μεθόδου.

Η πιο συνηθισμένη επιλογή για την τιμή του λ_k είναι:

$\lambda_0 : \tau \max_i \left\{ D_0(i,i) \right\}, i = 1,2,...,n$ όπου τ η παράμετρος που αφορά την αρχική πρόβλεψη που έχουμε κάνει για τις τιμές των παραμέτρων.

4.3. Αποτελέσματα μεθόδων

4.3.1. Σύγκριση μεθόδων Black-Scholes και Clewlow-Strickland

Στο μοντέλο Black-Scholes πραγματοποιούμε εκτίμηση μόνο μίας παραμέτρου, της μεταβλητότητας σ αναμένουμε λοιπόν στις περισσότερες περιπτώσεις τα αποτελέσματα της μεθόδου να έχουν μεγαλύτερες αποκλίσεις από τη μέθοδο των Clewlow-Strickland. Αυτό προκύπτει από το γεγονός πως η μέθοδος των Clewlow-Strickland περιλαμβάνει την εκτίμηση και των δύο παραμέτρων του μοντέλου μας, την μεταβλητότητα σ και την παράμετρο α. Για καθεμία ημέρα πραγματοποιήσαμε εκτίμηση για την μεταβλητότητα στην μεν πρώτη μέθοδο και εκτίμηση για τη μεταβλητότητα και την παράμετρο α στην δεύτερη μέθοδο και υπολογίσαμε τα αντίστοιχα κατάλοιπα.

Τα αποτελέσματα της μεθόδου Black-Scholes χρησιμοποιώντας τον κώδικα 1 BSCalibration, τον κώδικα 2 BSLSQD και τον κώδικα 3 BSformulaeCurrency παρουσιάζονται στον Πίνακα 1:

Πίνακας 1: ***Αποτελέσματα μεθόδου Black-Scholes***

Residuals	σ
0,7582	0,2793
0,4292	0,2397
0,1549	0,2506
0,8633	0,3044
0,9595	0,2992

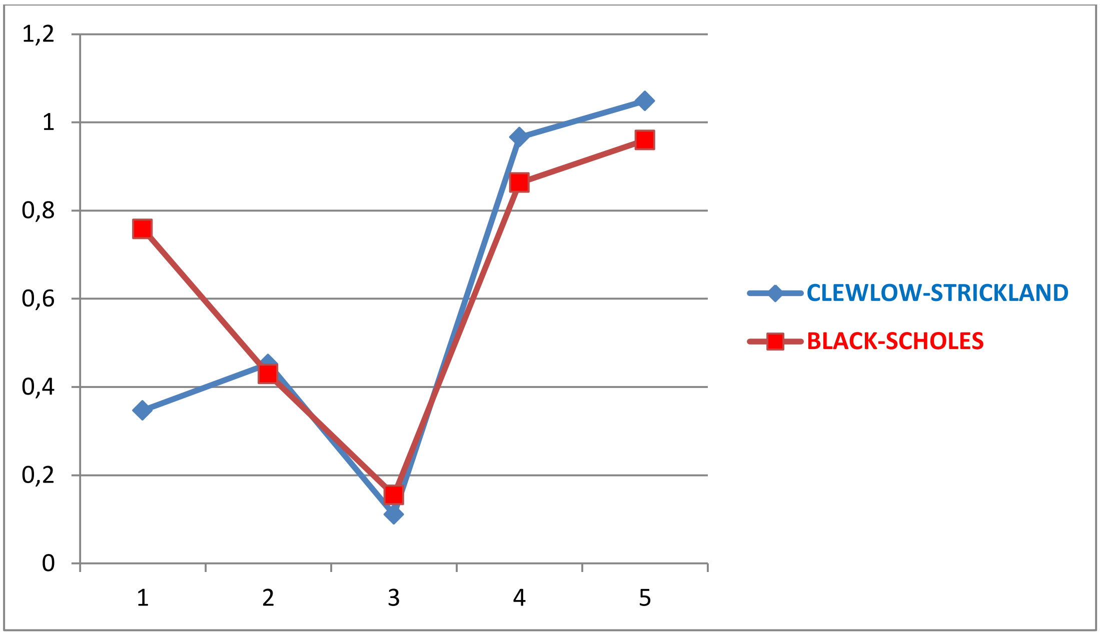
Αντίστοιχα εφαρμόζοντας τη δεύτερη μέθοδο των Clewlow-Strickland και με τη χρήση του επαναληπτικού αλγόριθμου των Levenberg και Marquardt αλλά και του κώδικα 4 SimpleCalibration, του κώδικα 5 Simple_call_Cur και του κώδικα 6 SimpleLSQD έχουμε τα εξής αποτελέσματα του Πίνακα 2:

Πίνακας 2: Αποτελέσματα μεθόδου Clewlow-Strickland

Residuals	σ	α
0,3467	0,3382	2,0456
0,4522	0,2418	0,1
0,1108	0,2684	0,7119
0,9662	0,308	0,1
1,0486	0,3026	0,1

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως, περιμένουμε τα κατάλοιπα στην μέθοδο των Clewlow-Strickland να είναι μικρότερα από τη μέθοδο των Black-Scholes καθώς στην μέθοδο των Clewlow-Strickland εκτιμούμε δύο παραμέτρους και άρα το μοντέλο λογικά θα προσαρμόζεται καλύτερα στις τιμές της αγοράς.

