ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΕΞΩΤΙΚΩΝ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΩΝ ΕΠΙ ΕΝΟΣ ΠΕΡΙΟΥΣΙΑΚΟΥ ΣΤΟΙΧΕΙΟΥ ΚΑΙ ΔΥΟ ΧΡΟΝΙΚΩΝ ΠΕΡΙΟΔΩΝ

Δημήτριος Ι. Παναγόπουλος

Διπλωματική Εργασία
που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και
Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου
Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την
απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος
Ειδίκευσης στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Πειραιάς
Οκτώβριος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. …….. συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Εφαρμοσμένη Στατιστική.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Αναπληρωτής Καθηγητής Μπούτσικας Μιχαήλ (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Πολίτης Κωνσταντίνος
- Επίκουρος Καθηγητής Πιτσέλης Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματική Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS

AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN

APPLIED STATISTICS

PRICING OF SINGLE ASSET, TWO-PERIOD EXOTIC OPTIONS

By

Dimitrios I. Panagopoulos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and

Insurance Science of the University of Piraeus in

partial fulfilment of the requirements for the degree

of Master of Science in Applied Statistics.

Piraeus, Greece

October 2018

Στην οικογένειά μου

Θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον επιβλέποντα καθηγητή μου, κ. Μιχάλη Μπούτσικα, για την καθοδήγηση, την υπομονή και την επιμονή που επέδειξε κατά την διάρκεια της συγγραφής της παρούσας διπλωματικής εργασίας, καθώς επίσης και για τις γνώσεις που αποκόμισα από εκείνον κατά την διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Περίληψη

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζεται τα τελευταία χρόνια, τόσο από επενδυτές όσο και από επιστήμονες, για τα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα και πιο συγκεκριμένα για τα εξωτικά δικαιώματα προαίρεσης. Τα εξωτικά συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης είναι πιο σύνθετα από τα απλά δικαιώματα προαίρεσης και εμφανίζουν πιο πολλές παραλλαγές όσον αφορά τον τρόπο πληρωμής και εξάσκησής τους.

Στο πρώτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στα παράγωγα και στις κατηγορίες αυτών. Επίσης, αναλύουμε την γεωμετρική κίνηση Brown, το μοντέλο Black and Scholes και ειδικότερα την Risk Neutral Pricing Formula. Τέλος, γίνεται αναφορά σε κάποια απλά εξωτικά συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης, τα οποία και θα μας φανούν χρήσιμα στην τιμολόγηση των εξωτικών δικαιωμάτων σε δυο χρονικές περιόδους.

Στο δεύτερο κεφάλαιο γίνεται εκτενής αναφορά στο σύνολο των εξωτικών δικαιωμάτων τα οποία τιμολογούνται σε δυο χρονικές περιόδους. Αποτυπώνονται τα χαρακτηριστικά του κάθε δικαιώματος, καθώς επίσης και οι τύποι με τους οποίους τα τιμολογούμε, οι οποίοι όμως θα μας απασχολήσουν κυρίως στο τρίτο κεφάλαιο.

Στο τρίτο και τελευταίο κεφάλαιο θα μας απασχολήσει η τιμολόγηση των εξωτικών δικαιωμάτων σε δυο χρονικές περιόδους με την μέθοδο της προσομοίωσης. Πιο αναλυτικά, κάνοντας μια εισαγωγή στην μέθοδο Monte Carlo προχωράμε με την προσομοίωση της γεωμετρικής κίνησης Brown και του μοντέλου Black and Scholes. Στα διάφορα εξωτικά δικαιώματα που παράγονται οι προσομοιωμένες τιμές των δικαιωμάτων συγκρίνονται με τις ακριβείς τιμές τους, για να μας αποκαλύψουν τυχόν αποκλίσεις τους. Τέλος, γίνεται γραφική απεικόνιση της μεταβολής της τιμής του εκάστοτε εξωτικού δικαιώματος για διάφορες τιμές των παραμέτρων του μοντέλου.

Στην εργασία αυτή, για την υλοποίηση των αλγορίθμων αποτίμησης χρησιμοποιήθηκε το υπολογιστικό πακέτο Wolfram Mathematica.

Abstract

Of particular interest in recent years, both by investors and by scientists, is the emergence of derivative financial products and, more specifically, of exotic options. Exotic options are more complex than simple options and show more variations in the way that they are priced and exercised.

In the first chapter we offer an introduction to Financial derivatives and their categories. We also present the geometric Brownian motion, the Black and Scholes model and the general Risk Neutral Pricing Formula. Finally, reference is made to some simple exotic option contracts, which will be useful for the pricing of exotic options in two time periods.

In the second chapter we deal extensively with exotic options priced in two time periods. The features of each option are captured, as well as the equations they are priced with, which will mainly concern us in the third chapter.

In the third and final chapter we are concerned with the pricing of two-period exotic options using Monte Carlo simulation. More specifically, by presenting a brief introduction to the Monte Carlo method, we proceed with the simulation of the geometric Brownian motion and the Black and Scholes model. The Monte Carlo estimated exotic options prices are compared with their exact values to verify their validity. Finally, a graphical representation of the price of each exotic option with respect to its parameters is made. In this work, the Wolfram Mathematica computational package was used to implement the valuation algorithms.

Πίνακας περιεχομένων

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα

1.1 Εισαγωγή

Στα χρηματοοικονομικά, παράγωγο προϊόν (derivative) καλείται ένα συμβόλαιο η αξία του οποίου συνδέεται άμεσα με την μεταβολή στη τιμή κάποιου άλλου βασικότερου προϊόντος (υποκείμενο αγαθό, underlying asset). Επί της ουσίας, πρόκειται για ένα αξιόγραφο η τιμή του οποίου καθορίζεται με άμεσο τρόπο από την τιμή του υποκείμενου αγαθού. Κάθε παράγωγο προϊόν απαρτίζεται από δυο αντισυμβαλλόμενους. Πρόκειται λοιπόν για μια διμερής συμφωνία όπου ο ένας έχει τη θέση του αγοραστή (long position) ενώ ο άλλος έχει τη θέση του πωλητή (short position).

Τα παράγωγα αναφέρονται σε διάφορους χρηματοοικονομικούς τίτλους όπως μετοχές, δείκτες μετοχών, ομόλογα, συνάλλαγμα ή και εμπορεύματα που τίθενται υπό διαπραγμάτευση στη δευτερογενή αγορά, όπως είναι τα χρηματιστήρια παραγώγων, είτε εκτός οργανωμένου χρηματιστηρίου (over-the-counter markets) απευθείας μεταξύ επενδυτών και χρηματομεσιτών. Επιπλέον η δημιουργία και η χρήση των παράγωγων χρηματοοικονομικών προϊόντων αποσκοπεί στην αντιστάθμιση κινδύνου (Hedging) απέναντι στις απώλειες κεφαλαίων που μπορεί να προκύψουν, στην επιδίωξη κερδών χωρίς την ανάληψη κινδύνου (arbitrage) ή στην κερδοσκοπία (speculation).

Τα βασικότερα παράγωγα χρηματοοικονομικά προϊόντα (ΠΧΠ) είναι τα προθεσμιακά συμβόλαια (forward contracts), τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (future contracts), τα προϊόντα δανεισμού τίτλων (stock repo και stock reverse repo), οι ανταλλαγές (swaps) και τα δικαιώματα προαίρεσης (options). Στο εξής θα αναφέρουμε ότι ένας επενδυτής έχει λάβει long position επί ενός χρηματοοικονομικού τίτλου όταν με τη θέση αυτή καταγράψει κέρδη στην περίπτωση που η τιμή του χρεογράφου ανέβει στο μέλλον, ενώ σε αντίθετη περίπτωση η θέση του αποφέρει ζημιά. Η θέση πώλησης τώρα (short position) είναι η αντίθετη με την παραπάνω θέση την οποία ακολουθούν οι επενδυτές ούτως ώστε να κερδίσουν από την πτώση των τιμών των περιουσιακών στοιχείων. Παρακάτω θα ασχοληθούμε συνοπτικά με τα διάφορα είδη των ΠΧΠ που αναφέραμε παραπάνω. Οι παρακάτω εισαγωγικοί παράγραφοι 1.2 - 1.5 βασίζονται κατά κύριο λόγο στις πανεπιστημιακές σημειώσεις του Μπούτσικα, (2005). Επίσης, για περισσότερες λεπτομέρειες ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί π.χ. να ανατρέξει και στα συγγράμματα των Neftci (2000), Kallianpur and Karandikar (2000), Etheridge (2002).

1.2 Κατηγορίες Παραγώγων Προϊόντων

Οι κατηγορίες προθεσμιακών συμβολαίων που αναγράφονται στην ενότητα 1.2 προέρχονται από τις σημειώσεις του Μπούτσικα, (2005).

Το **προθεσμιακό συμβόλαιο (forward contracts)** είναι μια συμφωνία μεταξύ δυο αντισυμβαλλομένων και αποτελεί τη πιο απλή μορφή παραγώγου. Τα συμβόλαια αυτά διαπραγματεύονται εκτός χρηματιστηρίου και η συμφωνία κλείνεται συνήθως μεταξύ χρηματοπιστωτικών οργανισμών, ή μεταξύ χρηματοπιστωτικών οργανισμών και των πελατών τους. Ο ένας εκ των δυο συμβαλλομένων λαμβάνει long position δηλαδή υπόσχεται να αγοράσει το υποκείμενο περιουσιακό προϊόν ενώ ο άλλος υπόσχεται να το πουλήσει (short position) σε μια συγκεκριμένη ποσότητα, σε προκαθορισμένη μελλοντική χρονική στιγμή T (delivery date) και σε προκαθορισμένη τιμή k (delivery price). Το υποκείμενο αγαθό που αναφέραμε μπορεί να είναι κάποιο εμπόρευμα όπως κρέας, ζάχαρη, χαλκός ή κάποιο αξιόγραφο όπως μετοχές, συνάλλαγμα, ομόλογα κ.α.

Στη περίπτωση όπου η αξία του υποκείμενου αγαθού στο χρόνο T είναι X_T τότε το κέρδος του αγοραστή στο χρόνο T θα είναι,

$$X_T - k$$

ενώ το κέρδος του πωλητή θα είναι,

$$k - X_T$$

Η αξία X_T του υποκείμενου αγαθού δεν θεωρείται γνωστή ενώ η τιμή συναλλαγής k καθορίζεται την ημέρα σύναψης του συμβολαίου $(t = 0)$ και εξαρτάται από την αξία του περιουσιακού στοιχείου την στιγμή $t = 0$ (X_0), το T και το επιτόκιο r των ομολόγων της αγοράς (risk free bonds). Επιπλέον το k καθορίζεται έτσι ώστε η αξία του προθεσμιακού συμβολαίου στο χρόνο 0 να είναι 0. Από εκεί και πέρα $(0 < t < T)$ η αξία του συμβολαίου μεταβάλλεται ανάλογα με τη τιμή X_t.

Τα **συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (ΣΜΕ) (future contracts)** σε πολύ μεγάλο βαθμό είναι τυποποιημένα συμβόλαια, που διατίθενται σε οργανωμένες αγορές (χρηματιστήρια) και για το λόγο αυτό παρέχεται ασφάλεια στις συναλλαγές τους. Επιπλέον οι αγορές ορίζουν επακριβώς πότε θα γίνει η παράδοση (ακριβής μέρα και ώρα), που θα γίνει η παράδοση (ακριβής τόπος) και τι θα παραδοθεί. Τα ΣΜΕ είναι διαθέσιμα για ένα πολύ μεγάλο αριθμό υποκείμενων αγαθών και δεν απαιτούν φυσική παράδοση του προϊόντος γιατί μπορεί να γίνει κλείσιμο της ανοικτής θέσης (close position) με άνοιγμα μίας αντίθετης. Για παράδειγμα, Αν έχει κάποιος ανοικτή μία θέση πώλησης (short) στον Δείκτη FTSE/ASE-20 με παράδοση τον Μάρτιο, μπορεί να κλείσει τη θέση παίρνοντας μία θέση αγοράς (long) στο ίδιο συμβόλαιο. Τέλος τόσο οι προσδοκίες των επενδυτών όσο και οι μεταβολές στη τιμή του υποκείμενου αγαθού επηρεάζουν την τιμή συναλλαγής του (k) συνεχώς στα νέα συμβόλαια.

Τα **προϊόντα δανεισμού τίτλων (stock repo και stock reverse repo)** διακρίνονται σε δυο κατηγορίες. Στην παραχώρηση των μετοχών ως «δάνειο» (stock lending – repo) και στην απόκτηση μετοχών από «δάνειο» (stock borrowing - reverse repo). Σύμφωνα με τη πρώτη διαδικασία ο επενδυτής ο οποίος δεν επιθυμεί να ρευστοποιήσει τις μετοχές του μπορεί να τις παραχωρήσει στο χρηματιστήριο παραγώγων και αντ' αυτού να λαμβάνει σε μηνιαία βάση ένα έσοδο, το οποίο δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων, χωρίς κίνδυνο. Επίσης ο επενδυτής δικαιούται από το χρηματιστήριο παραγώγων τεχνητό μέρισμα από τις μετοχές του. Η δεύτερη διαδικασία δίνει την δυνατότητα σε έναν επενδυτή να «δανειστεί» μέσω του χρηματιστηρίου παραγώγων τις μετοχές που «δάνεισε» σε αυτό κάποιος άλλος επενδυτής μέσω stock repo. Τέλος έχει την υποχρέωση καταβολής ενός ημερήσιου αντιτίμου, για το χρονικό διάστημα που κατέχει τις μετοχές αυτές καθώς επίσης και ένα περιθώριο ασφάλισης.

Η **σύμβαση ανταλλαγής (swap)** αποτελεί μια συμφωνία μεταξύ δυο αντισυμβαλλομένων για ανταλλαγή προκαθορισμένων μελλοντικών χρηματοροών. Τα χρηματικά ποσά που ανταλλάσσονται μπορεί να αναφέρονται σε διαφορετικά νομίσματα ή μπορεί να αφορούν σε ένα σταθερό ποσό που ανταλλάσσεται με ένα μεταβαλλόμενο, αβέβαιο ποσό. Υπάρχουν 4 διαφορετικές κατηγορίες swap οι οποίες είναι οι εξής:

- Συμβάσεις Ανταλλαγής Επιτοκίων (interest rates swap).

- Συμβάσεις Ανταλλαγής Νομισμάτων (currency swap).
- Συμβάσεις Ανταλλαγής Εμπορευμάτων (commodities swap).
- Συμβάσεις Ανταλλαγής Μετοχών (equity swap).

Οι κίνδυνοι τους οποίους αναλαμβάνει μέσω των swaps ο επενδυτής οφείλονται στην διακύμανση της αξίας του υποκείμενου αγαθού, δηλαδή τον κίνδυνο του υποκείμενου αγαθού, στην αδυναμία εκπλήρωσης των υποσχέσεων από μεριάς αντισυμβαλλόμενου, δηλαδή τον πιστωτικό κίνδυνο και τον κίνδυνο διακανονισμού κατά των οποίο ένας αντισυμβαλλόμενος δεν είναι σε θέση να παραδώσει ένα αξιόγραφο ή την ονομαστική αξία του σε μετρητά, ενώ ο άλλος το έχει παραδώσει ήδη σύμφωνα με την μεταξύ τους εμπορική συμφωνία. Παρόλα αυτά, η ανασφάλεια που δημιουργεί ο πιστωτικός κίνδυνος, έγινε προσπάθεια να αντιμετωπιστεί με την διαμεσολάβηση πιστωτικών ιδρυμάτων στις συμβάσεις ανταλλαγής.

Τα **δικαιώματα προαίρεσης (options)** είναι παρόμοια με τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης. Πρόκειται για μια συμφωνία μεταξύ δυο αντισυμβαλλόμενων, του αγοραστή του δικαιώματος (holder) και του πωλητή του δικαιώματος (writer). Ο αγοραστής έχει τη δυνατότητα να εξασκήσει το δικαίωμα και να απαιτήσει την εκτέλεση της συναλλαγής που περιγράφεται από τους όρους του συμβολαίου. Ωστόσο δεν είναι υποχρεωμένος να εξασκήσει το δικαίωμα εφόσον δεν τον συμφέρει. Ο πωλητής του δικαιώματος από την άλλη είναι υποχρεωμένος να εκπληρώσει τους όρους του συμβολαίου εφόσον το δικαίωμα εξασκηθεί από τον αγοραστή. Άρα ο holder βρίσκεται σε πλεονεκτική θέση έναντι του writer. Για το λόγο αυτό ο αγοραστής του δικαιώματος καταβάλλει ένα τίμημα-ασφάλιστρο c στον πωλητή του δικαιώματος προκειμένου να αποκτήσει το δικαίωμα. Το τίμημα αυτό ονομάζεται ασφάλιστρο ή τιμή δικαιώματος (option price, option premium).

Όπως αναφέραμε και παραπάνω πρόκειται για ένα συμβόλαιο όπου ο holder αναλαμβάνει το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει ή να πουλήσει στον writer σε μια προκαθορισμένη ημερομηνία T στο μέλλον και σε μια προκαθορισμένη τιμή συναλλαγής k, μια συγκεκριμένη ποσότητα ενός αγαθού. Ο επενδυτής λοιπόν μπορεί να λάβει τέσσερις θέσεις:

Δικαίωμα αγοράς (call option)

- Ο holder αναλαμβάνει long call position (αγορά δικαιώματος αγοράς).
- Ο writer αναλαμβάνει short call position (πώληση δικαιώματος αγοράς).

Δικαίωμα πώλησης (put option)

- Ο holder αναλαμβάνει long put position (αγορά δικαιώματος πώλησης).
- Ο writer αναλαμβάνει short put position (πώληση δικαιώματος πώλησης).

Τα δικαιώματα προαίρεσης διακρίνονται επίσης από τα εξής χαρακτηριστικά:

1. Το είδος του δικαιώματος (δικαίωμα αγοράς – call option ή δικαίωμα πώλησης – put option).
2. Το υποκείμενο προϊόν. Είναι ο περιουσιακός τίτλος, τον οποίο ο κάτοχος του δικαιώματος αγοράς δικαιούται να αγοράσει και ο κάτοχος του δικαιώματος πώλησης δικαιούται να πουλήσει.
3. Το μέγεθος του συμβολαίου. Είναι για παράδειγμα ο αριθμός των μετοχών του υποκείμενου τίτλου που προϋποθέτει το συμβόλαιο.
4. Η ημερομηνία λήξης (exercise date, maturity). Είναι ο χρόνος μέχρι τη λήξη του συμβολαίου και διακρίνεται σε δυο κατηγορίες:

   (α) Αμερικανικού τύπου (American option) όπου παρέχεται η δυνατότητα άσκησης του δικαιώματος προαίρεσης ανά πάσα στιγμή έως την ημερομηνία λήξης T.

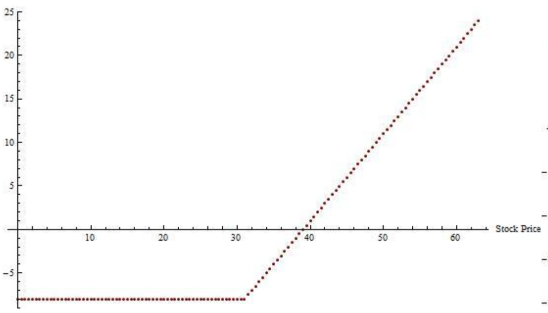
   (β) Ευρωπαϊκού τύπου (European option) όπου το δικαίωμα προαίρεσης ασκείται μόνο κατά την ημερομηνία λήξης του συμβολαίου.
5. Η τιμή εξάσκησης k (strike price ή exercise price). Είναι η προκαθορισμένη τιμή κατά την οποία ο κάτοχος του δικαιώματος μπορεί, εάν επιθυμεί, να εξασκήσει το δικαίωμα του πάνω στον υποκείμενο τίτλο.
6. Το αντίτιμο c (ασφάλιστρο ή τιμή δικαιώματος - Option price, option premium). Είναι το ποσό το οποίο καταβάλει αρχικά ο αγοραστής του δικαιώματος στο πωλητή και καθορίζεται από το νόμο της προσφοράς και της ζήτησης.

1.3 Αποδόσεις δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης

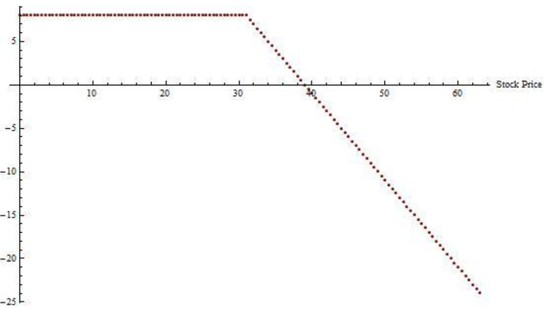
Ένας επενδυτής (βλέπε Μπούτσικα, (2005)) αγοράζει ένα δικαίωμα αγοράς (holder) καταβάλλοντας ασφάλιστρο c στον εκδότη του δικαιώματος (writer). Αποκτά έτσι το δικαίωμα αλλά όχι την υποχρέωση να αγοράσει μετά από χρόνο T ένα περιουσιακό στοιχείο σε προκαθορισμένη τιμή k. Εάν η αξία του υποκείμενου αγαθού κατά το χρόνο λήξης (X_T) είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης (k) τότε συμφέρει τον κάτοχο του δικαιώματος να εξασκήσει το δικαίωμα του. Σε αντίθετη περίπτωση ο κάτοχος του δικαιώματος δεν θα το εξασκήσει. Το κέρδος του στην πρώτη περίπτωση είναι $X_t - k(-c)$ ενώ στη δεύτερη $0(-c)$ καθώς έχει πληρώσει στον εκδότη του δικαιώματος το ασφάλιστρο c ώστε να αποκτήσει το δικαίωμα αυτό.

Ο αγοραστής του δικαιώματος αγοράς περιμένει ότι η τιμή του υποκείμενου χρεογράφου θα ανέβει πάνω από την τιμή εξάσκησης κατά την ημερομηνία λήξης, οπότε θα βγάλει κέρδος είτε πουλώντας το δικαίωμα, είτε εξασκώντας το. Επίσης στη περίπτωση που η αξία του υποκείμενου αγαθού πέσει κάτω από την τιμή εξάσκησης δεν ρισκάρει να χάσει ένα μεγάλο ποσό παρά μόνο το τίμημα του δικαιώματος.

Στη περίπτωση πώλησης ενός δικαιώματος αγοράς ο εκδότης του δικαιώματος προσδοκά ότι η αγοραία τιμή του υποκείμενου αγαθού θα είναι μικρότερη της τιμής εξάσκησης κατά την ημερομηνία λήξης ενώ παράλληλα όσο πιο πολύ ανεβαίνει η τιμή του υποκείμενου χρεογράφου τόσο μεγαλύτερες θα είναι οι απώλειές του. Ο κάτοχος του δικαιώματος σε αυτή τη περίπτωση δεν θα εξασκήσει το δικαίωμα του με το κέρδος για τον εκδότη του δικαιώματος να είναι $0(+c)$, δηλαδή το ασφάλιστρο του δικαιώματος. Αντίθετα εάν $X_T > k$ ο κάτοχος του δικαιώματος θα εξασκήσει το δικαίωμα του, με τον εκδότη του δικαιώματος να εμφανίζει κέρδη της τάξης των $k - X_T < 0(+c)$. Ακόμα και αν η τιμή του υποκείμενου αγαθού ανέβει πολύ, ο εκδότης είναι υποχρεωμένος να πουλήσει στον επενδυτή στην τιμή εξάσκησης ρισκάροντας να χάσει έτσι ένα μεγάλο ποσό.



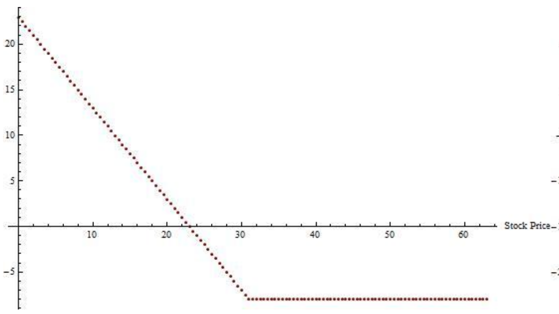
Γράφημα 1.3.1 Long call payoff.



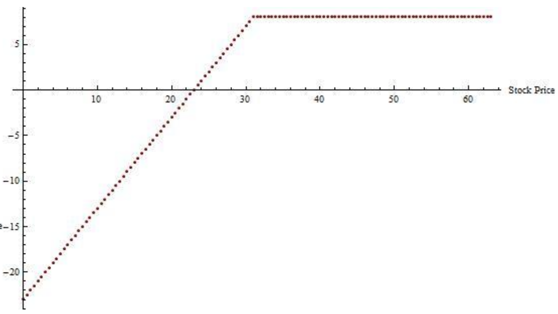
Γράφημα 1.3.2 Short call payoff.

