ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

# Στοχαστική Μοντελοποίηση για τον Υπολογισμό Τυχαίων Απαιτήσεων Θνησιμότητας Μέσω Παραγώγων Θνησιμότητας

Γεώργιος Μαυρομάτης

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην

Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς 2019

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

# Stochastic Modeling for Valuing Options on Mortality - Contingent Claims

by
George Mavromatis

MSc Dissertation
submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece 2019

*Στους γονείς μου*
*και στον αδερφό μου*

# ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Σε όλη την διάρκεια εκπόνησης της διπλωματικής εργασίας, υπήρξαν πολλά αγαπημένα πρόσωπα, που βοήθησαν και στήριξαν την προσπάθεια αυτή και στάθηκαν δίπλα μου. Ένα θερμό ευχαριστώ σε όλους τους συμφοιτητές και συναδέλφους μου, τους φίλους και την οικογένειά μου που με την υπομονή τους με βοήθησαν να ανταπεξέλθω στη μέχρι τώρα πορεία μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή μου Σεβρόγλου Βασίλειο, Αναπληρωτή Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς για τις πολύτιμες γνώσεις και την καθοδήγησή του καθ΄ όλη την διάρκεια της διπλωματικής εργασίας μου. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής, τον κύριο Μαχαιρά Νικόλαο, Καθηγητή του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς καθώς και την κυρία Βερροπούλου Γεωργία, Αναπληρώτρια Καθηγήτρια του ιδίου Τμήματος για την επίβλεψή τους.

# Περιεχόμενα

## Περίληψη

Στην εργασία αυτή θα μελετήσουμε τη στοχαστική μοντελοποίηση τυχαίων απαιτήσεων θνησιμότητας μέσω παραγώγων θνησιμότητας για μελλοντικό κίνδυνο και κίνδυνο επιτοκίου. Οι περισσότερες ασφαλιστικές εταιρίες και κυρίως στις ΗΠΑ επενδύουν τρισεκατομμύρια δολάρια σε πολιτικές που δίνουν την δυνατότητα δικαιώματος προέραισης ακύρωσης συμβολαίων αποταμίευσης με εγγυημένα ποσοστά ακύρωσης. Ωστόσο αν και ο κίνδυνος του επιτοκίου είναι σταθερά προβλέψιμος ο κίνδυνος θνησιμότητας δεν είναι. Με βάση τα παραπάνω μέσω της στοχαστικής μοντελοποίησης η εταιρία μπορεί να ορίσει για τον αντισυμβαλλόμενο δυο στοχαστικές μεταβλητές, αυτή του επιτοκίου και αυτή της θνησιμότητας. Επιπλέον απο αναλογιστική σκοπιά ο υπολογισμός του κινδύνου θνησιμότητας δεν γίνεται για χρόνο t για ένα άτομο ηλικίας x, ως αριθμό $\mu_x(t)$ αλλά ως ένα τυχαίο προθεσμιακό συμβόλαιο $\tilde{\mu}_x(t)$ απο το οποίο αναμένουμε θνησιμότητα ίση με $\mu_x(t) = E(\tilde{\mu}_x(t))$. Συμπερασματικά οι δυο αυτοί κίνδυνοι μπορούν να αντισταθμιστούν και το προϊόν ακύρωσης να τιμολογηθεί με τη βοήθεια χαρτοφυλακίου που περιλαμβάνει ασφάλειες, έσοδα και ομόλογα χωρίς χρεώσεις μέσω διακριτού και συνεχούς πλαισίου τιμολόγησης.

**ABSTRACT**

In this paper we will study the stochastic modeling of accidental mortality claims through future mortality derivatives and interest rate risk. Most insurance companies and especially in the US, they are investing trillions of dollars in policies that allow for the right of cancellation of savings contracts with guaranteed cancellation rates. However, although the interest rate risk is firmly predictable, the risk of mortality is not. Based on the above through the stochastic modeling the company may determine for the counterparty two stochastic variables, that of the interest rate and that of the mortality. Moreover, from the actuarial point of view, the calculation of the mortality risk is not made for a time t for a person aged x as a number $\mu_x(t)$ but as a random term contract $\tilde{\mu}_x(t)$ from which we expect mortality equal to $\mu_x(t) = E(\tilde{\mu}_x(t))$ In conclusion, these two risks can be offset, and the cancellation product can be priced through a portfolio that includes unsecured bills, revenues, and debentures through a distinct and consistent pricing framework.

# Εισαγωγή

Οι ασφαλιστικές εταιρίες αντιμετωπίζουν κινδύνους στη διαχείριση του χαρτοφυλακίου που στη πλειοψηφία τους προέρχονται από τον επενδυτικό κίνδυνο λόγω των επιτοκίων και τον ασφαλιστικό κίνδυνο λόγω των ποσοστών θνησιμότητας αλλά και την αλληλεπίδραση που μπορούν να προκληθούν απο αυτούς τους κινδύνους που περιέχουν τα ασφαλιστήρια συμβόλαια ζωής. Λόγω του είδους των κινδύνων αυτών, το μεγαλύτερο μέρος της έρευνας έχει γίνει για την παρούσα αξία ενός συνόλου συμβολαίων σε ένα πλαίσιο όπου τα δύο παραπάνω ως προς τα ποσοστά και την θνησιμότητα είναι τυχαία.

Οι περισσότερες ασφαλιστικές εταιρείες που εδρεύουν στις ΗΠΑ προσφέρουν στους κατόχους των φορολογικά προστατευόμενων αποταμιευτικών τους προγραμμάτων - γνωστές και ως συμβάσεις μεταβλητής ράντας ζωής το μακροπρόθεσμο δικαίωμα προαίρεσης να ακυρώσουν την πολιτική τους σε προκαθορισμένο επιτόκιο για ένα προκαθορισμένο χρονικό διάστημα. Εάν τα ποσοστά των ραντών ζωής κατά τη στιγμή της απόσβεσης είναι πιο ευνοϊκά από τη συγκεκριμένη καθορισμένη αξία, ο αντισυμβαλλόμενος μπορεί να απαιτήσει τρέχοντα επιτόκια ή να πάει αλλού. Εννοιολογικά, αυτό το δικαίωμα προαίρεσης αγοράς για τους παράγοντες απόδοσης της ράντας μπορεί να θεωρηθεί ως το δικαίωμα, αλλά όχι η υποχρέωση, να αγοράσει μια σταθερή ράντα άμεσης διάρκειας ζωής, για μια καθοριστική τιμή άσκησης κατά τη διάρκεια της σύμβασης. Η εταιρεία έχει παραχωρήσει ουσιαστικά στον αντισυμβαλλόμενο ένα διακίωμα προαίρεσης για δύο υποκείμενες στοχαστικές μεταβλητές. Τα μελλοντικά ποσοστά επιτοκίων και τα μελλοντικά ποσοστά θνησιμότητας. Τα επιτόκια μπορεί να μειωθούν σε σχέση με την εγγυημένη απόδοση - θέτοντας έτσι την ασφαλιστική εταιρεία σε επενδυτικό κίνδυνο. Επίσης, τα πρότυπα θνησιμότητας μπορούν να βελτιωθούν αφήνοντας την ασφαλιστική εταιρεία εκτεθειμένη σε απρόβλεπτο κίνδυνο μακροζωίας. Πιστεύουμε ότι αυτός ο κίνδυνος δεν είναι τετριμμένος, καθώς τουλάχιστον ένα τρισεκατομμύριο δολάρια σε αποταμιευτικά συνταξιοδοτικά προγράμματα επενδύονται σε αυτά τα προϊόντα, σύμφωνα με την Moody Investor Services [11]. Το δικαίωμα προαίρεσης για ακύρωση και η έμμεση έκθεση κινδύνου - θα πρέπει να αντιπαραβάλλεται με μια συναλλαγή άμεσης παράδοσης, άμεσης πρόβλεψης (SPIA) ή με μια προθεσμιακή συναλλαγή για την αγορά μιας ενιαίας πριμοδότησης αναβαλλόμενης ράντας ζωής και τα δύο αυτά με άμεσα κλειδωμένα μη αναστρέψιμα μακροπρόθεσμα επιτόκια. Στην πράξη, οι ασφαλιστικές εταιρείες τείνουν να προστατεύονται με την εγγύηση χαμηλών επιτοκίων σε συνδυασμό με επιθετικές προβλέψεις βελτίωσης της θνησιμότητας για τον πληθυσμό που απολαμβάνει.

Στη Διπλωματική μας εργασία, επιχειρούμε να εκτιμήσουμε τις αξιώσεις που σχετίζονται με τη θνησιμότητα, υποβάλλοντας στοχαστικά μοντέλα του κινδύνου-συν-επιτοκίου. Ευρετικά, αντιμετωπίζουμε την υποκείμενη ράντα ζωής ως ανυπόστατο δεσμό που φέρει το κουπόνι του ομολόγου, όπου η αθέτηση προκαλείται στον εξωγενή χρόνο του θανάτου. Στην πράξη, το δικαίωμα προαίρεσης για να ακυρωθεί είναι μια ενδεχόμενη αξίωση αμερικανικού τύπου σε εταιρικό ομόλογο. Από μια αναλογιστική ματιά, αντί να υπολογίσουμε τη δύναμη θνησιμότητας (βαθμός κινδύνου) στη χρονική στιγμή $t$ για ένα άτομο τώρα ηλικίας $x$, ως αριθμός $\mu_x(t)$ , το θεωρούμε ως τυχαίο μεταβλητό μεταγενέστερο ρυθμό $\tilde{\mu}_x(t)$, του οποίου η προσδοκία είναι η δύναμη θνησιμότητας στην κλασική έννοια ($\mu_x(t) = E[\tilde{\mu}_x(t)]$). Στο μοντέλο μας, θα υποθέσουμε ότι η προθεσμιακή δομή επιτοκίου-συν-θνησιμότητας διαμορφώνεται σε συνεχή χρόνο χρησιμοποιώντας μια προδιαγραφή Gompertz για την αναμενόμενη δύναμη θνησιμότητας.

Η κύρια ποιοτική παρατήρησή μας μπορεί να συνοψιστεί ως εξής. Εκτός από τον κίνδυνο επιτοκίου - ο οποίος είναι καλά κατανοητός στη χρηματοοικονομική βιβλιογραφία - υπάρχουν δύο διαφορετικές κατηγορίες κινδύνου θνησιμότητας, τις οποίες αντιμετωπίζει μια ασφαλιστική εταιρεία κατά την πώληση ενός δικαιώματος προαίρεσης. Η πρώτη κατηγορία χαρακτηρίζουμε ως κίνδυνο «μικρού δείγματος». Αντανακλά την πιθανότητα ότι οποιοσδήποτε συγκεκριμένος κάτοχος δικαιωμάτων προαίρεσης είναι πιο εύρωστος από τον μέσο όρο, με την επιφυλαξη της αντεπιλογής. Όταν η εταιρία αντιμετωπίζει έναν τέτοιο πελάτη, η ασφαλιστική εταιρεία αντιμετωπίζει ένα ρεύμα πληρωμών που είναι μεγαλύτερο από αυτό που αναμενόταν αρχικά βάσει των ποσοστών θνησιμότητας. Ωστόσο, η αναλογιστική θεωρία έχει από καιρό διαπιστώσει ότι αυτός ο συγκεκριμένος κίνδυνος μπορεί να εξαλειφθεί - και ως εκ τούτου δεν πρέπει να τιμολογείται - πωλώντας αρκετά ίδιά συμβόλαια και εκμεταλλευόμενοι το νόμο των μεγάλων αριθμών. Εάν πωληθούν αρκετά τέτοια συμβόλαια, η υλοποίηση θα συγκλίνει στην αναμενόμενη. Ο δεύτερος κίνδυνος είναι πιο λεπτός, είναι ο κίνδυνος η ασφαλιστική εταιρεία να υπερεκτιμήσει τη δύναμη θνησιμότητας του πληθυσμού. Αυτός ο κίνδυνος μακροζωίας δεν μπορεί να αντισταθμιστεί με το να καταφύγουμε στο νόμο μεγάλων αριθμών και την πώληση περισσότερων ραντών ζωής ή δικαιωμάτων προαίρεσης. Ασφαλώς, η ασφαλιστική εταιρεία προβαίνει σε άμεσες προσόδους με αναμενόμενο (δυναμικά προβλεπόμενο) ποσοστό βελτίωσης. Έτσι, η συνολική θνησιμότητα μπορεί να είναι χειρότερη ή καλύτερη από την αναμενόμενη. Επομένως, υποστηρίζουμε ότι αυτός ο δεύτερος τύπος κινδύνου μπορεί να αντισταθμιστεί με την πώληση περισσότερων ασφαλιστηρίων συμβολαίων ζωής. Οι κίνδυνοι αντισταθμίζονται μεταξύ τους. Αν βελτιωθούν τα ποσοστά θνησιμότητας, τότε το λογιστικό βιβλιάριο ασφάλισης ζωής θα παρουσιάσει απροσδόκητα κέρδη.

Στην πράξη, η ασφαλιστική εταιρεία μπορεί να μην είναι σε θέση να πουλήσει ασφάλειες στην ίδια ομάδα ατόμων, επειδή πρόκειται για ωρομίσθιες ράντες ζωής οι νέοι τείνουν να αγοράζουν ασφάλεια ζωής, ενώ οι παλιοί αγοράζουν προσόδους αλλά αυτό είναι απλώς ζήτημα εφαρμογής.Παράλληλα και ασφάλιση για την πληρωμή φόρων περιουσίας διατίθεται στο εμπόριο σε άτομα μεγαλύτερης ηλικίας. Σε πλήρεις αγορές, η αξία του δικαιώματος προαίρεσης είναι η τιμή του υπολειπόμενου κινδύνου, ο οποίος δεν μπορεί να εξαλειφθεί με την πώληση περισσότερων προμηθειών και ασφαλιστηρίων συμβολαίων ζωής. Θα παρουσιάσουμε σύντομα ένα διωνυμικό μοντέλο που θα βοηθήσει να εξηγήσουμε αυτήν την έννοια.

*Η εργασία διαρθρώνεται ως εξής:*

Στο πρώτο κεφάλαιο έχουμε την εισαγωγή-πρόλογο της παρούσα μας εργασίας. Στο δεύτερο κεφάλαιο θερούμε θεμιτό και γίνεται μία εισαγωγή στα βασικές έννοιες - ορισμούς των ραντών ζωής πληρωμών, τα είδη και τις κατηγορίες τους. Επίσης αναφέρουμε και τις έννοιες των ασφαλιστικών και επενδυτικών κινδύνων που διαπραγματευόμαστε στο κύριο μέρος της εργασίας.

Στο τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζονται βασικές μαθηματικές έννοιες απαραίτητες για να εισάγουν τον αναγνώστη στην έννοια της στοχαστικής ανάλυσης. Τέτοιες είναι απο τη θεωρία πιθανοτήτων όπως σ-άλγεβρες, άλγεβρα Borel, μέτρο πιθανότητας.Ταυτόχρονα αναλύουμε την έννοια των τυχαίων μεταβλητών και εν συνεχεία πλέον εισαγόμαστε στην έννοια των στοχαστικών διαδικασιών δίνοντας κάποια παραδείγματα για την καλύτερη κατανόηση. Τέλος συνεχίζουμε με τη μαθηματική παρουσίαση της κίνησης Brown και γίνεται μία εισαγωγή σε αυτή, πιο συγκεκριμένα στην αριθμητική κίνηση Brown και στη γεωμετρική κίνηση Brown. Επίσης, δίνονται παραδείγματα και εφαρμογές οι οποίες βοηθούν στην κατανόσηση των διαδικασιών αυτών.

Στο τέταρτο κεφάλαιο γίνεται μία εισαγωγή στα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα, τα είδη και τη χρησιμότητά τους, όπως επίσης και στη σύγκριση αυτών. Ωστόσο γίνεται μια πιο λεπτομερή ανάλυση για τα δικαιώματα προαίρεσης (Options) απαραίτητα για την κατανοήση του κυρίου κεφαλαίου της εργασίας αφού γίνεται συνεχής αναφορά και διαπραγμάτευση με βάσει τη χρησιμότητας τους για την αντιστάθμιση κινδύνων που αντιμετωπίζει η ασφαλιστική εταιρία.

Τέλος στο πέμπτο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την πλήρη ανάλυση του θέματος μας που είναι η Στοχαστική Τιμολόγηση (Τυχαίων) Απαιτήσεων Θνησιμότητας μέσω Δικαιωμάτων Προαίρεσης. Το μοντέλο μας χωρίζεται σε διακριτό και συνεχή χρόνο και πραγματοποιείται μια πλήρης μαθηματική ανάλυση αυτών.Τέλος παρουσιάζουμε τα αντίστοιχα συμπεράσματά μας.

# Κεφάλαιο 1

# Βασικές Έννοιες - Ράντες Ζωής Πληρωμών-Ασφαλιστικοί και Επενδυτικοί Κίνδυνοι

## 1.1 Εισαγωγή

Στόχος μας στο πρώτο κεφάλαιο είναι η παρουσίαση βασικών ορισμών για συνεχείς και ασυνεχείς ράντες πληρωμών ζωής καθώς και δυο βασικών κινδύνων μιας ασφαλιστικής εταιρίας, που αναλύουμε στην εργασία μας, αυτού της Θνησιμότητας και του Επιτοκίου.Όσο αναφορά τις ράντες, οι ράντες αποτελούν κύριο κομμάτι της θεωρίας για τη παρακολούθηση και τη κατανόηση των Ασφαλίσεων Ζωής ή Θανάτου [18] [21].

Απο την άλλη σε ένα χαρτοφυλάκιο με ασφαλιστήρια ζωής εμπεριέχονται ασφαλιστικοί και επενδυτικοί κίνδυνοι. Στην εργασία, θα επικεντρωθούμε στην ανάλυση του επενδυτικού κινδύνου ή κινδύνου αγοράς (market risk) και συγκεκριμένα αυτού του επιτοκίου και του κίνδυνου θνησιμότητας (mortality risk) όσον αφορά τις ασφαλίσεις ζωής [21].

## 1.2 Βασικές Έννοιες και Ορισμοί Ραντών

Ράντα ή μια σειρά πληρωμών ονομάζεται μία ακολουθία χρηματικών ποσών εισροών ή εκροών οι οποίες όταν λήξουν εισπράττονται ή πληρώνονται σε ίσες απέχουσες μεταξύ τους χρονικές στιγμές και κάθε χρηματικό ποσό λέγεται όρος της ράντας και η χρονική στιγμή στην οποία καταβάλλεται το χρηματικό ποσό λέγεται λήξη αυτής.Επίσης το χρονικό διάστημα μεταξύ της καταβολής των δόσεων της ράντας ονομάζεται περίοδος της ράντας. Για παράδειγμα τριμηνιαία ονομάζεται η ράντα κατα την οποία η δόση καταβάλλεται κάθε τρεις μήνες.Οι ράντες αποτελούν κομμάτι της καθημερινής μας ζωή καθώς μπορούμε να της βρούμε παντού στη καταβολή σύνταξης γήρατος, η πληρωμή του ενοικίου μιας κατοικίας ή η αποπληρωμή των δόσεων ενός δανείου. [;]

- Ληξιπρόθεσμες και Προκαταβλητέες Ράντες:Ληξιπρόθεσμη ονομάζεται η ράντα αν οι όροι της λήγουν στο τέλος κάθε χρονικού διαστήματος (περιόδου), ενώ αν οι όροι λήγουν στην αρχή κάθε περιόδου, η ράντα λέγεται προκαταβλητέα.

- Σταθερές και μη Σταθερές Ράντες: Οι ράντες μπορούν να διακριθούν σε σταθερές και μη σταθερές όταν οι όροι είναι ίσοι μεταξύ τους ή όταν οι όροι τους δεν είναι ίσοι αντίστοιχα αυτο π.χ. μπορεί να συμβεί οταν οι όροι αυξάνουν με ένα σταθερό ποσό ή με ένα σταθερό ρυθμό.

- Αβέβαιες και Βέβαιες Ράντες: Αν η καταβολή των δόσεων της εξαρτάται από τυχαία γεγονότα ονομάζεται αβέβαιη ράντα π.χ. τέτοια ράντα ζωής είναι τα ασφάλιστρα που καταβάλλονται από τον ασφαλισμένο εφόσον βρίσκεται εν ζωή. Ενώ αν η καταβολή των όρων δεν εξαρτάται από τυχαία γεγονότα ορίζεται ως βέβαιη ράντα.

- Πρόσκαιρες και Διηνεκείς Ράντες: Πρόσκαιρες ονομάζονται οι ράντες που αρχίζουν και τελειώνουν μέσα σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, αντίθετα όταν το πλήθος των όρων τους τείνει στο άπειρο, ονομάζονται διηνεκείς.

- Άμεσες και Μέλλουσες Ράντες: Άμεσες ονομάζονται οι ράντες οταν η δόσης της καταβάλεται στην αρχή ή στο τέλος της πρώτης περιόδο αλλά όταν καταβάλεται μετά τη πρώτη περίοδο ονομάζεται μέλλουσα [;] [19].

Σημειώνουμε οτι μοναδιαία ονομάζεται η ράντα όταν ο όρος της ισούται με μια νομισματική μονάδα.
Παρακάτω θα παραθέσουμε βασικούς μαθηματικούς ορισμούς και έννοιες της θεωρίας των ραντών.

## 1.3 Αβέβαιες Ράντες Πληρωμών (Life-Annuities)

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τις ράντες πληρωμών ζωής και θα μελετήσουμε τη περίπτωση των συνεχών αβέβαιων ραντών πληρωμών.

### 1.3.1 Ληξιπρόθεσμες Ισόβιες Συνεχείς Ράντες

Ληξιπρόθεσμη ισόβια συνεχής μοναδιαία ράντα ζωής είναι ίση με $1dt$ κατα την οποία η πληρωμή της μιας νομισματικής μονάδας γίνεται συνεχώς σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα στο τέλος κάθε περιόδου. Η πληρωμή της μπορεί να πραγματοποιηθεί κάθε μέρα, κάθε λεπτό ή ακόμα και κάθε δευτερόλεπτο [18].

Για μία βέβαια ράντα ζωής, που θα αναλύσουμε στην συνέχεια, με συνεχείς πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας, η χρονική διάρκεια πάνω στην οποίο γίνονται οι πληρωμές είναι μία τυχαία μεταβλητή T, που είναι ο υπολλειπόμενος χρόνος ζωής και αντίστοιχα η παρούσα αξία των μελλοντικών πληρωμών ενός ασφαλισμένου είναι μια τυχαία μεταβλητή Z τέτοια ώστε:

$$\mathrm{Z} = \nu^{\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{-\delta \mathrm{T}} \tag{1.1}$$

Ο αναλογιστικός συμβολισμός για το μέσο κόστος ασφάλειας για ατόμο ηλικίας $x$ είναι $\bar{A}_x$. Η μπάρα (-) συμβολίζει ότι το μέσο κόστος υπολογίζεται σε συνεχή βάση.

$$\bar{\mathrm{A}}_x = \mathrm{E(Z)} = \int_0^\infty \nu^{\mathrm{T}} \mathrm{f(t)\,dt} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta \mathrm{T}} \mathrm{f(t)\,dt} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\delta \mathrm{T}}\, {}_t\mathrm{p}_x \mu_{\mathrm{x+t}}\,\mathrm{dt} \tag{1.2}$$

όπου $f(t)$ η συνάρτηση του χρόνου, ${}_tp_x$ η πιθανότητα ένα άτομο ηλικίας $x$ να επιβιώσει μέχρι $x+t$ , και $\mu_{x+t}$ ένταση θνησιμότητας για άτομο ηλικίας $x+t$. Μια καλή εκτίμηση για το ποιο θα είναι το ολικό κόστος ασφαλείας μέσο όρο είναι η μέση τιμή, ταυτόχρονα για την διαχείρηση του κινδύνου λαμβάνεται υπόψιν η μεταβλητότητα του κόστους.Έτσι είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε την διασπορά ενδεχόμενων πληρωμών και πρέπει να υπολογίσουμε το $E(Z^2)$, τότε, όπως υπολογίσαμε το $\bar{A}_x$, έχουμε :

$$\mathrm{Z}^2 = \nu^{2\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{-2\delta \mathrm{T}} \tag{1.3}$$

και συμβολίζουμε αντι για $E(Z^2)$ ως ${}^2\bar{A}_x$ . Ο άνω δείκτης 2 στον συμβολισμό υποδεικνύει ότι η τιμή της έντασης ανατοκισμού διπλασιάζεται και ο τύπος του ${}^2\bar{A}_x$ είναι:

$$^{2}\mathrm{\bar{A}}_x = \mathrm{E(Z^2)} = \int_0^{\propto} \mathrm{e^{-2\delta T} f(t)\, dt} = \int_0^{\propto} \mathrm{e^{-2\delta T}}{}_t\mathrm{p}_x\mu_{\mathrm{x+t}}\, \mathrm{dt} \tag{1.4}$$

Η παρούσα αξία ράντας ζωής είναι μία τυχαία μεταβλητή, συμβολίζεται με $\bar{a}_{\overline{T}|}$ και δίνεται από:

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|} = \int_0^T \nu^T f(t)\, dt = \int_0^T e^{-\delta T} f(t)\, dt = \cdots = \frac{1-e^{\delta T}}{\delta} = \frac{1-\nu^T}{\delta} \tag{1.5}$$

οπου δ είναι ένταση ανατοκισμού.

Απο την σχέση (1.5) για διάφορες χρονικές στιγμές θανάτου παίρνουμε διαφορετική παρούσα αξία.

### Αναλογιστική Παρούσα Αξία $\bar{a}_x$

Η αναλογιστική παρούσα αξία $(APV)$ της $\bar{a}_{\overline{T}|}$ μιας συνεχούς ράντας συμβολίζεται με $\bar{a}_x$ , όπου $x$ η ηλικία του ασφαλισμένου από τη στιγμή που αρχίζουν οι πληρωμές της ράντας. [18] Αυτή ισούται με:

$$E(Y) = \bar{a}_x = E(\bar{a}_{\overline{T}|}) = \int_0^{\propto} \bar{a}_{\overline{T}|} f(t)\, dt = \int_0^{\propto} \bar{a}_{\overline{T}|}{}_t p_x \mu_{x+t}\, dt \tag{1.6}$$

Υπάρχει ένας εναλλακτικός τύπος υπολογισμού, ο οποίος χρησιμοποιεί τη καθαρή προικοδότηση (ασφάλιση μελλοντικού κεφαλαίου) ${}_nE_x$ , η οποία συμβολίζεται επίσης με $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$. Θεωρούμε ότι η καθαρή προικοδότηση ${}_nE_x$ είναι η αναλογιστική παρούσα αξία $(APV)$ της πληρωμής μίας νομισματικής μονάδας που πραγματοποιείται τη χρονική στιγμή $n$, εάν ο ασφαλισμένος είναι εν ζωή την δεδομένη χρονική στιγμή. Ορίζεται ως:

$$\mathrm{A}_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} =_{\mathrm{n}} \mathrm{E_x} = \nu^{\mathrm{n}}\, {}_{\mathrm{n}}\mathrm{p_x} = \mathrm{e_n^{-n\delta}p_x} \tag{1.7}$$

και μέσω παραγοντικής ολοκλήρωσης αποδεικνύουμε ότι:

$$E(Y) = \bar{a}_x = \int_0^{\infty} {}_tE_x \, dt \tag{1.8}$$

Η σχέση (1.8) ισχύει για $E(Y)$ και οχι για $E(Y^2)$.

Μπορούμε να ερμηνεύσουμε την (1.8) ως εξής: μία συνεχής ράντα ζωής μίας νομισματικής μονάδας πληρώνει $1dt$ στο διάστημα $[t, t + dt]$, εφόσον ο ασφαλισμένος βρίσκεται εν ζωή σε αυτό το διάστημα. Η αναλογιστική παρούσα αξία $(APV)$ της είναι ${}_tE_x \ dt$.

Ωστόσο υπάρχει ένας εύκολος τρόπος για να υπολογίσουμε την αναλογιστική παρούσα αξία $\bar{a}_x$, εφόσον είναι γνωστό το μέσο κόστος ασφάλειας για έναν ασφαλιζόμενο ηλικίας $x$, όπου συμβολίζουμε με $\bar{A}_x$ . Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.5) έχουμε ότι:

$$\bar{a}_x = \frac{1 - \bar{A}_x}{\delta} \tag{1.9}$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $E(\nu^T) = \bar{A}_x$ και εφόσον ότι η (1.9) γίνεται:

$$Y = \bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - \nu^T}{\delta} \tag{1.10}$$

ή ισοδύναμα

$$\nu^T + \delta \bar{a}_{\overline{T}|} = 1 \tag{1.11}$$

τότε απο την αναμενόμενη μέση τιμή και στα δύο μέλη της τελευταίας εξίσωσης, έχουμε ότι:

$$E(\nu^T + \delta E(\bar{a}_{\overline{T}|}) = 1 \tag{1.12}$$

Με τη χρησιμοποίηση της σχέσης $E(\bar{a}_{\overline{T}|}) = \bar{a}_x$, δημιουργούμε την σχέση:

$$\bar{A}_x + \delta \bar{a}_x = 1 \tag{1.13}$$

και επομένως αποδείξαμε την (1.9) .

