ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Η διαδικασία Pólya-Lundberg και γενικεύσεις της

Ρουμπάτη Μαρία

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιούλιος 2018

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Η διαδικασία Pólya-Lundberg και γενικεύσεις της

Ρουμπάτη Μαρία

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιούλιος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ #5 /13.06.2016 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Βασίλειος Σεβρόγλου
- Επίκουρος Καθηγητής Γεώργιος Τζαβελάς

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

The Pólya-Lundberg Process and some extensions

by
Roubati Maria

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece
Jule 2018

Στους γονείς μου, στον αδελφό μου
Αλέξανδρο και στην Βασιλική.
.

Ευχαριστίες

Κατ'αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα Καθηγητή κ.Νικόλαο Μαχαιρά για την αμέριστη συμπαράστασή του και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας καθώς και για την υπομονή του και τον χρόνο του. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ.Βασίλειο Σεβρόγλου και τον Επίκουρο Καθηγητή κ.Γεώργιο Τζαβελά για την τιμή που μου έκαναν να είναι μέλη της επιτροπής και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με την εν λόγω εργασία.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία αρχικά μελετάται η διαδικασία Pólya-Lundberg, η οποία είναι μία ειδική περίπτωση της μεικτής στοχαστικής διαδικασίας Poisson. Αποδεικνύεται, ότι κάθε τ.μ. μίας διαδικασίας Pólya-Lundberg ακολουθεί την αρνητική διωνυμική κατανομή, και ότι κάθε διαδικασία Pólya-Lundberg είναι μία φυσιολογική διαδικασία Markov.

Στη συνέχεια μελετάται η διαδικασία Delaporte ως μια γενίκευση της διαδικασίας Pólya-Lundberg, της όποιας η κατανομή αποδεικνύεται, ότι έιναι η συνέλιξη μίας κατανομής Poisson και μίας αρνητικής διωνυμικής. Μία άλλη γενίκευση της διαδικασίας Pólya-Lundberg είναι η διαδικασία της οποίας κάθε τ.μ. ακολουθεί την γενικευμένη αρνητική διωνυμική. Αυτή προέκυψε από την γενικευμένη γάμμα κατανομή όταν αυτή είναι μία κατανομή μείξης για την δομική παράμετρο της Poisson, όπως αποδείχθηκε από τον Gerber.

Τέλος κάποια αποτελέσματα του Ruohonen που σχετίζονται στην εκτίμηση των παραμέτρων μίας διαδικασίας Delaporte και στην προσαρμογή της σε πραγματικά δεδομένα.

Abstract

In this thesis we first investigate the Pólya-Lundberg process, which is a special case of the mixed Poisson process. It is proven that every random variable of a Pólya-Lundberg process has the negative binomial distribution as its distribution, and that every Pólya-Lundberg process is a regular Markov process.

We then study the Delaporte process as a generalization of the Pólya-Lundberg process and we show that its probability distribution is a convolution of a Poisson and a negative binomial distribution. Another generalization of the Pólya-Lundberg process is the process, whose every random variable has the generalized negative binomial distribution as its distribution. This can be induced by a mixed Poisson process with mixing distribution a generalized negative binomial distribution, as it has been proven by Gerber.

Finally, we study some results of Ruohonen concerning the fitting of the model of a Delaporte process to several data encountered in the literature, and its comparison with the Pólya-Lundberg process.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

τ.μ.	: Τυχαία μεταβλητή
σ.(π).π.	: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.κ.	: Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας
σ.δ.	: Στοχαστική διαδικασία
μ.χ.	: Μετρήσιμος χώρος
χ.π.	: Χώρος Πιθανότητας
χ.σ.	: Χαρακτηριστική συνάρτηση
σ.β.	: Σχεδόν βέβαια
σ.ο.	: Σχεδόν όλα
κ.δ.π.	: Κανονική δεσμευμένη πιθανότητα
i.i.d.	: Ισοκατανεμημένες και ανεξάρτητες
πρβλ.	: Παράβαλε
MPP	: Μεικτή διαδικασία Poisson
CMPP	: Σύνθετη Μεικτής Poisson

Εισαγωγή

Η επιλογή των κατάλληλων υποθέσεων για την απαριθμήτρια διαδικασία, που περιγράφει ένα χαρτοφυλάκιο κινδύνων είναι ένα σημαντικό πρόβλημα. Στην παρούσα εργασία μελετάται μία γενική μέθοδος επίλυσης αυτού του προβλήματος. Η βασική ιδέα είναι να θεωρήσουμε ένα ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνων ως μία μείξη ομοιογενών χαρτοφυλακίων. Τότε η απαριθμήτρια διαδικασία, που περιγράφει ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο, ορίζεται ως μία μείξη απαριθμήτριων διαδικασιών, που περιγράφουν τα ομοιογενή χαρτοφυλάκια, ώστε η κατανομή μείξης να περιγράφει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου.

Αρχικά μελετούμε τις μεικτές διαδικασίες Poisson και ιδιαιτέρως την διαδικασία Pólya-Lundberg.

Συμφώνα με τον Seal [44], η ιστορία μιας μεικτής σ.δ. Poisson ξεκινάει από μία εργασία του του Dubourdieu [14], ο οποίος πρότεινε την μεικτή σ.δ. Poisson. Ύστερα από δυο χρόνια οι μεικτές στοχαστικές διαδικασίες Poisson έγιναν κεντρικό θέμα στο γνωστό βιβλίο του Lundberg [31] (1940), ο οποίος ανέπτυξε την μαθηματική θεωρία του και μελέτησε τις εφαρμογές της στις ασθένειες και στις ασφάλειες ατυχημάτων. Ακόμη μία εφαρμογή προτάθηκε από τον Hofmann [24] (1955), ο οποίος μελέτησε τις μείκτές διαδικασίες Poisson σαν ένα μοντέλο για ασφαλιστικές αποζημιώσεις εργαζομένων.

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τη μεικτή διαδικασία Poisson παραπέμπουμε στις εργασίες των Lundberg [31] (1940), Albrecht [6] (1981) και [7] (1985), Pfeifer [36] (1986) και στο βιβλίο του Grandell [23] (1995). Οι μεικτές σ.δ. Poisson με τη δομική παράμετρο που ακολουθεί την κατανομή Gamma με τρείς παραμέτρους μελετήθηκαν για πρώτη φορά από τον Delaporte [11] (1960), [13] (1965) και αργότερα οι δομικές κατανομές συζητήθηκαν από τους Tröblinger [50] (1961), Kupper [28] (1962), Albrecht [6] (1981) και Gerber [20] (1991).

Στο Κεφάλαιο 1 δίνονται οι βασικές έννοιες και οι ορισμοί που χρειάζονται στην παρούσα εργασία. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται μία σύντομη επισκόπηση των εννοιών της κλασσικής θεωρίας κινδύνου. Μελετούνται εκτενέστερα οι απαριθμήτριες διαδικασίες με την ιδιότητα Markov, όπως και οι φυσιολογικές απαριθμήτριες διαδικασίες (βλ. Ορισμός 2.4.10) και αποδεικνύεται ότι κάθε διαδικασία Poisson είναι μία ομογενής φυσιολογική διαδικασία Markov.

(βλ. Θεώρημα 2.4.12).

Στο Κεφάλαιο 3 εξετάζονται οι μεικτές σ.δ. Poisson με παράμετρο μείξης (ή δομική παράμετρο) μία τ.μ.. Διατυπώνεται μεταξύ άλλων το πολυωνυμικό κριτήριο, που μας επιτρέπει να ελέγχουμε πότε η διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων είναι μεικτή Poisson, και είναι χρήσιμο στον υπολογισμό της πεπερασμένης διάστασης κατανομών μιας μεικτής σ.δ. Poisson (βλ. Λήμμα 3.2.4) και ένα αποτέλεσμα που μας δείχνει ότι η κλάση των μεικτών σ.δ. Poisson περιέχεται στην κλάση των σ.δ. Markov (βλ. Θεώρημα 3.2.5). Επίσης αποδεικνύεται ότι η κλάση των μεικτών διαδικασιών Poisson κάτω από μία προφανή συνθήκη περιέχεται στην κλάση των φυσιολογικών απαριθμήτριων διαδικασιών (βλ. Θεώρημα 3.2.6).

Στο Κεφάλαιο 4 μελετάται η διαδικασία Pólya-Lundberg. Αποδεικνύεται οτι η διαδικασία Pólya-Lundberg είναι μια φυσιολογική διαδικασία Markov η οποία δεν ειναι ομοιογενής (βλ. Πόρισμα 4.1.5). Στην Ενότητα 4.2 ορίζεται η διαδικασία Delaporte, που είναι γενίκευση της Pólya-Lundberg. Η κατανομή της Delaporte είναι ίση με την συνέλιξη μίας Poisson και μίας αρνητικής διωνυμικής (βλ. Θεώρημα 4.2.2).

Στο Κεφάλαιο 5 μελετούμε το πρόβλημα της εμφύτευσης της γάμμα κατανομής και της Αντίστροφης Γκαουσιανής κατανομής, σε μια μεγαλύτερη Οικογένεια Κατανομών, όπως επίσης και την οικογένεια γενικευμένων αντίστροφων Γκαουσιανών κατανομών. Πρόκειται για μια οικογένεια κατανομών τριών παραμέτρων, όπου η γάμμα κατανομή και η αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή είναι ειδικές περιπτώσεις. Στην Ενότητα 5.2 παρουσιάζεται η οικογένεια γενικευμένων γάμμα κατανομών. Ένα κλασσικό μοντέλο για την κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων είναι η **μεικτή κατανομή Poisson**. Στην ειδική περίπτωση που η κατανομή μείξης είναι η κατανομή Γαμμα, η κατανομή των απαιτήσεων είναι η αρνητική διωνυμική. Στην Ενότητα 5.3 χρησιμοποιούμε την γενικευμένη γάμμα κατανομή ως μια εναλλακτική λύση κατανομής μείξης. Η προκύπτουσα διακριτή κατανομή καλείται μια γενικευμένη αρνητική διωνυμική κατανομή και έχει κάποιες βοηθητικές ιδιότητες. Στην Ενότητα 5.4 θα δούμε ότι μια μεικτή Poisson κατανομή μπορεί να εξηγηθεί από το Μπεϊζιανο μοντέλο, όπου η κατανομή μείξης είναι η εκ των προτέρων κατανομή της άγνωστης παραμέτρου (τ.μ.) μιας διαδικασίας Poisson. Εάν η εκ των προτέρων κατανομή ειναι η γενικευμένη αντίστροφη Γκαουσιανή, τότε η εκ των υστέρων κατανομή θα είναι επίσης αυτού του τύπου. Μια αντίστοιχη ιδιότητα δεν ισχύει για την γενικευμένη γάμμα κατανομή.

Στο Κεφάλαιο 6 θεωρούμε το μοντέλο μιας σ.δ. Delaporte και αρχικά παρουσιάζουμε μια προσαρμογή του σε αρκετά δεδομένα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ροπών και της εκτίμησης μεγίστης πιθανοφάνειας όπου ελέγχουμε το πόσο καλή είναι η προσαρμογή του μοντέλου χρησιμοποιώντας τον έλεγχο χ^2. Επίσης εξετάζουμε πως φαίνονται οι τύποι θεωρίας αξιοπιστίας στο μοντέλο. Και τέλος στην τελευταία ενότητα εξετάζουμε την προσαρμογή του μοντέλου μας σε ορισμένα στοιχεία που υπάρχουν στην αναλογιστική βιβλιογραφία όπως στα δεδομένα του Trobliger.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία. Συμβολίζουμε με: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Χρησιμοποιούνται επίσης τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \backslash \{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Όμοια ορίζονται και τα σύνολα: $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$. Ακόμη, με $\mathbb{N}_n$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{0, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ και τέλος με $\mathbb{N}_n^*$ το σύνολο $\{1, \ldots, n\} \subset \mathbb{N}$.

Έστω Ω σύνολο και $A, B \subset \Omega$. Τότε με Ω συμβολίζεται το συμπλήρωμα του A, με $A \uplus B$ συμβολίζεται η ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων και με $\biguplus_{i \in I} A_i$ συμβολίζεται η ένωση μιας μη κενής οικογένειας $\{A_i\}_{i \in I}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων του. Για κάθε $A \subset \Omega$ με χ_A συμβολίζουμε τη δείκτρια συνάρτηση του A. Η ταυτοτική συνάρτηση από το Ω στον εαυτό του συμβολίζεται με id_Ω. Για μία απεικόνιση $f : D \longmapsto E$ με R_f ή με $f(D)$ συμβολίζεται το **σύνολο τιμών** της f και για ένα σύνολο $A \subset D$ με $f \upharpoonright A$ συμβολίζεται ο περιορισμός της f στο A. Αν $\mathcal{G}$ είναι κάποιο σύστημα υποσυνόλων του Ω, τότε η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$, συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται η **σ**-άλγεβρα η παραγόμενη από το $\mathcal{G}$ σ-άλγεβρα η παραγόμενη, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται ένας γεννήτορας της $\sigma(\mathcal{G})$. Μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$, είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** εάν υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω για την οποία ισχύει $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$) που παράγεται από όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$), ονομάζεται η Borel **σ**-άλγεβρα στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{R}^n$) και συμβολίζεται με $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (ή $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$). Τα στοιχεία μιας Borel σ-άλγεβρας, ονομάζονται σύνολα Borel .

Στη συνέχεια, και εφόσον δε δηλώνεται διαφορετικά, η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας χώρος πιθανότητας (χ.π. για συντομία) και το ζευγάρι (Υ, H) με $\Upsilon \neq \varnothing$ είναι ένας ***μετρήσιμος***

***χώρος** (μ.χ. για συντομία).* Μια απεικόνιση $f : \Omega \longmapsto \Upsilon$ ονομάζεταιΣ-H **-μετρήσιμη**, αν για κάθε $B \in H$ ισχύει $f^{-1}(H) \in \Sigma$. Κάθε Σ-H-μετρήσιμη με απεικόνιση $f : \Omega \longmapsto \Upsilon$ ονομάζεται και **τυχαία μεταβλητή** (τ.μ. για συντομία). Κάθε οικογένεια $\{X_i\}_{i \in I}$ Σ-H-μετρήσιμων συναρτήσεων ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία** (σ.δ. για συντομία). Με Σ_0 συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων $N \in \Sigma$ ώστε $P(N) = 0$. Για τ.μ. X, Y : $\Omega \longmapsto \mathbb{R}$ γράφουμε $X = Y$ $\quad P$-σχεδόν βέβαια (P-σ.β. για συντομία), αν $\{X \neq Y\} \in \Sigma_0$.

Μία τ.μ. $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** ως προς το μέτρο P, αν $\int |f| dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ ($\mathcal{L}^1_+(P)$ αντίστοιχα) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (αντίστοιχα μη αρνητικών ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^2(P)$

συμβολίζεται το σύνολο όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων**. Τ.μ. τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συναρτήσεων (δηλαδή όλων των $f : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $\int |f|^2 dP < \infty$).

Έστω $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{F}$ μία σ-υποάλγεβρα της Σ. Κάθε συνάρτηση $Y \in \mathcal{L}^1(P|\mathcal{F})$ που ικανοποιεί για κάθε $A \in \mathcal{F}$ την ισότητα $\int_A X dP = \int_A Y dP$, ονομάζεται **μία εκδοχή της δεσμευμένης μέσης τιμής της X δοθείσης της $\mathcal{F}$** και συμβολίζεται με $\mathbb{E}_P[X|\mathcal{F}]$. Για $X := \chi_E \in \mathcal{L}^1(P)$ με $E \in \Sigma$ θέτουμε $P(E|\mathcal{F}) := \mathbb{E}_P[\chi_E|\mathcal{F}]$.

Μία συνάρτηση $k : H \times \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ είναι ένας H-Σ- **Μαρκοβιανός πυρήνας** (Markov kernel) όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

($k1$) Η συνολοσυνάρτηση $k(\bullet, \omega)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην H για κάθε σταθερό $\omega \in \omega$.

($k2$) Η συνάρτηση $\omega \longmapsto k(B, \omega)$ είναι Σ-μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $B \in H$.

Ένας H-Σ- Μαρκοβιανός πυρήνας ονομάζεται επίσης **τυχαίο μέτρο**.

Έστω Σ-H-μετρήσιμη απεικόνιση $X : \Omega \longmapsto \Upsilon$ και μία σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ. Η **δεσμευμένη κατανομή της X επάνω στην** $\mathcal{F}$ είναι ένας H-$\mathcal{F}$ -Μαρκοβιανός πυρήνας k, ικανοποιώντας για κάθε $B \in H$ τη συνθήκη

$$k(B, \bullet) = P(X^{-1}(B)|\mathcal{F})(\bullet) \quad P \restriction \mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

Ένας τέτοιος Μαρκοβιανός πυρήνας k θα συμβολίζεται με $P_{X|\mathcal{F}}$. Ιδιαιτέρως, αν (Ξ,Z) είναι ένας μ.χ., Θ μία Σ-Ξ -μετρήσιμη απεικόνιση και $\mathcal{F} = \sigma$ (Θ), τότε για κάθε H-Z-Μαρκοβιανό πυρήνα k, η απεικόνιση $K(\Theta) : H \times \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$K(\Theta)(B, \omega) := (k(B, \bullet) \circ \Theta)(\omega) \quad \text{για κάθε} \quad B \in H \quad \text{και} \quad \omega \in \Omega$$

είναι ένας H-$\sigma(\Theta)-$Μαρκοβιανός πυρήνας. Ιδιαιτέρως, για $(\Upsilon, H) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ τα σχετικά μέτρα πιθανότητας $k(\bullet, \theta)$ για $\theta = \Theta(\omega)$ με $\omega \in \Omega$ είναι κατανομές στο $\mathfrak{B}$ και έτσι μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{K}(\theta)(\bullet)$ αντί για $k(\bullet,\theta)$. Αντίστοιχα, τη περίπτωση του $K(\Theta)$ τη συμβολίζουμε με $\mathbf{K}(\Theta)$.

Για οποιαδήποτε σ -υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Ω, θα λέμε ότι δύο H-$\mathcal{F}$-Μαρκοβιανοί πυρήνες k_i, για $i \in \{1,2\}$, είναι $P|\mathcal{F}$- **ισοδύναμοι** και γράφουμε $k_1 = k_2 \quad P|\mathcal{F}$-$\sigma.\beta.$, αν υπάρχει P-μηδενικό σύνολο $N \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $k_1(B,\omega) = k_2(B,\omega)$ για κάθε $B \in H$ και $\omega \notin N$.

Μια οικογένεια $\{\Sigma\}_{i\in I}$ $\sigma-$υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ έχουμε:

$$P(E_1 \cap \cdots \cap E_n|\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j|\mathcal{F}) \quad P|\mathcal{F} \quad -\sigma.\beta.$$

για κάθε $j \leq n$ και για κάθε $E_j \in \Sigma_{i_j}$ όπου τα $i_1, \ldots, i_n$ είναι διαφορετικά στοιχεία του I.

Μια οικογένεια Σ-H-μετρήσιμων απεικονίσεων $\{X_i\}_{i\in I}$ από το Ω στο Υ είναι:

- **P-υπο συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, αν η οικογένεια $\sigma(\{\mathrm{X}_i\})_{i\in I}$ είναι P-υπο συνθήκη ανεξάρτητη επάνω στην $\mathcal{F}$ και

- **P-υπο συνθήκη ισόνομη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Ω, αν

$$P(F \cap X_i^{-1}(B)) = P((F \cap X_j^{-1}(B)), \quad \text{για} \quad i,j \in I, F \in \mathcal{F} \quad \text{και } \mathrm{B} \in \mathrm{H}.$$

Επιπλέον, για κάθε τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathfrak{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια **σ-άλγεβρα** στο Ω που ονομάζεται η **σ-άλγεβρα στο Ω η παραγόμενη από την** X και ισχύει $\sigma(X) \subseteq \Sigma$. Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$ τ.μ., ορίζουμε:

$$\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big) := \sigma\Big(\bigcup_{j\in I} \sigma(X_j)\Big).$$

Η $\sigma\big(\{X_j\}_{j\in I}\big)$ ονομάζεται η **σ-άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια** $\{X_j\}_{j\in I}$.

Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in T}$ τ.μ. $T \neq \varnothing$ ονομάζεται **ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\Sigma_t\}_{t\in T}$ σ-υποαλγεβρών της Σ, αν για κάθε $\{t_1, \ldots, t_m\} \subseteq I$, οι σ-άλγεβρες $\sigma(X_{t_1}), \ldots, \sigma(X_{t_m})$, $\Sigma_{t_1}, \ldots, \Sigma_{t_m}$ είναι ανεξάρτητες.

Έστω $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ μια σ.δ. με ολικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών I έτσι, ώστε για κάθε $t \in I$ το σύνολο τιμών R_{X_t} της X_t να είναι αριθμήσιμο σύνολο. Η $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ ονομάζεται **Μαρκοβιανή σ.δ. ή σ.δ. Markov** ή θα λέμε ότι ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή ιδιότητα**, εάν ισχύει

$$P\left(\{X_{t_{n+1}} = x_{n+1}\} \;\middle|\; \bigcap_{j=1}^{n}\{X_{t_j} = x_j\}\right) = P\left(\{X_{t_{n+1}} = x_{n+1}\} \;\middle|\; \{X_{t_n} = x_n\}\right)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \cdots, t_{n+1} \in I$ με $t_1 < \cdots < t_{n+1}$ και $x_j \in R_{X_{t_j}}$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ ώστε $P(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{t_j} = x_j\}) > 0$.

Για κάθε ενδεχόμενο $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα της τ.μ. X ως προς τη δεσμευμένη πιθανότητα P_B συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}_B[X] := \mathbb{E}[X|B] := \int_B X dP_B$$

και ονομάζεται η **δεσμευμένη μέση τιμή** της τ.μ. X δοθέντος του ενδεχομένου.

Έστω I ένα μη κενό, μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μια οικογένεια $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **διύλιση** , αν για κάθε $j, k \in I$ με $j < k$ ισχύει $\Sigma_j \subseteq \Sigma_k$.

Μία σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη** σε μία διύλιση $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ αν για κάθε $j \in I$ η τ.μ. X_j είναι Σ_j -μετρήσιμη.

Η $\{T_j\}_{j\in I}$ με $T_j = \sigma(\{X_k : k \leq j\})$ για κάθε $j \in I$, ονομάζεται η **κανονική διύλιση** για την $\{X_j\}_{j\in I}$. Προφανώς, κάθε σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη κανονική της διύλιση.

Έστω I ένα μη κενό μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μία σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται **martingale** ως προς τη διύλιση $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ ή ένα $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$- martingale αν ισχύουν τα εξής:

$(m1)$ Η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$,

$(m2)$ για κάθε $j \in I$, η $X_j \in \mathcal{L}^1(P)$,

$(m3)$ για κάθε $j, k \in I$ με $j \leq k$ ισχύει $\mathbb{E}[X_k|\Sigma_j] = X_j \quad P \restriction \Omega_j - \sigma.\beta.$

Κεφάλαιο 2

Σύντομη Επισκόπηση της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα γίνει μια σύντομη αναφορά σε βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Κινδύνου. Αρχικά παρουσιάζονται κάποιες ιδιότητες των άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων. Τέλος αναφέρονται βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη διαδικασία Poisson , που αποτελεί τη βάση για τη κατανόηση της μεικτής διαδικασίας Poisson. Για όλο το κεφάλαιο η τριάδα (Ω,Σ,P) είναι ένασ χ.π.

2.1 Η στοχαστική διαδικασία Άφιξης Απαιτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα παρατεθούν ορισμοί και βασικές ιδιότητες για τις σ.δ. άφιξης απαιτήσεων και ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων.

Ορισμός 2.1.1. Η ακολουθία τ.μ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία άφιξης απαιτήσεων**, εάν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_T \in \Sigma$ τέτοιο ώστε, για όλα τα $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$ να ισχύουν τα εξής:

- $T_0(\omega) = 0$, και
- $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άμεσα προκύπτει πως για όλα τα $\omega \in \Omega\backslash\Omega_T$ και $n \in \mathbb{N}$, η $T_n(\omega) > 0$. Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως, το P-μηδενικό σύνολο Ω_T ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της στοχαστικής διαδικασίας άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Ορισμός 2.1.2. Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ άφιξης απαιτήσεων. Με $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συμβολίζουμε τη **ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων και ισχύει $W_n := T_n - T_{n-1}$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.**

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, προκύπτουν τα εξής:

- $W_n(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$,
- $E[W_n] > 0$

καθώς και η σχέση:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k. \tag{2.1}$$

Στο κεφάλαιο αυτό, και αν δε δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε τη $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως μια σταθερή σ.δ. άφιξης απαιτήσεων, και τη $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων επαγόμενη από τη $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε επίσης πως το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της άφιξης των απαιτήσεων είναι το κενό σύνολο, δηλαδή $\Omega_T := \emptyset$.

Εφόσον $W_n := T_n - T_{n-1}$ και $T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ είναι εμφανές πως η άφιξης, και η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων, αλληλοκαθορίζονται. Αυτό γίνεται εμφανέστερο και από τα ακόλουθα αποτελέσματα.(βλ. π.χ. [42] Lemma 1.1.1)

Λήμμα 2.1.3. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής:

$$\sigma(\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}) = \sigma(\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}) \tag{2.2}$$

Συμπεραίνουμε πως η γνώση που έχουμε για τους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων από τη T_n, είναι ίδια με τη πληροφορία που είναι διαθέσιμη από τη γνώση των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, δηλαδή τη W_n.

Ορισμός 2.1.4. Το ενδεχόμενο $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}$ ονομάζεται **έκρηξη**.

Λήμμα 2.1.5. Αν $\sup_{n\in\mathbb{N}} E[T_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.

Πόρισμα 2.1.6. Αν $\sum_{n=1}^{\infty} E[W_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [2], Λήμμα 3.2.6 και Πόρισμα 3.2.7..

Αξίζει να αναφέρουμε στο σημείο αυτό πως κατά την ανάπτυξη ενός υποδείγματος για μια ασφαλιστική επιχείρηση, μια από τις πρώτες αποφάσεις που πρέπει να ληφθεί έχει να κάνει με το αν θα πρέπει την πιθανότητα έκρηξης, να τη λάβουμε ίση με το μηδέν ή όχι. Η απόφαση αυτή αφορά τη άφιξης των απαιτήσεων.

