# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

## ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

## ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ

## ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗΣ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

# *ΑΡΧΕΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ ΑΣΦΑΛΙΣΤΡΟΥ ΚΑΙ ΜΕΤΡΑ ΚΙΝΔΥΝΟΥ*

# *ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ*

**Σωτηρία Κων/νου Μαργέτη**

Διπλωματική εργασία

Που υποβλήθηκε στο τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου

Πειραιάς

Οκτώβριος 2018

**UNIVERSITY OF PIRAEUS**

**DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE**

**POSTAGRADUATE PROGRAM IN ACTURIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT**

# *PRINCIPLES OF PREMIUM CALCULATION AND RISK MEASURES IN ACTUARIAL SCIENCE*

By

Sotiria K. Margeti

MSc Dissertation

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management

Piraeus, Greece

October 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ’ αριθμ. ………… Συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν:

- Κωνσταντίνος Πολίτης (Επιβλέπων)
- Γεωργία Βερροπούλου
- Μιχαήλ Μπούτσικας

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

Αφιερωμένη στους γονείς μου

& στον Αντώνη.

# ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα που συναντώνται στην αναλογιστική επιστήμη αποτελεί ο καθορισμός του ασφαλίστρου για ένα χαρτοφυλάκιο ζημιών, έχοντας μερική τουλάχιστον γνώση για την κατανομή του μεγέθους αυτών των ζημιών. Για τον υπολογισμό του ετήσιου ασφαλίστρου σε ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο, μπορούν να χρησιμοποιηθούν εναλλακτικά διάφορες αρχές που έχουν προταθεί, όπως η αρχή της διακύμανσης, η αρχή της τυπικής απόκλισης, η εκθετική αρχή κλπ.

Επίσης για τον καθορισμό του ασφαλίστρου με τρόπο ώστε το χαρτοφυλάκιο να είναι αφενός μεν ανταγωνιστικό, αφετέρου δε να παρουσιάζει μεγάλη φερεγγυότητα (δηλαδή μικρή πιθανότητα χρεοκοπίας), έχουν προταθεί διάφορα μέτρα κινδύνου, το δημοφιλέστερο εκ των οποίων είναι η αξία σε κίνδυνο (Value at Risk).

Στην παρούσα εργασία θα δοθεί μια επισκόπηση των κυριότερων αρχών υπολογισμού του ασφαλίστρου και θα εξεταστεί σε ποιο βαθμό αυτές ικανοποιούν διάφορες επιθυμητές ιδιότητες (π.χ. συνέπεια, προσθετικότητα, επαναληπτικότητα κλπ).

Επιπλέον θα αναφερθούν τα κυριότερα μέτρα κινδύνου που χρησιμοποιούνται στην αναλογιστική επιστήμη (VaR, TVaR, Expected Shortfall).

Τέλος θα γίνει σύγκριση των μέτρων κινδύνου, για συγκεκριμένες θεωρητικές κατανομές με βαριά ουρά.

# ABSTRACT

One of the most important problems encountered in actuarial science is the determination of the premium for a loss portfolio, with at least partial knowledge of the magnitude of these losses. For the calculation of the annual premium in such a portfolio, alternative principles may be used, such as the principle of variance, the principle of standard deviation, the exponential principle, etc.

Also, in order to determine the premium in such a way that the portfolio is both competitive and highly solvent (ie low probability of ruin), various risk measures have been proposed, the most popular of which is Value at Risk.

This dissertation will give an overview of the main principles of premium calculation and examine to what extent they meet different desirable attributes (eg consistency, additivity, repeatability, etc.).

In addition, the main risk measures used in actuarial science (VaR, TVaR, Expected Shortfall) will be presented.

Finally, the risk measures will be compared for specific theoretical distributions with heavy tail.

# Περιεχόμενα

# 1 Εισαγωγή

Οι ασφαλιστικές εταιρίες είναι ιδιωτικές εταιρίες, που στόχο έχουν την διεκπεραίωση ασφαλιστικών εργασιών. Στα κύρια καθήκοντά τους είναι η σύναψη ασφαλιστικών συμβάσεων κατόπιν εκτίμησης του κινδύνου, με σκοπό την κάλυψη του κινδύνου ως προς τον ασφαλισμένο και την μεγιστοποίηση του κέρδους ως προς την ίδια. Στόχος της κάθε ασφαλιστικής εταιρίας είναι η εύρεση του ελαχίστου ασφαλίστρου το οποίο θα πρέπει να καταβάλλει ο ασφαλισμένος έτσι ώστε να καλύπτει τις υποχρεώσεις της και παράλληλα να αυξάνει το πλεόνασμά της. Τα δύο παραπάνω χαρακτηριστικά αποτελούν την ύπαρξη ενός υγιούς χαρτοφυλακίου.

Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να δοθούν οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου καθώς και τα κυριότερα μέτρα κινδύνου. Στο δεύτερο κεφάλαιο της παρούσας εργασίας όπου θα παρουσιασθούν οι γενικές αρχές ασφαλίστρου οι οποίες έχουν κοινά χαρακτηριστικά με τα μέτρα κινδύνου, καθώς από τον υπολογισμό του ασφαλίστρου παίρνουμε σαφή εικόνα και πληροφορία για την σύναψη σύμβασης των υποχρεώσεων της εταιρίας. Οι περισσότεροι δημοφιλείς αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου είναι η αρχή αναμενόμενης τιμής, η αρχή διακύμανσης, η τυπική απόκλιση, καθώς και η εκθετική αρχή.

Σύμφωνα με την εξίσωση ωφελιμότητας κατανοούμε πως οι νομισματικές μονάδες δεν έχουν την ίδια αξία για όλους. Από την συνάρτηση ωφελιμότητας έχουμε τον διαχωρισμό των ατόμων σε τρείς κατηγορίες: τους κινδυνόφιλους, τους κινδυνόφοβους και τους αδιάφορους στον κίνδυνο. Το 1725 ο Bernoulli με το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης χρησιμοποιεί την εξίσωση ωφελιμότητας με σκοπό την προσδιορισμό των αποφάσεων του κάθε ατόμου αναλόγως των αναγκών του.

Η ασφαλιστική εταιρία ή αλλιώς ο ασφαλιστής στηρίζεται στο κριτήριο της αναμενόμενης ωφελιμότητας για την λήψη αποφάσεων και την δημιουργία του επενδυτικού της προφίλ. Επιπλέον στο δεύτερο κεφάλαιο θα γίνει αναφορά των τύπων της συνάρτησης ωφελιμότητας οι οποίοι επιγραμματικά είναι η εκθετική, η τετραγωνική, η λογαριθμική και τέλος η κλασματική.

Στο τρίτο και τέταρτο κεφάλαιο της εργασίας θα παρουσιαστούν τα κυριότερα μέτρα κινδύνου, με τις ιδιότητές τους. Με τον όρο κίνδυνο χαρακτηρίζουμε ένα απρόσμενο γεγονός το οποίο μπορεί να συμβεί σε ανύποπτο χρόνο, αγνώστου μεγέθους και μη γνωρίζοντας τις οικονομικές επιπτώσεις που μπορεί να επιφέρει. Ο κίνδυνος δεν λαμβάνει χώρα μονάχα στις επιχειρήσεις αλλά και στην ζωή και την καθημερινότητα του κάθε ατόμου. Με το πέρας των ετών και την αναγκαιότητα ποσοτικοποίησης του κινδύνου έχει υπάρξει βελτιστοποίηση των τεχνικών μέτρησής του.

Συγκεκριμένα ο σκοπός της μέτρησης του κινδύνου είναι ο υπολογισμός του και η ποσοτικοποίηση του, ώστε να μπορέσουμε να προβούμε στην ανάληψή του και ταυτόχρονα να διασφαλίσουμε την ρευστότητα της επιχείρησης. Ένα από το πιο δημοφιλή μέτρα κινδύνου είναι το Value at Risk (VaR), το οποίο θα αναλυθεί στο τρίτο κεφάλαιο της εργασίας, όπου θα δοθεί ο ορισμός του, οι ιδιότητες που θα πρέπει να πληροί, καθώς παράλληλα και ορισμένες μέθοδοι που επιτυγχάνουν τον υπολογισμό του. Παράλληλα θα αναφερθούν πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα του, καθώς και ποια είναι η χρήση του σύμφωνα με το νομοθετικό πλαίσιο του Solvency II (Φερεγγυότητα II). Τέλος στο ίδιο κεφάλαιο θα δοθεί ο υπολογισμός του VaR για τυχαίο δείγμα n παρατηρήσεων τα οποία θα ακολουθούν συγκεκριμένη κατανομή. Ο υπολογισμός θα πραγματοποιηθεί στο στατιστικό πακέτο R, του οποίου είναι δωρεάν η εγκατάστασή του καθώς και χρησιμοποιείται για ανάλυση δεδομένων και την εφαρμογή στατιστικών τεχνικών. Η επίτευξη του παραπάνω έχει πραγματοποιηθεί με την εγκατάσταση του πακέτου actuar το οποίο προσομοιώνει το τυχαίο δείγμα που επιλέξαμε.

Τέλος στο τέταρτο κεφάλαιο δίνεται ο ορισμός και άλλων μέτρων κινδύνου τα οποία αποτελούν επέκταση του VaR, και τα οποία είναι το Tail-VaR, το Conditional VaR καθώς και το Expected shortfall.

# 2 Αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου

Οι δραστηριότητες ενός ασφαλιστή αναφέρονται σε ένα σύστημα στο οποίο είτε αυξάνεται το αρχικό κεφάλαιο λόγω της είσπραξης του ασφαλίστρου είτε μειώνεται το αρχικό κεφάλαιο λόγω υψηλών απαιτήσεων και ενδεχομένως αυξημένου κόστους. Στόχος της παρούσας εργασίας είναι να μελετηθεί το ελάχιστο ασφάλιστρο το οποίο απαιτείται για την κάλυψη όλων των υποχρεώσεων, ενώ παράλληλα εξασφαλίζεται αύξηση του πλεονάσματος με σκοπό την ύπαρξη ενός υγιούς και φερέγγυου χαρτοφυλακίου.

Η εξασφάλιση του ελάχιστου ασφαλίστρου θα δοθεί μέσω ορισμένων μαθηματικών μεθόδων και εφαρμογών παρακάτω όπως έχει παρουσιάσει ο David C.M. Dickson στο σύγγραμμα του Insurance Risk and Ruin. Ένα μοντέλο για την εκτίμηση του ύψους του ασφαλίστρου αποτελεί η εξίσωση ωφελιμότητας $u(w-G) = E(u(w-X))$, όπου w είναι τα περιουσιακά στοιχεία του ατόμου, X είναι ο κίνδυνος που αντιμετωπίζει και τέλος G το μέγιστο ασφάλιστρο που είναι διατεθειμένος να καταβάλλει ο λήπτης. Με την εξίσωση μηδενικής ωφελιμότητας πριν την έναρξη της ασφάλισης καθώς και στην λήξη της η ωφελιμότητα παραμένει η ίδια.

## 2.1 Γενικές αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου

Σε μια ασφαλιστική εταιρία η οποία έχει να καλύψει υποχρεώσεις ύψους $X$, μέσω των αρχών υπολογισμού ασφαλίστρου Π, αναδεικνύεται το ελάχιστο ποσό $\Pi(X)$, που θα πρέπει να καταβάλλει ο ασφαλισμένος για την σύναψη του συμβολαίου του με τον ασφαλιστή ώστε να έχει συμφέρον ο ασφαλιστής. Οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου θα μπορούσαμε να πούμε ότι εμφανίζουν κοινά χαρακτηριστικά με τα μέτρα κινδύνου, δεδομένου πως το αποτέλεσμα που προκύπτει από τον υπολογισμό τους συνδέεται με την σύμβαση που προβλέπει κάλυψη κατά X υποχρεώσεων. Σε αυτό το σημείο αξίζει να σημειωθεί ότι οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου αποτελούν την βάση για τον υπολογισμό μετέπειτα των μέτρων κινδύνου.

Οι αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου αντιπροσωπεύουν την διάθεση του ασφαλιστή ώστε να αναλάβει έναν κίνδυνο, συνεπώς για την ανάληψη υψηλού κινδύνου απαιτείται αύξηση του ασφαλίστρου, ενώ σε αντίθεση με την ανάληψη ενός μικρότερου κινδύνου έχουμε μικρότερο ασφάλιστρο. Ορίζουμε παράμετρο $\alpha$ που αντικατοπτρίζει το περιθώριο ασφαλίστρου το οποίο προστίθεται στο αναμενόμενο κόστος και εκφράζει το ρίσκο που αναλαμβάνει ο ασφαλιστής. Το ανωτέρω προϋποθέτει συναίνεση στην χρήση της κατανομής του κινδύνου για τον υπολογισμό του καθαρού ασφαλίστρου.

Κάτωθι θα δοθούν οι δημοφιλέστερες αρχές για τον τρόπο υπολογισμού του ασφαλίστρου (Kaas R, Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. (2008)).

- Καθαρό ασφάλιστρο (net premium) γνωστό ως αρχή της ισοδυναμίας, ισούται με την μέση τιμή του κινδύνου X
$$\Pi(X) = E(X),$$

Η ανωτέρω μέθοδος χρησιμοποιείται για ουδέτερες τακτικές ως προς τον κίνδυνο.

- Η αρχή της αναμενόμενης τιμής (expected value principle), στην οποία το ασφάλιστρο ισούται με το καθαρό ασφάλιστρο προσθέτοντας μια συμφωνημένη επιβάρυνση $aE(X)$, όπου $\alpha > 0$, δηλαδή
$$\Pi(X) = (1+\alpha)E(X)$$

- Αρχή της διακύμανσης (variance principle), όπου η επιβάρυνση του ασφαλίστρου εξαρτάται από την διακύμανση $Var(X)$,
$$\Pi(X) = E(X) + \alpha Var(X), \alpha > 0$$

- Αρχή της τυπικής απόκλισης (standard deviation principle), όπου η επιβάρυνση του ασφαλίστρου εξαρτάται από την τυπική απόκλιση $\sigma(X)$
$$\Pi(X) = E(X) + \alpha\sigma(X), \alpha > 0$$

- Εκθετική αρχή (exponential principle),
$$\Pi(X) = \frac{1}{\alpha} log(m_x(\alpha)),$$

$m_x$, η ροπογεννήτρια συνάρτηση της $X$.