Ένας επενδυτής καταβάλλει ποσό c για να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης διότι προσδοκά πως η τιμή του υποκείμενου αγαθού θα πέσει κάτω από την προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης k στο χρόνο T, οπότε θα βγάλει κέρδος είτε πουλώντας το δικαίωμα, είτε εξασκώντας το. Αν η τιμή ανέβει αρκετά $(X_T > k)$ ο holder δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του με αποτέλεσμα να έχει ζημία ίση με το premium που πλήρωσε αρχικά στον εκδότη. Ενώ κατά το ίδιο χρονικό διάστημα εάν η $X_T < k$ τότε συμφέρει τον κάτοχο του δικαιώματος να εξασκήσει το δικαίωμα του με κέρδος $k - X_T\ (-c)$. Ο δικαιούχος με αυτή τη στρατηγική μειώνει τον κίνδυνο που διαχειρίζεται και για αυτό καταβάλλει ασφάλιστρο c. Τέλος όσο η τιμή του υποκείμενου χρεογράφου μειώνεται σε σχέση με την τιμή εξάσκησης τόσο η αξία ενός δικαιώματος πώλησης ανεβαίνει.

Στη περίπτωση πώλησης ενός δικαιώματος πώλησης ο εκδότης του δικαιώματος προσδοκά ότι η αγοραία τιμή του υποκείμενου αγαθού θα είναι μεγαλύτερη της τιμής εξάσκησης κατά την ημερομηνία λήξης. Στην περίπτωση αυτή ο κάτοχος του δικαιώματος δεν θα εξασκήσει το δικαίωμά του με αποτέλεσμα ο writer να έχει κέρδος $0(+c)$. Εάν τώρα η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης ($X_T < k$) τότε ο δικαιούχος θα εξασκήσει το δικαίωμα του. Έτσι ο εκδότης θα έχει κέρδος $X_T - k < 0(+c)$. Ακόμα και αν η τιμή του υποκείμενου αγαθού πέσει πολύ, ο εκδότης είναι υποχρεωμένος να αγοράσει από τον επενδυτή στην τιμή εξάσκησης ρισκάροντας να χάσει έτσι ένα μεγάλο ποσό.



Γράφημα 1.3.3 Long put payoff.



Γράφημα 1.3.4 Short put payoff.

Εσωτερική ή Εγγενής αξία (intrinsic value) ενός χρεογράφου είναι η πραγματική αξία ενός περιουσιακού στοιχείου και μπορεί να είναι διαφορετική από την αγοραία αξία δηλαδή τη χρηματική αξία ενός αγαθού σε σχέση με άλλα αγαθά. Στα δικαιώματα αγοράς εσωτερική αξία είναι η θετική διαφορά μεταξύ της τιμής του υποκείμενου χρεογράφου και της τιμής εξάσκησης. Δηλαδή το $\max\{X_t - k, 0\}$. Στα δικαιώματα πώλησης εσωτερική αξία είναι η θετική διαφορά μεταξύ της τιμής εξάσκησης και της τιμής του υποκείμενου χρεογράφου. Δηλαδή $\max\{k - X_t, 0\}$.

Ένα δικαίωμα αγοράς (πώλησης) με προκαθορισμένη τιμή εξάσκησης k και χρόνο λήξης T λέγεται ότι σε χρόνο $0 \leq t \leq T$ είναι **in-the-money**, αν $X_t > k (X_t < k)$, **at-the-money**, αν $X_t = k (X_t = k)$ **out-the-money**, αν $X_t < k (X_t > k)$. Τέλος με τον όρο **ανοιχτή πώληση (short selling)** οι επενδυτές αποσκοπούν στο κέρδος με την πτώση των τιμών των περιουσιακών στοιχείων. Για τον λόγο αυτό οι επενδυτές δανείζονται περιουσιακά στοιχεία που δεν κατέχουν, από άλλους επενδυτές, τα πουλάνε και σε μεταγενέστερη χρονική στιγμή θα αναγκαστούν να τα αγοράσουν πάλι για να τα επιστρέψουν στο δανειστή.

1.4 Κανονική κατανομή (Κατανομή Gauss)

Ιδιαίτερα χρήσιμη είναι η κανονική κατανομή η οποία αναφέρεται σε συνεχείς τυχαίες μεταβλητές οι τιμές των οποίων τείνουν να συγκεντρώνονται γύρω από την μέση τιμή. Μια πραγματική τυχαία μεταβλητή X με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \tag{1.1}$$

όπου μ ο μέσος όρος, σ η τυπική απόκλιση και x στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, ονομάζεται κανονικά κατανεμημένη με μέση τιμή μ και διακύμανση σ^2 και συμβολίζεται με $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Η κανονική κατανομή που έχει μέση τιμή 0 $(\mu = 0)$ και τυπική απόκλιση 1 $(\sigma = 1$, άρα και διασπορά $1)$, συμβολίζεται με $N(0,1)$ και ονομάζεται **τυποποιημένη κανονική κατανομή.** Η τυπική κανονική κατανομή (standard Gaussian) με $Z \sim N(0,1)$, όπου Z τυχαία συνεχής μεταβλητή στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$, περιγράφεται από την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \tag{1.2}$$

και τη συνάρτηση κατανομής,

$$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(z)dz = P\{Z < x\} \tag{1.3}$$

η οποία μπορεί να γραφτεί,

$$\Phi(x) = E\{\mathbb{I}(Z < x)\} \tag{1.4}$$

Η τυπική κανονική κατανομή είναι συμμετρική ως προς το μηδέν, δηλαδή $\varphi(z) = \varphi(-z)$. Έστω λοιπόν ότι $Z \sim N(0,1)$ και $F(Z)$, όπου $F(Z)$ γνωστή συνάρτηση, τυχαία μεταβλητή τότε η αναμενόμενη τιμή της δίνεται από το παρακάτω τύπο,

$$E\{F(Z)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\varphi(z)dz \tag{1.5}$$

και

$$E\{F(Z)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\varphi(z)dz = \int_{-\infty}^{+\infty} F(z)\varphi(-z)dz = E\{F(-Z)\} \tag{1.6}$$

λόγω συμμετρίας.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει και το θεώρημα μετατόπισης του Gauss (Gaussian Swift Theorem - GST) σύμφωνα με το οποίο εάν $Z \sim N(0,1)$ μια τυχαία μεταβλητή, $F(Z)$ γνωστή συνάρτηση ως προς Z με $Z \in (-\infty, +\infty)$ και c πραγματική σταθερά τότε,

$$\begin{aligned} E\{e^{cZ}F(Z)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{cy}\, F(y)\varphi(y)dy \\ &= e^{\frac{1}{2}c^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(y)\varphi(y-c)dy \\ &\overset{z=y-c}{=} e^{\frac{1}{2}c^2} \int_{-\infty}^{\infty} F(z+c)\varphi(z)dz \\ &= e^{\frac{1}{2}c^2}\, E\{F(Z+c)\} \end{aligned} \tag{1.7}$$

όπου $e^{cy}\varphi(y) = e^{cy}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2} = e^{\frac{1}{2}c^2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}(y-c)^2} = e^{\frac{1}{2}c^2}\varphi(y-c)$.

Έστω τώρα ότι έχουμε δυο τυχαίες μεταβλητές X και Y οι οποίες ακολουθούν την τυπική κανονική κατανομή $N(0,1;\rho)$ με συντελεστή συσχέτισης

$$\rho = corr\{X, Y\} = \frac{cov\{X, Y\}}{\sqrt{V\{X\}V\{Y\}}} \tag{1.8}$$

όπου $|\rho| < 1$, και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας,

$$\varphi(x, y; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-(x^2-2\rho xy+y^2)/2(1-\rho^2)} \tag{1.9}$$

με $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής δίνεται από τον τύπο (βλέπε Drezner, (1978)),

$$\Phi(x, y; \rho) = E\{\mathbb{I}(X < x)\mathbb{I}(Y < y)\} = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \varphi(u, v; \rho)dudv \tag{1.10}$$

Εάν τώρα θ, v δυο σταθερές και $F(X,Y)$ είναι μια συνάρτηση των X και Y τότε με ανάλογο τρόπο (βλέπε εξίσωση (1.7)) προκύπτει,

$$E\{e^{\theta X+vY}F(X,Y)\} = e^{\frac{1}{2}c^2}E\{F(X+\theta', Y+v')\} \tag{1.11}$$

όπου $c^2 = \theta^2 + v^2 + 2p\theta v, \theta' = \theta + pv, v' = v + p\theta$.

1.5 Τιμολόγηση Δικαιωμάτων σε συνεχή χρόνο – Το μοντέλο των Black and Scholes

Μία στοχαστική ανέλιξη ή διαδικασία (σ.δ.) (βλέπε Μπούτσικα, (2005)) $\{B_t, t \geq 0\}$ καλείται **κίνηση Brown** $BM(\mu, \sigma^2)$ με παραμέτρους $\mu \in R$ (τάση - drift parameter) και $\sigma > 0$ (μεταβλητότητα – volatility) αν ισχύει ότι, για κάθε $y \geq 0, t > 0$,

(1) Η τ.μ. $B_{y+t} - B_y \sim N(t\mu, t\sigma^2)$. Όπου $N(t\mu, t\sigma^2)$ η κανονική κατανομή, με μέση τιμή $t\mu$, τυπική απόκλιση $\sigma\sqrt{t}$ και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t\sigma^2}} e^{-\frac{(b-t\mu)^2}{2t\sigma^2}}$$

Το b ανήκει στο διάστημα $-\infty$ έως $+\infty$.

(2) Η τ.μ. $B_{y+t} - B_y$, είναι ανεξάρτητη από τις B_u, $0 \leq u \leq y$.

Συνήθως λαμβάνεται $B(0) = 0$.

Μία στοχαστική ανέλιξη $\{X_t,\ t \geq 0\}$ καλείται **γεωμετρική κίνηση Brown** με παραμέτρους $\mu \in R$ και $\sigma > 0$ και συμβολίζεται $GBM(\mu, \sigma^2)$, αν ισχύει ότι, για κάθε $y \geq 0, t > 0$.

1) Η τ.μ. $\ln \frac{X_{t+y}}{X_y} \sim N(t\mu, t\sigma^2)$.

2) Η τ.μ. $\frac{X_{t+y}}{X_y}$ είναι ανεξάρτητη από τις X_u, $0 \leq u \leq y$.

Αν $\{B_t, t \geq 0\} \sim BM(\mu, \sigma^2)$, τότε η $\{e^{B_t}, t \geq 0\} \sim GBM(\mu, \sigma^2)$. Αν λοιπόν $\{X_t, t \geq 0\} \sim GBM(\mu, \sigma^2)$τότε η τ.μ. $X_t/X_0 \sim$ **λογαριθμοκανονική κατανομή** διότι

$$\ln \frac{X_t}{X_0} \sim N(t\mu, t\sigma^2)$$

και επομένως αν $Z \sim N(0,1)$, οι ροπές k τάξης της τ.μ. X_t θα είναι

$$
\begin{aligned}
E\left(X_t^k\right) &= E\left(\left({X_0}^k e^{\ln X_t}\right)^k\right) = E\left(\left({X_0}^k e^{\sigma\sqrt{t}Z+t\mu}\right)^k\right) \\
&= {X_0}^k e^{kt\mu} E\left(e^{k\sigma\sqrt{t}Z}\right)
\end{aligned}
\tag{1.12}
$$

Αλλά,

$$
\begin{aligned}
E(e^{uZ}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{uZ} e^{-\frac{1}{2}z^2}\, dz \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(z-u)^2+\frac{1}{2}u^2} dz \underset{k=z-u}{=} \frac{e^{\frac{1}{2}u^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}k^2} dx = e^{\frac{1}{2}u^2}
\end{aligned}
$$

από όπου προκύπτει ότι

$$E\left(X_t^k\right) = {X_0}^k e^{kt\mu+\frac{1}{2}k^2\sigma^2 t}$$

Για $k = 1$ και 2 έχουμε,

$$E(X_t) = X_0 e^{t\mu+\frac{1}{2}t\sigma^2}, \qquad V(X_t) = E(X_t^2) - E(X_t)^2 = X_0^2 e^{2t\mu+\tau\sigma^2}(e^{t\sigma^2} - 1)$$

Αν $\{B_t, t \geq 0\}$ είναι μια σ.δ. και $\mathcal{F} = \sigma(B_s, s \leq t)$, τότε το σύνολο

$$\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$$

καλείται **διήθηση** ή μελλοντική ιστορία (filtration). Γενικότερα, διήθηση καλείται μια οικογένεια σ-αλγεβρών $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ με την ιδιότητα $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t$ για κάθε $s \leq t$. Μία στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \geq 0\}$ θα καλείται **προσαρμοσμένη** στην $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ αν η B_t είναι $\mathcal{F}_t$ – μετρήσιμη για κάθε $t \geq 0$. Μία στοχαστική ανέλιξη $\{B_t, t \geq 0\}$ θα καλείται **martingale** ως προς $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$, αν είναι προσαρμοσμένη σε αυτή την διήθηση,

$$E(|B_t|) < \infty, \kappa\alpha\iota\ E(B_t|\mathcal{F}_s) = B_s, s \leq t$$

Αν η σ.δ. $\{B_t, t \geq 0\}$ είναι martingale χωρίς να αναφέρεται η διήθηση, θα εννοείται ότι είναι ως προς τη «φυσική» της διήθηση $\{\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t), t \geq 0\}$. Έστω διήθηση $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$. Θα λέμε ότι μία σ.α. $\{B_t, t \geq 0\}$ είναι $\boldsymbol{\mathcal{F}_t}$ **–** $\boldsymbol{BM(\mu, \sigma^2)}$ αν

(i) είναι $BM(\mu, \sigma^2)$,

(ii) είναι προσαρμοσμένη στην $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ και

(iii) κάθε προσαύξηση $B_{t+s} - B_s$ είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}_y$ με $y \leq s$.

Προφανώς μια $BM(\mu, \sigma^2)$ είναι και $\mathcal{F}t - BM(\mu, \sigma^2)$ με $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. Συνήθως θα συμβολίζουμε με $\{W_t, t \geq 0\}$ μία σ.α. που είναι $BM(0,1)$. Αν η $\{W_t, t \geq 0\}$ είναι $\mathcal{F}_t - BM(0,1)$ τότε αποδεικνύεται ότι είναι και $\mathcal{F}_t -$ martingale.

Έστω μια χρηματοοικονομική αγορά εξεταζόμενη στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ για κάποιο δεδομένο T. Συμβολίζουμε με Ω το σύνολο των δυνατών καταστάσεων της αγοράς στο χρονικό αυτό διάστημα και με $\mathcal{F}$ το χώρο ενδεχομένων του. Ο χώρος $(\Omega, \mathcal{F}, P\ )$ είναι εφοδιασμένος και με ένα μέτρο πιθανότητας P.

Υποθέτουμε ότι στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ορίζεται μια τυπική κίνηση Brown $W_t,\ t \in [0, T]$ με το φυσικό της φιλτράρισμα $\mathcal{F}_t = \sigma(W_x, x \leq t),\ t \in [0, T]$. Έστω ότι στην αγορά διατίθενται οι παρακάτω τίτλοι:

Τίτλος 1 (riskless asset) Ένα ομόλογο με αξία e^{rt} στο χρόνο t.

Τίτλος 2 (risky asset) Μια μετοχή με αξία X_t στον χρόνο t. Θεωρούμε ότι η στοχαστική ανέλιξη $X_t, t \in [0, T]$ είναι μία γεωμετρική κίνηση Brown με αρχική τιμή X_0 $(t = 0)$, δηλαδή

$$X_t = X_0 e^{\sigma W_t + \mu t}$$

όπου $W_t, t \in [0, T] \sim BM(0, t)$ και μ (drift), σ (volatility) κάποιες σταθερές παράμετροι.

Τίτλος 3 (derivative). Ένα απλό ΠΧΠ Ευρωπαικού τύπου με χρόνο λήξης T (επί του Τίτλου 2). Ως τέτοιο παράγωγο θεωρείται μία τ.μ. D_T που είναι $\mathcal{F}_T$ – μετρήσιμη ($D_T =$αξία του παραγώγου στο χρόνο T).

Το πρόβλημα που καλούμαστε να αντιμετωπίσουμε είναι η εύρεση της αξίας του παραγώγου στο χρόνο $t \in [0, T]$. Μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο (χαρτοφυλάκιο αναπαραγωγής) με τελική αξία U_T ίση με την αξία του παραγώγου, έστω D_T, στο χρόνο T. Με το σύμβολο V_t θα εκφράζουμε στο εξής την no-arbitrage αξία ενός παραγώγου σε κάποια χρονική στιγμή t. Για δικαίωμα αγοράς π.χ. $D_T = V(X, T) = max(\ X_T - \mathrm{k})$. Η τιμολόγηση ενός παραγώγου εμπεριέχει την εύρεση της παρούσας αξίας του παραγώγου, $V(x, t)$, πριν την ημερομηνία λήξης T, όπου $x = X(t)$ υποδηλώνει την τιμή του υποκείμενου αγαθού για $t < T$. Για να μην υπάρχει δυνατότητα για κερδοσκοπία (arbitrage) στην αγορά θα πρέπει το παράγωγο προϊόν να έχει την ίδια αξία με το χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης για κάθε $t\ \in\ [0, T]$.

Έστω ένα αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο που στο χρόνο t θα αποτελείται από β_t ομόλογα και α_t μετοχές (α_t, β_t). Τότε συμβολίζουμε με

$$U_t = e^{rt}\beta_t + \alpha_t X_t$$

την αξία του στο χρόνο $t \in [0, T]$. Παραγωγίζοντας προκύπτει ότι,

$$dU_t = \beta_t de^{rt} + \alpha_t dX_t$$

δηλαδή η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου αυτού σε απειροστό χρόνο $[t, t + dt]$ οφείλεται αποκλειστικά στην μεταβολή της αξίας του ομολόγου $(de^{rt} = e^{rt}rdt)$ και της μετοχής (dX_t). Δεν προστίθεται κανένα εξωτερικό ποσό ούτε αφαιρείται κανένα ποσό από το χαρτοφυλάκιο.

Σύμφωνα με τη **Risk Neutral Pricing Formula (RNPF)** στο μοντέλο **Black-Scholes(-Merton)** (Black and Scholes (1973) και Merton (1973)) αν ένα ΠΧΠ (Ευρωπαϊκού τύπου) με χρόνο λήξης T έχει τελική αξία D_T,τότε στο χρόνο t θα έχει no-arbitrage αξία:

$$D_t = e^{-r(T-t)}E_Q(D_T|\mathcal{F}_t), \qquad t \in [0, T] \tag{1.13}$$

όπου το Q, το οποίο αναφέρεται ως μέτρο πιθανότητας σε ένα «κόσμο ουδετέρου ρίσκου» (απουσία arbitrage), στο χώρο $(\Omega, \mathcal{F})$ είναι τέτοιο ώστε,

$$X = \{X_t, t \in [0, T]\} \sim GBM(r - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$$

Δίκαιη αξία (no-arbitrage) ενός δικαιώματος είναι η αξία κατά την οποία δεν δίνεται δυνατότητα για κερδοσκοπία χωρίς κίνδυνο.

Στο μοντέλο Black-Scholes(-Merton), η no-arbitrage τιμή ενός δικαιώματος αγοράς (call ευρωπαϊκού τύπου, με ημερομηνία λήξης T, τιμή εξάσκησης k) στο χρόνο t από την RNPF που αναφέρθηκε παραπάνω είναι ίση με

$$V(x, t) = e^{-r(T-t)}E_Q(D_T|\mathcal{F}_t) = e^{-r(T-t)}E_Q(\max\{X_T - k, 0\}\,|X_t)$$

και αποδεικνύεται ότι στο χρόνο t με $X_t = x$

$$\begin{aligned} V(x, t) &= D_t = e^{-r(T-t)}E_Q(D_T|\mathcal{F}_t) \\ &= e^{-r(T-t)}E_Q(\max\{X_T - k, 0\}\,|X_t) \\ &= e^{-r(T-t)}E_Q((X_t \cdot \frac{X_T}{X_t} - k|X_t = x)_+) \end{aligned}$$

$$= e^{-r(T-t)}E((x\cdot e^{(T-t)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)+\sigma\sqrt{T-t}\cdot Z}-k)_+)$$

με

$$X_T = xe^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}Z} \tag{1.14}$$

όπου με Z συμβολίζουμε μια τ.μ. που ακολουθεί την $N(0,1)$. Αν τώρα θέσουμε $I(m > n) = 1$ αν $m > n$ και 0 αν $n \leq m$, θα ισχύει γενικά για οποιαδήποτε $m \neq 0, n$ ότι

$$\begin{aligned} E((e^{mZ+n}-k)_+) &= E((e^{mZ+n}-k)I(e^{mZ+n}>k)) \\ &= E\left(e^{mZ+n}I(e^{mZ+n}>k)\right)-E\left(k\cdot I(e^{mZ+n}>k)\right) \\ &= e^nE(e^{mZ}I(Z>\frac{\ln k-n}{m}))-k\cdot P(Z>\frac{\ln k-n}{m}) \end{aligned}$$

ενώ θέτοντας $\frac{\ln k-n}{m}=x$ έχουμε,

$$\begin{aligned} E(e^{mZ}\cdot I(Z>x)) &= \int_x^{\infty} e^{mx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{e^{\frac{(m)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-\frac{(z-m)^2}{2}}dz \\ &\underset{y=z-m}{=} \frac{e^{\frac{(m)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{x-m}^{\infty} e^{\frac{y^2}{2}}dy \\ &= e^{\frac{(m)^2}{2}}(1-\Phi(x-m)) = e^{\frac{(m)^2}{2}}\Phi(m-x) \end{aligned}$$

(όπου Φ είναι η σ.κ. της $N(0,1)$) και άρα

$$E((e^{mZ+n}-k)_+) = e^{n+\frac{(m)^2}{2}}\Phi(m-\frac{ln\,k-n}{m})-k(\frac{n-ln\,k}{m})$$

Με βάση τον παραπάνω γενικό τύπο προκύπτει τώρα άμεσα ότι

$$\begin{aligned} V(x,t) &= x\cdot e^{-r(T-t)}E((e^{(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2)+\sigma\sqrt{T-t}\cdot Z}-\frac{k}{x})_+ \\ &= x\cdot e^{-r(T-t)}(e^{(T-t)\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)+(\sigma\sqrt{(T-t)})^2/2})\Phi(\sigma\sqrt{T-t}\ -\frac{\ln\frac{k}{x}-(T-t)(r-\frac{1}{2}\sigma^2)-\ln\frac{k}{x}}{\sigma\sqrt{T-t}})) \\ &= x\cdot\Phi(\omega)\ -\ e^{-r(T-t)}k\Phi(\omega\ -\ \sigma\sqrt{T-t}) \end{aligned} \tag{1.15}$$

όπου

$$\omega = \frac{r(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2} - \ln\left(\frac{k}{X_t}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

και

Φ είναι η συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$,

σ είναι η μεταβλητότητα (volatility) της τιμής του υποκείμενου αγαθού,

r είναι το επιτόκιο των ομολόγων της αγοράς χωρίς κίνδυνο.

Στο εξής θα συμβολίζουμε, προς χάριν ευκολίας, την no-arbitrage τιμή, από τον τύπο $B-S$, ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης k στον χρόνο t,

$$C_k(X_t,t) = e^{-r(T-t)}E_Q((X_T-k)_+|\mathcal{F}_t) \tag{1.16}$$

όμοια η no-arbitrage αξία ενός δικαιώματος πώλησης (put option) θα είναι

$$P_k(X_t,t) = e^{-r(T-t)}E_Q((k-X_T)_+|\mathcal{F}_t) \tag{1.17}$$

όπου $\{X_t, t \in [0,T]\} \sim_Q GBM(r-\sigma^2/2, \sigma^2)$. Επειδή

$$(k - X_T)_+ = (X_T - k)_+ + k - X_T$$

Προκύπτει η εξής σχέση (put – call parity),

$$\begin{aligned} P_k(X_t,t) &= e^{-r(T-t)}E_Q((X_T-k)_+|\mathcal{F}_t) + e^{-r(T-t)}E_Q(k-X_T|\mathcal{F}_t) \\ &= C_k(X_t,t) + e^{-r(T-t)}k - e^{rt}E_Q(e^{-rt}X_T|\mathcal{F}_t) \\ &= C_k(X_t,t) + e^{-r(T-t)}k - X_t \end{aligned} \tag{1.18}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ότι η ανέλιξη $e^{-rt}X_T, t \in [0,T]$ είναι $\boldsymbol{Q}$ **−martingale**.

Η no-arbitrage αξία οποιουδήποτε ΠΧΠ Ευρωπαϊκού τύπου από τη RNPF, αν ένα ΠΧΠ έχει τελική αξία $D_T = g(X_T)$ (για κάποια συνάρτηση g), στο χρόνο t (με $X_t = x$) θα είναι,

$$\begin{aligned} V_g(x,t) &= e^{-r(T-t)}E_Q(g(X_T)\,|X_t = x) = e^{-r(T-t)}E_Q\left(g\left(X_t e^{\ln(X_T/X_t)}\right)\middle|X_t = x\right) \\ &= e^{-r(T-t)}E_Q(g(xe^N)) \end{aligned}$$

όπου η τ.μ. $N = ln(X_T/X_t) \sim_Q N((T-t)(r-\sigma^2/2), (T-t)\sigma^2)$.

Τέλος ας εξετάσομε την no-arbitrage αξία οποιουδήποτε ΠΧΠ Ευρωπαϊκού τύπου (path dependent) από τη risk neutral pricing formula, που έχει τελική αξία,

$$D_T = g(X_t, t \in [0, T])$$

Σε αυτή τη περίπτωση η τιμή του στο T εξαρτάται από όλη την διαδρομή της τιμής της μετοχής στο $[0, T]$ και η no-arbitrage αξία του στο χρόνο t θα είναι,

$$V_g(\{X_s, s \in [0, T]\}, t) = e^{-r(T-t)} E_Q\big(g(X_s, s \in [0, T])\big| X_{s,}\ s \le t\big)$$

όπου $X_s \sim_Q GBM(r - \sigma^2/2, \sigma^2)$.