### Το Εκθετικό Μοντέλο Επιβίωσης $\bar{a}_x$

Αν ο υπολοιπόμενος χρόνος ζωής T είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί εκθετική κατανομή με ένταση ανατοκισμού θνησιμότητας μ και ένταση ανατοκισμού επιτοκίου δ, τότε εύκολα μπορούμε να αποδείξουμε ότι ο τύπος υπολογισμού για το μέσο κόστος $\bar{A}_x$ είναι:

$$\mathrm{\bar{A}}_x = \frac{\mu}{\mu + \delta} \tag{1.14}$$

Με την βοήθεια της (1.9) υπολογίζουμε την αναλογιστική παρουσα αξία $\bar{a}_x$ ίση με [18]:

$$\bar{a}_x = \frac{1 - \left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)}{\delta} = \frac{1}{\mu + \delta} \tag{1.15}$$

### Διασπορά της $\bar{a}_{\overline{T}|}$

Ψπολογίζουμε την διασπορά της $\bar{a}_{\overline{T}|}$, απο τον τύπο:

$$V(\bar{a}_{\overline{T}|}) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} \tag{1.16}$$

όπου ${}^2\bar{A}_x = E(Z^2)$ η μέση τιμή της μεταβλητής $Z^2$. Θυμίζουμε ότι ο τύπος για την ${}^2\bar{A}_x$ είναι:

$${}^2\mathrm{\bar{A}}_x = \mathrm{E(Z^2)} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\delta\mathrm{t}}\,{}_t\mathrm{p}_x\mu_{\mathrm{x+t}}\,\mathrm{dt} \tag{1.17}$$

Για να αποδείξουμε την (1.16) παίρνουμε τη διασπορά και στα δύο μέλη της σχέσης:

$$\bar{a}_{\overline{T}|} = \frac{1 - \nu^T}{\delta} \tag{1.18}$$

και απο την ιδιότητα:

$$V(\bar{a}_{\overline{T}|}) = V\left(\frac{1}{\delta} + \frac{-\nu^T}{\delta}\right) = V\left(\frac{-\nu^T}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta^2}V(\nu^T) \tag{1.19}$$

και φτάνουμε στη σχέση:

$$V(\bar{a}_{\overline{T}|}) = V\left(\frac{\nu^T}{\delta^2}\right) = \frac{{}^2\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2}{\delta^2} \tag{1.20}$$

με

$$\mathrm{V}(\nu^{\mathrm{T}}) = {}^2\bar{\mathrm{A}}_x - (\bar{\mathrm{A}}_x)^2 \tag{1.21}$$

### 1.3.2 Πρόσκαιρες Συνεχείς Ράντες Ζωής

Μία $n$-χρόνων πρόσκαιρη ράντα ζωής λειτουργεί όπως μία $n$-χρόνων ασφάλεια ζωής προικοδότησης. Ο ασφαλισμένος λαμβάνει πληρωμές κατά τη διάρκεια των επόμενων $n$-χρόνων μέχρι τη χρονική στιγμή που είναι ζωντανός. Εάν παραμείνει ζωντανός μέχρι τη χρόνική στιγμή $n$ τότε οι πληρωμές σταματούν, και το συνολικό πόσο που συλλέγεται δίνεται από τη παρούσα αξία $\bar{a}_x = \frac{(1-\nu^n)}{\delta}$ δηλαδή οι πληρωμές σταματούν είτε στην ημέρα του θανάτου του ασφαλισμένου είτε σε $n$ χρόνια, ανάλογα με το τι θα συμβεί πρώτο [18]. Η τυχαία μεταβλητή $\Upsilon$ για μία συνεχή ράντα $n$-χρόνων πληρωμών μίας νομισματικής μονάδας είναι:

$$\mathrm{Y} = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T}|} & T < n \\ \bar{a}_{\overline{n}|} & T \geq n \end{cases} \tag{1.22}$$

Ο τύπος επεκτείνεται για μία $n$-χρόνων πρόσκαιρη ράντα ζωής και είναι παρόμοια με αύτη της ράντας ζωής με ελάχιστες αλλαγές. Η μέση τιμή του $\Upsilon$ συμβολίζεται με $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ και ορίζεται ως:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n \bar{a}_{\overline{T}|}({}_tp_x\mu_{x+t})\,dt + \bar{a}_{\overline{n}|}({}_np_x) \tag{1.23}$$

Όπως και προηγουμένως, για τις συνεχείς ισόβιες ράντες ζωής (continuous whole life annuities), έτσι και εδώ κάνουμε παραγοντική ολοκλήρωση και μπορούμε να αποδείξουμε το κάτωθι (εναλλακτικό) τύπο της (1.23)

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n {}_tE_x\,dt \tag{1.24}$$

Ο τύπος ο οποίος συνδέει την αναλογιστική παρούσα αξία πρόσκαιρης ράντας $\bar{a}_{x:\overline{n}|}$ με την παρούσα αξία μίας $n$-χρόνων ασφάλεια προικοδότησης $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{1 - \bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\delta} \tag{1.25}$$

Η διασπορά της πρόσκαιρης ράντα ζωής $n$-χρόνων της μεταβλητής Ψ λειτουργεί ακριβώς όπως η διασπορά της ράντας ζωής και δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{V(Y)} = \frac{{}^2\mathrm{A}_{x:\overline{n}|} - (\bar{\mathrm{A}}_{x:\overline{n}|})^2}{\delta^2} \tag{1.26}$$

### 1.3.3 Μέλλουσες Συνεχείς Ράντες Ζωής

Μία $n$-χρόνων μέλλουσα ράντα είναι μία ράντα ζωής στην οποία οι πληρωμές αρχίζουν σε $n$-χρόνια εάν ο ασφαλισμένος είναι ακόμη ζωντανός στο χρόνο $n$. Εάν T είναι ο εναπομείνοντας χρόνος ζωής της τυχαίας μεταβλητής, η τυχαία μεταβλητή Ψ για μία ν-χρόνων μέλλουσα ράντα είναι : $3x^2 + 5x = 10$

$$\mathrm{Y} = \begin{cases} 0 & T < n \\ \nu^n \bar{a}_{\overline{T-n}|} & T \geq n \end{cases} \tag{1.27}$$

Η παρούσα αξία μίας $n$-χρόνων μέλλουσας ράντας της μίας νομισματικής μονάδας για ηλικία ασφαλισμένου $x$ συμβολίζεται με ${}_{n|}\bar{a}_x$. Η αναλογιστική παρούσα αξία σε ηλικία $x$ του ασφαλισμένου μιας ολόκληρης ράντας ζωής ξεκινά στην ηλικία $x + n$ και δίνεται από το παρακάτω τύπο:

$${}_{n|}\bar{a}_x =_n E_x \bar{a}_{x+n} = \nu^n ({}_n p_x) \bar{a}_{x+n} \tag{1.28}$$

**ΣΧΟΛΙΟ:** Αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση που συνδέει τις αναλογιστικές παρούσες αξίες μεταξύ τους, δίνεται από το κάτωθι τύπο:

$$\bar{a}_x = \bar{a}_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{a}_x \tag{1.29}$$

Μία ισόβια συνεχής ράντα ζωής μπορεί να αντικατασταθεί από μία $n$-χρόνων πρόσκαιρη ράντα για να καλύψει τα επόμενα $n$ χρόνια και από μία $n$-χρόνων μέλλουσα ράντα για να καλύψει τον εναπομείνοντα χρόνο ζωής.

## 1.4 Βέβαιες Ράντες Πληρωμών

### 1.4.1 Ληξιπρόθεσμες Ράντες

Στην υποενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις άμεσες ληξιπρόθεσμες ράντες [18]. Υποθέτουμε ότι έχουμε μία ράντα για $n$-περιόδους στο διάστημα $[k-1,k]$, $k=1,2,\cdots,n$ με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας.Ορίζουμε την άμεση ληξιπρόθεσμη ράντα ως εξής:

Η παρούσα αξία (present value, PV) της ράντας αυτής συμβολίζεται με $PV = a_{\overline{n}|} = \nu + \nu^2 + \nu^3 + ... + \nu^n$ η οποία είναι ένα άθροισμα όρων γεωμετρικής πρόοδου με λόγο $\lambda = \nu$ και πρώτο όρο $\alpha_1 = \nu$. Τελικά η παρούσα αξία αυτής της ράντας σύμφωνα με το τύπο αθροίσματος της γεωμετρικής προόδου είναι:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-\nu^n}{i} \tag{1.30}$$

όπου το $i$ το επιτόκιο για τις πληρωμές. Η σχέση (1.30) γίνεται:

$$ia_{\overline{n}|} = 1-\nu^n \Rightarrow 1 = ia_{\overline{n}|} + \nu^n \tag{1.31}$$

Η μελλοντική αξία (accumulation value AV) των πληρωμών της ράντας συμβολίζεται με $s_{\overline{n}|} = AV$ και υπολογίζεται με βάση τον τύπο:

$$\mathrm{s}_{\overline{n}|} = (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-1} + (1+)^{\mathrm{n}-2} + \cdots + (1+\mathrm{i}) + 1 \tag{1.32}$$

όπου το παραπάνω άθροισμα είναι γεωμετρική πρόοδος με $\lambda = (1+i)^{-1}$ , $\alpha_1 = (1+i)^{n-1}$ , συνεπώς:

$$\mathrm{s}_{\overline{n}|} = (1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}-1}\frac{(1+\mathrm{i})^{-\mathrm{n}}-1}{(1+\mathrm{i})^{-1}-1} = \cdots = \frac{1-(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}}{-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}}-1}{\mathrm{i}} \tag{1.33}$$

### 1.4.2 Προκαταβλητέες Ράντες

Στην υποενότητα αυτή θα μελετήσουμε τις προκαταβλητέες ράντες [18]. Υποθέτουμε ότι έχουμε μία ράντα για $n$-περιόδους με πληρωμές μίας νομισματικής μονάδας. Ορίζουμε την άμεση προκαταβλητέα ράντα ως εξής:

Η παρούσα αξία μιας τέτοιας ράντας συμβολίζεται με $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ ενώ η μελλοντική αξία με $\ddot{s}_{\overline{n}|}$. Όσον αφορά τη παρούσα αξία έχουμε:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + \nu + \nu^2 + \cdots + \nu^{n-1} \tag{1.34}$$

Το παραπάνω άθροισμα είναι γεωμετρική πρόοδος με $\lambda = \nu$, $\alpha_1 = 1$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{\nu^n - 1}{\nu - 1} = \cdots = \frac{1 - \nu^n}{d} \tag{1.35}$$

Για την μελλοντική αξία της προκαταβλητέας ράντας έχουμε:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d} \tag{1.36}$$

Έτσι για το άθροισμα $\ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+i)^n + (1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + \cdots + (1+i)$ έχουμε οτι αποτελεί γεωμετρική πρόοδο με $\lambda = 1 + i$, $\alpha_1 = 1 + i$ και μετά από πράξεις φτάνουμε :

$$\mathrm{AV} = \ddot{\mathrm{s}}_{\overline{n}|} = \frac{(1+\mathrm{i})^{\mathrm{n}} - 1}{\mathrm{d}} \tag{1.37}$$

όπου $d = \frac{i}{1+i}$ το προεξοφλητικό επιτόκιο.

### 1.4.3 Διηνεκείς Ράντες

Οι πληρωμές σε μία διηνεκή ράντα γίνονται επΆ άπειρον. Η χρονική περίοδος της ράντας είναι μη πεπερασμένη.

#### Διηνεκής Ληξιπρόθεσμη Ράντα

Για μια διηνεκής ληξιπρόθεσμη ράντα η παρούσα αξία της δίνεται από το τύπο:

$$a_{\overline{\infty}|} = \nu + \nu^2 + \nu^3 + \cdots + \nu^n + \nu^{n+1} + \cdots \tag{1.38}$$

ο οποίος αποτελεί άθροισμα απείρων όρων γεωμετρικής προόδου με $\lambda = \nu$, $|\lambda| < 1$, $\alpha_1 = \nu$. Άρα:

$$a_{\overline{\infty}|} = \frac{\alpha_1}{1 - \lambda} = \frac{\nu}{1 - \nu} = \frac{\nu}{i\nu} = \frac{1}{i} \tag{1.39}$$

Η μελλοντική αξία της $AV$ διηνεκούς ράντας δεν υπάρχει καθώς οι πληρωμές γίνονται επ'απειρον.

### Προκαταβλητέα Διηνεκής Ράντα

Η παρούσα αξία μίας προκαταβλητέας διηνεκής ράντας ορίζεται από το τύπο:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = 1 + \nu + \nu^2 + \cdots + \nu^n + \nu^{n+1} = \frac{1}{1-\nu} \tag{1.40}$$

ή ισοδύναμα : $\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{d}$

## 1.5 Ασφαλιστικοί και Επενδυτικοί Κίνδυνοι

Στην ενότητα αυτή θα αναφέρουμε τους κινδύνους που περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο μιας εταιρίας ασφαλίσεων ζωής [21], ορισμένους θα τους αναφέρουμε επιγραμματικά και για κάποιους θα γίνει συνοπτική ανάλυση κυρίως σε θεωρητικό επίπεδο. Στην εργασία, θα επικεντρωθούμε στην ανάλυση του επενδυτικού κινδύνου και του κίνδυνου θνησιμότητας όσον αφορά τις ασφαλίσεις ζωής [21].

Οι ασφαλιστικές που ασχολούνται με προγράμματα ζωής ή συνταξιοδοτικά προϊόντα, έχουν ως στόχο την συγκέντρωση κεφαλαίου. Ένα μέρος του κεφαλαίου αυτού θα εξασφαλίζει την άδεια λειτουργίας της ασφαλιστικής εταιρείας απο τις Εποπτικές Αρχές, καθώς θα καλύπτουν τα απαιτούμενα εποπτικά κεφάλαια που ορίζονται απο αυτές.Άλλο μέρος αυτών των κεφαλαίων θα διατίθεται στην αγορά σε επενδύσεις που η εταιρεία κρίνει απαραίτητες για την μεγιστοποίηση των κερδών της. Οι επενδύσεις αυτές θα ανήκουν στο ενεργητικό της εταιρείας και μαζί με την υπόλοιπη ακίνητη ή μη περιουσία της θα αποτελούν τα περιουσιακά της στοιχεία.Πρέπει να τονίσουμε πως η εταιρεία βρίσκεται εκτεθειμένη σε κίνδυνο λόγω των επενδύσεων της, όπου πολλές από αυτές βασίζονται στα τρέχοντα επιτόκια της αγοράς, άλλα και λόγω των ασφαλιστικών προϊόντων που συναλλάσσεται, τα οποία περιέχουν και τον ασφαλιστικό κινδύνο και τον επιτοκιακό κίνδυνο, αφού πολλά προϊόντα και επενδύσεις βασίζονται στα επιτόκια που ορίζονται απο τις αγορές.

Οι κίνδυνοι που απασχολούν μία ασφαλιστική εταιρεία χωρίζονται σε δύο κατηγορίες, τους ασφαλιστικούς κινδύνους και τους μη ασφαλιστικού κινδύνους.

Ο ασφαλιστικός κίνδυνος πηγάζει από την ανάληψη ασφαλιστικών κινδύνων ζωής και αναφέρεται στους καλυπτόμενους κινδύνους όσο και στη διαδικασία που ακολουθείται για την διεξαγωγή των ασφαλιστικών εργασιών ζωής. Οι μη ασφαλιστικοί κίνδυνοι είναι αυτοί που απασχολούν κάθε χρηματοπιστωτικό οργανισμό και πηγάζουν από τις επενδύσεις που υλοποιεί η ασφαλιστική, αλλά και από τα ασφαλιστικά προϊόντα επενδυτικού τύπου.

### 1.5.1 Ασφαλιστικοί Κίνδυνοι

1. Κίνδυνος Θνησιμότητας
2. Κίνδυνος Ανικανότητας
3. Κίνδυνος Εξαγοράς
4. Κίνδυνος Εξόδων
5. Κίνδυνος Αναθεώρησης
6. Κίνδυνος Μακροβιότητας

### 1.5.2 Χρηματοοικονομικοί Κίνδυνοι ή (Μη Ασφαλιστικοί Κίνδυνοι)

1. Κίνδυνος Αγοράς
2. Πιστωτικός Κίνδυνος
3. Λειτουργικός Κίνδυνος
4. Στρατηγικός Κίνδυνος

### 1.5.3 Κίνδυνος Θνησιμότητας

Ένας από τους πιο σημαντικούς ασφαλιστικούς κίνδυνους στη διαχείριση ενός χαρτοφυλακίου με ασφαλιστήρια ζωής είναι ο κίνδυνος θνησιμότητας. Ο κίνδυνος θνησιμότητας αναπαριστά την αβεβαιότητα στην τάση και στις παραμέτρους της θνησιμότητας σε βαθμό που η πιθανή επιδείνωσή τους προκαλεί ζημίες στην εταιρεία. Ο κίνδυνος αυτός εμπεριέχεται στα ασφαλιστήρια που οι παροχές τους εξαρτώνται από τη θνησιμότητα του ασφαλισμένου [21].

## Παράγοντες Θνησιμότητας

Διάφοροι παράγοντες στη θνησιμότητα ουσιαστικά καθορίζουν το κόστος των συμβολαίων. Μια λανθασμένη παραδοχή για το ποσοστό θνησιμότητας μπορεί να έχει μακροπρόθεσμες επιπτώσεις για μια εταιρεία, εξαιτίας της μακροπρόθεσμης φύσης των περισσότερων συμβολαίων. Παρακάτω παρουσιάζονται οι παράγοντες οι οποίοι επηρεάζουν την θνησιμότητα οι οποίοι ποικίλουν ανάλογα με τη δομή του χαρτοφυλακίου:

1. Ατομικοί παράγοντες:
   Το φύλο, η ηλικία, το ιατρικό ιστορικό, η διατροφή, η άσκηση, το άγχος, το κάπνισμα, το αλκοόλ, τα ναρκωτικά, το οικογενειακό ιστορικό, το επάγγελμα, η συμπεριφορά (όπως η επιθετική οδήγηση ή οδήγηση σε κατάσταση μέθης), η οικογενειακή κατάσταση, η εκπαίδευση, η οικονομική κατάσταση και η ψυχική κατάσταση

2. Περιβαλλοντικοί και Γεωγραφικοί παράγοντες
   Η ρύπανση του αέρα και των υδάτων,η υψηλότερη έκθεση σε υπεριώδη ακτινοβολία στο νότιο ημισφαίριο (που οδηγεί σε μια υψηλότερη συχνότητα εμφάνισης καρκίνου του δέρματος, η έκθεση σε περισσότερες μολυσματικές ασθένειες κυρίως σε περιοχές με τροπικό κλίμα

3. Ποιοτικοί παράγοντες
   Η προσβασιμότητα και το κόστος της διαθέσιμης ιατρικής φροντίδας, ιδιαίτερα της προληπτικής φροντίδας (εμβολιασμοί, εξετάσεις ρουτίνας), η επείγουσα περίθαλψη και οι ιατρικές θεραπείες για σοβαρές καταστάσεις (η χημειοθεραπεία, η ακτινοθεραπεία)

4. Πολιτιστικές διαφορές
   Σε ορισμένες χώρες, η ασφαλιστική απάτη μπορεί να είναι πιο συνηθισμένη, η αυτοκτονία μπορεί να θεωρείται ένας έντιμος τρόπος για να λύσουμε ένα προσωπικό πρόβλημα, τα όπλα μπορεί να είναι ευρέως διαθέσιμα και τα φαινόμενα βίας μπορεί να είναι πιο συχνά.

## Πίνακες Θνησιμότητας

Στις μεγάλες αγορές ασφαλειών ζωής οι εκτιμήσεις για τον κίνδυνο θνησιμότητας βασίζονται στους πίνακες θνησιμότητας. Ύστερα από μελέτες και αναλύσεις δημογραφικών στοιχείων προκύπτουν μεγάλοι πίνακες με ποσοστά θνησιμότητας. Συνήθως, βγαίνουν ξεχωριστοί πίνακες για κάθε φύλλο.

Υπάρχουν τρεις βασικοί τύποι πινάκων θνησιμότητας:

1. <u>Αθροιστικός πίνακας</u>

2. <u>Επιλεκτικός πίνακας</u>

3. <u>Επιλεκτικός και Απόλυτος πίνακας</u>

Για να αναπτυχθεί ένας αξιόπιστος συνδυαστικός πίνακας θνησιμότητας απαιτούνται πολλά χρόνια δεδομένων και δεκάδες χιλιάδες (αν όχι εκατοντάδες χιλιάδες) θανάτων για τη μελέτη. Ως αποτέλεσμα, οι περισσότεροι πίνακες θνησιμότητας είναι κατασκευασμένοι από την βιομηχανία της ασφάλισης ζωής λαμβάνοντας υπόψη τα αποτελέσματα της άθροισης των στοιχείων πολλών εταιρειών. Οι μεγαλύτερες εταιρείες, ιδίως εκείνες που συμβάλλουν στη κατασκευή των πινάκων θνησιμότητας, αναλύουν τα αποτελέσματα θνησιμότητας τους ως ποσοστό επί του πίνακα της βιομηχανίας. Ορισμένες μικρότερες εταιρείες μπορεί να μην έχουν τους πόρους για να αναλύσουν τα αποτελέσματα θνησιμότητας. Ως αποτέλεσμα, υποθέτουν ότι εκπροσωπούνται από τον μέσο όρο της θνησιμότητας.

Χρησιμοποιώντας το μέσο όρο του κλάδου για τη θνησιμότητα μπορεί να είναι επικίνδυνο, καθώς η θνησιμότητα ποικίλλει ευρέως από εταιρεία σε εταιρεία λόγω των πολλών παραγόντων, όπως είναι οι στόχοι και τα πρότυπα του underwriting κάθε εταιρείας. Οι εταιρείες με το χαμηλότερο ποσοστό θνησιμότητας μπορεί να εμφανίσουν το μισό της θνησιμότητας των εταιρειών με την υψηλότερη θνησιμότητα. Εάν τα αποτελέσματα της θνησιμότητας της εταιρείας δεν μπορούν να αναλυθούν, η εταιρεία θα πρέπει τουλάχιστον να αναλύσει τους παράγοντες που επηρεάζουν τη θνησιμότητα πριν από τον καθορισμό της θνησιμότητας.

Σε ορισμένες χώρες, οι πίνακες θνησιμότητας του κλάδου αναπτύχθηκαν με τα αθροιστικά ποσοστά θνησιμότητας, αντί των συνδυαστικών αποτελεσμάτων θνησιμότητας. Αυτό γίνεται συνήθως όταν υπάρχουν ανεπαρκή στοιχεία για την ανάπτυξη αξιόπιστων ποσοστών θνησιμότητας ή όταν τα αποτέλεσμα δεν φαίνονται να είναι αντιπροσωπευτικά.

### 1.5.4 Κίνδυνος Επιτοκίου

Οι ασφαλιστικές εταιρείες κατέχουν μια ποικιλία περιουσιακών στοιχείων που χρησιμοποιούνται για να καλύψουν τα ασφαλιστήρια συμβόλαια. Αυτά τα περιουσιακά στοιχεία χρησιμοποιούνται για την κάλυψη των αποθεμάτων που ορίζουν οι εποπτικές αρχές και για την κάλυψη των κεφαλαιακών απαιτήσεων. Ορισμένα στοιχεία του ενεργητικού, όπως τα ομόλογα, οι προνομιούχες μετοχές και άλλα χρεόγραφα εξασφαλίζουν έσοδα στην εταιρεία λόγω της επιτοκιακής τους απόδοσης. Οι μετοχές και τα ακίνητα παρέχουν κάποιο τρέχον εισόδημα αλλά κυρίως βοηθούν στην ανάπτυξη κεφαλαιακών κερδών ή ζημιών [21].

Ο κίνδυνος επιτοκίου (Interest Rate Risk) θεωρείται ότι είναι ο κίνδυνος που οφείλεται στις κινήσεις και τις μεταβολές των επιτοκίων στο πλαίσιο μιας συγκεκριμένης οικονομίας. Έτσι, είναι προφανές ότι ο κίνδυνος επιτοκίου επηρεάζει περιουσιακά στοιχεία των οποίων η αξία είναι άμεσα συνδεδεμένη με το επίπεδο των επιτοκίων που υπάρχει στο πλαίσιο μιας οικονομίας [21].

Κατά την τιμολόγηση ενός προϊόντος ασφάλισης ζωής, είναι απαραίτητο να εκτιμηθούν τα έσοδα από τις επενδύσεις που θα αποκτηθούν από τα διάφορα περιουσιακά στοιχεία του υποκείμενου προϊόντος. Σε αυτή την ενότητα θα υποθέσουμε ότι όλα τα έσοδα από επενδύσεις προέρχονται από τα επιτόκια. Η υπόθεση αυτή λειτουργεί καλύτερα για τα προϊόντα που υποστηρίζονται μόνο από το έντοκα στοιχεία του ενεργητικού, όπως τα ομόλογα και οι ενυπόθηκοι τίτλοι δανεισμού. Οι οικονομικές συνθήκες σε μεγάλο βαθμό καθορίζεται από τα επιτόκια. Η οικονομική δραστηριότητα και τα κέρδη τείνουν να αυξάνονται όταν τα επιτόκια και τα ποσοστά πληθωρισμού είναι χαμηλά. Οι οικονομικές υφέσεις συχνά συνδυάζονται με τις απώλειες κεφαλαίων, τα υψηλά επιτόκια, και τα υψηλά ποσοστά πληθωρισμού, με αποτέλεσμα να αυξάνονται οι αθετήσεις πληρωμών. Οι κυβερνήσεις συχνά χειραγωγούν τα επιτόκια για να επιτύχουν τους οικονομικούς ή πολιτικούς στόχους. Οι στόχοι αυτοί μπορούν να περιλαμβάνουν την προστασία της αξίας του νομίσματός τους, κρατώντας σε χαμηλά επίπεδα τον πληθωρισμό, και βοηθώντας τις εγχώριες επιχειρήσεις να ανακάμψουν από τις προηγούμενες απώλειες.

Τα επίπεδα των επιτοκίων λοιπον διαμορφώνονται με μια σχετική αβεβαιότητα, καθώς οι μακροοικονομικοί και μη παράγοντες που τα επηρεάζουν είναι επίσης αβέβαιοι. Συνεπώς, η αστάθεια που υπάρχει στην διαμόρφωση των επιτοκίων ως παραμέτρων της αγοράς δημιουργεί και τον ανάλογο κίνδυνο αγοράς (επιτοκίου) σε περιουσιακά στοιχεία τα οποία επηρεάζονται από την διαμόρφωση του επιπέδου των επιτοκίων.

Άλλα παραδείγματα περιουσιακών στοιχείων όπου επηρεάζονται από τον κίνδυνο επιτοκίου είναι κυρίως τραπεζικά προϊόντα όπως δάνεια, καταθέσεις κτλ, αλλά και ομόλογα, ομολογίες και έντοκα γραμμάτια του δημοσίου, καθώς και γραμμάτια που υπογράφονται στο πλαίσιο ετεροχρονισμένων συναλλαγών.

Ανάλογα με την θέση που έχει λάβει κάποιος (αγοραστή ή πωλητή) σε ένα περιουσιακό στοιχείο που περιέχει κίνδυνο επιτοκίου (κίνδυνος επιλογής ,Optional Risk), είναι δυνατό είτε να χάσει είτε να κερδίσει από τις μεταβολές των επιτοκίων. Για παράδειγμα, εάν κάποιος δανείσει χρήματα με κυμαινόμενο επιτόκιο, τότε ανοδική πορεία των επιτοκίων θα προκαλέσει περαιτέρω όφελος σε αυτόν, ενώ θα προκαλέσει περισσότερο κόστος σε αυτόν που έχει δανειστεί. Τα ακριβώς αντίθετα θα συμβούν σε περίπτωση πτωτικής πορείας των επιτοκίων. Σε περιουσιακά στοιχεία που χαρακτηρίζονται από σταθερό επιτόκιο έχουν κίνδυνο επιτοκίου, έστω και με έμμεσο τρόπο. Για παράδειγμα, όταν κάποιος δανείσει με σταθερό επιτόκιο και τα επιτόκια ακολουθήσουν πτωτική πορεία, τότε έχει όφελος, υπό την έννοια ότι δανείζει, άρα κερδίζει, με επιτόκιο μεγαλύτερο από το ότι ισχύει στην αγορά. Ομοίως, ο δανειζόμενος θα έχει ζημιά, καθώς πληρώνει το μεγαλύτερο σταθερό επιτόκιο αν και μπορούσε να δανειστεί με μικρότερο επιτόκιο, άρα και κόστος. Τα ακριβώς αντίθετα θα ισχύουν για δανειστή και δανειζόμενο σε περίπτωση που τα επιτόκια ακολουθήσουν ανοδική πορεία.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι ο κίνδυνος επιτοκίου θεωρείται περισσότερο εύκολος να διαχειριστεί και να αντιμετωπιστεί. Ο λόγος είναι ότι από τη μια δεν υπάρχει τόση μεγάλη αβεβαιότητα σχετικά με το επίπεδο των επιτοκίων, καθώς οι παράγοντες που επηρεάζουν την διαμόρφωση των επιτοκίων δεν είναι τόσο ευμετάβλητοί όσο άλλοι παράγοντες που επιδρούν π.χ. στις τιμές των μετοχών.

### Επενδυτική Στρατηγική ως προς το Επιτόκιο

Υπάρχουν δύο διαφορετικές προσεγγίσεις για τον καθορισμό των επιτοκίων:

1. Η μέθοδος τμηματοποίησης
   Τα περιουσιακά στοιχεία διαχωρίζονται σε κατηγορίες ανά τομέα εργασίας της εταιρείας ή ανά προϊόν ή σε διάφορες χρονικές περιόδους κατά τις οποίες η εταιρεία έλαβε κεφάλαια.Ως αποτέλεσμα έχουμε ένα επιτόκιο για κάθε κατηγορία περιουσιακών στοιχείων.Κατά την ανάπτυξη ενός νέου προϊόντος, πρέπει να αποφασιστεί αν το προϊόν μπορεί να υπαχθεί σε μία ήδη υπάρχουσα κατηγορία του ενεργητικού ή αν το προϊόν έχει αρκετές διαφοροποιήσεις από τα υπόλοιπα προϊόντα και παράγει επαρκή περιουσιακά στοιχεία έτσι ώστε να δικαιολογείται η δημιουργία ενός νέου τμήματος του ενεργητικού. Σε αυτή τη περίπτωση θα ήταν σκόπιμο να περιμένουμε τα πρώτα αποτελέσματα των πωλήσεων του προϊόντος για να αποφασίσουμε την δημιουργία νέου τμήματος.

2. Μέθοδος χαρτοφυλακίου
   Σε αυτή τη μέθοδο γίνεται συνδυασμός των περιουσιακών στοιχείων με όλους τομείς εργασιών της εταιρείας, με όλα προϊόντα και για διάφορες χρονικές περιόδους. Σε αυτή τη μέθοδο εξάγουμε ένα επιτόκιο για όλες τις

κατηγορίες των περιουσιακών στοιχείων. Η μέθοδος του χαρτοφυλακίου λειτουργεί καλύτερα με μακροπρόθεσμες υποχρεώσεις, όπου οι ταμειακές ροές είναι κάπως προβλέψιμες. Αν υπάρχει ήδη ένα μεγάλο χαρτοφυλάκιο περιουσιακών στοιχείων και γίνονται αγορές νέων προϊόντων, με αποτέλεσμα η εταιρεία να λαμβάνει νέες ταμειακές ροές, τότε η μεταβλητότητα της συνολικήσαπόδοσης του χαρτοφυλακίου μειώνεται αργά με την πάροδο των ετών. Ωστόσο, όταν το επιτόκιο για τις νέες επενδύσεις είναι σημαντικά χαμηλότερο από το επιτόκιο του χαρτοφυλακίου και συνεχιστούν οι νέες επενδύσεις τότε το επιτόκιο του χαρτοφυλακίου θα μειωθεί γρήγορα. Την ίδια στιγμή που πολλά από τα πιο κερδοφόρα περιουσιακά στοιχεία της εταιρείας μπορεί να εξοφληθούν πρόωρα, επιταχύνοντας ακόμη περισσότερο τη μείωση του επιτοκίου του χαρτοφυλακίου.

# Κεφάλαιο 2

# Βασικές Μαθηματικές Έννοιες Εισαγωγή στις Στοχαστικές Διαδικασίες

## 2.1 Εισαγωγή

Σκοπός του τρίτου κεφαλαίου είναι να παρουσιάσουμε τους βασικούς ορισμούς και έννοιες για την κατανόηση της θεωρίας της στοχαστικής ανάλυσης. Ιδιαίτερα θα παρουσιάσουμε την κίνηση Brown και ειδικές περιπτώσεις αυτής, όπως την αριθμητική και τη γεωμετρική κίνηση, με στόχο την κατανόηση εννοιών. Θα ξεκινήσουμε με βασικούς ορισμούς και έννοιες από τη θεωρία πιθανοτήτων [20].

## 2.2 Βασικές Έννοιες Θεωρίας Πιθανοτήτων

### 2.2.1 σ-Άλγεβρες

**Ορισμός 2.1** *Εστω $\Omega$ ένα μη κενό σύνολο. Μια κλάση υποσυνόλων $\mathcal{F}$ του $\Omega$ καλείται σ-άλγεβρα [20] αν έχει τις εξής ιδιότητες:*

1. $\Omega, \in \mathcal{F}$

2. *Αν* $A \in f$ *τοτε και* $A^c \in \mathcal{F}$

3. *Αν* $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F}$ *(αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του Ω ) τότε και:*

$$\bigcup_{\mathrm{i=1}}^{\infty} \mathrm{A_i}\, \mathcal{F} \tag{2.1}$$

.

