ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

Εκθετικές ανισότητες για πιθανότητες χρεοκοπίας διαδικασιών κινδύνου με όρο διάχυσης

ΖΙΑΝΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιούλιος 2018

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Εκθετικές ανισότητες για πιθανότητες χρεοκοπίας διαδικασιών κινδύνου με όρο διάχυσης

ΖΙΑΝΑ ΒΑΣΙΛΙΚΗ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιούλιος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ #5|13.06.2016 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Κωσταντίνος Πολίτης
- Επίκουρος Καθηγητής Γεώργιος Τζαβελάς

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE
AND STATISTICS

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE
AND RISK MANAGEMENT

Exponential inequalities for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion

by
ZIANA VASILIKI

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece
July 2018

Στη γιαγιά μου και στην Μαρία.

.

Ευχαριστίες

Κατ'αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα Καθηγητή κ.Νικόλαο Μαχαιρά για την αμέριστη συμπαράστασή του και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας καθώς και για την υπομονή του και τον χρόνο του. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ. Κωσταντίνο Πολίτη και τον Επίκουρο Καθηγητή κ.Γεώργιο Τζαβελά για την τιμή που μου έκαναν να είναι μέλη της επιτροπής. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με την εν λόγω εργασία.

Περίληψη

Το κλασσικό μοντέλο της Θεωρίας συλλογικών κινδύνων έχει επεκταθεί από τον Gerber [21] με την πρόσθεση μιας διαδικασίας διάχυσης στη σύνθετη διαδικασία Poisson. Η μελέτη αυτού του μοντέλου έγινε αρχικά από τους Dufresne & Gerber [15] το 1991. Αποδεικνύεται ότι οι πιθανότητες χρεοκοπίας ικανοποιούν συγκεκριμένες ανανεωτικές εξισώσεις. Αποδεικνύεται επίσης ο τύπος της συνέλιξης και μία ανισότητα Lundberg για την πιθανότητα χρεοκοπίας με ένα παρόμοιο τρόπο όπως στην κλασσική περίπτωση.

Στη συνέχεια μελετάται η κατασκευή μίας κλάσης διαδικασιών διάχυσης που ακολουθούν τοπικά ένα διανυσματικό πεδίο και υπολογίζεται ο επεκταμένος γεννήτορας για ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού του γεννήτορα. Με την χρήση αυτής της θεωρίας κατασκευάζονται martingales για μία διαδικασία κινδύνου με όρο διάχυσης. Αυτό μας οδηγεί σε εκθετικά φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας σε άπειρο όπως και σε πεπερασμένο χρόνο.

Abstract

The classic model of Risk Theory has been extended by Gerber [21] by adding a diffusion process to the Poisson compound process. The study of this model was at first made by Dufresne & Gerber [15] in 1991. It turns out that the probabilities of bankruptcy satisfy specific renewal equations. The type of convolution and a Lundberg inequality for probability of bankruptcy in a similar way as in the classic case is also demonstrated.

Then it is studied the construction of a class of diffusion processes followed locally by a vector field and the expanded generator is calculated for a subset of the generator definition field. Using this theory, martingales are constructed for a diffusion-based risk process. This leads us to exponential inequalities for the probability of bankruptcy in infinity as well as in finite time.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

τ.μ.	:	Τυχαία μεταβλητή
σ.(π).π.	:	Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.κ.	:	Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας
σ.δ	:	Στοχαστική διαδικασία
μ.χ.	:	Μετρήσιμος χώρος
χ.π.	:	Χώρος Πιθανότητας
χ.σ.	:	Χαρακτηριστική συνάρτηση
σ.β.	:	Σχεδόν βέβαια
σ.ο.	:	Σχεδόν όλα
κ.δ.π	:	Κανονική δεσμευμένη πιθανότητα
i.i.d	:	Ισοκατανεμημένες και ανεξάρτητες
πρβλ.	:	Παράβαλε
MPP	:	Μεικτή διαδικασία Poisson
CMPP	:	Σύνθετη Μεικτής Poisson
$\mathbb{N}$	$:=$	$\{1, 2, ..., u, ...\}$. Το σύνολο των φυσικών αριθμών
$\mathbb{N}_{\mathbf{0}}$	$:=$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	:	Το σύνολο όλων των ακεραίων αριθμών
$\mathbb{Z}^*$	$:=$	$\mathbb{Z} - \{0\}$
$\mathbb{Z}_+$	$:=$	$\mathbb{N}_{\mathbf{0}}$
$\mathbb{Z}_+^*$	$:=$	$\mathbb{N}$
$\mathbb{Q}$	:	Το σύνολο όλων των ρητών αριθμών
$\mathbb{Q}^*$	:	$\mathbb{Q} - \{0\}$
$\mathbb{Q}_+$	:	$\{x : x \in \mathbb{Q}, \quad x \geqslant 0\}$
$\mathbb{Q}_+^*$	:	$\{x : x \in \mathbb{Q}_+, \quad x > 0\}$
$\mathbb{R}$	:	Το σύνολο όλων των πραγματικών αριθμών

$\mathbb{R}^*$	$:=$	$\mathbb{R}\backslash\{0\}$
$\mathbb{R}^+$	$:=$	$\{x : x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 0\}$

Εισαγωγή

Στην παρούσα εργασία μελετούνται μοντέλα διαδικασιών κινδύνου με όρο διάχυσης. Ο όρος διάχυσης εκφράζει μία επιπλέον αβεβαιότητα της διαδικασίας των συνολικών απαιτήσεων. Μία εναλλακτική ερμηνεία είναι ότι ο όπως αυτός προσθέτει μία αβεβαιότητα για την είσπραξη (income) ασφαλίστρων. Η ιδέα της δημιουργίας τέτοιων διαδικασιών για το κλασσικό μοντέλο συλλογικών κινδύνων οφείλεται στον [21]. Η συστηματική μελέτη του κλασσικού μοντέλου με όρο διάχυσης έγινε από τους [15]. Στη συνέχεια οι [20] και ο [26] μελέτησαν μοντέλα διαδικασιών κινδύνου με όρο διάχυσης όπου η απαριθμήτρια διαδικασία δεν είναι κατ' ανάγκη μία διαδικασία Poisson. Αν η κατανομή των ατομικών μεγεθών απαιτήσεων είναι συνδυασμοί εκθετικών κατανομών, οι πιθανότητες χρεοκοπίας μπορούν να υπολογιστούν με ένα διαφανή τρόπο.

Στο Κεφάλαιο 1 παρατίθεται κάποιες βασικές έννοιες και ορισμοί που απαιτούνται για τα επόμενα κεφάλαια. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται μία σύντομη επισκόπηση της κλασσικής θεωρίας κινδύνου. Συγκεκριμένα στην Ενότητα 2.1 δίνεται ο ορισμός και οι βασικές ιδιότητες της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων, στην Ενότητα 2.2. παρουσιάζεται ο ορισμός και οι βασικές ιδιότητες της απαριθμήτριας διαδικασίας, στην Ενότητα 2.3 ορίζεται η διαδικασία Poisson και παρουσιάζεται ένα Θεώρημα χαρακτηρισμού της Poisson. Στην Ενότητα 2.4 ορίζεται η διαδικασία των συνολικών απαιτήσεων και αναφέρονται οι βασικές ιδιότητες, ενώ στην 2.5 παρουσιάζεται μία σύντομη επισκόπηση των σύνθετων κατανομών. Στην συνέχεια, στην Ενότητα 2.6 αναλύεται το πρόβλημα της χρεοκοπίας για την κλασσική θεωρία κινδύνου και επιπλέον στην 2.7 και 2.8 αποδεικνύεται η ανισότητα του Kolmogorov για θετικά υπερ-martingales & η ανισότητα του Lundberg αντίστοιχα.

Στο Κεφάλαιο 3 παρατίθεται μία συστηματική μελέτη των διαδικασιών Markov & των γεννητόρων τους. Πιο συγκεκριμένα στην Ενότητα 3.1 μελετούνται με έναν γενικό τρόπο οι πυρήνες και οι ημιομάδες Markov. Στην Ενότητα 3.2 παρουσιάζονται βασικά αποτελέσματα σ.δ. με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις και η σχέση τους με τις ημιομάδες Markov. Στην Ενότητα 3.3 γίνεται μία συστηματική μελέτη των διαδικασιών Markov και τις σχέσεις τους με τις ημιομάδες Markov. Ιδιαιτέρως ορίζονται οι καθολικές διαδικασίες Markov και η σχέση τους με τις ημιομάδες Markov και τις ημιομάδες των πιθανοτήτων μετάβασης. Στην

Ενότητα 3.4 γίνεται μία εκτενής ανάλυση των γεννητόρων διαδικασιών Markov και μιας διαδικασίας των martingales η οποία παράγεται από τους γεννήτορες.

Στο κεφάλαιο 4 παρατίθεται μία συστηματική μελέτη των κατα τμήματα ντετερμινιστικών διαδικασιών Markov . Στην Ενότητα 4.1 μία κατασκευή και οι βασικές ιδιότητες μιας κατα τμήματα ντετερμινιστικής διαδικασίας Markov. Στο Κεφάλαιο 5 αναλύονται οι σύνθετες διαδικασίες Poisson με όρο διάχυσης όπως αυτές που έχουν μελετηθεί από τους Dufresne & Gerber [15]. Πιο συγκεκριμένα παρουσιάζεται η ελλιπής ανανεωτική εξίσωση για τη διαδικασία του πλεονάσματος.

Στο Κεφάλαιο 6 γίνεται μία συστηματική μελέτη των εκθετικών ανισοτήτων για πιθανότητες χρεοκοπίες , όπου κατασκευάζεται μία κλάση διαδικασιών διάχυσης που ακολουθεί τοπικά ένα διανυσματικό πεδίο και ο επεκταμένος γεννήτορας για ένα υποσύνολο του πεδίου ορισμού του γεννήτορα. Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 κατασκευάζονται martingales για διαδικασίες κινδύνου με όρο διάχυσης. Αυτό οδηγεί σε εκθετικά φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας τόσο σε άπειρο όσο και σε πεπερασμένο χρόνο.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί για την παρούσα εργασία.

Έστω Ω σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Τότε με Ω^c συμβολίζεται το συμπλήρωμα του Ω , με $A \biguplus B$ συμβολίζεται η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων και με $\biguplus_{i\in I} A_i$ συμβολίζεται η ένωση μιας μη κενής οικογένειας $\{A_i\}_{i\in I}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του. Για κάθε $A \subseteq \Omega$ με χ_A συμβολίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση του A. Η ταυτοτική συνάρτηση από το Ω στον εαυτό του συμβολίζεται με id_Ω. Αν $\mathcal{G}$ είναι κάποιο σύστημα υποσυνόλων του Ω, τότε η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$, συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται η **σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται ένας **γεννήτορας της** $\sigma(\mathcal{G})$. Μια σ-άλγεβρα , είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** εάν υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω για την οποία ισχύει $A = \sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$) που παράγεται από όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$), ονομάζεται **η Borel σ-άλγεβρα** στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{R}^n$) και συμβολίζεται με $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (ή $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$). Τα στοιχεία μιας Borel σ-άλγεβρας, ονομάζονται **σύνολα Borel** .

Στη συνέχεια, και εφόσον δε δηλώνεται διαφορετικά, η τριάδα (Ω, Σ, P) *είναι ένας* ***χώρος πιθανότητας*** *(χ.π. για συντομία) και το ζευγάρι* (Υ, H) *είναι ένας* ***μετρήσιμος χώρος***. Κάθε Σ-H-μετρήσιμη απεικόνιση $f : \Omega \to \Upsilon$ ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή** (τ.μ. για συντομία). Με Σ_0 συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων $N \in \Sigma$ ώστε $P(N) = 0$. Για τ.μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ γράφουμε $X = Y \quad P-$σχεδόν βέβαια ($P - \sigma$.β. για συντομία), αν $\{X \neq Y\} \in \Sigma_0$.

Μία τ.μ. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** ως προς το μέτρο P αν $\int |f| dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ ($\mathcal{L}^1_+(P)$ (αντίστοιχα) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (μη αρνητικών ολοκληρώσιμων)συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων (δηλαδή όλων των $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε $\int |f|^2 dP < \infty$).

Έστω $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{F}$ μία $\sigma-$ υποάλγεβρα του Ω. Κάθε συνάρτηση $Y \in \mathcal{L}^1(P|\mathcal{F})$ που ικανοποιεί για κάθε $A \in \mathcal{F}$ την ισότητα $\int_A X dP = \int_A Y dP$, ονομάζεται μία **εκδοχή της δεσμευμένης μέσης τιμής της** X **δοσμένης της** $\mathcal{F}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{E}_P[X|\mathcal{F}]$. Για $X := \chi_E \in \mathcal{L}^1(P)$ με $E \in \Omega$ θέτουμε $P(E|\mathcal{F}) := \mathbb{E}_P[\chi_E|\mathcal{F}]$.

Ορισμός 1.0.1. Μία συνάρτηση $k : \Omega \times H \to \bar{\mathbb{R}}_+$ είναι ένας $\Omega - H$-**Μαρκοβιανός πυρήνας** (Markov kernel), όταν ικανοποιούνται οι παρακάτω συνθήκες:

($k1$) Η συνολοσυνάρτηση $k(\omega, \bullet) : H \longmapsto [0,1]$ είναι ένα **μέτρο πιθανότητας** για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$.

($k2$) Η συνάρτηση $\omega \longmapsto k(B, \omega)$ είναι H-**μετρήσιμη** για κάθε σταθερό $B \in H$.

Αν $\Omega = \Upsilon$ και $\Sigma = H$ τότε λέμε ότι, η k είναι ένας **Μαρκοβιανός πυρήνας επάνω στο μ.χ.** (Ω, Σ) ή επάνω στο Ω. Ένας πυρήνας Markov επάνω στο μ.χ. (Ω, Σ) μπορεί να ερμηνευτεί ως ένα μέτρο επάνω στη Σ το οποίο εξαρτάται από το $\omega \in \Omega$, συγκεκριμένα ως το μέτρο $k(\bullet, \omega)$ της ($k1$), και πράγματι εξαρτάται μετρήσιμα από το ω με την έννοια της ($k2$). Γι' αυτόν τον λόγο οι πυρήνες επάνω στο μ.χ. (Ω, Σ) ονομάζονται και **τυχαία μέτρα** επάνω στον (Ω, Σ).

Έστω μία $\Sigma - H$-μετρήσιμη απεικόνιση $X : \Omega \to \Upsilon$ και μία $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ. Η **δεσμευμένη κατανομή της** X **επάνω στην** $\mathcal{F}$ είναι ένας H-$\mathcal{F}$-Μαρκοβιανός πυρήνας k, ικανοποιώντας για κάθε $B \in H$ τη συνθήκη

$$k(\bullet, B) = P(X^{-1}(B)|\mathcal{F})(\bullet) \quad P \restriction \mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

Ένας τέτοιος Μαρκοβιανός πυρήνας k θα συμβολίζεται με $P_{X|\mathcal{F}}$. Έστω $\Theta : \Omega \longmapsto \Upsilon$ μία τ.μ. . Σαφώς, για κάθε $H - \mathfrak{B}(\Upsilon)-$ Μαρκοβιανό πυρήνα k, η απεικόνιση $K(\Theta) : H \times \Omega \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$K(\Theta)(\omega, B) := (k(\bullet, B) \circ \Theta(\omega)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in H \quad \text{και} \quad \omega \in \Omega$$

είναι ένας $H - \sigma(\Theta)-$Μαρκοβιανός πυρήνας. Ιδιαιτέρως, για $(\Upsilon, H) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ τα σχετικά μέτρα πιθανότητας $k(\bullet, \theta)$ για $\theta = \Theta(\omega)$ με $\omega \in \Omega$ είναι κατανομές στο $\mathfrak{B}$ και έτσι μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{K}(\theta)(\bullet)$ αντί για $k(\bullet, \theta)$. Αντίστοιχα, τη περίπτωση του $K(\Theta)$ τη συμβολίζουμε με $\mathbf{K}(\Theta)$.

Για οποιαδήποτε $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, θα λέμε ότι δύο H-$\mathcal{F}$-Μαρκοβιανοί πυρήνες k_i, για $i \in \{1,2\}$, είναι $\boldsymbol{P} \restriction \boldsymbol{\mathcal{F}}-$**ισοδύναμοι** και γράφουμε $k_1 = k_2 \quad P|\mathcal{F} - \sigma.\beta.$, αν υπάρχει $P-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $k_1(B,\omega) = k_2(B,\omega)$ για κάθε $B \in H$ και $\omega \notin N$.

Μια οικογένεια $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ $\sigma-$υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται $\boldsymbol{P}$**-υπό συνθήκη ανεξάρτητη** ως προς τη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geqslant 2$ έχουμε:

$$P(E_1 \cap \cdots \cap E_n|\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j|\mathcal{F}) \quad P|\mathcal{F} \quad -\sigma.\beta.$$

για κάθε $j \leqslant n$ και για κάθε $E_j \in \Sigma_{i_j}$ όπου τα $i_1, \ldots, i_n$ είναι διακριτά στοιχεία του .

Μια οικογένεια Σ-T-μετρήσιμων απεικονήσεων $\{X_i\}_{i\in I}$ από το Ω στο Υ είναι:

- $\boldsymbol{P}$**-υπό συνθήκη ανεξάρτητη ως προς τη** σ**-υποάλγεβρα** $\mathcal{F}$ της Σ, αν η οικογένεια $\sigma(\{\Sigma_i\})_{i\in I}$ είναι P-υπο συνθήκη ανεξάρτητη ως προς την $\mathcal{F}$ και

- $\boldsymbol{P}$**-υπό συνθήκη ισόνομη επάνω στη** σ**-υποάλγεβρα** $\mathcal{F}$ της Ω, αν

$$P(F \cap X_i^{-1}(B)) = P((F \cap X_j^{-1}(B)), \quad \text{για} \quad i,j \in I, F \in \mathcal{F} \quad \text{και } \mathrm{B} \in \mathrm{T}.$$

Επιπλέον, για κάθε τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathfrak{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο Ω που ονομάζεται η **σ-άλγεβρα στο** Ω **η παραγόμενη από την** X και ισχύει $\sigma(X) \subseteq \Sigma$. Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$ τ.μ., ορίζουμε:

$$\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big) = \sigma\Bigg(\bigcup_{j\in I} \sigma(X_j)\Bigg).$$

Η $\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big)$ ονομάζεται **η** σ**-άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια** $\{X_j\}_{j\in I}$**.**

Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in T}$ τ.μ. ονομάζεται ανεξάρτητη μιας οικογένειας $\{\Sigma_t\}_{t\in T}$ σ-υποαλγεβρών της Σ, όπου $\mathrm{T} \neq \varnothing$ σύνολα δεικτών, αν και μόνο αν για κάθε $\{t_1, \ldots, t_m\} \subseteq I$, οι σ-άλγεβρες $\sigma(X_{t_1}), \ldots, \sigma(X_{t_m}), \Sigma_{t_1}, \ldots, \Sigma_{t_n}$ είναι ανεξάρτητες.

Αν οι P, Q είναι κατανομές πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$, τότε η κατανομή πιθανότητας με τύπο

$$(P * Q)(B) := \int_{\mathbb{R}} P(B-y)dQ(y) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

όπου $B - y := \{z - y : z \in B\}$, ονομάζεται η συνέλιξη των P, Q. Επίσης για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ως την $\boldsymbol{n}$-οστη συνέλιξη της P, την κατανομή πιθανότητας $P^{*(n+1)} := P^n * P$, όπου P^{*0} (εκφυλισμένη) κατανομή που ικανοποιεί την $P^{*0}(\{0\}) = 1$. Ομοίως, ορίζεται και η συνέλιξη δύο σ.κ.π. F, G ή δύο σ.(π.)π. f, g. Τέλος, σημειώνουμε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας (επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) $\{P_{X_k}\}_{k\in\mathbb{N}_n}$, τότε από τον ορισμό της συνέλιξης άμεσα έχουμε ότι

$$P_{X_0+\cdots+X_n} = P_{X_0} * \cdots * P_{X_n} = (P_{X_0} * \cdots * P_{X_{n-1}}) * P_{X_n}.$$

Μία οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$, όπου I ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο μετρήσιμων συναρτήσεων $X_j : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ $(j \in I)$ ονομάζεται σ.δ. (σ.δ.) ή στοχαστική ανέλιξη. Επί πλέον, αν το I είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια σ.δ. συνεχούς χρόνου, ενώ αν το $I \subseteq \mathbb{Z}$, τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια σ.δ. διακριτού χρόνου. .

Για κάθε ενδεχόμενο $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα της τυχαίας μεταβλητής X ως προς τη δεσμευμένη πιθανότητα P_B συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}_B[X] := \mathbb{E}[X|B] := \int_B X dP_B$$

και ονομάζεται **η δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθέντος του ενδεχομένου** B .

Έστω I ένα μη κενό, μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μια οικογένεια $\{\Sigma_j\}_{j\in I}\sigma$-υποαλγεβρών της Ω ονομάζεται **διύλιση**, αν και μόνο αν για κάθε $j, k \in I$ με $j < k$ ισχύει $\Sigma_j \subseteq \Sigma_k$.

Μία σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ αν για κάθε $j \in I$ η τ.μ. X_j είναι Σ_j -μετρήσιμη.

Η $\{T_j\}_{j\in I}$ με $T_j = \sigma(\{X_k : k \leqslant j\})$ για κάθε $j \in I$, ονομάζεται η **κανονική διύλιση** για την $\{X_j\}_{j\in I}$. Προφανώς, κάθε σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη κανονική της διύλιση.

Μία σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται ένα **martingale ως προς τη διύλιση** $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ή ένα $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$- martingale αν ισχύουν τα εξής:

$(m1)$ Η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$,

$(m2)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ισχύει $X_t \in \mathcal{L}^1(P)$,

$(m3)$ για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leqslant t$ ισχύει $\mathbb{E}[X_t|\Sigma_s] = X_s \quad P \restriction \Sigma_s - \sigma.\beta.$

Κεφάλαιο 2

Σύντομη Επισκόπηση της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα γίνει μια σύντομη αναφορά σε βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Κινδύνου. Αρχικά παρουσιάζονται κάποιες ιδιότητες της άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων. Τέλος αναφέρονται βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη διαδικασία Poisson, που αποτελεί τη βάση για τη κατανόηση της μεικτής διαδικασίας Poisson
.

2.1 Η σ.δ. Άφιξης Απαιτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα παρατεθούν οι ορισμοί και οι βασικές ιδιότητες της στοχαστικής διαδικασίας άφιξης απαιτήσεων και ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων.Για όλη την ενότητα η τριάδα (Ω,F,P) είναι ένας χώρος πιθανότητας.

Ορισμός 2.1.1. Η ακολουθία τ.μ $T := \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ ονομάζεται **σ.δ. άφιξης απαιτήσεων**, εάν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_T \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε, για όλα τα $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$ να ισχύουν τα εξής:

- $T_0(\omega) = 0$, και
- $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άμεσα προκύπτει πως για όλα τα $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$ και $n \in \mathbb{N}$, η $T_n(\omega) > 0$. Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως, το P-μηδενικό σύνολο Ω_T ονομάζεται P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της στοχαστικής διαδικασίας άφιξης των απαιτήσεων T.

Ορισμός 2.1.2. Έστω T η σ.δ. άφιξης απαιτήσεων. Με $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συμβολίζουμε τη σ.δ **ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων** και ισχύει $W_n := T_n - T_{n-1}$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, προκύπτουν τα εξής:

- $W_n(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$,
- $\mathbb{E}[W_n] > 0$

καθώς και η σχέση:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k. \tag{2.1}$$

Στο κεφάλαιο αυτό, και αν δε δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε τη T ως μια σταθερή σ.δ. άφιξης απαιτήσεων, και W ως σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων επαγόμενη από τη T. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε επίσης πως το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της άφιξης των απαιτήσεων είναι το κενό σύνολο $\Omega_T := \emptyset$.

Εφόσον $W_n = T_n - T_{n-1}$ και $T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ είναι εμφανές πως η άφιξης, και η ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων, αλληλοκαθορίζονται. Αυτό γίνεται εμφανέστερο και από τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Λήμμα 2.1.3. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\sigma(\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}) = \sigma(\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}). \tag{2.2}$$

Συμπεραίνουμε πως η γνώση που έχουμε για τους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων από τη T_n, είναι ίδια με τη πληροφορία που είναι διαθέσιμη από τη γνώση των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, δηλαδή τη W_n.

Ορισμός 2.1.4. Το ενδεχόμενο $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}$ ονομάζεται **έκρηξη**.

Λήμμα 2.1.5. Αν $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[T_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.

Πόρισμα 2.1.6. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[W_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [1] Λήμμα 3.2.6 και Πόρισμα 3.2.7.

Αξίζει να αναφέρουμε στο σημείο αυτό πως κατά την ανάπτυξη ενός υποδείγματος για μια ασφαλιστική επιχείρηση, μια από τις πρώτες αποφάσεις που πρέπει να ληφθεί έχει να κάνει με το αν θα πρέπει την πιθανότητα έκρηξης, να τη λάβουμε ίση με το μηδέν ή όχι. Η απόφαση αυτή αφορά τη άφιξης των απαιτήσεων.

Το λήμμα που ακολουθεί βοηθάει την καλύτερη κατανόηση της σχέσης που υπάρχει μεταξύ του T και W.

Λήμμα 2.1.7. Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Αν η W είναι ανεξάρτητη, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(*i*) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και

(*ii*) $P_{T_n} = Ga(n, \theta)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Στην περίπτωση αυτή, $\mathbb{E}[W_n] = 1/\theta$ και $\mathbb{E}[T_n] = n/\theta$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, και επιπρόσθετα, η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [27] Lemma 1.2.2.

2.2 Η απαριθμήτρια σ.δ.

Στο παρόν υποκεφάλαιο θα παραθέσουμε τη απαριθμήτρια σ.δ. επεκτείνοντας την ανάλυση μας.

Ορισμός 2.2.1. Μια οικογένεια $N := \{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ τ.μ. ονομάζεται σ.δ. **του αριθμού των απαιτήσεων ή απαριθμήτρια σ.δ.** , αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_N \in \Sigma$, τέτοιο ώστε για όλα τα $\omega \in \Omega \backslash \Omega_N$ να ισχύουν τα εξής:

($n1$) $N_0(\omega) = 0$,

($n2$) $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, για όλα τα $t \in (0, \infty)$,

($n3$) $N_t(\omega) = \inf_{s \in (t, \infty)} N_s(\omega)$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$,

($n4$) $\sup_{s \in [0,t)} N_s(\omega) \leqslant N_t(\omega) \leqslant \sup_{s \in [0,t)} N_s(\omega) + 1$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και

($n5$) $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Το P-μηδενικό σύνολο Ω_N, ονομάζεται P-μηδενικό **σύνολο εξαίρεσης** της απαριθμήτριας σ.δ N.

Ερμηνεύοντας τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να θεωρήσουμε πως

- Η τ.μ. N_t δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων που εμφανίζονται στο διάστημα $(0, t]$,

- Όλες οι τροχιές της N, ξεκινούν από το μηδέν και είναι δεξιά συνεχείς, στα σημεία ασυνέχειας, το άλμα είναι ύψους ένα, και τέλος τείνουν στο άπειρο.

Ένα αρχικό αποτέλεσμα του ορισμού, αποτελεί το ακόλουθο θεώρημα το οποίο ισχυρίζεται πως κάθε άφιξης απαιτήσεων, παράγει μία αριθμού απαιτήσεων και αντίστροφα.

Θεώρημα 2.2.2. *Αν T είναι μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega$, θέσουμε*

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leqslant t\}}(\omega) \tag{2.3}$$

τότε για $\{\overline{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\overline{N} := \{\overline{N}_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια απαριθμήτρια σ.δ. τέτοια ώστε $\Omega_{\overline{N}} = \Omega_T$, και

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$ ισχύει

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : \overline{N}_t(\omega) = n\} \tag{2.4}$$

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω θεωρημάτων βλ. [1] Θεώρημα 3.3.2, Θεώρημα 3.2.3 αντίστοιχα.

Για το υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου:

- Η N είναι μία απαριθμήτρια σ.δ. ,
- Η T είναι μία σ.δ. άφιξης απαιτήσεων που παράγεται από την N,
- Η W είναι μία σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων που παράγεται από την N,
- Το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της N είναι το κενό σύνολο, δηλαδή ισχύει $\Omega_N = \varnothing$.

Κάτω από την τελευταία υπόθεση προκύπτουν δύο εξαιρετικά χρήσιμες ισότητες. Σύμφωνα με αυτές, ορισμένα από τα γεγονότα (ενδεχόμενα) που καθορίζονται από τη του αριθμού των απαιτήσεων, μπορούν να ερμηνευτούν ως ενδεχόμενα που καθορίζονται από τη άφιξης των απαιτήσεων, και αντίστροφα.

[2.2.4]

Λήμμα 2.2.3. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύουν:

(a) $\{N_t \geqslant n\} = \{T_n \leqslant t\}$ και

(b) $\{N_t = n\} = \{T_n \leqslant t\} \backslash \{T_{n+1} \leqslant t\} = \{T_n \leqslant t < T_{n+1}\}$.

Για την απόδειξη βλ. πχ. [1]Λήμμα 3.3.4.

Το ακόλουθο λήμμα εκφράζει με ένα ιδιαίτερα περιεκτικό τρόπο, το γεγονός πως η του αριθμού των απαιτήσεων και η άφιξης απαιτήσεων παρέχουν την ίδια πληροφορία.

Άμεση συνέπεια του (a) του Λήμματος 2.2.4 είναι το παρακάτω

Λήμμα 2.2.4. Ισχύει ότι:

$$\sigma(\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}) = \sigma(\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}). \tag{2.5}$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να συνδέσουμε την πιθανότητα έκρηξης με τη του αριθμού απαιτήσεων ως εξής:

Λήμμα 2.2.5. Ισχύουν τα εξής:

$$P[\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}] = P\left[\bigcup_{t\in\mathbb{N}}\{N_t = \infty\}\right] = P\left[\bigcup_{t\in(0,\infty)}\{N_t = \infty\}\right]. \tag{2.6}$$

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [1] Λήμμα 3.3.6.

Πόρισμα 2.2.6. Αν η απαριθμήτρια σ.δ. έχει πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές, τότε η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με μηδέν.

Για μια αναλυτική απόδειξη του πορίσματος βλ. π.χ. [4] Πόρισμα 2.2.7.

Στο σημείο αυτό θα ορίσουμε τις έννοιες της προσαύξησης του αριθμού των απαιτήσεων σε διάστημα $(s,t]$ καθώς και των ανεξάρτητων προσαυξήσεών της, διότι μέσω αυτών κατανοούμε παρισσότερο τη του αριθμού των απαιτήσεων.

- Για $s,t \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $s \leqslant t$, η προσαύξηση της απαριθμήτριας σ.δ. N στο διάστημα $(s,t]$, ορίζεται από τη σχέση:

$$N_t - N_s := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{s<T_n\leqslant t\}}. \tag{2.7}$$

2.3 Η Διαδικασία Poisson

[2.3.1]

Ορισμός 2.3.1. Η απαριθμήτρια σ.δ N, ονομάζεται **(ομογενής) διαδικασία Poisson** με παράμετρο $\theta \in (0,\infty)$, όταν έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $t \in (0,\infty)$ να ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$.

Από τους ορισμούς προκύπτει πως μια απαριθμήτρια διαδικασία με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, έχει και στάσιμες προσαυξήσεις, αν και μόνο αν για κάθε $t,h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{N_{t+h}-N_t} = P_{N_h}$ (βλ. π.χ. [1] Λήμμα Α'.1.3).

Ορισμός 2.3.2. Μια απαριθμήτρια σ.δ $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **τυπική διαδικασία Poisson**, αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, h $\widetilde{N}_t$ ακολουθεί την με παράμετρο ένα.

Λήμμα 2.3.3. Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n,\theta)$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$

(ii) $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$, για όλα τα $t \in (0,\infty)$.

Στη περίπτωση αυτή, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ η $\mathbb{E}[T_n] = n/\theta$ και για όλα τα $t \in (0,\infty)$ η $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [27] Lemma 2.2.1.

Θεώρημα 2.3.4. *Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η σ.δ W ενδιάμεσων χρόνων άφιξης είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(a)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Η απαριθμήτρια σ.δ N είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο θ.

(iii) Η απαριθμήτρια σ.δ N έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, και ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

(iv) Η $\{N_t - \theta t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale .

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [27] Theorem 2.3.4 και για μια αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος βλ. π.χ. [1] Θεώρημα 4.2.4.

2.4 Η Διαδικασία των συνολικών απαιτήσεων

Σ'αυτήν την ενότητα εισάγονται και μελετούνται οι διαδικασίες συνολικών απαιτήσεων. Κατά μήκος της ενότητας αυτής θεωρούμε την N να είναι μια απαριθμήτρια σ.δ. και επίσης την T να είναι μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων που προκύπτει απο την απαριθμήτρια σ.δ..

Υποθέτουμε ότι το μηδενικό σύνολο εξαίρεσης είναι κενό και ότι η πιθανότητα έκρηξης ισούται με 0.

Επιπλέον, θεωρουμε την $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι μια ακολουθία τ.μ..

Για $t \in \mathbb{R}_+$ ορίζουμε

$$S_t := \sum_{k=1}^{N_t} X_k = \sum_{n=0}^{\infty} X_{\{N_t=n\}} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

. Βεβαίως έχουμε $S_0 = 0$

Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη και ισόνομη και ακόμα ότι η απαριθμήτρια σ.δ N και το μέγεθος απαιτήσεων $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες.

Λήμμα 2.4.1. Ισχύει η ισότητα

$$P[\{S_t \in B\}] = \sum_{n=0}^{\infty} P(\{N_t = n\}0)P(\sum_{k=1}^{n} X_k \in B)$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και $B \in \mathfrak{B}$.

Απόδειξη

Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned} P[\{S_t \in B\}] &= P[\{\sum_{k=1}^{N_t}\{X_k \in \}\}] \\ &= P[\sum_{n=0}^{\infty}\{N_t = n\}] \cap \sum\nolimits_{k=1}^{n}\{X_k \in B\}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N_t = n\}]P[\sum\nolimits_{k=1}^{n}\{X_k \in B\}] \end{aligned}$$

□

Για $s, t \in \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε $s \leqslant t$ η προσαύξηση της διαδικασίας συνολικών απαιτήσεων $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ στο διαστημα (s,t] ορίζεται από τη σχέση

$$S_t - S_s := \sum_{k=N_s+1}^{N_t} X_k. \tag{2.8}$$

Για την διαδικασία συνολικών απαιτήσεων οι ιδιότητες των ανεξάρτητων ή σταθερών προσαυξήσεων ορίζονται με τον ίδιο τρόπο όπως και για την απαριθμήτρια σ.δ..

Θεώρημα 2.4.2. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις τότε αυτό ισχύει και για την διαδικασία συνολικών απαιτήσεων.*

Για μια αναλυτική απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βλ [5] Παππά Θεώρημα 4.1.3

Θεώρημα 2.4.3. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε το ίδιο ισχύει και για τη διαδικασία συνολικών απαιτήσεων.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.3 βλ. π.χ [27] Theorem 5.1.3.

2.5 Σύνθετες Κατανομές

Σε αυτήν την ενότητα θα μελετήσουμε το πρόβλημα υπολογισμού της κατανομής των συνολικών μεγεθών απαίτησης S_t σε συγκεκριμένο χρόνο t.

Απλοποιούμε τους συμβολισμούς όπως παρακάτω:

Έστω N να είναι μια τυχαία μεταβλητή που ικανοποιεί τη σχέση $P_N[\mathbb{N}_0] = 1$ και ορίζεται ως εξής:

$$S := \sum_{k=1}^{N} X_k$$

Οι τυχαίες μεταβλητές N και S θα αναφέρονται ως το **πλήθος απαιτήσεων** και ως **συνολικό μέγεθος απαίτησης** αντίστοιχα.

Υποθέτουμε παντού ότι οι N και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες και διατηρούμε την υπόθεση ότι η ακολουθία $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη και ισόνομη.

Σ'αυτήν την περίπτωση η κατανομή πιθανότητας των συνολικών απαιτήσεων P_S ονομάζεται μια **σύνθετη κατανομή** (compound distribution) και συμβολίζεται με

$$\mathbf{C}(P_N, P_X).$$

Οι σύνθετες κατανομές **σύνθετη κατανομή** μπορούν να ονομαστούν σύμφωνα με την κατανομή της απαριθμήτριας τ.μ.

Για παράδειγμα αν P_N είναι μια κατανομή Poisson τότε η $\mathbf{C}(P_N, P_X)$ καλείται **σύνθετη κατανομή Poisson**.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα είναι μια αναδιατύπωση του Λήμματος 2.5.1.

Λήμμα 2.5.1. Ισχύει η ισότητα

$$P_S[B] = \sum_{n=0}^{\infty} \{P_N[\{n\}] P_X^n[B]$$

για όλα τα $B \in \mathfrak{B}$.

Αν και η παραπάνω ισότητα είναι χρήσιμη σε συγκεκριμένες περιπτώσεις, ωστόσο, απαιτεί τον υπολογισμό συνελίξεων,πράγμα ενδεχομένως δύσκολο και χρονοβόρο.

Σε μερικές περιπτώσεις, βοηθάει να βλέπουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση της κατανομής του μεγέθους απαιτήσεων.

Λήμμα 2.5.2. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της S ικανοποιεί τη σχέση

$$\phi_S(z) = m_N(\phi_X(z)).$$

Απόδειξη

Για όλα τα $z \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\phi_S(z) &= \mathbb{E}[e^{izS}]_N = \mathbb{E}[e^{iz}\sum_{k=1}^{n} X_k] \\
&= \mathbb{E}[\sum_{n=0}^{\infty} X_{\{N=n\}} \prod_{k=1}^{n} e^{izX_k}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[e^{izX_k}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] \mathbb{E}[e^{izX}]^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N=n\}] \phi_X(z)^n \\
&= \mathbb{E}[\phi_X(z)^N] = m_N(\phi_X(z)).
\end{aligned}$$

□

Αρχικά θεωρούμε την σύνθετη κατανομή Poisson.

Πόρισμα 2.5.3. *Αν $P_N = \boldsymbol{P}(\alpha)$ τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση της S ικανοποιεί τη σχέση*

$$\phi_S(z) = e^{\alpha(\phi_X(z)-1)}.$$

Αν η κατανομή του πλήθους απαιτήσεων είναι είτε κατανομή Bernoulli ή λογαριθμική, τότε ο υπολογισμός της σύνθετης κατανομής Poisson μπορεί να απλοποιηθεί όπως παρακάτω:

Πόρισμα 2.5.4. *Για όλα τα $\alpha \in (0, \infty)$ και $\eta \in (0, 1)$ ισχύει*

$$C(\boldsymbol{P}(\alpha), \boldsymbol{B}(\eta)) = \boldsymbol{P}(\alpha\eta) \quad \forall t \in (0, \infty).$$

Πόρισμα 2.5.5. *Για όλα τα $\alpha \in (0, \infty)$και $\quad \eta \in (0, 1)$ ισχύει*

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{P}(\alpha), \boldsymbol{Log}(n)) = \boldsymbol{NB}(\frac{\alpha}{\log(1-n)}, 1-n).$$

Έτσι οι σύνθετες κατανομές Poisson των πορισμάτων 2.5.4 και 2.5.3 δεν είναι τίποτα άλλο παρα Poisson ή αρνητική διωνυμική κατανομή, η οποία υπολογίζεται εύκολα αναδρομικά βασιζόμενοι στο παρακάτω θεώρημα.

Θεωρούμε την σύνθετη αρνητική διωνυμική κατανομή.

Πόρισμα 2.5.6. *Αν $P_N = \boldsymbol{NB}(\alpha, \theta)$, τότε η χαρακτηριστική συνάρτηση του S ικανοποιεί τη σχέση:*

$$\phi_S(z) = (\frac{\theta}{1-(1-\theta)\phi_X(z)})^{\alpha}.$$

Ανάλογο αποτέλεσμα με το Πόρισμα 2.5.4 είναι το παρακάτω:

Πόρισμα 2.5.7. *Για όλα τα* $\alpha \in (0.\infty)$ *και* $\theta, \eta \in (0,1)$,

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{NB}(\alpha,\theta), \boldsymbol{B}(\eta)) = \boldsymbol{NB}(\alpha, \frac{\theta}{\theta + (1-\theta)\eta}).$$

Για τη σύνθετη αρνητική διωνυμική κατανομή, έχουμε τα δύο παρακάτω αποτελέσματα.

Πόρισμα 2.5.8. *Για όλα τα* $m \in \mathbb{N}$, $\theta \in (0,1)$ *και* $\beta \in (0.\infty)$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{NB}(m,\theta), \boldsymbol{Exp}(\beta)) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}(m, 1-\theta), \boldsymbol{Exp}(\beta\theta)).$$

Πόρισμα 2.5.9. *Για όλα τα* $m \in \mathbb{N}$,$\theta, \eta \in (0,1)$

$$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{NB}(m,\theta), \boldsymbol{Geo}(\eta)) = \boldsymbol{C}(\boldsymbol{B}(m, 1-\theta), \boldsymbol{Geo}(\eta\theta)).$$

Λήμμα 2.5.10. Έστω ότι $\mathbb{E}[N] < \infty$ και $\mathbb{E}[X] < \infty$.

Τότε η μέση τιμή και η διασπορά της S υπάρχει και ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X]$$

και

$$Var[S] = \mathbb{E}[N]Var[X] + Var[N]\mathbb{E}[X]^2.$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{N} X_k] = \mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} X_{\{N=n\}} \sum_{k=1}^{n} X_k] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P[\{N=n\}]\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{n} X_k] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P[\{N=n\}]n\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X].
\end{aligned}$$

Έτσι αποδείχθηκε η πρώτη ισότητα.

Ομοίως έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S^2] &= \mathbb{E}[(\sum_{k=1}^{N} X_k)^2] = \mathbb{E}[\sum_{n=1}^{\infty} X_{\{N=N\}} (\sum_{k=1}^{n} X_k)^2] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P[\{N=n\}]\mathbb{E}[(\sum_{k=1}^{\infty} X_k)^2] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} P[\{N=n\}](nVar[X] + n^2\mathbb{E}[X]^2) \\
&= \mathbb{E}[N]Var[X] + \mathbb{E}[N^2]\mathbb{E}[X]^2
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} Var[S] &= \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}[S]^2 && (2.9) \\ &= (\mathbb{E}[N]Var[X] + \mathbb{E}[N^2]\mathbb{E}[X^2]) - (\mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X])^2 && (2.10) \\ &= \mathbb{E}[N]Var[X] + Var[N]\mathbb{E}[X]^2. && (2.11) \end{aligned}$$

Άρα ισχύει η δεύτερη ισότητα. □

Πόρισμα 2.5.11. *Έστω ότι* $P_N = \boldsymbol{P}(\alpha)$ *και* $\mathbb{E}[X] < \infty$*.Τότε*

$$\mathbb{E}[S] = \alpha\mathbb{E}[X]$$

και

$$Var[S] = \alpha\mathbb{E}[X^2].$$

2.6 Η διαδικασία πλεονάσματος και το πρόβλημα της χρεοκοπίας

Σ'αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε με τη διαδικασία πλεονάσματος και θα μελετήσουμε το πρόβλημα της χρεοκοπίας.

Αρχικά θα επεκτείνουμε το μοντέλο θεωρώντας και αναλύοντας κάποιες τεχνικές πτυχές του προβλήματος χρεοκοπίας. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την ανισότητα του Kolmogorov για θετικά ύπερ-martingales και θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την ανισότητα για να αποδείξουμε την ανισότητα του Lundberg για την πιθανότητα χρεοκοπίας στην περίπτωση που το επιβαρυμένο ασφάλιστρο έχει συντελεστή υπερπροσαρμογής. Τέλος θα δώσουμε κάποιες ικανές συνθήκες για την ύπαρξη ενός συντελεστή υπερπροσαρμογης.