Η πιο σημαντική ίσως ιδιότητα της τιμής ενός δικαιώματος από τον τύπο των B-S είναι η παράμετρος Δέλτα σύμφωνα με την οποία όταν αυξάνεται η τιμή $x = X_t$ της μετοχής στο χρόνο t, τότε η $C_k(x, t)$ αυξάνεται (ενώ αντίθετα η $P_k(x, t)$ μειώνεται). Μάλιστα η παράγωγος του $C_k(x, t)$ ως προς x καλείται παράμετρος Δέλτα και είναι ίση με,

$$Delta = \frac{d}{dx}\, C_k(x, t) = \Phi(\omega) \tag{1.19}$$

Η δεύτερη παράγωγος της τιμής του δικαιώματος αγοράς ως προς x καλείται Γάμμα και είναι ίση με

$$Gamma = \frac{d^2}{dx^2}\, C_k(x, t) = \frac{1}{\sigma x \sqrt{T - t}} \varphi(\omega) \tag{1.20}$$

με $\varphi = \Phi'$.

Όπως φαίνεται είναι θετική και επομένως η $C_k(x, t)$ είναι κυρτή ως προς x.

Παραπάνω βρήκαμε την no-arbitrage τιμή ενός παραγώγου. Στο αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης (π.χ. βλέπε Carr, Ellis, and Gupta (1998)), το οποίο στο χρόνο t, αποτελείται από α_t μετοχές και β_t ομόλογα, αν το β_t είναι θετικό έχουμε δανείσει (επενδύσει σε ομόλογα), αν είναι αρνητικό έχουμε δανειστεί (εκδώσει ομόλογα) το ποσό αυτό με επιτόκιο r (στο χρόνο t και β_t ομόλογα έχουν αξία $\beta_t e^{rt}$). Το χαρτοφυλάκιο αυτό έχει κάθε χρονική στιγμή t την ίδια αξία (U_t) με το εξεταζόμενο παράγωγο χρηματοοικονομικό προϊόν, δηλαδή,

$$C_k(X, t) = U_t = e^{rt}\beta_t + \alpha_t X_t \tag{1.21}$$

όπου $x = X_t$ η τιμή της μετοχής στο χρόνο t. Μπορεί πράγματι να κατασκευαστεί ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο το οποίο την χρονική στιγμή t θα πρέπει να περιέχει,

$$\alpha_t = \frac{d}{dx}\, C_k(X_t, t) = \Phi\left(\frac{r(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2} - \ln\left(\frac{k}{x}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

μετοχές, δηλαδή α_t θα πρέπει να είναι ίσο με την παράμετρο Δέλτα την χρονική στιγμή t (προφανώς η τιμή της θα είναι γνωστή στο χρόνο t, δηλαδή $\mathcal{F}_t$ −μετρήσιμη). Η τιμή β_t προκύπτει από τον τύπο $C_k(x,t) = e^{rt}\beta_t + \alpha_t X_t$.

Το ίδιο μπορεί να προκύψει και ως εξής. Έστω ότι έχουμε στην κατοχή μας ένα δικαίωμα αγοράς (long call) στο χρόνο t, και έστω ότι μετά από μικρό χρονικό διάστημα δt, η τιμή της υποκειμενικής μετοχής αυξάνεται (μειώνεται) κατά δx, με συνέπεια να αυξηθεί (μειωθεί) και η τιμή του δικαιώματος κατά δc. Επομένως, μετά από χρόνο δt θα έχουμε κέρδος (ζημιά) δc. Επειδή ισχύει ότι

$$\alpha_t = \frac{d}{dx}\, C_k(x,t) \approx \frac{\delta c}{\delta x}$$

το κέρδος (ζημιά) που θα έχουμε είναι περίπου ίσο με $\delta c \approx \alpha_t \delta x$. Επομένως αν στο χρόνο t από το χαρτοφυλάκιο μας είχαν πωληθεί α_t το πλήθος μετοχές, τότε θα είχαμε αντισταθμίσει πλήρως το κέρδος (ζημιά) που θα είχαμε από το δικαίωμα (long position στο call απαιτεί short position στην μετοχή). Αντίθετα αν είχαμε λάβει μια θέση short call τότε θα έπρεπε στο χρόνο t να είχαμε στην κατοχή μας α_t το πλήθος μετοχές (short position στο call απαιτεί long position στην μετοχή).

Επομένως, αν ένας επενδυτής έχει λάβει κάποια θέση (long ή short) σχετικά με ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης, τότε μπορεί να αντισταθμίσει αυτή του τη θέση κατασκευάζοντας ένα χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης. Το χαρτοφυλάκιο αυτό είναι δυναμικό, δηλαδή θα πρέπει η σύνθεσή του να αναπροσαρμόζεται κάθε χρονική στιγμή ώστε να είναι ίση με (α_t, β_t) στο χρόνο $t \in [0, T]$. Στην πράξη αυτό δεν είναι εφικτό, αλλά μπορεί η αναπροσαρμογή να γίνεται κατά τακτά χρονικά διαστήματα οδηγώντας σε προσεγγιστικό χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης.

Η στρατηγική που αναφέραμε παραπάνω καλείται Δέλτα (Delta Hedging). Μια υψηλή τιμή του Γάμμα (που είναι η παράγωγος του Δέλτα ως προς την τιμή της μετοχής) υποδηλώνει ότι το Δέλτα είναι αρκετά ευαίσθητο στις αλλαγές της τιμής της μετοχής και ότι πρέπει να αναπροσαρμόζεται πιο συχνά το (προσεγγιστικό) χαρτοφυλάκιο εξασφάλισης. Φυσικά όλα τα παραπάνω ισχύουν θεωρητικά, διότι στην πράξη υπάρχουν κόστη συναλλαγών που αυξάνουν το κόστος κατασκευής του χαρτοφυλακίου εξασφάλισης ενώ επίσης μπορεί η μεταβλητότητα να μην παραμένει σταθερή..

1.6 Απλά Εξωτικά Συμβόλαια Δικαιωμάτων Προαίρεσης (simple Exotic options)

Τα Ευρωπαϊκού και Αμερικανικού τύπου δικαιώματα αγοράς και πώλησης ονομάζονται plain vanilla και διαπραγματεύονται είτε σε οργανωμένες αγορές είτε εξωχρηματιστηριακά (over-the-counter). Στα Εξωτικά συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης (Exotic options) ανήκουν τα παράγωγα που δεν είναι plain vanilla. Επίσης, είναι πιο σύνθετα και μπορούν να ταξινομηθούν με διάφορους τρόπους. Ως εκ τούτου έχουν περισσότερες παραλλαγές στο τρόπο πληρωμής τους και εξάσκησής τους.

Με τον όρο απλά Εξωτικά συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης (simple Exotic options) αναφερόμαστε σε εκείνα τα συμβόλαια τα οποία δεν εξαρτώνται από τη διαδρομή που ακολουθήθηκε και περιέχουν ένα περιουσιακό στοιχείο X και μια χρονική περίοδο λήξης T. Η συνάρτηση κέρδους των απλών Εξωτικών δικαιωμάτων είναι της μορφής $V(x,T) = f(x)$, η οποία είναι διαφορετική σε σχέση με τα δικαιώματα αγοράς ή πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου. Η συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να αναλυθεί ως ένα άθροισμα απλούστερων συμβολαίων τα οποία και έχουν τιμολογηθεί. Σε αυτή τη περίπτωση η τιμή του παραγώγου ισούται με τη τιμή του χαρτοφυλακίου αναπαραγωγής.

Στο σημείο αυτό θα αναφερθούμε σε ορισμένα απλά Εξωτικά δικαιώματα τα οποία και θα μας βοηθήσουν στην τιμολόγηση των Εξωτικά συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης σε δυο χρονικές περιόδους (Dual Expiry Exotic Options) του επόμενου κεφαλαίου. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα εξωτικά δικαιώματα παραπέμπουμε στα συγγράμματα των Jarrow, (1995) και Lipton, (2003).

1.6.1 Δυαδικά δικαιώματα πρώτης τάξης

Τα δυαδικά δικαιώματα πρώτης τάξης αποτέλεσαν τον θεμέλιο λίθο όσον αφορά την τιμολόγηση πολλών άλλων παραγώγων. Αυτή φυσικά η άποψη δεν είναι καινούργια καθώς αρχικά χρησιμοποιήθηκε από τους Rubinstein and Reiner, (1991) και στην συνέχεια από τον Ingersoll, (2000). Με τον όρο αυτό εκφράζουμε τα παράγωγα, επί ενός υποκείμενου αγαθού, τα οποία επιφέρουν κέρδος κατά την ημερομηνία λήξης, T όταν η τιμή του περιουσιακού στοιχείου είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη από την τιμή εξάσκησης $\xi > 0$. Το κέρδος, κατά την ημερομηνία λήξης, των 1ης-τάξης δυαδικά δικαιώματα (binary options) σε αυτή την περίπτωση είναι μια συνάρτηση του x και δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$V_{\xi}^{s}(x,T) = f(x)\,\mathbb{I}(sx > s\xi) \tag{1.22}$$

όπου το $s = "+"$ ή $"-"$ εάν η τιμή του περιουσιακού στοιχείου είναι επάνω ή κάτω από την τιμή εξάσκησης αντίστοιχα. Η δείκτρια παίρνει την μορφή $\mathbb{I}(x > \xi)$ όταν $s = "+"$ ενώ όταν $s = "-"$ $\mathbb{I}(x < \xi)$. Αξίζει να σημειωθεί ότι τα πιο γνωστά 1ης-τάξης δυαδικά δικαιώματα είναι τα δυαδικά δικαιώματα επί ενός περιουσιακού στοιχείου (asset binary options) τα οποία πληρώνουν μια μονάδα του υποκείμενου αγαθού, δηλαδή $f(x) = x$ και τα δυαδικά δικαιώματα επί ενός ομολόγου (bond binary options) τα οποία πληρώνουν 1 δολάριο ή τίποτα, δηλαδή $f(x) = 1$. Η παρούσα αξία των δυαδικών περιουσιακών στοιχείων και δυαδικών ομολόγων γράφεται ως $A_{\xi}^{\pm}(x,t)$ και $B_{\xi}^{\pm}(x,t)$ αντίστοιχα. Επίσης κατά το χρόνο λήξης T ισχύει,

$$A_{\xi}^{+}(x,T) = x\mathbb{I}(x > \xi) \qquad A_{\xi}^{-}(x,T) = x\mathbb{I}(x < \xi)$$

$$B_{\xi}^{+}(x,T) = \mathbb{I}(x > \xi) \qquad B_{\xi}^{-}(x,T) = \mathbb{I}(x < \xi)$$

1.6.2 BS - Τιμές για ένα Δυαδικό περιουσιακό στοιχείο και ένα Δυαδικό ομόλογο πρώτης τάξης

Στην ενότητα αυτή (βλέπε Buchen, (2012)) προτού παραθέσουμε την τιμολόγηση των Δυαδικών περιουσιακών στοιχείων και Δυαδικών ομόλογων πρώτης τάξης θα αποδείξουμε το παρακάτω λήμμα που θα μας βοηθήσει στον υπολογισμό.

ΛΗΜΜΑ 1.7.1

Αν $X_T \gtrless k \Rightarrow Z \gtrless -d_k'(x,\tau)$ όπου

$$d_k'(x,\tau) = \frac{log\left(\frac{x}{k}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

Απόδειξη: Γνωρίζουμε (1.14) ότι $X_T = xe^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\sigma\sqrt{\tau}Z}$ με $\tau = (T-t)$ και $Z \sim N(0,1)$. Ισχύει ότι,

$$X_T = xe^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\sigma\sqrt{\tau}Z} \gtrless k \Rightarrow \log\left(xe^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\sigma\sqrt{\tau}Z}\right) \gtrless \log(k)$$

$$\Rightarrow Z \gtrless \frac{log\left(\frac{x}{k}\right)+\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{-\sigma\sqrt{\tau}} \qquad (1.23)$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Δυαδικό Ομόλογο

Συνεχίζοντας λοιπόν με την τιμολόγηση των δυαδικών ομολόγων έχουμε ότι,

$$\begin{aligned} B_\xi^+(x,t) &= e^{-r\tau}E_Q\{\mathbb{I}(X>\xi)|\mathcal{F}_t\} \\ &= e^{-r\tau}E_Q\{\mathbb{I}(Z>-d'_\xi(x,\tau))\} \\ &= e^{-r\tau}E_Q\{\mathbb{I}(Z<d'_\xi)\} \\ &= e^{-r\tau}\Phi(d'_\xi) \qquad (1.24) \end{aligned}$$

Οι γραμμές δυο, τρία και τέσσερα προκύπτουν από το Λήμμα 1.7.1 καθώς επίσης και από τις εξισώσεις (1.4) και (1.6). Ο αντίστοιχος τύπος για την τιμολόγηση των δυαδικών ομολόγων όπου η τιμή του περιουσιακού στοιχείου είναι κάτω από την τιμή εξάσκησης $\xi > 0$ είναι,

$$\begin{aligned} B_\xi^-(x,t) &= e^{-r\tau}E_Q\{\mathbb{I}(X<\xi)|\mathcal{F}_t\} \\ &= e^{-r\tau}E_Q\{\mathbb{I}(Z<-d'_\xi(x,\tau))\} \\ &= e^{-r\tau}E_Q\{\mathbb{I}(Z>d'_\xi)\} \\ &= e^{-r\tau}\Phi(-d'_\xi) \qquad (1.25) \end{aligned}$$

άρα προκύπτει ότι ο γενικός τύπος για την τιμολόγηση των επάνω (up, $s = "+"$) και κάτω (down, $s = "-"$) δυαδικών ομόλογων 1ης-τάξης με τιμή εξάσκησης ξ είναι,

$$B_\xi^s(x,t) = e^{-r\tau}\Phi(sd'_\xi) \qquad (1.26)$$

Δυαδικό περιουσιακό στοιχείο

Για την τιμολόγηση των δυαδικών δικαιωμάτων επί ενός περιουσιακού στοιχείου θα χρησιμοποιήσουμε την κανονική κατανομή και τις ιδιότητες της στις οποίες έχουμε αναφερθεί στο πρώτο κεφάλαιο καθώς επίσης και στην RNPF.

$$A_\xi^+(x,t) = e^{-r\tau}E_Q\{X\mathbb{I}(X>\xi)|\mathcal{F}_t\}$$

$$= e^{-r\tau} E_Q\{x e^{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau+\sigma\sqrt{\tau}Z} \mathbb{I}(X > \xi)|\mathcal{F}_t\}$$

$$= x e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau} E_Q\{e^{\sigma\sqrt{\tau}Z} \mathbb{I}\left(Z > -d'_\xi\right)\}$$

$$= x E_Q\{\mathbb{I}\left(Z + \sigma\sqrt{\tau} > -d'_\xi\right)\}$$

$$= x E_Q\left\{\mathbb{I}\left(Z < d'_\xi + \sigma\sqrt{\tau}\right)\right\}$$

$$= x\Phi\left(d_\xi\right) \tag{1.27}$$

Στην τρίτη γραμμή χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (1.7). Ορίζουμε σε αυτό το σημείο μια καινούργια παράμετρο την,

$$d_\xi(x,\tau) = d'_\xi(x,\tau) + \sigma\sqrt{\tau} = \frac{log\left(\frac{x}{\xi}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}} \tag{1.28}$$

Η αντίστοιχη εξίσωση για τα κάτω δυαδικά περιουσιακά στοιχεία όμοια είναι,

$$A_\xi^-(x,t) = e^{-r\tau} E_Q\{X\mathbb{I}(X < \xi)|\mathcal{F}_t\}$$

$$= x E_Q\left\{\mathbb{I}\left(Z > d'_\xi + \sigma\sqrt{\tau}\right)\right\}$$

$$= x\Phi\left(-d_\xi\right) \tag{1.29}$$

Επίσης, όπως και στα δυαδικά ομόλογα έτσι και εδώ οι δυο περιπτώσεις συνοψίζονται στο παρακάτω γενικό τύπο που αφορά την τιμολόγηση των επάνω $(s = " + ")$ και κάτω $(s = " - ")$ δυαδικών περιουσιακών στοιχείων 1ης-τάξης με τιμή εξάσκησης $\xi > 0$.

$$A_\xi^s(x,t) = x\Phi\left(s d_\xi\right) \tag{1.30}$$

1.6.3 Δικαιώματα Αγοράς και Πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου

Έστω ότι διαθέτουμε δυο ΠΧΠ επί ενός χρεογράφου X (βλέπε Buchen, (2012)). Το πρώτο είναι ένα επάνω δυαδικό περιουσιακό στοιχείο με απόδοση κατά την λήξη στο χρόνο T,

$$A_k^+(X,T) = X\mathbb{I}(X > k)$$

Το δεύτερο είναι ένα επάνω δυαδικό ομόλογο με απόδοση κατά την λήξη,

$$B_k^+(X,T) = \mathbb{I}(X > k)$$

Το δυαδικό περιουσιακό στοιχείο αποδίδει μια μονάδα της υποκείμενης μετοχής στο χρόνο T, μόνο εάν η τιμή της μετοχής είναι μεγαλύτερη από την τιμή εξάσκησης k. Από την άλλη το δυαδικό ομόλογο αποδίδει μια χρηματική μονάδα στη περίπτωσή μας ένα δολάριο την χρονική στιγμή T, εάν η τιμή της μετοχής είναι επάνω από την τιμή εξάσκησης την χρονική στιγμή T. Επομένως εξαρτώνται από την τιμή της υποκείμενης μετοχής. Εν αντιστοιχία τα δυαδικά δικαιώματα τα οποία αναφέρονται ως επάνω είναι in-the-money (itm) όταν η τιμή της υποκείμενης μετοχής είναι μικρότερη από την τιμή εξάσκησης k και συμβολίζονται,

$$A_k^-(X,T) = X\mathbb{I}(X<k) \qquad \text{και} \qquad B_k^-(X,T) = \mathbb{I}(X<k)$$

Εάν $x = X_t$ η τιμή της μετοχής στο χρόνο $t < T$, τότε οι παραπάνω τύποι γράφονται ως εξής,

$$A_k^-(x,t) \qquad \text{και} \qquad B_k^-(x,t)$$

Επομένως η απόδοση κατά την λήξη σε χρόνο T ενός δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης k μπορεί να εκφραστεί ως εξής,

$$\begin{aligned} C_k(X,T) &= (X-k)^+ \\ &= (X-k)\mathbb{I}(X>k) \\ &= X\mathbb{I}(X>k) - k\mathbb{I}(X>k) \\ &= A_k^+(X,T) - kB_k^+(X,T) \end{aligned}$$

και για χρόνο $t < T$,

$$\begin{aligned} C_k(x,t) &= e^{-r(T-t)}E_Q\{(X-k)^+|\mathcal{F}_t\} \\ &= e^{-r(T-t)}E_Q\{X\mathbb{I}(X>k) - k\mathbb{I}(X>k)|\mathcal{F}_t\} \\ &= A_k^+(x,t) - kB_k^+(x,t) \end{aligned}$$

Ομοίως για την τιμή ενός δικαιώματος πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου όσον αφορά τα κάτω δυαδικά προκύπτει,

$$P_k(x,t) = -A_K^-(x,t) + kB_K^-(x,t)$$

Επομένως προκύπτει ότι για ένα δικαίωμα αγοράς ισχύει,

$$\begin{aligned} C_k(x,t) &= A_k^+(x,t) - kB_k^+(x,t) \\ &= x\Phi(d_k) - ke^{-r\tau}\Phi(d_k') \qquad (1.31) \end{aligned}$$

και για ένα δικαίωμα πώλησης,

$$P_k(x,t) = -A_k^-(x,t) + kB_k^-(x,t)$$
$$= -x\Phi(-d_k) - ke^{-r\tau}\Phi(-d_k') \quad (1.32)$$

Η δεύτερη γραμμή τόσο στο δικαίωμα αγοράς όσο και στο δικαίωμα πώλησης προκύπτει από τις εξισώσεις (1.24), (1.27) και (1.25), (1.29) αντίστοιχα.

1.6.4 Q-Δικαιώματα προαίρεσης και Δικαιώματα Χάσματος (Gap and Q-Options)

Τα Gap δικαιώματα αγοράς και πώλησης (βλέπε Buchen, (2012)) αποτελούν επέκταση των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου. Ουσιαστικά είναι δικαιώματα αγοράς και πώλησης των οποίων η strike price k είναι διαφορετική από την exercise price ξ, δηλαδή $k \neq \xi$. Στο χρόνο λήξης T το κέρδος για το μεν gap δικαίωμα αγοράς είναι,

$$C(x,T) = (x-k)\mathbb{I}(x > \xi) \quad (1.33)$$

για το δε gap δικαίωμα πώλησης,

$$P(x,T) = (k-x)\mathbb{I}(x < \xi) \quad (1.34)$$

και η αξία τους για $t < T$ δίνεται αντίστοιχα από τις παρακάτω συναρτήσεις,

$$C(x,t) = A_\xi^+(x,\tau) - kB_\xi^+(x,\tau) \quad (1.35)$$

$$P(x,t) = -A_\xi^-(x,\tau) + kB_\xi^-(x,\tau) \quad (1.36)$$

Η ποσότητα $|\xi - k|$ καλείται χάσμα (gap) και υποδηλώνει ότι υπάρχει ένα gap μεταξύ της τιμής εξάσκησης του option και της τιμής στην οποία παράγεται κέρδος για τον κάτοχο του δικαιώματος. Όταν η ποσότητα αυτή δεν είναι μηδέν η απόδοση κατά την λήξη είναι μια συνάρτηση μη-συνεχής. Τέλος, ισχύει ότι $\xi \geq k$ για ένα gap δικαίωμα αγοράς και $\xi \leq k$ για ένα gap δικαιώματα πώλησης. Προφανώς εάν $\xi = k$ τότε μιλάμε για Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αγοράς ή πώλησης.

Γενικότερα ορίζεται ένα Q-δικαίωμα 1ης-τάξης με exercise price ξ και strike price k. Η αξία του παραγώγου αυτού κατά το χρόνο λήξης T είναι,

$$Q_\xi^s(x,T;k) = s(x-k)\mathbb{I}(sx > s\xi), \qquad (s = \pm). \quad (1.37)$$

Έτσι, το $Q_\xi^+(x,t;k)$ υποδηλώνει την παρούσα αξία ενός gap δικαιώματος αγοράς με strike price ξ και exercise price k, ενώ το $Q_\xi^-(x,t;k)$ ενός gap δικαιώματος πώλησης με τα ίδια χαρακτηριστικά. Έστω τώρα ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο διαθέτει δυαδικά περιουσιακά στοιχεία και δυαδικά ομόλογα, τότε η παρούσα αξία ενός Q-δικαιώματος δίνεται από το παρακάτω τύπο,

$$\begin{aligned} Q_\xi^s(x,t;k) &= sA_\xi^s(x,t) - skB_\xi^s(x,t) \\ &= sx\Phi\big(sd_\xi\big) - ske^{-r\tau}\Phi(sd'_\xi) \end{aligned} \quad (1.38)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Εξωτικά συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης σε δυο χρονικές περιόδους

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναλύσουμε τα Exotic options τα οποία εξαρτώνται από δυο διαφορετικές περιόδους. Το κέρδος τους έχει μια τέτοια δομή η οποία εξαρτάται από την τιμή του υποκείμενου αγαθού σε δυο μελλοντικές χρονικές περιόδους T_1 και T_2 με $T_1 < T_2$. Έστω ότι x_1, x_2 είναι οι τιμές του υποκείμενου αγαθού τις χρονικές περιόδους T_1 και T_2 αντίστοιχα. Τότε το κέρδος του δικαιώματος αυτού την χρονική στιγμή T_2 έχει την μορφή $V(x_i, T_2) = f(x_1, x_2)$. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι η τιμή x_1 του περιουσιακού στοιχείου η οποία και έχει καθοριστεί κατά την χρονική περίοδο T_1, παραμένει σταθερή καθ' όλη την διάρκεια της χρονικής περίοδο (T_1, T_2). Για τα εξωτικά δικαιώματα σε δυο χρονικές περιόδους που αναλύονται σε αυτό το κεφάλαιο κατά κύριο λόγο βασιστήκαμε στο σύγγραμμα του Buchen, (2004).

2.2 Προθεσμιακά συμβόλαια μελλοντικής εκκίνησης για δικαιώματα αγοράς και πώλησης (Forward Start Calls and Puts)

Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο μελλοντικής εκκίνησης για δικαιώματα αγοράς (πώλησης) δίνει τη δυνατότητα στον κάτοχο του δικαιώματος να αποκτήσει ένα at-the-money δικαίωμα αγοράς (πώλησης) Ευρωπαϊκού τύπου σε μια μελλοντική στιγμή T_1, δηλαδή η τιμή εξάσκησης ισούται με τη τιμή του περιουσιακού στοιχείου, το οποίο λήγει κατά τη χρονική περίοδο $T_2 > T_1$. Η τιμή εξάσκησης κατά τη χρονική περίοδο $t < T_1$ είναι άγνωστη για το λόγο αυτό τα forward start δικαιώματα θεωρούνται παραδείγματα δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με στοχαστική τιμή εξάσκησης (strike price). Η αξία του FS κατά την χρονική στιγμή T_1 όπου είναι γνωστή η αξία x_1 θα είναι,

$$F_c(x_1, T_1) = e^{-r\tau} E_Q\left(\left(X_{T_2} - X_{T_1}\right)_+ | X_{T_1} = x_1\right) = [C_k(x_1, \tau)]_{k=x_1}, \quad \tau = (T_2 - T_1)$$

όπου $C_k(x_1, \tau)$ εκφράζει την αξία ενός δικαιώματος αγοράς με απόδοση μετά από χρόνο τ ίση με $(x-k)_+$.