*Το ζεύγος (Ω ,$\mathcal{F}$) καλείται μετρήσιμος χώρος και αποδεικνύεται οτι αν* $\mathcal{F}$ *είναι σ-άλγεβρα τότε το:* $\in \mathcal{F}$ *και* $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$

**Παράδειγμα 2.1** *Έχουμε ένα μη κενό σύνολο* $\Omega = \{1, 2, 3\}$. *Τότε το σύνολο* $A = \{\Omega, \emptyset, \{2\}, \{1, 3\}\}$ *είναι μία σ-άλγεβρα αφού ικανοποιεί τις συνθήκες του παραπάνω ορισμού [20].*

**Παράδειγμα 2.2** *Έχουμε ένα μη κενό σύνολο* $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. *Τότε το σύνολο* $A_1 = \{\Omega, , \{1\}, \{2\}, \{1, 3, 4\}\}$ *δεν είναι μία σ-άλγεβρα γιατί περιέχει τα υποσύνολα* $\{1\}$ *και* $\{2\}$ *αλλά όχι το* $\{1\} \cup \{2\}$ . *Το σύνολο* $A_2 = \{\Omega, \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ *είναι μία σ-άλγεβρα και είναι μικρότερη από την σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα υποσύνολα του Ω [20].*

**Ορισμός 2.2** *Η ελάχιστη σ-άλγεβρα η οποία ορίζεται από ένα σύνολο A, είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει το σύνολο A. Η άλγεβρα αυτή συνήθως συμβολίζεται με σ(A) [20].*

**Παράδειγμα 2.3** *Θεωρούμε την άλγεβρα* $\{\emptyset, \Omega, A, A^c$. *Αυτή είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει το σύνολο A, οπότε είναι η σ(A) [20].*

**Παράδειγμα 2.4** *Έχουμε* $A_1$,$A_2$ *και* $A_3$ *υποσύνολα του Ω τέτοια ώστε* $A_i \cap A_j$ *για* $i \neq j$ *και* $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$
*Η σ-άλγεβρα*
$\{\emptyset, A_1, A_2, A_3, A_1 \bigcup A_2, A_2 \bigcup A_3, A_1 \bigcup A_3, \Omega\}$ *είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα σ(A), η οποία περιέχει το σύνολο* $A = \{A_1, A_2, A_3\}$ *[20].*

**Ορισμός 2.3** *Η μικρότερη σ-άλγεβρα η οποία περιέχεται σε κάθε σ-άλγεβρα είναι η τετριμένη ή εκφυλισμένη σ-άλγεβρα* $O = \{\emptyset, \Omega\}$ *[20].*

### 2.2.2 Άλγεβρα Borel

Ορίζουμε $\Omega = R$ και κατασκευάζουμε μία σ-άλγεβρα που αποτελείται από υποσύνολα του $R$.

**Ορισμός 2.4** *Η άλγεβρα Borel [20], η οποία συμβολίζεται με $\mathcal{B}$, είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα διαστήματα της μορφής $(-\infty, x)$, τα οποία μπορεί να θεωρηθούν ως υποσύνολα της πραγματικής ευθείας. Τα στοιχεία του $\mathcal{B}$ ονομάζονται σύνολα Borel.*
*Οι έννοιες της άλγεβρας Borel και των συνόλων της [20] γενικεύονται επίσης και σε υποσύνολα του $R^d$ δηλαδή όταν $\Omega = R^d, d = 1, 2, \cdots, n$. Λέμε ότι ένα παραλληλόγραμμο του $R^d$ είναι ένα υποσύνολο του $R^d$ της μορφής:*

$$(\alpha, \mathrm{b}] = \{\mathrm{x} \in \mathrm{R^d} : \alpha_\mathrm{i} < \mathrm{x_i} \leq \mathrm{b_i}, \mathrm{i} = 1, \cdots, \mathrm{d}\} \tag{2.2}$$

*όπου $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in R^d$ και $b = (b_1, \cdots, b_d) \in R^d$*

**Ορισμός 2.5** *Η σ-άλγεβρα Borel $\mathcal{B}(R^d)$ είναι η ελάχιστη σ-άλγεβρα η οποία περιέχει όλα τα παραλληλόγραμμα της μορφής $(\alpha, b]$ [20].*

### 2.2.3 Μέτρο Πιθανότητας

**Ορισμός 2.6** *Έστω ένα μη κενό σύνολο $\Omega$ και $f$ μία σ-άλγεβρά του. Μία συνολοσυνάρτηση $\mu$ από το $f$ στο $[0, \infty]$ καλείται μέτρο πιθανότητας αν [20] [23] :*

- $\mu(\emptyset) = 0$,$\mu(\Omega) = 1$
- $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ *για κάθε ακολουθία ξένων ανα δυο συνόλων* $A_1, A_2, \cdots \in f$

**Σημείωση:** Αν παραλείψουμε την συνθήκη $\mu(\Omega) = 1$ τότε λέμε ότι η μ είναι ένα μέτρο και όχι ένα μέτρο πιθανότητας και η τριάδα $(\Omega, f, \mu)$ καλείται χώρος μέτρου. Το μέτρο πιθανότητας συμβολίζεται συνήθως με $P$ και η τριάδα εδώ $(\Omega, f, P)$ καλείται χώρος μέτρου πιθανότητας [23].

Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει μοναδικό μέτρο λ το οποίο ορίζεται επάνω στα σύνολα Borel του $R$ και αντιστοιχεί σε κάθε διάστημα του $R$ το μήκος του (δηλ. $\lambda([\alpha,\beta]) = \lambda((\alpha,\beta]) = \lambda([\alpha,\beta)) = \lambda((\alpha,\beta)) = \beta - \alpha$). Το μέτρο αυτό καλείται μέτρο Lebesgue [20].

Περιοριζόμαστε στα σύνολα Borel όσον αφορά το μέτρο Lebesgue, διότι αποδεικνύεται ότι το μέτρο αυτό δεν μπορεί να ορισθεί επάνω σε όλα τα υποσύνολα του $R$. Ο περιορισμός αυτός δεν αποτελεί σοβαρό πρόβλημα διότι σύνολα εκτός του $\mathcal{B}(R)$ σχεδόν σπάνια εμφανίζονται σε εφαρμογές [20].

## 2.3 Στοχαστικές Διαδικασίες και Τυχαίες Μεταβλητές

### 2.3.1 f- Μετρήσιμη Συνάρτηση

**Ορισμός 2.7** *Ορίζεται $\Omega$ ένα μη κενό σύνολο. Καλείται η συνάρτηση $Y : \Omega \to R^d$ $f$-μετρήσιμη αν:*

$$\mathrm{Y^{-1}(U) = \{\omega \,\in\, \Omega : Y(\omega) \,\in\, U\} \,\in f} \tag{2.3}$$

*για κάθε ανοιχτό σύνολο $U \in R^d$*

Ειδικότερα μπορούμε να πούμε ότι η συνάρτηση $Y$ είναι $f$-μετρήσιμη αν η αντίστροφη εικόνα ενός υποσυνόλου του $R^d$, κάτω από τη συνάρτηση αυτή, ανήκει στη σ-άλγεβρα $f$ [20] [23].

### 2.3.2 Τυχαίες Μεταβλητές

**Ορισμός 2.8** *Μια τυχαία μεταβλητή είναι μία $f$-μετρήσιμη συνάρτηση $X : \Omega \to R^d$, όπου $(\Omega, f, P)$ είναι ένας χώρος πιθανοτήτων [23].*

### 2.3.3 Διακριτές Κατανομές Πιθανότητας

Θεωρούμε X μία διακριτή τυχαία μεταβλητή και ορίζουμε ότι οι τιμές που μπορεί να πάρει είναι $x_1, x_2, \cdots$ διατεταγμένες κατά αύξουσα σειρά. Υποθέτουμε ότι οι πιθανότητες να πάρει η μεταβλητή τις τιμές αυτές είναι:

$$\mathrm{P(X = x) = f(x_k)} \qquad \mathrm{k} = 1, 2, 3, \cdots \tag{2.4}$$

Ορίζουμε ως συνάρτηση πιθανότητας (ή κατανομή πιθανότητας) την

$$\mathrm{P(X = x) = f(x)} \tag{2.5}$$

με $P(X = x_k) = F(X_k)$ και $P(X \neq x_k) = 0$

Η $f(x)$ είναι μία συνάρτηση πιθανότητας, εάν:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\sum_x f(x) = 1$

όπου το άθροισμα θεωρείται ως προς όλες τις δυνατές τιμές του $x$. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πιθανότητας $f(x)$ καλείται γραφική παράσταση της πιθανότητας [23] [24].

### 2.3.4 Συναρτήσεις Κατανομής για Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Η συνάρτηση κατανομής για μία τυχαία μεταβλητή X ορίζεται με τη σχέση [23] [24]:

$$\mathrm{P(X \leq x) = F(x)}, \quad -\infty < \mathrm{x} < \infty \tag{2.6}$$

Η συνάρτηση κατανομής μπορεί να ληφθεί από τη συνάρτηση πιθανότητας επειδή:

$$\mathrm{F(x) = P(X \leq x)} = \sum_{\mathrm{u \leq x}} \mathrm{f(u)} \tag{2.7}$$

όπου το άθροισμα θεωρείται ως προς όλα τα $u$ για τα οποία $u \leq x$.
Έαν η τ.μ. $X$ παίρνει πεπερασμένο πλήθος τιμών $x_1, x_2, \cdots, x_n$ τότε η συνάρτηση κατανομής είναι:

$$\mathrm{F(x)} = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1), & x_1 \leq x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2), & x_2 \leq< x_3 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_1) + \cdots + f(x_n), & x_n \leq x < \infty \end{cases} \tag{2.8}$$

### 2.3.5 Συνεχείς Κατανομές Πιθανότητας

Στην περίπτωση όπου η $X$ είναι μία συνεχής τυχαία μεταβλητή, τότε η πιθανότητα να πάρει η $X$ μία ορισμένη τιμή, είναι σχεδόν 0. Έτσι δε μπορούμε να ορίσουμε με τον ίδιο τρόπο μια συνάρτηση πιθανότητας, όπως στη διακριτή μεταβλητή. Για τη δημιουργία μίας κατανομής πιθανότητας μίας συνεχούς τυχαίας μεταβλητής, διαπιστώνεται ότι η πιθανότητα $X$ θα βρίσκεται μεταξύ δύο διαφορετικών τιμών [23].

Θεωρούμε ως βάση τη παρατήρηση αυτή και σύμφωνα με τις ιδιότητες της συνάρτησης πιθανότητας για διακριτές τ.μ. οδηγούμαστε στην ύπαρξη μίας συναρτήσεως για την οποία:

1. $f(x) \geq 0$
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 \quad -\infty < x < \infty$

Ορίζουμε τη πιθανότητα η τ.μ. $X$ να πάρει τιμές μεταξύ α και β ως εξής:

$$\mathrm{P}(\alpha < \mathrm{x} < \beta) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathrm{f(x)\,dx} \tag{2.9}$$

Μια συνάρτηση $f(x)$ που ικανοποιεί τις παραπάνω συνθήκες (1) και (2) καλείται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την συνεχή τυχαία μεταβλητή.

### 2.3.6 Συναρτήσεις Κατανομής για Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Ορίζουμε τη συνάρτηση κατανομής της $F(x)$ για μία συνεχή τυχαία μεταβλητή με τη σχέση:

$$\mathrm{F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X \leq x)} = \int\limits_{-\infty}^{\mathrm{x}} \mathrm{f(x)\,dx} \tag{2.10}$$

### 2.3.7 Η $\sigma$ - Άλγεβρα που Παράγεται από μία Τυχαία Μεταβλητή

Θέτουμε ένα χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, f, P)$ και μία τυχαία μεταβλητή Χ. Από τα παραπάνω γνωρίζουμε ότι η Χ είναι εξ' ορισμού $f$-μετρήσιμη. Ωστόσο γενικότερα θα υπάρχουν μικρότερες σ-άλγεβρες για τις οποίες η Χ θα είναι μετρήσιμη [20].

**Ορισμός 2.9** *Η μικρότερη σ-άλγεβρα για την οποία η τυχαία μεταβλητή X είναι μετρήσιμη, αποκαλείται η σ-άλγεβρα που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή X και συμβολίζεται με σ(X) [20].*

**Θεώρημα 2.1** *Έστω $X, Y : \Omega \to R^d$, δύο τυχαίες μεταβλητές. Η τ.μ. Y είναι μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα σ(X), η οποία παράγεται από την τυχαία μεταβλητή X, αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση g, $g : R^d \to R^d$ μετρήσιμη κατά Borel, τέτοια ώστε $Y = g(X)$ [20].*

**Παράδειγμα 2.5** *Θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή*

$$X_3(\omega) = \begin{cases} k_0, & \alpha\nu\ \omega \in A_0 \\ k_1, & \alpha\nu\ \omega \in A_1 \\ k_2, & \alpha\nu\ \omega \in A_2 \end{cases}$$

*όπου $A_0 \cup A_1 \cup A_2 = \Omega$ με $A_0, A_1, A_2$ ανά δύο ξένα μεταξύ τους. Η σ-άλγεβρα που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή είναι η*

$$\{\emptyset, \Omega, A_0, A_1, A_2, A_0 \bigcup A_1, A_0 \bigcup A_2, A_1 \bigcup A_2\}.$$

*Η τυχαία μεταβλητή $X_3$ γράφεται και σαν*

$$\mathrm{X_3(\omega) = \sum_{i=1}^{n} k_i I_{A_i}(\omega)} \tag{2.11}$$

## 2.4 Στοχαστικές Διαδικασίες

### 2.4.1 Εισαγωγικές Έννοιες για Στοχαστικές Διαδικασίες

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε κάποια εισαγωγικά στοιχεία που αφορούν κανονικές διαδικασίες και ιδιότητες αυτών. Στηριζόμενοι στον Liu θα αναφέρουμε τους παρακάτω ορισμούς [20].

**Ορισμός 2.10** *Έστω $T$ ένα σύνολο δεικτών και έστω $(\Gamma, \varsigma, M)$ ένας στοχαστικός χώρος. Μια στοχαστική διαδικασία είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση από το καρτεσιανό γινόμενο $T \times (\Gamma, \varsigma, M)$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, δηλαδή, για κάθε $t \in T$ και για μοναδικό σύνολο Borel $\mathcal{B}$ πραγματικών αριθμών, το σύνολο:*

$$\{\mathrm{X_t} \in \mathrm{B}\} = \{\gamma \in \Gamma | \mathrm{X_t}(\gamma) \in \mathrm{B}\}$$

$\{X_t \in B\} = \{\gamma \in \Gamma | X_t(\gamma) \in B\}$

*είναι ένα ενδεχόμενο.*

**Ορισμός 2.11** *Μια στοχαστική διαδικασία $C_t$ λέγεται κανονική άν:*

1. *$C_0$ και όλες σχεδόν οι τροχιές είναι Lipschitz συνεχείς*
2. *$C_t$ έχει σταθερές και ανεξάρτητες μεταβολές προσαυξήσεων*
3. *κάθε μεταβολή $C_{(s+t)} - C_s$ είναι μια στοχαστική μεταβλητή κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή 0 και διασπορά $t^2$.*

Στη συνέχεια δίνουμε το παρακάτω θεώρημα [20].

**Θεώρημα 2.2 Θεώρημα:** *Η κανονική διαδικασία $C_t$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά $t^2$, και έχει συνάρτηση κατανομής:*

$$\Phi(\mathrm{x}) = (1 + \mathrm{e}^{(-(\frac{\pi \mathrm{x}}{\sqrt{3}\mathrm{t}}))})^{(-1)} \tag{2.12}$$

*δηλαδή,*

$$\mathrm{C_t} \sim \mathrm{N}(0, \mathrm{t}) \tag{2.13}$$

**Ορισμός 2.12** *Έστω $C_t$ μια κανονική διαδικασία. Τότε, για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\delta$ και $k$, η διαδικασία:*

$$\mathrm{M_t} = \delta \mathrm{t} + \mathrm{kC_t} \tag{2.14}$$

*ονομάζεται αριθμητική κανονική διαδικασία, όπου $\delta$ ονομάζεται ο συντελεστής μετατόπισης και $k$ ο συντελεστής διάχυσης.*
*Για την αριθμητική κανονική διαδικασία ισχύει το κάτωθι θεώρημα.*

**Θεώρημα 2.3** *Σε κάθε χρονική στιγμή $t$ , η αριθμητική κανονική διαδικασία $M_t$ είναι μια στοχαστική μεταβλητή κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή $\delta t$ και διασπορά $k^2t^2$, δηλαδή,*

$$\mathrm{M_t} \sim \mathrm{N}(\delta \mathrm{t}, \mathrm{kt}) \tag{2.15}$$

*και έχει συνάρτηση κατανομής:*

$$\Phi(\mathrm{x}) = (1 + \mathrm{e}^{(-(\frac{\pi(\delta \mathrm{t} - \mathrm{x})}{\sqrt{3}\mathrm{kt}}))})^{(-1)} \tag{2.16}$$

Στη συνέχεια δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 2.13** *Έστω $C_t$ μια κανονική διαδικασία. Τότε, για οποιοσδήποτε πραγματικούς αριθμούς $\delta$ και $k$, η διαδικασία*

$$\mathrm{G_t} = \mathrm{e}^{((\delta \mathrm{t} + \mathrm{kC_t}))} \tag{2.17}$$

*ονομάζεται γεωμετρική κανονική διαδικασία, όπου $\delta$ ονομάζεται ο λογαριθμικός συντελεστής μετατόπισης (log-drift coefficient) και $k$ ο λογαριθμικός συντελεστής διάχυσης (log-diffusion coefficient).*

**Θεώρημα 2.4** *Σε κάθε χρονική στιγμή $t$, η γεωμετρική κανονική διαδικασία $G_t$ είναι μία στοχαστική μεταβλητή λογαριθμοκανονικά κατανεμημένη, δηλαδή,*

$G_t \sim \log\left(N(\delta t, kC_t)\right)$

*και έχει συνάρτηση κατανομής η οποία είναι:*

$$\Phi(\mathrm{x}) = (1 + \mathrm{e}^{(-(\frac{\pi(\delta \mathrm{t} - \ln \mathrm{x})}{\sqrt{3}\mathrm{kt}}))})^{(-1)} \tag{2.18}$$

Στη συνέχεια της ενότητας αυτής θα δώσουμε επιπλέον βασικούς ορισμούς και έννοιες στοχαστικής διαδικασίας.

**Ορισμός 2.14** *Μία στοχαστική διαδικασία είναι μία παραμετρισμένη συλλογή τυχαίων μεταβλητών* $\{X_t\}_{(t\in T)}$ *οι οποίες ορίζονται σε ένα χώρο πιθανοτήτων* $(\Omega, f, P)$ *και παίρνουν τιμές στο* $R^d$.

*Μία στοχαστική διαδικασία έχει δύο «μεταβλητές», την* $t$ *και την* $\omega$.

- *Για κάθε* $t \in T$ *(το οποίο θεωρούμε δεδομένο και σταθερό) υπάρχει η τυχαία μεταβλητή* $\omega \to X_t(w) : \omega \in \Omega$
- *Έχοντας σταθερό* $\omega \in \Omega$ *θεωρούμε την συνάρτηση* $t \to X_t(\omega) : t \in T$ *η οποία ονομάζεται τροχιά (path) της* $X_t$.

**Παράδειγμα 2.6** *Ένα παράδειγμα [20] στοχαστικής διαδικασίας με διακριτό σύνολο δεικτών* $T$ *(διακριτό χρόνο) είναι το ακόλουθο. Θεωρούμε ότι ρίχνουμε διαδοχικά ένα νόμισμα και* $\omega_i$ *είναι το αποτέλεσμα της* $i$ *ρίψης. Θα θεωρήσουμε τις τυχαίες μεταβλητές* $X_i$ *οι οποίες παίρνουν τιμές* $X_i(\omega) =$
$$\begin{cases} 1, & \alpha\nu\ \omega_i = K \\ -1, & \alpha\nu\ \omega_i = \Gamma \end{cases}$$

*Η τιμή της* $X_i$ *θεωρείται το κέρδος ενός παίκτη κατά την* $i$ *ρίψη, αν ποντάρει ένα ευρώ στο αν θα έρθει κορώνα ή γράμματα. Η* $X_i$, $i \in N$ *είναι μια στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο. Η τιμή της είναι τα κέρδη του παίχτη κατά την διάρκεια του παιχνιδιού.*

**Ορισμός 2.15** *Μια ιδιότητα ισχύει σχεδόν βέβαια (σ.β.), όταν δεν ισχύει σε ένα μόνο σύνολο μέτρου 0.*
*Αρκετές φορές το μέτρο* $P$ *δεν είναι μέτρο πιθανότητας, γι΄ αυτό το λόγο λέμε ότι η ιδιότητα αυτή ισχύει σχεδόν παντού.*

**Παράδειγμα 2.7** *Το* $X \leq Y$, *σχεδόν βέβαιο όταν* $P(\{X > Y\}) = 0$.

**Ορισμός 2.16** *Μία στοχαστική διαδικασία* $X_t$ *σε συνεχή χρόνο, ονομάζεται δεξιά συνεχής αν* $X_t = X_{t+}$ *όπου* $X_{t+} = \lim_{\varepsilon\to 0} X_{t+\varepsilon}$.

**Ορισμός 2.17** *Μια στοχαστική διαδικασία* $A_t$ *ονομάζεται αύξουσα αν για σχεδόν όλα τα* $\omega \in \Omega$ *η* $A_t(\omega)$ *είναι μία μη αρνητική, μη φθίνουσα δεξιά συνεχής συνάρτηση στο* $t \geq 0$.

## 2.5 Η Κίνηση Brown

### 2.5.1 Εισαγωγή

Η κίνηση Brown, απο [20], είναι η βασική μονάδα για τυποποιημένες παραγώγους μοντέλων τιμολόγησης. Για παράδειγμα, η επιλογή του black-scholes υπόδειγματος αποτίμησης προυποθέτει ότι η τιμή του βασικού περιουσιακού στοιχείου ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown. Σε αυτή την ενότητα θα εξηγήσουμε τι σημαίνει αυτό.
Μια κίνηση *Brown* μπορεί να θεωρηθεί ως ένας τυχαίος περίπατος όπου ένα κέρμα περιστρέφεται απείρως γρήγορα και σε απειροελάχιστα μικρά διαστήματα του χρόνου. Μια κίνηση Brown είναι ένας τυχαίος περίπατος που συμβαίνει σε συνεχή χρόνο με κινήσεις που είναι περισσότερο συνεχής και λιγότερο διακριτές. Η κίνηση χαρακτηρίζεται από μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $Z = \{Z(t)\}$ όπου $t$ δείκτης για το χρόνο, με $Z(t)$ να αντιπροσωπεύει όλες τις τιμές των κινήσεων, μετά από $t$ περιόδους. Μια τέτοια οικογένεια ονομάζεται στοχαστική διαδικασία. Για μια κίνηση Brown της οποίας η τιμή ξεκινά ($t = 0$) από $z$, η στοχαστική διαδικασία $Z(t)$ έχει τα ακόλουθα χαρακτηριστικά:

1. $Z(0) = z$
2. Οι διαφορές $Z(t + s) - Z(t)$ είναι κανονικά κατανεμημένες με μέση τιμή 0 και διασπορά $s$.
3. Η διαφορά $Z(t+s_1)-Z(t)$ είναι ανεξάρτητη της διαφοράς $Z(t)-Z(t-s_2)$ όπου $s_1, s_2 > 0$, δηλαδή οι διαφορές $Z(t+s_1) - Z(t)$ και $Z(t) - Z(t-s_2)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές.
4. Η τ.μ. $Z(t)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του χρόνου $t$.

Εάν $z = 0$, τότε η κίνηση ονομάζεται τυπική κίνηση Brown (standard or a pure Brownian motion). Επίσης η τυπική κίνηση Brown είναι γνωστή και ως κίνηση Wiener.

**Παράδειγμα 2.8** *Θα βρούμε τη διασπορά της $Z(t) - Z(s)$, όπου $0 \leq s < t$. Η διασπορά της $Z(t) - Z(s)$, όπου $0 \geq s < t$, είναι $Z(t) - Z(s) = Z(s + (t - s)) - Z(s)$ και από την ιδιότητα (2) (βλ. σελ.28), καταλήγουμε ότι ειναι $t - s$ [20].*

**Παράδειγμα 2.9** *Θα δείξουμε ότι $E[Z(t+s)|Z(t)] = Z(t)$. Για κάθε τυχαία μεταβλητή X,Υ,Z γνωρίζουμε ότι:*

$E(X+Y|Z)=E(X|Z)+E(Y|Z)$ *και* $E(X|X)=X$.

*Χρησιμοποιώντας αυτές τις ιδιότητες έχουμε:*

$E[Z(t+s)|Z(t)]=E[Z(t+s)-Z(t)+Z(t)|Z(t)]$
$=E[Z(t+s)-Z(t)|Z(t)]+E[Z(t)|Z(t)]$
$=0+Z(t)$
$=Z(t)$

*Το παραπάνω αποτέλεσμα συνεπάγεται ότι η* $Z(t)$ *είναι μια martingale (μια στοχαστική διαδικασία* $Z(t)$ *για την οποία ισχύει* $E[Z(t+s)|Z(t)]=Z(t)$*, ονομάζεται martingale)*
*[20].*

**Παράδειγμα 2.10** *Θεωρούμε* $Z(2)=4$*, θα υπολογίσουμε το* $E[Z(5)|Z(2)]$.
*Έχουμε* $E[Z(5)|Z(2)]=E[Z(2+3)|Z(2)]=Z(2)=4$
*[20].*

**Παράδειγμα 2.11** *Θεωρούμε* $Z$ *μία τυπική κίνηση Brown, θα δείξουμε ότι* $E(Z(t)Z(s))=\min\{t,s\}$ *όπου* $t,s\geq 0$.
*Έστω* $t\geq s$. *Δεδομένου* $Z(t)$ *είναι μία τυπική κίνηση Brown, τότε* $Z(0)=0$.
*Έχουμε:*
$E[Z(t)]=E[Z(t)-Z(0)]=E[Z(0+t)-Z(0)]=0$
*και*
$Var[Z(t)]=Var[Z(t)-Z(0)]=t-0=t.$
*Αλλά*
$Var[Z(t)]=E[Z(t)^2]-([Z(t)])^2=E[Z(t)^2]-0^2=E[Z(t)^2]=t.$ *Οπότε έχουμε*
$E(Z(t)Z(s))=E[(Z(s)+Z(t)-Z(s))Z(s))]=E[(Z(s))^2]+E[(Z(t)-Z(s))Z(s)]=s+E[Z(t)-Z(s)]E[Z(s)]=s+0=\min\{t,s\}$

*αφού* $Z(t)-Z(s)$ *και* $Z(s)=Z(s)-Z(0)$ *είναι ανεξάρτητες (από την ιδιότητα (3) βλέπε σελίδα 28) [20].*

Θα δείξουμε τώρα ότι η τυπική κίνηση Brown $Z$ μπορεί να προσεγγιστεί από ένα άθροισμα ανεξάρτητων διωνυμικών τυχαίων μεταβλητών. Για μία μικρή χρονική περίοδο $h$, μπορούμε να εκτιμήσουμε τις μεταβολές της $Z$ από τη χρονική στιγμή

$t$ μέχρι τη χρονική στιγμή $t + h$, σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\mathrm{Z(t+h) - Z(t) = Y(t+h)\sqrt{h}} \tag{2.19}$$

όπου $Y(t)$ είναι μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί μία διωνυμική κατανομή ($Y(t) =^{+}_{-} 1$ με πιθανότητα 0.5). Επιπλέον $E[Y(t)] = 0$ και $Var[Y(t)] = 1$. Έστω το διάστημα $[0, T]$, το οποίο διαιρείται σε $n$ ίσα υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{t}{n}$ το καθένα. Τότε έχουμε,

$Z(T) = Z(T) - Z(0) = [Z(h) - Z(0)] + [Z(2h) - Z(h)] + [Z(3h) - Z(2h)] + [Z((n-1)h) + Z((n-2)h)] + [Z(nh) - Z((n-1)h)]$ (*)

Επομένως,

$Z(T) = \sum_{i=1}^{n}[Z(ih) - Z((i-1)h)]$
$= Y(0+h)\sqrt{h} + Y(2h)\sqrt{h} + \cdots + Y(nh)\sqrt{h}$
$= [Y(h) + Y(2h) + \cdots + Y(nh)]\sqrt{h}$
$= \sum_{i=1}^{n} Y(ih)\sqrt{h}$
$= \sqrt{T}[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y(ih)]$

και εφόσον $E[Y(ih)] = 0$, έχουμε

$$\mathrm{E[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y(ih)] = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} E[Y(ih)] = 0} \tag{2.20}$$

Παρόμοια, σύμφωνα με την $Var(Y(ih)) = 1$, φτάνουμε στη σχέση

$$\mathrm{Var[\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y(ih)] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = 1} \tag{2.21}$$

Από τα παραπάνω φαίνεται καθαρά, ότι μπορούμε να θεωρήσουμε τη τυπική κίνηση Brown ως μία προσέγγιση ενός αθροίσματος ανεξάρτητων διωνυμικών μεταβλητών (draws) με μέση τιμή 0 και διασπορά $h$.

Στη συνέχεια, από το κεντρικό οριακό θεώρημα έχουμε

$$\mathrm{\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} Y(ih)} \tag{2.22}$$

το οποίο προσεγγίζει μία τυπική κανονική κατανομή, έστω M. Οπότε

$$\mathrm{Z(T)} = \sqrt{\mathrm{T}}\mathrm{M(T)} \tag{2.23}$$

και προκύπτει ότι η $Z(T)$ προσεγγίζεται από μία κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0 και διασπορά $T$. Επιπλέον απο στοχαστικό λογισμό γνωρίζουμε ότι, η $Z(T)$ μπορεί να αναπαραστεί σε ολοκληρωτική μορφή ως εξής:

$$\mathrm{Z(T)} = \int_0^{\mathrm{T}} \mathrm{dZ(t)} \tag{2.24}$$

Το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της σχέσης (2.24) ονομάζεται στοχαστικό ολοκλήρωμα.

**Παράδειγμα 2.12** *Θεωρούμε $Z$ να είναι μία τυπική κίνηση Brown.*
*Θα υπολογίσουμε την $E(Z(4)Z(5))$. Παρατηρούμε ότι $Z(4) = Z(4) - Z(0)$ και $Z(5) - Z(4)$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Οπότε,*

$E(Z(4)Z(5)) = E[Z(4)\{Z(5) - Z(4) + Z(4)\}]$
$= E[Z(4)^2] + E[Z(4)(Z(5) - Z(4))]$
$= E[Z(4)^2] + E[Z(4)]E[Z(5) - Z(4)]$
$= E[Z(4)^2] - [E[Z(4)]^2 + E[Z(4)]E[Z(5)]$
$= Var(Z(4)) = 4$ *[20].*
*Εάν μετονομάσουμε τη μικρή χρονική περίοδο $h$ σε $dt$ και τη μικρή μεταβολή $Z$ σε $dZ(t)$, θα πάρουμε τη διαφορική μορφή*

$$\mathrm{dZ(T)M(T)}\sqrt{\mathrm{dt}} \tag{2.25}$$

*Με άλλα λόγια, αυτή η συνάρτηση λέει ότι σε μικρές περιόδους του χρόνου, οι αλλαγές στην αξία της διαδικασίας είναι κανονικά κατανεμημένες με διασπορά, η οποία είναι ανάλογη με το μήκος της χρονικής περιόδου.*

## 2.6 Βασικές Ιδιότητες της Κίνησης Brown $Z(t)$

Στην υποενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε δύο βασικές ιδιότητες της κίνησης Brown, απο [20], που αποδεικνύονται εξαιρετικά σημαντικές και θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε την διωνυμική προσέγγιση στην κίνηση Brown. Χωρίζουμε ένα διάστημα $[a, b]$ σε $n$-ίσα υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{(b-a)}{n}$ το καθένα. Η τετραγωνική απόκλιση της στοχαστικής διαδικασίας $\{Z(t)\}_{(a \le t \le b)}$ ορίζεται να είναι:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}[\mathrm{Z}(\mathrm{t_i}) - \mathrm{Z}(\mathrm{t_{i-1}})]^2 = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}[\mathrm{dZ}(\mathrm{t})]^2 \tag{2.26}$$

εάν το όριο υπάρχει (κάτω από τη σύγκλιση πιθανότητας). Στην περίπτωση της τυπικής κίνησης Brown έχουμε:

$$\lim_{\mathrm{n}\to\infty}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}[\mathrm{Z}(\mathrm{ih}) - \mathrm{Z}((\mathrm{i}-1)\mathrm{h})]^2 = \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}(\mathrm{Y_{ih}}\sqrt{\mathrm{h}})^2 = \lim_{\mathrm{n}\to\infty}\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}}\mathrm{Y_{ih}^2}\mathrm{h} = \mathrm{T} < \infty \tag{2.27}$$

Ένα σημαντικό συμπέρασμα του γεγονότος, ότι η τετραγωνική απόκλιση της κίνησης Brown είναι πεπερασμένη, είναι ότι οι αποκλίσεις ανώτερης τάξης είναι όλες μηδέν.