Όπως θα δούμε και παρακάτω στο κοινό γράφημα των καταλοίπων των δύο μεθόδων , τα κατάλοιπα που προκύπτουν από την πρώτη μέθοδο των Black-Scholes από την εκτίμηση μόνο μίας παραμέτρου του σ (Πίνακας 1) και τα κατάλοιπα που προκύπτουν από την δεύτερη μέθοδο των Clewlow-Strickland από την εκτίμηση δύο παραμέτρων του σ και του α (Πίνακας 2) έχουν πάρα πολύ μικρές αποκλίσεις, χωρίς ένα εκ των δύο μοντέλων να έχει σταθερά καλύτερη εκτίμηση. Παρακάτω παραθέτουμε το γράφημα μεταξύ των καταλοίπων των δύο μεθόδων:



Όπως λοιπόν παρατηρούμε στο παραπάνω γράφημα για την πρώτη μέρα τα κατάλοιπα για την μέθοδο Black-Scholes είναι ίσα με 0.7582 για σ=0.2793 ενώ για τη μέθοδο Clewlow-Strickland είναι ίσα με 0.3467 για σ=0.3382 και α=2.0456. Για τη δεύτερη μέρα τα κατάλοιπα με τη μέθοδο Black-Scholes είναι ίσα με 0.4292 για σ=0.2397 ενώ για τη μέθοδο Clewlow-Strickland είναι ίσα με 0.4522 για σ=0.2418 και α=0.1. Για τη τρίτη μέρα τα κατάλοιπα με τη μέθοδο Black-Scholes είναι ίσα με 0.1549 για σ=0.2506 ενώ για τη μέθοδο Clewlow-Strickland είναι ίσα με 0.1108 για σ=0.2684 και α=0.7119. Για τη τέταρτη μέρα τα κατάλοιπα με τη μέθοδο Black-Scholes είναι ίσα με 0.8633 για σ=0.3044 ενώ για τη μέθοδο Clewlow-Strickland είναι ίσα με 0.9662 για σ=0.308 και α=0.1. Τέλος, για την πέμπτη μέρα τα κατάλοιπα για την μέθοδο Black-Scholes είναι ίσα με 0.9595 για σ=0.2992 ενώ για τη μέθοδο Clewlow-Strickland 1.0486 για σ=0.3026 και α=0.1.

Όπως φαίνεται στο γράφημα 1, οι γραφικές παραστάσεις σχεδόν συμπίπτουν με τη μόνη σημαντική διαφορά της τάξης του 0,4 να εντοπίζεται την πρώτη μέρα όπου το μοντέλο των Clewlow-Strickland δίνει καλύτερη εκτίμηση με μικρότερα κατάλοιπα.

4.3.2. Σύγκριση μεθόδου Clewlow-Strickland με τις θεωρητικές και πραγματικές τιμές

Το μοντέλο των Clewlow και Strickland αποτελεί μια γενικευμένη περίπτωση του μοντέλου των Hull και White καθώς λαμβάνει υπόψη όλες τις πιθανές μετακινήσεις για την τιμή του υποκείμενου τίτλου στο μονοπάτι σε αντίθεση με το μοντέλο των Hull και White που η μορφή της καμπύλης αποδόσεων των προθεσμιακών συμβολαίων μπορεί να πάρει συγκεκριμένη μορφή, αφού τα μονοπάτια τιμής που κατασκευάζονται στον κώδικα αυτό έχουν σταθερές τιμές για τα δύο άκρα και με βάση συγκεκριμένες μετακινήσεις της τιμής του υποκείμενου τίτλου υπολογίζουν ολόκληρο το μονοπάτι.

