ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΤΜΗΜΑ

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΠΜΣ

ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΡΑΠΕΖΙΚΗΣ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ BLACK-SCHOLES ΥΠΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΜΕΡΙΣΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ

ΦΟΙΤΗΤΗΣ

ΜΙΧΑΛΟΠΟΥΛΟΣ ΑΛΕΞΑΝΔΡΟΣ ΜΧΡΗ1721

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΕΓΓΛΕΖΟΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΕΠΙΤΡΟΠΗ

ΑΝΑΠΛΗΡΩΤΗΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΚΟΥΡΟΓΕΝΗΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΕΠΙΚΟΥΡΟΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ ΑΝΘΡΩΠΕΛΟΣ ΜΙΧΑΗΛ

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2019

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα διπλωματική πραγματεύεται την αποτίμηση Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων προαίρεσης στα πλαίσια του μοντέλου Black-Scholes το οποίο έχει επεκταθεί ώστε να συμπεριλαμβάνει στοχαστική μερισματική απόδοση υπό σταθερή ή/και στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου, όπως αυτό παρουσιάζεται από τον Lioui Abraham (2006). Αρχικά περιγράφουμε τα δικαιώματα προαίρεσης σε θεωρητικό επίπεδο ενώ στη συνέχεια αναφέρουμε ιστορικά στοιχεία τα οποία αποτέλεσαν ορόσημο στην εξέλιξη τους από την αρχαιότητα μέχρι σήμερα. Απαραίτητη για την εκπόνηση της διπλωματικής είναι η ανάλυση του θεωρητικού πλαισίου, το οποίο αποτελεί τη βάση για την διεκπεραίωση της εμπειρικής μελέτης. Όσον αφορά την τελευταία, εκτιμούμε τις παραμέτρους του μοντέλου μας εφαρμόζοντας τον επαναληπτικό αλγόριθμο Levenberg-Marquardt με την βοήθεια του Excel και στην συνέχεια συγκρίνουμε τα αποτελέσματα του μοντέλου μας με αυτά του απλού μοντέλου Black-Scholes. Σύμφωνα με τα αποτελέσματα της εμπειρικής μας μελέτης, το μοντέλο Black-Scholes υπό στοχαστική μερισματική απόδοση όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική προσεγγίζει αποτελεσματικότερα τις τιμές των δικαιωμάτων όπως αυτές παρατηρούνται στην αγορά. Επιπρόσθετα, εξετάζουμε την προβλεπτική ικανότητα των εκτιμήσεων μας ενώ στη συνέχεια πραγματοποιούμε αριθμητική ανάλυση στα αποτελέσματά μας. Όσον αφορά την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων, τα αποτελέσματα της εμπειρικής μας μελέτης οδηγούν στο συμπέρασμα ότι ο χρόνος μέχρι την λήξη διαδραματίζει καθοριστικό ρόλο στην αποτελεσματικότητα του κάθε μοντέλου. Τέλος, αναλύουμε την συμπεριφορά των συντελεστών ευαισθησίας για τα παραπάνω δικαιώματα προαίρεσης, τόσο με την χρήση του μοντέλου μας όσο και με την χρήση του απλού μοντέλου Black-Scholes. Τα αποτελέσματα της μελέτης μας συνδράμουν στην ερμηνεία του οικονομικού αντίκτυπου της υπόθεσης ότι η μερισματική απόδοση είναι ντετερμινιστική ενώ πραγματικά είναι στοχαστική.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ

Δικαίωμα Προαίρεσης, Μοντέλο Black-Scholes, Στοχαστική Μερισματική Απόδοση, Αγοραία Τιμή του Κινδύνου, Συντελεστές Ευαισθησίας, Αλγόριθμος Levenberg-Marquardt, Εκτίμηση Παραμέτρων, Προβλεπτική Ικανότητα, Αριθμητική Ανάλυση.

ABSTRACT

This thesis refers to the pricing of the European type options in the frame of the Black-Scholes model which incorporates the stochastic dividend yield under constant or/and stochastic market price of risk, as it is presented from Lioui Abraham (2006). To begin with, we describe the options on theoretical level, while we mention some historical incidents which are considered as benchmarks throughout the option's evolution from ancient Greece until today. It is essential for this thesis to analyze the theoretical frame of the model, which is the pillar of the completion of the empirical study. Regarding the latter, we valuate the parameters of our model by applying the Levenberg-Marquardt algorithm with the use of Excel and then we compare our results with those of the Black-Scholes model under constant dividend yield. According to the results of our empirical study, the Black-Scholes model under stochastic dividend yield when the market price of risk is stochastic, approaches more effectively the market option prices. In addition, we test the forecasting ability of our valuations and we perform a numerical analysis. Regarding the forecasting ability of the models, the results of the empirical study show us that the time to maturity is way more important than what we initially expected in respect of the efficiency of each model. To conclude, we analyze the Greeks of the options that we use in our empirical study for all models. The results are simulated in order to assess the economic impact of assuming that the dividend yield is deterministic when it is actually stochastic.

KEY WORDS

Option, Black-Scholes Model, Stochastic Dividend Yield, Market Price of Risk, Greeks, Levenberg-Marquardt Algorithm, Parameter Valuation, Forecasting Ability, Numerical Analysis.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 Δικαιώματα προαίρεσης

Τα χαρτοφυλάκια πολλών επενδυτών, περιέχουν επενδύσεις όπως αμοιβαία κεφάλαια, μετοχές και ομόλογα. Όμως υπάρχουν πολλά περισσότερα είδη αξιογράφων. Ένα από αυτά είναι τα δικαιώματα προαίρεσης. Τα δικαιώματα προαίρεσης δίνουν νέες δυνατότητες και ευκαιρίες σε επενδυτές που αντιλαμβάνονται τόσο την δυναμική τους όσο και τους κινδύνους που ελλοχεύουν.

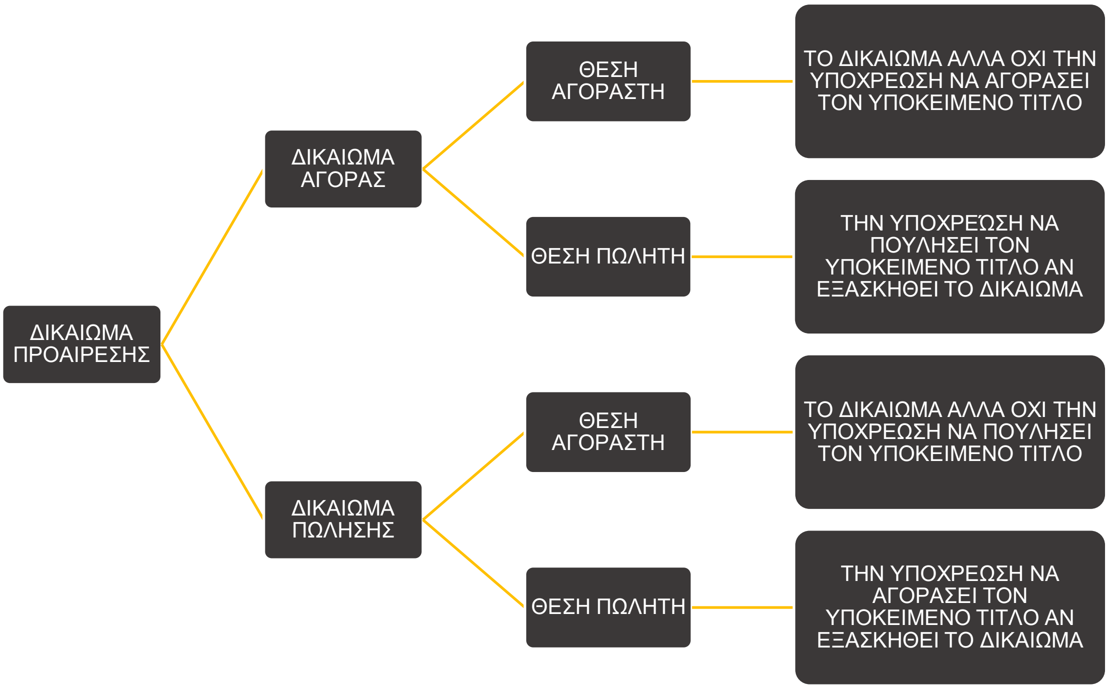
Η δυναμική των δικαιωμάτων προαίρεσης πηγάζει από την ευελιξία που παρουσιάζουν και την ικανότητα τους να αλληλοεπιδρούν με περιουσιακά στοιχεία. Συγκεκριμένα, δίνουν την δυνατότητα στους επενδυτές να προσαρμόζουν την θέση τους σύμφωνα με τις καταστάσεις της αγοράς που ενδέχεται να προκύψουν. Για παράδειγμα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως ένα αποτελεσματικό μέσο αντιστάθμισης του κινδύνου σε πιθανή πτώση της αξίας των μετοχών ενός υποκείμενου τίτλου. Γενικά τα δικαιώματα προαίρεσης μπορούν να χρησιμοποιηθούν σε πολλές στρατηγικές επενδύσεων (πχ κερδοσκοπία).

Τι είναι όμως τα δικαιώματα προαίρεσης; Πρόκειται για ένα είδος παραγώγων, καθώς η τιμή τους συνδέεται εσωτερικά με την τιμή κάποιου περιουσιακού στοιχείου. Ειδικότερα, τα δικαιώματα προαίρεσης είναι συμβόλαια-συμβάσεις ανάμεσα σε 2 αντισυμβαλλόμενους τα οποία τους δίνουν το δικαίωμα να αγοράσουν ή να πουλήσουν έναν υποκείμενο τίτλο σε μία προκαθορισμένη τιμή, σε μία προκαθορισμένη ημερομηνία ή και νωρίτερα. Οι 2 αντισυμβαλλόμενοι ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι ο αγοραστής (long position) και ο πωλητής (short position), ενώ τα δικαιώματα προαίρεσης διακρίνονται σε 2 κατηγορίες. Το δικαίωμα αγοράς (call option) και το δικαίωμα πώλησης (put option). Τέλος, τα δικαιώματα προαίρεσης χωρίζονται σε 2 κύριες κατηγορίες όσον αφορά την ημερομηνία εξάσκησης.

- *Δικαίωμα Ευρωπαϊκού τύπου (αγοράς)*: Στην κατηγορία αυτή, ο αγοραστής μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα του μόνο στην προκαθορισμένη ημερομηνία.
- *Δικαίωμα Αμερικανικού τύπου (αγοράς)*: Στην κατηγορία αυτή, ο αγοραστής μπορεί να εξασκήσει το δικαίωμα του οποιαδήποτε στιγμή μέχρι και την ημερομηνία λήξης του δικαιώματος.

(Στην διπλωματική μου εργασία θα ασχοληθώ μόνο με δικαιώματα Ευρωπαϊκού τύπου)

Για να γίνει πιο κατανοητή η διάκριση των δικαιωμάτων προαίρεσης, ακολουθεί το παρακάτω σχήμα:



1.2 Ιστορική αναδρομή

1.2.1 Η εξέλιξη των δικαιωμάτων προαίρεσης σε βάθος χρόνου

Τα δικαιώματα προαίρεσης για πολλούς αποτελούν ακόμα ένα δημιούργημα της Wall Street. Μία μικρή έρευνα όμως θα διαψεύσει αυτήν την πεποίθηση. (πηγή : http://www.optionstrading.org/history/)

- Οι ρίζες των δικαιωμάτων προαίρεσης, σύμφωνα με ένα βιβλίο του Αριστοτέλη από τον 4ο αιώνα π.Χ., εντοπίζονται στην αρχαία Ελλάδα. Συγκεκριμένα, ο αρχαίος φιλόσοφος Θαλής ο Μιλήσιος, κάνοντας χρήση των γνώσεων του στην αστρονομία και στα μαθηματικά, ήταν σε θέση να προβλέψει ότι θα υπάρξει αυξημένη συγκομιδή ελιάς στην περιοχή του. Για να επωφεληθεί από την πρόβλεψη του πλήρωνε τους ιδιοκτήτες των ελαιοτριβείων για να εξασφαλίσει το δικαίωμά του να χρησιμοποιήσει το ελαιοτριβείο την περίοδο της συγκομιδής. Όταν ερχόταν η περίοδος της αυξημένης συγκομιδής (όπως είχε προβλέψει) ο Θαλής πουλούσε τα δικαιώματα του για χρήση των ελαιοτριβείων σε αυτούς που τα χρειαζόντουσαν με αποτέλεσμα να βγάζει κέρδος. Η παραπάνω διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί ως το πρώτο δικαίωμα αγοράς με υποκείμενο τίτλο τα ελαιοτριβεία.

- Ένα άλλο παράδειγμα χρήσης δικαιωμάτων προαίρεσης στο παρελθόν, το οποίο έχει εξεταστεί και από τους Garber (1989,1990), White (1990), Van der Veen (2012), αποτελεί ένα περιστατικό στην Ολλανδία του 17^{ου} αιώνα μ.Χ. γνωστό ως Tulip Bulb Mania. Τότε, οι τουλίπες ήταν εξαιρετικά δημοφιλείς στην περιοχή ενώ η δημοτικότητά τους εξαπλώθηκε στην Ευρώπη και σε ολόκληρο τον κόσμο, γεγονός που οδήγησε σε αύξηση της ζήτησης των βολβών τουλίπας. Από αυτό το σημείο της ιστορίας, δικαιώματα αγοράς και πώλησης χρησιμοποιήθηκαν σε πολλές διαφορετικές αγορές κυρίως για hedging[1]. Για παράδειγμα, οι καλλιεργητές τουλίπας έμπαιναν στην θέση του αγοραστή στα δικαιώματα πώλησης για να προστατεύσουν τα κέρδη τους σε περίπτωση που η τιμή των βολβών τουλίπας έπεφτε, ενώ οι χονδρέμποροι τουλίπας έμπαιναν στην θέση αγοραστή στα δικαιώματα αγοράς για να προστατευτούν από τον κίνδυνο της αύξησης της τιμής των βολβών τουλίπας. Αξίζει να σημειωθεί ότι αυτά τα συμβόλαια δεν ήταν τόσο ανεπτυγμένα όσο είναι σήμερα, ενώ οι αγορές δικαιωμάτων ήταν σχετικά ανεπίσημες. Η αξία των συμβολαίων για τους βολβούς τουλίπας αυξήθηκε σημαντικά, με αποτέλεσμα να προκύψει μια δευτερογενής αγορά για τα συμβόλαια αυτά η οποία επέτρεπε την κερδοσκοπία. Όμως, κατά τη διάρκεια της δεκαετίας του 1630 η ζήτηση για βολβούς τουλίπας ήταν σε έξαρση. Ως αποτέλεσμα, η τιμή τους συνέχισε να αυξάνεται και τελικά η φούσκα ‘έσκασε’. Οι τιμές είχαν ανέλθει σε σημείο όπου δεν ήταν πλέον βιώσιμες και οι αγοραστές άρχισαν να εξαφανίζονται. Οι απλοί άνθρωποι που είχαν διακινδυνεύσει τα πάντα με σκοπό το κέρδος από την άνοδο των τιμών των βολβών έχασαν τις περιουσίες τους. Η ολλανδική οικονομία εισήλθε σε ύφεση. Επειδή η αγορά των δικαιωμάτων προαίρεσης ήταν ανεπίσημη, δεν υπήρχε κανένας τρόπος να εξαναγκαστούν οι επενδυτές να εκπληρώσουν τις υποχρεώσεις τους από τα συμβόλαια. Έτσι τα δικαιώματα προαίρεσης απέκτησαν κακή φήμη σε ολόκληρο τον κόσμο.

- Παρά την κακή φήμη που απέκτησαν εξακολουθούσαν να προσελκύουν πολλούς επενδυτές. Αυτό οφειλόταν σε μεγάλο βαθμό στο ότι πρόσφεραν μεγάλη μόχλευση[2], γεγονός που αποτελεί έναν από τους λόγους για τους οποίους είναι τόσο δημοφιλή σήμερα. Συνεπώς, η διαπραγμάτευση των δικαιωμάτων προαίρεσης συνεχίστηκε, χωρίς όμως να αλλάζει η άποψη που επικρατούσε για τα συμβόλαια αυτά τότε. Κατά το παρελθόν, τα δικαιώματα προαίρεσης έχουν απαγορευτεί πολλές φορές σε διάφορες περιοχές του κόσμου όπως την Ιαπωνία και την Αμερική, ενώ αξιοσημείωτη ήταν η απαγόρευση στο Λονδίνο η οποία διήρκησε περισσότερα από 100 χρόνια (1733-1860).

- Μία σημαντική εξέλιξη στην ιστορία των δικαιωμάτων προαίρεσης, σύμφωνα και με τον Sarnoff (1965), αφορούσε έναν Αμερικανό χρηματοδότη με το όνομα Russell Sage. Στα τέλη του 19ου αιώνα, ο Sage άρχισε να δημιουργεί δικαιώματα αγοράς και πώλησης τα οποία μπορούσαν να διαπραγματευτούν εκτός χρηματιστηρίου στις Ηνωμένες Πολιτείες. Δεν υπήρχε ακόμη επίσημη αγορά συναλλάγματος, αλλά ο Sage με τις δραστηριότητές του οδήγησε σε σημαντική πρόοδο της εμπορίας των δικαιωμάτων προαίρεσης. Ο Sage πιστεύεται ότι είναι το πρώτο άτομο που καθόρισε μια τιμολογιακή σχέση μεταξύ της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης, της τιμής του υποκείμενου τίτλου και των επιτοκίων. Χρησιμοποίησε την αρχή της ισότητας των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης (put-call parity)[3].

- Στα τέλη του 19^{ου} αιώνα, χρηματιστές (brokers[4] και dealers[5]) άρχισαν να χρησιμοποιούν διαφημίσεις για να προσελκύσουν επενδυτές. Η βασική ιδέα ήταν ότι ο εκάστοτε ενδιαφερόμενος θα ερχόταν σε επαφή με τον χρηματιστή και θα εξέφραζε το ενδιαφέρον να αγοράσει είτε δικαίωμα αγοράς είτε δικαίωμα πώλησης σε μια συγκεκριμένη μετοχή. Στην συνέχεια ο χρηματιστής θα προσπαθούσε να βρει κάποιον αντισυμβαλλόμενο για να διεκπεραιωθεί η συναλλαγή. Οι όροι της σύμβασης καθορίζονταν από τους αντισυμβαλλόμενους. Για τον παραπάνω σκοπό δημιουργήθηκε το Put and Call Brokers and Dealers Association. Παρόλα αυτά, η αγορά παρέμενε σχετικά μη ρευστοποιήσιμη και με περιορισμένη δραστηριότητα καθώς δεν υπήρχε ακόμα κάποια ορθή μέθοδος τιμολόγησης ούτε συγκεκριμένοι κανονισμοί με αποτέλεσμα να επικρατεί ανασφάλεια στην αγορά των δικαιωμάτων προαίρεσης.

- Στα τέλη της δεκαετίας του 1960 η Securities and Exchange Commission (SEC) επέβαλε κάποιους κανονισμούς, όμως υπήρχαν πάρα πολλές περιπλοκές και οι ασυνεπείς τιμές καθιστούσαν δύσκολο για τους επενδυτές να εξετάσουν σοβαρά τα δικαιώματα προαίρεσης ως βιώσιμο εμπορεύσιμο μέσο. Το 1968 το Chicago Board of Trade παρατήρησε μια σημαντική μείωση στην συναλλαγή των συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ) των αγαθών, έτσι άρχισε να ψάχνει νέους τρόπους να αναπτύξουν την δραστηριότητας τους. Κύριος στόχος τους ήταν να δημιουργήσουν νέες ευκαιρίες για τα μέλη που συναλλάσσονταν. Ύστερα από τις εναλλακτικές που εξετάστηκαν, αποφασίστηκε να δημιουργηθεί μία επίσημη αγορά συναλλαγής δικαιωμάτων προαίρεσης. Ως αποτέλεσμα, το 1973 το Chicago Board of Options Exchange (CBOE) ξεκίνησε να συναλλάσσεται συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης για πρώτη φορά τα οποία ήταν κατάλληλα τυποποιημένα σε μία δίκαιη αγορά, ενώ παράλληλα ιδρύθηκε η Clearing Corporation η οποία ήταν υπεύθυνη για την ορθή εκπλήρωση των συμβολαίων. Αξίζει να σημειωθεί πως στην Ελλάδα το Χρηματιστήριο Παραγώγων Αθηνών ξεκίνησε να διαπραγματεύεται παράγωγα το καλοκαίρι του 1999.

- Επομένως, περίπου 2300 χρόνια αφού ο Θαλής ο Μιλήσιος δημιούργησε το πρώτο δικαίωμα αγοράς, η συναλλαγή των δικαιωμάτων προαίρεσης ήταν πλέον νόμιμη.

1.2.2 Η επίδραση του μοντέλου Black-Scholes στην αγορά των δικαιωμάτων

Όταν το CBOE άνοιξε την αγορά των δικαιωμάτων προαίρεσης, τα συμβόλαια ήταν περιορισμένα, ενώ ως επί το πλείστων οι συναλλαγές αφορούσαν δικαιώματα αγοράς καθώς τα δικαιώματα πώλησης δεν είχαν τυποποιηθεί ακόμα. Γενικά επικρατούσε ένα κλίμα ανασφάλειας γύρω από την συναλλαγή των δικαιωμάτων προαίρεσης διότι δεν ήταν βέβαιο ακόμα κατά πόσο η αγορά αυτή ήταν επικερδής. Η ανασφάλεια αυτή είχε τις ρίζες της τόσο στην έλλειψη μίας δίκαιης μεθόδου τιμολόγησης, όσο και στην εμφανή έλλειψη ρευστότητας. Η απάντηση ήρθε σύντομα το ίδιο έτος που άνοιξαν οι αγορές των δικαιωμάτων προαίρεσης (1973) από 2 ακαδημαϊκούς, τον Fisher Black και τον Myron Scholes οι οποίοι παρουσίασαν μία μαθηματική εξίσωση ικανή να τιμολογήσει ένα δικαίωμα προαίρεσης χρησιμοποιώντας συγκεκριμένες μεταβλητές. Η εξίσωση αυτή έγινε γνωστή ως Black Scholes Pricing Model.

Τι κάνει όμως η εξίσωση αυτή; Ένα από τα επικρατέστερα ερωτήματα εκείνης της περιόδου ήταν κατά πόσο μπορεί να εκτιμηθεί ή να υπολογιστεί η τιμή μίας μετοχής σε ένα χρόνο για παράδειγμα. Με γνώμονα το ερώτημα αυτό, η λογική πίσω από το Black-Scholes Pricing Model γίνεται πιο σημαντική από την ίδια την εξίσωση. Οι Black, Scholes και Merton δεν προσπάθησαν να απαντήσουν στην ερώτηση «Πόσο θα αυξηθεί ή θα πέσει η τιμή των μετοχών;» Αντί αυτού έθεσαν μια σημαντική υπόθεση: ότι η τιμή μίας μετοχής αυξάνεται και μειώνεται με τον ίδιο απρόβλεπτο τρόπο όπως τα άτομα και τα μόρια στον αέρα. Όσο περίεργο και αν φαίνεται αυτό, ήταν (και εξακολουθεί να είναι) μια δημοφιλής ιδέα.

Στη δεκαετία του 1970, ο ακαδημαϊκός κόσμος, οι οικονομολόγοι και οι μαθηματικοί που μελετούσαν τις χρηματοπιστωτικές αγορές εξέταζαν όλο και περισσότερο τη φυσική για έμπνευση. Οι επιστήμονες είχαν από καιρό παρατηρήσει ότι τα σωματίδια σε υγρά και αέρια κινούνται ή αναταράσσονται χωρίς εμφανή αιτία και πίστευαν ότι αυτό ήταν ένα σημάδι της ύπαρξης μορίων και ατόμων των οποίων οι ασταθείς κινήσεις προκάλεσαν την κίνηση. Στη δεκαετία του 1900, θεωρητικοί επιστήμονες όπως ο Albert Einstein, Jean Perrin και ο Marian Smoluchowski εξήγησαν πως λειτούργησε η κίνηση αυτή. Διαπίστωσαν ότι τα σωματίδια κινούνται τυχαία, όμως με την βοήθεια της στατιστικής θα μπορούσαν να μοντελοποιήσουν τα πιο πιθανά μονοπάτια που θα ακολουθούσε κάποιο από αυτά τα τυχαία κινούμενα σωματίδια. Εμπνευσμένοι από έναν Γάλλο μαθηματικό που χρησιμοποίησε την ίδια στατιστική προσέγγιση για να διαμορφώσει τις χρηματιστηριακές τιμές το 1900, οι μαθηματικοί και οι οικονομολόγοι 'αγκάλιασαν' αυτή τη φυσιοκρατική άποψη της χρηματιστηριακής αγοράς. Επομένως, εάν οι κινήσεις στο χρηματιστήριο είναι τυχαίες, μπορούν να μοντελοποιηθούν. Αυτό κάνει η εξίσωση Black-Scholes. Ο τύπος δεν προσπαθεί να προβλέψει πώς θα αλλάξουν οι τιμές των μετοχών. Αντίθετα, υποθέτει ότι η μελλοντική πορεία των τιμών των μετοχών - όπως και τα ακάρεα σκόνης που απορροφώνται από άτομα και μόρια - ακολουθεί μια κανονική κατανομή, γεγονός το οποίο υποδεικνύει ότι οι μικρές κινήσεις είναι πολύ πιθανότερες από τις ακραίες κινήσεις.

Με αυτή την υπόθεση, η μόνη μεταβλητή που απαιτείται για την κατανόηση της κανονικής κατανομής είναι η μεταβλητότητα των τιμών των μετοχών. Μελετώντας την μεταβλητότητα των μετοχών στο παρελθόν, η εξίσωση Black-Scholes μπορεί να μοντελοποιήσει τον τρόπο με τον οποίο μπορεί να αλλάξει η τιμή των μετοχών και να υπολογίσει τη σωστή τιμή για ένα δικαίωμα προαίρεσης. Αν η τιμή μίας μετοχής είναι πολύ ασταθής, γεγονός που υποδηλώνει ότι η τιμή θα μετακινηθεί κατά πολύ προς τα πάνω και προς τα κάτω στο μέλλον, τότε τα δικαιώματα προαίρεσης για τις μετοχές θα είναι ακριβότερα. Πιο συγκεκριμένα, το μοντέλο Black and Scholes υπολογίζει την αξία ενός Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα χρησιμοποιώντας τις τρέχουσες τιμές των μετοχών, τα αναμενόμενα μερίσματα, την τιμή εξάσκησης του δικαιώματος προαίρεσης, τα αναμενόμενα επιτόκια, την ληκτότητα και την αναμενόμενη μεταβλητότητα.

Οι ιστορικοί της Wall Street δίνουν στους Black-Scholes τα εύσημα για τις αλλαγές που έγιναν στις χρηματοπιστωτικές αγορές μετά τη δημοσίευση της εξίσωσης τους το 1973. Μέσα σε μερικά χρόνια η εξίσωση έγινε αναπόσπαστο κομμάτι στους υπολογιστές όλων των χρηματιστών, ενώ πολλοί ακαδημαϊκοί υιοθέτησαν τον ίδιο τρόπο σκέψης και σε άλλα παράγωγα. Δεδομένου ότι ο τύπος έδωσε στα παράγωγα μια συγκεκριμένη τιμή τα παράγωγα δεν ήταν πλέον στοιχήματα. Αυτό τα έκανε εύκολα εμπορεύσιμα. Με άλλα λόγια οι τράπεζες και τα χρηματιστήρια καταχωρούσαν τα παράγωγα ως περιουσιακά στοιχεία μαζί με τις μετοχές, τα ακίνητα και τα ομόλογα.

Με την πάροδο του χρόνου, έχοντας λυθεί πλέον το πρόβλημα της τιμολόγησης και σε συνδυασμό με την ραγδαία ανάπτυξη των ηλεκτρονικών υπολογιστών η αγορά των εισηγμένων δικαιωμάτων προαίρεσης επεκτάθηκε σε πρόσθετα χρηματιστήρια, συμπεριλαμβανομένων των δικαιωμάτων πώλησης των μετοχών και των cash-settled[6] δικαιωμάτων προαίρεσης των χρηματιστηριακών δεικτών, τα οποία επιτρέπουν στους επενδυτές να διαχειρίζονται ή να αντισταθμίζουν την έκθεση σε κίνδυνο του χαρτοφυλακίου τους απέναντι σε δείκτες όπως τον S&P 500, τον Russell 2000 και τον NASDAQ-100. Το 1982, η εισηγμένη αγορά δικαιωμάτων προαίρεσης εκτοξεύτηκε όταν διαπραγματεύθηκαν περισσότερες από 500.000 συμβάσεις σε μία μόνο ημέρα. Η δημοτικότητα των δικαιωμάτων συνεχίζει να αυξάνεται χωρίς να υπάρχουν ενδείξεις ότι κάποια στιγμή θα σταματήσει να αυξάνεται ή θα μειωθεί. Ενδεικτικό είναι ότι κατά μέσο όρο 17.000.000 συμβόλαια διαπραγματεύονται κάθε μέρα σε περίπου δέκα χρηματιστήρια ανά τον κόσμο, ενώ πλέον η αγορά παραγώγων ανέρχεται σε περίπου 710.000.000.000.000 δολάρια. (πηγή : https://priceonomics.com/the-history-of-the-black-scholes-formula/)

Χαρακτηριστικό είναι το παρακάτω διάγραμμα το οποίο δείχνει τον όγκο δικαιωμάτων προαίρεσης που συναλλάχθηκαν τα τελευταία 26 χρόνια στις ΗΠΑ. (πηγή: Bloomberg)

1.3 Περιγραφή της διπλωματικής

Στο κεφάλαιο αυτό γνωρίσαμε σε θεωρητικό επίπεδο τα δικαιώματα προαίρεσης και σε ποιες κατηγορίες διακρίνονται. Αναφερθήκαμε επίσης εκτενώς στην ιστορική πορεία των δικαιωμάτων προαίρεσης τα πρώτα βήματα των οποίων παρατηρήθηκαν στην αρχαία Ελλάδα τον $4^{ο}$ αιώνα π.Χ.. ενώ φτάσαμε μέχρι και τον $20^{ο}$ αιώνα μ.Χ. όπου είδαμε και την πρώτη εφαρμογή του μοντέλου Black-Scholes στον υπολογισμό της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης.

Στο $2^{ο}$ κεφάλαιο θα προσεγγίσουμε μαθηματικά το απλό μοντέλο Black-Scholes. Συγκεκριμένα, θα ορίσουμε τις υποθέσεις του μοντέλου για να μπορέσουμε να το χτίσουμε και θα παραθέσουμε τα μαθηματικά εργαλεία τα οποία είναι απαραίτητα για να ολοκληρωθεί ο προσέγγιση αυτή. Κάποια από τα πιο σημαντικά μαθηματικά εργαλεία που θα αναλύσουμε είναι οι στοχαστικές διαδικασίες, η κίνηση Brown, το λήμμα του Ito κ.α.. Στην συνέχεια θα περιγράψουμε το απλό μοντέλο και τους τύπους κλειστής μορφής που χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε την τιμή των δικαιωμάτων προαίρεσης. Τέλος, θα αναφερθούμε εκτενώς στους συντελεστές ευαισθησίας των δικαιωμάτων και στους τύπους υπολογισμού τους.

Στο $3^{ο}$ κεφάλαιο, αρχικά θα θέσουμε τις υποθέσεις της χρηματοοικονομικής αγοράς και στην συνέχεια θα εξετάσουμε το μοντέλο υπό στοχαστική μερισματική απόδοση ενώ θα διακρίνουμε και τις 2 περιπτώσεις που προκύπτουν όσον αφορά την αγοραία τιμή του κινδύνου. Με άλλα λόγια, θα περιγράψουμε το μοντέλο Black-Scholes υπό στοχαστική μερισματική απόδοση τόσο για σταθερή αγοραία τιμή του κινδύνου όσο και για στοχαστική. Επιπλέον, θα παραθέσουμε τους τύπους υπολογισμού των δικαιωμάτων προαίρεσης και τους τύπους των συντελεστών ευαισθησίας που χρησιμοποιεί το μοντέλο μας και για τις 2 περιπτώσεις της αγοραίας τιμής του κινδύνου.