**Παράδειγμα 2.13** *Υποθέτουμε Z μία τυπική κίνηση Brown θα αποδείξουμε ότι:*

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[Z(ih) - Z((i-1)h)]^4 = 0$

*Όντως έχουμε:*

$\left|\sum_{k=1}^{n}[Z(ih)-Z((i-1)h)]^4\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}(Y_{ih}\sqrt{h})^4\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}Y_{ih}^4h^2\right| \le \sum_{k=1}^{n}h^2 = \frac{T^2}{n^2}$

*Ως εκ τούτου,*

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}[Z(ih) - Z((i-1)h)]^4 = 0$

*Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την ολική απόκλιση της τυπικής κίνησης Βροων. Αυτή είναι:*

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|[Z(t_i)-Z(t_{i-1})]\right| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left|Y_{ih}\right|\sqrt{h} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{h}$
$= \sqrt{T}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{h}}$
$= \sqrt{T}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{h}$

*Αυτό σημαίνει ότι η τροχιά της κίνησης Brown (Brownian path) κινείται πάνω κάτω πολύ γρήγορα στο διάστημα $[0, T]$. Δηλαδή, η τροχιά θα διασχίσει το σημείο αφετηρίας άπειρες φορές στο διάστημα $[0, T]$.*

### 2.6.1 Αριθμητική Κίνηση Brown

Μία τυπική κίνηση *Brown* $dZ(t)$, σύμφωνα με [20], έχει μέση τιμή 0 και διασπορά 1 ανά μονάδα χρόνου. Μπορούμε να γενικεύσουμε, έτσι ώστε αυτή η κίνηση να πάρει μη μηδενική μέση τιμή και μία αυθαίρετη σταθερή διασπορά. Ορίζουμε τ.μ. $X(t)$ σύμφωνα με τη σχέση:

$$\mathrm{X(t+h) - X(t) = ah + \sigma Y(t+h)\sqrt{h}} \tag{2.28}$$

όπου $Y(t)$ είναι μια τυχαία μεταβλητή από μία διωνυμική κατανομή. Θεωρούμε στην σχέση (2.28) $ah$ τον όρο μετατόπισης (drift rate) και $\sigma\sqrt{h}$ τον όρο θορύβου. Έστω $T > 0$, χωρίζουμε το διάστημα $[0, T]$ σε $n$ ίσα υποδιαστήματα μήκους $h = \frac{T}{n}$ το καθένα. Τότε:

$$\mathrm{X(T) - X(0) = \sum_{i=1}^{n}(\alpha\frac{T}{n} + \sigma Y(ih)\sqrt{\frac{T}{n}}) = \alpha T + \sigma\big(\sqrt{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y(ih)}{\sqrt{n}}\big)} \tag{2.29}$$

Από το κεντρικό οριακό θεώρημα βλέπουμε ότι η $\sqrt{T}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y(ih)}{\sqrt{n}}$ προσεγγίζει την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά T. Οπότε, έχουμε:

$$\mathrm{X(T) - X(0) = \alpha T + \sigma Z(t)} \tag{2.30}$$

όπου Z είναι η τυπική κίνηση *Brown*. Η στοχαστική διαφορική μορφή αυτής της έκφρασης είναι:

$$\mathrm{dX(t) = \alpha dt + \sigma dZ(t)} \tag{2.31}$$

Μια στοχαστική διαδικασία $\{X(t)_{t\geq 0}\}$ που ικανοποιεί την εξίσωση (2.31) ονομάζεται αριθμητική κίνηση $Brown$. Παρατηρούμε ότι

$E(Q(t) - X(0)) = \alpha t$ και $Var(X(T) - X(0)) = Var(\alpha t + \sigma Z(t)) = \sigma^2 t$.

Καλούμε $\alpha$ την στιγμιαία μέση τιμή ανά μονάδα χρόνου ή τον συντελεστή μετατόπισης και $\sigma^2$ την στιγμιαία διασπορά ανά μονάδα χρόνου. Θεωρούμε ότι $Q(t) - X(0)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με αναμενόμενη μέση τιμή $\alpha t$ και διασπορά $\sigma^2 t$. Επομένως, η $X(t)$ ακολουθεί και αυτή κανονική κατανομή με μέση τιμή $Q(0) + \alpha t$ και διασπορά $\alpha^2 t$.

**Παράδειγμα 2.14** *Θεωρούμε $\{X(t)_{t\geq 0}\}$ να είναι μία αριθμητική κίνηση Brown με συντελεστή μετατόπισης α και μεταβλητότητα ς. Θα δείξουμε ότι:*

$X(t) = X(\alpha) + \alpha(t - \alpha) + \sigma\sqrt{(t - \alpha)}W(t)$

*όπου $W$ είναι μία τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή.*

*Χρησιμοποιώντας τη σχέση (2.31) μπορούμε να γράψουμε*

$X(t) - X(\alpha) = \alpha(t - \alpha) + \sigma\sqrt{(t - \alpha)}W(t).$

*Επιπλέον η $X(t)$ ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή $X(\alpha) + \alpha(t - \alpha)$ και διασπορά $\sigma^2(t - \alpha)$.*

**Παράδειγμα 2.15** *Έστω ότι $\{X(t)_{t\geq 0}\}$ ακολουθεί μία αριθμητική κίνηση Brown έτσι ώστε $X(30) = 2$. Ο συντελεστή μετατόπισης α της κίνησης Brown είναι 0.435, και η μεταβλητότητα ς είναι 0.75. Θα βρούμε ποια είναι η πιθανότητα να έχουμε $X(34) < 0$.*
*Η μέση τιμή της κανονικής κατανομής $X(34)$ σύμφωνα με το προηγούμενο παράδειγμα είναι:*

$X(30) + \alpha(34 - 30) = 2 + 0.435 * 4 = 3.74.$

*Η τυπική απόκλιση είναι* $\sigma\sqrt{(t - \alpha)} = 0.75\sqrt{(34 - 30)} = 1.5$

*Οπότε έχουμε:*

$P(X(34) < 0) = P(Z < (\frac{0-3.74}{1.5})) = N(Z < -2.49) = 0.006387$

**Παράδειγμα 2.16** *Έστω $\{X(t)_{t\geq 0}\}$ είναι μία αριθμητική τυπική κίνηση Brown με συντελεστή μετατόπισης α=0.2 και μεταβλητότητα $\sigma^2 = 0.125$. Θα αποδείξουμε ότι η πιθανότητα $X(2)$ είναι μεταξύ 0.1 και 0.5.*
*Η $X(2)$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $\alpha T = 0.4$ και διασπορά $\sigma T^2 = 0.125 * 2 = 0.25$.*

*Επιπλέον,*

$P(0.1 < X(2) < 0.5) = N(\frac{(0.5-0.4)}{0.5}) - N(\frac{(0.1-0.4)}{0.5}) = 0.57926 - 0.274253$
$= 0.305007$

### 2.6.2 Γεωμετρική Κίνηση Brown

Στην ενότητα αυτή, θα παρουσιάσουμε τη γεωμετρική κίνηση Brown [20]. Ο λόγος που γίνεται αυτό είναι ότι η αριθμητική κίνηση Brown έχει πολλά μειονεκτήματα, συγκεκριμένα, Η $X(t)$ μπορεί να είναι αρνητική και ως εκ τούτου η αριθμητική κίνηση Brown είναι ένα κατώτερο μοντέλο για τις τιμές των μετοχών.
Η μέση τιμή και η διασπορά των μεταβολών σε όρους δολαρίου είναι ανεξάρτητες από το επίπεδο της τιμής της μετοχής. Στην πράξη, αν η τιμή των μετοχών διπλασιαζόταν, θα περιμέναμε τόσο την αναμενόμενη απόδοση του δολαρίου όσο και στη τυπική απόκλιση των αποδόσεων του δολάριου περίπου διπλάσια τιμή. Αυτά τα μειονεκτήματα καθώς και άλλα μπορούν να εξαλειφθούν με τη χρήση της γεωμετρικής κίνησης Βροων που θα δούμε ακολούθως. Όταν ο συντελεστή μετατόπισης α και η μεταβλητότητα $\sigma$ της αριθμητικής κίνησης Brown είναι συναρτήσεις του $X(t)$, τότε η στοχαστική διαφορική μορφή

$$\mathrm{dX(t)} = \alpha(\mathrm{X(t)})\mathrm{dt} + \sigma(\mathrm{X(t)})\mathrm{dZ(t)} \tag{2.32}$$

ονομάζεται διαδικασία *Ito*. Ειδικότερα, αν $\alpha(X(t)) = \alpha X(t)$ και $\sigma(X(t)) = \sigma X(t)$ τότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται

$$\mathrm{dX(t)} = \alpha\mathrm{X(t)dt} + \sigma\mathrm{X(t)dZ(t)} \tag{2.33}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{(\mathrm{dX(t)})}{(\mathrm{X(t)})} = \alpha\mathrm{dt} + \sigma\mathrm{dZ(t)} \tag{2.34}$$

Η διαδικασία στην προηγούμενη εξίσωση είναι γνωστή ως γεωμετρική κίνηση

*Brown*. Σημειώνεται ότι η εξίσωση (2.34) αποδεικνύει ότι η ποσοστιαία μεταβολή της αξίας περιουσιακών στοιχείων ακολουθεί την κανονική κατανομή με στιγμιαία μέση τιμή α και στιγμιαία διασπορά $\sigma^2$.

**Παράδειγμα 2.17** *Παραθέτουμε παρακάτω μία γεωμετρική κίνηση Βροων ως εξής [20]:*

$\frac{(dX(t))}{(X(t))} = 0.215dt + 0.342dZ(t)$

*Θα βρούμε ποια είναι η στιγμιαία μέση τιμή της ποσοστιαίας μεταβολής της αξίας των περιουσιακών στοιχείων και ποια είναι η στιγμιαία διασπορά.*
*Η στιγμιαία μέση τιμή της ποσοστιαίας μεταβολής στην αξία περιουσιακών στοιχείων είναι*
$\alpha = 0.215$
. *Η στιγμιαία διασπορά της ποσοστιαίας μεταβολής είναι* $\sigma^2 = [0.342]^2 = 0.116964$

*Για μία αυθαίρετη αρχική τιμή* $X(0)$ *της εξίσωσης (2.34) παίρνουμε*

$X(t) = X(0)e^{((\alpha-0.5\sigma^2))}t + \sigma\sqrt{t}Z)$

*όπου* $Z$ *είναι μία τυχαία μεταβλητή κανονικά κατανεμημένη με παραμέτρους 0 και 1. Εναλλακτικά μπορούμε να γράψουμε*

$X(t) = X(0)e^{((\alpha-0.5\sigma^2))}t + \sigma Z(t))$

*όπου* $Z$ *είναι μια τυχαία μεταβλητή κανονικά κατανεμημένη με παραμέτρους 0 και* $t$. *Παρατηρούμε ότι η* $X(t)$ *ακολουθεί την εκθετική κατανομή και όχι την κανονική. Όμως η* $X(t)$ *ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με μέση τιμή* $E(X(t)) = X(0)e^{\alpha t}$ *και διασπορά* $Var(X(t)) = e^{2\alpha t}X(0)^2(e^{\sigma^2 t} - 1)$. *Έπεται ότι η* $\ln{(X(t))}$ *ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή*

$\ln{(X(0))} + (\alpha - 0.5\sigma^2)t$ *και διασπορά* $\sigma^2 t$.

*Έτσι,*

$\ln{(X(t))} = \ln{(X(0))} + (\alpha - 0.5\sigma^2)t + \sigma Z(t)$

*Επομένως, όταν η* $X$ *ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown, ο λογάριθμος της ακολουθεί μια αριθμητική κίνηση Brown, η οποία είναι:*

$d[\ln(X(t))] = (\alpha - 0.5\sigma^2)dt + \sigma dZ(t)$ *[20].*

**Παράδειγμα 2.18** *Η τιμή μίας μετοχής είναι 100. Η τιμή της μετοχής ακολουθεί γεωμετρική κίνηση Brown με εύρος μετατόπισης (drift rate)* 10% *ανά χρόνο και διασπορά με έυρος* 9% *ανά χρόνο.Θα υπολογίσουμε την πιθανότητα ότι σε δύο χρόνια από σήμερα η τιμή της μετοχής θα είναι 200.*
*Θέλουμε* $P(S(2) > 200) = P(\ln(\frac{S(2)}{S(0)}) > \ln 2)$
*Αλλά η* $\ln(\frac{S(2)}{S(0)})$ *ακολουθεί κανονική κατανομή με μέση τιμή*

$(\alpha - 0.5\sigma^2)t = (0.10 - 0.5(0.09)) * 2 = 0.11$

*και διασπορά*

$\sigma^2 t = 0.09 * 2 = 0.18$

*Επομένως,*

$P(S(2) > 200) = P\left(Z > \frac{\ln 2 - 0.11}{\sqrt{0.18}}\right) = 1 - N(1.37) = 1 - 0.915 = 0.085$*[20].*

**Παράδειγμα 2.19** *Θεωρούμε μία γεωμετρική κίνηση Brown με συντελεστή μετατόπισης* $\alpha = 0.10$*. Για* $h = \frac{1}{365}$*, υποθέτουμε ότι η αναλογία του συντελεστή θορύβου* $\sigma\sqrt{h}$ *με τον συντελεστή μετατόπισης* $\alpha$ *είναι 22.926. Θα βρούμε τη τυπική απόκλιση* $\sigma$*.*
*Δεδομένου ότι:*

$\frac{(\sigma\sqrt{h})}{ah} = 22.926$

*ή*

$\frac{\sigma}{(0.10)\sqrt{(\frac{1}{365})}} = 22.926$

*λύνουμε ως προς ς και βρίσκουμε* $\sigma = 0.12$ *[20].*

# Κεφάλαιο 3

# Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα και Δικαιώματα Προαίρεσης

Στο παρόν κεφάλαιο θα κάνουμε αναφορά στα Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα. Θα μιλήσουμε για τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματά τους, θα διαχωρίσουμε τις κατηγορίες τους, θα αναλύσουμε κάποια απο τα σημαντικότερα χρηματοοικονομικά προϊόντα δίνοντας τον ορισμό τους, θα καταγράψουμε τα χαρακτηριστικά τους και τα γνωρίσματά τους και θα εξετάσουμε την ωφελιμότητά τους. Απο τα διάφορα και πιο γνωστά παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα θα εστιάσουμε περισσότερο στα Δικαιώματα Προαίρεσης.

## 3.1 Χρηματοοικονομικά Παράγωγα και Ορισμοί

Παράγωγο προϊόν στα χρηματοοικονομικά ονομάζεται ένα συμβόλαιο η αξία του οποίου εξαρτάται από την αξία κάποιου άλλου βασικότερου προϊόντος (υποκείμενο προϊόν ή underlying asset). Πρόκειται για χρηματοοικονομικά εργαλεία που βασίζουν την τιμή τους και προκύπτουν απο άλλα βασικά προϊόντα.Επίσης μπορούν να θεωρηθούν διμερής συμβάσεις κατα τις οποίες μπορεί να αναφέρονται σε μετοχές, δείκτες μετοχών, ομόλογα, συναλλάγματα ή και εμπορεύματα.

Τα πιο γνωστά παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα είναι τα εξής:

1. Τα Προθεσμιακά Συμβόλαια (ΠΣ) (Forward contracts)
2. Τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ) (Future contracts)
3. Τα Δικαιώματα Προαίρεσης (options)
4. Swaps (Ανταλλαγή δικαιωμάτων και υποχρεώσεων)

Στη συνέχεια θα αναφερθούμε στις παραπάνω συμβάσεις παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, όπως είναι τα Προθεσμιακά Συμβόλαια (Π.Σ.), τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (Σ.Μ.Ε.) , θα γίνει μια σύντομη αναφορά στα λεγόμενα Swaps και τέλος θα ασχολήθουμε δίνοντας περισσότερο έμφαση στη κατηγορία των Δικαιωμάτων Προαίρεσης.

Τα Παράγωγα είναι χρήσιμα για τις εξής διαδικασίες:

- Για Αντιστάθμιση Κινδύνου απο την μεταβλητότητα των τιμών και των επιτοκίων-Hedging:
  Χρήση των παραγώγων με σκοπό την εξουδετέρωση επενδυτικών κινδύνων. Αυτό εξασφαλίζεται με τη λήψη κατάλληλης θέσης σε παράγωγο προϊόν, η οποία δημιουργεί αντίθετα αποτελέσματα από αυτά της υποκείμενης αξίας, με αποτέλεσμα να μειώνεται ως και να εξαλείφεται ο κεφαλαιακός κίνδυνος για τον επενδυτή, ανεξάρτητα από το αν η αγορά κινηθεί ανοδικά ή πτωτικά. Έτσι, οι επενδυτές δεν είναι αναγκασμένοι να ρευστοποιήσουν το χαρτοφυλάκιό τους, αλλά μπορούν να διατηρήσουν τις θέσεις τους έχοντας εξασφαλίσει το κεφάλαιό τους και κλειδώσει τις αποδόσεις τους, ακόμη και σε περιόδους αβεβαιότητας για την πορεία της αγοράς.
- Για Κερδοσκοπία: Εδώ τα παράγωγα χρησιμοποιούνται με σκοπό το κέρδος το οποίο προέρχεται απο την διαφορετικότητα των τιμών σε διαφορετικές αγορές.
- Για Εκμετάλλευση των Μεταβολών της Αγοράς (μεταβλητότητα):Τα παράγωγα χρησιμεύουν με σκοπό την εξασφάλιση κέρδους με ελάχιστο ή και μηδενικό κίνδυνο.
- Για Arbitrage: εδώ χρησιμοποιούνται για την εκμετάλλευση των διαφορών μεταξύ της αγοράς αξιών - περιουσιακών στοιχείων και της αγοράς παραγώγων.

Τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα που χρησιμοποιούνται ως επενδυτικά χρηματοοικονομικά εργαλεία στις οικονομικές αγορές έχουν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα και θα αναφερθούμε σε μερικά απο αυτά:

## Πλεονεκτήματα

- Χαμηλό Κόστος.
- Οι τιμές συγκρατούνται οπότε δεν υπάρχει μεγάλη αύξηση τους.
- Παίζουν σημαντικό ρόλο στη πρόβλεψη των τιμών με στόχο την λήψη εταιρικών αποφάσεων.
- Ο κίνδυνος αντισυμβαλλομένου εξαλλείπτεται, δηλαδή ο πιστωτικός κίνδυνος ή πιθανότητα αθέτησης συμβολαίου αποφεύγεται απο τον αντισυμβαλλόμενο, για όσα παράγωγα που διαπραγματεύονται στα λεγόμενα χρηματιστήρια των παραγώγων.
- Με τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα δίνεται η δυνατότητα να επιλέξουμε το δείκτη κινδύνου που θα περιορίσουμε. Αυτό συμβαίνει προφανώς για να υπάρχει ενα περιθώριο κέρδους πράγμα το οποίο δεν γίνεται οταν δεν υπάρχει κίνδυνος. Καθώς αν συμβεί αυτό η πιθανότητα κέρδους μειώνεται όταν καταφεύγουμε σε ασφαλής επενδύσεις.
- Απο την άλλη είναι χρήσιμα καθώς δίνεται η πιθανότητα ύπαρξης κέρδους, ανεξαρτήτως των συνθηκών που υπάρχουν στην αγορά ακόμα και στη περίπτωση πτώση της αγοράς.
- Με τη μόχλευση ο επενδυτής του δίνεται η δυνατότητα να καταβάλει μόνο ένα ελάχιστο μέρος της αξιάς των αγορών τα χρήματα προεισπράτονται όταν έχουμε πώληση δικαιωμάτων.

## Μειονεκτήματα

- Επίσης με τη μόχλευση έχουμε πολλαπλασιασμό όχι μόνο κέρδους αλλά και της ζημιάς.
- Αν οργανώσουμε λάθος σχέδιο για την αντιμετώπιση κινδύνου μέσω των παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων αντί για κέρδη έχουμε ζημιές.
- Όταν στην παγκόσμια οικονομία υπάρχει κρίση ή συνεχής πτώση αυτό επηρεάζει την πτώση λόγω της αύξησης προσφοράς τίτλων.

## 3.2 Είδη Χρηματοοικονομικών Προϊόντων

### 3.2.1 Προθεσμιακά Συμβόλαια (ΠΣ)-(Forwards Contracts)

Τα Προθεσμιακά Συμβόλαια (ΠΣ) ή (forward contracts) είναι το απλούστερο είδος συμβάσεων χρηματοοικονομικών προϊόντων παραγώγων. Βασική ιδιαιτερότητα των συμβολαίων αυτών είναι οτι μπορείς να τα διαπραγματευτείς έξω απο τα χρηματιστήρια των παραγώγων και αναφέρεται μεταξύ δυο αντισυμβαλλομένων, δέσμευση των δύο αυτών μερών είναι το ένα να πουλήσει και το άλλο να αγοράσει μια συγκεκριμένη ποσότητα κάποιου προϊόντος παραγώγου όπως συναλλάγματα ή δείκτες μετοχών και με όρους οι οποίοι γνωστοποιούνται ρητά στη σύμβαση. Οι θέσεις των μερών αυτών ονομάζονται short και long αντίστοιχα. Υποθέτουμε οτι $S_r$ είναι η τιμή του αγαθού στην ημερομηνία λήξης του συμβολαίου και K είναι η τιμή που καθορίζεται την χρονική στιγμή που συνάπτεται το συμβόλαιο.Το κέρδος , γενικά, του αγοραστή απο ένα forward contract είναι (χωρίς να λαμβάνουμε υποψιν μας την χρονική αξία του χρήματος) :

$$\mathrm{S_r} - \mathrm{K} \tag{3.1}$$

Αντίθετα το κέρδος του πωλητής απο ένα τέτοιο συμβόλαιο είναι:

$$\mathrm{K} - \mathrm{S_r} \tag{3.2}$$

Τα προθεσμιακά συμβόλαια κάνουν λόγο για χρηματοοικονομικά προϊόντα τα οποία μπορεί είτε να είναι είτε να μην είναι τυποποιημένα, η σύναψη της σύμβασης και η συναλλαγή γίνεται χωρίς διαμεσολαβητές και μόνο ανάμεσα σε δυο μέρη. Επίσης αυτοπροσαρμόζονται (self-regulated)και η συναλλαγή είναι δυνατόν να εκπληρωθέι κατα τη λήξη του συμβολαίου (delivery-likely). Γενικά θεωρείται οτι προσαρμόζονται εύκολα , ωστόσο υπάρχει δυσκολία στο να βρεθέι ο πληρεξούσιος που έχει εξουσιοδοτηθεί να εκπροσωπεί το συμβόλαιο, παρουσιάζεται κίνδυνος ρευστότητας των αγορών και απο την άλλη ευκολία για να πραγματοποιηθεί οικονομική συναλλαγή. Τέλος, εκτίθονται σε κίνδυνο χρεοκοπίας.

### 3.2.2 Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (ΣΜΕ)-(Futures Contracts)

Τα Συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (futures) όπως και τα Προθεσμιακά (forwards) πρόκειται για μια σύμβαση μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων , οπου η μια μεριά υπόσχεταο να αγοράσει (long position) και η άλλη μεριά να πουλήσει (short position), μια συγκεκριμένη ποσότητα ενός προϊόντος σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον και σε μια προσυμφωνιμένη τιμή συναλλαγής (delivery price). Οι δυο μεριές επιθυμούν το αντίθετο δηλαδή ο αγοραστής προσδοκά για μια αύξηση της τιμής του αγαθού ενώ ο πωλητής επιθυμεί την μείωση της τιμής του αγαθού. Το υποκείμενο περιουσιακό αγαθό μπορεί να είναι είτε εμπόρευμα (ζαχαρη,μαλλι, χαλκος, σίδηρος, χρυσός κλπ) είτε χρηματοοικονομικό (μετοχές, ομόλογα, συναλλάγματα).

Τα futures contracts είναι απλά μια σύμβαση, δεν είναι συνάλλαγμα, ομόλογο ή περιουσιακό στοιχείο, το οποίο υποδηλώνει τους όρους με τους οποίους θα γίνει η πώληση ενός αγαθού στο μέλλον σε τιμή που καθορίζεται στο παρόν. Το αγαθό είναι τυποποιημένο,με τους διαμεσολαβητές του που ελέγχονται απο τους αντίστοιχους εκπροσώπους (regulated by agencies) και είναι πιθανό να ρευστοποιηθούν, μέσω της αγοράς αντίθετης θέσης - συναλλαγής για να αποφευχθεί η παράδοση. Οι περισσότεροι συγκεκριμένα που επενδύουν με τη συγκεκριμένη μέθοδο δεν κρατούν τις συμβάσεις τους futures μέχρι τη λήξη. Σχεδόν το 95% των συμβολαίων ουσιαστικά ακυρώνεται μέσω της διαδικασίας (offset).Τα τυποποιημένα futures έχουν τις ρίζες τους στην αγροτική οικονομία, αλλά σήμερα εμπορεύονται μία μεγάλη ποικιλία προϊόντων, από το σιτάρι μέχρι το φυσικό αέριο και τα πολύτιμα μέταλα αλλά και χρηματιστηριακά προϊόντα.

### 3.2.3 Σύγκριση Προθεσμιακών Συμβολαίων και Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης

Στη σύγκριση των δυο αυτών συμβολαίων παρατηρούμε οτι και στα δυο βασικό χαρακτηριστικό είναι οτι δεσμεύουν και τα δυο μέρη (long) και (short) να πουλήσουν ή να αγοράσουν ένα αγαθό υπο τις πορϋποθέσεις που αναγράφονται ρητά στη σύμβαση μεταξύ των δυο αυτών μερών. Οι δυο πλευρές δεν ανταλλάσουν χρήματα κατα την πρώτη συμφωνία. Ωστόσο τα χρήματα ανταλλάσσονται οταν το συμβόλαιο παύει να λήγει πλεόν δηλαδή κατα την διάρκεια της παράδοσης και παραλαβής του περιουσιακού στοιχείου. Τα συμβόλαια τόσο τα Προθεσμικά όσο και τα Μελλοντικής Εκπλήρωσης είναι χρήσιμα καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν για hedging κατα την διαφοροποίηση των τιμών ή για απόκτηση κέρδους πάνω στις διαφορές των τιμών κατα την διάρκεια μείωσης του ρίσκου. Επιπλεόν το κόστος για δικαιώματα προαίρεσης απο την πλευρά αγοράς δηλαδή (long) είναι μεγαλύτερο σε σχέση με την σύναψη των παραπάνω συμβάσεων Προθεσμιακών και Μελλοντικής Εκπλήρωσης. Παρόλαυτα αν και παρουσιάζεται λίγοτερο κόστος για τέτοιου είδους σύναψης συμβάσεων μπορεί να έχουμε σημαντικές απώλειες επειδή μέσα απο αυτα τα συμβόλαια δεσμεύονται ρητά οι αντίστοιχοι επενδυτές.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε και τις θέσεις των δύο πλευρών που εμπλέκονται. Η μια πλευρά είναι δεσμευμένη στο να αγοράσει το υπο εποπτούμενο αγαθό σε συγκεκριμένη τιμή σε συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον και έχει θέση long. Επιπλέον η πλευρά η οποία αντίστοιχα είναι δεσμευμένη να πουλήσει το υπο εποπτούμενο αγαθό σε συγκεκριμένη τιμή σε συγκεκριμένη ημερομηνία στο μέλλον και έχει θέση short.

Αξιοσημείωτο είναι οτι αν και τα δυο αυτά συμβόλαια forwards και futures είναι σχεδόν όμοια μεταξύ τους, τα οποία ολοκληρώνονται σε συγκεκριμένες ημερομηνίες στο μέλλον , υπάρχουν κάποιες διαφορές. Τα συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης είναι τυποποιήσιμα και εμπορεύσιμα σε αγορές χρηματιστηρίων ενώ τα Προθεσμιακά Συμβόλαια διαπραγματεύονται ιδιωτικά και όχι στις αγορές χρηματιστηρίων. Οι συμβάσεις futures απαιτούν περιθώρια τα λεγόμενα (margins) και διαδικασίες mark-to-market, κατα την διαδικασία καταγραφής τους αναπαριστόνται η παρούσα τιμή αγοράς και όχι η τιμή που καταγράφεται στην ημερομηνία κλεισίματος , αυτό συμβαίνει ώστε να διασφαλίζονται οτι καμία απο τις δυο πλευρές κατα την συμφωνία δεν προτίθονται να πτωχεύσει. Έτσι τα συμβόλαια Μελλοντικής Εκπλήρωσης (futures) θεωρούνται ασφαλέστερα στις αγορές κατα την συναλλαγή τους και ειδικότερα όταν αυτό γίνεται ανάμεσα σε πλευρές που είναι άγνωστοι μεταξύ τους και ταυτόχρονα δεν είναι απαραίτητη η φυσική παρουσία των μερών. Αντίθετα οι Προθεσμιακές Συμβάσεις (forwrads) δεν απαιτούν τέτοιου είδους όρους για την πραγματοποίησή τους.

## 3.3 Δικαιώματα Προαίρεσης (Options)

Η αγορά ενός δικαιώματος προαίρεσης είναι σχεδόν ίδια με αυτήν ενός ασφαλιστήριου συμβολαίου. Ο επενδυτής πληρώνει ένα ποσό για να αποκτήσει μία ενδεχομένως υψηλή απόδοση υπό προϋποθέσεις. Αν εκπληρούνται οι προϋποθέσεις, ξέρει εκ των προτέρων το ποσό της αποζημίωσης που θα εισπράξει την ημερομηνία λήξης. Αν οι προϋποθέσεις δεν τηρούνται, το συμβόλαιο τότε δεν θα αξιοποιηθεί. Σε κάθε περίπτωση όμως ο επενδυτής ξέρει ποιο είναι το μέγιστο ποσό που μπορεί να χάσει, το οποίο έχει μάλιστα προπληρώσει.

Τα δικαιώματα προαίρεσης (options) είναι μία νομικά δεσμευτική συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων (επενδυτών). Πάντοτε, όπως προαναφέραμε για τα χρηματοοικονομικά προϊόντα ο ένας έχει θέση αγοράς (long) και ο άλλος θέσης πώλησης (short). Αυτός που έχει τη θέση αγοράς (long) έχει μόνο δικαιώματα και όχι υποχρεώσεις. Αντίθετα, αυτός που έχει θέση πώλησης (short) έχει μόνο υποχρεώσεις και κανένα δικαίωμα.

Τα δικαιώματα διακρίνονται σε δικαιώματα αγοράς - calls (τα οποία έχουν αγοραστές και πωλητές) και δικαιώματα πώλησης - puts (τα οποία επίσης έχουν αγοραστές και πωλητές). Οι αγοραστές δικαιωμάτων είναι σαν τους ασφαλιζόμενους: πληρώνουν ένα μικρό ποσό για να εξασφαλίσουν κάποιες αποδόσεις.

Οι πωλητές δικαιωμάτων είναι σαν τις ασφαλιστικές εταιρείες: εισπράττουν μικρά ποσά από τους αγοραστές των δικαιωμάτων και παίρνουν τον κίνδυνο να πληρώσουν πολλαπλάσια ποσά.

