

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ
ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ



ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΤΗΝ
ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ
ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΧΡΗΣΗ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ ΣΥΝΕΧΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥ
ΓΙΑ ΤΗΝ ΤΙΜΟΛΟΓΗΣΗ ΕΠΙΤΟΚΙΑΚΩΝ
ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Κλεάνθους Αθηνά

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Οκτώβριος 2017

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία μελετά τη χρήση υποδειγμάτων συνεχούς χρόνου για την τιμολόγηση επιτοκιακών παραγώγων. Στο 1^ο Κεφάλαιο αναθεωρούμε τις Συμβάσεις Ανταλλαγής, τις χρήσεις και την αποτίμηση τους, το ρόλο των χρηματοπιστωτικών διαμεσολαβητών και των διαμορφωτών της αγοράς και τη φύση του swap rate. Στο 2^ο Κεφάλαιο αναλύονται οι μη Τυπικές Συμφωνίες Ανταλλαγής, οι μεταβολές στις Συμφωνίες “Vanilla”, τα Συμβόλαια Ανταλλαγής με ενσωματωμένα Συμβόλαια Δικαιώματος Προαίρεσης καθώς και διάφορα άλλα Σύνθετα Συμβόλαια Ανταλλαγής. Τέλος, στο 3^ο Κεφάλαιο αναφέρονται τα τυποποιημένα μοντέλα αγοράς των Επιτοκιακών Παραγώγων. Μεγαλύτερη έμφαση δίνεται στα Ευρωπαϊκά Συμβόλαια Δικαιώματος Προαίρεσης και στην αποτίμησή τους. Περαιτέρω, εξετάζουμε τα Συμβόλαια Δικαιώματος Προαίρεσης Ομολόγων και τα όρια επιτοκίων.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Ανθρωπέλος Μιχαήλ (Επιβλέπων)
- Μαχαιράς Νικόλαος
- Διακογιάννης Γεώργιος

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνώμων του συγγραφέα

UNIVERSITY OF PIRAEUS
DEPARTMENT OF STATISTICS AND
INSURANCE SCIENCE



POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL
SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

PRICING OF INTEREST RATE DERIVATIVES
BASED ON CONTINUOUS-TIME MODELS

Athina Kleanthous

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus

October 2017

Στη γιαγιά μου,

Αθηνά

Περιεχόμενα:

ΕΙΣΑΓΩΓΗ	2
ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ	7
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΣΥΜΦΩΝΙΕΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ (SWAPS)	9
1.1. INTEREST RATE SWAPS.....	9
1.1.1 Χρήση της Σύμβασης Ανταλλαγής (Swap) για την μετατροπή μιας υποχρέωσης (Liability) ..	13
1.1.2 Χρήση της Σύμβασης Ανταλλαγής (Swap) για την μετατροπή μιας απαίτησης (Asset)	14
1.2 Ο ΡΟΛΟΣ ΤΟΥ ΧΡΗΜΑΤΟΠΙΣΤΩΤΙΚΟΥ ΔΙΑΜΕΣΟΛΑΒΗΤΗ	15
1.3 ΔΙΑΜΟΡΦΩΤΕΣ ΤΗΣ ΑΓΟΡΑΣ (MARKET MAKERS)	16
1.4 Η ΦΥΣΗ ΤΟΥ SWAP RATE	17
1.5 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ EURIBOR/SWAP ZERO ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ.....	18
1.6 ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ ΣΥΜΦΩΝΙΩΝ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ.....	19
1.6.1 Αποτίμηση των όρων των ομολογιακών τιμών	19
1.6.2 Αποτίμηση των όρων των Προθεσμιακών Συμβολαίων Επιτοκίου.....	21
1.6.3 Αποτελέσματα Προθεσμιακής Δομής Επιτοκίων (Term Structure).....	22
1.7 ΔΙΑΦΟΡΕΣ ΑΠΟΤΙΜΗΣΗΣ ΤΗΣ ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΗΣ ΣΥΜΦΩΝΙΑΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ	24
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΜΗ ΤΥΠΙΚΕΣ ΣΥΜΦΩΝΙΕΣ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ (SWAPS REVISITED)	28
2.1 ΜΕΤΑΒΟΛΕΣ ΣΤΗ ΣΥΜΦΩΝΙΑ “VANILLA”	28
2.2 ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΣΥΝΘΕΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑΙΑ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ	29
2.2.1 Συμβόλαια Ανταλλαγής Euribor σε καθυστέρηση (Euribor-in-Arrears Swap)	29
2.2.2 Συμβόλαιο Ανταλλαγής Σταθερής Αήξης (Constant Maturity Swap, CMS).....	30
2.2.3 Συμβόλαια Ανταλλαγής Μετοχών (Equity Swaps).....	31
2.3 ΣΥΜΒΟΛΑΙΑ ΑΝΤΑΛΛΑΓΗΣ ΜΕ ΕΝΣΩΜΑΤΩΜΕΝΑ ΣΥΜΒΟΛΑΙΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ (SWAPS WITH EMBEDDED OPTIONS).....	32
2.3.1 Συμβόλαια Ανταλλαγής Δεδουλεμένων Τόκων (Accrual Swaps)	32
2.3.2 Ακυρώσιμο Συμβόλαιο Ανταλλαγής (Cancelable Swap).....	33
2.3.3 Ακυρώσιμα Σύνθετα Συμβόλαια Ανταλλαγής (Cancelable Compounding Swaps)	33
2.3.4 Άλλες Συμβάσεις Ανταλλαγής	35
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3: ΕΠΙΤΟΚΙΑΚΑ ΠΑΡΑΓΩΓΑ (INTEREST RATE DERIVATIVES): ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΜΟΝΤΕΛΑ ΑΓΟΡΑΣ.	36
3.1 ΠΑΡΑΓΩΓΑ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΠΡΟΪΟΝΤΑ (DERIVATIVES).....	36
3.2 ΣΥΜΒΟΛΑΙΑ ΔΙΚΑΙΩΜΑΤΟΣ ΠΡΟΑΙΡΕΣΗΣ ΟΜΟΛΟΓΩΝ (BOND OPTIONS).....	37
3.2.1 Ενσωματωμένα Συμβόλαια Δικαιώματος προαίρεσης Ομολόγων (Embedded Bond Options)	37
3.2.2 Ευρωπαϊκά Συμβόλαια Δικαιώματος Προαίρεσης Ομολόγων (European Bond Options).38	
3.3 ΑΝΩΤΑΤΟ/ ΚΑΤΩΤΑΤΟ ΟΡΙΟ ΕΠΙΤΟΚΙΩΝ (INTEREST RATE CAPS AND FLOOR).....	45
3.3.1 Το ανώτατο όριο ως χαρτοφυλάκιο Επιτοκιακών Συμβολαίων Δικαιώματος Προαίρεσης (The Cap as a Portfolio of Interest Rate Option).....	47
3.3.2 Το ανώτατο όριο ως χαρτοφυλάκιο Συμβολαίων Δικαιώματος Προαίρεσης Ομολογιών (The Cap as a Portfolio of Bond Option).....	48
3.3.3 Floors και Collars	48
3.3.4 Spot Μεταβλητότητες Vs Flat Μεταβλητότητες.....	51
3.3.5 Θεωρητική Αιτιολόγηση του μοντέλου (Black’s Model)	52
3.3.6 Ο αντίκτυπος στις Συμβάσεις Υπολογισμού των Ημερών (Day Count Conventions).....	53

3.4	EUROPEAN SWAP OPTIONS	54
3.4.1	ΑΠΟΤΙΜΗΣΗ ΤΩΝ EUROPEAN SWAPΤIONS	54
3.4.2	<i>Θεωρητική Αιτιολόγηση για το μοντέλο των Swaption</i>	<i>57</i>
3.4.3	<i>Ο αντίκτυπος στις συμβάσεις υπολογισμού των ημερών (Day Count Conventions)</i>	<i>58</i>
	ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ-ΕΠΙΛΟΓΟΣ	59

Ευχαριστίες

Η παρούσα διπλωματική εργασία εκπονήθηκε στα πλαίσια του μεταπτυχιακού προγράμματος σπουδών «Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου» του Πανεπιστημίου Πειραιώς.

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα καθηγητή της εργασίας αυτής κ. Ανθρωπέλο , για τις γνώσεις, τις συμβουλές, την άριστη συνεργασία και τις ώρες που αφιέρωσε για την καθοδήγηση μου. Επιπρόσθετα οφείλω να ευχαριστήσω και όλους τους καθηγητές του Μεταπτυχιακού Προγράμματος για τις πολύτιμες γνώσεις που μου προσέφεραν.

Κεφάλαιο 1: Συμφωνίες Ανταλλαγής (Swaps)

1.1. Interest Rate Swaps

Σε μια Συμφωνία Ανταλλαγής Επιτοκίων (Interest Rate Swaps), ο ένας αντισυμβαλλόμενος συμφωνεί να καταβάλει στον άλλο ταμειακές ροές (cash flows) ίσες με τους τόκους κάτω από ένα προκαθορισμένο επιτόκιο (σε ένα υποθετικό καθαρό κεφάλαιο) για συγκεκριμένη και προκαθορισμένη χρονική περίοδο. Ο αντισυμβαλλόμενος αυτός σε αντάλλαγμα εισπράττει τόκους κάτω από ένα κυμαινόμενο επιτόκιο (πάνω στο ίδιο υποθετικό κεφάλαιο) για την ίδια χρονική περίοδο.

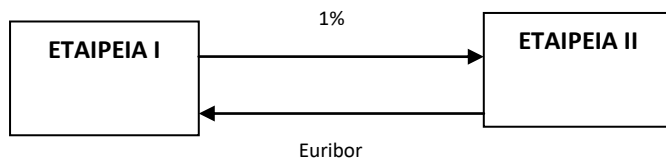
EURIBOR

Όταν η συναλλαγή του interest rate swap γίνεται σε ευρώ, τότε το κυμαινόμενο επιτόκιο που συνήθως χρησιμοποιείται είναι το European Interbank Offered Rate (Euribor) Ευρωπαϊκό Διατραπεζικό Προσφερόμενο Επιτόκιο. Πρόκειται για επιτόκιο αναφοράς (benchmark rate) που προσφέρεται για τις προθεσμιακές καταθέσεις της αγοράς χρήματος (1-2 εβδομάδες, 1,2,3,6,9 και 12 μήνες) σε ευρώ μεταξύ τραπεζών με μεγάλη πιστοληπτική διαβάθμιση. Το Euribor καθορίζεται από τη Ευρωπαϊκή Τραπεζική Ομοσπονδία και εκφράζει το μέσο όρο των επιτοκίων που δανείζουν και δανείζονται τα πιστωτικά ιδρύματα μεταξύ τους στη διατραπεζική αγορά χρήματος.

Ότι ισχύει στα επιτόκια Euribor ισχύει και σε κάθε κυμαινόμενο επιτόκιο.

Παράδειγμα 1.1:

Εξετάζουμε μια υποθετική Συμφωνία Ανταλλαγής Επιτοκίων για 4 έτη που ξεκίνησε στις 2 Ιανουαρίου 2013 μεταξύ της Εταιρείας I και της Εταιρείας II. Υποθέτουμε ότι η Εταιρεία I συμφωνεί να καταβάλει στην Εταιρεία II ένα σταθερό επιτόκιο 1%ετησίωςεπί ενός κεφαλαίου 200 εκατομμυρίων ευρώ και σε αντάλλαγμα η Εταιρεία II συμφωνεί να καταβάλει στη Εταιρεία I το 6μηνο επιτόκιο Euribor (κυμαινόμενο επιτόκιο)επί του ίδιου κεφαλαίου. Οι πληρωμές ανταλλάσσονται κάθε 6 μήνες και το επιτόκιο 1% αναφέρεται σε εξαμηνιαία σύμβαση. Αυτή η ανταλλαγή φαίνεται στο **Σχήμα 1.1**.



Σχήμα 1.1: Συμφωνία Ανταλλαγής Επιτοκίων μεταξύ των Εταιρειών

Η πρώτη ανταλλαγή πληρωμών θα πραγματοποιηθεί την 1 Ιουλίου 2013, 6 μήνες μετά την έναρξη της συμφωνίας. Η Εταιρεία I θα καταβάλει στην Εταιρεία II 1 εκατομμύριο ευρώ. Αυτό είναι το επιτόκιο πάνω στο κεφάλαιο των 200 εκατομμυρίων ευρώ για 6 μήνες στο 1%. Η Εταιρεία II θα καταβάλει τόκο στην Εταιρεία I επί του κεφαλαίου των 200 εκ. ευρώ στο 6μηνο επιτόκιο Euribor, το οποίο κυμαινόταν 6 μήνες πριν την 1 Ιουλίου 2013, δηλαδή στις 2 Ιανουαρίου 2013. Έστω ότι το 6μηνο επιτόκιο Euribor στις 2 Ιανουαρίου 2013 είναι 1,319%. Η Εταιρεία II πληρώνει στην Εταιρεία I :

$$0,5 * (1,319\%) * 200 \text{ εκ.} = \text{€}1.319.000$$

Η δεύτερη ανταλλαγή πληρωμών θα πραγματοποιηθεί στις 2 Ιανουαρίου 2014, ένα χρόνο μετά την έναρξη της συμφωνίας. Η Εταιρεία I θα πληρώσει 1 εκ. ευρώ στην Εταιρεία II. Η Εταιρεία II θα καταβάλει τόκους στην Εταιρεία I με το 6μηνο επιτόκιο Euribor που επικρατούσε την 1 Ιουλίου 2013 (6 μήνες πριν). Έστω ότι το 6μηνο επιτόκιο Euribor ήταν 1,340%. Η Εταιρεία II πληρώνει στην Εταιρεία I :

$$0,5 * (1,340\%) * 200 \text{ εκ.} = \text{€}1.340.000$$

Υπάρχουν συνολικά 8 ανταλλαγές πληρωμών για την συμφωνία. Η Εταιρεία I δίνει σε κάθε ανταλλαγή το σταθερό ποσό των 1 εκ. ευρώ. Η Εταιρεία II καταβάλει στην Εταιρεία I ένα κυμαινόμενο ποσό, που υπολογίζεται χρησιμοποιώντας το 6μηνο επιτόκιο Euribor, 6 μήνες πριν από την ημερομηνία πληρωμής. Μια Συμφωνία Ανταλλαγής Επιτοκίων είναι δομημένη έτσι ώστε η μια πλευρά να μετριάξει τη διαφορά μεταξύ των δύο πληρωμών προς την άλλη πλευρά. Στο παράδειγμά μας, η Εταιρεία II πληρώνει στην Εταιρεία I €319.000 (€1.319.000 - €1.000.000) την 1 Ιουλίου 2013 και €340.000 (€1.340.000 - €1.000.000) στις 2 Ιανουαρίου 2014.

Στον **Πίνακα 1.1** εμφανίζονται όλες οι ανταλλαγές πληρωμών που πραγματοποιήθηκαν στο πλαίσιο της συμφωνίας για ένα συγκεκριμένο σύνολο βμηνων επιτοκίων Euribor. Ο πίνακας δείχνει τις ταμειακές ροές (cash flows) από τη πλευρά της Εταιρείας Ι. Το κεφάλαιο των 200 εκατομμυρίων ευρώ χρησιμοποιείται μόνο για τον υπολογισμό των τόκων. Το καθαρό κεφάλαιο (principal), αυτό κάθε αυτό, δεν ανταλλάσσεται. Γι' αυτό το λόγο ονομάζεται υποθετικό καθαρό κεφάλαιο (notional principal).

Πίνακας 1.1: Ταμειακές ροές στην Εταιρεία Ι σε τετραετή ανταλλαγή επιτοκίων αξίας 200 εκατομμυρίων ευρώ, όταν καταβάλλεται ένα προκαθορισμένο επιτόκιο 1% και εισπράττεται βμηνο επιτόκιο Euribor.

Ημερομηνία	βμηνο επιτόκιο Euribor	Κυμαινόμενες ταμειακές εισροές	Σταθερές ταμειακές εκροές	Καθαρές ταμειακές ροές
2 Ιανουάριου 2013	1,319%			
1 Ιουλίου 2013	1,340%	1.319.000€	-1.000.000 €	319.000€
2 Ιανουαρίου 2014	1,387%	1.340.000€	-1.000.000 €	340.000 €
1 Ιουλίου 2014	1,302%	1.387.000 €	-1.000.000 €	387.000 €
2 Ιανουαρίου 2015	1,169%	1.302.000 €	-1.000.000 €	302.000 €
1 Ιουλίου 2015	1,049%	1.169.000 €	-1.000.000 €	169.000 €
4 Ιανουαρίου 2016	0,749%	1.049.000 €	-1.000.000 €	49000 €
1 Ιουλίου 2016	0,631%	749.000 €	-1.000.000 €	-251000 €
2 Ιανουαρίου 2017		631.000 €	-1.000.000 €	-369000 €

Αν το υποθετικό καθαρό κεφάλαιο ανταλλαχθεί στο τέλος του Swap, η φύση της συμφωνίας δε θα αλλάξει με κανένα τρόπο. Το υποθετικό καθαρό κεφάλαιο είναι ίδιο και για τις κυμαινόμενες και για τις σταθερές πληρωμές. Η ανταλλαγή 200 εκατομμυρίων ευρώ στο τέλος της συμφωνίας μεταξύ των Εταιρειών δεν θα έχει καμία οικονομική αξία. Ο **Πίνακας 1.2** παρουσιάζει τις ταμειακές ροές του **Πίνακα 1.1** με μια τελική ανταλλαγή κεφαλαίου που προστίθενται σε αυτό, παρέχοντας έναν ενδιαφέρον τρόπο προβολής της ανταλλαγής. Οι ταμειακές ροές στην τρίτη στήλη αυτού του πίνακα είναι οι ταμειακές ροές από μία Long-position¹ σε ένα

¹Long-Position: η ανοικτή θέση την οποία έχει πάρει ένας επενδυτής αγοράζοντας ένα νόμισμα, ένα χρεόγραφο, ένα συμβόλαιο ή ένα εμπόρευμα για επένδυση ή για κερδοσκοπία. Ο επενδυτής εκτιμά ότι θα ανέβει η τιμή του στο μέλλον οπότε θα το πωλήσει (close position) και θα καταγράψει πραγματοποιηθέντα κέρδη. Στην περίπτωση της long position, ο επενδυτής με την αγορά του χρηματοπιστωτικού μέσου αποκτά ιδιοκτησιακό δικαίωμα επ' αυτού.

κυμαινόμενου επιτοκίου ομόλογο. Οι ταμειακές ροές στην τέταρτη στήλη του πίνακα είναι οι ταμειακές ροές μιας short-position² σε ένα σταθερού επιτοκίου ομόλογο. Ο **Πίνακας 1.2** δείχνει ότι το Swap μπορεί να θεωρηθεί ως ανταλλαγή ενός ομολόγου με σταθερό επιτόκιο με ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου.

Πίνακας 1. 2: Ταμειακές ροές του Πίνακα 1 όταν υπάρχει οριστική ανταλλαγή καθαρού κεφαλαίου.

Ημερομηνία	6μηνο επιτόκιο Euribor	Κυμαινόμενες ταμειακές εισροές	Σταθερές ταμειακές εκροές	Καθαρές ταμειακές ροές
2 Ιανουάριου 2013	1,319%			
1 Ιουλίου 2013	1,340%	1.319.000€	-1.000.000 €	319.000€
2 Ιανουαρίου 2014	1,387%	1.340.000€	-1.000.000 €	340.000 €
1 Ιουλίου 2014	1,302%	1.387.000 €	-1.000.000 €	387.000 €
2 Ιανουαρίου 2015	1,169%	1.302.000 €	-1.000.000 €	302.000 €
1 Ιουλίου 2015	1,049%	1.169.000 €	-1.000.000 €	169.000 €
4 Ιανουαρίου 2016	0,749%	1.049.000 €	-1.000.000 €	49000 €
1 Ιουλίου 2016	0,631%	749.000 €	-1.000.000 €	-251000 €
2 Ιανουαρίου 2017		200.631.000 €	-201.000.000 €	-369000 €

Ο χαρακτηρισμός των ταμειακών ροών του Swap βοηθά να εξηγήσουμε γιατί το κυμαινόμενο επιτόκιο της ανταλλαγής τίθεται 6 μήνες πριν από την πληρωμή. Γενικά, οι τόκοι σε ένα ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου καθορίζονται στην αρχή της περιόδου και καταβάλλονται στο τέλος. Στον **Πίνακα 1.2** αντανakλάται ο υπολογισμός των πληρωμών κυμαινόμενου επιτοκίου σε ένα “Plain Vanilla³” Interest Rate Swap.

