



**Πανεπιστήμιο Πειραιώς**

**Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης  
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών  
Εφαρμοσμένη Στατιστική**

---

---

**Τιμολόγηση και Αντιστάθμιση Κίνδυνου σε  
μη Πλήρεις Αγορές: Η περίπτωση των  
Διαχύσεων Με Άλματα**

---

---

**Ψάφος Ε. Χρήστος**  
ΜΕΣ 16016

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

**Πειραιάς,  
Οκτώβριος 2018**





**Πανεπιστήμιο Πειραιώς**

**Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης  
Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών  
Εφαρμοσμένη Στατιστική**

---

---

**Τιμολόγηση και Αντιστάθμιση Κίνδυνου σε  
μη Πλήρεις Αγορές: Η περίπτωση των  
Διαχύσεων Με Άλματα**

---

---

**Ψάφος Ε. Χρήστος**  
ΜΕΣ 16016

**Διπλωματική Εργασία**

που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική

**Πειραιάς,  
Οκτώβριος 2018**

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη Γ.Σ.Ε.Σ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμό ..... συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής, Μπούτσικας Μιχαήλ (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής, Πολίτης Κωνσταντίνος
- Επίκουρος Καθηγητής, Ανθρωπέλος Μιχαήλ

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.



**University of Piraeus**

**Department of Statistics and Insurance Science  
Postgraduate Program In  
Applied Statistics**

---

---

**Pricing and Hedging in  
Incomplete Markets: The case of  
Jump - Diffusion Processes**

---

---

**Psafos E. Christos**

MES 16016

**MSc Dissertation**

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Applied Statistics.

**Piraeus, Greece  
October 2018**

This thesis was approved unanimously by the three - member committee appointed by the Department of Statistics and Actuarial Science, University of Piraeus, in accordance with the rules of the MSc program in Applied Statistics.

Committee members were:

- Associate Professor, Boutsikas Michael (Supervisor)
- Associate Professor, Politis Konstantinos
- Assistant Professor, Anthropolos Michael

Approval of this thesis from the Department of Statistics and Actuarial Science, University of Piraeus, does not imply any endorsement of the opinions of the author.

*Στον παππού Νίκο και  
την οικογένειά μου*





# Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να εκφράσω τις θερμές μου ευχαριστίες στον καθηγητή και μέντορά μου κ. Μιχαήλ Μπούτσικα για την ουσιαστική βοήθεια και υποστήριξη του στην παρούσα εργασία. Οι γνώσεις και τα εφόδια που έλαβα υπό την καθοδήγηση και τη διδασκαλία του αποτελούν πληροφορίες ζωτικής φύσεως για τη συνέχεια της ακαδημαϊκής αλλά και επαγγελματικής μου σταδιοδρομίας.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα υπόλοιπα μέλη της τριμελούς επιτροπής κ. Κωνσταντίνο Πολίτη και κ. Μιχαήλ Ανθρωπέλο, για τις ουσιαστικές τους παρατηρήσεις, καθώς και το ενδιαφέρον που έδειξαν κατά τη διεξαγωγή της διαδικασίας της προφορικής εξέτασης.

Δεν θα μπορούσα να παραλείψω να ευχαριστήσω το σύνολο των καθηγητών του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική για τις γνώσεις και το ήθος τα οποία μου μεταλαμπάδυσαν, καθώς και για τη διδαχή χρήσιμων και εφαρμόσιμων διαδικασιών στην επαγγελματική μου πορεία.

Φυσικά, ένα μεγάλο ευχαριστώ αναλογεί στην οικογένειά μου για την οικονομική και ψυχική υποστήριξη που μου προσέφεραν απλόχερα στο σύνολο της ακαδημαϊκής μου πορείας καθώς επίσης και στους στενούς μου φίλους που βρίσκονται πάντοτε στο πλευρό μου.

*Ψάφος Χρήστος*



# Περίληψη

Οι διαδικασίες με άλματα χρησιμοποιούνται τα τελευταία χρόνια όλο και περισσότερο για την μοντελοποίηση των τιμών χρηματοοικονομικών τίτλων, με σκοπό την καλύτερη τιμολόγηση παραγώγων προϊόντων και την αποτελεσματικότερη διαχείριση του κινδύνου. Οι εκθετικές διαδικασίες με άλματα είναι σε πολλές περιπτώσεις καταλληλότερες για τον σκοπό αυτό από τη Γεωμετρική Κίνηση Brown που χρησιμοποιείται στο απλό μοντέλο Black – Scholes. Το μειονέκτημα όμως είναι ότι οι αγορές στις οποίες εμφανίζονται άλματα τιμών δεν είναι πλήρεις, δηλαδή δεν είναι πάντοτε εφικτό να κατασκευαστούν χαρτοφυλάκια αναπαραγωγής (replicating portfolios) που προσφέρουν τέλεια αντιστάθμιση. Ως συνέπεια σε τέτοιες αγορές δεν είναι καθόλου εύκολη η αποτίμηση των διαφόρων παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων μέσω της θεωρίας του non – Arbitrage.

Στην παρούσα εργασία αρχικά θα γίνει μια παρουσίαση των βασικότερων αποτελεσμάτων των διαχύσεων με άλματα και στη συνέχεια θα γίνει επισκόπηση των διαφόρων γνωστών τεχνικών αποτίμησης παραγώγων σε αγορές με άλματα τιμών (μέθοδοι των Merton και Kou), καθώς και η κατασκευή κατάλληλων (μερικών) χαρτοφυλακίων αντιστάθμισης (Merton’s Approach, Superhedging, Utility Maximization, Quadratic Hedging). Τέλος, οι τεχνικές τιμολόγησης που θα παρουσιαστούν, θα υλοποιηθούν και θα συγκριθούν εμπειρικά (μέσω προσομοίωσης) χρησιμοποιώντας το λογισμικό Wolfram Mathematica®.



# Abstract

Jump – diffusion processes have been used over the past few years to model financial securities price fluctuations in order to offer alternative approaches for pricing derivative products and to manage risk more effectively. Exponential jump processes are in many cases better suited for this purpose than the Geometric Brownian Motion used in the simple Black – Scholes model. However, the downside is that the markets in which prices jump are incomplete, i.e. replicating portfolios that offer perfect hedging are not always feasible. Therefore, in such markets it is not easy to determine a “fair” price for various financial derivatives through the non – Arbitrage theory.

In the present MSc thesis, we will first present the most important results of the Jump Diffusion processes and then review various known techniques for the valuation of financial derivatives in markets with price jumps (Merton and Kou methods) as well as the construction of appropriate (partial) hedging portfolios (Merton's Approach, Superhedging, Utility Maximization, Quadratic Hedging). Finally, the introduced valuation techniques will be implemented and empirically compared (through simulation) using the computational software Wolfram Mathematica®.



# Περιεχόμενα

Περιεχόμενα.....	xiii
Κατάλογος Σχημάτων .....	xvii
Κατάλογος Πινάκων .....	xix
<b>Εισαγωγή.....</b>	<b>1</b>
1.1 Πρόλογος .....	1
1.2 Σκοπός της Εργασίας.....	3
<b>Η περίπτωση των πλήρων αγορών.....</b>	<b>5</b>
2.1 Πλήρεις αγορές.....	5
2.2 Το διωνυμικό υπόδειγμα $n$ περιόδων.....	7
2.3 Η Κίνηση Brown.....	9
2.4 Η Γεωμετρική Κίνηση Brown .....	10
2.5 Ολοκλήρωμα Itô – Ο τύπος του Itô.....	12
2.6 Το υπόδειγμα Black – Scholes .....	13
<b>Η περίπτωση των μη πλήρων αγορών .....</b>	<b>15</b>
3.1 Μη πλήρεις αγορές.....	15
3.2 Αίτια μη πληρότητας.....	17
3.2.1 Ανεπαρκές άνοιγμα εμπορεύσιμων περιουσιακών στοιχείων.....	17
3.2.2 Αγοραστικές Τριβές .....	17
3.2.3 Ασάφεια και ασύμμετρη πληροφορία .....	18
3.3 Το τριωνυμικό υπόδειγμα $n$ περιόδων .....	18
3.4 Ανεπίξετες Lévy και Απείρωτες Διαιρετές Κατανομές .....	22
3.5 Διαχύσεις με Άλματα.....	27
3.5.1 Υπόδειγμα Merton .....	28

3.5.2 Υπόδειγμα Kou .....	30
<b>Τιμολόγηση και Αντιστάθμιση Κινδύνου.....</b>	<b>33</b>
4.1 Τιμολόγηση Αξιογράφων .....	33
4.1.1 Τιμολόγηση μέσω του υποδείγματος Merton.....	34
4.1.2 Τιμολόγηση μέσω του υποδείγματος Kou .....	36
4.2 Δημιουργία Χαρτοφυλακίων Αντιστάθμισης.....	38
4.2.1 Προσέγγιση του Merton (Merton's Approach).....	38
4.2.2 Superhedging.....	39
4.2.3 Μεγιστοποίηση Ωφελιμότητας (Utility Maximization).....	41
4.2.4 Τετραγωνική Αντιστάθμιση (Quadratic Hedging).....	43
4.3 Βαθμονόμηση Υποδειγμάτων .....	46
4.3.1 Μη Γραμμικά Ελάχιστα Τετράγωνα .....	46
4.3.2 Διόρθωση μέσω της Σχετικής Εντροπίας .....	47
<b>Εφαρμογή.....</b>	<b>49</b>
5.1 Σύνολο Δεδομένων.....	49
5.2 Ισχύς των μεθόδων Βαθμονόμησης.....	50
5.3 Βαθμονόμηση των υποδειγμάτων.....	58
5.3.1 Βαθμονόμηση του υποδείγματος Black – Scholes.....	59
5.3.2 Βαθμονόμηση των υποδειγμάτων Διαχύσεων με Άλματα .....	61
5.3.3 Σύγκριση υποδειγμάτων .....	70
5.4 Πρόβλεψη.....	70
<b>Σύνοψη – Συμπεράσματα.....</b>	<b>73</b>
6.1 Σύνοψη .....	73
6.2 Συμπεράσματα .....	74
<b>Παράρτημα Α – Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου και Θεωρίας Πιθανοτήτων .....</b>	<b>77</b>
A.1 $\sigma$ – Άλγεβρα .....	77
A.2 Μέτρο και Χώρος Μέτρου .....	78
A.3 Μετρήσιμη Συνάρτηση και Τυχαία Μεταβλητή .....	78
A.4 Μέση Τιμή και Δεσμευμένη Μέση Τιμή.....	79



A.5 Χαρακτηριστική Συνάρτηση .....	80
A.6 Στοχαστική Ανέλιξη.....	81
A.7 Διήθηση, Προσαρμοσμένες Διαδικασίες και Θεωρία Martingale .....	82
<b>Παράρτημα Β - Κώδικες Mathematica® .....</b>	<b>85</b>
B.1 Η κίνηση Brown .....	85
B.2 Η Γεωμετρική κίνηση Brown.....	86
B.3 Ανελίξεις Lévy και Απείρως Διαιρετές Κατανομές .....	87
B.4 Διαχύσεις με Άλματα.....	89
B.5 Τιμολόγηση μέσω του υποδείγματος Merton.....	91
B.6 Τιμολόγηση μέσω του υποδείγματος Κου.....	91
B.7 Βαθμονόμηση Υποδειγμάτων .....	93
<b>Βιβλιογραφία.....</b>	<b>95</b>



# Κατάλογος Σχημάτων

<i>Εικόνα 2.2.1: Διωνυμικό δέντρο δύο περιόδων</i> .....	8
<i>Εικόνα 2.3.1: Τυχαίες πραγματοποιήσεις της <math>BM(0,0.5)</math></i> .....	10
<i>Εικόνα 2.4.1: Τυχαίες πραγματοποιήσεις της <math>GBM(-0.5,0.5)</math></i> .....	11
<i>Εικόνα 3.3.1: Τριωνυμικό δέντρο δύο περιόδων</i> .....	19
<i>Εικόνα 3.4.1: Τυχαίες πραγματοποιήσεις της σ.δ. Poisson <math>N_t(10)</math></i> .....	23
<i>Εικόνα 3.4.2: Μία τυχαία πραγματοποίηση της σύνθετης σ.δ. Poisson <math>X_t(10)</math> με κατανομή μεγέθους αλμάτων <math>\mathcal{F} \sim N(0,1)</math></i> .....	23
<i>Εικόνα 3.5.1: Μία τυχαία πραγματοποίηση μέσω του υποδείγματος Merton</i> .....	30
<i>Εικόνα 3.5.2: Μία τυχαία πραγματοποίηση μέσω του υποδείγματος Kou</i> .....	32
<i>Εικόνα 5.1.1: Τιμές αγοράς του παραγώγου</i> .....	50
<i>Εικόνα 5.2.1: Το γράφημα του συναρτησοειδούς της μεθόδου NLS για το υπόδειγμα Merton</i> .....	51
<i>Εικόνα 5.2.2: Το Contour Plot του συναρτησοειδούς της μεθόδου NLS για το υπόδειγμα Merton</i> .....	52
<i>Εικόνα 5.2.3: Το γράφημα του συναρτησοειδούς της μεθόδου RE για το υπόδειγμα Merton</i> .....	52
<i>Εικόνα 5.2.4: Το Contour Plot του συναρτησοειδούς της μεθόδου RE για το υπόδειγμα Merton</i> .....	53
<i>Εικόνα 5.2.5: Το γράφημα του συναρτησοειδούς των μεθόδων NLS και RE για το υπόδειγμα Kou</i> .....	53
<i>Εικόνα 5.2.6: Το Contour Plot του συναρτησοειδούς των μεθόδων NLS και RE για το υπόδειγμα Kou</i> .....	54
<i>Εικόνα 5.2.7: Γράφημα του εκτιμώμενου παραμετρικού διανύσματος <math>(\lambda, \nu)</math> του υποδείγματος Merton</i> .....	56
<i>Εικόνα 5.2.8: Γράφημα του εκτιμώμενου παραμετρικού διανύσματος <math>(\eta_1, \eta_2)</math> του υποδείγματος Kou</i> .....	57
<i>Εικόνα 5.3.1: Προσέγγιση των τιμών αγοράς μέσω του υποδείγματος BS</i> .....	59
<i>Εικόνα 5.3.2: Προσέγγιση των τιμών αγοράς μέσω του υποδείγματος Merton για τιμές των παραμέτρων <math>\eta = 4.61762</math> και <math>\nu = 0.976682</math></i> .....	61

<b>Εικόνα 5.3.3:</b> Το γράφημα του συναρτησοειδούς της μεθόδου NLS για το υπόδειγμα Merton με τιμές παραμέτρων $m = 4.61762$ και $v = 0.976682$ .....	62
<b>Εικόνα 5.3.4:</b> Το Contour Plot του συναρτησοειδούς της μεθόδου NLS για το υπόδειγμα Merton με τιμές παραμέτρων $m = 4.61762$ και $v = 0.976682$ .....	62
<b>Εικόνα 5.3.5:</b> Προσέγγιση των τιμών αγοράς μέσω του υποδείγματος Merton για τιμές των παραμέτρων $m = 4.48722$ και $v = 1.10215$ .....	63
<b>Εικόνα 5.3.6:</b> Το γράφημα του συναρτησοειδούς της μεθόδου RE για το υπόδειγμα Merton με τιμές παραμέτρων $m = 4.48722$ και $v = 1.10215$ .....	63
<b>Εικόνα 5.3.7:</b> Το Contour Plot του συναρτησοειδούς της μεθόδου RE για το υπόδειγμα Merton με τιμές παραμέτρων $m = 4.48722$ και $v = 1.10215$ .....	64
<b>Εικόνα 5.3.8:</b> Προσέγγιση των τιμών αγοράς μέσω του υποδείγματος Kou για τιμές των παραμέτρων $\eta_1 = 1.41173$ και $\eta_2 = 4.10756$ .....	64
<b>Εικόνα 5.3.9:</b> Το γράφημα του συναρτησοειδούς της μεθόδου NLS για το υπόδειγμα Kou με τιμές παραμέτρων $\eta_1 = 1.41173$ και $\eta_2 = 4.10756$ .....	65
<b>Εικόνα 5.3.10:</b> Το Contour Plot του συναρτησοειδούς της μεθόδου NLS για το υπόδειγμα Kou με τιμές παραμέτρων $\eta_1 = 1.41173$ και $\eta_2 = 4.10756$ .....	65
<b>Εικόνα 5.3.11:</b> Προσέγγιση των τιμών αγοράς μέσω του υποδείγματος Kou για τιμές των παραμέτρων $\eta_1 = 1.41173$ και $\eta_2 = 4.10756$ .....	66
<b>Εικόνα 5.4.1:</b> Γραφήματα διαφορών τιμών των μεθόδων Merton και Kou από τις δίκαιες τιμές αγοράς της μεθόδου Black - Scholes με χρόνο εξάσκησης $T = 1$ (πάνω αριστερά Εικόνα), 2 (πάνω δεξιά Εικόνα) και 3 έτη (κάτω αριστερά Εικόνα). Η μπλε καμπύλη αφορά τις διαφορές των τιμών αγοράς της μεθόδου Merton από εκείνες της μεθόδου Black - Scholes, ενώ η κόκκινη διακεκομμένη στις διαφορές των τιμών αγοράς της μεθόδου Kou από εκείνες της μεθόδου Black - Scholes.....	72

# Κατάλογος Πινάκων

<b>Πίνακας 5.1.1:</b> Σύνολο δεδομένων εφαρμογής με $S_0 = 2716$ .....	50
<b>Πίνακας 5.2.1:</b> Εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων $\lambda$ και $\nu$ του υποδείγματος Merton για κάθε βήμα επανάληψης του αλγορίθμου.....	55
<b>Πίνακας 5.2.2:</b> Εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων $\eta_1$ και $\eta_2$ , σφάλματα απόκλισης και τετραγωνικά σφάλματα απόκλισης του υποδείγματος Kou .....	56
<b>Πίνακας 5.2.3:</b> Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων .....	56
<b>Πίνακας 5.2.4:</b> Άνω και κάτω άκρα διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις μέσες τιμές των εκτιμητών των παραμέτρων των δύο υποδειγμάτων σε επίπεδα σημαντικότητας 95% και 99%. .....	58
<b>Πίνακας 5.3.1:</b> Εκτιμηθείσες τιμές αγοράς με βάση το υπόδειγμα BS, παρατηρηθείσες τιμές αγοράς του παραγώγου, σφάλματα απόκλισης, τετραγωνικά σφάλματα απόκλισης, μέσο τετραγωνικό σφάλμα και χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου μέσω του υποδείγματος BS που προέκυψαν για τιμή της παραμέτρου $\sigma = 0.127068$ .....	60
<b>Πίνακας 5.3.2:</b> Εκτιμηθείσες τιμές αγοράς, παρατηρηθείσες τιμές αγοράς του παραγώγου, σφάλματα απόκλισης, τετραγωνικά σφάλματα απόκλισης, μέσο τετραγωνικό σφάλμα και χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου μέσω του υποδείγματος Merton που προέκυψαν για τιμές των παραμέτρων $m = 4.61762$ και $\nu = 0.976682$ .....	67
<b>Πίνακας 5.3.3:</b> Εκτιμηθείσες τιμές αγοράς, παρατηρηθείσες τιμές αγοράς του παραγώγου, σφάλματα απόκλισης, τετραγωνικά σφάλματα απόκλισης, μέσο τετραγωνικό σφάλμα και χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου μέσω του υποδείγματος Merton που προέκυψαν για τιμές των παραμέτρων $m = 4.48722$ και $\nu = 1.10215$ .....	68
<b>Πίνακας 5.3.4:</b> Εκτιμηθείσες τιμές αγοράς, παρατηρηθείσες τιμές αγοράς του παραγώγου, σφάλματα απόκλισης, τετραγωνικά σφάλματα απόκλισης, μέσο τετραγωνικό σφάλμα και χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου μέσω του υποδείγματος Kou που προέκυψαν για τιμές των παραμέτρων $\eta_1 = 1.41173$ και $\eta_2 = 4.10756$ .....	69
<b>Πίνακας 5.3.5:</b> Σύγκριση των υποδειγμάτων .....	70
<b>Πίνακας 5.4.1:</b> Αποτελέσματα της πρόβλεψης μέσω των υποδειγμάτων Black – Scholes, Merton και Kou για το παράγωγο SPX με ωρίμανση 1, 2 και 3 έτη .....	71



# Κεφάλαιο 1

## Εισαγωγή

### 1.1 Πρόλογος

Η ανάγκη ορισμού μίας συστηματικής οντότητας, στην οποία δυο αντισυμβαλλόμενοι είναι σε θέση να έρθουν σε συμφωνία για την ανταλλαγή πλήθους αγαθών σε μία συγκεκριμένη χρονική στιγμή στο μέλλον, με σκοπό τον περιορισμό ή την εξάλειψη ενδεχόμενων μελλοντικών κινδύνων, οδήγησε στη θεμελίωση της έννοιας των πλήρων αγορών. Στο πρόβλημα αυτό έδωσαν λύση οι Arrow (1953), Debreu (1959) και McKenzie (1954), οι οποίοι συνέθεσαν ένα υπόδειγμα το οποίο είναι γνωστό στον τομέα των οικονομικών ως Θεωρία Γενικής Ισορροπίας (General Equilibrium – GE). Υπό το υπόδειγμα αυτό, ένα αξιόγραφο που αγοράζεται ή πωλείται την χρονική στιγμή  $t$  αποτελεί μια σύμβαση, σε διακριτό χρόνο, σύμφωνα με την οποία ο ένας συμβαλλόμενος υπόσχεται στον άλλο να παραδώσει μία μονάδα εισοδήματος σε ένα από τα πιθανά ενδεχόμενα που μπορεί να συμβεί κατά την χρονική στιγμή  $t + 1$ . Εάν σε κάθε χρονική στιγμή υπάρχει μία πλήρης ακολουθία τέτοιων συμβάσεων, για κάθε ενδεχόμενο που μπορεί να συμβεί την επόμενη χρονική στιγμή, οι αντισυμβαλλόμενοι θα ανταλλάξουν αυτές τις συμβάσεις προκειμένου να εξασφαλιστούν από μελλοντικούς κινδύνους, στοχεύοντας σε ένα επιθυμητό και οικονομικά εφικτό επίπεδο κατανάλωσης σε κάθε ενδεχόμενο.

Βασιζόμενοι σε ένα τέτοιο υπόδειγμα αγοράς, αρκετοί ερευνητές επιχείρησαν να δημιουργήσουν μαθηματικές μεθόδους, μέσω των οποίων καθίσταται δυνατή η τιμολόγηση αξιογράφων για τη διενέργεια αγοραπωλησιών, καθώς και η δημιουργία χαρτοφυλακίων που θα εξασφάλιζαν τον κάτοχο ενός τίτλου από ενδεχόμενους κινδύνους. Ένα από τα σημαντικότερα αποτελέσματα της σύγχρονης χρηματοοικονομικής θεωρίας είναι εκείνο του Merton (1973), ο οποίος υποστήριξε ότι, υπό ορισμένες προϋποθέσεις, η συχνή διαπραγμάτευση ενός μικρού αριθμού μακροχρόνιων τίτλων μπορεί να δημιουργήσει νέες επενδυτικές ευκαιρίες, οι οποίες διαφορετικά δεν θα ήταν διαθέσιμες στους επενδυτές. Αυτή η προσέγγιση είναι και η βάση της μεθόδου Black & Scholes (1973) και Merton (1973), η οποία αποτελεί μία μέθοδο τιμολόγησης χωρίς Arbitrage και συντελεί στην αντιστάθμιση του κινδύνου άλλων παράγωγων προϊόντων, προϋποθέτοντας την ισχύ της ιδιότητας του Martingale. Η ουσία της δυναμικής αντιστάθμισης είναι η δυνατότητα αναπαραγωγής της αποδόσεως ενός αξιογράφου με μια αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική δυναμικού χαρτοφυλακίου τιμολογημένων τίτλων, δηλαδή ενός χαρτοφυλακίου στο

οποίο δεν λαμβάνουν χώρα χρηματικές εισροές ή εκροές, εκτός από την χρονική στιγμή της δημιουργίας του και εκείνη της ωρίμανσής του. Εάν υπάρχει μια τέτοια στρατηγική δυναμικής αντιστάθμισης, τότε το αρχικό κόστος του χαρτοφυλακίου οφείλει να ισούται με την τιμή του παραγώγου, διαφορετικά υπάρχει ένα ενδεχόμενο εμφάνισης Arbitrage στην αγορά.

Στην οικονομία, οι μη πλήρεις αγορές είναι αγορές στις οποίες δεν είναι εφικτή η πλήρης αντιστάθμιση του κινδύνου που προέρχεται από την κατοχή μίας θέσης επί ενός αξιογράφου. Σε αντίθεση με τις πλήρεις αγορές, μία έλλειψη τίτλων στην αγορά πιθανότατα θα περιορίσει τους επενδυτές να μεταφέρουν την επιθυμητή μερίδα πλούτου μεταξύ των ενδεχομένων. Κάποιες αντιφατικές συνέπειες των υποδειγμάτων πλήρων αγορών σχετίζονται με τις εμπειρικές παρατηρήσεις σχετικά με την κατανάλωση, τον πλούτο και τις συναλλαγές της αγοράς. Για παράδειγμα, σε μία πλήρη αγορά, δεδομένου ότι οι επενδυτές μπορούν να εξασφαλιστούν πλήρως έναντι των κινδύνων, η σχετική θέση όσον αφορά την κατανομή του πλούτου ενός ατόμου δεν πρέπει να διαφέρει πολύ με την πάροδο του χρόνου λόγω την ιδιότητας του Martingale. Τα εμπειρικά στοιχεία, όμως, δίνουν διαφορετικά αποτελέσματα.

Με βάση τα παραπάνω, έκαναν την εμφάνισή τους στη βιβλιογραφία υποδείγματα με σκοπό την τιμολόγηση και την αντιστάθμιση του κινδύνου σε μη πλήρεις αγορές. Ο Merton (1976) εισήγαγε ένα υπόδειγμα το οποίο μπορούσε να προσεγγίσει με μεγαλύτερη ακρίβεια την εξέλιξη της κίνησης της τιμής μίας μετοχής στην πραγματική αγορά από την Γεωμετρική Κίνηση Brown, στην οποία βασίζεται το μοντέλο των Black – Scholes. Το αποτέλεσμα αυτό πηγάζει από το γεγονός ότι το υπόδειγμα του Merton είναι ευαίσθητο στις επιδράσεις που προκαλεί ένα μεγάλο γεγονός στην τιμή της μετοχής και προσπαθεί να το ερμηνεύσει μαθηματικά. Το προαναφερθέν υπόδειγμα αποτελεί μέλος μίας οικογένειας μη συνεχών στοχαστικών ανελίξεων που παρουσιάζουν άλματα πεπερασμένου πλήθους τα οποία ονομάζονται Διαχύσεις με Άλματα. Περίπου 30 χρόνια αργότερα, ο Kou (2002) πρότεινε άλλο ένα υπόδειγμα Διαχύσεων με Άλματα για τον ίδιο σκοπό. Τα δύο αυτά υποδείγματα αποτελούν τα πιο γνωστά και ευρέως χρησιμοποιούμενα σε τιμολογήσεις αξιογράφων στις μη πλήρεις αγορές χάρη στην ευχέρεια που παρέχει η κλειστότητα της μαθηματικής τους έκφρασης και στο εύρος των παραγόντων (μετρήσιμων ή μη) που ερμηνεύουν. Όπως προαναφέρθηκε, σχετικά με τη σύνθεση δυναμικών χαρτοφυλακίων εξασφάλισης, δεν είναι εφικτή η πλήρης αντιστάθμιση του κινδύνου στις μη πλήρεις αγορές. Αυτό δεν συμβαίνει επειδή η συνεχής χρονική διαπραγμάτευση είναι αδύνατη στην πράξη, αλλά επειδή υπάρχουν κίνδυνοι που δεν είναι εφικτό να αντισταθμιστούν ακόμη και σε συνεχή χρόνο συναλλαγών. Για το λόγο αυτό, έχουν προταθεί αρκετές προσεγγιστικές μέθοδοι μερικής αντιστάθμισης, όπως η προσέγγιση του Merton, της οποίας η ιδέα πηγάζει από την μέθοδο αντιστάθμισης Δέλτα του υποδείγματος των Black – Scholes, το Superhedging, υπό το οποίο επιχειρείται η διατήρηση της αξίας ενός δοθέντος αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου διαρκώς σε θετικά επίπεδα καθώς και μέθοδοι που αποτελούν ειδικές περιπτώσεις της Θεωρίας Ωφελιμότητας και της αντιστάθμισης Μέσου – Διακύμανσης όπως η μέθοδος Μεγιστοποίησης Συναρτήσεων Ωφελιμότητας (Utility Maximization) και η τετραγωνική αντιστάθμιση (Quadratic Hedging).



## 1.2 Σκοπός της Εργασίας

Σκοπός της παρούσης διπλωματικής εργασίας είναι η παρουσίαση και η σύγκριση των μεθόδων τιμολόγησης και αντιστάθμισης κινδύνου σε μη πλήρεις αγορές. Οι μέθοδοι οι οποίες θα παρουσιαστούν βασίζονται σε θεωρητικά υποδείγματα Διαχύσεων με Άλματα, το οποία θα παρουσιαστούν εκτενώς και θα προσομοιωθούν μέσω του λογισμικού Wolfram Mathematica®.

Η εργασία είναι δομημένη σε 3 μέρη εκ των οποίων στο πρώτο (Κεφάλαια 2 και 3) γίνεται μία σύντομη αναφορά στα σημαντικότερα αποτελέσματα που λαμβάνουν χώρα στις πλήρεις και τις μη πλήρεις αγορές καθώς η εισαγωγή των υποδειγμάτων Διαχύσεων με Άλματα τα οποία θα αποτελέσουν τον πυρήνα των μεθόδων τιμολόγησης και αντιστάθμισης κινδύνου που θα μελετηθούν στο δεύτερο μέρος (Κεφάλαιο 4). Τέλος, στο 3<sup>ο</sup> μέρος παρουσιάζεται μία εφαρμογή των μεθόδων που περιγράφονται στο Κεφάλαιο 4 σε πραγματικά δεδομένα αγορών που συλλέχθηκαν από το διαδίκτυο. Πιο συγκεκριμένα, κάθε κεφάλαιο περιλαμβάνει συνοπτικά τα εξής:

Στο **2<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** γίνεται μία αναδρομή στα σημαντικότερα αποτελέσματα των πλήρων αγορών, συμπεριλαμβανομένων του ορισμού και των προϋποθέσεων των πλήρων αγορών, της εισαγωγής των μοντέλων περιγραφής της κίνησης ενός αξιογράφου σε διακριτό (Διωνυμικό υπόδειγμα) και συνεχή (Κίνηση Brown – Γεωμετρική Κίνηση Brown) χρόνο καθώς και την παρουσίαση της μεθόδου των Black – Scholes.

Στο **3<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** εισάγεται η έννοια της μη πλήρους αγοράς και γίνεται μία σύντομη αναφορά σε μερικούς από τους λόγους για τους οποίους η πραγματική αγορά δεν μπορεί να θεωρηθεί πλήρης. Επίσης, παρουσιάζεται το Τριωνυμικό υπόδειγμα  $n$  περιόδων, το οποίο προκύπτει ως επέκταση του αντίστοιχου Διωνυμικού που χρησιμοποιείται στις πλήρεις αγορές. Τέλος, παρουσιάζονται η οικογένεια και τα συνθετικά στοιχεία των ανεξίτηλων Lévy καθώς και η ειδική περίπτωση τους, των Διαχύσεων με Άλματα, όπου το αλματικό τους μέρος περιέχει ένα πεπερασμένο πλήθος αλμάτων με κατανομή μεγέθους αλμάτων  $\mathcal{F}$ , συμπεριλαμβανομένων των υποδειγμάτων Merton (1976) και Kou (2002).

Στο **4<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** παρουσιάζονται ορισμένες βασικές μέθοδοι αποτίμησης δικαιωμάτων Ευρωπαϊκού Τύπου και αντιστάθμισης κινδύνου σε μη πλήρεις αγορές. Στο πρώτο μέρος του κεφαλαίου, γίνεται μία συνοπτική περιγραφή των μέτρων ουδετέρου κινδύνου που χρησιμοποιούνται σε καθένα από τα υποδείγματα των Merton (1976) και Kou (2002) και έπειτα εισάγονται οι μέθοδοι τιμολόγησης υπό αυτά. Στη συνέχεια εισάγονται κάποιες εκ των μεθόδων αντιστάθμισης κινδύνου που εφαρμόζονται στις μη πλήρεις αγορές. Οι μέθοδοι αυτές (Προσέγγιση του Merton, Superhedging, Μεγιστοποίηση Ωφελιμότητας, Τετραγωνική Αντιστάθμιση) μας παρέχουν ένα μέτρο εκτίμησης του κινδύνου στον οποίο εκτίθεται ένας επενδυτής μέσω της διατήρησης μίας θέσης επί ενός παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος καθώς και μια εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο μπορεί τον να διατηρήσει σε χαμηλά επίπεδα. Στο τρίτο μέρος του Κεφαλαίου γίνεται μία συνοπτική περιγραφή 2 μεθόδων βαθμονόμησης υποδειγμάτων (Μη Γραμμικά Ελάχιστα Τετράγωνα και Διόρθωση μέσω της Σχετικής Εντροπίας) που παρέχονται για την εκτίμηση των παραμέτρων ενός δοθέντος υποδείγματος τιμολόγησης με σκοπό την καλύτερη προσαρμογή του σε δεδομένα της αγοράς.

Στο **5<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** θα παρουσιαστεί μία εφαρμογή των αποτελεσμάτων του 4<sup>ου</sup> κεφαλαίου. Πιο συγκεκριμένα, ύστερα από την παρουσίαση των δεδομένων που συλλέχθηκαν από την αγορά, θα ελεγχθεί η ισχύς των μεθόδων βαθμονόμησης μέσω προσομοίωσης τιμών αγοράς και στη συνέχεια θα παρατεθεί η βαθμονόμηση των υποδειγμάτων τιμολόγησης των Διαχύσεων με Άλματα με σκοπό την εύρεση του παραμετρικού διανύσματος καθενός εξ' αυτών, μέσω του οποίου οι εκτιμώμενες τιμές προσεγγίζουν όσο το δυνατόν καλύτερα τις αντίστοιχες πραγματικές. Τέλος, θα παρατεθεί η σύγκριση των υποδειγμάτων που προέκυψαν από την προαναφερθείσα εφαρμογή για την αξιολόγηση του βέλτιστου υποδείγματος τιμολόγησης για το εν λόγω σύνολο δεδομένων με σκοπό τη διενέργεια προβλέψεων.

Στο **6<sup>ο</sup> Κεφάλαιο** θα παρατεθεί μία σύντομη ανασκόπηση των βασικότερων αποτελεσμάτων της παρούσης εργασίας καθώς και συμπεράσματα που σχετίζονται με την θεωρία των πλήρων αγορών και την ισχύ των Διαχύσεων με Άλματα σε θεωρητικό αλλά και πρακτικό επίπεδο.

Τέλος, στο **Παράρτημα** της εργασίας παρατίθενται ορισμοί της Θεωρίας Μέτρου και της Θεωρίας Πιθανοτήτων (Παράρτημα Α) που χρησιμοποιούνται εκτενώς στο σύνολο του κύριου μέρους για την θεμελίωση εννοιών στα περιεχόμενα κεφάλαια, καθώς και οι κώδικες του λογισμικού Wolfram Mathematica® (Παράρτημα Β) που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή σχημάτων και την προσομοίωση των μεθόδων που περιγράφονται.

## Κεφάλαιο 2

# Η περίπτωση των πλήρων αγορών

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιαστούν συνοπτικά ορισμένες έννοιες που λαμβάνουν χώρα στις περιπτώσεις όπου η αγορά παραγώγων θεωρείται πλήρης. Οι έννοιες αυτές μας παρέχουν μία εικόνα για τον τρόπο με τον οποίο κατασκευάζονται τα χαρτοφυλάκια αντιστάθμισης κινδύνου και εκτελείται η τιμολόγηση προϊόντων στις πλήρεις αγορές. Επίσης, μας βοηθούν στη εισαγωγή των ορολογιών και στη θεμελίωση των βασικών εργαλείων τιμολόγησης και αντιστάθμισης κινδύνου στις μη πλήρεις αγορές, με τις οποίες θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Από άποψη απλότητας, σε όλα τα επακόλουθα κεφάλαια της παρούσης εργασίας θεωρούμε ότι η εκάστοτε αγορά παραγώγων πληροί τις παρακάτω προϋποθέσεις:

- (i) Δεν υπάρχουν κόστη συναλλαγών, ενώ όλα τα κέρδη φορολογούνται με τον ίδιο τρόπο
- (ii) Οι συναλλασσόμενοι μπορούν να δανειστούν ή να δανείσουν με το ίδιο επιτόκιο  $r$  χωρίς κίνδυνο με συνεχή ανατοκισμό
- (iii) Οι συναλλασσόμενοι δρουν σύμφωνα με τις προσδοκίες τους και επιχειρούν να εκμεταλλευτούν όποιες ευκαιρίες για σίγουρο κέρδος εμφανίζονται
- (iv) Κάθε επενδυτής μπορεί να αγοράσει ή να πουλήσει ακόμη και δεκαδικό αριθμό μετοχών
- (v) Είναι επιτρεπτή η ανοιχτή πώληση (short selling) τίτλων της αγοράς

Η συγγραφή του κεφαλαίου βασίστηκε στα συγγράμματα Applebaum (2004), Black & Scholes (1973) καθώς και στις πανεπιστημιακές σημειώσεις Μπούτσικας (2005) και Ανθρωπέλος (2015).

### 2.1 Πλήρεις αγορές

Προτού εισάγουμε τις μεθόδους τιμολόγησης και αντιστάθμισης κινδύνου διακριτού και συνεχούς χρόνου θεωρούμε σκόπιμο να ορίσουμε την έννοια της πλήρους αγοράς. Για να ορίσουμε αυστηρά την μαθηματική της έννοια θα πρέπει αρχικά να ορίσουμε την έννοια της επενδυτικής στρατηγικής (ή δυναμικού χαρτοφυλακίου) και του αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου.

Έστω μία αγορά στην οποία παρέχονται προς διαπραγμάτευση  $k$  αξιόγραφα. Έστω  $\Omega$  το σύνολο των δυνατών καταστάσεων της στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$  και  $\mathfrak{F}$  όλα τα δυνατά ενδεχόμενα του  $\Omega$ . Θεωρούμε ότι ο χρόνος είναι διακριτός και χωρίζουμε το διάστημα  $[0, T]$  σε  $n$  χρονικά σημεία  $t_i = ih, i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ . Επειδή κατά τη χρονική στιγμή  $t_i$  θα γνωρίζουμε ποια ενδεχόμενα του  $\Omega$  θα έχουν πραγματοποιηθεί (η κατάσταση της αγοράς μέχρι εκείνη τη χρονική στιγμή θα είναι γνωστή), ορίζουμε ως  $\mathfrak{F}_i$  τη  $\sigma$ -Άλγεβρα αυτών των ενδεχομένων (βλ. Ορισμό Παράρτημα A.1.1). Τέλος, συμβολίζουμε με  $\mathbf{S}_i = (S_{t_i}^1, S_{t_i}^2, \dots, S_{t_i}^k)$  το τυχαίο διάνυσμα των χρηματικών αξιών των  $k$  τίτλων τη χρονική στιγμή  $t_i$ . Προφανώς το  $\mathbf{S}_i$  είναι  $\mathfrak{F}_i$ -μετρήσιμο.

**Ορισμός 2.1.1:** Μία επενδυτική στρατηγική είναι ένα σύνολο τίτλων μιας αγοράς του οποίου η σύνθεση μπορεί να αλλάζει ανάλογα με την παροντική και την παρελθοντική κατάσταση της αγοράς. Συμβολίζουμε με

$$\mathbf{x}_i = (x_{t_i}^1, x_{t_i}^2, \dots, x_{t_i}^k)$$

το διάνυσμα που εκφράζει το πλήθος των τεμαχίων των τίτλων  $1, 2, \dots, k$ , που περιέχονται στο χαρτοφυλάκιο στο χρονικό διάστημα  $[t_i, t_{i+1})$ . Εξ' ορισμού το  $\mathbf{x}_i$  είναι  $\mathfrak{F}_i$ -μετρήσιμο. Η χρηματική αξία του χαρτοφυλακίου στο χρονικό διάστημα  $[t_i, t_{i+1})$  ισούται με:

$$V_i = \mathbf{x}_i \mathbf{S}'_i = \sum_{j=1}^k x_{t_i}^j S_{t_i}^j, i = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1.1)$$

**Ορισμός 2.1.2:** Μία επενδυτική στρατηγική η οποία στο χρονικό διάστημα  $[t_i, t_{i+1})$  έχει σύνθεση  $\mathbf{x}_i = (x_{t_i}^1, x_{t_i}^2, \dots, x_{t_i}^k)$  καλείται αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο αν ισχύει ότι:

$$\mathbf{x}_{i-1} \mathbf{S}'_i = \mathbf{x}_i \mathbf{S}'_i, i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.1.2)$$

Ο τελευταίος ορισμός πρακτικά μας λέει ότι στον χρόνο  $t_i$  η σύνθεση του χαρτοφυλακίου μπορεί να αλλάξει από  $\mathbf{x}_{i-1}$  σε  $\mathbf{x}_i$  χωρίς να γίνεται προσθαφαίρεση χρηματικών αξιών από το χαρτοφυλάκιο. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με άμεση επανεπένδυση του ποσού που εισπράττεται από ενδεχόμενα κέρδη σε άλλους τίτλους του χαρτοφυλακίου, με σκοπό την ύπαρξη χρηματικής ροής εντός αυτού αλλά χωρίς την μεταβολή της συνολικής του αξίας. Η διαδικασία που περιγράφηκε καλείται και αυτοχρηματοδοτούμενη επενδυτική στρατηγική.

Πλέον είμαστε σε θέση να δώσουμε τον ορισμό της πλήρους αγοράς, υπό τον οποίο, κάνοντας χρήση μίας επενδυτικής στρατηγικής, μπορούμε να προσφέρουμε πλήρη αντιστάθμιση στο χαρτοφυλάκιο μας. Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι μία αγορά καλείται πλήρης αν και μόνο αν κάθε παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν (ή μία  $\mathfrak{F}_n$ -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή  $U_n$ ) είναι αντισταθμισίμο (hedgeable).

**Ορισμός 2.1.3:** Μία αγορά που αποτελείται από  $k$  αξιόγραφα  $\mathbf{S}_i$ , όπου  $i = 1, 2, \dots, k$ , καλείται πλήρης αν για κάθε  $\mathfrak{F}_i$ -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή  $V_i$ , υπάρχει διάνυσμα  $(\psi_{t_{i-1}}, \Delta_{t_{i-1}}^1, \Delta_{t_{i-1}}^2, \dots, \Delta_{t_{i-1}}^k) \in \mathbb{R}^{k+1}$  το οποίο να επιλύει την εξίσωση:

$$V_i = \sum_{j=1}^k \Delta_{t_{i-1}}^j S_{t_i}^j + \psi_{t_{i-1}} e^{rt_i} \quad (2.1.3)$$

όπου  $\Delta_{t_{i-1}}^j$  είναι το πλήθος τεμαχίων της  $j$  μετοχής που ο επενδυτής αγοράζει ( $\Delta_{t_{i-1}}^j > 0$ ) ή πουλάει ( $\Delta_{t_{i-1}}^j < 0$ ) τη χρονική στιγμή  $t_{i-1}$ ,  $\psi$  το ποσό που δανείζει ( $\psi_{t_{i-1}} > 0$ ) ή δανείζεται ( $\psi_{t_{i-1}} < 0$ ) την ίδια χρονική στιγμή και  $r$  το ομολογιακό επιτόκιο χωρίς κίνδυνο της αγοράς με συνεχή ανατοκισμό.