Όπως γίνεται κατανοητό από το παραπάνω τύπο το κέρδος κατά την χρονική στιγμή T_1 αναφέρεται σε ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή εξάσκησης $k = x_1$ και υπολειπόμενο χρόνο μέχρι τη λήξη $\tau = (T_2 - T_1)$. Το x_1 υποδηλώνει την τιμή του περιουσιακού στοιχείου την χρονική στιγμή T_1. Επίσης από την εξίσωση (1.33) μπορεί ισοδύναμα να γραφτεί,

$$F_c(x_1, T_1) = g(\tau)x_1$$

όπου η $g(\tau)$ δίνεται παρακάτω και είναι σταθερή και ανεξάρτητη της τιμής x_1. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα το συμβόλαιο μελλοντικής εκκίνησης για δικαίωμα αγοράς, την χρονική στιγμή T_1, να αποδίδει $g(\tau)$ μονάδες από το υποκείμενο αγαθό. Άρα η αξία του για $t < T_1$ δίνεται από τους παρακάτω τύπους

$$F_c(x,t) = e^{-rt}E_Q\left(g(\tau)X_{T_1}\middle|X_t = x\right) = g(\tau)e^{-rt}E_Q\left(X_{T_1}\middle|X_t = x\right) = g(\tau)x$$

λόγω του ότι, υπό το Q η $e^{-rt}X_t, t \geq 0$ είναι martingale. Επομένως τελικά

$$F_c(x,t) = g(\tau)x \tag{2.1}$$

$$g(\tau) = \Phi\left(a\sqrt{\tau}\right) - e^{-r\tau}\Phi\left(a'\sqrt{\tau}\right) \tag{2.2}$$

με $a = \frac{r}{\sigma} + \frac{1}{2}\sigma,\ a' = \frac{r}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma$.

Η αντίστοιχη παρούσα αξία για $t < T_1$ ενός συμβολαίου μελλοντικής εκκίνησης για δικαίωμα πώλησης βρέθηκε όμοια ότι είναι

$$F_p(x,t) = h(\tau)x \tag{2.3}$$

$$h(\tau) = -\Phi\left(-a\sqrt{\tau}\right) - e^{-r\tau}\Phi\left(-a'\sqrt{\tau}\right) \tag{2.4}$$

Έστω ότι x_2 η τιμή του περιουσιακού στοιχείου τη χρονική στιγμή T_2, τότε το κέρδος των συμβολαίων μελλοντικής εκκίνησης για δικαιώματα αγοράς και πώλησης αντίστοιχα, σύμφωνα με τα παραπάνω είναι,

$$F_c\left(x_1, x_2, T_2\right) = (x_2 - x_1)^+ \tag{2.5}$$

$$F_p\left(x_1, x_2, T_2\right) = (x_1 - x_2)^+ \tag{2.6}$$

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως η τιμή $x_1 = X(T_1)$, παραμένει σταθερή σε όλο το χρονικό διάστημα $(T_1,\ T_2)$. Πολλές φορές είναι πιο εύκολο η τιμολόγηση των συμβολαίων μελλοντικής εκκίνησης να γίνεται μέσω των κερδών της χρονικής περιόδου T_1 παρά της T_2, παρόλα αυτά είναι εποικοδομητικό από αναλυτικής πλευράς να πραγματοποιούμε τιμολόγηση των δικαιωμάτων και στις δυο αυτές χρονικές περιόδους ούτως ώστε να αποτυπώνεται η σύγκλιση των δυο αυτών προσεγγίσεων στην ίδια τιμή.

2.3 Δυαδικά δικαιώματα Δεύτερης τάξης (Second order Binaries)

Τα δυαδικά δικαιώματα 1ης τάξης είναι παράγωγα τα οποία κατά την λήξη τους αποφέρουν ένα ποσό $f(x)$ μόνο όταν η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι επάνω (μεγαλύτερη) ή κάτω (μικρότερη) από την τιμή εξάσκησης του. Τα κυριότερα ήδη είναι τα up-type και τα down-type, ανάλογα με το αν η τιμή εξάσκησης είναι πάνω ή κάτω από τη τιμή, όπως προαναφέραμε.

Λέμε ότι ένα παράγωγο επί ενός υποκείμενου αγαθού είναι ένα δυαδικό δικαίωμα 2ης τάξης εάν το κέρδος του κατά την χρονική στιγμή T_1 είναι ένα δυαδικό δικαίωμα επί ενός συμβολαίου το οποίο αυτό κάθε αυτό είναι δυαδικό δικαίωμα 1ης τάξης, με ημερομηνία λήξης $T_2 > T_1$. Το κέρδος κατά την χρονική περίοδο T_1 δίνεται από το παρακάτω τύπο

$$V_{\xi_1 \xi_2}^{s_1 s_2}(x_1, T_1) = V_{\xi_2}^{s_2}(x_1, \tau)\mathbb{I}(s_1 x_1 > s_1 \xi_1) \tag{2.7}$$

όπου με x_1 συμβολίζουμε τη τιμή του υποκείμενου αγαθού τη χρονική στιγμή T_1, $s_{1,2}$= $\pm$ υποδηλώνει το είδος του δυαδικού δικαιώματος και $V_{\xi_2}^{s_2}(x_1 \tau)$ είναι η τιμή του δυαδικού δικαιώματος 1ης-τάξης με τιμή εξάσκησης ξ_2 και χρόνο μέχρι τη λήξη $\tau = (T_2 - T_1)$.

Άρα τα δυαδικά δικαιώματα 2ης-τάξης έχουν δυο τιμές εξάσκησης ξ_1 και ξ_2 οι οποίες τίθενται σε ισχύ τις χρονικές στιγμές T_1 και T_2 αντίστοιχα. Σε αντιστοιχία με τα πρόσημα των s_1 και s_2 προκύπτουν τέσσερις διαφορετικοί συνδυασμοί για τα δυαδικά δικαιώματα 2ης-τάξης τα οποία είναι τα εξής: επάνω-επάνω, επάνω-κάτω, κάτω-επάνω και κάτω-κάτω δηλαδή $(s_1, s_2) = [(+\,+),\ (+\,-),\ (+\,-), (-,-)]$.

Τώρα αν $f(x)$ είναι η απόδοση των δυαδικών δικαιωμάτων 2ης-τάξης κατά την λήξη τους, όταν πληρούνται οι συνθήκες για εξάσκηση του δικαιώματος τη χρονική περίοδο (T_1, T_2), τότε έχουμε,

$$V_{\xi_1 \xi_2}^{s_1 s_2}(x_1, x_2, T_2) = f(x_2)\mathbb{I}(s_1 x_1 > s_1 \xi_1)\mathbb{I}(s_2 x_2 > s_2 \xi_2) \tag{2.8}$$

όπου x_2 είναι η τιμή του υποκείμενου αγαθού τη χρονική στιγμή T_2.

Παρατήρηση 2.1 Όταν τιμολογούμε ένα δυαδικό δικαίωμα $2^{ης}$-τάξης πρέπει να το υπολογίσουμε κατά τη χρονική στιγμή $t < T_1 < T_2$. Υπενθυμίζουμε όμως ότι η τιμή του περιουσιακού στοιχείου x_1 που υπολογίσαμε την χρονική στιγμή T_1 παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια της χρονικής περιόδου (T_1, T_2).

Τέλος, εάν μπορούμε να αναπαραστήσουμε το κέρδος ενός παραγώγου την χρονική στιγμή T_1 σαν ένα δυαδικό δικαίωμα $1^{ης}$-τάξης τότε πολλαπλασιασμένο με μια δείκτρια συνάρτηση $\mathbb{I}(s_1 x_1 > s_1 \xi_1)$, το παράγωγο αυτό μετατρέπεται σε ένα $2^{ης}$-ταξης δυαδικό δικαίωμα.

2.4 Δυαδικό περιουσιακό στοιχείο και Δυαδικό ομόλογο δεύτερης τάξης (Second-Order Asset and Bond Binaries)

Η τιμολόγηση των δυαδικών περιουσιακών στοιχείων και δυαδικών ομολόγων δεύτερης τάξης, όταν $f(x) = x$ και $f(x) = 1$ αντίστοιχα, εξαρτάται από την αξία του asset τις χρονικές στιγμές T_1 και T_2. Γνωρίζουμε (1.14) ότι,

$$X_i = x e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau_i + \sigma\sqrt{\tau_i} Z_i}, \qquad (i = 1, 2)$$

όπου $\tau_i = (T_i - t)$, $Z_i \sim N(0,1;\rho)$ και ρ ο συντελεστής συσχέτισης. Η τ.μ. Z_i συνδέεται με την κίνηση Brown σύμφωνα με τον τύπο $B_{\tau_i} = \sqrt{\tau_i} Z_i$. Άρα οι B_{τ_i} είναι ανεξάρτητες μεταβλητές που ακολουθούν την $BM(0, \tau_i)$ με $(i = 1, 2)$. Άρα έχουμε

$$\rho = corr\{Z_1, Z_2\} = \frac{Cov\{Z_1, Z_2\}}{\sqrt{V\{Z_1\}V\{Z_2\}}} = \frac{Cov\left(\frac{B_{\tau_1}}{\sqrt{\tau_1}}, \frac{B_{\tau_2}}{\sqrt{\tau_2}}\right)}{\sqrt{V\left(\frac{B_{\tau_1}}{\sqrt{\tau_1}}\right) V\left(\frac{B_{\tau_2}}{\sqrt{\tau_2}}\right)}}$$

$$= \frac{Cov\left(\frac{B_{\tau_1}}{\sqrt{\tau_1}}, \frac{B_{\tau_2}}{\sqrt{\tau_2}}\right)}{\sqrt{\frac{1}{\tau_1\tau_2} V\left(B_{\tau_1}\right) V\left(B_{\tau_2}\right)}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\tau_1}\sqrt{\tau_2}}\left(E\left(B_{\tau_1}B_{\tau_2}\right) - E\left(B_{\tau_1}\right)E\left(B_{\tau_2}\right)\right)}{\sqrt{\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1\tau_2}}}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{\tau_1}\sqrt{\tau_2}}\left(E\left(B_{\tau_1}B_{\tau_2}\right) - 0\right)}{1} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1}\sqrt{\tau_2}} E\left(B_{\tau_1}B_{\tau_2}\right)$$

Τώρα,

$$E\left(B_{\tau_1}B_{\tau_2}\right) = E(\left(B_{\tau_2} - B_{\tau_1}\right)B_{\tau_1} + B_{\tau_1}^2 = E\left(\left(B_{\tau_2} - B_{\tau_1}\right)B_{\tau_1}\right) + E\left(B_{\tau_1}^2\right)$$

$$= E\left(B_{\tau_2} - B_{\tau_1}\right)E\left(B_{\tau_1}\right) + E\left(B_{\tau_1}^2\right) = 0 + V\left(B_{\tau_1}\right) = \tau_1$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι,

$$\rho = \frac{\tau_1}{\sqrt{\tau_1}\sqrt{\tau_2}} = \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}} \tag{2.9}$$

ο οποίος σ.σ εξαρτάται από το χρόνο.

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι το Λήμμα 1.7.1 ότι δηλαδή $X_i \gtrless \xi_i \Rightarrow Z_i \gtrless -d_i'(x, \tau_i)$ για $(i = 1, 2)$ όπου,

$$[d_i, d_i'] = \left[\frac{log(x/\xi_i) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau_i}{\sigma\sqrt{\tau_i}}, \quad \frac{log(x/\xi_i) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau_i}{\sigma\sqrt{\tau_i}}\right] \tag{2.10}$$

Δυαδικά ομόλογα 2ης τάξης

Για την τιμολόγηση ενός κάτω-κάτω δυαδικού ομολόγου 2ης-τάξης θα χρησιμοποιήσουμε την RNPF (1.13) κατά την χρονική στιγμή T_2.

$$\begin{aligned} B_{\xi_1\xi_2}^{--}(x,t) &= e^{-r\tau_2}E_Q\{\mathbb{I}(X_1 < \xi_1)\mathbb{I}(X_2 < \xi_2)|\mathcal{F}_t\} \\ &= e^{-r\tau_2}E_Q\{\mathbb{I}(Z_1 < -d_1')\mathbb{I}(Z_2 < -d_2')\} \\ &= e^{-r\tau_2}\Phi(-d_1', -d_2'; \rho) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Η τελευταία σχέση προκύπτει από την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής της διδιάστατης τυπικής κανονικής κατανομής με συντελεστή συσχέτισης ρ, συγκεκριμένα

$$\Phi(-d_1', -d_2'; \rho) = E\{\mathbb{I}(Z_1 < -d_1')\mathbb{I}(Z_2 < -d_2')\} = \int_{-\infty}^{-d_1'}\int_{-\infty}^{-d_2'}\varphi(u, v; \rho)dudv$$

Ο γενικός τύπος των 2ης-τάξης bond binaries είναι ο εξής,

$$B_{\xi_1\xi_2}^{s_1s_2}(x,t) = e^{-r\tau_2}\Phi(s_1d_1', s_2d_2'; s_1s_2\rho) \tag{2.12}$$

Δυαδικό περιουσιακό στοιχείο 2ης τάξης

Για την τιμολόγηση ενός κάτω-επάνω δυαδικού περιουσιακού στοιχείου 2ης-τάξης θα χρησιμοποιήσουμε το GST για δυο τυχαίες μεταβλητές. Επομένως,

$$\begin{aligned} A_{\xi_1\xi_2}^{-+}(x,t) &= e^{-r\tau_2}E_Q\{X_2\mathbb{I}(X_1 < \xi_1)\mathbb{I}(X_2 > \xi_2)|\mathcal{F}_t\} \\ &= xe^{-\frac{1}{2}\sigma^2\tau_2}E_Q\{e^{\sigma\sqrt{\tau_2}Z_2}\mathbb{I}(Z_1 < -d_1')\mathbb{I}(Z_2 > -d_2')\} \\ &= xE_Q\{\mathbb{I}\left(Z_1 + \sigma\sqrt{\tau_1} < -d_1'\right)\mathbb{I}\left(Z_2 + \sigma\sqrt{\tau_2} > -d_2'\right)\} \end{aligned}$$

$$= xE_Q\{\mathbb{I}(Z_1 < -d_1)\mathbb{I}(Z_2 > -d_2)\}$$

$$= xE_Q\{\mathbb{I}(Z_1 < -d_1)\mathbb{I}(\widetilde{Z_2} < d_2)\}$$

$$= x\Phi(-d_1, d_2; -\rho) \qquad (2.13)$$

Στην τρίτη γραμμή της παραπάνω σχέσης χρησιμοποιήσαμε το Gaussian Swift Theorem για δυο μεταβλητές με $a = 0, b = \sigma\sqrt{\tau_2}$ και $\rho = \sqrt{\tau_1/\tau_2}$ (γνωστό). Άρα προκύπτει ότι,

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2pab = 0 + \sigma^2\tau_2 + 0 \Rightarrow c = \sigma\sqrt{\tau_2}$$

$$a' = a + pb = 0 + \sqrt{\frac{\tau_1}{\tau_2}}\sigma\sqrt{\tau_2} = \sigma\sqrt{\tau_1}$$

$$b' = b + pa = \sigma\sqrt{\tau_2} + 0 = \sigma\sqrt{\tau_2}$$

Στην τέταρτη γραμμή χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $d_i = d_i' + \sigma\sqrt{\tau_i}$ για $i = 1, 2$. Στην πέμπτη γραμμή θέσαμε $\widetilde{Z_2} = -Z_2$ και $\tilde{Z} \sim N(0, 1)$. Επίσης στην έκτη γραμμή εάν (Z_1, Z_2) η από κοινού κανονικά κατανεμημένες τ.μ. με συντελεστή συσχέτισης ρ, τότε η $(Z_1, -Z_2)$ είναι από κοινού η από κοινού κανονικά κατανεμημένες τ.μ. με συντελεστή συσχέτισης $-\rho$.

Τέλος ο γενικός τύπος ο οποίος περιλαμβάνει και τις τέσσερις περιπτώσεις ενός asset binary $2^{\eta\varsigma}$-τάξης είναι ο εξής,

$$A_{\xi_1\xi_2}^{s_1s_2}(x, t) = x\Phi(s_1d_1, s_2d_2;\ s_1s_2\rho) \qquad (2.14)$$

2.5 Q-Δικαιώματα Δεύτερης τάξης (Second Order Q-Options)

Στην ενότητα αυτή θα παρουσιάσουμε τα Q-δικαιώματα $2^{\eta\varsigma}$-τάξης τα οποία αποτελούν προέκταση των Q-δικαιωμάτων $1^{\eta\varsigma}$-τάξης που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, σύμφωνα με τον Buchen, (2012). Το κέρδος των Q-δικαιωμάτων $2^{\eta\varsigma}$-τάξης κατά τις χρονικές στιγμές T_1 και T_2 δεδομένου το ότι οι τιμές εξάσκησης είναι ξ_1, ξ_2 αντίστοιχα και η strike price k είναι,

$$Q_{\xi_1\xi_2}^{s_1s_2}(x_1, T_1; k) = Q_{\xi_2}^{s_2}(x_1, \tau; k)\mathbb{I}(s_1x_1 > s_1\xi_1)$$

$$Q_{\xi_1\xi_2}^{s_1s_2}(x_1, x_2, T_2; k) = s_2(x_2 - k)\mathbb{I}(s_1x_1 > s_1\xi_1)\mathbb{I}(s_2x_2 > s_2\xi_2) \qquad (2.15)$$

όπου $\tau = (T_1 - T_2)$ και $s_i = \pm$, όπου καθορίζει το είδος του Q-δικαιώματος.

Όπως έχουμε δει τα Q-δικαιώματα $1^{ης}$-τάξης σχετίζονται με τα gap δικαιώματα αγοράς και πώλησης τα οποία με την σειρά τους προέρχονται από δικαιώματα αγοράς και πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου με την διαφορά ότι οι strike prices διαφέρουν σε σχέση με τις exercise prices. Τα Q-διακαιώματα $2^{ης}$-τάξης μπορούν να αναλυθούν σαν δυαδικά δικαιώματα επί ενός δικαιώματος χάσματος αγοράς ή πώλησης και ταυτίζονται με ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από $2^{ης}$-τάξης δυαδικά ομόλογα και δυαδικά περιουσιακά στοιχεία. Για $t < T_1 < T_2$ είναι,

$$Q^{s_1 s_2}_{\xi_1 \xi_2}(x, t; k) = s_2 A^{s_1 s_2}_{\xi_1 \xi_2}(x, t) - s_2 k B^{s_1 s_2}_{\xi_1 \xi_2}(x, t) \qquad (2.16)$$

Παράδειγμα 2.1

Έστω ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα παράγωγο το οποίο αποδίδει $V(x_1, x_2, T_2) = x_2/x_1$ κατά την χρονική T_2, όπου x_i είναι η τιμή του υποκείμενου αγαθού στιγμή T_i με $T_1 < T_2$. Υποθέτουμε ότι υπό το μοντέλο Black and Scholes διαθέτουμε μια μετοχή η οποία δεν προσφέρει μέρισμα και θέλουμε να βρούμε την αξία του σε χρόνο $t < T_1$.

Θα τιμολογήσουμε το παράγωγο αυτό χρησιμοποιώντας τρείς μεθόδους.

Μέθοδος 1

Όπως γνωρίζουμε κατά το χρονικό διάστημα (T_1, T_2) η τιμή του υποκείμενου αγαθού παραμένει σταθερή. Επομένως η απόδοση του παραγώγου κατά την χρονική στιγμή T_2 είναι,

$$V(x_2, T_2) = k x_2, \qquad \text{με} \quad k = x_1^{-1}$$

Δηλαδή το k υποδηλώνει το πλήθος των μονάδων του υποκείμενου αγαθού. Η αξία του παραγώγου την χρονική στιγμή T_1 είναι,

$$V(x_1, T_1) = k x_1 = x_1^{-1} x_1 = 1$$

Άρα ουσιαστικά πρόκειται για μια ομολογία άνευ τοκομεριδίου με χρόνο λήξης T_1, η παρούσα αξία (προεξόφληση) της οποίας για χρόνο $t < T_1$ είναι,

$$V(x\,, t) = e^{-r\tau_1} \qquad \text{με} \qquad \tau_i = (T_i - t)$$

Μέθοδος 2

Χρησιμοποιώντας τον Tower Law και την RNPF, προκύπτει για $t < T_1 < T_2$,

$$\begin{aligned} V(x,t) &= e^{-r\tau_2} E_Q\{X_1^{-1} \cdot X_2 | \mathcal{F}_t\} \\ &= e^{-r\tau_2} E_Q\{E_Q\{X_1^{-1} \cdot X_2 | \mathcal{F}_1\} | \mathcal{F}_t\} \\ &= e^{-r\tau_2} E_Q\{X_1^{-1} \cdot E_Q\{X_2 | \mathcal{F}_1\} | \mathcal{F}_t\} \\ &= e^{-r\tau_2} E_Q\{X_1^{-1} \cdot X_1 e^{r(T_2 - T_1)} | \mathcal{F}_t\} \\ &= e^{-r\tau_1} E_Q\{1 | \mathcal{F}_t\} \\ &= e^{-r\tau_1} \end{aligned}$$

Η δεύτερη γραμμή χρησιμοποιεί τον Tower Law, με το φιλτράρισμα $\mathcal{F}_1$ στο χρόνο T_1. Ενώ η τέταρτη γραμμή προκύπτει λόγω του ότι υπό το Q η $E_Q\{X_2 | \mathcal{F}_1\} = X_1 e^{r(T_2 - T_1)}, t \geq 0$

Μέθοδος 3

Γνωρίζουμε (1.13) ότι $X_i = x e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau_i + \sigma\sqrt{\tau_i} Z_i}$, όπου $Z_i \sim N(0,1;\rho)$ με $\rho = \sqrt{\tau_1/\tau_2}$ και έχουμε,

$$\frac{X_2}{X_1} = e^{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T_2 - T_1) + \sigma(\sqrt{\tau_2} Z_2 - \sqrt{\tau_1} Z_1)}$$

Άρα

$$\begin{aligned} V(x,t) &= e^{-r\tau_2} E_Q\{X_1^{-1} \cdot X_2 | \mathcal{F}_t\} \\ &= e^{-r\tau_1 - \frac{1}{2}\sigma^2 (T_2 - T_1)} E_Q\left\{e^{\sigma\sqrt{\tau_2} Z_2 - \sqrt{\tau_1} Z_1)}\right\} \\ &= e^{-r\tau_1 - \frac{1}{2}\sigma^2 (T_2 - T_1)} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 (T_2 - T_1)} \\ &= e^{-r\tau_1} \end{aligned}$$

Η τρίτη γραμμή παραπάνω προκύπτει από την GST για δυο μεταβλητές με παράμετρο,

$$c^2 = \sigma^2\left[\tau_2 + \tau_1 - 2\rho\sqrt{\tau_1 \tau_2}\right] = \sigma^2(\tau_2 - \tau_1) = \sigma^2(T_2 - T_1)$$

2.6 Σύνθετα Δικαιώματα (Compound Options)

Οι τέσσερις βασικές κατηγορίες σύνθετων δικαιωμάτων είναι τα δικαίωμα αγοράς σε δικαίωμα αγοράς, δικαίωμα πώλησης σε δικαίωμα αγοράς, δικαίωμα αγοράς σε δικαίωμα πώλησης και δικαίωμα πώλησης σε δικαίωμα πώλησης τα οποία αναλύθηκαν από τον Geske, (1979). Ένα δικαίωμα αγοράς σε δικαίωμα αγοράς μας δίνει το δικαίωμα να αγοράσουμε ένα δικαίωμα αγοράς σε μια συμφωνημένη τιμή, την χρονική στιγμή T_1. Εάν εξασκήσουμε το δικαίωμα μας κατά την χρονική στιγμή T_1 τότε ο κάτοχος του δικαιώματος θα πάρει ένα νέο δικαίωμα αγοράς, το οποίο και λήγει κατά την χρονική στιγμή $T_2 > T_1$ με τιμή εξάσκησης k_2. Είναι ουσιαστικά δικαιώματα επί δικαιωμάτων Για το λόγο αυτά τα σύνθετα δικαιώματα αναφέρονται σε δυο χρονικές περιόδους.

Έστω λοιπόν ότι μπορούμε εάν θέλουμε να αγοράσουμε κατά την χρονική στιγμή T_1 το δικαίωμα αγοράς, σε μια συμφωνημένη τιμή c_1, με τιμή εξάσκησης k_2. Οι δείκτες αναφέρονται στις χρονικές στιγμές T_1 και T_2 αντίστοιχα. Επομένως θα εξασκήσουμε το δικαίωμά μας επί ενός δικαιώματος αγοράς σε δικαίωμα αγοράς εάν,

$$C_{k_2}(x_1, \tau) > c_1 \quad \text{με} \quad \tau = (T_2 - T_1)$$

Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι για να εξασκήσουμε το δικαίωμα μας κατά την χρονική στιγμή T_1 πρέπει η τιμή c_1 που θα πληρώσουμε για το δικαίωμα αγοράς (η αντίστοιχη τιμή αγοράς ενός put option συμβολίζεται με p_1) να είναι μικρότερη από την αξία ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή εξάσκησης k_2 και $\tau = (T_2 - T_1)$ υπολειπόμενο χρόνο μέχρι την λήξη.