Το Λήμμα που ακολουθεί βοηθάει την καλύτερη κατανόηση της σχέσης που υπάρχει μεταξύ του $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Λήμμα 2.1.7. Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Αν η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(*i*) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και

(*ii*) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \theta)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Στην περίπτωση αυτή, $E[W_n] = 1/\theta$ και $E[T_n] = n/\theta$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, και επιπρόσθετα, η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [42], Lemma 1.2.2..

2.2 Η απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία

Στην παρούσα ενότητα θα παραθέσουμε τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες της απαριθμήτριας σ.δ.

Ορισμός 2.2.1. Μια οικογένεια τ.μ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **του αριθμού των απαιτήσεων ή απαριθμήτρια σ.δ.**, αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_N \in \Sigma$, τέτοιο ώστε για όλα τα $\omega \in \Omega \backslash \Omega_N$ να ισχύουν τα εξής:

($n1$**)** $N_0(\omega) = 0$,

($n2$**)** $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, για όλα τα $t \in (0, \infty)$,

($n3$**)** $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$,

($n4$**)** $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \leq N_t(\omega) \leq \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και

($n5$**)** $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Το P-μηδενικό σύνολο Ω_N, ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της απαριθμήτριας σ.δ.** $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Ερμηνεύοντας τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να θεωρήσουμε πως

- Η τ.μ. N_t δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων που εμφανίζονται στο διάστημα $(0, t]$,
- Όλες οι τροχιές της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ξεκινούν από το μηδέν και είναι δεξιά συνεχείς, στα σημεία ασυνέχειας, το άλμα είναι ύψους ένα, και τέλος τείνουν στο άπειρο.

Μια αρχική συνέπεια του ορισμού είναι το ακόλουθο θεώρημα, σύμφωνα με το οποίο κάθε σ.δ. άφιξης απαιτήσεων, παράγει μία απαριθμήτρια σ.δ. και αντίστροφα.

Θεώρημα 2.2.2. Αν $T := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega$ θέσουμε

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega) \tag{2.3}$$

τότε για τη σ.δ. $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η N είναι μια απαριθμήτρια σ.δ. τέτοια ώστε $\Omega_N = \Omega_T$,

(ii) για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$ ισχύει

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t(\omega) = n\}. \tag{2.4}$$

Θεώρημα 2.2.3. Αν η $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία απαριθμήτρια σ.δ. και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega$ θέσουμε

$$T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t(\omega) = n\} \tag{2.5}$$

τότε για την $T := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η T μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_T = \Omega_N$, και

(ii) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega \backslash \Omega_N$ ισχύει

$$N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega). \tag{2.6}$$

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω θεωρημάτων βλ. π.χ. [2, Θεώρημα 3.3.2, Θεώρημα 3.2.3] αντίστοιχα.

Για το υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου:

- *η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία απαριθμήτρια σ.δ. ,*
- *η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων που παράγεται από την απαριθμήτρια σ.δ.*
- *η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων που παράγεται από την απαριθμήτρια σ.δ.*
- *το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης Ω_N της απαριθμήτριας σ.δ. είναι το κενό σύνολο.*

Κάτω από την τελευταία υπόθεση προκύπτουν δύο εξαιρετικά χρήσιμες ισότητες. Σύμφωνα με αυτές, ορισμένα από τα γεγονότα (ενδεχόμενα) που καθορίζονται από την απαριθμήτρια σ.δ. , μπορούν να ερμηνευτούν ως ενδεχόμενα που καθορίζονται από τη σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων, και αντίστροφα.

Λήμμα 2.2.4. Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύουν:

(a) $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$ και

(b) $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t\} \backslash \{T_{n+1} \leq t\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

Για την απόδειξη βλ. πχ. [2], Λήμμα 3.3.4..

Το ακόλουθο λήμμα εκφράζει με ένα ιδιαίτερα περιεκτικό τρόπο, το γεγονός πως η του αριθμού των απαιτήσεων και η άφιξης απαιτήσεων παρέχουν την ίδια πληροφορία.

Λήμμα 2.2.5. Ισχύει ότι:

$$\sigma(\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}) = \sigma(\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}) \tag{2.7}$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να συνδέσουμε την πιθανότητα έκρηξης με την απαριθμήτρια σ.δ. ως εξής:

Λήμμα 2.2.6. Ισχύει ότι:

$$P[\{\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n < \infty\}] = P\left[\bigcup_{t \in \mathbb{N}} \{N_t = \infty\}\right] = P\left[\bigcup_{t \in (0,\infty)} \{N_t = \infty\}\right]. \tag{2.8}$$

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [2], Λήμμα 3.3.6.

Πόρισμα 2.2.7. Αν η απαριθμήτρια σ.δ. έχει πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές, τότε η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με μηδέν.

Για μια αναλυτική απόδειξη του πορίσματος βλ. π.χ. [5], Πόρισμα 2.2.7..

Στο σημείο αυτό θα ορίσουμε τις έννοιες της προσαύξησης του αριθμού των απαιτήσεων σε διάστημα $(s, t]$ καθώς και των ανεξάρτητων προσαυξήσεών της, διότι μέσω αυτών κατανοούμε παρισσότερο τη του αριθμού των απαιτήσεων.

- Για $s, t \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $s \leq t$, η **προσαύξηση** της απαριθμήτριας σ.δ. $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ στο διάστημα $(s, t]$, ορίζεται από τη σχέση:

$$N_t - N_s := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{s < T_n \leq t\}}. \tag{2.9}$$

  Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $N_0 = 0$ και $T_n > 0$, η σχέση (2.9), συμφωνεί με τον τρόπο που ορίσαμε τη τ.μ. N_t στο Θεώρημα 2.2.2.

- Για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ έχουμε ότι:

$$N_t(\omega) = (N_t - N_s)(\omega) + N_s(\omega), \tag{2.10}$$

  που ισχύει ακόμη και όταν $N_s(\omega)$ απειρίζεται.

2.3 Η Στοχαστική Διαδικασία Poisson

Ορισμός 2.3.1. Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ονομάζεται **(ομογενής) διαδικασία Poisson με παράμετρο** $\theta \in (0,\infty)$, όταν έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $t \in (0,\infty)$ να ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$.

Από τους ορισμούς προκύπτει πως μια απαριθμήτρια σ.δ. με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, έχει και στάσιμες προσαυξήσεις, αν και μόνο αν για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{N_{t+h}-N_t} = P_{N_h}$ (βλ. π.χ. [2], Λήμμα A'1.3).

Ορισμός 2.3.2. Μια απαριθμήτρια σ.δ. $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **τυπική διαδικασία Poisson**, αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, h $\widetilde{N}_t$ ακολουθεί την Poisson με παράμετρο ένα.

Λήμμα (Πολυωνυμικό Κριτήριο) 2.3.3. Έστω $\alpha \in (0,\infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) Για κάθε $t \in (0,\infty)$ η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τη σχέση

$$P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t),$$

και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε το $\sum_{j=1}^m k_j = n$ ισχύει

$$P\left[\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\} \,\middle|\, \{N_{t_m} = n\}\right] = \frac{n!}{\prod_{j=1}^m k_j!} \cdot \prod_{j=1}^m \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}$$

(b) Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. Poisson με παράμετρο α.

Για μα αναλυτική απόδειξη του πορίσματος βλ. [5], Λήμμα 2.3.3.

Λήμμα 2.3.4. Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n,\theta)$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$

(ii) $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$, για όλα τα $t \in (0,\infty)$.

Στη περίπτωση αυτή, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $E[T_n] = n/\theta$ και για όλα τα $t \in (0,\infty)$ ισχύει $E[N_t] = \theta t$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [42], Lemma 2.2.1.

Θεώρημα 2.3.5. Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(a)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο θ.

(iii) Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, και ικανοποιεί τη συνθήκη $E[N_t] = \theta t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

(iv) Η σ.δ. $\{N_t - \theta t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [42], Theorem 2.3.4 και για μια αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος βλ. π.χ. [2], Θεώρημα 4.2.4.

2.4 Η απαριθμήτρια διαδικασία ως διαδικασία Markov

Οι χαρακτηρισμοί της διαδικασίας Poisson που έχουν δοθεί στο προηγούμενο κεφάλαιο μας δείχνουν ότι η Poisson είναι πολύ ιδιαίτερη απαριθμήτρια σ.δ.. Σε πρακτικές περιπτώσεις, οι προσαυξήσεις της απαριθμήτριας ενδεχομένως να μην είναι ανεξάρτητες ή στάσιμες ή να μην ακολουθούν την κατανομή Poisson, άρα σε κάθε μια από αυτές τις περιπτώσεις το μοντέλο Poisson δεν είναι κατάλληλο μοντέλο. Από την αδυναμία της διαδικασίας Poisson προκύπτει η ανάγκη μελέτης μεγαλυτέρων κλάσεων απαριθμήτριων διαδικασιών.

Στην παρούσα ενότητα γίνεται μια συστηματική μελέτη απαριθμητρίων διαδικασιών των οποίων οι πιθανότητες μετάβασης ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman–Kolmogorov και μπορούν να υπολογιστούν από μια ακολουθία εντάσεων. Οι εντάσεις αυτές εξαρτώνται από το χρόνο και δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στις περιπτώσεις που είναι ίδιες ή σταθερές.

Αρχικά θα παραθέσουμε μερικές ιδιότητες τις οποίες έχει μια απαριθμήτρια διαδικασία, οι οποίες όλες σχετίζονται με τις πιθανότητες μετάβασης και οι οποίες πιθανότητες ικανοποιούνται επαρκώς από τη διαδικασία Poisson.

Στη συνέχεια δίνεται ένας χαρακτηρισμός της φυσιολογικότητα απαριθμητριών σ.δ. που ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman–Kolmogorov. Τα βασικά αποτελέσματα χαρακτηρίζουν απαριθμήτριες, που είναι φυσιολογικές διαδικασίες Markov με ίσες ή σταθερές εντάσεις. Συνδυάζοντας αυτά τα αποτελέσματα εξάγουμε έναν άλλον χαρακτηρισμό για τη διαδικασία Poisson.

Σε όλη την ενότητα η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια απαριθμήτρια διαδικασία, η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ η διαδικασία άφιξης απαιτήσεων η οποία εξαρτάται από την απαριθμήτρια και η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ η διαδικασία ενδιάμεσων χρόνων που εξαρτάται από την διαδικασία άφιξης.

Θεώρημα 2.4.1. Αν η απαριθμήτρια έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε είναι μια διαδικασία Markov.

Απόδειξη . Έστω $m \in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_m, t_{m+1} \in (0, \infty)$ και $n_1, ..., n_m, n_{m+1} \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1}$, και $P\left[\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} = n_j\}\right] > 0$. Ορίζουμε $t_0 := 0$ και $n_0 := 0$. Αφού $P\left[\{N_0 = 0\}\right] = 1$, έχουμε

$$
\begin{aligned}
P\left[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\} \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right] &= \frac{P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{N_{t_j} = n_j\}\right]}{P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right]} \\
&= \frac{P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\right]}{P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\right]} \\
&= \frac{\prod_{j=1}^{m+1} P\left[\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\right]}{\prod_{j=1}^{m} P\left[\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\right]} \\
&= P\left[\{N_{t_{m+1}} - N_{t_m} = n_{m+1} - n_m\}\right]
\end{aligned}
$$

και

$$
\begin{aligned}
P\left[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\} \,\middle|\, \{N_{t_m} = n_m\}\right] &= \frac{P\left[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\,,\, N_{t_m} = n_m\}\right]}{P\left[\{N_{t_m} = n_m\}\right]} \\
&= \frac{P\left[\{N_{t_{m+1}} - N_{t_m} = n_{m+1} - n_m\,,\, N_{t_m} - N_{t_0} = n_m\}\right]}{P\left[\{N_{t_m} = n_m\}\right]} \\
&= \frac{P\left[\{N_{t_{m+1}} - N_{t_m} = n_{m+1} - n_m\}\right] P\left[\{N_{t_m} = n_m\}\right]}{P\left[\{N_{t_m} = n_m\}\right]} \\
&= P\left[\{N_{t_{m+1}} - N_{t_m} = n_{m+1} - n_m\}\right],
\end{aligned}
$$

όπου η τρίτη ισότητα είναι συνέπεια της ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων. Επομένως, από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$
P\left[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\} \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right] = P\left[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\} \,\middle|\, \{N_{t_m} = n_m\}\right],
$$

δηλ. η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ειναι μία διαδικασία Markov. □

Πόρισμα 2.4.2. Αν μια απαριθμήτρια διαδικασία είναι μια διαδικασία Poisson, τότε είναι και διαδικασία Markov.

Ορισμοί 2.4.3. **(a)** Ένα ζευγάρι $(k, r) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}_+$ είναι **επιτρεπτό** (admissible) εάν $(k, r) = (0, 0)$ ή $(k, r) \in \mathbb{N}_0 \times (0, \infty)$.
(b) Έστω $\mathcal{A}$ το σύνολο που περιέχει όλες τις τετράδες $(k, n, r, t) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ώστε το (k,r) να είναι επιτρεπτό, $k \leq n$, και $r \leq t$. Μια απεικόνιση

$$p : \mathcal{A} \longmapsto [0, 1]$$

είναι ένας **κανόνας μετάβασης** (transition rule) για την απαριθμήτρια $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ αν ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{n=k}^{\infty} p(k, n, r, t) \leq 1$$

για κάθε επιτρεπτό ζευγάρι (k,r) και για όλα τα $t \in [r, \infty)$ καθώς επίσης και τη σχέση

$$p(k, n, r, t) = P\left[\{N_t = n\} | \{N_r = k\}\right]$$

για όλα τα $(k, n, r, t) \in \mathcal{A}$ ώστε $P\left[\{N_r = k\}\right] > 0$. Είναι εύκολο να δούμε ότι ένας κανόνας μετάβασης πάντα υπάρχει αλλά δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικός.
Ωστόσο, όλοι οι παρακάτω ορισμοί και αποτελέσματα που περιέχουν κανόνες μετάβασης αποδεικνύεται πως είναι ανεξάρτητοι για συγκεκριμένη επιλογή κανόνα μετάβασης.
(c) Για έναν κανόνα μετάβασης $p : \mathcal{A} \longmapsto [0, 1]$ και $(k, n, r, t) \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$p_{k,n}(r, t) \quad := \quad p(k, n, r, t).$$

Τα $p_{k,n}(r, t)$ ονομάζονται **πιθανότητες μετάβασης** της $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ με κανόνα μετάβασης p. Προφανώς για κάθε ζευγάρι (n,t) που ικανοποιεί την $P\left[\{N_t = n\}\right] > 0$ ισχύει η σχέση

$$p_{n,n}(t, t) \quad = \quad 1.$$

(d) Η απαριθμήτρια $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τις **εξισώσεις Chapman–Kolmogorov** αν υπάρχει ένας κανόνας μετάβασης p τέτοιος ώστε

$$p_{k,n}(r, t) \quad = \quad \sum_{m=k}^{n} p_{k,m}(r, s) p_{m,n}(s, t)$$

για όλα τα $(k, n, r, t) \in \mathcal{A}$ και $s \in [r, t]$ με $P\left[\{N_r = k\}\right] > 0$. Οι εξισώσεις Chapman–Kolmogorov είναι ανεξάρτητες από τη συγκεκριμένη επιλογή του κανόνα μετάβασης .

Πράγματι, για κάθε $m \in \{k, \cdots, n\}$ με $P\left[\{N_s = m\} \bigcap \{N_r = k\}\right] > 0$, έχουμε $P\left[\{N_s = m\}\right] > 0$, και έτσι

$$p_{k,m}(r,s)p_{m,n}(s,t) = P\left[\{N_t = n\}|\{N_s = m\}\right] \cdot P\left[\{N_s = m\}|\{N_r = k\}\right].$$

Επίσης για $m \in \{k, \cdots, n\}$ με $P\left[\{N_s = m\} \bigcap \{N_r = k\}\right] = 0$, έχουμε $p_{k,m}(r,s) = P\left[\{N_s = m\}|\{N_r = k\}\right] = 0$ και έτσι

$$p_{k,m}(r,s)p_{m,n}(s,t) = 0,$$

ανεξάρτητα από την τιμή του $p_{m,n}(s,t)$.

Θεώρημα 2.4.4. Άν η απαριθμήτρια είναι διαδικασία Markov , τότε ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman–Kolmogorov.

Για μία απόδειξη του Θεωρήματος βλ. π.χ. [42], Theorem 3.1.3.

Πόρισμα 2.4.5. Άν η απαριθμήτρια έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις , τότε ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman–Kolmogorov.

Πόρισμα 2.4.6. Άν η απαριθμήτρια είναι μία διαδικασία Poisson, τότε ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman–Kolmogorov.

Ορισμός 2.4.7. *Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι* ***ομογενής****, αν υπάρχει ένας κανόνας μετάβασης, ώστε να ισχύει η ισότητα*

$$p_{n,n+k}(s,s+h) = p_{n,n+k}(t,t+h)$$

για όλα τα $k,n \in \mathbb{N}_0$ και $s,t,h \in \mathbb{R}_+$ ώστε τα (n,s) και (n,t) να είναι αποδεκτά και να ικανοποιούν τις σχέσεις $P\left[\{N_s = n\}\right] > 0$ και $P\left[\{N_t = n\}\right] > 0$

Θεώρημα 2.4.8. Άν η απαριθμήτρια έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις , τότε είναι μια ομογενής διαδικασία Markov.

Απόδειξη. Άπο το Θεώρημα 2.4.1 η απαριθμήτρια είναι μια διαδικασία Markov. Για να αποδείξουμε ότι είναι ομογενής, θεωρούμε $k \in \mathbb{N}_0$ και $h \in \mathbb{R}_+$ και ένα επιτρεπτό ζευγάρι (n,t) που ικανοποιεί τη σχέση $P\left[\{N_t = n\}\right] > 0$. Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}
p_{n,n+k}(t,t+h) &= P\left[\{N_{t+h} = n+k\}|\{N_t = n\}\right] \\
&= P\left[\{N_{t+h} - N_t = k\}|\{N_t - N_0 = n\}\right] \\
&= P\left[\{N_{t+h} - N_t = k\}\right] \\
&= P\left[\{N_h - N_0 = k\}\right] \\
&= P\left[\{N_h = k\}\right].
\end{aligned}$$

Επομένως η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ομογενής. □

Πόρισμα 2.4.9. Άν η απαριθμήτρια είναι μία διαδικασία Poisson, τότε είναι μια ομογενής διαδικασία Markov.

Ορισμός 2.4.10. α) Η απαριθμήτρια $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι **φυσιολογική (reqular)** αν υπάρχει κανόνας μετάβασης p και μια ακολουθία $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συνεχών συναρτήσεων $\mathbb{R}_+ \longmapsto (0,\infty)$ ώστε για κάθε επιτρεπτό ζευγάρι (n,t) να έχουμε

(i)

$$P\left[\{N_t = n\}\right] > 0,$$

(ii) η συνάρτηση $\mathbb{R}_+ \longmapsto [0,1]\ :\ h \longmapsto p_{n,n}(t,t+h)$ να είναι συνεχής,

(iii)

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(1 - p_{n,n}(t,t+h)\right) &= \lambda_{n+1}(t) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}p_{n,n}(t,t+h). \end{aligned}$$

Σε αυτήν την περίπτωση η $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ονομάζεται η **ακολουθία των εντάσεων** της απαριθμήτριας.

Παρατήρηση 2.4.11. - Η συνθήκη (i) σημαίνει ότι για κάθε χρόνο $t \in (0,\infty)$ κάθε πεπερασμένος αριθμός από απαιτήσεις τείνει να έχει αυστηρά θετική πιθανότητα.
- Η συνθήκη (ii) σημαίνει ότι η δεσμευμένη πιθανότητα στο $\{N_t = n\}$, δηλαδή η πιθανότητα μη αλμάτων σε ένα πεπερασμένο διάστημα μεταβάλλεται συνεχώς ως προς το μήκος του κάθε διαστήματος.
- Η συνθήκη (iii) σημαίνει ότι, η δεσμευμένη πιθανότητα στο $\{N_t = n\}$, η τάση για ένα άλμα οποιουδήποτε ύψους σε ένα απειροστίκο χρονικό διάστημα ισούται με την τάση ενός άλματος ύψους ένα.

Θεώρημα 2.4.12. Αν η απαριθμήτρια είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο α, τότε είναι μία ομογενής φυσιολογική διαδικασία Markov με εντάσεις $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν τη σχέση $\lambda_n(t) = \alpha$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$.

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 2.4.9 η απαριθμήτρια είναι μια ομογενής διαδικασία Markov
.

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό της φυσιολογικής διαδικασίας, θεωρούμε ένα ζευγάρι (n,t). Πρώτον, αφού

$$P\left[\{N_t = n\}\right] = e^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^n}{n!},$$

έχουμε ότι $P\left[\{N_t = n\}\right] > 0$, που αποδεικνύει τη συνθήκη (i) του Ορισμου 2.4.10
Δεύτερον, αφού

$$p_{n,n}(t, t+h) = e^{-\alpha h},$$

η συνάρτηση $h \longmapsto p_{n,n}(t, t+h)$ είναι συνεχής, που αποδεικνύει τη συνθήκη (ii) του Ορισμου 2.4.10
Τέλος έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(1 - p_{n,n}(t,t+h)\right) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(1 - e^{-\alpha h}\right) \\ &= \alpha \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}p_{n,n}(t,t+h) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}e^{-\alpha h}\alpha h \\ &= \alpha \end{aligned}$$

Αύτο αποδεικνύει τη συνθήκη (iii) του Ορισμου 2.4.10.
Επιπλέον η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι φυσιολογική με εντάσεις $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν τη σχέση $\lambda_n(t) = \alpha$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$. □

Κεφάλαιο 3

Μεικτές απαριθμήτριες στοχαστικές διαδικασίες

Είναι γεγονος, ότι η επιλογή κατάλληλων υποθέσεων για την απαριθμήτρια σ.δ. που περιγράφει το χαρτοφυλάκιο, είναι σοβαρό πρόβλημα. Παρακάτω θα αναλυθεί μια γενική μέθοδος αντιμετώπισης του προβλήματος. Η βασική ιδέα ουσιαστικά είναι να ερμηνεύσουμε ένα ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο ως μείγμα απο ομοιογενή χαρτοφυλάκια. Στην περίπτωση αυτή η απαριθμήτρια σ.δ. ενός ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου, ορίζεται ότι είναι ένα μείγμα απαριθμήτριων σ.δ. ομοιογενών χαρτοφυλακίων, τέτοια ώστε η μεικτή κατανομή τους να αντιπροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου.

3.1 Το υπόδειγμα

Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία απαριθμήτρια σ.δ. και μία τ.μ. Θ. Υποθέτουμε πως το ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνων, είναι ένα μείγμα από ανομοιογενή χαρτοφυλάκια ιδίου μεγέθους, τα οποία είναι παρόμοια, αλλά διαφορετικά μεταξύ τους. Υποθέτουμε επίσης, ότι κάθε ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο μπορει να προσδιοριστεί με την πραγματοποίηση της τ.μ. Θ.

Αυτό σημαίνει πως η κατανομή του Θ αντιπτροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου, υπό όρους. Οπότε οι ιδιότητες της κατανομής της απαριθμήτριας σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, καθορίζονται απο τις ιδιότητες της δεσμευμένης κατανομής ως προς Θ και από τις ιδιότητες της κατανομής του Θ. Για το λόγο αυτό η τ.μ Θ ονομάζεται παράμετρος δόμησης (structure parameter), η κατανομή της P_Θ ονομάζεται κατανομή δόμησης (structure distribution), ενώ η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται μεικτή απαριθμήτρια σ.δ. (mixed claim number process).

Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει:

- **υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις** ως προς το Θ, αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι προσαυξήσεις $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j \in (1,...,m)}$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες ως προς το Θ, και έχει

- **υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις** ως προς το Θ, αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m, h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι προσαυξήσεις $\{N_{t_{j+h}} - N_{t_{j-1+h}}\}_{j \in (1,...,m)}$ έχουν την ίδια υπό σύνθήκη κατανόμη ως προς το Θ, με τις $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j \in \{1,...,m\}}$.

Άμεσα προκύπτει πως μια απαριθμήτρια σ.δ. με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς Θ, έχει και υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς Θ αν και μόνο αν η $P_{N_{t+h}-N_t}|_\Theta = P_{N_h}|_\Theta$, $P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ για όλα τα $t, h \in \mathbb{R}_+$.

Για την απόδειξη χρησιμοποιούνται παρόμοια επιχειρήματα με εκείνα της απόδειξης του Λήμματος A 1.3 του [2].

Λήμμα 3.1.1. *Αν μια απαριθμήτρια σ.δ. έχει υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς Θ, τότε έχει και στάσιμες προσαυξήσεις.*

Για την απόδειξη του παρακάτω Λήμματος βλέπε π.χ. [42] Schmidt, Lemma 4.1.1. Αντίθετα το ερώτημα αν η απαριθμήτρια σ.δ. με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς το Θ μπορεί να έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, γενικά έχει αρνητική απάντηση όπως θα το δούμε παρακάτω.

Το λήμμα που ακολουθεί προκύπτει άμεσα απο τις ιδιότητες της υπό συνθήκη αναμενόμενης τιμής.

Λήμμα 3.1.2. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ έχει πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε*

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(N_t|\Theta)]$$

$$\mathbb{V}ar[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{V}ar(N_t|\Theta)] + \mathbb{V}ar[\mathbb{E}(N_t|\Theta)]$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.

3.2 Η μεικτή στοχαστική διαδικασία Poisson με παράμετρο μείξης

Στην ενότητα αυτή μπορούμε να εξειδικεύσουμε το μοντέλο των μεικτών σ.δ. Poisson με κατανομή μείξης υποθέτοντας ότι η παράμετρος είναι μια πραγματοποίηση μιας τ.μ.. Σε αυτή την ενότητα ορίζονται οι μεικτές σ.δ. Poisson με παράμετρο μείξης και αποδεικνύονται κάποιες ιδιότητές τους.

