ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Η δομική κατανομή σε μία μεικτή διαδικασία Poisson

Μποζινάκης Κωνσταντίνος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιούνιος 2018

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Η δομική κατανομή σε μία μεικτή διαδικασία Poisson

Μποζινάκης Κωνσταντίνος

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιούνιος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμόν 5 συνεδρίασή του (13/06/16) σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Κωνσταντίνος Πολίτης
- Αναπληρωτής Καθηγητής Βασίλειος Σεβρόγλου

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

The Structure distribution in a Mixed Poisson process

by
Bozinakis Konstantinos

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece
June 2018

Στην Οικογένεια μου και στην Μάγδα,

.

Ευχαριστίες

Κατ'αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα για την παρούσα διπλωματική εργασία Καθηγητή κ.Νικόλαο Μαχαιρά για την αμέριστη συμπαράστασή του και την πολύτιμη καθοδήγηση που μου προσέφερε κατά τη διάρκεια εκπόνησης της εργασίας καθώς και για την υπομονή του και τον χρόνο του. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ.Κωνσταντίνο Πολίτη και τον Αναπληρωτή Καθηγητή κ.Βασίλειο Σεβρόγλου για την τιμή που μου έκαναν να είναι μέλη της επιτροπής και για τις πολύτιμες υποδείξεις τους. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με την εν λόγω εργασία.

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζεται μία εκτενής μελέτη της κατανομής της δομικής παραμέτρου μίας μεικτής διαδικασίας Poisson. Αρχικά παρουσιάζεται μία συστηματική μελέτη των μεικτών διαδικασιών Poisson, η σχέση τους με τις διαδικασίες Markov και ένας χαρακτηρισμος τους μέσω του πολυωνυμικού κριτηρίου. Εν συνεχεία μελετούνται διάφορα παραδείγματα κατανομών της δομικής παραμέτρου και οι ιδιότητες που προκύπτουν για την αντίστοιχη μεικτή διαδικασία Poisson.

Τέλος παρουσιάζονται διάφορες μέθοδοι εκτίμησης της κατανομής της δομικής παραμέτρου μίας μεικτής διαδικασίας Poisson, κάθως και κάποια γραφήματα σχετικών παραδειγμάτων.

Abstract

In the present thesis an extensive study of the distribution of a structure parameter of a mixed Poisson process is presented. First, a systematic investigation of mixed Poisson processes together with their relation with Markov process, as well as a characterization of them in term of the multinomial criterion are provided. Next, various examples of the distributions of structure parameters for mixed Poisson processes are studied and the probability functions as well as some moments of the corresponding counting process are explicitly computed. Finally, some methods for the estimation of the distribution of the structure parameter are presented.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

τ.μ.	: Τυχαία μεταβλητή
σ.(π).π.	: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.κ.	: Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας
σ.δ	: Στοχαστική διαδικασία
μ.χ.	: Μετρήσιμος χώρος
χ.π.	: Χώρος Πιθανότητας
χ.σ.	: Χαρακτηριστική συνάρτηση
σ.β.	: Σχεδόν βέβαια
σ.ο.	: Σχεδόν όλα
κ.δ.π	: Κανονική δεσμευμένη πιθανότητα
i.i.d.	: Ισοκατανεμημένες και ανεξάρτητες
πρβλ.	: Παράβαλε
MPP	: Μεικτή διαδικασία Poisson
CMPP	: Σύνθετη Μεικτής *σ.δ.* Poisson

Εισαγωγή

Ένα από τα πιο κλασσικά παραδείγματα μίας απαριθμήτριας διαδικασίας είναι η ομογενής διαδικασία Poisson. Ωστόσο, σε πολλές εφαρμογές η διαδικασία Poisson είναι τόσο απλή για να είναι εφαρμόσιμη. Αν παραδείγματος χάριν N_t είναι ο αριθμός των απαιτήσεων μέχρι τον χρόνο t σε ένα συγκεκριμένο ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο, τότε είναι γνωστό στους αναλογιστές ότι η μεταβλητότητα στο χαρτοφυλάκιο, που εκφράζεται από την $\mathbb{V}ar(N_t)$, είναι πολύ μεγαλύτερη από την $\theta \cdot t$, την τιμή που αντιστοιχεί στην αυστηρή περίπτωση της Poisson. Ο λόγος είναι οτι, ακόμα και οταν ο αριθμός των απαιτήσεων ακολουθεί μία κατανομή Poisson, οι μέσες τιμές μεταβάλλονται στο χαρτοφυλάκιο. Αυτό σημαίνει οτι η τιμή θ μίας ατομικής πολιτικής έιναι μία από τις δυνατές τιμές μίας τ.μ. Θ. Αυτό οδηγεί στην έννοια μίας μεικτής διαδικασίας Poisson με δομική παράμετρο Θ.

Μερικές από τις πιο δημοφιλείς επιλογές για την δομική παράμετρο είναι :

• **Η ομογενής διαδικασία Poisson** Η δομική της παράμετρος Θ είναι εκφυλισμένη στο $\theta > 0$. Είναι η μοναδική μεικτή διαδικασία Poisson (MPP για συντομία) που είναι συγχρόνως μία ανανεωτική διαδικασία. (βλ.Ενότητα 5.1)

• **Η διπλη διαδικασία Poisson** Η δομική της παράμετρος έχει δύο διαφορετικά σημεία αλμάτων , τα θ_1 και θ_2 με αντίστοιχα ύψη αλμάτων $p_1 \in (0,1)$ και $p_2 := 1 - p_2$, αντίστοιχα (βλ. Ενότητα 5.2). Αυτό το είδος διαδικασίας θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί αν ο πληθυσμός ήταν χωρισμένος σε θηλυκά και αρσενικά άτομα.

• **Η διαδικασία P*ó*lya-Lundberg ή Pascal** (βλ. Ενότητα 5.3). Η δομική της παράμετρος Θ ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{Ga}(a, \beta)$, όπου $a, \beta > 0$ και η $\sigma.\pi.$ της N_t είναι εκείνη της Pascal ή της αρνητικής δυωνυμικής. Οι δύο παράμετροι α και β επιτρέπουν μεγάλη ευελιξία, όταν κάποιος ταιριάζει με τα πραγματικά δεδομένα εκείνα μιάς θεωρητικής κατανομής.

• **Η διαδικασία Sichel** Η δομική της παράμετρος Θ ακολουθεί την γενικευμένη αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή (GIGD για συντομία), που η $\sigma.\pi.\pi.$ της ορίζεται μέσω μίας τροποποιημένης συνάρτησης Bessel τρίτου είδους (βλ. Ενότητα 5.7). Ειδική της περίπτωση έιναι η αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή (βλ. Ενότητα 5.8).

Η εισαγωγή μιάς γενικής MPP οφείλεται πιθανόν στον Thyrion [42] για την γενική περίπτωση και στον Ammeter [12] για την ειδική περίπτωση διαδικασιών Pólya-Lundberg. Η πρώτη λεπτομερής και θεμελιώδης μελέτη των $MPPs$ οφείλεται στον Lundberg [33], ο οποίος έδωσε αποτελέσματα της στενότερης σύνδεσης μεταξύ $MPPs$ και διαδικασιών Markov συνεχούς χρόνου.

Εδώ μελετάμε τις παραπάνω δομικές παραμέτρους μεικτών διαδικασιών Poisson , καθώς και κάποιες επιπλέον. Πιο συγκεκριμένα στο Κεφάλαιο 1 παρατίθενται οι βασικές έννοιες και οι ορισμοί που χρησιμοποιούνται στην παρούσα εργασία. Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται μία συντομή επισκόπηση βασικών εννοιών της κλασσικής θεωρίας κινδύνου. Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται μία προσπάθεια συστηματικής μελέτης απαριθμητριών διαδικασιών, των οποίων οι πιθανότητες μετάβασης ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov και μπορούν να υπολογιστούν μέσω μιάς ακολουθίας εντάσεων. Οι εντάσεις είναι συναρτήσεις του χρόνου , και δίνεται ιδιαίτερη προσοχή στις περιπτώσεις όπου αυτές είναι ταυτοτικές η σταθερές. Τα κύρια αποτελέσματα χαρακτηρίζουν απαριθμήτριες διαδικασίες που είναι δυσιολογικές διαδικασίες Markov με εντάσεις που είναι ταυτοτικές ή όλες σταθερές. Πιο συγκεκριμένα, στην Ενότητα 3.2 αποδεικνύεται ένας χαρακτηρισμός της έννοιας της φυσιολογικότητας (βλ. Ορισμό 3.1.12) απαριθμητρτριών $\sigma.\delta.$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov μέσω διαφορικών και ολοκληρωτικών εξισώσεων (βλ. Θεώρημα 3.2.1).Στην Ενότητα 3.3 αποδεικνύεται αναλυτικά ένας χαρακτηρισμός μη ομογενών $\sigma.\delta.$ Poisson (βλ. Θεωρημα 3.3.3). Στην Ενότητα 3.4 αποδεικνύεται αρχικά ένας χαρακτηρισμός της ομογένειας φυσιολογικών απαριθμητριών $\sigma.\delta.$ που ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov μέσω των εντάσεων τους (βλ. Λήμμα 3.4.1). Ο εν λόγω χαρακτηρισμός μας βοηθάει να δώσουμε ένα χαρακτηρισμό της ομογένειας φυσιολογικών $\sigma.\delta.$ Markov μέσω της $\sigma.\delta.$ των ενδιάμεσων χρόνων (βλ. θεώρημα 3.4.2). Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 είναι χρήσιμα για την μελέτη της μεικτής $\sigma.\delta.$ Poisson και των δομικών κατανομών της.

Στο κεφάλαιο 4 παρατίθενται ο ορισμός και οι βασικές ιδιότητες μίας μεικτής $\sigma.\delta.$. Διατυπώνεται το πολυωνυμικό κριτήριο, που είναι χρήσιμο στη Στατιστική,(βλ. Λήμμα 4.2.3), και αποδεικνύονται οι ιδιότητες μίας μεικτής $\sigma.\delta.$ Poisson, όπως η Markov (βλ. θεώρημα 4.2.4) και η φυσιολογικότητα (βλ. θεώρημα 4.2.5).
Στο Κεφάλαιο 5 αναλύονται μερικά, επιπλέον εκείνων που αναφέραμε αρχικά, παραδείγματα δομικών κατανομών $MPPs$. Ιδιαιτέρως στην Ενότητα 5.4 περιγράφονται η διαδικασία Delaporte δηλαδή εκείνη η MPP με δομική παράμετρο Θ με κατανομή τη μετατοπισμένη (ή γενικευμένη) κατανομή $\mathbf{Ga}(a, \beta, \gamma)$. Αποδεικνύεται ότι μία διαδικασία Delaporte $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αναλύεται σε άθροισμά δύο ανεξάρτητων απαριθμητριών διαδικασιών, μίας ομογενούς Poisson και μιας διαδικασίας Pólya-Lundberg (βλ. Θεώρημα 5.4.1).

Συνέπεια αυτού είναι ο ευκολος υπολογισμός της σ.π. της N_t (βλ. Πόρισμα 5.4.2). Στην Ενότητα 5.5 μελετάται η MPP με δομική παράμετρο Θ που ακολουθεί την γενικευμένη Βήτα κατανομή. Στην Ενότητα 5.6 περιγράφεται η MPP με δομική παράμετρο Θ που ακολουθεί την περικομμένη (truncated) κανονική κατανομή. Στις Ενότητα 5.9 μελετάται η MPP με δομική παράμετρο Θ που ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή. Στο κεφάλαιο 6 παρουσιάζονται εκτιμήσεις της δομικής παραμέτρου μίας MPP μέσω τύπων πραγματικής αντστροφής (αντιστοφή με χρήση μετασχηματισμών Laplace και αντιστροφή βασισμένη στους χρόνους άφιξης) και προσομοιώσεις μίας MPP.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία. Συμβολίζουμε με: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.
Χρησιμοποιούνται επίσης τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Όμοια ορίζονται και τα σύνολα: $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$. Ακόμη, με $\mathbb{N}_n$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{0, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ και τέλος με $\mathbb{N}_n^*$ το σύνολο $\{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$.
Έστω Ω σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Τότε με A^c ή $\Omega \setminus A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του** A (σε σχέση με το Ω), με $A \uplus B$ συμβολίζεται η **ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων** και με $\biguplus_{i \in I} A_i$ συμβολίζεται η **ένωση μιας μη κενής οικογένειας** $\{A_i\}_{i \in I}$ **ξένων ανά δύο υποσυνόλων του** Ω.
Για κάθε $A \subseteq \Omega$ με χ_A συμβολίζουμε τη **δείκτρια συνάρτηση** του A. Η ταυτοτική συνάρτηση από το Ω στον εαυτό του συμβολίζεται με id_Ω. Για μία απεικόνιση $f : D \longmapsto E$ όπου $D, E \neq \varnothing$, με R_f ή με $f(D)$ συμβολίζεται το σύνολο τιμών της f. Αν $\varnothing \neq A \subseteq D$ με $f \restriction A$ συμβολίζεται ο περιορισμός της f στο A. Αν $\mathcal{G}$ είναι κάποιο σύστημα υποσυνόλων του Ω, τότε η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$, συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται η **σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **ένας γεννήτορας της** $\sigma(\mathcal{G})$. Μια σ-άλγεβρα A, είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** εάν υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω για την οποία ισχύει $A = \sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$) που παράγεται από όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$), ονομάζεται η **Borel σ-άλγεβρα** στο $\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{R}^n$) και συμβολίζεται με $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (ή $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$). Τα στοιχεία μιας Borel σ-άλγεβρας, ονομάζονται **σύνολα Borel**.
Στη συνέχεια, και εφόσον δε δηλώνεται διαφορετικά, η τριάδα (Ω, Σ, P) *είναι ένας* **χώρος πιθανότητας** *(χ.π. για συντομία)* και το ζευγάρι (Υ, T) είναι ένας **μετρήσιμος χώρος** (μ.χ. για συντομία). Με Σ_0 συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων $N \in \Sigma$ ώστε $P(N) = 0$.

Για τ.μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ γράφουμε $X = Y \quad P-$σχεδόν βέβαια ($P - \sigma.\beta.$ για συντομία), αν $\{X \neq Y\} \in \Sigma_0$.

Μία τ.μ. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** ως προς το μέτρο P αν $\int |f| dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ ($\mathcal{L}^1_+(P)$ αντίστοιχα) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (αντίστοιχα μη αρνητικών ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων** συναρτήσεων (δηλαδή όλων των $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε $\int |f|^2 dP < \infty$ − συναρτήσεων).

Έστω Υ ένα μη κενό σύνολο. Με π_Ω και π_Υ συμβολίζονται οι **κανονικές προβολές** από το $\Omega \times \Upsilon$ στο Ω και Υ αντίστοιχα. Αν $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση, τότε για σταθερό $\omega \in \Omega$ η συνάρτηση $f_\omega : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $f_\omega(y) := f(\omega, y)$ ονομάζεται η **$\boldsymbol{\omega}$−τομή** της f. Αντίστοιχα, για σταθερό $y \in \Upsilon$ η $f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ ώστε $f^y(\omega) := f(\omega, y)$ ονομάζεται η **y-τομή** της f.

Έστω $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{F}$ μία $\sigma-$υποάλγεβρα του Σ. Κάθε συνάρτηση $Y \in \mathcal{L}^1(P|\mathcal{F})$ που ικανοποιεί για κάθε $A \in \mathcal{F}$ την ισότητα $\int_A X dP = \int_A Y dP$, ονομάζεται **μία εκδοχή της δεσμευμένης μέσης τιμής της X δοθείσης της $\mathcal{F}$** και συμβολίζεται με $\mathbb{E}_P[X|\mathcal{F}]$. Για $X := \chi_E \in \mathcal{L}^1(P)$ με $E \in \Sigma$ θέτουμε $P(E|\mathcal{F}) := \mathbb{E}_P[\chi_E|\mathcal{F}]$.

Μία συνάρτηση $k : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ είναι ένας **$\boldsymbol{T - \Sigma}$-Μαρκοβιανός πυρήνας (Markov kernel)** όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

($k1$) Η συνολοσυνάρτηση $k(\bullet, \omega)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην T για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$.

($k2$) Η συνάρτηση $\omega \longmapsto k(B, \omega)$ είναι Σ-μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $B \in T$.

Ένας $T - \Sigma$-**Μαρκοβιανός πυρήνας** ονομάζεται επίσης **τυχαίο μέτρο**. (βλ. π.χ. [28, p. 83]).