Έστω η εξίσωση $C_{k_2}(x, \tau) = c_1$ και $x = k_1$ η λύση της. Η εξίσωση αυτή είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς $x \in [0, \infty)$. Επομένως έχει μια μοναδική λύση $x = k_1$ για κάθε $c_1 > 0$. Επιπλέον για δεδομένες χρονικές στιγμές (T_1, T_2) και τιμές (c_1, k_2) ο υπολογισμός του k_1 γίνεται μόνο μια φορά. Για να αγοράσουμε λοιπόν ένα δικαίωμα αγοράς την χρονική στιγμή T_1 αρκεί να ισχύει η εξής σχέση $x_1 > k_1$, δηλαδή η αξία του δικαιώματος αγοράς την χρονική στιγμή T_1 να είναι μεγαλύτερη από το k_1. Άρα το κέρδος ενός δικαιώματος αγοράς σε δικαίωμα αγοράς την χρονική στιγμή T_1 θα είναι,

$$V_{cc}(x_1, T_1) = [C_{k_2}(x_1, \tau) - c_1]^+ = [C_{k_2}(x_1, \tau) - c_1]\mathbb{I}(x_1 > k_1)$$

$$= [Q^{+}_{k_2}(x_1, \tau; k_2) - c_1]\mathbb{I}(x_1 > k_1) \tag{2.17}$$

Από το παραπάνω τύπο ο πρώτος όρος, $Q^{+}_{k_2}(x_1, \tau; k_2)\mathbb{I}(x_1 > k_1)$, αναπαριστά ένα Q-δικαίωμα 2ης-τάξης ενώ ο όρος $c_1\mathbb{I}(x_1 > k_1)$ παριστάνει το κέρδος ενός επάνω δυαδικού ομολόγου κατά την χρονική στιγμή T_1. Έτσι για $t < T_1 < T_2$ έχουμε,

$$V_{cc}(x, t) = Q^{++}_{k_1 k_2}(x, t; k_2) - c_1 B^{+}_{k_1}(x, \tau_1) \tag{2.18}$$

όπου $\tau_1 = (T_1 - T_2)$. Καταλαβαίνουμε λοιπόν ότι χειριζόμαστε το κέρδος, κατά την χρονική στιγμή T_1, των σύνθετων δικαιωμάτων, σαν ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο διαθέτει ένα Q-δικαίωμα 2ης-τάξης και ένα επάνω δυαδικό ομόλογο, τα οποία και έχουμε τιμολογήσει σε προηγούμενες ενότητες. Ως εκ τούτου ένα δικαίωμα αγοράς σε δικαίωμα αγοράς περιέχει την κανονική κατανομή τόσο με μια όσο και με δυο τυχαίες μεταβλητές.

Το κέρδος ενός δικαιώματος αγοράς σε δικαίωμα αγοράς κατά την δεύτερη χρονική λήξη T_2 δίνεται από το παρακάτω τύπο,

$$V_{cc}(x_1, x_2; T_2) = [(x_2 - k_2)^{+} - c_1 e^{r\tau}]\mathbb{I}(x_1 > k_1) \tag{2.19}$$

Ο τύπος αυτός αναφέρεται στο κέρδος που έχει να λαμβάνει ο κάτοχος του δικαιώματος κατά την λήξη και προκύπτει εάν από το κέρδος του δεύτερου δικαιώματος αγοράς αφαιρέσουμε την τιμή c_1 που πληρώσαμε για το δικαίωμα αγοράς την χρονική στιγμή T_1, εάν αυτό το επενδύαμε σε ένα ομόλογο μηδενικού κίνδυνου.

Με τον ίδιο τρόπο η παρούσα αξία των υπόλοιπων τριών σύνθετων δικαιωμάτων δηλαδή των δικαίωμα πώλησης σε δικαίωμα αγοράς, δικαίωμα αγοράς σε δικαίωμα πώλησης και δικαίωμα πώλησης σε δικαίωμα πώλησης είναι αντίστοιχα,

$$V_{pc}(x, t) = c_1 B^{-}_{k_1}(x, \tau_1) - Q^{-+}_{k_1 k_2}(x, t; k_2) \tag{2.20}$$

$$V_{cp}(x, t) = Q^{--}_{k_1 k_2}(x, t; k_2) - p_1 B^{-}_{k_1}(x, \tau_1) \tag{2.21}$$

$$V_{pp}(x, t) = p_1 B^{+}_{k_1}(x, \tau_1) - Q^{+-}_{k_1 k_2}(x, t; k_2) \tag{2.22}$$

Οι δυο τελευταίες εξισώσεις διαθέτουν τιμή εξάσκησης k_2 και εμπορική τιμή p_1. Η παράμετρος k_1 είναι η λύση της εξίσωσης,

$$P_{k_2}(x, \tau) = p_1$$

δεδομένου του ότι $p_1 < k_2 e^{-r\tau}$.

Επομένως κατά την χρονική στιγμή T_2 τα τέσσερα σύνθετα δικαιώματα τα οποία και τιμολογήσαμε προηγουμένως είναι τα εξής,

$$V_{cc}(x_1, x_2; T_2) = [(x_2 - k_2)^+ - c_1 e^{r\tau}]\mathbb{I}(x_1 > k_1)$$
$$V_{pc}(x_1, x_2; T_2) = [c_1 e^{r\tau} - (x_2 - k_2)^+]\mathbb{I}(x_1 < k_1)$$
$$V_{cp}(x_1, x_2; T_2) = [(k_2 - x_2)^+ - p_1 e^{r\tau}]\mathbb{I}(x_1 < k_1)$$
$$V_{pp}(x_1, x_2; T_2) = [p_1 e^{r\tau} - (k_2 - x_2)^+]\mathbb{I}(x_1 > k_1)$$

άρα

$$\begin{aligned}
[V_{cc} - V_{pc}](x_1, x_2; T_2) &= [(x_2 - k_2)^+ - c_1 e^{r\tau}]\mathbb{I}(x_1 > k_1) \\
&-[c_1 e^{r\tau} - (x_2 - k_2)^+]\mathbb{I}(x_1 < k_1) \\
&= (x_2 - k_2)^+\mathbb{I}(x_1 > k_1) - c_1 e^{r\tau}\mathbb{I}(x_1 > k_1) \\
&-c_1 e^{r\tau}\mathbb{I}(x_1 < k_1) + (x_2 - k_2)^+\mathbb{I}(x_1 < k_1) \\
&= (x_2 - k_2)^+ - c_1 e^{r\tau}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
[V_{cp} - V_{pp}](x_1, x_2; T_2) &= [(k_2 - x_2)^+ - p_1 e^{r\tau}]\mathbb{I}(x_1 < k_1) \\
&-[p_1 e^{r\tau} - (k_2 - x_2)^+]\mathbb{I}(x_1 > k_1) \\
&= (k_2 - x_2)^+\mathbb{I}(x_1 < k_1) - p_1 e^{r\tau}\mathbb{I}(x_1 < k_1) \\
&-p_1 e^{r\tau}\mathbb{I}(x_1 > k_1) + (k_2 - x_2)^+\mathbb{I}(x_1 > k_1) \\
&= (k_2 - x_2)^+ - p_1 e^{r\tau}
\end{aligned}$$

Δεδομένης της παρούσας αξίας των τελευταίων δυο εξισώσεων παραπάνω για $\tau_i = (T_i - t),\ i = 1{,}2$ και $t < T_1 < T_2$ προκύπτει,

$$V_{cc}(x, t) - V_{pc}(x, t) = C_{k_2}(x, \tau_2) - c_1 e^{r\tau} \qquad (2.23)$$

$$V_{cp}(x, t) - V_{pp}(x, t) = P_{k_2}(x, \tau_2) - p_1 e^{r\tau} \qquad (2.24)$$

2.7 Δικαιώματα Επιλογής (Chooser Options)

Ένα δικαίωμα επιλογής δίνει την δυνατότητα στο κάτοχο του δικαιώματος να επιλέξει εάν το δικαίωμα αυτό αναφέρεται σε ένα δικαίωμα αγοράς ή πώλησης Ευρωπαϊκού τύπου σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή T_1 κατά την διάρκειας ζωής του και αναλύθηκαν από τον Rubinstein, (1991). Το δικαίωμα αυτό λήγει κατά την χρονική στιγμή $T_2 > T_1$. Εμείς θα ασχοληθούμε με τα πιο σύνθετα δικαιώματα επιλογής σύμφωνα με τα οποία οι τιμές εξάσκησης και οι χρόνοι λήξης διαφέρουν μεταξύ τους. Υποθέτουμε ότι και τα δυο δικαιώματα λήγουν την ίδια χρονική στιγμή $T_2 > T_1$ και το κέρδος τους κατά την χρονική στιγμή T_1 είναι,

$$V(x_1, T_1) = \max\,[C_h(x_1, \tau), P_k(x_1, \tau)]$$

όπου $\tau = (T_2 - T_1)$ και h, k είναι οι τιμές εξάσκησης των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης αντίστοιχα όπως φαίνεται και στο τύπο παραπάνω.

Εάν $x = c$ η λύση της εξίσωσης $C_h(x, \tau) = P_k(x, \tau)$ είναι μοναδική διότι οι $C_h(x, \tau)$ και $P_k(x, \tau)$ είναι αύξουσα και φθίνουσα αντίστοιχα ως προς x. Η παράμετρος c μπορεί να υπολογιστεί μια φορά για δεδομένες τιμές εξάσκησης και ημερομηνίες εξάσκησης.

- Αν $x_1 > c$, τότε την χρονική στιγμή T_1 θα διαλέξουμε το δικαίωμα αγοράς διότι στην περιοχή $(c, +\infty)$ η αξία του είναι μεγαλύτερη από εκείνη του δικαιώματος πώλησης. Δηλαδή, $C_h(x, \tau) > P_k(x, \tau)$.
- Αν $x_1 < c$, τότε την χρονική στιγμή T_1 θα διαλέξουμε το δικαίωμα πώλησης διότι στην περιοχή $(-\infty, c)$ η αξία του είναι μεγαλύτερη από εκείνη του δικαιώματος αγοράς. Δηλαδή, $C_h(x, \tau) < P_k(x, \tau)$.

Το κέρδος σύμφωνα με τις παραπάνω δυο περιπτώσεις, την χρονική στιγμή T_1, είναι,

$$V(x_1, T_1) = Q_h^+(x_1, T_1; h)\mathbb{I}(x_1 > c) + Q_k^-(x_1, T_1; k)\mathbb{I}(x_1 < c)$$

το οποίο εκφράζεται μέσω Q-δικαιωμάτων 1ης-τάξης για τις τιμές των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης. Τέλος η παρούσα αξία ενός δικαιώματος επιλογής, εφόσον δεν γνωρίζουμε το είδος του δικαιώματος, για $t < T_1 < T_2$ μπορεί να εκφραστεί ως το άθροισμα δυο 2ης-τάξης Q-δικαιωμάτων ως εξής,

$$V(x, t) = Q_{ch}^{++}(x, t; h) + Q_{ck}^{--}(x, t; k) \qquad (2.25)$$

2.8 Δικαιώματα Επανακαθορισμού (Reset Options)

Έστω ότι ένας επενδυτής κατέχει ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης h και χρόνο λήξης T_1. Ένα δικαίωμα επανακαθορισμού δίνει την δυνατότητα στο κάτοχο του δικαιώματος, τη χρονική στιγμή T_1 να κάνει τρία πράγματα,

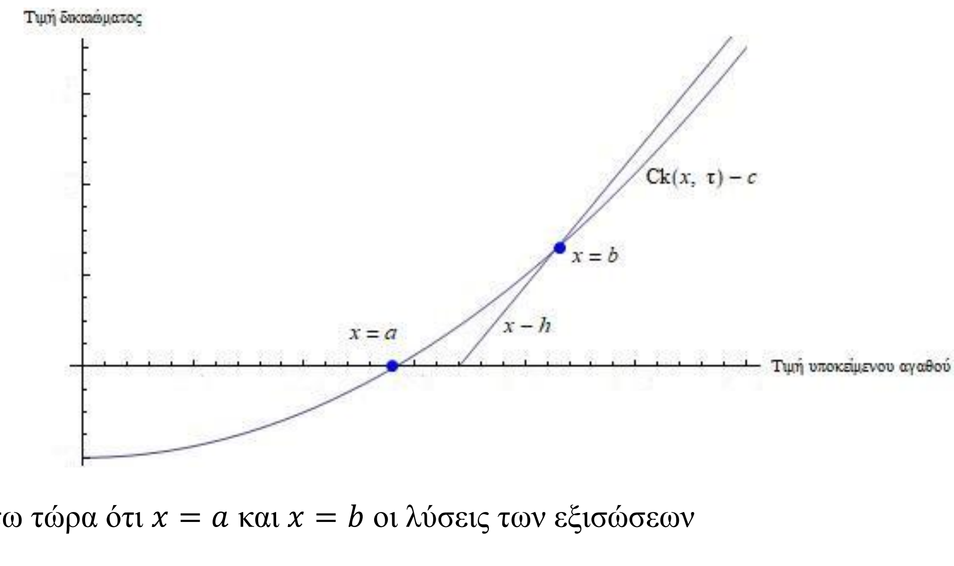
1. Για ένα συμφωνημένο αντίτιμο να επεκτείνει την διάρκεια του δικαιώματος μέχρι τον χρόνο $T_2 > T_1$ και ταυτόχρονα να αναπροσαρμόσει την τιμή εξάσκησης από h σε k.
2. Να εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου δεδομένου ότι είναι in-the-money.
3. Να μην εξασκήσει το δικαίωμα του εφόσον είναι out-of-the-money.

Υπάρχουν πολλά είδη δικαιώματα επανακαθορισμού τα οποία εξαρτώνται από το εάν το δικαίωμα αναφέρεται σε δικαίωμα αγοράς ή πώλησης αλλά και από την συνθήκη η οποία διέπει το εκάστοτε συμβόλαιο. Τα δικαιώματα επανακαθορισμού αναλύθηκαν λεπτομερώς από τον Longstaff, (1990). Θα προχωρήσουμε λοιπόν παρακάτω στην τιμολόγηση ενός reset δικαιώματος αγοράς. Το κέρδος ενός reset δικαιώματος αγοράς την χρονική στιγμή T_1 δίνεται από τον τύπο,

$$V(x_1, T_1) = \max\,[C_k(x_1, \tau) - c, (x_1 - h)^+]$$

όπου $\tau = (T_2 - T_1)$ και c η επιπλέον αμοιβή. Επομένως έχουμε τρείς επιλογές,

1. Εάν $C_k(x_1, \tau) - c > (x_1 - h)^+$ τότε μπορούμε να επανακαθορίσουμε τα χαρακτηριστικά του δικαιώματος αγοράς και να το επεκτείνουμε μέχρι την στιγμή T_2.
2. Εάν το δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου είναι in-the-money τότε μπορούμε να εξασκήσουμε το δικαίωμά μας.
3. Εάν είναι out-of-the-money τότε δεν θα προχωρήσουμε σε καμία ενέργεια.



Έστω τώρα ότι $x = a$ και $x = b$ οι λύσεις των εξισώσεων

- $C_k(x, \tau) = c$,
- $C_k(x, \tau) = x + c - h$ αντίστοιχα.

και για να είναι εφικτά τα τρία αυτά σενάρια θα πρέπει να ισχύει,

$$0 < c < ke^{-r\tau} - h$$

Αυτό γραφικά σημαίνει ότι το $x = a$ είναι το σημείο τομής του κέρδους του δικαιώματος αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου, εάν αφαιρέσουμε το αντίτιμο c του δικαιώματος επανακαθορισμού, με τον άξονα $x'x$. Το $x = b$ από την άλλη είναι το σημείο τομής του $C_k(x,\tau) - c$ με την ευθεία $x - h$, η οποία ξεκινάει από τον $x'x$ και είναι αύξουσα. Επομένως προκύπτουν οι εξής περιπτώσεις.

1. Για $a < x_1 < b$ η καμπύλη $C_k(x_1,\tau) - c$ βρίσκεται επάνω από την ευθεία $x - h$, δηλαδή $C_k(x_1,\tau) - c > (x_1 - h)^+$. Άρα σε αυτή την περίπτωση κάνουμε reset στα χαρακτηριστικά του δικαιώματός μας και επεκτείνουμε τον χρόνο ζωής του.
2. Για $x_1 > b$ τότε μας συμφέρει να εξασκήσουμε το δικαίωμά μας με τιμή εξάσκησης h
3. Για $0 < x_1 < a$ η τιμή εξάσκησης h είναι μεγαλύτερη από την αξία του υποκείμενου αγαθού και κατ' επέκταση η αξία του δικαιώματος μας είναι μηδενική. Άρα δεν θα προβούμε σε καμία ενέργεια.

Προκύπτει λοιπόν ότι το κέρδος ενός δικαιώματος επανακαθορισμού κατά την χρονική στιγμή T_1 είναι,

$$V(x_1,T_1) = [Q_k^+(x_1,T_1;k) - c][\mathbb{I}(x_1 > a) - \mathbb{I}(x_1 > b)] + (x_1 - h)\mathbb{I}(x_1 > b)$$

όπου το $Q_k^+(x_1,T_1;k)$ ως γνωστό αντιπροσωπεύει το δικαίωμα αγοράς και η δείκτρια $\mathbb{I}(a < x < b) = \mathbb{I}(x > a) - \mathbb{I}(x > b)$. Το παραπάνω κέρδος μπορούμε να το αναπαραστήσουμε και μέσω ενός χαρτοφυλακίου αναπαραγωγής το οποίο περιλαμβάνει 1^{ης} και 2^{ης} τάξης Q-δικαιώματα, η παρούσα αξία του οποίου δίνεται από τον παρακάτω τύπο,

$$\begin{aligned} V(x,t) = {} & Q_{ak}^{++}(x,t;k) - Q_{bk}^{++}(x,t;k) - c[B_a^+(x,\tau_1) - B_b^+(x,\tau_1)] \\ & + Q_b^+(x,\tau_1;h) \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.9 Απλά Cliquet δικαιώματα (Simple Cliquet Options)

Έστω ένα δικαίωμα αγοράς Ευρωπαϊκού τύπου με τιμή εξάσκησης k και ημερομηνία λήξης T_2. Υποθέτουμε ότι ο κάτοχος του δικαιώματος έχει την δυνατότητα να εξασφαλίσει κέρδος από το δικαίωμα αυτό σε μια προγενέστερη-προκαθορισμένη χρονική στιγμή T_1. Ένα τέτοιο δικαίωμα ονομάζεται απλό cliquet δικαίωμα. Το πλεονέκτημα των απλών cliquet δικαιωμάτων είναι ότι ακόμα και αν το δικαίωμα αυτό είναι out of the money κατά την χρονική στιγμή T_2 ο κάτοχος του δικαιώματος έχει την δυνατότητα να λάβει κάποιο ποσό εάν το δικαίωμα ήταν in the money την χρονική στιγμή T_1. Φυσικά αυτό το πλεονέκτημα προσμετράτε στην τρέχουσα τιμή του δικαιώματος. Τα απλά cliquet δικαιώματα αναλύθηκαν από τον Thomas, (1994).

Θα προχωρήσουμε στην τιμολόγηση των δικαιωμάτων αυτών ξεκινώντας από το κέρδος τους κατά την χρονική στιγμή T_2 το οποίο και είναι,

$$V(x_1, x_2, T_2) = max\ [(x_1 - k)^+, (x_2 - k)^+] \tag{2.27}$$

Ο όρος $(x_1 - k)^+$ αναπαριστά την εξασφαλισμένη αξία που έχει να λαμβάνει ο κάτοχος του δικαιώματος και ισούται με το κέρδος ενός δικαιώματος αγοράς την χρονική στιγμή T_1 ενώ ο όρος $(x_2 - k)^+$ αποτυπώνει το κέρδος ενός δικαιώματος αγοράς την χρονική στιγμή T_2. Για $t \in (T_1, T_2)$ το x_1 στον παραπάνω τύπο παραμένει σταθερό. Επομένως ο κάτοχος ενός cliquet δικαίωμα θα κερδίσει το μέγιστο των δυο παραπάνω call option εκτός εάν και τα δυο είναι out-of-the-money όποτε δεν θα κερδίσει τίποτα.

Με άλλα λόγια τα απλά cliquet δικαιώματα αποτελούνται από μια σειρά προθεσμιακών συμβολαίων μελλοντικής εκκίνησης όπου το πρώτο ενεργοποιείται αμέσως ενώ το δεύτερο ενεργοποιείται όταν λήγει το πρώτο. Σε κάθε στάδιο η τιμή εξάσκησης ταυτίζεται με την τρέχουσα τιμή. Αντιλαμβανόμαστε λοιπόν ότι κατά την χρονική στιγμή T_2 έχουμε τις εξής επιλογές.

- Εάν κατά την χρονική στιγμή T_1, $x_1 > k$ και $x_2 < x_1$ τότε ο holder θα εισπράξει κατά την λήξη το κέρδος της στιγμής T_1, δηλαδή $(x_1 - k)$. Αν όμως -$x_2 > x_1 > k$ τότε θα εισπράξει $(x_2 - k)$. Ισοδύναμα, αν $x_1 > k$ θα έχει κέρδος $(x_2 - x_1)^+$.
- Εάν κατά την χρονική στιγμή T_1, $x_1 < k$ τότε ο κάτοχος του δικαιώματος θα εισπράξει κατά την λήξη μόνο το κέρδος της χρονικής στιγμής T_2, το οποίο είναι $(x_2 - k)^+$.

Επομένως από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι ο παραπάνω τύπος μπορεί να γραφτεί ως εξής,

$$V(x_1, x_2, T_2) = (x_2 - k)^+ \mathbb{I}(x_1 < k) + [(x_2 - x_1)^+ + (x_1 - k)]\mathbb{I}(x_1 > k) \qquad (2.28)$$

Προκύπτει λοιπόν ότι ο πρώτος όρος $(x_2 - k)^+$ αναπαριστά ένα δικαίωμα αγοράς με strike price k πολλαπλασιασμένο με την δείκτρια $\mathbb{I}(x_1 < k)$. Ως εκ τούτου κατά την χρονική στιγμή T_1 η αξία του θα είναι,

$$V_1(x_1, T_1; k) = C_k(x, \tau)\mathbb{I}(x_1 < k) = Q_k^+(x_1, T_1, k)\mathbb{I}(x_1 < k)$$

με $\tau = (T_2 - T_1)$.

Σύμφωνα με την εξίσωση (2.5) ο δεύτερος όρος $V_2(x_1, T_1) = (x_2 - x_1)^+ \mathbb{I}(x_1 > k)$ είναι ένα προθεσμιακό συμβόλαια μελλοντικής εκκίνησης επί ενός δικαιώματος αγοράς το κέρδος του οποίου το πολλαπλασιάζουμε με την δείκτρια $\mathbb{I}(x_1 > k)$. Άρα η αξία του την χρονική στιγμή T_1 είναι,

$$V_2(x_1, T_1) = g(\tau)x_1\mathbb{I}(x_1 > k), \qquad \tau = (T_2 - T_1)$$

Η συνάρτηση $g(\tau)$ (εξίσωση 2.2) και ο όρος $g(\tau)x_1$ αποτελεί την αξία του προθεσμιακού συμβολαίου μελλοντικής εκκίνησης επί του δικαιώματος αγοράς την χρονική στιγμή T_1.

Ο τρίτος όρος $V_3(x_1, x_2, T_2) = (x_1 - k)\mathbb{I}(x_1 > k)$ εξαρτάται μόνο από την (σταθερά) x_1 και η αξία του την χρονική στιγμή T_1 είναι,

$$V_3(x_1, T_1) = e^{-r\tau}(x_1 - k)\mathbb{I}(x_1 > k), \qquad \tau = (T_2 - T_1).$$

Δηλαδή πολλαπλασιάζουμε το κέρδος την χρονική στιγμή T_2 με $e^{-r\tau}$ ο οποίος είναι συντελεστής προεξόφλησης στο διάστημα (T_1, T_2).

Από τα παραπάνω λοιπόν προκύπτει ο εξής συγκεντρωτικός τύπος,

$$V(x_1, T_1) = Q_k^+(x_1, T_1, k)\mathbb{I}(x_1 < k) + [g(\tau)x_1 + e^{-r\tau}(x_1 - k)]\mathbb{I}(x_1 > k)$$

Διαπιστώνουμε λοιπόν ότι η τιμολόγηση του δικαιώματος για κάθε $t < T_1$ είναι,

$$V(x, t) = Q_{kk}^{-+}(x, t; k) + g(\tau)A_k^+(x, \tau_1) + e^{-r\tau}C_k(x, \tau_1) \qquad (2.29)$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Τιμολόγηση Εξωτικών δικαιωμάτων προαίρεσης

3.1 Monte Carlo προσομοίωση

Για την τιμολόγηση των Εξωτικών δικαιωμάτων προαίρεσης θα χρησιμοποιήσουμε την μέθοδο της προσομοίωσης. Η μέθοδος αυτή είναι εμπειρική και μας βοηθάει στην μελέτη στοχαστικών φαινομένων. Ουσιαστικά παρακολουθούμε την εξέλιξη ενός φαινομένου και καταγράφουμε τα χαρακτηριστικά του. Την διαδικασία αυτή την επαναλαμβάνουμε πολλές φορές και εξάγουμε τα συμπεράσματά μας. Όσο μεγαλύτερο είναι το πλήθος των πραγματοποιήσεων του φαινομένου τόσο πιο ισχυρή είναι η μελέτη μας. Η αναπαράσταση του φαινομένου αυτού γίνεται με τη βοήθεια Η/Υ. Το υπολογιστικό πακέτο το οποίο και θα χρησιμοποιήσουμε για την υλοποίηση των προσομοιώσεών μας στην διπλωματική αυτή είναι το Mathematica. Τα παρακάτω εισαγωγικά στοιχεία που αφορούν τεχνικές προσομοίωσης βασίζονται στις σημειώσεις του Μπούτσικα (2005), καθώς και στα βιβλία των Ross (1997) και Glasserman (2004).

