

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

Μαθιόπουλος Κωνσταντίνος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής
Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων
για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην
Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική του Κινδύνου

Πειραιάς

Φεβρουάριος 2019

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ



**ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ**

**ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ**

**ΑΝΑΛΥΣΗ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΩΝ ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΩΝ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΩΝ
ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ**

Μαθιόπουλος Κωνσταντίνος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική του Κινδύνου

Πειραιάς

Φεβρουάριος 2019

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. 12/3.7.2017 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)
- Αναπληρώτρια Καθηγήτρια Βερροπούλου Γεωργία
- Αναπληρωτής Καθηγητής Μπούτσικας Μιχαήλ

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS



DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM
IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

ANALYSIS OF BIVARIATE STOCHASTIC SURPLUS PROCESSES IN RUIN THEORY

By

Mathiopoulos Konstantinos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance
Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of
the requirements for the degree of Master of Science in
Actuarial Science and Risk Management

Piraeus

February 2019

ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ

Θερμές ευχαριστίες σε όλους τους καθηγητές μου και το διδακτικό προσωπικό του Πανεπιστημίου.

Ιδιαίτερος, έχω την ανάγκη να ευχαριστήσω τον Αναπληρωτή Καθηγητή, κύριο Ευστάθιο Χατζηκωνσταντινίδη για την πολύτιμη βοήθειά του στην ολοκλήρωση της εργασίας, τις σημαντικές επιστημονικές παρατηρήσεις του και την άψογη συνεργασία.

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η διπλωματική αυτή έχει ως σκοπό τη μελέτη της αναλογικής αντασφάλισης, δυναμικής αναλογικής αντασφάλισης καθώς και στρατηγικές φραγμάτων μερισμάτων υπό το πρίσμα ενός δισδιάστατου μοντέλου χρεοκοπίας. Καθώς μια ασφαλιστική εταιρεία σε ένα χαρτοφυλάκιο της μπορεί να έχει παραπάνω από μια κλάσεις κινδύνων θα επεκτείνουμε το κλασσικό μοντέλο χρεοκοπίας σε παραπάνω διαστάσεις, με την κάθε διάσταση να περιγράφει μια κλάση κινδύνου. Επίσης σε πολλές περιπτώσεις οι κλάσεις κινδύνων (υπό-χαρτοφυλάκια) μπορεί να συνδέονται μεταξύ τους, οπότε θα προσθέσουμε μια ακόμα στοχαστική διαδικασία για την περιγραφή της αλληλεπίδρασή τους. Πιο συγκεκριμένα :

Στο κεφάλαιο 1 θα ανακεφαλαιώσουμε το κλασσικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου δείχνοντας μερικά βασικά αποτελέσματα για τις στοχαστικές διαδικασίες Poisson, για τις ανανεωτικές εξισώσεις, τη συνάρτηση των Gerber-Shiu, μερικά φράγματα και το μετασχηματισμό Laplace για τη γενικευμένη διαδικασία Erlang.

Στο κεφάλαιο 2 θα ξεκινήσουμε επεκτείνοντας το κλασσικό μοντέλο σε m -διαστάσεις δίνοντας και την αντίστοιχη συνάρτηση των Gerber-Shiu. Επιπροσθέτως θα το ειδικεύσουμε στο δισδιάστατο που είναι και ο κύριος σκοπός αυτής της διπλωματικής εργασίας, δίνοντας και μερικά αποτελέσματα για τις τύπου φάσεων κατανομές και θα καταλήξουμε σε μερικές εφαρμογές.

Στο κεφάλαιο 3 θα δώσουμε ένα ελαφρώς παραλλαγμένο μοντέλο που εφαρμόζεται στη δυναμική αναλογική αντασφάλιση και την αναλογική αντασφάλιση καθώς και κάποια βασικά φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας και το μετασχηματισμό Laplace από κοινού με το χρόνο χρεοκοπίας.

Τέλος στο κεφάλαιο 4, μελετάται μια διαδικασία δισδιάστατου κινδύνου στην οποία κάθε μεμονωμένη κλάση εφαρμόζει μια στρατηγική φράγματος μερισμάτων. Τα ασφαλιστικά χαρτοφυλάκια των δύο ασφαλιστών είναι συσχετισμένα δεδομένου ότι υπόκεινται στα κοινά σοκ που προκαλούν τις εξαρτώμενες ζημιές. Για να αναλυθούν τα αναμενόμενα προεξοφλημένα μερίσματα μέχρι τον κοινό χρόνο χρεοκοπίας της δισδιάστατης διαδικασίας, προτείνεται με ένα διακριτό χρονικά αντίστοιχο του μοντέλου και εφαρμόζεται μια δισδιάστατη επέκταση της διακριτοποίησης των Dickson-Waters (Dickson και Waters (1991)) με τη χρήση δισδιάστατης αναδρομής του τύπου Panjer (Walhin και Paris (2000)). Λεπτομερή αριθμητικά παραδείγματα με διάφορες εξαρτήσεις μέσω κοινών σοκ, θεωρίες πιθανοτήτων (Copulas) και αναλογικές αντασφάλισης τίθενται υπόψη και δίνονται βέλτιστες εφαρμογές σε προβλήματα στην αντασφάλιση, την κύρια κατανομή και τα μερίσματα. Επίσης διευκρινίζεται ότι το βέλτιστο ζευγάρι των φραγμάτων μερισμάτων που μεγιστοποιεί τη συνάρτηση μερισμάτων εξαρτάται από το αρχικό επίπεδο πλεονάσματος. Προς το τέλος προτείνεται ο τύπος στρατηγικής φραγμάτων μερισμάτων.

ABSTRACT

This diploma aims to study proportional reinsurance, dynamic proportional reinsurance, and dividend barrier strategies in the light of a two-dimensional ruin model. As an insurance company in one of its portfolios may have more than one risk class, we will expand the classic ruin model to more dimensions, with each dimension describing a risk class. Also in many cases, the risk classes (sub portfolios) can be linked together, so we will add another stochastic process to describe their interaction, in particular.

In Chapter 1 we will recapitulate the classic model of risk theory by showing some basic results for Poisson's stochastic processes, the rejuvenation equation, the Gerber-Shiu function as well as some dams, and the Laplace transformation for the generalized Erlang process.

In Chapter 2 we will begin by extending the classical model to m -dimensions by giving the corresponding function of Gerber-Shiu. In addition, we will specialize it in the two-dimensional, which is the main purpose of this diploma thesis, with some results for the phase-type distributions for some applications.

In Chapter 3 we will give a lightweight different model that applies to dynamic proportional reinsurance and proportional reinsurance as well as some key risks for the probability of ruin and Laplace transformation of joint ruin time.

Finally, in chapter 4, a two-dimensional risk process is considered in which each individual class applies a dividend barrier strategy. The insurance portfolios of the insurer are related as they are subject to the common shocks that cause the claims. In order to analyse the expected discounted dividends up to the common time of ruin of the two-dimensional process, it is proposed with a distinct temporal counterpart of the model and a two-dimensional extension of the Dickson-Waters discretization (Dickson and Waters (1991)) is applied using a two-Panjer (Walhin and Paris (2000)). Detailed numerical examples under different dependencies through common shocks, probability theories (Copulas) and proportional reinsurance are taken into account, and applications are given to optimal problems in reinsurance, main distribution and dividends. It is also clarified that the optimal pair of dividend bars maximizing the dividend function depends on the original surplus level. Finally, we propose the type of dividend strategy.

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ	16
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ.....	17
ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ.....	18

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

1.1 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ	20
1.2 Η ΑΝΑΝΕΩΜΕΝΗ ΠΡΟΕΞΟΦΛΗΜΕΝΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΟΙΝΗΣ ΤΩΝ GERBER ΚΑΙ SHIU. .	24
1.3 ΟΛΟΚΛΗΡΟ-ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΣΤΗΝ GERBER ΚΑΙ SHIU.....	26
1.4 Η ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ERLANG ΣΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ G-S.....	28

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

2.1 ΤΟ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΛΑΣΣΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ	36
2.1.1 ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟ Μ-ΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	37
2.1.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ GERBER-SHIU ΓΙΑ ΤΟ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ	37
2.1.3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ	39
2.1.4 ΜΕΡΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΟ-ΔΙΑΦΟΡΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ	40
2.1.5 ΑΝΑΔΡΟΜΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ	42
2.2 ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΥΠΟΥ ΦΑΣΕΩΣ.....	44
2.2.1 ΔΙΑΚΡΙΤΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΥΠΟΥ ΦΑΣΕΩΣ.....	44
2.2.2 ΑΘΡΟΙΣΤΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ ΚΑΙ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ.....	46
2.2.3 ΠΙΘΑΝΟΓΕΝΝΗΤΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ.....	46
2.2.4 ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΕΣ ΡΟΠΕΣ.....	47
2.2.5 ΚΛΕΙΣΤΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ.....	47
2.2.6 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΜΙΞΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΤΥΠΟΥ ΦΑΣΗΣ.....	48
2.2.7 ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ.....	48
2.2.8 ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΤΥΠΟΥ ΦΑΣΕΩΣ.....	51
2.2.9 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE.....	52
2.2.10 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΥΝΕΧΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΤΥΠΟΥ ΦΑΣΕΩΣ	52
2.2.11 ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΕΣ ΜΙΞΕΙΣ ΣΥΝΕΧΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΤΥΠΟΥ ΦΑΣΗΣ.....	53
2.2.12 ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ	54
2.3 ΜΕΡΙΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑ ΕΠΙΒΙΩΣΗΣ ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ.....	56
2.3.1 ΜΕΡΙΚΑ ΑΠΛΑ ΟΡΙΑ ΓΙΑ ΤΙΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ	57
2.3.2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΤΥΠΟΥ ΦΑΣΗΣ ΣΤΟ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΟΥ	58
2.3.3 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ.....	59
2.3.4 ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗΣ	60
2.3.5 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ.....	62
2.4 ΕΞΑΡΤΗΜΕΝΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ.....	66
2.4.1 ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΑ ΦΡΑΓΜΑΤΑ.....	68
2.4.2 ΤΟ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΜΕ ΠΟΛΥΔΙΑΣΤΑΤΕΣ ΤΥΠΟΥ ΦΑΣΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ...71	

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

3.1 ΤΟ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΙΝΔΥΝΩΝ ΜΕ ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ	74
3.1.1 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ	74
3.1.2 ΜΕΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ $\Delta(U)$	75
3.1.3 ΗJΒ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΕΠΑΛΗΘΕΥΣΗ ΤΗΣ ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ	76
3.1.4 ΦΡΑΓΜΑΤΑ LUNDBERG ΚΑΙ ΑΛΛΑΓΗ ΜΕΤΡΟΥ.....	78

3.1.5 Η ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΟΥ CRAMER-LUNDBERG	80
3.2 ΈΝΑ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ	84
3.2.1 ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΟΙ ΜΕΣΩ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗΣ ΕΡΜΗΝΕΙΑΣ	84
3.3 ΠΡΩΩΡΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	88
3.3.1 Η ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΚΑΙ ΤΟΥ ΕΛΛΕΙΜΜΑΤΟΣ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΣΤΗΝ $\{X_t > 0\}$	88
3.3.2 Η ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΤΟΥ $\{Y_t^2 > 0\}$ ΑΠΟΦΕΥΓΟΝΤΑΣ ΤΗ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑ	89
3.3.3 Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE ΤΟΥ ΑΠΟ ΚΟΙΝΟΥ ΧΡΟΝΟΥ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ	91
 ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ	
4.1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ	93
4.2 ΜΙΑ ΔΙΑΚΡΙΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟΥ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ.	96
4.2.1 ΤΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΚΑΙ ΤΑ ΜΕΡΙΣΜΑΤΑ	96
4.2.2 ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ	98
4.2.3 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ ΤΗΣ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗΣ	101
4.3 ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ ΕΞΑΡΤΗΣΕΩΝ	104
4.3.1 ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΚΟΙΝΩΝ ΣΟΚ	104
4.3.2 ΔΙΑΦΟΡΕΤΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ (Θ.Π.)	106
4.3.3 ΑΝΑΛΟΓΙΚΗ ΑΝΤΑΣΦΑΛΙΣΗ	108
4.4 ΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΑ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΤΗ ΔΙΣΔΙΑΣΤΑΤΗ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ	112
4.4.1 ΕΙΝΑΙ ΤΑ ΒΕΛΤΙΣΤΑ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΑΠΟ ΤΑ ΑΡΧΙΚΑ ΕΠΙΠΕΔΑ ΠΛΕΟΝΑΣΜΑΤΟΣ;	113
4.4.2 ΕΞΕΤΑΣΗ ΤΟΥ ΠΙΝΑΚΑ ΤΩΝ ΚΟΙΝΩΝ ΜΕΡΙΣΜΑΤΩΝ	114
4.4.3 ΒΕΛΤΙΣΤΑ ΦΡΑΓΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΟΡΙΣΜΕΝΑ ΒΕΛΤΙΣΤΑ ΦΡΑΓΜΑΤΑ	117
4.4.4 ΤΡΟΠΟΠΟΙΗΜΕΝΟΣ ΤΥΠΟΣ ΣΤΡΑΤΗΓΙΚΗΣ ΦΡΑΓΜΑΤΩΝ	121
4.4.5 ΤΕΛΙΚΕΣ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ	124
 ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ	126

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

1.1	Μεταβολές στο συντελεστή προσαρμογής	60
1.2	Συντελεστής προσαρμογής όταν οι ζημιές ακολουθούν εκθετική κατανομή	62
1.3	Παράδειγμα αποτελεσμάτων προσομοιωμένης πιθανότητας χρεοκοπίας	65
2.1	Προσεγγισμένες τιμές των αναμενόμενων προεξοφλημένων μερισμάτων	103
2.2	Προσομοιωμένα μερίσματα για δύο κλάσεις	103
3.1	Προσέγγιση μερισμάτων σε δύο μονάδες για διαφορετικά επίπεδα από κοινά σοκ	105
3.2	Θεωρίες πιθανοτήτων και συντελεστές βαθμού συσχέτισης Kendall	106
3.3	Προσεγγισμένα μερίσματα για δύο κλάσεις κινδύνων για διαφορετικές θεωρίες πιθανοτήτων για $\tau = 0,2$	107
3.4	Κατά προσέγγιση μερίσματα στις δύο κλάσεις κινδύνων για διαφορετικές θεωρίες πιθανοτήτων για $\tau = -0,2$	108
3.5	Προσεγγισμένα μερίσματα για διαφορετικά s_1 με $\beta_1 c_1 \approx 160$	110
4.1	Βέλτιστο ζεύγος τιμών φραγμάτων (b_1^*, b_2^*) για $1 \leq u_1, u_2 \leq 9$	113
4.2	Βέλτιστα συνολικά μερίσματα για $1 \leq u_1, u_2 \leq 9$	114
4.3	Προσεγγισμένα συνολικά μερίσματα για $(u_1, u_2) = (5,5)$	115
4.4	Προσεγγισμένα συνολικά μερίσματα για $(u_1, u_2) = (5,6)$	115
4.5	Προσεγγισμένα συνολικά μερίσματα για $(u_1, u_2) = (5,7)$	115
4.6	Τα βέλτιστα φράγματα για $1 \leq u_1 \leq 9$ και $1 \leq u_2 \leq 12$	117
4.7	Προσεγγισμένα βέλτιστα μερίσματα $1 \leq u_1 \leq 9$ και $1 \leq u_2 \leq 12$	117
4.8	Περιορισμένα βέλτιστα φράγματα για $1 \leq u_1 \leq 9$ και $1 \leq u_2 \leq 12$	120
4.9	Προσεγγισμένα περιορισμένα βέλτιστα μερίσματα για $1 \leq u_1 \leq 9$ και $1 \leq u_2 \leq 12$	120
4.10	Βέλτιστες παράμετροι στρατηγικής τροποποιημένων φραγμάτων	122
4.11	Προσεγγισμένα βέλτιστα μερίσματα υπό την στρατηγική τροποποιημένων φραγμάτων	123

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΧΗΜΑΤΩΝ

Γράφημα 1.1	Δειγματική στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος	23
Γράφημα 3.1	Δειγματική γραφική παράσταση για την εξέλιξη του δισδιάστατου μοντέλου	85
Γράφημα 4.1	Διάγραμμα προσεγγισμένων συνολικών μερισμάτων ως προς b_2 όταν $(u_1, u_2) = (5,5)$	116
Γράφημα 4.2	Σχεδίαση προσεγγισμένων βέλτιστων μερισμάτων ως προς u_2 για $u_1 + u_2 = K$	119
Γράφημα 4.3	Σχεδίαση των προσεγγισμένων περιορισμένων βέλτιστων μερισμάτων ως προς u_2 για $u_1 + u_2 = K$	121
Γράφημα 4.4	Προσεγγισμένα βέλτιστα μερίσματα ως προς u_1 για $u_1 + u_2 = K$ με τη στρατηγική τροποποιημένων ιραγμάτων	124

ΚΑΤΑΛΟΓΟΣ ΣΥΝΤΟΜΟΓΡΑΦΙΩΝ

τ.μ.	Τυχαία Μεταβλητή
G-S	Gerber και Shiu
σ.κ	Συνάρτηση Κατανομής Πιθανότητας
σ.π.π	Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας
HJB	Hamilton-Jacobi-Bellman
M.N.Δ.Μ.	Μερικώς Ντετερμινιστική Διαδικασία Markov
θ.π.	θεωρίες πιθανοτήτων
ΑΜΗ	θεωρία πιθανοτήτων Ali-Mikhail-Haq
FGM	θεωρία πιθανοτήτων Farlie-Gumbel-Morgenstern

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

1. Εισαγωγή

Ο σκοπός του πρώτου κεφαλαίου είναι να δώσει μια εισαγωγή στο κλασσικό μονοδιάστατο μοντέλο χρεοκοπίας καθώς και σε βασικούς ορισμούς που θα ακολουθήσουν στην υπόλοιπη διπλωματική. Θα ξεκινήσουμε δίνοντας τον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας Poisson με μερικά βασικά θεωρήματα της ανανεωτικής στοχαστικής διαδικασίας, τον ορισμό του χρόνου χρεοκοπίας και της πιθανότητας χρεοκοπίας. Αφού τα δούμε όλα αυτά θα προχωρήσουμε δίνοντας τη συνάρτηση των Gerber-Shiu και επιλέγοντας κατάλληλες τιμές στη συνάρτηση ποινής θα πάρουμε χρήσιμα μέτρα κινδύνων. Θα δούμε την ολόκληρη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η συνάρτηση των Gerber-Shiu και θα τη δούμε κάτω από μια γενικευμένη διαδικασία Erlang ώστε να πάρουμε το μετασχηματισμό Laplace της.

1.1 Στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος

Για να ορίσουμε τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος πρέπει πρώτα να ορίσουμε δύο ποσότητες $S(t), N(t)$.

Ορισμός 1.1

Μια απαριθμήτρια διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ αν

- i. $N(0) = 0$
- ii. $N(t)$ έχει t ανεξάρτητες προσανξήσεις.
- iii. $N(t) - N(s) \sim \text{Poisson}(\lambda(t-s))$ για $s < t$

Χρήσιμο είναι επίσης να ορίσουμε μια ακόμα στοχαστική διαδικασία, την ανανεωτική στοχαστική διαδικασία η οποία είναι ευρέως εφαρμοσμένη στη θεωρία κινδύνου και τη θεωρία ουρών.

Θα την ορίσουμε θεωρώντας τους ενδιάμεσους χρόνους που εμφανίζονται τα γεγονότα που απαριθμεί η $\{N(t), t \geq 0\}$. Έστω $\{W_i, i \in N\}$ μια ακολουθία μη αρνητικών ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών με σ.π.π. $f_w(t)$ σ.κ. $F_w(t)$ μετασχηματισμό Laplace $\hat{f}_w(s)$ με $E(W) < \infty$ όπου W_i είναι ο ενδιάμεσος χρόνος εμφάνισης του i -γεγονότος.

Ορίζουμε την ανανεωτική στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ως:

Ορισμός 1.2

Εστω μια ακολουθία $\{W_i, i \geq 0\}$ μη αρνητικών ισόνομων και ανεξάρτητων τ.μ. Η ακολουθία $\{\sigma_n, n \in N\}$ με $\sigma_0 = 0, \sigma_n = \sum_{j=1}^{j=n} W_j$ ονομάζεται ακολουθία ανανεώσεων. Τότε η αριθμητήρια διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ με $N(0) = 0$ που δίνεται ως ακολούθως:

$$N(t) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \mathbf{1}_{(\sigma_n \leq t)}$$

Ονομάζεται ανανεωτική στοχαστική διαδικασία.

Εύκολα παρατηρεί κανείς ότι από τον παραπάνω ορισμό για κάθε ανανεωτική ανέλιξη ισχύει η παρακάτω σχέση.

$$N(t) = n \text{ αν και μόνο αν } \{\sigma_n \leq t \leq \sigma_{n+1}\} \quad (1.1)$$

Θεώρημα 1.1.

Εστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μία ανανεωτική στοχαστική διαδικασία. Τότε σχεδόν παντού ισχύει ότι:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{N(t)}{t} = \frac{1}{E(W_i)} \quad (1.2)$$

Απόδειξη

Από τον ισχυρό νόμο των μεγάλων αριθμών πού δηλώνει ότι ο δειγματικός μέσος συγκλίνει με πιθανότητα ένα στην αναμενόμενη τιμή και από το θεώρημα παρεμβολής έχουμε

$$E(W_i) \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_n}{n} = \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{N(t)}}{N(t)} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{N(t)} \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{\sigma_{N(t)+1}}{N(t)+1} \frac{N(t)+1}{N(t)} = E(W_i)$$

Λήμμα 1.1.

$$E(\sigma_{N(t)+1}) = E(W_i)E(N(t)+1) \quad (1.3)$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} E(\sigma_{N(t)}) &= E(E(\sigma_{N(t)}/N)) = E(E(\sum_{i=0}^N W_i / N)) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{i=0}^n W_i / N = n) P(N = n) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} E(\sum_{i=0}^n W_i) P(N = n) = \sum_{n=0}^{\infty} n E(W_1) P(N = n) = \\ &= E(W_1) \sum_{n=0}^{\infty} n P(N = n) = E(W_1) E(N(t)) \end{aligned}$$

Και αντικαθιστώντας $N(t)+1$ με $N(t)$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη.

Αφού δείξαμε αυτό το λήμμα θα αποδείξουμε το στοιχειώδες ανανεωτικό θεώρημα το οποίο είναι βασικό για τη θεωρία στοχαστικών ανελλίξεων.

Θεώρημα 1.2

Για μια στοχαστική διαδικασία $\{N(t), t \geq 0\}$ ισχύει η παρακάτω σχέση.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N(t))}{t} = \frac{1}{E(W_1)} \quad (1.4)$$

Απόδειξη

Από λήμμα 1.1 και ξέρουμε ότι $t < \sigma_{N(t)+1}$ έχουμε

$$t < E(\sigma_{N(t)+1}) = E(W_1)(1 + E(N(t)))$$

Λύνοντας ως προς $\frac{E(N(t))}{t}$ έπεται ότι

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N(t))}{t} \geq \frac{1}{E(W_1)} \quad (1.5)$$

οπότε για να ισχύει η σχέση θα πρέπει το $\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N(t))}{t} \leq \frac{1}{E(W_1)}$.

Για να το αποδείξουμε θα ορίσουμε πρώτα την $W_i^c = \begin{cases} W_i & \text{αν, } W_i \leq c \\ c & \text{αν, } W_i > c \end{cases}$ ομοίως ορίζουμε

$$\mu^c = E(W_i^c) = \int_0^c (1 - F(w))dw \text{ και } M^c(t) = E(N^c(t)).$$

Είναι προφανές ότι $t + c \geq \sigma_{N^c(t)+1}^c$ οπότε έχουμε,

$$t + c \geq E(\sigma_{N^c(t)+1}^c) = E(W_i^c)(1 + E(N^c(t))) \quad (1.6)$$

Συνεπάγεται από το $W_i^c \leq W_i$ ότι $N^c(t) \geq N(t)$ άρα $M^c(t) \geq M(t)$ οπότε και από τη σχέση (1.6) έχουμε,

$$t + c \geq \mu^c (1 + M(t))$$

Διαιρώντας τη σχέση με t και λύνοντας ως προς $\frac{M(t)}{t}$ έχουμε,

$$\frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu^c} + \frac{1}{t} \left(\frac{c}{\mu^c} - 1 \right) \Rightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} \leq \frac{1}{\mu^c} \quad (1.7)$$

$$\text{Όμως } \lim_{c \rightarrow \infty} \mu^c = \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c (1 - F(w))dw = \int_0^\infty (1 - F(w))dw = \mu$$

Οπότε η (1.7) γίνεται,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} \leq \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu^c} = \frac{1}{\mu} \text{ δηλαδή } \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{E(N(t))}{t} \leq \frac{1}{E(W_1)} \quad (1.8)$$

Άρα από (1.7) και (1.8) ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Αφού ορίσαμε τι είναι η στοχαστική απεριθμήτρια διαδικασία την οποία θα τη χρησιμοποιήσουμε για να μοντελοποιήσουμε τον αριθμό των ζημιών, μπορούμε τώρα να ορίσουμε και τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος περιγράφει πώς εξελίσσεται το πλεόνασμα μιας ασφαλιστικής εταιρίας στο πέρασμα του χρόνου.

Ορισμός 1.3

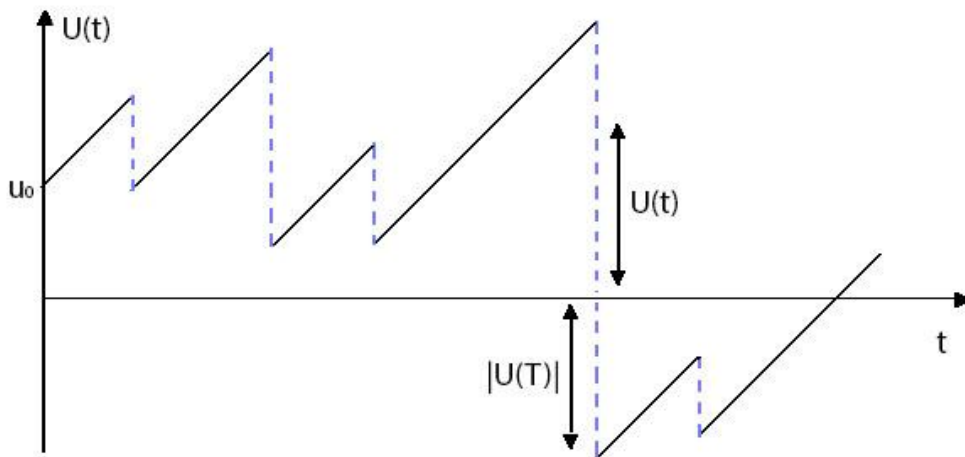
Ως στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος θα ορίσουμε τη στοχαστική διαδικασία $\{U(t), t > 0\}$ που δίνεται από την παρακάτω σχέση,

$$U(t) = u + ct - S(t) \quad (1.9)$$

Όπου u είναι το αρχικό αποθεματικό, c ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών και $S(t)$ οι συνολικές αποζημιώσεις μέχρι το χρόνο t και ορίζετε ως,

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad (1.10)$$

με $S(0)=0$ και $\{X_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που μοντελοποιούν το μέγεθος τις i ζημιάς με σ.π.π. $f(x)$, σ.κ. $F(x)$ και $E(x) < \infty$. Θεωρούμε ότι οι $\{X_i, i \in \mathbb{N}^*\}$ και $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι ανεξάρτητες.



Ορισμός 1.4 (Χρόνος χρεοκοπίας)

$$T := \inf\{t \geq 0 : U(t) \leq 0\} \quad (1.11)$$

Για $t \geq 0$, το οποίο πρακτικά σημαίνει ότι ως χρόνος χρεοκοπίας ορίζεται ο χρόνος t που η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $U(t)$ γίνεται μικρότερη ή ίση με μηδέν.

Ορισμός 1.5. (Πιθανότητα χρεοκοπίας)

Για $u > 0$, ορίζουμε ως πιθανότητα χρεοκοπίας το μέτρο,

$$\psi(u) := P(T < \infty / U(0) = u) = P(U(T) < 0 / U(0) = u) \quad (1.12)$$

Η $\psi(u)$ είναι φθίνουσα ως προς u δηλαδή $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0$ ενώ η ουρά τις $\bar{\psi}(u)$ είναι αύξουσα και $\lim_{u \rightarrow \infty} \bar{\psi}(u) = 1$ η οποία ορίζεται αντίστοιχα ως,

$$\bar{\psi}(u) = P(T = \infty / U(0) = u) = P(U(T) \geq 0) \quad (1.13)$$

Δύο πολύ χρήσιμες τ.μ. είναι οι $|U(T)|$ και η $U(T-)$. Η πρώτη περιγράφει το έλλειμμα τη στιγμή χρεοκοπίας ενώ η δεύτερη το πλεόνασμα ακριβώς πριν τη χρεοκοπία και ορίζεται ως,

$$U(T-) = \lim_{t \rightarrow T-} U(t) \quad (1.14)$$

Τις δυο αυτές τ.μ. μελέτησαν και μοντελοποίησαν το 1988 σε δημοσίευση τους ο Gerber και Shiu στην ομώνυμή τους συνάρτηση.

1.2 Η Ανανεωμένη προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber και Shiu.

Ορισμός 1.6

Για $u > 0$ και $\delta \geq 0$ ορίζουμε την παρακάτω συνάρτηση,

$$m_\delta(u) = E(e^{-\delta} w(U(T-), |U(T)|) I_{(T < \infty)} / U(0) = u) \quad (1.15)$$

Όπου δ η ένταση ανατοκισμού, w μία δισδιάστατη συνάρτηση $w : [0, \infty) \times (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ και ονομάζεται προεξοφλημένη συνάρτηση ποινής και για διαφορετικά ορίσματα τις συνάρτησης παίρνουμε πολύ χρήσιμα μέτρα κινδύνων.

Για $\delta=0$ και $w(x,y)=1$ έχουμε:

$$\psi(u) := E(I_{(T < \infty)} / U(0) = u) = P(T < \infty / U(0) = u)$$

Δηλ. η πιθανότητα χρεοκοπίας.

Για $\delta > 0$ και $w(x,y)=1$ έχουμε:

$$L\{m_\delta(u)\} = E(e^{-\delta} I_{(T < \infty)} / U(0) = u) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \psi(u) dt$$

Άρα το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας .

Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = I_{(x=x_1)} I_{(y=x_2)}$ έχουμε:

$$f_\delta(x_1, x_2 / u) = E(e^{-\delta} I_{(x=x_1)} I_{(y=x_2)} / U(0) = u) = e^{-\delta} P(X = x_1, Y = x_2 / U(0) = u)$$

Την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας τ.μ. $|U(T)|, U(T-)$.

Για $\delta=0$ και $w(x, y) = I_{(x=x_1)} I_{(y=x_2)}$ έχουμε:

$$f(x_1, x_2/u) = E(I_{(x=x_1)} I_{(y=x_2)} / U(0) = u) = P(X = x_1, Y = x_2 / U(0) = u)$$

Την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των τ.μ. $|U(T)|, U(T-)$.

Για $\delta>0$ και $w(x, y) = I_{(x \leq x_1)} I_{(y \leq x_2)}$ έχουμε:

$$F_\delta(x_1, x_2/u) = E(e^{-\delta} I_{(x \leq x_1)} I_{(y \leq x_2)} / U(0) = u) = e^{-\delta} P(X \leq x_1, Y \leq x_2 / U(0) = u)$$

Την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ. $|U(T)|, U(T-)$.

Για $\delta=0$ και $w(x, y) = I_{(x \leq x_1)} I_{(y \leq x_2)}$ έχουμε:

$$F(x_1, x_2/u) = E(I_{(x \leq x_1)} I_{(y \leq x_2)} / U(0) = u) = P(X \leq x_1, Y \leq x_2 / U(0) = u)$$

Την από κοινού συνάρτηση κατανομής των τ.μ. $|U(T)|, U(T-)$.

Για $\delta>0$ και $w(x, y) = I_{(x \leq x_1)}$ έχουμε:

$$F_\delta(x_1/u) = E(e^{-\delta} I_{(x \leq x_1)} / U(0) = u) = e^{-\delta} P(X \leq x_1 / U(0) = u)$$

Την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $|U(T)|$.

Για $\delta>0$ και $w(x, y) = I_{(y \leq x_2)}$ έχουμε:

$$F_\delta(x_2/u) = E(e^{-\delta} I_{(y \leq x_2)} / U(0) = u) = e^{-\delta} P(Y \leq x_2 / U(0) = u)$$

Την προεξοφλημένη περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $U(T-)$.

Για $\delta=0$ και $w(x, y) = I_{(x \leq x_1)}$ έχουμε:

$$F(x_1/u) = E(I_{(x \leq x_1)} / U(0) = u) = P(X \leq x_1 / U(0) = u)$$

Την περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $|U(T)|$.

Για $\delta=0$ και $w(x, y) = I_{(y \leq x_2)}$ έχουμε:

$$F(x_2/u) = E(I_{(y \leq x_2)} / U(0) = u) = P(Y \leq x_2 / U(0) = u)$$

Την περιθώρια συνάρτηση κατανομής της τ.μ. $U(T-)$.

Για $\delta>0$ και $w(x, y) = I_{(x=x_1)}$ έχουμε:

$$f_\delta(x_1/u) = E(e^{-\delta} I_{(x=x_1)} / U(0) = u) = e^{-\delta} P(X = x_1 / U(0) = u)$$

Την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $|U(T)|$.

Για $\delta > 0$ και $w(x, y) = I_{(y=x_2)}$ έχουμε:

$$f_{\delta}(x_2/u) = E(e^{-\delta t} I_{(y=x_2)} / U(0) = u) = e^{-\delta t} P(Y = x_2 / U(0) = u)$$

Την προεξοφλημένη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U(T-)$.

Για $\delta = 0$ και $w(x, y) = I_{(x=x_1)}$ έχουμε:

$$f(x_1/u) = E(I_{(x=x_1)} / U(0) = u) = P(X = x_1 / U(0) = u)$$

Την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $|U(T)|$.

Για $\delta = 0$ και $w(x, y) = I_{(y=x_2)}$ έχουμε:

$$f(x_2/u) = E(I_{(y=x_2)} / U(0) = u) = P(Y = x_2 / U(0) = u)$$

Την περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τ.μ. $U(T-)$.

Όπως παρατηρούμε η συνάρτηση των Gerber-Shiu μας δίνει μια πληθώρα πολύ χρήσιμων μέτρων για το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου αλλά όχι μόνο. Θέτοντας $w(x, y) = \max\{0, K - X\}$ η συνάρτηση των Gerber-Shiu μας δίνει την αξία ενός Αμερικάνικου τύπου put option με τιμή άσκησης K και αξία του underlying asset X .

Οι Gerber και Shiu σε εργασία τους το 1998 απέδειξαν ότι η $m_{\delta}(u)$ ικανοποιεί μια ολόκληρο-διαφορική εξίσωση τύπου Volterra. Η λύση της δόθηκε μέσω μετασχηματισμών Laplace και έδειξαν ότι ικανοποιεί μια ελλειμματική ανανεωτική διαφορική εξίσωση. Οι Lin και Willmot έλυσαν την παραπάνω εξίσωση για ζημιές ελευθέρως κατανομής σε όρους της ουράς μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

1.3 Ολόκληρο-διαφορικές εξισώσεις στην Gerber και Shiu.

Θεώρημα 1.3.

Η εξίσωση G-S (Gerber και Shiu) ικανοποιεί την παρακάτω ολόκληρο-διαφορική εξίσωση.

Για $u > 0$:

$$m'(u) = \frac{\lambda + \delta}{c} m(u) - \frac{\lambda}{c} \int_0^u m(u-x) f(x) dx - \frac{\lambda}{c} z(u) \quad (1.16)$$

$$\text{με } z(u) = \int_u^{\infty} w(u, x-u) f(x) dx.$$

Παρατήρηση 1.1

Όπως είδαμε πριν θέτοντας $\delta = 1$ και $w(x, y) = 1$ η συνάρτηση G-S δίνει την πιθανότητα χρεοκοπίας. Άρα έχουμε το ακόλουθο πόρισμα:

Πόρισμα 1.1

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί την ακόλουθη ολόκληρο-διαφορική εξίσωση.

$$\psi'(u) = \frac{\lambda}{c}\psi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(u-x)f(x)dx - \frac{\lambda}{c}\bar{F}(u) \quad (1.17)$$

Χρήσιμο είναι να δώσουμε τον ορισμό της ανανεωτικής εξίσωσης καθώς η (1.15) ικανοποιεί μία τέτοια εξίσωση

Ορισμός 1.7

Για $u > 0$, ορίζουμε ως ανανεωτική εξίσωση μία εξίσωση που γράφεται ως ακολούθως

$$\phi(u) = \lambda \int_0^u \phi(u-x)dG(x) + g(u) \quad (1.18)$$

Όπου $0 < \lambda \leq 1$, η g είναι φραγμένη συνάρτηση, η G μία σ.κ και η ϕ μία άγνωστη συνάρτηση. Αν $\lambda < 1$ τότε η ϕ ονομάζεται ελλειμματική αν $\lambda=1$ τότε κανονική

Θεώρημα 1.3.

Για $u > 0$ η εξίσωση $G-S$ ικανοποιεί την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$m_\delta(u) = \frac{1}{1+b} \int_0^u m_\delta(u-x)dG(x) + \frac{H(u)}{1+b} \quad (1.19)$$

Όπου: $b = \frac{(1+\theta)E(X)}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y)dy}$ με ρ μια συνάρτηση του δ $\rho = \rho(\delta)$, $G(x) = \frac{\bar{F}(x) - e^{rx} \int_x^\infty e^{-\rho y} f(y)dy}{\rho \int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y)dy}$

και $H(u) = \frac{e^{\rho u} \int_u^\infty e^{-\rho y} \int_x^\infty w(x-y)f(y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y} \bar{F}(y)dy}$

Για την απόδειξη βλέπε Lin-Wilmot(1999).

Για την λύση της (1.19) πρέπει να ορίσουμε την παρακάτω σ.κ.

$$K(u) = \sum_{n=0}^\infty \frac{b}{1+b} \left(\frac{1}{1+b}\right)^n G^{*n}(u) \quad (1.20)$$

Και η ουρά της,

$$\bar{K}(u) = \sum_{n=1}^\infty \frac{b}{1+b} \left(\frac{1}{1+b}\right)^n \bar{G}^{*n}(u) \quad (1.21)$$

Η (1.21) είναι εύκολο να δει κανείς ότι είναι η δεξιά ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής και πιο συγκεκριμένα,

$$\bar{K}(u) = P\left(\sum_{i=1}^N L_i > u\right) \quad (1.22)$$

Με την τ.μ. $N \sim Geo\left(\frac{1}{1+b}\right)$ και L_i ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ με σ.κ $G(x)$

Τώρα θα δώσουμε ένα θεώρημα το οποίο μπορούμε να λύσουμε την (1.16) μέσω άλλων εξισώσεων οι οποίες είναι συναρτήσεις της $\bar{K}(u)$

Θεώρημα 1.4.

Μπορούμε να λύσουμε την (1.15) μέσω των παρακάτω εξισώσεων

$$m_\delta(u) = \frac{1}{b} \int_0^u H(u-x) dK(u) + \frac{1}{1+b} H(u) \quad (1.23)$$

Διαφορετικά αν θεωρήσουμε πως η $H(u)$ είναι τουλάχιστον μια φορά διαφορίσιμη τότε έχουμε,

$$m_\delta(u) = -\frac{1}{b} \int_0^u \bar{K}(u-x) dH(u) - \frac{H(0)\bar{K}(u)}{b} + \frac{H(u)}{b} \quad (1.24)$$

Για την απόδειξη βλέπε θεώρημα 2.1 Lin-Willmot (1999).

1.4 Η γενικευμένη διαδικασία Erlang στη συνάρτηση G-S

Οι G-S (2005) απέδειξαν ότι η ομώνυμη συνάρτησή τους ικανοποιεί μια ολόκληρο-διαφορική εξίσωση όταν θεωρούμε ότι οι χρόνοι άφιξης των ζημιών είναι μια γενικευμένη Erlang διαδικασία.

Ορισμός 1.5

Εστω $\{X_i, i \in N^*\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων εκθετικά κατανομημένων τ.μ. με παραμέτρους $\lambda_i, i = 1, 2, \dots, n$ τότε η κατανομή του αθροίσματος τους $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι μια γενικευμένη Erlang κατανομή και δίνεται ακολούθως,

$$f(t) = \sum_{i=1}^n \left(\prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \right) \lambda_i e^{-\lambda_i t} \quad (1.25)$$

Και ο μετασχηματισμός Laplace της $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ είναι,

$$\hat{f}(s) = E(e^{-sS_n}) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_i}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i + s)} \quad (1.26)$$

Αφού ορίσαμε τη κατανομή Erlang τώρα θα δώσουμε την ολόκληρο-διαφορική εξίσωση που δώσανε οι G-S

Θεώρημα 1.5.

Η εξίσωση G-S ικανοποιεί την ακόλουθη ολόκληρο-διαφορική εξίσωση. Για $u \geq 0$ έχουμε,

$$\prod_{j=1}^n (\lambda_j + \delta - c \frac{\partial}{\partial u}) m_\delta(u) - \prod_{j=1}^n \lambda_j \int_0^u m_\delta(u-x) f(x) dx - \prod_{j=1}^n \lambda_j w(u) = 0 \quad (1.27)$$

Με

$$w(u) = \int_u^\infty w(u, x-u)f(x)dx = \int_0^\infty w(u, x)f(x+u)dx \quad (1.15)$$

Πόρισμα 1.2.

Για $\lambda_i = \lambda, i = 1, 2, \dots, n$ έχουμε την ολόκληρο-διαφορική εξίσωση για το ανανεωτικό μοντέλο Erlang και η (1.27) γίνεται,

$$(\lambda + \delta - c \frac{\partial}{\partial u})^n m_\delta(u) - \lambda^n \int_0^u m_\delta(u-x)f(x)dx - \lambda^n w(u) = 0 \quad (1.28)$$

Πόρισμα 1.3.

Για $\lambda_i = \lambda, n = 1$ η (1.27) παίρνει την ακόλουθη μορφή,

$$c \frac{\partial m_\delta(u)}{\partial u} - (\delta + \lambda)m_\delta(u) + \lambda \int_0^u m_\delta(u-x)f(x)dx - \lambda w(u) = 0 \quad (1.29)$$

Η οποία είναι η ολόκληρο-διαφορική εξίσωση για το κλασσικό μοντέλο.

Για να μπορέσουμε να λύσουμε την εξίσωση (1.27) θα πρέπει να βρούμε τους μετασχηματισμούς Laplace και μετά να τους αντιστρέψουμε, για αυτό το λόγο θα δώσουμε το παρακάτω θεώρημα και το λήμμα καθώς και κάποιες ιδιότητες των T_r τελεστών.

Θεώρημα 1.6.

Για $s \in C, \delta > 0$ η γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση Lundberg δίνεται ως,

$$\tilde{\gamma}(s) - \prod_{j=1}^n \lambda_j \hat{f}(s) = 0 \quad (1.30)$$

Με,

$$\tilde{\gamma}(s) = \prod_{j=1}^n (\lambda_j + \delta - cs) \quad (1.31)$$

Πόρισμα 1.4.

Για $\lambda_i = \lambda, n = 1$ στην (1.30) έχουμε τη θεμελιώδη Lundberg εξίσωση η οποία παίρνει την ακόλουθη μορφή,

$$\hat{f}(s) = \lambda + \delta - cs \quad (1.32)$$

Λήμμα 1.2.

1. Για $\text{Re}(s) \geq 0, \delta > 0$ η γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση Lundberg, έχει ακριβώς n ρίζες στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.
2. Για $\text{Re}(s) \geq 0, \delta \rightarrow 0^+$ η γενικευμένη θεμελιώδης εξίσωση Lundberg έχει ρίζα μόνο το 0 και $n-1$ ρίζες στο θετικό μιγαδικό ημιεπίπεδο.

Παίρνοντας το μετασχηματισμό Laplace της (1.27) και στα δύο μέλη της και χρησιμοποιώντας το λήμμα 1.2 βρίσκουμε το μετασχηματισμό Laplace της G-S εξίσωσης

Θεώρημα 1.6.

Για $\text{Re}(s) \geq 0$ ο μετασχηματισμός της εξίσωσης των G-S είναι,

$$\hat{m}_s(s) = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j \hat{w}(s) - q(s)}{\tilde{\gamma}(s) - \prod_{j=1}^n \lambda_j \hat{f}(s)} \quad (1.33)$$

Όπου

$$q(s) = \sum_{j=1}^n \hat{w}(r_j) \prod_{k=1, k \neq j}^n \frac{s - r_k}{r_j - r_k}$$

Και $r(\delta) \equiv r_i, \text{Re}(r_i) > 0$ είναι οι θετικές ρίζες της θεμελιώδους εξίσωσης Lundberg.

Ορισμός 1.6.

Έστω f μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε για r με πραγματικό μέρος θετικό και $x \geq 0$, τότε ο τελεστής T_r εφαρμοσμένος πάνω στην f δίνεται ως,

$$T_r f(x) = \int_x^\infty e^{-r(u-x)} f(u) du = \int_0^\infty e^{-ru} f(u+x) du \quad (1.34)$$

Πρόταση 1.1.

Για f ολοκληρώσιμη συνάρτηση ο τελεστής T_r έχει τις παρακάτω ιδιότητες,

1. $T_r f(0) = \int_0^\infty e^{-ru} f(u) du = \hat{f}(r)$
2. $T_{r_1} T_{r_2} f(x) = T_{r_2} T_{r_1} f(x) = \frac{T_{r_1} f(x) - T_{r_2} f(x)}{r_2 - r_1}, r_1 \neq r_2 \in \mathbb{C}$
3. $\frac{d}{dx} T_r f(x) = r T_r f(x) - f(x)$
4. $\frac{d}{dx} T_{r_1} T_{r_2} f(x) = -\sum_{k=1}^2 \frac{r_k T_{r_k} f(x)}{r_2(r_1 - r_k)}, r_2(s) = (s-r)(s-r)$
5. $T_r \hat{f}(x) = \frac{\hat{f}(s) - \hat{f}(r)}{r-s}, r \neq s \in \mathbb{C}$
6. $T_r \hat{f}(x) = L_{T_r f(x)}(s) = T_s T_r f(0)$
7. $s \hat{f}(s) - r \hat{f}(s) = (s-r)(-s T_r \hat{f}(s) - \hat{f}(r))$
8. $\hat{f}_1(s) \hat{f}_2(s) - \hat{f}_1(r) \hat{f}_2(r) = -(s-r)(\hat{f}_1(s) T_{r_2} \hat{f}_2(s) + \hat{f}_1(r) T_{r_1} \hat{f}_2(s))$

9. Αν $r_i, i = 1, 2, \dots, k$ είναι διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί ή μιγαδικοί αριθμοί

$$\text{τότε, } \prod_{j=1}^k T_{r_j} = (-1)^{k-1} \sum_{j=1}^k \frac{T_{r_j} f(x)}{\tau'_k(r_j)}, \tau(s) = \prod_{j=1}^k (s - r_j) \text{ και}$$

$$\prod_{j=1}^k T_{r_j} f(0) = (-1)^k \left(\frac{\hat{f}(s)}{\tau_k(r_j)} - \sum_{j=1}^k \frac{\hat{f}(r_j)}{(s - r) \tau'_k(r_j)} \right)$$

Επίσης αν η f είναι σ.π.π τότε έχουμε,

$$10. T_0 T_r f(x) = \int_x^\infty T_r f(u) du = \frac{\bar{F}(x) - T_r f(x)}{r} = T_r \bar{F}(x)$$

$$11. \int_0^\infty T_r f(x+y) dx = T_r \bar{F}(x) - T_r \bar{F}(y+u)$$

$$12. \int_0^\infty T_{r_1} T_{r_2} f(x) dx = \frac{1}{r_1 - r_2} \left(\frac{1 - f(r_1)}{r_1} - \frac{1 - f(r_2)}{r_2} \right)$$

$$13. \int_0^\infty (T_{r_1} f * T_{r_2} f)(x) dx = \left(\frac{(1 - f(r_1))(1 - f(r_2))}{r_1 r_2} \right)$$

Θεώρημα 1.7.

Για $\text{Re}(s) \geq 0$ ο μετασχηματισμός της εξίσωσης των G-S είναι,

$$\hat{m}_\delta(s) = \frac{\hat{G}(s)}{1 - \hat{n}(s)} \quad (1.35)$$

Όπου

$$\hat{G}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} G(x) dx = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} T_s \left(\prod_{j=1}^n T_{r_j} w \right)(0)$$

Και

$$\hat{n}(s) = \int_0^\infty e^{-sx} n(x) dx = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} T_s \left(\prod_{j=1}^n T_{r_j} f \right)(0)$$

Με $r_i, \text{Re}(r_i) > 0$ οι ρίζες της (1.33)

Αντιστρέφοντας την (1.35) ως προς s έχουμε,

Θεώρημα 1.8.