²Short-Position: η ανοικτή θέση την οποία έχει ένας επενδυτής με την πώληση ενός νομίσματος, ενός χρεογράφου, ενός συμβολαίου ή ενός εμπορεύματος επί των οποίων δεν έχει ακόμα ιδιοκτησιακό δικαίωμα.

³Plain Vanilla: ο όρος αναφέρεται σε απλές μορφές παράγωγων προϊόντων με τυποποιημένα χαρακτηριστικά.

1.1.1 Χρήση της Σύμβασης Ανταλλαγής (Swap) για την μετατροπή μιας υποχρέωσης (Liability)

Για την Εταιρεία I, το Swap θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να μετατραπεί ένα δάνειο κυμαινόμενου επιτοκίου σε δάνειο σταθερού επιτοκίου. Έστω ότι η Εταιρεία I συμφώνησε να δανειστεί 200 εκατομμύρια ευρώ σε Euribor + 10bp (basis points = μονάδες βάσης, ένα εκατοστό του 1%, δηλαδή 0,1%). Μετά τη σύναψη της συμφωνίας, η Εταιρεία I έχει τις ακόλουθες ταμειακές ροές:

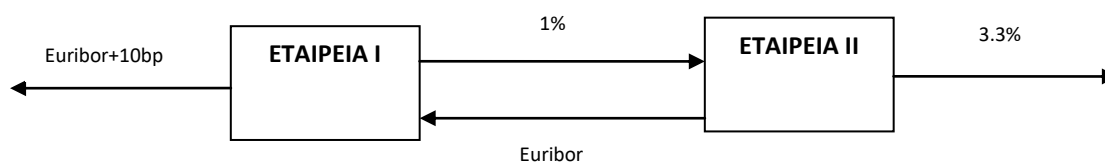
1. Πληρώνει το Euribor+0.1% στους εξωτερικούς δανειστές του.
2. Λαμβάνει το Euribor σύμφωνα με τους όρους της ανταλλαγής.
3. Πληρώνει 1% σύμφωνα με τους όρους της ανταλλαγής.

Το σύνολο των καθαρών ταμειακών ροών έχει ως αποτέλεσμα η Εταιρεία I να πληρώνει επιτόκιο 1,1%. Έτσι για την Εταιρεία I η ανταλλαγή θα μπορούσε να έχει ως αποτέλεσμα το μετασχηματισμό του κυμαινόμενου επιτοκίου Euribor συν 10bp σε δανεισμό με σταθερό επιτόκιο 1,1%.

Για την Εταιρεία II, το Swap θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να μετατραπεί ένα δάνειο σταθερού επιτοκίου σε δάνειο κυμαινόμενου επιτοκίου. Έστω ότι η Εταιρεία II έχει τετραετές δάνειο αξίας 200 εκατομμυρίων ευρώ, για το οποίο πληρώνει 3,3%. Μετά τη σύναψη της συμφωνίας, έχει τις ακόλουθες ταμειακές ροές:

1. Πληρώνει 3,3% στους εξωτερικούς δανειστές.
2. Πληρώνει το Euribor σύμφωνα με τους όρους της ανταλλαγής.
3. Λαμβάνει το 1% σύμφωνα με τους όρους της ανταλλαγής.

Το σύνολο των καθαρών ταμειακών ροών έχει ως αποτέλεσμα η Εταιρεία II να πληρώνει επιτόκιο Euribor+2,3%. Έτσι για την Εταιρεία II το Swap θα μπορούσε να έχει ως αποτέλεσμα το μετασχηματισμό του σταθερού επιτοκίου 3.3% σε δανεισμό με κυμαινόμενο επιτόκιο Euribor+2.3%.



Σχήμα 1. 2: Ενδεχόμενες χρήσεις της Σύμβασης Ανταλλαγής μεταξύ των Εταιρειών.

1.1.2 Χρήση της Σύμβασης Ανταλλαγής (Swar) για την μετατροπή μιας απαίτησης (Asset)

Η Σύμβαση Ανταλλαγής μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετατρέψει τη φύση ενός περιουσιακού στοιχείου. Στη περίπτωση της Εταιρείας I η ανταλλαγή θα μπορούσε να έχει ως αποτέλεσμα τη μετατροπή μιας απαίτησης με σταθερό επιτόκιο σε μια απαίτηση με κυμαινόμενο επιτόκιο. Έστω ότι η Εταιρεία I κατέχει 200 εκατομμύρια ευρώ σε ομόλογα που παρέχουν ετήσιο επιτόκιο 0.9% για τα επόμενα 4 χρόνια. Μετά τη σύναψη της συμφωνίας, η Εταιρεία I έχει τις ακόλουθες ταμειακές ροές:

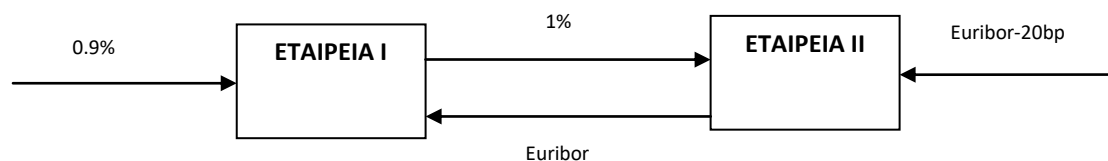
1. Λαμβάνει 0,9% από τα ομόλογα.
2. Λαμβάνει το Euribor σύμφωνα με τους όρους της ανταλλαγής.
3. Πληρώνει 1% σύμφωνα με τους όρους της ανταλλαγής.

Το σύνολο των καθαρών ταμειακών ροών έχει ως αποτέλεσμα η Εταιρεία I να λαμβάνει επιτόκιο Euribor μείων 10bp. Έτσι μια πιθανή χρήση του Swar για την Εταιρεία I είναι να μετατρέψει μια απαίτηση που κερδίζει 0,9% σε μια απαίτηση που κερδίζει Euribor μείων 10 μονάδες βάσης.

Αντίθετα, στη περίπτωση της Εταιρείας II η ανταλλαγή θα μπορούσε να έχει ως αποτέλεσμα τη μετατροπή μιας απαίτησης με κυμαινόμενο επιτόκιο σε μια απαίτηση με σταθερό επιτόκιο. Έστω ότι η Εταιρεία II έχει μια επένδυση ύψους 200 εκατομμυρίων ευρώ που αποφέρει Euribor μείων 20 μονάδες βάσης. Μετά τη σύναψη της συμφωνίας, η Εταιρεία II έχει τις ακόλουθες ταμειακές ροές:

1. Λαμβάνει Euribor μείων 20bp από τα ομόλογα.
2. Πληρώνει το Euribor σύμφωνα με τους όρους της ανταλλαγής.
3. Λαμβάνει το 1% σύμφωνα με τους όρους της ανταλλαγής.

Το σύνολο των καθαρών ταμειακών ροών έχει ως αποτέλεσμα η Εταιρεία II να λαμβάνει επιτόκιο 0,8%. Έτσι μια πιθανή χρήση του Swar για την Εταιρεία II είναι να μετατρέψει μια απαίτηση που κερδίζει Euribor μείων 20 μονάδες βάσης σε μια απαίτηση που κερδίζει επιτόκιο 0,8%.

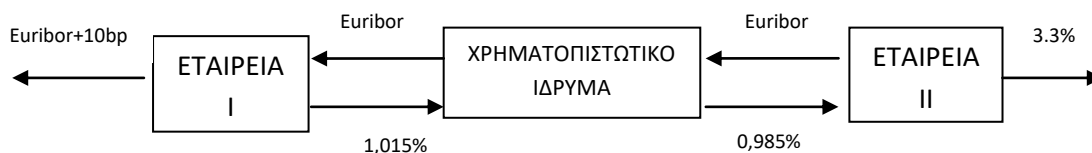


Σχήμα 1.3: Ενδεχόμενες χρήσεις της Σύμβασης Ανταλλαγής μεταξύ των Εταιρειών.

1.2 Ο ρόλος του χρηματοπιστωτικού διαμεσολαβητή

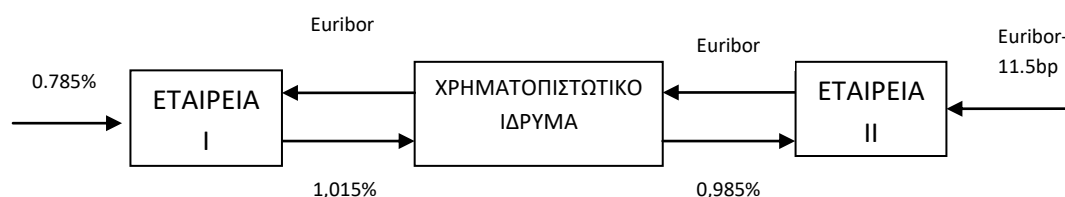
Συνήθως δύο μη χρηματοοικονομικές εταιρείες, όπως οι εταιρείες στο προηγούμενο παράδειγμα, δεν έρχονται σε άμεση επαφή για να κανονίσουν μια ανταλλαγή με τον τρόπο που υποδεικνύεται στα σχήματα 2 και 3 αλλά συμφωνούν κάθε μια με μια τράπεζα ή άλλο χρηματοπιστωτικό ίδρυμα. Οι “plain vanilla” συμφωνίες ανταλλαγής Euribor για τα ευρωπαϊκά επιτόκια είναι συνήθως δομημένες έτσι ώστε το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα να κερδίζει ένα ποσοστό (μονάδες βάσης) που εξαρτάται από την πιστοληπτική διαβάθμιση της εταιρείας που θέλει να δανειστεί.

Το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα εισέρχεται σε δύο πράξεις ανταλλαγής συναλλαγών με της Εταιρείες I και II. Αν υποθέσουμε ότι και οι δύο Εταιρείες τηρούν τις υποχρεώσεις τους, το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα είναι βέβαιο ότι θα αποφέρει κέρδος 0,03% ετησίως πολλαπλασιασμένο με το υποθετικό καθαρό κεφάλαιο των 200 εκατομμυρίων ευρώ. Αυτό ανέρχεται σε 60.000 ευρώ ετησίων για την τετραετή περίοδο. Η Εταιρεία I καταλήγει σε δανεισμό με επιτόκιο 1,115% (αντί 1,1%) και η Εταιρεία II καταλήγει σε δανεισμό Euribor+2,315% (αντί Euribor+2,3%). Το **Σχήμα 1.4** απεικονίζει το ρόλο του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος στην κατάσταση του Σχήματος 2.



Σχήμα 1.4: Σύμβαση Ανταλλαγής Επιτοκίων από το Σχήμα 2 όταν εμπλέκεται και το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα.

Στην περίπτωση που γίνεται χρήση του Swap για την μετατροπή μιας απαίτησης (Asset), η ανταλλαγή είναι η ίδια με την προηγούμενη και το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα είναι βέβαιο ότι θα αποκομίσει κέρδος 0.03% , σε περίπτωση που καμία από τις εταιρείες δεν αθετήσει. Η Εταιρεία I καταλήγει να κερδίζει Euribor μείον 11,5 μονάδες βάσης, ενώ η Εταιρεία II καταλήγει να κερδίζει 0,785%. Το **Σχήμα 1.5** απεικονίζει το ρόλο του χρηματοπιστωτικού ιδρύματος στην κατάσταση του Σχήματος 3.



Σχήμα 1.5: Σύμβαση Ανταλλαγής Επιτοκίων από το Σχήμα 3 όταν εμπλέκεται και το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα.

Σε κάθε περίπτωση το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα έχει συνάψει δύο ξεχωριστές συναλλαγές, μια με την Εταιρεία I και μια με την Εταιρεία II. Στις περισσότερες περιπτώσεις η μια εταιρεία δε γνωρίζει ότι το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα έχει συνάψει συμφωνία με την άλλη εταιρεία. Σε περίπτωση αθέτησης μιας από τις εταιρείες, το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα πρέπει ακόμη να τιμήσει τη συμφωνία του με την άλλη εταιρεία. Το κέρδος που λαμβάνει ο διαμεσολαβητής είναι εν μέρει μια αντιστάθμιση κινδύνου αν μια από της εταιρείες χρεοκοπήσει και δε γίνει η πληρωμή.

1.3 Διαμορφωτές της αγοράς (Market Makers)

Στη πράξη είναι απίθανο οι δύο εταιρείες να έλθουν ταυτόχρονα σε επαφή με ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα και να θέλουν να πάρουν αντίθετες θέσεις ακριβώς στην ίδια συμφωνία ανταλλαγής (ίση διάρκεια, ίση συχνότητα πληρωμών και ίδιο ύψος κεφαλαίου). Για το λόγο αυτό, πολλά μεγάλα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα ενεργούν ως διαμορφωτές της αγοράς για Swap. Αυτό σημαίνει ότι είναι έτοιμοι να πραγματοποιήσουν ένα Swap χωρίς να έχουν την αντίστοιχη αντισταθμιστική συμφωνία ανταλλαγής με έναν άλλο αντισυμβαλλόμενο. Οι διαμορφωτές της αγοράς πρέπει να ποσοτικοποιήσουν και να αντισταθμίσουν τους κινδύνους που αναλαμβάνουν. Τα ομόλογα, τα προθεσμιακά συμβόλαια επιτοκίου (forward rate agreements) και τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης επιτοκίων (interest rate futures) είναι παραδείγματα υποκείμενων μέσων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από τους διαμορφωτές της αγοράς για την αντιστάθμιση των κινδύνων.

Σε μια νέα συμφωνία ανταλλαγής όπου το σταθερό επιτόκιο ισούται με το τρέχον επιτόκιο ανταλλαγής μπορούμε να υποθέσουμε ότι η αξία αυτής της ανταλλαγής είναι μηδέν. Στον Πίνακα 2 είδαμε ότι μια συμφωνία ανταλλαγής μπορεί να χαρακτηριστεί ως η διαφορά μεταξύ μιας ομολογίας σταθερού επιτοκίου και μιας ομολογίας κυμαινόμενου επιτοκίου.

Ορίζουμε:

B_{fix} : Αξία ομολόγου σταθερού επιτοκίου λαμβάνοντας υπόψη τη συμφωνία ανταλλαγής.

B_{fl} : Αξία ομολόγου κυμαινόμενου επιτοκίου λαμβάνοντας υπόψη τη συμφωνία ανταλλαγής.

Δεδομένου ότι η συμφωνία ανταλλαγής είναι μηδενική, τότε:

$$B_{fix} = B_{fl} \quad (1.1)$$

1.4 Η φύση του Swap Rate

Swap rate είναι ο μέσος όρος του καθορισμένου επιτοκίου που ο διαμορφωτής της αγοράς είναι διατεθειμένος να πληρώσει έναντι της λήψης του Euribor (bid rate) και του τελικού επιτοκίου που είναι έτοιμος να λάβει έναντι της πληρωμής του Euribor (offer rate). Γενικά, είναι η διαφορά μεταξύ της τιμής αξίας δύο ημερών και (spot rate) και της προθεσμιακής τιμής (forward rate) εκφραζόμενη σε εκατοστιαία ποσοστά.

Στο σημείο αυτό εξετάζουμε τη φύση του Swap Rate και τη σχέση μεταξύ των αγορών Swap και Euribor. Όπως τα επιτόκια Euribor έτσι και τα επιτόκια swap δεν είναι risk-free (χωρίς κίνδυνο) επιτόκια δανεισμού. Εντούτοις, είναι λογικά, κοντά στις risk-free συνθήκες της αγοράς. Ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα μπορεί να κερδίσει το 5ετές επιτόκιο swap σε ένα συγκεκριμένο καθαρό κεφάλαιο κάνοντας τα εξής:

1. Δίνει το καθαρό κεφάλαιο για τους πρώτους 6 μήνες σε έναν δανειολήπτη AA και στη συνέχεια το επιστρέφει για διαδοχικές περιόδους 6 μηνών σε άλλους δανειολήπτες AA⁴.
2. Κάνει ένα swap για να ανταλλάξει το επιτόκιο Euribor που λαμβάνει για το 5ετές επιτόκιο swap.

Αυτό δείχνει ότι το 5ετές επιτόκιο swap είναι επιτόκιο με πιστωτικό κίνδυνο που αντιστοιχεί στην περίπτωση κατά την οποία πραγματοποιούνται 10 διαδοχικοί

⁴ AA είναι οι ομολογίες αυτές έχουν πολύ χαμηλό βαθμό πιστωτικού κινδύνου και η πιθανότητα μη πληρωμής ή καθυστέρησης πληρωμής είναι ελάχιστη.

δανεισμοί Euribor διάρκειας 6 μηνών σε εταιρείες AA. Ομοίως, το 7ετές επιτόκιο είναι ένα επιτόκιο με πιστωτικό κίνδυνο που αντιστοιχεί στην περίπτωση κατά την οποία πραγματοποιούνται 14 διαδοχικοί δανεισμοί Euribor διάρκειας 6 μηνών σε εταιρείες AA. Τα επιτόκια swap άλλων προθεσμιών μπορούν να ερμηνευθούν ανάλογα.

Σημειώστε ότι τα 5ετή επιτόκια swap είναι χαμηλότερα από τα 5ετή δανειακά επιτόκια AA. Είναι πολύ πιο ελκυστικό να δανείζει χρήματα για διαδοχικές περιόδους 6 μηνών στους δανειολήπτες που είναι πάντα AA στην αρχή των περιόδων από το να δανείζει σε ένα δανειολήπτη για 5 ολόκληρα χρόνια και για το μόνο που είναι σίγουρο είναι ότι η πιστοληπτική του ικανότητα (credit rating) τον πρώτο χρόνο είναι AA.

1.5 Υπολογισμός Euribor/Swap Zero επιτοκίων

Ένα πρόβλημα με τα επιτόκια Euribor είναι ότι οι άμεσες παρατηρήσεις είναι δυνατές μόνο για διάρκεια έως 12 μηνών. Ένας τρόπος για να επεκταθεί η μηδενική καμπύλη (zero curve) άνω των 12 μηνών είναι η χρήση συμβολαίων μελλοντικής εκπλήρωσης ευρωδολαρίων⁵ (Euro dollar futures). Τυπικά, τα Euro dollar futures χρησιμοποιούνται για την παραγωγή μηδενικής καμπύλης Euribor για 2 έτη και κάποιες φορές μέχρι 5 έτη. Οι έμποροι στη συνέχεια χρησιμοποιούν τα επιτόκια Swap για να επεκτείνουν περαιτέρω τη μηδενική καμπύλη Euribor. Η προκύπτουσα μηδενική καμπύλη αναφέρεται μερικές φορές ως η μηδενική καμπύλη Euribor και μερικές φορές ως η μηδενική καμπύλη Swap. Για να αποφύγουμε οποιαδήποτε σύγχυση, θα την αναφέρουμε ως η μηδενική καμπύλη Euribor/Swap. Θα περιγράψουμε τώρα πως χρησιμοποιούνται τα επιτόκια Swap για τον προσδιορισμό της μηδενικής καμπύλης Euribor/Swap.

Αρχικά πρέπει να σημειωθεί ότι η αξία ενός νεοκδοθέντος ομολόγου με κυμαινόμενο επιτόκιο που πληρώνει 6μηνο Euribor είναι πάντα ίσο με την αξία του καθαρού κεφαλαίου (ή την ονομαστική αξία, par value) όταν η μηδενική καμπύλη Euribor/Swap χρησιμοποιείται για εξόφληση. Ο λόγος είναι ότι το ομόλογο παρέχει ένα επιτόκιο Euribor και το Euribor είναι το προεξοφλητικό επιτόκιο. Το επιτόκιο του ομολόγου αντιστοιχεί ακριβώς στο προεξοφλητικό επιτόκιο και ως εκ τούτου η ομολογία είναι αρκετά ακριβές με την ονομαστική αξία.

⁵Euro dollar futures είναι το πιο δημοφιλές τριμηνιαίο συμβόλαιο μελλοντικής εκπλήρωσης επιτοκίων στις Ηνωμένες Πολιτείες που διαπραγματεύεται ο όμιλος CME (Chicago Mercantile Exchange Group). Ένα Eurodollar είναι ένα δολάριο που κατατίθεται σε αμερικανική ή ξένη τράπεζα εκτός Ηνωμένων Πολιτειών.

Στην εξίσωση (1.1), δείξαμε ότι για ένα νεοκδοθέντα Swarόπου το σταθερό επιτόκιο ισούται με το επιτόκιο $B_{\text{fix}} = B_{\text{fl}}$. Μόλις υποστηρίξαμε ότι το B_{fl} ισούται με το υποθετικό καθαρό κεφάλαιο. Τα επιτόκια Swarκαθορίζουν ένα σύνολο της ονομαστικής αξίας των ομολογιακών αποδόσεων.