Το φαινόμενο το οποίο καλούμαστε να μελετήσουμε είναι στοχαστικό διότι επηρεάζεται από μεταβλητές των οποίων η τιμή δεν είναι γνώστη. Επομένως θα χρειαστεί να παράγουμε κάποιους ψευδοτυχαίους αριθμούς από την κανονική κατανομή ούτως ώστε να αναπαραστήσουμε εικονικά το φαινόμενο. Με την εντολή,

`RandomReal[NormalDistribution[0,1]]`

το Mathematica μας επιστρέφει έναν ψευδοτυχαίο αριθμό από την τυπική κανονική κατανομή. Για παράδειγμα,

```
SeedRandom[];
Print[RandomReal[NormalDistribution[0,1]]]
```
```
0.6781131300247522
```

Με την εντολή **`SeedRandom[]`** το `Seed` λαμβάνεται με κάποιο τρόπο από το ρολόι του Η/Υ.

Οι ψευδοτυχαίοι αυτοί αριθμοί, της τυπικής κανονικής κατανομής, μπορούν να παραχθούν μέσω της αντιστροφής της συνάρτησης κατανομής της τυπικής κανονικής με την εντολή,

`InverseCDF[NormalDistribution[0, 1], u]`
$-\sqrt{2}\text{InverseErfc}[2U]$

Πιο αναλυτικά,

1) Παράγουμε μια τ.μ. που ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή, δηλαδή $U \sim U(0,1)$ (με την εντολή **RandomReal[]**)
2) Θέτουμε X =-2^(1/2)***InverseErfc[2U]**

Για παράδειγμα,

`U=RandomReal[];` `X=InverseCDF[NormalDistribution[0,1],U];X`
-0.6148556663588393

Έστω τώρα ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή,

$$E\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} g\,(y) f_X(y)dy, \text{ όπου } X \sim N(0,1)$$

για κάποια $g: R \to R$. Εάν $X_1, X_2, \dots, X_n$ ανεξάρτητες τ.μ. $\sim N(0,1)$, οι νέες τ.μ.

$$Y_1 = g(X_1), Y_2 = g(X_2), \dots, Y_n = g(X_n)$$

είναι ανεξάρτητες και ισόνομες. Άρα από τον νόμο των μεγάλων αριθμών έχουμε,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow[n\to\infty]{} E(Y) = E(g(X))$$

Παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα,

$$E\left(e^{-x^2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} f(y)dy$$

με $x \sim N(0,1)$.

Χρησιμοποιώντας το Mathematica θα είναι,

```
g[x_]:=Exp[-(x)^2];n=10000;s=0;
Do[X=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
   s=s+g[X],{i,1,n}];
Print[s/n]
```

```
0.5794603102926372
```

Για επαλήθευση, ο (αριθμητικός) υπολογισμός του παραπάνω ολοκληρώματος και πάλι μέσω του Mathematica δίνει:

```
NIntegrate[Exp[-(x)^2]*PDF[NormalDistribution[0,1],x]
,{x,-Infinity,Infinity}]
```

```
0.5773502691882791
```

Επομένως για την τιμολόγηση των Εξωτικών μας δικαιωμάτων σε δυο χρονικές περιόδους θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο Monte Carlo σύμφωνα με την οποία, αν θέλουμε γενικά να εκτιμήσουμε μια μέση τιμή $E\big(g(X_1, X_2, \dots, X_k)\big)$ όπου $X_1, X_2, \dots, X_k$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. από την $N(0,1)$ ακολουθούμε τα παρακάτω βήματα:

1) Παράγουμε τις τυχαίες μεταβλητές μας $X_1, X_2, \dots, X_k \sim N(0,1)$.
2) Υπολογίζουμε την $Y_1 = g(X_1, X_2, \dots, X_k\ )$.
3) Παράγουμε και πάλι ανεξάρτητα αντίγραφα των $X_1, X_2, \dots, X_k$, έστω $X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_k^{(2)}$.
4) Υπολογίζουμε την $Y_2 = g(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_k^{(2)})$.
5) Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα πολλές φορές και υπολογίζουμε τα $Y_3, \dots, Y_n$.
6) Τέλος η Monte Carlo εκτίμηση της μέσης τιμής θα είναι,

$$\hat{E}\big(g(X_1, X_2, \dots, X_k)\big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_k^{(i)})$$

3.2 Προσομοίωση Γεωμετρικής Κίνησης Brown και Μοντέλου Black and Scholes.

Όπως έχουμε προαναφέρει και στο πρώτο κεφάλαιο αυτής της διπλωματικής εργασίας η Γεωμετρική κίνηση Brown (GBM), σε αντίθεση με την κίνηση Brown, είναι κατάλληλη για την περιγραφή της τιμής χρηματοοικονομικών τίτλων διότι έχει ανεξάρτητες και ισόνομες ποσοστιαίες προσαυξήσεις. Μια πραγματοποίηση της στοχαστικής αυτής διαδικασίας $\{X(t), t \geq 0\}$ είναι μια συνεχής συνάρτηση του t η οποία όμως δεν είναι πουθενά παραγωγίσιμη (με πιθανότητα 1). Επομένως δεν μπορεί να προσομοιωθεί με κάθε λεπτομέρεια διότι σε ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα λαμβάνει άπειρες διαφορετικές τιμές. Στις εφαρμογές όμως συνήθως, αρκεί να παράγουμε τα $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n)$:

$X(t_0) = 1$

$X(t_1) = X(t_0)\left(\frac{X(t_1)}{X(t_0)}\right) = X(t_0)e^{Z_1}$, όπου $Z_1 \sim N\big((t_1 - t_0)\mu, (t_1 - t_0)\sigma^2\big)$

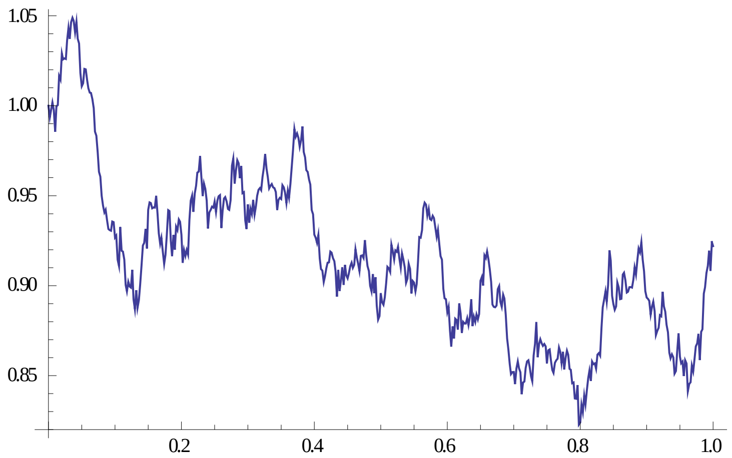
$X(t_2) = X(t_1)\left(\frac{X(t_2)}{X(t_1)}\right) = X(t_1)e^{Z_2}$, όπου $Z_2 \sim N\big((t_2 - t_1)\mu, (t_2 - t_1)\sigma^2\big)$

κ.ο.κ. …

ΒΗΜΑ 1. Θέτουμε $i = 1$ και $X_0 = x_0$.
ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$.
ΒΗΜΑ 3. Θέτουμε $X_i = X_{i-1}e^{(t_i - t_{i-1})\mu + \sigma\sqrt{t_i - t_{i-1}}Z}$.
ΒΗΜΑ 4. Θέτουμε $i = i + 1$ και αν $i \leq n$ επιστρέφουμε στο ΒΗΜΑ 2.

Μια υλοποίηση μέσω Mathematica είναι η ακόλουθη:

```
T=1;n=500;dt=T/n;m=-0.1;sigma=0.2;W=Table[0,{n}];
X=1;
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
   X=X*Exp[m*dt+sigma*dt^0.5*Z];
   W[[i]]={i*dt,X},{i,1,n}];
PrependTo[W,{0,1}];ListPlot[W,Joined->True]
```



Για να υπολογίσουμε την no-arbitrage τιμή c ενός δικαιώματος αγοράς γνωρίζουμε ότι υπάρχει ο κλειστός τύπος των Black-Scholes (1.15) παρόλα αυτά θα προσομοιώσουμε και μέσω της μεθόδου Monte Carlo ένα δικαίωμα αγοράς για να συγκρίνουμε τα αποτελέσματα από την προσομοίωση με τα θεωρητικά. Ο αντίστοιχος αλγόριθμος είναι:

ΒΗΜΑ 1. Δίνουμε τιμές στα $n, T, r, \sigma, K, X(0)$ και θέτουμε $\mu = r - \frac{\sigma^2}{2}$.
ΒΗΜΑ 2. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$.
ΒΗΜΑ 3. Θέτουμε $X(T) = X(0)e^{T\mu+\sigma\sigma\sqrt{T}Z}, D = \max\{X(T) - K, 0\}$.
ΒΗΜΑ 4. Επαναλαμβάνουμε το ΒΗΜΑ 3 για n φορές και θέτουμε sum το άθροισμα των D.
ΒΗΜΑ 5. Θέτουμε $c\_estimated = e^{-rT}\frac{sum}{n}$.

και η υλοποίηση μέσω του Mathematica (για συγκεκριμένες τιμές των παραμέτρων) θα είναι:

```
n=10000;r=0.1;sigma=0.2;K=100;X0=100;T=1;
sum=0;m=r-sigma^2/2;
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
   X=X0*Exp[T*m+sigma*T^0.5*Z];
   sum=sum+Max[X-K,0];
   ,{i,1,n}];
Print[Exp[-r*T]sum/n]
```

```
13.33035233100478
```

Μπορούμε να βρούμε και την ακριβή τιμή μέσω του τύπου Black – Scholes:

```
omega=(r*T+sigma^2*T/2-Log[K/X0])/(sigma*T^0.5);
C0=X0*CDF[NormalDistribution[0,1],omega]-K*Exp[-
r*T]*CDF[NormalDistribution[0,1],omega-sigma*T^0.5]
```

```
13.269676584660878
```

Οι ακόλουθες παράγραφοι, που αφορούν δικαιώματα εξαρτώμενα από δύο χρονικές περιόδους, βασίζονται κατά κύριο λόγο στο Buchen (2004, 2012).

3.3 Αποτίμηση Προθεσμιακών Συμβολαίων Μελλοντικής Εκκίνησης για δικαιώματα αγοράς και πώλησης

Η τιμή εξάσκησης k στην περίπτωση των δικαιωμάτων μελλοντικής εκκίνησης δεν προκαθορίζεται αλλά όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ισούται με την τιμή του υποκείμενου τίτλου σε καθορισμένο χρόνο T_1. Οι αντίστοιχες τελικές τιμές από τους τύπους (2.5) για το δικαίωμα αγοράς και (2.6) για το δικαίωμα πώλησης είναι :

$$F_c(x_{1,}\, x_{2,}\, T_2) = (x_2 - x_1)^+ \qquad\qquad F_p(x_{1,}\, x_{2,}\, T_2) = (x_1 - x_2)^+$$

Αλγόριθμος για Forward Start Call:

1. Ορίζουμε την αρχική μας κατάσταση και δίνουμε τιμές στις παραμέτρους $n, T_1, T_2, X_0, \sigma, r, \mu = r - \sigma^2/2\,, sum$ του συστήματος μας.
2. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $X_1 = X_0 e^{T_1 \mu + \sigma T_1^2 Z}$.
3. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $X_2 = X_1 e^{(T_2 - T_1)\mu + \sigma (T_2 - T_1)^2 Z}$.
4. Θέτουμε $sum = sum + Max[X_2 - X_1, 0]$ και επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2. 3 όσες φορές έχουμε θέσει το n.
5. Τέλος θέτουμε $F_c = e^{-rT_2} \frac{sum}{n}$.

Ο αντίστοιχος κώδικας είναι:

```
T2=1;r=0.01;n=10000;X0=100;sigma=0.1;sum=0;m=r-sigma^2/2;T1=0.5;
Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
   X1=X0*Exp[T1*m+sigma*T1^0.5*Z];
   Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
   X2=X1*Exp[(T2-T1)*m+sigma*(T2-T1)^0.5*Z];
   sum=sum+Max[X2-X1,0],{i,1,n}];
Exp[-r*T2]*N[sum/n]
```

```
3.029627320924749
```

Για να διαπιστώσουμε το πόσο "κοντά" βρίσκεται η τιμή αυτή με την πραγματική τιμή του Forward Start Call θα την συγκρίνουμε με αυτή του κλειστού τύπου:

$$F_c(x, t) = g(\tau)x$$

Ο αντίστοιχος κώδικας είναι:

```
X0*(CDF[NormalDistribution[0,1],(r/sigma+0.5*sigma)*Sqrt[T2-T1]]-
Exp[-r (T2-T1)]*CDF[NormalDistribution[0,1],(r/sigma-
0.5*sigma)*Sqrt[T2-T1]])
```

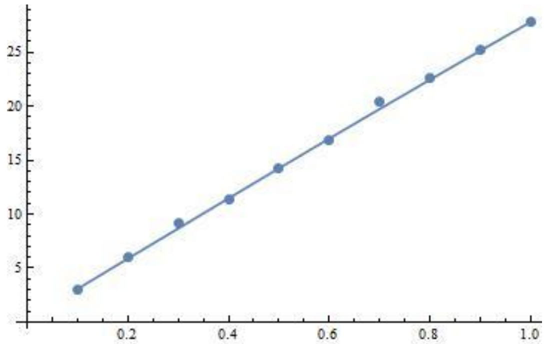
```
3.0697305092269755
```

Παρακάτω θα παραθέσουμε ένα γράφημα στο οποίο αποτυπώνεται η μεταβολή των τιμών του Forward Start Call για σ από 0.1 έως 1 με βήμα 0.1.

Ο κώδικας είναι:

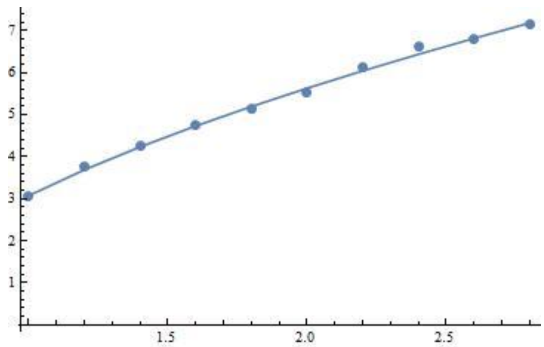
```
T2=1;r=0.01;n=10^4;X0=100;T1=0.5;k=10;A=Table[0,{k}];sigma=0.1;B=Tabl
e[0,{k}];
Do[sum=0;m=r-sigma^2/2;
  Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
     X1=X0*Exp[T1*m+sigma*T1^0.5*Z];
     Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
     X2=X1*Exp[(T2-T1)*m+sigma*(T2-T1)^0.5*Z];
     sum=sum+Max[X2-X1,0],{i,1,n}];

  A[[j]]={sigma,Exp[-r*T2]*N[sum/n]};
B[[j]]={sigma,X0*(CDF[NormalDistribution[0,1],(r/sigma+0.5*sigma)*Sqr
  t[T2-T1]]-Exp[-r (T2-T1)]*CDF[NormalDistribution[0,1],(r/sigma-
  0.5*sigma)*Sqrt[T2-T1]])};
  sigma=sigma+0.1;,{j,1,k}]
f1=ListPlot[A,PlotStyle->{PointSize[Large]}];
f2=ListPlot[B,Joined->True];
Show[f1,f2]
```

Γράφημα:



Με παρόμοια τρόπο γίνεται και το γράφημα ως προς την τιμή T_2, για T_2 από 1 έως 3 με βήμα 0.25.

Γράφημα:



Ο αντίστοιχος αλγόριθμος για την εκτίμηση της δίκαιης τιμής ενός Forward Start Put είναι ο ίδιος, με την διαφορά στον υπολογισμό της τελικής αξίας. Συγκεκριμένα αλλάζει η ακόλουθη γραμμή:

$$sum = sum + Max[X_1 - X_2, 0]$$

Για να διαπιστώσουμε το πόσο "κοντά" βρίσκεται η τιμή αυτή με την πραγματική τιμή του Forward Start Put θα την συγκρίνουμε με αυτή του κλειστού τύπου:

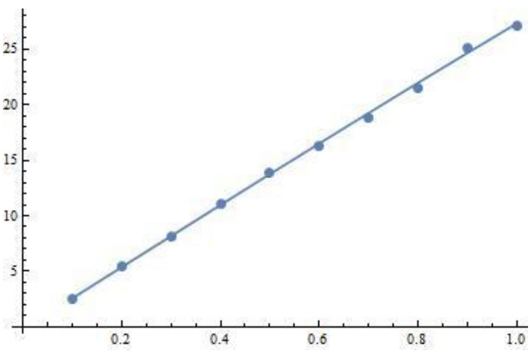
$$F_p(x,t) = h(\tau)x$$

Παρακάτω θα παραθέσουμε ένα γράφημα στο οποίο αποτυπώνεται η μεταβολή των τιμών του Forward Start Put για σ από 0.1 έως 1 με βήμα 0.1.

Ο κώδικας είναι:

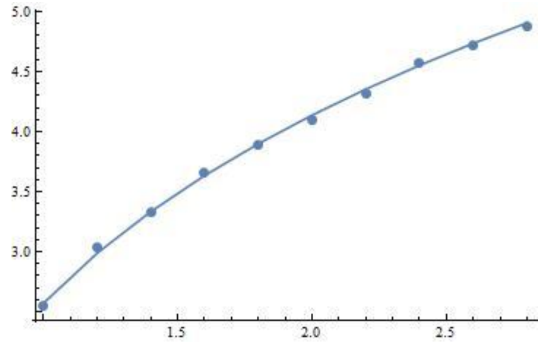
```
T2=1;r=0.01;n=10^4;X0=100;T1=0.5;k=10;A=Table[0,{k}];sigma=0.1;
Do[sum=0;m=r-sigma^2/2;
   Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
      X1=X0*Exp[T1*m+sigma*T1^0.5*Z];
      Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
      X2=X1*Exp[(T2-T1)*m+sigma*(T2-T1)^0.5*Z];
      sum=sum+Max[X1-X2,0],{i,1,n}];
   A[[j]]={sigma,Exp[-r*T2]*N[sum/n]};
   B[[j]]={sigma,X0*((-CDF[NormalDistribution[0,1],-
  ((r/sigma+0.5*sigma)*Sqrt[T2-T1]])+Exp[-r (T2-
   T1)]*CDF[NormalDistribution[0,1],-((r/sigma-0.5*sigma)*Sqrt[T2-
   T1]])])};
   sigma=sigma+0.1;,{j,1,k}]
f1=ListPlot[A,PlotStyle->{PointSize[Large]}];
f2=ListPlot[B,Joined->True];
Show[f1,f2]
```

Γράφημα:



Με παρόμοια τρόπο γίνεται και το γράφημα ως προς την τιμή T_2, για T_2 από 1 έως 3 με βήμα 0.25.

Γράφημα:



Από τα παραπάνω γραφήματα παρατηρούμε ότι στα προθεσμιακά συμβόλαια μελλοντικής εκκίνησης για ένα δικαίωμα αγοράς όσο αυξάνεται το σ τόσο αυξάνεται και η τιμή του δικαιώματος και μάλιστα η αύξηση αυτή είναι γραμμική. Η τιμή του δικαιώματος αυξάνεται και καθώς επιμηκύνουμε τον χρόνο T_2, αλλά η αύξηση αυτή αποτυπώνεται γραφικά με μια κοίλη μορφή. Όσον αφορά τα προθεσμιακά συμβόλαια μελλοντικής εκκίνησης για ένα δικαίωμα πώλησης η αύξηση της τιμής του δικαιώματος αυτού είναι και πάλι γραμμική σε σχέση με την αύξηση του σ ενώ η τιμή του δικαιώματος αυξάνεται λογαριθμικά καθώς επιμηκύνουμε τον χρόνο T_2.

3.4 Αποτίμηση Δυαδικού Περιουσιακού Στοιχείου και Δυαδικού Ομόλογου δεύτερης τάξης

Τα δικαιώματα αυτά τιμολογούνται σύμφωνα με το εάν η τιμή του υποκείμενου αγαθού είναι πάνω ή κάτω από την τιμή εξάσκησης κατά τις χρονικές στιγμές T_1 και T_2 και αποφέρουν ένα ποσό $f(x)$. Για την τιμολόγηση μέσω προσομοίωσης Monte Carlo ενός δυαδικού ομολόγου δεύτερης τάξης με $s_1, s_2 = (-,-)$ θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη γραμμή του τύπου (2.11).

Αλγόριθμος για δυαδικό ομόλογο δεύτερης τάξης:

1. Ορίζουμε την αρχική μας κατάσταση και δίνουμε τιμές στις παραμέτρους $n, T_1, T_2, X_0, \sigma, r, \mu = r - \sigma^2/2, \xi_1, \xi_2, sum = 0$ του συστήματος μας.
2. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $X_1 = X_0 e^{(T_1-t)\mu+\sigma(T_1-t)^2 Z}$.
3. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $X_2 = X_1 e^{(T_2-T_1)\mu+\sigma(T_2-T_1)^2 Z}$.
4. Θέτουμε λογική συνθήκη If, όπου αν $X_1 < \xi_1$ και $X_2 < \xi_2$ τότε έχουμε κέρδος 1 αλλιώς 0.

5. Θέτουμε $sum = sum + I01$.
6. Θέτουμε $e^{-r(T_2-t)}\frac{sum}{n}$.

Την παραπάνω τιμή που προκύπτει με προσομοίωση θα την συγκρίνουμε με την ακριβή τιμή του παραγώγου που μας δίνει ο τύπος:

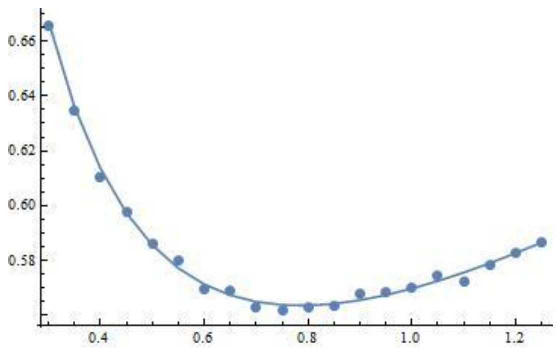
$$B^{s_1 s_2}_{\xi_1 \xi_2}(x,t) = e^{-r\tau_2}\Phi(s_1 d_1', s_2 d_2'; s_1 s_2 \rho)$$

Παρακάτω θα παραθέσουμε ένα γράφημα στο οποίο αποτυπώνεται η μεταβολή των τιμών του Δυαδικού ομολόγου δεύτερης τάξης για σ από 0.3 έως 1.25 με βήμα 0.05.

Ο κώδικας είναι:

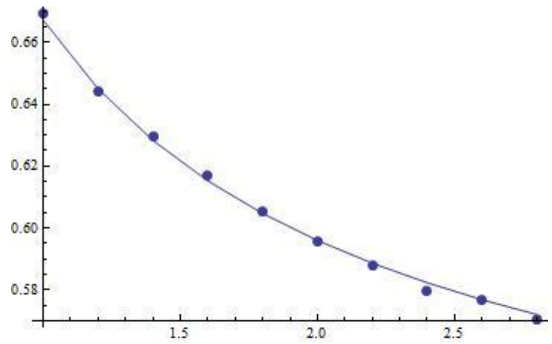
```
T2=1;r=0.01;n=10^5;X0=95;sigma=0.3;
j1=105;j2=115;T1=0.5;t=0.25;k=20;B=Table[0,{k}];Bexact=B;
Do[sum=0;m=r-sigma^2/2;
   Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
      X1=X0*Exp[(T1-t)*m+sigma*(T1-t)^0.5*Z];
      Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
      X2=X1*Exp[(T2-T1)*m+sigma*(T2-T1)^0.5*Z];
      If[X1<j1&&X2<j2,I01=1,I01=0];
      sum=sum+I01,{i,1,n}];
   B[[j]]={sigma,Exp[-r*(T2-t)]*N[sum/n]};
   p=((T1-t)/(T2-t))^0.5;
   d1=(Log[X0/j1]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
   d2=(Log[X0/j2]+(r-0.5*(sigma)^2) (T2-t))/(sigma*Sqrt[T2-t]);
   Bexact[[j]]={sigma,Exp[-r*(T2-
t)]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,p},{p,1}}],{-d1,-d2}]};
   sigma=sigma+0.05;,{j,1,k}];
f1=ListPlot[B,PlotStyle->{PointSize[Large]}];
f2=ListPlot[Bexact,Joined->True];
Show[f1,f2]
```

Γράφημα:



Με παρόμοια τρόπο γίνεται και το γράφημα ως προς την τιμή T_2, για T_2 από 1 έως 2.8 με βήμα 0.2.