Στο μοντέλο των Clewlow και Strickland υπολογίσαμε αρχικά τις πιθανότητες ανοδικής πορείας, καθοδικής πορείας και μεσαίας πορείας, όπως παρουσιάζονται στο Παράρτημα Ι, με τις οποίες μπορούμε να υπολογίσουμε σε ποια θέση θα βρεθεί η τιμή του υποκείμενου τίτλου (Κώδικας 7 CSCall). Στη συνέχεια, υπολογίσαμε τις τιμές των state prices Q_{ij} τις οποίες χρησιμοποιήσαμε προκειμένου να εκτιμήσουμε τον παράγοντα a_j (Κώδικας 8 FactorA2) ο οποίος μας δείχνει το πόσο πρέπει να μετακινηθεί ο κόμβος ώστε να επιτυγχάνεται μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματά μας. Με άλλα λόγια, μας δίνει την καταλληλότερη μετατόπιση ώστε η τιμή του μοντέλου να είναι πιο κοντά στην πραγματική τιμή της αγοράς. Το μοντέλο αυτό λαμβάνει υπόψη και τις δύο παραμέτρους όπως και το μοντέλο των Hull και White και γι’ αυτό αναμένουμε καλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματά μας.

Αρχικά, θα παρουσιάσουμε τον πίνακα 3 με την εκτίμηση του παράγοντα a_j για j=0,1…,T και συγκεκριμένα παρουσιάζουμε τις τιμές για j=T καθώς αυτή είναι η τιμή αφετηρίας προκειμένου να ξεκινήσουμε την συμπλήρωση του πίνακα που αναπαριστά το μονοπάτι τιμής του υποκείμενου τίτλου.

Πίνακας 3:

Columns 1 through 6
α_1 = 0   -0.0067   -0.0135   -0.0204   -0.0203   -0.0202
Columns 7 through 12
-0.0201   -0.0199   -0.0198   -0.0197   -0.0196   -0.0195
Columns 13 through 18
-0.0194   -0.0193   -0.0192   -0.0190   -0.0189   -0.0188
Columns 19 through 24
-0.0187   -0.0185   -0.0184   -0.0183   -0.0182   -0.0180
Columns 25 through 30
-0.0179   -0.0178   -0.0176   -0.0175   -0.0174   -0.0172
Columns 31 through 36
-0.0171   -0.0169   -0.0168   -0.0167   -0.0165 α_T = -0.0164

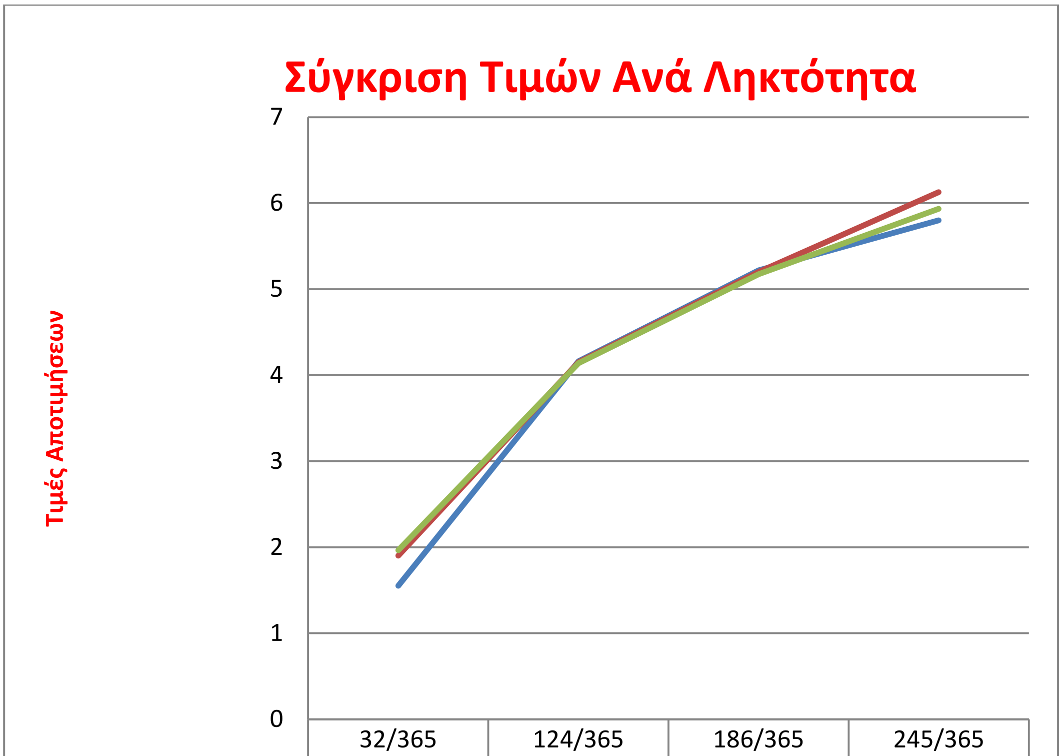
Στον Πίνακα 4 βραχυπρόθεσμα και στον Πίνακα 5 μακροπρόθεσμα, που ακολουθούν παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα του μοντέλου των Clewlow και Strickland και τα συγκρίνουμε τόσο με την θεωρητική τιμή που προκύπτει από τους τύπους κλειστής μορφής, την θεωρητική από την εντολή blsprice όσο και με την πραγματική τιμή της αγοράς.