Ορισμός 3.2.1. Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μεικτή στοχαστική διαδικασία Poisson** με παράμετρο Θ(P-MPP(Θ)για συντομία), εάν

- Θ είναι μια τ.μ. για την οποία ισχύει $P_\Theta[(0,\infty)]$, και
- $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς το Θ, έτσι ώστε για κάθε $t\in\mathbb{R}_+$ να ισχύει η σχέση $P_{N_t|\Theta}=P(t\Theta)$, $P|(\sigma\Theta)$-σ.β

Ιδιαιτέρως, αν η κατανομή της Θ είναι εκφυλισμένη στο $\theta_0>0$(δηλαδή $P_\Theta(\{\theta_0\})$), τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια P-σ.δ. Poisson με παράμετρο θ_0

Στη συνέχεια παρατίθεται μια βασική ιδιότητα της μεικτής σ.δ. Poisson:

Λήμμα 3.2.2. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι μια P-MPP(Θ), τότε έχει στάσιμες προσαυξήσεις και ικανοποιεί την σχέση:*

$$P[\{N_t\}]>0,$$

για όλα τα $t\in(0,\infty)$ και η $n\in\mathbb{N}_0$.

Ορισμός 3.2.3. Μία απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την **πολυωνυμική ιδιότητα** αν η σχέση

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=k_j\}\right]=\frac{n_m!}{\prod_{j=1}^m k_j!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}P\left[\{N_{t_m}=n_m\}\right]$$

ισχύει για όλα τα $m\in\mathbb{N}$, $0=t_0<\cdots<t_m,k_1,...,k_m\in\mathbb{N}_0$ και $n_m=\sum_{j=1}^m k_j$. Αν $P[\{N_{t_m}=n_m\}]>0$,τότε η προηγούμενη σχέση

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=k_j\}\;\middle|\;\{N_{t_m}=n_m\}\right]=\frac{n_m!}{\prod_{j=1}^m k_j!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}$$

το οποίο εξήγει και το όνομα της πολυωνυμικής ιδιότητας.

Λήμμα 3.2.4. ***(Πολυωνυμικό κριτήριο)****. Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι μια P-MPP(Θ), τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει την πολυωνυμική ιδιότητα και ισχύει*

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=k_j\}\;\middle|\;\{N_{t_m}=n\}\right]=\frac{n!}{\prod_{j=1}^m k_j!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}\tag{3.1}$$

για όλα τα $m\in\mathbb{N}$ και $t_0,...,t_m\in\mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0=t_0<\cdots<t_m$ και για όλα τα $n\in\mathbb{N}_0$ και $k_1,...,k_m\in\mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^m k_j=n$.

Στην περίπτωση που το $m = 2$, το πολυωνυμικό κριτήριο λέγεται **διωνυμικό κριτήριο του Lundberg**.

Σαν μία πρώτη συνέπεια του πολυωνυμικού κριτηρίου, θα δείξουμε ότι κάθε μεικτή σ.δ. Poisson είναι μία διαδικασία Markov:

Θεώρημα 3.2.5. Αν η απαριθμήτρια σ.δ. είναι μια P-MPP(Θ),τότε είναι και διαδικασία Markov.

Για αναλυτικές αποδείξεις των Λημμάτων 3.2.2 και 3.2.4 καθώς και του Θεωρήματος 3.2.4 βλ. π.χ. Μπότση [[5], Λήμμα 4.1.4, Λήμμα 4.2.1 και Θεώρημα 4.2.3]. Στην απόδειξη του Λήμματος 3.2.4 στην [5] Λήμμα 4.2.1 αποδεικνύονται η σχεση (3.1). Για να αποδείξουμε, οτι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει επί πλέον την πολυωνυμική ιδιότητα, αρκεί να εφαρμόσουμε την (3.1) για να πάρουμε

$$\begin{aligned} P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right] &= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\} \,\middle|\, \{N_{t_m} = n\}\right] P\left[\{N_{t_m} = n\}\right] \\ &\overset{(3.1)}{=} \frac{n!}{\prod_{j=1}^{m} k_j!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j} P\left[\{N_{t_m} = n\}\right]. \end{aligned}$$

Θεώρημα 3.2.6. Άν η απαριθμήτρια σ.δ. είναι μια μεικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο Θ, ώστε η Θ να έχει πεπερασμένες ροπές, τότε είναι φυσιολογική και ικανοποιεί την

$$p_{n,n+}(t, t+h) = \frac{h^k}{k!}\cdot\frac{\mathbb{E}\left[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^{n+k}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{-t\Theta}\Theta^{n}\right]}$$

για κάθε επιτρεπτό ζευγάρι (n, t) και για όλα τα $k \in \mathbb{N}_0$ και $h \in (0, \infty)$ και με εντάσεις $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$\lambda_n(t) = \frac{\mathbb{E}\left[e^{-t\Theta}\Theta^{n}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{-t\Theta}\Theta^{n-1}\right]}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$.

Απόδειξη. Με βάση το πολυωνυμίκο κριτήριο έχουμε

$$\begin{aligned} p_{n,n+k}(t, t+h) &= P\left[\{N_{t+h} = n+k\}|\{N_t = n\}\right] \\ &= P\left[\{N_t = n\}|\{N_{t+h} = n+k\}\right]\cdot\frac{P\left[\{N_{t+h} = n+k\}\right]}{P\left[\{N_t = n\}\right]} \\ &= \binom{n+k}{n}\left(\frac{t}{t+h}\right)^n\left(\frac{h}{t+h}\right)^k\cdot\frac{\int_\Omega e^{(t+h)\Theta}\frac{((t+h)\Theta)^{n+k}}{(n+k)!}dP}{\int_\Omega e^{t\Theta}\frac{(t\Theta)^n}{n!}dP} \\ &= \frac{h^k}{k!}\cdot\frac{\mathbb{E}\left[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^{n+k}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{-t\Theta}\Theta^{n}\right]}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε ότι η απαριθμήτρια είναι φυσιολογική.
Αρχικά, το Λήμμα 3.2.2 δίνει $P[\{N_t\}] > 0$, το οποίο αποδεικνύει τη συνθήκη (i) του Ορισμού 2.4.10
Δεύτερον, αφού

$$p_{n,n}(t, t+h) = \frac{\mathbb{E}\left[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^n\right]}{\mathbb{E}\left[e^{-t\Theta}\Theta^n\right]}$$

η συνάρτηση $h \longmapsto p_{n,n}(t, t+h)$ είναι συνεχής, το οποίο αποδεικνύει τη συνθήκη (ii) του Ορισμού 2.4.10.
Τέλος, έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}(1 - p_{n,n}(t, t+h)) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(1 - \frac{\mathbb{E}\left[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^n\right]}{\mathbb{E}\left[e^{-t\Theta}\Theta^n\right]}\right) \\ &= \frac{\mathbb{E}\left[e^{-t\Theta}\Theta^{n+1}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{-t\Theta}\Theta^n\right]}\end{aligned}$$

καθώς και

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} p_{n,n}(t, t+h) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}h\frac{\mathbb{E}\left[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^{n+1}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{-t\Theta}\Theta^n\right]} \\ &= \frac{\mathbb{E}\left[e^{-t\Theta}\Theta^{n+1}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{-t\Theta}\Theta^n\right]},\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει τη συνθήκη (iii) του Ορισμού 2.4.10. □

Λήμμα 3.2.7. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι μια P-MPP(Θ), τέτοια ώστε η $\mathbb{E}[\Theta] < \infty$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει :*

$$\mathbb{E}[N_t] = t\mathbb{E}[\Theta]$$

και

$$\mathbb{V}ar[N_t] = t\mathbb{E}[\Theta] + t^2\mathbb{V}ar[\Theta].$$

Ιδιετέρως η πιθανότητα έκρηξης ισούται με μηδέν.

Για την απόδειξη βλ.[[42], Lemma 4.2.5]

Έτσι,αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι μια P-MPP(Θ) έτσι ώστε η κατανομή της Θ να είναι μη εκφυλισμένη και να έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε, για όλα τα $t \in (0, \infty)$, ισχύει ότι $\mathbb{V}ar(N_t) > \mathbb{E}(N_t)$.

Θεώρημα 3.2.8. Αν η απαριθμήτρια σ.δ. είναι μια P-MPP(Θ), έτσι ώστε το Θ να έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(a) Η κατανομή του Θ, είναι εκφυλισμένη.

(b) Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

(c) Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μη ομογενής σ.δ. Poisson.

(d) Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια (ομογενής) σ.δ. Poisson.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [42], Theorem 4.2.6.

Κεφάλαιο 4

Η διαδικασίες Pólya-Lundberg και Delaporte

4.1 Βασικά αποτελέσματα

Συμφώνα με τον Seal [44], η ιστορία μιας μεικτής στοχαστική διαδικασία Poisson προέρχεται από μία εργασία του του Dubourdieu, [14] ο οποίος πρότεινε ως ένα μοντέλο σε μία ασφάλεια αυτοκινήτου αλλά δεν το συνέκρινε με στατιστικά δεδομένα. Ύστερα από δυο χρόνια οι μεικτές στοχαστικές διαδικασίες Poisson έγιναν κεντρικό θέμα στο γνωστό βιβλίο του Lundberg [31] (1940). Μας έδειξε ότι η διαδικασία Pólya-Lundberg είναι μια διαδικασία με αρκετές εφαρμογές στον Αναλογισμό, ότι παίζει σημαντικό ρόλο στις γενικές ασφαλίσεις, ο όποιος προσάρμοσε τη διαδικασία αυτή στις στατιστικές ασθενειών και ατυχημάτων.

Ορισμός 4.1.1. Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **διαδικασία Pólya-Lundberg** με παράμετρους α και γ εάν αύτη είναι μια μεικτή διαδικασία Poisson με παράμετρο Θ τέτοια ώστε $P_\Theta = Ga(\alpha,\gamma)$.

Θεώρημα 4.1.2. Εάν μια απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Pólya-Lundberg με παράμετρους α και γ, τότε ισχύει η σχέση:

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}=n_j\}\right] = \frac{\Gamma(\gamma+n_m)}{\Gamma(\gamma)\prod_{j=1}^{m}(n_j-n_{j-1})!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t_m}\right)^{\gamma}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{\alpha+t_m}\right)^{n_j-n_{j-1}}$$

για όλα τα $m\in\mathbb{N}$, για όλα τα $t_0,t_1,...,t_m\in\mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$, και για όλα τα $n_0,n_1,...,n_m\in\mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0=n_0<n_1<\cdots<n_m$.

Ιδιαιτέρως, η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες εξαρτημένες προσαυξήσεις και ικανοποιεί την

$$P_{N_t} = \mathbf{NB}\left(\gamma,\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)$$

για όλα τα $t \in (0, \infty)$, και την

$$P_{N_{t+h}-N_t|N_t} = \mathbf{NB}\left(\gamma + N_t, \frac{\alpha + t}{\alpha + t + h}\right)$$

για όλα τα $t, h \in (0, \infty)$.

Απόδειξη: Λόγω του Λήμματος 3.2.2 και του Θεωρήματος 3.2.7, είναι σαφές ότι η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες εξαρτημένες προσαυξήσεις .

Πάμε να αποδείξουμε του υπόλοιπους ισχυρισμούς.

(a) Έχουμε

$$\begin{aligned}
P(\{N_t = n\}) &= \int_\Omega P(\{N_t = n\}|\Theta(\omega))P(d\omega) \\
&= \int_\Omega e^{-t\Theta(\omega)} \frac{(t\Theta(\omega))^n}{n!} P(d\omega) \\
&= \int_\mathbb{R} e^{-t\theta} \frac{(t\theta)^n}{n!} P_\Theta(d\theta) \\
&= \int_\mathbb{R} e^{-t\theta} \frac{(t\theta)^n}{n!} \frac{\alpha^\gamma}{\Gamma(\gamma)} e^{-\alpha\theta}\theta^{\gamma-1} X_{(0,\infty)}(\theta)\lambda(d\theta) \\
&= \int_\mathbb{R} \frac{\alpha^\gamma t^n}{\Gamma(\gamma)n!} e^{-(t+\alpha)\theta}\theta^{n+\gamma-1} X_{(0,\infty)}(\theta)\lambda(d\theta) \\
&= \frac{\alpha^\gamma t^n}{\Gamma(\gamma)n!} \int_\mathbb{R} e^{-(t+\alpha)\theta}\theta^{n+\gamma-1} X_{(0,\infty)}(\theta)\lambda(d\theta) \\
&= \frac{\alpha^\gamma t^n}{\Gamma(\gamma)n!} \frac{\Gamma(\gamma+n)}{(\alpha+t)^{\gamma+n}} \int_\mathbb{R} \frac{(\alpha+t)^{\gamma+n}}{\Gamma(\gamma+n)} e^{-(t+\alpha)\theta}\theta^{n+\gamma-1} X_{(0,\infty)}(\theta)\lambda(d\theta) \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)n!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^\gamma \left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^n \\
&= \binom{\gamma+n-1}{n} \left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^\gamma \left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^n,
\end{aligned}$$

όπου η προτελευταια ισότητα προκύπτει διότι $\int_\mathbb{R} \frac{(\alpha+t)^{\gamma+n}}{\Gamma(\gamma+n)} e^{-(t+\alpha)\theta}\theta^{n+\gamma-1} X_{(0,\infty)}(\theta)\lambda(d\theta) = \mathbf{Ga}(t+\alpha, \gamma+n)(0,\infty) = 1$ και ως εκ τούτου

$$P_{N_t} = NB\left(\gamma, \frac{\alpha}{\alpha+t}\right). \tag{4.1}$$

(b) Ισχύει η σχέση

$$P\left(\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} = n_j\}\right) = \frac{\Gamma(\gamma+n_m)}{\Gamma(\gamma)\prod_{j=1}^m (n_j - n_{j-1})!} \left(\frac{\alpha}{\alpha+t_m}\right)^\gamma \prod_{j=1}^m \left(\frac{t_j - t_{j-1}}{\alpha+t_m}\right)^{n_j - n_{j-1}}.$$

Πράγματι, από το πολυωνυμικό κριτήριο και τη σχέση (5.1) έχουμε:

$$\begin{aligned}
P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}=n_j\}\right] &= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}=n_j\} \,\middle|\, \{N_{t_m}=n_m\}\right] P[\{N_{t_m}=n_m\}] \\
&= P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=n_j-n_{j-1}\} \,\middle|\, \{N_{t_m}=n_m\}\right] P[\{N_{t_m}=n_m\}] \\
&= \frac{n_m!}{\prod_{j=1}^{m}(n_j-n_{j-1})!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j-n_{j-1}}\binom{\gamma+n_m-1}{n_m} \\
&\quad \cdot\left(\frac{\alpha}{\alpha+t_m}\right)^{\gamma}\left(\frac{t_m}{\alpha+t_m}\right)^{n_m} \\
&= \frac{\Gamma(\gamma+n_m)}{\Gamma(\gamma)\prod_{j=1}^{m}(n_j-n_{j-1})!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t_m}\right)^{\gamma}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{\alpha+t_m}\right)^{n_j-n_{j-1}}.
\end{aligned}$$

(c) Ισχύει η σχέση $P_{N_{t+h}-N_t|N_t} = NB\left(\gamma+N_t, \dfrac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)$.
Πράγματι, απο τα βήματα **(α)** και **(b)** προκύπτει ότι

$$P[\{N_{t+h}=n+k\}\bigcap\{N_t=n\}] = \frac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma)n!k!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\alpha+t+h}\right)^{n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k}$$

και

$$P[\{N_t=n\}] = \frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)n!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^{n},$$

επομένως

$$
\begin{aligned}
P&\left[\{N_{t+h}-N_t=k\}\,\middle|\,\{N_t=n\}\right]\\
&=\frac{P[\{N_{t+h}-N_t=k\}\bigcap\{N_t=n\}]}{P[\{N_t=n\}]}\\
&=\frac{P[\{N_{t+h}=n+k\}\bigcap\{N_t=n\}]}{P[\{N_t=n\}]}\\
&=\frac{\dfrac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma)n!k!}\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma}\left(\dfrac{t}{\alpha+t+h}\right)^{n}\left(\dfrac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k}}{\dfrac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)n!}\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+t}\right)^{\gamma}\left(\dfrac{t}{\alpha+t}\right)^{n}}\\
&=\frac{\dfrac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma)n!k!}}{\dfrac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)n!}}\,\frac{\dfrac{\alpha^{\gamma}}{(\alpha+t+n)^{\gamma}}}{\dfrac{\alpha^{\gamma}}{(\alpha+t)^{\gamma}}}\,\frac{\dfrac{t^{n}}{(\alpha+t+n)^{n}}}{\dfrac{t^{n}}{(\alpha+t)^{n}}}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k}\\
&=\frac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma+n)k!}\frac{(\alpha+t)^{\gamma}}{(\alpha+t+h)^{\gamma}}\frac{(\alpha+t)^{n}}{(\alpha+t+h)^{n}}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k}\\
&=\binom{\gamma+n+k-1}{k}\left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k}
\end{aligned}
$$

και έτσι

$$
P_{N_{t+h}-N_t|N_t}=NB\left(\gamma+N_t,\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right).
$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Από το Θεώρημα 4.1.2, η διαδικασία Pólya-Lundberg δεν είναι πολύ δύσκολο να μελετηθεί αφού οι κατανομές τησ πεπερασμένης διαδικασίας είναι πλήρως γνωστές παρότι οι προσαυξήσεις της δεν είναι ανεξάρτητες.

Ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.1.2 βλέπουμε ότι η διαδικασία Pólya-Lundberg έχει θετική διάχυση:

Πόρισμα 4.1.3. (θετική μετάδοση)Εάν μια απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Pólya-Lundberg , τότε, για όλα τα $t,h\in(0,\infty)$., η συνάρτηση

$$
n\longmapsto P[\{N_{t+h}\geq n+1\}|\{N_t=n\}]
$$

είναι γνησίως αύξουσα.

Έτσι, για τη διαδικασία Pólya-Lundberg , η πιθανότητα του να συμβεί τουλάχιστον μια απαίτηση στο διάστημα $(t, t+h]$ αυξάνεται με τον αριθμό των απαιτήσεων που συνέβησαν μέχρι το χρόνο t.

Ολοκληρώνοντας, η Pólya-Lundberg διαδικασία, ειναι μια Markov διαδικασία η οποία δεν είναι ομοιογενής.

Λήμμα 4.1.4. *Υποθέτουμε ότι η απαριθμήτρια $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman–Kolmogorov και είναι φυσιολογικές. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*
(a) *η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ομογενής.*
(b) *Οι εντάσεις της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σταθερές.*
Απόδειξη. • *Υποθέτουμε ότι ισχύει η* **(a)** *και έστω η $n \in \mathbb{N}_0$. Για όλα τα $s, t \in (0, \infty)$, έχουμε*

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1}(s) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} p_{n,n+1}(s, s+h) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\frac{1}{h} p_{n,n+1}(t, t+h) \\ &= \lambda_{n+1}(t).\end{aligned}$$

Έτσι, λ_{n+1} είναι σταθερό στο $(0, \infty)$ και εν συνέχεια στο $\mathbb{R}_+$. Από την **(a)** *συνεπάγεται το* **(b)**.
• *Υποθέτουμε τώρα ότι η* **(b)** *ισχύει και η ακολουθία $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $(0, \infty)$ ώστε $\lambda_n(t) = \alpha_n$ να ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ και $t \in \mathbb{R}_+$.*
(1) *Για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ και $s, t, h \in \mathbb{R}_+$ ώστε (n, s) και (n, t) να είναι επιτρεπτά, έχουμε*

$$\begin{aligned}p_{n,n}(s, s+h) &= e^{-\int_s^{s+h} \lambda_{n+1}(u)du} \\ &= e^{-\int_s^{s+h} \alpha_{n+1}du} \\ &= e^{-\alpha_{n+1}h},\end{aligned}$$

και έτσι

$$p_{n,n}(s, s+h) = p_{n,n}(t, t+h).$$

(2) *Υποθέτουμε τώρα τη σχέση*

$$p_{n,n+k}(s, s+h) = p_{n,n+k}(t, t+h)$$

ισχύει για κάποιο $k \in \mathbb{N}_0$ και για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ και $s, t, h \in \mathbb{R}_+$ ώστε (n, s) και (n, t) να είναι *επιτρεπτά (που λόγω της* **(1)** *είναι για την περίπτωση* $k=0$*). Τότε έχουμε*

$$\begin{aligned} p_{n,n+k+1}(s,s+h) &= \int_s^{s+h} p_{n,n+k}(s,u)\lambda_{n+k+1}(u)p_{n+k+1,n+k+1}(u,s+h)du \\ &= \int_s^{s+h} p_{n,n+k}(t,t-s+u)\alpha_{n+k+1}p_{n+k+1,n+k+1}(t-s+u,t+h)du \\ &= \int_t^{t+h} p_{n,n+k}(t,v)\alpha_{n+k+1}p_{n+k+1,n+k+1}(v,t+h)dv \\ &= \int_t^{t+h} p_{n,n+k}(t,v)\lambda_{n+k+1}(v)p_{n+k+1,n+k+1}(v,t+h)dv \\ &= p_{n,n+k+1}(t,t+h) \end{aligned}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ *και* $s,t,h \in \mathbb{R}_+$ *ώστε* (n,s) *και* (n,t) *να είναι επιτρεπτά.*
(3) *Λόγω της* **(1)** *και* **(2)**, *άπο την* **(b)** *συνεπάγεται το* **(a)**. □

Πόρισμα 4.1.5. Αν η απαριθμήτρια $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Pólya-Lundberg με παραμέτρους α και γ, τοτε ειναι μια φυσιολογική διαδικασία Markov που ικανοποιεί τη σχέση

$$p_{n,n+k}(t,t+h) = \binom{\gamma+n+k-1}{k}\left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^k$$

για κάθε επιτρεπτό ζευγάρι (n,t) και για όλα τα $k \in \mathbb{N}_0$ και $h \in \mathbb{R}_+$ και με εντάσεις $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν τη σχέση

$$\lambda_n(t) = \frac{\gamma+n-1}{a+t}$$

για καθε $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$, συγκεκριμένα, η απαριθμήτρια $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μη ομογενής.

Απόδειξη Από το Λήμμα 2.11 και το Θεώρημα 3.2.6, η διαδικασία Pólya-Lundberg είναι μια φυσιολογική διαδικασία Markov. Από το Θεώρημα 4.1.2 και ισχύει

$$\begin{aligned} p_{n,n+k}(t,t+h) &= P[\{N_{t+h}=n+k\}|\{N_t=n\}] \\ &= P[\{N_{t+h}-N_t=k\}|\{N_t=n\}] \\ &= \binom{\gamma+n+k-1}{k}\left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^k. \end{aligned}$$

Άρα έχουμε

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1}(t) &= \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}p_{n,n+1}(t,t+h) \\ &= \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}(\gamma+n)\left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n}\frac{h}{\alpha+t+h} \\ &= \frac{\gamma+n}{a+t}, \end{aligned}$$

και έτσι

$$\lambda_n(t) = \frac{\gamma + n - 1}{a + t}.$$

Εφόσον οι εντάσεις δεν είναι σταθερές, απο το Λήμμα 4.1.4 του Schmidt [42] η απαριθμήτρια δεν ειναι ομογενής. □

4.2 Διαδικασία Delaporte

Έστω Θ ακολουθεί μια γενικευμένη κατανομή Γάμμα με την σ.π.π $f_\Theta(\Theta)$ να δίνεται απο τη σχέση

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\beta(\theta-\gamma)^{\beta-1}e^{-\alpha(\theta-\gamma)}}{\Gamma(\beta)} & \text{αν} \quad \theta > \gamma \\ 0 & \text{αν} \quad \theta \leq \gamma, \end{cases}$$

δηλαδή $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\alpha, \beta, \gamma)$, όπου $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ και $\gamma \in \mathbb{R}$.
Τότε η προκύπτουσα μεικτή σ.δ. Poisson με δομική παράμετρο Θ είναι μία περίπτωση μεικτής σ.δ. Poisson. Αυτό το μοντέλο προτάθηκε από τον Delaporte το 1960 [11]. O Ruohonen το 1988 [40] προσάρμοσε το μοντέλο αυτό σε διάφορα δεδομένα που υπάρχουν στην βιβλιογραφία, ενώ οι Willmot, Sundt το 1989 [54] και Schröter το 1990 [47] μελέτησαν αυτό το μοντέλο περισσοτερο από θεωριτική σκοπιά.

Ορισμός 4.2.1. Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. **Delaporte** με παράμετρους α, β και γ, εάν αύτη είναι μια μεικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο Θ ώστε $P_\Theta = Ga(\alpha, \beta, \gamma)$, δηλαδή

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\beta(\theta-\gamma)^{\beta-1}e^{-\alpha(\theta-\gamma)}}{\Gamma(\beta)} & ,\text{αν} \quad \theta > \gamma \\ 0 & ,\text{αν} \quad \theta \leq \gamma \end{cases}$$

Από τον ορισμό προκύπτει ότι η σ.π. $p_k(t) \longmapsto N_t$ δίνεται από τον τύπο

$$p_k(t) = \int_\gamma^\infty e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^k}{k!}\frac{\alpha^\beta(\theta-\gamma)^{\beta-1}e^{-\alpha(\theta-\gamma)}}{\Gamma(\beta)}d\theta$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $k \in \mathbb{N}_0$.
Τότε αποδεικνύεται ότι

$$p_0(t) = e^{-\gamma t}\left(\frac{1}{\alpha + t}\right)^\beta \qquad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}_+$$

και ότι η πιθανογεννήτρια της N_t δίνεται από τον τύπο

$$m_{N_t}(s) = e^{-(1-s)t\gamma}\left(\frac{\alpha}{\alpha + (1-s)t}\right)^\beta \qquad \text{για κάθε} \quad s \in (-1, 1).$$

Για μία αναλυτική απόδειξη των παραπάνω τύπων παραπέμπουμε στην [1] σελιδες 56-57.

Θεώρημα 4.2.2. Μία διαδικασία **Delaporte** $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με δομική κατανομή $\mathbf{Ga}(\alpha,\beta,\gamma)$ είναι ισοδύναμη με το άθροισμα δύο ανεξάρτητων απαριθμήτριων διαδικασιών, δηλαδή

$$N_t \overset{d}{=} N_{1,t} + N_{2,t} \qquad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

όπου η $\{N_{1,t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ομοιογενής διαδικασία Poisson με παράμετρο γ και η $\{N_{2,t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. Pólya-Lundberg, ισοδύναμα $P_{N_t} = \mathbf{P}(\gamma t) * \mathbf{NB}(\beta, \frac{\alpha}{\alpha+t})$, για κάθε $t > 0$ Συμβολισμός: $P_{N_t} = \mathbf{Del}(\gamma t, \beta, \frac{\alpha}{\alpha+t}))$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος παραπέμπουμε στην [47], Satz 3.3.1.