## 2.2 Συνάρτηση ωφελιμότητας και κατηγορίες ατόμων

Η φιλοσοφία της ωφελιμότητας είναι πως ένα χρηματικό ποσό δεν έχει την ίδια αξία για όλους, χωρίς παράλληλα να χάνεται η αντικειμενική του αξία. Μας υποδεικνύει παρόλα αυτά πως η λήψη μιας απόφασης δεν βασίζεται στην αντικειμενική αξία του αγαθού, αλλά στην αξία που έχει για τον λήπτη της απόφασης. Μέσω ενός απλού παραδείγματος μπορούμε να αντιληφθούμε όπως θα δούμε παρακάτω ακριβώς την ερμηνεία της.

**Παράδειγμα 2.1**

Για ένα άτομο με μηνιαίο εισόδημα 1.000€, η ωφελιμότητα από την αγορά ενός λαχείου αξίας 20€ με μέγιστο κέρδος 2.000€ είναι πολύ μεγαλύτερη από ένα άτομο με μηνιαίο εισόδημα 6.000€. Η αντικειμενική αξία του ποσού των 2.000€ παραμένει η ίδια, αλλάζει όμως η απόφαση του λήπτη δεδομένων των αναγκών του και της αξίας που του προσδίδει το ποσό, χαρακτηριστικά επιθυμούμε $u'(x) > 0$, καθώς θετική παράγωγος σημαίνει ότι η ωφελιμότητα είναι αύξουσα συνάρτηση του x, κάτι που είναι λογικό να ισχύει πάντα.

Η στάση μας έναντι του κινδύνου, καθώς η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι η u, παίρνει τις τρεις κάτωθι μορφές, ανάλογα με την $u'(x)$ και την $u''(x)$.

1) Όταν $u''(x) > 0$, είναι η περίπτωση των κινδυνόφιλων ατόμων (Risk Lovers). Στην κατηγορία αυτή ανήκουν τα άτομα τα οποία επιδιώκουν τον πλούτο και όλο και περισσότερο κυνηγούν αυτόν. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί ο τζόγος.
2) Άτομα με $u''(x) < 0$ φέρουν τα χαρακτηριστικά: συμπεριφέρονται συντηρητικά στις κινήσεις τους. Κύριο μέλημά τους είναι η ασφάλεια της επένδυσης τους και όχι το αβέβαιο κέρδος. Προτιμούν για παράδειγμα την κατάθεση ενός ποσού από την επένδυσή του επιχειρηματικά. Στην κατηγορία αυτή ανήκουν οι Κινδυνόφοβοι (Risk averse), οι οποίοι είναι διατεθειμένοι να πληρώσουν ένα ασφάλιστρο G, έναντι $G > E(x)$.
3) Στην τελευταία κατηγορία είναι οι αδιάφοροι στον κίνδυνο (risk neutral), για τους οποίους η οριακή χρησιμότητα είναι σταθερή. Τα άτομα αυτής της κατηγορίας όταν αντιμετωπίσουν τον κίνδυνο είναι διατεθειμένα να αποδώσουν ασφάλιστρο ίσο με την αναμενόμενη απώλεια. Γενικά είναι σπάνιο να βρεθούν τέτοια άτομα.

Δεν αρκούν όμως μονάχα οι μαθηματικοί τύποι αλλά και οι ανάγκες του ασφαλιστή και ασφαλισμένου.

Το 1725 ο Nikolaus Bernoulli με το παράδοξο της Αγίας Πετρούπολης και μετά τον θάνατό του ο αδερφός του Daniel Bernoulli, εξήγησαν γιατί κάποιος θα αρνηθεί την συμμετοχή του σε ένα παιχνίδι όπου το προσδοκώμενο κέρδος φθάνει το άπειρο. Μέσω ενός απλού παραδείγματος θα κατανοήσουμε την παραπάνω θεωρία.

Δυο αδέρφια ο Αντώνης και η Ελένη παίζουν ένα παιχνίδι. Ο Αντώνης δίνει στην Ελένη 1€ αν ένα νόμισμα έλθει την πρώτη φορά κορώνα. Αν έλθει γράμματα ξαναπαίζουν και αυτήν την φορά της δίνει 2€ και ούτω καθ εξής, όπου στην κάθε ρίψη το ποσό διπλασιάζεται.

Η προσδοκώμενη τιμή ισούται με:

$$\left(\frac{1}{2}\right) * 2 + \left(\frac{1}{2^2}\right) * 2^2 + \left(\frac{1}{2^3}\right) * 2^3 + \cdots + \left(\frac{1}{2^\nu}\right) * 2^\nu + \cdots$$

$$= 1 + 1 + 1 + \cdots + \qquad +1 + .. = \infty$$

Κανένας παίχτης όμως δεν είναι διατεθειμένος να πληρώσει άπειρο για να συμμετέχει στο παιχνίδι.

Σύμφωνα με τον Bernoulli οι παίχτες δεν ενδιαφέρονται για τα κέρδη όσο για την ωφέλεια που θα τους αποδώσουν αυτά. Στο παραπάνω παράδειγμα το άτομο έχει αποστροφή στον κίνδυνο καθώς η αξία του να κερδίσει ένα ποσό είναι μικρότερη από το να χάσει το ποσό αυτό. Το μικρό ποσό του 1€ δεν έχει επίπτωση στην ωφελιμότητα του ατόμου.

Συμπεραίνουμε λοιπόν πως τα άτομα είναι διατεθειμένα να ασφαλιστούν και κατά συνέπεια να πληρώσουν (αυξάνεται η ανάγκη της ασφάλισης) για να μειώσουν την αβεβαιότητα του μέλλοντος. Η προσέγγιση του Bernoulli χρησιμοποιεί την έννοια της ωφελιμότητας. Ο κάθε παίχτης έχει διαφορετική στάση απέναντι στον κίνδυνο. Η «αξία» του χρήματος για τον υποψήφιο παίκτη καθώς και ο κορεσμός της ευτυχίας που προέρχεται από την αύξηση των χρημάτων, είναι παράμετροι που δεν υπολογίζει ο τύπος του αναμενόμενου κέρδους και αυτός είναι ο λόγος που οι προσφορές για την συμμετοχή στο παιχνίδι δεν αντιστοιχούν στα θεωρητικά αναμενόμενα κέρδη. Δεν αρκούν μόνο οι μαθηματικοί τύποι και υπολογισμοί αλλά και οι ανάγκες του ασφαλιστή και του ασφαλισμένου.

Μία μέθοδος για τον υπολογισμό ασφαλίστρου αποτελεί η μέθοδος της εκθετικής πριμοδότησης. Η μέθοδος της εκθετικής πριμοδότησης μας δίνει μία σωστή απόδοση του ασφαλίστρου ενώ ακόμη οι μέτοχοι που χρηματοδοτούν το αρχικό κεφάλαιο ανταμείβονται με ένα συγκεκριμένο ποσό, το μέρισμα ενώ ταυτόχρονα η τιμή του ασφαλίστρου θα πρέπει να είναι χαμηλή έτσι ώστε να είναι ανταγωνιστικό και να έχει αυξημένη ζήτηση.

Η αρχή διασποράς αποτελεί ένα ακόμη μοντέλο υπολογισμού του ασφαλίστρου. Το πλεονέκτημα αυτής της μεθόδου είναι πως ένα μέρος της πριμοδότησης είναι προ αποφασισμένο και υπολογίζεται με γραμμικό συνδυασμό.

Επιπλέον στην παρούσα εργασία θα μελετηθούν ποσότητες για την μέτρηση κινδύνου. Ένα από αυτά, ιδιαίτερα αξιόπιστο μέτρο υπολογισμού είναι το VaR (Value at Risk). Η εφαρμογή του στο χαρτοφυλάκιο μας, μας δείχνει το μέγιστο ποσό που ενδεχομένως θα χάσουμε με την πραγματοποίηση ενός ακραίου γεγονότος.

Όπως προαναφέραμε για την μελέτη ασφαλιστικών κινδύνων χρησιμοποιούμε ορισμένα μοντέλα σε μαθηματική βάση. Στόχος μας είναι η μοντελοποίηση των ζημιών η οποία γενικά διακρίνεται σε δύο κατηγορίες: τον αριθμό των ζημιών και το ύψος του ποσού των ζημιών.

## 2.3 Αντασφάλιση και κατηγορίες

Οι ασφαλιστικές καλύψεις χωρίζονται σε αρκετές κατηγορίες ορισμένες εκ των οποίων είναι: ασφάλιση ζωής, ασφάλιση αυτοκινήτου, ασφάλιση περιουσίας, ασφάλιση ταξιδιωτική κ.τ.λ.. Με την έναρξη της ασφάλειας ο ασφαλισμένος καταβάλλει ένα συγκεκριμένο ποσό στον ασφαλιστή για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο, συνήθως ένα έτος. Έτσι ώστε σε μία ενδεχόμενη ζημιά ο ασφαλισμένος να αποζημιωθεί από τον ασφαλιστή.

Από την άλλη μεριά ο κάθε ασφαλιστής ασφαλίζεται ενδεχομένως σε μία αντασφαλιστική εταιρία έτσι ώστε σε ενδεχόμενη ζημιά να μην υποχρεούται να καταβάλει όλο το ύψος της αποζημίωσης. Ο ασφαλιστής καταβάλλει ένα συγκεκριμένο προκαθορισμένο ποσό, και την διαφορά της ζημίας καλύπτει η αντασφαλιστική εταιρία. Συγκεκριμένα θεωρούμε συμβολικά το ποσό της ζημιάς Χ, το προκαθορισμένο ποσό να συμβολίζεται με Μ και συγκεκριμένα ο ασφαλιστής υποχρεούται να πληρώσει αριθμητικά $Y = min(X, M)$ ενώ ο αντασφαλιστής καλείται να πληρώσει το ποσό

$$Z = \max(0, X - M) \,.$$

Συνεπώς ο αντασφαλιστής πληρώνει την διαφορά του ύψους της ζημιάς σε σχέση με το προκαθορισμένο ποσό από την στιγμή της σύναψης της ασφάλισης.

Γενικά ως αντασφάλιση ορίζεται η ασφάλιση του κινδύνου η οποία αναλαμβάνεται από μια Ασφαλιστική εταιρία και αφορά την εκχώρηση μέρους του κινδύνου που αναλαμβάνει ένας ασφαλιστής, σε έναν άλλον ασφαλιστή (τον αντασφαλιστή). Η παραπάνω διαδικασία στην ουσία αποτελεί μια συναλλαγή η οποία λαμβάνει χώρα κάτω από συγκεκριμένες προϋποθέσεις και καθορισμένους όρους, έτσι ώστε με την παρέλευση μεγάλης ζημιάς να υπάρξει οικονομική στήριξη στην ασφαλιστική εταιρία.

Σαφώς η αντασφάλιση χωρίζεται σε συγκεκριμένες κατηγορίες οι οποίες δεν θα αναλυθούν, δεδομένου πως δεν αποτελούν σκοπό μελέτης της παρούσας εργασίας, ενδεικτικά όμως θα αναφερθούν ορισμένες μέθοδοι οι οποίοι είναι

- Αναλογική αντασφάλιση,
- Μη αναλογική αντασφάλιση.

Σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε μοντέλα για την εύρεση του ύψους των ζημιών όπως προαναφέρθηκε και την κατασκευή του βέλτιστου ασφαλίστρου. Στην πράξη αρκεί να υπολογίσουμε την κατανομή των μεταβλητών που απαρτίζουν τις ζημιές. Η κατανομή αυτή μπορεί να είναι είτε συνεχής, είτε διακριτή είτε μικτού τύπου κατανομή.

Εξετάζουμε δύο μεθόδους για την εύρεση της κατανομής των συνολικών ζημιών. Μία μέθοδος είναι μέσω γεννητριών συναρτήσεων δηλαδή ροπογεννητριών ή πιθανογεννητριών. Ακόμη η δεύτερη μέθοδος για τον υπολογισμό της κατανομής είναι η μέθοδος των συνελίξεων. Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των συνελίξεων και θεωρώντας $F$ να είναι η συνάρτηση κατανομής του $X_1$ ακόμη $f_j = \Pr(X_1 = j)$ συμβολικά προκύπτει ότι

$$F^{n*}(x) = \Pr(S_n \leq x)$$

$$\Rightarrow \quad F^{n*}(x) = \sum_{j=0}^{x} [\![ (f_j) ]\!] \; F^{((n-1))^*}(x-j)$$

Μία ακόμη εξίσωση που βοηθά στον υπολογισμό του ασφαλίστρου είναι η εξίσωση ωφελιμότητας, η οποία έχει πολλές εφαρμογές. Η συνάρτηση ωφελιμότητας περιγράφει την αξία που έχει ένα χρηματικό ποσό. Για τον υπολογισμό της χρησιμοποιούμε την υπόθεση ότι $u'(x) > 0$ και ακόμη $u''(x) < 0$, τα οποία ισχύουν για άτομα τα οποία ανήκουν στην κατηγορία των κινδονόφοβων. Ο ασφαλιστής που χρησιμοποίει αυτή την εξίσωση είναι απρόθυμος να αναλάβει κάποιον κίνδυνο και αυτό ποσοτικοποιείται και δίνεται από την ακόλουθη σχέση $r(x) = \frac{-u''(x)}{u'(x)}$, ως συντελεστής αποστροφής κινδύνου, όπως θα δούμε και παρακάτω.

Η παραπάνω σχέση εκφράζει ποσοτικά την τάση που έχουν τα άτομα και την προθυμία να αγοράσουν ένα ασφαλιστικό πρόγραμμα και να πληρώσουν το αντίστοιχο αντίτιμο.

## 2.4 Κριτήριο της αναμενόμενης ωφελιμότητας (The expected utility criterion)

Για την λήψη αποφάσεων ο ασφαλιστής υπολογίζει την αναμενόμενη εξίσωση ωφελιμότητας σε όλα τα στάδια, έπειτα επιλέγει εκείνη που θα αποφέρει τα περισσότερα κέρδη καθώς αυτό φαίνεται από την εξίσωση.

Ένα παράδειγμα που μπορεί να μας εξηγήσει την χρήση της εξίσωσης είναι το ακόλουθο: Έστω δύο επενδυτικά προγράμματα με κέρδη $W$ και καθαρά κέρδη για το πρώτο επενδυτικό πρόγραμμα $X1$, καθώς και καθαρά κέρδη για το δεύτερο επενδυτικό πρόγραμμα $X2$. Επιλέγει το πρώτο επενδυτικό πρόγραμμα εάν και μόνο αν ισχύει

$$E[u(W + X_1)] > E[u(W + X_2)].$$

Όπως είναι λογικό ο επενδυτής θα είναι αδιάφορος μεταξύ των δύο επενδυτικών προγραμμάτων αν ισχύει :

$$E[u(W + X_1)] = E[u(W + X_2)].$$

**<u>Παράδειγμα 2.2</u>**

Αναφορικά με το παραπάνω ας υποθέσουμε ότι $u(x) = -\exp\{-0{,}001x\}$, και επιπροσθέτως η $X_1 \sim N(10^4, 700^2)$ και $X_2 \sim N(1{,}3 \cdot 10^4, 2000^2)$. Εδώ η πρώτη επένδυση έχει μικρότερη μέση τιμή αλλά είναι και λιγότερο ριψοκίνδυνη, εφόσον έχει μικρότερη διασπορά. Επομένως έχει ενδιαφέρον να δούμε ποια από τις δύο επενδύσεις θα προτιμήσει ένας επενδυτής που χρησιμοποιεί την παραπάνω συνάρτηση ωφελιμότητας.