Πίνακας 4:

	1η ημερα	2η ημερα	3η ημερα	4η ημερα	5η ημερα
Πραγματική Τιμή	3	3	3,29	3,09	3,14
B-S	2,8145	3,1451	3,2891	3,1769	3,2513
C-S	2,8715	3,1407	3,3079	3,3204	3,2623

Όπως παρατηρούμε οι τιμές και των δύο μοντέλων είναι πολύ κοντά στην πραγματική τιμή, παρόλα αυτά βραχυπρόθεσμα το μοντέλο των Black-Scholes δίνει καλύτερη εκτίμηση αφού εκτιμά μόνο μία παράμετρο, την μεταβλητότητα σ σε αντίθεση με τον μοντέλο των Clewlow-Strickland που εκτιμά δύο παραμέτρους το σ και α.

Πίνακας 5:



	32/365	124/365	186/365	245/365
Πραγματική Τιμή	1,55	4,16	5,22	5,8
B-S	1,901	4,15	5,1985	6,128
C-S	1,9633	4,1375	5,1744	5,9329

Μακροπρόθεσμα, το μοντέλο των Clewlow-Strickland δίνει καλύτερη εκτίμηση, πιο κοντά στην πραγματική τιμή από το μοντέλο των Black-Scholes εξαιτίας της εκτίμησης δύο παραμέτρων, έναντι της μίας στο μοντέλο των Black-Scholes.

Στον πίνακα 6 και 7 για δικαιώματα με διαφορετική λήξη Τ ,αυξάνω το μήκος των χρονικών βημάτων Δt προκειμένου να παρατηρήσουμε την ικανότητα του μοντέλου των Clewlow-Strickland στην προσέγγιση της θεωρητικής τιμής που προκύπτει από τους τύπους κλειστής μορφής.

Πίνακας 6:

Χρονικά Βήματα/Χρόνο	Ευρωπαϊκό Δικαίωμα (T=121/365)
1	4,0396
5	4,0119
10	3,9663
20	3,8882
25	3,8402
Θεωρητική Τιμή	3,8234

Πίνακας 7:

Χρονικά Βήματα/Χρόνο	Ευρωπαϊκό Δικαίωμα (T=94/365)
1	4,5657
5	4,5422
10	4,5074
20	4,4295
30	4,3421
40	4,2482
60	4,0578
Θεωρητική Τιμή	4,0421

Παρατηρούμε ότι όσο το μήκος των χρονικών βημάτων αυξάνεται τόσο η ακρίβεια στην εκτίμηση μέσω του μοντέλου των Clewlow-Strikland βελτιώνεται και αγγίζει έως και ακρίβεια 1ου δεκαδικού ψηφίου.

Κεφάλαιο 5

5. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα τελευταία 40 χρόνια, τα δικαιώματα προαίρεσης σε όποιο τύπο και αν αυτά συναντώνται, διαδραματίζουν σπουδαίο ρόλο στις περισσότερες οργανωμένες χρηματαγορές. Κρίνεται λοιπόν απαραίτητη, η τιμολόγησή τους με τέτοιο τρόπο ώστε να επιτυγχάνεται η καλύτερη δυνατή προσέγγιση.

Στην διπλωματική αυτή εργασία, πραγματοποιήσαμε αποτίμηση των ενεργειακών δικαιωμάτων προαίρεσης με υποκείμενο τίτλο το αργό πετρέλαιο χρησιμοποιώντας μοντέλα των Black-Scholes, Clewlow-Strickland αλλά και περισσότερο εξειδικευμένα μοντέλα όπως του Hull-White.

Ύστερα από την εμπειρική μελέτη την οποία πραγματοποιήσαμε πάνω στο τριωνυμικό δέντρο του γενικού μοντέλου των Clewlow-Strickland αποτιμήσαμε την παράμετρο σ στο πρώτο μοντέλο και τις παραμέτρους σ και α στο δεύτερο, και παρατηρήσαμε τις αλλαγές που επιφέρουν στις εκτιμηθείσες τιμές των δικαιωμάτων.

Τα αποτελέσματα στα οποία καταλήξαμε από τα δύο μοντέλα, είναι:

- Τα κατάλοιπα των δύο μοντέλων Black-Scholes και Clewlow-Strickland παρουσιάζουν μικρές αποκλίσεις, με το μοντέλο των Clewlow-Strickland να δίνει καλύτερη εκτίμηση την πρώτη μέρα όπου έχουμε και την μεγαλύτερη απόκλιση.