Γράφημα:



Για την αποτίμηση ενός δυαδικού περιουσιακού στοιχείου δεύτερης τάξης με $s_1, s_2 = (-,+)$ θα χρησιμοποιήσουμε την πρώτη γραμμή του τύπου (2.13). Ο αλγόριθμος είναι ίδιος με τον παραπάνω, η μόνη αλλαγή είναι στην γραμμή 5 όπου στην λογική συνθήκη if θέτουμε αν $X_1 < \xi_1$ και $X_2 > \xi_2$ τότε $I01 = X_2$ αλλιώς $I01 = 0$. Την παραπάνω εκτιμημένη τιμή από την προσομοίωση θα την συγκρίνουμε με την ακριβή τιμή ενός δυαδικού περιουσιακού στοιχείου δεύτερης τάξης που μας δίνει ο τύπος:

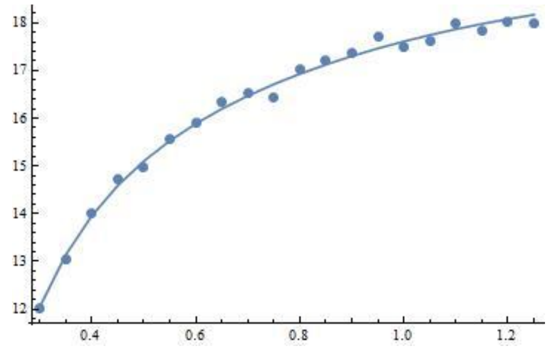
$$A_{\xi_1 \xi_2}^{s_1 s_2}(x,t) = x\Phi(s_1 d_1, s_2 d_2;\ s_1 s_2 \rho)$$

Παρακάτω θα παραθέσουμε ένα γράφημα στο οποίο αποτυπώνεται η μεταβολή των τιμών ενός δυαδικού περιουσιακού στοιχείου δεύτερης τάξης για σ από 0.3 έως 1.25 με βήμα 0.05.

Ο κώδικας είναι:

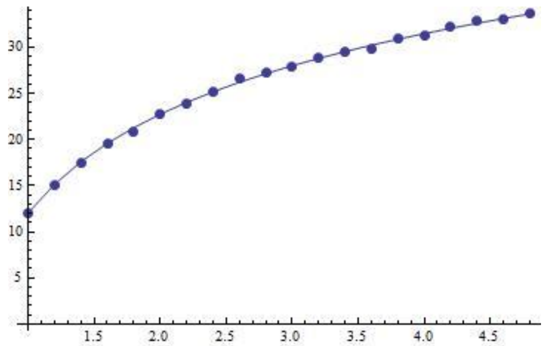
```
T2=1;r=0.01;n=10^5;X0=95;sigma=0.3;k=20;L=Table[0,{k}];A=L;
j1=105;j2=115;T1=0.5;t=0.25;
Do[sum=0;m=r-sigma^2/2;
   Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
      X1=X0*Exp[(T1-t)*m+sigma*(T1-t)^0.5*Z];
      Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
      X2=X1*Exp[(T2-T1)*m+sigma*(T2-T1)^0.5*Z];
      If[X1<j1&&X2>j2,I01=X2,I01=0];
      sum=sum+I01,{i,1,n}];
   L[[j]]={sigma,Exp[-r*(T2-t)]*N[sum/n]};
   p=((T1-t)/(T2-t))^0.5;
   d1=(Log[X0/j1]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
   d2=(Log[X0/j2]+(r-0.5*(sigma)^2) (T2-t))/(sigma*Sqrt[T2-t]);
    A[[j]]={sigma,X0*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,-p},{-
p,1}}],{-d1-sigma*(T1-t)^0.5,d2+sigma*(T2-t)^0.5}]};
    sigma=sigma+0.05;,{j,1,k}]
f1=ListPlot[L,PlotStyle->{PointSize[Large]}];
f2=ListPlot[A,Joined->True];
Show[f1,f2]
```

Γράφημα:



Με παρόμοια τρόπο γίνεται και το γράφημα ως προς την τιμή T_2, για T_2 από 1 έως 4.8 με βήμα 0.2.

Γράφημα:



Από τα παραπάνω γραφήματα παρατηρούμε ότι στα δυαδικά ομόλογα η τιμή του δικαιώματος εμφανίζει κυρτή μορφή, όσο αυξάνεται το σ, καθώς μειώνεται μέχρι την τιμή $\sigma = 0.7$ και ύστερα αυξάνεται ενώ όσο αυξάνεται ο χρόνος T_2 η τιμή του δικαιώματος φθίνει. Στην περίπτωση των δυαδικών περιουσιακών στοιχείων η τιμή του δικαιώματος αυξάνεται λογαριθμικά είτε αυξάνουμε το σ είτε το T_2.

3.5 Αποτίμηση Q-Δικαιωμάτων δεύτερης τάξης

Όπως έχουμε παρουσιάσει και σε προηγούμενο κεφάλαιο τα Q-δικαιώματα δεύτερης τάξης μπορούν να ερμηνευτούν σαν δυαδικά δικαιώματα επί ενός δικαιώματος "διαφοράς" αγοράς ή πώλησης.

Για την αποτίμηση ενός Q-δικαιώματος δεύτερης τάξης με $s_1, s_2 = (+, +)$ θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$Q^{s_1 s_2}_{\xi_1 \xi_2}(x_1, x_2, T_2; k) = s_2(x_2 - k)\mathbb{I}(s_1 x_1 > s_1 \xi_1)\mathbb{I}(s_2 x_2 > s_2 \xi_2)$$

Αλγόριθμος για δυαδικό ομόλογο δεύτερης τάξης:

1. Ορίζουμε την αρχική μας κατάσταση και δίνουμε τιμές στις παραμέτρους $n, T_1, T_2, X_0, \sigma, r, \mu = r - \sigma^2/2\,, \xi_1, \xi_2, k, sum = 0$ του συστήματος μας.
2. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $X_1 = X_0 e^{(T_1 - t)\mu + \sigma(T_1 - t)^2 Z}$.
3. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $X_2 = X_1 e^{(T_2 - T_1)\mu + \sigma(T_2 - T_1)^2 Z}$.
4. Θέτουμε λογική συνθήκη If, όπου αν $X_1 > \xi_1$ και $X_2 > \xi_2$ τότε $I01 = (X_2 - k)$ αλλιώς $I01 = 0$.
5. Θέτουμε $sum = sum + I01$.
6. Θέτουμε $e^{-r(T_2 - t)} \frac{sum}{n}$.

Την παραπάνω εκτιμημένη τιμή από την προσομοίωση θα την συγκρίνουμε με την ακριβή τιμή ενός Q-δικαιώματος δεύτερης τάξης που μας δίνει ο τύπος:

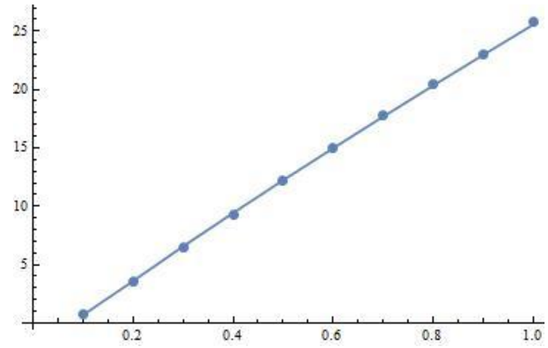
$$Q_{\xi_1 \xi_2}^{s_1 s_2}(x, t; k) = s_2 A_{\xi_1 \xi_2}^{s_1 s_2}(x, t) - s_2 k B_{\xi_1 \xi_2}^{s_1 s_2}(x, t)$$

Παρακάτω θα παραθέσουμε ένα γράφημα στο οποίο αποτυπώνεται η μεταβολή των τιμών ενός Q-δικαιώματος δεύτερης τάξης για σ από 0.1 έως 1 με βήμα 0.1.

Ο κώδικας είναι:

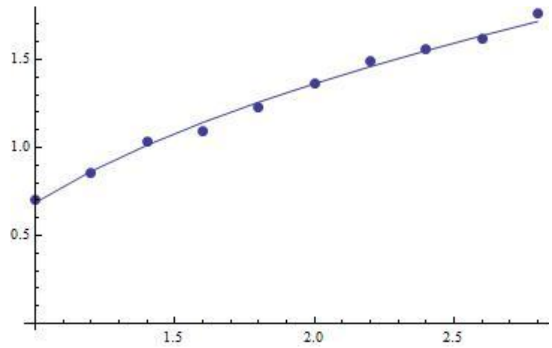
```
T2=1;r=0.01;n=10^5;X0=100;sigma=0.1;
j1=105;j2=115;T1=0.5;K=100;t=0.25;k=10;F=Table[0,{k}];Q=F;
Do[sum=0;m=r-sigma^2/2;
   Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
      X1=X0*Exp[(T1-t)*m+sigma*(T1-t)^0.5*Z];
      Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
      X2=X1*Exp[(T2-T1)*m+sigma*(T2-T1)^0.5*Z];
      If[X1>j1&&X2>j2,I01=(X2-K),I01=0];
      sum=sum+I01,{i,1,n}];
   F[[j]]={sigma,Exp[-r*(T2-t)]*N[sum/n]};
   p=((T1-t)/(T2-t))^0.5;
    d1=(Log[X0/j1]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
    d2=(Log[X0/j2]+(r-0.5*(sigma)^2) (T2-t))/(sigma*Sqrt[T2-t]);
 A=X0*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,p},{p,1}}],{d1+sigma*(T1-
t)^0.5,d2+sigma*(T2-t)^0.5}];
    p=((T1-t)/(T2-t))^0.5;
    d1=(Log[X0/j1]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
    d2=(Log[X0/j2]+(r-0.5*(sigma)^2) (T2-t))/(sigma*Sqrt[T2-t]);
    B=Exp[-r*(T2-
t)]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,p},{p,1}}],{d1,d2}];
    Q[[j]]={sigma,A-K*B};
    sigma=sigma+0.1;,{j,1,k}]
f1=ListPlot[F,PlotStyle->{PointSize[Large]}];
f2=ListPlot[Q,Joined->True];
Show[f1,f2]
```

Γράφημα:



Με παρόμοια τρόπο γίνεται και το γράφημα ως προς την τιμή T_2, για T_2 από 1 έως 2.8 με βήμα 0.2.

Γράφημα:



Η τιμή των Q δικαιωμάτων είναι μια αύξουσα συνάρτηση και μάλιστα γραμμική ως προς την αύξηση της μεταβλητής σ. Αύξουσα μορφή, με μια μικρή κλίση, είναι η τιμή του δικαιώματος και ως προς την μεταβλητή του χρόνου, T_2.

3.6 Σύνθετα δικαιώματα

Οι τέσσερις βασικές κατηγορίες σύνθετων δικαιωμάτων είναι τα εξής δικαίωμα αγοράς σε δικαίωμα αγοράς, δικαίωμα πώλησης σε δικαίωμα αγοράς, δικαίωμα αγοράς σε δικαίωμα πώλησης και δικαίωμα πώλησης σε δικαίωμα πώλησης. Για παράδειγμα ένα δικαίωμα αγοράς σε δικαίωμα αγοράς παρέχει στον κάτοχο το δικαίωμα να αγοράσει π.χ σε ένα μήνα ένα άλλο δικαίωμα που λήγει 6 μήνες μετά την εκπνοή του πρώτου δικαιώματος.

Έστω ότι διαθέτουμε ένα δικαίωμα αγοράς σε δικαίωμα αγοράς. Τότε μπορούμε αν θέλουμε να εξασκήσουμε το δικαίωμά μας την στιγμή T_1 καταβάλλοντας ένα συμφωνημένο ποσό c_1 εάν,

$$C_{K_2}(x_1,\tau) > c_1, \qquad \tau = (T_2 - T_1)$$

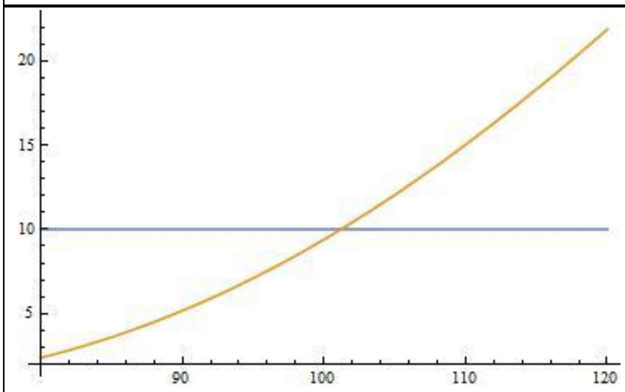
Αρχικά λύνοντας την εξίσωση $C_{K_2}(x,\tau) = c_1$ θα βρούμε την τιμή εξάσκησης στο χρόνο T_1, δηλαδή $x = K_1$ για $x \in [0,\infty)$. Για την αποτίμηση ενός Σύνθετου δικαιώματος θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$V_{cc}(x,t) = [(x_2 - K_2)^+ - c_1 e^{r\tau}]\mathbb{I}(x_1 > K_1)$$

Κώδικας για την εύρεση του K_1:

```
T2=1;r=0.01;T1=0.5;sigma=0.4;K2=105;"k*Exp[-r*(T2-T1)]-h";
omega=(r*(T2-T1)+sigma^2*(T2-T1)/2-Log[K2/x])/(sigma*(T2-
T1)^0.5);c1=10;
CcallK2=x*CDF[NormalDistribution[0,1],omega]-K2*Exp[-r*(T2-
T1)]*CDF[NormalDistribution[0,1],omega-sigma*(T2-T1)^0.5];
FindRoot[CcallK2==c1,{x,100}]
Plot[{c1,CcallK2},{x,80,120}]
```

$\{x \to \mathbf{101.19974344085541}\}$



Αλγόριθμος για Σύνθετο δικαίωμα:

1. Ορίζουμε την αρχική μας κατάσταση και δίνουμε τιμές στις παραμέτρους $n, T_1, T_2, t, X_0, \sigma, r, \mu = r - \sigma^2/2$, $K_1, K_2, sum = 0, c_1$ του συστήματος μας.
2. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $X_1 = X_0 e^{(T_1-t)\mu + \sigma(T_1-t)^2 Z}$.
3. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $X_2 = X_1 e^{(T_2-T_1)\mu + \sigma(T_2-T_1)^2 Z}$.
4. Θέτουμε λογική συνθήκη If, όπου αν $X_1 > K_1$ τότε $I01 = Max[X_2 - K_2, 0] - c_1 e^{r(T_2-T_1)}$ αλλιώς $I01 = 0$.
5. Θέτουμε $sum = sum + I01$.
6. Θέτουμε $e^{-r(T_2-t)}\frac{sum}{n}$.

Την παραπάνω εκτιμημένη τιμή από την προσομοίωση θα την συγκρίνουμε με την ακριβή τιμή ενός Σύνθετου δικαιώματος που μας δίνει ο τύπος:

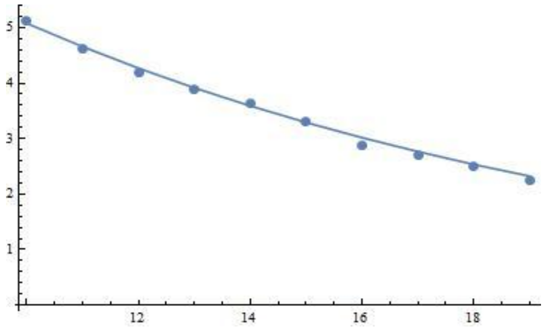
$$V_{cc}(x,t) = Q^{++}_{K_1K_2} - c_1 B^{+}_{K_1}(x,\tau_1)$$

Παρακάτω θα παραθέσουμε ένα γράφημα στο οποίο αποτυπώνεται η μεταβολή των τιμών ενός Σύνθετου δικαιώματος για c_1 από 10 έως 20 με βήμα 1.

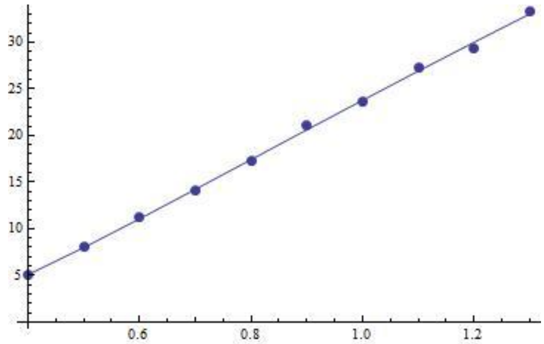
Ο κώδικας είναι:

```
T2=1;r=0.01;n=10^5;X0=100;sigma=0.4;
T1=0.5;K1=101.2;t=0.25;K2=105;c1=10;k=10;M=Table[0,{k}];Vcc=M;
Do[m=r-sigma^2/2;
   omega=(r*(T2-T1)+sigma^2*(T2-T1)/2-Log[K2/x])/(sigma*(T2-T1)^0.5);
   CcallK2=x*CDF[NormalDistribution[0,1],omega]-K2*Exp[-r*(T2-
T1)]*CDF[NormalDistribution[0,1],omega-sigma*(T2-T1)^0.5];
   K1=x/.FindRoot[CcallK2==c1,{x,100}];
   sum=0;
   Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
      X1=X0*Exp[(T1-t)*m+sigma*(T1-t)^0.5*Z];
      Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
      X2=X1*Exp[(T2-T1)*m+sigma*(T2-T1)^0.5*Z];
      If[X1>K1,I01=(Max[X2-K2,0]-c1*Exp[r*(T2-T1)]),I01=0];
      sum=sum+I01,{i,1,n}];
   M[[j]]={c1,Exp[-r*(T2-t)]*N[sum/n]};
   p=((T1-t)/(T2-t))^0.5;
   d1=(Log[X0/K1]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
   d2=(Log[X0/K2]+(r-0.5*(sigma)^2) (T2-t))/(sigma*Sqrt[T2-t]);
 A=X0*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,p},{p,1}}],{d1+sigma*(T1-
t)^0.5,d2+sigma*(T2-t)^0.5}];
   p=((T1-t)/(T2-t))^0.5;
   d1=(Log[X0/K1]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
   d2=(Log[X0/K2]+(r-0.5*(sigma)^2) (T2-t))/(sigma*Sqrt[T2-t]);
   B=Exp[-r*(T2-
t)]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,p},{p,1}}],{d1,d2}];
   Q=A-K2*B;
   dK1=(Log[X0/K1]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
   BK1=Exp[-r*(T1-t)]*CDF[NormalDistribution[0,1],dK1];
   Vcc[[j]]={c1,Q-c1*BK1};
   c1=c1+1;,{j,1,k}];
f1=ListPlot[M,PlotStyle->{PointSize[Large]}];
f2=ListPlot[Vcc,Joined->True];
Show[f1,f2]
```

Γράφημα:



Παρακάτω θα παραθέσουμε ένα γράφημα στο οποίο αποτυπώνεται η μεταβολή των τιμών ενός σύνθετου δικαιώματος για σ από 0.4 έως 1.3 με βήμα 0.1.



Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα παραπάνω δυο γραφήματα. Στην πρώτη περίπτωση η τιμή ενός σύνθετου δικαιώματος μειώνεται όσο αυξάνεται η τιμή του c_1, αντίθετα η τιμή του δικαιώματος αυξάνει γραμμικά όσο αυξάνει η τιμή του σ.

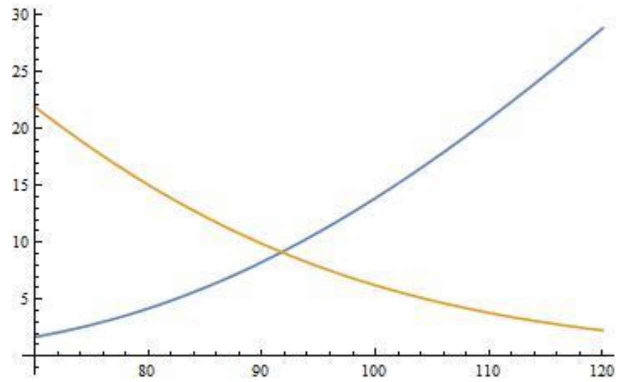
3.7 Δικαιώματα Επιλογής

Ένα δικαίωμα επιλογής δίνει το δικαίωμα στον κάτοχο να διαλέξει σε μια μελλοντική χρονική στιγμή T_1 εάν το παράγωγο θα είναι ένα Ευρωπαϊκού τύπου δικαίωμα αγοράς ή πώλησης. Οι τιμές εξάσκησης των δυο αυτών δικαιωμάτων είναι διαφορετικές ενώ η ημερομηνία λήξης τους είναι ίδια (T_2). Επειδή το δικαίωμα αγοράς είναι αύξουσα συνάρτηση ενώ το δικαίωμα πώλησης είναι φθίνουσα ορίζουμε ως $x = c$ το σημείο τομής τους το οποίο και θα μας βοηθήσει στο να καταλήξουμε σε κάποιο δικαίωμα από τα δυο παραπάνω που αναφέραμε. Εάν την στιγμή T_1 έχουμε $x_1 > c$ τότε διαλέγουμε το δικαίωμα αγοράς ενώ αν $x_1 < c$ τότε επιλέγουμε το δικαίωμα πώλησης. Αρχικά θα βρούμε την τιμή του c.

Κώδικας για την εύρεση του c:

```
T2=1;r=0.01;n=10000;X0=100;T1=0.5;sigma=0.4;m=r-
sigma^2/2;t=0.25;k=95;h=90;
omegacall=(r*(T2-T1)+sigma^2*(T2-T1)/2-Log[k/x])/(sigma*(T2-T1)^0.5);
Ccall=x*CDF[NormalDistribution[0,1],omegacall]-k*Exp[-r*(T2-
T1)]*CDF[NormalDistribution[0,1],omegacall-sigma*(T2-T1)^0.5];
omegaput=(r*(T2-T1)+sigma^2*(T2-T1)/2-Log[h/x])/(sigma*(T2-T1)^0.5);
Cput=x*CDF[NormalDistribution[0,1],omegaput]-h*Exp[-r*(T2-
T1)]*CDF[NormalDistribution[0,1],omegaput-sigma*(T2-T1)^0.5]-
x+h*Exp[-r*(T2-T1)];
c=FindRoot[Ccall==Cput,{x,100}]
Plot[{Ccall,Cput},{x,70,120}]
```

$\{x \rightarrow \mathbf{91.73744344453677}\}$



Αλγόριθμος για δικαίωμα Επιλογής:

1. Ορίζουμε την αρχική μας κατάσταση και δίνουμε τιμές στις παραμέτρους $n, T_1, T_2, t, X_0, \sigma, r, \mu = r - \sigma^2/2\,,\ h, k, sum = 0, c$ του συστήματός μας.
2. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $X_1 = X_0 e^{(T_1 - t)\mu + \sigma (T_1 - t)^2 Z}$.
3. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $X_2 = X_1 e^{(T_2 - T_1)\mu + \sigma (T_2 - T_1)^2 Z}$.
4. Θέτουμε λογική συνθήκη If, όπου αν $X_1 > c$ τότε $I01 = Max[X_2 - h, 0]$ αλλιώς $I01 = Max[k - X_2, 0]$.
5. Θέτουμε $sum = sum + I01$.
6. Θέτουμε $e^{-r(T_2 - t)} \frac{sum}{n}$.

Την παραπάνω τιμή θα την συγκρίνουμε με την ακριβή τιμή ενός δικαιώματος επιλογής που μας δίνει ο τύπος:

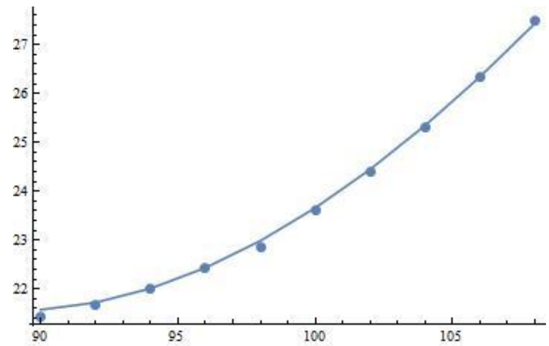
$$V(x,t) = Q_{ch}^{++}(x,t;h) + Q_{ck}^{--}(x,t;k)$$

Παρακάτω θα παραθέσουμε ένα γράφημα στο οποίο αποτυπώνεται η μεταβολή των τιμών ενός δικαιώματος Επιλογής για X_0 από 100 έως 120 με βήμα 2.