Ένας από τους κύριους λόγους εγκαθίδρυσης και ανάπτυξης των αγορών παραγώγων είναι η αντιστάθμιση κινδύνου (hedging) από ενδεχόμενες χρηματικές απώλειες μέσω επενδύσεων. Καθώς τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα δεν αποτελούν αυτόνομους τίτλους αξιογράφων, αλλά εμφανίζονται ως τύποι συμβολαίων τα οποία αναφέρονται σε διάφορους χρηματοοικονομικούς τίτλους (μετοχές, δείκτες μετοχών, συνάλλαγμα κτλ.) με προσυμφωνημένα τυποποιημένα χαρακτηριστικά (ημερομηνία λήξης, τιμή εξάσκησης, τιμή δικαιώματος), παρέχουν στους επενδυτές την δυνατότητα κερδοσκοπίας (Speculation) και της απολαβής σίγουρου κέρδους χωρίς την ανάλογη ανάληψη κινδύνου (Arbitrage). Η έννοια του Arbitrage ουσιαστικά περιγράφει μία επενδυτική στρατηγική κατά την οποία η πιθανότητα μη ζημιάς είναι ίση με 1, ενώ η πιθανότητα απολαβής κερδών είναι θετική, όπως φαίνεται αυστηρότερα και στον επόμενο ορισμό.

**Ορισμός 2.1.4:** Έστω ο χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$  με  $\Omega, \mathfrak{F}$  όπως ορίστηκαν παραπάνω και  $\mathcal{P}$  ένα μέτρο πιθανότητας. Μία επενδυτική στρατηγική στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$  με αρχικό πλούτο  $V_0 \in \mathbb{R}$  καλείται *Arbitrage* εάν σε τουλάχιστον μία χρονική στιγμή  $t_i = ih, i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , ισχύει ότι:

$$\mathcal{P}(e^{-rt_i} V_i \geq V_0) = 1 \quad \mathcal{P}(e^{-rt_i} V_i > V_0) > 0 \quad (2.1.4)$$

Σύμφωνα με την τρίτη παραδοχή στην αρχή του κεφαλαίου, κάθε επενδυτής επιχειρεί να εκμεταλλευτεί ευκαιρίες για arbitrage στην αγορά. Με αυτόν τον τρόπο, χάρη στη μαζική εκμετάλλευση τέτοιων περιπτώσεων από το ευρύ επενδυτικό κοινό, η αγορά επανέρχεται σε ισορροπία με αποτέλεσμα την εξάλειψη του Arbitrage. Το αποτέλεσμα αυτό καλείται non - Arbitrage (NA) και πάνω σε αυτό θα βασιστούν τα θεωρητικά μοντέλα τιμολόγησης που θα οριστούν στη συνέχεια της παρούσης εργασίας.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τις πλήρεις αγορές και την έννοια του Arbitrage παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα Ανθρωπέλος (2015, §2.1, §3.1).

## 2.2 Το διωνυμικό υπόδειγμα $n$ περιόδων

Το διωνυμικό υπόδειγμα  $n$  περιόδων αποτελεί ένα απλοποιημένο υπόδειγμα για τον υπολογισμό της δίκαιης αξίας  $C$  ενός παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος σε διακριτό χρόνο. Η δομή του βασίζεται στην κίνηση της τιμής του υποκείμενου αγαθού καθ' όλη τη διάρκεια ωρίμανσής του. Πιο συγκεκριμένα, υπό το διωνυμικό υπόδειγμα  $n$  περιόδων, η τιμή του παραγώγου σε κάθε χρονικό διάστημα κινείται ανοδικά ή καθοδικά με

συγκεκριμένη πιθανότητα μέχρι την (προκαθορισμένη) ημερομηνία λήξης του συμβολαίου.

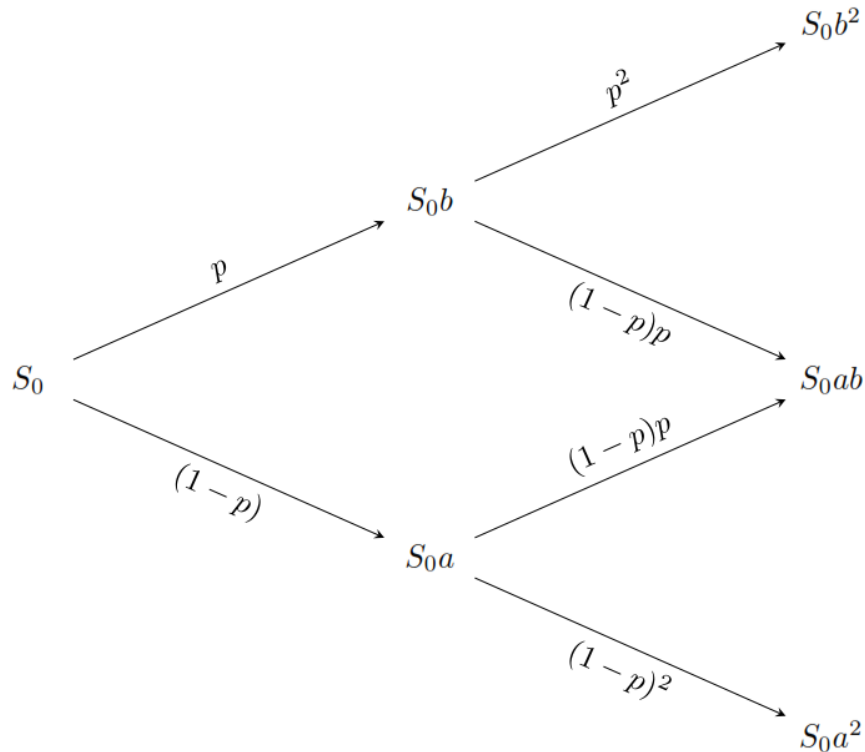
Έστω  $\Omega$  το σύνολο των καταστάσεων της αγοράς στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$ . Χωρίζουμε το διάστημα  $[0, T]$  σε  $n$  χρονικά σημεία  $t_i = ih, i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  και συμβολίζουμε με  $S_{t_i}$  την τιμή της υποκείμενης μετοχής στα αντίστοιχα χρονικά σημεία. Σε κάθε χρονικό σημείο  $t_j$ , η τιμή της μετοχής θα είναι ίση είτε με  $S_{t_{j-1}}a$  ή με  $S_{t_{j-1}}b$  ( $0 < a < b$ ) τις οποίες λαμβάνει με κάποιες πιθανότητες, έστω  $p$  και  $1 - p$ . Επίσης, θεωρούμε ως  $\mathcal{F}_i$  τη  $\sigma$ -Άλγεβρα των ενδεχομένων του  $\Omega$ , η οποία αποτελείται από  $2^{2^n}$  ενδεχόμενα. Τέλος, θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας  $\mathcal{P}$ , το οποίο σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο  $\omega = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  αντιστοιχεί πιθανότητα:

$$\mathcal{P}(\{\omega\}) = \mathcal{P}(\{v_1, v_2, \dots, v_n\}) = p^{\sum_{i=1}^n v_i} (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n v_i},$$

Αποδεικνύεται ότι στο συγκεκριμένο υπόδειγμα, υπό το μέτρο πιθανότητας  $\mathcal{P}$ , η αναμενόμενη αξία του παραγώγου σε κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τη σχέση:

$$C_{BT}(t_{i-1}) = e^{-rh} \left( \frac{e^{rh}b - 1}{b-a} (S_{t_{i-1}}a - K)_+ + \frac{1 - e^{rh}a}{b-a} (S_{t_{i-1}}b - K)_+ \right) \quad (2.2.1)$$

Παρακάτω παρατίθεται ένα γράφημα ενός διωνυμικού δέντρου τριών περιόδων, όπως περιγράφηκε στην αρχή της ενότητας.



**Εικόνα 2.2.1:** Διωνυμικό δέντρο δύο περιόδων

Βασιζόμενοι στα προηγούμενα, θέτοντας  $q = \frac{e^{rh}-a}{b-a}$ , όπου  $a < e^{rh} < b$ , οδηγούμαστε στην κατασκευή ενός νέου μέτρου πιθανότητας και κατά συνέπεια στον ορισμό ενός νέου χώρου πιθανότητας.

**Ορισμός 2.2.1:** Ο χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, Q)$  με  $\Omega, \mathfrak{F}$  όπως ορίστηκαν παραπάνω και  $Q$  το μέτρο πιθανότητας που σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο  $\omega = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  αντιστοιχεί πιθανότητα

$$Q(\{\omega\}) = Q(\{v_1, v_2, \dots, v_n\}) = q^{\sum_{i=1}^n v_i} (1-q)^{n-\sum_{i=1}^n v_i}, q = \frac{e^{rh} - a}{b - a} \quad (2.2.2)$$

όπου  $a < e^{rh} < b$ , καλείται *κόσμος ουδέτερου ρίσκου* και το μέτρο πιθανότητας  $Q$ , αντίστοιχα, καλείται *μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου*.

Από τα παραπάνω είμαστε πλέον σε θέση να προχωρήσουμε την τιμολόγηση ενός παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος μέσω του διωνυμικού μοντέλου  $n$  περιόδων.

**Θεώρημα 2.2.1:** Η (NA) αξία (στον χρόνο  $t = 0$ ) ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου (με τιμή εξάσκησης  $K$  και ημερομηνία λήξης  $T$ ) υπό το διωνυμικό υπόδειγμα  $n$  περιόδων δίνεται από τη σχέση

$$C_{BT}(0) = e^{-rT} E_Q(S_T - K)_+ \quad (2.2.3)$$

όπου  $Q$  το μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου. Δηλαδή είναι ίση με την παρούσα αξία του αναμενόμενου κέρδους από την χρήση του παραγώγου σε έναν κόσμο ουδέτερου ρίσκου.

## 2.3 Η Κίνηση Brown

Στην Ενότητα αυτή θα εισάγουμε ένα θεωρητικό υπόδειγμα που περιγράφει την κίνηση της μετοχής σε συνεχή χρόνο, ανάλογη με εκείνη που ορίστηκε νωρίτερα στη διακριτή περίπτωση. Γενικεύοντας το υπόδειγμα διακριτού χρόνου που δημιουργήσαμε καταλήγουμε σε ένα πολλαπλασιαστικό υπόδειγμα της μορφής:

$$S_{ih} = \begin{cases} S_{(i-1)h} b, & \text{με πιθανότητα } p \\ S_{(i-1)h} a, & \text{με πιθανότητα } 1 - p \end{cases} \quad (2.3.1)$$

και λαμβάνοντας το  $h \rightarrow 0$  προσεγγίζουμε ένα υπόδειγμα συνεχούς χρόνου.

Προτού αναλύσουμε το παρόν υπόδειγμα, θεωρούμε την ανέλιξη  $X_t = \ln(S_t)$ . Με αυτόν τον τρόπο καταλήγουμε σε ένα αθροιστικό υπόδειγμα το οποίο μας παρέχει μία πολύ καλή εικόνα για την περεταίρω μελέτη του ορισθέντος πολλαπλασιαστικού. Μέσω του προαναφερθέντος μετασχηματισμού καταλήγουμε στην στοχαστική ανέλιξη  $X_t, t \geq 0$  για την οποία ισχύει ότι:

$$X_{ih} = \begin{cases} X_{(i-1)h} + \sigma\sqrt{h}, & \text{με πιθαν. } p \\ X_{(i-1)h} - \sigma\sqrt{h}, & \text{με πιθαν. } 1 - p \end{cases}, p = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{h} \right), i = 1, 2, \dots, n \quad (2.3.2)$$

Σε αυτό το υπόδειγμα συνήθως θέτουμε  $X_0 = 0$ . Αποδεικνύεται ότι όταν  $h \rightarrow 0$ , τότε η κατανομή της  $X_t - X_0 = \sigma\sqrt{t}Z + t\mu$ , όπου  $Z \sim N(0,1)$  ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(t\mu, t\sigma^2)$ .

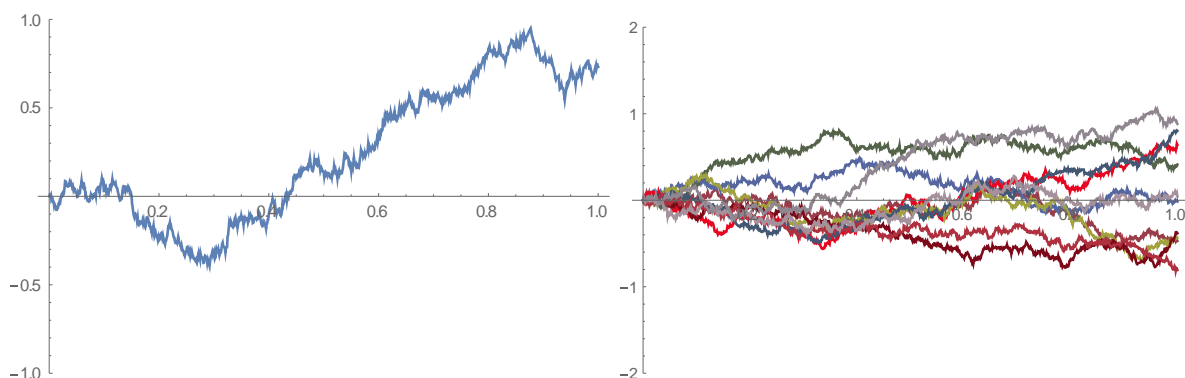
Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα που μας παρέχει η Κίνηση Brown (και γενικότερα οι ανελίξεις Lévy που θα ορίσουμε στο επόμενο κεφάλαιο) είναι ότι έχει ανεξάρτητες και ισόνομες (στην παρούσα περίπτωση κανονικές) προσαυξήσεις σε ανεξάρτητα χρονικά διαστήματα. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα η μεταβολή της  $X_t$  είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν και συνεπώς η  $X_{t+s} - X_s, t > 0$  είναι ανεξάρτητη από τις  $X_u, 0 \leq u \leq s$ . Επίσης, επειδή η  $X_t \sim N(t\mu, t\sigma^2)$  έπεται ότι η  $X_{t+s} - X_s \sim N(t\mu, t\sigma^2)$ . Μέσω του τελευταίου αποτελέσματος είμαστε πλέον σε θέση να δώσουμε τον ορισμό της Κίνησης Brown.

**Ορισμός 2.3.1:** Μία στοχαστική ανέλιξη  $X_t, t \geq 0$  καλείται *Κίνηση Brown* με τάση  $\mu \in \mathbb{R}$  και μεταβλητότητα  $\sigma > 0$  και συμβολίζεται με  $BM(\mu, \sigma^2)$ , αν ισχύουν τα παρακάτω για κάθε  $t \geq 0, s > 0$ :

- (i) Η τυχαία μεταβλητή  $X_{t+s} - X_s \sim N(t\mu, t\sigma^2)$
- (ii) Η τυχαία μεταβλητή  $X_{t+s} - X_s \sim N(t\mu, t\sigma^2)$  είναι ανεξάρτητη από τις  $X_u, 0 \leq u < s$

Στην περίπτωση όπου η  $X_t, t \geq 0$  είναι Κίνηση Brown με τάση 0 και μεταβλητότητα 1, δηλαδή  $X_t \sim BM(0,1)$ , τότε καλείται *Τυπική Κίνηση Brown* ή *Κίνηση Wiener* και συνήθως συμβολίζεται ως  $W_t, t \geq 0$ .

Παρακάτω παρατίθεται ένα γράφημα με μία πραγματοποίηση της  $X_t, t \in [0,1]$  με παραμέτρους  $(\mu, \sigma) = (0,0.5)$  και ένα γράφημα με 10 τυχαίες πραγματοποιήσεις της ίδιας τ.μ (βλ. Παράρτημα Β.1).



**Εικόνα 2.3.1:** Τυχαίες πραγματοποιήσεις της  $BM(0,0.5)$

## 2.4 Η Γεωμετρική Κίνηση Brown

Αν και η Κίνηση Brown διαθέτει τα συνθετικά στοιχεία μίας στοχαστικής ανέλιξης ικανής να περιγράψει την κίνηση της τιμής μίας μετοχής υστερεί σε δύο σημεία. Πρώτον, μπορεί να λάβει αρνητικές τιμές, κάτι το οποίο δεν είναι δυνατό να συμβεί στην πραγματικότητα και δεύτερον η μεταβολή μίας τιμής είναι ανεξάρτητη της ίδιας της τιμής, πράγμα το οποίο οδηγεί σε αθροιστική μεταβολή της τιμής και όχι ποσοστιαίας, όπως θα περίμενε κανείς. Η ανάγκη καταπολέμησης των δύο αυτών προβλημάτων οδήγησε στον ορισμό ενός πολλαπλασιαστικού υποδείγματος, το οποίο παράλληλα να διατηρεί τα συνθετικά στοιχεία της Κίνησης Brown. Έστω η τυχαία μεταβλητή:



$$S_{ih} = \begin{cases} S_{(i-1)h} e^{\sigma\sqrt{h}}, & \text{με πιθ. } p \\ S_{(i-1)h} e^{-\sigma\sqrt{h}}, & \text{με πιθ. } 1-p \end{cases}, p = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\mu}{\sigma} \sqrt{h} \right), i = 1, 2, \dots, n \quad (2.4.1)$$

Η  $S_t, t \geq 0$  προκύπτει με φυσιολογικό τρόπο από την Κίνηση Brown μέσω του μετασχηματισμού  $X_t = \ln(S_t)$ . Επομένως, βάσει των προηγούμενων, έπεται ότι η τ.μ.  $X_{t+y} - X_y = \ln(S_{t+y}) - \ln(S_y) \sim N(t\mu, t\sigma^2)$  και είναι ανεξάρτητη από το παρελθόν για κάθε  $0 \leq u < y$ . Μέσω του τελευταίου αποτελέσματος δίνεται ο ορισμός της Γεωμετρικής Κίνησης Brown.

**Ορισμός 2.4.1:** Μία στοχαστική ανέλιξη  $S_t, t \geq 0$  καλείται *Γεωμετρική Κίνηση Brown* με τάση  $\mu \in \mathbb{R}$  και μεταβλητότητα  $\sigma > 0$  και συμβολίζεται με  $GBM(\mu, \sigma^2)$ , αν ισχύουν για κάθε  $y \geq 0, t > 0$  τα παρακάτω:

- (i) Η τυχαία μεταβλητή  $\ln\left(\frac{S_{t+y}}{S_t}\right) \sim N(t\mu, t\sigma^2)$
- (ii) Η τυχαία μεταβλητή  $\frac{S_{t+y}}{S_t}$  είναι ανεξάρτητη από τις  $S_u, 0 \leq u < y$

Συνήθως θέτουμε  $S_0 = 1$ .

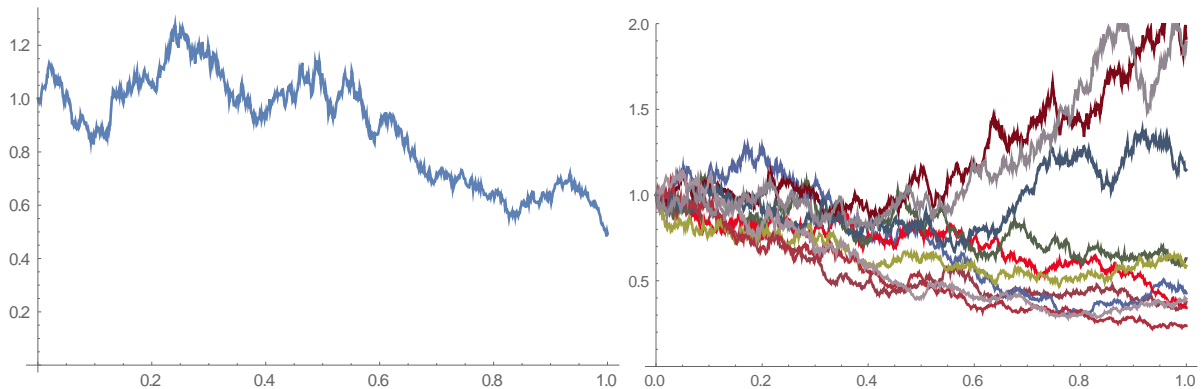
Η Γεωμετρική Κίνηση Brown αποτελεί μια στοχαστική διαδικασία που χρησιμοποιείται συχνά στην πράξη για την περιγραφή της κίνησης της τιμής μίας μετοχής σε πλήρεις αγορές. Κύρια στοιχεία που τη διαφοροποιούν από άλλες στοχαστικές διαδικασίες για το δοθέν πρόβλημα αποτελούν η απλότητα του ορισμού και της μελέτης της, καθώς και τα συνθετικά της στοιχεία, τα οποία από μαθηματικής σκοπιάς μας παρέχουν ευκόλως κατανητά και διαχειρίσιμα αποτελέσματα. Σχετικά με τη μέση τιμή και τη διασπορά της λαμβάνουμε τα επόμενα αποτελέσματα.

Αν  $Z \sim N(0,1)$ , τότε οι ροπές  $r$  τάξης της τ.μ.  $S_t$  θα είναι:

$$E(S_t^r) = E\left(\left(e^{\ln(S_t)}\right)^r\right) = E\left(\left(e^{\mu t + \sigma\sqrt{t}Z}\right)^r\right) = e^{rt\mu + \frac{1}{2}r^2t\sigma^2} \quad (2.4.2)$$

και επομένως  $E(S_t) = e^{t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}$  και  $Var(S_t) = e^{2t(\mu + \frac{1}{2}\sigma^2)}(e^{t\sigma^2} - 1)$ .

Παρακάτω παρατίθεται ένα γράφημα με μία πραγματοποίηση της  $S_t, t \in [0,1]$  με παραμέτρους  $(\mu, \sigma) = (-0.5, 0.5)$  και ένα γράφημα με 10 τυχαίες πραγματοποιήσεις της ίδιας τ.μ (βλ. Παράρτημα Β.2).



**Εικόνα 2.4.1:** Τυχαίες πραγματοποιήσεις της  $GBM(-0.5, 0.5)$

## 2.5 Ολοκλήρωμα Itô – Ο τύπος του Itô

Σε αυτό το σημείο θα επιχειρήσουμε να κατασκευάσουμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο αντιστάθμισης κινδύνου σε συνεχή χρόνο. Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με εκείνη της περίπτωσης του διωνυμικού μοντέλου, θεωρούμε ξανά ένα δυναμικό χαρτοφυλάκιο το οποίο τη χρονική στιγμή  $t_i$  έχει σύνθεση  $x_i = (\psi_i, \Delta_i)$  με αξία τίτλων  $S_i = (e^{rt_i}, S_i)$  (όπου  $x_i$  και  $S_i$   $\mathfrak{F}_t$ -μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές) και ικανοποιεί τη σχέση:

$$V_i - V_{i-1} = x_i S'_i - x_{i-1} S'_i = x_{i-1} (S'_i - S'_{i-1}), i = 1, 2, \dots, n$$

Αποδεικνύεται ότι σε συνεχή χρόνο για  $t = ih, h \rightarrow 0, t \in [0, T]$  το αντίστοιχο χαρτοφυλάκιο λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$V_t - V_0 = \int_0^t \psi_x de^{rx} + \int_0^t \Delta_x dS_x = r \int_0^t \psi_x e^{rx} dx + \int_0^t \Delta_x dS_x \quad (2.5.1)$$

Στην παραπάνω σχέση, η αξία του χαρτοφυλακίου διασπάται σε δύο ολοκληρώματα, με το πρώτο να αφορά την αξία των ομολόγων στο χαρτοφυλάκιο και το δεύτερο των μετοχών, αντίστοιχα. Αποδεικνύεται ότι το δεύτερο ολοκλήρωμα δεν μπορεί να υπολογιστεί ως ολοκλήρωμα Riemann-Stieljes διότι η στοχαστική ανέλιξη  $S_t$  είναι σχεδόν παντού μη παραγωγίσιμη.

Για το σκοπό αυτό εισάγουμε την έννοια του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô, το οποίο έχει ως σκοπό να ξεπεράσει το τελευταίο πρόβλημα. Προτού δώσουμε τον ακριβή ορισμό του ολοκληρώματος επί μίας  $\mathfrak{F}_t - BM(0,1)$ , θα ορίσουμε το ολοκλήρωμα επί «απλών» συναρτήσεων.

**Ορισμός 2.5.1:** Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$  εφοδιασμένος με μία διήθηση  $\mathfrak{F}_t, t \geq 0$  και έστω μία διαμέριση  $\Pi = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$  του  $[0, T]$ . Μία στοχαστική ανέλιξη  $\delta_t \in [0, T]$  καλείται *απλή*, αν είναι  $\mathfrak{F}_t$ -προσαρμοσμένη, τετραγωνικά ολοκληρώσιμη  $(E(\int_0^t \delta_x^2 dx) < \infty$  για κάθε  $t \in [0, T])$  και είναι σταθερή σε κάθε χρονικό διάστημα  $[t_{i-1}, t_i]$ .

Ο ορισμός του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô μίας απλής συνάρτησης είναι ο ακόλουθος.

**Ορισμός 2.5.2:** Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$  εφοδιασμένος με μία διήθηση  $\mathfrak{F}_t, t \geq 0$ . Ορίζουμε ως *στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô* μίας απλής  $\delta_t, t \geq 0$  ως προς την  $W_t, t \geq 0$ , στο διάστημα  $[0, T]$  την τυχαία μεταβλητή:

$$I_t = \int_0^t \delta_x dW_x = \sum_{i=0}^{k-1} \delta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \delta_{t_k} (W_t - W_{t_k}) \quad (2.5.2)$$

όπου  $k$  τέτοιο ώστε  $t_k \leq t \leq t_{k+1}$ .

Πλέον, είμαστε σε θέση να δώσουμε τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô.

**Ορισμός 2.5.3:** Έστω χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$  εφοδιασμένος με μία διήθηση  $\mathfrak{F}_t, t \geq 0$ . Ορίζουμε ως *στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô* της  $\delta_t, t \geq 0$  ως προς την  $W_t, t \geq 0$ , στο διάστημα  $[0, T], t \leq T$ , την τυχαία μεταβλητή

$$\int_0^t \delta_x dW_x = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^t \delta_x^{(j)} dW_x \quad (2.5.3)$$

όπου  $\delta_t^{(j)}, t \in [0, T], j = 1, 2, \dots$  είναι μια ακολουθία απλών ανελιξεων που συγκλίνουν στη  $\delta_t, t \in [0, T]$ .

Από τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô προκύπτουν ορισμένες ενδιαφέρουσες ιδιότητες, οι οποίες παρουσιάζονται παρακάτω:

**Πρόταση 2.5.1:** Το ολοκλήρωμα Itô έχει τις εξής ιδιότητες:

- (i) Η τυχαία μεταβλητή  $I_t$  είναι  $\mathfrak{F}_t$  - μετρήσιμη.
- (ii) Το ολοκλήρωμα ικανοποιεί τη γραμμική ιδιότητα. Δηλαδή ισχύει ότι:

$$\int_0^t (m\delta_x + n\gamma_x) dW_x = m \int_0^t \delta_x dW_x + n \int_0^t \gamma_x dW_x$$

όπου  $m, n \in \mathbb{R}$  και  $\delta_x, \gamma_x, t \geq 0$  απλές συναρτήσεις.

- (iii) Ισχύει ότι:

$$E(I_t^2) = E\left(\left(\int_0^t \delta_x dW_x\right)^2\right) = E\left(\int_0^t \delta_x^2 dW_x\right), t \in [0, T]$$

- (iv) Η στοχαστική ανέλιξη  $I_t, t \in [0, T]$  είναι martingale ως προς τη διήθηση  $\mathfrak{F}_t, t \in [0, T]$ .

Για την απόδειξη της πρότασης παραπέμπουμε τον αναγνώστη στις πανεπιστημιακές σημειώσεις Μπούτσικας (2005, §5.5). Κατ' αναλογία με τον κανόνα της αλυσίδας που λαμβάνει χώρα στην κλασική ανάλυση προκύπτει ο τύπος του Itô για στοχαστικές διαδικασίες. Παραθέτουμε χωρίς απόδειξη τον τύπο του Itô, ο οποίος μας παρέχει την ευχέρεια υπολογισμού του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô μέσω μίας απλής ολοκληρωτικής μορφής.

**Πρόταση 2.5.2:** Έστω συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με συνεχείς παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης και  $W_t \sim BM(0,1)$ . Για κάθε  $t \geq 0$  ισχύει ότι:

$$f(W_t) - f(W_0) = \int_0^t f'(W_x) dW_x + \frac{1}{2} \int_0^t f''(W_x) dx \quad (2.5.4)$$

Για την απόδειξη της πρότασης παραπέμπουμε τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη στο σύγγραμμα Applebaum (2004, §4.4).

Για περισσότερα επί του στοχαστικού ολοκληρώματος καθώς και του τύπου του Itô παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα Μπούτσικας (2005, §5.4 – §5.7).

## 2.6 Το υπόδειγμα Black – Scholes

Ύστερα από την εισαγωγή του ολοκληρώματος Itô έχουμε όλα τα αναγκαία εργαλεία για να προχωρήσουμε στην τιμολόγηση παραγώγων μέσω ενός εκ των βασικότερων και συχνά χρησιμοποιούμενων στην πράξη υποδειγμάτων για πλήρεις αγορές, του Black – Scholes. Ακολουθώντας την διαδικασία της προηγούμενης παραγράφου, καταλήγουμε σε ένα δυναμικό χαρτοφυλάκιο το οποίο τη χρονική στιγμή  $t < T$  ερμηνεύεται από την επόμενη διαφορική εξίσωση:

$$dV_t = \psi_t d_t + \Delta_t dS_t \quad (2.6.1)$$

Αποδεικνύεται, σε πλήρη αναλογία με το διωνυμικό μοντέλο σε διακριτό χρόνο, ότι υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας  $\mathcal{Q}$  που καθιστά την προεξοφλημένη αξία του αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου  $V_t^*$  martingale. Επίσης, αποδεικνύεται ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης το οποίο να έχει τελική τιμή  $V_T = U_T$ . Τα προαναφερθέντα αποτελέσματα συνοψίζονται στην επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 2.6.1:** Στο υπόδειγμα Black – Scholes ισχύουν τα παρακάτω:

- (i) Αν ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν Ευρωπαϊκού Τύπου με χρόνο λήξης  $T$  έχει τελική αξία  $U_T$ , τότε σε χρόνο  $t$  θα έχει (NA) αξία ίση με:

$$U_t = e^{-r(T-t)} E_{\mathcal{Q}}(U_T | \mathcal{F}_t), t \in [0, T] \quad (2.6.2)$$

όπου το μέτρο πιθανότητας  $\mathcal{Q}$  είναι τέτοιο ώστε  $d\mathcal{Q} = Z_T dP$  με  $Z_T = e^{-\theta W_T - \frac{1}{2}\theta^2 T}$ , όπου  $\theta = \frac{\mu - r + \frac{1}{2}\sigma^2}{\sigma}$ .

- (ii) Υπό το μέτρο πιθανότητας  $\mathcal{Q}$ , η ανάλυση της τιμής της μετοχής  $S_t, t \in [0, T]$  είναι μία Γεωμετρική Κίνηση Brown με παραμέτρους  $r - \frac{\sigma^2}{2}$  και  $\sigma^2$

Για την απόδειξη της προηγούμενης πρότασης παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα Black & Scholes (1973). Ύστερα από την προηγηθείσα ανάλυση μπορούμε πλέον να βρούμε έναν κλειστό τύπο για δικαιώματα προαίρεσης σε συνεχή χρόνο.

Πρόταση 2.6.2: Στο υπόδειγμα Black – Scholes η (NA) αξία ενός δικαιώματος αγοράς στον χρόνο  $t$  εκφράζεται από τη σχέση:

$$C_{BS}(t, S_t) = S_t \Phi(\omega) - e^{-(T-t)} K \Phi(\omega - \sigma\sqrt{T-t}) \quad (2.6.3)$$

όπου  $\omega = \frac{(r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t) - \ln(\frac{K}{S_t})}{\sigma\sqrt{T-t}}$ ,  $\Phi$  η συνάρτηση κατανομής της  $N(0,1)$ ,  $\sigma$  η μεταβλητότητα της τιμής της υποκείμενης μετοχής και  $r$  το επιτόκιο χωρίς κίνδυνο των ομολόγων της αγοράς.

Για την απόδειξη της πρότασης παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα Black & Scholes (1973) και στις πανεπιστημιακές σημειώσεις Μπούτσικας (2005, §6.1). Με ανάλογο τρόπο μπορούμε εύκολα να βρούμε την αντίστοιχη (NA) αξία ενός οποιουδήποτε δικαιώματος προαίρεσης Ευρωπαϊκού τύπου σε πλήρεις αγορές.

Για περισσότερα επί του υποδείγματος Black – Scholes παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα Black & Scholes (1973) και στις πανεπιστημιακές σημειώσεις Μπούτσικας (2005, §6.1 – §6.4).

## Κεφάλαιο 3

# Η περίπτωση των μη πλήρων αγορών

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μία επέκταση του προηγούμενου κεφαλαίου με σκοπό την εισαγωγή της έννοιας της μη πλήρους αγοράς καθώς και των κανόνων που τη διέπουν. Στόχος μας είναι, κατ' αναλογία με τα προηγούμενα, να αναπαραστήσουμε την κίνηση της τιμής μίας μετοχής, σε διακριτό και συνεχή χρόνο, και να θέσουμε τα θεμέλια της τιμολόγησης και της δημιουργίας χαρτοφυλακίων αντιστάθμισης κινδύνου, με τα οποία θα ασχοληθούμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Η συγγραφή του κεφαλαίου βασίστηκε στα συγγράμματα Applebaum (2004), Battig & Jarrow (1999), Burger & Kiliaras (2013), Clifford et al. (2010), Cont & Tankov (2004), Dou, Wang & Zhu (2017), Gatheral (2010), Kou (2002), Kyprianou (2008), Kyprianou (2009), Kyprianou (2013), Matsuda (2004), Merton (1976), Sato (1999), Schachermayer (1992), Staum (2008), Tankov & Voltchkova (2009), στις πανεπιστημιακές σημειώσεις Ανθρωπέλος (2015), Μπούτσικας (2004) και Pitman (2003) καθώς και στις διπλωματικές εργασίες Bjorefeldt & al. (2016) και Σφακιανάκης (2013).

### 3.1 Μη πλήρεις αγορές

Ο σημαντικότερος λόγος ανάπτυξης της θεωρίας πλήρων αγορών είναι η δημιουργία χαρτοφυλακίων αναπαράστασης με σκοπό την πλήρη αντιστάθμιση κινδύνου που αναλαμβάνει ένας επενδυτής από μία δοθείσα θέση. Γι' αυτόν το λόγο και χάρη στην απλότητα εφαρμογής του υποδείγματος Black – Scholes για την τιμολόγηση ενός αξιογράφου, τα αποτελέσματα της θεωρίας αυτής εφαρμόζονται συχνά στην πράξη στις αγορές παραγώγων. Κατά την συγκεκριμένη εφαρμογή, όμως, παρουσιάζονται προβλήματα τα οποία έγκεινται στον πυρήνα της θεωρίας. Το κυριότερο πρόβλημα είναι ότι στην πραγματικότητα δεν παρέχεται η δυνατότητα πλήρους εξασφάλισης από τον κίνδυνο. Το αποτέλεσμα αυτό επαφίεται σε γεγονότα όπως ότι τα θεωρητικά υποδείγματα των πλήρων αγορών βασίζονται στην υπόθεση ότι κατά τη διαδικασία δημιουργίας χαρτοφυλακίων αντιστάθμισης δεν λαμβάνουν χώρα μετρήσιμοι ή μη μετρήσιμοι παράγοντες, όπως για παράδειγμα τα μη διαπραγματεύσιμα αξιόγραφα, οι κινήσεις με άλματα, η στοχαστική μεταβλητότητα κ.α.

Για τους παραπάνω λόγους (καθώς και άλλους που θα παρουσιάσουμε παρακάτω) γίνεται επιτακτική η ανάγκη επέκτασης της προηγηθείσας θεωρίας με σκοπό να περιοριστούν τα παραπάνω προβλήματα. Προτού προχωρήσουμε στην εισαγωγή της έννοιας της μη πλήρους αγοράς παραθέτουμε τα δύο θεμελιώδη θεωρήματα της τιμολόγησης αξιογράφων που θα μας βοηθήσουν για τον σκοπό αυτό. Για να διατυπώσουμε τα επόμενα θεωρήματα πρέπει πρώτα να ορίσουμε την έννοια του ισοδύναμου μέτρου Martingale.

**Ορισμός 3.1.1:** Ένα μέτρο πιθανότητας  $Q$  καλείται *ισοδύναμο Martingale μέτρο* (*Equivalent Martingale Measure*) στα σενάρια της αγοράς όταν για κάθε  $A \in \mathcal{F}$ ,  $Q(A) = 0$  αν και μόνο αν  $\mathcal{P}(A) = 0$  και επίσης για κάθε  $i = 1, 2, \dots, n$  ισχύει ότι  $E_Q[S_{t_n} | \mathcal{F}_{t_i}] = S_{t_i}$ . Το σύνολο όλων αυτών των μέτρων θα συμβολίζεται με  $\mathcal{Q}_e$  και θα ονομάζεται *το σύνολο των ισοδύναμων Martingale μέτρων πιθανότητας*.

**Θεώρημα 3.1.1 (1<sup>ο</sup> θεμελιώδες θεώρημα):** Έστω μία αγορά που ορίζεται σε έναν χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  που αποτελείται από  $k$  αξιόγραφα με αξία στον χρόνο  $t$   $(S_t^1, S_t^2, \dots, S_t^k)_{t \in [0, T]}$ . Στην αγορά δεν υπάρχει Arbitrage αν και μόνο αν υπάρχει τουλάχιστον ένα μέτρο πιθανότητας  $Q \sim \mathcal{P}$  τέτοιο ώστε η προεξοφλημένη αξία κάθε αξιογράφου  $(S_t^*)_{t \in [0, T]}$  να είναι Martingale ως προς το  $Q$ .

**Θεώρημα 3.1.2 (2<sup>ο</sup> θεμελιώδες θεώρημα):** Έστω μία αγορά που αποτελείται από  $k$  αξιόγραφα  $(S_t^1, S_t^2, \dots, S_t^k)_{t \in [0, T]}$  του  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  στην οποία δεν υπάρχει Arbitrage. Η αγορά είναι πλήρης αν και μόνο αν υπάρχει μοναδικό Martingale μέτρο  $Q \sim \mathcal{P}$ .

Από τα δύο προηγούμενα θεωρήματα καταλήγουμε στα εξής αποτελέσματα:

- 1 Μέσω του πρώτου θεμελιώδους θεωρήματος, για να μην υπάρχει Arbitrage στην αγορά θα πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον ένα ισοδύναμο Martingale μέτρο.
- 2 Μέσω του δεύτερου θεμελιώδους θεωρήματος, υπό την υπόθεση (NA), για να είναι μία αγορά πλήρης θα πρέπει να υπάρχει μοναδικό ισοδύναμο Martingale μέτρο.

Για την απόδειξη των δύο θεμελιωδών θεωρημάτων της τιμολόγησης αξιογράφων παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Schachermayer (1992) και Battig & Jarrow (1999). Συνεπώς, η ύπαρξη τουλάχιστον δύο ισοδύναμων Martingale μέτρων διαφορετικών μεταξύ τους, υπό την υπόθεση της μη ύπαρξης Arbitrage στην αγορά, καθιστά την αγορά μη πλήρη. Από τα παραπάνω καταλήγουμε στο αποτέλεσμα ότι το πρόβλημα στην τιμολόγηση αξιογράφων στις μη πλήρεις αγορές ερμηνεύεται ως εξής:

Δοθέντος ενός μέτρου πιθανότητας  $\mathcal{P}$  υπάρχει ένα σύνολο ισοδύναμων μέτρων Martingale  $\mathcal{Q}_e$  τέτοιο ώστε η αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία του αξιογράφου  $E_Q[S_t^*]$  στο χρόνο  $t \in [0, T]$  να είναι (NA). Υπάρχει ένα διάστημα της μορφής

$$\left( \inf_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[S_t^*], \sup_{Q \in \mathcal{Q}_e} E_Q[S_t^*] \right)^1 \quad (3.1.1)$$

(NA) τιμών του αξιογράφου και είναι συνήθως αρκετά πλατύ για να μας παράσχει χρήσιμες τιμές αγοράς και πώλησης. Επομένως, σκοπός μας είναι να βρούμε έναν τρόπο να

<sup>1</sup> Staum (2008)

επιλέξουμε ένα από τα μέτρα τιμολόγησης  $Q \in \mathcal{Q}_e$  ώστε να αναθέσουμε την μοναδική αναμενόμενη τιμή της προεξοφλημένης απόδοσης  $E_Q[S_t^*]$  σε κάθε αξιόγραφο  $(S_t)_{t \in [0, T]}$ .

Για περισσότερα επί του ορισμού των μη πλήρων αγορών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Cont & Tankov (2004, §9.2) και Staum (2008, §1 – §2).

## 3.2 Αίτια μη πληρότητας

Όπως αναφέραμε στην αρχή του κεφαλαίου, στον πραγματικό κόσμο λαμβάνουν χώρα ορισμένα φαινόμενα τα οποία καθιστούν τις αγορές μη πλήρεις. Τα φαινόμενα αυτά αποτελούν μετρήσιμους ή μη μετρήσιμους παράγοντες οι οποίοι εμφανίζονται κυρίως ως ενδογενή αίτια των αγορών, τα οποία επηρεάζουν σε υψηλό βαθμό τη δημιουργία χαρτοφυλακίων αντιστάθμισης. Παρακάτω παρουσιάζουμε συνοπτικά τα σημαντικότερα αίτια, καθώς και τους παράγοντες οι οποίοι τα προκαλούν.

### 3.2.1 Ανεπαρκές άνοιγμα εμπορεύσιμων περιουσιακών στοιχείων

Στις αγορές παρέχεται ένας μεγάλος όγκος διαπραγματεύσιμων χρηματοοικονομικών αγαθών για το επενδυτικό κοινό, ο οποίος διαρκώς μεγαλώνει. Τα αγαθά αυτά συντελούν στην αντιστάθμιση του κινδύνου που αναλαμβάνουν οι επενδυτές, ενώ σε αρκετές περιπτώσεις παρέχουν κερδοσκοπικές ευκαιρίες. Η ύπαρξη, όμως, αγαθών τα οποία δεν είναι διαπραγματεύσιμα ή δεν καθορίζονται πλήρως από τις τιμές της αγοράς ελαττώνει σημαντικά τα εργαλεία των επενδυτών για την επίτευξη των παραπάνω στόχων. Προϊόντα όπως παράγωγα επί των καιρικών φαινομένων ή επί του εθνικού ακαθάριστου προϊόντος δεν βρίσκουν τη θέση τους στις αγορές καθιστώντας τις μη πλήρεις από την άποψη του περιορισμού που επιφέρουν στη διενέργεια συναλλαγών.

Επίσης, δύο σημαντικά φαινόμενα που παρουσιάζονται αρκετά συχνά στην πράξη είναι οι κινήσεις με άλματα και η στοχαστική μεταβλητότητα, τα οποία καθιστούν δύσκολη τη διενέργεια της αντιστάθμισης. Οι κινήσεις με άλματα αποτελούν μη συνεχείς στοχαστικές διαδικασίες, οι οποίες για τον ίδιο λόγο δεν μπορούν να περιγραφούν ικανοποιητικά από μία Γεωμετρική Κίνηση Brown και συνεπώς η τιμολόγηση μέσω του υποδείγματος Black – Scholes (ή άλλου υποδείγματος των πλήρων αγορών) θα έδινε ανακριβή αποτελέσματα. Η στοχαστική μεταβλητότητα αποτελεί ίσως το πιο συχνό φαινόμενο καθώς αναφέρεται στη μη σταθερή διαχρονική συμπεριφορά της μεταβλητότητας ενός προϊόντος. Αρκετά υποδείγματα τιμολόγησης των πλήρων αγορών βασίζονται στην παραδοχή της σταθερότητας της μεταβλητότητας, αποτέλεσμα το οποίο οδηγεί σε εσφαλμένους υπολογισμούς και διενέργεια αντιστάθμισης Βέγκα.

### 3.2.2 Αγοραστικές Τριβές

Τα θεωρητικά υποδείγματα των πλήρων αγορών βασίζονται στην υπόθεση ότι ένα χαρτοφυλάκιο, για να πετυχαίνει πλήρη αντιστάθμιση, θα πρέπει να αλλάζει τη σύστασή

του σε κάθε απειροστό χρονικό διάστημα, διατηρώντας την ίδια συνολική αξία. Δεδομένου του διαρκούς rebalancing, στην πραγματικότητα κάτι τέτοιο θα ήταν καταστροφικό για κάποιον επενδυτή, από την άποψη ότι με κάθε επανεπένδυση θα έπρεπε να καταβάλει κάποιο αντίστοιχο κόστος συναλλαγής. Το ίδιο αποτέλεσμα εμφανίζεται και στην περίπτωση της επανασύστασης σε συγκεκριμένες διακριτές στιγμές, όμως με μικρότερη ακρίβεια εξ' αιτίας της υπόθεσης του συνεχούς του χρόνου των υποδειγμάτων.