Παράδειγμα 1.2:

Ας υποθέσουμε ότι τα 6μηνα, 12μηνα και 18μηνα μηδενικά επιτόκια Euribor/Swar έχουν καθοριστεί ως 0,8%, 1% και 1,1% με συνεχή προεξόφληση και ότι το 2ετές επιτόκιο swar (για ανταλλαγή όπου οι πληρωμές γίνονται σε εξαμηνιαία βάση) είναι 1,3%. Αυτό το επιτόκιο swar 1,3% σημαίνει ότι ένα ομολογιακό κεφάλαιο €100 και ένα εξαμηνιαίο κουπόνι 1,3% ετησίως πωλούνται για την πραγματική τους αξία. Επομένως, εάν το R είναι το μηδενικό επιτόκιο 2 ετών, τότε:

$$0,65e^{-0,0008*0,5} + 0,65e^{-0,001*1} + 0,65e^{-0,011*1,5} + 100,65e^{-2R} = 100$$

Με την επίλυση αυτού, έχουμε ότι $R=1,303\%$.

1.6 Αποτίμηση των Συμφωνιών Ανταλλαγής Επιτοκίων

Μια συμφωνία ανταλλαγής επιτοκίων είναι κοντά στο μηδέν όταν αρχίζει να εισάγεται. Μετά την ύπαρξη για κάποιο χρονικό διάστημα, η αξία του μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική. Υπάρχουν δύο προσεγγίσεις αποτίμησης όταν τα επιτόκια Euribor/Swar χρησιμοποιούνται ως προεξοφλητικά επιτόκια. Η πρώτη προσέγγιση αφορά την ανταλλαγή ως τη διαφορά μεταξύ δύο ομολόγων και η δεύτερη προσέγγιση θεωρείται ως χαρτοφυλάκιο των Προθεσμιακών Συμβολαίων Επιτοκίου⁶ (Forward Rate Agreement, FRA).

1.6.1 Αποτίμηση των όρων των ομολογιακών τιμών

Το καθαρό κεφάλαιο που έχει αρχικά δανεισθεί δεν ανταλλάσεται με την συμφωνία ανταλλαγής επιτοκίων. Ωστόσο, όπως φαίνεται στον Πίνακα 2, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το καθαρό κεφάλαιο εισπράττεται και καταβάλλεται στο τέλος της συμφωνίας χωρίς να αλλάζει η αξία του. Με αυτό τον τρόπο, διαπιστώνουμε ότι, από την άποψη του πληρωτή του κυμαινόμενου επιτοκίου, μια ανταλλαγή μπορεί να θεωρηθεί ως μια long position σε ένα ομόλογο σταθερού επιτοκίου και μια short position σε ένα ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου, έτσι ώστε:

⁶Προθεσμιακό Συμβόλαιο Επιτοκίου είναι προθεσμιακή σύμβαση για την κάλυψη του κινδύνου μεταβολής των επιτοκίων.

$$V_{swap} = B_{fix} - B_{fl} \quad (1.2)$$

Όπου ,

V_{swap} : αξία Swap

B_{fl} : αξία ομολόγου κυμαινόμενου επιτοκίου (αντιστοιχεί στις πληρωμές που γίνονται)

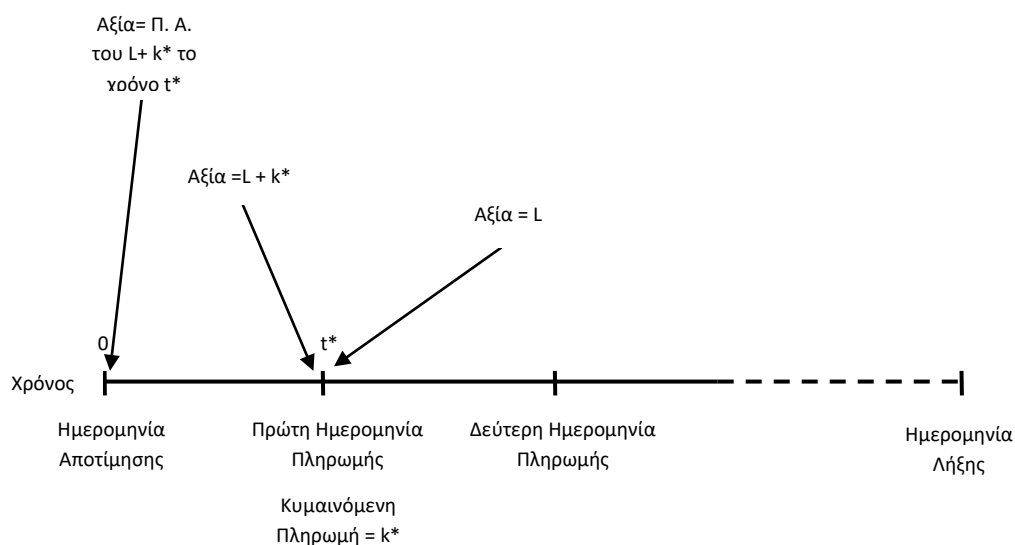
B_{fix} : αξία ομολόγου σταθερού επιτοκίου (αντιστοιχεί στις πληρωμές που εισπράττονται)

Ομοίως, από την άποψη του πληρωτή σταθερού επιτοκίου, μια ανταλλαγή μπορεί να θεωρηθεί ως μια long position σε ένα ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου και μια short position σε ένα ομόλογο σταθερού επιτοκίου, έτσι ώστε:

$$V_{swap} = B_{fl} - B_{fix} \quad (1.3)$$

Η ονομαστική αξία του σταθερού επιτοκίου B_{fix} , καταβάλλεται στο τέλος της ζωής του ομολόγου. Η θεωρητική τιμή (theoretical price) του μπορεί να υπολογιστεί ως η παρούσα αξία όλων των ταμειακών ροών που θα εισπράξει ο ιδιοκτήτης του ομολόγου.

Για να εκτιμήσουμε το ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου B_{fl} , επισημαίνουμε ότι το ομόλογο αξίζει το υποθετικό καθαρό κεφάλαιο αμέσως μετά την πληρωμή. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι αυτή τη στιγμή το ομόλογο είναι μια “καλή συμφωνία” όπου ο οφειλέτης πληρώνει Euribor για κάθε επόμενη περίοδο δεδουλευμένων εσόδων.



Σχήμα 1.6: Αποτίμηση ομολόγου κυμαινόμενου επιτοκίου όταν το κεφάλαιο του ομολόγου είναι L και η επόμενη πληρωμή είναι k^* τη χρονική στιγμή t^* .

Ας υποθέσουμε ότι το πλασματικό κεφάλαιο ορίζεται ως το L , η επόμενη ανταλλαγή πληρωμών γίνεται στο χρόνο t^* και η κυμαινόμενη πληρωμή που θα γίνει τη χρονική στιγμή t^* (η οποία καθορίστηκε την τελευταία ημερομηνία πληρωμής) είναι k^* . Αμέσως μετά την πληρωμή, $B_{fl} = L$, όπως μόλις εξηγήθηκε. Επομένως, αμέσως πριν την πληρωμή $B_{fix} = L + k^*$. Το ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου μπορεί να θεωρηθεί ως μέσο που παρέχει μια μόνο ταμειακή ροή του $L + k^*$ τη χρονική στιγμή t^* . Εκτιμώντας το γεγονός αυτό, η αξία του ομολόγου κυμαινόμενου επιτοκίου σήμερα, είναι $(L + k^*)e^{-r^*t^*}$, όπου r^* είναι το μηδενικό επιτόκιο Euribor/Swap για τη λήξη (maturity) t^* .

1.6.2 Αποτίμηση των όρων των Προθεσμιακών Συμβολαίων Επιτοκίου

Μια Συμφωνία Ανταλλαγής μπορεί να χαρακτηριστεί ως ένα χαρτοφυλάκιο Προθεσμιακών Συμβολαίων Επιτοκίου. Εξετάζουμε την συμφωνία ανταλλαγής μεταξύ της Εταιρείας I και II στο Σχήμα 1. Η συμφωνία είναι τετραετής και συνάφθηκε στις 2 Ιανουαρίου 2013 με εξαμηνιαίες πληρωμές. Η πρώτη πληρωμή γίνεται γνωστή κατά τη στιγμή της διαπραγμάτευσης. Οι υπόλοιπες ανταλλαγές μπορούν να θεωρηθούν ως FRAs. Η ανταλλαγή στις 2 Ιανουαρίου 2014 είναι ένα FRA όπου οι τόκοι στο 1% ανταλλάσσονται με τους τόκους στο 6μηνο Euribor επιτόκιο που παρατηρήθηκε στην αγορά την 1^η Ιουλίου 2013. Η ανταλλαγή στις 2 Ιανουαρίου 2015 είναι ένα FRA όπου οι τόκοι στο 1% ανταλλάσσονται με τους τόκους στο 6μηνο Euribor επιτόκιο που παρατηρήθηκε στην αγορά την 1^η Ιουλίου 2014 και ούτω καθεξής.

Ένα FRA μπορεί να αποτιμηθεί υποθέτοντας ότι τα προθεσμιακά επιτόκια πραγματοποιούνται. Επειδή δεν είναι τίποτα περισσότερο από ένα χαρτοφυλάκιο FRAs, μια “plain vanilla” συμφωνία ανταλλαγής επιτοκίων μπορεί επίσης να αποτιμηθεί κάνοντας την υπόθεση ότι πραγματοποιούνται τα προθεσμιακά επιτόκια. Η διαδικασία έχει ως εξής:

1. Χρησιμοποιούμε της μηδενική καμπύλη Euribor/Swap για τον υπολογισμό των προθεσμιακών επιτοκίων για κάθε επιτόκιο Euribor που θα καθορίσει τις ταμειακές ροές της ανταλλαγής.
2. Υπολογίζουμε τις ταμειακές ροές της ανταλλαγής με την προϋπόθεση ότι τα επιτόκια Euribor θα ισούνται με τα προθεσμιακά επιτόκια.
3. Προεξοφλούμε αυτές τις ταμειακές ροές της ανταλλαγής (χρησιμοποιώντας τη μηδενική καμπύλη Euribor/Swap) για να αποκτήσουμε την αξία της συμφωνίας ανταλλαγής.

1.6.3 Αποτελέσματα Προθεσμιακής Δομής Επιτοκίων (Term Structure)

Μια Συμφωνία Ανταλλαγής αρχίζει κοντά στο μηδέν. Αυτό σημαίνει ότι στην αρχή μιας ανταλλαγής το άθροισμα των αξιών των FRAs στα οποία βασίζεται η ανταλλαγή είναι κοντά στο μηδέν. Αυτό δεν σημαίνει όμως, ότι η αξία του κάθε FRA ξεχωριστά είναι κοντά στο μηδέν. Σε γενικές γραμμές, ορισμένα FRAs θα έχουν θετικές τιμές ενώ αλλά θα έχουν αρνητικές τιμές.

Εξετάζοντας τα FRAs στα οποία βασίζεται η ανταλλαγή μεταξύ των Εταιρειών I και II στο Σχήμα 1, παρατηρούμε ότι:

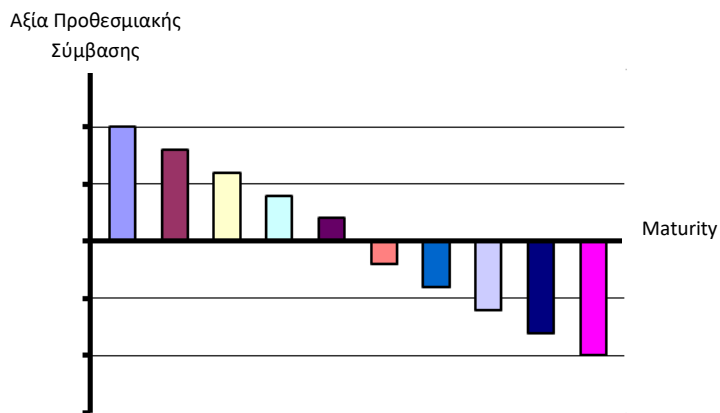
Αξία του FRA της Εταιρείας I > 0 όταν το προθεσμιακό επιτόκιο $> 1\%$

Αξία του FRA της Εταιρείας I $= 0$ όταν το προθεσμιακό επιτόκιο $= 1\%$

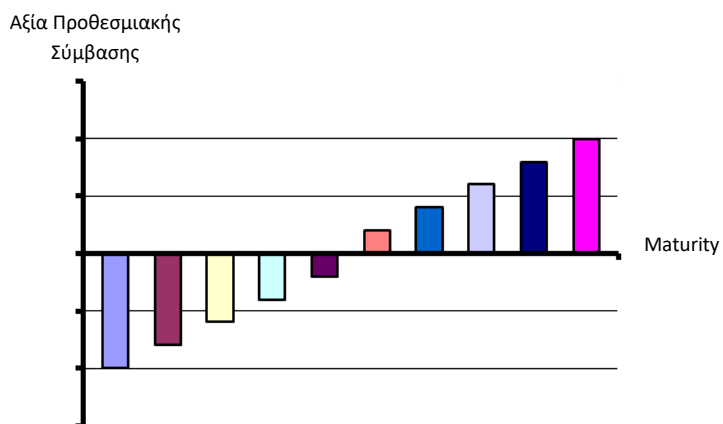
Αξία του FRA της Εταιρείας I < 0 όταν το προθεσμιακό επιτόκιο $< 1\%$

Ας υποθέσουμε ότι η προθεσμιακή δομή των επιτοκίων είναι ανοδική κατά τη χρονική στιγμή της διαπραγμάτευσης. Αυτό σημαίνει ότι τα μελλοντικά επιτόκια αυξάνονται καθώς πλησιάζει η ημερομηνία λήξης (maturity) του FRA. Δεδομένου ότι το άθροισμα των αξιών των FRAs είναι κοντά στο μηδέν, το προθεσμιακό επιτόκιο πρέπει να είναι μικρότερο από 1% για τις επόμενες ημερομηνίες πληρωμής. Επομένως, η αξία του FRA για την Εταιρεία I που αντιστοιχεί στις πρώτες ημερομηνίες πληρωμής είναι αρνητική, ενώ η αξία του FRA που αντιστοιχεί σε μεταγενέστερες ημερομηνίες πληρωμής είναι θετική. Εάν η προθεσμιακή δομή επιτοκίων είναι φθίνουσα κατά τη στιγμή της διαπραγμάτευσης, ισχύει το αντίστροφο.

(α) Η προθεσμιακή δομή των επιτοκίων είναι αύξουσα και λαμβάνομαι σταθερό επιτόκιο ή φθίνουσα και λαμβάνομε κυμαινόμενο επιτόκιο



(β) Η προθεσμιακή δομή των επιτοκίων είναι αύξουσα και λαμβάνομαι κυμαινόμενο επιτόκιο ή φθίνουσα και λαμβάνομε σταθερό επιτόκιο.



Σχήμα 1.7: Αποτίμηση των Συμβολαίων Μελλοντικής Εκπλήρωσης που βασίζονται σε μια Συμφωνία Ανταλλαγής ως συνάρτηση της ημερομηνίας λήξης (maturity).

1.7 Διαφορές Αποτίμησης της Τυποποιημένης Συμφωνίας Ανταλλαγής Επιτοκίων

Σε μια Συμφωνία Ανταλλαγής σταθερού επιτοκίου με κυμαινόμενο, το Euribor είναι από τα πιο κοινά επιτόκια αναφοράς. Στο παράδειγμα του παρόντος κεφαλαίο η συχνότητα πληρωμής του Euribor ήταν 6 μήνες, αλλά το νόημα των ανταλλαγών όπου η διάρκεια του Euribor είναι 1 μήνα, 3 μήνες και 12 μήνες είναι να γίνεται ανταλλαγή σε τακτική βάση. Ο χρόνος ανταλλαγής του κυμαινόμενου επιτοκίου δεν πρέπει να ταιριάζει με το χρόνο ανταλλαγής του σταθερού επιτοκίου.

Το καθαρό κεφάλαιο σε μια συμφωνία ανταλλαγής μπορεί να διαφοροποιηθεί καθ' όλη τη διάρκεια της συμφωνίας για να καλύψει τις ανάγκες του αντισυμβαλλομένου. Σε μια συμφωνία ανταλλαγής που η αποπληρωμή του χρέους γίνεται σε περιοδικές τοκοχρεολυτικές δόσεις σε συγκεκριμένη χρονική περίοδο, το καθαρό κεφάλαιο μειώνεται με προκαθορισμένο τρόπο. (Αυτό μπορεί να σχεδιαστεί για να αντιστοιχεί στο χρονοδιάγραμμα των δόσεων ενός δανείου). Σε μια Step-up Swap⁷, το καθαρό κεφάλαιο αυξάνεται με προκαθορισμένο τρόπο. (Αυτό μπορεί να σχεδιαστεί για να αντιστοιχεί στις αναλήψεις από μια σύμβαση δανείου).

Οι Αναβαλλόμενες Ανταλλαγές⁸ (Deferred Swaps) ή οι Προθεσμιακές Ανταλλαγές⁹ (Forward Swaps), όπου δεν αρχίζουν να ανταλλάσσονται πληρωμές επιτοκίων μέχρι κάποια μελλοντική ημερομηνία, μπορούν να τακτοποιηθούν. Μερικές φορές διαπραγματεύονται συμφωνίες ανταλλαγής όπου το καθαρό κεφάλαιο το οποίο έχει σταθερό επιτόκιο πληρωμών διαφέρει με το καθαρό επιτόκιο με κυμαινόμενο επιτόκιο πληρωμών.

Η *Ανταλλαγή Σταθερής Λήξης* (Constant Maturity Swap, CMS) είναι μια συμφωνία ανταλλαγής ενός επιτοκίου Euribor για ένα επιτόκιο swap. Ένα παράδειγμα θα ήταν μια συμφωνία ανταλλαγής Euribor διάρκειας 6 μηνών που θα εφαρμοζόταν σε έναν συγκεκριμένο καθαρό κεφάλαιο για το δεκαετές επιτόκιο Swap που εφαρμόζεται στο ίδιο καθαρό κεφάλαιο κάθε 6 μήνες για τα επόμενα 5 χρόνια. Μια *Ανταλλαγή Σταθερής Λήξης Θησαυροφυλακίου* (Constant Maturity Treasury Swap, CMTS) είναι

⁷Step-up swap είναι ένα interest rate swap στο οποίο το θεωρητικό ποσό του κεφαλαίου (notional principal) αυξάνεται σύμφωνα με ένα προκαθορισμένο χρονοδιάγραμμα

⁸Deferred swap είναι ένα swap του οποίου μερικές ή όλες οι πληρωμές αναβάλλονται για μια συγκεκριμένη περίοδο συνήθως για φορολογικούς ή λογιστικούς σκοπούς.

⁹Forward swap είναι το swap που δημιουργείται από τη σύνθεση δύο διαφορετικών swaps, τα οποία διαφέρουν στη διάρκεια με στόχο την κάλυψη του ειδικού χρονοδιαγράμματος των αναγκών ενός επενδυτή.

για παρόμοια συμφωνία για ανταλλαγή ενός επιτοκίου Euribor για ένα συγκεκριμένο επιτόκιο Θησαυροφυλακίου (π.χ. 10ετές χρέος δημοσίου).

Σε μια *Σύνθετη Συμφωνία Ανταλλαγής* (Compounding Swap), το επιτόκιο της μιας ή και των δύο πλευρών αυξάνεται προς τα τέλη της διάρκειας της ανταλλαγής σύμφωνα με προκαθορισμένους κανόνες και υπάρχει μόνο μία ημερομηνία πληρωμής στο τέλος της διάρκειας της συμφωνίας. Σε μια *Συμφωνία Ανταλλαγής καθυστερήσεων* Euribor, το επιτόκιο Euribor που παρατηρείται κατά την ημερομηνία πληρωμής χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό της πληρωμής την ημερομηνία αυτή. Σε μια *Δεδουλευμένη Συμφωνία Ανταλλαγής*, το επιτόκιο της μιας πλευράς της ανταλλαγής προκύπτει μόνο όταν το κυμαινόμενο επιτόκιο αναφοράς είναι σε ένα ορισμένο εύρος.

Παραδείγματα:

1. Μια Συμφωνία Ανταλλαγής Επιτοκίων αξίας 100 εκ. Ευρώ έχει υπόλοιπο ζωής 10 μηνών. Σύμφωνα με τους όρους της ανταλλαγής, το Euribor διάρκειας 6 μηνών ανταλλάσσεται για σταθερό επιτόκιο 2% ετησίως (συνυπολογίζεται εξαμηνιαία). Ο μέσος όρος του bid-offer¹⁰ επιτοκίου που ανταλλάσσεται για Euribor διάρκειας 6 μηνών στη Συμφωνία ανταλλαγής όλων των maturities ανέρχεται επί του παρόντος σε 1% ετησίως με συνεχή προεξόφληση. Το 6μηνο επιτόκιο Euribor ήταν 0,8% ετησίως πριν από 2 μήνες.