- Οι εκτιμηθείσες τιμές που προκύπτουν από τη χρήση του τριωνυμικού πλέγματος, παρουσιάζουν μικρές αποκλίσεις.

- Το μοντέλο των Black-Scholes δίνει καλύτερη εκτίμηση βραχυπρόθεσμα, ενώ των Clewlow-Strickland εκτιμά με μεγαλύτερη ακρίβεια δικαιώματα που λήγουν μακροπρόθεσμα.

- Το μοντέλο των Clewlow-Strickland για περισσότερα χρονικά βήματα μήκους Δt έως τη λήξη T , προσεγγίζει τη θεωρητική τιμή με ακρίβεια 1^{ου} δεκαδικού ψηφίου.

Βιβλιογραφία

Άρθρα

1. Annold, T.; Crock,TF.; Schwartz,S.; *2007.* Valuing Real Options using Implied Binomial Trees and Commodity Future Options.

2. Black, F.; Derman, E.; W. Ty, *1990*. A one-factor Model of Interest Rates and Its Application to Treasury Bond Options, *Financial Analysis Journal.*

3. Black, F.; Scholes M.; The pricing of Optionw and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy 81.*

4. Brennan and Schwartz model, *1982.*

5. Cortazar, G.; Schwartz, E.; *2002.* Implementing a Stochastic Model for Oil Futures Prices.

6. Cox, J.;, Ross, A.; *1976*. The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics 3, 145-166.*

7. Cox, JC.; Ross, SA.; Rubinstein, M.; *1979*. Option Pricing: A Simplified Approach*, Journal of Financial Economics, 229-263.*

8. Glasserman,P.; Heidelberger, P.; Shahabuddin, P.; Importance Sampling in the Heath-Jarrow-Morton Framework.

9. Glasserman,P; Q.Wu.; *2011,* Forward and Future Implied Volatility, *Intern. Journal of Theoritical and Applied Finance, Vol.14p.407-432.*

10. Edward O. Thorp.; *1985*, Options on Commodity Forward Contracts, *Management Science, Vol.31, No.10.*

11. Ito K.; *1951,* On Stochastic Differential Equations, *Memoirs of the Mathematical Society,4,1-51.*

12. Heath,D.; Jarrow,R.; Morton,A.; *1992.* Bond Pricing and the Term Structure of Interest Rates. A New Methodology for Contingent Claims Valuation, *77-105.*

13. Hull J.; White A.;*1993,* One factor Interest Rate Models and the Valuation of Interest Rate Derivatives Securities,*Vol.28,No.2.*

14. Hull J.; White A.;*1994,* Numerical Procedures for Implementing Term Structure Models I: Single- factor Models, *Journal of Derivatives 2,1,pp.7-16.*

15. Hull J.; White A.; *1996,* Using Hull-White Interest Rate Trees, *Journal of Derivatives, pp.26-39.*

16. Kaushik; Amin,J.; Jarrow Robert A.; *1991*. Pricing foreign currency options under stochastic interest rates,*Journal of International Money and Finance 10, 310-329.*

17. Levenberg K.;*1944,* A method for the solution of Certain Problems in Least Squares, *Quarterly Applied Math.2,pp.164-168.*

18. Marquardt,D.;*1963*, An Algorithm for Least Squares Estimation of Nonlinear Parameters, *SIAM Journal Applied Math. Vol.11, pp.431-441.*

19. More; J.J.; *1977,* The Levenberg Marquardt Algorithm: Implementation and Theory "Numerical Analysis", *ed. G.A. Watson, Lecture Notes in Mathematics 630, Springer Verlag, pp.105-116.*

20. Nijman,C.; *2008*. The energy market: From energy products to energy derivatives and in between*. VU University Amsterdam, Faculty of Sciences Business Mathematics and Informities*.

21. Tang-Song; *2012,* The Analysis of Black-Scholes Option Pricing. *Advances in Applied Economics and Finance, Vol.1,No.3.*

22. Vasicek, O.; *1997.* An equilibrium characterization of the Term Structure, *Journal of Financial Economics, 177-188.*

23. William Feller; *1957,* On Boundaries and Lateral Conditions for the Kolmogorov Differential Equations.

Βιβλία

1. Hull J.C(2005), Options, Futures and Other Derivatives. Prentice Hall, New Jersey, sixth edition.

2. Kienitz J., Wetterau D.; 2012. Financial Modelling, Theory, Implementation and Practice with MATLAB source, *Pbl Wiley.*

