
Πανεπιστήμιο Πειραιά



Τμήμα Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής
ΜΠΣ Χρηματοοικονομικής και Τραπεζικής Διοικητικής

Διατριβή:

Θεωρίες Τιμολόγησης με Ασυμμετρία Πληροφόρησης

Φοιτητής:

Γρηγοράκης Νικόλαος

Επιβλέπων Καθηγητής:

Ανθρωπέλος Μιχαήλ

Τριμελής Επιτροπή:

Επικ. Καθηγητής:

Ανθρωπέλος
Μιχαήλ

Καθηγητής:

Σκιαδόπουλος
Γεώργιος

Καθηγητής:

Στεφανάδης
Χριστόδουλος

Φεβρουάριος 2019

Περίληψη

Σε μια οικονομία, η τελική τιμή ενός αξιογράφου, καθώς και τα αναμενόμενα κέρδη των συναλλασσόμενων, αλλάζουν ανάλογα με την συμπεριφορά και τις γνώσεις τους. Κάθε συμβαλλόμενος μπορεί είτε να λαμβάνει ιδιωτική πληροφόρηση για την τελική αξία του αξιογράφου, είτε να προσπαθεί να εκτιμήσει αυτήν την αξία μέσω της τελικής τιμής. Μάλιστα, η παρουσία μη-ορθολογικών επενδυτών (noise traders) επηρεάζει κι αυτή σε μεγάλο βαθμό και τις τιμές και τις εκτιμήσεις των υπόλοιπων συμμετεχόντων. Κάθε συναλλασσόμενος μπορεί να συμπεριφερθεί ανταγωνιστικά χωρίς να λάβει υπόψιν του τις κινήσεις των άλλων, ή να αναλογιστεί την δύναμη αγοράς του και να δράσει στρατηγικά. Στην παρούσα διατριβή, παρουσιάζουμε τις έννοιες της ανταγωνιστικής (ισορροπία ορθολογικών προσδοκιών – REE) και της στρατηγικής ισορροπίας (ισορροπία Nash/μπεϋζιανή ισορροπία Nash) και αναλύουμε το υπόδειγμα του Kyle (1989) για μία αγορά με ασυμμετρία πληροφόρησης. Χρησιμοποιούμε αριθμητικές εφαρμογές για την σύγκριση των ισορροπιών και την εξαγωγή βασικών συμπερασμάτων ως προς τις εντολές (προγράμματα ζήτησης) των αντισυμβαλλομένων, την τελική τιμή του αξιογράφου και τα αναμενόμενα κέρδη όλων των συμμετεχόντων.

Λέξεις/Φράσεις – Κλειδιά: Ισορροπία Ορθολογικών Προσδοκιών, Ισορροπία Nash, ανταγωνιστική και στρατηγική συμπεριφορά, πληροφορημένοι και απληροφόρητοι συναλλασσόμενοι, noise traders, τιμή εκκαθάρισης, αξία ρευστοποίησης, προγράμματα ζήτησης, αποστροφή κινδύνου, αναμενόμενο όφελος.

Summary

In an asset market, both the asset's price and the traders' expected profits change according to their behavior and knowledge. Each trader can either acquire private information for the asset's liquidation value, or try to evaluate only through the prices. Especially, the presence of noise traders affects drastically both the prices and the evaluations. Every trader may behave competitively, without taking into consideration the strategies of his counterparties, or utilize his market power and act strategically. In this thesis, we present the definitions of competitive and strategic equilibrium (Rational Expectations Equilibrium and Nash/Bayesian Nash Equilibrium respectively) and analyze Kyle's model (1989) for a market with asymmetric information. We use a numerical approach in order to compare these equilibria and draw important conclusions based on the traders' demand schedules, the asset's price and the expected utilities.

Key Words: Rational Expectations Equilibrium, Nash Equilibrium, competitive and strategic behavior, informed and uninformed traders, noise traders, clear-market price, liquidation value, demand schedules, risk aversion, expected utility

Περιεχόμενα

1	Εισαγωγή	5
1.1	Ισορροπία Ορθολογικών Προσδοκιών	5
1.2	Ισορροπία Nash	7
1.3	Μπεϋζιανή Ισορροπία Nash	9
2	Μοντελοποίηση Αγοράς με Ασυμμετρία Πληροφόρησης	13
2.1	Δομή της Αγοράς	14
2.2	Ορισμός της Στρατηγικής Ισορροπίας	15
3	Χαρακτηρισμός της Ανταγωνιστικής Ισορροπίας	17
3.1	Ανταγωνιστική Ισορροπία Χωρίς Εξαγωγή Πληροφορίας	17
3.2	Συμμετρική Γραμμική Ισορροπία	19
4	Χαρακτηρισμός της Στρατηγικής Ισορροπίας	25
4.1	Τροποποίηση του Προβλήματος	25
4.2	Ενδογενείς Παράμετροι	28
4.3	Επίλυση του Μοντέλου	29
5	Σύγκριση Τιμών, Προγραμμάτων και Εξαγωγή Πληροφορίας	32
5.1	Εύρεση Τιμών και Προγραμμάτων – Κατασκευή Διαγραμμάτων	32
5.2	Μεταβολή των Τιμών και Ευαισθησία των Προγραμμάτων	39
5.3	Πληροφοριακή Επάρκεια των Τιμών	40
6	Ευαισθησία των Τιμών στην Αποστροφή Κινδύνου	42
6.1	Σχέση Τιμών με Κίνδυνο – Κατασκευή Διαγραμμάτων	42
6.2	Επιρροή των Συναλλασσόμενων και Ελαστικότητα των Τιμών	47
7	Επιλογή Βέλτιστης Συμπεριφοράς	49
7.1	Εύρεση Κερδών και Κατασκευή Διαγραμμάτων	49
7.2	Pareto Αποτελεσματικότητα και Περιθώριο Κέρδους	56
8	Επίλογος	58
9	Παράρτημα	59
9.1	Προβολικό Θεώρημα	59
9.2	Διαδικασία Επίλυσης Συστημάτων Κεφαλαίου 5	59
9.3	Διαδικασία Επίλυσης Συστημάτων Κεφαλαίου 6	63
9.4	Διαδικασία Επίλυσης Συστημάτων Κεφαλαίου 7	66
	Βιβλιογραφία	74

1 Εισαγωγή

Το περιβάλλον συναλλαγών σε μία οικονομία αξιογράφων μπορεί να περιγραφεί με τρεις βασικές μορφές ισορροπιών: την *Ισορροπία Ορθολογικών Προσδοκιών* (*Rational Expectations Equilibrium – REE*), την *Ισορροπία Nash* βασισμένη στην θεωρία παιγνίων (*Nash Equilibrium – NE*) και την πιο γενική της μορφή, την *Μπεϋζιανή Ισορροπία Nash* (*Bayesian Nash Equilibrium – BNE*). Με την χρήση τους μπορεί να αναλυθεί η τιμολόγηση οποιουδήποτε αξιογράφου στην οικονομία και όταν αυτή θεωρείται δεδομένη από τους υποψήφιους αγοραστές αλλά και όταν ληφθεί υπόψη η δύναμη αγοράς του καθενός. Ένα πρώτο συμπέρασμα είναι ότι η προσωπική πληροφόρηση μόνη της δεν οδηγεί πάντα σε επιπλέον συναλλαγές στην οικονομία και μάλιστα σε ορισμένες περιπτώσεις μπορεί και να τις μηδενίσει. Αυτό το συμπέρασμα ικανοποιείται και σε ανταγωνιστικό και σε στρατηγικό περιβάλλον.

1.1 Ισορροπία Ορθολογικών Προσδοκιών

Σε REE, κάθε συναλλασσόμενος συμπεριφέρεται ανταγωνιστικά, δηλαδή θεωρεί την τιμολόγηση και την πληροφόρηση όλων των υπολοίπων συναλλασσομένων δεδομένη και ότι δεν έχουν δύναμη αγοράς. Ωστόσο, ακόμη και όταν υπάρχει δύναμη αγοράς, οι συναλλασσόμενοι δεν την εκμεταλλεύονται και φαίνεται σαν να παρουσιάζουν την «σχιζοφρενική» τάση να μην την αξιοποιούν, ακόμη και αν ξέρουν ότι μπορούν να επηρεάσουν την τιμολόγηση. Οι εκ των προτέρων (*prior*) πεποιθήσεις κάθε συναλλασσόμενου παρουσιάζονται ως γνωστές σε όλους και προτείνεται μια εικασία σχετικά με την τιμολόγηση. Όλοι οι επενδυτές θεωρούν αυτήν την χαρτογράφηση πληροφοριών δεδομένη. Έπειτα κάθε συναλλασσόμενος παράγει τις εκ των υστέρων (*posterior*) πεποιθήσεις του, βασισμένος στα συμπεράσματα των υπόλοιπων συναλλασσόμενων. Με βάση αυτές τις πεποιθήσεις κάθε συναλλασσόμενος εξάγει την βέλτιστη προσωπική του ζήτηση. Όταν η αγορά βρεθεί σε ισορροπία, όπου ικανοποιούνται όλες οι καμπύλες ζήτησης των συναλλασσομένων, υπό ορθολογικές προσδοκίες, η θεωρητική τιμή που έχει εικαστεί πρέπει να συμπίπτει με την πραγματική τιμή της αγοράς.

Μια πολύ σημαντική εφαρμογή της REE είναι το *θεώρημα μη συναλλαγής* σε REE περιβάλλον (Milgrom & Stokey, 1982). Όπως αναφέρθηκε, το διάνυσμα των τιμών θεωρείται κοινή γνώση, όχι όμως και οι δράσεις των συναλλασσόμενων. Αν ωστόσο όλοι οι συναλλασσόμενοι είναι ορθολογικοί (και είναι γνωστό σε όλους αυτό) και η κατανομή τους είναι κατά Pareto αποτελεσματική, τότε οποιαδήποτε ασύμμετρη πληροφόρηση δεν θα οδηγήσει σε νέες συναλλαγές. Προϋπόθεση αυτού του θεωρήματος είναι ακόμη και η αυστηρή αποστροφή των επενδυτών από τον κίνδυνο.

Έστω ότι υπάρχει μια αγορά ενός αξιογράφου στην οποία είναι κοινή γνώση (πριν την λήψη νέας πληροφόρησης) ότι η αρχική κατανομή είναι

αποτελεσματική. Δηλαδή το περυσιακό στοιχείο κατανέμεται πρώτα σε εκείνους για τους οποίους έχει μεγαλύτερη αξία. Με την άφιξη νέας πληροφορήσης, ορισμένοι συναλλασσόμενοι ενδεχομένως θεωρούν το περυσιακό στοιχείο περισσότερο πολύτιμο από εκείνους που το κατέχουν. Έτσι, μην αναλογίζοντας οποιαδήποτε άλλη πληροφορήση, θα μπορούσαν να συμμετέχουν σε μία καλύτερη κατανομή μέσω συναλλαγών. Ωστόσο, το γεγονός ότι ένας συναλλασσόμενος είναι πρόθυμος να παραλάβει μονάδες του στοιχείου σε μια δεδομένη τιμή εκφράζει μια πληροφορία για το σινιάλο που έλαβε. Εφόσον όλοι οι συναλλασσόμενοι ερμηνεύουν τις πληροφορίες με τον ίδιο τρόπο, αυτή η επιπλέον πληροφορήση λαμβάνεται υπόψη από τους υποψήφιους πωλητές και αναθεωρούν τις πεποιθήσεις τους σχετικά με το στοιχείο. Έτσι, αρνούνται να κάνουν συναλλαγές στην προτεινόμενη τιμή.

Παράδειγμα: Ένα κλασικό παράδειγμα του θεωρήματος μη συναλλαγής παρουσιάστηκε από τους Milgrom & Stokey (1982). Χωρίζουμε τον χώρο καταστάσεων Ω σε δύο συνιστώσες:

1. Ως θ θεωρούμε το σύνολο των γεγονότων σχετικών με τις πληρωμές (κέρδη ή κόστη) των συναλλασσόμενων.
2. Ως X ορίζουμε το σύνολο των γεγονότων που δεν επηρεάζουν άμεσα τις πληρωμές αλλά αναγνωρίζονται ως λήψη σινιάλου από τους συναλλασσόμενους. Κάθε λήψη έρχεται με διαφορετικό τρόπο στον κάθε αντισυμβαλλόμενο.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν δύο καταστάσεις θ ($\theta = 1, \theta = 2$) και πέντε καταστάσεις X ($x = 1, x = 2, \dots, x = 5$). Έστω ακόμη ότι υπάρχουν μόνο δύο συναλλασσόμενοι και προτείνεται το εξής στοίχημα: αν $\theta = 1$, τότε ο δεύτερος πληρώνει τον πρώτο ένα συγκεκριμένο ποσό¹, ενώ αν $\theta = 2$, ο πρώτος πληρώνει τον δεύτερο το ίδιο ποσό. Οι εκ των προτέρων πεποιθήσεις των αντισυμβαλλόμενων είναι κοινές και δίνονται ως εξής:

X/θ	1	2
1	0,20	0,05
2	0,05	0,15
3	0,05	0,05
4	0,15	0,05
5	0,05	0,20

Πίνακας 1.1: Εκ των προτέρων πεποιθήσεις συναλλασσομένων

Οι διαμερίσεις των συναλλασσόμενων είναι:

$$\mathcal{P}_1: \{x = 1, x = 2\}, \quad \{x = 3, x = 4\}, \quad \{x = 5\}$$

$$\mathcal{P}_2: \{x = 1\}, \quad \{x = 2, x = 3\}, \quad \{x = 4, x = 5\}$$

¹ Το μέγεθος του ποσού δεν μας αφορά στην προκειμένη περίπτωση. Μας ενδιαφέρει μόνο το αποτέλεσμα του στοίχηματος με την γενική μορφή κέρδους ή κόστους.

Βάσει του πίνακα πεποιθήσεων, προκύπτουν οι παρακάτω πιθανότητες πραγματοποίησης λήψης σινιάλου για τον κάθε συναλλασσόμενο ξεχωριστά:

Συναλλασσόμενος 1	$P(\{x = 1, x = 2\} \mathcal{P}_1) = 0.2 + 0.05 + 0.05 + 0.15 = 0.45$ $P(\{x = 3, x = 4\} \mathcal{P}_1) = 0.05 + 0.05 + 0.15 + 0.05 = 0.3$ $P(\{x = 5\} \mathcal{P}_1) = 0.05 + 0.2 = 0.25$
Συναλλασσόμενος 2	$P(\{x = 1\} \mathcal{P}_2) = 0.2 + 0.05 = 0.25$ $P(\{x = 2, x = 3\} \mathcal{P}_2) = 0.05 + 0.15 + 0.05 + 0.05 = 0.3$ $P(\{x = 4, x = 5\} \mathcal{P}_2) = 0.15 + 0.05 + 0.05 + 0.2 = 0.45$

Πίνακας 1.2: Εκ των προτέρων πιθανότητες των συναλλασσομένων²

Ο πρώτος σκέφτεται ορθολογικά ότι αν $x = 1$, τότε ο δεύτερος γνωρίζει ότι $x = 1$ και θα αρνηθεί το στοίχημα καθώς δεν τον συμφέρει:

$$P(x = 1, \theta = 2|\mathcal{P}_2) = \frac{0.05}{0.25} = \frac{1}{5}$$

Επομένως, αν ο πρώτος παρατηρεί το πρώτο σκέλος της διαμέρισης $\{x = 1, x = 2\}$ και ο δεύτερος αποδεχτεί το στοίχημα, συμπεραίνει ότι $x = 2$. Όμως αν $x = 2$, τότε το στοίχημα δεν τον συμφέρει και έτσι δεν θα το δεχτεί:

$$P(x = 2, \theta = 1|\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \frac{0.05}{0.45} = \frac{1}{9} < P(x = 2, \theta = 2|\mathcal{P}_2) = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$$

Με ακριβώς την ίδια λογική ο δεύτερος δεν θα αποδεχτεί το στοίχημα αν παρατηρεί το σκέλος της διαμέρισής του $\{x = 4, x = 5\}$. Τελικά η μόνη περίπτωση όπου και οι δύο θα μπορούσαν να αποδεχτούν το στοίχημα είναι αν $x = 3$, δηλαδή στην τομή των $\{x = 3, x = 4\}$ και $\{x = 2, x = 3\}$:

$$P(x = 3, \theta = 1|\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = P(x = 3, \theta = 2|\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2) = \frac{0.05}{0.3} = \frac{1}{6}$$

Ωστόσο, έχοντας και οι δύο αποστροφή στον κίνδυνο, θα απορρίψουν το στοίχημα καθώς όχι μόνο δεν είναι βέβαιοι ότι $x = 3$, αλλά και η πιθανότητα κέρδους τους είναι μικρότερη του 50%.

1.2 Ισορροπία Nash

Σε αντίθεση με την REE η οποία είναι μια ανταγωνιστική ισορροπία, η NE πραγματεύεται τις στρατηγικές μεταξύ των συναλλασσόμενων. Η (καθαρή) ισορροπία Nash ορίζεται ως ένα προφίλ στρατηγικών όπου κάθε συμμετέχων ακολουθεί μια συγκεκριμένη στρατηγική και γνωρίζοντας τις στρατηγικές όλων

² Οι πιθανότητες είναι καλώς ορισμένες καθώς και για τις δύο διαμερίσεις αθροίζουν στην μονάδα: $P(\{x = 1, x = 2\}|\mathcal{P}_1) + P(\{x = 3, x = 4\}|\mathcal{P}_1) + P(\{x = 5\}|\mathcal{P}_1) = 0.45 + 0.3 + 0.25 = 1$ και $P(\{x = 1\}|\mathcal{P}_2) + P(\{x = 2, x = 3\}|\mathcal{P}_2) + P(\{x = 4, x = 5\}|\mathcal{P}_2) = 0.25 + 0.3 + 0.45 = 1$.

των υπολοίπων, δεν έχει κανένα όφελος να παρεκκλίνει από αυτήν (Cournot, 1838)³. Κάθε συναλλασσόμενος πλέον αναγνωρίζει την επιρροή που μπορεί να ασκήσει στην τιμολόγηση και την αξιοποιεί. Ένα πολύ απλό παράδειγμα είναι ένα παιχνίδι δύο συναλλασσόμενων όπου και οι δύο μπορούν να επιλέξουν την στρατηγική A και να κερδίσουν 1€ ή να επιλέξουν την στρατηγική B και να χάσουν 1€. Προφανώς και οι δύο θα επιλέξουν την στρατηγική A και ακόμη και αν αποκαλύψουν την στρατηγική τους ο ένας στον άλλον, κανείς δεν θα παρεκκλίσει από αυτήν. Επομένως το προφίλ στρατηγικών (A, A) είναι Ισορροπία Nash.

Βέβαια είναι πιθανό να υπάρχουν περισσότερες από μία ισορροπίες Nash ή ακόμη και να μην υπάρχει καμία ισορροπία Nash. Έστω ότι υπάρχουν πάλι δύο παίκτες οι οποίοι μπορεί να ακολουθήσουν δύο στρατηγικές και οι πληρωμές είναι οι εξής (όπου (x, y) θεωρούμε x το κέρδος του πρώτου παίκτη και y το κέρδος του δεύτερου):

		Παίκτης 1	
		στρατηγική A	στρατηγική B
Παίκτης 2	στρατηγική A	1, 1	1, 0
	στρατηγική B	0, 1	2, 2

Πίνακας 1.3: Πολλαπλές Ισορροπίες Nash

Είναι φανερό ότι αν ένας παίκτης επιλέξει την στρατηγική A, την ίδια στρατηγική πρέπει να ακολουθήσει και ο άλλος. Το ίδιο συμβαίνει και όταν κάποιος από τους δύο επιλέξει την στρατηγική B. Άρα το συμπέρασμα είναι ότι τα σημεία (A, A) και (B, B) είναι ισορροπίες Nash. Αν όμως οι πληρωμές αλλάξουν σε:

		Παίκτης 1	
		στρατηγική A	στρατηγική B
Παίκτης 2	στρατηγική A	1, 2	2, 1
	στρατηγική B	2, 1	1, 2

Πίνακας 1.4: Καμία Ισορροπία Nash

Τότε αν ο πρώτος επιλέξει την στρατηγική B, ο δεύτερος θα προτιμήσει την A καθότι θα έχει μεγαλύτερο κέρδος και αντίστοιχα αν ο δεύτερος επιλέξει την B, ο πρώτος θα προτιμήσει την A. Επομένως εδώ δεν υπάρχει ισορροπία Nash.

Το Δίλημμα του Φυλακισμένου: Μία ευρέως διαδεδομένη εφαρμογή της ισορροπίας Nash είναι το λεγόμενο «δίλημμα του φυλακισμένου» (Prisoner's Dilemma) το οποίο παρουσιάζει τους λόγους για τους οποίους δύο (ή και περισσότερα) ορθολογικά άτομα ενδέχεται να μην συνεργαστούν. Έστω ότι

³ Στην ανάλυσή μας, ασχολούμαστε μόνο με καθαρές (pure) ισορροπίες Nash. Ωστόσο, υπάρχει και η μικτή (mixed) ισορροπία. Αυτή βασίζεται σε στρατηγικές οι οποίες επιλέγονται από τους συμμετέχοντες βάσει μιας κατανομής πιθανοτήτων (π.χ. ένα παιχνίδι πέτρα-ψαλίδι-χαρτί). Γενικά, μπορούμε να πούμε ότι η καθαρή ισορροπία Nash είναι μία ειδική περίπτωση της μικτής όπου οι συμμετέχοντες επιλέγουν συγκεκριμένες στρατηγικές με πιθανότητα 1.

δύο μέλη μιας συμμορίας συλλαμβάνονται και φυλακίζονται. Οι κατηγοροι, λόγω έλλειψης επαρκών αποδεικτικών στοιχείων, προτείνουν μία συμφωνία:

Σε κάθε κρατούμενο δίδεται η ευκαιρία είτε να προδώσει ο ένας τον άλλον, είτε να συνεργαστούν μεταξύ τους και να μην μιλήσουν. Αν και οι δύο καταλήξουν σε προδοσία, ο καθένας τους εκτίει 2 χρόνια φυλακή. Αν μόνο ένας από τους δύο προδώσει τον άλλον, τότε ο προδότης μένει ελεύθερος ενώ ο άλλος εκτίει 3 χρόνια φυλακή. Τέλος, αν συνεργαστούν μεταξύ τους και δεν μιλήσουν, και οι δύο εκτίουν μόνο 1 χρόνο φυλακή. Τα αποτελέσματα συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα (όπου (x, y) θεωρούμε x την ποινή του ενός φυλακισμένου και y την ποινή του άλλου):

		Φυλακισμένος 1	
		προδοσία	συνεργασία
Φυλακισμένος 2	προδοσία	2, 2	3, 0
	συνεργασία	0, 3	1, 1

Πίνακας 1.5: Δίλημμα Φυλακισμένου με Ισορροπία Nash

Με μια πρώτη ματιά φαίνεται ότι και για τους δύο η συνεργασία είναι η καλύτερη δυνατή επιλογή. Στην πραγματικότητα όμως, λόγω της ορθολογικότητάς τους, θα καταλήξουν να προδώσουν ο ένας τον άλλον. Αν ο πρώτος φυλακισμένος αποφασίσει να προδώσει, τότε για τον δεύτερο είναι προτιμότερο να προδώσει κι αυτός για να μειωθεί η ποινή του στα 2 χρόνια. Αν από την άλλη ο πρώτος αποφασίσει να μην μιλήσει, τότε πάλι ο δεύτερος θα αποφασίσει να προδώσει για να αποφυλακιστεί. Συμμετρικά και ο πρώτος φυλακισμένος, βασιζόμενος στις επιλογές του δεύτερου, θα επιλέξει την προδοσία. Επομένως, η ισορροπία Nash βρίσκεται στο σημείο (προδοσία, προδοσία).⁴

Εφαρμογές του διλήμματος του φυλακισμένου παρουσιάζονται συχνά στην οικονομία. Μία γνωστή περίπτωση είναι τα καρτέλ όπου ως «συνεργασία» θεωρείται η τήρηση των τιμών σε ένα προσυμφωνημένο ελάχιστο επίπεδο και ως «προδοσία» η πώληση σε χαμηλότερο από το προαναφερθέν επίπεδο. Φυσικά στην συγκεκριμένη περίπτωση, η «προδοσία» συμφέρει και τους καταναλωτές καθώς βλέπουν συνεχώς μείωση των τιμών.

1.3 Μπεϋζιανή Ισορροπία Nash

Αν υπάρχει αβεβαιότητα και ασύμμετρη πληροφόρηση μεταξύ των συναλλασσόμενων η Ισορροπία Nash γενικεύεται στην BNE. Η Μπεϋζιανή Ισορροπία Nash ορίζεται ως ένα προφίλ στρατηγικών όπου κάθε *τύπος παίκτη* ακολουθεί μια στρατηγική και έχοντας τις πεποιθήσεις του για όλους τους υπόλοιπους τύπους και στρατηγικές, δεν έχει κανένα όφελος να αλλάξει

⁴ Αν οι φυλακισμένοι αντιμετωπίσουν πολλαπλούς γύρους ανακρίσεων τότε προκύπτει το επαναληπτικό δίλημμα του φυλακισμένου (γνωστό και ως «Παιχνίδι Πολέμου-Ειρήνης»), όπου η επιλογή της προδοσίας ενδέχεται να μην είναι η προτιμότερη (Axelrod, 1984).

αυτήν την στρατηγική. Κάθε συναλλασσόμενος ανανεώνει διαρκώς τις εκ των προτέρων πεποιθήσεις του παρατηρώντας τις κινήσεις όλων των υπολοίπων, χρησιμοποιώντας την ανανεωτική διαδικασία κατά Bayes. Σε αντίθεση με την REE, η εικασία δεν γίνεται στην τιμολόγηση αλλά στις στρατηγικές των παικτών. Οποιαδήποτε παρέκκλιση από την εικάζουσα στρατηγική αλλάζει τις πεποιθήσεις όλων των συναλλασσόμενων. Έτσι, όλοι οι παίκτες χρησιμοποιούν τον μπεϋζιανό ανανεωτικό κανόνα για να ανανεώσουν τις πεποιθήσεις τους. Αυτή η διαδικασία συνεχίζεται διαρκώς έως ότου όλες οι δράσεις των παικτών συνάδουν με τις εικάζουσες. Τότε αυτό το προφίλ στρατηγικών είναι BNE.

Παράδειγμα: Θεωρούμε πάλι ότι υπάρχουν δύο παίκτες αλλά τώρα ο πρώτος παίκτης έχει δύο τύπους, i με πιθανότητα p και ii με πιθανότητα $1-p$. Ο δεύτερος παραμένει παίκτης ενός τύπου. Ο πρώτος μπορεί να ακολουθήσει τις στρατηγικές A ή B και ο δεύτερος τις Γ ή Δ . Οι πληρωμές (ανάλογα με τον τύπο του πρώτου παίκτη) έχουν ως εξής:

	τύπος i (πιθ. p)		τύπος ii (πιθ. $1-p$)	
	στρατηγική Γ	στρατηγική Δ	στρατηγική Γ	στρατηγική Δ
στρατηγική A	3, 4	1, 0	6, 2	0, 4
στρατηγική B	4, 3	2, 0	5, 1	-1, 4

Πίνακας 1.6: Μπεϋζιανή Ισορροπία Nash

Υπάρχει αβεβαιότητα στον δεύτερο παίκτη λόγω του τύπου του πρώτου, όμως ο πρώτος είναι βέβαιος για τον τύπο του δεύτερου. Ο δεύτερος γνωρίζει μόνο την πιθανότητα ο πρώτος να είναι τύπου i ή ii . Αν ο πρώτος είναι τύπου i τότε ο δεύτερος προτιμά την στρατηγική Γ καθώς τότε έχει μεγαλύτερο κέρδος, ενώ προτιμά την Δ αν ο πρώτος είναι τύπου ii . Αντίστοιχα, ο πρώτος θα προτιμήσει την στρατηγική B αν είναι τύπου i και την A αν είναι τύπου ii . Άρα το αναμενόμενο κέρδος του δεύτερου αν επιλέξει την στρατηγική Γ είναι:

$$E(\text{payoff}, \Gamma) = 3p + 2(1 - p)$$

ενώ αν επιλέξει την στρατηγική Δ έχει:

$$E(\text{payoff}, \Delta) = 0p + 4(1 - p) = 4(1 - p)$$

Ο δεύτερος προτιμά την στρατηγική Γ όταν:

$$E(\text{payoff}, \Gamma) > E(\text{payoff}, \Delta) \Rightarrow 3p + 2(1 - p) > 4(1 - p) \Rightarrow p > 2/5$$

Επομένως, η BNE για τον πρώτο είναι B αν είναι τύπου i και A αν είναι τύπου ii , ενώ για τον 2 είναι Γ αν $p > 2/5$, Δ αν $p < 2/5$ και είναι αδιάφορος αν $p = 2/5$.

Παράδειγμα: Ως μία παραλλαγή του διλήμματος του φυλακισμένου, υποθέτουμε ότι οι δύο φυλακισμένοι είναι είτε ορθολογικοί, με πιθανότητα 70%, είτε αλτρουιστές, με πιθανότητα 30%. Ο αλτρουισμός παρουσιάζεται

στις ποινές του προηγούμενου προβλήματος των φυλακισμένων (Πίνακας 1.5) με «ηθική» επιβάρυνση 1 έτους στην προδοσία και ελάφρυνση 1 έτους στην συνεργασία. Όλοι οι πιθανοί συνδυασμοί συνοψίζονται στον παρακάτω πίνακα:

		ορθολογικός (70%)		αλτρουιστής (30%)	
		προδοσία	συνεργασία	προδοσία	συνεργασία
ορθολογικός (70%)	προδοσία	2,2	3,0	3,2	2,0
	συνεργασία	0,3	1,1	1,3	0,1
αλτρουιστής (30%)	προδοσία	2,3	3,1	3,3	2,1
	συνεργασία	0,2	1,0	1,2	0,0

Πίνακας 1.7: Δίλημμα Φυλακισμένου με Μπεύζιανή Ισορροπία Nash

Εδώ φαίνεται ότι ανάλογα με την προσωπικότητα των φυλακισμένων, η ισορροπία αλλάζει. Όταν είναι και οι δύο ορθολογικοί (με πιθανότητα $70\% * 70\% = 49\%$), όπως αποδείχτηκε ανωτέρω, και οι δύο θα προδώσουν. Όταν ένας από τους δύο είναι αλτρουιστής (με πιθανότητα $2 * (70\% * 30\%) = 42\%$), τότε μόνο ο ορθολογιστής θα προδώσει. Τέλος, όταν και οι δύο είναι αλτρουιστές (με πιθανότητα $30\% * 30\% = 9\%$), θα προτιμήσουν να συνεργαστούν μεταξύ τους.

Όπως και στην REE, το *θεώρημα μη συναλλαγής* εφαρμόζεται και στην BNE (Brunnermeier, 2001). Αν θεωρείται κοινή γνώση ότι η κατανομή είναι κατά Pareto αποτελεσματική, μετά την λήψη του σινιάλου, η συναλλαγή θεωρείται παιχνίδι μηδενικού αθροίσματος. Οποιοσδήποτε που λαμβάνει μια προσφορά συναλλαγής, αντιλαμβάνεται ότι ο αντικρουόμενος του θέλει να κερδοφορήσει εκμεταλλευόμενος την καλύτερη πληροφόρησή του. Εφόσον όμως για να κερδίσει κανείς πρέπει κάποιος άλλος να χάσει, κανείς δεν θα είναι πρόθυμος για συναλλαγή εκτός εάν οι τιμές έχουν εκτιμηθεί βάσει της νέας πληροφόρησης.

Παράδειγμα: Έστω ένα στοίχημα μεταξύ ενός απλού παίκτη και ενός εκπροσώπου (ενός γραφείου στοιχημάτων) όπου ο παίκτης ποντάρει στην νίκη της ομάδας του και ο εκπρόσωπος στην ήττα (σε ισοπαλία δεν κερδίζει κανείς). Και οι δύο έχουν κοινές εκ των προτέρων πεποιθήσεις αλλά διαφορετικές διαμερίσεις λόγω διαφορετικής πληροφόρησης⁵. Ο παίκτης έχει πλούτο W_1 , συνάρτηση ωφελείας U_1 και διαμέριση $\mathcal{P} = (P_1, \dots, P_m)$, ενώ ο εκπρόσωπος έχει W_2 , U_2 και $\mathcal{Q} = (Q_1, \dots, Q_n)$ αντίστοιχα. Θα αποδειχθεί ότι με πιθανότητα 1 δεν στοιχηματίζουν ποτέ μεταξύ τους. Έστω ότι υπάρχει στοίχημα (x, y) όπου x είναι το κέρδος του παίκτη, αν κερδίσει η ομάδα του και y το κόστος του αν χάσει η ομάδα και $p(P_i, Q_j) = p(\text{αποδοχή})$ η πιθανότητα να γίνει δεκτό το στοίχημα δεδομένης της πληροφόρησης των συμμετεχόντων. Ο παίκτης βρίσκεται στο σκέλος της διαμέρισής του P_i όταν

⁵ Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ο εκπρόσωπος λόγω της θέσης του, ενδέχεται να έχει καλύτερη (ακριβέστερη) πληροφόρηση.