Ποια είναι η τρέχουσα αξία της ανταλλαγής στη πλευρά με το κυμαινόμενο επιτόκιο και ποια στη πλευρά με το σταθερό επιτόκιο;

Σε 4 μήνες θα λάβει €1,5 εκ. ($=0,5*0,03*100\text{εκ.}$) και θα πληρώσει €600.000 ($=0,5*0,012*100\text{εκ.}$). Σε 10 μήνες θα λάβει 1.5εκ. ευρώ και θα πληρώσει το επιτόκιο Euribor που επικρατούσε τους 4 μήνες.

Η αξία του υποκείμενου ομολόγου σταθερού επιτοκίου είναι:

$$1.5\text{εκ.} * e^{-0,02 * \frac{4}{12}} + 101.5\text{εκ.} * e^{-0,02 * \frac{10}{12}} = €101.312 \text{ εκ.}$$

Η αξία του υποκείμενου ομολόγου κυμαινόμενου επιτοκίου είναι:

$$(100\text{εκ.} + 600000) * e^{-0,02 * \frac{4}{12}} = €99.931\text{εκ.}$$

Η αξία της ανταλλαγής από την πλευρά με το κυμαινόμενο επιτόκιο είναι €1.4εκ. ($= €101.312\text{εκ.} - €99.931\text{εκ.}$), ενώ η αξία της ανταλλαγής από την άλλη πλευρά είναι - €1.4εκ.

¹⁰Bid-offer είναι η τιμή του επιτοκίου τη στιγμή της αγοράς (bid) ή την στιγμή της πώλησης (offer)

Τα αποτελέσματα αυτά θα μπορούσε να προέρχονται από την ανάλυση της συμφωνίας ανταλλαγής σε προθεσμιακή σύμβαση¹¹(Forward Contract). Λαμβάνοντας υπόψη την πλευρά της κυμαινόμενης πληρωμής, η πρώτη προθεσμιακή σύμβαση περιλαμβάνει πληρωμή €600.000 και είσπραξη €1.5εκ. σε 4 μήνες. Έχει αξία $900.000 * e^{-0.02 * \frac{4}{12}} = € 894.019$. Η δεύτερη προθεσμιακή σύμβαση έχει προθεσμιακό επιτόκιο 2% ετησίως με συνεχής προεξόφληση ή 2,01% ετησίως με εξαμηνιαία προεξόφληση. Η αξία της προθεσμιακής σύμβασης είναι:

$$100 * (0,03 * 0,5 - 0,021 * 0,5) * e^{-0,02 * \frac{10}{12}} = € 0,443εκ.$$

Επομένως, η συνολική αξία της προθεσμιακής σύμβασης είναι:
 $€ 0.957εκ. + € 0.443εκ. = € 1.4εκ.$

2. Η μηδενική καμπύλη Euribor είναι επίπεδη στο 3% (συνεχής προεξόφληση) για 1,5 χρόνο. Τα επιτόκια της συμφωνίας ανταλλαγής για 2 και 3 χρόνια με εξαμηνιαίες πληρωμές είναι 3,3% και 3,5% αντίστοιχα. Εκτιμήστε τα μηδενικά επιτόκια Euribor με διάρκεια(maturity) 2, 2,5 και 3 χρόνια. (Υποθέστε ότι τα 2,5 χρόνια είναι ο μέσος όρος των 2 και 3 χρόνων.)

Το 2-ετές επιτόκιο της συμφωνίας είναι 3,3%. Αυτό σημαίνει ότι ένα 2-ετές ομόλογο Euribor που καταβάλλει εξαμηνιαίο κουπόνι (τοκομερίδιο) με επιτόκιο 3,3% ετησίως, πωλείται για την ονομαστική του αξία. Αν R_2 είναι το 2-ετές μηδενικό επιτόκιο Euribor:

$$1,5 * e^{-0,03 * 0,5} + 1,5 * e^{-0,03 * 1} + 1,5 * e^{-0,03 * 1,5} + 101,5e^{-R_2 * 2} = 100$$

Λύνοντας την εξίσωση έχουμε $R_2=0,02977$

Το 2,5-ετές επιτόκιο της συμφωνίας ανταλλαγής θεωρούμε ότι είναι 3,4%. Αυτό σημαίνει ότι ένα 2,5-ετές ομόλογο Euribor που καταβάλλει εξαμηνιαίο κουπόνι (τοκομερίδιο) με επιτόκιο 3,4% ετησίως, πωλείται για την ονομαστική του αξία. Αν $R_{2,5}$ είναι το 2,5-ετές μηδενικό επιτόκιο Euribor:

¹¹Forward contract είναι προθεσμιακή σύμβαση με βάση την οποία ο ένας αντισυμβαλλόμενος πουλάει στον άλλο ένα χρηματοπιστωτικό μέσο, μια μετοχή, ένα νόμισμα ή ένα εμπόρευμα σε μια συγκεκριμένη μελλοντική ημερομηνία και σε μια καθορισμένη τιμή.

$$1,7 * e^{-0,03*0,5} + 1,7 * e^{-0,03*1} + 1,7 * e^{-0,03*1,5} + 1,7 * e^{-0,02977*2} + 101,7 * e^{-R_{2,5}*2,5} = 100$$

Λύνοντας την εξίσωση, έχουμε $R_{2,5}=0,03385$

Το 3-ετές επιτόκιο της συμφωνίας είναι 3,5%.

Αυτό σημαίνει ότι ένα 3-ετές ομόλογο Euribor που καταβάλλει εξαμηνιαίο κουπόνι(τοκομερίδιο) με επιτόκιο 3,5% ετησίως, πωλείται για την ονομαστική του αξία. Αν R_3 είναι το 3-ετές μηδενικό επιτόκιο Euribor:

$$1,75 * e^{-0,03*0,5} + 1,75 * e^{-0,03*1} + 1,75 * e^{-0,03*1,5} + 1,75 * e^{-0,02977*2} + 1,75 * e^{-0,03385*2,5} + 101,75e^{-R_3*3} = 100$$

Λύνοντας την εξίσωση, έχουμε $R_3=0,03485$

Επομένως τα μηδενικά επιτόκια με διάρκεια(maturity) 2, 2,5 και 3 χρόνων είναι , 2,977%, 3,385%, 3,485% αντίστοιχα.

Κεφάλαιο 2: Μη τυποποιημένες Συμφωνίες Ανταλλαγής (Swaps Revisited)

2.1 Μεταβολές στη Συμφωνία “Vanilla”

Πολλές συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων περιλαμβάνουν σχετικά μικρές παραλλαγές της Plain Vanilla δομής, που αναφέρεται στο προηγούμενο κεφάλαιο. Σε μερικές ανταλλαγές το υποθετικό καθαρό κεφάλαιο αλλάζει με το χρόνο με προκαθορισμένο τρόπο. Ανταλλαγές όπου το υποθετικό καθαρό κεφάλαιο είναι μια αύξουσα συνάρτηση του χρόνου είναι γνωστές ως “*step-up swaps*”. Ανταλλαγές όπου το υποθετικό καθαρό κεφάλαιο είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου είναι γνωστές ως “*amortizing swaps*”. Οι Step-up swaps θα μπορούσαν να είναι χρήσιμες για μια κατασκευαστική εταιρεία που σκοπεύει να δανειστεί αυξανόμενα χρηματικά ποσά με κυμαινόμενα επιτόκια για τη χρηματοδότηση ενός συγκεκριμένου έργου και θέλει να ανταλλάξει χρηματοδότηση σταθερού επιτοκίου. Μια amortizing swap θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί από μια εταιρεία που δανείζεται με σταθερό επιτόκιο με συγκεκριμένο χρονοδιάγραμμα προπληρωμής και θέλει να δανείζεται με κυμαινόμενο επιτόκιο.

Το καθαρό κεφάλαιο και η συχνότητα πληρωμής μπορεί να διαφέρουν στις δύο πλευρές μιας ανταλλαγής. Αυτοί οι τύποι παραλλαγών στη βασική δομή plain vanilla δεν επηρεάζουν τη μεθοδολογία αποτίμησης. Η υπόθεση, ότι πραγματοποιούνται τα προθεσμιακά επιτόκια, μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα.

Το κυμαινόμενο επιτόκιο αναφοράς δεν είναι πάντα Euribor. Για παράδειγμα, σε μερικές συμφωνίες ανταλλαγής το κυμαινόμενο επιτόκιο αναφοράς είναι το επιτόκιο εμπορικού χρεογράφου (Commercial Paper, CP) ή σε άλλες περιπτώσεις γίνεται δεικτοποιημένη ανταλλαγή με κυμαινόμενο επιτόκιο μιας ημέρας (Overnight Indexed Swap, OIS). Μια *basis swap* περιλαμβάνει την ανταλλαγή ταμειακών ροών μεταξύ κυμαινόμενων επιτοκίων αναφοράς. Ένα παράδειγμα θα ήταν μια ανταλλαγή όπου το τριμηνιαίο επιτόκιο OIS συν 10 μονάδες βάσης ανταλλάσσεται για το 3μηνο Euribor και οι δύο εφαρμόζονται σε κεφάλαιο ύψους 100 εκατομμυρίων ευρώ. Μια basis swap θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τη διαχείριση κινδύνου από ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα του οποίου τα περιουσιακά στοιχεία και οι υποχρεώσεις εξαρτώνται από διαφορετικά κυμαινόμενα επιτόκια αναφοράς. Οι συμφωνίες ανταλλαγής όπου το κυμαινόμενο επιτόκιο αναφοράς δεν είναι Euribor μπορούν συνήθως να αποτιμηθούν χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι πραγματοποιούνται τα

προθεσμιακά επιτόκια.. Το προθεσμιακό επιτόκιο υπολογίζεται έτσι ώστε οι ανταλλαγές που περιλαμβάνουν το επιτόκιο αναφοράς να έχουν μηδενική αξία. (Αυτό είναι παρόμοιο με τον τρόπο που υπολογίζεται το προθεσμιακό επιτόκιο Euribor όταν χρησιμοποιείται η προεξόφληση του OIS.)

2.2 Περισσότερα Σύνθετα Συμβόλαια Ανταλλαγής

Στην ενότητα αυτή εξετάζουμε μερικά παραδείγματα ανταλλαγών όπου ο απλός κανόνας ότι πραγματοποιούνται τα προθεσμιακά επιτόκια δε λειτουργεί. Σε κάθε περίπτωση, πρέπει να υποτεθεί ότι πραγματοποιείται ένα προσαρμοσμένο προθεσμιακό επιτόκιο αντί για το πραγματικό προθεσμιακό επιτόκιο.

2.2.1 Συμβόλαια Ανταλλαγής Euribor σε καθυστέρηση (Euribor-in-Arrears Swap)

Μια Plain vanilla συμφωνία ανταλλαγής επιτοκίων είναι σχεδιασμένη έτσι ώστε το κυμαινόμενο επιτόκιο που παρατηρείται σε μια ημερομηνία πληρωμής, καταβάλλεται στην επόμενη ημερομηνία πληρωμής. Ένα εναλλακτικό μέσο που μερικές φορές διαπραγματεύεται είναι μια Συμφωνία Ανταλλαγής Euribor σε καθυστέρηση. Στο συμβόλαιο, το κυμαινόμενο επιτόκιο που καταβάλλεται την ημερομηνία πληρωμής ισούται με το επιτόκιο που παρατηρείται την ίδια ημερομηνία πληρωμής.

Υποθέτουμε ότι οι ημερομηνίες επαναφοράς στην ανταλλαγή είναι t_i για $i=0,1,\dots,n$ με $\tau_i = t_{i+1} - t_i$. Ορίζουμε το R_i ως το επιτόκιο Euribor για την περίοδο μεταξύ t_i και t_{i+1} , F_i ως την προθεσμιακή τιμή του R_i και το σ_i τη μεταβλητότητα αυτού του προθεσμιακού επιτοκίου. (Η τιμή του « σ_i » συνήθως υποδηλώνεται από τις τιμές caplet¹²). Σε μια ανταλλαγή Euribor-σε καθυστέρηση, η πληρωμή με το κυμαινόμενο επιτόκιο στο χρόνο t_i βασίζεται στο R_i και όχι στο R_{i-1} . Είναι απαραίτητο να γίνει προσαρμογή στην καμπύλη κυρτότητας που δείχνει το ποσοστό μεταβολής της διάρκειας σε σχέση με την αλλαγή των επιτοκίων (convexity) στο προθεσμιακό επιτόκιο όταν αποτιμάται η πληρωμή. Η αποτίμηση θα πρέπει να βασίζεται στην υπόθεση ότι το κυμαινόμενο επιτόκιο που καταβάλλεται είναι $F_i + \frac{F_i^2 \sigma_i^2 \tau_i t_i}{1+F_i \tau_i}$ και όχι F_i .

¹²Caplets είναι τα call option που βρίσκονται κάτω από το cap (ανώτερο όριο επιτοκίου).

2.2.2 Συμβόλαιο Ανταλλαγής Σταθερής Λήξης (Constant Maturity Swap, CMS)

Το Συμβόλαιο Ανταλλαγής Σταθερής λήξης είναι μια ανταλλαγή επιτοκίων όπου το κυμαινόμενο επιτόκιο ισούται με το επιτόκιο swap για μια συμφωνία με συγκεκριμένη διάρκεια ζωής. Για παράδειγμα, οι κυμαινόμενες πληρωμές σε μια ανταλλαγή CMS μπορούν να γίνονται κάθε 6 μήνες με επιτόκιο ίσο με το 5ετές swap. Συνήθως υπάρχει μια καθυστέρηση έτσι ώστε η πληρωμή σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία πληρωμής να είναι ίση με το επιτόκιο ανταλλαγής που παρατηρήθηκε κατά την προηγούμενη ημερομηνία πληρωμής. Υποθέτουμε ότι τα επιτόκια καθορίζονται τις χρονικές στιγμές t_0, t_1, t_2, \dots , οι πληρωμές γίνονται τις χρονικές στιγμές $t_1, t_2, t_3 \dots$, και το L είναι το υποθετικό καθαρό κεφάλαιο.

Η κυμαινόμενη πληρωμή τη χρονική στιγμή t_{i+1} είναι $t_i L S_i$, όπου $t_i = t_{i+1} - t_i$ και S_i είναι το επιτόκιο swap τη χρονική στιγμή t_i .

Υποθέτουμε ότι y_i είναι η προθεσμιακή τιμή του επιτοκίου swap S_i . Για να υπολογίσουμε την πληρωμή κατά τη χρονική στιγμή t_{i+1} , αποδεικνύεται σωστό να κάνουμε μια προσαρμογή στο προθεσμιακό επιτόκιο swap, έτσι ώστε το πραγματικό επιτόκιο swap να θεωρείται ότι είναι

$$y_i - \frac{1}{2} y_i^2 \sigma_{y,i}^2 \frac{G_i''(y_i)}{G_i'(y_i)} - \frac{y_i \tau_i F_i \rho_i \sigma_{y,i} \sigma_{F,i} t_i}{1 + F_i \tau_i} \quad (2.1)$$

και όχι y_i . Σε αυτή την εξίσωση, $\sigma_{y,i}$ είναι η μεταβλητότητα του προθεσμιακού επιτοκίου swap, F_i είναι το τρέχον προθεσμιακό επιτόκιο μεταξύ των χρονικών στιγμών t_i και t_{i+1} , $\sigma_{F,i}$ είναι η μεταβλητότητα αυτού του προθεσμιακού επιτοκίου και ρ_i είναι ο συσχετισμός μεταξύ του προθεσμιακού επιτοκίου και του προθεσμιακού επιτοκίου swap. $G_i(x)$ είναι η τιμή στο χρόνο t_i μιας ομολογίας ως συνάρτηση της απόδοσης του x . Η ομολογία πληρώνει κουπόνια με επιτόκιο y_i και έχει την ίδια διάρκεια ζωής και την ίδια συχνότητα πληρωμής με την ανταλλαγή από την οποία υπολογίζεται το CMS επιτόκιο. $G_i'(x)$ και $G_i''(x)$ είναι η πρώτη και η δεύτερη μερική παράγωγος του G_i σε σχέση με το x . Οι μεταβλητότητες $\sigma_{y,i}$ μπορούν να υποδηλωθούν από τα swaptions¹³, οι μεταβλητότητες $\sigma_{F,i}$ μπορούν να υποδηλωθούν από τις τιμές caplet και ο συσχετισμός ρ_i μπορεί να εκτιμηθεί από ιστορικά γεγονότα. Η προηγούμενη εξίσωση περιλαμβάνει μια κυρτότητα και μια χρονική προσαρμογή.

Ο όρος $-\frac{1}{2} y_i^2 \sigma_{y,i}^2 t_i \frac{G_i''(y_i)}{G_i'(y_i)}$ βασίζεται στην υπόθεση ότι το επιτόκιο ανταλλαγής S_i οδηγεί σε μια μόνο πληρωμή στο χρόνο t_i και όχι σε μια πρόσοδο πληρωμών.

¹³Swaptions: τα παράγωγα που βασίζονται σε ένα option επί ενός interest rate swap

Ο όρος $-\frac{y_i \tau_i F_i \rho_i \sigma_{y,i} \sigma_{F,i} t_i}{1+F_i \tau_i}$ αποτελεί μια προσαρμογή για το γεγονός ότι η πληρωμή που υπολογίζεται από το S_i γίνεται στο χρόνο t_{i+1} αντί t_i .

Η Συμφωνία Ανταλλαγής Δημοσίου Σταθερής Λήξης (Constant maturity Treasury Swap) λειτουργεί παρόμοια με ένα CMS εκτός από το ότι το κυμαινόμενο επιτόκιο είναι η απόδοση ενός ομολόγου του Δημοσίου με συγκεκριμένη διάρκεια ζωής. Η ανάλυση ενός CMT είναι ουσιαστικά ίδια με εκείνη ενός CMS με S_i που ορίζεται ως η απόδοση par ενός ομολόγου του Δημοσίου με καθορισμένη διάρκεια ζωής.

2.2.3 Συμβόλαια Ανταλλαγής Μετοχών (Equity Swaps)

Σε μια συμφωνία ανταλλαγής μετοχών, ένας αντισυμβαλλόμενος υπόσχεται να πληρώσει την απόδοση ενός δείκτη μετοχών (index equity) πάνω στο υποθετικό καθαρό κεφάλαιο, ενώ ο άλλος αντισυμβαλλόμενος πληρώνει μια σταθερή ή κυμαινόμενη απόδοση πάνω στο υποθετικό κεφάλαιο. Οι συμφωνίες ανταλλαγής μετοχών επιτρέπουν στους διαχειριστές κεφαλαίων να αυξάνουν ή να μειώνουν την έκθεσή τους σε ένα δείκτη χωρίς να αγοράζουν ή να πωλούν μετοχές. Μια equity swap είναι ένας εύκολος τρόπος για το πακετάρισμα μιας σειράς προθεσμιακών συμβολαίων ενός δείκτη, για να ανταποκριθεί στην κάλυψη των αναγκών της αγοράς.

Ένας δείκτης μετοχών είναι συνήθως ένας δείκτης συνολικής απόδοσης όπου τα μερίσματα επανεπενδύονται στα αποθέματα που περιλαμβάνουν το δείκτη.

Σε μια ανταλλαγή κυμαινόμενων μετοχών, η αξία της στην αρχή είναι μηδέν, λαμβάνοντας την προεξόφληση του Euribor. Αυτό συμβαίνει επειδή ένα χρηματοπιστωτικό ίδρυμα μπορεί να αναπαράγει χωρίς κόστος τις ταμειακές ροές, δανείζοντας το καθαρό κεφάλαιο σε κάθε ημερομηνία πληρωμής σε Euribor και επενδύοντας το στο δείκτη μέχρι την επόμενη ημερομηνία πληρωμής, με τυχόν μερίσματα που επανεπενδύονται. Η αξία της ανταλλαγής είναι πάντα μηδέν αμέσως μετά την ημερομηνία πληρωμής.

Μεταξύ των ημερομηνιών πληρωμής, η ταμειακή ροή των μετοχών και η ταμειακή ροή Euribor κατά την επόμενη ημερομηνία πληρωμής πρέπει να αποτιμώνται. Η ταμειακή ροή Euribor καθορίστηκε την τελευταία ημερομηνία επαναφοράς και έτσι μπορεί να αποτιμηθεί εύκολα. Η αξία της ταμειακής ροής των μετοχών είναι LE/E_0 , όπου L είναι το καθαρό κεφάλαιο, E είναι η τρέχον αξία του δείκτη μετοχών και E_0 είναι η αξία του δείκτη την τελευταία ημερομηνία πληρωμής.