Έστω $\Sigma - T$-μετρήσιμη απεικόνιση $X : \Omega \to \Upsilon$ και μία $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ. Η **δεσμευμένη κατανομή της X επάνω στην $\mathcal{F}$** είναι ένας $T - \mathcal{F}-$Μαρκοβιανός πυρήνας k, ικανοποιώντας για κάθε $B \in T$ τη συνθήκη

$$k(B, \bullet) = P(X^{-1}(B)|\mathcal{F})(\bullet) \quad P \restriction \mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

Ένας τέτοιος Μαρκοβιανός πυρήνας k θα συμβολίζεται με $P_{X|\mathcal{F}}$. Σαφώς, για κάθε $T - Z-$Μαρκοβιανό πυρήνα k, η απεικόνιση $K(\Theta) : T \times \Omega \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως

$$K(\Theta)(B, \omega) := (k(B, \bullet) \circ \Theta(\omega) \quad \text{για κάθε} \quad B \in T \quad \text{και} \quad \omega \in \boldsymbol{\Omega}$$

είναι ένας $T - \sigma(\Theta)-$Μαρκοβιανός πυρήνας. Ιδιαιτέρως, για $(\Upsilon, T) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ τα σχετικά μέτρα πιθανότητας $k(\bullet, \theta)$ για $\theta = \Theta(\omega)$ με $\omega \in \Omega$ είναι κατανομές στο $\mathfrak{B}$ και έτσι μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{K}(\theta)(\bullet)$ αντί για $k(\bullet, \theta)$. Αντίστοιχα, τη περίπτωση του $K(\Theta)$ τη συμβολίζουμε με $\mathbf{K}(\Theta)$.

Για οποιαδήποτε $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, θα λέμε ότι δύο $T-\mathcal{F}-$Μαρκοβιανοί πυρήνες k_i, για $i \in \{1,2\}$, είναι $\boldsymbol{P \restriction \mathcal{F}}$**−ισοδύναμοι** και γράφουμε $k_1 = k_2 \quad P \restriction \mathcal{F} - \sigma.\beta.$, αν υπάρχει $P-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $k_1(B,\omega) = k_2(B,\omega)$ για κάθε $B \in T$ και $\omega \notin N$.

Μια οικογένεια $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ $\sigma-$υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται $\boldsymbol{P}$**-υπό συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ έχουμε:

$$P(E_1 \cap \cdots \cap E_n|\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j|\mathcal{F}) \quad P \restriction \mathcal{F} \quad -\sigma.\beta.$$

για κάθε $j \leq n$ και για κάθε $E_j \in \Sigma_{i_j}$ όπου τα $i_1, \ldots, i_n$ είναι διακριτά στοιχεία του I.

Μια οικογένεια $\Sigma - T$-μετρήσιμων απεικονήσεων $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ από το Ω στο Υ είναι:

- $\boldsymbol{P}$**-υπο συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, αν η οικογένεια $\sigma(\{\mathrm{X}_t\})_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι P-υπο συνθήκη ανεξάρτητη επάνω στην $\mathcal{F}$ και

- $\boldsymbol{P}$**-υπο συνθήκη ισόνομη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ, αν

$$P(F \cap X_s^{-1}(B)) = P((F \cap X_t^{-1}(B)), \quad \text{για} \quad s,t \in \mathbb{R}_+, F \in \mathcal{F} \quad \text{και B} \in \mathrm{T}.$$

Επιπλέον, για κάθε τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathfrak{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο Ω που ονομάζεται η **σ-άλγεβρα στο Ω η παραγόμενη από την** X και ισχύει $\sigma(X) \subseteq \Sigma$. Γενικότερα, για μια οικογένεια $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ., ορίζουμε:

$$\sigma\big(\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\big) = \sigma\bigg(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \sigma(X_t)\bigg).$$

Η $\sigma\big(\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}\big)$ ονομάζεται η **σ-άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια** $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σ-υποαλγεβρών της Σ, αν για κάθε $\{t_1,\ldots,t_m\} \subseteq \mathbb{R}_+$, οι σ-άλγεβρες $\sigma(X_{t_1}),\ldots,\sigma(X_{t_m}),\Sigma_{t_1},\ldots,\Sigma_{t_n}$ είναι ανεξάρτητες.

Αν οι P, Q είναι κατανομές πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$, τότε η κατανομή πιθανότητας με τύπο

$$(P * Q)(B) := \int_{\mathbb{R}} P(B-y)dQ(y) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B},$$

όπου $B-y := \{z-y : z \in B\}$, ονομάζεται η **συνέλιξη** των P, Q. Επίσης για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε ως την $\boldsymbol{n}$**-οστη συνέλιξη** της P, την κατανομή πιθανότητας $P^{*(n+1)} := P^n * P$, όπου P^{*0} (εκφυλισμένη) κατανομή που ικανοποιεί την $P^{*0}(\{0\}) = 1$. Ομοίως, ορίζεται και η συνέλιξη δύο σ.κ.π. F, G ή δύο σ.(π.)π. f, g. Τέλος, σημειώνουμε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας (επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$) $\{P_{X_k}\}_{k\in\mathbb{N}_n}$, τότε από τον ορισμό της συνέλιξης άμεσα έχουμε ότι

$$P_{X_0+\cdots+X_n} = P_{X_0} * \cdots * P_{X_n} = (P_{X_0} * \cdots * P_{X_{n-1}}) * P_{X_n}.$$

Για κάθε ενδεχόμενο $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και τ.μ. $X : \mathbf{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα της τυχαίας μεταβλητής X ως προς τη δεσμευμένη πιθανότητα P_B συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}_B[X] := \mathbb{E}[X|B] := \int_B X dP_B$$

και ονομάζεται η **δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθέντος του ενδεχομένου B**.

Μια οικογένεια $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **διύλιση (filtration)** αν για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s < t$ ισχύει $\Sigma_s \subseteq \Sigma_t$.

Μία *σ.δ.* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η τ.μ. X_t είναι Σ_t -μετρήσιμη.

Η $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με $T_t := \sigma(\{X_s : s \leq t\})$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, ονομάζεται η **κανονική διύλιση** για την $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Προφανώς, κάθε *σ.δ.* $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι προσαρμοσμένη στη κανονική της διύλιση.

Μία *σ.δ.* $\{X_j\}_{j\in I}$ ονομάζεται ένα **martingale ως προς τη διύλιση** $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ή ένα $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$**-martingale** αν ισχύουν τα εξής:

$(m1)$ Η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\Sigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$,

$(m2)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, η $X_t \in \mathcal{L}^1(P)$,

$(m3)$ για κάθε $t, s \in \mathbb{R}_+$ με $t \leq s$ ισχύει $\mathbb{E}[X_s|\Sigma_t] = X_t \quad P \restriction \Sigma_t - \sigma.\beta.$

Κεφάλαιο 2

Σύντομη Επισκόπηση Εννοιών της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο θα γίνει μια σύντομη αναφορά σε βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Κινδύνου. Αρχικά παρουσιάζονται κάποιες ιδιότητες των *σ.δ.* άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων. Τέλος αναφέρονται βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη διαδικασία Poisson, που αποτελεί τη βάση για τη κατανόηση της μεικτής διαδικασίας Poisson.

2.1 Η Σ.Δ. Άφιξης των Απαιτήσεων

Στην ενότητα αυτή θα παρατεθούν ορισμοί και λήμματα τόσο για τη στοχαστική διαδικασία άφιξης απαιτήσεων αλλά και για τη στοχαστική διαδικασία ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων.

Ορισμός 2.1.1. Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία άφιξης απαιτήσεων**, εάν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_T \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε, για όλα τα $\omega \in \Omega\backslash\Omega_T$ να ισχύουν τα εξής:

- $T_0(\omega) = 0$, και
- $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άμεσα προκύπτει πως για όλα τα $\omega \in \Omega\backslash\Omega_T$ και $n \in \mathbb{N}$, η $T_n(\omega) > 0$. Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως, το P-μηδενικό σύνολο Ω_T ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της στοχαστικής διαδικασίας άφιξης των απαιτήσεων $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Ορισμός 2.1.2. Έστω $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων. Με $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συμβολίζουμε τη ***σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων** και ισχύει $W_n := T_n - T_{n-1}$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, προκύπτουν τα εξής:

- $W_n(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega \setminus \Omega_T$,
- $\mathbb{E}[W_n] > 0$

καθώς και η σχέση:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k. \tag{2.1}$$

Στο κεφάλαιο αυτό, και αν δε δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε τη $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ως μια σταθερή σ.δ. άφιξης απαιτήσεων, και τη $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ως σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων επαγόμενη από τη σ.δ. $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε επίσης πως το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων είναι το κενό σύνολο $\Omega_T := \emptyset \in \Sigma$.

Εφόσον $W_n := T_n - T_{n-1}$ και $T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ είναι εμφανές πως η σ.δ. άφιξης, και η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων, αλληλοκαθορίζονται. Αυτό γίνεται εμφανέστερο και από τα ακόλουθα αποτελέσματα.

Λήμμα 2.1.3. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύουν τα εξής:*

$$\sigma(\{T_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}) = \sigma(\{W_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}). \tag{2.2}$$

Αυτό σημαίνει πως η γνώση που έχουμε για τους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων από τη T_n, είναι ίδια με τη πληροφορία που είναι διαθέσιμη από τη γνώση των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, δηλαδή τη W_n.

Ορισμός 2.1.4. Το ενδεχόμενο $\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}$ ονομάζεται **έκρηξη**.

Λήμμα 2.1.5. *Αν $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}[T_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

Πόρισμα 2.1.6. *Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[W_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

Για αναλυτικές αποδείξεις των τριών παραπάνω αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [4, Λήμματα 3.2.3 (i) και 3.2.6 και Πόρισμα 3.2.7].

Αξίζει να αναφέρουμε στο σημείο αυτό πως κατά την ανάπτυξη ενός υποδείγματος για μια ασφαλιστική επιχείρηση, μια από τις πρώτες αποφάσεις που πρέπει να ληφθεί έχει να κάνει με το αν θα πρέπει την πιθανότητα έκρηξης, να τη λάβουμε ίση με το μηδέν ή όχι. Η απόφαση αυτή αφορά τη σ.δ. άφιξης των απαιτήσεων.

Το λήμμα που ακολουθεί βοηθάει την καλύτερη κατανόηση της σχέσης που υπάρχει μεταξύ του $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ και $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Λήμμα 2.1.7. *Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Αν η σ.δ. $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(*i*) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$ *και*

(*ii*) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \theta)$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$.

Στην περίπτωση αυτή, $\mathbb{E}[W_n] = 1/\theta$ *και* $\mathbb{E}[T_n] = n/\theta$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$, *και επιπρόσθετα, η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [35, Lemma 1.2.2].

2.2 Η Απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία

Στην προηγούμενη ενότητα συζητήσαμε για τη *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων καθώς και για τη *σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων. Στην παρούσα ενότητα θα προχωρήσουμε ένα βήμα παραπάνω, κάνοντας λόγω για τη απαριθμήτρια *σ.δ.* .

Ορισμός 2.2.1. Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται ***σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων ή απαριθμήτρια *σ.δ.*** , αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_N \in \Sigma$, τέτοιο ώστε για όλα τα $\omega \in \Omega \backslash \Omega_N$ να ισχύουν τα εξής:

($n1$) $N_0(\omega) = 0$,

($n2$) $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, για όλα τα $t \in (0, \infty)$,

($n3$) $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$,

($n4$) $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \leq N_t(\omega) \leq \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και

($n5$) $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Το P-μηδενικό σύνολο Ω_N, ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της απαριθμήτριας *σ.δ.*** $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.

Ερμηνεύοντας τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να θεωρήσουμε πως

- Η τ.μ. N_t δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων που εμφανίζονται στο διάστημα $(0, t]$,
- Όλες οι τροχιές της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ξεκινούν από το μηδέν και είναι δεξιά συνεχείς, στα σημεία ασυνέχειας, το άλμα είναι ύψους ένα, και τέλος τείνουν στο άπειρο.

Ένα αρχικό αποτέλεσμα του ορισμού, αποτελεί το ακόλουθο θεώρημα σύμφωνα με το οποίο κάθε *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων παράγει μία απαριθμήτρια *σ.δ.* και αντίστροφα.

Θεώρημα 2.2.2. *Αν $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega$, θέσουμε*

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega) \tag{2.3}$$

τότε για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια απαριθμήτρια σ.δ. τέτοια ώστε $\Omega_N = \Omega_T$, και

(ii) Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$ ισχύει

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t(\omega) = n\} \tag{2.4}$$

Θεώρημα 2.2.3. *Αν $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία απαριθμήτρια σ.δ. και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $\omega \in \Omega$, θέσουμε*

$$T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t(\omega) = n\} \tag{2.5}$$

τότε για την $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ είναι μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων τέτοια ώστε $\Omega_T = \Omega_N$, και

(ii) Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega \backslash \Omega_N$ ισχύει

$$N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}(\omega) \tag{2.6}$$

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω θεωρημάτων βλ. π.χ. [4, Θεώρημα 3.3.2, Θεώρημα 3.2.3] αντίστοιχα.

Για το υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου θεωρούμε:

- Την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ως μία απαριθμήτρια *σ.δ.* ,
- $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, ως μια *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων η οποία παράγεται από την απαριθμήτρια *σ.δ.*
- $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, μια *σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων η οποία παράγεται από την απαριθμήτρια *σ.δ.* .
- Το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της απαριθμήτριας *σ.δ.* ότι είναι το κενό σύνολο, δηλαδή ισχύει $\Omega_N = \emptyset$.

Κάτω από την τελευταία υπόθεση προκύπτουν δύο εξαιρετικά χρήσιμες ισότητες. Σύμφωνα με αυτές, ορισμένα από τα γεγονότα (ενδεχόμενα) που καθορίζονται από την απαριθμήτρια *σ.δ.* , μπορούν να ερμηνευτούν ως ενδεχόμενα που καθορίζονται από τη *σ.δ.* άφιξης των απαιτήσεων, και αντίστροφα.

Λήμμα 2.2.4. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύουν:*

(a) $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$ *και*

(b) $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t\} \backslash \{T_{n+1} \leq t\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$.

Για την απόδειξη βλ. πχ. [4, Λήμμα 3.3.4].

Το ακόλουθο λήμμα εκφράζει με ένα ιδιαίτερα περιεκτικό τρόπο, το γεγονός πως η απαριθμήτρια *σ.δ.* και η *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων παρέχουν την ίδια πληροφορία.

Λήμμα 2.2.5. *Ισχύει ότι:*

$$\sigma(\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}) = \sigma(\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}) \tag{2.7}$$

Η απόδειξη του Λήμματος 2.2.5 προκύπτει εύκολα από το Λήμμα 2.2.4.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να συνδέσουμε την πιθανότητα έκρηξης με τη απαριθμήτρια *σ.δ.* ως εξής:

Λήμμα 2.2.6. *Ισχύει ότι:*

$$P[\{\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n < \infty\}] = P\left[\bigcup_{t \in \mathbb{N}} \{N_t = \infty\}\right] = P\left[\bigcup_{t \in (0,\infty)} \{N_t = \infty\}\right]. \tag{2.8}$$

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [4, Λήμμα 3.3.6].

Πόρισμα 2.2.7. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. έχει πεπερασμένες αναμενόμενες τιμές, τότε η πιθανότητα της έκρηξης είναι ίση με μηδέν.*

Για μια αναλυτική απόδειξη του πορίσματος βλ. π.χ. [8, Πόρισμα 2.2.7].

Στο σημείο αυτό θα ορίσουμε τις έννοιες της προσαύξησης του αριθμού των απαιτήσεων σε διάστημα $(s, t]$ καθώς και των ανεξάρτητων προσαυξήσεών της, διότι μέσω αυτών κατανοούμε παρισσότερο την απαριθμήτρια *σ.δ.* .

- Για $s, t \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $s \leq t$, η **προσαύξηση** της απαριθμήτριας *σ.δ.* $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ στο διάστημα $(s, t]$, ορίζεται από τη σχέση:

$$N_t - N_s := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{s < T_n \leq t\}}. \tag{2.9}$$

  Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$, με $N_0 = 0$ και $T_n > 0$, η σχέση (2.9), συμφωνεί με τον τρόπο που ορίσαμε τη τ.μ. N_t στο Θεώρημα 2.2.2.

- Για κάθε $\omega \in \Omega$ και για κάθε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$ έχουμε ότι:

$$N_t(\omega) = (N_t - N_s)(\omega) + N_s(\omega), \tag{2.10}$$

  που ισχύει ακόμη και όταν $N_s(\omega)$ απειρίζεται.

2.3 Η στοχαστική διαδικασία Poisson

Ορισμός 2.3.1. Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, ονομάζεται **(ομογενής) διαδικασία Poisson με παράμετρο** $\theta \in (0,\infty)$, όταν έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $t \in (0,\infty)$ να ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$.

Από τους ορισμούς προκύπτει πως μια απαριθμήτρια σ.δ. με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, έχει και στάσιμες προσαυξήσεις, αν για κάθε $t, h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{N_{t+h}-N_t} = P_{N_h}$ (βλ. π.χ. [4, Λήμμα Α΄1.3]).