## 3.3.1 Είδη Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Τα δικαιώματα προαίρεσης δύναται να κατηγοριοποιηθούν είτε σύμφωνα με τον τρόπο πραγματοποίησης των συναλλαγών είτε σύμφωνα με το χρόνο άσκησής τους.

#### Εφαρμογή των συναλλαγών επι των Δικαιωμάτων Προαίρεσης

#### Χρηματιστηριακά Δικαιώματα Προαίρεσης - (Exchange-traded Options):

Όπως αναφέρει και ο τίτλος πρόκειται για δικαιώματα προαίρεσης τα οποία η συναλλαγή τους γίνεται στις χρηματιστηριακές αγορές και μπορούν να χαρακτηριστούν ως τυποποιημένα. Το παραπάνω διευκολύνει γιατί επιτρέπει ωστε να μπορούν να χρησιμοποιηθούν διάφοροι μέθοδοι μοντελοποίησης ως προς την τιμολόγησής τους. Οι διαδικασίες συναλλαγών τους πραγματοποιούνται μέσω χρηματιστηριακών εταιριών και έτσι σχεδόν μηδενίζεται ο κίνδυνος να μην τηρηθούν οι συμφωνίες μεταξύ των αντισυμβαλλομένων.

Τα κυριότερα δικαιώματα προαίρεσης αυτής της κατηγορίας είναι τα εξής:

- Δικαίωματα προαίρεσης μέσω θέσης αγοράς/πώλησης μετοχών (τα πιο κοινά τέτοια δικαιώματα είναι Αμερικάνικα Δικαιώματα)

- Δικαίωματα προαίρεσης μέσω θέσης αγοράς/πώλησης εμπορευμάτων
- Δικαίωματα προαίρεσης για συναλλαγές ομολόγων
- Δικαίωματα που αφορούν σε αλλαγές επιτοκίου
- Δικαίωματα προαίρεσης που αφορούν άμεσα δείκτες, χρηματιστηριακούς ή οποιονδήποτε άλλον
- Δικαίωματα προαίρεσης για συμβάσης μελλοντικής εκπλήρωσης και
- Δικαίωματα προαίρεσης όπου οι δυο πλευρές που συναλλάσσονται είναι συνδεδεμένες με επιτόκια, η μια με σταθεροποιημένο και η άλλη με κυμαινόμενο επιτόκιο

### Μη Χρηματιστηριακά Δικαιώματα Προαίρεσης - (Over-the-counter Options):

Σε αντίθεση με τα προηγούμενα όμως αυτά τα δικαιωμάτα δεν συναλλάσσονται στο χρηματιστηρίο και δεν είναι εισηγμένα σε αυτό, αυτό σημαίνει οτι η συναλλαγή τους γίνεται ιδιωτικά και δεν είναι τυποποιημένες συμβάσεις αλλά καθορίζονται με βάση τις ανάγκες της κάθε εταιρίας. Σύμφωνα με αυτό το γεγονός οι δυο πλευρές ορίζουν τους όρους για τα διακιώματα προαίρεσης και τους προσαρμόζουν σύμφωνα με τις ανάγκες τους και η διαπραγμάτευσής τους μπορεί να γίνει είτε απευθείας ανάμεσα των δυο πλευρών είτε μέσω χρηματιστηριακών εταιριών.

Τα σημαντικότερα δικαιώματα προαίρεσης για αυτή την κατηγορία είναι:

- Δικαίωματα προαίρεσης που αφορούν επιτόκια
- Δικαίωματα προαίρεσης που αφορούν επιτόκια νομισμάτων
- Δικαίωματα προαίρεσης που αφορούν συμβόλαια όπως swaps αλλα και swaptions

### Χρονική Στιγμή Άσκησης των Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Σύμφωνα με το κριτήριο άσκησης των δικαιωμάτων αυτά διαχωρίζονται ως εξής:

- European Options: Τα είδη αυτών των δικαιωμάτων πραγματοποιούνται μόνο κατα τη λήξη τους.

- American Options:Η κατηγορία αυτών μπορούν να ασκηθούν καθ'ολη την διάρκεια τους μέχρι τη λήξη τους.

- Bermudan Options: Η άσκηση των δικαιωμάτων αυτών μπορεί να ασκηθεί σε συγκεκριμένες ημερομηνίες μέχρι να λήξουν.

- Barrier Options:Η συναλλαγή τους πραγματοποιείται μόνο όταν η τιμή του αναφερόμενου τίτλου ξεπεράσει ένα προορισμένο όριο το οποίο έχει τεθεί.

- Exotic Options: Πρόκειται για δικαιώματα προαίρεσης όπου βασικό χαρακτηριστικό τους είναι οτι έχουν σύνθετο χρηματοοικονομικό κορμό και ένα ευρύτερο φάσμα τιμών άσκησης αυτό σημαίνει οτι είναι συνήθως over-the-counter ή ενσωματωμένα σε δομημένα ομόλογα.

### 3.3.2 Δικαιώματα Προαίρεσης και Στρατηγικές Θέσεις αυτών κατα την Συναλλαγή

Παρακάτω θα προσπαθήσουμε να επεξηγήσουμε τις θέσεις που παρουσιαζονται κατα την αγορά δικαιωμάτων προαίρεσης. Έχουμε λοιπον:

- Αν αγοράσουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης απο την θέση αγοράς (δηλαδή πάρουμε θέση αγοράς στο δικαίωμα αγοράς,long call), μας δίνεται το δικαίωμα να αγοράσουμε όταν θελήσουμε κάποια στιγμή στο μέλλον, την υποκείμενη αξία του διακιώματος σε κάποια συγκεκριμένη τιμή, την λεγόμενη τιμή άσκησης (exercise price). Δρούμε κατα κάποιο τρόπο σαν ασφαλιζόμενοι: πληρώνουμε ένα αντίτιμο και περιμένουμε άνοδο της αγοράς. Τη σχετική υποχρέωση (πώλησης της υποκείμενης αξίας) αναλαμβάνει ο πωλητής του δικαιώματος αγοράς (δηλαδή αυτός που έχει πάρει θέση πώλησης στο δικαίωμα αγοράς, short call). Δραστηριοποιείται σαν ασφαλιστική εταιρεία, εισπράττει αλλά δεν ελπίζει σε άνοδο της αγοράς. Με λίγα λόγια, η αγορά ενός δικαιώματος αγοράς είναι σαν λαχείο για άνοδο της αγοράς.

- Αν τώρα αγοράσουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης απο την θέση πώλησης (δηλαδή πάρουμε θέση αγοράς στο δικαίωμα πώλησης, long put), θα έχουμε το δικαίωμα να πουλήσουμε αν θελήσουμε κάποια στιγμή στο μέλλον, την υποκείμενη αξία, σε συγκεκριμένη τιμή άσκησης. Πράττουμε δηλαδή σαν ασφαλιζόμενοι: πληρώνουμε ένα ποσό και περιμένουμε πτώση της αγοράς. Την αντίστοιχη υποχρέωση (αγοράς της υποκείμενης αξίας) έχει ο πωλητής του δικαιώματος πώλησης (δηλαδή αυτός που έχει πάρει θέση πώλησης στο δικαίωμα πώλησης, short put). Όπως και πριν δραστηριοποιείται σαν ασφαλιστική εταιρεία: εισπράττει και ελπίζει σε πτώση της αγοράς. Οπότε και εδώ η αγορά δικαιώματος πώλησης είναι σαν λαχείο για κάθοδο όμως τώρα της αγοράς

### 3.3.3 Κλείσιμο Θέσεων

Στην προηγούμενη υποενότητα έγινε αναφορά για τις θέσεις των δικαιωμάτων προαίρεσης, τώρα θα αναφερθούμε στο λεγόμενο κλείσιμο των θέσεων αυτών:

Γενικά μπορούμε να κλείσουμε την θέση μας σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή κατα την διάρκεια μέχρι την ημερομηνία λήξης. Έχει παρατηρηθεί οτι οι περισσότεροι επενδυτές κλείνουν την θέση τους στα δικαιώματα προαίρεσης πριν αυτά λήξουν. Σημαντικό να επισημάνουμε είναι οτι άλλο είναι το κλείσιμο θέσης (κάτι το οποίο μπορεί να γίνει οποτεδήποτε καθ'ολη την διάρκεια) και άλλο να τα εξασκήσουμε πρόωρα ή μονο όταν λήξουν.

- ΑΓΟΡΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ (LONG CALL)
  ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ.
- ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ (SHORT CALL)
  ΑΓΟΡΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΑΓΟΡΑΣ.
- ΑΓΟΡΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΩΛΗΣΗΣ (LONG PUT)
  ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΩΛΗΣΗΣ
- ΠΩΛΗΣΗ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΩΛΗΣΗΣ (SHORT PUT)
  ΑΓΟΡΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΩΛΗΣΗΣ

Εξαρτάται απο διάφορους παράγοντες το πότε θα κλείσουμε την θέση μας στα δικαιώματα προαίρεσης πριν την ημερομηνία λήξης τους. Αν αγοράσαμε στο δικαίωμα αγοράς δείκτη στα 200 ευρώ, η αξία του σήμερα είναι π.χ. 250 ευρώ και δεν αναμένουμε να αυξηθεί περαιτέρω ή είμαστε ήδη ικανοποιημένοι, μπορούμε να κλείσουμε τη θέση μας και να εισπράξουμε το κέρδος των 50 ευρώ (250 - 200), μείον την προμήθεια πυ θα πάρει ο χρηματιστής. Αντίθετα, αν προβλέψουμε άμεσα ότι δεν θα επαληθευτούν οι προσδοκίες μας, πάλι είναι απαραίτητο να κλείσουμε τη θέση μας για να ελαχιστοποιήσουμε τη ζημία.

Ως τελευταία επιλογή εαν κατέχουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης είναι να περίμενουμε το δικαίωμα αυτο να λήξει. Κάτι τέτοιο όμως έχει ως αποτέλεσμα το δικαίωμα να χάσει την αξία του και ο κάτοχος του να υποστεί μια ζημία που θα είναι ίση με το αντίτιμο της τιμής του δικαιώματος που πληρώθηκε. Ωστόσο υπάρχει μια περίπτωση κατα την οποία η τιμή του δικαιώματος χάνεται εξολοκλήρου , κάτι τέτοιο συμβαίνει όταν ο κάτοχος του δικαιώματος δεν πάρει την απόφαση να το εξασκήσει μέσω της εντολής πώλησης ή να κλείσει τη θέση του μέσω κάποιας συναλλαγής.

### 3.3.4 Τιμές Άσκησης - (Exercise Price)

Έχει παρατηρηθεί οτι για κάθε δικαίωμα υπάρχουν σχεδόν πάντα γύρω στις 11 διαφορετικές τιμές άσκησης: μία οριακά στην τιμή της υποκείμενης αξίας, 5 τιμές πάνω και 5 τιμές κάτω από την υποκείμενη αξία.Ωστόσο μπορούμε να διαλέξουμε μία τιμή άσκησης, η οποία δεν επιτρέπεται να αλλάξει σε όλη τη διάρκεια του δικαιώματος προαίρεσης. Επίσης αν επιλέξουμε κάποια πολύπλοκη στρατηγική με την εφαρμογή των δικαιωμάτων, τότε μας δίνεται η επιλογή να επιλέξουμε περισσότερες απο μια τιμές άσκησης. Η τιμή άσκησης αποτελεί μια απο αυτές τις παραμέτρους που έχουν επίδραση στην υποκείμενη αξία, οπότε και στην τιμή των δικαιωμάτων. Για τα δικαιώματα αγοράς, όσο υψηλότερη τιμή άσκησης διαλέξουμε, τόσο πιο φθηνό θα είναι το δικαίωμα. Αντίθετα, στα δικαιώματα πώλησης, όσο υψηλότερη τιμή άσκησης επιλέξουμε, τόσο πιο υψηλό ασφάλιστρο θα πληρώσουμε. Είναι φανερό οτι η επιλογή της τιμής άσκησης εξαρτάται απο το πόσο σημαντική πρόκειται να είναι η άνοδος ή η πτώση της αξίας και, απαραίτητο, με το υπάρχον κεφάλαιό μας.

### 3.3.5 Πλεονεκτήματα Δικαιωμάτων Προαίρεσης

- Εκμετέλλευση όλων των δεικτών (ανοδικών ή καθοδικών) της αγοράς.
- Αμεση ρευστοποίηση.
- Μπορεί κανείς να δεσμεύσει πολύ μικρότερα κεφάλαια.
- Δίνεται η ευκαιρία για μεγαλύτερη μόχλευση.
- Μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αντισταθμίσει κανείς τον κίνδυνο.
- Γρήγορες και απλούστερες συναλλαγές.

#### Ωφελιμότητα απο τα Δικαιώματα Προαίρεσης

Με βάση τα πλεονεκτήματα των δικαιωμάτων που προαναφέραμε η αγορά δικαιωμάτων δίνει στον επενδυτή μοναδικά ωφέλη:

- Προσφέρει πολλαπλάσιες αποδόσεις επί του επενδυμένου κεφαλαίου (μόχλευση), αφού ο επενδυτής πληρώνει, από την αρχή, μόνο ένα μικρό ασφάλιστρο.
- Δεν κινδυνεύει να χάσει ποσό μεγαλύτερο από αυτό που έχει πληρώσει, δηλ. η μέγιστη ζημία του είναι το ποσό του ασφαλίστρου (που μπορεί να είναι πχ 60 ευρώ).
- Δίνει τη δυνατότητα εκμετάλλευσης όλων των τάσεων της αγοράς (ανοδικής με αγορά call και καθοδικής με αγορά put).
- Είναι απλώς ευέλικτα στη χρήση και έχουν χαμηλό κόστος στις συναλλαγές.
- Η λήψη ή η αντιστάθμιση μιας θέσης μπορεί να κλείσει οποιαδήποτε στιγμή πριν από τη λήξη του συμβολαίου, χάρη στη ρευστότητα που παρέχουν στην αγορά οι ειδικοί διαπραγματευτές (market makers).
- Δεν απαιτούνται μεγάλα κεφάλαια, αφού, για παράδειγμα, η αγορά ενός συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης μπορεί να μην ξεπερνά τα 60 ευρώ.
- Επιτρέπουν την επιδίωξη βραχυπρόθεσμων στόχων, παρόμοιων με την αγορά μετοχών, αλλά με τη δέσμευση κατά πολύ μικρότερων κεφαλαίων.
- Ακόμη και μικρές μεταβολές στις τιμές μίας μετοχής ή ενός δείκτη μπορούν να προκαλέσουν σημαντικές αλλαγές στην αξία των δικαιωμάτων. Για τον κάτοχο του δικαιώματος η μόχλευση δικαιώματος υπονοεί ότι με τις «κατάλληλες» τάσεις της αγοράς τα κέρδη θα αυξηθούν πολύ γρήγορα, ενώ οι ζημίες σε κάθε περίπτωση παραμένουν περιορισμένες στην τιμή του δικαιώματος (premium) που προπλήρωσε.

## 3.4 Swaps

### 3.4.1 Γενικά

Με τον όρο swap θεωρούμε μία συμφωνία μεταξύ δύο πλευρών με σκοπό την ανταλλαγή στο μέλλον χρηματορροών με όρους που ορίζονται σήμερα. Η συμφωνία αυτή καθορίζει, μεταξύ άλλων, τις ημερομηνίες στις οποίες θα πραγματοποιηθεί η συναλλαγή αυτή και τον τρόπο που θα υπολογιστούν αυτές. Οι σημαντικότεροι τύποι swaps είναι τα swaps για τα επιτόκια (Interest Rate Swaps), τα swaps για τα συναλλάγματα και τα Total Return Swaps. Ο κύριος λόγος για τον οποίο δημιουργήθηκαν και αναπτύχθηκαν αυτά τα χρηματοοικονομικά προϊόντα παραγώγων είναι λόγω των κινδύνων που προκαλούνται απο τις διακυμάνσεις των τιμών των επιτοκίων, των συναλλαγμάτων και των εμπορευμάτων.

### 3.4.2 Interest Rate Swaps (IRS)

Εδώ θα αναλύσουμε τα Interest Rate Swaps ως αντικείμενο ανταλλαγής, είναι εκείνες οι χρηματοροές τόκων, που υπολογίζονται για ένα συγκεκριμένο κεφάλαιο μέσω σταθερού και μεταβλητού επιτοκίου. Με χρήση του IRS υπάρχει συμφωνία μεταξύ δυο μερών, το ένα μέρος να εξοφλεί τους τόκους οι οποίοι υπολογίσονται με σταθερό επιτόκιο και το άλλο μέρος να πληρώνει εκείνους που μετριούνται με μεταβλητό επιτόκιο, επί του ίδιου κεφαλαίου. Πρωταρχικός σκοπός των IRS είναι η αντιστάθμιση του κινδύνου, παρόλαυτα στη συνέχεια στόχος ήταν η κερδοσκοπία, γι΄ αυτό το λόγο αποτελούν το μεγαλύτερος μέρος των συναλλαγών στο σύνολό τους.Σκόπιμο αποτελεί το γεγονός οτι για να πραγματοποιηθούν τέτοιες συναλλαγές απαιτείται η ικανότητα να προσδιορίζεται η τιμή της υποκείμενης αξίας σε διαδοχικές χρονικές στιγμές, για παράδειγμα εξάμηνα, τρίμηνα, έτη κλπ, γι΄ αυτό το σκοπό διαμορφώθηκαν δείκτες που εξειδικεύονται ανά συγκεκριμένο συνάλλαγμα, όπως το Libor και το Euribor.

### 3.4.3 Swap Options

Η κατηγορία αυτή αποτελείται απο εκείνα τα παράγωγα χρηματοοικονομικών προϊόντων, τα οποία δίνουν στον αγοραστή το δικαίωμα (Option) σε ένα Swap. Υπάρχουν δύο κατηγορίες Swaption. Συγκεκριμένα είναι:

- **payer swaption (put)**
- **receiver swaption (call)**

Απο το πρώτο ο κάτοχος έχει τη δυνατότητα στο δικαίωμα να συνάψει ένα swap ως υπόχρεος εξόφλησης του σταθερού επιτοκίου και αποκτώντας όμως δικαίωμα του κυμαινόμενου. Το δεύτερο δίνει στον κάτοχο αντίστοιχα το δικαίωμα της πληρωμής του κυμαινόμενου και της είσπραξης του σταθερού. Οι μεγαλύτερες κατηγορίες των swaptions, διακρίνονται ανάλογα με τον χρόνο άσκησης του δικαιώματος (όπως και στην περίπτωση των options, και είναι τα παρακάτω:

1. Αμερικάνικο Swaption: Το δικαίωμα πραγματοποίησης της συναλλαγής μπορει να γίνει σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή απο το κάτοχό του.

2. Ευρωπαϊκό Swaption: Στη συγκεκριμένη περίπτωση ο κάτοχος έχει τη δυνατότητα να ασκήσει το δικαίωμα του ως προς την πραγματοποίηση της συναλλαγής σε καθορισμένη χρονική στιμγή

3. Swaption Βερμούδων: Το δικαίωμα πραγματοποίησης της συγκεκριμένης συναλλαγής μπορεί να ασκηθεί απο το κάτοχό του σε σειρά απο προκαθορισμένες ημερομηνίες.

Οι κάτοχοι τέτοιων παραγώγων μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν με σκοπό στο κέρδος (κερδοσκοπία). Επίσης εταιρίες μπορούν να τα χρησιμοποιήσουν ώστε να έχουν την δυνατότητα να το σταματήσουν όποτε αυτές το κρίνουν απαραίτητο και αυτές θελήσουν.Τέλος ένα τέτοιο swap είναι χρήσιμο για τις εταιρίες που θέλουν να το χρησιμοποιήσουν μελλοντικά προκειμένου να επωφεληθούν απο το σταθερό επιτόκιο που επικρατεί σήμερα. Ωστόσο τους δίνεται η επιλογή να μην πραγματοποιήσουν την ανταλλαγή ή αυτή να γίνει με κάποιο καλύτερο επιτόκιο.

# Κεφάλαιο 4

# Στοχαστική Τιμολόγηση (Τυχαίων) Απαιτήσεων Θνησιμότητας Μέσω Δικαιωμάτων Προαίρεσης

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζεται ένα μοντέλο διακριτού χρόνου κάνοντας κατανοητό στον αναγώστη τη βασική διαίσθηση ως προς το επιχείρημα αντιστάθμισης των κινδύνων που αναλύουμε. Εν συνεχεία παρουσιάζεται και ένα μοντέλο συνεχούς χρόνου του κινδύνου επιτοκίου, το οποίο βασίζεται στον Cox [3], για τους τόκους και το μοντέλο Compertz για τη θνησιμότητα.Τέλος παρουσιάζεται ένα αριθμητικό παράδειγμα μοντέλου συνεχούς χρόνου και δίνονται χρήσιμα συμπεράσματα.

## 4.1 Διακριτός Χρόνος

Σε αυτή την ενότητα θα επεξηγήσουμε την βασική ιδέα μέσα απο απλά παραδείγματα διακριτού χρόνου καλύπτοντας έτσι ένα μικρό αριθμό περιόδων. Βασικό μας αντικείμενο διαπραγμάτευσης είναι να διευκρινήσουμε οτι η αύξηση της θνησιμότητας μπορεί να ισορροπηθεί και επομένως η επιλογής αγοράς ενός ενδεχομένου απαίτησης θνησιμότητας έχει μια μοναδική και ποσοτικοποιήσιμη τιμή. Τα παραδείγματα και οι υποθέσεις μας πραγματοποιούνται σε ετήσιο χρονικό διάστημα και οι ασφαλιστικές παροχές πληρώνονται στο τέλος του χρόνου θανάτου. Κατα την διάρκεια της ανάλυσης δεν λαμβάνονται υπόψιν τα έξοδα, τα κέρδη και άλλες διοικητικές υποχρεώσεις, όμως υποθέτουμε οτι όλα παρουσιάζονται σε μια ασφαλής βάση. Μια επιπλέον υπόθεση είναι οτι τα ποσοστά θνησιμότητας που χρησιμοποιήθηκαν για τις ασφάλειες ζωής είναι ίδια με αυτα των ραντών. Ωστόσο αυτό στην πραγματικότητα δεν αληθεύει αλλά δεν επηρεάζει το επιχείρημα άρνησης λόγω της σχέσης. Παρόλο που η θεωρία μας πρέπει να συμβαδίζει με τα καλά αναπτυγμένα αποτελέσματά μας για τα ομόλογα δικαιωμάτων προαίρεσης, εμείς θα επικεντρωθούμε στα δικαιώματα προαίρεσης καθαρής προικοδότησης. Αυτα είναι συμβόλαια που προάγουν ενιαία πληρωμή σε συγκεκριμένο χρόνο αν ο αγοραστής είναι ακόμα ζωντανός. Μια ράντα ζωής μπορεί να θεωρηθεί ως ενα καλάθι πολλών καθαρών προικοδοτήσεων. Παρολαυτά στο ποσό αυτό των τιμών δικαιωμάτων προαίρεσης των προικοδοτήσεων θα υπάρχει γενικά ένα σταθερό ανώτατο όριο της τιμής του δικαιώματος του ασφαλίστρου. Σε αυτη την περίπτωση ο αγοραστής του δικαιώματος υποχρεούται να ασκήσει είτε ολόκληρο είτε κανένα απο τα δικαίωματα προαίρεσης της καθαρής προικοδότησης. Παρολαυτά είναι πιθανό οτι αν το επιτόκιο και η θνησιμότητα έχουν αντίθετες κατευθύνσεις σε σχέση με την επίδραση των τιμών των ασφαλίστρων καποια απο τα δικαιώματα προαίρεσης καθαρών προικοδοτήσεων θα βρίσκονται στη λήξη των χρημάτων και κάποια οχι.

### 4.1.1 Γενική Έννοια

Ξεκινάμε ορίζοντας το $\Omega$ , το οποίο αντιπροσωπεύει όλες τις πιθανές καταστάσεις της ουσίας, φιλτραρισμένο για να ελέγξει την ροή των πληροφοριών. Αυτή είναι μια αύξουσα ακολουθία $\mathcal{F}_n$ της σ-άλγεβρας , όπου $\mathcal{F}_0$ είναι η απλή άλγεβρα $\{\Omega, \emptyset\}$. Μας δίνεται μια μακροπρόθεσμη διάρθρωση επιτοκίων προεπιλεγμένων κουπονιών χωρίς έκπτωση.Για κάθε διακριτό $\mathrm{k} \leq \mathrm{n}$ έχουμε τυχαίες μεταβλητές $D(\mathrm{k}, \mathrm{n})$ τα οποία είναι $\mathcal{F}_k$ μετρήσιμα, μαζί με ένα μέτρο πιθανότητας ουδέτερου κινδύνου $Q$ στο $\Omega$ έχουμε:

$$\mathrm{D(k, n) = D(k, k+1) * E_Q[D(k+1, n)|F_k] \quad \forall k < n} \tag{4.1}$$

Ο όρος $D(k, n)$ αντιπροσωπεύει την τιμή σε χρόνο $k$ ενός μηδενικού τοκομεριδίου κουπόνι ομολόγου το οποίο λήγει σε χρόνο $n$. Μέσα απο την εργασία μας θα υποθέσουμε οτι το μέτρο του ουδέτερου κινδύνου $Q$ χρησιμοποιείται για τιμολόγηση.

Επιπλέον στην προκαθορισμένη ελεύθερη αγορά χρειαζόμαστε μια ΄μακροπρόθεσμη δομή΄ για τα ποσοστά θνησιμότητας. Αυτό είναι περισσότερο εύκολο να εκφραστεί μέσω πιθανοτήτων επιβίωσης που είναι ανάλογες των τιμών των ομολόγων όπως δίνονται. Για κάθε $k \leq n$ δηλώνουμε ως πιθανότητα επιβίωσης

$p_x(k,n)$ τη πιθανότητα ενός ατόμου ηλικίας $x$ οτι θα επιβιώσει σε χρόνο $n$ υπο την προϋπόθεση οτι θα ζήσει σε χρόνο $k$. Επιπλέον απο αναλογιστική προσέγγιση αυτό είναι σταθερό και θα μπορούσε να γραφεί ως ${}_{n-k}p_{[x]+k}$. Συνεπής στη νεα μας εργασία θνησιμότητας όπως μας δίνεται στην οδηγία , $p_x(k,n)$ δεν είναι πλέον μια σταθερή αλλα μια μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή $F_k$. Επιπρόσθετα απαίτούμε ως ενα αξίωμα την ανάλογη σχέση που χρησιμοποιήσαμε για τις τιμές των ομολόγων. Αυτό είναι για την ίδια μετρήσιμη πιθανότητα $Q$ όπως παραπάνω:

$$\mathrm{p_x(k,n) = p_x(k,k+1) * E_Q[p_x(k+1,n)|F_k] \quad \forall k < n} \tag{4.2}$$

Υπο την αναμενόμενη προσέγγιση οταν οι πιθανότητες είναι σταθερές, το προσδοκώμενο αποτέλεσμα μπορεί να αλλάξει και αυτο μειώνεται σε μια καλά γνωστή αναλογιστική ταυτότητα

Ένας τρόπος για να δούμε οτι η φόρμουλα (4.2) είναι λογική είναι να σημειώσουμε οτι σε επιτόκιο 0, η $p_x(k,n)$ θα υποδηλώνει την τιμή σε χρόνο $k$ μιας μονάδας καθαρής προικοδότησης σε χρονο $n$. Πιο γενικά βλέπε φόρμουλα (4.4)

Για να κατανοήσουμε καλύτερα την σχέση (4.2), θα εξετάσουμε το επόμενο παράδειγμα. Υποθέτουμε οτι έχουμε ένα άτομο ηλικίας 60 και οτι υπάρχει και πιθανότητα 0.8 οτι αυτο το άτομο θα επιβιώσει στην ηλικία των 61. Με άλλα λόγια , $p_{60}(0,1) = 0.8$ (μια σταθερα, με $F_0$ μετρήσιμη). Παρολαυτα εμείς δεν ξέρουμε ποια είναι η πιθανότητα $p_{60}(1,2)$ , καθώς αυτή θα μπορούσε να εξαρτηθεί απο τυχαία γεγονότα. Αυτό είναι ανάλογο των στοχαστικών μοντέλων των επιτοκίων , όπου το επιτόκιο για την παρούσα περίοδο είναι γνωστό, αλλά τα επιτόκια για τις επόμενες περιόδους δεν είναι γνωστά.

Μπορούμε να υποθέσουμε οτι δυο πιθανές φυσικές καταστάσεις θα μπορούσαν να υλοποιηθούν κατα το επόμενο έτος. Στην πρώτη περίπτωση μια ελπιδοφόρα ιατρική ανακάλυψη πραγματοποιείται και η πραγματική τιμή της πιθανότητας επιβίωσης είναι $p_{60}^{(4.1)}(1,2) = 0.8$. Στη δεύτερη περίπτωση η ιατρική ανακάλυψη δεν υλοποιείται και η αξία της αντίστοιχης πιθανότητας είναι $p_{60}^{(4.2)}(1,2) = 0.7$. Μπορούμε εδω να επισημάνουμε οτι τα ανώτατα όρια χρησιμοποιούνται για να μετράνε την πιθανή κατάσταση των πραγματοποιήσεων της φύσης. Ωστόσο τώρα η συνηθισμένη βάση θνησιμότητας που χρησιμοποιείται απο τους αναλογιστές θα μπορούσε να δείξει ένα μονο αριθμό για την πιθανότητα όπου ένα άτομο θα ζήσει στην ηλικία των 62, υπο την προϋπόθεση οτι φτάνει στην ηλικία των 61. Ας υποθέσουμε οτι αυτή η πιθανότητα ήταν 0.75. Απο την δικιά μας σκοπιά ο αναλογιστής θα έπρεπε τότε να αποδώσει ίσες πιθανότητες για καθε μια απο τις δυο αυτές πιθανές καταστάσεις και έτσι το 0.75 αντιπροσωπεύει το αναμενόμενο $E_Q[p_{60}(1,2)]$.

Σημειώνοντας απο την σχέση (4.2) τότε θα έχουμε οτι $p_{60}(0,2) = (0.8) * (0.75) = 0.6$. Συνεχίζοντας απο μια άλλη σκοπιά, αν εμείς ξεκινησουμε με την τιμή του 0.6 για την πιθανότητα $p_{60}(0,2)$ τότε εμείς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση (4.2) και έτσι να βρούμε πάλι :

$E_Q[p_{60}(1,2)] = \frac{p_{60}(0,2)}{p_{60}(0,1)} = 0.75$

Αυτό δείχνει οτι αν κάποιος θεωρεί πιθανότητες επιβίωσης άνω του 1 έτους στο χρόνο 0, τότε κάποιος μπορεί να επιλέγει τις πιθανότητες των διαφόρων καταστάσεων βελτιώσης της θνησιμότητας. Με βάση την προσέγγισή μας οι συνηθισμένες τιμές που χρησιμοποιούνταν απο τους αναλογιστές είναι στη πραγματικότητα προθεσμιακά τιμές ακριβώς ανάλογες με τα προθεσμιακά επιτόκια των υπάρχοντων τιμών των ομολόγων.