2.3 Συμβόλαια Ανταλλαγής με ενσωματωμένα Συμβόλαια Δικαιώματος Προαίρεσης (Swaps with embedded Options¹⁴)

2.3.1 Συμβόλαια Ανταλλαγής Δεδουλευμένων Τόκων (Accrual Swaps)

Τα Συμβόλαια Ανταλλαγής Δεδουλευμένων Τόκων είναι ανταλλαγές όπου το ενδιαφέρον από τη μια πλευρά προκύπτει μόνο όταν το κυμαινόμενο επιτόκιο αναφοράς είναι εντός συγκεκριμένου εύρους. Μερικές φορές το εύρος παραμένει σταθερό καθ' όλη τη διάρκεια της ανταλλαγής, ενώ άλλες φορές επαναφέρεται περιοδικά.

Γενικά, υποθέτουμε ότι το επιτόκιο απόκλισης (cut-off) Euribor είναι R_K και ότι οι πληρωμές ανταλλάσσονται κάθε τ χρόνια. Θεωρούμε, i την ημέρα κατά τη διάρκεια της ανταλλαγής και υποθέτουμε ότι t_i είναι ο χρόνος μέχρι την ημέρα i . Υποθέτουμε ότι το τ -χρόνοεπιτόκιο Euribor την ημέρα i είναι R_i έτσι ώστε να προκύπτουν τόκοι όταν $R_i < R_K$. Ορίζουμε το F_i ως την προθεσμιακή αξία του R_i και το σ_i ως τη μεταβλητότητα του F_i . (Το σ_i εκτιμάται από τα σημεία (spot) caplet της μεταβλητότητας cap). Χρησιμοποιούμε τη συνήθη λογαριθμική παραδοχή, όπου η πιθανότητα ότι το Euribor είναι μεγαλύτερο από το R_K σε ένα κόσμο που είναι ουδέτερο στο κίνδυνο (risk neutrality¹⁵) σε σχέση με ένα μηδενικού τοκομεριδίου ομόλογο που έχει λήξη (maturity) το χρόνο $t_i + \tau$ είναι $N(d_2)$, όπου

$$d_2 = \frac{\ln(F_i/R_K) - \sigma_i^2 t_i / 2}{\sigma_i \sqrt{t_i}} \quad (2.2)$$

Η πληρωμή από το δυαδικό συμβόλαιο προαίρεσης (binary option¹⁶) πραγματοποιείται την ημερομηνία πληρωμής της ανταλλαγής μετά την ημέρα i . Υποθέτουμε ότι αυτό γίνεται τη χρονική στιγμή s_i . Η πιθανότητα ότι το Euribor είναι μεγαλύτερο από το R_K σε ένα κόσμο ουδέτερο στον κίνδυνο σε σχέση με ένα ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου που έχει ημερομηνία λήξης τη χρονική στιγμή s_i , δίνεται από το $N(d_2^*)$, όπου το d_2^* υπολογίζεται χρησιμοποιώντας τον ίδιο τύπο με το d_2 , αλλά με μια μικρή χρονική προσαρμογή του F_i αντανακλώντας τη διαφορά μεταξύ των χρονικών στιγμών $t_i + \tau$ και s_i .

Η αξία του δυαδικού συμβολαίου προαίρεσης που αντιστοιχεί στην ημέρα i είναι:

¹⁴Option είναι συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης. Είναι ένα παράγωγο μέσο (derivative) που συνίσταται στο δικαίωμα - αλλά όχι στην υποχρέωση - του αντισυμβαλλόμενου να αγοράσει (call option) ή να πωλήσει (put option) ένα συγκεκριμένο υποκείμενο μέσο (underlying instrument) σε μια προκαθορισμένη τιμή και σε προσδιορισμένη ημερομηνία στο μέλλον ή πριν από αυτή.

¹⁵Risk neutrality: ουδετερότητα έναντι του κινδύνου. Μία στάση του επενδυτή που δεν επιζητεί ούτε να αποφύγει ούτε να αναλάβει κινδύνους, αλλά αποδέχεται αυτούς σε οποιοδήποτε επίπεδο και αν ανέλθουν.

¹⁶Binary or digital option: Είναι ένα συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης που διακανονίζεται τοις μετρητοίς και έχει μία διακεκομμένη πληρωμή.

$$\frac{Q_L}{n_2} P(0, s_i) N(d_2^*) \quad (2.3)$$

Η συνολική αξία των δυαδικών συμβολαίων προαίρεσης προκύπτει από το άθροισμα αυτής την έκφρασης για κάθε μέρα κατά τη διάρκεια της ανταλλαγής. Η προσαρμογή του χρόνου (που προκαλεί την αντικατάσταση του d_2 από το d_2^*) είναι τόσο μικρή που στην πράξη συχνά αγνοείται.

2.3.2 Ακυρώσιμο Συμβόλαιο Ανταλλαγής (Cancelable Swap)

Ένα ακυρώσιμο συμβόλαιο ανταλλαγής είναι μια plain vanilla ανταλλαγή επιτοκίου, όπου η μια πλευρά έχει την επιλογή να τερματίσει σε μια ή περισσότερες ημερομηνίες πληρωμής. Ο τερματισμός μιας ανταλλαγής ισοδυναμεί με την είσοδο σε μια αντισταθμιστική (offsetting) ανταλλαγή. Εάν υπάρχει μόνο μια ημερομηνία τερματισμού, ένα ακυρώσιμο συμβόλαιο ανταλλαγής είναι ίδιο με μια κανονική ανταλλαγή συν μια θέση σε ένα European swaption. Όταν η ανταλλαγή μπορεί να τερματιστεί σε διαφορετικές ημερομηνίες πληρωμής, ένα ακυρώσιμο συμβόλαιο ανταλλαγής είναι μια κανονική ανταλλαγή συν ένα Bermudan swaption¹⁷.

2.3.3 Ακυρώσιμα Σύνθετα Συμβόλαια Ανταλλαγής (Cancelable Compounding Swaps)

Ορισμένες φορές τα σύνθετα συμβόλαια ανταλλαγής μπορούν να τερματιστούν σε καθορισμένες ημερομηνίες πληρωμής. Κατά τον τερματισμό, ο πληρωτής με το κυμαινόμενο επιτόκιο πληρώνει την σύνθετη αξία των κυμαινόμενων ποσών μέχρι τη στιγμή του τερματισμού και ο πληρωτής του σταθερού επιτοκίου πληρώνει την σύνθετη αξία των σταθερών ποσών μέχρι τη στιγμή του τερματισμού.

Χρησιμοποιούνται διάφορα τεχνάσματα για να εκτιμηθούν τα ακυρώσιμα σύνθετα συμβόλαια ανταλλαγής. Υποθέτουμε αρχικά ότι το κυμαινόμενο επιτόκιο είναι Euribor, συνυπολογίζεται στο Euribor και προεξοφλείτε σε Euribor. Υποθέτουμε ότι το καθαρό κεφάλαιο της ανταλλαγής καταβάλλεται (και από τις δύο πλευρές (σταθερή και κυμαινόμενη) στο τέλος της ζωής του συμβολαίου. Αυτό είναι παρόμοιο με τη μετάβαση από τον Πίνακα 1 στον Πίνακα 2 για μια plain vanilla ανταλλαγή. Η αξία της ανταλλαγής δε μεταβάλλεται και έχει ως αποτέλεσμα να διασφαλίζεται ότι η αξία της κυμαινόμενης πλευράς είναι πάντα ίση με το υποθετικό καθαρό κεφάλαιο σε μια

¹⁷Bermudan swaption: είναι ένα παράγωγο χρηματοοικονομικό μέσο που δίνει στον κάτοχο το δικαίωμα, αλλά όχι την υποχρέωση, να συνάπτει ανταλλαγή επιτοκίου σε οποιαδήποτε από τις προκαθορισμένες ημερομηνίες. Ο κάτοχος μπορεί να ασκήσει το συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης μόνο σε μία από αυτές τις ημερομηνίες.

ημερομηνία πληρωμής. Για να γίνει η ακύρωση, χρειάζεται να δούμε μόνο την σταθερή πλευρά. Κατασκευάζουμε ένα δέντρο επιτοκίων¹⁸ (Interest Rate tree). Επαναφερόμαστε στο δέντρο με το συνήθη τρόπο που εκτιμούμε την σταθερή πλευρά. Σε κάθε περίπτωση που μπορεί να ακυρωθεί η ανταλλαγή, εξετάζουμε αν είναι βέλτιστο να διατηρηθεί ή να ακυρωθεί η συμφωνία. Η ακύρωση της ανταλλαγής θέτει την σταθερή πλευρά ίση με την ονομαστική αξία (par). Εάν καταβάλλουμε σταθερό και λαμβάνουμε κυμαινόμενο επιτόκιο, στόχος μας είναι να ελαχιστοποιήσουμε την αξία της σταθερής πλευράς. Αν καταβάλλουμε κυμαινόμενο και λαμβάνουμε σταθερό, στόχος μας είναι να μεγιστοποιήσουμε την αξία της σταθερής πλευράς.

Όταν η κυμαινόμενη πλευρά είναι Euribor συν ένα spread¹⁹ συνυπολογισμένο σε Euribor, οι ταμειακές ροές που αντιστοιχούν στο spread επιτόκιο μπορεί να αφαιρεθούν από τη σταθερή πλευρά αντί να προστεθούν στην κυμαινόμενη πλευρά. Το συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης μπορεί να αποτιμηθεί όπως στην περίπτωση που δεν υπάρχει spread.

Όταν η σύνθεση είναι Euribor συν ένα spread, μια προσέγγιση είναι η εξής:

1. Υπολογίζουμε τη αξία της κυμαινόμενης πλευράς της ανταλλαγής σε κάθε ημερομηνία ακύρωσης, με την προϋπόθεση ότι θα πραγματοποιηθούν τα προθεσμιακά επιτόκια.
2. Υπολογίζουμε την αξία της κυμαινόμενης πλευράς της ανταλλαγής σε κάθε ημερομηνία ακύρωσης, υποθέτοντας ότι το κυμαινόμενο επιτόκιο είναι Euribor και συνυπολογισμένο σε Euribor.
3. Καθορίζουμε την περίσσεια του βήματος 1 κατά το βήμα 2 ως την «τιμή των spreads» σε μια ημερομηνία ακύρωσης.
4. Χειριζόμαστε το συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης με τον τρόπο που περιγράφεται πιο πάνω. Για να αποφασίσουμε αν θα ακυρώσουμε το συμβόλαιο δικαιώματος προαίρεσης, αφαιρούμε την τιμή των spreads από τις τιμές που υπολογίσαμε για τη σταθερή πλευρά.

¹⁸Ένα δέντρο επιτοκίων είναι μια διακριτή αναπαράσταση της στοχαστικής διαδικασίας για τα βραχυπρόθεσμα επιτόκια με τον ίδιο τρόπο που το δέντρο της τιμής των μετοχών είναι μια διακριτή αναπαράσταση της διαδικασίας ακολουθούμενη από μια μετοχή.

¹⁹Spread είναι το ποσοστό επικαταλλαγής. Είναι η διαφορά της μέγιστης τιμής ζήτησης (bid) και της ελάχιστης τιμής προσφοράς (offer) που ισχύει σε μια δεδομένη στιγμή στις αγορές χρήματος, συναλλάγματος, χρεογράφων και εμπορευμάτων.

2.3.4 Άλλες Συμβάσεις Ανταλλαγής

Στο κεφάλαιο αυτό έχουμε συζητήσει μερικές από τις δομές των συμβάσεων ανταλλαγής στην αγορά. Στην πράξη, το εύρος των διαφορετικών συμβάσεων που εμπορεύονται περιορίζεται από τη φαντασία των χρηματοοικονομικών μηχανικών και την όρεξη των εταιρικών ταμείων για καινοτόμα εργαλεία στη διαχείριση κινδύνων. Μια ανταλλαγή που ήταν πολύ δημοφιλής στις Ηνωμένες Πολιτείες στα μέσα της δεκαετίας του '90 είναι ένας δείκτης απόσβεσης επιτοκίων (amortizing rate swap), που ονομάζεται επίσης τιμαριθμική αναπροσαρμογή κεφαλαίου (index principal swap). Στο δείκτη αυτό, το καθαρό κεφάλαιο μειώνεται κατά μια έννοια εξαρτώμενο από το επίπεδο των επιτοκίων. Όσο χαμηλότερο είναι το επιτόκιο, τόσο μεγαλύτερη είναι η μείωση του κεφαλαίου. Η σταθερή πλευρά μιας αναπροσαρμοσμένης amortizing swap σχεδιάστηκε αρχικά ώστε να αντικατοπτρίζει περίπου την απόδοση που έχει αποκτήσει ένας επενδυτής σε μια εγγύηση που εξασφαλίζεται από ενυπόθηκα στεγαστικά δάνεια, αφού ληφθούν υπόψη τα συμβόλαια δικαιώματος προαίρεσης. Επομένως, η συμφωνία ανταλλάσσει την απόδοση της εγγύησης που εξασφαλίζεται με ενυπόθηκα δάνεια για κυμαινόμενο επιτόκιο.

Συνοψίζοντας, οι Συμφωνίες Ανταλλαγής αποδείχτηκαν πολύ χρήσιμα χρηματοπιστωτικά μέσα. Πολλές συμφωνίες ανταλλαγής μπορούν να αποτιμηθούν (α) υποθέτοντας ότι το Euribor (ή κάποιο άλλο κυμαινόμενο επιτόκιο αναφοράς) θα ισούται με τη μελλοντική τους αξία και (β) προεξοφλώντας τις προκύπτουσες ταμειακές ροές. Περιλαμβάνουν plain vanilla συμβόλαια ανταλλαγής επιτοκίων, συμφωνίες ανταλλαγής όπου το καθαρό κεφάλαιο μεταβάλλεται με προκαθορισμένο τρόπο, ανταλλαγές όπου οι ημερομηνίες πληρωμής διαφέρουν μεταξύ των πλευρών και σύνθετες συμφωνίες ανταλλαγής.

Ορισμένες συμφωνίες ανταλλαγής απαιτούν προσαρμογές (κυρτότητα, χρονική προσαρμογή) των προθεσμιακών επιτοκίων όταν αποτιμώνται. Μεταξύ των ανταλλαγών που απαιτούν προσαρμογές είναι τα Euribor σε καθυστέρηση και τα CMS/CMT.

Τα συμβόλαια ανταλλαγής μετοχών περιλαμβάνουν την απόδοση του δείκτη μετοχών που ανταλλάσσεται με ένα σταθερό ή κυμαινόμενο επιτόκιο. Συνήθως σχεδιάζονται έτσι ώστε να είναι μηδέν αμέσως μετά την ημερομηνία πληρωμής, αλλά μπορεί να έχουν μη μηδενικές τιμές μεταξύ των ημερομηνιών πληρωμής.

Ορισμένες συμφωνίες ανταλλαγής περιλαμβάνουν ενσωματωμένα συμβόλαια προαίρεσης. Μια ανταλλαγή δεδουλευμένων τόκων είναι μια κανονική ανταλλαγή συν ένα μεγάλο χαρτοφυλάκιο δυαδικών συμβολαίων προαίρεσης (ένα για κάθε ημέρα κατά τη διάρκεια της ανταλλαγής). Μια ακυρώσιμη ανταλλαγή είναι μια κανονική ανταλλαγή συν μια ανταλλαγή Bermudan.

Κεφάλαιο 3: Επιτοκιακά Παράγωγα (Interest Rate Derivatives): Τυποποιημένα Μοντέλα Αγοράς.

3.1 Παράγωγα Χρηματοοικονομικά Προϊόντα (Derivatives)

Τα παράγωγα είναι συγκεκριμένοι τύποι μέσων που παράγουν την αξία τους με την πάροδο του χρόνου από την απόδοση ενός υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου (π.χ. μετοχές, ομόλογα, εμπορεύματα).

Ένα παράγωγο διαπραγματεύεται μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, οι οποίοι υπόκεινται σε ένα προκαθορισμένο σύνολο όρων και προϋποθέσεων που καθορίζουν τα δικαιώματα και τις υποχρεώσεις τους.

Τα παράγωγα μπορούν να αποτελέσουν αντικείμενο διαπραγμάτευσης στο χρηματιστήριο ή εκτός αυτού και είναι γνωστά ως:

- Συναλλαγές με διαπραγμάτευση στο χρηματιστήριο (Exchange-Traded Derivatives (ETDs)): Τυποποιημένα συμβόλαια που διαπραγματεύονται σε αναγνωρισμένο χρηματιστήριο, με τους αντισυμβαλλόμενους να είναι ο κάτοχος και η ανταλλαγή. Οι συμβατικοί όροι δεν είναι διαπραγματεύσιμοι και οι τιμές τους είναι διαθέσιμες στο κοινό.
- Εξωχρηματιστηριακά παράγωγα (Over-the-Counter Derivatives (OTCs)): Συμβόλαια που διαπραγματεύονται εκτός χρηματιστηρίου με συγκεκριμένους όρους και προϋποθέσεις που καθορίζουν και συμφωνούνται από τον αγοραστή και τον πωλητή. Ως αποτέλεσμα, τα χρηματιστηριακά παράγωγα είναι πιο ρευστοποιήσιμα.

3.1.1 Επιτοκιακό Παράγωγο (Interest Rate Derivative)

Το επιτοκιακό παράγωγο είναι ένα χρηματοοικονομικό μέσο όπου χρησιμοποιείται όταν η αξία του υποκείμενου χρηματοοικονομικού στοιχείου επηρεάζεται από μεταβολές στα επιτόκια.

Μια πρόκληση για τους εμπόρους παραγώγων είναι η ύπαρξη καλών και ισχυρών διαδικασιών τιμολόγησης και αντιστάθμισης των προϊόντων αυτών. Τα παράγωγα των επιτοκίων είναι πιο δύσκολο να εκτιμηθούν από τις μετοχές και τα παράγωγα συναλλάγματος για τους ακόλουθους λόγους:

1. Η συμπεριφορά ενός μεμονωμένου επιτοκίου είναι πιο περίπλοκη από εκείνη μιας τιμής μετοχής ή μιας συναλλαγματικής ισοτιμίας.

2. Για την αποτίμηση πολλών προϊόντων είναι απαραίτητο να αναπτυχθεί ένα μοντέλο που να περιγράφει τη συμπεριφορά ολόκληρης της καμπύλης απόδοσης μηδενικού κουπονιού.
3. Οι διακυμάνσεις των διαφορών σημείων στην καμπύλη αποδόσεων είναι διαφορετικές.
4. Τα επιτόκια χρησιμοποιούνται για την προεξόφληση των παραγώγων καθώς και για την εξόφληση τους.

3.2 Συμβόλαια Δικαιώματος Προαίρεσης Ομολόγων (Bond Options)

Ένα συμβόλαιο Δικαιώματος Προαίρεσης Ομολόγων είναι ένα option αγοράς ή πώλησης συγκεκριμένου ομολόγου σε συγκεκριμένη ημερομηνία και τιμή. Εκτός από τη διαπραγμάτευση στην εξωχρηματιστηριακή αγορά, τα Bond Options συχνά ενσωματώνονται σε ομόλογα όταν εκδίδονται προκειμένου να γίνουν πιο ελκυστικά για τον εκδότη ή τους δυνητικούς αγοραστές.

3.2.1 Ενσωματωμένα Συμβόλαια Δικαιώματος προαίρεσης Ομολόγων (Embedded Bond Options)

Οι πιο συνήθεις μορφές ενός ενσωματωμένου συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης ομολόγων είναι τα *Ανακλητά Ομόλογα* (Callable Bond) καθώς και τα *Ευέλικτα Ομόλογα* (Puttable Bond).

Ένα *Callable Bond* περιέχει διατάξεις που επιτρέπουν στον εκδότη να επαναγοράσει το ομόλογο σε μια προκαθορισμένη τιμή και σε ορισμένα χρονικά διαστήματα στο μέλλον. Ο κάτοχος τέτοιου ομολόγου πώλησε ένα call option²⁰ στον εκδότη. Η τιμή άσκησης (strike price) ή η τιμή εξαγοράς (call price) του option είναι η προκαθορισμένη τιμή που πρέπει να καταβληθεί από τον εκδότη στον κάτοχο. Το ανακλητό ομόλογο δε μπορεί να κληθεί τα πρώτα χρόνια της ζωής του (περίοδος κλειδώματος). Μετά από αυτό η τιμή εξαγοράς είναι μια φθίνουσα συνάρτηση του χρόνου. Η αξία του call option αντικατοπτρίζεται στις εισηγμένες αποδόσεις των ομολόγων. Ομόλογα με δυνατότητες εξαγοράς προσφέρουν γενικά υψηλότερες αποδόσεις από τα ομόλογα χωρίς δυνατότητες εξαγοράς.