Απάντηση:

Για την πρώτη επένδυση έχουμε, αναμενόμενη ωφελιμότητα του εισοδήματος:

$$\begin{aligned} E[u(W+X_1)] &= -E[\exp\{-0{,}001(W+X_1)\}] \\ &= -\exp\{-0{,}001W\}\, E[\exp\{-0{,}001X_1\}] \\ &= -\exp\{-0{,}001W\}\exp\{-0{,}001 * 10^4 + \frac{1}{2} * 0{,}001^2 * 700^2\} \\ &= -\exp\{-0{,}001W\}\exp\{-9{,}755\} \end{aligned}$$

Αντίστοιχα για την δεύτερη επένδυση η αναμενόμενη ωφελιμότητα του εισοδήματος:

$$\begin{aligned} E[u(W+X_2)] &= -E[\exp\{-0{,}001(W+X_2)\}] \\ &= -\exp\{-0{,}001W\}\, E[\exp\{-0{,}001X_2\}] \\ &= -\exp\{-0{,}001W\}\exp\{-0{,}001 \cdot 1{,}3 \cdot 10^4 + \frac{1}{2} \cdot 0{,}001^2 \cdot 1000^2\} \\ &= -\exp\{-0{,}001W\}\exp\{-12{,}5\} \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι η δεύτερη επένδυση είναι περισσότερο συμφέρουσα – προτιμότερη για όλες τις τιμές του W καθώς $E[u(W+X_1)] < E[u(W+X_2)]$.

Σημειώνεται ότι με το κριτήριο της αναμενόμενης ωφελιμότητας (The expected utility criterion) μπορεί να οδηγηθούμε σε συμπεράσματα τα οποία θα αντιφάσκουν με τα αποτελέσματα άλλων κριτηρίων. Αυτό δεν πρέπει να μας εκπλήξει καθώς διαφορετικά κριτήρια δίνουν, γενικά, διαφορετικά αποτελέσματα. Στο παραπάνω παράδειγμα 2.1 ο επενδυτής διάλεξε την επένδυση που του έδινε το μεγαλύτερο αναμενόμενο καθαρό κέρδος.

Αξίζει να σημειωθεί αν μια συνάρτηση ωφελιμότητας $u(x)$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός μιας άλλης συνάρτησης ωφελιμότητας $v(x)$, της μορφής $u(x) = a \cdot v(x) + b$, με α, b σταθερές με $\alpha > 0$, τότε οι αποφάσεις που θα παρθούν βάση με το κριτήριο της αναμενόμενης ωφελιμότητας θα ικανοποιούν την σχέση

$$E[v(W+X_1)] > E[v(W+X_2)],$$

αν και μόνο αν

$$a \cdot E[v(W+X_1)] + b > a \cdot E[v(W+X_2)] + b.$$

## 2.5 Ανισότητα Jensen (Jensen's Inequality)

Η ανισότητα Jensen αποτελεί σημαντικό εργαλείο στην αναλογιστική επιστήμη. Περιγράφεται από την σχέση $E[u(x)] \leq u[E(x)]$, με την προϋπόθεση πως η

$u''(x) < 0$. Χρησιμοποιείται για τον υπολογισμό των βέλτιστων επιπέδων πριμοδότησης της ασφαλιστικής κάλυψης. Ακόμη καλείται να καλύψει την πλήρη ασφαλιστική κάλυψη έναντι μιας οποιασδήποτε ενδεχόμενης απώλειας.

Η ανισότητα Jensen μπορεί να προκύψει από το ανάπτυγμα μιας σειράς Taylor της κάτωθι μορφής:

$$u(x) = u(a) + u'(a)(x - a) + u''(z)\frac{(x - z)^2}{2},$$

όπου το $z$ είναι μεταξύ του $a$ και του $x$, και εφόσον γνωρίζουμε πως $u''(z) < 0$, προκύπτει

$$u(x) \leq u(a) + u'(a)(x - a).$$

Αντικαθιστώντας το x με μία τυχαία μεταβλητή X και το $a = E[X]$, και παίρνοντας μέσες τιμές προκύπτει η ανισότητα Jensen.

Η εξίσωση ωφελιμότητας του W ατομικού πλούτου (individual wealth) και του μέγιστου ασφαλίστρου που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο ασφαλισμένος για την κάλυψή του θα πρέπει να ισούται με την μέση τιμή της εξίσωσης ωφελιμότητας του W με μια τυχαία ζημιά X.

$$u(W - \Pi) = E[u(W - X)].$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Jensen προκύπτει

$$E\,[u\,(W - X)] \leq u\,(E\,[W - X]) = u\,(W - E\,[X]).$$

Το γεγονός ότι η πρώτη παράγωγος είναι θετική τότε για οποιοδήποτε άλλο ασφάλιστρο $\vec{\Pi} < \Pi$,

$$u\,(W - \vec{\Pi}) > u\,(W - \Pi).$$

Σύμφωνα με την ανισότητα Jensen

$$E[u(W - \Pi)] \leq u(E[W - X]) = u(W - E[X]),$$

συνεπώς

$$u(W - \Pi) \leq u\,(W - E\,[X]).$$

Καθώς η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι αύξουσα συμπεραίνουμε ότι το μέγιστο ασφάλιστρο που είναι διατεθειμένος να πληρώσει ο ασφαλισμένος είναι ίσο με την αναμενόμενη ζημιά $\Pi = E[X]$.

Βλέποντάς το από την πλευρά του ασφαλιστή παρατηρούμε ότι το ελάχιστο αποδεκτό ασφάλιστρο Π για να αναλάβει μια κάλυψη είναι της μορφής

$$u(W) = E[\, u(\, W + \Pi - X)].$$

Συνεπώς

$$E[u(W + \Pi - X)] < E[u(W + \vec{\Pi} - X)]$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen στο δεξιό μέλος της ανωτέρω ανισότητας έχουμε

$$u(W) = E\,[u\,(W + \Pi - X)] \leq u\,(W + \Pi - E\,[X]),$$

δεδομένου ότι είναι μια αύξουσα συνάρτηση, ο ασφαλιστής επιθυμεί ένα ασφάλιστρο το οποίο θα ισοδυναμεί τουλάχιστον με το ύψος της αναμενόμενης ζημιάς $\Pi \geq E[X]$, η ασφαλιστική κάλυψη υφίσταται μόνο όταν $\vec{\Pi} \geq \Pi.$

## 2.6 Τύποι συναρτήσεων ωφελιμότητας (Types of utility function)

**Εκθετική (Exponential)**

Επιπλέον μια προσέγγιση η οποία έχει ως σημαντικό πλεονέκτημα το ότι οι αποφάσεις δεν εξαρτώνται από το κεφάλαιο του ασφαλιστή αποτελεί η εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας και είναι της μορφής $u(x) = -exp\{-\beta x\}$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο της αναμενόμενης ωφελιμότητας και το γεγονός ότι μία επιλεγμένη περίπτωση θα είναι το αποτέλεσμα τυχαίου πλούτου της μορφής $W + X_i$, i=1,2,..,n έχουμε

$$E\,[u(W + X_j)] > E\,[u(W + X_i)]$$

$$\Leftrightarrow E[-exp\{-\beta * (W + X_j)\}] > E[-exp\{-\beta * (W + X_i)\}]$$

$$\Leftrightarrow -exp(-\beta * W) * E\left[exp\left(-\beta * X_j\right)\right] > -exp(-\beta * W) * E[exp(-\beta * X_i)]$$

$$\Leftrightarrow E[exp(-\beta * X_j)] < E[exp(-\beta * X_i)]$$

Το μέγιστο ασφάλιστρο που πρόκειται να καταβάλλει ο ασφαλιζόμενος υπό την μορφή εκθετικής ωφελιμότητας είναι $\Pi = \beta^{-1} * lo\,g[M_x(\beta)]$,

όπου $M_x(\beta)$ η ροπογεννήτρια συνάρτηση του X.

**<u>Παράδειγμα 2.3</u>**

Ένας υποψήφιος ασφαλιζόμενος σκέφτεται να ενεργοποιήσει μία ασφαλιστική κάλυψη καταβάλλοντας το αντίστοιχο ασφάλιστρο. Λαμβάνοντας ως δεδομένο ότι η συνάρτηση ωφελιμότητας είναι

$$u(x) = -\exp\{-\beta \cdot x\}$$

και η τυχαία μεταβλητή της ζημιάς $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, θα δείξουμε ότι το μέγιστο ασφάλιστρο P είναι μία αύξουσα συνάρτηση του β καθώς και τι δηλώνει αυτό το αποτέλεσμα.

Απάντηση:

Καθώς $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, θα υπολογίσουμε το μέγιστο ασφάλιστρο το οποίο θα εξαρτάται από την ροπογεννήτρια της κανονικής συγκεκριμένα μέσω της σχέσης $\Pi = \beta^{-1} \cdot log[M_x(\beta)]$

Συγκεκριμένα η ροπογεννήτρια της κανονικής κατανομή είναι

$$
\begin{aligned}
M_X(t) = E(e^{tX}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 tx]} \, dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x^2 - 2x\mu - 2\sigma^2 tx + \mu^2]} \, dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}[x^2 - 2(\mu + \sigma^2 t)x + \mu^2]} \, dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\left[x^2 - 2(\mu+\sigma^2 t)x + (\mu+\sigma^2 t)^2\right] + \mu^2 - (\mu+\sigma^2 t)^2\right\}} \, dx \\
&= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\left[x - (\mu+\sigma^2 t)\right]^2 + \mu^2 - (\mu+\sigma^2 t)^2\right\}} \, dx \\
&= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\mu^2 - (\mu+\sigma^2 t)^2\right\}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left\{\left[x - (\mu+\sigma^2 t)\right]^2\right\}} \, dx \\
&= e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\{\mu^2 - \mu^2 - 2\mu\sigma^2 t - \sigma^4 t^2\}} = e^{\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση

$$\Pi = \beta^{-1} \log[M_x(\beta)]$$

Προκύπτει ότι

$$\Pi = \frac{1}{\beta} \log[\, exp(\mu\beta + \tfrac{1}{2}\sigma^2\beta^2)] \Leftrightarrow$$

$$\Pi = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2\beta$$

Κατά συνέπεια το μέγιστο ασφάλιστρο είναι ευθέως ανάλογο με την παράμετρο β. Όσο μεγαλύτερο είναι το β τόσο μεγαλύτερο είναι και το Π που προτίθεται να καταβάλει ο ασφαλιζόμενος, το οποίο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι όσο περισσότερο risk averse είναι κάποιος , τόσο μεγαλύτερο είναι β και κατά συνέπεια το Π.

**<u>Παράδειγμα 2.4</u>**

Υπάρχει η δυνατότητα να παρέχεται η ασφαλιστική κάλυψη σε έναν ασφαλιζόμενο ο οποίος θα καταβάλλει ασφάλιστρο $\Pi = 80$€. Η τυχαία μεταβλητή της ζημιάς $X \sim Gamma(a = 3, b = 0.04)$ ενώ ο ασφαλιζόμενος θα λάβει την απόφαση αν θα καταβάλλει το ασφάλιστρο και να ενεργοποιήσει την κάλυψη βασιζόμενος αποκλειστικά και μόνο σε εκθετική συνάρτηση ωφελιμότητας με παράμετρο $\beta = 0.006$. Κάτωθι θα δούμε αν είναι συμφέρον για τον ασφαλισμένο να καταβάλλει αυτό το ασφάλιστρο.

Απάντηση:

Καθώς η $X \sim Gamma(a = 3, b = 0.04)$ θα υπολογίσουμε την $M_x(\beta)$ στο σημείο $\beta = 0.006$

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= E(e^{tX}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tX} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot b^a} x^{a-1} e^{-\frac{x}{b}}\, dx \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot b^a} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x}{b/(1-tb)}} x^{a-1}\, dx \\
&= \frac{\left(\frac{b}{1-tb}\right)^a}{b^a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha) \cdot \left(\frac{b}{1-tb}\right)^a} e^{-\frac{x}{b/(1-tb)}} x^{a-1}\, dx \\
&= \frac{\left(\frac{b}{1-tb}\right)^a}{b^a}
\end{aligned}
$$

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{1 - t \cdot b}\right)^a = \left(\frac{b}{b-t}\right)^a$$

$$M_X(\beta) = \left(\frac{b}{b-\beta}\right)^a$$

$$M_X(0{,}006) = \left(\frac{0.04}{0.04 - 0.006}\right)^3 = 1{,}17647^3 = 1{,}62833$$

Το μέγιστο ασφάλιστρο που είναι διατεθειμένος να καταβάλλει ο ασφαλιζόμενος είναι

$$
\begin{aligned}
\Pi_0 &= \beta^{-1} \cdot \log[M_X(\beta)] \\
&= \frac{1}{0.006} \cdot log(1.628332994094097293) = 81.25946475.
\end{aligned}
$$

Επειδή $81.25946475 = \Pi_0 > \Pi = 80$, επομένως το ασφαλιστικό πρόγραμμα είναι συμφέρον.

**Τετραγωνική (Quadratic)**

Ακολουθούν και άλλες μορφές της συνάρτησης ωφελιμότητας όπως είναι η τετραγωνική συνάρτηση χρησιμότητας της μορφής $u(x) = x - bx^2$ , όπου $x < {}^{1}/_{2\beta}$ , $\beta > 0$. Ένα μειονέκτημα αυτής είναι πως δεν εφαρμόζεται σε περιπτώσεις που οι ζημιές κατανέμονται σε όλο το εύρος τιμών των πραγματικών αριθμών.