Πόρισμα 4.2.3. Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία διαδικασία **Delaporte** . Τότε ισχύει

$$p_k(t) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(\gamma t)^{k-n}}{(k-n)!} e^{-\gamma t} \binom{\beta+n-1}{n} \left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^{\beta} \left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^{n},$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $k \in \mathbb{N}_0$.

Η αποδείξη του είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.2.2.

Παρατήρηση 4.2.4. Πολλές φόρες είναι ενδιαφέρον, να προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την κατανομή **Delaporte** μέσω ενός αναδρομικού τύπου. Έχουμε

$$L_\Theta(u) = e^{-\gamma u}\left(1 + \frac{u}{\alpha}\right)^{-\beta}$$

και έτσι

$$m_{N_t}(s) = e^{-\gamma t(1-s)}\left(1 + \frac{t(1-s)}{\alpha}\right)^{-\beta}$$

Μετά από απλούς υπολογισμούς η παραγώγιση των παραπάνω μας οδηγεί στον τύπο,

$$(\alpha + t - ts)m'_N(s) = \left(\beta t + \gamma t\,(\alpha+t) - \gamma t^2 s\right) m_{N_t}(s)$$

για κάθε $s \in (-1, 1)$.

Κεφάλαιο 5

Από την γενικευμένη γάμμα στη γενικευμένη αρνητική διωνυμική κατανομή

Η γενικευμένη γάμμα κατανομή περιέχει την γάμμα και την αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή σε ειδικές περιπτώσεις. Προτείνεται ως εναλλακτική περίπτωση της γενικευμένης αντίστροφης Γκαουσιανής κατανομής. Χρησιμοποιούμενη ως κατανομή μείξης για μια άγνωστη παράμετρο της Poisson, μας οδηγεί στη γενικευμένη αρνητική διωνυμική κατανομή.

5.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο 5 μελετούμε το πρόβλημα της εμφύτευσης δύο σημαντικών κατανομών, της γάμμα κατανομής και της Αντίστροφης Γκαουσιανής κατανομής, σε μια μεγαλύτερη Οικογένεια Κατανομών. Προφανώς υπάρχουν πολλές απαντήσεις σε αυτο το ερώτημα. Μια απάντηση δίνεται από την οικογένεια **γενικευμένων αντίστροφων Γκαουσιανών κατανομών**. Πρόκειται για μια οικογένεια κατανομών τριών παραμέτρων, όπου η πυκνότητα πιθανότητας $f(x)$ είναι ανάλογη προς την έκφραση $x^{\alpha-1}exp(-\beta x-\frac{\gamma}{x})$. Η **γάμμα κατανομή** είναι η ειδική περίπτωση για $\gamma = 0$ και η **αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή** είναι η ειδική περίπτωση για $\alpha = \frac{1}{2}$. Η Γενικευμένη Γκαουσιανη κατανομή έχει πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες, βλεπε Jorgenson [26]. Το κύριο μειωνέκτημα είναι οτι ορισμένα απο τα αποτελέσματά της είναι στα πλαίσια της τροποποιημένης συνάρτησης Bessel (του τρίτου είδους),που φοβίζει πολλούς αναλογιστές.

Στην Ενότητα 5.2 παρουσιάζεται η **οικογένεια γενικευμένων γάμμα κατανομών**, η οποία είναι μια εναλλακτική λύση και σε κάποιο βαθμό απλούστερη απάντηση στο ερώτημα.

Αυτή η οικογένεια προέκυψε απο έναν υπολογισμό στους Dufresne, Gerber and Shui [16] (1991), (τύπος 3.5).

Ένα κλασσικό μοντέλο για την κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων είναι η **μεικτή κατανομή Poisson**. Στη σημαντική ειδική περίπτωση που η κατανομή μείξης ειναι η κατανομή Γαμμα, η κατανομή των απαιτήσεων είναι η αρνητική διωνυμική. Πολλοί συγγραφείς προτειναν την αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή ως εναλλακτική κατανομή μείξης, βλεπε Willmot [52] (1986), Besson and Partat [8] (1990), Lemaire [29] (1991). Η προκύπτουσα διακριτή κατανομή ειναι γνωστή ως κατανομή Sichel, βλέπε Sichel [46] (1991).

Στην Ενότητα 5.3 χρησιμοποιούμε την γενικευμένη γάμμα κατανομή ως μια εναλλακτική λύση κατανομής μείξης. Η προκύπτουσα διακριτή κατανομή καλείται μια **γενικευμένη αρνητική διωνυμική κατανομή** και έχει κάποιες βοηθητικές ιδιότητες.

Μια μεικτή Poisson κατανομή μπορεί να εξηγηθεί απο το Μπεϊζιανο μοντέλο, όπου η κατανομή μείξης είναι η εκ των προτερων κατανομή της άγνωστης παραμέτρου (τ.μ.) μιας διαδικασίας Poisson. Εάν η εκ των προτερων κατανομή ειναι η γενικευμένη αντίστροφη Γκαουσιανή, τότε η εκ των υστέρων κατανομή θα είναι επίσης αυτού του τύπου. Δυστιχώς, μια αντίστοιχη ιδιότητα δεν ισχύει για την γενικευμένη γάμμα κατανομή. Αυτό θα το δούμε στην Ενότητα 5.4.

Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5 παρουσιάζονται στην εργασία [20] του Gerber (1991).

5.2 Η γενικευμένη γάμμα κατανομή

Στη θεωρία πιθανοτήτων, μια κατανομή πιθανότητας λέγεται **άπειρα διαιρετή** αν μπορεί να εκφραστεί ως η κατανομή πιθανότητας του αθροίσματος ενός αυθαίρετου αριθμού ανεξάρτητων και ταυτοτικά κατανεμημένων τ.μ.. Η χαρακτηριστική συνάρτηση οποιασδήποτε άπειρα διαιρετής κατανομής ονομάζεται μια **άπειρα διαιρετή χαρακτηριστική συνάρτηση**.

Πιο αυστηρά, η κατανομή πιθανοτήτας F είναι άπειρα διαιρετή εάν, για κάθε θετικό ακέραιο n, υπάρχουν n ανεξάρτητες ταυτοτικά κατανεμημένες τ.μ. $X_{n1}, ..., X_{nn}$ των οποίων το άθροισμα $S_n = X_{n1}, ..., X_{nn}$ έχει την κατανομή F. Για παράδειγμα η κατανομή Poisson, η αρνητική διωνυμική κατανομή, η κατανομή γάμμα και η εκφυλισμένη κατανομή είναι παραδείγματα άπειρος διαιρετών κατανομών. Το ίδιο ισχύει για την κανονική κατανομή, την κατανομή Cauchy και όλα τα άλλα μέλη της οικογένειας των **ευσταθών κατανομών**. Η ομοιόμορφη κατανομή και η διωνυμική κατανομή δεν είναι άπειρα διαιρετές. Η κατανομή t του student είναι άπειρα διαιρετή. Όλες οι σύνθετες κατανομές Poisson είναι άπειρα διαιρετές, αλλά το αντίστροφο δεν είναι αλήθεια.

Η θεωρία των ευσταθών κατανομών μονοδιάστατων μεταβλητών κυρίως αναπτύχθηκε στις δεκαετίες 1920 και 1930 από τους Paul Lévy και Yakovlevich Khinchine [27]. Αναπτύχθηκε επίσης με λεπτομέρεια από τους Gnedenko και Kolmogorov (1954) [21] και Feller (1971) [18] και είναι το αντικείμενο μιας πιο πρόσφατης μονογραφίας του Zolotarev (1986) [55].

Δίνουμε τέσσερις ισοδύναμους ορισμούς μιας ευσταθούς κατανομής.

Ορισμός 5.2.1. Μια τ.μ. X λέγεται ότι έχει **ευσταθή κατανομή** εάν για οποιουσδήποτε θετικούς αριθμούς A και B, υπάρχει ένας θετικός αριθμός C και ένας πραγματικός αριθμός D τέτοιοι ώστε

$$AX_1 + BX_2 \stackrel{d}{=} CX + D,$$

όπου X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες αντιγραφές της X και όπου " $\stackrel{d}{=}$ " υποδηλώνει την ισότητα κατά κατανομή.

Σημειώνουμε ότι μια τ.μ. συγκεντρωμένη σε ένα σημείο είναι πάντα ευσταθής. Αυτή η εκφυλισμένη περίπτωση δεν είναι ιδιαίτερου ενδιαφέροντος και, εκτός εάν δηλώνεται με σαφήνεια, πάντα θα θεωρούμε ότι η X είναι μη εκφυλισμένη. Μια τ.μ. X καλείται **αυστηρά ευσταθής** εάν η παραπάνω σχέση ισχύει για $D = 0$. Μια ευσταθής τ.μ. καλείται **συμμετρικά ευσταθής** εάν η κατανομή της είναι συμμετρική, που σημαίνει, εάν η X και η –X έχουν την ίδια κατανομή. Μια συμμετρική ευσταθής τ.μ. είναι φανερά αυστηρά ευσταθής.

Ορισμός 5.2.2. (ισοδύναμος με τον ορισμό 5.2.1). Μια τ.μ. X λέγεται ότι έχει ευσταθή κατανομή εάν για οποιοδήποτε $n \geq 2$, υπάρχει ένας θετικός αριθμός C_n και ένας πραγματικός αριθμός D_n τέτοιοι ώστε

$$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \stackrel{d}{=} C_n X + D_n,$$

όπου $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ανεξάρτητα αντίγραφα της X

Ορισμός 5.2.3. (ισοδύναμος με τον ορισμό 5.2.1 και τον 5.2.2). Μια τ.μ. X λέγεται ότι έχει ευσταθή κατανομή, εάν αποτελεί πεδίο έλξης, για παράδειγμα, εάν υπάρχει μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τ.μ. $Y_1, Y_2, ...$ και ακολουθίες τυχαίων αριθμών $\{d_n\}$ και πραγματικών αριθμών $\{\alpha_n\}$, τέτοιες ώστε

$$\frac{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}{d_n} + \alpha_n \xrightarrow{d} X$$

όταν n τείνει στο άπειρο.
Ο συμβολισμός $\xrightarrow{d}$ υποδηλώνει σύγκλιση κατά κατανομή.

Έστω (Ω,Σ,P) ένας χ.π. και X μια μη αρνητική τ.μ. της οποίας η κατανομή είναι άπειρα διαιρετή.

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση είναι της μορφής

$$M_X(r) = exp\left(\int_0^\infty (e^{rx}-1)q(x)dx\right). \tag{5.1}$$

Άρα

$$lnM_X(r) = \int_0^\infty (e^{rx}-1)q(x)dx.$$

Με τη παραγώγιση της παραπάνω συνάρτησης λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} \frac{dlnM_X(r)}{dr} &= \frac{d}{dr}\int_0^\infty (e^{rx}-1)q(x)dx \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{dr}(e^{rx}-1)q(x)dx \\ &= \int_0^\infty xe^{rx}q(x)dx, \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{dlnM_X(r)}{dr} = \int_0^\infty xe^{rx}q(x)dx. \tag{5.2}$$

Για $r = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] = \frac{dM_X}{dr}(0) &= \frac{1}{M_X(0)}\frac{dM_X}{dr}(0) \\ &= \frac{dlnM_X(r)}{dr}(0) \\ &\overset{(4.2)}{=} \int_0^\infty xe^0q(x)dx \\ &= \int_0^\infty xq(x)dx. \end{aligned}$$

Άρα

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty xq(x)dx. \tag{5.3}$$

Από τη σχέση (5.2) προκύπτει

$$\frac{d^2lnM_X(r)}{dr^2} = \int_0^\infty x^2e^{rx}q(x)dx \tag{5.4}$$

και

$$\begin{aligned} \frac{d^2lnM_X(r)}{dr^2} &= \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{M_X(r)}\frac{dM_X(r)}{dr}\right) \\ &= \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{M_X(r)}\right)\frac{dM_X(r)}{dr} + \frac{1}{M_X(r)}\frac{d^2M_X(r)}{dr^2} \\ &= -\frac{1}{M_X^2(r)}\frac{dM_X(r)}{dr}\frac{dM_X(r)}{dr} + \frac{1}{M_X(r)}\frac{d^2M_X(r)}{dr^2}. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{d^2 lnM_X(r)}{dr^2} = \frac{1}{M_X(r)}\frac{d^2 M_X(r)}{dr^2} - \frac{1}{M_X^2(r)}\left(\frac{dM_X(r)}{dr}\right)^2. \tag{5.5}$$

Για $r = 0$ χρησιμοποιώντας την (5.5) έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{d^2 lnM_X}{dr^2}(0) &= \frac{1}{M_X(0)}\frac{d^2 M_X}{dr^2}(0) - \frac{1}{M_X^2(0)}\left(\frac{dM_X}{dr}(0)\right)^2 \\ &= \frac{1}{1}\mathbb{E}[X^2] - \frac{1}{1}\mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{V}ar[X].\end{aligned}$$

Άρα από τις παραπάνω ισότητες και την (5.4) για $r = 0$ έχουμε

$$\mathbb{V}ar[X] = \int_0^\infty x^2 e^0 q(x)dx = \int_0^\infty x^2 q(x)dx,$$

δηλαδη

$$\mathbb{V}ar[X] = \int_0^\infty x^2 q(x)dx. \tag{5.6}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}\frac{d^3 ln(M_X(r))}{dr^3} &= \frac{d}{dr}\left(\frac{d^2 M_X(r)}{dr^2}\right) \\ &\overset{(4.5)}{=} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{M_X(r)}\frac{d^2 M_X(r)}{dr^2} - \frac{1}{M_X^2(r)}\left(\frac{dM_X(r)}{dr}\right)^2\right) \\ &= -\frac{1}{M_X^2(r)}\frac{dM_X(r)}{dr}\frac{d^2 M_X(r)}{dr^2} + \frac{1}{M_X(r)}\frac{d^3 M_X(r)}{dr^3} \\ &\quad +\frac{1}{M_X^4(r)}2M_X(r)\frac{dM_X(r)}{dr}\left(\frac{dM_X(r)}{dr}\right)^2 - \frac{1}{M_X^2(r)}2\frac{dM_X(r)}{dr}\frac{d^2 M_X(r)}{dr^2} \\ &= -\frac{1}{M_X^2(r)}\frac{dM_X(r)}{dr}\frac{d^2 M_X(r)}{dr^2} + \frac{1}{M_X(r)}\frac{d^3 M_X(r)}{dr^3} \\ &\quad +\frac{1}{M_X^4(r)}2M_X(r)\frac{dM_X(r)}{dr}\left(\frac{dM_X(r)}{dr}\right)^2 \\ &\quad -\frac{1}{M_X^2(r)}2\frac{dM_X(r)}{dr}\frac{d^2 M_X(r)}{dr^2}\end{aligned}$$

και για $r = 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 ln(M_X)}{dr^3}(0) &= -\frac{1}{M_X^2(0)}\frac{dM_X}{dr}(0)\frac{d^2M_X}{dr^2}(0) + \frac{1}{M_X(0)}\frac{d^3M_X}{dr^3}(0) \\
&\quad + \frac{1}{M_X^3(0)}2\frac{dM_X}{dr}(0)\left(\frac{dM_X}{dr}(0)\right)^2 - \frac{1}{M_X^2(0)}2\frac{dM_X}{dr}(0)\frac{d^2M_X}{dr^2}(0) \\
&= -\frac{1}{1}\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2] + \frac{1}{1}\mathbb{E}[X^3] + \frac{1}{1}2\mathbb{E}[X]\left(\mathbb{E}[X]\right)^2 - \frac{1}{1}2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2] \\
&= \mathbb{E}[X^3] - 3\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X]\left(\mathbb{E}[X]\right)^2 \\
&= \mathbb{E}[X^3] - 3\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2] + 2\left(\mathbb{E}[X]\right)^3,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\frac{d^3 ln(M_X)}{dr^3}(0) = \mathbb{E}[X^3] - 3\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2] + 2\left(\mathbb{E}[X]\right)^3 \tag{5.7}$$

Επίσης για $\mu := \mathbb{E}[X]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X-\mu)^3\right] &= \mathbb{E}\left[X^3 - 3X^2\mu + 3X\mu^2 - \mu^3\right] \\
&= \mathbb{E}[X^3] - 3\mu\mathbb{E}[X^2] + 3\mu^2\mathbb{E}[X] - \mu^3 \\
&= \mathbb{E}[X^3] - 3\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2] + 3\left(\mathbb{E}[X]\right)^2\mathbb{E}[X] - \left(\mathbb{E}[X]\right)^3 \\
&= \mathbb{E}[X^3] - 3\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2] + 2\left(\mathbb{E}[X]\right)^3.
\end{aligned}$$

Συνεπώς απο την παραπάνω σχέση και την (5.7) προκύπτει

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[(X-\mu)^3\right] &= \frac{d^3 ln(M_X)}{dr^3}(0) \\
&= \int_0^\infty x^3 e^0 q(x)dx = \int_0^\infty x^3 q(x)dx,
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ιδιότητα προκύπτει από την παραγώγηση της (5.4).
Επομένως έχουμε

$$\mathbb{E}\left[(X-\mu)^3\right] = \int_0^\infty x^3 q(x)dx. \tag{5.8}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ισχύει $P_X = \mathbf{Exp}(1)$. Τότε $\mathbb{E}[X] = 1$, $\mathbb{V}ar[X] = 1$ (βλ. Ορσ Β′ 4.3),

$$M_X(r) = \frac{1}{1-r}, \quad r < 1 \tag{5.9}$$

και

$$q(x) = x^{-1}e^{-x}, x > 0. \tag{5.10}$$

Η πρώτη ιδέα είναι να εμφυτευθεί αυτή η κατανομη σε μια οικογένεια κατανομών με

$$q_b(x) = cx^a e^{-bx} \tag{5.11}$$

όπου τα c και a καθορίζονται έτσι ώστε η μέση τιμή και η διακύμανση να ειναι ίση με 1 :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty xq_b(x) &= \int_0^\infty xcx^a e^{-bx}dx \\
&= \int_0^\infty cx^{a+1}e^{-bx}dx \\
&= c\frac{\Gamma(a+2)}{b^{a+2}}\int_0^\infty \frac{x^{(a+2)-1}e^{-bx}b^{a+2}}{\Gamma(a+2)}dx \\
&= \frac{c\Gamma(a+2)}{b^{a+2}} = 1
\end{aligned}$$

διότι ισχύει $\int_0^\infty \frac{x^{(a+2)-1}e^{-bx}b^{a+2}}{\Gamma(a+2)} = \mathbf{Ga}(b, a+2)(0,\infty) = 1$
Άρα

$$\int_0^\infty xq_b(x)dx = c\frac{\Gamma(a+2)}{b^{a+2}} = 1. \tag{5.12}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^2 q_b(x)dx &= \int_0^\infty x^2 cx^a e^{-bx}dx \\
&= \int_0^\infty cx^{a+2}e^{-bx}dx \\
&= c\frac{\Gamma(a+3)}{b^{a+3}}\int_0^\infty \frac{x^{(a+3)-1}e^{-bx}b^{a+3}}{\Gamma(a+3)}dx \\
&= \frac{c\Gamma(a+3)}{b^{a+3}} = 1,
\end{aligned}$$

όπου η πρότελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $\int_0^\infty \frac{x^{(a+3)-1}e^{-bx}b^{a+3}}{\Gamma(a+3)}dx = \mathbf{Ga}(b, a+3)(0,\infty) = 1$. Άρα

$$\int_0^\infty x^2 q_b(x)dx = c\frac{\Gamma(a+3)}{b^{a+3}} = 1. \tag{5.13}$$

Από τη σχέση (5.12) έχουμε $c\Gamma(a+2) = b^{a+2}$ συνεπώς $c = \frac{b^{a+2}}{\Gamma(a+2)}$
και απο την (5.13) έχουμε $c\Gamma(a+3) = b^{a+3}$, συνεπώς $c = \frac{b^{a+3}}{\Gamma(a+3)}$.
Άρα $\frac{b^{a+2}}{\Gamma(a+2)} = \frac{b^{a+3}}{\Gamma(a+3)}$, ή ισοδύναμα $\frac{b^{a+2}}{\Gamma(a+2)} = \frac{b^{a+3}}{(\alpha+2)\Gamma(a+2)}$ ή ισοδύναμα $a+2 =$

$\dfrac{b^{a+3}}{b^{a+2}} = b$. Επομένως $a = b - 2 \quad$ και $c = \dfrac{b^b}{\Gamma(b)}$, συνεπώς

$$q_b(x) = \frac{b^b}{\Gamma(b)} x^{b-2} e^{-bx}. \tag{5.14}$$

Ένας εύκολος υπολογισμός δίνει τη ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_b(r)$, η οποία υπάρχει για $r < b$:

Για $b > 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
lnM_b(r) &= \int_0^\infty (e^{rx} - 1) q_b(x) dx \\
&= \int_0^\infty (e^{rx} - 1) c x^a e^{-bx} dx \\
&= \int_0^\infty (e^{rx} - 1) \frac{b^b}{\Gamma(b)} x^{b-2} e^{-bx} dx \\
&= \frac{b^b}{\Gamma(b)} \int_0^\infty e^{rx} x^{b-2} e^{-bx} dx - \frac{b^b}{\Gamma(b)} \int_0^\infty x^{b-2} e^{-bx} dx \\
&= \frac{b^b}{\Gamma(b)} \int_0^\infty e^{(r-b)x} x^{b-2} dx - \frac{b^b}{\Gamma(b)} \int_0^\infty x^{b-2} e^{-bx} dx \\
&= \frac{b^b}{\Gamma(b)} \int_0^\infty e^{-(b-r)x} x^{b-2} dx - \frac{b^b}{\Gamma(b)} \int_0^\infty x^{b-2} e^{-bx} dx \\
&= \frac{\Gamma(b-1)}{(b-r)^{b-1}} \frac{b^b}{\Gamma(b)} \int_0^\infty \frac{(b-r)^{b-1}}{\Gamma(b-1)} e^{-(b-r)x} x^{b-2} dx \\
&\quad - \frac{\Gamma(b-1)}{b^{b-1}} \frac{b^b}{\Gamma(b)} \int_0^\infty \frac{b^{b-1}}{\Gamma(b-1)} e^{-(b-r)x} x^{b-2} dx \\
&= \frac{\Gamma(b-1) b^b}{(b-r)^{b-1} (b-1) \Gamma(b-1)} - \frac{\Gamma(b-1) b^b}{(b)^{b-1} (b-1) \Gamma(b-1)} \\
&= \frac{b^b}{(b-r)^{b-1} (b-1)} - \frac{b^b}{(b)^{b-1} (b-1)} \\
&= \frac{b^b}{(b-r)^{b-1} (b-1)} - \frac{b}{b-1} \\
&= \frac{-b}{b-1} \left[1 - \frac{b^{b-1}}{(b-r)^{b-1}} \right] \\
&= \frac{b}{b-1} \left[(\frac{b}{b-r})^{b-1} - 1 \right].
\end{aligned}$$

Άρα

$$lnM_b(r) = \frac{b}{b-1} \left[\left(\frac{b}{b-r} \right)^{b-1} - 1 \right], \quad b > 1, \tag{5.15}$$

Για $0 < b < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} lnM_b(r) &= \frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{b}{b-r}\right)^{b-1} - 1\right] \\ &= \frac{-b}{1-b}\left[\left(\frac{b}{b-r}\right)^{-(1-b)} - 1\right] \\ &= \frac{-b}{1-b}\left[\left(\frac{b-r}{b}\right)^{1-b} - 1\right] \\ &= \frac{b}{1-b}\left[\left(1 - \frac{b-r}{b}\right)^{1-b}\right]. \end{aligned}$$

Άρα ισχύει

$$lnM_b(r) = \frac{b}{1-b}\left[1 - \left(\frac{b-r}{b}\right)^{1-b}\right] \quad \forall \quad 0 < b < 1 \tag{5.16}$$

Φυσικά η $M_1(r)$ δίνεται από τον τύπο (5.9).

Ας εξετάσουμε τώρα την κατανομή γάμμα με παραμέτρους $a > 0$ και $\beta > 0$ δηλ $\boldsymbol{Ga(\beta, a)}$. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από τον τύπο

$$M_1(r; a, \beta) = \left(\frac{\beta}{\beta - r}\right)^a \quad \forall \quad r < \beta. \tag{5.17}$$

ΠΙΝΑΚΑΣ 1.

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της γενικευμένης κατανομής γάμμα.

$\ln M_b(r; a, \beta)$	$CASE$
$a\frac{b}{b-1}[(\frac{\beta b}{\beta b - r})^{b-1} - 1]$	$b > 1$
$a \ln \beta - a \ln(\beta - r)$	$b = 1$
$a\frac{b}{1-b}[1 - (\frac{\beta b - r}{\beta b})^{1-b}]$	$0 < b < 1$

Από την (5.9) και την (5.17) μπορούμε να λάβουμε τον ακόλουθο τύπο

$$\ln M_1(r; a, \beta) = ln\left(\frac{\beta}{\beta - r}\right)^a = aln\left(\frac{\beta}{\beta - r}\right) = a \ln M_1(\frac{r}{\beta}). \tag{5.18}$$

Τώρα εφαρμόζουμε αυτή τη συνάρτηση γενικότερα για την $\ln M_b(r)$. Έτσι, εξ ορισμού, η γενικευμένη γάμμα κατανομή με παράμετρους b, a και β έχει ροπογεννήτρια συνάρτηση $M_b(r; \alpha, \beta)$ που ορίζεται από τον τύπο

$$\ln M_b(r; \alpha, \beta) = \alpha \ln M_b(\frac{r}{\beta}) \quad \forall \quad r < \beta b. \tag{5.19}$$

Για $b > 1$ εφαρμόζοντας την (5.15) έχουμε

$$\begin{aligned} lnM_b(\frac{r}{\beta}) &= \frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{b}{b-\frac{r}{\beta}}\right)^{b-1} - 1\right] \\ &= \frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{b}{\frac{\beta b - r}{\beta}}\right)^{b-1} - 1\right] \\ &= \frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-1} - 1\right], \end{aligned}$$

δηλαδή

$$\ln M_b(\frac{r}{\beta}) = \frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-1} - 1\right]. \tag{5.20}$$

Για $b = 1$ και τη σχέση (5.18) έχουμε

$$\begin{aligned} \ln M_b(r;\alpha,\beta) = \ln M_1(r;\alpha,\beta) &= \alpha ln\left(\frac{\beta}{\beta - r}\right) \\ &= \alpha\left[ln\beta - ln(\beta - r)\right] \\ &= \alpha ln\beta - \alpha ln(\beta - r), \end{aligned}$$

άρα

$$\ln M_b(r;\alpha,\beta) = \alpha ln\beta - \alpha ln(\beta - r) \tag{5.21}$$

Για $0 < b < 1$ και τη σχέση (5.16) έχουμε

$$\begin{aligned} \ln M_b(r;\alpha,\beta) = \alpha \ln M_b(\frac{r}{\beta}) &= \alpha\frac{b}{1-b}\left[1 - \left(\frac{b-\frac{r}{\beta}}{b}\right)^{1-b}\right] \\ &= \alpha\frac{b}{1-b}\left[1 - \left(\frac{\frac{\beta b - r}{\beta}}{b}\right)^{1-b}\right] \\ &= \alpha\frac{b}{1-b}[1 - (\frac{\beta b - r}{\beta b})^{1-b}], \end{aligned}$$

$$\ln M_b(r;\alpha,\beta) = \alpha\frac{b}{1-b}[1 - (\frac{\beta b - r}{\beta b})^{1-b}] \tag{5.22}$$

Έτσι αποδείχθηκαν οι τύποι του Πίνακα 1.