²⁰ Call option είναι η αγορά ενός υποκείμενου μέσου στο μέλλον

Ένα *Puttable Bond* περιέχει διατάξεις που επιτρέπουν στον κάτοχο να απαιτήσει πρόωρη αποπληρωμή σε μια προκαθορισμένη τιμή και σε ορισμένα χρονικά διαστήματα στο μέλλον. Ο κάτοχος ενός τέτοιου ομολόγου έχει αγοράσει ένα put option για το ομόλογο καθώς και το ίδιο το ομόλογο. Το put option αυξάνει την αξία του ομολόγου προς τον κάτοχο έτσι ομόλογα με δυνατότητα πώλησης παρέχουν χαμηλότερες αποδόσεις από τα ομόλογα χωρίς τη δυνατότητα αυτή.

Άλλες μορφές ενός ενσωματωμένου συμβολαίου δικαιώματος προαίρεσης μπορούν να περιέχονται σε μέσα χορηγήσεων και καταθέσεων. Τα προνόμια προπληρωμής για δάνεια ή υποθήκες είναι ίδια με ένα call option ομολόγων. Τέλος, ένα δεσμευμένο δάνειο από μια τράπεζα ή άλλο χρηματοπιστωτικό ίδρυμα είναι ένα put option ομολόγου.

3.2.2 Ευρωπαϊκά Συμβόλαια Δικαιώματος Προαίρεσης Ομολόγων (European Bond Options)

Κάποια εξωχρηματιστηριακά και ενσωματωμένα συμβόλαια δικαιώματος προαίρεσης ομολόγων είναι Ευρωπαϊκά. Η υπόθεση που έγινε στο τυποποιημένο μοντέλο αγοράς για την αποτίμηση ενός European Bond Option είναι ότι η προθεσμιακή τιμή των ομολόγων έχει μια σταθερή μεταβλητότητα σ_B . Αυτό επιτρέπει στο Black's Model να μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

Black's Model

Το μοντέλο του Black είναι ένα δημοφιλές εργαλείο για την τιμολόγηση των European Options όσον αφορά τη προθεσμιακή ή τη μελλοντική τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου όταν τα επιτόκια είναι σταθερά.

Το μοντέλο του Black μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την τιμολόγηση των European Options όσον αφορά την προθεσμιακή τιμή του υποκείμενου περιουσιακού στοιχείου όταν τα επιτόκια είναι στοχαστικά.

Εξετάζουμε ένα Ευρωπαϊκό call option για ένα περιουσιακό στοιχείο με τιμή άσκησης K που διαρκεί μέχρι την ώρα T .

Από την εξίσωση $f_0 = P(O, T)E_T(f_T)$ η τιμή του option δίνεται από

$$c = P(O, T)E_T[\max(S_T - K, 0)] \quad (3.1)$$

Όπου,

S_T : η αξία του περιουσιακού στοιχείου τη χρονική στιγμή T

E_T : οι προσδοκίες σε ένα κόσμο ουδέτερο στον κίνδυνο σε σχέση με το $P(t,T)$.

Ορίζουμε F_0 και F_T την προθεσμιακή τιμή του περιουσιακού στοιχείου τη χρονική στιγμή 0 και T . Αφού $S_T = F_T$ έτσι

$$c = P(0, T) E_T[\max(S_T - K), 0] \quad (3.2)$$

Υποθέτουμε ότι F_T είναι λογαριθμοκανονική με τυπική απόκλιση $\ln(F_T)$ η οποία ισούται με $\sigma_F \sqrt{T}$.

Αυτό συνεπάγεται αφού η προθεσμιακή τιμή ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία με μεταβλητότητα σ_F .

Η εξίσωση $\frac{\Delta S}{S} \sim \Phi(\mu \Delta t, \sigma^2 \Delta t)$ δείχνει ότι

$$E_T[\max(F_T - k, 0)] = E_T(F_T)N(d_1) - KN(d_2)$$

Όπου,

$$d_1 = \frac{\ln \left[\frac{E_T(F_T)}{K} \right] + \sigma_F^2 T / 2}{\sigma_F \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln \left[\frac{E_T(F_T)}{K} \right] - \sigma_F^2 T / 2}{\sigma_F \sqrt{T}}$$

Ομοίως,

$$p = P(0, T)[KN(-d_2) - F_0 N(-d_1)]$$

Όπου,

p : η τιμή ενός European put option ενός περιουσιακού στοιχείου με τιμή άσκησης K και λήξη τη χρονική στιγμή T .

Το Black's model ισχύει τόσο για επενδυτικά όσο και καταναλωτικά περιουσιακά στοιχεία. Ισχύει όταν τα επιτόκια είναι στοχαστικά υπό την προϋπόθεση ότι το F_0 είναι η προθεσμιακή τιμή άσκησης. Η μεταβλητή σ_F μπορεί να ερμηνευτεί ως η μεταβλητότητα της προθεσμιακής τιμής του περιουσιακού στοιχείου.

Στις εξισώσεις (3.1) και (3.2), το σ_f ορίζεται ίσο με το σ_B και F_0 είναι ίσο με την προθεσμιακή τιμή του ομολόγου F_B , έτσι ώστε

$$c = P(0, T)[F_B N(d_1) - KN(d_2)]$$

$$p = P(0, T)[KN(-d_2) - F_B N(-d_1)]$$

Όπου,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_B}{K}\right) + \sigma_B^2 T/2}{\sigma_B \sqrt{T}}$$

Και

$$d_2 = d_1 - \sigma_B \sqrt{T}$$

K: τιμή άσκησης του bond option (σε μετρητά)

T: η χρονική στιγμή της λήξης (maturity)

P (0, T): είναι ο συντελεστής της (risk-free) έκπτωσης για τη λήξη τη χρονική στιγμή T.

Η προθεσμιακή τιμή του ομολόγου F_B μπορεί να υπολογιστεί από τον τύπο:

$$F_B = \frac{B_0 - I}{P(0, T)} \quad (3.3)$$

Όπου,

B_0 : η τιμή του ομολόγου τη χρονική στιγμή 0

I : η παρούσα αξία των ομολόγων που θα πρέπει να καταβληθεί κατά τη διάρκεια ζωής του option.

Στον τύπο αυτό, όσο η τιμή spot του ομολόγου όσο και η προθεσμιακή τιμή του ομολόγου είναι τιμές της μετρητής (cash price) και όχι εισηγμένες τιμές (quoted price).

Η τιμή άσκησης K στις εξισώσεις (3.1) και (3.2) δείχνει τη τιμή άσκησης της μετρητής. Κατά την επιλογή της σωστής τιμής του K , οι ακριβείς όροι του option είναι σημαντικοί. Αν η τιμή άσκησης του K ορίζεται ως το χρηματικό ποσό, το οποίο ανταλλάσσεται για το ομόλογο κατά την άσκηση του δικαιώματος, το K πρέπει να οριστεί ίσο με την τιμή άσκησης. Εάν η τιμή άσκησης του ομολόγου είναι η εισηγμένη τιμή του ομολόγου που ισχύει κατά την άσκηση του δικαιώματος, το K ορίζεται ίσο με τη τιμή άσκησης συν τους δεδουλευμένους τόκους κατά την ημερομηνία λήξης του option. Οι έμποροι αναφέρονται στην εισηγμένη τιμή του ομολόγου ως την καθαρή τιμή (clean price) και την τιμή της μετρητής ως τη λερωμένη τιμή (dirty price).

Παράδειγμα 3.1

Εξετάζουμε μια δεκαπενταετή European call option για ένα ομόλογο 9,75ετών με ονομαστική αξία €2.000. Ας υποθέσουμε ότι η τρέχουσα τιμή της μετρητής του ομολόγου είναι €1.920, η τιμή άσκησης είναι €2,000, το 10μηνο χωρίς κίνδυνο επιτόκιο είναι 12% ετησίως και η μεταβλητότητα της προθεσμιακής τιμής του ομολόγου για μια σύμβαση που λήγει σε 10μήνες είναι 10% ετησίως. Το ομόλογο καταβάλλει τοκομερίδιο 12% ετησίως (με πληρωμές που γίνονται σε εξαμηνιαία βάση). Οι πληρωμές τοκομεριδίων ύψους €120 αναμένονται σε 3 και 9 μήνες. Υποθέτουμε ότι τα χωρίς κίνδυνο επιτόκια για 3 και 9 μήνες είναι 10% και 10,5% ετησίως αντίστοιχα. Επομένως, η παρούσα αξία των πληρωμών των τοκομεριδίων είναι:

$$120e^{-0.25 \times 0.1} + 120e^{-0.75 \times 0.15} = \text{€}224.27$$

Η προθεσμιακή τιμή του ομολόγου δίνεται από την εξίσωση (3.3):

$$F_B = (1920 - 224.27)e^{0.12 \times 0.8333} = \text{€}1874.06$$

α) Αν η τιμή άσκησης είναι της μετρητής που θα πληρωθεί για το ομόλογο κατά την άσκηση, οι παράμετροι για την εξίσωση (3.1) είναι:

$$F_B = 1874,06$$

$$K = 2.000,$$

$$P(0, T) = e^{-0,12x\left(\frac{10}{12}\right)} = 0,9048 ,$$

$$\sigma_B = 0,1 \text{ και } T = 10/12$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{1874,06}{2000}\right) + (0,1)^2 0,8333/2}{0,1\sqrt{0,8333}} = -0,6668$$

$$d_2 = -0,6668 - 0,1x\sqrt{0,8333} = -0,758$$

$$c = 0,9048 x [1874,06 x N(-0,6668) - 2.000xN(-0,758)] = 19,01$$

Η τιμή του call option είναι €19,01

Υπολογισμοί:

$$N(-0,6668) = N(-0,66) - 0,68[N(-0,66) - N(-0,67)] = 0,2546 - 0,68(0,2546 - 0,2514) = 0,2524$$

$$N(-0,7580) = N(-0,75) - 0,8[N(-0,75) - N(-0,76)] = 0,2266 - 0,2119(0,2266 - 0,2236) = 0,2260$$

β) Αν η τιμή άσκησης είναι η εισηγμένη τιμή που θα καταβληθεί για το ομόλογο κατά την άσκηση, οι δεδουλευμένοι τόκοι ενός μηνός πρέπει να προστεθούν στο K επειδή η λήξη του δικαιώματος είναι 1 μήνα μετά την ημερομηνία του τοκομεριδίου, Αυτό παράγει μια τιμή για το K

$$2.000 + 20 x 0,8333 = 2016,67$$

Οι παράμετροι για την εξίσωση (3,1) είναι:

$$F_B = 1.874,06,$$

$$K = 2.199,99,$$

$$P(0, T) = e^{-0,12x\left(\frac{10}{12}\right)} = 0,9048 ,$$

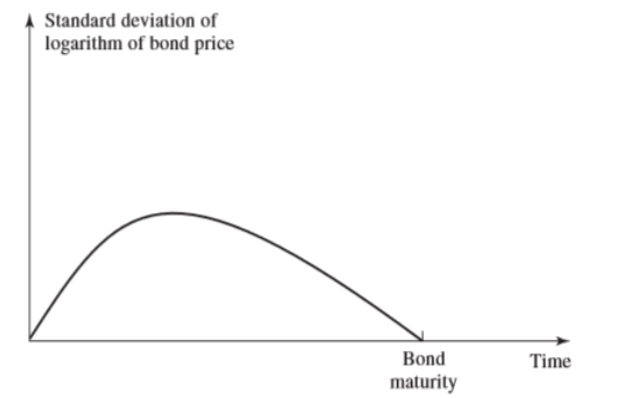
$$\sigma_B = 0,1 \text{ και } T = 10/12$$

$$d_1 = -0,6668$$

$$d_2 = -0,758$$

$$c = 0,9048x[1874,06x0,2524 - 2016,67x0,2260] = 15,60$$

Άρα η τιμή του option είναι €15,60

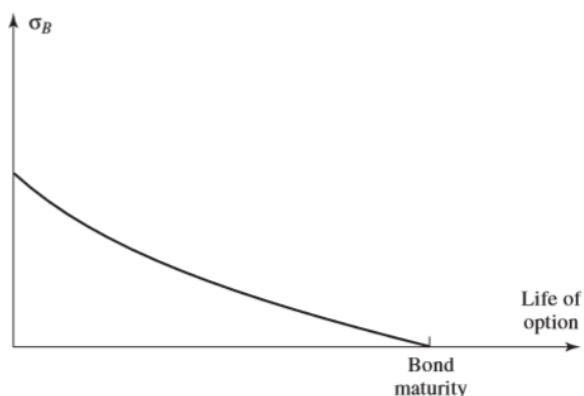


Σχήμα 3.1: Τυπική απόκλιση του λογάριθμου της τιμής των ομολόγων σε μελλοντικούς χρόνους ομολογία

Το Σχήμα 3.1 δείχνει πως η τυπική απόκλιση του λογάριθμου της τιμής του ομολόγου αλλάζει καθώς προχωράμε. Η τυπική απόκλιση είναι σήμερα μηδενική γιατί δεν υπάρχει αβεβαιότητα σχετικά με την τιμή του ομολόγου σήμερα. Επίσης, είναι μηδέν στη λήξη του ομολόγου, διότι γνωρίζουμε ότι η τιμή του ομολόγου θα ισούται με την ονομαστική του αξία κατά τη λήξη. Μεταξύ του σήμερα και της λήξης του ομολόγου, η τυπική απόκλιση αρχικά αυξάνεται και στη συνέχεια μειώνεται,

Η μεταβλητότητα σ_B που θα πρέπει να χρησιμοποιείται όταν αποτιμάται ένα European option για το ομόλογο είναι

$$\frac{\text{Τυπική απόκλιση του λογάριθμου της τιμής του ομολόγου κατά τη λήξη του option}}{\sqrt{\text{Χρονική στιγμή της λήξης του option}}}$$



Σχήμα 3.2: Διακύμανση της μεταβλητότητας των προθεσμιακών τιμών των ομολόγων σ_B με διάρκεια ζωής του option όταν διατηρείται σταθερή η ομολογία.

Στη περίπτωση που για ένα συγκεκριμένο υποκείμενο ομόλογο, αυξάνεται η διάρκεια ζωής του δικαιώματος προαίρεσης, το Σχήμα 3.2 δείχνει ένα τυπικό μοτίβο της μεταβλητότητας σ_B ως συνάρτηση της διάρκειας ζωής του option, με τη μεταβλητότητα σ_B να μειώνεται καθώς η διάρκεια ζωής του option αυξάνεται.

Οι μεταβλητότητες που συχνά διαπραγματεύονται τα bond option είναι οι μεταβλητότητες της απόδοσης και όχι των τιμών.

Η έννοια της διάρκειας ²¹ (duration) χρησιμοποιείται από την αγορά για να μετατραπεί η χρηματιστηριακή μεταβλητότητα αποδόσεων (quoted yield volatility) σε μεταβλητότητα τιμών. Υποθέτουμε ότι D είναι η τροποποιημένη διάρκεια του υποκείμενου ομολόγου στη λήξη του option. Η σχέση μεταξύ της διαφοράς ΔF_B της προθεσμιακή τιμή του ομολόγου F_B και της διαφοράς Δy_s της προθεσμιακής απόδοσης y_s είναι :

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -D \Delta y_F$$

ή

$$\frac{\Delta F_B}{F_B} \approx -D y_F \frac{\Delta y_F}{y_F}$$

Η μεταβλητότητα είναι ένα μέτρο της τυπικής απόκλισης των ποσοστιαίων μεταβολών στη τιμή μιας μεταβλητής. Επομένως η εξίσωση αυτή υποδηλώνει ότι η μεταβλητότητα της τιμής των προθεσμιακών ομολόγων σ_B που χρησιμοποιείται στο Black's model μπορεί να σχετίζεται κατά προσέγγιση με τη μεταβλητότητα της απόδοσης του προθεσμιακού ομολόγου σ_y με την εξίσωση:

²¹ Duration: Διάρκεια, είναι ο σταθμισμένος μέσος όρος του αριθμού των ετών μέχρι την έλευση των χρηματορροών ενός χρηματοπιστωτικού μέσου.

$$\sigma_B = Dy_0\sigma_y \quad (3.4)$$

Όπου,

y_0 : είναι η αρχική τιμή του y_F

σ_B : είναι η μεταβλητότητα της τιμής του προθεσμιακού ομολόγου

σ_y : είναι η μεταβλητότητα της απόδοσης του προθεσμιακού ομολόγου

Όταν η μεταβλητότητα της απόδοσης αναφέρεται σ' ένα option Ευρωπαϊκού ομολόγου, η τεκμαρτή παραδοχή είναι συνήθως ότι θα μετατραπεί σε μια μεταβλητότητα τιμών χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.4) και ότι αυτή η μεταβλητότητα θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια με την εξίσωση (3.1) ή (3.2) για να ληφθεί η τιμή του option. Υποθέτουμε ότι το υποκείμενο ομόλογο ενός call option έχει τροποποιημένη μέση σταθμική²² διάρκεια (modified duration) 4 ετών στη λήξη του δικαιώματος προαίρεσης, η προθεσμιακή απόδοση είναι 7% και η μεταβλητότητα των προθεσμιακών αποδόσεων από έναν μεσίτη είναι 20%. Αυτό σημαίνει ότι η τιμή της αγοράς του option που έχει στο χρηματιστηριακό μεσίτη είναι η τιμή που δίνεται από την εξίσωση (3.1) όταν η μεταβλητή της μεταβλητότητας σ_B είναι

$$4 \times 0,07 \times 0,20 = 0,056 \text{ ή } 5,6\% \text{ το χρόνο,}$$

Το Σχήμα 3.1 δείχνει ότι οι μεταβλητές των προθεσμιακών ομολόγων εξαρτώνται από το θεωρητικό option. Οι προθεσμιακές αποδόσεις των μεταβλητών είναι πιο σταθερές γι' αυτό και οι έμποροι τις προτιμούν.

3.3 Ανώτατο/ κατώτατο όριο επιτοκίων (Interest Rate Caps and Floor)

Cap είναι το ανώτερο όριο επιτοκίου. Μία σύμβαση κυμαινόμενου επιτοκίου όπου σε περιοδικές ημερομηνίες πληρωμών ο υπόχρεος πληρώνει τη διαφορά μεταξύ του επιτοκίου της αγοράς και ενός ειδικού ανωτάτου ορίου επιτοκίου και μόνο στην περίπτωση που η διαφορά αυτή είναι θετική. Άλλως, είναι το ανώτατο επιτόκιο που μπορεί να πληρωθεί σε ένα ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου (FRN, Floating Rate Note) ή το ανώτατο επιτόκιο στο οποίο μπορεί να φθάσει ένα ενυπόθηκο ομόλογο με αναπροσαρμοζόμενο επιτόκιο (ARM, Adjustable Rate Mortgage) σε μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο,

²² Modified duration : τροποποιημένη μέση σταθμική διάρκεια. Είναι μια πιο απλοποιημένη μέθοδος η οποία μετρά την ποσοστιαία - και όχι την απόλυτη - μεταβολή της τιμής σε μια συνήθως μικρή (π.χ 1%) μεταβολή της απόδοσης στη λήξη, ή άλλως την αλλαγή της τιμής ενός ομολόγου σε μια μικρή συνήθως αλλαγή του επιτοκίου

Floor είναι ένα χρηματοπιστωτικό προϊόν που εγγυάται ένα ελάχιστο επιτόκιο απόδοσης έστω και εάν το προσδιορισθέν στη σύμβαση κυμαινόμενο επιτόκιο πέσει στην αγορά κάτω από το επίπεδο αυτό. Άλλως, το ελάχιστο επιτόκιο σε ένα δάνειο κυμαινόμενου επιτοκίου, σε ένα ενυπόθηκο στεγαστικό δάνειο μεταβλητού ή αναπροσαρμοζόμενου επιτοκίου ή σε μία πιστωτική κάρτα με προνομιακό επιτόκιο δανείων (prime rate) ίσο με ένα σχετικό δείκτη (π,χ το Euribor). Εάν ο δείκτης με βάση τον οποίο υπολογίζεται το επιτόκιο οδηγήσει αυτό σε ένα επίπεδο κάτω από το floor που έχει συμφωνηθεί θα ισχύσει το ελάχιστο αυτό επίπεδο επιτοκίου και όχι αυτό που διαμορφώθηκε στην αγορά.

Μια δημοφιλής σύμβαση επιτοκίου που εφαρμόζουν από τα χρηματοπιστωτικά ιδρύματα στην εξωχρηματιστηριακή αγορά είναι ένα Interest Rate Cap. Τα ανώτατα όρια επιτοκίων μπορούν να γίνουν κατανοητά καταρχήν εξετάζοντας ένα χαρτοφυλάκιο επιτοκίων όπου το επιτόκιο επαναφέρεται περιοδικά ίσο με το Euribor. Ο χρόνος μεταξύ επαναφοράς είναι γνωστός ως τενόρος (tenor), Υποθέτουμε ότι ο χρόνος είναι 3 μήνες, το επιτόκιο του για τους πρώτους 3 μήνες είναι το αρχικό επιτόκιο Euribor 3 μηνών, για του επόμενους 3 μήνες το επιτόκιο Euribor είναι το 3μηνο επιτόκιο Euribor που επικρατεί στην αγορά το τρίμηνο αυτό και ούτω καθεξής.