Στο 4^{ο} κεφάλαιο θα αναφερθούμε στην εμπειρική μας μελέτη η οποία θα μας βοηθήσει να καταλήξουμε σε συμπεράσματα για το μοντέλο μας. Αρχικά, θα χρειαστεί να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους που διαφοροποιούν το μοντέλο μας από το απλό και για τις 2 περιπτώσεις. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση της σταθερής αγοραίας τιμής του κινδύνου θα πρέπει να εκτιμήσουμε 6 παραμέτρους, ενώ στην περίπτωση της στοχαστικής αγοραίας τιμής του κινδύνου θα εκτιμήσουμε 9 παραμέτρους. Στη συνέχεια, αφού συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μας για κάθε περίπτωση, θα χρησιμοποιήσουμε τις εκτιμήσεις μας για να προβλέψουμε μελλοντικές τιμές τις οποίες έχουμε ήδη αντλήσει από το Bloomberg. Με άλλα λόγια, θα ελέγξουμε την προβλεπτική ικανότητα των εκτιμήσεων μας. Επιπρόσθετα, θα πραγματοποιήσουμε αριθμητική ανάλυση στα αποτελέσματα μας για να καταλήξουμε σε σημαντικά συμπεράσματα. Τέλος, θα εξετάσουμε την συμπεριφορά των συντελεστών ευαισθησίας για το μοντέλο μας και στις 2 περιπτώσεις.

Στο τελευταίο κεφάλαιο, θα καταλήξουμε σε συμπεράσματα τα οποία θα προκύπτουν από την σύγκριση του απλού μοντέλου Black-Scholes με το μοντέλο μας τόσο για σταθερή αγοραία τιμή του κινδύνου όσο και για στοχαστική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ BLACK-SCHOLES

Η ιδέα του μοντέλου ήταν να αντισταθμίζεται ένα δικαίωμα αγοράζοντας και πουλώντας τον υποκείμενο τίτλο (asset), για παράδειγμα μετοχές, με τέτοιο τρόπο ώστε να εξαλείφεται ο κίνδυνος. Συνεπώς, κατασκεύασαν ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από ένα δικαίωμα και από έναν αριθμό Δ μετοχών και εξέτασαν τη στιγμιαία μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου. Επέλεξαν το χαρτοφυλάκιο έτσι ώστε να είναι χωρίς κίνδυνο, αυτό επιτυγχάνεται με την συνεχή αναπροσαρμογή της ποσότητας Δ των αριθμών των μετοχών του χαρτοφυλακίου. Σύμφωνα με μία εκ των υποθέσεων του μοντέλου, δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage[7] κάτι το οποίο σημαίνει πως το χαρτοφυλάκιο πρέπει να έχει απόδοση το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου (risk-free rate). Συγκεκριμένα, οι υποθέσεις του μοντέλου είναι οι εξής:

- Η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί τη γεωμετρική κίνηση Brown (GBM), δηλαδή έχουμε σταθερή μεταβλητότητα και δεν υπάρχουν άλματα στην πορεία που ακολουθεί (συνεχή πορεία).

- Δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage.

- Ο υποκείμενος τίτλος δεν δίνει μέρισμα μέχρι την λήξη του δικαιώματος (την υπόθεση αυτή στην συνέχεια της διπλωματικής θα την αναιρέσουμε)

- Επιτρέπεται η ανοιχτή θέση πώλησης (short selling[8]) των υποκείμενων τίτλων.

- Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών.

- Οι συναλλαγές είναι συνεχείς.

- Ο υποκείμενος τίτλος μπορεί να διαιρεθεί σε μικρότερα κομμάτια, δηλαδή μπορούμε να αγοράσουμε ή να πουλήσουμε τμήματά του.

- Το επιτόκιο μηδενικού κινδύνου είναι συνεχές και σταθερό μέχρι την λήξη του δικαιώματος.

2.1 Χρήσιμα μαθηματικά εργαλεία

Τα παρακάτω εργαλεία είναι απαραίτητα τόσο για την απόδειξη του μοντέλου Black-Scholes όσο και για την κατανόηση του.

2.1.1 Στοχαστικές Διαδικασίες

Οι στοχαστικές διαδικασίες αποτελούν ένα ερευνητικό πεδίο ιδιαίτερης σημασίας για την ανάπτυξη μοντέλων τιμολόγησης χρηματοοικονομικών παραγώγων δεδομένου πως η μοντελοποίηση των τιμών των υποκείμενων τίτλων πραγματοποιείται σε περιβάλλον στοχαστικότητας.

Ως στοχαστική διαδικασία (stochastic process) ορίζουμε ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών ορισμένων σε κοινό χώρο πιθανοτήτων με παράμετρο την πραγματική μεταβλητή t τον χρόνο $\{X(t),\ t\epsilon T\}$. Το σύνολο T των τιμών της παραμέτρου είναι το σύνολο δεικτών (index set) της στοχαστικής διαδικασίας. Με βάση το σύνολο των δεικτών τους οι στοχαστικές διαδικασίες διακρίνονται σε διαδικασίες διακριτού χρόνου (το σύνολο T είναι αριθμήσιμο) και σε διαδικασίες συνεχούς χρόνου (το σύνολο T είναι διάστημα του R). Οι στοχαστικές διαδικασίες κατατάσσονται βάσει του συνόλου των δυνατών τιμών της τυχαίας μεταβλητής X(t) σε:

- Διακριτού χρόνου και διακριτής μεταβλητής
- Διακριτού χρόνου και συνεχής μεταβλητής
- Συνεχούς χρόνου και διακριτής μεταβλητής
- Συνεχούς χρόνου και συνεχούς μεταβλητής

Έστω $\{S(t),\ t \geq 0\}$ μία στοχαστική διαδικασία που εκφράζει την εξέλιξη της τιμής ενός περιουσιακού στοιχείου. Η S(t) είναι μία τυχαία μεταβλητή που εκφράζει την τιμή στο χρόνο t και η S(t,ω) είναι μία απεικόνιση από ένα χώρο πιθανότητας (Ω,A,P) στο R που ορίζεται από την σχέση:

$$(t,\omega) = \{H\ \tau\iota\mu\acute{\eta}\ \varepsilon\nu\acute{o}\varsigma\ \pi\varepsilon\rho\iota o\upsilon\sigma\iota\alpha\kappa o\acute{\upsilon}\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}o\upsilon\ \sigma\tau o\ \chi\rho\acute{o}\nu o\ \text{t όταν}\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau o\pi o\iota\eta\theta\varepsilon\acute{\iota}\ \tau o\ \sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\iota\acute{\omega}\delta\varepsilon\varsigma\ \varepsilon\nu\delta\varepsilon\chi\acute{o}\mu\varepsilon\nu o\ \omega \in \Omega\}$$

Σε αυτή την περίπτωση η $\{S(t),\ t \geq 0\}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία τιμών.

Οι τιμές περιουσιακών στοιχείων στην πραγματικότητα παίρνουν μόνο διακριτές τιμές και ο χρόνος διαπραγμάτευσης τους δεν είναι συνεχής. Παρ’ όλα αυτά για την μελέτη της εξέλιξης των τιμών τους γίνεται χρήση μοντέλων που, αν και δεν αντιστοιχούν με ακρίβεια στην πραγματικότητα, είναι εύχρηστα και στην πράξη οδηγούν σε χρήσιμα συμπεράσματα.

2.1.2 Διαδικασίες Markov

Η διαδικασία Markov αποτελεί ένα είδος στοχαστικής διαδικασίας συνεχούς χρόνου κατά την οποία η μελλοντική κίνηση της μεταβλητής εξαρτάται μόνο από το σημείο που βρίσκεται στο παρόν και όχι από ιστορικά στοιχεία. Η S_t ακολουθεί μία διαδικασία Markov εάν οι κατανομές πιθανότητας του συνόλου των $S_{t+\Delta t}$ για όλες τις επόμενες t+Δt χρονικές στιγμές εξαρτώνται μόνο από την S_t.

Η διαδικασία Markov δείχνει να επαληθεύει την αδύναμη μορφή της πλήρους αγοράς. Σύμφωνα με την μορφή πλήρους αγοράς, οι ιστορικές πληροφορίες αντικατοπτρίζονται στις τιμές και έτσι δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους επενδυτές για να προβλέψουν μελλοντικές αποδόσεις.

Επομένως, υπολογίζουμε πως η διακύμανση για την τιμή S_T είναι :

$$Var\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = TVar(S_{t+1} - S_t)$$

Είναι φανερό ότι η διακύμανση των μεταβλητών που ακολουθούν διαδικασία Markov είναι ανάλογη του χρόνου.

2.1.3 Κίνηση Brown (Wiener Process)

Η κίνηση Brown πήρε το όνομά της από τον Άγγλο βοτανολόγο R.Brown, ο οποίος περιέγραψε πρώτος την κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα υγρό ή αέριο. Ο Αμερικανός μαθηματικός R.Wiener όρισε αυστηρά και μελέτησε σε βάθος την διαδικασία αυτή αποδεικνύοντας πολλές ιδιότητες της, για αυτό και η διαδικασία είναι γνωστή και ως Wiener Process.

Μια στοχαστική διαδικασία $\{z(t),\ t \geq 0\}$ ονομάζεται κίνηση Brown με συντελεστή διάχυσης σ^2 αν:

- $z(0) = 0$
- Έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις
- $\forall\ t \geq 0$, $z(t) \sim N(0,\sigma^2 t)$

Όταν σ=1 τότε η διαδικασία καλείται τυποποιημένη κίνηση Brown (Standard Brownian Motion) ή διαδικασία Wiener (Wiener Process).

Είναι αντιληπτό πως κάθε κίνηση Brown μπορεί να γραφεί ως συνάρτηση Wiener ως εξής:

$$z(t) = \sigma W(t)$$

Μετά από χρόνο Δt οι αντίστοιχες προσαυξήσεις Δz και ΔW θα ικανοποιούν την σχέση $\Delta z = \sigma \Delta W$ και αν θεωρήσουμε Δt πως τείνει στο μηδέν (εξετάζουμε σε συνεχές περιβάλλον) τότε έχουμε την διαφορική εξίσωση :

$$dz = \sigma dW$$

Η διαδικασία Wiener (γνωστή και ως κίνηση Brown στον τομέα της φυσικής), αποτελεί έναν συγκεκριμένο τύπο της διαδικασίας Markov, στην οποία θεωρείται ότι:

$$Var\left(\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t}\right) = 1 \qquad \kappa\alpha\iota \qquad E\left(\frac{S_{t+1} - S_t}{S_t}\right) = 0$$

Όπου E η αναμενόμενη μεταβολή της S_t . Για να ακολουθεί μία μεταβλητή z διαδικασία Wiener θα πρέπει κατά τη διάρκεια ενός μικρού χρονικού διαστήματος Δt να ισχύει:

$$\Delta z = \varepsilon\sqrt{\Delta t} \quad ,\acute{o}\pi o\upsilon\ \varepsilon \sim N(0,1)\ \kappa\alpha\iota\ \Delta z \sim N(0,\Delta t)$$

Κατά την διάρκεια μίας μεγάλης περιόδου T η μεταβολή της z είναι ίση με $z(T) - z(0)$. Αυτή η μεταβολή μπορεί να θεωρηθεί ως το άθροισμα των μεταβολών του z σε N μικρά χρονικά διαστήματα διάρκειας Δt, όπου $N = \frac{T}{\Delta t}$. Επομένως:

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i \sqrt{\Delta t}$$

Από την παραπάνω εξίσωση, εύκολα προκύπτει ότι:

$$E[z(T) - z(0)] = 0 \quad , \quad Var[z(T) - z(0)] = N\Delta t = T \quad , \quad \sigma[z(T) - z(0)] = \sqrt{T}$$

2.1.4 Λογαριθμοκανονική κατανομή (Lognormal)

Στη θεωρία των πιθανοτήτων, η λογαριθμοκανονική κατανομή είναι μία συνεχής κατανομή μίας τυχαίας μεταβλητής της οποίας ο λογάριθμος ακολουθεί κανονική κατανομή. Έτσι αν X~N(μ,σ^2) τότε η Y=ln(X) ακολουθεί επίσης κανονική κατανομή. Παρομοίως, αν Y~N(μ,σ^2) τότε X=exp(Y) ακολουθεί κανονική κατανομή. Μία τυχαία μεταβλητή η οποία ακολουθεί λογαριθμοκανονική κατανομή παίρνει μόνο θετικές τιμές. Οι τύποι της Lognormal(μ,σ^2) είναι οι ακόλουθοι:

- $PDF\colon \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
- $MEAN\colon e^{\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)}$
- $VAR\colon \left(e^{\sigma^2}-1\right)e^{(2\mu+\sigma^2)}$

2.2 Μαθηματική προσέγγιση του μοντέλου

Αρχικά θα αποδείξουμε το μοντέλο Black-Scholes-Merton για τον υπολογισμό της τιμής του υποκείμενου τίτλου χωρίς την καταβολή μερίσματος, ενώ στη συνέχεια με τη βοήθεια του λήμματος του Ito θα καταλήξουμε στην μερική διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton για τις τιμές των παραγώγων. Τέλος, θα κατασκευάσουμε την φόρμουλα Black-Scholes για τον υπολογισμό της τιμής των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης.

2.2.1 Χτίζοντας το μοντέλο

Υποθέτουμε ότι η αναμενόμενη απόδοση της τιμής του υποκείμενου τίτλου παραμένει σταθερή και είναι ίση με τον αριθμό μ. Δηλαδή :

$$\frac{1}{\varDelta\tau}E\left[\frac{S(t+\varDelta\tau)-S(t)}{S(t)}\right]=\mu \qquad \mathbf{(2.2.1)}$$

Αυτό σημαίνει ότι κατά μέσο όρο ισχύει ότι:

$$\frac{S(t+\Delta\tau)-S(t)}{S(t)} = \mu\Delta\tau \Leftrightarrow \Delta S(t) = \mu S(t)\Delta \quad ,\forall \ t>0 \ \kappa\alpha\iota \ \delta\acute{\iota}\alpha\sigma\tau\eta\mu\alpha \ \chi\rho\acute{o}\nu o\upsilon \ \Delta\tau \quad (\mathbf{2.2.2})$$

Για Δτ→dt έχουμε :

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt \Leftrightarrow dS(t) = \mu S(t)dt \qquad (\mathbf{2.2.3})$$

Του οποίου λύση αποτελεί το:

$$S(t) = S(0)e^{\mu t} \qquad (\mathbf{2.2.4})$$

Όμως στην πραγματικότητα οι τιμές των υποκείμενων τίτλων παρουσιάζουν μεταβλητότητα. Έτσι, η (2.2.2) θα γίνει:

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} = \mu\Delta\tau + \sigma\varepsilon_t\sqrt{\Delta\tau} \qquad ,\acute{o}\pi o\upsilon \ \varepsilon_t \sim N(0,1) \qquad (\mathbf{2.2.5})$$

Κανονική κατανομή όμως ακολουθεί και το πηλίκο $\frac{\Delta S(t)}{S(t)}$ ως γραμμικός συνδυασμός μεταβλητής που ακολουθεί κανονική κατανομή. Με άλλα λόγια:

$$\frac{\Delta S(t)}{S(t)} \sim N(\mu\Delta\tau, \sigma^2\Delta\tau)$$

Αυτό σημαίνει ότι το μοντέλο υποθέτει ότι η διακύμανση της μετοχής ανά μονάδα χρόνου είναι σταθερή και ίση με σ^2. Η παράμετρος σ καλείται μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Συγκεκριμένα:

$$\frac{1}{\Delta\tau} Var\left[\frac{S(t+\Delta\tau)-S(t)}{S(t)}\right] = \sigma^2$$

Επομένως, όπως αναφέραμε και προηγουμένως, λόγω της ύπαρξης μεταβλητότητας η εξίσωση (2.2.2) γίνεται:

$$\Delta S(t) = \mu S(t)\Delta\tau + \sigma S(t)\varepsilon_t\sqrt{\Delta\tau} \qquad (\mathbf{2.2.6})$$

Θεωρώντας ότι οι αλλαγές της τιμής γίνονται συνεχώς στον χρόνο, δηλαδή το Δτ είναι πολύ μικρό, καταλήγουμε στην υπόθεση ότι Δτ→dt. Τότε η εξίσωση (2.2.6) γίνεται:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dz(t) \qquad (\mathbf{2.2.7})$$

$$\textit{όπου } dt \textit{ πολύ μικρή μεταβολή του χρόνου και } z(t) \sim N(0, dt)$$

Η εξίσωση (2.2.7) αποτελεί το γνωστό Black-Scholes(-Merton-Samuelson) μοντέλο για την τιμολόγηση ενός υποκείμενου τίτλου όταν αυτό δεν δίνει μέρισμα. Λύση της (2.2.7) με την βοήθεια του λήμματος του Ito αποτελεί η:

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma z(t)}$$

Η παραπάνω εξίσωση ονομάζεται Γεωμετρική Κίνηση Brown (GBM).

2.2.2 Το λήμμα του Ito

Η τιμή ενός δικαιώματος ενός υποκείμενου τίτλου είναι μία συνάρτηση της τιμής του τίτλου αυτού και του χρόνου. Δηλαδή, η τιμή ενός παραγώγου είναι μία συνάρτηση του χρόνου και στοχαστικών μεταβλητών του παραγώγου. Απαιτείται λοιπόν να μπορούμε να κατανοήσουμε την συμπεριφορά των συναρτήσεων των στοχαστικών αυτών μεταβλητών. Τον δρόμο προς την κατανόηση της συμπεριφοράς αυτής άνοιξε ο μαθηματικός Kiyosi Itô το 1951. Η λύση που έδωσε έγινε γνωστή ως Ito 's lemma. Υποθέτουμε λοιπόν ότι η τιμή ενός παραγώγου περιγράφεται από την συνάρτηση C(S(t),t), όπου S(t) η τιμή του υποκείμενου τίτλου την χρονική στιγμή t. Αν η τιμή του παραγώγου είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και ακολουθεί μία διαδικασία Ito και η τιμή του υποκείμενου τίτλου ακολουθεί την (2.2.7), τότε:

$$dC(S(t), t) = \left(\mu S(t)\frac{\partial C}{\partial S} + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S(t)\left(\frac{\partial C}{\partial S}\right)dz(t) \qquad (\mathbf{2.2.8})$$

2.2.3 Η μερική διαφορική εξίσωση Black-Scholes-Merton

Υπενθυμίζουμε ότι στόχος του μοντέλου Black-Scholes είναι η κατασκευή ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται από ένα πλήθος μετοχών Δ(t) και από ένα κεφάλαιο B(t) επενδυμένο σε επιτόκιο μηδενικού κινδύνου, ικανό να αντισταθμίσει τον κίνδυνο. Η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού $\forall t$ πρέπει να είναι ίση με την τιμή του παραγώγου C(S(t),t). Συνεπώς:

$$\Delta(t)S(t) + B(t) = C(S(t),t) \qquad \mathbf{(2.2.9)}$$

Από τις εξισώσεις (2.2.3) και (2.2.4) αποδεικνύεται ότι : $dB(t) = rB(t)dt$

Οι μεταβολές του χαρτοφυλακίου για πολύ μικρές χρονικές περιόδους δίνουν:

$$\Delta(t)dS(t) + rB(t)dt = dC(S(t),t) \qquad \mathbf{(2.2.10)}$$

Εφαρμόζοντας το λήμμα του Ito για το 2ο μέλος της (2.2.10) προκύπτει η:

$$\Delta(t)dS(t) + rB(t)dt = \frac{\partial C}{\partial S}dS(t) + \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\sigma^2 S^2(t)\right)dt \qquad \mathbf{(2.2.11)}$$

Μέσω της εξίσωσης (2.2.9) αποδεικνύεται ότι λύσεις της (2.2.11) είναι οι:

$$\Delta(t) = \frac{\partial C}{\partial S} \quad \kappa\alpha\iota \quad B(t) = C(t) - \frac{\partial C}{\partial S}S(t)$$

Τις οποίες αν αντικαταστήσουμε στην (2.2.11) καταλήγουμε στην μερική διαφορική εξίσωση των Black-Scholes-Merton:

$$rC(t) = rS(t)\frac{\partial C}{\partial S}(t) + \frac{\partial C}{\partial t}(t) + \frac{\sigma^2 S^2(t)}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t) \qquad \mathbf{(2.2.12)}$$

2.2.4 Η φόρμουλα Black-Scholes

Οι Black και Scholes υποθέτοντας Γεωμετρική Κίνηση Brown για την τιμή των μετοχών κατέληξαν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μόνο μία εξίσωση που να ικανοποιεί την μερική διαφορική εξίσωση (2.2.12), υποκείμενη στην οριακή συνθήκη ενός δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου.

Η εξίσωση κλειστής μορφής που προκύπτει για την αποτίμηση του δικαιώματος αγοράς ευρωπαϊκού τύπου είναι η εξής:

$$c(t) = S(t)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad \mathbf{(2.2.13)}$$

Ενώ χρησιμοποιώντας την αρχή της ισότητας των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης προκύπτει ότι για την αποτίμηση του δικαιώματος πώλησης, η εξίσωση κλειστής μορφής είναι η εξής:

$$p(t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S(t)N(-d_1) \qquad \mathbf{(2.2.14)}$$

Όπου: **N( )** είναι η τυποποιημένη κανονική κατανομή

S(t) είναι η τιμή του υποκείμενου τίτλου την χρονική στιγμή t

K είναι η τιμή εξάσκησης

r είναι το συνεχώς ανατοκιζόμενο επιτόκιο (επιτόκιο μηδενικού κινδύνου καθώς έχουμε υποθέσει εκτίμηση παραγώγων στον κόσμο ουδέτερου κινδύνου)

σ είναι η μεταβλητότητα της τιμής του υποκείμενου τίτλου

t είναι ο χρόνος

T ο χρόνος μέχρι την λήξη του δικαιώματος

$$\boldsymbol{d_1} = \frac{ln\left(\frac{S(t)}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\boldsymbol{d_2} = \frac{ln\left(\frac{S(t)}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

2.3 Συντελεστές ευαισθησίας (Greeks)

Οι συντελεστές ευαισθησίας αποτελούν για πολλούς ‘δείκτη’ ευαισθησίας των δικαιωμάτων καθώς και ένα μέτρο αξιολόγησης τους. Με άλλα λόγια, οι συντελεστές ευαισθησίας, όπως ενδεικτικά αναφέρει και ο Hull (2009), μετρούν μία διαφορετική διάσταση του κινδύνου που συνεπάγεται σε ένα δικαίωμα προαίρεσης ανάλογα με την υποκείμενη μεταβλητή που εξετάζουμε. Τέτοιες μεταβλητές μπορεί να είναι η τιμή του δικαιώματος, η υποκείμενη μεταβλητότητα και ο χρόνος μέχρι την λήξη. Οι σημαντικότεροι συντελεστές ευαισθησίας είναι οι Δέλτα(Delta), Θήτα(Theta), Γάμα (Gamma) και Βέγκα(Vega). (πηγή: https://www.investopedia.com/university/options-pricing/greeks.asp)

2.3.1 Δέλτα

Το Δέλτα αποτελεί τον πιο γνωστό συντελεστή ευαισθησίας. Συγκεκριμένα, μετράει την ευαισθησία της τιμής ενός δικαιώματος σε σχέση με αλλαγές στην τιμή του υποκείμενου τίτλου, υποθέτοντας ότι οι υπόλοιπες μεταβλητές παραμένουν σταθερές. Μάλιστα, το Δέλτα χρησιμοποιείται και ως ένα μέσο αντιστάθμισης του κινδύνου το λεγόμενο Delta-hedging, σύμφωνα με το οποίο ο επενδυτής μπορεί να αγοράσει ή να πουλήσει Δ(t) κομμάτια του υποκείμενου τίτλου με σκοπό να ελαχιστοποιήσει την έκθεση του στον κίνδυνο.

$$\Delta(t) = \frac{\partial c}{\partial S}(t) = N(d_1) \qquad \mathbf{(2.3.1)}$$

$$\text{όπου } c(t) \text{ η τιμή του call option και } d_1 \text{ δίνεται παραπάνω.}$$

Η αξία του είναι αριθμητική και κυμαίνεται από 0 έως 1 για τα δικαιώματα αγοράς και από 0 έως -1 για τα δικαιώματα πώλησης.

2.3.2 Θήτα

Το Θήτα ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι ο ρυθμός μεταβολής της αξίας του δικαιώματος σε σχέση με τον χρόνο, υποθέτοντας ότι οι υπόλοιπες μεταβλητές παραμένουν σταθερές. Αξιοσημείωτο είναι ότι το Θήτα αυξάνεται όταν το δικαίωμα είναι ATM[9] (at the money) ενώ μειώνεται όταν είναι ITM[10] (in the money) και OTM[11] (out of the money). Πιο συγκεκριμένα, οι ανοιχτές θέσεις αγοράς για δικαιώματα αγοράς και πώλησης συνήθως έχουν αρνητικό Θήτα ενώ οι ανοιχτές θέσεις πώλησης για δικαιώματα αγοράς και πώλησης έχουν θετικό Θήτα. Το Θήτα περιγράφεται από τους παρακάτω τύπους:

Για το δικαίωμα αγοράς:

$$\Theta(call) = \frac{\partial c}{\partial t}(0) = -\frac{S(0)N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-rT}N(d_2) \qquad (\mathbf{2.3.2})$$

Για το δικαίωμα πώλησης:

$$\Theta(put) = \frac{\partial p}{\partial t}(0) = -\frac{S(0)N'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} + rKe^{-rT}N(-d_2) \qquad (\mathbf{2.3.3})$$

$όπου\ d_1, d_2\ δίνονται\ παραπάνω\ και\ N'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

$αποτελεί\ την\ συνάρτηση\ πυκνότητας\ πιθανότητας\ της\ κατανομής\ N(0,1)$

2.3.3 Γάμα

Το Γάμα μετράει την ευαισθησία του Δέλτα στις μεταβολές της τιμής του υποκείμενου τίτλου. Ουσιαστικά, το Γάμα χρησιμοποιείται για να δείξει την σταθερότητα του Δέλτα. Για παράδειγμα, αν το Γάμα είναι πολύ μεγάλο τότε αυτό σημαίνει ότι ακόμα και για πολύ μικρές μεταβολές στην τιμή του υποκείμενου τίτλου, το Δέλτα θα μεταβληθεί δραματικά. Υπολογίζεται από τον παρακάτω τύπο:

$$\Gamma(call) = \frac{\partial^2 c}{\partial S^2} = \frac{N'(d_1)}{S(0)\sigma\sqrt{T}} = \Gamma(put) \qquad (\mathbf{2.3.4})$$

$όπου\ \Gamma(call) = \Gamma(put) αποδεικνύεται\ από\ το\ put - call\ parity$

2.3.4 Βέγκα

Το Βέγκα, μετράει την ευαισθησία ενός δικαιώματος προαίρεσης στις διακυμάνσεις της μεταβλητότητας και αντικατοπτρίζει την μεταβολή της τιμής του δικαιώματος για κάθε 1% μεταβολή στην μεταβλητότητα. Μάλιστα, όσο περισσότερος ο χρόνος μέχρι την λήξη, τόσο πιο επιρρεπής η τιμή του δικαιώματος σε διακυμάνσεις της μεταβλητότητας.

$$V(call) = \frac{\partial c}{\partial \sigma}(0) = S(0)\sqrt{T}N'(d_1) = V(put) \qquad (\mathbf{2.3.5})$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ BLACK-SCHOLES ΥΠΟ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΜΕΡΙΣΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΟΣΗ

3.1 Οι δυσκολίες στην τιμολόγηση

Όσον αφορά την τιμολόγηση παραγώγων όταν ο υποκείμενος τίτλος δίνει μέρισμα, υποθέτουμε ότι γνωρίζουμε το ποσό του μερίσματος εκ των προτέρων. Όμως, έρευνες γύρω από την πρόβλεψη της απόδοσης του υποκείμενου τίτλου οδηγούν στο συμπέρασμα ότι η παραπάνω υπόθεση πρέπει να αναθεωρηθεί καθώς οι έρευνες ανέδειξαν την μεγάλη σημασία και επίδραση του μερίσματος στην απόδοση του υποκείμενου τίτλου σε βάθος χρόνου. Με άλλα λόγια, ένα διαφορετικό μέρισμα από αυτό που αρχικά είχε εκτιμηθεί ότι θα δώσει ένας υποκείμενος τίτλος, οδηγεί σε διαφοροποιήσεις στην απόδοσή του. Συγκεκριμένα, κάποιοι από αυτούς που ασχολήθηκαν με την απόδοση των υποκείμενων τίτλων υπό στοχαστική μερισματική απόδοση ήταν ο Schroder (1999), οι Broadie, Detemple, και Torres (2000) και οι Chance, Kumar και Rich (2002) των οποίων όμως οι έρευνες δεν επικεντρώθηκαν τόσο στην τιμολόγηση, όσο στην εύρεση λύσεων στο πρόβλημα που προκύπτει στην τιμολόγηση των παραγώγων όταν αυτά είναι υπό στοχαστική μερισματική απόδοση. Κοινός παρονομαστής των ερευνών που προαναφέραμε αποτέλεσε το επίπεδο δυσκολίας της τιμολόγησης παραγώγων όταν ο υποκείμενος τίτλος δίνει μέρισμα. Αξιοσημείωτο είναι δε, το γεγονός ότι τροχοπέδη στις έρευνες των προαναφερθέντων ήταν οι μη πλήρεις αγορές[12]. Ως αποτέλεσμα η υπόθεση πλήρων αγορών για την διεκπεραίωση των ερευνών ήταν απαραίτητη. Παρόλα αυτά, ακόμα και όταν υποθέτουμε πλήρεις αγορές, η τιμολόγηση παραγώγων υπό στοχαστική μερισματική απόδοση αποτελεί πρόκληση.

Στην συνέχεια του κεφαλαίου, θα αναλύσουμε την φόρμουλα Black-Scholes που τιμολογεί Ευρωπαϊκού τύπου δικαιώματα αγοράς και πώλησης τα οποία δίνουν στοχαστική μερισματική απόδοση υπό την υπόθεση του αντεστραμμένου μέσου[13] των στοχαστικών τιμών της αγοραίας τιμής του κινδύνου[14]. Επιπρόσθετα, θα παραθέσουμε αναλυτικές εξισώσεις και για τους συντελεστές ευαισθησίας των δικαιωμάτων. Όπως θα αποδειχθεί στην συνέχεια του κεφαλαίου, η στοχαστική μερισματική απόδοση δεν συνεπάγεται κάποιο νέο είδος κινδύνου, συνεπώς η αντιστάθμιση του μερισματικού κινδύνου μπορεί να επιτευχθεί μέσω της συναλλαγής των υποκείμενων τίτλων. Παράλληλα, αποδεικνύεται ότι οι αγοραίες τιμές του κινδύνου αποτελούν μία σημαντική μεταβλητή στην προσπάθεια καθορισμού της τιμής του παραγώγου. Όμως, όταν οι τιμές αυτές δεν διευκρινίζονται, τότε η υπόθεση των πλήρων αγορών δεν είναι επιτυχημένη. Για παράδειγμα, στον υπολογισμό της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς με το μοντέλο Black-Scholes-Merton, η αγοραία τιμή του κινδύνου δεν υπολογίζεται στην τιμή του δικαιώματος. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι τα παράγωγα παρέχουν στον αγοραστή χρηματική εισροή στην λήξη, η οποία αποτελεί συνάρτηση των προ-μερίσματος τιμών του υποκείμενου τίτλου στην λήξη. Η παρούσα αξία των τιμών αυτών ουσιαστικά δίνει στον αγοραστή ένα σύνολο μερισμάτων σε μία συγκεκριμένη ημερομηνία συν την προ-μερίσματος τιμή στην ημερομηνία αυτή.

Κάποια από τα πιο σημαντικά χαρακτηριστικά της Black-Scholes-Merton εξίσωσης για το Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς είναι:

1) Δικαίωμα Δέλτα: Ο αριθμός μονάδων του υποκείμενου τίτλου που είναι απαραίτητες για να πραγματοποιηθεί αντιστάθμιση κινδύνου είναι θετικός και μικρότερος του 1.
2) Η συνάρτηση της τιμής του δικαιώματος είναι μια αύξουσα συνάρτηση της υποκείμενης μεταβλητότητας.