Έστω $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ η διαδικασία των μεγεθών των απαιτήσεων και έστω $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η ολική διαδικασία απαιτήσεων, που επάγεται από την απαριθμήτρια διαδικασία και απο την διαδικασία του μεγέθους των απαιτήσεων, και έστω $c \in (0,\infty)$. Για $u \in (0,\infty)$ και για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$, ορίζουμε

$$R_t^u := u + ct - S_t.$$

Προφανώς, έχουμε ότι $R_0^u = u$.

Ερμηνεία

- c είναι η **ένταση του ασφαλίστρου** έτσι ώστε η ποσότητα ct να είναι τα έσοδα του ασφαλίστρου μέχρι το χρόνο t.

- u είναι το **αρχικό αποθεματικό**.

- R_t^u είναι το **αποθεματικό στο χρόνο t**, όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u.

Ορισμός 2.6.1. Η οικογένεια $\{R_t^u\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **διαδικασία πλεονάσματος** που επάγεται από την απαριθμήτρια διαδικασία, την διαδικασία του μεγέθους των απαιτήσεων, την ένταση του ασφαλίστρου και το αρχικό αποθεματικό.

Στόχος μας είναι το πρόβλημα χρεοκοπίας για την διαδικασία πλεονάσματος. Το πρόβλημα είναι ο υπολογισμός ή η εκτίμηση της πιθανότητας του ενδεχομένου η διαδικασία πλεονάσματος να πέσει κάποια στίγμη κάτω απο το 0.

Με σκοπό να δώσουμε έναν ακριβή τύπο για το πρόβλημα χρεοκοπίας, χρειαζόμαστε τις παρακάτω μετρο-θεωρητικες έννοιες:

Έστω $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια οικογένεια μετρήσιμων συναρτήσεων $\Omega \to [-\infty, \infty]$. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $Z : \Omega \to [-\infty, \infty]$ λέμε ότι είναι ένα **ουσιώδες infimum** της $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$,

αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες

- $P[\{Z \leqslant Z_t\}] = 1 \quad$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και

- κάθε μετρήσιμη συνάρτηση συνάρτηση $Y : \Omega \to [-\infty, \infty]$ τέτοια ώστε $P[\{Y \leqslant Z_t\}] = 1$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ ικανοποιεί την $P[\{Y \leqslant Z\}] = 1$.

Ο ορισμός ουσιαστικά υποδηλώνει ότι δύο οποιαδήποτε ουσιώδη infima της $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ίσα με πιθανότητα 1. Το σχεδόν βέβαια μοναδικό ουσιώδες infimum της οικογένειας $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συμβολίζεται με $\inf_{t\in\mathbb{R}_+} Z_t$.

Λήμμα 2.6.2. Κάθε οικογένεια $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μετρήσιμων συναρτήσεων $Z_t : \Omega \to [-\infty, \infty]$ έχει ένα ουσιώδες infimum.

Για μια αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ [3], σελίδες 77,78.

Ορισμός 2.6.3. Έστω η διαδικασία πλεονάσματος $\{R_t^u\}_{t\in\mathbb{R}^+}$. Από το προηγούμενο λήμμα, η διαδικασία πλεονάσματος έχει ένα ουσιώδες infimum που συμβολίζεται με $\inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u$.

Ιδιαιτέρως, έχουμε ότι $\{\inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u < 0\} \in \Sigma$. Το ενδεχόμενο $\{\inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u < 0\}$ καλείται **χρεοκοπία** της διαδικασίας πλεονάσματος και η πιθανότητα αυτού συμβολίζεται με τη σχέση:

$$\Psi(u) := P[\{\inf_{t\in\mathbb{R}_+} R_t^u < 0\}]$$

με σκοπό να δώσει έμφαση στην εξάρτηση της **πιθανότητας της χρεοκοπίας** με το αρχικό αποθεματικό.

Πρακτικά, ένα άνω φράγμα Ψ^* για την πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται εκ των προτέρων και η ασφαλιστική καλείται να επιλέξει το αρχικό αποθεματικό u έτσι ώστε $\Psi(u) \leqslant \Psi^*$.

Κατά βάση, θα πρέπει να διαλεχτεί το u έτσι ώστε

$$\Psi(u) = \Psi^*,$$

αλλά το πρόβλημα υπολογισμού της πιθανότητας χρεοκοπίας είναι ακόμη δυσκολότερο από το πρόβλημα υπολογισμού της κατανομής των συσσωρευτικών απαιτήσεων. Επομένως θα ήταν ενδιαφέρον να βρεθεί ένα άνω φράγμα $\Psi^{'}(u)$ για την πιθανότητα χρεοκοπίας, όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u, και να επιλεχθεί το u έτσι ώστε

$$\Psi'(u) = \Psi^*.$$

Αφού

$$\Psi(u) \leqslant \Psi'(u),$$

η ασφαλιστική είναι φερέγγυα μεν, αλλά πιθανόν κρατάει πολύ απόθεμα.

Είναι διαισθητικά ξεκάθαρο ότι ο χρόνος όπου η διαδικασία πλεονάσματος πέφτει για πρώτη φορά κάτω από το 0, πρέπει να είναι ένας χρόνος άφιξης απαίτησης. Για την καλύτερη κατανόηση αυτού, εισάγουμε μια διακριτοποίηση της διαδικασίας πλεονάσματος: Για $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $G_n := cW_n - X_n$, και για $n \in \mathbb{N}_0$ ορίζουμε

$$U_n^u := u + \sum_{k=1}^{n} G_k.$$

Προφανώς, έχουμε ότι $U_0^u = u$.

Η ακολουθία $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ καλείται **διαδικασία επιβαρυμένου ασφαλίστρου**(excess premium process), και η ακολουθία $\{U_n^u\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ καλείται **η τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος** (modified surplus process).

Το παρακάτω αποτέλεσμα δείχνει ότι η πιθανότητα της χρεοκοπίας ορίζεται απο την τροποποιημένη διαδικασία πλεονάσματος.

Λήμμα 2.6.4. Η πιθανότητα χρεοκοπίας ικανοποιεί τη σχέση
$\Psi(u) = P[\{\inf_{n\in\mathbb{N}_0} U_n^u < 0\}]$ για κάθε $u \in (0, \infty)$.

Για μια αναλυτική απόδειξη του παραπανω λήμματος βλ [3], σελ. $80_9 - 82^{14}$.

Λήμμα 2.6.5. Ισχύουν τα εξής:

- (i) Αν $I \neq \emptyset$ ένα σύνολο δεικιτών και $\{[\alpha_j, \beta_j)\}_{j\in\ I}$ με $\alpha_j < \beta_j$ για κάθε $j \in\ I$, οικογένεια ημιάνοιχτων διαστημάτων του $\mathbb{R}$, τότε ισχύει ότι $\bigcup_{j\in I}[\alpha_j, \beta_j) = [\inf_{j\in I} \alpha_j, \sup_{j\in I} \beta_j)$.

- (ii) Αν $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ ακολουθία μη κενών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, τότε για οποιαδήποτε οικογένεια πραγματικών αριθμών $\{x_k\}_{k\in J}$, όπου $J = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$, ισχύει

$$\inf_{k\in\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n} x_k = \inf_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\in A_n} x_k,$$

εφόσον τα infimum υπάρχουν.

Για μια αναλύτικη απόδειξη βλεπε [1] Λήμμα 5.1.4.

Θεώρημα 2.6.6. *Υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη και ισόνομη με μη εκφυλισμένη κατανομή και πεπερασμένες μέσες τιμές. Αν $\mathbb{E}[G] := \mathbb{E}[G_n] \leqslant 0, \quad \forall \quad n \in \mathbb{N}$, τότε για οποιοδήποτε αρχικό αποθεματικό η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ίση με 1.*

Για μια αναλύτικη απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος βλ. [3], σελ. $83_2 - 84^6$.

Πόρισμα 2.6.7. *Υποθέτουμε ότι οι ακολουθίες $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητες και κάθε μία απ' αυτες είναι ανεξάρτητη και ισόνομη με μη εκφυλισμένες κατανομές και πεπερασμένες μέσες τιμές. Αν $c \leqslant \mathbb{E}[X]/\mathbb{E}[W]$, τότε, για κάθε αρχικό αποθεματικό, η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι ίση με 1.*

Για την απόδειξη του παραπάνω πορίσματος βλ. [3], σελ. $83^5 - 83^{20}$. Αξίζει να σημειωθεί ότι το Θεώρημα 2.6.6 και Πόρισμα 2.6.7 δεν περιέχει καμία υπόθεση του αρχικού αποθεματικού.

Στην περίπτωση του Πορίσματος 2.6.7 βλέπουμε ότι με σκοπό να αποτρέψουμε την πιθανότητα της χρεοκοπίας από το να γίνει ίση με 1, η ένταση ασφαλίστρου πρέπει να είναι αρκετά μεγάλη έτσι ώστε να διασφαλιστεί ότι το αναμενόμενο ασφάλιστρο ανά απαίτηση, $c\mathbb{E}[W]$, είναι αυστηρά μεγαλύτερο απο το μέγεθος απαιτήσεων $\mathbb{E}[X]$. Το αναμενόμενο μέγεθος απαιτήσεων ονομάζεται **το καθαρό ασφάλιστρο**. Το αναμενόμενο επιβαρυμένο ασφάλιστρο

$$\mathbb{E}[G] = c\mathbb{E}[W] - \mathbb{E}[X],$$

ονομάζεται **(η επιβάρυνση ασφάλειας)** (safety loading) της τροποποιημένης σ.δ. του πλεονάσματος. Ισχύει ότι το ασφαλές loading είναι αυστηρά θετικό αν και μόνο η ένταση ασφάλιστρου ικανοποιεί την παρακάτω ανισότητα

$$c > \frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[W]}.$$

2.7 Η Ανισότητα του Kolmogorov για θετικά Υπερ-martingales

Σε ό,τι ακολουθεί στόχος μας είναι να βρούμε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας κάτω από μια κατάλληλη υπόθεση της διαδικασίας επιβαρυμένου ασφαλίστρου. Η απόδειξη αύτης της ανισότητας βασίζεται στην ανισότητα του Kolmogorov για θετικά υπέρ-martingales.

Θεωρούμε τη ακολουθία $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ τ.μ. με πεπερασμένες μέσες τιμές και την κανονική της διύλιση $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Μια συνάρτηση $\tau : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ καλείται **χρόνος διακοπής** για την $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ άν $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$, και είναι **φραγμένη** αν $\sup_{\omega\in\Omega} \tau(\omega) < \infty$. Έστω $\mathbf{T}$ το σύνολο όλων των φραγμένων χρόνων διακοπής για την $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Για $\tau \in \mathbf{T}$ ορίζουμε

$$Z_\tau := \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\{\tau=n\}} Z_n.$$

Τότε η Z_τ είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις

$$|Z_\tau| = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{\tau=n} |Z_n|.$$

και

$$\mathbb{E}[Z_\tau] = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{\tau=n\}} Z_n dP.$$

Σημειώνεται ότι τα αθροίσματα που χρησιμοποιούνται στον ορισμό της Z_τ και στους τύπους για τις $|Z_\tau|$ και $[Z_\tau]$ στην πραγματικότητα επεκτείνονται μόνο για πεπερασμένο αριθμό όρων.

Λήμμα (Μεγιστική Ανισότητα) 2.7.1. Η ανισότητα

$$P[\{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |Z_n| > \varepsilon\}] \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\tau\in\mathbf{T}} \mathbb{E}|Z_\tau|$$

ισχύει για όλα τα $\varepsilon \in (0, \infty)$.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το ενδεχόμενο

$$A_n := \{|Z_n| > \varepsilon\} \cap \bigcap_{k=1}^{n-1} \{|Z_k| \leqslant \varepsilon\}.$$

Τότε ισχύει

$$\{\sup_{\mathbb{N}_0} |Z_n| > \varepsilon\} = \biguplus_{n\in\mathbb{N}_0} A_n \tag{2.12}$$

Πράγματι, έστω $\omega \in \Omega$ αυθαίρετο. Τότε

$$\omega \in \{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |Z_n| > \epsilon\} \Leftrightarrow \sup_{n\in\mathbb{N}_0} |Z_n(n)| > \epsilon \Rightarrow \exists \quad n_0 \in \mathbb{N}_0 \quad |Z_{n_0}(n)| > \epsilon.$$

Έστω $n_1 := \min\{n \in \mathbb{N}_0 : |Z_n(n)| > \epsilon\}$.

Τότε για κάθε $k \in \{1, ..., n-1\}$ ισχύει $|Z_k(n)| \leqslant \epsilon$. Συνεπώς $\omega \in An_1$. Άρα

$$\{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |Z_n| > \epsilon\} \subseteq \biguplus_{n\in\mathbb{N}_0} A_n. \tag{2.13}$$

Αντιστρόφως, έστω $\omega \in \biguplus_{n\in\mathbb{N}_0} A_n$. Τότε $\exists \quad n_2 \in \mathbb{N}$, ώστε $|Z_{n_2}(n)| > \epsilon$ και για κάθε $k \in \{1, ..., n_2 - 1\}$ να ισχύει $|Z_k(n)| \leqslant \epsilon$. Συνπώς $\omega \in \{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |Z_n| > \epsilon\}$.

Άρα

$$\biguplus_{n\in\mathbb{N}_0} A_n \subseteq \{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} |Z_n(n)| > \epsilon\} \tag{2.14}$$

Από τις (2.13) και (3) προκύπτει η (2.12) δηλαδή ισχύει το ζητούμενο και από τη τελευταία προκύπτει

$$P[\{\sup_{\mathbb{N}_0} |Z_n| > \varepsilon\}] = \sum_{n=0}^{\infty} P[A_n],$$

θεωρούμε έναν αριθμό $r \in \mathbb{N}_0$, και ορίζουμε μια τυχαία μεταβλητή τ_r τέτοια ώστε

$$\tau_r(\omega) := \begin{cases} n & ,\alpha\nu \quad \omega \in A_n \quad \kappa\alpha\iota \quad n \in \{0, 1, ..., r\} \\ r & , \quad \alpha\nu \quad \omega \in \Omega \backslash \biguplus_{n=0}^{r} A_n. \end{cases}$$

Τότε έχουμε ότι $\tau_r \in \mathbf{T}$ και έτσι

$$\sum_{n=0}^{r} P[A_n] \leqslant \sum_{n=0}^{r} \frac{1}{\varepsilon} \int_{A_n} |Z_n| dP = \frac{1}{\varepsilon} \sum_{n=0}^{r} \int_{A_n} |Z_{\tau_r}| dP \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} |Z_{\tau_r}| dP \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\tau\in\mathbf{T}} \mathbb{E}|Z_\tau|.$$

Επομένως

$$P[\{\sup_{\mathbb{N}_0}\} |Z_n| > \varepsilon\}] = \sum_{n=0}^{\infty} P[A_n] \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \sup_{\tau\in\mathbf{T}} \mathbb{E}|Z_\tau|.$$

□

Λήμμα 2.7.2. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(a) Η $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ένα υπερ-martingale.

(b) Ισχύει $\mathbb{E}[Z_\sigma] \geqslant \mathbb{E}[Z_\tau]$ για όλα τα $\sigma, \tau \in \mathbf{T}$ με $\sigma \leqslant \tau$.

Απόδειξη

Αρχικά υποθέτουμε ότι ισχύει το (a) και θεωρούμε ότι $\sigma, \tau \in \mathbf{T}$ με $\sigma \leqslant \tau$. Για όλα τα $k, n \in \mathbb{N}_0$ με $n \geqslant k$ έχουμε $\{\sigma = k\} \cap \{\tau \geqslant n+1\} = \{\sigma = k\} \backslash \{\tau \leqslant n\} \in \mathcal{F}_n$, και έτσι

$$\begin{aligned}\int_{\{\sigma=k\}\cap\{\tau\geqslant n\}} Z_n dP &= \int_{\{\sigma=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP + \int_{\{\sigma=k\}\cap\{\tau\geqslant n+1\}} Z_n dP \\ &\geqslant \int_{\{\sigma=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP + \int_{\{\sigma=k\}\cap\{\tau\geqslant n+1\}} Z_{n+1} dP,\end{aligned}$$

όπου η ανισότητα προκύπτει από την υπόθεση ότι $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι υπέρ-martingale. Επίσης έχουμε ότι

$$\int_{\{\sigma=k\}} Z_k dP = \int_{\{\sigma=k\}\cap\{\tau\geqslant k\}} Z_k dP \geqslant \sum_{n=k}^{\infty} \int_{\{\sigma=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP,$$

συνεπώς

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} Z_\sigma dP &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\{\sigma=k\}} Z_k dP \\ &\geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \int_{\{\sigma=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \int_{\{\sigma=k\}\cap\{\tau=n\}} Z_n dP \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\{\tau=n\}} Z_n dP \\ &= \int_{\Omega} Z_\tau dP.\end{aligned}$$

Επομένως από το (a) προκύπτει το (b).

Πάμε τώρα από το (b) να αποδείξουμε το (a).Έστω ότι το (b) ισχύει. Θεωρούμε $n \in \mathbb{N}_0$ και $A \in \mathcal{F}_n$, και ορίζουμε μια τυχαία μεταβλητή τ θέτοντας:

$$\tau(\omega) := \begin{cases} n+1 & ,\omega \in A \\ n & ,\omega \in \Omega \backslash A. \end{cases}$$

Τότε έχουμε ότι $n \leqslant \tau \in \mathbf{T}$, έτσι

$$\begin{aligned}\int_A Z_n dP + \int_{\Omega\backslash A} Z_n dP &= \int_\Omega Z_n dP \geqslant \int_\Omega Z_\tau dP \\ &= \int_A Z_{n+1} dP + \int_{\Omega\backslash A} Z_n dP.\end{aligned}$$

Άρα ισχύει ότι $\int_A Z_n dP \geqslant \int_A Z_{n+1} dP$. Επομένως από το (b) συνεπάγεται το (a). □

Λήμμα 2.7.3. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(a) Η $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι martingale.

(b) Ισχύει $\mathbb{E}[Z_\sigma] = \mathbb{E}[Z_\tau]$ για όλα τα $\sigma, \tau \in \mathbf{T}$.

Αποδεικνύεται ομοίως με το παραπάνω Λήμμα 2.7.3

Ορισμός 2.7.4. *Η ακολουθία $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι* ***θετική*** *αν η Z_n είναι θετική για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$.*

Πόρισμα (Ανισότητα του Kolmogorov) 2.7.5. *Αν η $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι ένα θετικό ύπερ-martingale, τότε ισχύει η ανισότητα*

$$P[\{\sup_{\mathbb{N}_0} Z_n > \varepsilon\}] \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[Z_0]$$

για όλα τα $\varepsilon > 0$.

Η απόδειξη είναι άμμεση συνέπεια των Λημμάτων 2.7.1.

2.8 Η Ανισότητα Lundberg

Σε ολόκληρη την ενότητα υποθέτουμε ότι η ακολουθία $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ είναι ανεξάρτητη.

Ορισμός 2.8.1. Μια σταθερά $\rho \in (0, \infty)$ είναι ένας **συντελεστής υπερ-προσαρμογής**(superadjust coefficient) για την διαδικασία επιβαρυμένου ασφαλίστρου $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ αν ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbb{E}[e^{-\rho G_n}] \leqslant 1$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$,

και είναι **συντελεστής προσαρμογής** (adjustment coefficient) αν ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbb{E}[e^{-\rho G_n}] = 1$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Η $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι αναγκαίο να έχει κάποιο συντελεστή υπερπροσαρμογής. Αν η κατανομή ορισμένων επιβαρυμένων ασφαλίστρων είναι μη εκφυλισμένη, τότε η παραπάνω διαδικασία έχει το πολύ ένα συντελεστή προσαρμογής.

Έστω $\{\mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ η κανονική διύλιση της $\{U_n^u\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

3.6.14

Λήμμα 2.8.2. Για $\rho \in (0, \infty)$, ισχύει

$$\int_A e^{-\rho U_{n+1}^u} dP = \int_A e^{-\rho U_{n+1}^u} dP \int_\Omega e^{-\rho G_{n+1}} dP$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ και $\mathcal{A} \in \mathcal{F}_n$.

Απόδειξη. Για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$, έχουμε ότι

$$\mathcal{F}_n = \sigma(\{U_k^u\}_{k\in\{0,1,\dots,n\}}) = \sigma(\{G_k\}_{k\in\{1,\dots,n\}}.$$

Αφού η ακολουθία $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη έχουμε

$$\int_A e^{-\rho U_{n+1}^u} dP = \int_A e^{-\rho U_n^u} dP \cdot \int_\Omega e^{-\rho G_{n+1}} dP$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ και $A \in \mathcal{F}_n$. □

Πόρισμα 2.8.3. *Για $\rho \in (0,\infty)$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα*

(a) ρ είναι ένας συντελεστής υπερπροσαρμογής για τη διαδικασία επιβαρυμένου ασφαλίστρου.

(b) Για κάθε $u \in (0,\infty)$ η ακολουθία $\{e^{-\rho U_n^u}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι υπέρ-martingale.

Πόρισμα 2.8.4. *Για $\rho \in (0,\infty)$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(a) ρ είναι ένας συντελεστής προσαρμογής για τη διαδικασία επιβαρυμένου ασφαλίστρου.

(b) Για κάθε $u \in (0,\infty)$ η ακολουθία $\{e^{-\rho U_n^u}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι martingale.

Για μια αναλυτική απόδειξη του πορίσματος 2.8.3 βλ [3] σελ $86_2 - 87_5$

Θεώρημα (Ανισότητα Lundberg) 1. Αν ρ είναι ένας συντελεστής υπερ-προσαρμογής για τη διαδικασία επιβαρυμένου ασφαλίστρου, τότε ισχύει η ανισότητα

$$P[\{\inf_{n\in\mathbb{N}_0} U_n^u < 0\}] \leqslant e^{-\rho u}$$

για όλα τα $u \in (0,\infty)$.

Απόδειξη. Από τα παραπάνω πορίσματα προκύπτει ότι

$$P[\{\inf_{n\in\mathbb{N}_0} U_n^u < 0\}] = P[\{\sup_{n\in\mathbb{N}_0} e^{-\rho U_n^u} > 1\}] \leqslant \mathbb{E}[e^{-\rho U_0^u}] = \mathbb{E}, [e^{-\rho u}] = e^{-\rho u}.$$

□ Το άνω φράγμα για την πιθανότητα χρεοκοπίας που εξασφαλίζεται από την ανισότητα Lundberg εξαρτάται σαφώς από το αρχικό αποθεματικό u. Τυπικά, εξαρτάται επίσης, μέσω του συντελεστή υπερπροσαρμογής από την ένταση ασφαλίστρου c.

Κεφάλαιο 3

Διαδικασίες Markov και οι γεννήτορές τους

3.1 Πυρήνες και ημιομάδες πυρηνών Markov

Επειδή στην παρούσα ενότητα χρειαζόμαστε την έννοια μίας προβολικής οικογένειας μέτρων πιθανότητας, παρατίθεται ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 3.1.1. *Έστω $(E, \mathcal{E})$ ένας μ.χ. , I ένα μη κενό σύνολο και $\mathcal{F}(I)$ το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του I. Αν για κάθε $J \in \mathcal{F}(I)$ το P_J είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη σ-άλγεβρα $\mathcal{E}^I$ τότε η οικογένεια $\{P_J\}_{J \in \mathcal{F}(I)}$ ονομάζεται μία* ***προβολική οικογένεια*** *μέτρων πιθανότητας , αν για κάθε $H, J \in \mathcal{F}(I)$ με $H \subset J$ ισχύει*

$$P_J \circ P_{HJ}^{-1} = P_H$$

όπου P_{HJ} είναι η κανονική προβολή του E^J επάνω στο E^H.

Στη συνέχεια αναφέρουμε κάποια χρήσιμα παραδείγματα πυρηνών Markov.

Παραδείγματα 3.1.2. (**a**) Η συνάρτηση $I : \Omega \times \Sigma \longmapsto \{0, 1\}$, ώστε

$$I(\omega, A) := \delta_\omega(A) := \begin{cases} 1, & \alpha\nu \quad \omega \in A \\ 0, & \alpha\nu \quad \omega \notin A. \end{cases}$$

είναι ένας πυρήνας Markov επάνω στο μ.χ. (Ω, Σ), που ονομάζεται ο **μοναδιαίος πυρήνας** επάνω στο Ω.

(**b**) Έστω φ μία Σ-H- μετρήσιμη απεικόνιση . Η συνάρτηση $k : \Omega \times H \longmapsto [0, 1]$ ώστε

$$k(\omega, B) := \mu(\varphi^{-1}(B)) \quad \forall(\omega, B) \in \ \Omega \times H$$

είναι ένας -H-Μαρκοβιανός πυρήνας που είναι ανεξάρτητος του $\omega \in \Omega$.
(**c**) Έστω $\mathcal{C}$ μία σ-υποάλγεβρα της Σ. Το ερώτημα που προκύπτει από την θεωρία δεσμευμένων πιθανοτήτων ως προς τη $\mathcal{C}$ είναι, αν υπάρχει ένας Ω-Σ−Μαρκοβιανός πυρήνας k, ώστε η συνάρτηση $k(\cdot, A) : \Omega :\longmapsto [0,1]$ για κάθε $A \in \Sigma$ να είναι μια εκδοχή της δεσμευμένης πιθανότητας $P(A|\mathcal{C})$, δηλαδή ώστε να ισχύει

$$\int_C k(\omega, A)P(d\omega) = P(A \cap C)$$

για όλα τα $c \in \mathcal{C}$. Κάθε τέτοιος πυρήνας ονομάζεται **Μαρκοβιανός πυρήνας αναμονής** (expectation kernel) ως προς την $\mathcal{C}$. Για $\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega\}$ ισχύει $k(\omega, A) = P(A)$ και για $\mathcal{C} = \Sigma$ ισχύει $k(\omega, A) = I(\omega, A)$ για κάθε $(\omega, A) \in \Omega \times \mathcal{C}$. Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα, που είναι πολύ σημαντικό για τις εφαρμογές του, π.χ. στη Μαθηματική Στατιστική, είναι θετική στην περίπτωση που ο χώρος Υ είναι ένας πολωνικός χώρος και η Η είναι η $\mathfrak{B}(\Upsilon)$. (β.λ. π.χ. [16]).

Παρατήρησεις 3.1.3. Αν η συνάρτηση $k : \Omega \times H \longmapsto [0,1]$ είναι ένας Ω-H-Μαρκοβιανός πυρήνας, ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας $Q : H \longmapsto [0,1]$ ώστε

$$Q(B) := \int k(\omega, B)P(d\omega) \quad \forall B \in H.$$

Συνήθως συμβολίζουμε το Q με Pk και γράφουμε την ισότητα του ορισμού του Q ως εξής:

$$Pk(B) := \int P(d\omega)k(\omega, B) := \int k(\omega, B)P(d\omega) \tag{3.1}$$

Αν $\mathcal{M}_+^b(\Sigma)$ είναι το σύνολο όλων των μη αρνητικών Σ-μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων, τότε σε κάθε $\Omega - H-$Μαρκοβιανό πυρήνα k αντιστοιχεί μια απεικόνιση από το $\mathcal{M}_+^b(H)$ στο $\mathcal{M}_+^b(\Sigma)$, που ορίζεται ως εξής: Για κάθε $g \in \mathcal{M}_+^b(H)$ η συνάρτηση $\omega \longmapsto \int g(y)k(\omega, dy)$ είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{M}_+^b(\Sigma)$. Για να δείξουμε αυτό, αρκεί να θεωρήσουμε την g ως όριο απλών συναρτήσεων. Αυτή η αντιστοιχία μεταξύ $\mathcal{M}_+^b(H)$ και $\mathcal{M}_+^b(\Sigma)$ συμβολίζεται πάλι με k, και έτσι έχουμε

$$(kg)(\omega) := \int g(y)k(\omega, dy) \quad \forall \omega \in \Omega \tag{3.2}$$

για κάθε $g \in \mathcal{M}_+^b(H)$. Ειδικά, για τη δείκτρια συνάρτηση χ_B ενός συνόλου $B \in H$ έχουμε

$$k\chi_B(\omega) = k(\omega, B) \qquad \forall \omega \in \Omega. \tag{3.3}$$

Αν η k είναι ένας Μαρκοβιανός πυρήνας , τότε μπορεί σύμφωνα με το παραπάνω η k να θεωρηθεί ως μια θετική γραμμική απεικόνιση από τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{M}_+^b(H)$ στο $\mathcal{M}_+^b(\Sigma)$.

Η ορολογία "θετική" για θετικές γραμμικές απεικονίσεις σημαίνει ότι: αν $g \geqslant 0$ τότε $k(g) \geqslant 0$. Για κάθε Ω-H-Μαρκοβιανό πυρήνα η απεικόνιση $k : \mathcal{M}_+^b(H) \longmapsto \mathcal{M}_+^b(\Sigma)$ προφανώς είναι προσθετική, θετική, ομογενής και **συνεχής κατά Daniell** , όπου η τελευταία ιδιότητα σημαίνει ότι

$$g_n \uparrow g \Longrightarrow k(g_n) \uparrow k(g) \tag{3.4}$$

για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{M}_+^b(H)$.

Λήμμα 3.1.4. *Για κάθε προσθετική, θετική, ομογενή και συνεχή κατά Daniell απεικόνιση $M : \mathcal{M}_+^b(H) \longmapsto \mathcal{M}_+^b(\Sigma)$, υπάρχει ακριβώς ένας Ω-H- Μαρκοβιανός πυρήνας k, ώστε $M(g) = k(g)$ για κάθε $g \in \mathcal{M}_+^b(H)$.*

Απόδειξη

Λόγω της (3.3) μπορούμε να ορίσουμε την $k : \Omega \times H \longmapsto [0,1]$ μέσω της σχέσης

$$k(\omega, B) := M(\chi_B)(\omega) \quad \forall \quad (\omega, B) \in \Omega \times H.$$

Τότε εύκολα αποδεικνύεται, ότι η k είναι ένας Ω-H-Μαρκοβιανός πυρήνας. □

Το Λήμμα 3.1.4 μας οδηγεί άμεσα να κατανοήσουμε πως μπορεί να οριστεί η σύνθεση Μαρκοβιανών πυρήνων με ένα απλό τρόπο. Για αυτό το σκοπό θεωρούμε τρεις μ.χ. (Ω_i, Σ_i) με $i = 1, 2, 3$. Για i=1,2 έστω k_i ένας Ω_i-Σ_{i+1}-Μαρκοβιανός πυρήνας. Σύμφωνα με τη σχέση (3.4) η k_i μπορεί να θεωρηθεί η αντίστοιχη προσθετική, θετικά-ομογενής, συνεχής κατά Daniell απεικόνιση $k_i : \mathcal{M}_+^b(\Sigma_{i+1}) \longmapsto \mathcal{M}_+^b(\Sigma_i)$. Έτσι μπορεί να οριστεί η σύνθεση $k_1 \circ k_2 : \mathcal{M}_+^b(\Sigma_3) \longmapsto \mathcal{M}_+^b(\Sigma_1)$. Η $k_1 \circ k_2$ είναι προφανώς ομοίως μια προσθετική, θετικά ομογενής και συνεχής κατά Daniell απεικόνιση, επομένως σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.4 ένας Ω_1-Σ_3-Μαρκοβιανός πυρήνας . Ονομάζουμε την $k_3 := k_1k_2 := k_1 \circ k_2$ σύνθεση των k_1 και k_2. Σύμφωνα με τον ορισμό για κάθε $g \in \mathcal{M}_+^b(\Sigma_3)$ ισχύει

$$\begin{aligned}(k_1k_2g)(\omega_1) &= [k_1(k_2g)](\omega_1) = \int k_1(\omega_1, d\omega_2) \int k_2(\omega_2, d\omega_3)g(\omega_3) \\ &= \int\int k_1(\omega_1, d\omega_2)k_2(\omega_2, d\omega_3)g(\omega_3),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$(k_1k_2g)(\omega_1) = \int\int k_1(\omega_1, d\omega_2)k_2(d\omega_3, \omega_2)g(\omega_2, d\omega_3) \tag{3.5}$$

για κάθε $\omega_1 \in \Omega_1$. Αν $g = \chi_A$ με $A \in \Sigma_3$, τότε ο Ω_1-Σ_3-Μαρκοβιανός πυρήνας $k_3 = k_1k_2$ γράφονται ως

$$(k_1k_2)(\omega_1, A_3) = \int k_1(\omega_1, d\omega_2)k_2(\omega_2, A) \quad \forall \omega_1 \in \Omega_1. \tag{3.6}$$

Έτσι έχει έννοια ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 3.1.5. Έστω $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια οικογένεια Μαρκοβιανών πυρήνων επάνω στο μ.χ. $(E,\mathcal{E})$. Η $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρήνων** επάνω στο Ε, αν

$$P_{s+t} = P_s P_t \qquad \forall s,t \in \mathbb{R}_+ \tag{3.7}$$

Αν σε μια ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρήνων επάνω στο Ε ο P_0 ισούται με το μοναδιαίο Μαρκοβιανό πίνακα I, τότε η $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **κανονική** (normal).

Οι εξισώσεις (3.7) ονομάζονται **εξισώσεις Chapman-Kolmogorov**. Λόγω της (3.6) οι (3.7) γράφονται ως

$$P_{s+t}(x,B) = \int P_s(x,dy)P_t(y,B)$$

για οποιαδήποτε $(x,B) \in E \times \mathcal{E}$ και $s,t \in \mathbb{R}_+$. Από την (3.7) προκύπτει, αφού $t+s = s+t$, ότι $P_sP_t = P_tP_s$. Έτσι κάθε ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρήνων είναι **μεταθετική**.

Τα σημαντικότερα παραδείγματα ημιομάδων Μαρκοβιανών πυρήνων είναι παραδείγματα κανονικών ημιομάδων Μαρκοβιανών πυρήνων (β.λ. ωστόσο το Παράδειγμα 3.1.6(**b**)). Συχνά συναντούμε οικογένειες Μαρκοβιανών πυρήνων, όπου η ιδιότητα (3.7) ισχύει αρχικά μόνο για $s,t > 0$. Αν συμπληρώσουμε μια τέτοια οικογένεια με τον μοναδιαίο πίνακα $P_0 := I$ επάνω στο Ε, τότε έχουμε μια κανονική ημιομάδα.

Θα δώσουμε εδώ μία πιθανοθεωρητική ερμηνεία της νέας έννοιας της ημιομάδας πυρήνων. (Αυτή η ερμηνεία θα διατυπωθεί αυστηρά μαθηματικά στην Ενότητα 3.2). Έστω $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία οικογένεια Μαρκοβιανών πυρήνων επάνω στο Ε με $P_0 = I$. Τότε η $P_t(x,B)$ μπορεί να ερμηνευτεί ως η πιθανότητα, ότι ένα περιπλανόμενο σωματίδιο, το οποίο την χρονική στιγμή 0 ξεκινάει από τη θέση $x \in E$, βρίσκεται τη χρονική στιγμή $t \geqslant 0$ στο σύνολο $B \in \mathcal{E}$. Ένα τέτοιο σωματίδιο δεν έχει καμία "μνήμη". Η παραπέρα κίνηση του από μια θέση, που αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή t, ελέγχεται μόνο από αυτή τη θέση και όχι από τη πρόοδο της κίνησής του πριν από το χρόνο t. Έτσι, αν το σωματίδιο, που αρχιζει να κινείται από το x, βρίσκεται στο "στοιχειώδη όγκο" dy τη χρονική στιγμή s, τότε η πιθανότητα να το βρούμε κάτα τη χρονική στιγμή s+t σε ένα σύνολο $B \in \mathcal{E}$ υπολογίζετσι μέσω του τύπου

$$P_{s+t}(x,B) = \int P_s(x,dy)P_t(y,B),$$

δηλ. μέσω των εξισώσεων Chapman-Kolmogorov. Η παραπάνω ερμηνεία για ένα περιπλανώμενο σωματίδιο χωρίς μνήμη μας οδηγεί ως εκ τούτου αυτόματα στην ιδιότητα των ημιομάδων και συνεπώς σε μια κανονική ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρηνών .

Παραδείγματα 3.1.6. (**a**)Έστω $(E,\mathcal{E})$ οποιοσδήποτε μ.χ. και $P_t := I$ ο μοναδιαίος πυρήνας επάνω στο Ε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε η $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια κανονική ημιομάδα πυρήνων Markov . Σύμφωνα με την παραπάνω ερμηνεία η $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ περιγράφει ένα σωματίδιο, το οποίο μετά το ξεκίνημα στο $x \in E$ δεν εγκαταλείπει τη θέση του.

(b) Έστω $(E, \mathcal{E}, \mu)$ ένας χ.π. και έστω P_t ο ανεξάρτητός του $x \in E$, Μαρκοβιανός πυρήνας $P_t(x, B) := \mu(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{E}$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε η $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρηνών, η οποία είναι κανονική μόνο για $\mathcal{E} = \{\varnothing, E\}$.

(c) Μία ημιομάδα $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ Μαρκοβιανών πυρηνών επάνω στο μ.χ. $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ ονομάζεται **αναλλοίωτη ως προς τις μεταθέσεις** (ή χωρικά ομογενής) αν

$$P_t(x, B) = P_t(x + z, B + z)$$

για όλα τα $x, z \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathfrak{B}_d$ και $t \in \mathbb{R}_+$.

Αν θέσουμε

$$\mu_t := P_t(0, B)$$

τότε παίρνουμε μια οικογένεια $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}_d$, ώστε

$$P_t(B, x) = \mu_t(B - x).$$

Η ιδιότητα των ημιομάδων για την $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μας δίνει για κάθε $B \in \mathfrak{B}_d$ ότι

$$\begin{aligned}\mu_{s+t}(B) = P_{s+t}(0, B) &= \int P_s(0, dy) P_t(y, B) \\ &= \int \mu_s(dy)\mu_t(B - y) = (\mu_s * \mu_t)(B),\end{aligned}$$

συνεπώς,

$$\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t, \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.8}$$

Επομένως, η $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **ημιομάδα συνελίξεων** μέτρων πιθανότητας .

Αντιστρόφως, αν η $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία ημιομάδα συνελίξεων επάνω στη $\mathfrak{B}_d$, τότε η $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με

$$P_t(x, B) := \mu_t(B - x) \tag{3.9}$$

είναι μια ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρηνών επάνω στον $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ αναλλοίωτη ως προς τις μεταθέσεις.

Πράγματι για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ η απεικόνιση $B \to \mu_t(B - x)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}_d$). Επιπλέον, αν η απεικόνιση $(x, y) \longmapsto \chi_B(x + y)$ για κάθε σταθερά $B \in \mathfrak{B}_d$ είναι η σύνθεση της συνεχούς απεικόνισης $(x, y) \longmapsto x + y$ από το $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ στο $\mathbb{R}^d$ με την $\mathfrak{B}_d$)-μετρήσιμη δείκτρια συνάρτηση χ_B. Έπομένως, είναι $\mathfrak{B}_d \otimes \mathfrak{B}_d$-μετρήσιμη.

Είναι γνωστό ότι, για κάθε ημιομάδα συνελίξεων $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύει $\mu_0 = \delta_0$ (βλ. π.χ. [7], Korollar 29.7). Επομένως, μια ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρηνών αναλλοίωτη ως προς τις μεταθέσεις επάνω στο μ.χ. $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ είναι πάντα κανονική.

Πράγματι από την (3.9) προκύπτει ότι

$$P_0(x,B) = \delta_0(B-x) = \delta_x(B) = I(x,B) \tag{3.10}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^d$ και $B \in \mathfrak{B}_d$.

Έτσι από το Θεώρημα Fubrni προκύπτει ότι η απεικόνιση

$$x \longmapsto \int \chi_B(x+y)\mu_t(dy) = \int x_{B-x}(y)\mu_t(dy) = \mu_t(B-x)$$

είναι $\mathfrak{B}_d$-μετρήσιμη. Έτσι κάθε P_t είναι ένας Μαρκοβιανός πυρήνας . Για ένα μέτρο πιθανότητας μ επάνω στην $\mathfrak{B}_d$, έστω $\widetilde{\mu} := \mu \circ S^{-1} := S(\mu)$ το μέτρο εικόνα του μ μέσω της απεικόνισης $S : \mathbb{R}^d \longmapsto \mathbb{R}^d$ με $S(x) := -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$. Τότε η (3.10) και η προηγούμενη αλυσίδα ισοτήτων μας δείχνουν ότι για κάθε $B \in \mathfrak{B}_d, x \in \mathbb{R}^d, t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\begin{aligned}(P_t\chi_B)(x) = P_t(x,B) &= \int \chi_B(x+y)\mu_t(dy) \\ &= \int \chi_B(x-y)\widetilde{\mu}_t(dy).\end{aligned}$$

Τότε για κάθε $f \in \mathcal{M}^b_+(\mathfrak{B}_d)$ υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ απλών συναρτήσεων, ώστε $f = \lim_{n\to\infty} s_n$ και έτσι παίρνουμε

$$\begin{aligned}(P_tf)(x) &= \int f(x+y)\mu_t(dy) = \lim_{n\mapsto\infty}\int s_n(x+y)\mu_t(dy) \qquad (3.11)\\ &= \lim_{n\mapsto\infty}\int s_n(x-y)\widetilde{\mu}_t(dy) \\ &= \int f(x-y)\widetilde{\mu}_t(dy),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$P_tf = f * \widetilde{\mu}_t \qquad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall f \in \mathcal{M}^b_+(\mathfrak{B}_d). \tag{3.12}$$

Λόγω αυτής της ιδιότητας ο P_t ονομάζεται επίσης **Μαρκοβιανός πυρήνας συνέλιξης**. Σε συνδυασμό με την προφανή σχέση $S(\mu{*}v) = S(\mu){*}S(v)$ για οποιαδήποτε μέτρα πιθανότητας (μ,ν), ο τύπος (3.9) μας βοηθάει να επιβεβαιώσουμε την ιδιότητα ημιομάδας της οικογένειας $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Πράγματι για $s,t \in \mathbb{R}_+$ και $f \in \mathcal{M}^b_+(\mathfrak{B}_d)$ έχουμε

$$\begin{aligned}P_{s+t} = f * S(\mu_{s+t}) &= f * S(\mu_t * \mu_s) \\ &= f * (S(\mu_t) * S(\mu_s)) \\ &= (f * (S(\mu_t)) * S(\mu_s) \\ &= (P_tf) * S(\mu_s) = P_s(P_tf).\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε ημιομάδα $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ Μαρκοβιανών πυρηνών επάνω σε έναν μ.χ. $(E,\mathcal{E})$ οδηγεί με έναν φυσικό τρόπο σε μια προβολική οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στον $(E,\mathcal{E})$.

Η ιδέα αυτού προτείνεται μέσω του "περιπλανώμενου σωματιδίου χωρίς μνήμη".

Έστω $t_1 < \cdots < t_n$ και $B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{E}$. Αν το σωματίδιο ξεκινάει απο το x_0, τότε η πιθανότητα το σωματίδιο τις χρονικές στιγμές $t_1,...,t_n$ να βρίσκεται στα $B_1,...,B_n$, αντίστοιχα, δίνονται από τον τύπο

$$\int_{B_1}\cdots\int_{B_{n-1}}\int_{B_n} P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},d_{x_n})P_{t_{n-1}-t_{n-2}}(x_{n-2},d_{x_{n-1}})...P_{t_1}(x_0,dx_1).$$

Αν το σημείο εκκίνησης εξαρτάται επιπλέον από μία αρχική πιθανότητα, δηλαδή από ένα μέτρο πιθανότητας μ επάνω στην $\mathcal{E}$, τότε έχουμε στο τέλος να θεωρήσουμε ακόμη μια ολοκλήρωση με μεταβλητή το x_0 ως προς το μ.