Επίσης, στην πράξη πολλές φορές υπάρχουν περιορισμοί στα επιτόκια δανεισμού ενός αξιογράφου. Πιο συγκεκριμένα, ένας επενδυτής ενδέχεται να βρεθεί αντιμέτωπος με διαφορετικά επιτόκια δανεισμού για δύο θέσεις holder και writer με αποτέλεσμα τη μη εφαρμογή θεωρητικού υποδείγματος για τη δημιουργία χαρτοφυλακίου.

### 3.2.3 Ασάφεια και ασύμμετρη πληροφορία

Ακόμη και υπό την σωστή εφαρμογή υποδειγμάτων των πλήρων αγορών στην πράξη παρουσιάζονται ορισμένα ενδιαφέροντα φαινόμενα. Το πιο αξιοσημείωτο από αυτά αποτελεί την διαφορά μεταξύ της εκτιμώμενης τιμής ενός αξιογράφου με την αντίστοιχη χρηματιστηριακή. Η προαναφερθείσα διαφορά έγκειται στη διαφορετική εκτίμηση της μεταβλητότητας. Η πιο συνήθης μέθοδος εκτίμησής της προκύπτει μέσω των ιστορικών δεδομένων των τιμών ενός δοθέντος αξιογράφου. Στις αγορές όμως, κατά κύριο λόγο, η μεταβλητότητα που λαμβάνει χώρα στις τιμολογήσεις είναι γνωστή ως τεκμαρτή κι εκτός από τις ιστορικές τιμές του αξιογράφου περιλαμβάνει και άλλα χαρακτηριστικά, όπως τις προσδοκίες του επενδυτικού κοινού. Με αυτόν τον τρόπο γεννάται το ερώτημα πότε πρέπει ένας επενδυτής να αντισταθμίσει τον κίνδυνό του μέσω της ιστορικής και πότε μέσω της τεκμαρτής μεταβλητότητας.

Τέλος, ένας ακόμη παράγοντας που καθιστά τις αγορές μη πλήρεις είναι το φαινόμενο της ασύμμετρης πληροφορίας. Η ασύμμετρη πληροφορία είναι ένα φαινόμενο κατά το οποίο μία μερίδα του επενδυτικού κοινού έχει περισσότερη ή καλύτερη πληροφόρηση από κάποια άλλη σχετικά με τα δρώμενα της κίνησης ενός μέρους της αγοράς. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα την ανισορροπία της και εξ' αιτίας της προσφοράς και της ζήτησης επηρεάζει ως μη μετρήσιμος παράγοντας στις τιμολογήσεις αξιογράφων.

Για περισσότερα επί των αιτίων μη πληρότητας παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα Staum (2008, §3).

## 3.3 Το τριωνυμικό υπόδειγμα $n$ περιόδων

Στην παρούσα ενότητα θα εισάγουμε το τριωνυμικό υπόδειγμα  $n$  περιόδων, το οποίο αποτελεί γενίκευση του διωνυμικού υποδείγματος για την τιμολόγηση αξιογράφων σε διακριτό χρόνο στις μη πλήρεις αγορές. Κατ' αναλογία με το διωνυμικό υπόδειγμα, υπό το τριωνυμικό, η τιμή του παραγώγου σε κάθε χρονικό διάστημα κινείται ανοδικά, καθοδικά ή παραμένει σταθερή με συγκεκριμένη πιθανότητα μέχρι την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου.



Πιο συγκεκριμένα, έστω  $\Omega$  το σύνολο των καταστάσεων της αγοράς στο χρονικό διάστημα  $[0, T]$ . Χωρίζουμε το διάστημα  $[0, T]$  σε  $n$  χρονικά σημεία  $t_i = ih, i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  και συμβολίζουμε με  $S_i$  την τιμή της υποκείμενης μετοχής στα αντίστοιχα χρονικά σημεία. Σε κάθε χρονικό σημείο  $t_j$ , η τιμή της μετοχής θα είναι ίση με:

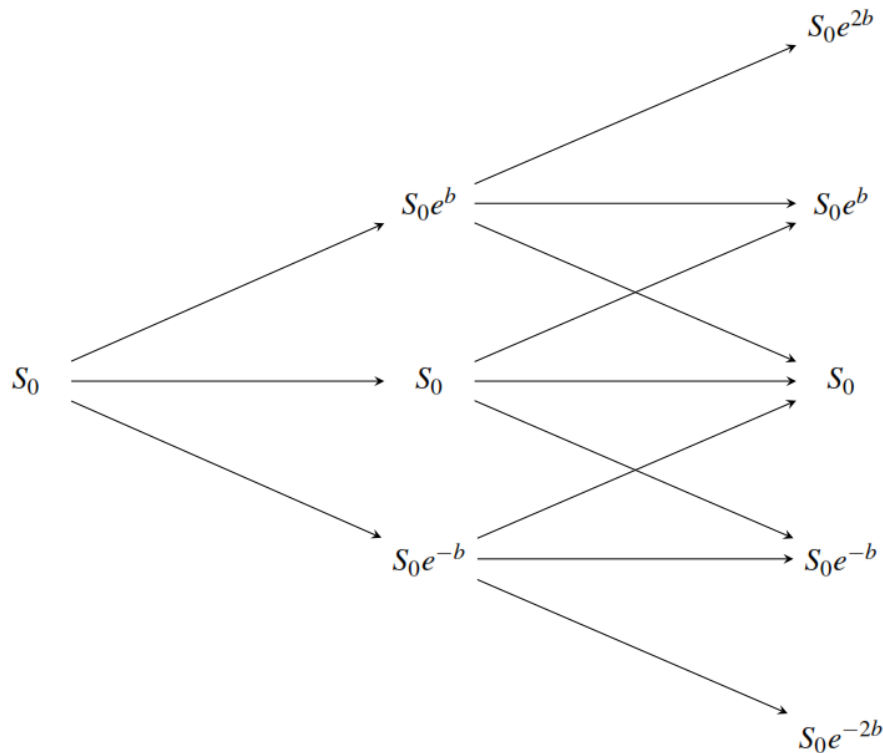
$$S_i = \begin{cases} S_{i-1}e^b, & \text{με πιθανότητα } p_b \\ S_{i-1}, & \text{με πιθανότητα } p_0, i = 0, 1, \dots, n \\ S_{i-1}e^a, & \text{με πιθανότητα } p_a \end{cases} \quad (3.3.1)$$

όπου  $b > 0, a < 0, p_b, p_a \in (0, 1)$ , και  $p_0 = 1 - p_b - p_a > 0$ .

Εκτελώντας τον μετασχηματισμό  $a = -b$ , η εξίσωση (3.3.1) λαμβάνει τη μορφή:

$$S_i = \begin{cases} S_{i-1}e^b, & \text{με πιθανότητα } p_b \\ S_{i-1}, & \text{με πιθανότητα } p_0, i = 0, 1, \dots, n \\ S_{i-1}e^{-b}, & \text{με πιθανότητα } p_a \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Παρακάτω παρατίθεται ένα γράφημα ενός τριωνυμικού δέντρου τριών περιόδων, όπως περιγράφηκε στην αρχή της ενότητας.



**Εικόνα 3.3.1:** Τριωνυμικό δέντρο δύο περιόδων

Σε αυτό το σημείο, κατ' αναλογία με την περίπτωση των πλήρων αγορών, θα επιχειρήσουμε να κατασκευάσουμε τα αντίστοιχα μέτρα ουδέτερου κινδύνου. Έστω  $(q_{+1}, q_0, q_{-1})$  μία τριάδα πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν τις εξής σχέσεις:

$$q_{+1} + q_0 + q_{-1} = 1 \quad q_{+1}e^b + q_0 + q_{-1}e^{-b} = e^r \quad (3.3.3)$$

Επιλύοντας τις εξισώσεις (3.3.3) ως προς  $q_{+1}$ ,  $q_{-1}$ , έχοντας ως ελεύθερη τη μεταβλητή  $q_0$ , βρίσκουμε ότι:

$$q_{+1} = \frac{e^r - e^{-b}}{e^b - e^{-b}} - q_0 \frac{1 - e^{-b}}{e^b - e^{-b}} \quad (3.3.4)$$

$$q_{-1} = \frac{e^b - e^r}{e^b - e^{-b}} - q_0 \frac{e^b - 1}{e^b - e^{-b}} \quad (3.3.5)$$

Για τον υπολογισμό της αξίας Ευρωπαϊκού Τύπου ενός παραγώγου με τη χρήση του τριωνυμικού υποδείγματος  $n$  περιόδων είναι απαραίτητος ο υπολογισμός της συνολικής αξίας ενός αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου στον χρόνο  $t_i < T, i = 0, 1, \dots, n$  με προκαθορισμένη σύνθεση. Για τον σκοπό αυτό παραθέτουμε το επόμενο Θεώρημα.

**Θεώρημα 3.3.1:** Έστω  $V_T$  η συνολική αξία ενός αυτοχρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου στον χρόνο  $t_n = T$ . Τότε, η αναμενόμενη συνολική του αξία στον χρόνο  $t_i < T, i = 0, 1, \dots, n$  για κάθε  $q_0 \in \mathbb{R}$ , δίνεται από τη σχέση:

$$V_{t_i} = e^{-r(T-t_i)} \sum_{(x_{t_{i+1}}, \dots, x_T) \in \{+1, 0, -1\}^{T-t_i}} q_{x_{t_{i+1}}} \dots q_{x_T} V_n(x) \quad (3.3.6)$$

Επίσης, έστω  $V_{t_{i+1}}^{\pm 1} = V_{t_{i+1}}$  θεωρώντας ότι  $x_{t_{i+1}} = \pm 1$  και  $V_{t_{i+1}}^0 = V_{t_{i+1}}$  θεωρώντας ότι  $x_{t_{i+1}} = 0$ . Τότε:

$$V_{t_i} = e^{-r} [q_{+1} V_{t_{i+1}}^{+1} + q_0 V_{t_{i+1}}^0 + q_{-1} V_{t_{i+1}}^{-1}] \quad (3.3.7)$$

Όπως παρατηρούμε από το προηγούμενο Θεώρημα, σε συνδυασμό με τον ορισμό των μέτρων ουδέτερου κινδύνου, δεν υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης (3.3.7). Αυτό προκύπτει ως αποτέλεσμα της θέσεως του  $q_0$  ως ελεύθερης μεταβλητής για τον καθορισμό των άλλων δύο πιθανοτήτων. Πιο συγκεκριμένα, υπάρχουν άπειρες λύσεις της εξίσωσης (3.3.7) με την καθεμία να προκύπτει από διαφορετική επιλογή του  $q_0$ .

Κατ' αναλογία με το διωνυμικό υπόδειγμα  $n$  περιόδων, θα προχωρήσουμε στην εύρεση της αξίας ενός παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος υπό το τριωνυμικό υπόδειγμα. Προτού, όμως παραθέσουμε το ανάλογο Θεώρημα, θα γίνει μία παρουσίαση ορισμένων Θεωρημάτων που αφορούν την ικανοποίηση των ιδιοτήτων (NA) και Martingale του υποδείγματος. Αποδεικνύεται εύκολα ότι οι εκφράσεις  $0 < q_0 < \frac{e^b - e^r}{e^b - 1}$  και  $q_{+1} > 0, q_{-1} > 0, q_{+1} + q_{-1} < 1$  είναι ισοδύναμες.

**Θεώρημα 3.3.2:** Υπό τη συνθήκη  $0 < q_0 < \frac{e^b - e^r}{e^b - 1}, r < b$ , τα αυτοχρηματοδοτούμενα χαρτοφυλάκια με συνολική αξία που δίνεται από τη σχέση (3.3.6) πληρούν την ιδιότητα (NA).

Σε αυτό το σημείο θα επιχειρήσουμε να δώσουμε στο υπόδειγμά μας μια περισσότερο πιθανοθεωρητική έκφραση, με σκοπό να ελέγξουμε την ύπαρξη της ιδιότητας Martingale και να εισάγουμε το βασικό Θεώρημα της ενότητας. Ξεκινούμε ορίζοντας τον χώρο πιθανότητας με τον οποίο θα ασχοληθούμε, καθώς και την κίνηση της τιμής ενός αξιογράφου ως τυχαία μεταβλητή.

Έστω  $\Omega = \{\omega = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} | v_i \in \{-1, 0, 1\}, i = 1, 2, \dots, n\}$ . Δοθέντων των  $p_{+1}, p_0, p_{-1} \in (0, 1)$  τέτοιων ώστε  $p_{+1} + p_0 + p_{-1} = 1$  και του  $\omega = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in \Omega$  ορίζουμε τον πεπερασμένο χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$  ως:

$$\mathcal{P}(\omega) = p_{+1}^{N_{+1}(\omega)} p_0^{N_0(\omega)} p_{-1}^{N_{-1}(\omega)}$$

όπου  $N_j(\omega)$  είναι το πλήθος των  $j, j \in \{-1, 0, 1\}$  σε κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο  $\omega$ . Η αξία ενός αξιογράφου στον χρόνο  $t_i = ih, i = 1, 2, \dots, n$ , ως τυχαία μεταβλητή στον χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$ , δίνεται υπό το τριωνυμικό υπόδειγμα  $n$  περιόδων μέσω της σχέσης:

$$S_{t_i} = S_0 X_{t_i}, \text{ όπου } X_{t_i} = \prod_{j=1}^i x_{t_j}, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\},$$

$$X_0 = 1 \text{ και για κάθε } \omega = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \in \Omega, x_{t_i}(\omega) = \begin{cases} e^b & , \text{ αν } v_i = 1 \\ 1 & , \text{ αν } v_i = 0 \\ e^{-b} & , \text{ αν } v_i = -1 \end{cases}$$

Για τη μέση τιμή της  $S_t$  εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$E[S_{t_i}] = S_0 (e^b p_{+1} + p_0 + e^{-b} p_{-1})^{ih} \quad (3.3.8)$$

Η αναμενόμενη αξία του παραγώγου τη χρονική στιγμή  $t_i$  δεδομένου ότι η αξία του στον χρόνο  $t_i - 1$  είναι γνωστή δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} E[S_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_{i-1}}] &= E[S_0 \prod_{j=1}^i x_{t_j} | \mathfrak{F}_{t_{i-1}}] = S_0 X_{t_{i-1}} E[x_{t_i}] \\ &= S_0 X_{t_{i-1}} (e^b p_{+1} + p_0 + e^{-b} p_{-1}) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Με βάση τα παραπάνω είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το επόμενο Θεώρημα.

**Θεώρημα 3.3.3:** Η προεξοφλημένη αξία ενός αξιόγραφου,  $e^{-rt_i} S_{t_i}$ , είναι Martingale αν και μόνο αν ισχύει  $e^b p_{+1} + p_0 + e^{-b} p_{-1} = e^r$ .

**Απόδειξη:** Από τον ορισμό της  $\eta(S_{t_i}), t_i \in [0, T], i = 0, 1, \dots, n$  είναι  $\mathfrak{F}_{t_i}$  - μετρήσιμη και από τα προηγούμενα είναι προφανές ότι  $E[e^{-rt_i} S_{t_i}] < \infty$ . Για την απόδειξη του Θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι:

$$E[e^{-rt_i} S_{t_i} | \mathfrak{F}_{t_{i-1}}] = e^{-r(t_{i-1})} S_{t_{i-1}} \quad (3.3.10)$$

Μέσω της σχέσης (3.3.9) είναι προφανές ότι η (3.3.10) ισχύει αν και μόνο αν είναι αληθής η ισότητα:

$$e^b p_{+1} + p_0 + e^{-b} p_{-1} = e^r \quad (3.3.11)$$

Αντίστροφα, η σχέση (3.3.11) ισχύει αν και μόνο αν η (3.3.10) είναι αληθής ■

Μέσω της τελευταίας σχέσης παρατηρούμε ότι η σχέση (3.3.8) παίρνει τη μορφή:

$$E[S_{t_i}] = S_0 e^{r i h} \quad (3.3.12)$$

Η σχέση (3.3.12) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η τριάδα  $(q_{+1}, q_0, q_{-1})$  πραγματικών αριθμών όπως ορίστηκαν στη σχέση (3.3.3) αποτελεί μία τριάδα πιθανοτήτων ουδέτερου κινδύνου. Βασιζόμενοι σε αυτό το αποτέλεσμα ορίζουμε ένα νέο χώρο πιθανότητας, τον  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{Q})$  όπου:

$$\mathcal{Q}(\omega) = q_{+1}^{N_{+1}(\omega)} q_0^{N_0(\omega)} q_{-1}^{N_{-1}(\omega)}$$

Το ερώτημα όμως που τίθεται είναι σε ποιο διάστημα της μορφής (3.1.1) διατηρείται η υπόθεση (NA) για ένα δεδομένο αξιόγραφο; Για να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα αυτό θα μας βοηθήσει η επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 3.3.1:** Με την εισαγωγή ενός αξιόγραφου με απόδοση  $(V_{t_i}), t_i \in [0, t], i = 1, 2, \dots, n$  διατηρείται η υπόθεση (NA) αν και μόνο αν

$$V_{t_{i-1}} \in \left( \inf_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_e} e^{-r_{ih}} E_{\mathcal{Q}}[V_{t_i}], \sup_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_e} e^{-r_{ih}} E_{\mathcal{Q}}[V_{t_i}] \right) \quad (3.3.13)$$

Πλέον, έχουμε όλα τα απαραίτητα εργαλεία για να προχωρήσουμε στην τιμολόγηση ενός αξιόγραφου υπό το τριωνυμικό υπόδειγμα  $n$  περιόδων.

**Θεώρημα 3.3.4:** Η (NA) αξία (στον χρόνο  $t = 0$ ) ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης  $K$  και ημερομηνία λήξης  $T$  στο τριωνυμικό υπόδειγμα  $n$  περιόδων δίνεται από τη σχέση

$$C_{TT}(0, q_0) = e^{-rT} \sum_{n_1+n_2+n_3=N} \frac{N!}{n_1! n_2! n_3!} q_{+1}^{n_1} q_{-1}^{n_2} q_0^{n_3} (S_0 e^{(n_1-n_2)b} - K)_+$$

Για περισσότερα επί του τριωνυμικού υποδείγματος  $n$  περιόδων παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο άρθρο Dou, Wang & Zhu (2017), στις πανεπιστημιακές σημειώσεις Clifford et al. (2010) και Ανθρωπέλος (2015, §3) καθώς και στη διπλωματική εργασία Bjorefeldt & al. (2016, §2 - §3.1.2).

## 3.4 Ανεπίξεις Lévy και Απείρως Διαιρετές Κατανομές

Στην παρούσα ενότητα θα εισάγουμε μία οικογένεια θεωρητικών υποδειγμάτων με σκοπό την θεμελίωση κανόνων που θα μας βοηθήσουν στην περιγραφή της κίνησης της τιμής μίας μετοχής σε συνεχή χρόνο. Ως γενίκευση της Κίνησης Brown και της Γεωμετρικής Κίνησης Brown, που εισήχθησαν στις παραγράφους 2.3 και 2.4 αντίστοιχα, η οικογένεια υποδειγμάτων αυτή αποτελεί ένα ευρύ σύνολο στοχαστικών διαδικασιών που πληρούν μία σειρά από αναγκαίες ιδιότητες. Από εδώ και στο εξής το προαναφερθέν σύνολο θα το καλούμε οικογένεια στοχαστικών ανεπίξεων Lévy και θα μελετήσουμε τα χαρακτηριστικά της και τους νόμους που τη διέπουν. Προτού προχωρήσουμε στον ορισμό της στοχαστικής διαδικασίας Lévy θα εισάγουμε τις έννοιες της στοχαστικής διαδικασίας Poisson και της σύνθετης στοχαστικής διαδικασίας Poisson που θα μας βοηθήσουν στον ορισμό των Διαχύσεων με Άλματα στην επόμενη ενότητα.

**Ορισμός 3.4.1:** Μία στοχαστική διαδικασία μη αρνητικών ακεραίων  $\{N_t\}_{t \geq 0}$ , η οποία είναι ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , καλείται *στοχαστική διαδικασία Poisson* με ένταση  $\lambda > 0$  αν πληροί τις εξής ιδιότητες:

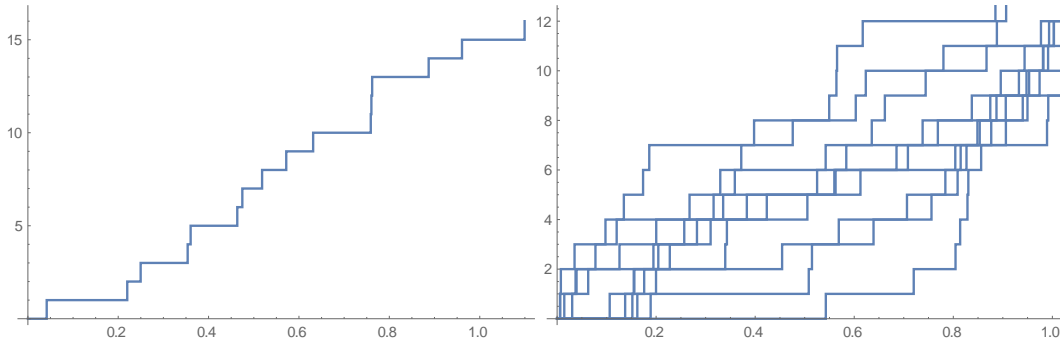
- (i) Τα μονοπάτια της  $N_t$  είναι  $\mathcal{P}$  - σχεδόν βέβαια δεξιά συνεχή με αριστερά όρια
- (ii)  $\mathcal{P}(N_0 = 0) = 1$
- (iii) Για  $0 \leq s \leq t$ , η κατανομή  $N_t - N_s$  είναι ίση κατά κατανομή με τη  $N_{t-s}$
- (iv) Για  $0 \leq s \leq t$ , η κατανομή  $N_t - N_s$  είναι ανεξάρτητη των  $\{N_u \mid u \leq s\}$
- (v) Για κάθε  $t > 0$ , η  $N_t$  είναι ίση κατά κατανομή με μία τυχαία μεταβλητή Poisson με παράμετρο  $\lambda t$

**Ορισμός 3.4.2:** Ορίζουμε ως *σύνθετη διαδικασία Poisson* έντασης  $\lambda > 0$  με συνάρτηση κατανομής μεγέθους αλμάτων  $\mathcal{F}(x)$ , κάθε στοχαστική διαδικασία της μορφής:

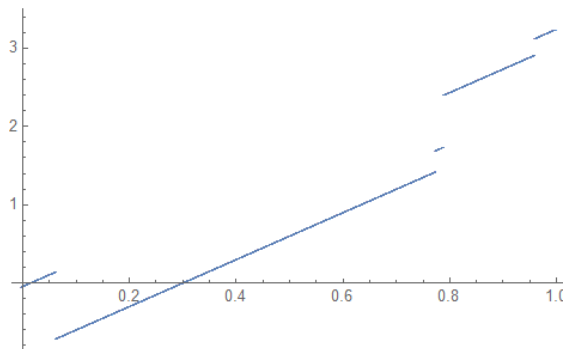
$$X_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_{N_t}, \forall t \geq 0 \quad (3.4.1)$$

όπου η  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  είναι μία διαδικασία Poisson με ένταση  $\lambda > 0$ , ανεξάρτητη από τα  $(Y_j)_{j \geq 1}$  και  $Y_j$  τα μεγέθη των αλμάτων, τα οποία είναι ανεξάρτητα και ισόνομα, με συνάρτηση κατανομής  $\mathcal{F}(x)$ .

Παρακάτω παρατίθεται ένα γράφημα με μία πραγματοποίηση σ.δ. Poisson  $N_t(10)$ ,  $t \in [0,1]$  με ένταση  $\lambda = 10$ , ένα γράφημα με 10 τυχαίες πραγματοποιήσεις της ίδιας τ.μ. και ένα γράφημα με μία πραγματοποίηση της σύνθετης σ.δ. Poisson  $X_t(10)$ ,  $t \in [0,1]$  με ένταση  $\lambda = 10$  με κατανομή μεγέθους αλμάτων  $\mathcal{F} \sim N(0,1)$  (βλ. Παράρτημα Β.3).



**Εικόνα 3.4.1:** Τυχαίες πραγματοποιήσεις της σ.δ. Poisson  $N_t(10)$



**Εικόνα 3.4.2:** Μία τυχαία πραγματοποίηση της σύνθετης σ.δ. Poisson  $X_t(10)$  με κατανομή μεγέθους αλμάτων  $\mathcal{F} \sim N(0,1)$

Βάσει της ιδιότητας (v) συμπεραίνουμε ότι η στοχαστική διαδικασία Poisson αποτελεί απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία. Δηλαδή, σε ένα δοθέν χρονικό διάστημα  $[t_1, t_2]$ , όπου  $t_2 > t_1 \geq 0$ , η  $N_t$  καταμετρά το πλήθος εμφανίσεων ή απωλειών ενός δεδομένου χαρακτηριστικού. Ως γενίκευση του προηγούμενου ορισμού προκύπτει άμεσα ο ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας Lévy.

**Ορισμός 3.4.3:** Μία στοχαστική διαδικασία  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , η οποία είναι ορισμένη σε έναν χώρο πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$ , καλείται *στοχαστική διαδικασία Lévy* αν πληροί τις εξής ιδιότητες:

- (i) Τα μονοπάτια της  $X_t$  είναι  $\mathcal{P}$  - σχεδόν βέβαια δεξιά συνεχή με αριστερά όρια
- (ii)  $\mathcal{P}(X_0 = 0) = 1$
- (iii) Για  $0 \leq s \leq t$ , η κατανομή  $X_t - X_s$  είναι ίση κατά κατανομή με τη  $X_{t-s}$
- (iv) Για  $0 \leq s \leq t$ , η κατανομή  $X_t - X_s$  είναι ανεξάρτητη των  $\{X_u | u \leq s\}$

Αποδεικνύεται ότι η Κίνηση Brown, η στοχαστική διαδικασία Poisson, οικογένειες άμεσα συνδεδεμένες με αυτήν, όπως η οικογένεια των σύνθετων διαδικασιών Poisson και η οικογένεια των αντισταθμισμένων διαδικασιών Poisson, καθώς και άλλες στοχαστικές διαδικασίες, αποτελούν μέλη της οικογένειας στοχαστικών ανελίξεων Lévy. Για πληροφορίες σχετικά με την οικογένεια στοχαστικών ανελίξεων Lévy παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Cont & Tankov (2004, §3.2, §3.4, §3.7, §5), Kyprianou (2009, §2), Kyprianou (2013, §1.2) και στη διπλωματική εργασία Σφακιανάκης (2013, §2 - §3).

Στο σημείο αυτό, θα μελετήσουμε τη θεμελιώδη σύνδεση των στοχαστικών ανελίξεων Lévy και της Θεωρίας των απείρως Διαιρετών Κατανομών. Πιο συγκεκριμένα, θα εισάγουμε την έννοια των απείρως διαιρετών κατανομών και θα δείξουμε την 1 - 1 αντιστοιχία μεταξύ του συνόλου τους και του συνόλου των στοχαστικών ανελίξεων Lévy.

**Ορισμός 3.4.4:** Λέμε ότι μία πραγματική τυχαία μεταβλητή  $Y$  έχει μία απείρως διαιρετή κατανομή εάν για κάθε  $n = 1, 2, \dots$  υπάρχει μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  τέτοια ώστε η  $Y$  να είναι ίση κατά κατανομή με το άθροισμα τυχαίων μεταβλητών  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n$ .

Μέσω του Ορισμού 3.4.4 μπορούμε πλέον να διατυπώσουμε αυστηρά τη σύνδεση που αναφέραμε παραπάνω.

**Θεώρημα 3.4.1** Έστω  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  μία ανέλιξη Lévy με κατανομή στον χώρο  $\mathbb{R}$ . Τότε, για κάθε  $t \geq 0$ , η κατανομή της  $X_t$ , είναι απείρως διαιρετή και, θέτοντας  $\mathcal{F}_{X_1} = \varphi$ , λαμβάνουμε ότι  $\mathcal{F}_{X_t} = \varphi^{*t}$ , όπου  $\varphi^{*t}$  είναι η συνέλιξη της κατανομής  $\varphi$  με τον εαυτό της  $t$  φορές. Αντίστροφα, αν η  $\varphi$  είναι μία απείρως διαιρετή κατανομή στον  $\mathbb{R}$ , τότε υπάρχει μία ανέλιξη Lévy  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , τέτοια ώστε  $\mathcal{F}_{X_1} = \varphi$ . Τέλος, αν  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  και  $\{X'_t\}_{t \geq 0}$  είναι δύο ανελίξεις Lévy με κατανομές στον  $\mathbb{R}$ , τέτοιες ώστε  $\mathcal{F}_{X_1} = \mathcal{F}_{X'_1}$ , τότε οι  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  και  $\{X'_t\}_{t \geq 0}$  ταυτίζονται κατά κατανομή.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα Sato (1999, §7). Παρακάτω ακολουθεί ένα από τα βασικότερα Θεωρήματα των απείρως διαιρετών κατανομών. Πρόκειται για το Θεώρημα αναπαράστασης Lévy - Khintchine ή αλλιώς ο τύπος των Lévy - Khintchine, το οποίο ορίζει την αναπαράσταση των χαρακτηριστικών συναρτήσεων όλων των απείρως διαιρετών κατανομών. Για τη διατύπωση του, είναι απαραίτητη η εισαγωγή της έννοιας της παράγουσας (ή χαρακτηριστικής) τριάδας και κυρίως του μέτρου Lévy το οποίο θα μας απασχολήσει στη συνέχεια της ενότητας.

**Ορισμός 3.4.5:** Μία τριάδα  $(\mu, \sigma, \nu)$ , όπου:

- (i)  $\mu$  ένας πραγματικός αριθμός,  $\mu \in \mathbb{R}$
- (ii)  $\sigma$  ένας θετικός αριθμός,  $\sigma > 0$
- (iii)  $\nu$  ένα μέτρο Borel ορισμένο στο  $\mathbb{R} - \{0\} = \{x \in \mathbb{R}, x \neq 0\}$ , με  $\nu(0) = 0$ , το οποίο ικανοποιεί τη σχέση:<sup>2</sup>

$$\int_{\mathbb{R}-\{0\}} (|y|^2 \wedge 1) \nu(dy) < \infty^3 \quad (3.4.2)$$

καλείται *παράγουσα τριάδα* της  $\varphi_X$ . Τα  $\nu$  και  $\sigma$  καλούνται, αντίστοιχα, *μέτρο Lévy* και *Gaussian τυπική απόκλιση*.

**Θεώρημα 3.4.2:** Έστω  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  μία ανέλιξη Lévy με κατανομή στον χώρο  $\mathbb{R}$ . Τότε υπάρχει μία παράγουσα τριάδα  $(\mu, \sigma, \nu)$ , που την καθορίζει μονοσήμαντα, έτσι ώστε για κάθε  $u \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \in (0, 1]$  και  $t \geq 0$ , να ισχύει ότι  $\varphi_X(u) = E[e^{iuX_t}] = e^{t\psi_X(u)}$ , όπου:

$$\psi_X(u) = -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + i\mu u + \int_{\mathbb{R}} (e^{iuy} - 1 - iuy1_{(|y| \leq \varepsilon)}) \nu(dy) \quad (3.4.3)$$

Αντίστροφα, αν  $\sigma$  ένας θετικός αριθμός,  $\sigma > 0$ ,  $\mu$  μία σταθερά του  $\mathbb{R}$  και  $\nu$  ένα μέτρο Lévy του  $\mathbb{R}$ , με  $\nu(0) = 0$ , τότε υπάρχει μία απείρως διαιρετή κατανομή  $\varphi_X$  της οποίας η χαρακτηριστική συνάρτηση δίνεται από την **(3.4.3)**.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος καθώς και για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το Θεώρημα αναπαράστασης Lévy – Khintchine και τις ιδιότητες των απείρως διαιρετών κατανομών, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Applebaum (2004, §1.2), Cont & Tankov (2004, §3.4), Kyprianou (2008, §2), Kyprianou (2009, §1) και Sato (1999, §7 - §8).

Στη συνέχεια της ενότητας θα παραθέσουμε ένα βασικό Θεώρημα των ανελιξεων Lévy, μέσω του οποίου πραγματοποιείται διάσπαση μίας δοθείσας ανέλιξης στα συστατικά της στοιχεία. Η διάσπαση αυτή μας παρέχει μία πολύ καλή εικόνα σχετικά με την εξέλιξη της κίνησης της, ενώ παράλληλα αποτελεί τον δομικό λίθο των Διαχύσεων με Άλματα που θα αναλύσουμε εκτενώς στην επόμενη ενότητα. Το Θεώρημα αυτό, το θεμελίωσε ο Γάλλος μαθηματικός Paul Lévy εκτελώντας μία άμεση ανάλυση των μονοπατιών των ανελιξεων Lévy και το συμπλήρωσε αργότερα ο Ιάπωνας μαθηματικός Kiyosi Itô, και για το λόγο αυτό είναι γνωστό με το όνομα «διάσπαση Lévy – Itô». Προτού προβούμε στη διατύπωση του Θεωρήματος θα δώσουμε τον ορισμό της τετραγωνικά ολοκληρώσιμης ανέλιξης Martingale η οποία θα μας χρειαστεί για τον ίδιο σκοπό.

**Ορισμός 3.4.6:** Έστω ένας χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$ . Μία στοχαστική διαδικασία  $\{M_t\}_{t \geq 0}$  του  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$  καλείται *τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ανέλιξη Martingale* αν είναι Martingale (βλ. Ορισμό Παράρτημα A.7.4) και για κάθε  $t \geq 0$ , ισχύει ότι  $E[M_t^2] < \infty$ .<sup>4</sup>

<sup>2</sup> Επειδή  $|y|^2 \wedge \varepsilon \leq |y|^2 \wedge 1$ , όποτε  $0 < \varepsilon < 1$ , από την **(3.4.2)** έπεται  $\nu((-\varepsilon, \varepsilon)^c) < \infty$  για κάθε  $\varepsilon > 0$ .

<sup>3</sup> Το  $\nu(\mathcal{A})$  εκφράζει το αναμενόμενο πλήθος, ανά μονάδα χρόνου, των αλμάτων, των οποίων το μέγεθος ανήκει στο  $\mathcal{A}$ , όπου  $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$  (βλ. Ορισμό Παράρτημα A.1.3).

<sup>4</sup> Baudoin (2012)



**Θεώρημα 3.4.3:** Έστω  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  μία ανέλιξη Lévy με παράγουσα τριάδα  $(\mu, \sigma, \nu)$ . Τότε υπάρχει ένας χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ , στον οποίο υπάρχουν τέσσερεις ανεξάρτητες ανελιξεις Lévy  $\{X_t^{(i)}, t \in [0, T]\}$ ,  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ , τέτοιες ώστε:

- (i)  $H\{X_t^{(1)}, t \in [0, T]\}$  είναι μία συνεχής τάση,  $X_t^{(1)} = \mu t$
- (ii)  $H\{X_t^{(2)}, t \in [0, T]\}$  είναι μία κίνηση Brown  $X_t^{(2)} = \sigma W_t$
- (iii)  $H\{X_t^{(3)}, t \in [0, T]\}$  είναι μία σύνθετη ανέλιξη Poisson  $X_t^{(3)} = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$
- (iv)  $H\{X_t^{(4)}, t \in [0, T]\}$  είναι μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ανέλιξη Martingale που κινείται αποκλειστικά με άλματα<sup>5</sup>

Θεωρώντας την στοχαστική ανέλιξη  $X_t = \sum_{j=1}^4 X_t^{(j)}$  και βάσει του Θεωρήματος 3.4.2, υπάρχει ένας χώρος πιθανότητας, στον οποίο ορίζεται μία ανέλιξη Lévy  $\{X_t\}_{t \geq 0}$ , με χαρακτηριστικό εκθετικό:

$$\psi_{X_t}(u) = -\frac{1}{2}\sigma^2 u^2 + i\mu u + \int_{\mathbb{R}} (e^{iuy} - 1 - iuy1_{(|y| \leq \varepsilon)}) \nu(dy), \forall u \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0, 1]$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα Cont & Tankov (2004, §3.4). Το αποτέλεσμα της διάσπασης Lévy – Itô είναι ιδιαίτερα σημαντικό. Παρατηρώντας πιο προσεκτικά τη διατύπωση του Θεωρήματος, όπως αναφέρουν οι Cont & Tankov (2004, §3.4), συμπεραίνουμε ότι η συγκεκριμένη αναπαράσταση συνοψίζεται σε δύο ανεξάρτητους όρους. Ο πρώτος όρος ερμηνεύεται από το άθροισμα  $X_t^{(1)} + X_t^{(2)}$ , το οποίο αποτελεί μία Κίνηση Brown με τάση  $\mu$  και μεταβλητότητα  $\sigma$ , και περιγράφει το συνεχές μέρος της στοχαστικής διαδικασίας. Ο δεύτερος όρος ερμηνεύεται από το άθροισμα  $X_t^{(3)} + X_t^{(4)}$  και περιγράφει το μη συνεχές μέρος της, ενώ ενσωματώνει τα άλματα της  $X_t$  και καθορίζεται από το μέτρο Lévy  $\nu$ . Η συνθήκη  $\int_{|y| \geq 1} \nu(dy) < \infty$  της σχέσης (3.4.2), πρακτικά σημαίνει ότι η  $X_t$  έχει πεπερασμένο αριθμό αλμάτων με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη της μονάδας. Επομένως το άθροισμα

$$X_t^l = \sum_{0 \leq s \leq t}^{| \Delta X_s | \geq 1} \Delta X_s \quad (3.4.4)$$

περιέχει ένα, σχεδόν βέβαια, πεπερασμένο πλήθος όρων και περιγράφει μία σύνθετη διαδικασία Poisson.

Για περισσότερα επί των Ανελιξεων Lévy και των Απείρωσ Διαιρετών Κατανομών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Applebaum (2004), Cont & Tankov (2004), Kyprianou (2008), Kyprianou (2009), Kyprianou (2013) και Sato (1999), στις πανεπιστημιακές σημειώσεις Pitman (2003) καθώς και στη διπλωματική εργασία Σφακιανάκης (2013).

---

<sup>5</sup>  $H\{X_t^{(4)}, t \in [0, T]\}$  διαθέτει σχεδόν βέβαια, αριθμήσιμο πλήθος αλμάτων, μεγέθους μικρότερου του  $\varepsilon \in (0, 1]$ , σε κάθε πεπερασμένο χρονικό διάστημα.



### 3.5 Διαχύσεις με Άλματα

Μέσω της διάσπασης Lévy – Itô, είδαμε ότι μία ανέλιξη Lévy με παράγουσα τριάδα  $(\mu, \sigma, \nu)$  μπορεί να διασπαστεί σε 4 επιμέρους όρους και να αναπαρασταθεί ως άθροισμα αυτών. Στην παρούσα εργασία, θα περιοριστούμε σε υποδείγματα των οποίων τα άλματα είναι πεπερασμένου πλήθους και συνεπώς ο 4<sup>ος</sup> όρος της διάσπασης Lévy – Itô μηδενίζεται. Τα υποδείγματα αυτά, τα οποία αποτελούν άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προαναφερθείσας αναπαράστασης, αποτελούν ειδική περίπτωση των εκθετικών διαδικασιών Lévy των οποίων τα άλματα είναι πεπερασμένου πλήθους και καλούνται Διαχύσεις με Άλματα.

$$X_t = \mu t + \sigma W_t + \sum_{j=1}^{N_t} Y_j \quad (3.5.1)$$

Η παρούσα διάσπαση ουσιαστικά συνοψίζεται σε δύο ανεξάρτητους όρους. Ο πρώτος όρος καλύπτει το συνεχές μέρος της διαδικασίας και αποτελεί μία κίνηση Brown με τάση  $\mu$  και μεταβλητότητα  $\sigma$  (μέρος διάχυσης). Ο δεύτερος όρος, αντίστοιχα, καλύπτει το μη συνεχές μέρος της, αποτελείται από μία σύνθετη διαδικασία Poisson με ένα, σχεδόν βέβαια, πεπερασμένο πλήθος  $N_t$  ανεξάρτητων και ισόνομων αλμάτων Poisson έντασης  $\lambda > 0$  και μεγέθους αλμάτων  $Y_j$  με κατανομή  $\mathcal{F}$  (αλματικό μέρος).

Θεωρώντας, τώρα ότι στην αγορά υπάρχουν ένα αξιόγραφο χωρίς κίνδυνο (ομόλογο) και ένα αξιόγραφο με κίνδυνο (μετοχή) του οποίου η τιμή την χρονική στιγμή  $t$  ισούται με  $S_t$ , το οποίο δεν πληρώνει μέρισμα (dividend), τότε, υπό ένα υπόδειγμα διαχύσεων με άλματα, η κίνηση της τιμής του περιγράφεται από την επόμενη διαφορική εξίσωση:

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t + dJ_t \quad (3.5.2)$$

όπου  $J_t = \sum_{j=1}^{N_t} Y_j$  και  $W_t$  μία διαδικασία Wiener. Η ακριβής λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.5.2) είναι η εξής:

$$S_t = S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t + J_t} \quad (3.5.3)$$

Υπό αυτό το υπόδειγμα, η κίνηση της τιμής του αξιογράφου που ενέχει κίνδυνο (risky asset) ακολουθεί την Γεωμετρική Κίνηση Brown σε κάθε διάστημα μεταξύ δύο αλμάτων, ενώ μετά από κάθε άλμα, η τιμή της,  $S_t$ , πολλαπλασιάζεται με  $e^{Y_j}$ . Συνεπώς, στο  $j$  – οστό άλμα η  $J_t$  ισούται με  $e^{Y_j} - 1$ .

Όπως αναφέραμε και παραπάνω, τα άλματα στην τιμή του αξιογράφου είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κατανομή Poisson με ένταση  $\lambda > 0$ . Αυτό πρακτικά σημαίνει ότι σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα πλάτους  $h$ , μπορεί να λάβει χώρα το πολύ ένα άλμα και η πιθανότητα να συμβεί είναι ανάλογη του πλάτους του διαστήματος. Η μαθηματική ερμηνεία αυτού είναι η παρακάτω:

$$P(N_{t+h} = n + k | N_t = n) = \begin{cases} \lambda h + o(h) & , \text{αν } j = 1 \\ o(h) & , \text{αν } j = 2 \\ 1 - \lambda(h) + o(h) & , \text{αν } j = 0 \end{cases} \quad (3.5.4)$$

όπου  $\lambda > 0$  είναι η ένταση των αλμάτων και το  $o(h)$  δηλώνει μία ποσότητα που συγκλίνει στο 0 γρηγορότερα από το  $h$ .

Σχετικά με το χαρακτηριστικό εκθετικό της  $\{X_t := S_t/S_0\}_{t \geq 0}$ , μέσω της σχέσης (3.4.3) και του γεγονότος ότι τα άλματα είναι πεπερασμένου πλήθους με απόλυτη τιμή μεγαλύτερη της μονάδας βρίσκουμε ότι:

$$\psi_{X_t}(u) = i\mu u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \int_{\mathbb{R}} (e^{iuy} - 1)v(dy), \forall u \in \mathbb{R} \quad (3.5.5)$$

Στη συνέχεια της ενότητας θα ασχοληθούμε με τα υποδείγματα διαχύσεων με άλματα που εισήγαγαν οι Robert Merton (1976) και Steven Kou (2002). Τα υποδείγματα αυτά προκύπτουν από την διαφορική εξίσωση (3.5.2) για διαφορετικές επιλογές κατανομής μεγέθους αλμάτων της  $J_t$ . Επίσης, βασιζόμενοι σε αυτά, θα προχωρήσουμε στην διενέργεια τιμολόγησης και αντιστάθμισης κινδύνου σε μη πλήρεις αγορές στο επόμενο κεφάλαιο.