Τα παραπάνω χαρακτηριστικά παύουν να ισχύουν όταν το μέρισμα είναι στοχαστικό. Στην περίπτωση αυτή, η τιμή του δικαιώματος αγοράς είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της υποκείμενης μεταβλητότητας και το δέλτα μπορεί να είναι αρνητικό. Για την αξιολόγηση των παραπάνω έχουν πραγματοποιηθεί πολλές προσομοιώσεις, κάποιες από τις οποίες οδήγησαν στο συμπέρασμα ότι η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς μπορεί να είναι μικρότερη από την εσωτερική αξία την ημερομηνία πριν δοθεί το μέρισμα. Όμως, ο Lioui (2006) απέδειξε ότι για λογικές τιμές των παραμέτρων των δυναμικών του υποκείμενου τίτλου και υπό στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου, η τιμή του δικαιώματος αγοράς δεν πέφτει ποτέ κάτω από την εσωτερική αξία όταν ο υποκείμενος τίτλος δίνει στοχαστικό μέρισμα. Τέλος, μέσα από την έρευνα του κατέληξε στο συμπέρασμα ότι στην περίπτωση των αγαθών (εκτενέστερη ανάλυση για τα παράγωγα των αγαθών έγινε από τον Korn το 2005) τα οποία υπόκεινται σε στοχαστική απόδοση διευκόλυνσης, η υπόθεση της αγοραίας τιμής για τον κίνδυνο να είναι σταθερή ή καθορισμένη, έχει πολύ σημαντική επίδραση στα αποτελέσματα της έρευνας τόσο ποσοτικά όσο και ποιοτικά.

3.2 Υποθέσεις της χρηματοοικονομικής αγοράς

Υποθέτουμε μία χρηματοοικονομική αγορά χωρίς την δυνατότητα arbitrage, στην οποία οι συναλλαγές γίνονται συνεχώς μέχρι την χρονική στιγμή τ, όπου τ αποτελεί τον οικονομικό ορίζοντα. Θεωρούμε το $Z(t)$ το οποίο αποτελεί μονοδιάστατη μη συσχετισμένη κίνηση Brown ορισμένη σε έναν ολοκληρωμένο χώρο πιθανοτήτων (Ω, F, P) όπου Ω είναι ο δειγματικός χώρος, F η σ-άλγεβρα που αναπαριστά μετρήσιμα γεγονότα και P η μέτρηση των ιστορικών πιθανοτήτων. Επίσης, υποθέτουμε ότι όλες οι στοχαστικές ανελίξεις είναι προσαρμοσμένες σε προσαυξημένη διήθηση[15] που προκύπτει από την κίνηση Brown. Η διήθηση αυτή συμβολίζεται με F τέτοιο ώστε $F \equiv \{F_t\}_{t\in[0,\tau]}$ και υποθέτουμε ότι ικανοποιεί τις γνωστές συνθήκες.

Υποθέτουμε μία μετοχή η οποία συναλλάσσεται και αποδίδει συνεχές στοχαστικό μέρισμα δ(t). Η ανέλιξη της τιμής της, υποθέτουμε ότι λύνει την ακόλουθη διαφορική εξίσωση:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \Big(\mu_s\big(t, S(t), \delta(t)\big) - \delta(t)\Big)dt + \sigma_S dZ(t) \qquad \mathbf{(3.2.1)}$$

$\acute{o}\pi o \upsilon\ S(0) > 0,\ \mu_s\big(t, S(t), \delta(t)\big)\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \eta\ \sigma\upsilon\nu o\lambda\iota\kappa\acute{\eta}\ \alpha\pi\acute{o}\delta o\sigma\eta\ \tau\eta\varsigma\ \mu\varepsilon\tau o\chi\acute{\eta}\varsigma(\mu\acute{\varepsilon}\rho\iota\sigma\mu\alpha +$
$\kappa\varepsilon\varphi\alpha\lambda\alpha\iota\alpha\kappa\acute{\eta}\ \alpha\xi\acute{\iota}\alpha,\ \sigma_S\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \mu\iota\alpha\ \theta\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{\eta}\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\alpha}$

Οι παράμετροι της (3.2.1) υποθέτουμε ότι ικανοποιούν σχετικές συνθήκες τέτοιες ώστε η (3.2.1) να έχει μία μοναδική λύση.

Επειδή η αγορά πρέπει να είναι πλήρης ακόμα και υπό στοχαστική μερισματική απόδοση, η ανέλιξη της μερισματικής απόδοσης πρέπει να εξαρτάται από τις υπάρχουσες πηγές αβεβαιότητας. Έτσι υποθέτουμε ότι η ανέλιξη της μερισματικής απόδοσης αποτελεί λύση της:

$$d\delta(t) = \theta_\delta\big(\mu_\delta - \delta(t)\big)dt + \sigma_\delta dZ(t) \qquad \mathbf{(3.2.2)}$$

$$\acute{o}\pi o\upsilon\ \delta(0) = 0 \quad \kappa\alpha\iota\ \mu_\delta, \sigma_\delta\ \sigma\tau\alpha\theta\varepsilon\rho\acute{\varepsilon}\varsigma$$

Η στοχαστική μερισματική απόδοση ακολουθεί μια στοχαστική ανέλιξη αντεστραμμένου μέσου, η οποία αντικατοπτρίζει τα χαρακτηριστικά των μερισματικών ανελίξεων. Μία πιθανή προέλευση του αντεστραμμένου μέσου στην μερισματική απόδοση είναι η αντιστροφή του μέσου που παρατηρείται ευρέως στις αποδόσεις, στις τιμές αλλά και στα ταμειακά διαθέσιμα ενός υποκείμενου τίτλου. Εκτενέστερη έρευνα και αναφορά στο φαινόμενο αυτό έχει πραγματοποιηθεί από τους Lettau και Ludvigson (2002) και τους Cadenillas, Sakar και Zapatero (2006).

Παρόλο που οι εταιρείες προσπαθούν να εξομαλύνουν τα μερίσματα, οι μερισματικές αποδόσεις εξαρτώνται από την συμπεριφορά των τιμών του υποκείμενου τίτλου και από άλλες μεταβλητές όπως τα ταμειακά διαθέσιμα της εταιρείας. Μία πιθανή προέλευση της αντιστροφής του μέσου σε μερισματική απόδοση πιθανόν αποτελεί η αντιστροφή του μέσου των κερδών, των τιμών και των ταμειακών διαθεσίμων τα οποία έχουν παρατηρηθεί και καταγραφεί ευρέως.

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι μπορούμε να καταλήξουμε σε 2 περιπτώσεις όσον αφορά την αγοραία τιμή του κινδύνου.

Στην πρώτη περίπτωση η αγοραία τιμή του κινδύνου σε μία τέτοια χρηματοοικονομική αγορά είναι σταθερή και ίση με:

$$\kappa(t) = \frac{\mu_s\big(t, S(t)\big) - r}{\sigma_s} \qquad (\mathbf{3.2.3})$$

Στην δεύτερη περίπτωση, υποθέτουμε ότι η αγοραία τιμή του κινδύνου ακολουθεί μία στοχαστική ανέλιξη αντεστραμμένου μέσου, είναι συσχετισμένη με κάθε βασική πηγή κινδύνου και αποτελεί λύση της ακόλουθης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (ΣΔΕ από εδώ και πέρα) :

$$d\kappa(t) = \theta_\kappa\big(\mu_\kappa - \kappa(t)\big)dt + \sigma_\kappa dZ(t) \qquad (\mathbf{3.2.4})$$

$$\text{όπου } \theta_\kappa, \mu_\kappa, \sigma_\kappa \text{ θετικές σταθερές}$$

Η ΣΔΕ (3.2.4) επιτρέπει την μεταβλητότητα του χρόνου στην αγοραία τιμή του κινδύνου, το οποίο είναι απαραίτητο στα μοντέλα τιμολόγησης των υποκείμενων τίτλων, προκειμένου να αποδώσει τα εμπειρικά χαρακτηριστικά των τιμών του υποκείμενου τίτλου. Μία υπόθεση για να μας διευκολύνει είναι ότι οι αγοραίες τιμές του κινδύνου είναι ασυσχέτιστες. Επιπρόσθετα, πέρα από την μετοχή, μπορεί να συναλλαχθεί έναν ακίνδυνο υποκείμενο τίτλο ο οποίος θα αποδίδει ένα στιγμιαίο επιτόκιο r, και έναν επικίνδυνο υποκείμενο τίτλο τέτοιος ώστε η αγορά να είναι πλήρης.

3.3 Τιμολόγηση δικαιωμάτων υπό στοχαστική μερισματική απόδοση όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή

3.3.1 Δικαίωμα αγοράς

Θεωρούμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς για μία μετοχή με τιμή S(t) στον χρόνο t, χρόνο μέχρι την λήξη T και τιμή εξάσκησης K. Η τιμή του την χρονική στιγμή t δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$C(t) = S(t)e^{\left\{-\Delta(t,T) - \frac{1}{2}\left(\sigma_S^2(T-t) - \Sigma(t,T)^2\right)\right\}}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad (\mathbf{3.3.1})$$

όπου: $\hat{\theta}_\delta = \theta_\delta$

$\hat{\mu}_\delta = \mu_\delta - \frac{\sigma_\delta}{\theta_\delta}\kappa$

$$d_1 = \frac{1}{\Sigma(t,T)}\left(ln\frac{S(t)}{K} + \left(r - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)(T-t) + \Sigma(t,T)^2 - \Delta(t,T)\right)$$

$$d_2 = d_1 - \Sigma(t,T)$$

$$\Delta(t,T) = \frac{1}{\hat{\theta}_\delta}\left(1 - e^{-\hat{\theta}_\delta(T-t)}\right)\delta(t) + \hat{\mu}_\delta\left((T-t) - \frac{1}{\hat{\theta}_\delta}\left(1 - e^{-\hat{\theta}_\delta(T-t)}\right)\right) \qquad (\mathbf{3.3.2})$$

$$\Sigma(t,T)^2 = \sigma_S^2(T-t) - 2\sigma_s\frac{\sigma_\delta}{\hat{\theta}_\delta}\left((T-t) - \frac{1}{\hat{\theta}_\delta}\left(1 - e^{-\hat{\theta}_\delta(T-t)}\right)\right) + \frac{\sigma_\delta^2}{\hat{\theta}_\delta^2}\left((T-t) - \frac{2}{\hat{\theta}_\delta}\left(1 - e^{-\hat{\theta}_\delta(T-t)}\right) + \frac{1}{\hat{\theta}_\delta}\left(1 - e^{-2\hat{\theta}_\delta(T-t)}\right)\right) \qquad (\mathbf{3.3.3})$$

Αξιοσημείωτο χαρακτηριστικό της εξίσωσης (3.3.1) σε σύγκριση με την (2.2.13) είναι η παρουσία της αγοραίας τιμής του κινδύνου. Στο Black-Scholes μοντέλο, μία τέτοια ανέλιξη δεν εμφανίζεται. Υποθετικά, αν οι πλήρεις αγορές αποτελούσαν την κινητήριο δύναμη για την τιμολόγηση παραγώγων, θα ήταν διότι οι αγοραίες τιμές των πηγών του κινδύνου στην οικονομία δεν χρειάζεται να είναι καθορισμένες για να τιμολογηθούν ενδεχόμενες απαιτήσεις. Ένα τέτοιο χαρακτηριστικό αιτιολογήθηκε αργότερα από την martingale[16] προσέγγιση της τιμολόγησης ενδεχόμενων απαιτήσεων. Πράγματι, η martingale προσέγγιση έδειξε ότι οι τιμές των αρχικών υποκείμενων τίτλων που δίνονται είναι φειδωλές. Υπό στοχαστική μερισματική ανάλυση, όλες οι τιμές των ενδεχόμενων απαιτήσεων χρειάζονται διευκρίνιση όσον αφορά τα δυναμικά των τιμών του κινδύνου για να μπορέσουν να υπολογιστούν ακόμα και όταν οι αγορές είναι πλήρεις. Η λογική πίσω από αυτό το αποτέλεσμα βασίζεται στο γεγονός ότι το τελικό αποτέλεσμα (payoff) του δικαιώματος είναι μια κυρτή συνάρτηση της προ-μερίσματος αξίας του υποκείμενου τίτλου του οποίου η παρούσα αξία είναι άγνωστη. Στο Black-Scholes μοντέλο, η σχετική μεταβλητότητα είναι η μεταβλητότητα των σχετικών αλλαγών του υποκείμενου τίτλου μέχρι την λήξη του δικαιώματος. Στην περίπτωση των στοχαστικών μερισμάτων, η σχετική μεταβλητότητα είναι η μεταβλητότητα των σχετικών αλλαγών στον υποκείμενο τίτλο μέχρι την λήξη η οποία έχει διορθωθεί με γνώμονα την μεταβλητότητα της μερισματικής απόδοσης και της αγοραίας τιμής του κινδύνου. Αυτό εμφανίζεται στην (3.3.1) μέσα από τον όρο : $\Sigma(t,T)^2$.

3.3.2 Δικαίωμα πώλησης

Θεωρούμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα πώλησης για μία μετοχή με τιμή S(t) στον χρόνο t, χρόνο μέχρι την λήξη T και τιμή εξάσκησης K. Η τιμή του δικαιώματος πώλησης την χρονική στιγμή t και η σχέση της με την τιμή του δικαιώματος αγοράς για την χρονική στιγμή t καθώς και η ισότητα δικαιώματος πώλησης-δικαιώματος αγοράς δίνονται από τους τύπους που ακολουθούν.

Η ισότητα δικαιώματος πώλησης-δικαιώματος αγοράς ανάμεσα σε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς και πώλησης είναι:

$$C(t) - P(t) = S(t)e^{\left\{-\Delta(t,T)-\frac{1}{2}\left(\sigma_S^2(T-t)-\Sigma(t,T)^2\right)\right\}} - e^{-r(T-t)}K \qquad (\mathbf{3.3.4})$$

Έτσι η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος πώλησης είναι:

$$P(t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S(t)e^{\left\{-\Delta(t,T)-\frac{1}{2}\left(\sigma_S^2(T-t)-\Sigma(t,T)^2\right)\right\}}N(-d_1) \qquad (\mathbf{3.3.5})$$

Η τιμή του δικαιώματος πώλησης παρουσιάζει χαρακτηριστικά παρόμοια με αυτά του δικαιώματος αγοράς. Επιπλέον, οι στοχαστικές μερισματικές αποδόσεις έχουν μεγάλες συνέπειες στην ισότητα δικαιώματος πώλησης-δικαιώματος αγοράς, γεγονός το οποίο αποτελεί σημαντικό εργαλείο στην προσπάθεια μας να αξιολογήσουμε την σημαντικότητα των τριβών της αγοράς και ειδικότερα για τους περιορισμούς των ανοιχτών πωλήσεων μετοχών μέσω των τιμών των δικαιωμάτων. Εκτενέστερες αναφορές για τους περιορισμούς αυτούς γίνονται από τους Lamont και Thaler (2003), Ofek, Richardson και Whitelaw (2004) και από τους Evans, Geezy, Musto και Reed (2008)

3.4 Τιμολόγηση δικαιωμάτων υπό στοχαστική μερισματική απόδοση όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική

3.4.1 Δικαίωμα αγοράς

Θεωρούμε ένα Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς για μία μετοχή με τιμή S(t) στον χρόνο t, χρόνο μέχρι την λήξη T και τιμή εξάσκησης K. Η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική (3.2.4). Η τιμή του την χρονική στιγμή t δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$C(t) = S(t)e^{\left\{-\Delta(t,T)-\frac{1}{2}\left(\sigma_S^2(T-t)-\Sigma(t,T)^2\right)\right\}}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \qquad (\mathbf{3.4.1})$$

όπου: $d_1 = \frac{1}{\Sigma(t,T)}\left(ln\frac{S(t)}{K} + \left(r - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)(T-t) + \Sigma(t,T)^2 - \Delta(t,T)\right)$

$d_2 = d_1 - \Sigma(t,T)$

$\bar{\theta}_\kappa = \theta_\kappa(1 + \sigma_\kappa)$

$$\bar{\mu}_\kappa = \frac{\mu_\kappa}{1+\sigma_\kappa}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(t,T) &= \frac{1}{\theta_\delta}\left(1-e^{-\theta_\delta(T-t)}\right)\delta(t) \\
&+ \frac{\sigma_\delta}{\theta_\delta}\left(\frac{1}{\theta_\delta-\bar{\theta}_\kappa}\left(e^{-\theta_\delta(T-t)}-e^{-\bar{\theta}_\kappa(T-t)}\right)-\frac{1}{\bar{\theta}_\kappa}\left(1-e^{-\bar{\theta}_\kappa(T-t)}\right)\right)\kappa(t) \\
&+ \mu_\delta(T-t)-\frac{1}{\theta_\delta}\mu_\delta\left(1-e^{-\theta_\delta(T-t)}\right) \\
&+ \frac{\sigma_\delta}{\theta_\delta}\bar{\mu}_\kappa\left(\frac{1}{\theta_\delta-\bar{\theta}_\kappa}\left(\frac{\bar{\theta}_\kappa}{\theta_\delta}\left(1-e^{-\theta_\delta(T-t)}\right)-\left(1-e^{-\bar{\theta}_\kappa(T-t)}\right)\right)-(T-t)\right. \\
&\left.+\frac{1}{\bar{\theta}_\kappa}\left(1-e^{-\bar{\theta}_\kappa(T-t)}\right)\right) \qquad \mathbf{(3.4.2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Sigma(t,T)^2 &= \left(\sigma_s-\frac{\sigma_\delta}{\theta_\delta}+\frac{\sigma_\delta\sigma_\kappa}{\theta_\delta\bar{\theta}_\kappa}\right)^2(T-t)+\left(\frac{\sigma_\delta}{\theta_\delta}-\frac{\sigma_\delta\sigma_\kappa}{\theta_\delta(\theta_\delta-\bar{\theta}_\kappa)}\right)^2\frac{1}{2\theta_\delta}\left(1-e^{-2\theta_\delta(T-t)}\right) \\
&+\left(\frac{\sigma_\delta\sigma_\kappa}{\theta_\delta(\theta_\delta-\bar{\theta}_\kappa)}-\frac{\sigma_\delta\sigma_\kappa}{\theta_\delta\bar{\theta}_\kappa}\right)^2\frac{1}{2\bar{\theta}_\kappa}\left(1-e^{-2\bar{\theta}_\kappa(T-t)}\right) \\
&+2\left(\sigma_s-\frac{\sigma_\delta}{\theta_\delta}+\frac{\sigma_\delta\sigma_\kappa}{\theta_\delta\bar{\theta}_\kappa}\right)\left(\frac{\sigma_\delta}{\theta_\delta}-\frac{\sigma_\delta\sigma_\kappa}{\theta_\delta(\theta_\delta-\bar{\theta}_\kappa)}\right)\frac{1}{\theta_\delta}\left(1-e^{-\theta_\delta(T-t)}\right) \\
&+2\left(\sigma_s-\frac{\sigma_\delta}{\theta_\delta}+\frac{\sigma_\delta\sigma_\kappa}{\theta_\delta\bar{\theta}_\kappa}\right)\left(\frac{\sigma_\delta\sigma_\kappa}{\theta_\delta(\theta_\delta-\bar{\theta}_\kappa)}-\frac{\sigma_\delta\sigma_\kappa}{\theta_\delta\bar{\theta}_\kappa}\right)\frac{1}{\bar{\theta}_\kappa}\left(1-e^{-\bar{\theta}_\kappa(T-t)}\right) \\
&+2\left(\frac{\sigma_\delta}{\theta_\delta}-\frac{\sigma_\delta\sigma_\kappa}{\theta_\delta(\theta_\delta-\bar{\theta}_\kappa)}\right)\left(\frac{\sigma_\delta\sigma_\kappa}{\theta_\delta(\theta_\delta-\bar{\theta}_\kappa)}-\frac{\sigma_\delta\sigma_\kappa}{\theta_\delta\bar{\theta}_\kappa}\right)\frac{1}{\theta_\delta+\bar{\theta}_\kappa} \\
&\left(1-e^{-(\theta_\delta+\bar{\theta}_\kappa)(T-t)}\right) \qquad \mathbf{(3.4.3)}
\end{aligned}$$

3.4.2 Δικαίωμα πώλησης

Τόσο ο τύπος για την ισότητα δικαιώματος αγοράς-δικαιώματος πώλησης όσο και ο τύπος για το δικαίωμα πώλησης, παραμένουν ίδιοι με αυτούς της ενότητας 3.3 (βλέπε τύπους (3.3.4) και (3.3.5) αντίστοιχα), δηλαδή όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι μία θετική σταθερά. Η μόνη διαφορά που παρατηρούμε είναι στους όρους Δ(t,T) και $\Sigma(t,T)^2$ οι οποίοι περιέχονται στους παραπάνω τύπους και αναλύονται πλέον όπως και στην περίπτωση του δικαιώματος αγοράς όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική (βλέπε τύπους (3.4.2) και (3.4.3) αντίστοιχα).

Όπως και στην ενότητα 3.3 έτσι και σε αυτή την ενότητα παρατηρούμε ότι η αγοραία τιμή του κινδύνου διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στον τύπο υπολογισμού της τιμής ενός δικαιώματος προαίρεσης, ενώ και τις παραμέτρους της αγοραίας τιμής του κινδύνου τις συναντάμε σε πολλούς όρους μέσα στους παραπάνω τύπους. Εύλογα λοιπόν συμπεραίνουμε ότι η συμβολή της αγοραίας τιμής του κινδύνου, είτε αυτή είναι σταθερή είτε στοχαστική, είναι καθοριστική για τον υπολογισμό της τιμής των δικαιωμάτων προαίρεσης αλλά και των συντελεστών ευαισθησίας τους, όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα.

3.5 Συντελεστές Ευαισθησίας (Δικαίωμα αγοράς)

Στην ενότητα αυτή θα αναλύσουμε τις επιπτώσεις των στοχαστικών μερισματικών αποδόσεων στις ιδιότητες των τιμών των δικαιωμάτων όσον αφορά παραμέτρους όπως την τιμή του υποκείμενου τίτλου και την μεταβλητότητα. Ενώ θα διακρίνουμε και τους τύπους κλειστής μορφής των συντελεστών ευαισθησίας για την περίπτωση που η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή και για την περίπτωση που είναι στοχαστική.

3.5.1 Δέλτα

Το Δέλτα ενός δικαιώματος αγοράς υπό στοχαστική μερισματική απόδοση, όπως και στο Black-Scholes μοντέλο που εξετάσαμε στο 2ο κεφάλαιο, ορίζεται ως το πλήθος των τμημάτων του υποκείμενου τίτλου που περιέχονται σε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αναπαριστά ένα δικαίωμα αγοράς. Ο τύπος του Δέλτα στην περίπτωση που η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή είναι:

$$\Delta_{call}(t) = e^{\left\{\frac{1}{2}\left(\Sigma(t,T)^2-\sigma_S^2(T-t)\right)-\Delta(t,T)\right\}} N(d_1)\left[1-\frac{1}{\hat{\theta}_\delta}\left(1-e^{-\hat{\theta}_\delta(T-t)}\right)\frac{\sigma_\delta}{\sigma_S}\right] \qquad \mathbf{(3.5.1)}$$

Για την περίπτωση όμως που η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική, ο τύπος του Δέλτα γίνεται :

$$\begin{aligned}\Delta_{call}(t) = e^{\left\{\frac{1}{2}\left(\Sigma(t,T)^2-\sigma_S^2(T-t)\right)-\Delta(t,T)\right\}} N(d_1)&\left[1-\frac{1}{\theta_\delta}\left(1-e^{-\theta_\delta(T-t)}\right)\frac{\sigma_\delta}{\sigma_S}\right.\\ &\left.-\frac{\sigma_\delta}{\theta_\delta}\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_S}\left(\frac{1}{\theta_\delta-\bar{\theta}_\kappa}\left(e^{-\theta_\delta(T-t)}-e^{-\bar{\theta}_\kappa(T-t)}\right)-\frac{1}{\bar{\theta}_\kappa}\left(1-e^{-\bar{\theta}_\kappa(T-t)}\right)\right)\right] \qquad \mathbf{(3.5.2)}\end{aligned}$$

Με μία προσεχτική ματιά στους τύπους (3.5.1) και (3.5.2), παρατηρούμε ότι το Δέλτα μπορεί να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό, ενώ σε απόλυτες τιμές μπορεί να πάρει τιμές μεγαλύτερες του 1. Αυτό αποτελεί μία πολύ σημαντική διαφορά με το Δέλτα στο απλό Black-Scholes μοντέλο. Το γεγονός αυτό, οφείλεται στο ότι η μετοχή δεν χρησιμοποιείται μόνο για να αντισταθμίζεται ο κίνδυνος του υποκείμενου τίτλου αλλά και για να αντισταθμίζεται ο κίνδυνος που προκύπτει από την μερισματική απόδοση και από την τιμή αγοράς του κινδύνου. Οι νέες αυτές πηγές κινδύνου, εξαρτώμενες από τις συσχετίσεις μεταξύ των μερισματικών αποδόσεων, των αγοραίων τιμών του κινδύνου και των δυναμικών των τιμών της μετοχής, αντισταθμίζονται χρησιμοποιώντας διάφορες τεχνικές αντιστάθμισης. Τέλος, παρατηρούμε ότι το Δέλτα είναι πλέον συναρτήσει του χρόνου.

3.5.2 Γάμα

Το Γάμα του δικαιώματος αγοράς συνήθως ορίζεται ως η παράγωγος του Δέλτα ως προς τον υποκείμενο τίτλο. Πράγματι για σταθερή αγοραία τιμή του κινδύνου:

$$\Gamma_{call}(t) = \frac{\partial \Delta_{call}(t)}{\partial S(t)} = e^{\left\{\frac{1}{2}\left(\Sigma(t,T)^2 - \sigma_S^2(T-t)\right) - \Delta(t,T)\right\}} \frac{1}{S(t)\Sigma(t,T)} n(d_1) \left[1 - \frac{1}{\hat{\theta}_\delta}\left(1 - e^{-\hat{\theta}_\delta(T-t)}\right)\frac{\sigma_\delta}{\sigma_S}\right] \quad (\mathbf{3.5.3})$$

Όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου όμως είναι στοχαστική, το Γάμα γίνεται:

$$\begin{aligned} \Gamma_{call}(t) = \frac{\partial \Delta_{call}(t)}{\partial S(t)} &= \\ &= e^{\left\{\frac{1}{2}\left(\Sigma(t,T)^2 - \sigma_S^2(T-t)\right) - \Delta(t,T)\right\}} \frac{1}{S(t)\Sigma(t,T)} n(d_1) \left[1 - \frac{1}{\theta_\delta}\left(1 - e^{-\theta_\delta(T-t)}\right)\frac{\sigma_\delta}{\sigma_S}\right. \\ &\left. - \frac{\sigma_\delta}{\theta_\delta}\left(\frac{1}{\theta_\delta - \bar{\theta}_\kappa}\left(e^{-\theta_\delta(T-t)} - e^{-\bar{\theta}_\kappa(T-t)}\right) - \frac{1}{\bar{\theta}_\kappa}\left(1 - e^{-\bar{\theta}_\kappa(T-t)}\right)\right)\frac{\sigma_\kappa}{\sigma_S}\right] \quad (\mathbf{3.5.4}) \end{aligned}$$

Το Γάμα έχει παρόμοια χαρακτηριστικά με το Δέλτα. Συγκεκριμένα, μπορεί να είναι είτε θετικό είτε αρνητικό και ποικίλει και αυτό ανάλογα με τον χρόνο.

3.5.3 Βέγκα

Άλλη μία μεταβλητή που είναι σημαντική για την διαχείριση του κινδύνου ενός χαρτοφυλακίου δικαιώματος αγοράς είναι το Βέγκα. Το Βέγκα είναι η παράγωγος της τιμής του δικαιώματος ως προς την μεταβλητότητα. Όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή, το Βέγκα είναι:

$$B_{call}(t) = \frac{\partial C(t)}{\partial \sigma_S}$$
$$= S(t)e^{\left\{\frac{1}{2}[\Sigma(t,T)^2 - \sigma_S^2(T-t)] - \Delta(t)\right\}} n(d_1)\frac{\sigma_S(T-t)}{\Sigma(t,T)}$$
$$- S(t)e^{\left\{\frac{1}{2}[\Sigma(t,T)^2 - \sigma_S^2(T-t)] - \Delta(t)\right\}} \left(\frac{1}{\Sigma(t,T)} n(d_1) + N(d_1)\right)\frac{\sigma_\delta}{\theta_\delta}\Bigg((T-t)$$
$$- \frac{1}{\theta_\delta}\left(1 - e^{-\theta_\delta(T-t)}\right)\Bigg) \qquad (\mathbf{3.5.5})$$

Στην περίπτωση όμως που η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική, ο τύπος υπολογισμού του Βέγκα γίνεται:

$$B_{call}(t) = \frac{\partial C(t)}{\partial \sigma_S}$$
$$= S(t)e^{\left\{\frac{1}{2}[\Sigma(t,T)^2 - \sigma_S^2(T-t)] - \Delta(t)\right\}} n(d_1)\frac{\sigma_S(T-t)}{\Sigma(t,T)}$$
$$- S(t)e^{\left\{\frac{1}{2}[\Sigma(t,T)^2 - \sigma_S^2(T-t)] - \Delta(t)\right\}} \left(\frac{1}{\Sigma(t,T)} n(d_1) + N(d_1)\right)\frac{\sigma_\delta}{\theta_\delta}\Bigg\{(T-t)$$
$$- \frac{1}{\theta_\delta}\left(1 - e^{-\theta_\delta(T-t)}\right)$$
$$+ \sigma_\kappa\Bigg[\frac{1}{\theta_\kappa^2}\left(1 - e^{-\theta_\kappa(T-t)}\right) - \frac{1}{\theta_\kappa}\left((T-t) + \frac{1}{\theta_\delta - \theta_\kappa}\left(1 - e^{-\theta_\kappa(T-t)}\right)\right)$$
$$+ \frac{1}{\theta_\delta}\left(\frac{1}{\theta_\delta - \theta_\kappa}\left(1 - e^{-\theta_\kappa(T-t)}\right)\right)\Bigg]\Bigg\} \qquad (\mathbf{3.5.6})$$

Παρόλο που το Βέγκα από το μοντέλο Black-Scholes είναι πάντα θετικό, δεν συμβαίνει το ίδιο και στους τύπους (3.5.5) και (3.5.6). Πράγματι, αν η συσχέτιση μεταξύ των δυναμικών του δείκτη της μετοχής και της μερισματικής απόδοσης είναι θετική, δηλαδή αν $\sigma_\delta>0$, τότε τα στοχαστικά μερίσματα μειώνουν την ευαισθησία στην μεταβλητότητα της τιμής του δικαιώματος αγοράς η οποία μπορεί να γίνει ακόμα και αρνητική.

Υπενθυμίζουμε ότι $\left((T-t)-\frac{1}{\theta_\delta}\left(1-e^{-\theta_\delta(T-t)}\right)\right) \geq 0$. Όταν η συσχέτιση είναι αρνητική, δηλαδή όταν $\sigma_\delta < 0$, τότε οι στοχαστικές μερισματικές αποδόσεις αυξάνουν την ευαισθησία της τιμής του δικαιώματος αγοράς στην μεταβλητότητα. Το αποτέλεσμα αυτό συνάδει με τα αποτελέσματα των ερευνών των El Karoui, Jeanblanc-Picque and Shreve (1998) οι οποίοι έδειξαν ότι η παρουσία στοχαστικής μεταβλητότητας μπορεί να μετατρέψει την τιμή του δικαιώματος σε φθίνουσα συνάρτηση της μεταβλητότητας.

Παρόμοια ανάλυση με αυτήν που προηγήθηκε στην ενότητα αυτή μπορεί να γίνει και για τον υπολογισμό των συντελεστών ευαισθησίας στην περίπτωση του δικαιώματος πώλησης. Σύμφωνα με τον Lioui (2006), μία αξιοσημείωτη διαφορά όταν μελετάμε το Βέγκα ενός δικαιώματος πώλησης υπό στοχαστική μερισματική απόδοση, είναι ότι αυτό δεν ισούται με το Βέγκα του δικαιώματος αγοράς.