Έτσι προκύπτει

$$\begin{aligned}&\int_E\int_{B_1}\cdots\int_{B_{n-1}}\int_{B_n} P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dxn)P_{t_{n-1}-t_{n-2}}(x_{n-2},dxn-1)...P_{t_1}(x_0,dx_1)\mu(dx_0)\\ &\quad=\int\int\cdots\int \chi_{B_1,...,B_n}(x_1,...,x_n)P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)...P_{t_1}(x_0,dx_1)\mu(dx_0).\end{aligned}$$

Με $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}_+$.
Μετά από αυτήν την προετοιμασία μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.7. *Έστω $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρηνών επάνω σε έναν μ.χ. $(E,\mathcal{E})$ και μ ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathcal{E}$. Για κάθε σύνολο $J=\{t_1,\cdots,t_n\}\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ με $t_1<...<t_n$ και για κάθε $B\in\mathcal{E}_J$ θέτουμε*

$$P_J(B) := \int\int\cdots\int \chi_B(x_1,...,x_n)P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)...P_{t_1}(x_0,dx_1)\mu(dx_0). \tag{3.13}$$

Τότε η $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$ είναι μια προβολική οικογένεια επάνω στο μ.χ. $(E,\mathcal{E})$.

Απόδειξη. Κάθε P_J είναι ένα μέτρο επάνω στην $\mathcal{E}_J$. Πράγματι αρκεί να θεωρήσουμε μία ακολουθία $\{B_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ αν'πα δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων από την $\mathcal{E}_J$ με ένωση B και να ολοκληρώσουμε (σύμφωνα με τη 3.13) την συνάρτηση $\chi_B=\sum_{j=1}^{\infty}\chi_{B_j}$. Επίσης ισχύει $P_J(E^J)=1$ διότι

$$\begin{aligned}P_J(E^J) &= \int_E\int_E\cdots\int_E P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)...P_{t_1}(x_0,dx_1)\mu(dx_0)\\ &= \int 1\mu(dx_0)=1.\end{aligned}$$

Μένει να δείξουμε ότι η οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$ είναι προβολική . Αρκεί προς αυτό να δείξουμε ότι $P_H \circ {\pi_{JH}}^{-1} = P_J$ για κάθε δυο σύνολα $J, H \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ με $J \subseteq H$ για τα οποία το $H\backslash J$ είνα μονοσύνολο (βλ. π.χ. [7], § 35, Bemerkurg 2) Η π_{JH} είναι κανονική προβολή από το E^H επάνω στο E^J.

Έστω λοιπόν $t_1 < \cdots < t_n$ τα στοιχεία του J και έστω $H \setminus J = \{t^{'}\}$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$P_H(\pi_{JH}^{-1}(C)) = P_J(C), \qquad \forall C \in \mathcal{E}_J. \tag{3.14}$$

Επειδή τα σύνολα $B_1 \times ... \times B_n$ με $B_1, ..., B_n \in \mathcal{E}$ είναι τα στοιχεία ενός γεννήτορα της $\mathcal{E}_J$ που είναι κλείστος ως προς τις πεπερασμένες τομές, αρκεί σύμφωνα με το θεώρημα της μοναδικότηατς της Θεωρίας Μέτρου, να αποδειχθεί η (3.14) μόνο για τα σύνολα $C := B_1 \times ... \times B_n \in \mathcal{E}_J$.

Αρχικά έστω $t_i < t^{'} < t_{i+1}$ για ένα $i = 1, ..., n-1$. Τότε

$$\begin{aligned}
&P_H(\pi_{JH}^{-1}(C)) \\
&\quad = P_H(B_1 \times ... \times B_i \times E \times B_{i+1} \times ... \times B_n) \\
&\quad = \int_E \int_{B_1} ... \int_E \int_{B_{i+1}} ... \int_{B_n} P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \dots P_{t_{i+1}-t^{'}}(x^{'}, dx_{i+1}) \cdot \\
&\quad P_{t^{'}-t_i}(x_i, dx^{'}) ... P_{t_1}(x_0, dx_1)\mu(dx_0) \\
&\quad = \int_E \int_{B_1} ... \int_E \int_{B_{i+1}} f(x_{i+1}) P_{t_{i+1}-t^{'}}(x^{'}, dx_{i+1}) P_{t^{'}-t_i}(x_i, dx^{'}) ... \mu(dx_0),
\end{aligned}$$

όπου η συνάρτηση f για $i = n-1$ είναι η σταθερή συνάρτηση 1 και για $i < n-1$ ορίζεται από τον τύπο

$$f(x_{i+1}) := \int_{B_{i+2}} ... \int_{B_n} P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) ... P_{t_{i+2}-t_{i+1}}(x_{i+1}, dx_{i+2}).$$

Προφανώς η f είναι μία μη αρνητικη συνάρτηση $\mathcal{E}$-μετρήσιμη συνάρτηση επάνω στο E. Από την ιδιότητα των ημιομάδων και τη σχέση 3.2 προκύπτει

$$\begin{aligned}
\int_E \int_{B_{i+1}} f(x_{i+1}) P_{t_{i+1}-t^{'}}(x^{'}, dx_{i+1}) P_{t^{'}-t_i}(x_i, dx^{'}) &= P_{t^{'}-t_i} P_{t_{i+1}-t^{'}}(\chi_{B_{i+1}} f)(x_i) \\
&= P_{t_{i+1}-t_i}(\chi_{B_{i+1}} f)(x_i) \\
&= \int_{B_{i+1}} f(\chi_{i+1}) P_{t_{i+1}-t_i}(x_i, dx_{i+1}).
\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned} P_H(\pi_{JH}^{-1}(C)) &= \int_E \int_{B_1} \dots \int_{B_{i+1}} f(x_{i+1}) P_{t_{i+1}-t_i}(x_i, dx_{i+1}) P_{t_i - t_{i-1}}(x_{i-1}, dx_i)\mu(dx_0) \\ &= \int_E \int_{B_1} \dots \int_{B_n} P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \dots P_{t_1}(dx_1, x_0)\mu(dx_0) = P_J(C). \end{aligned}$$

Η περίπτωση $t' < t_1$ αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο, ενώ η περίπτωση $t_n < t'$ είναι προφανής. □

Παρατήρηση 3.1.8. Αν το E είναι ένας πολωνικός χώρος και $\mathcal{E} := \mathfrak{B}(E)$, τότε από το Θεώρημα Συνέπειας του Kolmogorov (βλ. π.χ. [7] , Satz 35.3, Korollar 35.4) προκύπτει ότι η προβολική οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$ που κατασκευάστηκε εδώ, είναι η οικογένεια των πεπερασμένης διάστασης κατανομών μιας σ.δ. με χ.κ τον E. Για δοσμένη Μαρκοβιανή ημιομάδα $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$ εξαρτάται μόνο από την αρχική κατανομή μ επάνω στον $\mathcal{E}$. Αν επιλέξουμε τη κανονική σ.δ. που αντιστοιχει στην $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$, τότε αυτή είναι μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P^μ), όπου μόνο το μέτρο πιθανότητας P^μ εξαρτάται από το μ (και ισχύει $\Omega = \mathbb{E}^{\mathbb{R}_+}, \Sigma := \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}, X_t := \pi_{\{t\}} : \Omega \to E$ η κανονική προβολή). Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $J = \{t_1, ..., t_n\}$ του $\mathbb{R}_+$ με $t_1 < ... < t_n$ ισχύει ότι η $P_J = P^\mu_{(X_1,...,X_n)}$ είναι η από κοινού κατανομή των τ.μ. $X_{t_1}, ..., X_{t_n}$ ως προς το P^μ. Έτσι σύμφωνα με την 3.13 έχουμε

$$P^\mu(\{X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n\}) = \int_E \int_{B_1} \dots \int_{B_n} P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \dots P_{t_1}(x_0, dx_1) \tag{3.15}$$

για οποιαδήποτε σύνολα $B_1, ..., B_n \in \mathcal{E}$. Για την ειδική περίπτωση $\mu = \delta_x$ έχουμε

$$P^{\delta_x}(\{X_{t_1} \in B_1, \dots, X_{t_n} \in B_n\}) = \int_{B_1} \dots \int_{B_n} P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) \dots P_{t_1}(x, dx_1) \tag{3.16}$$

για κάθε $x \in E$. Μία σύγκριση των (3.15) και (3.16) μας οδηγεί για οποιαδήποτε αρχική κατανομή μ στην ισότητα

$$P^\mu(\{X_{t_1}, ..., X_{t_n} \in n\}) = \int P^{\delta_x}(\{X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_n} \in B_{t_n}\})\mu(dx) \tag{3.17}$$

για κάθε επιλογή των $n \in \mathbb{N}$ των αριθμών $t_1 < \cdots < t_n$ από το $\mathbb{R}_+$ και των συνόλων $B_1, ..., B_n \in \mathcal{E}$. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Μοναδικότητας της Θεωρίας Μέτρου έχουμε

$$P^\mu(A) = \int P^{\delta_x}(A)\mu(dx) \qquad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \tag{3.18}$$

ή για συντομία

$$P^\mu = \int P^{\delta_x}(\mu(dx)) \tag{3.19}$$

Από τις (3.16) και (3.17) για την ειδική περίπτωση $n = 1$ προκύπτει ότι

$$P^{\delta_x}(\{X_t \in B\}) = P_t(x, B) \qquad \forall x \in E \quad \forall B \in \mathcal{E} \tag{3.20}$$

και

$$P^{\mu}(\{X_t \in B\}) = P_t(x, B)\mu(dx) \qquad \forall B \in \mathcal{E} \tag{3.21}$$

αντίστοιχα. Για $t = 0$ προκύπτει

$$P^{\mu}(\{X_0 \in B\}) = \int P_0(x, B)\mu(dx) \qquad \forall B \in \mathcal{E}, \tag{3.22}$$

Αν η ημιομάδα είναι κανονική, τότε $P_0 = I$, άρα

$$P^{\mu}_{X_0} = \mu. \tag{3.23}$$

3.2 Σ.Δ. με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Στο παράδειγμα (3.1.6)**(c)** εμφανίστηκε η έννοια μίας ημιομάδας Markov επάνω στον $\mathbb{R}^d$ αναλλοίωτης ως προς τις μεταθέσεις. Σε κάθε τέτοια ημιομάδα $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αντιστοιχεί με μια 1-1 αντιστοιχία μία ημιομάδα συνελίξεων $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$μέτρων πιθανότητας επάνω στον $\mathbb{R}^d$, που ορίζεται μέσω των σχέσεων

$$\mu_t(B) = P_t(0, B) \quad \forall B \in \mathbb{B}_d, \tag{3.24}$$

και

$$P_t(x, B) = \mu_t(B - x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall B \in \mathcal{B}_d. \tag{3.25}$$

Η (3.25) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\int \chi_B P_t(x, dy) = \int \chi_B(x + y)\mu_t(dy)$$

ή ισοδύναμα μέσω της (3.11)

$$\int f(y)P_t(x, dy) = \int f(x + y)\mu_t(dy) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \tag{3.26}$$

για Borel -μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^d \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$.

Παρακάτω γενικεύουμε την (3.26) για Borel -μετρήσιμες συναρτήσεις $f : (\mathbb{R}^d)^n \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι το μ είναι μια αρχική κατανομή επάνω στη $\mathfrak{B}_d$.

Για οποιοδήποτε σύνολο $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ με στοιχεία $t_1 < \cdots < t_n$ συμβολίζουμε $\mu \in P_J$ το μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}_{dn}$ που ορίστηκε στο Θεώρημα 3.1.7. Αν η $f : (\mathbb{R}^d)^n \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+$ είναι μια Borel -μετρήσιμη συνάρτηση, τότε

$$\int f(x_1, \ldots, x_n) P_J(d(x_1, \ldots, x_n)) = \int\int\int \cdots \int f(x_0 + x_1, \ldots, x_0 + \ldots + x_n)\mu_{t_n - t_{n-1}}(dx_n) \tag{3.27}$$

$$\ldots \mu_{t_2 - t_1}(dx_2)\mu_{t_1}(dx_1)\mu(dx_0).$$

Η (3.27) προκύπτει εύκολα με διαδοχικές εφαρμογές της (3.26).

Θα εξετάσουμε παρακάτω δύο ιδιότητες των σ.δ. οι οποίες είναι σε στενή σχεση με τα παραπάνω.

Ορισμός 3.2.1. Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια σ.δ. με χ.κ. $\mathbb{R}^d$. Η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται:
(a) μία σ.δ. με **στάσιμες προσαυξήσεις** , αν υπάρχει μία οικογένεια $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}_d$, ώστε

$$P_{X_t - X_s} = \mu_{t-s} \tag{3.28}$$

για οποιαδήποτε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leqslant t$.
(b) μία σ.δ. με **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** , αν για κάθε $t_0, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ οι τ.μ.

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \tag{3.29}$$

είναι ανεξάρτητες.

Η απαίτηση (3.28) της στασιμότητας των προσαυξήσεων σημαίνει ότι, η κατανομή κάθε προσαύξησης $X_t - X_s$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $t - s \quad (0 \leqslant s \leqslant t)$. Για $s = t$ η (3.28) γίνεται

$$\delta_0 = \mu_0. \tag{3.30}$$

Παρατήρηση 3.2.2. Η απαιτούμενη στον ορισμό 3.2.1, **(b)**, ανεξαρτησία των τ.μ. (3.29) συνεπάγεται, ότι αυτή παραμένει σε ισχύ για κάθε επιλογή σημείων $0 \leqslant t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Πράγματι, στην περίπτωση που ισχύει $t_0 > 0$, η αλυσίδα των $n+1$ σημείων μπορεί να συμπληρωθεί με το $t_{-1} := 0$. Τότε οι τ.μ.

$$X_{t_{-1}}, X_{t_0} - X_{t_{-1}}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

είναι ανεξάρτητες. Επειδή $X_{t_0} = X_{t_{-1}} + (X_{t_0} - X_{t_{-1}})$, η X_{t_0} θα είναι $\sigma(X_{t_{-1}}, X_{t_0} - X_{t_{-1}})$-μετρήσιμη. Τότε η ανεξαρτησία προκύπτει από τη σχέση $\sigma(X_{t_0}) \subseteq \sigma(X_{t_{-1}}, X_{t_0} - X_{t_{-1}})$ και την ανεξαρτησία των σ-αλγεβρών $\sigma(X_{t_0}), \sigma(X_{t_1} - X_{t_0}), ..., \sigma(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$.

Η σύνδεση των νέων εννοιών με αυτών που έχουν επαναλάβαμε στην εισαγωγή της παρούσας ενότητας θα γίνει σαφής, αν, όπως και στην Παρατήρηση (3.2.2), για δυσμενή αρχική κατανομή $\mu : \mathbb{B}_d \longmapsto [0,1]$ θεωρήσουμε την κανονική διαδικασία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. $(\Omega, \Sigma, P^\mu$, η οποία αντιστοιχεί στην προβολική οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathbb{F}(\mathbb{R}_+)}$, η οποία με την σειρά της προέρχεται από μια αναλλοίωτη ως προς της μεταθέσεις Μαρκοβιανή ημιομάδα $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ή από εκείνη η οποία, μέσω της (3.24) αντιστοιχεί στην ομάδα συνελίξεων μέτρων πιθανότητας $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Τότε για κάθε οικογένεια πεπερασμένων στο πλήθος σημείων $t_1, ..., t_n$ η από κοινού κατανομή των τ.μ. $X_{t_1}, ..., X_{t_n}$ ως προς το P^μ δίνεται μέσω της σχέσης (3.13) του Θεωρήματος (3.1.7), από τον τύπο

$$(P^\mu)_{(X_{t_1},...,X_{t_n})} = P_J \tag{3.31}$$

για $J := \{t_1, ..., t_n\}$.

Έτσι λοιπόν, έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P_μ), η οποία προέρχεται από μία ημιομάδα $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συνελίξεων επάνω στη $\mathfrak{B}_d$, την αντίστοιχη αναλλοίωτη ως προς τις μεταθέσεις Μαρκοβιανή ημιομάδα $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και από μία αρχική κατανομή μ επάνω στη $\mathfrak{B}_d$. Τότε η διαδικασία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Για οποιοδήποτε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leqslant t$ ισχύει*

$$P^\mu_{X_t - X_s} = \mu_{t-s}. \tag{3.32}$$

Απόδειξη. Αρχικά αποδεικνύουμε τη στασιμότητα των προσαυξήσων μέσω της απόδειξης της (3.30). Για $s = t$ η (3.30) είναι προφανής, επειδή για μια ημιομάδα συνελίξεων $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ από μέτρα πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}_d$ ισχύει $\mu_0 = \delta_0$ Αν $s < t$ θέτουμε $Y := (X_s, X_t)$ και συμβολίζουμε με q τη συνεχή (άρα Borel -μετρήσιμη) απεικόνιση $(x_1, x_2) \longmapsto x_1 - x_2$ από τον $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ στον $\mathbb{R}^d$. Τότε η $P^\mu_{X_t - X_s}$ είναι η κατανομή της $q \circ Y$ ως προς το P^μ. Άρα για κάθε $B \in \mathfrak{B}_d$ για $Q := q^{-1}(B)$ ισχύει

$$P^\mu(\{X_t - X_s \in B\}) = P^\mu(\{q \circ Y \in B\}) = P^\mu(\{Y \in Q\}),$$

επομένως λόγο της σχέσης (βλ. 3.29)) $(P^\mu) = P_{\{s,t\}}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} P^\mu(\{X_t - X_s \in B\}) &= \int\int\int \chi_Q(x_1, x_2) P_{t-s}(x_1, dx_2) P_s(x, dx_1) \mu(dx) \\ &= \int\int\int \chi_{X_1+B}(x_2) P_{t-s}(x_1, dx_2) P_s(x, dx_1) \mu(dx) \\ &= \int\int P_{t-s}(x_1, x_1 + B) P_s(x, dx_1) \mu(dx) \\ &= \mu_{t-s}(B) \int P_s(x, \mathbb{R}^d) \mu(dx) = \mu_{t-s}(B). \end{aligned}$$

Εδώ χρησιμοποιήθηκε το αναλλοίωτο των μεταθέσεων της P_{t-s} στη μορφή

$$P_{t-s}(x_1, x_1 + B) = P_{t-s}(0, B) = \mu_{t-s}(B)$$

μέσω της σχέσης (3.25). Έτσι αποδείχθηκε η (3.30) στην περίπτωση $s < t$.

Έστω τώρα $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$. Η σ.δ. έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις , όταν οι $n+1$ τ.μ.

$$Y_0 := X_{t_0}, \quad Y_1 := X_{t_1} - X_{t_0}, ..., Y_n := X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

είναι ανεξάρτητες. Επομένως για $Z := (Y_0, ..., Y_n)$ πρέπει να δείξουμε ότι

$$P_Z^\mu = \otimes_{j=0}^n P_{Y_j}^\mu.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$P_Z^\mu({}_0 \times \cdots \times A_n) = \prod_{j=1}^n P_{Y_j}^\mu(A_j) \tag{3.33}$$

για οποιαδήποτε $A_0, \ldots, A_n \in \mathfrak{B}_d$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
P_Z^\mu({}_0 \times \cdots \times A_n) &= \int \chi_{{}_0 \times \cdots \times A_n} dP^\mu_{(Y_0,\ldots,Y_n)} \\
&= \int \chi_{{}_0 \times \cdots \times A_n} \cdot (Y_0, \ldots, Y_n) dP^\mu \\
&= \int \prod_{j=0}^n (\chi_{A_j} \circ Y_j) dP^\mu = \int \prod_{j=0}^n \chi_{A_j} \circ (X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) dP^\mu,
\end{aligned}$$

όπου η τ.μ. $X_{t_{-1}} := 0$ δεν έχει ακόμη προσμετρηθεί.

Σύμφωνα με την (3.29) η $P_{\{t_0,\ldots,t_n\}}$ είναι η από κοινού κατανομή των τ.μ. $X_{t_0}, \ldots, X_{t_n}$. Χρησιμοποιώντας την (3.27) έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int \prod_{j=0}^n \chi_{A_j} \circ (X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) dP^\mu \\
&\quad = \int \chi_{A_0}(x_0) \prod_{j=1}^n \chi_{A_j}(x_j - x_{j-1}) P_{\{t_0,\ldots,t_n\}}(d(x_0, \ldots, x_n)) \\
&\quad = \int \int \int \cdots \int \chi_{A_0}(x_{-1} + x_0) \prod_{j=1}^n \chi_{A_j}(x_j) \mu_{t_n - t_{n-1}}(dx_n) \ldots \mu_{t_0}(dx_0) \mu(dx_{-1}).
\end{aligned}$$

Έτσι λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση $\mu_0 = \delta_0$ έχουμε

$$P_Z^\mu({}_0 \times \cdots \times A_n) = \mu(A_0) \prod_{j=1}^n \mu_{t_j - t_{j-1}}(A_j).$$

Από τη σχέση (3.32) της στασιμότητας, που έχει ήδη αποδειχθεί, προκύπτει ότι

$$\mu_{t_j - t_{j-1}}(A_j) = P^{\mu}_{Y_j}(A_j) \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

και άρα

$$P^{\mu}_{Z}({}_0 \times \cdots \times A_n) = \mu(A_0) \prod_{j=1}^{n} P^{\mu}_{Y_j}(A_j)$$

Επειδή ισχύει ότι $Y_0 = X_{t_0} = X_0$ και επειδή το P_0 είναι ο μοναδιαίος πυρήνας, λόγω της σχέσης (3.10)(της Ενότητας 4.1), προκύπτει ότι

$$P^{\mu}_{Y_0}(A_0) = \int P_0(x, A_0)\mu(dx) = \mu(A_0).$$

Έτσι ισχύει η (3.33) □

Η ακόλουθη αξιοσημείωτη αντιστροφή διδάσκει, ότι έχουμε ήδη αντιμετωπίσει το τυπικό παράδειγμα μίας διαδικασίας με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις με το Θεώρημα 3.2.3.

Θεώρημα 3.2.4. *Για κάθε σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P) με χ.κ. $\mathbb{R}^d$ με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ορίζεται μέσω της σχέσης*

$$\mu_t := P_{X_t - X_0}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \tag{3.34}$$

μία ημιομάδα συνελίξεων $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ από μέτρα πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}^d$. Οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης της σ.δ. είναι εκείνες της κανονικής διαδικασίας, η οποία προκύπτει από τη Μαρκοβιανή ημιομάδα που αντιστοιχεί στην παραπάνω ημιομάδα συνελίξεων μέσω της (3.25), και από την αρχική κατανομή $\mu := P_{X_0}$. Για την από κοινού κατανομή P_J των τ.μ. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ (ως προς το P) ισχύει η σχέση (3.13)), όπου $J := \{t_1, \ldots, t_n\}$ και $t_1 < \cdots < t_n$.

Απόδειξη. Για $t = 0$ ισχύει $\mu_0 = \delta_0$, δηλ. ισχύει η (3.34). Επίσης ισχύει $\mu_{s,t} = \mu_s * \mu_t$ πάντα, αν ένας από τους αριθμούς $s, t \in \mathbb{R}_+$ είναι 0. Θα δείξουμε ότι η (3.34) και για $s > 0$, $t > 0$, Από την ανεξαρτησία των προσαυξήσεων προκύπτει ότι οι τ.μ. $X_{s+t} - X_t$ και $X_t - X_0$ είναι ανεξάρτητες. Λόγω της στασιμότητας των προσαυξήσεων το μ_s είναι η κατανομή της $X_{s+t} - X_t$. Επομένως

$$\mu_{t+s} = P_{X_{s+t} - X_0} = P_{X_{s+t} - X_t} * P_{X_t - X_0} = \mu_s * \mu_s.$$

Άρα η $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια ημιομάδα συνελίξεων από μέτρα πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}_d$.

Έστω $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$. Για τον υπολογισμό της από κοινού κατανομής Q των τ.μ. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}$ θέτουμε $K := \{t_0, \ldots, t_n\} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $T : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \longmapsto (\mathbb{R}^d)^{n+1}$ μέσω του τύπου

$$T(x_0, \ldots, x_n) := (x_0, x_1 - x_0, \ldots, x_n - x_{n-1}). \tag{3.35}$$

Για κάθε *Borel*-μετρήσιμη συνάρτηση $f : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \longmapsto [0, \infty]$ έχουμε:

$$\begin{aligned}\int f dQ &= \int f \circ (X_{t_0}, \dots, X_{t_n}) dP \\ &= \int (f \circ T^{-1} \circ T \circ (X_{t_0}, \dots, X_{t_n})) dP \\ &= \int (f \circ T^{-1} \circ (X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})) dP \\ &= \int (f \circ T^{-1}) d\tau,\end{aligned}$$

όπου $\tau := P_{(X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})}$ είναι η από κοινού κατανομή των τ.μ.

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}.$$

Επειδή οι προσαυξήσεις είναι στάσιμες και ανεξάρτητες, προκύπτει ότι

$$\tau = \mu \otimes \mu_{t_1} \otimes \mu_{t_2 - t_1} \cdots \otimes \mu_{t_n - t_{n-1}}.$$

Από το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\int f dQ = \int \int \int \cdots \int f(x_0, x_1 + x_0, \dots, x_0 + \cdots + x_n) \mu_{t_n - t_{n-1}}(dx_n) \dots \mu_{t_1}(dx_1) \mu(dx_0)$$

για όλες τις συναρτήσεις f όπως παραπάνω. Εφαρμόζοντας τη σχέση (3.27) έχουμε

$$\begin{aligned}\int f dPk &= \int \int \int \cdots \int f(x_{-1} + x_0, \dots, x_{-1} + x_0 + \cdots + x_n) \mu_{t_n - t_{n-1}}(dx_n) \dots \mu_{t_0}(dx_0) \mu(dx_{-1}) \\ &= \int \int \int \cdots \int f(x_{-1}, x_{-1} + x_1, \dots, x_{-1} + x_1 + \cdots + x_n) \mu_{t_n - t_{n-1}}(dx_n) \dots \mu_{t_1}(dx_1) \mu(dx_{-1})\end{aligned}$$

αν προσέξουμε ότι $\mu_0 = \mu_{t_0} = \delta_0$. □ Έτσι αποδείχθηκε ότι

$$\int f dQ = \int f dPk$$

για όλες τις Borel -μετρήσιμες συναρτήσεις συναρτήσεις $f : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \longmapsto \mathbb{R}_+$ συνεπώς από τον ορισμό της Q προκύπτει ότι

$$P_{(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})} = P_K. \tag{3.36}$$

Αυτό αποδεικνύει το δεύτερο μέρος του ισχυρισμού για $J = \{t_1, \dots, t_n\} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ με $t_0 := 0$ με $t_1 < \cdots < t_n$ και $t_1 := 0$. Για την απομένουσα περίπτωση $0 < t_1 < \cdots < t_n$ θεωρούμε το σύνολο $K := \{t_0, \cdots, t_n\} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ με $t_0 := 0$. Από την (3.36) για κάθε $B \in (\mathfrak{B}_d)_n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&P_{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})}(B)\\
&\quad = P_{(X_{t_0},\dots,X_{t_n})}(\mathbb{R}^d \times B) = Pk(\mathbb{R}^d \times B)\\
&\quad = \int\int\int\cdots\int \chi_{(\mathbb{R}^d\times B)}(x_0, x_1 + x_0, \dots, x_0 + \cdots + x_n)\mu_{t_n - t_{n-1}}(dx_n)\dots\mu_{t_1}(dx_1)\mu(dx_0)\\
&\quad = \int\int\int\cdots\int \chi_B(x_0, x_1 + x_0, \dots, x_0 + \cdots + x_n)\mu_{t_n - t_{n-1}}(dx_n)\dots\mu_{t_1}(dx_1)\mu(dx_0)\\
&\quad = P_J(B),
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την (3.27). Άρα $P_{(X_{t_1},\dots,X_{t_n})} = P_J$.

3.3 Διαδικασίες Markov

Ορισμός 3.3.1. Έστω $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία διύλιση στον (Ω, Σ). Μία σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. $X_t : \Omega \to E$ ονομάζεται **σ.δ. Markov** (ως προς τη διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$) αν ισχύει

$$P(\{X_t \in B\}|\mathcal{F}_s) = P(\{X_t \in B\}|X_s) \quad P \restriction \mathcal{F}_s - \sigma.\beta. \tag{3.37}$$

για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ και $B \in \mathcal{E}$.

Η ιδιότητα (3.37) ονομάζεται η **στοιχειώδης** ή **η μεμονωμένη** (ατομική) ιδιότητα Markov ως προς την $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Για να αποκομίσουμε μια ολόκληρη σειρά σημαντικών παραδειγμάτων, φέρουμε τον Ορισμό 3.3.1 σε μια ισοδύμαμη με αυτόν μορφή.

Λήμμα 3.3.2. *Μία σ.δ. $X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία σ.δ. Markov ως προς τη κανονική της διύλιση $\{F_t^X\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, αν και μόνο αν για κάθε σύνολο $B \in \mathcal{E}$ και για κάθε $s_1, \dots, s_n, t \in \mathbb{R}_+$ με $s_1 < \dots < s_n < t$ ισχύει*

$$P(\{X_t \in B\}|X_{s_1}, \dots, X_{s_n}) = P(\{X_t \in B\}|X_{s_n}) \quad \sigma.\beta. \tag{3.38}$$

Απόδειξη. Έστω ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει τη στοιχειώδη ιδιότητα Markov. Τότε για $B \in \mathcal{E}$ και $0 \leqslant s_1 < \dots < s_n < t$ ισχύει

$$P(\{X_t \in B\}|\mathcal{F}_{s_n}^X) = P(\{X_t \in B\}|X_{s_n}) \quad \sigma.\beta. \tag{3.39}$$

Θέτουμε για συντομία $A := \{X_t \in B\}$. Τότε

$$\mathbb{E}[\chi_A|\mathcal{F}_{s_n}^X] = \mathbb{E}[\chi_A|X_{s_n}] \quad P \restriction \mathcal{F}_{s_n}^X - \sigma.\beta.$$

συνεπώς

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\chi_A|\mathcal{F}_{s_n}^X]|X_{s_1},...,X_{s_n}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\chi_A|X_{s_n}]|X_{s_1},...,X_{s_n}] \quad P\upharpoonright \mathcal{F}_{s_n}^X - \sigma.\beta.$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbb{E}[\chi_A|X_{s_n}|X_{s_1},...,X_{s_n}] = \mathbb{E}[\chi_A|X_{s_n}] \quad P\upharpoonright \mathcal{F}_{s_n}^X - \sigma.\beta.$$

Άρα ισχύει η (3.38)

Αντιστρόφως, έστω ότι ισχύει η (3.38). Για $B \in \mathcal{E}$ και $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ πρέπει να δείξουμε, ότι μία εκδοχή Y της $P(\{X_t \in B\}|X_s)$ είναι επίσης μια εκδοχή της δεσμευμένης πιθανότητας $P(\{X_t \in B\}|\mathcal{F}_s)$. Επειδή η Y είναι $\sigma(X_s)$-(άρα και $\mathcal{F}_s^X-$) μετρήσιμη πρέπει να αποδειχθεί ότι ισχύει η σχέση

$$\int_Q Y dP = P(\{X_t \in B\} \cap Q) \quad \forall Q \in \mathcal{F}_s^X. \tag{3.40}$$

Λόγω της (3.39), (3.40) ισχύει για όλα τα $Q \in \sigma(X_{s_1},...,X_{s_n})$ για οποιαδήποτε $s_1,...,s_n \in \mathbb{R}_+$ με $s_1 < ... < s_n =: s$. Προφανώς το σύστημα $\mathcal{G}$ αυτών των συνόλων Q είναι κλειστό ως προς τις πεπερασμένες τομές, παράγει την $\mathcal{F}_{s_n}^X$ και ισχύει $\Omega \in \mathcal{G}$. Επειδή δεξιά και αριστερά της (3.40) έχουμε πεπερασμένα μέτρα επάνω στη Σ, τα οποία συμπίπτουν πάνω στο $\mathcal{G}$, πρέπει αυτά τα μέτρα, σύμφωνα με τη Πρόταση 1.2.8 του [3], να συμπίπτουν επάνω στη $\sigma(\mathcal{G}) = \mathcal{F}_s^X$. Άρα ισχύει η (3.40) για όλα τα $Q \in \mathcal{F}_s^X$. □

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει ένα χρήσιμο χαρακτηρισμό σ.δ. Markov.

Θεώρημα 3.3.3. *Η σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. $X_t : \Omega \longmapsto E$ είναι διαδικασία Markov ως προς τη διύλιση $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αν και μόνο αν για κάθε $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leqslant t$ και για κάθε $f \in \mathcal{M}_b(E)$ ισχύει*

$$\mathbb{E}[f(X_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[f(X_t)|X_s] \quad P\upharpoonright \mathcal{F}_s - \sigma.\beta.. \tag{3.41}$$

Απόδειξη. Έστω ότι ισχύει η (3.41) για κάθε $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leqslant t$ και για κάθε $f \in \mathcal{M}_b(E)$. Τότε για $f := \chi_B : E \longleftrightarrow \mathbb{R}_+$ με $B \in \mathcal{E}$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(X_t^{-1}(B)|\mathcal{F}_s) &= \mathbb{E}[\chi_{X_t^{-1}(B)}|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\chi_B(X_t)|\mathcal{F}_s] \\ &\overset{(3.41)}{=} \mathbb{E}[\chi_B(X_t)|X_s] = \mathbb{E}[\chi_{X_t^{-1}(B)}|X_s] \\ &= P(X_t^{-1}(B)|X_s), \end{aligned}$$

όπου οι ισότητες ισχύουν $P\upharpoonright \mathcal{F}_s - \sigma.\beta.$, άρα η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. Markov.

Αντιστρόφως, έστω ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία Markov και έστω $s,t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leqslant t$. Για $f = \chi_B \in \mathcal{M}_b(E), B \in \mathcal{E}$ ισχύει προφανώς η (3.41). Άρα η (3.41) ισχύει και για κάθε απλή μη αρνητική συνάρτηση f. Από το Θεώρημα της Μονότονης Σύγκλισης η (3.41) θα ισχύει και για κάθε μη αρνητική συνάρτηση $f \in \mathcal{M}(E)$, άρα και για κάθε $f \in \mathcal{M}_b(E)$ μη αρνητική, επομένως για κάθε $f \in \mathcal{M}_b(E)$. □

Υποθέτουμε ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία οικογένεια τ.μ. $X_t : \Omega \longmapsto E$, η $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η κανονική της διύλιση, και ότι ο (E,$\mathcal{E}$) είναι ένας πολωνικός χώρος με $\mathcal{E} : \mathfrak{B}(E)$. Από το Θεώρημα A.3.1 και την Παρατήρηση A.3.2, μπορούμε να γράψουμε

$$P(\{X_t \in B\}|X_s) = p(s, X_s, t, B), \tag{3.42}$$

όπου η συνάρτηση $x \longmapsto p(s, x, t, B)$ είναι $\sigma(X_s)-$ μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερά s, t, B με $s \leqslant t$. Επί πλέον, από το Theorem A2.12 του [24], υπάρχει μια φυσιολογική (regular) δεσμευμένη κατανομή της X_t επάνω στη σ-άλγεβρα $\sigma(X_s)-$, και επομένως μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η συνολοσυνάρτηση $A \longmapsto p(s, x, t, A)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας για οποιοδήποτε σταθερά σημεία s, x, t. Χρησιμοποιώντας τώρα ένα επιχείρημα μονότονης κλάσης για συναρτήσεις (βλ. Θεώρημα [6]), συμπεραίνουμε ότι για κάθε $g \in \mathcal{M}_b(E)$ ισχύει

$$\mathbb{E}[g(X_t)|\mathcal{F}_s] = \int_E g(y)p(s, y, t, dy) \quad P \upharpoonright \sigma(X_s) - \sigma.\beta.. \tag{3.43}$$

Άρα εφαρμόζοντας την ιδιότητα του πύργου για δεσμευμένες μέσες τιμές, παίρνουμε για κάθε $s, u, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < u < t$ και για κάθε $B \in \mathcal{E}$ τις σχέσεις

$$\begin{aligned} p(s, X_s, t, B) &= P(\{X_t \in B\}|\mathcal{F}_s) \\ &= \mathbb{E}[P(\{X_t \in B\}|\mathcal{F}_u)|\mathcal{F}_s] \\ &= \mathbb{E}[p(s, X_u, t, B)|\mathcal{F}_s] \\ &\overset{(3.43)}{=} \int_E p(s, y, t, B)p(s, x, u, dy), \end{aligned}$$

όπου όλες οι ισότητες ισχύουν $P \upharpoonright \mathcal{F}_s - \sigma.\beta..$ Άρα για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ και $B \in \mathcal{E}$ ισχύει

$$p(s, x, t, A) = \int_E p(s, y, t, A)p(s, x, u, dy) \tag{3.44}$$

για $P \upharpoonright \mathcal{F}_s - \sigma.o.$ τα $x \in E$.

Η εξίσωση (3.44) γνωστή ως εξίσωση Chapman-Kolmogorov μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό, όπου χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\mathbb{R}_+^{2<} := \{(s,t) \in \mathbb{R}_+^2 : s < t\}$.

Ορισμός 3.3.4. Μια συνάρτηση $p : \mathbb{R}_+ \times E \times \mathbb{R}_+ \times \mathcal{E} \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης** αν για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+^{2<}$ ισχύει:

($\sigma\pi\mu 1$) η $x \longmapsto p(s,x,t,B)$ είναι $\mathcal{F}_s$-μετρήσιμη,

($\sigma\pi\mu 2$) η $\longmapsto p(s,x,t,B)$ είναι μέτρο πιθανότητας για σταθερό $B \in \mathcal{E}$,

($\sigma\pi\mu 3$) η (3.44) ισχύει για κάθε $(s,t) \in \mathbb{R}_+^{2<}$, $\quad x \in \mathcal{E} \quad \kappa\alpha\iota \quad B \in \mathcal{E}$.

Εναλλακτικά ονόματα για συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης είναι **πιθανότητα μετάβασης** και Markov πιθανότητα μετάβασης. Εναλλακτικός συμβολισμός $p_{s,t}(x,B) := p(s,x,t,B)$. Είναι φυσικό να ορίσουμε τις πιθανότητες μετάβασης "μηδενικού χρόνου" ως

$$p(s,x,t,B) := \delta_x(B) = \chi_B(x).$$

Ορισμός 3.3.5. Μια σ.δ. Markov $X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ λέμε ότι έχει τη συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης p αν η εξίσωση (3.42) ικανοποιείται για κάθε $(s,t) \in \mathbb{R}_+^{2<}$ και $A \in \mathcal{E} \quad P \restriction \mathcal{F}_s - \sigma.\beta.$

Αν μία σ.δ. Markov X έχει συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης p, τότε από την (3.42) προκύπτει η (3.43) με μια εφαρμογή του Θεωρήματος B'.3.6. της [6]. Αντιστρόφως, θέτοντας $g = \chi_B$, $B \in \mathcal{E}$ στην (3.43) παίρνουμε την (3.42). Έτσι στον Ορισμό (3.3.5) η (3.42) μπορεί να αντικατασταθεί από την (3.43).

Τα σχέδια που προηγήθηκαν του Ορισμού 3.3.4 μας δείχνουν ότι σε κάθε σ.δ. Markov αντιστοιχεί μια συνάρτηση, η οποία ικανοποιεί την (3.44) για $P_{X_s} - "\sigma.o"$ τα $x \in E$. Άρα είναι με αυτήν την έννοια "σχεδόν" μια συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης.

Στην περίπτωση που ο $(E,\mathcal{E})$ είναι ένας πολωνικός χώρος ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα:

Θεώρημα 3.3.6. *Κάθε σ.δ. Markov με χ.κ. έναν πολωνικό χώρο έχει μια συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης που ικανοποιεί την εξίσωση Chapman-Kolmogorov για κάθε* $(s,t) \in \mathbb{R}_+^{2<}$, $B \in \mathcal{E}$ *και* $x \in E$.

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στην εργασία [23] του Kuznetsov.

Το αντίστροφο του παραπάνω θεωρήματος δεν ισχύει γενικά. Για αντιπαραδείγματα παραπέμπουμε στα βιβλία των [28] και [24], Example 7.1. Παρ' όλα αυτά, αν υπάρχει ένα "αρχικό σημείο" τότε η αντίστοιχη διαδικασία υπάρχει.

Θεώρημα 3.3.7. *Υποθέτουμε ότι η p είναι μια συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης και ότι το* μ *είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην* $\mathcal{E}$. *Τότε υπάρχει μια σ.δ. Markov , ώστε η p να είναι αντίστοιχη συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης της με* $\mu = P_{X_{t_0}}$.

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στο βιβλίο [24], Thm 7.1.

Μια σημαντική περίπτωση σ.δ. Markov είναι όπου η πιθανότητα μετάβασης εξαρτάται μόνο από την απόσταση μεταξύ χρονικών στιγμών.

Ορισμός 3.3.8. Μια συνάρτηση πιθανότητας μετάβασης p είναι **ομογενής** , αν για όλα τα $s_1, t_1, s_2, t_2 \in \mathbb{R}_+$ με $t_2 - s_2 = t_1 - s_1 > 0$ και για κάθε $x \in E,$, $B \in \mathcal{E}$ ισχύει

$$p(s_1, x, t_1, B) = p(s_2, x, t_2, B).$$

Μια σ.δ. Markov είναι **ομογενής** αν έχει μια ομογενή σ.π. μετάβασης.

Μια ομογενή σ.π. μετάβασης επιτρέπεται να θεωρηθεί ως μια συνάρτηση τριών μεταβλητών, δηλάδη $p(s, x, t, B) = p(t - s, x, B) = p_{t-s}(x, B)$, ισοδύναμα $p(s, x + s + t, B) = p(x, t, B)$. Τότε η εξίσωση Chapman-Kolmogorov μπορεί να γραφεί ως

$$p(s + t, x, B) = \int_E p(t, y, B)p(s, x, dy) \tag{3.45}$$

Θεώρημα 3.3.9. *Έστω $X := \{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ μία σ.δ. με χ.κ. $(E, \mathcal{E})$ που έχει κατανομές πεπερασμένης διάστασης, που προκύπτουν μέσω της (3.13) από μία ημιομάδα Markov $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ και μία αρχική κατανομή μ επάνω στην $\mathcal{E}$. Τότε η X είναι μια διαδικασία Markov ως προς την κανονική της διύλιση $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Έπιπλέον, για όλα τα $B \in \mathcal{E}$ και όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ ισχύει*

$$P(\{X_t \in \ B\} | \mathcal{F}_s^X) = P_{t-s}(X_s, B) \quad \sigma.\beta. \tag{3.46}$$

Εδώ με $P_{t-s}(B, X_s)$ συμβολίζεται η τ.μ. $\omega \to P_{t-s}(X_s(\omega), B))$.

Απόδειξη. Σημειώνουμε ότι η $P_{t-s}(X_s, B)$ είναι πάντα $\sigma(X_s)$- και επομένως $\mathcal{F}_s^X$-μετρήσιμη . Έτσι, εκείνο που πρέπει να δείξουμε για να επιβεβαιώσουμε την (3.49) είναι ότι

$$\int_Q P_{t-s}(X_s, B)dP = P(\{X_t \in B\} \cap Q)$$

για όλα τα $Q \in \mathcal{F}_s^X$ ή λόγω του θεωρήματος μοναδικότητας της Θεωρίας Μέτρου, για τουλάχιστον όλα τα Q στην οικογένεια

$$\bigcup_{0 \leqslant s_1 < \ldots < s_n = s} \sigma(X_{s_1}, \ldots, X_{s_n})$$

η οποία παράγει την $\mathcal{F}_s^X$ (βλ. την απόδειξη του Λήμματος 3.2.2).

Έτσι έχουμε να δείξουμε μόνο, ότι για οποιοδήποτε $B \in \mathcal{E}$ και για $s_1, \ldots, s_n, t \in \mathbb{R}_+$ με $s_1 < \ldots < s_n < t$ ισχύει:

$$P(\{X_t \in \ B | X_{s_1}, \ldots, X_{s_n}\}) = P_{t-s_n}(X_{s_n}, B) \quad \sigma.\beta. \tag{3.47}$$

Τότε ειδική περίπτωση της (3.26) είναι η

$$P(\{X_t \in \ B|X_{s_n}\}) = P_{t-s_n}(X_{s_n}, B) \quad \sigma.\beta. \tag{3.48}$$

Από τις δύο παραπάνω ισότητες προκύπτει η στοιχειώδης ιδιότητα Markov .

