ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ

ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΜΕΤΡΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ ΓΙΑ ΤΟ ΔΙΑΚΡΙΤΟ ΑΝΑΝΕΩΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΤΗΣ ΘΕΩΡΙΑΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ ΜΕ ΧΡΟΝΙΚΕΣ ΕΞΑΡΤΗΣΕΙΣ

ΠΕΤΡΟΠΟΥΛΟΣ ΘΕΟΦΑΝΗΣ

Διπλωματική Εργασία
Που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του
Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των Απαιτήσεων του για την απόκτηση του
Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη
Και Διοικητική Κινδύνου

ΠΕΙΡΑΙΑΣ

ΝΟΕΜΒΡΙΟΣ 2018

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN

ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

RUIN MEASURES FOR THE DISCRETE-TIME DEPENDENT RENEWAL RISK MODEL

PETROPOULOS THEFANIS

MSc Dissertation
submitted to the Department of Statistics
and Insurance Science of the University of Piraeus in partial
fulfilment of the requirements for the degree
of Master of Science in Actuarial Science and Risk
Management.

PIRAEUS,GREECE

NOVEMBER 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμ. .... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική επιστήμη και Διοικητική κινδύνου Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Χατζηκωνσταντινίδης Ευστάθιος (Επιβλέπων)
- Κυριαζής Αθανάσιος
- Πέτρος Χατζόπουλος

Η έγκριση της διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Περίληψη

Η παρούσα εργασία ασχολήθηκε με τα μέτρα χρεοκοπίας που αναφέρονται στις επιχειρήσεις αλλά και τις χρονικές εξαρτήσεις που τα επηρεάζουν και θα πρέπει οι επιχειρήσεις να λάβουν υπόψη τη στρατηγική που ακολουθούν σε περίπτωση που βρεθούν σε δυσμενή θέση. Η ανάλυση βασίστηκε στη μελέτη και ανασκόπηση συγκεκριμένης αρθογραφίας.

Ουσιαστικά το κάθε κεφάλαιό της ήταν η μελέτη και αξιολόγηση σε συνδυασμό με άλλη αρθογραφία και βιβλιογραφία. Από το πρώτο κεφάλαιο επισημάνθηκαν οι διάφορες ροπές που υπάρχουν σε σχέση με το χρόνο χρεοκοπίας για τις επιχειρήσεις. Το δεύτερο κεφάλαιο έδωσε βαρύτητα και εξήγαγε συμπεράσματα για τις διάφορες απαιτήσεις που υπάρχουν αλλά και το χρόνο αναμονής στις επιχειρήσεις. Το τρίτο έκανε κάποιες διαπιστώσεις για τα ελλείμματα που αντιμετωπίζουν οι εταιρίες και πως καλούνται να βρουν λύσεις για δυσμενείς καταστάσεις. Το τέταρτο εστίασε σε προεξοφλήσεις, ενώ το πέμπτο έδωσε και πάλι σημαντικά συμπεράσματα για τη κατανομή του χρόνου σε τέτοιου είδους καταστάσεις.

Σε γενικές γραμμές ως βασικό συμπέρασμα της εργασίας το οποίο προήλθε μέσα από την ανάλυση των άρθρων και γενικότερα με τη σχετική βιβλιογραφία με το θέμα είναι ότι οι επιχειρήσεις πρέπει να λάβουν υπόψη το χρονικό προγραμματισμό που πρέπει να κάνουν σε τέτοιου είδους καταστάσεις χρεοκοπίας που καλούνται να αντιμετωπίσουν αλλά και γενικότερα σε κάθε δυσμενή κατάσταση στην οποία υποβάλλονται λόγω του περιβάλλοντος ή λόγω δικής τους κακής διαχείρισης. Με βάση τη παρούσα θεωρητική προσέγγιση της μελέτης, στο μέλλον θα μπορούσαν να αναπτυχθούν πρακτικές ως προς το περιεχόμενό τους, μελέτες από τις οποίες θα μπορούσαν να εξαχθούν μοντέλα που θα βοηθούσαν στη καλύτερη αντίληψη της παρούσας υπό ανάλυση κατάστασης.

Λέξεις κλειδιά: χρεοκοπία, χρονικές εξαρτήσεις

Abstract

This study dealt with bankruptcy measures relating to enterprises and the time dependencies that affect them, which enterprises should take into account in their strategy if they find themselves in a disadvantageous position. The analysis was based on the study and review of particular articles.

Essentially, each chapter was a study and evaluation in combination with other articles and literature. The first chapter highlighted the various moments that exist in relation to bankruptcy time for enterprises. The second chapter gave weight and drew conclusions about the various claims that exist as well as the waiting time in enterprises. The third chapter reported certain findings about the deficits faced by enterprises and how they are called upon to find solutions to unfavorable situations. The fourth chapter focused on the discounts, while the fifth chapter presented important conclusions on the time allocation in such situations.

In general, the main conclusion of the study that emerged through the analysis of the articles and more generally through the relevant literature on the subject, is that enterprises should take into account the time schedule they have to do in a bankruptcy situations that they have to deal with, but also more generally in any unfavorable situation due to the environment or due to their own mismanagement. Based on this theoretical approach to the study, in the future, certain practices could be developed in terms of their content, and studies from which models could be extracted that would help to better understand the situation under analysis.

Keywords:ruin measures, time dependencies

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σκοπός της παρούσης μελέτης είναι να μελετήσει τα μέτρα χρεοκοπίας που αναφέρονται στις επιχειρήσεις αλλά και τις χρονικές εξαρτήσεις που τα επηρεάζουν. Παράλληλα θα παρουσιάσει τη στρατηγική που οι επιχειρήσεις πρέπει να λάβουν υπόψη τους σε περίπτωση που βρεθούν σε δυσμενή θέση. Η εργασία αποτελείται συνολικά από πέντε κεφάλαια. Το πρώτο κεφάλαιο παρουσιάζει το μοντέλο κινδύνου διακριτού χρόνου, αναλύει την περίπτωση όπου u=0 και μελετά τις ροπές και τις συνδιακυμάνσεις. Τέλος υπολογίζει την περίπτωση όπου u>0.

Το δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζει το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο κινδύνου. Αναλυτικά παρουσιάζει την περιγραφή του μοντέλου και τον συμβολισμό του, τον τελεστή των διακριτών συναρτήσεων, τα martingales και τη γενικευμένη εξίσωση lundering, τη γεννήτρια συνάρτηση ϕ, την ανάλυση όταν u=0, τον αναδρομικό τύπο για το $\phi(u)$ και τέλος τις ρητές εκφράσεις για *g(y)*

Το τρίτο κεφάλαιο παρουσιάζει το μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen. Αναλυτικά παρουσιάζει την περιγραφή του μοντέλου και τη σημειογραφία του, την έκφραση για φ(u), τις κατανομές του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία, το έλλειμμα στην χρεοκοπία και την απαίτηση που προκαλεί η χρεοκοπία. Τέλος παρουσιάζονται οι δύο τάξεις κατανομών του μεγέθους απαιτήσεων.

Το τέταρτο κεφάλαιο παρουσιάζει τη σχέση μεταξύ των συναρτήσεων προεξοφλημένων ποινών των Gerber – Shiu στα κλασικά και στάσιμα διακριτά ανανεωτικά μοντέλα, το προεξοφλημένο ελεύθερο μοντέλο και το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο.

Το πέμπτο και τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζει ένα ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen διακριτού χρόνου, όπου ο χρόνος της απαίτησης έχει αντίκτυπο στο μεταγενέστερο μέγεθος της απαίτησης, όπως για παράδειγμα στην ασφάλιση καταστροφών. Παρουσιάζεται η γενική δομή του, εφαρμόζεται για μια κατηγορία διακριτών κατανομών χρόνου Kn μεταξύ των απαιτήσεων και παρουσιάζεται η εξέλιξη καθυστερημένης ανανέωσης κινδύνου, διακριτού χρόνου. Στο τέλος της εργασίας συνοψίζονται τα βασικά της συμπεράσματα.

Κεφάλαιο 1

Τα προβλήματα που σχετίζονται με τον υπολογισμό των πιθανοτήτων χρεοκοπίας για άπειρο χρονικό διάστημα , για το μοντέλο συνεχούς χρονικού κινδύνου, έχουν λάβει μεγάλη προσοχή τα τελευταία χρόνια.

Αυτά περιλαμβάνουν μελέτες της κατανομής του χρόνου χρεοκοπίας (πιθανότητες χρεωκοπίας πεπερασμένου χρόνου), το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία και το έλλειμμα στην χρεοκοπία, καθώς και τις ροπές αυτών των μεταβλητών.

Ως εκ τούτου, ο τύπος αποδίδει την από κοινού συνάρτηση κατανομής των τριών τυχαίων μεταβλητών του χρόνου στην χρεοκοπία, το πλεόνασμα λίγο πριν την χρεοκοπία και το έλλειμμα στην χρεοκοπία.

Δεδομένης της διακριτικής φύσης του μοντέλου μας, οι γεννήτριες συναρτήσεις πιθανοτήτων χρησιμοποιούνται σε ολόκληρη την ανάλυση της χρονικής στιγμής της χρεοκοπίας και των σχετικών τυχαίων μεταβλητών. Η από κοινού συνάρτηση κατανομής για το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο προκύπτει από τους Cheng et al. (2000) χρησιμοποιώντας τεχνικές martingale και ένα επιχείρημα δυαδικότητας. Αντ' αυτού, στην Ενότητα 1.4 βρίσκουμε έναν τύπο για την γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου χρεωκοπίας Τ, τις προ εξοφλημένες ροπές του ελλείμματος στην χρεοκοπία και το πλεόνασμα λίγο πριν την χρεοκοπία. Η ενότητα 3 δίνει μια λεπτομερή συζήτηση για την περίπτωση u = 0 και όταν το μέγεθος της απαίτησης σε χρονική περίοδο μονάδας είναι γεωμετρικά κατανεμημένο.

Αυτά τα αποτελέσματα είναι ανεξάρτητου ενδιαφέροντος και μπορούν να δώσουν μια καλύτερη κατανόηση των ανάλογων αποτελεσμάτων στο μοντέλο συνεχούς χρόνου, ως οριακή περίπτωση του μοντέλου διακριτού χρόνου.

1.1 Περιγραφή μοντέλου και σημειώσεις

Θεωρούμε την διαδικασία πλεονάσματος διακριτού χρόνου

$$U(t) = u + t - \sum_{i=1}^{t} X_i, \ t = 1, 2, \ldots\ldots,$$

όπου $u \in N$ είναι το αρχικό απόθεμα. Οι X_i είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $p(\kappa) = P(X = \kappa)$, για k = 0, 1, 2, …., εκφράζοντας το συνολικό ποσό απαιτήσεων κατά την περίοδο i, που εμφανίζεται στο τέλος της περιόδου. Εκφράζεται με

$\mu_k = \mathrm{E}\left[X^k\right]$ η k-ή ροπή του X και με $\hat{p}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} s^i p(i)$ για τις γεννήτριες συναρτήσεις πιθανοτήτων.

Χωρίς απώλεια της γενικότητας υποθέτουμε ότι η παραγωγή ασφαλίστρου ανά μονάδα χρόνου είναι 1 και για να έχουμε ένα θετικό περιθώριο ασφαλείας, όπου $\mu_1 < 1$:

Τώρα ορίζουμε (την πιθανώς ελαττωματική τυχαία μεταβλητή)

$$T = \min\{t = 1, 2, ...; U(t) \le 0\}$$

να είναι ο χρόνος χρεωκοπίας,

$$\Psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u),\ u \in \mathrm{N}$$

να είναι η τελική πιθανότητα χρεωκοπίας και

$$\psi(u,t) = P(T = t | U(0) = u),\ t = 1, 2, 3, ...,$$

να είναι η πιθανότητα χρεωκοπίας στο χρόνο t:

Θεωρούμε $f_3(x, y, t | u) = P\{U(T-1) = x, |U(T)| = y,\ T = t | U(0) = u\}, x, y \in \mathrm{N}$, από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του πλεονάσματος λίγο πριν την χρεοκοπία, το έλλειμμα την στιγμή της χρεωκοπίας και τον χρόνο χρεοκοπίας.

Υποθέτουμε $\upsilon \in (0, 1)$ είναι (σταθερό) συντελεστής προεξόφλησης σε μια περίοδο και ορίζουμε

$f_2(x, y | u) = \sum_{t=1}^{\infty} u^t f_3(x, y, t | u)$ ως προ εξοφλημένη από κοινού γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας της

$U(T-1)$ και $|U(T)|$. Ομοίως, εκφράζουμε με $f(x|u) = \sum_{y=0}^{\infty} f_2(x, y | u).$ Οι συνηθισμένοι τύποι πιθανότητας υπό όρους δίνουν την ακόλουθη σχέση:

$$f_2(x, y | u) = f(x|u) \frac{p(x + y + 1)}{\sum_{k=x+1}^{\infty} p(k)},\ x, y \in \mathrm{N}.$$

Ένας από τους στόχους μας είναι να βρούμε $f_2(x, y | 0)$ και $f_2(x, y | u)$ για κάθε x,y ∈ N: Οι Cheng et al. (2000), βρίσκουν $f_2(x, y | 0)$ χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες martingale και ένα επιχείρημα δυαδικότητας για το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο.

Θέτω $w(x, y)$, $x, y = 0, 1, 2, \ldots$ να είναι οι μη αρνητικές τιμές μιας συνάρτησης ποινής. Για 0 < u< 1, ορίζουμε

$$\varphi(u) = E\left[u^T w(U(T-1), \left|U(T)\right| I(T<\infty) \middle| U(0)=u\right], \quad u \in \mathrm{N}. \tag{1.1}$$

Η ποσότητα $w(U(T-1), \left|U(T)\right|$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η ποινή κατά τη στιγμή της χρεωκοπίας για το πλεόνασμα $U(T-1)$ και το έλλειμμα $\left|U(T)\right|$. Τότε $\phi(u)$ είναι η αναμενόμενη προ εξοφλημένη ποινή εάν το υ θεωρείται ως ένα προεξοφλητικό επιτόκιο .

Θα χρησιμοποιήσουμε μια τεχνική παρόμοια με εκείνη των Gerber και Shiu (1998) για να δώσουμε μία αναδρομική έκφραση του $\varphi(u)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.1

$$\varphi(0) = u\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\rho^x w(x,y)p(x+y+1), \tag{1.2}$$

Και για $u \in \mathrm{N}^+$,

$$\phi(u) = \upsilon\sum_{x=0}^{u-1}\phi(u-x)\sum_{y=0}^{\infty}\rho^y p(x+y+1) + \upsilon\rho^{-u}\sum_{x=u}^{\infty}\rho^x\sum_{y=0}^{\infty}w(x,y)p(x+y+1),$$

όπου 0 <ρ< 1 είναι η ρίζα της εξίσωσης

$$q(s) := \frac{\hat{p}(s)}{s} = \frac{1}{\upsilon} \tag{1.3}$$

Απόδειξη: Δουλεύοντας ως προς το ύψος της πρώτης απαίτησης X_1, έχουμε

$$\phi(u) = \upsilon E[\phi(u+1-X_1)],$$

για $u \in \mathrm{N}$. Επομένως

$$\phi(0) = p(0)\upsilon\phi(1) + \upsilon\sum_{x=1}^{\infty}w(0, x-1)p(x) \tag{1.4}$$

και

$$\phi(u) = p(0)\upsilon\phi(u+1) + \upsilon\sum_{x=1}^{u}\phi(u+1-x)p(x)$$
$$+\upsilon\sum_{x=u+1}^{\infty}w(u, x-u-1)p(x), \quad u \in \mathrm{N}^+. \tag{1.5}$$

Για $0<\rho<1$, ορίζουμε $\phi_\rho(u) = \rho^u\phi(u)$. Έπειτα για $u \in \mathrm{N}^+$ έχουμε

$$\phi_\rho(u) = \frac{\upsilon p(0)}{\rho} = \phi_\rho(u+1) + \upsilon\sum_{x=1}^{u}\rho^{x-1}\phi_\rho(u+1-x)p(x) + \upsilon\rho^u\sum_{x=u+1}^{\infty}w(u, x-u-1)p(x)$$

Επαναδιάταξη όρων

$$\phi_\rho(u+1)=\frac{\rho}{\upsilon p(0)}\phi_\rho(u)-\frac{1}{p(0)}\sum_{x=1}^{u}\rho^x\phi_\rho(u+1-x)p(x)$$
$$-\frac{1}{p(0)}\rho^{u+1}\sum_{x=u+1}^{\infty}w(u,x-u-1)p(x)$$

Και επομένως $\Delta\phi_\rho(u):=\phi_\rho(u+1)-\phi_\rho(u)$ δίνεται από

$$\Delta\phi_\rho(u)=\phi_\rho(u)\left[\frac{\rho/\upsilon-p(0)}{p(0)}\right]-\frac{1}{p(0)}\left\{\sum_{x=1}^{u}\rho^z\phi_\rho(u+1-x)p(x)\right.$$

$$)-\rho^{u+1}\sum_{z=u+1}^{\infty}w(u,x-u-1)p(x)\Big\},u\in N^+ \tag{1.6}$$

Τώρα υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα $\rho\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $\frac{\hat{p}(\rho)}{\rho}=\frac{1}{\upsilon}$ (η ύπαρξή του συζητείται μετά την απόδειξη). Τότε η (1.6) γίνεται

$$\Delta\phi_\rho(u)=\phi_\rho(u)\left[\frac{\hat{p}(\rho)-p(0)}{p(0)}\right]-\frac{1}{p(0)}$$
$$\left\{\sum_{x=1}^{u}\rho^z\phi_\rho(u+1-x)p(x)\ -\rho^{u+1}\sum_{z=u+1}^{\infty}w(u,x-u-1)p(x)\right\} \tag{1.7}$$

Αθροίζοντας από u = 1 έως m - 1 και αναδιατάσσοντας τους όρους, βρίσκουμε

$$\phi_\rho(m)=\phi_\rho(1)+\frac{1}{p(0)}\left\{\sum_{u=1}^{\infty u}\rho^u p(u)\sum_{x-1}^{m-1}\phi_\rho(x)-\sum_{z=1}^{m-1}\sum_{u=x}^{m-1}\rho^{u+1-x}p(u+1-x)\phi^\rho(x)\right.$$
$$\left.-\sum_{u=1}^{m-1}\rho^{u+1}\sum_{x=u}^{\infty}w(u,x-u)p(x+1)\right\}$$

$$=\phi_\rho(1)+\frac{1}{p(0)}\left\{\sum_{x=1}^{m-1}\phi_\rho(x)\sum_{u=m-x+1}^{\infty}\rho^u p(u)\right.$$
$$\left.-\sum_{u=1}^{m-1}\rho^{u+1}\sum_{x=u}^{\infty}w(u,x-u)p(x+1)\right\} \tag{1.8}$$

Εφόσον $\lim_{m\to\infty}\phi_\rho(m)=0,\ \gamma\iota\alpha\ 0<\rho<1,$ έχουμε

$$\phi_\rho(1)=\frac{1}{p(0)}\sum_{u=1}^{\infty}\rho^{u+1}\sum_{x=u}^{\infty}w(u,x-u)p|(x+1),$$

$$\phi(1)=\frac{1}{p(0)}\sum_{u=1}^{\infty}\rho^{u}\sum_{x=u}^{\infty}w(u,x-u)p(x+1) \qquad (1.9)$$

Από την (1.4) και την (1.9) έχουμε

$$\phi(0)=\upsilon\sum_{u=1}^{\infty}\rho^{u}\sum_{x=u}^{\infty}w(u,x-u)p(x+1)+\upsilon\sum_{z=1}^{\infty}w(0,x-1)p(x)$$

$$=\upsilon\sum_{u=0}^{\infty}\rho^{u}\sum_{x=u}^{\infty}w(u,x-u)p(x+1)=\upsilon\sum_{u=0}^{\infty}\rho^{u}\sum_{x=0}^{\infty}w(u,x)p(x+u+1)$$

και με τη σειρά της η (1.8) συνεπάγεται ότι

$$\phi_\rho(m)=\frac{1}{p(0)}\left\{\sum_{z=1}^{m-1}\phi_\rho(x)\sum_{u=m-z+1}^{\infty}\rho^{u}p(u)+\sum_{u=m}^{\infty}\rho^{u+1}\sum_{x=u}^{\infty}w(u,x-u)p(x+u+1)\right\}.$$

Επομένως

$$\phi(m)=\frac{1}{p(0)}\left\{\sum_{z=1}^{m-1}\phi(x)\sum_{u=m-x+1}^{\infty}\rho^{u-m+x}p(u)\right.$$

$$\left.+\sum_{u=m}^{\infty}\rho^{u+1-m}\sum_{x=u}^{\infty}w(u,x-u)p(x+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{p(0)}\left\{\sum_{y=1}^{m-1}\phi(m-y)\sum_{z=0}^{\infty}\rho^{z+1}p(x+y+1)\right.$$

$$\left.+\sum_{u=m}^{\infty}\rho^{u+1-m}\sum_{x=u}^{\infty}w(u,x-u)p(x+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{p(0)}\left\{\sum_{y=0}^{m-1}\phi(m-y)\sum_{z=0}^{\infty}\rho^{z+1}p(x+y+1)-\phi(m)\sum_{z=0}^{\infty}\rho^{z+1}p(x+1)\right.$$

$$\left.+\sum_{u=m}^{\infty}\rho^{u+1-m}\sum_{x=u}^{\infty}w(u,x-u)p(x+1)\right\}.$$

Τελικά,

$$\phi(m)=\frac{\rho}{\hat{p}(\rho)}\left\{\sum_{y=0}^{m-1}\phi(m-y)\sum_{z=0}^{\infty}\rho^{x}p(x+y+1)\right.$$

$$\left.+\sum_{u=m}^{\infty}\rho^{u-m}\sum_{z=u}^{\infty}w(u,x-u)p(x+1)\right\}$$

$$= \upsilon \sum_{y=o}^{m-1} \phi(m-y) \sum_{x=0}^{\infty} \rho^x p(x+u+1) + \upsilon \sum_{u=m}^{\infty} \rho^{u-m} \sum_{z=u}^{\infty} w(u, x-u) p(x+1)$$

$$= \upsilon \sum_{y=0}^{m-1} \phi(m-y) \sum_{x=0}^{\infty} \rho^x p(x+y+1) + \upsilon \sum_{u=m}^{\infty} \rho^{u-m} \sum_{x=0}^{\infty} w(u, x) p(x+u+1).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Παρατήρηση: Εάν, αντ' αυτού, ο χρόνος χρεοκοπίας ορίζεται ως η πρώτη φορά που το πλεόνασμα πέφτει σε μια αυστηρά αρνητική τιμή, T*= min {t = 1,2,....;U(t)<0}; Τότε εύκολα διακρίνεται ότι $\phi^*(u) := E\left[\upsilon^{T^*} w\left(U\left(T^*-1\right), \left|U\left(T^*\right)\right|\right) I\left(T^* < \infty\right) \middle| U(0) = u\right]$

Ικανοποιεί τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο, ελαφρώς διαφοροποιημένο από το ΘΕΩΡΗΜΑ 1

$$\phi^*(0) = \frac{1}{p(0)} \rho \sum_{x=0}^{\infty} \rho^x \sum_{y=1}^{\infty} w(x,y) p(x+y+1),$$

Και για $u \in \mathrm{N}^+$

$$\phi^*(u) = \upsilon \sum_{x=0}^{u} \phi^*(u-x) \sum_{y=0}^{\infty} \rho^y p(x+y+1) + \upsilon \rho^{-u} \sum_{x=u}^{\infty} \rho^x \sum_{y=1}^{\infty} w(x,y) p(x+y+1).$$

Εξ ορισμού, το q στην (1.3) είναι αυστηρά κυρτό. Εξ ου εξίσωση (1.3) έχει το πολύ δύο λύσεις. Επιπλέον, $\lim_{s \to 0+} q(s) = +\infty$ και $q(1) = 1 < \frac{1}{u}$, υποδηλώνοντας ότι για ένα σταθερό $\upsilon \in (0,1), q(s) = \frac{\hat{p}(s)}{s} = \frac{1}{\upsilon}$ έχει μια μοναδική λύση μεταξύ 0 και 1; Ας πούμε s = ρ.

Εάν το X είναι επαρκώς κανονικό, τότε η εξίσωση (1.3) έχει επίσης μια λύση μεγαλύτερη από 1, ας πούμε s = R: Όταν υ= 1, αυτό το R είναι ο κλασικός συντελεστής προσαρμογής για το διακριτό μοντέλο.

Τώρα, εδώ η λύση ρ της (1.3) είναι συνάρτηση του συντελεστή προεξόφλησης υ. Την ονομάζουμε ρ(υ) και εξετάζουμε τις παρακάτω ιδιότητες.

Λήμμα 1.1 Εάν $\rho(\upsilon)$ ∈(0, 1) είναι η λύση της $q(s) = \frac{\hat{p}(s)}{s} = \frac{1}{\upsilon}$, για $\upsilon \in$(0, 1), τότε

a) 0 < $\rho(\upsilon)$ < υ,

b) $\lim_{\upsilon \to 0} \rho(\upsilon) = 0$ *and* $\lim_{\upsilon \to 1} \rho(\upsilon) = 1$,

c) Τα παράγωγα της ρ από οποιαδήποτε σειρά υπάρχουν, ειδικά

$$\rho'(\upsilon) = \frac{\hat{p}(\rho)}{1-\upsilon\,\hat{p}(\rho)}, \quad \rho''(\upsilon) = \frac{\upsilon\,\hat{p}''(\rho)[\rho'(\upsilon)]^2 + 2\,\hat{p}'(\rho)\rho'(\upsilon)}{1-\upsilon\,\hat{p}'(\rho)},$$

όπου $\lim_{\upsilon\to 0}\rho'(\upsilon) = p(0)$, $\lim_{\upsilon\to 1}\rho'(\upsilon) = \frac{1}{1-\mu_1}$, $\lim_{\upsilon\to 0}\rho''(\upsilon) = 2p(1)p(0)$

και $\lim_{\upsilon\to 1}\rho''(\upsilon) = \frac{\mu_2 + \mu_1(1-2\mu_1)}{1-\mu_1}$.

Περαιτέρω συζήτηση των ιδιοτήτων του ρ και του R, κάτω από μηδενικούς και αρνητικούς συντελεστές φόρτωσης, μπορεί να βρεθεί στο Cheng et al. (2000). Για λόγους απλοποίησης, έχουμε εκφράσει σε όλη την μελέτη την $\rho(\upsilon)$ με ρ όταν $\upsilon\in(0, 1)$ είναι σταθερό.

1.2 Ανάλυση της περίπτωσης u = 0

Εφόσον $f_3(x,y,t\,|\,0)$ είναι η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της $U(T-1),|U(T)|$ και T, τότε

$$\begin{aligned}\phi(0) &= E[\upsilon^{T}\omega(U(T-1),|U(T)|)I(T<\infty)|U(0)=0]\\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\upsilon^{t}\omega(x,y)f_3(x,y,t\,|\,0)\\ &= \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\omega(x,y)\sum_{t=1}^{\infty}\upsilon^{t}f_3(x,y,t\,|\,0) = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\omega(x,y)f_2(x,y\,|0)\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας με το Θεώρημα 1.1, βρίσκουμε ότι

$f_2(x,y\,|0) = \upsilon\rho^{x}p(x+y+1)$, το οποίο υποδηλώνει ότι

$g(y\,|\,0) = \sum_{x=0}^{\infty} f_2(x,y\,|\,0) = \sum_{x=0}^{\infty}\upsilon\rho^{x}p(x+y+1)$ και

$f(x\,|\,0) = \sum_{y=0}^{\infty} f_2(x,y\,|\,0) = \upsilon\rho^{x}\sum_{y=x+1}^{\infty}p(y)$.

Τώρα

$$E[\upsilon^T I(T<\infty)\,\big|\, U(0)=0] = \sum_{y=0}^{\infty} g(y \,\big|\, 0) = \upsilon\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\rho^x p(x+y+1)$$

$$= \upsilon\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=x+1}^{\infty}\rho^x p(y) = \upsilon\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\rho^x p(y) = \upsilon\sum_{y=1}^{\infty} p(y)\frac{1-\rho^y}{1-\rho}$$

$$= \frac{\upsilon[1-\hat{p}(\rho)]}{1-\rho} = \frac{\upsilon-\rho}{1-\rho} = 1-\frac{1-\upsilon}{1-\rho}, \qquad (1.10)$$

Και επομένως από το Λήμμα 1-(c) παράγουμε το γνωστό αποτέλεσμα (Gerber, 1988):

$$\Psi(0) = P[T<\infty \,|\, U(0)=0]$$

$$= \lim_{\upsilon\to 1} E[\upsilon^T I(T<\infty)\,|\,(0)=0] = \lim_{\upsilon\to 1}\frac{1-\rho'(\upsilon)}{-\rho'(\upsilon)} = \mu_1 \qquad (1.11)$$

Από την άλλη πλευρά, $E[\upsilon^T I(T<\infty)\,\big|\, U(0)=0] = \sum_{n=1}^{\infty}\upsilon^n P[T=n \,|\, U(0)=0]$

Και επομένως

$$\mathrm{P}\big[\mathrm{T}=n \,|\, U(0)=0\big] = \frac{\left.\dfrac{d^n}{du^n}\left(\dfrac{\upsilon-1}{1-\rho}\right)\right|_{\upsilon=0}}{n!}$$

Μετά από κάποιες απλουστεύσεις, έχουμε

$P[T=1 \,|\, U(0)=0] = 1-\rho'(0) = 1-p(0),$

$$P\big[T=2 \,|\, U(0)=0\big] = \frac{-\rho''(0)-2\rho'(0)^2+2\rho'(0)}{2} = p(0)-p(0)^2-p(0)p(1).$$

Γενικά, είναι δύσκολο να βρεθεί $P\big[T=n \,|\, U(0)=0\big]$σε κλειστή μορφή. Μόνο για ορισμένες ειδικές κατανομές του X μπορούν να βρεθούν ρητές εκφράσεις.

Παράδειγμα 1 (Τυχαίος περίπατος)

Εάν $P(X=0)=p$ και $P(X=2)=1-p=q,$ τότε $\hat{p}(\rho)=p+q\rho^2$ και $\rho = \dfrac{1-\sqrt{4q(1-q)\upsilon^2}}{2q\upsilon}$. Επομένως

$$E\big[\upsilon^T I(T<\infty)\,|\, U(0)=0\big] = 1+\frac{\upsilon-1}{1-\rho} = 1+\frac{(2q\upsilon-1)-\sqrt{1-4q(1-q)\upsilon^2}}{2}.$$

Τώρα, εφόσον

$$\sqrt{1-4q(1-q)\upsilon^2} = 1+\frac{1}{2}\left[-4q(1-q)\upsilon^2\right]+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}\left[-4q(1-q)\upsilon^2\right]^2+\ldots$$
$$+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}\left[-4q(1-q)\upsilon^2\right]^n+\ldots \qquad (1.12)$$

Όπως αναμένεται $P[T=1|U(0)=0]=q, P[T=2|U(0)=0]=q(1-q)$ και

$$P[T=2n-1|U(0)=0]=0, n=2,3,\ldots$$

$$P[T=2n|U(0)=0]=\frac{1x3x5x\ldots x(2N-3)}{2xn!}[2q(1-q)]^n.$$

Παράδειγμα 2 (Γεωμετρικές απαιτήσεις)

Εάν $X \sim geometric(\theta)$, π.χ. $P(X=k)=(1-\theta)\theta^{\kappa},)$ για $k\in \mathrm{N}$, τότε $\hat{p}(\rho)=\dfrac{1-\theta}{1-\rho\theta}$

και

$\rho=\dfrac{1-\sqrt{1-4\theta(1-\theta)\upsilon}}{2\theta}$. Επομένως

$$E\left[\upsilon^T \mathrm{I}(T<\infty)\middle| U(0)=0\right]=\frac{\upsilon-\rho}{1-\rho}=\frac{1}{2(1-\theta)}\left[1-\sqrt{1-4\theta(1-\theta)\upsilon}\right]$$

Ένα επιχείρημα παρόμοιο με την (1.12), για θ και υ παρά για q και υ^2, δίνει

$P[T=1|U(0)=0]=\theta,$

$P[T=n|U(0)=0]=\dfrac{1x3x5x\ldots x(2n-3)}{n!}2^n\theta^n(1-\theta)^{n-1}, \quad n=2,3,\ldots$

1.3 Ροπές και συνδιακυμάνσεις

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.1 λαμβάνουμε τις κοινού και οριακές ροπές των $U(T-1)$, $|U(T)|$ και T όταν $u=0$, ορίζοντας το $\omega(x,y)$. Για την απλοποίηση των υπολογισμών εισάγεται η κατανομή ισορροπίας. Θα διαδραματίσει κρίσιμο ρόλο σε όσα ακολουθούν.

1.3.1 Κατανομή ισορροπίας μιας διακριτής τυχαίας μεταβλητής

Υποθέτουμε ότι X είναι η μη αρνητική τυχαία μεταβλητή, η οποία λαμβάνει ακέραιες τιμές του τμήματος 2, με την συνάρτηση πιθανοτήτων της να εκφράζεται ως $p(x)$, τις $k-\varepsilon\varsigma$ ροπές μ_k και την συνάρτηση επιβίωσης $\overline{P}(x)=P(X>x)=\sum_{y=x+1}^{\infty}p(y), x\in \mathrm{N}$. Εξετάστε την κατανομή ισορροπίας του p, οριζόμενη ως

$$p_1(x):=\frac{\overline{P(x)}}{\mu_1}=\frac{\sum_{y=x+1}^{\infty}p(y)}{\mu_1}, x\in \mathrm{N}.$$

Τώρα ορίζουμε $\mu_{(n)}:=E\left[X^{(n)}\right]$ να είναι η n-ή παραγοντική ροπή της X, όπου εδώ $x^{(n)}=x(x-1)...(x-n+1)$ εκφράζει την n-ή παραγοντική δύναμη του x και $x^{(0)}=1$. Είναι γνωστό ότι το άθροισμα (βλ. Hamming, 1973, p. 182) $\sum_{k=x}^{y}k^{(n)}=\frac{(y+1)^{(n+1)}-x^{(n+1)}}{n+1}$, για $n\in \mathrm{N}^{+}, x, y\in \mathrm{N}$, και $x\le y$. Επομένως η n-ή παραγοντική ροπή $\mu_{1:(n)}$ του p_1 δίδεται από

$$\mu_{1:(n)}=\sum_{x=1}^{\infty}x^{(n)}p_1(x)=\frac{1}{\mu_1}\sum_{x=1}^{\infty}x^{(n)}\sum_{y=x+1}^{\infty}p(y)=\frac{1}{\mu_1}\sum_{y=2}^{\infty}p(y)\sum_{x=1}^{y-1}x^{(n)}, n\ge 1,$$

$$=\frac{1}{\mu_1}\sum_{y=2}^{\infty}p(y)\frac{y^{n+1}}{n+1}=\frac{\mu_{(n+1)}}{\mu_1(n+1)}=\frac{\mu_{(n+1)}}{\mu_{(1)}(n+1)}, \gamma\iota\alpha\ \mu_1=\mu_{(1)}. \qquad (1.13)$$

Ομοίως, η γεννήτρια συνάρτησης πιθανότητας της κατανομής ισορροπίας p_1 δίδεται από

$$\hat{p}_1(s)=\sum_{x=0}^{\infty}s^{x}p_1(x)=\frac{1-\hat{p}(s)}{\mu_1(1-s)}, -1\le s\le 1,$$

με $\hat{p}_1(1)=1$, και η συνάρτηση επιβίωσης είναι

$$\overline{P_1}(x)=\sum_{y=x+1}^{\infty}p_1(y)=\frac{1}{\mu_1}\sum_{y=x+1}^{\infty}\sum_{k=y+1}^{\infty}p(k), \qquad x\in \mathrm{N},$$

$$=\frac{1}{\mu_1}\sum_{k=x+2}^{\infty}p(k)[k-(x+1)]=\frac{1}{\mu_1}\sum_{k=x+1}^{\infty}p(k)[k-(x+1)]. \qquad (1.14)$$

Τώρα ορίζουμε την κατανομή ισορροπίας του p_1, ή ισοδύναμα, την κατανομή ισορροπίας δεύτερης τάξης του p:

$$p_2(x) = \frac{\overline{P}_1(x)}{\mu_{1:1}} = \frac{1}{\mu_{1:1}\mu_1} \sum_{y=x+1}^{\infty} [y - (x+1)] p(y), \quad x \in \mathrm{N},$$

όπου $\mu_{1:1}$ είναι η ροπή πρώτης τάξης του p_1. Οι παραγοντικές ροπές του p_2 λαμβάνονται όπως στην (1.13) και είναι

$$\mu_{2:(n)} = \frac{\mu_{1:(n+1)}}{\mu_{1:1}(n+1)} = \frac{\mu_{1:(n+1)}}{\mu_{1:(1)}(n+1)}.$$

Στη συνέχεια, η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων του $p_2(x)$ δίδεται από

$$\hat{p}_2(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x p_2(x) = \frac{1 - \hat{p}_1(s)}{\mu_{1:1}(1-s)}, \quad -1 \le s \le 1,$$

με $\hat{p}_2(1) = 1$, και την αντίστοιχη συνάρτηση επιβίωσης:

$$\begin{aligned}
\overline{P}_2(x) &= \sum_{k=x+1}^{\infty} p_2(k) = \frac{1}{\mu_{1:1}\mu_1} \sum_{k=x+1}^{\infty} \sum_{y=k+1}^{\infty} [y - (k+1)] p(y) \\
&= \frac{1}{\mu_{1:1}\mu_1} \sum_{y=x+2}^{\infty} p(y) \sum_{k=x+1}^{y-1} [y - (k+1)] \\
&= \frac{1}{\mu_{1:1}\mu_1} \sum_{y=x+2}^{\infty} p(y) \{1 + \ldots + [y - (x+1) - 1]\} \\
&= \frac{1}{\mu_{1:1}\mu_1} \sum_{y=x+2}^{\infty} p(y) \{\frac{1}{2}[y - (x+1)]^2 + \frac{1}{2}[y - (x+1)]\} \\
&= \frac{1}{2\mu_{1:1}\mu_1} \sum_{y=x+1}^{\infty} p(y) [y - (x+1)]^2 - \frac{1}{2} p_2(x).
\end{aligned}$$

Ορίζουμε παρομοίως τις επόμενες κατανομές ισορροπίας του p, από τις τρίτες τάξεις $p_3(x) = \frac{1}{\mu_{2:1}} \overline{P}_2(x)$ μέχρι την n-ή τάξη $p_n(x) = \frac{1}{\mu_{n-1:1}} \overline{P}_{n-1}(x)$ για $x \in$ N, όπου το επόμενο λήμμα δίνει μια έκφραση για $\overline{P}_n(x)$.

Λήμμα 1.2 Η συνάρτηση επιβίωσης $\overline{P}_n(x)$, της κατανομής ισορροπίας n-ής τάξης p_n μπορεί να εκφραστεί ως

$$\overline{P}_n(x) = \frac{1}{n!\prod_{l=0}^{n-1}\mu_{l:1}} \sum_{y=x+1}^{\infty} p(y)[y-(x+1)]^{(n)}, \qquad (1.15)$$

$$= \frac{1}{\mu_{(n)}} \sum_{y=x+1}^{\infty} p(y)[y-(x+1)]^{(n)}, \qquad (1.16)$$

όπου $\mu_{l:1}$ είναι ο μέσος όρος της κατανομής ισορροπίας της l-ής τάξης και $\mu_{0:1} = \mu_1$ είναι ο μέσος όρος του p (ή η κατανομή ισορροπίας της 0-ής τάξης).

Απόδειξη: Η (1.14) δείχνει ότι η (1.15) ισχύει για $n=1$. Με επαγωγή, υποθέτουμε ότι η (1.15) ισχύει για οποιοδήποτε n, τότε

$$\begin{aligned}
\overline{P}_{n+1}(x) &= \sum_{t=x+1}^{\infty} p_{n+1}(t) = \sum_{t=x+1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{n:1}} \overline{P}_n(t) \\
&= \frac{1}{n!\prod_{l=0}^{n}\mu_{l:1}} \sum_{y=x+2}^{\infty} p(y) \sum_{t=x+1}^{y-1} [y-(t+1)]^{(n)} \\
&= \frac{1}{n!\prod_{l=0}^{n}\mu_{l:1}} \sum_{y=x+2}^{\infty} p(y) \sum_{k=0}^{y-(x+2)} k^{(n)} \\
&= \frac{1}{(n+1)!\prod_{l=0}^{n}\mu_{l:1}} \sum_{y=x+1}^{\infty} p(y)[y-(x+1)]^{(n+1)},
\end{aligned}$$

επιβεβαιώνει την (1.15) επίσης για $n+1$. Επιπλέον, δεδομένου ότι $\overline{P}_n(-1)=1$, συμπεραίνουμε από την (1.15) ότι

$$n!\prod_{l=0}^{n-1}\mu_{l:1} = \mu_{(n)}, \ n \in \mathrm{N}^+, \qquad (1.17)$$

Και επομένως η $\overline{P}_n(x)$ δίδεται επίσης από την (1.16).

Για να ληφθούν πρόσθετες ιδιότητες των κατανομών ισορροπίας ανώτερης τάξης του p, χρειαζόμαστε την ακόλουθη ταυτότητα.

Ταυτότητα 1.1 Για $n \in \mathrm{N}$ και $y \in \mathrm{N}^+$,

$$\sum_{x=0}^{y-1} x^{(n)} s^x = n! \frac{s^n(1-s^y)}{(1-s)^{n+1}} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{k!} \frac{s^{n-k}}{(1-s)^{n-k+1}} y^{(k)} s^y. \qquad (1.18)$$

Απόδειξη: Έστω $I_n = \sum_{x=0}^{y-1} x^{(n)} s^x$. Σαφώς $I_n = n\dfrac{s}{1-s} I_{n-1} - \dfrac{1}{1-s} y^{(n)} s^y$ και

$I_0 = \dfrac{1-s^y}{1-s}$.

Το αποτέλεσμα ακολουθεί με μαθηματική επαγωγή.

Τώρα το επόμενο λήμμα δίνει μια έκφραση για $\hat{p}_{n+1}(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x p_{n+1}(x)$, την γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων για p_{n+1}.

Λήμμα 1.3 Για $n \in N^+$ και $-1 \le s \le 1$

$$\hat{p}_{n+1}(s) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{\mu_{(n+1)}} \frac{1-\hat{p}(s)}{(1-s)^{n+1}} + \frac{(n+1)!}{\mu_{(n+1)}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \frac{\mu_{(k)}}{(1-s)^{n-k+1}}, \qquad (1.19)$$

με $\hat{p}_{n+1}(1) = 1$.

Απόδειξη: Εφόσον $p_{n+1}(x) = \dfrac{\overline{P}_n(x)}{\mu_{n:1}} = \dfrac{n+1}{\mu_{(n+1)}} \sum_{y=x+1}^{\infty} p(y)[y-(x+1)]^{(n)}$, από την (1.16) και την (1.17) έχουμε

$$\begin{aligned}
\hat{p}_{n+1}(s) &= \frac{n+1}{\mu_{(n+1)}} \sum_{x=0}^{\infty} s^x \sum_{y=x+1}^{\infty} p(y)[y-(x+1)]^{(n)} \\
&= \frac{n+1}{\mu_{(n+1)}} \sum_{y=1}^{\infty} p(y) \sum_{x=0}^{y-1} s^x [y-(x+1)]^{(n)} \\
&= \frac{m+1}{\mu_{(n+1)}} \sum_{y=1}^{\infty} p(y) s^{y-1} \sum_{x=0}^{y-1} s^{-x} x^{(n)} \\
&= \frac{n+1}{\mu_{(n+1)}} \sum_{y=1}^{\infty} p(y) s^{y-1} \left[(-1)^n n! \frac{1-s^y}{(1-s)^{n+1}} \left(\frac{1}{s}\right)^{y-1} \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-k} n!}{k!} \frac{y^{(k)}}{(1-s)^{n-k+1}} \left(\frac{1}{s}\right)^{y-1} \right],
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει για την (1.18), η οποία με την σειρά της δίδει την (1.19).