αποδέχεται το στοίχημα και επομένως ορίζει πιθανότητα $p(Q_j | P_i, \text{αποδοχή})$ για κάθε σκέλος της διαμέρισης Q_j που βρίσκεται ο εκπρόσωπος όταν αποδέχεται και εκείνος το στοίχημα. Το αναμενόμενο κέρδος, $E(\text{payoff})$, του παίκτη είναι:

$$\sum_{Q_j} \left\{ p(Q_j | P_i, \text{αποδοχή}) \left[p(\text{νίκη} | P_i, Q_j) U_1(W_1 + x) + (1 - p(\text{νίκη} | P_i, Q_j)) U_1(W_1 + y) \right] \right\}$$

Για να δεχτεί ο παίκτης το στοίχημα πρέπει το κέρδος του από αυτό να είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το κέρδος του αν δεν το δεχόταν:

$$E(\text{payoff}) \geq U_1(W_1) \Rightarrow p(P_i, \text{αποδοχή}) * E(\text{payoff}) \geq p(P_i, \text{αποδοχή}) * U_1(W_1)$$

Αθροίζοντας για κάθε P_i έχουμε:

$$\sum_{P_i, Q_j} \left\{ p(P_i, \text{αποδοχή}) p(Q_j | P_i, \text{αποδοχή}) \left[p(\text{νίκη} | P_i, Q_j) U_1(W_1 + x) + (1 - p(\text{νίκη} | P_i, Q_j)) U_1(W_1 + y) \right] \right\} \geq U_1(W_1) \sum_{P_i} p(P_i, \text{αποδοχή})$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο $p(A \cap B) = p(A) p(B|A)$ παίρνουμε:

$$p(\text{αποδοχή}) \left[p(\text{νίκη} | \text{αποδοχή}) U_1(W_1 + x) + (1 - p(\text{νίκη} | \text{αποδοχή})) U_1(W_1 + y) \right] \geq p(\text{αποδοχή}) U_1(W_1)$$

$$\Rightarrow p(\text{νίκη} | \text{αποδοχή}) U_1(W_1 + x) + (1 - p(\text{νίκη} | \text{αποδοχή})) U_1(W_1 + y) \geq U_1(W_1)$$

Όμως επειδή ο παίκτης έχει αποστροφή από τον κίνδυνο, η U_1 είναι γνησίως κοίλη συνάρτηση. Επομένως:

$$p(\text{νίκη} | \text{αποδοχή})(W_1 + x) + (1 - p(\text{νίκη} | \text{αποδοχή}))(W_1 + y) > W_1$$

$$\Rightarrow p(\text{νίκη} | \text{αποδοχή})x + (1 - p(\text{νίκη} | \text{αποδοχή}))y > 0$$

Το συμπέρασμα είναι ότι ο παίκτης περιμένει πάντα θετική αναμενόμενη αξία. Όμως με την ίδια λογική το ίδιο θα αναμένει και ο εκπρόσωπος. Είναι αδύνατον όμως να ισχύουν και τα δύο ταυτόχρονα. Άρα η πιθανότητα να γίνει δεκτό το στοίχημα είναι μηδενική.

2 Μοντελοποίηση Αγοράς με Ασύμμετρία Πληροφόρησης

Πολλά μοντέλα βασίζονται στην REE για να εξηγήσουν τις στρατηγικές σε μια αγορά ασύμμετρης πληροφόρησης. Ωστόσο, τα αποτελέσματα που προκύπτουν δεν είναι αρκετά ικανοποιητικά. Οι Grossman & Stiglitz (1980) χρησιμοποίησαν την REE για την αδυναμία ύπαρξης αποτελεσματικών αγορών δίνοντας έμφαση στον πληροφοριακό «θόρυβο» που παρουσιάζεται στις τιμές κατά τη δημιουργία κινήτρου λήψης κοστοβόρας πληροφόρησης. Σύμφωνα με το μοντέλο τους, οι τιμές δεν αντικατοπτρίζουν ολόκληρη την πληροφόρηση των πληροφορημένων συναλλασσόμενων αλλά μόνο ένα μέρος της. Με αυτόν τον τρόπο υπάρχει ανταμοιβή για όσους δαπανούν πόρους για τη λήψη αυτής της πληροφόρησης. Έτσι όμως, λόγω της ανταγωνιστικής φύσης της REE, παρουσιάζονται αντικρουόμενα συμπεράσματα μεταξύ της αποτελεσματικότητας της παροχής πληροφοριών και των κινήτρων λήψεών τους. Αν η παροχή πληροφοριών ήταν πράγματι αποτελεσματική, τότε αυτή, σύμφωνα με την REE, θα έπρεπε να παρουσιάζεται εξ ολοκλήρου στην τελική τιμή. Όμως, το κίνητρο λήψης τους βασίζεται στην κρυφή ανταμοιβή που παρέχουν, η οποία δεν θα έπρεπε να είναι γνωστή σε όλους.

Ο Hellwig (1980) πρώτος ανέφερε τη «σχιζοφρένεια» των συναλλασσόμενων των Grossman & Stiglitz. Εφόσον η REE είναι μια ανταγωνιστική ισορροπία, φαίνεται ότι οι συναλλασσόμενοι δεν εκμεταλλεύονται την δύναμη αγοράς που ενδεχομένως κατέχουν, αλλά αντιθέτως δέχονται την τιμολόγηση δεδομένη.⁶ Ειδικά, αν θεωρηθεί η αγορά ως τέλεια ανταγωνιστική και οι συμμετέχοντες ουδέτεροι στον κίνδυνο, οι τιμές στην ισορροπία αποκαλύπτουν ένα τεράστιο ποσοστό της ιδιωτικής τους πληροφόρησης. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα το κέρδος τους να είναι αρκετά μικρό σε σύγκριση με τις δαπάνες τους για την λήψη πληροφόρησης, χάνοντας έτσι κίνητρο για την αναζήτησή της. Παρόμοιο πρόβλημα παρουσιάζεται και όταν υπάρχουν ελάχιστες «θορυβώδεις» συναλλαγές, καθώς πάλι ένα μεγάλο μέρος της πληροφόρησης παρουσιάζεται στην τελική τιμή (Diamond & Verrecchia, 1981).

Σε αντίθεση με την REE, η χρήση της BNE δίνει καλύτερα αποτελέσματα σε αγορές με ασύμμετρη πληροφόρηση. Ο Kyle (1989) χρησιμοποιεί την BNE στο μοντέλο του για να ορίσει όλους τους συναλλασσόμενους (πληροφορημένους και μη) ως στρατηγικούς αξιοποιώντας την επιρροή που μπορούν να ασκήσουν στην τελική τιμή.⁷

⁶ Μία τέτοια συμπεριφορά μπορεί να δικαιολογηθεί θεωρώντας κάθε συναλλασσόμενο ως σημείο σε ένα «συνεχές κλώνων», όπου η ζήτηση καθενός ξεχωριστά επηρεάζει αμελητέα την τιμή, σε αντίθεση με την σωρευτική τους ζήτηση (Admati, 1985).

⁷ Είναι λογικό ωστόσο να θεωρηθεί ότι οι καλύτερα πληροφορημένοι συναλλασσόμενοι έχουν και μεγάλο μέγεθος.

2.1 Δομή της Αγοράς

Ορίζουμε με κυματιστή γραμμή (\sim) οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή (τ.μ.), με σκοπό να την διαχωρίσουμε από μια πραγματοποίησή της (όπου δεν χρησιμοποιείται (\sim)). Υπάρχει μόνο μια περίοδος συναλλαγών και ένα αξιόγραφο με τιμή \tilde{p} και αξία ρευστοποίησης $\tilde{v} \sim N(0, r_v^{-1})$. Επομένως, η απόδοση ισούται με $\tilde{v} - \tilde{p}$. Η τυχαιότητα της τιμής \tilde{p} οφείλεται στην ύπαρξη των noise traders και της ιδιωτικής πληροφόρησης όπως θα οριστούν παρακάτω. Υπάρχουν τριών ειδών συναλλασσόμενοι:

1. *N πληροφορημένοι συναλλασσόμενοι* όπου ο καθένας έχει μοναδική ιδιωτική πληροφόρηση, η οποία συμβολίζεται ως το αποτέλεσμα της τ.μ. $\tilde{\iota}_n$ (σινιάλο) και πρόγραμμα ζήτησης $X_n(\tilde{p}, \tilde{\iota}_n)$, $n = 1, \dots, N$. Το πρόγραμμα ζήτησης δείχνει τον αριθμό των κομματιών του αξιογράφου που ζητούν οι πληροφορημένοι συναλλασσόμενοι ανάλογα με την τιμή του (\tilde{p}) και την ιδιωτική πληροφόρηση που λαμβάνουν ($\tilde{\iota}_n$). Καθένας τους έχει συνάρτηση ωφελείας:

$$U_n(X_n) = -\exp(-\rho_I \underbrace{(v - p)X_n}_{\pi_{In}})$$

όπου $\rho_I \geq 0$ είναι ο δείκτης αποστροφής κινδύνου (αν $\rho_I = 0$, ο συναλλασσόμενος θεωρείται ουδέτερος στον κίνδυνο). Η συνάρτηση ωφελείας παρουσιάζει το κέρδος των συναλλασσόμενων στο τέλος της περιόδου συναλλαγών όπου έχει καθοριστεί συγκεκριμένα και η τιμή και η αξία ρευστοποίησης του αξιογράφου (δηλαδή παύουν να είναι τ.μ.).

2. *M απληροφόρητοι συναλλασσόμενοι* με πρόγραμμα ζήτησης $Y_m(\tilde{p})$, $m = 1, \dots, M$ και συνάρτηση ωφελείας:

$$V_m(Y_m) = -\exp(-\rho_U \underbrace{(v - p)Y_m}_{\pi_{Um}})$$

όπου $\rho_U \geq 0$ είναι ο δείκτης αποστροφής κινδύνου. Και το πρόγραμμα ζήτησης και η συνάρτηση ωφελείας έχουν την ίδια ερμηνεία με τα αντίστοιχα των πληροφορημένων, με την μόνη διαφορά ότι το πρόγραμμα ζήτησης των απληροφόρητων εξαρτάται μόνο από την τιμή του αξιογράφου καθώς δεν υπάρχει σινιάλο $\tilde{\iota}_n$.

3. *Μη-Ορθολογικοί συναλλασσόμενοι* (noise traders) με σωρευτική αρνητική ζήτηση (προσφορά) $\tilde{z} \sim N(0, \sigma_z^2)$ η οποία δεν σχετίζεται με την μεγιστοποίηση κέρδους⁸. Δηλαδή το \tilde{z} είναι το πλήθος των μονάδων που θα πουλήσουν όλοι μαζί οι θορυβώδεις συναλλασσόμενοι.

Η ιδιωτική πληροφόρηση $\tilde{\iota}_n$ μοντελοποιείται ως το άθροισμα των τ.μ. $\tilde{\iota}_n = \tilde{v} + \tilde{e}_n$, $\tilde{e}_n \sim N(0, r_e^{-1})$ για μια τ.μ. \tilde{e}_n . Με αυτόν τον τρόπο, κάθε σινιάλο ερμηνεύεται ως μία εικάζουσα τελική αξία του αξιογράφου για την οποία έχουν

⁸ Ο Kyle παρουσιάζει τους θορυβώδεις συναλλασσόμενους με τυχαία σωρευτική ζήτηση \tilde{z} . Ωστόσο εδώ παρουσιάζουμε το \tilde{z} ως μία τυχαία πλεονάζουσα προσφορά, μέρος της οποίας διεκδικούν και οι πληροφορημένοι και οι απληροφόρητοι συναλλασσόμενοι.

ενημερωθεί οι πληροφορημένοι, ο καθένας με διαφορετικό τρόπο. Αυτή η εικασία είναι εν μέρει η πραγματική αξία ρευστοποίησης \tilde{v} , και μία εσφαλμένη πληροφόρηση \tilde{e}_n . Το υπόδειγμα υποθέτει ότι η \tilde{z} είναι ανεξάρτητη των $\tilde{v}, \tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_N$ για να δειχθεί ότι οι θορυβώδεις συναλλαγές δεν παρέχουν καμία πληροφόρηση. Επιπρόσθετα, υπάρχει ανεξαρτησία και μεταξύ όλων των \tilde{e}_n αποκαλύπτοντας έτσι την διαφορετική πληροφόρηση μεταξύ των πληροφορημένων.

Όλα τα προγράμματα ζήτησης δίδονται σε έναν *δημοπράτη* (auctioneer), ο οποίος βάσει αυτών ορίζει την τελική τιμή (τιμή εκκαθάρισης) του αξιογράφου. Έπειτα, διανέμει τις κατάλληλες ποσότητες για να ικανοποιήσει την ζήτηση όλων των συναλλασσόμενων. Η αγορά βασίζεται στο υπόδειγμα της «*δημοπρασίας μετοχών*» του Wilson (1979), σύμφωνα με το οποίο όλοι οι συμμετέχοντες λαμβάνουν μερίδια του αξιογράφου στην τελική τιμή.

2.2 Ορισμός της Στρατηγικής Ισορροπίας

Πριν ορίσουμε την στρατηγική ισορροπία, χρησιμοποιείται ως σημείο αναφοράς (benchmark) η ανταγωνιστική ισορροπία και εξηγούνται οι λόγοι για τους οποίους δεν μπορεί να εφαρμοστεί:

Ορισμός 2.1: Μία *ανταγωνιστική ισορροπία* ορίζεται ως μια τ.μ. \tilde{p} και το σύνολο των προγραμμάτων ζήτησης $X_n(\tilde{p}, \tilde{t}_n)$, $Y_m(\tilde{p})$, $n = 1, \dots, N$, $m = 1, \dots, M$ για τα οποία η αγορά εκκαθαρίζεται:

$$\sum_{n=1}^N X_n(\tilde{p}, \tilde{t}_n) + \sum_{m=1}^M Y_m(\tilde{p}) - \tilde{z} = 0 \quad (2.1)$$

και μεγιστοποιείται ο αναμενόμενος πλούτος των συναλλασσόμενων:

$$X_n(\tilde{p}, \tilde{t}_n) \in \arg \max_{X_n} \{E[U_n(X_n) | \tilde{p}, \tilde{t}_n]\}, \forall n = 1, \dots, N \quad (2.2)$$

$$Y_m(\tilde{p}) \in \arg \max_{Y_m} \{E[V_m(Y_m) | \tilde{p}]\}, \forall m = 1, \dots, M \quad (2.3)$$

Είναι φανερό ότι στην ανταγωνιστική ισορροπία, κανένας συναλλασσόμενος δεν λαμβάνει υπόψιν του τις στρατηγικές των αντισυμβαλλομένων του όταν δίνει το δικό του πρόγραμμα ζήτησης. Έτσι δεν αναλογίζεται ούτε τη δύναμη αγοράς που φαίνεται να κατέχει από την (2.1). Ειδικά οι απληροφόρητοι δρουν αναλογιζόμενοι μόνο της τιμής \tilde{p} και δεν λαμβάνουν τίποτα άλλο υπόψιν τους. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο αυτή η ισορροπία δεν επαρκεί για την μοντελοποίηση της αγοράς με ασυμμετρία πληροφόρησης.

Για να δειχθεί η στρατηγική δράση των συναλλασσόμενων, συμβολίζουμε:

$$\tilde{X}_n = \tilde{X}_n(X, Y), \quad \tilde{Y}_m = \tilde{Y}_m(X, Y), \quad \tilde{p} = \tilde{p}(X, Y) \quad (2.4)$$

όπου $X = \langle X_1, X_2, \dots, X_N \rangle$ και $Y = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_M \rangle$ οποιαδήποτε διανύσματα στρατηγικών όλων των πληροφορημένων και απληροφόρητων αντίστοιχα. Με αυτόν τον συμβολισμό ξεκαθαρίζεται το γεγονός ότι αλλάζοντας τη στρατηγική του X_n ή Y_m , κάθε συναλλασσόμενος (πληροφορημένος και μη) αλλάζει ταυτόχρονα και τις στρατηγικές όλων των υπολοίπων και την τελική τιμή στην ισορροπία, εξασκώντας με αυτόν τον τρόπο την δύναμη αγοράς του. Έτσι μπορούμε τώρα να ορίσουμε την στρατηγική ισορροπία:

Ορισμός 2.2: Μία *στρατηγική ισορροπία* ορίζεται ως μια τ.μ. \tilde{p} και τα διανύσματα των προγραμμάτων ζήτησης $X = \langle X_1, X_2, \dots, X_N \rangle$ και $Y = \langle Y_1, Y_2, \dots, Y_M \rangle$ για τα οποία η αγορά εκκαθαρίζεται:

$$\sum_{n=1}^N \tilde{X}_n(X, Y) + \sum_{m=1}^M \tilde{Y}_m(X, Y) - \tilde{z} = 0 \quad (2.5)$$

και μεγιστοποιείται ο αναμενόμενος πλούτος των συναλλασσόμενων:

$$\tilde{X}_n(X, Y) \in \arg \max_{X_n} \left\{ E \left[U_n \left(\tilde{X}_n(X, Y) \right) \mid \tilde{p}(X, Y), \tilde{c}_n \right] \right\}, \forall n = 1, \dots, N \quad (2.6)$$

$$\tilde{Y}_m(X, Y) \in \arg \max_{Y_m} \left\{ E \left[V_m \left(\tilde{Y}_m(X, Y) \right) \mid \tilde{p}(X, Y) \right] \right\}, \forall m = 1, \dots, M \quad (2.7)$$

Επειδή η τιμή στην ισορροπία επηρεάζεται και από τους μη-ορθολογικούς συναλλασσόμενους, πληροφοριακά η τιμή αυτή ισοδυναμεί με μία θορυβώδη παρατήρηση των κινήσεων των συναλλασσόμενων. Το πιθανότερο είναι ότι σε ισορροπία, η τιμή δεν αποκαλύπτει πλήρως την εσωτερική πληροφόρηση των συναλλασσόμενων.

Στα επόμενα δύο κεφάλαια περιγράφουμε αναλυτικά τα προγράμματα ζήτησης όλων των συμμετεχόντων στην αγορά και την επακόλουθη τιμή εκκαθάρισης σε ανταγωνιστικό και στρατηγικό περιβάλλον.

3 Χαρακτηρισμός της Ανταγωνιστικής Ισορροπίας

Ξεκινώντας από την ανταγωνιστική ισορροπία, υπάρχουν δύο διαφορετικές περιπτώσεις. Οι συναλλασσόμενοι μπορούν είτε να θεωρήσουν την τιμή δεδομένη και να μην εξάγουν καθόλου πληροφορία από αυτήν (*αφελής (naive) ισορροπία*), είτε να χρησιμοποιούν την τιμή ως την μοναδική πηγή πληροφορίας. Υπενθυμίζουμε ότι μόνο στην στρατηγική ισορροπία έχουμε εξαγωγή πληροφορίας και από τις κινήσεις (προγράμματα ζήτησης) των υπόλοιπων αντισυμβαλλομένων.

Αν και τα προγράμματα ζήτησης X_n και Y_m μπορούν να έχουν οποιαδήποτε μορφή («market orders» ή «limit orders»⁹), οι υποθέσεις της κανονικότητας των τ.μ. και των εκθετικών συναρτήσεων ωφελείας (CARA-Gaussian περιβάλλον) βοηθούν στον χαρακτηρισμό τους ως γραμμικές συναρτήσεις της τιμής \tilde{p} και της πληροφόρησης $\tilde{\iota}_n$ (μόνο για τους πληροφορημένους). Πράγματι, λύνοντας το πρόβλημα μεγιστοποίησης μέσω πρώτης και δεύτερης παραγώγου, θα καταλήξουμε σε γραμμικά βέλτιστα προγράμματα ζήτησης.

3.1 Ανταγωνιστική Ισορροπία Χωρίς Εξαγωγή Πληροφορίας

Θεωρώντας αρχικά ότι οι συναλλασσόμενοι δεν εξάγουν καμία πληροφορία από την τιμή του αξιογράφου ($\tilde{p} = p$) για τους απληροφόρητους έχουμε:

$$E[V_m(Y_m)] = \int_{-\infty}^{+\infty} -\exp(\rho_U(\tilde{v} - p)Y_m) f(Y_m) dY_m$$

$$= -\exp \left\{ -\rho_U \left(\frac{E[(\tilde{v} - p)Y_m] - \frac{\rho_U}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - p)Y_m]}{\text{εγγυημένο κέρδος μηδενικού ρίσκου (certainty equivalent)}} \right) \right\}$$

Η μεγιστοποίηση του κέρδους ισοδυναμεί με την μεγιστοποίηση ως προς Y_m του εγγυημένου κέρδους:¹⁰

$$E[(\tilde{v} - p)Y_m] - \frac{\rho_U}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - p)Y_m] = Y_m(E[\tilde{v}] - p) - \frac{\rho_U}{2} Y_m^2 \text{Var}[\tilde{v}] = -Y_m p - \frac{\rho_U}{2r_v} Y_m^2$$

⁹ Ως «market orders» ορίζονται οι συναλλαγές που γίνονται βάσει της τιμής του αξιογράφου την συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Τα «limit orders» είναι οι συναλλαγές που γίνονται αφού έχει οριοθετηθεί από τους συναλλασσόμενους μια κατώτατη και μία ανώτατη τιμή μεταξύ των οποίων είναι διατεθειμένοι να κάνουν συναλλαγές. Με τα «market orders» δίδεται προτεραιότητα στην ταχύτητα των συναλλαγών ενώ με τα «limit orders» υπάρχει μεγαλύτερος έλεγχος ως προς το μέγεθος των συναλλαγών.

¹⁰ Υπενθυμίζουμε ότι $\tilde{v} \sim N(0, r_v^{-1}) \Rightarrow E[\tilde{v}] = 0, \text{Var}[\tilde{v}] = r_v^{-1}$

Παραγωγίζοντας ως προς Y_m και μηδενίζοντας την παράγωγο παίρνουμε:

$$\frac{d}{dY_m} \left(-Y_m p - \frac{\rho_U}{2r_v} Y_m^2 \right) = 0 \Rightarrow -p - \frac{\rho_U}{r_v} Y_m = 0$$

$$Y_m = -\frac{r_v}{\rho_U} p \quad (3.1)$$

Το πρόγραμμα ζήτησης είναι πράγματι το βέλτιστο καθώς η δεύτερη παράγωγος προκύπτει αρνητική:

$$\frac{d^2}{dY_m^2} \left(-Y_m p - \frac{\rho_U}{2r_v} Y_m^2 \right) = -\frac{\rho_U}{r_v} < 0$$

Βλέπουμε ότι το Y_m έχει αρνητική γραμμική σχέση με την τιμή p , δείχνοντας ότι καθώς αυξάνεται η τιμή του αξιογράφου, κάθε απληροφόρητος συναλλασσόμενος θα προτιμήσει να πουλήσει όλο και περισσότερα κομμάτια.

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία για την εύρεση βέλτιστου X_n για τους πληροφορημένους με δεδομένη πληροφόρηση \tilde{i}_n :

$$E[(\tilde{v} - p)X_n | \tilde{i}_n] - \frac{\rho_I}{2} Var[(\tilde{v} - p)X_n | \tilde{i}_n] = X_n (E[\tilde{v} | \tilde{i}_n] - p) - \frac{\rho_I}{2} X_n^2 Var[\tilde{v} | \tilde{i}_n]$$

Για την εύρεση των $E[\tilde{v} | \tilde{i}_n]$ και $Var[\tilde{v} | \tilde{i}_n]$ εφαρμόζουμε το *προβολικό θεώρημα* (βλ. Παράρτημα), το οποίο στο μοντέλο μας για τις τ.μ. $\tilde{v} \sim N(0, r_v^{-1})$ και $\tilde{i}_n = \tilde{v} + \tilde{e}_n$, $\tilde{e}_n \sim N(0, r_e^{-1})$, απλοποιείται ως εξής:

$$E(\tilde{v} | \tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_N) = E(\tilde{v} | \tilde{v} + \tilde{e}_1, \dots, \tilde{v} + \tilde{e}_N) = \frac{r_e}{r_v + Nr_e} \sum_{n=1}^N \tilde{i}_n \quad (3.2)$$

$$Var(\tilde{v} | \tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_N) = Var(\tilde{v} | \tilde{v} + \tilde{e}_1, \dots, \tilde{v} + \tilde{e}_N) = \frac{1}{r_v + Nr_e} \quad (3.3)$$

Παρατηρούμε ότι η εκτιμώμενη αξία ρευστοποίησης αυξάνεται κατά $r_e/(r_v + Nr_e)$ μονάδες για κάθε πραγματοποίηση σινιάλου \tilde{i}_n , ενώ η διασπορά της μειώνεται από r_v^{-1} (όταν δεν λαμβάνεται υπόψη η ιδιωτική πληροφόρηση) σε $(r_v + Nr_e)^{-1}$. Μάλιστα, η ντετερμινιστική φύση της δεσμευμένης διακύμανσης (3.3) δείχνει ότι η απόκλιση της αξίας ρευστοποίησης από την αναμενόμενη της τιμή είναι ανεξάρτητη από οποιαδήποτε πραγματοποίηση σινιάλου i_n .

Συνεχίζοντας το πρόβλημα εύρεσης βέλτιστου X_n , από τις (3.2) και (3.3) για ένα μόνο \tilde{i}_n , έχουμε:

$$X_n(E[\tilde{v}|\tilde{t}_n] - p) - \frac{\rho_I}{2} X_n^2 \text{Var}[\tilde{v}|\tilde{t}_n] = X_n \left(\frac{r_e}{r_v + r_e} \tilde{t}_n - p \right) - \frac{\rho_I}{2(r_v + r_e)} X_n^2$$

Βρίσκουμε την πρώτη παράγωγο ως προς X_n και την μηδενίζουμε:

$$\frac{d}{dX_n} \left(X_n \left(\frac{r_e}{r_v + r_e} \tilde{t}_n - p \right) - \frac{\rho_I}{2(r_v + r_e)} X_n^2 \right) = 0 \Rightarrow \frac{r_e}{r_v + r_e} \tilde{t}_n - p - \frac{\rho_I}{r_v + r_e} X_n = 0$$

$$X_n = -\frac{r_v + r_e}{\rho_I} p + \frac{r_e}{\rho_I} \tilde{t}_n \quad (3.4)$$

Και εδώ η δεύτερη παράγωγος προκύπτει αρνητική δείχνοντας ότι το X_n που προκύπτει είναι πράγματι το μέγιστο:

$$\frac{d^2}{dX_n^2} \left(X_n \left(\frac{r_e}{r_v + r_e} \tilde{t}_n - p \right) - \frac{\rho_I}{2(r_v + r_e)} X_n^2 \right) = -\frac{\rho_I}{r_v + r_e} < 0$$

Και εδώ το X_n έχει αρνητική γραμμική σχέση με την τιμή p . Ωστόσο λόγω της ιδιωτικής πληροφόρησης, υπάρχει και θετική γραμμική σχέση με το σινιάλο \tilde{t}_n .

Με τα X_n και Y_m των (3.1) και (3.4) βρίσκουμε την τιμή εκκαθαρισμού όπως παρουσιάστηκε στον Ορισμό 2.1:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N X_n(p, \tilde{t}_n) + \sum_{m=1}^M Y_m(p) - \tilde{z} &= 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^N \left(-\frac{r_v + r_e}{\rho_I} p + \frac{r_e}{\rho_I} \tilde{t}_n \right) + \sum_{m=1}^M \left(-\frac{r_v}{\rho_U} p \right) - \tilde{z} = 0 \\ &\Rightarrow -\frac{N(r_v + r_e)}{\rho_I} p + \frac{r_e}{\rho_I} \sum_{n=1}^N \tilde{t}_n - \frac{Mr_v}{\rho_U} p - \tilde{z} = 0 \\ &\Rightarrow p = \left(\frac{N(r_v + r_e)}{\rho_I} + \frac{Mr_v}{\rho_U} \right)^{-1} \left(\frac{r_e}{\rho_I} \sum_{n=1}^N \tilde{t}_n - \tilde{z} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Βλέπουμε ότι είναι αδύνατο να εξαχθεί πληροφορία μέσω των τιμών από τους απληροφόρητους. Μόνο οι πληροφορημένοι μπορούν να εξαγάουν πληροφορία η οποία αντανακλάται στην ιδιωτική τους πληροφόρηση από την ποσότητα $\left(\frac{N(r_v + r_e)}{\rho_I} + \frac{Mr_v}{\rho_U} \right)^{-1} \frac{r_e}{\rho_I}$.

3.2 Συμμετρική Γραμμική Ισορροπία

Βάσει των ανωτέρω και δεδομένης της ανταγωνιστικής ισορροπίας (Ορισμός 2.1), ορίζεται η *συμμετρική γραμμική ισορροπία* στην οποία τα X_n και Y_m είναι γραμμικά και ίδια $\forall n = 1, \dots, N$ και $\forall m = 1, \dots, M$ αντίστοιχα. Δηλαδή υπάρχουν σταθερές $\alpha_I, \alpha_U, \beta_I, \beta_U, \gamma$ για τις οποίες:

$$X_n(p, i_n) = \alpha_I - \beta_I p + \gamma i_n, \quad Y_m(p) = \alpha_U - \beta_U p \quad (3.6)$$

Οι αριθμοί α_I και α_U είναι οι πάγιες μονάδες του αξιογράφου οι οποίες ζητούνται αντίστοιχα από τους πληροφορημένους και μη, ανεξαρτήτως της τιμής και της ιδιωτικής πληροφόρησης¹¹. Οι παράμετροι β_I και β_U δείχνουν το πλήθος των μονάδων που αφαιρούνται από την ζήτηση των συναλλασσομένων όταν η τιμή αυξάνεται κατά μία μονάδα. Τέλος, μόνο για τους πληροφορημένους, ο συντελεστής γ δείχνει το πλήθος των μονάδων που ζητούνται επιπλέον όταν το σινιάλο αυξάνεται κατά μία μονάδα¹². Οι συντελεστές $\alpha_I, \alpha_U, \beta_I, \beta_U, \gamma$ είναι γνωστοί σε όλους τους συναλλασσόμενους αποκαλύπτοντας έτσι και τον τύπο τους (πληροφορημένοι ή απληροφόρητοι).

Συγκρίνοντας τις σχέσεις στην (3.6) με τις (3.1) και (3.4) για τιμή p η οποία δεν παρέχει καμία πληροφορία, παρατηρούμε άμεσα ότι:

$$\alpha_I = \alpha_U = 0, \quad \beta_I = \frac{r_v + r_e}{\rho_I}, \quad \beta_U = \frac{r_v}{\rho_U}, \quad \gamma = \frac{r_e}{\rho_I}$$

Έστω r_F η ακρίβεια πρόβλεψης της αξίας ρευστοποίησης \tilde{v} δεδομένης όλης της ιδιωτικής πληροφόρησης. Βάσει του προβολικού θεωρήματος και της σχέσης (3.2) το r_F δίνεται ως εξής:

$$r_F = \text{Var}^{-1}(\tilde{v} | \tilde{i}_1, \dots, \tilde{i}_N) = r_v + Nr_e \quad (3.7)$$

Διαισθητικά, μπορούμε να πούμε ότι για την απόκτηση πλήρους ακρίβειας, στην προϋπάρχουσα ακρίβεια r_v , προστίθενται r_e βαθμοί για καθεμία παρατήρηση σφάλματος r_e^{-1} . Οι απληροφόρητοι συναλλασσόμενοι ωστόσο δεν παρατηρούν καμία εσωτερική πληροφόρηση, ενώ οι πληροφορημένοι παρατηρούν μόνο την δικιά τους. Επιπρόσθετα, θεωρούμε πλέον ότι κάθε συμβαλλόμενος όχι μόνο παρατηρεί την τιμή \tilde{p} , αλλά την αναγνωρίζει ως μία ενδεχόμενη πηγή πληροφόρησης. Επομένως, η ακρίβεια της κάθε ομάδας, r_U για τους απληροφόρητους και r_I για τους πληροφορημένους, ορίζεται ως:

$$r_U = \text{Var}^{-1}(\tilde{v} | \tilde{p}), \quad r_I = \text{Var}^{-1}(\tilde{v} | \tilde{p}, \tilde{i}_n) \quad (3.8)$$

¹¹ Τα α_I και α_U είναι μη θετικοί αριθμοί για να δείξουν ότι όταν το αξιόγραφο δεν έχει καμία αξία ($p = 0$) και δεν υπάρχει κανένα σινιάλο ($i_n = 0$), οι συναλλασσόμενοι δεν έχουν κανένα λόγο να το κατέχουν.

¹² Προφανώς όταν οι αγορές είναι αισιόδοξες (bull markets) τα σινιάλα είναι υψηλά και η ζήτηση αυξάνεται. Αντιθέτως, όταν υπάρχει κρίση (bear markets), η ζήτηση πέφτει.

Η ακρίβεια κάθε συναλλασσομένου είναι προφανώς καλύτερη από την εκ των προτέρων ακρίβεια r_v αλλά χειρότερη από ακρίβεια πλήρους πληροφόρησης r_F . Επομένως, ως μία μορφή αναπααραμέτρησης, μπορούμε να γράψουμε:

$$r_U = r_v + \varphi_U N r_e, \quad r_I = r_v + \varphi_I (N-1) r_e + r_e, \quad \varphi_U, \varphi_I \in [0,1]^{13} \quad (3.9)$$

Οι φ_U, φ_I είναι δείκτες πληροφοριακής αποτελεσματικότητας με τους οποίους οι τιμές συσσωρεύουν ιδιωτική πληροφόρηση. Ο φ_U δείχνει το ποσοστό ακρίβειας των N πληροφορημένων το οποίο παρουσιάζεται στους απληροφόρητους μέσω των τιμών. Αντίστοιχα, ο φ_I δείχνει το ποσοστό ακρίβειας των $N-1$ πληροφορημένων που παρουσιάζεται στον n -οστό πληροφορημένο. Αν $\varphi_U = 0$ ή $\varphi_I = 0$, τότε οι τιμές δεν αποκαλύπτουν καμία εσωτερική πληροφόρηση ($r_U = r_I = r_v$), ενώ όσο αυξάνονται οι δείκτες, τόσο μεγαλύτερη εξαγωγή πληροφοριών γίνεται (στην μονάδα φανερώνεται κάθε ιδιωτική πληροφόρηση, $r_U = r_I = r_F$).

Σε συμμετρική γραμμική ισορροπία, αντικαθιστώντας τα γραμμικά προγράμματα ζήτησης (3.6) στην (2.1) παίρνουμε την τιμή \tilde{p} :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N X_n(\tilde{p}, \tilde{t}_n) + \sum_{m=1}^M Y_m(\tilde{p}) - \tilde{z} &= 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^N (\alpha_I - \beta_I \tilde{p} + \gamma \tilde{t}_n) + \sum_{m=1}^M (\alpha_U - \beta_U \tilde{p}) - \tilde{z} = 0 \\ \Rightarrow N\alpha_I - N\beta_I \tilde{p} + \gamma \sum_{n=1}^N \tilde{t}_n + M\alpha_U - M\beta_U \tilde{p} - \tilde{z} &= 0 \\ \Rightarrow \tilde{p} &= \lambda \left(N\alpha_I + M\alpha_U + \gamma \sum_{n=1}^N \tilde{t}_n - \tilde{z} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου

$$\lambda = \frac{1}{N\beta_I + M\beta_U} \quad (3.11)$$

είναι η κλίση της σωρευτικής πλεονάζουσας προσφοράς \tilde{z} .