Ορισμός 2.3.2. Μια απαριθμήτρια σ.δ. $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **τυπική διαδικασία Poisson**, αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, η $\widetilde{N}_t$ ακολουθεί την Poisson με παράμετρο ένα.

Λήμμα (Πολυωνυμικό κριτήριο) 2.3.3. *Έστω $\alpha \in (0,\infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(*a*) *Για κάθε $t \in (0,\infty)$ η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τη σχέση*

$$P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t),$$

και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε το $\sum_{j=1}^m k_j = n$ ισχύει

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}|\{N_{t_m} = n\}\right] = \frac{n!}{\prod_{j=1}^m k_j!} \cdot \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}$$

(*b*) *Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια σ.δ. Poisson με παράμετρο α.*

Για μια αναλυτική απόδειξη του πορίσματος βλ. [8, Λήμμα 2.3.3].

Λήμμα 2.3.4. *Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n,\theta)$, *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$

(ii) $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$, *για όλα τα* $t \in (0,\infty)$.

Στη περίπτωση αυτή, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ η $\mathbb{E}(T_n) = n/\theta$ και για όλα τα $t \in (0,\infty)$ η $\mathbb{E}(N_t) = \theta t$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [35, Lemma 2.2.1].

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω $\theta \in (0,\infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο θ.*

(iii) *Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, και ικανοποιεί τη συνθήκη $\mathbb{E}[N_t] = \theta t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.*

(iv) *Η σ.δ. $\{N_t - \theta t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [35, Theorem 2.3.4] και για μια αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος βλ. π.χ. [4, Θεώρημα 4.2.4].

Κεφάλαιο 3

Η απαριθμήτρια διαδικασία ως διαδικασία Markov

Οι χαρακτηρισμοί της διαδικασίας Poisson που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο δείχνουν ότι η διαδικασία Poisson είναι μια πολύ ιδιαίτερη απαριθμήτρια διαδικασία. Σε πρακτικές περιπτώσεις, ωστόσο, οι προσαυξήσεις της απαριθμήτριας διαδικασίας μπορεί να μην είναι ανεξάρτητες ή στάσιμες ή να μην κατανέμονται ως Poisson, και σε κάθε μία από αυτές τις περιπτώσεις η διαδικασία Poisson δεν είναι κατάλληλη ως μοντέλο. Η αποτυχία της διαδικασίας Poisson, αυξάνει την ανάγκη μελέτης μεγαλύτερων κατηγοριών απαριθμητριών διαδικασιών. Το παρόν κεφάλαιο παρέχει μια συστηματική συζήτηση για τις απαριθμήτριες διαδικασίες των οποίων οι πιθανότητες μετάβασης ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov και μπορούν να υπολογιστούν από μια ακολουθία εντάσεων. Οι εντάσεις είναι συναρτήσεις του χρόνου, και θα δοθεί ιδιαίτερη προσοχή στις περιπτώσεις όπου όλες είναι ίσες ή σταθερές.

3.1 Το υπόδειγμα

Στην παρούσα ενότητα εισάγουμε διάφορες ιδιότητες τις οποίες μπορεί να έχει μια απαριθμήτρια διαδικασία και οι οποίες πληρούνται από τη διαδικασία Poisson. Θεωρούμε δύο μεθόδους για την επέκταση της έννοιας της διαδικασίας Poisson: Η πρώτη βασίζεται στην παρατήρηση ότι, εξ ορισμού, κάθε διαδικασία Poisson έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, και αυτό οδηγεί στη γενικότερη έννοια της απαριθμήτριας διαδικασίας Markov και στην ακόμα γενικότερη απαριθμήτρια διαδικασία, που ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov . Η δεύτερη, η οποία έχει έντονα αναλυτικό χαρακτήρα και είναι αρκετά διαφορετική από την πρώτη, είναι η έννοια της φυσιολογικής (regular) απαριθμήτριας διαδικασίας. Οι φυσιολογικές απαριθμήτριες *σ.δ.* που ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov θα παρέχουν το γενικό πλαίσιο για τη συζήτηση διαφόρων κλάσεων απαριθμητριών διαδικασιών και για έναν άλλο χαρακτηρισμό της διαδικασίας Poisson.

Ορισμός 3.1.1. Μία απαριθμήτρια σ.δ. $\{\mathrm{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **Μαρκοβιανή** ή ***σ.δ.* Markov** ή θα λέμε ότι ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή ιδιότητα**, εάν ισχύει

$$P(N_{t_{m+1}} = n_{m+1}|\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}) = P(N_{t_{m+1}} = n_{m+1}|N_{t_m} = n_m)$$

για όλα τα $m \in \mathbb{N}$, $t_1, \cdots, t_{m+1} \in \mathbb{R}*_+$ με $t_1 < \cdots < t_{m+1}$ και $n_1 \cdots, n_{m+1} \in \mathbb{N}_0$ με $P(\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}) > 0$. Οι συνθήκες έχουν ως συνεπαγωγή ότι $n_1 \leq \cdots \leq n_m$. Επιπλέον αν η απαριθμήτρια διαδικασία είναι μία διαδικασία Markov, τότε η προηγούμενη ισότητα συνεχίζει να ισχύει αν $t_1 = 0$ ή $n_j = \infty$ για κάποια $j \in 1, ..., m$.

Θεώρημα 3.1.2. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις τότε είναι μια διαδικασία Markov.*

Απόδειξη. Θεωρούμε $m \in \mathbb{N}$,$t_1, \cdots, t_m, t_{m+1} \in (0, \infty)$ και $n_1, \cdots, n_m, n_{m+1} \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $t_1 < \cdots < t_m < t_{m+1}$ και $P(\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}) > 0$.Ορίζουμε $t_0 := 0$ και $n_0 := 0$. Αφού $P[\{N_0 = 0\}] = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} P\left[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\}|\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\})\right] &= \frac{P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{N_{t_j} = n_j\}\right]}{P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right]} \\ &= \frac{P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\right]}{P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\right]} \\ &= \frac{\prod_{j=1}^{m+1} P\left[\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\right]}{\prod_{j=1}^{m} P\left[\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\right]} \\ &= P\left[\{N_{t_{m+1}} - N_{t_m} = n_{m+1} - n_m\}\right], \end{aligned}$$

καθώς και

$$\begin{aligned} P\left[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\}|\{N_{t_m} = n_m\}\right] &= P\left[\{N_{t_{m+1}} - N_{t_m} = n_{m+1} - n_m\}|\{N_{t_m} - N_0 = n_m\}\right] \\ &= P\left[\{N_{t_{m+1}} - N_{t_m} = n_{m+1} - n_m\}\right], \end{aligned}$$

και έτσι

$$P\left[N_{t_{m+1}} = n_{m+1}|\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}] = P[N_{t_{m+1}} = n_{m+1}|N_{t_m} = n_m\right].$$

□

Πόρισμα 3.1.3. *Αν η απαριθμήτρια διαδικασία είναι μία διαδικασία Poisson τότε είναι μία διαδικασία Markov.*

Το αντίστροφο του παραπάνω πορίσματος δεν ισχύει γενικά, αφού υπάρχουν απαριθμήτριες *σ.δ.* που είναι Markov αλλά όχι Poisson όπως π.χ. η *σ.δ.* του Ψυλε. Στον ορισμό της διαδικασίας του Markov έχουμε ήδη συναντήσει το πρόβλημα των υπό συνθήκη πιθανοτήτων σε σχέση με τα μηδενικά σύνολα. Εισάγουμε τώρα μερικές έννοιες που θα μας επιτρέψουν να αποφύγουμε υπό συνθήκη πιθανότητες σε σχέση με μηδενικά σύνολα.

Ορισμοί 3.1.4. (a) Ένα ζευγάρι $(k, r) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}_+$ ονομάζεται **αποδεκτό** (admissible) αν $(k, r) = (0, 0)$ ή $(k, r) \in \mathbb{N}_0 \times (0, \infty)$.

(b) Έστω $\mathcal{A}$ η οικογένεια όλων των τετράδων $(k, n, r, t) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ώστε το (k, r) να είναι αποδεκτό, $k \leq n$ και $r \leq t$. Μία απεικόνιση $p : \mathcal{A} \longmapsto [0, 1]$ ονομάζεται ένας **κανόνας μετάβασης**(transition rule) για την απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, αν ικανοποιεί τη σχέση

$$\sum_{n=k}^{\infty} p_(k, n, r, t) \leq 1$$

για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (k, r) και για όλα τα $t \in [r, \infty)$, οπως και τη σχέση

$$p(k, n, r, t) = P\left(\{N_t = n\} | \{N_r = k\}\right)$$

για όλα τα $(k, n, r, t) \in \mathcal{A}$ ώστε $P(\{N_r = k\}) > 0$.

Είναι εύκολο να δούμε ότι ένας κανόνας μετάβασης πάντα υπάρχει αλλά δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικός. Ωστόσο, όλοι οι παρακάτω ορισμοί και τα αποτελέσματα που σχετίζονται με κανόνες μετάβασης θα αποδειχθεί να είναι ανεξάρτητα από την συγκεκριμένη επιλογή του κανόνα μετάβασης.

(c) Για έναν κανόνα μετάβασης $p : \mathcal{A} \longmapsto [0, 1]$ και $(k, n, r, t) \in \mathcal{A}$ ορίζουμε τη συνάρτηση

$$p_{k,n} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longmapsto [0, 1]$$

μέσω του τύπου

$$p_{k,n}(r, t) := p(k, n, r, t).$$

Οι $p_{k,n}(r, t)$ ονομάζονται οι **πιθανότητες μετάβασης** της απαριθμήτριας *σ.δ.* $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ως προς τον κανόνα μετάβασης p. Προφανώς ισχύει η ισότητα

$$p_{n,n}(t, t) = 1$$

για κάθε αποδεκτό ζεύγος (n, t), που ικανοποιεί $P(\{N_t = n\}) > 0$.

(d) Η απαριθμήτρια *σ.δ.* ικανοποιεί τις **εξισώσεις Chapman-Kolmogorov** εάν υπάρχει ένας κανόνας μετάβασης p τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα

$$p_{k,n}(r, t) = \sum_{m=k}^{n} p_{k,m}(r, s) p_{m,n}(s, t)$$

για όλα τα $(k,n,r,t) \in \mathcal{A}$ και $s \in [r,t]$ τέτοιο ώστε $P(\{N_r = k\}) > 0$.

Η ισχύς των εξισώσεων Chapman-Kolmogorov είναι ανεξάρτητη από την ιδιαίτερη επιλογή του κανόνα μετάβασης. Πράγματι, για $m \in \{k,...,n\}$ τέτοιο ώστε $P[\{N_s = m\} \cap \{N_r = k\}] > 0$ έχουμε $P[\{N_s = m\} > 0$ και έτσι

$$p_{k,m}(r,s)p_{m,n}(s,t) = P[\{N_t = n\}|\{N_s = m\}] \cdot P[\{N_s = m\}|\{N_r = k\}].$$

Επίσης, για $m \in \{k,...,n\}$ τέτοιο ώστε $P[\{N_s = m\} \cap \{N_r = k\}] = 0$, έχουμε $p_{k,m}(r,s) = P[\{N_s = m\}|\{N_r = k\} = 0$ και έτσι

$$p_{k,m}(r,s)p_{m,n}(s,t) = 0,$$

ανεξαρτήτως του ποια ορίστηκε να είναι η τιμή $p_{m,n}(s,t)$.

Θεώρημα 3.1.5. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. είναι μια διαδικασια Markov τότε ικανοποιει τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov*

Απόδειξη. Θεωρούμε $(k,n,r,t) \in \mathcal{A}$ και $s \in [r,t]$ τέτοιο ώστε $P(\{N_r = k\}) > 0$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}
p_{k,t}([\{r,t\}) &= P[\{N_t = n\}|\{N_r = k\} \\
&= \sum_{m=k}^{n} P[\{N_t = n\} \cap \{N_s = m\}|\{N_r = k\}] \\
&= \sum_{m=k}^{n} (P[\{N_t = n\}|\{N_s = m\} \cap \{N_r = k\}] \cdot P[\{N_s = m\}|\{N_r = k\}]) \\
&= \sum_{m=k}^{n} (P[\{N_t = n\}|\{N_s = m\}] \cdot P[\{N_s = m\}|\{N_r = k\}]) \\
&= \sum_{m=k}^{n} p_{k,m}(r,s)p_{m,n}(s,t),
\end{aligned}$$

όπου το δεύτερο και το τρίτο άθροισμα θα πρέπει να λαμβάνονται μόνο για εκείνα τα $m \in \{k,...,n\}$ για τα οποία $P[\{N_s = m\} \cap \{N_r = k\}] > 0$. □

Το αντίστροφο του θεωρήματος 3.1.5 δεν ισχύει γενικά, όπως δείχνει το παρακάτω αντιπαράδειγμα

Παράδειγμα 3.1.6. *(Stoyanov [39], 20.1(i))*
Υποθέτουμε ότι μία κληρωτίδα περιέχει τέσσερις μπάλες αριθμημένες ως 1, 2, 3, 4. Επιλέγουμε τυχαία μία μπάλα, σημειώνουμε τον αριθμό και την επανατοποθετούμε. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται πολλές φορές. Συμβολίζουμε με ξ_n τον αριθμό στην n-οστή επιλεγμένη μπάλα. Για $j = 1,2,3$ θεωρούμε τα γεγονότα $A_j^{(n)} = \{\xi_n = j\} \cup \{\xi_n = 4\}$, για $m \in \mathbb{N}$ και έστω $X_{3(m-1)+j}$=1 αν συμβαίνει το ενδεχόμενο $A_j^{(m)}$ και 0 διαφορετικά. Έτσι έχουμε ορίσει

τη σ.δ. $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ και θέλουμε να διαπιστώσουμε αν ικανοποιεί την Μαρκοβιανή ιδιότητα και τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov.

Αν καθένα απο τα k_1, k_2, k_3 είναι 1 ή 0, τότε

$$P[\{X_n = k_1\}] = P[\{X_n = k_2\}|\{X_m = k_3\}] = \frac{1}{2},$$

για $n > m$.
Επομένως για $l < m < n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} = P\left[\{X_n = k_2\}|\{X_l = k_1\}\right] &= P\left[\{X_n = k_2\}|\{X_m = 0\}\right]P[\{X_m = 0\}|\{X_l = k_1\}] \\ &\quad +P\left[\{X_n = k_2\}|\{X_m = 1\}\right]P[\{X_m = 1\}|\{X_l = k_1\}] \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι πιθανότητες μετάβασης της ακολουθίας $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιούν την εξίσωση Chapman-Kolmogorov . Επιπλέον, το ενδεχόμενο $\{X_{3m} = 1, X_{3m-1} = 1\}$ σημαίνει ότι ξ_m=4 από το οποίο συνεπάγεται ότι $X_{3m} = 1$.

Έτσι, $\quad P[\{X_{3m} = 1\}|\{X_{3m-2} = 1, X_{3m-1} = 1\}] = 1$, για $m \in \mathbb{N}_0$

Αυτή η σχέση δείχνει ότι η Μαρκοβιανή ιδιότητα δεν ισχύει για την ακολουθία $\{X_n, n \in \mathbb{N}_0\}$. Ως εκ τούτου $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ δεν είναι αλυσίδα Markov παρά το γεγονός ότι οι πιθανότητες μετάβασης του, ικανοποιούν την εξίσωση Chapman-Kolmogorov .

Πόρισμα 3.1.7. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις τότε αυτή ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov .*

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2 ,αν η απαριθμήτρια σ.δ. έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, θα είναι Markov. Επομένως το αποτέλεσμα του Πορίσματος 3.1.7 είναι συνέπεια του Θεωρήματος 3.1.5 . □

Πόρισμα 3.1.8. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. είναι μία διαδικασία Poisson τότε αυτή ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov .*

Απόδειξη. Αν η απαριθμήτρια σ.δ. είναι Poisson , τότε έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, άρα σύμφωνα με το Πόρισμα 3.1.7 θα ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov . □

Ορισμός 3.1.9. Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι **ομογενής** εάν υπάρχει ένας κανόνας μετάβασης p τέτοιος ώστε να ισχύει η ισότητα

$$p_{n,n+k}(s, s+h) = p_{n,n+k}(t, t+h)$$

για όλα τα $n, k \in \mathbb{N}_0$ και $s, t, h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε (n, s) και (n, t) να είναι αποδεκτά και να ικανοποιούν τις σχέσεις $P[\{N_s = n\}] > 0$ και $P[\{N_t = n\}] > 0$. Και πάλι, η ιδιότητα του να είναι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ομογενής είναι ανεξάρτητη της συγκεκριμένης επιλογής του κανόνα μετάβασης.