Λήμμα 1.4 Για m και $n \in N^+$ έχουμε ότι $\mu_{n:(m)} = \dfrac{n!\,m!}{(m+n)!} \dfrac{\mu_{(n+m)}}{\mu_{(n)}}$.

Απόδειξη: Με επαγωγή έχουμε $\mu_{n+1:(m)} = \dfrac{\mu_{n:(m+1)}}{(m+1)\mu_{n:1}}$.

1.3.2 Ροπές και συν διακυμάνσεις των $U(T-1), |U(T)|$ *και* υ^T

Από τα παραπάνω αποτελέσματα βλέπουμε ότι αν η συνάρτηση ποινής στο Θεώρημα 1.1 επιλεγεί να είναι $w(x,y) = x^{(m)}y^{(m)}$, για m, n $\in$ N, τότε

$$E\left[\upsilon^T (U(T-1))^{(m)} (|U(T)|)^n I(T<\infty) \middle| U(0)=0\right]$$

$$= \upsilon \sum_{x=0}^{\infty} \rho^x x^{(m)} \sum_{y=x+1}^{\infty} [y-(x+1)]^{(n)} p(y)$$

$$= n!\upsilon \prod_{i=0}^{n} \mu i : 1 \sum_{x=m}^{\infty} \rho^x x^{(m)} p_n + 1(x)$$

$$n!\upsilon\rho^m \prod_{i=0}^{n} \mu i : 1 \frac{d^m}{d\rho^m} \hat{p}_n + 1(\rho) = \frac{\mu_{(n+1)}}{n+1} \upsilon\rho^m \frac{d^m}{d\rho^m} \hat{p}_n + 1(\rho),$$

$$E\left[\upsilon^T |U(T)|^n I(T<\infty) \middle| U(0)=0\right] = \upsilon \sum_{x=0}^{\infty} \rho^x \sum_{y=x+1}^{\infty} [y-(x+1)]^{(n)} p(y)$$

$$= \upsilon \sum_{z=0}^{\infty} \rho^z p_{n+1}(x) n! \prod_{i=0}^{n} \mu i : 1 = \upsilon n! \prod_{i=0}^{n} \mu i : 1 \hat{p}_{n+1}(\rho) = \frac{\mu_{(n+1)}}{n+1} \upsilon \hat{p}_{n+1}(\rho)$$

$$E\left[\upsilon^T (U(T-1))^{(m)} I(T<\infty) \middle| U(0)=0\right] = \upsilon \sum_{x=0}^{\infty} \rho^x x^{(m)} \sum_{y=z+1}^{\infty} p(y)$$

$$= \upsilon\rho^m \sum_{z=m}^{\infty} \rho^{(x-m)} x^{(m)} \mu_1 p_1(x) = \upsilon\rho^m \mu_1 \frac{d^m}{d\rho^m} \hat{p}_1(\rho).$$

Εδώ δίνονται μόνο τα ακριβή αποτελέσματα στις απλούστερες περιπτώσεις, $w(x,y) = x^{(1)}$, $w(x,y) = y^{(1)}$ ή όταν $w(x,y) = x^{(1)}y^{(1)}$

1. Η αναμενόμενη προεξοφλημένη τιμή $|U(T)|$ λαμβάνεται χρησιμοποιώντας $w(x,y) = y^{(1)}$:

$$\mathrm{E}\left[\upsilon^{\mathrm{T}} |U(\mathrm{T})| I(\mathrm{T}<\infty) \middle| U(0)=0\right] = \upsilon \sum_{x=0}^{\infty} \rho^x \sum_{y=z+1}^{\infty} [y-(x+1)] p(y)$$

$$= \upsilon\mu_{1:1}\mu_1 \sum_{x=0}^{\infty} \rho^x p_2(x) = \frac{\mu_{(2)}}{2} \upsilon \hat{p}_2(\rho) = \upsilon \left[\frac{\mu_1(1-\rho) - 1 + \hat{p}(\rho)}{(1-\rho)^2} \right]$$

Εφόσον από την (1.11), εδώ $\Psi(0) = P[T<\infty | U(0)=0] = \mu_1$, τότε

$$E\left[\upsilon^T |U(T)| \middle| T<\infty, U(0)=0\right] = \frac{\mu_{(2)}}{2\mu_{(1)}} \upsilon \hat{p}_2(\rho) = \upsilon \left[\frac{\mu_1(1-\rho) - 1 + \hat{p}(\rho)}{\mu_1(1-\rho)^2} \right],$$

και συγκεκριμένα $E\left[\left|U(T)\right| \mid T<\infty, U(0)=0\right]=\mu_{1:1}\,\hat{p}_2(\rho)=\mu_{1:1}=\dfrac{\mu_{(2)}}{2\mu_1}$,

2. Εν αντιθέσει, w(x, y) = $x^{(1)}$ δίνει την αναμενόμενη προεξοφλημένη τιμή της $U(T-1)$:

$$E\left[\upsilon^{\mathrm{T}}U(\mathrm{T}-1)I(\mathrm{T}<\infty)\middle|U(0)=0\right]=\upsilon\sum_{x=0}^{\infty}x\rho^{x}\sum_{y=z+1}^{\infty}p(y)$$

$$=\upsilon\mu_1\sum_{Z=0}^{\infty}x\rho^{z}p_1(x)=\upsilon\mu_1\rho\,\hat{p}_1'(\rho)=\upsilon\rho\left[\frac{1-\hat{p}(\rho)-\hat{p}'(\rho)(1-\rho)}{(1-\rho)^2}\right]$$

Ομοίως το $\Psi(0)=\mu_1$ συνεπάγεται ότι

$$\mathrm{E}\left[\upsilon^{\mathrm{T}}U(\mathrm{T}-1)\middle|\,\mathrm{T}<\infty, U(0)=0\right]=\upsilon\rho\,\hat{p}_1'(\rho)=\upsilon\rho\left[\frac{1-\hat{p}(\rho)-\hat{p}'(\rho)(1-\rho)}{\mu_1(1-\rho)^2}\right],$$

και πάλι βρίσκουμε αυτό που αναμένουμε:

$$E\left[U(T-1)\middle|\,T<\infty, U(0)=0\right]=\hat{p}_1'(1)=\mu_{1:1}=\frac{\mu_{(2)}}{2\mu_1}.$$

Τέλος, συμβολίζουμε με $Z=U(\mathrm{T}-1)+\left|U(\mathrm{T})\right|+1$ το ποσό της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι

$$E\left[Z\,\middle|\,T<\infty, U(0)=0\right]=1+E\left[U(T-1)\middle|\,T<\infty, U(0)=0\right]$$

$$+E\left[\left|U(T)\right|\middle|\,T<\infty, U(0)=0\right]=1+\frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1}=\frac{\mu_2}{\mu_1}\geq\mu_1,$$

δείχνοντας ότι το αναμενόμενο ποσό της απαίτησης που προκαλεί χρεωκοπία είναι μεγαλύτερο από το να αναμένουμε μια μόνο απαίτηση Χ:

3. Η αναμενόμενη προ εξοφλημένη τιμή $U(T$-1) και $\left|U(\mathrm{T})\right|$, από κοινού, λαμβάνεται χρησιμοποιώντας $w(x,y)=x^{(1)}y^{(1)}$:

$$E\left[\upsilon^{T}U(T-1)\left|U(T)\right|I(T<\infty)\middle|\,U(0)=0\right]=\upsilon\mu_1\mu_{1:1}\sum_{Z=0}^{\infty}x\rho^{x}p_2(x)$$

$$=\upsilon\mu_1\mu_{1:1}\rho\,\hat{p}_2'(\rho)=\frac{\mu_{(2)}}{2}\upsilon\rho\,\hat{p}_2'(\rho),$$

το οποίο συνεπάγεται

$$E\left[\upsilon^T U(T-1)\middle| U(T)\middle| \, T<\infty, U(0)=0\right]=\upsilon\mu_{1:1}\rho\,\hat{p}_2'(\rho)=\frac{\mu_{(2)}}{2\mu_1}u\rho\,\hat{p}_2'(\rho),$$

Και συγκεκριμένα $E\left[U(T-1)\middle|U(T)\middle|\,T<\infty, U(0)=0\right]=\mu_{1:1}\,\hat{p}_2'(1)=\mu_{1:1}\mu_{2:1}=\frac{\mu_{(3)}}{3!\,\mu_1}.$

Τέλος, από τα παραπάνω αποτελέσματα προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Cov\left[U(T-1),\middle| U(T)\middle|\,T<\infty, U(0)=0\right] &= \mu_{1:1}\mu_{2:1}-(\mu_{1:1})^2 \\ &= \frac{\mu_{(3)}}{6\mu_1}-\left(\frac{\mu_{(2)}}{2\mu_1}\right)^2. \end{aligned}$$

Παρατηρήσεις:

1. Σαφώς εάν $\mu_{2:1}$ | (\) $\mu_{1:1}$, τότε τα $U(T-1)$ και $|U(T)|$ συσχετίζονται θετικά (ή αρνητικά), ενώ εάν $\mu_{2:1} = \mu_{1:1}$, τότε τα $U(T-1)$ και $|U(T)|$ δεν συσχετίζονται. Μία επαρκής προϋπόθεση για να ισχύει $\mu_{2:1} > (<,=)\,\mu_{1:1}$ είναι ότι το p_1 είναι μία DFR κατανομή (αντίστοιχα IFR, σταθερό ποσοστό αποτυχίας), ή ισοδύναμα, ότι το p είναι μία IMRL κατανομή (αντίστοιχα DMRL, σταθερή μέση υπολειπόμενη διάρκεια ζωής).
2. Εάν X~p είναι γεωμετρικά κατανεμημένη, τότε η κατανομή ισορροπίας οποιασδήποτε τάξης $p_n = p$, π.χ. η ίδια κατανομή με εκείνη του X και επομένως τα $|U(T)|$ και $U(T-1)$ δεν συσχετίζονται. Επιπλέον, λόγω της ιδιότητας έλλειψης μνήμης, το $|U(T)|$ είναι ανεξάρτητο από το $U(T-1)$ και το T.

1.3.3 Ροπές της, $U(T-1)$, $|U(T)|$ και χρόνος χρεωκοπίας T

Για να ληφθεί ο μέσος όρος των $U(T-1)$, $|U(T)|$ και T, από κοινού, χρειαζόμαστε τα εξής:

Λήμμα 1.5

$$\begin{aligned} &E\left[Tw\left(U(T-1),|U(T)|\right)I(T<\infty)\middle| U(0)=0\right] \\ &=\sum_{z=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}w(x,y)p(x+y+1)+\frac{1}{1-\mu_1}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}xw(x,y)p(x+y+1). \end{aligned}$$

Απόδειξη: Λαμβάνουμε υποψιν την

$\phi(0) = E\left[\upsilon^T w(U(T-1),|U(T)|)I(T<\infty)|U(0)=0\right]$ στην (2) του Θεωρήματος 1.

Λαμβάνοντας παράγωγα σε σχέση με το υ και στις δύο πλευρές και θέτοντας υ = 1 (το οποίο υποδηλώνει ρ = 1), ολοκληρώνεται η απόδειξη.

Τώρα χρησιμοποιώντας $w(x,y) = x^{(m)}y^{(n)}$, στο Λήμμα 5, μας δίνει

$$
\begin{aligned}
&E\left[T(U(T-1))^{(m)}|U(T)|^{(n)}I(T<\infty)|U(0)=0\right] \\
&= \sum_{x=0}^{\infty} x^{(m)} \sum_{y=x+1}^{\infty}\left[y-(x+1)\right]^{(n)} p(y) + \sum_{x=0}^{\infty}\frac{xx^{(m)}}{1-\mu_1}\sum_{y=x+1}^{\infty}\left[y-(x+1)\right]^{(n)} p(y) \\
&= n!\prod_{l=0}^{n}\mu_{l:1}\left[\sum_{x=0}^{\infty}x^{(m)}p_{n+1}(x) + \sum_{x=0}^{\infty}\frac{x^{(m+1)}p_{n+1}(x)}{1-\mu_1} + \sum_{x=0}^{\infty}\frac{mx^{(m)}p_{n+1}(x)}{1-\mu_1}\right] \\
&= \frac{\mu_{(n+1)}}{n+1}\left[\mu_{n+1:(m)} + \frac{\mu_{n+1:(m+1)}}{(1-\mu_1)} + \frac{m}{(1-\mu_1)}\mu_{n+1:(m)}\right] \\
&= \frac{m!n!}{(m+n+1)!}\left(1+\frac{m}{1-\mu_1}\right)\mu_{(n+m+1)} + \frac{n!(m+1)!}{(1-\mu_1)(n+m+2)!}\mu_{(n+m+2).}
\end{aligned}
$$

Εφόσον $E\left[I(T<\infty)|U(0)=0\right] = P\left[T<\infty|U(0)=0\right] = \Psi(0) = \mu_1$, εδώ οι ακόλουθες ειδικές περιπτώσεις είναι άμεσες:

$$
\begin{aligned}
&E\left[TU(T-1)|U(T)||T<\infty, U(0)=0\right] \\
&= \frac{E\left[TU(T-1)|U(T)|I(T<\infty)|U(0)=0\right]}{E\left[I(T<\infty)|U(0)=0\right]} \\
&= \mu_{1:1}\mu_{2:1} + \frac{\mu_{1:1}\left[\mu_{2:(2)}+\mu_{2:(1)}\right]}{1-\mu_1} = \frac{\mu_{(3)}}{6\mu_1} + \frac{\mu_{(4)}+2\mu_{(3)}}{12\mu_1(1-\mu_1)}
\end{aligned}
$$

Ομοίως

$$
E\left[TU(T-1)|\,T<\infty, U(0)=0\right] = \frac{E\left[T|U(T)|I(T<\infty)|U(0)=0\right]}{E\left[I(T<\infty)|U(0)=0\right]}
$$

$$
= \mu_{1:1} + \frac{\mu_{1:1}\mu_{2:1}}{1-\mu_1} = \frac{\mu_{(2)}}{2\mu_1} + \frac{\mu_{(3)}}{6\mu_1(1-\mu_1)},
$$

ενώ

$$
E\left[TU(T-1)|\,T<\infty, U(0)=0\right] = \frac{E\left[TU(T-1)I(T<\infty)|U(0)=0\right]}{E\left[I(T<\infty)|U(0)=0\right]}
$$

$$
= \mu_{1:1} + \frac{\mu_{1:(2)}+\mu_{1:(1)}}{1-\mu_1} = \mu_{1:1} + \frac{\mu_{1:2}}{1-\mu_1} = \frac{\mu_{(2)}}{2\mu_1} + \frac{2\mu_{(3)}+3\mu_{(2)}}{6\mu_1(1-\mu_1)}.
$$

Τελικά

$$E\left[T\middle|T<\infty,U(0)0\right]=\frac{E\left[TI(T<\infty)\middle|U(0)=0\right]}{E\left[I(T<\infty)\middle|U(0)=0\right]}=1+\frac{\mu_{1:1}}{1-\mu_1}$$
$$=1+\frac{\mu_{(2)}}{2\mu_1(1-\mu_1)}.$$

Με τις παραπάνω ροπές, οι συνδιακυμάνσεις μεταξύ $U(T-1)$, $|U(T)|$ και T μπορούν να ληφθούν ως εξής:

$$Cov\left[T,|U(T)|\middle|T<\infty,U(0)=0\right]=\mu_{1:1}+\frac{\mu_{1:1}\mu_{2:1}}{1-\mu_1}-\left(1+\frac{\mu_{1:1}}{1-\mu_1}\right)\mu_{1:1}$$
$$=\frac{\mu_{1:1}(\mu_{2:1}-\mu_{1:1})}{1-\mu_1}=\frac{1}{1-\mu_1}Cov\left[U(T-1),|U(T)|\middle|T<\infty,U(0)=0\right],$$

και

$$Cov\left[T,U(T-1)\middle|T<\infty,U(0)=0\right]=\mu_{1:1}+\frac{\mu_{1:2}}{1-\mu_1}-\left(1+\frac{\mu_{1:1}}{1-\mu_1}\right)\mu_{1:1}$$
$$=\frac{\mu_{1:2}-\mu_{1:1}^2}{1-\mu_1}=\frac{1}{1-\mu_1}\left[\frac{2\mu_{(3)}+3\mu_{(2)}}{6\mu_1}-\left(\frac{\mu_{(2)}}{2\mu_1}\right)^2\right]\geq 0.$$

Παρατηρήσεις:

1. Τα T και $U(T-1)$ συσχετίζονται θετικά καθώς όσο πιο αργά προκύπτει η χρεοκοπία, τόσο μεγαλώνει το πλεόνασμα.
2. Η συνδιακύμανση των T και $|U(T)|$ είναι ανάλογη με εκείνη των $U(T-1)$ και $|U(T)|$.
3. Τα T και $|U(T)|$ συσχετίζονται θετικά ή αρνητικά, ανάλογα με το αν $\mu_{2:1}>\mu_{1:1}$ ή $\mu_{2:1}<\mu_{1:1}$. Το ίδιο ισχύει για τα $U(T-1)$ και $|U(T)|$.

1.4 Η περίπτωση $u>0$

Τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας επεκτείνονται εδώ στην περίπτωση $u>0$. Θεωρούμε $\phi(0)$ στην (1.2) του Θεωρήματος 1.1 και ξαναγράφουμε την $\phi(u)$ ως

$$\phi(u)=\sum_{z=0}^{u-1}\phi(u-z)g(z\mid 0)+A(u), \quad for\, u \in \mathrm{N}^{+} \tag{1.20}$$

$$=\frac{1}{1+\beta}\sum_{z=0}^{u-1}\phi(u-z)l(z)+\frac{1}{1+\beta}M(u), \tag{1.21}$$

όπου $M(u)=(1+\beta)A(u)$ και

$$A(u)=\upsilon\rho^{-u}\sum_{z=u}^{\infty}\rho^{z}\sum_{y=0}^{\infty}w(z,y)p(z+y+1), \quad for\ u \in \mathrm{N} \tag{1.22}$$

$$=\phi(0)-\upsilon\rho^{-u}\sum_{z=0}^{u-1}\rho^{z}\sum_{y=0}^{\infty} w(z,y)p(z+y+1), \qquad \mu\varepsilon\ A(0)=\phi(0).$$

Εδώ το β ορίζεται ως $\frac{1}{1+\beta}:=\sum_{z=0}^{\infty}g(z\mid 0)=\frac{\upsilon-\rho}{1-\rho}$, από την (1.10). Σημειώστε ότι τότε η $l(z)=(1+\beta)g(z\mid 0)$είναι μία σωστή συνάρτηση πιθανοτήτων στο N.

Αυτός είναι ένας αναδρομικός τύπος για την $\phi(u)$, που μπορεί να υπολογιστεί ξεκινώντας από την $\phi(0)$, για οποιαδήποτε συνάρτηση ποινής $w(x,y)$.

Τώρα ορίζουμε την σύνθετη γεωμετρική συνάρτηση πιθανοτήτων $k(u)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta}{1+\beta}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{n}l^{*n}(u), for\ \ u \in \mathrm{N}$. Στην συνέχεια, μπορεί να δοθεί ο ακόλουθος ρητός τύπος της $\phi(u)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.2

$$\phi(u)=\frac{1}{\beta}\sum_{z=0}^{u-1}M(u-z)k(z), \quad u \in \mathrm{N}^{+}. \tag{1.23}$$

Απόδειξη: θεωρούμε την (1.21) και από τις

$\hat{\phi}(s)=\sum_{u=0}^{\infty}s^u\phi(u), \hat{l}(s)=\sum_{z=0}^{\infty}s^z l(z)$ και $\hat{M}(s)=\sum_{u=0}^{\infty}s^u M(u)$ ως μετασχηματισμούς των ϕ, l και M, αντίστοιχα. Τότε ο μετασχηματισμός της (1.21) δίδεται από την

$$\hat{\phi}(s)=\frac{\hat{M}(s)-\phi(0)\hat{l}(s)}{1+\beta-\hat{l}(s)}.$$

Η $\hat{k}(s)=\sum_{u=0}^{\infty}s^u k(u)=\frac{\beta}{1+\beta-\hat{l}(s)}$ συνεπάγεται ότι $\hat{\phi}(s)=\frac{\hat{M}(s)-\phi(0)\hat{l}(s)}{\beta}\frac{\beta}{1+\beta-\hat{l}(s)}=\frac{\hat{M}(s)-\phi(0)\hat{l}(s)}{\beta}\hat{k}(s).$ Αντιστρέφοντας τα αποτελέσματα της (1.23).

Εφόσον το k είναι μια σύνθετη γεωμετρική συνάρτηση πιθανοτήτων, μπορεί να ληφθεί αναδρομικά από τον τύπο του Panjer, και η $\phi(u)$ υπολογίζεται με την (1.23) στο Θεώρημα 1.2. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση $u=1$, το Λήμμα 1 συνεπάγεται ότι $\rho=1,\ \beta=(1-\mu_1)/\mu_1,\ g(z\,|\,0)=p_1(z)$ και $\phi(u)=E[\omega(U(T-1),|U(T)|)I(T<\infty)|U(0)=u|]$, αποδίδοντας το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 1.1 ΓΙα $u\in N^+$

$$E[\omega(U(T-1),|U(T)|)I(T<\infty|U(0)=u)]=\frac{\mu_1}{1-\mu_1}\sum_{z=0}^{u-1}M(u-z)k(z),$$

όπου $M(u)=\frac{1}{\mu_1}\sum_{x=u}^{\infty}\sum_{y=0}^{\infty}\omega(x,y)p(x+y+1)$ και $k(z)=(1-\mu_1)\sum_{n=0}^{\infty}\mu_1^n p_1^{*n}(z).$

Ως πρώτη εφαρμογή του θεωρήματος 1.1, αντλούμε την από κοινού συνάρτηση πιθανοτήτων $f_2(x,y\,|\,u)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.3 Για $u,\ x\in N^+$ και $y\in N$, έχουμε

$$f_2(x,y\,|\,u)=\sum_{z=0}^{u-1}f_2(x,y|u-z)g(z\,|\,0)+\rho^{-u}f_2(x,y\,|\,0)I(x\geq u). \qquad (1.24)$$

Απόδειξη: Εξετάζουμε την (1.20) και την (1.22). Για , $x \in \mathrm{N}^+$ και $y \in \mathrm{N}$, σταθερά, θέτουμε

$$\omega(z,s)=\begin{cases}1 & \alpha\nu\ z=x, s=y\\ 0 & \alpha\lambda\lambda\acute{\iota}\omega\varsigma\end{cases}$$

τότε, στη συγκεκριμένη περίπτωση, η $\phi(u)$ γίνεται

$$f_2(x,y\,|\,u)=\begin{cases}\sum_{z=0}^{u-1} f_2(x,y\,|\,u-z)g(z\,|\,0) & \alpha\nu\, x<u\\ \sum_{z=0}^{u-1} f_2(x,y\,|\,u-z)g(z\,|\,0)+\upsilon\rho^{x-u}p(x+y+1) & \alpha\nu\, x\geq u\end{cases}$$

$$=\sum_{z=0}^{u-1} f_2(x,y\,|\,u-z)g(z\,|\,0)+\rho^{-u}f_2(x,y\,|\,0)I(x\geq u).$$

Αυτό το θεώρημα δίνει έναν αναδρομικό τύπο για την από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_2(x,y|u)$, ξεκινώντας στο $f_2(x,y\,|\,1)=\dfrac{f_2(x,y\,|\,0)I(x\geq 1)}{\rho[1-g(0|\,0)]}$.

Μόλις βρεθεί η $f_2(x,y\,|\,u)$, οι $f_2(x\,|\,u)$ και $g(y\,|\,u)$ ακολουθούν εύκολα. Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ανανέωσης, οι Cheng et al. (2000) δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα στην σύνθετη διωνυμική περίπτωση.

Μια εφαρμογή του Θεωρήματος 1.2 δίνει μια εναλλακτική έκφραση για την $f_2(x,y\,|\,u)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.4 Για $x \in \mathrm{N}$ και $y \in \mathrm{N}$

$$f_2(x,y\,|\,u)=\gamma(u)f_2(x,y\,|\,0),\qquad u\in \mathrm{N}^+, \tag{1.25}$$

όπου

$$\gamma(u)=\begin{cases}\dfrac{1}{\beta}\sum_{z=0}^{u-1}(1+\beta)\rho^{z-u}k(z) & if\ 1\leq u\leq x\\ \dfrac{1}{\beta}\sum_{z=u-x}^{u-1}(1+\beta)\rho^{z-u}k(z) & if\ u>x\end{cases} \tag{1.26}$$

Απόδειξη: Έστω $\gamma(u)=\sum_{z=0}^{u-1}\gamma(u-z)g(z\,|\,0)+\rho^{-u}I(x\geq u)$, για $y \in \mathrm{N}^+$. Από την (1.24) ακολουθεί ότι $f_2(x,y\,|\,u)=\gamma(u)f_2(x,y\,|\,0)$. Αφ' ετέρου, από το Θεώρημα 1.2 βλέπουμε ότι για την παραπάνω επιλογή συνάρτησης ποινής, η $\gamma(u)$ μπορεί επίσης να εκφραστεί ως $\gamma(u) = \frac{1}{\beta}\sum_{z=0}^{u-1}(1+\beta)\rho^{-(u-z)} I(x \geq u - z) k(z)$ και ακολουθεί η (1.26).

Σημείωση: Η (1.25) μπορεί να θεωρηθεί ως ένας γενικευμένος τύπος Dickson σε ένα διακριτό περιβάλλον. Και πάλι εάν $\upsilon = 1$ τότε $\rho = 1$, $l(z) = p_1(z)$ και $1+\beta = \frac{1}{\mu_1}$.

Επομένως,

$k(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\mu_1)\mu_1^n p_1^{*n}(z)$ και

$K(u-1) = \sum_{z=0}^{u-1} k(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(1-\mu_1)\mu_1^n P_1^{*n}(u-1) = 1 - \Psi(u).$

Ως εκ τούτου από το Θεώρημα 4 η $\gamma(u)$ γίνεται

$$\frac{f_2(x,y \mid u)}{f_2(x,y \mid 0)} = \begin{cases} \dfrac{K(u-1)}{1-\mu_1} = \dfrac{1-\Psi(u)}{1-\Psi(0)} & \alpha\nu \ 1 \leq u \leq x \\ \dfrac{[K(u-1) - K(u-x-1)]}{1-\mu_1} = \dfrac{\Psi(u-x) - \Psi(u)}{1-\Psi(0)} & \alpha\nu \ u > x \end{cases}.$$

Αυτό δίνει τον κλασικό τύπο του Dickson $f_2(x,y \mid u)$ στο διακριτό μοντέλο.

Ως δεύτερη εφαρμογή του Θεωρήματος 1.1, θεωρούμε μια σταθερά $w(x,y) = 1$ για να λάβουμε $\phi_T(u) = E\left[\upsilon^T I(T < \infty) \mid U(0) = u\right]$, η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων του χρόνου χρεωκοπίας T με αρχικό απόθεμα $y \in N^+$:

$$\phi_T(u) = \sum_{z=0}^{u-1} \phi_T(u-z) g(z \mid 0) + H(u), \qquad (1.27)$$

όπου $g(z \mid 0) = \sum_{x=0}^{\infty} \upsilon \rho^x p(x+z+1)$, όπως πριν, και η $H(u)$ είναι:

$$\begin{aligned} H(u) &= \upsilon\rho^{-u} \sum_{z=u}^{\infty} \rho^z \sum_{y=0}^{\infty} \rho(z+y+1) = \upsilon\mu_1\rho^{-u} \sum_{z=u}^{\infty} \rho^z p_1(z) \\ &= \upsilon\mu_1\rho^{-u}\left[\hat{p}_1(\rho) - \sum_{z=0}^{u-1} \rho^z p_1(z)\right] = \sum_{z=u}^{\infty} g(z \mid 0) = \phi_T(0) - \sum_{z=0}^{u-1} g(z \mid 0). \end{aligned}$$

Αυτός είναι ένας αναδρομικός τύπος για $\phi_T(u)$, ξεκινώντας από $\phi_T(1) = \frac{H(1)}{1-g(1 \mid 0)} \frac{\phi_T(0) - g(0 \mid 0)}{1-g(1 \mid 0)}$

Παρατήρηση: Εάν $\phi_T(u) = E\left[\upsilon^{T*} I(T^* < \infty) \middle| U(0) = u\right]$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων του τροποποιημένου χρόνου χρεωκοπίας T^*, που θεωρήσαμε στην πρώτη παρατήρηση, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\phi_{T^*}(u) = \sum_{z=0}^{u} \phi_{T^*}(u-z) g(z \mid 0) + \sum_{z=u+1}^{\infty} g(z \mid 0).$$

Τώρα ας εξετάσουμε ότι η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων μετασχηματίζει την $\hat{\phi}_T(s) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u \phi_T(u), \hat{g}(s) = \sum_{z=0}^{\infty} s^z g(z \mid 0)$και την $\hat{H}(s) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u H(u).$ Από την (27)

$$\hat{\phi}_T(s) = \phi_T(0) + \frac{\hat{H}(s) - H(0)}{1 - \hat{g}(s)}, \tag{1.28}$$

όπου $\phi_T(0) = H(0) = \dfrac{\upsilon - \rho}{1 - \rho}.$ Η απλοποίηση των όρων δίνει

$\hat{g}(s) = \upsilon \left[\dfrac{\hat{p}(\rho) - \hat{p}(s)}{\rho - s} \right]$, και

$$\hat{H}(s) - H(0) = \upsilon \mu_1 s \frac{\hat{p}_1(\rho) - \hat{p}_1(s)}{\rho - s} = \frac{\upsilon s}{\rho - s} \left[\frac{1 - \hat{p}(\rho)}{1 - \rho} - \frac{1 - \hat{p}(s)}{1 - s} \right].$$

Η αντικατάσταση αυτών των δύο εκφράσεων στην (1.28) τελικά δίνει

$$\hat{\phi}_T(s) = \phi_T(0) + \frac{s\left[\upsilon(1-\rho)\hat{p}(s) + \rho(1-s) + \upsilon(\rho - s)\right]}{(1-\rho)(1-s)\left[\upsilon \hat{p}(s) - s\right]} \tag{1.29}$$

Παρατηρήσεις:

1. Θυμηθείτε ότι η εξίσωση $q(s) = \dfrac{\hat{p}(s)}{s} = \dfrac{1}{\upsilon}$ έχει το πολύ δύο λύσεις, 0 < ρ < 1 και R > 1: Είναι εύκολα αντιληπτό ότι για αυτές τις τιμές $\hat{g}(\rho) = \upsilon \hat{p}(\rho)$ και $\hat{g}(R) = 1$.

2. Για ορισμένες κατανομές του X, η $\phi_T(u)$ μπορεί να ληφθεί με αντιστροφή $\hat{\phi}_T$.

Παράδειγμα 3 (Γεωμετρικές απαιτήσεις)

Εάν X~geometric(θ),όπως στο Παράδειγμα 2, τότε

$$\rho = \frac{1-\sqrt{1-4\vartheta(1-\theta)\upsilon}}{2\vartheta},\ R = \frac{1+\sqrt{1-4\vartheta(1-\vartheta)\upsilon}}{2\vartheta}, \phi_T(0) = \frac{1-\vartheta R}{1-\vartheta}, \hat{g}(s)$$
$$= \frac{\upsilon\vartheta}{(1-\rho\vartheta)}\frac{s\vartheta}{(1-s\vartheta)} = \frac{\upsilon s\vartheta}{R(1-s\vartheta)},$$
$$\hat{H}(s) - (0) = \frac{\upsilon\vartheta}{(1-\rho\vartheta)}\frac{s\vartheta}{1-s\vartheta} = \frac{\upsilon s\vartheta}{R(1-s\vartheta)},$$
$$\hat{\phi}_T(s) - \phi_T(0) = \frac{\hat{H}(s) - H(0)}{1-\hat{g}(s)} = \frac{\upsilon}{R}\frac{\frac{R^2\vartheta}{R-\upsilon(1-\vartheta)}\frac{s}{R}}{1-\frac{R^2\vartheta}{R-\upsilon(1-\vartheta)}\frac{s}{R}} = \frac{\upsilon}{R}\frac{\frac{s}{R}}{1-\frac{s}{R}} = \frac{\upsilon}{R}\sum_{\upsilon=1}^{\infty} s^{\upsilon}R^{-\upsilon}$$

και επομένως

$$\phi_T(u) = \frac{\upsilon}{R}R^{-u} = \upsilon R^{-(u+1)} = \left[\frac{1-\vartheta R}{1-\vartheta}\right]R^{-u} = \phi_T(0)R^{-u},\ u \in \mathrm{N}.$$

Η ειδική περίπτωση $\upsilon = \rho = 1$ επιφέρει $\phi_T(u) = \Psi(u) = \frac{\vartheta}{1-\vartheta}R^{-u} = \Psi(0)R^{-u}$,

που είναι ένα διακριτό ανάλογο του συνεχούς Poisson / εκθετικού μοντέλου. Σε αυτήν την περίπτωση ϕ_T μπορεί επίσης να προκύψει από το εναλλακτικό θεώρημα δειγματοληψίας martingale και την ιδιότητας έλλειψης μνήμης της γεωμετρικής κατανομής, όπως στους Cheng κ.ά. (2000).

Σε αυτή την απλούστερη περίπτωση, είναι δυνατόν να ληφθεί η κατανομή του χρόνου χρεοκοπίας

$P(T=n)|U(0) = u.$ από $\frac{1}{R} = \frac{1}{2(1-\vartheta)\upsilon}\left[1-\sqrt{1-4\vartheta(1-\vartheta)\upsilon}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\upsilon^n$, όπου

$b_0 = \vartheta$ και $b_n = \frac{1x3x.....2_n - 1}{(n+1)!}2^{n+1}\vartheta^{n+1}(1-\vartheta)^n$, τότε $\left(\frac{1}{R}\right)^{u+1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\upsilon^n$, όπου

$c_0 = b_0^{u+1}$ και $c_n = \frac{1}{nb_0}\sum_{k=1}^{n}\left[(u+2)k - n\right]c_n - k^b k.$ Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\phi_T(u) = \sum_{n=1}^{\infty}\upsilon^n P(T=n \mid U(0)=u) = \upsilon R^{-(u+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} c_{n-1}\upsilon^n.$$

Τελικά, η $P(T = n \mid U(0) = u) = c_{n-1}$ δίδεται από

$$c_{n=1} = \begin{cases} c_0 & \alpha\nu\ n = 1 \\ \dfrac{1}{(n-1)b_0}\sum_{k=1}^{n-1}[(u+2)k - n + 1]c_{n-1-k}b_k & \alpha\nu\ n \geq 2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \vartheta^{u+1} & \alpha\nu\ n = 1 \\ \dfrac{1}{\vartheta(n-1)}\sum_{k=1}^{n-1}[(u+2)k - n + 1]b_k P(T = n-k \mid U(0) = u) & \alpha\nu\ n \geq 2 \end{cases}$$

Για να ολοκληρωθεί αυτό το παράδειγμα, εξετάζουμε τις παραγοντικές ροπές του Τ, οι οποίες λαμβάνονται μέσω διαδοχικών παραγώγων του ϕ_T για $\upsilon = 1$. Για παράδειγμα

$$E[T \mid U(0) = u] = \frac{d}{d\upsilon}\upsilon R^{-(u+1)}\Bigg|_{\upsilon = 1} = R(1)^{-(u+1)}\left[1 + \frac{u+1}{R(1)}\frac{1-\vartheta}{\sqrt{1-4\vartheta(1-\vartheta)}}\right]$$

όπου $R(1) = \dfrac{1+\sqrt{1-4\vartheta(1-\vartheta)}}{2\vartheta}$. Ομοίως, η παραγοντική ροπή δεύτερης τάξης είναι:

$$E[T(T-1)I(T<\infty) \mid U(0) = u] = \frac{d^2}{d\upsilon^2}\upsilon R^{-(u+1)}\Bigg|_{\upsilon=1}$$

$$= R(1)^{-(u+1)}\left[\frac{2(u+1)(1-\vartheta)}{\sqrt{1-4\vartheta(1-\vartheta)}} + \frac{(u+1)(u+2)(1-\vartheta)^2}{R(1)[1-4\vartheta(1-\vartheta)]} + \frac{2(u+1)\vartheta(1-\vartheta)^2}{[1-4\vartheta(1-\vartheta)]^{\frac{3}{2}}}\right].$$

Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι σε γενικές γραμμές το $\phi_T(u)$ μπορεί να εκφραστεί ως σύνθετη γεωμετρική ουρά. Εφόσον $\phi_T(u) = \sum_{z=0}^{u-1}\phi_T(u-z)g(z|0) + \sum_{z=u}^{\infty}g(z \mid o)$, μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\phi_T(u) = \frac{1}{1+\beta}\sum_{z=0}^{u-1}\phi_T(u-z)l(z) + \frac{1}{1+\beta}\sum_{z=u}^{\infty}l(z), \qquad u \in \mathrm{N}, \tag{1.30}$$

όπου $\dfrac{1}{1+\beta} = \sum_{z=0}^{\infty}g(z \mid 0) = \phi_T(0) = \dfrac{\upsilon-\rho}{1-\rho}$ και $l(z) = \dfrac{g(z \mid 0)}{\sum_{z=0}^{\infty}g(z \mid 0)} = (1+\beta)g(z \mid 0)$

είναι μια σωστή συνάρτηση πιθανότητας, ενώ η $\overline{L}(u) = \sum_{z=u+1}^{\infty}l(z)$ είναι η πιθανότητα ουράς του l.

Το Θεώρημα 1.5 $\phi_T(u)$ μπορεί να εκφραστεί ως σύνθετο γεωμετρικό άθροισμα

$$\phi_T(u) = \frac{\beta}{1+\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n \overline{L}^{*n}(u-1), \quad u \in \mathrm{N} \qquad (1.31)$$

$$= \phi_T^{\,*}(u) + \frac{\beta}{1+\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n l^{*n}(u),$$

Όπου τα $\overline{L}^{*n}$ και l^{*n} είναι η n-ή συνέλιξη των $\overline{L}$ και l, ενώ $\overline{L}(-1) = \overline{L}^{*n}(-1) = 1$.

Απόδειξη: Η (27) μπορεί να ξαναγραφτεί ως $1-\phi_T(u) = \frac{1}{1+\beta}\sum_{Z=0}^{u-1}[1-\phi_T(u-z)]l(z) + \frac{\beta}{1+\beta}$

για $u \in \mathrm{N}^+$. Τότε το Θεώρημα 2 δίδει $1-\phi_T(u) = \sum_{z=0}^{u-1}k(z)$ και επομένως

$$1-\phi_T(u) = \frac{\beta}{1+\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n \sum_{z=0}^{u-1} l^{*n}(z) = \frac{\beta}{1+\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n L^{*n}(u-1),$$

το οποίο στην συνέχεια υποδεικνύει ότι $\phi_T(u) = \frac{\beta}{1+\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n \overline{L}^{*n}(u-1)$, για

$u \in \mathrm{N}^+$.

Με $\overline{L}^{*n}(-1) = 1$ αυτός ο τύπος ισχύει και για $u = 0$.

Ομοίως, η παρατήρηση στην (27) υποδηλώνει ότι

$$\phi_{T^*}(u) = \tfrac{1}{1+\beta}\sum_{z=0}^{u}\phi_{T^*}(u-z)l(z) + \frac{1}{1+\beta}\overline{L}(u),$$

για $u \in \mathrm{N}$. Αφαιρώντας από την (30), έχουμε

$$\phi_T(u) - \phi_{T^*}(u) = \frac{1}{1+\beta}\sum_{z=0}^{u}\left[\phi_T(u-z) - \phi_{T^*}(u-z)\right]l(z) + \frac{\beta}{(1+\beta)_2}l(u).$$

Χρησιμοποιώντας μετασχηματισμούς, παρατηρείται εύκολα ότι η $\phi_T(u) - \phi_{T^*}(u)$ είναι σύνθετη γεωμετρική:

$$\phi_T(u-)\phi_{T^*}(u) = \frac{\beta}{1+\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n l^{*n}(u), \qquad u \in \mathrm{N},$$

που υποδεικνύει ότι $\phi_{T^*}(u) = \frac{\beta}{1+\beta}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^n \overline{L}^{*n}(u)$, για να ολοκληρωθεί η Απόδειξη

Παρατηρήσεις:

1. Το Θεώρημα 1.5 δίνει έναν γενικευμένο τύπο συνέλιξης του Beekman για το μοντέλο διακριτού χρόνου. Εάν $\upsilon = \rho = 1$, τότε απλοποιεί τον κλασικό τύπο συνέλιξης του Beekman $\Psi(u) = (1-\mu_1)\sum_{n=1}^{\infty} \mu_1^n \overline{P}_1^{*n}(u-1)$.

2. Εφόσον η $\phi_T(u)$ αναγνωρίζει μια σύνθετη γεωμετρική μορφή και το $l(z)$ είναι διακριτό, ο αναδρομικός τύπος του Panjer μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί εδώ. Επιπλέον, οποιεσδήποτε ιδιότητες (π.χ. διπλής όψης όρια) της σύνθετης γεωμετρικής κατανομής ισχύουν επίσης στη $\phi_T(u)$.

3. Το θεώρημα δίνει επίσης την σχέση μεταξύ των μετασχηματισμών της γεννήτριας συνάρτησης πιθανοτήτων δύο διαφορετικά καθορισμένων χρόνων χρεωκοπίας T και T^*.

Ένας αναδρομικός τύπος της γεννήτριας συνάρτησης κατανομής για τον χρόνο χρεωκοπίας T υποδεικνύει ότι οι ροπές του T μπορούν να αποκτηθούν αναδρομικά. Εγγράφουμε την πρώτη και την δεύτερη παραγοντική ροπή

$E_1(u) = E[TI(T<\infty) | U(0)=u]$ και $E_{(2)}(u) = E[T^{(2)} I(T<\infty) | U(0)=u]$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 1.6

$$E_1(u) = \mu_1 + \frac{\mu_{(2)}}{2(1-\mu_1)} + \mu_1 \sum_{z=0}^{u-1} E_1(u-z)p_1(z) + \mu_1 \sum_{z=0}^{u-1} [\Psi(u-z)-1]p_1(z)$$
$$+ \frac{\mu_{(2)}}{2(1-\mu_1)} \sum_{=0}^{u-1} [\Psi(u-z)-1]p_2(z), \qquad u \in \mathrm{N}^+ \tag{1.32}$$

και

$$E_{(2)}(u) = \sum_{z=0}^{u-1} E_{(2)}(u-z)\mu_1 p_1(z) + \sum_{z=0}^{u-1} E_1(u-z)\left[2\mu_1 p_1(z) + \frac{\mu_{(2)}}{(1-\mu_1)} p_2(z)\right]$$
$$+ \sum_{z=0}^{u-1} [\Psi(u-z)-1]\left[\frac{\mu_{(2)}(\mu_2 - 3\mu_1 + 2)}{2(1-\mu_1)^3} p_2(z) + \frac{\mu_{(3)} p_3(z)}{3(1-\mu_1)^2}\right]$$
$$+ \frac{\mu_{(2)}(\mu_2 - 3\mu_1 + 2)}{2(1-\mu_1)^3} + \frac{\mu_{(3)}}{3(1-\mu_1)^2}, \qquad u \in \mathrm{N}^+. \tag{1.33}$$

Απόδειξη: Εξ ορισμού $\frac{\theta}{\theta\upsilon}\phi_T(u)\big|_{\upsilon=1} = E[TI(T<\infty) | U(0)=u] = E_1(u)$.