Για $u \geq 0$ η εξίσωση των G-S ικανοποιεί την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση,

$$\begin{aligned} m_\delta(u) &= \int_0^u m_\delta(u-z) n(x) dx + G(x) \\ &= \frac{1}{1+\xi} \int_0^u m_\delta(u-z) z(x) dx + \frac{1}{1+\xi} H(u) \end{aligned} \quad (1.36)$$

Όπου

$$G(x) = \int_0^\infty e^{-sx} G(x) dx = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} T_s \left(\prod_{j=1}^n T_{r_j} w \right)(x)$$

Και

$$n(x) = \int_0^\infty e^{-sx} n(x) dx = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} T_s \left(\prod_{j=1}^n T_{r_j} f \right)(x)$$

Επίσης το ξ είναι τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi} = \int_0^\infty n(x) dx = 1 - \frac{\prod_{j=1}^n (\lambda_j + \delta) - \prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n \prod_{j=1}^n r_j} < 1$,

$r_j, \text{Re}(r_j) > 0$ οι ρίζες της (1.33), $H(x) = (1+\xi)G(x)$, $z(x) = (1+\xi)n(x)$ με $z(x)$ να είναι η σ.π.π. της

$$Z(x) = \frac{\int_0^u \eta(y) dy}{\int_0^\infty n(y) dy}.$$

Επίσης αν $\delta \rightarrow 0^+$ τότε $\xi \rightarrow \xi_0$ τέτοιο ώστε $\frac{1}{1+\xi_0} = 1 - \frac{1}{cr'(0)} < 1$.

Θα ορίσουμε τώρα την ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής καθώς η λύση της εξίσωσης (1.36) υπολογίζεται μέσω αυτής. Οπότε για $u \geq 0$ έχουμε,

$$\bar{K}(u) = 1 - K(u) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\xi}{1+\xi} \left(\frac{\xi}{1+\xi} \right)^n \bar{N}^{*n}(u)$$

Με $\bar{N}^{*n}(u)$ η νιοστή συνέλιξη της ουράς της $N(u)$.

Θεώρημα 1.9.

Η λύση της εξίσωσης (1.36) είναι η ακόλουθη,

$$m_\delta(u) = \frac{1}{\xi} \int_0^u H(u-x) dK(x) + \frac{1}{1+\xi} H(u) \quad (1.37)$$

Ισοδύναμα υπολογίζεται ως,

$$m_\delta(u) = \frac{1}{\xi} \int_0^u \bar{K}(u-x) dH(x) - \frac{H(0)}{\xi} \bar{K}(u) + \frac{1}{\xi} H(u) \quad (1.38)$$

Ή

$$m_\delta(u) = \frac{1}{\xi} \int_0^u (1 - \bar{K}(u-x)) dH(x) - \frac{H(0)}{\xi} (1 - \bar{K}(u)) \quad (1.39)$$

Απόδειξη.

Από τις εξίσωσης (1.37),(1.38),(1.39) και από την $H(u)$ παρατηρούμε ότι η λύση της $m_\delta(u)$ εξαρτάται από τον υπολογισμό της $\bar{K}(u)$. Ξέροντας από τους Lin-Willmot(1999) ότι η ουρά της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής για $u \geq 0$ ικανοποιεί την παρακάτω ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση,

$$\bar{K}(u) = \frac{1}{1+\xi} \int_0^u \bar{K}(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi} \bar{Z}(u) \quad (1.40)$$

Επίσης, επιλέγοντας $w(x, y) = 1$ η εξίσωση των G-S γίνεται ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας, δηλαδή $\hat{m}_{\delta r}(u) = E(e^{-\delta r} I_{(T<\infty)})/U(0) = u$. Οπότε για $w(x, y) = 1$ και με την ιδιότητα 9 των τελεστών έχουμε,

$$H(u) = (1+\xi) \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} (\prod_{j=1}^n T_{r,j} \bar{Z})(u)$$

Άρα η (1.37) παίρνει τη μορφή,

$$m_{\delta r}(u) = \frac{1}{1+\xi} \int_0^u m_{\delta r}(u-x)z(x)dx + \frac{1}{1+\xi} \bar{Z}(u) \quad (1.41)$$

Συγκρίνοντάς την με την (1.40) παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας είναι η δεξιά ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής.

Θεώρημα 1.10.

Για $u \geq 0$ ισχύει ότι,

$$\bar{K}(u) = \hat{m}_{\delta r}(u) = E(e^{-\delta r} I_{(T<\infty)})/U(0) = u$$

Από τα θεωρήματα (1.9) και (1.10) προκύπτει ότι ξέροντας τις $m_{\delta r}(u)$, $H(u)$ μπορούν να υπολογιστούν διάφορα μέτρα κινδύνου θεωρώντας διαφορετικές τιμές στη συνάρτηση ποινής $w(x, y)$.

Οπότε για να υπολογίσουμε όλα τα χρήσιμα μέτρα χρεοκοπίας είναι σημαντικό να υπολογίσουμε την $m_{\delta r}(u)$, η οποία θα υπολογιστεί μέσω του μετασχηματισμού Laplace.

Οπότε από την (1.35) και για $w(x, y) = 1$ έχουμε,

$$\hat{m}_{\delta r}(s) = \frac{\hat{G}(s) \prod_{j=1}^n (r_j - s)}{\prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j + \delta}{c} - s \right) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c^n} \hat{f}(s)} \quad (1.42)$$

Η οποία βρίσκεται μέσω της ακόλουθης σχέσης για $s \neq r$,

$$1 - \hat{n}(s) = \frac{\prod_{j=1}^n \left(\frac{\lambda_j + \delta}{c} - s \right) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c^n} \hat{f}(s)}{\prod_{j=1}^n (r_j - s)}$$

Η οποία αποδεικνύεται μέσω του λήμματος 1.2 και μέσω των τελεστών T_r (βλέπε Lin (2003) θεώρημα 2). Επίσης θέτοντας την $w(x, y) = 1$ και με την ιδιότητα 5 των τελεστών η συνάρτηση $\hat{G}(s)$ γίνεται,

$$\begin{aligned}\hat{G}(s) &= \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} T_s f(0) \prod_{j=1}^n T_{r_j} = \frac{\prod_{j=1}^n \lambda_j}{c^n} \frac{T_0 \prod_{j=1}^n T_{r_j} f(0) - T_s \prod_{j=1}^n T_{r_j} f(0)}{s} \\ &= \frac{\hat{n}(0) - \hat{n}(s)}{s} = \frac{1}{s} \left(\frac{\prod_{j=1}^n (\frac{\lambda_j + \delta}{c} - s) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c^n} \hat{f}(s)}{\prod_{j=1}^n (r_j - s)} - \frac{\xi}{1 + \xi} \right)\end{aligned}\quad (1.43)$$

Και αντικαθιστώντας την (1.30) στην (1.29) έχουμε ότι

$$\hat{m}_{\delta T}(s) = \frac{\prod_{j=1}^n (\frac{\lambda_j + \delta}{c} - s) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c^n} \hat{f}(s) - \frac{\xi}{1 + \xi} \prod_{j=1}^n (r_j - s)}{s \left(\prod_{j=1}^n (\frac{\lambda_j + \delta}{c} - s) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c^n} \hat{f}(s) \right)}\quad (1.44)$$

Ο μετασχηματισμός Laplace (1.44) αντιστρέφεται μόνο αν έχει πολυωνυμική μορφή. Οπότε για να έχει η (1.44) πολυωνυμική μορφή θα πρέπει να έχει η $\hat{f}(s)$ πολυωνυμική μορφή συνεπώς επιλέγουμε μια $f(x)$ τέτοια ώστε να ανήκει στην κλασματική οικογένεια κατανομών.

Ορισμός 1.7.

Εστω η τ.μ. X με σ.π.π. $f(x)$, θα ανήκει στην οικογένεια κλασματικών κατανομών R_f αν ο μετασχηματισμός Laplace $\hat{f}(s)$ μπορεί να γραφτεί ως πηλίκο δύο πολυωνύμων ως ακολούθως,

$$\hat{f}(s) = \frac{Q_{m-1}(s)}{Q_m(s)}\quad (1.45)$$

με $Q_m(0) = Q_{m-1}(0)$, $\text{Re}(s) \in (h_x, \infty)$, $m \in \mathbb{N}^+$, $\inf\{s \in \mathbb{R} : E(e^{-sX}) < \infty\}$, και $Q_m(s), Q_{m-1}(s)$ πολυώνυμα m βαθμού και $\deg(Q_{m-1}(s)) \leq m-1$.

Οπότε θεωρώντας ότι οι ζημιές ακολουθούν μια κατανομή από τη κλασματική οικογένεια $f(x)$ ο μετασχηματισμός Laplace υπολογίζεται μέσω της (1.45) και ορίζοντας το παρακάτω πολυώνυμο $m+n$ βαθμού,

$$B_{m,n}(s) = \prod_{j=1}^n (\frac{\lambda_j + \delta}{c} - s) Q_m(s) - \prod_{j=1}^n \frac{\lambda_j}{c} Q_{m-1}(s)\quad (1.46)$$

τότε ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.11.

Αν ο μετασχηματισμός Laplace της σ.π.π. του μεγέθους των ζημιών μπορεί να γραφτεί σαν την (1.45) τότε,

$$\hat{m}_{\delta T}(s) = \frac{B_{m-1}(s)}{\prod_{i=1}^m (s + R_i)}$$

όπου $B_{m-1}(s) = \frac{1}{s} \left(\prod_{i=1}^m (s + R_i) - \frac{\xi}{1 + \xi} Q_m(s) \right)$, με το ξ να είναι όπως το θεώρημα 1.9 και R_i να είναι οι ρίζες της εξίσωσης $B_{m,n}(s) = 0$, με $\text{Re}(R_i) > 0, i = 1, 2, \dots, m$. Επίσης αν οι ρίζες R_i είναι διαφορετικές μεταξύ τους για, τότε

$$\hat{m}_{\delta T}(s) = \sum_{i=1}^m \frac{a_i}{s + R_i}$$

Και για $u \geq 0$

$$\hat{m}_{\delta T}(s) = \sum_{i=1}^m a_i e^{-R_i u}$$

$$\text{Όπου } a_i = \frac{\prod_{j=1}^m R_j}{R_i \prod_{j=1, j \neq i}^m (R_j - R_i)} \frac{Q_m(-R_i)}{Q_m(0)}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ

Φράγμα για της πιθανότητες χρεοκοπίας στο πολυδιάστατο μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

2.1 Το πολυδιάστατο μοντέλο για την κλασσική θεωρία κινδύνου

Ορισμός 2.1

Ως στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος $\{U_i(t), t \geq 0\}$ για την i -κλάση με $i=1, 2, \dots, m$ θα ορίζεται από την παρακάτω σχέση

$$U_i(t) = u_i + c_i t - \sum_{k=1}^{N_{ii}(t)} X_{i,k} - \sum_{k=1}^{N_c(t)} Z_{i,k} \quad (2.1)$$

Με $\{N_{ii}(t), t \geq 0\}$ και $\{N_c(t), t \geq 0\}$ απαριθμήτριες στοχαστικές διαδικασίες Poisson με εντάσεις $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \dots, \lambda_{mm}$, και λ_c, c_i ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών για την i -κλάση κινδύνου και $\{X_{ii,k}, k \in \mathbb{N}^*\}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. για την i -κλάση κινδύνου, $\{Z_{1,k}, Z_{2,k}, \dots, Z_{m,k}, k \in \mathbb{N}^*\}$ είναι μία ακολουθία από m -διάστατα ανεξάρτητα διανύσματα.

Για να μην είναι σίγουρη η χρεοκοπία, θεωρούμε ότι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση,

$$c_i = (1 + \theta_i)(\lambda_{ii} E(X_{ii,1}) + \lambda_c E(Z_{i,1}))$$

Όπως τόνισε ο Chan στο et al. (2003) στο ‘concept of ruin’ στο πολυδιάστατο μοντέλο υπάρχουν διαφορετικοί ορισμοί για το χρόνο χρεοκοπίας με διαφορετικές ερμηνείες.

Ορισμός 2.2 (Χρόνος χρεοκοπίας)

$$\begin{aligned} 1^{ος}: T_{OR} &:= \inf\{t \geq 0 : \min(U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t)) < 0\} \\ 2^{ος}: T_{SIM} &:= \inf\{t \geq 0 : \max(U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t)) < 0\} \\ 3^{ος}: T_{AND} &:= \max\{\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_m\}, \tau_i = \inf\{t \geq 0 / U_i(t) < 0\} \\ 4^{ος}: T_{SUM} &:= \inf\{t \geq 0 : \sum_{i=1}^m U_i(t) < 0\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Ο πρώτος ορισμός μας λέει ότι χρόνος χρεοκοπίας είναι όταν ένα από τα πλεονάσματα είναι αρνητικό. Ο δεύτερος και ο τρίτος ορίζουν ως χρόνο χρεοκοπίας, αυτόν που όλα τα πλεονάσματα γίνονται ταυτόχρονα αρνητικά. Ο τέταρτος ορίζει ως χρόνο χρεοκοπίας αυτόν που το άθροισμα των πλεονασμάτων γίνονται αρνητικά. Ο τέταρτος ορισμός είναι εύκολος να μελετηθεί καθώς ανάγεται σε μονοδιάστατο.

2.1.1 Αναδρομική προσέγγιση για την πιθανότητα επιβίωσης για το m-διάστατο μοντέλο

Θα μελετήσουμε την πιθανότητα επιβίωσης για τον πρώτο ορισμό, δηλαδή

$$T_{OR} := \inf\{t \geq 0 : \min(U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t)) < 0\} \text{ με } ,$$

$$\psi(\tilde{u}_i) = P_{\tilde{u}_i}(T_{OR} < \infty) = P(T_{OR} < \infty / U_1(t) = u_1, U_2(t) = u_2, \dots, U_m(t) = u_m)$$

Και αντίστοιχα η πιθανότητα επιβίωσης $\bar{\psi}(\tilde{u}_i) = 1 - \psi(\tilde{u}_i)$

Η στρατηγική για να δημιουργήσουμε την αναδρομική σχέση είναι να εξετάσουμε κάθε ζημιά ξεχωριστά για $n=1, 2, \dots$ οπότε θα εισάγουμε το χρόνο που γίνεται η n-οστή

ζημιά $S_n = \sum_{k=1}^n V_k$ όπου η $\{V_k, k \in \mathbb{N}^*\}$ είναι ο ενδιάμεσος χρόνος που συμβαίνει η n-οστή

ζημιά και είναι αντίστοιχη σε μια διαδικασία Poisson $\{\sum_{i=1}^m N_{ii}(t) + N_c(t), t \geq 0\}$. Επίσης

θεωρούμε ότι οι τ.μ. $\{X_{ii,k}, k \in \mathbb{N}^*\}$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες και εκθετικά κατανομημένες

με μέση τιμή $\frac{1}{\lambda_s}$ με $\lambda_s = \sum_{i=1}^m \lambda_{ii} + \lambda_c$.

Θεώρημα 2.1

Δοθέντος της πρώτης ζημιάς και τα προκύπτοντα μεγέθη ζημιών για m κλάσεις η πιθανότητα επιβίωσης αναδρομικά δίνεται από το παρακάτω τύπο,

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{n+1}(\tilde{u}) &= \sum_{i=1}^m \int_0^\infty \int_0^{u_i+c_i t} \bar{\psi}_n((\sum_{k=1}^m u_k + c_k t) - x_i) \\ &\times f_{ii}(x_i) \lambda_{ii} e^{-\lambda_s t} dx_i dt + \int_0^\infty \int_0^{u_m+c_m t} \dots \int_0^{u_1+c_1 t} \\ &\bar{\psi}_n(\sum_{k=1}^m u_k + c_k t - x_k) f_c(\tilde{x}) \lambda_c e^{-\lambda_s t} dx_1 \dots dx_m dt. \end{aligned} \quad (2.3)$$

με $\bar{\psi}_0(\tilde{u}) = 1$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\psi}_n(\tilde{u}) = \bar{\psi}(\tilde{u})$

2.1.2 Η εξίσωση Gerber-Shiu για το πολυδιάστατο μοντέλο

Σε αυτή τη παράγραφο θα εξετάσουμε την εξίσωση G-S για το m-διάστατο μοντέλο κάτω από το χρόνο T_{OR} η οποία ορίζεται ακολούθως

Ορισμός 2.3

Η εξίσωση των G-S για το m-διάστατο μοντέλο θα δίνετε από τον ακόλουθο τύπο :

$$m_s(\tilde{u}) = E(e^{-\delta \tilde{w}(\tilde{U}(T))} I_{(T_{OR} < \infty)} / \tilde{u}_i) \quad (2.4)$$

Είναι σημαντικό να παρατηρήσουμε ότι στο χρόνο T_{OR} δεν χρεοκοπούν όλες οι κλάσεις κινδύνων ταυτόχρονα. Πιο συγκεκριμένα αν χρεοκοπήσει, π.χ. η i-κλάση κινδύνου από $\{N_{ii}(t), t \geq 0\}$ τότε σε όλες τις κλάσεις το πλεόνασμα θα είναι θετικό. Σε αντίθεση αν η

χρεοκοπία συμβεί από το κοινό σοκ $\{N_c(t), t \geq 0\}$ τότε περισσότερες από μία κλάσεις κινδύνων χρεοκοπούν ταυτόχρονα. Για αυτό καλό είναι να δώσουμε έναν διαφορετικό ορισμό που τα διαχωρίζει ανάλογα με τις περιπτώσεις χρεοκοπίας. Οπότε ορίζουμε τη συνάρτηση ποινής ως ακολούθως.

Ορισμός 2.4

Εστω Γ όλα τα υποσύνολα του $\{1, 2, \dots, m\}$ εξαιρουμένου του κενού και A το σύνολο δεικτών του Γ και τότε η συνάρτηση ποινής δίνεται ως εξής,

$$\begin{aligned}
 w(\tilde{y}) &= \sum_{A \in \Gamma} w^A(\tilde{y}) I_{(y_i < 0, i \in A; y_j \geq 0, j \notin A)} = \\
 & \sum_{i=1}^m w^i(\tilde{U}(T_{OR})) I_{(U_i(T_{OR}) < 0; U_j(T_{OR}) \geq 0, i \neq j)} \\
 & + \sum_{A \in \Gamma \setminus \bigcup_{k=1}^m \{k\}} w^A(\tilde{U}(T_{OR})) I_{(U_i(T_{OR}) < 0, i \in A; U_j(T_{OR}) \geq 0, j \notin A)} \\
 & = \sum_{i=1}^m w^i(\tilde{U}(T_{OR})) I_{(\tau_i = T_{OR}; \tau_j > T_{OR}, i \neq j)} \\
 & + \sum_{A \in \Gamma \setminus \bigcup_{k=1}^m \{k\}} w^A(\tilde{U}(T_{OR})) I_{(\tau_i = T_{OR}, i \in A; \tau_j > T_{OR}, j \notin A)}
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Παράδειγμα 2.1

Στην περίπτωση που $m=2$, παίρνουμε το δισδιάστατο μοντέλο και η συνάρτηση ποινής παίρνει την ακόλουθη μορφή

$$\begin{aligned}
 w(U_1(T_{OR}), U_2(T_{OR})) &= w^{\{1\}}(U_1(T_{OR}), U_2(T_{OR})) I_{(\tau_1 < \tau_2)} \\
 & + w^{\{2\}}(U_1(T_{OR}), U_2(T_{OR})) I_{(\tau_1 > \tau_2)} \\
 & + w^{\{1,2\}}(U_1(T_{OR}), U_2(T_{OR})) I_{(\tau_1 = \tau_2)}
 \end{aligned}$$

Θέτοντας τις κατάλληλες τιμές στη συνάρτηση ποινής και στο δ παίρνουμε πολύ χρήσιμα μέτρα κινδύνου όπως και στο μονοδιάστατο μοντέλο.

Για $w^{\{1\}}(\cdot, \cdot) \equiv w^{\{2\}}(\cdot, \cdot) \equiv w^{\{1,2\}}(\cdot, \cdot) = 1$ και $\delta > 0$ έχουμε,

$$L\{m_\delta(u)\} = E(e^{-\delta t} (I_{(T_{OR} < \infty)}) / U_1(0) = u, U_2(0) = u_2) = \int_0^\infty e^{-\delta t} \psi(u) dt \quad \text{άρα το μετασχηματισμό Laplace της πιθανότητας χρεοκοπίας}$$

Για $w^{\{1\}}(\cdot, \cdot) \equiv w^{\{2\}}(\cdot, \cdot) \equiv w^{\{1,2\}}(\cdot, \cdot) = 1$ και $\delta = 0$ έχουμε,

$$\psi(u_1, u_2) := E(I_{(T_{OR} < \infty)} / U_1(0) = u_1, U_2(0) = u_2) = P(T_{OR} < \infty / U_1(0) = u_1, U_2(0) = u_2), \quad \text{άρα την πιθανότητα να χρεοκοπήσει μία από της δύο κλάσεις κινδύνων.}$$

Για $w^{\{1\}}(\cdot, \cdot) \equiv w^{\{2\}}(\cdot, \cdot) = 0, w^{\{1,2\}}(\cdot, \cdot) = 1$ και $\delta = 0$ έχουμε,

$$E(I_{(\tau_1 = \tau_2)} / U_1(0) = u_1, U_2(0) = u_2) = P(U_1(T_{OR}) < 0; U_2(T_{OR}) < 0 / U_1(0) = u_1, U_2(0) = u_2) \quad \text{δηλαδή αποτυπώνει την πιθανότητα να χρεοκοπούν και οι δύο κλάσεις κινδύνων ταυτόχρονα.}$$

Για $w^{(1)}(y_1, y_2) = -y_1, w^{(2)}(y_1, y_2) = -y_2, w^{(12)}(y_1, y_2) = -y_1 - y_2$ και $\delta > 0$ έχουμε,
 $E(e^{-\delta\tau_1} I_{(\tau_1 \leq \tau_2; \tau_1 < \infty)} | U_1(\tau_1)) / U_1(0) = u_1, U_2(0) = u_2 + E(e^{-\delta\tau_2} I_{(\tau_2 \leq \tau_1; \tau_2 < \infty)} | U_2(\tau_2)) / U_1(0) = u_1, U_2(0) = u_2$
δηλαδή εκφράζεται το αναμενόμενο προεξοφλημένο πλεόνασμα το οποίο λαμβάνει υπόψη και το αρνητικό πλεόνασμα.

Για $w^{(1)}(y_1, y_2) = y_1 + y_2, w^{(2)}(y_1, y_2) \equiv w^{(12)}(y_1, y_2) = 0$ και $\delta > 0$ έχουμε,
 $E(e^{-\delta\tau_1} I_{(\tau_1 \leq \tau_2)} (U_1(\tau_1) + U_2(\tau_2)) / U_1(0) = u_1, U_2(0) = u_2$

Δηλαδή το αναμενόμενο προεξοφλημένο πλεόνασμα στο οποίο η πρώτη κλάση έχει χρεοκοπήσει ενώ η δεύτερη είναι θετική. Αυτό είναι ένα ενδιαφέρον μέτρο καθώς δείχνει αν είναι συμφέρον να συνεχίσει η ασφαλιστική να έχει και τις δύο κλάσεις κινδύνων ακόμα και αν η μία από αυτές έχει χρεοκοπήσει.

2.1.3 Πιθανότητα επιβίωσης για το δισδιάστατο μοντέλο κινδύνου

Όπως τόνισε ο Chan et al (2003), η θεωρία χρεοκοπίας κάτω από το πολυδιάστατο μοντέλο είναι πολύ περίπλοκη. Ακόμα και για δύο διαστάσεις τα προβλήματα που προκύπτουν είναι πολύ απαιτητικά. Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου πολλά ενδιαφέροντα αποτελέσματα μπορούν να βρεθούν μέσω των ολόκληρο-διαφορικών εξισώσεων που ικανοποιούν. Από την άλλη πλευρά στο πολυδιάστατο μοντέλο μπορούμε μόνο να γράψουμε τις ολόκληρο-διαφορικές εξισώσεις για την πιθανότητα χρεοκοπίας χωρίς να πάρουμε ακριβείς λύσεις.

Σε αυτό το σημείο θεωρούμε τη στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος όπως την ορίσαμε στο πολυδιάστατο μοντέλο αλλά για $m=2$

Ορισμός 2.5

Η δισδιάστατη διαδικασία πλεονάσματος ορίζεται ως,

$$U_i(t) = u_i + c_i t + \sum_{k=1}^{N_i(t)} X_{i,k} \quad (2.6)$$

Με τους συντελεστές της εξίσωσης όπως τους ορίσαμε στον ορισμό (1.1). Σε αυτό το σημείο θεωρούμε ότι η $\{N_1(t), t \geq 0\}$ και η $\{N_2(t), t \geq 0\}$ είναι συσχετισμένες. Για απλότητα θα ακολουθήσουμε τους Ambagaspitiya (1999) Cossette και Marceau (2000) και θα υποθέσουμε ότι:

$$N_1(t) = N_{11}(t) + N_{12}(t) \text{ και } N_2(t) = N_{22}(t) + N_{12}(t)$$

Οι οποίες είναι τρεις ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με εντάσεις $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{12}$ αντίστοιχα. Αυτό σημαίνει ότι $\lambda_1 = \lambda_{11} + \lambda_{12}$ και $\lambda_2 = \lambda_{22} + \lambda_{12}$. Οπότε οι δύο κλάσεις κινδύνων με κοινό σοκ συσχετίζονται. Χρησιμοποιώντας την (2.1) θα επεκτείνουμε το μοντέλο του Chan et al (2003).

Ορισμός 2.6 (Χρόνος χρεοκοπίας)

Χρόνος χρεοκοπίας για την i -κλάση κινδύνου ορίζουμε το

$$T_i := \{t \geq 0 : U_i(t) < 0\} \quad (2.7)$$

Με τη σύμβαση ότι $\inf(\emptyset) = \infty$ και ότι ο χρόνος χρεοκοπίας για τον ασφαλιστή ορίζεται ως

$$T = T_1 \wedge T_2$$

Ορισμός 2.7 (Πιθανότητα χρεοκοπίας)

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως,

$$\psi(u_1, u_2) = P(T < \infty / U_1(0), U_2(0)) = P(\inf\{t \geq 0 : \min\{U_1(t), U_2(t)\} < 0\}) \quad (2.8)$$

Αντίστοιχα η πιθανότητα επιβίωσης

$$\bar{\psi}(u_1, u_2) = 1 - \psi(u_1, u_2) \quad (2.9)$$

Προκύπτει ότι $\bar{\psi}(u_1, u_2) = 0$ αν $u_1 < 0$ ή $u_2 < 0$.

2.1.4 Μερική ολόκληρο-διαφορική εξίσωση

Η μέση αναμενόμενη τιμή των ζημιών $E(X_i) = \mu_i, i = 1, 2$ και για $\bar{\psi}(u_1, u_2) > 0$ όπου $(u_1, u_2) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$ θα πρέπει το ασφάλιστρο να ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη

$$p_i = \frac{c_i - \lambda_i \mu_i}{\lambda_i \mu_i} \quad (2.10)$$

Θεώρημα 2.2

Αν $u_1, u_2 \geq 0$ και η $\bar{\psi}(u_1, u_2)$ είναι παραγωγίσιμη ως προς u_1, u_2 τότε ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση,

$$\begin{aligned} c_1 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial u_1} + c_2 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial u_2} &= (\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{12}) \bar{\psi} \\ &- \lambda_{11} \int_0^{u_1} \bar{\psi}(u_1 - x_1, u_2) dF_1(x_1) \\ &- \lambda_{22} \int_0^{u_2} \bar{\psi}(u_1, u_2 - x_2) dF_2(x_2) \\ &- \lambda_{12} \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \bar{\psi}(u_1 - x_1, u_2 - x_2) dF_1(x_1) dF_2(x_2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Απόδειξη:

Για την απόδειξη θα πάρουμε το χρόνο σε ένα μικρό διάστημα $(0, h]$ και θα πάρουμε τα τρία πιθανά σενάρια όπως ακολουθούν

- Καμία ζημία στο $(0, h]$
- Μόνο μία ζημιά.
- Και μεγαλύτερο από μία ζημιά.

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η πιθανότητα του να συμβεί πάνω από μία ζημιιά είναι ο(h) καθώς οι ζημιές γίνονται σύμφωνα με μια στοχαστική διαδικασία Poisson. Με βάση το θεώρημα ολικής πιθανότητας και της σχέσης (2.9) έχουμε:

Για ευκολία θέτουμε $\Lambda = \lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{12}$, $\Lambda_{11} = \lambda_{11} + \lambda_{12}$, $\Lambda_{22} = \lambda_{22} + \lambda_{12}$ και $\Lambda_{12} = \lambda_{11} + \lambda_{22}$.

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(u_1, u_2) &= e^{-\Lambda h} \bar{\psi}(u_1 + c_1 h, u_2 + c_2 h) + \lambda_{11} e^{-\Lambda_{22} h} \int_0^h \int_0^{u_1 + c_1 t} e^{-\lambda_{11} t} \\
&\times \bar{\psi}(u_1 + c_1 t - x_1, u_2 + c_2 t) dF_1(x_1) dt \\
&+ \lambda_{22} e^{-\Lambda_{11} h} \int_0^h \int_0^{u_2 + c_2 t} e^{-\lambda_{22} t} \\
&\times \bar{\psi}(u_1 + c_1 t, u_2 + c_2 t - x_2) dF_2(x_2) dt \\
&\lambda_{12} e^{-\Lambda_{12} h} \int_0^h \int_0^{u_1 + c_1 t} \int_0^{u_2 + c_2 t} e^{-\lambda_{12} t} \\
&\times \bar{\psi}(u_1 + c_1 t - x_1, u_2 + c_2 t - x_2) dF_1(x_1) dF_2(x_2) dt + o(h)
\end{aligned} \tag{2.12}$$

Όμως αν γράψουμε το πρώτο όρο της (2.12) ως ανάπτυγμα Taylor έχουμε

$$\begin{aligned}
e^{-\Lambda h} \bar{\psi}(u_1 + c_1 h, u_2 + c_2 h) &= (1 - \Lambda h) [\bar{\psi}(u_1, u_2) + c_1 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial u_1} h \\
&+ c_2 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial u_2} h + o(h)]
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Και αντικαθιστώντας τη (2.13) στη (2.12) και διαιρώντας με h έχουμε το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Μέχρι τώρα υποθέταμε ότι η πιθανότητα επιβίωσης έχει συνεχείς μερικές παραγώγους. Στο επόμενο θεώρημα θα αποδείξουμε την εν λόγω πρόταση υπό κάποιες συνθήκες.

Θεώρημα 2.3

Αν $\int_0^\infty |f_i'(x_i)| dx_i < \infty$ τότε η $\bar{\psi}(u_1, u_2)$ έχει συνεχείς μερικές παραγώγους για $(u_1, u_2) \in [0, \infty) \times [0, \infty)$.

Απόδειξη:

Για απλότητα θα πάρουμε την περίπτωση που $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0$ θεωρούμε ότι $u_1, u_2 \geq 0$. Έστω S_1 η πρώτη προσαύξηση της διαδικασίας Poisson $\{N_{12}(t), t \geq 0\}$.

Παρατηρούμε ότι $U_1(t), U_2(t) \geq 0$ για $t \in [0, S_1)$. Και από την ισχυρή Μαρκοβιανή ιδιότητα του δισδιάστατου μοντέλου της θεωρίας κινδύνου και της εξίσωσης (2.9) έχουμε,

Για $t \geq S_1$

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}(u_1, u_2) &= E(I_{((U_1(t), U_2(t)) \geq 0)}) = E(\bar{\psi}(U_1(S_1), U_2(S_2))) = \\
&\lambda_{12} \int_0^\infty e^{-\lambda_{12} s} \phi(u_1 + c_1 s, u_2 + c_2 s) ds
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Όπου

$$\phi(u_1, u_2) = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \bar{\psi}(u_1 - x_1, u_2 - x_2) f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 \quad (2.15)$$

Αλλάζοντας τις μεταβλητές σε $r_1 = u_1 - x_1$, $r_2 = u_2 - x_2$ η (2.15) γίνεται

$$\phi(u_1, u_2) = \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \bar{\psi}(r_1, r_2) f_1(u_1 - r_1) f_2(u_2 - r_2) dr_1 dr_2 \quad (2.16)$$

Η οριοθέτηση της $\bar{\psi}(u_1, u_2)$ και η συνέχεια της $f_1(x_1)$ και της $f_2(x_2)$ στο $[0, \infty)$ δείχνουν ότι και η ϕ είναι συνεχής στο $[0, \infty) \times [0, \infty)$ άρα μαζί με τις εξισώσεις (2.14), (2.16) δείχνουν ότι και η $\bar{\psi}(u_1, u_2)$ είναι συνεχής στο $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Και με την υπόθεση ότι υπάρχουν τα $\int_0^\infty |f_i'(x_i)| dx_i$ και χρησιμοποιώντας τις (2.14), (2.16) αποδεικνύουμε ότι η $\bar{\psi}(u_1, u_2)$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \infty) \times [0, \infty)$.

Μια άλλη οριακή συνθήκη για να ορίσουμε την $\bar{\psi}(u_1, u_2)$ είναι

$$\bar{\psi}(\infty, \infty) = 1 \quad (2.17)$$

Παρατήρηση 2.1

Για $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0$ η εξίσωση (2.15) γίνεται

$$c_1 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial u_1} + c_2 \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial u_2} = \lambda_{12} \bar{\psi} - \lambda_{12} \int_0^{u_1} \int_0^{u_2} \bar{\psi}(u_1 - x_1, u_2 - x_2) dF_1(x_1) dF_2(x_2) \quad (2.18)$$

Η εξίσωση (2.18) δίνει την εξίσωσή (4.4) στη δημοσίευση του Chan et al (2003).

Επίσης ο Chan στο ίδιο άρθρο συμπεριέλαβε το μετασχηματισμό Laplace για την $\bar{\psi}(u_1, u_2)$ που περιέχει τα ολοκληρώματα των $\bar{\psi}(u_1, 0)$ και $\bar{\psi}(0, u_2)$. Αυτό σημαίνει ότι είναι δύσκολο να παράγει ακριβή τύπο για την $\bar{\psi}(u_1, u_2)$ αντιστρέφοντας το μετασχηματισμό Laplace ακόμα και στη περίπτωση που οι ζημιές είναι εκθετικά κατανομημένες. Ακολούθως θα δώσουμε έναν αναδρομικό τύπο για την $\bar{\psi}(u_1, u_2)$ όταν οι ζημιές είναι εκθετικά κατανομημένες.

2.1.5 Αναδρομική προσέγγιση

Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε ότι οι ακολουθίες τ.μ. $\{X_{k,i}, k \in \mathbb{N}^*, i=1,2\}$

Είναι εκθετικά κατανομημένες με σ.π.π $f_i(x_i)$ και σ.κ $F_i(x_i)$ αντίστοιχα οπότε έχουμε ,

$$\begin{cases} dF_1(x_1) = b_1 e^{-b_1 x_1} dx_1, & x_1 \geq 0 \\ dF_2(x_2) = b_2 e^{-b_2 x_2} dx_2, & x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

Επίσης ισχύει ότι $\bar{\psi}(u_1, \infty) = P(T_1 = \infty)$ και $\bar{\psi}(\infty, u_2) = P(T_2 = \infty)$.

Κάτω από την υπόθεση (2.19) από το Gerber(1979) έχουμε,

$$\begin{cases} \bar{\psi}(u_1, \infty) = 1 - \frac{1}{1 + \rho_1} e^{-\frac{b_1 \rho_1}{1 + \rho_1} u_1}, u_1 \geq 0 \\ \bar{\psi}(\infty, u_2) = 1 - \frac{1}{1 + \rho_2} e^{-\frac{b_2 \rho_2}{1 + \rho_2} u_2}, u_2 \geq 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

Όπου

$$\rho_1 = \frac{b_1 c_1 - \lambda}{\lambda} \text{ και } \rho_2 = \frac{b_2 c_2 - \lambda}{\lambda} \quad (2.21)$$

Θεώρημα 2.4

Εστω $u_1, u_2 \geq 0$ και $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0$ και $\lambda_{12} = \lambda$ τότε η εξίσωση (2.18) με τις συνθήκες (2.18) η $\bar{\psi}(u_1, u_2)$ έχει μοναδική παραγωγίσιμη λύση στο $[0, \infty) \times [0, \infty)$ και αναδρομικά μπορεί να υπολογιστεί ως ακολούθως,

$$\bar{\psi}_0(u_1, u_2) = 1 \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1(u_1, u_2) &= 1 - \frac{\lambda}{\lambda + c_1 b_1} e^{-b_1 u_1} - \frac{\lambda}{\lambda + c_2 b_2} e^{-b_2 u_2} \\ &+ \frac{\lambda}{\lambda + c_1 b_1 + c_2 b_2} e^{-(b_1 u_1 + b_2 u_2)} \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{n+1}(u_1, u_2) &= \frac{\lambda b_1 b_2}{\lambda + c_1 b_1 + c_2 b_2} \\ &\times \left(\int_0^{u_1} \left(\int_0^{u_2} \bar{\psi}_n(t_1, t_2) e^{b_1(t_1 - u_1)} e^{b_2(t_2 - u_2)} dt_1 \right) dt_2 \right. \\ &+ \int_{u_1}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{c_2}{c_1}(t_1 - u_1) + u_2} \bar{\psi}_n(t_1, t_2) e^{\frac{\lambda}{c_1}(u_1 - t_1)} \right. \\ &\times e^{-b_2 \left(\frac{c_2}{c_1}(t_1 - u_1) + u_2 - t_2 \right)} dt_2 \Big) dt_1 \\ &+ \int_{u_2}^{\infty} \left(\int_0^{\frac{c_1}{c_2}(t_2 - u_2) + u_1} \bar{\psi}_n(t_1, t_2) e^{\frac{\lambda}{c_2}(u_2 - t_2)} \right. \\ &\times e^{-b_1 \left(\frac{c_1}{c_2}(t_2 - u_2) + u_1 - t_1 \right)} dt_1 \Big) dt_2 \Big) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Για $n=1, 2, \dots$ και η $\bar{\psi}(u_1, u_2)$ πρέπει να ικανοποιεί τα παρακάτω

$$0 < \dots < \bar{\psi}_n(u_1, u_2) < \bar{\psi}_{n-1}(u_1, u_2) < \dots < \bar{\psi}_1(u_1, u_2) < \bar{\psi}_0(u_1, u_2) = 1$$

Και ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\psi}_n(u_1, u_2) = \bar{\psi}(u_1, u_2)$$

Απόδειξη βλέπε Lanfen Dang, Ning Zhu , Haiming Zhang (2009)

2.2 Κατανομές τύπου φάσεως

Πολλές πράξεις με κατανομές τύπου φάσεως γίνονται χρησιμοποιώντας το γινόμενο Kronecker

Ορισμός 2.8

Για δύο πίνακες \mathbf{A} και \mathbf{B} με διαστάσεις $l \times k, n \times m$ το γινόμενο Kronecker \otimes ορίζεται ως

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & a_{12}\mathbf{B} & \dots & a_{1k}\mathbf{B} \\ a_{21}\mathbf{B} & a_{22}\mathbf{B} & \dots & a_{2k}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{l1}\mathbf{B} & a_{l2}\mathbf{B} & \dots & a_{lk}\mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

Χρήσιμες ιδιότητες είναι οι:

Αν υπάρχουν τα γινόμενα \mathbf{LU}, \mathbf{MV} τότε

$$(\mathbf{L} \otimes \mathbf{M})(\mathbf{U} \otimes \mathbf{V}) = \mathbf{LU} \otimes \mathbf{MV}$$

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{B}$$

2.2.1 Διακριτές κατανομές τύπου φάσεως

Μια διακριτή κατανομή φάσης είναι η κατανομή του χρόνου στην απορρόφηση σε μια ορισμένη διακριτή χρονική αλυσίδα Markov με μεταβατική μήτρα \mathbf{P} με διαστάσεις $m+1$. Η αλυσίδα Markov έχει m μεταβατικές και μία απορροφητική κατάσταση

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

Το αρχικό διάνυσμα πιθανότητας συμβολίζεται με (\mathbf{a}, a_{m+1}) . Το ζεύγος (\mathbf{a}, \mathbf{T}) ονομάζεται αναπαράσταση του τύπου φάσεως κατανομής.

Ο πίνακας \mathbf{T} δεν είναι σημειακός. Μία από της συνέπειες είναι ότι τουλάχιστον το άθροισμα από μία από τις σειρές του πίνακα είναι αυστηρά μικρότερο από ένα.

Ορισμός 2.9

Στοχαστικός είναι ο πίνακας ο οποίος πληροί την παρακάτω ιδιότητα

$$P\mathbf{1}=\mathbf{1} \quad \mu\epsilon \quad \mathbf{1}=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οπότε έχουμε $T\mathbf{1}+\mathbf{1}=\mathbf{1}$ η $t=(\mathbf{I}-T)\mathbf{1}$

$$P^n = \begin{bmatrix} T^n & (\mathbf{I}-T)\mathbf{1} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Από το παραπάνω προκύπτει ότι :

$$P(X > n) = \mathbf{a}T^n\mathbf{1} \quad (2.27)$$

και

$$P(X \leq n) = 1 - \mathbf{a}T^n\mathbf{1} \quad (2.28)$$

Παράδειγμα 2.2

Η πιο απλή κατανομή τύπου φάσεως είναι όταν ο T έχει διάσταση $m=1$ και $\mathbf{a}=\mathbf{1}$ οπότε έχουμε,

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Όπως θα γίνει αντιληπτό αργότερα αυτή η κατανομή είναι μια γεωμετρική κατανομή με παράμετρο $1-p$. Το άθροισμα τ.μ. που είναι γεωμετρικά κατανομημένες μας δίνουν αρνητική γεωμετρική κατανομή η οποία σαν τύπου φάσης εκφράζεται ως ακολούθως.

$$P = \begin{bmatrix} p & 1-p & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 1-p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & p & 1-p \\ & & & \mathbf{0} & & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = (1, 0, \dots, 0).$$

2.2.2 Αθροιστική κατανομή πιθανότητας και πυκνότητα πιθανότητας.

Τώρα θα δώσουμε ένα επιχείρημα που θα μας οδηγήσει στην εξίσωση (2.28). Πρώτα θα θεωρήσουμε τις πιθανότητες για τις μεταβατικές καταστάσεις μετά από n μεταβάσεις. Η πιθανότητα αυτή είναι η

$$p_i^{(n)} = P(X_n = i)$$

Αν συλλέξουμε όλες αυτές τις πιθανότητες σε ένα διάνυσμα έχουμε

$$\mathbf{p}^{(n)} = (p_1^{(n)}, \dots, p_m^{(n)})$$

Και θεωρώντας διακριτό χρόνο στην αλυσίδα Markov έχουμε

$$\mathbf{p}^{(n)} = \mathbf{p}^{(n-1)}\mathbf{T} = \mathbf{a}\mathbf{T}^n \quad (2.29)$$

Το γεγονός ότι η απορρόφηση συμβαίνει στον χρόνο x μπορεί να χωριστεί χρησιμοποιώντας την ένωση των συμβάντων στην οποία βρίσκεται η αλυσίδα στην κατάσταση i ($i = 1, \dots, m$) στο χρόνο $x-1$, και ότι η απορρόφηση συμβαίνει στο i κατά το χρόνο x . Η πιθανότητα του πρώτου είναι $p_i^{(x-1)}$ ενώ η πιθανότητα του τελευταίου γεγονότος είναι t_i . Επομένως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας μπορεί να εκφραστεί για $x > 0$ ως,

$$f(x) = \sum_{i=1}^m p_i^{(x-1)} t_i = \mathbf{p}^{(x-1)} \mathbf{t} = \mathbf{a}\mathbf{T}^{x-1} \mathbf{t} \quad (2.30)$$

Η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας μπορεί τώρα να βρεθεί με άθροιση του $f(x)$ ή σημειώνοντας ότι η απορρόφηση έχει συμβεί εάν η διαδικασία δεν βρίσκεται πλέον σε μία από τις μεταβατικές καταστάσεις κατά το χρόνο x . Η πιθανότητα να βρεθεί σε μία από τις μεταβατικές καταστάσεις είναι,

$$\sum_{i=1}^m p_i^{(x)} t_i = \mathbf{p}^{(x)} \mathbf{1} = \mathbf{a}\mathbf{T}^x \mathbf{1} \quad (2.31)$$

Έτσι, η αθροιστική συνάρτηση πιθανότητας για $x > 0$ δίνεται από,

$$F(x) = 1 - \mathbf{a}\mathbf{T}^x \mathbf{1} \quad (2.32)$$

2.2.3 Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Η Πιθανογεννήτρια συνάρτηση για μια μη αρνητική διακριτή τυχαία μεταβλητή X δίνεται από

$$P_x(t) = E(t^X) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) t^x \quad (2.33)$$

Για μια διακριτή κατανομή τύπου φάσεως τ.μ έχουμε

$$\begin{aligned} P_x(t) &= E(t^X) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) t^x \\ &= \mathbf{a}_{m+1} + \sum_{x=1}^{\infty} \mathbf{a}\mathbf{T}^{x-1} \mathbf{t}^x = \mathbf{a}_{m+1} + t\mathbf{a}(\mathbf{I} - t\mathbf{T})^{-1} \mathbf{t} \end{aligned} \quad (2.34)$$

Στο δεξί μέρος της εξίσωσης έχουμε χρησιμοποιήσει το ανάλογο αποτέλεσμα των γεωμετρικών σειρών για $x < 1$ $\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ για πίνακες, δηλαδή $\sum_{i=0}^{\infty} \mathbf{A}^i = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ για $|\lambda_i| < 1$ με λ_i οι ιδιοτιμές του \mathbf{A} .

2.2.4 Παραγοντικές ροπές

Οι παραγοντικές ροπές για μια διακριτή τυχαία μεταβλητή μπορούν να ληφθούν με διαδοχική διαφορήση της πιθανογεννήτριας συνάρτησης.

$$E(X(X-1)\dots(X-(k-1))) = \left. \frac{\partial^k P_x(t)}{\partial t^k} \right|_{t=1} \quad (2.35)$$

Έτσι για μια τύπου φάσης τ.μ. με αναπαράσταση (\mathbf{a}, \mathbf{T}) έχουμε,

$$E(X(X-1)\dots(X-(k-1))) = k! \mathbf{a}(\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-k} \mathbf{T}^{k-1} \mathbf{1} \quad (2.36)$$

Ο πίνακας $\mathbf{U} = (\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1}$ έχει ιδιαίτερη σημασία καθώς τα στοιχεία i, j έχουν σημαντική πιθανολογική ερμηνεία καθώς ο αναμενόμενος χρόνος που μένει στην κατάσταση j πριν την απορρόφηση εξαρτάται από την κατάσταση που ξεκινάει i . Μπορούμε να εκφράσουμε τη ροπογεννήτρια συνάρτηση του \mathbf{U} ως,

$$P_x(t) = \mathbf{a}_{m+1} + \mathbf{a}(\mathbf{U} \frac{1-t}{t} + \mathbf{I})^{-1} \mathbf{1} \quad (2.37)$$

2.2.5 Κλειστές ιδιότητες

Ένα από τα ελκυστικά χαρακτηριστικά των κατανομών τύπου φάσης είναι ότι οι κλάσεις τους είναι κλειστές για μια σειρά από πράξεις. Οι ιδιότητες που τις καθιστούν κλειστές σε κάποιες πράξεις είναι ένας κύριος παράγοντας που συμβάλλει στη δημοτικότητα των κατανομών τύπου φάσης στην πιθανή διαμόρφωση των τεχνικών συστημάτων. Ιδιαίτερα θα δούμε ότι είναι κλειστές υπό την πρόσθεση, την πεπερασμένη μίξη κατανομών, την άπειρη μίξη και την διατεταγμένη στατιστική.

Θεώρημα 2.5

Έστω δύο διακριτές τ.μ. X, Y με αναπαραστάσεις (\mathbf{a}, \mathbf{T}) και (\mathbf{b}, \mathbf{S}) αντίστοιχα. Τότε το άθροισμα τους $Z = X + Y$ ακολουθεί μια διακριτή τύπου φάσης κατανομή με αναπαράσταση (\mathbf{y}, \mathbf{L})

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1m} & t_1\beta_1 & t_1\beta_2 & \dots & t_1\beta_k & t_1\beta_{k+1} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2m} & t_2\beta_1 & t_2\beta_2 & \dots & t_2\beta_k & t_2\beta_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{m1} & T_{m2} & \dots & T_{mm} & t_m\beta_1 & t_m\beta_2 & \dots & t_m\beta_k & t_m\beta_{k+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1k} & s_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2k} & s_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & S_{k1} & S_{k2} & \dots & S_{kk} & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

Με $\gamma = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \alpha_{m+1}\beta_1, \alpha_{m+1}\beta_2, \dots, \alpha_{m+1}\beta_k)$

Και με συμβολισμούς πινάκων

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{t}\boldsymbol{\beta} & \beta_{k+1}\mathbf{t} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} & \mathbf{s} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

και

$$\gamma = (\boldsymbol{\alpha}, \alpha_{m+1}\boldsymbol{\beta}), \gamma_{m+k+1} = \alpha_{m+1}\beta_{k+1}.$$

2.2.6 Πεπερασμένες μίξεις κατανομών τύπου φάσης

Λήμμα 2.1

Δοθέντος X_i τ.μ. τύπου φάσης κατανεμημένες με αναπαραστάσεις $(\boldsymbol{\alpha}_i, \mathbf{T}_i)$ και $Z = I_i X_i$ με $\sum_{i=1}^k I_i = 1$, $P(I_i = 1) = p_i$. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι και η Z είναι τύπου φάσης κατανεμημένη με αναπαράσταση (γ, \mathbf{L}) που δίνεται παρακάτω

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{T}_k \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

και

$$\gamma = (p_1\boldsymbol{\alpha}_1, p_2\boldsymbol{\alpha}_2, \dots, p_k\boldsymbol{\alpha}_k)$$

2.2.7 Διατεταγμένη στατιστική

Αρχικά θα μελετήσουμε τη κατανομή του ελαχίστου U και του μεγίστου V από δύο ανεξάρτητες τ.μ. X, Y . Έχουμε $U = \min(X, Y)$ και $V = \max(X, Y)$ αλλά πρώτα θα δώσουμε ένα παράδειγμα

Παράδειγμα 2.2

Έστω X μια τ.μ. με αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $k_x = 2$, p_x και έστω Y τ.μ. και αυτή με αρνητική διωνυμική κατανομή με παραμέτρους $k_y = 2$, p_y , οι πίνακες $\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y$ είναι,

$$\mathbf{T}_x = \begin{bmatrix} p_x & 1-p_x \\ 0 & p_x \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} p_y & 1-p_y \\ 0 & p_y \end{bmatrix}$$

Με $\mathbf{a}_x = (1,0)$ και $\mathbf{a}_y = (1,0)$.