Συμπερασματικά, η στοχαστική μερισματική απόδοση και η στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου επηρεάζουν την τιμή των δικαιωμάτων με 2 τρόπους:

- Μέσω της παρούσας αξίας των μελλοντικών μερισμάτων
- Μέσω της μεταβλητότητας του υποκείμενου τίτλου διορθωμένης για την παρούσα αξία των μερισμάτων

Οι 2 τρόποι δεν λειτουργούν στην ίδια κατεύθυνση, για αυτό η επίδραση στην τιμή των δικαιωμάτων είναι αβέβαιη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΕΜΠΕΙΡΙΚΗ ΜΕΛΕΤΗ

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσεγγίσουμε εμπειρικά το μοντέλο Black-Scholes σύμφωνα με τους τύπους που αναλύσαμε στο κεφάλαιο 3. Η εμπειρική μελέτη όπως αναφέραμε σε προηγούμενα κεφάλαια θα επικεντρωθεί σε 4 βασικά σημεία.

1. Θα εκτιμήσουμε τις παραμέτρους μας τόσο για σταθερή αγοραία τιμή του κινδύνου, όσο και για στοχαστική.
2. Θα χρησιμοποιήσουμε τις παραμέτρους που εκτιμήσαμε για να ελέγξουμε την προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου.
3. Θα πραγματοποιήσουμε αριθμητική ανάλυση στα δικαιώματα προαίρεσης τα οποία εξετάζουμε με σκοπό να δούμε την συμπεριφορά της τιμής τους σε μεταβολές διάφορων παραμέτρων τους.
4. Θα εξετάσουμε την συμπεριφορά των συντελεστών ευαισθησίας των δικαιωμάτων αγοράς σε κάθε περίπτωση.

Για την διεξαγωγή της εμπειρικής μελέτης, αντλήσαμε δεδομένα από τη Bloomberg για τα δικαιώματα προαίρεσης της Apple για το διάστημα 24/9/2018-31/12/2018. Τροχοπέδη αποτέλεσε το γεγονός ότι η πρόσβαση σε ιστορικές τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης ήταν περιορισμένη. Για το λόγο αυτό η μελέτη μας αφορά το παραπάνω χρονικό διάστημα. Όσον αφορά την επιλογή του υποκείμενου τίτλου, διαλέξαμε την Apple διότι πληρούσε τα παρακάτω κριτήρια που είχαμε θέσει:

- Να είναι εισηγμένη σε αμερικάνικο χρηματιστήριο
- Να έχει μεγάλη χρηματιστηριακή αξία
- Ο όγκος αξιογράφων της που συναλλάσσονται καθημερινά να είναι μεγάλος
- Να δίνει μέρισμα

Συγκεκριμένα, για την διεκπεραίωση της μελέτης χρειαστήκαμε:

- Τις τιμές των δικαιωμάτων αγοράς για διαφορετικές ληκτότητες και για διαφορετικές τιμές εξάσκησης.
- Τις αντίστοιχες τιμές εξάσκησης για τα παραπάνω δικαιώματα.
- Τις αντίστοιχες ληκτότητες για τα παραπάνω δικαιώματα.
- Την ημερήσια τιμή αγοράς της μετοχής της Apple για το χρονικό διάστημα που ορίσαμε παραπάνω.
- Την μεταβλητότητα (implied volatility) κάθε δικαιώματος αγοράς.
- Το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο της Κεντρικής Τράπεζας της Αμερικής (FED).

Τα δεδομένα που αντλήσαμε είναι μόνο για δικαιώματα αγοράς για εξοικονόμηση χρόνου της εμπειρικής μελέτης, ενώ για λόγους ακριβείας όλα τα δεδομένα είναι στρογγυλοποιημένα στο 5^{ο} δεκαδικό ψηφίο.

Για την διεξαγωγή της εμπειρικής μελέτης, τόσο για σταθερή όσο και για στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου χρησιμοποιήσαμε 12 δικαιώματα αγοράς για κάθε ημέρα. Αντλήσαμε δεδομένα για 4 συγκεκριμένες ληκτότητες και για 3 τιμές εξάσκησης για κάθε ληκτότητα έτσι ώστε για κάθε ληκτότητα να έχουμε ένα δικαίωμα ATM (At The Money), ένα ITM (In The Money) και ένα OTM (Out of The Money).

4.1 Ο υποκείμενος τίτλος

Η εταιρεία Apple Inc. είναι μία αμερικανική πολυεθνική τεχνολογική εταιρεία η οποία σχεδιάζει αναπτύσσει και εμπορεύεται τεχνολογικές συσκευές και λογισμικά. Ιδρύθηκε τον Απρίλιο του 1976 από τους Steve Jobs, Steve Wozniak και Ronald Wayne. Στις 12 Δεκεμβρίου του 1980 η Apple εισήχθη για πρώτη φορά στο χρηματιστήριο των ΗΠΑ.

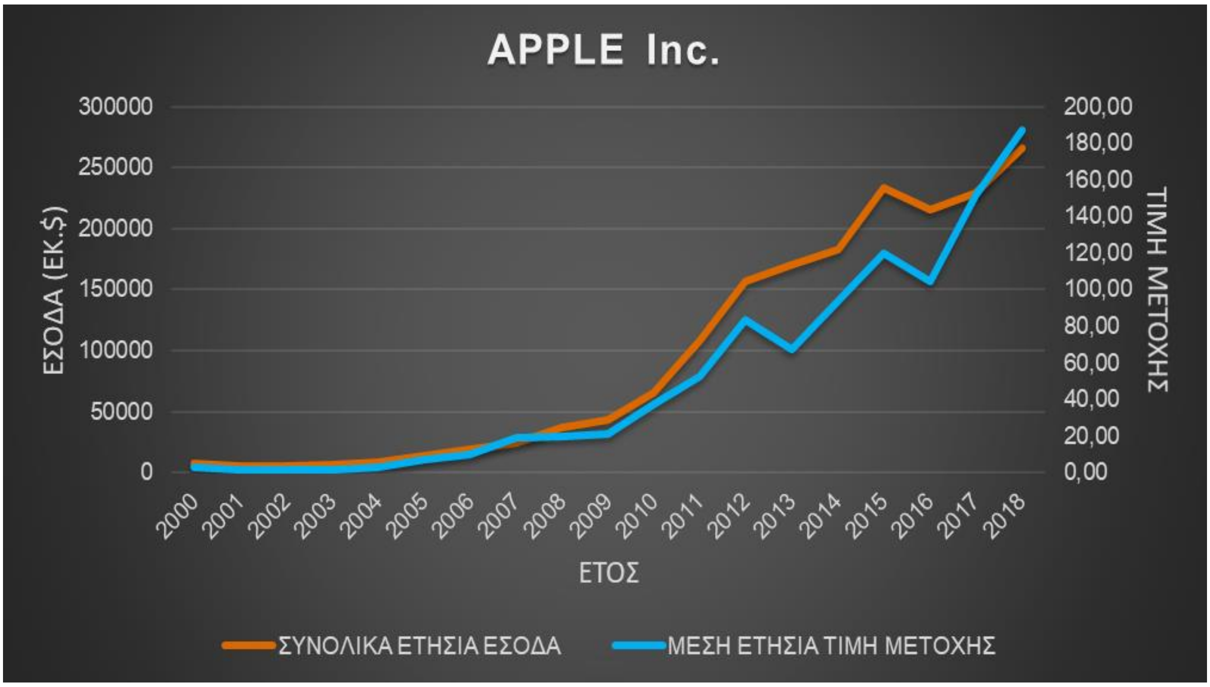
Πλέον, είναι η μεγαλύτερη σε έσοδα και σύνολο ενεργητικού εταιρεία τεχνολογίας και πληροφοριών παγκοσμίως. Ενδεικτικός είναι ο Πίνακας 4.1 που ακολουθεί στον οποίο βλέπουμε στην 2η και στην 3η στήλη τα έσοδα και το σύνολο ενεργητικού αντίστοιχα της εταιρείας για τα τελευταία 18 χρόνια. Στην 4η στήλη παρατηρούμε την μέση ετήσια τιμή της μετοχής της εταιρείας για κάθε έτος.

Πίνακας 4.1

ΕΤΟΣ	ΣΥΝΟΛΙΚΑ ΕΣΟΔΑ (ΕΚ.$)	ΣΥΝΟΛΟ ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΟΥ (ΕΚ.$)	ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ ΜΕΤΟΧΗΣ
2000	7983	6803	3,11
2001	5363	6021	1,45
2002	5742	6298	1,34
2003	6207	6815	1,34
2004	8279	8050	2,67
2005	13931	11516	6,88
2006	19315	17205	10,29
2007	24578	25347	19,05
2008	37491	36171	19,78
2009	42905	47501	21,49
2010	65225	75183	37,14
2011	108249	116371	52,66
2012	156508	176064	83,33
2013	170910	207000	67,68
2014	182795	231839	93,93
2015	233715	290345	119,86
2016	215639	321686	104,62
2017	229234	375319	151,62
2018	265595	365725	187,45

Εμφανή, σύμφωνα με τα παραπάνω οικονομικά στοιχεία, είναι η ραγδαία μεγέθυνση της εταιρείας τα τελευταία χρόνια. Τα στοιχεία αυτά αλλά και η γενικότερη οικονομική πορεία της εταιρείας, φαίνονται καλύτερα στο Σχήμα 4.1 που ακολουθεί, στο οποίο αντανακλάται η ραγδαία μεγέθυνση της εταιρείας από το 2010 και μετά.

Σχήμα 4.1



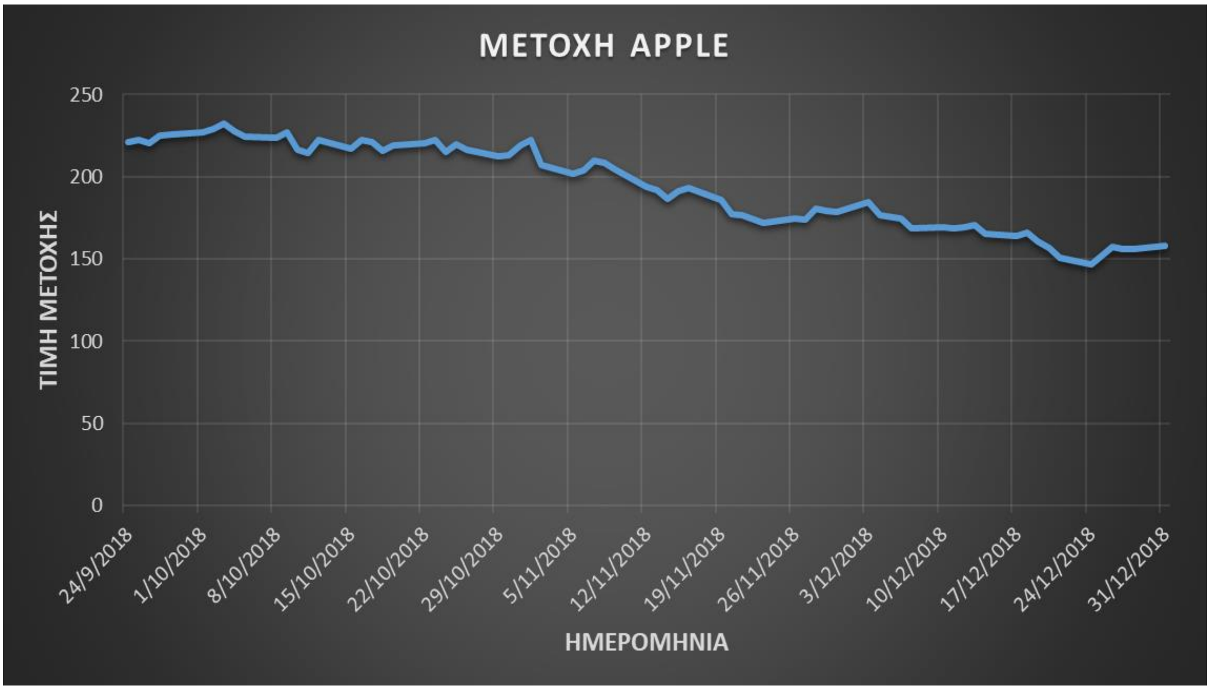
Στην συνέχεια, παραθέτουμε τα χρηματοοικονομικά στοιχεία της Apple που αντλήσαμε από τη Bloomberg για το χρονικό διάστημα στο οποίο γίνεται η εμπειρική μας μελέτη. Συγκεκριμένα, στον Πίνακα 4.2 είναι η τιμή της μετοχής για το διάστημα αυτό. Όσον αφορά τις τιμές εξάσκησης, επιλέξαμε για κάθε μέρα τιμές -10 και +10 ευρώ, από την τιμή εξάσκησης για την οποία το δικαίωμα αγοράς είναι ATM, για τις τιμές εξάσκησης των δικαιωμάτων αγοράς που είναι ITM και OTM αντίστοιχα. Για να μελετήσουμε ενδελεχώς την χρηματοοικονομική πορεία της εταιρείας ως προς την αγορά των δικαιωμάτων της θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω σχήματα. Αναλυτικότερα, στο Σχήμα 4.2 περιγράφεται η πορεία της τιμής της μετοχής της Apple για το διάστημα 24/9/2018-31/12/2018. Από το σχήμα αυτό, παρατηρούμε ότι η τιμή της μετοχής έχει μια καθοδική τάση τους τελευταίους μήνες με ένα εύρος μεταβολής της τάξεως των 70 περίπου μονάδων. Στο Σχήμα 4.3 περιγράφονται οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς ATM της εταιρείας για τις 4 ληκτότητες που έχουμε επιλέξει (18/1/2019, 18/4/2019, 21/6/2019, 17/1/2020), ενώ στο Σχήμα 4.4 οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς με λήξη στις 17/1/2020 (τα συγκεκριμένα δικαιώματα επιλέχθηκαν τυχαία για να απεικονιστούν γραφικά) για διαφορετικές τιμές εξάσκησης (ATM, ITM, OTM). Όπως ήταν αναμενόμενο, οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς δεν κινούνται διαφορετικά από την τιμή της μετοχής. Με άλλα λόγια ανεξάρτητα από την τιμή εξάσκησης ή τον χρόνο μέχρι την λήξη, οι τιμές των δικαιωμάτων έχουν επίσης καθοδική τάση τους τελευταίους μήνες. Αυτό εξηγείται από το γεγονός ότι η τιμή της μετοχής με την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς, όπως φαίνεται και στους τύπους (3.3.1) και (3.4.1), έχουν θετική συσχέτιση. Τέλος, στα Σχήματα 4.5 και 4.6 περιγράφεται η μεταβλητότητα των δικαιωμάτων αγοράς, όπως αυτή δίνεται από τη Bloomberg, για διαφορετικές ληκτότητες όταν είμαστε ATM και για διαφορετικές τιμές εξάσκησης για τα δικαιώματα που λήγουν στις 17/1/2020 αντίστοιχα (τα συγκεκριμένα δικαιώματα επιλέχθηκαν επίσης τυχαία για να απεικονιστούν γραφικά). Παρατηρώντας τα Σχήματα 4.5 και 4.6, καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με αυτά της θεωρίας. Με άλλα λόγια, η μεταβλητότητα ενός δικαιώματος με την τιμή ενός δικαιώματος έχουν αρνητική συσχέτιση καθώς, ενώ η τιμή του δικαιώματος αγοράς μειώνεται σε βάθος 3μήνου, η μεταβλητότητα αυξάνεται. Επιπρόσθετα, από το Σχήμα 4.5, συμπεραίνουμε ότι η μεταβλητότητα των δικαιωμάτων που λήγουν στις 18/1/2019 έχει μεγαλύτερη διακύμανση από τις μεταβλητότητες των δικαιωμάτων που λήγουν μεταγενέστερα. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι όταν ο χρόνος μέχρι την λήξη είναι μικρός, τότε η διακύμανση της τιμής του δικαιώματος εξαρτάται κυρίως από τις διακυμάνσεις της μεταβλητότητας. Αντίθετα, όταν ο χρόνος μέχρι την λήξη είναι μεγάλος, τότε μέρος της διακύμανσης της τιμής του δικαιώματος απορροφάται και από τον χρόνο, με αποτέλεσμα η μεταβλητότητα να έχει μικρότερη διακύμανση από ότι όταν ο χρόνος μέχρι την λήξη είναι μικρός. Τα παραπάνω επιβεβαιώνονται παρατηρώντας τον τύπο υπολογισμό της τιμής του δικαιώματος (2.2.13).

Το Σχήμα 4.6 από την άλλη μας βοηθάει να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι η μεταβλητότητα ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι μεγαλύτερη όταν το δικαίωμα είναι ITM και μικρότερη όταν είναι OTM.

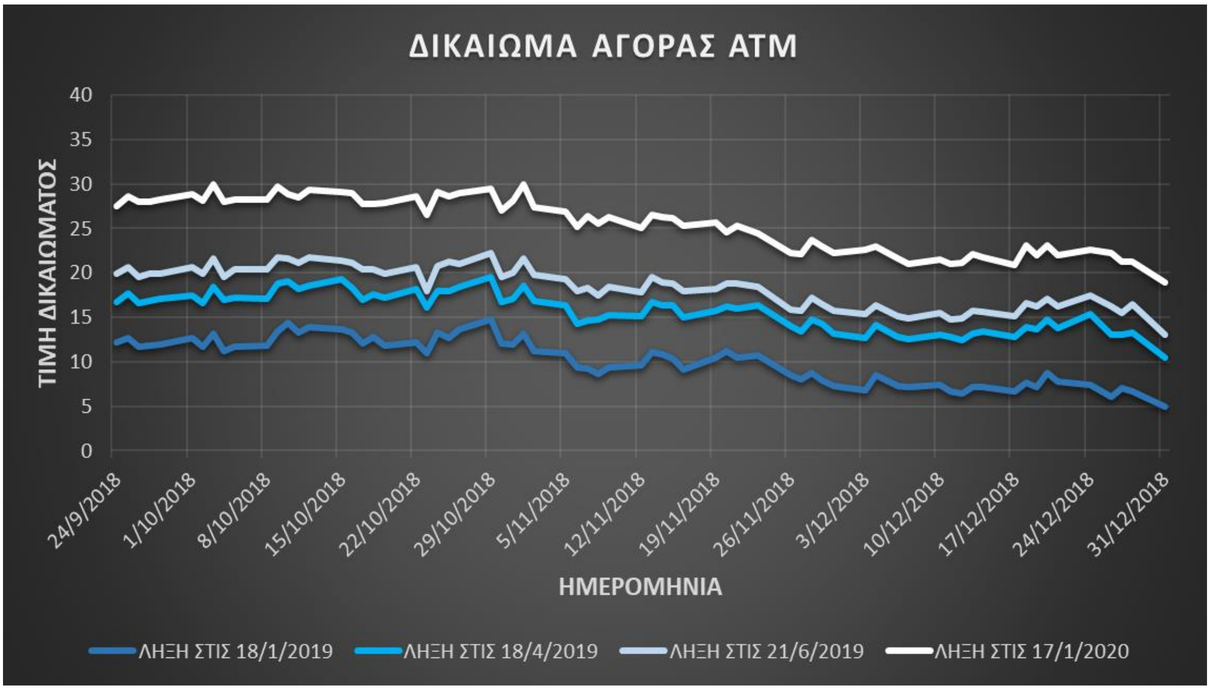
Πίνακας 4.2

Α/Α	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΕΣ	ΤΙΜΗ ΜΕΤΟΧΗΣ
1	**31/12/2018**	157,74
2	**28/12/2018**	156,23
3	**27/12/2018**	156,15
4	**26/12/2018**	157,17
5	**24/12/2018**	146,83
6	**21/12/2018**	150,73
7	**20/12/2018**	156,83
8	**19/12/2018**	160,89
9	**18/12/2018**	166,07
10	**17/12/2018**	163,94
11	**14/12/2018**	165,48
12	**13/12/2018**	170,95
13	**12/12/2018**	169,10
14	**11/12/2018**	168,63
15	**10/12/2018**	169,60
16	**7/12/2018**	168,49
17	**6/12/2018**	174,72
18	**4/12/2018**	176,69
19	**3/12/2018**	184,82
20	**30/11/2018**	178,58
21	**29/11/2018**	179,55
22	**28/11/2018**	180,94
23	**27/11/2018**	174,24
24	**26/11/2018**	174,62
25	**23/11/2018**	172,29
26	**21/11/2018**	176,78
27	**20/11/2018**	176,98
28	**19/11/2018**	185,86
29	**16/11/2018**	193,53
30	**15/11/2018**	191,41
31	**14/11/2018**	186,80
32	**13/11/2018**	192,23
33	**12/11/2018**	194,17
34	**9/11/2018**	204,47
35	**8/11/2018**	208,49
36	**7/11/2018**	209,95
37	**6/11/2018**	203,77
38	**5/11/2018**	201,59
39	**2/11/2018**	207,48
40	**1/11/2018**	222,22
41	**31/10/2018**	218,86
42	**30/10/2018**	213,30
43	**29/10/2018**	212,24
44	**26/10/2018**	216,30
45	**25/10/2018**	219,80
46	**24/10/2018**	215,09
47	**23/10/2018**	222,73
48	**22/10/2018**	220,65
49	**19/10/2018**	219,31
50	**18/10/2018**	216,02
51	**17/10/2018**	221,19
52	**16/10/2018**	222,15
53	**15/10/2018**	217,36
54	**12/10/2018**	222,11
55	**11/10/2018**	214,45
56	**10/10/2018**	216,36
57	**9/10/2018**	226,87
58	**8/10/2018**	223,77
59	**5/10/2018**	224,29
60	**4/10/2018**	227,99
61	**3/10/2018**	232,07
62	**2/10/2018**	229,28
63	**1/10/2018**	227,26
64	**28/9/2018**	225,74
65	**27/9/2018**	224,95
66	**26/9/2018**	220,42
67	**25/9/2018**	222,19
68	**24/9/2018**	220,79

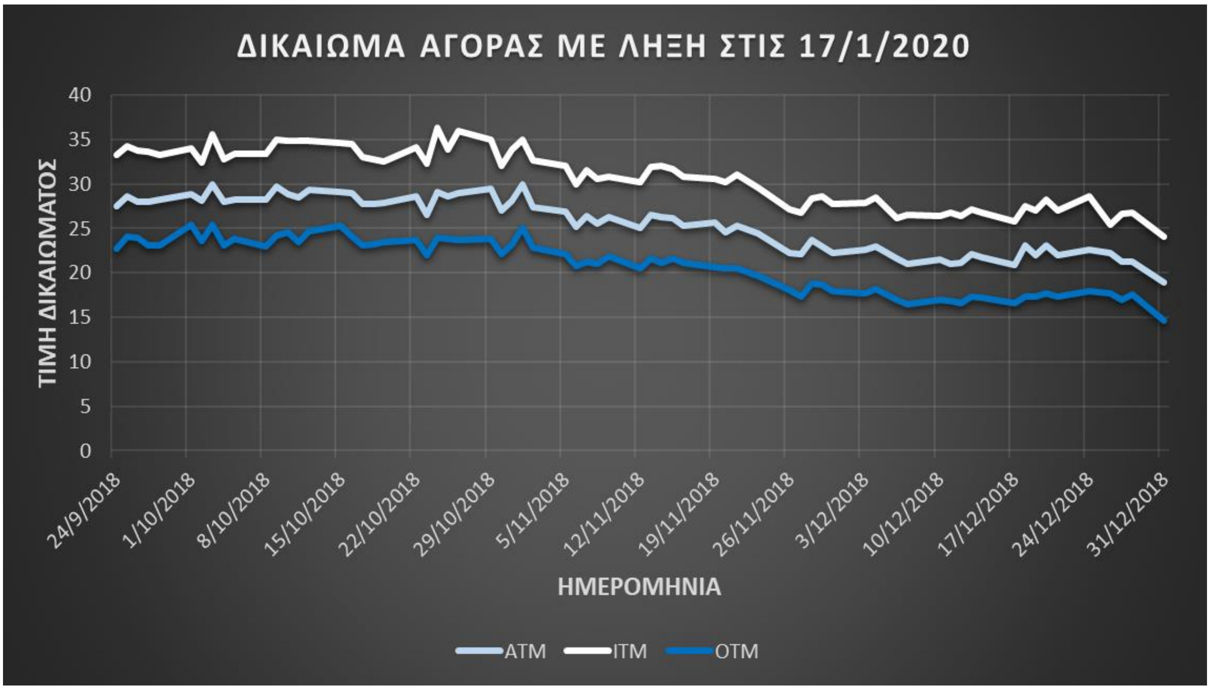
Σχήμα 4.2



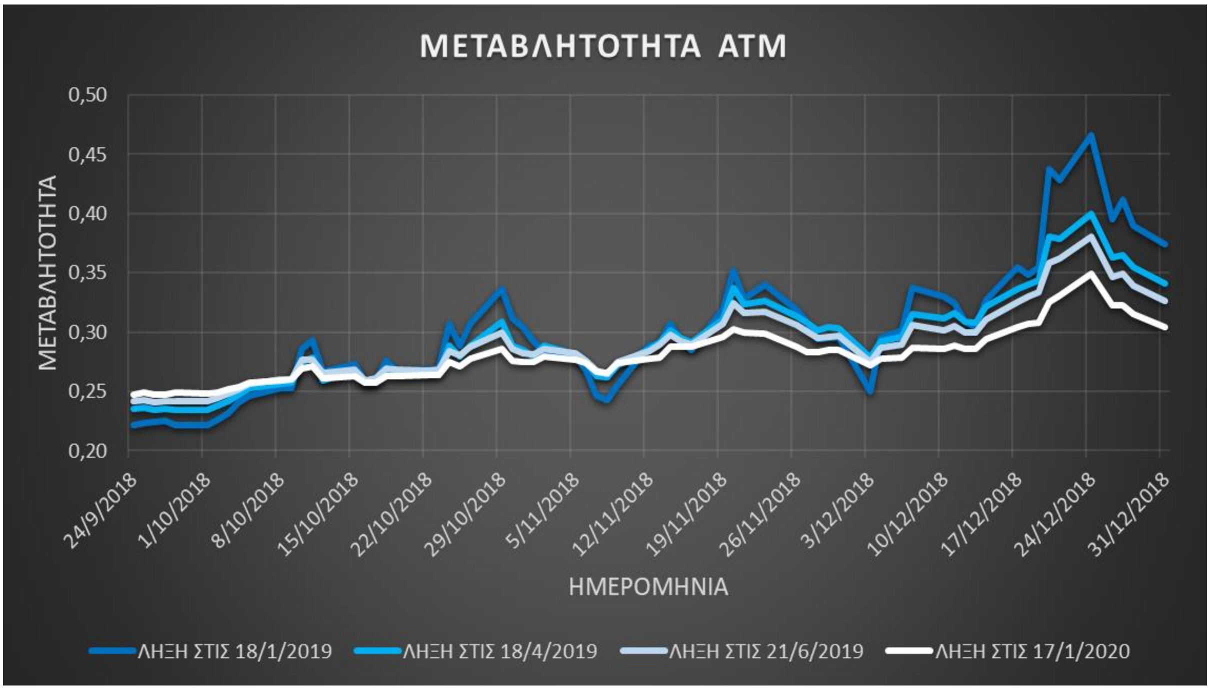
Σχήμα 4.3



Σχήμα 4.4



Σχήμα 4.5



Σχήμα 4.6

4.2 Εκτίμηση παραμέτρων

Για την εκτίμηση των παραμέτρων, σχηματίσαμε έναν πίνακα δεδομένων με 68 σειρές και 12 στήλες. Σε κάθε σειρά είναι οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς για την κάθε ημέρα. Όσον αφορά τις στήλες, διαλέξαμε για ληκτότητες την 18/1/2019, την 18/4/2019, την 21/6/2019 και την 17/1/2020 και για κάθε μία από τις ληκτότητες αυτές πήραμε την τιμή ενός δικαιώματος ATM, ενός ITM και ενός OTM.

Η μέθοδος εκτίμησης που χρησιμοποιήσαμε είναι μία διαδικασία σύμφωνα με την οποία, εάν έχουμε ένα μοντέλο και ένα σετ παραμέτρων για το μοντέλο αυτό, βρίσκουμε τιμές των παραμέτρων τέτοιες ώστε τα τετράγωνα των διαφορών, των θεωρητικών τιμών που υπολογίσαμε με το μοντέλο μας με τις αντίστοιχες τιμές της αγοράς, να έχουν την μικρότερη δυνατή τιμή. Η διαδικασία αυτή είναι ο επαναληπτικός αλγόριθμος Levenberg-Marquardt και την εφαρμόσαμε στο Excel μέσω του βοηθητικού εργαλείου solver.

Πιο συγκεκριμένα, ο τύπος της ελαχιστοποίησης που χρησιμοποιήσαμε για να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους μας είναι:

$$A = argmin \sum_{i=1}^{N} \left(f_i^{market}(T_i, K_i) - f_i^{model}(T_i, K_i)\right)^2$$

όπου: $A = σετ\ παραμέτρων\ για\ το\ εκάστοτε\ μοντέλο$

$N = πλήθος\ δικαιωμάτων\ για\ κάθε\ μέρα$

$T = ληκτότητα$

$K = τιμή\ εξάσκησης$

Η μέθοδος Levenberg-Marquardt είναι από τις πιο διαδεδομένες τεχνικές για να παράγουμε λύσεις σε μη-γραμμικά (least square curve fitting[17]) προβλήματα. Όπως άλλοι αριθμητικοί αλγόριθμοι ελαχιστοποίησης, ο αλγόριθμος Levenberg-Marquardt είναι μία επαναληπτική διαδικασία. Για να αρχίσει μια ελαχιστοποίηση, ο χρήστης πρέπει να παρέχει μια αρχική εικασία για το διάνυσμα παραμέτρων .

Ας σκεφτούμε N παρατηρήσεις y(i), όπου i=1,2,…..,N και μία εξίσωση h: $R^n \rightarrow R$ με n: παραμέτρους $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Υποθέτουμε πως $N \geq n$.

Στην μελέτη μας οι N παρατηρήσεις είναι οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς που έχουμε παρατηρήσει στην αγορά.

Υπολογίζουμε τις τιμές του μοντέλου μας

$$h(x; p_i) = \hat{y}_i$$

και τα κατάλοιπα

$$r_i(x) := \hat{y}_i - y_i.$$

Συνεπώς βρίσκουμε το $R = (r_1, \ldots, r_N)^T$ το οποίο είναι το διάνυσμα διάστασης N των καταλοίπων.

Τότε πρέπει να λύσουμε το παρακάτω πρόβλημα ελαχιστοποίησης

$$\min_x f(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} r_i(x)^2 = \frac{1}{2}R(x)^T R(x)$$

Οι Levenberg K.(1944) και Marquardt D(1963) πρότειναν μία λύση του προβλήματος προσαρμογής της καμπύλης χρησιμοποιώντας έναν επαναληπτικό αλγόριθμο που συνδυάζει την μέθοδο *Steepest descent*[18] με την μέθοδο των Gauss-Newton.

Ο Levenberg προτείνει να υπολογίσουμε την κατεύθυνση d_k ως τη λύση στη παρακάτω τροποποιημένη εξίσωση των Gauss-Newton.

$$(R'(x^k)^T R'(x^k) + \lambda_k I)d_k = -R'(x^k)^T R(x^k)$$

Όπου I είναι μοναδιαία μήτρα και $\lambda_k > 0$ είναι μία παράμετρος απόσβεσης. Η μήτρα στο δεξί μέρος της εξίσωσης είναι θετικά ορισμένη. Με αυτόν τον τρόπο η λύση d_k εγγυάται πως είναι μία δίκαιη κατεύθυνση για την συνάρτηση f για όλες τις θετικές παραμέτρους απόσβεσης. Για μικρές τιμές του λ_k η μέθοδος του Levenberg συμπεριφέρεται όπως η επανάληψη των Gauss-Newton και δείχνει έναν ρυθμό σύγκλισης των επικρατουσών x^k που είναι κοντά στο x^*. Για επαναλήψεις μακριά από την βέλτιστο η παράμετρος απόσβεσης είναι πολύ μεγάλη και η κατεύθυνση μπορεί να δοθεί με την σχέση

$$d_k \approx -\frac{1}{\lambda_k} R'(x^k)^T R(x^k)$$

Η επιλογή της παραμέτρου απόσβεσης λ_k επηρεάζει το d_k καθώς επίσης και την διάρκεια κάθε βήματος της μεθόδου Levenberg-Marquardt. Από την στιγμή που η επιλογή έχει άμεσο αντίκτυπο στην σταθερότητα της μεθόδου είναι σημαντικό πως θα ορίσουμε το λ_k και πως θα αναβαθμίζεται σε κάθε επανάληψη.