Παρατηρούμε ότι από την συνολική πληροφορία που παρουσιάζεται στην τιμή \tilde{p} , το κομμάτι $\lambda(N\alpha_I + M\alpha_U)$ μπορεί να εξαχθεί από κάθε απληροφόρητο m , ενώ το κομμάτι $\lambda(N\alpha_I + M\alpha_U + \gamma \tilde{t}_n)$ από τον n -οστό πληροφορημένο.

¹³ $r_I = var^{-1}(\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{t}_n) = var^{-1}(\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{v} + \tilde{e}_n) = \underbrace{r_v + r_e}_{var^{-1}(\tilde{v}|\tilde{t}_n)} + \varphi_I(N-1)r_e$

Επιπρόσθετα, το λ μπορεί να υπολογισθεί και στην ανταγωνιστική ισορροπία χωρίς εξαγωγή πληροφορίας, καθώς καταλήγουμε άμεσα στον συντελεστή της τιμής εκκαθάρισης (3.5):

$$\lambda = \frac{1}{N\beta_I + M\beta_U} = \frac{1}{N \frac{r_v + r_e}{\rho_I} + M \frac{r_v}{\rho_U}} = \left(\frac{N(r_v + r_e)}{\rho_I} + \frac{Mr_v}{\rho_U} \right)^{-1}$$

Με την εφαρμογή του προβολικού θεωρήματος, καταλήγουμε στο εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.1: Σε συμμετρική γραμμική ισορροπία, οι δείκτες φ_U, φ_I δίνονται ως εξής:

$$\varphi_U = \frac{N\gamma^2}{N\gamma^2 + \sigma_z^2 r_e}, \quad \varphi_I = \frac{(N-1)\gamma^2}{(N-1)\gamma^2 + \sigma_z^2 r_e} \quad (3.12)$$

Επομένως:

$$E[\tilde{v}|\tilde{p}] = \frac{\varphi_U r_e}{\gamma r_U} (\lambda^{-1} \tilde{p} - N\alpha_I - M\alpha_U) \quad (3.13)$$

$$E[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{\iota}_n] = \frac{(1-\varphi_I)r_e}{r_I} \tilde{\iota}_n + \frac{\varphi_I r_e}{\gamma r_I} (\lambda^{-1} \tilde{p} - N\alpha_I - M\alpha_U)^{14} \quad (3.14)$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι μόνο η παράμετρος γ επηρεάζει τους δείκτες φ_I, φ_U . Αυτό είναι αναμενόμενο καθώς το γ μετρά την ευαισθησία των ποσοτήτων που συναλλάσσονται οι πληροφορημένοι βάσει της πληροφόρησής τους. Οι υπόλοιπες παράμετροι $\alpha_I, \alpha_U, \beta_I, \beta_U$ επηρεάζουν μόνο την μεροληψία των τιμών.

Πόρισμα 3.1: Όταν οι πάγιες ζητήσεις α_I, α_U είναι μηδενικές, τότε οι τιμές είναι αμερόληπτες ($E[\tilde{v}|p] = p$) $\Leftrightarrow \varphi_U r_e = \lambda \gamma r_U$.

Απόδειξη: Έστω ότι $E[\tilde{v}|p] = p$. Τότε από την (3.13) έχουμε:

$$E[\tilde{v}|p] = \frac{\varphi_U r_e}{\gamma r_U} \lambda^{-1} p \Rightarrow p = \frac{\varphi_U r_e}{\gamma r_U} \lambda^{-1} p \Rightarrow \varphi_U r_e = \lambda \gamma r_U$$

Αντίστροφα, αν $\varphi_U r_e = \lambda \gamma r_U$ τότε προκύπτει άμεσα ότι: $E[\tilde{v}|p] = p$. ■

¹⁴ Για την απόδειξη των (3.13) και (3.14), θεωρούμε την τ.μ. \tilde{p} ως πληροφοριακά ισοδύναμη με την τ.μ. $\tilde{h} = \frac{1}{N\beta} (\lambda^{-1} \tilde{p} - N\alpha_I - M\alpha_U)$ (ως προς τον απληροφόρητο) και τις τ.μ. $\tilde{\iota}_n, \tilde{p}$ με τις τ.μ. $\tilde{\iota}_n$ και $\tilde{h}_n = \frac{1}{(N-1)\beta} (\lambda^{-1} \tilde{p} - N\alpha_I - M\alpha_U - \gamma \tilde{\iota}_n)$ αντίστοιχα (ως προς τον πληροφορημένο).

Πλέον για τυχαία τιμή \tilde{p} από την οποία εξάγεται πληροφορία, το πρόβλημα μεγιστοποίησης κέρδους τροποποιείται. Αρχικά, για τους πληροφορημένους έχουμε:

$$E[U_n(X_n|\tilde{p}, \tilde{i}_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} -\exp(\rho_I(\tilde{v} - \tilde{p})X_n) f(X_n|\tilde{p}, \tilde{i}_n) dX_n$$

$$= -\exp \left\{ -\rho_I \left(\frac{E[(\tilde{v} - \tilde{p})X_n|\tilde{p}, \tilde{i}_n] - \frac{\rho_I}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - \tilde{p})X_n|\tilde{p}, \tilde{i}_n]}{\text{εγγυημένο κέρδος μηδενικού ρίσκου (certainty equivalent)}} \right) \right\}$$

Μεγιστοποιούμε ως προς X_n το εγγυημένο κέρδος:

$$E[(\tilde{v} - \tilde{p})X_n|\tilde{p}, \tilde{i}_n] - \frac{\rho_I}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - \tilde{p})X_n|\tilde{p}, \tilde{i}_n]$$

$$= X_n \left\{ E[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{i}_n] - \frac{E[\tilde{p}|\tilde{p}, \tilde{i}_n]}{= \tilde{p}} \right\} - \frac{\rho_I}{2} X_n^2 \left\{ \frac{\text{Var}[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{i}_n]}{= r_I^{-1} (3.8)} + \frac{\text{Var}[\tilde{p}|\tilde{p}, \tilde{i}_n]}{= 0} \right\}$$

$$= X_n \{ E[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{i}_n] - \tilde{p} \} - \frac{\rho_I}{2r_I} X_n^2$$

Μηδενίζουμε την πρώτη παράγωγο για την εύρεση ακροτάτου:

$$\frac{d}{dX_n} \left(X_n \{ E[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{i}_n] - \tilde{p} \} - \frac{\rho_I}{2r_I} X_n^2 \right) = 0 \Rightarrow E[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{i}_n] - \tilde{p} - \frac{\rho_I}{r_I} X_n = 0$$

$$\Rightarrow X_n^*(p, i_n) = \frac{E[\tilde{v}|p, i_n] - p}{\rho_I/r_I}, \quad \rho_I/r_I > 0$$

Βρίσκουμε και την δεύτερη παράγωγο για την παρουσία μεγίστου ή ελαχίστου στο X_n^* :

$$\frac{d^2}{dX_n^2} \left(X_n \{ E[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{i}_n] - \tilde{p} \} - \frac{\rho_I}{2r_I} X_n^2 \right) = -\frac{\rho_I}{r_I} < 0$$

Άρα πράγματι παρουσιάζει μέγιστο στο X_n^* . Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία για τα Y_m , καταλήγουμε ότι τα βέλτιστα προγράμματα ζήτησης σε ανταγωνιστική ισορροπία είναι τα εξής:

$$X_n^*(p, i_n) = \frac{E[\tilde{v}|p, i_n] - p}{\rho_I/r_I}, \quad Y_m^*(p) = \frac{E[\tilde{v}|p] - p}{\rho_U/r_U}, \quad (3.15)$$

και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1 παίρνουμε:

$$X_n^*(p, i_n) = \underbrace{\left(\frac{(1 - \varphi_I)r_e}{\rho_I}\right)} i_n - \underbrace{\left(\frac{\gamma\lambda r_I - \varphi_I r_e}{\gamma\lambda\rho_I}\right)} p - \underbrace{\frac{\varphi_I r_e (N\alpha_I + M\alpha_U)}{\gamma\rho_I}},$$

$$Y_m^*(p) = - \underbrace{\left(\frac{\gamma\lambda r_U - \varphi_U r_e}{\gamma\lambda\rho_U}\right)} p - \underbrace{\frac{\varphi_U r_e (N\alpha_I + M\alpha_U)}{\gamma\rho_U}}$$

Εξισώνουμε με τα γραμμικά προγράμματα ζήτησης και παίρνουμε:

$$\alpha_I = -\frac{\varphi_I r_e (N\alpha_I + M\alpha_U)}{\gamma\rho_I} = 0, \quad \beta_I = \frac{\gamma\lambda r_I - \varphi_I r_e}{\gamma\lambda\rho_I}, \quad \gamma = \frac{(1 - \varphi_I)r_e}{\rho_I}, \quad (3.16)$$

$$\alpha_U = -\frac{\varphi_U r_e (N\alpha_I + M\alpha_U)}{\gamma\rho_U} = 0, \quad \beta_U = \frac{\gamma\lambda r_U - \varphi_U r_e}{\gamma\lambda\rho_U} \quad (3.17)$$

Σημειώνουμε ότι σε κάθε αγορά, η επίλυση του συστήματος εξισώσεων (3.16) και (3.17) καταλήγει ότι $\alpha_I = \alpha_U = 0$.

4 Χαρακτηρισμός της Στρατηγικής Ισορροπίας

Τροποποιούμε το πρόβλημα της συμμετρικής ισορροπίας χρησιμοποιώντας την έννοια της κατάλοιπης καμπύλης προσφοράς. Κάθε συμβαλλόμενος αξιοποιεί την δύναμη αγοράς του συμπεριφερόμενος ως μονοπωλητής ο οποίος παρατηρεί την κατάλοιπη καμπύλη προσφοράς. Έτσι και οι πληροφορημένοι και οι απληροφόρητοι παρουσιάζουν διαφορετικά $\alpha_I, \alpha_U, \beta_I, \beta_U, \gamma$ από τα πραγματικά για να έχουν μεγαλύτερο κέρδος στην ισορροπία. Κάθε στρατηγική η οποία μπορεί να επιτευχθεί επιλέγοντας ένα πρόγραμμα ζήτησης, μπορεί να επιτευχθεί και με την επιλογή σημείων στην κατάλοιπη καμπύλη προσφοράς.

4.1 Τροποποίηση του Προβλήματος

Για να δειχθεί πλέον η στρατηγική συμπεριφορά των συναλλασσόμενων, χρησιμοποιούμε την στρατηγική ισορροπία του Ορισμού 2.2 διατηρώντας όμως την υπόθεση των γραμμικών προγραμμάτων ζήτησης (3.6). Αρχικά απομονώνοντας τον m -οστό απληροφόρητο στην τιμή εκκαθάρισης (2.5) έχουμε:

$$\sum_{n=1}^N \tilde{X}_n(X, Y) + \tilde{Y}_m(X, Y) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^M \tilde{Y}_k(X, Y) - \tilde{z} = 0$$

$$\Rightarrow N\alpha_I - N\beta_I\tilde{p} + \gamma \sum_{n=1}^N \tilde{t}_n + \tilde{Y}_m + (M-1)\alpha_U - (M-1)\beta_U\tilde{p} - \tilde{z} = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{p} = \frac{1}{N\beta_I + (M-1)\beta_U} \tilde{Y}_m + \frac{1}{N\beta_I + (M-1)\beta_U} \left(N\alpha_I + (M-1)\alpha_U + \gamma \sum_{n=1}^N \tilde{t}_n - \tilde{z} \right)$$

Αντίστοιχα, αν απομονώσουμε τον n -οστό πληροφορημένο παίρνουμε:

$$\tilde{X}_n(X, Y) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \tilde{X}_k(X, Y) + \sum_{m=1}^M \tilde{Y}_m(X, Y) - \tilde{z} = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{X}_n + (N-1)\alpha_I - (N-1)\beta_I\tilde{p} + \gamma \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \tilde{t}_k + M\alpha_U - M\beta_U\tilde{p} - \tilde{z} = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{p} = \frac{1}{(N-1)\beta_I + M\beta_U} \tilde{X}_n + \frac{1}{(N-1)\beta_I + M\beta_U} \left((N-1)\alpha_I + M\alpha_U + \gamma \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \tilde{t}_k - \tilde{z} \right)$$

Επομένως, για τους πληροφορημένους και τους απληροφόρητους αντίστοιχα, οι κατάλοιπες καμπύλες προσφοράς ορίζονται ως εξής:

$$\tilde{p} = \tilde{p}_{In} + \lambda_I \tilde{X}_n, \quad \tilde{p} = \tilde{p}_{Um} + \lambda_U \tilde{Y}_m \quad (4.1)$$

όπου

$$\lambda_I = \frac{1}{(N-1)\beta_I + M\beta_U}, \quad \lambda_U = \frac{1}{N\beta_I + (M-1)\beta_U} \quad (4.2)$$

και

$$\tilde{p}_{In} = \lambda_I \left((N-1)\alpha_I + M\alpha_U + \gamma \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^N \tilde{t}_k - \tilde{z} \right) \quad (4.3)$$

$$\tilde{p}_{Um} = \lambda_U \left(N\alpha_I + (M-1)\alpha_U + \gamma \sum_{n=1}^N \tilde{t}_n - \tilde{z} \right) \quad (4.4)$$

Τα λ_I και λ_U δείχνουν τον αντίκτυπο που έχουν τα προγράμματα ζήτησης των πληροφορημένων και απληροφόρητων αντίστοιχα στην τελική τιμή του αξιογράφου. Έτσι με αυτήν την τροποποίηση, γίνεται φανερή η στρατηγική συμπεριφορά των συναλλασσόμενων με την επιρροή που μπορούν να ασκήσουν στην τιμή.

Υποθέτοντας πάλι ότι βρισκόμαστε σε *CARA-Gaussian* περιβάλλον, το πρόβλημα τροποποιείται στην εύρεση κατάλληλων \tilde{X}_n και \tilde{Y}_m για τα οποία μεγιστοποιείται το αναμενόμενο κέρδος δεδομένων των \tilde{p}_{In} , \tilde{t}_n και \tilde{p}_{Um} . Δηλαδή ψάχνουμε τα \tilde{X}_n , \tilde{Y}_m τα οποία πλέον ικανοποιούν τις σχέσεις (2.6) και (2.7) της στρατηγικής ισορροπίας αντίστοιχα.

Λύνουμε το κλασικό πρόβλημα μεγιστοποίησης μέσω πρώτης και δεύτερης παραγώγου για να καταλήξουμε στο βέλτιστο \tilde{X}_n . Έχουμε:

$$\begin{aligned} E[U_n(\tilde{X}_n | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\exp(\rho_I(\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{X}_n) f(\tilde{X}_n | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n) d\tilde{X}_n \\ &= -\exp \left\{ -\rho_I \left(\frac{E[(\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{X}_n | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] - \frac{\rho_I}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{X}_n | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n]}{\text{εγγυημένο κέρδος μηδενικού ρίσκου}} \right) \right\} \\ &\quad \text{(certainty equivalent)} \end{aligned}$$

Η μεγιστοποίηση του κέρδους ισοδυναμεί με την μεγιστοποίηση ως προς \tilde{X}_n του εγγυημένου κέρδους:

$$\begin{aligned}
 & E[(\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{X}_n | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] - \frac{\rho_I}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{X}_n | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] \\
 & \stackrel{(4.1)}{=} E[(\tilde{v} - \tilde{p}_{In} - \lambda_I \tilde{X}_n)\tilde{X}_n | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] - \frac{\rho_I}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - \tilde{p}_{In} - \lambda_I \tilde{X}_n)\tilde{X}_n | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] \\
 & = \tilde{X}_n \left\{ E[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] - \underbrace{E[\tilde{p}_{In} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n]}_{=\tilde{p}_{In}} - \lambda_I \tilde{X}_n \right\} - \frac{\rho_I}{2} \tilde{X}_n^2 \left\{ \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] + \underbrace{\text{Var}[\tilde{p}_{In} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n]}_{=0} \right\} \\
 & = \tilde{X}_n \{ E[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] - \tilde{p}_{In} \} - \tilde{X}_n^2 \left\{ \lambda_I + \frac{\rho_I}{2} \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] \right\}
 \end{aligned}$$

Μηδενίζουμε την πρώτη παράγωγο για την εύρεση ακροτάτου:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{d\tilde{X}_n} \left(\tilde{X}_n \{ E[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] - \tilde{p}_{In} \} - \tilde{X}_n^2 \left\{ \lambda_I + \frac{\rho_I}{2} \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] \right\} \right) = 0 \\
 & \Rightarrow E[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] - \tilde{p}_{In} - \tilde{X}_n \{ 2\lambda_I + \rho_I \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] \} = 0 \\
 & \Rightarrow \tilde{X}_n^* = \frac{E[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] - \tilde{p}_{In}}{2\lambda_I + \rho_I \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n]}, \quad 2\lambda_I + \rho_I \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] \neq 0
 \end{aligned}$$

Βρίσκουμε και την δεύτερη παράγωγο για την παρουσία μεγίστου ή ελαχίστου στο \tilde{X}_n^* :

$$\frac{d^2}{d\tilde{X}_n^2} \left(\tilde{X}_n \{ E[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] - \tilde{p}_{In} \} - \tilde{X}_n^2 \left\{ \lambda_I + \frac{\rho_I}{2} \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] \right\} \right) = -(2\lambda_I + \rho_I \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n])$$

Καταλήγουμε στα εξής συμπεράσματα:

1. Αν $2\lambda_I + \rho_I \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] > 0$:

Έχουμε μέγιστο κέρδος στο πρόγραμμα ζήτησης \tilde{X}_n^* . Επιπρόσθετα, παρατηρούμε ότι εφόσον το \tilde{p}_{In} είναι γραμμικός συνδυασμός των \tilde{p} και \tilde{t}_n , ισχύει ότι $E[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] = E[\tilde{v} | \tilde{p}, \tilde{t}_n]$ και $\text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] = \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}, \tilde{t}_n] \stackrel{(3.8)}{=} \frac{1}{r_I}$.

Επομένως:

$$\tilde{X}_n^* = \frac{E[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] - \tilde{p}_{In}}{2\lambda_I + \rho_I \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n]} \stackrel{(4.1)}{=} \frac{E[\tilde{v} | \tilde{p}, \tilde{t}_n] - \tilde{p} + \lambda_I \tilde{X}_n^*}{2\lambda_I + \rho_I / r_I} \Rightarrow \tilde{X}_n^* = \frac{E[\tilde{v} | \tilde{p}, \tilde{t}_n] - \tilde{p}}{\lambda_I + \rho_I / r_I}$$

2. Αν $2\lambda_I + \rho_I \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] < 0$:

Δεν υπάρχει μέγιστο κέρδος για κανένα πρόγραμμα ζήτησης \tilde{X}_n . Δηλαδή ο πληροφορημένος αποκτά άπειρο κέρδος συναλλάσσοντας άπειρες ποσότητες.

3. Αν $2\lambda_I + \rho_I \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}_{In}, \tilde{t}_n] = 0$:

Πάλι ο πληροφορημένος αποκτά άπειρο κέρδος. Αν $E[\tilde{v}|\tilde{p}_{In}, \tilde{i}_n] \neq \tilde{p}_{In}$, συναλλάσσεται άπειρες ποσότητες ενώ αν $E[\tilde{v}|\tilde{p}_{In}, \tilde{i}_n] = \tilde{p}_{In}$, είναι αδιάφορος ως προς αυτές.

Με παρόμοια ανάλυση για το \tilde{Y}_m , συμπεραίνουμε ότι τα βέλτιστα προγράμματα ζήτησης X_n^* και Y_m^* δίνονται από τις σχέσεις:

$$\tilde{X}_n^*(p, i_n) = \frac{E[\tilde{v}|p, i_n] - p}{\lambda_I + \rho_I/r_I}, \quad \tilde{Y}_m^*(p) = \frac{E[\tilde{v}|p] - p}{\lambda_U + \rho_U/r_U} \quad (4.5)$$

όταν

$$2\lambda_I + \rho_I/r_I > 0, \quad 2\lambda_U + \rho_U/r_U > 0 \quad (4.6)$$

Συγκρίνοντας τα προγράμματα ζήτησης της ανταγωνιστικής ισορροπίας (3.15) με εκείνα της στρατηγικής (4.5), παρατηρούμε ότι η μόνη διαφορά μεταξύ τους είναι η παρουσία των λ_I και λ_U στην στρατηγική ισορροπία. Η έλλειψή τους στην ανταγωνιστική ισορροπία είναι αναμενόμενη καθώς όπως είδαμε οι αριθμοί αυτοί δείχνουν την άσκηση της δύναμης αγοράς η οποία δεν γίνεται σε ανταγωνιστικό περιβάλλον ($\lambda_I = \lambda_U = 0$).

4.2 Ενδογενείς Παράμετροι

Για την τελική επίλυση της συμμετρικής γραμμικής ισορροπίας, είναι ωφέλιμο να ορίσουμε παραμέτρους οι οποίες έχουν διαισθητικό χαρακτήρα.

Ορίζουμε ως παράμετρο πληροφοριακής επίπτωσης την:

$$\zeta = \left(\frac{r_e}{r_I}\right)^{-1} \gamma\lambda \quad (4.7)$$

Η παράμετρος αυτή υπολογίζει κατά πόσο αυξήθηκε η τιμή του αξιόγραφου όταν η εκτίμηση του n-οστού πληροφορημένου αυξηθεί κατά μία μονάδα ως αποτέλεσμα μιας μεγαλύτερης πραγματοποίησης του ιδιωτικού σινιάλου \tilde{i}_n .¹⁵

Ορίζουμε ως οριακό μερίδιο αγοράς τις παραμέτρους (για τον πληροφορημένο και απληροφόρητο αντίστοιχα):

$$\xi_I = \beta_I\lambda, \quad \xi_U = \beta_U\lambda \quad (4.8)$$

¹⁵ Από την (3.14) παρατηρούμε ότι για να αυξηθεί η εκτίμηση του πληροφορημένου κατά μία μονάδα, πρέπει το σινιάλο να αυξηθεί κατά $\left(\frac{r_e}{r_I}\right)^{-1}$. Παράλληλα, από την (3.10), η αύξηση του σινιάλου κατά μία μονάδα προκαλεί άνοδο της τιμής κατά $\gamma\lambda$. Ο πολλαπλασιασμός των δύο αυτών ποσοτήτων παράγει το ζ .

Αυτές οι παράμετροι υπολογίζουν κατά πόσο αυξήθηκε η ποσότητα που συναλλάσσεται ο κάθε πληροφορημένος και απληροφόρητος εάν αυξηθεί η πλεονάζουσα προσφορά \tilde{z} κατά μία μονάδα¹⁶. Η μία μονάδα αύξησης της προσφοράς \tilde{z} πρέπει να μοιραστεί σε όλους τους υπόλοιπους συναλλασσόμενους. Επομένως, οι δύο αυτές παράμετροι ικανοποιούν την εξίσωση:

$$N\xi_I + M\xi_U = 1$$

4.3 Επίλυση του Μοντέλου

Σύμφωνα με την ανάλυσή μας, οι απαραίτητες προϋποθέσεις ύπαρξης στρατηγικής συμμετρικής γραμμικής ισορροπίας είναι οι παράμετροι λ , λ_I , λ_U να είναι καλώς ορισμένες, δηλαδή να μην μηδενίζονται οι παρονομαστές των αριθμών:

$$\lambda = \frac{1}{N\beta_I + M\beta_U}, \quad \lambda_I = \frac{1}{(N-1)\beta_I + M\beta_U}, \quad \lambda_U = \frac{1}{N\beta_I + (M-1)\beta_U},$$

τα προγράμματα ζήτησης να δίνονται από τις σχέσεις:

$$\tilde{X}_n^*(p, i_n) = \frac{E[\tilde{v}|p, i_n] - p}{\lambda_I + \rho_I/r_I}, \quad \tilde{Y}_m^*(p) = \frac{E[\tilde{v}|p] - p}{\lambda_U + \rho_U/r_U},$$

όταν:

$$2\lambda_I + \rho_I/r_I > 0, \quad 2\lambda_U + \rho_U/r_U > 0$$

Αντικαθιστώντας τις εκτιμήσεις $E[\tilde{v}|p, i_n]$ και $E[\tilde{v}|p]$ των σχέσεων (3.13) και (3.14) του Θεωρήματος 3.1 στα βέλτιστα προγράμματα ζήτησης, παίρνουμε:

$$\tilde{X}_n^*(p, i_n) = \underbrace{\left(\frac{(1-\varphi_I)r_e}{\lambda_I r_I + \rho_I}\right)}_{\alpha_I} i_n - \underbrace{\left(\frac{\gamma\lambda r_I - \varphi_I r_e}{\gamma\lambda(\lambda_I r_I + \rho_I)}\right)}_{\beta_I} p - \underbrace{\frac{\varphi_I r_e (N\alpha_I + M\alpha_U)}{\gamma(\lambda_I r_I + \rho_I)}}_{\gamma},$$

$$\tilde{Y}_m^*(p) = -\underbrace{\left(\frac{\gamma\lambda r_U - \varphi_U r_e}{\gamma\lambda(\lambda_U r_U + \rho_U)}\right)}_{\beta_U} p - \underbrace{\frac{\varphi_U r_e (N\alpha_I + M\alpha_U)}{\gamma(\lambda_U r_U + \rho_U)}}_{\gamma}$$

Εξισώνοντας τους παραπάνω συντελεστές με τις παραμέτρους των γραμμικών προγραμμάτων ζήτησης (3.6), έχουμε:

$$\alpha_I = -\frac{\varphi_I r_e (N\alpha_I + M\alpha_U)}{\gamma(\lambda_I r_I + \rho_I)}, \quad \beta_I = \frac{\gamma\lambda r_I - \varphi_I r_e}{\gamma\lambda(\lambda_I r_I + \rho_I)}, \quad \gamma = \frac{(1-\varphi_I)r_e}{\lambda_I r_I + \rho_I}, \quad (4.9)$$

¹⁶ Για το ξ_I , από την (3.10), η αύξηση του \tilde{z} κατά μία μονάδα μεταβάλλει την τιμή κατά $-\lambda$ μονάδες. Παράλληλα, από την (3.6), η αύξηση της τιμής κατά μία μονάδα, μεταβάλλει την ποσότητα συναλλαγής κατά $-\beta_I$. Ο πολλαπλασιασμός των δύο αυτών ποσοτήτων παράγει το ξ_I . Με τον ίδιο τρόπο παράγεται και το ξ_U .

$$\alpha_U = -\frac{\varphi_U r_e (N\alpha_I + M\alpha_U)}{\gamma(\lambda_U r_U + \rho_U)}, \quad \beta_U = \frac{\gamma\lambda r_U - \varphi_U r_e}{\gamma\lambda(\lambda_U r_U + \rho_U)} \quad (4.10)$$

Απλοποιούμε τις ισότητες αυτές εισάγοντας τις ενδογενείς παραμέτρους ζ, ξ_I, ξ_U όπως ορίστηκαν στις (4.7) και (4.8)¹⁷ και καταλήγουμε στις σχέσεις:

$$(1 - \varphi_I)(1 - \xi_I) = 1 - \zeta, \quad \frac{\rho_I \gamma}{r_e} = \frac{(1 - \varphi_I)(1 - 2\zeta)}{1 - \zeta},$$

ως προς τις παραμέτρους του πληροφορημένου συμβαλλόμενου και στην σχέση:

$$\xi_U \left(\frac{\zeta r_U}{1 - \xi_U} + \frac{\rho_U \gamma r_I}{r_e} \right) = \zeta r_U - \varphi_U r_I$$

ως προς τις παραμέτρους του απληροφόρητου.

Συνεχίζουμε να χρησιμοποιούμε τα ζ, ξ_I, ξ_U για να απλουστεύσουμε και τους περιορισμούς της δεύτερης παραγωγού και καταλήγουμε ότι πρέπει:

$$\gamma > 0, \quad 0 < \zeta \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{\varphi_U}{N} < \xi_I < \frac{1}{N}, \quad 0 < \xi_U < \frac{1 - \varphi_U}{M}$$

Οι ανωτέρω περιορισμοί υπονοούν ότι:

$$\lambda_I > 0, \quad \lambda_U > 0, \quad \beta_I > 0, \quad \beta_U > 0, \quad a_I = a_U = 0$$

Με αυτόν τον τρόπο συμπεραίνουμε ότι οι ενδογενείς παράμετροι χαρακτηρίζουν πλήρως την συμμετρική γραμμική ισορροπία ως εξής:

Θεώρημα 4.1: Έστω $\sigma_z^2 > 0$ και $r_e > 0$. Τότε αν $N \geq 2$ και $M \geq 1$, υπάρχει μία μοναδική συμμετρική στρατηγική ισορροπία η οποία χαρακτηρίζεται από τις τέσσερις ενδογενείς παραμέτρους $(\gamma, \zeta, \xi_I, \xi_U)$ μέσω της επίλυσης των εξισώσεων:

$$N\xi_I + M\xi_U = 1 \quad (4.11)$$

$$(1 - \varphi_I)(1 - \xi_I) = 1 - \zeta \quad (4.12)$$

$$\frac{\rho_I \gamma}{r_e} = \frac{(1 - \varphi_I)(1 - 2\zeta)}{1 - \zeta} \quad (4.13)$$

¹⁷ Οι ξ_I, ξ_U μπορούν εναλλακτικά να γραφούν ως $1 - \xi_I = 1 - \beta_I \lambda = \frac{(N-1)\beta_I + M\beta_U}{N\beta_I + M\beta_U} = \frac{\lambda}{\lambda_I}$ και $1 - \xi_U = 1 - \beta_U \lambda = \frac{N\beta_I + (M-1)\beta_U}{N\beta_I + M\beta_U} = \frac{\lambda}{\lambda_U}$ αντίστοιχα.

$$\xi_U \left(\frac{\zeta r_U}{1 - \xi_U} + \frac{\rho_U \gamma r_I}{r_e} \right) = \zeta r_U - \varphi_U r_I \quad (4.14)$$

υπό τους παρακάτω περιορισμούς:

$$\gamma > 0, \quad 0 < \zeta \leq \frac{1}{2}, \quad \frac{\varphi_U}{N} < \xi_I < \frac{1}{N}, \quad 0 < \xi_U < \frac{1 - \varphi_U}{M} \quad (4.15)$$

5 Σύγκριση Τιμών, Προγραμμάτων και Εξαγωγή Πληροφορίας

Εφόσον έχουν πλέον παρουσιαστεί οι διαφορετικές συμπεριφορές των συναλλασσομένων, θέλουμε να εξετάσουμε πώς αλλάζουν τα προγράμματα ζήτησης, η τιμή εκκαθάρισης, καθώς και η πληροφορία που περιέχουν οι τιμές μεταξύ των ισορροπιών.

5.1 Εύρεση Τιμών και Προγραμμάτων – Κατασκευή Διαγραμμάτων

Έστω ότι έχουμε τις εξής εξωγενείς παραμέτρους¹⁸:

$$N = 2, \quad M = 2, \quad r_e = 2, \quad r_v = 3, \quad \sigma_z^2 = 1 \quad (5.1)$$

Επιπλέον έστω ότι $\rho_I = 4/3$, $\rho_U = 1$. Αρχικά για την ανταγωνιστική ισορροπία στην οποία δεν εξάγεται πληροφορία από την τιμή του αξιογράφου από τις σχέσεις (3.1) και (3.4) έχουμε τα εξής προγράμματα ζήτησης:

$$Y_m = -\frac{r_v}{\rho_U} p = -3p$$

$$X_n = -\frac{r_v + r_e}{\rho_I} p + \frac{r_e}{\rho_I} \tilde{t}_n = -\frac{3+2}{4/3} p + \frac{2}{4/3} \tilde{t}_n = -\frac{15}{4} p + \frac{3}{2} \tilde{t}_n$$

Συνοψίζοντας παίρνουμε:

$$X_1(p, \tilde{t}_1) = -\frac{15}{4} p + \frac{3}{2} \tilde{t}_1, \quad X_2(p, \tilde{t}_2) = -\frac{15}{4} p + \frac{3}{2} \tilde{t}_2, \quad Y_1(p) = Y_2(p) = -3p \quad (5.2)$$

Επιπρόσθετα, από την (3.5) βρίσκουμε και την τιμή εκκαθάρισης:

$$p = \left(\frac{N(r_v + r_e)}{\rho_I} + \frac{Mr_v}{\rho_U} \right)^{-1} \left(\frac{r_e}{\rho_I} \sum_{n=1}^N \tilde{t}_n - \tilde{z} \right) = \left(\frac{2 * 15}{4} + 2 * 3 \right)^{-1} \left(\frac{3}{2} (\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2) - \tilde{z} \right)$$

$$\Rightarrow p = \frac{2}{27} \left(\frac{3}{2} (\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2) - \tilde{z} \right) \quad (5.3)$$

Έπειτα εφαρμόζουμε τις ίδιες παραμέτρους σε ανταγωνιστική ισορροπία όπου πλέον εξάγεται πληροφορία από τις τιμές. Από τις σχέσεις (3.12) και (3.9) έχουμε:

$$\varphi_U = \frac{N\gamma^2}{N\gamma^2 + \sigma_z^2 r_e} = \frac{2\gamma^2}{2\gamma^2 + 2} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1}, \quad \varphi_I = \frac{(N-1)\gamma^2}{(N-1)\gamma^2 + \sigma_z^2 r_e} = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 2}$$

$$r_U = r_v + \varphi_U N r_e = \frac{7\gamma^2 + 3}{\gamma^2 + 1}, \quad r_I = r_v + \varphi_I (N-1) r_e + r_e = \frac{7\gamma^2 + 10}{\gamma^2 + 2}$$

¹⁸ Δηλαδή $\tilde{v} \sim N(0, 1/3)$, $\tilde{e}_n \sim N(0, 1/2)$ για $n = 1, 2$ και $\tilde{z} \sim N(0, 1)$.