Υποθέτουμε περαιτέρω, πράγματι, οτι τα επιτόκια και τα ποσοστά θνησιμότητας είναι ανεξάρτητα. Αυτο ισχύει για όλα τα $k \leq n$, $r \leq s$ . Επίσης οι μεταβλητές $D(k,n)$ και $p_x(r,s)$ είναι ανεξάρτητες. Τελικά, για ολα τα $k \leq n$ σημειώνουμε οτι :

$$\mathrm{\Lambda_x(k,n) = D(k,n) * p_x(k,n)} \tag{4.3}$$

οπου είναι $F_k$ μετρήσιμο και δηλώνει το συμβόλαιο καθαρής προικοδότησης. Με άλλα λόγια, η τυχαία μεταβλητή $\Lambda x(k,n)$ είναι η τιμή την χρονική στιγμή κ όπου θα πληρωθεί απο ένα άτομο (με παρούσα ηλικία $x$) οπου έχει επιβιώσει την δεδομένη χρονική στιγμή, για ενα πληρωμένο συμβόλαιο 1 μονάδας σε χρόνο $n$, αν επιζήσει.Προκύπτει απο τις σχέσεις (4.1) και (4.2) και την ανεξαρτησία τους οτι:

$$\mathrm{\Lambda_x(k,n) = \Lambda_x(k,k+1) * E_Q[\Lambda_x(k+1,n)|F_k] \quad \forall k < n} \tag{4.4}$$

Ανώτερος στόχος μας είναι να τιμολογήσουμε ένα δικαίωμα προαίρεσης αγοράς για να αποκτήσουμε μια καθαρή προικοδότηση την χρονική στιγμή $k$ , αυτό πληρώνει 1 μονάδα σε χρόνο $n$ , αν επιζήσει. Έτσι σημείωση μας είναι $C_x(k,n|\Lambda)$ όπου $\Lambda$ είναι η ακριβής τιμής του δικαιώματος προαίρεσης της αγοράς.

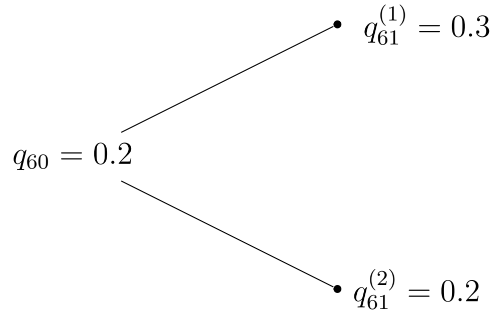
### 4.1.2 Αναπαραγωγή και Αντιστάθμιση με Ντετερμινιστική Προσέγγιση

Σε αυτη την ενότητα θα αναλύσουμε μέσα απο ένα απλό παράδειγμα για να δείξουμε οτι ένα δικαίωμα προαίρεσης για μια ενδεχόμενη αιτία θνησιμότητας μπορεί να επαναληφθεί απο τον αγοραστή ή να καλυφθεί έναντι κινδύνου απο τον εκδότη του δικαιώματος προαίρεσης. Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση υποθέτοντας οτι τα επιτόκια είναι ντετερμινιστικά.

Θεωρούμε ένα άτομο την χρονική στιγμή 0 και ηλικίας 60. Το άτομο αυτό θέλει να λάβει μια ενιαία πληρωμή 1 νομισματικής μονάδας στην ηλικία των 62 αν είναι ακόμα μέχρι τότε ζωντανός. Αυτό είναι ένα συμβόλαιο 2 χρόνων καθαρής προικοδότησης. Υποθέτουμε οτι αυτοί αγοράζουν αυτό το συμβόλαιο απο μια ασφαλιστική εταιρία η οποία αξιεί την θνησιμότητα όπως δίνεται στο παράδειγμα παραπάνω. Η πιθανότητα επιβίωσης είναι $p_{60}(0,1) = 0.8$ και $p_{60}(1,2) = \{0.8\, or\, 0.7\}$ με ίσες πιθανότητες. Για λεπτομέρειες βλέπε *Σχήμα 1* , όπου παρουσιάζουμε την πιθανότητα θανάτου $q = 1 - p$. Ταυτόχρονα υποθέτουμε ένα σταθερό μηδενικό επιτόκιο και έτσι η τιμή προικοδότησης είναι 0.6.

Απο την άλλη μια εναλλακτική για το άτομο θα ήταν να περιμένει για ένα έτος και να αγοράσει τότε το συμβόλαιο ασφάλισης επιβίωσης εφόσον βρίσκεται ακόμα εν ζωή . Εδώ τίθεται το ερώτημα γιατί να το αγοράσουν τώρα εφόσον δεν χάνουν τίποτα λόγω θανάτου κατα την διάρκεια του χρόνου· Φυσικά , αντι αυτοί να πληρώσουν 0.6, θα πληρώσουν είτε $\Lambda_{60}^{(4.2)}(1,2) = (1 - 0.30) = 0.7$ ή $\Lambda_{60}^{(4.1)}(1,2) = (1 - 0.20) = 0.8$ , υποθέτοντας οτι είναι εν ζωή και εξαρτάται και σε ποια φυσική κατάσταση βρίσκονται. Θεωρούμε οτι ως μια άλλη εναλλακτική ο ασφαλιστής προσφέρει σε αυτούς το δικαίωμα προαίρεσης να αγοράσουν αυτό το συμβόλαιο στην ηλικία των 61 με εγγυημένη τιμή 0.75. Έτσι , αν υπάρξει εξέλιξη, αυτοί πρέπει να πληρώσουν μόνο 0.75 αντι για 0.8. Αν όμως δεν υπάρξει εξέλιξη , αυτοί δεν θα εξασκήσουν το δικαίωμα προαίρεσης και έναντι, θα πληρώσουν την κύρια τιμή 0.7. Η φυσική τιμή του δικαιώματος προαίρεσης κατα την λήξη θα είναι είτε 0.05 ή 0. Σκοπός μας είναι να τιμολογήσουμε το δικαίωμα προαίρεσης και να αγοράσουμε το συμβόλαιο της ασφάλισης επιβίωσης. Βασιζόμενοι σε προηγούμενο σημείωμα ψάχνουμε για το $C_{60}(1,2|0.75)$.

Αυτο μπορεί να υπολογιστεί με ένα στάνταρ τρόπο, εξάγοντας το απο ένα αναπαραγόμενο χαρτοφυλάκιο. Η βασική διαφορά μεταξύ αυτής της κατάστασης και της συνηθισμένης με τα ομόλογα των δικαιωμάτων προαίρεσης είναι οτι πρέπει να αναλογιστούμε τα περιουσιακά στοιχεία που σχετίζονται με την θνησιμότητα, όπου η αποζημίωση εξαρτάται αν το κύριο άτομο είναι ζωντανό ή όχι. Θεμελιώδες σύνολο του ενεργητικού που εμείς αναλογιζόμαστε για το σκοπό αυτό έχει να κάνει με το υποκείμενο έτος $n$ της ασφάλισης επιβίωσης και το οποίο θα συμβολίσουμε με $\mathbf{E_n}$. Με το $\mathbf{E_n}$ εννοούμε την πληρωμή μιας νομισματικής μονάδας την χρονική στιγμή $n$ αν το άτομο είναι ζωντανό την χρονική στιγμή $n$, ωστόσο το άτομο θα πληρώθει 0 αν πεθάνει πριν την χρονική στιγμή $n$. Μέσα απο αυτό το παράδειγμα θα δείξουμε οτι το δικαίωμα προαίρεσης όπως περιγράφεται είναι ισόδυναμο με ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο περιέχει 0.5 νομισματικές μονάδες δύο χρόνων ασφαλίσεων επιβίωσης συνδυασμένο με ασφάλιση επιβίωσης ενός χρόνου με μια μικρή έκπτωση 0.35 νομισματικών μονάδων. Θα συμβολίσουμε το δικαίωμα προαίρεσης με $\mathbf{P}$.




*Σχήμα.1 Στοχαστικό Μοντέλο Ποσοστών Θνησιμότητας για μια περίοδο*

Συνεχίζοντας , χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbf{P}$ για να περιγράψουμε μια ενδεχόμενη απαίτηση σε αντίθεση με μια αριθμητική ποσότητα.

$$\mathbf{P = 0.5 * E_2 - 0.35 * E_1} \tag{4.5}$$

Υποθέτουμε οτι ένα άτομο διαθέτει ένα χαρτοφυλάκιο και είναι ακόμα εν ζωή στην χρονική στιγμή 1. Οι πρέπει να πληρώσουν 0.35 μονάδες την χρονική στιγμή 1 για να εκπληρωθεί η υποχρέωση στο 1ο έτος της ασφάλισης επιβίωσης. Εάν έχει σημειωθεί βελτίωση θνησιμότητας, τα άτομα μπορούν να αγοράσουν επιπλέον 0.5 μονάδες εισοδήματος για μια τιμή των 0.4 , δημιουργώντας έτσι συνολικά έξοδα 0.75. Αν δεν έχει σημειωθεί βελτίωση , αγοράζουν επιπλέον 0.5 μονάδες εισοδήματος για την τιμή των 0.3, δημιουργώντας έτσι συνολικά έξοδα 0.7. Επομένως , έχουν επαναλάβει το δικαίωμα προαίρεσης. Η no arbitrage αξία του δικαιώματος προαίρεσης πρέπει τότε να είναι η τιμή μηδενικού κόστους αυτού του χαρτοφυλακίου το οποίο είναι 0.5(0.6)-0.35(0.8)=0.02. Ωστόσο υπάρχει ένα πρακτικό πρόβλημα και αυτό επαναλαμβάνει την διαδικασία όπως περιγράφτηκε, αφού δεν είναι εφικτό για απευθείας sell short μιας ασφάλισης επιβίωσης για κάποιον εν ζωή. Παρόλαυτά μπορούμε εύκολα να το αντιμετωπίσουμε κατασκευάζοντας ένα short sale. Με βάση αυτά σημειώνουμε με $\mathbf{B_n}$ ενός έτους την μία νομισματική μονάδα ενός ομολόγου με μηδενικό κουπόνι και με $\mathbf{I_n}$ σημειώνουμε το συμβόλαιο μιας ασφάλειας ζωής η οποία πληρώνει 1 νομισματική μονάδα για χρονική στιγμή $n$ με την προϋπόθεση το άτομο να πεθάνει κατα την διάρκεια των $n$ χρόνων. Αυτό φυσικά δεν είναι ένα στάνταρ συμβόλαιο, αλλά απο ντετερμινιστικό ενδιαφέρον είναι ισόδυναμο με ένα ασφαλιστήριο συμβόλαιο $n$ έτους με μεταβλητό όφελος θανάτου ίσο με την τιμή ενός ομολόγου το οποίο λήγει την χρονική στιγμή $n$ . Τότε

$$\mathbf{E_n} = \mathbf{B_n} - \mathbf{I_n} \tag{4.6}$$

για την κάθε πλευρά της παραπάνω εξίσωσης σημειώνεται ένα ενδεχόμενο περιουσιακό στοιχείο το οποίο πληρώνει μια νομισματική μονάδα αν και μονο αν το άτομο είναι ζωντανό στο τέλος των $n$ χρόνων. Έτσι μια ελλειματική θέση του $\mathbf{E_1}$ είναι το ίδιο με την πλεονασματική θέση $\mathbf{I_1} - \mathbf{B_1}$ πράγμα το οποίο δεν είναι τίποτα άλλο απο ένα ασφαλισμένο δάνειο. Στο παράδειγμά μας το άτομο δανείζεται 0.35, πληρώνει 0.07 για να ασφαλίσει , εξασφαλίζοντας έτσι έσοδα 0.28. Με την τιμή 0.02 του δικαιώματος προαίρεσης αγοράζεται μαζί μια ασφάλιση επιβίωσης 0.5 νομισματικών μονάδων στην ηλικία των 62 χρόνων. Είναι ενδιαφέρον να το συγκρίνουμε με ένα αντεγραμμένο χαρτοφυλάκιο στο κλασικό Cox-Ross-Rubinstein διωνυμικό πλαίσιο μιας περιόδου. Την χρονική στιγμή 0 αγοράζουμε ένα συγκεκριμένο αριθμό νομισματικών μονάδων ως υποκείμενη ασφάλεια αντιστάθμισης και το χρηματοδοτούμε αυτό πουλώντας βραχυπρόθεσμα ομόλογα , κανονίζοντας την ίδια στιγμή ασφαλιστική κάλυψη της ελλειματικής θέσης σε περίπτωση θανάτου τον $1^o$ χρόνο. Τώρα εξετάζουμε τα ζητήματα απο την οπτική σκοπιά του ασφαλιστή οποίος γράφει το δικαίωμα προαίρεσης και παραουσιάζει πως αυτοί μπορούν να αντισταθμίσουν τον κίνδυνο απο την δικιά τους θέση. Φυσικά ο ασφαλιστης έχει ένα ενσωματωμένο τρόπο αντιστάθμισης της ασφάλισης του δικαιώματος προαίρεσης, ειδικοτερα πουλώντας ασφάλεια ζωής. Πράγματι είναι προφανές και ακολουθεί νορμαλιστικά την εξίσωση (4.6), δηλαδή οτι ένας ασφαλιστής μπορεί να λάβει μακροπρόθεσμη (πλεονασματική) θέση πουλώντας ασφάλιση επιβίωσης και κατα αυτόν τον τρόπο αντισταθμίζει ενάντια στη πιθανότητα της βελτίωσης της θνησιμότητας ασφαλίσεων επιβίωσης όπου έχουν ήδη πουληθεί. Επιπρόσθετα, μπορούν να αντισταθμίσουν ενάντια των δικαιωμάτων προαίρεσης στις ασφαλίσεις επιβίωσης πουλώντας ένα ποσοστό $H$ νομισματικών μονάδων της ασφάλισης για κάθε μια νομισματική μονάδα του δικαιώματος προαίρεσης. Στο παράδειγμά μας ενός έτους είναι ξεκάθαρο ότι $H = \frac{1}{2}$ και για κάθε νομισματική μονάδα του δικαιώματος προαίρεσης που πουλήθηκε, ο ασφαλιστής θα πρέπει να πουλήσει $\frac{1}{2}$ μιας νομισματικής μονάδας 2 χρόνων περιόδου ασφάλισης. Το χαρτοφυλάκιο που προκύπτει είναι συνδυασμός αυτών, θα είναι $-\mathbf{P} - \mathbf{0.5I_2}$ (με τα επιτόκια να είναι 0 ) και συνοψίζοντας απο τις (4.5) και (4.6) αυτό ισούται με

$\mathbf{0.35E_1 - 0.5B_2}$. Αυτό αποκλείει τον όρο $\mathbf{E_2}$ και επομένως αντισταθμίζει την αύξηση κινδύνου απο αβέβαιη θνησιμότητα στο $2^o$ έτος. Ωστόσο είναι φανερό οτι αυτό πρέπει να ερμηνευθεί με σωστό τρόπο απο τότε που τα συμβόλαια δεν είναι ίδια. Σκοπός του παραδείγματος είναι να απομονώσει το εγγενή κίνδυνο του δικαιώματος προαίρεσης και όχι το μικρό δείγμα κινδύνου που συζητήσαμε στην εισαγωγή. Με αλλα λόγια υποθέτουμε οτι αν ο ασφαλιστής έχει μια πλεονασματική θέση $N$ νομισματικών μονάδων της $\mathbf{E_2}$ και μια αποτελεσματική ελλειματική θέση $N$ νομισματικών μονάδων της $\mathbf{E_2}$ , τοτε η εμπειρική θνησιμότητα θα είναι ίδια μεταξύ των δύο γκρούπ συμβάσεων και ο ασφαλιστής θα έχει ένα καθαρό μηδενικό δίχτυ πληρωμής στο σύνολο των συμβολαίων αυτών. Εύκολα μπορούμε να γράψουμε την φόρμουλα αυτής της μιας περιόδου με ντετερμινιστικό ενδιαφέρον, δηλαδή παρακάτω έχουμε :

$$\mathrm{H} = \frac{\Lambda_{60}^{(1)}(1,2) - \Lambda}{\Lambda_{60}^{(1)}(1,2) - \Lambda_{60}^{(2)}(1,2)}, \tag{4.7}$$

δίνεται οτι $\Lambda_{60}^{(2)}(1,2) \leq \Lambda \leq \Lambda_{60}^{(1)}(1,2)$. Ορίζουμε τις υποθέσεις $H = 1$ αν $\Lambda < \Lambda_{60}^{(2)}(1,2)$ και $H = 0$ αν $\Lambda > \Lambda_{60}^{(1)}(1,2)$.
Το χαρτοφυλάκιο του δικαιώματος προαίρεσης δίνεται απο

$$\mathbf{P} = \mathbf{H}[\mathbf{E_2} - \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{60}}^{(\mathbf{2})}(\mathbf{1},\mathbf{2})\mathbf{E_1}] \tag{4.8}$$

Επίσης, συνεχίζοντας έχουμε:

$$\mathrm{C}_{60}(1,2|\Lambda) = \mathrm{H}[\Lambda_{60}(0,2) - \Lambda_{60}^{(2)}(1,2)\Lambda_{60}(0,1)]. \tag{4.9}$$

Ο ασφαλιστής αντισταθμίζει το δικαίωμα γράφοντας Η νομισματικές μονάδες ασφάλισης για κάθε μονάδα του εισοδήματος του δικαιώματος προαίρεσης. Απο την (4.4)

$$\Lambda_{60}(0,2) = \Lambda_{60}(0,1)E_Q\Lambda_{60}(1,2) \ ,$$

και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Η στην εξίσωση (4.9) για να απεικονίσουμε την τιμή του δικαιώματος αγοράς, δηλαδή έχουμε

$$\mathrm{C}_{60}(1,2|\Lambda) = \left(\frac{\mathrm{E_Q}[\Lambda_{60}(1,2) - \Lambda_{60}^{(2)}(1,2)]}{\Lambda_{60}^{(1)}(1,2) - \Lambda_{60}^{(2)}(1,2)}\right)\Lambda_{60}(0,1)(\Lambda_{60}^{(1)}(1,2) - \Lambda) \tag{4.10}$$

Το ερμηνεύουμε ως εξής. Ας σημειώσουμε ως $\pi$ να είναι η πιθανότητα κάτω απο την υπόθεση του $Q$ . Επίσης, υποθέτουμε μηδενικό επιτόκιο, $E_Q[\Lambda_{60}(1,2)] = \pi p_{60}^{(1)}(1,2) + (1-\pi)p_{60}^{(2)}(1,2)$, $\Lambda_{60}^{(1)}(1,2) = p_{60}^{(1)}(1,2)$ και $\Lambda_{60}^{(2)}(1,2) = p_{60}^{(2)}(1,2)$, έτσι ο πρώτος όρος στη τελευταία γραμμή ελαττώνει το $\pi$ , την πιθανότητα κατω απο το $Q$ για την εξέλιξης της θνησιμότητας. Αυτό πολλαπλασιάζεται στη συνέχεια απο την αναμενόμενη απόδοση το δικαίωμα αγοράς και μειώθηκε στο χρόνο 0 . Η επιμίκυνση της διαδικασίας παραπάνω σε περιόδους με χρονική διάρκεια περισσότερη ενός έτους είναι σαφής.Η αναπαραγωγή και η αντιστάθμιση της διαδικασίας μπορεί εύκολα να χειραγωγηθεί δουλεύοντας προς τα πισω μέσω επακόλουθου πλέγματος ή εναλλακτικά μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη αξία , η οποία φυσικά θα συμπεριλάβει πολλά περισσότερα μονοπάτια εμείς θα μελετήσουμε συνοπτικά παράδειγμα δυο περιόδων με μηδενικό επιτόκιο.

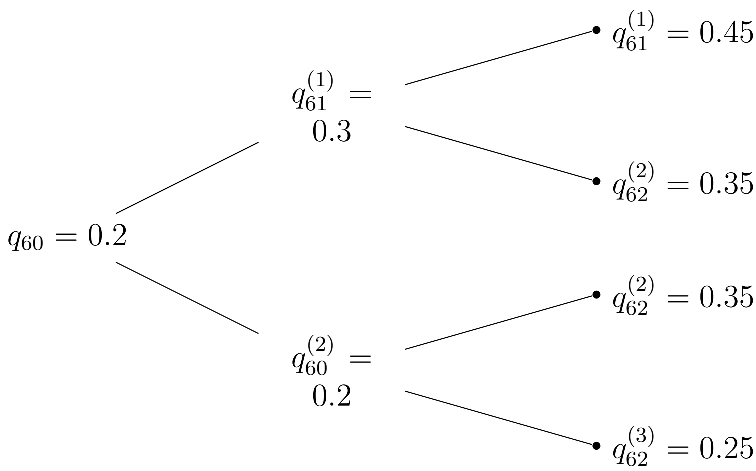
Θεωρούμε ποσοστά θνησιμότητας για τις ηλικίες 60 και 61 όπως προηγουμένως. Επιπρόσθετα υποθέτουμε οτι αν η τιμή της πιθανότητας θανάτου στην ηλικία 61 είναι $q_{61} = 0.20$, τότε η τιμή της πιθανότητας θανάτου $q_{62}$ που εφαρμόζεται την χρονική στιγμή 2 για ένα άτομο που τώρα είναι στην ηλικία των 60 είναι είτε 0.25 ή 0.35. Αν η τιμή της $q_{61}$ στην ηλικία των 62 είναι 0.30, η αντίστοιχη τιμή της $q_{62}$ είναι είτε 0.35 ή 0.45. Βλέπε *Σχήμα 2* για λεπτομέρειες. Οι τιμές για τις ασφαλίσεις επιβίωσης που λήγουν την χρονική στιγμή 3 δίνονται παρακάτω:

$$\Lambda_{60}(0,3) = 0.392, \quad \Lambda_{60}^{(1)}(1,3) = 0.560, \quad \Lambda_{60}^{(2)}(1,2) = 0.420$$

Οι τιμές για τις ασφαλίσεις επιβίωσης που λήγουν την χρονική στιγμή 2 είναι ίδιες όπως χρησιμοποιήθηκαν για το παράδειγμα για μια περίοδο. Επομένως είναι:

$$\Lambda_{60}^{(1)}(1,2) = 0.8, \quad \Lambda_{60}^{(2)}(1,2) = 0.7$$

Οι υποθέσεις μας για την κίνηση των ποσοστών θνησιμότητας, μαζί με τις προβλεπόμενες τιμές, προφανώς συνεπάγεται οτι εμείς έχουμε αντιστοιχίσει ίσες πιθανότητες σε καθε ένα απο τις 2 πιθανές περιπτώσεις σε κάθε επίπεδο. Απο την άλλη αυτό σημαίνει μια ίση πιθανότητα για κάθε μια απο τις πιθανότητες στην ηλικία των 62 . Αναλογιζόμαστε ένα συμβόλαιο το οποίο προάγει ένα δικαίωμα προαίρεσης στην ηλικία των 62, για μια τιμή 0.60 , μια ασφάλιση η οποία πληρώνει 1 νομισματική μονάδα στην ηλίκια των 63 αν το άτομο βρίσκεται εν ζωή.




*Σχήμα 2. Στοχαστικό Μοντέλο Ποσοστών Θνησιμότητας για δύο περιόδους.*

Απο τις εξισώσεις (4.7) και (4.8) μπορούμε να υπολογίσουμε την χρονική στιγμή 1 των χαρτοφυλακίων μας. Έτσι θα είναι $\mathbf{E_3} - \mathbf{0.6E_2}$ αν προκύψει εξέλιξη ή $\mathbf{0.5E_3} - \mathbf{0.275E_2}$ αν όχι. Την χονικη στιμγή 0 το χαρτοφυλάκιο μας τότε θα είναι της μορφής $\alpha\mathbf{E_3} - \beta\mathbf{E_2}$ όπου για να είναι αυτοχρηματοδοτούμενο χρειαζόμαστε την αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή 1 να είναι ίση με την αξία του χαρτοφυλακίου που δίνεται απο πάνω σε καθένα απο τις 2 πραγματοποιήσεις θνησιμότητας. Έτσι αυτό είναι:

$$\alpha\Lambda^{(1)}(1,3) - \beta\Lambda^{(1)}(1,2) = \Lambda^{(1)}(1,3) - 0.6\Lambda^{(1)}(1,2)$$

και

$$\alpha\Lambda^{(2)}(1,3) - \beta\Lambda^{(2)}(1,2) = 0.5\Lambda^{(2)}(1,3) - 0.275\Lambda^{(2)}(1,2).$$

Λύνοντας προκύπτει α=0.75 και β=0.425 και η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης είναι:

0.75(0.392)-0.425(0.600)=0.039

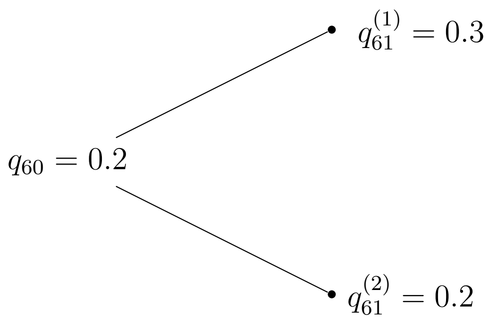
Εναλλάκτικά , η τιμή του δικαιώματος μπορεί να υπολογιστεί απευθείας παίρνοτας και χρησιμοποιώντας προσδοκώμενες ουδέτερες πιθανότητες ρίσκου όπως δίνονται. Στην ηλικία των 62, η αξία της ασφάλισης επιβίωσης θα είναι είτε, 0.750, 0.650, ή 0.550, καθένα με ίση πιθανότητα. Η τιμή του δικαιώματος υπολογίζεται απο την εξίσωση (4.10), ειδικά εμείς πρέπει να υπολογίσουμε πίσω στα μονοπάτια μας τουλάχιστον πάνω απο δύο. Αυτή η τιμη θα είναι:

$$\tfrac{1}{4}[(0.8)(0.8)0.15 + (0.8)(0.8)0.05 + (0.8)(0.7)0.05 + (0.8)(0.7)0] = 39$$

όπως είχε προκύψει και παραπάνω.

### 4.1.3 Αντιστάθμιση και Αναπαραγωγή με Στοχαστικό Επιτόκιο

Στην ενότητα αυτή θα αναλογιστούμε μια περισσότερο ρεαλιστική περίπτωση όπου τα επιτόκια μας είναι στοχαστικά. Θα υποθέσουμε εδώ μόνο την μια περίοδο, παραβλέποντας τις λεπτομέρειες επέκτασης της πολλαπλής περιόδου. Θα πραγματοποιήσουμε ξανά το παράδειγμα της μιας περιόδου της προηγούμενης ενότητας εκτός απο το μηδενικό επιτόκιο, προβλέπουμε επιτόκια απο τις ακόλουθες τιμές για 1 νομισματική μονάδα απο ομόλογα με μηδενικό κουπόνι. Η τιμή ενός έτος ομολόγου είναι 0.8. Η τιμή ενός διετούς ομολόγου είναι 0.56. Σε ένα χρόνο απο τώρα η ληξιπρόθεσμη τιμή του ομολόγου την χρονική στιγμή δύο είναι είτε 0.8 ή 0.6. Επιπρόσθετα κάνουμε την υπόθεση την χρονική στιγμή 0 οτι η τιμή του συμβολαίου που πληρώνει 1 νομισματική μονάδα στην ηλικία των 62 αν ο αγοραστής είναι ζωντανός είναι 0.336 και η τιμή του όταν πληρώνει 1 νομισματική μονάδα στην ηλικία των 61 αν ο αγοραστής είναι ζωντανός είναι 0.640. Βλέπε *Σχήμα 3* για λεπτομέρειες. Αυτές οι τιμές είναι σύμφωνα με τις ουδέτερες πιθανότητες κινδύνου και είναι $\frac{1}{2}$ για καθένα, για αύξηση ή μείωση της κίνησης των δύο επιτόκιο ή θνησιμότητα. Αναλογιζόμαστε ένα συμβόλαιο το οποίο δίνει σε ένα άτομο το δικαίωμα προαίρεσης να αγοράσει 1 νομισματική μονάδα, για 1 χρόνο ασφάλιση επιβίωσης για χρονική στιγμή 1 και για ακριβής τιμή του Λ.



$D^{(1)}(1,2) = 800$

$D(0,1) = 800$, $D(0,2) = 560$

$D^{(2)}(1,2) = 600$

*Σχήμα 3. Στοχαστικό Μοντέλο Επιτοκίων και Θνησιμότητας.*

Λαμβάνοντας υπόψιν τις τέσσερις πιθανότητες επιτοκίου και θνησιμότητας για το $2^o$ έτος θα έχουμε τέσσερα αντι για δύο αναπαραγόμενα περιουσιακά στοιχεία. Τώρα και στα δύο $\mathbf{E_1}$ και $\mathbf{E_2}$ το άτομο θα αποκτήσει θέση μακράς διάρκειας και θα το χρηματοδοτήσει απο δύο ξεχωριστά είδη ασφαλισμένων δανείων.

Περίπτωση 1: Το δάνειο έχει επιτόκιο σύμφωνα με τα ισχύοντα επιτόκια της αγοράς και ο δανειολήπτης αγοράζει μικτή ασφάλιση για την πρόβλεψη αποπληρωμής σε περίπτωση θανάτου εντός 2 ετών . Ως εκ τούτου μια μονάδα αυτού του περιουσιακού στοιχείου προβλέπει μια πληρωμή την χρονική στιγμή 2 αν το άτομο είναι ακόμα ζωντανό. Το σύνολο αυτής της πληρωμής είναι $1/0.64$ αν $D(1,2) = 0.8$, ή $1/0.48$ αν $D(1,2) = 0.6$

Περίπτωση 2: Πρόκειται για ένα δάνειο 1 έτους το οποίο εγκυάται την αποπληρωμή την χρονική στιγμή 1, με ένα ληξιπρόθεσμο ομόλογο 2 ετών . Όπως και πριν έτσι και εδώ ο δανειολήπτης αγοράζει ασφάλιση για να αποπληρώσει το δάνειο σε περίπτωση θανάτου στο πρώτο χρόονο. Αν το άτομο είναι ακόμα ζωντανό, μια μονάδα αυτού του περιουσιακού στοιχείου τότε παρέχει την χρονική στιγμή 1 μοναδιαίο ληξιπρόθεσμο ομόλογο 2 ετών.

Το αρχικό μας χαρτοφυλάκιο θα περιέχει $G$ μονάδες του $\mathbf{E_1}$, $J$ μονάδες του $\mathbf{E_2}$, Κ μονάδες του δανείου της περίπτωσης 1 και $L$ μονάδες του δανείου της περίπτωσης 2.

Μια μέθοδος επίλυσης για τα $G$, $J$, $K$ και $L$ είναι ο υπολογισμός των τιμών για καθε ένα περιουσιακό στοιχείο την χρονική στιμγή 1 σύμφωνα με το ποια κατάσταση επικρατεί. Υποθέτουμε την αξία ίσον 0 και λύνουμε τις τέσσερις εξισώσεις. Ωστόσο μπορούμε να περιγράψουμε μια εναλλακτική μέθοδο η οποία επεξηγεί καλύτερα τη λογική πίσω απο την διαδικασία και η οποία είναι περισσότερο προσαρμόσιμη σε μια επέκταση στην περίπτωση πολλαπλής περιόδου.

Όπως και στη περίπτωση του ντετερμινιστικού επιτοκίου η επικρατούσα ποσότητα για την αναπαραγώμενη αντιστάθμιση της διαδικασίας είναι η ποσότητα

Η η οποία εξηγείται στην εξίσωση (4.7). Η διαφορά εδώ είναι οτι η Η είναι μια τυχαία μεταβλητή δυο τιμών, δεδομένου οτι η αξία της εξαρτάται απο το επιτόκιο που ισχύει για το έτος 2

Σύμφωνα και απο τα προηγούμενα , καποιος μπορεί να επαναλάβει το δικαίωμα προαίρεσης αγοράζοντας Η μονάδες εισοδήματος και 1-Η την χρονική στιγμή 1. Ακόμα και αν κάποιος δεν γνωρίζει την αξία των Η μονάδων την χρονική στιγμή 0 η διαδικασία μπορεί να ολοκληρωθεί διαμέσω του μηχανισμού των δανείων. Έτσι την χρονική στιγμή 0 το άτομο αγοράζει Η μονάδες του $\mathbf{E_2}$ επιπλέον αγοράζονται $\Delta$ μονάδες του $\mathbf{E_2}$ οπου αυτές οι $\Delta$ μονάδες είναι αρκετές για να αποπληρώσουν το δάνειο της περίπτωσης 1. Παρόλο που τα Η και $\Delta$ εξαρτώνται και τα δυο απο την τιμή του επιτοκίου το $2^o$ έτος μπορούμε να το κάνουμε αν το άθροισμα και των 2 είναι ντετερμινιστικό. Με άλλα λόγια ζητάμε ότι:

$$\mathrm{J} = \mathrm{H} + \Delta = \mathrm{H} - \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{D}(0,1)\mathrm{D}(1,2)}, \tag{4.11}$$

Ορίζουμε $\Lambda^{'} = \min\{\Lambda_{60}^{(2)}(1,2), \Lambda\}$. Το $\Lambda^{'}$ είναι η ποσότητα που θα πληρωθεί την χρονική στιγμή 1 για να εξαγοραστεί 1 μονάδα καθαρής προικοδότησης στην χρονική στιγμή 2.