Διαφοροποιώντας την

$\phi_T(u) = \sum_{z=0}^{u-1} \phi_T(u-z) g(z|0) + \sum_{z=u}^{\infty} g(z|0)$ και στις δύο πλευρές παίνρουμε την

$$\frac{\vartheta}{\vartheta\upsilon}\phi_T(u)=\sum_{z=0}^{u-1}\frac{\vartheta}{\vartheta\upsilon}\phi_T(u-z)g(z\,|\,0)+\sum_{z=0}^{u-1}\phi_T(u-z)\frac{\vartheta}{\vartheta\upsilon}g(z\,|\,0)+\frac{\vartheta}{\vartheta\upsilon}\sum_{z=u}^{\infty}g(z\,|\,0). \qquad (1.34)$$

Με αντικατάσταση $\frac{\vartheta}{\vartheta\upsilon}g(z\,|\,0)=\sum_{x=0}^{\infty}\rho^x p(x+z+1)+\sum_{z=0}^{\infty}\upsilon x\rho^{x-1}\rho'(\upsilon)p(x+z+1)$

στην (34)

Και θέτουμε $\upsilon=\rho=1$. Τότε οι $\phi_T(u)=\Psi(u), g(z\,|\,0)=\mu_1 p_1(z)$ και $\rho'(1)=\frac{1}{1-\mu_1}$

δίδουν

$$\begin{aligned}
E_1(u)&=\mu_1\sum_{z=0}^{u-1}E_1(u-z)p_1(z)+\mu_1\sum_{z=0}^{u-1}\Psi(u-z)p_1(z)\\
&\quad+\frac{1}{1-\mu_1}\sum_{z=0}^{u-1}\Psi(u-z)\sum_{z=0}^{\infty}xp(x+z+1)+\sum_{z=u}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}p(x+z+1)\\
&\quad+\frac{1}{1-\mu_1}\sum_{z=u}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}xp(x+z+1)\\
&=\mu_1\sum_{z=0}^{u-1}E_1(u-z)p_1(z)+\mu_1\sum_{z=0}^{u-1}\Psi(u-z)p_1(z)\\
&\quad+\frac{1}{1-\mu_1}\sum_{z=0}^{u-1}\Psi(u-z)\sum_{x=z+1}^{\infty}[x-(z+1)]p(x)\\
&\quad+\sum_{z=u}^{\infty}\sum_{x=z+1}^{\infty}p(x)+\frac{1}{1-\mu_1}\sum_{z=u}^{\infty}\sum_{x=z+1}^{\infty}[x-(z+1)]p(x)\\
&=\mu_1\sum_{z=0}^{u-1}E_1(u-z)p_1(z)+\mu_1\sum_{z=0}^{u-1}\Psi(u-z)p_1(z)\\
&\quad+\frac{\mu_{1:1}\mu_1}{1-\mu_1}\sum_{z=0}^{u-1}\Psi(u-z)p_2(z)+\mu_1\sum_{z=u}^{\infty}p_1(z)+\frac{\mu_{1:1}\mu_1}{1-\mu_1}\sum_{z=u}^{\infty}p_2(z)\\
&=\mu_1\sum_{z=0}^{u-1}E_1(u-z)p_1(z)+\mu_1\sum_{z=0}^{u-1}\Psi(u-z)p_1(z)\\
&\quad+\frac{\mu_{(2)}}{2(1-\mu_1)}\sum_{z=0}^{u-1}\Psi(u-z)p_2(z)+\mu_1\overline{P}_1(u-1)+\frac{\mu_{(2)}}{2(1-\mu_1)}\overline{P}_2(u-1),
\end{aligned}$$

Το οποίο αποδίδει τον αναδρομικό τύπο για την $E_1(u)$: Για να λάβουμε $E_{(2)}(u)$, Διαφοροποιούμε και τις δύο πλευρές στην (1.34), ορίζουμε $\upsilon=\rho=1$ και σημειώνουμε ότι $\rho''(1)=\frac{\mu_2-\mu_1-2\mu_1^2}{(1-\mu_1)}$.

Ως τελική εφαρμογή των Θεωρημάτων 1.1 και 1.2, δίνουμε εκφράσεις για τις προεξοφλημένες ροπές των $U(T-1)$ και $|U(T)|$.

Συμβολίζουμε με $\phi^{(n)}(u;\upsilon) = E\left[\upsilon^T \left|U(T)\right|^{(n)} I(T<\infty) \middle| U(0)=u\right]$ και $\phi_{(m)}(u;\upsilon) = E\left[\upsilon^T (U(T-1))^{(m)} I(T<\infty) \middle| U(0)=u\right]$.

Πόρισμα 1.2. Για $u \in \mathrm{N}^+$

$$\phi^{(n)}(u;\upsilon) = \phi^{(n)}(0;\upsilon) + \sum_{z=0}^{u-1} \phi^{(n)}(u-z;\upsilon) g(z \mid 0) + \frac{\mu_{(n+1)}}{n+1} \upsilon \sum_{z=0}^{u-1} \rho^{z-u} p_n + 1(z),$$

όπου $\phi^{(n)}(0;\upsilon) = \frac{\mu_{(n+1)}}{n+1} \upsilon \hat{p}_{n+1}(\rho)$ δίδεται στην Ενότητα 1.3.2. Συγκεκριμένα όταν ισχύει $\upsilon = 1$ τότε η $\phi^{(n)}(u;1) = E\left[\left| U(T)\right|^n I(T<\infty) \middle| U(0)=u\right]$ δίδεται αναδρομικά από την $\phi^{(n)}(u;1) = \phi^{(n)}(0;1) + \mu_1 \sum_{z=0}^{u-1} \phi^{(n)}(u-z;1) p_1(z) + \frac{\mu_{(n+1)}}{n+1} P_{n+1}(u-1)$.

Πόρισμα 1.3. Για $u \in \mathrm{N}^+$

$$\phi_{(m)}(u;\upsilon) = \phi_{(m)}(0;\upsilon) + \sum_{z=0}^{u-1} \phi_{(m)}(u-z;\upsilon) g(z \mid 0) + \upsilon \mu_1 \sum_{z=0}^{u-1} \rho^{z-u} x^{(m)} p_1(z),$$

όπου $\phi_{(m)}(0;\upsilon) = \upsilon \rho^m \mu_1 \frac{d^m}{d\rho^m} \hat{p}(\rho)$ δίδεται στην Ενότητα 1.3.2 Συγκεκριμένα όταν ισχύει $\upsilon = 1$ τότε $\phi_{(m)}(u;1) = E\left[(U(T-1))^{(m)} I(T<\infty) \middle| U(0)=u\right]$ δίδεται αναδρομικά από: $\phi_{(m)}(u;1) = \phi_{(m)}(0;1) + \mu_1 \sum_{z=0}^{u-1} \phi_{(m)}(u-z;1) p_1(z) + \mu_1 \sum_{z=0}^{u-1} z^m p_1(z)$.

Συμπέρασμα

Τα παραπάνω αποτελέσματα απεικονίζουν περαιτέρω την χρησιμότητα της συνάρτησης της ποινής. Οι τύποι μας για το διακριτό μοντέλο χρονικού κινδύνου μπορούν να βοηθήσουν στην καλύτερη κατανόηση των αντίστοιχων αναλόγων τους στο μοντέλο συνεχούς χρόνου, το οποίο αποτελεί μια περιοριστική περίπτωση. Ελπίζουμε ότι αυτά τα αποτελέσματα θα αποδειχθούν επίσης ανεξάρτητου ενδιαφέροντος.

2.1 Εισαγωγή

Τα προβλήματα που σχετίζονται με τον υπολογισμό των πιθανοτήτων χρεοκοπίας και των ποσοτήτων που σχετίζονται με την χρεοκοπία, για τα κλασικά μοντέλα κινδύνου συνεχούς χρόνου ή για τα μοντέλα κινδύνου Sparre Andersen, έχουν λάβει σημαντική προσοχή τα τελευταία χρόνια [1-14]. Οι αναφορές περιλαμβάνουν μελέτες για τις από κοινού και οριακές κατανομές του χρόνου χρεοκοπίας (πιθανότητες χρεοκοπίας πεπερασμένου χρόνου), το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία, το έλλειμμα κατά την χρεωκοπία, η απαίτηση που προκαλεί την χρεοκοπία, καθώς και τις ροπές αυτών των μεταβλητών.

Το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο κινδύνου, ως διακριτό ανάλογο του κλασσικού μοντέλου κινδύνου σύνθετης Poisson, προτάθηκε αρχικά από τον Gerber [15] και μελετήθηκε περαιτέρω από τους [16-21]. Οι Yuen και Guo [22] και Cossette κ.ά. [23] μελέτησαν δύο διαφορετικές επεκτάσεις του σύνθετου δυωνυμικού μοντέλου κινδύνου.

Αυτή η μελέτη που επεκτείνει το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο κινδύνου, διερευνά αναλογικά προβλήματα, σε μια τάξη διακριτών μοντέλων κινδύνου Sparre Andersen. Προκύπτει ένας αναδρομικός τύπος για την συνάρτηση Gerber-Shiu που οφείλεται στην χρεοκοπία χρησιμοποιώντας το εργαλείο γεννητριών συναρτήσεων αντί των μετασχηματισμών Laplace που χρησιμοποιούνται συνήθως για μοντέλα συνεχούς χρόνου. Η συνάρτηση Gerber-Shiu εξαρτάται από τον χρόνο της χρεοκοπίας, το πλεόνασμα λίγο πριν από την χρεοκοπία και το έλλειμμα κατά την χρεοκοπία. Ως εκ τούτου, πολλές σχετικές ποσότητες χρεοκοπίας μπορούν να ληφθούν μέσω του αναδρομικού τύπου.

Σε μια επόμενη μελέτη [24], δείχνουμε ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί να εκφραστεί ρητά από την άποψη μιας σύνθετης γεωμετρικής συνάρτησης κατανομής, η οποία στην συνέχεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ληφθούν οι ρητές εκφράσεις για την γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας του χρόνου χρεωκοπίας, τις από κοινού και οριακές κατανομές του πλεονάσματος πριν από την χρεωκοπία, του ελλείμματος κατά την χρεοκοπία, της απαίτησης που προκαλεί η χρεοκοπία, καθώς και των ροπών τους.

2.2 Περιγραφή μοντέλου και συμβολισμός

θεωρούμε μια διαδικασία κινδύνου Sparre Andersen διακριτού χρόνου

$$U(n) = u + n - \sum_{t-1}^{N(n)} X_i, \quad n = 1,2,.....,$$

Συμβολίζουμε με $\mu_\kappa = \mathrm{E}\left[\mathrm{X}^\kappa\right]$ την k-ή ροπή του X και με

$\hat{p}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} s^i p(i),\ s \in \mathrm{C}$, την γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων.

Η διαδικασία καταμέτρησης $\{\mathrm{N}(n); n \in N\}$ δηλώνει τον αριθμό των απαιτήσεων μέχρι και τον χρόνο n και ορίζεται ως $\mathrm{N}(n) = \max\{k : W_1 + W_2 + \ldots W_k \le n$ όπου οι ενδιάμεσοι χρόνοι αναμονής των απαιτήσεων W_i υποθέτουμε ότι είναι ανεξάρτητες και ισόνομες κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές θετικής ακέραιας μάζας με κοινή συνάρτηση πιθανότητας $k(x) = P(W = x)$ για x =1,2, . . . : Συμβολίζουμε με $\hat{k}(s) = \sum_{i=1}^{\infty} s^i k(i),\ s \in \mathrm{C}$, την γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων.

Επιπροσθέτως υποθέτουμε ότι τα $\{W_i; i \in \mathrm{N}^+\}$ και $\{X_i; i \in \mathrm{N}^+\}$ είναι ανεξάρτητα και $E(W) = (1+\theta)E(X) = (1+\theta)\mu_1$, προκειμένου να είναι θετικό το περιθώριο ασφαλείας θ .

Τώρα ορίζουμε (την πιθανώς ελαττωματική) τυχαία μεταβλητή $T| = \min\{n \in \mathrm{N}^+ : U(n) < 0\}$ να είναι ο χρόνος της χρεοκοπίας,

$\Psi(u) = P(T < \infty | U(0) = u),\ u \in \mathrm{N}$, να είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας με χρονικό ορίζοντα στο άπειρο και $\psi(u,n) = P(T = n | U(0) = u),\ n = 1,2,3,\ldots$, να είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας στον χρόνο n:

Θεωρούμε την $f_3(x,y,t|u) = P\{U(T-1) = x,\ |U(T)| = y,\ T = t | U(0) = u\},\ x \in \mathrm{N}$, $y \in \mathrm{N}^+$,

ως την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του πλεονάσματος λίγο πριν την χρεωκοπία, το έλλειμμα στην χρεωκοπία και τον χρόνο της χρεωκοπίας. Υποθέτουμε ότι $\upsilon \in (0,1)$ είναι ο (σταθερός) συντελεστής προεξόφλησης σε μια περίοδο και ορίζουμε την $f_2(x,y|u) = \sum_{t=1}^{\infty} u^t f_3(x,y,t|u)$ ως μία προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής πιθανοτήτων $U(T-1)$ και $|U(T)|$.

Έστω ότι $f_1(x|u) = \sum_{y=0}^{\infty} f_2(x,y|u)$ και $\overline{P}(x) = 1 - P(x)$. Τότε οι συνηθισμένοι τύποι δεσμευμένης πιθανότητας δίνουν την ακόλουθη σχέση:

$$f_2(x,y|u) = f_1(x|u)\frac{p(x+y+1)}{\overline{P}(x+1)},\quad x \in \mathrm{N},\ y \in \mathrm{N}^+.$$

Έστω ότι $w(x,y)$, x,y = 0,1,2,...., να είναι μια μη αρνητική συνάρτηση ποινής. Για $0<\upsilon<1$, ορίζουμε

$$\phi(u) = E\left[u^T w(U(T-1), |U(T)|) I(T<\infty) \middle| U(0)=u\right],\ u \in \mathrm{N}. \qquad (2.1)$$

Η ποσότητα $w(U(T-1), |U(T)|)$ μπορεί να ερμηνευθεί ως η ποινή κατά την στιγμή της χρεωκοπίας για το πλεόνασμα $U(T-1)$ και το έλλειμμα $|U(T)|$. Τότε η $\phi(u)$ είναι η αναμενόμενη συνάρτηση προεξοφλημένης ποινής (Gerber-Shiu) εάν το ν θεωρείται ως προεξοφλητικό επιτόκιο.

Οι Pavlova και Willmot [25] δίνουν μια έκφραση της συνάρτησης Gerber-Shiu στο μοντέλο κινδύνου ανανέωσης διακριτού χρόνου σε σχέση με τη συνάρτηση Gerber-Shiu στο αντίστοιχο μοντέλο ανανέωσης κινδύνου, αλλά οι συναρτήσεις Gerber-Shiu εξακολουθούν να είναι άγνωστες στα περισσότερα από τα μοντέλα διακριτού χρόνου τακτικής ανανέωσης εκτός από το σύνθετο δυαδικό μοντέλο. Ο κύριος στόχος για την υπόλοιπη μελέτη είναι να υπολογίσει την συνάρτηση Gerber-Shiu σε μια τάξη συνήθων μοντέλων ανανέωσης κινδύνου

2.3 Ένας τελεστής των διακριτών συναρτήσεων

Αυτή η ενότητα ορίζει έναν τελεστή σε συναρτήσεις πραγματικών τιμών με πεδίο που είναι το σύνολο των θετικών ακέραιων αριθμών. Ορίζουμε το T_r ως τον τελεστή σε οποιαδήποτε συνάρτηση με πραγματικές τιμές $f(x)$ $x \in \mathrm{N}^+$, με

$$T_r f(y) = \sum_{x=y}^{\infty} r^{x-y} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} r^x f(x+y)|, \quad r \in \mathrm{C}, \mathrm{y} \in \mathrm{N}^+. \qquad (2.2)$$

η συνεχής έκδοση αυτού του τελεστή βρέθηκε πρώτα από στους Dickson και Hipp [2] και οι ιδιότητές του δίνονται από τους Li και Garrido [12]. Όπως και για την συνεχή έκδοση του τελεστή, ο διακριτός περιορισμός του T_r διαθέτει επίσης πολλές ωραίες ιδιότητες, οι οποίες είναι χρήσιμες για την απλούστευση των υπολογισμών:

1. $rT_r f(1) = f(r)$, όπου $f(r)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του f.

2. $T_1 f(y) = \sum_{x=y}^{\infty} f(x), \quad y \in \mathrm{N}^+$.

3. Εάν τα r_1 και r_2 είναι διαφορετικά, τότε

$$T_{r_2} T_{r_1} f(y) = \frac{r_2 T_{r_2} f(y) - r_1 T_{r_1} f(y)}{r_2 - r_1}. \qquad (2.3)$$

4. Εάν $r_1 = r_2 = r$, τότε

$$T_r^2 f(y) = T_r T_r f(y) = \lim_{r_1 \to r} T_{r_1} T_r f(y) = \lim_{r_1 \to r} \frac{r_1 T_{r_1} f(y) - r T_r f(y)}{r_1 - r}$$

$$= \frac{d[r T_r f(y)]}{dr} = \sum_{x=y}^{\infty} (x - y + 1) r^{x-y} f(x) \tag{2.4}$$

5. Εάν $r_1, r_2, \ldots, r_k$ είναι διαφορετικά, τότε

$$T_{r_k} T_{r_{k-1}} \ldots T_{r_1} f(y) = \sum_{j=1}^{k} \frac{r_j^{k-1} T_{r_1} f(y)}{\pi'_k(r_j)}, \tag{2.5}$$

όπου $\pi_k(s) = \prod_{i=1}^{k} (s - r_1)$. Ενώ η γεννήτρια συνάρτηση δίδεται από

$$s T_s T_{r_k} T_{r_{k-1}} \ldots T_{r_1} f(1) = \left[\prod_{i=1}^{k} \frac{s}{s - r_1} \right] f(s) - \sum_{j=1}^{k} \left(\frac{s}{s - r_j} \right) \frac{r_j^{k-1} \hat{f}(r_j)}{\pi'_k(r_j)}.$$

6. Γιαr $k \in \mathrm{N}^+$,

$$T_r^k f(y) = \underbrace{T_r T_r \cdots T_r}_{k} f(y) = \lim_{s \to r} T_s T_r^{k-1} = \frac{d[r T_r^{k-1} f(y)]}{dr}. \tag{2.6}$$

2.4 Martingales και μια γενικευμένη εξίσωση Lundberg

Έστω $\tau_k = \sum_{j=1}^{k} W_j$ είναι ο χρόνος έλευσης της k-ής απαίτησης και $U_k = U(\tau_k)$ είναι το πλεόνασμα αμέσως μετά την *k*-ή αξίωση. Προσδιορίζοντας το $\tau_0 = 0$ έχουμε $U_0 = u$ και για k =1, 2, . . . ,

$$U_k = U(\tau_k) = u + \tau_k - \sum_{j=1}^{k} X_j = u + \sum_{j=1}^{k} [W_j - X_j].$$

Αναζητούμε έναν αριθμό $s \in \mathrm{C}$ τέτοιον ώστε η διαδικασία:

$$\{ \upsilon^{\tau_k} s^{-U_k} ; k \in \mathrm{N} \} \tag{2.7}$$

να αποτελέσει ένα martingale. Εδώ το martingale είναι

$E[\upsilon^{W_1} s^{X_1 - W_1}] = E[(\upsilon / s)^{W_1} s^{X_1}] = E[(\upsilon / s)^{W_1}] E[s^{X_1}] = 1,$

που ισοδυναμεί με

$$\hat{k}(\upsilon / s) \hat{p}(s) = 1. \tag{2.8}$$

Η εξίσωση (2.8) είναι μια γενικευμένη εκδοχή της εξίσωσης του Lundberg.

Στο υπόλοιπο έγγραφο, υποθέτουμε ότι οι χρόνοι αναμονής των απαιτήσεων έχουν διακριτή κατανομή K_m, δηλαδή η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων $k(x)$, $x \in N^+$ μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\hat{k}(s) = \frac{s\left[\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j (s-1)^j\right]}{\prod_{i=1}^{m}(1-sq_i)}, \qquad \Re(s) < \min\left\{\frac{1}{q_i} : 1 \le i \le m\right\}, \tag{2.9}$$

όπου $0 < q_i < 1$, για i=1, 2, . . . , m, και οι συντελεστές $\beta_1, \beta_2 ...., \beta_{m-1}$ είναι τέτοιοι ώστε το k είναι μία συνάρτηση πιθανοτήτων. Έτσι, η μέση τιμή και η δεύτερη παραγοντική ροπή των χρόνων αναμονής των απαιτήσεων δίδονται από:

$$E(W) = \hat{k}(1) = 1 + \sum_{i=1}^{m}\frac{q_1}{(1-q_i)} + \frac{\beta_1}{\left|\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)\right.}. \tag{2.10}$$

$$E\left[W^{(2)}\right] = \hat{k}''(1) = \frac{2\beta_2 + \beta_1\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i}{(1-q_i)}}{\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)}$$

$$+ E(W)\sum_{i=1}^{m}\frac{q_i}{(1-q_i)} + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{q_i}{1-q_i}\right)^2, \tag{2.11}$$

όπου $x^{(2)} = x(x-1)$ είναι η δεύτερη παραγοντική δύναμη του x.

Αυτή η κατηγορία κατανομών περιλαμβάνει, ως ειδικές περιπτώσεις, τις μετατοπισμένες γεωμετρικές, τις μετατοπισμένες ή αποκομμένες αρνητικές διωνυμικές, καθώς και γραμμικούς συνδυασμούς αυτών (συμπεριλαμβανομένου του μίγματος) αυτών.

Παρακάτω παρατίθενται ορισμένα παραδείγματα

1. Εάν $\hat{k}(s) = s(1-q)/(1-sq)$, $0 < q < 1$ τότε η $k(x) = (1-q_1)q_1^{x-1}, x = 1,2,....,$ είναι μία μετατοπισμένη ή αποκομμένη γεωμετρική κατανομή.
2. Εάν $\hat{k}(s) = s\prod_{i-1}^{m}(1-q_1)/\prod_{i=1}^{m}(1-sq_i)$, $0 < q_i < 1$, τότε η k είναι μία μετατοπισμένη κατανομή που είναι η συνέλιξη των m γεωμετρικών κατανομών $k_i(x) = (1-q_i)q_i^x$, $x = 0,1,2,.........$ Επιπλέον, εάν $q_i = q$, για όλα τα i=1, 2, . . . ,m, τότε η k είναι μια μετατοπισμένη αρνητική διωνυμική κατανομή με $k(x) = \binom{m+x-2}{x-1}(1-q)^m q^{x-1}$, $x = 1,2,......$
3. Εάν $\hat{k}(s) = \left[\prod_{i=1}^{m}s(1-q_i)\right]/\prod_{i=1}^{m}(1-sq_i)$ τότε η $k(x) = k_1 * k_2 * .... * k_m(x)$ με

$k_i(x)=(1-q_i)q_i^{x-1},\ 0<q_i<1,\ x=1,2,\ldots\ldots$ Επιπλέον, εάν $q_i=q$, για όλα τα i=1,2,...,m, τότε η k είναι αρνητική διωνυμική κατανομή ξεκινώντας από το m, π.χ. $k(x)=(1-q)^m\binom{x-1}{m-1}q^{x-m}, \qquad x=m,m+1,\ldots.$

4. Εάν $k(x)=\left[(1-q)^m/\left(1-(1-q)^m\right)\right]\binom{m+x-1}{x}q^x,\ 0<q<1,\ x=1,2,\ldots.,$ τότε η k είναι μια αποκομμένη αρνητική διωνυμική κατανομή με $\hat{k}(s)=\dfrac{(1-q)^m}{1-(1-q)^m}\dfrac{1-(1-sq)^m}{(1-sq)^m}=\dfrac{s\left[(1-q)^m+\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j(s-1)^j\right]}{}$, όπου
$\beta_j=\left[(1-q)^m/\left(1-(1-q)^m\right)\right]\sum_{k=j}^{m-1}(-q)^{k+1}\binom{m}{k+1}\binom{k}{j},\ j=1,2,\ldots.m.$

5. Συγκεκριμένα, εάν τα $q_1,q_2,\ldots.q_m$ είναι διαφορετικά, με μερικά κλάσματα, η k μπορεί να εκφραστεί ως ένας γραμμικός συνδυασμός των m γεωμετρικών κατανομών με παραμέτρους q_i

$$k(x)=\sum_{i=1}^{m}\theta_i(1-q_i)q_i^{x-1}, \qquad x=1,2,\ldots\ldots, \qquad (2.12)$$

όπου τα $\theta_1,\theta_2,\ldots\theta_m$ είναι τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{m}\theta_i=1$ και δίδεται αναλυτικά από την

$$\theta_i=\frac{\sum_{k=1}^{m-1}\beta_k(1/q_i-1)^k+\prod_{j=1}^{m}(1-q_j)}{(1-q_i)\left[\prod_{j=1,j\neq i}^{m}1-q_j/q_i\right]}, \qquad i=1,2,\ldots.,m. \qquad (2.13)$$

Υποθέτοντας ότι η $\hat{k}(s)$ δίδεται από την (2.9), μπορούμε να απλοποιήσουμε την γενικευμένη εξίσωση Lundberg $\hat{k}(\upsilon/s)\hat{p}(s)=1$ ως εξής

$$\gamma(s)=\frac{1}{\hat{k}(\upsilon/s)}$$

$$=\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\upsilon q_i)}{\upsilon\left[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)+\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(\upsilon-s)^j\right]}=\hat{p}(s), \quad s\in \mathrm{C}. \quad (2.14)$$

Οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης διαδραματίζουν βασικό ρόλο σε αυτή την μελέτη και συζητούνται στο ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 2.1. Για $0<\upsilon<1$ και $m \in N^+$, η εξίσωση (2.14) έχει ακριβώς m ρίζες, έστω $\rho_i(\upsilon)$, i=1, 2, . . . , m, με $0<|\rho_i|<1$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα περίγραμμα μονάδων στην Γ=$\{s:|s|=1\}$ στο C. Εφόσον $\left|\hat{k}(\upsilon/s)\right|<\hat{k}(|\upsilon/s|)=k(|\upsilon|)<1$ στο περίγραμμα Γ, τότε ισχύει

$\left|1/\hat{k}(\upsilon/s)\right|>1=\hat{p}(1)=\hat{p}(|s|)\geq\left|\hat{p}(s)\right|$ στο C. Με βάση το Θεώρημα του Rouche, οι

εξισώσεις $1/\hat{k}(\upsilon/s)=0$ και $1/\hat{k}(\upsilon/s)=\hat{p}(s)$ έχουν τον ίδιο αριθμό ριζών στην μονάδα του κύκλου. Από την (2.14), η πρώτη έχει m ρίζες μέσα στην μονάδα του κύκλου, τότε η εξίσωση του Lundberg έχει m ρίζες εντός της μονάδας κύκλου, έστω $\rho_1(\upsilon),\rho_2(\upsilon),.........\rho_m(\upsilon)$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το s=0 δεν είναι ρίζα της (2.14) και έχουμε $0<|\rho_i|<1$, για i=1, 2, . . ., m.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Προσδιορίζουμε $l(s)=\hat{p}(s)-1/\hat{k}(\upsilon/s)$. Εφόσον $l(1)<0$ και $\lim_{s\to\infty} l(s)=+\infty$, τότε εάν η $p(x)$ είναι επαρκώς κανονική, η $l(s)=0$ έχει μία ρίζα μεγαλύτερη από το l, έστω $R(u)$, που ονομάζεται γενικευμένος συντελεστής προσαρμογής.
2. Καθώς ισχύει $\upsilon\to 1^-$, $R(\upsilon)\to R(1)$ και $\rho_j(\upsilon)\to\rho_j(1)$, for j=1,2, . . . , m, όπου τα $R(1)$ και $\rho_1(1),\rho_2(1),.....,\rho_m(1)$ είναι ρίζες της $\hat{k}(1/s)\hat{p}(s)=1$.
3. Για λόγους απλοποίησης, οι $R(u)$ και $\rho_j(\upsilon)$ συμβολίζονται με R και ρ_j, για j=1, 2, . . . ,m και $0<\upsilon<1$.

2.5 Γεννήτρια συνάρτηση του ϕ

Προσαρμόζοντας το χρόνο και το ποσό της πρώτης απαίτησης, λαμβάνουμε:

$$\phi(u)=E\left[\upsilon^{W_1}\phi(U_1)\right]=E\left[\upsilon^{W_1}\phi(u+W_1-X_1)\right]=\sum_{t=1}^{\infty}\upsilon^t k(t)E[\phi(u+t-X_1)].$$

Τώρα ορίζουμε την $\hat{\phi}(s)=\sum_{u=0}^{\infty}s^u\phi(u)$ ως την γεννήτρια συνάρτηση του ϕ και με την (2.15),

$$\hat{\phi}(s)=\sum_{u=0}^{\infty}s^u\phi(u)=\sum_{u=0}^{\infty}s^u\sum_{t=1}^{\infty}\upsilon^t k(t)E[\phi(u+1-X_1)]$$
$$=\sum_{u=0}^{\infty}s^u\sum_{y=u+1}^{\infty}\upsilon^{y-u}k(y-u)E[\phi(y-X_1)]$$
$$=\sum_{y=1}^{\infty}U^y E[\phi(y-X_1)]\sum_{u=0}^{y-1}(s/\upsilon)^u k(y-u)$$
$$=\sum_{y=1}^{\infty}s^y E[\phi(y-X_1)]\sum_{t=1}^{y}(\upsilon/s)^t k(t). \qquad (2.15)$$

Εάν $q_1,q_2,....q_m$ είναι διαφορετικά, τότε η $k(t)$ έχει την μορφή της (2.12). Αντικαθιστώντας την στην (2.15) έχουμε

$$\hat{\phi}(s)=\sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i(1-q_i)}{q_i}\sum_{y=1}^{\infty}s^y E[\phi(y-X_1)]\sum_{t=1}^{y}(\upsilon/s)^t q_i^t$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i(1-q_i)(\upsilon/s)}{[1-(\upsilon/s)q_i]}\left\{\sum_{y=1}^{\infty}s^y E[\phi(y-X_1)]-\sum_{y=1}^{\infty}(\upsilon q_i)^y E[\phi(y-X_1)]\right\}$$
$$=\hat{k}(\upsilon/s)\sum_{y=1}^{\infty}s^y E[\phi(y-X_1)]-\sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i(1-q_i)\upsilon b_i}{(s-\upsilon q_i)}, \qquad (2.16)$$

όπου $b_i=\sum_{y=1}^{\infty}(\upsilon q_i)^y E[\phi(y-X_1)]$. Εξ ορισμού της $\phi(u)$,

$$E[\phi(y-X_1)]=\sum_{x=1}^{y}\phi(y-x)p(x)+\omega(y) \qquad (2.17)$$

όπου $\omega(y)=\sum_{x=y+1}^{\infty}w(y-1,x-y)p(x)$. Αντικαθιστώντας την (2.17) στην (2.16) έχουμε

$$\hat{\phi}(s)=\frac{\hat{k}(\upsilon/s)\hat{\omega}(s)-\sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i(1-q_i)\upsilon b_i}{s-\upsilon q_i}}{\left[1-\hat{k}(\upsilon/s)\hat{p}(s)\right]}, \qquad (2.18)$$

όπου $\hat{\omega}(s)=\sum_{y=1}^{\infty}s^y\omega(y)$. Πολλαπλασιάζοντας τόσο τον παρονομαστή όσο και τον αριθμητή της (2.18) με $\gamma(s)=1/\hat{k}(\upsilon/s)$ έχουμε

$$\hat{\phi}(s)=\frac{\hat{\omega}(s)-\frac{Q_{m-1}(s)}{\upsilon\left[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)+\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(\upsilon-s)^j\right]}}{\left[\gamma(s)-\hat{p}(s)\right]} \qquad (2.19)$$

όπου $Q_{m-1}(s)=\left[\prod_{i-1}^{m}(s-\upsilon q_i)\right]\left[\sum_{i=1}^{m}(\upsilon\theta_i b_i(1-q_i))/(s-\upsilon q_i)\right]$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $m-1$ ή μικρότερου. Εφόσον η $\hat{\phi}(s)$ είναι πεπερασμένη για όλα τα s με $0<|\Re(s)|<1$, ο αριθμητής στα δεξιά της (2.19) πρέπει να είναι μηδέν κάθε φορά που ο παρονομαστής είναι μηδέν. Τότε η $Q_{m-1}(s)$ μπορεί να προσδιοριστεί από το γραμμικό σύστημα για *j*=1, 2, . . . , m,

$$Q_{m-1}(\rho_j)=\hat{\omega}(\rho_j)\left\{\upsilon\left[\rho_J^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)+\sum_{t=1}^{m-1}\beta_t\rho_j^{m-1-t}(\upsilon-\rho_j)^t\right]\right\}.$$

Επιπλέον, εάν $\rho_1,\rho_2,......,\rho_m$ είναι διαφορετικά, με τον τύπο παρεμβολής του Lagrange, αποκτούμε

$$Q_{m-1}(s)=\sum_{j=1}^{m}c_j\,\hat{\omega}(\rho_j)\left[\prod_{k=1,k\neq j}^{m}\frac{(s-\rho_k)}{(\rho_j-\rho_k)}\right], \tag{2.20}$$

όπου $c_j=\upsilon\left[\rho_j^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)+\sum_{t=1}^{m-1}\beta_t\rho_j^{m-1-t}(\upsilon-\rho_j)^t\right]$, για *j*=1,2,....,*m*.

Παρατηρούμε ότι αν είναι μερικά q_i είναι ίσα, ισχύει ακόμη ο τύπος (2.19) και ο τύπος (2.20) για την περίπτωση όπου τα $\rho_1,\rho_2,.......\rho_m$ είναι διαφορετκά, από την ιδιότητα συνέχειας.

2.6 Ανάλυση όταν ισχύει *u*=0

Στρεφόμαστε τώρα προς την εξεύρεση ποσοτήτων που σχετίζονται με την χρεοκοπία όταν $u=0$. Για λόγους απλούστευσης, υποθέτουμε ότι τα $\rho_1,\rho_2,.......\rho_m$ είναι διαφορετικά στο υπόλοιπο της μελέτης. Αρχικά

$$\phi(0)=\lim_{s\to 0}\hat{\phi}(s)=\lim_{s\to 0}\frac{\hat{\omega}(s)-\dfrac{Q_{m-1}(s)}{\upsilon\left[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)+\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(\upsilon-s)^j\right]}}{\left[\gamma(s)-\hat{p}(s)\right]}$$

$$=\frac{\sum_{j=1}^{m}c_j\,\hat{\omega}(\rho_j)\left[\prod_{k=1,k\neq j}^{m}\dfrac{\rho_k}{\rho_j-\rho_k}\right]}{\upsilon^m\prod_{i=1}^{m}q_i}$$

$$=\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j\,\hat{\omega}(\rho_j)}{\rho_j\prod_{k=1,k\neq 1}^{m}(\rho_j-\rho_k)}. \tag{2.21}$$

Εφόσον $\omega(y)=\sum_{x=y+1}^{\infty} w(y-1,x-y)p(x)=\sum_{t=1}^{\infty} w(y-1,t)p(y+t)$ και

$$\hat{\omega}(s)=\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty} s^{y} w(y-1,t)p(y+t)=\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} s^{x+1} w(x,y)p(x+y+1),$$

Τότε η (2.21) μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\begin{aligned}\phi(0)&=\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\rho_j^{x+1} w(x,y)p(x+y+1)}{\rho_j\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}\\ &=\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\rho_j^{x} w(x,y)p(x+y+1), \qquad (2.22)\end{aligned}$$

όπου $b_j=c_j/\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)$. Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\phi(0)&=E\left[\upsilon^{T} w(U(T-1),|U(T)|)I(T<\infty)|U(0)=0\right]\\ &=\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} w(x,y)f_2(x,y|0). \qquad (2.23)\end{aligned}$$

Η σύγκριση αυτών των δύο τύπων δίνει

$$f_2(x,y|0)=\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j\rho_j^{x} p(x+y+1), \quad x\in \mathrm{N}, \quad y\in \mathrm{N}^{+}, \qquad (2.24)$$

$$f_1(x|0)=\sum_{y=1}^{\infty} f_2(x,y|0)=\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=0}^{m} b_j\rho_j^{x}\bar{P}(x+1), \quad x\in \mathrm{N}, \qquad (2.25)$$

όπου $\bar{P}(x+1)=\sum_{y=x+2}^{\infty} p(y)$, και

$$\begin{aligned}g(y)=g(y|0)=\sum_{x=0}^{\infty} f_2(x,y|0)&=\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j\sum_{x=0}^{\infty}\rho_j^{x} p(x+y+1)\\ &=\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j T_{\rho j} p(y+1), \quad y\in \mathrm{N}^{+}, \qquad (2.26)\end{aligned}$$

όπου το T_r είναι ένας τελεστής που ορίστηκε στην ενότητα 3.

Η συνάρτηση g είναι μία ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας και διαδραματίζει σημαντικό ρόλο σε αυτήν την μελέτη. Ορίζοντας την $\hat{g}(s)=\sum_{y=1}^{\infty} s^{y} g(y)$ ως την γεννήτρια συνάρτηση του g , τότε έχουμε το ακόλουθο Λήμμα .

ΛΗΜΜΑ 2.1. Η γεννήτρια συνάρτηση του g δίδεται από

$$\hat{g}(s) = 1 - \frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\upsilon q_i) - \upsilon \hat{p}\left[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(\upsilon - s)^j\right]}{\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{\upsilon q_i}{\rho_i}\right)\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)} \qquad (2.27)$$

Απόδειξη. Εφόσον $\hat{g}(s) = sT_s g(1)$, τότε

$$\hat{g}(s) = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j sT_s T_{\rho j}\, p(2) = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j s\left[\frac{sT_s p(2) - \rho_j T_{\rho j} p(2)}{s-\rho_j}\right]$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j\left[\dfrac{\hat{p}(s) - (s/\rho_j)\hat{p}(\rho_j)}{s-\rho_j}\right]}{\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{c_j\,\hat{p}(s)}{(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}\right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{m}\frac{c_j s\,\hat{p}(\rho_j)}{\rho_j(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}\right\}$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\left\{\sum_{j=1}^{m}\frac{\upsilon\,\hat{p}(s)\left[\rho_j^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{t=1}^{m-1}\beta_t\rho_j^{m-1-t}(\upsilon-\rho_j)^t\right]}{(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}\right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{m}\frac{s\prod_{i=1}^{m}(\rho_j-\upsilon q_i)}{\rho_j(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}\right\}. \qquad (2.28)$$

Με γνωστό τύπο στην θεωρία παρεμβολής,

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{(\rho_j-s)^n}{\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)} = \begin{cases} 1, & n = m-1, \\ 0, & n = 0,1,2,\ldots,m-2, \\ -\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}, & n = 1, \end{cases} \qquad (2.29)$$

έχουμε

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\upsilon\rho_j^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)}{(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$=-\upsilon\sum_{j=1}^{m}\frac{\left[(\rho_j-s)+s\right]^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)}{(\rho_j-s)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$=-\upsilon\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)\sum_{j=1}^{m}\frac{\sum_{l=0}^{m-1}s^{m-1-l}\binom{m-1}{l}(\rho_j-s)^l}{(\rho_j-s)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$=\upsilon s^{m-1}\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}\right] \qquad (2.30)$$

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\upsilon\left[\sum_{t=1}^{m-1}\beta_t\rho_j^{m-1-t}(\upsilon-\rho_j)^t\right]}{(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$=\upsilon\sum_{t=1}^{m-1}\beta_t\sum_{j=1}^{m}\frac{\left[(\rho_j-s)+s\right]^{m-1-t}\left[(\upsilon-s)+(s-\rho_j)\right]^t}{(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$=\frac{\upsilon\sum_{t=1}^{m-1}\beta_t(\upsilon-s)^t s^{m-t-1}}{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}, \qquad (2.31)$$

και

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{-\prod_{i=1}^{m}(\rho_j-\upsilon q_i)}{\rho_j(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}=\sum_{j=1}^{m}\frac{\sum_{t=0}^{m}\sigma_{m-t}\rho_j^t}{\rho_j(\rho_j-s)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\frac{\sigma_m}{\rho_j(\rho_j-s)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\sum_{t=1}^{m}\sigma_{m-t}\rho_j^{t-1}}{(\rho_j-s)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}, \qquad (2.32)$$

όπου $\sigma_0=1,\sigma_2=\sum_{i=1}^{m}(-\upsilon q_i),\sigma_3=\sum_{1\leq i\leq j\leq m}\upsilon^2 q_i q_j,\ldots,\sigma_m=\prod_{i=1}^{m}(-\upsilon q_i)$.

Πάλι με την (2.29), ο τύπος (2.32) απλοποιείται ως εξής

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{-\prod_{i=1}^{m}(\rho_j-\upsilon q_i)}{\rho_j(s-\rho_j)\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}=\frac{1}{s}\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(\upsilon q_i)}{\prod_{i=1}^{m}\rho_i}-\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\upsilon q_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}\right]. \qquad (2.33)$$

Αντικαθιστώντας τα (2.30), (2.31) και (2.33) στο (2.28) τελικά αποδεικνύεται ότι η (2.27) ισχύει.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1, έχουμε ότι

$$\phi_T(0) = E\left[\upsilon^T I(T<\infty) \middle| U(0)=0\right] = \sum_{y=1}^{\infty} g(y) = \lim_{s\to 1} \hat{g}(s)$$

$$= 1 - \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-\upsilon q_1) - \upsilon\left[\prod_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{t=1}^{m-1}\beta_t(\upsilon-1)^t\right]}{\prod_{i=1}^{m}(1-\rho_i)}\right]$$

$$= 1 - \left[1-\hat{k}(\upsilon)\right]\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-\upsilon q_i)}{\prod_{i=1}^{m}(1-\rho_i)}\right] < 1, \qquad (2.34)$$

όπου το τελευταίο βήμα προκύπτει από τον ορισμό του $\hat{k}(s)$.

Τελικά, έχουμε

$$\Psi(0) = \lim_{\upsilon\to 1^-} E\left[\upsilon^T I(T<\infty) \middle| U(0)=0\right]$$

$$= 1 - \lim_{\upsilon\to 1^-}\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\left[\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-\upsilon q_i)\left[1-\hat{k}(\upsilon)\right]}{\prod_{i=1}^{m}(1-\rho_i)}\right]$$

$$= 1 - \left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1-q_i}{q_i}\right)\left[\prod_{i=1}^{m-1}\frac{\rho_i(1)}{1-\rho_i(1)}\right]\lim_{\upsilon\to 1^-}\frac{\left[\dfrac{1-\hat{k}(\upsilon)}{1-\upsilon}\right]}{\left[\dfrac{1-\rho_m(\upsilon)}{1-\upsilon}\right]}$$

$$= 1 - \left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1-q_i}{q_i}\right)\left[\prod_{i=1}^{m-1}\frac{\rho_i(1)}{1-\rho_i(1)}\right]\left[\frac{\hat{k}'(1)}{\rho'_m(1)}\right]$$

$$= 1 - \left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1-q_i}{q_i}\right)\left[\prod_{i=1}^{m-1}\frac{\rho_i(1)}{1-\rho_i(1)}\right]\left[E(W)-E(X)\right], \qquad (2.35)$$

όπου το τελευταίο βήμα προκύπτει από $\hat{k}'(1) = E(W)$ και $\rho'_m(1) = E(W)/[E(W)-E(X)]$, που μπορούν να ληφθούν λαμβάνοντας παράγωγα σε σχέση με το υ και στις δύο πλευρές της εξίσωσης του Lundberg $\hat{k}(\upsilon/\rho_m(\upsilon))\hat{p}(\rho_m(\upsilon)) = 1$, βάζοντας το $\upsilon \to 1^-$, και επισημαίνοντας ότι $\lim_{\upsilon\to 1^-}\rho_m(\upsilon) = 1$.