Ορίζουμε $Z = \min(X, Y)$ και δημιουργούμε μια Markov αλυσίδα που περιγράφει την ταυτόχρονη εξέλιξη των αλυσίδων X και Y και έτσι την εξέλιξη της αλυσίδας Z . Η διαδικασία θα έχει 4 μεταβατικές καταστάσεις που αντιστοιχούν σε όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των αλυσίδων X και Y . Δηλώνουμε τις τέσσερις καταστάσεις με $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$. Η μετάβαση από το $(1,1)$ στο $(1,2)$ συμβαίνει κάθε φορά που δεν έχουμε μεταβολή στην αλυσίδα X (πιθανότητα p_x) και η αλυσίδα Y αλλάζει (πιθανότητα $1-p_y$). Περιληπτικά, η τελική Markov chain track μέχρι τη στιγμή που οι πρώτες αρχικές αλυσίδες θα επιτύχουν την απορρόφηση. Έτσι,

$$\mathbf{T}_{\min(X,Y)} = \begin{bmatrix} p_x p_y & p_x(1-p_y) & p_y(1-p_x) & (1-p_x)(1-p_y) \\ 0 & p_x p_y & 0 & (1-p_x)p_y \\ 0 & 0 & p_x p_y & p_x(1-p_y) \\ 0 & 0 & 0 & p_x p_y \end{bmatrix}$$

Επίσης έχουμε $\mathbf{a}_{\min(X,Y)} = (1,0,0,0)$. Επίσης μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{T}_{\min(X,Y)} = \mathbf{T}_x \otimes \mathbf{T}_y$ και $\mathbf{a}_{\min(X,Y)} = \mathbf{a}_x \otimes \mathbf{a}_y$.

Σε σχέση με την κατανομή του $Z_2 = \max(X, Y)$ πρέπει να συμπεριλάβουμε 4 ακόμα καταστάσεις $(1,3)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$ που αντιστοιχούν στη δυνατότητα μιας αλυσίδας να επιβιώνει από την απορρόφηση της άλλης. Είναι βολικό να τοποθετήσουμε το χώρο κατάστασης ως $(1,1)$, $(1,2)$, $(2,1)$, $(2,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(3,1)$, $(3,2)$. Και παίρνουμε τη γεννήτρια τύπου φάσης $\mathbf{T}_{\max(X,Y)}$

$$\mathbf{T}_{\max(X,Y)} = \begin{bmatrix} p_x p_y & (1-p_y) & (1-p_x)p_y & (1-p_x)(1-p_y) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_x p_y & 0 & (1-p_x)p_y & p_x(1-p_y) & (1-p_x)(1-p_y) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_x p_y & p_x(1-p_y) & 0 & 0 & (1-p_x)p_y & (1-p_x)(1-p_y) \\ 0 & 0 & 0 & p_x p_y & 0 & p_x(1-p_y) & 0 & (1-p_x)p_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & p_x & 1-p_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_y & 1-p_y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & p_y \end{bmatrix}$$

Το γενικό αποτέλεσμα είναι ότι αν μια τ.μ X τύπου φάσεως κατανεμημένη με $(\mathbf{T}_x, \mathbf{a}_x)$ και μία Y επίσης και αυτή τύπου φάσης κατανεμημένη με $(\mathbf{T}_y, \mathbf{a}_y)$ η τ.μ $Z = \min(X, Y)$ είναι και αυτή κατανεμημένη τύπου φάσης με αναπαράσταση $(\mathbf{L}, \boldsymbol{\gamma})$ με

$$\mathbf{L} = \mathbf{T}_x \otimes \mathbf{T}_y$$

και

$$\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{a}_x \otimes \mathbf{a}_y$$

Επίσης η τ.μ. $Z_2 = \max(X, Y)$ είναι κ αυτή κατανεμημένη με τύπου φάσης κατανομή με αναπαράσταση $(\mathbf{L}, \boldsymbol{\gamma})$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_x \otimes \mathbf{T}_y & \mathbf{T}_x \otimes \mathbf{t}_y & \mathbf{T}_y \otimes \mathbf{t}_x \\ 0 & \mathbf{T}_x & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_y \end{bmatrix}$$

και

$$\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{a}_x \otimes \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_x a_{y,m+1}, a_{x,k+1} \mathbf{a}_y)$$

Με τον \mathbf{T}_x να έχει διάσταση k και η διάσταση του \mathbf{T}_y να είναι m . Για πληρότητα γράφουμε ,

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_x \otimes \mathbf{t}_y \\ \mathbf{t}_x \\ \mathbf{t}_y \end{bmatrix}$$

Καλό είναι να αναφέρουμε ότι κατανομές με άπειρο στήριγμα (δηλ. $f(x) = 0$ για $x \geq x_0$) είναι όλες κατανεμημένες τύπου φάσης.

Επίσης τυχαία αθροίσματα από ανεξάρτητες τ.μ. κατανεμημένες τύπου φάσης, όπου το άθροισμα των όρων είναι και αυτό τύπου φάσης κατανεμημένο τότε το άθροισμα θα είναι και αυτό τύπου φάσης κατανεμημένο με αναπαράσταση,

$$(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}, \mathbf{T} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{t} \mathbf{a} \otimes \mathbf{S})$$

Ένα πρόβλημα των κατανομών τύπου φάσης είναι η *μη μοναδικότητα* των αναπαραστάσεων τους. Στις περισσότερες περιπτώσεις διαφορετικές αναπαραστάσεις καταλήγουν στην ίδια κατανομή. Μόνο σε μερικές ειδικές περιπτώσεις η αναπαράσταση είναι μοναδική.

2.2.8 Συνεχείς κατανομές τύπου φάσεως

Ορισμός 2.10

Μια κατανομή τύπου φάσης είναι η κατανομή του χρόνου απορρόφησης σε μια πεπερασμένη αλυσίδα Markov διάστασης $m+1$, όπου μια κατάσταση απορροφήθηκε και οι άλλες m είναι μεταβατικές. Μια τύπου φάσης κατανομή δίνεται από ένα m -διάστατο διάνυσμα σειρά, ένα διάνυσμα \mathbf{a} και έναν $m \times m$ πίνακα \mathbf{T} . Το ζεύγος (\mathbf{a}, \mathbf{T}) ονομάζεται αναπαράσταση της τύπου φάσης κατανομής.

Τώρα θα θεωρήσουμε τις πιθανότητες $p_i(t) (i = 1, 2, \dots, m)$ της Markov αλυσίδας να βρίσκονται στη μεταβατική κατάσταση i στο χρόνο t . Συλλέγουμε αυτές τις πιθανότητες σε ένα διάνυσμα $\mathbf{p}(t)$. Και ορίζουμε το διάνυσμα $\mathbf{p}_+(t) = (\mathbf{p}(t), p_{m+1}(t))$, το οποίο είναι η κλασική λύση των Charpan –Kolmogorov εξισώσεων,

$$\mathbf{p}'_+(t) = \mathbf{p}_+(t)\mathbf{Q} \quad (2.40)$$

Με $\mathbf{p}(t)$ τέτοιο ώστε να ικανοποιεί

$$\mathbf{p}'(t) = \mathbf{p}(t)\mathbf{Q} \quad (2.41)$$

Η λύση του συστήματος μας δίνει,

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{a}e^{t\mathbf{T}} \quad (2.42)$$

Άρα η πιθανότητα η αλυσίδα να μην έχει απορροφηθεί ακόμα στο χρόνο t είναι,

$$\mathbf{p}(t)\mathbf{1} = \mathbf{a}e^{t\mathbf{T}} = P(\mathbf{X} > \mathbf{t}) \quad (2.43)$$

$$P(X \leq x) = F(x) = 1 - \mathbf{a}e^{x\mathbf{T}}\mathbf{1}$$

Χρησιμοποιώντας ότι $e^{x\mathbf{T}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(x\mathbf{T})^i}{i!}$ έχουμε

$$f(x) = F'(X) = -\mathbf{a}e^{x\mathbf{T}}\mathbf{T}\mathbf{1} \quad (2.44)$$

Και χρησιμοποιώντας ότι $\mathbf{T}\mathbf{1} + \mathbf{t} = \mathbf{0}$ έχουμε

$$f(x) = \mathbf{a}e^{x\mathbf{T}}\mathbf{T}\mathbf{t}. \quad (2.45)$$

Παράδειγμα 2.3

Έστω η διάσταση του πίνακα \mathbf{T} να είναι 1 τότε έχουμε,

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Και η αντίστοιχη αναπαράσταση είναι $\mathbf{a} = ((1), (-\lambda))$ και βρίσκουμε ότι $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ και $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ δηλαδή την εκθετική κατανομή.

2.2.9 Μετασχηματισμός Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace για μια συνεχή τ.μ. X ορίζεται ως

$$L_x(s) = E(e^{-sX}) = \int_0^{\infty} e^{-sx} f(x) dx \quad (2.46)$$

Και για μια συνεχή τ.μ. τύπου φάσης έχουμε,

$$L_t(s) = E(e^{-st}) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = a_{m+1} + \mathbf{a}(s\mathbf{I} - \mathbf{T})^{-1} \mathbf{t} \quad (2.47)$$

Θεώρημα 2.6

Έστω $\mathbf{U} = (-\mathbf{T})^{-1}$, τότε τα u_{ij} στοιχεία του πίνακα είναι ο αναμενόμενος χρόνος που περνάει στην κατάσταση j δοθέντος την εκ των προτέρων κατάσταση i απορρόφησης.

Πρόταση 2.1

Η αναμενόμενη τιμή μιας τ.μ. X τύπου φάσης κατανομημένης με αναπαράσταση (\mathbf{a}, \mathbf{T}) και με $\mathbf{U} = (-\mathbf{T})^{-1}$ είναι, $E(x) = \mathbf{aU}\mathbf{1}$.

2.2.10 Ιδιότητες συνεχών κατανομών τύπου φάσεως

Όπως και στις διακριτές κατανομές τύπου φάσεως έτσι και στις συνεχείς είναι κλειστές πράξεις οι οποίες εμφανίζονται συχνά στη θεωρία πιθανοτήτων.

Θεώρημα 2.7

Για δύο ανεξάρτητες τ.μ. $X \sim PH(\mathbf{a}, \mathbf{T})$ και $Y \sim PH(\mathbf{b}, \mathbf{S})$ τότε $Z = X + Y \sim PH(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{L})$ με $\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{a}, a_{m+1} \mathbf{b}) = (a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1} b_1, a_{m+1} b_2, \dots, a_{m+1} b_k)$ και

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & \mathbf{t}\mathbf{b} & \beta_{k+1} \mathbf{t} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S} & \mathbf{s} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1m} & t_1\beta_1 & t_1\beta_2 & \dots & t_1\beta_k & t_1\beta_{k+1} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2m} & t_2\beta_1 & t_2\beta_2 & \dots & t_2\beta_k & t_2\beta_{k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{m1} & T_{m2} & \dots & T_{mm} & t_m\beta_1 & t_m\beta_2 & \dots & t_m\beta_k & t_m\beta_{k+1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1k} & s_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2k} & s_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & S_{k1} & S_{k2} & \dots & S_{kk} & s_k \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Παράδειγμα 2.4

Έστω το άθροισμα $Z = \sum_{i=1}^k X_i$ με $X_i \sim \exp(\lambda_i)$ χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση έχουμε ,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_2 & & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_3 & \lambda_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_4 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_{k-2} & \lambda_{k-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda_{k-1} & \lambda_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\lambda_k \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a} = (1, 0, \dots, 0)$. Αν $\lambda_i = \lambda$ τότε έχουμε άθροισμα εκθετικών κατανομών με ίδιο λ οπότε έχουμε κατανομή Erlang με ,

$$\sigma.π.π. f(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} \quad \sigma.κ. F(x) = \sum_{i=k}^{\infty} \lambda \frac{(\lambda x)^i}{(i)!} e^{-\lambda x}$$

$$L_x(s) = \left(\frac{\lambda}{s + \lambda} \right)^k \quad \text{και} \quad \mu_i = \frac{(i+k-1)!}{(k-1)! \lambda^i}$$

2.2.11 Πεπερασμένες μίξεις συνεχών κατανομών τύπου φάσης

Θεώρημα 2.7

Κάθε κυρτή πεπερασμένη μίξη τύπου φάσης κατανομών ακολουθεί μια τύπου φάσης κατανομή και πιο συγκεκριμένα, έστω $X_i \sim PH(\mathbf{a}_i, \mathbf{T}_i)$ τέτοια ώστε $Z_i = X_i$ με πιθανότητα p_i τότε $Z_i \sim PH(\boldsymbol{\gamma}_i, \mathbf{L}_i)$ με $\boldsymbol{\gamma} = (p_1 \mathbf{a}_1, p_2 \mathbf{a}_2, \dots, p_k \mathbf{a}_k)$ και

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & T_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & T_k \end{bmatrix} \quad (2.49)$$

Παράδειγμα 2.4

Έστω k το πλήθος τ.μ. με $X_i \sim \exp(\lambda_i), i = 1, 2, \dots, k$ και έστω η τ.μ. $Z = X_i$ με πιθανότητα p_i τότε η τ.μ. Z μπορεί να εκφραστεί ως μια μίξη κατανομών των X_i τ.μ. και η κατανομή του Z θα είναι

$$f_z(x) = \sum_{i=1}^k p_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}$$

Η κατανομή του Z ονομάζεται υπερεκθετική κατανομή και η τύπου φάσης αναπαράσταση της είναι $(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{L})$ με $\boldsymbol{\gamma} = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ και

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\lambda_k \end{bmatrix}$$

Επίσης

$$f(x) = \sum_{i=1}^k p_i \lambda_i e^{-\lambda_i x} \quad F(x) = 1 - \sum_{i=1}^k p_i e^{-\lambda_i x}$$

$$L_x(s) = \sum_{i=1}^k \frac{p_i \lambda_i}{s + \lambda_i} \quad \mu_i = \sum_{i=1}^k \frac{p_i}{\lambda_i}$$

2.2.12 Διατεταγμένη στατιστική

Η διατεταγμένη στατιστική από πεπερασμένες ανεξάρτητες τύπου φάσης κατανεμημένες τ.μ. είναι και αυτή τύπου φάσης κατανεμημένη. Θα επικεντρωθούμε στη κατανομή του ελαχίστου και του μεγίστου από δυο τ.μ. X με αναπαράσταση $(\mathbf{a}_x, \mathbf{T}_x)$ και Y με αναπαράσταση $(\mathbf{a}_y, \mathbf{T}_y)$ αλλά πρώτα θα δώσουμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.5

Έστω X ακολουθεί την γενικευμένη Erlang κατανομή με παραμέτρους $\lambda_{x,1}, \lambda_{x,2}$ και έστω Y ακολουθεί την υπερεκθετική κατανομή με παραμέτρους $p_y, \lambda_{y,2}, \lambda_{y,2}$. Πρώτα θα μελετήσουμε την κατανομή του $\min(X, Y)$ οπότε έχουμε,

$$\mathbf{T}_x = \begin{bmatrix} -\lambda_{x,1} & \lambda_{x,1} \\ 0 & -\lambda_{x,2} \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{T}_y = \begin{bmatrix} -\lambda_{y,1} & 0 \\ 0 & -\lambda_{y,2} \end{bmatrix}$$

με

$$\mathbf{a}_x = (1,0) \text{ και } \mathbf{a}_y = (p_y, 1-p_y)$$

Τώρα μπορούμε να κατασκευάσουμε μια αλυσίδα Markov που να περιγράφει ταυτόχρονα την εξέλιξη των δύο αλυσίδων που σχετίζουμε με τις X, Y . Όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα η αλυσίδα θα έχει τέσσερις καταστάσεις που αντιστοιχούν σε όλους τους πιθανούς συνδυασμούς από τις δύο αρχικές αλυσίδες. Συμβολίζουμε τις τέσσερις καταστάσεις ως $(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)$. Οι μεταβάσεις από το $(1,1)$ στο $(2,1)$ και από το $(1,2)$ στο $(2,2)$ συμβαίνουν με ένταση $\lambda_{x,1}$ ενώ καμία άλλη μετάβαση δεν είναι δυνατή από αυτές τις δύο καταστάσεις. Τις εναπομείνουσες καταστάσεις τις βρίσκουμε παρόμοια. Εν κατακλείδι παίρνουμε την Markov αλυσίδα που περιγράφει το χρόνο μέχρι οι δύο αλυσίδες να απορροφηθούν από το $\min(X, Y)$. Αυτός ο χρόνος προφανώς είναι τύπου φάσης κατανεμημένος με γεννήτορα,

$$\mathbf{T}_{\min(X,Y)} = \mathbf{T}_x \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{T}_y =$$

$$= \begin{bmatrix} -(\lambda_{x,1} + \lambda_{y,1}) & 0 & \lambda_{x,1} & 0 \\ 0 & -(\lambda_{x,1} + \lambda_{y,2}) & 0 & \lambda_{x,1} \\ 0 & 0 & -(\lambda_{x,2} + \lambda_{y,1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda_{x,2} + \lambda_{y,2}) \end{bmatrix}$$

και

$$\mathbf{a}_{\min(X,Y)} = \mathbf{a}_x \otimes \mathbf{a}_y = (p_y, 1-p_y, 0, 0)$$

Για να πάρουμε την κατανομή του $\max(X, Y)$ πρέπει επιπλέον να λάβουμε υπόψη τις καταστάσεις $(1,3), (2,3), (3,1), (3,2)$ που αντιστοιχούν στο ενδεχόμενο μία από τις αλυσίδες να έχει φτάσει στη κατάσταση απορρόφησης. Οπότε ο γεννήτορας $\mathbf{T}_{\max(X,Y)}$ θα είναι,

$$\mathbf{T}_{\max(X,Y)} = \begin{bmatrix} -(\lambda_{x,1} + \lambda_{y,1}) & 0 & \lambda_{x,1} & 0 & \lambda_{y,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -(\lambda_{x,1} + \lambda_{y,2}) & 0 & \lambda_{x,1} & \lambda_{y,2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda_{x,1} + \lambda_{y,1}) & 0 & 0 & \lambda_{y,1} & \lambda_{x,2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda_{x,2} + \lambda_{y,2}) & 0 & \lambda_{y,2} & 0 & \lambda_{x,2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{x,1} & \lambda_{x,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{x,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{y,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\lambda_{y,2} \end{bmatrix}$$

Θεώρημα 2.8

Εστω $X \sim PH(\mathbf{a}_x, \mathbf{T}_x)$ και $Y \sim PH(\mathbf{a}_y, \mathbf{T}_y)$ τότε η $Z = \min(X, Y) \sim PH(\boldsymbol{\gamma}, \mathbf{L})$ με

$$\mathbf{L} = \mathbf{T}_x \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{T}_y \text{ και } \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{a}_x \otimes \mathbf{a}_y \quad (2.50)$$

Επίσης η $Z_2 = \max(X, Y) \sim PH(\boldsymbol{\gamma}_2, \mathbf{L}_2)$ με

$$\mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_x \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \mathbf{T}_y & \mathbf{I} \otimes \mathbf{t}_y & \mathbf{t}_x \otimes \mathbf{I} \\ 0 & \mathbf{T}_x & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T}_y \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

και

$$\boldsymbol{\gamma} = (\mathbf{a}_x \otimes \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_x a_{y,m+1}, a_{x,k+1} \mathbf{a}_y)$$

Η διάσταση του \mathbf{T}_x είναι k και η διάσταση του \mathbf{T}_y είναι m . Ο \mathbf{I} είναι

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{t}_x \\ \mathbf{t}_y \end{bmatrix}$$

2.3 Μερικά αποτελέσματα για τη πιθανότητα επιβίωσης για το δισδιάστατο μοντέλο

Ένα ερώτημα που προκύπτει είναι πως θα υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας. Όπως είδαμε για τον ορισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας μπορούμε να δώσουμε διαφορετικούς ορισμούς. Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τρεις από αυτούς τους ορισμούς και τις πιθανότητες χρεοκοπίας τους. Θυμίζουμε ότι

$$T_{OR} := \inf\{t \geq 0 : \min(U_1(t), U_2(t)) < 0\} \quad (2.52)$$

$$T_{SIM} := \inf\{t \geq 0 : \max(U_1(t), U_2(t), \dots, U_m(t)) < 0\} \quad (2.53)$$

$$T_{SUM} := \inf\{t \geq 0 : \sum_{i=1}^2 U_i(t) < 0\} \quad (2.54)$$

και οι αντίστοιχες πιθανότητες χρεοκοπίας

$$\psi_{OR}(u_1, u_2) = P(T_{OR} < \infty / (U_1(0), U_2(0)) = (u_1, u_2)) \quad (2.55)$$

$$\psi_{SIM}(u_1, u_2) = P(T_{SIM} < \infty / (U_1(0), U_2(0)) = (u_1, u_2)) \quad (2.56)$$

$$\psi_{SUM}(u_1, u_2) = P(T_{SUM} < \infty / (U_1(0), U_2(0)) = (u_1, u_2)) \quad (2.57)$$

2.3.1 Μερικά απλά όρια για τις πιθανότητες χρεοκοπίας

Έστω $T_1 = \inf\{t/U_1(t) < 0\}$ και $T_2 = \inf\{t/U_2(t) < 0\}$ να είναι οι χρόνοι χρεοκοπίας των $U_1(t), U_2(t)$ και έστω $\psi_1 = P(T_1 < \infty)$ και $\psi_2 = P(T_2 < \infty)$ να είναι οι αντίστοιχες πιθανότητες χρεοκοπίας τους. Μπορούμε να πούμε τα ακόλουθα

$$\psi_{OR}(u_1, u_2) \geq \max(\psi_1(u_1), \psi_2(u_2)) \quad (2.58)$$

$$\psi_{SIM}(u_1, u_2) \leq \min(\psi_1(u_1), \psi_2(u_2)) \quad (2.59)$$

Είναι πιθανό οι παραπάνω ανισότητες να ισχύουν για μη αρνητικά αρχικά αποθέματα, αλλά δεν είναι προφανές αν θα ισχύουν όταν τουλάχιστον ένα από τα δυο πλεονάσματα είναι ίσο με το μηδέν.

Λήμμα 2.2

Έστω $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, είναι αυστηρά θετικοί αν και μόνο αν για κάθε δύο αυστηρά θετικούς πραγματικούς αριθμούς (a_1, a_2) ισχύει ότι $\sum_{i=1}^2 a_i x_i > 0$.

Επίσης θα θεωρούμε ότι $\sum_{i=1}^2 a_i = 1$ οπότε έχουμε

$$P(T_{OR} = \infty) = P(a_1 U_1(t) + a_2 U_2(t) > 0) \quad (2.60)$$

Μια οικογένεια μονοδιάστατων μοντέλων είναι η $\{U_a(t)\}$ με $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ και ορίζεται ως,

$$U_a(t) = a_1 U_1(t) + a_2 U_2(t) = a_1 u_1 + a_2 u_2 + (a_1 c_1 + a_2 c_2)t - \sum_{j=1}^{N(t)} \left(\sum_{i=1}^2 a_i X_{i,j} \right) \quad (2.61)$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι από τις υποθέσεις για τις διαδικασίες πλεονάσματος $\{U_i(t), i=1,2\}$ ότι η $\{U_a(t)\}$ ικανοποιεί τη συνθήκη κέρδους με αρχική τιμή $\sum_{i=1}^2 a_i u_i$. Έστω T_a ο χρόνος χρεοκοπίας του $\{U_a(t)\}$ και $\psi_a(a_1 u_1 + a_2 u_2) = P(T_a < \infty / U_a(0) = a_1 u_1 + a_2 u_2)$ έχουμε κάποια στοιχειώδεις αποτελέσματα της θεωρίας του μέτρου όπως,

$$P(T_{OR} = \infty) = P(T_a = \infty, \forall (a_1, a_2)) \leq \inf_a P(T_a = \infty) \quad (2.62)$$

$$P(T_{OR} < \infty) \geq 1 - \inf_a P(T_a = \infty) = \sup_a P(T_a < \infty) \quad (2.63)$$

Παρόμοια και για τους άλλους ορισμούς για την πιθανότητα χρεοκοπίας έχουμε,

$$\begin{aligned} P(T_{SIM} < \infty) &= P(U_1(t), U_2(t) < 0) \\ &= P(a_1 U_1(t) + a_2 U_2(t) > 0) = P(T_a < \infty) \leq \inf_a P(T_a < \infty) \end{aligned} \quad (2.64)$$

και τέλος για την πιθανότητα της (2.57) έχουμε,

$$P(T_{SUM} < \infty) = P(T_{(1/2, 1/2)} < \infty) \quad (2.65)$$

Οπότε η πιθανότητα για το T_{SUM} μπορεί να βρεθεί ως ειδική περίπτωση του μονοδιάστατου μοντέλου.

Τέλος κλειστοί τύποι για τις πιθανότητες κάτω από το μοντέλο του λήμματος είναι πολύ δύσκολο να βρεθούν (ακόμα και κάτω από την υπόθεση ότι οι ζημιές είναι εκθετικά κατανομημένες) λόγω της πολυπλοκότητας της σχέσης της πιθανότητας χρεοκοπίας και των παραμέτρων a_1, a_2 . Οπότε τα απλά φράγματα που αναφέραμε παραπάνω αποδεικνύονται πολύ χρήσιμα.

2.3.2 Εφαρμογές των κατανομών τύπου φάσης στο δισδιάστατο μοντέλο κινδύνου

Τα τελευταία χρόνια η διαδικασία πλεονάσματος με τις ζημιές να είναι τύπου φάσης κατανομημένες όπως και ο χρόνος άφιξης τους έχουν ελκύσει πληθώρα μελετών και έχουν προσφέρει μια εξαιρετική επανεξέταση σε αυτό το χώρο.

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο 2.2 μία τύπου φάσης κατανομή ορίζεται για συνεχείς χρόνου ομογενείς αλυσίδα Markov με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων. Σε αυτό το κεφάλαιο ορίζουμε το χώρο καταστάσεων $E = \{0,1,2\}$ με το 0 να είναι η κατάσταση απορρόφησης, και η αλυσίδα Markov είναι μη αναστρέψιμη. Τότε η τ.μ.

$$\eta = \inf\{t \geq 0 : X(t) = 0\} \quad (2.66)$$

είναι σχεδόν παντού πεπερασμένη και είναι κατανομημένη με μια τύπου φάσης κατανομή.

Πρόταση 2.2

Έστω ότι οι ζημιές είναι κατανομημένες με μια τύπου φάσης κατανομή για το μονοδιάστατο μοντέλο και με αναπαράσταση (\mathbf{a}, \mathbf{B}) με $a_0 = 0, \mathbf{B}$ μη μοναδικός και με επιβάρυνση κινδύνου

$$\rho = \frac{\lambda E(x)}{c} < 1 \text{ όπου } \lambda \text{ και } c \text{ σταθερές. Έστω τώρα } \mathbf{a}^* = -(\mathbf{E}X)^{-1} \mathbf{a}' \mathbf{B}^{-1}, \text{ με } \mathbf{a}' = (a_1, a_2).$$

Τότε για όλα τα $u > 0$ η πιθανότητα χρεοκοπίας μπορεί να υπολογιστεί ως ακολούθως,

$$\psi(u) = \rho \mathbf{a}^* e^{(u(\mathbf{B} + \rho \mathbf{b} \mathbf{a}^*))} \quad (2.67)$$

Πρόταση 2.3

Ο πίνακας $\mathbf{A} = \mathbf{B} + \rho \mathbf{b} \mathbf{a}^*$ έχει αρνητικές δύο ιδιοτιμές όταν οι τ.μ. είναι εκθετικά κατανομημένες.

Απόδειξη :

Έστω οι τ.μ. $X_i, i = 1, 2$ να είναι εκθετικά κατανομημένες με παραμέτρους β_1, β_2 τότε η τ.μ. $X = a_1 X_1 + a_2 X_2$ θα είναι τύπου φάσης κατανομημένη με αναπαράσταση (\mathbf{a}, \mathbf{B}) και έστω οι ακόλουθες ποσότητες,

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \rho \mathbf{b} \mathbf{a}^*, \mathbf{a}^* = -(\mathbf{E}X)^{-1} \mathbf{a}' \mathbf{B}^{-1}$$

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_1}{a_1} & \frac{\beta_1}{a_1} \\ 0 & \frac{\beta_2}{a_2} \end{bmatrix}, \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\beta_2}{a_2} \end{bmatrix}, \rho = \frac{1}{1+\theta} \quad (2.68)$$

Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{\beta_1}{a_1} & \frac{\beta_1}{a_1} \\ \gamma \frac{a_1}{\beta_1} & -\frac{\beta_2}{a_2} + \gamma \frac{a_2}{\beta_2} \end{bmatrix} \quad \text{με } \gamma = \rho \left(\frac{\beta_2 \beta_1}{a_2 a_1} + \frac{a_2}{\beta_2} \right)$$

και το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του \mathbf{A} είναι,

$$\lambda^2 + \lambda \left(\frac{\beta_1}{a_1} + \frac{\beta_2}{a_2} - \rho \frac{1}{\frac{a_1/\beta_1}{+} \frac{a_2/\beta_2}} \right) + (1-\rho) \left(\frac{\beta_1 \beta_2}{a_1 a_2} \right) = 0 \quad (2.69)$$

Και αφού η παραπάνω εξίσωση έχει τουλάχιστον μία αρνητική ρίζα, και στο αριστερό μέρος της εξίσωσης ο τελευταίος όρος είναι θετικός συνεπάγεται ότι και η δεύτερη ρίζα είναι αρνητική

2.3.3 Εφαρμογές των κατανομών

Κάτω από την υπόθεση ότι οι ζημιές ακολουθούν εκθετική κατανομή, συνεπάγεται ότι η διαδικασία όπως ορίστηκε στο κεφάλαιο 2.3.1 είναι ένα μονοδιάστατο μοντέλο με τις ζημιές να ακολουθούν μια κατανομή τύπου φάσης. Τώρα ως ειδική περίπτωση θα υπολογίσουμε την $P(T_{SUM} < \infty)$, αλλά ακόμα και σε αυτήν την ειδική περίπτωση είναι δύσκολο να υπολογίσουμε τις πιθανότητες $P(T_{OR} < \infty)$ $P(T_{SIM} < \infty)$.

Θεωρούμε το σύνολο $\{a_1, a_2\}$ τέτοιο ώστε $a_i > 0$ και $\sum_{i=1}^2 a_i = 1$. Αν οι τ.μ. $X_i, i=1,2$ είναι εκθετικά κατανομημένες με παραμέτρους β_i , τότε και οι τ.μ. $a_i X_i$ θα είναι και αυτές εκθετικά κατανομημένες με παράμετρο $b_i = \frac{\beta_i}{a_i}$. Κάτω από την υπόθεση ότι οι τ.μ. $X_i, i=1,2$ είναι ανεξάρτητες συνεπάγεται ότι η τ.μ. $\sum_{i=1}^2 X_i a_i$ θα ακολουθεί μία κατανομή τύπου φάσης με αναπαράσταση (\mathbf{a}, \mathbf{B}) με

$$\mathbf{a} = (0,1,0) \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -b_1 & b_1 \\ 0 & -b_2 \end{bmatrix}$$

Ξέροντας την αναπαράσταση (\mathbf{a}, \mathbf{B}) μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(T_{SUM} < \infty)$

θέτοντας $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$ και $\beta_i = 1, i=1,2$ και για τη διαδικασία Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ θέτουμε

$\lambda = 1$ οπότε για το κάτωθι μοντέλο έχουμε,

$$U_1(t) + U_2(t) = u_1 + u_2 + (c_1 + c_2)t - \sum_{i=1}^{N(t)} (X_{1i} + X_{2i}) \quad (2.70)$$

$$\mathbf{a}' = (1, 0), \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \rho = \frac{1}{1.5}, \mathbf{a}^* = -\frac{1}{2} \mathbf{a}' \mathbf{B}^{-1} \quad (2.71)$$

κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε,

$$P(T_{SUM} < \infty) = \psi(u_1 + u_2) = \frac{1}{3} (1, 1) e^{(u_1 + u_2) \mathbf{A}} (1, 1)', \text{ με} \quad (2.72)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας \mathbf{A} έχει δύο ιδιοτιμές τη $\lambda_1 = \frac{-5 - \sqrt{13}}{6} = -1,43426$ και $\lambda_2 = \frac{-5 + \sqrt{13}}{6} = -0,232408$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι $\xi_1 = (-2,30278, 1)'$ και $\xi_2 = (-1,30278, 1)'$. Τότε του \mathbf{A}' τα ιδιοδιανύσματα είναι σειρές και έχουμε $\zeta_1 = (-0,277349, 0,361325)$, $\zeta_2 = (-0,277349, 0,638675)$

a_1	R_a
0,00	0,33333
0,10	0,36754
0,20	0,40409
0,30	0,43348
0,40	0,45631
0,45	0,46264
0,49	0,46472
0,50	0,46481

Πίνακας 1.1 : Μεταβολές στο συντελεστή προσαρμογής R_a

μετά από μερικούς υπολογισμούς έχουμε,

$$P(T_{SUM} < \infty) = \psi_{SUM}(u_1 + u_2) = 0,703134 e^{-0,232408(u_1 + u_2)} - 0,0364674 e^{-1,43426(u_1 + u_2)}$$

και για $u_1 = u_2 = u$ έχουμε,

$$P(T_{SUM} < \infty) = \psi_{SUM}(2u) = 0,703134 e^{-0,46481(u_1 + u_2)} - 0,0364674 e^{-2,86852(u_1 + u_2)}$$

Για το κλασσικό μονοδιάστατο μοντέλο είναι πολύ γνωστό ότι

$$\psi(u) = \frac{1}{1 + \theta} e^{-\frac{\theta}{1 + \theta} \beta u} = 0,666666 e^{-0,333333u}.$$

2.3.4 Συντελεστής προσαρμογής

Θα χωρίσουμε το πρόβλημα σε δυο περιπτώσεις (α) $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ και (β) $\theta_1 \neq \theta_2$. Η ιδέα είναι πως αν το supremum του συντελεστή προσαρμογής (Panjer και Willmot, 1992, σελ. 359) της διαδικασίας $\{U_a(t)\}$ είναι αυστηρά μεγαλύτερος από τους αντίστοιχους συντελεστές των $\{U_1(t)\}$ και $\{U_2(t)\}$, τότε θα λέμε ότι το πάνω φράγμα της $P(T_{SIM} < \infty)$ είναι ασυμπτωτικά καλό.

Παρόμοια αν το infimum του συντελεστή προσαρμογής $\{U_a(t)\}$ είναι αυστηρά μικρότερος από τους αντίστοιχους συντελεστές $\{U_1(t)\}$ και $\{U_2(t)\}$, τότε θα λέμε ότι το κάτω φράγμα της $P(T_{OR} < \infty)$ είναι ασυμπτωτικά καλό.

Σε συνάρτηση με τα αποτελέσματα του παρακάτω πίνακα η ανισότητα (2.63) είναι ένα καλό πάνω φράγμα για τη $P(T_{SIM} < \infty)$, αλλά η ανισότητα (2.64) αποτυγχάνει να δώσει ένα καλό κάτω όριο για τη $P(T_{OR} < \infty)$ (βλέπε πίνακα 2).

Η ιδέα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά της πιθανότητας χρεοκοπίας ξεκινάει με την εισαγωγή του συντελεστή προσαρμογής, για παράδειγμα, βλέπε Bowers et al, 1997 chapter 13 για το μονοδιάστατο μοντέλο της θεωρίας κινδύνου.

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε τον συντελεστή προσαρμογής για τη διαδικασία $\{U_a(t)\}$ αλλά πρώτα θα δώσουμε ένα αριθμητικό παράδειγμα.

Παράδειγμα 2.6

Θεωρούμε το προηγούμενο παράδειγμα στο δισδιάστατο μοντέλο χρεοκοπίας της θεωρίας κινδύνου, $\lambda = 1, c_1 = c_2 = 1,5$ οι ζημιές είναι εκθετικά κατανεμημένες με παραμέτρους $\beta_1 = \beta_2 = 1$ και $\theta_1 = \theta_2 = 0,5$. Για διαφορετικές τιμές των a_1, a_2 ο R_a μπορεί να υπολογιστεί. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον πίνακα 1 παραπάνω.

Από το πίνακα, παρατηρούμε ότι ο R_a παίρνει μέγιστη τιμή αν $a_1 = a_2 = 0,5$. Μπορεί να δειχθεί ότι ο R_a σαν συνάρτηση των (a_1, a_2) φτάνει μέγιστο στο $\frac{5 - \sqrt{13}}{3}$ όταν

$(a_1, a_2) = (0,5, 0,5)$ και ελάχιστο στο $\frac{1}{3}$ για $(a_1, a_2) = (0,1)$ ή για $(a_1, a_2) = (1,0)$ αντίστοιχα.

Πριν δώσουμε ένα γενικό αποτέλεσμα θα αναφέρουμε δύο ανισότητες πρώτα.

Λήμμα 2.3.

Ανισότητα Holder (Halmos, 1978 σελ. 175)

(α) Για οποιεσδήποτε θετικές τ.μ. $Z_1 > 0, Z_2 > 0$ έχουμε,

$$E\left(\prod_{i=1}^2 Z_i\right) \leq \prod_{i=1}^2 E(Z_i^{r_i})^{\frac{1}{r_i}} \quad (2.73)$$

όπου $r_1 > 0, r_2 > 0$ και ικανοποιούν τη σχέση $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 1$.

(β) Για δύο θετικούς αριθμούς $x_1 > 0, x_2 > 0$ και $a_1 > 0, a_2 > 0$ και ικανοποιούν τη σχέση $a_1 + a_2 = 1$ ισχύει η παρακάτω ανισότητα,

$$x_1^{a_1} x_2^{a_2} \leq \max\{x_1, x_2\}. \quad (2.74)$$

Τώρα θα δώσουμε ένα γενικό αποτέλεσμα.

Πρόταση 2.4

Έστω $\theta_1 = \theta_2 = \theta$ για το δισδιάστατο μοντέλο τότε,

$$\sup_a R_a > \max\{R_1, R_2\} \quad (2.75)$$

a	$R_a/\theta=0,3$	$R_a/\theta=0,6$	$R_a/\theta=0,9$
0	0,2307769	0,375000	0,473684
0,05	0,241011	0,392179	0,495862
0,1	0,248290	0,405522	0,514130
0,2	0,252459	0,416667	0,532721
0,3	0,243071	0,403905	0,519529
0,5	0,201967	0,333333	0,426177
0,6	0,179883	0,295075	0,375365
0,9	0,127914	0,207945	0,262743
0,95	0,121394	0,197284	0,249218
1	0,115358	0,187500	0,236842

Πίνακας 1.2 : Συντελεστής προσαρμογής όταν οι ζημιές ακολουθούν εκθετική κατανομή

2.3.5 Αριθμητικά παραδείγματα.

Έστω τώρα οι X_1, X_2 να ακολουθούν εκθετική κατανομή με παραμέτρους $\beta_1 = \frac{1}{2}, \beta_2 = 1$ έτσι ώστε $E(X_1) = 2, E(X_2) = 1$. Ξέρουμε ότι η ροπογεννήτρια μιας τ.μ. εκθετικά κατανεμημένης είναι,

$$M(t) = \frac{\beta}{\beta - t}$$

οπότε για την τ.μ. $X_a = a_1 X_1 + a_2 X_2$ η ροπογεννήτρια είναι

$$E(\exp(a_1 X_1 + a_2 X_2)) = E(e^{a_1 X_1}) E(e^{a_2 X_2}) = \frac{\beta_1}{\beta_1 - a_1 t} \frac{\beta_2}{\beta_2 - a_2 t}$$

Αυτές οι εξισώσεις χρησιμοποιήθηκαν για να υπολογιστούν οι συντελεστές προσαρμογής του πίνακα 2.

Μπορούμε να υπολογίσουμε και τη πιθανότητα $P(T_{SUM} < \infty)$ θεωρώντας ότι

$\theta_1 = \theta_2 = \theta = 0,6$ οπότε έχουμε,

$$\mathbf{a}' = (1,0), \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \rho = \frac{1}{1,6}, \mathbf{a}^* = -\frac{1}{3} \mathbf{a}' \mathbf{B}^{-1}$$

$$\text{και } P(T_{SUM} < \infty) = \psi_{SUM}(0,5u_1 + 0,5u_2) = \frac{1}{4,8} (2,1) e^{(u_1+u_2)\mathbf{A}} (1,1)'$$

$$\text{με } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ \frac{4}{4,8} & -2 + \frac{2}{4,8} \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του \mathbf{A} είναι οι $\lambda_1 = -2,25$ και $\lambda_2 = -0,33333$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\xi_1 = (-0,626495, 0,780869)'$ και $\xi_2 = (0,83205, 0,5547)'$. Τον πίνακα \mathbf{A}^{-1} τα ιδιοδιανύσματα είναι $\zeta_1 = (-0,556793, 0,83519)$ και $\zeta_2 = (0,783816, 0,627052)$. Οπότε έχουμε,

$$e^{u\mathbf{A}} = \xi_1 \zeta_1' e^{\lambda_1 u} + \xi_2 \zeta_2' e^{\lambda_2 u}.$$

Μετά από υπολογισμούς βρίσκουμε,

$$P(T_{SUM} < \infty) = \psi_{SUM}(0,5u_1 + 0,5u_2) = 0,652173 e^{-0,33333(0,5u_1+0,5u_2)} - 0,03271739 e^{-2,256(0,5u_1+0,5u_2)}$$

Και στη περίπτωση που $u_1 = u_2 = u$ έχουμε,

$$P(T_{SUM} < \infty) = \psi_{SUM}(u) = 0,652173 e^{-0,33333u} - 0,0271739 e^{-2,25u}$$

Χρησιμοποιώντας υπολογιστή μπορούμε να βρούμε τα πάνω και κάτω φράγματα των \bar{a}, \underline{a} του R_a . Για $\theta = 0,6$ ο R_a φτάνει μέγιστο στο 0,41667 όταν το $\bar{a} = 0,196965$ και ελάχιστο 0,1875 όταν το $\underline{a} = 1$.

Οπότε μπορούμε να δώσουμε ένα καλό ασυμπτωτικό πάνω φράγμα για τη $P(T_{SIM} < \infty)$.

Αλλά δεν υπάρχει καλό ασυμπτωτικό κάτω φράγμα για τη $P(T_{OR} < \infty)$ για αυτό το παράδειγμα και για τον ορισμό του καλού ασυμπτωτικού φράγματος που δώσαμε εδώ.

Το ασυμπτωτικό πάνω φράγμα για τη $P(T_{SIM} < \infty)$ υπολογίζεται ως ακολούθως.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2,53852 & 2,53852 \\ 0,256144 & -0,723121 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του \mathbf{A} είναι οι $\lambda_1 = -2,84497$ και $\lambda_2 = -0,416678$. Τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα είναι τα $\xi_1 = (-0,992792, 0,119847)'$ και $\xi_2 = (0,767268, -0,642317)'$. Του πίνακα \mathbf{A}^{-1} τα ιδιοδιανύσματα είναι $\zeta_1 = (-0,880147, 1,05299)$ και $\zeta_2 = (-0,164476, -1,36249)$. Οπότε έχουμε,

$$P(T_{SIM} < \infty) = \psi_{SUM}(a_1 u_1 + a_2 u_2) = 0,651609 e^{-0,416678(0,196965u_1 + 0,803035u_2)} - 0,00266103 e^{-2,84497(1,96965u_1 + 0,803035u_2)}$$

Και στη περίπτωση που $u_1 = u_2 = u$ έχουμε,

$$P(T_{SIM} < \infty) = \psi_{SUM}(a_1 u_1 + a_2 u_2) = 0,651609 e^{-0,416678u} - 0,00266103 e^{-2,84497u}$$

Για να δοκιμάσουν πόσο καλά είναι τα παραπάνω όρια οι Chan, Ynag και Zhang, εκτέλεσαν ένα πείραμα προσομοίωσης με τη χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. Χωρίσανε το χρόνο ($T = 1000$) σε ($M = 100.000$) διαστήματα. Οπότε το κάθε χρονικό διάστημα θα έχει μήκος

$\Delta t = \frac{T}{M} = 0,01$. Το πλήθος των ζημιών στο i διάστημα NC_i έχει προσομοιωθεί με μία

Poisson κατανομή με παράμετρο Δt . Οι ζημιές X_{1k}, X_{2k} είναι ανεξάρτητες και έχουν προσομοιωθεί σύμφωνα με εκθετικές κατανομές με παραμέτρους $\frac{1}{2}, 1$ αντίστοιχα. Οι διαδικασίες πλεονάσματος υπολογιστήκαν με τους παρακάτω τύπους,

$$U_1(i) = U_1(i-1) + c(\Delta t) - \sum_{k=1}^{NC_i} X_{1k}, \quad (2.76)$$

$$U_2(i) = U_2(i-1) + c(\Delta t) - \sum_{k=1}^{NC_i} X_{2k}. \quad (2.77)$$

Επίσης $\theta_1 = \theta_2 = \theta = 0,6, c_1 = 3,2, c_2 = 1,6$. Το πείραμα επαναλήφθηκε για $N = 100.000$.

Η προσημιωμένη πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η σχετική συχνότητα του γεγονότος, όπου οι δύο διαδικασίες πλεονάσματος πρέπει να είναι μικρότερες του μηδενός για κάποιο $i \in \{1, 2, \dots, M\}$. Πρέπει να σημειωθεί ότι δεν κατάφεραν να παράγουν την πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας λόγω των λίγων για τη μελέτη διαστημάτων χρόνου ($M = 100.000$)

Η πραγματική πιθανότητα χρεοκοπίας ενδεχομένως είναι λίγο μεγαλύτερη από τη προσομοιωμένη. Παρόλα αυτά το προηγούμενο πείραμα ρίχνει φως για το πάνω φράγμα. Τα αποτελέσματα δίνονται στο πίνακα 3. Οι λόγοι των πάνω φραγμάτων με την προσομοιωμένη πιθανότητα έχουν εύρος από 1,49 μέχρι 2,69 για διάφορες τιμές του αρχικού αποθέματος. Παρόμοια αποτελέσματα παρατηρήθηκαν για το παράδειγμα 3.1. τα πειράματα υπονοούν ότι η μέθοδος που προτάθηκε για τον υπολογισμό του πάνω φραγματος είναι σχετικά καλή.

u	Προσομοιωμένο $P(T_{SIM} < \infty/u)$	Upper Bound	Ratio
0	0,436470	0,651609	1,49
1	0,251630	0,429562	1,71
2	0,151700	0,283182	1,87
3	0,093170	0,186683	2,00
4	0,059050	0,123067	2,08
5	0,036870	0,081130	2,20
6	0,022710	0,053484	2,36
7	0,015030	0,035258	2,35
8	0,009270	0,023243	2,51
9	0,006370	0,015323	2,41
10	0,003760	0,010101	2,69
20	0,000080	0,000257	1,96
50	0,000000	0,000000	N/A

Πίνακας 1.3 : Αποτελέσματα προσημειωμένης πιθανότητας χρεοκοπίας

Μετά από κάποιες αριθμητικές μελέτες για τη πιθανότητα χρεοκοπίας για το δισδιάστατο μοντέλο έδειξαν κάποια αποτελέσματα.

(α) Κάτω από την υπόθεση $\theta_1 = \theta_2 = \theta$, αν η διαφορά μεταξύ των παραμέτρων των ζημιών (που είναι εκθετικά κατανομημένες) είναι μεγάλη τότε τα $\sup_a R_a, \max\{R_1, R_2\}$ γίνονται μικρότερα. Επίσης αν $\beta_1 \approx \beta_2$ τότε η διαφορά μεταξύ των $\sup_a R_a$ και $\max\{R_1, R_2\}$ γίνεται σημαντική.

(β) Για τις παραμέτρους σταθερές και το θ να μικραίνει, τότε παρατηρήθηκε ότι συρρικνώνεται η διαφορά μεταξύ των $\sup_a R_a$ και $\max\{R_1, R_2\}$.