Σημειώνουμε οτι η $M_b(r;a,\beta)$ είναι της μορφής (5.1)

$$q_b(x;a,\beta) := \alpha\beta q_b(\beta x) = \alpha\beta\frac{b^b}{\Gamma(b)}(\beta x)^{b-2}e^{-b\beta x} \quad \forall \quad x>0. \tag{5.23}$$

Παρατήρηση 5.2.4. (α)Οι δυο πρώτες ροπές της γενικευμένης γαμμα κατανομής δίνονται από τους τυπους

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a}{\beta}, \qquad \mathbb{V}ar[X] = \frac{a}{\beta^2} \tag{5.24}$$

Πράγματι για $b>1$ απο τον τύπο (5.21) έχουμε

$$M_b(r;\alpha,\beta) \quad = \quad e^{\alpha\frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{\beta b}{\beta b-r}\right)^{b-1}-1\right]}.$$

Άρα

$$\begin{aligned}
\frac{dM_b(r;\alpha,\beta)}{dr} &= e^{\alpha\frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{\beta b}{\beta b-r}\right)^{b-1}-1\right]}\alpha\frac{b}{b-1}(b-1)\left(\frac{\beta b}{\beta b-r}\right)^{b-2}\left(\frac{\beta b}{(\beta b-r)^2}\right)\\
&= e^{\alpha\frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{\beta b}{\beta b-r}\right)^{b-1}-1\right]}\alpha b\left(\frac{\beta b}{\beta b-r}\right)^{b-2}\left(\frac{\beta b}{(\beta b-r)^2}\right)
\end{aligned}$$

και

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 M_b(r;\alpha,\beta)}{dr^2} &= e^{\alpha\frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-1}-1\right]} \alpha \frac{b}{b-1}(b-1)\left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-2}\left(\frac{\beta b}{(\beta b - r)^2}\right) \\
& \cdot \alpha b \left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-2}\left(\frac{\beta b}{(\beta b - r)^2}\right) \\
& + e^{\alpha\frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-1}-1\right]} \left[\alpha b(-2)\left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-3}\left(\frac{\beta b}{(\beta b - r)^2}\right)\right] \\
& \cdot \left[\frac{\beta b}{(\beta b - r)^2}\right] \\
& + e^{\alpha\frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-1}-1\right]} \alpha b \left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-2}\left(\frac{\beta b}{(\beta b - r)^4} 2(\beta b - r)\right) \\
&= e^{\alpha\frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-1}-1\right]} \alpha^2 b^2 \left[\left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-2}\right]^2 \left[\frac{\beta b}{(\beta b - r)^2}\right]^2 \\
& + e^{\alpha\frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-1}-1\right]} \left[\alpha b(-2)\left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-3}\left(\frac{\beta b}{(\beta b - r)^2}\right)^2\right] \\
& + e^{\alpha\frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-1}-1\right]} 2\alpha b \left(\frac{\beta b}{\beta b - r}\right)^{b-2}\left(\frac{\beta b}{(\beta b - r)^2}\right)^3
\end{aligned}
$$

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) = \left.\frac{dM_b(r;\alpha,\beta)}{dr}\right|_{r=0} &= e^{\alpha\frac{b}{b-1}[1-1]} \alpha b \left(\frac{\beta b}{(\beta b)^2}\right) \\
&= e^0 \alpha b \frac{1}{\beta b} \\
&= \frac{\alpha}{\beta}
\end{aligned}
$$

και

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2) = \left.\frac{d^2 M_b(r;\alpha,\beta)}{dr^2}\right|_{r=0} &= e^{\alpha\frac{b}{b-1}[1-1]}\alpha^2 b^2\left(\frac{\beta b}{(\beta b)^2}\right)^2 \\
&\quad + e^{\alpha\frac{b}{b-1}[1-1]}\alpha b(b-2)\left(\frac{\beta b}{(\beta b)^2}\right)^2 \\
&\quad + e^{\alpha\frac{b}{b-1}[1-1]}2\alpha b\left(\frac{\beta b}{(\beta b)^3}\right) \\
&= e^0\alpha^2 b^2\frac{1}{\beta^2 b^2} + \alpha b(b-2)\frac{1}{\beta^2 b^2} + 2\alpha b\frac{1}{\beta^2 b^2} \\
&= \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha b(b-2+2)}{\beta^2 b^2} \\
&= \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha b^2}{\beta^2 b^2} \\
&= \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta^2}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left[X\right] &= \mathbb{E}\left[X^2\right] - \left[\mathbb{E}\left[X\right]\right] \\
&= \frac{\alpha^2}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \\
&= \frac{\alpha}{\beta^2}
\end{aligned}$$

για $b = 1$ από τη σχέση (5.21) προκύπτει

$$\ln M_b(r;\alpha,\beta) = ln\left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^{\alpha}$$

άρα

$$\begin{aligned}
M_b(r;\alpha,\beta) &= e^{ln\left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^{\alpha}} \\
&= \left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^{\alpha},
\end{aligned}$$

$$\frac{dM_b(r;\alpha,\beta)}{dr} = \alpha\left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^{\alpha-1}\left(\frac{\beta}{(\beta-r)^2}\right)$$

και

$$\begin{aligned}
\frac{d^2M_b(r;\alpha,\beta)}{dr^2} &= \alpha(\alpha-1)\left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^{\alpha-2}\frac{\beta}{(\beta-r)^2}\frac{\beta}{(\beta-r)^2} \\
&+\alpha\left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^{\alpha-1}\frac{\beta}{(\beta-r)^4}2(\beta-r) \\
&= \alpha(\alpha-1)\left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^{\alpha-2}\frac{\beta^2}{(\beta-r)^4}+\alpha\left(\frac{\beta}{\beta-r}\right)^{\alpha-1}\frac{2\beta}{(\beta-r)^3}
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X]=\left.\frac{dM_b(r;\alpha,\beta)}{dr}\right|_{r=0} &= \alpha\left(\frac{\beta}{\beta}\right)^{\alpha-1}\frac{\beta}{(\beta)^2} \\
&= \frac{\alpha}{\beta}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2]=\left.\frac{d^2M_b(r;\alpha,\beta)}{dr^2}\right|_{r=0} &= \alpha(\alpha-1)\left(\frac{\beta}{\beta}\right)^{\alpha-2}\frac{\beta^2}{\beta^4}+\alpha\left(\frac{\beta}{\beta}\right)^{\alpha-1}\frac{2\beta}{(\beta)^3} \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)}{\beta^2}+\frac{2\alpha}{\beta^2} \\
&= \frac{\alpha^2-\alpha+2\alpha}{\beta^2} \\
&= \frac{\alpha^2+\alpha}{\beta^2}
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar\left[X\right] &= \mathbb{E}\left[X^2\right]-\left[\mathbb{E}\left[X\right]\right] \\
&= \frac{\alpha^2}{\beta^2}+\frac{\alpha}{\beta^2}-\frac{\alpha^2}{\beta^2} \\
&= \frac{\alpha}{\beta^2}
\end{aligned}$$

Ομοίως αποδεικνύεται οτί για $0<b<1$ $\mathbb{E}[X]=\frac{\alpha}{\beta}$ και $\mathbb{V}ar[X]=\frac{\alpha}{\beta^2}$
Άρα αποδείξαμε οτι $\mathbb{E}[X]=\frac{\alpha}{\beta}$ και $\mathbb{V}ar[X]=\frac{\alpha}{\beta^2}$ (ανεξάρτητα από το b) και η τρίτη κεντρική ροπή είναι

$$\mathbb{E}\left[(X-\mu)^3\right]=\frac{a}{\beta^3}\frac{b+1}{b}, \tag{5.25}$$

η οποία κυμαίνεται μεταξύ $\frac{a}{\beta^3}$ και ∞ εξαρτώμενη από την τιμή του b. Ως εκ τούτου ο προσδιορισμός μιας γενικευμένης γαμμα κατανομής με την μέθοδο των ροπών είναι δυνατή, εάν η τρίτη κεντρική ροπή είναι τουλάχιστον $\dfrac{a}{\beta^3} = \dfrac{\sigma^4}{\mu}$.

(b) Η οικογένεια των γενικευμένων γάμμα κατανομών έχει δυο γνωστά μέλη, προφανώς (για $b = 1$) την γάμμα κατανομή με σ.π.π.

$$f_1(x; a, \beta) = \frac{\beta^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\beta x} \tag{5.26}$$

και (για $b = \dfrac{1}{2}$) την αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή με σ.π.π.

$$f_{\frac{1}{2}}(x; a, \beta) = \frac{a}{\sqrt{2\pi\beta}} x^{-\frac{3}{2}} exp\left[-\frac{(\beta x - a)^2}{2\beta x}\right]. \tag{5.27}$$

Σε διαφορετική περίπτωση, για $0 < b < 1$, η $f_b(x; a, \beta)$ μπορεί να σχετίζεται με τη ευσταθή πυκνότητα με δείκτη $1 - b$, αλλά δε φαίνεται κανένας συγκεκριμένος τύπος να είναι διαθέσιμος. Εάν $b > 1$, η γενικευμένη γαμμα κατανομή είναι μια **σύνθετη κατανομή Poisson** με παράμετρο $\dfrac{\alpha b}{b-1}$ και η κατανομή ποσοτήτων άλματος είναι γάμμα με παραμέτρους b–1 και βb. Τελικά αυτό μας δείχνει ότι για $b = \infty$ μια γενικευμένη γάμμα τ.μ. είναι ένα σταθερό πολλαπλάσιο μιας τ.μ. Poisson.

(c) Δεδομένου ότι η η γενικευμένη γάμμα κατανομή είναι άπειρα διαιρετή, μπορεί να ερμηνευτεί ως η περιθώρια κατανομή μιας διαδικασίας με ανεξάρτητες και στάσιμες προσαυξήσεις. Για παράδειγμα, υπάρχει μια διαδικασία $\{S_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, έτσι ώστε η κατανομή της S_t να είναι γενικευμένη γαμμα με παραμέτρους $a_t = t$, $\beta_t = \beta$,$b_t = b$. Οι Dufresne και Gerber [15] χρησιμοποίησαν αυτή τη διαδικασία ως πρότυπο για τις συνολικές απαιτήσεις και υπολόγισαν την αντίστοιχη πιθανότητα χρεοκοπίας.

5.3 Η Γενικευμένη Αρνητική Διωνυμική Κατανομή

Θα εξετασουμε μια απαρηθμήτρια τ.μ. N, για παραδειγμα τον αριθμο των απαιτησεων ενός χαρτοφυλακίου σε ένα δεδομένο χρονικό διάστημα. Υποθέτουμε ότι η N είναι μια μεικτή κατανομή Poisson, δηλ ότι η υπο συνθήκη κατανομή του N (δοσμένης της Θ) είναι Poisson με παράμετρο Θ, οπου Θ είναι κάποια μη αρνητική τ.μ..

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της N, $m_N(z) = \mathbb{E}[z^N]$, μπορεί να εκφραστεί με τη ροπογεννήτρια $M_\Theta(r)$ του Θ ως εξής :

$$m_N(z) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[z^N|\Theta\right]\right] = \mathbb{E}\left[e^{\Theta(z-1)}\right] = M_\Theta(z-1). \tag{5.28}$$

Τοτε,το $p_k = P(\{N = k\})$ είναι ο συντελεστής του z^k της δυναμοσειράς της $m_N(z)$.

Εάν η κατανομή της Θ είναι η Γάμμα, η N είναι μια αρνητική Διωνυμική κατανομή. Πιο γενικά, αν υποθέσουμε ότι η Θ έχει μια γενικευμένη Γάμμα κατανομή, τότε η κατανομή της N καλείται μια **γενικευμένη αρνητική διωνυμική κατανομή**. Η πιθανογεννήτρια είναι

$$m_b(z; \alpha, \beta) = M_b(z-1; \alpha, \beta). \tag{5.29}$$

Οι ακριβείς τύποι εμφανίζονται στον Πίνακα 2, όπου έχουμε θέσει

$$p = \frac{\beta b}{1+\beta} \quad \text{και} \quad q = 1-p$$

Οι πρώτες τρείς ροπές της N ειναι:

$$\mathbb{E}[N] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[N|\Theta\right]\right] = \mathbb{E}[\Theta] = \frac{\alpha}{\beta} \tag{5.30}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του Λήμματος 3.1.2 και όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την (5.24).

Επίσης, σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.2 έχουμε :

$$\mathbb{V}ar(N) = \mathbb{E}[(\mathbb{V}ar(N|\Theta)] + \mathbb{V}ar[\mathbb{E}(N|\Theta)] = \mathbb{E}[\Theta] + \mathbb{V}ar[\Theta] = \frac{a}{\beta^2} + \frac{a}{\beta}. \tag{5.31}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η N είναι μεικτή Poisson με παράμετρο Θ και η τελεύταια ισότητα είναι συνέπεια της (5.24)

και

$$\mathbb{E}\left[(N-\mu)^3\right] = \frac{\alpha}{\beta^3}\frac{b+1}{b} + 3\frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta}, \tag{5.32}$$

ενας τύπος που θα επαληθευθεί αργότερα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2.

Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της γενικευμένης αρνητικής διωνυμικής κατανομής.

$G_b(z;\alpha,\beta)$	b
$exp\left\{\alpha\frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{p}{1-qz}\right)^{b-1}-1\right]\right\}$	$b>1$
$\left(\frac{p}{1-qz}\right)^{\alpha}$	$b=1$
$exp\left\{\alpha\frac{b}{1-b}\left[1-\left(\frac{1-qz}{p}\right)^{1-b}\right]\right\}$	$0<b<1$

ΠΙΝΑΚΑΣ 3.

Ερμηνεία του N ως σύνθετη τ.μ. Poisson.

λ	$g(z)$	b
$\alpha\frac{b}{b-1}(1-p^{b-1})$	$\frac{\left(\frac{p}{1-qz}\right)^{b-1}-p^{b-1}}{1-p^{b-1}}$	$b>1$
$-\alpha\ln p$	$\frac{-\ln(1-qz)}{-\ln p}$	$b=1$
$\alpha\frac{b}{1-b}(p^{b-1}-1)$	$\frac{1-(1-qz)^{1-b}}{1-p^{1-b}}$	$0<b<1$

Αφού ότι η κατανομή της Θ είναι απείρως διαιρετή, προκύπτει ότι η κατανομή της N είναι η σύνθετη Poisson, έτσι ώστε:

$$G_b(z;\alpha,\beta)=e^{\lambda[g(z)-1]}, \tag{5.33}$$

όπου λ είναι η παράμετρος της Poisson και g(z) είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση μιας απαριθμήτριας τ.μ..

Για $b>1$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
G_b(z;\alpha,\beta) &= exp\left\{\alpha\frac{b}{b-1}(1-p^{b-1})\left[\frac{\left(\frac{p}{1-qz}\right)^{b-1}-p^{b-1}}{1-p^{b-1}}-1\right]\right\} \\
&= exp\left\{\alpha\frac{b}{b-1}\left[(1-p^{b-1})\frac{\left(\frac{p}{1-qz}\right)^{b-1}-p^{b-1}}{1-p^{b-1}}-(1-p^{b-1})\right]\right\} \\
&= exp\left\{\alpha\frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{p}{1-qz}\right)^{b-1}-p^{b-1}-1+p^{b-1}\right]\right\} \\
&= exp\left\{\alpha\frac{b}{b-1}\left[\left(\frac{p}{1-qz}\right)^{b-1}-1\right]\right\}.
\end{aligned}
$$

Για $b = 1$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
G_b(z;\alpha,\beta) &= exp\left\{-\alpha\ln p\left[\frac{-\ln(1-qz)}{-\ln p}-1\right]\right\} \\
&= exp\left\{-\alpha\ln(1-qz)+\alpha\ln p\right\} \\
&= exp\left\{\ln p^{\alpha}-\ln(1-qz)^{\alpha}\right\} \\
&= exp\left\{\ln\left(\frac{p^{\alpha}}{(1-qz)^{\alpha}}\right)\right\} \\
&= \frac{p^{\alpha}}{(1-qz)^{\alpha}} \\
&= \left(\frac{p}{1-qz}\right)^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

Για $0 < b < 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
G_b(z;\alpha,\beta) &= exp\left\{\alpha\frac{b}{1-b}(p^{b-1}-1)\left[\frac{1-(1-qz)^{1-b}}{1-p^{1-b}}-1\right]\right\}\\
&= exp\left\{\alpha\frac{b}{1-b}(p^{b-1}-1)\left[\frac{1-(1-qz)^{1-b}-1+p^{1-b}}{1-p^{1-b}}\right]\right\}\\
&= exp\left\{\alpha\frac{b}{1-b}(\frac{1}{p^{1-b}}-1)\left[\frac{-(1-qz)^{1-b}+p^{1-b}}{1-p^{1-b}}\right]\right\}\\
&= exp\left\{\alpha\frac{b}{1-b}\left(\frac{1-p^{1-b}}{p^{1-b}}\right)\left[\frac{-(1-qz)^{1-b}+p^{1-b}}{1-p^{1-b}}\right]\right\}\\
&= exp\left\{\alpha\frac{b}{1-b}\left[\frac{-(1-qz)^{1-b}+p^{1-b}}{p^{1-b}}\right]\right\}\\
&= exp\left\{\alpha\frac{b}{1-b}\left[1-\left(\frac{1-qz}{p}\right)^{1-b}\right]\right\}
\end{aligned}$$

Η συγκεκριμένη μορφή του λ και του g(z) μπορούν να διαβαστούν και από τον ΠΙΝΑΚΑ 2, και τα αποτελέσματα εμφανίζονται στον ΠΙΝΑΚΑ 3.

Τώρα μπορούμε να επαληθεύσουμε τους τύπους (5.25) εώς (5.27) χρησιμοποιώνταςτους εύχρηστους τύπους.

$$\mathbb{E}[N] = \lambda g'(1) \tag{5.34}$$

$$\mathbb{V}ar[N] = \lambda[g''(1) + g'(1)] \tag{5.35}$$

$$\mathbb{E}\left[(N-\mu)^3\right] = \lambda[g'''(1) + 3g''(1) + g'(1)]. \tag{5.36}$$

Οι πιθανότητες της N, μπορούν να υπολογιστούν αναδρομικά με τη μέθοδο του Panjer. Έστω g_k οι πιθανότητες που αντιστοιχούν στην g(z),

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k z^k \tag{5.37}$$

Τότε $p_0 = e^{-\lambda}$ και

$$p_k = \frac{\lambda}{k}\sum_{i=1}^{k} i q_i p_{k-i} \tag{5.38}$$

για $k = 1, 2, 3, ...$ Εδώ μπορούν να υπολογιστούν οι ακριβείς τύποι για την g_k. Με την επέκταση της g(z) στον ΠΙΝΑΚΑ 3, βλέπουμε οτι

$$g_k = \frac{p^{b-1}}{1-p^{b-1}}\binom{1-b}{k}(-q)^k = \frac{p^{b-1}}{1-p^{b-1}}\binom{k+b-2}{k}q^k, \quad \text{για} \quad b > 1, \tag{5.39}$$

$$g_k = \frac{1}{-\ln p}\frac{q^k}{k}, \quad \text{όπου} \quad b = 1 \tag{5.40}$$

$$g_k = \frac{1}{1-p^{1-b}}\binom{1-b}{k}(-q)^{k+1}, \quad \text{για} \quad 0 < b < 1. \tag{5.41}$$

Αυτές είναι η πιθανότητες της **Αρνητικής Διωνυμικής Κατανομής** (για $b > 1$), της **λογαριθμικής κατανομής** (για $b = 1$) και μιας κατανομής την οποία οι Willmot [52] Engen [17] ονομάζουν **επεκταμένη περικομένη Αρνητικής Διωνυμικής Κατανομής** (extented truncated negative binomial distribution).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Εάν $b = 1$ η N έχει μια Αρνητική Διωνυμική Κατανομή, τότε η p_k μπορεί να ληφθεί πιο άμεσα ως συντελεστής της z^k στο ανάπτυγμα της $\mathbb{E}\left[z^N\right] = \left(\frac{p}{1-qz}\right)^{\alpha}$, δηλ

$$p_k = p^{\alpha}\binom{-\alpha}{k}(-q)^k = p^{\alpha}\binom{k+\alpha+1}{k}q^k \tag{5.42}$$

για $k = 1, 2, 3, ...$ Αν $b = \frac{1}{2}$, ένας απλούστερος τύπος αναδρομής απο τον τύπο (**??**)είναι δυνατός, αφού από τις σχέσεις

$$G'_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\beta}\left[1 - \frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-\frac{1}{2}} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta), \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}
G''_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) &= \left[\frac{\alpha}{\beta}\left[1 - \frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-\frac{1}{2}} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta)\right]' \\
&= \frac{\alpha}{\beta}(-\frac{1}{2})\left[1 - \frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-\dfrac{3}{2}}(-\frac{2}{\beta})G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) \\
&\quad + \frac{\alpha}{\beta}\left[1 - \frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-\frac{1}{2}} G'_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) \\
&= \frac{\alpha}{\beta^2}\left[1 - \frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-\dfrac{3}{2}} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) \\
&\quad + \frac{\alpha}{\beta}\left[1 - \frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-\frac{1}{2}} \frac{\alpha}{\beta}\left[1 - \frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-\frac{1}{2}} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) \\
&= \frac{\alpha}{\beta^2}\left[1 - \frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-\frac{3}{2}} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left[1 - \frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-1} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta)
\end{aligned}$$

επομένως

$$G''_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) = \frac{\alpha}{\beta^2}\left[1-\frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-\frac{3}{2}} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) + \frac{\alpha^2}{\beta^2}\left[1-\frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-1} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) \quad (5.44)$$

Από τη σχέση (5.44) έχουμε

$$\begin{aligned}
\left[1-\frac{2(z-1)}{\beta}\right] G''_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) &= \left[1-\frac{2(z-1)}{\beta}\right]\frac{\alpha}{\beta^2}\left[1-\frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-\frac{3}{2}} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) \\
&\quad + \left[1-\frac{2(z-1)}{\beta}\right]\frac{\alpha^2}{\beta^2}\left[1-\frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-1} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) \\
&= \frac{1}{\beta}\left[1-\frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-1}\frac{\alpha}{\beta}\left[1-\frac{2(z-1)}{\beta}\right]^{-\frac{1}{2}} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) \\
&\quad + \frac{\alpha^2}{\beta^2} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) \\
&= \frac{1}{\beta} G'_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) + \frac{\alpha^2}{\beta^2} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta)
\end{aligned}$$

προκύπτει οτι

$$\left[1-\frac{2(z-1)}{\beta}\right] G''_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) = \frac{1}{\beta} G'_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) + \frac{\alpha^2}{\beta^2} G_{\frac{1}{2}}(z;\alpha,\beta) \quad (5.45)$$

Αναπτύσοντας αυτές τις συναρτήσεις σε δυνάμεις του z και συγκρίνοντας τους συντελεστές του z^{n-2}, βλέπουμε ότι

$$\left(1+\frac{2}{\beta}\right) n(n-1)p_n = \frac{1}{\beta}(n-1)(2n-3)p_{n-1} + \frac{\alpha^2}{\beta^2} p_{n-z}. \quad (5.46)$$

Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση του αναδρομικού τύπου (3.5) του [52] ,(1986).

5.4 Μπεϊζιανή διάταξη

Ενώ η μεικτή Κατανομή Poisson έχει κάποιο ανεξάρτητο ενδιαφέρον, μπορεί να μελετηθεί στο Μπεϊζιανό πλαίσιο. Ας υποθέσουμε ότι η διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **σταθμισμένη διαδικασία Poisson**. Η παράμετρος Θ είναι μία τ.μ. και έχει μια $F_\Theta(\theta) = P(\{\Theta \le \theta\})$.

Έστω

$$M_\Theta(r) = \int_0^\infty e^{rx} dF_\Theta(\theta) \quad (5.47)$$

η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Θ. Δοσμένης της παρατήρησης $\{N(t) = n\}$, η εκ των υστέρων κατανομή της Θ είναι

$$P(\{\Theta \le \theta\}|\{N_t = n\}) = \frac{\int_0^\lambda \theta^n e^{-t\theta} F_\Theta(d\theta)}{\int_0^\infty \theta^n e^{-t\theta} F_\Theta(d\theta)} \quad (5.48)$$

Έτσι η εκ των υστέρων ροπογεννήτρια συνάρτηση είναι

$$\mathbb{E}(e^{r\Theta}|\{N_t = n\}) = \frac{\int_0^\infty \theta^n e^{(r-t)\theta} F_\Theta(d\theta)}{\int_0^\infty \theta^n e^{-t\theta} F_\Theta(d\theta)} = \frac{M_\Theta^{(n)}(r-t)}{M_\Theta^{(n)}(-t)} \tag{5.49}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το Grandell, Chapter 2, Proposition 2,1(v), και όπου η εδώ η $M_\Theta^{(n)}$ είναι η παράγωγος της n-τάξης της M_Θ .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η Θ ακολουθεί μια γενικευμένη κατανομή γάμμα, δηλ $M_\Theta(r) = M_b(r;\alpha,\beta)$ βλέπε Πίνακα 1. Όσο δεν υπάρχουν απαιτήσεις, αν $N_t = 0$, η εκ των προτέρων κατανομή της Θ εξακολουθεί να είναι Γενικευμένη Poisson, με παραμέτρους

$$\alpha_t = \alpha \left(\frac{\beta b}{\beta b + t}\right)^{b-1} \qquad \beta_t = \beta + \frac{t}{b} \qquad b_t = b. \tag{5.50}$$

Αυτό μπορεί να αποδειχθεί απο την (5.44) με έναν εύκολο υπολογισμό. Ωστόσο, τα πρώτα αποτελέσματα των απαιτήσεων είναι μια διπλή απογοήτευση: εάν $N_t = 1$ και εάν $b \neq 1$, βλέπουμε από την (5.44) ότι η εκ των υστέρων κατανομή της Θ δεν είναι πλέον γενικευμένη κατανομή γάμμα.