3. Les Clewlow and Chris Strickland; Implementing Derivatives Models, 1st edition.

Παράρτημα Ι

Κώδικες Matlab

Κώδικας 1 (BSCalibration): Εκτίμηση παραμέτρου σ

```
function [ x,resnorm,residual,exitflag,v] =
BSCalibration(~ )
clear all
global S0; % Τρέχουσα τιμή
global imp_vol; % Implied Volatility
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate
S0=zeros(1,20);
irate=0.026;
TTM=zeros(1,20);
strike=zeros(1,20);
imp_vol=zeros(1,20);
mktprice=zeros(1,20);
parameter=zeros(1,1);
res=zeros(1,1);
%εισάγω δεδομένα
S0 = xlsread('CLA1.xlsx','data','A14:T14');
irate = 0.026;
TTM = xlsread('CLA1.xlsx','data','A24:T24');
strike = xlsread('CLA1.xlsx','data','A7:T7');
%imp_vol = xlsread('plano.xlsx','modeldata','AT4:BE440');
mktprice = xlsread('CLA1.xlsx','data','A31:T31');
% Θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο που θέλω να εκτιμήσω
%διαλέγω την πιο ρεαλιστική(μέσος των implied
volatilities των δεδομένων
x0 = [0.1];
% Θέτω τα όρια της άγνωστης παραμέτρου
lb = [0.001];
ub = [2];
[ x,resnorm,residual,exitflag] =
lsqnonlin(@BSLSQD,x0,lb,ub);
parameter(1,1)=x;
res(1,1)=resnorm;
BS_call_matrix = zeros(1,20);
for j=1:20
BS_call_matrix(1,j) =
BSformulaeCurrency(S0(1,j),strike(1,j),irate,TTM(1,j),x(1
));
end
pricedata = [BS_call_matrix];
v=res
end
```

Κώδικας 2 (BSLSQD): Εκτίμηση παραμέτρου σ

```
function [ BS_lsqd ] = BSLSQD( x )
% καλείται από το BSCalibration.m
% Εύρεση Διαφορών
global S0; % Τρέχουσα τιμή
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate
BS_lsqd = zeros(1,20);
for j=1:20
BS_lsqd(j)= mktprice(1,j)-
BSformulaeCurrency(S0(1,j),strike(1,j),irate,TTM(1,j),x(1
));
end
end
```

Κώδικας 3 (BSformulaeCurrency): Εκτίμηση παραμέτρου σ

```
function [ Price ] = BSformulaeCurrency( S,K,r,T,sigma)
d1=((r+(sigma^2)*0.5)*T+log(S/K))/(sigma*sqrt(T));
d2=d1-sigma*sqrt(T);
N1=normcdf(d1);
N2=normcdf(d2);
Price=S*exp(-r*T)*N1-K*exp(-r*T)*N2;
end
```

__**Κώδικας 4 (SimpleCalibration): Εκτίμηση παραμέτρων σ και α**__

```
function [ x,resnorm,residual,exitflag,output,d,y]
=SimpleCalibration(~ )
clear all
global S0; % Τρέχουσα τιμή
global imp_vol; % Implied Volatility
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate
%global k;% βοηθητική μεταβλητή
%Φτιάχνω πίνακες μηδενικούς για να μπουν οι τιμές από το
φύλλο %του excell με τα δεδομένα
S0=zeros(1,20);
irate=0.0264;
TTM=zeros(1,20);
strike=zeros(1,20);
imp_vol=zeros(1,20);
mktprice=zeros(1,20);
parameter=zeros(1,2);
res=zeros(1,1);
exit=zeros(1,1);
%εισάγω δεδομένα
S0 = xlsread('CLA1.xlsx','data','A9:T9');
irate =0.0264;
TTM = xlsread('CLA1.xlsx','data','A19:T19');
strike = xlsread('CLA1.xlsx','data','A2:T2');
imp_vol = xlsread('CLA1.xlsx','data','A18:T18');
mktprice = xlsread('CLA1.xlsx','data','A26:T26');
% Θέτω αρχική τιμή στην παράμετρο που θέλω να εκτιμήσω
%διαλέγω την πιο ρεαλιστική(μέσος των implied
volatilities των δεδομένων
x0 = [0.2,0.2];
% Θέτω τα όρια της άγνωστης παραμέτρου
lb = [0.001,0.1];
ub = [1.99,3];
[x,resnorm,residual,exitflag,output]=lsqnonlin(@SimpleLSQ
D,x0,lb,ub);
parameter(1,:)=x;
res(1,1)=resnorm;
Simple_call_matrix = zeros(1,20);
for j=1:20
Simple_call_matrix(1,j) =
Simple_call_Cur(S0(1,j),strike(1,j),irate,TTM(1,j),x(1),x
(2));
end
pricedata = Simple_call_matrix
y=res
d=parameter
```