Μία συνήθης επιλογή είναι:

$$\lambda_0 := \tau. \max_i \{D_0(i,i)\}_{i=1,\dots,n}$$

Η παράμετρος τ σχετίζεται με την αρχική πρόβλεψη του μοντέλου μας για τις τιμές των παραμέτρων.

Επομένως, βρήκαμε τις τιμές των δικαιωμάτων της αγοράς από Bloomberg και χρησιμοποιήσαμε την μέθοδο Levenberg-Marquardt με την βοήθεια του εργαλείου Solver στο Excel για να βρούμε τις τιμές των παραμέτρων που ταιριάζουν καλύτερα στα μοντέλα μας (υπολογισμός τιμής δικαιωμάτων αγοράς με το μοντέλο Black-Scholes υπό στοχαστική μερισματική απόδοση με σταθερή και στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου) ώστε να υπολογίσουμε τις τιμές των δικαιωμάτων αγοράς.

4.2.1 Σταθερή αγοραία τιμή του κινδύνου

Οι παράμετροι που εκτιμήσαμε όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή προκύπτουν εύκολα από τις εξισώσεις: (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3). Συγκεκριμένα έπρεπε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους: σ_s, θ_δ, σ_δ, δ, μ_δ, κ. Με την βοήθεια του Excel και του Solver, καταλήξαμε στις εκτιμήσεις των οποίων παρουσιάζονται κάποια μέτρα θέσης και διακύμανσης στον Πίνακα 4.3, ενώ κριτήριο για το αν ήταν ή όχι επιτυχημένες οι εκτιμήσεις μας αποτελούν τα αθροίσματα των τετραγωνισμένων διαφορών που εμφανίζονται στον Πίνακα 4.4.

Από τον Πίνακα 4.3 παρατηρούμε ότι η παράμετρος που αντιπροσωπεύει την μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής(σ_s) έχει μέσο όρο περίπου 8,4%, ενώ έχουν παρατηρηθεί εκτιμήσεις από 0,1% έως και 37%. Πολύ κοντά στην εκτίμηση της μεταβλητότητας της τιμής της μετοχής βρίσκονται και τα αποτελέσματα της εκτίμησης της μεταβλητότητας της μερισματικής απόδοσης. Συγκεκριμένα, οι εκτιμήσεις είχαν μέσο όρο 7,6% περίπου, ενώ οι εκτιμήσεις κυμαίνονταν από 0,1% έως και 28%. Τέλος η μερισματική απόδοση εκτιμήθηκε κατά μέσο όρο στο 1,5% ενώ η σταθερά της αγοραίας τιμής του κινδύνου σε βάθος τριμήνου ήταν περίπου 18%.

Επιπρόσθετα, στα παρακάτω σχήματα απεικονίζονται οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς υπολογισμένες με την χρήση των εκτιμήσεων μας σε σύγκριση με τις αντίστοιχες τιμές της αγοράς που αντλήσαμε από Bloomberg. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 4.7 παρατηρούμε την σύγκριση των θεωρητικών τιμών και των τιμών της αγοράς για ένα δικαίωμα αγοράς ATM που λήγει στις 18/1/2019, στο Σχήμα 4.8 παρατηρούμε την σύγκριση για ένα δικαίωμα αγοράς ITM που λήγει στις 18/4/2019 και στο Σχήμα 4.9 για ένα δικαίωμα αγοράς OTM που λήγει στις 21/6/2019. (Τα παραπάνω δικαιώματα επιλέχθηκαν τυχαία)

Για λόγους ακριβείας και αποφυγής υπολογιστικών και λογικών λαθών, θέσαμε περιορισμούς για τις παραμέτρους που εκτιμήσαμε. Συγκεκριμένα, θέσαμε ως κατώτερο όριο την τιμή 0,001 (0,1%) και ως μέγιστο όριο την τιμή 1 (100%). Το σκεπτικό που μας οδήγησε στους περιορισμούς αυτούς είναι ότι οι παράμετροι παίρνουν τιμές μεταξύ 0 και 1 καθώς αποτελούν ποσοστά. Για παράδειγμα αν η μεταβλητότητα σ=0.4, σημαίνει ότι είναι 40%. Με τον τρόπο αυτό στερούμαστε την δυνατότητα να πάρουν κάποιες μεταβλητές μας τιμή μεγαλύτερη του 1, γεγονός το οποίο δεν θα επηρεάσει τα αποτελέσματα μας καθώς από τα δεδομένα που αντλήσαμε μπορούμε εύκολα να συμπεράνουμε ότι το αξιόγραφο το οποίο εξετάζουμε και επεξεργαζόμαστε για την συγκεκριμένη χρονική περίοδο τουλάχιστον δεν θα δικαιολογούσε ακραίες τιμές όπως για παράδειγμα μεταβλητότητα μεγαλύτερη από 1, δηλαδή σ>100%. Τη δήλωση αυτή την στηρίζουμε μελετώντας τόσο την πορεία της τιμής της μετοχής και της τιμής των αντίστοιχων δικαιωμάτων αγοράς οι οποίες φαίνεται στο Σχήμα 4.2 και στα Σχήματα 4.3 και 4.4 αντίστοιχα, όσο και τις τιμές της μεταβλητότητας του δικαιώματος αγοράς της μετοχής τις οποίες αντλήσαμε από το Bloomberg οι οποίες φαίνονται στα Σχήματα 4.5 και 4.6. Με άλλα λόγια, παρατηρούμε ότι τα δεδομένα μας δεν περιέχουν ακραίες-αφύσικες τιμές. Σε αντίθετη περίπτωση, αν δηλαδή βρίσκαμε στα δεδομένα μας τέτοιες τιμές τότε μία από τις πιθανές αιτίες εμφάνισης τους θα ήταν να είχαν και κάποιοι παράμετροι ακραίες τιμές, όπως για παράδειγμα η μεταβλητότητα, με αποτέλεσμα να έπρεπε να αναθεωρήσουμε τους περιορισμούς που θα παίρναμε για τις εκτιμήσεις μας.

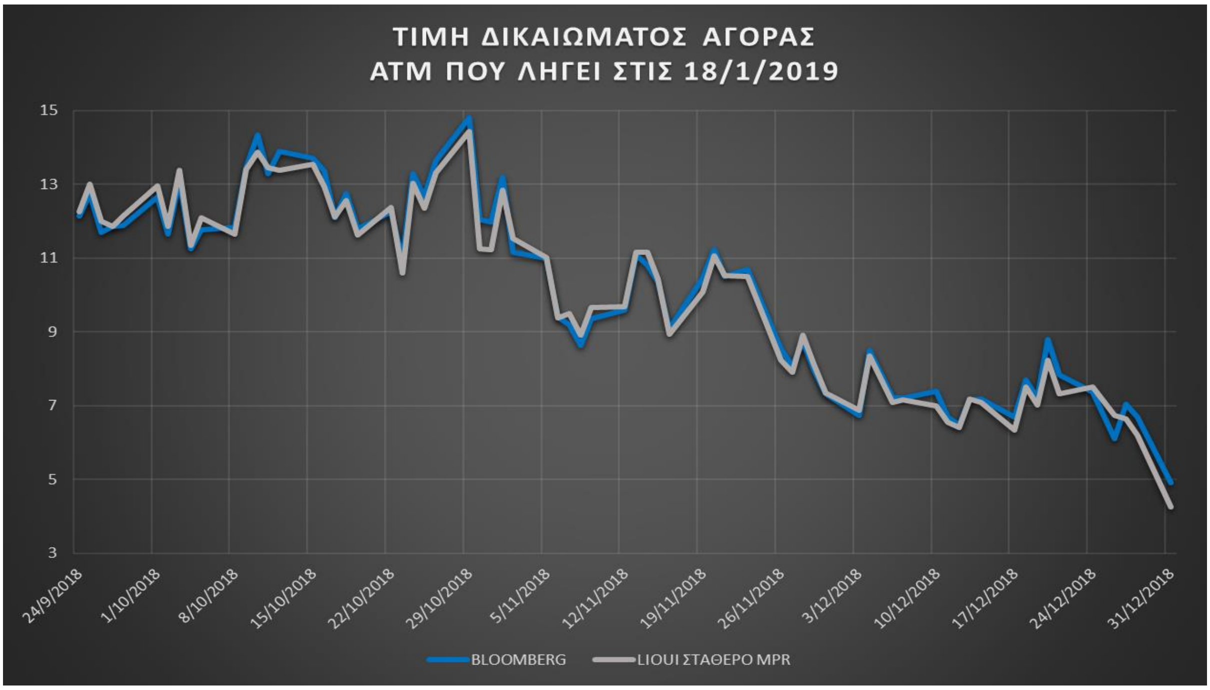
Πίνακας 4.3

ΣΤΑΘΕΡΟ MPR	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΠΡΟΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗ						$\hat{\mu}_\delta$
	σ_s	θ_δ	σ_δ	δ	μ_δ	κ	
AVERAGE	0.08428	0.28358	0.07630	0.01457	0.21095	0.18403	0.16443
MAX	0.36985	1.00000	0.28520	0.06330	1.00000	1.00000	0.99978
MIN	0.00111	0.00364	0.00100	0.00100	0.00100	0.00100	-0.23538
ST.DEV	0.09022	0.30283	0.08143	0.01567	0.38788	0.30073	0.41029
VARIANCE	0.00814	0.09171	0.00663	0.00025	0.15045	0.09044	0.16834

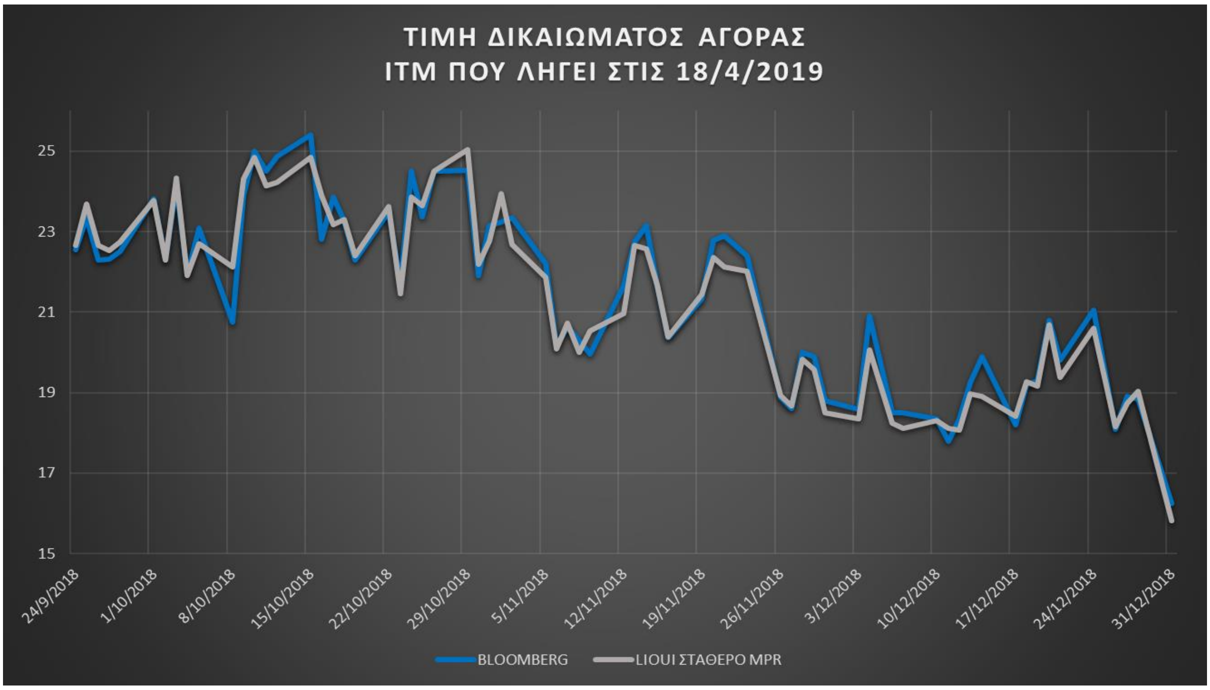
Πίνακας 4.4

Α/Α	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΕΣ	ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ	Α/Α	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΕΣ	ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ
1	**31/12/2018**	1,29676	35	**8/11/2018**	0,63874
2	**28/12/2018**	2,04393	36	**7/11/2018**	0,75874
3	**27/12/2018**	1,54939	37	**6/11/2018**	0,58437
4	**26/12/2018**	3,50080	38	**5/11/2018**	0,32456
5	**24/12/2018**	1,99903	39	**2/11/2018**	1,08060
6	**21/12/2018**	1,24207	40	**1/11/2018**	2,26308
7	**20/12/2018**	2,83100	41	**31/10/2018**	2,94092
8	**19/12/2018**	0,66249	42	**30/10/2018**	2,34028
9	**18/12/2018**	1,35111	43	**29/10/2018**	1,89592
10	**17/12/2018**	4,61891	44	**26/10/2018**	1,38492
11	**14/12/2018**	1,83737	45	**25/10/2018**	0,66087
12	**13/12/2018**	0,42619	46	**24/10/2018**	1,44720
13	**12/12/2018**	0,62370	47	**23/10/2018**	2,26666
14	**11/12/2018**	1,08041	48	**22/10/2018**	1,22333
15	**10/12/2018**	0,74198	49	**19/10/2018**	0,71104
16	**7/12/2018**	1,00482	50	**18/10/2018**	0,46602
17	**6/12/2018**	1,02601	51	**17/10/2018**	0,74900
18	**4/12/2018**	1,38806	52	**16/10/2018**	2,26700
19	**3/12/2018**	0,35050	53	**15/10/2018**	2,03917
20	**30/11/2018**	0,46753	54	**12/10/2018**	1,94301
21	**29/11/2018**	0,78750	55	**11/10/2018**	0,81746
22	**28/11/2018**	1,35905	56	**10/10/2018**	1,13174
23	**27/11/2018**	0,66230	57	**9/10/2018**	0,69298
24	**26/11/2018**	1,39705	58	**8/10/2018**	3,39317
25	**23/11/2018**	1,11990	59	**5/10/2018**	0,82688
26	**21/11/2018**	1,26722	60	**4/10/2018**	0,70162
27	**20/11/2018**	1,61582	61	**3/10/2018**	0,43816
28	**19/11/2018**	0,84306	62	**2/10/2018**	1,44751
29	**16/11/2018**	0,38145	63	**1/10/2018**	3,71138
30	**15/11/2018**	0,35919	64	**28/9/2018**	0,80466
31	**14/11/2018**	2,55275	65	**27/9/2018**	0,42953
32	**13/11/2018**	0,46566	66	**26/9/2018**	1,21629
33	**12/11/2018**	0,91854	67	**25/9/2018**	0,67485
34	**9/11/2018**	1,18918	68	**24/9/2018**	0,63604

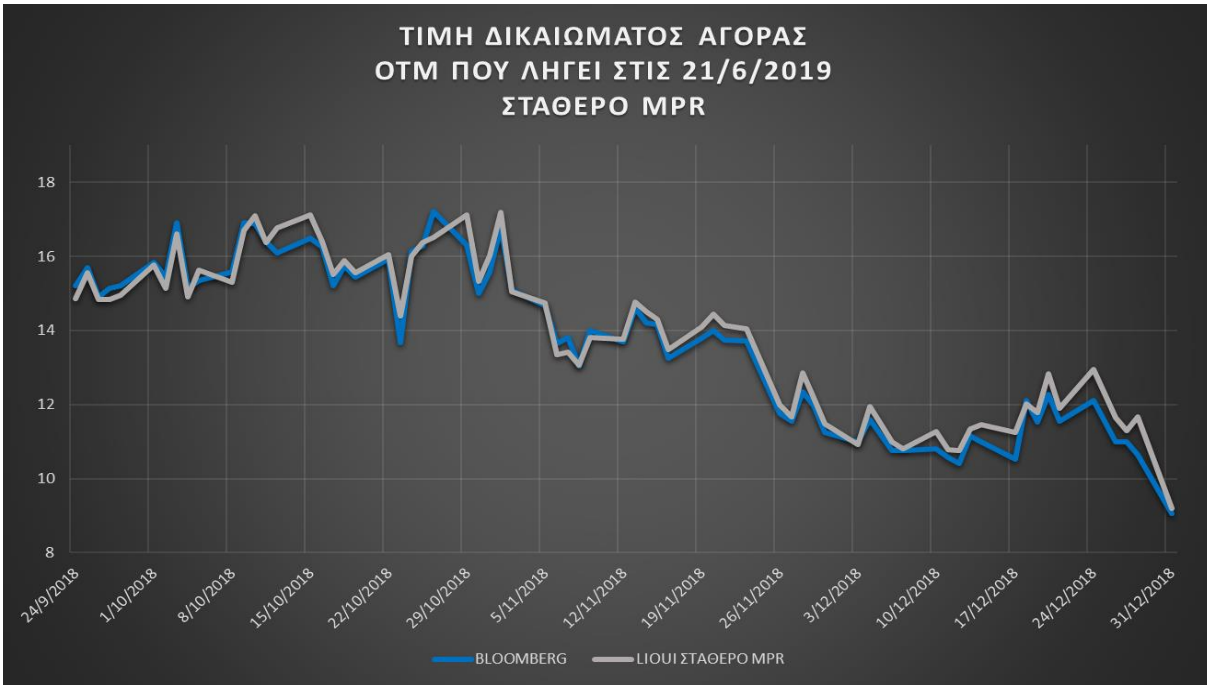
Σχήμα 4.7



Σχήμα 4.8



Σχήμα 4.9



4.2.2 Στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου

Οι παράμετροι που εκτιμήσαμε όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική προκύπτουν από τις εξισώσεις: (3.4.1), (3.4.2) και (3.4.3). Συγκεκριμένα έπρεπε να εκτιμήσουμε τις παραμέτρους: σ_s, θ_δ, σ_δ, δ, μ_δ, *κ(t)*, σ_κ, θ_κ, μ_κ

Με την βοήθεια του Excel και του Solver, καταλήξαμε στις εκτιμήσεις των οποίων τα μέτρα θέσης και διακύμανσης παρουσιάζονται στον Πίνακα 4.5, ενώ κριτήριο για το αν ήταν ή όχι επιτυχημένες οι εκτιμήσεις μας αποτελούν θα αθροίσματα των τετραγωνισμένων διαφορών που εμφανίζονται στον Πίνακα 4.6.

Αντίθετα με τις εκτιμήσεις μας στο μοντέλο Black-Scholes όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή, οι εκτιμήσεις για την μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής στο μοντέλο όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική ήταν πολύ μεγαλύτερες. Συγκεκριμένα, η παράμετρος σ_s κατά μέσο όρο εκτιμήθηκε στο 48% περίπου με το εύρος των εκτιμήσεων για την παράμετρο αυτή να αγγίζει το 60%. Διαφορές είχαμε τόσο για την μεταβλητότητα της μερισματικής απόδοσης όσο και για την ίδια την μερισματική απόδοση οι οποίες εκτιμήθηκαν κατά μέσο όρο στο 22% και 2,3% αντίστοιχα. Τέλος, η στοχαστική πλέον αγοραία τιμή του κινδύνου ήταν κατά μέσο όρο 41% ενώ αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι η παράμετρος αυτή έλαβε τιμές από 0,1% έως και 100%. Το εύρος αυτό αντικατοπτρίζει απόλυτα την έννοια της στοχαστικότητας στην αγοραία τιμή του κινδύνου.

Όσον αφορά τις μεγάλες διαφορές που παρατηρούμε στις μεταβλητότητες των τιμών της αγοράς από μοντέλο σε μοντέλο, εξηγούνται από την ανάλυση των τύπων (3.2.3) και (3.2.4). Αναλυτικότερα, όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή, η στοχαστικότητα της τιμής της μετοχής περιγράφεται από λιγότερες παραμέτρους. Επιπρόσθετα, μεγάλες διαφορές παρουσιάζονται και στην παράμετρο της αγοραίας τιμής του κινδύνου οι οποίες εξηγούνται από το γεγονός ότι στην περίπτωση της σταθερής αγοραίας τιμής του κινδύνου η σταθερά κ εξαρτάται κυρίως από την μεταβλητότητα της τιμής της μετοχής ενώ στην αντίθετη περίπτωση, όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική, από τις παραμέτρους σ_κ, μ_κ και θ_κ.

Στην συνέχεια παραθέτουμε τα σχήματα στα οποία απεικονίζονται οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς υπολογισμένες με την χρήση των εκτιμήσεων μας σε σύγκριση με τις αντίστοιχες τιμές της αγοράς που αντλήσαμε από Bloomberg. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 4.10 παρατηρούμε την σύγκριση των θεωρητικών τιμών και των τιμών της αγοράς όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική για ένα δικαίωμα αγοράς ATM που λήγει στις 18/1/2019. Στο Σχήμα 4.11 περιγράφεται η σύγκριση των θεωρητικών και των τιμών της αγοράς για ένα δικαίωμα αγοράς ITM που λήγει στις 18/4/2019 ενώ στο Σχήμα 4.12 για ένα δικαίωμα αγοράς OTM που λήγει στις 21/6/2019. (Τα παραπάνω δικαιώματα επιλέχθηκαν τυχαία).

Πίνακας 4.5

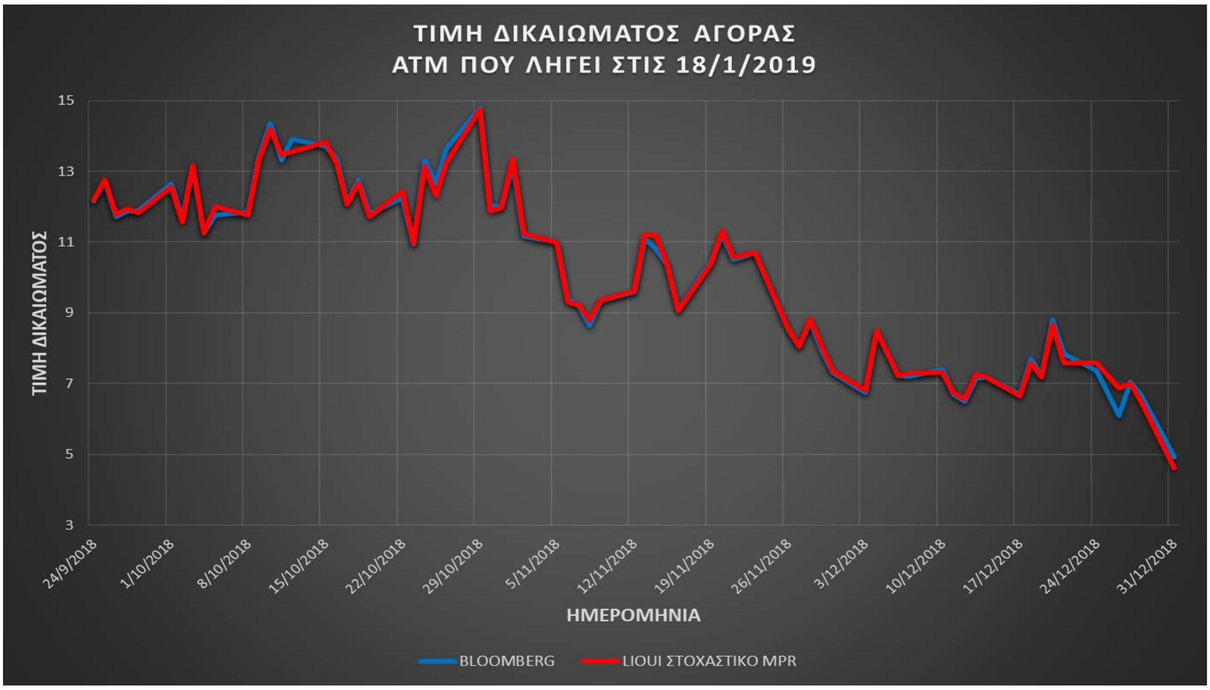
ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ MPR	ΠΑΡΑΜΕΤΡΟΙ ΠΡΟΣ ΕΚΤΙΜΗΣΗ									$\hat{\mu}_\delta$	$\hat{\theta}_\kappa$	$\hat{\mu}_\kappa$
	σ_s	θ_δ	σ_δ	δ	μ_δ	κ(t)	σ_κ	θ_κ	μ_κ			
AVERAGE	0.47736	0.97387	0.22026	0.02320	0.04332	0.41406	0.03240	0.04084	0.06235	-0.04242	0.04365	0.06159
MAX	0.84519	1.00000	0.99181	0.46824	0.42196	1.00000	0.37345	0.54128	1.00000	0.09753	0.54653	0.99900
MIN	0.24435	0.75252	0.01295	0.00100	0.00100	0.00100	0.00100	0.00100	0.00100	-0.18825	0.00100	0.00089
ST.DEV	0.15500	0.05373	0.14773	0.07275	0.07356	0.20303	0.05583	0.07844	0.20921	0.05949	0.08254	0.20697
VARIANCE	0.02402	0.00289	0.02182	0.00529	0.00541	0.04122	0.00312	0.00615	0.04377	0.00354	0.00681	0.04284

Πίνακας 4.6

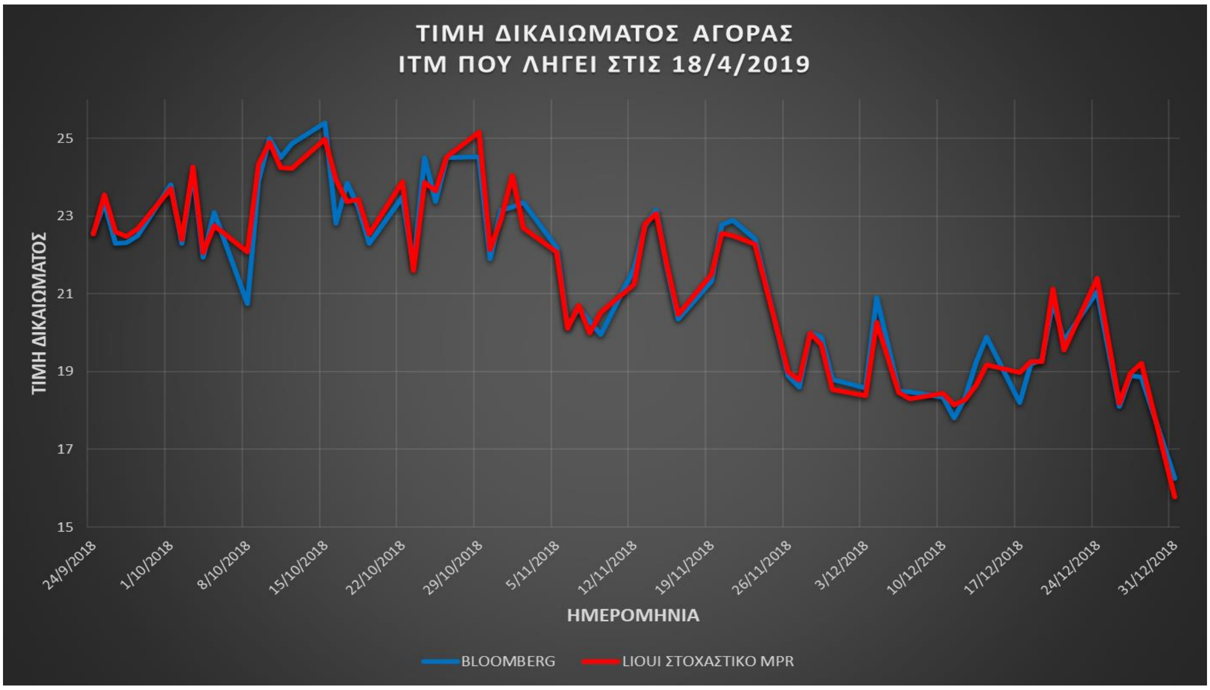
Α/Α	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΕΣ	ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ
1	31/12/2018	0,66192
2	28/12/2018	1,39773
3	27/12/2018	0,31120
4	26/12/2018	3,30315
5	24/12/2018	1,71123
6	21/12/2018	0,37108
7	20/12/2018	0,73594
8	19/12/2018	0,43871
9	18/12/2018	1,35725
10	17/12/2018	1,80345
11	14/12/2018	1,18559
12	13/12/2018	1,27193
13	12/12/2018	0,21394
14	11/12/2018	0,78961
15	10/12/2018	0,20541
16	7/12/2018	0,50074
17	6/12/2018	0,29821
18	4/12/2018	0,85832
19	3/12/2018	0,31417
20	30/11/2018	0,42844
21	29/11/2018	0,61586
22	28/11/2018	0,90803
23	27/11/2018	0,52632
24	26/11/2018	0,71409
25	23/11/2018	0,33014
26	21/11/2018	0,38019
27	20/11/2018	0,32847
28	19/11/2018	0,33023
29	16/11/2018	0,20129
30	15/11/2018	0,38690
31	14/11/2018	0,98601
32	13/11/2018	0,18545
33	12/11/2018	0,49992
34	9/11/2018	0,61441

Α/Α	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΕΣ	ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ
35	8/11/2018	0,50659
36	7/11/2018	0,37370
37	6/11/2018	0,48958
38	5/11/2018	0,11135
39	2/11/2018	0,68640
40	1/11/2018	1,11207
41	31/10/2018	0,19518
42	30/10/2018	0,48594
43	29/10/2018	1,43040
44	26/10/2018	1,30697
45	25/10/2018	0,72517
46	24/10/2018	1,36040
47	23/10/2018	1,24889
48	22/10/2018	0,59855
49	19/10/2018	0,23533
50	18/10/2018	0,07706
51	17/10/2018	0,47050
52	16/10/2018	1,95340
53	15/10/2018	0,98333
54	12/10/2018	1,67104
55	11/10/2018	0,75844
56	10/10/2018	0,29808
57	9/10/2018	0,67454
58	8/10/2018	3,29663
59	5/10/2018	0,68497
60	4/10/2018	0,29451
61	3/10/2018	0,09842
62	2/10/2018	0,18788
63	1/10/2018	0,71118
64	28/9/2018	0,14201
65	27/9/2018	0,14510
66	26/9/2018	0,57536
67	25/9/2018	0,14090
68	24/9/2018	0,50083

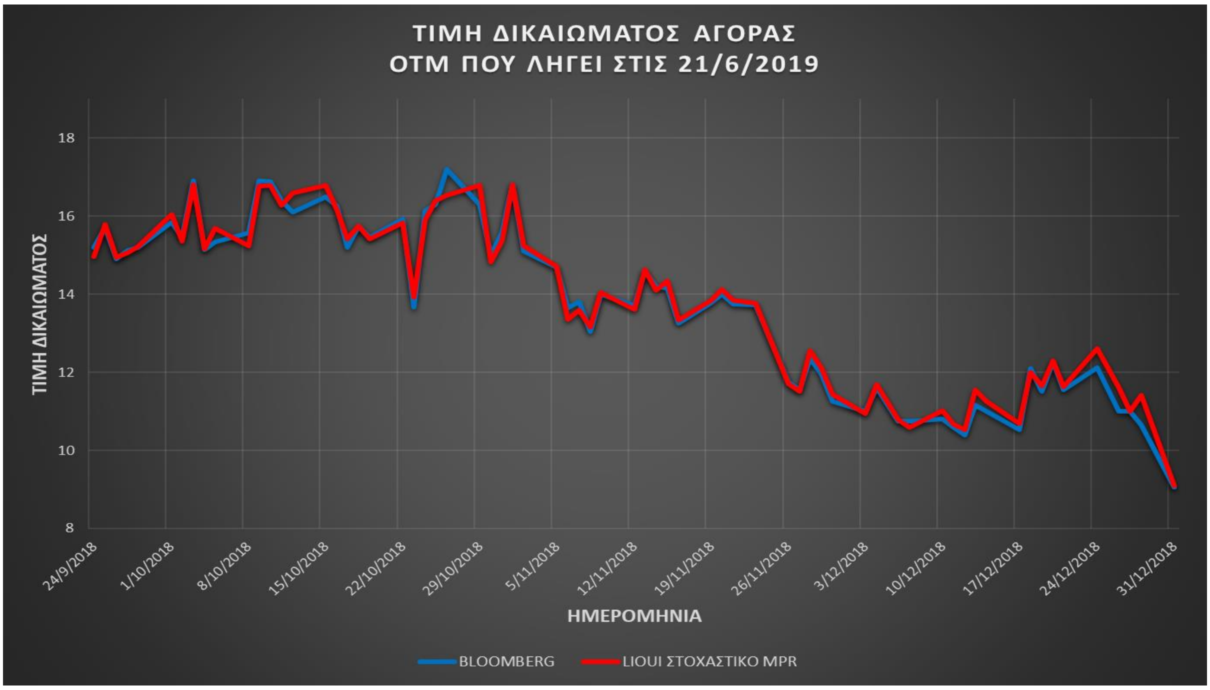
<u>Σχήμα 4.10</u>



<u>Σχήμα 4.11</u>



Σχήμα 4.12



4.3 Σύγκριση μεθόδων

<u>4.3.1 Το μοντέλο Black-Scholes υπό σταθερή μερισματική απόδοση (απλό μοντέλο)</u>

Απαραίτητο για να σχηματίσουμε μια ολοκληρωμένη και εμπεριστατωμένη εικόνα για την αποτελεσματικότητα του μοντέλου μας είναι να εξετάσουμε πως λειτουργεί το απλό μοντέλο Black-Scholes. Ως τύπους υπολογισμού του απλού μοντέλου θεωρήσαμε τους τύπους που αναφέρουμε στην ενότητα 2.2.4. Όμως ο τύπος (2.2.13) υπολογίζει την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς όταν αυτό δεν δίνει μέρισμα. Στην περίπτωση μας, ο υποκείμενος τίτλος που έχουμε επιλέξει, δίνει συνεχές μέρισμα.