Κεφάλαιο 6

Εκτιμήσεις της διαδικασίας Delaporte

Στο Κεφάλαιο 6 θεωρούμε το μοντέλο μιας σ.δ. **Delaporte** και αρχικά παρουσιάζουμε μια προσαρμογή του σε αρκετά δεδομένα που συναντούνται στη βιβλιογραφία χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των ροπών και της εκτίμησης μεγίστης πιθανοφάνειας. Δυστυχώς οι εκτιμητές μεγίστης πιθανοφάνειας δεν μπορούν να προσδιοριστούν μέσω ενός κλειστού τύπου. Ως εκ τούτου υπολογίζονται με μεγιστοποίηση της συνάρτησης πιθανοφάνειας αριθμητικά.

Έστω ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μεικτή Poisson με δομική παράμετρο μείξης Θ ώστε $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\alpha,\beta,\gamma)$.

Ελέγχουμε την υπόθεση $H_0 : \gamma = 0$ έναντι της $H_1 : \gamma > 0$. Αυτό ελέγχει την ύπαρξη της συνιστώσας Poisson στό μοντέλο. Οι αντίστοιχοι τύποι για την Pólya-Lundberg, δηλαδη για μεικτές σ.δ. Poisson με $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\alpha,\beta)$ παρουσιάζονται στο βιβλίο του Seal [43] το 1969.

Η αίσθηση που δίνει το μοντέλο μας στις εκτιμήσεις της αξιοπιστίας είναι το γεγονός, ότι ακόμη και η καλύτερη ιστορία απαιτήσεων, δηλαδή καθόλου απαιτήσεις, δεν οδηγεί σε μηδενικό ασφάλιστρο στο όριο. Αυτό οφείλεται στην ύπαρξη της έντασης υπόβαθρου, που προκαλεί τη διαδικασία Poisson .

6.1 Ερμηνεία του μοντέλου

Υποθέτουμε ότι η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μεικτή διαδικασία Poisson, δηλαδή, αν η ένταση των απαιτήσεων είναι Θ, τότε η δεσμευμένη διαδικασία $\{N_t|\Theta\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Poisson. Εάν η ένταση Θ έχει κατανομή πιθανότητας P_Θ, τότε:

$$p_n(t) = P(N_t = n) = \int_0^\infty \frac{(\theta t)^n e^{-\theta t}}{n!} P_\Theta d\theta. \tag{6.1}$$

με $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\alpha, \beta, \gamma)$, δηλαδή

$$f_\Theta(\theta) = \begin{cases} \dfrac{\alpha^\beta (\theta-\gamma)^{\beta-1} e^{-\alpha(\theta-\gamma)}}{\Gamma(\beta)} & ,\text{αν} \quad \theta > \gamma \\ 0 & ,\text{αν} \quad \theta \leq \gamma \end{cases} \tag{6.2}$$

με θετικά α, β και γ. Από την (6.2) φαίνεται ότι η ένταση έχει ένα αυστηρα θετικό κατώτατο όριο γ. Αντικαθιστώντας την (6.2) στην (6.1) αποκτούμε:

$$p_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(k+\beta)}{\Gamma(\beta)k!} \left(\frac{\alpha}{t+\alpha}\right)^\beta \left(\frac{t}{t+\alpha}\right)^k \frac{(\gamma t)^{n-k} e^{-\gamma t}}{(n-k)!}. \tag{6.3}$$

Ο τύπος (6.3) παρουσιάζει την $p_n(t)$ ως συνέλιξη μιας Αρνητικής Διωνυμικής Κατανομής και μια κατανομής Poisson, δηλαδή $P_{N_t} = \mathbf{P}(\gamma t) * \mathbf{NB}(\beta, \dfrac{\alpha}{\alpha+t})$.

Από αυτό ή απευθείας από τη (6.2) μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι η ένταση Θ μπορεί να γραφεί ως το άθροισμα $\Theta = \gamma + \Theta_1$, όπου γ είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός, και η Θ_1 ακολουθεί την $\mathbf{Ga}(\beta, \alpha)$. Η ερμηνεία αυτων των συνιστωσών είναι:
γ: η ένταση υποβάθρου της Poisson η οποία είναι κοινή για όλους τους κινδύνους
Θ_1 : επιπλέον επιμέρους ένταση που ποικίλει από τον ένα κίνδυνο στον αλλό.

Με αυτή την ερμηνεία μπορούμε να υποθέσουμε ότι η διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, αποτελείται από δυο μεταξύ τους ανεξάρτητες συνιστώσες διαδικασίες $\{N_{1t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{N_{2t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, όπου η $\{N_{1t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Poisson με ένταση γ και η $\{N_{2t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μεικτή διαδικασία Poisson της οποίας η ένταση Θ_1 ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{Ga}(\beta, \alpha)$. Τότε

$$N_t = N_{1t} + N_{2t}, \tag{6.4}$$

όπου $P_{N_{1t}} = \mathbf{P}(\gamma t)$ και $P_{N_{2t}} = \mathbf{NB}(\beta, \dfrac{\alpha}{t+\alpha})$.

Οι ροπές της N_t υπολογίζονται ώς εξής:

$$\mathbb{E}[\Theta] = \frac{\beta}{\alpha} + \gamma$$
$$\mathbb{V}ar[\Theta] = \frac{\beta}{\alpha^2}$$
$$\mathbb{E}\left[(\Theta - \mathbb{E}[\Theta])^3\right] = \frac{2\beta}{\alpha^3}.$$

Με τη βοήθεια των ροπών της Θ, οι ροπές της N_t μπορούν να γραφούν ως:

$$\mathbb{E}[N_t] = t\mathbb{E}[\Theta]$$

$$\mathbb{V}ar[N_t] = t^2\mathbb{V}ar[\Theta] + t\mathbb{E}[\Theta]$$

$$\mathbb{E}\left[(N_t - \mathbb{E}[N_t])^3\right] = t^3\mathbb{E}\left[(\Theta - \mathbb{E}[\Theta])^3\right] + 3t^2\mathbb{V}ar[\Theta] + t\mathbb{E}[\Theta].$$

Αντικαθιστώντας λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[N_t\right] &= \left(\frac{\beta}{\alpha}+\gamma\right)t \\ \mathbb{V}ar\left[N_t\right] &= \left(\frac{\beta}{\alpha^2}\right)t^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}+\gamma\right)t \\ \mathbb{E}\left[(N_t-\mathbb{E}\left[N_t\right])^3\right] &= \left(2\frac{\beta}{\alpha^3}\right)t^3+\left(3\frac{\beta}{\alpha^2}\right)t^2+\left(\frac{\beta}{\alpha}+\gamma\right)t \end{aligned} \tag{6.5}$$

6.2 Προσαρμογή της κατανομής σε δεδομένα

Λεμε ότι ένα διάνυσμα παραμέτρων (α,β,γ) είναι **εφικτό** (feasible) αν όλα τα στοιχεία είναι θετικά. Αναλόγως, λέμε ότι ένας εκτιμητής είναι **εφικτός** αν και τα τρία στοιχεία είναι θετικά. Θεωρούμε τρεις λύσεις για την εφαρμογή της κατανομής (6.3) στα δεδομένα. Για ευκολία παίρνουμε $t = 1$.

Μέθοδος 1

Θεωρούμε πρώτα τη μέθοδο των ροπών. Παίρνουμε πρώτα δειγματοληπτικά τις τρεις πρώτες ροπές: $\overline{x}$ (δειγματική μέση τιμή), s^2 (δειγματική διακύμανση), $\overline{x}_3$(η τρίτη κεντρική δειγματική ροπή), οι δυο τελευταίες υπολογίζονται με βάρη $\dfrac{1}{n-1}$. Εξισώνοντας αυτά με τις δημοφιλείς ροπές (6.5) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha} &= \frac{2(s^2-\overline{x})}{(\overline{x}_3-3s^2+2\overline{x})}, \\ \widehat{\beta} &= (s^2-\overline{x})\widehat{\alpha}^2, \\ \widehat{\gamma} &= \overline{x}-\frac{\widehat{\beta}}{\widehat{\alpha}}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Αναγκαίες και ικανές συνθήκες για την εφικτότητα είναι: $s^2 > \overline{x},\ \overline{x}_3 > \dfrac{2s^4}{\overline{x}-s^2}$.
Η πρώτη συνθήκη συνεπάγεται ότι η δειγματική διακύμανση πρέπει να είναι μεγαλύτερη από το δειγματικό μέσο. Αυτό οφείλεται στην παρουσία της αρνητικής διωνυμικής συνιστώσας στο μοντέλο. Η συνιστώσα της Poisson δίνει διακύμανση ίση με τη μέση τιμή. Η δεύτερη συνθήκη σημαίνει ότι η κατανομή έχει μία μεγαλύτερη τρίτη κεντρική ροπή από την αρνητική διωνυμική κατανομή με τις ίδιες πρώτες δύο ροπές.

Μέθοδος 2

Επειδή η χρήση της τρίτης ροπής στην εκτίμηση μπορεί να μας δώσει υπερβολικό βάρος στην ουρά θεωρούμε εδώ μια παραλλαγή της μεθόδου των ροπών. Η ιδέα είναι να ταιριάξουν τα $\overline{x}$, s^2 και p_0, η σχετική συχνότητα της μηδενικής τάξης. Τότε πρέπει να λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{\alpha} + \gamma &= \overline{x} \\ \frac{\beta}{\alpha} + \gamma + \frac{\beta}{\alpha^2} &= s^2 \\ \left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right)^{\beta} e^{-\gamma} &= p_0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Αυτό οδηγεί στη λύση

$$\widehat{\beta} = \frac{(\overline{x} - \widehat{\gamma})^2}{s^2 - \overline{x}}, \qquad \widehat{\alpha} = \frac{\overline{x} - \widehat{\gamma}}{s^2 - \overline{x}} \tag{6.8}$$

Με το $\widehat{\gamma}$ να είναι η λύση της εξίσωσης

$$\gamma = -\ln p_0 + \frac{(\overline{x} - \widehat{\gamma})^2}{s^2 - \overline{x}} \ln \frac{\overline{x} - \gamma}{s^2 - \gamma}. \tag{6.9}$$

Η λύση που δίνεται στις (6.8) και (6.9) είναι εφικτή εάν η $\widehat{\gamma}$ βρισκεται στο ανοικτο διάστημα $(0, \overline{x})$ και $s^2 > \overline{x}$. Στη συνέχεια, θεωρούμε τις ικανές και αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη μιας μοναδικής λύσης της (6.9) στο διάστημα αυτό. Για το σκοπό αυτό, έστω

$$f(\gamma) \; := \gamma + \ln p_0 + \frac{(\overline{x} - \gamma)^2}{s^2 - \overline{x}} \ln(1 + \frac{s^2 - \overline{x}}{\overline{x} - \gamma}).$$

Η λύση της (6.9) είναι τότε ισοδύναμη με τη λύση της εξίσωσης $f(\gamma) = 0$.

Τώρα έχουμε

$$f(0) = \ln p_0 + \frac{\overline{x}^2}{s^2 - \overline{x}} \ln \frac{s^2}{\overline{x}}$$

και

$$f(\overline{x}) = \overline{x} + \ln p_0.$$

Έχουμε επίσης

$$\begin{aligned} f'(\gamma) &= 1 - \frac{2(\overline{x} - \gamma)}{s^2 - \overline{x}} \ln\left(1 + \frac{s^2 - \overline{x}}{\overline{x} - \gamma}\right) + \frac{(\overline{x} - \gamma)^2}{s^2 - \overline{x}} \left(1 + \frac{s^2 - \overline{x}}{\overline{x} - \gamma}\right)^{-1} \frac{s^2 - \overline{x}}{(\overline{x} - \gamma)^2} \\ &= 1 - \frac{2(\overline{x} - \gamma)}{s^2 - \overline{x}} \ln\left(1 + \frac{s^2 - \overline{x}}{\overline{x} - \gamma}\right) + \left(1 + \frac{s^2 - \overline{x}}{\overline{x} - \gamma}\right)^{-1}. \end{aligned}$$

Έαν θέσουμε $y := \dfrac{s^2 - \overline{x}}{\overline{x} - \gamma}$, $\quad h(y) := yf'(\gamma)$ τότε

$$\begin{aligned} h(y) &= y\left[1 - \frac{2}{y}\ln(1+y) + (1+y)^{-1}\right] \\ &= y - 2\ln(1+y) + \frac{y}{1+y} \\ &= \frac{y(1+y)+y}{1+y} - 2\ln(1+y) \\ &= \frac{2y+y^2}{1+y} - 2\ln(1+y). \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} h'(y) &= \frac{(2+2y)(1+y) - (2y+y^2)}{(1+y)^2} - 2\frac{1}{1+y} \\ &= \frac{2(1+y)^2 - 2y - 2y^2 - 2 - 2y}{(1+y)^2} \\ &= \frac{2(1+2y+y^2-2y-y^2-1)}{(1+y)^2} \\ &= \frac{2}{(1+y)^2}. \end{aligned}$$

Από αυτό είναι εύκολο να δουμε οτι $h(0) = 0$ και $h'(y) > 0$, όταν $y > 0$. Αλλά αυτό σημαίνει ότι, εάν $s^2 > \overline{x}$, τότε $f'(\gamma) > 0$ για $0 < \widehat{\gamma} < \overline{x}$. Επειδή η συνθήκη $s^2 > \overline{x}$ είναι επίσης αναγκαία για $\widehat{\beta} > 0$ έχουμε ότι οι συνθήκες

$$s^2 > \overline{x}, \qquad -\overline{x} < lnp_0 < \frac{-\overline{x}^2}{s^2 - \overline{x}} \ln \frac{s^2}{\overline{x}}$$

είναι αναγκαίες και ικανές για την ύπαρξη μιας μοναδικής εφικτής λύσης. Αυτά σημαίνουν ότι η πιθανότητα μηδενικής τάξης πρέπει να βρίσκεται μεταξύ μιας κατανομής Poisson και μιας αρνητικής διωνυμικής κατανομής με τις κατάλληλες πρώτες ρόπες.

Μέθοδος 3

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τα δεδομένα $n_0, n_1, ..., n_k$ όπου n_j είναι ο αριθμός των κινδύνων που είχαν j απαιτήσεις σε μοναδιαίο χρόνο. Η μέθοδος του εκτιμητή μεγίστης πιθανοφάνειας μας δίνει τους εκτιμητές $\widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, \widehat{\gamma}$, οι οποίοι μεγιστοποιούν τη συνάρτηση πιθανοφάνειας

$$\begin{aligned}
L(\alpha,\beta,\gamma) &= ln\prod_{j=0}^{k}(p_j(1))^{n_1}\\
&= \sum_{j=0}^{k} n_j \ln p_j(1)\\
&= \sum_{j=0}^{k} n_j\left[\beta\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}-\gamma+\ln\left(\sum_{i=0}^{j}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{\gamma^{j-i}}{i!(j-i)!(1+\alpha)^i}\right)\right]\\
&= n\beta\ln\frac{\alpha}{1+\alpha}-n\gamma+\sum_{j=0}^{k}n_j\ln\left(\gamma^j\sum_{i=0}^{k}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{i!(j-i)!(\gamma(1+\alpha))^i}\right),
\end{aligned}$$

όπου $n := n_0 + \cdots + n_k$ είναι ο συνολικός αριθμός των παρατηρούμενων κινδύνων. Για τη διευκόλυνση της μεγιστοποίησης θέτουμε $\eta := \gamma(1+\alpha)$ και $(\frac{\eta-\gamma}{\gamma})$ στη θέση του α στη συνάρτηση L. Τότε η πιθανοφάνεια είναι

$$\overline{L}(\beta,\eta,\gamma) = n\beta\ln\frac{\eta-\gamma}{\eta}-n\gamma+n\overline{x}\ln(\gamma)+\sum_{j=0}^{k}n_j\ln\left(\sum_{i=0}^{k}\frac{\Gamma(i+\beta)}{i!(j-i)!\Gamma(\beta)\eta^i}\right).$$

Αν θέσουμε την παράγωγο ως προς γ ίση με το μηδέν παίρνουμε την εξίσωση

$$\frac{-n\beta}{\eta-\gamma}-n+\frac{n\overline{x}}{\gamma}=0, \tag{6.10}$$

ή ισοδύναμα

$$\overline{x}=\gamma+\frac{\beta}{\alpha}.$$

Προκειμένου να χρησιμοποιήσουμε τις μερικές παραγώγους ως προς β και η θέτουμε

$$w_j(\beta,\eta) := \sum_{i=1}^{j}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{i!(j-i)!\eta^i}.$$

Έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial\beta}w_j=\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\sum_{i=1}^{j}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{i!(j-i)!\eta^i}\right]$$

για $i=1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{(j-1)!\eta}\right] &= \left[\frac{1}{(j-1)!\eta}\right]\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\Gamma(1+\beta)}{\Gamma(\beta)}\right]\\
&= \left[\frac{1}{(j-1)!\eta}\right]\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\beta\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta)}\right]\\
&= \frac{1}{(j-1)!\eta}
\end{aligned}$$

και
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{i=2}^{j}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{i!(j-i)!\eta^i}=\sum_{i=2}^{j}\frac{1}{i!(j-i)!\eta^i}\frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}$$

επίσης

$\Gamma(\beta+1)=\beta\Gamma(\beta)$
$\Gamma(\beta+2)=\Gamma(\beta+1+1)=(\beta+1)\Gamma(\beta+1)=(\beta+1)\beta\Gamma(\beta)$
$\Gamma(\beta+i)=(\beta+i-1)(\beta+i-2)\cdots\beta\Gamma(\beta)=\Gamma(\beta)\prod_{m=1}^{i}(\beta+m-1)$
$\dfrac{\Gamma(\beta+i)}{\Gamma(\beta)}=\prod_{m=1}^{i}(\beta+m-1)$

άρα

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{\Gamma(\beta+i)}{\Gamma(\beta)}\right] &= \sum_{i=2}^{j}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}\\ &\quad [(\beta+i-2)\cdots\beta+(\beta+i-1)(\beta+i-3)\cdots\beta+\cdots+(\beta+i-2)\cdots(\beta-1)]\\ &= \sum_{i=2}^{j}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}\sum_{j=1}^{i}\prod_{m\neq j}^{i}(\beta+m-1).\end{aligned}$$

Τότε
$$\frac{\partial}{\partial\beta}w_j=\frac{1}{(j-1)!\eta}+\sum_{i=2}^{j}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{\sum_{j=1}^{i}\prod_{m\neq j}^{i}(\beta+m-1)}{i!(j-i)!\eta^i},$$

και
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\eta}w_j &= \frac{\partial}{\partial\eta}\sum_{i=1}^{j}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{i!(j-i)!\eta^i}\\ &= \sum_{i=1}^{j}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{\partial}{\partial\eta}\frac{1}{i!(j-i)!\eta^i}\\ &= \sum_{i=1}^{j}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{i!(j-i)!}\frac{\partial}{\partial\eta}\eta^{-i}\\ &= \sum_{i=1}^{j}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{i!(j-i)!}(-i)\eta^{-i-1}\end{aligned}$$

άρα
$$\frac{\partial}{\partial\eta}w_j=\sum_{i=1}^{j}\frac{\Gamma(i+\beta)}{\Gamma(\beta)}\frac{(-i)}{i!(j-i)!\eta^{i+1}}.$$

Με τη βοήθεια αυτών έχουμε
$$\overline{L}(\beta,\eta,\gamma)=n\beta\ln\frac{\eta-\gamma}{\eta}-\eta\gamma+n\overline{x}\ln(\gamma)+\sum_{j=0}^{k}n_j\ln(w_j(\beta,\eta)),$$

και

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\bar{L} = n\beta((\eta-\gamma)^{-1}-n^{-1}) + \sum_{j=0}^{k} n_j \frac{\partial}{\partial \eta} w_j(\beta,\eta)(w_j(\beta,\eta))^{-1} \tag{6.11}$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\overline{L} = n\ln(\frac{\eta-\gamma}{\eta}) + \sum_{j=0}^{k} n_j \frac{\partial}{\partial \beta} w_j(\beta,\eta)(w_j(\beta,\eta))^{-1}. \tag{6.12}$$

Λόγω της (6.10) το τρισδιάστατο πρόβλημα μεγιστοποίησης έχει μειωθεί σε διδιάστατο. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να επιλυθεί χρησιμοποιώντας μια μέθοδο βελτιστοποίησης, η οποία χρησιμοποιεί την κλίση που δίνεται στις (6.11) και (6.13).

6.3 Έλεγχος του υποδείγματος

Μετά την προσαρμογή του μοντέλου χρησιμοποιώντας τη Μέθοδο Μεγίστης Πιθανοφάνειας, μπορούμε να ελέγξουμε το πόσο καλή είναι η προσαρμογή του μοντέλου χρησιμοποιώντας τον έλεγχο χ^2.

Αν έχουμε μια καλή προσαρμογή υπάρχει το ερώτημα εάν το γ διαφέρει σημαντικά από το μηδέν. Η περίπτωση $\gamma = 0$ αντιστοιχεί στην καθαρή αρνητική διωνιμική κατανομή, δηλ η ένταση υποβάθρου της Poisson απουσιάζει. Πρέπει να δοκιμάσουμε τη μηδενική υπόθεση H_0 : $\gamma = 0$ έναντι της εναλλακτικής υπόθεσης $H_1 : \gamma > 0$. Υπό τη μηδενική υπόθεση ο αριθμός των απαιτήσεων είναι μια αρνητική διωνιμική κατανομή. Αυτή η κατανομή προσαρμόζεται στα δεδομένα χρησιμοποιώντας τη μέθοδο μεγίστης πιθανοφάνειας. Η περιγραφή αυτής της μεθόδου για μια αρνητική διωνυμική κατανομή μπορεί να βρεθεί για παράδειγμα στους Johnson and Kotz (1969) [25]. Αυτό μας δίνει την εκτίμηση $(\overline{\beta}, \overline{\alpha})$. Αν συμβολίσουμε με $\tilde{p_i}$ και $\overline{p_i}$ τις πιθανότητες κλάσης i που δίνονται από τους εκτιμητές $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \tilde{\gamma})$ και $(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$, αντίστοιχα, τότε μπορούμε να σχηματίσουμε τη μεταβλητή ελέγχου

$$Y := -2\sum_{i=0}^{k=0} n_i \ln(\frac{\overline{p}_i}{\tilde{p}_i}) \tag{6.13}$$

Στην περίπτωση μας η τιμή $\gamma = 0$ βρίσκεται στο σύνορο του χώρου παραμέτρων. Επομένως, η ασυμπτωτική κατανομή δεν είναι $\chi^2(1)$ αλλά μια 50 : 50 μείξη της χ^2 και μιας εκφυλισμένης κατανομής στην αρχή, όπως έχει αποδειχθεί από τους Seal και Liang (1987) [45]. Αυτό σημαίνει ότι εάν εμείς επιλέξουμε το επίπεδο σημαντικότητας ε, η κρίσιμη τιμή θα είναι το (1-2ε)-κλασματικό (fractile) $\chi^2(1)$ κατανομής.

6.4 Αξιοπιστία

θα εξετάσουμε τώρα πως φαίνονται οι τύποι θεωρίας αξιοπιστίας για το μοντέλο μας. Έστω

$$p_{l|n}(s|t) := P\left(N_{t+s} - N_t = l | N_t = n\right),$$

η δεσμευμένη πιθανότητα των l απαιτήσεων σε χρόνο s με την προϋπόθεση ότι είχαμε n απαιτήσεις στο χρόνο t. Τώρα έχουμε

$$p_{l|n}(s|t) = \binom{l+n}{n}\left(\frac{t}{t+s}\right)^n \left(\frac{s}{t+s}\right)^l \frac{p_{l+n}(s+t)}{p_n(t)},$$

βλεπε Seal [43], page 27. Για παράδειγμα η πιθανότητα καμίας απαίτησης σε χρόνο s δοσμένου ότι είχαμε μηδέν απαιτήσεις σε χρόνο t είναι

$$p_{0|0}(s|t) = \left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+s}\right)^\beta e^{-\gamma s},$$

Η δεσμευμένη μέση τιμή της έντασης Θ μετά από τις n απαιτήσεις σε χρόνο t είναι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\Theta|n,t\right] &= \frac{n+1}{t}\frac{p_{n+1}(t)}{p_n(t)} \\ &= \frac{n+1}{\alpha+t}\frac{\dfrac{\sum_{k=0}^{n+1}\Gamma\left(k+\beta\right)\left(\gamma\left(\alpha+t\right)\right)^{n+1-k}}{\left((n+1-k)!k!\right)}}{\dfrac{\sum_{k=0}^{n}\Gamma\left(k+\beta\right)\left(\gamma\left(\alpha+t\right)\right)^{n-k}}{\left((n-k)!k!\right)}}.\end{aligned}$$

Επιπλέον, η δεσμευμένη σ.π.π. της Θ μετά από n απαιτήσεις σε χρόνο t μπορεί μετά από μερικούς υπολογισμούς να γραφεί ως

$$f_{\Theta|n,t}\left(\theta|n,t\right) = \frac{\left(\alpha+t\right)^\beta\left(\theta-\gamma\right)^{\beta-1}e^{-(\theta-\gamma)(\alpha+t)}}{\Gamma\left(\beta\right)}\frac{\left(\theta t\right)^n}{n!}\frac{p_0(t)}{p_n(t)}d\theta$$

για $\theta > \gamma$. Ο πρώτος παράγοντας εδώ είναι η σ.π.π της κατανομής $\mathbf{Ga}(\beta, \alpha+t, \gamma)$. Ειδικά μετά από ελεύθερο απαιτήσεων χρόνο t έχουμε

$$P_{\Theta|\{N_t=0\}} = \mathbf{Ga}(\beta, \alpha+t, \gamma)$$

έτσι ώστε

$$\mathbb{E}\left[N_{t+s} - N_t|\{N_t = 0\}\right] = \left(\frac{\beta}{\alpha+t} + \gamma\right)s$$

$$\mathbb{V}ar\left[N_{t+s} - N_t|\{N_t = 0\}\right] = \frac{\beta s^2}{\left(\alpha+t\right)^2} + \left(\frac{\beta}{\alpha+t} + \gamma\right)s.$$

Επιπλέον, εάν αφήσουμε το t να τείνει στο άπειρο, τότε

$$\lim_{t\to\infty}\mathbb{E}\left[N_{t+s} - N_t|\{N_t = 0\}\right] = \gamma s$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{V}ar\left[N_{t+s} - N_t|\{N_t = 0\}\right] = \gamma s.$$

Ισοδύναμα μπορούμε να συμπαιράνουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\Theta|\{N_t = 0\}\right] = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{\beta}{\alpha+t} + \gamma\right) = \gamma$$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{V}ar\left[\Theta|\{N_t = 0\}\right] = \lim_{t\to\infty}\frac{\beta}{(\alpha+t)^2} = 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι $\lim_{t\to\infty}(\Theta|\{N_t = 0\}) = \gamma$ κατά πιθανότητα, έτσι ώστε ένας κίνδυνος χωρίς απαιτήσεις θα προσεγγίζει έναν κίνδυνο με μία καθαρή διαδικασία Poisson. Αυτό σημαίνει επίσης ότι το ασφάλιστρο αξιοπιστίας θα συγκλίνει στο γ, και όχι στο μηδέν.