Κώδικας 5 (Simple_call_Cur): Εκτίμηση παραμέτρων σ και α

```
function [ Price ] = Simple_call_Cur( S0,K,r,T,sigma,a)
w=((sigma^2)/(2*a))*(1-exp(-2*a*T));
h=(log(S0/K)+0.5*w)/sqrt(w);
N1=normcdf(h);
N2=normcdf(h-sqrt(w));
Price=exp(-r*T)*(S0*N1-K*N2);
end
```

Κώδικας 6 (SimpleLSQD): Εκτίμηση παραμέτρων σ και α

```
function [ simple_lsqd ] = SimpleLSQD( x )
global S0; % Τρέχουσα τιμή
%global imp_vol; % Implied Volatility
global strike ; % strike price
global TTM; % Χρόνος για την λήξη του δικαιώματος
global mktprice; % αγοραία τιμή δικαιώματος
global irate ; % interest rate εγχώριο,στην περίπτωση μας
USD
%global k;% βοηθητική μεταβλητή
simple_lsqd = zeros(1,20);
for j=1:20
simple_lsqd(j)= mktprice(1,j)-
Simple_call_Cur(S0(1,j),strike(1,j),irate,TTM(1,j),x(1),x
(2));
end
end
```

Κώδικας 7 (CSCall): Υπολογισμός πιθανοτήτων για εκτίμηση Q_{ij} και a_j:

```
function [Price,latticeProb,W] =
CSCall(S0,K,r,T,sigma,dt,a)
%UNTITLED4 Summary of this function goes here
%   Detailed explanation goes here

N=round(T/dt);
dt=T/N;
dS=sqrt(3*sigma^2*dt);
M=ceil(0.184/(a*dt));
matval=zeros(2*M+1,N+1);
VetS=dS*(-M:1:M);
matval(:,N+1)=max(VetS-K,0);
latticek=zeros(2*M-1,1);
```

```
latticeProb=zeros(4,2*M+1);
for j=N-1:-1:0

pd=1/2*((((sigma^2)*dt+(a^2)*(M*dS)^2*(dt^2))/(dS^2))+2+3
*(a*(-M*dS)*dt)/dS);

pu=1/2*((((sigma^2)*dt+(a^2)*(M*dS)^2*(dt^2))/(dS^2))+(a*
(-M*dS)*dt)/dS);
    pm=1-pd-pu;
    latticeProb(1,1)=pd;
    latticeProb(3,1)=pu;
    latticeProb(2,1)=pm ;
    latticeProb(4,1)=-M+1;
    matval(1,j+1)=exp(-
r*dt)*(pu*matval(3,j+2)+pm*matval(2,j+2)+pd*matval(1,j+2)
);
    for i=(-M+1):1:(M-1)
        for b=1:(2*M-1)
            latticek(b,1)=abs(VetS(i+M+1)-
a*VetS(i+M+1)*dt-VetS(b+1));
        end
        for b=1:(2*M-1)
          if latticek(b,1)==min(latticek)
        k=b-M;
          end
        end

pu=1/2*(((sigma^2)*dt+(a^2)*(i*dS)^2*(dt^2))/(dS^2)+(k-
i)^2-((a*i*dS*dt)/dS)*((1-2*(k-i))-(k-i)));

pd=1/2*(((sigma^2)*dt+(a^2)*(i*dS)^2*(dt^2))/(dS^2)+(k-
i)^2+((a*i*dS*dt)/dS)*(1+2*(k-i))+(k-i));
        pm=1-pu-pd;
        latticeProb(1,i+M+1)=pd;
        latticeProb(2,i+M+1)=pm;
        latticeProb(3,i+M+1)=pu;
        latticeProb(4,i+M+1)=k;
matval(i+M+1,j+1)=exp(-
r*dt)*(pu*matval(k+M+2,j+2)+pm*matval(k+M+1,j+2)+pd*matva
l(k+M,j+2));
    end

pd=1/2*((((sigma^2)*dt+(a^2)*(M*dS)^2*(dt^2))/(dS^2))-
(a*(M*dS)*dt)/dS);

pu=1/2*((((sigma^2)*dt+(a^2)*(M*dS)^2*(dt^2))/(dS^2))+2-
3*(a*(M*dS)*dt)/dS);
    latticeProb(1,2*M+1)=pd;
    latticeProb(3,2*M+1)=pu;
    latticeProb(2,2*M+1)=1-pd-pu;
    latticeProb(4,2*M+1)=M-1;
```

```
    matval(2*M+1,j+1)=exp(-
r*dt)*(pu*matval(2*M+1,j+2)+pm*matval(2*M,j+2)+pd*matval(
2*M-1,j+2));
end
Price=matval(M+1,1);
W=matval;
end
```