Επιπλέον για το εισόδημα την χρονική στιγμή 2 το άτομο αγοράζει επαρκής μονάδες του $\mathbf{E_1}$ έτσι την χρονική στιγμή 1 η πληρωμή της καθαρής προικοδότησης μαζί με το $\Lambda^{'}$ θα αγοραστούν επιπλέον (1-Η) μονάδες αυτής και επίσης θα αποπληρωθεί το δανείο της παραπάνω περίπτωσης 2. Οπότε ορίζουμε ότι:

$$\mathrm{G} + \Lambda^{'} = (1-\mathrm{H})\Lambda(1,2) - \mathrm{D}(1,2)\mathrm{L}, \tag{4.12}$$

Για να κατανοήσουμε πλήρως τι συμβαίνει εδώ θα αναλύσουμε την περίπτωση όπου το επιτόκιο στο $2^o$ έτος είναι χαμηλότερο των δυο πιθανοτήτων. Αυτο θα προκαλέσει αύξηση της αξίας του δικαίωματος προαίρεσης απαιτώντας μια μεγαλύτερη ποσότητα αντιστάθμισης και έτσι το Η θα αυξηθεί. Ωστόσο το χαμηλότερο επιτόκιο θα επιφέρει ως αποτέλεσμα μια χαμηλότερη αναγκαία πληρωμή η οποία θα μηδενίσει το δάνειο της περίπτωσης 1 και έτσι το $\Delta$ θα μειωθεί. Επιπλέον το αντίθετο αληθεύει για το δάνειο της περίπτωσης 2 καθώς τα ομόλογα τα οποία πρέπει να δοθούν την χρονική στιγμή 1 για να εξοφλήσουν το δάνειο θα αυξήσουν την αξία. Αυτο θα έχει ως αποτέλεσμα να αντισταθμίσει την μείωση του 1-Η και τότε μπορούμε να λύσουμε για $G$ και $L$ ως ντετερμινιστικές ποσότητες της εξίσωσης (4.12).

Σε συγκεκριμένο παράδειγμα υποθέτουμε οτι η τιμή είναι 0.525. Τότε H=1 όταν $D(1,2) = 0.8$ ή $H = 0$ όταν $D(1,2) = 0.6$ . Από την εξίσωση (4.11)

$J = 1 - \frac{K}{0.64} = -\frac{K}{0.48}$,
οταν λυθεί θα μας δώσει
$J = 4$ και $K = -1.920$

Απο την εξίσωση (4.12) έχουμε :

$G + 0.525 = -0.8L$ , $G + 0.480 = 0.480 - 0.6L$

Για την δεύτερη εξίσωση παραπάνω πρέπει να επιλέξουμε μόνο μια απο τις πιθανές πραγματοποιήσεις θνησιμότητας. Απο το ορισμό του H είναι εύκολο να δούμε οτι χρησιμοποιώντας κάποια άλλη πραγματοποίηση πολύ απλά θα προστεθεί έτσι μια σταθερότητα σε κάθε πλευρά της εξίσωσης
Αν λύσουμε τις παραπάνω εξισώσεις θα μας δώσουν τιμές ίσες με:

$G = 1.575$ , $L = -2625$.

H αρχική τιμή του διανύσματος των $\mathbf{E_2}, \mathbf{E_1}$ για τα δάνεια τύπου 1 (περίπτωση 1) και τύπου 2 (περίπτωση 2) είναι (0.64,0.336,0.6,0.448) αντίστοιχα. Τότε μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία του δικαιώματος προαίρεσης το οποίο είναι

1.575(0.64)+4(0.336)-1.92(0.6)-2.625(0.448)=0.024

Φυσικά αν γνωρίζουμε την μετρήσιμη πιθανότητα $Q$ δεν είναι απαραίτητο να υπολογίσουμε το αναπαραγώμενο χαρτοφυλάκιο για να υπολογίσουμε αντίστοιχα την τιμή του δικαίωματος προαίρεσης, αλλά μπορούμε απλά να πάρουμε μια κατάλληλη αναμενόμενη τιμή όπως κάναμε στο τέλος της προηγούμενης ενότητας. Οι τιμές για την καθαρή προικοδότηση την χρονική στιγμή 1 θα είναι είτε 0.64, 0.56,0.48, ή 0.42 με το καθένα να είναι εξίσου πιθανό κάτω απο την ποσότητα $Q$ . Ο συντελεστής έκπτωσης 1 έτους την χρονική στιμγή 0 για το επιτόκιο και την θνησιμότητα αντίστοιχα ισούται με (0.8)(0.8)=0.64, δίνοντας την αξία του δικαιώματος προαίρεσης η οποία ισούται με:

$\frac{1}{4}(0.64)[115 + 35 = 0 = 0] = 0.024$

Η αντιστάθμιση του κινδύνου απο του ασφαλιστή μπορεί να γίνει με τον ίδιο τρόπο που εμείς δείξαμε και με ντετερμινιστικό επιτόκιο. Ο ασφαλιστής πρέπει να φροντίσει να διατηρήσει τις H μονάδες της ασφάλισης για τους ζωντανούς στην ηλικία των 61 για καθε μια μονάδα του δικαιώματος προαίρεσης η οποία πουλήθηκε στην ηλικία των 60. Αυτο θα εξασφαλίσει οτι οι συνολικές αναμενόμενες πληρωμές των ραντών και της ασφάλισης τοτε θα είναι ανεξάρτητες της θνησιμότητας στο $2^o$ έτος. Η διαφορά εδώ είναι οτι πρέπει να είναι μεταβλητή ασφάλιση για να υπολογιστούν οι δυο πιθανές τιμές της ποσότητας H.

Για παράδειγμα με την τιμή άσκησης στα 0.525, αν το $D(1,2) = 0.8$ ή 0 ή αν το $D(1,2) = 0.6$ τότε θα έπρεπε να πουλήσουν την ασφάλεια όπου το όφελος θανάτου την χρονική στιγμή 2 ήταν 1. Ενώ αυτό ταυτόχρονα ίσως να μην είναι απόλυτα κατανοητό , κατι τέτοιο θα μπορούσε να επιτευχθεί πουλώντας ένα συμβόλαιο με όφελος θανάτου 4 μονάδες και τότε αντασφαλίζουμε με ένα συμβόλαιο δεικτών το οποίο πληρώνει 3 αν η τιμή του ομολόγου είναι 0.8 ή 0.6.

Για να γίνει πιο ξεκάθαρη η διαδικασία που αναλύουμε θα ξανακάνουμε το παράδειγμα με μια τιμή άσκησης στα 0.435. Έτσι έχουμε H=1 αν $D(1,2) = 0.8$ και H=0.75 αν $D(1,2) = 0.6$ το οποίο τελικά δίνει:

$J = 1 - \frac{K}{0.64} = 0.75 - \frac{K}{0.48}$
το οποίο δίνει
$J = 1.75$ και $K = -0.48$

Επιπλέον
$G + 0.465 = -0.8L = 0.25(0.48) - 0.6L$
παίρνουμε
$G = 0.045$ και $L = -0.6$.

Οπότε η τιμή του δικαίωματος προαίρεσης είναι:
0.045(0.64)+1.75(0.336)-o.48(0.6)-1.8(0.448)=0.06
Ως έλεγχο, θα το υπολογίσουμε με βάση την μέθοδο απόδοσης
$\frac{1}{4}(0.64)[205 + 125 + 45 + 0] = 0.06$

Η περίπτωση του ντετερμινιστικού επιτοκίου που αναλύθηκε στη προηγούμενη ενότητα μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική περίπτωση των παραπάνω. Στη περίπτωση που το $D(1,2)$ παίρνει μόνο μια τιμή. Ωστόσο, μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση (4.11) παίρνοντας K=0 και $J = H$ . Παρόμοια λύνουμε την εξίσωση (4.12) παίρνοντας $G = 0$. Διαλέγοντας την διαδικασία υλοποίησης όπου η θνησιμότητα βελτιώνεται, έχουμε οτι:

$L = \frac{\Lambda - (1-H)\lambda^1(1,2)}{D(1,2)} = \frac{H\Lambda^2(1,2)}{D(1,2)}$
το οποίο περιέχεται και στη φόρμουλα (4.8)
Στη παραπάνω ισότητα χρησιμοποιούμε τον ορισμό του H.

Συνοψίζοντας κάθε μονάδα του δικαιώματος προαίρεσης αναπαράγεται αγοράζοντας H μονάδες εισοδήματος του ταμείου και 1-H αργότερα , η μεταβλητή φύση του H αντιμετωπίζεται με τη λήψη κατάλληλων τύπων δανείων για τη χρηματοδότηση της αγοράς. Ο ασφαλιστής παράλληλα δεν χρειάζεται να ανησυχεί σχετικά με τις 1-H μονάδες που αγοράζονται την χρονική στιγμή 1 απο την σιτγμή που η τιμή θα πληρωθεί. Ωστόσο πρέπει να αντισταθμιστούν οι H μονάδες που αγοράστηκαν την χρονική στιγμή 0 για τις οποίες έχουν εξασφαλιστεί για την άγνωστη θνησιμότητα του $2^{ou}$ έτους. Αυτό πραγματοποιείται πουλώντας Η μονάδες της ασφάλειας ζωής.

### 4.1.4 Γενικός Τύπος Διακριτού Χρόνου για Δικαίωμα Προαίρεσης

Εν συνεχεία μπορούμε να ασχοληθούμε και να δώσουμε ένα γενικό τύπο για το δικαίωμα προαίρεσης που αγοράζουμε την χρονική στιγμή $k$, ένα συμβόλαιο πληρώνει 1 μονάδα την χρονική στιγμή $n$ αν το άτομο είναι ζωντανό την δεδομένη χρονική στιμγή για μια τιμή άσκησης του $\Lambda$. Η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης θα είναι η προσδοκόμενη βάση του $Q$ μεταξύ τη διαφοράς της τιμής αγοράς και της τιμής άσκησης κατα την χρήση ( αν η ανταπόκριση είναι θετική), μειωμένη ως προς και τα δυο, επιτόκιο και θνησιμότητα, για την χρονική στιγμή 0. Έτσι ο γενικό τύπος της παραπάνω διαδικασίας δίνεται απο:

$$C_x(k, n|\Lambda) = E_Q\left[\prod_{i=1}^{k} \Lambda_x(i-1, i) \max[\Lambda_x(k, n) - \Lambda, 0]\right]$$

### 4.1.5 Σύγκριση Δικιωμάτων Προαίρεσης Ραντών και Καθαρής Προικοδότησης

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με παραδείγματα, όπως υποδείξαμε και παραπάνω, για να δείξουμε οτι εμείς δεν μπορούμε γενικά να αναλογιστούμε ενα δικαίωμα προαίρεσης μιας ράντας ως ισοδύναμο με ένα πλήθος δικαιωμάτων προαίρεσης καθαρής προικοδότησης.

Λαμβάνουμε υπόψιν μας λοιπόν ένα πλήθος δικαιωμάτων προαίρεσης, σημειώνοντας το καθένα με ένα ακέραιο αριθμό $n$ όπου , $k+1 \leq n \leq N$ (όπου το Ν είναι η τελευταία διάρκεια κατα την οποία τα μέλη της συγκεκριμένης ομάδας θα ζουν). Το $n$-στο συμβόλαιο δίνει στον αγοραστή την επιλογή να αγοράσει σε χρονική στιγμή $k$, μια μονάδα ληξιπρόθεσμης καθαρής προικοδότησης την χρονική στιγμή $n$ για μια τιμή άσκησης $K_n$. Ορίζουμε $K = \sum_{n=k+1}^{N} K_n$. Το $n$-οστο δικαίωμα προαίρεσης θα ασκηθεί αν και μονο αν $K_n \leq \Lambda(k, n)$ ενώ η ράντα του δικαιώματος με τιμή άσκησης Κ θα ασκηθεί αν και μονο αν $K \leq \sum_{n=k+1}^{N} K_n$. Πρακτικά θα μπορούσαμε κανονικά να δώσουμε τιμή άσκησης Κ για την ράντα. Το ερώτημα το οποίο προκύπτει είναι αν μπορούμε να αναζητήσουμε μια ακολουθία $K_n$ που να αθροίζει στο Κ έτσι ώστε να μπορέσουν να ασκηθούν όλα ή κανένα απο τα ατομικά συμβόλαια καθαρής προικοδότησης. Αν εμείς μπορέσουμε να βρούμε μια τετοια ακολουθία τότε θα μπορούσαμε πράγματι να μειώσουμε την τιμολόγηση της ράντας του δικαιώματος προαίρεσης σε σχέση με την τιμολόγηση της καθαρής προικοδότησης. Σε ενα απλοποιημένο μοντέλο πλέγματος όπου κάθε φορά υπάρχουν μονο πολλά τελικά αποτελέσματα είναι εύκολο να αντληθούν οι κατάλληλες συνθήκες προκειμένου να διατηρηθεί κάτι τέτοιο. Μπορούμε να σταθεροποιήσουμε ενα $k$ και να υποθέσουμε οτι αγοράζουμε το δικαίωμα προαίρεσης την χρονική στιγμή $k$ όπου μια μονάδα ράντας ζωής ξεκινάει την χρονική στιμγή $k+1$ . Εν συνεχεία πρέπει να εξετάσουμε τα πιθανά αποτελέσματα τα οποία έχουμε αριθμήσει ως 1,2,3...,$s$ για τιμή επιτοκίου και θνησιμότητας την χρονική στιγμή $k$. Ορίζουμε $\Lambda^i(k,n)$ να είναι η τιμή μιας νομισματικής μονάδας καθαρής προικοδότησης την χρονική στιμγή $k$ την οποία μπορούμε να ξεπληρώσουμε σε χρόνο $n$ δεδομένου οτι έχει προκύψει αποτέλσμα $i$. Οπότε έχουμε ότι :

$$\alpha^{\mathrm{i}}(\mathrm{k}) = \sum_{\mathrm{n=k+1}}^{\mathrm{N}} \Lambda^{\mathrm{i}}(\mathrm{k,n}), \tag{4.13}$$

η παραπάνω εξίσωση περιγράφει την τιμή για μια νομισματική μονάδα ράντα ζωής την χρονική στιγμή $k$ αφου έχει προκύψει αποτέλεσμα ίσο με $i$ την ίδια χρονική στιγμή.
Μπορούμε να προβλέψουμε κατα μια έννοια τα αναμενόμενα αποτελέσματα την χρονική στηγμή $k$ εκφράζοντας ότι:

$$\mathrm{i} \leq \mathrm{j} \text{ if } \Lambda^{\mathrm{i}}(\mathrm{k,n}) \leq \Lambda^{\mathrm{j}}(\mathrm{k,n}), \tag{4.14}$$

για όλα τα $n = k+1, ..., N$.

Παρακάτω θα αναφερθούμε σε ένα Θεώρημα το οποίο και θα αποδείξουμε. Οπότε έχουμε:

**Θεώρημα:**
Ένα δικαίωμα προαίρεσης ράντας με ημερομηνία άσκησης $k$ μπορεί να τιμολογηθεί απο δικαίωμα προαίρεσης καθαρής προικοδότησης αν και μονο αν η παραπάνω σειρά είναι γραμμική.

**Απόδειξη:**
Πρώτα θα υπόθεσουμε οτι η σειρά είναι γραμμική . Διαλέγουμε το μικρότερο $i$ τέτοιο ώστε $\alpha^i(k) \geq K$, τότε διαλέγουμε $K_n$ ώστε $K_n \leq \Lambda^i(k,n)$ και $\sum_{k=1}^{N} K_n = K$. Αν προκύψει αποτέλεσμα $j$ με $\alpha^j(k) \geq K$, τότε $j \geq i$ και το δικαίωμα προαίρεσης της ράντας θα ασκηθεί όπως και όλα τα δικαιώματα προαίρεσης καθαρής προικοδότησης. Αν προκύψει αποτέλεσμα $j$ με $\alpha^j(k) < K$

τότε απαραιτήτως $j < i$ και δεν θα ασκηθεί κανένα απο τα δικαιώματα καθαρής προικοδότησης .
Αντίστροφα υποθέτουμε οτι η σειρά δεν είναι γραμμική. Τότε εμείς μπορούμε να βρούμε δείκτες $i, j, m, n$ τέτοια ώστε:

$$\Lambda^{\mathrm{i}}(\mathrm{k}, \mathrm{n}) > \Lambda^{\mathrm{j}}(\mathrm{k}, \mathrm{n}) \ , \ \Lambda^{\mathrm{j}}(\mathrm{k}, \mathrm{m}) > \Lambda^{\mathrm{i}}(\mathrm{k}, \mathrm{m}), \tag{4.15}$$

Εν συνεχεία θεωρούμε οτι $\alpha^i(k) \leq \alpha^j \leq \alpha^j(k)$ και ορίζουμε $K = \alpha^i(k)$. Αναλογιζόμαστε ένα σύνολο καθαρής προικοδότησης με τιμές άσκησης μια ακολουθία $(K_n)$ οι οποίες αθροίζουν στο $K$. Για μια τιμή άσκησης του K το δικαίωμα προαίρεσης της ράντας θα ασκηθεί αν απροκύψει αποτέλεσμα $i$ ή $j$, ωστόσο θα υποθέσουμε οτι δεν θα ασκηθούν ολα τα δικαιώματα προαίρεσης καθαρής προικοδότησης και για τα δυο αποτελέσματα .Τοτε θα έχουμε :

$$\mathrm{K}_{\mathrm{m}} \leq \Lambda^{\mathrm{i}}(\mathrm{k}, \mathrm{m}), \tag{4.16}$$

και

$$\mathrm{K}_{\mathrm{n}} \leq \Lambda^{\mathrm{j}}(\mathrm{k}, \mathrm{n}) < \Lambda^{\mathrm{i}}(\mathrm{k}, \mathrm{n}), \tag{4.17}$$

Με την σειρά αυτό συνεπάγεται οτι :
$\sum_{r \neq n,m} K_r > \sum_{r \neq n,m} \Lambda^i(k, r)$
άρα , τουλάχιστον ένα δικαίωμα προαίρεσης καθαρής προικοδότησης δεν θα ασκηθεί για άλλες χρονικές στιγμές πέρα απο τις $m, n$ για το αποτέλεσμα $i$

## Παράδειγμα

Υποθέτουμε οτι οι τιμές των ομολόγων $D(0, 1), D(1, 2)D(2, 3)$ δίνονται απο :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & 800 \\ & 800 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ 800 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 600 \\ & 600 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & 400 \end{tikzcd}$$

με ισοδύναμες πιθανότητες $\frac{1}{2}$ για τις ανω και κατω παραστάσεις, παράλληλα το πλέγμα του $q's$ δίνεται απο :

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny]
 & & 0.7 \\
 & 0.5 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
0.2 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & & 0.6 \\
 & 0.3 \arrow[ur, dash] \arrow[dr, dash] & \\
 & & 0.5
\end{tikzcd}$$

επίσης με πιθανότητες ίσες με $\frac{1}{2}$ για τις ανω και κατω παραστάσεις

Ενα δικαίωμα προαίρεσης δίνεται να αγορασει την χρονική στιγμη 1 μια ράντα 2 ετών που δίνει 1000 μονάδες με την πρώτη πληρωμή την χρονική στιγμή 2 και τιμή άσκησης 497. Υπάρχουν τέσσερα πιθανά ενδεχόμενα την χρονική στιγμή 1 που εξαρτώνται είτε με το αν οι τιμές των ομολόγων είναι υψηλές ή χαμηλές και είτε με το αν $q's$ είναι υψηλά ή χαμηλά. Ειδικότερα για αποτέλεσμα 1 , χρειάζεται να αναλογιστούμε δύο απο αυτά δηλαδή υψηλές τιμές ομολόγων και υψηλες αξίες του $q$ ή για αποτέλεσμα 2 , χαμηλές τιμές ομολόγων και χαμηλή αξία του $q$. Έχουμε :

$$\Lambda^1(1,2) = 400 < \Lambda^2(1,2) = 420, \tag{4.18}$$

αλλά

$$\Lambda^1(1,3) = 98 > \Lambda^2(1,3) = 94.50, \tag{4.19}$$

έτσι δεν πληρείται η προϋπόθεση.

Στο παράδειγμα μας παραπάνω , οι αλλαγές στη θνησιμότητα έχουν μια μονότονη ιδιότητα. Αν οποιαδήποτε στιγμή έχουμε οτι μια αξία του $q$ είναι υψηλότερη απο μια άλλη τότε όλες οι πιθανές μελλοντικές αξίες που προκύπτουν απο τιμή θα είναι υψηλότερες απο εκείνες που προκύπτουν απο άλλες τιμές. Αν το επιτόκιο ήταν ντετερμινιστικό θα επιτυγχάναμε γραμμική σειρά, αλλά το πρόβλημα που προκύπτει είναι οτι οι τιμές των επιτοκίων σε αυτό το παράδειγμα έχει την ίδια μονότονη συμπεριφορά. Αν καταλήξουμε στο να τροποποιήσουμε αυτό αξιώνωντας μια μέση αναστρέψιμη κατάσταση για τα επιτόκια τότε γίνεται ευκολότερη η επίτευξη της γραμμικής σειράς. Υποθέτουμε οτι οι τιμές των ομολόγων έχουν τις ίδιες αξίες όπως και παραπάνω , αλλά όμως για καθένα απο τα δυο αποτελέσματα την χρονική στιμγή 1, η πιθανότητα οτι οι τιμές θα είναι 600 την χρονική στιγμή 2 είναι $\frac{3}{4}$ και όχι $\frac{1}{2}$. Τώρα παίρνουμε τις ίδιες αξίες με το αποτέλεσμα 1 και επίσης :

$$90 = \Lambda^1(1,3) < \Lambda^2(1,3) = 103.95, \tag{4.20}$$

και έτσι τελικά έχουμε γραμμική σειρά (εδώ είναι ξεκάθαρο οτι τα άλλα δυο αποτέλεσματα θα δώσουν ακολουθίες μεγαλύτερες απο οτι θα δώσει το αποτέλεσμα 2 και μικρότερες απο οτι θα δώσει το αποτέλεσμα 1).

Εν κατα κλείδι, οι τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης των καθαρών προικοδοτήσεων μπορούν να προστεθούν για να εξυπηρετήσουν ένα ανώτερο όριο δέσμευσης για την τιμή απο ένα δικαίωμα προαίρεσης που αγοράζει μια ράντα ζωής αλλα κανονικά δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να τιμολογήσει την αγορά του δικαιώματος ακριβώς.

## 4.2 Συνεχές Μοντέλο στο Χρόνο

Στην ενότητα αυτή αναπτύσουμε ενα συνεχές μοντέλο στο χρόνο οπως λέμε απο option-to-annuitise (OTA) , υποθέτοντας οτι καθοδηγείται απο δυο ανεξάρτητα 'short rates' το στιγμιαίο επιτόκιο και επιτόκιο κινδύνου.Αρχικά αντλούμε τις τιμές no arbitrage των συμβολαίων καθαρής προικοδότησης και στη συνέχεια εξάγουμε τις τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης επί του υποκείμενου τίτλου. Στο παράδειγμά μας υποθέτουμε μια διαδικασία Cost Income Ratio (CIR) για βραχυπρόθεσμο δείκτη και μια γενικευμένη μέση επαναφορά της διαδικασίας Gompertz (MRG) για το δείκτη κινδύνου.

### 4.2.1 Γενικό Πλαίσιο Μοντέλου, Συμβολισμοί και Ορολογία Μοντέλου

Σύμφωνα με την προσέγγιση του Duffie and Singleton [5] σχετικά με την τιμολόγηση των defaultable ομολόγων, μοντελοποιούμε μια διαδικασία κινδύνου και επιτοκίου . Αυτο ορίζεται απο :

$$\xi_{\mathrm{t}} = \mathrm{r}_{\mathrm{t}} + \mathrm{h}_{\mathrm{t}}, \tag{4.21}$$

όπου το $r_t$ είναι το στιγμιαίο risk-free επιτόκιο και το $h_t$ είναι ο δείκτης κινδύνου. Σε αντίθεση με την τιμολόγηση των επιχειρηματικών δανείων , όπως είναι επόμενο υποθέτουμε οτι το $r_t$ είναι ανεξάρτητο του $h_t$. Επίσης αγνοούμε τα ποσοστά ανάκτησης, καθώς στο πλαίσιο της προσωπικής ασφάλισης, η αθέτηση είναι πλήρης.

### Ομόλογα χωρίς Προεπιλογή (Default-free bonds)

Σε περίπτωση απουσίας κινδύνου θνησιμότητας την χρονική στιγμή $t$ η τιμή του ομολόγου μηδενικού κουπονιού το οποίο λήγει όταν $T > t$ ορίζεται και ισούται με :

$$\mathrm{D_t} := \mathrm{E_Q}\left[\mathrm{e}^{\int_t^T \mathrm{r_u\,du}}|\mathcal{F}_\mathrm{t}\right] \tag{4.22}$$

Η σημειογραφία μας διαφέρει ελαφρώς από την προηγούμενη ενότητα, αρκει εδώ να δώσουμε έμφαση στη συνεχή χρονική διάρκεια του υπολογισμού. Επιπλέον η ουδέτερη προσδοκία κινδύνου $E_Q[\cdot]$ θα πρέπει να συγκριθεί με την προσδοκία που αναμένεται απο τον πραγματικό κόσμο $E_P[\cdot]$.
(Για την σχέση μεταξύ των δυο πιθανών προσδοκιών μπορούμε να απευθυνθούμε στους συγγραφείς Musiela and Rutkowski) [14]
Είναι σαφές, στην τετριμμένη (ντετερμινιστική, συνεχής) περίπτωση όπου $r_t = r$ , η εξίσωση (4.22) συγχωνεύεται στο $D_t(T) = exp\{-r(T-t)\}$. Απο την άλλη όταν το $r_t$ μπορεί να αντιπροσωπευτεί απο μια στοχαστική διδαδικασία, η εξίσωση (4.22) μειώνει την εκτίμηση του μετασχηματισμού Laplace της τυχαίας μεταβλητής $\int_t^T r_t\,dt$. Επίσης πολύ συχνά η έκφραση $D_t(T)$ γράφεται ως:

$$\mathrm{D_t} = \mathrm{e}^{-\mathrm{y_t(T)(T-t)}}, \tag{4.23}$$

όπου το $y_t(T)$ υποδηλώνει τον χρόνο λήξης $t$ ενός ομολόγου με μηδενικό κουπόνι. Η οικογένεια $\{y_t(T)\ \forall T \geq t\}$ αναφέρεται ως καμπύλη αποδόσεων των επιτοκίων ή διάρθρωση επιτοκίων.
(Για περίσσοτερη συζήτηση και αναζήτηση οπως και προηγουμένως μπορούμε να απευθυνθούμε στους συγγραφείς Musiela and Rutkowski)[14] ή [8] . Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το $D_t(s,T)$ για να υποδηλώσουμε την προθεσμιακή τιμή ενός ομολόγου μηδενικού κουπονιού που λήγει στο χρόνο $T \geq s$.(Μπορούμε να κάνουμε μια δέσμευση η οποία γίνεται την χρονική στιγμή $t$ για την αγορά ενός ομολόγου μηδενικού κουπονιού σε χρονική στιγμή

$s \geq t$.)Εφαρμόζοντας την θεμελιώδη εξίσωση τιμολόγησης ή ενα απλό κόστος της επιχείρησης μεταφοράς, έτσι έχουμε οτι:

$$D_t(s,T) = E_Q\left[e^{-\int_t^T r_u\,du}|\mathcal{F}_t\right] \tag{4.24}$$

$$= E_Q\left[e^{\int_t^s r_u\,du}e^{-\int_t^T r_u\,du}|\mathcal{F}_t\right] \tag{4.25}$$

$$= \frac{D_t(T)}{D_t(s)} \qquad \forall T \geq s \geq t \tag{4.26}$$

Εν τέλει την χρονική στιγμή $t$ το στιγμιαίο προθεσμιακό επιτόκιο για χρόνο $s$ ορίζεται ισοδύναμα απο την εξίσωση:

$$\mathrm{f_t(s)} = \lim_{\mathrm{T}\downarrow\mathrm{s}} \frac{\ln[\mathrm{D_t(s)}] - \ln[\mathrm{D_t(T)}]}{\mathrm{T-s}} = \lim_{\mathrm{T}\downarrow\mathrm{s}} \frac{\mathrm{y_t(T)(T-s) - y_t(s-t)}}{\mathrm{T-s}}, \tag{4.27}$$

Αυτό οδηγεί σε μια καλά γνώριμη εξίσωση προθεσμιακής τιμολόγησης ενός ομολόγου με μηδενικό κουπόνι και ορίζεται απο :

$$\mathrm{D_t} = \mathrm{e}^{-\int_\mathrm{t}^\mathrm{T} \mathrm{f_t(u)\,du}}, \tag{4.28}$$

το οποίο θα γενικεύσουμε στο πλαίσιο των ραντών

### 4.2.2 Συναρτήσεις Θνησιμότητας

Χρησιμοποιώντας το ίδιο γενικό πλαίσιο , η πιθανότητα επιβίωσης στη χρονική στιγμή T , με την υπόθεση οτι το άτομο είναι ακόμα ζωντανό την χρονική στιγμή $t$ και έτσι ορίζεται και είναι ισοδύναμο με :

$$\mathrm{p_t(T)} := \mathrm{E_Q}\left[\mathrm{e}^{-\int_\mathrm{t}^\mathrm{T} \mathrm{h_u\,du}}|\mathcal{F}_\mathrm{t}\right], \tag{4.29}$$

Η εξίσωση (4.29) έμμεσα υποδηλώνει οτι επικεντρωνόμαστε σε μια συγκεκριμένη στατιστική ομάδα, στην οποία όλα τα άτομα γεννήθηκαν σε μια συγκεκριμένη χρονιά. Το σημείο το οποίο θέλουμε να ξεχωρίσουμε ανάμεσα στις διαφορετικές ομάδες είναι να επικεντρωθούμε στα άτομα με χρονιά γέννησης $y$ με δεδομένη πιθανότητα $p_t(T|y)$. Ωστόσο η παραπάνω εξίσωση στους εκπαιδευόμενους αναλογιστές ίσως να φαίνεται σαν μια πιθανότητα που αντιπροσωπεύει συναρτήσεις επιβίωσης. Στην πραγματικότητα όμως αυτή η γενίκευση είναι σύμφωνη με μια παραδοσιακή διαδικασία και είναι ενσωματωμένη μέσα σε αυτή. Για παράδειγμα στη τετριμμένη περίπτωση που ο δείκτης κινδύνου (αποτυγχάνει) είναι σταθερός δηλαδή $h_t = h$ η πιθανότητα επιβίωσης δίνεται απο : $p_t(T) = \exp\{-h(T-t)\}$. Αυτή η σταθερή δύναμη υποτιθέμενης θνησιμότητας είναι συνώνυμη με μια μελλοντική διάρκεια ζωής που κατανέμεται εκθετικά. Στην πιο γενική περίπτωση όπου ο δείκτης κινδύνου είναι στοχαστικός όπου είναι και η ουσία της Διπλωματικής μας εργασίας η πιθανότητα επιβίωσης μπορεί να αντιπροσωπευτεί διαμέσου της ακέραιας μετατροπής Laplace του δείκτη κινδύνου. Οι αναλογιστές ταυτόχρονα ίσως να είναι περισσότερο εξοικειωμένοι με τη ξαφνική επίδραση της θνησιμότητας $\mu_s$ ως τον υποκείμενο συντελεστή τιμολόγησης χρησιμοποιώντας αυτή την προσέγγιση δηλαδή $p_t(T) = \exp\{-\int_t^T \mu_u\, du\}$.Ωστόσο, όπως υποστηρίξαμε στην εισαγωγή του εγγράφου, προτιμάμε να ορίσουμε τη δύναμη θνησιμότητας, ανάλογη με ένα προθεσμιακό επιτόκιο, όπου :

$$\mu_{\mathrm{t}}(\mathrm{s}) = \lim_{\mathrm{T}\downarrow \mathrm{s}} \frac{\ln[\mathrm{p_t(s)}] - \ln[\mathrm{p_t(T)}]}{\mathrm{T-s}} \qquad \forall \mathrm{T} \geq \mathrm{s} \geq \mathrm{t} \tag{4.30}$$

Σε αυτό το πλαίσιο, η στιγμιαία επίδραση της θνησιμότητας ορίζεται άμεσα από την πιθανότητα επιβίωσης, η οποία με τη σειρά της οδηγείται από το στοχαστικό ποσοστό κινδύνου. Στην πραγματικότητα παρατηρείται μια απλή εφαρμογή της ανισότητας του Jensen δηλαδή :

$$\mathrm{p_t(T)} = \mathrm{e}^{-\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} \mu_{\mathrm{u}}\, \mathrm{du}} = \mathrm{E}[\mathrm{e}^{-\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} \mathrm{h_u}\, \mathrm{du}} | \mathrm{F_t}] \geq \mathrm{e}^{-\int_{\mathrm{t}}^{\mathrm{T}} \mathrm{E}[\mathrm{h_u}]\, \mathrm{du}} \tag{4.31}$$

Στην πράξη, υποστηρίζουμε ότι η στιγμιαία καμπύλη δύναμης θνησιμότητας (στην ασφάλιση) είναι ισοδύναμη με την στιγμιαία καμπύλη μελλοντικών επιτοκίων (σε χρηματοδότηση). Όλες οι αξιώσεις μπορούν να τιμολογηθούν από τις παραπάνω καμπύλες.
Παρατηρήθηκε οτι δεν υπάρχει αναφορά η ιδέα ενός στοχαστικού ποσοστού κινδύνου στην αναλογιστική βιβλιογραφία. Ωστόσο, σχετικές έννοιες έχουν χρησιμοποιηθεί από τους βιολόγους του πληθυσμού για τη μελέτη της γήρανσης του ανθρώπου. Σχετικά αποσπάσματα υπάρχουν στους Woodbury και Manton [16] ή Yashin et al. [17].