(γ) Ακόμα έγινε προσομοίωση με τις ζημιές να ακολουθούν κατανομή δυο σημείων τ.μ. δυο σημείων, και το πλήθος των ζημιών να ακολουθούν μια κατανομή Poisson. Τα αριθμητικά αποτελέσματα ήταν παρόμοια με αυτά όταν οι ζημιές ακολουθούσαν εκθετική κατανομή.

(δ) Προφανώς αν $(U_1(0), U_2(0)) = (0,0)$ η πιθανότητα χρεοκοπίας στο μονοδιάστατο μοντέλο για τη διαδικασία $\{U_a(t)\}$ είναι σταθερά για κάθε $\{a_1, a_2\}$, δηλαδή, $P(T_a < \infty) = \frac{1}{1+\theta}$.

Επίσης είναι πολύ πιθανό να ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες

$$P(T_{OR} < \infty / (u_1, u_2) = (0, 0)) \geq \max\left(\frac{1}{1 + \theta_1}, \frac{1}{1 + \theta_2}\right) \quad (2.78)$$

$$P(T_{SIM} < \infty / (u_1, u_2) = (0, 0)) \leq \min\left(\frac{1}{1 + \theta_1}, \frac{1}{1 + \theta_2}\right) \quad (2.79)$$

2.4 Εξαρτημένες ιδιότητες και φράγματα για το πολυδιάστατο μοντέλο της θεωρίας κινδύνου

Έστω ένα ασφαλιστικό επενδυτικό χαρτοφυλάκιο με m υπό χαρτοφυλάκια. Έστω $N(t)$ το πλήθος των ζημιών μέχρι το χρόνο t , και $X_{i,n}$ η n -οστή ζημιά του $i, i = 1, \dots, m$ υπό χαρτοφυλακίου. Η στοχαστική διαδικασία πλεονάσματος σε αυτό το υπό κεφάλαιο θα οριστεί λίγο διαφορετικά

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} U_1(t) \\ \vdots \\ U_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{N(t)} X_{1,n} - c_1 t \\ \vdots \\ \sum_{n=1}^{N(t)} X_{m,n} - c_m t \end{bmatrix}, t \geq 0 \quad (2.80)$$

Όπου $c_i > 0$ ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών για το i υπό χαρτοφυλάκιο. Θεωρούμε ότι οι ζημιές $\{(X_{1,n}, \dots, X_{m,n}), n \geq 1\}$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ.

Έστω $u_i > 0$ το αρχικό κεφάλαιο για το i υπό χαρτοφυλάκιο. Τότε ορίζουμε τις παρακάτω πιθανότητες χρεοκοπίας

$$\psi_{AND}(\tilde{u}) = P\left(\bigcap_{i=1}^m (\sup_t \{U_i(t)\} > u_i)\right) \quad (2.81)$$

$$\begin{aligned} \psi_{OR}(\tilde{u}) &= P\left(\bigcup_{i=1}^m (\sup_t \{U_i(t)\} > u_i)\right) \\ &= P(\sup\{\max(U_1(t) - u_1, \dots, U_m(t) - u_m)\} > 0) \end{aligned} \quad (2.82)$$

$$\begin{aligned} \psi_{SIM}(\tilde{u}) &= P(U_1(t) > u_1, \dots, U_m(t) > u_m) \\ &= P(\sup_t \{\min(U_1(t) - u_1, \dots, U_m(t) - u_m)\} > 0) \end{aligned} \quad (2.83)$$

Η παράσταση (2.81) μας δίνει την πιθανότητα να συμβεί η χρεοκοπία σε όλα τα υπό-χαρτοφυλάκια, όχι αναγκαστικά σε όλα τα υπό-χαρτοφυλάκια ταυτόχρονα, η (2.83) μας δίνει την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία ταυτόχρονα σε όλα τα υπό-χαρτοφυλάκια και τέλος η παράσταση (2.82) μας δίνει την πιθανότητα να συμβεί χρεοκοπία τουλάχιστον σε ένα υπό-χαρτοφυλάκιο.

Για το πολυδιάστατο μοντέλο της θεωρίας κινδύνου ο Sundt (1999) μελέτησε μία αναδρομική μέθοδο για να προσδιορίσει την κατανομή του πλεονάσματος. Ο Chan et al. (2003) μελέτησε τις πιθανότητες $\psi_{OR}(\tilde{u})$ και $\psi_{SIM}(\tilde{u})$ στη περίπτωση που οι ζημιές είναι ανεξάρτητες και παρήγαγε ένα κάτω φράγμα για την $\psi_{AND}(\tilde{u})$ και συμπεριέλαβε έναν ρητό τύπο για την περίπτωση που η ζημιές είναι κατανεμημένες τύπου φάσης.

Σε αυτό το υπό-κεφάλαιο όταν λέμε αύξουσα ή φθίνουσα εννοούμε ότι δεν είναι φθίνουσα και ότι δεν είναι αύξουσα αντίστοιχα.

Ορισμός 2.11

Εστω $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ και $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ δύο τυχαία διανύσματα στον R^m τότε,

(α) θα λέμε ότι το \mathbf{X} είναι μεγαλύτερο από το \mathbf{Y} κατά στοχαστικό τρόπο και συμβολίζεται ως $\mathbf{X} \geq_{st} \mathbf{Y}$.

Αν $E(f(\mathbf{X})) \geq_{st} E(f(\mathbf{Y}))$ για όλες τις αύξουσες συναρτήσεις f .

(β) θα λέμε ότι το \mathbf{X} είναι πιο εξαρτημένο από το \mathbf{Y} κατά *super modular* τρόπο και συμβολίζεται ως $\mathbf{X} \geq_{sm} \mathbf{Y}$.

Αν $Ef(\mathbf{X}) \geq_{st} Ef(\mathbf{Y})$ για όλες τις *super modular* συναρτήσεις f .

Super modular συνάρτηση είναι η συνάρτηση που για όλα τα $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^m$ ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα

$$f(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) + f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \geq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}).$$

Όπου $\mathbf{x} \vee \mathbf{y}$ συμβολίζει το διάνυσμα του μέγιστου στοιχείου και το $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ συμβολίζει το διάνυσμα του ελάχιστου στοιχείου. Η περίπτωση (α) του ορισμού 2.11 έχει πολλές χρήσιμες ιδιότητες και εφαρμογές. Οι ακόλουθες ιδιότητες θα χρησιμοποιηθούν αργότερα.

Λήμμα 2.4

Εστω $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ και $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$ δύο τυχαία διανύσματα στον R^m τέτοια ώστε $\mathbf{X} \geq_{sm} \mathbf{Y}$

(1) $(f_1(X_1), \dots, f_m(X_m)) \geq_{sm} (f_1(Y_1), \dots, f_m(Y_m))$ για οποιεσδήποτε συναρτήσεις f_1, \dots, f_m που είναι αύξουσες ή φθίνουσες.

(2) Αν X_i, Y_i είναι ισόνομες για $i = 1, \dots, m$ τότε,

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_m > x_m) \geq P(Y_1 > x_1, \dots, Y_m > x_m) \quad (2.84)$$

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m) \geq P(Y_1 \leq x_1, \dots, Y_m \leq x_m) \quad (2.85)$$

Για οποιαδήποτε (x_1, \dots, x_m)

Επίσης αν $\mathbf{X} \geq_{sm} \mathbf{Y}$ τότε $Cov(X_i, X_j) \geq Cov(Y_i, Y_j)$ για $i \neq j$.

Θεώρημα 2.9

Αν $\mathbf{X} \geq_{sm} \mathbf{Y}$ τότε για μη αρνητικά u_1, \dots, u_m

$$(3) \quad \psi_{AND}^X(\tilde{u}) \geq \psi_{AND}^Y(\tilde{u})$$

$$(4) \quad \psi_{OR}^X(\tilde{u}) \leq \psi_{OR}^Y(\tilde{u})$$

$$(5) \quad \psi_{SIM}^X(\tilde{u}) \geq \psi_{SIM}^Y(\tilde{u})$$

Απόδειξη βλέπε: Jun Cai και Haijun Li Dependence Properties and Bounds for Ruin Probabilities in Multivariate Compound Risk Model.

2.4.1 Στοχαστικά φράγματα.

Η στρατηγική μας είναι να περιορίσουμε τις πολυδιάστατες πιθανότητες (2.2), (2.4) σε μία μονοδιάστατη πιθανότητα χρεοκοπίας, η οποία μπορεί να υπολογιστεί στη περίπτωση που οι ζημιές ακολουθούν μια κατανομή τύπου φάσης.

Θεωρούμε το πολυδιάστατο μοντέλο όπως το ορίσαμε παραπάνω και ορίζουμε,

$$X_{(1),n} = \min\{X_{1,n}, \dots, X_{m,n}\} \quad X_{(m),n} = \max\{X_{1,n}, \dots, X_{m,n}\}$$

$$c_{(1)} = \min\{c_1, \dots, c_m\} \quad c_{(m)} = \max\{c_1, \dots, c_m\}$$

$$u_{(1)} = \min\{u_1, \dots, u_m\} \quad u_{(m)} = \max\{u_1, \dots, u_m\}$$

Επίσης ορίζουμε,

$$\psi_{\min}(u) = P(\sup_t (\sum_{n=1}^{N(t)} X_{(1),n} - c_{(m)}t) > u) \quad (2.86)$$

$$\psi_{\max}(u) = P(\sup_t (\sum_{n=1}^{N(t)} X_{(m),n} - c_{(1)}t) > u)$$

Είναι προφανές ότι για μη αρνητικά (u_1, \dots, u_m) ,

$$\psi_{\min}(u_{(m)}) \leq \psi_{SIM}(\tilde{u}) \leq \psi_{OR}(\tilde{u}) \leq \psi_{\max}(u_{(1)})$$

Τώρα έστω το σύνολο,

$$\mathbf{a} \in \mathbf{A} = \{(a_1, \dots, a_m) : a_j \geq 0, j = 1, \dots, m, \text{ και } \sum_{j=1}^m a_j > 0\}$$

και

$$\psi_a(u) = P(\sup_t (\sum_{n=1}^{N(t)} \sum_{j=1}^m a_j X_{j,n} - \sum_{j=1}^m a_j c_j t) > u) \quad (2.87)$$

$$\psi_{SUM}(u) = P(\sup_t (\sum_{n=1}^{N(t)} \sum_{j=1}^m X_{j,n} - \sum_{j=1}^m c_j t) > u) \quad (2.88)$$

Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό της (2.1) παρατηρούμε ότι,

$$\psi_{\mathbf{a}}(\sum_{j=1}^m a_j u_j) = P(\sup_t (\sum_{j=1}^m a_j (U_j(t) - u_j)) > 0) \quad (2.89)$$

Από τη μια έχουμε ότι για κάθε $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{A}$ και για κάθε $t > 0$ και από το γεγονός $\{U_1(t) > u_1, \dots, U_m(t) > u_m\}$ συνεπάγεται $\{\sum_{j=1}^m a_j (U_j(t) - u_j) > 0\}$. Οπότε έχουμε,

$$\psi_{SIM}(\tilde{u}) \leq \psi_{\mathbf{a}}(\sum_{j=1}^m a_j u_j)$$

Για κάθε $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{A}$.

Από την άλλη μεριά έχουμε, για κάθε $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{A}$ και για κάθε $t > 0$ και από το γεγονός $\{\sum_{j=1}^m a_j (U_j(t) - u_j) > 0\}$ συνεπάγεται ότι το γεγονός $\{U_j(t) > u_j\}$ θα ισχύει τουλάχιστον για ένα j .

Οπότε έχουμε, $\psi_{OR}(\tilde{u}) \geq \psi_{\mathbf{a}}(\sum_{j=1}^m a_j u_j)$ Για κάθε $(a_1, \dots, a_m) \in \mathbf{A}$.

Στην ακόλουθη πρόταση ανακεφαλαιώνουμε τα προηγούμενα.

Πρόταση 2.5

Έστω $\mathbf{A} = \{(a_1, \dots, a_m) : a_j \geq 0, j = 1, \dots, m, \text{ και } \sum_{j=1}^m a_j > 0\}$ τότε έχουμε

$$(1) \psi_{\min}(u_{(m)}) \leq \psi_{SIM}(\tilde{u}) \leq \inf_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}} \psi_{\mathbf{a}}(\sum_{j=1}^m a_j u_j)$$

$$(2) \psi_{OR}(u_{(m)}) \geq \psi_{\max}(\tilde{u}) \geq \sup_{\mathbf{a} \in \mathbf{A}} \psi_{\mathbf{a}}(\sum_{j=1}^m a_j u_j)$$

Πρόταση 2.6

Έστω δύο πολυδιάστατα μοντέλα M_1, M_2 με ίδιους ρυθμούς είσπραξης ασφαλίσεων, το πλήθος των ζημιών και στις δυο περιπτώσεις να είναι διαδικασία Poisson με ίδια ένταση, αλλά τα μεγέθη των ζημιών να είναι διαφορετικά, $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ και $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)$. Αν $\mathbf{X} \geq_{sm} \mathbf{Y}$ τότε,

$$(1) \psi_{\min}^X(u) \geq \psi_{\min}^Y(u)$$

$$(2) \psi_{\max}^X(u) \leq \psi_{\max}^Y(u)$$

$$(3) \psi_{SUM}^X(u) \geq \psi_{SUM}^Y(u)$$

Το μονοδιάστατο μοντέλο που δείξαμε στη πρόταση 2.5 ισχύει για κάθε διάνυσμα \mathbf{X} αν το διάνυσμα ικανοποιεί μια ιδιότητα, τότε μπορούμε να βρούμε ένα φράγμα. Αλλά πρώτα θα δώσουμε τον ορισμό της θετικά συσχετισμένης και της super modular εξάρτησης.

Ορισμός 2.11

Εστω $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ να είναι ένα πραγματικό τυχαίο διάνυσμα.

(1) Θα λέμε ότι το \mathbf{X} είναι θετικά συσχετισμένο αν,

$$E(f(\mathbf{X})g(\mathbf{X})) \geq E(f(\mathbf{X}))E(g(\mathbf{X})) \quad (2.90)$$

για κάθε αύξουσα συνάρτηση f, g ορισμένη R^m .

(2) Θα λέμε ότι το \mathbf{X} είναι *super modular* εξαρτημένο αν,

$$(X_1, \dots, X_m \geq_{sm} (X_1^I, \dots, X_m^I) \quad (2.91)$$

Όπου τα X_1^I, \dots, X_m^I είναι ανεξάρτητα, και X_j^I και $X_j, j = 1, \dots, m$ είναι ισόνομες.

Και η θετική συσχέτιση και η *super modular* εξάρτηση απορρέουν το ακόλουθο κάτω φράγμα γινομένου της από κοινού συνάρτησης κατανομής και της ουράς της.

$$P(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m) \geq \prod_{j=1}^m P(X_j \leq x_j) \quad (2.92)$$

$$P(X_1 > x_1, \dots, X_m > x_m) \geq \prod_{j=1}^m P(X_j > x_j) \quad (2.93)$$

Μερικά διανύσματα έχουν και τις δυο ιδιότητες δηλαδή και είναι θετικά συσχετισμένα και *super modular* εξαρτημένα. Όμως αν έχουν τη μια ιδιότητα δεν σημαίνει ότι έχουν και την άλλη.

Θεωρώντας ότι το πλήθος των ζημιών είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson οι Cai και Li (2005) έδειξαν ότι το κάτω όριο για την $\psi_{and}(\tilde{u})$, δείχνοντας ότι αν το διάνυσμα των ζημιών είναι συσχετισμένο τότε και το $(\sup_t U_1(t), \dots, \sup_t U_m(t))$ είναι επίσης συσχετισμένο.

Πρόταση 2.6

Για το πολυδιάστατο μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με το πλήθος των ζημιών να είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson και το διάνυσμα του μεγέθους των ζημιών να είναι θετικά συσχετισμένο τότε έχουμε,

$$\prod_{j=1}^m \psi_j(u_j) \leq \psi_{and}(\tilde{u}) \leq \psi_{OR}(\tilde{u}) \leq 1 - \prod_{j=1}^m (1 - \psi_j(u_j)) \quad (2.94)$$

Για μη αρνητικά u_1, \dots, u_m και $\psi_j(u) = P(\sup_t U_j(t) > u_j)$ με $j = 1, \dots, m$.

Πρόταση 2.7

Για το πολυδιάστατο μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με το πλήθος των ζημιών να είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson και το διάνυσμα του μεγέθους των ζημιών να είναι *super modular* εξαρτημένο τότε έχουμε,

$$\prod_{j=1}^m \psi_j(u_j) \leq \psi_{and}(\tilde{u}) \leq \psi_{OR}(\tilde{u}) \leq 1 - \prod_{j=1}^m (1 - \psi_j(u_j)) \quad (2.95)$$

Για μη αρνητικά u_1, \dots, u_m και $\psi_j(u) = P(\sup_t U_j(t) > u_j)$ με $j = 1, \dots, m$.

2.4.2 Το πολυδιάστατο μοντέλο με πολυδιάστατες τύπου φάσης κατανομές

Σε αυτή την υποενότητα θα παράγουμε κλειστούς τύπους για τα φράγματα που δώσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο θεωρώντας ότι οι ζημιές ακολουθούν πολυδιάστατες τύπου φάσης κατανομές. Μετά θα δείξουμε τα αποτελέσματα χρησιμοποιώντας τη πολυδιάστατη κατανομή Marshall-Olkin

Έστω $\{X(t), t \geq 0\}$ να είναι μια συνεχούς χρόνου αλυσίδα Markov με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων E και γεννήτορα T , στον οποίο D είναι η μόνη απορροφητική κατάσταση και όλες οι άλλες είναι μεταβατικές. Έστω $e_i, i = 1, \dots, m$ να είναι μη κενά στοχαστικά κλειστά υποσύνολα του E τέτοια ώστε $\bigcap_{i=1}^m e_i = \{D\}$ (ένα υποσύνολο του χώρου καταστάσεων ονομάζεται στοχαστικά κλειστό υποσύνολο όταν η στοχαστική διαδικασία $\{X(t), t \geq 0\}$ εισχωρήσει σε αυτό και δεν φύγει ποτέ.). Οπότε, $E = (\bigcup_{i=1}^m e_i) \cup e_0$ για κάποιο υποσύνολο $e_0 \subset E$ με $e_0 \cap e_j = \emptyset$ για κάποιο $1 \leq j \leq m$. Ακόμα, ο γεννήτορας της αλυσίδας έχει τη μορφή,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}\mathbf{I} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

Όπου $\mathbf{0} = (0, \dots, 0)$ είναι ένα d -διάστατο διάνυσμα, $\mathbf{I} = (1, \dots, 1)^T$ επίσης ένα d -διάστατο διάνυσμα, ο \mathbf{A} είναι ένας υπό-γεννήτορας μη μοναδικός πίνακας $d \times d$ διαστάσεων, με $d = |E| - 1$. Έστω $\mathbf{b} = (0, \mathbf{a})$ να είναι το αρχικό διάνυσμα πιθανότητας στον E τέτοιο ώστε $\mathbf{b}(D) = 0$

Ορίζουμε,

$$X_i = \inf\{t \geq 0 : X(t) \in e_i\} \quad (2.96)$$

Για απλότητα υποθέτουμε ότι $P(X_1 > 0, \dots, X_m > 0) = 1$ το οποίο σημαίνει ότι η υποκείμενη αλυσίδα Markov ξεκινάει μέσα από το e_0 σχεδόν σίγουρα. Η από κοινού κατανομή των (X_1, \dots, X_m) ονομάζεται πολυδιάστατη τύπου φάσης κατανομή και συμβολίζεται με MPH με αναπαράσταση $(\mathbf{a}, \mathbf{A}, E, e_1, \dots, e_m)$.

Λήμμα 2.5

Έστω (X_1, \dots, X_m) να ακολουθεί μια πολυδιάστατη τύπου φάσης κατανομή με αναπαράσταση $(\mathbf{a}, \mathbf{A}, E, e_1, \dots, e_m)$ με $\mathbf{A} = (a_{ij})$. Για κάποιο $S \subseteq E - \{D\}$, ας συμβολίσουμε με \mathbf{A}_S τον υπό-πίνακα του \mathbf{A} που περιέχει όλες τις μεταβάσεις από τον S στον S , και με \mathbf{a}_S να είναι το υπό-διάνυσμα του \mathbf{a} που περιέχει όλες τις πιθανότητες μετάβασης που οδηγούν στον S . Τότε,

$$(1) \quad X_j \text{ είναι τύπου φάσης κατανομημένο με αναπαράσταση } \left(\frac{\mathbf{a}_{E-e_j}}{\mathbf{a}_{E-e_j} \mathbf{I}}, \mathbf{A}_{E-e_j}, |E - e_j| \right)$$

(2) $X_{(1)} = \min\{X_1, \dots, X_m\}$ είναι τύπου φάσης κατανεμημένο με αναπαράσταση

$$\left(\frac{\mathbf{a}_{e_0}}{\mathbf{a}_{e_0} \mathbf{I}}, \mathbf{A}_{e_0}, |e_0|\right)$$

(3) $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_m\}$ είναι τύπου φάσης κατανεμημένο με αναπαράσταση

$$(\mathbf{a}, \mathbf{A}, |E|-1)$$

(4) $\sum_{i=1}^m X_i$ είναι τύπου φάσης κατανεμημένο με αναπαράσταση $(\mathbf{a}, \mathbf{L}, |E|-1)$,

όπου $\mathbf{L} = (l_{ij})$ και δίνεται από, $l_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{k(i)}$ με $k(i) = \text{το πλήθος των δεικτών μέσα από}$

$$\{j : i \notin e_j, 1 \leq j \leq m\}$$

Με τη βοήθεια το λήμματος (2.5) θα δώσουμε κλειστούς τύπους για όλα τα φράγματα των προτάσεων (2.5) και (2.6)

Πρόταση 2.8

Έστω το πολυδιάστατο μοντέλο με το πλήθος των ζημιών να είναι μια στοχαστική διαδικασία Poisson με ένταση λ , και τις ζημιές να είναι τυχαία διανύσματα τύπου φάσεως κατανεμημένα με αναπαράσταση $(\mathbf{a}, \mathbf{A}, E, e_1, \dots, e_m)$ τότε,

$$(1) \psi_j(u_j) = -\frac{\lambda}{c_j} \frac{\mathbf{a}_{E-e_j}}{\mathbf{a}_{E-e_j} \mathbf{I}} \mathbf{A}_{E-e_j}^{-1} \exp\left\{\left(\mathbf{A}_{E-e_j} - \frac{\lambda}{c_j} \mathbf{t}_0 \frac{\mathbf{a}_{E-e_j}}{\mathbf{a}_{E-e_j} \mathbf{I}} \mathbf{A}_{E-e_j}^{-1}\right) u_j\right\} \mathbf{I}, \text{ με}$$

$$\mathbf{t}_0 = -\mathbf{A}_{E-e_j} \mathbf{I}$$

$$(2) \psi_{\min}(u_{(m)}) = -\frac{\lambda}{c_{(m)}} \frac{\mathbf{a}_{e_0}}{\mathbf{a}_{e_0} \mathbf{I}} \mathbf{A}_{e_0}^{-1} \exp\left\{\left(\mathbf{A}_{e_0} - \frac{\lambda}{c_{(m)}} \mathbf{t}_0 \frac{\mathbf{a}_{e_0}}{\mathbf{a}_{e_0} \mathbf{I}} \mathbf{A}_{e_0}^{-1}\right) u_{(m)}\right\} \mathbf{I}, \text{ με } \mathbf{t}_0 = -\mathbf{A}_{e_0} \mathbf{I}$$

$$(3) \psi_{\max}(u_{(1)}) = -\frac{\lambda}{c_{(1)}} \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{a} \mathbf{I}} \mathbf{A}^{-1} \exp\left\{\left(\mathbf{A} - \frac{\lambda}{c_{(1)}} \mathbf{t}_0 \mathbf{A}^{-1}\right) u_{(1)}\right\} \mathbf{I}, \text{ με } \mathbf{t}_0 = -\mathbf{A} \mathbf{I}$$

$$(4) \psi_{SUM}\left(\sum_{j=1}^m u_j\right) = -\frac{\lambda}{\sum_{j=1}^m c_j} \mathbf{a} \mathbf{L}^{-1} \exp\left\{\left(L - \frac{\lambda}{\sum_{j=1}^m c_j} \mathbf{t}_0 \mathbf{a} \mathbf{L}^{-1}\right) \left(\sum_{j=1}^m u_j\right)\right\} \mathbf{I}$$

$$\text{με } \mathbf{t}_0 = -\mathbf{L} \mathbf{I}$$

Τώρα θα δείξουμε ένα αποτέλεσμα χρησιμοποιώντας την πολυδιάστατη Marshal Olkin κατανομή.

Έστω λοιπόν $\{E_S, S \subseteq \{1, \dots, m\}\}$ να είναι μια ακολουθία από εκθετικά κατανεμημένες τ.μ. με E_S

Να έχει μέση τιμή $\frac{1}{\lambda_S}$. Ορίζουμε,

$$X_j = \min\{E_j : j \in S\} \tag{2.97}$$

Η από κοινού κατανομή των (X_1, \dots, X_m) ονομάζεται Marshal-Olkin κατανομή με παραμέτρους $\{\lambda_s, S \subseteq \{1, \dots, m\}\}$ (Marshal και Olkin 1967)

Ως συνέπεια από τη (2.97) έχουμε ότι κάθε Marshal-Olkin κατανομή είναι θετικά συσχετισμένη αλλά και super modular εξαρτημένη. Οπότε από τη πρόταση (3.5) έχουμε

$$\left(\prod_{j=1}^m \frac{1}{1+\theta_j}\right) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \frac{\theta_j}{1+\theta_j} \left(\sum_{S:j \in S} \lambda_S u_j\right)\right) \leq \psi_{and}(\tilde{u}),$$

$$1 - \left(\prod_{j=1}^m \frac{1}{1+\theta_j}\right) \exp\left(-\sum_{j=1}^m \frac{\theta_j}{1+\theta_j} \left(\sum_{S:j \in S} \lambda_S u_j\right)\right) \geq \psi_{and}(\tilde{u})$$

Για κάθε μη αρνητικά (u_1, \dots, u_m) και με $\theta_j = \left(\sum_{S:j \in S} \lambda_S\right) \frac{c_j}{\lambda} - 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ

3.1 Το δισδιάστατο μοντέλο κινδύνων με αναλογική αντασφάλιση

Αντασφαλιστική είναι μια συμφωνία μεταξύ του ασφαλιστή και το αντασφαλιστή κάτω από την οποία οι ζημιές μοιράζονται κατά τα συμφωνηθέντα. Έτσι η ασφαλιστική εταιρία έχει εκχωρήσει ένα μέρος του κινδύνου στην αντασφαλιστική εταιρεία. Ένα απλό παράδειγμα αντασφάλισης είναι η αναλογική αντασφάλιση, στην οποία η ασφαλιστική εταιρεία πληρώνει ένα ποσοστό της ζημιάς έστω a και η αντασφαλιστική εταιρεία $1 - a$, με $a < 1$. Αν το ποσοστό a μπορεί να αλλάξει ανάλογα με το κίνδυνο που θέλει να αναλάβει η ασφαλιστική εταιρεία τότε αυτή ονομάζεται δυναμική αναλογική αντασφάλιση. Πολλοί ερευνητές έχουν ασχοληθεί με αυτό το πρόβλημα αλλά στο μονοδιάστατο μοντέλο.

3.1.1 Δυναμική αναλογική αντασφάλιση

Ορίζεται ένας χώρος πιθανότητας $(\Omega, \mathfrak{F}, P)$ και ένα φιλτράρισμα $\{\mathfrak{F}_t, t \geq 0\}$. Το \mathfrak{F}_t αναπαριστά την διαθέσιμη πληροφορία στο χρόνο t , και κάθε απόφαση παίρνεται πάνω σε αυτή. Υποθέτουμε ότι ένα ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο αποτελείται από δύο υπό-χαρτοφυλάκια $\{X_t^a\}, \{Y_t^b\}$ και έστω $\{U_n, V_n\}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τ.μ. που περιγράφουν το μέγεθος των ζημιών των (X_t^a, Y_t^b) . Έστω $G(u, v)$ η από κοινού σ.κ., η οποία υποθέτουμε ότι είναι συνεχής.

Σε οποιαδήποτε στιγμή t η ασφαλιστική μπορεί να διαλέξει μια στρατηγική αναλογικής αντασφάλισης (a_t, b_t) . Αυτό σημαίνει ότι η ασφαλιστική στο χρόνο t πληρώνει $(a_t U_n, b_t V_n)$, και η αντασφαλιστική $((1 - a_t)U_n, (1 - b_t)V_n)$. $a = \{a_t\}, b = \{b_t\}$ αποδεκτές στρατηγικές αν οι διαδικασίες είναι στο διάστημα $[0, 1]$.

Με ℓ συμβολίζουμε το σύνολο των αποδεκτών στρατηγικών. Οπότε το μοντέλο είναι,

$$\begin{bmatrix} X_t^a \\ Y_t^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_0^t c_1(a_s) ds \\ \int_0^t c_2(b_s) ds \end{bmatrix} - \sum_{n=1}^{N(t)} \begin{bmatrix} a_{\sigma_n} U_n \\ b_{\sigma_n} V_n \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Όπου u_1, u_2 είναι τα αρχικά κεφάλαια των $\{X_t^a\}, \{Y_t^b\}$ αντίστοιχα, $c_1(a_t), c_2(b_t)$ είναι ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών από την ασφαλιστική για το κάθε υπό-πορτοφόλιο στο χρόνο t . Υποθέτουμε ότι τα $c_1(a_t), c_2(b_t)$ είναι συνεχείς ως προς a, b αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι αν $a = b = 0$ τότε τα $c_1(0), c_2(0)$ είναι αυστηρά αρνητικά. Διαφορετικά η ασφαλιστική θα ασφάλιζε όλο το χαρτοφυλάκιο στην αντασφαλιστική οπότε θα υπήρχε βέβαιο κέρδος.

Έστω c_1, c_2 τα ασφάλιστρα που θα εισέπραττε η ασφαλιστική αν δεν υπήρχε αντασφάλεια, τότε $c_1(a_t) \leq c_1, c_2(b_t) \leq c_2$. Αν το πλήθος των ζημιών είναι στοχαστική διαδικασία Poisson ένταση λ και ανεξάρτητη από (U_n, V_n) . Τότε η συνθήκη καθαρού κέρδους είναι

$c_1 > \lambda E(U_n), c_2 > \lambda E(V_n), a_{\sigma_n} U_n, b_{\sigma_n} V_n$ είναι το ποσό που πληρώνει η ασφαλιστική εταιρεία στο χρόνο σ_n (ο χρόνος που θα έρθει η n -οστή απαίτηση).

Στη πραγματικότητα, αν η ασφαλιστική έχει ένα πολυδιάστατο μοντέλο κινδύνου, τότε προσαρμόζει το κεφάλαιο για όλα τα υποχαρτοφυλάκια. Αν το κεφάλαιο προσαρμοστεί καλά τότε η ασφαλιστική λειτουργεί ομαλά. Έτσι τους αναλογιστές τους ενδιαφέρει περισσότερο πως συσσωρευτική ζημιά επηρεάζει την εταιρεία. Οπότε και εμείς θα επικεντρωθούμε στο συσσωρευτικό πλεόνασμα.

$$R_t^{a,b} = X_t^a + Y_t^b = u + \int_0^t (c_1(a) + c_2(b)) ds - \sum_{n=1}^{N(t)} (a_{\sigma_n} U_n + b_{\sigma_n} V_n) \quad (3.2)$$

με $u = u_1 + u_2$. Ο χρόνος χρεοκοπίας ορίζεται ως,

$$\tau_{a,b} = \{t \geq 0 : R_t^{a,b} < 0\} \quad (3.3)$$

Ο οποίος δείχνει πότε το άθροισμα θα είναι αρνητικό.

Η πιθανότητα χρεοκοπίας ορίζεται ως,

$$\psi_{a,b}(u) = P(\tau_{a,b} < \infty / R_0^{a,b} = u) \quad (3.4)$$

Η αντίστοιχη πιθανότητα επιβίωσης είναι,

$$\delta_{a,b}(u) = P(\tau_{a,b} = \infty / R_0^{a,b} = u) \quad (3.5)$$

Το κριτήριο για να βρούμε τη βέλτιστη στρατηγική είναι να μεγιστοποιήσουμε τη πιθανότητα επιβίωσης από την πλευρά της ασφαλιστικής δηλαδή,

$$\delta(u) = \sup_{(a,b) \in \ell} \delta_{a,b}(u) \quad (3.6)$$

Συμβολίζουμε με (a^*, b^*) τη βέλτιστη στρατηγική $\{R_t\}$ η διαδικασία πλεονάσματος κάτω από τη βέλτιστη στρατηγική και τ^* ο χρόνος χρεοκοπίας της.

3.1.2 Μερικές ιδιότητες του $\delta(u)$

Πρώτα θα δώσουμε μερικές ιδιότητες του $\delta(u)$.

Λήμμα 3.1.

Για κάθε στρατηγική (a, b) , με πιθανότητα 1 ήττες συμβαίνει χρεοκοπία είτε $\lim_{t \rightarrow \infty} R_t^{a,b} = \infty$

Απόδειξη βλέπε: Yan Li και Guoxin Liu (2012)

Λήμμα 3.2.

Η πιθανότητα επιβίωσης $\delta(u)$ είναι αυστηρός αύξουσα.

3.1.3 HJB Εξισώσεις και θεώρημα επαλήθευσης.

Σε αυτή την υποενότητα θα δώσουμε την εξίσωση Hamilton-Jacobi-Bellman συσχετισμένη με το πρόβλημα μας και θα δώσουμε την απόδειξη στο θεώρημα επαλήθευσης.

Έστω $(a, b) \in [0, 1]$ να είναι δυο αυθαίρετες σταθερές και $\varepsilon > 0$. Αν το αρχικό κεφάλαιο $u = 0$ υποθέτουμε ότι $c_1(a) + c_2(b) \geq 0$ έτσι ώστε να αποφύγουμε την άμεση χρεοκοπία. Αν $u > 0$, υποθέτουμε $h > 0$ και αρκετά μικρό τέτοιο ώστε $u + h(c_1(a) + c_2(b)) > 0$. Ορίζουμε,

$$(u_t^1, u_t^2) = \begin{cases} (a, b) & \text{για } t \leq \sigma_1 \wedge h \\ (a_{t-(\sigma_1 \wedge h)}^\varepsilon, b_{t-(\sigma_1 \wedge h)}^\varepsilon) & \text{για } t > \sigma_1 \wedge h \end{cases} \quad (3.7)$$

Όπου $(a_t^\varepsilon, b_t^\varepsilon)$ οι στρατηγικές που ικανοποιούν $\delta_{a_t^\varepsilon, b_t^\varepsilon} > \delta(x) - \varepsilon$. Η πρώτη ζημία συμβαίνει με πυκνότητα $\lambda e^{-\lambda t}$ και $P(\sigma_1 > h) = e^{-\lambda h}$. Δεσμεύοντας στην $\mathfrak{T}_{\sigma_1 \wedge h}$ έχουμε,

$$\begin{aligned} \delta(u) &\geq \delta_{u^1, u^2}(u) = e^{-\lambda h} \delta_{a_t^\varepsilon, b_t^\varepsilon}(u + h(c_1(a) + c_2(b))) \\ &+ \int_0^h \int_0^{\frac{u+h(c_1(a)+c_2(b))}{a}} \int_0^{\frac{u+(t-ax)(c_1(a)+c_2(b))}{b}} \delta_{a_t^\varepsilon, b_t^\varepsilon}(u + t(c_1(a) + c_2(b)) - au - bv) \\ &\times dG(u, v) \lambda e^{-\lambda t} dt \\ &\geq e^{-\lambda h} \delta(u + h(c_1(a) + c_2(b))) \\ &+ \int_0^h \int_0^{\frac{u+h(c_1(a)+c_2(b))}{a}} \int_0^{\frac{u+(t-ax)(c_1(a)+c_2(b))}{b}} \delta(u + t(c_1(a) + c_2(b)) - au - bv) \\ &\times dG(u, v) \lambda e^{-\lambda t} dt - \varepsilon \end{aligned} \quad (3.8)$$

Επειδή το ε είναι αυθαίρετο, έστω $\varepsilon = 0$ τότε η 3.8 γίνεται,

$$\begin{aligned} &\frac{\delta(u + h(c_1(a) + c_2(b)) - \delta(u))}{h} - \frac{1 - e^{-\lambda h}}{h} \delta(u + h(c_1(a) + c_2(b))) \\ &+ \frac{1}{h} \int_0^h \int_0^{u/a} \int_0^{(u-ax)/b} \delta(u + t(c_1(a) + c_2(b)) - au - bv) dG(u, v) - \lambda \delta(u) \leq 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Και αν υποθέσουμε ότι η $\delta(u)$ είναι παραγωγίσιμη και $h \rightarrow 0$ έχουμε,

$$(c_1(a) + c_2(b))\delta'(u) + \lambda \int_0^{u/a} \int_0^{(u-ax)/b} \delta(u - ax - by) dG(x, y) - \lambda \delta(u) \leq 0 \quad (3.10)$$

Για όλα τα $(a, b) \in \ell$ η 3.10 ισχύει. Πρώτα θεωρούμε μια HJB εξίσωση,

$$\sup_{(a,b) \in [0,1] \times [0,1]} (c_1(a) + c_2(b))f'(u) + \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty f(u - ax - by) dG(x, y) - \lambda f(u) \leq 0 \quad (3.11)$$

Προς στιγμήν, δεν είμαστε σίγουροι αν η $\delta(u)$ ικανοποιεί μια HJB εξίσωση και απλά εικάζουμε ότι η $\delta(u)$ είναι μια λύση της και για αυτό την αντικαθιστούμε με την $f(u)$. Καθώς η $\delta(u)$ είναι μια συνάρτηση επιβίωσης, ενδιαφερόμαστε για μια συνάρτηση $f(x)$ η

οποία πρέπει να είναι αυστηρώς αύξουσα, $f(x) = 0$ για $x < 0$ και $f(0) > 0$. καθώς η συνάρτηση της οποίας πήραμε το supremum είναι συνεχής ως προς a, b και στο $[0,1] \times [0,1]$ είναι συμπαγής, για $u \geq 0$ υπάρχουν τιμές $a(u), b(u)$ τέτοιες ώστε να φτάνουν το supremum. Επίσης για να ισχύει η 3.11 θα πρέπει να ισχύει και $c_1(a) + c_2(b) \geq 0$, επιπλέον για να ισχύει $c_1(a) + c_2(b) \geq 0$ πρέπει να ισχύει και $P(aU_n + b_n V > 0) > 0$. ξαναγράφουμε τη 3.11

$$\sup_{(a,b) \in F} (c_1(a) + c_2(b))f'(u) + \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty f(u - ax - by) dG(x, y) - \lambda f(u) = 0 \quad (3.12)$$

Όπου $F = \{(a, b) \in [0,1] \times [0,1] : c_1(a) + c_2(b) > 0\}$ και $u \geq 0$. Ορίζουμε επίσης $\frac{u}{0} = \infty$

Από τη 3.12 έχουμε,

$$f'(u) \leq + \frac{\lambda}{c_1(a) + c_2(b)} (f(u) - \int_0^\infty \int_0^\infty f(u - ax - by) dG(x, y)) \quad (3.13)$$

Για $(a, b) = (a^*, b^*)$ ισχύει η ανισότητα. Τότε η $f(u)$ επίσης θα ικανοποιεί την παρακάτω εξίσωση,

$$f'(u) = \inf_{(a,b) \in F} \frac{\lambda}{c_1(a) + c_2(b)} (f(u) - \int_0^\infty \int_0^\infty f(u - ax - by) dG(x, y)) \quad (3.14)$$

Οι εξισώσεις 3.10 και 3.14 είναι ισοδύναμες μόνο για αυστηρά αύξουσες συναρτήσεις.

Θεώρημα 3.1.

Υπάρχει μια μοναδική λύση για την HJB εξίσωση (3.14) με $f(0) = 1$. Η λύση είναι φραγμένη, αυστηρώς αύξουσα και συνεχώς παραγωγίσιμη.

Απόδειξη βλέπε: Yan Li και Guoxin Liu (2012)

Θεώρημα 3.2. (Θεώρημα επαλήθευσης)

Έστω $f(u)$ να είναι η μοναδική λύση της HJB εξίσωσης (3.12) με $f(0) = 1$. Τότε

$f(u) = \frac{\delta(u)}{\delta(0)}$. Μια βέλτιστη στρατηγική δίνεται από (a^*, b^*) , η οποία ελαχιστοποιεί την 3.12,

και $\{R_t\}$ είναι η διαδικασία κάτω από αυτή τη στρατηγική

Απόδειξη:

Έστω (a, b) μια αυθαίρετη στρατηγική με τη στοχαστική της διαδικασία $\{R_t^{a,b}\}$. αφού η $f(u)$ είναι φραγμένη για $t \geq 0$ έχουμε,

$$E\left(\sum_{n: \sigma_n \leq t} |f(R^{a,b}(\sigma_n)) - f(R^{a,b}(\sigma_n -))|\right) < \infty \quad (3.15)$$

Έστω A ο γεννήτορας του $\{R_t^{a,b}\}$. Από το θεώρημα 11.2.2 Rolski et al.[14], ξέρουμε ότι $f \in D$ και $\Delta(A)$ το πεδίο ορισμού του A , τότε,

$$f(R_{\tau_{a,b} \wedge t}^{a,b}) - \int_0^{\tau_{a,b} \wedge t} (c(a) + c(b))f'(R_s^{a,b}) + \lambda \left(\int_0^{R_t^{a,b}/a} \int_0^{(R_t^{a,b} - ax)/b} f(R_s^{a,b} - ax - by) dG(x, y) - f(R_s^{a,b}) \right) ds \quad (3.16)$$

Είναι ένα martingale. Από την (3.12) ξέρουμε $\{f(R_t^{a,b})I_{(\tau_{a,b} > t)}\}$ είναι ένα supermartingale, τότε,

$$E(f(R_t^{a,b})I_{(\tau_{a,b} > t)}) = E(f(R_{\tau_{a,b} \wedge t}^{a,b})) \leq f(u) \quad (3.21)$$

Αν $(a, b) = (a^*, b^*)$, τότε $\{f(R_t^{a^*, b^*})\}$ είναι ένα martingale οπότε $E(f(R_t)I_{(\tau^* > t)}) = f(u)$. Έστω $t \rightarrow \infty$ τότε από τη φραγμένη ιδιότητα της $f(u)$ έχουμε

$$f(\infty)\delta_{a,b}(u) = f(\infty)P(\tau_{a,b} = \infty) \leq f(u) = f(\infty)\delta_{a^*, b^*}(u) = \delta(u)f(\infty) \quad (3.22)$$

Για $u = 0$, παίρνουμε ότι $f(\infty) = \frac{1}{\delta(0)}$. Επίσης $\delta(u) = \frac{f(u)}{f(\infty)} = f(u)\delta(0)$. Άρα η στρατηγική (a^*, b^*) είναι η βέλτιστη.

3.1.4 Φράγματα Lundberg και αλλαγή μέτρου.

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε, θεωρώντας δυναμική αναλογική αντασφάλεια ότι κλειστός τύπος για τη πιθανότητα χρεοκοπίας είναι δύσκολο να παραχθεί. Για αυτό το λόγο αυτό οι ασυμπτωτικές βέλτιστες στρατηγικές είναι πολύ σημαντικές. Στη κλασική θεωρία κινδύνου έχουμε τα φράγματα Lundberg και την προσέγγιση Cramer-Lundberg για τη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Τα φράγματα Lundberg μας δίνουν το πάνω και το κάτω φράγμα της πιθανότητας χρεοκοπίας ενώ η προσέγγιση Cramer-Lundberg την ασυμπτωτική συμπεριφορά της όσο το αρχικό απόθεμα τείνει στο άπειρο. Για το διδιάστατο μοντέλο με δυναμική αντασφάλιση θα προσπαθήσουμε να δώσουμε ανάλογα αποτελέσματα. Το κλειδί για την ασυμπτωτική συμπεριφορά είναι ο συντελεστής προσαρμογής.

Υποθέτουμε ότι $E(e^{r(U+V)}) < \infty, r > 0$. Για σταθερό (a, b) , έστω $R(a, b)$ να είναι ο συντελεστής προσαρμογής που ικανοποιείται από,

$$\theta(r; a, b) := \lambda(E(e^{r(aU+bV)} - 1) - r(c_1(a) + c_2(b))) = 0 \quad (3.23)$$

Θα επικεντρωθούμε στο $R = \sup_{(a,b) \in [0,1] \times [0,1]} R(a, b)$, που είναι ο συντελεστής προσαρμογής στο

πρόβλημα μας. Από υπόθεση τα $c_1(a), c_2(b)$ είναι συνεχείς, τότε $\theta(r; a, b)$ θα είναι και αυτή συνεχείς ως προς a, b , πιο συγκεκριμένα

$$\frac{\partial^2 \theta(r; a, b)}{\partial r^2} = \lambda E((aU + bV)^2 e^{r(aU + bV)}) > 0 \quad (3.24)$$

$$\theta(0; a, b) = 0, \theta(R(a, b); a, b) = 0$$

Μπορούμε να πούμε ότι η $\theta(r; a, b)$ είναι αυστηρώς κυρτή συνάρτηση ως προς r και $\theta(R; a, b) > 0$. Αν $r < R$, τότε υπάρχουν a, b τέτοια ώστε $R(a, b) > r$ και $\theta(R; a, b) < 0$. Επειδή $\theta(R; a, b)$ είναι συνεχείς ως προς a, b και επειδή $[0, 1] \times [0, 1]$ είναι συμπαγές, υπάρχουν a', b' για τα οποία ισχύει $\theta(R; a', b') = 0$.

Λήμμα 3.4.

Έστω $M(r; a, b) = E(e^{r(aU + bV)})$, $c_1(a), c_2(b)$ να είναι δύο φορές παραγωγίσιμες ως προς r, a, b . Πιο συγκεκριμένα αν,

$$c_1''(a) \leq 0, c_2''(b) \leq 0 \quad (3.25)$$

Τότε η $R(a, b)$ έχει ένα μοναδικό μέγιστο.

Απόδειξη βλέπε: Yan Li και Guoxin Liu (2012)

Θεώρημα 3.3.

Η ελάχιστη πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u)$ είναι φραγμένη από το e^{-Ru} , δηλαδή $\psi(u) < e^{-Ru}$.

Απόδειξη:

Για σταθερή αναλογική αντασφάλιση (a', b') , η $\psi_{a', b'}(u)$ μπορεί να υπολογιστεί όπως και στο κλασσικό μοντέλο, οπότε έχουμε,

$$\psi_{a', b'}(u) = P(\tau < \infty) = E^{(R)}(\exp(RR_{\tau_{a', b'}}^{a', b'}))e^{-Ru} < e^{-Ru} \quad (3.25)$$

Άρα η ελάχιστη πιθανότητα είναι φραγμένη από, $\psi(u) \leq \psi_{a', b'}(u) < e^{-Ru}$.

Από το θεώρημα 3.3, ο συντελεστής προσαρμογής μπορεί να θεωρηθεί σαν μέτρο κινδύνου για να εκτιμήσει τη βέλτιστη πιθανότητα χρεοκοπίας.

Ορίζουμε μια στρατηγική την οποία θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω. Αν $u < 0$, και θέτουμε $a^*(u) = b^*(u) = 1$. Για να βρούμε το κάτω όριο, θα αρχίσουμε ορίζοντας τη διαδικασία M_t .

$$\begin{aligned} M_t &= \exp(-R(R_t - u) - \int_0^t \theta(R; a^*(R_s), b^*(R_s)) ds) = \\ &= \exp\left\{ \sum_{n=1}^{N(t)} R(a^*(R_{\sigma_n})U + b^*(R_{\sigma_n})V) - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t \lambda [E\{\exp\{R(a^*(R_s)U + b^*(R_s)V)\} - 1] ds \right\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Λήμμα 3.5.

Η διαδικασία M_t είναι αυστηρά ένα martingale με αναμενόμενη τιμή ένα.

Βασισμένοι στο martingale M_t που ορίσαμε παραπάνω, θα θεωρήσουμε μια οικογένεια από νέα μέτρα $P_t^* = E(M_t; A)$, $A \in \mathfrak{F}_t$. Από το θεώρημα επέκτασης του Kolmogorov, υπάρχει μέτρο πιθανότητας P^* τέτοιο ώστε όταν είναι περιορισμένο στη \mathfrak{F}_t τότε είναι P_t^* . Εξάλλου αν T είναι \mathfrak{F}_t - χρόνος τερματισμού και $A \subset \{T < \infty\}$ τέτοιο ώστε $A \in \mathfrak{F}_t$, τότε $P^*(A) = E(M_T; A)$. Η αλλαγή μέτρου είναι πολύ ισχυρή τεχνική για την έρευνα της πιθανότητας χρεοκοπίας.

Απόδειξη βλέπε: Yan Li και Guoxin Liu (2012)

Θεώρημα 3.4.