**<u>Παράδειγμα 2.5</u>**

Ένας επενδυτής ο οποίος μπορεί να διαθέσει $W = 1000$ έχει να επιλέξει μεταξύ δύο προγραμμάτων των οποίων τα χαρακτηριστικά παρουσιάζονται κάτωθι. $X_1$ αναμενόμενη απόδοση $E(X_1) = 200$ με διακύμανση $V(X_1) = 30$, ενώ $E(X_2) = 202$ . Βασιζόμενοι αποκλειστικά και μόνο στο γεγονός ότι η απόφαση βασίζεται στην τετραγωνική συνάρτηση ωφελιμότητας με παράμετρο $\beta = 0.0004$ μας ενδιαφέρει να δούμε πάνω από ποιο ποσό της $V(X_2)$ ο επενδυτής θα επιλέξει το πρόγραμμα 1.

Απάντηση:

Όπως είναι λογικό ο επενδυτής θα επιλέξει το πρώτο πρόγραμμα όταν

$$E[u(W + X_1)] > E[u(W + X_2)] \Leftrightarrow$$

$$E[(1000 + X_1 - \beta(1000 + X_1)^2)] > E[(1000 + X_2 - \beta(1000 + X_2)^2)] \Leftrightarrow$$

$$E\left[\left(1000 + X_1 - \beta 1000^2 - 2\beta 1000 X_1 - \beta {X_1}^2\right)\right] > E\left[\left(1000 + X_2 - \beta 1000^2 - 2\beta 1000 X_2 - \beta {X_2}^2\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$E[X_1](1 - 2000\beta) - \beta\, E[X_1^2] > E[X_2](1 - 2000\beta) - \beta\, E[X_2^2] \Leftrightarrow$$

$$E[X_2^2] > (E[X_2] - E[X_1])(\beta^{-1} - 2000) + E[X_1^2] \Leftrightarrow E[X_2^2] > (202 - 200)\left(\frac{1}{0.0004} - 2000\right) + (30 + 200^2) \Leftrightarrow E[X_2^2] > 41030 \Leftrightarrow$$

$$V[X_2] = E[X_2^2] - E[X_2]^2 > 41030 - 202^2 \Leftrightarrow$$

$$V[X_2] > 226$$

Συνεπώς ο επενδυτής θα επιλέξει το πρώτο πρόγραμμα για τις τιμές διακύμανσης που ξεπερνούν τις 226 νομισματικές μονάδες του δεύτερου προγράμματος.

**Λογαριθμική (Logarithmic)**

Η λογαριθμική συνάρτηση ωφελιμότητας έχει τη μορφή

$$u(x) = \beta \cdot log\ (x),\ x > 0, \beta > 0.$$

Σε αυτή την περίπτωση όπως είναι αντιληπτό η συνάρτηση ωφελιμότητας ορίζεται μόνο για θετικές τιμές της μεταβλητή Χ, και είναι η μέθοδος που χρησιμοποιείται περισσότερο από όσους δεν αναλαμβάνουν κίνδυνο καθώς: $u'(x) = \frac{\beta}{x} > 0$ και $u''(x) = \frac{-\beta}{x^2} < 0$ και ο συντελεστής αποστροφής κινδύνου είναι $r(x) = \frac{1}{x}$.

**<u>Παράδειγμα 2.6</u>**

Με βάση την λογαριθμική συνάρτηση χρησιμότητας και θεωρώντας έναν επενδυτή ο οποίος είναι διατεθειμένος να επενδύσει σε μια από τις n εταιρίες, θα αποδείξουμε πως η επένδυση είναι ανεξάρτητη από τον πλούτο. Συμβολικά θεωρούμε W τον πλούτο, W $X_i$ το αποτέλεσμα της εκάστοτε επένδυσης.

Απάντηση:

Η αναμενόμενη ωφελιμότητα είναι

$$E[u(WX_i)\ ] = \ E[\beta\ log(\ WX_i)] = \ \beta\ E[log\ W] + \beta\ E[log\ X_i]$$

Επομένως ο επενδυτής θα προτιμήσει μια επένδυση i από την επένδυση j όταν

$$E[u(WX_i)\ ] > \ E\big[u\big(WX_j\big)\ \big] \Leftrightarrow$$

$$\beta\ E[log\ W] + \beta\ E[log\ X_i] > \ \beta\ E[log\ W] + \beta\ E\big[log\ X_j\big] \Leftrightarrow$$

$$E[log\ X_i] > \ E[log\ X_j],$$

Δηλαδή το αποτέλεσμα είναι ανεξάρτητο από το W.

**Κλασματική (Fractional power)**

Τέλος συναντάμε την κλασματική συνάρτηση ωφελιμότητας που ισούται με $u(x) = x^{\beta}$, για $x > 0\ και\ 0 < \beta < 1$.

**<u>Παράδειγμα 2.7</u>**

Ένα άτομο αντιμετωπίζει έναν κίνδυνο ο οποίος κατανέμεται ομοιόμορφα στο διάστημα $(0{,}500)$. Υπάρχει η δυνατότητα να ασφαλιστεί με το παρακάτω είδος ασφάλισης: για κάθε απαίτηση θα χρειαστεί να πληρώσει $Y = min(X, 250)$. Θεωρώντας ότι η συνάρτηση ωφελιμότητας που χρησιμοποιείται ώστε να αποφασίσει είναι $u(x) = x^{\frac{7}{10}}$ θα εξετάσουμε εάν είναι πρόθυμος να πληρώσει ποσό 220 για να αγοράσει την ασφάλιση όταν ο πλούτος ανέρχεται στα $W = \ 700$.

Απάντηση:

Στην περίπτωση που δεν θα ασφαλιστεί

$$E[u(700-X)] = \frac{1}{500}\int_0^{500}(700-x)^{\frac{7}{10}}\,dx$$

$$= \frac{-10}{500\cdot 17}\left[(700-x)^{\frac{17}{10}}\right]\begin{matrix}500\\0\end{matrix}$$

$$= \frac{-10}{8500}[8.161{,}14 - 68.654{,}9] = \frac{-10}{8500}\cdot 60.493{,}76 \Leftrightarrow$$

$$E[u(700-x)] = 71{,}169.$$

Στην περίπτωση που θα ασφαλιστεί

$$E = [u(700-220-Y)] = \frac{1}{500}[\int_0^{250}(480-x)^{\frac{7}{10}}\,dx + \int_{250}^{500}(280)^{\frac{7}{10}}\,dx$$

$$= \frac{1}{500}\left\{\frac{-10}{17}\left[(480-x)^{\frac{17}{10}}\right]\begin{matrix}250\\0\end{matrix} + 250\cdot 280^{\frac{7}{10}}\right\}$$

$$= \frac{1}{500}\left\{\frac{-10}{17}\left[(480-250)^{\frac{17}{10}} - 480^{\frac{17}{10}}\right] + 250\cdot 280^{\frac{7}{10}}\right\}$$

$$= \frac{1}{500}\left\{\frac{10}{17}[36.150{,}150 - 10.349{,}928\,] + 12.910{,}725\right\}$$

$$E = [u(700-220-Y)] = 56{,}175.$$

Καθώς $E[u(700-x)] > E[u(700-220-Y)]$ δεν τον συμφέρει να πληρώσει 220€ για να ασφαλιστεί.

Στα επόμενα κεφάλαια που ακολουθούν θα δοθούν τα κυριότερα μέτρα κινδύνου, καθώς και η εφαρμογή τους σε υποθετικό χαρτοφυλάκιο, με την χρήση του στατιστικού πακέτου R.

# 3 Αξία σε κίνδυνο VaR (Value at Risk)

## 3.1 Κατηγορίες κινδύνου

Η μέτρηση και η αντιστάθμιση του κινδύνου αποτελούν σημεία αναφοράς για την πορεία των χρηματοπιστωτικών ιδρυμάτων, και αντικείμενο μελέτης των οικονομικών αναλυτών. Με τον όρο κίνδυνο αναφερόμαστε στα μη προβλέψιμα γεγονότα που μπορούν να εμφανιστούν και να επηρεάσουν αρνητικά την αξία του χαρτοφυλακίου μας. Οι κατηγορίες κινδύνου ποικίλουν και συνοπτικά θα αναφέρουμε μερικές οι οποίες μπορούν να αποβούν καταστροφικές για το χαρτοφυλάκιό μας.

Στις κατηγορίες αυτές που προαναφέρθηκαν περιέχεται ο κίνδυνος συναλλάγματος (foreign exchange risk), ο κίνδυνος ρευστότητας (liquidity risk), επιτοκιακός κίνδυνος (interest rate risk), πιστωτικός κίνδυνος (credit risk), ο κίνδυνος θνησιμότητας (mortality risk), λειτουργικός κίνδυνος (operational risk), ο καταστροφικός κίνδυνος (catastrophic risk), κίνδυνος συγκέντρωσης (concentration risk) και άλλες κατηγορίες που θα αναφερθούν συνοπτικά ώστε να γίνει κατανοητή η εμφάνισή τους σε μια επιχείρηση και πώς μπορεί να μας επηρεάσουν.

- Λειτουργικός κίνδυνος: εμφανίζεται από ζημιές που πηγάζουν από απρόσμενα λάθη προερχόμενα από το εσωτερικό της ασφαλιστικής επιχείρησης. Τέτοια παραδείγματα μπορεί να είναι εσωτερικά προβλήματα στα λειτουργικά συστήματα, λάθη προσωπικού, απάτη διαμεσολαβητών και υπαλλήλων κ.α.

- Κίνδυνος ρευστότητας: εμφανίζεται στην περίπτωση που η ασφαλιστική επιχείρηση δεν έχει αρκετά αποθέματα και γενικότερα κεφάλαια ώστε να μπορεί να ανταπεξέλθει στις μελλοντικές της υποχρεώσεις. Οι χρηματοροές παρουσιάζουν τις αδυναμίες του χαρτοφυλακίου και τις δυνατότητες επένδυσης της ασφαλιστικής επιχείρησης. Παρόλα αυτά οι ασφαλιστικές επιχειρήσεις έχουν υποχρεωθεί από το Solvency 2 να κρατούν επαρκή κεφάλαια ώστε να μπορούν να ανταπεξέλθουν στις υποχρεώσεις τους.

- Κίνδυνος θνησιμότητας: αντανακλά τις μεταβλητές που επηρεάζουν και εντείνουν την θνησιμότητα σε βαθμό που μπορεί να προκαλέσει ζημιές στην ασφαλιστική επιχείρηση. Συγκεκριμένα το πρόγραμμα της μικτής ασφάλισης θα πληγεί από ένα τέτοιο είδος κινδύνου καθώς βασίζεται στα ασφάλιστρα των ασφαλισμένων και θα έχει μειωμένα έσοδα σε σχέση με τις παροχές που θα πρέπει να καταβάλλει.

- Ο Κίνδυνος Καταστροφικού Γεγονότος: είναι η περίπτωση να συμβεί ένα ακραίο καταστροφικό γεγονός (π.χ. σεισμός, τρομοκρατική ενέργεια, ασθένεια κ.τ.λ.) με αποτέλεσμα να αυξηθούν απρόσμενα οι θάνατοι και οι εταιρία να είναι υποχρεωμένη να καταβάλει τις αποζημιώσεις νωρίτερα απ' ότι ανέμενε.

- Ο Κίνδυνος Επιτοκίων: επηρεάζει τις τιμές των περιουσιακών στοιχείων και των υποχρεώσεων. Σε μία ενδεχόμενη μείωση των επιτοκίων παρατηρούμε πως και τα περιουσιακά στοιχεία και οι υποχρεώσεις της εταιρίας αυξάνονται. Οι επενδύσεις αυξάνονται με ταχύτερο ρυθμό απ' ότι οι ασφαλιστικές υποχρεώσεις συνεπώς δεν υπάρχει κίνδυνος για την εταιρία. Σε μία ενδεχόμενη αύξηση των επιτοκίων οι υποχρεώσεις μειώνονται λιγότερο από τα περιουσιακά στοιχεία και η εταιρία αντιμετωπίζει επιτοκιακό κίνδυνο.

- Ο Κίνδυνος Συναλλάγματος: εμφανίζεται στην περίπτωση που μια ασφαλιστική επιχείρηση έχει επενδύσει σε ξένο νόμισμα. Μια ενδεχόμενη μεταβολή της συναλλαγματικής ισοτιμίας μπορεί να πλήξει την επένδυση. Παρατηρούμε πως μία μείωση της συναλλαγματικής ισοτιμίας θα επιφέρει ζημία στην ασφαλιστική επιχείρηση.

- Ο Κίνδυνος Πιστωτικού Περιθωρίου: είναι η διαφορά μεταξύ της ακίνδυνης απόδοσης και της απόδοσης εταιρικών ομολόγων. Εμφανίζεται μόνο στις επενδύσεις και όχι στις υποχρεώσεις καθώς προεξοφλούμε με το ακίνδυνο επιτόκιο.

- Ο Κίνδυνος Συγκέντρωσης: εμφανίζεται όταν μεγάλο ποσοστό των επενδύσεων τοποθετείται σε συγκεκριμένη τιτλοποίηση ή σε ένα σύνολο τίτλο που ανήκουν σε έναν όμιλο υπάρχει αλληλεξάρτηση. Θεωρούμε πως κίνδυνο συγκέντρωσης εμφανίζουν προϊόντα με πιστωτική διαβάθμιση ενώ τα κρατικά ομόλογα δεν τον διατρέχουν. Η ασφαλιστική επιχείρηση έχει κίνδυνο συγκέντρωσης στα εταιρικά ομόλογα AA, AAA που κατέχει.

Λόγω των ανωτέρω οι ερευνητές στην προσπάθειά τους να αντιμετωπίσουν και να μετρήσουν τον κίνδυνο ανέπτυξαν κάποια μέτρα κινδύνου, ένα εκ των οποίων θα μας απασχολήσει στο παρόν κεφάλαιο είναι το VaR (Value at Risk) ή αλλιώς Αξία σε Κίνδυνο. Εν συντομία στην παρούσα εργασία η αναφορά σε αυτό θα γίνεται με τα αρχικά του VaR. Το VaR είναι ένα από τα πλέον διαδεδομένα μέτρα κινδύνου, με απλή εφαρμογή και συνοψίζει σε έναν αριθμό την έκθεση στον κίνδυνο.

## 3.2 Ιστορική αναδρομή VaR

Την δεκαετία του 90 όπου εμφανίστηκε ένας μεγάλος αριθμός πτωχεύσεων σε μεγάλους οργανισμούς λόγω της ανεπάρκειας εσωτερικού ελέγχου σε ανεπτυγμένες οικονομικά χώρες και μη, όπως για παράδειγμα η κρίση αποταμιεύσεων στις ΗΠΑ καθώς και η κρίση τραπεζικού συστήματος στην Ιαπωνία, κατέστη επιτακτική η ανάγκη για την διαχείριση και μέτρηση του κινδύνου από τους χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς αλλά ακόμη και από τις επιχειρήσεις.