### 4.2.3 Η Καμπύλη Πιθανότητας Θνησιμότητας

Όπως στο μοντέλο διακριτού χρόνου, ξεκινάμε με συμβάσεις καθαρού δανεισμού, οι οποίες στη συνέχεια μπορούν να ενταχθούν (και αθροίζονται) για να σχηματίσουν μια ράντα ζωής. Αυτό είναι ανάλογο με τη δημιουργία ομολόγων που φέρουν κουπόνια χρησιμοποιώντας ένα μείγμα συμβάσεων με μηδενικό κουπόνι. Σε συνεχή χρόνο, η τιμή ενός συμβολαίου καθαρού δανείου, με λήξη T ορίζεται και ισούται με:

$$\Lambda_t(T) = E_Q[e^{-\int_t^T h_u\,du}|F_t]E_Q[e^{-\int_t^T r_u\,du}|F_t] \tag{4.32}$$
$$= E_Q[e^{-\int_t^T (h_u+r_u)\,du}|F_t] \tag{4.33}$$
$$= E_Q[e^{-\int_t^T \xi_u\,du}|F_t] \tag{4.34}$$

Διαισθητικά, η τιμή της καθαρής προικοδότησης είναι ίση με το προϊόν της τιμής των ομολόγων χωρίς χρεώσεις και της πιθανότητας επιβίωσης. Εννοείται, $\Lambda_t(T) \to 0$, όταν $T \to \propto$. Επίσης, όπως στην περίπτωση της πιθανότητας επιβίωσης, η σημείωση $\Lambda_t(T|y)$ θα χρησιμοποιηθεί όταν προσδιορίζεται για μια συγκεκριμένη ομάδα. Ανάλογα με το (default-free) ομολόγου μηδενικού τοκομεριδίου, ορίζουμε στο $\Lambda_t(s,T)$ ώστε να εκπροσωπεί την ώρα - τιμή $t$ forward μια καθαρής προικοδότησης που λήγει σε χρόνο $T > s$.Στο πλαίσιο μια ράντας ζωής, η δέσμευση είναι γίνονται σε χρόνο $t$ για να αγοράσει ένα συμβόλαιο καθαρής προικοδότησης κατά τη στιγμή $s > t$.Δίνουμε έμφαση οτι την $\Lambda_t(s,T)$ δεν είναι ακριβώς μια αναβαλλόμενης ράντα (με την κλασική αναλογιστική έννοια του όρου), δεδομένου ότι η καταβολή εξαγοράς δεν γίνεται τώρα, αλλά σε χρόνος $s > t$, εξαρτώμενο από την επιβίωση του ατόμου. Σε κάθε περίπτωση, εφαρμόζοντας τη θεμελιώδη εξίσωση τιμολόγησης, έχουμε το εξής:

$$\Lambda_t(s,T) = E_Q[e^{-\int_t^T \xi_u\,du}|F_t] = \frac{\Lambda_t(T)}{\Lambda_t(s)} \quad \forall T \geq s \geq t \tag{4.35}$$

Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική, ο χρόνος $t$ για την τιμή απόδοσης ενός call option για την απόκτηση ενός καθαρού τίτλου με λήξη $T$ για χρόνο $s \leq T$, για μια σταθερή τιμή του $\Lambda$, ορίζεται ως $C_t(s,T,\Lambda)$. Η πληρωμή κατά τη λήξη είναι:

$$\mathrm{C_s(s,T,\Lambda) = max[\Lambda_s(T) - \Lambda, 0]} \tag{4.36}$$

Η τιμή της πλήρους αγοράς (complete-market) (ή αλλιώς No Arbitrage) αυτής της επιλογής για call option είναι:

$$C_s(s,T,\Lambda) = E_Q[e^{-\int_t^T \xi_u\,du}\max[\Lambda_s(T)-\Lambda,0]|F_t] \tag{4.37}$$
$$= E_Q[e^{-\int_t^T \xi_u\,du}\max[E_Q[e^{-\int_s^T \xi_u\,du}|F_s]-\Lambda,0]|F_t] \tag{4.38}$$

Όπως θα περίμενε κανείς διαισθητικά, καθώς $A \to 0$, $C_t(s,T,\Lambda) \to \Lambda_t(T)$, προχωρούμε τώρα να συμπεράνουμε ρητές εκφράσεις για $\Lambda_t(T)$ και $C_t(s,T,\Lambda)$ υποθέτοντας μια συγκεκριμένη παραμετροποίηση της διαδικασίας $\xi_t = r_t + h_t$.

### 4.2.4 Η Διαδικασία Cost Income Ratio (CIR) για το Επιτόκιο

Για πληρότητα, παρουσιάζουμε το μοντέλο CIR, το οποίο είναι ένα από τα πιο δημοφιλή βραχυπρόθεσμα μοντέλα για τα επιτόκια. Ειδικότερα έχουμε:

$$\mathrm{dr_t} = \kappa(\theta - \mathrm{r_t})\mathrm{dt} + \sigma_\mathrm{r}\sqrt{\mathrm{r_t}}\mathrm{dB_t^r} \tag{4.39}$$

Οι τρεις παράμετροι για τα επιτόκια κ,ϑ και $\sigma_r$ είναι αυτοί που εξουδετερώνουν τον κίνδυνο. Η εξίσωση (4.39) υποδηλώνει οτι τα $r_s|r_t$ είναι μη κεντρικά στατιστικά ελεγχόμενα κατα $x^2$. Αυτό το γεγονός μπορεί να ανιχνευθεί στα αρχικά αποτελέσματα από τον Feller, αλλά αποδίδεται ευρέως στον Cox. et al. (1985) [3] Η αναμενόμενη τιμή και η διακύμανση της είναι ίσες με :

$$\mathrm{E[r_s|r_t] = r_t e^{-\kappa(s-t)}} + \theta(1 - \mathrm{e^{-k(s-t)}}) \tag{4.40}$$

$$\mathrm{var[[r_s|r_t] = r_t}\Big(\frac{\sigma_\mathrm{r}^2}{\kappa}\Big)(\mathrm{e}^{-\kappa(\mathrm{s-t})} - \mathrm{e}^{-2\kappa(\mathrm{s-t})}) + \theta\Big(\frac{\sigma_\mathrm{r}^2}{2\kappa}\Big)(1-\mathrm{e}^{-\kappa(\mathrm{s-t})})^2 \tag{4.41}$$

Οι ιδιότητες της διαδικασίας CIR για το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο είναι πολύ γνωστές στην δομημένη βιβλιογραφία των όρων, επομένως δεν θα αναφερθούμε για αυτές εδώ. Τώρα λαμβάνοντας το μετασχηματισμό Λαπλαςε στην εξίσωση (4.22), η τιμή του ομολόγου είναι ίση με :

$$\mathrm{D_t(T) = C_1(t,T)e^{-r_t C_2(t,T)}} \tag{4.42}$$

όπου

$$C_1(t,T) = \left[\frac{2\gamma e^{(\kappa+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma}\right]^{2\kappa\theta/\sigma_r^2} \tag{4.43}$$

$$C_2(t,T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)}-1)}{(\gamma+\kappa)(e^{\gamma(T-t)}-1)+2\gamma} \tag{4.44}$$

και $\gamma = \sqrt{\kappa^2 + 2\sigma_r^2}$

### 4.2.5 Μέση Αναστροφή (Mean Reverting) Brownian Gompertz

Ψάχνουμε για μια διαδικασία εξάπλωσης του συνεχούς χρόνου για τον κίνδυνο, που μπορεί να χρησιμεύσει ως στοχαστικά ανάλογο της συνάρτησης επιβίωσης Gompertz. Αναφορές γίνονται στους Carriere [2], (Gutterman και Vanderhoof )[6], (Tennebein και Yanderhooof ) [15] που βασίζονται στο Gompertz και σε άλλα μοντέλα συνεχούς θνησιμότητας. Φυσικά, υπάρχουν πολλά μοντέλα που μπορεί κανείς να επιλέξει ως επέκταση στο Gompertz. Μετά από πειράματα με μια ποικιλία προσεγγίσεων, οι συγγραφείς επέλεξαν μια αποκαλούμενη μέση αναστροφή της προδιαγραφής Brownian Gompertz (MRBG). Η διαδικασία αυτή αναμένεται να αυξηθεί εκθετικά με την διακύμανση να είναι ανάλογη με την τιμή του ποσοστού κινδύνου. Επιπλέον η διαδικασία δεν θα φτάσει ποτέ στο μηδέν και εμφανίζει μέση αναστροφή. Όλα αυτά είναι επιθυμητά και ίσως ακόμη και απαιτούμενα για μια σωστή συνάρτηση κινδύνου θνησιμότητας. Από τεχνική άποψη, έχουμε το εξής:

$$h_t = h_0 e^{gt+\sigma Y_t}, \quad g, \sigma, h_0 > 0 \tag{4.45}$$

$$dY_t = -bY_t dt + dB_t^h, \quad Y_0 = 0, b \geq 0 \tag{4.46}$$

Όταν $b = 0$, η διαδικασία συμπίπτει με την γεωμετρική κίνηση Brownian, δεδομένου ότι το $Y_t$ γίνεται $B_t$. Καθώς αυξάνεται το $b$ το $Y_t$ εμφανίζει ισχυρότερη μέση αναστροφή. Η στοχαστική διαφορική εξίσωση για το $Y_t$, μπορεί να λυθεί ρητά για να αποδώσει:

$$\mathrm{Y_t} = \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{e}^{-\mathrm{b(t-u)}}\, \mathrm{dB^h_u} \tag{4.47}$$

με μέση τιμή (στοχαστικό ολοκλήρωμα) μηδέν και διακύμανση (με την ισομετρία του Ito):

$$\sigma^2 = \mathrm{E[Y_t^2]} = \int_0^{\mathrm{t}} (\mathrm{e}^{-\mathrm{b(t-u)}})^2\, \mathrm{dB^h_u} = \frac{1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{bt}}}{2\mathrm{b}} \tag{4.48}$$

που πηγαίνει στο $t$ καθώς το $b \to 0$ και είναι πάντοτε μικρότερο από $t$, για $b > 0$. Με άλλα λόγια, η διαδικασία έχει μικρότερη διακύμανση σε σύγκριση με μια τυπική κίνηση Brownian. Οι υψηλότερες στιγμές του $U_t$, δίνονται από:

$$\mathrm{E[Y_t^{2n-1}]} = 0, \quad \mathrm{n} = 1, 2, 3, ... \tag{4.49}$$

$$\mathrm{E[Y_t^{2n}]} = \mathrm{E}\left[\left(\frac{\mathrm{Y_t}}{\sigma_{\mathrm{t}}}\right)^{2\mathrm{n}}\right]\sigma_{\mathrm{t}}^{2\mathrm{n}}, \quad \mathrm{n} = 1, 2, 3... \tag{4.50}$$

$$\mathrm{E[Y_t^{2n}]} = \frac{(2\mathrm{n})!}{2^{\mathrm{n}}(\mathrm{n}!)}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{bt}}}{2\mathrm{b}}\right]^{\mathrm{n}}, \quad \mathrm{n} = 1, 2, 3... \tag{4.51}$$

$$\mathrm{E[Y_t^{2n}]} = \frac{(2\mathrm{n})!}{(\mathrm{n}!)}\left[\frac{1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{bt}}}{4\mathrm{b}}\right]^{\mathrm{n}}, \quad \mathrm{n} = 1, 2, 3... \tag{4.52}$$

Ο συντελεστής κινδύνου καταγραφής $\ln[h_t]$ είναι κατά συνέπεια κανονικά κατανεμημένος με μέση τιμή $\ln[gt] + \ln[h_0]$ και διακύμανση $\sigma^2(1 - \exp(-2bt))/2b$. Οι (μη κεντρικές) ροπές του K δίδονται από:

$$\mathrm{E[h_t^n]} = \mathrm{E[(h_0 e^{gt+\sigma Y_t})^n]}, \tag{4.53}$$

$$\mathrm{E}[\mathrm{h_t^n}] = \mathrm{h_0^n e^{ngt} E[e^{n\sigma Y_t}]}, \tag{4.54}$$

έτσι λοιπόν

$$\mathrm{E}[\mathrm{h_t^n}] = \mathrm{h_0^n e^{ngt}} \exp\left[\frac{(\mathrm{n}\sigma)^2}{2}\left(\frac{1-\mathrm{e^{-2bt}}}{2\mathrm{b}}\right)\right], \quad \mathrm{n} = 1,2,3... \tag{4.55}$$

Για παράδειγμα, όταν $n = 1$ έχουμε οτι ο αναμενόμενος βαθμός κινδύνου θα είναι:

$$\mathrm{E}[\mathrm{h_t}] = \mathrm{h_0} \exp\left(\mathrm{gt} + \frac{\sigma^2}{2}\left(\frac{1-\mathrm{e^{-2bt}}}{2\mathrm{b}}\right)\right) \tag{4.56}$$

Ο αναμενόμενος βαθμός κινδύνου θα είναι η συνήθης συνάρτηση του Gompertz όταν $b = 0$ και ως εκ τούτου $E[h_t] = h_0 \exp\left((g + (\sigma^2/2))t\right)$. Για να αποκτήσουμε περαιτέρω γνώση της δομής του $h_t$, ορίζουμε $F(t,y) = h_0 \exp\left(gt + \sigma y\right)$, κατόπιν με το λήμμα του Ito, έχουμε:

$$\mathrm{dF(t,y)} = \frac{\partial \mathrm{F(t,y)}}{\partial \mathrm{t}}\mathrm{dt} + \frac{\partial \mathrm{F(t,y)}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{F(t,y)}}{\partial \mathrm{y}^2}\mathrm{d}\langle \mathrm{Y}\rangle_\mathrm{t} \tag{4.57}$$

Αυτό, με τη σειρά του, συνεπάγεται ότι:

$$\mathrm{dh_t} = \mathrm{gh_t dt} + \sigma \mathrm{h_t dY_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{h_t dt}, \tag{4.58}$$

$$\mathrm{dh_t} = \mathrm{gh_t dt} + \sigma \mathrm{h_t}(-\mathrm{bY_t dt} + \mathrm{dB_t^h}) + \frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{h_t dt}. \tag{4.59}$$

Τελικά, απο τη στιγμή που $Y_t = (\ln[h_t/h_0] - gt)/\sigma$, σύμφωνα με τον ορισμό της εξίσωσης (4.45), φτάνουμε στους ορισμούς:

$$\mathrm{dh_t} = \mathrm{gh_t dt} + \sigma \mathrm{h_t}(\frac{-\mathrm{b}(\ln[\mathrm{h_t/h_0}] - \mathrm{gt})}{\sigma}\mathrm{dt} + \mathrm{dB_t^h}) + \frac{1}{2}\sigma^2 \mathrm{h_t dt}. \tag{4.60}$$

$$\mathrm{dh_t} = ((\mathrm{g} + \frac{1}{2}\sigma^2) - \mathrm{b}(\ln[\mathrm{h_t}] - \ln[\mathrm{h_0}] - \mathrm{gt}))\mathrm{h_t dt} + \sigma \mathrm{h_t dB_t^h}, \tag{4.61}$$

$$\mathrm{dh_t} = (\mathrm{g} + \frac{1}{2}\sigma^2 + \mathrm{b}\ln[\mathrm{h_0}] + \mathrm{bgt} + \mathrm{b}\ln[\mathrm{h_t}])\mathrm{h_t dt} + \sigma \mathrm{h_t dB_t^h}, \tag{4.62}$$

το οποίο , είναι και αρκετά ενδιαφέρον, είναι αρκετά παρόμοιο με το μοντέλο Black-Derman-Toy για το βραχυπρόθεσμο επιτόκιο

$$\mathrm{dX_t} = (\mathrm{A} + \mathrm{Bt} + \ln[\mathrm{X_t}])\mathrm{X_t dt} + \mathrm{CX_t dB_t}, \tag{4.63}$$

για περισσότερες λεπτομέρειες μπορούμε να βρούμε στους Black and Karasinski [1], ή Hull and White [9].

## 4.3 Αριθμητικά Παραδείγματα

Αν και μπορεί κανείς να αποκτήσει εκφράσεις κλειστής μορφής για τις τιμές CIR και τις τιμές δικαιωμάτων προαίρεσης, το ίδιο δεν ισχύει για τη διαδικασία MRBG. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι το (αναπόσπαστο) άθροισμα των λογαριθμικών μεταβλητών δεν είναι φυσιολογικό. Τώρα, αν και υπάρχουν διαθέσιμες προσεγγίσεις με βάση Hansen and Jorgensen or Milevsky and Posner [7][10], αποφασίσαμε να κάνουμε μια προσομοίωση του Monte Carlo για να λάβουμε κάποιες τιμές ομολόγων και δικαιωμάτων προαίρεσης. Για το σκοπό αυτό, διαχωρίσαμε τόσο τις διαδόσεις όσο και τις προσομοιώσεις των μηνιαίων αλλαγών των δυο δηλαδή του επιτοκίου και του ποσοστού κινδύνου, προκειμένου να αποκτήσουμε τη δομή των όρων των αιτημάτων που σχετίζονται με τη θνησιμότητα. Για παράδειγμα, όταν οι παράμετροι επιτοκίων είναι $\sigma_r = 0.15, \theta = 0.075, \kappa = 0.25, r_0 = 0.055$ και οι παράμετροι των βαθμών κινδύνου είναι $\sigma_h = 0.20, g = 0.10, b = 0.5, h_0 = 0.015$, λαμβάνουμε τις ακόλουθες τιμές και επιλογές για τη σύμβαση της καθαρής προικοδότησης. Για $n = 10.000$ προσομοιώσεις με $\Lambda_0(10) = 0.40867$, με τυπικό σφάλμα (0.0011), $\Lambda_0(20) = 0.10442$ με τυπικό σφάλμα (0.0005) και με τιμή δικαιώματος προαίρεσης $C_0(10, 20, 0.25) = 0.01518$ και τυπικό σφάλμα (0.0002). Αυτές οι παράμετροι αντιστοιχούν σε ένα 70 χρονο που έχει τη δυνατότητα να ακυρώσει τις τρέχουσες προθεσμιακές χρεώσεις, σε 10 χρόνια. Το δικαίωμα προαίρεσης θα ανερχόταν σε 1.5% της ονομαστικής αξίας της πολιτικής του προικοδοτήματος.

Γενικά, φαίνεται ότι τόσο οι τιμές προαίρεσης όσο και οι τιμές των ομολόγων δεν είναι αρκετά ευαίσθητες στο μέγεθος της μέσης παραμέτρου αναστροφής $b$, αλλά είναι ιδιαίτερα ευαίσθητες (φυσικά) στην μεταβλητότητα, $\sigma_r$, $\sigma_h$. Επίσης, όσο υψηλότερος είναι ο τρέχων ρυθμός κινδύνου $h_0$, ή ο ρυθμός ανάπτυξης $g$ τόσο χαμηλότερη είναι η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης της ράντας.

Οι πίνακες 4.1, 4.2 μας δείχνουν τις *υποθέσεις του παραπάνω παραδείγματος και ο 4.3 μας περιγράφει το τελικό συμπέρασμα του αριθμητικού μας παραδείγματος*[1].

| | |
|---|---|
| $\sigma$ | 15% |
| $\varkappa$ | 0.25 |
| $\Delta$T | $\frac{1}{12}$ |
| $r_o$ | 5.50% |
| $r$ | 7.50% |

Πίνακας 4.1: *Πίνακας παραμέτρων επιτοκίων.*

| | |
|---|---|
| $\sigma$ | $\{5, 10, 15, 20\}$ |
| $b$ | 0.5 |
| $\Delta$T | $\frac{1}{12}$ |
| $h_o$ | $\{0.5, 1, 1.5\}$ |
| $g$ | 0.1% |

Πίνακας 4.2: *Πίνακας παραμέτρων βαθμών κινδύνου.*

| | $\sigma = 5\%$ | $\sigma = 10\%$ | $\sigma = 15\%$ | $\sigma = 20\%$ |
|---|---|---|---|---|
| $h_o = 0.5\%$ | 7.1%(0.006) | 6.2%(0.005) | 5.3%(0.004) | 3.2%(0.003) |
| $h_o = 1\%$ | 5.2%(0.004) | 3.3%(0.004) | 2.2%(0.003) | 1.9%(0.002) |
| $h_o = 1.5\%$ | 2.1%(0.0002) | 1.7%(0.0002) | 1.5%(0.002) | 1.5%(0.0002) |

Πίνακας 4.3: *Πίνακας που δείχνει όσο υψηλότερος είναι ο τρέχων ρυθμός κινδύνου $h_0$, ή ο ρυθμός ανάπτυξης $g$, τόσο χαμηλότερη είναι η τιμή του δικαιώματος προαίρεσης της ράντας.*

[1]Τα παραπάνω στοιχεία των πινάκων αντιπροσωπεύουν τα αποτελέσματα 10.000 δεδομένων με το μοντέλο του Μοντε ἄρλο για τους δείκτες επιτοκίων και κινδύνου για 70 χρονο που έχει τη δυνατότητα να ακυρώσει τις τρέχουσες προθεσμιακές χρεώσεις, σε 10 χρόνια, με βάση το [7][10].

## 4.4 Συμπεράσματα

Στην παρούσα εργασία προτείνουμε ένα μοντέλο τιμολόγησης δικαιωμάτων προαίρεσης σχετικά με τα μελλοντικά ποσοστά θνησιμότητας (και επιτοκίων). Αυτά τα δικαιώματα προαίρεσης υπάρχουν σήμερα στην αγορά, αλλά έχουν γραφεί πολύ λίγα για τον τρόπο με τον οποίο πρέπει να τιμολογούνται ή να δεσμεύονται. Αυτά τα δικαιώματα προαίρεσης, «αποπληρωμής», αν οι τιμές των ασφαλίσεων ζωής (καθαρής προικοδότησης) καταλήγουν σε υψηλότερη από κάποια προκαθορισμένη τιμή άσκησης, κατά τον χρόνο έκδοσης της σύμβασης. Έχουμε παρουσιάσει ένα διακριτό και συνεχές μοντέλο χρόνου και έχουμε δείξει πώς να αντισταθμίζουμε αυτά τα δικαιώματα με τη χρήση ασφαλίσεων ζωής προικοδότησης, προεπιλεγμένων ελεύθερων ομολόγων (free bonds) και συμβολαίων ασφάλισης ζωής. Στο διακριτό μοντέλο, οι λεπτομέρειες αντιστάθμισης παρουσιάζονται με ακρίβεια. Για το συνεχές μοντέλο βασιζόμαστε στη θεωρία των Duffie and Singleton [4][5]. Η βασική μας εννοιολογική συνεισφορά είναι η αντιμετώπιση του ποσοστού αναλογιστικού κινδύνου καθαυτού ως μια στοχαστική μεταβλητή, σε αντίθεση με μια ντετερμινιστική επιδραση της θνησιμότητας. Εφόσον, στα κλασικά ντετερμινιστικά αναλογιστικά μοντέλα, η επιλογή να ακυρωθεί μακροπρόθεσμα - θα πρέπει να έχει μηδενική αξία από τότε που οι αναλογιστές δεν επιτρέπουν την αβεβαιότητα όσον αφορά τους παράγοντες θνησιμότητας που θα ισχύουν κατά την είσπραξη. Αντίθετα, αντιμετωπίζουμε την πιθανότητα επιβίωσης ως προσδοκία σε σχέση με την πορεία του βαθμού κινδύνου με την πάροδο του χρόνου. Οι τιμές καθαρής προικοδότησης μπορούν στη συνέχεια να θεωρηθούν ότι δημιουργούν μια δομή χρόνου θνησιμότητας. Ερμηνεύουμε την κλασική επίδραση της θνησιμότητας ως μια καμπύλη προς τα εμπρός, από την οποία όλες οι αξιώσεις διατιμώνται σε ένα πλαίσιο χωρίς αρμπιτραζ (No Arbitrage). Αυτή η μακροπρόθεσμη καμπύλη θνησιμότητας αθροίζει τις προσδοκίες της αγοράς για τα ποσοστά θνησιμότητας σε συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης, αλλά ταυτόχρονα μπορεί να αλλάξει με την πάροδο του χρόνου, ανταποκρινόμενη στις νέες πληροφορίες. Αυτή η προσέγγιση είναι παρόμοια με το πνεύμα των πρόσφατων εργασιών των Mullin και Philipson [13], όπου χρησιμοποιούν τις τιμές αγοράς για τους όρους ασφαλιστηρίων συμβολαίων ζωής για να υποδηλώνουν προσδοκίες για τα μελλοντικά ποσοστά θνησιμότητας. Παρόλα αυτά, προχωρούμε σε αυτή τη διαδικασία ένα βήμα παραπέρα, υποθέτοντας ότι η αγορά έχει μια συγκεκριμένη προσδοκία της ομάδας ανθρώπων που αλλάζει με την πάροδο του χρόνου. Η στοχαστικότητα στις μελλοντικές πιθανότητες επιβίωσης για οποιαδήποτε συγκεκριμένη ομάδα ατόμων είναι αυτό που δίνει αξία στην επιλογή. Η μελλοντική έρευνα θα επιχειρήσει να εκτιμήσει τις παραμέτρους της διαδικασίας ποσοστού κινδύνου εξετάζοντας τα στοιχεία των τιμών των προσόδων (ραντών ζωής).

# Βιβλιογραφία

## Ξένη


[1] Black, F., Karasinski, P., 1991.Bond and option pricing when short rates are longnormal. Financial Analysts Journal 47, 52-59.

[2] Carriere, J.,1994. An Investigation of the Gompertz Law of Mortality, Vol. 2. Actuarial Research Clearing House.

[3] Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A., 1985. A theory of the term structure of interest rates. Econometrica 53 (2), 385-407.

[4] Duffie, D., Singleton, K., 1996. Modeling the term structure of defaultable bonds. Working Paper. Graduate School of Business Administration, Stanford University.

[5] Duffie, D., Singleton, K., 1997.An econometric model of the term structure of interest-rate swap yields. The Journal of Finance 52 (4)

[6] Gutterman, S., Vanderhoof, I.T., 1998. Forecasting changes in mortality: a search for a law of causes and effects. The North American Actuarial Journal 2 (4), 135-138.

[7] Hansen, A.T., Jorgensen, P.L., 1999. Fast and accurate analytical approximation of bond prices when short interest rates are lognormal. Journal of Computational Finance 3 (2), 27-45.

[8] Hull,J., 2000. Options, Fuctures and Others Derivatives, 4th Edition. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[9] Hull,J., White, A., 1990. Pricing interest-rate derivative securities. The Review of Financial Studies 3 (4), 573-592.

[10] Milevsky, M.A., Posner, S.E., 1998. Assian options, the sum of lognormals, and the reciprocal gamma distribution. Journal of Financial and Quantitative Analysis 33 (2), 409-422.

[11] Milevsky, M.A., Posner, S.E., 2001. The titanic option: valuation of the guaranteed minimum death benefits in variable annuities and mutual funds. The Journal of Risk and Insurance 68 (1), 93-128.

[12] M.A. Milevsky, S. David Promislow, 2001. Mortality derivatives and the option to annuitise. Insurance: Mathematics and Economics 29 (2001) 299-318.

[13] Mullin, C., Philipson, T., 1997. The future od old-age longevity: competitive pricing of mortality contingent claims. Working Paper No. 6042. National Bureau of Economic Research.

[14] Musiela, M., Rutkowski, M., 1997. Martingale Methods in Financial Modeling. Springer, Berlin.

[15] Tennebein, A., Vanderhooof, I.T., 1980. New mathematical laws of select and ultimate mortality. Transactions of the Society of Actuaries 32, 119-158.

[16] Woodbury, M.A., Manthon, K.G., 1977. A random-walk model of human mortality and aging. Theoretical Population Biology 11, 37-48.

[17] Yasmin, A.I., Manthon, K.G., Vaupel, J.W., 1985. Mortality and aging in a heterogeneous population: a stochastic process model with observed and unobserved variables. Theoritical Population Biology 27, 154-175.

## Ελληνική

[18] Χατζηκωνσταντινίδης Ε., 2016, Συμβάντα Ζωής & Θανάτου Ι Π.Μ.Σ. «Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου», Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[19] Πιτσέλης Γ., 2016, Συνταξιοδοτικές Μέθοδοι (Ράντες) Π.Μ.Σ. «Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου», Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[20] Μαχαιράς Ν., 2016, Στοχαστικές Διαδικασίες Π.Μ.Σ. «Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου», Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[21] Χατζηβασίλογλου Ι., 2016, Διοικητικής Κινδύνου Π.Μ.Σ. «Αναλογιστική Επιστήμη & Διοικητική Κινδύνου», Τμήμα Στατιστικής & Ασφαλιστικής Επιστήμης, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[22] Κουτσόπουλος Κ.Ι., 1999, Αναλογιστικά Μαθηματικά, Μέρος Ι, Θεωρία των Κινδύνων, Εκδόσεις Συμμετρία.

[23] Κούτρας Μ., 2004,Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές, Μέρος Ι, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.

[24] Κούτρας Μ., 2005, Εισαγωγή στις Πιθανότητες, Θεωρία και Εφαρμογές, Μέρος ΙΙ, Εκδόσεις Αθ. Σταμούλης.