Βρίσκουμε τους συντελεστές β_I, β_U, γ μέσω των σχέσεων (3.16) και (3.17) ξεκινώντας πρώτα από το γ :

$$\gamma = \frac{(1 - \varphi_I)r_e}{\rho_I} \Rightarrow \gamma = \frac{\frac{4}{\gamma^2 + 2}}{\frac{4}{3}} \Rightarrow \gamma^3 + 2\gamma - 3 = 0 \Rightarrow (\gamma - 1)(\gamma^2 + \gamma + 3) = 0$$

$$\Rightarrow \gamma = 1$$

Άρα τα $\varphi_U, \varphi_I, r_U, r_I$ γίνονται:

$$\varphi_U = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1} = \frac{1}{2}, \quad \varphi_I = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 2} = \frac{1}{3}$$

$$r_U = \frac{7\gamma^2 + 3}{\gamma^2 + 1} = 5, \quad r_I = \frac{7\gamma^2 + 10}{\gamma^2 + 2} = \frac{17}{3}$$

Έπειτα βρίσκουμε τα β_I, β_U :

$$\left. \begin{aligned} \beta_I &= \frac{\gamma \lambda r_I - \varphi_I r_e}{\gamma \lambda \rho_I} \Rightarrow \beta_I = \frac{17\lambda - 2}{4\lambda} \\ \beta_U &= \frac{\gamma \lambda r_U - \varphi_U r_e}{\gamma \lambda \rho_U} \Rightarrow \beta_U = \frac{5\lambda - 1}{\lambda} \\ \lambda &= \frac{1}{N\beta_I + M\beta_U} \Rightarrow 2\beta_I + 2\beta_U = \frac{1}{\lambda} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{17\lambda - 2 + 20\lambda - 4}{2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{37\lambda}{2} = 4 \Rightarrow \lambda = \frac{8}{37}$$

$$\beta_I = \frac{\frac{17 * 8}{37} - 2}{\frac{4 * 8}{37}} \Rightarrow \beta_I = \frac{17 * 4 - 37}{2 * 8} \Rightarrow \beta_I = \frac{31}{16}$$

$$\beta_U = \frac{\frac{5 * 8}{37} - 1}{\frac{8}{37}} \Rightarrow \beta_U = \frac{40 - 37}{8} \Rightarrow \beta_U = \frac{3}{8}$$

Τέλος, έχουμε ήδη δείξει ότι $\alpha_U = \alpha_I = 0$. Συνοψίζοντας τα αποτελέσματά μας, έχουμε:

$$\gamma = 1, \quad \beta_I = \frac{31}{16}, \quad \beta_U = \frac{3}{8}, \quad \alpha_U = \alpha_I = 0, \quad \lambda = \frac{8}{37}$$

Επομένως, από την (3.10), η τιμή εκκαθάρισης σε ανταγωνιστικό περιβάλλον είναι:

$$\tilde{p} = \frac{8}{37} (\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2 - \tilde{z}) \quad (5.4)$$

Παράλληλα, τα προγράμματα ζήτησης (3.6) που προκύπτουν είναι:

$$X_1^*(p, i_1) = -\frac{31}{16}p + i_1, \quad X_2^*(p, i_2) = -\frac{31}{16}p + i_2, \quad Y_1^*(p) = Y_2^*(p) = -\frac{3}{8}p \quad (5.5)$$

Για την εύρεση των προγραμμάτων ζήτησης σε *στρατηγική ισορροπία*, λόγω της πολυπλοκότητας του συστήματος εξισώσεων του Θεωρήματος 4.1, χρησιμοποιούμε την MatLab για την επίλυσή του. Το σύστημα εξισώσεων (4.11) - (4.14) εξαιτίας των παραμέτρων (5.1) γράφεται ως εξής:

$$2(\xi_I + \xi_U) - 1 = 0 \quad (5.6)$$

$$\left(\frac{2}{\gamma^2 + 2}\right)(1 - \xi_I) - (1 - \zeta) = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{2}{3}\gamma - \left(\frac{2}{\gamma^2 + 2}\right)\left(\frac{1 - 2\zeta}{1 - \zeta}\right) = 0 \quad (5.8)$$

$$\xi_U \left[\left(\frac{\zeta}{1 - \xi_U}\right)\left(\frac{7\gamma^2 + 3}{\gamma^2 + 1}\right) + \frac{7\gamma^3 + 10\gamma}{2(\gamma^2 + 2)} \right] - \zeta \left(\frac{7\gamma^2 + 3}{\gamma^2 + 1}\right) + \frac{7\gamma^4 + 10\gamma^2}{(\gamma^2 + 1)(\gamma^2 + 2)} = 0 \quad (5.9)$$

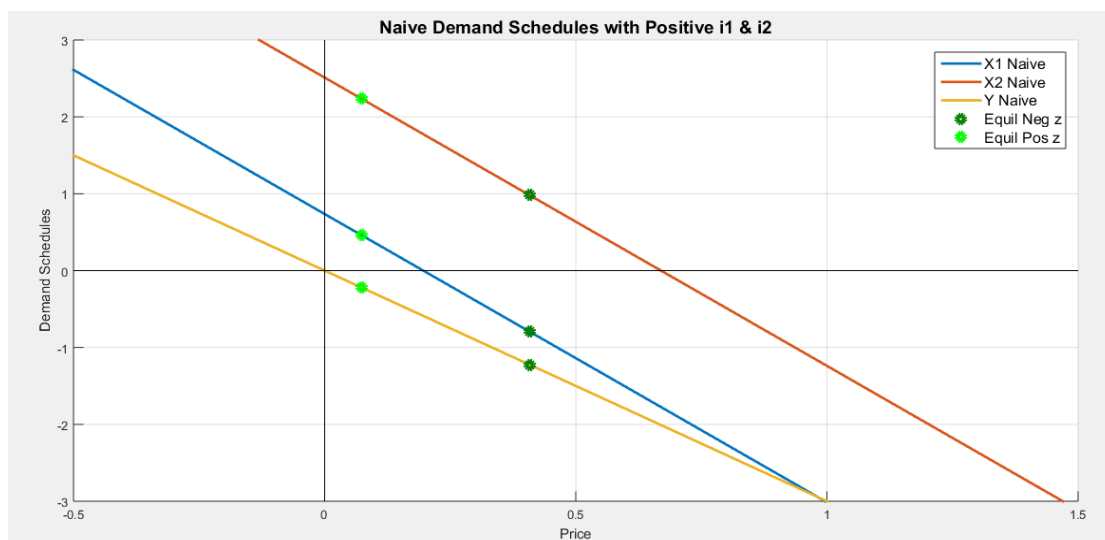
Αντικαθιστούμε τα $\gamma, \zeta, \xi_I, \xi_U$ στις εξισώσεις (4.7) - (4.8) για να βρούμε και τα $\lambda, \beta_I, \beta_U$. Τέλος, βρίσκουμε τα $\lambda_U, \tilde{p}_{Um}$ από τις σχέσεις (4.2) και (4.4) και λύνουμε την (4.1) ως προς \tilde{p} :¹⁹

$$\tilde{p} = \tilde{p}_{Um} + \lambda_U \tilde{Y}_m \Rightarrow \tilde{p} = \tilde{p}_{Um} + \lambda_U (-\beta_U \tilde{p}) \Rightarrow \tilde{p} = \frac{\tilde{p}_{Um}}{1 + \lambda_U \beta_U} \quad (5.10)$$

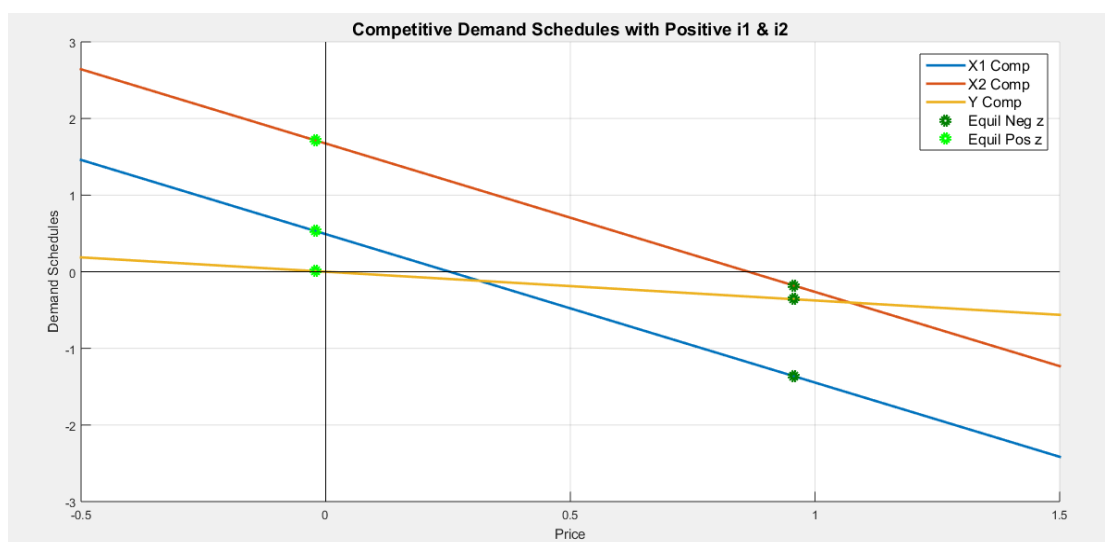
Για την πληροφόρηση \tilde{i}_n εφόσον $\tilde{i}_n = \tilde{v} + \tilde{e}_n$, ισχύει $\tilde{i}_n \sim N(0, 1/3 + 1/2)$ για $n = 1, 2$. Χρησιμοποιώντας την MatLab, παίρνουμε τυχαία i_1, i_2, z για να βρούμε την τιμή εκκαθάρισης p και τα προγράμματα ζήτησης για κάθε πιθανή συμπεριφορά (χωρίς εξαγωγή πληροφορίας – *Naive*, ανταγωνιστική – *REE* ή στρατηγική – *BNE*). Η διαδικασία επίλυσης των συστημάτων καθώς και η κατασκευή των γραφημάτων παρουσιάζονται στο Παράρτημα. Τα i_1 και i_2 που προέκυψαν είναι θετικά, με το i_1 σχετικά αδύναμο ($i_1 = 0.4908$) και το i_2 πολύ ισχυρό ($i_2 = 1.6741$). Επειδή το z προέκυψε αρνητικό ($z = -2.2588$), το παρουσιάζουμε στην προκειμένη περίπτωση ως πλεονάζουσα ζήτηση. Για την καλύτερη ερμηνεία των συμπερασμάτων μας, παρουσιάζουμε όλους τους συνδυασμούς $(i_1, i_2, z, -z), (-i_1, -i_2, z, -z), (-i_1, i_2, z, -z)$ και $(i_1, -i_2, z, -z)$ ²⁰. Η εναλλαγή του προσήμου στα i_n και z είναι επιτρεπτή λόγω της συμμετρικότητας της κανονικής κατανομής.

¹⁹ Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να βρούμε τα $\lambda_I, \tilde{p}_{Im}$ από τις (4.2) και (4.3) και να χρησιμοποιήσουμε την σχέση $\tilde{p} = \tilde{p}_{Im} + \lambda_I \tilde{X}_n$. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο αλλά η διαδικασία είναι περισσότερο χρονοβόρα.

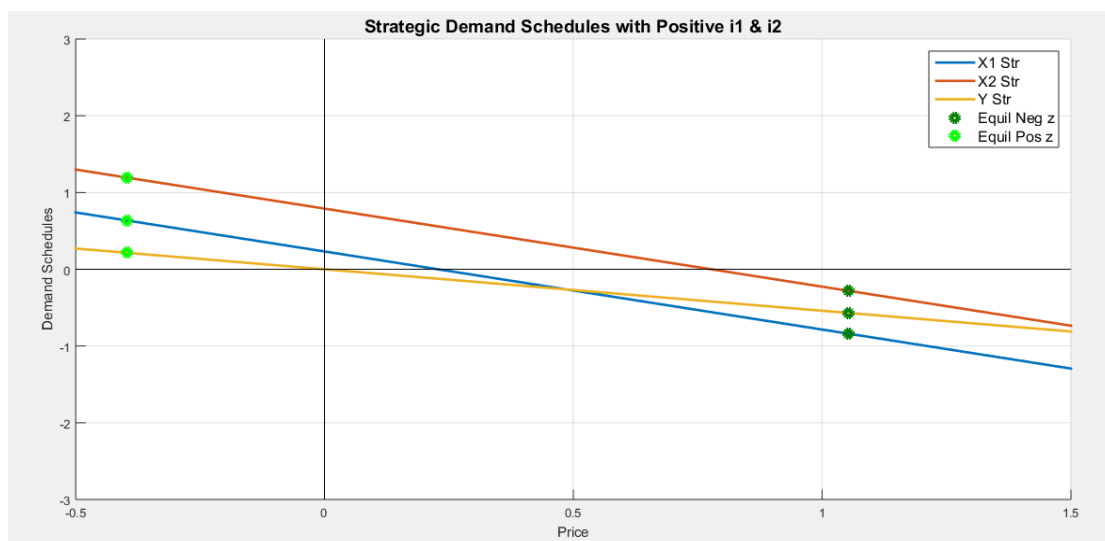
²⁰ Το μέγεθος του z επηρεάζει μόνο την τελική τιμή p . Τα προγράμματα ζήτησης παραμένουν ίδια καθώς στο πρόβλημα εύρεσης βέλτιστων X_n και Y_m , το z εκτιμάται ως τ.μ.



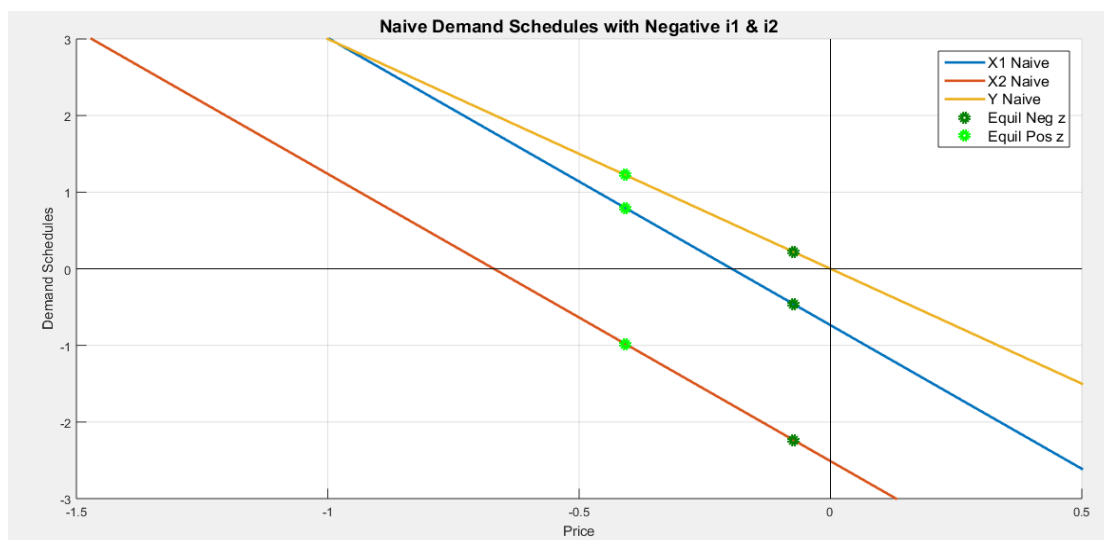
Γράφημα 5.1: Προγράμματα ζήτησης σε ανταγωνιστική ισορροπία χωρίς εξαγωγή πληροφορίας - Naive με θετικά i_1, i_2 ($i_1 = 0.4908, i_2 = 1.6741, |z| = 2.2588$)



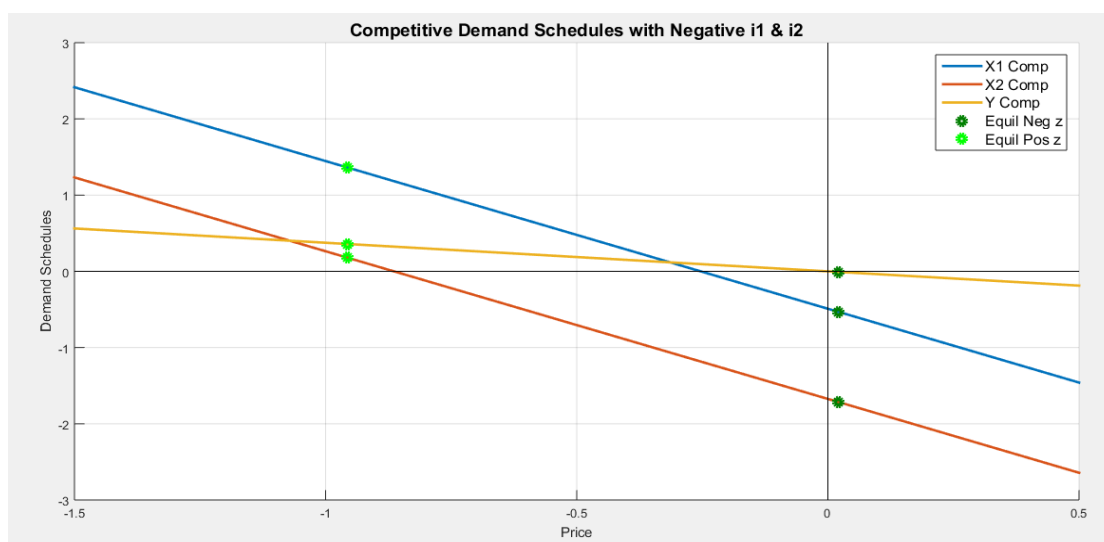
Γράφημα 5.2: Προγράμματα ζήτησης σε ανταγωνιστική ισορροπία - REE με θετικά i_1, i_2 ($i_1 = 0.4908, i_2 = 1.6741, |z| = 2.2588$)



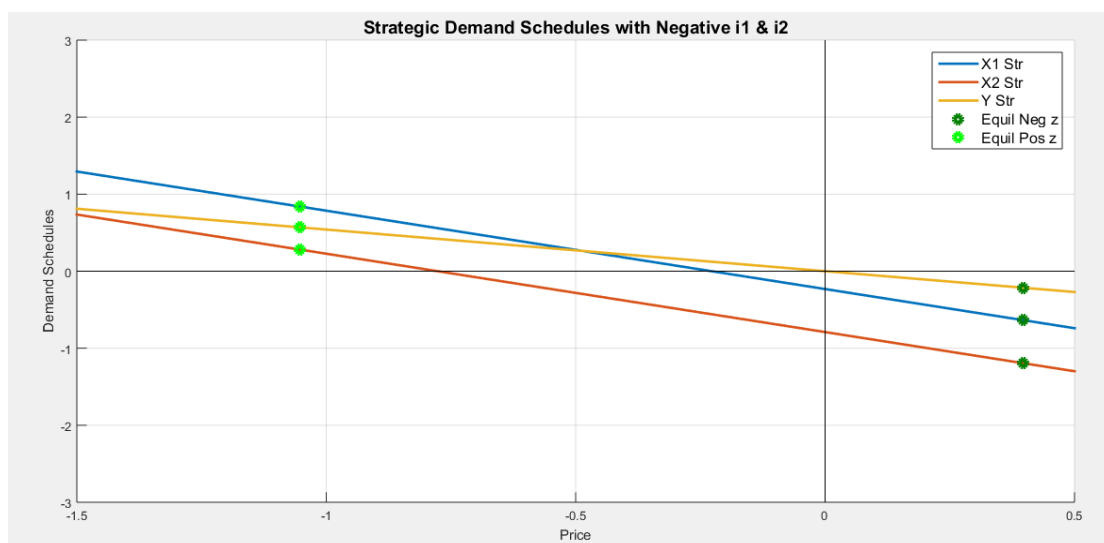
Γράφημα 5.3: Προγράμματα ζήτησης σε στρατηγική ισορροπία - BNE με θετικά i_1, i_2 ($i_1 = 0.4908, i_2 = 1.6741, |z| = 2.2588$)



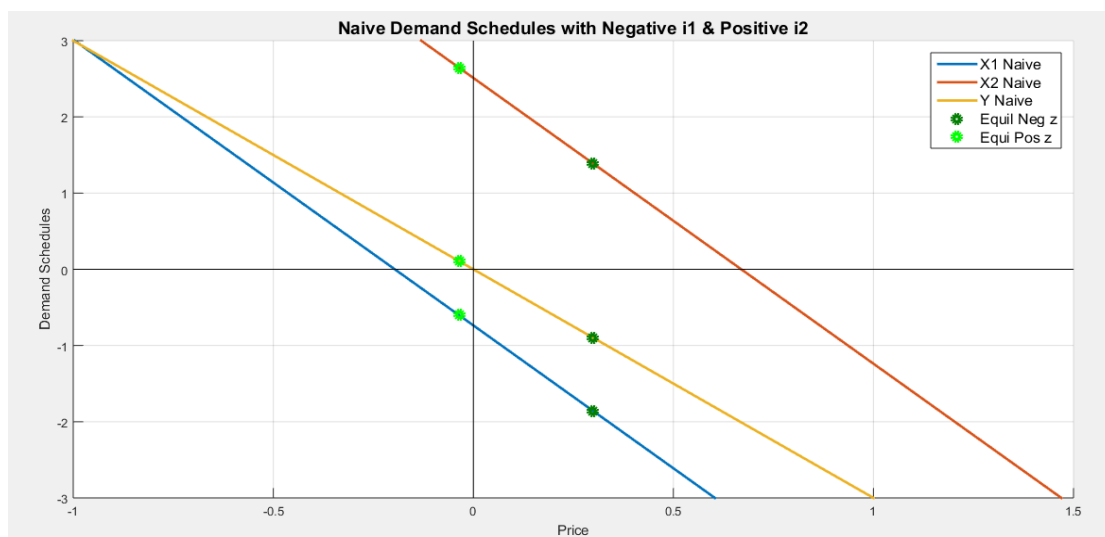
Γράφημα 5.4: Προγράμματα ζήτησης σε ανταγωνιστική ισορροπία χωρίς εξαγωγή πληροφορίας - Naive με αρνητικά i_1, i_2 ($i_1 = -0.4908, i_2 = -1.6741, |z| = 2.2588$)



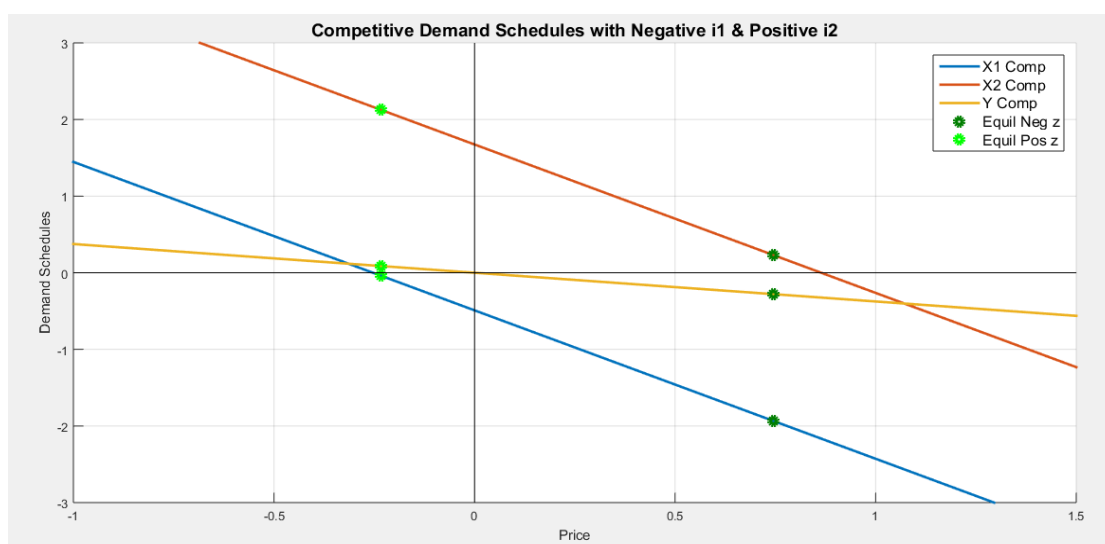
Γράφημα 5.5: Προγράμματα ζήτησης σε ανταγωνιστική ισορροπία - REE με αρνητικά i_1, i_2 ($i_1 = -0.4908, i_2 = -1.6741, |z| = 2.2588$)



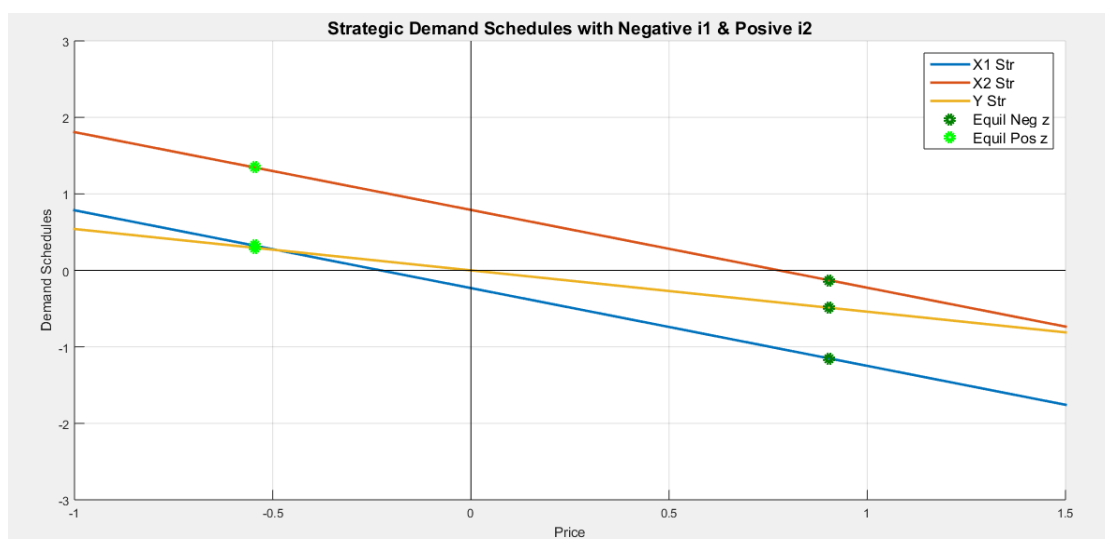
Γράφημα 5.6: Προγράμματα ζήτησης σε στρατηγική ισορροπία - BNE με αρνητικά i_1, i_2 ($i_1 = -0.4908, i_2 = -1.6741, |z| = 2.2588$)



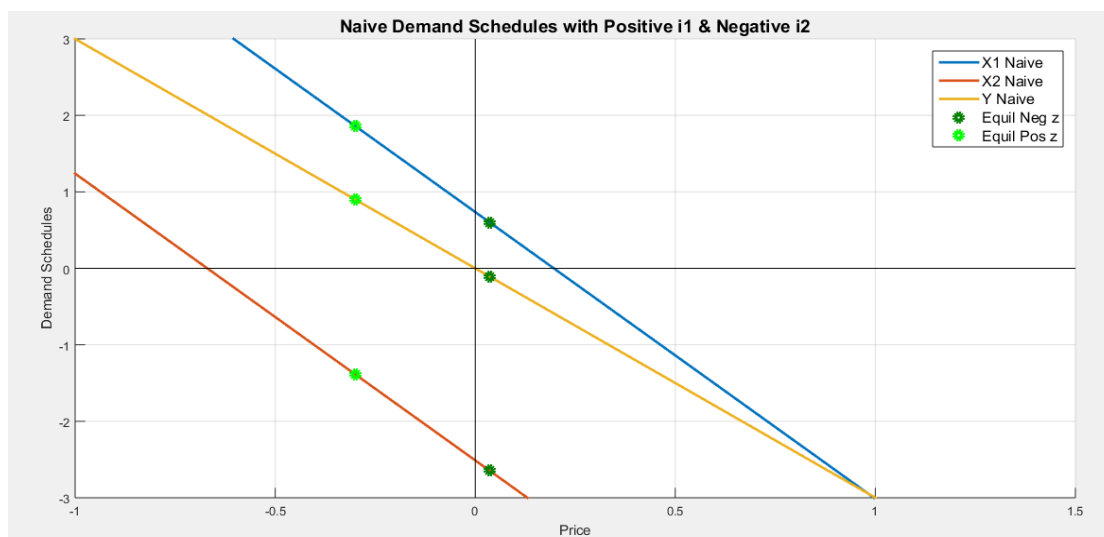
Γράφημα 5.7: Προγράμματα ζήτησης σε ανταγωνιστική ισορροπία χωρίς εξαγωγή πληροφορίας - Naive με αρνητικό i_1 και θετικό i_2 ($i_1 = -0.4908, i_2 = 1.6741, |z| = 2.2588$)



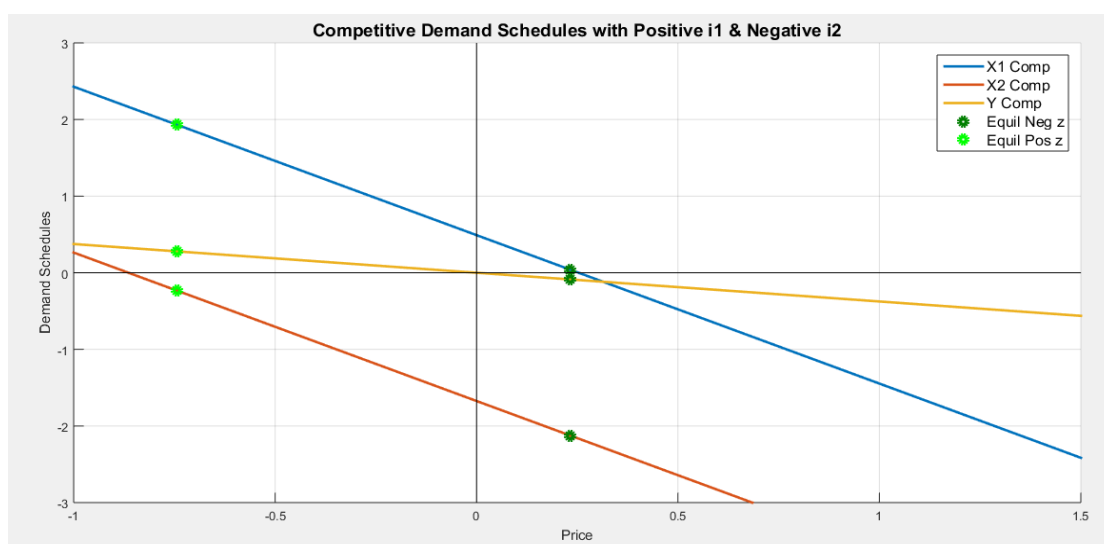
Γράφημα 5.8: Προγράμματα ζήτησης σε ανταγωνιστική ισορροπία - REE με αρνητικό i_1 και θετικό i_2 ($i_1 = -0.4908, i_2 = 1.6741, |z| = 2.2588$)



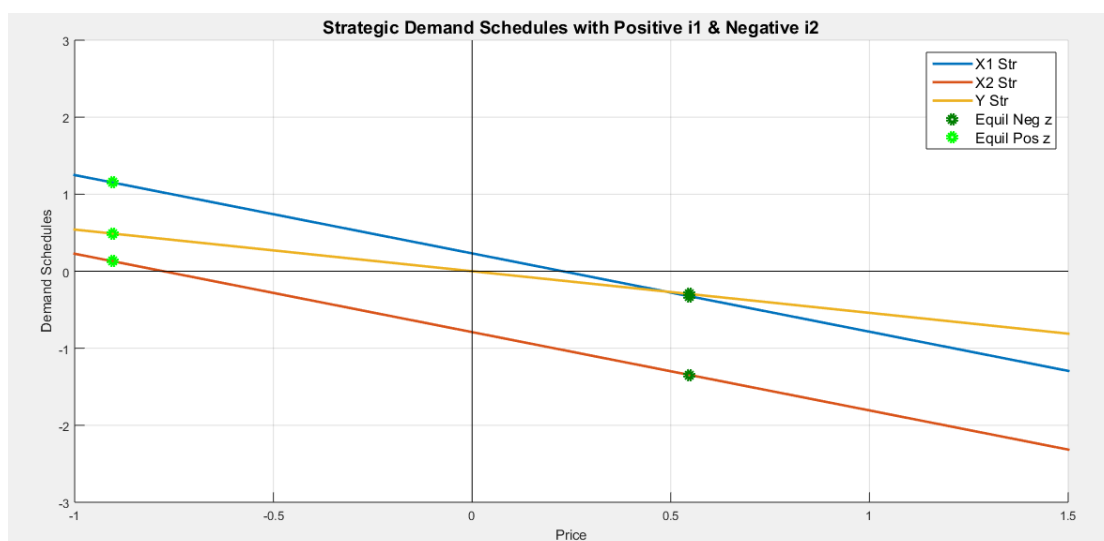
Γράφημα 5.9: Προγράμματα ζήτησης σε στρατηγική ισορροπία - BNE με αρνητικό i_1 και θετικό i_2 ($i_1 = -0.4908, i_2 = 1.6741, |z| = 2.2588$)



Γράφημα 5.10: Προγράμματα ζήτησης σε ανταγωνιστική ισορροπία χωρίς εξαγωγή πληροφορίας - Naive με θετικό i_1 και αρνητικό i_2 ($i_1 = 0.4908, i_2 = -1.6741, |z| = 2.2588$)



Γράφημα 5.11: Προγράμματα ζήτησης σε ανταγωνιστική ισορροπία - REE με θετικό i_1 και αρνητικό i_2 ($i_1 = 0.4908, i_2 = -1.6741, |z| = 2.2588$)



Γράφημα 5.12: Προγράμματα ζήτησης σε στρατηγική ισορροπία - BNE με θετικό i_1 και αρνητικό i_2 ($i_1 = 0.4908, i_2 = -1.6741, |z| = 2.2588$)

5.2 Μεταβολή των Τιμών και Ευαισθησία των Προγραμμάτων

Παρατηρούμε ότι το αξιόγραφο αποκτά μεγαλύτερη αξία προφανώς όταν $i_1 > 0$, $i_2 > 0$ και $z < 0$ (Γράφημα 5.1 - Γράφημα 5.3). Η πληροφόρηση ότι το αξιόγραφο θα έχει θετική αξία ($i_1 > 0$, $i_2 > 0$), σε συνδυασμό με την πλεονάζουσα ζήτηση ($z < 0$) οδηγεί την τιμή στα υψηλότερα επίπεδα. Επιπρόσθετα, βλέπουμε ότι το z (ως ισχυρότερο των i_1 , i_2) επηρεάζει σημαντικά την μεταβολή των τιμών από την μία ισορροπία στην άλλη. Όταν υπάρχει πλεονάζουσα ζήτηση, η τιμή εκκαθάρισης αυξάνεται συνεχώς, με την χαμηλότερη να βρίσκεται στην Naive ισορροπία και την υψηλότερη στην BNE ισορροπία. Ακόμη και αν μέσω της ιδιωτικής πληροφόρησης, το αξιόγραφο αναμένεται να έχει αρνητική αξία ($i_1 < 0$, $i_2 < 0$), η παρουσία της μεγάλης πλεονάζουσας ζήτησης υπεραντισταθμίζει την επιρροή των i_n (Γράφημα 5.4 - Γράφημα 5.6). Το ακριβώς αντίθετο συμβαίνει όταν υπάρχει πλεονάζουσα προσφορά ($z > 0$), όπου οι τιμές (για οποιονδήποτε συνδυασμό i_1 , i_2) πέφτουν από την μία ισορροπία στην άλλη.²¹

Η αύξηση (ή αντίστοιχα η μείωση) των τιμών οφείλεται στις αλλαγές των εκτιμήσεων των συναλλασσόμενων. Στην *Naive ισορροπία*, κανείς δεν εκτιμά την αναμενόμενη αξία βάσει των τιμών. Επομένως, καμία ιδιωτική πληροφόρηση δεν διαχέεται στην αγορά και η πλεονάζουσα ζήτηση/προσφορά των noise traders επηρεάζει σε πολύ μεγάλο βαθμό τις τιμές. Μάλιστα, η αδυναμία εκτίμησης μέσω των τιμών δικαιολογεί και την μεγάλη ευαισθησία των προγραμμάτων ζήτησης των πληροφορημένων στην ιδιωτική πληροφόρηση που λαμβάνουν (υψηλό γ) καθώς μόνο σ' αυτήν βασίζεται η εκτίμησή τους. Γι' αυτόν τον λόγο, στην Naive ισορροπία, οι τιμές αποκαλύπτουν σχεδόν εξ ολοκλήρου την ιδιωτική πληροφόρηση. Όμως, κανένας δεν το εκμεταλλεύεται αυτό καθώς όλοι οι συναλλασσόμενοι θεωρούν τις τιμές δεδομένες.