2.7 Ένας αναδρομικός τύπος για το $\phi(u)$

2.7.1 Γενική περίπτωση

Σε αυτήν την ενότητα, δίδεται ένας αναδρομικός τύπος για $\phi(u)$ με το επιχείρημα της ανανέωσης. Το σημείο εκκίνησης της αναδρομής $\phi(u)$ δίδεται στο (2.22). Για $u \in \mathrm{N}^{+}$, με παρόμοια επιχειρήματα όπως και στους Gerber και Shiu [4] για την συνεχή περίπτωση , υπολογίζουμε για την πρώτη φορά που η διαδικασία του πλεονάσματος πέφτει κάτω από το αρχικό πλεόνασμα u.

$$\begin{aligned}\phi(u) &= \sum_{y=1}^{u}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\upsilon^{t}\phi(u-y)f_{3}(x,y,t|0)\\&\quad+\sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\upsilon^{t}w(x+u,y-u)f_{3}(x,y,t|0)\\&=\sum_{y=1}^{u}\sum_{x=0}^{\infty}\phi(u-y)f_{2}(x,y|0)+\sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}w(x+u,y-u)f_{2}(x,y|0)\\&=\sum_{y=1}^{u}\phi(u-y)g(y)+H(u),\quad u\in \mathrm{N}^{+},\end{aligned}\tag{2.36}$$

όπου

$$\begin{aligned}H(u) &= \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}w(x+u,y-u)f_{2}(x,y|0)=\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty}w(x,y)f_{2}(x-u,y+u|0)\\&=\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m}b_j\sum_{x=u}^{\infty}\rho_j^{x-u}\sum_{y=1}^{\infty}w(x,y)p(x+y+1)=\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m}b_j\sum_{x=u}^{\infty}\rho_j^{x-u}\omega(x+1)\\&=\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m}b_jT_{\rho j}\omega(u+1).\end{aligned}\tag{2.37}$$

Ο τύπος (2.36) είναι ένας αναδρομικός τύπος για την $\phi(u)$ με σημείο εκκίνησης $\phi(0)$. Συγκεκριμένα, εάν $w(x,y)=1$, τότε η $\phi(u)$ απλοποιείται στην γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων του χρόνου T της χρεωκοπίας σε σχέση με τον συντελεστή προεξόφλησης υ, ο οποίος πλέον ορίζεται από την

$$\phi_T(u)=E\left[\upsilon^{T}I(T<\infty)|U(0)=u\right],\ u\in \mathrm{N}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η $\omega(u)$ απλοποιείται ως εξής

$\omega(u)=\sum_{x=u+1}^{\infty}p(x)=\bar{P}(u)=T_1p(u+1)$ και η $H(u)$ απλοποιείται στην

$$H(u)=\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m}b_jT_{\rho j}T_1p(u+2)=T_1g(u+1)=\sum_{y=u+1}^{\infty}g(u),\tag{2.38}$$

τότε η $\phi_T(u)$ έχει τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο

$$\phi_T(u)=\sum_{y=1}^{u}\phi_T(u-y)g(y)+\sum_{y=u+1}^{\infty}g(y), u\in \mathrm{N}^{+}. \qquad (2.39)$$

Έτσι, η πιθανότητα χρεοκοπίας $\Psi(u)$ μπορεί να αποκτηθεί λαμβάνοντας το όριο για τη $\phi_T(u)$ όταν $\upsilon\to 1^{-}$, π.χ.,

$$\begin{aligned}\Psi(u)&=\lim_{\upsilon\to 1^{-}}E\left[\upsilon^{T}I(T<\infty)\middle|U(0)=u\right]\\ &=\sum_{y=1}^{u}\Psi(u-y)g_1(y)+\sum_{y=u+1}^{\infty}g_1(y), u\in \mathrm{N}^{+}, \qquad (2.40)\end{aligned}$$

όπου $g_1(y)=\lim_{\upsilon\to 1^{-}} g(y)$.

2.7.2 Ειδικές κατανομές χρόνου αναμονής

Τώρα εξετάζουμε κάποιες ειδικές περιπτώσεις κατανομών χρόνου αναμονής επιλέγοντας $\hat{k}(s)$.

1. $\hat{k}(s)=s(1-q)/(1-sq)$, τότε η γενικευμένη εξίσωση Lundberg (2.8) έχει ακριβώς μια ρίζα στο (0, 1), έστω ρ. Τότε ο αναδρομικός τύπος

$$\phi(u)=\sum_{y=1}^{u}\phi(u-y)g(y)+H(u), \quad u|\in \mathrm{N}^{+},$$

έχει ένα σημείο εκκίνησης που δίνεται στο (2.22) ως

$$\phi(0)=H(0)=\frac{\rho(1-q)}{q}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\rho^{x}w(x,y)p(x+y+1),$$

συγκεκριμένα, $\phi_T(0)=1-\rho(1-\upsilon)/[\upsilon q(1-\rho)]$ and $\Psi(0)=1-\theta/[q(1+\theta)]$.

Ενώ, $g(y)=\dfrac{\rho(1-q)}{q}T_{\rho}p(y+1)=\dfrac{1-q}{q}\sum_{x=1}^{\infty}\rho^{x}p(x+y), \qquad (2.41)$

$$H(u)=\frac{\rho(1-q)}{q}T_{\rho}\omega(y+1)=\frac{1-q}{q}\sum_{x=1+u}^{\infty}\rho^{x-u}\omega(u). \qquad (2.42)$$

2. Εάν $\hat{k}(s)=s[(1-q_1)(1-q_2)+\beta(s-1)]/[(1-sq_1)(1-sq_2)], 0<q_1,q_2<1$, τότε

$$\begin{aligned}g(y)&=\frac{\rho_1\rho_2[(1-q_1)(1-q_2)-\beta]}{\upsilon q_1q_2(\rho_1-\rho_2)}T_{\rho 2}T_{\rho 1}p(y+1)\\ &+\left[\frac{\beta\rho_1\rho_2}{q_1q_2}\right]\frac{T_{\rho 1}p(y+1)-T_{\rho 2}p(y+1)}{\rho_1-\rho 2}, \qquad (2.43)\end{aligned}$$

$$H(u) = \frac{\rho_1\rho_2\left[(1-q_1)(1-q_2)-\beta\right]}{\upsilon q_1 q_2(\rho_1-\rho_2)} T_{\rho 2} T_{\rho 1}\omega(u+1)$$
$$+\left[\frac{\beta\rho_1\rho_2}{q_1 q_2}\right]\frac{T_{\rho 1}\omega(u+1)-T_{\rho 2}\omega(u+1)}{\rho_1-\rho 2}, \qquad (2.44)$$

Το σημείο εκκίνησης της αναδρομής είναι

$$\phi(0) = H(0) = \frac{\rho_1\rho_2\left[(1-q_1)(1-q_2)-\beta\right]+\beta\upsilon\rho_2}{\upsilon q_1 q_2(\rho_1-\rho_2)}\hat{\omega}(\rho_1)$$
$$+\frac{\rho_1\rho_2\left[(1-q_1)(1-q_2)-\beta\right]+\beta\upsilon\rho_1}{\upsilon q_1 q_2(\rho_2-\rho_1)}\hat{\omega}(\rho_2) \qquad (2.45)$$

Συγκεκριμένα, εάν $w(x,y)=1$, τότε από τις (2.34) και (2.35),

$$\phi_T(0) = 1-\frac{\rho_1\rho_2(1-\upsilon)\left[1-\upsilon(q_1q_2+\beta)\right]}{\upsilon^2 q_1q_2(1-\rho_1)(1-\rho_2)}, \qquad (2.46)$$

$$\Psi(0) = 1-\left[\frac{(1-q_1)(1-q_2)}{q_1 q}\right]\left[\frac{\rho_1(1)}{1-\rho_1(1)}\right]\left[E(W)-E(X)\right].$$

Όταν ισχύει $m=2$ δύο ειδικές περιπτώσεις είναι ιδιαίτερα σημαντικές, αυτές είναι:

- Εάν $\beta = -\left[\alpha q_2(1-q_1)+(1-\alpha)q_1(1-q_2)\right]$, $0<\alpha, q_1, q_2<1$, τότε η k είναι μία μίξη δύο μετατοπισμένων γεωμετρικών κατανομών με πυκνότητα $k(x) = \alpha(1-q_1)q_1^{x-1}+(1-\alpha)(1-q_2)q_2^{x-1}$, $x=1,2,......$
- Εάν $q_1=q_2=q$ και $\beta=(1-q)^2 q/(2-q)$, με $0<q<1$, τότε η k είναι μια αποκομμένη αρνητική διωνυμική κατανομή με συνάρτηση πιθανότητας $k(x) = \left\{(1-q)^2/\left[1-(1-q)^2\right]\right\}(x+1)q^x$, $x=1,2,......$

3. Εάν $\hat{k}(s) = s\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)/\left[\prod_{i=1}^{m}(1-sq_i)\right]$, *i.e.*, $\beta_i=0$, για $i=1,2,...m-1$ τότε η k είναι η κατανομή της συνέλιξης των m γεωμετρικών κατανομών, αλλά μετατοπισμένη προς τα δεξιά κατά 1. Επομένως

$$g(y) = \upsilon\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i(1-q_i)}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{\rho_j^{m-1}T_{\rho_j}p(y+1)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j-\rho_k)}$$
$$= \upsilon\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i(1-q_i)}{\upsilon q_i}\right]T_{\rho_m}T_{\rho_{m-1}}.....T_{\rho_1}p(y+1). \qquad (2.47)$$

$$H(u) = \upsilon\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i(1-q_i)}{\upsilon q_i}\right]T_{\rho_m}T_{\rho_{m-1}}......T_{\rho_1}\omega(u+1). \qquad (2.48)$$

Το σημείο εκκίνησης της αναδρομής $\phi(0)$δίνεται από

$$\phi(0)=H(0)=\upsilon\left[\prod_{i-1}^{m}\frac{\rho_i(1-q_i)}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{\rho_j^{m-2}T_{\rho j}\omega(1)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\rho_j-\rho_k\right)}$$

$$=\upsilon\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i(1-q_i)}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{\rho_j^{m-2}\hat{\omega}(\rho_j)}{\prod_{k=1,k\neq j}^{m}\left(\rho_j-\rho_k\right)}. \qquad (2.49)$$

Συγκεκριμένα, από την (2.34) και (2.35),

$$\phi_T(0)=1-\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{1-\rho_i}\right]\frac{\prod_{i=1}^{m}(1-\upsilon q_i)-\upsilon\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)}{\prod_{i=1}^{m}(\upsilon q_i)}, \qquad (2.50)$$

$$\Psi(0)=1-\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{1-q_i}{q_i}\right)\left[\prod_{i=1}^{m-1}\frac{\rho_i(1)}{1-\rho_i(1)}\right][E(W)-E(X)]. \qquad (2.51)$$

Παρατηρούμε ότι αυτές είναι οι διακριτές εκδοχές των αποτελεσμάτων στην γενικευμένη διαδικασία $Erlang(m)$ συνεχούς χρόνου, βλέπε Gerber και Shiu [7]

2.8 Αναλυτικές εκφράσεις για $g(y)$

Σε αυτήν την ενότητα, δείχνουμε ότι η g(y) μπορεί να ληφθεί αναλυτικά αναστρέφοντας την γεννήτρια συνάρτηση στην (2.27) όταν η κατανομή των μεγεθών απαίτησης έχει μια λογική γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων ή η κατανομή μεγεθών απαίτησης είναι πεπερασμένη (η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων είναι πολυωνυμική).

2.8.1 Κατανομή μεγεθών αξίωσης K_n

Υποθέτουμε ότι η $p(x)$ είναι K_n κατανεμημένη για x, $n \in N^+$ δηλαδή η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων της δίδεται από

$$\hat{p}(s)=\frac{E_n(s)}{\prod_{i=1}^{n}(1-sx_i)}, \qquad \Re(s)<\min\left\{\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},.....\frac{1}{\alpha_n}\right\}, \qquad (2.52)$$

όπου $E_n(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n με $E_n(0)=0,\ E_n(1)=\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)$, και

$0<\alpha_i<1,$ for $i=1,2,......,n.$ Σε αυτήν την περίπτωση, η $\hat{g}(s)$στην (2.27) απλοποιείται ως εξής

$$\hat{g}(s)=1-\frac{\left[\prod_{i=1}^{m}(s-\upsilon q_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}(1-s\alpha_i)\right]-E_n(s)B_{m-1}(s)}{\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{\upsilon q_i}{\rho_i}\right)\left[\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}(1-s\alpha_i)\right]},\qquad (2.53)$$

όπου $B_{m-1}(s)=\upsilon\left[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)+\sum_{j-1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(\upsilon-s)^j\right]$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $m-1$, με κύριο συντελεστή $B_{m-1}=\upsilon\left[\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)+\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\beta_j\right]$.

Για λόγους απλοποίησης, ορίζουμε την $E_{m,n}(s)=\left[\prod_{i=1}^{m}(s-\upsilon q_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}(1-s\alpha_i)\right]-E_n(s)B_{m-1}(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $n+m$ με κύριο συντελεστή $(-1)^n\left(\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right)$. Στη συνέχεια, είναι εύκολο να επαληθευτεί ότι οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg (2.8), $\rho_1,\rho_2,\ldots\ldots,\rho_m$, με $0<|\rho_i|<1$, είναι οι ρίζες m της εξίσωσης $E_{m,n}(s)=0$. Έστω $R_1,R_2,\ldots\ldots,R_n$ *με* $|R_i|>1$ είναι οι υπόλοιπες ρίζες n της $E_{m,n}(s)=0$. Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια σχέση μεταξύ των ριζών $\rho_1,\rho_2,\ldots\ldots,\rho_m$ *and* $R_1,R_2,\ldots\ldots R_n$, δηλαδή,

$$\left[\prod_{i=1}^{m}\rho_i\right]\left[\prod_{i=1}^{n}R_i\right]=\frac{\prod_{i=1}^{n}\upsilon q_i}{\prod_{i=1}^{n}\alpha_i}.\qquad (2.54)$$

Τώρα που η $E_{m,n}(s)$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $E_{m,n}(s)=\left[\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right]\left[\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}(R_i-s)\right]$,

τότε η (2.53) μαζί με την (2.54) δίνουν

$$\hat{g}(s)=1-\frac{\prod_{i=1}^{n}(1-s/R_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i s)}=\frac{sQ_{n-1}(s)}{\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i s)},\qquad (2.55)$$

όπου $Q_{n-1}(s)=\left[\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i s)-\prod_{i=1}^{n}(1-s/R_i)\right]/s$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n-1.

Επιπλέον, εάν τα $\alpha_1,\alpha_2,\ldots\ldots\alpha_n$ είναι διαφορετικά, τότε η $g(y)$ μπορεί να ληφθεί με μερικά κλάσματα ως εξής

$$g(y)=\sum_{i=1}^{n}z_i\alpha_i^{y-1},\qquad y\in N^+\qquad (2.56)$$

όπου ο συντελεστής $z_i=\left[\prod_{j=1}^{n}(1/R_j-\alpha_i)\right]/\left[\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\alpha_j-\alpha_i)\right]$, $i=1,2,\ldots..,n.$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.1. Σε αυτό το παράδειγμα, υποθέτουμε ότι οι χρόνοι αναμονής των απαιτήσεων ακολουθούν μια μετατοπισμένη αρνητική διωνυμική κατανομή $k(x)=x(1|-q)^2 q^{x-1},\ x\in \mathrm{N}^+$, και $\hat{k}(s)=s(1-q)^2/(1-sq)^2$. Τα ποσά των απαιτήσεων είναι μια μείξη δύο γεωμετρικών κατανομών με

$p(x)=\vartheta(1-\alpha_1)\alpha_1^{x-1}+(1-\vartheta)(1-\alpha_2)\alpha_2^{x-1},\ x\in \mathrm{N}^+, 0<\vartheta,\alpha_{1,}\ ,\alpha_2<1.$

Τότε $\hat{p}(s)=s[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)+\beta(1-s)]/[(1-s\alpha_1)(1=s\alpha_2)]$,

με $\beta=\vartheta\alpha_2(1-\alpha_1)+(1-\vartheta)\alpha_1(1-\alpha_2)$. Η εξίσωση

$E_{2,2}(s)=(s-\upsilon q)^2(1-s\alpha_1)(1-s\alpha_2)-\upsilon(1-q)^2 s^2[(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)+\beta(1-s)]=0$

Έχει δύο ρίζες, έστω $\rho_1,\rho_2\ \mu\varepsilon\ |\rho_i|<1$, και δύο ρίζες, έστω R_1,R_2 με $|R_i|>1$.

Η (2.55) δίνει

$$\hat{g}(s)=\frac{s\left[\left(\alpha_1\alpha_2-\dfrac{1}{R_1R_2}\right)s+\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2}-(\alpha_1+\alpha_2)\right]}{(1-s\alpha_1)(1-s\alpha_2)}$$

Αντιστρέφοντας έχουμε

$$g(y)=\varsigma_1\alpha_1^{y-1}+\varsigma_2\alpha_2^{y-1},\qquad y\in \mathrm{N}^+, \qquad (2.57)$$

όπου

$$\varsigma_1=\frac{(R_1R_2\alpha_1\alpha_2-1)+\alpha_1[R_1+R_2-R_1R_2(\alpha_1+\alpha_2)]}{R_1R_2(\alpha_1-\alpha_2)},$$

$$\varsigma_2=\frac{(R_1R_2\alpha_1\alpha_2-1)+\alpha_2[R_1+R_2-R_1R_2(\alpha_1+\alpha_2)]}{R_1R_2(\alpha_2-\alpha_1)}.$$

Στη συνέχεια, η συνάρτηση Gerber-Shiu ϕ μπορεί να υπολογιστεί αναδρομικά από την (2.36). Έάν θέτοντας $u=1$ και $w(x,y)$ να γίνει $xy, x\ \kappa\alpha\iota\ y$, αντίστοιχα, τότε η $\phi(u)$ απλοποιείται στις από κοινού και οριακές ροπές των $U(T-1)$. και $|U(T)|$.

Τώρα έστω $q=1/3, \vartheta=0.6, \alpha_1=1/2, \alpha_2=1/3, u=1,$ τότε $E(W)=2>E(X)=1.8$ που σημαίνει ισχύει η συνθήκη του καθαρού κέρδους. Η εξίσωση $E_{2,2}(s)=0$ έχει τέσσερις ρίζες, $\rho_1=1,\ \rho_2=0.2183,\ R_1=1.1344\ \ \kappa\alpha\iota R_2=2.6917.$Τότε

$$g(y)=0.2941\alpha_1^{y-1}+0.1256\alpha_2^{y-1},\qquad y\in \mathrm{N}^+.$$

Ο Πίνακας 2.1 δίνει τις από κοινού και οριακές ροπές του πλεονάσματος πριν από την χρεωκοπία και το έλλειμμα στην χρεοκοπία, μαζί με τη μέση τιμή του ποσού των απαιτήσεων που προκαλεί τη χρεοκοπία. Φαίνεται ότι: (i) η από κοινού ροπή με δεδομένη την χρεωκοπία αυξάνεται όσο αυξάνεται το u, (ii) οι δύο πρώτες ροπές των $U(T-1)$ και $|U(T)|$ αυξάνονται όσο αυξάνεται το u ενώ το αποτέλεσμα του u στις δύο πρώτες ροπές του $U(T-1)$ είναι μεγαλύτερο από αυτήν στο $|U(T)|$ (iii) η των απαιτήσεων που προκαλεί χρεοκοπία αυξάνεται όσο αυξάνεται *το* u και είναι μεγαλύτερη από την μέση τιμή του ποσού των απαιτήσεων r.v.'s, (iv) το αποτέλεσμα του u σε όλες αυτές τις ποσότητες είναι μεγαλύτερο για μικρό u, και μικρότερο για μεγάλες αρχικές πλεονασματικές τιμές u .

Πίνακας 2.1. Ροπές για το πλεόνασμα πριν από την χρεωκοπία και το έλλειμμα στην χρεωκοπία για διαφορετικά *u*.

u	A	B	C	D	E	F
0	1.9107	0.9904	1.8784	2.8557	5.2716	3.8688
1	2.95803	1.53196	1.89591	4.53027	5.37623	4.4279
2	3.53798	1.82529	1.90329	6.02392	5.42065	4.7286
3	3.86556	1.98875	1.90645	7.17367	5.43939	4.8952
4	4.05238	2.08156	1.90785	8.00108	5.44744	4.9894
5	4.15964	2.13462	1.90838	8.57300	5.45077	5.0430
6	4.22144	2.16502	1.90862	8.95754	5.45238	5.0736
7	4.25669	2.18245	1.90879	9.21084	5.45301	5.0912
8	4.27691	2.19274	1.90889	9.37486	5.45347	5.1016
9	4.28879	2.19854	1.90913	9.48004	5.45368	5.1077
10	4.29552	2.20187	1.90917	9.54631	5.45399	5.1110
11	4.29957	2.20366	1.90942	9.58805	5.45424	5.1131
12	4.30171	2.20491	1.90932	9.61360	5.45411	5.1142
13	4.30269	2.20535	1.90935	9.62939	5.45403	5.1147
14	4.30409	2.20612	1.90966	9.63979	5.45443	5.1158
15	4.30447	2.20586	1.90899	9.64538	5.45502	5.1149

A: από κοινού ροπές για τα $U(T\text{-}1)$ και $U(T)$; με δεδομένη την εμφάνιση χρεωκοπίας
B: μέσος όρος του $U(T\text{-}1)$; με δεδομένη την εμφάνιση χρεωκοπίας.
C: μέσος όρος του $|U(T)|$, με δεδομένη την εμφάνιση χρεωκοπίας.
D: δεύτερη ροπή του $U(T\text{-}1)$ σχετικά με την προέλευση, με δεδομένη την εμφάνιση χρεωκοπίας.

E: δεύτερη ροπή του $|U(T)|$ σχετικά με την προέλευση, με δεδομένη την εμφάνιση χρεωκοπίας.
F: μέσος όρος του ποσού της αξίωσης που προκαλεί την χρεωκοπία, με δεδομένη την εμφάνιση χρεωκοπίας.

Ο Πίνακας 2.2 δίνει τις συνδιακυμάνσεις και τους συντελεστές συσχέτισης του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και το έλλειμμα μόλις συμβεί η χρεοκοπία, δεδομένης της εμφάνισης της χρεοκοπίας, για διαφορετικό αρχικό πλεόνασμα u. Μπορεί να φανεί ότι η συν διακύμανση αυξάνεται όσο αυξάνεται το u και οι δύο τυχαίες μεταβλητές είναι θετικά συσχετισμένες, ενώ ο μικρότερος συντελεστής συσχέτισης σημαίνει ότι είναι ασθενώς συσχετισμένες.

Εδώ παρουσιάζω ένα πίνακα για την φ(u) όπου έκανα στο mathematica για το παραπάνω παράδειγμα κατά αντιστοιχία μέχρι την στήλη C όπως στο προηγούμενο παράδειγμα

u	A	B	C
0	1.48377	0.769123	1.45874
1	1.30502	0.679639	1.00046
2	2.12982	1.01237	1.05231
3	2.68765	1.38275	1.0102
4	2.93801	1.50522	0.931696
5	2.95875	1.51172	0.842149
6	2.83614	1.44657	0.75298
7	2.63641	1.34325	0.669172
8	2.40358	1.22381	0.592638
9	2.16434	1.10154	0.523817
10	1.9336	0.983857	0.46246
11	1.71881	0.874435	0.408023
12	1.52306	0.774773	0.359858
13	1.34692	0.685131	0.317311
14	1.18967	0.605125	0.279759
15	1.04998	0.534058	0.246634

2.8.2 Πεπερασμένες κατανομές μεγεθών των απαιτήσεων

Σε αυτήν την ενότητα, υποθέτουμε ότι η κατανομή των μεγεθών των απαιτήσεων είναι πεπερασμένη, δηλαδή για N=2, 3, . . . ,

$$p(n) = P(X| = n) = p_n, \quad n = 1,2,......N. \qquad (2.58)$$

Πίνακας 2.2 Συνδιακύμανση και συντελεστής συσχέτισης μεταξύ του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία και του ελλείμματος στην χρεοκοπία για διαφορετικά u.

u	0	1	2	3	4	5	6	7
G	0.05036	0.05356	0.06391	0.07411	0.08109	0.08599	0.08921	0.09085
H	0.02785	0.02716	0.02905	0.03075	0.03149	0.03189	0.03209	0.03202
u	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
G	0.09121	0.09151	0.09173	0.09185	0.09189	0.09192	0.09216	0.09349
H	0.03173	0.03156	0.03148	0.03139	0.03132	0.03131	0.03104	0.03178

Το G συμβολίζει την συνδιακύμανση και το H τον συντελεστή συσχέτισης

Τότε

$$\hat{p}(s) = D_N(s) = p_1 s + p\ s^2 + ... + P_N s^N, \quad s \in C, \qquad (2.59)$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού N. Για παράδειγμα, η διωνυμική κατανομή, η διακριτή ομοιόμορφη και η υπερ-γεωμετρική κατανομή είναι πεπερασμένες. Ορίζουμε την $V(s) = D_N(s) B_{m-1}(s) - \prod_{i=1}^{m}(s - \upsilon q_i)$ ως ένα πολυώνυμο βαθμού $N + m - 1$,

με κύριο συντελεστή $V_{N+m-1} = P_N B_{m-1}$, όπου $B_{m-1} = \upsilon\left[\prod_{i=1}^{m}(1 - q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j \beta_j\right]$ είναι ο κύριος συντελεστής του πολυωνύμου $B_{m-1}(s)$. Από όλες τις ρίζες $N + m - 1$, της εξίσωσης $V(s) = 0$, $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ είναι m ρίζες με $0 < |\rho_i| < 1$. Έστω $R_1, R_2, ... R_{N-1}$ με $|R_i| > 1$, να είναι οι υπόλοιπες ρίζες $N - 1$. Επομένως, η $V(s)$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $V(s) = V_{N+m-1}\left[\prod_{i=1}^{m}(s - \rho_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{N-1}(s - R_i)\right]$

Θέτοντας $s = 0$ έχουμε

$$(-1)^N V_{N+m-1}\left(\prod_{i=1}^{m} \rho_i\right)\left(\prod_{i=1}^{N-1} R_i\right) = \prod_{i=1}^{m}(\upsilon q_i). \qquad (2.60)$$

Τότε η $\hat{g}(s)$ απλοποιείται σε

$$\hat{g}(s) = 1 + V_{N+m-1}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right)\prod_{i=1}^{N-1}(s - R_i) = 1 - \prod_{i=1}^{N-1}\frac{R_i - s}{R_i}. \qquad (2.61)$$

Απομονώνοντας τον συντελεστή s^n δίνεται η $g(n), για\ n = 1,2,...N-1$, Π.χ.,

$$g(1) = \left[\sum_{i=1}^{N-1}\frac{1}{R_i}\right],$$

$$g(2) = -\sum_{1\le i\le j\le N-1}\frac{1}{R_i R_j},$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$g(N-2) = (-1)^{N-3}\left[\prod_{i=1}^{N-1}\frac{1}{R_i}\right]\sum_{i=1}^{N-1}R_i,$$

$$g(N-1) = (-1)^{N-2}\prod_{i=1}^{N-1}\frac{1}{R_i}.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.2 Σε αυτό το παράδειγμα, υποθέτουμε ότι οι χρόνοι αναμονής των απαιτήσεων είναι K_m κατανεμημένοι με $\hat{k}(s)$ που δίνεται από την (2.9), και τα σταθερά ποσά απαιτήσεων 2, δηλαδή, $P(X=2)=1$ με $\hat{p}(s) = s^2$. Τότε $V(s) = s^2 B_{m-1}(s) - \prod_{i=1}^{m}(s - \upsilon q_i)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $m+1$ με κύριο συντελεστή $V_{m+1} = B_{m-1} = \upsilon\left[\prod_{i=1}^{m}(1 - q_i) + \sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j \beta_j\right]$. Μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $V(s) = V_{m+1}(s-R)\prod_{i=1}^{m}(s - \rho_i)$, όπου $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ με τα $|\rho_i| < 1$. και $R > 1$ να είναι $m+1$ ρίζες της εξίσωσης $V(s) = 0$.

Σε αυτήν την περίπτωση, η $\hat{g}(s) = s/R$ δίνει $g(1) = 1/R\ και\ g(i) = 0, για\ i = 2,3,...$
Τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu $\phi(u)$ εισάγει έναν απλό αναδρομικό τύπο:

$$\phi(u) = \phi(u-1)g(1) + H(u) = \frac{\phi(u-1)}{R} + H(u), \qquad u \in \mathrm{N}^+ \qquad (2.62)$$

όπου η τιμή εκκίνησης για την αναδρομή είναι $H(0) = w(0,1)\left[\prod_{i=1}^{m}\rho_i/(\upsilon q_i)\right]\sum_{j=1}^{m} b_j$. Εφόσον $H(i) = 0,\ i = 1,2,......,$ τότε η $\phi(u)$ μπορεί επίσης να αποκτηθεί αναλυτικά ως εξής:

$$\phi(u) = H(0)R^u, \qquad u \in \mathrm{N}.$$

Ειδικότερα, εάν $w(x,,y) = 1$ τότε η $\phi_T(u)$ δίνεται αναδρομικά από

$$\phi_T(u) = \frac{\phi_T(u-1)}{R} + H(0), \quad u \in N^+,$$

όπου $H(0) = \phi_T(0) = \hat{g}(1) = 1/R$, με (2.61). Επομένως, η $\phi_T(u)$ μπορεί επίσης να δοθεί αναλυτικά από την $\phi_T(u)\Big| = \frac{1}{R^{u+1}}, \quad u \in N.$

2.9 Τελικές παρατηρήσεις

Τα παραπάνω αποτελέσματα απεικονίζουν περαιτέρω την χρησιμότητα της συνάρτησης Gerber-Shiu σε διακριτά μοντέλα κινδύνου Sparre Andersen και επιτρέπουν μια καλύτερη κατανόηση των αναλόγων τους στα μοντέλα κινδύνου συνεχούς χρόνου. Τα αποτελέσματα και οι μέθοδοι ενέχουν επίσης ανεξάρτητα ενδιαφέροντα. Συμπληρώνουν ένα κενό στην περιορισμένη βιβλιογραφία στα μοντέλα κινδύνου διακριτού χρόνου.

Οι τύποι μας είναι άμεσα προγραμματιζόμενοι στην πράξη, ενώ μπορούν να αναπαράγουν τις συνεχείς εκδόσεις ως οριακές περιπτώσεις.

Κατανομές του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία, το έλλειμμα τη στιγμή αμέσως μετά τη χρεοκοπία και η απαίτηση που προκαλεί τη χρεοκοπία σε μία τάξη διακριτού χρόνου μοντέλων κινδύνου

3.1. Εισαγωγή

Τα προβλήματα που σχετίζονται με τον υπολογισμό των πιθανοτήτων χρεοκοπίας και των ποσοτήτων που σχετίζονται με την χρεοκοπία, για τα κλασικά μοντέλα κινδύνου συνεχούς χρόνου ή για τα μοντέλα κινδύνου Sparre Andersen, έχουν λάβει σημαντική προσοχή τα τελευταία χρόνια [1-14]. Οι αναφορές περιλαμβάνουν μελέτες για τις από κοινού και οριακές κατανομές του χρόνου χρεοκοπίας (πιθανότητες χρεοκοπίας πεπερασμένου χρόνου), το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία, το έλλειμμα κατά την χρεωκοπία, η απαίτηση που προκαλεί την χρεοκοπία, καθώς και τις ροπές αυτών των μεταβλητών.

Εξετάζουμε ανάλογα προβλήματα, αλλά σε μια τάξη διακριτού χρόνου μοντέλων κινδύνου Sparre Andersen στην οποία οι ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης των απαιτήσεων έχουν μια διακριτή κατανομή K_m, δηλ. η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων (p.g.f.) της συνάρτησης κατανομής είναι μια αναλογία δύο πολυωνυμικών τάξης το πολύ $m \in \mathbb{N}^{+}$ με ορισμένες προϋποθέσεις. Το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο κινδύνου, που συστάθηκε για πρώτη φορά από τον Gerber [15] ως διακριτό ανάλογο του κλασικού σύνθετου μοντέλου κινδύνου Poisson, είναι μια ειδική περίπτωση όταν $m = 1$.

Ο Li [16] δίνει έναν αναδρομικό τύπο για την αναμενόμενη προ εξοφλημένη συνάρτηση ποινής Gerber-Shiu λόγω της χρεοκοπίας για το πλεόνασμα πριν την χρεοκοπία και το έλλειμμα τη στιγμή μετά τη χρεοκοπία, χρησιμοποιώντας το εργαλείο των γεννητριών συναρτήσεων. Αυτό το άρθρο δείχνει ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu μπορεί να εκφραστεί αναλυτικά σε όρους μιας σύνθετης γεωμετρικής συνάρτησης κατανομής που έχει κλειστές εκφράσεις παρά σαν συνέλιξη τύπων δύο κλάσεων κατανομών μεγεθών των απαιτήσεων. Έπειτα αναλυτικές εκφράσεις για την γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων p.g.f. του χρόνου χρεοκοπίας, οι από κοινού και οριακές κατανομές του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία, το έλλειμμα την στιγμή αμέσως μετά τη χρεοκοπία και η απαίτηση που προκαλεί τη χρεοκοπία μπορούν να επιτευχθούν με την κατάλληλη επιλογή συναρτήσεων ποινής. Αυτά τα αποτελέσματα επεκτείνουν τα ήδη υπάρχοντα που έχουν βρεθεί για το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο κινδύνου στη βιβλιογραφία, π.χ., [15, 17-23].

Αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να δώσουν μια καλύτερη κατανόηση των ανάλογων τους στο συνεχές μοντέλο χρόνου και είναι επίσης ανεξάρτητου ενδιαφέροντος. Συμπληρώνουν ένα κενό στη λιγοστή βιβλιογραφία στα μοντέλα διακριτού χρόνου της θεωρίας κινδύνου. Οι τύποι μας είναι εύκολα προγραμματισμένη στην πράξη, ενώ μπορούν ακόμη να αναπαράγουν τις συνεχείς εκδοχές ως οριακές περιπτώσεις.

3.2. Περιγραφή μοντέλου και συμβολισμός

Αναλογιστείτε μια διακριτή διαδικασία πλεονάσματος χρόνου Sparre Andersen όπως έχει οριστεί σύμφωνα με τον τύπο στο αντίστοιχο 2ο κεφάλαιο .

$$U(n) = u + n - \sum_{t-1}^{N(n)} X_i, \quad n = 1,2,.....,$$

Τώρα ορίστε (την ενδεχομένως ελλειμματική) τυχαία μεταβλητή $T = \min\{n \in \mathrm{n}N^+ : U(n) < 0\}$ να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας και

$$\Psi(u) = P\big(T < \infty \big| U(0) = u\big), \quad u \in N,$$

να είναι πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρονικό διάστημα. θέτω $w(x,y), x, y = 0,1,2,K$ να είναι η μη αρνητικές τιμές μιας συνάρτησης ποινής. Για $0 < \upsilon < 1$, ορίζουμε

$$\phi(u) = E\Big[\upsilon^T w\big(U(T-1), |U(T)|\big) I(T<\infty) \big| U(0) = u\Big], \; u \in N. \qquad (3.1)$$

Η ποσότητα $w\big(U(T-1), |U(T)|\big)$ μπορεί να ερμηνευτεί ως η ποινή κατά το χρόνο χρεοκοπίας για το πλεόνασμα $U(T-1)$ και το έλλειμμα $|U(T)|$. Τότε $\phi(u)$ είναι η αναμενόμενη προ εξοφλημένη συνάρτηση ποινής Gerber-Shiu εάν υ θεωρείται ως ένας προεξοφλητικός παράγοντας.

Όπως στον Li $[16]$, υποθέτουμε πως οι απαιτήσεις των ενδιάμεσων χρόνων έχουν μια διακριτή K_m κατανομή, π.χ.,η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων του είναι $k(x), x \in N^+$ μπορεί να εκφραστεί ως

$$\hat{k}(s) = \frac{s\left[\Pi_{i=1}^m (1-q_i) + \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j (s-1)^j\right]}{\Pi_{i=1}^m (1 - sq_i)}, \; \Re(s) < \min\{1/q_i : 1 \le i \le m\}, \qquad (3.2)$$

όπου $0 < q_i < 1$, για $i = 1,2,K,m,$ και οι συντελεστές $\beta_1, \beta_2, K, \beta_{m-1}$ είναι τέτοιοι όπου $k(x), x \in N^+$ είναι μία συνάρτηση πιθανότητας. Αυτή η τάξη κατανομών περιέχει, σαν ειδικές περιπτώσεις, τη μετατοπισμένη γεωμετρική, μετατοπισμένη ή τροποποιημένη αρνητική διωνυμική, καθώς και γραμμικούς συνδυασμούς αυτών (συμπεριλαμβανομένων μιγμάτων).

Αφήστε $\rho_1, \rho_2, K, \rho_m$ να είναι όλες οι ρίζες εντός της μονάδας του κύκλου του πολύπλοκου επιπέδου της ακόλουθης Γενικευμένης εξίσωσης Lundberg:

$$\gamma(s) := \frac{1}{\hat{k}(u/s)}$$

$$= \frac{\Pi_{i=1}^m (s - \upsilon q_i)}{\upsilon\left[s^{m-1}\Pi_{i=1}^m (1-q_i) + \sum_{j=1}^{m-1} \beta_j s^{m-1-j} (\upsilon - s)^j\right]} = \hat{p}(s), \qquad s \in C. (3.3)$$

Η απόδειξη της ύπαρξης των ριζών m μπορεί να βρεθεί στον Li [16]. Εάν $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_m$ είναι διαφορετικές, ο Li [16] δείχνει ότι

$$\phi(0) = \left[\prod_{i-1}^{m} \frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right] \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{x=0}^{\infty} \sum_{y=1}^{\infty} \rho_j^x w(x,y)\, p(x+y+1)$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right] \sum_{j=1}^{m} b_j T_{\rho_j} \omega(1), \qquad (3.4)$$

όπου $b_j = \upsilon\left[\rho_j^{m-1} \Pi_{i=1}^{m}(1-q_i) + \sum_{t=1}^{m-1} \beta_t \rho_j^{m-1-t} (\upsilon - \rho_j)^t\right] / \Pi_{k=1,k\neq j}^{m}(\rho_j - \rho_k)$,

$\omega(y) = \sum_{x=y+1}^{\infty} w(y-1, x-y)\, p(x)$, και T_r είναι ένας τελεστής σε μια συνάρτηση αληθινών τιμών με δικαίωμα να γίνεται στο σύνολο των θετικών ακεραίων N^+ έτσι ώστε

$$T_r f(y) = \sum_{x=y}^{\infty} r^{x-y} f(x) = \sum_{x=0}^{\infty} r^x f(x+y), \qquad r \in \mathrm{N}^+, \quad y \in \mathrm{N}^+, \quad (3.5)$$

Για οποιαδήποτε αληθινή συνάρτηση f. Ο τελεστής T_r έχει πολλές καλές ιδιότητες οι οποίες δίνονται στον Li [16]. Η συνεχής έκδοση αυτού του τελεστή πρώτο συστήθηκε στους Dickson και Hipp [2] και οι ιδιότητές του δίνονται στους Li και Garrido [12].

Για, $u \in \mathrm{N}^+$ ο Li [16] δείχνει ότι η συνάρτηση Gerber-Shiu δίνεται αναδρομικά από την ακόλουθη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση

$$\phi(u) = \sum_{y=1}^{u} \phi(u-y)\, g(y) + H(u) \qquad (3.6)$$

όπου

$$g(y) = \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right] \sum_{j=1}^{m} b_j T_{\rho_j} p(y+1), \qquad y \in \mathrm{N}^+,$$

$$H(u) = \left[\prod_{i=1}^{m} \frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right] \sum_{j=1}^{m} b_j T_{\rho_j} \omega(u+1), \qquad u \in \mathrm{N}^{+} \quad .$$

Συγκεκριμένα, εάν $w(x, y) = 1$, τότε $\phi(u)$ απλοποιείται από τη γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων p.g.f. της στιγμής της χρεοκοπίας, η οποία τώρα καθορίζεται από

$\phi_T(u) := E\left[\upsilon^T I(T < \infty) \middle| U(0) = u\right]$. Τότε η $\phi_T(u)$ δίνεται αναδρομικά από

$$\phi_T(u) = \sum_{y=1}^{u} \phi_T(u-y) g(y) + \sum_{y=u+1}^{\infty} g(y), \qquad u \in \mathrm{N}^{+} \qquad (3.7)$$

όπου το αρχικό σημείο της παραπάνω αναδρομής είναι

$$\phi_T(0) = 1 - \left[1 - \hat{k}(\upsilon)\right] \prod_{i=1}^{m} \left[\frac{\rho_i(1-\upsilon q_i)}{\upsilon q_i(1-\rho_i)}\right]. \qquad (3.8)$$

Η πιθανότητα καταστροφής $\Psi(u)$ μπορεί να επιτευχθεί με τη λήψη περιορισμών $\phi_T(u)$ όταν υ πηγαίνει στο 1, π.χ.

$$\Psi(u) = \sum_{y=1}^{u} \Psi(u-y) g_1(y) + \sum_{y=u+1}^{\infty} g_1(y), \qquad u \in \mathrm{N}^{+}, \qquad (3.9)$$

όπου $g_1(y) = \lim_{\upsilon \to 1 - g(y)}$. Το αρχικό σημείο της αναδρομής (3.9) δίνεται με

$$\Psi(0) = \lim_{\upsilon \to 1^-} \phi_T(0) = 1 - \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1-q_i}{q_i}\right) \left[\prod_{i=1}^{m-1} \frac{\rho_i(1)}{1-\rho_i(1)}\right] \left[E(W) - E(X)\right], \qquad (3.10)$$

όπου $\rho_i(1)$ είναι το όριο του ρ_i όταν $\upsilon \to 1^-$ για $i = 1, 2, \ldots, m-1$, που μπορεί να ληφθεί λύνοντας την εξίσωση $\hat{k}(1/s)\hat{p}(s) = 1$. Οι λεπτομερείς παραλλαγές των παραπάνω αποτελεσμάτων δίνονται στον Li $[16]$.