Ο κώδικας είναι:

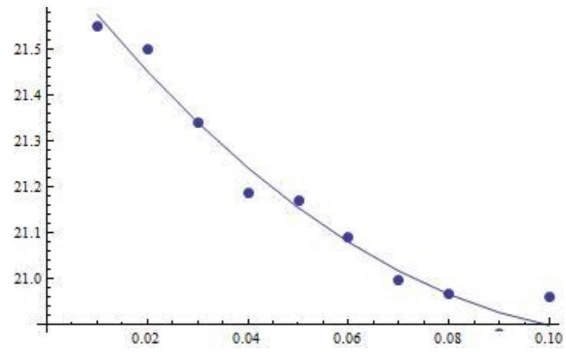
```
T2=1;r=0.01;n=10^5;X0=90;T1=0.5;sigma=0.4;t=0.25;k=95;h=90;p=10;R=Tab
le[0,{p}];V=R;
Do[m=r-sigma^2/2;c=91.73744344453677;sum=0;
   Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
      X1=X0*Exp[(T1-t)*m+sigma*(T1-t)^0.5*Z];
      Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
      X2=X1*Exp[(T2-T1)*m+sigma*(T2-T1)^0.5*Z];
      If[X1>c,I01=Max[X2-h,0],I01=Max[k-X2,0]];
      sum=sum+I01;,{i,1,n}];
   R[[j]]={X0,Exp[-r*(T2-t)]*N[sum/n]};
   p=((T1-t)/(T2-t))^0.5;
   d11=(Log[X0/c]+(r+0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
   d21=(Log[X0/h]+(r+0.5*(sigma)^2) (T2-t))/(sigma*Sqrt[T2-t]);
   A=X0*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,p},{p,1}}],{d11,d21}];
   d1=(Log[X0/c]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
   d2=(Log[X0/h]+(r-0.5*(sigma)^2) (T2-t))/(sigma*Sqrt[T2-t]);
   B=Exp[-r*(T2-
t)]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,p},{p,1}}],{d1,d2}];
   Qch=A-h*B;
   d12=(Log[X0/c]+(r+0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
   d22=(Log[X0/k]+(r+0.5*(sigma)^2) (T2-t))/(sigma*Sqrt[T2-t]);
   A=X0*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,p},{p,1}}],{-d12,-
d22}];
   d1=(Log[X0/c]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
   d2=(Log[X0/k]+(r-0.5*(sigma)^2) (T2-t))/(sigma*Sqrt[T2-t]);
   B=Exp[-r*(T2-
t)]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,p},{p,1}}],{-d1,-d2}];
   Qck=-A+k*B;
   V[[j]]={X0,Qch+Qck};
   X0=X0+2;,{j,1,p}]
f1=ListPlot[R,PlotStyle->{PointSize[Large]}];
f2=ListPlot[V,Joined->True];
Show[f2,f1]
```

Γράφημα:



Με παρόμοια τρόπο γίνεται και το γράφημα ως προς την τιμή του r, για r από 0.01 έως 0.1 με βήμα 0.01.

Γράφημα:



Αυξάνοντας την τιμή X_0 η τιμή ενός δικαιώματος επιλογής αυξάνεται εκθετικά σε αντίθεση με την τιμή του δικαιώματος, η οποία μειώνεται, καθώς αυξάνεται το επιτόκιο r.

3.8 Δικαιώματα Επανακαθορισμού

Τα δικαιώματα Επανακαθορισμού δίνουν την δυνατότητα στον κάτοχο την χρονική στιγμή T_1 να κάνει μια από τις εξής κινήσεις:

1. Να επεκτείνει την ζωή του δικαιώματος για ένα συμφωνημένο ποσό. Για παράδειγμα σε ένα δικαίωμα αγοράς εάν $C_k(x_1, \tau) - c > (x_1 - h)^+$.
2. Να εξασκήσει το δικαίωμα εάν είναι in the money π.χ. το δικαίωμα αγοράς.
3. Να μην κάνει καμία ενέργεια επί του δικαιώματος.

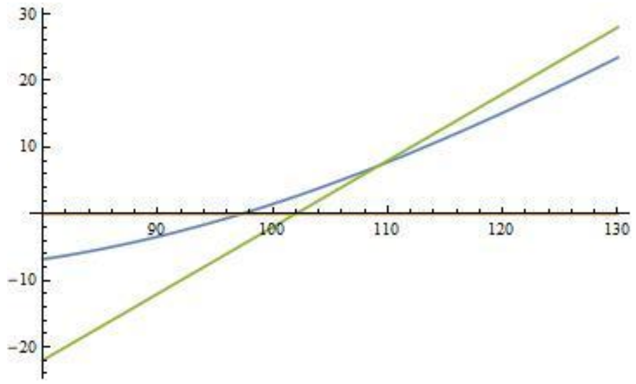
Αυτό που μας ενδιαφέρει κατά κύριο λόγο είναι η τιμή του υποκείμενου αγαθού την χρονική στιγμή T_1 η οποία και καθορίζει ποια ενέργεια θα κάνουμε. Εάν $x = a$ και $x = b$ οι λύσεις των εξισώσεων $C_k(x, \tau) = c$ και $C_k(x, \tau) = c + x - h$ αντίστοιχα τότε εάν πληρείται η συνθήκη $0 < c < ke^{-r\tau} - h$. Προκύπτουν εν αντιστοιχία οι παρακάτω τρεις περιπτώσεις:

1. Εάν $0 < x_1 < a$ δεν κάνουμε κάποια ενέργεια.
2. Εάν $\alpha < x_1 < b$ επανακαθορίζουμε το δικαίωμα.
3. Εάν $x_1 > b$ εξασκούμε το δικαίωμα μας π.χ. το δικαίωμα αγοράς.

Αρχικά θα υπολογίσουμε τα α, b. Κώδικας για την εύρεση των α, b:

```
T2=1;r=0.01;T1=0.5;k=100;h=102;sigma=0.4;c=10;
omega=(r*(T2-T1)+sigma^2*(T2-T1)/2-Log[k/x])/(sigma*(T2-T1)^0.5);
Ccall=x*CDF[NormalDistribution[0,1],omega]-k*Exp[-r*(T2-
T1)]*CDF[NormalDistribution[0,1],omega-sigma*(T2-T1)^0.5];
a=FindRoot[Ccall==c,{x,100}]
b=FindRoot[Ccall==x+c-h,{x,100}]
Plot[{Ccall-c,0,x-h},{x,80,130}]
```

$\{x \to \mathbf{97.29969058610597}\}$
$\{x \to \mathbf{109.22847479537437}\}$



Αλγόριθμος για δικαίωμα Επανακαθορισμού:

4. Ορίζουμε την αρχική μας κατάσταση και δίνουμε τιμές στις παραμέτρους $n, T_1, T_2, t, X_0, \sigma, r, \mu = r - \sigma^2/2,\ h, k, sum = 0, \alpha, b$ του συστήματος μας.
5. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $X_1 = X_0 e^{(T_1-t)\mu+\sigma(T_1-t)^2 Z}$.
6. Παράγουμε $Z \sim N(0,1)$ και θέτουμε $X_2 = X_1 e^{(T_2-T_1)\mu+\sigma(T_2-T_1)^2 Z}$.
7. Θέτουμε λογικές συνθήκες If, όπου αν $0 < X_1 < \alpha$ τότε $I01 = 0$ αν $\alpha < X_1 < b$ $I01 = Max[X_2 - k, 0] - c$ αν $X_1 > b$ τότε $I01 = Max[X_1 - h, 0]$.
8. Θέτουμε $sum = sum + I01$.
9. Θέτουμε $e^{-r(T_2-t)}\frac{sum}{n}$.

Την παραπάνω τιμή θα την συγκρίνουμε με την ακριβή τιμή ενός δικαιώματος Επανακαθορισμού που μας δίνει ο τύπος:

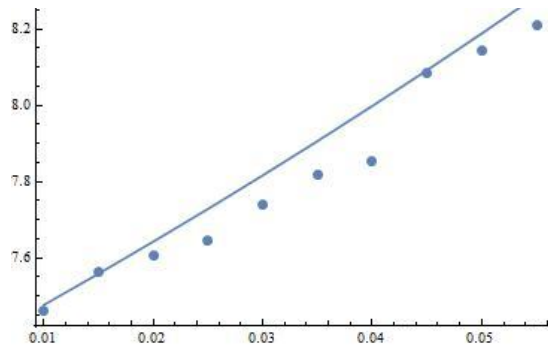
$$V(x,t) = Q_{ak}^{++}(x,t;k) - Q_{bk}^{++}(x,t;k) - c[B_a^{+}(x,\tau_1) - B_b^{+}(x,\tau_1)] + Q_b^{+}(x,\tau_1;h)$$

Παρακάτω θα παραθέσουμε ένα γράφημα στο οποίο αποτυπώνεται η μεταβολή των τιμών ενός δικαιώματος Επανακαθορισμού για r από 0.01 έως 0.055 με βήμα 0.005.

Ο κώδικας είναι:

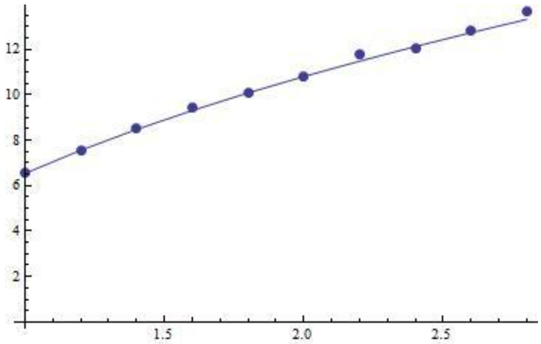
```
T2=1;r=0.01;n=10^5;X0=100;T1=0.5;sigma=0.4;t=0.25;k=100;h=102;a=97.05
2;b=93.4734;g=10;W=Table[0,{g}];c=10;V=W;
Do[m=r-sigma^2/2;a=97.29969058610597;b=109.2284747953743;sum=0;
    Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
        X1=X0*Exp[(T1-t)*m+sigma*(T1-t)^0.5*Z];
        Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
        X2=X1*Exp[(T2-T1)*m+sigma*(T2-T1)^0.5*Z];
        If[0<X1<a,I01=0,If[a<X1<b,I01=Max[X2-k,0]-c,If[X1>b,I01=Max[X1-
h,0]]]];
        sum=sum+I01;,{i,1,n}];
    W[[j]]={r,Exp[-r*(T2-t)]*N[sum/n]};
    p=((T1-t)/(T2-t))^0.5;
    d11=(Log[X0/a]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
    d2=(Log[X0/k]+(r-0.5*(sigma)^2) (T2-t))/(sigma*Sqrt[T2-t]);
A1=X0*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,p},{p,1}}],{d11+sigma*(T1
-t)^0.5,d2+sigma*(T2-t)^0.5}];
    B1=Exp[-r*(T2-
t)]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,p},{p,1}}],{d11,d2}];
    Qak=A1-k*B1;
    d12=(Log[X0/b]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
A2=X0*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,p},{p,1}}],{d12+sigma*(T1
-t)^0.5,d2+sigma*(T2-t)^0.5}];
    B2=Exp[-r*(T2-
t)]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,p},{p,1}}],{d12,d2}];
    Qbk=A2-k*B2;
    Ba=Exp[-r*(T1-t)]*CDF[NormalDistribution[0,1],d11];
    Bb=Exp[-r*(T1-t)]*CDF[NormalDistribution[0,1],d12];
    Qb=X0*CDF[NormalDistribution[0,1],d12+sigma*(T1-t)^0.5]-h*Exp[-
r*(T1-t)]*CDF[NormalDistribution[0,1],d12];
    V[[j]]={r,Qak-Qbk-c (Ba-Bb)+Qb};
    r=r+0.005;,{j,1,g}];
f1=ListPlot[W,PlotStyle->{PointSize[Large]}];
f2=ListPlot[V,Joined->True];
Show[f1,f2]
```

Γράφημα:



Με παρόμοια τρόπο γίνεται και το γράφημα ως προς την τιμή T_2, για T_2 από 1 έως 2.8 με βήμα 0.02.

Γράφημα:



Από τα παραπάνω γραφήματα συμπεραίνουμε ότι η τιμή ενός δικαιώματος επανακαθορισμού είναι μια αύξουσα, γραμμική συνάρτηση ως προς την αύξηση της τιμής των μεταβλητών r και T_2.

3.9 Απλά Cliquet δικαιώματα

Τα απλά cliquet δικαιώματα αποτελούνται από μια σειρά forward start options όπου το πρώτο ενεργοποιείται αμέσως ενώ το δεύτερο ενεργοποιείται όταν λήγει το πρώτο. Ακόμα και αν το δικαίωμα αυτό είναι out of the money κατά την χρονική στιγμή T_2 ο κάτοχος του δικαιώματος έχει την δυνατότητα να λάβει κάποιο ποσό εάν το δικαίωμα ήταν in the money την χρονική στιγμή T_1. Για $t \in (T_1, T_2)$ το x_1 στον παραπάνω τύπο παραμένει σταθερό.

Για την αποτίμηση ενός απλού Cliquet δικαιώματος δεύτερης τάξης θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο:

$$V(x_1, x_2, T_2) = (x_2 - K)^+ \mathbb{I}(x_1 < K) + [(x_2 - x_1)^+ + (x_1 - K)]\mathbb{I}(x_1 > K).$$

Αλγόριθμος για δυαδικό ομόλογο δεύτερης τάξης:

1. Ορίζουμε την αρχική μας κατάσταση και δίνουμε τιμές στις παραμέτρους $n, T_1, T_2, X_0, \sigma, r, \mu = r - \sigma^2/2\,, K, sum = 0$ του συστήματος μας.
2. Παράγουμε $Z{\sim}N(0,1)$ και θέτουμε $X_1 = X_0 e^{(T_1 - t)\mu + \sigma (T_1 - t)^2 Z}$.
3. Παράγουμε $Z{\sim}N(0,1)$ και θέτουμε $X_1 = X_1 e^{(T_2 - T_1)\mu + \sigma (T_2 - T_1)^2 Z}$.
4. Θέτουμε λογική συνθήκη If, όπου αν $X_1 < K$ τότε $I01 = Max[X_2 - K, 0]$ αλλιώς $I01 = Max[\,X_2 - X_1, 0] + (X_1 -\, K)]$.
5. Θέτουμε $sum = sum + I01$.
6. Θέτουμε $e^{-r(T_2 - t)}\,\frac{sum}{n}$.

Την παραπάνω εκτιμημένη τιμή από την προσομοίωση θα την συγκρίνουμε με την ακριβή τιμή ενός απλού Cliquet δικαιώματος δεύτερης τάξης που μας δίνει ο τύπος:

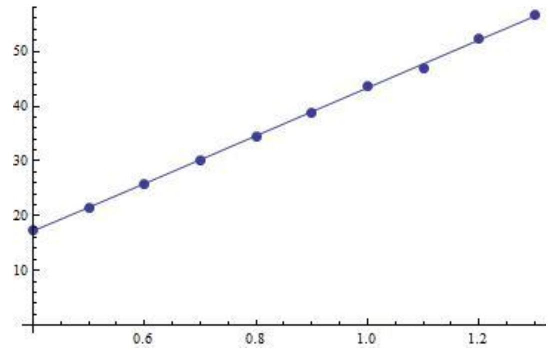
$$V(x,t) = Q_{KK}^{-+}(x,t;K) + g(\tau)A_K^{+}(x,\tau_1) + e^{-r\tau}C_K(x,\tau_1)$$

Παρακάτω θα παραθέσουμε ένα γράφημα στο οποίο αποτυπώνεται η μεταβολή των τιμών ενός απλού Cliquet δεύτερης τάξης για σ από 0.4 έως 1.3 με βήμα 0.1.

Ο κώδικας είναι:

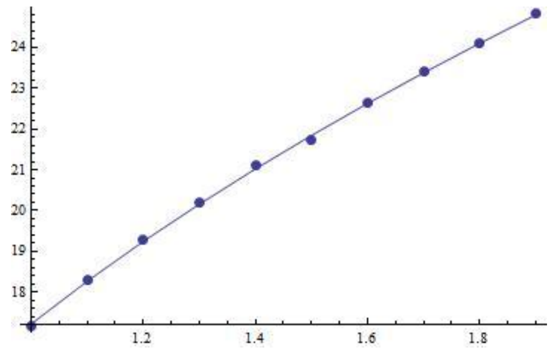
```
T2=1;r=0.01;n=10^5;X0=100;sigma=0.4;
T1=0.5;K=100;t=0.25;k=10;G=Table[0,{k}];V=G;
Do[sum=0;m=r-sigma^2/2;
 Do[Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  X1=X0*Exp[(T1-t)*m+sigma*(T1-t)^0.5*Z];
  Z=RandomReal[NormalDistribution[0,1]];
  X2=X1*Exp[(T2-T1)*m+sigma*(T2-T1)^0.5*Z];
  If[X1<K,I01=Max[X2-K,0],I01=Max[X2-X1,0]+(X1-K)];
  sum=sum+I01,{i,1,n}];
 G[[j]]={sigma,Exp[-r*(T2-t)]*N[sum/n]};
 p=((T1-t)/(T2-t))^0.5;
 d1=(Log[X0/K]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-t]);
 d2=(Log[X0/K]+(r-0.5*(sigma)^2) (T2-t))/(sigma*Sqrt[T2-t]);
 Anp=X0*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,-p},{-p,1}}],{-d1-
sigma*(T1-t)^0.5,d2+sigma*(T2-t)^0.5}];
 Bnp=Exp[-r*(T2-t)]*CDF[MultinormalDistribution[{0,0},{{1,-p},{-
p,1}}],{-d1,d2}];
 Qnp=Anp-K*Bnp;
 dk=(Log[X0/K]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t))/(sigma*Sqrt[T1-
t])+sigma*(T1-t)^0.5;
 d=Log[X0/K]+(r-0.5*(sigma)^2) (T1-t)/(sigma*Sqrt[T1-t]);
 g=CDF[NormalDistribution[0,1],(r/sigma+0.5*sigma)*Sqrt[T2-T1]]-Exp[-
r (T2-T1)]*CDF[NormalDistribution[0,1],(r/sigma-0.5*sigma)*Sqrt[T2-
T1]];
 Ap=X0*CDF[NormalDistribution[0,1],dk];
 Ck=X0*CDF[NormalDistribution[0,1],dk]-K*Exp[-r (T1-
t)]*CDF[NormalDistribution[0,1],d];
 V[[j]]={sigma,Qnp+g*Ap+Exp[-r (T2-T1)]*Ck};
 sigma=sigma+0.1;,{j,1,k}]
f1=ListPlot[G,PlotStyle→{PointSize[Large]}];
f2=ListPlot[V,Joined→True];
Show[f1,f2]
```

Γράφημα:



Με παρόμοια τρόπο γίνεται και το γράφημα ως προς την τιμή T_2, για T_2 από 1 έως 2 με βήμα 0.1.

Γράφημα:



Στην περίπτωση των απλών Cliquet δικαιωμάτων όσο αυξάνεται η τιμή των μεταβλητών T_2 και σ τόσο αυξάνεται η τιμή του δικαιώματος και μάλιστα η αύξηση αυτή και στις δυο περιπτώσεις είναι γραμμική.

3.10 Συμπεράσματα

Προθεσμιακά Συμβόλαια Μελλοντικής Εκκίνησης	Στα συμβόλαια αυτά τόσο για τα δικαιώματα αγοράς όσο και για τα δικαιώματα πώλησης οι τιμές των προσομοιώσεων αλλά και των κλειστών τύπων συγκλίνουν σε μεγάλο βαθμό. Επίσης, με την αύξηση της τυπικής απόκλισης και στα δυο δικαιώματα εμφανίζεται μια γραμμική αύξηση στις τιμές των συμβολαίων ενώ κατά την αύξηση του χρόνου T_2, η αύξηση στις τιμές των συμβολαίων έχει πιο λογαριθμικό χαρακτήρα.
Δυαδικά Περιουσιακά Στοιχεία $2^{ης}$ τάξης	Σε ένα Δυαδικό Περιουσιακό Στοιχείο οι τιμές των προσομοιώσεων και των κλειστών τύπων συγκλίνουν αρκετά. Εδώ όσο αυξάνεται και τυπική απόκλιση αλλά και ο χρόνος λήξης η αξία του συμβολαίου παρουσιάζει μια καθαρά λογαριθμική αύξηση και δείχνει να αρχίζει να σταθεροποιείται σε μια τιμή στο μέλλον, διαφορετική όμως για τις δυο μεταβλητές που εξετάζουμε.
Δυαδικά Ομόλογα 2ης τάξης	Στα συμβόλαια αυτά και πάλι οι τιμές των προσομοιώσεων και των κλειστών τύπων συγκλίνουν ικανοποιητικά. Ενδιαφέρον παρουσιάζει το γεγονός ότι κατά την αύξηση της τυπικής απόκλισης αρχικά μειώνεται εκθετικά η αξία του συμβολαίου, μέχρι $\sigma = 0.8$ και μετά αυξάνεται εκθετικά. Ενώ όσο αυξάνεται ο χρόνος T_2, η αξία του συμβολαίου μειώνεται με εκθετικό ρυθμό.
Q- Δικαιώματα $2^{ης}$ τάξης	Στα Q-δικαιώματα, τα οποία συνδέονται με τα δυο προηγούμενα εξωτικά δικαιώματα, η προσομοίωση και ο κλειστός τύπος δίνουν παρόμοιες αξίες επί του συμβολαίου. Επίσης η αξία του συμβολαίου αυξάνεται τόσο με την αύξηση της τυπικής απόκλισης όσο και με την αύξηση του χρόνου λήξης T_2, με γραμμικό και ελαφρώς λογαριθμικό τρόπο αντίστοιχα.

Σύνθετα Δικαιώματα	Στα Σύνθετα Δικαιώματα αφού βρήκαμε την συνθήκη σύμφωνα με την οποία θα αγοράσουμε το δεύτερο δικαίωμα, έναντι ενός ποσού, καταλήξαμε με την βοήθεια της προσομοίωσης και του κλειστού τύπου, ότι όσο αυξάνεται το ποσό αυτό μειώνεται η αξία του δικαιώματος. Αντίθετα όσο αυξάνεται η τυπική απόκλιση η αξία του δικαιώματος αυξάνει γραμμικά. Οι τιμές τις προσομοίωσης και του κλειστού τύπου και εδώ συγκλίνουν σε μεγάλο βαθμό.
Δικαιώματα Επιλογής	Στα Δικαιώματα Επιλογής βρίσκουμε το σημείο τομής του δικαιώματος αγοράς και πώλησης, μέσω προσομοίωσης, ούτως ώστε να καταλήξουμε πιο δικαίωμα θα επιλέξουμε, στην περίπτωσή μας $c = 91.7$. Η αξία τώρα ενός Δικαιώματος Επιλογής αυξάνεται εκθετικά όσο αυξάνεται η αρχική τιμή x_0 αντίθετα μειώνεται εκθετικά όσο αυξάνεται το επιτόκιο r. Παρόλα αυτά η προσαρμογή των τιμών, στην δεύτερη περίπτωση, δεν είναι ιδανική.
Δικαιώματα Επανακαθορισμού	Και στα Δικαιώματα Επανακαθορισμού βρίσουμε μέσω προσομοίωσης κάποια διαστήματα στα οποία κινείται η τιμή x_1 για να αποφασίσουμε πιο κίνηση, μας συμφέρει, να κάνουμε. Η αξία ενός τέτοιου δικαιώματος αυξάνεται όσο αυξάνεται το επιτόκιο, όμως οι τιμές της προσομοίωσης και του κλειστού παρουσιάζουν αποκλίσεις. Αντίθετα η αξία ενός Δικαιώματος Επανακαθορισμού αυξάνεται ελαφρώς λογαριθμικά και οι τιμές προσομοίωσης και κλειστού τύπου ταυτίζονται.
Απλά Cliquet Δικαιώματα	Τέλος, στα Απλά Cliquet Δικαιώματα με την αύξηση τόσο του χρόνου λήξης όσο και της τυπικής απόκλισης η αξία ενός τέτοιου δικαιώματος αυξάνεται γραμμικά και η σύγκλιση των τιμών της προσομοίωσης και του κλειστού τύπου είναι πολύ ικανοποιητική.

Βιβλιογραφία

Black, F. and M.S. Scholes. (1973). The *pricing of options and corporate liabilities*.Journal of Political Economy, 81:637–653.

Buchen, P. (2012). *An Introduction to Exotic Option Pricing*, CRC Press, Taylor & Francis Group, London, United Kingdom.

Buchen, P.W. (2004). The *pricing of dual expiry options.* Quantitative Finance, 4:101–108.

Carr, P., K. Ellis, and V. Gupta. (1998*). Static hedging of exotic options.* Journal of Finance, 53(3):1165–1190.

Drezner, Z. (1978). *Computation of the bivariate normal integral*. Mathematics of Computation, 32(141):277–279.

Etheridge A. (2002). *A course in financial calculus*. Cambridge University Press.

Geske, R. (1979). *The valuation of compound options.* Journal of Financial Economics, 7:63–81.

Glasserman, P. (2004). *Monte Carlo methods in Financial Engineering*. Springer, New York.

Ingersoll, J. (2000). *Digital contracts: simple tools for pricing complex derivatives*. Journal of Business, 73:67–88.

Jarrow, R. (1995). *Over the rainbow: developments in exotic options and complex swaps.* Risk Publications, London, United Kingdom.

Kallianpur, G and Karandikar R. L. (2000) *Introduction to option pricing theory*. Birkhauser.

Lipton, A. (2003). *Exotic options: the cutting-edge collection*. Risk Books, London, United Kingdom.

Longstaff, F. (1990). *Pricing options with extendible maturities: analysis and applications*. Journal of Finance, 45(3):935–957.

Merton, R. (1973) *Theory of rational option pricing.* Bell Journal of Economics and Management Science, 4(1):141–183.

Neftci Salih N. (2000) *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. Academic Press,

Ross (1997). *Simulation* (2nd edition), Academic Press.

Rubinstein, M. and E. Reiner. (1991). *Unscrambling the binary code.* Risk Magazine, 4:75–83.

Rubinstein, M. (1991). *Options for the undecided*. Risk Magazine, 4(4):43.

Thomas, B. (1994). *Something to shout about*. Risk Magazine, 6(5):56–58.

Μπούτσικας, Μ. (2005). Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα, Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πειραιά.

Μπούτσικας Μ. (2005). *Μέθοδοι Προσομοίωσης και Στατιστικές Υπολογιστικές Τεχνικές*. Πανεπιστημιακές σημειώσεις, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.