Στην *REE ισορροπία*, όπου πλέον γίνεται εκτίμηση μέσω των τιμών, η ιδιωτική πληροφόρηση διαχέεται στην αγορά μαζί με τις εντολές των noise traders. Η αθροιστικά θετική ιδιωτική πληροφόρηση ($i_1 + i_2 > 0$), σε συνδυασμό με την πλεονάζουσα ζήτηση, ενισχύει περαιτέρω την αύξηση των τιμών (Γράφημα 5.2 και Γράφημα 5.8), ενώ η αρνητική πληροφόρηση μαζί με την πλεονάζουσα προσφορά μειώνει τις τιμές (Γράφημα 5.5 και Γράφημα 5.11). Αν υπάρχουν αντίθετες συμπεριφορές, είδαμε ότι το z εξακολουθεί να επηρεάζει σε μεγαλύτερο βαθμό τις τιμές. Οι πληροφορημένοι, εκτιμώντας πλέον τις τιμές (και μέσω αυτών και την πληροφόρηση των άλλων), μειώνουν την ευαισθησία τους στην δικιά τους πληροφόρηση ($\gamma^{REE} < \gamma^{Naive}$). Τέλος, η δυνατότητα εξαγωγής πληροφορίας μέσω των τιμών μειώνει την ευαισθησία

²¹ Αυτό το συμπέρασμα προφανώς δεν ισχύει για όλα τα πιθανά \tilde{i}_1 , \tilde{i}_2 , \tilde{z} . Φυσικά και υπάρχουν περιπτώσεις όπου τα \tilde{i}_1 , \tilde{i}_2 ασκούν μεγαλύτερη επιρροή από το \tilde{z} στην αγορά. Λόγω της τυχαίας φύσης αυτών των αριθμών, κάθε πραγματοποίησή τους μπορεί να οδηγήσει σε διαφορετικές επιδράσεις.

των προγραμμάτων ζήτησης (πληροφορημένων και απληροφόρητων) και ως προς τις τιμές, αφού πλέον δεν θεωρούνται δεδομένες.

Στην *BNE* ισορροπία, η παρουσία της δύναμης αγοράς ενισχύει την αύξηση των τιμών αν υπάρχει πλεονάζουσα ζήτηση ή την μείωσή τους αν υπάρχει πλεονάζουσα προσφορά. Αυτό προκαλείται από την εισαγωγή περισσότερου «θορύβου» στο σύστημα, αφού οι πληροφορημένοι, αντιλαμβανόμενοι την δύναμη αγοράς τους και δρώντας ως μονοπωλητές, μειώνουν την ποσότητα που συναλλάσσονται για να μην αποκαλύψουν πλήρως το σινιαλο τους, μειώνοντας το γ . Το γεγονός αυτό παρουσιάζεται άμεσα αν συγκρίνουμε και τα γ των σχέσεων (3.16) και (4.9):

$$\gamma^{REE} = \frac{(1 - \varphi_I)r_e}{\rho_I}, \quad \gamma^{BNE} = \frac{(1 - \varphi_I)r_e}{\lambda_I r_I + \rho_I}$$

Βλέπουμε ότι η εμφάνιση του λ_I στον παρονομαστή, στην *BNE* ισορροπία, μειώνει το γ σε σύγκριση με την *REE* ισορροπία. Κατά συνέπεια, οι τιμές περιέχουν λιγότερη πληροφορία. Όμως, οι απληροφόρητοι αντιλαμβάνονται λανθασμένα αυτήν την πληροφορία και για να εκμεταλλευτούν την δύναμη αγοράς τους, αυξάνουν τις συναλλαγές τους. Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο οι απληροφόρητοι παρουσιάζουν μία ελαφρώς μεγαλύτερη ευαισθησία στις τιμές σε σχέση με την *REE*.

5.3 Πληροφοριακή Επάρκεια των Τιμών

Ο Kyle δικαιολογεί την μειωμένη πληροφορία που παρέχουν οι τιμές στην στρατηγική ισορροπία συγκρίνοντάς την με την ανταγωνιστική μέσω του πληροφοριακού δείκτη φ_I . Αρχικά, για την ανταγωνιστική ισορροπία, χρησιμοποιώντας την σχέση (3.16) και εφαρμόζοντάς την στην (3.12) έχουμε:

$$\begin{aligned} \varphi_I &= \frac{(N-1)\gamma^2}{(N-1)\gamma^2 + \sigma_z^2 r_e} = \frac{(N-1) \left(\frac{(1-\varphi_I)r_e}{\rho_I} \right)^2}{(N-1) \left(\frac{(1-\varphi_I)r_e}{\rho_I} \right)^2 + \sigma_z^2 r_e} = \frac{(N-1)(1-\varphi_I)^2 r_e}{(N-1)(1-\varphi_I)^2 r_e + \sigma_z^2 \rho_I^2} \\ &\Rightarrow \varphi_I \sigma_z^2 \rho_I^2 = (N-1)(1-\varphi_I)^3 r_e \\ &\Rightarrow \frac{(1-\varphi_I)^3}{\varphi_I} = \frac{\rho_I^2 \sigma_z^2}{(N-1)r_e} \end{aligned} \quad (5.11)$$

Αντίστοιχα για την στρατηγική ισορροπία παίρνουμε:

$$\varphi_I = \frac{(N-1)\gamma^2}{(N-1)\gamma^2 + \sigma_z^2 r_e} \Rightarrow (1-\varphi_I)(N-1)\gamma^2 = \varphi_I \sigma_z^2 r_e \Rightarrow \gamma^2 = \frac{\varphi_I \sigma_z^2 r_e}{(1-\varphi_I)(N-1)}$$

και αντικαθιστούμε στην (4.13):

$$\begin{aligned} \frac{\rho_I \gamma}{r_e} &= \frac{(1 - \varphi_I)(1 - 2\zeta)}{1 - \zeta} \Rightarrow \frac{\rho_I^2 \varphi_I \sigma_z^2 r_e}{r_e^2 (1 - \varphi_I)(N - 1)} = \frac{(1 - \varphi_I)^2 (1 - 2\zeta)^2}{(1 - \zeta)^2} \\ &\Rightarrow \frac{(1 - \varphi_I)^3 (1 - 2\zeta)^2}{\varphi_I (1 - \zeta)^2} = \frac{\rho_I^2 \sigma_z^2}{(N - 1)r_e} \end{aligned} \quad (5.12)$$

Συγκρίνοντας τις σχέσεις (5.11) και (5.12) παρατηρούμε ότι ο δείκτης φ_I είναι μεγαλύτερος στην ανταγωνιστική ισορροπία REE, αφού από την (4.15) ισχύει $0 < \zeta \leq 1/2$. Με αυτόν τον τρόπο αποδεικνύεται το συμπέρασμα ότι στην στρατηγική ισορροπία, ο πληροφορημένος μειώνει την ποσότητα που συναλλάσσεται (παρουσιάζοντας χαμηλότερο γ) με αποτέλεσμα οι τιμές να περιέχουν λιγότερη πληροφόρηση σε σχέση με την REE. Επιπρόσθετα, βλέπουμε ότι η παράμετρος ζ είναι αυτή που επηρεάζει το μέγεθος της πληροφόρησης που εμφανίζεται στις τιμές. Βάσει αυτού του συλλογισμού, μπορούμε να θεωρήσουμε το ζ ως *δείκτη δύναμης αγοράς* όπου αν $\zeta = 0$, έχουμε ανταγωνιστική ισορροπία (οι (5.11) και (5.12) ταυτίζονται), ενώ αν $\zeta = 1/2$, έχουμε στρατηγική ισορροπία ουδέτερου κινδύνου ($\rho_I = 0$).

Ορισμένα βασικά συμπεράσματα προκύπτουν αν εξετάσουμε τις οριακές συνθήκες. Όταν έχουμε ουδέτερο κίνδυνο ($\rho_I \rightarrow 0$), μικρό ρίσκο από θορυβώδεις συναλλαγές ($\sigma_z^2 \rightarrow 0$) και κάθε πληροφορημένος κατέχει μεγάλο μέρος συνολικής πληροφόρησης ($(N - 1)r_e \rightarrow \infty$), ισχύει ότι $\varphi_I \rightarrow 1$ στην ανταγωνιστική ισορροπία, ενώ $\varphi_I \rightarrow 1/2$ στην στρατηγική²². Δηλαδή, ενώ στην ανταγωνιστική ισορροπία οι τιμές στο όριο αποκαλύπτουν πλήρως κάθε ιδιωτική πληροφόρηση, το ίδιο δεν ισχύει σε στρατηγικό περιβάλλον. Το αξιοσημείωτο αυτό γεγονός οφείλεται στην ύπαρξη των τυχαίων συναλλαγών \tilde{z} . Όταν οι συναλλαγές αυτές είναι πολύ λίγες, η ρευστότητα της αγοράς αρχίζει και μειώνεται, με αποτέλεσμα οι πληροφορημένοι να συναλλάσσονται ακόμη μικρότερες ποσότητες για να μην αποκαλύψουν το σινιάλο τους. Ειδικά όταν $z = 0$, η αγορά κλείνει εντελώς καθώς δεν θα πραγματοποιηθεί καμία συναλλαγή.

²² Από την σχέση (4.12), άμεσα συμπεραίνουμε ότι $\varphi_I \leq \zeta$ και επομένως $0 < \varphi_I \leq \zeta \leq 1/2$.

6 Ευαισθησία των Τιμών στην Αποστροφή Κινδύνου

Θέλουμε να εξετάσουμε επιπλέον και την ευαισθησία των τιμών σε ισορροπία ως προς την *αποστροφή στον κίνδυνο* των πληροφορημένων και απληροφόρητων συναλλασσομένων. Οι εξωγενείς παράμετροι (5.1) καθώς και τα i_1, i_2, z παραμένουν ίδια. Στις μεταβολές του ρ_U , θα θεωρούμε σταθερό $\rho_I = 1$. Ομοίως, στις μεταβολές του ρ_I , θα θεωρούμε $\rho_U = 1$.

6.1 Σχέση Τιμών με Κίνδυνο – Κατασκευή Διαγραμμάτων

Ξεκινώντας από την *Naive ανταγωνιστική ισορροπία*, από την σχέση (3.5), για διάφορα ρ_I, ρ_U , έχουμε:

$$\begin{aligned} \tilde{p} &= \left(\frac{N(r_v + r_e)}{\rho_I} + \frac{Mr_v}{\rho_U} \right)^{-1} \left(\frac{r_e}{\rho_I} \sum_{n=1}^N \tilde{t}_n - \tilde{z} \right) = \left(\frac{10}{\rho_I} + \frac{6}{\rho_U} \right)^{-1} \left(\frac{2}{\rho_I} (\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2) - \tilde{z} \right) \\ &\Rightarrow \tilde{p}(\rho_I, \rho_U) = \frac{\rho_I * \rho_U}{10\rho_U + 6\rho_I} \left(\frac{2}{\rho_I} (\tilde{t}_1 + \tilde{t}_2) - \tilde{z} \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Συνεχίζουμε στην *ανταγωνιστική ισορροπία - REE*, όπου βρίσκουμε τα β_I, β_U, γ μέσω των (3.16) και (3.17) για τις παραμέτρους (5.1) (κάθε φορά για διαφορετικά ρ_I, ρ_U) και τα αντικαθιστούμε στην τιμή εκκαθάρισης (3.10):

$$\rho_I(\gamma^3 + 2\gamma) - 4 = 0 \quad (6.2)$$

$$\beta_I - \frac{7\gamma^3 + 10\gamma - 4\gamma^2(\beta_I + \beta_U)}{\rho_I(\gamma^3 + 2\gamma)} = 0 \quad (6.3)$$

$$\beta_U - \frac{7\gamma^3 + 3\gamma - 4\gamma^2(\beta_I + \beta_U)}{\rho_U(\gamma^3 + \gamma)} = 0 \quad (6.4)$$

Τέλος, στην *στρατηγική ισορροπία - BNE*, λύνουμε το σύστημα εξισώσεων (4.11) – (4.14) και βρίσκουμε την τιμή εκκαθάρισης από την (5.10):

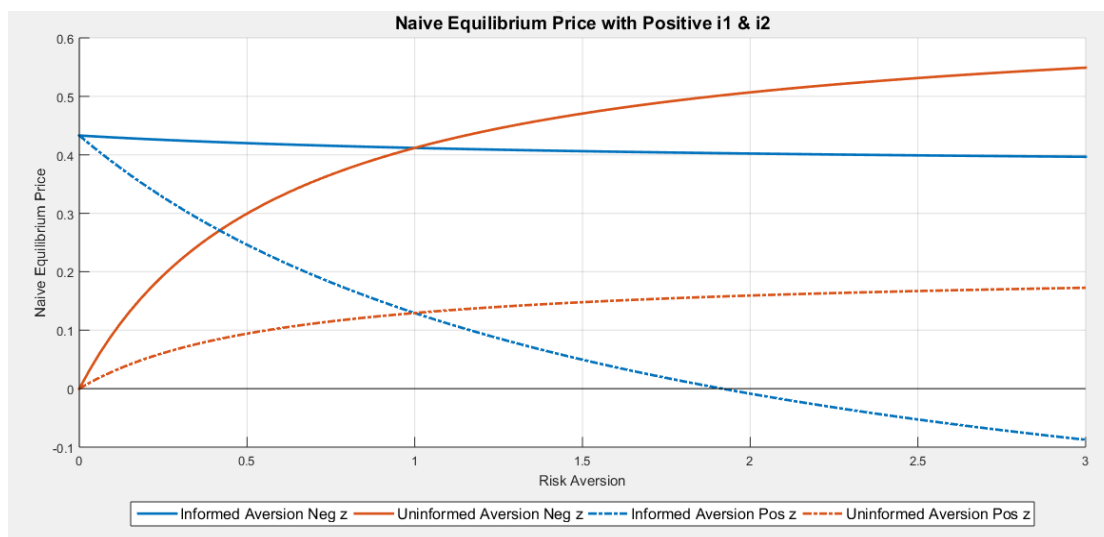
$$2(\xi_I + \xi_U) - 1 = 0 \quad (6.5)$$

$$\left(\frac{2}{\gamma^2 + 2} \right) (1 - \xi_I) - (1 - \zeta) = 0 \quad (6.6)$$

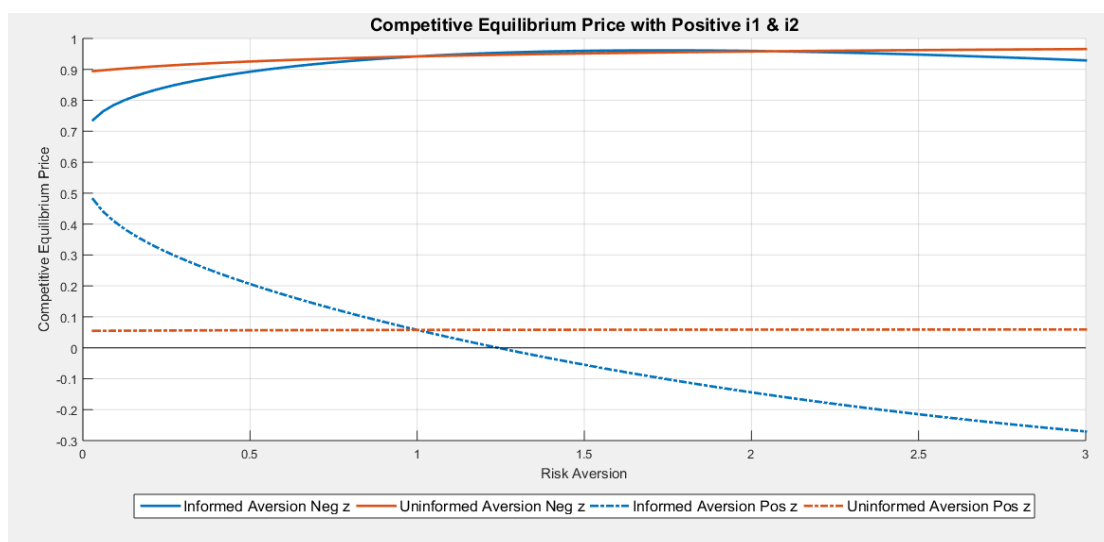
$$\frac{\gamma\rho_I}{2} - \left(\frac{2}{\gamma^2 + 2} \right) \left(\frac{1 - 2\zeta}{1 - \zeta} \right) = 0 \quad (6.7)$$

$$\xi_U \left[\left(\frac{\zeta}{1 - \xi_U} \right) \left(\frac{7\gamma^2 + 3}{\gamma^2 + 1} \right) + \frac{\rho_U(7\gamma^3 + 10\gamma)}{2(\gamma^2 + 2)} \right] - \zeta \left(\frac{7\gamma^2 + 3}{\gamma^2 + 1} \right) + \frac{7\gamma^4 + 10\gamma^2}{(\gamma^2 + 1)(\gamma^2 + 2)} = 0 \quad (6.8)$$

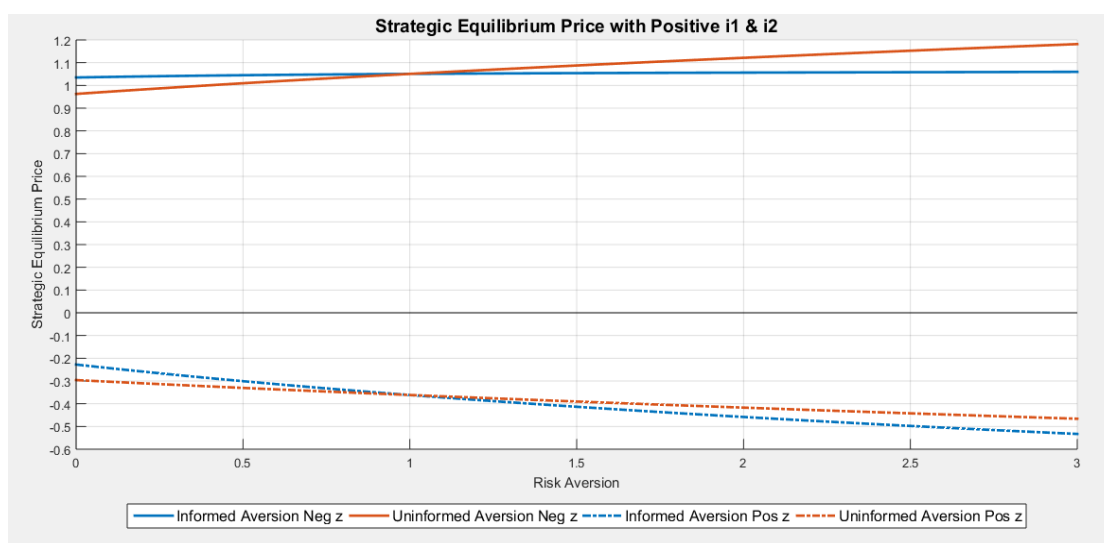
Η διαδικασία κατασκευής των γραφημάτων και για τις τρεις ισορροπίες παρουσιάζεται στο Παράρτημα. Εξακολουθούμε να χρησιμοποιούμε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς $(i_1, i_2, z, -z)$, $(-i_1, -i_2, z, -z)$, $(-i_1, i_2, z, -z)$ και $(i_1, -i_2, z, -z)$ για να έχουμε καλύτερα αποτελέσματα.



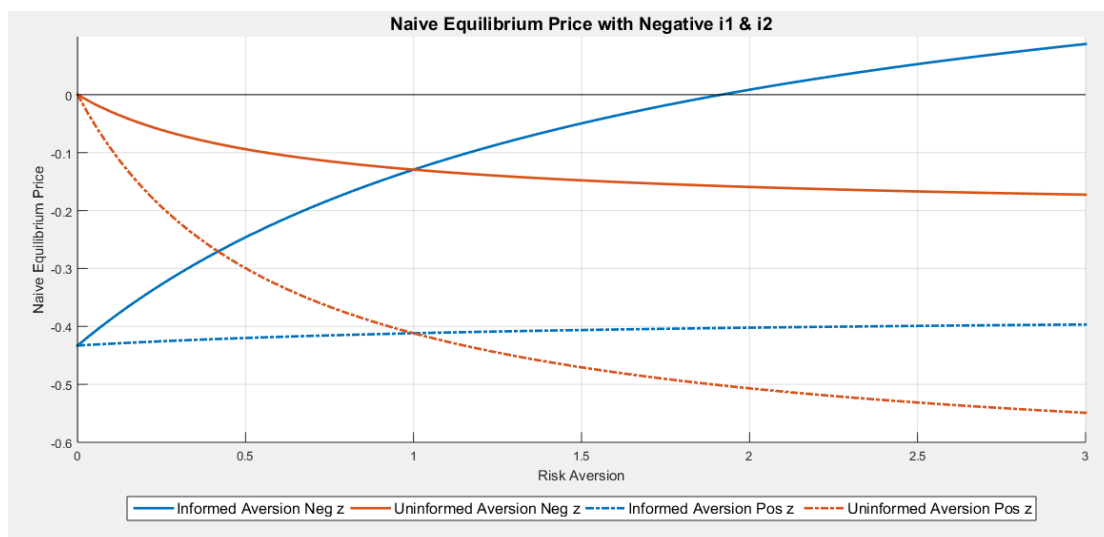
Γράφημα 6.1: Σύγκριση τιμών χωρίς εξαγωγή πληροφορίας – Naive ως προς την αποστροφή κινδύνου με θετικά i_1, i_2 ($i_1 = 0.4908, i_2 = 1.6741, |z| = 2.2588$)



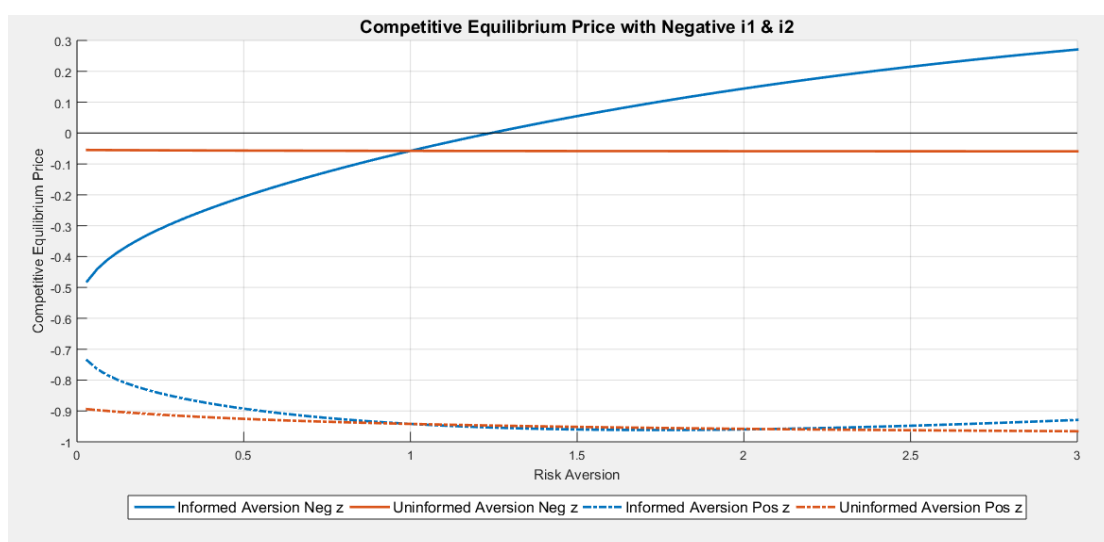
Γράφημα 6.2: Σύγκριση τιμών σε ανταγωνιστικό περιβάλλον - REE ως προς την αποστροφή κινδύνου με θετικά i_1, i_2 ($i_1 = 0.4908, i_2 = 1.6741, |z| = 2.2588$)



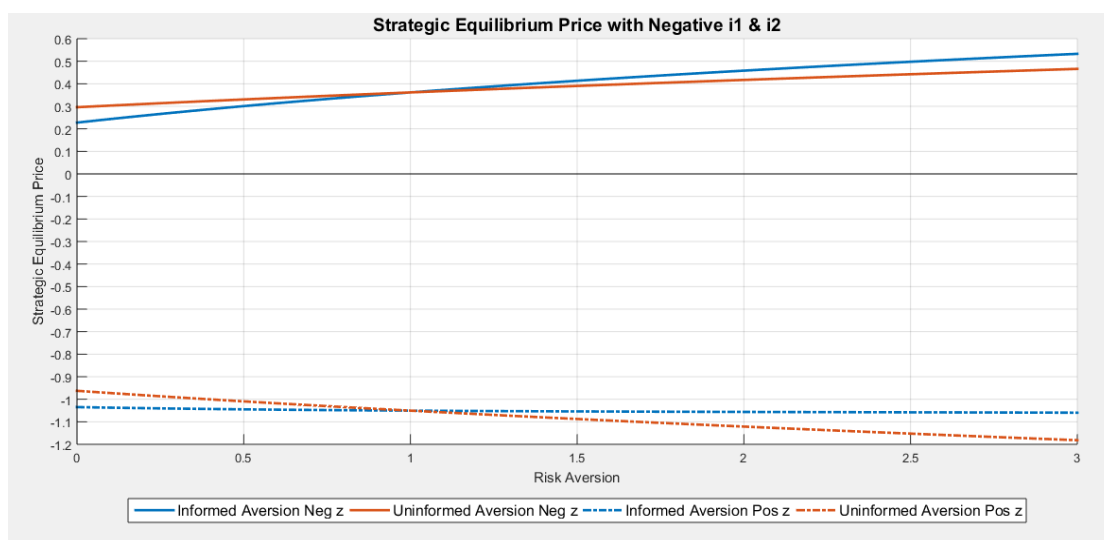
Γράφημα 6.3: Σύγκριση τιμών σε στρατηγικό περιβάλλον - BNE ως προς την αποστροφή κινδύνου με θετικά i_1, i_2 ($i_1 = 0.4908, i_2 = 1.6741, |z| = 2.2588$)



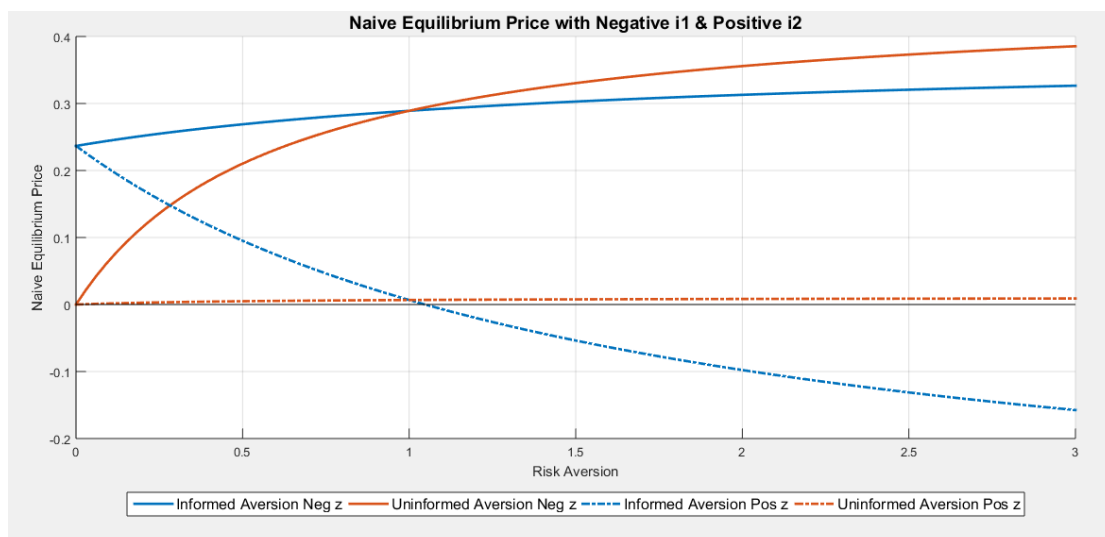
Γράφημα 6.4: Σύγκριση τιμών χωρίς εξαγωγή πληροφορίας – Naive ως προς την αποστροφή κινδύνου με αρνητικά i_1, i_2 ($i_1 = -0.4908, i_2 = -1.6741, |z| = 2.2588$)



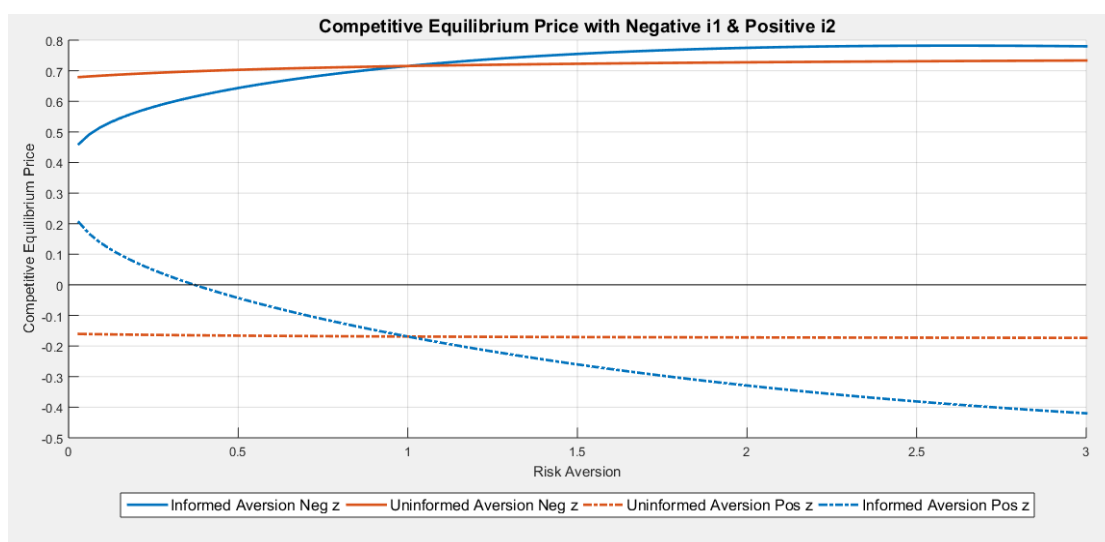
Γράφημα 6.5: Σύγκριση τιμών σε ανταγωνιστικό περιβάλλον - REE ως προς την αποστροφή κινδύνου με αρνητικά i_1, i_2 ($i_1 = -0.4908, i_2 = -1.6741, |z| = 2.2588$)



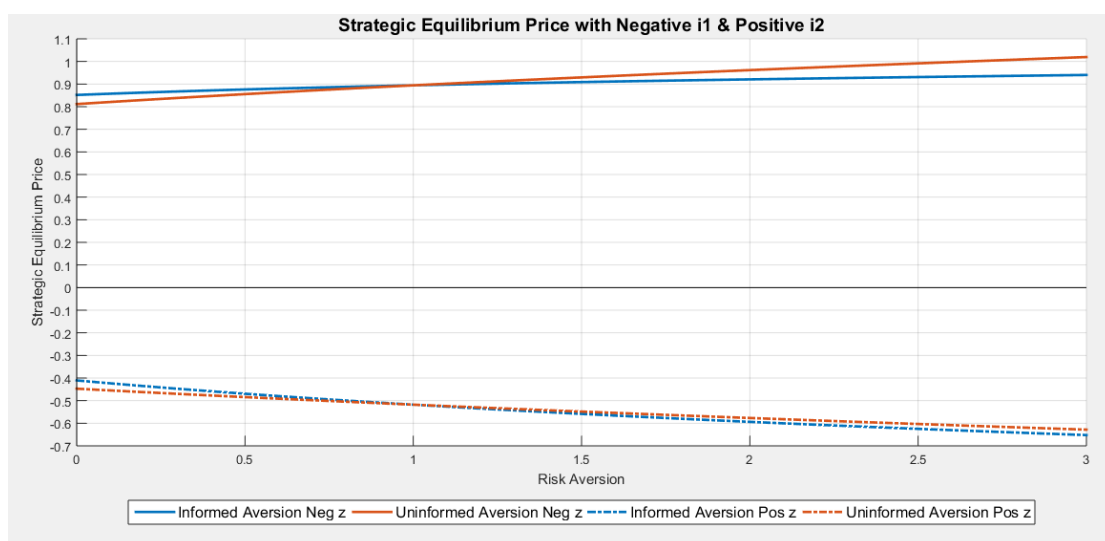
Γράφημα 6.6: Σύγκριση τιμών σε στρατηγικό περιβάλλον - BNE ως προς την αποστροφή κινδύνου με αρνητικά i_1, i_2 ($i_1 = -0.4908, i_2 = -1.6741, |z| = 2.2588$)