3.3 Αναλυτική έκφραση για $\phi(u)$

Σε αυτή την ενότητα, δείχνουμε ότι $\phi(u)$ μπορεί επίσης να εκφραστεί αναλυτικά υπό όρους μιας αθροιστικής γεωμετρικής συνάρτησης κατανομής. Πρώτα ξαναγράφουμε την (3.6) ως

$$\phi(u) = \frac{1}{1+\xi_\upsilon} \sum_{y=1}^{u} \phi(u-y) l(y) + H(u), \quad u \in \mathrm{N}^+ \quad , \qquad (3.11)$$

όπου ξ_υ είναι τέτοιο ώστε $1/(1+\xi_\upsilon) = \phi_T(0)$, $l(y) = (1+\xi_\upsilon) g(y)$ είναι μια κατάλληλη συνάρτηση κατανομής , και $\phi(0) = H(0)$. Συγκεκριμένα, η εξίσωση (3.7) γίνεται

$$\phi_T(u) = \frac{1}{1+\xi_\upsilon} \sum_{y=1}^{u} \phi_T(u-y) l(y) + \frac{1}{1+\xi_\upsilon} \bar{L}(u), \quad u \in \mathrm{N}^+, \quad (3.12)$$

όπου $\bar{L}(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty} l(y)$ είναι η ουρά του l. Τώρα καθορίζουμε μια σύνθετη γεωμετρική συνάρτηση κατανομής από

$$a(u) = \left(\frac{\xi_\upsilon}{1+\xi_\upsilon}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+\xi_\upsilon}\right)^n l^{*n}(u), \qquad u \in \mathrm{N} \ , \qquad (3.13)$$

με $a(0) = \xi_\upsilon / (1+\xi_\upsilon)$, όπου * υποδηλώνει τη συνέλιξη. Τότε είναι εύκολο να δείξουμε, χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις, ότι $\phi_T(u)$ μπορεί να εκφραστεί ως η ουρά της σύνθετης γεωμετρικής συνάρτησης κατανομής $a(u)$ ως ακολούθως:

$$\phi_T(u) = \bar{A}(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty} a(y) = \left(\frac{\xi_\upsilon}{1+\xi_\upsilon}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\xi_\upsilon}\right)^n \bar{L}^{*n}(u), \quad u \in N \quad . \tag{3.14}$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ.

1. Δεδομένου ότι η $l(y)$ υποστηρίζεται στο N^+, τότε $l^{*n}(u)=0$, εάν $n>u$, επομένως το $a(u)$ μπορεί να εκφραστεί ως ένα πεπερασμένο άθροισμα από

$$a(u) = \left(\frac{\xi_\upsilon}{1+\xi_\upsilon}\right)\sum_{n=0}^{u}\left(\frac{1}{1+\xi_\upsilon}\right)^n l^{*n}(u), \quad u \in \mathrm{N}\,.$$

2. $L^{*n}(u)=0$,εάν $n>u$ τότε $\Phi_T(u)$ μπορεί να εκφραστεί σαν το άθροισμα πεπερασμένων όρων από

$$\phi_T(u) = 1-\left(\frac{\xi_\upsilon}{1+\xi_\upsilon}\right)\sum_{n=0}^{u}\left(\frac{1}{1+\xi_\upsilon}\right)^n L^{*n}(u), \quad u \in \mathrm{N}\,. \tag{3.15}$$

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει ότι, για γενικά $w(x,y)$, η συνάρτηση Gerber-Shiu $\phi(u)$ μπορεί να εκφραστεί αναλυτικά όσον αφορά την σύνθετη γεωμετρική συνάρτηση κατανομής $a(u)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.1.

$$\phi(u) = \left(\frac{1+\xi_\upsilon}{\xi_\upsilon}\right)\sum_{y=0}^{u} H(u-y)\,a(y), \quad u \in \mathrm{N} \quad . \tag{3.16}$$

Απόδειξη. Θέτω $\hat{\phi}(s)=\sum_{u=0}^{\infty}s^u\phi(u)$, $\hat{l}(s)=\sum_{y=1}^{\infty}s^y l(y)$, $\hat{a}(s)=\sum_{y=0}^{\infty}s^y a(y)$ και $\hat{H}(s)=\sum_{u=0}^{\infty}s^u H(u)$ να είναι οι γεννήτριες συναρτήσεις των $\phi, l, z,$ και H, αντίστοιχα. Μετά πολλαπλασιάζοντας s^u και στις δύο πλευρές της (3.11) και αθροίζοντας το u από 0 έως ∞ δίνεται

$$\hat{\phi}(s) = \frac{(1+\xi_\upsilon)\hat{H}(s)}{\left[1+\xi_\upsilon - \hat{l}(s)\right]}, \quad |\Re(s)| < 1. \tag{3.17}$$

Τώρα $\hat{a}(s) = \xi_\upsilon / \left[1+\xi_\upsilon - \hat{l}(s)\right]$ συνεπάγεται ότι $\hat{\phi}(s) = \hat{a}(s)\hat{H}(s)(1+\xi_\upsilon)/\xi_\upsilon$. Η αντιστροφή δίνει την (16).

3.4 Κατανομές του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία, το έλλειμμα την την στιγμή αμέσως μετά την χρεοκοπίας και η απαίτηση που προκαλεί τη χρεοκοπία

Σε αυτή την ενότητα, εξετάζουμε τις προ εξοφλημένες από κοινού και οριακές κατανομές του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία $U(T-1)$, το έλλειμμα τη στιγμή αμέσως μετά τη χρεοκοπία $|U(T)|$, και την απαίτηση που προκαλεί την χρεοκοπία $Z = U(T-1) + |U(T)| + 1$.

Υποδηλώνεται από $f_3(x,y,t|u) = P\{U(T-1) = x, |U(T)| = y, T = t | U(0) = u\}$, $x \in \mathrm{N}$, $y \in \mathrm{N}^+$, η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του πλεονάσματος λίγο πριν την χρεοκοπία ,το έλλειμμα τη στιγμή αμέσως μετά τη χρεοκοπία και ο χρόνος χρεοκοπίας. Θέτω το $\upsilon \in (0,1)$ να είναι (συνεχής) προεξοφλητικός παράγοντας για μια περίοδο και ορίζω $f_2(x,y|u) = \sum_{t=1}^{\infty} \upsilon^t f_3(x,y,t|u)$ ως μία προ εξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-1)$ και $|U(T)|$. Ομοίως, υποδηλώνεται από $f_1(x|u) = \sum_{y=1}^{\infty} f_2(x,y|u)$ την προ εξοφλημένη οριακή συνάρτηση κατανομής του $U(T-1)$ και από $g(y|u) = \sum_{x=0}^{\infty} f_2(x,y|u)$ την προ εξοφλημένη οριακή συνάρτηση κατανομής του $|U(T)|$. Οι συνήθεις δεσμευμένους τύπους πιθανοτήτων δίνεται η ακόλουθη σχέση:

$$f_2(x,y|u) = f_1(x|u)\frac{p(x+y+1)}{\hat{P}(x+1)}, \quad x \in \mathrm{N}^+, \quad y \in \mathrm{N}^+. \tag{3.18}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.2. Για $x \in \mathrm{N}, y \in \mathrm{N}^+$, και $u \in \mathrm{N}^+$:

$$f_2(x,y|u) = \sum_{z=1}^{u} f_2(x,y|u-z)g(z) + I(u \le x) f_2(x-u, y+u|0), \tag{3.19}$$

$$f_1(x|u) = \sum_{z=1}^{u} f_1(x|u-z)g(z) + I(u \le x)\sum_{l=u+1}^{\infty} f_2(x-u, l|0), \tag{3.20}$$

$$g(y|u) = \sum_{z=1}^{u} g(y|u-z)g(z) + g(y+u|0), \tag{3.21}$$

όπου τα αρχικά σημεία

$$f_2(x,y|0) = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j \rho_j^x p(x+y+1), \quad x \in \mathrm{N}, \quad y \in \mathrm{N}^+,$$

$$f_1(x|0) = \sum_{y=1}^{\infty} f_2(x,y|0) = \left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m} b_j b_j^x \bar{P}(x+1), \quad x \in \mathrm{N},$$

και $g(y|0) = g(y)$.

Απόδειξη. Θέτοντας $w(x_1,x_2) = I(x_1 = x, y_1 = y)$, $w(x_1,x_2) = I(x_1 = x, y_1 = y)$ και $w(x_1,x_2) = I(y_1 = y)$, αντίστοιχα, στις (3.6) και (3.4) δίνονται οι παρακάτω αναδρομικούς τύποι και τα αρχικά τους σημεία.

Αφήστε $h(z|u), z=2,3,\ldots$, να είναι η προεξοφλημένη πιθανότητα κατανομής του Z, τότε έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.3. Για $u \in \mathbb{N}^{+}$ και $z=2,3,\ldots$,

$$h(z|u)=\sum_{y=1}^{u} h(z|u-y)g(y)+I(z \geq u+2)p(z)M(u), \qquad (3.22)$$

Όπου

$$M(u)=\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j\left(1-\rho_j^{z-u-1}\right)}{\left(1-\rho_j\right)}. \qquad (3.23)$$

Ενώ το σημείο εκκίνησης δίνεται από

$$h(z|0)=p(z)M(0)=p(z)\left[\prod_{i=1}^{m}\frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right]\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j\left(1-\rho_j^{z-1}\right)}{\left(1-\rho_j\right)}. \qquad (3.24)$$

Απόδειξη. Εάν θέσουμε $w(x,y)=I(x+y+1=z)$, τότε $\phi(u)$ απλοποιεί το $h(z|u)$ και ο αναδρομικός τύπος (3.6) απλοποιεί τον (3.22).

Σαν εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1, δείχνουμε ότι $f_2(x,y|u), f_1(x|u), g(y|u)$ και $h(z|u)$ όλα βρίσκουν αναλυτικές εκφράσεις όσον αφορά την σύνθετη γεωμετρική συνάρτηση πιθανότητας. $a(u)$.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.4 Για $x \in \mathbb{N}$ και $y \in \mathbb{N}^{+}$,

$$f_2(x,y|u)=\begin{cases}\left(\frac{1+\xi_\upsilon}{\xi_\upsilon}\right)\left(\frac{\prod_{i-1}^{m}\rho_i}{\prod_{i=1}^{m}\upsilon q_i}\right)p(x+y+1)\sum_{j=1}^{m}b_j\rho_j^{x-u}\sum_{n=0}^{u}\rho_j^n a(n), & 0\leq u\leq x,\\ \left(\frac{1+\xi_\upsilon}{\xi_\upsilon}\right)\left(\frac{\prod_{i=1}^{m}\rho_i}{\prod_{i=1}^{m}\upsilon q_i}\right)p(x+y+1)\sum_{j=1}^{m}b_j\rho_j^{x-u}\sum_{n=u-x}^{u}\rho_j^n a(n), & u>x,\end{cases} \qquad (3.25)$$

Απόδειξη. Επαναδιατυπώστε το (3.19) του Θεώρηματος 3.2 ως

$$f_2\left(x,y\middle|u\right)=\left(\frac{1}{1+\xi_\upsilon}\right)\left[\sum_{z=1}^{u}f_2\left(x,y\middle|u-z\right)l\left(z\right)+\left(1+\xi_\upsilon\right)I\left(u\le x\right)f_2\left(x-u,y+u\middle|0\right)\right].$$

Με το Θεώρημα 3.1, $f_2\left(x,y\middle|u\right)$ μπορεί να επαναδιατυπωθεί αναλυτικά με

$$f_2\left(x,y\middle|u\right)=\frac{1+\xi_\upsilon}{\xi_\upsilon}\sum_{n=0}^{u}I\left(u-n\le x\right)f_2\left(x-u+n,y+u-n\middle|0\right)a\left(n\right)$$

$$=\left(\frac{1+\xi_\upsilon}{\xi_\upsilon}\right)\left(\frac{\prod_{i=1}^{m}\rho_i}{\prod_{i=1}^{m}\upsilon q_i}\right)\sum_{n=0}^{u}I\left(u-n\le x\right)\sum_{j=1}^{m}p\left(x+y+1\right)b_j\rho_j^{x-u+n}a\left(n\right).$$

Αλλάζοντας την σειρά άθροισης, η παραπάνω έκφραση απλοποιείται την (3.25).

Λήμμα 3.1. Για $x\in N$,

$$f_1\left(x\middle|u\right)=\begin{cases}\left(\frac{1+\xi_\upsilon}{\xi_\upsilon}\right)\left(\frac{\prod_{i=1}^{m}\rho_i}{\prod_{i=1}^{m}\upsilon q_i}\right)\bar{P}(x+1)\sum_{j=1}^{m}b_j\rho_j^{x-u}\sum_{n=0}^{u}\rho_j^{n}a(n), & 0\le u\le x,\\ \left(\frac{1+\xi_\upsilon}{\xi_\upsilon}\right)\left(\frac{\prod_{i=1}^{m}\rho_i}{\prod_{i=1}^{m}\upsilon q_i}\right)\bar{P}(x+1)\sum_{j=1}^{m}b_j\rho_j^{x-u}\sum_{n=u-x}^{u}\rho_j^{n}a(n), & u>x.\end{cases}\tag{3.26}$$

Απόδειξη. Ολοκληρώνοντας την (3.25) σε y από 0 έως ∞ δίνει το τύπο (26).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ. Εάν $m=1$, τότε η (3.25) απλοποιείται σε

$$f_2\left(x,y\middle|u\right)=\begin{cases}f_2(x,y|0)\left(\frac{1+\xi_\upsilon}{\xi_\upsilon}\right)\sum_{n=0}^{u}\rho^{n-u}a(n), & 0\le u\le x,\\ f_2(x,y|0)\left(\frac{1+\xi_\upsilon}{\xi_\upsilon}\right)\sum_{n=u-x}^{u}\rho^{n-u}a(n), & y>x,\end{cases}\tag{3.27}$$

η οποία μπορεί να βρεθεί στους Li και Garrido $[22]$. Συγκεκριμένα, εάν θέσουμε $\upsilon = 1$, τότε η από κοινού κατανομή του $U(T-1)$ και $|U(T)|$ δίνεται από

$$f_2(x, y|u) = \begin{cases} f_2(x,y|0)\dfrac{1-\Psi(u)}{1-\Psi(0)}, & 0 \le u \le x, \\ f_2(x,y|0)\dfrac{\Psi(u-x)-\Psi(u)}{1-\Psi(0)}, & u > x, \end{cases} \tag{3.28}$$

ο οποίος είναι ο τύπος του Dickson (Dickson $[24]$) στο κλασσικό σύνθετο διωνυμικό μοντέλο.

Για την προ εξοφλημένη κατανομή της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία $Z = U(T-1) + |U(T)| + 1$, έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.5. Για $u \in \mathrm{N}$ και $u + 2 \le z$,

$$h(z|u) = \left(\frac{1+\xi_\upsilon}{\xi_\upsilon}\right)\left(\frac{\prod_{i=1}^m \rho_i}{\prod_{i=1}^m \upsilon q_i}\right) p(z) \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{(1-\rho_j)} \sum_{n=0}^u \left(1-\rho_j^{z-u+n-1}\right) a(n), \tag{3.29}$$

ενώ για $2 \le z < u + 2$,

$$h(z|u) = \left(\frac{1+\xi_\upsilon}{\xi_\upsilon}\right)\left(\frac{\prod_{i=1}^m \rho_i}{\prod_{i=1}^m \upsilon q_i}\right) p(z) \sum_{j=1}^m \frac{b_j}{(1-\rho_j)} \sum_{n=u+2-z}^u \left(1-\rho_j^{z-u+n-1}\right) a(n). \tag{3.30}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.1 με

$$H(u) = \left[\prod_{i=1}^m \frac{\rho_i}{\upsilon q_i}\right] p(z) I(z \ge u+2) \sum_{j=1}^m \frac{b_j\left(1-\rho_j^{z-u-1}\right)}{(1-\rho_j)}$$

ολοκληρώνει την απόδειξη.

Συγκεκριμένα, εάν $m=1$, έχουμε το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 3.2. Εάν οι απαιτήσεις των ενδιαμέσων χρόνων είναι γεωμετρικά κατανεμημένες με $k(x)=(1-q)q^{x-1}$, $x \in \mathrm{N}^{+}$, τότε

$$h(z|u)=\begin{cases} \frac{\upsilon(1-\rho)(1-q)}{1-\upsilon}p(z)\sum_{n=0}^{u}\frac{1-\rho^{z-u+n-1}}{1-\rho}a(n), & u+2\le z,\\ \frac{\upsilon(1-\rho)(1-q)}{1-\upsilon}p(z)\sum_{n=u+2-z}^{u}\frac{1-\rho^{z-u+n-1}}{1-\rho}a(n), & 2\le z<u+2. \end{cases} \tag{3.31}$$

Επιπλέον, εάν $\upsilon=1$, $\rho=1$ και $\rho'(1)=(1+\theta)/\theta$, τότε

$$h(z|u)=\begin{cases} \frac{(1-q)(1+\theta)}{\theta}p(z)\sum_{n=0}^{u}(z-u+n-1)a(n), & u+2\le z,\\ \frac{(1-q)(1+\theta)}{\theta}p(z)\sum_{n=u+2-z}^{u}(z-u+n-1)a(n), & 2\le z<u+2, \end{cases} \tag{3.32}$$

όπου $\theta>0$ είναι ο περιθώριο ασφαλείας .

3.5 Δύο τάξεις κατανομών μεγέθους των απαιτήσεων.

Το Θεώρημα 3.1 δείχνει ότι η συνάρτηση $\phi(u)$ μπορεί να εκφραστεί αναλυτικά όσον αφορά την σύνθετη γεωμετρική συνάρτηση πιθανότητας $a(u)$, δηλαδή, εάν το $a(u)$ μπορεί να βρεθεί αναλυτικά, τότε μπορεί και το $\phi(u)$. Μία τέτοια υπόθεση όπου $a(u)$ βρίσκει μια αναλυτική έκφραση είναι όταν αναγνωρίζουμε μια ρητή συνάρτηση κατανομής πιθανοτήτων. Ακολουθεί από (3.13) ότι $\hat{a}(s)$ είναι μια ρητή συνάρτηση εάν και μόνο αν $\hat{g}(s)$ είναι μία ρητή συνάρτηση, ενώ $\hat{g}(s)$ είναι μία ρητή συνάρτηση εάν και μόνο εάν $\hat{p}(s)$ είναι μία ρητή συνάρτηση ή ένα πολυώνυμο (ή $p(x)$ έχει μία πεπερασμένη υποστήριξη).

3.5.1 K_n κατανομή μεγέθους απαίτησης

Το Λήμμα 3.1 του Li [16] δείχνει ότι η γεννήτρια συνάρτηση του g δίνεται από

$$\hat{g}(s)=1-\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-\upsilon q_i)-\upsilon\hat{p}(s)\left[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)+\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(\upsilon-s)^j\right]}{\left[\prod_{i=1}^{m}(\upsilon q_i/\rho_i)\right]\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)},$$

έτσι παίρνοντας γεννήτριες συναρτήσεις και στις δύο πλευρές της (3.13) δίνει

$$\hat{a}(s)=\frac{1-\phi_T(0)}{\left[1-\hat{g}(s)\right]}=\frac{\left[\prod_{i=1}^{m}(\upsilon q_i/\rho_i)\right]\left[1-\phi_T(0)\right]\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)}{\prod_{i=1}^{m}(s-\upsilon q_i)-\hat{p}(s)B_{m-1}(s)},\qquad(3.33)$$

όπου $B_{m-1}(s)=\upsilon\left[s^{m-1}\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)+\sum_{j=1}^{m-1}\beta_j s^{m-1-j}(\upsilon-s)^j\right]$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $m-1$, με κορυφαίο συντελεστή $B_{m-1}=\upsilon\left[\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)+\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\beta_j\right]$.

Σε αυτή την ενότητα, υποθέτουμε ότι $p(x)$ είναι K_n κατανεμημένη για $x,n\in\mathrm{N}^+$ π.χ., η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων δίνεται από

$$\hat{p}(s)=\frac{E_n(s)}{\prod_{i=1}^{n}(-sa_i)},\qquad \Re(s)<\min\left\{\frac{1}{\alpha_1},\frac{1}{\alpha_2},\ldots\frac{1}{\alpha_n}\right\},\qquad(3.34)$$

όπου $E_n(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n με $E_n(0)=0, E_n(1)=\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)$ και $0<\alpha_i<1$, για $i=1,2,\ldots,n$. Σε αυτή την περίπτωση, το $\hat{a}(s)$ μπορεί να μεταμορφωθεί σε μια ρητή συνάρτηση, η οποία δίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Ορίζουμε $E_{m,n}(s)=\left[\prod_{i=1}^{m}(s-\upsilon q_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}(1-sa_i)\right]$. Μετά είναι εύκολα επαληθεύσιμο ότι οι ρίζες της γενικευμένης εξίσωσης Lundberg (3.3),

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ με $0 < |\rho_i| < 1$, είναι m ρίζες της εξίσωσης $E_{m,n}(s) = 0$. Θέτουμε $R_1, R_2, \ldots, R_n$ με $|R_i| > 1$ να είναι οι υπόλοιπες n ρίζες της $E_{m,n}(s) = 0$. Σημειώνουμε πως υπάρχει μία σχέση μεταξύ των ριζών $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ και $R_1, R_2, \ldots, R_n$,

$$\left[\prod_{i=1}^{m} \rho_i\right]\left[\prod_{i=1}^{n} R_i\right] = \frac{\prod_{i=1}^{m} \upsilon q_i}{\prod_{i=1}^{n} \alpha_i} \tag{3.35}$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3.6. Για την παραπάνω ορισμένη $\hat{p}(s)$, η γεννήτρια συνάρτηση του $a(u)$ δίνεται από

$$\hat{a}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(R_i - 1)}{\prod_{i=1}^{n}(1/\alpha_i - 1)} \frac{\prod_{i=1}^{n}(1/\alpha_1 - s)}{\prod_{i=1}^{n}(R_i - s)}. \tag{3.36}$$

Επιπλέον, εάν R_i είναι διαφορετικά, τότε με μερικά κλάσματα,

$$\hat{a}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 - 1/R_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1 - \alpha_i)} + \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i s}{(R_i - s)}. \tag{3.37}$$

Αντιστρέφοντας τα όρια

$$a(0) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1 - 1/R_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1 - \alpha_i)}, \tag{3.38}$$

Και

$$a(u) = \sum_{i=1}^{n} r_i R_i^{-u} \quad , \qquad u \in \mathrm{N}^+, \tag{3.39}$$

Όπου

$$r_i = \left(\prod_{j=1}^{n} \frac{1-R_i\alpha_j}{1-\alpha_j}\right)\left(\prod_{j=1, j\neq i}^{n} \frac{R_j - 1}{R_j - R_i}\right)\left(\frac{R_i - 1}{R_i}\right), \quad \text{για } i = 1,2,\ldots,n .$$

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας το (3.34) στο (3.33) και πολλαπλασιάζοντας $\prod_{i=1}^{n}(1-s\alpha_i)$ και με τα δύο μέρη ονομαστή και παρανομαστή,

$$\hat{a}(s) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{m}(\upsilon q_i/\rho_i)\right]\left[1-\phi_T(0)\right]\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)\prod_{i=1}^{n}(1-s\alpha_i)}{E_{m,n}(s)}. \qquad (3.40)$$

Τώρα που $E_{m,n}(s) = \left[\prod_{i=1}^{n}\alpha_i\right]\left[\prod_{i-1}^{m}(s-\rho_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{n}(R_i - s)\right]$, αντικαθιστώντας το στο (3.40) και απαλείφοντας τους κοινούς παράγοντες δίνει

$$\hat{a}(s) = \frac{\left[\prod_{i=1}^{m}(\upsilon q_i/\rho_i)\right]\left[1-\phi_T(0)\right]\prod_{i=1}^{n}(1/\alpha_i - s)}{\prod_{i=1}^{n}(R_i - s)}. \qquad (3.41)$$

Η εξίσωση (3.35) και το δεδομένο $\hat{a}(1) = \sum_{u=0}^{\infty} a(u) = 1$ αποδεικνύει ότι η (3.36) αληθεύει.

Τελικά, η (3.36) μπορεί να επαναδιατυπωθεί ως

$$\hat{a}(s) = \frac{\prod_{i=1}^{n}(1-1/R_i)}{\prod_{i=1}^{n}(1-\alpha_i)}$$

$$+\frac{\prod_{i=1}^{n}(R_i - 1)}{\prod_{i=1}^{n}(1/\alpha_i - 1)}\left[\frac{\prod_{i=1}^{n}(1/\alpha_i|-s) - \left[\prod_{i=1}^{n}(R_i - s)/\prod_{i=1}^{n}(\alpha_i R_i)\right]}{\prod_{i=1}^{n}(R_i - s)}\right].$$

Εάν $R_i, R_2, \ldots R_n$ είναι διαφορετικά, η μέθοδος μερικών κλασμάτων δίνει την (3.37), αντιστρέφοντας δίνει την (3.39).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.1. Σε αυτό το παράδειγμα, υποθέτουμε πως η κατανομή των απαιτήσεων των ενδιαμέσων χρόνων είναι K_m με γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων να είναι δοσμένη στην (3.2), τα ποσά των απαιτήσεων είναι γεωμετρικά κατανεμημένες με $p(x)=(1-\alpha)\alpha^{x-1}, x\in \mathrm{N}$ και $\hat{p}(s)=s(1-\alpha)/(1-s\alpha)$.Τότε η εξίσωση

$$E_{m,1}(s)=\left[\prod_{i=1}^{m}(s-\upsilon q_i)\right](1-s\alpha)-s(1-\alpha)B_{m-1}(s)=0$$

έχει m ρίζες, λέμε $\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_m$ με $|\rho_i|<1$ και μία ρίζα $R>1$. Είναι εύκολα επαληθεύσιμο ότι η σχέση $\prod_{i=1}^{m}(\upsilon q_i/\rho_i)=\alpha R$ ισχύει.

Το Θεώρημα 3.6 δίνει

$$a(0)=\frac{R-1}{R(1-\alpha)},$$

$$a(u)=\frac{(1-\alpha R)(R-1)}{R(1-\alpha)}R^{-u},\ \ u\in \mathrm{N}^{+}\ .$$

Τότε

$$\phi_T(u)=\sum_{y=u+1}^{\infty}a(y)=\frac{1-\alpha R}{R(1-\alpha)}R^{-u},\quad u\in \mathrm{N}\ .$$

Σαν εφαρμογή του Θεωρήματος 3.4, η προ εξοφλημένη από κοινού συνάρτηση κατανομής των $U(T-1)$ και $|U(T)|$ δίνεται για $0\le u\le x$,

$$f_2(x,y|u)=\frac{1-\alpha R}{\alpha R^2}p(x+y+1)\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j\rho_j^x\left(R\rho_j^{-u}-\rho_jR^{-u}\right)}{\left(R-\rho_j\right)},\quad x\in\mathrm{N}, y\in\mathrm{N}^{+},$$

και για $u>x$,

$$f_2(x,y|u)=\frac{1-\alpha R}{\alpha R^2}p(x+y+1)\sum_{j=1}^{m}\frac{b_j R^{-u}\left[R^{x+1}-\rho_j^{x+1}\right]}{(R-\rho_j)},\ \ x\in \mathrm{N}, y\in \mathrm{N}^+ .$$

Η συνάρτηση προ εξοφλημένης οριακής κατανομής του $U(T-1)$ μπορεί να βρεθεί από σχέση της (3.18) ως

$f_1(x|u)=f_2(x,y|u)\bar{P}(x+1)/p(x+y+1)=f_2(x,y|u)/p(y)$. Η συνάρτηση προεξοφλημένης οριακής κατανομής του $|U(T)|$ δίνεται από

$$g(y|u)=\sum_{x=0}^{\infty}f_2(x,y|u)=\sum_{x=0}^{\infty}f_1(x|u)p(y)=\phi_T(u)p(y).$$

3.5.2. Κατανομές του ποσού των απαιτήσεων με πεπερασμένη υποστήριξη

Σε αυτή την ενότητα, υποθέτουμε πως η κατανομή του ποσού των απαιτήσεων έχει μια πεπερασμένη υποστήριξη, π.χ., για $N=2,3,\ldots$,

$$p(n)=P(X=n)=p_{n'},\qquad n=1,2,\ldots N. \tag{3.42}$$

Τότε

$$\hat{p}(s)=D_{\mathrm{N}}(s):=p_1 s+p_2 s+\ldots p_{\mathrm{N}}s^{\mathrm{N}},\qquad -1<\Re(s)<1, \tag{3.43}$$

είναι ένα πολυώνυμο βαθμού N. Για παράδειγμα, η διωνυμική κατανομή, η διακριτή ομοιομορφία και η υπερ-γεωμετρική κατανομή όλες έχουν μία πεπερασμένη υποστήριξη.

Ορίστε $V(s):=D_N(s)B_{m-1}(s)-\prod_{i=1}^{m}(s-\upsilon q_i)$ να είναι ένα πολυώνυμο βαθμού $N+m-1$, με κυρίαρχο συντελεστή $V_{N+m-1}=p_N B_{m-1}$, όπου $B_{m-1}=\upsilon\left[\prod_{i=1}^{m}(1-q_i)+\sum_{j=1}^{m-1}(-1)^j\beta_j\right]$ είναι ο κυρίαρχος συντελεστής του πολυώνυμου $B_{m-1}(s)$. Από όλες τις $N+m-1$ ρίζες της εξίσωσης $V(s)=0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ είναι m ρίζες με $0<|\rho_i|<1$ και $R_1, R_2, \ldots R_{N-1}$ με $|R_i|>1$ είναι οι υπόλοιπες $N-1$ ρίζες. Επομένως, το $V(s)$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $V(s)=V_{N+m-1}\left[\prod_{i=1}^{m}(s-\rho_i)\right]\left[\prod_{i=1}^{N-1}(s-R_i)\right]$. Θέτοντας $s=0$, μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι

$$(-1)^N V_{N+m-1}\left(\prod_{i=1}^{m}\rho_i\right)\left(\prod_{i=1}^{N-1}R_i\right)=\prod_{i=1}^{m}(\upsilon q_i) \tag{3.44}$$

Τότε η (3.33) μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\hat{a}(s)=\frac{\left[1-\phi_T(0)\right]\left[\prod_{i=1}^{N-1}R_i\right]}{\prod_{i=1}^{N-1}(R_i-s)}. \tag{3.45}$$

Εφόσον $\hat{a}(1)=\sum_{u=0}^{\infty}a(u)=1$, τότε έχουμε $1-\phi_T(0)=\prod_{i=1}^{N-1}\left[(R_i-1)/R_i\right]$ και η (3.45) απλουστεύεται σε

$$\hat{a}(s)=\frac{\prod_{i=1}^{N-1}(R_i-1)}{\prod_{i=1}^{N-1}(R_i-s)}. \tag{3.46}$$

Εάν $R_1, R_2, \ldots, R_{N-1}$ είναι διαφορετικά, από μερικά κλάσματα,

$$\hat{a}(s)=\sum_{i=1}^{N-1}\frac{r_i}{(R_i-s)}=\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{r_i}{R_i}\right)\frac{1}{\left(1-\frac{s}{R_i}\right)}, \tag{3.47}$$

όπου $r_i=(R_i-1)\prod_{j=1,j\neq 1}^{N-1}\left[(R_j-1)/(R_j-R_i)\right]$. Αντιστρέφοντας τα όρια

$$a(u)=\sum_{i=1}^{N-1}\left(\frac{r_i}{R_i}\right)R_i^{-u}, \qquad u\in \mathrm{N}. \tag{3.48}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3.2. Σε αυτό το παράδειγμα, υποθέτουμε πως οι απαιτήσεις των ενδιαμέσων χρόνων ακολουθούν μια αρνητικά διωνυμική $(2,q)$ κατανομή με $k(x)=x(1-q)^2 q^{x-1}, x \in N^+$ και $\hat{k}(s)=s(1-q)^2/(1-sq)^2$. Τα μεγέθη των απαιτήσεων είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα με $P(X=1)=P(X=2)=P(X=3)=1/3$ και $\hat{p}(s)=\left(s+s^2+s^3\right)/3$. Τότε η $V(s)=\hat{p}(s)B_1(s)-(s-\upsilon q)^2=\upsilon(1-q)^2\times\left(s^2+s^3+s^4\right)/3-(s-\upsilon q)^2$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού 4 με κυριάρχο συντελεστή $\upsilon(1-q)^2/3$. Θέτουμε ρ_1,ρ_2 με $0<|\rho_i|<1$ και R_1,R_2 με $|R_i|>1$ να είναι όλες οι ρίζες της εξίσωσης $V(s)=0$. Σημειώνουμε ότι η σχέση $\rho_1\rho_2R_1R_2=-3\upsilon q^2/(1-q)^2$ διατηρείται θέτοντας $s=0$ στην εξίσωση $V(s)=0$.

Ο τύπος (3.48) δίνει

$$\alpha(u)=\frac{(R_1-1)(R_2-1)}{R_2-R_1}\left[R_1^{-(u+1)}-R_2^{-(u+1)}\right],\ u \in N .$$

Μετά

$$\phi_T(u)=\sum_{y=u+1}^{\infty}a(y)=\frac{R_2-1}{R_2-R_1}R_1^{-(u+1)}+\frac{R_1-1}{R_1-R_2}R_2^{-(u+1)},\quad u \in N .$$

Απλοποιώντας το Λήμμα 3.1 δίνει την προ εξοφλημένη κατανομή του $U(T-1)$ για $0 \le u \le x$

$$f_1(x|u)=\frac{3\bar{P}(x)}{(R_1-R_2)(\rho_1-\rho_2)}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{i+j}\frac{\rho_i^{x+2}\left[\rho_i^{-(u+1)}-R_j^{-(u+1)}\right]}{R_j-\rho_i},$$

και για $u>x$,

$$f_1\left(x\middle|u\right)=\frac{3\bar{P}(x)}{(R_1-R_2)(\rho_1-\rho_2)}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{i+j}\frac{\rho_i R_j^{-(u-x)}-\rho_i^{x+2}R_j^{-(u+1)}}{R_j-\rho_i},$$

Για την προ εξοφλημένη κατανομή της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία $Z=U(T-1)+|U(T)|+1$, έχουμε τα ακόλουθα απλοποιημένα αποτελέσματα από το Θεώρημα 3.5 για $u\in \mathrm{N}$:

$$h\left(2\middle|u\right)=\frac{R_1^{-(u+1)}-R_2^{-(u+1)}}{R_1-R_2},$$

$$h\left(3\middle|u\right)=\frac{1+\rho_1+\rho_2}{R_1-R_2}\left[R_1^{-(u+1)}-R_2^{-(u+1)}\right]+\frac{1}{R_1-R_2}\left[R_1^{-u}-R_2^{-u}\right],$$

και $h\left(z\middle|u\right)=0$, για $z=1$ και $z\geq 4$.

4.1. Εισαγωγή

Σε αυτό το άρθρο εξετάζουμε μια γενίκευση του διακριτού ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου, πιο απλά, τη διακριτό στάσιμο ή διακριτό ανανεωτικό μοντέλου ισορροπίας κινδύνου. Ο αριθμός των απαιτήσεων της διαδικασίας συμβολίζεται με $\{N_t;t\geq 0\}$είναι μια διακριτή ανανεωτική διαδικασία με ανεξάρτητους και ισόνομους κατανεμημένους (i.i.d.) ενδιαμέσους χρόνους των απαιτήσεων $\{V_1,V_2,\ldots\}$ έχοντας συνάρτηση αθροιστικής κατανομής (c.d.f.) $\mathrm{K}(x)=1-\bar{\mathrm{K}}(x)$ και συνάρτηση πιθανοτήτων (p.f.) $k(x)=\bar{\mathrm{K}}(x-1)-\bar{\mathrm{K}}(x),x\in \mathrm{N}_+$. Τα ατομικά ποσά των απαιτήσεων $\{L_1,L_2,\ldots\}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές με κοινή συνάρτηση αθροιστικής κατανομής $F(x)=1-\bar{F}(x)$ και συνάρτηση πιθανοτήτων $f(x),x\in \mathrm{N}_+$. Θα υποθέτουμε πάντα ότι $k(0)=0$ θεωρώντας το πολύ μία απαίτηση σε ένα συγκεκριμένο χρονικό σημείο και ότι $f(0)=0$ αυτή τη φορά για να αποφύγουμε μη συμβαλλόμενες απαιτήσεις. Σε αντίθεση με τα κλασσικά ανανεωτικά μοντέλα, στο ισορροπίας ένα V_1, είναι ακόμη ανεξάρτητο από $\{V_2, V_3, \ldots\}$ και $\{L_1, L_2, \ldots\}$, έχουν συνάρτηση σωρευτικής κατανομής $K_1(x) = 1 - K_1(x)$ και συνάρτηση σημειακής μάζας $k_1(x) = \bar{K}(x-1)/\mathrm{E}\{V_2\}, x \in \mathrm{N}_+$. Επίσης, παρομοίως με την κατανομή ισορροπίας της V_2, η συνάρτηση πιθανότητας ισορροπίας $f_1(x) = \bar{K}(x-1)/\mathrm{E}\{V_2\}, x \in \mathrm{N}_+$, του L_1 είναι καθορισμένη και η $F_1(x) = 1 - \bar{F}_1(x)$ είναι η συνάρτηση αθροιστικής κατανομής της.

Το πλεόνασμα κατά χρονική περίοδο t είναι $U_t = u + t - \sum_{i=1}^{N_i} L_i$ όπου u είναι το αρχικό απόθεμα και $(1+\Theta)\mathrm{E}\{L_1\}/\mathrm{E}\{V_2\} = 1$ με περιθώριο ασφαλείας $\theta \geq 0$. Όταν αναφερόμαστε στο χρόνο χρεοκοπίας, υπάρχουν δύο ξεχωριστοί ορισμοί στη βιβλιογραφία. Μερικοί συγγραφείς θεωρούν ότι η χρεοκοπία προκύπτει όταν το πλεόνασμα πέφτει κάτω από το μηδέν, ενώ άλλοι ορίζουν την χρεοκοπία όταν το πλεόνασμα είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός. (Δείτε Gerber (1988) και Shiu (1988), για παράδειγμα). Προτιμούμε τον πρώτο ορισμό, ονομαστικά, θέτω $\mathrm{T} = \inf\{t \in \mathrm{N}_+ : U_t < 0\}$ να είναι ο χρόνος χρεοκοπίας στο κανονικό διακριτό ανανεωτικό μοντέλο με $\mathrm{T} = \infty$ εάν δεν προκύψει χρεοκοπία. Σημειώστε πως αν προκύψει η χρεοκοπία, $|U_\mathrm{T}|$ είναι το έλλειμμα την στιγμή αμέσως μετά τη χρεοκοπία και $U_{\mathrm{T}-}$ είναι το πλεόνασμα αμέσως πριν από την χρεοκοπία. Υποδηλώνεται με

$$m(u) = \mathrm{E}\left\{u^T w\left(U_{T-}, |U_T|\right) I(T < \infty) \middle| U_0 = u\right\}$$

η συνάρτηση προ εξοφλημένης ποινής Gerber-Shiu. Παρουσιάστηκε αρχικά από τους Gerber και Shiu (1998). Επίσης $u \in (0,1]$ είναι ο προεξοφλητικός παράγοντας, $w(u_1, u_2) : \mathrm{N}_+ \times \mathrm{N}_+ \to \mathrm{N}$, και $I(E)$ είναι μια δείκτρια συνάρτηση ενός γεγονότος E που παίρνει την τιμή 1 όποτε συμβαίνει το γεγονός και 0 όταν δεν συμβαίνει.

Εάν T_e και T_* είναι οι χρόνοι χρεοκοπίας στο διακριτό ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου ισορροπίας και στο σύνθετο διωνυμικό μοντέλο αντίστοιχα, οι αντίστοιχες συναρτήσεις ποινής είναι (σε μια προφανή σημείωση)

$$m_e(u) = \mathrm{E}\left\{u^{T_e} w\left(U_{T_e-}, \left|U_{T_e}\right|\right) I\left(T_e < \infty\right) \middle| U_0 = u\right\}$$

Και

$$m_*(u) = \mathrm{E}\left\{u^{T_*} w\left(U_{T_*-}, \left|U_{T_*}\right|\right) I\left(T_* < \infty\right) \middle| U_0 = u\right\}.$$

Για απλοποίηση θα υποθέσουμε ότι u είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός. Θα υιοθετήσουμε τη συνθήκη ότι η εισροή ασφαλίστρων συμβαίνει πριν από τις απαιτήσεις σε ένα προκαθορισμένο χρονικό σημείο. Αυτές είναι βασικές υποθέσεις που χρησιμοποιούνται στα διακριτού χρόνου μοντέλα . (Δείτε Gerber (1988) και Shiu (1988)).

Το κύριο αποτέλεσμα αυτού του άρθρου προκύπτει στην Ενότητα 2. Συσχετίζεται με τις προ εξοφλημένες συναρτήσεις ποινής στο κλασσικό διακριτό ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου και ισορροπίας. Η Ενότητα 3 θεωρεί το προ εξοφλημένο δωρεάν μοντέλο: $u = 1$. Δίνεται μεγαλύτερη προσοχή στην ελλειμματική από κοινού αθροιστική συνάρτηση κατανομής του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία και το έλλειμα την στιγμή της χρεοκοπίας.

Μια σημαντική ειδική περίπτωση του παρόντος μοντέλου είναι το καλά γνωστό σύνθετο διωνυμικό μοντέλο, το οποίο μελετάται στην τελευταία ενότητα. Σχετική ανάλυση μπορεί να βρεθεί στον Cheng et al. (2000) και στον Li και Garrido (2002). Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε πως η διαφορετική προσέγγιση προσαρμόζεται καλά για χρήση σε αυτό το πλαίσιο και ασχολείται για να βρεθεί μία διακριτή ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση για την προ εξοφλημένη συνάρτηση ποινής των Gerber-Shiu. Αν και υπάρχουν ομοιότητες με το συνεχές ανάλογο, ονομαστικά το κλασικό μοντέλο Poisson, υπάρχουν μερικές τεχνικές λεπτομέρειες που είναι παρόλα αυτά κάπως διαφορετικά στη διακριτή περίπτωση. Είναι επίσης αξιοσημείωτο ότι η παρούσα προσέγγιση περιέχει διαφοροποιήσεις και αυτή η τεχνική μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί στα διακριτά ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου για κατανομές ενδιαμέσων χρόνων των απαιτήσεων οι οποίες είναι διακριτού τύπου φάσης(δηλ. ένας συνδυασμός ή μείγμα εκθετικών). Σε αυτές τις περιπτώσεις η επαναλαμβανόμενη διαφοροποίηση είναι απαραίτητη, ανάλογη της συνεχούς περίπτωσης που μελετάται από τους Cheng και Tang (2003), Gerber και Shiu (2003a.b), Li (2003) και Lin (2003). Η προσέγγιση είναι ποιοτικά παρόμοια με αυτή του παρόντος άρθρου, ωστόσο, επικεντρώνεται στο σύνθετο διωνυμικό μοντέλο.

Παρόμοια θέματα έχουν συζητηθεί από τους Dickson (1994) και Willmot και Dickson (2003).