Θεώρημα 3.1.10. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις,τότε είναι μία ομογενής διαδικασία Markov .*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.1.2 η απαριθμήτρια σ.δ. είναι μία διαδικασία Markov. Για να αποδειχθεί ότι η απαριθμήτρια σ.δ. είναι ομογενής, θεωρούμε $k \in \mathbb{N}_0$ και $h \in \mathbb{R}_+$ και ένα αποδεκτό ζευγάρι (n,t) που ικανοποιεί $P[\{N_t = n\}] > 0$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} p_{n,n+k}(t,t+h) &= P[\{N_{t+h} = n+k\}|\{N_t = n\}] \\ &= P[\{N_{t+h} - N_t = k\}|\{N_t - N_0 = n\}] \\ &= P[\{N_{t+h} - N_t = k\}] \\ &= P[\{N_h - N_0 = k\}] \\ &= P[\{N_h = k\}], \end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από την ανεξαρτησία των προσαυξήσεων και η τέταρτη από την ανεξαρτησία και στασιμότητα των προσαυξησεων. Άρα $p_{n,n+k}(t,t+h) = P[\{N_h = k\}$.

(α) Άρα $p_{n,n+k}(t,t+h) = P[\{N_h = k\}$.

(β) Ομοίως για ένα αποδεκτό ζευγάρι (n,s) που ικανοποιεί την $P(\{N_s = n\}) > 0$ προκύπτει ότι $p_{n,n+k}(s,s+h) = P[\{N_h = k\}]$.

Από τις (α) και (β) έχουμε ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ομογενής. □

Πόρισμα 3.1.11. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. είναι μια διαδικασία Poisson,τότε αυτή είναι μια ομογενής διαδικασία Markov.*

Απόδειξη. Αφού κάθε σ.δ. Poisson έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις το αποτέλεσμα του πορίσματος είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.1.10. □

Ορισμός 3.1.12. Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **φυσιολογική** (regular), αν υπάρχει ένας κανόνας μετάβασης p και μία ακολουθία $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συνεχών συναρτήσεων $\lambda_n : \mathbb{R}_+ \longmapsto (0,\infty)$, ώστε για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n,t) να ισχύουν τα εξής:

(i) $P(\{N_t = n\}) > 0$,

(ii) η συνάρτηση $\mathbb{R}_+ \longmapsto [0,1] : h \longmapsto p_{n,n}(t,t+h)$ να είναι συνεχής.

(iii)

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(1 - p_{n,n}(t,t+h) &= \lambda_{n+1}(t) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} p_{n,n+1}(t,t+h). \end{aligned}$$

Σε αυτήν την περίπτωση λέμε, ότι η $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι η **ακολουθία των εντάσεων**(sequence of intensities) της απαριθμήτριας *σ.δ.* .

Παρατηρήσεις 3.1.13. (**a**) Η συνθήκη (i) μας δείχνει ότι, ανά πάσα στιγμή που το $t \in (0, \infty)$ κάθε πεπερασμένος αριθμός απαιτήσεων επιτυγχάνεται με αυστηρά θετική πιθανότητα.

(**b**)Η συνθήκη (ii) μας δείχνει ότι, εξαρτώμενη από το γεγονός $\{N_t = n\}$ η πιθανότητα μη πραγματοποίησης άλματος σε ένα πεπερασμένο διάστημα μεταβάλλεται ως συνεχής συνάρτηση του μήκους του διαστήματος.

(**c**) Η συνθήκη (iii) μας υποδεικνύει ότι, εξαρτώμενη από το γεγονός $\{N_t = n\}$, η τάση για ένα άλμα οποιουδήποτε ύψους σε ένα απειροελάχιστο χρονικό διάστημα ισοδυναμεί με την τάση ενός αλματος ύψους 1.

Θεώρημα 3.1.14. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. είναι μία διαδικασία Poisson με παράμετρο* a *, τότε είναι μία ομογενής φυσιολογική διαδικασία Markov με εντάσεις* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *που ικανοποιουν τη σχέση* $\lambda_n(t) = a$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$ *και τα* $t \in \mathbb{R}_+$ *.*

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 3.1.11 η απαριθμήτρια *σ.δ.* είναι μία ομογενής διαδικασία Markov. Για να αποδειχθεί ο ισχυρισμός σχετικά με την κανονικότητα, θεωρούμε ένα αποδεκτό ζεύγος (n, t).
Πρώτον, εφόσον

$$P[\{N_t = n\}] = e^{-\alpha t}\frac{(\alpha t)^n}{n!},$$

έχουμε $P[\{N_t = n\}] > 0$, που αποδεικνύει την πρώτη συνθήκη του ορισμού 3.1.12.
Δεύτερον, εφόσον

$$p_{n,n}(t, t+h) = e^{-\alpha h},$$

η συνάρτηση $h \longmapsto p_{n,n}(t, t+h)$ είναι συνεχής, που αποδεικνύει την δεύτερη συνθήκη του Ορισμού 3.1.12.
Τέλος, έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(1 - p_{n,n}(t, t+h)) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(1 - e^{-\alpha h})\\ &= \alpha\end{aligned}$$

καθώς και

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}p_{n,n+1}(t, t+h) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}e^{-\alpha h}\alpha h\\ &= \alpha.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει τη συνθήκη (iii) του Ορισμού 3.1.12.
Επομένως, η σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι φυσιολογική με εντάσεις $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ όπου $\lambda_n(t) = \alpha$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και τα $t \in \mathbb{R}_+$. $\square$

Το προηγούμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι όλες οι ιδιότητες που εισήχθησαν σε αυτή την ενότητα ικανοποιούνται από την διαδικασία Poisson.

3.2 Ένας χαρακτηρισμός της φυσιολογικότητας.

Το ακόλουθο αποτέλεσμα χαρακτηρίζει την φυσιολογικότητα των απαριθμητριών σ.δ. που ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω ότι η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov και έστω $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $R_+ \to (0, \infty)$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(**a**) *Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι φυσιολογική με εντάσεις $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.*

(**b**) *Υπάρχει ένας κανόνας μετάβασης p τέτοιος ώστε να ισχύουν οι διαφορικές εξισώσεις*

$$\frac{d}{dt}p_{k,n}(r,t) = \begin{cases} -p_{k,k}(r,t)\lambda_{k+1}(t) & \text{αν } k = n \\ p_{k,n-1}(r,t)\lambda_n(t) - p_{k,n}(r,t)\lambda_{n+1}(t) & \text{αν } k < n \end{cases}$$

με αρχικές συνθήκες

$$p_{k,n}(r,r) = \begin{cases} 1 & \text{αν } k = n \\ 0 & \text{αν } k < n \end{cases}$$

για όλα τα $(k,n,r,t) \in \mathcal{A}$.

(**c**) *Υπάρχει ένας κανόνας μετάβασης p τέτοιος ώστε να ισχύουν οι ολοκληρωτικές εξισώσεις*

$$p_{k,n}(r,t) = \begin{cases} e^{-\int_r^t \lambda_{k+1}(s)ds} & \text{αν } k = n \\ \int_k^t p_{k,n-1}(r,s)\lambda_n(s)p_{n,n}(s,t)ds & \text{αν } k < n \end{cases}$$

για όλα τα $(k,n,r,t) \in \mathcal{A}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα:

$$(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (a)$$

- Υποθέτουμε πρώτα ότι ισχύει το (a) και θεωρώ ένα κανόνα μετάβασης p και $(k, n, r, t) \in \mathcal{A}$

  (**a1**) Από τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov, έχουμε:

$$\begin{aligned} p_{k,k}(r, t+h) - p_{k,k}(r, t) &= p_{k,k}(r, t) p_{k,k}(t, t+h) - p_{k,k}(r, t) \\ &= -p_{k,k}(r, t)(1 - p_{k,k}(t, t+h)) \end{aligned}$$

και ως εκ τούτου

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[p_{k,k}(r, t+h) - p_{k,k}(r, t)] &= -p_{k,k}(r, t) \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}(1 - p_{k,k}(t, t+h)) \\ &= -p_{k,k}(r, t) \lambda_{k+1}(t) \end{aligned}$$

Έτσι η δεξιά παράγωγος της συνάρτησης $t \longmapsto p_{k,k}(r, t)$ υπάρχει και είναι συνεχής και από αυτό προκύπτει ότι η παράγωγος της συνάρτησης $t \longmapsto p_{k,k}(r, t)$ υπάρχει και ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt} p_{k,n}(r, t) = -p_{k,k}(r, t) \lambda_{k+1}(t)$$

με την αρχική συνθήκη $p_{k,k}(r, r) = 1$.

Ιδιαιτέρως, έχουμε

$$\begin{aligned} p_{k,k}(r, t) &= e^{-\int_r^t \lambda_{k+1}(s) ds} \\ &> 0. \end{aligned}$$

(**a2**) Υποθέτουμε τώρα ότι $k < n$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} p_{k,n}(r, t+h) - p_{k,n}(r, t) &= \sum_{m=k}^{n} p_{k,m}(r, t) p_{m,n}(t, t+h) - p_{k,n}(r, t) \\ &= \sum_{m=k}^{n-2} p_{k,m}(r, t) p_{m,n}(t, t+h) \\ &\quad + p_{k,n-1}(r, t) p_{n-1,n}(t, t+h) \\ &\quad - p_{k,n}(r, t)(1 - p_{n,n}(t, t+h)). \end{aligned}$$

Για $m \in \{k, ..., n-2\}$ έχουμε $p_{m,n}(t, t+h)) \leq 1 - p_{m,m}(t, t+h) - p_{m,m-1}(t, t+h)$ επομένως

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} p_{m,n}(t, t+h) = 0$$

και η παραπάνω σχέση μαζί με τη σχέση

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} p_{n-1,n}(t, t+h) = \lambda_n(t)$$

και

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(1 - p_{n,n}(t, t+h)) = \lambda_{n+1}(t)$$

μας δίνει

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(p_{k,n}(r, t+h) - p_{k,n}(r,t)) &= \sum_{m=k}^{n-2} p_{k,m}(r,t) \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} p_{m,n}(t, t+h) \\
&\quad + p_{k,n-1}(r,t) \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} p_{n-1,n}(t, t+h) \\
&\quad - p_{k,n}(r,t) \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(1 - p_{n,n}(t, t+h)) \\
&= p_{k,n-1}(r,t)\lambda_n(t) - p_{k,n}(r,t)\lambda_{n+1}(t).
\end{aligned}$$

Έτσι η δεξιά παράγωγος της συνάρτησης $t \longmapsto p_{k,n}(r,t)$ υπάρχει και επομένως η συνάρτηση $t \longmapsto p_{k,n}(r,t)$ είναι δεξιά συνεχής στο $[r, \infty)$. Επιπλέον, για $t \in (r, \infty)$ από τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov έπεται ότι για όλα τα $s \in (r,t)$ ισχύει

$$\begin{aligned}
|p_{k,n}(r,s) - p_{k,n}(r,t)| &= |p_{k,n}(r,s) - \sum_{m=k}^{n} p_{k,m}(r,s) p_{m,n}(s,t)| \\
&\leq \sum_{m=k}^{n-1} p_{k,m}(r,s) p_{m,n}(s,t) + p_{k,n}(r,s)(1 - p_{n,n}(s,t)) \\
&\leq \sum_{m=k}^{n} (1 - p_{m,m}(s,t)) \\
&\leq \sum_{m=k}^{n} \left(1 - \frac{p_{m,m}(r,t)}{p_{m,m}(r,s)}\right)
\end{aligned}$$

και έτσι

$$\lim_{s\to t} |p_{k,n}(r,s) - p_{k,n}(r,t)| = 0,$$

το οποίο σημαίνει ότι η συνάρτηση $t \longmapsto p_{k,n}(r,t)$ είναι επίσης και αριστερά συνεχής στο (r, ∞) και επομένως συνεχής στο $[r, \infty)$. Αλλά τότε η δεξιά παράγωγος του $t \longmapsto p_{k,n}(r,t)$ είναι συνεχής. Αυτό συνεπάγεται ότι η παράγωγος του $t \longmapsto p_{k,n}(r,t)$ υπάρχει και ικανοποιεί την διαφορική συνάρτηση .

$$\frac{d}{dt} p_{k,n}(r,t) = p_{k,n-1}(r,t)\lambda_n(t) - p_{k,n}(r,t)\lambda_{n+1}(t)$$

με αρχική συνθήκη $p_{k,n}(r,r) = 0$

(**a3**). Εξαιτίας του $(a1)$ και του $(a2)$, το (a) συνεπάγεται το (b).

- Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει το (b) και θεωρώ ένα κανόνα μετάβασης p που ικανοποιεί τις διαφορικές εξισώσεις και $(k,n,r,t) \in \mathcal{A}$.

  (**b1**). Έχουμε ήδη παρατηρήσει στο προηγούμενο μέρος της απόδειξης πως η διαφορική εξίσωση

$$\frac{d}{dt}p_{k,k}(r,t) = -p_{k,k}(r,t)\lambda_{k+1}(t)$$

με αρχικη συνθήκη $p_{k,k}(r,r) = 0$ έχει την μοναδική λύση

$$p_{k,k}(r,t) = e^{-\int_r^t \lambda_{k+1}(s)ds}$$

(**b2**) Υποθέτουμε τώρα ότι $k < n$. Τότε η συνάρτηση $t \longmapsto 0$ είναι η μοναδική λύση της ομογενής διαφορικής συνάρτησης

$$\frac{d}{dt}p_{k,k}(r,t) = -p_{k,n}(r,t)\lambda_{n+1}(t)$$

με αρχική συνθήκη $p_{k,n}(r,r) = 0$. Αυτό σημαίνει ότι η ανομοιογενής διαφορική συνάρτηση

$$\frac{d}{dt}p_{k,k}(r,t) = p_{k,n-1}(r,t)\lambda_n(t) - p_{k,n}(r,t)\lambda_{n+1}(t)$$

με αρχική συνθήκη $p_{k,n}(r,r) = 0$, έχει το πολύ μία λύση .

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $t \longmapsto p_{k,n-1}(r,t)$ είναι ήδη δοσμένη (που λόγω του (**A**) είναι η περίπτωση για $n = k+1$) και ορίζεται

$$\hat{p}_{k,n}(r,t) := \int_r^t p_{k,n-1}(r,s)\lambda_n(s)p_{n,n}(s,t)ds.$$

Εφόσον

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}p_{k,n}(r,t)\hat{p}_{k,n}(r,t) &= \int_r^t p_{k,n-1}(r,s)\lambda_n(s)\left(\frac{d}{dt}p_{n,n}(s,t)\right)ds + p_{k,n-1}(r,t)\lambda_n(t) \\
&= \int_r^t p_{k,n-1}(r,s)\lambda_n(s)(-p_{n,n}(s,t)\lambda_{n+1}(t))ds + p_{k,n-1}(r,t)\lambda_n(t) \\
&= \int_r^t p_{k,n-1}(r,s)\lambda_n(s)p_{n,n}(s,t)ds \cdot (-\lambda_{n+1}(t)) + p_{k,n-1}(r,t)\lambda_n(t) \\
&= \hat{p}_{k,n}(r,s)(-\lambda_{n+1}(t)) + p_{k,n-1}(r,t)\lambda_n(t) \\
&= p_{k,n-1}(r,t)\lambda_n(t) - \hat{p}_{k,n}(r,s)(-\lambda_{n+1}(t))
\end{aligned}$$

και $\hat{p}_{k,n}(r,r) = 0$, η συνάρτηση $t \longmapsto \hat{p}_{k,n}(r,t)$ είναι η μοναδική λύση της διαφορικής συνάρτησης

$$\frac{d}{dt}p_{k,k}(r,t) = p_{k,n-1}(r,t)\lambda_n(t) - p_{k,n}(r,t)\lambda_{n+1}(t),$$

με αρχική συνθήκη $p_{k,n}(r,r) = 0$ και έχουμε

$$\int_r^t p_{k,n-1}(r,s)\lambda_n(s)(p_{n,n}(s,t)ds.$$

(b3). Από το **(b1)** και το **(b2)**, το (b) συνεπάγεται το (c).