Κάτω από το νέο μετρό P^* , η διαδικασία $\{R_t\}$ είναι μια μερικώς ντετερμινιστική διαδικασία

Markov (M.N.A.M. εν συντομία) με ένταση μεταπήδησης $\lambda^* = \lambda E(e^{R(a^*(x)U + b^*(x)V)})$

και η κατανομή των ζημιών είναι,

$$G_x^*(u, v) = \frac{1}{E(e^{R(a^*(x)U + b^*(x)V})}) \int_0^u \int_0^v e^{R(a^*(x)r + b^*(x)s)} dG(r, s) \quad (3.27)$$

Οι ρυθμοί είσπραξης των ασφαλιστρών είναι $c_1(a^*(x)), c_2(b^*(x))$ αντίστοιχα.

Θεώρημα 3.4.

Εστω

$$C_- = \inf_z \frac{1}{E(e^{R(U+V-z)} / U + V > z)} \quad (3.28)$$

Με το z να είναι μέσα από το σύνολο $\{z : P(U + V > z) > 0\}$ τότε $\psi(u) \geq C_- e^{-Ru}$.

Απόδειξη βλέπε: Yan Li και Guoxin Liu (2012)

3.1.5 Η προσέγγιση του Cramer-Lundberg

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε την ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\psi(x)e^{Rx}$, η οποία αποκαλείτε προσέγγιση Cramer-Lundberg. Από το θεώρημα του Fubini, μετασχηματίζουμε τη παρακάτω συνάρτηση.

Για διευκόλυνση θέτουμε $H = a^*(x)U + b^*(x)V$.

$$\begin{aligned}
& \int_0^{x/a^*(x)} \int_0^{(x-ua^*(x))/b^*(x)} \psi(x-ua^*(x)-vb^*(x))dG(u,v) \\
&= \int_0^{x/a^*(x)} \int_0^{(x-ua^*(x))/b^*(x)} \left(\int_0^{x-ua^*(x)-vb^*(x)} \psi'(z)dz + \psi(0) \right) dG(u,v) \\
&= \psi(0)P(H < x) + \int_0^x \int_0^{x-r} \psi'(z)dzdG_H(r) \\
&= \psi(0)P(H < x) + \int_0^x \int_0^{x-z} dG_H(r)\psi'(z)dz \\
&= \psi(0)P(H < x) + \int_0^x P(H < x-z)\psi'(z)dz \tag{3.29} \\
&= \psi(0) \int_0^{x/a^*(x)} \int_0^{(x-ua^*(x))/b^*(x)} dG(u,v) \\
&+ \int_0^x \left(\int_0^{(x-z)/a^*(x)} \int_0^{(x-ua^*(x))/b^*(x)} dG(u,v) \right) \psi'(z)dz \\
&= \psi(0) \int_0^{x/a^*(x)} \int_0^{(x-ua^*(x))/b^*(x)} dG(u,v) + \int_0^x \psi'(z)G_H(x-z)dz
\end{aligned}$$

Και αφού η $\psi(x) = 1 - \delta(x)$ τότε η HJB εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως ακολούθως,

$$\begin{aligned}
& (c_1(a^*(x)) + c_2(b^*(x)))\psi'(x) \\
&+ \lambda(1 - G_H(x) - \psi(0)(1 - G_H(x)) - \int_0^x \psi'(z)(1 - G_H(x-z))dz) = 0 \tag{3.30}
\end{aligned}$$

Θέτουμε $f(x) = \psi(x)e^{Rx}$ και $\psi'(x)e^{Rx} = f'(x) - Rf(x)$ και

$$\begin{aligned}
& (c_1(a^*(x)) + c_2(b^*(x)))(f'(x) - Rf(x)) \\
&+ \lambda(\delta(0)e^{Rx}(1 - G_H(x) + \int_0^x (Rf(z) - f(z))e^{Rx}(1 - G_H(x-z))dz) = 0 \tag{3.31}
\end{aligned}$$

Αφού η $\psi(x)$ είναι αυστηρά φθίνουσα, τότε και η $\psi'(x)e^{Rx} < 0$. Έτσι και η $f'(x) < Rf(x)$. Άρα η $f'(x)$ είναι φραγμένη. Θέτοντας $g(x) = f'(x) - Rf(x)$, παίρνουμε,

$$\begin{aligned}
& -(c_1(a^*(x)) + c_2(b^*(x)))g(x) \\
&+ \lambda(\delta(0)e^{Rx}(1 - G_H(x) + \int_0^x g(z)e^{Rx}(1 - G_H(x-z))dz) = 0 \tag{3.32}
\end{aligned}$$

Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης έχουμε,

$$\begin{aligned}
& -(c_1(a^*(x)) + c_2(b^*(x)))g(x) \\
&+ \lambda(\delta(0)e^{Rx}(1 - G_H(x) + \int_0^x g(x-y)e^{Ry}(1 - G_H(y))dy) = 0 \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τα $a^*(x), b^*(x)$ με a', b' θα πάρουμε την ανισότητα

$$\begin{aligned}
& - (c_1(a') + c_2(b'))g(x) \\
& + \lambda(\delta(0)e^{Rx}(1 - G_{a'U+b'V}(x)) + \int_0^x g(x-y)e^{Ry}(1 - G_{a'U+b'V}(y))dy) \geq 0
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Θέτουμε ως $H' = a'U + b'V$.

Παρατήρηση 3.1

$$\begin{aligned}
E(e^{RH'}) &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{RH'} dG(u, v) \\
&= \int_0^\infty e^{Rx} dG_{H'}(x) \\
&= 1 + R \int_0^\infty e^{Ry}(1 - G_{H'}(y))dy
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Από τον ορισμό των a', b' ,

$$\lambda(E(e^{RH'}) - 1) = R(c_1(a') + c_2(b')) \tag{3.36}$$

Έτσι $c_1(a') + c_2(b') = \lambda \int_0^\infty e^{Ry}(1 - G_{H'}(y))dy$. Αντικαθιστώντας την στην ανισότητα 3.34 παίρνουμε,

$$\begin{aligned}
& - g(x)\lambda \int_0^\infty e^{Ry}(1 - G_{H'}(y))dy \\
& + \lambda(\delta(0)e^{Rx}(1 - G_{a'U+b'V}(x)) + \int_0^x g(x-y)e^{Ry}(1 - G_{a'U+b'V}(y))dy) \geq 0
\end{aligned} \tag{3.37}$$

Μετά από μετασχηματισμούς

$$\begin{aligned}
& \int_0^x e^{Ry}(g(x-y) - g(x))(1 - G_{H'}(y))dy \\
& \geq g(x) \int_x^\infty e^{Ry}(1 - G_{H'}(y))dy - e^{Rx}\delta(0)(1 - G_{H'}(x))
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Από το λήμμα A.12 στον Schmidli [13], ξέρουμε $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{Rx}(1 - G_{H'}(x)) = 0$.

Λήμμα 3.6

1. $g(x)$ είναι φραγμένη. Πιο συγκεκριμένα η $f'(x)$ είναι φραγμένη.
2. Έστω $\xi = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{R}$ τότε $\limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) = \xi$. Επίσης $\xi > 0$ αν $C_- > 0$
3. Για κάθε $\beta > 0, x_0 > 0, \varepsilon > 0$ υπάρχει $x \geq x_0$ τέτοιο ώστε $f(y) > \xi - \varepsilon$ για $y \in [x - \beta, x]$.

Απόδειξη βλέπε: Yan Li και Guoxin Liu (2012)

Θεώρημα 3.5.

Έστω $C_- > 0$. Τότε το $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{Rx} \psi(u) = \xi > 0$.

Απόδειξη:

Διαλέγουμε $\beta > 0, \varepsilon > 0$. Υπάρχει $x_0 \geq \beta$ τέτοιο ώστε $f(x) > \xi - \varepsilon$ για $x \in [x_0 - \beta, x_0]$. Αν $x \geq 2x_0$

Ορίζουμε $T = \inf\{t > 0, R_t < x_0\}$ τότε,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= E^*(\exp\{RR_T + \int_0^{r^*} \theta(R; a^*(R_s), b^*(R_s)) ds\}) \\
 &= E^*(E^*(\exp\{RR_T + \int_0^{r^*} \theta(R; a^*(R_s), b^*(R_s)) ds\} / \mathfrak{F}_T)) \\
 &= E^*(E^*(\exp\{RR_T + \int_0^{r^*} \theta(R; a^*(R_s), b^*(R_s)) ds\} / R_T)) \quad (3.39) \\
 &\exp\{\int_0^T \theta(R; a^*(R_s), b^*(R_s)) ds\} \\
 &\geq E^*(f(R(T))) \geq E^*(f(R(T))I_{(x_0 - \beta \leq R_T \leq x_0)}) \\
 &> (\xi - \varepsilon)P(x_0 - R_T \leq \beta)
 \end{aligned}$$

Διαλέγοντας κατάλληλο β , μπορούμε να πάρουμε $P^*(x_0 - R_T \leq \beta) > 1 - \varepsilon$. Οπότε $f(x) > (\xi - \varepsilon)(1 - \varepsilon)$. Έτσι,

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} f(x) \geq \xi = \limsup_{x \rightarrow \infty} f(x) \quad (3.40)$$

Και με το λήμμα 3.6 ολοκληρώνετε η απόδειξη.

Θεώρημα 3.6.

Έστω $C_- > 0$. Τότε $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$. Επιπλέον αν (a', b') είναι μοναδικά, τότε $\lim_{x \rightarrow \infty} a^*(x) = a'$ και

$$\lim_{x \rightarrow \infty} b^*(x) = b'.$$

Απόδειξη βλέπε: Yan Li και Guoxin Liu (2012)

3.2 Ένα δισδιάστατο μοντέλο της θεωρίας κινδύνου με αναλογική αντασφάλιση

Εισαγωγή

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε μια επέκταση του δισδιάστατου μοντέλου που εισήγαγε ο Avram et al (2008a). Μέχρι το τέλος θα θεωρούμε δυο ασφαλιστικές με την πρώτη ασφαλιστική οι ζημιές να γίνονται λόγω μιας σύνθετης διαδικασίας Poisson. Δεύτερος θα είναι ο αντασφαλιστής και οι ζημιές θα γίνονται σαν ένα ποσοστό του πρώτου. Θα δώσουμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου μέχρι τουλάχιστον ένας από τους δύο χρεοκοπήσει. Επίσης θα αναφέρουμε το πλεόνασμα του πρώτου ασφαλιστή όταν ο αντασφαλιστής χρεοκοπήσει σε συνάρτηση με κάποια ανοιχτά προβλήματα.

Μαθηματικά η εξέλιξη της δισδιάστατης στοχαστικής διαδικασίας συμβολίζεται ως $(\{Y_t^1, Y_t^2\}, t \geq 0)$ και περιγράφεται ως

$$\begin{cases} Y_t^1 = c_1 dt - adL_t - dS_t \\ Y_t^2 = c_2 dt - (1-a)dL_t \\ (Y_t^1, Y_t^2) = (u_1, u_2) \end{cases} \quad (3.41)$$

Η συνθήκη για θετικό κέρδος είναι

$$c_1 > aE(L) + E(S) \quad (3.42)$$

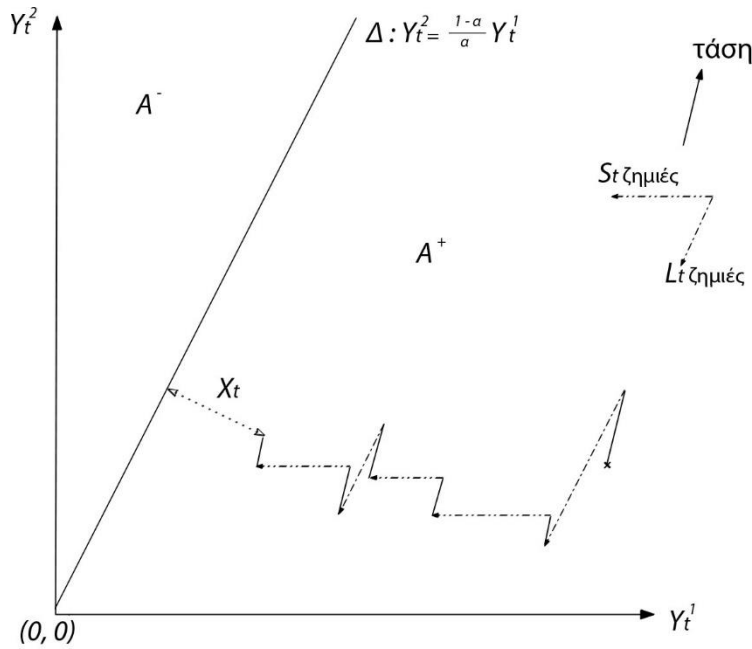
$$c_2 > (1-a)E(S) \quad (3.43)$$

Και ο χρόνος χρεοκοπίας

$$\tau = \inf\{ t \geq 0 : \min(Y_t^1, Y_t^2) < 0\} = \min(\tau_1, \tau_2) \quad (3.44)$$

3.2.1 Περιορισμοί μέσω γεωμετρικής ερμηνείας

Θα δώσουμε μια παρόμοια μεθοδολογία με αυτή του Avram et al(2008a) για να μειώσουμε το δισδιάστατο μοντέλο στο πιο προσιτό μονοδιάστατο στο οποίο πολλά από τα αποτελέσματα είναι είδη γνωστά. Στο διάγραμμα 3.1 παρατηρούμε μια δειγματική γραφική παράσταση για την εξέλιξη του δισδιάστατου μοντέλου όπως ορίστηκε στην 3.41.



Γράφημα 3.1: Δειγματική γραφική παράσταση για την εξέλιξη του δισδιάστατου μοντέλου

Ο κάθετος άξονας παριστάνει τη διαδικασία πλεονάσματος $\{Y_t^2, t \geq 0\}$ και ο οριζόντιος άξονας παριστάνει τη διαδικασία πλεονάσματος $\{Y_t^1, t \geq 0\}$. Με $\Delta \subset \mathbb{R}^2$ συμβολίζουμε την εξίσωση που η ευθεία δίνεται από $y = \frac{(1-a)}{a}x$, έστω η στοχαστική διαδικασία $\{X_t, t \geq 0\}$ η οποία ορίζεται ως $X_t = \langle \vec{u}, (Y_t^1, Y_t^2) \rangle$ (με $\langle \dots \rangle$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο) όπου $u = (1-a, a)$. Γεωμετρικά η X_t μπορεί να ερμηνευτεί σαν την αλγεβρική απόσταση (η οποία είναι ανάλογη της ευκλείδειας μετρικής) μεταξύ των $(Y_t^1, Y_t^2) \in \mathbb{R}^2$ και Δ όπως δείχνει και το γράφημα και ικανοποιεί

$$\begin{cases} dX_t = ((1-a)c_1 - ac_2)dt - (1-a)dS_t \\ X_0 = \langle \vec{u}, (y_1, y_2) \rangle = (1-a)y_1 - ay_2 \end{cases} \quad (3.45)$$

Η ευθεία Δ χωρίζει τον \mathbb{R}^2 σε δύο μη κοινά σύνολα τα A^+, A^- που ορίζονται ως,

$$A^+ := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle > 0\}$$

και

$$A^- := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 : \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle < 0\}$$

Τα σύνολα $X_t > 0$ είναι ισοδύναμα με $(Y_t^1, Y_t^2) \in A^+$ και $X_t < 0$ είναι ισοδύναμο με $(Y_t^1, Y_t^2) \in A^-$.

Επίσης εισάγουμε το χρόνο χρεοκοπίας της νέας μονοδιάστατης διαδικασίας και τη συμβολίζουμε με $\tau_x := \{t \geq 0 : X_t < 0\}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας έτσι ώστε να αποφύγουμε ασυνέπειες, αφήνουμε τη δισδιάστατη διαδικασία $(\{Y_t^1, Y_t^2\}, t \geq 0)$ να ξεκινάει από το σύνολο A^+ η ισοδύναμα ορίζουμε $X_0 = (1-a)y_1 - ay_2 > 0$.

Η διαδικασία $(\{Y_t^1, Y_t^2\}, t \geq 0)$ κινείται προς τα πάνω όσο δεν συμβαίνει καμία ζημιά σε καμία από τις δύο διαδικασίες που την αποτελούν. Όταν συμβεί ζημιά λόγω της $\{L_t, t \geq 0\}$ θα κάνει τη διαδικασία $(\{Y_t^1, Y_t^2\}, t \geq 0)$ να κινηθεί προς τα κάτω προς το σημείο $(0,0)$ παράλληλα με τη γραμμή Δ , ενώ ζημιές από την $\{S_t, t \geq 0\}$ την κάνουν να κινηθεί προς τα αριστερά προς τον κάθετο άξονα.

Ο χρόνος χρεοκοπίας όπως ορίστηκε μπορεί να εκληφθεί και ως την πρώτη φορά που η στοχαστική διαδικασία $(\{Y_t^1, Y_t^2\}, t \geq 0)$ βγαίνει από το πρώτο τεταρτημόριο. Θεωρώντας ότι η διαδικασία ξεκινάει από το A^+ , με μια πιο προσεκτική μάλιστα στο γράφημα 1, φανερώνεται ένας ανταγωνισμός μεταξύ του πρώτου περάσματος των τ_x, τ_2 . Ο ανταγωνισμός τους είναι ότι αν η διαδικασία $(\{Y_t^1, Y_t^2\}, t \geq 0)$ περάσει τον οριζόντιο άξονα πριν από το χρόνο τ_x (δηλ. $\tau_x < \tau_2$) τότε η χρεοκοπία στη δισδιάστατη διαδικασία θα οφείλεται μόνο από τη διαδικασία $\{Y_t^2, t \geq 0\}$ (δηλ. $\tau_x = \tau_2$).

Μια πιο δύσκολη ερώτηση γεννάται όταν $\tau_x \leq \tau_2$. Κάτω από αυτό το σενάριο έτσι ώστε να αναλύσουμε το χρόνο τ σχετικά με το δισδιάστατο μοντέλο όπως ορίστηκε στη 3.41, πρέπει να εισάγουμε έναν νέο περιορισμό που κάνει το σύνολο A^- σύνολο απορρόφησης το οποίο είναι,

$$\frac{c_1}{c_2} > \frac{1-a}{a} \quad (3.46)$$

Τον περιορισμό αυτό θα τον θεωρούμε σε όλη την ενότητα. Γεωμετρικά, η συνθήκη (3.46) υποθέτει ότι η κλήση της αύξησης της διαδικασίας $(\{Y_t^1, Y_t^2\}, t \geq 0)$ (λόγω της συλλογής ασφαλιστρών) ξεπερνάει την κλήση της ευθείας Δ , διαβεβαιώνοντας ότι αφού η διαδικασία εισέλθει στο σύνολο A^- , δεν θα φύγει ποτέ για να γυρίσει στο A^- . Ισοδύναμα η συνθήκη (3.46) μας εγγυάται ότι η $\{X_t > 0\}$ είναι αυστηρώς φθίνουσα, το οποίο είναι εμφανές από τη σχέση (3.45), με τη 3.46 να ικανοποιεί το δισδιάστατο μοντέλο της θεωρίας κινδύνου μπορεί να διαιρεθεί σε δύο διακριτά μονοδιάστατα μοντέλα ως ακολούθως: $\tau_2 < \tau_x$ συνεπάγει $\tau = \tau_2$ και $\tau_2 \geq \tau_x$ συνεπάγει $\tau = \tau_1$.

Το παρόν μοντέλο γενικεύει τη μελέτη του Avram et al(2008a). Μια σημαντική ιδιότητα που κάνει αυτό το πρόβλημα προσιτό είναι επειδή οι διαδικασίες $\{X_t > 0\}$ και $\{Y_t^2 > 0\}$ είναι ανεξάρτητες.

Θα ανακεφαλαιώσουμε με δύο πρακτικές πραγματικές ερμηνείες για το μοντέλο όπως ορίστηκε στην (3.41), μαζί με επιπλέον απλοποιήσεις των περιορισμών (3.42) (3.43) (3.46) .

- I. Οι $\{Y_t^1 > 0\}$, $\{Y_t^2 > 0\}$ μπορούν να θεωρηθούν σαν δύο κλάδους της ίδιας ασφαλιστικής εταιρείας, δηλαδή οι δυο κλάδοι μοιράζονται την $\{L_t > 0\}$ αναλογικά, ενώ η $\{S_t > 0\}$ είναι μόνο στο πρώτο κλάδο. Ο πρώτος κλάδος μπορεί να έχει δυο διαφορετικούς συντελεστές επιβάρυνσης στους διαφορετικούς τύπους απαιτήσεων, δηλαδή

$$c_1 = (1 + \theta_1)aE(L_1) + (1 + \theta_2)E(S_1) \quad (3.47)$$

Ενώ στο δεύτερο κλάδο υποθέτουμε διαφορετικό συντελεστή επιβάρυνσης.

$$c_2 = (1 + \theta_3)(1 - a)E(L_1) \quad (3.48)$$

Καθώς ο δεύτερος κλάδος μοιράζεται ένα ποσοστό της διαδικασίας, υποθέτουμε ότι έχει μεγαλύτερο συντελεστή επιβάρυνσης $\theta_3 > \theta_1$. Το συνολικό ασφάλιστρο που θα πληρώσουν οι ασφαλισμένοι για τη διαδικασία της συσσωρευτικής ζημιάς $\{L_t > 0\}$ είναι $(1 + \theta_1)a + (1 + \theta_3)(1 - a)E(L_1)$. Οι (3.46),(3.47),(3.48) μας οδηγούν στη συνθήκη,

$$\frac{E(L_1)}{E(S_1)} > \frac{1 + \theta}{a(\theta_3 - \theta_1)} \quad (3.49)$$

Η (3.49) μας βοηθάει να βρούμε το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας τ . Υπογραμμίζουμε ότι κάτω από την συνθήκη (3.48) η διαδικασία $\{L_t > 0\}$ μπορεί να θεωρηθεί μεγαλύτερου ρίσκου από την $\{S_t > 0\}$ σε όρους μέσης τιμής. Παρατηρήστε ότι στην πραγματικότητα στη συνθήκη (3.49) το δεξί μέρος θα είναι μεγαλύτερο της μονάδας.

- II. Οι $\{Y_t^1 > 0\}$, $\{Y_t^2 > 0\}$ περιγράφουν τη διαδικασία πλεονάσματος του ασφαλιστή και του αντασφαλιστή αντίστοιχα. Υποθέτουμε ότι ο ασφαλιστής εισπράττει ασφάλιστρα με συντελεστή επιβάρυνσης θ_1, θ_2 για τις συσσωρευτικές διαδικασίες ζημιών $\{L_t > 0\}$ και $\{S_t > 0\}$ αντίστοιχα. Καθώς ο ασφαλιστής αντασφαλίζει ένα ποσοστό των απαιτήσεων $\{L_t > 0\}$, πληρώνει τον αντασφαλιστή ένα επιβαρυνμένο ασφάλιστρο θ_3 , τότε

$$c_1 = (1 + \theta_1)E(L_1) + (1 + \theta_2)E(S_1) - (1 + \theta_3)(1 - a)E(L_1) \quad (3.50)$$

Ενώ το c_2 είναι το ίδιο με την (3.47) υποθέτουμε ότι $\theta_3 > \theta_1$, διαφορετικά η ασφαλιστική θα αντασφάλιζε όλο το $\{L_t > 0\}$ χαρτοφυλάκιο της με βέβαιο κέρδος. Το ασφάλιστρο που πληρώνουν οι ασφαλισμένοι για το $\{L_t > 0\}$ είναι $(1 + \theta_1)E(L_1)$. Από τις (3.42) και (3.50) παίρνουμε μια ισοδύναμη συνθήκη,

$$\frac{E(L_1)}{E(S_1)} (\theta_1 - \theta_3(1 - a)) + \theta_2 > 0 \quad (3.51)$$

Χρησιμοποιώντας τις συνθήκες (3.48) και (3.50), η συνθήκη (3.46) γίνεται

$$\frac{E(L_1)}{E(S_1)} > \frac{1+\theta_1}{\theta_3-\theta_1} \quad (3.52)$$

Όπως και στη πρώτη πραγματική ερμηνεία, έτσι και εδώ $\frac{1+\theta_1}{\theta_3-\theta_1} > 1$ ισχύει στις περισσότερες περιπτώσεις, το οποίο σημαίνει ότι η συνθήκη (3.52) απαιτεί ότι η διαδικασία $\{L_t > 0\}$ έχει μεγαλύτερο ρίσκο από την $\{S_t > 0\}$ σε όρους μέσης τιμής. Οπότε είναι λογικό η ασφαλιστική εταιρεία να αντισταφάσει ένα ποσοστό της $\{L_t > 0\}$. Η συνθήκη της (3.52) είναι αναγκαία για τον προσδιορισμό του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου χρεοκοπίας τ χρησιμοποιώντας γεωμετρικά επιχειρήματα.

Έστω η (3.52). πρέπει να τη διαχωρίσουμε δύο περιπτώσεις ως ακολούθως.

- Αν $1 < \frac{\theta_3}{\theta_1} \leq \frac{1}{1-a}$, τότε η συνθήκη (3.51) ικανοποιείται και μόνο η συνθήκη (3.52)

απαιτείται.

- Αν $\frac{\theta_3}{\theta_1} > \frac{1}{1-a}$, τότε για να ισχύουν και οι δύο συνθήκες (3.51), (3.52) θα πρέπει να

ικανοποιείται η

$$\frac{1+\theta_1}{\theta_3-\theta_1} < \frac{E(L_1)}{E(S_1)} < \frac{\theta_2}{\theta_2(1-a)-\theta_1}.$$

3.3 Πρόωρα αποτελέσματα

Αν χρεοκοπήσει η διαδικασία $\{X_t > 0\}$ πριν από τη διαδικασία $\{L_t > 0\}$ ($\tau_2 \geq \tau_x$) τότε η γνώση για το πλεόνασμα $Y_{\tau_x}^1$ είναι καίριας σημασίας καθώς η χρεοκοπία της διδιάστατης διαδικασίας ($\{Y_t^1, Y_t^2\}, t \geq 0$) θα συμβεί λόγω της $\{Y_{\tau_x}^1, t \geq 0\}$ ($\tau = \tau_1$). Είναι εμφανές ότι κάτω από αυτό το σενάριο έχουμε τη σχέση,

$$Y_t^1 = \frac{a}{1-a} Y_t^2 - \frac{1}{a} |X_{\tau_x}| \quad (3.53)$$

Η οποία εκφράζει το επίπεδο του πλεονάσματος της διαδικασίας $\{Y_{\tau_x}^1, t \geq 0\}$ συναρτήσει των $\{Y_t^2 > 0\}$ και $\{X_t > 0\}$ στο χρόνο τ_x .

3.3.1 Η από κοινού πυκνότητα του χρόνου και του ελλείμματος χρεοκοπίας στην $\{X_t > 0\}$.

Ξεκινώντας από τη (3.45) ξαναγράφουμε την εξίσωση ως,

$$dX_t = -cdt - dS^a \quad (3.54)$$

Με $c = ac_2 - (1-a)c_1 > 0$ $S_t^a = (1-a)S_t$. Σημειώνουμε ότι η $\{S_t^a > 0\}$ είναι ακόμα μια σύνθετη διαδικασία Poisson με παράμετρο λ_S ίδιο με τη $\{S_t > 0\}$, αλλά με προσαρμοσμένη γενική τυχαία μεταβλητή $Z^{a,S} = (1-a)Z^S$ και σ.π.π. $f_{a,S}(\cdot)$. Επιπλέον, συμβολίζουμε με $h_C(t/x)$ τη σ.π.π. του τ_X στο t , $(0 < t < \frac{x}{c})$ για συνεχείς πιθανότητα χρεοκοπίας με $X_0 = x$, και με $h_j(z, t/x)$ την από κοινού σ.π.π. της $(|X_{\tau_X}|, \tau_X)$ στο (z, t) , $(0 < t < \frac{x}{c}, z > 0)$ για χρεοκοπία από άλματα δοθέντος $X_0 = x$.

Πρόταση 3.1.

Η διαδικασία $\{X_t > 0\}$ που ορίστηκε στη (3.54) με $X_0 = x > 0$ η από κοινού κατανομή του χρόνου τ_X και του ελλείμματος τη στιγμή της χρεοκοπίας $|X_t|$ αποτελείται από τα ακόλουθα χαρακτηριστικά.

1. Λόγω συνέχειας (δηλ. $|X_t| = 0$)
2. Ένα σημείο $\tau_X = \frac{x}{c}$ έχει πιθανότητα,

$$P(\tau_X = \frac{x}{c}, |X_{\tau_X}| = 0) = e^{-\frac{\lambda_S x}{c}}$$

3. Η περιθώρια τ_X δίνετε ως,

$$h_C(t/x) = c \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_S t} \frac{(\lambda_S t)^n}{n!} f_{a,S}^{*n}(x-ct) \quad (3.55)$$

Για $0 < t < \frac{x}{c}$.

4. Λόγω των αλμάτων (δηλ. $|X_t| > 0$)

$$h_j(z, t/x) = \lambda_S e^{-\lambda_S t} f_{a,S}(z+x-ct) + \lambda_S \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_S t} \frac{(\lambda_S t)^n}{n!} \int_0^{x-ct} f_{a,S}(z+y) f_{a,S}^{*n}(x-ct) dy \quad (3.56)$$

Για $0 < t < \frac{x}{c}, z > 0$.

Απόδειξη βλέπε: Badescu, Rabehasaina (2011)

3.3.2 Η πυκνότητα του $\{Y_t^2 > 0\}$ αποφεύγοντας τη χρεοκοπία.

Με παρόμοιο τρόπο που γράψαμε τη διαδικασία $\{X_t > 0\}$ στη (3.54), έχουμε

$$dY_t^2 = c_2 dt - dL_t^a \quad (3.57)$$

Όπου με $L_t^a = (1-a)L_t$, η $\{L_t^a > 0\}$ είναι και αυτή μια σύνθετη διαδικασία Poisson με παράμετρο λ_s ίδιο με τη $\{L_t > 0\}$ αλλά με προσαρμοσμένη γενική τυχαία μεταβλητή $Z^{a,L} = (1-a)Z^L$ και σ.π.π $f_{a,L}(\cdot)$.

Πρόταση 3.2.

Η διαδικασία $\{Y_t^2 > 0\}$ όπως ορίστηκε στην (3.57), η κατανομή της διαδικασίας πλεονάσματος $\{Y_t^2 > 0\}$ στο σημείο u στο χρόνο t , αποφεύγοντας τη χρεοκοπία συνίσταται από τις παρακάτω περιπτώσεις:

I. Ένα σημείο με μάζα πιθανότητας δίνεται από,

$$P_{y_2}(\inf_{s \leq t} Y_s^2 > 0, Y_t^2 = u) = e^{-\lambda t} \quad (3.58)$$

Για $u = y_2 + c_2 t$.

II. Η πυκνότητα δίνεται από,

$$P_{y_2}(\inf_{s \leq t} Y_s^2 > 0, Y_t^2 \in du) = \zeta(y_2, t, u) du \quad (3.59)$$

Για $u = y_2 + c_2 t$

$\zeta(y_2, t, u) =$

$$\begin{cases} e^{-\lambda t} (b(y_2, c_2 t, u) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_L t)^n}{n!} \int_0^{ct} \frac{z}{c_2 t} f_{a,L}^{*n}(c_2 t - z) b(y_2, z, u) dz, \\ e^{-\lambda t} (b(y_2, c_2 t, u) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_L t)^n}{n!} (\frac{u - y_2}{c_2 t} f_{a,L}^{*n}(c_2 t - (u - y_2)) + \\ + \int_0^{ct} \frac{z}{c_2 t} f_{a,L}^{*n}(c_2 t - z) b(y_2, z, u) dz, \end{cases} \quad (3.60)$$

Με το πρώτο κλάδο να ισχύει για $u \leq y_2, t > 0$ και ο δεύτερος για $u > y_2, t > \frac{u - y_2}{c_2}$

$$b(y_2, t, u) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_L}{c_2}\right)^n \int_0^{z \wedge u} \xi_n(y - u, z - u) dv, & u \leq y_2, t > 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_L}{c_2}\right)^n \int_0^{y + ((z - u) \wedge 0)} \xi_n(v, y + z - u - v) dv, & u > y_2, z > u - y_2 \end{cases} \quad (3.61)$$

και

$$\xi(y, z) = \frac{y_2^{n-1}}{(n-1)!} f_{a,L}^{*n}(z + y_2) + \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} \frac{(-1)^j}{(n-1)!} \int_0^{y_2} v^{n-1} f_{a,L}^{*j}(y_2 - v) f_{a,L}^{*n-j}(z + v) dv \quad (3.62)$$

Απόδειξη βλέπε: Badescu, Rabehasaina (2011)

3.3.3 Ο μετασχηματισμός Laplace του από κοινού χρόνου χρεοκοπίας.

Τα ώρα θα δώσουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της υποενότητας το μετασχηματισμό Laplace του χρόνου χρεοκοπίας τ , δηλαδή $E(e^{-\beta\tau} I_{(\tau<\infty)}) / (Y_0^1, Y_0^2) = (y_1, y_2)$.

Πρόταση 3.3.

Στο δισδιάστατο μοντέλο $(\{Y_t^1, Y_t^2\}, t \geq 0)$ όπως το ορίσαμε στο 3^ο κεφάλαιο με $x = (1-a)y_1 - ay_2 > 0$, ο μετασχηματισμός Laplace του χρόνου χρεοκοπίας τ δίνεται από,

$$E(e^{-\beta\tau} I_{(\tau<\infty)}) / (Y_0^1, Y_0^2) = (y_1, y_2) = E(e^{-\beta\tau_1} I_{(\tau_X > \tau_2)}) / (Y_0^1, Y_0^2) = (y_1, y_2) + E(e^{-\beta\tau_2} I_{(\tau_X \leq \tau_2, \tau_1 < \infty)}) / (Y_0^1, Y_0^2) = (y_1, y_2) \quad (3.63)$$

Το πρώτο μέρος της εξίσωσης μπορεί να υπολογιστεί ως,

$$E(e^{-\beta\tau} I_{(\tau<\infty)}) / (Y_0^1, Y_0^2) = (y_1, y_2) = \int_0^x e^{-\beta t} P_x(\tau_X > t) P_{y_2}(\tau_2 \in dt), \quad (3.64)$$

και για $0 < t < \frac{x}{c}$

$$P_x(\tau > t) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda_S t} \frac{(\lambda_S t)^n}{n!} F_{a,S}^{*n}(x - ct) \quad (3.65)$$

Στη συνέχεια, ορίζουμε $E(e^{-\beta\tau_1} I_{(\tau_1 < \infty)}) / (Y_0^1, Y_0^2) = (y_1, y_2)$ το μετασχηματισμό Laplace για το χρόνο χρεοκοπίας του τ_1 για τη διαδικασία $\{Y_t^1, t \geq 0\}$, ο οποίος είναι γνωστός ως η ουρά μιας σύνθετης γεωμετρικής κατανομής κάτω από την υπόθεση ότι ισχύει $\beta > 0$ ή η συνθήκη (3.42). Η εξίσωση (3.64) είναι το άθροισμα έξι περιπτώσεων.

I. Χρεοκοπία της $\{X_t > 0\}$ από συνέχεια.

A. Καμία ζημιά από την $\{S_t > 0\}$ και καμία ζημιά από τη $\{L_t > 0\}$ στο διάστημα $(0, \tau_X]$:

$$e^{-(\beta+\lambda_S+\lambda_L)ss\frac{x}{c}} E_{\frac{a}{1-a}(y_2+c_2\frac{x}{c})} (e^{-\beta\tau_1} I_{(\tau_1 < \infty)}) \quad (3.66)$$

B. Καμία ζημιά από την $\{S_t > 0\}$ και τουλάχιστον μία από τη $\{L_t > 0\}$ στο διάστημα

$$(0, \tau_X]: \int_0^{y_2+c_2\frac{x}{c}} e^{-(\beta+\lambda_S)s\frac{x}{c}} E_{\frac{a}{1-a}u} (e^{-\beta\tau_1} I_{(\tau_1 < \infty)}) \zeta(y_2, \frac{x}{c}, u) du \quad (3.67)$$

C. Τουλάχιστον μια ζημιά από την $\{S_t > 0\}$ και καμία από τη $\{L_t > 0\}$ στο διάστημα

$$(0, \tau_X]: \int_0^x e^{-(\beta+\lambda_L)t} E_{\frac{a}{1-a}(y_2+c_2t)} (e^{-\beta\tau_1} I_{(\tau_1 < \infty)}) h_C(t/x) du \quad (3.68)$$

D. Τουλάχιστον μια ζημιά από την $\{S_t > 0\}$ και καμία από τη $\{L_t > 0\}$ στο διάστημα

$$(0, \tau_x]: \int_0^x e^{-\beta t} \left(\int_0^{y_2+c_2t} E_{\frac{a}{1-a}}^{(y_2+c_2t)-z} (e^{-\beta \tau_1} I_{(\tau_1 < \infty)}) \zeta(y_2, \frac{x}{c}, u) du \right) h_C(t/x) dt \quad (3.69)$$

II. Χρεοκοπία της $\{X_t > 0\}$ από άλματα.

a) Καμία ζημιά από την $\{L_t > 0\}$ στο διάστημα $(0, \tau_x]$:

$$\int_0^x e^{-(\beta+\lambda_L)t} \left(\int_0^{a(y_2+c_2t)} \int_0^{au} E_{\frac{a}{1-a}}^{(y_2+c_2t)-\frac{z}{1-a}} (e^{-\beta \tau_1} I_{(\tau_1 < \infty)}) h_J(z, t/x) dz \right) dz + \int_{a(y_2+c_2t)}^\infty h_J(z, t/x) dz dt \quad (3.70)$$

b) Τουλάχιστον μία από τη $\{L_t > 0\}$ στο διάστημα $(0, \tau_x]$:

$$\int_0^x e^{-(\beta+\lambda_L)t} \int_0^{a(y_2+c_2t)} \left(\int_0^{au} E_{\frac{a}{1-a}}^{u-\frac{z}{1-a}} (e^{-\beta \tau_1} I_{(\tau_1 < \infty)}) h_J(z, t/x) dz \right) dz + \int_{au}^\infty h_J(z, t/x) dz \zeta(y_2, t, u) du dt \quad (3.71)$$

Απόδειξη βλέπε: Badescu, Rabehasaina (2011)

Πρόταση 3.4.

Για τη δισδιάστατη στοχαστική διαδικασία $(\{Y_t^1, Y_t^2\}, t \geq 0)$ η πιθανότητα επιβίωσης του πλεονάσματος $\{Y_t^1, t \geq 0\}$ όταν η $\{Y_t^2, t \geq 0\}$ χρεοκοπεί από κοινού με το γεγονός $\{\tau_x > \tau_2\}$, είναι συνεχής ως προς u και δίνεται από,

$$P(Y_{\tau_2}^1 > \tau, \tau_x > \tau_2 / y, y) = \begin{cases} \sum_{n=0}^\infty \int_0^x \int_{\frac{-(-1-a)u}{a}}^{\frac{x-(1-a)u-ct}{a}} e^{-\lambda_S t} \frac{(\lambda_S t)^n}{n!} F_{a,S}^{*n}(x - (1-a)u - ct - az) \eta(z, t/y_2) dz dt & u < 0 \\ + \sum_{n=0}^\infty \int_0^x \int_0^{\frac{(1-a)u}{a}} e^{-\lambda_S t} \frac{(\lambda_S t)^n}{n!} F_{a,S}^{*n}(x - ct) \eta(z, t/y_2) dz dt & \\ = \sum_{n=0}^\infty \int_0^{\frac{x-(1-a)u}{c}} \int_0^{\frac{x-(1-a)u-ct}{a}} e^{-\lambda_S t} \frac{(\lambda_S t)^n}{n!} F_{a,S}^{*n}(x - (1-a)u - ct - az) \eta(z, t/y_2) dz dt & 0 \leq u < \frac{x}{1-a} \\ 0 & u \geq \frac{x}{1-a} \end{cases} \quad (3.72)$$

Απόδειξη βλέπε: Badescu, Rabehasaina (2011)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ

Περί διαδικασίας δισδιάστατου κινδύνου με στρατηγική φράγματος μερισμάτων

4.1 Εισαγωγή

Στο κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνου, η διαδικασία $\{U_*(t)\}_{t \geq 0}$ πλεονάσματος μιας ασφαλιστικής επιχείρησης για $t \geq 0$ είναι

$$U(t) = u + ct - \sum_{n=1}^{N(t)} X_n$$

όπου το $u \geq 0$ είναι το αρχικό πλεόνασμα της ασφαλιστικής, $c > 0$ είναι ο ρυθμός εισπραξης των ασφαλιστρών, $N(t)$ είναι μια διαδικασία απαρίθμησης των ζημιών και η X_n περιγράφει το μέγεθος της n -οστής ζημιάς. Υποθέτουμε ότι $\{N(t), t \geq 0\}$ είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση $\lambda > 0$, και $\{X_n, n = 1, \dots, \infty\}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών και ανεξάρτητες από τη τ.μ. $N(t)$.

Ο χρόνος χρεοκοπίας της διαδικασίας $\{U(t), t \geq 0\}$ ορίζεται από το $T = \inf\{t \geq 0 : U(t) < 0\}$, που είναι η πρώτη στιγμή όπου η διαδικασία πλεονάσματος πέφτει κάτω από μηδέν. Για να εξασφαλιστεί ότι το ενδεχόμενο χρεοκοπίας $\{T < \infty\}$ δεν είναι σίγουρο, απαιτείται ο θετικός όρος φόρτωσης ασφάλειας $c > \lambda E(X_1)$

Ένα μειονέκτημα του παραπάνω μοντέλου είναι ότι η διαδικασία $\{U(t), t \geq 0\}$ τείνει στο άπειρο μακροπρόθεσμα, το οποίο οδηγεί στην ιδέα της ανακατανομής τμήματος του πλεονάσματος στους μετόχους της ασφαλιστικής εταιρείας (de Finetti (1957)). Μια από τις συνηθέστερα μελετημένες στρατηγικές μερισμάτων είναι η στρατηγική φράγματος (βλ. π.χ. Gerber (1979)) όπου όλα τα εισπραττόμενα ασφάλιστρα πληρώνονται στους μετόχους ως μέρισμα αμέσως, όποτε το πλεόνασμα φθάνει σε ένα επίπεδο φράγματος b (εφ' όσον δεν έχουμε χρεοκοπία). Από μαθηματική άποψη, διαδικασία πλεονάσματος $\{U(t), t \geq 0\}$ με το $U(0) = u \geq 0$ και $u \leq b$ μπορεί να αποδοθεί από την:

$$dU(t) = \begin{cases} cdt - d \sum_{n=1}^{N(t)} X_n, & 0 \leq U(t) < b \\ -d \sum_{n=1}^{N(t)} X_n, & U(t) = b \end{cases}$$

Η μελέτη της στρατηγικής φραγμάτων είναι μεγάλου ενδιαφέροντος επειδή είναι γνωστό πως βελτιστοποιεί τη μεγιστοποίηση των αναμενόμενων προεξοφλημένων μερισμάτων μέχρι τη χρεοκοπία όταν η πυκνότητα της X_1 είναι απολύτως μονότονη (π.χ. Loeffen (2008, θεώρημα 3)). Επιπλέον, για οποιαδήποτε κατανομή ζημιάς, το βέλτιστο φράγμα μερισμάτων είναι ανεξάρτητο από το αρχικό επίπεδο πλεονάσματος. Αναφέρουμε ενδεικτικά τις αναθεωρήσεις

των Albrecher και Thonhauser (2009) και Avanzi (2009) για τις στρατηγικές μερισμάτων.

Πρόσφατα, υπήρξε αυξανόμενο ενδιαφέρον για την πολυδιάστατη θεωρία κινδύνου στην οποία οι διαδικασίες πλεονάσματος πολλών επιχειρήσεων αναλύονται από κοινού. Στα πολυδιάστατα μοντέλα κινδύνου, οι συχνότητες ή/και η σφοδρότητα των ασφαλιστικών ζημιών πληρωτέων από διαφορετικούς ασφαλιστές συσχετίζονται.

Στην ουσία μια τέτοια κατάσταση προκύπτει όταν οι ασφαλιστές υπόκεινται σε «κοινούς κλονισμούς» ως αποτέλεσμα καταστροφικών γεγονότων (π.χ. σεισμοί, τσουνάμι) που προκαλούν μεγάλες και συσχετισμένες ζημιές σε ίδιες χρονικές στιγμές, ή όταν μεταφέρει ένας ασφαλιστής μέρος των ζημιών του σε έναν ή περισσότερους αντασφαλιστές μέσω μιας σύμβασης αντασφάλισης.

Σε αυτό το κεφάλαιο, ακολουθούμε την προηγούμενη διατύπωση, αν και εφαρμογές στην τελευταία κατάσταση είναι επίσης δυνατές (βλ. παρατήρηση 1 και παράγραφος 3.3). Θα εξετάσουμε δύο κλάσεις κινδύνων, κάθε μια τους έχει μια στρατηγική φράγματος μερισμάτων. Η διδιάστατη διαδικασία πλεονάσματος $\{(U_1(t), U_2(t)), t \geq 0\}$ με αρχικά επίπεδα πλεονάσματος $(u_1, u_2) = (U_1(0), U_2(0))$ και φράγματα μερισμάτων (b_1, b_2) (όπου $0 \leq u_1 \leq b_1$ και $0 \leq u_2 \leq b_2$) και για $k = 1, 2$ είναι,

$$dU_k(t) = \begin{cases} c_k dt - d(\sum_{n=1}^{N_{kk}(t)} Y_{k,n} + \sum_{n=1}^{N_{1,2}(t)} Z_{k,n}), & 0 \leq U_k(t) < b_k \\ -d(\sum_{n=1}^{N_{kk}(t)} Y_{k,n} + \sum_{n=1}^{N_{1,2}(t)} Z_{k,n}), & U_k(t) = b_k \end{cases} \quad (4.1)$$

Εδώ (c_1, c_2) είναι οι ρυθμοί είσπραξης των ασφαλιστρών για τις δυο κλάσεις κινδύνων και $\{N_{11}(t), t \geq 0\}, \{N_{22}(t), t \geq 0\}$ και $\{N_{12}(t), t \geq 0\}$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητες διαδικασίες Poisson με τις αντίστοιχες παραμέτρους $\lambda_{11}, \lambda_{22}$ και λ_{12} . Επιπλέον, $\{Y_{1n}, n = 1, \dots, \infty\}, \{Y_{2n}, n = 1, \dots, \infty\}$ και $\{(Z_{1n}, Z_{2n}), n = 1, \dots, \infty\}$ είναι αμοιβαία ανεξάρτητες ακολουθίες ανεξάρτητες από τις ανωτέρω τρεις διαδικασίες Poisson και κατανομημένες ως γενικές τυχαίες μεταβλητές Y_1, Y_2 και (Z_1, Z_2) αντίστοιχα. Για το κάθε $k = 1, 2$ η διαδικασία $\{N_{kk}(t), t \geq 0\}$ μετρά τον αριθμό ζημιών που αντιμετωπίζονται από την k -οστή κλάση, μόνο για τις ζημιές που προκύπτουν από τα «συνηθισμένα» περιστατικά ζημιών με τη σφοδρότητα κατανομημένη ως Y_k . Αφ' ετέρου, $\{N_{12}(t), t \geq 0\}$ μετρά τον αριθμό «κοινών σοκ» που οδηγούν ενδεχομένως εξαρτώμενες ζημιές κατανομημένες ως (Z_1, Z_2) στις δύο επιχειρήσεις. Υποτίθεται ότι Y_1, Y_2 και (Z_1, Z_2) είναι θετικές συνεχείς τυχαίες μεταβλητές με τις συναρτήσεις αθροιστικής κατανομής $F_{11}(\cdot), F_{22}(\cdot)$ και $F_{12}(\cdot)$ αντίστοιχα. Θα ήταν βολικό να παρουσιαστεί η $F_{12}(\cdot)$ με μορφή πλειάδας (π.χ. Nelsen (2006)) όπως $F_{12}(z_1, z_2) = C(F_{1\bullet}(z), F_{2\bullet}(z))$, όπου $C(\cdot, \cdot)$ είναι μια πλειάδα και $F_{1\bullet}(\cdot), F_{2\bullet}(\cdot)$ είναι οι περιθώριες σ.κ. των Z_1, Z_2 αντίστοιχα. Ο χρόνος χρεοκοπίας της k -οστής κλάσης είναι $T_k = \inf\{t \geq 0 : U_k(t) < 0\}$.

Παρατήρηση 4.1.

Αν υποθέσουμε ότι (Z_1, Z_2) είναι το αποτέλεσμα του διαχωρισμού μιας ζημιάς W μεταξύ ενός ασφαλιστή και ενός αντασφαλιστή μέσω της αναλογικής αντασφάλισης, δηλ.

$(Z_1, Z_2) = (aW, (1-a)W)$ για μια θετική συνεχή τυχαία μεταβλητή W με σ.κ. $F_W(\cdot)$ και

σταθερό a έτσι ώστε $0 < a < 1$. Κατόπιν κάποιος μπορεί να εξισώσει $F_{\bullet_1}(z_1) = F_W\left(\frac{z_1}{a}\right)$ και

$F_{\bullet_2}(z_2) = F_W\left(\frac{z_2}{1-a}\right)$ και να εφαρμόσει τη συνμοτονικότητα των πλειάδων $C(u, v) = \min\{u, v\}$

για $0 \leq u, v \leq 1$. Οπότε, η διατύπωσή μας, παρέχει μια ενιαία προσέγγιση για τη μελέτη των κοινών σοκ και της αναλογικής αντασφάλισης. Τα παραδείγματα σχετικά με την αναλογική αντασφάλιση θα εξεταστούν στην παράγραφο 4.3.