4.2. Σχέση μεταξύ των συναρτήσεων προ εξοφλημένης ποινής των Gerber-Shiu στά κλασσικά και στα στάσιμά διακριτά ανανεωτικά μοντέλα

Το βασικό αποτέλεσμα σε αυτό το άρθρο δίνεται με το ακόλουθο θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.1. *Οι συναρτήσεις προ εξοφλημένης ποινής των Gerber-Shiu σε ισορροπίας και σε κλασσικά ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου σχετίζονται με*

$$m_e(u) = \frac{1}{1+\theta}\sum_{i=0}^{u} m(u-i) f_1(i+1) + v_u(u), \quad u \in \mathrm{N},$$

όπου

$$v_u(u) = \sum_{i=u+1}^{\infty} u^{i-u}\tau(i) - \frac{1-u}{1+\theta}\sum_{i=u+1}^{\infty} u^{i-u-1}\sum_{j=1}^{i} m(i-j) f_1(j)$$

και

$$\tau(i) = \frac{1}{E\{V_2\}}\sum_{j=i+1}^{\infty} w(i, j-i) f(j), i \in \mathrm{N}.$$

Απόδειξη. Υποθέτοντας τον χρόνο V_1 και το ποσό L_1 για την πρώτη απαίτηση, παίρνουμε:

$$m(u) = \sum_{i=1}^{\infty} u^i \left[\sum_{j=1}^{u+i} m(u+i-j) f(j) + \sum_{j=u+i+1}^{\infty} w(u+i, j-u-i) f(j) \right] P\{V_{1=i}\}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} u^i \gamma(u+i) P\{V_1 = i\}, \tag{4.1}$$

όπου

$$\gamma(t) = \sum_{j=1}^{t} m(t-j) f(j) + E\{V_2\} \tau(t), \qquad t \in \mathrm{N},$$

γνωρίζοντας ότι $\gamma(0) = E\{V_2\}\tau(0)$. Συνεπώς, ξεκινώντας το άθροισμα στην (4.1) από το 0 αντί για 1,

$$m(u) = \sum_{l=0}^{\infty} u^{l+1} \gamma(u+1+l) P\{V_1 = l+1\}, \tag{4.2}$$

ή ισοδύναμα,

$$\frac{1}{E\{V_2\}} m(u) = \sum_{l=0}^{\infty} u^{l+1} \gamma(u+1+l) \frac{k(l+1)}{E\{V_2\}} \tag{4.3}$$

στο κλασσικό ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου. Για τη μέθοδο ισορροπίας όπως στη (4.2) έχουμε ανάλογα

$$m_e(u) = \sum_{l=0}^{\infty} u^{l+1} \gamma(u+1+l) \frac{\bar{K}(l)}{E\{V_2\}}. \tag{4.4}$$

Ως εκ τούτου, αφαιρώντας το (3) από το (4), βρίσκουμε

$$m_e(u)-\frac{1}{E\{V_2\}}m(u)=\sum_{l=0}^{\infty}u^{l+1}\gamma(u+1+l)\frac{\bar{K}(l+1)}{E\{V_2\}}$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}u^{l+1}\gamma(u+1+l)k_1(l+2).$$

Αυτό είναι,

$$\sum_{l=1}^{\infty}u^{l}\gamma(u+l)k_1(l+1)=m_e(u)-\frac{1}{E\{V_2\}}m(u). \tag{4.5}$$

αλλά από το (4) αντικαθιστώντας το u με $u-1$, αυτό έπεται ότι

$$m_e(u-1)=\frac{\upsilon\gamma(u)}{E\{V_2\}}+\sum_{l=1}^{\infty}u^{l+1}\gamma(u+l)k_1(l+1),\qquad u\in \mathrm{N}_+$$

Και επιπλέον

$$\sum_{l=1}^{\infty}u^{l}\gamma(u+l)k_1(l+1)=\frac{1}{u}m_e(u-1)-\frac{\gamma(u)}{E\{V_2\}}. \tag{4.6}$$

Επομένως, εξισώνοντας τους τύπους (5) και (6) παίρνουμε

$$m_e(u)=\frac{1}{u}m_e(u-1)+\frac{m(u)-\gamma(u)}{E\{V_2\}},$$

το οποίο μπορεί να αναδιατυπωθεί ως

$$\left(1-\frac{1}{u}\right)m_e(u)-\frac{m(u)-\sum_{j=1}^{u}m(u-j)f(j)}{E\{V_2\}}+\tau(u)=\frac{1}{u}\left[m_e(u-1)-m_e(u)\right].$$

Σε ολόκληρο το παρακάτω άρθρο θα χρησιμοποιήσουμε κυματώδη κεφαλαία γράμματα για να δηλώσουμε τις αντίστοιχες παραγοντικές συναρτήσεις. Τώρα, μετά τον πολλαπλασιασμό με uz^u και αθροίζοντας το u από το 1 έως το ∞ η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$(u-1)\left[M_e(z)-m_e(0)\right]-u\frac{M(z)-m(0)-M(z)F(z)}{E\{V_2\}}+u\left[T(z)-\tau(0)\right]=(z-1)M_e(z)+m_e(0),$$

ή ισοδύναμα,

$$(u-z)M_e(z)=u\left[m_e(0)-\frac{m(0)}{E\{V_2\}}\right]+u\frac{M(z)-M(z)F(z)}{E\{V_2\}}-u\left[T(z)-\tau(0)\right].$$

(4.7)

Τώρα,

$$F_1(z)=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{z^x\bar{F}(x-1)}{E\{L_1\}}=\frac{z}{E\{L_1\}}\sum_{x=0}^{\infty}z^x\bar{F}(x)$$

και από τον Feller (1968, p.260) ισχύει $F_1(z)=z\left[1-F(z)\right]/\left[(1-z)E\{L_1\}\right]$. Επομένως, η (4.7) μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$(u-z)M_e(z)=u\left[\tau(0)+m_e(0)-\frac{m(0)}{E\{V_2\}}\right]+\frac{u(1-z)E\{L_1\}}{zE\{V_2\}}M(z)F_1(z)-uT(z).$$

(4.8)

Για να καθορίσουμε τη σταθερά $u\left[\tau(0)+m_e(0)-m(0)/E\{V_2\}\right]$, θέτουμε $z=u$ και σημειώνουμε ότι $E\{L_1\}/E\{V_2\}=1/(1+\theta)$ για να βρούμε

$$u\left[\tau(0)+m_e(0)-\frac{m(0)}{E\{V_2\}}\right]=uT(u)-\frac{1-u}{1+\theta}M(u)F_1(u).$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση (4.8) έχει ως αποτέλεσμα (μετά από πολλαπλασιασμό με z/u):

$$z\left(1-\frac{z}{u}\right)M_e(z)=z\left[T(u)-T(z)\right]-\frac{z}{u}\frac{1-u}{1+\theta}M(u)F_1(u)+\frac{1-z}{1+\theta}M(z)F_1(z)$$
$$=\frac{1-z/u}{1+\theta}M(z)F_1(z)+\frac{z}{u}\frac{1-u}{1+\theta}\left[M(z)F_1(z)-M(u)F_1(u)\right]+z\left[T(u)-T(z)\right].$$

Διαίρεση με $1-z/u$ έχει ως αποτέλεσμα

$$zM_e(z)=\frac{1}{1+\theta}M(z)F_1(z)+z\frac{1-u}{1+\theta}\frac{M(z)F_1(z)-M(u)F_1(u)}{u-z}+zu\frac{T(u)-T(z)}{u-z}. \tag{4.9}$$

Τώρα, για μια τυχαία συνάρτηση $a(x), x\in\mathrm{N}$, με γεννήτρια συνάρτηση $A(z)$, έχουμε εύκολα ότι

$$\frac{A(z)-A(t)}{z-t}=\sum_{u=0}^{\infty}z^u\sum_{x=u+1}^{\infty}t^{x-u-1}a(x).$$

Έτσι, ο συντελεστής του z^u στην $\left[A(z)-A(t)\right]/(z-t)$ είναι $\sum_{x=u+1}^{\infty}t^{x-u-1}a(x)$ και εξισώνοντας τους συντελεστές του z^{u+1} στην (4.9) τελικά βρίσκουμε

$$m_e(u)=\frac{1}{1+\theta}\sum_{i=0}^{u}m(u-i)f_1(i+1)-\frac{1-u}{1+\theta}\sum_{i=u+1}^{\infty}u^{i-u-1}\sum_{j=1}^{i}m(i-j)f_1(j)+\sum_{i=u+1}^{\infty}u^{i-u}\tau(i)$$

και το θεώρημα αποδεικνύεται.

Τώρα εξετάζουμε τις συνέπειες του Θεωρήματος 4.1 με μεγαλύτερη λεπτομέρεια.

4.3. Το προ εξοφλημένο ελεύθερο μοντέλο

Θεωρούμε την απλούστερη περίπτωση όταν $u = 1$. Περιγράφονται από

$$\beta(u) = m(u)\big|_{u=1} = E\left\{w\left(U_{T-}, |U_T|\right) I(T < \infty) \big| U_0 = u\right\}$$

και

$$\beta_e(u) = m_e(u)\big|_{u=1} = E\left\{w\left(U_{T_e-}, |U_{T_e}|\right) I(T_e < \infty) \big| U_0 = u\right\}$$

οι συναρτήσεις Gerber-Shiu στα κλασσικά και στάσιμα ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου αντίστοιχα.

Λήμμα 4.1. Οι συναρτήσεις $\beta_e(u)$ και $\beta(u)$ σχετίζονται με την

$$\beta_e(u) = \frac{1}{1+\theta}\sum_{i=0}^{u} \beta(u-i) f_1(i+1) + \sum_{i=u+1}^{\infty} \tau(i), \quad u \in \mathrm{N}.$$

Απόδειξη. Το αποτέλεσμα ακολουθεί απευθείας από το Θεώρημα 4.1 όταν $u = 1$.

Παρατηρούμε ότι όταν $u = 0$, $\beta_e(0) = \left[1/(1+\theta)\right]\beta(0) f_1(1) + \sum_{i=1}^{\infty} \tau(i)$ και έτσι $\beta_e(0)$ εξαρτάται από $\beta(0)$ στο κλασσικό μοντέλο. Αυτό είναι ένα τμήμα από το ανάλογο συνεχές κλασσικό μοντέλο Poisson όπου δεν υπάρχει εξάρτηση με το αρχικό αποθεματικό.

Τώρα θεωρούμε περισσότερες ειδικές περιπτώσεις που εμπλέκονται με το πλεόνασμα αμέσως πριν από την χρεοκοπία και το έλλειμμα στην στιγμή αμέσως μετά την χρεοκοπία. Συνεπώς, θέτουμε $F(x, y|u) = P\left\{T < \infty, U_{T-} \le x, |U_T| \le y \big| U_0 = u\right\}$ και

$F_e\left(x,y\middle|u\right)=P\left\{T_{e-}\le x,\left|U_{T_e}\right|\le y\middle|U_0=u\right\}$ να είναι οι ελλειμματικές από κοινού αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία και το έλλειμμα στην χρεοκοπία στα κλασσικά και στα στάσιμα ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου αντίστοιχα.

Λήμμα 4.2. Οι από κοινού ελλαττωματικές αθροιστικές συναρτήσεις κατανομής συσχετίζονται με

$$F_e\left(x,y\middle|u\right)=\frac{1}{1+\theta}\sum_{i=0}^{u}F\left(x,y\middle|u-i\right)f_1\left(i+1\right)$$

$$+\frac{I\left(u<x\right)}{1+\theta}\left[\bar{F}_1\left(u+1\right)-\bar{F}_1\left(x+1\right)-\bar{F}_1\left(u+y+1\right)+\bar{F}_1\left(x+y+1\right)\right],\quad x\,,\ y\in \mathrm{N}_+\,,\ u\in \mathrm{N}\,.$$

Απόδειξη. Αρχικά να εκφράσουμε τα $F\left(x,\ \ y\middle|u\right)$ και $F_e\left(x,\ \ y\middle|u\right)$ υπό τον όρο $\beta\left(u\right)$ και $\beta_e\left(u\right)$. Πρώτον, σημειώστε ότι

$$F\left(x,\ \ y\middle|u\right)=E\left\{I\left(T<\infty\right)I\left(U_{T-}\le x\right)I\left(\left|U_{T_e}\right|\le y\right)\middle|U_0=u\right\}$$

και

$$F_e\left(x,\ \ y\middle|u\right)=E\left\{I\left(T_e<\infty\right)I\left(U_{T_e-}\le x\right)I\left(\left|U_{T_e}\right|\le y\right)\middle|U_0=u\right\}.$$

Δεύτερον, όταν $w\left(X,Y\right)=I\left(X\le x\right)I\left(Y\le y\right)$, $F\left(x,\ \ y\middle|u\right)=\beta\left(u\right)$ και $F_e\left(x,\ \ y\middle|u\right)=\beta_e\left(u\right)$ Τότε, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1:

$$F_e\left(x,\ \ y\middle|u\right)=\frac{1}{1+\theta}\sum_{i=0}^{u}F\left(x,\ \ y\middle|u-i\right)f_1\left(i+1\right)+\sum_{i=u+1}^{\infty}\frac{1}{E\left\{V_2\right\}}\sum_{j=i+1}^{\infty}I\left(i\le x\right)I\left(j-i\le y\right)f\left(j\right)$$

$$=\frac{1}{1+\theta}\sum_{i=0}^{u}F\left(x,\ \ y\middle|u-i\right)f_1\left(i+1\right)+\frac{I\left(u<x\right)}{\left(1+\theta\right)E\left\{L_1\right\}}\sum_{i=u+1}^{x}\ \sum_{j=i+1}^{i+y}f\left(j\right)$$

$$= \frac{1}{1+\theta}\sum_{i=0}^{u} F\left(x,\ y\middle|u-i\right) f_1(i+1) + \frac{I(u<x)}{(1+\theta)E\{L_1\}}\sum_{i=u+1}^{x}\left[\bar{F}(i)-\bar{F}(i+y)\right]$$

$$= \frac{1}{1+\theta}\sum_{i=0}^{u} F\left(x,\ y\middle|u-i\right) f_1(i+1) + \frac{I(u<x)}{1+\theta}\left[\bar{F}_1(u+1)\right.$$

$$\left. -\bar{F}_1(x+1)-\bar{F}_1(u+y+1)+\bar{F}_1(x+y+1)\ \right], \qquad x,\ y\in \mathrm{N}_+$$

και το αποτέλεσμα ακολουθεί.

Η ελλειμματική οριακή κατανομή του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία είναι συνεπώς

$$F_{e,X}\left(x\middle|u\right) = \lim_{y\to\infty}\ F_e\left(x,\ y\middle|u\right) = \frac{1}{1+\theta}\sum_{i=0}^{u} F_X\left(x\middle|u-i\right) f_1(i+1)$$

$$+\frac{I(u<x)}{1+\theta}\left[\bar{F}_1(u+1)-\bar{F}_1(x+1)\right], \quad x\in\mathrm{N}_+,\ u\in\mathrm{N}$$

και η ελλειμματική οριακή κατανομή του ελλείμματος την στιγμή της χρεοκοπίας είναι

$$F_{e,Y}\left(y\middle|u\right) = \lim_{x\to\infty}\ F_e\left(x,\ y\middle|u\right) = \frac{1}{1+\theta}\left[\sum_{i=0}^{u} F_Y\left(y\middle|u-i\right) f_1(i+1) + \bar{F}_1(u+1) - \bar{F}_1(u+y+1)\right]$$

$$y\in\mathrm{N}_+,\ u\in\mathrm{N},$$

όπου οι συντελεστές X και Y υποδηλώνουν ποια οριακή κατανομή θεωρούμε.
Τώρα γυρίζουμε στο κλασσικό διακριτό μοντέλο καταστροφής, το οποίο μπορεί να ξαναβρεθεί σαν μια ειδική περίπτωση.

4.4. Το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο.

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση $k(x)=(1-\phi)\phi^{x-1}, x\in\mathrm{N}_+$: ονομαστικά, την τροποποιημένη γεωμετρική κατανομή στο 0. Τότε $\bar{K}(x)=\phi^x$ και $E\{V_2\}=1/(1-\phi)$. Επομένως, $k_1(x)=k(x)$, $x\in\mathrm{N}_+$ και $m_e(u)=m(u)=m_*(u)$. Λόγω αυτής της ειδικής δομής, βρίσκουμε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1

ότι είναι δυνατό να βρεθεί ένα διακριτό ανάλογο της ελλειμματικής συνάρτησης ποινής Gerber-Shiu στο κλασσικό μοντέλο κινδύνου.

ΘΕΩΡΗΜΑ 4.2. *Η συνάρτηση ελλειμματικής ποινής Gerber-Shiu* $m_*(u)$ *ικανοποιεί την ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση:*

$$m_*(u) = q(u)\sum_{i=0}^{u} m_*(u-i)b_\rho(i+1) + u\sum_{i=u+1}^{\infty} \rho^{i-u-1}\tau(i), \quad u \in \mathrm{N},$$

όπου $\tau(i) = (1-\phi)\sum_{j=i+1}^{\infty} w(i, j-i) f(j)$, $i \in \mathrm{N}$, $\rho = \rho(\upsilon)$ είναι η μοναδική θετική ρίζα στο διάστημα $(\upsilon\phi, \upsilon]$ της εξίσωσης $F(\rho) = (\rho - \upsilon\phi)/[\upsilon(1-\phi)]$:

$$b_\rho(x) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i f(x+i)}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \bar{F}(i)}, \ x \in \mathrm{N}_+,$$

είναι μια συνάρτηση πιθανότητας και

$$q(\upsilon) = \begin{cases} \frac{\upsilon-\rho}{1-\rho}, & u<1, \\ \frac{1}{1+\theta}, & u=1. \end{cases}$$

Απόδειξη. Από την Εξίσωση (4.7) έχουμε με $m_*(u) = m_e(u) = m(u)$,

$$(\upsilon - z)M_*(z) = \upsilon\left[1 - \frac{1}{E\{V_2\}}\right]m_*(0) + \upsilon\tau(0) + \upsilon\frac{M_x(z) - M_*(z)F(z)}{E\{V_2\}} - \upsilon T(z)$$

το οποίο ισοδυναμεί με

$$\left[z - \upsilon + \upsilon\frac{1-F(z)}{E\{V_2\}}\right]M_*(z) = \upsilon T(z) - \upsilon\left[1 - \frac{1}{E\{V_2\}}\right]m_*(0) - \upsilon\tau(0). \qquad (4.10)$$

Από $E\{V_2\} = 1/(1-\phi)$, ο πρώτος όρος στο αριστερό μέρος μπορεί να εκφραστεί ως

$$z - \upsilon + \upsilon\frac{1-F(z)}{E\{V_2\}} = \upsilon[l(z) - \xi(z)],$$

όπου $l(z) = -\phi + z/\upsilon$ και $\xi(z) = (1-\phi)F(z)$. Τώρα, υποθέτοντας το z να είναι μεταξύ μηδέν και της ακτίνα σύγκλισης του $F(z), \xi'(z) \geq 0, \xi''(z) \geq 0$ και $l'(z) > 0$. Επίσης, $l(\upsilon\phi) = 0 < \xi(\upsilon\phi)$ και $l(u) = 1 - \phi = \xi(1) \geq \xi(\upsilon)$. Συνεπώς, υπάρχει μία μοναδική ρίζα $\rho \in (\upsilon\phi, \upsilon]$ στην εξίσωση $l(\rho) = \xi(\rho)$ ή αντίστοιχα $z - \upsilon\phi - \upsilon(1-\phi)F(z) = 0$. Συνεπώς, από (4.10) με $z = \rho$:

$$\upsilon\phi m_*(0) + \upsilon\tau(0) = \upsilon T(\rho),$$

και η (4.10) γίνεται

$$\left[z - \upsilon\phi - \upsilon(1-\phi)F(z)\right]M_*(z) = \upsilon T(z) - \upsilon T(\rho).$$

Αφαιρούμε $\left[\rho - \upsilon\phi - \upsilon(1-\phi)F(\rho)\right]M_*(z) = 0$ από τον πρώτο όρο στο αριστερό μέρος για να πάρουμε

$$\left\{z - \rho + \upsilon(1-\phi)\left[F(\rho) - F(z)\right]\right\}M_*(z) = \upsilon\left[T(z) - T(\rho)\right],$$

ή, πολλαπλασιάζοντας με $z/(z-\rho)$

$$\left\{z - \upsilon(1-\phi)\frac{z\left[F(\rho) - F(z)\right]}{\rho - z}\right\}M_*(z) = z\upsilon\frac{T(z) - T(\rho)}{z - \rho}.$$

Για να αναστρέψουμε τις γεννήτριες συναρτήσεις σημειώνουμε ότι η συνάρτηση πιθανότητας $b_\rho(x), x \in \mathrm{N}_+$, έχει γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας:

$$\mathrm{B}_\rho(z) = \sum_{x=1}^{\infty} z^x b_\rho(x) = \frac{\sum_{x=1}^{\infty} z^x \sum_{i=x}^{\infty} \rho^{i-x} f(i)}{\sum_{i=0}^{\infty} \rho^i \sum_{j=i+1}^{\infty} f(i)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \rho^i f(i) \sum_{x=1}^{i} (z/\rho)^x}{\sum_{j=1}^{\infty} f(j) \sum_{i=0}^{j-1} \rho^i}$$

$$= \frac{(z/\rho)\sum_{i=1}^{\infty} \rho^i f(i)\left[\left(1 - (z/\rho)^i / (1 - z/\rho)\right)\right]}{\sum_{j=1}^{\infty} f(j)\left[\left(1 - \rho^j\right)/(1-\rho)\right]} = \frac{z\left[F(\rho) - F(z)\right]}{(\rho - z)\left[1 - F(\rho)\right]/(1-\rho)}$$

$$= \frac{1-\rho}{1-F(\rho)} \frac{z\left[F(\rho)-F(z)\right]}{\rho - z}.$$

Συνεπώς παίρνουμε

$$zM_*(z) - \frac{\upsilon(1-\phi)\left[1-F(\rho)\right]}{1-\rho} \mathrm{B}_\rho(z) M_*(z) = z\upsilon \frac{T(z)-T(\rho)}{z-\rho}.$$

Έτσι, συγκρίνοντας τους συντελεστές του z^{u+1} οδηγούμαστε στο

$$m_*(u) = \frac{\upsilon(1-\phi)\left[1-F(\rho)\right]}{1-\rho} \sum_{i=0}^{u} m_*(u-i) b_\rho(i+1) + \upsilon \sum_{i=u+1}^{\infty} \rho^{i-u-1} \tau(i).$$

Τώρα, $\upsilon(1-\phi)\left[1-F(\rho)\right] = \upsilon(1-\phi)-(\rho-\upsilon\phi) = \upsilon - \rho$ και έτσι εάν $\upsilon < 1$,

$$\frac{\upsilon(1-\phi)\left[1-F(\rho)\right]}{1-\rho} = \frac{\upsilon-\rho}{1-\rho}.$$

Αντιστρόφως,

$$\frac{\upsilon(1-\phi)\left[1-F(\rho)\right]}{1-\rho} = \frac{\upsilon}{\rho}(1-\phi) E\{L_1\} F_1(\rho) = \frac{\upsilon F_1(\rho)}{\rho(1+\theta)}$$

από $1+\theta = E\{V_2\}/E\{L_1\} = 1/\left[(1-\phi)E\{L_1\}\right]$. Άρα, εάν $\upsilon \to 1^-$ τότε $\rho \to 1$ και $\upsilon(1-\phi)\left[1-F(\rho)\right]/(1-\rho) \to 1/(1+\theta)$ σε αυτή την περίπτωση. Το αποτέλεσμα ακολουθεί.

Εφόσον $\rho \in (\upsilon\phi, \upsilon]$ είναι λύση της εξίσωσης $l(z) = \xi(z)$ όταν $\upsilon < 1$, η ανανεωτική εξίσωση που δίνεται με το Θεώρημα 4.1 είναι ελλειμματική, το οποίο θυμίζει την κλασσική περίπτωση Poisson της συνάρτησης Gerber-Shiu. (Δείτε Gerber και Shiu (1998) για το μοντέλο Poisson.)

Μία σημαντική ειδική περίπτωση είναι το σύνθετο διωνυμικό ανάλογο της κλασσικής Poisson πιθανότητας χρεοκοπίας σε άπειρο χρονικό διάστημα. Για να προκύψει, θέτουμε $\upsilon = 1$ και γι'αυτό $\rho = 1$ και $b_\rho(x) = f_1(x)$, $x \in \mathrm{N}_+$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.1 δίνοντας

$$\psi_*(u) = \frac{1}{1+\theta} \sum_{i=0}^{u} \psi_*(u-i) f_1(i+1) + \frac{1}{1+\theta} \bar{F}_1(u+1), \qquad u \in \mathrm{N}.$$

Αυτή είναι μια ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση η οποία μπορεί να ληθεί χρησιμοποιώντας γεννήτριες συναρτήσεις. Όπως εύκολα υποδεικνύεται, βρίσκεται ότι η παραγοντική συνάρτηση της $\psi_*(u)$ μπορεί να παρουσιαστεί στην καλά γνωστή μορφή:

$$\psi_*(z)=\sum_{u=0}^{\infty} z^u \psi_*(u)=\frac{1}{1-z}\left\{1-\frac{1-1/(1+\theta)}{1-F_1(z)/\left[z(1+\theta)\right]}\right\},$$

η οποία συμφωνεί με τον Willmot (1993, p.139), για παράδειγμα. Συνεπώς το $\psi_*(u)$ είναι η ουρά μιας διακριτής σύνθετης γεωμετρικής κατανομής με παράμετρο $1/(1+\theta)$, με συνάρτηση πιθανότητας $h(x)=f_1(x+1)$ και αθροιστική συνάρτηση κατανομής $H(x)=1-\bar{H}(x), x\in \mathrm{N}$, ονομαστικά

$$\psi_*(u)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\theta}{1+\theta}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^i \bar{H}^{*i}(u), \quad u\in \mathrm{N},$$

όπου $H^{*i}(x)=1-\bar{H}^{*i}(x)$ είναι η i-στη συνέλιξη του $H(x)$ με τον εαυτό του. Επομένως, η πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο χρονικό διάστημα με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα είναι

$$\psi_*(0)=\frac{\theta}{1+\theta}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{1+\theta}\right)^i\left\{1-\left[f_1(1)\right]^i\right\}=\frac{\theta}{1+\theta}\left[\frac{1+\theta}{\theta}-\frac{1}{1-f_1(1)/(1+\theta)}\right]=1-\frac{\theta}{\phi(1+\theta)}$$

εφόσον $f_1(1)=1/E\{L_1\}=(1+\theta)/E\{V_2\}=(1+\theta)(1-\phi)$, το οποίο συμπίπτει με τον Willmot (1993, p.139).

Στο προεξοφλητικό δωρεάν μοντέλο μπορεί να προκύψει μία ανάλογη περίπτωση με αυτή στο Λήμμα 4.2.Από, $\beta_e(u)=\beta(u)$, η εξίσωση στο Λήμμα 4.1 γίνεται μια ελλειμματική ανανεωτική και την εξίσωση στο Λήμμα 4.2, ονομαστικά

$$F_*\left(x,y|u\right)=\frac{1}{1+\theta}\sum_{i=0}^{u}F_*\left(x,y|u-i\right)f_1\left(i+1\right)$$

$$+\frac{I\left(u<x\right)}{1+\theta}\left[\bar{F}_1\left(u+1\right)-\bar{F}_1\left(x+1\right)-\bar{F}_1\left(u+y+1\right)+\bar{F}_1\left(x+y+1\right)\right],\quad x,y\in N_+,\ u\in N.$$

Επιπλέον, όταν $\upsilon=1$, $\rho=1$ και $b_\rho\left(x\right)=f_1\left(x\right)$, $x\in N_+$. Επομένως το αποτέλεσμα στο Θεώρημα 4.1 παράγει αυτό στο Λήμμα 4.1.

Τέλος, παρατηρούμε ότι $U_{T-}+\left|U_T\right|$ είναι το ποσό της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία. . Επομένως,θέτουμε

$$G_*\left(s|u\right)=E\left\{I\left(U_{T_*-}+\left|U_{T_*}\right|\le s\right)I\left(T_*<\infty\right)\middle|U_0=u\right\}$$

να είναι η συνάρτηση ελλειμματικής αθροιστικής κατανομής της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία στο σύνθετο διωνυμικό μοντέλο. Το επόμενο λήμμα παρέχει μια ανανεωτική εξίσωση για $G_*\left(s|u\right)$.

Λήμμα 4.2. Η απαίτηση που προκαλεί χρεοκοπία έχει ελλειμματική αθροιστική συνάρτηση χρεοκοπίας που ικανοποιεί την

$$G_*\left(s|u\right)=\frac{1}{1+\theta}\sum_{i=0}^{u}G_*\left(s|u-i\right)f_1\left(i+1\right)+\frac{1}{1+\theta}\left[\bar{F}_1\left(u+1\right)-\bar{F}_1\left(s+1\right)+\left(u-s\right)f_1\left(s+1\right)\right]$$

,

$u\in N$, $s\ge u+2$.

(4.11)

Απόδειξη. Όταν $w\left(x,y\right)=I\left(x+y\le s\right)$, $G_*\left(s|u\right)=\mu_*\left(u\right)\big|_{\upsilon=1}$. Επίσης, εάν $\upsilon=1$,τότε $\rho=1$, το οποίο συνεχώς οδηγεί στο $b_\rho\left(x\right)=f_1\left(x\right)$, $x\in N_+$. Συνεπώς, με απευθείας εφαρμογή του Θεωρήματος 4.1 έχει αποτέλεσμα

$$G_*(s|u)=\frac{1}{1+\theta}\sum_{i=0}^{u}G_*(s|u-i)f_1(i+1)+(1-\phi)\sum_{i=u+1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}w(i,j-i)f(j).$$

Για τον δεύτερο όρο στη δεξιά πλευρά έχουμε

$$(1-\phi)\sum_{i=u+1}^{\infty}\sum_{j=i+1}^{\infty}w(i,j-i)f(j)=(1-\phi)\sum_{j=u+2}^{\infty}f(j)\sum_{i=u+1}^{j-1}w(i,j-i)$$

$$=(1-\phi)\sum_{j=u+1}^{\infty}f(j+1)\sum_{i=u+1}^{j}I(j+1\leq s)=(1-\phi)\sum_{j=u+1}^{s-1}(j-u)f(j+1)$$

$$=(1-\phi)\sum_{j=u+1}^{s}(j-u-1)f(j)$$

$$=(1-\phi)\left\{\sum_{j=u+1}^{s}jf(j)-(u+1)\left[\bar{F}(u)-\bar{F}(s)\right]\right\}$$

$$=(1-\phi)\left\{(u+1)\bar{F}(u)-s\bar{F}(s)+\sum_{j=u+1}^{s-1}\bar{F}(j)-(u+1)\left[\bar{F}(u)-\bar{F}(s)\right]\right\}$$

$$=(1-\phi)\left[\sum_{j=u+1}^{s}\bar{F}(j)+(u-s)\bar{F}(s)\right]$$

$$=\frac{1}{1+\theta}\left[\bar{F}_1(u+1)-\bar{F}_1(s+1)+(u-s)f_1(s+1)\right],\qquad s\in\mathbb{N}_+\setminus\{1\},\quad u+2\leq s,$$

όπως στην (4.11).

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του Λήμματος 4.2 όταν $u=0$, μπορεί να βρούμε την ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας της απαίτησης που προκαλεί χρεοκοπία $S=X+Y$ στο σύνθετο διωνυμικό μοντέλο με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα:

$$g_*(s|0)=\frac{1-\phi}{\phi}(s-1)f(s),\qquad s\in\mathrm{N}_+\setminus\{1\}.$$

5.1 Εισαγωγή

Στην θεωρία κινδύνου, η έρευνα σχετικά με την ανέλιξη του πλεονάσματος του ασφαλιστή στα διαφορετικά ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου Sparre Andersen έγινε εκτενώς με την ανάλυση της λειτουργίας Gerber-Shiu που εισήχθη για πρώτη φορά από τους Gerber και Shiu (1998). Μαζί με το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen συνεχούς χρόνου, μερικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα έχουν επίσης προκύψει σε ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου Sparre Andersen διακριτού χρόνου που μας δίνουν μια εικόνα και ιδέες προσέγγισης για τα μοντέλα συνεχούς χρόνου. Στην παρούσα εργασία θεωρούμε ένα ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen διακριτού χρόνου, αλλά υποθέτουμε γενικά ότι ο χρόνος των ενδιαμέσων απαιτήσεων πιθανώς έχει αντίκτυπο στο μεταγενέστερο μέγεθος της απαίτησης, όπως για παράδειγμα στην ασφάλιση καταστροφών. Πράγματι, διάφοροι συγγραφείς ανέλυσαν την ανέλιξη του πλεονάσματος κάτω από ορισμένες δομές εξάρτησης μεταξύ του μεγέθους της απαίτησης και του χρόνου της απαίτησης σε ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου συνεχούς χρόνου (βλ. π.χ. Albrecher & Boxma, 2004; Albrecher & Teugels, 2006; Boudreault et al., 2006; Cossette et al., 2008; Badescu et al., 2009). Πρόσφατα, ο Marceau (2009) υπέθεσε μια δομή εξάρτησης μέσω μιας διδιαάστατης γεωμετρικής κατανομής σε μια ανανεωτική διαδικασία κινδύνου διακριτού χρόνου.

Σε αυτήν την εργασία, η δομή εξάρτησης υποθέτουμε ότι είναι αυθαίρετη και θα μελετηθεί μια γενικευμένη εκδοχή της κλασικής συνάρτησης Gerber-Shiu. Αυτή η γενίκευση επιτυγχάνεται προσθέτοντας δύο επιπλέον μεταβλητές στην συνάρτηση της ποινής, δηλαδή το ελάχιστο επίπεδο του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία και το πλεόνασμα αμέσως μετά την προτελευταία απαίτηση πριν συμβεί η χρεοκοπία. Μια τέτοια γενίκευση μας επιτρέπει να μελετήσουμε περαιτέρω την ανέλιξη του πλεονάσματος του ασφαλιστή πριν από το γεγονός της χρεοκοπίας. Οι Cheung κ.ά. (2010b) μελέτησαν για πρώτη φορά αυτήν την γενίκευση σε μια ανανεωτική διαδικασία κινδύνου Sparre Andersen συνεχούς χρόνου και θα δείξουμε ότι τα αποτελέσματα που προκύπτουν σε αυτήν την εργασία είναι άρρηκτα συνδεδεμένα. Σημειώνεται ότι η μεταβλητή ελάχιστου επιπέδου πλεονάσματος που προστέθηκε στην συνάρτηση της ποινής μελετήθηκε επίσης από τους Biffis & Kyprianou (2010) και από τους Biffis & Morales (2010) στο πλαίσιο των ανελίξεων κινδύνου Levy.

Οι σχετικές πληροφορίες και ο συμβολισμός που αφορούν στην κατηγορία των μοντέλων κινδύνου που μας ενδιαφέρουν και η γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu παρέχονται στην Ενότητα 5.2. Στην Ενότητα 5.3.1, ανάλογο με την ανανεωτική διαδικασία κινδύνου Sparre Andersen συνεχούς χρόνου που μελετάται από τους Cheung κ.ά. (2010b), προκύπτουν δομικές ιδιότητες της γενικευμένης συνάρτησης Gerber-Shiu στο παρόν μοντέλο. Συνεπώς, μπορεί να ληφθεί μια εναλλακτική μορφή αποτελέσματος για την γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu και διάφορες από κοινού και οριακές κατανομές ποσοτήτων που σχετίζονται με την χρεοκοπία. Στην Ενότητα 5.4, για να προσδιοριστούν οι ποσότητες που εμπλέκονται στους αναδρομικούς τύπους στην γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu, υποθέτουμε μια ευρεία κατηγορία κατανομών, που ονομάζεται διακριτική κλάση K_n για τους χρόνους μετξύ των απαιτήσεων. Η διακριτή τάξη κατανομών K_n που μελετάται από τον Li (2005a, b) έχει μια γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων η οποία είναι μια αναλογία δύο πολυωνύμων τάξης n.

Το σύνθετο διωνυμικό μοντέλο μπορεί εύκολα να ανευρεθεί ως ειδική περίπτωση και έχει εξεταστεί ευρέως από πολλούς ερευνητές (π.χ. Gerber, 1988; Shiu, 1989; Willmot, 1993; Dickson, 1994; Cheng κ.ά., 2000; Yuen & Guo, 2001). Τέλος, στην Ενότητα 5.5, εξετάζεται μια τροποποιημένη διακριτή ανέλιξη απλής ανανέωσης (δηλαδή μία διακριτή ανέλιξη καθυστερημένης ανανέωσης). Συγκεκριμένα, υποθέτουμε χρονικά εξαρτώμενα μεγέθη απαιτήσεων έτσι ώστε αυτό το μοντέλο να μπορεί να είναι πιο ικανοποιητικό ως μοντέλο στο οποίο ένα ζεύγος του πρώτου συμβάντος ακολουθεί μία διαφορετική υπόθεση κατανομής από τα επόμενα ζεύγη. Για την γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu σε αυτό το μοντέλο, προκύπτει ένας αναδρομικός τύπος για την από κοινού προ εξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας από την αντίστοιχη γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu στο κλασσικό μοντέλο.

5.2 Υπόβαθρο και συμβολισμός

Πρώτον, ας θεωρήσουμε την ανέλιξη πλεονάσματος $\{U(t); t \geq 0\}$ στην διακριτή ανέλιξη ανανέωσης κινδύνου όπως περιγράφεται τώρα. Το πλεόνασμα στον χρόνο t ορίζεται ως

$$U(t) = u + 1 - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i,$$

με το αρχικό αποθεματικό του ασφαλιστή να είναι $u \geq 0.$. Ο χρόνος μετράται σε διακριτές μονάδες 0,1,2, . . . και τα ασφάλιστρα καταβάλλονται με συντελεστή 1 ανά μονάδα χρόνου. Η ανέλιξη του αριθμού των απαιτήσεων $\{N(t); t \geq 0\}$ θεωρείται ότι είναι μια ανανεωτική διαδικασία, με ανεξάρτητους και ισόνομα κατανεμημένους θετικά ενδιαμέσους χρόνους των απαιτήσεων

$\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ με κοινή συνάρτηση κατανομής $K(t)$ και συνάρτηση μάζας πιθανότητας $k(t)=K(t)-K(t-1)$ για $y=1,2,...$ Τα μεγέθη των απαιτήσεων $\{Y_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες θετικά τυχαίες μεταβλητές με συναρτήση κατανομής $P(y)$ και συναρτήση μάζας πιθανότητας $p(y)=P(y)-P(y-1)$ για $y=1,2,...$ Συμβολίζουμε ένα αυθαίρετο ζεύγος (W_i,Y_i) από (W,Y). Εάν τα W και Y θεωρηθούν ανεξάρτητα, η ανέλιξη του πλεονάσματος $\{U(t);t\geq 0\}$ αναφέρεται ως το ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen διακριτού χρόνου (π.χ.. Wu & Li, 2008).

θα γενικεύσουμε το παραπάνω μοντέλο χαλαρώνοντας την υπόθεση της ανεξαρτησίας μεταξύ των μεγεθών των απαιτήσεων και των ενδιαμέσων χρόνων των απαιτήσεων ακολούθως. Υποθέτουμε μόνο ότι τα ζεύγη $\{(W_i,Y_i);i=1,2...\}$είναι ανεξάρτητα και ισόνομα κατανεμημένα, έτσι ώστε οι επαυξήσεις$\{(W_i-Y_i);i=1,2...\}$ να είναι επίσης ανεξάρτητες και ισόνομα κατανεμημένες, που υποδηλώνει ότι η ανέλιξη του πλεονάσματος Sparre Andersen διακριτού χρόνου εξακολουθεί να διαθέτει μία ιδιότητα τυχαίου περίπατου. Ας προσδιορίσουμε την συνάρτηση μάζας πιθανότητας του Y με δεδομένο το W από $p_t(y)=\Pr\{Y=y|W=t\}$ και επίσης την συνάρτηση κατανομής με $P_t(y)$ για $y=1,2...$ Προφανώς, η από κοινού κατανομή των (W,Y) ανευρίσκεται από το παράγωγο της οριακής συνάρτησης πιθανοτήτων $k(t)$ και της συνάρτησης πιθανοτήτων $p_t(y)$. Είναι χρήσιμο να εισαχθεί η υποθετική γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων $\hat{p}_i(s)=\sum_{y=1}^{\infty}s^y p_t(y)$.

Εδώ υιοθετούμε την συμβολική σύμβαση ότι το κενό παράγωγο είναι 1 και το κενό άθροισμα είναι 0. Τέλος, υποθέτουμε την περίπτωση του θετικού περιθωρίου ασφαλείας, δηλαδή $E[W]>E[Y]$.

Στη συνέχεια, ας εισαγάγουμε την κλασική συνάρτηση της προεξοφλημένης ποινής Gerber-Shiu που καθορίζεται σε ένα ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen διακριτού χρόνου (π.χ. Li, 2005a, b; Wu & Li, 2008).

$$m_{v,12}(u)=E\left[v^T w_{12}\left(U(T-1),|U(T)|\right)I(T<\infty)|U(0)=u\right],\quad u\in \mathrm{N}, \qquad (5.1)$$

όπου T είναι ο χρόνος χρεοκοπίας που ορίζεται ως $T=\min\{t\in N^+:U(t)<0\}\mu\varepsilon T=\infty$ εάν ισχύει $U(t)\geq 0$ για όλα τα $t\geq 1$. Επίσης,

$U(T-1)$ είναι το πλεόνασμα πριν την χρεΟκοπία, $|U(T)|$ είναι το έλλειμμα την στιγμή της χρεωκοπίας, $w_{12}(x,y)$ είναι η συνάρτηση ποινής και $v \in (0,1]$ ερμηνεύεται ως ο συντελεστής προεξόφλησης.

Όπως στους Cheung κ.ά. (2010b), προκειμένου να γενικεύσουμε την παραπάνω συνάρτηση Gerber-Shiu, αρχικά ορίζουμε το $X_t = \min_{0 \le s < 1} U(s)$ ως το ελάχιστο πλεόνασμα πριν τον χρόνο t. Έτσι, X_T είναι το ελάχιστο επίπεδο του πλεονάσματος πριν την χρεοκοπία. Δεύτερων, έστω ότι $R_n = u + \sum_{i=1}^{n}(W_i - Y_i)$ για $n = 1,2\ldots$ και $R_0 = u$, π.χ. R_n είναι το πλεόνασμα αμέσως μετά την n-ή αξίωση εάν $n \geq 1$. Επομένως, $R_{N(T)-1}$ είναι το πλεόνασμα αμέσως μετά την προτελευταία απαίτηση πριν προκύψει η χρεοκοπία εάν $\mathrm{N}(\mathrm{T}) > 1$, και $R_0 = u$ εάν προκύψει η χρεοκοπία στην πρώτη απαίτηση (π.χ. $\mathrm{N}(\mathrm{T}) = 1$). Σημειώστε ότι αυτές οι δύο καινούργιες ποσότητες, X_T και $R_{N(T)-1}$, μπορεί να είναι ίδιες ή όχι ανάλογα με μια δεδομένη διαδρομή δείγματος. Τότε η Εξίσωση (5.1) μπορεί να γενικευθεί ως εξής

$$m_v^*(u) = E\left[v^T w^*\left(U(T-1), |U(T)|, X_T, R_{N(T)-1}\right) I(T < \infty) \middle| U(0) = u\right], \qquad u \in \mathrm{N}. \qquad (5.2)$$

Μπορούμε να αναλύσουμε το τελευταίο ύψος της κλίμακας πριν από την χρεοκοπία $X_T + |U(T)|$ και τον τελευταίο ενδιάμεσο χρόνο των απαιτήσεων πριν από την χρεοκοπία από την Εξίσωση (5.2). Ως ειδική περίπτωση της Εξίσωσης (5.2) με $w^*(x,y,z,r) = w(x,y,r)$, προκύπτει ότι

$$m_v(u) = E\left[v^T w\left(U(T-1), |U(T)|, X_T, R_{N(T)-1}\right) I(T < \infty) \middle| U(0) = u\right], \qquad u \in \mathrm{N}. \qquad (5.3)$$

Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (5.3) μπορούμε να μελετήσουμε το τελευταίο ζεύγος ($W_{N(T)}, Y_{N(T)}$) όπου $Y_{N(T)}$ είναι η απαίτηση που προκαλεί την χρεοκοπία που δίδεται από την $Y_{N(T)} = U(T-1) + |U(T)| + 1$. Σημειώστε ότι το πραγματικό επίπεδο του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία είναι $R_{N(T)-1} + W_{N(T)}$ που ισοδυναμεί με $U(T-1)+1$. Οι Cheung κ.ά. (2010a) μελέτησαν αυτή την ποσότητα σε μια σύνθετη ανέλιξη κινδύνου Poisson.