Η τ.μ. $Y := P_{t-s_n}(X_{s_n}, B)$ είναι $\sigma(X_{s_1}, ..., X_{s_n})$-μετρήσιμη . Για την απόδειξη της (3.26) αρκεί να αποδείξουμε την

$$\int_Q Y dP = P(\{X_t \in B\} \cap Q) \tag{3.49}$$

για όλα τα $Q \in \sigma(X_{s_1}, ..., X_{s_n})$. Μπορεί να υποτεθεί, ότι $Q = \{X_{s_1} \in B_1\} \cap ... \cap \{X_{s_n} \in B_n\}$ με $B_1, ..., B_n \in \mathcal{E}$, επειδή αυτά τα σύνολα αποτελούν έναν γεννήτορα της $\sigma(X_{s_1}, ..., X_{s_n})$ που περιέχει το Ω και είναι κλειστός ως προς τις πεπερασμένες τομές. Αλλά τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int_Q Y dP &= \int \chi_Q Y dP = \int (\chi_{B_1} \cdot X_{s_1}) ... \chi_{B_n} \cdot X_{s_n}) Y dP \\ &= \int \chi_{B_1}(x_1) ... \chi_{B_n}(x_n) P_{t-s_n}(X_{s_n}, B) P_J(d(x_1, ..., x_n)),\end{aligned}$$

όπου $J = \{s_1, ..., s_n\}$ και P_J είναι η από κοινού κατανομή των τ.μ. $X_{s_1}, ..., X_{s_n}$. Τότε από την (3.56) προκύπτει

$$\begin{aligned}&\int_Q Y dP \\ &= \int\int ... \int \chi_{B_1}(x_1) ... \chi_{B_n}(x_n) P_{t-s_n}(X_{s_n}, B) \cdot P_{s_n - s_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n) ... P_{s_1}(x_0, dx_1) \mu(dx_0) \\ &= \int \int_{B_1} ... \int_{B_n} P_{t-s_n}(x_n, B) ... P_{s_1}(x_0, dx_1) \mu(dx_0) \\ &= \int \int_{B_1} ... \int_{B_n} \int_B P_{t-s_n}(x_n, dx_{n+1}) ... P_{s_1}(x_0, dx_1) \mu(dx_0) \\ &= P_H(B_1 \times ... \times B_n \times B),\end{aligned}$$

όπου $H := \{s_1, ..., s_n, t\}$ και P_H είναι η από κοινού κατανομή των τ.μ.$X_{s_1}, ..., X_{s_n}, X_t$. Άρα

$$P_H(B_1 \times ... \times B_n \times B) = P(\{X_{s_1} \in B_1, ..., X_{s_n} \in B_n, X_t \in B\}) = P(\{X_t \in B\} \cap Q)$$

Η τελευταία σχέση μας οδηγεί στην (3.27). □

Παρατήρηση 3.3.10. Ενώ η συνθήκη (3.37) ικανοποιείται αυτόματα για $s = t$, είναι απαραίτητη μία συμπληρωματική συνθήκη για τον πυρήνα P_0 για να μπορεί να ισχύει η συνθήκη (3.46) επίσης για $s = t$. Για $s = t \geqslant 0$ η αριστερή πλευρά της (3.46) επίσης είναι ίση με

$X_{\{X_t \in B\}} = X_B(X_t)$. Η δεξιά πλευρά μας δείχνει $P_0(X_t, B)$. Αν η P_0 είναι ο μοναδιαίος πυρήνας, δηλαδή αν η ημιομάδα Markov $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι **κανονική**, τότε ισχύει η (5) για $0 \leqslant s \leqslant t$ (ανεξάρτητα από την επιλογή της αρχικής κατανομής μ).

Με την βοήθεια του Θεωρήματος 3.3.3 προκύπτουν άμεσα το παρακάτω πόρισμα και ενδεικτικά παραδείγματα διαδικασιών Markov.

Πόρισμα 3.3.11. *Κάθε σ.δ. με χ.κ. $\mathbb{R}^d$ και με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις είναι μια σ.δ Markov .*

Παραδείγματα 3.3.12. (a) Κάθε κίνηση Brown με χ.κ.τον $\mathbb{R}^d$ είναι μια σ.δ Markov.
(b) Κάθε σ.δ. Poisson με παράμετρο $a > 0$ είναι μια σ.δ Markov.
(c) Ένα σημαντικό παράδειγμα μιας μη αναλλοίωτης ως προς τις μεταθέσεις κανονικής ημιομάδας πυρήνας Markov $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στον $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ προκύπτει για δοσμένες παραμέτρους $a > 0$, $c > 0$ όπως παρακάτω: Έστω P_0 ο μοναδιαίος πυρήνας I και

$$P_t(x, B) := \int_B P_t(x, y)dy \quad \forall t > 0 \quad \forall B \in \mathbb{B},$$

όπου $p_t(x, \bullet) : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ είναι η σ.π.π. της μονοδιάστατης κανονικής κατανομής $N(\tau^*, x, \tau^2)$ με

$$\tau^* := e^{-\alpha t}, \quad \tau^2 := c\frac{1 - e^{-2at}}{2a} \quad \kappa\alpha\iota \quad \tau > 0. \tag{3.50}$$

Επομένως για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $t > 0$ ισχύει

$$\begin{aligned} p_t(x, y) &= \frac{1}{(2\pi\tau^2)^{1/2}} e^{-\frac{(y-\tau^* x)^2}{2\tau^2}} \\ &= \frac{1}{[\frac{c\pi}{a}(1 - e^{-2at})]^{1/2}} e^{-\frac{a(y-e^{-at}x)^2}{c(1-e^{-2at})}}, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$p_t(x, y) = [\frac{c\pi}{a}(1 - e^{-2at})]^{-1/2} e^{-\frac{a(y-e^{-at}x)^2}{c(1-e^{-2at})}}. \tag{3.51}$$

Αν ορίσουμε για $s > 0$ τους αριθμούς σ^2 και $\sigma > 0$ ανάλογα με τους τ^* και τ για $t > 0$, τότε τότε παίρνουμε την ιδιότητα των ημιομάδων όπως παρακάτω:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_s(x, y)p_t(y, z)dy = (2\pi\tau\sigma)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\sigma^* x-y)^2}{2\sigma^2} - \frac{(\tau^* y-z)^2}{2\tau^2}} dy.$$

μέσω του μετασχηματισμού $\eta := y - \frac{z}{\tau^*}$ μπορεί να αποδειχθεί ότι

$$p_{s+t}(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_s(x, y)p_t(y, z)dy,$$

επομένως ισχύουν οι εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

$$p_{s+t}(x,B) = \int p_s(x,dy)p_t(y,B) \quad \forall (x,B) \in \mathbb{R} \times \mathbb{B}, \forall s,t \in \mathbb{R}_+.$$

Αφού ισχύει $\int P_t(x,y)dy = 1$ η P_t είναι ένας πυρήνας Markov για κάθε $t > 0$, όπου η μετρησιμότητα της συνάρτησης $x \longmapsto P_t(x,B)$ προκύπτει από το Θεώρημα Fubini.

Η ημιομάδα $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, που προέκυψε με το παραπάνω τρόπο ονομάζεται η **ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck** με παραμέτρους $a > 0$ και $c > 0$. Για c=1 και $a \to 0$ προκύπτει η ημιομάδα της κίνησης Brown.

Έστω $\mu : \mathfrak{B} \longmapsto [0,1]$ μία αρχική κατανομή. Η προβολική οικογένεια μέτρων πιθανοτήτας, που προκύπτει μέσω της σχέσης (3.13) είναι η οικογένεια της πεπερασμένης διάστασης κατανομών μιας πραγματικής σ.δ. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P). Κάθε τέτοια σ.δ. είναι μια σ.δ. Markov (σύμφωνα με το Θεώρημα 3.3.3).

Η ιδιότητα (3.46) είναι ακόμη πιο στενά συνδεδεμένη με τις ημιομάδες Markov, από ό,τι εκφράζει το Θεώρημα 3.3.3. Για να το δείξουμε αυτό, θεωρούμε μια ημιομάδα Markov $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ επάνω σε έναν πολωνικό χώρο E εφοδιασμένο με την σ-άλγεβρα $\mathcal{E} := \mathfrak{B}(E)$. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.1.8, για κάθε αρχική κατανομή $\mu : \mathbb{E} \longmapsto [0,1]$ υπάρχει μια σ.δ. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P) με χ.κ. E, όπου μόνο το P^{μ} εξαρτάται από το μ και όπου οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης προκύπτουν από την ημιομάδα $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ και την αρχική κατανομή μ μέσω του τύπου (3.13). Ιδιατέρως, το μέτρο πιθανότητας P^{δ_x} επάνω στη Σ ορίζεται για κάθε $x \in E$. Θα το συμβολίζουμε από τώρα και στο εξής με P^x.

Σύμφωνα με την σχέση (3.16) για κάθε $t_1, ..., t_n$ από το $\mathbb{R}_+$ και $B_1, ..., B_n \in \mathfrak{B}(E)$ ισχύει

$$\begin{aligned} P^X(\{X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_n} \in B_n\}) &= \int_{B_1} ... \int_{B_n} P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_1) ... P_{t_1}(x, dx_1) \\ &= P_{t_1}((...(P_{t_{n-1}-t_{n-2}}(P_{t_n - t_{n-1}} \chi_{B_n})\chi_{B_{n-1}})...)X_{B_1})(x), \end{aligned}$$

όπου η απεικόνιση $x \longmapsto P^x(\{X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_n} \in B_n\})$ είναι πάντα $\mathcal{E}$-μετρήσιμη. Επειδή κάθε μία από τις σ.δ $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ επάνω στον χ.π. (Ω, Σ, P) είναι κανονική, δηλαδή $\Omega = E^{\mathbb{R}_+}, \Sigma = \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}$ και $X_t \omega(t)$, η σ-άλγεβρα Σ παράγεται απ'λο το σύστημα g των συνόλων $\{X_{t_1} \in B_1\} \cap ... \cap \{X_{t_n} \in B_n\}$ με $t_1 < ... < t_n$, $B_1, ..., B_n \in \Sigma$, $\quad n \in \mathbb{N}$. Επί πλέον, το σύστημα $\mathbb{M}$ όλων των συνόλων A, για τα οποία η απεικόνιση $x \longmapsto P^x(A)$ είναι μετρήσιμη , είναι προφανώς μια κλάση Dynkin με $g \subset \mathbb{M}$. Άρα, από το θεώρημα Μονότονης κλάσης (β.λ. π.χ. [19], Theorem 136B) προκύπτει, ότι $\Sigma = \sigma(g) \subset \mathbb{M}$, συνεπώς $\Sigma = \mathbb{M}$. Επομένως, η συνάρτηση $x \longmapsto P^x(A)$ είναι ένας πυρήνας Markov .

Τελικά ισχύουν οι σχέσεις (3.20) και (3.46), δηλαδή

$$P_t(x,B) = P^x(\{X_t \in B\})$$

και

$$P^x(\{X_{t+s} \in B\}|\mathcal{F}_s^X) = P_t(X_s, B) \quad P^x - \sigma.\beta.$$

για οποιαδήποτε $s, t\mathbb{R}_+, \quad x \in E \quad και \quad B \in \mathcal{E}$. αν η ημιομάδα $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι κανονική.

Έτσι από τη μεριά ισχύει

$$P^x(\{X_{t+s} \in B\}|\mathcal{F}_s^X) = P^{X_s}(\{X_{t+s} \in B\}) - P^X\sigma.\beta,$$

όπου με $P^{X_s}(A)$ για $A \in \Sigma$ συμβολίζουμε τη τ.μ. $\omega \longmapsto P^{X_s}(A)$, και από την άλλη μεριά ισχύει

$$P^X(\{X_0 = x\}) = 1.$$

Με τα παραπάνω δείξαμε, ότι η τετράδα $(\Omega, \Sigma, P^X_{x\in E}, \quad \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια καθολική σ.δ. Markov με την έννοια του παρακάτω ορισμού

Ορισμός 3.3.13. Έστω $(E,\mathcal{E})$ ένας μ.χ **καθολική σ.δ. Markov** με χ.κ. E (ή $(E,\mathcal{E})$) ονομάζεται κάθε τετράδα $(\Omega, \Sigma, \{P^x\}_{x\in E}, \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

[ump1] για κάθε $x \in E$ η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. με χ.κ. E επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P^x),

[ump2] για κάθε $A \in \Sigma$ η συνάρτηση $x \longmapsto P^x(A)$ είναι Σ-μετρήσιμη ,

[ump3] $P^x(\{X_0 = x\}) = 1 \quad x \in E$,

[ump4] $P^x(\{X_{t+s} \in B\}|\mathcal{F}_s^X) = P^{X_s}(\{X_{t+s} \in B\}) - \sigma.\beta.$ για οποιαδήποτε $s, t \in \mathbb{R}_+, \quad x \in E \quad και \quad B \in \mathcal{E}$. Η (ump4) ονομάζεται **καθολική ιδιότητα Markov** (ως προσ την κανονική διύλιση). Για κάθε $x \in E$ η σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι τότε μια σ.δ Markov επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P^x).

Από εδώ και πέρα θα συμβολίζουμε την δεσμευμένη μέση τιμή ως προς $P^x \quad \mu\epsilon \quad \mathbb{E}^x$. Από την (ump2) προκύπτει η $\sigma(X_s)$- και επομένως η $\mathcal{F}_s^X$-μετρησιμότητα της τ.μ.

$$Y := P^{x_s}(\{X_t \in B\}).$$

Η καθολική ιδιότητα Markov μας λέει, ότι η Υ είναι μια εκδοχή της δεσμευμένης πιθανότητας στην αριστερή πλευρά της (ump4). Επειδή αυτή μπορεί να γραφεί και στη μορφή $\mathbb{E}[x_B \circ X_{t+s}|\mathcal{F}_s^X]$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} Y = \mathbb{E}[Y|X_s] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[x_B \circ X_{t+s}|\mathcal{F}_s^X]|X_s] \\ &= P^x(\{X_{t+s} \in B\}|X_s) \quad P^X - \sigma.\beta. \end{aligned}$$

Σημειώνουμε πάλι ότι η (ump4) μας δίνει τη στοιχειώδη ιδιότητα Markov (3.37).

Παρατήρηση 3.3.14. Είναι κατανοητό ότι δοσμένης μιας διύλισης $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στη σ-άλγεβρα Σ μία τετράδα $(\Omega, \Sigma, \{P^x\}_{x\in E}, \{X_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ ονομάζεται μια **καθολική σ.δ. Markov** ως προς την $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και ισχύουν οι (ump1)-(ump4) με $\mathcal{F}_t$ στη θέση της $\mathcal{F}_t^X$.

Αντίστοιχα, η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι τότε μια σ.δ Markov ως προς την $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. $(\Omega, \Sigma, P^X$.

Συνοψίζουμε ότι αποδείξαμε στο ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 3.3.15. *Για κάθε κανονική ημιομάδα Markov $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω σε έναν πολωνικό χώρο E υπάρχει μια **καθολική σ.δ. Markov** $(\Omega, \Sigma, \{P^x\}_{x\in E}, \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ με χ.κ E, ώστε για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+, x \in E$ και $B \in \Sigma$ να ισχύει:*

$$P_t(x, B) = P^x(\{X_t \in B\}) \tag{3.52}$$

Ισοδύναμη με την (3.52) είναι η σχέση

$$P_t f(x) = \mathbb{E}^x[f \circ X_t] \quad \forall x \in E, \ \ t \in \mathbb{R}_+ \tag{3.53}$$

για όλες τις Borel -μετρήσιμες συναρτήσεις $f : E \longmapsto \widetilde{\mathbb{R}_+}$.

Αρκεί να παρατηρήσει κανείς ότι η (3.52) μπορεί να γραφεί επίσης στη μορφή $P_t x_B(x) = \mathbb{E}^x[x_B \circ X_t]$.

Αξιοσημείωτο είναι επίσης το παρακάτω αντίστροφο θεώρημα

Θεώρημα 3.3.16. *Έστω $(E, \mathcal{E})$ ένας μ.χ. και $(\Omega, \Sigma, \{P^x\}_{x\in E}, \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ μια καθολική σ.δ. Markov με χ.κ. E. Τότε μέσω της σχέσης*

$$P_t(x, B) = P^x(\{X_t \in B\}) \quad \forall (x, B) \in E \times \mathcal{E} \tag{3.54}$$

ορίζεται μία κανονική ημιομάδα Markov $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω σε έναν πολωνικό χώρο $(E, \mathcal{E})$, επειδή η απεικόνιση $x \longmapsto P^x(A)$ για κάθε $A \in \Sigma$, άρα ιδιαιτέρως για $A := \{X_t \in B\}$ για κάθε $B \in \mathcal{E}$, είναι $\mathcal{E}$-μετρήσιμη και επειδή η απεικόνιση $B \longmapsto P_t(B, x)$ είναι η κατανομή της τ.μ. X_t ως προς το μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathcal{E}$. Λόγω της ιδιότητας (ump3) η P_0 είναι ο μοναδιαίος πυρήνας.

Απόδειξη. Κάθε απεικόνιση $P_t : \mathcal{E} \times E \longmapsto \mathbb{R}_+$ είναι ένας πυρήνας Markov επάνω στο $\mathcal{E} \times E$, επειδή η απεικόνιση $x \longmapsto P^x(A)$ για κάθε $A \in \Sigma$, άρα ιδιαιτέρως για $A := \{X_t \in B\}$ για κάθε $B \in \mathcal{E}$, είναι $\mathcal{E}$-μετρήσιμη και επειδή η απεικόνιση $B \longmapsto P_t(B, x)$ είναι η κατανομή της τ.μ. X_t ως προς το μέτρο πιθανότητας P^x, άρα είναι ένα μέτρο πιθανότητας P^x, άρα είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathcal{E}$. Λόγω της ιδιότητας (ump3) η P_0 είναι ο μοναδιαίος πίνακας . Επομένως μένει να αποδείξουμε μόνο την ιδιότητα της ημιομάδας . Για αυτόν το σκοπό θεωρούμε οποιαδήποτε $(B, x) \in \mathcal{E} \times E$ και $s, t \in \mathbb{R}_+$. Λόγω της καθολικής ιδιότητας Markov έχουμε

$$\begin{aligned} P_{s+t}(B, x) &= P^x(\{X_{t+s} \in B\}) = \mathbb{E}^x[\chi_{\{X_{t+s} \in B\}}] \\ &= \mathbb{E}^x[\mathbb{E}^x[\chi_{\{X_{t+s} \in B\}}]|\mathcal{F}_f^{\mathcal{X}}] \\ &= \mathbb{E}^x[P^X(\{X_{t+s} \in B\}]|\mathcal{F}_s^X)] \\ &= \mathbb{E}^x[P^{X_s}(\{X_t \in B\}]. \end{aligned}$$

Επομένως, λαμβάνοντας υπόψιν την (3.53) παίρνουμε

$$\begin{aligned} P_{s+t}(B, x) = \mathbb{E}^x[P_t(\{B, X_s\})] &= \int P_t(B, X_s(\omega))P^x(d\omega) \\ &= \int P_t(B, y)P^x_{X_s}(dy). \end{aligned}$$

Όμως η κατανομή $P^x_{X_s}$ της X_s ως προς το μέτρο πιθανότητας P^x είναι λόγω της (3.53) το μέτρο πιθανότητας $P_s(\cdot, x)$. Έτσι, τελικά παίρνουμε τη σχέση

$$P_{s+t}(B, x) = \int P_s(dy, x)P_t(B, y),$$

δηλαδή τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov. □

Μέσω των δύο προηγούμενων θεωρημάτων, ακριβέστερα μέσω των σχέσεων (3.52) και (3.54) προκύπτει πιο συγκεκριμένα η ιδέα να ερμηνεύσουμε, σε μια κανονική ημιομάδα $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ πυρηνών Markov, τον αριθμό $P_t(B, x)$ ως την πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X_t \in B\}$ με σημείο εκκίνησης το $x \in E$.

Ορισμός 3.3.17. Έστω μια **καθολική σ.δ. Markov** καθολική σ.δ. Markov $(\Omega, \Sigma, \{P^x\}_{x \in E})$, $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+})$ με χ.κ E. Τότε η κανονική ημιομάδα Markov $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ που προκύπτει μέσω της σχέσης (3.53) ονομαζέται επίσης η **ημιομάδα των πιθανοτήτων μετάβασης** της σ.δ.
.

Στο παρακάτω πόρισμα αποδεικνύεται ότι για την ημιομάδα $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ των παραπάνω πιθανοτήτων μετάβασης με αρχική κατανομή $\mu = \delta_x$ η προβολική οικογένεια $\{P^x_J\}_{J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$, που προκύπτει μέσω του Θεωρήματος 3.1.7, είναι ακριβώς η οικογένεια των πεπερασμένης διάστασης κατανομών της σ.δ. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P^x) για $x \in E$.

Πόρισμα 3.3.18. Έστω $(E,\mathcal{E})$ και $(\Omega,\Sigma,\{P^x\}_{x\in E},\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ όπως στο Θεώρημα 3.3.10. Τότε για κάθε $x\in E$ και $J\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ η πεπερασμένης διάστασης κατανομή της σ.δ. $\{X_t\in B\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. (Ω,Σ,P^x) δίνεται από τον τύπο

$$P^x_{(X_{t_1},...,X_{t_n})}=\int...\int\chi_B(x_1,...,x_n)P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)...P_{t_1}(x,dx_1), \tag{3.55}$$

όπου $t_1,...,t_n$ είναι τα στοιχεία του J και $B\in\mathcal{E}_J$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε την (3.55) για σύνολα $B=B_1\times B_1\times...\times B_n$ με $B_1,...,B_n\in\mathcal{E}$. Αυτό μπορεί να γίνει με επαγωγή στο $n\in\mathbb{N}$. Για $n=1$ αυτό προκύπτει από τη σχέση (3.53). • $n-1\longmapsto n$ για $n\geqslant 2$. Το σύνολο $Q:=\{X_{t_1}\in B_1\}\cap...\cap\{X_{t_{n-1}}\in B_{n-1}\}$ είναι στοιχείο της $\mathcal{F}^X_{t_{n-1}}$. Από την καθολική ιδιότητα Markov προκύπτει

$$\begin{aligned}P^x_J(B_1,...,B_n)&=P^x(\{X_{t_n}\in B_n\}\cap Q)\\&=\int_Q P^x(\{X_{t_n}\in B_n\}|\mathcal{F}^X_{t_{n-1}})dP^x\\&=\int_Q P^{X_{t_{n-1}}}(\{X_{t_n-t_{n-1}}\in B_n\})dP^x\\&=\int\chi_Q P^{X_{t_{n-1}}}(\{X_{t_n-t_{n-1}}\in B_n\})dP^x\\&=\int(\chi_{B_1}\circ X_{t_1})\cdot...\cdot(\chi_{B_{n-1}}\circ X_{t_{n-1}})P_{t_n-t_{n-1}}(X_{t_{n-1}},B_n)dP^x.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της επαγωγής, όπου η από κοινού κατανομή των $X_{t_1},...,X_{t_{n-1}}$ ως προς P^x δίνεται από την (3.55), έχουμε

$$\begin{aligned}P^x_J(B_1\times...\times B_n)&=\int_{B_1}...\int_{B_n}P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},B_n)P_{t_{n-1}-t_{n-2}}(x_{n-2},dx_1)\\&=\int_{B_1}...\int_{B_n}P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)...P_{t_1}(x,dx_1).\end{aligned}$$

Εδώ τελείωνει η απόδειξη. □

Μια σύνοψη των μέχρι τώρα αποτελεσμάτων παρέχει μια αξιοσημείωτη εικόνα για την κατασκευή μιας προβολικής οικογένειας μέτρων πιθανότητας επάνω σε έναν πολωνικό χώρο E ξεκινώντας από μια ημιομάδα πυρηνών Markov $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και μια αρχικη κατανομή μ επάνω στην $\mathcal{E}$.

Θεώρημα 3.3.19. *Έστω $\widetilde{X}=\{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία σ.δ. επάνω στον $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\Sigma},\widetilde{P})$ με χ.κ. έναν πολωνικό χώρο E και αρχική κατανομή $\mu:=\widetilde{P}_{\widetilde{X}_0}$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(a) *Οι πεπερασμένης-διάστασης κατανομές της σ.δ. προέρχεται μέσω της σχέσης (3.13) από μια κανονική ημιομάδα Markov $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και μια αρχικη κατανομή μ επάνω στην $\mathcal{E}$.*

(b) *Υπάρχει μια καθολική σ.δ. Markov* $(\Omega, \Sigma, \{P^x\}_{x\in E}), \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ *με χ.κ* E*, ώστε η* $\widetilde{X}$ *να είναι ισοδύναμη με την* $X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *επάνω στο χ.π.* (Ω, Σ, P^μ)*, όπου το μέτρο πιθανότητας* P^μ *δίνεται από τη σχέση*

$$P^\mu(A) := \int P^x(A)\mu(dx), \quad \forall A \in \Sigma. \tag{3.56}$$

Απόδειξη (a)$\Longrightarrow$(b): Η ύπαρξη μιας καθολική σ.δ. Markov $(\Omega, \Sigma, \{P^X\}_{x\in E}, \quad \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$, και μάλιστα στην κανονική της μορφή, με την ιδιότητα (3.52) προκύπτει από το θεώρημα 3.3.15, του οποίουη απόδειξη, εκτός από την καθολική ιδιότητα Markov , έχει γίνει ήδη στην Παρατήρηση 3.1.8. Το μέτρο P^μ επάνω στην $\Sigma = \mathcal{F}_{\mathbb{R}_+}$, που μελετήθηκε στην Παρατήρηση 3.1.14, είναι μέσω της σχέσης (3.17) το μέτρο που ορίστηκε μέσω της (3.56). Η ιδιότητα (3.15) μας δίνει την ισοδύναμια των διαδικασιών $\widetilde{X}$ *και* $\widetilde{X}^\mu$, όπου $\widetilde{X}^\mu$ είναι η $\widetilde{X}$ επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P^μ).

(b)$\Longrightarrow$(a): Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Sigma = \sigma(\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+})$ και ότι επομένως τα ενδεχόμενα $\{X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_1} \in B_n\}$ με $n \in \mathbb{N}$, $t_1 < ... < t_n$ από το $\mathbb{R}_+$ και $B_1, ..., B_n \in \mathcal{E}$ παράγουν την σ-άλγεβρα Σ. Τότε όμως το P^μ μπορεί να οριστεί μονοσήμαντα μέσω των τιμών του επάνω σε αυτούς τους γεννήτορες, δηλαδή μέσω της σχέσης

$$P^\mu(\{X_{t_1 \in B_1}, ..., X_{t_n} \in B_n\}) = \int P^x(\{X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_n} \in B_n\})\mu(dx)$$

(με η,t_i και B_i όπως παραπάνω). Από αυτό και από το Πόρισμα 3.3.18 προκύπτει, ότι οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές $P^\mu(\{X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_n} \in B_n\})$ προέρχονται από την κανονική ημιομάδα Markov που αντιστοιχεί στην καθολική σ.δ. Markov μέσω της σχέσης (3.54) και από την αρχική κατανομή μ. Τότε όμως προκύπτει το (a), επειδή οι σ.δ. $\widetilde{X}^\mu$ και $\widetilde{X}$ είναι ισοδύναμες. □

Θυμίζουμε, ότι δύο σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. (Ω, Σ, P) και $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{P})$ με τον ίδι χ.κ E ονομάζονται **ισοδύναμες**, αν έχουν την ίδια οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$ πεπερασμένης διάστασης κατανομών.

3.4 Γεννήτορες διαδιακασιών Markov

Έστω $(E, \mathcal{E})$ ένας πολωνικός χώρος με $\mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$, και $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια ομογενής διαδικασία Markov με σ.π. μετάβασης p. *Σε όλη την Ενότητα 3.4 υποθέτουμε ότι οι τροχιές της X ειναι δεξιά συνεχείς με αριστερό όριο.*

Αφού η συνολοσυνάρτηση $B \longmapsto p(t, x, B)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας για σταθερά $t \in \mathbb{R}_+$ και $x \in E$, για κάθε $g \in \mathcal{M}_b(E)$ μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα

$$T_t(g)(x) := \int_E g(y)p(t, x, dy) = \mathbb{E}[g(X_t)|X_0 = x], \quad \forall \quad t > 0. \tag{3.57}$$

Για κάθε $g \in \mathcal{M}_b(E)$ ορίζουμε την $\| g \| := \sup_{x \in E} |g(x)|$. Η $\| g \|$ ονομάζεται η **supremum-νόρμα** της g.

Ο τύπος (3.57) ορίζει τον τελεστή

$$T_t : \mathcal{M}_b(E) \longmapsto \mathcal{M}_b(E).$$

Πράγματι,

$$\| T_t g \| \leqslant \sup_{x \in E} |T_t(g)(x)| \leqslant \| g \| \int_E p(t, x, dy) = \| g \| . \tag{3.58}$$

Ο τελεστής T_t είναι προφανώς γραμμικός επάνω στον $\mathcal{M}_b(E)$ και η σχέση (3.58) σημαίνει ότι $\| T_t \| = \sup_{g \in \mathcal{M}_b(E)} \| T_t g \| \leqslant 1$ (βλ. Ορσ. A.4.2 και Λήμμα A.4.3

Επί πλέον, αν θέσουμε $g := 1$, τότε $\| T_t(g) \| = 1$. Άρα $\| T_t \| = 1$ για κάθε $t > 0$. Ορίζοντας

$$T_0(g)(x) := g(x) \tag{3.59}$$

παίρνουμε μια οικογένεια $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ γραμμικών ισομετρικών τελεστών $T_t : \mathcal{M}_b(E) \longmapsto \mathcal{M}_b(E)$. Με τον γενικό ορισμό A.4.4 μιας ημιομάδας, μπορεί να αποδειχθεί το παρακάτω αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.4.1. *Η οικογένεια $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ τελεστών, που ορίζεται με τις σχέσεις (3.57) και (3.59) είναι μια ημιομάδα.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε μόνο την ισότητα ($\star$) του Ορισμού C.0.4. Όμως αυτή προκύπτει άμεσα από την εξίσωση Chapman-Kolmogorov και το Θεώρημα Fubini, αφού για κάθε $g \in \mathcal{M}_b(E)$ και $s, t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_{t+s}(g)(x) &= \int_E g(y) P_{t+s}(x, dy) \\ &= \int_E g(y) \int_E P_t(z, dy) P_s(x, dz) \\ &= \int_E P_s(x, dz) \int_E g(y) P_t(z, dy) \\ &= \int_E T_t(g)(z) P_s(x, dz) \\ &= T_t(T_s(g))(x), \end{aligned}$$

για κάθε $x \in E$. □

Η ημιομάδα $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ονομάζεται μια **ημιομάδα Markov**.

Ορισμός 3.4.2. Έστω $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ μια ημιομάδα συστολών $T_t : \mathcal{M}_b(E) \longmapsto \mathcal{M}_b(E)$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$A_g := \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_t(g) - g) \tag{3.60}$$

για κάθε συνάρτηση $g \in \mathcal{M}_b(E)$ για την οποία αυτό το όριο υπάρχει με τη supremum νόρμα και ανήκει στον $\mathcal{M}_b(E)$. Έστω $\mathfrak{D}(\mathbf{A}) \subseteq \mathcal{M}_b(E)$ το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το χώρο $\mathcal{M}_b(E)$, οι οποίες έχουν αυτές τις δύο ιδιότητες. Τότε η απεικόνιση $A : \mathfrak{D}(\mathbf{A}) \longmapsto \mathcal{M}_b(E)$, που ορίζεται από τη σχέση (3.60) ονομάζεται ο **απειροστικός γεννήτορας** της $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Το σύνολο $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$ ονομάζεται το πεδίο ορισμού της $\mathbf{A}$. Για την ημιομάδα που δίνεται από τη σχέση (3.60), έχουμε

$$\mathbf{A}(g)(x) := \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}\mathbb{E}[g(X_t) - g(x)|X_0 = x] \tag{3.61}$$

για όλες τις συναρτήσεις $g \in \mathfrak{D}(\mathbf{A})$.

Για μια απεικόνιση $B : (a,b) \longmapsto \mathcal{M}_b(E)$, όπου $(a,b) \subseteq \mathbb{R}_+$, ορίζουμε τις έννοιες της παραγώγου και του ολοκληρώματος Riemmann όπως και για τις πραγματικές συνεχείς συναρτήσεις, θεωρώντας τη σύγκλιση ως προς τη supremum-νόρμα. Ιδιαιτέρως έστω $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η ημιομάδα συστολών που ορίζεται μέσω της (3.57). Αν $g \in \mathcal{M}_b(E)$ είναι τέτοια ώστε $\lim_{h\downarrow 0} T_t(g) = g$, τότε δεν είναι δύσκολο να δούμε, ότι η απεικόνιση $t \longmapsto T_t(g)$ είναι δεξιά συνεχής και υπάρχει το ολοκλήρωμα Riemmann $\int_0^t T_{t+s}(g)ds$ για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$.

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει έναν αριθμό σημαντικών αποτελεσμάτων για ημιομάδες συστολών.

Θεώρημα 3.4.3. *Έστω $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια ημιομάδα συστολών και A ο απειροστικός γεννήτορας της. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) Αν η $g \in \mathcal{M}_b(E)$ είναι τέτοια ώστε η απεικόνιση $t \longmapsto T_t(g)$ να είναι δεξιά συνεχής στο $t = 0$, τότε $\int_0^t T_s(g)ds \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{A})$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, και

$$T_t(g) - g = \boldsymbol{A}\Big(\int_0^t T_s(g)ds\Big). \tag{3.62}$$

(ii) Αν $g \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{A})$ και $t \in \mathbb{R}_+$ τότε $T_t(g) \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{A})$ και

$$\frac{d^+}{dt}T_t(g) - g = \boldsymbol{A}(T_t(g)) = T_t(\boldsymbol{A}(g)), \tag{3.63}$$

όπου $\frac{d^+}{dt}$ συμβολίζει την παράγωγο από δεξιά.

(iii) Αν $g \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{A})$ και $t \in \mathbb{R}_+$ τότε $T_t(g) \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{A})$ και

$$T_t(g) - g = \boldsymbol{A}\Big(\int_0^t T_s(g)ds\Big) = \int_0^t \boldsymbol{A}(T_s(g))ds = \int_0^t (T_s(\boldsymbol{A}(g))ds. \tag{3.64}$$

Απόδειξη. (i): Άφου η $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια ημιομάδα συστολών, δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η απεικόνιση $s \longmapsto T_s(g)$ είναι δεξιά συνεχής για όλα τα $s \in \mathbb{R}_+$. Επιπλέον το ολοκλήρωμα Riemmann $\int_0^t T_{u+s}(g)du$ υπάρχει για όλα τα $s, t \in \mathbb{R}_+$.

Έστω $t_i^n := \frac{t_i}{n}$. Τότε

$$\lim_{n\to\infty}(t/n)\sum_{i=1}^{n} T_{t_i^n}(g) = \int_0^t T_u(g)du.$$

Άφου

$$T_s(\int_0^t T_u(g)du) = T_s(\int_0^t T_u(g)du - \frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n} T_{t_i}^n(g)) + \frac{t}{n}\sum_{i=1}^{n} T_s(Tt_i^n(g)),$$

έχουμε

$$T_s(\int_0^t T_n(g)du) = \int_0^t T_s(T_u(g))du = \int_0^t T_{s+u}(g)du,$$

το οποίο προκύπτει από την ιδιότητα συστολής της $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Έτσι

$$\begin{aligned}\frac{1}{s}(T_s - \mathbb{I})(T_u(g)du) &= \frac{1}{s}\int_0^t (T_{s+u}(g) - T_u(g))du \\ &= \frac{1}{s}\int_t^{t+s} T_u(g)du - \frac{1}{s}\int_0^s T_u(g)du.\end{aligned}$$

Η δεξιά συνέχεια της συνάρτησης $u \longmapsto T_u(g)$ συνεπάγεται, ότι το δεξί μέλος της παραπάνω ισότητας τείνει στην $T_t(g) - g \quad \gamma\iota\alpha \quad s \downarrow 0$.

Έχουμε

$$s^{-1}(T_s(T_t(g)) - T_t(g)) = T_t(s^{-1}(T_s(g) - g)).$$

Έτσι, η ιδιότητα της συστολής μας δίνει $T_t(g) \in \mathfrak{D}(\mathbf{A})$ και $\mathbf{A}(T_t(g)) = T_t(\mathbf{A}(g))$. Επιπλέον,

$$s^{-1}(T_{s+t} - T_t(g)) = s^{-1}(T_s - \mathbb{I})(T_t(g)),$$

το οποίο μας δίνει τη σχέση (3.63), δηλαδή την (ii).
(iii) Το πρώτο μέρος προκύπτει από την (i), αφού αν $g \in \mathfrak{D}(A)$ τότε $T_s(g) \longmapsto g$ καθώς $s \downarrow 0$. Το δεύτερο μέρος προκύπτει από την (ii) και από το γεγονός ότι

$$\frac{d^+}{dt}(T_u(g))du = T_t(g) - T_0(g),$$

το οποίο μπορεί να αποδειχθεί, όπως και στην περίπτωση των ολοκληρωμάτων Riemann πραγματικών συναρτήσεων. □

Υπάρχει μια στενή σχέση μεταξύ martingales και απειροστικών γεννητόρων , όπως ορίστηκαν στη σχέση (3.60). Ιδιαιτέρως, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.3 μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε μια κλάση martingales.

Θεώρημα 3.4.4. *Έστω $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια διαδικασία Markov με χ.κ. $(E, \mathcal{E})$ και με σ.π. μετάβασης p. Έστω $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η ημιομάδα που ορίζεται από τη σχέση (3.57) και έστω $\boldsymbol{A}$ ο απειροστικός γεννήτορας της. Τότε για κάθε $g \in \mathfrak{D}(\boldsymbol{A})$ η διαδικασία $\{M_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ – martingale, όπου*

$$M_t := g(X_t) - g(X_0) - \int_0^t \boldsymbol{A}(g(X_u))du \tag{3.65}$$

και $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η κανονική διύλιση της X.

*Ο τύπος (3.58) ονομάζεται **τύπος του Dynkin**.*

Απόδειξη. Θυμίζουμε ότι για κάθε $g \in \mathfrak{D}(\mathbf{A})$ έχουμε $\mathbf{A}(g) \in \mathcal{M}_b(E)$ και επομένως η $A(g)$ είναι μετρήσιμη .

Αφού η X έχει τροχιές που είναι δεξιά συνεχείς με αριστερό όριο, η συνάρτηση $t \longmapsto \mathbf{A}(g(X_t(\omega)))$ είναι μετρήσιμη για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$. Έτσι το ολοκλήρωμα Lebesque $\int_0^t \mathbf{A}(g(X_u(\omega)))du$ είναι καλά ορισμένο για κάθε $\omega \in \Omega$, επειδή η $\mathbf{A}(g)$ είναι φραγμένη. Για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ εφαρμόζωντας το Θεώρημα 3.4.3, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_{s+t}|\mathcal{F}_t^X] + g(X_0) &= \mathbb{E}[g(X_{t+s}) - \int_t^{t+s} \mathbf{A}(g(X_u))du|\mathcal{F}_t^X] - \int_0^t \mathbf{A}(g(X_u))du \\
&= \int g(y)p(s, X_t, dy) - \int_t^{t+s} \mathbf{A}(g(y))p(u-t, X_t, dy)du - \int_0^t \mathbf{A}(g(X_u))du \\
&= T_s(g(X_t)) - \int_0^s T_u(\mathbf{A}(g(X_t))du - \int_0^t \mathbf{A}(g(X_u))du \\
&= g(X_t) - \int_0^t \mathbf{A}(g(X_u))du = M_t + g(X_0),
\end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα προκύπτει από την σχέση (3.64) του Θεωρήματος 3.4.3. □

Παράδειγμα 3.4.5. Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία σ.δ. Poisson με ένταση λ, και έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η σ.δ. που ορίζεται από τον τύπο $X_t := N_t - ct$ για κάποιο $c > 0$. Τότε η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι Markov , αφού έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Επίσης ισχύει $E = \mathbb{R}$. Για την σ.π. μετάβασης p έχουμε

$$p(h, x, B) = \sum_0^\infty \frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{\lambda h} \chi_{\{x+k-ch\in B\}}. \tag{3.66}$$

Θεωρούμε την ημιομάδα $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που ορίζεται από την (3.57). Τότε απο την (3.66) προκύπτει ότι

$$T_h(g)(x) = \sum_0^\infty \frac{(\lambda h)^k}{k!} e^{\lambda h} g(x+k-ch)$$

για $x \in \mathbb{R}$ και $g \in \mathcal{M}_b(\mathbb{R})$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι το $\mathfrak{D}(A)$ αποτελείται από όλες τις συνεχείς και φραγμένες μετρήσιμες συναρτήσεις, οι οποίες είναι παραγωγίσιμες αριστερά με μια φραγμένη αριστερή παράγωγο και

$$\mathbf{A}(g)(x) = \lambda(g(x+1) - g(x)) - cg^{(1)}(x), \tag{3.67}$$

όπου χρησιμοποιούμε τον ίδιο συμβολισμό για τηνν αριστερή παράγωγο όπως και για την παράγωγο. Από το Θεώρημα 3.4.4 η σ.δ. $\{M_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με

$$M_t = g(X_t) - \int_0^t [\lambda(g(X_n+1) - g(X_n)) - cg^{(1)}(X_n)]du,$$

είναι martingale για κάθε $g \in \mathfrak{D}(\mathbf{A})$. Αν $A(g) = 0$ τότε η $\{g(X_t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι martingale.

Επομένως είναι ενδιαφέρον να επιλυθεί η εξίσωση

$$\lambda(g(x+1) - g(x_n) - cg^{(1)}(x) = 0 \tag{3.68}$$

Ας δοκιμάσουμε τη συνάρτηση $g(x) = e^{sx}$ για κάποιο $s \in \mathbb{R}$. Τότε πρέπει να ικανοποιηθεί η συνθήκη

$$\lambda(e^s - 1) - cs = 0. \tag{3.69}$$

Αφού η συνάρτηση $h(s) := \lambda(e^s - 1) - cs$ είναι κυρτή, η (3.69) δέχεται μία (μη τετριμμένη) λύση $s \neq 0$, αν και μόνο αν $\lambda \neq c$. Συμβολίζουμε με s_0 αυτή τη λύση της (3.68). Όμως δεν μπορεί να εφαρμοστεί το Θεώρημα 3.4.4, αφού οι συναρτήσεις $g(x) = e^{sx}$ με $s \neq 0$ και $g(x) = x$ δεν είναι φραγμένες. Ωστόσο από τα παραδείγματα (2) και (3) του [25], Section 10.1.3 προκύπτει ότι οι σ.δ. $\{e^{s_0 X_t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στην περίπτωση $\lambda \neq c$ και $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αν $\lambda = c$ είναι $\{\mathcal{F}_t{}^X\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *− martingales*. Το παράδειγμα 3.4.5 μας δείχνει ότι είναι επιθυμητό να έχουμε επίσης μη φραγμένες συναρτήσεις g στο $A(g)$.

Ορισμός 3.4.6. Ένας **πλειότιμος γραμμικός τελεστής** είναι ένα σύνολο $\mathbf{A} \subseteq \{(g, \widetilde{g}) : g, \widetilde{g} \in \mathcal{M}\}$ έτσι, ώστε αν $(g_i, \widetilde{g}_i) \in \mathbf{A}$ για $i \in \{1, 2\}$ τότε επίσης $(ag_1 + bg_2, a\widetilde{g}_1 + b\widetilde{g}_2) \in \mathbf{A}$ για όλα τα $a, b \in \mathbb{R}$.