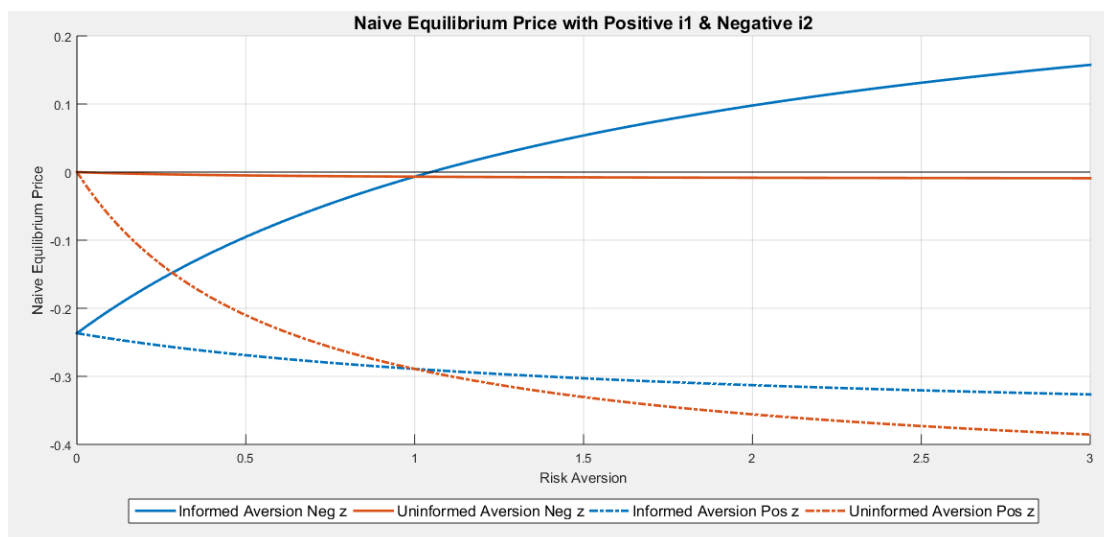
Γράφημα 6.7: Σύγκριση τιμών χωρίς εξαγωγή πληροφορίας – Naive ως προς την αποστροφή κινδύνου με αρνητικό i_1 και θετικό i_2 ($i_1 = -0.4908, i_2 = 1.6741, |z| = 2.2588$)



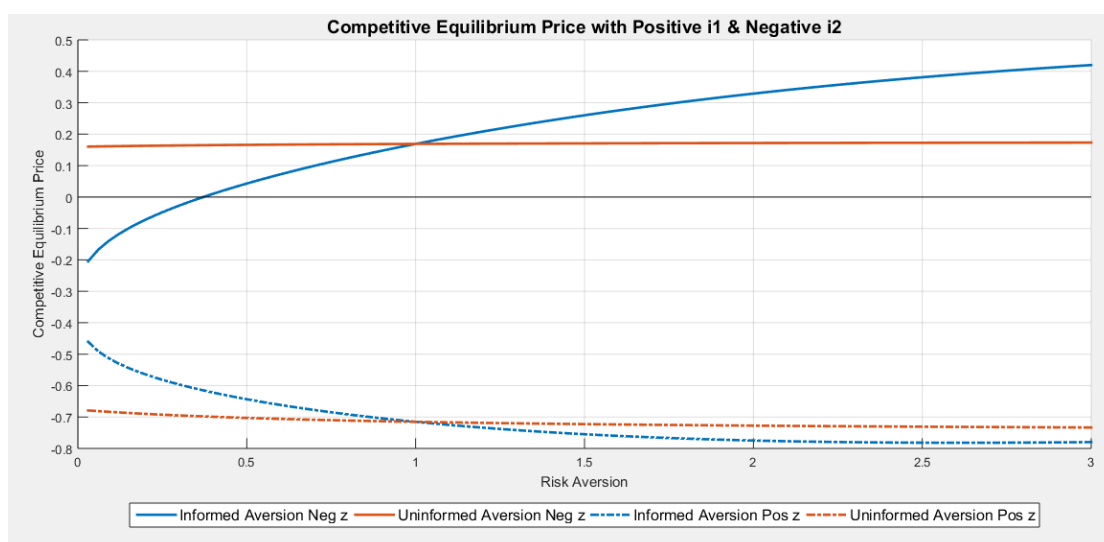
Γράφημα 6.8: Σύγκριση τιμών σε ανταγωνιστικό περιβάλλον - REE ως προς την αποστροφή κινδύνου με αρνητικό i_1 και θετικό i_2 ($i_1 = -0.4908, i_2 = 1.6741, |z| = 2.2588$)



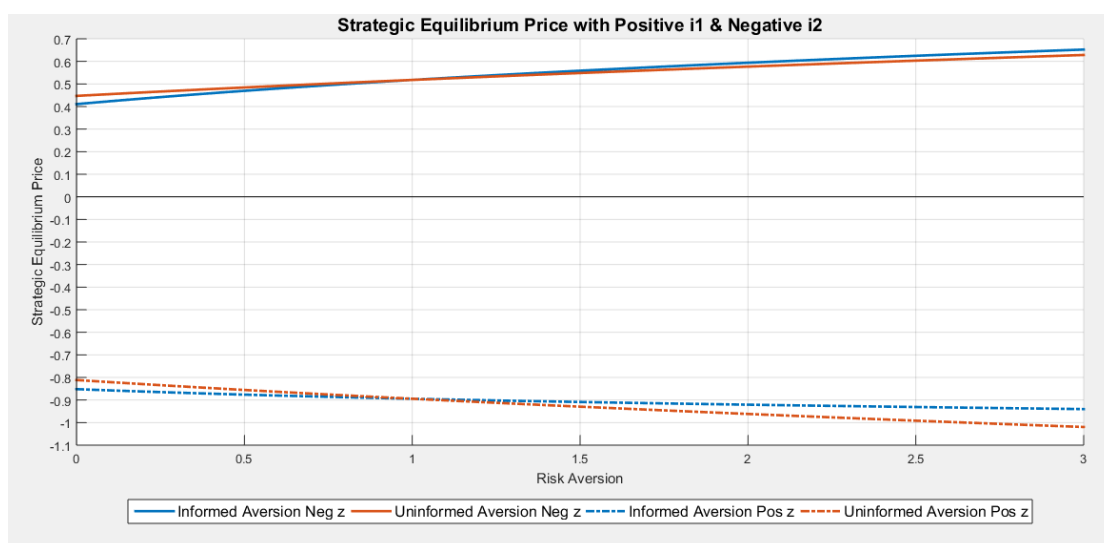
Γράφημα 6.9: Σύγκριση τιμών σε στρατηγικό περιβάλλον - BNE ως προς την αποστροφή κινδύνου με αρνητικό i_1 και θετικό i_2 ($i_1 = -0.4908, i_2 = 1.6741, |z| = 2.2588$)



Γράφημα 6.10: Σύγκριση τιμών χωρίς εξαγωγή πληροφορίας – Naive ως προς την αποστροφή κινδύνου με θετικό i_1 και αρνητικό i_2 ($i_1 = 0.4908, i_2 = -1.6741, |z| = 2.2588$)



Γράφημα 6.11: Σύγκριση τιμών σε ανταγωνιστικό περιβάλλον - REE ως προς την αποστροφή κινδύνου με θετικό i_1 και αρνητικό i_2 ($i_1 = 0.4908, i_2 = -1.6741, |z| = 2.2588$)



Γράφημα 6.12: Σύγκριση τιμών σε στρατηγικό περιβάλλον - BNE ως προς την αποστροφή κινδύνου με θετικό i_1 και αρνητικό i_2 ($i_1 = 0.4908, i_2 = -1.6741, |z| = 2.2588$)

6.2 Επιρροή των Συναλλασσόμενων και Ελαστικότητα των Τιμών

Αρχικά, βλέπουμε ότι ισχυροποιείται το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξαμε μέσω των γραφημάτων των προγραμμάτων ζήτησης (Ενότητα 5.2). Για κάθε συνδυασμό i_1, i_2 , η μεταβολή των τιμών, ανάλογα με την παρουσία πλεονάζουσας προσφοράς ή ζήτησης από τους noise traders, μεγαλώνει από την μία ισορροπία στην άλλη. Δηλαδή, η ύπαρξη πλεονάζουσας προσφοράς ($z > 0$) μειώνει διαρκώς την τιμή ξεκινώντας από την Naive ισορροπία και καταλήγοντας στην BNE, ενώ η πλεονάζουσα ζήτηση ($z < 0$) την αυξάνει. Επιπλέον, για κάθε συνδυασμό ρ_I, ρ_U , παρατηρούμε ότι η τιμή του αξιογράφου είναι πάντα υψηλότερη όταν υπάρχει αθροιστικά θετική ιδιωτική πληροφόρηση (Γράφημα 6.1 - Γράφημα 6.3 και Γράφημα 6.7 - Γράφημα 6.9).

Στην *Naive ανταγωνιστική ισορροπία*, η παρουσία θετικής ιδιωτικής πληροφόρησης σε συνδυασμό με την πλεονάζουσα προσφορά (η οποία όπως είδαμε στην συγκεκριμένη περίπτωση έχει μεγαλύτερη επιρροή), ωθεί τους πληροφορημένους στην αγορά μεγάλων ποσοτήτων του αξιογράφου, επηρεάζοντας έτσι περισσότερο την τιμή σε σχέση με τους απληροφόρητους. Μόνο στην ύπαρξη πλεονάζουσας ζήτησης επηρεάζουν οι απληροφόρητοι την τιμή καθώς οι πληροφορημένοι θεωρούν ότι το αξιόγραφο είναι πολύ ακριβό δεδομένης της πληροφόρησής τους (Γράφημα 6.1 και Γράφημα 6.7). Στην ύπαρξη αρνητικής πληροφόρησης συμβαίνει το ακριβώς αντίθετο. Τώρα, η ύπαρξη πλεονάζουσας ζήτησης ωθεί τους πληροφορημένους στην πώληση μεγάλων ποσοτήτων επηρεάζοντας με αντίθετο τρόπο την τιμή (Γράφημα 6.4 και Γράφημα 6.10). Αυτό το συμπέρασμα αποδεικνύεται και στα προγράμματα ζήτησης όπου στην Naive ανταγωνιστική ισορροπία, αν $i_1 + i_2 > 0$ και $z > 0$, οι πληροφορημένοι κατά μέσο όρο αγοράζουν (Γράφημα 5.1 και Γράφημα 5.7) ενώ αν $i_1 + i_2 < 0$ και $z < 0$, πουλάνε (Γράφημα 5.4 και Γράφημα 5.7).

Στην *REE ανταγωνιστική ισορροπία*, παρατηρούμε ότι σε κάθε συνδυασμό (i_1, i_2, z) , οι απληροφόρητοι επηρεάζουν απειροελάχιστα τις τιμές (Γράφημα 6.2, Γράφημα 6.5, Γράφημα 6.8 και Γράφημα 6.11). Αυτό θα μπορούσε να δικαιολογηθεί από την μικρή ζήτηση που φαίνεται να έχουν οι απληροφόρητοι σε αυτήν την ισορροπία (Γράφημα 5.2, Γράφημα 5.5, Γράφημα 5.8 και Γράφημα 5.11). Η δυνατότητα εκτίμησης πλέον μέσω των τιμών φανερώνει στους απληροφόρητους «θόρυβο» τον οποίο αδυνατούν να αξιολογήσουν. Αυτό, σε συνδυασμό και με την έλλειψη δύναμης αγοράς, περιορίζει τις κινήσεις τους, αφήνοντας έτσι τους πληροφορημένους να επηρεάζουν τις τιμές.

Στην *BNE στρατηγική ισορροπία*, η εισαγωγή της δύναμης αγοράς (πληροφορημένων και απληροφόρητων) οδηγεί στη σχεδόν ισοδύναμη επιρροή όλων των συναλλασσομένων στις τιμές. Είδαμε ότι η εισαγωγή

περισσότερου «θορύβου» στην αγορά, οδηγεί στην μείωση των ποσοτήτων που συναλλάσσονται οι πληροφορημένοι, ενώ παράλληλα προκαλεί μία ελαφρώς μεγαλύτερη ευαισθησία των απληροφόρητων στις τιμές. Ο συνδυασμός αυτών των δύο δίνει σε όλους τους συναλλασσόμενους σχεδόν κοινή επιρροή στις τιμές.

Τέλος, επισημαίνουμε και την γενική ελαστικότητα των τιμών στις μεταβολές των ρ_I και ρ_U . Βλέπουμε ότι η διαρκής εισαγωγή περισσότερου «θορύβου» στην αγορά (από την Naive ισορροπία, στην εκτίμηση μέσω των τιμών, στην δύναμη αγοράς), κάνει τις τιμές όλο και περισσότερο ανελαστικές στον κίνδυνο των συναλλασσόμενων. Ενώ στην Naive ισορροπία έχουμε μία διακύμανση 0.5 - 0.6 μονάδων, αυτή πέφτει στην REE στις 0.3 μονάδες και καταλήγει στην BNE στις 0.1 - 0.2 μονάδες, με την μεταβολή να μοιάζει σχεδόν γραμμική. Αυτό δικαιολογείται από την προσθήκη περισσότερων παραμέτρων στο σύστημα, με την REE να ενσωματώνει τους δείκτες φ_I, φ_U και την BNE να προσθέτει επιπλέον την δύναμη αγοράς λ_I, λ_U .

7 Επιλογή Βέλτιστης Συμπεριφοράς

Στα προηγούμενα δύο κεφάλαια μελετήσαμε τις μεταβολές των τιμών σε κάθε περιβάλλον και για πολλαπλές αποστροφές κινδύνου των συναλλασσόμενων. Θέλουμε τώρα να εξετάσουμε ποια συμπεριφορά (κυρίως μεταξύ *Ανταγωνιστικής και Στρατηγικής*) προσφέρει μεγαλύτερο κέρδος στους συναλλασσόμενους. Χρησιμοποιούμε τα προγράμματα ζήτησης και την τιμή εκκαθάρισης που αναλύσαμε στα κεφάλαια 3 και 4 και βρίσκουμε το αναμενόμενο όφελος πληροφορημένων και απληροφόρητων για κάθε συμπεριφορά, χρησιμοποιώντας το *εγγυημένο κέρδος μηδενικού ρίσκου* (*certainty equivalent*) C .

7.1 Εύρεση Κερδών και Κατασκευή Διαγραμμάτων

Οι noise traders, σε κάθε ισορροπία, εφόσον παρέχουν πλεονάζουσα ζήτηση \tilde{z} , έχουν πάντα σωρευτικό κέρδος $\tilde{z} * (\tilde{p} - \tilde{v})$. Επειδή όμως $\tilde{v} \sim N(0, r_v^{-1})$, το μέσο κέρδος τους καταλήγει να είναι $\tilde{z} * \tilde{p}$.

Εξαιτίας της απλοϊκής φύσης της *Naive ανταγωνιστικής συμπεριφοράς*, δεν θα ασχοληθούμε τόσο με αυτήν. Μόνο για λόγους πληρότητας, αναφέρουμε τον τρόπο εύρεσης των κερδών για κάθε συναλλασσόμενο. Ξεκινώντας από τους απληροφόρητους, το αναμενόμενο όφελός τους προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned}
 E[V_m(Y_m)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\exp(\rho_U(\tilde{v} - p)Y_m) f(Y_m) dY_m \\
 &= -\exp \left\{ \underbrace{-\rho_U \left(E[(\tilde{v} - p)Y_m] - \frac{\rho_U}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - p)Y_m] \right)}_{C_U^{Naive}} \right\} \\
 \Rightarrow C_U^{Naive} &= Y_m \left(\underbrace{E[\tilde{v}]}_{=0} - p \right) - \frac{\rho_U}{2} Y_m^2 \underbrace{\text{Var}[\tilde{v}]}_{=r_v^{-1}} \\
 \stackrel{(3.1)}{\Rightarrow} C_U^{Naive} &= -p \left(-\frac{r_v}{\rho_U} p \right) - \frac{\rho_U}{2r_v} \left(-\frac{r_v}{\rho_U} p \right)^2 = \frac{r_v}{\rho_U} p^2 - \frac{r_v}{2\rho_U} p^2 \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$C_U^{Naive} = \frac{r_v}{2\rho_U} p^2 \quad (7.1)$$

Για τους πληροφορημένους έχουμε:

$$E[U_n(X_n|\tilde{t}_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} -\exp(\rho_I(\tilde{v} - p)X_n) f(X_n|\tilde{t}_n) dX_n$$

$$\begin{aligned}
 &= -\exp \left\{ -\rho_I \left(\frac{E[(\tilde{v} - p)X_n | \tilde{t}_n] - \frac{\rho_I}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - p)X_n | \tilde{t}_n]}{C_I^{Naive}} \right) \right\} \\
 \Rightarrow C_I^{Naive} &= X_n (E[\tilde{v} | \tilde{t}_n] - p) - \frac{\rho_I}{2} X_n^2 \text{Var}[\tilde{v} | \tilde{t}_n] \\
 \stackrel{(3.2)}{\implies} C_I^{Naive} &= X_n \left(\frac{r_e}{r_v + r_e} \tilde{t}_n - p \right) - \frac{\rho_I}{2(r_v + r_e)} X_n^2 \\
 \stackrel{(3.3)}{\implies} & \\
 &\stackrel{(3.4)}{=} \left(-\frac{r_v + r_e}{\rho_I} p + \frac{r_e}{\rho_I} \tilde{t}_n \right) \left(\frac{r_e}{r_v + r_e} \tilde{t}_n - p \right) - \frac{\rho_I}{2(r_v + r_e)} \left(-\frac{r_v + r_e}{\rho_I} p + \frac{r_e}{\rho_I} \tilde{t}_n \right)^2 \\
 &= -\frac{r_e}{\rho_I} p \tilde{t}_n + \frac{r_v + r_e}{\rho_I} p^2 + \frac{r_e^2}{\rho_I(r_v + r_e)} \tilde{t}_n^2 - \frac{r_e}{\rho_I} p \tilde{t}_n - \frac{r_v + r_e}{2\rho_I} p^2 - \frac{r_e^2}{2\rho_I(r_v + r_e)} \tilde{t}_n^2 + \frac{r_e}{\rho_I} p \tilde{t}_n \\
 &= -\frac{r_e}{\rho_I} p \tilde{t}_n + \frac{r_v + r_e}{2\rho_I} p^2 + \frac{r_e^2}{2\rho_I(r_v + r_e)} \tilde{t}_n^2 \Rightarrow \\
 C_I^{Naive} &= \frac{1}{\rho_I} \left(p \sqrt{\frac{r_v + r_e}{2}} - \frac{r_e}{\sqrt{2(r_v + r_e)}} \tilde{t}_n \right)^2 \tag{7.2}
 \end{aligned}$$

Για την ανταγωνιστική ισορροπία REE, ξεκινάμε πάλι από το αναμενόμενο όφελος των απληροφόρητων:

$$\begin{aligned}
 E[V_m(Y_m^* | \tilde{p})] &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\exp(\rho_U(\tilde{v} - \tilde{p})Y_m^*) f(Y_m^* | \tilde{p}) dY_m^* \\
 &= -\exp \left\{ -\rho_U \left(\frac{E[(\tilde{v} - \tilde{p})Y_m^* | \tilde{p}] - \frac{\rho_U}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - \tilde{p})Y_m^* | \tilde{p}]}{C_U^{REE}} \right) \right\} \\
 \Rightarrow C_U^{REE} &= Y_m^* (E[\tilde{v} | \tilde{p}] - \tilde{p}) - \frac{\rho_U}{2} (Y_m^*)^2 \underbrace{\text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}]}_{=r_U^{-1}} \\
 \stackrel{(3.15)}{=} & \left(\frac{E[\tilde{v} | \tilde{p}] - \tilde{p}}{\rho_U / r_U} \right) (E[\tilde{v} | \tilde{p}] - \tilde{p}) - \frac{\rho_U}{2r_U} \left(\frac{E[\tilde{v} | \tilde{p}] - \tilde{p}}{\rho_U / r_U} \right)^2 \\
 &= \frac{r_U}{\rho_U} (E[\tilde{v} | \tilde{p}] - \tilde{p})^2 - \frac{r_U}{2\rho_U} (E[\tilde{v} | \tilde{p}] - \tilde{p})^2 \stackrel{(3.13)}{\implies} \\
 & \quad (\alpha_I = \alpha_U = 0)
 \end{aligned}$$

$$C_U^{REE} = \frac{r_U}{2\rho_U} \left[\tilde{p} \left(\frac{\varphi_U r_e}{\lambda \gamma r_U} - 1 \right) \right]^2 \quad (7.3)$$

Αντίστοιχα για τους πληροφορημένους, έχουμε:

$$\begin{aligned} E[U_n(X_n^* | \tilde{p}, \tilde{t}_n)] &= \int_{-\infty}^{+\infty} -\exp(\rho_I(\tilde{v} - \tilde{p})X_n^*) f(X_n^* | \tilde{p}, \tilde{t}_n) dX_n^* \\ &= -\exp \left\{ \underbrace{-\rho_I \left(E[(\tilde{v} - \tilde{p})X_n^* | \tilde{p}, \tilde{t}_n] - \frac{\rho_I}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - \tilde{p})X_n^* | \tilde{p}, \tilde{t}_n] \right)}_{C_I^{REE}} \right\} \\ &\Rightarrow C_I^{REE} = X_n^* (E[\tilde{v} | \tilde{p}, \tilde{t}_n] - \tilde{p}) - \frac{\rho_I}{2r_I} (X_n^*)^2 \\ &\stackrel{(3.15)}{=} \left(\frac{E[\tilde{v} | \tilde{p}, \tilde{t}_n] - \tilde{p}}{\rho_I/r_I} \right) (E[\tilde{v} | \tilde{p}, \tilde{t}_n] - \tilde{p}) - \frac{\rho_I}{2r_I} \left(\frac{E[\tilde{v} | \tilde{p}, \tilde{t}_n] - \tilde{p}}{\rho_I/r_I} \right)^2 \\ &= \frac{r_I}{\rho_I} (E[\tilde{v} | \tilde{p}, \tilde{t}_n] - \tilde{p})^2 - \frac{r_I}{2\rho_I} (E[\tilde{v} | \tilde{p}, \tilde{t}_n] - \tilde{p})^2 \xrightarrow[(\alpha_I = \alpha_U = 0)]{(3.13)} \\ &C_I^{REE} = \frac{r_I}{2\rho_I} \left[\frac{(1 - \varphi_I)r_e}{r_I} \tilde{t}_n + \tilde{p} \left(\frac{\varphi_I r_e}{\lambda \gamma r_I} - 1 \right) \right]^2 \quad (7.4) \end{aligned}$$

Τέλος, στην στρατηγική ισορροπία BNE, βρίσκουμε πάλι τα αντίστοιχα αναμενόμενα οφέλη ξεκινώντας από τους απληροφόρητους:

$$\begin{aligned} E[V_m(\tilde{Y}_m^* | \tilde{p})] &= E[V_m(\tilde{Y}_m^* | p_{Um})] = \int_{-\infty}^{+\infty} -\exp(\rho_U(\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{Y}_m^*) f(\tilde{Y}_m^* | p_{Um}) d\tilde{Y}_m^* \\ &= -\exp \left\{ \underbrace{-\rho_U \left(E[(\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{Y}_m^* | p_{Um}] - \frac{\rho_U}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - \tilde{p})\tilde{Y}_m^* | p_{Um}] \right)}_{C_U^{BNE}} \right\} \\ &\stackrel{(4.1)}{\Rightarrow} C_U^{BNE} = E[(\tilde{v} - p_{Um} - \lambda_U \tilde{Y}_m^*)\tilde{Y}_m^* | p_{Um}] - \frac{\rho_U}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - p_{Um} - \lambda_U \tilde{Y}_m^*)\tilde{Y}_m^* | p_{Um}] \\ &= \tilde{Y}_m^* (E[\tilde{v} | p_{Um}] - p_{Um} - \lambda_U \tilde{Y}_m^*) - \frac{\rho_U}{2} (\tilde{Y}_m^*)^2 \text{Var}[\tilde{v} | p_{Um}] \\ &= \tilde{Y}_m^* \left(\underbrace{E[\tilde{v} | p_{Um}]}_{=E[\tilde{v} | \tilde{p}]} - p_{Um} \right) - (\tilde{Y}_m^*)^2 \left(\lambda_U + \frac{\rho_U}{2} \underbrace{\text{Var}[\tilde{v} | p_{Um}]}_{=\text{Var}[\tilde{v} | \tilde{p}] = r_U^{-1}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\stackrel{\zeta}{=} \widetilde{Y}_m^* (E[\tilde{v}|\tilde{p}] - \tilde{p}) - \frac{\rho_U}{2r_U} (\widetilde{Y}_m^*)^2 \\
(4.1) & \\
&\stackrel{\zeta}{=} \left(\frac{E[\tilde{v}|\tilde{p}] - \tilde{p}}{\lambda_U + \rho_U/r_U} \right) (E[\tilde{v}|\tilde{p}] - \tilde{p}) - \frac{\rho_U}{2r_U} \left(\frac{E[\tilde{v}|\tilde{p}] - \tilde{p}}{\lambda_U + \rho_U/r_U} \right)^2 \\
(4.5) & \\
&= (E[\tilde{v}|\tilde{p}] - \tilde{p})^2 \left[\frac{2r_U(\lambda_U + \rho_U/r_U) - \rho_U}{2r_U(\lambda_U + \rho_U/r_U)^2} \right] \xrightarrow[(\alpha_I = \alpha_U = 0)]{(3.13)} \\
& \\
C_U^{BNE} &= \frac{2r_U(\lambda_U + \rho_U/r_U) - \rho_U}{2r_U(\lambda_U + \rho_U/r_U)^2} \left[\tilde{p} \left(\frac{\varphi_U r_e}{\lambda_U r_U} - 1 \right) \right]^2 \quad (7.5)
\end{aligned}$$

Για τους πληροφορημένους, έχουμε:

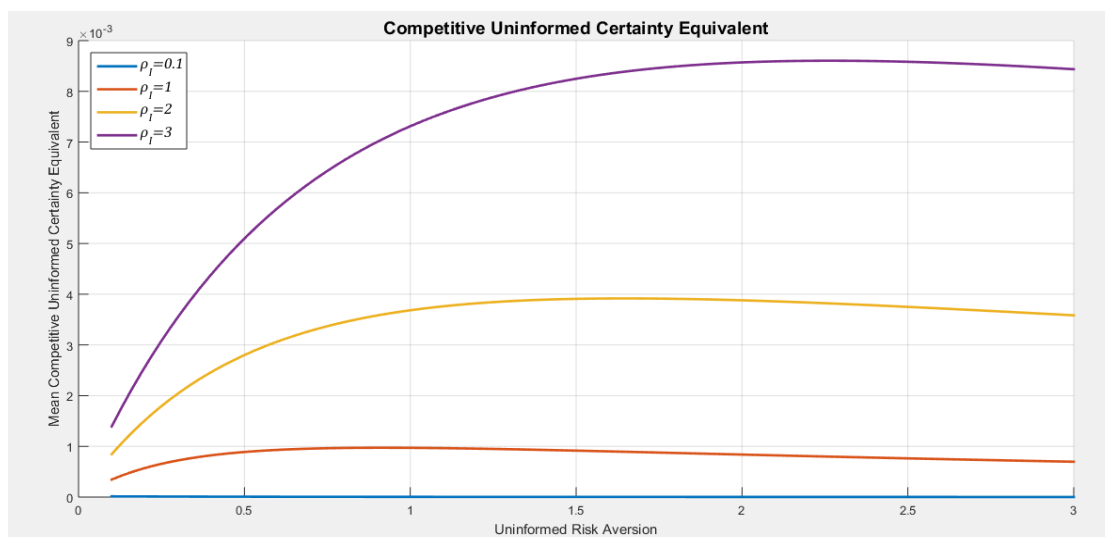
$$\begin{aligned}
E[U_n(\widetilde{X}_n^* | \tilde{p}, \tilde{i}_n)] &= E[U_n(\widetilde{X}_n^* | \tilde{p}_{In}, \tilde{i}_n)] = \int_{-\infty}^{+\infty} -\exp(\rho_I(\tilde{v} - \tilde{p})\widetilde{X}_n^*) f(\widetilde{X}_n^* | \tilde{p}_{In}, \tilde{i}_n) d\widetilde{X}_n^* \\
&= -\exp \left\{ -\rho_I \left(\frac{E[(\tilde{v} - \tilde{p})\widetilde{X}_n^* | \tilde{p}_{In}, \tilde{i}_n] - \frac{\rho_I}{2} \text{Var}[(\tilde{v} - \tilde{p})\widetilde{X}_n^* | \tilde{p}_{In}, \tilde{i}_n]]}{C_I^{BNE}} \right) \right\} \\
\Rightarrow C_I^{BNE} &= \widetilde{X}_n^* \left(\frac{E[\tilde{v}|\tilde{p}_{In}, \tilde{i}_n] - \tilde{p}_{In}}{=E[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{i}_n]} \right) - (\widetilde{X}_n^*)^2 \left(\lambda_I + \frac{\rho_I}{2} \frac{\text{Var}[\tilde{v}|\tilde{p}_{In}, \tilde{i}_n]}{=\text{Var}[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{i}_n]=r_I^{-1}} \right) \\
&\stackrel{\zeta}{=} \widetilde{X}_n^* (E[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{i}_n] - \tilde{p}) - \frac{\rho_I}{2r_I} (\widetilde{X}_n^*)^2 \\
(4.1) & \\
&\stackrel{\zeta}{=} \left(\frac{E[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{i}_n] - \tilde{p}}{\lambda_I + \rho_I/r_I} \right) (E[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{i}_n] - \tilde{p}) - \frac{\rho_I}{2r_I} \left(\frac{E[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{i}_n] - \tilde{p}}{\lambda_I + \rho_I/r_I} \right)^2 \\
(4.5) & \\
&= (E[\tilde{v}|\tilde{p}, \tilde{i}_n] - \tilde{p})^2 \left[\frac{2r_I(\lambda_I + \rho_I/r_I) - \rho_I}{2r_I(\lambda_I + \rho_I/r_I)^2} \right] \xrightarrow[(\alpha_I = \alpha_U = 0)]{(3.13)} \\
& \\
C_I^{BNE} &= \frac{2r_I(\lambda_I + \rho_I/r_I) - \rho_I}{2r_I(\lambda_I + \rho_I/r_I)^2} \left[\frac{(1 - \varphi_I)r_e}{r_I} \tilde{i}_n + \tilde{p} \left(\frac{\varphi_I r_e}{\lambda_I r_I} - 1 \right) \right]^2 \quad (7.6)
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τα αναμενόμενα κέρδη που βρήκαμε σε προσομοίωση Monte – Carlo 10.000 διαφορετικών i_1, i_2, z για την αγορά με

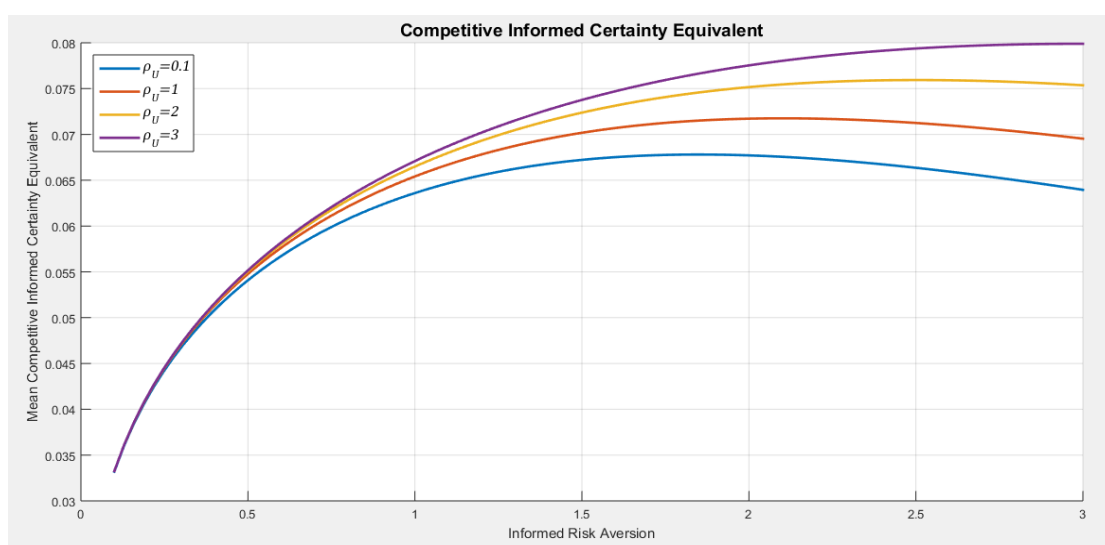
τις εξωγενείς παραμέτρους (5.1). Η διαδικασία κατασκευής των διαγραμμάτων παρουσιάζεται στο Παράρτημα. Συνοψίζουμε όλα τα κέρδη (7.1) - (7.6) της συγκεκριμένης αγοράς στον παρακάτω πίνακα:

Συναλλασσόμενοι	Certainty Equivalents C		
Πληροφορημένοι	Naive	$C_I^{Naive} = \frac{1}{\rho_I} \left(p \sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{2}{\sqrt{10}} \tilde{t}_n \right)^2$	
	REE	$C_I^{REE} = \frac{r_I}{2\rho_I} \left[\frac{2(1-\varphi_I)}{r_I} \tilde{t}_n + \tilde{p} \left(\frac{2\varphi_I}{\lambda\gamma r_I} - 1 \right) \right]^2$	
	BNE	$C_I^{BNE} = \frac{2r_I(\lambda_I + \rho_I/r_I) - \rho_I}{2r_I(\lambda_I + \rho_I/r_I)^2} \left[\frac{2(1-\varphi_I)}{r_I} \tilde{t}_n + \tilde{p} \left(\frac{2\varphi_I}{\lambda\gamma r_I} - 1 \right) \right]^2$	
Απληροφόρητοι	Naive	$C_U^{Naive} = \frac{3}{2\rho_U} p^2$	
	REE	$C_U^{REE} = \frac{r_U}{2\rho_U} \left[\tilde{p} \left(\frac{2\varphi_U}{\lambda\gamma r_U} - 1 \right) \right]^2$	
	BNE	$C_U^{BNE} = \frac{2r_U(\lambda_U + \rho_U/r_U) - \rho_U}{2r_U(\lambda_U + \rho_U/r_U)^2} \left[\tilde{p} \left(\frac{2\varphi_U}{\lambda\gamma r_U} - 1 \right) \right]^2$	
Noise Traders (σωρευτικά)	Naive	$\tilde{z} * p$	
	REE	$\tilde{z} * \tilde{p}$	
	BNE	$\tilde{z} * \tilde{p}$	
$\varphi_U = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 1}$	$\varphi_I = \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + 2}$	$r_U = \frac{7\gamma^2 + 3}{\gamma^2 + 1}$	$r_I = \frac{7\gamma^2 + 10}{\gamma^2 + 2}$

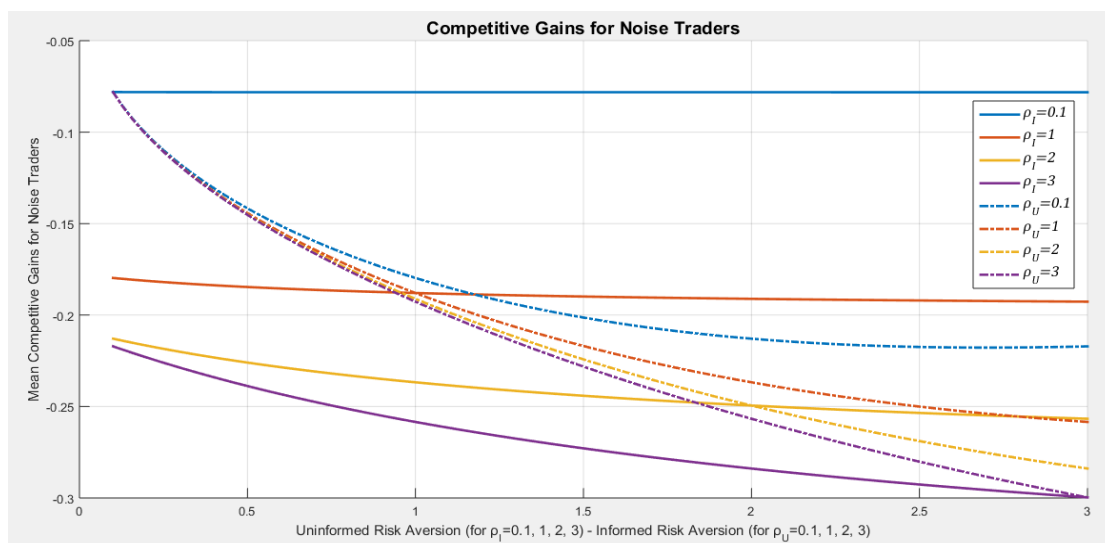
Πίνακας 7.1: Κέρδη συναλλασσομένων για κάθε ισορροπία σε αγορά με $N = 2$, $M = 2$, $r_e = 2$, $r_v = 3$, $\sigma_z^2 = 1$



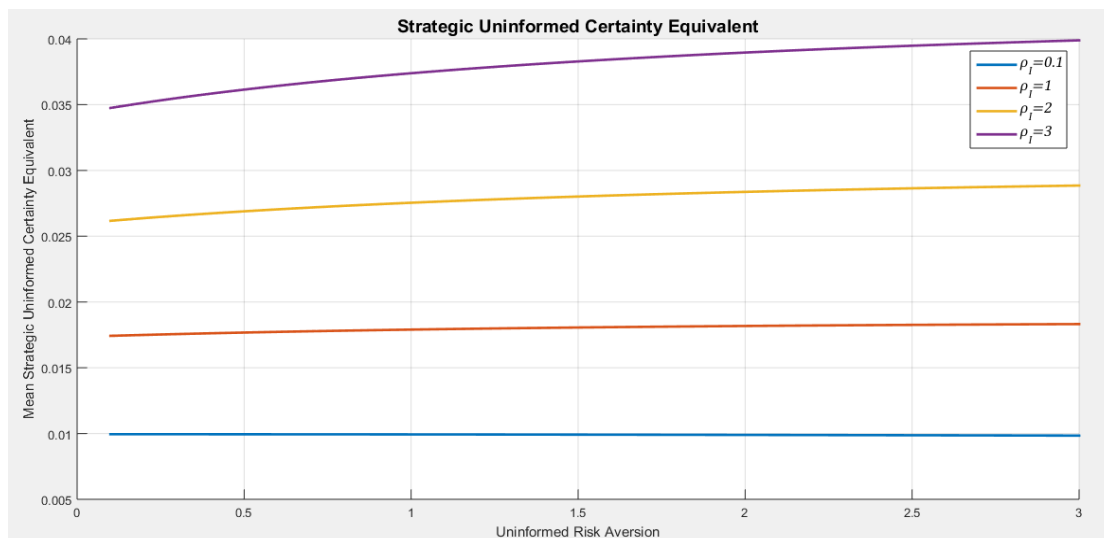
Γράφημα 7.1: Μέσα κέρδη απληροφόρητων σε ανταγωνιστική ισορροπία REE σε αγορά με $N = 2, M = 2, r_e = 2, r_v = 3, \sigma_z^2 = 1$



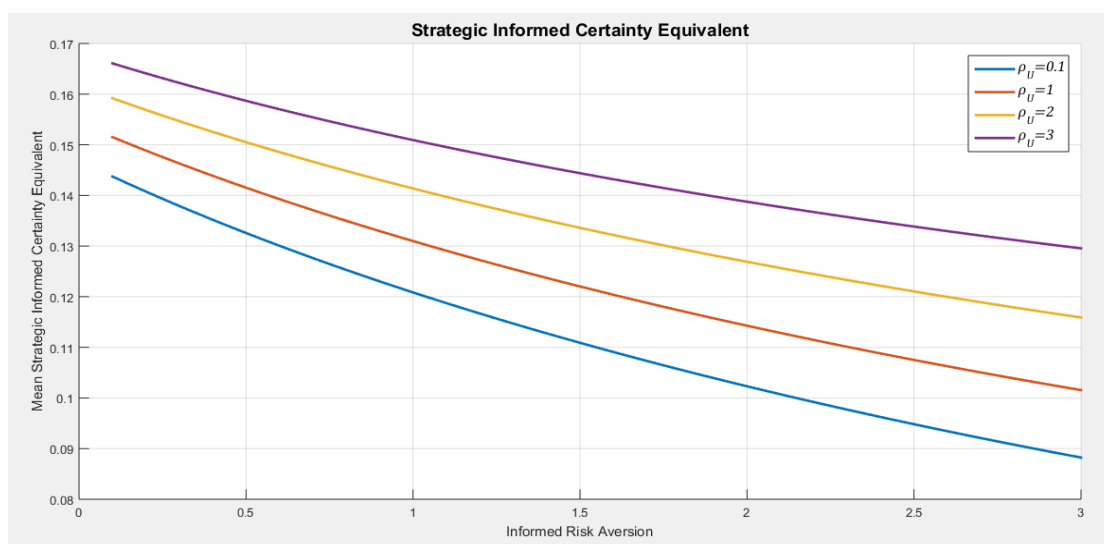
Γράφημα 7.2: Μέσα κέρδη πληροφορημένων σε ανταγωνιστική ισορροπία REE σε αγορά με $N = 2, M = 2, r_e = 2, r_v = 3, \sigma_z^2 = 1$



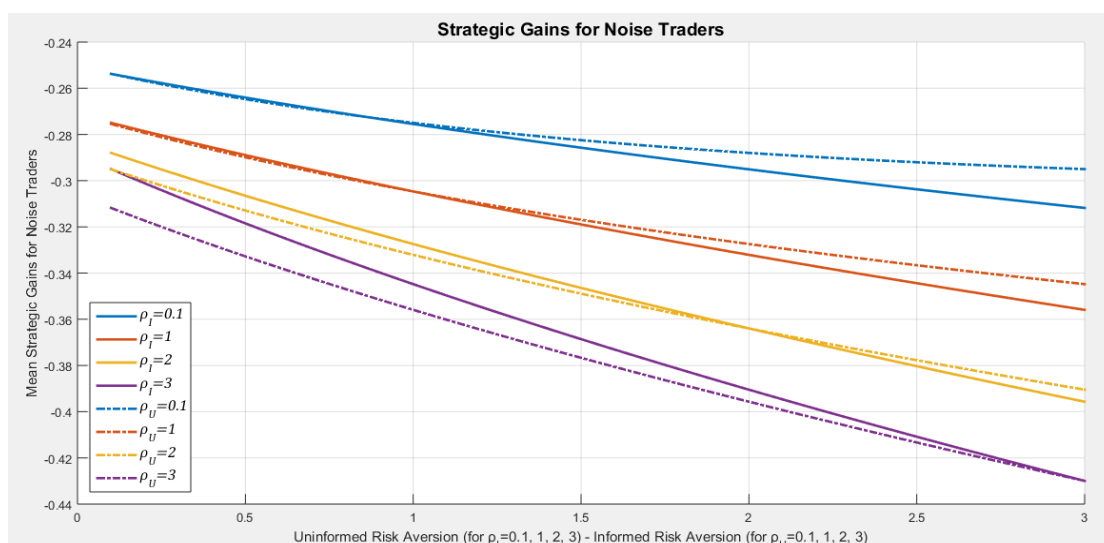
Γράφημα 7.3: Μέσα κέρδη των noise traders σε ανταγωνιστική ισορροπία REE σε αγορά με $N = 2, M = 2, r_e = 2, r_v = 3, \sigma_z^2 = 1$



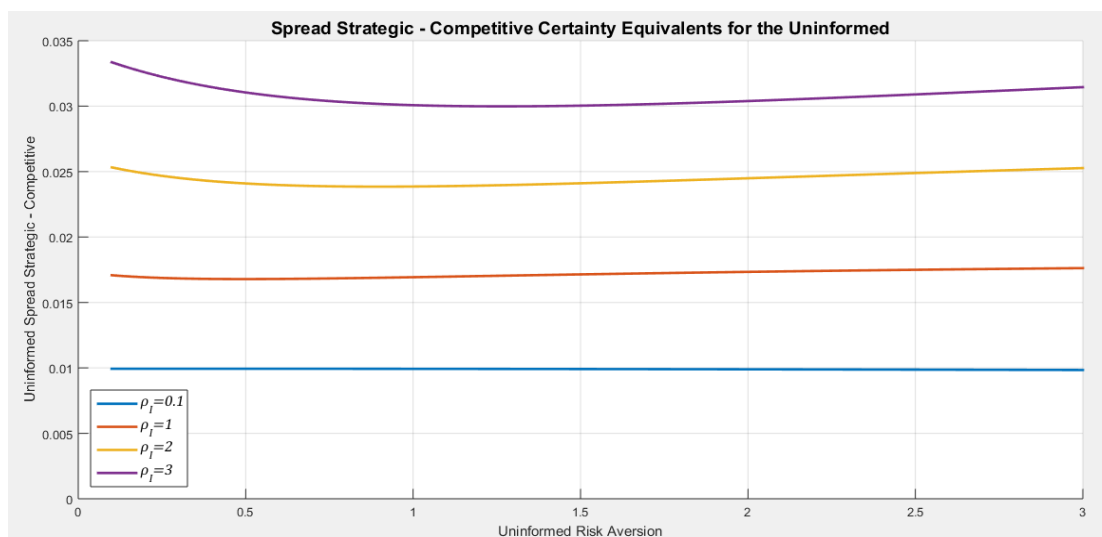
Γράφημα 7.4: Μέσα κέρδη απληροφόρητων σε στρατηγική ισορροπία BNE σε αγορά με $N = 2, M = 2, r_e = 2, r_v = 3, \sigma_z^2 = 1$



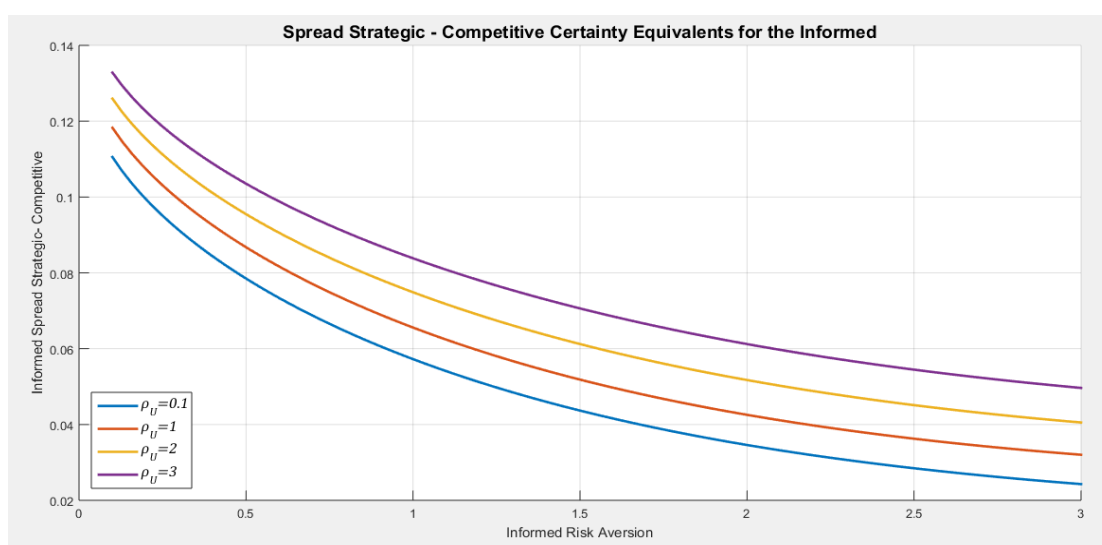
Γράφημα 7.5: Μέσα κέρδη πληροφορημένων σε στρατηγική ισορροπία BNE σε αγορά με $N = 2, M = 2, r_e = 2, r_v = 3, \sigma_z^2 = 1$



Γράφημα 7.6: Μέσα κέρδη των noise traders σε στρατηγική ισορροπία BNE σε αγορά με $N = 2, M = 2, r_e = 2, r_v = 3, \sigma_z^2 = 1$



Γράφημα 7.7: Περιθώριο κέρδους (spread) από ανταγωνιστική σε στρατηγική ισορροπία για τους απληροφόρητους σε αγορά με $N = 2$, $M = 2$, $r_e = 2$, $r_v = 3$, $\sigma_z^2 = 1$



Γράφημα 7.8: Περιθώριο κέρδους (spread) από ανταγωνιστική σε στρατηγική ισορροπία για τους πληροφορημένους σε αγορά με $N = 2$, $M = 2$, $r_e = 2$, $r_v = 3$, $\sigma_z^2 = 1$

7.2 Pareto Αποτελεσματικότητα και Περιθώριο Κέρδους

Στην ανταγωνιστική ισορροπία, βλέπουμε ότι οι απληροφόρητοι έχουν τα μεγαλύτερα κέρδη όταν και οι ίδιοι αλλά και οι πληροφορημένοι έχουν μεγάλη αποστροφή στον κίνδυνο (Γράφημα 7.1). Ταυτόχρονα όμως, το ίδιο συμβαίνει και με τους πληροφορημένους (Γράφημα 7.2), γεγονός το οποίο δείχνει ότι η ανταγωνιστική ισορροπία REE είναι κατά Pareto αποτελεσματική. Βέβαια, η δυνατότητα λήψης ιδιωτικής πληροφόρησης παρέχει στους πληροφορημένους πάντα μεγαλύτερα κέρδη σε σύγκριση με τους απληροφόρητους οι οποίοι μάλιστα όπως αναφέραμε δεν συναλλάσσονται και μεγάλες ποσότητες (Ενότητες 5.2 και 6.2).

Στην στρατηγική ισορροπία, οι απληροφόρητοι εξακολουθούν να παρουσιάζουν τα μεγαλύτερα κέρδη όταν υπάρχει μεγάλη αποστροφή κινδύνου και από τους ίδιους και από τους πληροφορημένους (Γράφημα 7.4).

Ωστόσο, οι πληροφορημένοι πλέον προτιμούν οι ίδιοι να είναι ουδέτεροι στον κίνδυνο και οι απληροφόρητοι όσο το δυνατόν λιγότερο ριψοκίνδυνοι (Γράφημα 7.5). Δηλαδή σε αντίθεση με την ανταγωνιστική ισορροπία, η στρατηγική ισορροπία *BNE* δεν είναι κατά Pareto αποτελεσματική. Με την παρουσία πλέον της δύναμης αγοράς, οι πληροφορημένοι, για να εκμεταλλευτούν στο έπακρον την ιδιωτική τους πληροφόρηση, είναι διατεθειμένοι να αναλάβουν μεγάλο ρίσκο και να γίνουν πιο επιθετικοί απέναντι και στους απληροφόρητους και στους noise traders. Αντίθετα, οι απληροφόρητοι (έστω και οριακά) προτιμούν να παρουσιάζουν μεγάλη αποστροφή για να έχουν μεγαλύτερα κέρδη.

Παρατηρώντας το περιθώριο κέρδους (*spread*) πληροφορημένων και απληροφόρητων μεταξύ στρατηγικής και ανταγωνιστικής ισορροπίας, έχουμε μία ξεκάθαρη εικόνα για την επιλογή της καλύτερης συμπεριφοράς (Γράφημα 7.7 και Γράφημα 7.8). Αν και τελικά δεν είναι κατά Pareto αποτελεσματική, η στρατηγική ισορροπία παρέχει πάντα μεγαλύτερο κέρδος και για τους πληροφορημένους και για τους απληροφόρητους, για κάθε ζεύγος ρ_I, ρ_U .

Η συνεχής σωρευτική ζημία των noise traders (Γράφημα 7.3 και Γράφημα 7.6) δικαιολογείται ως πληρωμή του ασφαλιστρού (*premium*) των τιμών που παρουσιάζεται από την υποβολή των δεικτών αποστροφής κινδύνου όλων των συναλλασσόμενων. Η μεγαλύτερη αποστροφή κινδύνου συνεπάγεται και με μεγαλύτερο ασφαλιστρο το οποίο μάλιστα αντικατοπτρίζεται και στα κέρδη όλων των υπόλοιπων συμμετεχόντων. Ειδικά η παρουσία δύναμης αγοράς στην στρατηγική ισορροπία (Γράφημα 7.6) αυξάνει αυτό το ασφαλιστρο και το κάνει σχεδόν ισοδύναμο και για τον κίνδυνο των πληροφορημένων και για τον κίνδυνο των απληροφόρητων.

8 Επίλογος

Παρουσιάσαμε μια αγορά με ασυμμετρία πληροφόρησης μεταξύ τριών τύπων συναλλασσομένων (πληροφορημένοι, απληροφόρητοι και noise traders), στην οποία μπορεί να υπάρξουν τρεις διαφορετικές ισορροπίες ανάλογα με τις εκτιμήσεις των συμμετεχόντων. Ξεκινήσαμε με την πιο απλή ισορροπία, την *Naïve ανταγωνιστική ισορροπία*, όπου όλοι θεωρούν τις τιμές δεδομένες και δεν εξάγουν πληροφορία μέσω αυτών. Σε αυτήν την ισορροπία υπάρχει μεγάλη ευαισθησία και των ποσοτήτων που συναλλάσσονται και των τιμών ως προς τον κίνδυνο που είναι διατεθειμένοι οι συμμετέχοντες να έχουν.

Συνεχίσαμε στην *REE ανταγωνιστική ισορροπία*, στην οποία πλέον γίνεται εξαγωγή της πληροφορίας μέσω των τιμών και επιπλέον οι ποσότητες και οι τιμές γίνονται λιγότερο ελαστικές. Επιπρόσθετα, είδαμε την κατά Pareto αποτελεσματικότητα αυτής της ισορροπίας, παρατηρώντας ότι η υποβολή μικρού ρίσκου και από τους πληροφορημένους και από τους απληροφόρητους οδηγεί σε περισσότερα κέρδη και για τους δύο.

Τέλος, καταλήξαμε στην *BNE στρατηγική ισορροπία*, όπου κάθε (ορθολογικός) συναλλασσόμενος αντιλαμβάνεται τη δύναμη αγοράς του και δρα αναλογιζόμενος και των συμπεριφορών των αντισυμβαλλομένων του. Εδώ, οι ποσότητες που συναλλάσσονται οι συμμετέχοντες έχουν μικρή απόκλιση μεταξύ τους και η μεταβολή των τιμών γίνεται σχεδόν γραμμική. Παρόλο που δεν είναι κατά Pareto αποτελεσματική, το θετικό περιθώριο κέρδους, σε σύγκριση με την ανταγωνιστική ισορροπία, θα οδηγήσει όλους τους συμβαλλόμενους σε αυτήν την συμπεριφορά.

9 Παράρτημα

9.1 Προβολικό Θεώρημα

Λόγω της υπόθεσης της κανονικότητας των τ.μ., αναφέρουμε μία από τις βασικότερες ιδιότητες της κανονικής κατανομής, το προβολικό θεώρημα (projection theorem). Το θεώρημα αυτό εφαρμόζεται στην εύρεση δεσμευμένων αναμενόμενων τιμών και διακυμάνσεων οι οποίες είναι αναγκαίες στα πλαίσια της τιμολόγησης του αξιογράφου και των εκτιμήσεων των συναλλασσόμενων.

Θεώρημα 9.1: Έστω δύο πολυδιάστατες κανονικές τ.μ. $\tilde{U}_{k \times 1}$ και $\tilde{W}_{(n-k) \times 1}$ για τις οποίες ισχύει:

$$(\tilde{U}, \tilde{W}) \sim N \left(\begin{bmatrix} E(\tilde{U}) \\ E(\tilde{W}) \end{bmatrix}_{n \times 1}, \begin{bmatrix} Var(\tilde{U}) & Cov(\tilde{U}, \tilde{W}) \\ Cov(\tilde{W}, \tilde{U}) & Var(\tilde{W}) \end{bmatrix}_{n \times n} \right)$$

Τότε και η δεσμευμένη τ.μ. $(\tilde{U}|W = w)$ ακολουθεί κανονική κατανομή με:

$$E(\tilde{U}|W = w) = E(\tilde{U}) + Cov(\tilde{U}, \tilde{W}) (Var(\tilde{W}))^{-1} (w - E(\tilde{W})) \quad (9.1)$$

$$Var(\tilde{U}|W = w) = Var(\tilde{U}) - Cov(\tilde{U}, \tilde{W}) (Var(\tilde{W}))^{-1} Cov(\tilde{W}, \tilde{U}) \quad (9.2)$$

Μία σημαντική παρατήρηση είναι ότι λόγω των ιδιοτήτων της κανονικής κατανομής, η δεσμευμένη διακύμανση (9.2) είναι ανεξάρτητη της πραγματοποίησης της τ.μ. \tilde{W} .

9.2 Διαδικασία Επίλυσης Συστημάτων Κεφαλαίου 5²³

Βρίσκουμε αρχικά τυχαίους αριθμούς i_1, i_2, z βασιζόμενοι στις κατανομές τους (υπενθυμίζουμε ότι για $n = 1, 2$, $\tilde{\epsilon}_n \sim N(0, 1/3 + 1/2)$ και $\tilde{z} \sim N(0, 1)$):

```
i1=normrnd(0, sqrt(1/3+1/2))
```

```
i1 =
```

```
0.4908
```

```
i2=normrnd(0, sqrt(1/3+1/2))
```

```
i2 =
```

```
1.6741
```

²³ Οι εντολές που παρουσιάζονται στις ενότητες 9.2 και 9.3 είναι μόνο για τον συνδυασμό $(i_1, i_2, z, -z)$. Οι υπόλοιποι συνδυασμοί προκύπτουν με τον ίδιο τρόπο εναλλάσσοντας κατάλληλα τα πρόσημα των i_1, i_2, z στις εντολές που εμφανίζονται.

```
z=normrnd(0, 1)
```

```
z =
```

```
-2.2588
```

Ξεκινώντας από την *Naive ανταγωνιστική ισορροπία*, κατασκευάζουμε τα γραφήματα των προγραμμάτων ζήτησης, χρησιμοποιώντας τα προγράμματα ζήτησης (5.2) και την τιμή εκκαθάρισης (5.3). Παραθέτουμε τις εντολές του συνδυασμού $(i_1, i_2, z, -z)$ από το Γράφημα 5.1:

```
p_NaiveEquil=2/27*(3/2*(i1+i2)-z)
```

```
p_NaiveEquil =
```

```
0.4079
```

```
p_NaiveEquilPosz=2/27*(3/2*(i1+i2)+z)
```

```
p_NaiveEquilPosz =
```

```
0.0732
```

```
array_p=linspace(-3,3);
```

```
X1_Naive=(-15/4*array_p)+(3/2*i1);
```

```
X2_Naive=(-15/4*array_p)+(3/2*i2);
```

```
Y_Naive=-3*array_p;
```

```
X1_NaiveEquil=(-15/4*p_NaiveEquil)+(3/2*i1);
```

```
X2_NaiveEquil=(-15/4*p_NaiveEquil)+(3/2*i2);
```

```
Y_NaiveEquil=-3*p_NaiveEquil;
```

```
X1_NaiveEquilPosz=(-15/4*p_NaiveEquilPosz)+(3/2*i1);
```

```
X2_NaiveEquilPosz=(-15/4*p_NaiveEquilPosz)+(3/2*i2);
```

```
Y_NaiveEquilPosz=-3*p_NaiveEquilPosz;
```

```
plot(array_p,X1_Naive, array_p,X2_Naive, array_p,Y_Naive,
```

```
p_NaiveEquil,X1_NaiveEquil,'o', p_NaiveEquil,X2_NaiveEquil,'o',
```

```
p_NaiveEquil,Y_NaiveEquil,'o',
```

```
p_NaiveEquilPosz,X1_NaiveEquilPosz,'o',
```

```
p_NaiveEquilPosz,X2_NaiveEquilPosz,'o',
```

```
p_NaiveEquilPosz,Y_NaiveEquilPosz,'o')
```

```
hold on
```

```
plot(linspace(-3,3), linspace(0,0), 'k-');
```

```
plot(linspace(0,0), linspace(-3,3), 'k-');
```

Συνεχίζουμε στην *ανταγωνιστική ισορροπία REE* όπου χρησιμοποιούμε τις σχέσεις (5.4) και (5.5) για να φτιάξουμε τα προγράμματα ζήτησης από το Γράφημα 5.2:

```
p_CompEquil=8/37*(i1+i2-z)
```

```
p_CompEquil =
```

```
0.9565
```

```
p_CompEquilPosz=8/37*(i1+i2+z)
```

```

p_CompEquilPosz =
    -0.0203

X1_Comp=(-31/16*array_p)+i1;
X2_Comp=(-31/16*array_p)+i2;
Y_Comp=-3/8*array_p;
X1_CompEquil=(-31/16*p_CompEquil)+i1;
X2_CompEquil=(-31/16*p_CompEquil)+i2;
Y_CompEquil=-3/8*p_CompEquil;
X1_CompEquilPosz=(-31/16*p_CompEquilPosz)+i1;
X2_CompEquilPosz=(-31/16*p_CompEquilPosz)+i2;
Y_CompEquilPosz=-3/8*p_CompEquilPosz;
plot(array_p,X1_Comp, array_p,X2_Comp, array_p,Y_Comp,
p_CompEquil,X1_CompEquil,'o', p_CompEquil,X2_CompEquil,'o',
p_CompEquil,Y_CompEquil,'o', p_CompEquilPosz,X1_CompEquilPosz,'o',
p_CompEquilPosz,X2_CompEquilPosz,'o',
p_CompEquilPosz,Y_CompEquilPosz,'o')
hold on
plot(linspace(-3,3), linspace(0,0), 'k-');
plot(linspace(0,0), linspace(-3,3), 'k-');

```

Τέλος, για την *στρατηγική ισορροπία BNE*, κατασκευάζουμε πρώτα την συνάρτηση *StrategicEquil* στην οποία ορίζουμε το σύστημα εξισώσεων (5.6) - (5.9) που θα λύσει η MatLab:

```

function [ Eq ] = StrategicEquil(param)
% ξ_I=param(1)  ξ_U=param(2)  ζ=param(3)  γ=param(4)
% N=2  M=2  ρ_I=4/3  ρ_U=1  r_e=2  (σ_z)^2=1
Eq(1)=2*(param(1)+param(2))-1;
Eq(2)=(2/(param(4)^2+2))*(1-param(1))-1+param(3);
Eq(3)=param(4)*2/3-(2/(param(4)^2+2))*(1-2*param(3))/(1-param(3));
Eq(4)=param(2)*(param(3)*((7*param(4)^2+3)/(param(4)^2+1))/(1-
param(2))+0.5*(7*param(4)^3+10*param(4))/(param(4)^2+2))-
param(3)*(7*param(4)^2+3)/(param(4)^2+1)+(7*param(4)^4+10*param(4)^2)
/((param(4)^2+1)*(param(4)^2+2));
end

```

```

str_paramStart=[0,0,0,0];
str_paramEquil=fsolve(@(x)StrategicEquil(x),str_paramStart)

```

Equation solved.

fsolve completed because the vector of function values is near zero as measured by the default value of the function tolerance, and the problem appears regular as measured by the gradient.