### 3.5.1 Υπόδειγμα Merton

Το πρώτο υπόδειγμα διαχύσεων με άλματα που εισήχθη στη βιβλιογραφία με σκοπό την περιγραφή της κίνησης της τιμής μίας μετοχής είναι εκείνο του Robert Merton (βλ. Merton (1976)). Ο Merton, επιχείρησε να ερμηνεύσει μέσω του υποδείγματός του, πέραν των φυσιολογικών δονήσεων που επηρεάζουν την τιμή της μετοχής και έχουν περιθωριακή επίδραση σε αυτή, τις μη φυσιολογικές δονήσεις που επιδρούν στην τιμή της σε μεγάλο βαθμό και αποτελούν πληροφορίες που εισέρχονται στην αγορά σε διακριτές χρονικές στιγμές. Βασιζόμενος σε αυτό, εισήγαγε το παρακάτω υπόδειγμα:

$$dS_t/S_t = (a - \lambda k)dt + \sigma dW_t + dJ_t \quad (3.5.6)$$

όπου  $a$  η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής,  $\sigma$  η μεταβλητότητά της,  $\lambda$  το αναμενόμενο πλήθος των αφίξεων των δονήσεων (shocks) ανά μονάδα χρόνου,  $k \equiv E[Y_t - 1] = E[Y_t] - 1$ , δηλαδή η αναμενόμενη ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή του αγαθού εάν λάβει χώρα ένα Poisson γεγονός,  $W_t$  μία διαδικασία Wiener και  $J_t$  μία ανεξάρτητη και ισόνομη σύνθετη διαδικασία Poisson με ένταση  $\lambda$ .

Η υπόθεση που γίνεται υπό το υπόδειγμα για την κατανομή του μεγέθους αλμάτων  $J_t$  είναι ότι ο λογάριθμός τους ακολουθεί την Κανονική Κατανομή. Πιο συγκεκριμένα, έστω ότι σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα  $dt$  συμβαίνει ένα άλμα. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα τη μεταβολή της τιμής της μετοχής κατά ένα ποσοστό  $y_t$ . Για τον λογάριθμο της ποσοστιαίας αυτής μεταβολής λαμβάνουμε ότι:

$$\ln\left(\frac{y_t S_t}{S_t}\right) = \ln(y_t) \equiv Y_t \sim N(m, v^2) \quad (3.5.7)$$

Επομένως, η σχετική ποσοστιαία μεταβολή της  $S_t$  ισούται με:

$$\frac{y_t S_t - S_t}{S_t} = y_t - 1 \quad (3.5.8)$$

Σχετικά με το αναμενόμενο μέγεθος ενός άλματος, ως ποσοστό επί της τιμής της μετοχής, καθώς και με τη διακύμανσή του μεγέθους αλμάτων που λαμβάνουν χώρα βρίσκουμε ότι:

$$E[y_t] = e^{m + \frac{1}{2}v^2} \quad \text{Var}[y_t] = e^{2m + v^2}(e^{v^2} - 1) \quad (3.5.9)$$

Τέλος, η αναμενόμενη ποσοστιαία μεταβολή στην τιμή του αγαθού εάν λάβει χώρα ένα Poisson γεγονός ισούται με:

$$k \equiv E[y_t - 1] = e^{m + \frac{1}{2}v^2} - 1 \quad (3.5.10)$$

Συνοψίζοντας όλα τα παραπάνω, η σχέση (3.5.6) λαμβάνει την κάτωθι μορφή:

$$dS_t/S_0 = (a - \lambda k)dt + \sigma dW_t + (Y_t - 1)N_t \quad (3.5.11)$$

Η (3.5.11) μπορεί να γραφεί πιο αναλυτικά ως εξής:

$$dS_t/S_0 = \begin{cases} (a - \lambda k)dt + \sigma dW_t & , \text{Αν δεν υπάρξει άλμα} \\ (a - \lambda k)dt + \sigma dW_t + (Y_t - 1) & , \text{Αν υπάρξει άλμα} \end{cases} \quad (3.5.12)$$

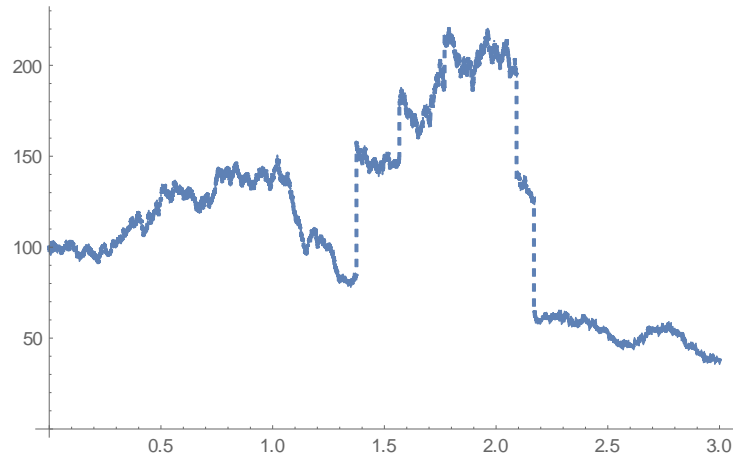
Επομένως, η ακριβής λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.5.6) είναι η εξής:

$$S_t = S_0 e^{(a - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda k)t + \sigma W_t} \prod_{j=1}^{N_t} y_j \quad (3.5.13)$$

Τέλος, η χαρακτηριστική συνάρτηση της  $X_t = S_t/S_0$  με κατανομή μεγέθους αλμάτων  $N(m, v^2)$  δίνεται από την επόμενη σχέση:

$$\psi_{X_t}(u) = iu(a - \lambda k) - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \lambda \left( e^{ium - \frac{u^2 v^2}{2}} - 1 \right), \forall u \in \mathbb{R} \quad (3.5.14)$$

Παρακάτω παρατίθεται ένα γράφημα με μια πραγματοποίηση μέσω του υποδείγματος Merton με μέρος διάχυσης που ακολουθεί μία Κίνηση Brown  $BM(0.025, 0.09)$  και με κατανομή μεγέθους αλμάτων την  $LN(0.046, 1.009)$  ( $Y_t \sim N(0, 0.09)$ ) και με πλήθος αλμάτων που ακολουθεί την κατανομή  $Poisson(1)$ . Το μέσο μέγεθος των αλμάτων ισούται με 104,6%, ενώ κατά τη διαδικασία εκτέλεσης του αλγορίθμου έλαβαν χώρα 6 άλματα τις χρονικές στιγμές 0.7866, 1.3752, 1.5672, 1.7694, 2.0916, 2.1696 (βλ. Παράρτημα Β.4).



**Εικόνα 3.5.1:** Μία τυχαία πραγματοποίηση μέσω του υποδείγματος Merton

### 3.5.2 Υπόδειγμα Κου

Ένα ακόμη θεωρητικό υπόδειγμα διαχύσεων με άλματα που έχει ως σκοπό την περιγραφή της κίνησης της τιμής μίας μετοχής είναι εκείνο που προτάθηκε από τον Steven Kou (βλ. Kou (2002)). Ο Kou παρατήρησε ότι σε αρκετές εμπειρικές έρευνες σε τιμολογήσεις αξιογράφων λάμβαναν χώρα δύο συγκεκριμένα φαινόμενα, το φαινόμενο της λεπτοκύρτωσης και της κυρτής εκτίμησης της μεταβλητότητας (volatility smile). Λεπτοκύρτωση είναι το φαινόμενο κατά το οποίο η κατανομή της απόδοσης ενός αξιογράφου παρουσιάζει υψηλότερη κορυφή και ασύμμετρες βαρύτερες ουρές σε σύγκριση με την Κανονική κατανομή. Η κυρτή εκτίμηση της μεταβλητότητας αποτελεί ένα μοτίβο της τεκμαρτής μεταβλητότητας που παρατηρείται κατά την αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης. Πιο συγκεκριμένα, προκύπτει ως γράφημα της τιμής εξάσκησης και της τεκμαρτής μεταβλητότητας μίας ομάδας δικαιωμάτων προαίρεσης με κοινή ημερομηνία εξάσκησης και έχει τη μορφή μιας κυρτής συνάρτησης (χαμόγελου).

Έχοντας ως σκοπό να συμπεριλάβει στην τιμολόγηση αξιογράφων τα παραπάνω φαινόμενα, ο Kou πρότεινε ένα υπόδειγμα με διπλά εκθετικά κατανεμημένα μεγέθη αλμάτων (δηλαδή τα μεγέθη αλμάτων ακολουθούν μία ασύμμετρη κατανομή Laplace). Το ζητούμενο υπόδειγμα καθορίζεται από την επόμενη εξίσωση:

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t + d \left( \sum_{j=1}^{N_t} (V_j - 1) \right) \quad (3.5.15)$$

όπου  $W_t$  μία διαδικασία Wiener,  $N_t$  μία ανεξάρτητη και ισόνομη διαδικασία Poisson με ένταση  $\lambda$  και  $\{V_k\}$  μία ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων μη αρνητικών τυχαίων μεταβλητών, τέτοιες ώστε  $Y = \ln(V)$  ακολουθούν μία ασύμμετρη διπλά εκθετική κατανομή με πυκνότητα:

$$f_Y(Y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 Y} 1_{(Y \geq 0)} + (1-p)\eta_2 e^{\eta_2 Y} 1_{(Y < 0)}, \eta_1 > 1, \eta_2 > 0 \quad (3.5.16)$$

όπου  $\eta_1$  και  $\eta_2$  είναι τα αναμενόμενα θετικά και αρνητικά, αντίστοιχα, μεγέθη αλμάτων και  $p$  η σχετική πιθανότητα να λάβει χώρα ένα θετικό άλμα. Με άλλα λόγια,

$$\ln(V) = Y =_d \left\{ \begin{array}{l} \gamma_+, \text{ με πιθανότητα } p \\ -\gamma_-, \text{ με πιθανότητα } 1 - p \end{array} \right\} \quad (3.5.17)$$

όπου  $\gamma_+$  και  $\gamma_-$  είναι εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή  $1/\eta_1$  και  $1/\eta_2$  αντίστοιχα, ενώ ο συμβολισμός  $=_d$  δηλώνει την ισότητα κατά κατανομή. Όπως και στο υπόδειγμα του Merton, υπό το υπόδειγμα του Kou γίνεται η παραδοχή ότι όλες οι πηγές τυχαιότητας (δηλαδή το συνεχές μέρος, τα μεγέθη αλμάτων καθώς και το πλήθος αλμάτων) είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Επίσης, για λόγους απλότητας, η τάση  $\mu$  καθώς και η μεταβλητότητα  $\sigma$  θεωρούνται σταθερές.

Η ακριβής λύση της διαφορικής εξίσωσης (3.5.14) είναι η εξής:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} \prod_{j=1}^{N_t} V_j \quad (3.5.18)$$

Σχετικά με το αναμενόμενο μέγεθος ενός άλματος καθώς και με τη διακύμανσή του μεγέθους αλμάτων που λαμβάνουν χώρα βρίσκουμε ότι:

$$E[Y] = \frac{p}{\eta_1} - \frac{1-p}{\eta_2} \quad (3.5.19)$$

$$Var[Y] = p(1-p) \left( \frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} \right)^2 + \left( \frac{p}{\eta_1^2} + \frac{1-p}{\eta_2^2} \right) \quad (3.5.20)$$

καθώς επίσης:

$$E[V] = E[e^Y] = (1-p) \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} + p \frac{\eta_1}{\eta_1 + 1}, \eta_1 > 1, \eta_2 > 0 \quad (3.5.21)$$

Ο περιορισμός  $\eta_1 > 1$  απαιτείται για την ικανοποίηση των σχέσεων  $E[V] < \infty$  και  $E[S_t] < \infty$  και ουσιαστικά σημαίνει ότι το μέσο μέγεθος θετικών αλμάτων δεν ξεπερνάει σε τιμή το 100%.

Τέλος, το μέτρο Lévy καθώς και η χαρακτηριστική συνάρτηση της  $X_t = S_t/S_0$  με διπλά εκθετική κατανομή μεγέθους αλμάτων παρατίθενται στις επόμενες σχέσεις:

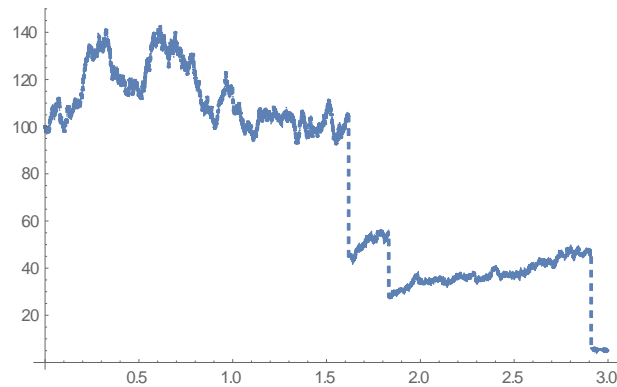
$$v(y) = \lambda [p\eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{(y \geq 0)} + (1-p)\eta_2 e^{-\eta_2 y} 1_{(y < 0)}] \quad (3.5.22)$$

$$\psi_{X_t}(u) = i\mu u - \frac{\sigma^2 u^2}{2} + \lambda \left( \frac{p}{\eta_1 - iu} - \frac{1-p}{\eta_2 + iu} \right), \forall u \in \mathbb{R} \quad (3.5.23)$$

Όπου  $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda \left[ \left( p \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} + (1-p) \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} \right) - 1 \right]$ .

Παρακάτω παρατίθεται ένα γράφημα με μια πραγματοποίηση μέσω του υποδείγματος Kou με μέρος διάχυσης που ακολουθεί μία Κίνηση Brown  $BM(0.007, 0.09)$  και με

κατανομές μεγέθους αλμάτων τις  $Exp(2)$ ,  $Exp(1)$  με σχετική πιθανότητα να λάβει χώρα ένα θετικό άλμα ίση με 0.6 και με πλήθος αλμάτων που ακολουθεί την κατανομή  $Poisson(1)$ . Κατά τη διαδικασία εκτέλεσης του αλγορίθμου έλαβαν χώρα 3 άλματα τις χρονικές στιγμές 1.6176, 1.8315, 2.9103 (βλ. Παράρτημα Β.4).



**Εικόνα 3.5.2:** Μία τυχαία πραγματοποίηση μέσω του υποδείγματος Kou

Για περισσότερα επί των Διαχύσεων με άλματα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Burger & Kliaras (2013), Gatheral (2010), Kou (2002), Matsuda (2004), Merton (1976) και Tankov & Voltchkova (2009).

## Κεφάλαιο 4

# Τιμολόγηση και Αντιστάθμιση Κινδύνου

Στο παρόν κεφάλαιο θα εισάγουμε μερικές από τις βασικές μεθόδους τιμολόγησης και αντιστάθμισης κινδύνου που λαμβάνουν χώρα στις περιπτώσεις όπου οι αγορές θεωρούνται μη πλήρεις. Πιο συγκεκριμένα, θα παρουσιάσουμε την αξία ενός παράγωγου χρηματοοικονομικού προϊόντος υπό τα υποδείγματα Διαχύσεων με Άλματα (υπόδειγμα Merton και υπόδειγμα Kou) που εισήχθησαν στο προηγούμενο κεφάλαιο κι έπειτα θα μεταβούμε στη δημιουργία χαρτοφυλακίων εξασφάλισης με σκοπό την αντιστάθμιση του κινδύνου που αναλαμβάνουμε από μία θέση επί αυτού.

Η συγγραφή του κεφαλαίου βασίστηκε στα συγγράμματα Bodie, Kane & Marcus (2014), Ceci, Cretarola & Russo (2014), Černý (2009), Cont & Tankov (2004), Cvitanić, Schachermayer & Wang (2002), Delbaen, Rheinlander & Schweizer (2002), Eberlein & Jacod (1997), Föllmer & Schweizer (1991), Gugole (2016), Hodges & Neuberger (1989), Hu, Imkeller & Muller (2004), Karatzas & Shreve (1998), Kou (2002), Kou & Wang (2004), Kramkov (1996), Matsuda (2005), Merton (1976) και Naik & Lee (1990).

### 4.1 Τιμολόγηση Αξιογράφων

Η διενέργεια τιμολογήσεων έχει ως σκοπό την εύρεση της αξίας των αξιογράφων σε μία αγορά στην οποία δεν διατίθενται ευκαιρίες για Arbitrage. Για την επίτευξη του σκοπού αυτού είναι απαραίτητος ο καθορισμός ενός μέτρου πιθανότητας, υπό το οποίο η αναμενόμενη προεξοφλημένη αξία του αξιογράφου να είναι Martingale (βλ. Ορισμό Παράρτημα A.7.4), το οποίο καλείται μέτρο ουδέτερου κινδύνου. Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 3, στις μη πλήρεις αγορές δεν υπάρχει μοναδικό μέτρο ουδέτερου κινδύνου, με αποτέλεσμα την ύπαρξη πολλών πιθανών επιλογών ενός τέτοιου μέτρου για την διενέργεια τιμολογήσεων. Στην παρούσα ενότητα αρχικά θα καθορίσουμε ένα (όχι μοναδικό) μέτρο πιθανότητας ουδέτερου ρίσκου για τα υποδείγματα Διαχύσεων με Άλματα που εισήχθησαν και στη συνέχεια θα προχωρήσουμε στην εύρεση της αξίας αγοράς δικαιωμάτων αγοράς (long calls) για καθένα εξ' αυτών. Ο υπολογισμός των αντίστοιχων τιμών πώλησης γίνεται εύκολα μέσω της σχέσης του put – call parity:

$$C_{put}(t, S_t) = C_{call}(t, S_t) + e^{-r(T-t)}K - S_t \quad (4.1.1)$$

όπου  $C_{call}(t, S_t)$  η (NA) τιμή αγοράς ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου με χρόνο εξάσκησης  $T$  και τιμή εξάσκησης  $K$  υπό κάποιο υπόδειγμα Διάχυσης με Άλματα.

#### 4.1.1 Τιμολόγηση μέσω του υποδείγματος Merton

Στην Ενότητα 3.5 είδαμε ότι το υπόδειγμα Διαχύσεων με Άλματα του Merton (1976) δίνεται από την ακόλουθη σχέση:

$$S_t = S_0 e^{\mu t + \sigma W_t} \prod_{j=1}^{N_t} y_j \quad (4.1.2)$$

όπου  $\mu$  η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής,  $\sigma$  η μεταβλητότητά της,  $W_t$  μία διαδικασία Wiener και  $N_t$  μία ανεξάρτητη και ομογενής διαδικασία Poisson με ένταση  $\lambda$  και με κατανομή μεγέθους αλμάτων  $y_j \sim LN(m, v^2)$ , κι επίσης η διαδικασία Poisson  $N_t$ , η διαδικασία Wiener  $W_t$  και το μέγεθος αλμάτων  $y_j$  είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους. Ο Merton για το υπόδειμά του επέλεξε το μέτρο ουδετέρου κινδύνου που χρησιμοποιείται για την τιμολόγηση μέσω του Black – Scholes, αλλάζοντας μόνο την παράμετρο τάσης της διαδικασίας Wiener, αφήνοντας όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους αναλλοίωτες. Δηλαδή υπό το μέτρο ουδετέρου κινδύνου  $Q_M$  ισχύει ότι:

$$S_t = S_0 e^{\mu^M t + \sigma W_t^M} \prod_{j=1}^{N_t} y_j \quad (4.1.3)$$

όπου  $W_t^M$  μία διαδικασία Wiener,  $N_t$  και  $y_i$  όπως ορίστηκαν παραπάνω, ανεξάρτητες από την  $W_t^M$  και η  $\mu^M$  επιλεγμένη έτσι ώστε η προεξοφλημένη αξία του αξιογράφου  $S_t^* = S_t e^{-rt}$  να είναι Martingale υπό το  $Q_M$ , δηλαδή:

$$\mu^M = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda E[Y_i - 1] = r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda \left( e^{m + \frac{v^2}{2}} - 1 \right) \quad (4.1.4)$$

Μία προσέγγιση για το πρόβλημα τιμολόγησης υπό το υπόδειγμα του Merton αποτελεί εκείνη στην οποία βασίζεται η μέθοδος των Black – Scholes, η οποία προϋποθέτει ότι το μοντέλο CAPM (Capital Asset Pricing Model) περιγράφει ικανοποιητικά την απόδοση του αξιογράφου. Αν υποθέσουμε ότι τα άλματα αποτελούν σημαντικές πληροφορίες που εισέρχονται στην αγορά σε διακριτές χρονικές στιγμές και προκαλούν ισχυρές δονήσεις στην τιμή του αξιογράφου, τότε υπό το CAPM, εκπροσωπούν το μέρος του μη συστημικού κινδύνου και συνεπώς είναι ασυσχέτιστα με την αγορά. Οπότε, επειδή το μη συστημικό ρίσκο του χαρτοφυλακίου της αγοράς είναι διαφοροποιήσιμο, έπεται ότι το βήτα του χαρτοφυλακίου είναι ίσο με μηδέν και επομένως, υπό το CAPM η αναμενόμενη απόδοση όλων των αξιογράφων με μηδενικό βήτα πρέπει να ισούται με  $r$ , δηλαδή την



απόδοση μηδενικού κινδύνου της αγοράς.<sup>6</sup> Η δίκαιη αξία ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$C_{call}(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E_Q[(S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t] \quad (4.1.5)$$

Βασιζόμενοι στη σχέση (4.1.5) και στον καθορισμό του πλήθους αλμάτων  $N_\tau$  στο χρονικό διάστημα  $\tau = T - t$ , μπορούμε να εκφράσουμε ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου υπό το υπόδειγμα του Merton ως ένα άπειρο άθροισμα των τιμών του Black - Scholes. Θέτοντας  $k = \exp(m + v^2/2) - 1$  και  $H(S_t) = (S_t - K)_+$  βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} C_M(t, S_t) &= \\ &= e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} Q_M(N_\tau = n) E_{Q_M} \left[ H \left( S_0 e^{\mu^M \tau + \sigma W_\tau^M + \sum_{j=1}^{N_\tau} y_j} \right) \middle| N_\tau = n \right] \\ &= e^{-r\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} E_{Q_M} \left[ H \left( S_0 e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k\right)\tau + nm + \sqrt{\sigma^2 + \frac{nv^2}{\tau}} W_\tau^M} \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{r_n\tau - r\tau} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} e^{-r_n\tau} E_{Q_M} \left[ H \left( S_0 e^{n\left(m + \frac{1}{2}v^2\right) + \left(r - \frac{\sigma_n^2}{2} - \lambda k\right)\tau + \sigma_n W_\tau^M} \right) \right] \quad (4.1.6) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'\tau} (\lambda'\tau)^n}{n!} e^{-r_n\tau} E_{Q_M} \left[ H \left( S_0 e^{r_n\tau - \frac{\sigma_n^2}{2}\tau + \sigma_n W_\tau^M} \right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'\tau} (\lambda'\tau)^n}{n!} C_{BS}(t, S_t; \sigma_n, r_n) \end{aligned}$$

όπου:

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda(1 + k) \\ r_n &= r - \lambda k + \frac{n \ln(1+k)}{T-t} \\ \sigma_n^2 &= \sigma^2 + \frac{nv^2}{T-t} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

και  $C_{BS}$  είναι ο τύπος των Black - Scholes για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου με χρόνο εξάσκησης  $T$  όταν δεν εμφανίζονται άλματα.

Για περισσότερα επί του υποδείγματος Merton παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Cont & Tankov (2004, §4.3, §10.1), Gugole (2016) και Merton (1976).

<sup>6</sup> Bodie, Kane & Marcus (2014, §9)

<sup>7</sup>  $\mu^M t + \sigma W_t^M + \sum_{j=1}^{N_\tau} y_j \sim N \left( \left( r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) t + nm, \sigma^2 t + nv^2 \right)$

#### 4.1.2 Τιμολόγηση μέσω του υποδείγματος Kou

Αναφορικά με το υπόδειγμα του Kou (2002), ένας τρόπος με τον οποίο μπορούμε να επιλέξουμε ένα μέτρο ουδέτερου κινδύνου είναι εκείνος της μεγιστοποίησης μίας συνάρτησης ωφελιμότητας  $U(c_t, t)$  κάποιας καταναλωτικής διαδικασίας  $c_t$ , μέσω της σχέσης  $\max_c E[\int_0^\infty U(c_t, t) dt]$ . Μέσω της προαναφερθείσας διαδικασίας, ο Kou απέδειξε ότι η τάση της στοχαστικής διαδικασίας είναι επιλεγμένη έτσι ώστε η προεξοφλημένη αξία του αξιογράφου  $S_t^* = S_t e^{-rt}$  να είναι Martingale υπό το  $\mathcal{Q}_K$ , δηλαδή:

$$\mu^K = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda \left[ \left( p \frac{\eta_1}{\eta_1 - 1} + (1-p) \frac{\eta_2}{\eta_2 + 1} \right) - 1 \right] \quad (4.1.8)$$

όπου  $\eta_1$  και  $\eta_2$  είναι τα αναμενόμενα θετικά και αρνητικά, αντίστοιχα, μεγέθη αλμάτων και  $p$  η σχετική πιθανότητα να λάβει χώρα ένα θετικό άλμα.

Για περισσότερα σχετικά με την αλλαγή μέτρου πιθανότητας και την ισορροπία των υποδειγμάτων Διαχύσεων με Άλματα παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Cont & Tankov (2004, §10.1), Kou (2002), Merton (1976) και Naik & Lee (1990). Επίσης, για περισσότερα σχετικά με τη Θεωρία Ωφελιμότητας και τη Μεγιστοποίηση των Συναρτήσεων Ωφελιμότητας παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα Karatzas & Shreve (1998, §3, §6). Για να προχωρήσουμε στην τιμολόγηση αξιογράφων μέσω του υποδείγματος Kou θα πρέπει αρχικά να υπολογίσουμε την κατανομή του αθροίσματος διπλά εκθετικών τυχαίων μεταβλητών. Για τον σκοπό αυτό θα μας βοηθήσει η συνάρτηση  $Hh$ , η οποία μπορεί να μας παράσχει κλειστό τύπο για την κατανομή του δοθέντος αθροίσματος.

**Ορισμός 4.1.1:** Για κάθε  $n \geq 0$ , η  $Hh_n$  συνάρτηση είναι μία μη αύξουσα συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$Hh_n(x) = \int_x^\infty Hh_{n-1}(y) dy = \frac{1}{n!} \int_x^\infty (t-x)^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq 0, n = 0, 1, \dots \quad (4.1.9)$$

όπου  $Hh_{-1}(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} = \sqrt{2\pi}\varphi(x)$  και  $Hh_0 = \sqrt{2\pi}\Phi(-x)$ .

Η συνάρτηση  $Hh_n$  μπορεί επίσης να υπολογιστεί αναδρομικά μέσω της σχέσης:

$$nHh_n(x) = Hh_{n-2}(x) - xHh_{n-1}(x), \quad n \geq 1 \quad (4.1.10)$$

Το πρόβλημα της τιμολόγησης σε αυτό το σημείο διατυπώνεται ως εξής: Για κάθε δοθείσα πιθανότητα  $\mathcal{P}$ , ορίζουμε:

$$\mathcal{V}(\mu, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; a, T) := \mathcal{P}[Z(T) \geq a] \quad (4.1.11)$$

όπου  $Z(t) = \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$ , η  $Y$  έχει μία διπλά εκθετική κατανομή με πυκνότητα

$$f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{(y \geq 0)} + (1-p)\eta_2 e^{\eta_2 y} 1_{(y < 0)}, \eta_1 > 1, \eta_2 > 0$$

και  $N(t)$  είναι μία διαδικασία Poisson με ένταση  $\lambda$ . Η σχέση **(4.1.11)** θα μας βοηθήσει στην εύρεση της αξίας των δικαιωμάτων προαίρεσης, καθώς σε αυτή θα βασιστεί το υπόδειγμα τιμολόγησης του Kou. Αποδεικνύεται ότι:

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}[Z(T) \geq a] &= \frac{e^{(\sigma\eta_1)^2 T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^n P_{n,k}(\sigma\sqrt{T}\eta_1)^k \\
&\quad \times I_{k-1}\left(a - \mu T; -\eta_1, -\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\eta_1\sqrt{T}\right) \\
&+ \frac{e^{(\sigma\eta_2)^2 T/2}}{\sigma\sqrt{2\pi T}} \sum_{n=1}^{\infty} \pi_n \sum_{k=1}^n Q_{n,k}(\sigma\sqrt{T}\eta_2)^k \\
&\quad \times I_{k-1}\left(a - \mu T; -\eta_2, \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}, -\sigma\eta_2\sqrt{T}\right) \\
&+ \pi_0 \Phi\left(-\frac{a - \mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)
\end{aligned} \tag{4.1.12}$$

όπου για  $1 \leq k \leq n - 1$ :

$$P_{n,k} = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-k-1}{i-k} \binom{n}{i} \binom{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}^{i-k} \binom{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}^{n-i} p^i q^{n-i} \tag{4.1.13}$$

$$Q_{n,k} = \sum_{i=k}^{n-1} \binom{n-k-1}{i-k} \binom{n}{i} \binom{\eta_1}{\eta_1 + \eta_2}^{n-i} \binom{\eta_2}{\eta_1 + \eta_2}^{i-k} p^{n-i} q^i \tag{4.1.14}$$

με  $P_{n,k} = p^n$  και  $Q_{n,k} = q^n$ , όπου  $q = 1 - p$  και:

$$\pi_n = \frac{e^{-\lambda T} \lambda^n}{n!}$$

Τέλος, για τον υπολογισμό της σχέσης **(4.1.12)** χρειαζόμαστε τον υπολογισμό της τιμής του ολοκληρώματος  $I_n(c; \alpha, \beta, \delta) = \int_c^{\infty} e^{\alpha x} \text{Hh}_n(\beta x - \delta) dx$ ,  $n \geq 0$  για τυχαίες σταθερές  $\alpha, c$  και  $\beta$ . Για τον λόγο αυτό παραθέτουμε την επόμενη πρόταση.

**Πρόταση 4.1.1: (i)** Αν  $\beta > 0$  και  $\alpha \neq 0$ , τότε για κάθε  $n \geq -1$ :

$$\begin{aligned}
I_n(c; \alpha, \beta, \delta) &= -\frac{e^{\alpha c}}{\alpha} \sum_{i=0}^n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-i} \text{Hh}_i(\beta c - \delta) \\
&\quad + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} e^{\frac{\alpha\delta}{\beta} + \frac{\alpha^2}{2\beta^2}} \Phi\left(-\beta c + \delta + \frac{\alpha}{\beta}\right)
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

**(ii)** Αν  $\beta < 0$  και  $\alpha < 0$ , τότε για κάθε  $n \geq -1$ :

$$I_n(c; \alpha, \beta, \delta) = -\frac{e^{\alpha c}}{\alpha} \sum_{i=0}^n \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-i} \text{Hh}_i(\beta c - \delta) - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n+1} \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} e^{\frac{\alpha\delta + \alpha^2}{2\beta^2}} \Phi\left(\beta c - \delta - \frac{\alpha}{\beta}\right) \quad (4.1.16)$$

Για την απόδειξη της Πρότασης 4.1.1 καθώς και την απόδειξη των σχέσεων (4.1.13), (4.1.14) παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα Kou (2002, §B). Με βάση τα προηγούμενα, καταλήγουμε στο βασικό Θεώρημα της ενότητας:

**Θεώρημα 4.1.1:** Η αξία ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου με χρόνο εξάσκησης  $T$  υπό το υπόδειγμα του Kou δίνεται από τη σχέση:

$$C_K(0, S_0) = S_0 \mathcal{V}\left(r + \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\zeta, \sigma, \tilde{\lambda}, \tilde{p}, \tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2; \log\left(\frac{K}{S_0}\right), T\right) - K e^{-rT} \mathcal{V}\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda\zeta, \sigma, \lambda, p, \eta_1, \eta_2; \log\left(\frac{K}{S_0}\right), T\right) \quad (4.1.17)$$

όπου  $\tilde{p} = \frac{p}{1+\zeta} \frac{\eta_1}{\eta_1-1}$ ,  $\tilde{\eta}_1 = \eta_1 - 1$ ,  $\tilde{\eta}_2 = \eta_2 + 1$ ,  $\tilde{\lambda} = \lambda(\zeta + 1)$ ,  $\zeta = \frac{p\eta_1}{\eta_1-1} + (1-p) \frac{\eta_2}{\eta_2+1} - 1$ .

Για περισσότερα επί του υποδείγματος Kou παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Kou (2002) και Kou & Wang (2004).

## 4.2 Δημιουργία Χαρτοφυλακίων Αντιστάθμισης

Στις πλήρεις αγορές, η κατασκευή χαρτοφυλακίων με σκοπό από την εξασφάλιση από κινδύνους που προέρχονται από θέσεις επί παραγώγων χρηματοοικονομικών προϊόντων, είναι μία διαδικασία, της οποίας, κάθε χρονική στιγμή, η ζημία από την κατοχή του χαρτοφυλακίου είναι (προσεγγιστικά) μηδενική και γνωρίζουμε τον συνολικό αριθμό μετοχών και ομολόγων που είναι απαραίτητα για τον σκοπό αυτό. Στο πιο ρεαλιστικό σενάριο των μη πλήρων αγορών, η πλήρης, αυτή, αντιστάθμιση δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί και για τον λόγο αυτό έχουν αναπτυχθεί μέθοδοι, μέσω των οποίων, γίνεται προσπάθεια καθορισμού ενός μέτρου των προαναφερθέντων κινδύνων και της ελαχιστοποίησής τους. Στο υπόλοιπο της ενότητας θα παραθέσουμε ορισμένες από τις μεθόδους που έχουν προταθεί για την επίτευξη του προαναφερθέντα σκοπού.

### 4.2.1 Προσέγγιση του Merton (Merton's Approach)

Από τη σχέση (4.1.5) προκύπτει ότι η προεξοφλημένη αξία του αξιογράφου στο υπόδειγμα του Merton είναι Martingale υπό το  $\mathcal{Q}_M$  διότι:

$$C_M^*(t, S_t) = e^{-rt} C_M = E_{\mathcal{Q}_M}[e^{-rT} (S_T - K)_+ | \mathcal{F}_t] = E_{\mathcal{Q}_M}[C_M^*(T, S_T) | \mathcal{F}_t] \quad (4.2.1)$$

Συνεπώς, η προεξοφλημένη αξία  $C_M^*$  ισούται με την Martingale συνιστώσα της.

$$\begin{aligned}
C_M^*(T, S_T) - C_M^*(0, S_0) &= e^{-rT} (S_T - K)_+ - E_{Q_M} [(S_T - K)_+] \\
&= \int_0^T \frac{\partial C_M}{\partial S}(u, S_u) \hat{S}_u \sigma dW_u^M \\
&\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} [C_M(u, S_u + z) - C_M(u, S_u)] \tilde{J}_S dudz
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

όπου  $\tilde{J}_S$  είναι το μέτρο των αλμάτων της  $S$ , το οποίο είναι ίδιο υπό τα μέτρα  $\mathcal{P}$  και  $\mathcal{Q}$ . Το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης που προτάθηκε από τον Merton είναι η αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική  $(\psi_t, \Delta_t)$ , όπου:

$$\Delta_t = \frac{\partial C_M}{\partial S}(t, S_t) \quad \psi_t = \Delta_t S_t - \int_0^t \Delta_u dS_u \tag{4.2.3}$$

Η τελευταία σχέση, πρακτικά, σημαίνει ότι στο χαρτοφυλάκιο αυτό αντισταθμίζεται μόνο ο κίνδυνος που προέρχεται από το μέρος διάχυσης. Το (προεξοφλημένο) σφάλμα αντιστάθμισης ισούται με:

$$\begin{aligned}
C_M^*(T, S_T) - C_M^*(0, S_0) - \int_0^T \frac{\partial C_M}{\partial S}(u, S_u) d\hat{S}_u \\
= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} [C_M(u, S_u + z) - C_M(u, S_u) \\
- (1 + z) \frac{\partial C_M}{\partial S}(u, S_u)] \tilde{J}_S dudz
\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

Αυτή η μέθοδος αντιστάθμισης έχει την ιδιότητα να διορθώνει τη μέση επίδραση των αλμάτων, αφήνοντας, όμως, τον κάτοχο του χαρτοφυλακίου εκτεθειμένο στον κίνδυνο που προέχεται από το αλματικό μέρος.

Για περισσότερα επί της προσέγγισης του Merton παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Cont & Tankov (2004, §10.1), Merton (1976) και Naik & Lee (1990).

## 4.2.2 Superhedging

Μία άλλη μέθοδος αντιστάθμισης κινδύνου βασίζεται στην ιδέα της διατήρησης της αξίας του χαρτοφυλακίου σε θετικά επίπεδα. Δηλαδή, αντί να προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε τον κίνδυνο που προέρχεται από μία θέση, επιχειρούμε να βρούμε μία αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική  $(\psi_t, \Delta_t)$ , μέσω της οποίας να είναι βέβαιο ότι το χαρτοφυλάκιο θα επιφέρει κέρδος σε κάθε χρονική στιγμή της κατοχής του.

$$P \left( V_T(\varphi) = V_0 + \int_0^T \Delta_t dS_t \geq (S_T - K)_+ \right) = 1 \tag{4.2.5}$$

Η προαναφερθείσα τακτική (και κατ' επέκταση μέθοδος) καλείται Superhedging. Για μία Superhedging αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική, το κόστος της αντιστοιχεί στο

αρχικό κεφάλαιο  $V_0$ . Το κόστος της φθηνότερης Superhedging στρατηγικής καλείται κόστος του Superhedging και συμβολίζεται με  $\Pi_{\text{sup}}((S_T - K)_+)$ .

$$\begin{aligned} & \Pi_{\text{sup}}((S_T - K)_+) \\ &= \inf \left\{ V_0, \exists \Delta \in S, P \left( V_T(\Delta) = V_0 + \int_0^T \Delta_t dS_t \geq (S_T - K)_+ \right) = 1 \right\} \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Ουσιαστικά, μέσω της προηγηθείσας διαδικασίας, ένας επενδυτής επιχειρεί να προσδιορίσει ένα διάστημα τιμών, του οποίου άνω άκρο αποτελεί η τιμή πώλησης του αγαθού και, αντίστοιχα, το κάτω άκρο την τιμή αγοράς του. Το διάστημα αυτό είναι της μορφής:

$$[\Pi_{\text{sup}}(-(K - S_T)_+), \Pi_{\text{sup}}((S_T - K)_+)] \quad (4.2.7)$$

Το πλεονέκτημα που προσφέρει η παρούσα μέθοδος είναι ότι δεν απαιτεί την επιλογή ενός συγκεκριμένου Martingale μέτρου ή κάποια συγκεκριμένη παράμετρο σχετική με την αποφυγή του κινδύνου. Η μεγάλη δυσκολία της είναι ο υπολογισμός του κόστους του Superhedging για τον οποίο χρειαζόμαστε την έννοια του ουσιώδους supremum.

**Ορισμός 4.2.1:** Μία τυχαία μεταβλητή  $Z$  καλείται *ουσιώδες supremum (essential supremum)* της οικογένειας  $(Y_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$  και συμβολίζεται με  $Z = \text{ess sup}_{\lambda \in \Lambda} Y_\lambda$  αν:

- (i)  $Z \geq Y_\lambda$  σχεδόν βέβαια (υπό ένα μέτρο πιθανότητας  $P$ ) για κάθε  $\lambda \in \Lambda$
- (ii)  $Z \leq Z'$  σχεδόν βέβαια (υπό το  $P$ ) για κάθε τυχαία μεταβλητή  $Z'$  που ικανοποιεί τη σχέση  $Z' \geq Y_\lambda$  σχεδόν βέβαια με πιθανότητα  $P$  για κάθε  $\lambda \in \Lambda$

Η επόμενη πρόταση αποτελεί τη μέθοδο υπολογισμού του κόστους του Superhedging.

**Πρόταση 4.2.1:** Έστω ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου επί ενός αξιογράφου που περιγράφεται από μία SemiMartingale διαδικασία  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  και έστω ότι

$$\sup_{Q \in \mathcal{M}(S)} E_Q((S_T - K)_+) < \infty \quad (4.2.8)$$

Τότε ισχύει η επόμενη σχέση:

$$\begin{aligned} & \inf_{\Delta \in S} \{V_t^*(\Delta), P(V_T(\Delta) \geq (S_T - K)_+) = 1\} \\ &= \text{ess sup}_{Q \in \mathcal{M}_a(S)} E_Q[e^{-rT}(S_T - K)_+ | \mathcal{F}] \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

Συγκεκριμένα, το κόστος της φθηνότερης Superhedging στρατηγικής για το  $(S_T - K)_+$  δίνεται από τη σχέση:

$$\Pi_{\text{sup}}((S_T - K)_+) = \text{ess sup}_{Q \in \mathcal{M}_a(S)} E_Q[e^{-rT}(S_T - K)_+ | \mathcal{F}] \quad (4.2.10)$$

όπου,  $\mathcal{M}_a(S)$  είναι το σύνολο των Martingale μέτρων πιθανότητας που είναι απόλυτα συνεχή ως προς το  $\mathcal{P}$ .

Το προηγούμενο αποτέλεσμα, ουσιαστικά σημαίνει ότι, όσον αφορά τα ισοδύναμα μέτρα Martingale, το κόστος του Superhedging αντιστοιχεί στην αξία του δικαιώματος προαίρεσης υπό το λιγότερο ευνοϊκό μέτρο. Επίσης, υπό το λιγότερο ευνοϊκό μέτρο

Martingale,  $\mathcal{Q}_{\text{sup}}$ , το οποίο αντιστοιχεί στην πιθανότητα των χειρότερων δυνατών σεναρίων για το  $(S_T - K)_+$  επιτυγχάνεται το  $\Pi_{\text{sup}}$ . Ωστόσο, το  $\Pi_{\text{sup}}$  καθορίζεται από μια μη γραμμική μέθοδο υπολογισμού και δεν μπορεί να περιγραφεί με βάση ένα μεμονωμένο μέτρο Martingale. Παρακάτω παρατίθεται το διάστημα κόστους του Superhedging στην περίπτωση των Διαχύσεων με Άλματα.

**Πρόταση 4.2.2:** Αν  $X$  είναι μία Διάχυση με Άλματα με συντελεστή διάχυσης  $\sigma > 0$  και μεγέθη αλμάτων που περιγράφονται από μία σύνθετη διαδικασία Poisson, τότε το διάστημα των τιμών για ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου είναι το

$$[C_{BS}(0, S_0, T, K; \sigma), S_0] \quad (4.2.11)$$

όπου  $C_{BS}$  είναι ο τύπος των Black – Scholes για την τιμολόγηση ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού Τύπου με μεταβλητότητα  $\sigma$ .

Για περισσότερα επί του Superhedging παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Eberlein & Jacod (1997) και Kramkov (1996).

### 4.2.3 Μεγιστοποίηση Ωφελιμότητας (Utility Maximization)

Ένα πρόβλημα που παρατηρείται μέσω της χρήσης της μεθόδου του Superhedging είναι ότι τα όρια του διαστήματος της σχέσης (4.2.11) είναι υπερβολικά πλατιά. Αυτό το αποτέλεσμα έγκειται στο γεγονός ότι η μέθοδος αποδίδει την ίδια σημαντικότητα στην αντιστάθμιση σε όλα τα σενάρια που μπορούν να συμβούν με μη – μηδενική πιθανότητα, ανεξάρτητα από την πραγματική απώλεια σε ένα δεδομένο σενάριο. Μια διαφορετική προσέγγιση, περιλαμβάνει σενάρια με σταθμίσεις ανάλογα με τις ζημίες που προκύπτουν από το καθένα και επιχειρεί να ελαχιστοποιήσει τη μέση σταθμισμένη ζημία. Θεωρούμε έναν επενδυτή με αρχικό πλούτο  $V_0$ , υπό ένα αβέβαιο περιβάλλον, που θα επιλέξει μεταξύ των μελλοντικών εξοφλήσεων  $Z$  σύμφωνα με το κριτήριο

$$\max_Z E_{\mathcal{P}}[U(Z)] \quad (4.2.12)$$

όπου  $U: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  μία κοίλη, αύξουσα συνάρτηση που καλείται συνάρτηση ωφελιμότητας του επενδυτή και  $\mathcal{P}$  είναι ένα μέτρο πιθανότητας το οποίο αντικατοπτρίζει είτε την κατανομή των αντικειμενικών εκδοχών των μελλοντικών γεγονότων ή την υποκειμενική οπτική του επενδυτή. Η κοιλότητα της  $U$  σχετίζεται με το μέγεθος αποστροφής στον κίνδυνο του επενδυτή.