Για τον υπολογισμό της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς όταν ο υποκείμενος τίτλος δίνει συνεχές μέρισμα, υπόκειται δηλαδή σε μερισματική απόδοση, χρησιμοποιείται ο παρακάτω τύπος ο οποίος περιγράφεται και στην βιβλιογραφία του Hull:

$$c(t) = S(t)e^{-q(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$\acute{o}\pi o\upsilon$: q *είναι η μερισματική απόδοση του υποκείμενου τίτλου την οποία θα εκτιμήσουμε*

$$d_1 = \frac{ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + (r - q + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Επομένως, για να εξετάσουμε την αποτελεσματικότητα του απλού μοντέλου, εκτιμήσαμε 2 παραμέτρους. Την μεταβλητότητα σ και την μερισματική απόδοση q. Τα μέτρα θέσης και διακύμανσης των εκτιμήσεων μας και τα κατάλοιπα του απλού μοντέλου περιγράφονται στο Πίνακα 4.7 και 4.8 αντίστοιχα. Στον Πίνακα 4.7 παρατηρούμε ότι η μεταβλητότητα κατά μέσο όρο είναι περίπου 30% και το εύρος των εκτιμήσεων είναι σχετικά περιορισμένο, της τάξεως του 23% περίπου. Αντίθετα η μερισματική απόδοση κατά μέσο όρο είναι περίπου 2,3% ενώ οι εκτιμήσεις είχαν τιμές από 0,6% έως και 4,8%.

Πίνακας 4.7

	ΑΠΛΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	
	σ	**q(t)**
AVERAGE	0,30421	0,02283
MAX	0,46096	0,04759
MIN	0,22957	0,00605
ST.DEV	0,05595	0,00552
VARIANCE	0,00313	0,00003

Πίνακας 4.8

Α/Α	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΕΣ	ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ
1	**31/12/2018**	10,54596
2	**28/12/2018**	12,36507
3	**27/12/2018**	14,61544
4	**26/12/2018**	10,68889
5	**24/12/2018**	21,68310
6	**21/12/2018**	13,50124
7	**20/12/2018**	24,78869
8	**19/12/2018**	9,27110
9	**18/12/2018**	8,50142
10	**17/12/2018**	17,36300
11	**14/12/2018**	10,58144
12	**13/12/2018**	7,37314
13	**12/12/2018**	8,16999
14	**11/12/2018**	7,86619
15	**10/12/2018**	6,14814
16	**7/12/2018**	9,57927
17	**6/12/2018**	5,79772
18	**4/12/2018**	11,00605
19	**3/12/2018**	2,87882
20	**30/11/2018**	3,94734
21	**29/11/2018**	6,39521
22	**28/11/2018**	4,76314
23	**27/11/2018**	4,26355
24	**26/11/2018**	4,65428
25	**23/11/2018**	13,44191
26	**21/11/2018**	14,11878
27	**20/11/2018**	13,27611
28	**19/11/2018**	6,20236
29	**16/11/2018**	3,21919
30	**15/11/2018**	3,80083
31	**14/11/2018**	16,62782
32	**13/11/2018**	7,74933
33	**12/11/2018**	6,76329
34	**9/11/2018**	1,35739
35	**8/11/2018**	1,57364
36	**7/11/2018**	2,24937
37	**6/11/2018**	1,44886
38	**5/11/2018**	1,98434
39	**2/11/2018**	2,31322
40	**1/11/2018**	4,45237
41	**31/10/2018**	7,19375
42	**30/10/2018**	6,51372
43	**29/10/2018**	15,37980
44	**26/10/2018**	10,37863
45	**25/10/2018**	5,31666
46	**24/10/2018**	12,76190
47	**23/10/2018**	6,39004
48	**22/10/2018**	6,81897
49	**19/10/2018**	2,11503
50	**18/10/2018**	3,33687
51	**17/10/2018**	3,96082
52	**16/10/2018**	4,58060
53	**15/10/2018**	6,56436
54	**12/10/2018**	3,30466
55	**11/10/2018**	9,75292
56	**10/10/2018**	6,71094
57	**9/10/2018**	2,29015
58	**8/10/2018**	4,39443
59	**5/10/2018**	2,34191
60	**4/10/2018**	1,67085
61	**3/10/2018**	3,46914
62	**2/10/2018**	2,44687
63	**1/10/2018**	6,67579
64	**28/9/2018**	3,97474
65	**27/9/2018**	3,84123
66	**26/9/2018**	8,14805
67	**25/9/2018**	4,71300
68	**24/9/2018**	3,53829

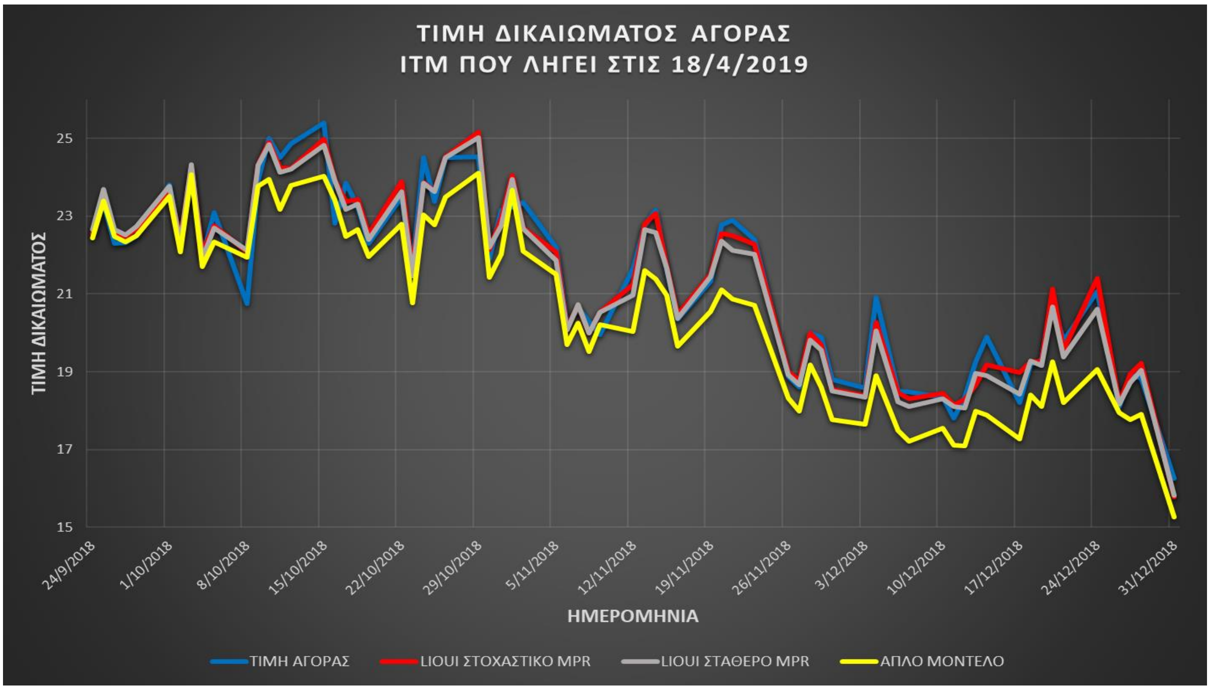
4.3.2 Σύγκριση καταλοίπων των μοντέλων

Στην ενότητα αυτή θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα μας από το μοντέλο Black-Scholes υπό στοχαστική μερισματική απόδοση όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή και όταν είναι στοχαστική με τις αντίστοιχες τιμές που αντλήσαμε από το Bloomberg και με τα αποτελέσματα μας από το απλό μοντέλο Black-Scholes.

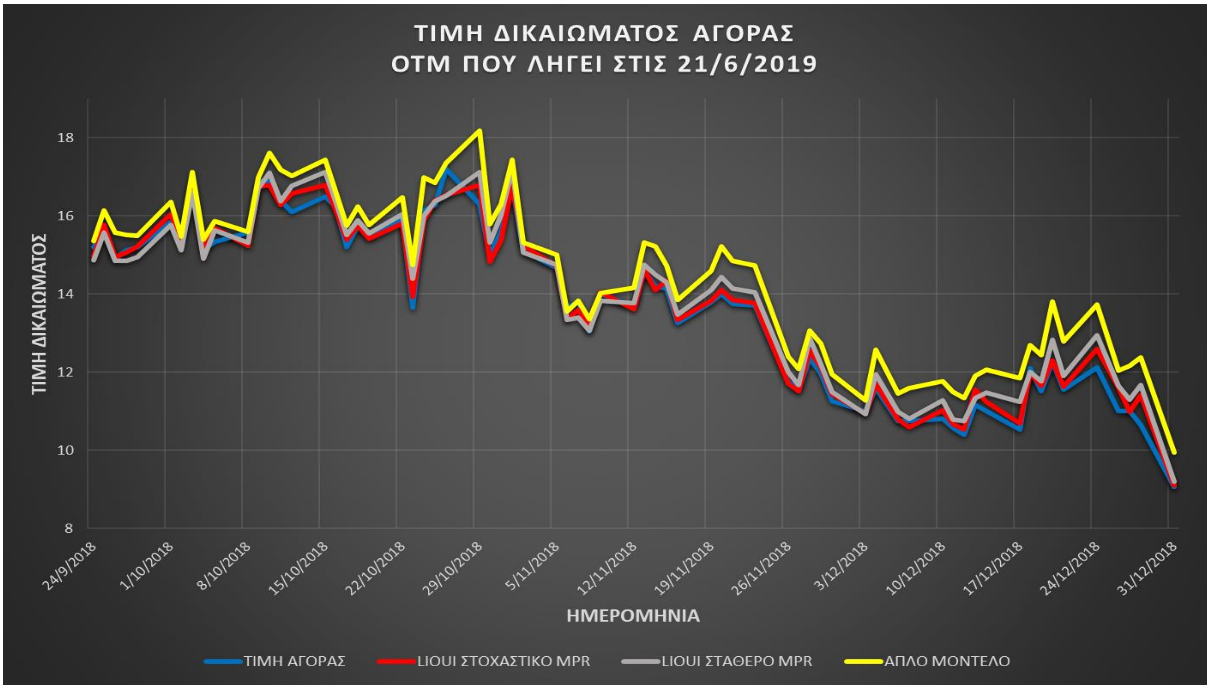
Έτσι, ακολουθούν 3 σχήματα ενδεικτικά των αποτελεσμάτων μας. Στο Σχήμα 4.13 περιγράφονται οι τιμές των δικαιωμάτων που είναι ATM με ληκτότητα στις 18/1/2019. Στο Σχήμα 4.14 οι τιμές των δικαιωμάτων που είναι ITM με ληκτότητα στις 18/4/2019 και στο Σχήμα 4.15 οι τιμές των δικαιωμάτων που είναι OTM με ληκτότητα στις 21/6/2019. (τα δικαιώματα που χρησιμοποιήθηκαν για την γραφική απεικόνιση των αποτελεσμάτων μας επιλέχθηκαν τυχαία)

Σχήμα 4.13

Σχήμα 4.14



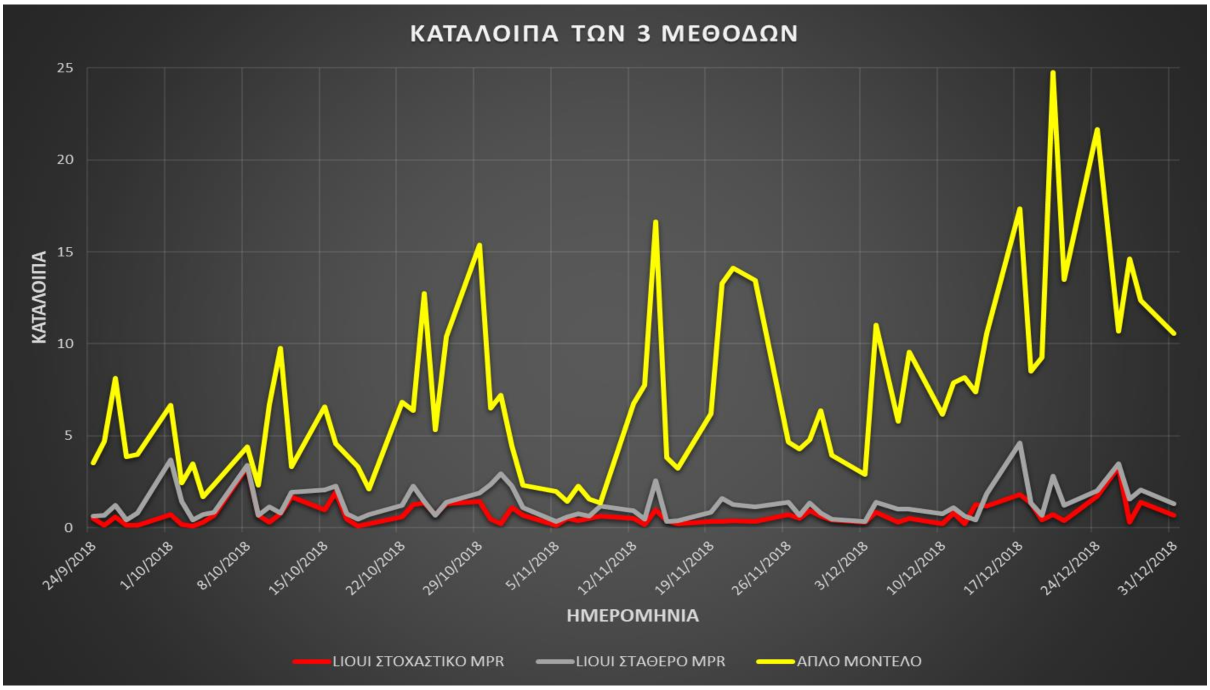
Σχήμα 4.15



Από τα παραπάνω γραφήματα, παρατηρούμε ότι ως επί το πλείστων οι εκτιμήσεις που πραγματοποιήσαμε μας δίνουν τιμές, για τα δικαιώματα αγοράς που εξετάζουμε, πολύ κοντά σε αυτές της αγοράς, ενώ αντίθετα οι τιμές που υπολογίσαμε με το απλό μοντέλο Black-Scholes έχουν μεγάλες διαφορές με τις αντίστοιχες τιμές της αγοράς. Η διαπίστωση αυτή υποστηρίζεται και από τα αποτελέσματα μας στο Πίνακα 4.7 όπου παρατηρούμε κατάλοιπα πολύ μεγαλύτερα από αυτά που βρήκαμε για το μοντέλο μας τόσο για σταθερή αγοραία τιμή του κινδύνου όσο και για στοχαστική. Ενδεικτικό είναι το Σχήμα 4.16 στο οποίο απεικονίζονται γραφικά τα κατάλοιπα των 3 πλέον μεθόδων.

Οι αποκλίσεις που φαίνονται να υπάρχουν σε μερικές ημερομηνίες στα παραπάνω γραφήματα όσον αφορά το μοντέλο Black-Scholes υπό σταθερή αλλά και υπό στοχαστική μερισματική απόδοση, οφείλονται στο γεγονός ότι οι τιμές της αγοράς εξαρτώνται και από άλλους παράγοντες πέρα από αυτούς που εξετάζουμε στην μελέτη μας. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι ότι για να διαμορφωθεί η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς εξετάζεται η ζήτηση που έχει το δικαίωμα αυτό, δηλαδή το πλήθος (volume) των δικαιωμάτων που συναλλάχθηκαν.

Σχήμα 4.16



4.4 Προβλεπτική ικανότητα

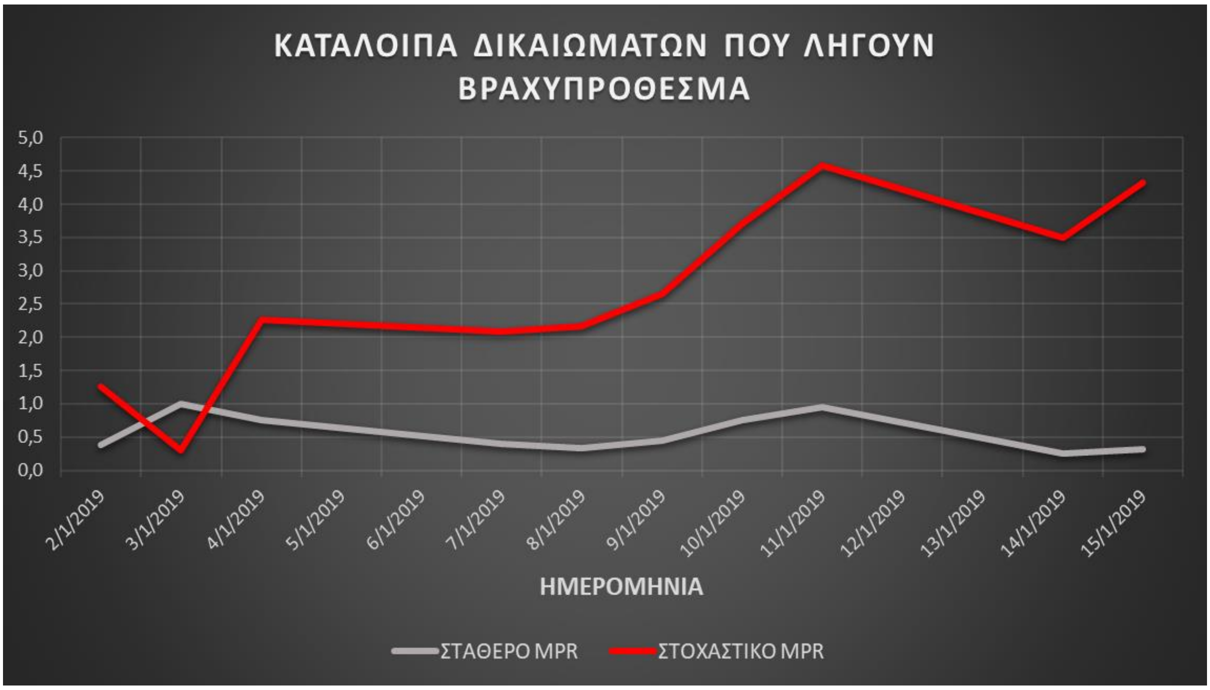
Αφού ολοκληρώσαμε την εκτίμηση των παραμέτρων μας, εξετάσαμε την προβλεπτική τους ικανότητα. Με άλλα λόγια, χρησιμοποιήσαμε τις παραμέτρους που εκτιμήσαμε στις 31/12/2018 για να υπολογίσουμε την θεωρητική τιμή των δικαιωμάτων αγοράς για τις επόμενες 10 μέρες χρησιμοποιώντας τα μοντέλα μας.

Όπως ήταν αναμενόμενο το άθροισμα των τετραγωνισμένων διαφορών μεταξύ των τιμών που υπολογίσαμε με το εκάστοτε μοντέλο μας και με αυτών της αγοράς, ήταν μικρό τις πρώτες μέρες και σιγά σιγά αυξανόταν. Το ίδιο παρατηρήσαμε και για σταθερή και για στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου. Αξιοσημείωτο είναι όμως το γεγονός ότι, παρόλο που σύμφωνα με τα αποτελέσματα της ενότητας 4.3 το μοντέλο λειτουργεί καλύτερα όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική, το μοντέλο υπό σταθερή αγοραία τιμή του κινδύνου έχει καλύτερη προβλεπτική ικανότητα από ότι όταν είναι υπό στοχαστική. Αυτό συμβαίνει κυρίως γιατί το μοντέλο μας, όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή, είναι πιο αποτελεσματικό βραχυπρόθεσμα. Εάν δηλαδή θέλουμε να εξετάσουμε την προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου μας όταν τα δικαιώματα λήγουν σε μερικές μέρες, τότε ο ιδανικότερο μοντέλο, όπως φαίνεται και στο Σχήμα 4.17 είναι αυτό με την σταθερή αγοραία τιμή του κινδύνου. Αντίθετα, εάν τα δικαιώματα προαίρεσης που εξετάζουμε λήγουν μακροπρόθεσμα, δηλαδή σε μερικούς μήνες ή χρόνια, τότε το ιδανικότερο μοντέλο για να προβλέψουμε τις τιμές των δικαιωμάτων μας είναι αυτό με στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου. Ικανό να υποστηρίξει τα παραπάνω είναι το Σχήμα 4.18. Το αποτέλεσμα αυτό δεν θα έπρεπε να μας εκπλήσσει καθώς βραχυπρόθεσμα η αβεβαιότητα είναι περιορισμένη σε σχέση με τον μακροπρόθεσμο ορίζοντα. Επομένως, το μοντέλο μας υπό στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου έχει περισσότερες μεταβλητές για να αντικατοπτρίσει την αβεβαιότητα, συνεπώς δίνει καλύτερα αποτελέσματα μακροπρόθεσμα. Αντίθετα το μοντέλο μας υπό σταθερή αγοραία τιμή του κινδύνου έχει λιγότερες παραμέτρους με αποτέλεσμα η προβλεπτική ικανότητα του μοντέλου αυτού να είναι αποτελεσματικότερη όταν η αβεβαιότητα είναι περιορισμένη, δηλαδή βραχυπρόθεσμα. Πράγματι στον Πίνακα 4.9 και στο Σχήμα 4.19 που ακολουθούν φαίνονται τα κατάλοιπα από την προβλεπτική ικανότητα των παραμέτρων που εκτιμήσαμε για κάθε μοντέλο υπολογισμού της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς.

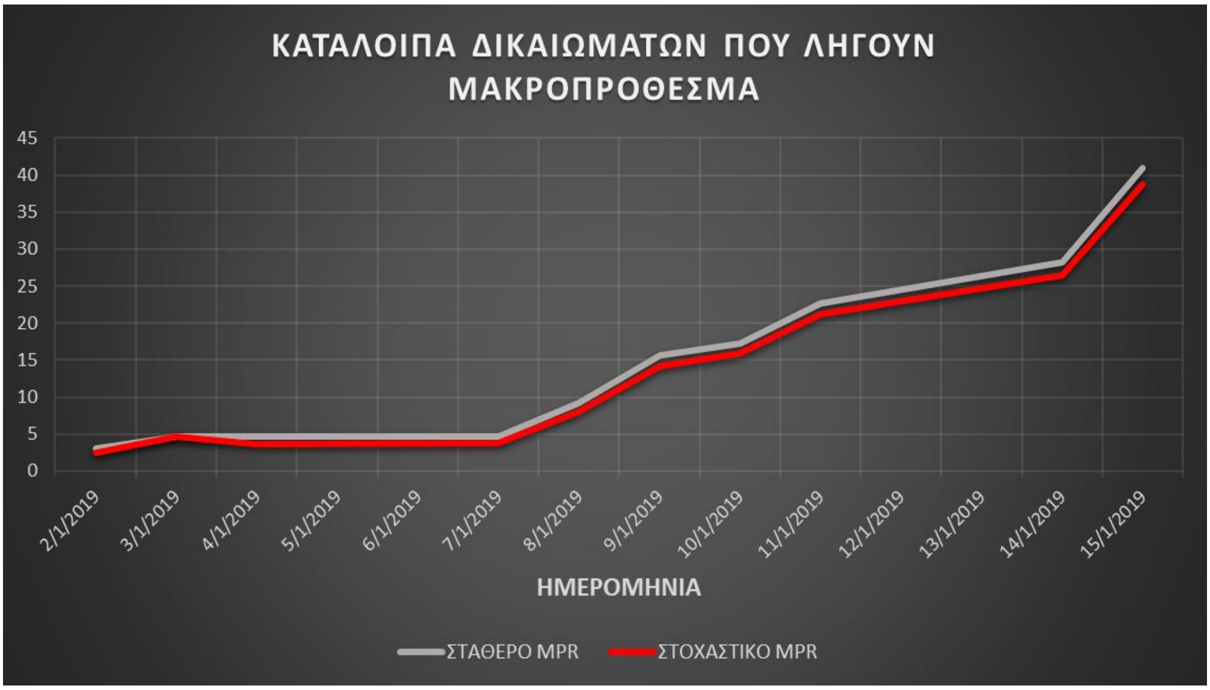
Πίνακας 4.9

Α/Α	ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΕΣ	ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΣΜΕΝΩΝ ΔΙΑΦΟΡΩΝ		
		ΣΤΑΘΕΡΟ MPR	ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ MPR	ΑΠΛΟ ΜΟΝΤΕΛΟ
1	15/1/2019	41,23944	43,09531	52,19206
2	14/1/2019	28,42284	29,90020	39,29462
3	11/1/2019	23,65058	25,85244	31,15596
4	10/1/2019	18,06977	19,66668	26,91668
5	9/1/2019	16,01948	16,80466	23,28641
6	8/1/2019	9,50093	10,17809	18,51739
7	7/1/2019	5,11064	5,83092	12,37291
8	4/1/2019	5,41075	5,93935	11,65167
9	3/1/2019	5,67639	4,98150	30,11309
10	2/1/2019	3,47373	3,67124	10,89117
11	31/12/2018	1,29676	0,66192	10,54596

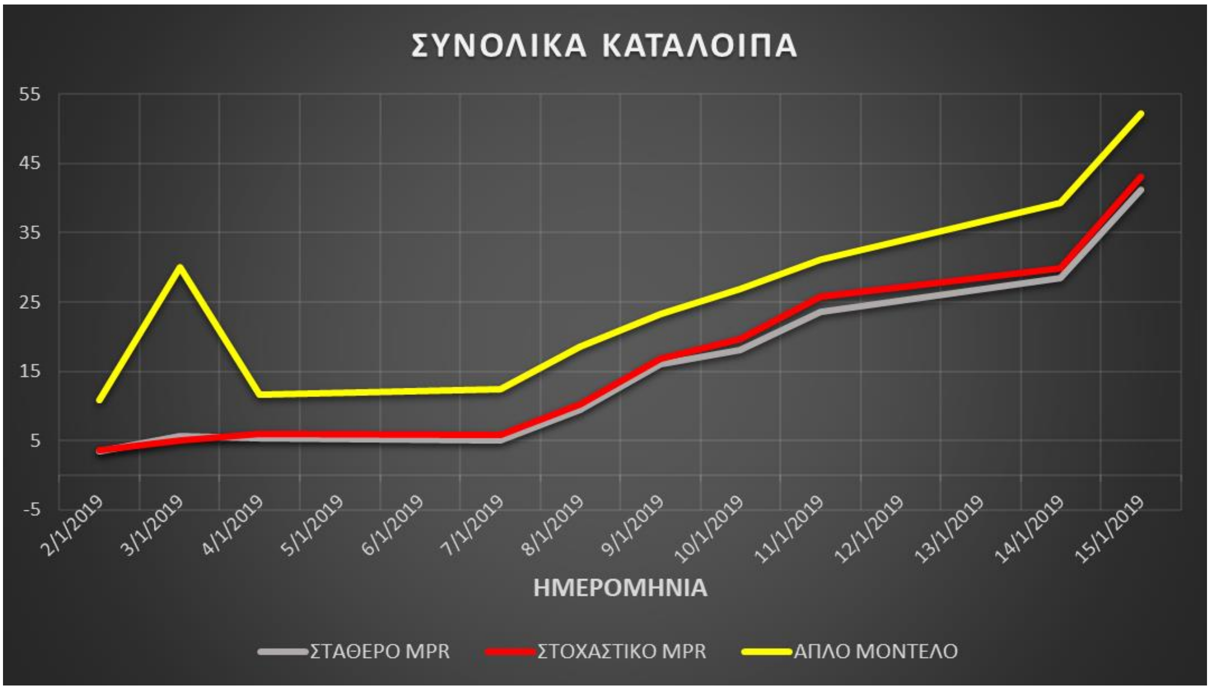
Σχήμα 4.17



Σχήμα 4.18



Σχήμα 4.19



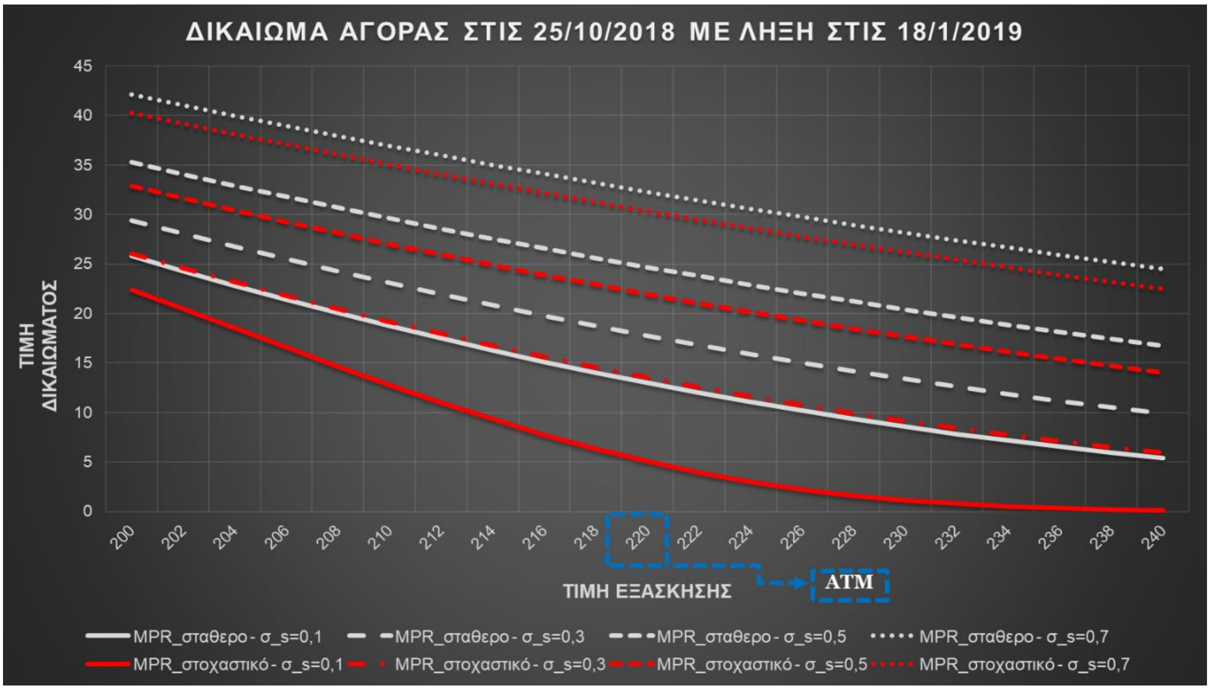
4.5 Αριθμητική ανάλυση

Στην ενότητα αυτή πραγματοποιούμε αριθμητική ανάλυση των αποτελεσμάτων μας. Με άλλα λόγια, εξετάζουμε πως συμπεριφέρεται η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς όταν μεταβάλλεται μόνο μία παράμετρος ενώ όλες οι άλλες είναι σταθερές. Συγκεκριμένα, κάναμε αριθμητική ανάλυση για διαφορετικές τιμές της μεταβλητότητας της τιμής της μετοχής σ_s για 2 περιπτώσεις. Στην πρώτη περίπτωση μεταβάλλεται η τιμή εξάσκησης και στην $2^η$ περίπτωση μεταβάλλεται ο χρόνος μέχρι την λήξη. Η αριθμητική ανάλυση έγινε και για σταθερή και για στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου.