Κώδικας 8 (FactorA2): Εκτίμηση παράγοντα a_j, Q_{ij} και εύρεση τιμής δικαιώματος:

```
function [a,Price,Q] =
FactorA2(S0,K,r,T,dt,prob,F,a,sigma)
%UNTITLED Summary of this function goes here
%   Detailed explanation goes here
N=round( T/dt);
dt=T/N;
dS=sqrt(3*sigma^2*dt);
M=ceil(0.184/(a*dt));
Q=zeros(2*M+1,N+1);
a=zeros(1,N+1);
ProbMove=zeros(2*M+1,2*M+1);

ProbMove(1,1:3)=prob(1:3,1)';
for i=-M+1:1:M-1
    ProbMove(i+M+1,i+M:i+M+2)=prob(1:3,i+M+1)';
end
ProbMove(2*M+1,2*M-1:2*M+1)=prob(1:3,2*M+1);
Q(M+1,1)=1;
for j=1:N
    for i=-M:1:M
        for z=-M:M

Q(i+M+1,j+1)=Q(i+M+1,j+1)+Q(z+M+1,j)*ProbMove(z+M+1,i+M+1
)*exp(-r*dt);
        end
    end
end
for j=0:N
    x=0;
    for i=-M:1:M
        x=x+Q(i+M+1,j+1)*S0*exp(i*dS);
    end
        a(1,j+1)=log(F(j+1)/x);
end
Price=0;
for i=-M:1:M
```

```
    Price=Price+Q(i+M+1,N+1)*max(S0*exp(a(N+1)+i*dS)-
K,0);
end
 end
```

Πίνακας πιθανοτήτων των Clewlow-Strickland:

K=58, S0=58.26, T=35/365, r=0.0264, α=2.0456, sigma=0.3382, dt=1/365

Columns 1 through 6					
0.9064	0.0931	0.0949	0.0967	0.0986	0.1005
0.0024	0.6345	0.6365	0.6384	0.6403	0.6420
0.0913	0.2724	0.2686	0.2649	0.2611	0.2574
Columns 7 through 12					
0.1025	0.1044	0.1064	0.1085	0.1105	0.1126
0.6438	0.6454	0.6470	0.6486	0.6501	0.6515
0.2538	0.2501	0.2465	0.2430	0.2394	0.2359
Columns 13 through 18					
0.1147	0.1169	0.1191	0.1213	0.1236	0.1259
0.6528	0.6541	0.6553	0.6565	0.6576	0.6586
0.2324	0.2290	0.2256	0.2222	0.2188	0.2155
Columns 19 through 24					
0.1282	0.1305	0.1329	0.1353	0.1377	0.1402
0.6596	0.6605	0.6614	0.6621	0.6629	0.6635
0.2122	0.2090	0.2057	0.2026	0.1994	0.1963
Columns 25 through 30					
0.1427	0.1453	0.1478	0.1504	0.1530	0.1557
0.6641	0.6647	0.6651	0.6655	0.6659	0.6662
0.1932	0.1901	0.1871	0.1840	0.1811	0.1781
Columns 31 through 36					
0.1584	0.1611	0.1639	0.1667	0.1695	0.1723
0.6664	0.6665	0.6666	0.6667	0.6666	0.6665
0.1752	0.1723	0.1695	0.1667	0.1639	0.1611
Columns 37 through 42					
0.1752	0.1781	0.1811	0.1840	0.1871	0.1901
0.6664	0.6662	0.6659	0.6655	0.6651	0.6647
0.1584	0.1557	0.1530	0.1504	0.1478	0.1453
Columns 43 through 48					
0.1932	0.1963	0.1994	0.2026	0.2057	0.2090
0.6641	0.6635	0.6629	0.6621	0.6614	0.6605
0.1427	0.1402	0.1377	0.1353	0.1329	0.1305
Columns 49 through 54					
0.2122	0.2155	0.2188	0.2222	0.2256	0.2290
0.6596	0.6586	0.6576	0.6565	0.6553	0.6541
0.1282	0.1259	0.1236	0.1213	0.1191	0.1169
Columns 55 through 60					

0.2324	0.2359	0.2394	0.2430	0.2465	0.2501
0.6528	0.6515	0.6501	0.6486	0.6470	0.6454
0.1147	0.1126	0.1105	0.1085	0.1064	0.1044
Columns 61 through 66					
0.2538	0.2574	0.2611	0.2649	0.2686	0.2724
0.6438	0.6420	0.6403	0.6384	0.6365	0.6345
0.1025	0.1005	0.0986	0.0967	0.0949	0.0931
Column 67					
0.0913					
0.0024					
0.9064					