6.5 Προσαρμογή του υποδείγματος σε πραγματικά δεδομένα

Σε αυτή την ενότητα εξετάζουμε την προσαρμογή του μοντέλου μας σε ορισμένα στοιχεία που υπάρχουν στην αναλογιστική βιβλιογραφία. Υπολογίζουμε τις Εκτιμήτριες μέγιστης πιθανοφάνειας για τα α και β στην περίπτωση που $\gamma = 0$, και για α, β, γ στη γενική περίπτωση. Για να ξεκινήσουμε λύνουμε την (6.9) ως προς γ χρησιμοποιώντας $\gamma := \frac{\overline{x}}{2}$ ως πρώτη εικασία. Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε αυτό το γ μαζί με τα α και β που προέκυψαν από την (6.8) ως την αρχική εικασία για τον υπολογισμό της εκτιμήτριας μεγίστης πιθανοφάνειας. Αυτές οι εκτιμήτριες υπολογίζονται χρησιμοποιώντας τη μέθοδο Davidon-Fletcher-Powell, βλέπε Rao (1978) [39].

Η πρώτη εφαρμογή μας είναι στα δεδομένα του Trobliger (1961) [50], που ο Trobliger προσάρμοσε στα δεδομένα του ένα μοντέλο στο οποίο οι κίνδυνοι κατατάσσονται σε δύο κλάσεις «το καλό» και “το κακό”. Η προσαρμογή ήταν “καλη” για $\chi^2(1) = 0.44$. Αυτά τα δεδομένα μας δίνουν $\overline{x} = 0.14421976$, $s^2 = 0.1638699$ και $p_0 = 0.872949$. Εάν προσαρμόζεται η αρνητική διωνυμική κατανομή τότε $\overline{\alpha} = 1.117895$ $\overline{\beta} = 7.751332$ και αν το μοντέλο μας είναι προσαρμοσμένο, τότε $\overline{\alpha} = 0.2766328$, $\overline{\beta} = 3.7597937$ και $\tilde{\gamma} = 0.07064318$. Οι συχνότητες των διαφορετικών κλάσεων του μοντέλο μας και της αρνητικής διωνυμικής κατανομής μαζί με τις παρατηρούμενες συχνότητες δίνονται στον Πίνακα 1.

Εάν οι τρεις τελευταίες κατηγορίες και η κλάση ”≥ 7” είναι ενωμένες μεταξύ τους, η τιμή $\chi^2(1)$ για την καλή συμπεριφορά του μοντέλου μας είναι 0.0042. Αυτή η εξαιρετικά χαμηλή τιμή οφείλεται στο γεγονός ότι έχουν τοποθετηθεί τρεις παράμετροι. Η δοκιμασία αναλογίας πιθανοτήτων έχει τώρα την τιμή $\chi^2(1)$ 3.93 η οποία υπερβαίνει την κρίσιμη τιμή 2.706 στο επίπεδο $0,95$. Ως εκ τούτου, η υπόθεση $H_0 : \gamma = 0$ απορρίπτεται. Τώρα έχουμε την εκτίμηση

0.071 για την ένταση υποβάθρου. Αυτό μπορεί να συγκριθεί με τη μέση ένταση $\overline{x} = 0.144$ και την "καλή" ένταση $0,109$ στο μοντέλο του Trobhger. Η εκτιμώμενη ένταση υποβάθρου είναι 49% της εκτιμώμενης μέσης έντασης και 66% της εκτιμώμενης "καλής" τιμής.

Ο Willmot [53] έχει εγκαταστήσει μια εκτεταμένη αρνητική διωνυμική κατανομή σε αυτά τα δεδομένα. Η τιμή x^2 ήταν 0.0282 που δείχνει μια πολύ καλή εφαρμογή.

ΠΙΝΑΚΑΣ 1

Αριθμός των απαιτήσεων	Παρατηρησεις	Το Ruohonen μοντέλο	NB
0	20592	20591,87	20596,76
1	2651	2651,45	2631,03
2	297	296,42	318,37
3	41	41,12	37,81
4	7	6,70	4,45
5	0	1,18	0,52
6	1	0,21	0,06

Εξετάζουμε επίσης ένα άλλο παράδειγμα λίγο πιο συγκεκριμένα. Ο Thyrion (1960) [49] προσάρμοσε επίσης ένα μοντέλο τριών παραμέτρων μεικτές σ.δ. Poisson. Αυτό το μοντέλο έχει μια λογική προσάρμογη. Η εκτίμηση δεν ήταν διαθέσιμη με τη μέθοδο της μέγιστη πιθανοφάνειας και έτσι ούτε με τον χ^2 έλεγχο. Οι εκτιμημένες παράμετροι είναι $\bar{x} = 0,2143537$, $s^2 = 0.2889314$ και $p_0 = 0.82866505$. Οι εκτιμημένες αρνητικές δυωνυμικές παράμετροι είναι $\overline{\alpha} = 0.7015122$ και $\overline{\beta} = 3.2726858$. Οι εκτιμημένες παράμετροι του μοντέλου του Ruohonen είναι $\overline{\alpha} = 0.2006137$, $\overline{\beta} = 1.6665135$ και $\tilde{\gamma} = 0.09397439$. Οι υπολογισθείσες και παρατηρούμενες συχνότητες συλλέγονται στον Πίνακα 2.

Αν οι τρεις τελευταίες κλάσεις και η κλάση "≥ 8" συνεκτιμηθούν, η θετική δοκιμασία προσαρμογής για το μοντέλο μας έχει την τιμή $\chi^2(2) = 4.12$. Αυτό είναι κάτω από το 90% της τιμή $4,605$ έτσι ώστε το μοντέλο μας να μην μπορεί να απορριφθεί. Η δοκιμή πιθανοφάνειας έχει την τιμή $9,53$, η οποία υπερβαίνει ακόμη και το επίπεδο $0,995$. Η υπόθεση $H_0 : \gamma = 0$ τότε απορρίπτεται. Η εκτιμήτρια για την ένταση υποβάθρου $\tilde{\gamma} = 0.094$ είναι περίπου 44% της εκτιμημένης μέσης έντασης $\overline{x}$.

Έχουμε εξετάσει διάφορα άλλα στοιχεία από την ασφάλιση της κυκλοφορίας. Θα παραθέσουμε μια σύντομη ανασκόπηση για να εξοικονομήσουμε χώρο. Ο Lemaire (1979) [30] δίνει δεδομένα στα οποία ήδη η αρνητική διωνυμική κατανομή ταιριάζει καλά. Επομένως η υπόθεση $H_0 : \gamma = 0$ δεν απορρίπτεται. Παρ 'όλα αυτά, η εκτιμήτρια μέγιστης πιθανοφάνειας για την ένταση υποβάθρου είναι 40% της εκτιμημένης μέσης έντασης $\overline{x}$. O Delaporte (1962) [12] δίνει δεδομένα, τα οποία έχουν την ουρά βραχύτερη από την προσαρμοσμένη αρνητική διωνυμική κατανομή. Επομένως, το μοντέλο μας οδηγεί σε αρνητική τιμή για την ένταση υποβάθρου και δεν μπορεί να προσαρμοστεί σε αυτά τα δεδομένα. O Pesonen (1962) [33] διαθέτει δεδομένα στα οποία ήδη το αρνητικό διωνυμικό μοντέλο ταιριάζει καλά και η υπόθεση μηδενικής έντασης υποβάθρου δεν απορρίπτεται. Και πάλι, ωστόσο, η εκτιμημένη ένταση υποβάθρου είναι ένα μεγάλο ποσοστό, 60%, της εκτιμημένης μέσης έντασης $\overline{x}$. O Mule (1972) [32] περιλαμβάνει δύο σειρές δεδομένων, A και B. Τα δεδομένα A οδηγούν σε παρόμοια προσομοίωση με αυτή του Delaporte και τα δεδομένα B είναι παρόμοια με εκείνα των Pesonen και Lemaire. Τέλος, ο Bühlmann (1970) [9] δίνει δεδομένα για τα οποία απορρίπτεται η μηδενική υπόθεση μηδενικής έντασης υποβάθρου με υψηλή τιμή χ^2. Από την άλλη, το $\tilde{\gamma}$ είναι τόσο χαμηλό όσο το $0,37\overline{x}$. Οι Gossieaux και Lemaire (1981) [22] έχουν επίσης εξετάσει τα ίδια δεδομένα και έχουν βρει ότι η καλύτερη προσαρμογή μεταξύ των τεσσάρων κατανομών δίνεται από μια μείξη δύο κατανομών Poisson.

Ως συμπέρασμα πρέπει να παραδεχτούμε ότι το μοντέλο που παρουσιάζεται εδώ δεν είναι μια γενική λύση στο πρόβλημα του προσδιορισμού της κατανομής του αριθμού των απαιτήσεων. Εάν τα δεδομένα έχουν μια μακρά ουρά, τότε αυτό το μοντέλο αξίζει να εξεταστεί. Εάν η ουρά δεν είναι βαρια τότε η καλή εφαρμογή της αρνητικής διωνυμικής κατανομής δεν μπορεί να διορθωθεί χρησιμοποιώντας αυτό το μοντέλο με θετικό γ. Ωστόσο, οι γνώσεις που διαθέτουμε για την προσαρμογή αυτού του μοντέλου δείχνουν ότι στις περισσότερες περιπτώσεις η ένταση υποβάθρου είναι κάπου γύρω από το μισό του μέσου όρου, περίπου μεταξύ $0,4\tilde{\gamma}$ και $0,6\tilde{\gamma}$.

ΠΙΝΑΚΑΣ 2

Αριθμός των απαιτήσεων	Παρατηρησεις	Το Ruohonen μοντέλο	NB
0	7840	1837,40	7847,01
1	1317	1326,16	1288,36
2	239	222,76	256,53
3	42	52,68	54,07
4	14	15,08	11,71
5	4	4,66	2,58
6	4	1,50	0,57
6	1	0,50	0,13

Παραρτήματα

Παράρτημα A

Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Στο παράρτημα αυτό αναφέρονται βασικές έννοιες της θεωρίας μέτρου που χρειαζόμαστε στην μελέτη των κατανομών Hofmann. Για τις έννοιες που δεν αναφέρονται εδώ, παραπέμπουμε στο [4], Κεφάλαιο 1 και 2.

A.1 Χρήσιμες έννοιες και ορισμοί

Ορισμός A.1.1. Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) δύο χ.π. και $\mathcal{G} := \{A \times B : \ A \in \Sigma, \ B \in T\}$.

(a) Η οικογένεια $\Sigma \otimes T := \sigma(\mathcal{G})$ ονομάζεται η **σ-άλγεβρα γινόμενο** της Σ και T.

(b) Για κάθε $E \subseteq \Omega \times \Upsilon$, και $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ αυθαίρετα αλλά σταθερά, τα σύνολα

$$E_x := \{\bar{y} \in \Upsilon : (x, \bar{y}) \in E\}$$

και

$$E^y := \{\bar{x} \in \Omega : (\bar{x}, y) \in E\}$$

ονομάζονται η **x-τομή** και η **y-τομή** (x-section and y-section) του E, αντίστοιχα.

(c) Αν η $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση και τα $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ είναι αυθαίρετα αλλά σταθερά, τότε οι συναρτήσεις

$$f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R} : \bar{y} \longmapsto f_x(\bar{y}) := f(x, \bar{y})$$

και

$$f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R} : \bar{x} \longmapsto f^y(\bar{x}) := f(\bar{x}, y)$$

ονομάζονται η **x-τομή** της f και η **y-τομή** της f, αντίστοιχα.

Λήμμα A.1.2. *Έστω (Ω, Σ) και (Υ, T) μετρήσιμοι χώροι. Τότε ισχύει:*

(i) *Για κάθε* $E \in \Sigma \otimes T$ *και για κάθε* $x \in \Omega$ *και* $y \in \Upsilon$ *έχουμε* $E_x \in T$ *και* $E^y \in \Sigma$.

(ii) *Για κάθε* $\Sigma \otimes T$*- μετρήσιμη συνάρτηση* $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ *και για κάθε* $x \in \Omega$ *και* $y \in \Upsilon$ *οι συναρτήσεις* $f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ *και* $f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ *είναι* T*- και* Σ*- μετρήσιμες, αντίστοιχα.*

Θεώρημα A.1.3. *(Fubini για δείκτριες συναρτήσεις) Έστω* (Ω, Σ, P) *και* (Υ, T, Q) *χ.π., και* $E \in \Sigma \otimes T$ *αυθαίρετο αλλά σταθερό. Τότε η συνάρτηση* $Q(E_\bullet) : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ *με* $x \longmapsto Q(E_x)$ *είναι* Σ*-μετρήσιμη και η συνάρτηση* $P(E^\bullet) : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ *με* $y \longmapsto P(E^y)$ *είναι* T*-μετρήσιμη και ισχύει*

$$\int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy). \tag{A.1}$$

Θεώρημα A.1.4. *(Ύπαρξη και μοναδικότητα του μέτρου γινόμενο) Έστω* (Ω, Σ, P) *και* (Υ, T, Q) *χ.π. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας* $P \otimes Q : \ \Sigma \otimes T \longmapsto [0, 1]$ *ώστε*

$$(P \otimes Q)(A \times B) = P(A)Q(B)$$

για κάθε $A \in \Sigma$ *και* $B \in T$*. Το μέτρο* $P \otimes Q$ *ονομάζεται το* **μέτρο γινόμενο** *των* P *και* Q*, Επιπλέον, για κάθε* $E \in \Sigma \otimes T$ *ισχύει*

$$(P \otimes Q)(E) = \int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy).$$

Για τις αποδείξεις των τριών τελευταίων αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [10], Theorem 5.1.3.

Θεώρημα A.1.5. *(Fubini για μη αρνητικές συναρτήσεις) Έστω* (Ω, Σ, P) *και* (Υ, T, Q) *χ.π.. Για κάθε* $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto [0, \infty] \quad \Sigma \otimes T - \mathfrak{B}([0, \infty])$*-μετρήσιμη συνάρτηση θέτουμε*

$$\varphi_f : \Omega \longmapsto [0, \infty] \quad \text{με} \quad \varphi_f(x) := \int_\Upsilon f_x(y)Q(dy)$$

και

$$\psi_f : \Upsilon \longmapsto [0, \infty] \quad \text{με} \quad \psi_f(y) := \int_\Omega f^y(x)Q(dx).$$

Τότε η φ_f *είναι* $\Sigma - \mathfrak{B}([0, \infty])$*-μετρήσιμη, η η* ψ_f *είναι* $T - \mathfrak{B}([0, \infty])$*-μετρήσιμη και ισχύει*

$$\int_{\Omega \times \Upsilon} f dP \otimes Q = \int_\Omega \varphi_f dP = \int_\Upsilon \psi_f dQ$$

δηλαδή

$$\begin{aligned}\int_{\Omega \times \Upsilon} f d(P \otimes Q) &= \int_\Omega \int_\Upsilon f(x, y)Q(dy)P(dx) \\ &= \int_\Upsilon \int_\Omega f(x, y)P(dx)Q(dy)\end{aligned}$$

Για την απόδειξη βλ. [10], Proposition 5.2.1.

Θεώρημα Α.1.6. *(Fubini) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. και $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ me $f \in \mathcal{L}^1(P \otimes Q)$. Τότε*

(i)

$$f_x \in \mathcal{L}^1(Q), \quad \text{για} \quad P-\sigma.o \quad \text{τα} \quad x \in \Omega$$

και

$$f^y \in \mathcal{L}^1(P), \quad \text{για} \quad Q-\sigma.o \quad \text{τα} \quad y \in \Upsilon,$$

(ii) *οι συναρτήσεις* $\varphi_f : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ *με* $\varphi_f(x) := \begin{cases} \int_\Upsilon f_x(y)Q(dy), & \text{αν} \quad f_x \in \mathcal{L}^1(Q) \\ 0, & \text{αλλιώς}, \end{cases}$ *kai*

$\psi_f : \Upsilon \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ *με* $\psi_f(y) := \begin{cases} \int_\Omega f^y(x)P(dx), & \text{αν} \quad f^y \in \mathcal{L}^1(P) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ *ανήκουν στον* $\mathcal{L}^1(P)$ *και* $\mathcal{L}^1(Q)$, *αντίστοιχα,*

(iii) *ισχύει*

$$\int_{\Omega\times\Upsilon} f d(P\otimes Q) = \int_\Omega \varphi_f dP = \int_\Upsilon \psi_f dQ$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\times\Upsilon} f d(P\otimes Q) &= \int_\Omega \int_\Upsilon f(x,y)Q(dy)P(dx) \\ &= \int_\Upsilon \int_\Omega f(x,y)P(dx)Q(dy) \end{aligned}$$

όπου θέτουμε

$$\int_\Upsilon f(x,y)Q(dy) = 0, \quad \text{αν} \quad f_x \notin \mathcal{L}^1(Q)$$

και

$$\int_\Omega f(x,y)P(dx) = 0, \quad \text{αν} \quad f^y \notin \mathcal{L}^1(P).$$

Για την απόδειξη βλ. [10], Theorem 5.2.2.

Παράρτημα B

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Στο παράρτημα αυτό δίνονται ορισμένοι βασικοί ορισμοί της Θεωρίας Πιθανοτήτων καθώς και οι κατανομές πιθανότητας που αναφέρθηκαν στην παρούσα εργασία.

B.1 Χρήσιμοι Ορισμοί

Ορισμός B.1.1. Η συνάρτηση $\Gamma : (0, \infty) \longmapsto (0, \infty)$ που δίνεται από την

$$\Gamma(\gamma) := \int_0^\infty e^{-x} x^{\gamma-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Γάμμα**.

Η συνάρτηση Γάμμα έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(\gamma+1) &= \gamma\Gamma(\gamma) \end{aligned}$$

Επιπλέον για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{B.1}$$

Δηλαδή, οι τιμές της Γάμμα για $n \in \mathbb{N}_0$, αντιστοιχούν σε παραγωντικά.

Ορισμός B.1.2. Η συνάρτηση $B : (0, \infty) \times (0, \infty)$ που δίνεται από την

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Βήτα**.

Η θεμελιώδης ταυτότηα για την συνάρτηση Βήτα είναι

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιότητες της συνάρτησης Βήτα εξαρτώνται απο την συνάρτηση Γαμμα.

Ορισμός B.1.3. Για $\alpha\in\mathbb{R}$ και $m\in\mathbb{N}_0$ ο γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής ορίζεται να είναι

$$\binom{\alpha}{m}:=\prod_{j=0}^{m-1}\frac{a-j}{m-j}. \tag{B.2}$$

Πόρισμα B.1.4. *Για $\alpha\in(0,\infty)$ και $m\in\mathbb{N}_0$, από τις ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα ισχύει*

$$\binom{a+m-1}{m}=\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!} \tag{B.3}$$

Απόδειξη. Για $\alpha\in(0,\infty)$ και $m\in\mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\binom{a+m-1}{m} &= \prod_{j=0}^{m-1}\frac{a+m-1-j}{m-j}=\frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots m}\\ &= \frac{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\dots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot m!}=\frac{(a+m-1)!}{(a-1)!\cdot m!}\\ &= \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!}.\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του ορισμού του διωνυμικου συντελεστή και η τελευταία απο την ιδιότητα (B.1) της συνάρτησης Γάμμα. □

Ορισμός B.1.5. Έστω (Ω,Σ,P) ένας χ.π. Μία συνάρτηση $X:\Omega\longmapsto\mathbb{R}$ ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή** (τ.μ. για συντομία), αν για κάθε $B\in\mathcal{B}$ ισχύει $X^{-1}(B)\in\Sigma$. Για μια τ.μ X: $\Omega\longmapsto\mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X:\mathfrak{B}\longmapsto\mathbb{R}$ με τύπο

$$P_X(B):=P(X^{-1}(B))\quad \text{για κάθε}\quad B\in\mathfrak{B}$$

είναι ένα μέτρο πιθανότητας και ονομάζεται **κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X** . Μάλιστα, αν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\})=1$, τότε η P_X ονομάζεται **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)** (degenerate (probability) distribution).

Η P_X (αντίστοιχα η τ.μ. X) παράγει την **συνάρτηση κατανομής** (*σ.κ.*) $F_X:\mathbb{R}\longmapsto[0,1]$ **της τ.μ.** X, που ορίζεται από τον τύπο:

$$F_X(x):=P_X((-\infty,x])=P(X\le x)\quad\text{για κάθε}\quad x\in\mathbb{R}.$$

Από Πρόταση 1.4.9, [4], αποδεικνύεται πως η F_X είναι πράγματι *σ.κ.* Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως η *σ.κ.* F_X μιας τ.μ. X ικανοποιεί τη σχέση:

$$P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}, B \in \mathfrak{B}.$$

όπου $\lambda_{F_X}(B)$ είναι μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την F_X (βλ. π.χ [4], Πρόταση 1.4.10).

Μια (*σ.κ.*) $F : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ ονομάζεται:

- **Διακριτή** αν και μόνο αν είναι της μορφής

  $$F(x) = \sum_{k \in K : k \leq x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

  για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \longmapsto \mathbb{R}_+$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** (*σ.π.*) της F.

- **Συνεχής** αν η F είναι συνεχής συνάρτηση.

- **Απόλυτα Συνεχής** αν είναι της μορφής:

  $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

  για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (*σ.π.π.*).

Προφανώς, αν η τ.μ. X είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας συνεχής τ.μ. θα εννοούμε απόλυτα συνεχής τ.μ. Επίσης θα λέμε ότι η τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$, όπου $m \in \mathbb{N}$ και $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν και μόνο αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X} d\nu(x) = \int_{B \cap R_X} f_X(x) d\nu(x) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

όπου f_X η αντίστοιχη *σ.(π.)π.*, και ν το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}_0$ ή το μέτρο του Lebesgue λ επάνω στο $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. X είναι συνεχής ή διακριτή.
Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το R_X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Ορισμός Β.1.6. Για μια τ.μ. $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$\mathbb{E}_P[X] := \int X dP = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

ονομάζεται η **μέση τιμή** ή **αναμενόμενη τιμή** ή **μαθηματική ελπίδα** της τ.μ. X. Για λόγους απλοποίησης μπορούμε να γράψουμε $\mathbb{E}[X]$ αντί $\mathbb{E}_P[X]$. Ειδικά αν η τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, και είναι ένας αριθμός.

Ορισμός Β.1.7. Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Ένα $R \subseteq \Omega \times \Upsilon$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο** του $\Omega \times \Upsilon$ αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επιπρόσθετα, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται **σ-άλγεβρα γινόμενο** των Σ και T και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.

Έστω επίσης ο χ.π. $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μέτρο ρ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των P και Q** και συμβολίζεται με $P \otimes Q$, αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = P(A)Q(B)$. Η τριάδα $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, P \otimes Q)$ ονομάζεται **χ.π. γινόμενο**.

Ορισμός Β.1.8. Εάν I είναι ένα οποιοδήποτε μή κενό σύνολο δεικτών, και $\{\Omega_i, \Sigma_i, P_i\}_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\varnothing \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον χ.π. γινόμενο $\otimes_{i \in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := (\prod_{i \in J} \Omega_i \otimes_{i \in J} \Sigma_i \otimes_{i \in J} P_i)$. Αν (Ω, Σ, P) είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με P^I την **πιθανότητα γινόμενο** στον Ω^I και με Σ^I το πεδίο ορισμού του P^I.

Ορισμοί Β.1.9. *Τα ενδεχόμενα* $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma$ $(n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 2)$ *ονομάζονται* **ανεξάρτητα** *αν και μόνο αν* $P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$ *για κάθε* $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ *και για κάθε* $k \in \mathbb{N}$. *Ομοίως, οι τ.μ.* $X_1, \ldots, X_n : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 2)$ *ονομάζονται* **ανεξάρτητες** *αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία* $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ *πραγματικών αριθμών, τα ενδεχόμενα* $\{X_k \leq \alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ *είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ.* $X_1, \ldots, X_n$ *είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία* $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ *στοιχείων της* $\mathfrak{B}$ *τα ενδεχόμενα* $\{X_k \in B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ *είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ.[4, Παρατήρηση 3.2.5], (b)). Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται* **ανεξάρτητη** *αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.*

Οι σ*-υποάλγεβρες* $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ $(n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 2)$ *της* Σ *ονομάζονται* **ανεξάρτητες** *αν και μόνο αν για κάθε* $k \in \mathbb{N}_n$ *και για κάθε* $A_k \in \Sigma_k$ *τα* $A_1, \ldots, A_n$ *είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια* σ*-υποαλγεβρών της* Σ *ονομάζεται* **οικογένεια ανεξάρτητων σ-υποαλγεβρών της** Σ *αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε πεπερασμένες στο πλήθος από αυτές, είναι ανεξάρτητες.*

Ορισμοί B.1.10. *Μία οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$, όπου I ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (βλ. π.χ. [?, Ορισμός 1.19]), μετρήσιμων συναρτήσεων $X_j : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ $(j \in I)$ ονομάζεται* **στοχαστική διαδικασία (σ.δ.) ή στοχαστική ανέλιξη**. *Επιπλέον, αν το I είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια* **σ.δ. συνεχούς χρόνου** *, ενώ αν το $I \subseteq \mathbb{Z}$, τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια* **σ.δ. διακριτού χρόνου** *.*

Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$:

- *Είναι μια* **σ.δ. ανεξάρτητων προσαυξήσεων** *ή έχει* **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** *αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ οι* **προσαυξήσεις** *$X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j \in \mathbb{N}_m)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.*
- *Είναι μια* **σ.δ. στάσιμων προσαυξήσεων** *ή έχει* **στάσιμες προσαυξήσεις** *αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\mathbb{N}_m}$, έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m}$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε $h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{(X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h})_{j\in\mathbb{N}_m}} = P_{(X_{t_j}-X_{t_{j-1}})_{j\in\mathbb{N}_m}}$.*

Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\xi} : \mathfrak{B} \longmapsto \mathbb{R}_+$ **το μέτρο απαρίθμησης** που συγκεντρώνεται στο $\mathbb{N}_0$, και με $\boldsymbol{\lambda} : \mathfrak{B} \longmapsto \mathbb{R}_+$ **το μέτρο Lebesgue**. Τα μέτρα αυτά είναι σ-πεπερασμένα, και τα πιο σημαντικά μέτρα πιθανότητας με πεδίο ορισμού την $\mathfrak{B}$ είναι απόλυτα συνεχή με τα $\boldsymbol{\xi}$ και $\boldsymbol{\lambda}$.
Για $n \in \mathbb{N}_0$, συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\lambda}^n : \mathfrak{B}_n \longmapsto \mathbb{R}$ το n-διάστατο μέτρο Lebesgue.