- Υποθέτουμε τέλος ότι ισχύει το (c) και θεωρούμε έναν κανόνα μετάβασης p που ικανοποιεί τις συναρτήσεις ολοκλήρωσης. Για $n \in \mathbb{N}$ και $r,t \in \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε $r \leq t$, ορίζουμε

$$\Lambda_n(r,t) := \int_r^t \lambda_n(s)ds.$$

Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} p_{n,n}(r,t) &= e^{-\int_r^t \lambda_{n+1}(s)ds} \\ &= e^{-\Lambda_{n+1}(r,t)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n,r) και όλα τα $t \in [r,\infty)$ Πρώτον, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$, έχουμε

$$\begin{aligned} P[\{N_t = n\}] &= P[\{n_t = 0\}|\{N_0 = 0\}] \\ &= p_{0,0}(0,t) \\ &> 0 \end{aligned}$$

Θεωρούμε τώρα, $t \in (0,\infty)$ και υποθέτουμε ότι $p_{0,n-1}(0,t) = P[\{N_t = n-1\}] > 0$ ισχύει για κάποια $n \in \mathbb{N}$ και όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ (η οποία είναι η υπόθεση για $n = 1$). Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} P[\{N_t = n\}] &= P[\{N_t = n\}|\{N_0 = 0\}] \\ &= p_{0,n}(0,t) \\ &= \int_0^t p_{0,n-1}(0,s)\lambda_n(s)p_{n,n}(s,t)ds \\ &> 0 \end{aligned}$$

Έτσι λοιπόν

$$P[\{N_t = n\}] > 0$$

για κάθε αποδεκτό ζεύγος (n,t), το οποίο αποδεικνύει το (i) του Ορισμού 3.1.12. Δεύτερον, για κάθε αποδεκτό ζεύγος (n,t),και για όλα τα $h \in \mathbb{R}_+$, έχουμε

$$p_{n,n}(t,t+h) = e^{-\Lambda_{n+1}(t,t+h)},$$

από το οποίο προκύπτει, ότι η συνάρτηση $h \longmapsto p_{n,n}(t, t+h)$ είναι συνεχής. Έτσι αποδεικνύεται το (ii) του Ορισμού 3.1.12. Τέλος, για κάθε αποδεκτό ζεύγος (n, t), έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(1 - p_{n,n}(t, t+h)) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(1 - e^{-\Lambda_{n+1}}(t, t+h) \\ &= \lambda_{n+1}(t), \end{aligned}$$

και επειδή

$$\begin{aligned} p_{n,n+1}(t, t+h)) &= \int_t^{t+h} p_{n,n}(t,u)\lambda_{n+1}(u)p_{n+1,n+1}(u, t+h)du \\ &= \int_t^{t+h} p_{n,n}(t,u)\lambda_{n+1}(u)e^{-\Lambda_{n+2}(u,t+h)}du \\ &= e^{-\Lambda_{n+2}(t,t+h)} \int_t^{t+h} p_{n,n}(t,u)\lambda_{n+1}(u)e^{\Lambda_{n+2}(t,u)}du \end{aligned}$$

επίσης έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(p_{n,n+1}(t, t+h) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(e^{-\Lambda_{n+2}(t,t+h)} \int_t^{t+h} p_{n,n}(t,u)\lambda_{n+1}(u)e^{\Lambda_{n+2}(t,u)}du\right) \\ &= e^{-\Lambda_{n+2}(t,t)} \cdot p_{n,n}(t,t)\lambda_{n+1}(t)e^{\Lambda_{n+2}(t,t)} \\ &= \lambda_{n+1}(t). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το (iii) του Ορισμού 3.1.12.
Επομένως, το (c) συνεπάγεται το (a).

□

Δεδομένου ότι φυσιολογικότητα είναι ανεξάρτητη από την ιδιαίτερη επιλογή του κανόνα μετάβασης, κάθε κανόνας μετάβασης για μία φυσιολογική απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov πληροί τις διαφορικές και ολοκληρωτικές συναρτήσεις του θεωρήματος 3.2.1.

3.3 Ένας χαρακτηρισμός των μη ομογενών διαδικασιών Poisson.

Στην παρούσα ενότητα, μελετούμε απαριθμήτριες διδικασίες, που είναι φυσιολογικές διαδικασίες Markov με ίδιες εντάσεις.

Λήμμα 3.3.1. *Έστω ότι η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov και είναι φυσιολογική. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα* (**a**) *Ισχύει η*

$$p_{0,k}(t,t+h) = p_{n,n+k}(t,t+h)$$

για όλα τα $n,k \in \mathbb{N}_0$ *και* $t,h \in \mathbb{R}_+$ *τέτοια ώστε το* (n,t) *να είναι αποδεκτό.*

(**b**) *Οι εντάσεις της* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι όλες ίδιες.*

Απόδειξη. • Είναι εμφανές ότι το (a) συνεπάγεται το (b).

• Υποθέτουμε τώρα ότι το (b) ισχύει.

(**b1**) Για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n,t) και όλα τα $h \in \mathbb{R}_+$, έχουμε

$$\begin{aligned} p_{0,0}(t,t+h)) &= e^{-\int_t^{t+h}\lambda_1(s)ds} \\ &= e^{-\int_t^{t+h}\lambda_{n+1}(s)ds} \\ &= p_{n,n}(t,t+h). \end{aligned}$$

(**b2**) Υποθέτουμε τώρα ότι η εξίσωση

$$p_{0,k+1}(t,t+h) = p_{n,n+k}(t,t+h)$$

ισχύει για κάποια $k \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n,t) και όλα τα $h \in \mathbb{R}_+$(όπου απο το (A) είναι η περίπτωση για $k=0$). Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} p_{0,k+1}(t,t+h) &= \int_t^{t+h} p_{0,k}(t,u)\lambda_{k+1}(u)p_{k+1,k+1}(u,t+h)du \\ &= \int_t^{t+h} p_{n,n+k}(t,u)\lambda_{n+k+1}(u)p_{n+k+1,n+k+1}(u,t+h)du \\ &= p_{n,n+k+1}(t,t+h). \end{aligned}$$

για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n,t) και όλα τα $h \in \mathbb{R}_+$.

(**b3**) Από το $(b1)$ και $(b2)$, προκύπτει ότι το (b) συνεπάγεται το (a) . □

Ορισμός 3.3.2. Έστω $\lambda : \mathbb{R}_+ \to (0,\infty)$ μία συνεχής συνάρτηση. Η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μη ομογενής διαδικασία** Poisson με ένταση λ, εάν έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις που ικανοποιούν τη σχέση

$$P_{N_{t+h}-N_t} = \mathbf{P}\left(\int_t^{t+h}\lambda(s)ds\right)$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και $h \in (0,\infty)$. Έτσι, η απαριθμήτρια *σ.δ.* είναι μη ομογενής Poisson με σταθερή ένταση $t \longmapsto \alpha$ αν και μόνο αν είναι μία *σ.δ.* Poisson με παράμετρο α.

Θεώρημα 3.3.3. *Έστω $\lambda : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ μία συνεχής συνάρτηση. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(**a**) *Η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία φυσιολογική σ.δ. Markov με εντάσεις $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν την σχέση $\lambda_n(t) = \lambda(t)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και τα $t \in \mathbb{R}_+$.*

(**b**) *Η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις και είναι φυσιολογική με εντάσεις $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν την σχέση $\lambda_n(t) = \lambda(t)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και τα $t \in \mathbb{R}_+$.*

(**c**) *Η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία μη ομογενής διαδικασία Poisson με ένταση λ.*

Απόδειξη. Κάθε μία απο τις παραπάνω συνθήκες δείχνει ότι η απαριθμήτρια διαδικασία ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov. Επομένως, το Θεώρημα 3.2.1 ισχύει. Για όλα τα $r, t \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $r \leq t$, ορίζουμε

$$\Lambda(r, t) := \int_r^t \lambda(s)ds.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος θα γίνει σύμφωνα με το ακόλουθο σχήμα:

$$(a) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (a)$$

- Υποθέτουμε πρώτα πως ισχύει το (a).
  (**a1**) Για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n, t) και όλα τα $t \in [r, \infty)$, έχουμε

$$\begin{aligned} p_{n,n}(r,t) &= e^{-\int_r^t \lambda_{n+1}(s)ds} \\ &= e^{-\int_r^t \lambda(s)ds} \\ &= e^{-\Lambda(r,t)}. \end{aligned}$$

  (**a2**) Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει η εξίσωση

$$p_{n,n+k}(r,t) = e^{-\Lambda(r,t)} \frac{(\Lambda(r,t))^k}{k!}$$

  για κάποια $k \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n, r) και όλα τα $t \in [r, \infty)$(όπου λόγω του $(a1)$ είναι η περίπτωση για $k = 0$). Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} p_{n,n+k+1}(r,t) &= \int_r^t p_{n,n+k}(r,s)\lambda_{n+k+1}(s)p_{n+k+1,n+k+1}(s,t)ds \\ &= \int_r^t e^{-\Lambda(r,s)} \frac{(\Lambda(r,s))^k}{k!} \lambda(s) e^{-\Lambda(s,t)} ds \\ &= e^{-\Lambda(r,t)} \int_r^t \frac{(\Lambda(r,s))^k}{k!} \lambda(s)ds \end{aligned}$$

$$\stackrel{?}{=} \quad e^{-\Lambda(r,t)}\frac{(\Lambda(r,t))^{k+1}}{(k+1)!}$$

για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n,r) και όλα τα $t \in [r,\infty)$.

(**a3**) Από το $(a1)$ και $(a2)$,προκύπτει η εξίσωση

$$p_{n,n+k}(r,t) = e^{-\Lambda(r,t)}\frac{(\Lambda(r,t))^{k}}{k!}$$

για όλα τα $n,k \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε (n,r) να είναι αποδεκτό και $r \leq t$.

(**a4**) Από το $(a3)$ έχουμε

$$\begin{aligned} P[\{N_t = n\}] &= p_{0,n}(0,t) \\ &= e^{-\Lambda(0,t)}\frac{(\Lambda(0,t))^{n}}{n!} \end{aligned}$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε (n,t) να είναι αποδεκτό. Έτσι έχουμε την σχέση

$$P_{N_t} = \mathbf{P}(\Lambda(0,t)).$$

για όλα τα $t \in (0,\infty)$.

(**a5**) Ισχύει η ισότητα

$$P_{N_t - N_r} = \mathbf{P}(\Lambda(r,t)).$$

ισχύει για όλα τα $r,t \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $r < t$.

Στην περίπτωση $r = 0$, ο ισχυρισμός προκύπτει απο το $(a4)$. Στην περίπτωση $r > 0$, προκύπτει απο το $(a4)$ ότι η πιθανότητα έκρηξης είναι ίση με 0 και ότι $P[\{N_t = n\}] > 0$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$. Από το $(a3)$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} P[\{N_t - N_r = k\}] &= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N_t - N_r = k\} \cap \{N_r = n\}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P[\{N_t = n+k\}|\{N_r = n\}] \cdot P[\{N_r = n\}] \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} p_{n,n+k}(r,t)p_{0,n}(0,r) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\Lambda(r,t)}\frac{(\Lambda(r,t))^{k}}{k!}e^{-\Lambda(0,r)}\frac{(\Lambda(0,r))^{n}}{n!} \\ &= e^{-\Lambda(r,t)}\frac{(\Lambda(r,t))^{k}}{k!}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\Lambda(0,r)}\frac{(\Lambda(0,r))^{n}}{n!} \\ &= e^{-\Lambda(r,t)}\frac{(\Lambda(r,t))^{k}}{k!}, \end{aligned}$$

για όλα τα $k \in \mathbb{N}_0$, και έτσι έχουμε ότι

$$P_{N_t - N_r} = \mathbf{P}(\Lambda(r,t)).$$

(**a6**) Η απαριθμήτρια διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις
Έστω $m \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοιο ώστε $0 < t_0 < t_1 < ... < t_m$ και $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}_0$. Για $j \in \{0, 1, ..., m\}$ ορίζουμε

$$n_j := \sum_{i=1}^{j} k_i.$$

Αν $P[\bigcap_{j=1}^{m-1}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}]$=$P[\bigcap_{j=1}^{m-1}\{N_{t_j} = n_j\}] > 0$, τότε η ιδιότητα Markov μαζί με το $(a3)$ και $(a5)$ μας δίνει,

$$\begin{aligned}
P\Bigg[\{N_{t_m} = n_m\}|\bigcap_{j=1}^{m-1}\{N_{t_j} = n_j\}\Bigg] &= P[\{N_{t_m} = n_m\}|\{N_{t_{m-1}} = n_{m-1}\}] \\
&= p_{n_{m-1},n_m}(t_{m-1}, t_m) \\
&= e^{-\Lambda(t_{m-1},t_m)}\frac{((\Lambda(t_{m-1}, t_m))^{n_m-n_{m-1}}}{(n_m - n_{m-1})!} \\
&= P[\{N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = n_m - n_{m-1}\}] \\
&= P[\{N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = k_m\}],
\end{aligned}$$

επομένως

$$\begin{aligned}
P\Bigg[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\Bigg] &= P\Bigg[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\Bigg] \\
&= P\Bigg[\{N_{t_m} = n_m\}|\bigcap_{j=1}^{m-1}\{N_{t_j} = n_j\}\Bigg]\cdot P\Bigg[\bigcap_{j=1}^{m-1}\{N_{t_j} = n_j\}\Bigg] \\
&= P[\{N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = k_m\}]\cdot P\Bigg[\bigcap_{j=1}^{m-1}\{N_{t_j} = n_j\}\Bigg] \\
&= P[\{N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = k_m\}]\cdot P\Bigg[\bigcap_{j=1}^{m-1}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\Bigg].
\end{aligned}$$

Είναι εμφανές ότι η σχέση

$$P\Bigg[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\Bigg] = P[\{N_{t_m} - N_{t_{m-1}} = k_m\}]\cdot P\Bigg[\bigcap_{j=1}^{m-1}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\Bigg]$$

ισχύει επίσης εάν $P[\bigcap_{j=1}^{m-1}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}] = 0$.
Με επαγωγή στο $m \in \mathbb{N}$ προκύπτει ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.
(**a7**) λόγω του $(a5)$ και του $(a6)$, η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία μη ομογενής διαδικασία Poisson με ένταση λ. Συνεπώς από το (a) συνεπάγεται το (c).

- Έστω τώρα ότι ισχύει το (c). Φυσικά, η διαδικασία $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Επιπλέον, για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n,r) και όλα τα $k\in\mathbb{N}_0$ και $t\in[r,\infty)$, έχουμε

$$\begin{aligned} p_{n,n+k}(r,t) &= P[\{N_t=n+k\}|\{N_r=n\}] \\ &= P[\{N_t-N_r=k\}|\{N_r-N_0=n\}] \\ &= P[\{N_t-N_r=k\}] \\ &= e^{-\Lambda(r,t)}\frac{(\Lambda(r,t))^k}{k!}. \end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από την ανεξαρτησία των προσαυξήσεων της $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Για $k=0$ έχουμε

$$\begin{aligned} p_{n,n}(r,t) &= e^{-\Lambda(r,t)} \\ &= e^{-\int_r^t \lambda(s)ds}, \end{aligned}$$

και για $k\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} p_{n,n+k}(r,t) &= e^{-\Lambda(r,t)}\frac{(\Lambda(r,t))^k}{k!} \\ &\stackrel{?}{=} e^{-\Lambda(r,t)}\int_r^t \frac{(\Lambda(r,s))^{k-1}}{(k-1)!}\lambda(s)ds \\ &= \int_r^t e^{-\Lambda(r,s)}\frac{(\Lambda(r,s))^{k-1}}{(k-1)!}\lambda(s)e^{-\Lambda(s,t)}ds \\ &\stackrel{?}{=} \int_r^t p_{n,n+k-1}(r,s)\lambda(s)p_{n+k,n+k}(s,t)ds. \end{aligned}$$

Τώρα απο το Θεώρημα 3.2.1 προκύπτει ότι η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι φυσιολογική με εντάσεις $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν την σχέση $\lambda_n(t)=\lambda(t)$ για όλα τα $n\in\mathbb{N}$ και $t\in\mathbb{R}_+$. Επομένως, από το (c) συνεπαγεται το (b).

- Τέλος έστω ότι ισχύει το (b). Αφού η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, προκύπτει απο το Θεώρημα 3.1.2 ότι $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έιναι μια διαδικασία Markov. Επομένως, από το (b) συνεπαγεται το (a).

□

3.4 Ένας Χαρακτηρισμός της Ομογένειας.

Στην παρούσα ενότητα, μελετούμε απαριθμήτριες διαδικασίες, που είναι φυσιολογικές διαδικασίες Markov με εντάσεις που είναι όλες σταθερές.

Λήμμα 3.4.1. *Έστω ότι η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov και είναι φυσιολογική. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(a) *Η σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι ομογενής.*

(b) *Οι εντάσεις της* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι όλες σταθερές.*

Απόδειξη. **(a)** $\Longrightarrow$ **(b)**: Υποθέτουμε πρώτα ότι ισχύει το (a) και θεωρούμε ότι $n \in \mathbb{N}_0$. Για όλα τα $s,t \in (0,\infty)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1}(s) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(p_{n,n+1}(s,s+h)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(p_{n,n+1}(t,t+h)\\ &= \lambda_{n+1}(t),\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του ορισμού των ομογενών απαριθμητριών διαδικασιών. Έτσι, η λ_{n+1} είναι σταθερή στο $(0,\infty)$ επομένως είναι σταθερή στο $\mathbb{R}_+$. Συνεπώς το (a) συνεπάγεται το (b).