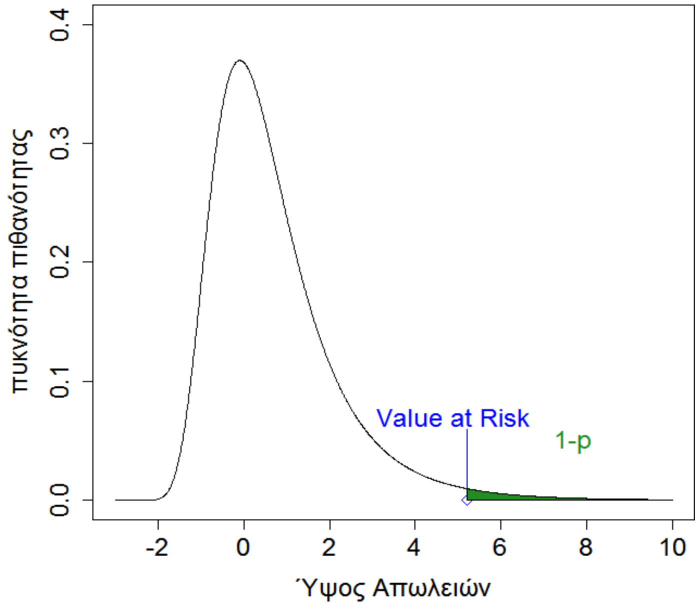
Την δεκαετία εκείνη αναπτύχθηκε η μελέτη της Αξίας σε Κίνδυνο η οποία επικεντρώνεται στην μελέτη της ζημιάς που θα προκύψει σε μία επιχείρηση με βάση μια λογική πιθανότητα. Αναπτύχθηκε κυρίως στους χρηματοπιστωτικούς κινδύνους αλλά λόγω της εύκολης εφαρμογής της και της απλότητας της ακόμη και από μη ειδικούς στην διαχείριση κινδύνου γρήγορα χρησιμοποιήθηκε από εταιρίες που εμπορεύονται χρηματοοικονομικά υποκείμενα και ακόμη από επιχειρήσεις διαφόρων κλάδων.

## 3.3 Ορισμός VaR

Δίνοντας τον ορισμό της μπορούμε να πούμε πως υπολογίζει την μέγιστη ζημιά την οποία εμείς οριοθετούμε, βάση της οποίας είναι η ακραία απώλεια που μπορεί να συμβεί στο χαρτοφυλάκιο μας για μία συγκεκριμένη περίοδο (για παράδειγμα σε διάστημα μιας εβδομάδας, ενός μήνα κτλ), για ένα συγκεκριμένο διάστημα εμπιστοσύνης. Αποτελείται από δύο βασικά χαρακτηριστικά, συγκεκριμένα αποτίμηση του κινδύνου σε νομισματικές μονάδες, δηλαδή ποιο είναι το ακριβές ποσό της απώλειας μιας συγκεκριμένης περιόδου καθώς και ποια είναι η πιθανότητα το ποσό η απώλεια να είναι μεγαλύτερη του ποσού που έχουμε ορίσει, συγκεκριμένα το VaR είναι το $(100 - p)\%$ ποσοστημόριο της κατανομής των ζημιών του χαρτοφυλακίου, όπου $\alpha$ είναι ο συντελεστής εμπιστοσύνης.

**Παράδειγμα 3.1**

Η VaR είναι στην ουσία το άνω $p$-ποσοστημόριο της κατανομής των ζημιών, για $0 < p < 1$. Για παράδειγμα, ορίζοντας ένα μέγιστο κατώφλι 200 εκατομμυρίων Ευρώ που είναι το χείριστο σενάριο απώλειας του χαρτοφυλακίου μας στην μελέτη διαστήματος ενός μήνα έχει πιθανότητα μόλις 1-p=5% να χαθεί αυτό το ποσό στο διάστημα ενός μήνα.



(Καραμέρος (2015))

Η χρήση της μεθόδου κατέστη αναγκαία δεδομένης της πίεσης που ασκούν οι εποπτικές αρχές για την καλύτερη διαχείριση των χρηματοοικονομικών κινδύνων, ιδιαίτερα καθώς η μεταφορά χρηματοοικονομικών προϊόντων από χώρα σε χώρα δημιουργεί μεγαλύτερη έκθεση στον κίνδυνο, και τέλος με την ραγδαία εξέλιξη της τεχνολογικής επιστήμης είναι πολύ πιο εύκολη η μελέτη και η διαχείριση του κινδύνου.

Η VaR χρησιμοποιείται κυρίως στα κάτωθι

- ✓ Χρηματοπιστωτικά ιδρύματα, τέτοια ιδρύματα είναι παραδείγματος χάριν οι Τράπεζες, οι οποίες έχουν μεγάλα χαρτοφυλάκια και αντιμετωπίζουν πολλούς κινδύνους.
- ✓ Εποπτικές Αρχές, δεδομένης της υποχρέωσης του κάθε ιδρύματος να έχει διασφαλίσει ένα κεφάλαιο ως αποθεματικό για την αντιμετώπιση ενός κινδύνου.
- ✓ Επιχειρήσεις, για κάθε επιχείρηση είναι ωφέλιμη η διασφάλιση κινδύνου και η προετοιμασία αντιμετώπισης του δεδομένων των συναλλαγών που πραγματοποιούνται.
- ✓ Διαχειριστές Στοιχείων Ενεργητικού, με την μέθοδο VaR δίδεται η δυνατότητα μέτρησης του κινδύνου στο ενεργητικό της επιχείρησης αλλά και ατομικά του ιδίου διαχειριστή.

Αναφορικά με τα στοιχεία που χρειάζονται για τον υπολογισμό του VaR χρειάζονται τα κάτωθι

- ❖ Κατανομή των ζημιών του χαρτοφυλακίου,
- ❖ Περίοδος υπολογισμού (συχνότητα)
- ❖ Απόδοση χαρτοφυλακίου,
- ❖ Κίνδυνος χαρτοφυλακίου.

## 3.4 Μέθοδοι Υπολογισμού VaR

Κάτωθι θα παρουσιάσουμε μεθόδους υπολογισμού του VaR

Οι περισσότερο διαδεδομένες μέθοδοι υπολογισμού του VaR είναι η παραμετρική μέθοδος (parametric method), μέθοδος ιστορικής προσομοίωσης (historical simulation method), καθώς και η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo (Monte Carlo simulation method), (Μαραγιάννη (2012)). Η κάθε μια μέθοδος έχει θετικά και αρνητικά χαρακτηριστικά, σε καμία περίπτωση όμως δεν ανταγωνίζεται η μία την άλλη, αλλά η κάθε μια εφαρμόζεται καλύτερα ανάλογα κατά περίπτωση.

Συγκεκριμένα η παραμετρική μέθοδος έχει καλύτερη εφαρμογή όταν οι αποδόσεις ακολουθούν την κανονική κατανομή. Η μέθοδος ιστορικής προσομοίωσης υπολογίζει καλύτερα παρελθοντικές αποδόσεις ενώ αντίθετα η μέθοδος προσομοίωσης Monte Carlo μας εξυπηρετεί καθώς έχει την δυνατότητα αύξησης του πλήθους των παρατηρήσεων.

*<u>Παραμετρική Μέθοδος</u>*.

Η ανωτέρω μέθοδος είναι κατάλληλη όταν είναι γνωστή η κατανομή, δεν συνίσταται όμως για την περίπτωση μικρού αριθμού παρατηρήσεων.

Τα βήματα για τον υπολογισμό της είναι τα εξής:

Ορισμός παραγόντων κινδύνου, εντοπισμός ευαισθησίας των περιουσιακών στοιχείων έναντι κάθε κινδύνου. Εν συνεχεία υπολογισμός της τυπικής απόκλισης ιστορικών στοιχείων με τους παράγοντες κινδύνου. Για τον υπολογισμό της τυπικής απόκλισης πολλαπλασιάζουμε τις ευαισθησίες με τις τυπικές αποκλίσεις συνυπολογίζοντας τις συσχετίσεις. Τέλος υποθέτουμε το πλήθος των ζημιών ακολουθούν την κανονική κατανομή, προσεγγίζοντας το 99% του VaR μέχρι και 2,3 φορές την τυπική απόκλιση.

Ο λόγος χρησιμοποίησής της έγκειται στο γεγονός πως μπορεί να υπολογιστεί γρήγορά καθώς και η απλότητα της.

*<u>Μέθοδος Ιστορικής προσομοίωσης</u>*

Συλλέγονται ημερήσια δεδομένα, καθώς η επιλογή της συχνότητας του δείγματος επηρεάζει την εκτίμηση του VaR. Στην εν λόγω μέθοδο επιθυμούμε την καταγραφή όσο το δυνατόν περισσότερων παρατηρήσεων για την εκτίμηση των σπάνιων γεγονότων. Η εκτίμηση μεγάλων περιόδων παρέχει καλύτερη πληροφόρηση καθώς περιλαμβάνει μεγάλο δείγμα παρατηρήσεων. Η υπόθεση αυτής της μεθόδου στηρίζεται στο γεγονός ότι τα μελλοντικά στοιχεία μοιάζουν με τα στοιχεία του παρελθόντος καθώς και τα δεδομένα του παρελθόντος μπορούν να μας αποδώσουν έγκυρη πληροφόρηση για την αποτίμηση του κινδύνου.

Τα βήματα για τον υπολογισμό της αξίας σε κίνδυνο είναι:

- Συλλογή ιστορικών δεδομένων
- Προσαρμογή δεδομένων ώστε να συμβαδίζουν με τα δεδομένα της αγοράς,
- Εμπειρική κατανομή δεδομένων,
- Ορισμός επιπέδου σημαντικότητας και υπολογισμός του VaR.

Η μέθοδος ιστορικής προσομοίωσης είναι αξιόπιστη δεδομένου ότι έχουμε πλήθος ιστορικών στοιχείων χωρίς ιδιαίτερες μεταβολές. Η ανωτέρω μέθοδος είναι ιδιαίτερα προσιτή δεδομένου ότι δεν απαιτεί ιδιαίτερες γνώσεις για την εφαρμογή της, και μπορεί να μεταλαμπαδευτεί σε άτομα που δεν είναι γνώστες του αντικειμένου, αλλά είναι επιτακτική η ανάγκη να γνωρίζουν. Επιπλέον η συλλογή των δεδομένων είναι ιδιαίτερα εύκολη καθώς μπορούν να χρησιμοποιηθούν οποιαδήποτε δημοσιευμένα στοιχεία.

Από την άλλη πλευρά δεδομένου ότι τα αποτελέσματα αυτής της μεθόδου στηρίζονται αποκλειστικά και μόνο στην συλλογή ιστορικών στοιχείων δεν μπορούν να είναι απόλυτα αντιπροσωπευτικά, καθώς δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν τα δεδομένα αυτά προέρχονται από περιόδους μεγάλων μεταβολών ή αντίστοιχα περιόδων που δεν υπήρχαν έντονες διακυμάνσεις με συνέπεια να έχουμε υψηλές ή αντίστοιχα πολύ χαμηλές τιμές του VaR. Επιπλέον δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τι θα συμβεί αν υπάρξει μια μεγάλη μεταβολή στην αγορά για μια συγκεκριμένη περίοδο. Τέλος ένα ακόμη ζήτημα που δημιουργείται είναι ποια θα είναι η ορθή επιλογή διαστήματος των παρατηρήσεων που θα χρησιμοποιηθούν, δηλαδή αν θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν ημερήσιες καταγραφές, μηνιαίες κ.α.

*Μέθοδος Monte Carlo*

Η μέθοδος Monte Carlo παρουσιάζει κοινά στοιχεία με την μέθοδο ιστορικής Προσομοίωσης καθώς επιλέγεται μια κατανομή που παριστά τις μεταβολές των τιμών και εν συνεχεία προσομοιώνουμε τις τιμές της κατανομής για να καταγράψουμε τα υποθετικά κέρδη ή τις ζημίες που θα προκύψουν.

Για τον υπολογισμό της θα πρέπει να ορισθεί στοχαστική διαδικασία για τους παράγοντες κινδύνου, καθώς και να γίνει προσομοίωση των χρηματοοικονομικών μεταβλητών.

Η ανωτέρω μέθοδος είναι ιδιαίτερα χρονοβόρα καθώς απαιτούνται πολλές προσομοιώσεις συνάμα όμως εξαρτάται και από την πολυπλοκότητα του χαρτοφυλακίου που εξετάζουμε.

Στην πραγματικότητα η προσομοίωση Monte Carlo είναι ένα δείγμα των τιμών της αγοράς προσαρμοσμένο σε μια κατανομή.

## 3.5 Ιδιότητες μέτρων κινδύνου

Σε κάθε περίπτωση τα μέτρα κινδύνου θα πρέπει να ικανοποιούν ορισμένες ιδιότητες . Παρακάτω θα αναφερθούν ορισμένες ιδιότητες καθώς και η ερμηνεία τους, ορίζοντας ως μέτρο κινδύνου την συνάρτηση $\rho[X]$.

- Μη υπερβολικό περιθώριο ασφάλειας (Non-excessive loading or no-ripoff)
  $$\rho[X] \leq \max[X] = F_x^{-1}(1) .$$
  Με την ανωτέρω ιδιότητα φαίνεται πως ο κίνδυνος είναι μικρότερος ή ίσος με την μέγιστη ζημιά.
- Μη αρνητικό περιθώριο ασφαλείας (Non negative loading)
  $$\rho[X] \geq E[X].$$
  Από την παραπάνω ανισότητα συμπεραίνουμε πως το μέτρο κινδύνου θα πρέπει να ξεπερνά την μέση αναμενόμενη ζημία, διότι αν υπάρξει το αντίστροφο μελλοντικά θα χρεοκοπήσει το χαρτοφυλάκιο μας.
- Προσθετικότητα (Translativity)
  $$\rho[X + c] = \rho[X] + c.$$

Από την ανωτέρω ιδιότητα συμπεραίνουμε πως για ενδεχόμενη αύξηση των υποχρεώσεων ύψους c, θα πρέπει να υπάρξει αύξηση του κεφαλαίου κατά το ίδιο ποσό.

- Σταθερότητα (Constancy)

$$\rho[c] = c.$$

Για να αντιμετωπιστεί ο κίνδυνος, θα πρέπει να υπάρχει το αντίστοιχο κεφάλαιο.

- Υποπροσθετικότητα (Subadditivity)

$$\rho[X + Y] \leq \rho[X] + \rho[Y].$$

  Με την παραπάνω ιδιότητα συμπεραίνουμε πως με την ένωση δύο Qχαρτοφυλακίων δεν αυξάνεται ο κίνδυνος.