Ένας τρόπος υπολογισμού της αβέβαιης εξόφλησης  $(S_T - K)_+$  ενός δικαιώματος αγοράς, αποτελεί το βεβαιωτικό ισοδύναμο (certainty equivalent)  $c(V_0, (S_T - K)_+)$  το οποίο ορίζεται ως το άθροισμα του κεφαλαίου το οποίο, προστιθέμενο στον αρχικό πλούτο  $V_0$ , οδηγεί στο ίδιο επίπεδο αναμενόμενης ωφελιμότητας.

$$\begin{aligned} U(V_0 + c(V_0, (S_T - K)_+)) &= E[U(V_0 + (S_T - K)_+)] \\ \Rightarrow c(V_0, (S_T - K)_+) &= U^{-1}(E[U(V_0 + (S_T - K)_+)]) - V_0 \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Η συνάρτηση  $c(V_0, (S_T - K)_+)$  ερμηνεύεται ως η αποζημίωση ενός αποστρεφόμενου τον κίνδυνο επενδυτή ωφελιμότητας  $U$  που απαιτεί για το ρίσκο που διατρέχει

διατηρώντας στην κατοχή του την θέση αγοράς επί του δικαιώματος. Ένας επενδυτής που χρησιμοποιεί την αναμενόμενη ωφελιμότητα ως κριτήριο βρίσκεται μεταξύ της απολαβής της τυχαίας εξόφλησης του δικαιώματος ή του κατ' αποκοπή ποσού  $c(V_0, (S_T - K)_+)$ .

Βέβαια, σε μία αγορά όπου ένας επενδυτής έχει την ευχέρεια της δυναμικής επένδυσης σε αγαθά, υπάρχει η πιθανότητα της αύξησης της ωφελιμότητάς του μέσω επανεπένδυσης στην θέση του. Δηλαδή, έστω ότι ο επενδυτής ακολουθεί μία αυτοχρηματοδοτούμενη επενδυτική στρατηγική  $(\Delta_t)_{t \in [0, T]}$ . Τότε, στο διάστημα  $[0, T]$  ο τελικός του πλούτος θα ισούται με:

$$V_T = V_0 + \int_0^T \Delta_t dS_t \quad (4.2.14)$$

Ένας επενδυτής ο οποίος επιθυμεί να μεγιστοποιήσει τη ωφελιμότητά του, θα επιχειρήσει να επιλέξει μία αυτοχρηματοδοτούμενη στρατηγική  $(\psi_t, \Delta_t)$  για να βελτιστοποιήσει την ωφελιμότητά του τελικού του πλούτου:

$$u(V_0, 0) = \sup_{\Delta \in \mathcal{S}} E_{\mathcal{P}} \left[ U \left( V_0 + \int_0^T \Delta_t dS_t \right) \right] \quad (4.2.15)$$

Αν αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς με τελική αξία  $(S_T - K)_+$  στην τιμή  $p$  και διατηρήσει το δικαίωμα μέχρι την ημερομηνία λήξης του  $T$ , τότε η μέγιστη ωφελιμότητά του από την επένδυση στο δικαίωμα δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} u(V_0 - p, (S_T - K)_+) \\ = \sup_{\Delta \in \mathcal{S}} E_{\mathcal{P}} \left[ U \left( V_0 - p + (S_T - K)_+ + \int_0^T \Delta_t dS_t \right) \right] \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

Η τιμή  $p$  η οποία εξισώνει τις δύο προηγούμενες ισότητες καλείται τιμή αδιαφορίας ωφελιμότητας (utility indifference price) και συμβολίζεται με  $\pi_u(V_0, (S_T - K)_+)$ , δηλαδή

$$u(V_0, 0) = u(V_0 - \pi_u(V_0, (S_T - K)_+), (S_T - K)_+) \quad (4.2.17)$$

Η τιμή αδιαφορίας ωφελιμότητας επεκτείνει την έννοια του βεβαιωτικού ισοδύναμου και δηλώνει την αδιαφορία ενός επενδυτή, με αρχικό πλούτο  $V_0$  και συνάρτηση ωφελιμότητας  $U$ , σχετικά με την αγορά ή μη του δικαιώματος. Όπως παρατηρούμε από τη σχέση **(4.2.17)**, η τιμή αδιαφορίας ωφελιμότητας εξαρτάται από τον αρχικό πλούτο  $V_0$ . Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ξεπεραστεί στην ειδική περίπτωση όπου η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι η εκθετική,

$$U_a(V_0) = 1 - e^{-aV_0} \quad (4.2.18)$$

Η συνάρτηση  $U_a$  καλείται εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας και μας βοηθάει στον καθορισμό ενός κανόνα τιμολόγησης  $\Pi_a((S_T - K)_+)$ . Ο κανόνας αυτός μας οδηγεί στην επόμενη πρόταση:



**Πρόταση 4.2.3:** Έστω  $\Pi_a((S_T - K)_+)$  η τιμή αδιαφορίας ωφελιμότητας για μία εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας  $U_a$ . Τότε

- (i) Όταν η παράμετρος αποστροφής από τον κίνδυνο  $a$  τείνει στο άπειρο τότε η τιμή αδιαφορίας ωφελιμότητας συγκλίνει στο κόστος του Superhedging
- (ii) Όταν η παράμετρος αποστροφής από τον κίνδυνο  $a$  τείνει στο μηδέν τότε η τιμή αδιαφορίας ωφελιμότητας καθορίζει ένα γραμμικό κανόνα τιμολόγησης που δίνεται από τη σχέση

$$\lim_{a \rightarrow 0} \Pi_a((S_T - K)_+) = E_{Q^*} [(S_T - K)_+] \quad (4.2.19)$$

όπου  $Q^*$  είναι ένα Martingale μέτρο πιθανότητας ισοδύναμο με το  $\mathcal{P}$  το οποίο ελαχιστοποιεί την σχετική εντροπία ως προς το  $\mathcal{P}$ . Δηλαδή:

$$\mathcal{E}(Q^*|\mathcal{P}) = \inf_{Q \in M_a(S)} \mathcal{E}(Q|\mathcal{P}) = \inf_{Q \in M_a(S)} E_{\mathcal{P}} \left[ \frac{dQ}{d\mathcal{P}} \ln \frac{dQ}{d\mathcal{P}} \right] \quad (4.2.20)$$

Από την τελευταία πρόταση παρατηρούμε δύο πράγματα. Πρώτον, η τιμή αδιαφορίας ωφελιμότητας για μία εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας φράσσεται μεταξύ του κόστους του Superhedging και ενός γραμμικού κανόνα τιμολόγησης που βασίζεται σε ένα μέτρο πιθανότητας  $Q^*$  το οποίο ελαχιστοποιεί την σχετική εντροπία ως προς το  $\mathcal{P}$ . Δεύτερον, παρατηρούμε ότι για διαφορετικές επιλογές της παράμετρου αποστροφής από τον κίνδυνο  $a$  μπορούμε να λάβουμε τελείως διαφορετικά αποτελέσματα στην εκτίμησή μας, πράγμα το οποίο δείχνει ότι η μέθοδος είναι ευαίσθητη στην επιλογή της συγκεκριμένης παραμέτρου. Επίσης, επειδή η επιλογή του  $a$  είναι απόλυτα υποκειμενική, η συγκεκριμένη τεχνική εγείρει ορισμένες αμφιβολίες σχετικά με την εφαρμογή της.

Για περισσότερα σχετικά με τη Θεωρία Ωφελιμότητας και τη Μεγιστοποίηση των Συναρτήσεων Ωφελιμότητας παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Cont & Tankov (2004, §10.3), Cvitanic, Schachermayer & Wang (2002), Delbaen, Rheinlander & Schweizer (2002), Hodges & Neuberger (1989) και Hu, Imkeller & Muller (2004), Karatzas & Shreve (1998, §3, §6).

#### 4.2.4 Τετραγωνική Αντιστάθμιση (Quadratic Hedging)

Η Τετραγωνική Αντιστάθμιση αποτελεί ειδική περίπτωση της μεθόδου μεγιστοποίησης συναρτήσεων ωφελιμότητας, όταν η συνάρτηση ωφελιμότητας δίνεται από τη σχέση  $U(x) = -x^2$ . Σκοπός της μεθόδου είναι η ελαχιστοποίηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος αντιστάθμισης μίας αντισταθμιστικής στρατηγικής και σε αντίθεση με την περίπτωση της μεγιστοποίησης συναρτήσεων ωφελιμότητας μας παρέχει συμμετρία ως προς τη ζημία ή το κέρδος που θα λάβουμε από την εν λόγω στρατηγική. Η λογική της μεθόδου βασίζεται στην θεωρία της αντιστάθμισης Μέσου - Διασποράς (Mean - Variance Hedging, βλ. Cont & Tankov (2004, §10.4.1), Černý (2009, §13.1.2)) υπό την οποία, δοθείσης μίας αυτοχρηματοδοτούμενης στρατηγικής, αρχικού κεφαλαίου  $V_0$  με χαρτοφυλάκιο

$(\Delta_t, \psi_t)$  επί ενός αξιογράφου, επιχειρούμε να ελαχιστοποιήσουμε το τελικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα αντιστάθμισης:

$$\inf_{\Delta} E_{\mathcal{Q}}[|V_T(\Delta) - (S_T - K)_+|^2] = \inf_{V_0, \Delta} E_{\mathcal{Q}}[\varepsilon(V_0, \Delta)]^2 \quad (4.2.21)$$

όπου  $V_T(\Delta) = V_0 + \int_0^T r\psi_t dt + \int_0^T \Delta_t dS_t$ . Για την διατύπωση της παραπάνω μέσης τιμής απαιτείται ο καθορισμός ενός μέτρου πιθανότητας. Για τον λόγο αυτό, θεωρούμε ένα μέτρο ουδετέρου ρίσκου  $\mathcal{Q}$  υπό το οποίο η προεξοφλημένη αξία του παραγώγου  $S_t^*$  είναι Martingale. Επίσης, θεωρούμε ένα εσωτερικό γινόμενο μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών ως  $(X, Y) = E(XY)$ . Υπό αυτό το γινόμενο, δύο τυχαίες μεταβλητές  $X, Y$  πεπερασμένης διακύμανσης καλούνται ορθογώνιες εάν  $E(XY) = 0$ . Με βάση τα παραπάνω, η σχέση (4.3.21) αναδιατυπώνεται ως εξής:

$$\inf_{V_0, \Delta} E_{\mathcal{Q}}[\varepsilon(V_0, \Delta)]^2 = \inf_{A \in \mathcal{A}} \|e^{-rT}(S_T - K)_+ - A\|^2 \quad (4.2.22)$$

όπου  $\mathcal{A}$  το σύνολο των τελικών εφικτών αποπληρωμών ως προς μία επενδυτική στρατηγική το οποίο ορίζεται ως:

$$\mathcal{A} = \left\{ V_0 + \int_0^T \Delta_t dS_t, V_0 \in \mathbb{R}, \Delta \in \mathcal{S} \right\} \quad (4.2.23)$$

Συνεπώς, το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος αντιστάθμισης μίας αντισταθμιστικής στρατηγικής είναι ισοδύναμο με εκείνο της εύρεσης μίας προεξοφλημένης αβέβαιης αποπληρωμής  $H^*$  (στην περίπτωση μας έχουμε θέσει  $H(S_T)^* = e^{-rT}(S_T - K)_+$ ) τέτοια ώστε να ικανοποιεί τη σχέση (4.2.22). Στο πρόβλημα αυτό έρχεται να δώσει λύση η Διάσπαση Galtchouk – Kunita – Watanabe.

**Πρόταση 4.2.4 (Διάσπαση Galtchouk – Kunita – Watanabe):** Έστω  $(S_t^*)_{t \in [0, T]}$  μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη διαδικασία Martingale (βλ. Ορισμό 3.4.6) ως προς το μέτρο ουδετέρου κινδύνου  $\mathcal{Q}$ . Κάθε τυχαία μεταβλητή  $H^*$  πεπερασμένης διακύμανσης προσαρμοσμένη στη διήθηση  $(\mathcal{F}_t^S)_{t \in [0, T]}$  της  $S_t^*$  μπορεί να αναπαρασταθεί ως το άθροισμα ενός στοχαστικού ολοκληρώματος της  $S_t^*$  και μίας τυχαίας μεταβλητής  $N$  ορθογώνιας προς το  $\mathcal{A}$ , δηλαδή υπάρχει μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη στρατηγική  $(\Delta_t^H)_{t \in [0, T]}$  τέτοια ώστε, με πιθανότητα 1:

$$H^* = E_{\mathcal{Q}}[H^*] + \int_0^T \Delta_t^H dS_t^* + N^H \quad (4.2.24)$$

όπου η  $N^H$  είναι ορθογώνια σε όλα τα στοχαστικά ολοκληρώματα ως προς  $S^*$ . Επιπροσθέτως, η διαδικασία Martingale που ορίζεται ως  $N_t^H = E_{\mathcal{Q}}[N^H | \mathcal{F}_t]$  είναι αυστηρά ορθογώνια προς το  $\mathcal{A}$ .

Για την απόδειξη της πρότασης παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα Ceci, Cretarola & Russo (2014). Στην σχέση (4.2.24) η τυχαία μεταβλητή  $N^H$  αναπαριστά τον υπολειπόμενο κίνδυνο της αυτοχρηματοδοτούμενης στρατηγικής ο οποίος δεν μπορεί να αντισταθμιστεί. Στο σημείο αυτό θα επιχειρήσουμε να υπολογίσουμε την  $\Delta_t^H$ , η οποία μας οδηγεί στον ελάχιστο κίνδυνο μέσω της μεθόδου της Τετραγωνικής Αντιστάθμισης.

Αποδεικνύεται ότι εάν η στοχαστική διαδικασία  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  που περιγράφει την κίνηση της τιμής ενός αξιογράφου είναι μία εκθετική διαδικασία Lévy (ή κατ' επέκταση μία Διάχυση με Άλματα), τότε το πρόβλημα της Τετραγωνικής Αντιστάθμισης μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής (βλ. Cont & Tankov (2004, §10.4.2)):

$$\inf_{\Delta} E_Q |G_T(\Delta) + V_0 - e^{-rT} (S_T - K)_+|^2 \quad (4.2.25)$$

όπου η  $G_T$  περιγράφει την τελική εξόφληση από μία στρατηγική  $(\psi_t, \Delta_t)$  και ισούται με:

$$G_T(\Delta) = \int_0^T r\psi_t dt + \int_0^T \Delta_t S_t dZ_u \quad (4.2.26)$$

Στην περίπτωση των εκθετικών διαδικασιών Lévy, ο υπολογισμός της  $\Delta_t$  μας παρέχεται μέσω της επόμενης πρότασης:

**Πρόταση 4.2.5:** Έστω μία ανέλιξη Lévy  $(S_t)_{t \in [0, T]}$  η οποία υπό το μέτρο ουδετέρου ρίσκου  $\mathcal{Q}$  γράφεται ως:

$$dS_t^* = S_t^* dZ_t \quad (4.2.27)$$

όπου  $Z$  είναι μία ανέλιξη Lévy μέτρου Lévy  $v_Z$  και με συντελεστή διάχυσης  $\sigma > 0$ . Αν για κάποιο δικαίωμα Ευρωπαϊκού Τύπου με τιμή εξάσκησης  $H(S_T)$ , όπου  $H: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ , υπάρχει  $K > 0$  τέτοιο ώστε:

$$|H(x) - H(y)| \leq K|x - y| \quad (4.2.28)$$

τότε ο ελαχιστοποιητής κινδύνου της αντιστάθμισης (risk minimizing hedge) που επιλύει τη σχέση **(4.2.25)** ισοδυναμεί με τη διατήρηση μιας θέσης επί του υποκείμενου αγαθού που ισούται με  $\Delta_t = \Delta(t, S_t)$ , όπου:

$$\Delta(t, S_t) = \frac{\sigma^2 \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_t) + \frac{1}{S} \int v_Z(dz) z [C(t, S_t(1+z)) - C(t, S_t)]}{\sigma^2 + \int z^2 v_Z(dz)} \quad (4.2.29)$$

όπου  $C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E_Q[H(S_T) | S_t]$ .

Για την απόδειξη της πρότασης παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο σύγγραμμα Cont & Tankov (2004, §10.4.2). Επειδή οι συναρτήσεις της μορφής  $H(S_T) = (S_T - K)_+$  και  $H(S_T) = (K - S_T)_+$  ικανοποιούν την ιδιότητα **(4.2.28)** έπεται ότι η πρόταση ισχύει για δικαιώματα αγοράς και πώλησης καθώς και συνδυασμό αυτών.

Για περισσότερα επί των μεθόδων Τετραγωνικής Αντιστάθμισης και αντιστάθμισης Μέσου - Διασποράς παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Ceci, Cretarola & Russo (2014), Cont & Tankov (2004, §10.4), Černý (2009, §13.1.2) και Föllmer & Schweizer (1991).

## 4.3 Βαθμονόμηση Υποδειγμάτων

Η βαθμονόμηση υποδειγμάτων αποτελεί μία τεχνική μέσω της οποίας καθίσταται δυνατή η εκτίμηση των παραμέτρων ενός μοντέλου με σκοπό την καλύτερη προσαρμογή του σε ένα δοθέν σύνολο δεδομένων. Για τον σκοπό αυτό, στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί αρκετές μέθοδοι οι οποίες επιχειρούν να ελαχιστοποιήσουν κάποια συνάρτηση, τέτοια, ώστε προβλέψεις που προκύπτουν από το υπό εξέταση υπόδειγμα να προσεγγίζουν όσο δυνατόν περισσότερο τις αντίστοιχες πραγματικές τιμές από την αγορά. Στην παρούσα εργασία θα περιοριστούμε σε 2 μεθόδους οι οποίες θα παρουσιαστούν και θα εφαρμοστούν μέσω του λογισμικού Mathematica® για την βαθμονόμηση των υποδειγμάτων των Merton και Kou.

### 4.3.1 Μη Γραμμικά Ελάχιστα Τετράγωνα

Η πρώτη μέθοδος που θα εισάγουμε αποτελεί την μέθοδο των Μη Γραμμικών Ελαχίστων Τετραγώνων (Non-Linear Least Squares – NLS). Υπό τη μέθοδο αυτή, ορίζουμε ένα διάνυσμα παραμέτρων  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  μέσω του οποίου προσπαθούμε να ελαχιστοποιήσουμε το παρακάτω τετραγωνικό σφάλμα τιμολόγησης:

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^k w_i |C_\theta(T_i, K_i) - C_i|^2 \quad (4.3.1)$$

Πιο συγκεκριμένα, το πρόβλημα που επιχειρούμε να επιλύσουμε ορίζεται ως εξής:

Δοθέντος ενός συνόλου παρατηρηθεισών τιμών αγοράς  $C_i, i \in I$  ενός αξιογράφου με τιμή και ημερομηνία εξάσκησης  $K_i$  και  $T_i$  αντίστοιχα κι ενός υποδείγματος Διάχυσης με Άλματα με παράγουσα τριάδα  $(\mu(\theta), \sigma(\theta), \nu(\theta))$ , αναζητούμε την τιμή

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} \sum_{i=1}^k w_i |C_\theta(T_i, K_i) - C_i|^2 \quad (4.3.2)$$

η οποία ελαχιστοποιεί το τετραγωνικό σφάλμα τιμολόγησης της σχέσης (4.3.1), όπου με  $C_\theta$  συμβολίζουμε την υπολογισθείσα τιμή αγοράς του αξιογράφου μέσω του υποδείγματος Διάχυσης με Άλματα με παράγουσα τριάδα  $(\mu(\theta), \sigma(\theta), \nu(\theta))$  και ως  $w_i, i \in I$  μία συνάρτηση βάρους για κάθε όρο του αθροίσματος.

Το πρόβλημα της συγκεκριμένης μεθόδου είναι ότι, αν και πάντα παρέχει αποτελέσματα, επειδή η συνάρτηση της σχέσης (4.3.1) είναι μη γνησίως κυρτή, είναι πιθανό, μέσω της αριθμητικής επίλυσής της για κάποιες αρχικές τιμές, η μέθοδος να εγκλωβιστεί σε κάποια περιοχή τοπικού ελαχίστου. Συνεπώς, κατά την εφαρμογή της είναι συνετό να υπάρχει εποπτεία και να επανεξετάζονται τα αποτελέσματά της για την αποφυγή του προβλήματος. Σχετικά με την επιλογή των βαρών, οι πιο συνήθεις επιλογές είναι τα ομοιόμορφα βάρη  $w_i = 1/k, i = 1, 2, \dots, k$ , οι τετραγωνικές αποκλίσεις των τιμών ζήτησης και προσφοράς του αξιογράφου:

$$w_i = \frac{1}{|C_i^{bid} - C_i^{ask}|^2} \quad (4.3.3)$$

και οι τετραγωνικές τιμές της συνάρτησης Vega του υποδείγματος των Black – Scholes , η οποία δηλώνει της ευαισθησία της τιμής του αξιογράφου ως προς τις μεταβολές της μεταβλητότητάς του:

$$w_i = \frac{1}{Vega_i^2} = \frac{1}{\left(\frac{\partial}{\partial \sigma} C_{BS}(t, S_t; T_i, K_i)\right)^2} \quad (4.3.4)$$

Η δεύτερη συνάρτηση βάρους, συνήθως δεν προτιμάται για τη διενέργεια βαθμονόμησης υποδειγμάτων, διότι οι τιμές προσφοράς και ζήτησης δεν είναι πάντοτε διαθέσιμες από την αγορά. Στο επόμενο κεφάλαιο, όπου θα παρουσιαστεί μία εκτενής μελέτη πάνω στην βαθμονόμηση των υποδειγμάτων Merton και Kou θα κάνουμε χρήση των ομοιόμορφων βαρών για την εκτίμηση των παραμέτρων των δύο μοντέλων.

### 4.3.2 Διόρθωση μέσω της Σχετικής Εντροπίας

Όπως είδαμε στην Ενότητα 4.3.1, η βαθμονόμηση υποδειγμάτων μέσω της μεθόδου των Μη Γραμμικών Ελαχίστων Τετραγώνων είναι πιθανό να μας οδηγήσει σε κάποιο τοπικό ελάχιστο της συνάρτησης **(4.3.1)**, αποτέλεσμα το οποίο φανερώνει την μη μοναδικότητα επίλυσής της μεθόδου και της ευαισθησίας της στις αρχικές συνθήκες.

Για να ξεπεραστεί το πρόβλημα αυτό, γίνεται η προσθήκη μίας γνησίως κυρτής συνάρτησης «ποινής» στην σχέση **(4.3.1)**. Η κυρτότητα της συνάρτησης ποινής συνεπάγεται την κυρτότητα του συναρτησοειδούς μέσω του οποίου πραγματώνεται η βαθμονόμηση υποδειγμάτων. Για τη συνάρτηση αυτή στην βιβλιογραφία έχουν προταθεί αρκετές επιλογές, όμως για τους σκοπούς της παρούσης εργασίας θα περιοριστούμε στην επιλογή του μέτρου ελάχιστης σχετικής εντροπίας  $\mathcal{E}(Q_\theta|\mathcal{P})$  της σχέσης **(4.2.20)**, όπου  $\mathcal{P}$  είναι το εκ των προτέρων Martingale μέτρο πιθανότητας ενός δεδομένου υποδείγματος Διάχυσης με Άλματα. Βασιζόμενοι στα προηγούμενα, η σχέση **(4.3.1)** λαμβάνει την παρακάτω μορφή:

$$J(\theta) = \sum_{i=1}^k w_i |C_\theta(T_i, K_i) - C_i|^2 + a\mathcal{E}(Q_\theta|\mathcal{P}) \quad (4.3.5)$$

όπου  $a$  είναι η σταθερά κανονικοποίησης του συναρτησοειδούς και ορίζει την σχετική σημαντικότητα των δύο όρων του, δηλαδή, του τετραγωνικού σφάλματος τιμολόγησης και του συναρτησοειδούς ελάχιστης εντροπίας. Όπως είναι προφανές, για μικρές τιμές της σταθεράς  $a$ , η μέθοδος συγκλίνει στην μέθοδο των Μη Γραμμικών Ελαχίστων Τετραγώνων, ενώ για μεγάλες τιμές της, το συναρτησοειδές  $J(\theta)$  σταθεροποιείται χάρη στην κυρτή έκφραση της  $\mathcal{E}(Q_\theta|\mathcal{P})$  και συγκλίνει σε μία μοναδική λύση.

Στην περίπτωση των Διαχύσεων με Άλματα αποδεικνύεται ότι (βλ. Matsuda (2005)) το μέτρο ελάχιστης σχετικής εντροπίας δίνεται από τη σχέση:

$$\begin{aligned} \varepsilon(Q_\theta|\mathcal{P}) &= \frac{T}{2\sigma^2} \left[ \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1) (v_Q(x) - v_P(x)) dx \right]^2 \\ &\quad + T \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{dv_Q(x)}{dv_P(x)} \log \frac{dv_Q(x)}{dv_P(x)} + 1 - \frac{dv_Q(x)}{dv_P(x)} \right) v_Q(x) dx \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

όπου  $v(x)$  το μέτρο Lévy του υποδείγματος Διάχυσης με Άλματα. Πιο συγκεκριμένα, υπό τα υποδείγματα των Merton και Κου, η σχέση (4.3.6) λαμβάνει την μορφή:

$$\begin{aligned} \varepsilon_M(Q_\theta|\mathcal{P}) &= \frac{T}{2\sigma^2} \left[ \lambda_Q \left( e^{m_Q + \frac{v_Q^2}{2}} - 1 \right) - \lambda_P \left( e^{m_P + \frac{v_P^2}{2}} - 1 \right) \right]^2 \\ &\quad + T \lambda_Q \log \frac{\lambda_Q v_P}{\lambda_P v_Q} + T \lambda_P + T \lambda_Q \left( -\frac{3}{2} + \frac{v_Q^2 + (m_Q + m_P)^2}{2v_P^2} \right) \end{aligned} \quad (4.3.7)$$

και

$$\begin{aligned} \varepsilon_K(Q_\theta|\mathcal{P}) &= \frac{T}{2\sigma^2} (\mu_Q - \mu_P)^2 + \frac{c_{1,Q}}{\eta_{1,Q}} \log \frac{c_{1,Q}}{c_{1,P}} - c_{1,Q} \frac{\eta_{1,Q} - \eta_{1,P}}{\eta_{1,Q}^2} + \frac{c_{1,P}}{\eta_{1,P}} \\ &\quad - \frac{c_{1,Q}}{\eta_{1,Q}} + \frac{c_{2,Q}}{\eta_{2,Q}} \log \frac{c_{2,Q}}{c_{2,P}} - c_{2,Q} \frac{\eta_{2,Q} - \eta_{2,P}}{\eta_{2,Q}^2} + \frac{c_{2,P}}{\eta_{2,P}} - \frac{c_{2,Q}}{\eta_{2,Q}} \end{aligned} \quad (4.3.8)$$

αντίστοιχα, όπου για το υπόδειγμα του Κου  $\mu = r - \frac{1}{2}\sigma^2 - \lambda \left[ \left( \frac{p}{\eta_1 - 1} - \frac{1-p}{\eta_2 + 1} \right) - 1 \right]$ ,  $c_1 = p\eta_1$  και  $c_2 = (1-p)\eta_2$ .

Για περισσότερα σχετικά με την μέθοδο των Μη Γραμμικών Ελάχιστων Τετραγώνων και της Διόρθωσης μέσω της Σχετικής Εντροπίας παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα συγγράμματα Cont & Tankov (2004, §13) και Matsuda (2005).

# Κεφάλαιο 5

## Εφαρμογή

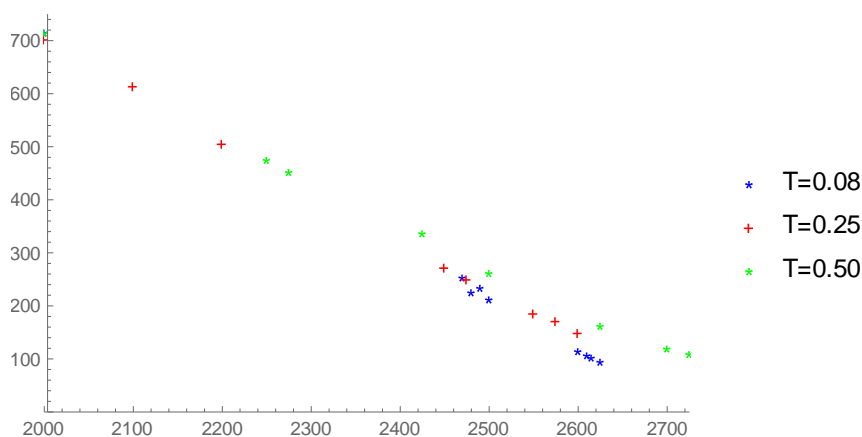
Στο παρόν κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε μία εφαρμογή των μεθόδων που εισήχθησαν νωρίτερα σε δεδομένα τα οποία συλλέχθηκαν από την αγορά. Πιο συγκεκριμένα, ύστερα από την εκτίμηση των παραμέτρων του αλματικού μέρους καθενός από τα μοντέλα Διαχύσεων με Άλματα των Merton και Kou, θα μεταβούμε στην εύρεση του βέλτιστου υποδείγματος για την τιμολόγηση του παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος που εισάγεται.

### 5.1 Σύνολο Δεδομένων

Το σύνολο δεδομένων στο οποίο θα εφαρμοστούν οι προαναφερθείσες μέθοδοι αποτελείται από συνολικά 30 παρατηρηθείσες τιμές του παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος SPX, το οποίο εφαρμόζεται στην κίνηση του δείκτη S&P 500 (Standard & Poor's 500), ο οποίος αποτελεί έναν βεβαρημένο δείκτη αγοράς που αντιπροσωπεύει τις κινήσεις των μετοχών των 500 Αμερικανικών εταιριών με την μεγαλύτερη αγοραστική δραστηριότητα και κατέχει μία θέση ανάμεσα στους δείκτες αναφοράς των χρηματιστηρίων ανά τον κόσμο. Για τη συγκεκριμένη εφαρμογή θεωρούμε ότι ο δείκτης δεν πληρώνει μέρισμα στους κατόχους θέσεων επί αυτού. Πιο συγκεκριμένα, το σύνολο αποτελείται από ένα υποσύνολο των τιμών αγοράς του παραγώγου με ημερομηνία διαπραγμάτευσης την 28/06/2018 και 3 διαφορετικές ημερομηνίες εξάσκησης (20/07/2018, 21/09/2018 και 21/12/2018), με αρχική τιμή του δείκτη (για τις ανάγκες της τιμολόγησης) την τιμή κλεισίματος του κατά την ημερομηνία 28/06/2018 η οποία ανέρχεται στα \$2716. Οι τιμές αγοράς συλλέχθηκαν από την ιστοσελίδα Yahoo! Finance στις 29/06/2018. Παρακάτω παραθέτουμε το γράφημα των τιμών αγοράς του παραγώγου συναρτήσεως των τιμών εξάσκησης του. Για καθεμία ημερομηνία εξάσκησης παρατίθενται 10 τιμές αγοράς του αξιογράφου που προκύπτουν συναρτήσεως κάποιας τιμής εξάσκησης όπως φαίνεται και στον επόμενο πίνακα:

Exercise Date	20/07/18		21/09/18		21/12/18	
	K	Call Price	K	Call Price	K	Call Price
1	1000	1715.00	1000	1716.25	100	2573.80
2	2000	717.00	1910	794.25	1000	1693.50
3	2470	255.31	2000	704.50	2000	716.50
4	2480	227.30	2100	616.25	2250	477.00
5	2490	235.84	2200	507.59	2275	454.20
6	2500	214.00	2450	274.23	2425	338.70
7	2600	116.40	2475	252.07	2500	263.80
8	2610	108.60	2550	187.79	2625	164.12
9	2615	104.30	2575	173.41	2700	121.40
10	2625	96.50	2600	151.00	2725	111.00
Risk Free Rate	1.80%		1.93%		2.13%	

**Πίνακας 5.1.1:** Σύνολο δεδομένων εφαρμογής με  $S_0 = 2716$



**Εικόνα 5.1.1:** Τιμές αγοράς του παραγώγου

## 5.2 Ισχύς των μεθόδων Βαθμονόμησης

Προτού εφαρμόσουμε τις μεθόδους των Μη Γραμμικών Ελαχίστων Τετραγώνων και της Διόρθωσης μέσω της Σχετικής Εντροπίας στα δεδομένα, θα κάνουμε έναν σύντομο έλεγχο για να δούμε κατά πόσο τα αποτελέσματά τους ευσταθούν και προσεγγίζουν ικανοποιητικά τις δοθείσες τιμές. Για το λόγο αυτό, μέσω των υποδειγμάτων Διαχύσεων με Άλματα θα προσομοιώσουμε τιμές αγοράς και στη συνέχεια μέσω των προαναφερθέντων μεθόδων θα προχωρήσουμε στην εκτίμηση των παραμέτρων τους. Η προσομοίωση των τιμών αγοράς θα γίνει μέσω της προσθήκης θορύβου στις τιμές αγοράς των σχέσεων



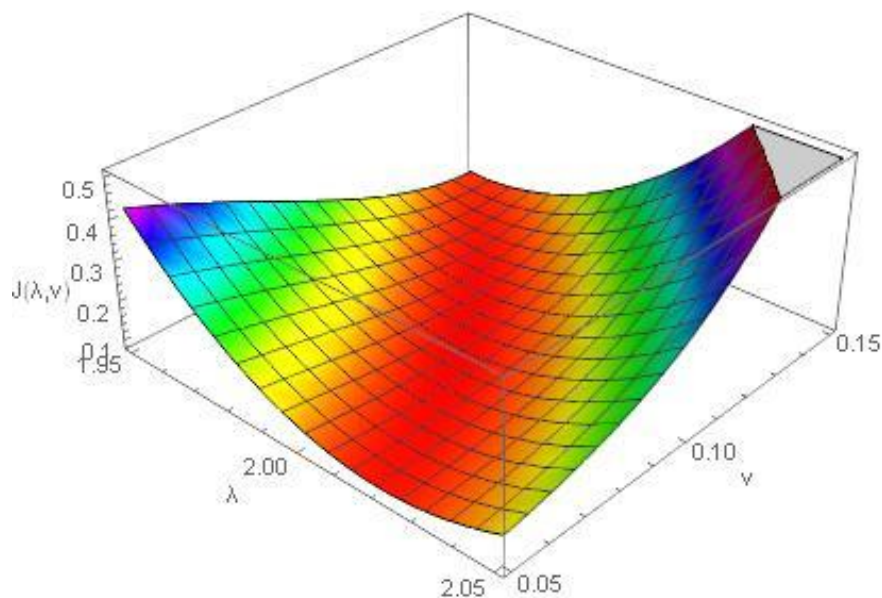
(4.1.6) και (4.1.26) που θα προκύπτουν για προκαθορισμένες τιμές των παραμέτρων από την επόμενη σχέση.

$$C_i^{sim}(\boldsymbol{\theta}) = C_i(\boldsymbol{\theta}) + \delta \varepsilon_i \quad (5.2.1)$$

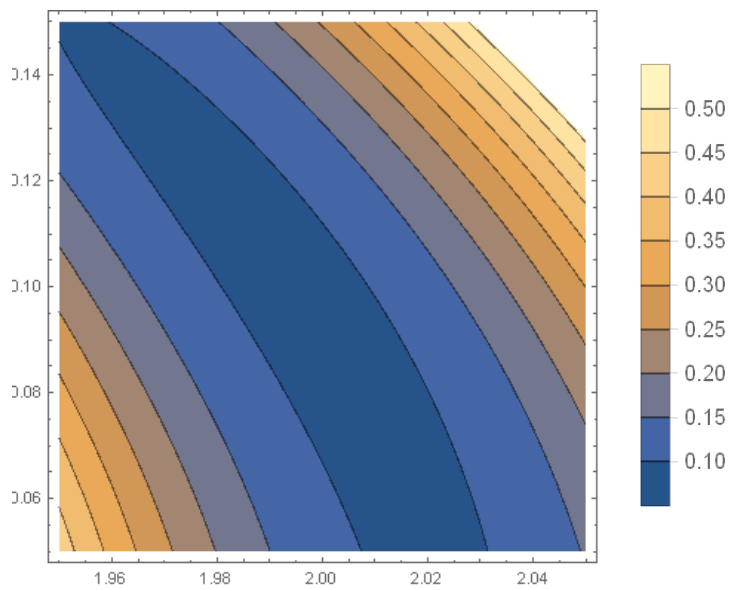
όπου  $\varepsilon_i \sim N(0,1)$  (κατά συνέπεια  $\delta \varepsilon_i \sim N(0, \delta^2)$ ) και  $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$  το διάνυσμα παραμέτρων κάθε υποδείγματος.

Βασιζόμενοι στα παραπάνω, θεωρούμε δύο μοντέλα μη πλήρων αγορών εκ των οποίων το πρώτο περιγράφεται ικανοποιητικά από το υπόδειγμα τιμολόγησης του Merton με διάνυσμα παραμέτρων  $(\sigma, \lambda, m, \nu) = (0.2, 2, -0.5, 0.1)$  και το δεύτερο από το υπόδειγμα του Kou με διάνυσμα παραμέτρων  $(\sigma, \eta_1, \eta_2, \lambda, \rho) = (0.2, 5, 4, 1, 0.4)$ . Τα υπό μελέτη παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα θεωρούμε ότι έχουν ημερομηνίες εξάσκησης ύστερα από 1, 2 και 3 έτη με αντίστοιχη απόδοση μηδενικού κινδύνου ίση με 2%, 4% και 6% για κάθε χρονική περίοδο. Επίσης, για κάθε χρονική περίοδο, παρέχονται στον επενδυτή 10 διαφορετικές επιλογές τιμών εξάσκησης του δικαιώματος, οι οποίες είναι ομοιόμορφα κατανομημένες μεταξύ \$100 και \$200 και, τέλος, κατά τη χρονική στιγμή  $t = 0$  η τιμή της μετοχής στην οποία εφαρμόζεται το παράγωγο θεωρούμε ότι είναι ίση με \$98. Για την προσομοίωση των τιμών αγοράς κάθε υποδείγματος θεωρούμε ότι η τυπική απόκλιση του θορύβου είναι ίση με  $\delta = 0.3$ .

Εφαρμόζοντας τη μέθοδο των Μη Γραμμικών Ελαχίστων Τετραγώνων (NLS) στο υπόδειγμα το Merton ως προς τις παραμέτρους  $(\lambda, \nu)$  λαμβάνουμε ότι η ελάχιστη τιμή του συναρτησοειδούς επιτυγχάνεται για τις τιμές  $(1.99545, 0.0989203)$  οι οποίες είναι αρκετά κοντά στις πραγματικές, αποτέλεσμα το οποίο είναι εμφανές και από το αντίστοιχο τρισδιάστατο γράφημα και το Contour Plot του συναρτησοειδούς που παρατίθενται παρακάτω (βλ. Παράρτημα Β.7).

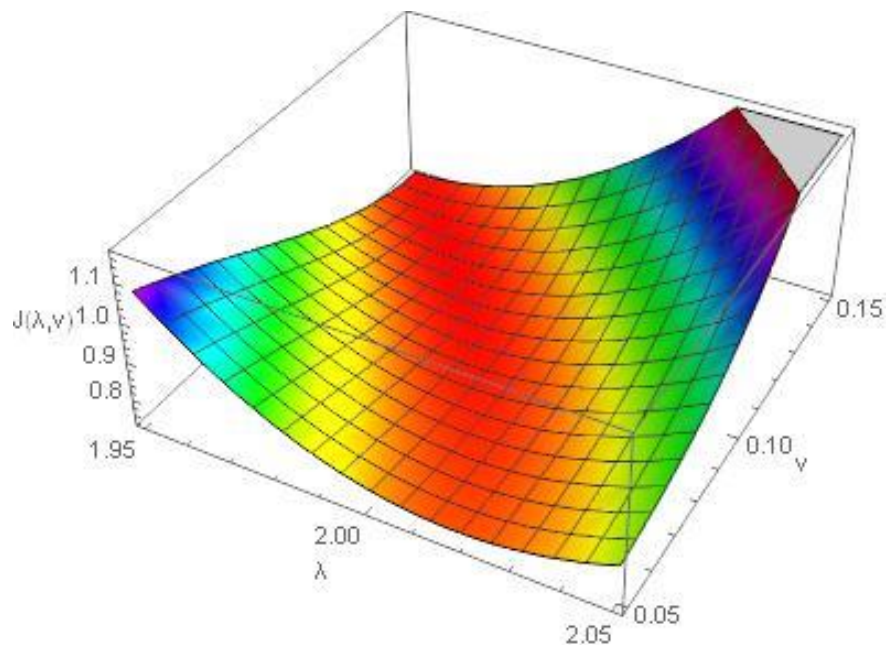


**Εικόνα 5.2.1:** Το γράφημα του συναρτησοειδούς της μεθόδου NLS για το υπόδειγμα Merton

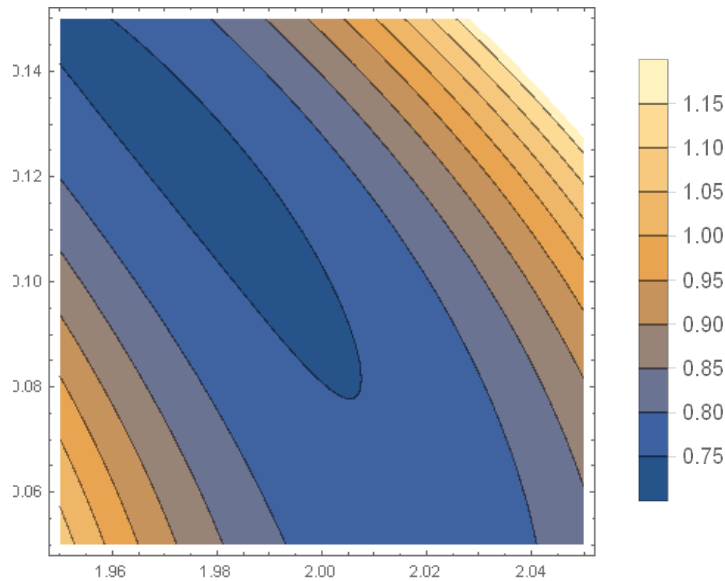


**Εικόνα 5.2.2:** Το Contour Plot του συναρτησοειδούς της μεθόδου NLS για το υπόδειγμα Merton

Εφαρμόζοντας τώρα την μέθοδο της Διόρθωσης μέσω της Σχετικής Εντροπίας (RE) στο ίδιο υπόδειγμα, με σταθερά κανονικοποίησης ίση με  $\alpha = 0.03$ , λαμβάνουμε παρόμοια αποτελέσματα, αφού ότι η ελάχιστη τιμή του συναρτησοειδούς επιτυγχάνεται για τις τιμές  $(1.9743, 0.124711)$  για τον ίδιο συνδυασμό παραμέτρων.

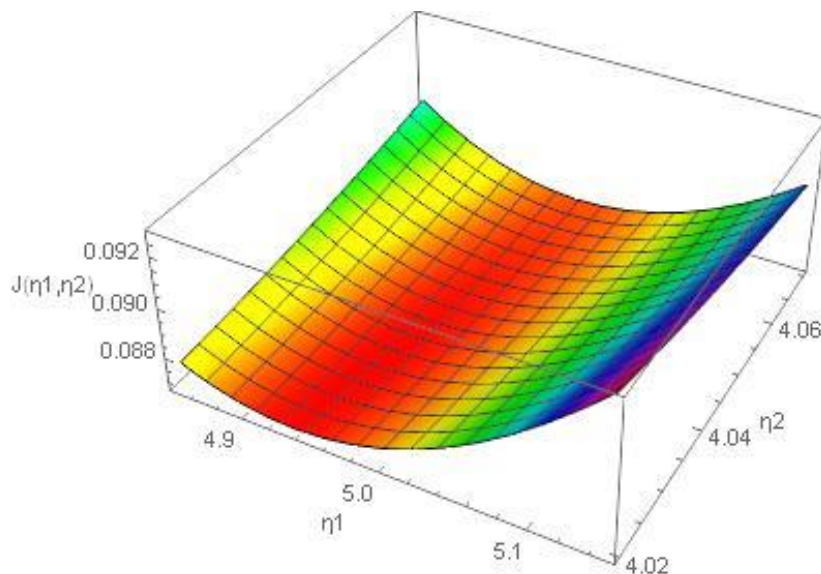


**Εικόνα 5.2.3:** Το γράφημα του συναρτησοειδούς της μεθόδου RE για το υπόδειγμα Merton

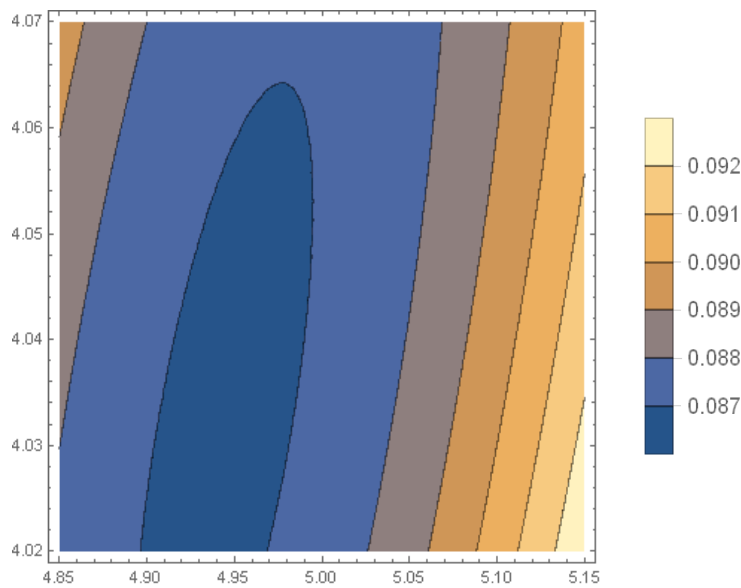


**Εικόνα 5.2.4:** Το Contour Plot του συναρτησοειδούς της μεθόδου RE για το υπόδειγμα Merton

Σχετικά με το υπόδειγμα του Kou, προχωρήσαμε στην ελαχιστοποίηση κάθε συναρτησοειδούς ως προς τις παραμέτρους  $(\eta_1, \eta_2)$ . Οι δύο μέθοδοι κατά την εφαρμογή τους μας οδήγησαν ακριβώς στις ίδιες εκτιμήσεις και συγκεκριμένα στο αποτέλεσμα ότι η ελάχιστη τιμή του εκάστοτε συναρτησοειδούς επιτυγχάνεται για τις τιμές των παραμέτρων  $(4.94301, 4.03067)$  οι οποίες είναι ιδιαίτερα καλές προσεγγίσεις των πραγματικών τιμών. Παρακάτω παρατίθενται το τρισδιάστατο γράφημα και το Contour Plot του συναρτησοειδούς μεθόδων NLS και RE, όπως εκείνα προέκυψαν μέσω του λογισμικού Mathematica® (βλ. Παράρτημα Β.7).