(b) $\Longrightarrow$ **(a)**: Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει το (b) και θεωρούμε μια ακολουθία $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο $(0,\infty)$ τέτοια ώστε, να ισχύει $\lambda_n(t) = \alpha_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$.

Θα δείξω το ($\boldsymbol{\alpha}$) με επαγωγή στο $k \in \mathbb{N}$.

• $k = 0$. Για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ και $s,t,h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε (n,s) και (n,t) να είναι αποδεκτά, έχουμε

$$\begin{aligned}p_{n,n}(s,s+h) &= e^{-\int_s^{s+h}\lambda_{n+1}(u)du}\\ &= e^{-\int_s^{s+h}\alpha_{n+1}du}\\ &= e^{-\alpha_{n+1}h} = p_{n,n}(t,t+h),\end{aligned}$$

δηλαδή

$$p_{n,n}(s,s+h) = p_{n,n}(t,t+h) \tag{3.1}$$

Άρα ισχύει ο ορισμός 3.1.9 των ομογενών απαριθμητριών σ.δ. για $k = 0$.

• $k \longrightarrow k+1$. Υποθέτουμε τώρα ότι για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ και $s,t,h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε (n,s) και (n,t) να είναι αποδεκτά ισχύει η σχέση

$$p_{n,n+k}(s,s+h) = p_{n,n+k}(t,t+h) \tag{3.2}$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}_0$.

Τότε έχουμε

$$p_{n,n+k+1}(s,s+h) = \int_s^{s+h} p_{n,n+k}(s,u)\lambda_{n+k+1}p_{n+k+1,n+k+1}(u,s+h)du$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^h p_{n,n+k}(s,s+h_1)a_{n+k+1}p_{n+k+1,n+k+1}(s+h_1,s+h_1+h_2)dh_1 \\
&= \int_0^h p_{n,n+k}(t,t+h_1)a_{n+k+1}p_{n+k+1,n+k+1}(t+h_1,t+h_1+h_2)dh_1 \\
&= \int_s^{s+h} p_{n,n+k}(t,t-s+u)a_{n+k+1}p_{n+k+1,n+k+1}(t-s+u,t+h)du \\
&\overset{v:=t-s+u}{=} \int_t^{t+h} p_{n,n+k}(t,v)a_{n+k+1}p_{n+k+1,n+k+1}(v,t+h)dv \\
&= \int_t^{t+h} p_{n,n+k}(t,v)\lambda_{n+k+1}(v)p_{n+k+1,n+k+1}(v,t+h)dv \\
&= p_{n,n+k+1}(t,t+h),
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τελευταία ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα 3.1.14, η δεύτερη και η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του μετασχηματισμού $u = s+h_1$ με $0 \geq h_1 \geq h$ και $h_2 := h-h_1$, η τρίτη ισότητα προκύπτει από τη σχέση (3.1) και την υπόθεση της επαγωγής (3.2).
Επομένως ισχύει το (a). □

Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των ομογενών φυσιολογικών διαδικασιών Markov.

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω ότι $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών στο $(0,\infty)$. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα :*

(a) *Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ειμαι μία φυσιολογική διαδικασία Markov με εντάσεις $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ που ικανοποιούν $\lambda_n(t) = \alpha_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$.*

(b) *Η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη σχέση $P_{W_n} = Exp(\alpha_n)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Για $n \in \mathbb{N}$, έστω $\mathbf{T}_n, \mathbf{W}_n : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^n$ τα τυχαία διανύσματα με συντεταγμένες T_i και W_i αντίστοιχα , και έστω $\mathbf{M}_n$ ο $(n \times n)$ πίνακας με στοιχεία

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{αν } i \geq j \\ 0 & \text{αν } i < j. \end{cases}$$

Τότε ο $\mathbf{M}_n$ είναι αντιστρέψιμος και ικανοποιεί τη σχέση

$$det\mathbf{M}_n = 1.$$

Επιπλέον, έχουμε $\mathbf{T}_n = \mathbf{M}_n \circ \mathbf{W}_n$ και επομένως

$$\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_n{}^{-1} \circ \mathbf{T}_n$$

καθώς και ${\mathbf{T}_n}^{-1} = {\mathbf{W}_n}^{-1} \circ {\mathbf{M}_n}^{-1}$. Επιπλέον, έστω $\mathbf{l}_n$ το διάνυσμα στο $\mathbb{R}^n$ με όλες τις συντεταγμένες ίσες με το 1 και έστω $\langle .,. \rangle$ το εσωτερικό γινόμενο επάνω στο $\mathbb{R}^n$.

• Υποθέτουμε πρώτα ότι ισχύει το (a). Δεδομένου ότι η διαδικασία άφιξης των απαιτήσεων είναι πιο άμεσα συνδεδεμένη με την απαριθμήτρια διαδικασία απο ότι είναι η διαδικασία των ενδιάμεσων χρόνων αφιξης των απαιτήσεων, θα προσδιορίσουμε πρώτα τις κατανομές πεπαρασμένης διάστασης της διαδικασίας άφιξης των απαιτήσεων και στη συνέχεια θα εφαρμόσουμε την ισότητα $\mathbf{W}_n = {\mathbf{M}_n}^{-1} \circ \mathbf{T}_n$, ώστε να πάρουμε τις κατανομές της διαδικασίας των ενδιάμεσων χρόνων αφιξης.

Θεωρούμε δύο ακολουθίες $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ και $\{t_j\}_{j\in\mathbb{N}_0}$ πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν τις σχέσεις $t_0 = 0$ και $t_{j-1} \leq r_j < t_j$ για όλα τα $j \in \mathbb{N}$. Αρχικά εκμεταλλευόμαστε την φυσιολογικότητα και στη συνέχεια την ιδιότητα Markov προκειμένου να προσδιορισουμε τις κατανομές πεπαρασμένης διάστασης της διαδικασίας άφιξης των απαιτήσεων.

(**a1**) Για κάθε αποδεκτό ζεύγος (j, r) και όλα τα $t \in [r, \infty)$, έχουμε

$$p_{j,j}(r,t) = e^{-\alpha_{j+1}(t-r)}.$$

Πράγματι, η φυσιολογικότητα μας δίνει

$$\begin{aligned} p_{j,j}(r,t) &= e^{-\int_r^t \lambda_{j+1}(s)ds} \\ &= e^{-\int_r^t \alpha_{j+1}ds} \\ &= e^{-\alpha_{j+1}(t-r)}. \end{aligned}$$

(**a2**) Για όλα τα $j \in \mathbb{N}$ και $r, t \in (0, \infty)$ τέτοια ώστε $r \leq t$, έχουμε

$$p_{j-1,j}(r,t) := \begin{cases} \frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}-\alpha_j}\left(e^{-\alpha_j(t-r)} - e^{-\alpha_{j+1}(t-r)}\right) & \text{αν } \alpha_j \neq \alpha_{j+1} \\ \alpha_j(t-r)e^{-\alpha_j(t-r)} & \text{αν } \alpha_j = \alpha_{j+1}. \end{cases}$$

Πράγματι, αν $\alpha_j \neq \alpha_{j+1}$, τότε η φυσιολογικότητα σε συνδυασμό με το $(a1)$ μας δίνει

$$\begin{aligned} p_{j-1,j}(r,t) &= \int_r^t p_{j-1,j-1}(r,s)\lambda_j(s)p_{j,j}(s,t)ds \\ &= \int_r^t e^{-\alpha_j(s-r)}\alpha_j e^{-\alpha j+1(t-s)}ds \\ &= \alpha_j e^{(\alpha_j r - \alpha_{j+1}t)} \int_r^t e^{(\alpha_{j+1}-\alpha_j)s}ds \\ &= \alpha_j e^{(\alpha_j r - \alpha_{j+1}t)} \frac{1}{\alpha_{j+1}-\alpha_j}\left(e^{(\alpha_{j+1}-\alpha_j)t} - e^{(\alpha_{j+1}-\alpha_j)r}\right) \\ &= \frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}-\alpha_j}\left(e^{-\alpha_j(t-r)} - e^{-\alpha_{j+1}(t-r)}\right). \end{aligned}$$

Παρόμοια, αν $\alpha_j = \alpha_{j+1}$, τότε

$$
\begin{aligned}
p_{j-1,j}(r,t) &= \int_r^t p_{j-1,j-1}(r,s)\lambda_j(s)p_{j,j}(s,t)ds \\
&= \int_r^t e^{-\alpha_j(s-r)}\alpha_j e^{-\alpha_{j+1}(t-s)}ds \\
&= \int_r^t e^{-\alpha_j(s-r)}\alpha_j e^{-\alpha_j(t-s)}ds \\
&= \int_r^t \alpha_j e^{-\alpha_j(t-r)}ds \\
&= \alpha_j(t-r)e^{-\alpha_j(t-r)}.
\end{aligned}
$$

(**a3**) Για όλα τα $j \in \mathbb{N}$ και $h \in (0,\infty)$ έχουμε,

$$
\begin{aligned}
&p_{j-1,j-1}(h,h+r_j)p_{j-1,j}(r_j,t_j)p_{j,j}(t_j,r_{j+1}) \\
&\quad = \int_{r_j}^{t_j} \alpha_j e^{(\alpha_{j+1}-\alpha_j)s_j}ds_j \cdot p_{j,j}(h,h+r_{j+1}).
\end{aligned}
$$

Πράγματι, αν $\alpha_j \neq \alpha_{j+1}$, τότε η $(a1)$ σε συνδυασμό με την $(a2)$ μας δίνουν

$$
\begin{aligned}
&p_{j-1,j-1}(h,h+r_j)p_{j-1,j}(r_j,t_j)p_{j,j}(t_j,r_{j+1}) \\
&= e^{-\alpha_j r_j}\cdot \frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}-\alpha_j}\left(e^{-\alpha_j(t_j-r_j)} - e^{-\alpha_{j+1}(t_j-r_j)}\right)\cdot e^{-\alpha_{j+1}(r_{j+1}-t_j)} \\
&= \frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}-\alpha_j}\left(e^{(\alpha_{j+1}-\alpha_j)t_j} - e^{(\alpha_{j+1}-\alpha_j)r_j}\right)\cdot e^{-\alpha_{j+1}r_{j+1}} \\
&= \int_{r_j}^{t_j} \alpha_j e^{(\alpha_{j+1}-\alpha_j)s_j}ds_j \cdot p_{j,j}(h,h+r_{j+1}).
\end{aligned}
$$

Παρόμοια, αν $\alpha_j = \alpha_{j+1}$, τότε

$$
\begin{aligned}
&p_{j-1,j-1}(h,h+r_j)p_{j-1,j}(r_j,t_j)p_{j,j}(t_j,r_{j+1}) \\
&\quad = e^{-\alpha_j r_j}\cdot \alpha_j(t_j-r_j)e^{-\alpha_j(t_j-r_j)}\cdot e^{-\alpha_{j+1}(r_{j+1}-t_j)} \\
&\quad = e^{-\alpha_j r_j}\cdot \alpha_j(t_j-r_j)e^{-\alpha_j(t_j-r_j)}\cdot e^{-\alpha_j(r_{j+1}-t_j)} \\
&\quad = \alpha_j(t_j-r_j)\cdot e^{-\alpha_j r_{j+1}} \\
&\quad = \int_{r_j}^{t_j} \alpha_j ds_j \cdot p_{j,j}(h,h+r_{j+1}) \\
&\quad = \int_{r_j}^{t_j} \alpha_j e^{(\alpha_{j+1}-\alpha_j)s_j}ds_j \cdot p_{j,j}(h,h+r_{j+1}).
\end{aligned}
$$

(**a4**) Για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$
P\Bigg[\{N_{r_n} = n-1\} \cap \bigcap_{j=1}^{n-1}\{N_{t_j} = j\} \cap \{N_{r_j} = j-1\}\Bigg] \;>\; 0
$$

και

$$
P\Bigg[\bigcap_{j=1}^{n}\{N_{t_j} = j\} \cap \{N_{r_j} = j-1\}\Bigg] \;>\; 0.
$$

Αυτό προκύπτει με επαγωγή στο $n \in \mathbb{N}$, χρησιμοποιώντας το (**a1**) και το (**a2**) και την ιδιότητα Markov:
Για $n = 1$, έχουμε

$$\begin{aligned} P[\{N_{r_1} = 0\}] &= P[\{N_{r_1} = 0\}|\{N_0 = 0\}] \\ &= p_{0,0}(0, r_1) \\ &> 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} P[\{N_{t_1} = 1\} \cap \{N_{r_1} = 0\}] &= P[\{N_{t_1} = 1\}|\{N_{r_1} = 0\}] \cdot P[\{N_{r_1} = 0\}] \\ &= p_{0,0}(0, r_1) p_{0,1}(r_1, t_1) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Έστω τώρα ότι ισχύει ο ισχυρισμός για κάποια $n \in \mathbb{N}$. Τότε έχουμε,

$$\begin{aligned} & P\Bigg[\{N_{r_{n+1}} = n\} \cap \bigcap_{j=1}^{n} \{N_{t_j} = j\} \cap \{N_{r_j} = j-1\}\Bigg] \\ &= P\Bigg[\{N_{r_{n+1}} = n\}| \bigcap_{j=1}^{n} \{N_{t_j} = j\} \cap \{N_{r_j} = j-1\}\Bigg] \\ &\quad \cdot P\Bigg[\bigcap_{j=1}^{n} \{N_{t_j} = j\} \cap \{N_{r_j} = j-1\}\Bigg] \\ &= P[\{N_{r_{n+1}} = n\}|\{N_{t_n} = n\}] \\ &\quad \cdot P\Bigg[\bigcap_{j=1}^{n} \{N_{t_j} = j\} \cap \{N_{r_j} = j-1\}\Bigg] \\ &= p_{n,n}(t_n, r_{n+1}) \cdot P\Bigg[\bigcap_{j=1}^{n} \{N_{t_j} = j\} \cap \{N_{r_j} = j-1\}\Bigg] \\ &> 0 \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} & P\Bigg[\bigcap_{j=1}^{n+1} \{N_{t_j} = j\} \cap \{N_{r_j} = j-1\}\Bigg] \\ &= P\Bigg[\{N_{t_{n+1}} = n+1\}|\{N_{r_{n+1}} = n\} \cap \bigcap_{j=1}^{n} \{N_{t_j} = j\} \cap \{N_{r_j} = j-1\}\Bigg] \\ &\quad \cdot P\Bigg[\{N_{r_{n+1}} = n-1\} \cap \bigcap_{j=1}^{n} \{N_{t_j} = j\} \cap \{N_{r_j} = j-1\}\Bigg] \\ &= P[\{N_{t_{n+1}} = n+1\}|\{N_{r_{n+1}} = n\}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot P\Big[\{N_{r_{n+1}} = n-1\} \cap \bigcap_{j=1}^{n} \{N_{t_j} = j\} \cap \{N_{r_j} = j-1\}\Big] \\
= \;& p_{n,n+1}(r_{n+1}, t_{n+1}) \cdot P\Big[\{N_{r_{n+1}} = n\} \cap \bigcap_{j=1}^{n} \{N_{t_j} = j\} \cap \{N_{r_j} = j-1\}\Big] \\
> \;& 0.
\end{aligned}
$$

(**a5**) Για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$
P\Big[\bigcap_{j=1}^{n} \{r_J < T_J \le t_j\}\Big] = \prod_{j=1}^{n-1} \int_{r_j}^{t_j} a_j e^{(a_{j+1}-a_j)s_j} ds_j \cdot \int_{r_n}^{t_n} a_n e^{a_n s_n} ds_n.
$$

Πράγματι, με την χρήση του (**a4**), της ιδιότητας Markov, του (**a3**) και του (**a1**), βρίσκουμε για όλα τα $h \in (0, \infty)$,

$$
\begin{aligned}
&P\Big[\bigcap_{j=1}^{n} \{r_j < T_j \le t_j\}\Big] \\
= \;& P\Big[\bigcap_{j=1}^{n} \{N_{r_j} < j \le N_{t_j}\}\Big] \\
= \;& P\Big[\{N_{t_n} \ge n\} \cap \{N_{r_n} = n-1\} \cap \bigcap_{j=1}^{n-1} \{N_{t_j} = j\} \cap \{N_{r_j} = j-1\}\Big] \\
= \;& P[\{N_{t_n} \ge n\} | \{N_{r_n} = n-1\}] \\
& \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \Big(P[\{N_{r_{j+1}} = j\} | \{N_{t_j} = j\}] \cdot P[\{N_{t_j} = j\} | \{N_{r_j} = j-1\}] \Big) \\
& \cdot P[\{N_{r_1} = 0\} | \{N_0 = 0\}] \\
= \;& p_{0,0}(0, r_1) \prod_{j=1}^{n-1} p_{j-1,j}(r_j, t_j) p_{j,j}(t_j, r_{j+1}) \cdot \Big(1 - p_{n-1,n-1}(r_n, t_n)\Big) \\
= \;& p_{0,0}(h, h + r_1) \prod_{j=1}^{n-1} p_{j-1,j}(r_j, t_j) p_{j,j}(t_j, r_{j+1}) \cdot \Big(1 - p_{n-1,n-1}(r_n, t_n)\Big) \\
= \;& \prod_{j=1}^{n-1} \int_{r_j}^{t_j} a_j e^{(a_{j+1}-a_j)s_j} ds_j \cdot p_{n-1,n-1}(h, h + r_n) \cdot \Big(1 - p_{n-1,n-1}(r_n, t_n)\Big) \\
= \;& \prod_{j=1}^{n-1} \int_{r_j}^{t_j} a_j e^{(a_{j+1}-a_j)s_j} ds_j \cdot e^{-a_n r_n} \cdot \Big(1 - e^{-a_n (t_n - r_n)}\Big) \\
= \;& \prod_{j=1}^{n-1} \int_{r_j}^{t_j} a_j e^{(a_{j+1}-a_j)s_j} ds_j \cdot e^{-a_n r_n} \cdot \Big(e^{-a_n r_n} - e^{-a_n t_n}\Big) \\
= \;& \prod_{j=1}^{n-1} \int_{r_j}^{t_j} a_j e^{(a_{j+1}-a_j)s_j} ds_j \cdot \int_{r_n}^{t_n} a_n e^{a_n s_n} ds_n.
\end{aligned}
$$