- Συμμονοτονική προσθετικότητα (Comonotonic additivity)
  $$\rho[X + Y] = \rho[X] + \rho[Y].$$

Σύμφωνα με την παραπάνω ιδιότητα, καταργείται η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας για συμμονοτονικές τυχαίες μεταβλητές όπου συμμονοτονικές μεταβλητές καλούνται εκείνες με θετική εξάρτηση όπου αυτό εκφράζεται

$$(X, Y) =_d (F_x^{-1}(U), F_Y^{-1}(U)).$$

Όπου η U ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο (0,1). Οι συμμονοτονικοί κίνδυνοι δεν μπορούν να αντισταθμίσουν ο ένας τον άλλον.

- Επαναληψιμότητα (Iterativity)

$$\rho[X] = \rho[\rho[X|Y]].$$

Το ασφάλιστρο για την X υπολογίζεται σε δύο στάδια.

- Θετική ομοιογένεια (Positive homogeneity)

$$\rho[cX] = c\rho[X].$$

Η ανωτέρω ιδιότητα αποτελεί απόρροια της συμμονοτονικής προσθετικότητας.

- Μονοτονία (Monotonicity)

$$\Pr[X \leq Y] = 1 \Rightarrow \rho[X] \leq \rho[Y].$$

Έστω ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο $Z_1$ και ένα χαρτοφυλάκιο $Z_2$, με το πρώτο να φέρει μικρότερες αποδόσεις $\mathrm{Z}_1 < \mathrm{Z}_2$ τότε ο κίνδυνος του πρώτου χαρτοφυλακίου είναι μεγαλύτερος από αυτόν του δεύτερου $\rho(Z_1) \geq \rho(Z_2)$.

- Συνέχεια σύγκλισης κατά κατανομή

$$\lim_{n\to\infty} \rho[X_n] = \rho[X].$$

Όπου $X_n$ ακολουθία κινδύνων η οποία συγκλίνει κατά κατανομή $X_n \to_d X$

- Αντικειμενικότητα (Objectivity)

$$X =_d Y \Rightarrow \rho[X] = \rho[Y].$$

Σύμφωνα με την ανωτέρω ιδιότητα $\rho[X]$ εξαρτάται από την συνάρτηση κατανομής του X, συνεπώς εμπεριέχονται όλα τα στοιχεία που θα χρησιμοποιηθούν για την μέτρηση κινδύνου του X.

## 3.6 Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της VaR

Το παραπάνω μέτρο κινδύνου αποτελεί σημαντικό εργαλείο στην διαχείριση του κινδύνου. Συνεπώς είναι επιτακτική η ανάγκη αναφοράς των πλεονεκτημάτων της καθώς και των μειονεκτημάτων της αντίστοιχα. Υπάρχουν αρκετές μέθοδοι υπολογισμού της, αλλά η επιλογή της εκάστοτε μεθόδου εξαρτάται από την σύνθεση του χαρτοφυλακίου που μελετάμε, (Μαραγιάννη (2012)).

Συγκεκριμένα θα παρουσιασθούν πλεονεκτήματα του μέτρου κινδύνου

- Διαχείριση πληροφόρησης. Η απλότητα της συγκεκριμένης μεθόδου η οποία μπορεί να γίνει εύκολα αντιληπτή καθώς αποτυπώνει τον κίνδυνο σε έναν αριθμό την καθιστά ένα από τα σημαντικότερα εργαλεία.
- Καθορισμός ορίων διαπραγμάτευσης. Υπάρχει η δυνατότητα καθορισμού ορίου στο συνάλλαγμα και στα χρεόγραφα σύμφωνα με την VaR,και παρέχεται η δυνατότητα σύγκρισης σε διαφορετικές αγορές.
- Καθορισμός σχέσης κινδύνου και απόδοσης χαρτοφυλακίου. Με τον υπολογισμό του VaR ενός χαρτοφυλακίου μπορεί να γίνει η σύγκρισή του με ένα οποιοδήποτε άλλο χαρτοφυλάκιο.
- Κατανομή πόρων. Με τον υπολογισμό του VaR οι διαχειριστές κινδύνου είναι στην θέση να χαράξουν την στρατηγική τους πολιτική και τις επενδύσεις που μπορούν να πραγματοποιήσουν στο μέλλον για την μεγαλύτερη απόδοση του χαρτοφυλακίου.
- Συμμόρφωση με τις ρυθμιστικές αρχές. Η χρήση της VaR παρέχει γνώση για τους κινδύνους τους αγοράς. Δεδομένου αυτού τα πιστωτικά ιδρύματα μπορούν να εναρμονισθούν με τις απαιτήσεις των εποπτικών αρχών αναφορικά με τους κινδύνους που αναλαμβάνουν καθώς και της κεφαλαιακής επάρκειας που πρέπει να έχουν ώστε να είναι φερέγγυες.

Παρόλα αυτά η χρήση της μεθοδολογίας της VaR ενέχει ορισμένους κινδύνους που μπορούν να οδηγήσουν το χρηματοπιστωτικό ίδρυμα σε ανάληψη λανθασμένων αποφάσεων για την διαχείριση του κινδύνου. Ενδεικτικά θα δοθούν κάτωθι ορισμένα μειονεκτήματα της μεθόδου.

- Στην περίπτωση μεταβολής της απόδοσης ενός περιουσιακού στοιχείου λόγω μιας απροσδόκητης αλλαγής η πρόβλεψη της VaR μπορεί να αποφέρει λανθασμένη πληροφορία.
- Το ανωτέρω μέτρο κινδύνου μπορεί να υπολογίσει την μέγιστη ζημιά που μπορεί να υποστεί ένας οργανισμός για μία συγκεκριμένη χρονική περίοδο δεδομένου ότι τα περιουσιακά στοιχεία του οργανισμού θα πωληθούν στις τρέχοντες αξίες της αγοράς. Σε έναν οργανισμό ο οποίος έχει μη ρευστοποιήσιμα στοιχεία ο υπολογισμός της μπορεί να υποεκτιμήσει την αναμενόμενη ζημιά.
- Ακόμη ένα μειονέκτημα της μεθόδου είναι πως κατά περίπτωση δεν λαμβάνεται υπόψη ο πιστωτικός κίνδυνος όπως για παράδειγμα στην μέθοδο προσομοίωσης Monte Carlo, συνεπώς θα υπάρξει μεγάλη απόκλιση από την εκτίμηση της μέγιστης ζημιάς.

## 3.7 Value at Risk και εφαρμογή στην Φερεγγυότητα ΙΙ

Με την χρήση του νομοθετικού πλαισίου της Φερεγγυότητας ΙΙ (Solvency II) (Χατζηβασίλογλου, 2013) το οποίο εφαρμόστηκε σε όλες τις ασφαλιστικές επιχειρήσεις από την 1/1/2016 στόχος ήταν

- Η μεγαλύτερη προστασία των ασφαλισμένων,
- Η χρηματοπιστωτική σταθερότητα,
- Η ύπαρξη δίκαιων και σταθερών αγορών,
- Καθώς και η ενδυνάμωση της ανταγωνιστικότητας των Ευρωπαϊκών ασφαλιστικών εταιριών σε διεθνές επίπεδο.

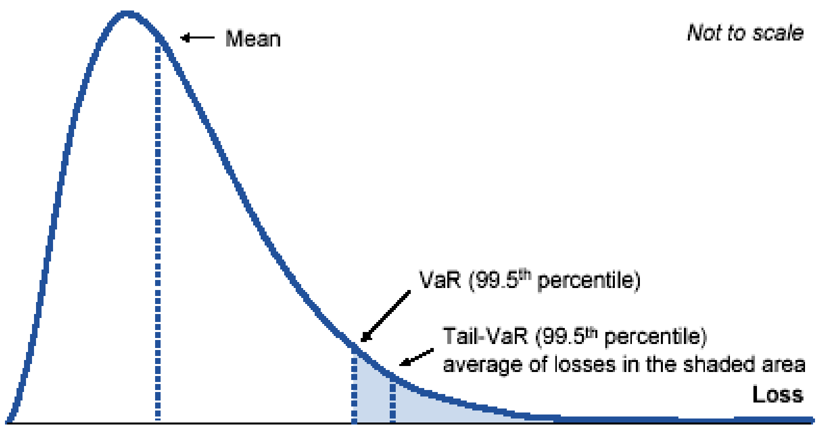
Η Φερεγγυότητα ΙΙ αποτελείται από τρείς πυλώνες που παρουσιάζονται κάτωθι

- Ποσοτικές απαιτήσεις,
- Ποιοτικές απαιτήσεις,
- Δημοσιοποίηση και αναφορά.

Στον πυλώνα Ι (ποσοτικές απαιτήσεις), περιλαμβάνονται οι κεφαλαιακές απαιτήσεις που θα πρέπει να πληρούν οι ασφαλιστικές εταιρίες ώστε να είναι φερέγγυες και να αποφευχθεί η παρέμβαση των εποπτικών αρχών που μπορεί να οδηγήσει στην ανάκληση άδειας λειτουργίας της εταιρίας. Σε αυτή την περίπτωση μια ασφαλιστική εταιρία μπορεί να νιώσει ασφαλής με κεφάλαια ίσα με το SCR (Solvency Capital Requirement), όπου το SCR είναι το VaR των βασικών ιδίων κεφαλαίων, με επίπεδο εμπιστοσύνης 99,5% σε περίοδο ενός έτους υπό την παραδοχή της συνεχιζόμενης λειτουργίας (going concern).

Το SCR αποτελεί μια υπολογιζόμενη συνολική απαίτηση που περιλαμβάνει στους υπολογισμούς της όλους τους κινδύνους που μπορούν να ποσοτικοποιηθούν, όλες τις ζημιές που δύναται να εμφανιστούν εντός ενός έτους, καθώς και την επίπτωση των τεχνικών μείωσης κινδύνου (π.χ αντασφάλιση). Όπως προαναφέρθηκε υπολογίζεται τουλάχιστον μία φορά για κάθε έτος, καθώς επίσης επαναϋπολογίζεται στην περίπτωση διαφοροποίησης του προφίλ κινδύνου.

(Καραμέρος (2015)).



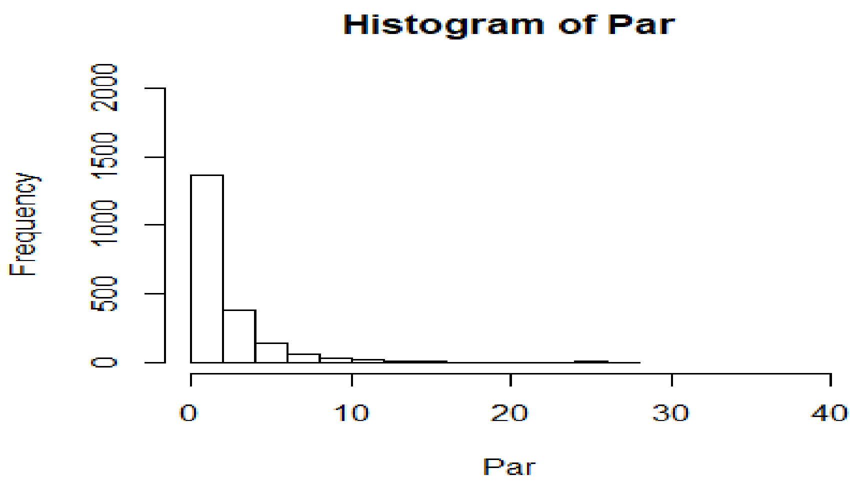
Όσον αφορά τώρα τις ελάχιστες κεφαλαιακές απαιτήσεις MCR (Minimum Capital Requirement), αποτελούν το VaR των βασικών ιδίων κεφαλαίων σε διάστημα εμπιστοσύνης 85%, για την περίοδο ενός έτους. Αποτελεί το απόλυτο κατώτατο όριο και στην περίπτωση μη τήρησής τους επεμβαίνει η εποπτική αρχή με την άρση της αδείας λειτουργίας. Το MCR συνήθως υπολογίζεται σε τριμηνιαία βάση.

## 3.8 Εφαρμογές-Παραδείγματα

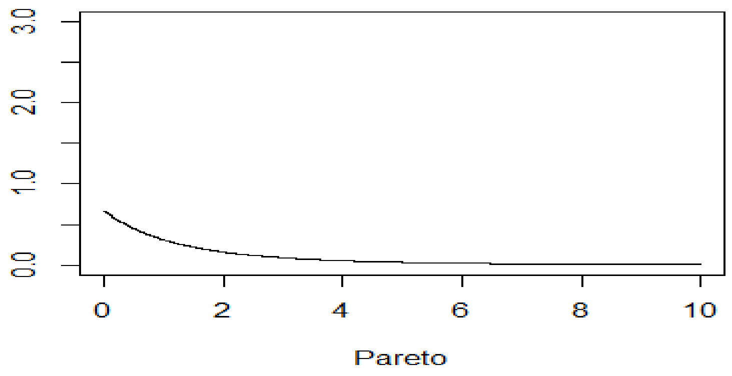
Υποθέτοντας χαρτοφυλάκιο με n=2.000 πλήθος απαιτήσεων (αποζημιώσεων), και κάνοντας χρήση του στατιστικού πακέτου actuar στην R, προσομοιώνουμε την κατανομή Pareto, την κατανομή Gamma και την κατανομή Lognormal κάνοντας την υπόθεση της ίδιας μέσης τιμής $E = 2.000$, θα υπολογίσουμε το Value at Risk, σε επίπεδο σημαντικότητας 95%, 97,5%, 99% και τέλος 99,9%.

Θα δοθεί ο κώδικας που χρησιμοποιήθηκε για την κατανομή Pareto, την κατανομή Gamma, καθώς και την κατανομή Lognormal.