Το σύνολο

$$\mathfrak{D}(\mathbf{A}) := \{g \in \mathcal{M}(E) : (g, \widetilde{g}) \in \mathbf{A} \quad \text{για κάποιο} \quad \widetilde{g} \in \mathcal{M}(E)\}$$

ονομάζεται το **πεδίο ορισμού** του τελεστή **A**. Ο πλειότιμος γραμμικός τελεστής **A**, ο οποίος αποτελείται από όλα τα ζευγάρια $(g, \widetilde{g}) \in \mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(E)$ για τα οποία η σ.δ.

$$\{g(X_t) - g(X_0) - \int_0^t \widetilde{g}(X_u)du\}_{t\in\mathbb{R}_+} \tag{3.70}$$

γίνεται ένα $\{\mathcal{F}_t{}^X\}_{t\in\mathbb{R}_+} - martingale$, ονομάζεται ο **πλήρης γεννήτορας** (full generator) της σ.δ. Markov $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Αν η σ.δ. στην 3.70 είναι μόνο ένα τοπικό martingale , τότε το σύνολο όλων των ζευγαριών $(g, \widetilde{g}) \in \mathcal{M}(E) \times \mathcal{M}(E)$ με αυτή την ασθενέστερη ιδιότητα martingale ονομάζεται ο **επεκταμένος γεννήτορας** της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Από το Θεώρημα 3.4.4 προκύπτει ότι το πεδίο ορισμού ενός απειροστικού γεννήτορα μίας σ.δ. Markov περιέχεται πάντα στο πεδίο ορισμού του πλήρους γεννήτορά της.

Παρακάτω, δίνουμε τα κριτήρια για μια συνάρτηση g να ανήκει στο $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$ ενός γεννήτορα $\mathbf{A}$. Αποδεικνύεται ένα τύπος, που μας δείχνει να βρούμε μια συνάρτηση $\widetilde{g}$ ώστε $(g, \widetilde{g}) \in \mathbf{A}$.

Για απλοποίηση των συμβολισμών θα γράφουμε $\mathbf{A}(g)$, αν εννοούμε μια συνάρτηση $\widetilde{g}$ ώστε $(g, \widetilde{g}) \in \mathbf{A}$. Δεν πρέπει να ξεχνάμε, ότι η $\widetilde{g}$ είναι μόνο μία εκδοχή των συναρτήσεων $\widetilde{g}$ για τις οποίες ισχύει ότι $(g, \widetilde{g}) \in \mathbf{A}$.

Κεφάλαιο 4

Κατα τμήματα ντετερμινιστικές διαδικασίες Markov

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να αναλύσει στοχαστικά μοντέλα, στα οποία η τυχαιότητα εμφανίζεται ως σημειακά συμβάντα, δηλ. υπάρχει μία ακολουθία $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τυχαίων γεγονότων σε σταθερούς ή τυχαίους χρόνους $T_1 < T_2 < ...$, άλλα δεν υπάρχει πρόσθετο στοιχείο αβεβαιότητας μεταξύ αυτών των χρόνων. Θα μελετήσουμε μια γενική κλάση διαδικασιών που ονομάζονται **κατά τμήματα ντετερμινιστικές διαδικασίες Markov** (PDMPs για συντομία), οι οποίες είναι στοχαστικά μοντέλα που έχουν ακριβώς την παραπάνω ιδιότητα και είναι ικανοποιητικά γενικές για να καλύψουν μία ευρεία ποικιλία εφαρμοσμένων προβλημάτων ως ειδικές περιπτώσεις.

4.1 Κατασκευή και ιδιότητες της PDMPs

Υποθέτουμε, ότι ο χ.κ E για μία κατά τμήματα ντετερμινιστική σ.δ. διαδικασία Markov $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, που πρόκειται να κατασκευαστεί, μπορει να ταυτιστεί με ένα υποσύνολο ενός Ευκλείδιου χώρου $\mathbb{R}^d$.

Πιο συγκεκριμένα, έστω K οποιοδήποτε πεπερασμένο μη κενό σύνολο, $\{d_\nu : \nu \in K\}$ μία οικογένεια φυσικών αριθμών. Για κάθε $\nu \in K$ έστω C_ν ένα ανοιχτό υποσύνολο των $\mathbb{R}^{d_\nu}$. Θέτουμε

$$E := \{(\nu, z) : \nu \in K, \quad z \in C_\nu\}.$$

Έτσι το K είναι το σύνολο των δυνατών διαφορετικών εξωτερικών καταστάσεων της διαδικασίας. Για παράδειγμα, στις ασφάλειες ζωής θα μπορούσε κάποιος να διαλέξει K="υγειής","άρρωστος","νεκρός". Το C_ν είναι ο χ.κ. της διαδικασίας, αν η εξωτερική κατάσταση είναι ν. Αυτό μας επιτρέπει να θεωρήσουμε διαφορετικούς χ.κ. σε διαφορετικές εξωτερικές καταστάσεις. Για λόγους απλοποίησης, θεωρούμε μόνο πεπερασμένα σύνολα K αν και η θεωρία επεκτείνεται και σε άπειρα αλλά αριθμήσιμα K. Παρακάτω, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $X_t = (J_t, Z_t)$, οπού $\{J_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ περιγράφει την οικογένεια των εξωτερικών καταστάσεων και $\{Z_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μας δείχνει την εξέλιξη των εξωτερικών συνιστωσών.

Συμπεριφορά μεταξύ αλμάτων 4.1.1. Μεταξύ αλμάτων η διαδικασία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ακολουθεί μία ντετερμινιστική τροχιά, ενώ η εξωτερική συνιστώσα J_t είναι σταθερή $J_t = \nu$. Αρχίζοντας από ένα σημείο $z \in C_\nu$, η ανάπτυξη της ντετερμινιστικής τροχιάς, είναι πλήρως καθορισμένη από τις ταχύτητες της σε όλα τα σημεία C_ν, δηλ. μέσω μίας κατάλληλης συνάρτησης $c_\nu = (c_1, ..., c_{d_\nu}) : \quad C_\nu \longmapsto \mathbb{R}^{d_\nu}$ που είναι το λεγόμενο **διανυσματικό πεδίο** . Αν ένα διανυσματικό πεδίο c_ν έχει καλές ιδιότητες διαφορισιμότητας, τότε για κάθε $z \in C_\nu$ υπάρχει μία τροχιά $\varphi_\nu(t, z)$, που ονομάζεται **μία ροή** ή μία **ολοκληρωτική καμπύλη** έτσι ώστε $\varphi_\nu(0, z) = z$ και $\frac{\partial}{\partial t}\varphi_\nu(t, z) = c_\nu(\varphi_\nu(t, z))$.

Χρειάζεται να υποθέσουμε, ότι η συνάρτηση c_ν ικανοποιεί αρκετές συνθήκες φυσιολογικότητας για να επιβεβαιώσουμε την μοναδικότητα όλων των ολοκληρωτικών καμπυλών, ανεξάρτητα από τις αρχικές συνθήκες.

Μερικές φορές είναι βολικό να περιγράφουμε ένα διανυσματικό πεδίο ως ένα διαφορικό τελεστή $\mathfrak{X}$ που δίνονται από τη σχέση

$$\mathfrak{X}g(z) = \sum_{i=1}^{d_\nu} c_i(z)\frac{\partial g}{\partial z_i}(z)$$

που δρα επάνω σε διαφορίσιμες συναρτήσεις g. Αν η g είναι συνεχώς διαφορίσιμη, τότε για $z(t) = \varphi_\nu(t, z)$ έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial t}g(z(t)) = \sum_{i=1}^{d_\nu} c_i(z(t))\frac{\partial g}{\partial z_i}(z(t)).$$

Με άλλα λόγια η ολοκληρωτική καμπύλη $\{\varphi_\nu(t, z) : t < t^*(\nu, z)\}$, όπου

$$t^*(\nu, z)(\nu, z) := \sup\{t > 0 : \phi_\nu(t, z) \quad \exists \quad \text{και} \quad \phi_\nu(t, z) \in C_\nu\},$$

Είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial}{\partial t}g(\varphi_\nu(t, z)) = (\mathfrak{X}g)(\varphi_\nu(t, z)), \qquad \varphi_\nu(0, z) = z. \tag{4.1}$$

Έστω $\partial C_\nu := c\ell C_\nu \backslash C_\nu$, όπου $c\ell C_\nu$ είναι η **κλειστότητα** του C_ν, το **σύνορο** του C_ν, και έστω

$$\partial^* C_\nu := \{\tilde{z} \in \partial^* C_\nu : \tilde{z} = \varphi_\nu(t, z) \quad \gamma\iota\alpha \quad \kappa\alpha\pi o\iota o \quad (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times C_\nu\}$$

και

$$\Gamma := \{(\nu, z) \in \partial E : \nu \in K, z \in \partial^* C_\nu\}.$$

Υποθέτουμε ότι $\varphi_\nu(t^*(\nu,z),z) \in \Gamma$ αν $t^*(\nu,z) < \infty$. Το σύνολο Γ ονομάζεται το **ενεργό σύνολο** (active boundary) του E. Πιο παραστατικά, το Γ είναι το σύνολο εκείνων των συνοριακών σημείων του E, τα οποία μπορούν να προσεγγιστούν από το E μέσω ολοκληρωτικών καμπυλών μέσα σε πεπερασμένο χρόνο και ο $t^*(\nu,z)$ είναι ο χρόνος που χρειάζεται για να προσεγγιστεί το σύνορο από το σημείο (ν,z).

Η συνθήκη $\varphi_\nu(t^*(\nu,z),z) \in \Gamma$ αν $t^*(\nu,z) < \infty$ βεβαιώνει ότι η ολοκληρωτική καμπύλη δεν μπορεί να "εξαφανιστεί" μέσα στο E.

Παραδείγματα 4.1.2. **(a)** Για το μοντέλο της σύνθετης Poisson θεωρούμε τη σ.δ. $\{R_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με $R_t := R_t^u := u + ct - St$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, όπου $c \in (0,\infty)$ (βλ. Ενότητα 2.6). Τότε οι ντετερμινιστικές τροχιές μεταξύ των χρόνων άφιξης απαιτήσεων έχουν την μορφή

$$\varphi(t,z) := z + ct, \quad c > 0.$$

Έστω $g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ μια διαφορίσιμη συνάρτηση. Αφού

$$(\mathfrak{X}g)(z+ct) = \frac{d}{dt}g(z+ct) = cg^{'}(z+ct),$$

ο τελεστής $\mathfrak{X}$ είναι της μορφής $\mathfrak{X} = \beta\frac{d}{dt}$. Μια άλλη επιλογή είναι να χρησιμοποιήσουμε την ολοκληρωτική καμπύλη $\widetilde{\varphi}(t,(z,h)) := (z+ct, h+t)$, όπου το (z,h) περιγράφει το πραγματικό αποθεματικό κινδύνου και τη χρονική παράμετρο h. Για μια διαφορίσιμη εξίσωση $\widetilde{g} : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{X}}\widetilde{g}(z+ct,h+t) &= \frac{d}{dt}\widetilde{g}(z+ct,h+t)\\ &= c\frac{\partial\widetilde{g}}{\partial z}(z+ct,h+t) + \frac{\partial\widetilde{g}}{\partial h}(z+ct,h+t).\end{aligned}$$

Έτσι γράφουμε ότι ο $\widetilde{\mathfrak{X}}$ παίρνει τη μορφή $\mathfrak{X} = c\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial h}$.

(b) Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία PDMP με πλήρη γεννήτορα $\mathbf{A}$ (βλ. Ενότητα 4.2 για λεπτομέρειες σχετικά με την κατασκευή της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$). Είναι εύκολο να ενσωματωθεί μία συγκεκριμένη εξάρτηση του χρόνου στο μοντέλο. Σημειώνουμε, ότι η σ.δ. $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με $\widetilde{X}_t := (X_t, t)$ είναι επίσης μία PDMP που δρα επάνω στο $E \times \mathbb{R}$. Έστω $\tilde{z} := (z_1, ..., z_{\nu_d}, h) \in C_\nu \times \mathbb{R}$ και έστω $\widetilde{z} \longmapsto \widetilde{g}(\widetilde{z}) \in \mathbb{R}$ μία διαφορίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $h \geqslant 0$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση

$C_\nu \ni z \longmapsto \widetilde{g}(z,h)$ με g_h. Τότε

$$\begin{aligned}(\widetilde{\mathfrak{X}}\widetilde{g})(\varphi_\nu(t,z),t) &= \frac{\partial}{\partial t}\widetilde{g}(\varphi_\nu(t,z),t) \\ &= \sum_{i=1}^{d_\nu} c_i(\varphi_\nu(t,z))\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial z_i}(\varphi_\nu(t,z),t) + \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial z_i}(\varphi_\nu(t,z),t) \\ &= (\mathfrak{X}g_1)(\varphi_\nu(t,z)) + \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial z_i}(\varphi_\nu(t,z),t),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\widetilde{\mathfrak{X}}\widetilde{g}(\varphi_\nu(t,z),t) = (\mathfrak{X}g)(\varphi_\nu(t,z)) + \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial z_i}(\varphi_\nu(t,z),t). \tag{4.2}$$

Έτσι έχουμε ότι $\widetilde{\mathfrak{X}} = \mathfrak{X} + \frac{\partial}{\partial h}$ για τον διαφορικό τελεστή $\mathfrak{X}$ που δρα όπως στην (4.2). Έστω $\widetilde{\mathbf{A}}$ ο πλήρης γεννήτορας της $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και έστω $\widetilde{g} \in \mathfrak{D}(\widetilde{\mathbf{A}})$. Τότε $g_h \in \mathfrak{D}(\mathbf{A})$ για κάθε $h \geqslant 0$, όπου $g_h(z) := \widetilde{g}(z,h)$. Μία παράσταση του $(\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{g})(z,h)$ δίνεται από τον τύπο

$$(\widetilde{\mathbf{A}}\widetilde{g})(z,h) = (\mathbf{A}g_h)(z) + \frac{\partial \widetilde{g}}{\partial h}(z,h). \tag{4.3}$$

4.2 Ο μηχανισμός αλμάτων

Το διανυσματικό πεδίο $\mathfrak{X}$ ορίζει την κίνηση μιας PDMP μεταξύ αλμάτων. Ο μηχανισμός των αλμάτων καθορίζεται από δύο επιπλέον συναρτήσεις, **την ένταση άλματος** (jump intensity), δηλ. μια μετρήσιμη συνάρτηση $\lambda : E \longmapsto \mathbb{R}_+$, ώστε για κάθε $x = (\nu, z) \in E$ να υπάρχει $\epsilon(x) > 0$ έτσι ώστε η συνάρτηση $s \longmapsto \lambda(\nu, \varphi_\nu(s,z))$ να είναι ολοκληρώσιμη επάνω στο $[0, \epsilon(x))$, και τον **πυρήνα μετάβασης** (transitional kernel) ή το **μέτρο μετάβασης** $Q : (E \cup \Gamma) \times \mathfrak{B}(E) \longmapsto [0,1]$, δηλ. η $Q(x,\cdot) : \mathfrak{B}(E) \longmapsto [0,1]$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας για όλα τα $x \in E \cup \Gamma$ και η $Q(\cdot, B) : E \cup \Gamma \longmapsto [0,1]$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση για όλα τα $B \in \mathfrak{B}(E)$, ώστε $Q(x, \{x\}) = 0$.

Τα $\mathfrak{X}$,λ,Q ονομάζονται τα **τοπικά χαρακτηριστικά** της PDMP.

Στην ασφαλιστική ορολογία η ένταση άλματος λ μπορεί να ερμηνευθεί ως μία “δύναμη μετάβασης”, ενώ η $Q(x,\cdot)$ είναι η “μετά το άλμα” κατανομή ενός άλματος από την κατάσταση x (αν $x \in E$) ή από το συνοριακό σημείο x (αν $x \in \Gamma$).

Συμβολισμοί 4.2.1. Έστω $f : E\cup\Gamma \longmapsto \mathbb{R}$ μία μετρήσιμη συνάρτηση ώστε $f \in \mathfrak{L}^1(Q(x,\cdot))$ για κάθε $x \in E \cup \Gamma$. Συμβολίζουμε με $Qf : E \cup \Gamma \longmapsto \mathbb{R}$ την συνάρτηση με τύπο

$$Qf(x) := \int_E f(y)Q(x,dy).$$

Αφού η Q είναι πυρήνας μετάβασης, προκύπτει ότι η Qf είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Ιδιαιτέρως, αν $f \in \mathcal{M}_b(E \cup \Gamma)$ τότε $Qf \in \mathcal{M}_b(E \cup \Gamma)$, δηλ. η Q είναι ένας τελεστής από το $\mathcal{M}_b(E \cup \Gamma)$ στον εαυτό του.

Η κατασκευή της PDMP 4.2.2. Έστω (Ω, Σ, P) ο κύβος του Hilbert του παραρτήματος **Y**, δηλ. ο κανονικός χ.π. για μια ακολουθία $\{U_n(\omega)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητων τ.μ. ώστε $P_{\mathbf{U}_n} = \mathbf{U}(0,1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι τροχιές $t \longmapsto \mathbf{X}_t(\omega)$ με $t > 0$ μίας σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με τιμές στο E, ξεκινώντας από ένα σταθερό σημείο $x = (\nu, z) \in E$, κατασκευάζονται ως εξής:

Έστω

$$\overline{F}(t,x) := \chi_{\{t<t^*(x)\}} e^{-\int_0^t \lambda(\nu,\varphi_\nu(s,z))ds}.$$

Τότε η $F(t,x)$ θα είναι η σ.κ του πρώτου χρόνου άλματος T_1 της διαδικασίας . Έτσι έστω

$$\psi_1(u,x) := \begin{cases} inf\{t : \overline{F}(t,x) \leqslant u\} & ,\alpha\nu \quad \{t : \underline{F}(t,x) \leqslant u\} \neq \varnothing \\ +\infty, \quad \text{αλλιώς}. \end{cases}$$

και έστω $S_1(\omega) := T_1(\omega) := \psi_1(U_1(\omega), x)$. Τότε $P(\{T_1 > t\}) = F(t,x)$.

Έστω $\psi_2 : [0,1] \times (E \cup \Gamma) \longmapsto E$ μία μετρήσιμη συνάρτηση, ώστε

$$\lambda((\psi_2^x)^{-1}(B)) := \lambda(\{u : \psi_2(u,x) \in B\}) := Q(x,B)$$

για κάθε $B \in \mathfrak{B}(E)$. Η ύπαρξη μιας τέτοιας συνάρτησης εξασφαλίζεται από το Πόρισμα **Y4**. Η τροχιά $t \longmapsto X_t(\omega)$ μέχρι το πρώτο χρόνο άλματος ορίζεται τώρα ως εξής:
Αν $T_1(\omega) = \infty$, τότε $X_t(\omega) := (u, \varphi_\nu(t,z))$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, αν$T_1(\omega) < \infty$, τότε $X_t(\omega) := (u, \varphi_\nu(t,z))$ για κάθε $t \in [0, T_1(\omega))$ και $\quad X_{T_1}(\omega) := \psi_2(U_2(\omega)(\nu, \varphi_\nu(T_1(\omega), z)))$.

Η διαδικασία τώρα ξαναξεκινάει από το $X_{T_1}(\omega)$ σύμφωνα με την ίδια λογική. Έτσι, αν $T_1(\omega) < \infty$ ορίζουμε

$$S_2(\omega) := \psi_1(U_3(\omega), X_{T_1}(\omega))$$

$$T_2(\omega) := T_1(\omega) + S_2(\omega).$$

Έστω $(\nu', z') := X_{T_1}(\omega)$. Αν $T_2(\omega) = \infty$, τότε

$$X_t(\omega) := (\nu', \varphi_{\nu'}(t - T_1(\omega), z')) \quad \forall \quad t \in [T_1(\omega), T_2(\omega))$$

ένω αν $T_2(\omega) < \infty$, τότε

$$X_t(\omega) := (\nu', \varphi_{\nu'}(t - T_1(\omega), z')) \quad \forall \quad t \in [T_1(\omega), T_2(\omega))$$

$$X_{T_2}(\omega) := \psi_2(U_4(\omega)(\nu', \varphi_{\nu'}(S_2(\omega), z'))).$$

Με αυτό το τρόπο έχουμε ορίσει μια απεικόνιση από το Ω στο σύνολο όλων των ακολουθιών της μορφής $(S_1(\omega), Z_1(\omega), S_{K_0}(\omega))$, όπου $K_0 := \min\{k : S_k(\omega) = \infty\}(= \infty$ αν $S_k(\omega) < \infty$ για όλα τα k) και $Z_k(\omega) := X_{T_k}(\omega)$ όπως ορίστηκαν παραπάνω.

Έστω

$$N_t(\omega) := \sum_{k\in\mathbb{N}} \chi_{\{t \geqslant T_k\}}.$$

Υπόθεση 4.2.3. *Για κάθε αρχικό σημείο $x \in E$ ισχύει $\mathbb{E}[N_t] < \infty$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.*

Από την υπόθεση συνεπάγεται ότι $\lim_{k\to\infty} T_k(\omega) = \infty$ σ.β. Η υπόθεση 4.2.3 μπορεί συνήθως να διατυπωθεί αρκετά εύκολα στις εφαρμογές, αλλά είναι δύσκολο να διατυπωθούν γενικές συνθήκες, κάτω από τις οποίες ισχύει η 4.2.3 εξαιτίας των περίπλοκων αλληλεπιδράσεων μεταξύ των $\mathfrak{X}$, λ, Q και της γεωμετρίας του συνόρου .

Πρόταση 4.2.4. *Έστω ότι η λ είναι φραγμένη, δηλ. $\lambda(x) \leqslant c < \infty$ για όλα τα $x \in E$. Τότε η Υπόθεση 4.2.3 ισχύει αν ικανοποιείται μία από τις παρακάτω συνθήκες:*

(a) *Δεν υπάρχουν "ενεργά" σύνορα, δηλ, $t^*(x) = \infty$ για όλα τα $x \in E$*

(b) *Για κάποιο $\varepsilon > 0$ ισχύει $Q(x, A_\varepsilon) = 1$ για όλα τα $x \in \Gamma$, όπου $A_\varepsilon := \{x \in E : t^*(x) \geqslant \varepsilon\}$.*

Για την απόδειξη της παραπάνω πρότασης παραπέμπουμε στον [12], page 60.

Από δω και κάτω, αν δεν αναφέρεται κάτι διαφορετικό, υποθέτουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες:

(PDP1) Για κάθε $\nu \in K$, το $\mathfrak{X}_\nu$ είναι ενά τοπικά Lipschitz συνεχές διανυσματικό πεδίο με ροή $\varphi_\nu(t,z)$. Ο χρόνος έκρηξης $t_\infty(z)$ είναι ίσος με ∞, αν $t^*(x) = \infty$ για $x = (\nu, z)$.

(PDP2) Η $\lambda : E \longmapsto \mathbb{R}_+$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση ώστε η συνάρτηση $t \longmapsto \lambda(u, \varphi_\nu(t,z))$ να είναι ολοκληρώσιμη επάνω στο $[0, \varepsilon(x))$ για κάποιο $\varepsilon(x)) > 0$ για κάθε $x \in E$.

(PDP3) Η $Q(\cdot, B)(E \cup \Gamma) \longmapsto [0,1]$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση για όλα τα $B \in \mathfrak{B}(E)$, ώστε $Q(x, \{x\}) = 0$ για κάθε $x \in E$.

(PDP4) Ισχύει η Υπόθεση 4.2.3.

4.3 Η ισχυρή ιδιότητα Markov

Σκοπός αυτής της ενότητας είναι να δείξουμε ότι η διαδικασία $(D_E, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, P_x)$ που κατασκευάστηκε στην Ενότητα **4.2** είναι μία ομογενής ισχυρή ιδιότητα Markov. Για να γίνει αυτό εκμεταλλευόμαστε την ισχυρή σύνδεση μεταξύ της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και μια σχετικής **διαδικασίας άλματος**. Πληροφορίες για τις διαδικασίες άλματος υπάρχουν στο Παράρτημα **Z**.

Έστω $D_E := D_E[0,\infty)$ το σύνολο όλων των δεξιά συνεχών συναρτήσεων $z : \mathbb{R}_+ \longmapsto E$, ώστε να υπάρχει το αριστερό όριο $\lim_{s\uparrow t} z(s)$ για όλα τα $t \in (0,\infty)$. Συμβολίζουμε με $\breve{x}_t$ τη συνάρτηση συντεταγμένων που ορίζεται από τον τύπο

$$\breve{x}_t(z) = z(t) \quad \gamma\iota\alpha \quad z \in D_E.$$

Έστω $\{\mathcal{F}_t^{\breve{X}}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η κανονική διύλιση της $\{\breve{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με $\mathcal{F}_t^{\breve{X}} := \sigma(\{\breve{x}_s\}_{s\leqslant t})$ και $\mathcal{F}^{\breve{X}} := \sigma(\{\mathcal{F}_t^{\breve{X}}\}_{t\in\mathbb{R}_+})$.

Η κατασκευή της Ενότητας **4.2** ορίζει για κάθε αρχικό σημείο $x \in E$ μία μετρήσιμη απεικόνιση $\psi_x : \Omega \longmapsto D_E$, ώστε $\breve{x}_t(\psi_x(\omega)) = X_t(\omega)$. Έστω $P_x := P \circ \psi_x^{-1}$ το μέτρο εικόνα του P μέσω της ψ_x. Αυτό ορίζει μια οικογένεια μέτρων $\{P_x\}_{x\in E}$. Έτσι μια PDP μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαδικασία ορισμένη επάνω στο Ω ή ως μια οικογένεια Markov ορισμένη επάνω στο D_E. Θα είναι μία βολική κατάχρηση των συμβολισμών, αν συμβολίζουμε αυτήν με $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ανεξάρτητα από τον χ.π. επάνω στον οποίο ορίζεται αυτή.

Για ένα οποιοδήποτε μέτρο πιθανότητας $\mu : \mathfrak{B}(E) \longmapsto [0,1]$, ορίζουμε το μέτρο $P^\mu : \mathcal{F}^{\breve{X}} \longmapsto [0,1]$ μέσω του τύπου

$$P^\mu(A) := \int_E P_x(A)\mu(dx) \quad \forall A \in \mathcal{F}^{\breve{X}}.$$

Έστω $\mathcal{F}_t^\mu$ η πλήρωση της $\mathcal{F}_t^{\breve{X}}$ ως προς το P^μ και

$$\mathcal{F}_t := \bigcap_{\mu\in\mathbb{M}^1(E)} \mathcal{F}_t^\mu,$$

όπου $\mathbb{M}^1(E)$ είναι το σύνολο όλων των μέτρων πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}(E)$.

Ορισμός 4.3.1. Σταθεροποιούμε ένα οποιοδήποτε $x \in E$ και θεωρούμε την PDP $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με αρχή το x όπως κατασκευάστηκε παραπάνω. Η **αντίστοιχη διαδικασία άλματος**. (associated jump process) $\{\eta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ παίρνει τιμές στο $E \times \mathbb{Z}_+$ και ορίζεται ως εξής:

$$\eta_t := (x,0), \quad \alpha \quad t < T_1 \kappa\alpha\iota \quad \eta_t := (\eta_{t,1}, \eta_{t,2}) := (X_{T_n}, n) \quad \alpha \quad T_n \leqslant t < T_{n+1}. \tag{4.4}$$

Υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξυ των τροχιών των $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{\eta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ (βλ [12], page 63).

Θεώρημα 4.3.2. *Η $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι δεξιά συνεχής, δηλ. για κάθε $t > 0$ ισχύει*

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{\epsilon>0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα οποιοδήποτε $\mu \in \mathbb{M}(E)$ και θεωρούμε την $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με αρχικό μέτρο μ και την αντίστοιχη διαδικασία άλματος $\{\eta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Έστω $\{\mathcal{G}_t^\mu\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η πλήρωση ως προς P^μ της κανονικής διύλισης της $\{\eta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στο $D_E \times \mathbb{Z}_+$. Σύμφωνα με το Θεώρημα ισχύει $g_{t^+}^\mu = g_t^\mu$ για κάθε $t > 0$ για κανονικές διυλίσεις δεξιά σταθερών διαδικάσιων και επομένως για την κανονική διύλιση της $\{\eta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, αφού η $\{\eta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι δεξιά σταθερή. Αποδεικνύεται εύκολα ότι η $\mathcal{F}_+^\mu = \mathcal{F}_t^\mu$ για κάθε $t > 0$. Επομένως έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_+ &= \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon} = \bigcap_{\varepsilon>0} \bigcap_{\mu\in\mathbb{M}^1(E)} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}^\mu \\ &= \bigcap_{\mu\in\mathbb{M}^1(E)} \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}^\mu = \bigcap_{\mu\in\mathbb{M}^1(E)} \mathcal{F}_t^\mu = \mathcal{F}_t.\end{aligned}$$

□

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας. Για $f \in \mathcal{M}_b(E)$ έστω

$$P_t f(x) := \mathbb{E}_x[f(X_t)], \tag{4.5}$$

όπου $\mathbb{E}_x$ συμβολίζει την ολοκλήρωση ως προς το μέτρο P_x.

Θεώρημα και Ορισμός 4.3.3. *Η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία ομογενής* ***ισχυρή διαδικασία Markov****, δηλ. για κάθε $x \in E$, $\mathcal{F}_t$- χρόνο διακοπής T και $f \in \mathcal{M}_b(E)$ ισχύει*

$$\mathbb{E}_x[f(X_{T+s}\chi_{\{T<\infty\}}|\mathcal{F}_T] := P_s f(X_T)\chi_{\{T<\infty\}}. \tag{4.6}$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε πρώτα τη στοιχειώδη ιδιότητα Markov, για $T = t$, ένα σταθερό μη αρνητικό χρόνο. Από την κατασκευή της διαδικασίας $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ Έχουμε $P(\{S_{k+1} > s|\mathcal{F}_{T_k}\}) = \overline{F}(s, X_{T_k}$, όπου η $\overline{F}$ έχει οριστεί στην 4.2.2. Έτσι

$$\begin{aligned}P_x(\{T_{k+1} > t+s\}|\mathcal{F}_t)\chi_{\{T_k\leqslant t<T_{k+1}\}} &= \frac{\overline{F}(t+s-T_k, X_{T_k})}{\overline{F}(t-T_k, X_{T_k})}\chi_{\{T_k\leqslant t<T_{k+1}\}} \\ &= e^{-\int_0^s \lambda}(\nu, \varphi_\nu(u+t-T_k), z)du)\chi_{\{t+s-T_k<t^*(X_{T_k})\}},\end{aligned}$$

όπου $X_{T_k} = (\nu, z)$. Θέτουμε $X_t := (\nu(t), z(t))$. Επάνω στο σύνολο $\{T_k \leqslant t < T_{k+1}\}$ έχουμε $\nu(t) = \nu(T_k)$. Άρα χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ημιομάδας έχουμε

$$\varphi_\nu(u+t-T_k, z) = \varphi_\nu(u, \varphi_\nu(t-T_k), z) = \varphi_{\nu(t)}(u, z(t)),$$

και

$$t^*(X_t) = t^*(X_{T_k}) - (t - T_k).$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$t + s - T_k < t^*(X_{T_k}) \iff s < t^*(X_t),$$

συνεπώς $P_x(\{T_{k+1} > t + s\}|\mathcal{F}_t)\chi_{\{T_k \leqslant t < T_{k+1}\}} = \overline{F}(s, X_t)\chi_{\{T_k \leqslant t < T_{k+1}\}}$.

Επομένως θέτοντας $\widetilde{T} := \inf\{s > t : X_s \neq X_{s^-}\}$, έχουμε

$$P_x(\{\widetilde{T} > t + s\}|\mathcal{F}_t) = \overline{F}(s, X_t).$$

Έτσι με δέσμευση επάνω στην $\mathcal{F}_t$ ο επόμενος χρόνος άλματος της διαδικασίας έχει την ίδια κατανομή με τον πρώτο χρόνο άλματος μιας PDP αρχίζοντας από την X_t. Αφού οι απομένοντες ενδιάμεσοι χρόνοι άφιξης και οι μετά το άλμα καταστάσεις ορίζονται από τ.μ. $U_n, U_{n+1}, ...$ οι οποίες είναι ανεξάρτητες από το παρελθόν, έχουμε δείξει, ότι αν η h είναι μια φραγμένη συνάρτηση επάνω στο E τότε

$$\mathbb{E}_x[h(X_{t+s}, s \in \mathbb{R}_+)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[h(X_s, s \in \mathbb{R}_+)]_{y=X_t}$$

και η 4.3 με T=t είναι μια ειδική περίπτωση. Για να δείξουμε την ισχυρή ιδιότητα Markov χρησιμοποιούμε το χαρακτηρισμό των χρόνων διακοπής διαδικασιών άλματος που δίνεται στο Θεώρημα. Αυτό μεταφέρεται στους χρόνους διακοπής της $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στα πλαίσια της 1-1 αντιστοιχίας μεταξύ των τροχιών της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{\eta_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, δείχνει ότι αν ορίσουμε $Z_k := X_{T_k}$ και $\xi_k := (x, S_1, Z_1, S_2, Z_2, ..., S_k, Z_k)$ τότε σε κάθε χρόνο διακοπής T αντιστοιχούν συναρτήσεις $s_1, s_2, ...$ ώστε $T_{\chi_{\{T \leqslant T_1\}}} = (s_1(x) \wedge T_1)\chi_{\{T \leqslant T_1\}}$ και για $k = 2, 3, ...$

$$T\chi_{\{T_{k-1} < T \leqslant T_k\}} = ((T_{k+1} + s_k(\xi_{k-1}) \wedge T_k))\chi_{\{T_{k-1} < T \leqslant T_k\}}$$

Αυτός ο χαρακτηρισμός δείχνει, ότι επάνω στο σύνολο $\{T < \infty\}$ υπάρχουν τρεις δυνατές περιπτώσεις: ή T=0, η $T = T_k$ για κάποιο k, ή $T = T_{k-1} + s_k(\xi_{k-1})$ για κάποιο k, και κάθε ένα απ' αυτά τα σύνολα είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμο. Αν ορίσουμε $\widetilde{T} := \inf\{t > T : X_t \neq X_{t^-}\}$, τότε οι ίδιοι υπολογισμοί όπως παραπάνω, εφαρμοζόμενοι σε αυτές τις τρεις περιπτώσεις, δείχνουν ότι

$$P_x(\{\widetilde{T} > T + s\} \cap \{T < \infty\}|\mathcal{F}_T) = \overline{F}(s, X_T)\chi_T < \infty).$$

Το ίδιο επιχείρημα που χρησιμοποιήθηκε για τη στοιχειώδη ιδιότητα Markov μας δείχνει ότι

$$\mathbb{E}[h(X_{T+s}, s \in \mathbb{R}_+)\chi_{\{T<\infty\}}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_y[h(X_s, s \in \mathbb{R}_+)]|_{y=X_t}\chi_{\{T<\infty\}},$$

Από το οποίο προκύπτει η ισχυρή ιδιότητα Markov □

4.4 Ο επεκταμένος γεννήτορας της PDMP

Το επόμενο βήμα μας είναι να κατασκευάσουμε martingales που αντιστοιχούν σε μια PDMP $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Σύμφωνα με τον ορισμό του επεκταμένου γεννήτορα που δόθηκε στην Ενότητα **3.4**, πρέπει να βρούμε μια συνάρτηση στο πεδίο ορισμού $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$ του γεννήτορα $\mathbf{A}$ της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Έτσι προκύπτουν τα εξής δύο προβλήματα:

- να βρεθούν συνθήκες για μια μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση g επάνω στο E για να ανήκει στο $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$ και

- να προσδιοριστεί μια σύναρτηση $\mathbf{A}g$ ώστε $(g, Ag) \in A$.

Αυτά τα προβλήματα είναι γενικά δύσκολο να λυθούν. Ευτυχώς υπάρχουν δυνατές λύσεις αν περιοριστούμε σε ένα υποσύνολο του $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$, επαρκώς ικανό για προβλήματα ασφάλισης. Το παράδειγμα 3.4.5 δείχνει μια σαφή μέθοδο εύρεσης μιας συνάρτησης $\mathbf{A}g$ ώστε $(g, Ag) \in A$. Για μια διαδικασία Poisson $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η διαδικασία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με $X_t := N_t - ct$ είναι εύκολο να δειχθεί ότι είναι μια PDMP . Επί πλεον στην Ενότητα 3.4 δείξαμε ότι $(g, \mathbf{A}g) \in A$, αν η g είναι φραγμένη, μετρήσιμη και αριστερά διαφορίσιμη με φραγμένη παράγωγο και αν η Ag δίνεται από τη σχέση 3.67 (της Ενότητας 3.4).

Το παρακάτω θεώρημα μας δίνει μια χρήσιμη επέκταση. Θυμίζουμε ότι μία συνάρτηση g ονομάζεται **απόλυτα συνεχής** , αν υπάρχει μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ώστε $g(y) = g(y_0) + \int_{y_0}^{y} f(z)dz$ για κάθε $y \in E$ και $y_0 \in E$ σταθερό.

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια PDMP και έστω $g^* : E \cup \Gamma \longmapsto \mathbb{R}]$ μια μετρήσιμη συνάρτηση που ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:*

(a) *για κάθε $(\nu, z) \in E$ η συνάρτηση $t \longmapsto g^*(u, \varphi_\nu(t, z))$ είναι απόλυτα συνεχής επάνω στο $(0, t^*(\nu, z))$,*

(b) *για κάθε $x \in \Gamma$ ισχύει*

$$g^*(x) = \int_E g^*(y)Q(x, dy) \tag{4.7}$$

(c) *για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει*

$$\mathbb{E}[\sum_{I,T_i \leqslant t} |g^*(X_{T_i}) - g^*(X_{T_i^-})|] < \infty. \tag{4.8}$$

Τότε $g \in \mathfrak{D}(A)$, όπου g είναι ο περιορισμός της g^* στο E και $(g, \mathbf{A}g) \in \mathbf{A}$, όπου $\mathbf{A}g$ δίνεται από τη σχέση

$$(Ag)(x) = (\mathfrak{X}g)(x) + \lambda(x) \int_E (g(y) - g(x))Q(x, dy). \tag{4.9}$$

Απόδειξη. Αφού σύμφωνα με τον ορισμό του πλήρους γεννήτορα η οικογένεια της Ενότητας 3.4 είναι $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale, πρέπει να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}[g(X_{t+h} - g(X_t) - \int_t^{t+h} (\mathbf{A}g)(X_v)dv|\mathcal{F}_t^X] = 0 \tag{4.10}$$

Για όλα τα $t, h \in \mathbb{R}_+$. Η παραπάνω συνθήκη έχει νόημα μόνο αν η τ.μ. στο αριστερό μέρος της 4.9 είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη. Έτσι πρέπει αρχικά να δείξουμε αυτή την ιδιότητα ολοκληρωσιμότητας. Σύμφωνα με το Θεώρημα 4.3.3 το αριστερό μέλος της 4.9 μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\mathbb{E}[g(X_{t+h}) - g(X_t) - \int_t^{t+h} ((\mathfrak{X}g)(X_v) + \lambda(X_v)\cdot\int_E (g(y) - g(X_v))Q(X_v, dy))dv|\mathcal{F}_t^X] = \mathbb{E}[g(X_{t+h}) - g(X_t)$$

Με τη δέσμευση $X_t = x \in E$ έχουμε

$$\mathbb{E}[g(X_{t+h}) - g(X_t) - \int_t^{t+h} ((\mathfrak{X}g)(X_v) + \lambda(X_v)\cdot\int_E (g(y) - g(X_v))Q(X_v, dy))dv|X_t = x]$$

$$= \mathbb{E}[g(X_h) - g(X_0) - \int_t^{t+h} ((\mathfrak{X}g)(X_v) + \lambda(X_v)\cdot\int_E (g(y) - g(X_v))Q(X_v, dy))dv|X_0 = x].$$

Επομένως είναι αρκετό να δείξουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει

$$\mathbb{E}[g(X_t) - g(X_0) - \int_0^t ((\mathfrak{X}g)(X_v) + \lambda(X_v)\cdot\int_E (g(y) - g(X_v))Q(X_v, dy))dv] = 0.$$

Αν δεν υπάρχει άλμα στο χρόνο v, τότε οποιαδήποτε ροή του διαφορικού τελεστή $\mathfrak{X}$ που ικανοποιεί τη συνθήκη **(a)** συνεπάγεται τη σχέση

$$(\mathfrak{X}g)(X_v) = \frac{\partial}{\partial v} g(X_v).$$

Επομένως

$$g(X_t) - g(X_0) - \int_0^t (\mathfrak{X}g)(X_v)dv = \sum_{T_i \leqslant t} (g(X_{T_i}) - g^*(X_{T_i^-}),$$

και έτσι πρέπει να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}[\sum_{T_i \leqslant t} (g(X_{T_i}) - g^*(X_{T_i^-}) - \int_0^t \lambda(X_v)\int_E (g(y) - g(X_v))Q(X_v, dy))dv] = 0. \tag{4.11}$$

Για απλοποίηση των συμβολισμών, υποθέτουμε $X_0 = x$ όπου $x = (\nu, z) \in E$ είναι μια αυθαίρετη (ντετερμινιστική) κατάσταση της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Θεωρούμε την έκφραση $\mathbb{E}[g(X_{T_1\wedge t}) - g^*(X_{T_{1^-}\wedge t})]$. Από τη συνθήκη 4.11 προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}[g(X_{T_1\wedge t}) - g^*(X_{T_{1^-}\wedge t}) : T_1 \geqslant t \wedge t^*(x)] = 0.$$

Από την κατασκευή της PDMP $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχουμε

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[g(X_{T_1} - g^*(X_{T_1^-})) : T_1 < t \wedge t \wedge t^*(x)]\\ &= \int_0^{t\wedge t^*(x)} \int_E (g(y) - g(u, \varphi_\nu(v,z)))Q(u, \varphi_\nu(v,z) \cdot \lambda(u, \varphi_\nu(v,z))\overline{F}(v)dv,\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[g(X_{T_1\wedge t}) - g^*(X_{T_{1^-}\wedge t}) : T_1 \geqslant t \wedge t^*(x)] = 0$$

$$\int_0^{t\wedge t^*(x)} \int_E (g(y) - g(\nu, \varphi_\nu(v,z)))Q(\nu, \varphi_\nu(v,z), dy) \cdot \lambda(\nu, \varphi_\nu(v,z))\overline{F}(v)dv,$$

όπου $\overline{F}(v) = \int_v^0 \lambda(\nu, \varphi_\nu(w,z)F(w)dw)$ σύμφωνα με τον ορισμό της F.