(**a6**) Θεωρούμε ένα $n \in \mathbb{N}$ και ορίζουμε την $\mathbf{f}_n : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}_+$ με τύπο

$$\mathbf{f}_n(\mathbf{w}) := \prod_{j=1}^{n} a_j e^{-a_j w_j} \chi_{(0,\infty)}(w_j).$$

Έστω $s_0 := 0$ και $A := (r_1, t_1] \times ... \times (r_n, t_n]$. Από το (**a5**) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
P[\{\mathbf{T}_n \in A\}] &= P\Big[\bigcap_{j=1}^{n} \{r_j < T_j \le t_j\}\Big] \\
&= \prod_{j=1}^{n-1} \int_{r_j}^{t_j} a_j e^{(a_{j+1}-a_j)s_j} ds_j \cdot \int_{r_n}^{t_n} a_n e^{a_n s_n} ds_n \\
&= \prod_{j=1}^{n-1} \int_{(r_j,t_j]} a_j e^{(a_{j+1}-a_j)s_j} d\lambda(s_j) \cdot \int_{(r_n,t_n]} a_n e^{a_n s_n} d\lambda(s_n) \\
&= \int_A \Bigg(\prod_{j=1}^{n-1} a_j e^{(a_{j+1}-a_j)s_j} \Bigg) a_n e^{a_n s_n} d\lambda_n(s) \\
&= \int_A \Bigg(\prod_{j=1}^{n} a_j e^{(s_j - s_{j-1} - a_j)s_j} \chi_{(0.\infty)}(s_j - s_{j-1}) \Bigg) d\lambda_n(s) \\
&= \int_A \mathbf{f}_n(\mathbf{M}_n^{-1}(s)) d\lambda_n(s).
\end{aligned}$$

(**a7**) Επειδή η ακολουθία $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι γνησίως αύξουσα με $T_0 = 0$, προκύπτει απο το (**a6**) ότι ισχύει η ισότητα

$$P[\{\mathbf{T}_n \in A\}] = \int_A \mathbf{f}_n(\mathbf{M}_n^{-1}(s)) d\lambda_n(s)$$

για όλα τα $A \in \mathfrak{B}_n$.

(**a8**) Έστω $B_1, ..., B_n \in \mathfrak{B}$ και $B := B_1 \times ... \times B_n$. Επειδή $\mathbf{W}_n = \mathbf{M}_n{}^{-1} \circ \mathbf{T}_n$, η ισότητα που δείχτηκε στην (**a7**) μας δίνει :

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{W}_n}[B] &= P[\{\mathbf{W}_n \in B\}] \\
&= P[\{\mathbf{M}_n{}^{-1} \circ \mathbf{T}_n \in B\}] \\
&= P[\{\mathbf{T}_n \in \mathbf{M}_n(B)\}] \\
&= \int_{\mathbf{M}_n(B)} \mathbf{f}_n(\mathbf{M}_n^{-1}(s)) d\lambda_n(s) \\
&= \int_B \mathbf{f}_n(\mathbf{w}) d(\lambda_n)_{\mathbf{M}_n^{-1}}(\mathbf{w}) \\
&= \int_B \mathbf{f}_n(\mathbf{w}) \frac{1}{|det \mathbf{M}_n^{-1}|} d\lambda_n(\mathbf{w}) \\
&= \int_B \mathbf{f}_n(\mathbf{w}) d\lambda_n(\mathbf{w}) \\
&= \int_B \Bigg(\prod_{j=1}^{n} a_j e^{-a_j w_j} \chi_{(0,\infty)}(w_j) \Bigg) d\lambda_n(\mathbf{w})
\end{aligned}$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \int_{B_j} a_j e^{-a_j w_j} \chi_{(0,\infty)}(w_j) d\lambda(w_j).$$

(**a9**) Από το (**a8**), η ακολουθία $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί την ισότητα

$$P_{W_n} = \mathbf{Exp}(a_n)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Επομένως από το (a) συνεπάγεται το (b).

• Υποθέτουμε τώρα ότι ισχύει το (b).

(**b1**) Για να αποδείξουμε την ιδιότητα Markov, έστω $m \in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_m, t_{m+1} \in (0, \infty)$, και $k_1, ..., k_m \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $t_1, ... < t_m < t_{m+1}$ και $P[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = k_j\}] > 0$.

Στην περίπτωση που $k_m = 0$, είναι σαφές πως ισχύει η ισότητα

$$P\left[\{N_{t_{m+1}} = k_{m+1}\}|\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = k_j\}\right] = P[\{N_{t_{m+1}} = l\}|\{N_{t_m} = k_m\}]$$

για όλα τα $k_{m+1} \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $k_m \leq k_{m+1}$. Στην περίπτωση όπου το $k_m \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $k_0 := 0$ και $n := k_m$, και έστω $l \in \{0, 1, ..., m-1\}$ ο μοναδικός ακέραιος που ικανοποιεί την σχέση $k_l < k_{l+1} = k_m = n$. Τότε υπάρχει ένα ορθογώνιο $B \subseteq \prod_{j=0}^{l}(0, t_{j+1})$ τέτοιο ώστε

$$\left(\bigcap_{j=0}^{l}\{T_{k_j} \leq t_j < T_{k_{j+1}}\}\right) \cap \{T_n \leq t_{l+1}\} = \mathbf{T}_n^{-1}(B). \tag{3.3}$$

Παίρνοντας $A := \mathbf{M}_n^{-1}(B)$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{j=0}^{l}\{T_{k_j} \leq t_j < T_{k_{j+1}}\}\right) \cap \{T_n \leq t_{l+1}\} &= \mathbf{T}_n^{-1}(B) \\ &= \mathbf{W}_n^{-1}(\mathbf{M}_n^{-1}(B)) \\ &= \mathbf{W}_n^{-1}(A). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία του $\mathbf{W}_n$ και του W_{n+1}, απο τον τύπο μετασχηματισμού για ολοκληρώματα και το θεώρημα Fubini, προκύπτει

$$\begin{aligned} P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = k_j\}\right] &= P\left[\bigcap_{j=1}^{l}\{N_{t_j} = k_j\} \cap \{N_{t_{l+1}} = n\} \cap \{N_{t_m} = n\}\right] \\ &= P\left[\left(\bigcap_{j=1}^{l}\{T_{k_j} \leq t_j < T_{k_{j+1}}\}\right) \cap \{T_n \leq t_{l+1}\} \cap \{t_m < T_{n+1}\}\right] \\ &\overset{(3.3)}{=} P[\mathbf{W}_n^{-1}(A) \cap \{t_m - T_n < W_{n+1}\}] \\ &= P[\mathbf{W}_n^{-1}(A) \cap \{t_m - \langle \mathbf{1}_n, \mathbf{W}_n \rangle < W_{n+1}\}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_A \left(\int_{(t_m - \langle \mathbf{1}_n, \mathbf{s} \rangle, \infty)} P_{W_{n+1}}(dw) \right) P_{\mathbf{W}_n}(\mathbf{ds}) \\
&= \int_A \left(\int_{(t_m - \langle \mathbf{1}_n, \mathbf{s} \rangle, \infty)} a_{n+1} e^{-a_{n+1} w} \lambda(dw) \right) P_{\mathbf{W}_n}(\mathbf{ds}) \\
&\overset{v=w+s}{=} \int_A e^{a_{n+1} \langle \mathbf{1}_n, \mathbf{s} \rangle} \left(\int_{(t_m, \infty)} a_{n+1} e^{-a_{n+1} v} \lambda(dv) \right) P_{\mathbf{W}_n}(\mathbf{ds}) \\
&= \int_A e^{a_{n+1} \langle \mathbf{1}_n, \mathbf{s} \rangle} P_{\mathbf{W}_n}(\mathbf{ds}) \cdot \int_{(t_m, \infty)} P_{W_{n+1}}(dv).
\end{aligned}
$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας τα ίδια επιχειρήματα με παραπάνω, βρίσκουμε

$$
\begin{aligned}
P[\{N_{t_m} = k_m\}] &= P[\{N_{t_m} = n\}] \\
&= P[\{T_n \le t_m < T_{n+1}\}] \\
&= P[\{T_n \le t_m\} \cap \{t_m - T_n < W_{n+1}\}] \\
&= \int_{(-\infty, t_m]} \left(\int_{(t_m - s, \infty)} P_{W_{n+1}}(dw) \right) P_{T_n}(ds) \\
&= \int_{(-\infty, t_m]} \left(\int_{(t_m - s, \infty)} a_{n+1} e^{-a_{n+1} w} \lambda(dw) \right) P_{T_n}(ds) \\
&= \int_{(-\infty, t_m]} e^{a_{n+1} s} \left(\int_{(t_m, \infty)} a_{n+1} e^{-a_{n+1} v} \lambda(dv) \right) P_{T_n}(ds) \\
&= \int_{(-\infty, t_m]} e^{a_{n+1} s} P_{T_n}(ds) \int_{(t_m, \infty)} P_{W_{n+1}}(dv).
\end{aligned}
$$

Θεωρούμε τώρα $k \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $k_m < k$, και ορίζουμε $U := T_k - T_{n+1} = T_k - T_n - W_{n+1}$. Τότε έχουμε

$$
\begin{aligned}
&P\left[\{N_{t_{m+1}} \ge k\} \cap \bigcap_{j=1}^{m} \{N_{t_j} = k_j\} \right] \\
&= P\left[\left(\bigcap_{j=1}^{l} \{N_{t_j} = k_j\} \right) \cap \{N_{t_{l+1}} = n\} \cap \{N_{t_m} = n\} \cap \{N_{t_{m+1}} \ge k\} \right] \\
&= P\left[\left(\bigcap_{j=1}^{l} \{T_{k_j} \le t_j < T_{k_{j+1}}\} \right) \cap \{T_n \le t_{l+1}\} \cap \{t_m < T_{n+1}\} \cap \{T_k \le t_{m+1}\} \right] \\
&\overset{(3.3)}{=} P[\mathbf{W}_n^{-1}(A) \cap \{t_m - T_n < W_{n+1}\} \cap \{U \le t_{m+1} - T_n - W_{n+1}\}] \\
&= P[\mathbf{W}_n^{-1}(A) \cap \{t_m - \langle \mathbf{1}_n, \mathbf{W}_n \rangle < W_{n+1}\} \cap \{U \le t_{m+1} - \langle \mathbf{1}_n, \mathbf{W}_n \rangle - W_{n+1}\}] \\
&= \int_A \left(\int_{(t_m - \langle \mathbf{1}_n, \mathbf{s} \rangle, \infty)} \left(\int_{(-\infty, t_{m+1} - \langle \mathbf{1}_n, \mathbf{s} \rangle - w]} P_U(du) \right) P_{W_{n+1}}(dw) \right) P_{\mathbf{W}_n}(\mathbf{ds}) \\
&= \int_A \left(\int_{(t_m - \langle \mathbf{1}_n, \mathbf{s} \rangle, \infty)} P[\{U \le t_{m+1} - \langle \mathbf{1}_n, \mathbf{s} \rangle - w\}] P_{W_{n+1}}(dw) \right) P_{\mathbf{W}_n}(\mathbf{ds}) \\
&= \int_A \left(\int_{(t_m - \langle \mathbf{1}_n, \mathbf{s} \rangle, \infty)} P[\{U \le t_{m+1} - \langle \mathbf{1}_n, \mathbf{s} \rangle - w\}] a_{n+1} e^{-a_{n+1} w} \lambda(dw) \right) P_{\mathbf{W}_n}(\mathbf{ds})
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= \int_A e^{a_{n+1}\langle \mathbf{1}_n,\mathbf{s}\rangle}\left(\int_{(t_m,\infty)} P[\{U \leq t_{m+1}-\upsilon\}]a_{n+1}e^{-a_{n+1}\upsilon}\lambda(d\upsilon)\right)P_{\mathbf{W}_n}(\mathbf{ds})\\
&= \int_A e^{a_{n+1}\langle \mathbf{1}_n,\mathbf{s}\rangle}P_{\mathbf{W}_n}(\mathbf{ds})\cdot\int_{(t_m,\infty)} P[\{U \leq t_{m+1}-\upsilon\}]P_{W_{n+1}}(d\upsilon).
\end{aligned}$$

καθώς και

$$\begin{aligned}
&P[\{N_{t_{m+1}} \geq k\}\cap\{N_{t_m}=k_m\}]\\
&\quad = P[\{N_{t_{m+1}} \geq k\}\cap\{N_{t_m}=n\}]\\
&\quad = P[\{T_n \leq t_m < T_{n+1}\}\cap\{T_k \leq t_{m+1}\}]\\
&\quad = P[\{T_n \leq t_m\}\cap\{t_m - T_n < W_{n+1}\}\cap\{U \leq t_{m+1}-T_n-W_{n+1}\}]\\
&\quad = \int_{(-\infty,t_m]}\left(\int_{(t_m-s,\infty)}\int_{(-\infty,t_{m+1}-s-w]} P_U(du)\right)P_{W_{n+1}}(dw)\Bigg)P_{T_n}(ds)\\
&\quad = \int_{(-\infty,t_m]}\left(\int_{(t_m-s,\infty)} P[\{U \leq t_{m+1}-s-w\}]P_{W_{n+1}}(dw)\right)P_{T_n}(ds)\\
&\quad = \int_{(-\infty,t_m]}\left(\int_{(t_m-s,\infty)} P[\{U \leq t_{m+1}-s-w\}]a_{n+1}e^{-a_{n+1}w}\lambda(dw)\right)P_{T_n}(ds)\\
&\quad = \int_{(-\infty,t_m]} e^{a_{n+1}s}\left(\int_{(t_m,\infty)} P[\{U \leq t_{m+1}-\upsilon\}]a_{n+1}e^{-a_{n+1}\upsilon}\lambda(d\upsilon)\right)P_{T_n}(ds)\\
&\quad = \int_{(-\infty,t_m]} e^{a_{n+1}s}P_{T_n}(ds)\cdot\int_{(t_m,\infty)} P[\{U \leq t_{m+1}-\upsilon\}]P_{W_{n+1}}(d\upsilon).
\end{aligned}$$

Αυτό μας δίνει

$$\begin{aligned}
&P\left[\{N_{t_{m+1}} \geq k\}|\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}=k_j\}\right]\\
&\quad = \frac{P\left[\{N_{t_{m+1}} \geq k\}\cap\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}=k_j\}\right]}{P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j}=k_j\}\right]}\\
&\quad = \frac{\int_A e^{a_{n+1}\langle \mathbf{1}_n,\mathbf{s}\rangle}P_{\mathbf{W}_n}(\mathbf{ds})\cdot\int_{(t_m,\infty)} P[\{U \leq t_{m+1}-\upsilon\}]P_{W_{n+1}}(d\upsilon)}{\int_A e^{a_{n+1}\langle \mathbf{1}_n,\mathbf{s}\rangle}P_{\mathbf{W}_n}(\mathbf{ds})\cdot\int_{(t_m,\infty)} P_{W_{n+1}}(d\upsilon)}\\
&\quad = \frac{\int_{(t_m,\infty)} P[\{U \leq t_{m+1}-\upsilon\}]P_{W_{n+1}}(d\upsilon)}{\int_{(t_m,\infty)} P_{W_{n+1}}(d\upsilon)}\\
&\quad = \frac{\int_{-\infty,t_m} e^{a_{n+1}s}P_{T_n}(ds)\cdot\int_{(t_m,\infty)} P[\{U \leq t_{m+1}-\upsilon\}]P_{W_{n+1}}(d\upsilon)}{\int_{-\infty,t_m} e^{a_{n+1}s}P_{T_n}(ds)\cdot\int_{(t_m,\infty)} P_{W_{n+1}}(d\upsilon)}\\
&\quad = \frac{P[\{N_{t_{m+1}} \geq k\}\cap\{N_{t_m}=k_m\}]}{P[\{N_{t_m}=k_m\}]}\\
&\quad = P[\{N_{t_{m+1}} \geq k\}|\{N_{t_m}=k_m\}].
\end{aligned}$$

Επομένως, έχουμε

$$P\left[\{N_{t_{m+1}} \geq k\}|\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = k_j\}\right] = P[\{N_{t_{m+1}} \geq k\}|\{N_{t_m} = k_m\}]$$

για όλα τα $k \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $k_m < k$. Φυσικά, η προηγούμενη σχέση ισχύει επίσης αν $k_m = k$, και αυτό ισχύει έτσι για όλα τα $k \in \mathbb{N}_0$ τέτοιο ώστε $k_m \leq k$. Αλλά αυτό συνεπάγεται ότι ισχύει η σχέση

$$P\left[\{N_{t_{m+1}} = k_{m+1}\}|\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = k_j\}\right] = P[\{N_{t_{m+1}} = k_{m+1}\}|\{N_{t_m} = k_m\}]$$

για όλα τα $k_{m+1} \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $k_m \leq k_{m+1}$, το οποίο σημαίνει ότι $\{N_t\}t \in \mathbb{R}_+$ είναι μία διαδικασία Markov.