<stopping criteria details>

```

str_paramEquil =
    0.3265    0.1735    0.3940    0.4721

```

Καταλήξαμε ότι $\xi_I = 0.3265$, $\xi_U = 0.1735$, $\zeta = 0.3940$, $\gamma = 0.4721$. Μάλιστα, αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα στην (4.15) βλέπουμε ότι ικανοποιούνται και οι περιορισμοί:

$$\gamma = 0.4721 > 0$$

$$0 < \zeta = 0.3940 \leq \frac{1}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi_I = 0.3265 \\ \frac{1}{N} = \frac{1}{2} \\ \frac{\varphi_U}{N} = \frac{\gamma^2}{2(\gamma^2 + 1)} = 0.0911 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\varphi_U}{N} < \xi_I < \frac{1}{N}$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi_U = 0.1735 \\ \frac{1 - \varphi_U}{M} = \frac{1}{2(\gamma^2 + 1)} = 0.4089 \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < \xi_U < \frac{1 - \varphi_U}{M}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα τις σχέσεις (4.2), (4.4), (4.7), (4.8) και (5.6) για να βρούμε τα προγράμματα ζήτησης και την τιμή εκκαθάρισης για τον συνδυασμό $(i_1, i_2, z, -z)$ (Γράφημα 5.3):

```
str_rI=(7*str_paramEquil(4)^2+10)/( str_paramEquil(4)^2+2);
str_l=(2*str_paramEquil(3))/(str_rI*str_paramEquil(4));
str_bI= str_paramEquil(1)/str_l;
str_bU= str_paramEquil(2)/str_l;
str_lU=1/(2*str_bI+str_bU);
str_pU=str_lU*( str_paramEquil(4)*(i1+i2)-z);
p_StrEquil=(str_pU)/(1+str_lU*str_bU)

p_StrEquil =

    1.0531

str_pUPosz=str_lU*( str_paramEquil(4)*(i1+i2)+z);
p_StrEquilPosz=(str_pUPosz)/(1+str_lU*str_bU)

p_StrEquilPosz =

   -0.3970

X1_Str=(-str_bI*array_p)+( str_paramEquil(4)*i1);
X2_Str=(-str_bI*array_p)+( str_paramEquil(4)*i2);
Y_Str=-str_bU*array_p;
X1_StrEquil=(-str_bI*p_StrEquil)+( str_paramEquil(4)*i1);
X2_StrEquil=(-str_bI*p_StrEquil)+( str_paramEquil(4)*i2);
Y_StrEquil=-str_bU*p_StrEquil;
X1_StrEquilPosz=(-str_bI*p_StrEquilPosz)+( str_paramEquil(4)*i1);
X2_StrEquilPosz=(-str_bI*p_StrEquilPosz)+( str_paramEquil(4)*i2);
Y_StrEquilPosz=-str_bU*p_StrEquilPosz;
plot(array_p,X1_Str, array_p,X2_Str, array_p,Y_Str,
p_StrEquil,X1_StrEquil,'o', p_StrEquil,X2_StrEquil,'o',
p_StrEquil,Y_StrEquil,'o', p_StrEquilPosz,X1_StrEquilPosz,'o',
```

```
p_StrEquilPosz,X2_StrEquilPosz,'o',
p_StrEquilPosz,Y_StrEquilPosz,'o')
hold on
plot(linspace(-3,3), linspace(0,0), 'k-');
plot(linspace(0,0), linspace(-3,3), 'k-');
```

9.3 Διαδικασία Επίλυσης Συστημάτων Κεφαλαίου 6

Για την *Naive ανταγωνιστική ισορροπία* (Γράφημα 6.1), χρησιμοποιούμε την σχέση (6.1) για να βρούμε την τιμή εκκαθάρισης για όλα τα πιθανά ρ_I, ρ_U :

```
rhoI=linspace(10^(-10),3);
rhoU=linspace(10^(-10),3);
p_NaiveInAv=zeros(1,100);
for i=1:100
p_NaiveInAv(i)=(1/(10/rhoI(i)+6))*(2/rhoI(i)*(i1+i2)-z);
end
p_NaiveUnAv=zeros(1,100);
for i=1:100
p_NaiveUnAv(i)=(1/(10+6/rhoU(i)))*(2*(i1+i2)-z);
end
p_NaiveInAvPosz=zeros(1,100);
for i=1:100
p_NaiveInAvPosz(i)=(1/(10/rhoI(i)+6))*(2/rhoI(i)*(i1+i2)+z);
end
p_NaiveUnAvPosz=zeros(1,100);
for i=1:100
p_NaiveUnAvPosz(i)=(1/(10+6/rhoU(i)))*(2*(i1+i2)+z);
end
plot(rhoI, p_NaiveInAv, rhoU, p_NaiveUnAv, rhoI, p_NaiveInAvPosz,
rhoU, p_NaiveUnAvPosz)
hold on
plot(linspace(-3,3), linspace(0,0), 'k-');
plot(linspace(0,0), linspace(-3,3), 'k-');
```

Για την *ανταγωνιστική ισορροπία REE*, κατασκευάζουμε πρώτα την συνάρτηση *CompAv* στην οποία ορίζουμε το σύστημα εξισώσεων (6.2) - (6.4) που θα λύσει η MatLab, και έπειτα βρίσκουμε την τιμή εκκαθάρισης από την (3.10):

```
function [ Eq ] = CompAv(comp_coeff,rhoI,rhoU)
% beta_I=comp_coeff(1) beta_U=comp_coeff(2) gamma=comp_coeff(3)
% N=2 M=2 r_e=2 (sigma_z)^2=1
Eq(1) = rhoI*(comp_coeff(3)^3+2*comp_coeff(3))-4;
Eq(2) = comp_coeff(1)-((7*comp_coeff(3)^3+10*comp_coeff(3)-
4*comp_coeff(3)^2*(comp_coeff(1)+comp_coeff(2)))/(rhoI*(comp_coeff(3)
^3+2*comp_coeff(3))));
Eq(3) = comp_coeff(2)-((7*comp_coeff(3)^3+3*comp_coeff(3)-
4*comp_coeff(3)^2*(comp_coeff(1)+comp_coeff(2)))/(rhoU*(comp_coeff(3)
^3+comp_coeff(3))));
end

comp_coeffStart=[0,0,0.1];
comp_coeffInAv=zeros(100,3);
```

```

for i=1:100
comp_coeffInAv(i,:)=fsolve(@(x)CompAv(x,rhoI(i),1),comp_coeffStart);
end
p_CompInAv=zeros(100,1);
for i=1:100
p_CompInAv(i)=(1/(2*(comp_coeffInAv(i,1)+comp_coeffInAv(i,2))))*(comp_
_coeffInAv(i,3)*(i1+i2)-z);
end
comp_coeffUnAv=zeros(100,3);
for i=1:100
comp_coeffUnAv(i,:)=fsolve(@(x)CompAv(x,1,rhoU(i)),comp_coeffStart);
end
p_CompUnAv=zeros(100,1);
for i=1:100
p_CompUnAv(i)=(1/(2*(comp_coeffUnAv(i,1)+comp_coeffUnAv(i,2))))*(comp_
_coeffUnAv(i,3)*(i1+i2)-z);
end
p_CompInAvPosz=zeros(100,1);
for i=1:100
p_CompInAvPosz(i)=(1/(2*(comp_coeffInAv(i,1)+comp_coeffInAv(i,2))))*(
comp_coeffInAv(i,3)*(i1+i2)+z);
end
p_CompUnAvPosz=zeros(100,1);
for i=1:100
p_CompUnAvPosz(i)=(1/(2*(comp_coeffUnAv(i,1)+comp_coeffUnAv(i,2))))*(
comp_coeffUnAv(i,3)*(i1+i2)+z);
end
plot(rhoI(2:100),p_CompInAv(2:100), rhoU(2:100),p_CompUnAv(2:100),
rhoI(2:100),p_CompInAvPosz(2:100), rhoU(2:100),p_CompUnAvPosz(2:100))
hold on
plot(linspace(-3,3), linspace(0,0), 'k-');
plot(linspace(0,0), linspace(-3,3), 'k-');

```

Αντίστοιχα και για την *στρατηγική ισορροπία BNE*, κατασκευάζουμε πρώτα την συνάρτηση *StrategicAv* στην οποία ορίζουμε το σύστημα εξισώσεων (6.5) - (6.8), και έπειτα βρίσκουμε την τιμή εκκαθάρισης από την (5.10):

```

function [ Eq ] = StrategicAv(param, rhoI, rhoU)
% ξ_I=param(1)  ξ_U=param(2)  ζ=param(3)  γ=param(4)
% N=2          M=2          r_e=2      (σ_z)^2=1
Eq(1)=2*(param(1)+param(2))-1;
Eq(2)=(2/(param(4)^2+2))*(1-param(1))-1+param(3);
Eq(3)=param(4)*rhoI/2-(2/(param(4)^2+2)*(1-2*param(3)))/(1-param(3));
Eq(4)=param(2)*(param(3)*((7*param(4)^2+3)/(param(4)^2+1))/(1-
param(2))+0.5*rhoU*(7*param(4)^3+10*param(4))/(param(4)^2+2)-
param(3)*(7*param(4)^2+3)/(param(4)^2+1)+(7*param(4)^4+10*param(4)^2)
/((param(4)^2+1)*(param(4)^2+2));
end

str_paramInAv=zeros(100,4);
for i=1:100
str_paramInAv(i,:)=fsolve(@(x)StrategicAv(x,rhoI(i),1),str_paramStart
);
end
str_rIInAv=zeros(100,1);
for i=1:100
str_rIInAv(i)=(7*str_paramInAv(i,4)^2+10)/(str_paramInAv(i,4)^2+2);

```



```

end
str_lInAv=zeros(100,1);
for i=1:100
str_lInAv(i)=(2*str_paramInAv(i,3))/(str_rInAv(i)*str_paramInAv(i,4)
);
end
str_bIInAv=zeros(100,1);
for i=1:100
str_bIInAv(i)=str_paramInAv(i,1)/str_lInAv(i);
end
str_bUInAv=zeros(100,1);
for i=1:100
str_bUInAv(i)=str_paramInAv(i,2)/str_lInAv(i);
end
str_lUInAv=zeros(100,1);
for i=1:100
str_lUInAv(i)=1/(2*str_bIInAv(i)+str_bUInAv(i));
end
str_pUInAv=zeros(100,1);
for i=1:100
str_pUInAv(i)=str_lUInAv(i)*( str_paramInAv(i,4)*(i1+i2)-z);
end
p_StrInAv=zeros(100,1);
for i=1:100
p_StrInAv(i)=(str_pUInAv(i))/(1+str_lUInAv(i)*str_bUInAv(i));
end
str_paramUnAv=zeros(100,4);
for i=1:100
str_paramUnAv(i,:)=fsolve(@(x)StrategicAv(x,1,rhoU(i)),str_paramStart
);
end
str_rIUnAv=zeros(100,1);
for i=1:100
str_rIUnAv(i)=(7*str_paramUnAv(i,4)^2+10)/( str_paramUnAv(i,4)^2+2);
end
str_lUnAv=zeros(100,1);
for i=1:100
str_lUnAv(i)=(2*str_paramUnAv(i,3))/(str_rIUnAv(i)*str_paramUnAv(i,4)
);
end
str_bIUnAv=zeros(100,1);
for i=1:100
str_bIUnAv(i)=str_paramUnAv(i,1)/str_lUnAv(i);
end
str_bUUnAv=zeros(100,1);
for i=1:100
str_bUUnAv(i)=str_paramUnAv(i,2)/str_lUnAv(i);
end
str_lUUnAv=zeros(100,1);
for i=1:100
str_lUUnAv(i)=1/(2*str_bIUnAv(i)+str_bUUnAv(i));
end
str_pUUnAv=zeros(100,1);
for i=1:100
str_pUUnAv(i)=str_lUUnAv(i)*( str_paramUnAv(i,4)*(i1+i2)-z);
end
p_StrUnAv=zeros(100,1);
for i=1:100
p_StrUnAv(i)=(str_pUUnAv(i))/(1+str_lUUnAv(i)*str_bUUnAv(i));
end
str_pUInAvPosz=zeros(100,1);

```

```

for i=1:100
str_pUInAvPosz(i)=str_lUInAv(i)*( str_paramInAv(i,4)*(i1+i2)+z);
end
p_StrInAvPosz=zeros(100,1);
for i=1:100
p_StrInAvPosz(i)=(str_pUInAvPosz(i))/(1+str_lUInAv(i)*str_bUInAv(i));
end
str_pUUnAvPosz=zeros(100,1);
for i=1:100
str_pUUnAvPosz(i)=str_lUUnAv(i)*( str_paramUnAv(i,4)*(i1+i2)+z);
end
p_StrUnAvPosz=zeros(100,1);
for i=1:100
p_StrUnAvPosz(i)=(str_pUUnAvPosz(i))/(1+str_lUUnAv(i)*str_bUUnAv(i));
end
plot(rhoI, p_StrInAv, rhoU, p_StrUnAv, rhoI, p_StrInAvPosz, rhoU,
p_StrUnAvPosz)
hold on
plot(linspace(-3,3), linspace(0,0), 'k-');
plot(linspace(0,0), linspace(-3,3), 'k-');

```

9.4 Διαδικασία Επίλυσης Συστημάτων Κεφαλαίου 7

Ξεκινάμε βρίσκοντας 10.000 διαφορετικούς συνδυασμούς (i_1, i_2, z) μέσω των κατανομών τους ($\tilde{i}_n \sim N(0, 1/3 + 1/2)$ και $\tilde{z} \sim N(0, 1)$). Για την εύρεση των τιμών εκκαθάρισης για κάθε ισορροπία, σταθεροποιούμε τους δείκτες αποστροφής κινδύνου σε 4 τιμές ($\rho_I = \{0.1, 1, 2, 3\}$ και $\rho_U = \{0.1, 1, 2, 3\}$). Για κάθε σταθερή τιμή ρ_I (ή ρ_U αντίστοιχα), αφήνουμε το ρ_U (ή ρ_I αντίστοιχα) να παίρνει 100 διαφορετικές τιμές στο διάστημα $[0.1, 3]$. Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε σε $(4 + 4) * 100 * 10.000 = 8.000.000$ διαφορετικές τιμές εκκαθάρισης. Για τις *REE* και *BNE* ισορροπίες, βρίσκουμε τα μέσα certainty equivalents και τα μέσα κέρδη των noise traders μέσω των τύπων που είδαμε (Πίνακας 7.1)

```

SignalNoise=zeros(10000,3);
for i=1:10000
SignalNoise(i,1)=normrnd(0,sqrt(1/3+1/2));
SignalNoise(i,2)=normrnd(0,sqrt(1/3+1/2));
SignalNoise(i,3)=normrnd(0,1);
end
i1=SignalNoise(:,1);
i2=SignalNoise(:,2);
z=SignalNoise(:,3);
rhoI=linspace(0.1,3);
rhoU=linspace(0.1,3);

```

Αρχικά για την *REE* ανταγωνιστική ισορροπία, επικαλούμαστε πάλι την συνάρτηση *CompAn* που κατασκευάσαμε για την επίλυση των εξισώσεων (6.2) - (6.4), και υπολογίζουμε την τιμή εκκαθάρισης (3.10). Για τα certainty equivalents βρίσκουμε επιπρόσθετα και τα $r_U, r_I, \varphi_U, \varphi_I$:

```

comp_coeffStart=[0,0,0.0001];
comp_coeff=zeros(800,3);
for a=1:100
comp_coeff(a,:)=fsolve(@(x)CompAv(x,0.1,rhoU(a)),comp_coeffStart);
end
for b=101:200
comp_coeff(b,:)=fsolve(@(x)CompAv(x,1,rhoU(b-100)),comp_coeffStart);
end
for c=201:300
comp_coeff(c,:)=fsolve(@(x)CompAv(x,2,rhoU(c-200)),comp_coeffStart);
end
for d=301:400
comp_coeff(d,:)=fsolve(@(x)CompAv(x,3,rhoU(d-300)),comp_coeffStart);
end
for e=401:500
comp_coeff(e,:)=fsolve(@(x)CompAv(x,rhoI(e-400),0.1),comp_coeffStart);
end
for f=501:600
comp_coeff(f,:)=fsolve(@(x)CompAv(x,rhoI(f-500),1),comp_coeffStart);
end
for g=601:700
comp_coeff(g,:)=fsolve(@(x)CompAv(x,rhoI(g-600),2),comp_coeffStart);
end
for h=701:800
comp_coeff(h,:)=fsolve(@(x)CompAv(x,rhoI(h-700),3),comp_coeffStart);
end

p_Comp=zeros(10000,800);
for i=1:10000
for a=1:100
p_Comp(i,a)=(1/(2*(comp_coeff(a,1)+comp_coeff(a,2))))*(comp_coeff(a,3)
)*(i1(i)+i2(i))-z(i));
end
for b=101:200
p_Comp(i,b)=(1/(2*(comp_coeff(b,1)+comp_coeff(b,2))))*(comp_coeff(b,3)
)*(i1(i)+i2(i))-z(i));
end
for c=201:300
p_Comp(i,c)=(1/(2*(comp_coeff(c,1)+comp_coeff(c,2))))*(comp_coeff(c,3)
)*(i1(i)+i2(i))-z(i));
end
for d=301:400
p_Comp(i,d)=(1/(2*(comp_coeff(d,1)+comp_coeff(d,2))))*(comp_coeff(d,3)
)*(i1(i)+i2(i))-z(i));
end
for e=401:500
p_Comp(i,e)=(1/(2*(comp_coeff(e,1)+comp_coeff(e,2))))*(comp_coeff(e,3)
)*(i1(i)+i2(i))-z(i));
end
for f=501:600
p_Comp(i,f)=(1/(2*(comp_coeff(f,1)+comp_coeff(f,2))))*(comp_coeff(f,3)
)*(i1(i)+i2(i))-z(i));
end
for g=601:700
p_Comp(i,g)=(1/(2*(comp_coeff(g,1)+comp_coeff(g,2))))*(comp_coeff(g,3)
)*(i1(i)+i2(i))-z(i));
end
for h=701:800
p_Comp(i,h)=(1/(2*(comp_coeff(h,1)+comp_coeff(h,2))))*(comp_coeff(h,3)
)*(i1(i)+i2(i))-z(i));
end

```

```

end
end

Comp_rU=zeros(800,1);
for j=1:800
Comp_rU(j)=(7*comp_coeff(j,3)^2+3)/(comp_coeff(j,3)^2+1);
end
Comp_rI=zeros(800,1);
for j=1:800
Comp_rI(j)=(7*comp_coeff(j,3)^2+10)/(comp_coeff(j,3)^2+2);
end
Comp_phiU=zeros(800,1);
for j=1:800
Comp_phiU(j)=(comp_coeff(j,3)^2)/(comp_coeff(j,3)^2+1);
end
Comp_phiI=zeros(800,1);
for j=1:800
Comp_phiI(j)=(comp_coeff(j,3)^2)/(comp_coeff(j,3)^2+2);
end

C_UREE=zeros(10000,400);
for i=1:10000
for a=1:100
C_UREE(i,a)=(Comp_rU(a)/(2*rhoU(a)))*(p_Comp(i,a)*((4*Comp_phiU(a)*(comp_coeff(a,1)+comp_coeff(a,2)))/(comp_coeff(a,3)*Comp_rU(a)-1))^2);
end
for b=101:200
C_UREE(i,b)=(Comp_rU(b)/(2*rhoU(b-100)))*(p_Comp(i,b)*((4*Comp_phiU(b)*(comp_coeff(b,1)+comp_coeff(b,2)))/(comp_coeff(b,3)*Comp_rU(b)-1))^2);
end
for c=201:300
C_UREE(i,c)=(Comp_rU(c)/(2*rhoU(c-200)))*(p_Comp(i,c)*((4*Comp_phiU(c)*(comp_coeff(c,1)+comp_coeff(c,2)))/(comp_coeff(c,3)*Comp_rU(c)-1))^2);
end
for d=301:400
C_UREE(i,d)=(Comp_rU(d)/(2*rhoU(d-300)))*(p_Comp(i,d)*((4*Comp_phiU(d)*(comp_coeff(d,1)+comp_coeff(d,2)))/(comp_coeff(d,3)*Comp_rU(d)-1))^2);
end
end
MeanC_UREE=zeros(1,400);
for j=1:400
MeanC_UREE(j)=mean(C_UREE(:,j));
end
plot(rhoU,MeanC_UREE(1:100), rhoU,MeanC_UREE(101:200),
rhoU,MeanC_UREE(201:300), rhoU,MeanC_UREE(301:400))

C_IREE=zeros(10000,400);
for i=1:10000
for a=1:100
C_IREE(i,a)=(Comp_rI(a+400)/(2*rhoI(a)))*((2*(1-Comp_phiI(a+400)))/Comp_rI(a+400)*i1(i)+p_Comp(i,a+400)*((4*Comp_phiI(a+400)*(comp_coeff(a+400,1)+comp_coeff(a+400,2)))/(comp_coeff(a+400,3)*Comp_rI(a+400)-1))^2);
end
for b=101:200
C_IREE(i,b)=(Comp_rI(b+400)/(2*rhoI(b-100)))*((2*(1-Comp_phiI(b+400)))/Comp_rI(b+400)*i1(i)+p_Comp(i,b+400)*((4*Comp_phiI

```

```

(b+400)*(comp_coeff(b+400,1)+comp_coeff(b+400,2))/(comp_coeff(b+400,
3)*Comp_rI(b+400))-1))^2;
end
for c=201:300
C_IREE(i,c)=(Comp_rI(c+400)/(2*rhoI(c-200)))*((2*(1-
Comp_phiI(c+400)))/Comp_rI(c+400)*i1(i)+p_Comp(i,c+400)*((4*Comp_phiI
(c+400)*(comp_coeff(c+400,1)+comp_coeff(c+400,2))/(comp_coeff(c+400,
3)*Comp_rI(c+400))-1))^2;
end
for d=301:400
C_IREE(i,d)=(Comp_rI(d+400)/(2*rhoI(d-300)))*((2*(1-
Comp_phiI(d+400)))/Comp_rI(d+400)*i1(i)+p_Comp(i,d+400)*((4*Comp_phiI
(d+400)*(comp_coeff(d+400,1)+comp_coeff(d+400,2))/(comp_coeff(d+400,
3)*Comp_rI(d+400))-1))^2;
end
end
MeanC_IREE=zeros(1,400);
for j=1:400
MeanC_IREE(j)=mean(C_IREE(:,j));
end
plot(rhoI,MeanC_IREE(1:100), rhoI,MeanC_IREE(101:200),
rhoI,MeanC_IREE(201:300), rhoI,MeanC_IREE(301:400))

z_REEGains=zeros(10000,800);
for i=1:10000
for a=1:100
z_REEGains(i,a)=z(i)*p_Comp(i,a);
end
for b=101:200
z_REEGains(i,b)=z(i)*p_Comp(i,b);
end
for c=201:300
z_REEGains(i,c)=z(i)*p_Comp(i,c);
end
for d=301:400
z_REEGains(i,d)=z(i)*p_Comp(i,d);
end
for e=401:500
z_REEGains(i,e)=z(i)*p_Comp(i,e);
end
for f=501:600
z_REEGains(i,f)=z(i)*p_Comp(i,f);
end
for g=601:700
z_REEGains(i,g)=z(i)*p_Comp(i,g);
end
for h=701:800
z_REEGains(i,h)=z(i)*p_Comp(i,h);
end
end
Meanz_REEGains=zeros(1,800);
for j=1:800
Meanz_REEGains(j)=mean(z_REEGains(:,j));
end
plot(rhoU,Meanz_REEGains(1:100), rhoU,Meanz_REEGains(101:200),
rhoU,Meanz_REEGains(201:300), rhoU,Meanz_REEGains(301:400),
rhoI,Meanz_REEGains(401:500), rhoI,Meanz_REEGains(501:600),
rhoI,Meanz_REEGains(601:700), rhoI,Meanz_REEGains(701:800))

```

Έπειτα, για την BNE στρατηγική ισορροπία, χρησιμοποιούμε πάλι την συνάρτηση `StrategicAv` για την επίλυση των εξισώσεων (6.5) - (6.8) και βρίσκουμε τα $r_U, r_I, \varphi_U, \varphi_I, \lambda, \beta_I, \beta_U, \lambda_I, \lambda_U, p_{Um}$ για τον υπολογισμό της τιμής εκκαθάρισης (5.10) και των certainty equivalents. Τέλος, βρίσκουμε και το περιθώριο κέρδους (`spread`) της στρατηγικής έναντι της ανταγωνιστικής ισορροπίας:

```

str_paramStart=[0,0,0,0];
str_param=zeros(800,4);
for a=1:100
str_param(a,:)=fsolve(@(x)StrategicAv(x,0.1,rhoU(a)),str_paramStart);
end
for b=101:200
str_param(b,:)=fsolve(@(x)StrategicAv(x,1,rhoU(b-100)),str_paramStart);
end
for c=201:300
str_param(c,:)=fsolve(@(x)StrategicAv(x,2,rhoU(c-200)),str_paramStart);
end
for d=301:400
str_param(d,:)=fsolve(@(x)StrategicAv(x,3,rhoU(d-300)),str_paramStart);
end
for e=401:500
str_param(e,:)=fsolve(@(x)StrategicAv(x,rhoI(e-400),0.1),str_paramStart);
end
for f=501:600
str_param(f,:)=fsolve(@(x)StrategicAv(x,rhoI(f-500),1),str_paramStart);
end
for g=601:700
str_param(g,:)=fsolve(@(x)StrategicAv(x,rhoI(g-600),2),str_paramStart);
end
for h=701:800
str_param(h,:)=fsolve(@(x)StrategicAv(x,rhoI(h-700),3),str_paramStart);
end

Str_rU=zeros(800,1);
for j=1:800
Str_rU(j)=(7*str_param(j,4)^2+3)/(str_param(j,4)^2+1);
end
Str_rI=zeros(800,1);
for j=1:800
Str_rI(j)=(7*str_param(j,4)^2+10)/(str_param(j,4)^2+2);
end
Str_phiU=zeros(800,1);
for j=1:800
Str_phiU(j)=(str_param(j,4)^2)/(str_param(j,4)^2+1);
end
Str_phiI=zeros(800,1);
for j=1:800
Str_phiI(j)=(str_param(j,4)^2)/(str_param(j,4)^2+2);
end
str_lambda=zeros(800,1);
for j=1:800

```

```

str_lamda(j)=(2*str_param(j,3))/(Str_rI(j)*str_param(j,4));
end
str_bI=zeros(800,1);
for j=1:800
str_bI(j)=str_param(j,1)/str_lamda(j);
end
str_bU=zeros(800,1);
for j=1:800
str_bU(j)=str_param(j,2)/str_lamda(j);
end
str_lI=zeros(800,1);
for j=1:800
str_lI(j)=1/(str_bI(j)+2*str_bU(j));
end
str_lU=zeros(800,1);
for j=1:800
str_lU(j)=1/(2*str_bI(j)+str_bU(j));
end
str_pU=zeros(10000,800);
for i=1:10000
for j=1:800
str_pU(i,j)=str_lU(j)*(str_param(j,4)*(i1(i)+i2(i))-z(i));
end
end
p_Str=zeros(10000,800);
for i=1:10000
for j=1:800
p_Str(i,j)=(str_pU(i,j))/(1+str_lU(j)*str_bU(j));
end
end
end

C_UBNE=zeros(10000,400);
for i=1:10000
for a=1:100
C_UBNE(i,a)=((2*Str_rU(a)*(str_lU(a)+rhoU(a)/Str_rU(a))-
rhoU(a))/(2*Str_rU(a)*(str_lU(a)+rhoU(a)/Str_rU(a))^2))* (p_Str(i,a)*
(2*Str_phiU(a))/(str_lamda(a)*str_param(a,4)*Str_rU(a)-1))^2;
end
for b=101:200
C_UBNE(i,b)=((2*Str_rU(b)*(str_lU(b)+rhoU(b-100)/Str_rU(b))-rhoU(b-
100))/(2*Str_rU(b)*(str_lU(b)+rhoU(b-
100)/Str_rU(b))^2))* (p_Str(i,b)*((2*Str_phiU(b))/(str_lamda(b)*str_pa
ram(b,4)*Str_rU(b)-1))^2;
end
for c=201:300
C_UBNE(i,c)=((2*Str_rU(c)*(str_lU(c)+rhoU(c-200)/Str_rU(c))-rhoU(c-
200))/(2*Str_rU(c)*(str_lU(c)+rhoU(c-
200)/Str_rU(c))^2))* (p_Str(i,c)*((2*Str_phiU(c))/(str_lamda(c)*str_pa
ram(c,4)*Str_rU(c)-1))^2;
end
for d=301:400
C_UBNE(i,d)=((2*Str_rU(d)*(str_lU(d)+rhoU(d-300)/Str_rU(d))-rhoU(d-
300))/(2*Str_rU(d)*(str_lU(d)+rhoU(d-
300)/Str_rU(d))^2))* (p_Str(i,d)*((2*Str_phiU(d))/(str_lamda(d)*str_pa
ram(d,4)*Str_rU(d)-1))^2;
end
end
end
MeanC_UBNE=zeros(1,400);
for j=1:400
MeanC_UBNE(j)=mean(C_UBNE(:,j));
end
end

```

```

plot(rhoU,MeanC_UBNE(1:100), rhoU,MeanC_UBNE(101:200),
rhoU,MeanC_UBNE(201:300), rhoU,MeanC_UBNE(301:400))

C_IBNE=zeros(10000,400);
for i=1:10000
for a=1:100
C_IBNE(i,a)=((2*Str_rI(a+400)*(str_lI(a+400)+rhoI(a)/Str_rI(a+400))-
rhoI(a))/(2*Str_rI(a+400)*(str_lI(a+400)+rhoI(a)/Str_rI(a+400))^2))*
(2*(1-
Str_phiI(a+400)))/Str_rI(a+400)*il(i)+p_Str(i,a+400)*((2*Str_phiI(a+4
00))/(str_lamda(a+400)*str_param(a+400,4)*Str_rI(a+400))-1))^2;
end
for b=101:200
C_IBNE(i,b)=((2*Str_rI(b+400)*(str_lI(b+400)+rhoI(b-
100)/Str_rI(b+400))-rhoI(b-
100))/(2*Str_rI(b+400)*(str_lI(b+400)+rhoI(b-
100)/Str_rI(b+400))^2))*((2*(1-
Str_phiI(b+400)))/Str_rI(b+400)*il(i)+p_Str(i,b+400)*((2*Str_phiI(b+4
00))/(str_lamda(b+400)*str_param(b+400,4)*Str_rI(b+400))-1))^2;
end
for c=201:300
C_IBNE(i,c)=((2*Str_rI(c+400)*(str_lI(c+400)+rhoI(c-
200)/Str_rI(c+400))-rhoI(c-
200))/(2*Str_rI(c+400)*(str_lI(c+400)+rhoI(c-
200)/Str_rI(c+400))^2))*((2*(1-
Str_phiI(c+400)))/Str_rI(c+400)*il(i)+p_Str(i,c+400)*((2*Str_phiI(c+4
00))/(str_lamda(c+400)*str_param(c+400,4)*Str_rI(c+400))-1))^2;
end
for d=301:400
C_IBNE(i,d)=((2*Str_rI(d+400)*(str_lI(d+400)+rhoI(d-
300)/Str_rI(d+400))-rhoI(d-
300))/(2*Str_rI(d+400)*(str_lI(d+400)+rhoI(d-
300)/Str_rI(d+400))^2))*((2*(1-
Str_phiI(d+400)))/Str_rI(d+400)*il(i)+p_Str(i,d+400)*((2*Str_phiI(d+4
00))/(str_lamda(d+400)*str_param(d+400,4)*Str_rI(d+400))-1))^2;
end
end
MeanC_IBNE=zeros(1,400);
for j=1:400
MeanC_IBNE(j)=mean(C_IBNE(:,j));
end
plot(rhoI,MeanC_IBNE(1:100), rhoI,MeanC_IBNE(101:200),
rhoI,MeanC_IBNE(201:300), rhoI,MeanC_IBNE(301:400))

z_BNEGains=zeros(10000,800);
for i=1:10000
for a=1:100
z_BNEGains(i,a)=z(i)*p_Str(i,a);
end
for b=101:200
z_BNEGains(i,b)=z(i)*p_Str(i,b);
end
for c=201:300
z_BNEGains(i,c)=z(i)*p_Str(i,c);
end
for d=301:400
z_BNEGains(i,d)=z(i)*p_Str(i,d);
end
for e=401:500
z_BNEGains(i,e)=z(i)*p_Str(i,e);
end
end

```



```
for f=501:600
z_BNEGains(i,f)=z(i)*p_Str(i,f);
end
for g=601:700
z_BNEGains(i,g)=z(i)*p_Str(i,g);
end
for h=701:800
z_BNEGains(i,h)=z(i)*p_Str(i,h);
end
end
Meanz_BNEGains=zeros(1,800);
for j=1:800
Meanz_BNEGains(j)=mean(z_BNEGains(:,j));
end
plot(rhoU,Meanz_BNEGains(1:100), rhoU,Meanz_BNEGains(101:200),
rhoU,Meanz_BNEGains(201:300), rhoU,Meanz_BNEGains(301:400),
rhoI,Meanz_BNEGains(401:500), rhoI,Meanz_BNEGains(501:600),
rhoI,Meanz_BNEGains(601:700), rhoI,Meanz_BNEGains(701:800))

Spread_U=MeanC_UBNE-MeanC_UREE;
Spread_I=MeanC_IBNE-MeanC_IREE;
plot(rhoU,Spread_U(1:100), rhoU,Spread_U(101:200),
rhoU,Spread_U(201:300), rhoU,Spread_U(301:400))
plot(rhoI,Spread_I(1:100), rhoI,Spread_I(101:200),
rhoI,Spread_I(201:300), rhoI,Spread_I(301:400))
```

Βιβλιογραφία

- Admati, A. R. (1985). A Noisy Rational Expectations Equilibrium for Multi-Asset Securities Markets. *Econometrica*, 53, 629-657.
- Admati, A. R. (1989). Information in Financial Markets: The Rational Expectations Approach. (S. Bhattacharya, & G. M. Constantinides, Eds.) *Financial Markets and Incomplete Information*, 139-152.
- Admati, A. R., & Pfleiderer, P. (1986). A Monopolistic Market for Information. *Journal of Economic Theory*, 39, 400-438.
- Admati, A. R., & Pfleiderer, P. (1990). Direct and Indirect Sale of Information. *Econometrica*, 58, 901-928.
- Aumann, R. J. (1976). Agreeing to Disagree. *The Annals of Statistics Vol.4, No. 6*, 1236-1239.
- Ausubel, L. M., & Cramton, P. (1995). Demand Reduction and Inefficiency in Multi-Unit Auctions. *Mimeo, University of Maryland*.
- Axelrod, R. (1984). *The Evolution of Cooperation*. Basic Books.
- Back, K., & Zender, J. P. (1993). Auctions of Divisible Goods: On the Rationale for the Treasury Experiment. *Review of Financial Studies*, 6(4), 733-764.
- Bhattacharya, U., & Spiegel, M. (1991). Insiders, Outsiders and Market Breakdowns. *The Review of Financial Studies, Vol. 4, No. 2*, 255-282.
- Blume, L., Easley, D., & O'Hara, M. (1994). Market Statistics and Technical Analysis: The Role of Volume. *Journal of Finance*, 49(1), 153-181.
- Brunnermeier, M. K. (2001). *Asset Pricing under Asymmetric Information: Bubbles, Crashes, Technical Analysis, and Herding*. Oxford University Press.
- Cournot, A. A. (1838). *Researches on the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*.
- DeMarzo, P., & Skiadas, C. (1998). Aggregation, Determinacy, and Informational Efficiency for a Class of Economies with Asymmetric Information. *Journal of Economic Theory*, 80, 123-152.
- Diamond, D. W., & Verrecchia, R. E. (1981). Information Aggregation in a Noisy Rational Expectations Economy. *Journal of Financial Economics*, 9, 221-235.

- Grossman, S. J. (1976). On the Efficiency of Competitive Stock Markets Where Traders Have Diverse Information. *Journal of Finance*, 31, 573-585.
- Grossman, S. J., & Stiglitz, J. E. (1980). On the Impossibility of Informationally Efficient Markets. *American Economic Review*, 70, 393-408.
- He, H., & Wang, J. (1995). Differential Information and Dynamic Behavior of Stock Trading Volume. *Review of Financial Studies*, 8(4), 919-972.
- Hellwig, M. F. (1980). On the Aggregation of Information in Competitive Markets. *Journal of Economic Theory*, 22, 477-498.
- Hellwig, M. F. (1982). Rational Expectations Equilibrium with Conditioning on Past Prices: A Mean-Variance Example. *Journal of Economic Theory*, 26, 279-312.
- Klemperer, P., & Meyer, M. (1989). Supply Function Equilibria in Oligopoly under Uncertainty. *Econometrica*, 57(6), 1243-1277.
- Kyle, A. S. (1989). Informed Speculation with Imperfect Competition. *Review of Economic Studies*, 56, 317-356.
- Maskin, E. S., & Riley, J. G. (1989). Optimal Multi-unit Auctions. (F. H. Hahn, Ed.) *The Economics of Missing Markets, Information, and Games*, 312-335.
- Milgrom, P., & Stokey, N. (1982). Information, Trade and Common Knowledge. *Journal of Economic Theory* 26, 17-27.
- Pfeidener, P. (1984). The Volume of Trade and the Variability of Prices: A Framework for Analysis in Noisy Rational Expectations Equilibria.
- Radner, R. (1979). Rational Expectations Equilibrium, Generic Existence and the Information Revealed by Prices. *Econometrica*, 47, 655-678.
- Spulber, D. F. (1999). Market Microstructure.
- Verrechia, R. E. (1982). Information Acquisition in a Noisy Rational Expectations Economy. *Econometrica*, 50, 1415-1430.
- Viswanathan, S., & Wang, J. J. (1997). Market Architecture: Limit-Order Books versus Dealership Markets.
- Viswanathan, S., & Wang, J. J. (1999). Optimal Bidding in Multi-unit Discriminatory Auctions.
- Wang, J. (1994). A Model of Competitive Stock Trading Volume. *Journal of Political Economy*, 102(1), 127-168.

Wilson, R. (1979). Auctions of Shares. *Quarterly Journal of Economics*, 93(4), 675-689.