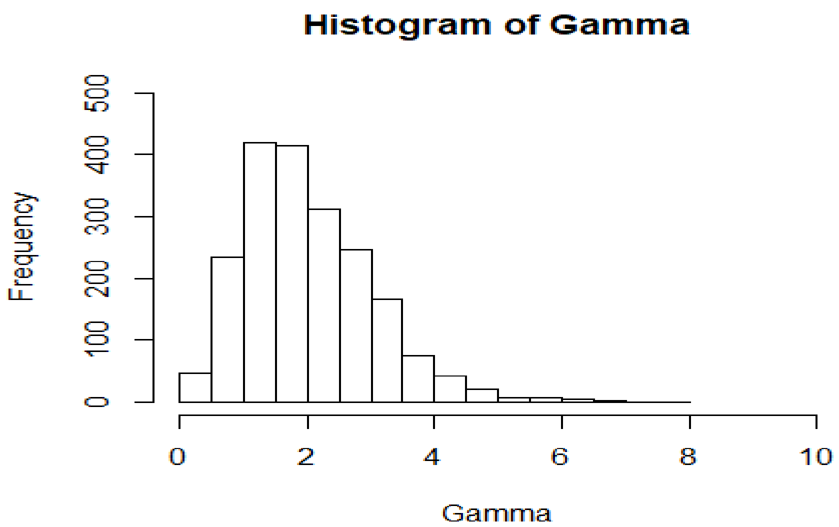
```
#PARETO
n=2000;set.seed(10)
a<-3;l<-4;q<-0.99
Par<-rpareto(n,a,l)
mean(Par)
hist(Par,xlim=c(0,40),ylim=c(0,2000))
quantile(Par,q)
plot(x,dpareto(x,a,l),type="l",,ylim=c(0,3),xlab="Pareto",ylab="")
plot(x,ppareto(x,a,l),type="l",,ylim=c(0,10),xlab="Pareto",ylab="")
```



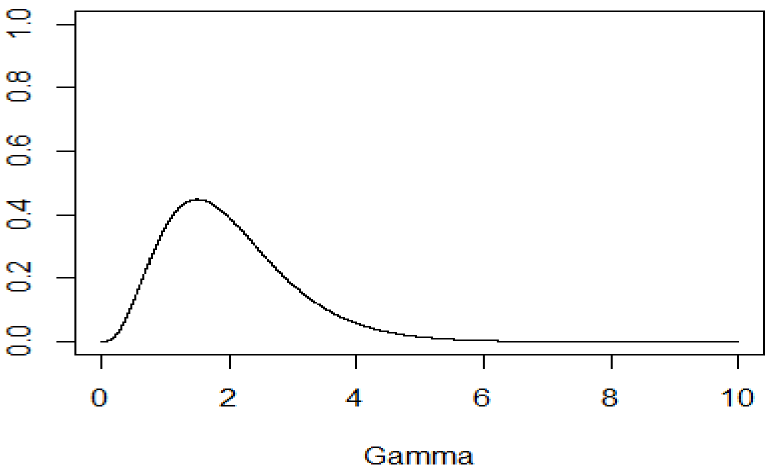
Από το ιστόγραμμα της Pareto με παραμέτρους (4,6), συμπεραίνουμε πως έχει βαριά ουρά καθώς ενώ οι περισσότερες παρατηρήσεις βρίσκονται από (0,5), εμφανίζονται παρατηρήσεις και στο διάστημα (10,20) και (20,30).
Η αντίστοιχη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, εμφανίζεται κάτωθι.

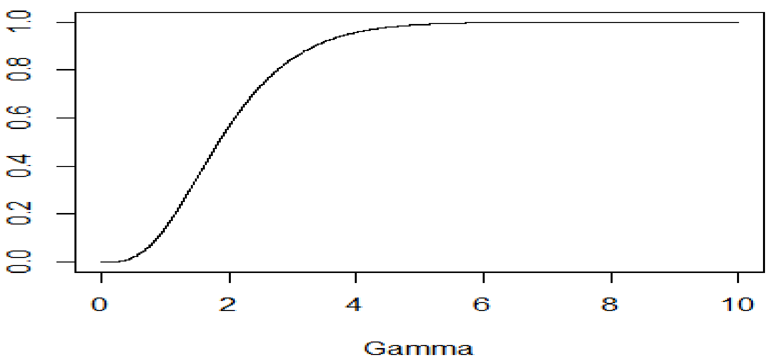



**#GAMMA**
**n=2000;set.seed(10)**
**a<-4;b<-2;q<-0.99**
**Gamma<-rgamma(n,a,b)**
**mean(Gamma)**
**hist(Gamma,xlim=c(0,10),ylim=c(0,500))**
**quantile(Gamma,q)**
**plot(x,dgamma(x,a,b),type="l",,ylim=c(0,1),xlab="Gamma",ylab="")**
**plot(x,pgamma(x,a,b),type="l",,ylim=c(0,1),xlab="Gamma",ylab="")**

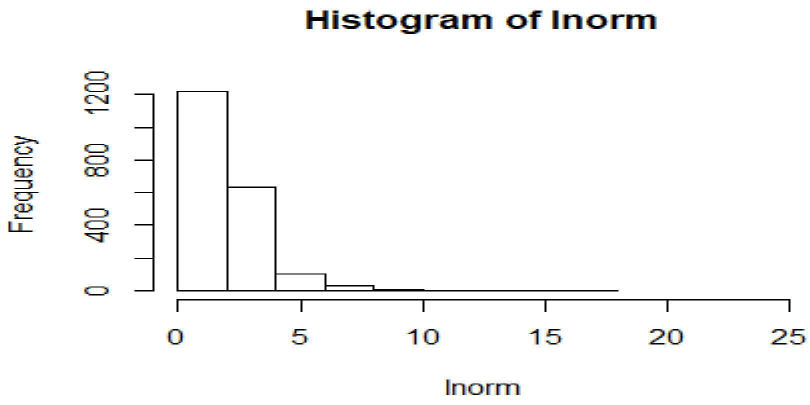



Από το ιστόγραμμα συχνοτήτων της κατανομής Gamma με παραμέτρους (10,5), παρατηρούμε ότι η Gamma έχει ελαφριά ουρά, καθώς δεν σημειώνονται ακραίες παρατηρήσεις. Όπως είναι λογικό το Value at Risk αναμένουμε να είναι μικρό.
Αντίστοιχα δίδεται η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Gamma.

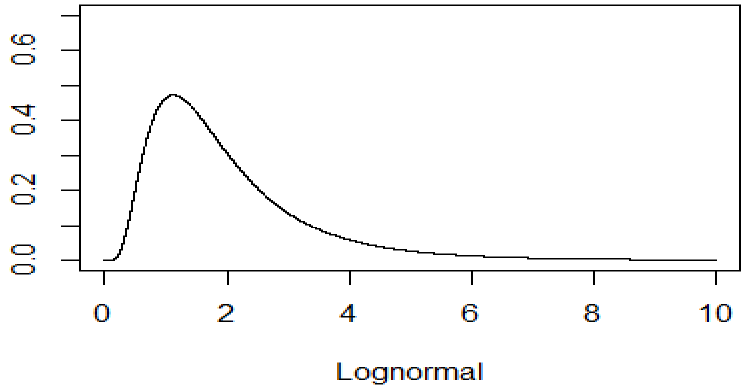


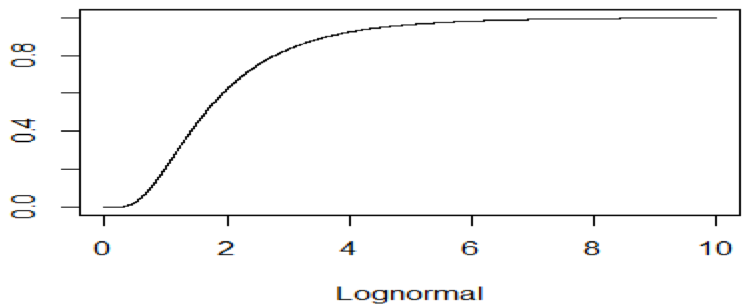




```
#LOGNORMAL
n=2000;set.seed(10)
m<-0.5;s<-sqrt(2*(ln(2)-m));q<-0.999;s
lnorm<-rlnorm(n,m,s)
mean(lnorm)
hist(lnorm,xlim=c(0,25),ylim=c(0,1300))
quantile(lnorm,q)
plot(x,dlnorm(x,m,s),type="l",ylim=c(0,0.7),xlab="Lognormal",ylab="")
plot(x,plnorm(x,m,s),type="l",ylim=c(0,1),xlab="Lognormal",ylab="")
```




Το ιστόγραμμα συχνοτήτων της Lognormal όπου οι περισσότερες παρατηρήσεις σημειώνονται από (0,5).




Αντίστοιχα η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Lognormal, η οποία παρατηρούμε ότι είναι λιγότερο απότομη από την κατανομή Gamma, συνεπώς έχει πιο βαριά ουρά.

Στον πίνακα που ακολουθεί εμφανίζονται συγκεντρωτικά τα αποτελέσματα που προκύπτουν από την εφαρμογή του παραπάνω κώδικα σε επίπεδο σημαντικότητας

$p = 5\%$ , $p = 2{,}5\%$ , $p = 1\%$ και τέλος $p = 0{,}1\%$. Επιπλέον έχει γίνει υπολογισμός του Value at Risk για τα επίπεδα εμπιστοσύνης που αναφέραμε καθώς και για δύο κατανομές Pareto με διαφορετικές παραμέτρους αλλά με την ίδια μέση τιμή, όσο και για την κατανομή Gamma έχει υπολογισθεί δύο φορές με ίδια μέση τιμή και διαφορετικές παραμέτρους, καθώς και για την Lognormal με ίδια μέση τιμή.

| | **Value At Risk σε επίπεδο σημαντικότητας $1-p$** | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Distribution E(X)=2000* | 95% | 97.5% | 99% | 99.9% |
| **Pareto(a=3,l=4)** | 6.783904 | 9.576281 | 13.52812 | 32.25035 |
| **Pareto(a=4,l=6)** | 6.623746 | 9.003475 | 12.17219 | 25.33938 |
| **Gamma(a=6,b=3)** | 3.5398 | 3.857679 | 4.340225 | 5.676125 |
| **Gamma(a=10,b=5)** | 3.144966 | 3.402884 | 3.749889 | 4.73079 |
| **Lognormal(μ=0.5,σ=0.6215258)** | 4.312849 | 5.829089 | 7.254191 | 10.87336 |

Παρατηρούμε πως η κατανομή Pareto έχει την πιο βαριά ουρά συγκριτικά με τις άλλες δύο κατανομές, καθώς οι εκτιμήσεις του VaR είναι πολύ μεγαλύτερες σε όλα τα επίπεδα σημαντικότητας. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ρυθμός μεταβολής στην κατανομή Pareto είναι μεγαλύτερος από τον ρυθμό μεταβολής της κατανομής Lognormal, και ακόμη μεγαλύτερος από τον αντίστοιχο της κατανομής Gamma.

Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι σε επίπεδο σημαντικότητας 5% και για παραμέτρους $(\alpha = 4, l = 6)$ το Value at Risk υπολογίστηκε 6,623746. Αποτέλεσμα το οποίο μας υποδεικνύει πως στις 100 ζημιές που θα συμβούν μόλις οι 5 από αυτές αναμένεται να ξεπεράσουν την τιμή 6,623746. Αντίστοιχα για την κατανομή Gamma με παραμέτρους $(\alpha = 6, b = 3)$ σε επίπεδο εμπιστοσύνης 5% το αντίστοιχο Value at Risk υπολογίζεται σε 3,5398, δηλαδή στις 100 ζημιές του χαρτοφυλακίου μας μόλις οι 5 από αυτές αναμένεται να ξεπεράσουν την τιμή 3,5398. Τέλος για την κατανομή Lognormal με παραμέτρους $(\mu = 0{,}5, \sigma = 0{,}6215258)$ σε επίπεδο σημαντικότητας 5% το Value at Risk υπολογίζεται 4,312849, που πρακτικά μας δείχνει ότι στις 100 ζημιές μόλις οι 5 από αυτές θα πάρουν τιμή μεγαλύτερη του 4,312849.

Αντίστοιχα αποτελέσματα, προκύπτουν για τα επίπεδα σημαντικότητας $p = 2{,}5\%$ , $p = 1\%$ και $p = 0{,}1\%$.

Παρατηρούμε πως η μέγιστη τιμή του VaR εμφανίζεται στην Pareto (3,4) και σε επίπεδο σημαντικότητας 0,1% όπου ισούται με 32,25035. Επιπλέον παρατηρούμε πως για την ίδια κατανομή όσο μεγαλώνουν οι παράμετροι της τόσο μικρότερο υπολογίζεται το Value at Risk. Το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση της Pareto και της Gamma.

# 4 Αξία σε κίνδυνο στην ουρά της κατανομής (Tail Value at Risk)

Μειονέκτημα του VaR αποτελεί ότι μετράει μονάχα την συχνότητα του κινδύνου και όχι την δύναμή του και την έντασή του. Ένα μέτρο κινδύνου για την μελέτη αυτής της έντασης είναι το TVaR (Tail Value at Risk), το οποίο χρήζει μελέτης από τους κατόχους κινδύνου για το ποια είναι η απώλεια που θα προκληθεί κατά την υπέρβαση της αναμενόμενης ζημιάς στην αξία κινδύνου (VaR).

Ο ορισμός του TVaR δίδεται κάτωθι

$$\mathrm{TVaR}[X;p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR[X;\xi]d\xi,\ 0 < \mathrm{p} < 1$$

Για κίνδυνο X με πιθανότητα p,το TVaR μπορεί να θεωρηθεί αριθμητικός μέσος των ζημιών από το άνω p-ποσοστημόριο της κατανομής μέχρι το άνω όριο τιμών αυτής της κατανομής.

Ιδιότητες (Πολίτης (2014)).

1. Μικρό περιθώριο ασφάλειας.

Δεδομένου ότι και η VaR έχει μικρό περιθώριο ασφάλειας, είναι προφανές ότι ισχύει

$$\mathrm{TVaR}(X;p) \leq \frac{1}{1-p}\int_p^1 \max(X)\, d\xi = \max(X)$$

2. Μη αρνητικό περιθώριο ασφάλειας.

Για συνάρτηση που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο (0,1), ισχύει

$$E(X) = E\left(F_x^{-1}(u)\right) = \int_0^1 F_x^{-1}\,(p)dp = TVaR(X;0)$$

Συνεπώς εφόσον μπορεί να δειχτεί ότι η TVaR δεν είναι φθίνουσα ως προς p προκύπτει (απόδειξη βλ. Πολίτης (2014))

$$TVaR(X;p) \geq TVaR(X;0) = E(X)$$

3. Σταθερότητα.

Η ανωτέρω ιδιότητα δεν ισχύει για την TVaR καθώς για κάθε πιθανότητα p>0 και σταθερό c ισχύει

$$TVaR(c;p) = \frac{1}{1-p}\int_p^1 cd\xi = c$$

4. Προσθαφαιρετικότητα.

Η κατηγοριοποίηση σε επιμέρους κινδύνους οδηγεί σε μείωση του τελικού κινδύνου. Η χρήση της συγκεκριμένης ιδιότητας μας εξυπηρετεί για την εκτίμηση των επιμέρους κινδύνων σε διαφορετικά χαρτοφυλάκια, με σκοπό την μέτρηση του συνολικού κινδύνου.

5. Προσθετικότητα.