Χωρίζουμε τη παραπάνω έκφραση σε δύο μέρη για να πάρουμε

$$\begin{aligned}&\int_0^{t\wedge t^*(x)} \int_E (g(y) - g(\nu, \varphi_\nu(v,z)))Q(\nu, \varphi_\nu(v,z), dy) \cdot \lambda(\nu, \varphi_\nu(v,z)) \int_0^{t\wedge t^*(x)} \lambda(\nu, \varphi_\nu(w,z))\overline{F}(w)dwdv,\\ &= \int_0^{t\wedge t^*(x)} \int_0^w \lambda(\nu, \varphi_\nu(v,z)) \int_E (g(y) - g(v, \varphi_\nu(v,z)))Q(\nu, \varphi_\nu(v,z), dy), dv \cdot \lambda(\varphi_\nu(w,z))\overline{F}(w)dw\\ &= \mathbb{E}[\int_0^{T_1} \lambda(X_v) \int_E (g(y) - g(X_v))Q(X_v, dy)dv : T_1 \leqslant t \wedge t^*(x)],\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}&\int_0^{t\wedge t^*(x)} \int_E (g(y) - g(\nu, \varphi_\nu(v,z)))Q(\varphi_\nu(v,z), dy) \cdot \lambda(\varphi_\nu(v,z))\overline{F}(t \wedge t^*(x))dv\\ &= \mathbb{E}[\int_0^{T_1\wedge t} \lambda(X_v) \int_E (g(y) - g(X_v))Q(X_v, dy)dv : T_1 \geqslant t \wedge t^*(x)].\end{aligned}$$

Έτσι προκύπτει

$$\mathbb{E}[g(X_{T_1} - g^*(X_{T_1^-})] = \mathbb{E}[\int_0^{t\wedge T_1} \lambda(X_v) \int_E (g(y) - g(X_v))Q(X_v, dy)dv].$$

Αφού η τελευταία σχέση ισχύει επίσης για μία τυχαία αρχική κατάσταση μπορούμε να παραλείψουμε την υπόθεση $X_0 = x$. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ο χρόνος άλματος T_k είναι ένας $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-χρόνος διακοπής. Επί πλέον, από την ισχυρή ιδιότητα Markov της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ του Θεωρήματος 4.3.3 έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[g(X_{T_k\wedge t}) - g^*(X_{T_k \overline{\wedge} t})] - T_{k\wedge t} &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(X_{T_k\wedge t}) - g^*(X_{T_k\overline{\wedge} t})|\mathcal{F}_{T_{k-1}}]]\\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\int_{t\wedge T_{k-1}}^{t\wedge T_k} \lambda(X_\nu) \int_E (g(y) - g(X_\nu))Q(X_\nu, dy)dv|\mathcal{F}_{T_{k-1}}]]\\ &= \mathbb{E}[\int_{t\wedge T_{k-1}}^{t\wedge T_k} \lambda(X_\nu) \int_E (g(y) - g(X_v))Q(X_\nu, dy)dv].\end{aligned}$$

Από το παραπάνω προκύπτει

$$\mathbb{E}[\sum_{i=0}^{N_t\wedge n}(g(X_{T_i})-g(X_{T_i^-}))]=\mathbb{E}[\int_0^{t\wedge T_n}\lambda(X_\nu)\int_E(g(y)-g(X_v))Q(X_v,dy)dv].$$

Ανάλογα έχουμε

$$\mathbb{E}[\sum_{i=0}^{N_t\wedge n}|g(X_{T_i})-g^*(X_{T_i^-})|]=\mathbb{E}[\int_0^{t\wedge T_n}\lambda(X_v)\int_E|g(y)-g(X_\nu)|Q(X_v,dy)dv].$$

και από το Θεώρημα Μονότονης Σύγκλισης προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}[\sum_{i=0}^{N_t}|g(X_{T_i})-g^*(X_{T_i^-})|]=\mathbb{E}[\int_0^{t}\lambda(X_\nu)\int_E|g(y)-g(X_\nu)|Q(X_\nu,dy)dv].$$

Ιδιαιτέρως από την (4.7), η τ.μ. του αριστερού μέλους της (4.10) είναι απόλυτα συνεχής. Επομένως ισχύει η (4.10) και έτσι εδώ τελειώνει η απόδειξη του θεωρήματος. □

Παρατήρηση 4.4.2. Σημειώνουμε ότι στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1 δεν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τον απειροστό γεννήτορα διότι δεν θέλαμε να υποθέσουμε ότι η g είναι φραγμένη . Επίσης, η συνθήκη **(c)** του Θεωρήματος 4.4.1 ικανοποιείται όταν η g είναι φραγμένη .

Σε εφαρμογές του Θεωρήματος 4.4.1 συχνά χρησιμοποιείται η παρακάτω μέθοδος. Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία PDMP με γεννήτορα $\mathbf{A}$. Ψάχνουμε για μία μετρήσιμη συνάρτηση g^* που να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 4.4.1 και τη συνθήκη $\mathbf{A}g=0$. Η διαδικασία $\{g(X_t-g(X_0)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι τότε $\{\mathcal{F}_t{}^X\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ − *martingale* . Για την επεκταμένη PDMP $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με $\widetilde{X}_t:=(X_t,t)$ έχουμε το παρακάτω πόρισμα.

Πόρισμα 4.4.3. *Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία PDMP με χ.κ. E και ενεργό σύνορο Γ. Θεωρούμε την PDMP $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με $\widetilde{X}_t:=(X_t,t)$ που δρα στον χ.κ. $\widetilde{E}:=E\times\mathbb{R}$ με ενεργό σύνορο $\widetilde{\Gamma}:=\Gamma\times\mathbb{R}$. Έστω $\widetilde{g}:\widetilde{E}\cup\widetilde{\Gamma}\longmapsto\mathbb{R}$ μία μετρήσιμη συνάρτηση που να ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 4.4.1 ως προς την επεκταμένη PDMP $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Τότε $g\in\mathfrak{D}(\widetilde{\boldsymbol{A}})$, όπου g είναι ο περιορισμός της g^* στο $\widetilde{E}$, και $(g,\widetilde{\boldsymbol{A}}g)\in\widetilde{\boldsymbol{A}}$, όπου $\widetilde{\boldsymbol{A}}g$ δίνεται από τον τύπο*

Απόδειξη. Η ένταση άλματος $\lambda(x,t)$ και ο πυρήνας μετάβασης $Q((x,t),d(y,t))$ της επεκταμένης PDMP $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ δίνονται από τις σχέσεις

$$\lambda(x,t):=\lambda(x),\quad Q((x,t),d(y,t)):=Q((x,dy),\tag{4.12}$$

όπου $\lambda(x)$ και $Q((x, d(y))$ είναι τα αντίστοιχα χαρακτηριστικά της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Από το Θεώρημα 4.4.1 και την (4.2) προκύπτει η (4.11). $\square$

Σε διάφορες εφαρμογές, ιδιαιτέρως σε προβλήματα βελτιστοποίησης, πρέπει να υπολογίζονται μέσες τιμές της μορφής

$$\mathbb{E}[\int_0^{t_0} e^{-\int_0^t k(X_v,\nu)dv}\gamma(X_t,t)dt]$$

για κάποιο σταθέρπο χρονικό ορίζοντα t_0, όπου ο $\Delta(t) := e^{-\int_0^t k(X_v,\nu)dv}$ μπορεί να ερμηνευτεί ως ένας παράγοντας προεξόφλησης (discounting factor) και η $\gamma(X_t,t)$ ως μια συνάρτηση κόστους. Γι'αυτόν τον σκοπό χρειαζόμαστε το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.4.4. *Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία PDMP με χ.κ. E και γεννήτορα $\boldsymbol{A}$. Για $t_0 > 0$ σταθερό, έστω $\kappa : E \times [0,t_0] \longmapsto \mathbb{R}_+$ και $\gamma : E \times [0,t_0] \longmapsto \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Επί πλέον θεωρούμε τις μετρήσιμες συναρτήσεις $g : E \times \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ και $g_{ter} : E \longmapsto \mathbb{R}$, όπου η τελευταία συνάρτηση διαμορφώνει τα κόστη τερματικών (models terminal costs). Υποθέτουμε ότι*
(a) *η g ικανοποιεί τις συνθήκες του Πορίσματος 4.4.3,*
(b) *$g(x,t_0) = g_{ter}(x)$ για όλα τα $x \in E$,*
(c) *$\frac{\partial g}{\partial t}(x,t) + (\boldsymbol{A}gt)(x) - k(x,t)g(x,t) + \gamma(x,t) = 0 \quad t \leqslant 0$.*
Τότε

$$g(X_0,0) = \mathbb{E}[\int_0^{t_0} e^{-\int_0^t k(X_v,v)dv}\gamma(X_t,t)dt + e^{-\int_0^{t_0} k(X_v,v)dv}g_{ter}(X_{t_0})]. \tag{4.13}$$

Απόδειξη. Από την (4.3) έχουμε ότι ο γεννήτορας $\widetilde{\mathbf{A}}$ της επεκταμένης PDMP $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με $\widetilde{X}_t := (X_t,t)$ δίνεται από τη σχέση

$$(\widetilde{\mathbf{A}}g)(x,t) = (\mathbf{A}g_t)(x) + \frac{\partial}{\partial t}g(x,t),$$

όπου $g_t(x) := g(x,t)$. Έτσι από το Πόρισμα 4.4.3 προκύπτει ότι η διαδικασία $\{M_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με

$$M_t := g(X_t,t) - g(X_0,0) - \int_0^t (\frac{\partial g}{\partial v}(X_v,v) + (\mathbf{A}g_v)(X_v))$$

είναι *martingale*. Από τη συνθήκη **(a)** του Θεωρήματος 4.4.1 η $\{M_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι απόλυτα συνεχής κατά τροχιά. Έτσι μπορούμε να γράψουμε σε διαφορική μορφή

$$dg(X_t,t) = dM_t + \frac{\partial g}{\partial t}(X_t,t) + (\mathbf{A}gt)(X_t,t)dt.$$

Τότε για τη συνάρτηση $\Delta(t) = e^{-\int_0^1 (kX_v, v)dv}$ έχουμε

$$\begin{aligned} d(\Delta(t), g(X_t, t)) &= \Delta(x)(dg(X_t, t) - k(X_t, t)g(X_t, t)dt) \\ &= \Delta(t)(dM_t + \frac{\partial g}{\partial t}((X_t, t) + (\mathbf{A}g_t)(X_t) - k(X_t, t)g(X_t, t)dt) \\ &= -\Delta(t)(\gamma(X_t, t)dt - dM_t)), \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι συνέπεια της υπόθεσης **(c)**.
Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}[\Delta(t_0)g(X_{t_0}, t_0) - g(X_0, 0))] = -\mathbb{E}[\int_0^{t_0} \Delta(t)(\gamma(X_t, t))dt].$$

Εδώ τελειώνει η απόδειξη. □

Κεφάλαιο 5

Σύνθετες διαδικασίες Poisson με όρο διάχυσης

5.1 Εισαγωγή

Στο κλασσικό μοντέλο της θεωρίας χρεοκοπίας το πλεόνασμα που επιτυγχάνει μια ασφαλιστική εταιρεία δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

$$u + ct - S_t, \quad t \geqslant 0. \tag{5.1}$$

Το $u \geqslant 0$ είναι το αρχικό αποθεματικό, c είναι η ένταση ασφαλίστρου, η διαδικασία $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ για τις συνολικές αποζημιώσεις ακολουθεί την Poisson με παράμετρο λ και η συνάρτηση κατανομής των τ.μ. της διαδικαασίας των μεγεθών απαίτησης συμβολίζεται με P_X. Το αναμενόμενο μέγεθος απαίτησης ορίζεται με μ και υποθέτουμε ότι $c > \lambda\mu$.

Έτσι ως περιθώριο ασφαλείας ορίζουμε τη σχέση

$$q = (c - \lambda\mu)/c \tag{5.2}$$

που κυμαίνεται από 0 έως 1.

Επεκτείνουμε το κλασσικό μοντέλο προσθέτοντας έναν όρο διάχυσης (η διαδικασία) Wiener στη σχέση (5.1) Το πλεόνασμα τη χρονική στιγμή t είναι:

$$R_t^u = u + ct - S_t + W_t, \;\; t \geqslant 0. \tag{5.3}$$

Η $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Wiener με απειροελάχιστη μεταβολή 0 και απειροελάχιστη διασπορά $2D > 0$. Έτσι για κάθε $t > 0$ η τυχαία μεταβλητή W_t ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διασπορά 2Dt. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι οι διαδικασίες $\{S_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ και $\{W_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι ανεξάρτητες.

Ο όρος διαχυσης στην (5.3) εκφράζει μια επιπλέον τυχαιότητα στις συνολικές απαιτήσεις. Μια διαφορετική ερμηνεία είναι να προσθέσουμε μια τυχαιότητα και στα ασφάλιστρα.

Όπως και στο κλασσικό μοντέλο μας ενδιαφέρει η πιθανότητα μη χρεοκοπίας,

$$\psi(u) = P(\{R_t^u \geqslant 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\}), \tag{5.4}$$

και $\Psi(u) = 1 - \psi(u)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας. Η πιθανότητα αυτή μπορεί να αναλυθεί όπως παρακάτω:

$$\Psi(u) = \Psi_d(u) + \Psi_s(u). \tag{5.5}$$

Εδώ το $\Psi_d(u)$ είναι η πιθανότητα χρεοκοπίας που προκαλείται από την ταλάντωση, δηλαδή το πλεόνασμα τη στιγμη της χρεοκοπίας είναι 0 και $\Psi_s(u)$ είναι η πιθανότητα ότι η χρεοκοπία επέρχεται από μια απαίτηση, δηλαδή το πλεόνασμα τη στιγμή της χρεοκοπίας είναι αρνητικό.

Επιπλέον, όπως διαφαίνεται και από τη ταλαντωτή φύση των δειγματικών μονοπατιών ισχύει:

$$\psi(0) = \Psi_s(0) = 0, \quad \Psi(0) = \Psi_d(0) = 1 \tag{5.6}$$

5.2 Η ελλιπής ανανεωτική εξίσωση για R(u)

Το σημείο εκκίνησης θα είναι η παρακάτω ολοκληροδιαφορική εξίσωση:

$$D\psi^{''}(u) + c\psi'(u) = \lambda\psi(u) - \lambda \int_0^u \psi(u-x)P_X(dx), \quad u \geqslant 0. \tag{5.7}$$

Θεωρούμε ένα απειροελάχιστο χρονικό διάστημα με μήκος dt και διακρίνουμε τις περιπτώσεις ύπαρξης ή μη μιας απαίτησης στο διάστημα αυτό. Από το νόμο της ολικής πιθανότητας συνεπάγεται ότι

$$\psi(u) = (1-\lambda dt)\mathbb{E}[\psi(u) + cdt + W_{dt}] + \lambda dt \int_0^u \psi(u-x)P_X(dx). \tag{5.8}$$

Αντικαθιστούμε με

$$\mathbb{E}[\psi(u) + cdt + W_{dt}] = R(u) + cdt\psi'(u) + Ddt\psi''(u), \tag{5.9}$$

αφαιρούμε το $\psi(u)$ και από τις δύο πλευρές και διαιρούμε την προκύπτουσα εξίσωση με το dt έτσι ώστε να εξάγουμε την (5.7).

Στη συνέχεια ολοκληρώνουμε την (5.7) ως προς u στο διάστημα (0,u). Από $\psi(0) = 0$ παίρνουμε ότι:

$$D\psi'(u) + c\psi(u) = D\psi'(0) + \lambda \int_0^{\nu} \psi(u-y)[1-F_X(y)]dy. \tag{5.10}$$

Για $u \to \infty$ προκύπτει η εξίσωση $c = D\psi'(0) + \lambda\mu$, από την οποία προκύπτει αντίστοιχα ότι

$$\psi'(0) = (c - \lambda\mu)/D = q\zeta, \tag{5.11}$$

όπου $\zeta = \frac{c}{D}$. Ως εκ τούτου, η τελική μορφή της (5.10) είναι

$$\psi'(u) + \zeta\psi(u) = q\zeta + (\lambda/D)\int_0^u \psi(u-y)[1 - F_X(y)]dy, \quad u \geqslant 0. \tag{5.12}$$

Σύμφωνα με την ορολογία του [21] (1970) η τελευταία εξίσωση καλείται **επεκταμένη ελλιπής ανανεωτική εξίσωση**. Εδώ κάνουμε ένα βήμα παραπέρα και παίρνουμε μια ελλιπή ανανεωτική εξίσωση με τον συνηθισμένο τρόπο.

Αρχικά πολλαπλασιάζουμε την (5.12) με τον ολοκληρωτικό παράγοντα $e^{\zeta\nu}$, ολοκληρώνουμε ως προς v στο διάστημα (0,x) και παίρνουμε

$$e^{\zeta x}\psi(x) = q(e^{\zeta x} - 1) + (\lambda/D)\int_0^x \int_0^v e^{\zeta u}\psi(v-y)[1 - F_X(y)]dydv, x \geqslant 0. \tag{5.13}$$

Εισάγουμε τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας:

$$h_1(x) := \zeta e^{-\zeta x} h_2(x) := (1/\mu)[1 - F_X(x)], \quad x > 0 \tag{5.14}$$

και συμβολίζουμε με $H_1(x) cαι \ \ H_2(x)$ τις αντίστοιχες συναρτήσεις κατανομής. Τότε η (5.13) μπορεί να γραφεί στην παρακάτω απλοποιημένη μορφή

$$\psi(x) = qH_1(x) + (1-q)\int_0^x \psi(z) h_1 * h_2(x-z)dz, \quad x \geqslant 0. \tag{5.15}$$

Αυτή ειναι μια **ελλιπής ανανεωτική εξίσωση** για τη συνάρτηση $\psi(x)$. Έτσι οι κλασσικές τεχνικές της ανανεωτικής θεωρίας μπορούν να εφαρμοστούν με σκοπό την απόκτηση αποτελεσμάτων για την πιθανότητα μη χρεοκοπίας.

5.3 Ο τύπος συνέλιξης

Αν χρησιμοποιήσουμε μετασχηματισμούς Laplace στην (5.15), προκύπτει ότι

$$\widehat{\psi}(\rho) = q\widehat{H}_1(\rho) + (1-q)\widehat{\psi}(\rho)\widehat{H}_1(\rho)\widehat{H}_2(\rho), \tag{5.16}$$

με

$$\widehat{\psi}(\rho) := \int_0^\infty e^{-x\rho} d\psi(x),$$
$$\widehat{h}_1(\rho) := \int_0^\infty e^{-x\rho} h_1(x)dx = \frac{\zeta}{\zeta + \rho},$$

$$\widehat{h}_2(\zeta) = \int_0^\infty e^{-x\rho} h_2(x)dx = \frac{1}{\mu}\int_0^\infty e^{-x\rho}[1 - F_X(x)]dx = \frac{1}{\mu\rho}\left\{1 - \int_0^\infty e^{-x\rho} dP(x)\right\}.$$

Έτσι,

$$\widehat{\psi}(\rho) = \frac{q\widehat{h}_1(\rho)}{1-(1-q)\widehat{h}_1(\rho)\widehat{h}_2(\rho)}. \tag{5.17}$$

Αυτό γενικεύει το κλασσικό μοντέλο $D = 0$,όπου $M_1(\rho) = 1$. Από την (2.9) αναπτύσσοντας την (5.15) ως γεωμετρική σειρά, βλέπουμε ότι

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q(1-q)^n H_1^{*^{(n+1)}} * H_2^{*^n}(x). \tag{5.18}$$

Αυτό γενικεύει τον κλασσικό **τύπο συνέλιξης** ο οποίος συχνά συναντάται στο [8] (1974). Διαισθητικά, αναμένουμε πως η πιθανότητα μη χρεοκοπίας είναι μια φθίνουσα συνάρτηση της παραμέτρου D, το οποίο εύκολα αποδεικνύεται με βάση τη σχέση (5.18). Εισάγουμε τους συμβολισμούς $R(x,D)$ και $H_1(x,D)$ για να δείξουμε το ρόλο της D. Υποθέτουμε ότι $0 < D_1 < D_2$. Έτσι ισχύει $H_1(x,D_1) \geqslant H_1(x,D_2)$ για όλα τα x, δηλαδή $H_1(;D_1)$ είναι στοχαστικά μεγαλύτερη από την $H_1(\cdot,D_2)$. Από το τελευταίο συνεπάγεται ότι και η $H_1^{*^{n+1}}(\cdot,D_1)$ είναι στοχαστικά μεγαλύτερη από την $H_1^{*^{(n+1)}}(;D_2))$ για όλα τα n, δηλαδή

$$H_1^{*^{(n+1)}}(x,D_1) \geqslant H_1^{*^{(n+1)}}(x,D_2) \quad \forall \;\; x \;\; \text{και} \;\; n.$$

Τελικά, από την (5.18) προκύπτει ότι $R(x,D_1) \geqslant R(x,D_2)$.

5.4 Οι πιθανότητες χρεοκοπίας

Παρόμοιοι υπολογισμοί μπορούν να εφαρμοστούν για τις συναρτήσεις $\Psi(x)$,$\Psi_d(x)$ και $\Psi_s(x)$. Για παράδειγμα για την συνάρτηση $\Psi_d(x)$ αρκεί να επιλύσουμε την εξίσωση

$$D\Psi_d''(u) + c\Psi_d'(u) = \lambda\Psi_d(u) - \lambda\int_0^u \Psi_d(u-x)dF_X(x), \quad u \geqslant 0. \tag{5.19}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση προκύπτει η επεκταμένη ελλειμματική ανανεωτική εξίσωση,

$$\Psi_d'(\nu) + \zeta\Psi_d(u) = (\lambda \;\, D)\int_0^\nu \Psi_d(\nu - y)[1 - F_X(y)]dy, \quad \nu \geqslant 0. \tag{5.20}$$

Στη συνέχεια πολλαπλασιάζοντας με τον παράγοντα $e^{\zeta\nu}$ και ολοκληρωνοντας προκύπτει μια σχέση ανάλογη της (5.15)

$$\Psi_d(x) = 1 - H_1(x) + (1-q)\int_0^x \Psi_d(x-z)h_1 * h_2(z)dz, \quad x \geqslant 0. \tag{5.21}$$

όπου η τελευταία είναι η ανανεωτική εξίσωση για την συνάρτηση $\Psi_d(x)$.

Τώρα η συνάρτηση $\Psi_d(x)$ προκύπτει άμεσα από τη συνάρτηση $\psi(x)$ ως εξής: Από τη σχέση (5.15) έχουμε:

$$\psi(x) = qH_1(x) + (1-q)\int_0^x \psi(x-z)h_1 * h_2(z)dz, \tag{5.22}$$

και παραγωγίζουμε για να πάρουμε την εξίσωση:

$$\psi'(x) = qh_1(x) + (1-q)\int_0^x \psi'(x-z)h_1 * h_2(z)dz. \tag{5.23}$$

Τώρα συγκρίνουμε τις (5.21) και (5.23).Αφού

$$h_1(x) = \zeta[1 - H_1(x)], \tag{5.24}$$

τότε λόγω της μοναδικότητας των λύσεων των ελλιπών ανανεωτικών εξισώσεων προκύπτει ότι:

$$\psi'(x) = q\zeta\Psi_d(x) = [(c-\lambda\mu)/D]\Psi_d(x), \tag{5.25}$$

που γενικεύει την (5.11).Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε μέσω της σχέσης (5.25) την $\Psi_d(x)$. Επιπλέον, $\Psi(x) = 1 - \psi(x)$ και $\Psi_s(x) = \Psi(x) - \Psi_d(x)$.

5.5 Ανάλυση της μέγιστης συνολικής απώλειας

Θεωρούμε τη συνολική απώλεια στο χρόνο t, να δίνεται από τη σχέση:

$$L_t = S_t - ct - W_t, \quad t \geqslant 0 \tag{5.26}$$

και τη μέγιστη συσσωρευτική απώλεια από τον τύπο:

$$L = \max\{L_t : t \geqslant 0\}. \tag{5.27}$$

Όπως και στο κλασσικό μοντέλο:

$$\psi(u) = P(\{L_t \leqslant u, \quad \forall t \geqslant 0\}) = P(\{L \leqslant u\}), \tag{5.28}$$

όπου $\psi(u)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της τ.μ. L. Η τ.μ. L μπορεί να αναλυθεί όπως παρακάτω

$$L = L_0^{(1)} + L_1^{(2)} + L_1^{(1)} + ... + L_N^{(2)} + L_N^{(1)}, \tag{5.29}$$

με την υπόθεση ότι αν $N = 0$, τότε $L = L_0^{(1)}$. Το N είναι ο αριθμός των κλιμακωτών υψών της διαδικασίας $\{L_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τα οποία προκαλούνται από την εμφάνιση μιας απαίτησης. Έστω $T_1, T_2, ..., T_N$ χρόνοι εμφάνισης των απαιτήσεων. Θέτουμε $T_0 = 0$ και $T_{N+1} = \infty$. Τότε

$$L_k^{(1)} = \max\{L_t : t < T_{k+1}\} - L_{T_k} \quad \gamma\iota\alpha \quad k = 0, 1, ..., N, \tag{5.30}$$
$$L_k^{(2)} = L_{T_k} - L_{T_{k-1}} - L_{k-1}^{(1)} \quad \gamma\iota\alpha \quad k = 0, 1, ..., N.$$

Σημειώνουμε ότι η N έχει μία γεωματρική κατανομή με

$$P(\{N=n\}) = p(1-p)^n, \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}_0, \tag{5.31}$$

όπου p είναι η πιθανότητα το πλήθος των κλιμακωτών υψών να είναι 0. Οι τυχαίες μεταβλητές $L_0^{(1)}, L_1^{(1)}, \ldots$ είναι ισόνομες με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_1(x)$ και οι $L_1^{(2)}, L_2^{(2)}, \ldots$ είναι ισόνομες με κοινή συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $g_2(x)$.Τελικά οι τυχαίες μεταβλητές $N, L_0^{(1)}, L_1^{(2)}, L_1^{(1)}, L_2^{(2)}, \ldots$ είναι ανεξάρτητες.

Ακόλουθο όλων των παραπάνω είναι η σχέση

$$\psi(u) = \sum_{n=0}^{\infty} p(1-p)^n G_1^{*(n+1)} \dot{*} G_2^{*(n)}(u). \tag{5.32}$$

Λόγω της σχέσης (5.18) προκύπτει ότι:

$$p = q, \quad G_1(x) = H_1(x), \quad G_2(x) = H_2(x), \tag{5.33}$$

με $q, H_1(x)$ και $H_2(x)$ όπως ορίζονται από τις σχέσεις (5.2) και (5.14).

Πάμε τώρα να αποδείξουμε τη ισχύ της (5.33), που μας παρέχει την πιθανοτική ερμηνεία της (5.15) και γενικεύει το γνωστό κλασσικό μοντέλο, βλ. για παράδειγμα [10](1986, Θεώρημα 11.4).

Αρχικά θα χρησιμοποιήσουμε τον νόμο της ολικής πιθανότητας για να δημιουργήσουμε τις εξισώσεις

$$\Psi_d(x) = 1 - G_1(x) + (1-p)\int_0^x \Psi_d(x-z) g_1 * g_2(z) dz \tag{5.34}$$

και

$$\psi(x) = pG_1(x) + (1-p)\int_0^x \psi(x-z) g_1 * g_2(z) dz. \tag{5.35}$$

(5.12) Παραγωγίζοντας παίρνουμε ότι:

$$\psi'(x) = pg_1(x) + (1-p)\int_0^x R'(x-z) g_1 * g_2(z) dz. \tag{5.36}$$

Από τις σχέσεις (4.7),(5.10) και (5.12) προκύπτει ότι:

$$q\zeta[1 - G_1(x)] = pg_1(x).$$

Έτσι

$$g_1(x) = \alpha\zeta e^{-\alpha\zeta x}, \quad x > 0, \quad \mu\varepsilon \quad \alpha = \frac{q}{p}. \tag{5.37}$$

Από την (5.23) προκύπτει ότι

$$\psi''(0) = qh_1'(0) = -q\zeta^2 \tag{5.38}$$

και από την (5.38) ότι

$$\psi^{''}(0) = pg_1'(0) = -p\zeta^2\alpha^2 = -q^2\zeta^2/p. \tag{5.39}$$

Εξισώνοντας αυτές τις σχέσεις προκύπτει ότι $p = q$.Με βάση αυτό και της σχέσης (5.39) συνεπάγεται ότι $g_1(x) = h_1(x)$ και τέλος προκύπτει ότι $g_2(x) = h_2(x)$ και εφαρμόζουμε μετασχηματισμό Laplace στην (5.22) και (5.37).

Από τη στιγμή που ξέρουμε ότι: $H_1(x)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της L_0^1, q είναι η πιθανότητα για $L = L_0^{(1)}$ και ότι $h_1 * h_2(x)$ είναι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $L_0^{(1)} + L_1^{(2)}$ οι τύποι (5.15) και (5.20) είναι άμεσές απόρροιες του Νόμου Ολικής Πιθανότητας.

Στο σημείο αυτό προσθέτουμε τις εξίσου εμφανείς εξισώσεις:

$$\Psi_s(x) = (1-q)[H_1(x) - H_1 * H_2(x)] + (1-q)\int_0^x \Psi_s(x-z)h_1 * h_2(z)dz, \tag{5.40}$$

και

$$\Psi(x) = q[1 - H_1(x)] + (1-q)[1 - H_1 * H_2(x)] + (1-q)\int_0^x \Psi(x-z)h_1 * h_2(z)dz \tag{5.41}$$

στη συλλογή των ελλιπών ανανεωτικών εξισώσεων.

5.6 Μείξη εκθετικών κατανομών

Θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις πιθανότητας του μεγέθους των απαιτήσεων είναι της μορφής:

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i\beta_i e^{-\beta_i x}, \quad x > 0 \tag{5.42}$$

κάποια από τα A_i μπορεί να είναι αρνητικά, εφόσον $p(x) \geqslant 0$.Τότε

$$1 - F(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i e^{-\beta_i x}, \quad x > 0, \tag{5.43}$$

και

$$\widehat{h}_2(\rho) = \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\beta_i + \rho}, \quad \mu = A_1/\beta_1 + ... + A_n/\beta_n. \tag{5.44}$$

Στη συνέχεια αντικαθιστούμε στην (5.44) και αναλύουμε την συνάρτηση $\widehat{\psi}(\rho)$ σε επιμέρους συναρτήσεις για να προκύψει τελικά ότι η $\Psi(x) = 1 - \psi(x)$ πρέπει να είναι της μορφής:

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k e^{-r_k x}, \quad x \geqslant 0. \tag{5.45}$$

Παρακάτω προσδιορίζουμε τα $r_1, ..., r_{n+1}, C_1, ..., C_{n+1}$ με ένα διαφορετικό τρόπο. Αρχικά αντικαθιστούμε την $\psi(x)$ με $1 - \psi(x)$ στην (2.6). Η προκύπτουσα εξίσωση μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$D\Psi'(x) + c\Psi(x) = \lambda \int_0^x \Psi(x-y)[1-F(y)]dy + \lambda \int_x^\infty [1-F(y)]dy. \tag{5.46}$$

Τώρα αντικαθιστούμε την (5.43) και (5.44) εκτιμώντας τα δύο ολοκληρώματα και παίρνουμε την παρακάτω συνθήκη:

$$-D\sum_{k=1}^{n+1} C_k r_k e^{-r_k x} + c\sum_{k=1}^{n+1} C_k e^{-r_k x} = \lambda \sum_{k=1}^{n+1}\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i C_k}{\beta_i - r_k}(e^{-r_h x} - e^{-\beta_i x}) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\beta_i} e^{-\beta_i x}. \tag{5.47}$$

Συγκρίνοντας τους συντελεστές των $e^{r_k x}$, βλέπουμε ότι $r_1, ..., r_{n+1}$ είναι οι λύσεις της εξίσωσης

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\beta_i - r} + Dr = c. \tag{5.48}$$

Για λόγους ευκολίας υποθέτουμε ότι η εξίσωση αύτη έχει n+1 διακριτές λύσεις, το οποίο ισχύει πάντα όταν $A_i > 0$. Συγκρίνοντας τώρα τους συντελεστές των $e^{-\beta_i x}$, παρατηρούμε ότι τα $C_1, ..., C_{n+1}$ πρέπει να επαληθεύουν την εξίσωση:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{\beta_i}{\beta_i - r_k} C_k = 1, \quad \gamma\iota\alpha i = 1, ..., n. \tag{5.49}$$

Από τη σχέση $\Psi(0) = 1$ προκύπτει ότι:

$$C_1 + ... + C_{n+1} = 1. \tag{5.50}$$

Έτσι οι σχέσεις (5.49) και (5.50) είναι ένα σύστημα από n+1 γραμμικές εξισώσεις για τα C_k το οποίο λύνεται ως εξής:

Εισάγουμε τη ρητή συνάρτηση

$$Q(x) := \sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_k r_k}{x - r_k}. \tag{5.51}$$

Λόγω των (5.49) και (5.50) προκύπτει ότι $Q(0) = -1$ και $Q(\beta_i) = 0$ για $i = 1, ..., n$. Έτσι

$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x - \beta_i}{\beta_i}\right) \prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{r_k}{x - r_k}\right). \tag{5.52}$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{C_k r_k}{x - r_k} = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{x - \beta_i}{\beta_i}\right) \prod_{k=1}^{n+1} \left(\frac{r_k}{x - r_k}\right). \tag{5.53}$$

με τον όρο $(x - r_h)$, και θέτουμε $x = r_h$ για να προκύπτει ότι

$$C_h = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{r_h - \beta_i}{\beta_i} \right) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n+1} \left(\frac{r_k}{r_h - r_k} \right), \quad h = 1, ..., n+1. \tag{5.54}$$

Συνοψίζοντας αν η κατανομή του μεγέθους των απαιτήσεων είναι μια μείξη εκθετικών κατανομών, τότε η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από τη σχέση (5.45), τα r_k είναι οι λύσεις των εξισώσεων (5.48) και (5.54) είναι η τελική μορφή του C_k.

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ως εξής: Ξαναγράφουμε την (5.48) ως μια πολυωνυμική εξίσωση

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} A_i \prod_{j=1}^{n} (\beta_j - r) + (Dr - c) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (\beta_j - r) = 0. \tag{5.55}$$

Σ 'αυτή τη σχέση ο συντελεστής του r^{n+1} είναι ο $(-1)^n D$, και ο σταθερός όρος μπορεί να απλοποιηθεί στο $(\lambda\mu - c) \prod_{j=1}^{n} \beta_j$.Έτσι από το θεώρημα του Vieta το γινόμενο των λύσεων της (5.55) είναι:

$$\prod_{k=1}^{n+1} r_k = \frac{c - \lambda\mu}{D} \prod_{j=1}^{n} \beta_j = q\zeta \prod_{j=1}^{n} \beta_j. \tag{5.56}$$

Αντικαθιστώντας το στη σχέση (5.54) έχουμε ότι:

$$C_h = \frac{1}{r_h} q\zeta \prod_{i=1}^{n} (r_h - \beta_i) / \prod_{k=1 k \neq h}^{n} (r_h - r_k). \tag{5.57}$$

Επιστρέφουμε τώρα στην $\Psi_d(x)$. Ισχύει ότι

$$\Psi_d(x) = \sum_{k=1}^{n+1} C_k^d e^{-r_k x}, \quad x \geqslant 0, \tag{5.58}$$

με

$$C_k^d = \frac{r_h}{q\zeta} C_h = \prod_{i=1}^{n} (r_h - \beta_i) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq h}}^{n} (r_h - r_k). \tag{5.59}$$

5.7 Ο συντελεστής προσαρμογής

Παρακάτω υποθέτουμε ότι η κατανομή του μεγέθους απαιτήσεων είναι φυσιολογική στην ουρά και έτσι η ροπογεννήτρια συνάρτηση των μεμονομένων μεγεθών απαιτήσεων και συγκεκριμένα ο συντελεστής προσαρμογής να υπάρχει. Από την (5.3) προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}[e^{-rU(t)}] = e^{-ru} e^{-rct + \lambda t (\int_0^\infty e^{rx} dF(x) - 1) + Dr^2 t}. \tag{5.60}$$

Με βάση τη σχέση (5.60) ορίζουμε το συντελεστή προσαρμογής R ως τη θετική ρίζα της εξίσωσης

$$\lambda \int_0^{infty} e^{rx} dF(x) + Dr^2 = \lambda + cr. \tag{5.61}$$

Τότε η διαδικασία $\{e^{-RU(t)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι martingale.Αν τη σταματήσουμε στον χρόνο T (χρόνος χρεοκοπίας), προκύπτει ότι:

$$e^{-Ru} = \mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T < \infty]\Psi(u) = \Psi_d(u) + \mathbb{E}[e^{-RU(T)}|T < \infty, U(T) < 0]\Psi_s(u). \tag{5.62}$$

Άρα

$$e^{-Ru} > \Psi_d(u) + \Psi_s(u) = \Psi(u) \quad \text{για} \quad u > 0. \tag{5.63}$$

Ο συντελεστής προσαρμογής παίζει ακόμα το ρόλο του ασυμπτωτικού τύπου:

$$\Psi_d(u) \approx C^d e^{-Ru} \quad \text{για} \quad u \to \infty \tag{5.64}$$

και

$$\Psi_s(u) \approx C^s e^{-Ru} \quad \text{για} \quad u \to \infty. \tag{5.65}$$

Για να προκύψει η (5.64) πολλαπλασιάζουμε την εξίσωση με e^{Rx} και τελικά προκύπτει

$$e^{Rx}\Psi_d(x) = e^{Rx}[1 - H_1(x)] + (1-q)\int_0^x e^{R(x-z)}\Psi_d(x-z)e^{Rz}h_1 * h_2(z)dz. \tag{5.66}$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$(1-q)\int_0^\infty e^{Rz}h_1 * h_2(z)dz = 1. \tag{5.67}$$

Έτσι η (5.66) είναι μια συνήθης ανανεωτική εξίσωση για τη συνάρτηση $e^{Rx}\Psi_d(x)$. Από το ανανεωτικό θεώρημα προκύπτει ότι:

$$e^{Rx}\Psi_d(x) \to C^d = \frac{\int_0^\infty e^{Rz}[1 - H_1(z)]dz}{(1-q)\int_0^\infty z e^{Rz} h_1 * h_2(z)dz} \tag{5.68}$$

για $x \to \infty$. Προφανώς

$$\Psi(u) \approx Ce^{-Ru} \quad \text{για} \quad u \to \infty. \tag{5.69}$$

με $C = C^d + C^s$.

Κεφάλαιο 6

Εκθετικές ανισότητες για πιθανότητες χρεοκοπίας

Στο παρόν κεφάλαιο κατασκευάζουμε μια κλάση διαδικασιών διάχυσης που ακολουθεί τοπικά ένα διανυσματικό πεδίο και τον επεκταμένο γεννήτορα για ένα υποσύνολο του πεδίο ορισμού του γεννήτορα.

Χρησιμοποιώντας αυτή τη θεωρία κατασκευάζονται martingales για διαδικασίες κινδύνου με όρο διάχυσης. Αυτό οδηγεί σε εκθετικά φράγματα για την πιθανότητα χρεοκοπίας τόσο σε άπειρο όσο και σε πεπερασμένο χρόνο.

6.1 Εισαγωγή

Ο [21] (1970) επέκτεινε το κλασσικό μοντέλο Cramér-Lundberg προσθέτοντας έναν όρο διάχυσης $\{\eta W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στη κλασσική διαδικασία κινδύνου

$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N} Z_i + \eta W_t$$

,

όπου $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown.

Αύτο γράφεται ισοδύναμα

$$R_t = u + ct + \eta_1 {W_t}^{(1)} - \left(\sum_{i=1}^{N_t} Z_i + \eta_2 {W_t}^{(2)} \right).$$

Αυτή η γενίκευση ουσιαστικά, μπορεί να ερμηνευθεί πως επιτρέπει κάποια αβεβαιότητα στο βασικό εισόδημα και στα κόστη.

Το μοντέλο έχει επίσης μελετηθεί από τους Dufresne και Gerber [15] (1991), όπου αποδείχθηκε η ανισότητα Lundberg για την πιθανότητα χρεοκοπίας με παρόμοιο τρόπο όπως στο κλασσικό μοντέλο, βλ. Κεφάλαιο 5.

Σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να βρεθούν εκθετικές ανισότητες για το μοντέλο κινδύνου με όρο διάχυσης, αν η απαριθμήτρια N δεν είναι απαραίτητα διαδικασία Poisson.

Κατά τη διάρκεια των τελευταίων χρόνων αποδείχθηκε ότι η θεωρία των διαδικασιών Markov αποτελεί ένα ιδανικό εργαλείο στην θεωρία κινδύνου, βλέπε για παράδειγμα [14] (1989) [17] (1993) ή [18] (1994). Σ'αυτές τις μελέτες χρησιμοποιήθηκε η θεωρία των τμηματικά ντετερμινιστικών μαρκοβιανών διαδικασιών (βλέπε [12](1984) ή [13] (1993)) και το Κεφάλαιο 4.

Στον παρόν κεφάλαιο θα κατασκευάσουμε μια τμηματικά ντετερμινιστική διαδικασία Markov που περιλαμβάνει κάποιους όρους διάχυσης. Δίνουμε συνθήκες κάτω από τις οποίες μια συνάρτηση ανήκει στο πεδίο ορισμού του επεκταμένου γεννήτορα καθώς και τη μορφή του γεννήτορα κάτω από αυτές τις συνθήκες.

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τη θεωρία για να εξασφαλίσουμε εκθετικές ανισότητες για την πιθανότητα χρεοκοπίας για το μοντέλο Cramér-Lundberg, το ανανεωτικό μοντέλο και το μοντέλο Cox με διάχυση.

Για μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η μικρότερη πλήρης διύλιση $\{\mathcal{F}_t^x\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, στην οποία η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι προσαρμοσμένη, καλείται **κανονική διύλιση**.

Αν δεν δηλώνουμε κάτι διαφορετικά, χρησιμοποιούμε πάντα την κανονική διύλιση .

Θυμίζουμε από το Κεφάλαιο 3, ότι αν για μια διαδικασία Markov $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και για φραγμένες μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις f και $\widetilde{f}$ ισχύει

$$\lim_{h\downarrow 0}(\frac{1}{h}\mathbb{E}[f(X_h)-f(x)|X_0=x])=\widetilde{f}(x),$$

όπου η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο χώρο καταστάσεων, τότε θέτουμε $\mathbf{A}_{inf}f=\widetilde{f}$ και λέμε ότι η f ανήκει στο πεδίο ορισμού $\mathcal{D}(\mathbf{A}_{inf})$ του απειροστικού γεννήτορα. Από το Θεώρημα του Dynkin (βλέπε Williams [29] (1979,σελίδα 129)) η σ.δ. των τ.μ.

$$f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t \mathbf{A}_{inf}f(X_s)ds$$

είναι martingale για κάθε $f\in\mathcal{D}(\mathbf{A}_{inf})$. Ο περιορισμός σε φραγμένες συναρτήσεις είναι πολύ ισχυρός. Επομένως χρειαζόμαστε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 6.1.1. Αν για κάποιες μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις $f,\widetilde{f}:E\longmapsto\mathbb{R}$ η διαδικασία $\{f(X_t)-f(X_0)-\int_0^t\widetilde{f}(X_s)ds\}$ είναι $\mathcal{F}_t^X$-τοπικό martingale τότε θέτουμε $\mathbf{A}f:=\widetilde{f}$.

Ο τελεστής $\mathbf{A}$ ονομάζεται **επεκταμένος γεννήτορας** (extended generator) $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και η f λέμε ότι ανήκει στο πεδίο ορισμού του γεννήτορα $\mathcal{D}(\mathbf{A})$.

Ορισμός 6.1.2. Αν για κάποιες μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις $f, \widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$ η σ.δ. $\{f(X_t) - f(X_0 - \int_0^t f(X_s)ds\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t\in\mathbb{R}_+}$- τοπικό martingale, τότε θέτουμε $\mathbf{A}f = \widetilde{f}$.Ο τελεστής $\mathbf{A}$ ονομάζεται ο **(επεκταμένος) γεννήτορας** της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και λέμε ότι η f ανήκει στο πεδίο ορισμού $\mathfrak{D}(\mathbf{A})$ του γεννήτορα $\mathbf{A}$.

Παρατήρηση 6.1.3. Σημειώνεται ότι το $\mathbf{A}$ στην πραγματικότητα είναι ένας πλειότιμος τελεστής . Επομένως ταυτοποιούμε όλες τις εκδοχές της $\widetilde{f}$ στο σύνολο τιμών του $\mathbf{A}$.

6.2 Κατασκευή της διαδικασίας

Για την κατασκευή της διαδικασίας, η οποία χρησιμοποιείται στο παρόν κεφάλαιο, βασιζόμαστε στην κατασκευή της τμηματικά ντετερμινιστικής διαδικασίας Markov του [12] (1984), (βλ. Κεφάλαιο 4). Έστω E ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$.Για όλα τα $y \in E$ θέτουμε

$$\mathfrak{X} = \sum_{k=1}^{d\nu} c_k(y)\frac{\partial}{\partial_{x_k}},$$

όπου $c_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις. Συμβολίζουμε με c_ν το διάνυσμα με i συντεταγμένη c_{ν_i}.