Αντίθετα από το κλασικό μονοδιάστατο μοντέλο της θεωρίας κινδύνου όπου η χρεοκοπία ορίζεται όταν το πλεόνασμα πέφτει κάτω από μηδέν, υπάρχουν διάφοροι τρόποι να οριστεί η χρεοκοπία στη διαδικασία του δισδιάστατου μοντέλου. Οι ακριβείς λύσεις είναι σπάνια διαθέσιμες και τα υπάρχοντα αποτελέσματα είναι συνήθως υπό μορφή ασυμπτωτικών (βλέπε π.χ. Li (2007, παράγραφος 4), Chen (2011), HU και Jiang (2013). Αριθμητικές μέθοδοι για να αξιολογηθούν οι πιθανότητες χρεοκοπίας μπορούν να βρεθούν στους Kaishev και Dimitrova (2006), Kaishev (2008, παράγραφος 4), Dimitrova και Kaishev (201), και Castaner (2013). Μια περιεκτική επισκόπηση των διαδικασιών πολυδιάστατου κινδύνου δίδεται από τους Asmussen και Albrecher (201, Κεφάλαιο XIII.9).

Μια πρόσφατη εργασία των Czarna και Palmowski (2011) έλαβε υπόψη την επίδραση των πληρωμών μερισμάτων στο δισδιάστατο μοντέλο με αναλογική αντασφάλιση. Ένα από τα προτεινόμενα μοντέλα τους περιλαμβάνει ένα φράγμα της μορφής $aU_1(t) + U_2(t) = b$, το οποίο είναι σαφώς διαφορετικό όσο αφορά την (4.1).

Εντούτοις, αυτοί υπέθεσαν ότι υπάρχει μια μεταφορά κεφαλαίου μεταξύ των δύο κλάσεων όποτε η δισδιάστατη διαδικασία είναι στο φράγμα (Γράφημα 1). Αυτό σημαίνει ότι η χρεοκοπία (από την άποψη μιας εξόδου από το θετικό τεταρτημόριο) μπορεί πραγματικά να εμφανιστεί λόγω της κύριας μεταφοράς, η οποία είναι σχεδόν ανεπιθύμητη. Σε αυτό το κεφάλαιο, θα μελετήσουμε το μοντέλο (4.1) και θα ορίσουμε το χρόνο χρεοκοπίας της δισδιάστατης διαδικασίας $\{(U_1(t)U_2(t)), t \geq 0\}$ να είναι

$$T_{OR} = \min(T_1, T_2) = \inf\{t \geq 0 : \min(U_1(t), U_2(t)) < 0\}.$$

Η βασική ποσότητα ενδιαφέροντος μας είναι τα αναμενόμενα προεξοφλημένα μερίσματα μέχρι τον κοινό χρόνο χρεοκοπίας για κάθε μια από τις δύο κλάσεις. Για το κάθε $k = 1, 2$, στοχεύουμε να υπολογίσουμε, για $0 \leq u_1 \leq b_1; 0 \leq u_2 \leq b_2$,

$$V_k(u_1, u_2; b_1, b_2) = c_k E\left(\int_0^{T_{OR}} e^{-\delta t} I_{(U_k(t)=b_k)} dt / U_1(0), U_2(0) = (u_1, u_2)\right) \quad (4.2)$$

όπου δ είναι η ένταση επιτοκίου. Αξίζει να σημειωθεί ότι ακόμα κι αν δεν υπάρχει κανένα κοινό σοκ, τα μερίσματα των δύο κλάσεων είναι ακόμα εξαρτώμενα μέσω του κοινού χρόνου χρεοκοπίας T_{OR} . Όπως αναφέρεται ανωτέρω, είναι γενικά πολύ δύσκολο να παραχθούν ακριβή αποτελέσματα για τις πολυδιάστατες διαδικασίες κινδύνου. Επομένως, οι παρόμοιες διαδικασίες όπως σε Dickson και Waters (1991) μπορούν να εφαρμοστούν για να γίνει μια σύνδεση ανάμεσα στο συνεχές χρονικά μοντέλο και σε ένα διακριτό, ευκολότερο προς

μελέτη. Κατόπιν κάποιος μπορεί να προσεγγίσει την (4.2) χρησιμοποιώντας την αντίστοιχη διακριτή της.

Η δομή του παρόντος κεφαλαίου έχει ως εξής:

Η παράγραφος 4.2 αφορά στην αξιολόγηση του αναμενόμενου προεξοφλημένου μερίσματος μέχρι τη χρεοκοπία σε μια διαδικασία διακριτού δισδιάστατου κινδύνου. Παρότι στέκεται μόνο του αυτό το μοντέλο, θα δείξουμε πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να προσεγγίσει το συνεχές-χρονικά μοντέλο (4.2) μέσω της διακριτοποίησης των Dickson-Waters με τη βοήθεια δισδιάστατης αναδρομής τύπου Panjer. Η προσέγγιση υποστηρίζεται έπειτα από μερικές προσομοιώσεις.

Η παράγραφος 4.3 αφορά στη σύγκριση για το πως η εξάρτηση μεταξύ των δύο κλάσεων επηρεάζει τα μερίσματα, και αριθμητικά παραδείγματα που περιλαμβάνουν τα κοινά σοκ, την αναλογική αντασφάλιση και χρήση διαφορετικών θεωριών πιθανοτήτων.

Η παράγραφος 4.4 παρέχει περισσότερα αριθμητικά παραδείγματα που εστιάζουν στο ζευγάρι βέλτιστων φραγμάτων μερισμάτων που μεγιστοποιούν τα αναμενόμενα προεξοφλημένα μερίσματα.

Τέλος, η παράγραφος 4.5 έχει μερικές τελικές παρατηρήσεις.

4.2 Μια διακριτή διαδικασία δισδιάστατου κινδύνου με φράγματα μερισμάτων

4.2.1 Το μοντέλο και τα μερίσματα

Σε διακριτό πλαίσιο, εξετάζουμε τη δισδιάστατη διαδικασία $\{(U_1^d(t)U_2^d(t)), t \geq 0\}$ με φράγματα μερισμάτων (b_1, b_2) , $k = 1, 2$, και για $n = 1, 2, \dots$,

$$U_k^d(n) = U_k^d(n-1) + 1 - I_{(U_k^d(n-1)=b_k; X_{k,n}=0)} - X_{k,n} \quad (4.3)$$

με το αρχικό κεφάλαιο $U_k^d(0) = u_k$ (όπου $u_k = 0, 1, \dots, b_k$).

Υποτίθεται ότι το ασφάλιστρο είναι 1 σε κάθε περίοδο, και οι ζημιές $\{(X_{1n}, X_{2n}), n = 1, \dots, \infty\}$ διαμορφώνουν μια ακολουθία δισδιάστατων τυχαίων διανυσμάτων κατανεμημένα όπως (X_1, X_2) με από κοινού σ.π.π. $g(\cdot, \cdot)$. Επιπλέον, τα X_1 και X_2 είναι κατανεμημένα στο σύνολο μη αρνητικών ακέραιων αριθμών. Η (4.3) συνιστά ότι ένα μερίσμα 1 είναι πληρωτέο στους μετόχους της κλάσης k στο χρόνο n :

- 1) αν το πλεόνασμα της κλάσης k είναι σε επίπεδο b στο χρόνο $n-1$ και
- 2) η μονάδα k δεν έχει καμία ζημιά στο χρόνο n (Dickson και Waters (2004, παράγραφος 5)).

Για $k = 1, 2$, το $T_k^d = \inf\{n \in (1, 2, \dots) : U_k^d(n) \leq 0\}$ θα γίνει ο χρόνος χρεοκοπίας του $\{U_k^d(n), n = 0, 1, \dots\}$ (παρατήρηση 2). Εντούτοις, για τιμή χρόνου ίση με 0 οι μεμονωμένες διαδικασίες ξεκινούν από το επίπεδο μηδέν χωρίς χρεοκοπία. Για το κάθε $k = 1, 2$ η συνθήκη θετικού κέρδους δίνεται από το $E(X_k) < 1$. Ο χρόνος χρεοκοπίας για την κοινή δισδιάστατη διαδικασία πλεονάσματος $\{(U_1^d(n)U_2^d(n)), n = 1, 2, \dots\}$ ορίζεται έπειτα ως $T_k^d = \min\{T_1^d, T_2^d\}$.

Παρατήρηση 4.2.

Κατά τη μελέτη του διακριτού χρονικά μοντέλου της θεωρίας κινδύνου, διαφορετικοί ερευνητές προτείνουν διαφορετικούς ορισμούς για την χρεοκοπία ως προς το εάν η επίτευξη του επιπέδου μηδέν θεωρείται ως γεγονός χρεοκοπίας. Αλλά ο τρέχων ορισμός (ότι φτάνοντας στο μηδέν οδηγούμαστε σε χρεοκοπία) αναμένεται να λειτουργήσει καλύτερα, ειδικά όταν εφαρμόζεται ένα διακριτό μοντέλο για να προσεγγιστεί ένα συνεχές (χρονικά) (βλ. Dickson και Waters (1991, παράγραφος 8)).

Θέτοντας την ένταση επιτοκίου ίση με ρ ανά περίοδο, ενδιαφερόμαστε για αναμενόμενη προεξοφλημένη πληρωμή μερισμάτων μέχρι τον κοινό χρόνο χρεοκοπίας για κάθε μια από τις δύο κλάσεις. Για το κάθε $k = 1, 2$, ορίζουμε, $u_1 = 0, 1, \dots, b_1, u_2 = 0, 1, \dots, b_2$,

$$V_k^d(u_1, u_2; b_1, b_2) = E\left(\sum_{n=1}^d e^{-\rho n} I_{(U_k^{(n-1)}=b_k; X_{k,n}=0)} / U_1(0), U_2(0) = (u_1, u_2)\right) \quad (4.4)$$

Προκειμένου να μελετηθεί η παραπάνω ποσότητα, μπορούμε να προσαρμόσουμε όλα τα πιθανά γεγονότα στο χρόνο 1. Διακρίνονται 4 περιπτώσεις με βάση τα επίπεδα αρχικού κεφαλαίου :

1) Για $u_1 = 0, 1, \dots, b_1 - 1; u_2 = 0, 1, \dots, b_2 - 1$ το ασφάλιστρο 1.v.μ και για τις δυο κλάσεις θα προστεθεί στο πλεόνασμα και κανένα μέρισμα δεν είναι πληρωτέο στο χρόνο 1. Εάν οι ζημιές X_{11} και X_{21} δεν είναι μεγαλύτερες από u_1 και u_2 αντίστοιχα, τότε η δισδιάστατη διαδικασία θα συνεχιστεί και θα υπάρξουν πιθανά μελλοντικά μερίσματα, διαφορετικά εμφανίζεται χρεοκοπία και κανένα μέρισμα δεν θα πληρωθεί. Για $k = 1, 2$ θα έχουμε

$$V_k^d(u_1, u_2; b_1, b_2) = e^{-\rho} \sum_{i=0}^{u_1} \sum_{j=0}^{u_2} g(i, j) V_k^d(u_1 + 1 - i, u_2 + 1 - j; b_1, b_2) \quad (4.5)$$

2) Για $u_1 = b_1; u_2 = 0, 1, \dots, b_2 - 1$, το πρώτο ασφάλιστρο της κλάσης $k = 1$ θα πληρωθεί ως μέρισμα εάν δεν υπάρχει ζημιά για αυτήν τη κλάση. Και οι δύο κλάσεις θα επιζήσουν στο χρόνο 1 εάν οι αξιώσεις X_{11} και X_{21} δεν είναι μεγαλύτερες από $b_1 - 1$ και u_2 αντίστοιχα, οδηγώντας σε πιθανά μελλοντικά μερίσματα. Αυτό οδηγεί στην

$$\begin{aligned} V_1^d(b_1, u_2; b_1, b_2) &= e^{-\rho} \sum_{j=u_2+1}^{\infty} g(0, j) + e^{-\rho} \sum_{j=0}^{u_2} g(0, j)(1 + V_1^d(b_1, u_2 + 1 - j; b_1, b_2)) \\ &+ e^{-\rho} \sum_{i=1}^{u_1} \sum_{j=0}^{u_2} g(i, j) V_1^d(u_1 + 1 - i, u_2 + 1 - j; b_1, b_2) \\ &= e^{-\rho} \sum_{j=0}^{\infty} g(0, j) + e^{-\rho} \sum_{j=0}^{u_2} g(0, j) V_1^d(b_1, u_2 + 1 - j; b_1, b_2) \\ &\sum_{i=1}^{u_1} \sum_{j=0}^{u_2} g(i, j) V_1^d(u_1 + 1 - i, u_2 + 1 - j; b_1, b_2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Και

$$\begin{aligned} V_2^d(b_1, u_2; b_1, b_2) &= e^{-\rho} \sum_{j=0}^{u_2} g(0, j) V_2^d(b_1, u_2 + 1 - j; b_1, b_2) \\ &\sum_{i=1}^{u_1} \sum_{j=0}^{u_2} g(i, j) V_2^d(u_1 + 1 - i, u_2 + 1 - j; b_1, b_2) \end{aligned} \quad (4.7)$$

3) Για $u_1 = 0, 1, \dots, b_1 - 1; u_2 = b_2$, οι αναλύσεις είναι ίδιες με εκείνες στην περίπτωση 2 εκτός από το ότι οι ρόλοι των κλάσεων 1 και 2 αντιστρέφονται. Οπότε έχουμε,

$$V_1^d(u_1, b_2; b_1, b_2) = e^{-\rho} \sum_{j=0}^{u_2} g(i, 0) V_1^d(b_1, u_2 + 1 - j; b_1, b_2) \quad (4.8)$$

$$\sum_{i=1}^{u_1} \sum_{j=0}^{u_2} g(i, j) V_1^d(u_1 + 1 - i, u_2 + 1 - j; b_1, b_2)$$

και

$$V_2^d(u_1, b_2; b_1, b_2) = e^{-\rho} \sum_{j=0}^{\infty} g(i, 0) + e^{-\rho} \sum_{j=0}^{u_2} g(i, 0) V_2^d(b_1, u_2 + 1 - j; b_1, b_2) \quad (4.9)$$

$$\sum_{i=1}^{u_1} \sum_{j=0}^{u_2} g(i, j) V_2^d(u_1 + 1 - i, u_2 + 1 - j; b_1, b_2)$$

4) $u_1 = b_1; u_2 = b_2$, κάθε κλάση θα πληρώσει το 1 ν.μ. ως μέρος εάν δεν είχε καμία ζημιά, συν τα πιθανά μελλοντικά μερίσματα εάν και οι δύο κλάσεις επιζήσουν στο χρόνο 1. Αυτό οδηγεί

$$V_1^d(b_1, b_2; b_1, b_2) = e^{-\rho} g(0, 0) V_1^d(b_1, b_2; b_1, b_2) + e^{-\rho} \sum_{j=0}^{\infty} g(0, j)$$

$$+ e^{-\rho} \sum_{j=0}^{u_2} g(0, j) V_1^d(b_1, b_2 + 1 - j; b_1, b_2) + e^{-\rho} \sum_{j=0}^{u_2} g(i, 0) V_1^d(b_1 + 1 - i, b_2; b_1, b_2) \quad (4.1)$$

$$+ e^{-\rho} \sum_{i=1}^{u_1} \sum_{j=0}^{u_2} g(i, j) V_1^d(u_1 + 1 - i, u_2 + 1 - j; b_1, b_2)$$

Και

$$V_2^d(b_1, b_2; b_1, b_2) = e^{-\rho} g(0, 0) V_2^d(b_1, b_2; b_1, b_2) + e^{-\rho} \sum_{j=0}^{\infty} g(0, j)$$

$$+ e^{-\rho} \sum_{j=0}^{u_2} g(0, j) V_2^d(b_1, b_2 + 1 - j; b_1, b_2) + e^{-\rho} \sum_{j=0}^{u_2} g(i, 0) V_2^d(b_1 + 1 - i, b_2; b_1, b_2) \quad (4.11)$$

$$+ e^{-\rho} \sum_{i=1}^{u_1} \sum_{j=0}^{u_2} g(i, j) V_2^d(u_1 + 1 - i, u_2 + 1 - j; b_1, b_2)$$

Καταλήγοντας, για σταθερά b_1 και b_2 , οι $b_1 b_2$ εξισώσεις (4.5) για $k = 1$, b_2 εξισώσεις (4.6), b_1 εξισώσεις (4.8) και η ενιαία εξίσωση (4.1) διαμορφώνει ένα σύστημα $(b_1 + 1)(b_2 + 1)$ γραμμικών εξισώσεων για το $\{V_1^d(u_1, u_2; b_1, b_2) : u_1 = 0, 1, \dots, b_1; u_2 = 0, 1, \dots, b_2\}$ μπορεί να λυθεί από την (4.5) για $k = 2$, (4.7), (4.9) και (4.11).

4.2.2 Παραγωγή της προσέγγισης

Ο στόχος μας είναι να προσεγγίσουμε τα αναμενόμενα προεξοφλημένα μερίσματα V_k που ορίστηκαν στην (4.2) για το συνεχές χρονικό πρότυπο (4.1) χρησιμοποιώντας το V_k^d της (4.4) για το διακριτό χρονικό πρότυπο (4.3). Για αυτόν τον λόγο, ακολουθούμε παρόμοια βήματα με τους Dickson και Waters (1991), οι οποίοι μελέτησαν τις πεπερασμένες χρονικά πιθανότητες επιβίωσης. Στα παρόντα διδιάστατα πλαίσια, υπάρχουν πρόσθετες περιπλοκές σχετικά με τη χρήση της θεωρίας πιθανοτήτων καθώς επίσης και διδιάστατης αναδρομής κατά Panjer (βλ. παράγραφος 4.2.3). Η παραγωγή της προσέγγισης αποτελείται από τα ακόλουθα τέσσερα βήματα.

1) Βήμα 1: Αλλαγή της νομισματικής μονάδας

Κατ' αρχάς, εφαρμόζουμε μια αλλαγή της νομισματικής μονάδας στο συνεχές πρότυπο (4.1). Ιδίως, για μερικές θετικές σταθερές β_1 και β_2 (γνωστά όπως παράγοντες κλίμακας), ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές $Y_k^{(1)} = \beta_k Y_k^1$ και $Z_k^1 = \beta_k Z_k$ για $k = 1, 2$. Εάν το $V_k^{(1)}(u_1, u_2; b_1, b_2)$ περιγράφει τα αναμενόμενα προεξοφλημένα μερίσματα για τη κλάση k στο συνεχές μοντέλο με τα γενικά άλματα $Y_1^{(1)}, Y_2^{(2)}$ και $(Z_1^{(1)}, Z_2^{(2)})$, έντασης Poisson $\lambda_{11}, \lambda_{22}$ και $\lambda_{1,2}$, ένταση επιτοκίου δ , ρυθμό είσπραξης ασφαλιστρών $(\beta_1 c_1, \beta_2 c_2)$ αρχικά επίπεδα πλεονάσματος (u_1, u_2) , και επίπεδα φραγμάτων (b_1, b_2) , τότε το V_k στην (4.2) ικανοποιεί την παρακάτω σχέση.

$$V_k(u_1, u_2; b_1, b_2) = \frac{1}{\beta_k} V_k^{(1)}(\beta_1 u_1, \beta_2 u_2; \beta_1 b_1, \beta_2 b_2) \quad (4.12)$$

2) Βήμα 2: Διακριτοποίηση του $Y_1^{(1)}, Y_2^{(2)}, Z_1^{(1)}$ και $Z_2^{(2)}$

Οι τυχαίες μεταβλητές $Y_1^{(1)}, Y_2^{(2)}, Z_1^{(1)}$ και $Z_2^{(2)}$ στο βήμα 1 διακριτοποιούνται στο $\{0, 1, \dots\}$ για να δώσουν τις διακριτοποιημένες $Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)}, Z_1^{(2)}$ και $Z_2^{(2)}$. Η κατανομή μάζας πιθανότητας του $Y_2^{(2)}$, για $k = 1, 2$ και για $i = 0, 1, \dots$ είναι

$$h_{kk}(i) = \beta_k \left(\int_{\frac{i}{\beta_k}}^{\frac{i+1}{\beta_k}} F_{kk}(y) dy - \int_{\frac{i-1}{\beta_k}}^{\frac{i}{\beta_k}} F_{kk}(y) dy \right) \quad (4.13)$$

Για το διακριτοποιημένο τυχαίο διάνυσμα $(Z_1^{(2)}, Z_2^{(2)})$, εφαρμόζουμε την ίδια θεωρία πλειιάδων $C(\cdot, \cdot)$, επομένως, η από κοινού σ.π.π. $(Z_1^{(2)}, Z_2^{(2)})$, δηλαδή $h_{12}(i, j)$, μπορεί να υπολογιστεί από τη σχετική κοινή αθροιστική συνάρτηση κατανομής. Για $i, j = 0, 1, \dots$

$$\sum_{k=0}^i \sum_{l=0}^j h_{12}(k, l) = C(\beta_1 \int_{\frac{i}{\beta_1}}^{\frac{i+1}{\beta_1}} F_{1\cdot}(y) dy - \int_{\frac{i-1}{\beta_1}}^{\frac{i}{\beta_1}} F_{1\cdot}(y) dy, \beta_2 \int_{\frac{j}{\beta_2}}^{\frac{j+1}{\beta_2}} F_{\cdot 2}(y) dy - \int_{\frac{j-1}{\beta_2}}^{\frac{j}{\beta_2}} F_{\cdot 2}(y) dy) \quad (4.14)$$

Εάν $Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)}$ και $(Z_1^{(2)}, Z_2^{(2)})$ είναι καλές προσεγγίσεις του $Y_1^{(1)}, Y_2^{(2)}$ και $(Z_1^{(1)}, Z_2^{(1)})$ (δηλ. όταν β_1 και β_2 είναι μεγάλα τιμές), τότε

$$V_k^{(2)}(u_1, u_2; b_1, b_2) \approx V_k^{(1)}(u_1, u_2; b_1, b_2)$$

Και από την 4.12 παίρνουμε,

$$V_k(u_1, u_2; b_1, b_2) \approx \frac{1}{\beta_k} V_k^{(2)}(\beta_1 u_1, \beta_2 u_2; \beta_1 b_1, \beta_2 b_2) \quad (4.15)$$

3) Βήμα 3: Αλλαγή της χρονικής μονάδας

Αλλάζουμε τώρα τη χρονική μονάδα του συνεχούς μοντέλου με τις διακριτές ζημιές στο βήμα 2 τέτοιες ώστε ο ρυθμός είσπραξης των ασφαλιστρών ανά μονάδα χρόνου να είναι 1. Για να επιτευχθεί αυτό, τα β_1 και β_2 που εισήχθησαν στο βήμα 1, επιλέγονται έτσι ώστε $\beta_1 c_1 = \beta_2 c_2$. Το μοντέλο στο βήμα 2 είναι ισοδύναμο με ένα μοντέλο στο οποίο τα διακριτά

γενικά άλματα είναι $Y_1^{(2)}, Y_2^{(2)}$ και $(Z_1^{(2)}, Z_2^{(2)})$, οι εντάσεις Poisson είναι $\frac{\lambda_{11}}{\beta_1 c_1}$, $\frac{\lambda_{22}}{\beta_1 c_1}$ και $\frac{\lambda_{12}}{\beta_1 c_1}$,

η ένταση επιτοκίου είναι $\rho = \frac{\delta}{\beta_1 c_1}$, τα ασφάλιστρα είναι (1,1), τα αρχικά επίπεδα

πλεονάσματος είναι (u_1, u_2) , και τα επίπεδα φραγμάτων είναι (b_1, b_2) . Από τα παραπάνω μπορεί εύκολα να προκύψει η

$$V_k^{(3)}(u_1, u_2; b_1, b_2) = V_k^{(2)}(u_1, u_2; b_1, b_2)$$

και από τη 4.15 οδηγούμαστε στην

$$V_k(u_1, u_2; b_1, b_2) \approx \frac{1}{\beta_k} V_k^{(3)}(\beta_1 u_1, \beta_2 u_2; \beta_1 b_1, \beta_2 b_2) \quad (4.16)$$

4) Βήμα 4: Αντικατάσταση του συνεχούς-χρονικά προτύπου από διακριτό πρότυπο

Σε αυτό το τελικό βήμα, το συνεχές μοντέλο με διακριτές ζημιές στο βήμα 3 αντικαθίσταται από ένα διακριτό (στον οποίο το γεγονός της καταστροφής και η πληρωμή του μερίσματος (ενδεχομένως) ελέγχονται μόνο μια φορά ανά περίοδο). Κάποιος μπορεί έπειτα να προσεγγίσει το $V_k^{(3)}(u_1, u_2; b_1, b_2)$ ως

$$V_k^{(3)}(u_1, u_2; b_1, b_2) \approx V_k^{(d)}(u_1, u_2; b_1, b_2) \quad (4.17)$$

όπου $V_k^{(d)}(u_1, u_2; b_1, b_2)$ ορίζεται στην (4.4) με ένταση επιτοκίου $\rho = \frac{\delta}{\beta_1 c_1}$ και για $k = 1, 2$

$$X_k = \sum_{n=1}^{M_{kk}} Y_{k,n}^{(2)} + \sum_{n=1}^{M_{kk}} Z_{k,n}^{(2)} \quad (4.18)$$

Εδώ το M_{kk} ακολουθεί μια κατανομή Poisson με ένταση $\gamma_{kk} = \frac{\lambda_{kk}}{\beta_1 c_1}$ ενώ M_{12} ακολουθεί μια

κατανομή Poisson με μέσο $\gamma_{12} = \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 c_1}$. Επιπλέον, $\{Y_{k,n}^{(2)}, n = 0, 1, \dots\}$ είναι ανεξάρτητη και

ισόνομη με τη μεταβλητή Y_k^2 , και $\{(Z_{1,n}^{(2)}(n), Z_{2,n}^{(2)}(n)), n = 1, 2, \dots\}$ είναι επίσης ανεξάρτητες και

ισόνομες με το γενικό διάνυσμα $(Z_{1,n}^{(2)}(n), Z_{2,n}^{(2)}(n))$. Επιπλέον, M_{11}, M_{22}, M_{12} ,

$\{(Y_{1,n}^{(2)}, n = 1, 2, \dots\}, \{(Y_{2,n}^{(2)}, n = 1, 2, \dots\}$ και $\{(Z_{1,n}^{(1)}(n), Z_{2,n}^{(1)}(n)), n = 1, 2, \dots\}$ είναι όλα αμοιβαία

ανεξάρτητα. Ως εκ τούτου X_1 και X_2 είναι εξαρτημένες σύνθετες τυχαίες μεταβλητές

Poisson. Όταν το β_1 (συνεπώς και το β_2) είναι «μεγάλα», τα χρονικά διαστήματα μεταξύ των σημείων όπου τα επίπεδα πλεονάσματος ελέγχονται είναι μικρά, δεδομένου ότι η μονάδα

χρόνου στο παρόν βήμα είναι ισότιμη με το $\frac{1}{\beta_1 c_1}$ της χρονικής μονάδας του αρχικού

συνεχούς μοντέλου (4.1). Τότε η 4.17 θα αποτελεί καλή προσέγγιση. Από την 4.16 έχουμε

$$V_k(u_1, u_2; b_1, b_2) \approx \frac{1}{\beta_k} V_k^{(d)}(\beta_1 u_1, \beta_2 u_2; \beta_1 b_1, \beta_2 b_2) \quad (4.19)$$

όπου θα πρέπει $\beta_1 u_1, \beta_2 u_2, \beta_1 b_1, \beta_2 b_2$ να είναι ακέραιοι αριθμοί.

Ο τύπος 4.19 προτείνει ότι η αριστερή πλευρά του, δηλαδή τα αναμενόμενα προεξοφλημένα μερίσματα V_k στην (4.2) για το συνεχές μοντέλο (4.1), μπορεί να προσεγγιστεί από τη δεξιά πλευρά του που αφορά στο V_k^d της (4.4) για το πρότυπο (4.3). Απομένει να αξιολογηθεί η από κοινού σ.π.π. (X_1, X_2) , προκειμένου να εφαρμοστούν τα αποτελέσματα στην παράγραφο 4.2.1 για να βρεθεί το V_k^d . Αυτό θα είναι το περιεχόμενο της επόμενης υποενότητας, μέσω της αναδρομής κατά Panjer.

4.2.3 Δισδιάστατη αναδρομή Panjer για τις εξαρτώμενες σύνθετες κατανομές Poisson

Βάσει του τυχαίου διανύσματος (X_1, X_2) της (4.18) και με μια ελαφριά τροποποίηση των αποτελεσμάτων των Walhin και Paris (2000, παράγραφος 4) που θεώρησαν πως όπου $Z_1^{(2)}$ και $Z_2^{(2)}$ είναι ανεξάρτητα και κατανομημένα ως $Y_1^{(2)}$ και $Y_2^{(2)}$ αντίστοιχα, μπορεί να αποδειχθεί πως

$$\hat{g}(r, s) = \exp(-\gamma_{11}(1 - \hat{h}_{11}(r)) - \gamma_{22}(1 - \hat{h}_{22}(s)) - \gamma_{12}(1 - \hat{h}_{12}(r, s)))$$

$$\text{Όπου } \hat{h}_{11} = \sum_{i=0}^{\infty} r^i h_{11}(i), \hat{h}_{22}(s) = \sum_{j=0}^{\infty} s^j h_{22}(j) \text{ και } \hat{h}_{12}(r, s) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} r^i s^j h_{12}(i, j)$$

Και είναι οι πιθανογεννήτριες συναρτήσεις των $h_{11}(\cdot), h_{22}(\cdot), h_{12}(\cdot)$ οι οποίες έχουν οριστεί στην 4.13. και 4.14 στο βήμα 2 και $\gamma_{ii} = \frac{\lambda_{ii}}{\beta_1 c_1}$ $i = 1, 2$ όπως στο βήμα 4. Παραγωγίζοντας τη παραπάνω σχέση ως προς r , πολλαπλασιάζοντας ως προς r και εξισώνοντας τους συντελεστές r^i καταλήγουμε ότι για $i = 1, 2, \dots; j = 0, 1, \dots$,

$$g(i, j) = \gamma_{11} \sum_{k=1}^i \frac{k}{i} h_{11}(k) g(i-k, j) + \gamma_{12} \sum_{k=1}^i \sum_{l=0}^i \frac{k}{i} h_{12}(k, l) g(i-k, j-1) \quad (4.20)$$

Ομοίως:

$$g(i, j) = \gamma_{22} \sum_{k=1}^i \frac{k}{i} h_{22}(k) g(i-k, j) + \gamma_{12} \sum_{k=1}^i \sum_{l=0}^i \frac{k}{i} h_{12}(k, l) g(i-k, j-1) \quad (4.21)$$

Με αρχική τιμή

$$\hat{g}(0, 0) = \exp(-\gamma_{11}(1 - h_{11}(0)) - \gamma_{22}(1 - h_{22}(0)) - \gamma_{12}(1 - h_{12}(0, 0))) \quad (4.22)$$

4.2.3 Αριθμητικές απεικονίσεις της προσέγγισης

Σε αυτή την υποενότητα στοχεύει στην επίδειξη της ποιότητας της προσέγγισης της παραγράφου 4.2. Καθώς η ίδια προσέγγιση θα χρησιμοποιηθεί στις διάφορες αριθμητικές απεικονίσεις για το υπόλοιπο του κεφαλαίου, τονίζονται οι προγραμματισμένες εργασίες που χρειάζονται για την προσέγγιση του $V_k(u_1, u_2; b_1, b_2)$ για $k = 1, 2$

- Ορισμός των παραμέτρων και των υποθέσεων κατανομών του συνεχούς χρονικά μοντέλου (4.1). τα οποία περιλαμβάνουν τις εντάσεις είσπραξης των ασφαλιστρών, τις εντάσεις Poisson, τις σ.κ., corula $C(\cdot, \cdot)$ και την ένταση επιτοκίου δ για τη συνάρτηση των μερισμάτων (4.2).
- Επιλογή των παραγόντων κλίμακας (β_1, β_2) έτσι ώστε τα $\beta_1 u_1, \beta_2 u_2, \beta_1 b_1, \beta_2 b_2$ να είναι ακέραιοι αριθμοί, και $\beta_1 c_1 = \beta_2 c_2$.
- Εφαρμογή των (4.13) και (4.14) για την εύρεση των $h_{ii}(\cdot), i=1,2$ Με $\gamma_{11} = \frac{\lambda_{11}}{\beta_1 c_1}$, $\gamma_{22} = \frac{\lambda_{22}}{\beta_1 c_1}$ και $\gamma_{12} = \frac{\lambda_{12}}{\beta_1 c_1}$ εύρεση της $g(\cdot, \cdot)$ αναδρομικά χρησιμοποιώντας (2.18) και (4.21) με αρχική τιμή (4.22).
- Θέτουμε $\rho = \frac{\delta}{\beta_1 c_1}$. Εφαρμόζουμε τις (4.5) - (4.11) (αντικαθιστώντας τα b_1, b_2 με $c_1 \beta_1, c_2 \beta_2$) για να υπολογιστούν τα $\{V_1^{(d)}(u_1, u_2; \beta_1 b_1, \beta_2 b_2) : u_1 = 0, 1, \dots, \beta_1 b_1; u_2 = 0, 1, \dots, \beta_2 b_2\}$ και $\{V_2^{(d)}(u_1, u_2; \beta_1 b_1, \beta_2 b_2) : u_1 = 0, 1, \dots, \beta_1 b_1; u_2 = 0, 1, \dots, \beta_2 b_2\}$.
- Εφαρμογή της (2.17) για να βρούμε προσεγγιστικά τα $V_k(u_1, u_2; b_1, b_2)$ για $k = 1, 2$

Αξίζει να σημειωθεί ότι όσο οι παράγοντες κλίμακας β_1 και β_2 αυξάνονται (έτσι ώστε $\beta_1 c_1 = \beta_2 c_2$), η προσέγγιση της συνεχούς-χρονικά δισδιάστατης διαδικασίας από μια διακριτής γίνεται ακριβέστερη επειδή 1) η διακριτοποίηση στο βήμα 2 στην παράγραφο 4.2.2 γίνεται λεπτομερέστερη και 2) η διακριτή χρονικά διαδικασία προσέγγισης στο βήμα 4 ελέγχεται συχνότερα (και έρχεται πιο κοντά στο συνεχές πρότυπο).

Παράδειγμα 1

Σε αυτό το παράδειγμα, υποθέτουμε ότι οι εντάσεις Poisson είναι $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{12} = 1$ και ρυθμοί είσπραξης ασφαλιστρών $c_1 = 2,8$ και $c_2 = 4,2$ Η κλάση 1 υπόκειται σε ζημιές με την σ.π.π. $f_{11}(y) = f_{1\bullet}(y) = 0,8e^{-0,8y}$ και οι ζημιές για τη κλάση 2 έχουν σ.π.π.

$f_{22}(y) = f_{2\bullet}(y) = 0,5e^{-0,5y}$. Με μέσες τιμές να είναι 1.25 και 2 αντίστοιχα. Στην περίπτωση ενός κοινού σοκ, υποτίθεται ότι Z_1 και Z_2 είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, δηλ. ότι εφαρμόζεται $C(u, v) = uv$ για $0 \leq u, v \leq 1$. Οι συνθήκες θετικού κέρδους $c_1 = 2,8 > 2,5 = \lambda_{11}E(Y_1) + \lambda_{12}E(Z_1)$ και $c_2 = 4,2 > 4 = \lambda_{22}E(Y_2) + \lambda_{12}E(Z_2)$ ικανοποιούνται.

Η ένταση επιτοκίου έστω ότι είναι $\delta = 0.05$ και οι τιμές φραγμάτων είναι σταθερές $b_1 = b_2 = 2$ (βλ. παράγραφο 5 για εξήγηση σχετικά με την επιλογή των χαμηλών φραγμάτων). Σύμφωνα με τις υπολογιστικές διαδικασίες που περιγράφονται σε αυτή την υποενότητα, απαιτούμε $\beta_1 c_1 = \beta_2 c_2$, ή ισοδύναμα $\beta_1 = 1,5\beta_2$. Οι προσεγγισμένες τιμές των αναμενόμενων προεξοφλημένων μερισμάτων για τις δύο κλάσεις που χρησιμοποιούν διαφορετικά ζευγάρια τιμών (β_1, β_2) δίνονται στους Πίνακες 2.1 (α) και (β).

V_1	$(\beta_1, \beta_2) = (3, 2)$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,425	0,486	0,507
	1	0,832	0,971	1,024
	2	1,526	1,721	1,805
	$(\beta_1, \beta_2) = (6, 4)$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,417	0,473	0,491
	1	0,826	0,958	1,003
	2	1,524	1,716	1,79
	$(\beta_1, \beta_2) = (15, 1)$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,413	0,467	0,482
	1	0,824	0,951	0,991
	2	1,526	1,715	1,782
	$(\beta_1, \beta_2) = (30, 20)$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,412	0,465	0,479
	1	0,823	0,949	0,987
	2	1,527	1,715	1,78
$(\beta_1, \beta_2) = (60, 40)$				
$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
0	0,411	0,464	0,478	
1	0,823	0,948	0,985	
2	1,527	1,715	1,778	
V_2	$(\beta_1, \beta_2) = (3, 2)$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,957	1,493	2,268
	1	1,193	1,869	2,717
	2	1,267	2,003	2,886
	$(\beta_1, \beta_2) = (6, 4)$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,956	1,496	2,276
	1	1,187	1,869	2,725
	2	1,253	1,99	2,882
	$(\beta_1, \beta_2) = (15, 1)$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,958	1,501	2,285
	1	1,184	1,87	2,733
	2	1,245	1,984	2,881
	$(\beta_1, \beta_2) = (30, 20)$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,958	1,503	2,289
	1	1,184	1,871	2,736
	2	1,243	1,982	2,881
$(\beta_1, \beta_2) = (60, 40)$				
$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
0	0,959	1,504	2,291	
1	1,184	1,872	2,738	
2	1,242	1,981	2,881	

Πίνακες 2.1(α) κ (β) Προσεγγισμένες τιμές των αναμενόμενων προεξοφλημένων μερισμάτων

V_1	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,411	0,463	0,476
	1	0,823	0,945	0,983
	2	1,527	1,715	1,777
V_2	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,959	1,506	2,292
	1	1,182	1,87	2,739
	2	1,24	1,979	2,88

Πίνακες 2.2. (α) κ (β) Προσομοιωμένα μερίσματα για τις δύο κλάσεις

Από τον πίνακα 2.1, είναι σαφές ότι για ένα δεδομένο σύνολο (β_1, β_2) , οι συναρτήσεις μερισμάτων και για τις δύο κλάσεις αυξάνονται στα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος u_1 και u_2

όπως και θα ‘πρεπε. Όταν αυξάνουμε τις τιμές (β_1, β_2) για κάθε σταθερό ζευγάρι των αρχικών επιπέδων πλεονάσματος (u_1, u_2) , οι τιμές μερισμάτων της κλάσης 1 πάντα μειώνονται (εκτός από όταν $(u_1, u_2) = (2, 0)$) εκτιμώντας ότι εκείνοι της κλάσης 2 είτε αυξάνονται είτε μειώνονται. Σε όλες τις περιπτώσεις, τα μερίσματα και για τις δύο κλάσεις φαίνεται να αλλάζουν όσο τα (β_1, β_2) αυξάνονται.

Για να ελέγξουμε περαιτέρω τα αποτελέσματα, πρέπει επίσης να γίνουν μερικές προσομοιώσεις στους πρότυπους πίνακες συνεχούς-χρονικά ρίσκου 2.2 (α) και (β) για το μερίσμα της συνάρτησης των δύο κλάσεων. Στον πίνακα 2.2, κάθε ζευγάρι (V_1, V_2) υπολογίζεται χρησιμοποιώντας 1.000.000 δείγματα παραγμένα μέχρι τον κοινό χρόνο χρεοκοπίας. Συγκρίνοντας τον πίνακα 2.1 με τον πίνακα 2.2, μπορούμε να δούμε τους παράγοντες κλίμακας $(\beta_1, \beta_2) = (60, 40)$ να δίνουν καλά αποτελέσματα: οι τιμές μερισμάτων είναι πάντα οι ίδιες μέχρι τουλάχιστον δύο δεκαδικά ψηφία.

Εντούτοις, τα αποτελέσματα προσομοίωσης είναι μερικές φορές λίγο μεγαλύτερα ή λίγο μικρότερα από τις διακριτού τύπου προσεγγίσεις. Επομένως, κάποιος δεν μπορεί να αποφανθεί αν η προσέγγισή μας τείνει να υποτιμήσει ή να υπερεκτιμήσει την αληθινή αξία των μερισμάτων, δηλ. ούτε ο αντίκτυπος των καθυστερημένων μερισμάτων ούτε η παρατεταμένη επιβίωση δεν είναι πάντα κυρίαρχα. Εν τούτοις, για κάθε σταθερό ζευγάρι των αρχικών επιπέδων πλεονάσματος (u_1, u_2) , οι προσεγγισμένες τιμές στον πίνακα 2.1 πλησιάζουν την αντιστοιχία προσομοιωμένων τιμών στον πίνακα 2.2 είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω, καθώς αυξάνεται το (β_1, β_2) .

4.3 Διαφορετικοί τύποι εξαρτήσεων

Σε αυτό το τμήμα, εξετάζουμε τη δισδιάστατη διαδικασία κινδύνου (4.1) στην οποία οι δύο κλάσεις κινδύνων υπάγονται στους διαφορετικούς τύπους εξαρτήσεων μέσω μερικών αριθμητικών παραδειγμάτων. Αυτοί περιλαμβάνουν (i) τα κοινά σοκ (ii) τη θεωρία πιθανοτήτων και (iii) αναλογική αντισφάλιση. Σε όλο αυτό το τμήμα, οι τιμές των φραγμάτων $b_1 = b_2 = 2$ θα εφαρμοστούν επειδή θα χρησιμοποιηθούν υψηλοί παράγοντες κλίμακας (β_1, β_2) (βλ. τελικές παρατηρήσεις στην παράγραφο 4.5).

4.3.1 Διαφορετικά επίπεδα κοινών σοκ

Παράδειγμα 2

Σε αυτό το παράδειγμα, στοχεύουμε στην εξέταση του αντίκτυπου των διαφορετικών επιπέδων κοινών σοκ στα μερίσματα με ποικιλία των τιμών $\lambda_{11}, \lambda_{22}$ και λ_{12} κρατώντας σταθερά τα $\lambda_{11} + \lambda_{12} = \lambda_{22} + \lambda_{12} = 2$, δηλ. η κάθε μία κλάση κινδύνου υπόκειται στο ίδιο συνολικό ποσοστό άφιξης ζημιών ίσο με 2. Χρησιμοποιούμε τις συναρτήσεις πυκνότητας

$$f_{11}(y) = f_{1\bullet}(y) = 8e^{-2y} \sin^2(y), f_{22}(y) = f_{2\bullet}(y) = \frac{1}{4} 0,6^2 ye^{-0,6y} + \frac{3}{4} 9^2 ye^{-9y}.$$

Αυτές οι δύο κατανομές έχουν ρητούς μετασχηματισμούς Laplace, και χρησιμοποιήθηκαν από τους Cheung και Drekić (2008). Και οι δύο έχουν μέση τιμή 1, και διακύμανση το 0.50 και 1.80

αντίστοιχα. Ενώ η $f_{22}(y)$ αντιπροσωπεύει μια μίξη 2 κατανομών Erlang, η λιγότερο γνωστή $f_{11}(y)$ είναι η σ.π.π. κατανομής ημιτόνου με χαμηλή μεταβλητότητα.

Οι υπόλοιπες πρότυπες υποθέσεις είναι ίδιες με εκείνες στο παράδειγμα 1: Z_1 και Z_2 είναι ανεξάρτητα σε περίπτωση κοινού σοκ, η ένταση επιτοκίου $\delta = 0,05$ είναι, και οι τιμές των φραγμάτων είναι $b_1 = b_2 = 2$. Χρησιμοποιώντας παράγοντες κλίμακας $(\beta_1, \beta_2) = (60, 40)$, ακολουθούμε τις διαδικασίες προσέγγισης που περιγράφονται στην αρχή από την παράγραφο 2.4 και οι τιμές από τα προκύπτοντα μερίσματα παρατίθενται στους πίνακες 3.1 (α) και (β). Οι πίνακες αρχίζουν με ακραία περίπτωση $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 2$ και $\lambda_{12} = 0$. Κατόπιν καθώς κινούμαστε κάτω από τους πίνακες, τα λ_{11} και λ_{22} μειώνονται κατά 0.5 ενώ το λ_{12} αυξάνεται κατά 0.5 κάθε φορά, έως ότου φθάσουμε σε μια άλλη ακραία περίπτωση όπου θα είναι $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0$ και $\lambda_{12} = 2$. Η τελευταία περίπτωση δείχνει ότι οι δύο μονάδες υπόκεινται μόνο στα κοινά σοκ.

V_1	$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 2, \lambda_{12} = 0$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,26	0,303	0,308
	1	0,689	0,801	0,816
	2	1,404	1,601	1,627
	$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 1,5, \lambda_{12} = 0,5$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,305	0,342	0,347
	1	0,769	0,873	0,886
	2	1,503	1,688	1,712
	$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 1, \lambda_{12} = 1$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,358	0,387	0,39
	1	0,857	0,95	0,962
	2	1,609	1,781	1,803
	$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0,5, \lambda_{12} = 1,5$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,419	0,437	0,439
	1	0,955	1,035	1,045
	2	1,722	1,88	1,9
$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0, \lambda_{12} = 2$				
$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
0	0,49	0,493	0,494	
1	1,062	1,127	1,135	
2	1,842	1,986	2,004	
V_2	$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 2, \lambda_{12} = 0$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,906	1,401	2,113
	1	1,637	2,458	3,318
	2	1,946	2,91	3,846
	$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 1,5, \lambda_{12} = 0,5$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	1,041	1,538	2,26
	1	1,799	2,621	3,483
	2	2,092	3,067	4,005
	$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 1, \lambda_{12} = 1$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	1,193	1,686	2,417
	1	1,971	2,791	3,655
	2	2,244	3,231	4,170
	$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0,5, \lambda_{12} = 1,5$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	1,365	1,845	2,584
	1	2,156	2,969	3,834
	2	2,402	3,401	4,341
$\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0, \lambda_{12} = 2$				
$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
0	1,558	2,018	2,763	
1	2,352	3,155	4,022	
2	2,566	3,578	4,519	

Πίνακες 3.1(α) και (β): Προσέγγιση μερισμάτων σε δύο μονάδες για διαφορετικά επίπεδα από κοινά σοκ.

Από τον πίνακα 3.1 βλέπουμε ότι οι τιμές μερισμάτων και για τις δύο μονάδες αυξάνονται όσο αυξάνεται το ποσοστό κοινών κλονισμών. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί ως εξής. Για την περίπτωση όπου $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 2$ και $\lambda_{12} = 0$, οι διαδικασίες πλεονάσματος των δύο μονάδων είναι πράγματι ανεξάρτητες, και ο μέσος συνολικός αριθμός των γεγονότων αξίωσης ανά χρόνο μονάδων, δηλαδή $\lambda_{11} + \lambda_{22} + \lambda_{12}$, είναι 4.

Καθώς κινούμαστε προς την πιο εξαρτώμενη περίπτωση όπου $\lambda_{11} = \lambda_{22} = 0$ και $\lambda_{12} = 2$ όπου υπάρχουν μόνο κοινοί κλονισμοί, ο μέσος συνολικός αριθμός των γεγονότων αξίωσης ανά χρόνο μονάδων μειώνεται σε 2.

Μια άλλη ερμηνεία των αποτελεσμάτων μας είναι ότι όταν δεν υπάρχει κανένας κοινός κλονισμός, μια από τις μονάδες έχει στην πραγματικότητα θετικό πλεόνασμα στον κοινό χρόνο T καταστροφών αλλά κανένα περαιτέρω μέρισμα δεν πληρώνεται, δηλ. η κατάσταση δεν είναι ευνοϊκή. Αντίθετα, όταν κοινοί κλονισμοί είναι συχνότεροι, είναι πιθανότερο ότι και οι δύο μονάδες έχουν αρνητικό πλεόνασμα στον κοινό χρόνο T καταστροφών ούτως ή άλλως, δηλαδή υπάρχει μικρότερη πιθανότητα κατασπατάλησης πόρων. Αυτές οι παρατηρήσεις συμπληρώνουν τα αριθμητικά αποτελέσματα του Gong (2012, Γράφημα 1) ο οποίος μελέτησε την κοινή πιθανότητα καταστροφών ελλείψει μερισμάτων.

4.3.2 Διαφορετικές θεωρίες πιθανοτήτων (θ.π.)