Η ανωτέρω ιδιότητα έχει εφαρμογή στην εκτίμηση του Var συνεπώς ισχύει και για το TVaR.

6. Ομοιογένεια.

Η ανωτέρω ιδιότητα έχει εφαρμογή στην εκτίμηση του Var συνεπώς ισχύει και για το TVaR.

7. Μονοτονικότητα.

Η ανωτέρω ιδιότητα έχει εφαρμογή στην εκτίμηση του Var συνεπώς ισχύει και για το TVaR.

8. Αντικειμενικότητα.

Η ανωτέρω ιδιότητα έχει εφαρμογή στην εκτίμηση του Var συνεπώς ισχύει και για το TVaR.

## 4.1 Conditional VaR (CVaR)

Δεδομένου ότι το VaR αποτελεί ένα από τα πλέον διαδεδομένα μέτρα κινδύνου, έχουν πραγματοποιηθεί πολλές έρευνες με σκοπό την βελτιστοποίησή του, καθώς το VaR παρουσιάζει πολλαπλά μέγιστα και ελάχιστα. Ο Uryasey και ο Rockafellar ανέπτυξαν μια θεωρία για το μοντέλο CVaR, η οποία φαίνεται να είναι περισσότερο έγκυρη σε διαφορετικά επίπεδα εμπιστοσύνης. Αργότερα ο Olszwwski κατόπιν έρευνας κατέληξε πως ένα αποτελεσματικό χαρτοφυλάκιο μπορεί να ολοκληρωθεί από την βελτιστοποίηση της μέσης CVaR.

Άλλη παράμετρος η οποία έχει αξία να αναφερθεί είναι ο χρόνος για τον οποίο έχει υπολογιστεί το Var. Η απόδοση του υπό μελέτη χαρτοφυλακίου μπορεί να αλλάζει σε περισσότερο σε μηνιαία βάση και κατά την μελέτη να εκτιμάται σε ημερήσια βάση, γεγονός που θα μας οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα. Σε κάθε περίπτωση η διάρκεια της περιόδου θα πρέπει να καθορίζεται από την φύση του υπό εκτίμηση χαρτοφυλακίου, το οποίο μπορεί να είναι διάστημα μίας ημέρας έως και ενός μήνα. Για παράδειγμα η επιτροπή της Βασιλείας έχει ορίσει χρονικό ορίζοντα δέκα ημερών για συναλλαγές στην αγορά κεφαλαίου. Αυτό αποτυπώνεται με τον κάτωθι τύπο

$$F(p) = \int_{-\infty}^{VaR_{ap}} p(r)dr = 1 - \alpha,$$

Όπου r τα περιουσιακά στοιχεία της επιχείρησης και $p(r)$ η πυκνότητα πιθανότητας..

Ο ανωτέρω τύπος διατυπώνεται ακόμη και ως εξής

$$F(a) = P[r \leq VaR_a] = 1 - \alpha$$

Μερικές ανεπάρκειες του VaR ως μέτρο κινδύνου είναι πως δεν υπολογίζει το μέγεθος των ζημιών όταν σημειώνεται υπέρβαση. Με την εκτίμησή του αθροίσματος των συνιστωσών του χαρτοφυλακίου υπάρχει το ενδεχόμενο ο κίνδυνος του χαρτοφυλακίου να είναι μεγαλύτερος. Εναλλακτικό μέτρο κινδύνου το οποίο ορίζεται ως η αναμενόμενη αξία απωλειών που υπερβαίνουν το VaR είναι το Conditional VaR (CVaR).

Συγκεκριμένα το CVaR ορίζεται ως η αναμενόμενη απόδοση πέραν της αξίας σε κίνδυνο, σε διάστημα εμπιστοσύνης α. Ο παραπάνω ορισμός μαθηματικά αποτυπώνεται

$$CVaR_a(X) = E[-X| - X \geq VaR_a(X)]$$

Το Conditional Value at Risk είναι ίσο είτε μεγαλύτερο από το Value at Risk. Το Conditional VaR είναι η υπό όρους αναμενόμενη ζημιά δίχως να ξεπερνά το VaR.

Η ερμηνεία του CVaR είναι η υπερβολική απώλεια. Κατά τον υπολογισμό του VaR σε διάστημα εμπιστοσύνης 95% το CVaR είναι ο μέσος όρος του. Το CVaR μπορεί να υπολογισθεί κάνοντας χρήση μιας κανονικής κατανομής

$$CVaR_a = \frac{exp(\frac{-q_\alpha^2}{2})}{a\sqrt{2\pi}}\sigma$$

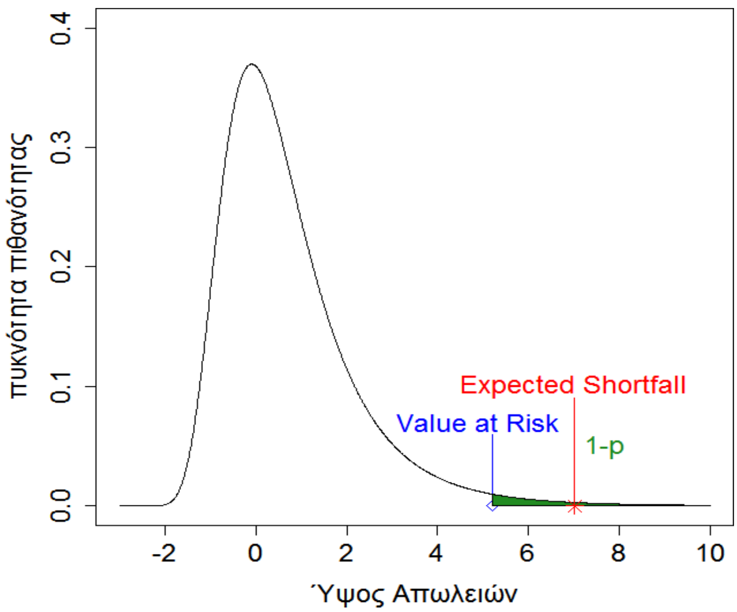
Ερμηνεία της ανωτέρω εξίσωσης είναι 95% εγκυρότητα και 5% πιθανότητα ζημιών.

Τέλος ακόμη ένας τρόπος υπολογισμού του CVaR μη παραμετρικός είναι ο υπολογισμός του σταθμισμένου μέσου του VaR.

## 4.2 Expected Shortfall (Αναμενόμενη απώλεια)

Ένα ακόμη μέτρο κινδύνου το οποίο συνδέεται απόλυτα με το VaR είναι το Expected Shortfall ή Conditional VaR εν συντομία ES ή CVaR το οποίο ερμηνεύεται ως αναμενόμενη ζημία. Για ζημιές L ενός χαρτοφυλακίου με $E(L) < \infty$ και $F_L$ η συνάρτηση κατανομής των ζημιών του χαρτοφυλακίου, σε επίπεδο εμπιστοσύνης $p \in (0,1)$ το αναμενόμενο έλλειμμα υπολογίζεται ως εξής

$$ES_p = E[VaR_u | u > p] = \frac{1}{1-p}\int_p^1 VaR_u du$$




(Καραμέρος (2015)).

Συνεπώς για επίπεδο εμπιστοσύνης $p$, ελέγχουμε την ουρά της κατανομής για όλες τις τιμές VaR. Αντιλαμβανόμαστε πως το $ES_p$ εξαρτάται αποκλειστικά και μόνο από την κατανομή των απωλειών του χαρτοφυλακίου και ιδιαιτέρως από την ουρά της κατανομής αυτής, και παράλληλα ισχύει $ES_p \geq VaR_p$ .

## 4.3 Σχέσεις των μέτρων κινδύνου

Παρακάτω θα δοθούν ορισμένες ιδιότητες οι οποίες συνδέουν τα μέτρα κινδύνου που προαναφέρθηκαν, (βλ. Kaas et al, 2008).

Συγκεκριμένα για πιθανότητα $p\epsilon(0,1)$, ισχύει

$$TVaR[X;p] = VaR[X;p] + \frac{1}{1-p}ES[X;p]$$

$$CTE[X;p] = VaR[X;p] + \frac{1}{(\bar{F}_x)(VaR[X;p])}ES[X;p]$$

$$CVaR[X;p] = \frac{ES[X;p]}{(\bar{F}_x)(VaR[X;p])}$$

Εύκολα προκύπτει πως το

$$TVaR[S;p] = VaR[S;p] + \frac{1}{1-p}\int_p^1 \{VaR[S;t] - VaR[S;p]\}dt$$

$$= VaR[S;p] + \frac{1}{1-p}ES[S;p]$$

Από τις παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε πως αρχικά το TVaR είναι μεγαλύτερο από το VaR, καθώς ισούται με το VaR και ακόμη μία μη αρνητική ποσότητα.

Αντίστοιχα το CTE είναι μεγαλύτερο από το VaR, καθώς ισούται με το VaR και ακόμη μία ποσότητα, η οποία παίρνει τιμές μεγαλύτερες ή ίσες του μηδενός.

Παρακάτω θα δοθεί ένα παράδειγμα, το οποίο εξετάζει την ιδιότητα της υποπροσθετικότητας. Μια ιδιότητα πολύ σημαντική για τα μέτρα κινδύνου, καθώς μας δείχνει πως μια συγχώνευση δύο χαρτοφυλακίων δεν δημιουργεί μεγαλύτερο κίνδυνο. Η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας δεν ισχύει γενικά στην εύρεση του Value at Risk.

Αντίθετα η υποπροσθετικότητα ισχύει πάντα για το tail Value at Risk και για το CTE ισχύει μονάχα για συνεχείς κινδύνους.

Στο παράδειγμα που ακολουθεί έχει υπολογισθεί το Value at Risk για δύο εκθετικές κατανομές με παράμετρο 2 η καθεμία, καθώς και το VaR για μια κατανομή Gamma με παραμέτρους (2,2), η οποία προέρχεται από την συνέλιξη των δύο εκθετικών κατανομών. Η ιδιότητα που επιθυμούμε να ικανοποιείται ώστε να ισχύει η υποπροσθετικότητα είναιη ακόλουθη,

$$VaR[S+T;p] \leq VaR[S;p] + VaR[T;p].$$

Για το άθροισμα $VaR[S;p] + VaR[T;p]$ των εκθετικών κατανομών, για διάφορες τιμές του $p$ έχουμε υπολογίζουμε,

$$P(S > a) = \exp(-2a) = p,$$

κατά συνέπεια,

$$-2a = \log(p),$$

άρα,

$$VaR[S;p] = a = -\frac{\log(p)}{2}$$

και τελικά,

$$VaR[S;p] + VaR[T;p] = 2 \cdot (-\frac{\log(p)}{2})$$

Στο πίνακα που ακολουθεί, παρατίθενται τόσο τα θεωρητικά όσο και τα ποσοστημόρια που προκύπτουν έπειτα από προσομοίωση 100.000 παρατηρήσεων για διάφορες τιμές του $p$.

| *1-p* | 50% | 60% | 75% | 90% | 95% | 97.5% | 99% | 99.5% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *model* | 0.6948219 | 0.9178175 | 1.3924239 | 2.3086778 | 2.9902882 | 3.6819664 | 4.5783436 | 5.2697231 |
| *empirical* | 0.6931472 | 0.9162907 | 1.3862944 | 2.3025851 | 2.9957323 | 3.6888795 | 4.6051702 | 5.2983174 |

Αντίστοιχα, για το $VaR[S + T;p]$ του αθροίσματος των δύο εκθετικών κατανομών, το οποίο οδηγεί σε μία κατανομή Gamma, για διάφορες τιμές του $p$ έχουμε,

| *1-p* | 50% | 60% | 75% | 90% | 95% | 97.5% | 99% | 99.5% |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *model* | 0.8422374 | 1.0127578 | 1.3512588 | 1.9462717 | 2.3653680 | 2.7729778 | 3.3128503 | 3.7038098 |
| *empirical* | 0.8391735 | 1.0111566 | 1.3463173 | 1.9448601 | 2.3719323 | 2.7858217 | 3.3191760 | 3.7150648 |

Ουσιαστικά, ορίζοντας το μέγεθος του δείγματος τόσο μεγάλο, ώστε να θεωρήσουμε ότι $n \to \infty$, τα αποτελέσματα της προσομοίωσης θα συγκλίνουν στα εμπειρικά ποσοστημόρια.

Για τους υπολογισμούς χρησιμοποιήθηκε ο κάτωθι κώδικας στην R.

```
set.seed(2)
levels<-c(0.5,0.6,0.75,0.9,0.95,0.975,0.99,0.995)
```

```
a=-log(1-levels);a
qgamma(levels,2,2)
X_1<-rgamma(100000,1,2)
X_2<-rgamma(100000,1,2)
S<-X_1+X_2
VarX_1<-quantile(X_1,levels,type=7)
VarX_2<-quantile(X_2,levels,type=7)
VarX_1+VarX_2
VarS<-quantile(S,levels,type=7)
```

Από τα ανωτέρω αποτελέσματα συμπεραίνουμε ότι δεν ισχύει πάντα η ιδιότητα της υποπροσθετικότητας κατά τον υπολογισμό του VaR. Σε μερικά ποσοστημόρια ισχύει, ενώ σε άλλα όχι.

# ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

*Ξενόγλωσση*


- Dickson D. (2005), Insurance Risk and Ruin Theory, Cambridge University Press.
- Kaas R, Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M. (2008) Modern Actuarial Risk Theory Using R, Springer Heidelberg Dordrecht London New York.
- Linsmeier T. and Pearson N. (2010), "Risk Measurement: An Introduction to Value at Risk", Office for Futures and options Research working paper, University Library of Munich, Germany.


*Ελληνική*


- Αντζουλάκος Δ. Γλώσσα Προγραμματισμού R, με εφαρμογές στην Αναλογιστική Επιστήμη, (2016), Π.Μ.Σ. Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Καραμέρος Π. (2015), Αξία σε Κίνδυνο Και Τεχνικές Εκτίμησης της, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πατρών.
- Μαραγιάννη Κ. (2012), Value at Risk, Διπλωματική εργασία, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών.
- Πολίτης Θ, (2014) Μέτρα Κινδύνου στην Αναλογιστική Επιστήμη, Διπλωματική εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.
- Χατζηβασίλογλου Ι, (2013), Διοικητική Κινδύνου, Π.Μ.Σ. Αναλογιστικής Επιστήμης και Διοικητικής Κινδύνου, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.


*Διαδίκτυο- Άρθρα*


- Kisiala J. (2015), Conditional Value at Risk: Theory and Applications , University of Edinburgh, www.maths.ed.ac.uk/~prichtar/docs/Kisiala_Dissertation.pdf
- https://www.wikipedia.org/