Έστω $\eta_i \quad (i = 1, ..., d_\nu)$ πραγματικοί αριθμοί. Συμβολίζουμε με H τον διαγώνιο πίνακα με $H_{ii} = \eta_i$. Έστω $W := \{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία d_ν-διάστατη τυπική κίνηση Brown και $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (ΣΔΕ)

$$dY_t(z) = \alpha(Y_t(z))dt + HdW_t \quad \mu\varepsilon \quad Y_0(z) = z. \tag{6.1}$$

Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι η $\{Y_t(z)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι καλώς ορισμένη σε κάποιο μη κενό διάστημα $[0, t^*]$ για όλα τα $z \in E$. Για μια ανάλυση των συνθηκών επάνω στο α ώστε η σ.δ. $\{Y_t(z)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ να είναι καλά ορισμένη, παραπέμπουμε στους Elliot (1982, p.183) ή Revuz and Yor (1991,Ch IX). Σημειώνεται ότι η υπόθεση αυτή χρησιμοποιείται για τα μοντέλα κινδύνου που μελετώνται σε αυτό το κεφάλαιο. Για $z \in \partial E$ έστω

$$\mathfrak{B}(z) := \{A \cap \partial E : z \in A \subseteq \mathbb{R}^d,\ A \text{ ανοιχτό}\}$$

το σύνολο όλων των ανοιχτών περιοχών του z στο ∂E.

Συμβολίζουμε με

$$\Gamma := \{z \in \partial E : \exists x \in E, P(Y_t(x) \in A \text{ για κάποιο } t > 0) > 0,\ \forall A \in \mathfrak{B}(z)\}$$

το σύνολο όλων των συνοριακών σημείων που είναι προσβάσιμα απο το εσωτερικό.

Για κάθε $z \in \partial E$ συμβολίζουμε με

$$t^*(z, B) := inf\{t > 0 : Y_t(z) \notin E\},$$

τον χρόνο μέχρι η διαδικασία, που ξεκινάει από το z, να φύγει από το E.

Για να αποτρέψουμε την έκρηξη των τροχιών υποθέτουμε ότι

$$Y_{t^*} \in \Gamma \quad \text{επάνω} \quad \text{στο} \quad \{\tau^* < \infty\} \quad \sigma.\beta. \tag{6.2}$$

Για τη μοντελοποίηση στοχαστικής διαδικασίας με άλματα χρειάζομαστε μια τάση, δηλαδή μια μετρήσιμη συνάρτηση $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$, και ένα μέτρο μετάβασης $Q : \mathfrak{B}(E) \times (E \cup \Gamma) \longrightarrow [0, 1]$.Το $(Q(\bullet, x))$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας και κάθε σταθερό $x \in E \cup \Gamma$ και η $Q(A, \bullet) : E \cup \Gamma \to [0, 1]$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση για όλα τα $A \in \mathfrak{B}(E)$.

Παρατήρηση 6.2.1. Σημειώνεται ότι ο χώρος καταστάσεων στον [12] (1984) είναι το σύνολο

$$\bigcup_{i \in I} (\{i\} \times M_i)$$

όπου I είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και το M_i είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Με σκοπό να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς και επειδή είναι επαρκές για τα μοντέλα που πραγματευόμαστε στο κεφάλαιο αυτό, θεωρούμαι μόνο τη περίπτωση που το I περιέχει ένα στοιχείο. Είναι ξεκάθαρο ότι η μέθοδος λειτουργεί για ένα αυθαίρετο αριθμήσιμο σύνολο I όπως και για ένα σύνολο I που περιέχει ένα στοιχείο.

Τώρα κατασκευάζουμε μια τροχιά της διαδικασίας με αρχικό σημείο z. Ορίζουμε την (τυχαία) συνάρτηση:

$$\bar{F}^{(1)}(t) := \begin{cases} e^{-\int_0^t \lambda(Y_s^{(1)}(z))ds}, & \alpha\nu \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*(z, B^{(1)}) \\ 0, \quad \alpha\nu \quad t \geqslant t^*(z, B^{(1)}) \end{cases}$$

.

Εισάγουμε σε όλα τα αντικείμενα το (1) για να δηλώσουμε ότι κατασκευάζουμε την τροχία μέχρι το πρώτο άλμα. Θέτουμε $\mathcal{E}^{(1)} := \sigma(\{W_t^{(1)})\}_{t \in \mathbb{R}_+})$.

Διαλέγουμε τυχαίες μεταβλητές $T_1 > 0$ και $Z_1 \in E$ στην υπό συνθήκη συναρτήσεις κατανομής

$$P[T_1 \leqslant t | \mathcal{E}^{(1)}] = F^{(1)}$$

και

$$P[Z_1 \in \bullet | T_1, \mathcal{E}^{(1)}] = Q(\bullet, Y_{T_1}{}^{(1)}(z)).$$

Ορίζουμε την τ.μ

$$X_t := \begin{cases} Y_t^{(1)} & \text{αν } 0 \leqslant t < T_1, \\ Z_1 & \text{αν } t = T_1. \end{cases}$$

Η διαδικασία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ανάμεσα στο πρώτο και στο δεύτερο άλμα κατασκευάζεται ομοίως χρησιμοποιώντας ως αρχικό σημείο το Z_1. Χρησιμοποιούμε την κίνηση Brown $W^{(2)}$,η οποία είναι ανεξάρτητη της $\sigma(\{X_s\}_{s\leqslant T_1})$.

Η δειγματική τροχιά $\{Y_t^{(2)}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επιλέγεται έτσι ώστε το ζεύγος $(Y^{(2)}(Z_1), W^{(2)})$ να ικανοποιεί τη Σ.Δ.Ε. (6.1). Με αυτό το τρόπο παίρνουμε μία δειγματική τροχιά της $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με χρόνους αλμάτων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Έστω N_t ο αριθμός των αλμάτων στο διάστημα $[0,t]$ και έστω ότι $\mathbb{E}[N_t] < \infty$ για όλα τα $t > 0$. Όπως και στον [12] (1984), η παραπάνω κατασκευασμένη διαδικασία είναι μια ισχυρή διαδικασία Markov (βλ Κεφάλαιο 3).

Παρατήρησεις 6.2.2. **(a)** Για τα μοντέλα που εξετάζονται στο παρόν κεφάλαιο είναι αρκετό να προσθέσουμε μια κίνηση Brown στη ντετερμινιστική τροχιά, διότι οι **μη διαταραγμένες** (arturbed) τροχιές ειναι γραμμικές σε αυτές τις περιπτώσεις. Αλλά από τη στιγμή που το διανυσματικό πεδίο $\mathfrak{X}$ γίνεται μη γραμμικό (π.χ αν υπάρχει πληθωρισμός και τοκος) η απειροελάχιστη μετατόπιση σε ένα σημείο εξαρτάται επίσης από την κίνηση Brown. Συνεπώς πρέπει να ορίσουμε το συνεχές τμήμα της διαδικασίας μέσω της Σ.Δ.Ε. (6.1).

(b) Χρησιμοποιούμε το προσβάσιμο σύνορο Γ, με σκοπό την απλοποίηση της συνθήκης (6.4) της παρακάτω Πρότασης 6.2.4. Αν δουλέψουμε με το πλήρες σύνορο ∂E του Ε αντί για το Γ, τότε η συνάρτηση, την οποία ψάχνουμε θα πρεπει να έχει ένα όριο σε ένα συνοριακό σημείο, το οποίο ποτε δεν μπορεί να γίνει προσβάσιμο απο τη διαδικασία. Επιπλέον θα πρέπει να ορίσουμε το μέτρο μετάβασης $\mathcal{Q}$ στο σημείο αυτό.

(c) Στην κατασκευή της διαδικασίας χρησιμοποιουμε μια άλλη κίνηση Brown για κάθε τμήμα μεταξύ δύο χρόνων άλματος. Ενα (τεχνικό) πρόβλημα της κατασκευής προκύπτει αφού ο χρόνος $t^*(Z_{k-1}, W^{(k)})$ και η τροχιά μέχρι τον χρόνο $t^*(Z_{k-1}, W^{(k)})$ είναι, σε αντίθεση με την περίπτωση της τμηματικά ντετερμινιστικής διαδικασίας, όχι πια ντετερμινιστικές μεταβλητές. Αλλά για να ορίσουμε τη συνάρτηση F^k, πρέπει να δεσμεύσουμε επάνω στον $t^*(Z_{k-1}, W^{(k)})$ και στην πλήρη τροχιά $\{Y_t(Z_{k-1})\}_{t\leqslant t^*(Z_{k-1},W^{(k)})}$ με σκοπό τον προσδιορισμό της έντασης του άλματος . Επομένως θα πρέπει να δεσμεύσουμε σε όλη τη σ-άλγεβρα $\mathcal{E}^{(k)}$. Αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να ξεκινήσουμε με μια καινούργια κίνηση Brown μετά από κάθε ένα άλμα έτσι ώστε να διατηρηθεί η ιδιότητα Markov .

Για μια τμηματικά ντετερμινιστική διαδικασία Markov υπάρχουν συνθήκες ώστε μία συνάρτηση να ανήκει στο πεδίο ορισμού του γεννήτορα (βλ. π.χ. [14] (1989)). Αυτές οι συνθήκες αποδεικνύονται πολύτιμες για να προσδιορίσουμε εκθετικά martingales (βλ. επίσης [17]

(1993)). Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι τέτοιες συνθήκες επίσης υπάρχουν για τη διαδικασία μας. Η απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [20] (1993).

Πρόταση 6.2.3. Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η σ.δ.που κατασκευάστηκε παραπάνω και $f : E \cup \Gamma \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση έτσι ώστε

$$\text{η } f \text{ να είναι δύο φορές μερικώς διαφορίσιμη ως προς όλες τις συν/νες της με } \eta_i \neq 0, \tag{6.3}$$

$$f(x) = \int_E f(y)Q(\mathrm{d}y, x) \quad \forall x \in \Gamma. \tag{6.4}$$

$$\mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_t\wedge n} |f(X_{T_i}) - f(X_{T_{i-}})|] < \infty \quad \forall t > 0\, n \in \mathbb{N}. \tag{6.5}$$

Τότε $f \in \mathfrak{D}(\mathbf{A})$ και ο γεννήτορας έχει την μορφή

$$\mathbf{A}f(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\eta_i^2\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}f(x) + \mathfrak{X}f(x) + \lambda(x)\int_E (f(y) - f(x))Q(\mathrm{d}y, x). \tag{6.6}$$

Παρατήρηση 6.2.4. Οι παραπάνω συνθήκες θα μπορούσαν να αποδυναμωθούν. Ιδιαίτερα η (6.5) θα μπορούσε να αντικατασταθεί από τη συνθήκη από την συνθήκη (5.6) του [12] (1984). Θα δουλέψουμε με την (6.5) γιατί αποδεικνύεται ότι είναι πιο εύκολο να επαληθευτεί.

Η ιδέα είναι να επιλυθεί η εξίσωση $\mathbf{A}f = 0$ υποθέτοντας ότι ισχύει η (6.6) και μέτα να επαληθευτούν οι συνθήκες (6.3)-(6.5) και να δειχθεί ότι η $|f(X_{t\wedge T_n}) - f(X_0)|$ είναι φραγμένη απο μια ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή για όλα τα $t \geqslant 0$. Τότε η σ.δ. $\{(f(X_t) - f(X_0))\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα είναι martingale.

Η παρακάτω πρόταση θα μπορούσε να είναι χρήσιμη για προβλήματα βελτιστοποίησης. Μπορεί να αποδειχθεί με παρόμοιο τρόπο με εκείνον του αντίστοιχου θεωρήματος του [12].

Πρόταση 6.2.5. Έστω $\alpha : E \times [0, t] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ $\gamma : E \times [0, t] \longrightarrow \mathbb{R}$ και $f_{ter} : E \longrightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η $f : E \times [0, t] \longrightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(i) $f \in \mathfrak{D}(\mathbf{A})$,

(ii) $\mathbb{E}\left[\sum_{T_i\leqslant t}|f(X_{T_i}, T_i) - f(X_{T_{i-}}, T_i)|\right] < \infty, \quad \forall t > 0$

(iii) $\mathbb{E}\left[\int_0^t(\eta_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s, s))^2 ds\right] < \infty \quad \forall 1 \leqslant t \leqslant d \quad t \geqslant 0,$

(iv) $f(x, t) = f_{ter}(x) \quad \forall x \in E,$

(v) $\mathbf{A}f(x,s) - \alpha(x,s)f(x,s) + \gamma(x,s) = 0.$

Τότε:

$$f(x,0) = \mathbb{E}\left[\int_0^t e^{-\int_0^s \alpha(X_u,u)\mathrm{du}}\gamma(X_s,s)\mathrm{ds} + e^{-\int_0^t \alpha(X_u,u)\mathrm{du}} f_{ter}(X_t)|X_0 = x\right].$$

Παράδειγμα 6.2.6. Δεν θα χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 6.2.5 παραπέρα. Αλλά θα δώσουμε ένα παράδειγμα ως εφαρμογή. Έστω μια κλασσική διαδικασία κινδύνου με όρο διάχυσης. Θεωρούμε ότι μία εταιρεία πληρώνει μερίδια με σταθερό επιτόκιο γ αν $R_t \geqslant M$,όπου M ένα φράγμα μεριδίου. Τότε το απόθεμα κινδύνου της εταιρίας θα είναι:

$$R_t = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i + \eta W_t - \gamma \int_0^t \chi_{\{(R_t \geqslant M)\}}\mathrm{dt}.$$

Υποθέτουμε επίσης ότι η συνθήκη καθαρού κέρδους $c - \gamma - \lambda\mu = 0$ παραβιάζεται. Αυτό σημαίνει ότι επέρχεται η χρεοκοπία σ.β. . Συμβολίζουμε με τ τη στιγμή της χρεοκοπίας . Σκοπός είναι η επιλογή του φράγματος M, έτσι ώστε το αναμενόμενο προεξοφλησμένο (discounted) μέρισμα

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \gamma\chi_{(R_i \geqslant M)}e^{-\alpha t}\mathrm{dt}\right] \tag{6.7}$$

να μεγιστοποιηθεί. Η Πρόταση 6.2.5 μας δίνει μια μέθοδο υπολογισμού της (6.7).

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου θα χρησιμοποιήσουμε μοντέλα της μορφής

$$R_t := u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Z_i + \eta W_t,$$

όπου με u συμβολίζουμε το αρχικό αποθεματικό, με c το ασφάλιστρο, με $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια απαριθμήτρια διαδικασία, με $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ορίζουν το μέγεθος των απαιτήσεων, η είναι ένας πραγματικός αριθμός και $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια τυπική κίνηση Brown. Θεωρούμε ότι οι στοχαστικές διαδικασίες N, $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ και $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ανεξάρτητες. Ορίζουμε τον χρόνο χρεοκοπία τ:=$\{\inf(t \geqslant 0 : R_t < 0)\}$ ο οποίος είναι χρόνος διακοπής. Υποθέτουμε τη συνθήκη καθαρού κέρδους $\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}[R_t]/t > 0$ για να αποφύγουμε το $\tau < \infty$ σ.β. Συμβολίζουμε με G την συνάρτηση κατανομής των απαιτήσεων $\{Z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, με μέση τιμη $\mu = \mathbb{E}[Z_i]$ και μετασχηματισμό $Laplace-Stieltjes$ $\widehat{G}(s) := \int_0^\infty e^{-sx}\mathrm{dG(x)}$. Η προσέγγιση έχει νόημα αν υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $\widehat{G}(-r) < \infty$. Αυτό σημαίνει ότι η ουρά της κατανομής του μεγέθους των απαιτήσεων φθίνει εκθετικά. Επομένως οι κατανομές με βαριά ουρά όπως η *Pareto* και η Λογαριθμοκανονική εξαιρούνται. Επίσης αν η $f(x,t)$ είναι θετική και φθίνουσα στο x και η $\{f(R_t,t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι τοπικό martingale, τότε η $\{f(R_t,t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι martingale, αν η $f(R_t - ct, t)$ είναι ολοκληρώσιμη.

6.3 Το κλασσικό μοντέλο με όρο διάχυσης

O Gerber [21] (1970) θεώρησαι το μοντέλο, όπου η N είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο λ. Η συνθήκη καθαρού κέρδους είναι $c > \lambda\mu$. Θεωρώντας τη διαδικασία Markov $\{R_t, t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ οι παράμετροι του μοντέλου γίνονται $\mathbb{E} = \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, $\mathfrak{X} = (\frac{\partial}{\partial t})+c(\frac{\partial}{\partial x})$, $\lambda(x,t) = \lambda = const$, $Q((\mathrm{dy}, s),(x,t)) = \chi_{\{s=t\}}\mathrm{dG(x-y}$ και $\eta_1 = \eta$ $\eta_2 = 0$. Το σύνορο Γ προσβάσιμο από το εσωτερικό είναι το $\emptyset$.

Για $\mathbf{A}f = 0$ από τη σχέση (6.6) προκύπτει ότι

$$\frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) + c\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) + \lambda\int_0^\infty (f(x-y,t) - f(x,t))\mathrm{dG(y)} = 0.$$

Σύμφωνα με τους Embrechts et al [17] δοκιμάζουμε μια συνάρτηση της μορφής $f(x,t) = e^{\theta t}e^{-rx}$ και υποθέτουμε ότι $\widehat{G}(-r) < \infty$. Τότε

$$\theta = \lambda(\widehat{G}(-r) - 1) - rc + \frac{\eta^2}{2}r^2. \tag{6.8}$$

Η $\theta(r)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση με $\theta'(0) = -c + \lambda\mu < 0$. Οι συνθήκες (6.3)-(6.5) είναι εύκολο να αποδειχθούν. Ισχύει ότι $0 < f(R_t,t) \leqslant f(R_t - ct, t)$, οπου η τελευταία συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη γιατί $\widehat{G}(-r) < \infty$. Έτσι παίρνουμε το παρακάτω

Λήμμα 6.3.1. *Έστω $r \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\widehat{G}(-r) < \infty$.Τότε η διαδικασία*

$$(e^{(-\lambda(\widehat{G}(-r)-1)+rc-(\eta^2/2)r^2)t}e^{rR_t})_{t\in\mathbb{R}_+}$$

είναι martingale.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα των *martingales* για χρόνους διακοπής τ 1(βλ. π.χ. Παράρτημα X) παίρνουμε ότι

$$e^{-ru} = \mathbb{E}[e^{rR_t}] = \mathbb{E}[e^{-\theta(\tau\wedge t)}e^{-rR_{\tau\wedge t}}] \geqslant \mathbb{E}[e^{-\theta\tau}e^{-rR_\tau}|\tau \leqslant t]P[\tau \leqslant t]$$
$$\geqslant \mathbb{E}[e^{-\theta\tau}|\tau \leqslant t]P[\tau \leqslant t] \geqslant e^{-(\theta\vee 0)t}P[\tau \leqslant t],$$

Έτσι

$$P[\tau \leqslant t] \leqslant e^{-(\theta\vee 0)t}e^{-ru}.$$

Αν $\theta(r) \leqslant 0$ προκύπτει, αν το t τείνει στο άπειρο, μια εκθετική ανισότητα για την πιθανότητα χρεοκοπίας. Θέτοντας $R := \sup\{r \geqslant 0 : \theta(r) \leqslant 0\}$ παίρνουμε την ανισότητα *Lundberg*

$$P[\tau < \infty|R_0 = u] \leqslant e^{-Ru}.$$

Άν η εξίσωση έχει μια θετική ρίζα, τότε έχουμε το αποτέλεσμα των [15] (1991). Παρατηρούμε ότι εξαιτίας της κυρτότητας της $\theta(r)$ υπάρχει ακριβώς μια θετική ρίζα αν $\theta(r) \geqslant 0$ για κάποιο $r > 0$.

6.4 Το ανανεωτικό μοντέλο

Η ευκολότερη τροποποίηση του κλασσικού μοντέλου κινδύνου είναι να υποθέσουμε ότι η N είναι μια αυθαίρετη ανανεωτική διαδικασία.Οι τυχαίες μεταβλητές $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, ...$ είναι ανεξάρτητες και $T_2 - T_1, T_3 - T_2, ...$ έχουν την ίδια συνάρτηση κατανομής F. Συμβολίζουμε τη συνάρτηση κατανομής της T_1 με F^1. Για λόγους απλοποίησης των συμβολισμών έστω T μια τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F. Η N καλείται συνήθης ανανεωτική διαδικασία αν $F^1 = F$ και στάσιμη ανανεωτική διαδικασία αν ο μέσος $\lambda^{-1} = \int_0^\infty (1 - F(u))du$ των ενδιάμεσων χρόνων είναι πεπερασμένος και $F^1(u) = \lambda \int_0^u (1 - F(w))dw$. Στην τελευταία περίπτωση η (N_t) έχει στάσιμες προσαυξήσεις. Σημειώνεται ότι από τη συνθήκη καθαρού κέρδους προκύπτει ότι $c > \lambda\mu$, όπου θέτουμε το λ με 0 αν $\int_0^\infty (1 - F(u))du = \infty$. Προφανώς η διαδικασία κινδύνου $\{R_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ δεν είναι πια μαρκοβιανή. Παρόλα αύτα υπάρχουν δύο τρόποι που μπορεί να μετασχηματιστεί σε διαδικασία Markov.

(a) Μετασχηματισμός σε διαδικασία Markov μέσω του χρόνου από την τελευταία απαίτηση
Ο φυσικός τρόπος για την μετατροπή της διαδικασίας σε μαρκοβιανή είναι να θεωρήσουμε το $\{\mathfrak{F}_t^R\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-προσαρμοσμένο χρόνο W_t που παρήλθει μετά από την τελευταία απαίτηση. Τότε η διαδικασία $\{(R_t, W_t, t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μετατρέπεται σε μαρκοβιανή με την απαραίτητη προυπόθεση ότι η F είναι απόλυτα συνεχής. Οι παράμετροι του μοντέλου είναι $E = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$,$\mathfrak{X} = (\frac{\partial}{\partial x}) + c(\frac{\partial}{\partial x}) + (\frac{\partial}{\partial w}), \lambda(x, w, t) = (1 - F(w))^{-1}F'(w), Q((dy, 0, t), (x, w, t)) = dG(x - y)$ και $\eta_1 = \eta, \eta_2 = \eta_3 = 0$. Οπως και στο κλασσικό μοντέλο $\Gamma = \emptyset$. Για αυτό το μοντέλο παίρνουμε το παρακάτω martingale.

Λήμμα 6.4.1. Έστω $r \in \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε $\widehat{G}(-r) < \infty$ και έστω ότι η κατανομή F των ενδιάμεσων χρόνων είναι απόλυτα συνεχής. Τότε η διαδικασία

$$\{h(W_t)e^{-\theta(r)t}e^{-rR_t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$$

είναι martingale όπου

$$h(w) = \widehat{G}(-r)\frac{e^{(\theta(r)+cr-\eta^2r^2/2)}}{w}1 - F(w)\int_w^\infty F'(s)e^{-(\theta(r)+cr-\eta^2r^2/2)s}ds \tag{6.9}$$

και $\theta(r)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\widehat{G}(-r)\widehat{F}(\theta(r) + cr - \eta^2r^2/2) = 1. \tag{6.10}$$

Απόδειξη. Για μια συνάρτηση f που ικανοποιεί τις συνθήκες της Πρότασης 6.2.3 η εξίσωση $\mathfrak{U}f = 0$ μας δίνει:

$$\frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, w, t) + c\frac{\partial f}{\partial x}(x, w, t) + \frac{\partial f}{\partial w}(x, w, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x, w, t)$$

$$+\frac{F'(w)}{1-F(w)}\int_0^\infty (f(x-y,0,t)-f(x,w,t))dG(y)=0.$$

Όπως και στην εργασία των [17] (1993) δοκιμάζουμε μια συνάρτηση της μορφής

$$f(x,w,t)=h(w)e^{-\theta t}e^{-rx}$$

όπου μπορούμε να υποθέτουμε ότι $h(0)=1$. Αυτό οδηγεί σε μια μη ομογενή γραμμική διαφορική εξίσωση για την h η οποία έχει τη λύση (6.9). Παρατηρούμε ότι στη γενική λύση εμφανίζεται μια αυθαίρετη σταθερά, που πρέπει να απαλειφθεί για να ισχύει η συνθήκη (6.5). Από τη συνθήκη $h(0)=1$ προκύπτει η (6.10). Επειδή $\widehat{G}(-r)\geqslant 1$ και $\widehat{F}(s)$ είναι μια συνεχής γνησίως φθίνουσα συνάρτηση με $\widehat{F}(0)=1$ και $\widehat{F}(\infty)=0$, προκύπτει ότι η $\theta(r)$ είναι καλώς ορισμένη.Οι συνθήκες (6.3)-(6.5) και η ολοκληρωσιμότητα της $f(R_t-ct,W_t,t)$ μπορεί να επαληθευτούν όπως στο κλασσικό μοντέλο. Σημειώνεται ότι $h(w)\leqslant\widehat{G}(-r)$.
Έτσι $\{f(R_t,W_t,t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι maringale. □

Για να βρούμε μια εκθετική ανισότητα για την πιθανότητα χρεοκοπίας αρκεί να δείξουμε ότι $E[h(W_\tau)|\tau\leqslant t]$ είναι φραγμένη μακριά από το 0. Στους [17] (1993) αυτό δεν αποτελούσε πρόβλημα, διότι $W_\tau=0$, αν η χρεοκοπία επέρχεται από μία απαίτηση. Στην περίπτωσή μας η χρεοκοπία που προκαλείται απο διάχυση είναι επίσης πιθανή. Θα ξαναγυρίσουμε στο πρόβλημα στην επόμενη υπόενοτητα.

(b) Μετατροπή σε διδικασία Markov μέσω του χρόνου μέχρι την επόμενη απαίτηση

Έστω V_t ο υπολειπόμενος χρόνος μέχρι την επόμενη απαίτηση. Τότε η διαδικασία $\{(R_t,V_t,t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ θα γίνει μια διαδικασία Markov. Σημειώνουμε ότι τώρα θα πρέπει να εργαστούμε με τη διύλιση $\{\mathfrak{F}_t^R\vee\mathfrak{F}_t^V\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Στην πράξη ο χρόνος V_t δεν είναι παρατηρήσιμος. Επίσης δεν χρειάζεται να υποθέσουμε ότι η F είναι απόλυτα συνεχής,γεγόνος που απλοποιεί τους υπολογισμούς. Στη περίπτωση αυτή η τάση του άλματος είναι $\lambda(x,u,t)=0$ επειδή τα άλματα είναι πιθανά μόνο αν $V_t=0$. Άλλα αντί αυτού παίρνουμε ένα μη κενό σύνορο $\Gamma=\{(x,0,t):(x,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\}$. Για τις άλλες παραμέτρους της διαδικασίας παίρνουμε $E=\mathbb{R}\times\mathbb{R}^+\backslash\{0\}\times\mathbb{R}^+,\mathfrak{X}=(\frac{\partial}{\partial t})+c(\frac{\partial}{\partial x})-(\frac{\partial}{\partial u}),,Q((dy,du,t),(x,0,t))=dG(x-y)dF(u)$ και $\eta_1=\eta,\eta_2=\eta_3=0$.

Η μέθοδος μας οδηγεί στο παρακάτω martingale:

Λήμμα 6.4.2. Έστω $r\geqslant 0$ τέτοιο ώστε $\widehat{G}(-r)<\infty$. Τότε η διαδικασία

$$\{e^{-(\theta+cr-\eta^2r^2/2)V_t}e^{-\theta t}e^{-rR_t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$$

είναι maringale όπου το θ είναι ορισμένο από την (6.10). Επιπροσθέτως η $\theta(r)$ είναι κυρτή στο διάστημα του $(0,\sup\{s\geqslant 0:\widehat{G}(-s)<\infty\})$ και $\theta'(0)=-c+\lambda\mu<0$ κάτω από τη αναφερθείσα συνθήκη καθαρού κέρδους.

Απόδειξη. Αρκεί να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{\eta^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,u,t) + c\frac{\partial f}{\partial x}(x,u,t) - \frac{\partial f}{\partial u}(x,u,t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x,u,t) = 0$$

μαζί με τη συνοριkή συνθήκη

$$f(x,0,t) = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x-y,u,t)dF(u)dG(y).$$

Όπως και πριν δοκιμάζουμε μια συνάρτηση της μορφής:

$$f(x,u,t) = h(u)e^{-\theta t}e^{-rx},$$

όπου μπορούμε να υποθέσουμε ότι $h(0) = 1$.Η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$h(u) = e^{-(\theta + cr - \eta^2 r^2/2)u}$$

και η συνοριακή συνθήκη μας δίνει την (6.10). Έχουμε ήδη δείξει ότι η θ είναι καλώς ορισμένη. Με έναν εύκολο υπολογισμό προκύπτει ότι οι συνθήκες (6.3)-(6.5) πληρούνται και ότι η $(f(R_t - ct, V_t, t)$ είναι ολοκληρώσιμη. Σημειώνεται ότι $h(u) \leqslant 1$.Έτσι η $\{f(R_t, V_t, t)\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια martingale. Η κυρτότητα και ο υπολογισμός της $\theta'(0)$ προκύπτουν όπως στον (1991) [22] p.148.
□ Προχωρώντας όπως στο κλασσικό μοντέλο οδηγούμαστε και πάλι στο τεχνικό πρόβλημα απόδειξης ότι η $[h(V_t|\tau \leqslant t]$ είναι φραγμένη μακριά απο το 0. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε μια συμπληρωματική συνθήκη για την F.

Θεώρημα 6.4.3. Θεωρούμε το ανανεωτικό μοντέλο με όρο διάχυσης. Υποθέτουμε ότι $B_{rc} := \sup\{\mathbb{E}[T - x|T > x] : x \geqslant 0\} < \infty$. Θέτουμε $R := \sup\{r \geqslant 0 : \widehat{G}(-r)\widehat{F}(cr - \eta^2 r^2/2 \leqslant 1\}$. Τότε

$$P[\tau < \infty | R_0 = u] \leqslant C(R)e^{-Ru},$$

όπου η $C(R)$ είναι μια πεπερασμένη σταθερά που ορίζεται από την (6.11) παρακάτω.

Παρατήρηση 6.4.4. *Αν υπάρχει $r > 0$ και $\theta(r) \geqslant 0$ τότε το R είναι μοναδική θετική ρίζα της εξίσωσης $\widehat{G}(-R)\widehat{F}(cR - \eta^2 R^2/2) = 1$.*

Απόδειξη. Όπως και στο κλασσικό μοντέλο ισχυεί ότι

$$P[\tau \leqslant t|V_0] \leqslant \frac{h(V_0)}{\mathbb{E}[h(V_\tau)|\tau \leqslant t, V_0]}e^{(\theta\vee 0)t}e^{-ru} = \frac{h(V_0)}{\mathbb{E}[h(V_\tau)|\tau \leqslant t, V_0]}e^{-ru}$$

αν $\theta \leqslant 0$.Έστω τ^* ο χρόνος της τελευταίας απαίτησης πριν τη χρεοκοπία. Θέτουμε $\tau^* = 0$ επάνω στο $\{N_\tau = 0\}$.Τότε $\mathbb{E}[h(V_\tau|\tau^* = \tau, \tau \leqslant t, V_0] = \widehat{G}(-r)^{-1}$ και $\mathbb{E}[h(V_\tau|\tau^* = 0, \tau \leqslant$

$t, V_0] > h(V_0)$ επειδή $\theta + cr - \eta^2 r^2/2 \geqslant 0$. Επιπλέον από την ανισότητα του Jensen προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[h(V_\tau)|0 < \tau^* < \tau, \tau \leqslant t, V_0] \\
&= \mathbb{E}[e^{-(\theta+cr-\eta^2r^2/2)(V_{\tau *}-(\tau-\tau^*))}|0 < \tau^* < \tau, \tau \leqslant t, V_0] \\
&\geqslant e^{-(\theta+cr-\eta^2r^2/2)\mathbb{E}[V_{\tau *}-(\tau-\tau^*)|0<\tau^*<\tau,\tau\leqslant t,V_0]} \geqslant e^{-(\theta+cr-\eta^2r^2/2)B_{rc}}
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει με δέσμευση επάνω στα τ και τ^*. Σημειώνεται ότι $e^{-(\theta+cr-\eta^2r^2/2)B_{rc}} \geqslant \widehat{F}(\theta + cr - \eta^2 r^2/2)^{-1} = \widehat{G}(-r)$. Θέτοντας

$$C(r) := \mathbb{E}[\max\{h(V_0 e^{(\theta+cr-\eta^2r^2/2)B_{rc}}, 1\}] \tag{6.11}$$

και αφήνοντας το t να τείνει στο ∞ παίρνουμε:

$$P[\tau < \infty] \leqslant C(r)e^{-ru}$$

αν $\theta \leqslant 0$. Η $C(r)$ είναι πεπερασμένη επείδη $h(V_0) < 1$.Το συμπέρασμα προκύπτει με την επιλογή ενός r που είναι το μεγαλύτερο δυνατό.

□

Η συνθήκη $B_{rc} < \infty$ δεν είναι πολύ ισχυρή όπως δείχνει το παρακάτω πόρισμα. Μπορεί να ισχύει $C(R) = \infty$, αν $B_{rc} = \infty$.

Πόρισμα 6.4.5. Έστω R όπως στο Θεώρημα 6.4.3. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$

$$\lim_{u\to\infty} P[\tau < \infty | R_0 = u] e^{(R-\varepsilon)u} = 0$$

Απόδειξη. Για $n \in \mathbb{N}$ έστω $F^{(n)}(u)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της $T \wedge n$. Έστω (n) ένας δείκτης για τις τ.μ. της διαδικασίας με την F να αντικαθιστάται από την $F^{(n)}$. Τότε $P[\tau < \infty] \leqslant P[\tau^{(n)} < \infty]$ επειδή οι ενδιάμεσοι χρόνοι της $R_t^{(n)}$ είναι μικρότερο από εκείνο της (R_t).Επιλέγουμε $R - \varepsilon < r < R$. Είναι προφανές ότι $\theta^{(n)}(r) \downarrow \theta(r)$ όταν $n \to \infty$.Έτσι για n αρκετά μεγάλο $\theta^{(n)}(r) \leqslant 0$. Άρα

$$P[\tau < \infty] \leqslant P[\tau^{(n)} < \infty] \leqslant C^n(r)e^{-ru}$$

από το Θεώρημα 6.4.3. □

Παραρτήματα

Α′. Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Β′. Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

C′. Χώροι με νόρμα, γραμμικοί τελεστές και ημιομάδες

D′. Ο κανονικός χώρος πιθανότητας του κύβου Hilbert

Ε′. Διαδικασίες άλματος και Martingales

Παράρτημα A

Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Στο παράρτημα αυτό αναφέρονται βασικές έννοιες της θεωρίας μέτρου που χρειαζόμαστε στην μελέτη των κατανομών Hofmann. Για τις έννοιες που δεν αναφέρονται εδώ, παραπέμπουμε στο [3] Κεφάλαιο 1 και 2.

A.1 Χρήσιμες έννοιες και ορισμοί

Ορισμός A.1.1. *Έστω* (Ω, Σ, P) *και* (Υ, T, Q) *δύο χ.π. και* $\mathcal{G} := \{A \times B : \ A \in \Sigma, \ B \in T\}$.

(a) *Η οικογένεια* $\Sigma \otimes T := \sigma(\mathcal{G})$ *ονομάζεται η* **σ-άλγεβρα γινόμενο** *της* Σ *και* T.

(b) *Για κάθε* $E \subseteq \Omega \times \Upsilon$, *και* $x \in \Omega$ *και* $y \in \Upsilon$ *αυθαίρετα αλλά σταθερά, τα σύνολα*

$$E_x := \{\bar{y} \in \Upsilon : (x, \bar{y}) \in E\}$$

και

$$E^y := \{\bar{x} \in \Omega : (\bar{x}, y) \in E\}$$

ονομάζονται η **x-τομή** *και η* **y-τομή** *(x-section and y-section) του E, αντίστοιχα.*

(c) *Αν η* $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ *είναι οποιαδήποτε συνάρτηση και τα* $x \in \Omega$ *και* $y \in \Upsilon$ *είναι αυθαίρετα αλλά σταθερά, τότε οι συναρτήσεις*

$$f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R} : \bar{y} \longmapsto f_x(\bar{y}) := f(x, \bar{y})$$

και

$$f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R} : \bar{x} \longmapsto f^y(\bar{x}) := f(\bar{x}, y)$$

ονομάζονται η **x-τομή** *της* f *και η* **y-τομή** *της* f, *αντίστοιχα.*

Λήμμα A.1.2. *Έστω* (Ω, Σ) *και* (Υ, T) *μετρήσιμοι χώροι. Τότε ισχύει:*

(i) Για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ και για κάθε $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ έχουμε $E_x \in T$ και $E^y \in \Sigma$.

(ii) Για κάθε $\Sigma \otimes T$- μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ οι συναρτήσεις $f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ και $f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ είναι T- και Σ- μετρήσιμες, αντίστοιχα.

Θεώρημα Α.1.3. *(Fubini για δείκτριες συναρτήσεις) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π., και $E \in \Sigma \otimes T$ αυθαίρετο αλλά σταθερό. Τότε η συνάρτηση $Q(E_\bullet) : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ με $x \longmapsto Q(E_x)$ είναι Σ-μετρήσιμη και η συνάρτηση $P(E^\bullet) : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ με $y \longmapsto P(E^y)$ είναι T-μετρήσιμη και ισχύει*

$$\int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_{Upsilon} P(E^y)Q(dy). \tag{A.1}$$

Θεώρημα Α.1.4. *(Ύπαρξη και μοναδικότητα του μέτρου γινόμενο) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $P \otimes Q : \ \Sigma \otimes T \longmapsto [0, 1]$ ώστε*

$$(P \otimes Q)(A \times B) = P(A)Q(B)$$

για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Το μέτρο $P \otimes Q$ ονομάζεται το **μέτρο γινόμενο** *των P και Q, Επιπλέον, για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ ισχύει*

$$(P \otimes Q)(E) = \int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy).$$

Για τις αποδείξεις των τριών τελευταίων αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [11] Theorem 5.1.3

Θεώρημα Α.1.5. *(Fubini για μη αρνητικές συναρτήσεις) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π.. Για κάθε $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto [0, \infty] \quad \Sigma \otimes T - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη συνάρτηση θέτουμε*

$$\varphi_f : \Omega \longmapsto [0, \infty] \quad \text{με} \quad \varphi_f(x) := \int_\Upsilon f_x(y)Q(dy)$$

και

$$\psi_f : \Upsilon \longmapsto [0, \infty] \quad \text{με} \quad \psi_f(y) := \int_\Omega f^y(x)Q(dx).$$

Τότε η φ_f είναι $\Sigma - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη, η η ψ_f είναι $T - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη και ισχύει

$$\int_{\Omega \times \Upsilon} f dP \otimes Q = \int_\Omega \varphi_f dP = \int_\Upsilon \psi_f dQ$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \Upsilon} f d(P \otimes Q) &= \int_\Omega \int_\Upsilon f(x, y)Q(dy)P(dx) \\ &= \int_\Upsilon \int_\Omega f(x, y)P(dx)Q(dy) \end{aligned}$$

Για την απόδειξη βλ. [11] Proposition 5.2.1.

Θεώρημα A.1.6. *(Fubini) Έστω $(\varOmega, \varSigma, P)$ και $(\varUpsilon, T, Q)$ χ.π. και $f : \varOmega \times \varUpsilon \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ me $f \in \mathcal{L}^1(P \otimes Q)$. Τότε*

(i)

$$f_x \in \mathcal{L}^1(Q), \quad \text{για} \quad P-\sigma.o \quad \text{τα} \quad x \in \varOmega$$

και

$$f^y \in \mathcal{L}^1(P), \quad \text{για} \quad Q-\sigma.o \quad \text{τα} \quad y \in \varUpsilon,$$

(ii) οι συναρτήσεις $\varphi_f : \varOmega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ *με* $\varphi_f(x) := \begin{cases} \int_\varUpsilon f_x(y)Q(dy), & \text{αν} \quad f_x \in \mathcal{L}^1(Q) \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$ *kai* $\psi_f : \varUpsilon \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ *με* $\psi_f(y) := \begin{cases} \int_\varOmega f^y(x)P(dx), & \text{αν} \quad f^y \in \mathcal{L}^1(P) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ *ανήκουν στον* $\mathcal{L}^1(P)$ *και* $\mathcal{L}^1(Q)$, *αντίστοιχα,*

(iii) ισχύει

$$\int_{\varOmega\times\varUpsilon} f d(P\otimes Q) = \int_\varOmega \varphi_f dP = \int_\varUpsilon \psi_f dQ$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_{\varOmega\times\varUpsilon} f d(P\otimes Q) &= \int_\varOmega \int_\varUpsilon f(x,y)Q(dy)P(dx) \\ &= \int_\varUpsilon \int_\varOmega f(x,y)P(dx)Q(dy) \end{aligned}$$

όπου θέτουμε

$$\int_\varUpsilon f(x,y)Q(dy) = 0, \quad \text{αν} \quad f_x \notin \mathcal{L}^1(Q)$$

και

$$\int_\varOmega f(x,y)P(dx) = 0, \quad \text{αν} \quad f^y \notin \mathcal{L}^1(P).$$

Για την απόδειξη βλ. [11] Theorem 5.2.2.

Παράρτημα B

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Στο παράρτημα αυτό δίνονται ορισμένοι βασικοί ορισμοί της Θεωρίας Πιθανοτήτων καθώς και οι κατανομές πιθανότητας που αναφέρθηκαν στην παρούσα εργασία.

B.1 Χρήσιμοι Ορισμοί

Ορισμός B.1.1. Η συνάρτηση $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ που δίνεται από την

$$\Gamma(\gamma) := \int_0^\infty e^{-x} x^{\gamma-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Γάμμα**.

Η συνάρτηση Γάμμα έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(\gamma+1) &= \gamma\Gamma(\gamma) \end{aligned}$$

Επιπλέον για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{B.1}$$

δηλαδή, οι τιμές της Γάμμα για $n \in \mathbb{N}_0$, αντιστοιχούν σε παραγωντικά.

Ορισμός B.1.2. Η συνάρτηση $B : (0, \infty) \times (0, \infty)$ που δίνεται από την

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Βήτα**.

Η θεμελιώδης ταυτότητα για την συνάρτηση Βήτα είναι

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιότητες της συνάρτησης Βήτα εξαρτώνται απο την συνάρτηση Γαμμα.

Ορισμός B.1.3. Για $\alpha \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{N}_0$ ο γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής ορίζεται να είναι

$$\binom{\alpha}{m} := \prod_{j=0}^{m-1} \frac{a-j}{m-j}. \tag{B.2}$$

Ορισμός B.1.4. Για $\alpha \in (0,\infty)$ και $m \in \mathbb{N}_0$, από τις ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα ισχύει

$$\binom{a+m-1}{m} = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!} \tag{B.3}$$

Απόδειξη. Για $\alpha \in (0,\infty)$ και $m \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\binom{a+m-1}{m} &= \prod_{j=0}^{m-1}\frac{a+m-1-j}{m-j} = \frac{a(a+1)(a+2)\ldots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots m}\\ &= \frac{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\ldots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot m!} = \frac{(a+m-1)!}{(a-1)!\cdot m!}\\ &= \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!}.\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του ορισμού του διωνυμικου συντελεστή και η τελευταία απο την ιδιότητα (B.1) της συνάρτησης Γάμμα. □

Ορισμός B.1.5. Έστω (Ω,Σ,P) ένας χ.π. Για μια τ.μ X: $\Omega \to \mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

είναι ένα μέτρο πιθανότητας και ονομάζεται **κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X**. Μάλιστα, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$, τότε η P_X ονομάζεται **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)** (degenerate (probability) distribution).

Η P_X (αντίστοιχα η τ.μ. X) παράγει την **συνάρτηση κατανομής** (σ.κ.) $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ **της τ.μ.** X, που ορίζεται από τον τύπο:

$$F_X(x) := P_X((-\infty,x]) = P(X \leqslant x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Από Πρόταση 1.4.9, [3], αποδεικνύεται πως η F_X είναι πράγματι *σ.κ.* Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως η *σ.κ.* F_X μιας τ.μ. X ικανοποιεί τη σχέση:

$$P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}, B \in \mathfrak{B}.$$

όπου $\lambda_{F_X}(B)$ είναι μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την F_X (βλ. π.χ [3], Πρόταση 1.4.10).