Σε αυτήν την υποενότητα, εφαρμόζουμε διαφορετικές παραμετρικές θεωρίες πιθανοτήτων για να περιγράψουμε την εξάρτηση μεταξύ Z_1 και Z_2 όταν ένα κοινό σοκ χτυπά και τις δύο μονάδες. Τρεις θεωρίες πιθανοτήτων θα εξεταστούν:

(1) η Ali-Mikhail-Haq (AMH) θεωρία πιθανοτήτων (π.χ. Nelsen (2006, ασκήσεις 2.14 (δ) και 5.1))

(2) η θεωρία πιθανοτήτων των Farlie-Gumbel-Morgenstern (FGM) (π.χ. Nelsen (2006, παραδείγματα 3.12 και 5.2)) και

(3) η Γκαουσιανή (ή κανονική) θεωρία πιθανοτήτων (π.χ. Denuit και λοιποί (2005, κεφάλαιο 4.3.3 και άσκηση 5.4.6)). Ο ορισμός κάθε θεωρίας πιθανοτήτων καθώς και του συντελεστή βαθμού συσχέτισης του Kendall (ή αλλιώς Kendall's tau τ) συνοψίζονται στον πίνακα 3.2.

Copula	$C(u, v)$ for $0 \leq u, v \leq 1$	Range of θ	Kendall's tau τ	Range of τ
AMH	$\frac{uv}{1 - \theta(1-u)(1-v)}$	$-1 \leq \theta \leq 1$	$\frac{3\theta-2}{3\theta} - \frac{2(1-\theta)^2 \ln(1-\theta)}{3\theta^2}$	$-0,18173 \leq \tau \leq 0,33333$
FGM	$uv + \theta uv(1-u)(1-v)$	$-1 \leq \theta \leq 1$	$\frac{2}{9} \theta$	$-0,22222 \leq \tau \leq 0,22222$
Gaussian	$\Phi(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v))$	$-1 \leq \theta \leq 1$	$\frac{2}{\pi} \arcsin \theta$	$-1 < \tau < 1$

Πίνακας 3.2 Θεωρίες πιθανοτήτων και συντελεστές βαθμού συσχέτισης Kendall.

Εξ ορισμού στη Γκαουσιανή θεωρία πιθανοτήτων $\Phi(\cdot)$ είναι η κανονική κατανομή, ενώ το $\Phi_\theta(\cdot, \cdot)$ αντιπροσωπεύει την πολλαπλασιαστική κανονική κατανομή με τη συνδιακύμανση μ . Και στις τρεις θεωρίες πιθανοτήτων, το $\theta = 0$ αφορά στην περίπτωση της ανεξαρτησίας (δηλ. $C(u, v) = uv$ για $0 \leq u, v \leq 1$), και το προκύπτον tau του Kendall είναι μηδέν. Αξίζει να σημειωθεί ότι και οι 3 θεωρίες πιθανοτήτων έχουν μια παράμετρο. Αυτό σημαίνει πως, από

την άποψη της βαθμολόγησης, εάν μια από αυτές τις θεωρίες πιθανοτήτων κριθεί ως κατάλληλη για ένα δεδομένο σύνολο στοιχείων, τότε η παράμετρος προκύπτει με απλό τρόπο μόλις υπολογιστεί ο βαθμός συσχετισμού του Kendall (βλ. π.χ. McNeil (2005, παράγραφος 5.5.1)).

Η εφαρμογή των θεωριών ως εργαλεία για τη διαχείριση ρίσκου στα οικονομικά και ασφαλιστικά συζητήθηκε εκτενώς από διαφόρους, μεταξύ των οποίων οι Embrechts (2002, 2003), Valdez(1998), Klugman και Parsa (1999) και Trivedi και Zimmer (2005) για γενικές αναλογιστικές εφαρμογές και την προσαρμογή απωλειών από διμερείς κατανομές με τη θεωριών πιθανοτήτων. Οι λόγοι για την επιλογή των ανωτέρω θ.π., περιληπτικά, είναι οι ακόλουθοι. Κατ' αρχάς, η θ.π. AMH ανήκει στην κατηγορία αρχιμηδικών θ.π., που είναι “δημοφιλείς” για διαμόρφωση μαθηματικών μοντέλων (βλ. π.χ. Genest και MacKay (1986), Denuit (2005, Κεφάλαιο 4.5). Δεύτερον, η θ.π. FGM ανήκει στην κατηγορία πολυωνυμικών θ.π. και λόγω της απλότητάς της, η θ.π. FGM γίνεται όλο και περισσότερο δημοφιλής στη διαμόρφωση των συνολικών ζημιών στα πρότυπα ασφαλιστικού κινδύνου (βλ. π.χ. Cossette (201), Cheung (2013, παράγραφος 4), και Χατζηκωνσταντινίδης και Βρόντος (2014)). Ενώ οι AMH και FGM επιτρέπουν μόνο τη μέτρια εξάρτηση, η ισχυρότερη εξάρτηση μπορεί να διαμορφωθεί από το Γκαουσιανή θ.π. που χρησιμοποιείται συνήθως για λόγους σύγκρισης (βλ. Denuit (2005, σχήμα 4.4)).

Παράδειγμα 3

Σε αυτό το παράδειγμα, ακολουθούμε τις ίδιες υποθέσεις όπως στο παράδειγμα 2 της παραγράφου 3.1, εκτός από το ότι οι τρεις θ.π. στον πίνακα 3.2 εφαρμόζονται στο ζευγάρι (Z_1, Z_2) που προέκυψαν από τα κοινά σοκ. Οι πίνακες 3.3 (α) και (β) συνοψίζουν την κατά προσέγγιση μερισματική απόδοση χρησιμοποιώντας τις διαδικασίες στην αρχή της παραγράφου 2.4 με παράγοντες κλίμακας $(\beta_1, \beta_2) = (60, 40)$.

Εάν θέσουμε σταθερή τιμή $\tau = 0,2$ για το tau του Kendall, βρίσκουμε $\theta = 0,71349$ $\theta = 0,9$ και $\theta = 0,30902$ για τις AMH, FGM και Gauss θ.π. αντίστοιχα, εκτιμώντας η θ.π. AMH δεν μπορεί να φθάσει σε ένα τέτοιο tau σύμφωνα με την τελευταία στήλη του πίνακα 3.2. Η αντίστοιχες προσεγγιστικές τιμές μερισμάτων δίνονται στους πίνακες 3.4 (α) και (β).

V ₁	AMH				
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
	0	0,369	0,398	0,402	
	1	0,881	0,975	0,987	
	2	1,636	1,81	1,831	
	FGM				
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
	0	0,371	0,401	0,404	
	1	0,885	0,98	0,991	
	2	1,641	1,815	1,837	
	Gaussian				
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
0	0,372	0,401	0,405		
1	0,887	0,982	0,994		
2	1,643	1,818	1,84		
V ₂	AMH				
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
	0	1,23	1,727	2,458	
	1	2,035	2,863	3,729	
	2	2,307	3,304	4,244	
	FGM				
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
	0	1,236	1,733	2,465	
	1	2,045	2,876	3,743	
	2	2,318	3,318	4,258	
	Gaussian				
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
0	1,239	1,736	2,468		
1	2,052	2,885	3,752		
2	2,327	3,33	4,271		

Πιν 3.3 (α) και (β). Προσεγγισμένα μερίσματα για 2 κλάσεις κινδύνων για 2 θ.π. για $\tau = 0,2$

		FGM			
		$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
V ₁	0	0,345	0,374	0,377	
	1	0,831	0,923	0,935	
	2	1,578	1,748	1,77	
	Gaussian				
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
	0	0,344	0,373	0,376	
	1	0,83	0,921	0,933	
	2	1,577	1,746	1,768	

		FGM			
		$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
V ₂	0	1,153	1,64	2,371	
	1	1,901	2,709	3,57	
	2	2,173	3,148	4,085	
	Gaussian				
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
	0	1,152	1,639	2,369	
	1	1,901	2,708	3,569	
	2	2,172	3,147	4,084	

Πιν 3.4 (α) και (β). Κατά προσέγγιση μερίσματα στις δύο κλάσεις κινδύνων για διαφορετικές θεωρίες πιθανοτήτων για $\tau = -0,2$

Από τους τέσσερις παραπάνω πίνακες, είναι σαφές ότι οι τιμές μερισμάτων είναι αρκετά κοντά για διαφορετικές θεωρίες πιθανοτήτων με σταθερό τον συντελεστή συσχέτισης του Kendall. Όταν κάποιος συγκρίνει τις τιμές στους Πίνακες 3.1 (δηλ. την περίπτωση με $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{12} = 1$), 3.3 και 3.4, η συνάρτηση μερίσματος για κάθε κλάση κινδύνου αυξάνεται καθώς ο συντελεστής συσχέτισης του Kendall αλλάζει από $-0,2$ σε 0 και μετά σε $0,2$. Η σκέψη που κρύβεται πίσω από αυτό είναι η εξής:

Για κάθε μία από τα τρεις θεωρίες, για σταθερές (u, v) η τιμή του $C(u, v)$ αυξάνεται με την παράμετρο θ , η οποία με τη σειρά του αυξάνεται με το συντελεστή συσχέτισμού του Kendall. Έτσι, για τις σταθερές τιμές των z_1 και z_2 , η αθροιστική συνάρτηση κοινής κατανομής $F_{12}(z_1, z_2) = C(F_{1\bullet}(z_1), F_{\bullet 2}(z_2))$ αυξάνει σε σχέση με τον συντελεστή συσχέτισμού Kendall. Καταλήγοντας, όταν η εξάρτηση είναι θετική, η πιθανότητα το (Z_1, Z_2) να βρεθεί εκτός του διαστήματος $(0, z_1] \times (0, z_2]$ είναι μικρότερη, οδηγώντας σε μικρότερη πιθανότητα χρεοκοπίας της διδιάστατης διαδικασίας από ένα δεδομένο κοινό σοκ και ως εκ τούτου περισσότερα μερίσματα.

4.3.3 Αναλογική αντασφάλιση

Σε αυτήν την υποενότητα, εξηγείται η ερμηνεία και η εφαρμογή του μοντέλου (4.1) σε προβλήματα που αφορούν αναλογική αντασφάλιση (βλ. παρατήρηση 1). Καταρχάς, ελλείψει οποιασδήποτε αντασφάλισης, υποτίθεται ότι η κλάση κινδύνου 1 της επιχείρησης αντιμετωπίζει δύο ανεξάρτητες κατηγορίες συνολικών ζημιών με ένταση άφιξης Poisson λ_{11} και λ_{12} και γενικές ζημιές σφοδρότητας Y_1 και W αντίστοιχα. Επιπλέον, η κλάση κινδύνου 2 υπόκειται μόνο σε μια συνολική διαδικασία ζημιών με ποσοστό Poisson λ_{22} και γενική ζημιά Y_2 . Υποθέτουμε ότι η γενική ζημιά W είναι πιο επικίνδυνη από την Y_1 (π.χ η W έχει βαριά ουρά και Y_1 ελαφριά ουρά) και η κλάση κινδύνου 1 θέλει να μειώσει την έκθεση σε κίνδυνο με την αγορά αντασφάλισης από τη κλάση κινδύνου 2 για μέρος του κινδύνου W . Υποθέτουμε μια αναλογική σύμβαση αντασφάλισης έτσι ώστε η κλάση

κινδύνου 1 να διατηρεί ένα ποσοστό s_1 από κάθε ζημιά W (και να αντασφαλίζει το υπόλοιπο $1 - s_1$) για $0 < s_1 < 1$

Στο πλαίσιο των συμφωνιών αντασφάλισης που περιγράφηκαν παραπάνω, το μοντέλο (4.1) εφαρμόζεται εφαρμόζοντας $(Z_1, Z_2) - (s_1 W, (1 - s_1) W)$. Με το $F_W(\cdot)$ να είναι η κανονική κατανομή της θετικής συνεχούς τυχαίας μεταβλητής W , έχουμε $F_{1\bullet}(y_1) = F_W(\frac{y_1}{s_1})$ και

$F_{\bullet 2}(y_2) = F_W(\frac{y_2}{1 - s_1})$. Επειδή τα Z_1 και Z_2 είναι συνμοτονοτικά, πρέπει να εφαρμοστεί η

συνμοτονικότητα των Copula $C(u, v) = \min(u, v)$ για το $0 \leq u, v \leq 1$. Θεωρείται ότι κλάση κινδύνου 1 επιβάλλει τον συντελεστή επιβάρυνσης η_{11} και η_{12} στις ζημιές Y_1 και W ενώ η κλάση κινδύνου 2 επιβάλλει συντελεστή επιβάρυνσης η_{21} και η_{22} στα Y_2 και Z_2 . Κατά συνέπεια, τα καθαρά εισοδηματικά ποσοστά ασφαλιστρού c_1 και c_2 δίνονται από τη σχέση:

$$\begin{cases} c_1 = (1 + \eta_{11})\lambda_{11}E(Y_1) + ((1 + \eta_{12}) - (1 + \eta_{22})(1 - s_1))\lambda_{12}E(W) \\ c_2 = (1 + \eta_{12})\lambda_{22}E(Y_2) + (1 + \eta_{22})(1 - s_1)\lambda_{12}E(W) \end{cases} \quad (4.23)$$

Πρακτικά, ο συντελεστής επιβάρυνσης η_{22} που χρεώνεται από τον αντασφαλιστή δεν είναι μικρότερος από τον η_{12} . Αλλιώς η κλάση κινδύνου 1 μπορεί απλά να αντασφαλίσει ολόκληρο το ρίσκο W ώστε να έχει κέρδος χωρίς κίνδυνο. Επιπλέον, η κλάση κινδύνου 1 της επιχείρησης δεν πρέπει να επιλέξει να δεχτεί τον κίνδυνο W εκτός αν μπορεί να παράγει θετικό αναμενόμενο καθαρό κέρδος. Αυτό οδηγεί στην συνθήκη:

$$((1 + \eta_{12}) - (1 + \eta_{22})(1 - s_1))\lambda_{12}E(W) > s_1\lambda_{12}E(W) \quad (4.24)$$

Η αριστερή πλευρά της παραπάνω εξίσωσης αντιπροσωπεύει το καθαρό εισόδημα ασφαλιστρού της κλάσης κινδύνου 1 με την αποδοχή του ρίσκου W και αντασφάλισης μέρος του, ενώ η δεξιά πλευρά είναι οι αναμενόμενες καθαρές ζημιές της κλάσης κινδύνου 1 που προκύπτουν από το W μετά από την αντασφάλιση.

Παράδειγμα 4

Σε αυτό το παράδειγμα, υποθέτουμε $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{12} = 1$, $f_{11}(y) = 8e^{-2y} \sin^2(y)$

$$f_W(y) = \frac{5 \cdot 8^5}{(y + 8)^6}, \text{ και } f_{22}(y) = \frac{1}{4} 0,6^2 ye^{-0,6y} + \frac{3}{4} 9^2 ye^{-9y}.$$

Σημειώστε ότι τα Y_1 και Y_2 έχουν και τα δύο ελαφριά ουρά με μέση τιμή 1 ενώ το W έχει βαριά ουρά με μέση τιμή 2.

Όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα, η ένταση του επιτοκίου υποτίθεται ότι ήταν $\delta = 0,05$ και οι τιμές των φραγμάτων είναι $(b_1, b_2) = (2, 2)$. Επιπλέον, οι συντελεστές επιβάρυνσης είναι $\eta_{11} = 0,2$, $\eta_{12} = \eta_{21} = 0,5$ και $\eta_{22} = 1$, $\eta_{22} = 1$. Εφαρμόζοντας αυτές τις

υποθέσεις στην ανισότητα (3.2) παίρνουμε $s_1 > 0,5$. Κατόπιν, οι τιμές c_1 και c_2 υπολογίζονται σύμφωνα με την (3.1) βασιζόμενοι σε διαφορετικές επιλογές s_1 .

Θα εφαρμόσουμε και πάλι τις διαδικασίες προσέγγισης που αναφέρονται στην Ενότητα 2.4 για την παραγωγή των μερισμάτων. Ας σημειωθεί πως δεν είναι δυνατό να εφαρμοστούν οι ίδιοι παράγοντες κλίμακας (β_1, β_2) για διαφορετικές τιμές s_1 λόγω του περιορισμού $\beta_1 c_1 = \beta_2 c_2$. Προκειμένου να γίνει μια δίκαιη σύγκριση των μερισμάτων για διαφορετικά s_1 , οι τιμές β_1 (ή β_2) επιλέγονται έτσι ώστε οι προκύπτουσες τιμές $\beta_1 c_1$ (ή $\beta_2 c_2$) να είναι συγκρίσιμες για διαφορετικά s_1 , έτσι ώστε προσεγγίζοντας διακριτές διαδικασίες να ελέγχονται κατά προσέγγιση στην ίδια συχνότητα. Θυμηθείτε ότι μονάδα χρόνου στο μοντέλο προσέγγισης διακριτικού χρόνου είναι ισοδύναμη με τη μονάδα χρόνου $\frac{1}{\beta_1 c_1}$ στο μοντέλο του συνεχούς χρόνου.) Η μελέτη λειτουργεί κάτω από ένα σύνολο τιμών (β_1, β_2) των οποίων οι τιμές των $\beta_1 c_1$ είναι όλα περίπου 160. Τα προσεγγισμένα αναμενόμενα προεξοφλημένα μερίσματα για τις δύο κλάσεις κινδύνου καθώς επίσης και τα ποσά τους για τις διάφορες τιμές s_1 δίνονται στους πίνακες 3.5 (α), (β) και (γ).

V_1	$s_1 = 0.55$			
	$(\beta_1, \beta_2) = (66, 48), \beta_1 c_1 = 158.4$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,696	0,75	0,757
	1	1,361	1,563	1,578
	2	2,157	2,481	2,516
	$s_1 = 0.6$			
	$(\beta_1, \beta_2) = (62, 52), \beta_1 c_1 = 161.2$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,829	0,899	0,907
	1	1,553	1,778	1,796
	2	2,37	2,727	2,758
	$s_1 = 0.65$			
	$(\beta_1, \beta_2) = (58, 56), \beta_1 c_1 = 162.4$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	0,966	1,053	1,064
1	1,743	1,991	2,012	
2	2,579	2,966	2,996	
$s_1 = 0.7$				
$(\beta_1, \beta_2) = (54, 60), \beta_1 c_1 = 162$				
$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
0	1,14	1,211	1,224	
1	1,931	2,202	2,227	
2	2,783	3,196	3,229	
V_2	$s_1 = 0,55$			
	$(\beta_1, \beta_2) = (66, 48), \beta_1 c_1 = 158,4$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	1,642	2,214	2,968
	1	2,391	3,399	4,28
	2	2,594	3,77	4,732
	$s_1 = 0.6$			
	$(\beta_1, \beta_2) = (62, 52), \beta_1 c_1 = 161.2$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	1,523	2,085	2,828
	1	2,173	3,123	3,995
	2	2,342	3,453	4,389
	$s_1 = 0,65$			
	$(\beta_1, \beta_2) = (58, 56), \beta_1 c_1 = 162.4$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2
	0	1,392	1,942	2,673
1	1,95	2,844	3,706	
2	2,091	3,131	4,048	
$s_1 = 0,7$				
$(\beta_1, \beta_2) = (54, 60), \beta_1 c_1 = 162$				
$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
0	1,252	1,788	2,506	
1	1,727	2,565	3,416	
2	1,843	2,809	3,713	

		$s_1 = 0,75$						$s_1 = 0,75$			
		$(\beta_1, \beta_2) = (50, 64), \beta_1 c_1 = 160$						$(\beta_1, \beta_2) = (50, 64), \beta_1 c_1 = 160$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2		$u_1 \backslash u_2$	0	1	2		
	0	1,242	1,372	1,388		0	1,16	1,626	2,331		
	1	2,114	2,411	2,44		1	1,505	2,289	3,128		
	2	2,982	3,42	3,458		2	1,601	2,494	3,385		

		$s_1 = 0,55$			
		$(\beta_1, \beta_2) = (66, 48), \beta_1 c_1 = 158,4$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
	0	2,338	2,964	3,725	
	1	3,752	4,962	5,858	
	2	4,751	6,251	7,248	
		$s_1 = 0.6$			
		$(\beta_1, \beta_2) = (62, 52), \beta_1 c_1 = 161,2$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
	0	2,353	2,984	3,735	
	1	3,725	4,901	5,790	
	2	4,712	6,181	7,147	
		$s_1 = 0,65$			
		$(\beta_1, \beta_2) = (58, 56), \beta_1 c_1 = 162,4$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
	0	2,358	2,995	3,736	
	1	3,693	4,835	5,718	
	2	4,669	6,097	7,044	
		$s_1 = 0.7$			
		$(\beta_1, \beta_2) = (54, 60), \beta_1 c_1 = 162$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
	0	2,356	2,999	3,730	
	1	3,657	4,768	5,643	
	2	4,626	6,005	6,942	
		$s_1 = 0.75$			
		$(\beta_1, \beta_2) = (50, 64), \beta_1 c_1 = 160$			
	$u_1 \backslash u_2$	0	1	2	
	0	2,348	2,998	3,719	
	1	3,620	4,700	5,568	
	2	4,583	5,914	6,843	

Πίνακες 3.5: (α) , (β) και (γ) Προσεγγισμένα μερίσματα για διαφορετικά s_1 με $\beta_1 c_1 \approx 160$

Από τον πίνακα 3.5, μπορεί να παρατηρηθεί ότι για κάθε σταθερό ζευγάρι των επιπέδων αρχικού κεφαλαίου υπό εξέταση, οι τιμές μερισμάτων για την κλάση κινδύνου 1 αυξάνονται ενώ για τη μονάδα 2 μειώνεται καθώς το s_1 αυξάνεται με βήμα 0.05 από το 0.55 έως το 0.75. (Έχει εξεταστεί επίσης για μεγαλύτερες τιμές s_1 μέχρι $s_1 = 1$ και ισχύει το ίδιο).

Αν το συμφέρον μας είναι να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα των συναρτήσεων μερίσματος των δύο κλάσεων κινδύνου, παρατηρούμε ότι το μέγιστο επιτυγχάνεται σε διαφορετικές τιμές του s_1 ανάλογα με τα επίπεδα του αρχικού πλεονάσματος. Μεταξύ των εννέα ζευγών επιπέδων αρχικού πλεονάσματος, έξι από αυτά έχουν τα βέλτιστα κοινά μερίσματα που επιτεύχθηκαν στο $s_1 = 0,55$.

Οι εξαιρέσεις περιλαμβάνουν τις περιπτώσεις των $(u_1, u_2) = (0,0)$ και $(u_1, u_2) = (0,2)$ για τις οποίες η βέλτιστη s_1 είναι 0.65 μαζί με την περίπτωση $(u_1, u_2) = (0,1)$ για την οποία το βέλτιστο s_1 είναι 0,7. Τα αποτελέσματα δείχνουν ότι προκειμένου να μεγιστοποιηθεί η ένωση μερισμάτων σε μια αναλογική σύμβαση αντασφάλισης, το βέλτιστο επίπεδο διατήρησης s_1 δεν πρέπει να επιλεγεί στα άκρα του 0 ή του 1, π.χ. το ρίσκο θα πρέπει να μοιραστεί

4.4 Τα βέλτιστα φράγματα μερισμάτων για τη δισδιάστατη διαδικασία

Στην τυποποιημένη μονοδιάστατη σύνθετη διαδικασία κινδύνου Poisson υπό μια στρατηγική φράγματος μερισμάτων, είναι γνωστό (βλ. Gerber κ.ά (2006, παράγραφος 4)) ότι το βέλτιστο φράγμα b^* μερισμάτων που μεγιστοποιεί τα αναμενόμενα προεξοφλημένα μερίσματα μέχρι την ζημιά (όσον αφορά το επίπεδο φραγμάτων b) είναι ανεξάρτητο από το αρχικό πλεόνασμα $u \geq 0$, εφ' όσον $u \leq b^*$. Εάν $u > b^*$, αυτομάτως υποθέτουμε ότι το υπόλοιπο $u - b$ πέραν του φράγματος πληρώνεται αμέσως ως εφάπαξ μέρισμα έτσι ώστε η διαδικασία να αρχίζει στο b .

Υπό αυτήν την ρύθμιση, ο Gerber (2006, παράγραφος 5) διαπίστωσε ότι η συνάρτηση μερισμάτων επιτυγχάνεται επίσης για ένα τοπικό μέγιστο $b = b^*$ ακόμη και για $u > b^*$ και σχολιάστηκε ότι σε πολλές περιπτώσεις αυτό αναμένεται να είναι το ολικό μέγιστο. Βλέπε επίσης Gerber κ.ά (201, Τμήμα 5) για συζήτηση του βέλτιστου φράγματος μερισμάτων σε ένα μοντέλο μονοδιάστατου διακριτικού χρόνου

Σε ένα δισδιάστατο μοντέλο ρίσκου, θα υιοθετήσουμε τον κανόνα ότι εάν μια ορισμένη κλάση κινδύνου μιας επιχείρησης έχει το αρχικό πλεόνασμα της πάνω από το επίπεδο φραγμάτων της, τότε το υπόλοιπο πληρώνεται αμέσως ως μέρισμα. Επομένως, σε ένα συνεχές-χρονικά πλαίσιο θα έχουμε:

$$V_1(u_1, u_2; b_1, b_2) = \begin{cases} V_1(u_1, b_2; b_1, b_2), & 0 \leq u_1 \leq b_1; u_2 > b_2 \\ u_1 - b_1 + V_1(b_1, u_2; b_1, b_2) & u_1 > b_1; 0 < u_2 < b_2 \\ u_1 - b_1 + V_1(b_1, b_2; b_1, b_2) & u_1 > b_1; u_2 > b_2 \end{cases}$$

για την κλάση κινδύνου 1.

Παρόμοιος ορισμός ισχύει για την κλάση κινδύνου 2 και για το μοντέλο διακριτικού χρόνου επίσης. Ενδιαφερόμαστε πρώτιστα για το βέλτιστο ζευγάρι των φραγμάτων μερισμάτων που μεγιστοποιούν το σύνολο των συναρτήσεων των μερισμάτων των 2 κλάσεων κινδύνου. Εντούτοις, οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται για να αναλύσουν το βέλτιστο φράγμα στην περίπτωση μίας κλάσης κινδύνου όπως στην περίπτωση Gerber κ.α (2006)) δεν ισχύουν για το δισδιάστατο μοντέλο συνεχούς χρόνου. Συνεπώς, θα εργαστούμε με το διακριτικό μοντέλο και θα εφαρμόσουμε τις διαδικασίες προσέγγισης της παραγράφου 4.2.4 για να δοθούν μερικές αριθμητικές απεικονίσεις που θα δώσουν μια πιο εμπειριστατωμένη εικόνα στο πρόβλημα.

4.4.1 Είναι τα βέλτιστα φράγματα ανεξάρτητα από τα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος;

Στα δισδιάστατα (ή γενικότερα πολλών μεταβλητών) πλαίσια, δεν αναμένεται το ζευγάρι βέλτιστων φραγμάτων μερισμάτων για να είναι ανεξάρτητο από τα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος. Στο ακόλουθο συνοπτικό παράδειγμα, παρέχεται μια ιδιαίτερη περίπτωση για να δικαιολογηθεί ο ισχυρισμός αυτός.

Παράδειγμα 5

Εξετάζουμε την ιδιαίτερη δισδιάστατη διαδικασία ρίσκου που εισάγεται στην παράγραφο 4.2.1. Οι γενικές ζημιές X_1 και X_2 θεωρούνται ανεξάρτητες έτσι ώστε $g(i, j) = g_1(i)g_2(j)$ για το $i, j = 1, 2, \dots$. Υποθέτουμε ότι X_1 και X_2 ακολουθούν διαφορετικές μη τροποποιημένες γεωμετρικές κατανομές. Για την κλάση κινδύνου 1, υποθέτουμε το $g_1(0) = 0,78$ και $g_1(k) = 0,55 \cdot 0,6(1 - 0,6)^k$ για $k = 1, 2, \dots$, και έτσι $E(X_1) = 0,367$. Για την κλάση κινδύνου 2, $g_2(0) = 0,8$ και $g_2(k) = 0,4 \cdot 0,5(1 - 0,5)^k$ για $k = 1, 2, \dots$, και ως εκ τούτου $E(X_2) = 0,4$.

Η ένταση επιτοκίου είναι $a = 0,05$. Χρησιμοποιώντας τα συστήματα εξισώσεων που αναπτύσσονται στην παράγραφο 4.2.1, έχουμε υπολογίσει τις τιμές μερισμάτων για τις ακέραιες τιμές φραγμάτων (b_1, b_2) (τα φράγματα μπορούν να πάρουν μόνο ακέραιες τιμές στο μοντέλο συνεχούς χρόνου) και έχουμε αναζητήσει τα βέλτιστα φράγματα (b_1^*, b_2^*) που μεγιστοποιούν τα συνολικά μερίσματα $V_1^d(u_1, u_2; b_1, b_2) + V_2^d(u_1, u_2; b_1, b_2)$. Για $1 \leq u_1, u_2 \leq 9$ τα βέλτιστα φράγματα δίνονται στον πίνακα 4.1, και το αποτέλεσμα των τιμών του βέλτιστου συνολικού μερίσματος δίνονται στον πίνακα 4.2. Είναι σαφές από τον πίνακα 4.1 ότι αν και τα επίπεδα περισσοτέρων συνδυασμών του αρχικού πλεονάσματος μοιράζονται το ίδιο ζευγάρι των βέλτιστων φραγμάτων $(b_1^*, b_2^*) = (5, 6)$, γενικά οι τιμές (b_1^*, b_2^*) εξαρτώνται από τα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος (u_1, u_2) .

$u_1 \backslash u_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(5,60)	(5,60)	(5,50)	(5,50)	(5,50)	(5,50)	(5,50)	(5,50)	(5,50)
2	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,50)	(5,50)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)
3	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,50)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)
4	(4,50)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)
5	(4,50)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)
6	(4,50)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)
7	(4,50)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)

8	(4,50)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)
9	(4,50)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)	(5,60)

Πίνακας 4.1 Βέλτιστο ζεύγος τιμών φραγμάτων (b_1^*, b_2^*) για $1 \leq u_1, u_2 \leq 9$

$u_1 \backslash u_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	11,248	12,995	14,345	15,501	16,634	17,634	18,634	19,634	20,634
2	12,918	14,898	16,404	17,660	18,823	19,889	20,889	21,889	22,889
3	14,16	16,230	17,832	19,145	20,317	21,439	22,439	23,439	24,439
4	15,187	17,324	18,981	20,329	21,521	22,652	23,652	24,652	25,652
5	16,187	18,369	20,042	21,401	22,599	23,732	24,732	25,732	26,732
6	17,187	19,369	21,042	22,401	23,599	24,732	25,732	26,732	27,732
7	18,187	20,369	22,042	23,401	24,599	25,732	26,732	27,732	28,732
8	19,187	21,368	23,042	24,401	25,599	26,732	27,732	28,732	29,732
9	20,187	22,368	24,042	25,401	26,599	27,732	28,732	29,732	30,732

Πίνακας 4.2 Βέλτιστα συνολικά μερίσματα για $1 \leq u_1, u_2 \leq 9$

4.4.2 Εξέταση του πίνακα των κοινών μερισμάτων

Για το υπόλοιπο της εργασίας, θα εφαρμοστούν οι διαδικασίες προσέγγισης που περιγράφονται στο παράδειγμα 2 στην ενότητα 4.3.1 με ένταση Poisson $\lambda_{11} = \lambda_{22} = \lambda_{12} = 1$, π.χ. η ένταση είσπραξης ασφαλιστρών είναι $c_1 = 2,2$ και $c_2 = 3,3$ η ζημιά της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας είναι $f_{11}(y) = f_{1\bullet}(y) = 8e^{-2y} \sin^2(y)$ και

$$f_{22}(y) = f_{2\bullet}(y) = \frac{1}{4}0,6^2 ye^{-0,6y} + \frac{3}{4}9^2 ye^{-9y} \text{ με } Z_1 \text{ και } Z_2 \text{ να είναι ανεξάρτητα, και η ένταση}$$

επιτοκίου είναι $\delta = 0,05$. Η διαδικασία εκτίμησης που περιγράφεται στο έγγραφο στην αρχή της ενότητας 4.2.4 θα εφαρμοστεί καθ' όλη τη διάρκεια.

Επειδή θα εξετάσουμε μεγαλύτερα επίπεδα φραγμάτων, θα εφαρμοστούν παντού μικρότεροι παράγοντες κλίμακας $(\beta_1, \beta_2) = (3,2)$ (βλ. τις τελικές παρατηρήσεις στο τμήμα 5). Όπως είδαμε στο παράδειγμα 5, έχουμε εξετάσει ότι τα βέλτιστα φράγματα εξαρτώνται από τα αρχικά επίπεδα κεφαλαίου. Δεδομένου ότι χρησιμοποιούμε $(\beta_1, \beta_2) = (3,2)$, τα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος (u_1, u_2) και τα φράγματα (b_1, b_2) (και ως εκ τούτου τα βέλτιστα φράγματα (b_1^*, b_2^*)) στο μοντέλο συνεχούς χρόνου που εκτιμάται, μπορεί να είναι

κλασματικής μορφής π.χ. $(9\frac{1}{3}, 10\frac{1}{2})$. Εντούτοις, ενδεικτικά, εξετάζουμε μόνο τις τιμές

ακέραιων αριθμών (u_1, u_2) και (b_1, b_2) για ευκολία.

$b_1 \backslash b_2$	1	2	3	4	...	9	10	11	12
1	11.741	1.912	1.045	9.139	...	6.175	5.988	5.859	5.770
2	12.596	12.158	11.670	11.083	...	7.978	7.568	7.224	6.936
3	12.638	12.583	12.537	12.396	...	1.144	9.656	9.202	8.786
4	12.175	12.391	12.704	12.973	...	12.063	11.621	11.167	1.719
...
9	1.174	1.567	11.221	12.014	...	14.603	14.641	14.556	14.374
1	1.029	1.385	11.000	11.765	...	14.500	14.596	14.567	14.435
11	9.943	1.267	1.845	11.576	...	14.336	14.467	14.473	14.374
12	9.893	1.193	1.739	11.436	...	14.155	14.303	14.329	14.251

Πίνακας 4.3 Προσεγγισμένα συνολικά μερίσματα για $(u_1, u_2) = (5,5)$

$b_1 \backslash b_2$	1	2	3	4	...	9	10	11	12
1	12,741	11,912	11,045	1,139	...	6,469	6,197	6,009	5,879
2	13,596	13,158	12,670	12,083	...	8,567	8,067	7,648	7,297
3	13,638	13,583	13,537	13,396	...	1,942	1,382	9,861	9,384
4	13,175	13,391	13,704	13,973	...	13,01	12,519	12,013	11,513
...
9	11,174	11,567	12,221	13,014	...	15,726	15,763	15,668	15,469
1	11,029	11,385	12,000	12,765	...	15,619	15,718	15,681	15,534
11	1,943	11,267	11,845	12,576	...	15,450	15,584	15,583	15,471
12	1,893	11,193	11,739	12,436	...	15,264	15,415	15,434	15,343

Πίνακας 4.4 Προσεγγισμένα συνολικά μερίσματα για $(u_1, u_2) = (5,6)$

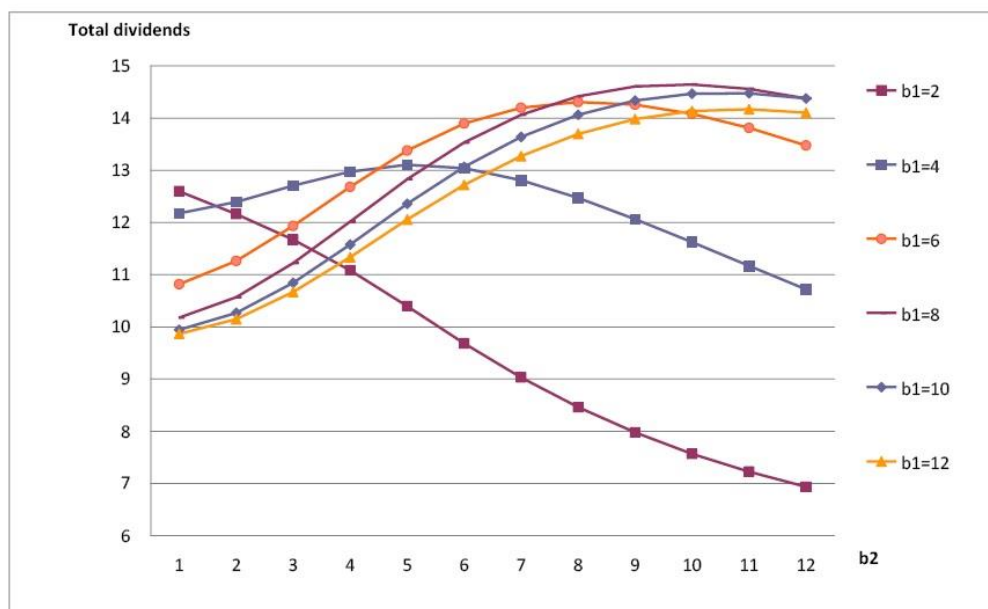
$b_1 \backslash b_2$	1	2	3	4	...	9	10	11	12
1	13,741	12,912	12,045	11,139	...	6,881	6,485	6,212	6,023
2	14,596	14,158	13,670	13,083	...	9,248	8,641	8,131	7,704
3	14,638	14,583	14,537	14,396	...	11,786	11,150	1,556	1,012
4	14,175	14,391	14,704	14,973	...	13,960	13,422	12,864	12,31
...
9	12,174	12,567	13,221	14,014	...	16,794	16,831	16,726	16,508
1	12,029	12,385	13,000	13,765	...	16,686	16,785	16,740	16,577
11	11,943	12,267	12,845	13,576	...	16,514	16,648	16,640	16,512
12	11,893	12,193	12,739	13,436	...	16,324	16,475	16,487	16,381

Πίνακας 4.5 Προσεγγισμένα συνολικά μερίσματα για $(u_1, u_2) = (5,7)$

Προκειμένου να μελετηθεί ο τρόπος που οι τιμές φραγμάτων επηρεάζουν τα συνολικά αναμενόμενα προεξοφλημένα μερίσματα, θέτουμε σταθερές τιμές των ζευγών (u_1, u_2) για να είναι $(5,5)$, $(5,6)$ και $(5,7)$ με τη σειρά και έπειτα ταξινομημένες σε πίνακες τις προσεγγισμένες συνολικές τιμές μερισμάτων για τις διάφορες επιλογές (b_1, b_2) στους πίνακες 4.3-4.5. Ο υπογραμμισμένος αριθμός σε κάθε πίνακα δείχνει τη μεγαλύτερη τιμή μερίσματος για τον

συγκεκριμένο συνδυασμό του (u_1, u_2) . Αρχικά εξετάζουμε τον Πίνακα 4.3 για τον οποίο $(u_1, u_2) = (5, 5)$. Εάν ο ένας καθορίσει $b_1 = 1, b_2 = 2$ ή $b_1 = 3$, τότε η συνολική τιμή του μερίσματος μειώνεται στο b_2 δηλαδή $b_2 = 1$ δίνει τα μεγαλύτερα συνολικά μερίσματα.

Εάν η τιμή του b_1 είναι σταθερή ώστε να είναι μεγαλύτερη, τότε απαιτείται μεγαλύτερη τιμή του b_2 για τη μεγιστοποίηση των συνολικών μερισμάτων. Αυτό απεικονίζεται επίσης στο γράφημα 4.1, στο οποίο σχεδιάζεται το προσεγγισμένο σύνολο μερισμάτων ως προς την τιμή φράγματος b_2 για κάθε σταθερό $b_1 = 2, 4, 6, 8, 10, 12$. Κάτι παρόμοιο παρατηρείται εάν είναι σταθερό το b_2 και ποικίλλει το b_1 , και το ίδιο ισχύει αν κοιτάξουμε τον πίνακα 4.4 και 4.5. Αυτό δείχνει ότι προκειμένου να επιτευχθούν υψηλά κοινά μερίσματα, τα φράγματα πρέπει να είναι αρκετά κοντά το ένα στον άλλο. Επιπλέον, από τον αριθμό με έντονη γραμματοσειρά (bold) σε κάθε πίνακα, διαπιστώνεται ότι η μέγιστη συνολική αξία μερισμάτων επιτυγχάνεται στα φράγματα $(b_1^*, b_2^*) = (8, 10)$ και για τα τρία εξεταζόμενα ζευγάρια των αρχικών επιπέδων πλεονάσματος. Αυτό θα συζητηθεί και παρακάτω στην ενότητα 4.4.3



Γράφημα 4.1: Διάγραμμα προσεγγισμένων συνολικών μερισμάτων ως προς b_2 όταν $(u_1, u_2) = (5, 5)$

Σημειώστε ότι κάθε ένας από τους πίνακες 4.3-4.5 διαιρείται σε τέσσερα τμήματα: i) $b_1 < u_1$ και $b_2 < u_2$ (ii) $b_1 \geq u_1$ και $b_2 < u_2$ (iii) $b_1 < u_1$ και $b_2 \geq u_2$ και (iv) $b_1 \geq u_1$ και $b_2 \geq u_2$. Στο πρώτο τμήμα, το επίπεδο φράγματος είναι χαμηλότερο από το αρχικό πλεόνασμα για κάθε κλάση κινδύνου, και επομένως κάθε κλάση κινδύνου πληρώνει ένα μερίσμα στο χρόνο 0 και η δισδιάστατη διαδικασία αρχίζει στην πραγματικότητα στο (b_1, b_2) .

Πηγαίνοντας από τον πίνακα 4.3 στον πίνακα 4.4, η μόνη αλλαγή είναι πως η κλάση κινδύνου 2 κατέχει μια μονάδα περισσότερη από το αρχικό κεφάλαιο, και αυτό εξηγεί το γεγονός ότι κάθε αξία μερίσματος στον πίνακα 4.4 είναι ακριβώς μια μονάδα μεγαλύτερη από την αντίστοιχη αξία στον πίνακα 4.3 μέσα στο πρώτο τμήμα. Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για τους πίνακες 4.4 και 4.5.

Για το δεύτερο τμήμα, οι τιμές μερισμάτων παρουσιάζουν ίδιες ιδιότητες με εκείνες στο πρώτο τμήμα επειδή είναι η κλάση κινδύνου 2 που πληρώνει ένα μέρισμα στο χρόνο 0 και έπειτα ξεκινάει η διαδικασία στο (u_1, b_2) . Στο τρίτο τμήμα, η κλάση κινδύνου 1 (αντί της κλάσης κινδύνου 2) πρέπει να πληρώσει το υπόλοιπο του u_1 αντί του b_2 και έπειτα να ξεκινήσει η διαδικασία στο (b_1, u_2) . Στο τέταρτο τμήμα, καμία από τις δύο κλάσεις κινδύνου δεν πληρώνει άμεσα μερίσματα στο χρόνο 0.

Σημειώστε ότι όλες οι τιμές μερισμάτων στον πίνακα 4.5 είναι υψηλότερες από τις αντίστοιχες στον πίνακα 4.4, οι οποίες είναι με τη σειρά μεγαλύτερες από εκείνες στον πίνακα 4.3. Αυτό είναι αναμενόμενο δεδομένου ότι τα μερίσματα πρέπει να αυξάνονται στο αρχικό κεφάλαιο u_2 .

4.4.3 Βέλτιστα φράγματα και περιορισμένα βέλτιστα φράγματα

Σε αυτό το τμήμα, ενδιαφερόμαστε για το ζευγάρι των βέλτιστων φραγμάτων για κάθε συνδυασμό (τιμές ακέραιων αριθμών) (u_1, u_2) για $1 \leq u_1 \leq 9$ και $1 \leq u_2 \leq 12$. Τα βέλτιστα φράγματα και οι αντίστοιχες βέλτιστες από κοινού τιμές μερισμάτων δίνονται στους πίνακες 4.6 και 4.7 αντίστοιχα:

$u_1 \backslash u_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)
2	(8,90)	(8,90)	(7,80)	(7,80)	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)	(3,10)
3	(8,90)	(8,90)	(8,90)	(8,90)	(8,90)	(7,80)	(7,80)	(7,80)	(7,80)	(7,80)	(7,80)	(7,80)
4	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,90)	(8,90)	(8,90)	(8,90)	(8,90)	(8,90)	(8,90)	(8,90)
5	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)
6	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)
7	(6,80)	(7,90)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)
8	(6,80)	(7,90)	(7,90)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(9,10)	(9,10)	(9,10)
9	(6,80)	(7,90)	(7,90)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(8,10)	(9,10)	(9,10)	(9,10)

Πίνακας 4.6 Τα βέλτιστα φράγματα για $1 \leq u_1 \leq 9$ και $1 \leq u_2 \leq 12$

$u_1 \backslash u_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4.309	5.309	6.309	7.309	8.309	9.309	1.309	11.309	12.309	13.309	14.309	15.309
2	5.839	6.752	7.644	8.622	9.622	1.622	11.622	12.622	13.622	14.622	15.622	16.622
3	7.250	8.400	9.498	1.534	11.521	12.498	13.473	14.460	15.460	16.460	17.460	18.460
4	8.371	9.701	1.959	12.133	13.241	14.295	15.315	16.318	17.316	18.316	19.316	20.316
5	9.291	1.766	12.156	13.445	14.641	15.763	16.831	17.863	18.874	19.875	20.875	21.875
6	1.083	11.672	13.164	14.539	15.807	16.986	18.098	19.160	20.189	21.198	22.198	23.198
7	11.012	12.537	14.074	15.512	16.831	18.051	19.193	20.276	21.318	22.332	23.332	24.332
8	12.012	13.537	15.044	16.467	17.81	19.049	20.206	21.300	22.348	23.374	24.383	25.383
9	13.012	14.537	16.044	17.467	18.81	20.049	21.206	22.300	23.348	24.379	25.390	26.390

Πίνακας 4.7 Προσεγγισμένα βέλτιστα μερίσματα $1 \leq u_1 \leq 9$ και $1 \leq u_2 \leq 12$

Από τον πίνακα 4.6, αν και τα βέλτιστα φράγματα (b_1^*, b_2^*) ποικίλουν με το αρχικό επίπεδο πλεονάσματος (u_1, u_2) , συχνά παίρνουν την τιμή $(b_1^*, b_2^*) = (8, 10)$. Οι ανωμαλίες των χαμηλότερων βέλτιστων φραγμάτων συμβαίνουν συνήθως όταν τα u_1 ή u_2 είναι μικρά.

Συγκεκριμένα, όταν η κλάση κινδύνου 1 έχει χαμηλό αρχικό πλεόνασμα $u_1 = 1$ ή $u_1 = 2$, τα βέλτιστα φράγματα (b_1^*, b_2^*) είναι κυρίως οι μικρές τιμές του $(3, 1)$. Όταν μία από τις δύο κλάσεις κινδύνου έχει χαμηλό αρχικό πλεόνασμα, η δισδιάστατη διαδικασία είναι πιθανό να προκαλέσει ζημιά νωρίς ούτως ή άλλως. Για να βελτιστοποιηθούν τα κοινά μερίσματα, είναι σημαντικό να εξασφαλιστεί ότι κάποια πρώιμα μερίσματα πληρώνονται πριν από την ζημιά (με όρους άμεσου μερίσματος στο χρόνο 0 ή φθάνοντας στο φράγμα νωρίς), με αποτέλεσμα τα χαμηλότερα βέλτιστα φράγματα (b_1^*, b_2^*) .

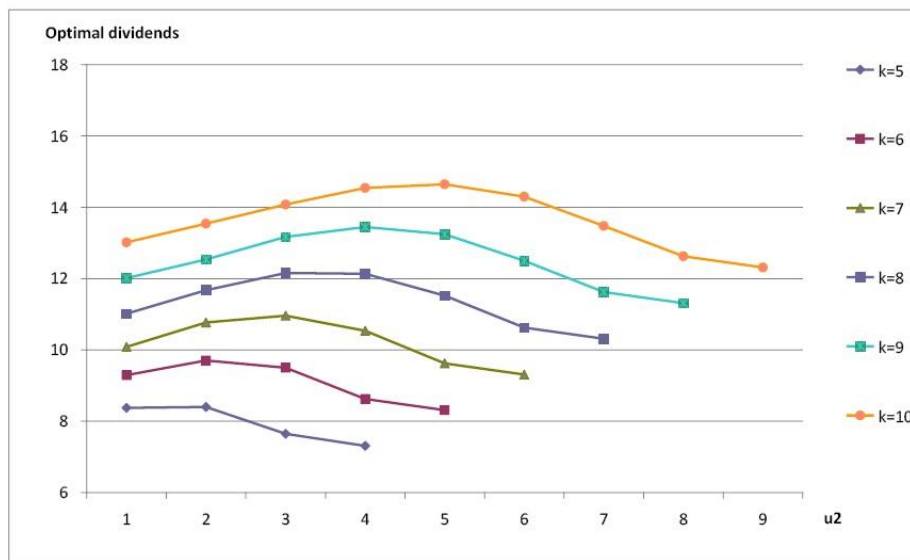
Ωστόσο, αυτό το αποτέλεσμα είναι λιγότερο προφανές όταν το u_2 είναι χαμηλό. Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι η κλάση κινδύνου 2 έχει υψηλότερο συντελεστή επιβάρυνσης (καθώς έχει υψηλότερη ένταση είσπραξης ασφαλιστρών, αλλά το ίδιο αναμενόμενο κόστος ζημιάς σε σχέση με την κλάση κινδύνου 1) και επομένως χαμηλότερες πιθανότητες πρόωρης ζημιάς από την κλάση κινδύνου 1, ενώ όλα τα άλλα είναι ίσα. Είναι επίσης χρήσιμο να σημειωθεί ότι τα βέλτιστα φράγματα είναι και τα δύο πάντα υψηλά είτε χαμηλά, δηλ. δεν είναι βέλτιστο για έναν ασφαλιστή να θέσει ένα υψηλό φράγμα εάν κάποιος άλλος έχει ένα χαμηλό φράγμα και αντίστροφα. Αυτό μπορεί να αποδοθεί στο γεγονός ότι οι πληρωμές μερισμάτων και για τις δύο κλάσεις κινδύνου παύουν στον κοινό χρόνο ζημιάς T , και εάν μια από τις κλάσεις κινδύνου έχει μεγάλο θετικό πλεόνασμα στο χρόνο T θα είχε πληρωθεί καλύτερα ως μερίσμα στην αρχή. Βλέπε Ενότητα 4.3.1 για παρόμοια σχόλια.