Το ανώτατο όριο επιτοκίων έχει σχεδιαστεί για να παρέχει ασφάλεια έναντι του επιτοκίου επί του κυμαινόμενου επιτοκίου που υπερβαίνει ένα ορισμένο επίπεδο. Το επίπεδο αυτό ορίζεται ως ανώτατο επιτόκιο (cap rate).

Παράδειγμα 3.2

Υποθέτουμε ότι το καθαρό κεφάλαιο είναι 20εκ. ευρώ, ο τενόρος είναι 3 μήνες, η διάρκεια ζωής του cap είναι 5 χρόνια και το ανώτατο επιτόκιο είναι 5% και οι πληρωμές πραγματοποιούνται ανά τρίμηνο. Το ανώτατο όριο προβλέπει ασφάλιση έναντι του κυμαινόμενου επιτοκίου άνω του 5%. Αγνοούμε τα θέματα ημερήσιας μέτρησης και υποθέτουμε ότι υπάρχει ακριβώς 0,25 χρόνια μεταξύ των ημερομηνιών πληρωμών. Υποθέτουμε ότι σε μια συγκεκριμένη ημερομηνία επαναφοράς το επιτόκιο Euribor 3 μηνών είναι 6%. Το κυμαινόμενο επιτόκιο θα χρειαζόταν $0,25 \times 0,06 \times 20.000.000 = \text{€}300.000$ τόκους που θα καταβληθούν 3 μήνες αργότερα. Με το 3μηνο επιτόκιο Euribor 5% οι τόκοι που θα πληρωθούν είναι $0,25 \times 0,05 \times 20.000.000 = \text{€}250.000$.

Επομένως το ανώτατο όριο παρέχει πληρωμή (payoff) των €50.000, Η πληρωμή δεν εμφανίζεται την ημερομηνία επαναφοράς όταν παρατηρείται το 6% αλλά 3 μήνες αργότερα. Αυτό αντικατοπτρίζει τη συνηθισμένη χρονική στιγμή μεταξύ του παρατηρηθέντος επιτοκίου και της αντίστοιχης πληρωμής. Σε κάθε ημερομηνία επαναφοράς κατά τη διάρκεια της ζωής του ανώτατου ορίου, παρατηρείται το Euribor. Αν το Euribor είναι μικρότερο από το 5% ,τρεις μήνες αργότερα δεν υπάρχει καμία πληρωμή από το ανώτατο όριο. Εάν το Euribor είναι μεγαλύτερο του 5% η πληρωμή είναι το ¼ της υπέρβασης που εφαρμόζεται στον κύριο υπόχρεο των 20 εκ. ευρώ.

Σημειωτέον ότι τα ανώτερα όρια είναι συνήθως καθορισμένα έτσι ώστε το αρχικό επιτόκιο Euribor, ακόμα και αν είναι μεγαλύτερος από το ανώτατο όριο, να μην οδηγήσει σε πληρωμή κατά τη πρώτη ημερομηνία επαναφοράς.

Στο παράδειγμά μας το ανώτατο όριο διαρκεί 5 χρόνια. Υπάρχουν επομένως συνολικά 19 ημερομηνίες επαναφοράς και 19 πιθανές πληρωμές από το ανώτατο όριο.

3.3.1 Το ανώτατο όριο ως χαρτοφυλάκιο Επιτοκιακών Συμβολαίων Δικαιώματος Προαίρεσης (The Cap as a Portfolio of Interest Rate Option)

Εξετάζουμε το ενδεχόμενο ενός ανώτατου ορίου με διάρκεια ζωής T , καθαρό κεφάλαιο L , και ανώτατο όριο επιτοκίου R_K . Υποθέτουμε ότι οι ημερομηνίες επαναφοράς είναι t_1, t_2, \dots, t_n και ορίζουμε $t_{n+1} = T$. Ορίζουμε R_k ως το επιτόκιο Euribor για την περίοδο μεταξύ t_k και t_{k+1} παρατηρούμε τη χρονική περίοδο t_k ($1 \leq k \leq n$). Το ανώτατο όριο οδηγεί σε μια πληρωμή τη χρονική στιγμή t_{k+1} ($k=1,2,\dots,n$) του

$$L\delta_k \max(R_k - R_K, 0) \quad (3.5)$$

Όπου,

$$\delta_k = t_{k+1} - t_k$$

Το R_k και R_K είναι εκφρασμένα με συχνότητα ανάμειξης ίση με συχνότητα επαναφοράς.

Η έκφραση (3.5) είναι η πληρωμή από ένα call option με επιτόκιο Euribor που παρατηρείται τη χρονική στιγμή t_k με πληρωμή που πραγματοποιείται τη χρονική στιγμή t_{k+1} . Το ανώτατο όριο είναι ένα χαρτοφυλάκιο με n τέτοια options. Τα επιτόκια Euribor παρατηρούνται τις χρονικές στιγμές t_1, t_2, \dots, t_n και οι αντίστοιχες πληρωμές πραγματοποιούνται τις χρονικές στιγμές t_2, t_3, \dots, t_{n+1} . Τα n call options που βασίζονται στο ανώτατο όριο είναι γνωστά ως κάψουλες (caplets).

3.3.2 Το ανώτατο όριο ως χαρτοφυλάκιο Συμβολαίων Δικαιώματος Προαίρεσης Ομολογιών (The Cap as a Portfolio of Bond Option)

Ένα επιτοκιακό ανώτατο όριο μπορεί επίσης να χαρακτηριστεί ως ένα χαρτοφυλάκιο put option²³ για zero-coupon ομόλογα με πληρωμές των put options τη χρονική στιγμή που έχουν υπολογιστεί. Η πληρωμή με βάση την εξίσωση (3.5) τη χρονική στιγμή t_{k+1} είναι ισοδύναμη με

$$\frac{L\delta_k}{1 + R_k\delta_k} \max\{R_k - R_K, 0\}$$

τη χρονική στιγμή t_k . Αυτό συνεπάγεται

$$\max\left[L - \frac{L(1+R_K\delta_k)}{1+R_k\delta_k}, 0\right] \quad (3.6)$$

Η έκφραση $\frac{L(1+R_K\delta_k)}{1+R_k\delta_k}$ είναι η τιμή τη χρονική στιγμή t_k ενός zero-coupon ομολόγου που πληρώνει $L(1 + R_K\delta_k)$ τη χρονική στιγμή t_{k+1} . Η έκφραση (3.6) είναι επομένως η πληρωμή από ένα put option με λήξη t_k με zero-coupon ομόλογα με λήξη t_{k+1} όταν η ονομαστική αξία του ομολόγου είναι $L(1 + R_K\delta_k)$ και τιμή άσκησης L . Επομένως το ανώτατο όριο επιτοκίου μπορεί να θεωρηθεί ως ένα χαρτοφυλάκιο του European put option για zero-coupon ομολογίες.

3.3.3 Floors και Collars

Collar θεωρείται μια από τις εξής περιπτώσεις:

1) ένας συνδυασμός αγοράς ενός cap (σύμβαση κυμαινόμενου επιτοκίου όπου σε περιοδικές ημερομηνίες πληρωμών ο υπόχρεος πληρώνει τη διαφορά μεταξύ του επιτοκίου της αγοράς και ενός ειδικού ανωτάτου ορίου επιτοκίου και μόνο στην περίπτωση που η διαφορά αυτή είναι θετική) και ταυτόχρονα μιας πώλησης ενός floor (σύμβαση κυμαινόμενου επιτοκίου που εγγυάται ένα ελάχιστο επιτόκιο απόδοσης έστω και εάν το προσδιορισθέν στη σύμβαση κυμαινόμενο επιτόκιο πέσει στην αγορά κάτω από το επίπεδο αυτό).

2) ένα ανώτερο και ένα κατώτερο όριο επιτοκίου σε ένα χρεόγραφο κυμαινόμενου επιτοκίου (Floating-Rate Note, FRN) ή σε ένα ενυπόθηκο ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου (AdjustableRate Mortgage, ARM). Τα όρια προσδιορίζονται στους όρους της έκδοσης των χρεογράφων και σημαίνουν ότι εάν τα επιτόκια της αγοράς υπερβούν τα όρια αυτά, ο εκδότης θα πληρώσει μόνο το επιτόκιο του ανώτερου και κατώτερου ορίου αντίστοιχα.

3) ένα call option και ένα long put option αγοράζονται έναντι μιας προηγούμενης κατεχόμενης θέσης long stock. Τα ανωτέρω συμβόλαια δικαιωμάτων προαίρεσης

²³ Put option: είναι η πώληση ενός υποκείμενου μέσου στο μέλλον.

(options) μπορούν να έχουν την ίδια τιμή εξάσκησης του δικαιώματος ή διαφορετική τιμή και η λήξη μπορεί να είναι η ίδια ή όχι.

4) σε ένα εγγυημένο ενυπόθηκο ομόλογο (Collateralised Mortgage Obligation, CMO) το collar είναι το επίπεδο στο οποίο ορισμένες μεταβλητές απόδοσης, όπως το yield και η μέση διάρκεια της ζωής του ομολόγου, είναι εγγυημένες να παραμείνουν.

Τα Επιτοκιακά Floors και τα Επιτοκιακά Collars (λέγονται και floor-ceiling agreements) είναι ανάλογα με τα ανώτατα όρια. Ένα floor παρέχει μια πληρωμή όταν το επιτόκιο του υποκείμενου κυμαινόμενου επιτοκίου πέσει κάτω από ένα ορισμένο επιτόκιο, Ένα Floor παρέχει μια πληρωμή $L\delta_k \max(R_K - R_k, 0)$ τη χρονική στιγμή t_{k+1} ($k=1,2,\dots,n$).

Κατ' αναλογία με ένα επιτοκιακό ανώτατο όριο, ένα επιτοκιακό κατώτατο όριο είναι ένα χαρτοφυλάκιο από put option επιτοκίων ή ένα χαρτοφυλάκιο από call option zero-coupon ομολογιών. Κάθε ένα από τα μεμονωμένα options που περιλαμβάνουν ένα κατώτατο όριο είναι γνωστά ως *flooret*.

Ένα Collar είναι ένα μέσο που έχει σχεδιαστεί για να εγγυηθεί ότι το επιτόκιο του υποκείμενου χρεογράφου με Euribor (ή γενικότερα κυμαινόμενο) επιτόκιο βρίσκεται πάντα ανάμεσα σε δύο επίπεδα.

Επιπρόσθετα, ένα Collar είναι ένας συνδυασμός μιας θετικής θέσης σε ένα ανώτατο όριο και μιας αρνητικής θέσης σε ένα κατώτατο όριο. Συνήθως, κατασκευάζεται έτσι ώστε η τιμή του ανώτατου επιτοκίου να είναι ίση με την τιμή του κατώτατου ορίου. Το κόστος που εισέρχεται στο Collar είναι τότε μηδέν.

Put-Call ισοτιμία για τα ανώτατα και κατώτατα όρια

Υπάρχει μια σχέση ισοτιμίας μεταξύ των τιμών των ανώτατων και κατώτατων ορίων. Η σχέση αυτή είναι:

$$\text{Αξία του Ανώτατου ορίου} = \text{Αξία του κατώτατου ορίου} + \text{Αξία του Swap}$$

Το ανώτατο και κατώτατο όριο έχουν την ίδια τιμή άσκησης R_K . Το Swap είναι μια συμφωνία ανταλλαγής επιτοκίων λαμβάνοντας κυμαινόμενο (Euribor) και πληρώνοντας σταθερό επιτόκιο πάνω στην τιμή άσκησης R_K , χωρίς ανταλλαγή πληρωμών κατά την πρώτη ημερομηνία επαναφοράς. Τα τρία αυτά μέσα (Cap, floor, Swap) έχουν την ίδια διάρκεια ζωής και την ίδια συχνότητα πληρωμής.

Απόδειξη ότι ισχύει:

Εξετάζουμε μια θετική θέση στο ανώτατο όριο σε συνδυασμό με μια αρνητική θέση στο κατώτατο όριο. Το κατώτατο όριο παρέχει μια ταμειακή ροή ίση με Euribor $-R_K$ για περιόδους όπου το Euribor είναι μεγαλύτερο του R_K . Το βραχυπρόθεσμο κατώτατο όριο παρέχει μια ταμειακή ροή ίση με $-(R_K - \text{Euribor}) = \text{Euribor} - R_K$ για περιόδους όπου το Euribor είναι μικρότερο από το R_K . Επομένως υπάρχει ταμειακή ροή του Euribor $-R_K$ σε όλες τις περιπτώσεις. Αυτή είναι η ταμειακή ροή για το

Swap. Επομένως, προκύπτει ότι η αξία του ανώτατου ορίου μείον την αξία του κατώτατου ορίου θα πρέπει να είναι ίση με την αξία του Swap.

Σημείωση:

Τα Swap είναι συνήθως δομημένα έτσι ώστε το Euribor τη χρονική στιγμή 0 προσδιορίζει μια πληρωμή κατά την πρώτη ημερομηνία επαναφοράς.

Τα ανώτατα και κατώτατα όρια είναι συνήθως δομημένα έτσι ώστε να μην υπάρχει καμία πληρωμή κατά την πρώτη ημερομηνία πληρωμής.

Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο η put-call ισοτιμία περιλαμβάνει μια μη τυπική συμφωνία ανταλλαγής (swap), όπου δεν υπάρχει καμία πληρωμή κατά την πρώτη ημερομηνία επαναφοράς.

Αποτίμηση των ανώτατων και κατώτατων ορίων

Όπως φαίνεται στην εξίσωση (3.5), η κάψουλα (caplet) που αντιστοιχεί στο επιτόκιο που παρατηρείται στο χρόνο t_k παρέχει μια πληρωμή $L\delta_k \max(R_k - R_K, 0)$ στο χρόνο t_{k+1} .

Σύμφωνα με το τυποποιημένο μοντέλο αγοράς, η αξία του caplet είναι:

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [F_k N(d_1) - R_K N(d_2)] \quad (3.7)$$

Όπου,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{F_k}{R_K}\right) + \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{F_k}{R_K}\right) - \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma_k \sqrt{t_k}$$

F_k : προθεσμιακό επιτόκιο τη χρονική στιγμή 0 για τις περιόδους μεταξύ των χρονικών στιγμών t_k και t_{k+1} .

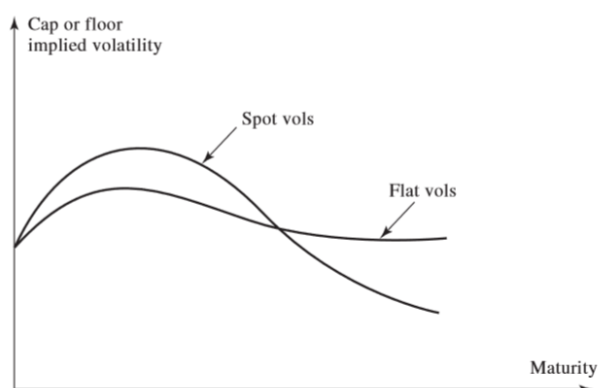
σ_k : μεταβλητότητα του προθεσμιακού επιτοκίου.

Αυτή είναι μια φυσική επέκταση του Black's model. Η μεταβλητότητα σ_k πολλαπλασιάζεται με $\sqrt{t_k}$, γιατί το επιτόκιο R_k παρατηρείται τη χρονική στιγμή t_k , αλλά ο συντελεστής προεξόφλησης $P(0, t_{k+1})$ αντανακλά το γεγονός ότι η πληρωμή γίνεται κατά τη χρονική στιγμή t_{k+1} και όχι t_k .

Η αξία της αντίστοιχης flooret είναι:

$$L\delta_k P(0, t_{k+1}) [R_k N(-d_2) - F_k N(-d_1)] \quad (3.8)$$

3.3.4 Spot Μεταβλητότητες Vs Flat Μεταβλητότητες



Σχήμα 3.3: Καμπύλη Μεταβλητότητας

Η Flat μεταβλητότητα μπορεί να υπολογιστεί από τη spot μεταβλητότητα και αντίστροφα.

Το Σχήμα 3.3 δείχνει ένα τυπικό πρότυπο για spot μεταβλητότητες και flat μεταβλητότητες ως συνάρτηση της λήξης. Σε περίπτωση μιας spot μεταβλητότητας, η λήξη είναι ίση με τη λήξη ενός caplet ή ενός floorlet, σε περίπτωση μιας flat μεταβλητότητας, η λήξη είναι ίση με τη λήξη ενός ανώτατου ή κατώτατου ορίου. Οι flat μεταβλητότητες είναι παρόμοιες με τον αθροιστικό μέσο όρο των spot μεταβλητοτήτων και έτσι παρουσιάζουν λιγότερη μεταβλητότητα.

Στο σχήμα αυτό η καμπύλη παρατηρείται όταν οι μεταβλητότητες υπολογίζονται από τις τιμές του option αλλά και από τα ιστορικά δεδομένα. Δεν υπάρχει γενική συμφωνία σχετικά με την ύπαρξη της καμπύλης. Μια πιθανή εξήγηση είναι ότι οι τιμές στο βραχυπρόθεσμο κομμάτι της μηδενικής καμπύλης ελέγχεται από τις κεντρικές τράπεζες. Αντίθετα τα επιτόκια 2 και 3 ετών καθορίζονται σε μεγάλο

βαθμό από τις δραστηριότητες των εμπορών. Αυτοί οι έμποροι μπορεί να αντιδράνε υπερβολικά στις αλλαγές που παρατηρούνται σε σύντομο χρονικό διάστημα και προκαλούν τη μεταβλητότητα αυτών των επιτοκίων να είναι υψηλότερη από τη μεταβλητότητα των βραχυπρόθεσμων επιτοκίων.

Για τις λήξεις πέραν των 2 και 3 ετών, η μέση επαναφορά των επιτοκίων προκαλεί τη μείωση της μεταβλητότητας.

3.3.5 Θεωρητική Αιτιολόγηση του μοντέλου (Black's Model)

Η επέκταση του Black's model χρησιμοποιείται για την αποτίμηση ενός caplet για να αποδειχθεί ότι είναι εσωτερικά συνεπής, λαμβάνοντας υπόψη σε ένα κόσμο ουδέτερο στον κίνδυνο σε σχέση με ένα ομόλογο μηδενικού τοκομεριδίου ουδέτερο στο κίνδυνο που λήγει κατά τη χρονική περίοδο t_{k+1} .

Γενικά αποτελέσματα:

1. Η τρέχουσα αξία της κάθε ασφάλισης είναι η αναμενόμενη αξία τη χρονική στιγμή t_{k+1} , πολλαπλασιασμένη με την τιμή μιας ομολογίας μηδενικού τοκομεριδίου που λήγει κατά τη χρονική περίοδο t_{k+1} .
2. Η αναμενόμενη αξία ενός ουδέτερου στο κίνδυνο επιτοκίου διάρκειας μεταξύ των χρονικών περιόδων t_k και t_{k+1} ισούται με το προθεσμιακό επιτόκιο,

Το πρώτο από τα αποτελέσματα δείχνει ότι η τιμή ενός caplet που παρέχει μια πληρωμή τη χρονική στιγμή t_{k+1} είναι:

$$L\delta_k P(0, t_{k+1})E_{k+1}[\max(R_k - R_K, 0)] \quad (3.9)$$

Όπου,

E_{k+1} : αναμενόμενη αξία που είναι προθεσμιακά ουδέτερη στο κίνδυνο σε σχέση με ένα μηδενικού τοκομεριδίου ομόλογο με λήξη τη χρονική στιγμή t_{k+1} .

Όταν το προθεσμιακό επιτόκιο που διέπει το ανώτατο όριο (αρχικά F_k υποτίθεται ότι έχει μια σταθερή μεταβλητότητα σ_k το R_k είναι η λογαριθμοκανονική που εξετάζουμε με την τυπική απόκλιση του $\ln(R_k)$ ίσο με το $\sigma_k\sqrt{t_k}$.