Επίσης, θεωρούμε τις συγκεκριμένες ειδικές περιπτώσεις των παραπάνω συναρτήσεων Gerber-Shiu με τις διαδοχικά απλουστευμένες συναρτήσεις ποινής, αντίστοιχα, που ορίζονται ως εξής

$w^*(x,y,z,r) = w_{123}(x,y,z)$, $w^*(x,y,z,r) = w_{23}(y,z)$, *and* $w*(x,y,z,r) = 1$, i.e.

$$m_{v,123}(u) = E\left[v^T w_{123}\left(U(T-1), |U(T)|, X_T\right) I(T<\infty) \middle| U(0)=u\right], \quad u \in \mathrm{N}, \qquad (5.4)$$

$$m_{v,23}(u) = E\left[v^T w_{23}\left(|U(T)|, X_T\right) I(T<\infty) \middle| U(0)=u\right], \quad u \in \mathrm{N}, \qquad (5.5)$$

και

$$\overline{G}_v(u) = E\left[v^T \ I(T<\infty) \middle| U(0)=u\right], \quad u \in \mathrm{N}. \qquad (5.6)$$

Σίγουρα, με $v = 1$, η Εξίσωση (5.6) μετατρέπεται στην πιθανότητα χρεοκοπίας $\psi(u) = \Pr\{T<\infty | U(0)=u\}$.

Επιπλέον, η θεμελιώδης εξίσωση του Lundberg (γενικευμένη) δίδεται από (π.χ. Li, 2005a,b).

$$E\left[v^W s^{Y-W}\right] = 1, \qquad (5.7)$$

και στις τελευταίες ενότητες οι ρίζες αυτής της εξίσωσης διαδραματίζουν σημαντικό ρόλο στην ανάλυση των συναρτήσεων Gerber-Shiu που μόλις εισήχθησαν.

Για την ανάλυση της Εξίσωσης (5.3) στην Ενότητα 5.4, θα ορίσουμε μια βοηθητική συνάρτηση και τον τελεστή Dickson-Hipp διακριτού χρόνου (βλέπε Dickson & Hipp, 2001; Li & Garrido, 2004 για την συνεχή έκδοση αυτού του τελεστή) ως εξής. Πρώτον, υποθέτουμε

$$\eta_v(u) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \omega_i(u+t) k(t), \qquad u \in \mathrm{N}, \qquad (5.8)$$

για κάποια συνάρτηση $\omega_t(u)$ με γεννήτρια συνάρτηση $\hat{\eta}(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \eta_v(x)$. Τότε, λαμβάνοντας το άθροισμα από το 0 έως ∞ το έχουμε

$$\hat{\eta}_v(s) = \sum_{u=0}^{\infty} s^u \sum_{t=1}^{\infty} v^t \omega_t(u+t) k(t) = \sum_{t=1}^{\infty} s^{-t} v^t k(t) \left\{ \sum_{u=0}^{\infty} s^{u+t} \omega_t(u+t) \right\}$$

$$= \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{v}{s}\right)^t k(t) \left\{ \hat{\omega}_t(u) \right\},$$

όπου $\hat{\omega}_t(s) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \omega_t(x)$. Δηλαδή,

$$\hat{\eta}_v(s) = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\frac{v}{s}\right)^t k(t) \hat{\omega}_t(s) - \hat{\omega}_{*,v}(s), \qquad (5.9)$$

όπου $\hat{\omega}_{*,y}(s) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{u=0}^{t-1} s^{u-t} v^t k(t) \omega_t(u)$.

Επίσης, για μία συνάρτηση $h(y)$ που ορίζεται στο $y \in N$, ο τελεστής Dickson-Hipp διακριτού χρόνου που συμβολίζεται με T_r ορίζεται ως εξής

$$T_r h(y) = \sum_{x=y}^{\infty} r^{x-y} h(x) = \sum_{x=0}^{\infty} r^x h(x+y), \qquad y \in \mathrm{N}.$$

επομένως, η $T_r h(0) = \sum_{x=0}^{\infty} r^x h(x) = \hat{h}(r)$ είναι η γεννήτρια συνάρτηση του $h(x)$ και εάν τα s και r είναι διακριτά, τότε

$$\frac{\hat{h}(s) - \hat{h}(r)}{s-r} = \frac{sT_s h(1) - rT_r h(1)}{s-r} = T_s T_r h(1) = \sum_{x=0}^{\infty} s^x \{T_r h(x+1)\}. \qquad (5.10)$$

Για λεπτομέρειες σχετικά με πολλές ωραίες ιδιότητες αυτού του τελεστή, ανατρέξτε στην Ενότητα 3 του Li (2005a) αλλά ο τελεστής που ορίζεται εκεί αφορά σε μια συνάρτηση $h(x)$ στο $x \in N^+$.

5.3 Γενική δομή

5.3.1 Αναδρομικοί τύποι

Για να ξεκινήσει η ανάλυση, αν προκύψει χρεοκοπία στην πρώτη απαίτηση, η από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία (x) και το έλλειμμα στην χρεωκοπία (y) δίδονται από

$$h_1(x, y|u) = k(x-u+1)p_{x-u+1}(x+y+1), \qquad x \in \mathrm{N}, y \in \mathrm{N}^+, \qquad (5.11)$$

όπου $T = x - u + 1$ και $R_{N(T)-1} = u$. Για τις επόμενες αξιώσεις που προκαλούν χρεοκοπία (π.χ. $N(T) = 2,3...$), δεδομένου ότι δεν υπάρχει πλέον μια γραμμική σχέση μεταξύ του χρόνου της χρεοκοπίας και του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία, η από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας $(T, U(Y-1), |U(T)|, R_{N(T)-1})$ στα (t, x, y, r) δίδεται από $h_2(t, x, y, r|u)$ για $t = 2,3...., x, r \in N^+$, και $y \in N^+$. Επίσης, η προ εξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πιθανοτήτων που αντιστοιχεί στα h_1 και h_2 αντίστοιχα, δίδεται από

$$h_{1,v}(x, y|u) = v^{x-u+1} h_1(x, y|u) \qquad (5.12)$$

και

$$h_{2,v}(x, y, r|u) = \sum_{t=2}^{\infty} v^t h_2(t, x, y, r|u). \qquad (5.13)$$

Όπως και στους Li (2005a) και Wu & Li (2008), ας θεωρήσουμε την πτώση κάτω από το πλεόνασμα u για να λάβουμε μία αναδρομική εξίσωση για $m_v^*(u)$ όπως ορίζεται στην Εξίσωση (5.2). Η συνάρτηση πιθανοτήτων για αυτήν την πρώτη πτώση που προκαλείται από μία πρώτη απαίτηση διέπεται από $h_1(x,y|0)$, σε αυτήν την περίπτωση, το επίπεδο του πλεονάσματος πάνω από ένα αρχικό κεφάλαιο u πριν από την πτώση είναι $x+1$, και το ποσό πτώσης κάτω από το u είναι y, έτσι ώστε το επίπεδο του πλεονάσματος μετά την πτώση αυτή να γίνει $u-y$ και ο χρόνος αυτής της πτώσης είναι $x+1$. Αν η πτώση κάτω από το u προκαλείται από τυχόν μεταγενέστερες απαιτήσεις έναντι της πρώτης, τότε η συνάρτηση πιθανοτήτων διέπεται από $h_2(x,y,r|0)$. Υπάρχουν δύο πιθανότητες ανάλογα με το αν η πρώτη πτώση προκαλεί χρεοκοπία ή όχι. Εάν $y \le u$ (δηλαδή το επίπεδο πλεονάσματος μετά την πτώση $u-y$ εξακολουθεί να είναι μη αρνητικό), τότε η ανέλιξη κινδύνου Poisson αρχίζει εκ νέου (πιθανολογικώς) με το νέο αρχικό πλεόνασμα $u-y$. Εάν $y \ge u+1$ (δηλαδή η χρεοκοπία εμφανίζεται στην πρώτη πτώση κάτω από το u), τότε στην περίπτωση της πτώσης που προκύπτει στην πρώτη απαίτηση, $U(T-1)=x+u$, και $|U(T)|=y-u,\ X_T=u\ and\ R_{N(T)-1}=u.$ Ενώ στην περίπτωση της πτώσης που συμβαίνει εκτός από την πρώτη απαίτηση, $U(T-1)=x+u, |U(T)|=y-u,\ X_T=u,$ και $R_{N(T)-1}=r+u.$ Αθροίζοντας για όλες τις τιμές *t,x,y* και *r* προκύπτει ο αναδρομικός τύπος ως ακολούθως. Για $u \in N$,

$$m_v^*(u)=\left\{\sum_{y=1}^{u} m_v^*(u-y)\sum_{x=0}^{\infty} h_{1,v}(x,y|0)+\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{x} h_{2,v}(x,y,r|0)\right\}+l_v^*(u), \qquad (5.14)$$

Όπου τα $h_{1,v}(x,y|0)$ και $h_{2,v}(x,y,r|0)$ δίδονται από τις Εξισώσεις (5.12) και (5.13), αντίστοιχα και

$$l_v^*(u)=\sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\ \left|\left\{w^*(x+u,y-u,u,u)h_{1,v}(x,y|0)\right\}\right.$$
$$+\sum_{r=0}^{x} w^*(x+u,y-u,u,r|+u)h_{2,v}(x,y,r|0)\ \}, \qquad (5.15)$$

αντιπροσωπεύει την συνεισφορά που οφείλεται στην χρεοκοπία από την πρώτη πτώση.

Αθροίζοντας για όλες τις τιμές των *t* και *r*, αποκτούμε την προεξοφλημένη (οριακή εάν *υ*=1) από κοινού συνάρτηση πιθανοτήτων του πλεονάσματος πριν την χρεωκοπία (*x*) και το έλλειμμα στην χρεοκοπία (*y*) που δίδονται από την

$$h_v(x,y|u)=h_{1,v}(x,y|u)+\sum_{r=0}^{x}h_{2,v}(x,y,r|u). \qquad (5.16)$$

Με $u=0$ στην παραπάνω συνάρτηση πιθανοτήτων, η Εξίσωση (5.14) μπορεί να γραφτεί εκ νέου ως εξής

$$m_v^*(u)=\sum_{y=1}^{u}m_v^*(u-y)\left\{\sum_{x=0}^{\infty}h_v(x,y|0)\right\}+l_v^*(u). \qquad (5.17)$$

Τότε, έστω ότι

$$\phi_v=\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}h_v(x,y|0),$$

και έστω ότι το ύψος της κλίμακας της συνάρτησης πιθανοτήτων είναι

$$f_v(y)=\frac{1}{\phi_v}\sum_{x=0}^{\infty}h_v(x,y|0), \qquad y\in \mathrm{N}^+, \qquad (5.18)$$

η Εξίσωση (5.17) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$m_v^*(u)=\phi_v\sum_{y=1}^{u}m_v^*(u-y)f_v(y)+l_v^*(u). \qquad (5.19)$$

Καθίσταται σαφές ότι, η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πιθανοτήτων $U(T-1)$, $|U(T)|$, και $R_{N(T)-1}$ για χρεοκοπία που προκύπτει στις απαιτήσεις που ακολουθούν την πρώτη με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα (δηλαδή $h_{2,v}(x,y,r|0)$) είναι απαραίτητη για την ανάλυση της γενικευμένης συνάρτησης Gerber-Shiu $m_v^*(u)$ στην Εξίσωση (5.2), εφόσον η προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανοτήτων $h_{1,v}(x,y|0)$ στην Εξίσωση (5.12) είναι γνωστή. Τώρα, εξετάζουμε την γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu (3) που επίσης ικανοποιεί τις αναδρομικές εκφράσεις στην Εξίσωση (5.19) με $w^*(x,y,z,r)=w(x,y,r)$ στην Εξίσωση (5.15), δηλαδή

$$m_v(u)=\phi_v\sum_{y=1}^{u}m_v(u-y)f_v(y)+l_v(u), \qquad (5.20)$$

όπου

$$l_v(u)=\sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\left\{w(x+u,y-u,u)h_{1,v}(x,y|0)+\sum_{r=0}^{x}w(x+u,y-u,r+u)h_{2,v}(x,y,r|0)\right\}.$$

Μια αλλαγή της μεταβλητής των αθροίσεων δίδει

$$l_v(u)=\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty}\left\{w(x,y,u)h_{1,v}(x,y|u)+\sum_{r=u}^{x}w(x,y,r)h_{2,v}(x-u,y+y,r-u|0)\right\}, \qquad (5.21)$$

καθώς $h_{1,v}(x-u, y+u|0) = h_{1,v}(x, y|u)$.

Επιπλέον, οι συναρτήσεις Gerber-Shiu (5.4), (5.5), και (5.6) ικανοποιούν επίσης την αναδρομική εξίσωση, αντίστοιχα. Εάν $w^*(x,y,u,r) = w_{123}(x,y,|z)$, τότε η Εξίσωση (5.15) γίνεται

$$l_{v,123}(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty} w_{123}(x+u, y-u, u)\left\{h_{1,v}(x,y|0) + \sum_{r=0}^{x} h_{2,v}(x,y,r|0)\right\},$$

δηλαδή,

$$l_{v,123}(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty} w_{123}(x+u, y-u, u) h_v(x,y|0), \qquad (5.22)$$

χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (5.16). Με $l_{v,123}(u)$ σε αυτήν την περίπτωση, η Εξίσωση (5.19) γίνεται

$$m_{v,123}(u) = \phi_v \sum_{y=1}^{u} m_{v,123}(u-y) f_v(y) + l_{v,123}(u).$$

Για την απλούστερη περίπτωση $w^*(x,y,z,r) = w_{23}(y,z)$, η Εξίσωση (5.5) μπορεί να ληφθεί από την Εξίσωση (5.19) με τις Εξισώσεις (5.15) και (5.18)

$$m_{v,23}(u) = \phi_v \sum_{y=1}^{u} m_{v,23}(u-y) f_v(y) + l_{v,23}(u),$$

όπου

$$l_{v,23}(u) = \phi_v \sum_{y=u+1}^{\infty} w_{23}(y-u, u) f_v(y). \qquad (5.23)$$

Σε αυτήν την περίπτωση, το $m_{v,23}(u)$ εξαρτάται μόνο από το ύψος της κλίμακας της συνάρτησης πιθανοτήτων $f_v(y)$ και έτσι η συνάρτηση πιθανοτήτων του τελευταίου ύψους της κλίμακας $X_T + |U_T|$ μπορεί να ληφθεί από το γενικό ύψος της κλίμακας της συνάρτησης πιθανοτήτων (βλ. Ενότητα 3.3). Επιπλέον, εάν $w^*(x,y,z,r) = 1$, τότε η Εξίσωση (5.6) έχει επίσης μια αναδρομική εξίσωση

$$\overline{G}_v(u) = \phi_v \sum_{y=1}^{\infty} \overline{G}_v(u-y) f_v(y) + \phi_v \overline{F}_v(u), \qquad (5.24)$$

όπου $F_v(u) = 1 - \overline{F}_v(u) = \sum_{y=1}^{u} f_v(y)$ και $1 - \overline{F}_y^{*n}(u)$ είναι η συνάρτηση κατανομής των n φορών συνέλιξης της $f_v(u)$. Η λύση της Εξίσωσης (5.24) είναι γνωστή ως η διακριτή σύνθετη γεωμετρική ουρά με $\overline{G}_v(0)=\phi_v$ (π.χ. Willmot & Lin, 2001; Wu & Li, 2008) η οποία δίδεται από

$$\overline{G}_v(u)=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi_v)(\phi_v)^n \overline{F}_v^{*n}(u), \qquad u\in \mathrm{N}.$$

Η γενική λύση στην Εξίσωση (5.19) (και οι ειδικές περιπτώσεις της με την Εξίσωση (5.20)) μπορούν να εκφραστούν ως εξής (π.χ. Wu & Li, 2008, Θεώρημα 5.1))

$$m_v(u)=\frac{1}{1-\phi_v}\sum_{y=0}^{u} g_v(u-y)l_v(y), \qquad u\in \mathrm{N}, \qquad (5.25)$$

όπου $g_v(u)$ είναι η σύνθετη γεωμετρική συνάρτηση πιθανοτήτων $g_v(u)=\overline{G}_v(u-1)-\overline{G}_v(u)$ για $u\in \mathrm{N}^+$ με $g_v(0)=1-\phi_v$. Σημειώστε ότι η $g_v(u)$ δίδεται από

$$g_v(u)=\infty\sum_{n=0}(1-\phi_v)(\phi_v)^n f_v^{*n}(u), \qquad u\in \mathrm{N},$$

Όπου η $f_v^{*n}(u)$ είναι η συνάρτηση πιθανοτήτων των *n* φορών συνέλιξης της $f_v(u)$ με την συνήθη σύμβαση $f_v^{*n}(u)=\mathrm{I}(u=0)$.

Στη συνέχεια, όπως καταδείξαμε στην Εξίσωση (5.19), ο προσδιορισμός της προεξοφλημένης από κοινού συνάρτησης πιθανοτήτων $h_{2,v}(x,y,r|0)$ αρκεί για να μελετηθεί η $m_v^*(u)$ στην Εξίσωση (5.2) και επομένως μπορούμε να αναλύσουμε την $m_v(u)$.

5.3.2 Ανάλυση της $m_{v(u)}$

Εδώ βρίσκουμε μια εναλλακτική μορφή λύσης στην $|m_v(u)$ που οδηγεί στην $h_{2,v}(x,y,r|0)$ στην ακόλουθη Πρόταση.

ΠΡΟΤΑΣΗ 5.1 Υποθέτουμε ότι η προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανοτήτων $h_{2,v}(x,y,r|0)$ εισάγει την αναπαράσταση

$$h_{2,v}(x,y,r|0)=h_{1,v}(x,y|r)v_v(r), \qquad x,r\in \mathrm{N}, y\in \mathrm{N}^+, \qquad (5.26)$$

Για κάποια συνάρτηση $v_v(r)$. Τότε η συνάρτηση Gerber-Shiu στην Εξίσωση (5.3) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$m_v(u)=\beta_v(u)+\sum\nolimits_{r=0}^{\infty}\beta_v(r)\tau_v(u,r), \qquad u\in \mathrm{N}, \qquad (5.27)$$

όπου

$$\beta_v(u)=\sum_{x=u}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}w(x,y,u)h_{1,v}(x,y|u), \qquad (5.28)$$

και

$$\tau_v(u,r)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\phi_v}\left\{g_v(u-r)+\sum_{y=0}^{r}v_v(r-y)g_v(u-y)\right\}, r=0,1,.....,u-1\\ \dfrac{1}{1-\phi_v}\sum_{y=0}^{u}v_v(r-y)g_v(u-y), r=u,u+1,.......\end{cases}, \qquad (5.29)$$

με

$$\tau_v(0,r)=v_v(r).$$

Απόδειξη. Για ευκολία συμβολισμού, έστω

$$\begin{aligned}\xi_v(u)&=\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty}\sum_{r=u}^{x}w(x,y,r)h_{2,v}(x-u,y+u,r-u|0)\\ &=\sum_{r=u}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=r}^{\infty}w(x,y,r)h_{2,v}(x-u,y+u,r-u|0),\end{aligned} \qquad (5.30)$$

τότε η Εξίσωση (5.21) μπορεί να ξαναγραφτεί ως $l_v(u)=\beta_v(u)+\xi_v(u)$ όπου $\beta_v(u)$ δίδεται από την Εξίσωση (5.28). Με αυτήν την παράσταση για $l_v(u)$, προκύπτει από την Εξίσωση (5.25)

$$m_v(u)=\frac{1}{1-\phi_v}\sum_{y=0}^{u}g_v(u-y)\{\beta_v(y)+\xi_v(y)\}. \qquad (5.31)$$

Υπό την παραδοχή (5.26), λαμβάνουμε

$$h_{2,v}(x-u,y+u,r-u|0)=h_{1,v}(x,y|r)v_v(r-u).$$

Αξιοποιώντας την παραπάνω εξίσωση με την Εξίσωση (5.28), η Εξίσωση (5.30) γίνεται $\sum_{r=u}^{\infty}\beta_v(r)v_v(r-u)$, και έτσι η δεξιά πλευρά της Εξίσωσης (5.31) μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$\frac{1}{1-\phi_v}\sum_{y=0}^{u}g_v(u-y)\{\beta_v(y)+\xi_v(y)\}=\frac{1}{1-\phi_v}\sum_{y=0}^{u}g_v(u-y)\left\{\beta_v(y)+\sum_{r=y}^{\infty}\beta_v(r)v_v(r-y)\right\}.$$

Μετά από μια εναλλαγή της σειράς αθροίσματος με την παραπάνω εξίσωση, η Εξίσωση (5.31) μπορεί να ξαναγραφτεί ως εξής

$$\begin{aligned}m_v(u)&=\frac{1}{1-\phi_v}\sum_{r=0}^{u}\beta_v(r)g_v(u-r)+\frac{1}{1-\phi_v}\left(\sum_{r=0}^{u-1}\sum_{y=0}^{r}+\sum_{r=u}^{\infty}\sum_{y=0}^{u}\right)\beta_v(r)v_v(r-y)g_v(u-y)\\ &=\beta_v(u)+\sum_{r=0}^{\infty}\beta_v(r)\tau_v(u,r),\end{aligned}$$

εφόσον $g_v(0)=1-\phi_v$. Επομένως, δείξαμε ότι η Εξίσωση (5.27) ισχύει για $t_v(u,r)$ που δίδεται από την (5.29).

Είναι χρήσιμο να σημειώσουμε ότι η μορφή λύσης στην Εξίσωση (5.27) είναι χρήσιμο για να μελετήσουμε τις ποσότητες που σχετίζονται με την χρεοκοπία με σωστή επιλογή της συνάρτησης ποινής, καθώς στην λύση, η συνάρτηση της ποινής εμφανίζεται μόνο στην συνάρτηση $\beta_v(u)$ στην Εξίσωση (5.28). Η παραδοχή (5.26) εξετάζεται λεπτομερώς σε σχέση με τους διακριτούς χρόνους K_n μεταξύ των απαιτήσεων στην Ενότητα 5.4.

Επίσης, η δεξιά πλευρά της Εξίσωσης (5.26) ερμηνεύεται ως εξής: αφού το πλεόνασμα φτάσει σε επίπεδο *r* από 0, η επόμενη πτώση που προκαλεί χρεοκοπία εξηγείται από την συνάρτηση $h_{1,v}$ με το πλεόνασμα *x* πριν από την χρεοκοπία και το έλλειμμα *y* στην χρεοκοπία.

Για το υπόλοιπο του παρόντος εγγράφου, θα υποθέσουμε ότι η Εξίσωση (5.26) ισχύει πιθανολογικά γενικά. Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την απόδειξη με αυτό το ζήτημα σε μοντέλο συνεχόμενου χρόνου, βλ. Cheung (2010). Επίσης, η λύση (5.27) είναι μια πιο ελκυστική μορφή υπό την έννοια ότι διακρίνει την συμβολή στην συνάρτηση της ποινής με βάση το αν η χρεοκοπία εμφανίζεται στην πρώτη απαίτηση ή στις επόμενες. Όπως γνωρίζουμε, ο χρόνος χρεοκοπίας και το πλεόνασμα πριν την χρεωκοπία σχετίζονται άμεσα όταν συμβεί η χρεοκοπία στην πρώτη απαίτηση.

Στην επόμενη υποενότητα, με μια σωστή επιλογή της συνάρτησης ποινής, καταδεικνύουμε πώς μπορούμε να αντλήσουμε τις γενικές μορφές των προεξοφλημένων από κοινού και οριακών συναρτήσεων πιθανοτήτων των ποσοτήτων που σχετίζονται με την χρεοκοπία. Με άλλα λόγια, για να ληφθούν τα ακόλουθα αποτελέσματα, δεν αναμένονται συγκεκριμένες υποθέσεις σχετικά με τις κατανομές των χρόνων μεταξύ των απαιτήσεων ή των μεγεθών των απαιτήσεων.

5.3.3 Προεξοφλημένες συναρτήσεις πιθανότητας των ποσοτήτων που σχετίζονται με την χρεοκοπία

Πρώτον, η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας της $U(T-1), |U(T)|$, και $R_{N(T)-1}$ λαμβάνεται εύκολα από την Πρόταση 5.1 ως εξής. Σημειώστε ότι η Εξίσωση (5.3) μπορεί να θεωρηθεί ως μια προσδοκία της συνάρτησης ποινής, ώστε να μπορεί να εκφραστεί χρησιμοποιώντας τις προεξοφλημένες από κοινού συναρτήσεις πιθανότητας (5.12) και (5.13) ως εξής

$$m_v(u) = \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty} w(x,y,u) h_{1,v}(x,y|u) + \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{x=r}^{\infty} w(x,y,r) h_{2,v}(x,y,r|u). \qquad (5.32)$$

Αξιοποιώντας την Εξίσωση (28) και συγκρίνοντας την παραπάνω παράσταση με την Εξίσωση (27), έχουμε

$$h_{2,v}(x,y,r|u) = h_{1,v}(x,y|r)\tau_v(u,r), \qquad x = r, r+1,\dots.. \qquad (5.33)$$

Επίσης, εάν $w_{123}(x,y,z) = s_1^x s_2^y s_3^z$, τότε χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (5.25) με $l_{v,123}(u)$ στην Εξίσωση (5.22) που δίδεται από

$\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty} s_1^x s_2^y s_3^u h_v(x-u, y+u|0)$ σε αυτήν την περίπτωση, βρίσκει κανείς την από κοινού γεννήτρια συνάρτηση

$$E\left[v^T s_1^{U(T-1)} S_2^{|U(T)|} S_3^{X_T} \mathrm{I}(T<\infty) \middle| U(0)=u\right] = \frac{1}{1-\phi_V}\sum_{z=0}^{u} g_v(u-z) l_{v,123}(z)$$

$$= \sum_{z=0}^{u}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=z}^{\infty} s_1^x s_2^y s_3^z \left\{\frac{g_v(u-z)}{1-\phi_v} h_v(x-z, y+z|0)\right\}.$$

Έτσι, από την μοναδικότητα της γεννήτριας συνάρτησης, προκύπτει ότι η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του $(U(T-1), |U(T)|, X_{N(T)})$ για (*x,y,z*) δίδεται από

$$h_{3,v}(x,y,z|u) = \frac{g_v(u-z)}{1-\phi_v} h_v(x-z, y+z|0), \qquad x = z, z+1,\dots\dots\dots\dots, y \in \mathrm{N}^+, z = 0,1,\dots\dots, u.$$

Επίσης, λαμβάνουμε την από κοινού γεννήτρια συνάρτηση του χρόνου *T* της χρεοκοπίας και το τελευταίο ύψος της κλίμακας $|U(T)| + X_T$ με μια επιλογή από $w_{23}(y,z) = s^{y+z}$ χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (5.25) με $l_{v,23}(u)$ στην Εξίσωση (5.23) που δίδεται από $\phi_v \sum_{y=u+1}^{\infty} s^y f_v(y)$, δηλαδή,

$$E\left[v^T s^{|U(T)|+X_T} \mathrm{I}(T<\infty) \middle| U(0)=u\right] = \frac{1}{1-\phi_V}\sum_{Z=0}^{U} g_v(u-z) l_{v,23}(z)$$

$$= \sum_{z=0}^{u}\sum_{y=z+1}^{\infty} s^y \left\{\frac{\phi_v g_v(u-z)}{1-\phi_v} f_v(y)\right\}.$$

Η εναλλαγή της σειράς αθροίσεως στην παραπάνω εξίσωση ακολουθούμενη από εξίσωση συντελεστών s^y αποδίδει την προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας του τελευταίου ύψους της κλίμακας $|U(T)|+X_T$, δηλαδή,

$$f_{1,v}(u,y)=\begin{cases}\dfrac{\phi_v}{1-\phi_v}\left\{\overline{G}_v(u-y)-\overline{G}_v(u)\right\}f_v(y), y=1,2,.....,u\\ \dfrac{\phi_v}{1-\phi_v}\left\{1-\overline{G}_v(u)\right\}fv(y), y=u+1,u+2,....\end{cases}$$

καθώς $\sum_{z=0}^{y-1}g_v(u-z)=\overline{G}_v(u-y)-\overline{G}_v(u)$ και $\sum_{z|=0}^{u}g_v(u-z)=1-\overline{G}_v(u)$.

Επιπλέον, η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του τελευταίου ζεύγους του χρόνου μεταξύ των αξιώσεων και το μέγεθος της απαίτησης, π.χ. $\left(W_{N(T)},Y_{N(T)}\right)$ μπορεί επίσης να ληφθεί. Υπενθυμίζεται ότι ο τελευταίος χρόνος μεταξύ των απαιτήσεων είναι $W_{N(T)}=U(T-1)-R_{N(T)-1}+1$ και η απαίτηση που προκαλεί την χρεοκοπία είναι $Y_{N(T)}=U(T-1)+|U(T)|+1$. Σε αυτήν την περίπτωση, εάν $w(x,y,r)=s_1^{x-r+1}s_2^{x+y+1}$, τότε $\beta_v(u)$ στην Εξίσωση (5.28) με την Εξίσωση (5.11) και την (5.12) ακολουθούμενη από την αλλαγή μιας μεταβλητής από (*x*-*u*+1) σε *t* οδηγεί σε

$$\sum_{x=u}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}s_1^{x-u+1}s_2^{x+y+1}\left\{v^{x-u+1}k(x-u+1)P_{x\_u+1}(x+y+1)\right\}$$
$$=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{y=u+t+1}^{\infty}s_1^t s_2^y\left\{v^t k(t)p_t(y)\right\}.$$

Με την παραπάνω $b_v(u)$, η δισδιάστατη γεννήτρια συνάρτηση του $\left(W_{N(T)},Y_{N(T)}\right)$ μπορεί να ληφθεί από την Εξίσωση (5.27) ως εξής

$$E\left[v^T s_1^{W_{N(T)}}s_2^{Y_{N(T)}}\mathrm{I}(T<\infty)\middle|U(0)=u\right]=\beta_v(u)+\sum_{r=0}^{\infty}\beta_v(r)\tau_v(u,r)$$
$$=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{y=u+t+1}^{\infty}s_1^t s_2^v\left\{v^t k(t)p_t(y)\right\}+\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{y=r+t+1}^{\infty}s_1^t s_2^y\left\{v^t k(t)p_t(y)\tau_v(u,r)\right\}$$
$$=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{y=u+t+1}^{\infty}s_1^t s_2^y\left\{v^t k(t)p_t(y)\right\}+\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{y=t+1}^{\infty}\sum_{r=0}^{y-t-1}s_1^t s_2^y\left\{v^t k(t)p_t(y)\tau_v(u,r)\right\}, \qquad (5.34)$$

και ως εκ τούτου, η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του τελευταίου ενδιαμέσου χρόνου των απαιτήσεων $W_{N(T)}$ και η απαίτηση που προκαλεί την χρεωκοπία $Y_{N(T)}$ δίδεται από

$$h_{4,v}(t,y|u)=v^t k(t) p_t(y)\left\{\mathrm{I}(y\geq u+t+1)+\mathrm{I}(y\geq t+1)\sum_{r=o}^{y-t-1}\tau_v(u,r)\right\},\qquad t\in \mathrm{N}^+.$$

Για την γεννήτρια συνάρτηση του $W_{N(T)}$, η Εξίσωση (5.34) με s_2=1 γίνεται

$$E\left[v^T s_1^{W_{N(T)}}\mathrm{I}(T<\infty)\middle|U(0)=u\right]=\sum_{t=1}^{\infty}s_1^t\left\{v^t k(t)\overline{P}_t(u+t)+v^t k(t)\sum_{r=0}^{\infty}\overline{P}_t(r+t)\tau_v(u,r)\right\},$$

όπου $\overline{P}_t(y)=1-P_t(y)$, και αποκτάμε την προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας του τελευταίου χρόνου μεταξύ των απαιτήσεων $W_{N(T)}$ που δίδεται από

$$h_{5,v}(t|u)=v^t k(t)\left\{\overline{P}_t(u+1)+\sum_{r=0}^{\infty}\overline{P}_t(r+t)\tau_v(u,r)\right\},\qquad t\in \mathrm{N}^+.$$

Ομοίως, η προεξοφλημένη συνάρτηση πιθανότητας της απαίτησης που προκαλεί την χρεοκοπία $Y_{N(T)}$μπορεί να ληφθεί με $s_1=1$ στην Εξίσωση (5.34). Οι λεπτομέρειες παραλείπονται εδώ. Ο Li (2005b) μελέτησε τις από κοινού και οριακές κατανομές της αξίωσης που προκαλεί την χρεωκοπία μαζί με το πλεόνασμα πριν από την χρεοκοπία και το έλλειμμα την στιγμή της χρεωκοπίας, υποθέτοντας μια διακριτή κατανομή K_n για τους χρόνους μεταξύ των απαιτήσεων. Υποθέτουμε επίσης αυτήν την συγκεκριμένη κατηγορία στην παρακάτω ενότητα.

5.4 Εφαρμογές για μια κατηγορία διακριτών κατανομών χρόνου K_n μεταξύ των απαιτήσεων

Για να ξεκινήσουμε, εισάγουμε μια κατηγορία διακριτών κατανομών K_n (ή Coxian) για τους ενδιαμέσους χρόνους των απαιτήσεων ακολούθως. Αυτή η κατηγορία είναι αρκετά μεγάλη και περιέχει κοινά χρησιμοποιούμενες κατανομές όπως μετατοπισμένη ή τροποποιημένη γεωμετρική και αρνητική διωνυμική. Στο Willmot (1993), αναλύθηκε λεπτομερώς η μείξη Poisson συνδέεται μεταξύ του σύνθετου κλασσικού μοντέλου Poisson συνεχούς χρόνου και του σύνθετου διωνυμικού μοντέλου διακριτού χρόνου. Παρομοίως, για να προσδιοριστεί η αναπαράσταση μιας διακριτής κατανομής K_n, χρησιμοποιούμε την δομή μίας τροποποιημένης μικτής κατανομής Poisson όταν η μικτή κατανομή είναι στην κατηγορία συνεχών κατανομών K_n.

Πρώτον, ορίζουμε μια κλάση οικογένειας διακριτών κατανομών K_n για τους ενδιαμέσους χρόνους των απαιτήσεων που έχουν γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας που είναι μια αναλογία δύο πολυωνύμων της κατηγορίας n που δίδεται από (π.χ. Li (2005a,b))

$$\hat{k}(s) = \frac{s\varepsilon(s)}{\prod_{i=1}^{m}(1 - sq_i)^{n_i}}, \qquad (5.35)$$

όπου $0 < q_i < 1$ for $i = 1,2,\ldots m$ με $q_i \neq q_j$ για $i \neq j$. Επίσης, το n_i είναι ένας μη αρνητικός ακέραιος αριθμός για $i = 1,2,\ldots m$, και $n = \sum_{i=1}^{m} n_i > 0$, ενώ το $\varepsilon(s)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n-1 ή λιγότερο (ο παρονομαστής της Εξίσωσης (5.35) είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n). Περιέχει πολλές κατανομές ως ειδικές περιπτώσεις, για παράδειγμα, εάν $m = n = 1$, $q|_i = q$, και $\varepsilon(s) = 1 - q$, τότε είναι μια μετατοπισμένη ή τροποποιημένη γεωμετρική κατανομή με γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας $\hat{k}(s) = s(1-q)/(1-sq)$. Με άλλα λόγια, η ανέλιξη του αριθμού των απαιτήσεων $\{\mathrm{N}(t); t \geq 0\}$ μετατρέπεται σε μια διωνυμική ανέλιξη η οποία μελετάται περαιτέρω στο τέλος αυτής της ενότητας.

Τώρα, για να αποκτηθεί μια κατηγορία διακριτών κατανομών K_n με γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας στην μορφή της Εξίσωσης (5.35), ας ορίσουμε την γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας της μείξης τροποποιημένων πιθανοτήτων Poisson ως εξής

$$P(s) = \frac{\tilde{\alpha}(1-s) - \tilde{\alpha}(1)}{1 - \tilde{\alpha}(1)}, \qquad (5.36)$$

όπου $\tilde{\alpha}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dA(t)$ και η σχετική συνάρτηση κατανομής ανάμιξης $A(t)$ ανήκει στην κατηγορία των συνεχών κατανομών K_n με μετασχηματισμό Laplace (π.χ. Willmot & Woo (2010), Εξίσωση (5.1) με $q_i = (1 + \lambda_i)^{-1}$

$$\tilde{\alpha}(s) = \frac{\zeta(s)}{\prod_{i=1}^{m}(1 - q_i + sq_i)^{n_i}}, \qquad (5.37)$$

με το $\zeta(s)$ να είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n-1 ή λιγότερο. Με την Εξίσωση (5.37), η Εξίσωση (5.36) μπορεί να αναπαρασταθεί ως εξής

$$P(s)\frac{\zeta(1-s)-\zeta(1)\prod_{i=1}^{m}(1-sq_i)^{n_i}}{C\prod_{i=1}^{m}(1-sq_i)^{n_i}}, \qquad (5.38)$$

όπου το C είναι μια σταθερά που δίδεται από $C=1-\zeta(1)$. Εφόσον η $P(s)$ είναι η τροποποιημένη γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας στο μηδέν (π.χ. $P(0)=0$), η Εξίσωση (5.38) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής

$$P(s)=\frac{s\Upsilon(s)}{\prod_{i=1}^{m}(1-sq_i)^{n_i}},$$

όπου το $Y(s)$ένα πολυώνυμο βαθμού *n*-1 ή λιγότερο, που είναι η ίδια μορφή της Εξίσωσης (5.35).Μόλις δείξαμε η διακριτή κατανομή $k(t)$με γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας την (5.35) είναι η μείξη τροποποιημένης κατανομής Poisson όταν η μεικτή κατανομή βρίσκεται σε μια κατηγορία συνεχών κατανομών Coxian. Έτσι, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα από τους Willmot & Woo (2010), βρίσκει κανείς τις μείξεις τροποποιημένων πιθανοτήτων Poisson, δηλαδή η μεικτή συνάρτηση πιθανότητας $k(t)$ των ενδιαμέσων χρόνων των απαιτήσεων, μπορεί να ληφθεί ως

$$k(t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{i,j}^{*}\frac{(1-q_i)^j q_i^t}{1-(1-q_i)^j}\binom{j+t-1}{t}, \qquad t=1,2,..... \qquad (5.39)$$

όπου τα $\alpha_{i,j}^{*}$ είναι σταθερές. Επομένως, μία διακριτή κατηγορία K_n μπορεί να αντιμετωπιστεί με όρους πεπερασμένων συνδυασμών τροποποιημένων αρνητικών δυωνιμικών (Pascal) κατανομών. Επομένως, η γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας (5.35) δίδεται από

$$\hat{k}(s)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{i,j}^{**}\frac{1-(1-sq_i)^j}{(1-sq_i)^j},$$

όπου τα $\alpha_{i,j}^{**}$ είναι σταθερές.

Για να ξεκινήσει η ανάλυση, θεωρούμε τα ανεξάρτητα από το χρόνο μεγέθη απαιτήσεων (π.χ. $p_t(y)=p(y)$) και τα εξετάζουμε ως προς τον χρόνο και το ποσό της πρώτης απαίτησης. Η αναδρομική έκφραση για $m_v(u)$ στην Εξίσωση (5.3) μπορεί να ληφθεί ως εξής

$$m_v(u)=\beta_v(u)+\sum_{t=1}^{\infty}v^t\sigma_v(u+t)k(t), \qquad u\in\mathrm{N}, \qquad (5.40)$$

όπου

$$\beta_v(u)=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{y=u+t+1}^{\infty} v^t w(u+t-1, y-u-t, u)p(y)k(t), \qquad (5.41)$$

$$\sigma_v(x)=\sum_{y=1}^{x} m_v(x-y)p(y). \qquad (5.42)$$

Η παραπάνω $\beta_v(u)$ μπορεί να θεωρηθεί ως η συνεισφορά στην συνάρτηση ποινής λόγω χρεοκοπίας της πρώτης απαίτησης, η οποία είναι η ίδια με την Εξίσωση. (5.28) από τις Εξισώσεις (5.11) και (5.12). Επειδή ο δεύτερος όρος στη δεξιά πλευρά της Εξίσωσης (5.40) έχει την μορφή της Εξίσωσης (5.8) με τα $\omega_t(u)=\sigma_v(u)$ να είναι ανεξάρτητα του *t*, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (5.9) αποκτούμε την γεννήτρια συνάρτηση για $m_v(u)$ στην Εξίσωση (5.40), δηλαδή $\hat{m}_v(s)=\sum_{u=0}^{\infty} s^u m_v(u)$ ως

$$\hat{m}_v(s)=\hat{\beta}_v(s)+\hat{\sigma}(s)\hat{k}\left(\frac{v}{s}\right)-\hat{\sigma}_{*,v}(s), \qquad (5.43)$$

όπου $\hat{\beta}_v(s)=\sum_{u=0}^{\infty} s^u \beta_v(u)$, $\hat{\sigma}_v(s)=\sum_{u=1}^{\infty} s^u \sigma_v(u)$, και

$$\hat{\sigma}_{*,v}(s)=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{u=0}^{t-1} s^{u-t} v^t k(t)\sigma_v(u).$$

Ε αυτήν την περίπτωση, χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (5.39) ακολουθούμενη από εναλλαγή αθροισμάτων έχουμε

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_{*,v}(s)&=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{u=0}^{t-1} s^{u-t} v^t \sigma_v(u)\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{i,j}^{*}\frac{\left|(1-q_i)^j q_i^t\right|}{1-(1-q_i)^j}\binom{j+t-1}{t}\right\}\\ &=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{i,j}^{**}\sum_{u=0}^{\infty} s^u \sigma_v(u)\left\{\sum_{t=u+1}^{\infty}\left(\frac{vq_i}{s}\right)^t\binom{j+t-1}{t}\right\}, \qquad (5.44)\end{aligned}$$

όπου $\alpha_{i,j}^{**}=\alpha_{i,j}^{*}(1-q_i)^j\left\{1-(1-q_i)^j\right\}^{-1}$. Για να απλοποιήσουμε την δεξιά πλευρά στην παραπάνω εξίσωση, σημειώνουμε πρώτα ότι (βλ. Klugman κ.ά. (2008, p. 154))

$$\begin{aligned}\sum_{t=u+1}^{\infty}\left(\frac{vq_i}{s}\right)^t\binom{j+t-1}{t}&=\left(1-\frac{vq_i}{s}\right)-j\frac{\frac{vq_i}{s}}{1-\frac{vq_i}{s}}\sum_{k=1}^{j}\left(1-\frac{vq_i}{s}\right)^k\left(\frac{vq_i}{s}\right)^u\binom{u+k-1}{u}\\ &=\left(1-\frac{vq_i}{s}\right)^{-j}\sum_{k=0}^{j-1}\left(1-\frac{vq_i}{s}\right)^k\left(\frac{vq_i}{s}\right)^{u+1}\binom{u+k}{u}.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το παραπάνω αποτέλεσμα, η Εξίσωση (5.44) μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\hat{\sigma}_{*,v}(s)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{k=0}^{j-1}\alpha_{i,j}^{**}\sigma_v(i,k)\frac{\frac{1}{s}}{\left(1-\frac{vq_i}{s}\right)^{j-k}}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\theta_{i,j}\frac{\frac{1}{s}}{\left(1-\frac{vq_i}{s}\right)^{j}},$$

όπου $\sigma_v(i,k)=\sum_{u=0}^{\infty}\sigma_v(u)(vq_i)^{u+1}\binom{u+k}{u}$ και $\theta_{i,j}=\sum_{k=j}^{n_i}\alpha_{i,j}^{**}\sigma_v(i,k-j)$. Με άλλα λόγια, λαμβάνεται η αναπαράσταση της (5.44) ως εξής

$$\hat{\sigma}_{*,v}(s)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\theta_{i,j}\frac{s^{j-1}}{(s-vq_i)^{j}}, \qquad (5.45)$$

όπου τα $\theta_{i,j}$ είναι σταθερές.