Όσο αφορά στον πίνακα 4.7, είναι σαφές ότι το προεξοφλημένο μερίσμα αυξάνεται όσον αφορά και στα δύο αρχικά επίπεδα πλεονάσματος. Ο πίνακας μπορεί επίσης να μας βοηθήσει να μελετήσουμε ένα βέλτιστο πρόβλημα κατανομής εάν το κριτήριο είναι να μεγιστοποιηθούν τα συνολικά μερίσματα των δύο κλάσεων κινδύνου. (Βλ. π.χ. Loisel (2005, Ενότητα 5) ή Gong (2012, Ενότητα 6.3) περί μιας κατανομής κεφαλαίου που ελαχιστοποιεί τον κίνδυνο από πολλές μεταβλητές).

Ας υποθέσουμε ότι και οι δύο επιχειρησιακές κλάσεις κινδύνου ανήκουν σε μια μεγαλύτερη εταιρεία που θέλει να επιλέξει (u_1, u_2) για να μεγιστοποιήσει το $V_1(u_1, u_2; b_1, b_2) + V_2(u_1, u_2; b_1, b_2)$ υπό την επιφύλαξη του περιορισμού $u_1 + u_2 = K$ (και φυσικά $u_1 \geq 0$ και $u_2 \geq 0$) για ένα δεδομένο αρχικό κεφάλαιο του $K > 0$. Αυτή μπορεί να θεωρηθεί ως μια δισδιάστατη διαδικασία. Πρώτον, τα βέλτιστα ζεύγη φραγμών (b_1^*, b_2^*) και τα βέλτιστα από κοινού μερίσματα που προκύπτουν προσδιορίζονται σύμφωνα με τους πίνακες 4.6 και 4.7. Τότε μπορούμε να δούμε την κλάση κινδύνου $u_1 + u_2 = K$ στον πίνακα 4.7 για να βρούμε τον βέλτιστο συνδυασμό του (u_1^*, u_2^*) που δίνει την υψηλότερη τιμή μερίσματος.

Για εύκολη αναφορά, σχεδιάζουμε επιπλέον τα βέλτιστα από κοινού μερίσματα έναντι του κεφαλαίου u_2 που βρίσκεται στην κλάση κινδύνου 2 δεδομένου ότι το $K = 5,6,7,8,9,10$ στο Σχήμα 4.2. Για παράδειγμα, αν $K = 7$ τότε $u_2^* = 3$ αποφέρει τα υψηλότερα κοινά μερίσματα και γ αυτό $u_1^* = K - u_2^* = 4$, αν $K = 10$ τότε $(u_1^*, u_2^*) = (5,5)$ (και στις δύο περιπτώσεις $(b_1^*, b_2^*) = (8,10)$)

Σημειώνεται ότι η βέλτιστη κατανομή (u_1^*, u_2^*) φαίνεται να συμβαίνει σε μέρη όπου το συνολικό κεφάλαιο K είναι περίπου ισομερώς μοιρασμένο. Ο λόγος είναι ότι εάν η κατανομή βρίσκεται σε ένα από τα δύο άκρα/ ακραία σημεία, τότε είναι πιο πιθανό ότι μία από τις δύο κλάσεις κινδύνου θα έχει θετικό πλεόνασμα στον κοινό χρόνο T και πόροι κατασπαταλώνονται. (βλ. Ενότητα 4.3.1).



Γράφημα 4.2: Σχεδίαση προσεγγισμένων βέλτιστων μερισμάτων ως προς u_2 για $u_1 + u_2 = K$

Μέχρι στιγμής, όταν μεγιστοποιούμε τα κοινά μερίσματα δεν τοποθετούμε κανέναν περιορισμό στο εάν τα φράγματα πρέπει να είναι κάτω ή επάνω από τα αντίστοιχα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος των δύο κλάσεων κινδύνου. Εντούτοις, ξέρουμε ήδη από τον Πίνακα 4.6 ότι αυτό θα μπορούσε να οδηγήσει στα βέλτιστα φράγματα που είναι πολύ χαμηλότερα από τα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος, και αυτό να οδηγήσει σε πρόωρη χρεοκοπία από την περίπτωση που θα εφαρμόζονταν υψηλότερα φράγματα.

Πρακτικά, πρόωμες χρεοκοπίες δεν είναι επιθυμητές από την μεριά της διαχείρισης κινδύνου ακόμη και όταν τα μερίσματα μεγιστοποιούνται. Αυτά οδηγούν στην ιδέα της μεγιστοποίησης των μερισμάτων υπό την επιβολή ποινής σε περίπτωση χρεοκοπίας ή σε περιορισμό πιθανοτήτων χρεοκοπίας (βλέπε πχ Dickson and Waters (2004), Dickson and Drekic (2006), Gerber et al., 2006, Thonhauser and Albrecher (2007)).

Στις παρούσες συνθήκες, μπορούμε να καθυστερήσουμε την χρεοκοπία με τη μεγιστοποίηση των από κοινού μερισμάτων με τον περιορισμό πως τα επίπεδα φραγμάτων πρέπει να είναι

τουλάχιστον τα αντίστοιχα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος. Τα προκύπτοντα επίπεδα φραγμάτων θα ονομαστούν «περιορισμένα βέλτιστα φράγματα». Ακολουθούν οι πίνακες 4.8 και 4.9, που δίνουν τα περιορισμένα βέλτιστα φράγματα και τις προκύπτουσες από κοινού τιμές μερισμάτων αντίστοιχα.

$\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	(3,1)	(3,2)	(4,3)	(5,4)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(7,8)	(8,9)	(8,1)	(9,11)	(9,12)
2	(8,9)	(8,9)	(7,8)	(7,8)	(5,5)	(6,6)	(7,7)	(7,8)	(8,9)	(8,1)	(9,11)	(9,12)
3	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(7,8)	(7,8)	(7,8)	(8,9)	(8,1)	(9,11)	(9,12)
4	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,1)	(9,11)	(9,12)
5	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(9,11)	(9,12)
6	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(9,11)	(9,12)
7	(7,9)	(7,9)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(9,11)	(9,12)
8	(8,1)	(7,9)	(7,9)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(9,11)	(9,11)	(9,12)
9	(9,11)	(9,11)	(9,11)	(9,11)	(9,11)	(9,11)	(9,11)	(9,11)	(9,11)	(9,11)	(9,11)	(9,12)

Πίνακας 4.8 Περιορισμένα βέλτιστα φράγματα για $1 \leq u_1 \leq 9$ και $1 \leq u_2 \leq 12$

$\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4.309	4.906	5.553	6.222	6.899	7.532	8.18	8.634	9.089	9.483	9.812	1.092
2	5.839	6.752	7.644	8.505	9.397	1.354	11.231	12.037	12.736	13.345	13.854	14.289
3	7.250	8.400	9.498	1.534	11.521	12.498	13.473	14.460	15.359	16.146	16.804	17.369
4	8.371	9.701	1.959	12.133	13.241	14.295	15.315	16.318	17.316	18.245	19.026	19.699
5	9.291	1.766	12.156	13.445	14.641	15.763	16.831	17.863	18.874	19.875	20.751	21.511
6	1.083	11.672	13.164	14.539	15.807	16.986	18.098	19.160	20.189	21.198	22.143	22.970
7	1.932	12.537	14.074	15.512	16.831	18.051	19.193	20.276	21.318	22.332	23.324	24.199
8	11.680	13.395	14.998	16.467	17.81	19.049	20.206	21.300	22.348	23.374	24.383	25.288
9	12.267	14.068	15.747	17.281	18.678	19.960	21.151	22.273	23.344	24.379	25.390	26.306

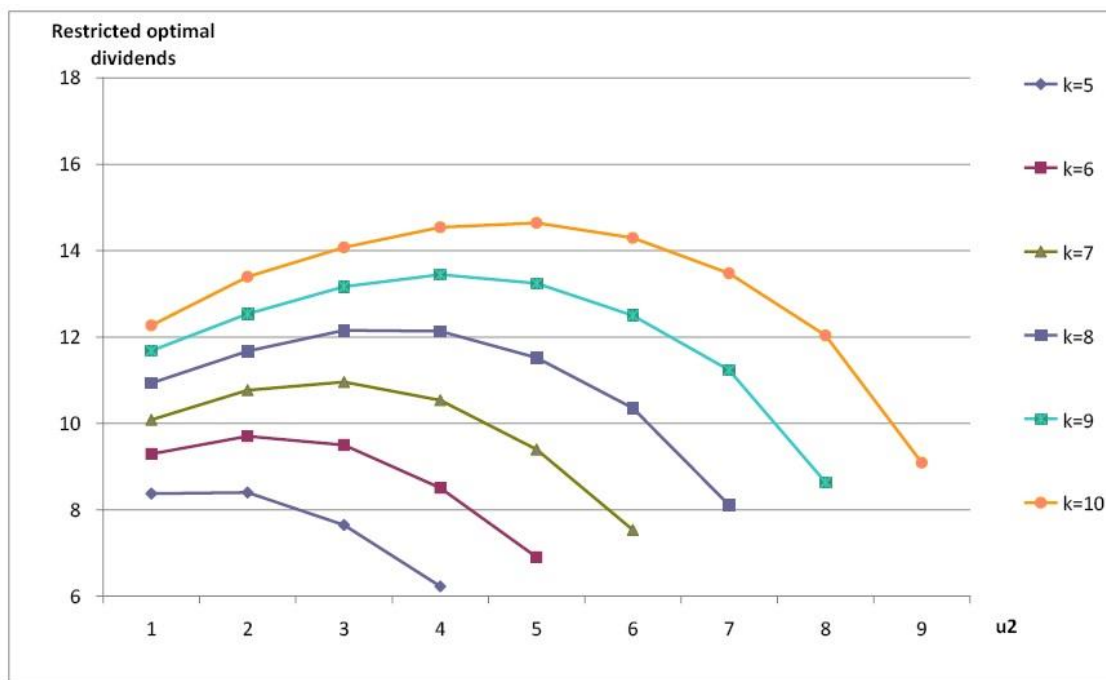
Πίνακας 4.9: Προσεγγισμένα περιορισμένα βέλτιστα μερίσματα για $1 \leq u_1 \leq 9$ και $1 \leq u_2 \leq 12$

Και στους δύο πίνακες 4.8 και 4.9, οι έντονοι αριθμοί αντιστοιχούν στις θέσεις όπου οι τιμές είναι ίδιες με εκείνες στους πίνακες 4.6 και 4.7. Αυτές οι θέσεις του πίνακα είναι κυρίως όπου τα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος έχουν αρκετά ισορροπημένες τιμές. Σε πολλές άλλες θέσεις, τα περιορισμένα βέλτιστα φράγματα στον πίνακα 4.8 είναι πολύ υψηλότερα από τα συνολικά βέλτιστα φράγματα στον πίνακα 4.6. Αξίζει να σημειωθεί πως εκτός από όταν $u_1 = 1$, οι τιμές μερισμάτων στον πίνακα 4.9 είναι συγκρίσιμες με εκείνες στον πίνακα 4.7.

Αυτό δείχνει ότι η εφαρμογή των περιορισμένων βέλτιστων φραγμάτων μπορεί πραγματικά να καθυστερήσει την ζημιά (λόγω των υψηλότερων φραγμάτων) χωρίς να σαταληθούν πολλά μερίσματα. Εν τούτοις, ο πίνακας 4.8 παρουσιάζει ίδια φαινόμενα με τον πίνακα 4.6,

δηλ. ότι τα περιορισμένα βέλτιστα φράγματα δύο κλάσεων κινδύνου έχουν πάντα παρόμοιες τιμές.

Ο λόγος είναι παρόμοιος με αυτόν για τα συνολικά βέλτιστα φράγματα. Επιστρέφοντας στο πρόβλημα της κατανομής κεφαλαίου με βάση τα περιορισμένα βέλτιστα φράγματα, τα αποτελέσματα της βέλτιστης κατανομής είναι ίδια με την περίπτωση όπου τα συνολικά βέλτιστα φράγματα χρησιμοποιούνται, τουλάχιστον μέχρι $K = 10$. Αυτό απεικονίζεται στο σχήμα 4.3.



Γράφημα 4.3: Σχεδίαση των προσεγγισμένων περιορισμένων βέλτιστων μερισμάτων ως προς u_2 για $u_1 + u_2 = K$

4.4.4 Τροποποιημένος τύπος στρατηγικής φραγμάτων

Εδώ θα μελετήσουμε έναν τροποποιημένο τύπο στρατηγικής φραγμάτων βασισμένο σε μερικές παρατηρήσεις από τον πίνακα 4.7 σχετικά με τις τιμές μερισμάτων υπό τα συνολικά βέλτιστα φράγματα. Ως τώρα υποτίθεται πάντα πως στο χρόνο 0 οι δύο κλάσεις κινδύνου σταθεροποιούν τα επίπεδα φραγμάτων τους ώστε να μην αλλάξουν αργότερα. Αλλά εάν ο χρόνος 0 είναι χρόνος απόφασης για να τεθούν τα φράγματα, θα είχε νόημα να επιτρεπόταν να πληρωθούν τα άμεσα μερίσματα στο χρόνο 0 έτσι ώστε οι δισδιάστατη διαδικασία να κινηθεί προς μια καλύτερη αρχική θέση από την οποία να εφαρμόζονται τα νέα συνολικά βέλτιστα φράγματα.

Η ανωτέρω ιδέα μπορεί να διευκρινιστεί με το εξής παράδειγμα:

Έστω ότι η δισδιάστατη διαδικασία κινδύνου ξεκινά με τα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος $(u_1, u_2) = (3, 8)$. Από τους πίνακες 4.6 και 4.7, ξέρουμε πως η βέλτιστη από κοινού αξία μερισμάτων είναι 14.460 κάτω από τα βέλτιστα φράγματα (7,8). Εντούτοις, εάν η κλάση κινδύνου 2 πληρώνει άμεσο μέρισμα 1, τότε η δισδιάστατη διαδικασία μετατοπίζεται στη νέα θέση (3,7) και μπορούν να εφαρμοστούν τα βέλτιστα φράγματα για τα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος (3,7) (που συμβαίνει να είναι (7,8) επίσης).

Αυτό θα έχει αποτέλεσμα υψηλότερα συνολικά κοινά μερίσματα $1+13.473 = 14.473$. Αλλά εάν η κλάση κινδύνου 2 συνεχίζει να πληρώνει ένα άμεσο μερίσμα 1, που κινεί τη δισδιάστατη διαδικασία προς το (3, 6), τότε τα συνολικά κοινά μερίσματα θα είναι ακόμα υψηλότερα στο 14.498. Η διαδικασία συνεχίζεται, και καμία περαιτέρω βελτίωση δεν είναι δυνατή επάνω στην επίτευξη της θέσης (3, 4) όπου τα συνολικά κοινά μερίσματα στο 14.534 έχουν το επιθυμητό αποτέλεσμα. Για να συνοψίσουμε, αρχίζοντας από $(u_1, u_2) = (3, 8)$, η γενική στρατηγική θα ήταν για την κλάση κινδύνου 2 να πληρώσει 4 στο χρόνο 0, και να εφαρμοστούν έπειτα τα φράγματα (8,9) έτσι ώστε η αναμενόμενη παρούσα αξία των μελλοντικών μερισμάτων να είναι 1.534

Βάσει των προαναφερθέντων, έχουν ταξινομηθεί σε πίνακες οι βέλτιστες παράμετροι της στρατηγικής τροποποιημένων φραγμάτων στον πίνακα 4.1. Σε κάθε κελί του πίνακα, το ανώτερο ζευγάρι είναι η αρχική θέση στόχων ενώ το χαμηλότερο ζευγάρι αντιπροσωπεύει τα βέλτιστα φράγματα για τη νέα αρχική θέση. Ο πίνακας 4.11 δίνει τις τιμές μερισμάτων αναλόγως.

$\begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)	(1,1)
	(3,1)	(3,1)	(3,1)	-3,1	(3,1)	(3,1)	(3,1)	(3,1)	(3,1)	(3,1)	(3,1)	(3,1)
2	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,1)	(2,1)
	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)
	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)	(4,7)	(4,8)	(4,8)	(4,8)	(4,8)	(4,8)
	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)	(8,9)
5	(4,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)	(5,7)	(5,8)	(5,9)	(5,1)	(5,1)	(5,1)
	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)
6	(4,1)	(5,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)	(6,7)	(6,8)	(6,9)	(6,1)	(6,1)	(6,1)
	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)
7	(4,1)	(5,2)	(6,3)	(6,4)	(7,5)	(7,6)	(7,7)	(7,8)	(7,9)	(7,1)	(7,1)	(7,1)
	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)
8	(4,1)	(5,2)	(6,3)	(6,4)	(7,5)	(7,6)	(8,7)	(8,8)	(8,9)	(8,1)	(8,11)	(8,11)
	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(9,11)	(9,11)	(9,11)
9	(4,1)	(5,2)	(6,3)	(6,4)	(7,5)	(7,6)	(8,7)	(8,8)	(8,9)	(9,1)	(8,11)	(8,11)
	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(8,1)	(9,11)	(9,11)	(9,11)

Πίνακας 4.10 Βέλτιστες παράμετροι στρατηγικής τροποποιημένων φραγμάτων

$u_1 \backslash u_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4.309	5.309	6.309	7.309	8.309	9.309	1.309	11.309	12.309	13.309	14.309	15.309
2	5.839	6.839	7.839	8.839	9.839	1.839	11.839	12.839	13.839	14.839	15.839	16.839
3	7.250	8.400	9.498	1.534	11.534	12.534	13.534	14.534	15.534	16.534	17.534	18.534
4	8.371	9.701	1.959	12.133	13.241	14.295	15.315	16.318	17.318	18.318	19.318	20.318
5	9.371	1.766	12.156	13.445	14.641	15.763	16.831	17.863	18.874	19.875	20.875	21.875
6	1.371	11.766	13.164	14.539	15.807	16.986	18.098	19.160	20.189	21.198	22.198	23.198
7	11.371	12.766	14.164	15.539	16.831	18.051	19.193	20.276	21.318	22.332	23.332	24.332
8	12.371	13.766	15.164	16.539	17.831	19.051	20.206	21.300	22.348	23.374	24.383	25.383
9	13.371	14.766	16.164	17.539	18.831	20.051	21.206	22.300	23.348	24.379	25.390	26.390

Πίνακας 4.11 Προσεγγισμένα βέλτιστα μερίσματα υπό την στρατηγική τροποποιημένων φραγμάτων

Πρώτον, τα κελιά στους πίνακες 4.9-4.1 με το άσπρο φόντο δείχνουν τις θέσεις (i) όπου δεν υπάρχει οποιαδήποτε στρατηγική τροποποιημένου φράγματος που να υπερσχύσει της (συνολικά) βέλτιστης στρατηγικής φράγματος στους πίνακες 4.6-4.7 (ii) που δεν είναι οι αρχικές θέσεις στόχων για άλλα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος υπό εξέταση και (iii) που δεν περιλαμβάνει οποιαδήποτε άμεσα μερίσματα στο χρόνο 0.

Δεύτερον, μια στήλη ή μια σειρά με μαύρους αριθμούς και το ίδιο γκριζό φόντο στους πίνακες 4.9-4.1 αντιπροσωπεύουν τις θέσεις που καταρρέουν ως προς το ανώτατο προς τα πάνω ή προς τα αριστερά κελί μέσα σε εκείνη τη (μερική) στήλη ή σειρά. Π.χ., εφ' όσον $u_1 = 3$ και $4 \leq u_2 \leq 12$, η κλάση 2 πρέπει να πληρώσει ένα μερίσμα της τάξεως του $u_2 - 4$ στο χρόνο 0 και έπειτα οι δύο κλάσεις κινδύνου πρέπει να εφαρμόσουν το (8,9) ως φράγμα. Για ένα άλλο παράδειγμα, μέσα στο πεδίο όπου $5 \leq u_1 \leq 9$ και $u_2 = 2$, η κλάση κινδύνου 1 αμέσως πληρώνει $u_1 - 5$ και έπειτα οι δύο κλάσεις κινδύνων εφαρμόζουν τα φράγματα (8,1). Εκτός από τις θέσεις - στόχους, όλα τα υπόλοιπα κελιά με το γκριζό υπόβαθρο στον πίνακα 4.1 έχουν αυστηρά υψηλότερες τιμές μερισμάτων από τις αντίστοιχες της (συνολικά) βέλτιστης στρατηγικής φραγμάτων που αφορά στον πίνακα 4.7.

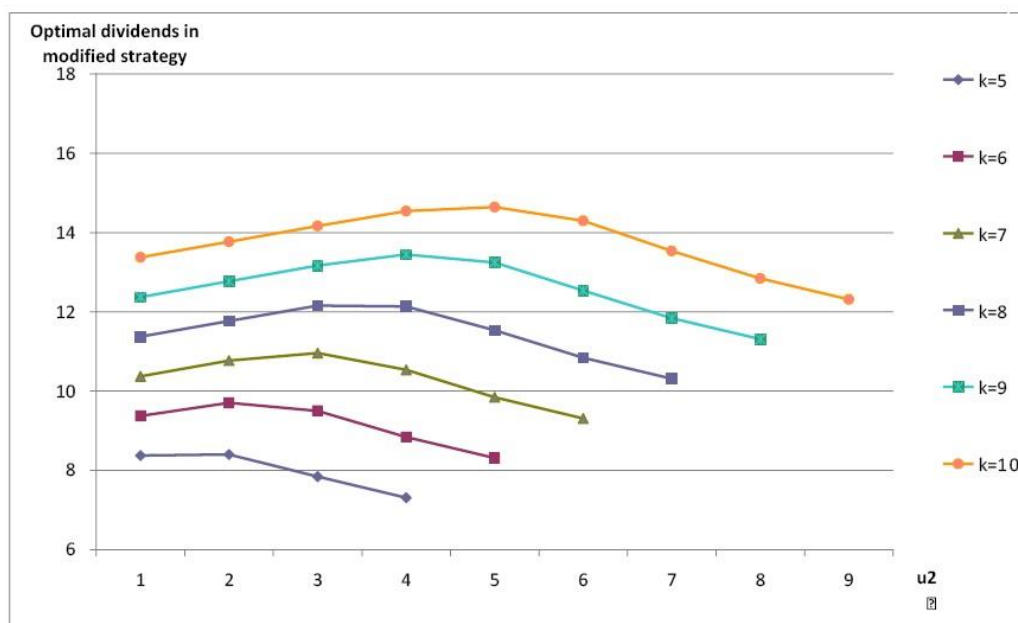
Τέλος, κάθε υπόλοιπο κελί με σκοτεινό φόντο και άσπρο αριθμό έχει στην ουσία την ίδια στρατηγική τροποποιημένου φράγματος όπως (συνολικά) η βέλτιστη στρατηγική φράγματος, αλλά η ερμηνεία είναι ελαφρώς πιο περίπλοκη. Π.χ. όταν $u_1 = 5$ και $10 \leq u_2 \leq 12$, ο πίνακας 4.6 δείχνει (συνολικά) τα βέλτιστα εμπόδια $(b_1^*, b_2^*) = (8,10)$. Αφού $u_2 > b_2^*$, αυτό ουσιαστικά σημαίνει ότι η κλάση κινδύνου 2 πρέπει να πληρώσει ένα άμεσο μερίσμα $u_2 - 1$ (που κινεί τη δισδιάστατη διαδικασία στο (5,1)) και συνεχίζει να εφαρμόζει τα φράγματα (8,1).

Πάλι από τον πίνακα 4.6, είναι γνωστό ότι τα (συνολικά) βέλτιστα φράγματα που αντιστοιχούν στα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος $(u_1, u_2) = (5,10)$ είναι επίσης (8,1). Επομένως, η ανωτέρω περιγραφή είναι πράγματι ίδια με την στρατηγική που δίνεται στον πίνακα 4.1, με (5,1) όντας η αρχική θέση στόχων και (8,1) τα νέα φράγματα.

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι τιμές μερισμάτων στον πίνακα 4.11 δεν είναι μικρότερες από εκείνες στον πίνακα 4.7 κάτω από τα (συνολικά) βέλτιστα φράγματα. Το πιο σημαντικό είναι πως, σε ορισμένες περιπτώσεις όπου τα (συνολικά) βέλτιστα φράγματα είναι χαμηλά στον πίνακα 4.6, η εφαρμογή της προτεινόμενης από εμάς στρατηγικής φράγματος μπορεί να

οδηγήσει σε αργότερο χρεοκοπίας επίσης. Π.χ. όταν $u_1 = 2$, $u_2 = 2$ και $4 \leq u_2 \leq 12$, σύμφωνα με τις δύο στρατηγικές των πινάκων 4.6 και 4.1, η δισδιάστατη διαδικασία αρχίζει ουσιαστικά στα αρχικά επίπεδα πλεονάσματος (2, 1) μετά από την πληρωμή ενός άμεσου μερίσματος στο χρόνο 0.

Όμως τα υψηλότερα φράγματα (8, 9) εφαρμοσμένα υπό την στρατηγική τροποποίησης (σε σύγκριση με τα φράγματα (3,1) στον πίνακα 4.6) σημαίνει ότι η δισδιάστατη διαδικασία μπορεί τώρα να διαρκέσει περισσότερο. Επομένως, η προτεινόμενη στρατηγική τροποποίησης θα μπορούσε να έχει το πλεονέκτημα των αυξανόμενων κοινών μερισμάτων και του καθυστερημένου χρόνου ζημιάς σε σύγκριση με την τυποποιημένη στρατηγική φράγματος. Τέλος, το γράφημα 4.4 δείχνει ότι η στρατηγική τροποποιημένων φραγμάτων οδηγεί στην ίδια βέλτιστη διανομή κεφαλαίου όπως στα γραφήματα 4.2 και 4.3 για τουλάχιστον μέχρι $K = 10$.



Γράφημα 4.4: Προσεγγισμένα βέλτιστα μερίσματα ως προς u_1 για $u_1 + u_2 = K$ με τη στρατηγική τροποποιημένων φραγμάτων.

4.4.5 Τελικές παρατηρήσεις

Σε αυτήν την ενότητα, αναπτύχθηκε μια διαδικασία διακριτοποίησης για να προσεγγιστεί μια συνεχής-χρονικά διαδικασία δισδιάστατου ρίσκου. Οι εφαρμογές σε προβλήματα σχετικά με την ανασφάλιση, την κατανομή κεφαλαίου, και τα μερίσματα αναπαρίστανται με αριθμητικά παραδείγματα. Προτάθηκε μια στρατηγική τροποποίησης φράγματος μερισμάτων που μπορεί να οδηγήσει σε αυξανόμενα μερίσματα και ο πιο περισσότερο χρόνο επιβίωσης.

Υπάρχουν διάφορες κατευθύνσεις για μελλοντική έρευνα:

Κατ' αρχάς, με τα επίπεδα φραγμάτων (b_1, b_2) στο μοντέλο συνεχούς χρόνου μαζί με τους παράγοντες κλίμακας (β_1, β_2) , πρέπει να λυθεί ένα σύστημα $(\beta_1 b_1 + 1)(\beta_2 b_2 + 1)$ γραμμικών εξισώσεων σύμφωνα με τις διαδικασίες προσέγγισης που περιγράφονται στην αρχή της παραγράφου 4.2.4.

Σε περιπτώσεις όπου τα ζεύγη τιμών (b_1, b_2) και (β_1, β_2) είναι και τα δύο μεγάλα, είναι δυνατόν να μην επαρκεί η μνήμη του υπολογιστή (αυτό εξηγεί τις επιλογές χαμηλών φραγμάτων στην παράγραφο 3 και χαμηλών συντελεστών κλιμάκωσης στην παράγραφο 4). Πρέπει να αναζητηθούν αποτελεσματικότερες υπολογιστικές μέθοδοι.

Δεύτερον, οι διαδικασίες μας μπορούν να επεκταθούν από δισδιάστατες σε πολυδιάστατες, αλλά οι υπολογισμοί θα είναι πολύ πιο κουραστικοί, και θα απαιτηθούν καλύτεροι αλγόριθμοι.

Τρίτον, το παρόν πρότυπο μπορεί να τροποποιηθεί έτσι ώστε η μεταφορά κεφαλαίου μεταξύ κλάσεων κινδύνου (π.χ. Hult και Lindskog (2006)) να είναι δυνατή όταν είναι μια κλάση κινδύνου κινδυνεύει ενώ η άλλη έχει άφθονο κεφάλαιο.

Τέλος, κάποιος μπορεί επίσης να προσπαθήσει να αντλήσει ειδικές πολύπλοκες ερμηνείες βγαλμένες από τα αποτελέσματα των απλούστερων μοντέλων όπως εκθετικές ζημιές με κοινά σοκ μόνο, ή από την αναλογική αντασφάλιση. Εμείς θέτουμε τα τελευταία ως ανοιχτές ερωτήσεις.

BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- [1] Albrecher, H. and Thonhauser, S. 2009. Optimality results for dividend problems in insurance. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales Serie A. Matematicas* 13(2): 295-320.
- [2] Asmussen, S. and Albrecher, H. 201. *Ruin Probabilities*. Second Edition. New Jersey: World Scientific.
- [3] Avanzi, B. 2009. Strategies for dividend distribution: A review. *North American Actuarial Journal* 13(2): 217-251.
- [4] Avram, F., Palmowski, Z. and Pistoris, M. 2008a. A two-dimensional ruin problem on the positive quadrant. *Insurance: Mathematics and Economics* 42(1): 227-234.
- [5] Avram, F., Palmowski, Z. and Pistoris, M. 2008b. Exit problem of a two-dimensional risk process from the quadrant: Exact and asymptotic results. *Annals of Applied Probability* 18(6): 2421-2449.
- [6] Badescu, A.L., Cheung, E.C.K. and Rabehasaina, L. 2011. A two-dimensional risk model with proportional reinsurance. *Journal of Applied Probability* 48(3): 749-765.
- [7] Bargues, M., Cossette, H. and Marceau, μ E. 2009. TVaR-based capital allocation with copulas. *Insurance: Mathematics and Economics* 45(3): 348-361.
- [8] Bargues, M., Cossette, H., Loisel, S. and Marceau, μ E. 2011. On the moments of aggregate discounted claims with dependence introduced by a FGM copula. *ASTIN Bulletin* 41(1): 215-238.
- [9] Blanchet, J. and Liu, J. 2014. Total variation approximations and conditional limit theorems for multivariate regularly varying random walks conditioned on ruin. *Bernoulli* 20(2): 416-456.
- [1] Cai, J. and Li, H. 2005. Multivariate risk model of phase type. *Insurance: Mathematics and Economics* 36(2): 137-152.
- [11] Cai, J. and Li, H. 2007. Dependence properties and bounds for ruin probabilities in multivariate compound risk models. *Journal of Multivariate Analysis* 98(4): 757-773.
- [12] Castaner, A., Claramunt, M.M. and Lefevre, C. 2013. Survival probabilities in bivariate risk models, with application to reinsurance. *Insurance: Mathematics and Economics* 53(3): 632-642.
- [13] Chadjiconstantinidis, S. and Vrontos, S. 2014. On a renewal risk process with dependence under a Farlie-Gumbel-Morgenstern copula. *Scandinavian Actuarial Journal* 2014(2): 125-158.

- [14] Chan, W.-S., Yang, H. and Zhang, L. 2003. Some results on the ruin probability in a two-dimensional risk model. *Insurance: Mathematics and Economics* 32(3): 345-358.
- [15] Chen, Y., Yuen, K.C. and Ng, K.W. 2011. Asymptotics for the ruin probabilities of a two-dimensional renewal risk model with heavy-tailed claims. *Applied Stochastic Models in Business and Industry* 27(3): 290-300.
- [16] Cheung, E.C.K. and Drekić, S. 2008. Dividend moments in the dual risk model: Exact and approximate approaches. *ASTIN Bulletin* 38(2): 399-422.
- [17] Collamore, J.F. 1996. Hitting probabilities and large deviations. *The Annals of Probability* 24(4): 2065-2078.
- [18] Collamore, J.F. 1998. First passage times of general sequences of random vectors: A large deviations approach. *Stochastic Processes and their Applications* 78(1): 97-130.
- [19] Cossette, H., Marceau, E. and Marri, F. 2011. Analysis of ruin measures for the classical compound Poisson risk model with dependence. *Scandinavian Actuarial Journal* 201(3): 221-245.
- [20] Czarna, I. and Palmowski, Z. 2011. De Finetti's dividend problem and impulse control for a two-dimensional insurance risk process. *Stochastic Models* 27(2): 220-250.
- [21] Dang, L., Zhu, N. and Zhang, H. 2009. Survival probability for a two-dimensional risk model. *Insurance: Mathematics and Economics* 44(3): 491-496.
- [22] de Finetti, B. 1957. Su un'impostazione alternativa della teoria collettiva del rischio. *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries* 2: 433-443.
- [23] De Vylder, F. and Goovaerts, M.J. 1988. Recursive calculation of finite-time ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics* 7(1): 1-7.
- [24] Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M. and Kaas, R. 2005. *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. Chichester: Wiley.
- [25] Denuit, M., Purcaru, O. and Van Keilegom, I. 2004. Bivariate Archimedean copula modelling for loss-ALAE data in non-life insurance. Discussion Paper 04-23, Institut de Statistique, Université Catholique de Louvain, Louvain-la-Neuve, Belgium.
- [26] Dickson, D.C.M. 2005. *Insurance Risk and Ruin*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [27] Dickson, D.C.M. and Drekić, S. 2006. Optimal dividends under a ruin probability constraint. *Annals of Actuarial Science* 1(2): 291-306.
- [28] Dickson, D.C.M. and Waters, H.R. 1991. Recursive calculation of survival probabilities. *ASTIN Bulletin* 21(2): 199-221.

- [29] Dickson, D.C.M. and Waters, H.R. 2004. Some optimal dividends problems. *ASTIN Bulletin* 34(1): 49-74.
- [30] Dimitrova, D.S and Kaishev, V.K. 201. Optimal joint survival reinsurance: An efficient frontier approach. *Insurance: Mathematics and Economics* 47(1): 27-35.
- [31] Drouet-Mari, R. and Kotz, S. 2001. *Correlation and dependence*. London: Imperial College Press.
- [32] Embrechts, P., Lindskog, F. and McNeil, A. 2003. Modelling dependence with copulas and applications to risk management. In: *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, ed. S.T. Rachev, pp.329-384. Amsterdam: Elsevier.
- [33] Embrechts, P., McNeil, A. and Straumann, D. 2002. Correlation and dependence in risk management: Properties and pitfalls. In: *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, ed. M.A.H. Dempster, pp.176-223. Cambridge: Cambridge University Press.
- [34] Frees, E.W. and Valdez, E.A. 1998. Understanding relationships using θεωρία πιθανοτήτων. *North American Actuarial Journal* 2(1): 1-25.
- [35] Genest, C. and MacKay, J. 1986. The joy of copulas: Bivariate distributions with uniform marginals. *The American Statistician* 40(4): 280-283.
- [36] Gerber, H.U. 1979. *An Introduction to Mathematical Risk Theory*. Huebner Foundation Monograph 8. Homewood, IL: Richard D. Irwin.
- [37] Gerber, H.U., Lin, X.S. and Yang, H. 2006. A note on the dividends-penalty identity and the optimal dividend barrier. *ASTIN Bulletin* 36(2): 489-503.
- [38] Gerber, H.U. and Shiu, E.S.W. 1998. On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal* 2(1): 48-72.
- [39] Gerber, H.U., Shiu, E.S.W. and Smith, N. 2006. Maximizing dividends without bankruptcy. *ASTIN Bulletin* 36(1): 5-23.
- [40] Gerber, H.U., Shiu, E.S.W. and Yang, H. 201. An elementary approach to discrete models of dividend strategies. *Insurance: Mathematics and Economics* 46(1): 19-116.
- [41] Gong, L., Badescu, A.L. and Cheung, E.C.K. 2012. Recursive methods for a multi-dimensional risk process with common shocks. *Insurance: Mathematics and Economics* 50(1): 19-120.
- [42] Hu, Z. and Jiang, B. 2013. On joint ruin probabilities of a two-dimensional risk model with constant interest rate. *Journal of Applied Probability* 50(2): 309-322.
- [43] Huang, W., Weng, C. and Zhang, Y. 2013. Multivariate risk models under heavy-tailed risks. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*. In press.

- [44] Hult, H. and Lindskog, F. 2006. Heavy-tailed insurance portfolios: Buffer capital and ruin probabilities. School of ORIE, Cornell University, Technical Report No. 1441.
- [45] Hult, H., Lindskog, F., Mikosch, T. and Samorodnitsky, G. 2005. Functional large deviations for multivariate regularly varying random walks. *Annals of Applied Probability* 15(4): 2651- 2680.
- [46] Kaishev, V.K. and Dimitrova, D.S. 2006. Excess of loss reinsurance under joint survival optimality. *Insurance: Mathematics and Economics* 39(3): 376-389.
- [47] Kaishev, V.K., Dimitrova, D.S. and Ignatov, Z.G. 2008. Operational risk and insurance: a ruin-probabilistic reserving approach. *Journal of Operational Risk* 3(3): 39-60.
- [48] Klugman, S.A., Panjer, H.H. and Willmot G.E. 2008. *Loss Models : From Data to Decisions*. 3rd Edition. New York: Wiley.
- [49] Klugman, S.A. and Parsa, R. 1999. Fitting bivariate loss distributions with copulas. *Insurance: Mathematics and Economics* 24(1-2): 139-148.
- [50] Li, J., Liu, Z. and Tang, Q. 2007. On the ruin probabilities of a bidimensional perturbed risk model. *Insurance: Mathematics and Economics* 41(1): 185-195.
- [51] Lin, X.S., Willmot, G.E. and Drekić, S. 2003. The compound Poisson risk model with a constant dividend barrier: analysis of the Gerber-Shiu discounted penalty function. *Insurance: Mathematics and Economics* 33(3): 551-566.
- [52] Liu, J. and Woo, J.-K. 2014. Asymptotic analysis of risk quantities conditional on ruin for multidimensional heavy-tailed random walks. *Insurance: Mathematics and Economics* 55: 1-9.
- [53] Loeffen, R.L. 2008. On optimality of the barrier strategy in de Finetti's dividend problem for spectrally negative Lévy processes. *Annals of Applied Probability* 18(5): 1669-1680.
- [54] Loisel, S. 2005. Differentiation of some functionals of risk processes, and optimal reserve allocation. *Journal of Applied Probability* 42(2): 379-392.
- [55] McNeil, A.J., Frey, R. and Embrechts, P. 2005. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques, and Tools*. New Jersey: Princeton University Press.
- [56] Nelsen, R.B. 2006. *An Introduction to Θεωρία πιθανοτήτων*. Second edition. In: Springer Series in Statistics. New York: Springer.
- [57] Panjer, H.H. 2006. *Operational Risk: Modeling Analytics*. New Jersey: Wiley.
- [58] Picard, P., Lefèvre, C. and Coulibaly, I. 2003. Multirisks model and finite-time ruin probabilities. *Methodology and Computing in Applied Probability* 5(3): 337-353.
- [59] Rabehasaina, L. 2009. Risk processes with interest force in Markovian environment. *Stochastic Models* 25(4): 580-613.

- [60] Thonhauser, S. and Albrecher, H. 2007. Dividend maximization under consideration of the time value of ruin. *Insurance: Mathematics and Economics* 41(1): 163-184.
- [61] Trivedi, P.K. and Zimmer, D.M. 2005. Θεωρία πιθανοτήτων modeling: An introduction for practitioners. *Foundations and Trends in Econometrics* 1(1): 1-111.
- [62] Walhin, J.F. and Paris, J. 2000. Recursive formulae for some bivariate counting distributions obtained by the trivariate reduction method. *ASTIN Bulletin* 30(1): 141-155.
- [63] Woo, J.-K. and Cheung, E.C.K. 2013. A note on discounted compound renewal sums under dependency. *Insurance: Mathematics and Economics* 52(2): 170-179.
- [64] Yuen, K.C., Guo, J. and Wu, X. 2006. On the first time of ruin in the bivariate compound Poisson model. *Insurance: Mathematics and Economics* 38(2): 298-308.
- [65] Boudreault, M., Cossette, H., Landriault, D., Marceau, E., 2006. On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. *Scandinavian Actuarial Journal* 5, 265–285.
- [66] Collamore, J.F., 1996. Hitting probabilities and large deviations. *The Annals of Probability* 24 (4), 2065–2078.
- [67] Collamore, J.F., 1998. First passage times of general sequences of random vectors: a large deviations approach. *Stochastic Processes and their Applications* 78 (1) 97–130.
- [68] Collamore, J.F., 2002. Importance sampling techniques for the multidimensional ruin problem for general Markov additive sequences of random vectors. *The Annals of Applied Probability* 12 (1), 382–421.
- [69] Cossette, H., Marceau, E., Marri, F., 2008. On the compound Poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie–Gumbel–Morgenstern copula. *Insurance: Mathematics and Economics* 43 (3), 444–455.
- [70] Gerber, H.U., Shiu, E.S.W., 1998. On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal* 2 (1), 48–72.
- [71] Lee, S.C.K., Lin, X.S., 2010. Modeling and evaluating insurance losses via mixtures of Erlang distributions. *North American Actuarial Journal* 14 (1), 107–130.
- [72] Rabehasaina, L., 2009. Risk processes with interest force in Markovian environment. *Stochastic Models* 25 (4), 580–613.
- [73] Stanford, D.A., Stroiński, K.J., 1994. Recursive methods for computing finite-time ruin probabilities for phase-type distributed claim sizes. *Astin Bulletin* 24 (2), 235–254.
- [74] Stanford, D.A., Stroiński, K.J., Lee, K., 2000. Ruin probabilities based at claim instants for some non-Poisson claim processes. *Insurance: Mathematics and Economics* 26 (2–3), 251–267.

- [75] Willmot, G.E., Woo, J.-K., 2007. On the class of Erlang mixtures with theoretic applications. *North American Actuarial Journal* 11 (2), 99–115.
- [76] Ambagaspitiya, R.S., 1999. On the distribution of two classes of correlated aggregate claims. *Insurance: Mathematics and Economics* 24, 301_308.
- [77] Ambagaspitiya, R.S., 2003. Aggregate survival probability of a portfolio with dependent. *Insurance: Mathematics and Economics* 32, 431_443.
- [78] Cossette, H., Marceau, E., 2000. The discrete-time risk model with correlated classes of business. *Insurance: Mathematics and Economics* 26, 133_149.
- [79] Gerber, H.U., 1979. An Introduction to Mathematical Risk Theory. In: S.S. Heubner Foundation Monograph Series, vol. 8. S.S. Heubner, Philadelphia.
- [80] Grandell, J., 1991. Aspects of Risk Theory. Springer-Verlag, New York.
- [81] Wang, G., Wu, R., 2001. Distributions for the risk process with stochastic return on investments. *Stochastic Processes and their Applications* 95, 329_341.
- [82] Wang, G., Yuen, K.C., 2005. On a correlated aggregate claims model with thinning-dependence structure. *Insurance: Mathematics and Economics* 35, 456_468.
- [83] Wu, X., Yuen, K.C., 2003. A discrete-time risk model with interaction between classes of business. *Insurance: Mathematics and Economics* 33, 117_133.
- [84] Yuen, K.C., Guo, J.Y., Wu, X., 2002. On a correlated aggregate claims model with Poisson and Erlang risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics* 31, 205_214.
- [85] Asmussen, S., and T. Rolski (1991). Computational methods in risk theory: A matrix-algorithmic approach. *Insurance: Mathematics & Economics* 10, 259-274.
- [86] Assaf, D., Langberg, N., Savits, T., and Shaked, M. (1984). Multivariate phase type distributions, *Operations Research* 32, 688–702.
- [87] Cai, J. and Li, H. (2005b). Conditional tail expectations for multivariate phase type distributions. *Journal of Applied Probability* 42, 810-825.
- [88] Kulkarni, V.G. (1989). A new class of multivariate phase type distributions, *Operations Research* 37, 151–158.
- [89] Li, H. and S.H. Xu (2000). On the dependence structure and bounds of correlated parallel queues and their applications to synchronized stochastic systems *J. Appl. Probab.* 37, 1020-1043.
- [90] Marshall, A.W. and Olkin, I. (1967). A multivariate exponential distribution *J. Amer. Statist. Assoc.* 2, 84-98.
- [91] Marshall, A.W. and Olkin, I. (1979). *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*. Academic Press, New York.

- [92] Muller, A. and Stoyan, D. (2002) Comparison Methods for Stochastic Models and Risks. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [93] Neuts, M. F. (1981). Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models: An Algorithmic Approach, The Johns Hopkins University Press, Baltimore.
- [94] Shaked, M. and J. G. Shanthikumar (1994). Stochastic Orders and Their Applications, Academic Press, New York.
- [95] Sundt, B. (1999). On multivariate Panjer recursions. *ASTIN Bulletin* 29, 29-45.
- [96] Tong, Y. L. (1980). Probability Inequalities in Multivariate Distributions. Academic Press, New York.
- [97] B. Højgaard and M. Taksar, “Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models with transaction costs,” *Insurance: Mathematics and Economics*, vol. 22, no. 1, pp. 41–51, 1998.
- [98] B. Højgaard and M. Taksar, “Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models,” *Scandinavian Actuarial Journal*, vol. 1998, no. 2, pp. 166–180, 1998.
- [99] H. Schmidli, “Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting,” *Scandinavian Actuarial Journal*, no. 1, pp. 55–68, 2001.
- [100] X. Zhang, M. Zhou, and J. Guo, “Optimal combinational quota-share and excess-of-loss reinsurance policies in a dynamic setting,” *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, vol. 23, no. 1, pp. 63–71, 2007.
- [101] H. Schmidli, “On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance,” *The Annals of Applied Probability*, vol. 12, no. 3, pp. 890–907, 2002.
- [102] P. Azcue and N. Muller, “Optimal reinsurance and dividend distribution policies in the Cramér-Lundberg model,” *Mathematical Finance*, vol. 15, no. 2, pp. 261–308, 2005.
- [103] M. I. Taksar and C. Markussen, “Optimal dynamic reinsurance policies for large insurance portfolios,” *Finance and Stochastics*, vol. 7, no. 1, pp. 97–121, 2003.
- [104] H. Schmidli, “Asymptotics of ruin probabilities for risk processes under optimal reinsurance and investment policies: the large claim case,” *Queueing Systems*, vol. 46, no. 1-2, pp. 149–157, 2004. [64] H. Schmidli, *Stochastic Control in Insurance*, Springer, London, UK, 2008.
- [105] T. Rolski, H. Schmidli, V. Schmidt, and J. Teugels, *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, Wiley, New York, NY, USA, 1999.
- [106] H. Schmidli, “Asymptotics of ruin probabilities for risk processes under optimal reinsurance policies: the small claim case,” Working paper 180, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, 2002.

- [107] H. Schmidli, “On the Cramér-Lundberg approximations for ruin probabilities under optimal excess-of-loss reinsurance,” Working paper 193, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, 2004.
- [108] C. Hipp and H. Schmidli, “Asymptotics of ruin probabilities for controlled risk processes in the small claims case,” *Scandinavian Actuarial Journal*, no. 5, pp. 321–335, 2004.
- [109] Bertoin, J. 1997. Exponential decay and ergodicity of completely asymmetric Levy processes in a finite interval. *Annals of Applied Probability* 7(1): 156-169.
- [110] Cheung E.C.K. and Landriault D. 2010. A generalized penalty function with the maximum surplus prior to ruin in a MAP risk model. *Insurance: Mathematics and Economics* 46(1): 127-134.
- [111] Dickson, D.C.M. 2008. Some explicit solutions for the joint density of the time of ruin and the deficit at ruin. *ASTIN Bulletin* 38(1): 259-276.
- [112] Dickson, D.C.M. and Willmot, G.E. 2005. The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model. *ASTIN Bulletin* 35(1): 45-60.
- [113] Landriault, D. and Willmot, G.E. 2009. On the joint distributions of the time to ruin, the surplus prior to ruin, and the deficit at ruin in the classical risk model. *North American Actuarial Journal* 13(2): 252-270.
- [114] Lin, X.S. and Willmot, G.E. 1999. Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory. *Insurance: Mathematics and Economics* 25(1): 63-84.
- [115] Suprun, V.N. 1976. Problem of destruction and resolvent of a terminating process with independent increments. *Ukrainian Mathematical Journal* 28(1): 39-45.
- [116] Tijms, H. 1994. *Stochastic Models*. Chichester: John Wiley.