Η εξίσωση (3.9) γίνεται:

$$L\delta_k P(0, t_{k+1})[E_{k+1}(R_k)N(d_1) - R_K N(d_2)]$$

Όπου,

$$d_1 = \frac{\ln \left[\frac{E_{k+1}(R_k)}{R_K} \right] + \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}}$$

$$d_2 = \frac{\ln \left[\frac{E_{k+1}(R_k)}{R_K} \right] - \sigma_k^2 t_k / 2}{\sigma_k \sqrt{t_k}} = d_1 - \sigma \sqrt{t_k}$$

Το δεύτερο αποτέλεσμα υποδηλώνει ότι

$$E_{k+1}(R_k) = F_k$$

3.3.6 Ο αντίκτυπος στις Συμβάσεις Υπολογισμού των Ημερών (Day Count Conventions)

Οι Συμβάσεις υπολογισμού των ημερών ορίζουν τον αριθμό των ημερών μεταξύ δύο ημερομηνιών και τον τρόπο υπολογισμού μιας τοκοφόρου περιόδου όταν ο αριθμός των ημερών είναι ένα κλάσμα μιας κανονικής περιόδου. Διαφέρουν ως προς τον αριθμό των ημερών του έτους (360, 365, 366) καθώς επίσης ως προς τον αριθμό των ημερών του μήνα (30, 31, 28 και 29 για τον Φεβρουάριο). Οι πιο συνήθεις συμβάσεις είναι οι Actual/360, Actual/actual, Actual/365 fixed, 30/360, 30E/360 και 30E+/360.

Υποθέτουμε ότι το επιτόκιο ανώτατου ορίου R_K εκφράζεται με μια σύμβαση Actual/360, Αυτό σημαίνει ότι το χρονικό διάστημα δ_k στους τύπους πρέπει να αντικατασταθεί από a_k το δεδουλευμένο κλάσμα για το χρονικό διάστημα t_k και t_{k+1} . Το προθεσμιακό επιτόκιο F_k πρέπει να εκφράζεται με μια σύμβαση Actual/360. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να καθορίζεται από την επίλυση της ακόλουθης εξίσωσης:

$$1 + a_k F_k = \frac{P(0, t_k)}{P(0, t_{k+1})}$$

Ο αντίκτυπος όλων αυτών είναι σχεδόν ο ίδιος με τον υπολογισμό του δ_k σε μια σύμβαση Actual/actual με βάση μετατροπής R_K από τη σύμβαση Actual/360 σε Actual/actual και τον υπολογισμό του F_k με σύμβαση Actual/actual με βάση την επίλυση:

$$1 + \delta_k F_k = \frac{P(0, t_k)}{P(0, t_{k+1})}$$

3.4 European Swap Options

Swap Options ή Swaptions είναι options για συμφωνίες ανταλλαγής επιτοκίων και είναι ένα ακόμα είδος του interest rate option. Τα Swaptions δίνουν στον κάτοχο το δικαίωμα να εισέλθουν σε ένα interest rate swap σε μια συγκεκριμένα στιγμή στο μέλλον. Από την άλλη ο κάτοχος δεν έχει την υποχρέωση να ασκήσει το δικαίωμα αυτό. Πολλά χρηματοπιστωτικά ιδρύματα που προσφέρουν συμβάσεις interest rate swap σε εταιρικούς πελάτες τους μπορούν να πουλήσουν ή να αγοράσουν swaptions από αυτούς.

Τα Swaptions παρέχονται από εταιρείες με εγγύηση ότι το σταθερό επιτόκιο που θα πληρωθεί για σε ένα μελλοντικό δάνειο δε θα υπερβαίνει κάποιο επίπεδο. Αυτά είναι μια εναλλακτική λύση για forward swaps (ή deferred swaps). Τα forward swaps δεν περιλαμβάνουν καμία προκαταβολή αλλά έχουν το μειονέκτημα να υποχρεώνουν την εταιρεία να εισέλθει σε μια συμφωνία swap. Με ένα swaptions η εταιρεία είναι σε θέση να επωφεληθεί από ευνοϊκές μεταβολές των επιτοκίων, ενώ αποκτά προστασία από τις δυσμενείς μεταβολές των επιτοκίων. Η διαφορά μεταξύ ενός swaptions και ενός forward swap είναι ανάλογη με τη διαφορά ανάμεσα σε ένα option σε ένα ξένο νόμισμα και μιας προθεσμιακής σύμβασης για το νόμισμα.

3.4.1 Αποτίμηση των European Swaptions

Το επιτόκιο Swap για μια συγκεκριμένη λήξη σε μια δεδομένη στιγμή είναι το (mid-market²⁴) σταθερό επιτόκιο, το οποίο ανταλλάσσεται με Euribor σε ένα νεοκτιδόμενο swap με τη λήξη αυτή. Το μοντέλο που συνήθως χρησιμοποιείται για την αποτίμηση ενός European swap Option υποθέτει ότι το υποκείμενο swap στη λήξη είναι λογαριθμοκανονική.

Swaptions και Bond Option

Ένα Interest Rate Swap μπορεί να θεωρηθεί ως σύμβαση ανταλλαγής ενός ομολόγου σταθερού επιτοκίου για ένα ομόλογο κυμαινόμενου επιτοκίου. Κατά την έναρξη του swap, η αξία του ομολόγου κυμαινόμενου επιτοκίου ισούται πάντα με το καθαρό κεφάλαιο του swap. Ένα swaptions, μπορεί επομένως να θεωρηθεί ως ένα option για μια ανταλλαγή μια ομολογίας σταθερού επιτοκίου με το καθαρό κεφάλαιο του swap, που θεωρείται ένα είδος bond option,

²⁴ Τιμή Mid-Market είναι η μέση τιμή αγοράς. Ειδικότερα ο μέσος όρος της τιμής αγοράς και της τιμής πώλησης που προσφέρονται από τους διαμορφωτές της αγοράς στις διεθνείς αγορές συναλλάγματος και χρεογράφων χρησιμοποιείται και για την αποτίμηση των επενδυτικών θέσεων στο τέλος του έτους.

Εάν ένα swaption δίνει στον κάτοχο το δικαίωμα να πληρώσει σταθερό και να λάβει κυμαινόμενο επιτόκιο με τιμή άσκησης ίση με το καθαρό κεφάλαιο. Εάν ένα swaption δίνει στον κάτοχο του το δικαίωμα να πληρώσει κυμαινόμενο και να λάβει σταθερό επιτόκιο με τιμή άσκησης ίση με το καθαρό κεφάλαιο.

Εξετάζουμε ένα swaption όπου ο κάτοχος έχει το δικαίωμα να πληρώσει ένα επιτόκιο s_K και να λάβει Euribor σε μια ανταλλαγή που θα διαρκέσει n χρόνια αρχίζοντας από T έτη. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν m πληρωμές ανά έτος στο πλαίσιο της ανταλλαγής και ότι το καθαρό κεφάλαιο είναι L . Κάθε σταθερή πληρωμή για το swap είναι ο καθορισμένος ρυθμός L/m .

Ας υποθέσουμε ότι το swap rate για ένα n -ετή swap που ξεκινάει τη χρονική στιγμή T , αποδεικνύεται ότι είναι s_T , Συγκρίνοντας τις ταμειακές ροές σε ένα swap όπου το σταθερό επιτόκιο είναι s_T με τις ταμειακές ροές σε ένα swap, όπου το σταθερό επιτόκιο είναι s_K , μπορεί να δει κανείς ότι η πληρωμή από το swaption αποτελείται από μια σειρά ταμειακών ροών ίση με:

$$\frac{L}{m} \max(s_T - s_K, 0)$$

Οι ταμειακές ροές λαμβάνονται m φορές το χρόνο για τα n -χρόνια ζωής του swap.

Υποθέτουμε ότι οι ημερομηνίες πληρωμής του swap είναι T_1, T_2, \dots, T_{mn} , που μετρείται σε χρόνια από σήμερα (ισχύει ότι $T_i = T + \frac{i}{m}$), Κάθε ταμειακή ροή είναι η πληρωμή από ένα call option για s_T με τιμή άσκησης s_K .

Ενώ ένα ανώτατο όριο είναι ένα χαρτοφυλάκιο από options για επιτόκια, ένα swaption είναι ένα απλό option για ένα swap rate με επαναλαμβανόμενες πληρωμές. Το τυποποιημένο μοντέλο αγοράς δίνει την αξία ενός swaption όπου ο κάτοχος έχει το δικαίωμα να πληρώσει s_K ως

$$\sum_{i=1}^{mn} \frac{L}{m} P(0, T_i) [s_0 N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

Όπου,

$$d_1 = \frac{\ln(s_0/s_K) + \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(s_0/s_K) - \sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

s_0 : προθεσμιακό επιτόκιο swap τη χρονική στιγμή 0 ($s(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_N)}{A(t)}$)

σ : μεταβλητότητα του swap rate

$\sigma\sqrt{T}$: τυπική απόκλιση του $\ln s_T$

$\sum_{i=1}^{mn} P(0, T_i)$: συντελεστής προεξόφλησης για τις mn πληρωμές

A : αξία σύμβασης που πληρώνει $1/m$ το χρόνο T_i ($1 \leq I \leq mn$)

Η αξία του swaption ισούται με

$$LA[s_0N(d_1) - s_KN(d_2)] \quad (3.10)$$

Όπου,

$$A = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{mn} P(0, T_i)$$

Εάν το swaption δίνει στον κάτοχο το δικαίωμα να λαμβάνει ένα σταθερό επιτόκιο s_K αντί της πληρωμής του, η πληρωμή από το swaption είναι

$$\frac{L}{m} \max(s_K - s_T, 0)$$

Αυτό είναι το put option στο s_T . Οι πληρωμές, λαμβάνονται πάλι τη χρονική στιγμή T_i ($1 \leq I \leq mn$). Το τυποποιημένο μοντέλο αγοράς δίνει την αξία του swaption να είναι:

$$LA[s_KN(d_2) - s_0N(d_1)] \quad (3.11)$$

Παράδειγμα 3.3

Υποθέτουμε ότι καμπύλη αποδόσεων Euribor η οποία χρησιμοποιείται για την προεξόφληση είναι flat στο 5% ετησίως με συνεχή σύνθεση. Εξετάζουμε ένα swaption που δίνει στον κάτοχο το δικαίωμα να πληρώσει 5,2% σε ένα 2-ετή swap που ξεκινάει μετά από 4 έτη. Η μεταβλητότητα του προθεσμιακού επιτοκίου swap είναι 15%. Οι πληρωμές γίνονται σε εξαμηνιαία βάση και το καθαρό κεφάλαιο είναι 200 εκ. ευρώ.

Σε αυτή την περίπτωση,

$$A = \frac{1}{2} (e^{-0,05 \times 5,5} + e^{-0,05 \times 6} + e^{-0,05 \times 6,5} + e^{-0,05 \times 7}) = 1,463$$

Το επιτόκιο 5% ετησίως με συνεχή σύνθεση μεταφράζεται σε 5,075% εξαμηνιαία σύνθεση, επομένως στο παράδειγμα μας $s_0 = 0,05075$.

$$s_K = 0.052, T = 5 \text{ και } \sigma = 0.2$$

Έτσι,

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{0,05075}{0,052}\right) + 0,2^2 \times 5/2}{0,2\sqrt{5}} = 0,1692$$

$$d_2 = d_1 - 0,2\sqrt{5} = -0,2780$$

Από την εξίσωση (3.10) η αξία του swaption σε ευρώ είναι

$$200 \times 1,463 \times [0,05075 \times N(0,1692) - 0,052 \times N(-0,2780)]$$

$$= 200 \times 1,463 \times [0,05075 \times 0,5672 - 0,052 \times 0,3905]$$

$$= 2.481 \text{ ευρώ.}$$

3.4.2 Θεωρητική Αιτιολόγηση για το μοντέλο των Swaption

Η επέκταση του Black's model που χρησιμοποιείται για τα swaptions μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι εσωτερικά συνεπής σε ένα κόσμο προθεσμιακά ουδέτερο στο κίνδυνο σε σχέση με την ετήσια πρόσοδο A .

Γενικά, η τρέχουσα αξία κάθε ασφάλειας είναι η τρέχουσα τιμή της προσόδου πολλαπλασιασμένη με την αναμενόμενη τιμή του:

$$\frac{\text{Τιμή ασφάλειας κατά το χρόνο } T}{\text{Αξία της προσόδου κατά το χρόνο } T}$$

Η αναμενόμενη τιμή ενός επιτοκίου Swap κατά το χρόνο T ισούται με το προθεσμιακό επιτόκιο Swap.

Το πρώτο αποτέλεσμα δείχνει ότι η αξία του swaption είναι

$$LA E_A[\max(s_T - s_K, 0)]$$

$$\Rightarrow LA[E_A(s_T)N(d_1) - s_K N(d_2)]$$

Όπου,

$$d_1 = \frac{\ln \left[\frac{E_A(s_T)}{s_K} \right] + \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln \left[\frac{E_A(s_T)}{s_K} \right] - \sigma^2 T / 2}{\sigma \sqrt{T}} = d_1 - \sigma \sqrt{T}$$

Το δεύτερο αποτέλεσμα δείχνει ότι το $E_A(s_T)$ ισούται με s_0 . Τα αποτελέσματα οδηγούν στον τύπο τιμολόγησης ενός swap option της εξίσωσης (3.10). Παράλληλα, δείχνουν ότι τα επιτόκια μπορούν να αντιμετωπίζονται ως σταθερά για τους σκοπούς της προεξόφλησης με την προϋπόθεση ότι το αναμενόμενο swap rate είναι ίσο με το forward swap rate.

3.4.3 Ο αντίκτυπος στις συμβάσεις υπολογισμού των ημερών (Day Count Conventions)

Οι παραπάνω τύποι μπορούν να γίνουν πιο ακριβής με την χρήση των συμβάσεων υπολογισμού των ημερών. Το σταθερό επιτόκιο για το swap βασίζεται στο swap option που εκφράζεται με actual/365 ή 30/360.

Υποθέτουμε ότι $T_0 = T$ και ότι για την εφαρμογή της σύμβασης υπολογισμού των ημερών, το δεδουλευμένο ποσοστό που αντιστοιχεί στη χρονική περίοδο μεταξύ T_{i-1} και T_i είναι α_i ,

Οι τύποι που έχουμε δει είναι στη συνέχεια σωστοί με τον συντελεστή της ράντας A να ορίζεται ως

$$A = \sum_{i=1}^{mn} \alpha_i P(0, T_i)$$

Όπως φαίνεται από την εξίσωση $s(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_N)}{A(t)}$, το forward rate swap s_0 δίνεται από την επίλυση της εξίσωσης:

$$s_0 A = P(0, T) - P(0, T_{mn})$$

Συμπεράσματα-Επίλογος

Ένας από τους συνηθέστερους τύπους Swaps είναι η συμφωνία ανταλλαγής επιτοκίων, όπου ο ένας αντισυμβαλλόμενος συμφωνεί να καταβάλει στον άλλο ταμειακές ροές ίσες με τους τόκους κάτω από ένα προκαθορισμένο επιτόκιο για συγκεκριμένη και προκαθορισμένη χρονική περίοδο. Μια ανταλλαγή επιτοκίων μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μετατρέψει ένα δάνειο με κυμαινόμενο επιτόκιο σε δάνειο σταθερού επιτοκίου ή αντιστρόφως. Υπάρχουν δύο τρόποι αποτίμησης των ανταλλαγών επιτοκίων. Πρώτον, το swap αναλύεται σε μια long position σε μια ομολογία και σε μια short position σε ένα άλλο ομόλογο. Δεύτερον, το swap μπορεί να θεωρηθεί ως χαρτοφυλάκιο προθεσμιακών συμβολαίων.

Οι ανταλλαγές έχουν αποδειχθεί πολύ χρήσιμα χρηματοπιστωτικά μέσα. Τα swap περιλαμβάνουν τις συμβάσεις ανταλλαγής επιτοκίων απλού τύπου “Vanilla”, τις πράξεις ανταλλαγής όπου το καθαρό κεφάλαιο αλλάζει με προκαθορισμένο τρόπο, τις ανταλλαγές όπου οι ημερομηνίες πληρωμής είναι διαφορετικές σε κάθε πλευρά και τις σύνθετες συμφωνίες ανταλλαγής. Ορισμένες συμφωνίες ανταλλαγής απαιτούν προσαρμογές των προθεσμιακών επιτοκίων όταν αποτιμώνται. Αυτές οι προσαρμογές ονομάζονται κυρτότητα, χρονισμός ή ποσοτικές προσαρμογές. Μεταξύ των ανταλλαγών που χρειάζονται προσαρμογές είναι τα Euribor σε καθυστέρηση και τα CMS / CMT. Τα Συμβόλαια ανταλλαγής μετοχών περιλαμβάνουν την απόδοση ενός δείκτη μετοχών που ανταλλάσσεται με ένα σταθερό ή κυμαινόμενο επιτόκιο. Συνήθως σχεδιάζονται έτσι ώστε να έχουν αξία ίση με το μηδέν αμέσως μετά την ημερομηνία πληρωμής, αλλά μπορεί να έχουν μη μηδενικές τιμές μεταξύ των ημερομηνιών πληρωμής. Ορισμένα Swaps περιλαμβάνουν ενσωματωμένα συμβόλαια δικαιώματος προαίρεσης. Ένα συμβόλαιο ανταλλαγής δεδουλευμένων τόκων είναι ένα κανονικό swap συν ένα μεγάλο χαρτοφυλάκιο δυαδικών επιλογών (ένα για κάθε ημέρα της διάρκειας της ανταλλαγής). Μια ακυρώσιμη ανταλλαγή είναι ένα κανονικό swap συν ένα Bermudan swaption. Το Black’s model και οι επεκτάσεις του παρέχουν μια δημοφιλή προσέγγιση για την αποτίμηση των Ευρωπαϊκών Συμβολαίων Δικαιώματος Προαίρεσης. Η ουσία του μοντέλου είναι ότι η αξία της μεταβλητής που βασίζεται στο option θεωρείται λογαριθμοκανονική κατά τη λήξη του. Στην περίπτωση ενός Ευρωπαϊκού Συμβολαίου Δικαιώματος Προαίρεσης το μοντέλο υποθέτει ότι η υποκείμενη τιμή του ομολόγου είναι λογαριθμοκανονική κατά τη λήξη του δικαιώματος. Για ένα Cap το μοντέλο υποθέτει ότι τα επιτόκια που προκύπτουν κάθε ένα από τα caplet διανέμονται λογαριθμοκανονικά. Στην περίπτωση ενός swap option, το μοντέλο υποθέτει ότι το υποκείμενο swap rate κατανέμεται λογαριθμοκανονικά.

Το Black’s model προϋποθέτει τον υπολογισμό της αναμενόμενης πληρωμής με βάση την υπόθεση ότι η αναμενόμενη τιμή μιας μεταβλητής ισούται με την προθεσμιακή της αξία και στη συνέχεια προεξοφλεί την αναμενόμενη πληρωμή με το μηδενικό επιτόκιο που παρατηρείται σήμερα στην αγορά. Αυτή είναι η σωστή διαδικασία για τα “Plain Vanilla” μέσα.

Βιβλιογραφία:

1. Αναστασοπούλου Λίνα (2016), Σημειώσεις Στρατηγικές Διοικητική Κινδύνου : Παράγωγα προϊόντα για τον πιστωτικό κίνδυνο.
2. Alm, J., and F. Lindskog (2013). "Foreign Currency Interest Rate Swaps in Asset–Liability Management for Insurers".
3. Black, F. (1976). "The Pricing of Commodity Contracts".
4. Chance D. and Rich D. (1998). "The Pricing of Equity Swap and Swaptions".
5. Corb, H. (2012). "Interest Rate Swaps and Other Derivatives".
6. Flavell, R. R. (2010). "Swaps and Other Derivatives", 2nd Edition.
7. Hull J. (2015). "Options, Futures and Other Derivatives", 9th Edition.
8. Hull, J., and A. White (2013). "OIS Discounting and the Pricing of Interest Rate Derivatives", Working Paper, University of Toronto.
9. Klein, P. (2014). "Interest Rate Swaps: Reconciliation of Models"
10. Lindskog, J. A. (2013). "Foreign Currency Interest Rate Swaps in Asset–Liability Management for Insurers".
11. Litzenberger, R. H. (1992). "Swaps: Plain and Fanciful".
12. Memmel, C., and A. Schertler. (2013). "Bank Management of the Net Interest Margin: New Measures"
13. Purnanandam, A. (2007). "Interest rate derivatives at Commercial Banks: An Empirical Investigation".
14. Rates, E. (n.d.). Euribor Rates. Ανάκτηση από <http://www.euribor-rates.eu/>.
15. Schertler, C. M. (2013). Bank Management of the Net Interest Margin: New Measures.
16. Smith D.J. (1997). "Aggressive Corporate Finance: A Close Look at the Procter and Gamble–Bankers Trust Leveraged Swap".Alm, J., and F. Lindskog (2013). "Foreign Currency Interest Rate Swaps in Asset–Liability Management for Insurers".

Ηλεκτρονικές Διευθύνσεις:

1. Ινστιτούτο Εργασίας ΟΤΟΕ ΙΝΕ. (n.d.). Ανάκτηση από ine.otoe.gr.
2. www.el.wikipedia.org