Μια (*σ.κ.*) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται:

- **Διακριτή** αν και μόνο αν είναι της μορφής

$$F(x) = \sum_{k \in K : k \leqslant x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

  για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}_+$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** (*σ.π.*) της F.

- **Συνεχής** αν η F είναι συνεχής συνάρτηση.

- **Απόλυτα Συνεχής** αν είναι της μορφής:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

  για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (*σ.π.π.*).

Προφανώς, αν η τ.μ. X είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας συνεχής τ.μ. θα εννοούμε απόλυτα συνεχής τ.μ. Επίσης θα λέμε ότι η τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$, όπου $m \in \mathbb{N}$ και $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν και μόνο αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X} d\nu(x) = \int_{B \cap R_X} f_X(x) d\nu(x) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

όπου f_X η αντίστοιχη *σ.(π.)π.*, και ν το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}_0$ ή το μέτρο του Lebesgue λ επάνω στο $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. X είναι συνεχής ή διακριτή.
Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το R_X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Ορισμός Β.1.6. Για μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$\mathbb{E}_P[X] := \int X dP = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

ονομάζεται η **μέση τιμή** ή **αναμενόμενη τιμή** ή **μαθηματική ελπίδα** της τ.μ. X. Για λόγους απλοποίησης μπορούμε να γράψουμε $\mathbb{E}[X]$ αντί $\mathbb{E}_P[X]$. Ειδικά αν η τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, και είναι ένας αριθμός.

Ορισμός Β.1.7. Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Ένα $R \subseteq \Omega \times \Upsilon$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο του** $\Omega \times \Upsilon$ αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επιπρόσθετα, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται **σ-άλγεβρα γινόμενο** των Σ και T και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.

Έστω επίσης ο χ.π. $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μέτρο ρ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των** P **και** Q και συμβολίζεται με $P \otimes Q$, αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = P(A)Q(B)$. Η τριάδα $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, P \otimes Q)$ ονομάζεται **χ.π. γινόμενο**.

Ορισμός Β.1.8. *Εάν I είναι ένα οποιοδήποτε μή κενό σύνολο δεικτών, και $\{\Omega_i, \Sigma_i, P_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\varnothing \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον χ.π. γινόμενο $\otimes_{i\in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := (\prod_{i\in J} \Omega_i \otimes_{i\in J} \Sigma_i \otimes_{i\in J} P_i)$. Αν (Ω, Σ, P) είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με P^I την **πιθανότητα γινόμενο** στον Ω^I και με Σ^I το πεδίο ορισμού του P^I.*

Ορισμοί Β.1.9. Τα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \quad (n \in \mathbb{N}_0 : n \geqslant 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν και μόνο αν $P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$ για κάθε $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ομοίως, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}_0 : n \geqslant 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ πραγματικών αριθμών, τα ενδεχόμενα $\{X_k \leqslant \alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ στοιχείων της $\mathfrak{B}$ τα ενδεχόμενα $\{X_k \in B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ.[3] Παρατήρηση 3.2.5, (b)). Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.

Οι σ-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N}_0 : n \geqslant 2)$ της Σ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων σ-υποαλγεβρών της** Σ αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε πεπερασμένες στο πλήθος από αυτές, είναι ανεξάρτητες.

Ορισμός Β.1.10. Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. $X_t : \Omega \longmapsto \Upsilon$:

- Είναι μια ***σ.δ.* ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j \in \mathbb{N}_m)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

- Είναι μια ***σ.δ.* στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j \in \mathbb{N}_m}$, έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j \in \mathbb{N}_m}$.

Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\xi} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **το μέτρο απαρίθμησης** που συγκεντρώνεται στο $\mathbb{N}_0$, και με $\boldsymbol{\lambda} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **το μέτρο Lebesgue**. Τα μέτρα αυτά είναι σ-πεπερασμένα, και τα πιο σημαντικά μέτρα πιθανότητας με πεδίο ορισμού την $\mathfrak{B}$ είναι απόλυτα συνεχή με τα $\boldsymbol{\xi}$ και $\boldsymbol{\lambda}$.
Για $n \in \mathbb{N}_0$, συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\lambda}^n : \mathfrak{B}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ το n-διάστατο μέτρο Lebesgue.

B.2 Γενικές έννοιες στις κατανομές

Ένα μέτρο πιθανότητας $Q : \mathfrak{B}_n \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **κατανομή** (distribution).
Μια κατανομή ονομάζεται **εκφυλισμένη** (degenerate) αν υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Στην συνέχεια του παρόντος παραρτήματος θεωρούμε μόνο κατανομές με πεδίο ορισμού το $\mathfrak{B}$.

Για $y \in \mathbb{R}$, η **κατανομή Dirac** δ_y ορίζεται να είναι η (εκφυλισμένη) κατανομή Q που ικανοποιεί την

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Λόγω του ιδιαίτερου ρόλου της κατανομής Dirac, όλες οι παραμετρικές κλάσεις των κατανομών που μελετούνται παρακάτω ορίζονται ως μη-εκφυλισμένες κατανομές.

Θεωρούμε τις κατανομές $Q, R : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$.

Μέση Τιμή και Ροπές ανώτερης τάξης

Ορισμός B.2.1. Αν

$$\min\left\{\int_{(-\infty,0]} (-x)Q(dx), \int_{\mathbb{R}_+} xQ(dx)\right\} < \infty,$$

τότε **η μέση τιμή** της Q υπάρχει και ορίζεται από την σχέση

$$E[Q] := \int_{\mathbb{R}} xQ(dx).$$

Αν

$$\max\left\{\int_{(-\infty,0]}(-x)Q(dx),\int_{\mathbb{R}_+}xQ(dx)\right\}<\infty,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}}|x|Q(dx)<\infty$$

τότε η μέση τιμή της Q υπάρχει και ονομάζεται **πεπερασμένη μέση τιμή**.

Ορισμός Β.2.2. Αν για κάποιο $n\in\mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}}|x|^nQ(dx)<\infty,$$

τότε λέμε ότι η Q έχει **πεπερασμένη ροπή τάξης n** ή έχει **n−οστή ροπή** που ορίζεται από την σχέση

$$E[Q^n]=\int_{\mathbb{R}}x^nQ(dx).$$

Η κατανομή Q λέμε ότι έχει πεπερασμένες ροπές τάξης k αν η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}}|x|^nQ(dx)<\infty$$

ισχύει για όλα τα $n\in\mathbb{N}_0$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν η Q έχει πεπερασμένη ροπή τάξης n, τότε έχει πεπερασμένη ροπή τάξης k για όλα τα $k\in\{1,\dots,n-1\}$.

Διακύμανση και Συντελεστής μεταβλητότητας

Ορισμός Β.2.3. Αν η Q έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε **η διακύμανση** της Q ορίζεται να είναι

$$Var[Q]:=\int_{\mathbb{R}}(x-E[Q])^2Q(dx).$$

Προφανώς ισχύει

$$Var[Q]=E[Q^2]-E[Q]^2.$$

Ορισμός Β.2.4. Αν για την Q ισχύει ότι $Q[\mathbb{R}_+=1$ και $E[Q]\in(0,\infty)$,τότε **ο συντελεστής μεταβλητότητας** της Q ορίζεται από την σχέση

$$v[Q]:=\frac{\sqrt{Var[Q]}}{E[Q]}.$$

Χαρακτηριστική συνάρτηση

Ορισμός Β.2.5. Η χαρακτηριστική συνάρτηση ή **ο μετασχηματισμός Fourier** της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $\varphi_Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ που δίνεται από την

$$\varphi_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izx} Q(dx)$$

με $\varphi_Q(0) = 1$.

Ένα αποτέλεσμα των μετασχηματισμών Fourier είναι ότι η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την χαρακτηριστική της συνάρτηση φ_Q.

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Β.2.6. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $M_Q : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ που δίνεται από την

$$M_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{zx} Q(dx)$$

με $M_Q(0) = 1$.

Αν η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Q είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή γύρω από το μηδέν, τότε η Q έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\frac{d^n M_Q}{dz^n}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx). \tag{B.4}$$

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Β.2.7. Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$ τότε **η πιθανογεννήτρια συνάρτηση** της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $m_Q : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται από την

$$\begin{aligned} m_Q(z) &:= \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n Q[\{n\}]. \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n m_Q}{dz^n}(0) = Q[\{n\}], \tag{B.5}$$

η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την πιθανογεννήτρια συνάρτησή της m_Q.

Πρόταση Β.2.8. *Έστω ότι $Q[\mathbb{N}_0] = 1$. Τότε οι δύο πρώτες ροπές της κατανομής Q υπολογίζονται άμεσα από την πιθανογεννήτρια συνάρτηση σύμφωνα με τις σχέσεις*

$$E[Q] = \frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} \tag{B.6}$$

$$E[Q^2] = \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} + \frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} \tag{B.7}$$

Συνέλιξη

Ορισμός Β.2.9. Αν η $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια απεικόνιση με $+(x, y) := x + y$, τότε η

$$Q * R := (Q \otimes R)_+$$

είναι μια κατανομή, η οποία ονομάζεται **συνέλιξη** των Q και R. Ομοίως, ορίζεται και η συνέλιξη δύο σ.κ.π. F, G ή δύο σ.(π.)π. f, g.

Οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι άμεσες συνέπειες του Ορισμού B.2.9 και του Θεωρήματος Fubini για μέτρα (βλ. Θεώρημα A.1.4).

Πρόταση Β.2.10. *Η ισότητα*

$$(Q * R)(B) = \int_{\mathbb{R}} Q(B - y)R(dy)$$

ισχύει για κάθε $B \in \mathfrak{B}$*. Ιδιαιτέρως ισχύει*

$$(Q * \delta_y)(B) = (\delta_y * Q)(B) = Q(B - y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$ *και* $b \in \mathfrak{B}$*.*

Πρόταση Β.2.11. *Η συνέλιξη ικανοποιεί τις ισότητες*

$$Q * R = R * Q$$
$$\varphi_{Q*R} = \varphi_Q \cdot \varphi_R$$
$$M_{Q*R} = M_Q \cdot M_R$$

Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1 = R[\mathbb{N}_0]$*, τότε ισχύει*

$$m_{Q*R} = m_Q \cdot m_R.$$

Πρόταση Β.2.12. *Αν οι κατανομές* Q *και* R *έχουν πεπερασμένη μέση τιμή τότε ισχύει*

$$E[Q * R] = E[Q] + E[R]$$

και αν επιπλέον έχουν και πεπερασμένες δεύτερες ροπές τότε

$$Var[Q * R] = Var[Q] + Var[R].$$

Πρόταση Β.2.13. *Αν* $Q = \int f \, d\nu$ *και* $R = \int g \, d\nu$ *για* $\nu \in \{\xi, \lambda\}$*, τότε* $Q * R = \int f * g \, d\nu$*, όπου η απεικόνιση* $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ορίζεται*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\nu(dy).$$

Ορισμός B.2.14. Για $n \in \mathbb{N}_0$, η n-οστή συνέλιξη της Q όριζεται από την σχέση

$$Q^{*n} := \begin{cases} \delta_0, & \text{αν } n = 0 \\ Q * Q^{*(n-1)}, & \text{αν } n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Αν η $Q = \int f \, d\nu$, για $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, τότε η συνάρτηση πιθανότητας της Q^{*n} ως προς το μέτρο ν συμβολίζεται f^{*n}.

B.3 Διακριτές κατανομές

Ορισμός B.3.1. Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **διακριτή**, αν υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $S \in \mathfrak{B}$ που ικανιποιεί την $Q[S] = 1$. Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$, τότε η Q είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο απαρίθμισης $\boldsymbol{\xi}$.

Η διωνυμική κατανομή

Ορισμός B.3.2. Για $m \in \mathbb{N}_0$ και $\theta \in (0,1)$, η **διωνυμική κατανομή** $\mathbf{B}(m,\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \{0, 1, \ldots, m\}$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \binom{m}{x} \theta^x (1-\theta)^{m-x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = m\theta$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = m\theta(1-\theta)$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \big((1-\theta) + \theta e^{iz}\big)^m$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = ((1-\theta) + \theta e^z)^m$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = ((1-\theta) + \theta z)^m$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Bernoulli** με $\mathbf{B}(\theta) := \mathbf{B}(1,\theta)$

Η αρνητική διωνυμική κατανομή

Ορισμός B.3.3. Για $\alpha \in (0, \infty)$ και $\theta \in (0, 1)$, **η αρνητική διωνυμική κατανομή** $\mathbf{NB}(\alpha, \theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \binom{\alpha + x - 1}{x} \theta^\alpha (1 - \theta)^x.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \alpha \frac{1 - \theta}{\theta}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \alpha \frac{1 - \theta}{\theta^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1 - (1 - \theta) e^{iz}} \right)^\alpha$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1 - (1 - \theta) e^{z}} \right)^\alpha \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(1 - \theta))$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1 - (1 - \theta) z} \right)^\alpha$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Pascal** με $\mathbf{NB}(m, \theta)$ για $m \in \mathbb{N}_0$.

Η κατανομή Poisson

Ορισμός B.3.4. Για $\alpha \in (0, \infty)$, **η κατανομή Poisson** $\mathbf{P}(\alpha)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = e^{-\alpha} \frac{\alpha^x}{x!}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \alpha$$

- Διακύμανση:

$$Var[Q] = \alpha$$

- Χαρακτηριστική συνάρτηση:

$$\varphi_Q(z) = e^{\alpha(e^{iz}-1)}$$

- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_Q(z) = e^{\alpha(e^{z}-1)}$$

- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:

$$m_Q(z) = e^{\alpha(z-1)}$$

Η κατανομή Delaporte

Ορισμός B.3.5. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ και $\theta \in (0,1)$, **η κατανομή Delaporte** $\mathbf{Del}(\alpha, \beta, \theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \mathbf{P}(\alpha) * \mathbf{NB}(\beta, \theta).$$

Η γεωμετρική κατανομή

Ορισμός B.3.6. Για $m \in \mathbb{N}_0$ και $\theta \in (0,1)$, **η γεωμετρική κατανομή** $\mathbf{Geo}(m, \theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \boldsymbol{\delta}_m * \mathbf{NB}(m, \theta).$$

Ειδική περίπτωση: **Η μονο-παραμετρική γεωμετρική κατανομή** με $\mathbf{Geo}(\theta) := \mathbf{Geo}(1, \theta)$

Η λογαριθμική κατανομή

Ορισμός B.3.7. Για $\theta \in (0,1)$, **η λογαριθμική κατανομή** $\mathbf{Log}(\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta^x}{x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:

$$E[Q] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta}{1-\theta}$$

- Διακύμανση:

$$Var[Q] = \frac{|\ln(1-\theta)| - \theta}{|\ln(1-\theta)|^2}\frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$

- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{iz})}{\ln(1-\theta)}$$

- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{z})}{\ln(1-\theta)}, \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(\theta))$$

- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta z)}{\ln(1-\theta)}$$

B.4 Συνεχείς κατανομές

Ορισμός B.4.1. Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **συνεχής**, αν είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue $\boldsymbol{\lambda}$.

Η κατανομή Βήτα

Ορισμός B.4.2. *Για* $\alpha, \beta \in (0,\infty)$, **η κατανομή Βήτα** $\mathbf{Be}(\alpha,\beta)$ *ορίζεται να είναι η κατανομή*
$$Q := \int \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\chi_{(0,1)}(x)\boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Ειδική περίπτωση: **Η ομοιόμορφη κατανομή** $\mathbf{U}(0,1) := \mathbf{Be}(1,1)$.

Η κατανομή Γάμμα (Δύο παραμέτρων)

Ορισμός B.4.3. Για $\alpha, \beta \in (0,\infty)$, **η κατανομή Γάμμα** $\mathbf{Ga}(\alpha,\beta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή
$$Q := \int \frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x} x^{\beta-1}\chi_{(0,\infty)}(x)\boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \frac{\beta}{\alpha}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\beta}{\alpha^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - iz}\right)^{\beta}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - z}\right)^{\beta} \quad \forall z \in (-\infty, \alpha)$$

Ειδικές περιπτώσεις:

- **Η κατανομή Erlang Ga**(α, m), με $m \in \mathbb{N}_0$.
- **Η εκθετική κατανομή Exp**$(\alpha) := \mathbf{Ga}(\alpha, 1)$.
- **Η $\boldsymbol{\chi}^2$ κατανομή** $\boldsymbol{\chi}_m^2 := \mathbf{Ga}(\frac{1}{2}, \frac{m}{2})$, με $m \in \mathbb{N}_0$.

Η κατανομή Γάμμα (Τριών παραμέτρων)

Ορισμός B.4.4. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ και $\gamma \in \mathbb{R}$, **η κατανομή Γάμμα Ga**(α, β, γ) ορίζεται να είναι η κατανομή
$$Q := \boldsymbol{\delta}_\gamma * \mathbf{Ga}(\alpha, \beta).$$

Ειδική περίπτωση: Η κατανομή Γάμμα με δυο παραμέτρους $\mathbf{Ga}(\alpha, \beta) = \mathbf{Ga}(\alpha, \beta, 0)$.

Η κατανομή Pareto

Ορισμός B.4.5. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, **η κατανομή Pareto Par**(α, β) ορίζεται να είναι η κατανομή
$$Q := \int \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha + x}\right)^{\beta+1} \chi_{0,\infty}(x) \boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Παράρτημα C

Χώροι με νόρμα, γραμμικοί τελεστές και ημιομάδες

Ορισμός C.0.1. Έστω E ένας πραγματικός γραμμικός χώρος. Μία συνάρτηση $\| \quad \|$: $E \longmapsto \mathbb{R}_+$ ονομάζεται **νόρμα** , αν ικανοποιεί τις παρακάτω συνθήκες:

(n1) $\| X \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,

(n2) $\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall x \in E \quad \| ax \| = |a| \, \| x \|$,

(n3) $\forall x, y \in E \quad \| x + y \| \leqslant \| x \| + \| y \|$.

Ορισμός C.0.2. Έστω E_1 και E_2 πραγματικοί γραμμικοί χώροι με νόρμες $\| \; quad \; \|_1$ kai $\| \; quad \; \|_2$, αντίστοιχα. Η απεικόνιση $A : E_1 \longmapsto E_2$ ονομάζεται

(a) ένας **γραμμικός τελεστής** , αν $\forall x, y \in E, \quad \forall a, \beta \in \mathbb{R} \quad aA(x) + \beta A(y)$,

(b) ένας **συνεχής τελεστής**, αν για κάθε ακολουθία $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ στοιχείων του E, και $x \in E$, ώστε $\lim_{n \to \infty} \| x_n - x \|_1 = 0$, ισχύει $\lim_{n \to \infty} \| (x_n) - (x) \|_2 = 0$.

(c) ένας **φραγμένος τελεστής**, αν υπάρχει $c > 0$ ώστε για κάθε $x \in E_1$ να ισχύει $\| (x) \|_2 \leqslant c \| x \|_1$.

Λήμμα C.0.3. *Έστω E_1 και E_2 πραγματικοί γραμμικοί χώροι με νόρμες $\| \; quad \; \|_1$ kai $\| \; quad \; \|_2$, αντίστοιχα. Τότε*

(i) *ένας γραμμικός τελεστής* $A : E_1 \longmapsto E_2$ *είναι φραγμένος, αν και μόνο αν είναι συνεχής.*

(ii) *Αν*

$$\| A \| := \inf\{c > 0 : \forall x \in E_1 \quad \| A(x) \|_2 \leqslant c \| x \|\},$$

τότε

$$\begin{aligned} \| A \| &= \sup\{\frac{\| A(x) \|_2}{\| x \|_1} : x \in E_1, x \neq 0\} \\ &= \sup\{\| A(x) \|_2 : x \in E_1, \| x \|_1 \leqslant 1\} \\ &= \sup\{\| A(x) \|_2 : x \in E_1, \| x \|_1 = 1\}, \end{aligned}$$

και $\| A \| < \infty$ *αν και μόνο αν ο* A *είναι φραγμένος.*

(iii) $\| A(x) \|_2 \leqslant \| A(x) \| \cdot \| x \|_1$ *για κάθε* $x \in E_1$

Ο αριθμός $\| A \|$ ονομάζεται **νόρμα του γραμμικού τελεστή A.**

Ορισμός C.0.4. Μία οικογένεια $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ γραμμικών φραγμένων τελεστών $T_t : E \longmapsto E$, όπου ο E είναι ένας πραγματικός γραμμικός χώρος με νόρμα, ονομάζεται μία **ημιομάδα**, αν $T_0 = \mathfrak{I}$ (ταυτοτικός τελεστής) και για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$

$$T_{t+s} = T_t T_s (= T_s T_t). \tag{C.1}$$

Η $\{T_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **ημιομάδα συστολών** αν επί πλέον ισχύει

$$\| T_t(g) \leqslant \| g \|$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $g \in \mathcal{M}_b(E)$.

Παράρτημα D

Ο κανονικός χώρος πιθανότητας του κύβου Hilbert

Το απλούστερο παράδειγμα ενός υπεραριθμήσιμου πλήρους χ.π. είναι η τριάδα $(\Psi, \mathfrak{L}, \lambda)$, όπου $\Psi := [0,1]$, η σ-άλγεβρα του Lebesque στο $\mathcal{I}$ και λ το μέτρο του Lebesque περιορισμένο στην $\mathfrak{L}$. Η τ.μ. $U : \mathcal{I} \longmapsto \mathbb{R}$ με $U(x) = x$ έχει τότε την ομοιόμορφη κατανομή επάνω στο $\mathcal{I}$, δηλ.$\lambda_U = \mathbf{U}(0,1)$. Γενικότερα ο **κύβος του Hilbert** $\Omega = \prod_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_i$, όπου $\mathcal{I}_i := \mathcal{I}$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$, με την σ-άλγεβρα $\Sigma : \mathfrak{L}_{\mathbb{N}}$ και $P = \lambda_{\mathbb{N}}$ μας δίνει την τριάδα (Ω, Σ, P), που θεωρείται ο κανονικός χώρος για μία ακολουθία $\{U_m\}_{n\in\mathbb{N}}$ ανεξάρτητων τ.μ. που η καθεμία τους έχει την $\mathbf{U}(0,1)$ κατανομή και ορίζεται από τη σχέση $U_n(\omega) := \omega_n$ για $\omega = (\omega_1, \omega_2)...)$ και $n \in \mathbb{N}$. Τυχαίες μεταβλητές με άλλες κατανομές κατασκευάζονται τότε με διάφορους γνωστούς μετασχηματισμούς (βλ. π.χ. βιβλιογραφία (1986)).

Για κατανομές επάνω στον $\mathbb{R}$ ο γενικός μετασχηματισμός είναι όπως παρακάτω:

Πρόταση D.0.1. *Έστω $\mathcal{F}$ μία συνάρτηση κατανομής πιθανότητας επάνω στον $\mathbb{R}$ (βλ. [3] για τον ορισμό). Έστω β η αντίστροφη συνάρτηση με τύπο*

$$\beta(u) := \inf\{t \in \mathcal{I} : F(t) \geqslant u\}. \tag{D.1}$$

Έστω $U : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ μία τ.μ. με $P_U = \boldsymbol{U}(0,1)$ και $X = \beta \circ U$. Τότε $P(X \leqslant t) = F(t)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, δηλαδή η F είναι η σ.κ. της X.

Απόδειξη.

Αρκεί να παρατηρήσουμε μόνο, ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$X \leqslant t \Longleftrightarrow U \leqslant F(t) \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\lambda}(U \leqslant F(t)) = F(t)$$

αφού $P_U = \mathbf{U}(0,1)$. □

Έστω $\psi : \Omega \longmapsto \Upsilon$ μία Σ-H-μετρήσιμη απεικόνιση. Τότε όπως είναι γνωστό (βλ. π.χ. [3])πάντα ορίζεται το μέτρο εικόνα $P \circ \Psi^{-1} : H \longmapsto [0,1]$. Αυτό το γεγονός μαζί με την Πρόταση D.0.1 οδηγούν στο παρακάτω.

Ερώτημα D.0.2. *Ποια είναι η πιο γενική κλάση μετρήσιμων χώρων (Ψ, H), ώστε αν η $\mathfrak{v}$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην H να υπάρχει μία μετρήσιμη συνάρτηση $\psi : \mathcal{I} \longmapsto \Upsilon$ με την ιδιότητα $\lambda \circ \psi^{-1} = v$.*

Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα δεν είναι απλή (βλ. π.χ. βιβλιογραφία (1978), για περισσότερες πληροφορίες), αφού επί πλέον σχετίζεται με το γνωστό δύσκολο πρόβλημα της ύπαρξης μετρήσιμων επιλογών μίας πλειότιμης απεικόνισης (βιβλιογραφία).

Όμως ως μια ειδική περίπτωση έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα, που είναι επαρκές για τους σκοπούς μας εδώ.

Πρόταση D.0.3. *Έστω E ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Τότε υπάρχει μία Borel μετρήσιμη συνάρτηση $\varphi : E \longmapsto [0,1]$, ώστε η φ να είναι 1-1, το $\varphi(E)$ να είναι ένα Borel υποσύνολο του [0,1], και η $\varphi^{-1} : \varphi(E) \longmapsto E$, να είναι Borel μετρήσιμη.*

Απόδειξη. Υπάρχει μία 1-1 Borel μετρήσιμη συνάρτηση $\varphi : E \longmapsto [0,1]$ (βλ. βιβλιογραφία). Το σύνολο $\varphi(E)$ είναι Borel υποσύνολο του [0,1] (βλ. π.χ. [11] Theorem 8.3.7) και η $\varphi^{-1} : \varphi(E) \longmapsto E$ είναι Borel μετρήσιμη σύμφωνα με το Lemma 8.3.8 του [11]. □

Πρόταση D.0.4. *Ένα $\mathfrak{v} : \mathfrak{B}(E) \longmapsto [0,1]$ ένα μέτρο πιθανότητας επάνω σε ένα Borel υποσύνολο E του $\mathbb{R}^d$. Τότε υπάρχει μία μετρήσιμη συνάρτηση $\psi : [0,1] \longmapsto$ ώστε $\lambda \circ \psi^{-1} = v$.*

Απόδειξη. Έστω φ η συνάρτηση της Πρότασης D.0.3 και $F(t) := \nu(\varphi^{-1}([0,t]))$ για κάθε $t \in \mathcal{I}$. Ορίζουμε την $\beta : \mathcal{I} \longmapsto \mathbb{R}$ μέσω της σχέσης D.1.

Επίσης ορίζουμε τη συνάρτηση $g : \mathcal{I} \longmapsto E$ μέσω του τύπου

$$g(t) := \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & \text{αν} \quad t \in \varphi(E) \\ y_0, & \text{αν} \quad t \notin \varphi(E) \end{cases}$$

όπου y_0 είναι οποιοδήποτε σημείο του E. Τότε $\mathcal{C} \circ \psi^{-1} = v$, όπου $\psi = g \circ \beta$. □

Παρατήρηση D.0.5. *Το παραπάνω πόρισμα είναι ένα θεωρητικό παρά πρακτικό αποτέλεσμα. Η συνηθισμένη μέθοδος να κατασκευάσουμε τυχαία διανύσματα με τιμές στον $\mathbb{R}^d$ με καθορισμένες κατανομές είναι με επανελειμένη εφαρμογή του αποτελέσματος της μίας διάστασης, D.1. Για παράδειγμα για ένα διδιάστατο τυχαίο διάνυσμα $= ({}_1, {}_2)$ θα μπορούσε κανένας να κατασκευάσει μία τ.μ. που να έχει την περιθώρια κατανομή της X_1 και μετά μία επιπλέον τ.μ. που να έχει την δεσμευμένη κατανομή της X_2 δοσμένης της X_1. Με αυτή τη μέθοδο χρησιμοποιείται ένα d-διάστατο τυχαίο διάνυσμα , ενώ το Πόρισμα D.0.4 μας δείχνει ότι αυτό μπορεί να γίνει με ένα βήμα.*

Παράρτημα E

Διαδικασίες άλματος και Martingales

Αυτό το παράρτημα δίνει μια περιγραφή της θεωρίας των martingales για διαδικασίες αλμάτων, η οποία χρησιμοποιεί στο Κεφάλαιο 4 για να δείξουμε την ισχυρή ιδιότητα Markov μίας PDP και για να χαρακτηρίσουμε τον πλήρη γεννήτορα.

Η διαδικασία άλματος ορίζεται και μελετάται στην ενότητα D1. Η Ενότητα D2 αφορά στη δομή και τις ιδιότητες των χρόνων διακοπής.

E.1 Ορισμος των διαδικασιών αλμάτων

Ορισμός E.1.1. Μία **διαδικασία άλματος** (jump process) είναι μία δεξιά συνεχής κατά τμήματα σταθερή σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με τιμές στο $X \cup \{\Delta_\infty\}$ όπου X είναι ένας **χώρος Borel** δηλ. ο X είναι ένας τοπολογικός χώρος που είναι ομοιομορφικός με ένα Borel υποσύνολο ενός πλήρους διαχωρίσιμού μετρικού χώρου και Δ_∞ είναι μία μεμονομένη κατάσταση. Υποθέτουμε, ότι η διαδικασία έχει ασυνέχειες σε μία αύξουσα ακολουθία $\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ μεμονωμένων χρόνων και (is killed) σε χρόνο $T_\infty := \lim_{k\to\infty} T_k$. Έτσι μια δειγματοσυνάρτηση (τροχία) της διαδικασίας καθορίζεται από μια σταθερά $z_0 \in X$, μία ακολουθία $\{(W_k, Z_k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ τ.μ. W_k με τιμές στο $\mathbb{R}_+$ και Z_k με τιμές στο E και με τον ορισμό των $T_0 := 0, \quad T_k := T_{k-1} + W_k$ και $X_t = Z_k$ για $t \in [T_k, T_{k+1})$, $X_t = \Delta_\infty$ για $t \geqslant T_\infty$.

Μπορούμε να ορίσουμε τη διαδικασία άλματος επάνω σε έναν κανονικό χώρο ως εξής: Έστω

$$Y := (\mathbb{R} \times X) \cup \{\Delta\}$$

όπου Δ είναι ένα μεμονωμένο σημείο. Ορίζουμε $\Omega_i := \prod_{k=1}^{i} Y_k$, $\Omega := \prod_{k=1}^{\infty} Y_k$, $\mathcal{F}^{i,0} := \sigma(\otimes_{k=1}^{i}\mathfrak{B}(Y_k))$ και $\mathcal{F}^0 := \sigma(\otimes_{k\in\mathbb{N}}\mathfrak{B}(Y_k))$. Έστω $\xi_k : \Omega \longmapsto Y_k$ η απεικόνιση συντεταγμένων και έστω $\xi_k(\omega) \in \mathbb{R}_+ \times X$, αλλιώς $\xi_i(\omega) = \Delta$. Έστω $\omega_k(\omega) = (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_k(\omega))$. Τώρα έστω

$$T_k(\omega) := \begin{cases} \sum_{i=1}^k W_i(\omega) & , \text{αν} \quad \xi_i(\omega) \neq \Delta, \text{για κάθε } i = 1, \ldots, k \\ \infty & , \text{αν} \quad \xi_i(\omega) = \Delta, \text{για κάθε } i = 1, \ldots, k, \end{cases}$$

$$T_\infty(\omega) := \lim_{k \to \infty} T_k(\omega),$$

και ορίζουμε την τροχιά $X_t(\omega)$ για $t \in \mathbb{R}_+$ με τον τύπο

$$X_t(\omega) := \begin{cases} z_0 & \text{αν} \quad t < T_1(\omega) \\ Z_k & \text{αν} \quad T_k(\omega) \leqslant t < T_{k+1}(\omega) \\ \Delta_\infty & \text{αν} t \geqslant T_\infty(\omega). \end{cases}$$

Εδώ το $z_0 \in X$ είναι σταθερό και το Δ_∞ είναι ένα σημείο μεμονωμένο από το X. Η κανονική διύλιση της $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ στο Ω είναι η $\{\mathcal{F}_t^0\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ με

$$\mathcal{F}_t^0 := \sigma(\{X_s(\bullet) : s \leqslant t\}).$$

Ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στο Ω ορίζεται από την ακόλουθη οικογένεια δεσμευμένων συναρτήσεων κατανομών: Το μ^1 είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(Y, \mathfrak{B}(Y))$ ώστε

$$\mu^1((\{0\} \times X) \cup (\mathbb{R}_+ \times \{z_0\})) = 0, \tag{E.1}$$

και για $k = 2, 3, \ldots$ η $\mu^k : \Omega_{k+1} \times \mathfrak{B}(Y) \longmapsto [0,1]$ είναι ένα μέτρο μετάβασης που ικανοποιεί τις συνθήκες:

(tm1) η $\mu^k(\bullet, G)$ είναι μετρήσιμη για κάθε $G \in \mathfrak{B}(Y)$,

(tm2) η $\mu^k(\omega_{k-1}(\omega), \bullet)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας για κάθε $\omega \in \Omega$,

(tm3) $\mu^k(\omega_{k-1}(\omega), (\{0\} \times X)) \cup (\mathbb{R}_+ \times Z_{k-1}(\omega))) = 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$,

(tm4) $\mu^k(\omega_{k-1}(\omega), \{\Delta\}) = 1$ αν $\xi_i(\omega) = \Delta$ για κάποιο $i \leqslant k-1$.

Τότε το P είναι το μοναδικό μέτρο πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\Omega, \mathcal{F}^0)$ με $\mathcal{F}^0 := \sigma(\{\mathcal{F}_t^0\}_{t \in \mathbb{R}_+})$, έτσι ώστε για κάθε $k \in \mathbb{N}$ και για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f επάνω στο Ω_k να ισχύει

$$\int_\Omega f(\xi_1(\omega), \ldots, \xi_k(\omega)) P(d\omega)$$
$$= \int_{Y_1} \cdots \int_{Y_k} f(\xi_1, \ldots, \xi_k) \mu^k(\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, d\xi_k) \quad \mu^{k-1}(\xi_1, \ldots, \xi_{k-2}, d\xi_{k-1}) \ldots \mu^1(d\xi_1).$$

Από την ιδιότητα $(tm3)$, προκύπτει ότι με πιθανότητα ένα ισχύει $T_1 > 0$, $T_k > T_{k-1}$ και $Z_k \neq Z_{k-1}$. Επίσης από την $(tm4)$ προκύπτει ότι $\xi_i = \Delta$ για όλα τα $i \geqslant k : \min\{j : \xi_j(\omega) = \Delta\}$ και ερμηνεύουμε αυτό λέγοντας ότι $T_k(\omega) = \infty$. Τώρα ορίζουμε τις σ-άλγεβρες $\mathcal{F}_t, \mathcal{F}_t^k, \mathcal{F}$ ως προς τις πληρώσεις των $\mathcal{F}_t^0, \mathcal{F}_t^{k,0}, \mathcal{F}^0$ με όλα τα P-μηδενικά σύνολα της $\mathcal{F}^0$, αντίστοιχα. Έστω $\mathbb{F} := \{\mathcal{F}_t\}t \in \mathbb{R}_+$. Αύτή είναι η πλήρωση της κανονικής διύλισης της διαδικασίας άλματος $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Ορισμός Ε.1.2. Ένας **χρόνος διακοπής** της $\mathbb{F}$ είναι μια $\mathcal{F}$-μετρήσιμη συνάρτηση $T : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ έτσι, ώστε $\{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Λήμμα Ε.1.3. *Ισχύουν τα εξής:*

(i) *οι συναρτήσεις T_∞ και T_k $(k \in \mathbb{N})$ είναι $\mathbb{F}$-χρόνο διακοπής ,*

(ii) $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty := \sigma(\{\mathcal{F}_t\}t \in \mathbb{R}_+)$

Για την απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [12] pages 258-259.

Ε.2 Δομή των χρόνων διακοπής και των σ-αλγεβρών διακοπής

Ορισμός Ε.2.1. Μία οποιαδήποτε $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$-χρόνο διακοπής T, η **σ-άλγεβρα διακοπής** (stopped σ-algebra) $\mathcal{F}_T$ ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{T \leqslant t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\}.$$

Χρειαζόμαστε ένα πιο σαφή χαρακτηρισμό της $\mathcal{F}_T$ και αυτός δίνεται από το παρακάτω θεώρημα, το οποίο μας δείχνει επίσης ότι η διύλισης $\mathbb{F}$ είναι δεξιά συνεχής.

Θεώρημα Ε.2.2. *Ισχύουν τα παρακάτω:*

(a) *Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ έχουμε $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$.*

(b) *Για κάθε χρόνο διακοπής T έχουμε*

$$\mathcal{F}_T = \sigma(\{X_{s\wedge T} : s \in \mathbb{R}_+\}).$$

(c) *Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε*

$$\mathcal{F}_{T_k} = \sigma(\{\xi_1, \dots, \xi_k\}) = \mathcal{F}^k \times \prod_{i=k+1}^{\infty} Y_i,$$

δηλ. $A \in \mathcal{F}_{T_k} \iff A = \widetilde{A} \times \prod_{i=k+1}^{\infty} Y_i$ *για κάποιο* $\widetilde{A} \in \mathcal{F}^k$.

Το (a) και (b) του θεωρήματος ισχύουν για κάθε δεξιά σταθερή διαδικασία. Έτσι, έστω $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία σ.δ. με τιμές στο X με δεξιά συνεχείς τροχιές, που ορίζεται σε κάποιο χ.π. $(B, \mathbf{A}, m)$ και έστω $\{\mathfrak{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η κανονική διύλιση της $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ πληρούμενη όπως συνήθως με όλα τα m-μηδενικά σύνολα της $\mathbf{A}$. Η $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι **δεξιά σταθερή**, αν για κάθε $(t, \beta) \in \mathbb{R}_+ \times B$ υπάρχει $\varepsilon(A, \beta) > 0$ ώστε $Y_{t+\delta}(\beta) = Y_t(\beta)$ για κάθε $\delta \in [0, \varepsilon(t, \beta)]$.

Bremand E.2.3. *Έστω $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία δεξιά σταθερή διαδικασία όπως περιγράφηκε παραπάνω. Τότε*

(a) $\mathfrak{N}_t := \mathfrak{N}_t^+ = \bigcap_{\varepsilon>0} \mathfrak{N}_{t+\varepsilon}$ *για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$

(b) $\mathfrak{N}_s = \sigma(\{Y_{s\wedge S} : s \in \mathbb{R}_+\})$ *για κάθε* $\{\mathfrak{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *χρόνου διακοπής* S.

Για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος παραπέμπουμε στον [12] Theorem (A2.2). Τα συμπεράσματα (a) και (b) του Θεωρήματος E.2.3 είναι ειδικές περιπτώσεις των (a) και (b) του θεωρήματος E.2.3. Για την απόδειξη του (c) του θεωρήματος E.2.3 παραπέμπουμε στον [12] Theorem (A2.1).

Χρειαζόμαστε επίσης το παρακάτω αποτέλεσμα που δίνει μία πολύ ακριβής περιγραφή της κλάσης των $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ χρόνων διακοπής.

Θεώρημα E.2.4. *Έστω τ χρόνος διακοπής της κανονικής διύλισης $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ της διαδικασίας άλματος. Τότε υπάρχει μια σταθερά s_1 και συναρτήσεις $s_k := \Omega_{k-1} \longmapsto \mathbb{R}_+$ για $k = 2, 3, \dots$ έτσι ώστε*

$$\tau\chi_{\{\tau \leqslant T_1\}} = (s_1 \wedge T_1)\chi_{\tau \leqslant T_1}$$

και για $k = 2, 3, \dots$

$$\tau\chi_{\{T_{k-1} < \tau \leqslant T_k\}} = ((T_{k-1} + s_k(\xi_{k-1})) \wedge T_k)\chi_{\{T_{k-1} < \tau \leqslant T_k\}}.$$

Για την απόδειξη παραπέμπουμε στον [12] Theorem (A2.3).

Bibliography

[1] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2006), *Martingales στη Θεωρία Κινδύνου με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Ασφαλιστικής και Στατιστικής Επιστήμες ΜΕΣ.

[2] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2013), *Martingale-Ισοδύναμες κατανομές πιθανότητας με εφαρμογές στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου*, Διδακτορική Διατριβή Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[3] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2006), *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[4] Μπότση, Α. (2013), *Μελέτη Στοχαστικών Διαδικασιών με Υποσυνθήκη Στάσιμες και Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Ασφαλιστικής και Στατιστικής Επιστήμες ΜΕΣ.

[5] Παππά (2013), *Μελέτη Στοχαστικών Διαδικασιών με Υποσυνθήκη Στάσιμες και Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Ασφαλιστικής και Στατιστικής Επιστήμες ΜΑΕ.

[6] Παπαδόπουλος, Α, *Προβλήματα Martingales και αλλαγές μέτρου, Διπλωματική Εργασία Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Ασφαλιστικής και Στατιστικής Επιστήμες ΜΑΕ.*

[7] Bauer, H. (1991), *Wahrscheinliohkeits theory Walter De Gruyter, Berlin-New York*

[8] Beekman, J.A. (1974). Two Stochastic Processes. Almqvist & Wiksell, Stockholm.

[9] Bjork, T. and J. Grandell (1988). Exponential inequalities for ruin probabilities in the Cox case. Scandinauian Actuarial Journal, 77-111.

[10] Bowers, N.J., Jr., H.U. Gerber, J.C. Hickman, D.A. Jones and C.J. Nesbitt (1986). Actuarial Mathematics. Society of Actuaries, Itasca, IL.

[11] Cohn, D. L. (2013), *Measure Theory, Second Edition, Birkhäuser*

[12] Davis, M.H.A. (1984). Piecewise-deterministic Markov processes: A general class of non-diffusion stochastic models. Journal of the Royal Statistical Society, Series B 46, 353-388.

[13] Davis, M.H.A. (1993). Markov Models and Optimization. Chapman & Hall, London.

[14] Dassios, A. and P. Embrechts (1989). Martingales and insurance risk. Communications in Statistics - Stochastic Models 5, 181-217.

[15] Dufresne, F. and H.U. Gerber (1991). Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion. Insurance: Mathematics and Economics 10, 51-59.

[16] Dudley, R,M , *Real Analysis and Probability, Cambridge University Press 2004*, p. Theorem 10.2.2

[17] Embrechts, P., Grandell, J. and H. Schmidli (1993). Finite-time Lundberg inequalities in the Cox case. Scandinauian Actuarial Journal, 17-41.

[18] Embrechts, P. and H. Schmidli (1994). Ruin estimation for a general insurance risk model. Advances in Apphed Probability, forthcoming.

[19] Fremlin, D.H (2001), *Measure Theory Val I, Theres Fremlin (Ed)*,Duke Math. J. 5, 661-674.

[20] Furrer, H.J. and Schmidli, H. (1994) *Exponential inequalities for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion*, Insurance: Mathematics and Economics 15, 23-36.

[21] Gerber, H.U. (1970). *An extension of the renewal equation and its application in the collective theory of risk*. Skandinavisk Aktuarietidskrift, 205-210.

[22] Grandell (1991), *Aspects of Risk Theory*, Springer-Verlag

[23] Kushner, H.J. (1977) *Probability Methods for Approximations in Stochastic Control and for Elliptic Equations, Academic Press, New York.*

[24] Mark H.A.Davis *Markov Models and Optimazation*

[25] T Rolski & H. Schmidli, Stochastic Processes for Insurance and Finance

[26] Schmidli, H. (1995) Cramer-Lundberg approximations for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion, Insurance: Mathematics and Economics 16, 135-149

[27] Schmidt, K.D. (1996), *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart.

[28] J.Stoyanov (1987) *Counterexamples ruin propabilities, 20.1, page 206, (John Wiley & Sous,*

[29] Williams, D. (1979). Diffusions, Markov Processes and Martingales, Vol. I. Wiley, New York.

Ευρετήριο Όρων

Ευρετήριο Συμβόλων