B.2 Γενικές έννοιες στις κατανομές

Ένα μέτρο πιθανότητας $Q : \mathfrak{B}_n \longmapsto [0, 1]$ ονομάζεται **κατανομή** (distribution).
Μια κατανομή ονομάζεται **εκφυλισμένη** (degenerate) αν υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Στην συνέχεια του παρόντος παραρτήματος θεωρούμε μόνο κατανομές με πεδίο ορισμού το $\mathfrak{B}$.

Για $y \in \mathbb{R}$, η **κατανομή Dirac** δ_y ορίζεται να είναι η (εκφυλισμένη) κατανομή Q που ικανοποιεί την

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Λόγω του ιδιαίτερου ρόλου της κατανομής Dirac, όλες οι παραμετρικές κλάσεις των κατανομών που μελετούνται παρακάτω ορίζονται ως μη-εκφυλισμένες κατανομές.

Θεωρούμε τις κατανομές $Q, R : \mathfrak{B} \longmapsto [0, 1]$.

Μέση Τιμή και Ροπές ανώτερης τάξης

Ορισμός Β.2.1. Αν

$$\min\left\{\int_{(-\infty,0]}(-x)Q(dx), \int_{\mathbb{R}_+} xQ(dx)\right\} < \infty,$$

τότε **η μέση τιμή** της Q υπάρχει και ορίζεται από την σχέση

$$E[Q] := \int_{\mathbb{R}} xQ(dx).$$

Αν

$$\max\left\{\int_{(-\infty,0]}(-x)Q(dx), \int_{\mathbb{R}_+} xQ(dx)\right\} < \infty,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}} |x|Q(dx) < \infty$$

τότε η μέση τιμή της Q υπάρχει και ονομάζεται **πεπερασμένη μέση τιμή** .

Ορισμός Β.2.2. Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty,$$

τότε λέμε ότι η Q έχει **πεπερασμένη ροπή τάξης n** ή έχει **n−οστή ροπή** που ορίζεται από την σχέση

$$E[Q^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx).$$

Η κατανομή Q λέμε ότι έχει πεπερασμένες ροπές τάξης k αν η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty$$

ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$.
Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν η Q έχει πεπερασμένη ροπή τάξης n, τότε έχει πεπερασμένη ροπή τάξης k για όλα τα $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Διακύμανση και Συντελεστής μεταβλητότητας

Ορισμός Β.2.3. Αν η Q έχει πεπερασμένη μέση τιμή , τότε **η διακύμανση** της Q ορίζεται να είναι

$$Var[Q] := \int_{\mathbb{R}} (x - E[Q])^2 Q(dx).$$

Προφανώς ισχύει

$$Var[Q] = E[Q^2] - E[Q]^2.$$

Ορισμός Β.2.4. Αν για την Q ισχύει ότι $Q[\mathbb{R}_+ = 1$ και $E[Q] \in (0, \infty)$,τότε **ο συντελεστής μεταβλητότητας** της Q ορίζεται από την σχέση

$$v[Q] := \frac{\sqrt{Var[Q]}}{E[Q]}.$$

Χαρακτηριστική συνάρτηση

Ορισμός Β.2.5. Η χαρακτηριστική συνάρτηση ή **ο μετασχηματισμός Fourier** της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $\varphi_Q : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{C}$ που δίνεται από την

$$\varphi_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izx} Q(dx)$$

με $\varphi_Q(0) = 1$.

Ένα αποτέλεσμα των μετασχηματισμών Fourier είναι ότι η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την χαρακτηριστική της συνάρτηση φ_Q.

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Β.2.6. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $M_Q : \mathbb{R} \longmapsto [0, \infty]$ που δίνεται από την

$$M_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{zx} Q(dx)$$

με $M_Q(0) = 1$.

Αν η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Q είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή γύρω από το μηδέν, τότε η Q έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\frac{d^n M_Q}{dz^n}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx). \tag{B.4}$$

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Β.2.7. Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$ τότε **η πιθανογεννήτρια συνάρτηση** της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $m_Q : [-1, 1] \longmapsto \mathbb{R}$ που δίνεται από την

$$\begin{aligned} m_Q(z) &:= \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n Q[\{n\}]. \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n m_Q}{dz^n}(0) = Q[\{n\}], \tag{B.5}$$

η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την πιθανογεννήτρια συνάρτησή της m_Q.

Πρόταση B.2.8. *Έστω ότι $Q[\mathbb{N}_0] = 1$. Τότε οι δύο πρώτες ροπές της κατανομής Q υπολογίζονται άμεσα από την πιθανογεννήτρια συνάρτηση σύμφωνα με τις σχέσεις*

$$E[Q] = \frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} \tag{B.6}$$

$$E[Q^2] = \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} + \frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} \tag{B.7}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον Ορισμό B.2.7 ισχύει

$$m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx)$$

επομένως αν παραγωγίσουμε ως προς z θα ισχύει

$$\frac{d}{dz} m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} x z^{x-1} Q(dx)$$

άρα για $z = 1$ θα έχουμε ότι

$$\frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} = \int_{\mathbb{R}} x Q(dx) = E[Q].$$

Αν βρούμε και την δεύτερη παράγωγο της πιθανογεννήτριας συνάρτησης ως προς z θα ισχύει

$$\frac{d^2}{dz^2} m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} x(x-1) z^{x-2} Q(dx)$$

άρα για $z = 1$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} &= \int_{\mathbb{R}} x(x-1) Q(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 Q(dx) - \int_{\mathbb{R}} x Q(dx) \\ &= E[Q^2] - E[Q] \end{aligned}$$

επομένως για την δεύτερη ροπή θα ισχύει

$$\begin{aligned} E[Q^2] &= \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} + E[Q] \\ &= \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} + \frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} \end{aligned}$$

□

Συνέλιξη

Ορισμός Β.2.9. Αν η $+ : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}$ είναι μια απεικόνιση με $+(x, y) := x + y$, τότε η

$$Q * R := (Q \otimes R)_+$$

είναι μια κατανομή, η οποία ονομάζεται **συνέλιξη** των Q και R.

Οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι άμεσες συνέπειες του Ορισμού Β.2.9 και του Θεωρήματος Fubini για μέτρα (βλ. Θεώρημα Α.1.4).

Πρόταση Β.2.10. *Η ισότητα*

$$(Q * R)(B) = \int_{\mathbb{R}} Q(B - y)R(dy)$$

ισχύει για κάθε $B \in \mathfrak{B}$. *Ιδιαιτέρως ισχύει*

$$(Q * \delta_y)(B) = (\delta_y * Q)(B) = Q(B - y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$ *και* $b \in \mathfrak{B}$.

Απόδειξη. Έστω $B \in \mathfrak{B}$. Τότε

$$\begin{aligned}
(Q * R)(B) &= (Q \otimes R)_+(B) \\
&:= (Q \otimes R)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in B\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} Q(\{x \in \mathbb{R} : x \in B - y\})R(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} Q(B - y)R(dy),
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος Α.1.4.

Ιδιαιτέρώς για οποιαδήποτε $y \in \mathbb{R}$ και $B \in \mathfrak{B}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
(Q * \delta_y)(B) &= (\delta_y * Q)(B) \\
&= (Q \otimes \delta_y)_+(B) \\
&= Q \otimes \delta_y(\{(x, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : x + \bar{y} \in B\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} Q(B - \bar{y})\delta_y(d\bar{y}) \\
&= Q(B - y),
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος Α.1.4. □

Πρόταση Β.2.11. *Η συνέλιξη ικανοποιεί τις ισότητες*

$$Q * R = R * Q$$

$$\varphi_{Q*R} = \varphi_Q \cdot \varphi_R$$

$$M_{Q*R} = M_Q \cdot M_R$$

Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1 = R[\mathbb{N}_0]$, *τότε ισχύει*

$$m_{Q*R} = m_Q \cdot m_R.$$

Πρόταση B.2.12. *Αν οι κατανομές* Q *και* R *έχουν πεπερασμένη μέση τιμή τότε ισχύει*

$$E[Q * R] = E[Q] + E[R]$$

και αν επιπλέον έχουν και πεπερασμένες δεύτερες ροπές τότε

$$Var[Q * R] = Var[Q] + Var[R].$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση B.2.12 για την ροπογεννήτρια της $Q * R$ ισχύει $M_{Q*R} = M_Q \cdot M_R$. Επιπλέον από την B.4 ισχύει ότι

$$E[Q * R] = \frac{dM_{Q*R}}{dz}(0), \quad \mathbb{E}[(Q * R)^2] = \frac{d^2 M_{Q*R}}{dz^2}(0).$$

Επομένως θα ισχύει

$$\begin{aligned} M'_{Q*R}(z) &= \Big(M_Q(z) \cdot M_R(z)\Big)' = M'_Q(z)M_R(z) + M_Q(z)M'_R(z) \\ M''_{Q*R}(z) &= \Big(M_Q(z) \cdot M_R(z)\Big)'' = M''_Q(z)M_R(z) + 2M'_Q(z)M'_R(z) + M_Q(z)M''_R(z) \end{aligned}$$

και άρα θα ισχύει

$$\begin{aligned} E[Q * R] &= M'_{Q*R}(0) \overset{(B.4)}{=} E[Q] + E[R] \\ \mathbb{E}[(Q * R)^2] &= M''_{Q*R}(0) \overset{(B.4)}{=} E[Q^2] + 2E[Q]E[R] + E[R^2]. \end{aligned}$$

Επομένως για την διακύμανση θα ισχύει

$$\begin{aligned} Var[Q * R] &= \mathbb{E}[(Q * R)^2] - E[Q * R]^2 \\ &= E[Q^2] + 2E[Q]E[R] + E[R^2] - E[Q]^2 - 2E[Q]E[R] - E[R]^2 \\ &= E[Q^2] - E[Q]^2 + E[R^2] - E[R]^2 \\ &= Var[Q] + Var[R] \end{aligned}$$

$\square$

Πρόταση B.2.13. *Αν* $Q = \int f \, d\nu$ *και* $R = \int g \, d\nu$ *για* $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, *τότε* $Q * R = \int f * g \, d\nu$, *όπου η απεικόνιση* $f * g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}_+$ *ορίζεται*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\nu(dy).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση B.2.10, για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} [Q * R](B) &= \int_{\mathbb{R}} Q[B-y]R(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{B-y} f(x)\nu(dx)\ g(y)\nu(dy) \end{aligned}$$

□

Ορισμός B.2.14. Για $n \in \mathbb{N}_0$, η n-οστή συνέλιξη της Q όριζεται από την σχέση

$$Q^{*n} := \begin{cases} \delta_0, & \text{αν } n = 0 \\ Q * Q^{*(n-1)}, & \text{αν } n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Αν η $Q = \int f\ d\nu$, για $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, τότε η συνάρτηση πιθανότητας της Q^{*n} ως προς το μέτρο ν συμβολίζεται f^{*n}.

B.3 Διακριτές κατανομές

Ορισμός B.3.1. Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longmapsto [0,1]$ ονομάζεται **διακριτή**, αν υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $S \in \mathfrak{B}$ που ικανιποιεί την $Q[S] = 1$. Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$, τότε η Q είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο απαρίθμισης $\boldsymbol{\xi}$.

Η διωνυμική κατανομή

Ορισμός B.3.2. Για $m \in \mathbb{N}_0$ και $\theta \in (0,1)$, η **διωνυμική κατανομή** $\mathbf{B}(m, \theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \{0, 1, \ldots, m\}$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \binom{m}{x} \theta^x (1-\theta)^{m-x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = m\theta$$

- Διακύμανση:
$$Var[Q] = m\theta(1-\theta)$$

- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \big((1-\theta) + \theta e^{iz}\big)^m$$

- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_Q(z) = ((1-\theta) + \theta e^z)^m$$

- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:

$$m_Q(z) = ((1-\theta) + \theta z)^m$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Bernoulli** με $\mathbf{B}(\theta) := \mathbf{B}(1,\theta)$

Η αρνητική διωνυμική κατανομή

Ορισμός B.3.3. Για $\alpha \in (0,\infty)$ και $\theta \in (0,1)$, **η αρνητική διωνυμική κατανομή** $\mathbf{NB}(\alpha,\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \binom{\alpha + x - 1}{x}\theta^\alpha (1-\theta)^x.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:

$$E[Q] = \alpha\frac{1-\theta}{\theta}$$

- Διακύμανση:

$$Var[Q] = \alpha\frac{1-\theta}{\theta^2}$$

- Χαρακτηριστική συνάρτηση:

$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^{iz}}\right)^\alpha$$

- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^{z}}\right)^\alpha \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(1-\theta))$$

- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:

$$m_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)z}\right)^\alpha$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Pascal** με $\mathbf{NB}(m,\theta)$ για $m \in \mathbb{N}_0$.

Η κατανομή Poisson

Ορισμός B.3.4. Για $\alpha \in (0, \infty)$, **η κατανομή Poisson** $\mathbf{P}(\alpha)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = e^{-\alpha} \frac{\alpha^x}{x!}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \alpha$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \alpha$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = e^{\alpha(e^{iz}-1)}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = e^{\alpha(e^z-1)}$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = e^{\alpha(z-1)}$$

Η κατανομή Delaporte

Ορισμός B.3.5. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ και $\theta \in (0, 1)$, **η κατανομή Delaporte** $\mathbf{Del}(\alpha, \beta, \theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \mathbf{P}(\alpha) * \mathbf{NB}(\beta, \theta).$$

Η γεωμετρική κατανομή

Ορισμός B.3.6. Για $m \in \mathbb{N}_0$ και $\theta \in (0, 1)$, **η γεωμετρική κατανομή** $\mathbf{Geo}(m, \theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \boldsymbol{\delta}_m * \mathbf{NB}(m, \theta).$$

Ειδική περίπτωση: **Η μονο-παραμετρική γεωμετρική κατανομή** με $\mathbf{Geo}(\theta) := \mathbf{Geo}(1, \theta)$

Η λογαριθμική κατανομή

Ορισμός B.3.7. Για $\theta \in (0,1)$, **η λογαριθμική κατανομή Log**(θ) ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta^x}{x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta}{1-\theta}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{|\ln(1-\theta)| - \theta}{|\ln(1-\theta)|^2}\frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{iz})}{\ln(1-\theta)}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{z})}{\ln(1-\theta)}, \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(\theta))$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta z)}{\ln(1-\theta)}$$

B.4 Συνεχείς κατανομές

Ορισμός B.4.1. Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **συνεχής**, αν είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue $\boldsymbol{\lambda}$.

Η κατανομή Βήτα

Ορισμός B.4.2. Για $\alpha, \beta \in (0,\infty)$, **η κατανομή Βήτα Be**$(\alpha,\beta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \int \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\chi_{(0,1)}(x)\boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Ειδική περίπτωση: **Η ομοιόμορφη κατανομή** $\mathbf{U}(0,1) := \mathbf{Be}(1,1)$.

Η κατανομή Γάμμα (Δύο παραμέτρων)

Ορισμός Β.4.3. Για $\alpha, \beta \in (0,\infty)$, **η κατανομή Γάμμα** $\mathbf{Ga}(\alpha,\beta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή
$$Q := \int \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x} x^{\beta-1} \chi_{(0,\infty)}(x) \boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \frac{\beta}{\alpha}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\beta}{\alpha^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - iz}\right)^\beta$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - z}\right)^\beta \quad \forall z \in (-\infty, \alpha)$$

Ειδικές περιπτώσεις:

- **Η κατανομή Erlang** $\mathbf{Ga}(\alpha, m)$, με $m \in \mathbb{N}_0$.
- **Η εκθετική κατανομή** $\mathbf{Exp}(\alpha) := \mathbf{Ga}(\alpha, 1)$.
- **Η $\boldsymbol{\chi}^2$ κατανομή** $\boldsymbol{\chi}^2_m := \mathbf{Ga}(\frac{1}{2}, \frac{m}{2})$, με $m \in \mathbb{N}_0$.

Η κατανομή Γάμμα (Τριών παραμέτρων)

Ορισμός Β.4.4. Για $\alpha, \beta \in (0,\infty)$ και $\gamma \in \mathbb{R}$, **η κατανομή Γάμμα** $\mathbf{Ga}(\alpha,\beta,\gamma)$ ορίζεται να είναι η κατανομή
$$Q := \boldsymbol{\delta}_\gamma * \mathbf{Ga}(\alpha,\beta).$$

Ειδική περίπτωση: Η κατανομή Γάμμα με δυο παραμέτρους $\mathbf{Ga}(\alpha,\beta) = \mathbf{Ga}(\alpha,\beta,0)$.

Η κατανομή Pareto

Ορισμός B.4.5. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, **η κατανομή Pareto** $\mathbf{Par}(\alpha, \beta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \int \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha + x} \right)^{\beta+1} \chi_{0,\infty}(x) \boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βιβλιογραφία

[1] Θάνος, Δ.Π. (2018), *Μεικτές συνθήκες κατανομές Poisson*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστική και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ΜΑΕ.

[2] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2006), *Martingales στη Θεωρία Κινδύνου με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστική και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ΜΕΣ.

[3] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2013), *Martingale- Ισοδύναμες κατανομές πιθανότητας με εφαρμογές στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου*, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστική και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ΜΕΣ.

[4] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2006), *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[5] Μπότση, Α. (2013), *Μελέτη Στοχαστικών Διαδικασιών με Υποσηνθήκη Στάσιμες και Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστική και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ΜΕΣ.

[6] Albrecht, P. (1981), *Dynamische statistische Entscheidungsverfahren für Schadenzahlprozesse.* Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft.

[7] Albrecht, P. (1985), *Mixed Poisson process.* In: Encyclopedia of Statistical Sciences; Vol. 6, pp. 556-559. New York - Chichester: Wiley.

[8] Besson, J.-L. and C. Partrat (1990), *Loi de Poisson - Inverse Gaussienne et systimes de bonus-malus.* ASTIN Colloquium Montreux.

[9] Bühlmann, H (1970), *Mathematical Methods in Risk Theory.* Springer-Verlag, Berlin.

[10] Cohn, D.L. (2013), *Measure Theory*, Second Edition, Birkhäuser.

[11] Delaporte, P. (1960), *Un problème de tarification de l'assurance accidents d'automobiles examiné par la statistique mathématique.* Transactions of the International Actuarial Congress, Subject BI.

[12] Delaporte, P. (1962), *Sur l'efficacité des critéres de tarification de l'assurance contre les accidents d'automobiles,* in Astin Bulletin 2 (1), 84-95.

[13] Delaporte, P. (1965), *Tari*

cation du risque individuel d'Aaccidents d'Aautomobiles par la prime modelee sur le risque. ASTIN Bull. 3, 251-271.

[14] Dubourdieu, M.J. (1938), *Remarques relatives 'a la theorie mathematique de l'Aassurance-accidents.* Bull. Inst. Actu. Franc. 44, 79-126.

[15] Dufresne, F. and H.U. Gerber (1991), *The probability of ruin for the Inverse Gaussian and related processes.* Submitted for publication.

[16] Dufresne, F., H.U. Gerber and E.S.W. Shiu (1991), *Risk theory with the gamma process.* ASTIN Bulletin 21, 177-192.

[17] Engen, S. (1974), *On species frequency models.* Biometrika 61, 263-270.

[18] Feller, W. (1971), *An Introduction to propability theory and its applications,* vol. 2, 2nd edn., Wiley, New York [1st edn 1966].

[19] Gerber, H. U. (1983), *On the asymptotic behaviour of the mixed Poisson process.* Scand. Actuar. J. 256.

[20] Gerber H. U. (1991), *From the generalized gamma to the generalized negative binomial distribution,* University of Lausanne, CH-1015 Lausanne, Switzerland.

[21] Gnedenko, B.V. and Kolmogorov, A.N. (1954), *Limit distributions for sums of independent rendom variables,* Addison-Wesley,Cambridge (Mass) [English translation from the Russian edition, G.I.T.T.L., Moscow(1949)].

[22] Gossiaux A. M. and Lemaire J. (1981), *Méthodes d'ajustement de distributions de sinistres,* Bulletin of Association of Swiss Actwaries 81, 87-95.

[23] Grandell, J. (1997), *Mixed Poisson Processes.* Chapman and Hall.

[24] Hofmann, M. (1955), *Uber zusammengesetzte Poisson-Prozesse und ihre Anwendungen in der Unfallversicherung.* Mitt. SVVM 55, 499-575.

[25] Johnson, N I and Kotz, S (1969), *Discrete Distribution Houghton Mifflin,* Boston.

[26] Jorgenson, B. (1982), *Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution.* Lecture Notes in Statistics, Vol. 9. Springer Verlag, New York.

[27] Khinchine A.Ya. and Lévy P. (1936), *Sur les lois stables Comptes Redus de l'Academie,* Sciences Paris 202, 374-376.

[28] Kupper, J. (1962), A note on compound generalized distributions. Scand. Actuar. J., 60-72.

[29] Lemaire, J. (1991), *Negative binomial or Poisson inverse Gaussian?* ASTIN Colloquium Stockholm.

[30] Lemaire, J. (1979), *How to Define a Bonus-Malus System with an Exponential Utility Function*, ASTIN Bulletin 10 (3), 274-282.

[31] Lundberg, O. (1940), *On Random Processes and Their Application to Sickness and Accident Statistics.* Uppsala: Almqvist and Wiksells. and accident statistics. 1st ed. 1940, Almqvist och Wiksell, Uppsala.

[32] Mule M. (1972), *The influence of the franchise on the number of claims in motor insurance.* ASTIN Bulletin 6 (3), 191-194.

[33] Pesonen, E. (1962), *A Numerical Method of Finding a Suitable Bonus Scale.* ASTIN Bulletin, 2 (1), 102-108.

[34] Pfeifer, D. (1982a), *The structure of elementary birth processes.* J. Appl. Probab. 19, 664-667.

[35] Pfeifer, D. (1982b), *An alternative proof of a limit theorem for the Polya-Lundberg process.* Scand. Actuar. J. 176-178.

[36] Pfeifer, D. (1986), *Polya-Lundberg process.* In: Encyclopedia of Statistical Sciences; Vol. 7, pp. 63-65. New York - Chichester: Wiley.

[37] Pfeifer, D. (1987), *Martingale characteristics of mixed Poisson processes.* Blätter DGVM 18, 107-100.

[38] Pfeifer, D., and Heller, U. (1987), *A martingale characterization of mixed Poisson processes.* J. Appl. Probab. 24, 246-251.

[39] Rao, S S (1978), *Optimization Theory and Application Wiley Eastern,* New Delhi.

[40] Ruohonen, M. (1988), *On a model for the claim number process.* The Sampo Group, Turku, Finland.

[41] Schmidt, K.D. (1992), *Stochastische Modellierung in der Erfahrungstari erung.* Blätter DGVM 20, 441-455.

[42] Schmidt, K.D. (1996), *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart.

[43] Seal, H.L. (1969), *Stochastic Theory of a Risk Business Wiley,* New York.

[44] Seal, H. L. (1983), *The Poisson process: Its failure in risk theory.* Insurance Math. Econom. 2, 287-288.

[45] Seal, S G and Liang, K Y (1987), *Asymptotic properties of maximum likelihood estimators and likelihood ratio tests under nonstandard conditions* Journal of the American Statistical Association **82** (398),605-610.

[46] Sichel, H. (1971), *On a family of discrete distribution particularly suited to represent long-tailed frequency data.* Proceedings of the Third Symposium on Mathematical Statistics, ed. N.F. Laubscher, Pretoria.

[47] Spodarev, E. (2008), *Stochastische Risikotherie,* Vorlesung skript, Universität Ulm, Germany.

[48] Sundt, B. (1993), *An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics.* Third Edition. Karlsruhe: Verlag Versicherungswirtschaft.

[49] Thyrion, P (1960), *Contribution a l'etude du bonus pour non sinistre en assurance automobile.* ASTIN Bulletin 1, 142-162.

[50] Trobliger, A (1961), *Mathematische Untersuchungen zur Beitragsrückgewähr in der Kraftfahrversicherung Bl. Dents. Gesell. Verstch. Math.* 5, 327, 348.

[51] Widder, D. V. (1931), *Necessary and sufficient conditions for the representation of a function as a Laplace integral*, Trans. Am. Math. Soc. 33.

[52] Willmot, G.E. (1986), *Mixed compound Poisson distribution.* ASTIN Bulletin 16s, 59-79.

[53] Willmot, G (1988), *Sundt and Jewell's family of discrete distributions.* ASTIN Bulletin 18, 17, 29.

[54] Willmot, G.E. and Sundt, B. (1989), *On Posterior Probabilities and Moments in Mixed Poisson Processes.* Scandinavian Actuarial Journal, 14, 139-146.

[55] Zolotarev, V.M. (1986), *One-dimensional stable distribution.* American Mathematical Society, Providence, R.I. [English Translation from the Russian edition: Odnomernye Ustoichivye Raspredelniia, Nauka, Moscow (1982)].

Ευρετήριο Όρων

Ευρετήριο Συμβόλων