**Εικόνα 5.2.5:** Το γράφημα του συναρτησοειδούς των μεθόδων NLS και RE για το υπόδειγμα Kou



**Εικόνα 5.2.6:** Το Contour Plot του συναρτησοειδούς των μεθόδων NLS και RE για το υπόδειγμα Kou

Σημειώνεται ότι για το υπόδειγμα του Kou είχαμε ακρίβεια 1 βήματος κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου. Όπως παρατηρούμε από τα προηγούμενα αποτελέσματα, οι προσεγγίσεις που μας παρέχουν οι μέθοδοι βαθμονόμησης είναι ιδιαίτερα καλές. Για να έχουμε μία καλύτερη εικόνα της ισχύος των αλγορίθμων, ενδεικτικά, θα επανεκτελέσουμε τη μέθοδο βαθμονόμησης NLS για ένα πλήθος  $n$  επαναλήψεων σε καθένα από τα υποδείγματα Διαχύσεων με Άλματα, με παραμετρικά διανύσματα τα προαναφερθέντα, με σκοπό να ελέγξουμε το μέγεθος του σφάλματος απόκλισης που προκύπτει από την προσομοίωση. Πιο συγκεκριμένα, για το υπόδειγμα του Merton θα επαναλάβουμε την εκτέλεση της μεθόδου 100 φορές, ενώ για το υπόδειγμα του Kou 10 φορές (λόγω του μεγάλου υπολογιστικού κόστους και του αργού χρόνου εκτέλεσης). Οι τιμές των εκτιμώμενων παραμέτρων κάθε υποδείγματος σε κάθε βήμα της επανάληψης παρουσιάζονται στους Πίνακες 5.2.1 και 5.2.2 (ενδεικτικά, στον Πίνακα 5.2.2 παρουσιάζονται επίσης τα σφάλματα απόκλισης και τα τετραγωνικά σφάλματα απόκλισης για κάθε παράμετρο). Επίσης, παρακάτω παρατίθενται τα γραφήματα των εκτιμώμενων παραμετρικών διανυσμάτων  $((\lambda, \nu)$  για το υπόδειγμα Merton και  $(\eta_1, \eta_2)$  για το υπόδειγμα Kou) των υποδειγμάτων Διαχύσεων με Άλματα όπως προέκυψαν μέσω της βαθμονόμησής τους για κάθε βήμα της επανάληψης από τη μέθοδο NLS.

Από τον Πίνακα 5.2.3 λαμβάνουμε ότι κατά μέσο όρο οι τιμές των εκτιμηθεισών παραμέτρων δεν απέχουν ιδιαίτερα από τις αντίστοιχες δοθείσες, αποτέλεσμα το οποίο φανερώνει την ευστάθεια των αλγορίθμων υπό συνθήκες προσομοίωσης. Βέβαια, η σχετικά μεγάλη τάξη μεγέθους της τυπικής απόκλισης των εκτιμήσεων των παραμέτρων του υποδείγματος Kou είναι ελαφρώς ανησυχητική, όμως το αποτέλεσμα αυτό έγκειται στο μικρό πλήθος επαναλήψεων του αλγορίθμου για το παρόν υπόδειγμα και συνεπώς μία επανεκτέλεση του με μεγαλύτερο πλήθος επαναλήψεων πιθανότατα να την ελαττώσει.

#	$\hat{\lambda}$	$\hat{\nu}$	#	$\hat{\lambda}$	$\hat{\nu}$	#	$\hat{\lambda}$	$\hat{\nu}$	#	$\hat{\lambda}$	$\hat{\nu}$	#	$\hat{\lambda}$	$\hat{\nu}$
1	1.993	0.110	21	2.012	0.082	41	2.001	0.104	61	1.979	0.131	81	2.019	0.066
2	2.025	0.057	22	2.025	0.058	42	2.021	0.058	62	2.007	0.089	82	2.000	0.119
3	1.989	0.120	23	1.946	0.154	43	1.973	0.106	63	1.965	0.128	83	2.017	0.085
4	2.037	0.000	24	2.005	0.081	44	1.976	0.146	64	1.999	0.111	84	1.986	0.127
5	1.944	0.158	25	1.986	0.117	45	2.018	0.081	65	1.990	0.111	85	1.986	0.117
6	2.007	0.109	26	2.014	0.067	46	2.001	0.094	66	2.014	0.072	86	2.013	0.085
7	1.994	0.106	27	2.016	0.074	47	2.009	0.086	67	1.975	0.127	87	1.999	0.122
8	2.020	0.083	28	2.030	0.053	48	2.010	0.067	68	1.998	0.108	88	1.986	0.122
9	1.993	0.106	29	1.988	0.113	49	1.979	0.122	69	2.028	0.063	89	2.000	0.118
10	1.972	0.128	30	1.979	0.141	50	1.999	0.112	70	1.975	0.136	90	1.989	0.111
11	2.028	0.058	31	2.031	0.047	51	1.981	0.115	71	2.035	0.025	91	2.024	0.093
12	2.025	0.035	32	1.975	0.119	52	2.031	0.054	72	2.023	0.000	92	2.000	0.106
13	2.004	0.092	33	1.999	0.093	53	2.011	0.080	73	2.028	0.054	93	2.004	0.094
14	2.027	0.032	34	2.033	0.000	54	2.023	0.068	74	1.992	0.133	94	2.013	0.064
15	2.013	0.074	35	2.006	0.085	55	2.004	0.096	75	2.026	0.074	95	2.025	0.069
16	1.972	0.121	36	1.960	0.143	56	1.964	0.137	76	1.970	0.131	96	2.001	0.111
17	2.036	0.029	37	2.019	0.061	57	1.977	0.136	77	1.985	0.121	97	2.011	0.080
18	1.979	0.112	38	1.966	0.134	58	2.005	0.092	78	2.013	0.052	98	2.023	0.079
19	1.995	0.114	39	1.999	0.100	59	2.008	0.087	79	2.007	0.095	99	1.970	0.136
20	2.033	0.044	40	2.021	0.065	60	1.980	0.116	80	1.975	0.121	100	1.997	0.109

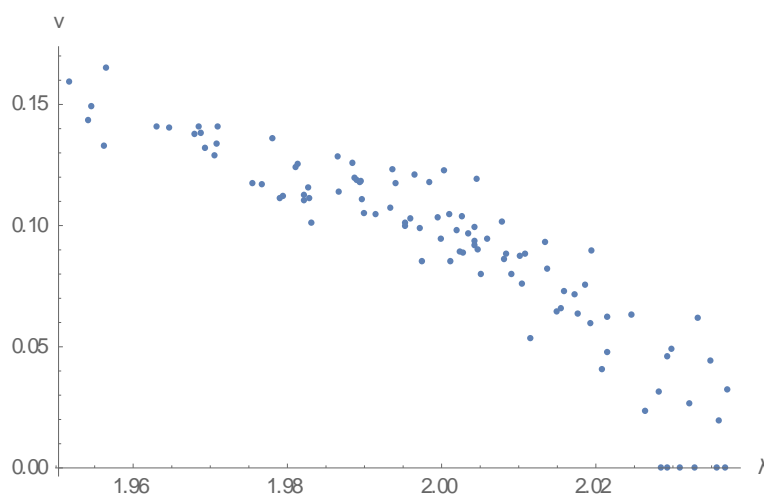
**Πίνακας 5.2.1:** Εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων  $\lambda$  και  $\nu$  του υποδείγματος Merton για κάθε βήμα επανάληψης του αλγορίθμου

#	$\hat{\eta}_1$	$\hat{\eta}_1 - \eta_1$	$(\hat{\eta}_1 - \eta_1)^2$	$\hat{\eta}_2$	$\hat{\eta}_2 - \eta_2$	$(\hat{\eta}_2 - \eta_2)^2$
1	4.901	-0.099	0.010	3.993	-0.007	0.000
2	4.807	-0.193	0.037	3.980	-0.020	0.000
3	5.280	0.280	0.078	4.172	0.172	0.030
4	5.092	0.092	0.008	3.986	-0.014	0.000
5	4.916	-0.084	0.007	3.859	-0.141	0.020
6	4.747	-0.253	0.064	3.835	-0.165	0.027
7	5.160	0.160	0.026	4.037	0.037	0.001
8	5.043	0.043	0.002	4.090	0.090	0.008
9	5.570	0.570	0.325	4.158	0.158	0.025
10	5.115	0.115	0.013	4.181	0.181	0.033

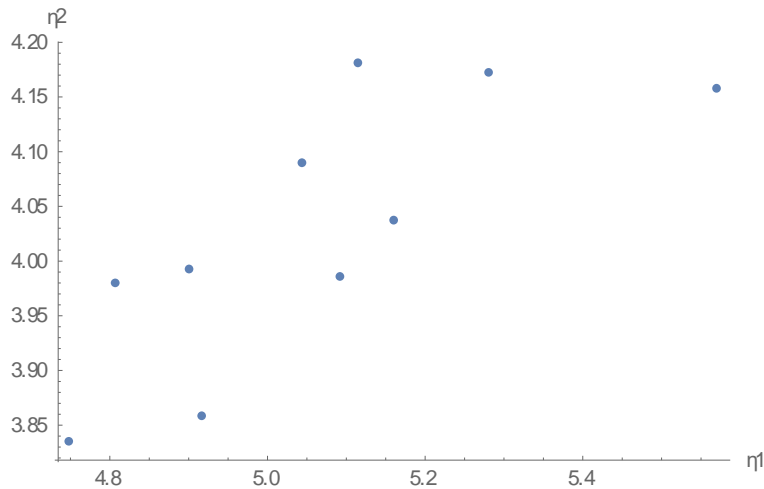
**Πίνακας 5.2.2:** Εκτιμώμενες τιμές των παραμέτρων  $\eta_1$  και  $\eta_2$ , σφάλματα απόκλισης και τετραγωνικά σφάλματα απόκλισης του υποδείγματος Kou

<b>Model</b>	<b>Merton</b>		<b>Kou</b>	
	$\hat{\lambda}$	$\hat{\nu}$	$\hat{\eta}_1$	$\hat{\eta}_2$
<b>Mean Value</b>	2.00117	0.09330	5.06318	4.02918
<b>Standard Error</b>	0.02141	0.03420	0.24275	0.12305
<b>Mean Signed Deviation</b>	0.00117	-0.00670	0.06318	0.029185
<b>Error Variance</b>	0.00046	0.00122	0.06336	0.016089

**Πίνακας 5.2.3:** Συγκεντρωτικός πίνακας αποτελεσμάτων



**Εικόνα 5.2.7:** Γράφημα του εκτιμώμενου παραμετρικού διανύσματος  $(\lambda, \nu)$  του υποδείγματος Merton



**Εικόνα 5.2.8:** Γράφημα του εκτιμώμενου παραμετρικού διανύσματος  $(\eta_1, \eta_2)$  του υποδείγματος Κου

Για να εξετάσουμε την αμεροληψία και τη διασπορά σφάλματος εκτίμησης των παραμέτρων θα κάνουμε χρήση των επόμενων μαθηματικών εκφράσεων:

$$MSD(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{\hat{\theta}_i - \theta}{n} \quad EV(\hat{\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{(\hat{\theta}_i - \theta)^2}{n-1} \quad (5.2.2)$$

Η πρώτη σχέση, γνωστή και ως Μέση Απόκλιση Προσέμου, αποτελεί ένα μέτρο εκτίμησης της μεροληψίας μίας εκτιμήτριας. Οι σημειακές εκτιμήσεις της Μέσης Απόκλισης Προσέμου (MSD) και του Σφάλματος Απόκλισης (EV) των παραμέτρων  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\nu}$ ,  $\hat{\eta}_1$  και  $\hat{\eta}_2$  παρατίθενται στον Πίνακα 5.2.3. Από τις προαναφερθείσες τιμές παρατηρούμε ότι ο αλγόριθμος διατηρεί τη διασπορά των σφαλμάτων σε χαμηλά επίπεδα, ενώ σχετικά με την αμεροληψία των εκτιμήσεων, αντί της σημειακής εκτίμησης του Πίνακα 5.2.3, θα προχωρήσουμε στην κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις μέσες τιμές των εκτιμητών των παραμέτρων με σκοπό τον έλεγχο αμεροληψίας σε συγκεκριμένο επίπεδο σημαντικότητας. Θεωρώντας ότι οι εκτιμητές των παραμέτρων ακολουθούν προσεγγιστικά κανονική κατανομή και επειδή οι τυπικές τους αποκλίσεις δεν ήταν εκ των προτέρων γνωστές, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε προσεγγιστικά την *Student t* κατανομή με  $n - 1$  βαθμούς ελευθερίας (99 για το υπόδειγμα Merton και 9 για το υπόδειγμα Κου). Συγκεκριμένα, το διάστημα εμπιστοσύνης με συντελεστή εμπιστοσύνης  $1 - \alpha$  στην παρούσα περίπτωση είναι το παρακάτω:

$$\left( \hat{\theta} - t_{\alpha/2; n-1} \frac{s(\hat{\theta})}{\sqrt{n}}, \hat{\theta} + t_{\alpha/2; n-1} \frac{s(\hat{\theta})}{\sqrt{n}} \right) \quad (5.2.3)$$

Στον Πίνακα 5.2.4 παρατίθενται τα διαστήματα εμπιστοσύνης για τη μέση τιμή καθενός από τις παραμέτρους  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\nu}$ ,  $\hat{\eta}_1$  και  $\hat{\eta}_2$  με συντελεστές εμπιστοσύνης 95% και 99%.

95%	Lower Bound	Upper Bound	99%	Lower Bound	Upper Bound
$\bar{\lambda}$	1.997	2.005	$\bar{\lambda}$	1.996	2.007
$\bar{\nu}$	0.087	0.100	$\bar{\nu}$	0.084	0.102
$\bar{\eta}_1$	4.890	5.237	$\bar{\eta}_1$	4.814	5.313
$\bar{\eta}_2$	3.941	4.117	$\bar{\eta}_2$	3.903	4.156

**Πίνακας 5.2.4:** Άνω και κάτω άκρα διαστημάτων εμπιστοσύνης για τις μέσες τιμές των εκτιμητών των παραμέτρων των δύο υποδειγμάτων σε επίπεδα σημαντικότητας 95% και 99%.

Από τα αποτελέσματα του Πίνακα 5.2.4 λαμβάνουμε ότι σε κάθε περίπτωση η προκαθορισμένη τιμή της εκάστοτε παραμέτρου ( $\lambda = 2, \nu = 0.1, \eta_1 = 5, \eta_2 = 4$ ) περιέχεται στο αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης σε κάθε ζητούμενο επίπεδο σημαντικότητας και συνεπώς δεν μπορούμε να απορρίψουμε την υπόθεση για την αμεροληψία των εκτιμητών των δοθέντων παραμέτρων.

Στην επόμενη ενότητα, ύστερα από την εισαγωγή των κριτηρίων σύγκρισης των υποδειγμάτων, θα προβούμε στην εφαρμογή των μεθόδων στα υποδείγματα Διαχύσεων με Άλματα των Merton και Kou, καθώς και στο μοντέλο των Black – Scholes με σκοπό την εύρεση του βέλτιστου υποδείγματος τιμολόγησης για το εν λόγω σύνολο δεδομένων.

### 5.3 Βαθμονόμηση των υποδειγμάτων

Στην παρούσα παράγραφο θα εφαρμοστούν οι μέθοδοι βαθμονόμησης που εισήχθησαν στην Ενότητα 4.3 (Μη Γραμμικά Ελάχιστα Τετράγωνα – NLS, Διόρθωση μέσω της Σχετικής Εντροπίας – RE) στα υποδείγματα των Merton και Kou με σκοπό την εκτίμηση των παραμέτρων τους για την καλύτερη προσαρμογή τους στις τιμές του παραγώγου SPX. Επίσης, για λόγους πληρότητας, θα παρατεθούν και τα αποτελέσματα της βαθμονόμησης του υποδείγματος των Black – Scholes και στο τέλος της ενότητας θα παρουσιαστεί μία αναλυτική σύγκριση των μοντέλων. Τα κριτήρια σύγκρισης είναι τα εξής:

- (i) Το μέσο τετραγωνικό σφάλμα απόκλισης των παρατηρηθεισών από τις εκτιμηθείσες τιμές αγοράς του παραγώγου το οποίο δίνεται από τη σχέση:

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (C_{\theta}(T_i, K_i) - C_i)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad (5.3.1)$$

όπου  $C_{\theta}(T_i, K_i)$  οι εκτιμηθείσες τιμές αγοράς του παραγώγου από το εκάστοτε υπόδειγμα τιμολόγησης,  $C_i$  οι αντίστοιχες παρατηρηθείσες και  $n = 30$  το πλήθος των παρατηρήσεων.

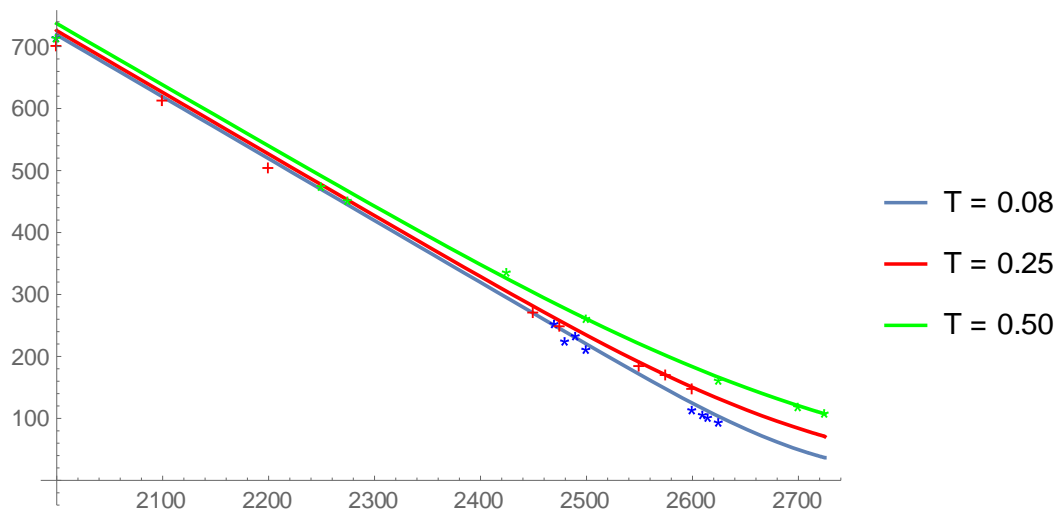


- (ii) Η ταχύτητα εκτέλεσης του αλγορίθμου σε δευτερόλεπτα η οποία σχετίζεται με την επεξεργαστική ισχύ του χρησιμοποιούμενου Η/Υ. Σημειώνεται ότι τα χαρακτηριστικά του υπολογιστή που χρησιμοποιήθηκε είναι (CPU) AMD FX-6300, 3.5 GHz και (RAM) 8 GB, 669 MHz.

### 5.3.1 Βαθμονόμηση του υποδείγματος Black - Scholes

Το υπόδειγμα Black - Scholes, όπως έχουμε αναφέρει και νωρίτερα, αποτελεί το συχνότερα χρησιμοποιούμενο υπόδειγμα αποτίμησης της αξίας ενός παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος, υπό την υπόθεση της πληρότητας της αγοράς. Για τον λόγο αυτό, θεωρήσαμε απαραίτητη την χρήση του ως υπόδειγμα αναφοράς για συγκρίσεις με τα υπόλοιπα υποδείγματα τιμολόγησης. Μέσω της βαθμονόμησής του θα λάβουμε μία εικόνα για την τιμή του Μέσου Τετραγωνικού Σφάλματος του υποδείγματος και στην συνέχεια θα την συγκρίνουμε με εκείνη των υπολοίπων υποδειγμάτων με σκοπό την αξιολόγηση του βέλτιστου υποδείγματος τιμολόγησης για το δοθέν αξιόγραφο.

Θεωρώντας ότι η αγορά ικανοποιεί τις συνθήκες πληρότητας, προχωρήσαμε στην ελαχιστοποίηση του συναρτησοειδούς της σχέσης (4.3.1) με συνάρτηση βάρους  $w_i = 1/30, i = 1, 2, \dots, 30$  ως προς τη μεταβλητή  $\sigma$  και καταλήξαμε στο αποτέλεσμα ότι η μεταβλητότητα του παραγώγου είναι περίπου ίση με 0.127068. Ο αλγόριθμος χρειάστηκε 0.984 δευτερόλεπτα για να εκτελεστεί, πετυχαίνοντας τιμή μέσου τετραγωνικού σφάλματος περίπου ίση με 195.937.



Εικόνα 5.3.1: Προσέγγιση των τιμών αγοράς μέσω του υποδείγματος BS

		<i>BS Call</i>	<i>Call Price</i>	$\epsilon$	$\epsilon^2$
<i>Exercise Date</i>	<i>20/07/2018</i>	1717.44	1715.00	2.44	5.95
		718.88	717.00	1.88	3.53
		249.66	255.31	-5.65	31.94
		239.72	227.30	12.42	154.23
		229.80	235.84	-6.04	36.52
		219.90	214.00	5.90	34.77
		124.52	116.40	8.12	65.98
		115.72	108.60	7.12	50.70
		111.40	104.30	7.10	50.44
		102.95	96.50	6.45	41.55
<i>21/09/2018</i>	1720.81	1716.25	4.56	20.82	
	815.19	794.25	20.94	438.63	
	725.63	704.50	21.13	446.34	
	626.11	616.25	9.86	97.19	
	526.60	507.59	19.01	361.50	
	280.79	274.23	6.56	43.09	
	257.32	252.07	5.25	27.57	
	190.45	187.79	2.65	7.05	
	169.76	173.41	-3.65	13.29	
	150.11	151.00	-0.89	0.79	
<i>21/12/2018</i>	2617.06	2573.80	43.26	1871.37	
	1726.59	1693.50	33.09	1095.18	
	737.20	716.50	20.70	428.41	
	490.87	477.00	13.87	192.48	
	466.57	454.20	12.37	153.12	
	325.47	338.70	-13.23	174.93	
	260.41	263.80	-3.39	11.47	
	166.15	164.12	2.03	4.10	
	120.46	121.40	-0.94	0.89	
	107.22	111.00	-3.78	14.26	
<i>MSE</i>				195.94	
<i>ETA</i>				0.98	

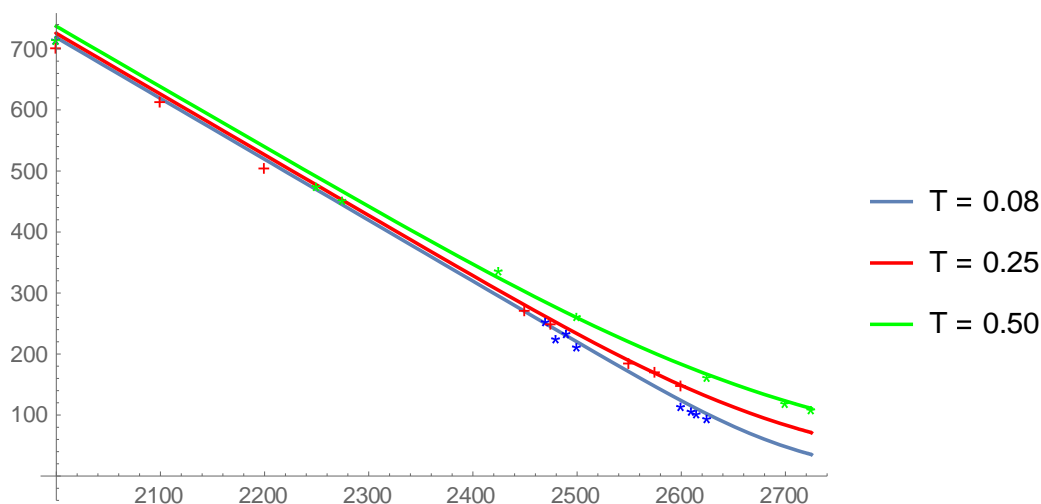
**Πίνακας 5.3.1:** Εκτιμηθείσες τιμές αγοράς με βάση το υπόδειγμα BS, παρατηρηθείσες τιμές αγοράς του παραγώγου, σφάλματα απόκλισης, τετραγωνικά σφάλματα απόκλισης, μέσο τετραγωνικό σφάλμα και χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου μέσω του υποδείγματος BS που προέκυψαν για τιμή της παραμέτρου  $\sigma = 0.127068$

### 5.3.2 Βαθμονόμηση των υποδειγμάτων Διαχύσεων με Άλματα

Θεωρώντας τώρα ότι η αγορά δεν ικανοποιεί τις συνθήκες πληρότητας είμαστε σε θέση να προβούμε στην βαθμονόμηση των υποδειγμάτων Διαχύσεων με Άλματα των Merton και Kou. Για την εφαρμογή κάθε μεθόδου βαθμονόμησης αρχικά θα ελαχιστοποιήσουμε το εκάστοτε συναρτησοειδές ως προς όλες τις ελεύθερες μεταβλητές του (4 για το υπόδειγμα Merton και 5 για το υπόδειγμα Kou) και στη συνέχεια αντικαθιστώντας όλες τις μεταβλητές εκτός από 2 με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις τους θα επαναλάβουμε τη διαδικασία για τις εναπομείνουσες. Η συνάρτηση βάρους η οποία θα χρησιμοποιηθεί αποτελεί την  $w_i = 1/30, i = 1, 2, \dots, 30$ , δηλαδή σε κάθε παρατήρηση θα δοθεί ίδια βαρύτητα κατά την εκτίμηση. Ενδεικτικά, θα παραθέσουμε τα αποτελέσματα της ελαχιστοποίησης μόνο ως προς 2 μεταβλητές για κάθε συναρτησιακό. Πιο συγκεκριμένα, για το υπόδειγμα του Merton θα προχωρήσουμε στη βαθμονόμηση μόνο ως προς τις μεταβλητές  $(m, v)$ , δηλαδή τη μέση τιμή και τη μεταβλητότητα του μεγέθους των αλμάτων, ενώ για το υπόδειγμα Kou μόνο ως προς τις  $(\eta_1, \eta_2)$ , δηλαδή το αναμενόμενο μέγεθος θετικών και αρνητικών αλμάτων αντίστοιχα. Σχετικά με το υπόδειγμα του Merton, ελαχιστοποιώντας ως προς το διάνυσμα παραμέτρων  $(\sigma, \lambda, m, v)$ , καταλήγουμε στο αποτέλεσμα ότι οι τιμές των παραμέτρων μέσω των οποίων το υπόδειγμα περιγράφει ικανοποιητικά την τιμή του αξιογράφου ισούνται με:

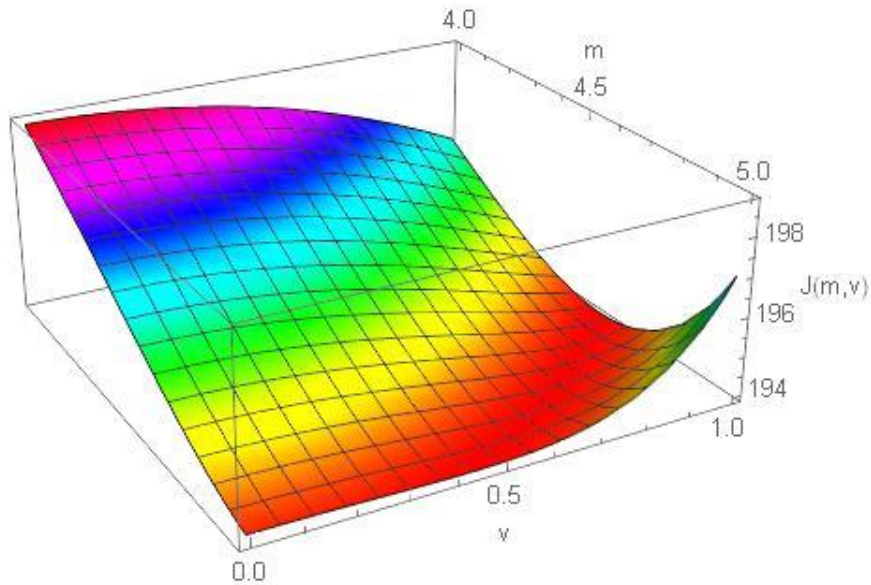
$$(S_0, K, T, r, \sigma, \lambda, m, v) = (2716, K_{i,j}, T_j, r_j, 0.116582, 0.000111358, -5.14733, 4.53296)$$

όπου  $K_{i,j}, r_j, i = 1, 2, \dots, 10, j = 1, 2, 3$  οι τιμές εξάσκησης και η απόδοση μηδενικού κινδύνου της αγοράς όπως φαίνονται στον Πίνακα 5.1.1 και  $T_j \in \{0.08, 0.25, 0.5\}, j = 1, 2, 3$ , το χρονικό διάστημα ωρίμανσης του παραγώγου. Διατηρώντας τις παραμέτρους  $\sigma, \lambda$  σταθερές και ίσες με τις εκτιμηθείσες τιμές τους ελαχιστοποιούμε εκ νέου το συναρτησοειδές ως προς τις μεταβλητές  $m, v$ . Η μέθοδος NLS αξιολόγησε ότι η μέση τιμή και η μεταβλητότητα του μεγέθους των αλμάτων ισούνται, αντίστοιχα, με  $m = 4.61762$  και  $v = 0.976682$ . Ο αλγόριθμος χρειάστηκε 5.391 δευτερόλεπτα για να εκτελεστεί, πετυχαίνοντας τιμή μέσου τετραγωνικού σφάλματος περίπου ίση με 193.946.

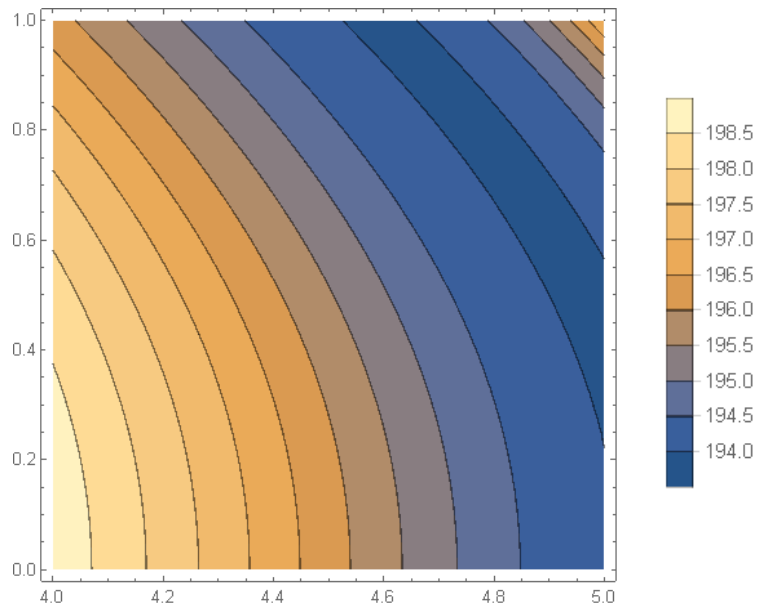


**Εικόνα 5.3.2:** Προσέγγιση των τιμών αγοράς μέσω του υποδείγματος Merton για τιμές των παραμέτρων  $m = 4.61762$  και  $v = 0.976682$

Παρακάτω παρατίθεται το τρισδιάστατο γράφημα του συναρτησοειδούς καθώς και το αντίστοιχο Contour Plot (βλ. Παράρτημα Β.7).



**Εικόνα 5.3.3:** Το γράφημα του συναρτησοειδούς της μεθόδου NLS για το υπόδειγμα Merton με τιμές παραμέτρων  $m = 4.61762$  και  $v = 0.976682$

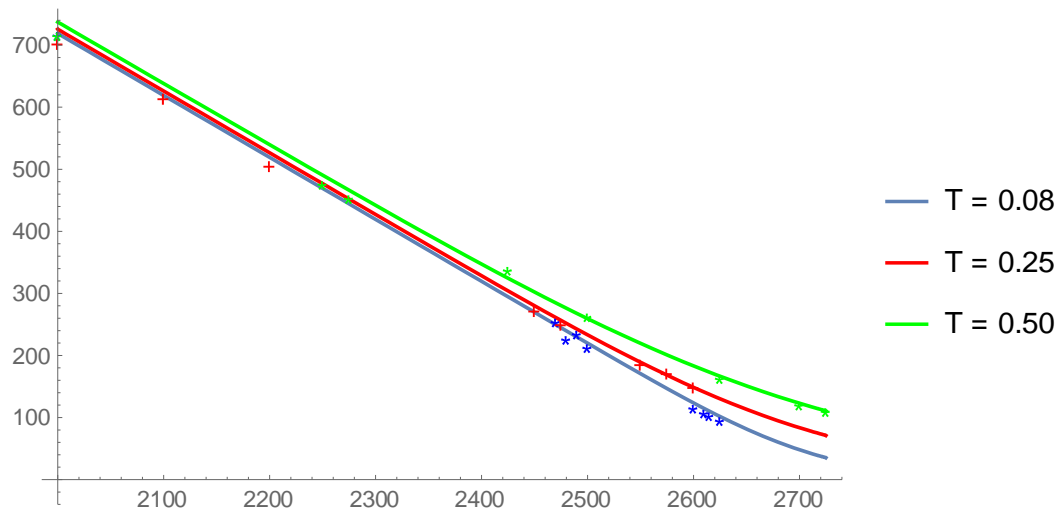


**Εικόνα 5.3.4:** Το Contour Plot του συναρτησοειδούς της μεθόδου NLS για το υπόδειγμα Merton με τιμές παραμέτρων  $m = 4.61762$  και  $v = 0.976682$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο της διόρθωσης μέσω σχετικής εντροπίας στο υπόδειγμα του Merton με εκ των προτέρων Martingale μέτρο πιθανότητας με παραμέτρους:

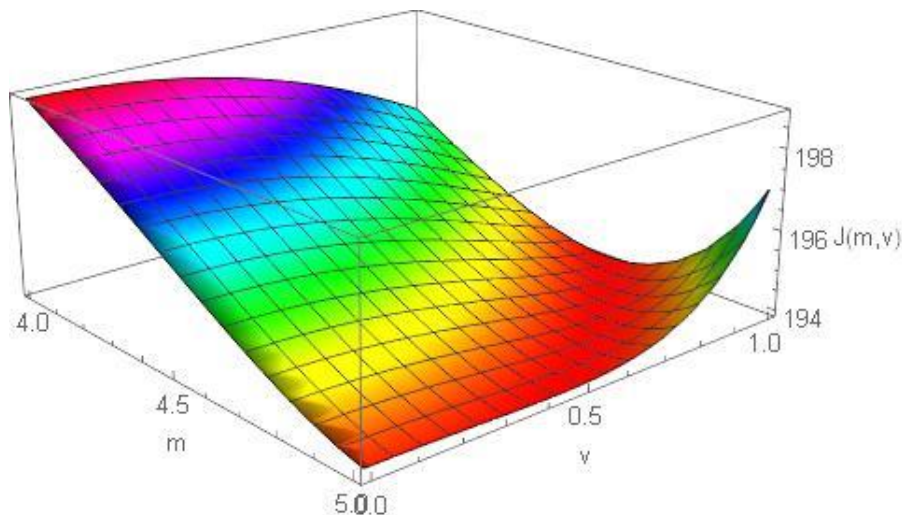
$$(\sigma, \lambda, m, \nu) = (0.116582, 0.000111358, -5.14733, 4.53296)$$

και σταθερά κανονικοποίησης ίση με  $\alpha = 0.03$ , αξιολογήθηκε ότι το αναμενόμενο πλήθος αλμάτων και η μεταβλητότητα του μεγέθους τους, αντίστοιχα, είναι ίσα με  $m = 4.48722$  και  $\nu = 1.10215$ . Ο αλγόριθμος χρειάστηκε 12.25 δευτερόλεπτα για να εκτελεστεί, πετυχαίνοντας τιμή μέσου τετραγωνικού σφάλματος περίπου ίση με 193.946.

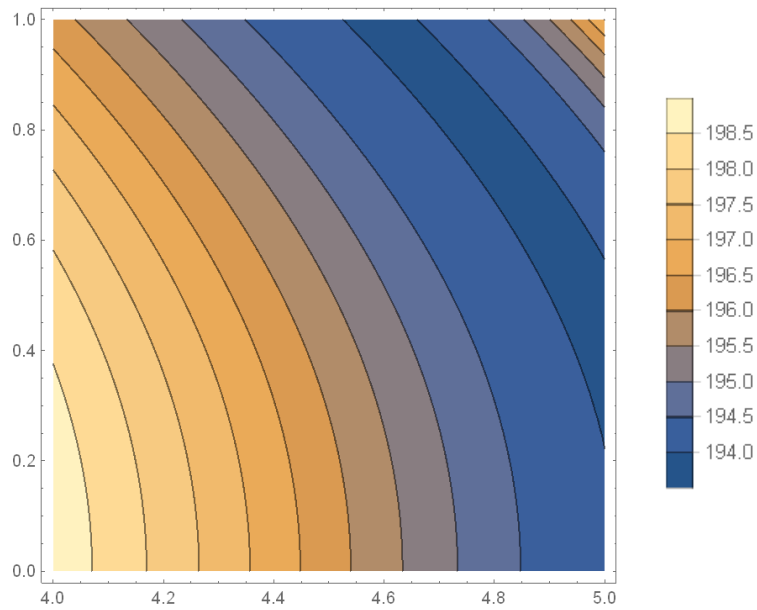


**Εικόνα 5.3.5:** Προσέγγιση των τιμών αγοράς μέσω του υποδείγματος Merton για τιμές των παραμέτρων  $m = 4.48722$  και  $\nu = 1.10215$

Παρακάτω παρατίθεται το τρισδιάστατο γράφημα του συναρτησοειδούς καθώς και το αντίστοιχο Contour Plot (βλ. Παράρτημα Β.7).



**Εικόνα 5.3.6:** Το γράφημα του συναρτησοειδούς της μεθόδου RE για το υπόδειγμα Merton με τιμές παραμέτρων  $m = 4.48722$  και  $\nu = 1.10215$

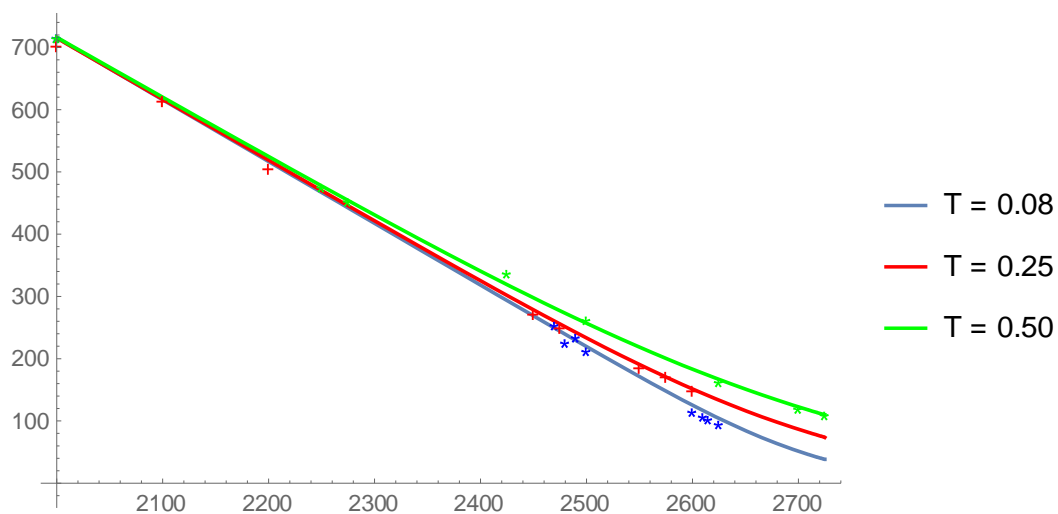


**Εικόνα 5.3.7:** Το Contour Plot του συναρτησοειδούς της μεθόδου RE για το υπόδειγμα Merton με τιμές παραμέτρων  $m = 4.48722$  και  $v = 1.10215$

Αναφορικά με το υπόδειγμα του Κου, ελαχιστοποιώντας ως προς το διάνυσμα παραμέτρων  $(\sigma, \eta_1, \eta_2, \lambda, p)$ , καταλήγουμε στο αποτέλεσμα ότι οι τιμές των παραμέτρων μέσω των οποίων το υπόδειγμα περιγράφει ικανοποιητικά την τιμή του αξιογράφου ισούνται με:

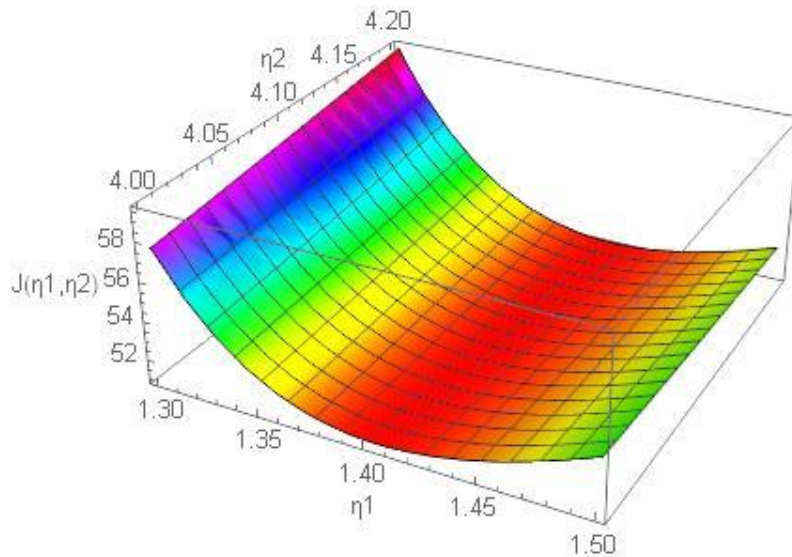
$$(S_0, K, T, r, \sigma, \eta_1, \eta_2, \lambda, p) = (2716, K_{i,j}, T_j, r_j, 0.1315, 1.4018, 3.9645, 0.0568, 0.02232)$$

όπου  $K_{i,j}, r_j$  και  $T_j i = 1, 2, \dots, 10, j = 1, 2, 3$  όπως παραπάνω. Σημειώνεται ότι για το υπόδειγμα του Κου είχαμε ακρίβεια 1 βήματος κατά την εκτέλεση του αλγορίθμου.