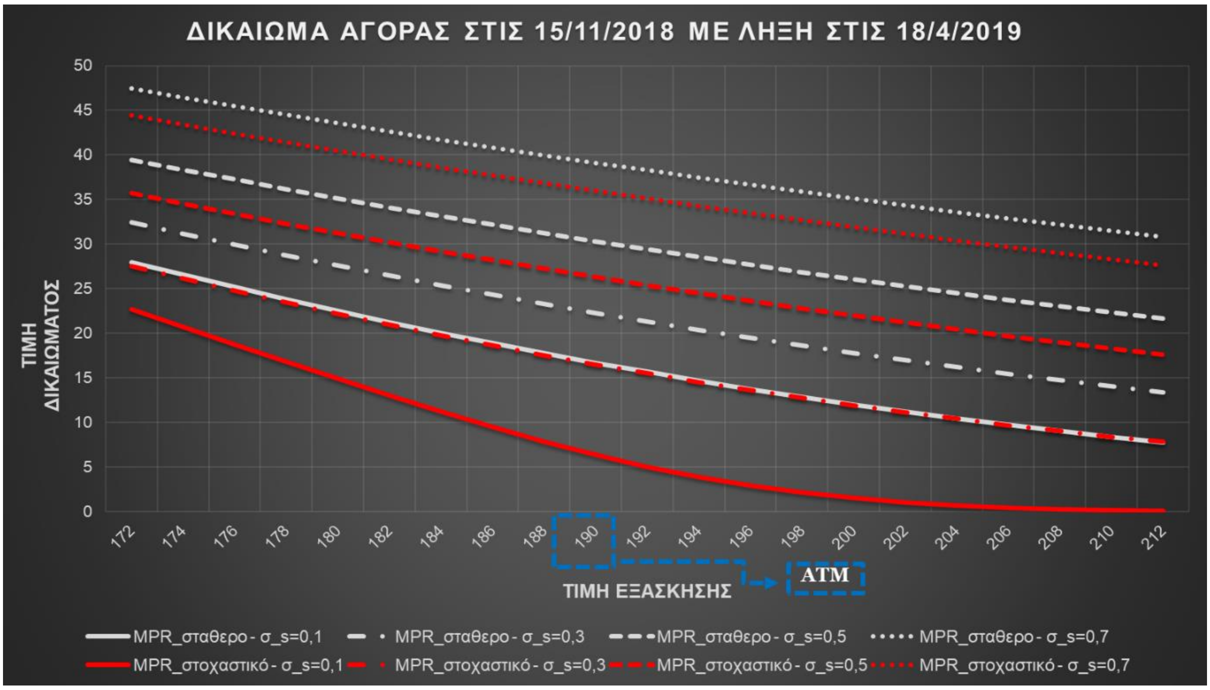
4.5.1 Ως προς την τιμή εξάσκησης

Αρχικά εξετάσαμε την συμπεριφορά της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς όταν μεταβάλλεται η τιμή εξάσκησης. Αναλυτικότερα, επιλέξαμε τυχαία 3 ημερομηνίες από τις 68 της μελέτης μας και σε κάθε ημερομηνία διαλέξαμε ένα δικαιώματα αγοράς με συγκεκριμένο χρόνο ως την λήξη τον οποίο επιλέξαμε επίσης τυχαία. Επομένως, διαλέξαμε ένα δικαίωμα αγοράς από τις 25/10/2018 που λήγει στις 18/1/2019 (Σχήμα 4.20) , ένα δικαίωμα αγοράς από τις 15/11/2018 που λήγει στις 18/4/2019 (Σχήμα 4.21) και ένα δικαίωμα αγοράς από τις 31/12/2018 που λήγει στις 21/6/2019 (Σχήμα 4.22). Επιπρόσθετα, για κάθε δικαίωμα πραγματοποιήσαμε αριθμητική ανάλυση για 4 διαφορετικές μεταβλητότητες (σ_s=0.1, σ_s=0.3, σ_s=0.5, σ_s=0.7). Τέλος, σε κάθε περίπτωση χρησιμοποιήσαμε 20 τιμές εξάσκησης με εύρος 40 δολάρια και βήμα μεταβολής 2 δολάρια. Από την αριθμητική ανάλυση προέκυψαν τα παρακάτω 3 γραφήματα:

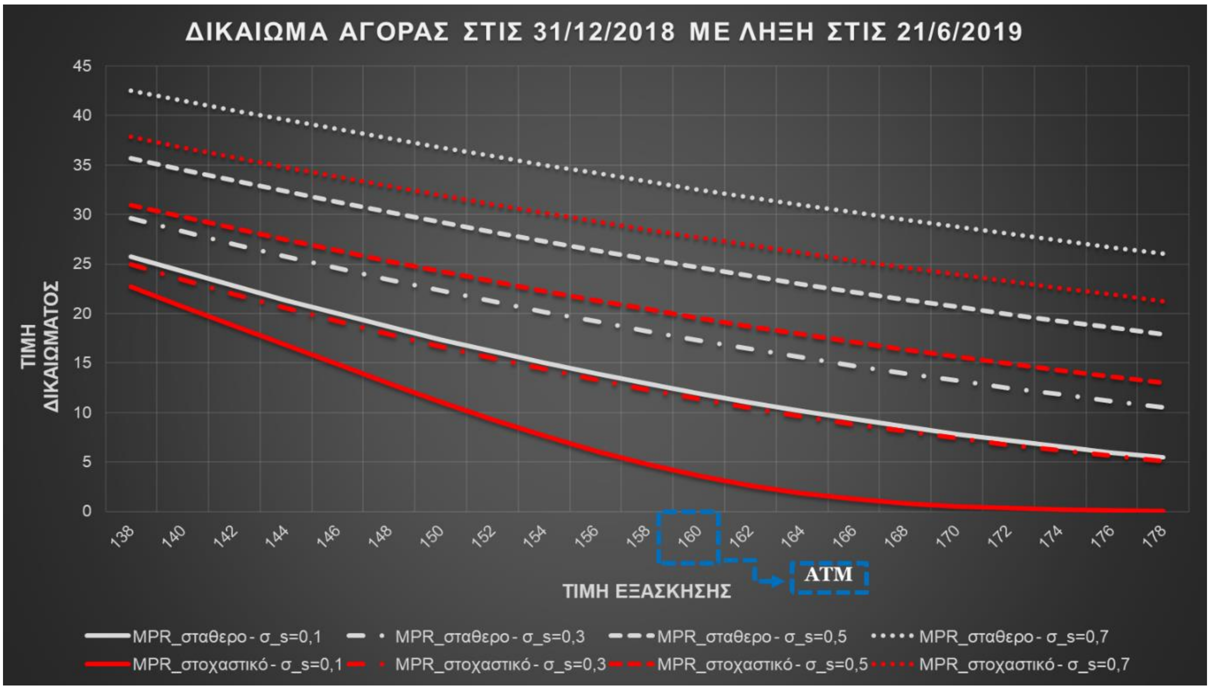
<u>Σχήμα 4.20</u>



Σχήμα 4.21



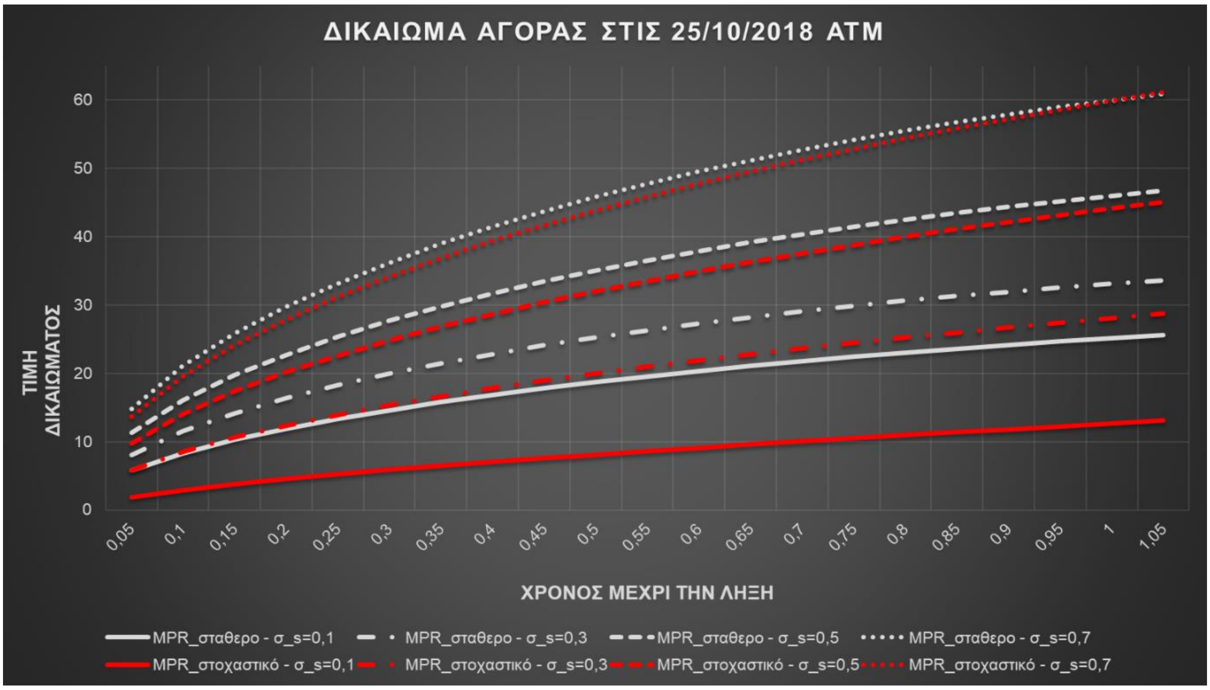
Σχήμα 4.22



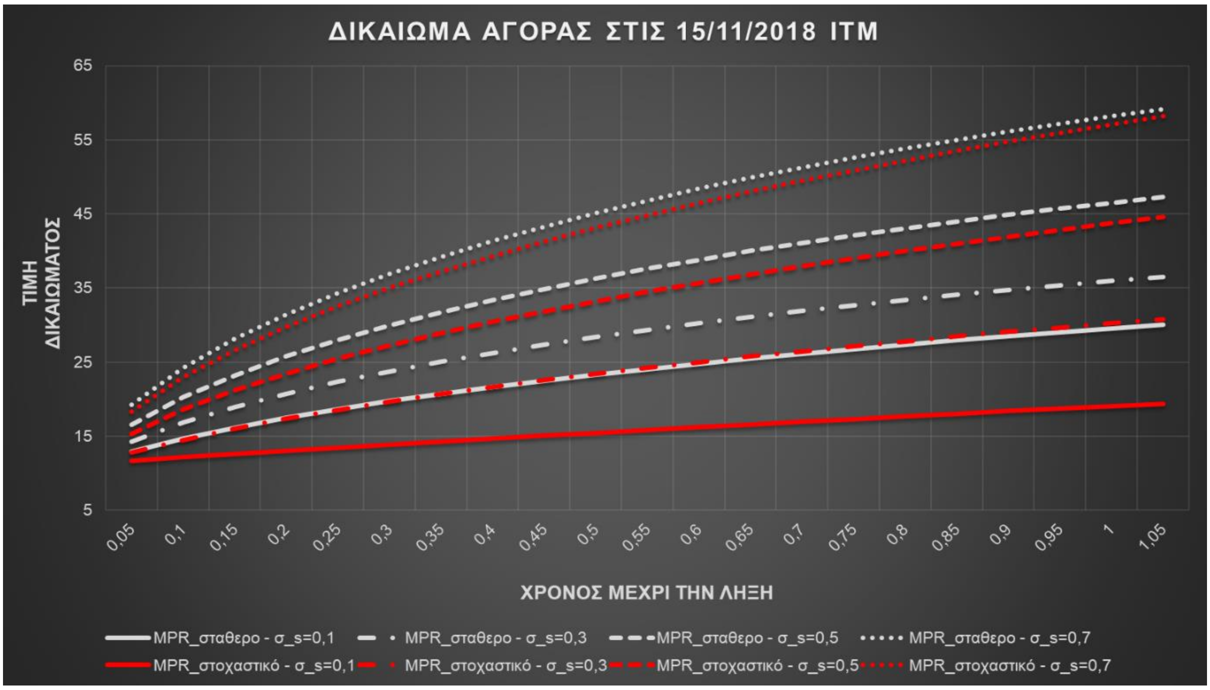
4.5.2 Ως προς το χρόνο μέχρι την λήξη

Στη συνέχεια, εξετάσαμε την συμπεριφορά της τιμής ενός δικαιώματος αγοράς όταν μεταβάλλεται ο χρόνος στη λήξη. Για αυτήν την αριθμητική ανάλυση, επιλέξαμε δικαιώματα από τις ίδιες ημερομηνίες με την προηγούμενη ενότητα (25/10/2018, 15/11/2018, 31/12/2018) για συγκεκριμένη όμως τιμή εξάσκησης για κάθε δικαίωμα. Συγκεκριμένα επιλέξαμε ένα δικαίωμα αγοράς ATM από τις 25/10/2018 (Σχήμα 4.23), ένα δικαίωμα ITM από τις 15/11/2018 (Σχήμα 4.24) και ένα OTM από τις 31/12/2018 (Σχήμα 4.25). Τέλος, για την ανάλυση μας χρησιμοποιήσαμε 21 διαφορετικούς χρόνους μέχρι την λήξη με εύρος 1 έτος ξεκινώντας από τις 18 μέρες (0.05) και με βήμα πάλι 18 μέρες. Επομένως, καταλήξαμε στα παρακάτω 3 γραφήματα στα οποία όπως ήταν αναμενόμενο παρατηρούμε ότι σε κάθε περίπτωση, δηλαδή ανεξαρτήτως την τιμή εξάσκησης ή αν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή ή στοχαστική, όσο αυξάνεται ο χρόνος μέχρι την λήξη τόσο αυξάνεται και η τιμή του δικαιώματος. Το ίδιο ισχύει και για την μεταβολή της μεταβλητότητας σ_S. Συγκεκριμένα, παρατηρούμε από τα παρακάτω γραφήματα πως όσο αυξάνεται η μεταβλητότητα τόσο αυξάνεται και η τιμή του δικαιώματος αγοράς. Ενδιαφέρουσα είναι η περίπτωση στην οποία το δικαίωμα αγοράς που εξετάζουμε είναι OTM. Στην περίπτωση αυτή όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.25, όταν η μεταβλητότητα είναι μεγάλη τότε όσο μεγαλώνει ο χρόνος μέχρι την λήξη του δικαιώματος τόσο μεγαλώνουν και οι τιμές των δικαιωμάτων αγοράς που υπολογίστηκαν με το μοντέλο υπό στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου συγκριτικά με τις τιμές που υπολογίστηκαν από το μοντέλο υπό σταθερή αγοραία τιμή του κινδύνου.

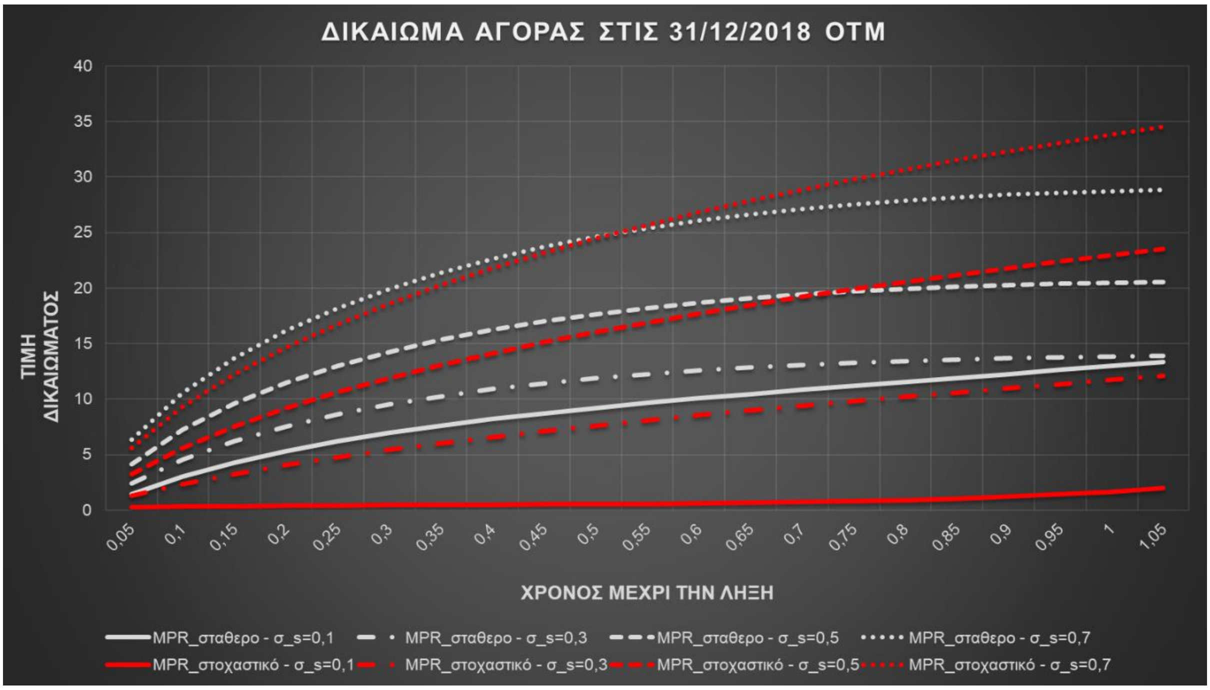
Σχήμα 4.23



Σχήμα 4.24



Σχήμα 4.25



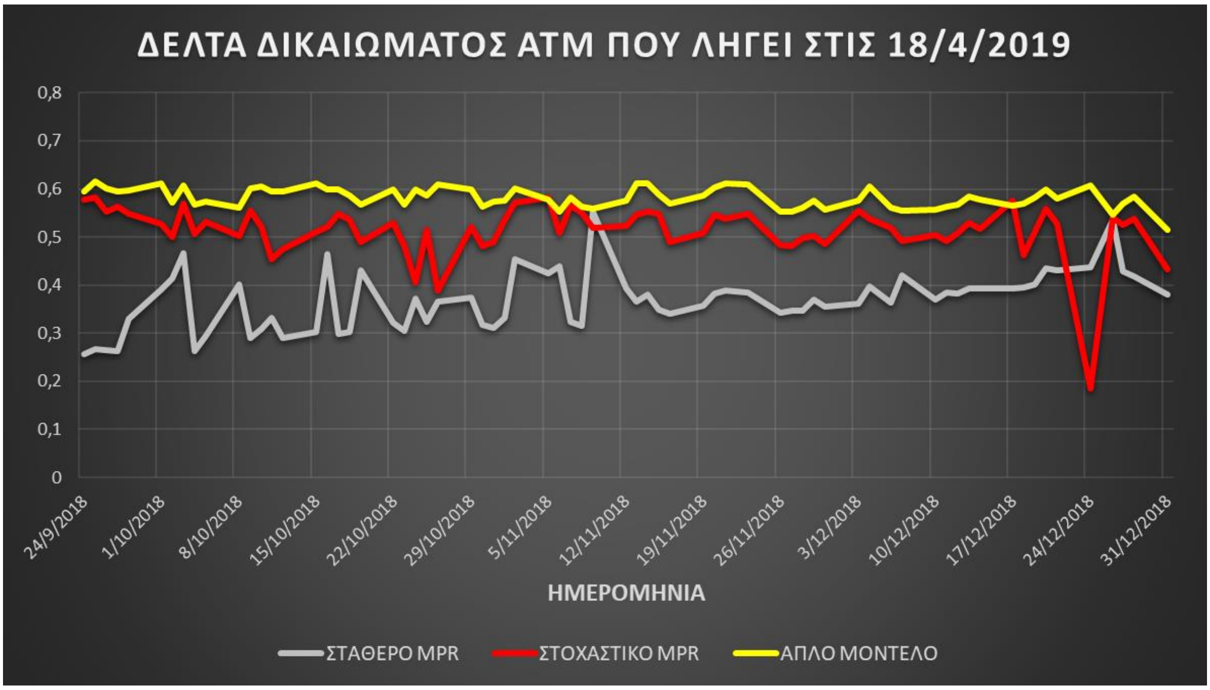
4.6 Σύγκριση συντελεστών ευαισθησίας

Κλείνοντας το κεφάλαιο αυτό, αξίζει να μελετήσουμε τους συντελεστές ευαισθησίας του μοντέλου μας. Όπως αναφέραμε και στην περιγραφή του μοντέλου στην ενότητα 3.5 οι συντελεστές ευαισθησίας του μοντέλου Black-Scholes υπό στοχαστική μερισματική απόδοση έχουν διαφορετικούς τύπους κλειστής μορφής από αυτούς του απλού μοντέλου Black-Scholes. Αυτό έχει ως συνέπεια οι συντελεστές ευαισθησίας να έχουν και διαφορετικές ιδιότητες σε κάθε μοντέλο. Υπενθυμίζουμε ότι και οι 3 συντελεστές που εξετάζουμε (Δέλτα, Γάμα, Βέγκα) σύμφωνα με το απλό μοντέλο είναι θετικοί αριθμοί. Μάλιστα, το Δέλτα μπορεί να πάρει τιμές μόνο μεταξύ 0 και 1. Όμως οι συντελεστές αυτοί δεν λειτουργούν το ίδιο στο μοντέλο μας. Συγκεκριμένα, και οι 3 συντελεστές ευαισθησίας μπορούν να πάρουν και αρνητικές τιμές, ενώ το Δέλτα μπορεί να πάρει, σε απόλυτη τιμή, τιμές μεγαλύτερες του 1, ιδιότητα η οποία αποτελούσε χαρακτηριστικό μόνο του Βέγκα.

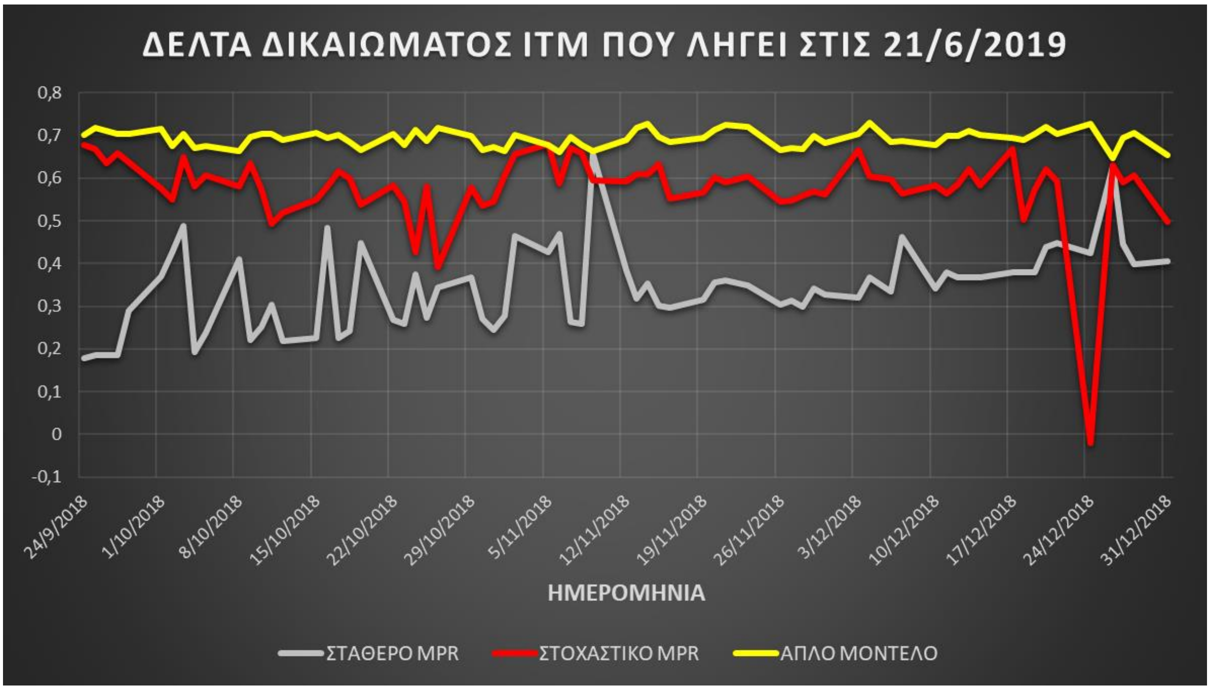
4.6.1 Δέλτα

Για να εξετάσουμε την συμπεριφορά του Δέλτα και να επαληθεύσουμε τις νέες του ιδιότητες, παρουσιάζουμε γραφικά τα Δέλτα 3 δικαιωμάτων αγοράς με διαφορετικές τιμές εξάσκησης και διαφορετικές ληκτότητες και για τα 3 μοντέλα που εξετάζουμε. Συγκεκριμένα, στο Σχήμα 4.26 περιγράφονται τα Δέλτα ενός δικαιώματος ATM που λήγει στις 18/4/2019, στο Σχήμα 4.27 τα Δέλτα ενός δικαιώματος ITM που λήγει στις 21/6/2019 και στο Σχήμα 4.28 ενός δικαιώματος OTM που λήγει στις 17/1/2020. Στο Σχήμα 4.26 παρατηρούμε ότι τα Δέλτα όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική είναι πιο κοντά στα Δέλτα που υπολογίστικαν με το απλό μοντέλο. Το ίδιο ισχύει και για τα Σχήματα 4.27 και 4.28 στα οποία τα Δέλτα του απλού μοντέλου έχουν πολύ μικρή διακύμανση σε σχέση με αυτά των άλλων 2 μοντέλων. Οι ιδιότητες του Δέλτα που αναφέρουμε στην θεωρία για το μοντέλο Black-Scholes υπό στοχαστική μερισματική απόδοση επαληθεύονται στα Σχήματα 4.27 και 4.28 όπου παρατηρούμμε ότι σε κάποιες ημερομηνίες είναι αρνητικό. Εξετάζοντας τους τύπους υπολογισμών των Δέλτα για το μοντέλο μας, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι και για σταθερη και για στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου μπορεί να πάρει αρνητικές τιμές ή τιμές μεγαλύτερες του 1 σε απόλυτες τιμές μόνο όταν η μεταβλητότητα της μερισματικής απόδοσης είναι μεγαλύτερη από αυτή της τιμής της μετοχής, δηλαδή όταν $\sigma_\delta > \sigma_S$. Για τους άλλους 2 συντελεστές ευαισθησίας που θα εξετάσουμε (Γάμα, Βέγκα) θα χρησιμοποιήσουμε τα ίδια δικαιώματα με αυτά που χρησιμοποιήσαμε για το Δέλτα.

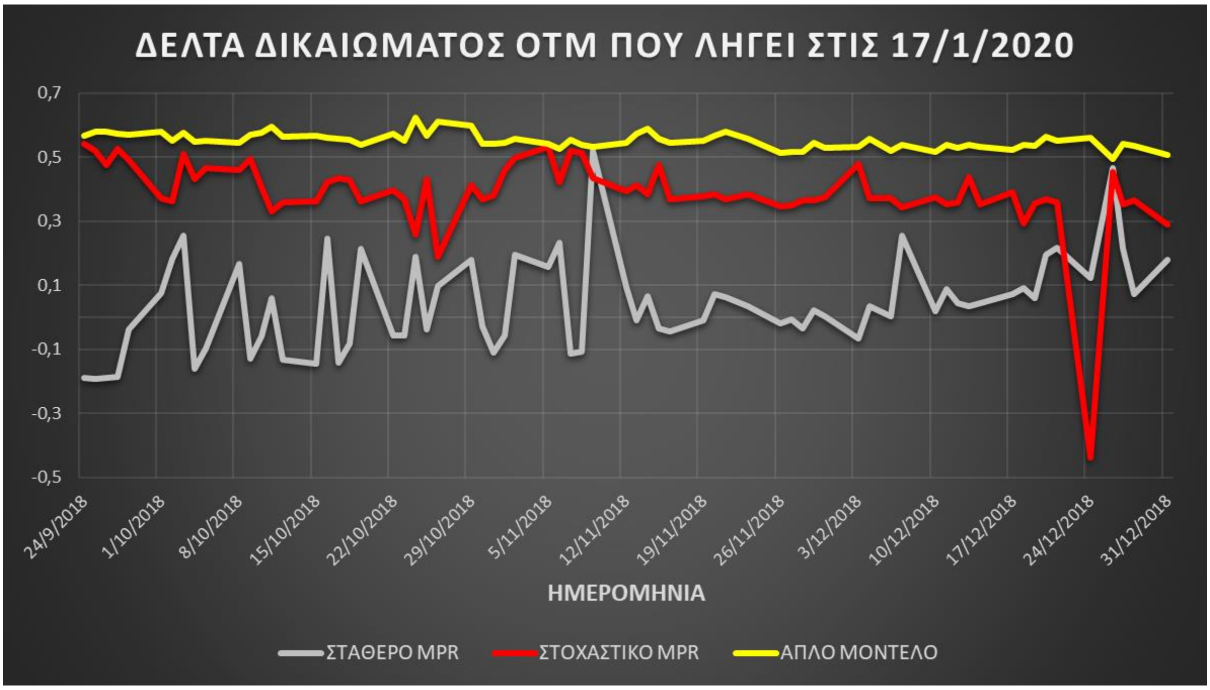
<u>Σχήμα 4.26</u>



<u>Σχήμα 4.27</u>



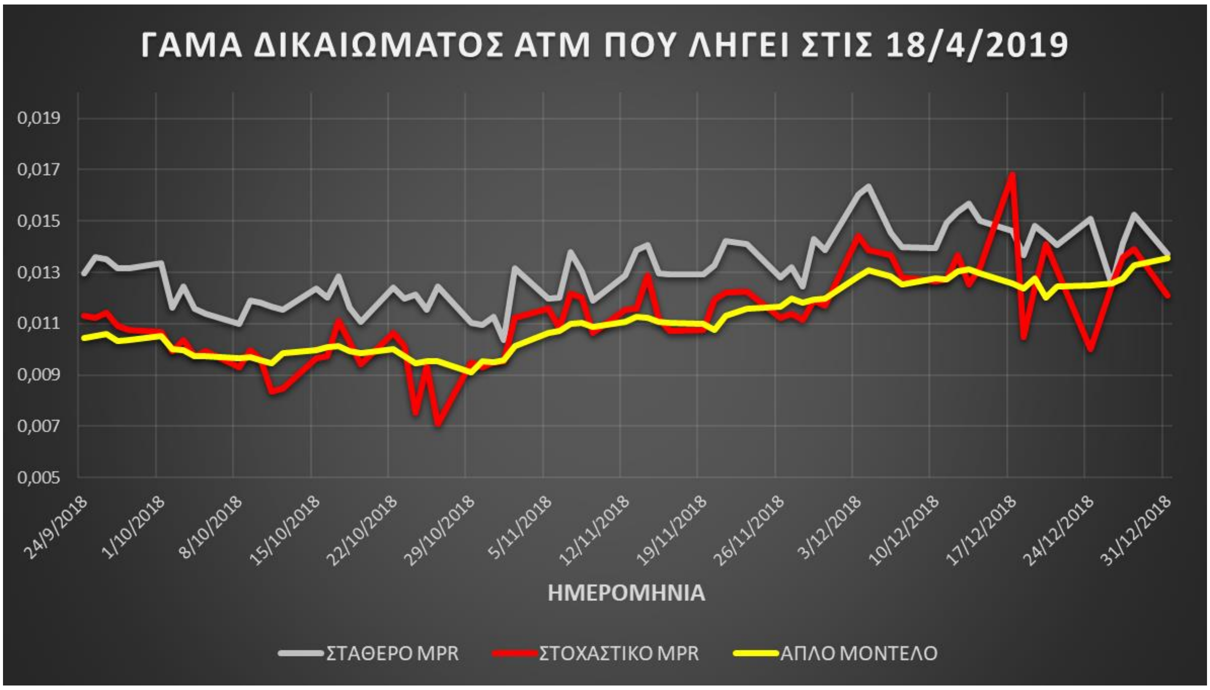
Σχήμα 4.28



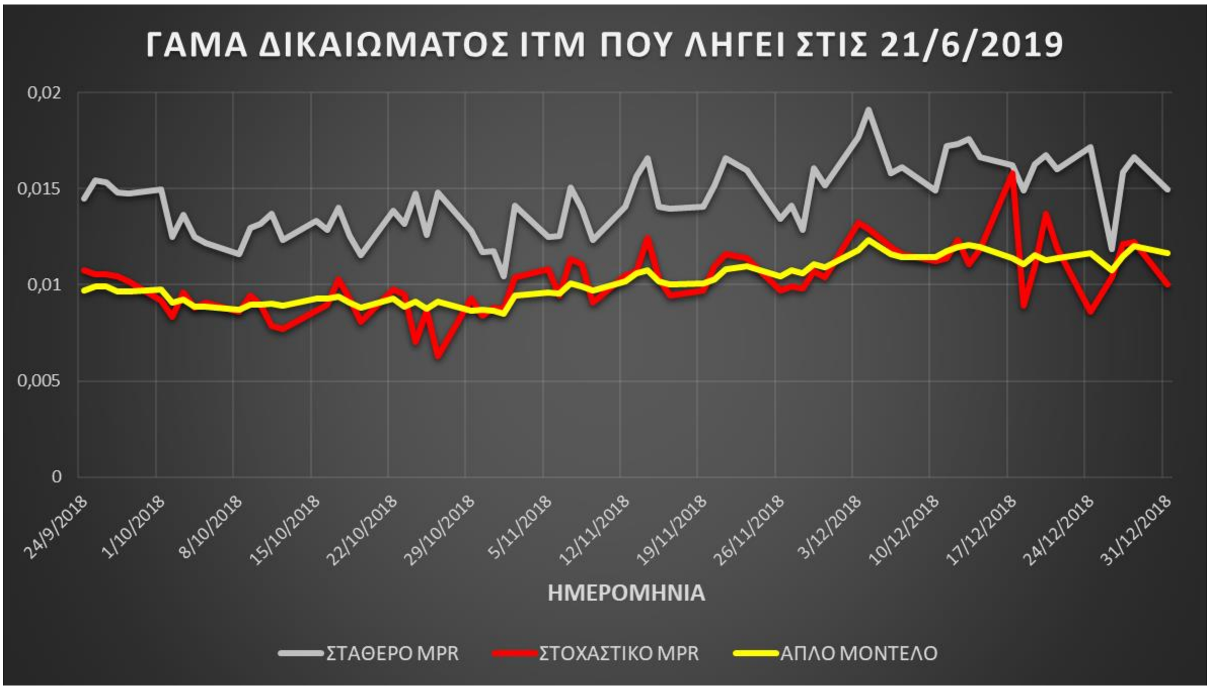
4.6.2 Γάμα

Όπως και το Δέλτα έτσι και το Γάμα, όταν το μοντέλο Black-Scholes είναι υπό στοχαστική μερισματική απόδοση, παρουσιάζει διαφορετικές ιδιότητες από αυτές του απλού μοντέλου. Όμως οι διαφορές αυτές δεν επαληθεύονται στην εμπειρική μας μελέτη καθώς σε κάθε περίπτωση το Γάμα παρέμεινε θετικό. Στα σχήματα που ακολουθούν παρατηρούμε, τόσο για το μοντέλο Black-Scholes υπό στοχαστική μερισματική απόδοση όταν ή αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή όσο και για όταν είναι στοχαστική, ότι τα Γάμα έχουν μεγάλη διακύμανση σε σύγκριση με τα Γάμα του απλού μοντέλου. Επίσης, αξιοσημείωτο είναι το γεγονός ότι όσο το δικαίωμα που εξετάζουμε είναι ATM (Σχήμα 4.29) ή ITM (Σχήμα 4.30), τα Γάμα που υπολογίστηκαν υπό στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου είναι πολύ κοντά σε αυτά που υπολογίστηκαν με το απλό μοντέλο. Αυτό όμως δεν ισχύει και στην περίπτωση όπου το δικαίωμα αγοράς είναι OTM και λήγει στις 17/1/2020 (Σχήμα 4.31).