Χρησιμοποιώντας το $\hat{\sigma}_v(s)=\hat{m}_v(s)\hat{p}(s)$ από τις Εξισώσεις (5.42) και (5.45) μαζί με την αναδιάταξη της Εξίσωσης (5.43) έχουμε

$$\hat{m}_v(s)\left\{1-\hat{p}(s)\hat{k}(v/s)\right\}=\hat{\beta}_v(s)-\frac{Q_v(s)}{\prod_{k=1}^{m}(s-vq_k)^{n_k}}, \qquad (5.46)$$

όπου

$$Q_v(s)=\left\{\prod_{k=1}^{m}(s-vq_k)^{n_k}\right\}\sum_{i-1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\theta_{i,j}\frac{s^{j-1}}{(s-vq_i)^{j}}, \qquad (5.47)$$

είναι ένα πολυώνυμο στο s βαθμού $n-1$ ή λιγότερο. Ο Li (2005a, Θεώρημα 5.1) έδειξε ότι η εξίσωση Lundberg (5.7), δηλαδή $\hat{p}(s)\hat{k}(v/s)=1$, έχει ακριβώς n ρίζες $\rho_1,\rho_2,......\rho_n$ με μη αρνητικό πραγματικό μέρος $\mathrm{Re}(\rho_j)\geq 0$ στο μιγαδικό επίπεδο. Στην συνέχεια, υποθέτουμε ότι αυτές οι ρίζες είναι ξεχωριστές. Στην συνέχεια, από την θεωρία των πολυωνύμων Lagrange, η (5.47) μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$Q_v(s)=\sum_{i=1}^{n}\left\{\hat{\beta}_v(\rho_i)\prod_{k=1}^{m}(\rho_i-vq_k)^{n_k}\right\}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left(\frac{s-\rho_j}{\rho_i-\rho_j}\right),$$

όπου υποθέτουμε ότι $\hat{m}_v(\rho_i)<\infty$ για $i=1,2,.......,n.$ Χρησιμοποιώντας την παραπάνω παράσταση για $Q_v(s)$ και πολλαπλασιάζοντας την Εξίσωση (5.46) με $\prod_{k=1}^{m}(s-vq_k)^{nk}$ έχουμε

$$\hat{m}_v(s)\left\{\prod_{k=1}^{m}(s-vq_k)^{n_k}\right\}\left\{1-\hat{p}(s)\hat{k}(v/s)\right\}=\hat{\beta}_v(s)\left\{\prod_{k=1}^{m}(s-vq_k)^{n_k}\right\}$$
$$-\sum_{i=1}^{n}\left\{\hat{\beta}_v(\rho_i)\prod_{k=1}^{m}(\rho_i-vq_k)^{n_k}\right\}\prod_{j=1,j\neq i}^{n}\left(\frac{s-\rho_j}{\rho_i-\rho_j}\right). \qquad (5.48)$$

Από το Λήμμα 1 στο Li (2005a), γνωρίζουμε ότι η ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας $\phi_v f_v(y)$ έχει γεννήτρια συνάρτηση η οποία δίδεται από

$$\phi_v \hat{f}_v(s)=1-\frac{\prod_{k=1}^{m}(s-vq_k)^{n_k}}{\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{vq_i}{\rho_i}\right)\prod_{i=1}^{n}(s-\rho_i)}\left\{1-\hat{p}(s)\hat{k}(v/s)\right\},$$

έτσι η Εξίσωση (5.48) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\hat{m}_v(s)\left\{1-\phi_v \hat{f}_v(s)\right\}=\hat{l}_v(s),$$

όπου

$$\hat{l}_v(s)=\frac{\hat{\beta}_v(s)\prod_{k=1}^{m}(s-vq_k)^{n_k}}{\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{vq_l}{\rho_l}\right)\prod_{i=1}^{n}(s-\rho_i)}-\sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{\beta}_v(\rho_i)\prod_{k=1}^{m}(\rho_i-vq_k)^{n_k}}{\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{vq_l}{\rho_l}\right)(s-\rho_i)\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\rho_i-\rho_j)}. \qquad (5.49)$$

Στην συνέχεια, ομοίως με τους Willmot & Woo (2010) μπορούμε να βρούμε την παράσταση για $\prod_{k=1}^{m}(2-vq_k)^{n_k}/\prod_{i=1}^{n}(s-\rho_i)$ ως εξής

$$\frac{\prod_{k=1}^{m}(s-vq_k)^{n_k}}{\prod_{i=1}^{n}(s-\rho_i)}=1+\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{k=1}^{m}(\rho_i-vq_k)^{n_k}}{(s-\rho_i)\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\rho_i-\rho_j)}.$$

Η αντικατάσταση αυτής της παράστασης στον πρώτο όρο στην δεξιά πλευρά της Εξίσωσης (5.49)

$$\hat{l}_v(s)=\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}\right)\left[\hat{\beta}_v(s)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\prod_{k=1}^{m}(\rho_i-vq_k)^{n_k}}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\rho_i-\rho_j)}\left\{\frac{\hat{\beta}_v(s)-\hat{\beta}_v(\rho_i)}{s-\rho_i}\right\}\right].$$

Από την μοναδικότητα της γεννήτριας συνάρτησης και την ιδιότητα του διακριτού τελεστή Dickson-Hipp στην Εξίσωση (5.10), προσδιορίζουμε το $l_v(u)$ στην Εξίσωση (5.20) ως εξής

$$l_v(u)=\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}\right)\left\{\beta_v(u)+\sum_{i=l}^{n}\alpha_i^{*}T_{\rho_i}\beta_v(u+1)\right\}, \qquad (5.50)$$

όπου

$$\alpha_i^* = \frac{\prod_{k=1}^{m} (\rho_i - vq_k)^{n_k}}{\prod_{j=1, j\neq i}^{n} (\rho_i - \rho_j)}. \qquad (5.51)$$

Όπως στους Willmot & Woo (2010) οι οποίοι μελέτησαν ένα μοντέλο κινδύνου συνεχούς χρόνου με μια τάξη κατανομών Coxian μεταξύ των απαιτήσεων, τώρα ανακτάμε την περίπτωση της κλασσικής συνάρτησης Gerber-Shiu στην Εξίσωση (5.1) που μελετήθηκε από τον Li (2005a) στο παρόν διακριτό μοντέλο. Εάν $w(w, y, r) = w_{12}(x, y)$, τότε το $\beta_v(u)$ στην Εξίσωση (5.41) έχει ως εξής

$$\beta_{v,12}(u) = \sum_{t=1}^{\infty} v^t \alpha_{12}(u+t) k(t),$$

όπου

$$\alpha_{12}(x) = \sum_{y=x+1}^{\infty} w_{12}(x-1, y-x) p(y) = \sum_{y=1}^{\infty} w_{12}(x-1, y) p(x+y), \qquad x \in \mathrm{N}^+. \quad (5.52)$$

Εφόσον το $\beta_{v,12}(u)$ είναι και πάλι της μορφής (5.8), χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (4.9) και (4.45) με το $a_{12}(u)$ στην θέση του $s_v(u)$ λαμβάνουμε την γεννήτρια συνάρτηση ως εξής

$$\hat{\beta}_{v,12}(s) = \hat{\alpha}_{12}(s) \hat{k}\left(\frac{v}{s}\right) - \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \theta_{i,j}^* \frac{s^{j-1}}{(s - vq_i)^j},$$

όπου τα $\theta_{i,j}^*$ είναι σταθερές. Έπειτα, χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (5.35) και (5.47), λαμβάνουμε

$$\hat{\beta}_{v,12}(s) \left\{ \prod_{k=1}^{m} (s - vq_k)^{n_k} \right\} = \hat{\alpha}_{12}(s) Q_1^*(s) - Q_2^*(s), \qquad (5.53)$$

όπου

$$Q_1^*(s) = \left\{ \prod_{k=1}^{m} (s - vq_k)^{n_k} \right\} \hat{k}\left(\frac{v}{s}\right) \qquad (5.54)$$

και τα $Q_2^*(s)$ είναι πολυώνυμα βαθμού n-1 ή λιγότερο. Έτσι, πάλι από την θεωρία των πολυωνύμων Lagrange, $Q_k^*(s)$ για k=1,2 μπορεί να αποδοθεί ως εξής

$$Q_k^*(s) = \sum_{i=1}^{n} Q_k^*(\rho_i) \prod_{j=1, j\neq i}^{n} \left(\frac{s - \rho_j}{\rho_i - \rho_j} \right). \qquad (5.55)$$

Αντικαθιστώντας την Εξίσωση (5.53) στην Εξίσωση (5.49) με εφαρμογή της Εξίσωσης (5.55), προκύπτει ότι

$$\hat{l}_{v,12}(s) = \frac{\hat{\alpha}_{12}(s)Q_l^*(s) - Q_2^*(s)}{\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{vq_l}{\rho_l}\right)\prod_{i=1}^{n}(s-\rho_i)} - \sum_{i=1}^{n}\frac{\hat{\alpha}_{12}(\rho_i)Q_l^*(\rho_i) - Q_2^*(\rho_i)}{\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{vq_l}{\rho_l}\right)(s-\rho_i)\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\rho_i-\rho_j)}$$

$$= \left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}\right)\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_1^*(\rho_i)}{\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\rho_i-\rho_j)}\left\{\frac{\hat{\alpha}_{12}(s) - \hat{\alpha}_{12}(\rho_i)}{s-\rho_i}\right\}.$$

Επομένως, από την μοναδικότητα της γεννήτριας συνάρτησης και της Εξίσωσης (5.10) έχουμε

$$l_{v,12}(u) = \left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}\right)\sum_{i=1}^{n} b_i T_{\rho_i}\alpha_{12}(u+1),$$

όπου η $b_i = Q_1^*(\rho_i)/\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\rho_i-\rho_j)$ είναι ίδια με $\alpha_i^*\hat{k}(v/\rho_i)$ με το α_i^* να δίδεται από την Εξίσωση (5.51) λόγω της Εξίσωσης (5.54). Αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με την Εξίσωση (5.37) στο Li (2005a). Επίσης, εάν $w_{12}(x,y)=1$, τότε από την Εξίσωση (5.24) γνωρίζουμε ότι $l_{v,12}(u) = \phi_v \overline{F}_v(u)$ και επομένως

$$\phi_v \overline{F}_v(u) = \left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}\right)\sum_{i=1}^{n} b_i T_{\rho_i}\overline{P}(u+1) = \left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}\right)\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{x=0}^{\infty}\rho_i^x \overline{P}(x+u+1), \qquad u \in \mathrm{N},$$

καθώς $\alpha_{12}(x) = \sum_{y=1}^{\infty} p(x+y) = \overline{P}(x)$ από την Εξίσωση (5.52). Επειδή $f_v(y) = \overline{F}_v(y-1) - \overline{F}_v(y)$, λαμβάνουμε άμεσα τα εξής

$$\phi_v f_v(y) = \phi_v\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}\right)\sum_{i=1}^{n} b_i \sum_{x=0}^{\infty}\rho_i^x p(x+y+1)$$

$$= \phi_v\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}\right)\sum_{i=1}^{n} b_i T_{\rho_i} p(y+1), \qquad y \in \mathrm{N}^+,$$

που συμφωνεί με την Εξίσωση (5.26) στο Li (2005a).

Επιπλέον, εξ όσων γνωρίζουμε, για να αναλύσουμε την Εξίσωση (5.2) πρέπει να λάβουμε μία (προεξοφλημένη) από κοινού συνάρτηση πιθανότητας με $U(T-1), |U(T)|,$ και $R_{N(T)-1}$ με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα ως εξής. Από τις Εξισώσεις (5.21) και (5.28) για *u*=0, είναι ξεκάθαρο ότι

$$l_v(0) = \beta_v(0) + \sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{r=0} wh_{2,v}(x,y,r|0).$$

Συγκρίνοντας το παραπάνω αποτέλεσμα με την Εξίσωση (5.50) για u=0 έχουμε τα εξής

$$\sum_{r=o}^{\infty}\sum_{x=r}\sum_{y=1} w(x,y,r)h_{2,v}(x,y,r|0)=\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}-1\right)\beta_v(0)+\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}\right)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^* T_{\rho_i}\beta_v(1), \qquad (5.56)$$

και χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (5.28), η δεξιά πλευρά της Εξίσωσης (5.56) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής

$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} w(x,y,0)\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}-1\right)h_{1,v}(x,y|0)+\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{x=r+1}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} w(x,y,r+1)\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}\right)$$

$$x\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*\rho_i^r h_{2,v}(x,y|r+1). \qquad (5.57)$$

Εάν $w(x,y,r)=s_1^x s_2^y s_3^r$, τότε εξισώνοντας τους συντελεστές στην αριστερή πλευρά των Εξισώσεων (5.56) και (5.57) προκύπτει ότι

$$h_{2,v}(x,y,r|0)=\left\{\mathrm{I}(r=0)\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}-1\right)+\mathrm{I}(r\neq 0)\left(\prod_{l=1}^{n}\frac{\rho_l}{vq_l}\right)\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^*\rho_i^{r-1}\right\}h_{1,v}(x,y|r), \qquad (5.58)$$

όπου το $h_{1,v}(x,y|r)$ δίδεται από την Εξίσωση (5.12) με τις Εξισώσεις (5.11) και (5.39) σε αυτήν την περίπτωση.

Έτσι, υπό τον όρο ότι η κατανομή διακριτού χρόνου μεταξύ των απαιτήσεων K_n, η Εξίσωση (5.26) ικανοποιείται σύμφωνα με την Εξίσωση (5.58) με το προφανές $v_v(r)$ στην αγκύλη και μπορούμε να εφαρμόσουμε την Εξίσωση (5.29) στην Πρόταση 5.1 για να αποκτήσουμε την προεξοφλημένη συνάρτηση μετάβασης $\tau_v(u,r)$. Επομένως, από την Εξίσωση (5.33) μαζί με μια τέτοια παράσταση για $\tau_v(u,r)$, αποκτούμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $U(T-1),|U(T)|$, και το $R_{N(T)-1}$ με αυθαίρετο αρχικό πλεόνασμα (π.χ. $h_{2,v}(x,y,r|u)$). Βέβαια, κάθε από κοινού ή οριακή συνάρτηση πιθανότητας που μελετάται στην Ενότητα 5.3.3 μπορεί να βασιστεί σε αυτό το μοντέλο εφαρμόζοντας τα γενικά αποτελέσματα που προκύπτουν σε αυτό.

5.4.1. Ειδική περίπτωση: σύνθετη διωνυμική ανέλιξη

Εδώ, θεωρούμε την σύνθετη διωνυμική ανέλιξη ως ειδική περίπτωση της διακριτής τάξης K_n. Είναι ένα διακριτό ανάλογο της κλασσικής σύνθετης ανέλιξης Poisson. Στην περίπτωση αυτή, οι χρόνοι μεταξύ των απαιτήσεων ακολουθούν μια γεωμετρική κατανομή τροποποιημένη στο μηδέν

$$k(t) = (1-q)q^{t-1}, \qquad t = 1,2,\ldots\ldots,$$

με γεννήτρια συνάρτηση πιθανότητας $\hat{k}(s) = s(1-q)/(1-sq)$. Συμβολίζουμε την μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης Lundberg στην Εξίσωση (5.7) ως ρ (π.χ. Li (2005a)). Τότε, σε αυτήν την περίπτωση το α_1^* στην Εξίσωση (5.51) ανάγεται σε $\rho - vq$ και από την Εξίσωση (5.50) η συνάρτηση Gerber-Shiu στην Εξίσωση (5.3) ικανοποιεί την αναδρομική παράσταση της Εξίσωσης (5.20) όπου

$$l_v(u) = \frac{\rho}{vq}\{\beta_v(u) + (\rho - vq)T_\rho \beta_v(u+1)\}.$$

Επίσης, η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του $U(T-1),|U(T)|$, και $R_{N(T)-1}$ στην Εξίσωση (5.58) απλοποιείται ως εξής

$$h_{2,v}(x,y,r|0) = \left(\frac{\rho}{vq} - 1\right)\left[\mathrm{I}(r=0) + \mathrm{I}(r \neq 0)\rho^r\right] h_{1,v}(x,y|r).$$

Όπως αναφέρθηκε προηγουμένως, αυτή η συνάρτηση καθορίζει την ανάλυση της γενικευμένης συνάρτησης Gerber-Shiu στην Εξίσωση (5.2) και τις ειδικές περιπτώσεις της.

5.5 ανανεωτική διαδικασία κινδύνου διακριτού χρόνου με υστέρηση

Με τις ίδιες υποθέσεις που θεωρούμε στην Ενότητα 2, αλλά υποθέτοντας ότι η διαδικασία εκτελείται για κάποιο χρονικό διάστημα πριν από την πρώτη παρατήρησή της, τότε ο χρόνος μεταξύ των απαιτήσεων για το πρώτο συμβάν θεωρείται ότι είναι διαφορετικός από τους επόμενους. Αυτή η κλασσική τροποποιημένη ανανεωτική διαδικασία ονομάζεται διαδικασία καθυστερημένης ανανέωσης (για περισσότερες λεπτομέρειες, βλέπε Cox (1962, Ενότητα 2.2), Ross (1996, Ενότητα 3.5), Rolski κ.ά., 1999) και Willmot & Lin)). Χωρίς την υπόθεση του χρονικά εξαρτώμενου μεγέθους των απαιτήσεων, αυτό το μοντέλο καθυστέρησης εξετάστηκε από τους Alfa & Drekic (2007) και Drekic & Mera (2010) χρησιμοποιώντας αλγοριθμικούς πίνακες. Για την ανάλυση της κλασικής συνάρτησης Gerber-Shiu, οι Pavlova & Willmot (2004) εξέτασαν μία στάσιμη ανανεωτική ανέλιξη κινδύνου διακριτού χρόνου (βλέπε Willmot, 2004, Kim & Willmot, 2010) για ένα καθυστερημένο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου συνεχούς χρόνου και Willmot & Dickson (2003) για ένα ανανεωτικό στάσιμο μοντέλο κινδύνου συνεχούς χρόνου).

Σε αυτό το μοντέλο, ας υποθέσουμε ότι τη συνάρτηση πιθανότητας του πρώτου χρόνου μεταξύ των απαιτήσεων είναι $k_1(t)$ και η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του πρώτου ζεύγους (W_1, Y_1) ορίζεται ως $k_1(t)p_{1,t}(y)$, όπου η $p_{1,t}(y)$ είναι μία υποθετική συνάρτηση πιθανότητας των $Y_1 = y$ με $W_1 = t$, που υποδηλώνει ότι η δομή της εξάρτησης του μεγέθους της πρώτης απαίτησης διαφέρει από τις επόμενες. Σε αντιστοιχία με τις Εξισώσεις (5.2) και (5.3) στο κλασσικό διακριτό μοντέλο, θεωρούμε μια γενίκευση της κλασσικής συνάρτησης Gerber-Shiu στο παρόν μοντέλο

$$m^*_{d,v}(u) = E\left[v^{T_d} w^*\left(U(T_d = 1), |U(T_d)|, X_{T_d}, R_{N(T_d)-1}\right) \mathrm{I}(T_d < \infty) \middle| U(0) = u\right], \quad u \in \mathrm{N}, \quad (5.59)$$

όπου T_d είναι ο χρόνος της χρεοκοπίας στο μοντέλο καθυστέρησης. Εάν $w^*(x, y, z, r) = w(x, y, r)$, η Εξίσωση (5.59) ανάγεται σε

$$m_{d,v}(u) = E\left[v^{T_d} w\left(U(T_d - 1), |U(T_d)|, R_{N(T_d)-1}\right) \mathrm{I}(T_d < \infty) \middle| U(o) = u\right], \quad u \in \mathrm{N}. \qquad (5.60)$$

Όπως στο Woo (2010) ο οποίος εξέτασε το καθυστερημένο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου συνεχούς χρόνου, τα δομικά αποτελέσματα των γενικευμένων συναρτήσεων Gerber-Shiu (5.59) και (5.60) το καθυστερημένο ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου διακριτού χρόνου μπορούν να εξαχθούν από την άποψη του κλασσικού ανανεωτικού μοντέλου κινδύνου διακριτού χρόνου που μελετήθηκε στην Ενότητα 3.1

Αρχικά, η από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία (x) και το έλλειμμα στην χρεωκοπία (y) όταν εμφανίζεται η χρεοκοπία στην πρώτη απαίτηση (π.χ. $N(T_d) = 1$) ορίζεται ως εξής

$$h_1^d(x, y|u) = k_1(x - u + 1)p_{1,x-u+1}(x + y + 1), \qquad x \in \mathrm{N}, y \in \mathrm{N}^+, \qquad (5.61)$$

όπου $T_d = x - u + 1$ και $R_{n(T_d)-1} = u$. Για άλλες περιπτώσεις (π.χ. $\mathrm{N}(T_d) \geq 2$), η από κοινού ελλειμματική συνάρτηση πιθανότητας του $(T_d, U(T_d - 1), |U(T_d)|, R_{N(T_d)-1})$ για (t,x,y,r) συμβολίζεται ως εξής $h_2^d(t, x, y, r|u)$ για $t = 2,3,........, x, r \in \mathrm{N}$ και

$y \in \mathrm{N}^+$. Η προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των h_1^d και h_2^d θεωρείται ότι είναι αντιστοίχως ως εξής

$$h_{1,v}^d(x,y|u) = v^{x-u+1} h_1^d(x,y|u) \qquad (5.62)$$

και

$$h_{2,v}^d(x,y|u) = \sum_{t-2}^{\infty} v^t h_{21}^d(t,x,y,r|u). \qquad (5.63)$$

Και πάλι, υπολογίζοντας για την πρώτη πτώση κάτω από το αρχικό επίπεδο του πλεονάσματος u, μπορούμε να λάβουμε τον ακόλουθο αναδρομικό τύπο για την Εξίσωση (5.59) που περιλαμβάνει την Εξίσωση (5.2) με τις Εξισώσεις (5.62) και (5.63)

$$m_{d,v}^*(u) = \sum_{y=1}^{u} m_v^*(u-y)\left\{\sum_{x=o}^{\infty} h_{1,v}^d(x,y|0) + \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{x} h_{2,v}^d(x,y,r|0)\right\} + l_{d,v}^*(u), \qquad (5.64)$$

όπου

$$l_{d,v}^*(u) = \sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=o}^{\infty}\left\{\begin{array}{l} w^*(x+u,y-u,u,u)h_{1,v}^d(x,y,r|0) \\ +\sum_{r=0}^{x} w^*(x+u,y-u,u,r+u)h_{2,v}^d(x,y,r|0) \end{array}\right\} \qquad (5.65)$$

που αφορά στην περίπτωση όταν προκύπτει χρεοκοπία στην πρώτη πτώση. Από τις Εξισώσεις (5.62) και (5.63), η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία (x) και το έλλειμμα στην χρεωκοπία (y) λαμβάνονται ως εξής

$$h_v^d(x,y|u) = h_{1,v}^d(x,y|u) + \sum_{r=0}^{x} h_{2,v}^d(x,y,r|u). \qquad (5.66)$$

Χρησιμοποιώντας την Εξίσωση (5.66), η Εξίσωση (5.64) μπορεί να εκφραστεί ως εξής

$$m_{d,v}^*(u) = \phi_{d,v}\sum_{y=1}^{u} m_v^*(u-y) f_{d,v}(y) + l_{d,v}^*(u),$$

όπου $\phi_{d,v} = \sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty} h_v^d(x,y|0)$ και $f_{d,v}(y) = \phi_{d,v}^{-1}\sum_{x=0}^{\infty} h_v^d(x,y|0)$. Σημειώνουμε ότι η Εξίσωση (5.59) εξαρτάται μόνο από την Εξίσωση (5.63) με u=0 όπως στο κλασσικό διακριτό μοντέλο που μελετήθηκε στην Ενότητα 3.1. Επομένως, για να λάβουμε την από κοινού συνάρτηση πιθανότητας, θεωρούμε την Εξίσωση (5.60) στα παρακάτω. Εάν $w^*(x,y,z,r) = w(x,y,r)$, τότε η Εξίσωση (5.65) γίνεται

$$l_{d,v}(u)=\sum_{y=u+1}^{\infty}\sum_{x=0}^{\infty}\left\{w(x+u,y-u,u)h_{1,v}^{d}(x,y|0)+\sum_{r=0}^{x}w(x+u,y-u,r+u)h_{2,v}^{d}(x,y,r|o)\right\}$$

και αλλάζοντας τις μεταβλητές των αθροισμάτων έχουμε

$$l_{d,v}(u)=\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{x=u}^{\infty}\left\{w(x,y,u)h_{1,v}^{d}(x,y|0)+\sum_{r=u}^{x}w(x,y,r)h_{2,v}^{d}(x-u,y+u,r-u|o)\right\}.$$

Στην συνέχεια, με υπολογισμούς ως προς τον χρόνο και το ποσό της πρώτης απαίτησης, βρίσκουμε

$$m_{d,v}(u)=\beta_{d,v}(u)+\sum_{t=1}^{\infty}v^{t}\sigma_{v,t}(u+t)k_{1}(t), \qquad (5.67)$$

όπου

$$\beta_{d,v}(u)=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{y=u+t+1}^{\infty}v^{t}w(u+t-1,y-u-t,u)p_{1,t}(y)k_{1}(t) \qquad (5.68)$$

και

$$\sigma_{v,t}(x)=\sum_{y=0}^{x}m_{v}(x-y)p_{1,t}(y). \qquad (5.69)$$

Όπως η Εξίσωση (5.41), η Εξίσωση (5.68) μπορεί να ερμηνευθεί ως η συμβολή στην συνάρτηση της ποινής λόγω χρεοκοπίας από την πρώτη απαίτηση στο παρόν μοντέλο. Από τις Εξισώσεις (5.61) και (5.62), μπορεί να εκφραστεί εκ νέου ως εξής

$$\beta_{d,v}(u)=\sum_{x=u}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}w(x,y,u)h_{1,v}^{d}(x,y|u). \qquad (5.70)$$

Ομοίως με την Εξίσωση (5.32), χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (5.70) και (5.63) μπορούμε να εκφράσουμε την Εξίσωση (5.60) ως εξής

$$m_{d,v}(u)=\beta_{d,v}(u)+\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{x}w(x,y,r)h_{2,v}^{d}(x,y,r|u). \qquad (5.71)$$

Συγκρίνοντας την παραπάνω παράσταση στην Εξίσωση (5.67) με την Εξίσωση (5.69), μπορούμε να ανάγουμε ότι

$$\sum_{x=0}^{\infty}\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{x}w(x,y,r)h_{2,v}^{d}(x,y,r|u)=\sum_{t=1}^{\infty}v^{t}\sum_{z=0}^{u+t}m_{v}(z)p_{1,t}(u+t-z)k_{1}(t). \qquad (5.72)$$

Αλλάζοντας την σειρά αθροίσεως στην δεξιά πλευρά της Εξίσωσης (5.72) προκύπτει

$$\left(\sum_{z=0}^{u}\sum_{t=1}^{\infty}+\sum_{z=u+1}^{\infty}\sum_{t=z-u}^{\infty}\right)m_v(z)\left\{v^t p_{1,t}(u+t-z)k_1(t)\right\}=\sum_{z=o}^{\infty}m_v(z)A_v(u,z), \qquad (5.73)$$

όπου

$$A_v(u,z)=\begin{cases}\sum_{t=1}^{\infty}v^t p_{1,t}(u+t-z)k_1(t), z=|0,1|,......,u\\ \sum_{t=z-u}^{\infty}v^t p_{1,t}(u+t-z)k_1(t), z=u|+1,u+2,....\end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας τις Εξισώσεις (5.32) και (5.33), προκύπτει ότι η δεξιά πλευρά της Εξίσωσης (5.73) είναι

$$\sum_{z=o}^{\infty}m_v(z)A_v(u,z)=\sum_{z=0}^{\infty}A_v(u,z)\left\{\sum_{y=1}^{\infty}\infty\sum_{x=z}w(x,y,z)h_{1,v}(x,y|z)\right.$$
$$\left.+\sum_{y=1}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{x=r}^{\infty}w(x,y,r)h_{1,v}(x,y|r)\tau_v(z,r)\right\}. \qquad (5.74)$$

Επομένως, εάν $w(x,y,r)=s_1^x s_2^y s_3^r$ στις Εξισώσεις (5.72) και (5.74), από την μοναδικότητα της γεννήτριας συνάρτησης, λαμβάνουμε την προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας των $U(T_d-1),|U(T_d)|$, και $R_{N(T_d)-1}$ που δίδεται από

$$h_{2,v}^d(x,y,r|u)=h_{1,v}(x,y|r),x|=r,r+1,......,y\in \mathrm{N}^+,r\in \mathrm{N},$$

όπου

$$\xi_v(u,r)=A_v(u,r)+\sum_{z=0}^{\infty}A_v(u,z)\tau_v(z,r)$$

αντιπροσωπεύει την προεξοφλημένη μετάβαση σε ένα πλεόνασμα από το *u* στο *r* στην καθυστερημένη ανέλιξη διακριτού χρόνου. Με την σειρά της, μια υποκατάσταση της παραπάνω παράστασης του $h_{2,v}^d$ στην Εξίσωση (5.71) με την Εξίσωση (5.28), δίδει

$$m_{d,v}(u)=\beta_{d,v}(u)+\sum_{r=0}^{\infty}\beta_v(r)\xi_v(u,r).$$

Με βάση την παραπάνω παράσταση για την Εξίσωση (5.60), τα τμήματα που περιέχουν την συνάρτηση της ποινής βρίσκονται μόνο στις συναρτήσεις $\beta_{d,v}$ και β_v έτσι ώστε να είναι πιο χρήσιμο για την ανάλυση των διαφόρων ποσοτήτων που σχετίζονται με την χρεοκοπία, όπως στην Πρόταση 1 στην περίπτωση μιας κανονικής ανανεωτικής ανέλιξης κινδύνου διακριτού χρόνου.

Βέβαια, όταν $k_1(t)=k(t)$ και $p_{1,t}(y)=p_t(y)$, όλα τα αποτελέσματα που λαμβάνονται στα κλασσικά μοντέλα της Ενότητας 3 ανακτώνται από τις καθυστερημένες περιπτώσεις της Ενότητας 5.
Ακολουθεί μία περίληψη των κύριων αποτελεσμάτων.

5.6 ΣΥΝΟΨΗ

Η παρούσα μελέτη επικεντρώνεται στην ανάλυση του $m_v^*(u)$, την γενίκευση της συνάρτησης Gerber-Shiu που ορίζεται από την Εξίσωση (5.2) σε ένα ανανεωτικό μοντέλο κινδύνου Sparre Andersen διακριτού χρόνου. Στην Ενότητα 5.3.1, προκύπτουν αναδρομικοί τύποι για αυτές τις γενικευμένες συναρτήσεις Gerber-Shiu και τις ειδικές περιπτώσεις τους. Όπως παρουσιάστηκε στην Ενότητα 5.3.1, το $m_v(u)$ στην Εξίσωση (5.3), πιο συγκεκριμένα μια προεξοφλημένη από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $h_{2,v}$ στην Εξίσωση (5.13) με μηδενικό αρχικό πλεόνασμα είναι επαρκής για να την ανάλυση των ποσοτήτων που σχετίζονται με την χρεοκοπία και που σχετίζονται με τις νέες μεταβλητές που εισάγονται στην Εξίσωση. (5.2). Επομένως, πραγματοποιείται ανάλυση του $m_v(u)$στην Ενότητα 5.3.2 καθώς και των προεξοφλημένων συναρτήσεων πιθανότητας διαφόρων ποσοτήτων που σχετίζονται με την χρεοκοπία, όπως το τελευταίο ύψος της κλίμακας και της τελευταία απαίτησης στην Ενότητα 5.3.3.
Η ειδική περίπτωση του μοντέλου με διακριτούς ενδιαμέσους χρόνους των απαιτήσεων K_n αποτελεί το αντικείμενο της Ενότητας 5.4. Τέλος, θεωρούμε μια τροποποιημένη (ή καθυστερημένη) ανανεωτική ανέλιξη με την υπόθεση μιας διαφορετικής κατανομής του πρώτου ζεύγους (W_1, Y_1) από τα άλλα ζεύγη. Σε αυτήν την περίπτωση, η παράσταση για την γενικευμένη συνάρτηση Gerber-Shiu (59) λαμβάνεται με την Εξίσωση (5.2) που ορίζεται σε μια κλασσική ανανεωτική ανέλιξη.

Επίλογος

Στην παρούσα έρευνα έγινε μια προσπάθεια παρουσίασης άρθρων τα οποία ήταν σχετικά με την θεωρία χρεοκοπίας. Οπότε για τον αναγνώστη πρόκειται για ένα χρήσιμο υλικό το οποίο παρουσιάζει σε ένα αρχείο σύνοψη άρθρων Πιο συγκεκριμένα εξετάσαμε τα στάσιμα και τα κλασσικά διακριτά ανανεωτικά μοντέλα κινδύνου. Το βασικό αποτέλεσμα αυτού του άρθρου ήταν μια έκφραση της συνάρτησης προεξοφλημένης ποινής Gerber-Shiu στο στάσιμο μοντέλο με όρους της αντίστοιχης συνάρτησης Gerber-Shiu στο κλασσικό μοντέλο. Επιπλέον αυτή η σχέση εξετάστηκε με περισσότερες λεπτομέρειες και στην υπόθεση προεξόφλησης κάτω από το σύνθετο δυωνυμικό μοντέλο.

Ακόμα εξετάστηκαν οι κατανομές του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία, το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας και η απαίτηση που προκαλεί χρεοκοπία σε μία τάξη μοντέλου κινδύνου διακριτού χρόνου. Σε αυτό το άρθρο, ένας σαφής τύπος για την συνάρτηση Gerber-Shiu δόθηκε με όρους μίας σύνθετης γεωμετρικής συνάρτησης κατανομής, μέσω της οποίας πολλές ποσότητες σχετιζόμενες με την χρεοκοπία αναλύονται, π.χ., πιθανότητα χρεοκοπίας, η γεννήτρια συνάρτηση πιθανοτήτων του χρόνου χρεοκοπίας, από κοινού και οριακές κατανομές του πλεονάσματος πριν από την χρεοκοπία, το έλλειμμα την στιγμή της χρεοκοπίας και η απαίτηση που προκαλεί χρεοκοπία.

Τέλος εξετάστηκε μια μέθοδο παρόμοια των Gerber and Shiu, ένας άναδρομικός τύπος για την αναμενόμενη προεξόφληση ποινής λόγω της χρεοκοπίας σε ένα διακριτό μοντέλο.

Βιβλιογραφία

Albrecher, H. and Boxma, O.J., 2004. A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. *Insurance: Mathematics and Economics*, *35*(2), pp.245-254.

Albrecher, H. and Teugels, J.L., 2006. Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory. *Journal of Applied Probability*, *43*(1), pp.257-273.

Alfa, A.S. and Drekic, S., 2007. Algorithmic analysis of the Sparre Andersen model in discrete time. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, *37*(2), pp.293-317.

Badescu, A.L., Cheung, E.C. and Landriault, D., 2009. Dependent risk models with bivariate phase-type distributions. *Journal of Applied Probability*, *46*(1), pp.113-131.

Biffis, E. and Kyprianou, A.E., 2010. A note on scale functions and the time value of ruin for Lévy insurance risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, *46*(1), pp.85-91.

Biffis, E. and Morales, M., 2010. On a generalization of the Gerber–Shiu function to path-dependent penalties. *Insurance: Mathematics and Economics*, *46*(1), pp.92-97.

Boudreault, M., Cossette, H., Landriault, D. and Marceau, E., 2006. On a risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes. *Scandinavian Actuarial Journal*, *2006*(5), pp.265-285.

Cheng, S., Gerber, H.U. and Shiu, E.S., 2000. Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics*, *26*(2-3), pp.239-250.

Cheng, Y. and Tang, Q., 2003. Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang (2) risk process. *North American Actuarial Journal*, *7*(1), pp.1-12.

Cheung, E.C., 2010. A generalized penalty function in Sparre Andersen risk models with surplus-dependent premium. *Insurance: Mathematics and Economics*, *48*(3), pp.384-397.

Cheung, E.C., Landriault, D., Willmot, G.E. and Woo, J.K., 2010. Gerber–Shiu analysis with a generalized penalty function. *Scandinavian Actuarial Journal*, *2010*(3), pp.185-199.

Cheung, E.C., Landriault, D., Willmot, G.E. and Woo, J.K., 2010. Structural properties of Gerber–Shiu functions in dependent Sparre Andersen models. *Insurance: Mathematics and Economics*, *46*(1), pp.117-126.

Cossette, H., Landriault, D. and Marceau, É., 2003. Ruin probabilities in the compound Markov binomial model. *Scandinavian Actuarial Journal*, *2003*(4), pp.301-323.

Cossette, H., Marceau, E. and Marri, F., 2008. On the compound Poisson risk model with dependence based on a generalized Farlie–Gumbel–Morgenstern copula. *Insurance: Mathematics and Economics*, *43*(3), pp.444-455.

Cox, D.R., 1962. Renewal Theory, Methuen and Co. *Ltd., London*.

De Vylder, F.E., Bühlmann, H. and Gerber, H.U., 1996. *Advanced risk theory: a self-contained introduction*. Editions de l'Université de Bruxelles.

Delbaen, F., 1990. A remark on the moments of ruin time in classical risk theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, *9*(2-3), pp.121-126.

Dickson, D.C. and Hipp, C., 2001. On the time to ruin for Erlang (2) risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, *29*(3), pp.333-344.

Dickson, D.C., 1992. On the distribution of the surplus prior to ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, *11*(3), pp.191-207.

Dickson, D.C., 1994. Some comments on the compound binomial model. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, *24*(1), pp.33-45.

Dickson, D.C., 1998. On a class of renewal risk processes. *North American Actuarial Journal*, *2*(3), pp.60-68.

dos Reis, A.D.E., 2000. On the moments of ruin and recovery times. *Insurance: Mathematics and Economics*, *27*(3), pp.331-343.

Drekic, S. and Mera, A.M., 2011. Ruin analysis of a threshold strategy in a discrete-time Sparre Andersen model. *Methodology and Computing in Applied Probability*, *13*(4), pp.723-747.

Feller, W., 1968. *An introduction to probability theory and its applications* (Vol. 1, p. p115). New York: Wiley.

Gerber, H.U. and Shiu, E.S., 1997. The joint distribution of the time of ruin, the surplus immediately before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, *21*(2), pp.129-137.

Gerber, H.U. and Shiu, E.S., 1998. On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, *2*(1), pp.48-72.

Gerber, H.U. and Shiu, E.S., 2003. "Moments of the Surplus before Ruin and the Deficit at Ruin in the Erlang (2) Risk Process," Yebin Cheng and Qihe Tang, January 2003. *North American Actuarial Journal*, *7*(4), pp.96-101.

Gerber, H.U. and Shiu, E.S., 2005. The time value of ruin in a Sparre Andersen model. *North American Actuarial Journal*, *9*(2), pp.49-69.

Gerber, H.U., 1988. Mathematical fun with the compound binomial process. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, *18*(2), pp.161-168.

Hamming, R., 2012. *Numerical methods for scientists and engineers*. Courier Corporation.

Kim, S.Y. and Willmot, G.E., 2010. The proper distribution function of the deficit in the delayed renewal risk model. *Scandinavian Actuarial Journal*, *2011*(2), pp.118-137.

Li*, S., 2005. Distributions of the surplus before ruin, the deficit at ruin and the claim causing ruin in a class of discrete time risk models. *Scandinavian Actuarial Journal*, *2005*(4), pp.271-284.

Li*, S., 2005. On a class of discrete time renewal risk models. *Scandinavian Actuarial Journal*, *2005*(4), pp.241-260.

Li, S. and Garrido, J., 2002. On the time value of ruin in the discrete time risk model.

Li, S. and Garrido, J., 2004. On ruin for the Erlang (n) risk process. *Insurance: Mathematics and Economics*, *34*(3), pp.391-408.

Li, S. and Garrido, J., 2005. On a general class of renewal risk process: analysis of the Gerber-Shiu function. *Advances in Applied Probability*, *37*(3), pp.836-856.

Lin, X.S. and Willmot, G.E., 1999. Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, *25*(1), pp.63-84.

Lin, X.S. and Willmot, G.E., 2000. The moments of the time of ruin, the surplus before ruin, and the deficit at ruin. *Insurance: Mathematics and Economics*, *27*(1), pp.19-44.

Marceau, E., 2009. On the discrete-time compound renewal risk model with dependence. *Insurance: Mathematics and Economics*, *44*(2), pp.245-259.

Pavlova, K.P. and Willmot, G.E., 2004. The discrete stationary renewal risk model and the Gerber–Shiu discounted penalty function. *Insurance: Mathematics and Economics*, *35*(2), pp.267-277.

Picard, P. and Lefèvre, C., 1998. The moments of ruin time in the classical risk model with discrete claim size distribution. *Insurance: Mathematics and Economics*, *23*(2), pp.157-172.

Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J.L., 2009. *Stochastic processes for insurance and finance* (Vol. 505). John Wiley & Sons.

Ross, S. M., 1996. Stochastic Processes (2nd ed). New York: John Wiley.

Sharpe, J., Stuart, A., Harry, H. and Klugman, G.E., 2008. Loss Models: From Data to Decisions. *Annals of Actuarial Science*, *3*(1-2), p.327.

Shiu, E.S., 1989. The probability of eventual ruin in the compound binomial model. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, *19*(2), pp.179-190.

Sun, L. and Yang, H., 2004. On the joint distributions of surplus immediately before ruin and the deficit at ruin for Erlang (2) risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, *34*(1), pp.121-125.

Sundt, B., 1993. Panjer HH, Willmot GE (1992): Insurance risk models. Society of Actuaries, Schaumburg IL 60713-2226, USA, 442 pages, US $35.00 (overseas:+ 50%). *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, *23*(1), pp.157-160.

Willmot, G.E. and Cai, J., 2001. Aging and other distributional properties of discrete compound geometric distributions. *Insurance: Mathematics and Economics*, *28*(3), pp.361-379.

Willmot, G.E. and Dickson, D.C., 2003. The Gerber–Shiu discounted penalty function in the stationary renewal risk model. *Insurance: Mathematics and Economics*, *32*(3), pp.403-411.

Willmot, G.E. and Woo, J.K., 2010. Surplus analysis for a class of Coxian interclaim time distributions with applications to mixed Erlang claim amounts. *Insurance: Mathematics and Economics*, *46*(1), pp.32-41.

Willmot, G.E., 1993. Ruin probabilities in the compound binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics*, *12*(2), pp.133-142.

Willmot, G.E., 1999. A Laplace transform representation in a class of renewal queueing and risk processes. *Journal of Applied Probability*, *36*(2), pp.570-584.

Willmot, G.E., 2004. A note on a class of delayed renewal risk processes. *Insurance: Mathematics and Economics*, *34*(2), pp.251-257.

Willmot, G.E., Lin, X.S. and Lin, X.S., 2001. *Lundberg approximations for compound distributions with insurance applications* (Vol. 156). Springer Science & Business Media.

Woo, J.K., 2010. Some remarks on delayed renewal risk models. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, *40*(1), pp.199-219.

Wu, X. and Li, S., 2008. On the discounted penalty function in a discrete time renewal risk model with general interclaim times. *Scandinavian Actuarial Journal*, *2009*(4), pp.281-294.

Yuen, K.C. and Guo, J.Y., 2001. Ruin probabilities for time-correlated claims in the compound binomial model. *Insurance: Mathematics and Economics*, *29*(1), pp.47-57.