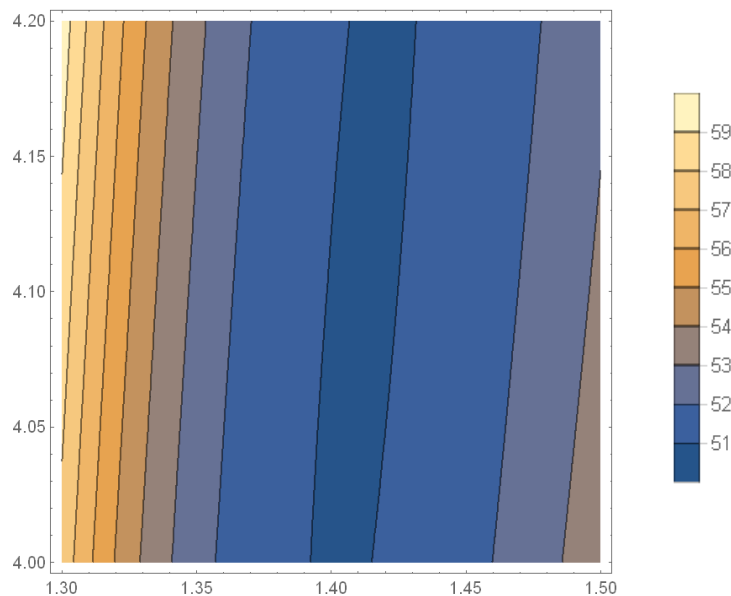


**Εικόνα 5.3.8:** Προσέγγιση των τιμών αγοράς μέσω του υποδείγματος Κου για τιμές των παραμέτρων  $\eta_1 = 1.41173$  και  $\eta_2 = 4.10756$

Διατηρώντας τις παραμέτρους  $\sigma, \lambda, \rho$  σταθερές και ίσες με τις εκτιμηθείσες τιμές τους ελαχιστοποιούμε εκ νέου το συναρτησοειδές ως προς τις μεταβλητές  $\eta_1, \eta_2$ . Η μέθοδος NLS αξιολόγησε ότι το αναμενόμενο μέγεθος θετικών και αρνητικών αλμάτων, αντίστοιχα, ισούνται με  $\eta_1 = 1.41173$  και  $\eta_2 = 4.10756$ . Ο αλγόριθμος χρειάστηκε 344.267 δευτερόλεπτα για να εκτελεστεί, πετυχαίνοντας τιμή μέσου τετραγωνικού σφάλματος περίπου ίση με 50.9326. Παρακάτω παρατίθεται το τρισδιάστατο γράφημα του συναρτησοειδούς καθώς και το αντίστοιχο Contour Plot (βλ. Παράρτημα Β.7).

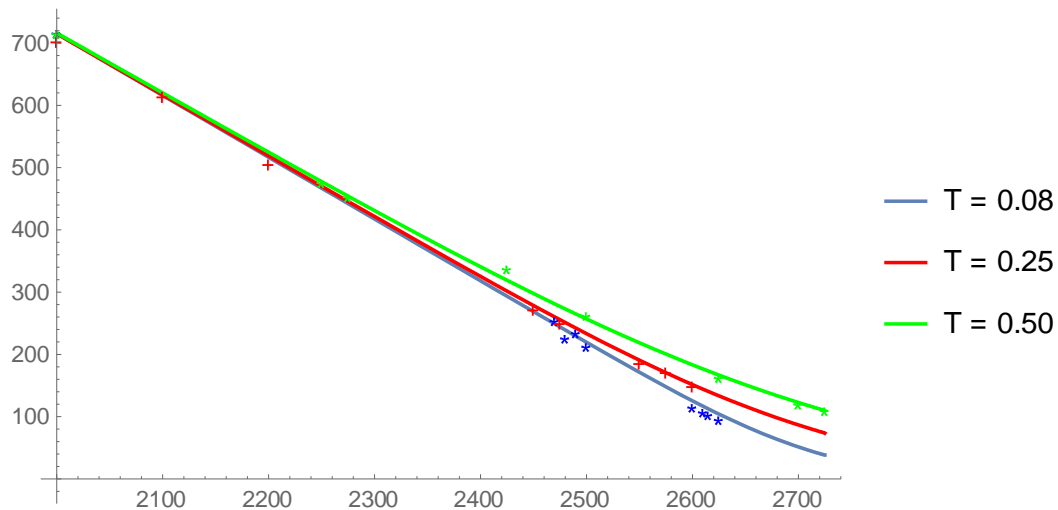


**Εικόνα 5.3.9:** Το γράφημα του συναρτησοειδούς της μεθόδου NLS για το υπόδειγμα Κου με τιμές παραμέτρων  $\eta_1 = 1.41173$  και  $\eta_2 = 4.10756$



**Εικόνα 5.3.10:** Το Contour Plot του συναρτησοειδούς της μεθόδου NLS για το υπόδειγμα Κου με τιμές παραμέτρων  $\eta_1 = 1.41173$  και  $\eta_2 = 4.10756$

Εφαρμόζοντας την μέθοδο της διόρθωσης μέσω σχετικής εντροπίας στο υπόδειγμα του Kou με εκ των προτέρων Martingale μέτρο πιθανότητας με παραμέτρους  $(\sigma, \eta_1, \eta_2, \lambda, p) = (0.1315, 1.41173, 4.10756, 0.0568, 0.02232)$  και σταθερά κανονικοποίησης ίση με  $\alpha = 0.03$ , αξιολογήθηκε ότι το αναμενόμενο μέγεθος θετικών και αρνητικών αλμάτων, αντίστοιχα, είναι ίσα με  $\eta_1 = 1.41173$  και  $\eta_2 = 4.10756$ . Ο αλγόριθμος χρειάστηκε 350.250 δευτερόλεπτα για να εκτελεστεί, πετυχαίνοντας τιμή μέσου τετραγωνικού σφάλματος περίπου ίση με 50.9326.



**Εικόνα 5.3.11:** Προσέγγιση των τιμών αγοράς μέσω του υποδείγματος Kou για τιμές των παραμέτρων  $\eta_1 = 1.41173$  και  $\eta_2 = 4.10756$

Το τρισδιάστατο γράφημα του συναρτησοειδούς καθώς και το αντίστοιχο Contour Plot της μεθόδου RE προκύπτουν να είναι τα ίδια με εκείνα της μεθόδου NLS και συνεπώς παραλείπονται. Οι Πίνακες με τις εκτιμηθείσες τιμές αγοράς, τις παρατηρηθείσες τιμές αγοράς του παραγώγου SPX, τα σφάλματα απόκλισης, τα τετραγωνικά σφάλματα απόκλισης, το μέσο τετραγωνικό σφάλμα και τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου για τα υποδείγματα των Merton και Kou που εκτιμήθηκαν μέσω των μεθόδων βαθμονόμησης NLS και RE παρουσιάζονται στις επόμενες σελίδες.



		<i>Merton Call</i>	<i>Call Price</i>	$\epsilon$	$\epsilon^2$
<i>Exercise Date</i>	<i>20/07/2018</i>	1717.44	1715.00	2.44	5.95
		718.88	717.00	1.88	3.53
		249.60	255.31	-5.71	32.56
		239.64	227.30	12.34	152.37
		229.70	235.84	-6.14	37.76
		219.76	214.00	5.76	33.21
		123.53	116.40	7.13	50.82
		114.60	108.60	6.00	36.02
		110.22	104.30	5.92	35.07
		101.65	96.50	5.15	26.50
<i>21/09/2018</i>	1720.81	1716.25	4.56	20.82	
	815.19	794.25	20.94	438.63	
	725.63	704.50	21.13	446.34	
	626.11	616.25	9.86	97.18	
	526.60	507.59	19.00	361.17	
	280.08	274.23	5.84	34.16	
	256.41	252.07	4.34	18.86	
	189.02	187.79	1.22	1.50	
	168.25	173.41	-5.16	26.67	
	148.59	151.00	-2.41	5.82	
<i>21/12/2018</i>	2617.06	2573.80	43.26	1871.37	
	1726.59	1693.50	33.09	1095.18	
	737.19	716.50	20.69	428.13	
	490.57	477.00	13.57	184.07	
	466.18	454.20	11.98	143.57	
	324.46	338.70	-14.24	202.77	
	259.37	263.80	-4.43	19.63	
	166.57	164.12	2.45	6.00	
	123.03	121.40	1.63	2.66	
	110.72	111.00	-0.28	0.08	
<i>MSE</i>				193.95	
<i>ETA</i>				5.39	

**Πίνακας 5.3.2:** Εκτιμηθείσες τιμές αγοράς, παρατηρηθείσες τιμές αγοράς του παραγωγού, σφάλματα απόκλισης, τετραγωνικά σφάλματα απόκλισης, μέσο τετραγωνικό σφάλμα και χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου μέσω του υποδείγματος Merton που προέκυψαν για τιμές των παραμέτρων  $m = 4.61762$  και  $v = 0.976682$

		<i>Merton Call</i>	<i>Call Price</i>	$\epsilon$	$\epsilon^2$
<i>Exercise Date</i>	<i>20/07/2018</i>	1717.44	1715.00	2.44	5.95
		718.88	717.00	1.88	3.53
		249.60	255.31	-5.71	32.56
		239.64	227.30	12.34	152.37
		229.70	235.84	-6.14	37.76
		219.76	214.00	5.76	33.21
		123.53	116.40	7.13	50.82
		114.60	108.60	6.00	36.02
		110.22	104.30	5.92	35.07
		101.65	96.50	5.15	26.50
<i>21/09/2018</i>	1720.81	1716.25	4.56	20.82	
	815.19	794.25	20.94	438.63	
	725.63	704.50	21.13	446.34	
	626.11	616.25	9.86	97.18	
	526.60	507.59	19.00	361.17	
	280.08	274.23	5.84	34.16	
	256.41	252.07	4.34	18.86	
	189.02	187.79	1.22	1.50	
	168.25	173.41	-5.16	26.67	
	148.59	151.00	-2.41	5.82	
<i>21/12/2018</i>	2617.06	2573.80	43.26	1871.37	
	1726.59	1693.50	33.09	1095.18	
	737.19	716.50	20.69	428.13	
	490.57	477.00	13.57	184.07	
	466.18	454.20	11.98	143.57	
	324.46	338.70	-14.24	202.77	
	259.37	263.80	-4.43	19.63	
	166.57	164.12	2.45	6.00	
	123.03	121.40	1.63	2.66	
	110.72	111.00	-0.28	0.08	
<i>MSE</i>				193.95	
<i>ETA</i>				12.25	

**Πίνακας 5.3.3:** Εκτιμηθείσες τιμές αγοράς, παρατηρηθείσες τιμές αγοράς του παραγωγού, σφάλματα απόκλισης, τετραγωνικά σφάλματα απόκλισης, μέσο τετραγωνικό σφάλμα και χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου μέσω του υποδείγματος Merton που προέκυψαν για τιμές των παραμέτρων  $m = 4.48722$  και  $v = 1.10215$

		<i>Kou Call</i>	<i>Call Price</i>	$\varepsilon$	$\varepsilon^2$
<i>Exercise Date</i>	<i>20/07/2018</i>	1711.96	1715.00	-3.04	9.26
		715.47	717.00	-1.53	2.35
		249.01	255.31	-6.30	39.75
		239.16	227.30	11.86	140.59
		229.33	235.84	-6.51	42.39
		219.53	214.00	5.53	30.57
		125.37	116.40	8.97	80.46
		116.70	108.60	8.10	65.60
		112.45	104.30	8.15	66.35
		104.12	96.50	7.62	57.99
<i>21/09/2018</i>	1703.74	1716.25	-12.51	156.52	
	803.58	794.25	9.33	87.09	
	715.05	704.50	10.55	111.33	
	616.87	616.25	0.62	0.38	
	518.93	507.59	11.34	128.59	
	278.43	274.23	4.20	17.66	
	255.60	252.07	3.53	12.46	
	190.62	187.79	2.83	8.00	
	170.52	173.41	-2.89	8.36	
	151.40	151.00	0.40	0.16	
<i>21/12/2018</i>	2577.54	2573.80	3.74	14.01	
	1692.61	1693.50	-0.89	0.79	
	716.25	716.50	-0.25	0.06	
	477.50	477.00	0.50	0.25	
	454.12	454.20	-0.08	0.01	
	318.97	338.70	-19.73	389.31	
	256.87	263.80	-6.93	48.00	
	166.71	164.12	2.59	6.70	
	122.65	121.40	1.25	1.56	
	109.79	111.00	-1.21	1.46	
<i>MSE</i>				50.93	
<i>ETA</i>				344.27	

**Πίνακας 5.3.4:** Εκτιμηθείσες τιμές αγοράς, παρατηρηθείσες τιμές αγοράς του παραγωγού, σφάλματα απόκλισης, τετραγωνικά σφάλματα απόκλισης, μέσο τετραγωνικό σφάλμα και χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου μέσω του υποδείγματος Kou που προέκυψαν για τιμές των παραμέτρων  $\eta_1 = 1.41173$  και  $\eta_2 = 4.10756$

### 5.3.3 Σύγκριση υποδειγμάτων

Για την σύγκριση των μοντέλων που προέκυψαν από την εφαρμογή των μεθόδων βαθμονόμησης NLS και RE παραθέτουμε τον επόμενο πίνακα που περιέχει τα αποτελέσματα ισχύος των μοντέλων (εκτιμώμενο χρόνο εκτέλεσης και μέσο τετραγωνικό σφάλμα).

	<i>BS</i>	<i>M<sub>NLS</sub></i>	<i>M<sub>RE</sub></i>	<i>K<sub>NLS</sub></i>	<i>K<sub>RE</sub></i>
ETA	<b>0.984</b>	5.391	12.250	344.267	350.250
MSE	195.937	193.946	193.946	<b>50.933</b>	50.933

*Πίνακας 5.3.5: Σύγκριση των υποδειγμάτων*

Έχοντας ως μοντέλο αναφοράς το μοντέλο των Black – Scholes βλέπουμε ότι το υπόδειγμα του Merton μας προσφέρει ελάχιστα καλύτερα αποτελέσματα, διότι μέσω της μεθόδου NLS κατάφερε να ελαττώσει σε μικρό βαθμό την τιμή του MSE (μείωση κατά περίπου 1.03%), αυξάνοντας όμως παράλληλα τον χρόνο εκτέλεσης του αλγορίθμου. Παρόμοια αποτελέσματα μας παρέχει και η εφαρμογή της μεθόδου RE στο υπόδειγμα, μέσω της οποίας δεν επιτυγχάνεται περαιτέρω μείωση της τιμής του MSE σε σύγκριση με την μέθοδο NLS, τουλάχιστον στο 3<sup>ο</sup> δεκαδικό ψηφίο, αλλά το κόστος σε χρόνο εκτέλεσης είναι φανερά μεγαλύτερο. Η συνεισφορά του αλματικού παράγοντα στο συγκεκριμένο εκτιμώμενο μοντέλο βρέθηκε ότι είναι σχεδόν μηδενική ( $\lambda \approx 0.00011$ ) και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ότι σχεδόν ταυτίζεται με το απλό μοντέλο BS.

Αντίθετα, αναφορικά με το υπόδειγμα του Kou, εκείνο το οποίο παρατηρείται είναι ότι, αν και ο χρόνος εκτέλεσης των δύο αλγορίθμων είναι υπερβολικά μεγάλος συγκριτικά με εκείνον του BS (περίπου 5.5 λεπτά για την βαθμονόμηση του Kou έναντι 1 δευτερολέπτου για το BS), το υπόδειγμα προσαρμόζεται πολύ καλύτερα στα πραγματικά δεδομένα, αφού η τιμή του μέσου τετραγωνικού σφάλματος είναι περίπου ίση με 50.933 (ελαττωμένη σχεδόν κατά 74%) μέσω της εφαρμογής των μεθόδων NLS και RE.

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι, για το δοθέν σύνολο δεδομένων, ως βέλτιστο υπόδειγμα Διαχύσεων με Άλματα με σκοπό την τιμολόγηση των εν λόγω αξιογράφων κρίνεται το υπόδειγμα του Kou όπως προέκυψε μέσω της εφαρμογής της μεθόδου NLS. Οι λόγοι της μη επιλογής του αντίστοιχου υποδείγματος που προέκυψε από την εφαρμογή της μεθόδου RE είναι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγορίθμου σε συνδυασμό με το υπολογιστικό κόστος που απαιτεί η ελαχιστοποίηση ενός συναρτησοειδούς με πολυπλοκότερη μαθηματική έκφραση, καθώς και το γεγονός ότι η μέθοδος αυτή δεν προσέφερε επιπλέον μείωση του MSE κατά την εφαρμογή της.

## 5.4 Πρόβλεψη

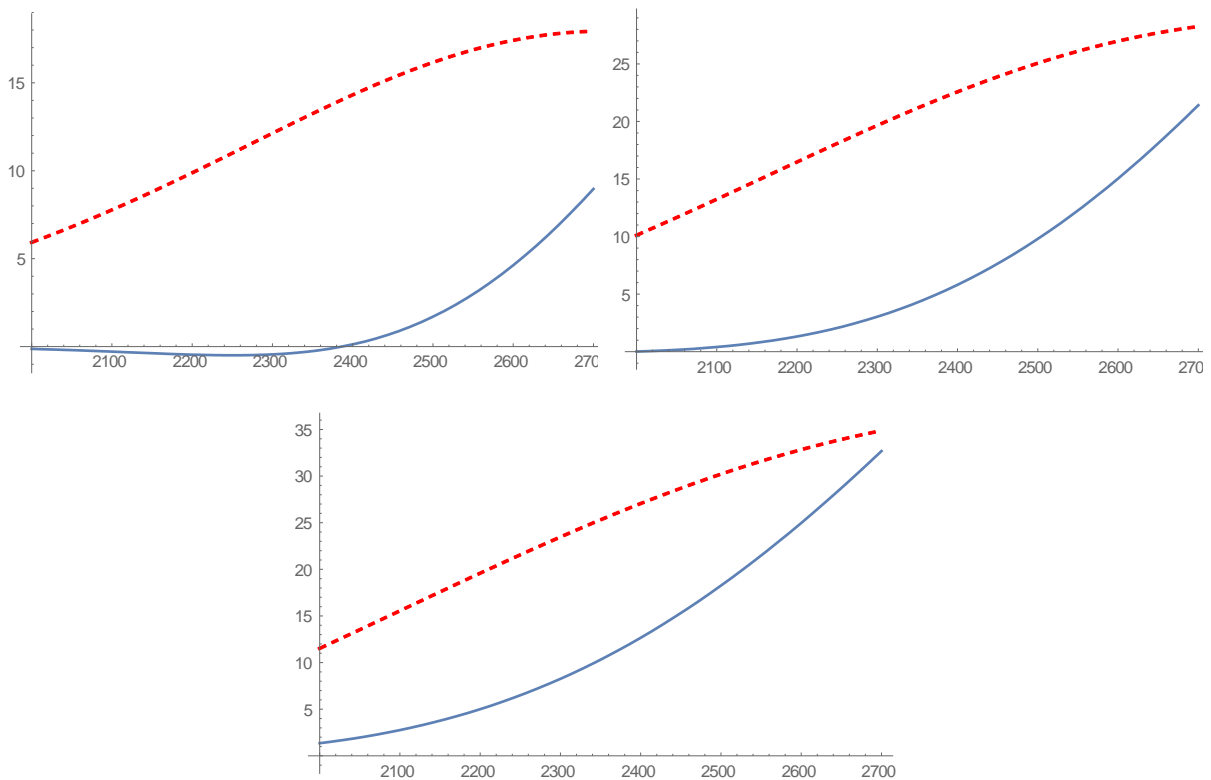
Έχοντας πλέον εκτιμήσει τις παραμέτρους καθενός εκ των τριών υποδειγμάτων τιμολόγησης έχουμε όλα τα απαραίτητα εργαλεία ώστε να μεταβούμε στην πρόβλεψη τιμών

του παραγώγου SPX για διάφορους χρόνους εξάσκησης του δικαιώματος. Για τον λόγο αυτό θα προχωρήσουμε στην πρόβλεψη των τιμών του παραγώγου για χρόνους εξάσκησης  $T = 1, 2$  και  $3$  έτη, με αντίστοιχα επιτόκια μηδενικού κινδύνου  $r = 2.34\%$ ,  $2.54\%$  και  $2.63\%$ , όπως ελήφθησαν από την αγορά στις 29/06/2018, και τιμές εξάσκησης  $K$  όπως φαίνονται στον Πίνακα 5.4.1.

<i>K</i>	<i>28/06/2019</i>			<i>28/06/2020</i>			<i>28/06/2021</i>		
	<i>BS</i>	<i>Merton</i>	<i>Kou</i>	<i>BS</i>	<i>Merton</i>	<i>Kou</i>	<i>BS</i>	<i>Merton</i>	<i>Kou</i>
<b>2000</b>	762.70	762.57	768.62	818.65	818.67	828.77	875.70	877.05	887.22
<b>2070</b>	694.90	694.67	702.09	754.53	754.77	766.81	814.86	817.12	829.19
<b>2140</b>	627.68	627.32	636.27	691.58	692.27	706.11	755.34	758.89	772.52
<b>2210</b>	561.43	560.96	571.53	630.15	631.60	646.95	697.41	702.68	717.39
<b>2280</b>	496.68	496.20	508.36	570.63	573.25	589.66	641.31	648.83	664.03
<b>2350</b>	434.08	433.82	447.33	513.41	517.68	534.56	587.30	597.61	612.61
<b>2420</b>	374.38	374.72	389.09	458.85	465.36	481.96	535.61	549.29	563.33
<b>2490</b>	318.33	319.81	334.32	407.31	416.65	432.15	486.43	504.07	516.34
<b>2560</b>	266.63	269.91	283.63	359.06	371.86	385.35	439.92	462.08	471.78
<b>2630</b>	219.87	225.65	237.52	314.33	331.18	341.77	396.22	423.41	429.73
<b>2700</b>	178.41	187.38	196.34	273.27	294.68	301.52	355.40	388.08	390.27

**Πίνακας 5.4.1:** Αποτελέσματα της πρόβλεψης μέσω των υποδειγμάτων *Black – Scholes*, *Merton* και *Kou* για το παράγωγο SPX με ωρίμανση 1, 2 και 3 έτη

Βασιζόμενοι στα αποτελέσματα της σύγκρισης των υποδειγμάτων που έλαβε χώρα στην Ενότητα 5.3.3, εκείνο το οποίο μπορούμε να ισχυριστούμε είναι ότι, για δικαιώματα αγοράς με τα ίδια ακριβώς χαρακτηριστικά με εκείνα του Πίνακα 5.4.1, αναμένουμε το υπόδειγμα του Kou να προσεγγίζει καλύτερα τις τιμές αγοράς τους συγκριτικά με τα υποδείγματα των *Black – Scholes* και *Merton*. Επίσης, αναμένουμε ότι οι τιμές αγοράς των δύο τελευταίων μεθόδων δεν θα διαφέρουν σημαντικά, πράγμα το οποίο είναι εμφανές και από τα αντίστοιχα γραφήματα διαφορών των τιμών αγοράς των μεθόδων τιμολόγησης των υποδειγμάτων Διαχύσεων με Άλματα από τις αντίστοιχες τιμές αγοράς της μεθόδου *Black – Scholes* που παρατίθενται παρακάτω.



**Εικόνα 5.4.1:** Γραφήματα διαφορών τιμών των μεθόδων Merton και Kou από τις δίκαιες τιμές αγοράς της μεθόδου Black – Scholes με χρόνο εξάσκησης  $T = 1$  (πάνω αριστερά Εικόνα), 2 (πάνω δεξιά Εικόνα) και 3 έτη (κάτω αριστερά Εικόνα). Η μπλε καμπύλη αφορά τις διαφορές των τιμών αγοράς της μεθόδου Merton από εκείνες της μεθόδου Black – Scholes, ενώ η κόκκινη διακεκομμένη στις διαφορές των τιμών αγοράς της μεθόδου Kou από εκείνες της μεθόδου Black – Scholes

Από τα παραπάνω γραφήματα παρατηρούμε ότι οι τιμές αγοράς μεταξύ των μεθόδων Merton και Black – Scholes δεν διαφέρουν σημαντικά για μικρές τιμές εξάσκησης του δικαιώματος, ενώ για μεγαλύτερες τιμές εξάσκησης, καθώς ο χρόνος εξάσκησης του μεγαλώνει, η τιμολόγηση μέσω του υποδείγματος Merton δείχνει να προσεγγίζει τις τιμές αγοράς της μεθόδου Kou. Το τελευταίο αποτέλεσμα είναι περισσότερο εμφανές στο γράφημα που αναφέρεται στην πρόβλεψη των τιμών αγοράς του παραγώγου με ωρίμανση 3 έτη.

# Κεφάλαιο 6

## Σύνοψη – Συμπεράσματα

Στο παρόν κεφάλαιο θα παρατεθεί μία σύντομη ανασκόπηση των βασικότερων αποτελεσμάτων της παρούσης εργασίας καθώς και ορισμένα συμπεράσματα που σχετίζονται με την θεωρία των μη πλήρων αγορών και με την ισχύ των μεθόδων τιμολόγησης που βασίζονται στα υποδείγματα Διαχύσεων με Άλματα σε θεωρητικό αλλά και πρακτικό επίπεδο.

### 6.1 Σύνοψη

Στα πλαίσια της συγκεκριμένης διπλωματικής εργασίας είχαμε ως στόχο την θεωρητική θεμελίωση της οικογένειας των στοχαστικών διαδικασιών, που είναι γνωστή ως Διαχύσεις με Άλματα, και στη συνέχεια την μετάβαση στην αποτίμηση δικαιωμάτων προαίρεσης και τη σύνθεση χαρτοφυλακίων αντιστάθμισης κινδύνου που εφαρμόζονται στην περίπτωση όπου οι αγορές θεωρούνται μη πλήρεις. Για τον λόγο αυτό, βασιζόμενοι στη θεωρία πλήρων αγορών και το υπόδειγμα των Black – Scholes, υπό το οποίο γίνεται η υπόθεση ότι η κίνηση της τιμής ενός αξιογράφου περιγράφεται από μία Γεωμετρική Κίνηση Brown, προχωρήσαμε σε μία σταδιακή επέκταση της συγκεκριμένης θεωρίας, ώστε να περιγράψουμε τα συνθετικά εκείνα στοιχεία τα οποία θα μας βοηθούσαν στο σκοπό μας.

Τα δύο Θεμελιώδη Θεωρήματα τιμολόγησης αξιογράφων που εισήχθησαν στην Ενότητα 3.1 αποτέλεσαν βάση για τη δημιουργία ενός προτύπου αγορών, στις οποίες το υπόδειγμα των Black – Scholes κρίνεται ανεπαρκές για την ακριβή απόδοση της τιμής ενός παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος. Ορισμένα αίτια αυτού του αποτελέσματος περιγράφηκαν εκτενώς στην Ενότητα 3.2, αναδεικνύοντας παράλληλα την καλύτερη περιγραφή της πραγματικής αγοράς που παρέχει αυτό το πρότυπο. Στην Ενότητα 3.4 εισήχθη η οικογένεια στοχαστικών ανελίξεων Lévy, η οποία, χάρη στο Θεώρημα διάσπασης των Lévy – Itô, μας οδήγησε στον ορισμό της οικογένειας των Διαχύσεων με Άλματα. Τα υποδείγματα που ορίσαμε στην Ενότητα 3.5 (Merton και Kou) έθεσαν τα θεμέλια για την περιγραφή στοχαστικών διαδικασιών πεπερασμένου πλήθους αλμάτων, αλλά πιο σημαντικά, για την περιγραφή της κίνησης της τιμής ενός αξιογράφου στις μη πλήρεις αγορές.

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάσαμε όλες εκείνες τις μεθόδους που αποτέλεσαν τον πυρήνα της εργασίας. Πιο συγκεκριμένα, ύστερα από την εισαγωγή των, όχι μοναδικών, μέτρων Martingale για κάθε υπόδειγμα, προχωρήσαμε στην εύρεση της αξίας ενός παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος υπό καθένα απ' αυτά. Σχετικά με την μέθοδο του Merton που ορίστηκε στην Ενότητα 4.1.1, όπως φανερώνει και η μαθηματική της έκφραση, αποτελεί φυσική επέκταση της μεθόδου των Black – Scholes, που όμως διαχειρίζεται περισσότερη πληροφορία χάρη στη χρήση του αλματικού παράγοντα. Παράλληλα, η μέθοδος του Kou, εξ' αιτίας της παραδοχής μίας διπλά εκθετικής κατανομής για την περιγραφή του αλματικού μέρους της αντίστοιχης στοχαστικής διαδικασίας, προσεγγίζει από μία διαφορετική σκοπιά τη διαδικασία της τιμολόγησης, επιχειρώντας να εξαλείψει το φαινόμενο της λεπτοκύρτωσης το οποίο εμφανίζεται αρκετά συχνά στις κινήσεις των τιμών των μετοχών.

Αναφορικά με τις μεθόδους αντιστάθμισης κινδύνου που παρουσιάστηκαν στην Ενότητα 4.2, μελετήσαμε συνοπτικά ορισμένες φιλοσοφίες που σχετίζονται με την μέτρηση και την ελαχιστοποίηση του ρίσκου που αναλαμβάνει ένας επενδυτής από την κατοχή ενός χρηματοοικονομικού τίτλου στις μη πλήρεις αγορές. Αρχικά, εισήχθη η προσέγγιση του Merton η οποία αποτελεί την ίδια αντιστάθμιση Δέλτα που λαμβάνει χώρα στις πλήρεις αγορές υπό το υπόδειγμα των Black – Scholes. Έπειτα, μελετήσαμε τη μέθοδο του Superhedging η οποία βασίζεται στην ιδέα της διατήρησης της αξίας του χαρτοφυλακίου σε θετικά επίπεδα, παρέχοντας ένα διάστημα τιμών για την επίτευξη του εν λόγω σκοπού. Επίσης, μέσω της θεωρίας Μεγιστοποίησης Ωφελιμότητας καταλήξαμε στη μέθοδο της Τετραγωνικής Αντιστάθμισης, η οποία, γενικεύοντας την προσέγγιση του Merton, επιχειρεί να περιορίσει τον κίνδυνο που προέρχεται από τα άλματα στις τιμές της μετοχής.

Τέλος, βασιζόμενοι στις μεθόδους βαθμονόμησης των Μη Γραμμικών Ελαχίστων Τετραγώνων και της Διόρθωσης μέσω της Σχετικής Εντροπίας της Ενότητας 4.3 μεταβήκαμε στην βέλτιστη προσαρμογή των υποδειγμάτων Διαχύσεων με Άλματα σε δεδομένα της αγοράς (Κεφάλαιο 5). Ύστερα από τον έλεγχο της ισχύος των μεθόδων βαθμονόμησης που έλαβε χώρα στην Ενότητα 5.1, αναζητήσαμε το βέλτιστο υπόδειγμα για την τιμολόγηση του εν λόγω παραγώγου χρηματοοικονομικού προϊόντος με σκοπό τη διενέργεια προβλέψεων για τις μελλοντικές του τιμές.

## 6.2 Συμπεράσματα

Η έννοια των μη πλήρων αγορών, και κατ' επέκταση των μεθόδων τιμολόγησης και αντιστάθμισης κινδύνου που περιγράφηκαν στο σύνολο της εργασίας, αποτελεί ένα επιπλέον βήμα κατανόησης και ερμηνείας του μηχανισμού και των ιδιοτήτων της πραγματικής αγοράς. Από μαθηματικής σκοπιάς, τα υποδείγματα και οι μέθοδοι που εισήχθησαν δεν αντικατοπτρίζουν την πραγματικότητα, λόγω του αστάθμητου παράγοντα του απροσδόκητου που τη διέπει, όμως επεκτείνουν την έννοια της πλήρους αγοράς και προσεγγίζουν περισσότερο στην πραγματική της φύση.

Όπως είδαμε, σε θεωρητικό αλλά και πρακτικό επίπεδο, η προσθήκη ενός αλματικού παράγοντα σε ένα υπόδειγμα όπως η Γεωμετρική Κίνηση Brown, εμπεριέχει περισσότερη μετρήσιμη ή μη μετρήσιμη πληροφορία απ' ότι μία συνεχής στοχαστική διαδικασία. Από μαθηματικής άποψης, η προθήκη αυτή συνεπάγεται την ύπαρξη περισσότερων



βαθμών ελευθερίας στο υπόδειγμα και κατά συνέπεια καλύτερη προσαρμογή σε πραγματικά δεδομένα, λόγω του μεγαλύτερου όγκου διαχειρίσιμης πληροφορίας. Ακόμη και σε περιπτώσεις όπου ο αλματικός παράγοντας είναι σχεδόν μηδενικός, όπως συνέβη στην Ενότητα 5.3.2 ( $\lambda_M = 0.000111358$  για το υπόδειγμα του Merton και  $\lambda_K = 0.0568$  για το υπόδειγμα του Kou μέσω της μεθόδου NLS), η προσαρμογή των μεθόδων τιμολόγησης που βασίζονται στα υποδείγματα Διαχύσεων με Άλματα ήταν καλύτερη στα δεδομένα του παραγώγου SPX συγκριτικά με εκείνη του υποδείγματος των Black – Scholes.

Βέβαια, η εφαρμογή μίας σύνθετης θεωρίας όπως αυτή των μη πλήρων αγορών είναι αδύνατο να μην έχει ελαττώματα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελούν οι πολυπλοκότερες μαθηματικές εκφράσεις, συγκριτικά με το απλούστερο υπόδειγμα της Γεωμετρικής Κίνησης Brown και κατ' επέκταση της μεθόδου των Black – Scholes, οι οποίες συχνά οδηγούν σε μεγάλο υπολογιστικό κόστος και κατά συνέπεια αργότερο χρόνο εκτέλεσης, αποτέλεσμα το οποίο είδαμε και κατά την εφαρμογή της μεθόδου τιμολόγησης του Kou. Τέλος, ακόμη και στην περίπτωση όπου ένας επενδυτής επιλέξει να βασιστεί σε κάποιο υπόδειγμα Διαχύσεων με Άλματα για κάποια ενδεχόμενη επενδυτική στρατηγική, λόγω της μαζικότητας της χρήσης υποδειγμάτων πλήρων αγορών στην πράξη από το ευρύ επενδυτικό κοινό, ενδέχεται να αποκλίνει από την πορεία των γεγονότων στην πραγματική αγορά.



# Παράρτημα Α

## Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου και Θεωρίας Πιθανοτήτων

Στο παρόν κεφάλαιο θα εισαχθεί μία σειρά βασικών μαθηματικών εννοιών, στις οποίες βασίζονται τα αποτελέσματα της εργασίας.

Η συγγραφή του κεφαλαίου βασίστηκε στα συγγράμματα Applebaum (2004), Cont & Tankov (2004), Sato (1999), στις πανεπιστημιακές σημειώσεις Μπούτσικας (2005) καθώς και στη διπλωματική εργασία Σφακιανάκης (2013).

### A.1 $\sigma$ - Άλγεβρα

**Ορισμός 1.1:** Έστω  $\Omega$  ένα μη κενό σύνολο. Μία κλάση υποσυνόλων  $\mathfrak{F}$  του  $\Omega$  καλείται  $\sigma$  - άλγεβρα αν πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i)  $\Omega \in \mathfrak{F}$
- (ii) Αν  $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$  τότε και  $\mathcal{A}^c \in \mathfrak{F}$
- (iii) Αν  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots \in \mathfrak{F}$  τότε και  $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i \in \mathfrak{F}$

Το ζεύγος  $(\Omega, \mathfrak{F})$  καλείται  $\mathfrak{F}$  - μετρήσιμος χώρος. Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν η  $\mathfrak{F}$  είναι  $\sigma$ -άλγεβρα τότε  $\emptyset \in \mathfrak{F}$  και αν  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots \in \mathfrak{F}$  τότε και  $\bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i \in \mathfrak{F}$ .

**Ορισμός 1.2:** Ως ελάχιστη  $\sigma$  - άλγεβρα, επί ενός συνόλου ενδεχομένων  $\mathcal{A}$ , ορίζεται η μικρότερη  $\sigma$  - άλγεβρα που περιέχει το  $\mathcal{A}$  και συμβολίζεται με  $\sigma(\mathcal{A})$ .

Για τις ανάγκες διατύπωσης των ορισμών της εργασίας εισαγάγουμε την έννοια της  $\sigma$  - άλγεβρας Borel, η οποία αποτελεί ένα από τα γνωστότερα και βασικότερα παραδείγματα  $\sigma$  - άλγεβρας.

**Ορισμός 1.3:** Ως  $\sigma$  - άλγεβρα Borel ορίζεται η ελάχιστη  $\sigma$  - άλγεβρα η οποία περιέχει όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του  $\mathbb{R}^d$  και συμβολίζεται με  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ . Τα στοιχεία της  $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$  καλούνται «σύνολα Borel».

Τα στοιχεία της  $\sigma$  - άλγεβρας  $\mathfrak{F}$  καλούνται και  $\mathfrak{F}$  - μετρήσιμα σύνολα. Για λόγους ευκολίας, αρκετές φορές, δεδομένης μιας συγκεκριμένης  $\sigma$  - άλγεβρας  $\mathfrak{F}$ , θα καλούμε τα  $\mathfrak{F}$

– μετρήσιμα σύνολα και τον  $\mathfrak{F}$  – μετρήσιμο χώρο απλώς ως μετρήσιμα σύνολα και μετρήσιμο χώρο αντίστοιχα.

## A.2 Μέτρο και Χώρος Μέτρου

**Ορισμός 2.1:** Έστω  $\Omega$  ένα μη κενό σύνολο και  $\mathfrak{F}$  μία  $\sigma$  – άλγεβρα αυτού. Μία συνολοσυνάρτηση  $\mu$  από το  $\mathfrak{F}$  στο  $[0, \infty]$  καλείται *μέτρο* εάν:

- (i)  $\mu(\emptyset) = 0$
- (ii)  $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{A}_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\mathcal{A}_i)$ , για κάθε ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots \in \mathfrak{F}$

Η τριάδα  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mu)$  καλείται *χώρος μέτρου*.

Ένα από τα γνωστότερα μέτρα είναι το μέτρο Lebesgue που ορίζεται στα σύνολα Borel του  $\mathbb{R}$  και αντιστοιχίζει σε κάθε ανοιχτό διάστημα το μήκος του (π.χ.  $\mu((\alpha, \beta)) = \beta - \alpha$ ). Η ποσότητα  $\mu(\Omega)$  καλείται *συνολική μάζα μέτρου*. Σύμφωνα με τις διαφορετικές τιμές που λαμβάνει η συνολική μάζα μέτρου έχουμε τους παρακάτω χαρακτηρισμούς:

- (i) Αν  $\mu(\Omega) < \infty$ , τότε το μέτρο  $\mu$  καλείται «πεπερασμένο»
- (ii) Αν  $\mu(\Omega) = 1$ , τότε το μέτρο  $\mu$  καλείται «μέτρο πιθανότητας» και θα συμβολίζεται ως  $\mathcal{P}(\mathcal{A})$ , όπου  $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}$

Μία τριάδα  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$ , όπου  $\mathcal{P}$  είναι ένα μέτρο πιθανότητας, καλείται *χώρος μέτρου πιθανότητας* ή *χώρος πιθανότητας*.

## A.3 Μετρήσιμη Συνάρτηση και Τυχαία Μεταβλητή

**Ορισμός 3.1:** Μία συνάρτηση  $\varphi$  από ένα μετρήσιμο χώρο  $(\Omega_1, \mathfrak{F}_1)$  σε ένα μετρήσιμο χώρο  $(\Omega_2, \mathfrak{F}_2)$  καλείται *μετρήσιμη συνάρτηση* εάν  $\varphi^{-1}(\mathcal{A}) \in \mathfrak{F}_1$  για κάθε  $\mathcal{A} \in \mathfrak{F}_2$ .

Το σύνολο  $\varphi^{-1}(\mathcal{A})$  συμβολίζεται με  $[\varphi \in \mathcal{A}] := \{\omega \in \Omega_1 \mid \varphi(\omega) \in \mathcal{A}\}$ . Κάνοντας χρήση του ορισμού της μετρήσιμης συνάρτησης είμαστε πλέον σε θέση να διατυπώσουμε τον ορισμό της τυχαίας μεταβλητής.

**Ορισμός 3.2:** Αν  $\Omega$  είναι ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος και  $\varphi$  μία μετρήσιμη συνάρτηση  $\varphi : (\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ , τότε η  $\varphi$  καλείται *τυχαία μεταβλητή*, και συνήθως συμβολίζεται με  $X, Y$ , κ.ο.κ.

Χρησιμοποιώντας την έννοια του επαγόμενου μέτρου πιθανότητας μέσω της τυχαίας μεταβλητής  $X$ , μπορούμε να συνδέσουμε τα μέτρα των ενδεχομένων δύο μετρήσιμων χώρων.

**Ορισμός 3.3:** Έστω ένας χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$  και μία τυχαία μεταβλητή  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Η τυχαία μεταβλητή  $X$  επάγει την πιθανότητα  $\mathcal{P}_X$  του  $(\Omega, \mathfrak{F})$  στην  $\mathcal{P}_X$  που ορίζεται στον  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ , έτσι ώστε για κάθε  $\mathcal{A} \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$  να ισχύει  $\mathcal{P}_X(\mathcal{A}) = \mathcal{P}(X \in \mathcal{A})$ . Το νέο

μέτρο πιθανότητας  $\mathcal{P}_X$  στον χώρο  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$  καλείται *επαγόμενο μέτρο πιθανότητας* μέσω της  $X$  ή *κατανομή* της  $X$ .<sup>8</sup>

Αποδεικνύεται ότι η πιθανότητα  $\mathcal{P}_X$  μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα από τη συνάρτηση κατανομής της  $X$ .

**Ορισμός 3.4:** Έστω ένας χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$  και μία τυχαία μεταβλητή  $X : (\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ . Η συνάρτηση που περιγράφει την  $\mathcal{P}_X$  στον χώρο  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$  καλείται *συνάρτηση κατανομής* της τυχαίας μεταβλητής  $X$  και ορίζεται ως:

$$\mathcal{F}_X(x) = \mathcal{P}(X \leq x) = \mathcal{P}(X \in (-\infty, x]), x \in \mathbb{R}$$

Η συνάρτηση κατανομής της τυχαίας μεταβλητής  $X$  πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i)  $0 \leq \mathcal{F}_X(x) \leq 1, x \in \mathbb{R}$
- (ii)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mathcal{F}_X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_X(x) = 1$
- (iii) Η  $\mathcal{F}_X$  είναι αύξουσα συνάρτηση
- (iv) Η  $\mathcal{F}_X$  είναι δεξιά συνεχής συνάρτηση

Συμπληρωματικά με τη συνάρτηση κατανομής ορίζεται μία ακόμη συνάρτηση, όποτε αυτό είναι δυνατό, η οποία καλείται *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* και εκφράζει την πυκνότητα με την οποία έχει κατανεμηθεί η συνολική πιθανότητα στον  $\mathbb{R}$ .

**Ορισμός 3.5:** Έστω ένας χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$  και μία τυχαία μεταβλητή  $X : (\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ . Εάν υπάρχει μη αρνητική συνάρτηση  $f$ , τέτοια ώστε:

$$\mathcal{F}_X(x) = \int_{-\infty}^x f(z) dz$$

θα καλείται *συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας* της τυχαίας μεταβλητής  $X$ .

## A.4 Μέση Τιμή και Δεσμευμένη Μέση Τιμή

Ένα από τα πλέον χρήσιμα μέτρα για την έκβαση ενός πειράματος τύχης αποτελεί η μέση τιμή. Παρακάτω παρατίθενται οι ορισμοί της μέσης και της δεσμευμένης μέσης τιμής μίας τυχαίας μεταβλητής  $X$  από τη σκοπιά της θεωρίας μέτρου.

**Ορισμός 4.1:** Έστω ένας χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$  και μία τυχαία μεταβλητή  $X : (\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathcal{P}_X)$ . Το ολοκλήρωμα Lebesgue της  $X$

$$E_{\mathcal{P}}(X) = E(X) = \int_{\Omega} X d\mathcal{P}$$

καλείται *μέση τιμή* ή *αναμενόμενη τιμή* της τυχαίας μεταβλητής  $X$  υπό το μέτρο πιθανότητας  $\mathcal{P}$  και συμβολίζεται με  $E_{\mathcal{P}}(X)$  ή απλώς  $E(X)$ .

Προφανώς, η εκτίμηση της έκβασης ενός πειράματος τύχης, βασίζεται στις γνώσεις και στις πληροφορίες που έχουμε στη διάθεσή μας σε σχέση με το πείραμα. Προκειμένου να εκφράσουμε μαθηματικά ότι στην συγκεκριμένη εκτίμηση έχουμε λάβει υπόψη

<sup>8</sup> Υπενθυμίζεται ότι  $\mathcal{P}(X \in \mathcal{A}) = \mathcal{P}([X \in \mathcal{A}]) = \mathcal{P}(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \mathcal{A}\})$ .