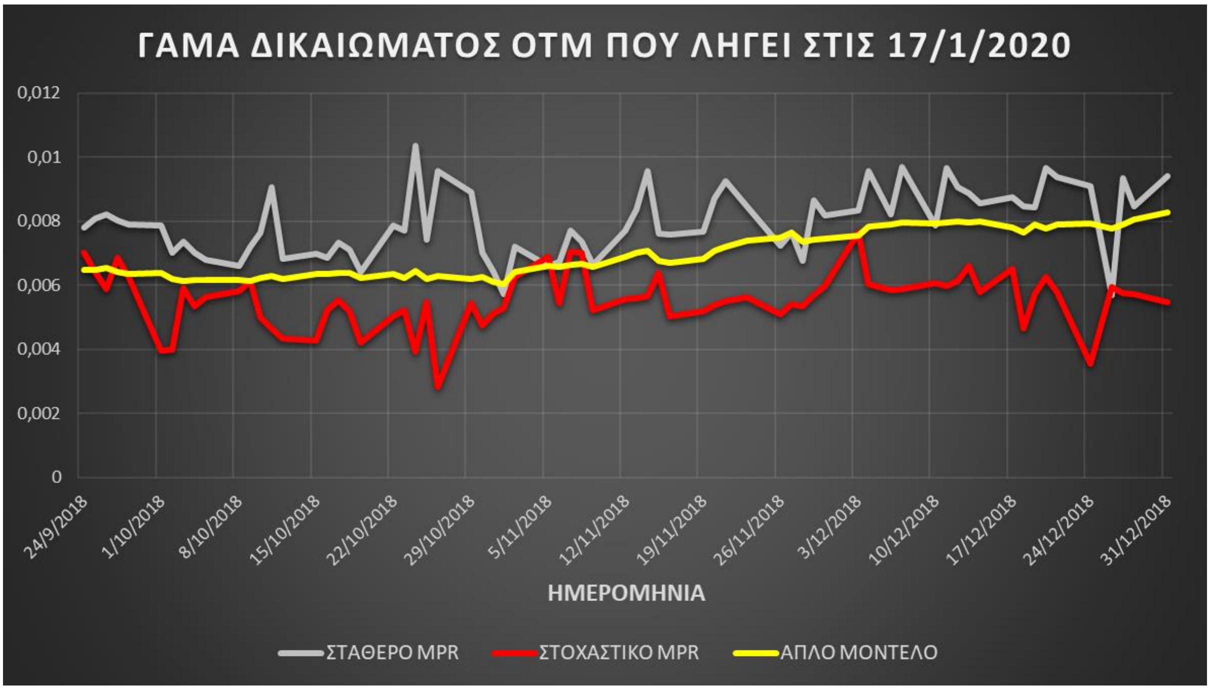
Σχήμα 4.29



Σχήμα 4.30



Σχήμα 4.31

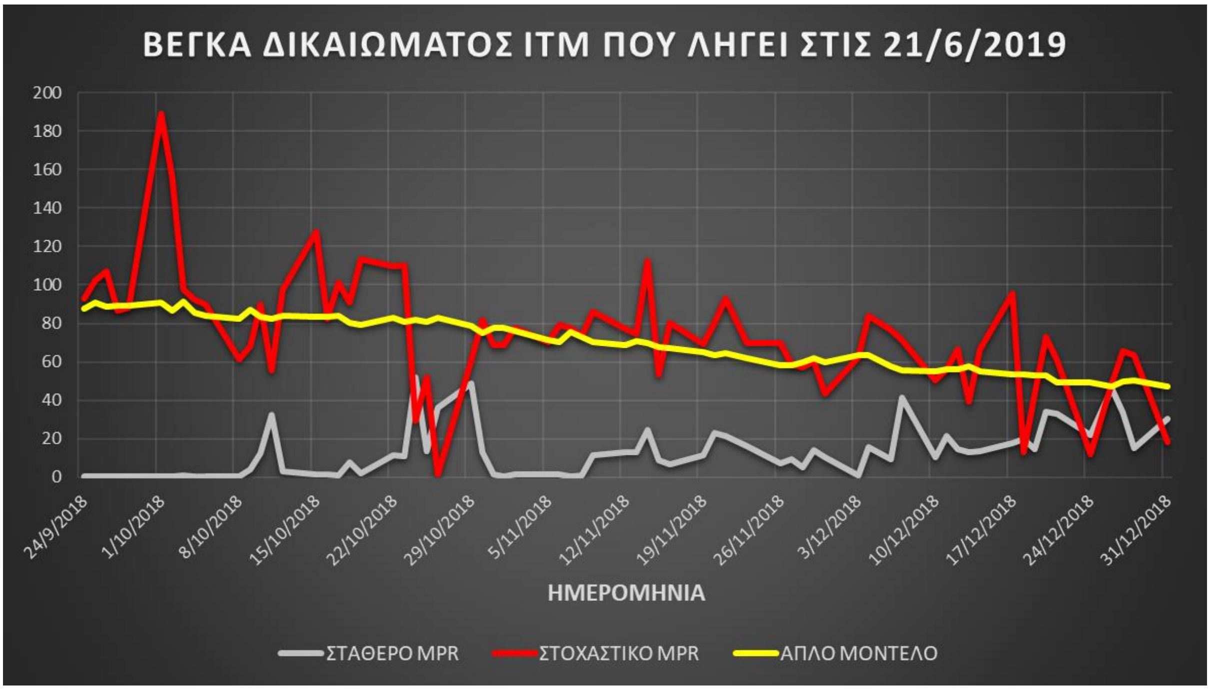


4.6.3 Βέγκα

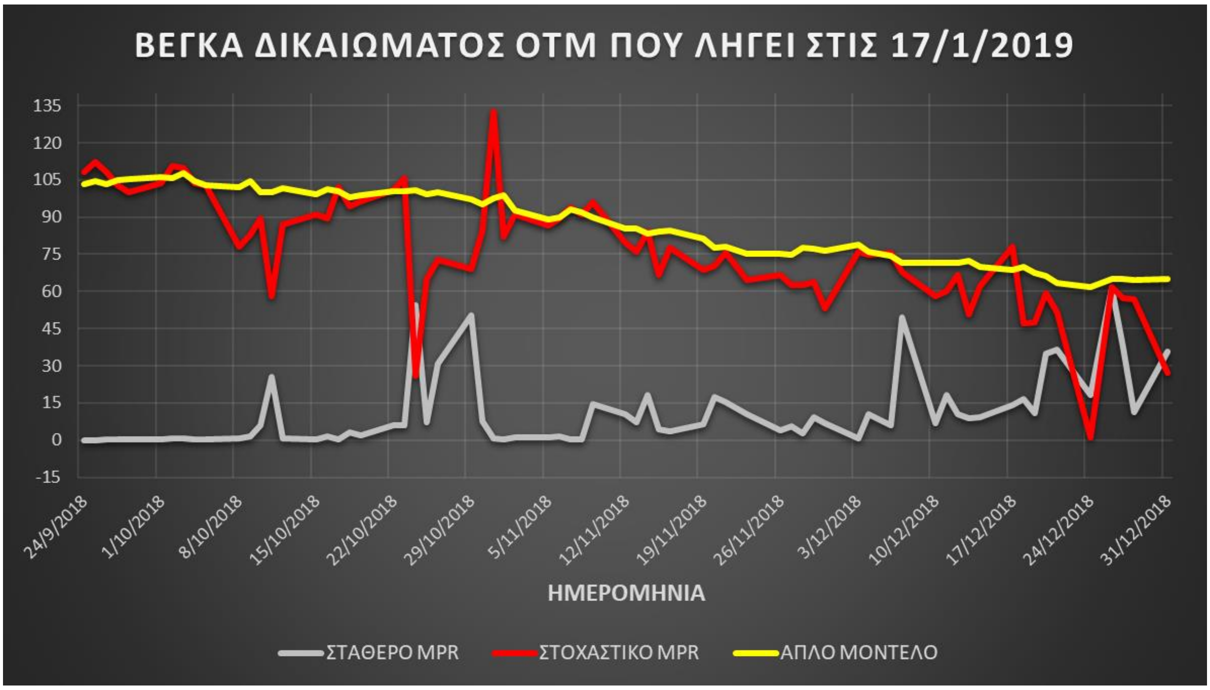
Τέλος, διαφορετικές ιδιότητες με αυτές του αντίστοιχου συντελεστή ευαισθησίας στο απλό μοντέλο παρουσιάζει και το Βέγκα. Συγκεκριμένα, στα 2 μοντέλα που εξετάζουμε, το Βέγκα μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Πράγματι, ενώ στο Σχήμα 4.32 οι τιμές είναι όλες θετικές, στο Σχήμα 4.33 και 4.34 παρατηρούμε σε κάποιες ημερομηνίες και αρνητικές τιμές. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η διακύμανση των Βέγκα που υπολογίστηκαν με τα μοντέλα μας και ειδικά για τα Βέγκα που υπολογίστηκαν με το μοντέλο Black-Scholes υπό στοχαστική μερισματική απόδοση όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική. Σε όλα τα παρακάτω σχήματα παρατηρούμε ότι τα Βέγκα για στοχαστική αγοραία τιμή του κινδύνου έχουν εύρος τιμών που αγγίζει τις 180 μονάδες όμως γραφικά έχει την ίδια τάση με τα Βέγκα που υπολογίστηκαν με το απλό μοντέλο.

Σχήμα 4.32

Σχήμα 4.33



Σχήμα 4.34



Εν κατακλείδι, στους παρακάτω πίνακες, συνοψίζονται τα αποτελέσματα μας από την μελέτη των συντελεστών ευαισθησίας για κάθε μοντέλο. Συγκεκριμένα, στον Πίνακα 4.10 παραθέτουμε τα μέτρα θέσης και διασποράς για τους συντελεστές ευαισθησίας του μοντέλου Black-Scholes υπό στοχαστική μερισματική απόδοση όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή, στον Πίνακα 4.11 όταν είναι στοχαστική και τέλος στον Πίνακα 4.12 παρατηρούμε τα μέτρα θέσης και διασποράς των συντελεστών ευαισθησίας του απλού μοντέλου Black-Scholes υπό σταθερή μερισματική απόδοση.

Πίνακας 4.10

ΣΤΑΘΕΡΟ MPR	ΔΕΛΤΑ	ΓΑΜΑ	ΒΕΓΚΑ
AVERAGE	0.29348	0.01450	10.35566
MAX	0.80806	0.07562	69.15809
MIN	-0.23995	0.00568	0.06222
ST.DEV	0.19814	0.00759	11.81593
VARIANCE	0.03926	0.00006	139.61620

<u>Πίνακας 4.11</u>

ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΟ MPR	ΔΕΛΤΑ	ΓΑΜΑ	ΒΕΓΚΑ
AVERAGE	0.50083	0.01175	63.88217
MAX	0.81421	0.04504	206.86652
MIN	0.19025	0.00281	-15.53164
ST.DEV	0.11027	0.00635	29.66319
VARIANCE	0.01216	0.00004	879.90479

<u>Πίνακας 4.12</u>

ΑΠΛΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	ΔΕΛΤΑ	ΓΑΜΑ	ΒΕΓΚΑ
AVERAGE	0.59030	0.01190	62.65608
MAX	0.83010	0.04759	127.50309
MIN	0.19785	0.00605	14.18088
ST.DEV	0.10668	0.00552	24.02582
VARIANCE	0.01138	0.00003	577.24027

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Τα δικαιώματα προαίρεσης αποτελούν πλέον ένα από τα κυριότερα και επικερδέστερα αξιόγραφα που συναλλάσσονται στις χρηματιστηριακές αγορές. Από το 1973 που εμφανίστηκε η πρώτη επίσημη μέθοδος τιμολόγησης τους από τους Black, Scholes και Merton, γνώρισαν μεγάλη αύξηση σε όγκο συναλλαγών, αλλά και αναγνώριση και νομιμοποίηση σε χώρες που είχαν απαγορευτεί. Τα τελευταία χρόνια με σκοπό την καλύτερη δυνατή ακρίβεια στην τιμολόγηση τους γίνονται συνεχώς προσπάθειες για να βελτιωθεί η ήδη υπάρχουσα φόρμουλα τιμολόγησης. Θέτοντας ως στόχο να μπορούν να συνυπολογίσουν όλες τις πιθανές παραμέτρους που επηρεάζουν την τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης, χτίζονται και εφαρμόζονται συνεχώς νέα μοντέλα τιμολόγησης.

Ένα από αυτά τα μοντέλα είναι και αυτό το οποίο διαπραγματεύεται η διπλωματική αυτή. Το μοντέλο Black-Scholes υπό στοχαστική μερισματική απόδοση συμπεριλαμβάνοντας την αγοραία τιμή του κινδύνου. Η εμπειρική μελέτη που πραγματοποιήσαμε είχε ως σκοπό την διάκριση αφενός του μοντέλου μας ανάλογα με την φύση της αγοραίας τιμής του κινδύνου (σταθερή, στοχαστική) και αφετέρου την ‘ανάδειξη’ του αποτελεσματικότερου. Η εμπειρική μελέτη που πραγματοποιήσαμε ξεκίνησε από την εκτίμηση των παραμέτρων, που περιγράφουν τους παράγοντες που μπορεί να επηρεάσουν την τιμή ενός δικαιώματος προαίρεσης, για κάθε περίπτωση. Τα αποτελέσματα της μελέτης μας ήταν αρκετά ικανοποιητικά και αυτό φαίνεται και από τα κατάλοιπα του κάθε μοντέλου που εξετάσαμε:

- Μοντέλο Black-Scholes υπό στοχαστική μερισματική απόδοση όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή
- Μοντέλο Black-Scholes υπό στοχαστική μερισματική απόδοση όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική
- Απλό μοντέλο Black-Scholes υπό σταθερή μερισματική απόδοση

Από τα αποτελέσματα της μελέτης μας προκύπτει ότι το μοντέλο που περιγράφει καλύτερα τους παράγοντες που επηρεάζουν την τιμή ενός δικαιώματος και που την υπολογίζει με μεγαλύτερη ακρίβεια είναι το μοντέλο Black-Scholes υπό στοχαστική μερισματική απόδοση όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι στοχαστική.

Στην συνέχεια της εμπειρικής μελέτης, εξετάσαμε την προβλεπτική ικανότητα των μοντέλων μας. Τα αποτελέσματα της έρευνας μας όσον αφορά την προβλεπτική ικανότητα ήταν πολύ ενδιαφέροντα καθώς ήρθαν σε αντίθεση εν μέρη με τα συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε μετά την εκτίμηση των παραμέτρων.

Συγκεκριμένα, όταν η αγοραία τιμή του κινδύνου είναι σταθερή μπορούμε να προβλέψουμε με μεγαλύτερη ακρίβεια μελλοντικές τιμές δικαιωμάτων αγοράς με έναν περιορισμό. Τα δικαιώματα αυτά να λήγουν βραχυπρόθεσμα. Σύμφωνα με την μελέτη μας, ο χρόνος μέχρι την λήξη ενός δικαιώματος αγοράς διαδραματίζει σημαντικό ρόλο στην προβλεπτική ικανότητα του εκάστοτε μοντέλου. Αναλυτικότερα, καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι εάν το δικαίωμα αγοράς λήγει βραχυπρόθεσμα τότε το ιδανικότερο μοντέλο είναι αυτό με την σταθερή αγοραία τιμή του κινδύνου. Το αντίθετο συμβαίνει όταν το δικαίωμα λήγει μακροπρόθεσμα. Τέλος, αξιοσημείωτα ήταν τα αποτελέσματα της εμπειρικής μας μελέτης από την εξέταση των συντελεστών ευαισθησίας. Με άλλα λόγια, μας δόθηκε η δυνατότητα να παρατηρήσουμε τις διαφορές των ιδιοτήτων των συντελεστών ευαισθησίας από μοντέλο σε μοντέλο και να ερευνήσουμε που οφείλονται.

ΥΠΟΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

- hedging[1] (αντιστάθμιση κινδύνου) : *είναι μια επενδυτική θέση που αποσκοπεί στην αντιστάθμιση πιθανών ζημιών ή κερδών που μπορεί να προκύψουν από μια επένδυση. Με άλλα λόγια, μια αντιστάθμιση είναι μια τεχνική διαχείρισης κινδύνου που χρησιμοποιείται για να μειώσει τυχόν σημαντικές απώλειες ή κέρδη που υπέστη ένα άτομο ή ένας οργανισμός.*

- μόχλευση[2] (leverage) : *Μόχλευση είναι με απλά λόγια η δυνατότητα να επενδύσουμε μεγαλύτερα κεφάλαια από αυτά πού πραγματικά κατέχουμε. Αυτή η πρακτική επενδύσεων μέσω μόχλευσης πολλαπλασιάζει τα κέρδη αν η αγορά κινηθεί υπέρ μας αλλά και τις ζημιές αν η αγορά κινηθεί εναντίον μας.*

- put-call parity[3] : *Η ισοτιμία δικαιωμάτων αγοράς και δικαιωμάτων πώλησης είναι μια αρχή που ορίζει τη σχέση μεταξύ της τιμής των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων πώλησης και των Ευρωπαϊκών δικαιωμάτων αγοράς της ίδιας κατηγορίας, δηλαδή με τον ίδιο υποκείμενο τίτλο, τιμή εξάσκησης και ημερομηνία λήξης. Συγκεκριμένα:* $C(t) + Ke^{-r(T-t)} = P(t) + S(t)$

- brokers[4] : *Ένας broker είναι ένα άτομο που οργανώνει τις συναλλαγές μεταξύ ενός αγοραστή και ενός πωλητή και αμείβεται με προμήθεια κατά την εκτέλεση της συμφωνίας. Ένας broker που ενεργεί επίσης ως πωλητής ή ως αγοραστής γίνεται κύριο μέρος της συμφωνίας.*

- dealers[5] : *Ένας dealer είναι ένα άτομο ή μια επιχείρηση που συναλλάσει χρεόγραφα για δικό του λογαριασμό, είτε μέσω ενός broker είτε με άλλο τρόπο. Ο dealer ορίζεται από το γεγονός ότι ενεργεί και διαπραγματεύεται για δικό του λογαριασμό, σε αντίθεση με έναν broker που ενεργεί ως αντιπρόσωπος και εκτελεί εντολές για λογαριασμό των πελατών του.*

- cash-settled[6] (διακανονισμός με μετρητά) : *Ο διακανονισμός σε μετρητά είναι μια μέθοδος διακανονισμού που χρησιμοποιείται σε ορισμένα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης και σε συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης όπου, κατά τη λήξη ή την άσκηση του συμβολαίου ή του δικαιώματος, ο πωλητής του χρεογράφου δεν παραδίδει το πραγματικό (φυσικό) υποκείμενο περιουσιακό στοιχείο αλλά αντ' αυτού μεταφέρει τη σχετική ταμειακή θέση . Για τους πωλητές που δεν επιθυμούν να αποκτήσουν τον πραγματικό υποκείμενο τίτλο, ένας διακανονισμός μετρητών είναι μια πιο βολική μέθοδος διαπραγμάτευσης συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης και δικαιωμάτων προαίρεσης .*

- arbitrage[7] : *Το arbitrage είναι μια επενδυτική ευκαιρία που αποφέρει κέρδος χωρίς ρίσκο. Ουσιαστικά, το arbitrage είναι η ταυτόχρονη αγορά και πώληση ενός περιουσιακού στοιχείου με σκοπό ο επενδυτής να επωφεληθεί από μια* *ανισορροπία της τιμής. Είναι μία συναλλαγή που αποφέρει κέρδος εκμεταλλευόμενη τις διαφορές στην τιμή πανομοιότυπων ή παρόμοιων υποκείμενων τίτλων σε διαφορετικές αγορές ή με διαφορετικές μορφές. Το arbitrage υφίσταται καθώς οι αγορές είναι μη πλήρεις.*

- short selling[8] (ανοιχτές πωλήσεις) : *Short selling είναι η πώληση ενός χρεογράφου που έχει δανειστεί ο πωλητής. Αυτός που έχει θέση ανοιχτής πώλησης κερδίζει εάν η τιμή του τίτλου μειωθεί. Με άλλα λόγια, ο επενδυτής πουλάει για να ανοίξει τη θέση και αναμένει να το αγοράσει αργότερα σε χαμηλότερη τιμή για να επωφεληθεί από τη διαφορά ως κέρδος.*

- ATM[9] (At The Money) : *ATM είναι η κατάσταση στην οποία η τιμή εξάσκησης ενός δικαιώματος είναι ίδια με την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Τόσο τα δικαιώματα αγοράς όσο και τα δικαιώματα πώλησης μπορούν να βρίσκονται ταυτόχρονα ATM. Ένα ATM δικαίωμα δεν έχει εσωτερική αξία (IV=0). Έχει παρατηρηθεί ότι ο όγκος συναλλαγών των δικαιωμάτων είναι πολύ υψηλός όταν τα δικαιώματα είναι ATM.*

- ITM[10] (In The Money) : *ITM είναι η κατάσταση στην οποία η τιμή εξάσκησης ενός δικαιώματος αγοράς είναι μικρότερη από την τιμή του υποκείμενου τίτλου, ή όταν η τιμή εξάσκησης ενός δικαιώματος πώλησης είναι μεγαλύτερη από την τιμή του υποκείμενου τίτλου. Όταν ένα δικαίωμα είναι ITM δεν σημαίνει απαραίτητα κέρδος, σημαίνει όμως ότι αξίζει να εξασκηθεί.*

- OTM[11] (Out of The Money) : *OTM είναι η κατάσταση στην οποία η τιμή εξάσκησης ενός δικαιώματος αγοράς είναι μεγαλύτερη από την τιμή του υποκείμενου τίτλου, ή η τιμή εξάσκησης ενός δικαιώματος πώλησης είναι μικρότερη από την τιμή του υποκείμενου τίτλου.*

- πλήρεις αγορές[12] (complete markets) : *Μία πλήρης αγορά (Arrow-Debreu market) είναι η αγορά που πληροί τις ακόλουθες 2 συνθήκες: α) τα κόστη συναλλαγών είναι αμελητέα. β) υπάρχει τιμή για κάθε υποκείμενο τίτλο σε οποιαδήποτε κατάσταση στον κόσμο.*

- υπόθεση αντεστραμμένου μέσου[13] (mean reversion) : *Η υπόθεση αντεστραμμένου μέσου είναι η θεωρία που υποστηρίζει ότι οι τιμές και οι αποδόσεις των υποκείμενων τίτλων τελικά επιστρέφουν στον μακροπρόθεσμο μέσο του συνόλου των δεδομένων. Ο μέσος αυτός μπορεί να είναι το μέσο όρο ιστορικών παρατηρήσεων των τιμών ή των αποδόσεων.*

- αγοραία τιμή του κινδύνου[14] (MPR, Market Price of Risk) : *Γνωστή και ως Sharpe ratio, είναι μία μέθοδος μέτρησης η οποία βοηθάει τους επενδυτές να αντιληφθούν την απόδοση της επένδυσης τους σε σύγκριση με τον κίνδυνό της.*

- προσαυξημένη διήθηση[15] (augmented filtration) : *Στη θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών, οι διηθήσεις χρησιμοποιούνται για να μοντελοποιήσουν τις πληροφορίες που είναι διαθέσιμες σε ένα δεδομένο σημείο και επομένως παίζουν σημαντικό ρόλο στην μοντελοποίηση των τυχαίων διαδικασιών. Μία διήθηση λέγεται προσαυξημένη αν είναι πλήρης και δεξιά συνεχής.*

- martingale[16] : *Στην θεωρία πιθανοτήτων, martingale είναι μια στοχαστική διαδικασία για την οποία σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή η υπό όρους αναμενόμενη επόμενη τιμή της ακολουθίας , δεδομένου όλες τις προηγούμενες τιμές, είναι ίση με την παρούσα αξία. Επενδυτικά, το σύστημα martingale είναι ένα σύστημα επένδυσης στο οποίο η αξία των επενδύσεων σε δολάρια αυξάνεται συνεχώς μετά από απώλειες ή το μέγεθος της θέσης του αυξάνεται με τη μείωση του μεγέθους του χαρτοφυλακίου.*

- least square curve fitting[17] : *Η μαθηματική διαδικασία με την οποία βρίσκουμε την καλύτερη δυνατή καμπύλη από ένα σύνολο σημείων, ελαχιστοποιώντας το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων των σημείων από την καμπύλη (κατάλοιπα).*

- Steepest descent[18] : *Στα μαθηματικά, η μέθοδος Steepest descent είναι μια επέκταση της μεθόδου Laplace για την προσέγγιση ενός ολοκληρώματος.*

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Άρθρα:

- Black Fisher and Scholes Myron (1973). 'The Pricing of Options and Corporate Liabilities', The Journal of Political Economy, vol. 81, No. 3, pp. 637-654
- Broadie M., Detemple J., Ghysels E. & Torres O. (2000). 'American options with stochastic dividends and volatility: A non parametric investigation', Journal of Econometrics, vol. 94, pp. 53–92
- Cadenillas A., Sarkar S., Zapatero F. (2006). 'Optimal dividend policy with mean-reverting cash reservoir', Mathematical Finance, vol. 17, issue 1
- Chance D., Kumar R. & Rich D. (2002, Spring). 'European option pricing with discrete stochastic dividend', Journal of Derivatives, pp. 39–45
- Evans R., Geczy C., Musto D. & Reed A. (2008). 'Failure is an option: Impediments to short selling and options prices', The Review of Financial Studies, vol. 22, issue 5, pp. 1955-1980
- Garber Peter M. (1989). 'Tulipmania', Journal of Political Economy, vol. 97, issue 3, pp. 535-560
- Garber Peter M. (1990). 'Famous First Bubbles', Journal of Economic Perspectives, vol. 4, No. 2, pp. 35-54
- Kiyosi Ito (1951). 'On Stochastic Differential Equation', Memoirs of the American mathematical society, No. 4
- Korn O. (2005). 'The drift matters', Journal of Futures Markets, vol. 25, issue 3, pp. 211–241
- Lamont O. & Thaler R. (2003). 'Can the market add and subtract? Mispricing in tech stock carve-outs', Journal of Political Economy, vol. 111, No. 2, pp. 227–268
- Lettau M. & Ludvigson S. (2002). 'Consumption, aggregate wealth and expected stock returns', Journal of Finance, vol. 56, issue 3
- Levenberg K. (1944). 'A method for the solution of certain non-linear problems in least squares', Quarterly of Applied Mathematics, vol. 2, No. 2, pp. 164-168

- Lioui Abraham (2006). 'Black-Scholes-Merton revisited under stochastic dividend yields', Journal of Futures Markets, vol. 26, issue 7, pp. 703-732
- Marquardt W. Donald (1963). 'An algorithm for Least-Squares estimation of non-linear parameters', Journal of the Social for Industrial and Applied Mathematics, vol. 11, No. 2, pp. 431-441
- Ofek E., Richardson M. & Whitelaw R. (2004). 'Limited arbitrage and short sales restrictions: Evidence from options markets', Journal of Financial Economics, vol. 74, issue 2, pp. 305–342
- Sarnoff Paul (1965). 'Russell Sage: The Money King'
- Schroder M. (1999). 'Changes of numèraire for pricing futures, forwards, and options', Review of Financial Studies, vol. 12, pp. 1143–1163
- Van der Veen A. Maurits (2012). 'The Dutch Tulip Mania: The Social Foundations of a Financial Bubble
- White Eugene N. (1990). 'Crashes and Panics: the Lessons from History', chapter: 'Who Put the Mania in the Tulipmania?'

Βιβλία:

- John C. Hull (2009). 'Options, Futures, and other Derivatives 9th Edition', chapter 19