κάποια συγκεκριμένη πληροφορία χρησιμοποιούμε την έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής.

**Ορισμός 4.2:** Έστω μία τυχαία μεταβλητή  $X : (\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathcal{P}_X)$  με  $E(|X|) < \infty$ . Μία συνάρτηση  $W : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  καλείται *δεσμευμένη μέση τιμή* της τυχαίας μεταβλητής  $X$  δεδομένης μίας  $\sigma$ -άλγεβρας  $\mathfrak{D} (\subseteq \mathfrak{F})$  και συμβολίζεται με  $W = E(X|\mathfrak{D})$  αν πληροί τις ακόλουθες ιδιότητες:

- (i) Η  $W = E(X|\mathfrak{D})$  είναι μία τυχαία μεταβλητή από τον  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$  στον  $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathcal{P}_X)$ , δηλαδή είναι  $\mathfrak{D}$ -μετρήσιμη και Lebesgue ολοκληρώσιμη
- (ii) Η  $W = E(X|\mathfrak{D})$  ικανοποιεί τη σχέση:

$$\int_G E(X|\mathfrak{D}) d\mathcal{P} = \int_G X d\mathcal{P}, \forall G \in \mathfrak{D} \Leftrightarrow E(E(X|\mathfrak{D}) \cdot 1_G) = E(X \cdot 1_G), \forall G \in \mathfrak{D}$$

όπου η  $1_G$  λαμβάνει τις τιμές 1 και 0, όταν  $\omega \in G$  και  $\omega \notin G$  αντίστοιχα.

Σύμφωνα με τον ορισμό, η έννοια της πληροφορίας εκφράζεται από τη δέσμευση ως προς τη  $\sigma$ -άλγεβρα  $\mathfrak{D}$ . Με αυτόν τον τρόπο γνωρίζουμε εκ των προτέρων ποια ενδεχόμενα έχουν πραγματοποιηθεί στο παρελθόν, με αποτέλεσμα να έχουμε την ευχέρεια αποκλεισμού πιθανών εκβάσεων του πειράματος.

## A.5 Χαρακτηριστική Συνάρτηση

Ένας εναλλακτικός τρόπος μονοσήμαντης περιγραφής της κατανομής μίας τυχαίας μεταβλητής είναι με τη χρήση της χαρακτηριστικής συνάρτησης.

**Ορισμός 5.1:** Έστω ένας χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P})$ . *Χαρακτηριστική συνάρτηση*  $\varphi_X(z) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$  μίας τυχαίας μεταβλητής  $X \in \mathbb{R}^d$  καλείται ο μετασχηματισμός Fourier - Stieltjes της συνάρτησης κατανομής  $\mathcal{F}_X$  της τυχαίας μεταβλητής, και ορίζεται ως:

$$\varphi_X(z) = E(e^{iz'X}) = \int_{\Omega} e^{iz'X(\omega)} \mathcal{P}(d\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iz'x} d\mathcal{F}_X(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{iz'x} f_X(x) dx, i = \sqrt{-1}$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο σύγγραμμα Cont & Tankov (2004, §2.2.3).

Σε αρκετές περιπτώσεις θα κάνουμε χρήση του λογαρίθμου της χαρακτηριστικής συνάρτησης, ο οποίος καλείται *εκθέτης της χαρακτηριστικής συνάρτησης* και συμβολίζεται ως

$$\psi_X(z) = \log(\varphi_X(z)) \Leftrightarrow \varphi_X(z) = e^{\psi_X(z)}$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση κάθε τυχαίας μεταβλητής  $X$ , πληροί τις εξής ιδιότητες:

- (i)  $\varphi_X(0) = 1$  και  $|\varphi_X(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{R}$
- (ii) Υπάρχει για κάθε τυχαία μεταβλητή και για κάθε  $z \in \mathbb{R}$  και είναι συνεχής
- (iii) Καθορίζει τη συνάρτηση κατανομής με μοναδικό τρόπο. Συγκεκριμένα, αν δύο τυχαίες μεταβλητές διαθέτουν την ίδια χαρακτηριστική συνάρτηση, τότε θα ακολουθούν και την ίδια κατανομή (θα είναι ισόνομες)

- (iv) Έστω  $X, Y$  δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με χαρακτηριστικές συναρτήσεις  $\varphi_X(z)$  και  $\varphi_Y(z)$  αντίστοιχα. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής  $X + Y$  θα είναι η  $\varphi_{X+Y}(z) = \varphi_X(z)\varphi_Y(z)$ .

## A.6 Στοχαστική Ανέλιξη

Δεδομένης της ανάγκης περιγραφής και μοντελοποίησης διαδικασιών, τα οποία εξελίσσονται χρονικά κατά τρόπο που περιέχει τυχειότητα, και συνεπώς δεν μπορούν να περιγραφούν ικανοποιητικά από μία τυχαία μεταβλητή, προχωρούμε στην εισαγωγή της έννοιας της στοχαστικής ανέλιξης.

**Ορισμός 6.1:** Στοχαστική ανέλιξη ή διαδικασία καλείται κάθε από κοινού μετρήσιμο σύνολο τυχαίων μεταβλητών  $X_t : (\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathcal{P}_X)$  της μορφής

$$\{X_t, t \in T\} = \{X_t(\omega), t \in T, \omega \in \Omega\}$$

όπου το  $t$  συνήθως συμβολίζει τον χρόνο.

Αναλόγως με το εάν ο χρόνος  $t$  λαμβάνει διακριτές ή συνεχείς τιμές, καλούμε τη στοχαστική διαδικασία *διακριτού* ή *συνεχούς* χρόνου.

Όπως προκύπτει από τον ορισμό, μία στοχαστική ανέλιξη αποτελεί συνάρτηση δύο μεταβλητών, του χρόνου  $t (\in [0, \infty))$  και του  $\omega (\in \Omega)$ . Συνεπώς, μπορούμε να την αντιμετωπίσουμε ως:

- (i) Μία τυχαία μεταβλητή, διατηρώντας σταθερό τον χρόνο  $t$ ,

$$X_t(\omega), \omega \in \Omega$$

- (ii) Μία συνάρτηση του χρόνου, διατηρώντας σταθερό το  $\omega$ ,

$$X_t(\omega), t \in T$$

Μία έννοια που μπορεί να θεωρηθεί ότι επεκτείνει ασθενώς τη συνέχεια συνάρτησης στις στοχαστικές ανελίξεις είναι η έννοια της στοχαστικής συνέχειας.

**Ορισμός 6.2:** Μια στοχαστική ανέλιξη  $\{X_t, t \in T\}$  στον  $\mathbb{R}$  καλείται *στοχαστικά συνεχής*, εάν

$$\lim_{s \rightarrow t} \mathcal{P}(|X_s - X_t| > \varepsilon) = 0, \forall t \geq 0, \forall \varepsilon > 0$$

Ουσιαστικά, η έννοια της στοχαστικής συνέχειας μιας στοχαστικής ανέλιξης  $X_t$  αφορά την τυχειότητα των χρόνων εμφάνισης σημείων ασυνέχειας (αλμάτων) στις τροχιές της και όχι αυτή καθαυτή τη συνέχεια ή ασυνέχεια των τροχιών της.

Σημαντικό ρόλο στη μελέτη συγκεκριμένων προβλημάτων κατέχουν οι ιδιότητες των προσαυξήσεων των στοχαστικών ανελίξεων, γεγονός που έχει οδηγήσει στη μελέτη και ταξινόμηση τους βάσει των ιδιοτήτων των προσαυξήσεων τους.

**Ορισμός 6.3:** Έστω μία στοχαστική ανέλιξη  $\{X_t, t \in T\}, X_t: (\Omega, \mathfrak{F}, \mathcal{P}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathcal{P}_X)$ . Θα λέμε ότι:

- (i) Η  $\{X_t, t \in T\}$  διαθέτει *ανεξάρτητες προσαυξήσεις*, εάν η τυχαία μεταβλητή  $X_{t+h} - X_t$  είναι ανεξάρτητη από τις  $X_u, u \in [0, t]$ , για κάθε  $t, h \geq 0$

- (ii) Η  $\{X_t, t \in T\}$  διαθέτει ισόνομες προσαυξήσεις, εάν η κατανομή κάθε τυχαίας μεταβλητής  $X_{t+h} - X_t$  δεν εξαρτάται από το  $t$ , για κάθε  $t, h$

## A.7 Διήθηση, Προσαρμοσμένες Διαδικασίες και Θεωρία Martingale

Σε προηγούμενη παράγραφο, και συγκεκριμένα κατά τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής, αναφερθήκαμε στη μαθηματική διατύπωση της έννοιας της πληροφορίας. Στην παρούσα παράγραφο θα ορίσουμε αυστηρά τη συγκεκριμένη έννοια και μέσω αυτής θα επεκταθούμε στον ορισμό του Martingale.

**Ορισμός 7.1:** Έστω ένας χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ . Μία οικογένεια  $\sigma$  - αλγεβρών  $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ , με την ιδιότητα  $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$  για κάθε  $s, t$  με  $0 \leq s \leq t$ , θα καλείται *διήθηση* ή (*μελλοντική*) *πληροφορία*.

Μέσω του προηγούμενου ορισμού, στην περίπτωση όπου το  $t$  αποτελεί παράμετρο χρόνου, ουσιαστικά επιτυγχάνουμε να εκφράσουμε μέσω της δέσμευσης ως προς μία διήθηση  $\mathcal{F}_t$  την πληροφορία που έχουμε στην κατοχή μας έως και αυτή τη χρονική στιγμή. Συνεπώς, η δέσμευση ως προς μία διήθηση  $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  μπορεί να έχει την έννοια της αυξανόμενης με το χρόνο πληροφορίας που θα έχουμε στη διάθεσή μας ως τον χρόνο  $s, 0 \leq s \leq t$ .

**Ορισμός 7.2:** Έστω ένας χώρος πιθανότητας  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$  και μία στοχαστική ανέλιξη  $\{X_t, t \geq 0\}$ . Η διήθηση  $\sigma(X_t, s \leq t), s, t \geq 0$  θα καλείται *φυσική διήθηση* της  $\{X_t, t \geq 0\}$  και θα συμβολίζεται με  $\mathcal{F}_t^X, t \geq 0$ .

Η φυσική διήθηση, επομένως, αποτελεί μία διήθηση που κάθε χρονική στιγμή  $t$ , εμπειρίχει όλη την πληροφορία που έχουμε στη διάθεσή μας, δεδομένης μίας στοχαστικής ανέλιξης  $\{X_t, t \geq 0\}$  μέχρι και τον χρόνο  $t$ .

**Ορισμός 7.3:** Έστω μία διήθηση  $\mathcal{F}_t, t \geq 0$  και μία στοχαστική ανέλιξη  $\{X_t, t \geq 0\}$ . Η  $\{X_t, t \geq 0\}$  θα καλείται *προσαρμοσμένη* στη διήθηση  $\mathcal{F}_t, t \geq 0$ , εάν για κάθε  $t \geq 0$  η  $\sigma(X_t) \subseteq \mathcal{F}_t$ , δηλαδή, εάν η  $X_t$  είναι  $\mathcal{F}_t$  - μετρήσιμη.

Συνεπώς, αναφερόμενοι σε μία στοχαστική ανέλιξη  $\{X_t, t \geq 0\}$  προσαρμοσμένη επί μίας διήθησης  $\mathcal{F}_t$  αναφερόμαστε σε μία στοχαστική ανέλιξη, της οποίας η τιμή την χρονική στιγμή  $t$ , δοθείσης της διήθησης  $\mathcal{F}_t$ , είναι γνωστή.

Βασιζόμενοι σε αυτό το αποτέλεσμα μπορούμε να ορίσουμε την έννοια του Martingale.

**Ορισμός 7.4:** Μία στοχαστική ανέλιξη  $\{X_t, t \geq 0\}$  θα καλείται *Martingale* ως προς τη διήθηση  $\mathcal{F}_t, t \geq 0$  ( $\mathcal{F}_t$  - Martingale) αν πληροί τα εξής:

- (i) Η  $\{X_t, t \geq 0\}$  είναι  $\mathcal{F}_t$  - μετρήσιμη
- (ii)  $E(|X_t|) < \infty$
- (iii)  $E(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s, s < t$ , με πιθανότητα 1<sup>9</sup>

<sup>9</sup> Εάν  $E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s$  είναι submartingale ενώ εάν  $E(X_t | \mathcal{F}_s) \leq X_s$  είναι supermartingale,  $s < t$ .



Η έννοια του martingale είναι άμεσα συνδεδεμένη με τη συμμετοχή ενός επενδυτή σε ένα «δίκαιο τυχερό παίγνιο». Το αξιοσημείωτο αυτό αποτέλεσμα προκύπτει κυρίως από την υπόθεση **(iii)** του παραπάνω ορισμού, διότι αν θεωρήσουμε ότι βρισκόμαστε στο χρόνο  $s < t$ , τότε το αναμενόμενο μας κέρδος στον χρονικό διάστημα  $[s, t]$  θα ισούται με:

$$E(X_t - X_s | \mathcal{F}_s) = E(X_t | \mathcal{F}_s) - E(X_s | \mathcal{F}_s) = E(X_t | \mathcal{F}_s) - X_s = 0$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τις προαναφερθείσες έννοιες παραπέμπουμε στα συγγράμματα Applebaum (2004, §1.1), Cont & Tankov (2004, §2.4.2), καθώς και στις πανεπιστημιακές σημειώσεις Μπούτσικας (2005, §5.3).



# Παράρτημα Β

## Κώδικες Mathematica®

### B.1 Η κίνηση Brown

Κώδικας κατασκευής μίας τυχαίας πραγματοποίησης της τυχαίας μεταβλητής  $X_t, t \in [0,1]$  με παραμέτρους  $(\mu, \sigma) = (0,0.5)$  στο Mathematica®.

```
(* Brownian Motion *)
(* ----- *)

(* Option's Parameters*)
m=0;sigma=0.5;t=1;n=1000;d=t/n;i=1;X=0;XL=Table[0,{n}];

(* Model Simulation *)
Do[
  X=X+m*d+sigma*d^0.5*RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  XL[[i]]={i*d,X};
  ,{i,1,n}]
PrependTo[XL,{0,0}];

(* Exports *)
ListPlot[XL,Joined->True]

(* Source: Μπούτσικας (2004) *)
```

Κώδικας κατασκευής 10 τυχαίων πραγματοποιήσεων της τυχαίας μεταβλητής  $X_t, t \in [0,1]$  με παραμέτρους  $(\mu, \sigma) = (0,0.5)$  στο Mathematica.

```
(* Brownian Motion *)
(* ----- *)

(* Option's Parameters*)
m=0;sigma=0.5;t=1;n=1000;d=t/n;i=1;Do[X=0;XL=Table[0,{n}];

(* Model Simulation *)
```

```

Do[
  X=X+m*d+sigma*d^0.5*RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  XL[[i]]={i*d,X};
  ,{i,1,n}]
PrependTo[XL,{0,0}];
Pl[j]=ListLinePlot[XL,PlotRange->{-2,2},PlotStyle->ColorData
[j,"ColorList"]];,{j,1,10}}

(* Exports *)
Show[Table[Pl[i],{i,1,10}]]

(* Source: Μπούτσικας (2004) *)

```

## B.2 Η Γεωμετρική κίνηση Brown

Κώδικας κατασκευής μίας τυχαίας πραγματοποίησης της τυχαίας μεταβλητής  $S_t, t \in [0,1]$  με παραμέτρους  $(\mu, \sigma) = (-0.5, 0.5)$  στο Mathematica®.

```

(* Geometric Brownian Motion *)
(* ----- *)

(* Option's Parameters*)
m=-0.5;sigma=0.5;t=1;n=1000;d=t/n;
S=1;SL=Table[0,{n}];

(* Model Simulation *)
Do[
  S=S*Exp[m*d+sigma*d^0.5*RandomReal[NormalDistribution[0,1]]];
  SL[[i]]={i*d,S};
  ,{i,1,n}]
PrependTo[SL,{0,1}];

(* Exports *)
ListPlot[SL,Joined->True]

(* Source: Μπούτσικας (2004) *)

```

Κώδικας κατασκευής 10 τυχαίων πραγματοποιήσεων της τυχαίας μεταβλητής  $S_t, t \in [0,1]$  με παραμέτρους  $(\mu, \sigma) = (-0.5, 0.5)$  στο Mathematica.

```

(* Geometric Brownian Motion *)
(* ----- *)

(* Option's Parameters*)
m=-0.5;sigma=0.5;t=1;n=1000;d=t/n;

(* Model Simulation *)
Do[
  S=1;SL=Table[0,{n}];
  Do[

```

```

S=S*Exp[m*d+sigma*d^0.5*RandomReal[
NormalDistribu tion[0,1]]];
SL[[i]]={i*d,S};
, {i,1,n}
PrependTo[SL,{0,1}];
Pl[j]=ListLinePlot[SL,PlotRange->{0,2},PlotStyle->ColorData
[j,"ColorList"]];, {j,1,10}

(* Exports *)
Show[Table[Pl[i], {i,1,10}], Joined->True]

(* Source: Μπούτσικας (2004) *)

```

### B.3 Ανελίξεις Lévy και Απείρωσ Διαιρετές Κατανομές

Κώδικας κατασκευής μίας τυχαίας πραγματοποίησης της σ.δ. Poisson  $N_t, t \in [0,1]$  με παράμετρο έντασης  $\lambda = 10$  στο Mathematica®.

```

(* Poisson Process *)
(* ----- *)

(* Model's Parameters*)
λ=10;T=1;

(* Jump Times Simulation *)
Traj={{0,0}};JumpTimes={};t=0;
While[
t<=T,t=t+Random[ExponentialDistribution[λ]];
AppendTo[JumpTimes,t];
];

(* Model Simulation *)
For[
i=1,i<=Length[JumpTimes],i++,
AppendTo[Traj,{JumpTimes[[i]],i-1}];
AppendTo[Traj,{JumpTimes[[i]],i}];
];

(* Exports *)
ListPlot[Traj,Joined->True,
PlotRange->{{0,T},Min[Traj[[All,2]]],Max[Traj[[All,2]]]}]

(* Source: Σφακιανάκης (2013) *)

```

Κώδικας κατασκευής 10 τυχαίων πραγματοποιήσεων της της σ.δ. Poisson  $N_t, t \in [0,1]$  με παράμετρο έντασης  $\lambda = 10$  στο Mathematica®.

```

(* Poisson Process *)
(* ----- *)

```

```

(* Model's Parameters*)
λ=10;T=1;

(* Model Simulation *)
Do[
  Traj={{0,0}};JumpTimes={};t=0;
  While[
    t<=T,t=t+Random[ExponentialDistribution[λ]];
    AppendTo[JumpTimes,t];
  ];
  For[
    i=1,i<=Length[JumpTimes],i++,
    AppendTo[Traj,{JumpTimes[[i]],i-1}];
    AppendTo[Traj,{JumpTimes[[i]],i}];
  ];
  Pl[j]=ListPlot[Traj,Joined->True,PlotRange->{{0,T},
  Min[Traj[[All,2]],Max[Traj[[All,2]]]}];
  ,{j,1,10}];

(* Exports *)
Show[Table[Pl[i],{i,1,10}],Joined->True]

(* Source: Σφακιανάκης (2013) *)

```

Κώδικας κατασκευής 10 τυχαίων πραγματοποιήσεων της της σύνθετης σ.δ. Poisson  $N_t, t \in [0,1]$  με παράμετρο έντασης  $\lambda = 10$  με κατανομή μεγέθους αλμάτων  $F \sim N(0,1)$  στο Mathematica®.

```

(* Compound Poisson Process *)
(* ----- *)

(* Model's Parameters*)
n=10000;T=1;γ=3;λ=10;
JumpTimes={};JumpSizes={};Traj={};PoisRN1=0;
sum=0;dt=0;t=0;γ=0;i=0;t=0;

(* Jump Times Simulation *)
While[
  t<=T,t=t+Random[ExponentialDistribution[λ]];
  AppendTo[JumpTimes,t];
  PoisRN1=PoisRN1+1;
];

(* Jump Sizes Simulation *)
For[
  i=1,i<=PoisRN1,i++,
  AppendTo[JumpSizes,Random[NormalDistribution[0,1]]];
];
dt=T/n;sum=0;i=1;

(* Model Simulation *)
For[
  t=0,t<=T,t=t+dt,
  If[
    i<=PoisRN1&& t>=JumpTimes[[i]],

```

```

sum=sum+JumpSizes[[i]];
i++;];
y=(γ*t)+sum;
AppendTo[Traj,{t,y}];
];

(* Exports *)
ListPlot[Traj,PlotMarkers->{"."},PlotRange->{{0,T},Min[Traj[[All,2]]],Max[Traj[[All,2]]]}]

(* Source: Σφακιανάκης (2013) *)

```

## B.4 Διαχύσεις με Άλματα

Κώδικας κατασκευής του υποδείγματος Merton με μέρος διάχυσης που ακολουθεί μία Κίνηση Brown  $BM(0.025,0.09)$  και με αλματικό μέρος με κατανομή μεγέθους αλμάτων την  $LN(0.046,1.009)$  και με πλήθος αλμάτων που ακολουθεί την κατανομή  $Poisson(1)$  στο Mathematica®.

```

(* Merton's Model *)
(* ----- *)

(* Option's Parameters *)
S0=100;T=3;n=1000;dt=T/n;σ=0.3;r=0.07;
μ=r-0.5*σ^2;S=Table[S0,{n+1}];SL=Table[{0,S0},{n + 1}];

(* Model's Parameters*)
λ=1;m=0;v=0.3;k=Exp[m+0.5*v^2]-1;
StepJumpIndex={};time=dt;

(* Jump Time Simulation *)
JumpTime=Floor[-Log[RandomReal[]]/λ,dt];j=1;
While[
time<JumpTime&&time<T,time=time+dt;j++;
If[
time==JumpTime,AppendTo[StepJumpIndex,j];
JumpTime=JumpTime+Floor[-Log[RandomReal[]]/λ,dt]];
];

(* Simulation of the Jump Diffusion Model *)
Do[
Z=RandomReal[NormalDistribution[]];
Y=If[
MemberQ[StepJumpIndex,i],
RandomReal[NormalDistribution[m,v]],0];
S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[(μ-λ*k)*dt+σ*Sqrt[dt]*Z+Y];
SL[[i]]={i*dt,S[[i]]};
,{i,2,n + 1}];

(* Exports *)
R1=ListPlot[SL,PlotRange->All];
R2=ListPlot[SL,Joined->True,PlotStyle->Dashed,PlotRange->All];
Show[R1,R2]

```

```
Print["The average Jump Size is equal to: ", (k+1)*100, "%"];
If[
  StepJumpIndex=={},Print["There were no Jumps"],
  Print["Jump(s) occurred at the following step(s): ",
  StepJumpIndex]];
```

(\* Source: Μποζούδης (2013) \*)

Κώδικας κατασκευής του υποδείγματος Kou με μέρος διάχυσης που ακολουθεί μία Κίνηση Brown  $BM(0.007,0.09)$  και με αλματικό μέρος με κατανομές μεγέθους αλμάτων τις  $Exp(2), Exp(1)$  με σχετική πιθανότητα να λάβει χώρα ένα θετικό άλμα ίση με 0.6 και με πλήθος αλμάτων που ακολουθεί την κατανομή  $Poisson(1)$  στο Mathematica®.

```
(* Kou's Model *)
(* ----- *)

(* Option's Parameters *)
S0=100;T=3;n= 1000;dt=T/n;σ=0.3;r=0.07;μ=r;
S=Table[S0,{n+1}];Y=Table[1,{n+1}];SL=Table[{0,S0},{n+1}];

(* Model's Parameters*)
λ=1;StepJumpIndex={};up=0;down=0;time=dt;a1=2;
eta2=1;p1=0.6;p2=1-p1;

(* Jump Time Simulation *)
JumpTime=Floor[-Log[RandomReal[]]/λ,dt];j=1;
While[
  time<JumpTime&&time<T,time=time+dt;j++;
  If[
    time==JumpTime,AppendTo[StepJumpIndex,j];
    JumpTime=JumpTime+Floor[-Log[RandomReal[]]/λ,dt]
  ];

(* Simulation of the Jump Diffusion Model *)
Do[
  Z=RandomReal[NormalDistribution[]];
  Y[[i]]=If[
    MemberQ[StepJumpIndex,i],
    If[
      RandomReal[]<p1,
      RandomReal[ExponentialDistribution[eta1]],
      RandomReal[ExponentialDistribution[eta2]]],1];
  S[[i]]=S[[i-1]]*Exp[μ*dt+σ*Sqrt[dt]*Z]*Y[[i-1]];
  SL[[i]]=[i*dt,S[[i]]]
  ,{i,2,n}];

(* Exports *)
R1=ListPlot[SL,PlotRange->All];
R2=ListPlot[SL,Joined->True,PlotStyle->Dashed,PlotRange->All];
Show[R1,R2]
Do[
  If[
    Y[[i]]==1,i++,
    If[
      Y[[i]]>1,up=up+1,down=down+1];,{i,1,n}];
```



```
If[
  StepJumpIndex=={},Print["There were no Jumps"],
  Print["Jump(s) occurred at the following step(s): ",
  StepJumpIndex]];
```

## B.5 Τιμολόγηση μέσω του υποδείγματος Merton

Κώδικας τιμολόγησης μέσω του υποδείγματος Merton βασιζόμενος στην κλειστή έκφραση του (Σχέση 4.1.6) στο Mathematica®.

```
(* Definition of the power 0^0=1 *)
Unprotect[Power];Power[0|0.,0|0.]=1;Protect[Power]

(* Definition of functions Normalcdf, sn, rn, d1, d2 *)
Normalcdf[x_]:=1/2*Erf[x/Sqrt[2]]+1/2

sn[T_,sigma_,v_,i_]:=Sqrt[sigma^2+i*v^2/T]

rn[T_,r_,lambda_,i_]:=r-lambda*k+i*Log[1+k]/T

d1[S0_,K_,T_,r_,sigma_,lambda_,v_,i_]:=((rn[T,r,lambda,i]+sn[T,sigma,v,i]^2
/2)*T-Log[K/S0])/ (sn[T,sigma,v,i]*Sqrt[T])

d2[S0_,K_,T_,r_,sigma_,lambda_,v_,i_]:=d1[S0,K,T,r,sigma,lambda,v,i]-
sn[T,sigma,v,i]*Sqrt[T]

(* Call and Put Option Pricing functions *)
Ccall[S0_,K_,T_,r_,sigma_,lambda_,m_,v_]:= (n=10^2;k=Exp[m+v^2/2]-1;
sum = 0;
Do[
  Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  S=S0*Normalcdf[d1[S0,K,T,r,sigma,lambda,v,i]]-K*Exp[-rn[T,r,lambda,i]
*T]*Normalcdf[d2[S0,K,T,r,sigma,lambda,v,i]];
  sum=sum+(Exp[-lambda*(1+k)*T]*(lambda*(1+k)*T)^i*S/Factorial[i]);
  ,{i,0,n}];
(sum))

Cput[S0_,K_,T_,r_,sigma_,lambda_,m_,v_]:=Ccall[S0,K,T,r,sigma,lambda,m,v]
+Exp[-r*T]*K-S0
```

## B.6 Τιμολόγηση μέσω του υποδείγματος Kou

Κώδικας τιμολόγησης μέσω του υποδείγματος Kou βασιζόμενος στην κλειστή έκφραση του (Σχέση 4.1.26) στο Mathematica®.

```
(* Definition of functions phi, Hh, II, Pni, Qni *)
phi[x_]:= (1+Erf[x/Sqrt[2]])/2
```

```

Hh[n_, x_] := If[
  x >= -6, If[
    x < 10, 1/n! * NIntegrate[(t-x)^n * Exp[-t^2/2],
      {t, x, Infinity}], 0]
  , (temp = (x + Sqrt[x*x + 4*n]) * 0.5; NIntegrate[(t-x)^n * Exp[-t^2/2],
    {t, x, temp-3}] + NIntegrate[(t-x)^n * Exp[-t^2/2], {t, temp-3, temp-1}]
    + NIntegrate[(t-x)^n * Exp[-t^2/2], {t, temp-1, temp}] + NIntegrate
    [(t-x)^n * Exp[-t^2/2], {t, temp, temp+1}] + NIntegrate[(t-x)^n * Exp
    [-t^2/2], {t, temp+1, temp+3}] + NIntegrate[(t-x)^n * Exp[-t^2/2]
    , {t, temp+3, Infinity}]) / (n!)]

II[jj_, ll_, aa_, bb_, dd_] := Which[
  (bb > 0 && aa != 0), -(Exp[aa*ll]/aa) * (Table[(bb/aa)^(jj-i), {i, 0, jj}]
    . Table[Hh[i, bb*ll-dd], {i, 0, jj}]) + ((bb/aa)^(jj+1))
    * (Sqrt[2*Pi]/bb) * Exp[aa*dd/bb + (1/2) * (aa/bb)^2] *
    phi[-bb*ll+dd+aa/bb],
  (bb < 0 && aa < 0), -(Exp[aa*ll]/aa) * (Table[(bb/aa)^(jj-i), {i, 0, jj}]
    . Table[Hh[i, bb*ll-dd], {i, 0, jj}]) - ((bb/aa)^(jj+1))
    * (Sqrt[2*Pi]/bb) * Exp[aa*dd/bb + (1/2) * (aa/bb)^2] *
    phi[bb*ll-dd-aa/bb],
  (bb > 0 && aa == 0), Hh[n+1, bb*ll-dd]/bb]

Pni[n_, i_, p_, eta1_, eta2_] := Sum[Binomial[n, j] * (p^j) * ((1-p)^(n-j)) *
  Binomial[n-i-1, j-i] * ((eta1/(eta1+eta2))^(j-i)) * ((eta2/
  (eta1+eta2))^(n-j))
  , {j, i, n-1}]/; i < n;
Pni[n_, n_, p_, eta1_, eta2_] = p^n;

Qni[n_, i_, p_, eta1_, eta2_] := Sum[Binomial[n, j] * ((1-p)^j) * (p^(n-j)) *
  Binomial[n-i-1, j-i] * ((eta2/(eta1+eta2))^(j-i)) * ((eta1/
  (eta1+eta2))^(n-j))
  , {j, i, n-1}]/; i < n;
Qni[n_, n_, p_, eta1_, eta2_] = (1-p)^n;

(* Calculation of the Probability P(Z(T)>=a) *)
cprob[mu_, eta1_, eta2_, lambda_, p_, sigma_, aa_, T_, Steps_] :=
  (IITwo = Table[II[k-1, aa-mu*T, -eta1, -1/(sigma*Sqrt[T]),
    - (sigma*Sqrt[T])*eta1]
  , {k, 1, Steps}];
  IIFour = Table[II[k-1, aa-mu*T, eta2, 1/(sigma*Sqrt[T])
  , - (sigma*Sqrt[T])*eta2], {k, 1, Steps}];
  PiN[n_] = Exp[-lambda*T] * ((lambda*T)^n) / (n!);
  PiNPni = Table[PiN[n] * Pni[n, k, p, eta1, eta2] *
  ((sigma*Sqrt[T])*eta1)^k
  , {n, 1, Steps}, {k, 1, n}];
  PiNQni = Table[PiN[n] * Qni[n, k, p, eta1, eta2] *
  ((sigma*Sqrt[T])*eta2)^k
  , {n, 1, Steps}, {k, 1, n}];
  sec = Sum[PiNPni[[n, k]] * IITwo[[k]], {n, 1, Steps}, {k, 1, n}];
  fourth = Sum[PiNQni[[n, k]] * IIFour[[k]], {n, 1, Steps}, {k, 1, n}];
  (sec * Exp[((sigma*eta1)^2 * T/2] + fourth * Exp[((sigma*eta2)^2)
  * T/2]) / (Sqrt[2*Pi] * sigma * Sqrt[T]) + Exp[-lambda*T] * phi[-(aa-mu*T) /
  (sigma*Sqrt[T])]);

(* Call and Put Option Pricing functions *)
callOR[S0_, K_, T_, r_, sigma_, lambda_, p_, eta1_, eta2_, Steps_] := (
  zetaaOR = p*eta1/(eta1-1) + (1-p)*eta2/(eta2+1) - 1;
  tempaeta1OR = r + sigma*sigma/2 - lambda*zetaaOR;
  tempaeta2OR = tempaeta1OR - sigma*sigma;

```

```

S0*cprob[tempaeta1OR, eta1-1, eta2+1, λ*(1+zetaaOR), p*eta1/
((1+zetaaOR)*(eta1-1)), sigma, Log[K/S0], T, Steps]-K*
Exp[-r*T]*cprob[tempaeta2OR, eta1, eta2, λ, p, sigma, Log[K/S0],
T, Steps]);

putOR[S0_, K_, T_, r_, sigma_, λ_, p_, eta1_, eta2_, Steps_] :=
callOR[S0, K, T, r, sigma, λ, p, eta1, eta2, Steps]+Exp[-r*T]*K-S0

(* Source: Kou (2002) *)

```

## B.7 Βαθμονόμηση Υποδειγμάτων

Κώδικας βαθμονόμησης του υποδείγματος Merton μέσω της μεθόδου των Μη Γραμμικών Ελαχίστων Τετραγώνων βασιζόμενος στην έκφρασή της σχέσης 4.3.1 ίσων βαρών στο Mathematica®.

```

(* Calibration of MJD model via the NLS Method *)
JMNLS=0;
Do[
  Do[
    JMNLS=JMNLS+1/30*Abs[Ccall[S0, K[[i, j]], T[[j]], r[[j]],
sigma, λ, m, v]-c[[i, j]]]^2;
    , {i, 1, Length[K]};
    , {j, 1, Length[T]}]
Timing[NMinimize[{JMNLS, sigma>0, λ>=0, v>0}, {sigma, λ, m, v}]]

(* Outputs *)
Plot3D[JMNLS, {m, m0, m1}, {v, v0, v1}, ColorFunction->Function
  [{x, y, z}, Hue[z]], AxesLabel->{"m", "v", "J(m, v)"}]
ContourPlot[JMNLS{m, m0, m1}, {v, v0, v1}, PlotLegends->Automatic,
  AxesLabel->{"m", "v"}]

```

Κώδικας βαθμονόμησης του υποδείγματος Merton μέσω της μεθόδου Διόρθωσης μέσω της Σχετικής Εντροπίας βασιζόμενος στην έκφρασή της σχέσης 4.3.5 ίσων βαρών στο Mathematica®.

```

(* Definition of the minimum RE measure for the MJD model *)
μ[r_, sigma_, λ_, m_, v_] := r - sigma^2/2 - λ*(Exp[m+v^2/2]-1);
e[T_, r_, sigma_, λp_, mp_, vp_, λq_, mq_, vq_] := T/(2*sigma^2)*
(μ[r, sigma, λq, mq, vq]-μ[r, sigma, λp, mp, vp])^2+T*λq*
Log[(λq*vp)/(λp*vq)]+T*λp+T*λq*(-3/2+((mq+mp)^2+vq^2)/
(2*vp^2));

(* Calibration of MJD model via the RE Method *)
a=0.03;
JMRE=0;
Do[
  Do[
    JMRE=JMRE+1/30*Abs[Ccall[S0, K[[i, j]], T[[j]], r[[j]],
sigma, λp, mp, v]-c[[i, j]]]^2+a*e[T[[j]], r[[j]], sigma, λp, mp,

```

```

vp, λp, m, v];
, {i, 1, Length[K]}}];
, {j, 1, Length[T]}}]
Timing[NMinimize[{JMRE, v>0}, {m, v}]]

(* Outputs *)
Plot3D[JMRE, {m, m0, m1}, {v, v0, v1}, ColorFunction->Function
[ {x, y, z}, Hue[z] ], AxesLabel->{"m", "v", "J(m, v)"}]
ContourPlot[JMRE, {m, m0, m1}, {v, v0, v1}, PlotLegends->Automatic,
AxesLabel->{"m", "v"}]

```

Με εντελώς παρόμοιο τρόπο κατασκευάζονται και οι ανάλογοι κώδικες για του υπόδειγμα του Κου και για το λόγο αυτό παραλείπονται.

# Βιβλιογραφία

## Ελληνική

- Ανθρωπέλος, Μ. (2015). *Στοχαστική Χρηματοοικονομική*. Πειραιάς: Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Μποζούδης, Μ. (2013). *Προσεγγιστικές Μέθοδοι Αποτίμησης Δικαιωμάτων Αμερικανικού Τύπου (Διπλωματική Εργασία)*. Πειραιάς: Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Μπούτσικας, Μ. (2004). *Μέθοδοι Προσομοίωσης και Στατιστικές Υπολογιστικές Τεχνικές*. Πειραιάς: Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Μπούτσικας, Μ. (2005). *Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα - Εισαγωγή στη Στοχαστική Χρηματοοικονομική Ανάλυση*. Πειραιάς: Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Σφακιανιάκης, Θ. (2013). *Προσομοίωση Ανελιξίων Lévy με Εφαρμογές στην Αποτίμηση Παραγώγων Χρηματοοικονομικών Προϊόντων (Διπλωματική Εργασία)*. Πειραιάς: Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

## Ξένη

- Applebaum, D. (2004). *Levy Processes And Stochastic Calculus*. Cambridge : Cambridge University Press.
- Arrow, K. (1953). The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk Bearing (English version 1964). In *The Review of Economic Studies, Vol 31* (pp. 91-96). Oxford : Oxford University Press.
- Battig, R., & Jarrow, R. (1999). The Second Fundamental Theorem of Asset Pricing - A New Approach. In A. Karolyi, *The Review of Financial Studies, Volume 12*. Oxford: Oxford University Press .
- Baudoin, F. (2012, 09 11). *Research and Lecture notes by Fabrice Baudoin*. Retrieved from <https://fabricebaudoin.wordpress.com/2012/09/11/lecture-18-square-integrable-martingales-and-quadratic-variations/>
- Bertsimas, D., Kogan, L., & Lo, A. (2000). Hedging Derivative Securities and Incomplete Markets, an e-Arbitrage Approach. In D. S. Levi, *Operations Research 49*. Catonsville, Maryland: Institute for Operations Research and the Management Sciences.

- Bjorefeldt, J., Hee, D., Malmgard, E., Niklasson, V., Pettersson, T., & Rados, J. (2016). *The Trinomial Asset Pricing Model (Master's Thesis)*. Goteborg: Goteborgs universitet.
- Black, F., & Scholes, M. (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. In H. Uhlig, *The Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3. Chicago : The University of Chicago Press.
- Bodie, Z., Kane, A., & Marcus, A. J. (2014). *Investments, (Vol. 10th Edition)*. New York: McGraw-Hill Education.
- Burger, P., & Kiliaras, M. (2013). *Jump Diffusion Models for Option Pricing vs the Black Scholes Model*. Wien: University of Applied Sciences bfi Vienna.
- Ceci, C., Cretarola, A., & Russo, F. (2014). *GKW Representation Theorem and Linear BSDEs Under Restricted Information. An application to Risk Minimization*. World Scientific Publishing.
- Černý, A. (2009). *Mathematical Techniques in Finance - Tools for Incomplete Markets*. New Jersey: Princeton University Press.
- Clifford, P., Wang, Y., Zaboronski, O., & Zhang, K. (2010). *Pricing Options Using Trinomial Trees*.
- Cont, R., & Tankov, P. (2004). *Financial Modelling With Jump Processes*. London: Chapman & Hall/CRC.
- Cvitanić, J., Schachermayer, W., & Wang, H. (2002). *Utility Maximization in Incomplete Markets with Random Endowment*.
- Debreu, G. (1959). *Theory of Value*. New York: Wiley.
- Delbaen, F., Rheinlander, T., & Schweizer, M. (2002). Exponential Hedging and Entropic Penalties. In *Mathematical Finance 12*, pp. 99-123.
- Dou, C., Wang, L., & Zhu, C. (2017). The Equation of Real Option Value Under Trinomial Tree Model. In A. Ahmad, *Open Journal of Social Sciences*. Wuhan, China: Scientific Research Publishing.
- Eberlein, E., & Jacod, J. (1997). On the range of option prices. In *Finance and Stochastic, 1*. Zurich: Springer.
- Föllmer, H., & Schweizer, M. (1991). Hedging of Contingent Claims Under Incomplete Information. In M. Davis, & R. Elliott, *Applied Stochastic Analysis., Vol. 5* , pp. 389–414. London: Gordon and Breach.
- Gatheral, J. (2010). Jump Diffusion Models. In R. Cont, *Encyclopedia of Quantitative Finance, Vol. 1*. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons.
- Gugole, N. (2016). Merton Jump-Diffusion Model Versus the Black and Scholes Approach for the Log>Returns and Volatility Smile Fitting. In *International Journal of Pure and Applied Mathematics, Volume 109, No. 3*. Academic Publications Ltd.
- Hodges, S. D., & Neuberger, A. (1989). Optimal Replication of Contingent Claims Under Transaction Costs. In *Review of Futures Markets, 8*, pp. 222–239.
- Hu, Y., Imkeller, P., & Müller, M. (2004). *Utility Maximization In Incomplete Markets*.

- Karatzas, I., & Shreve, S. (1998). Methods of Mathematical Finance. In *Probability Theory and Stochastic Modelling, Vol. 39*. New York: Springer.
- Kou, S. (2002). A Jump - Diffusion Model for Option Pricing. In D. S. Levi, *Management Science*. Catonsville, Maryland: Institute for Operations Research and the Management Sciences.
- Kou, S., & Wang, H. (2004). Option Pricing Under a Double Exponential Jump-Diffusion Model. In *Management Science, Vol. 50, No. 9* (pp. 1178–1192). Catonsville, Maryland: Institute for Operations Research and the Management Sciences.
- Kramkov, D. (1996). Optional Decomposition of Supermartingales and Hedging Contingent Claims in Incomplete Security Markets. In *Probability Theory and Related Fields, 105*, pp. 459–479. Zurich: Springer.
- Kyprianou, A. (2008). *Lévy processes*. Bath: University of Bath.
- Kyprianou, A. (2009). *Lévy Processes and Continuous - State Branching*. Bath: University of Bath.
- Kyprianou, A. (2013). *Fluctuations of Levy Processes with Applications*. Zurich: Springer.
- Magill, M., & Quinzii, M. (1996). *Incomplete Markets*. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press.
- Magill, M., & Shafer, W. (1990). *Incomplete Markets*. Urbana-Champaign: Bureau of Economic and Business Research, University of Illinois.
- Matsuda, K. (2004). *Introduction to Merton Jump Diffusion Model*. New York: The City University of New York.
- Matsuda, K. (2005). *Parametric Regularized Calibration of Merton Jump-Diffusion Model with Relative Entropy: What Difference Does It Make?* New York: The Graduate Center, The City University of New York.
- McKenzie, L. (1954). On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems. In *Econometrica, Vol. 22* (pp. 147-161). Wiley: Wiley-Blackwell.
- Merton, R. (1973). An Intertemporal Capital Asset Pricing Model. In *Econometrica, Vol. 41* (pp. 867-87). Wiley: Wiley-Blackwell.
- Merton, R. (1976). Option Pricing When Underlying Stock Returns Are Discontinuous. In W. Schwert, *Journal of Financial Economics* (pp. 125-144). Amsterdam, Netherlands: Elsevier.
- Naik, V., & Lee, M. (1990). General Equilibrium Pricing of Options on the Market Portfolio with Discontinuous Returns. In *The Review of Financial Studies, Vol. 3, No. 4 (1990)*, pp. 493-521. Oxford: Oxford University Press.
- Pitman, J. (2003). *Probability Theory - Lecture 26: Levy Process and Infinitely Divisible Law*. Berkeley: University of California.
- Sato, K. I. (1999). *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge: Cambridge University Press.

- Schachermayer, W. (1992). A Hilbert Space Proof of the Fundamental Theorem of Asset Pricing in Finite Discrete Time. In R. Laeven, S. Lin, Q. Tang, G. Willmot, & H. Yang, *Insurance: Mathematics and Economics, Vol. 11*. Amsterdam: Elsevier.
- Staum, J. (2008). Incomplete Markets. In J. Birge, & V. Linetsky, *Handbooks in Operations Research and Management Science: Financial Engineering, Vol. 15* (pp. 511 - 563). Evanston: Northwestern University.
- Tankov, P., & Voltchkova, E. (2009). Jump Diffusion Models - A Practitioner's Guide. *Bankers, Markets & Investors*, 99.