(**b2**) Για να αποδειχθεί ο ισχυρισμός της φυσιολογικότητας, θεωρούμε ένα αποδεκτό ζευγάρι (n, t). Οπως προηγουμένως βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
P[\{N_{t+h} = n\} \cap \{N_t = n\}] &= P[\{T_n \leq t\} \cap \{t + h \leq T_{n+1}\}] \\
&= P[\{T_n \leq t\} \cap \{t + h - T_n < W_{n+1}\}] \\
&= \int_{(-\infty,t]} \left(\int_{(t+h-s,\infty)} P_{W_{n+1}}(dw)\right) P_{T_n}(ds) \\
&= \int_{(-\infty,t]} \left(\int_{(t+h-s,\infty)} a_{n+1}e^{-a_{n+1}w}\lambda(dw)\right) P_{T_n}(ds) \\
&= \int_{(-\infty,t]} e^{-a_{n+1}(t+h-s)} P_{T_n}(ds) \\
&= e^{-a_{n+1}(t+h)} \int_{(-\infty,t]} e^{a_{n+1}s} P_{T_n}(ds)
\end{aligned}$$

για όλα τα $h \in \mathbb{R}_+$, ως εκ τούτου

$$\begin{aligned}
P[\{N_t = n\}] &= e^{-a_{n+1}t} \int_{(-\infty,t]} e^{a_{n+1}s} P_{T_n}(ds) \\
&> 0,
\end{aligned}$$

και έτσι

$$\begin{aligned}
p_{n,n}(t, t + h) &= P[\{N_{t+h} = n\}|\{N_t = n\}] \\
&= \frac{P[\{N_{t+h} = n\} \cap \{N_t = n\}]}{P[\{N_t = n\}]}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{e^{-a_{n+1}(t+h)} \int_{(-\infty,t]} e^{a_{n+1}s} P_{T_n}(ds)}{e^{-a_{n+1}t} \int_{(-\infty,t]} e^{a_{n+1}s} P_{T_n}(ds)} \\
&= e^{-a_{n+1}h}
\end{aligned}
$$

για όλα τα $h \in \mathbb{R}_+$. Από ότι έχουμε δει ως τώρα, έχουμε

$$
P[\{N_t = n\}] > 0,
$$

που αποδεικνύει το (i) του Ορισμού 3.1.12.
Είναι επίσης σαφές ότι η συνάρτηση $h \longmapsto p_{n,n}(t, t+h)$ είναι συνεχής, το οποίο αποδεικνύει το (ii) του Ορισμού 3.1.12. Επιπλέον, έχουμε

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\Big(1 - p_{n,n}(t,t+h)\Big) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(1 - e^{-a_{n+1}h} \\
&= a_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Επίσης έχουμε

$$
\begin{aligned}
&P[\{N_{t+h} = n+1\} \cap \{N_t = n\}] \\
&\quad= P[\{T_n \le t < T_{n+1} \le t+h < T_{n+2}\}] \\
&\quad= P[\{T_n \le t\} \cap \{t - T_n < W_{n+1} \le t + h - T_n\} \cap \{t + h - T_n - W_{n+1} < W_{n+2}\}] \\
&\quad= \int_{(-\infty,t]} \left(\int_{(t-s,t+h-s]} \left(\int_{(t+h-s-w,\infty]} P_{W_{n+2}}(du) \right) P_{W_{n+1}}(dw) \right) P_{T_n}(ds) \\
&\quad= \int_{(-\infty,t]} \left(\int_{(t-s,t+h-s]} \left(\int_{(t+h-s-w,\infty]} a_{n+2} e^{-a_{n+2}u} d\lambda(u) \right) P_{W_{n+1}}(dw) \right) P_{T_n}(ds) \\
&\quad= \int_{(-\infty,t]} \left(\int_{(t-s,t+h-s]} e^{-a_{n+2}(t+h-s-w)} P_{W_{n+1}}(dw) \right) P_{T_n}(ds) \\
&\quad= \int_{(-\infty,t]} \left(\int_{(t-s,t+h-s]} e^{-a_{n+2}(t+h-s-w)} a_{n+1} e^{-a_{n+1}w} \lambda(dw) \right) P_{T_n}(ds) \\
&\quad= \int_{(-\infty,t]} \left(\int_{(t,t+h]} e^{-a_{n+2}(t+h-\upsilon)} a_{n+1} e^{-a_{n+1}(\upsilon-s)} \lambda(d\upsilon) \right) P_{T_n}(ds) \\
&\quad= a_{n+1} e^{-a_{n+2}(t+h)} \int_{(-\infty,t]} e^{a_{n+1}s} P_{T_n}(ds) \int_{(t,t+h]} e^{(a_{n+2}-a_{n+1})\upsilon} \lambda(d\upsilon),
\end{aligned}
$$

και έτσι

$$
\begin{aligned}
&P[\{N_{t+h} = n+1\} | \{N_t = n\}] \\
&\quad= \frac{P[\{N_{t+h} = n+1\} \cap \{N_t = n\}]}{P[\{N_t = n\}]} \\
&\quad= \frac{a_{n+1} e^{-a_{n+2}(t+h)} \int_{(-\infty,t]} e^{a_{n+1}s} P_{T_n}(ds) \int_{(t,t+h]} e^{(a_{n+2}-a_{n+1})\upsilon} d\lambda(\upsilon)}{e^{-a_{n-1}t} \int_{(-\infty,t]} e^{a_{n+1}s} P_{T_n}(ds)}
\end{aligned}
$$

$$= a_{n+1}e^{a_{n+1}t}e^{-a_{n+2}(t+h)}\int_{(t,t+h]} e^{(a_{n+2}-a_{n+1})v}d\lambda(v)$$

Στην περίπτωση $a_{n+1} \neq a_{n+2}$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
p_{n,n+1}(t,t+h) &= P[\{N_{t+h}=n+1\}|\{N_t=n\}] \\
&= a_{n+1}e^{a_{n+1}t}e^{-a_{n+2}(t+h)}\int_{(t,t+h]} e^{(a_{n+2}-a_{n+1})v}\lambda d(v) \\
&= a_{n+1}e^{a_{n+1}t}e^{-a_{n+2}(t+h)}\frac{e^{(a_{n+2}-a_{n+1})(t+h)}e^{(a_{n+2}-a_{n+1})(t)}}{a_{n+2}-a_{n+1}} \\
&= \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}-a_{n+1}}\Big(e^{-a_{n+1}h}-e^{-a_{n+2}h}\Big),
\end{aligned}$$

και έτσι ,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}p_{n,n+1}(t,t+h) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{a_{n+1}}{a_{n+2}-a_{n+1}}\Big(e^{-a_{n+1}h}-e^{-a_{n+2}h}\Big) \\
&= a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Στην περίπτωση $a_{n+1} = a_{n+2}$, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
p_{n,n+1}(t,t+h) &= P[\{N_{t+h}=n+1\}|\{N_t=n\}] \\
&= a_{n+1}e^{a_{n+1}t}e^{-a_{n+2}(t+h)}\int_{(t,t+h]} e^{(a_{n+2}-a_{n+1})v}\lambda d(v) \\
&= a_{n+1}e^{a_{n+1}t}e^{-a_{n+2}(t+h)}\int_{(t,t+h]} \lambda d(v) \\
&= a_{n+1}he^{-a_{n+1}h},
\end{aligned}$$

και έτσι

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}p_{n,n+1}(t,t+h) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}a_{n+1}he^{-a_{n+1}h} \\
&= a_{n+1}.
\end{aligned}$$

Έτσι σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big(1-p_{n,n+1}(t,t+h)\Big) &= a_{n+1}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}p_{n,n+1}(t,t+h),\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το (iii) του Ορισμού 3.1.12.

Έχουμε δείξει λοιπόν ότι $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι φυσιολογική με εντάσεις $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ικανοποιόντας την σχέση $\lambda_n(t) = a_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Συνεπώς το (b) συνεπάγεται του (a). $\square$

Κεφάλαιο 4

Μεικτές στοχαστικές διαδικασίες Poisson

Η επιλογή κατάλληλων υποθέσεων για την απαριθμήτρια *σ.δ.* που περιγράφει ένα χαρτοφυλάκιο, είναι ένα σοβαρό πρόβλημα. Στο παρόν κεφάλαιο θα συζητηθεί μια γενική μέθοδος αντιμετώπισης του προβλήματος. Η βασική ιδέα είναι να ερμηνεύσουμε ένα ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο ως μείγμα από ομοιογενή χαρτοφυλάκια. Στη περίπτωση αυτή η διαδικασία του αριθμού των απαιτήσεων ενός ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου, ορίζεται ως ένα μείγμα απαριθμητριών στοχαστικών διαδικασιών ομοιογενών χαρτοφυλακίων, με τέτοιον τρόπο ώστε η μεικτή κατανομή τους, να αντιπροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου. Αρχικά θα καθοριστεί το γενικό μοντέλο, και στη συνέχεια θα μελετηθεί η μεικτή *σ.δ.* Poisson και μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση, η διαδικασία Pólya-Lundberg.

Τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 4.1 και 4.2 υπάρχουν στο [35]. Εδώ παρουσιάζονται με αναλυτικές αποδείξεις.

4.1 Το υπόδειγμα

Θεωρούμε στο εξής μία απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και μια τυχαία μεταβλητή Θ. Υποθέτουμε όπως προαναφέρθηκε, πως το ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνων, είναι ένα μείγμα από ομοιογενή χαρτοφυλάκια ιδίου μεγέθους, τα οποία είναι παρόμοια, αλλά διαφορετικά μεταξύ τους. Υποθέτουμε επίσης, ότι κάθε ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο, μπορεί να προσδιοριστεί με τη πραγματοποίηση της τυχαίας μεταβλητής Θ. Αυτό σημαίνει πως η κατανομή του Θ αντιπροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου, υπό όρους. Οπότε οι ιδιότητες της κατανομής της απαριθμήτριας *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, καθορίζονται από τις ιδιότητες της δεσμευμένης κατανομής ως προς το Θ, και από τις ιδιότητες της κατανομής του Θ. Για το λόγο αυτό, η τυχαία μεταβλητή Θ ονομάζεται **παράμετρος δόμησης ή δομική παράμετρος** (**structure parameter**), η κατανομή της P_Θ ονομάζεται **κατανομή δόμησης ή δομική κατανομή** (**structure**

distribution), ενώ η απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μεικτή** $\sigma.\delta.$ **του αριθμού των απαιτήσεων (mixed claim number process) ή μεικτή απαριθμήτρια** $\boldsymbol{\sigma.\delta.}$ **(mixed counting process) με δομική παράμετρο** ϑ **ή με δομική κατανομή** P_Θ.

Η απριθμήτρια $\sigma.\delta.$ $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει:

- **υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις** ως προς το Θ αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι προσαυξήσεις $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες ως προς το Θ, και έχει

- **υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις** ως προς το Θ αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m, h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι προσαυξήσεις $\{N_{t_j+h} - N_{t_{j-1+h}}\}_{j\in\{1,\ldots,m\}}$ έχουν την ίδια υπό συνθήκη κατανομή ως προς το Θ.

Άμεσα προκύπτει πως, μια απαριθμήτρια στοχαστική διαδικασία με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς Θ, έχει και υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς Θ αν η $P_{N_{t+h}-N_t|\Theta} = P_{N_h|\Theta} \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ για όλα τα $t, h \in \mathbb{R}_+$.

Για την απόδειξη χρησιμοποιούνται παρόμοια επιχειρήματα με εκείνα της απόδειξης του Λήμματος Α΄1.3 του [4].

Λήμμα 4.1.1. *Αν μία απαριθμήτρια σ.δ. έχει υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς* Θ*, τότε έχει και στάσιμες προσαυξήσεις.*

Αντίθετα, για μία απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς Θ, συνεπάγεται ότι δεν έχει γενικά ανεξάρτητες προσαυξήσεις όπως θα δούμε και από το Θεώρημα 4.2.8, στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

Το λήμμα που ακολουθεί προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες της υπό συνθήκη αναμενόμενης τιμής.

Λήμμα 4.1.2. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *έχει πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε*

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_t|\Theta]]$$

και

$$\mathbb{V}ar(N_t) = \mathbb{E}[\mathbb{V}ar(N_t|\Theta)] + \mathbb{V}ar(\mathbb{E}[N_t|\Theta])$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.

4.2 Η μεικτή σ.δ. Poisson

Στο σημείο αυτό παρουσιάζεται ο ορισμός της μεικτής σ.δ. Poisson.

Ορισμός 4.2.1. Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **μεικτή σ.δ. Poisson** με παράμετρο Θ (για συντομία $P - MPP(\Theta)$), εάν

- η Θ είναι μια τ.μ. για την οποία ισχύει $\mathrm{P}_\Theta[(0,\infty)] = 1$, και εάν
- η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς το Θ, έτσι ώστε για κάθε $t \in (0,\infty)$ να ισχύει η σχέση $\mathrm{P}_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta) \quad P \upharpoonright \sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$

Ιδιαιτέρως, αν η κατανομή της Θ είναι εκφυλισμένη στο $\theta_0 > 0$ (δηλαδή $P_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$), τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία P-σ.δ. Poisson με παράμετρο θ_0.

Στην συνέχεια παρατίθεται μία βασική ιδιότητα της μεικτής σ.δ. Poisson:

Λήμμα 4.2.2. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι μία μεικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο Θ, τότε έχει στάσιμες προσαυξήσεις και ικανοποιεί τις σχέσεις:*

$$0 < P[N_t = n] = \int_{\mathbb{R}} e^{-t\theta}\frac{(t\theta)^n}{n!}P_\Theta(d(\theta)) \tag{4.1}$$

για όλα τα $t \in (0,\infty)$ και $n \in \mathbb{N}_0$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P\left[\{N_t = n\}\right] &= \int_\Omega P(\{N_t = n\}|\Theta)dP \\ &= \int_\Omega e^{-t\Theta(\omega)}\frac{(t\Theta(\omega))^n}{n!}P(d(\omega)) \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-t\theta}\frac{(t\theta)^n}{n!}P_\Theta(d(\theta)) > 0, \end{aligned}$$

όπου ή πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του θεωρήματος Ολικής Πιθανότητας, ή δεύτερη προκύπτει από τον ορισμό της μεικτής σ.δ. Poisson, ή τρίτη από το θεώρημα αλλαγής μεταβλητής της Θεωρίας Μέτρου (βλ.π.χ.[7], Θεώρημα 2.4.6) και η ανισότητα προκύπτει από το γεγονός, ότι το πρώτο μέλος του γινομένου στο ολοκλήρωμα για θ,t > 0 και για κάθε n που ανήκει στο $\mathbb{N}_0$ είναι πάντοτε θετικό. □

Λήμμα 4.2.3. (Πολυωνυμικό Κριτήριο) *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία μεικτή σ.δ. Poisson, τότε ισχύει η σχέση*

$$P\left[\bigcap_{j=1}^m \{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}|\{N_{t_m} = n\}\right] = \frac{n!}{\prod_{j=1}^m k_j!}\cdot\prod_{j=1}^m\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}$$

για όλα τα $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m, h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ και για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$ και $k_1 < \cdots < k_m \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^m X_k = n$.

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος βλ.[8] ,Λήμμα 4.2.1

Στην περίπτωση που $m = 2$, το πολυωνυμικό κριτήριο λέγεται το δυωνυμικό κριτήριο του **το δυωνυμικό κριτήριο του Lundberg**.

Το πολυωνυμικό κριτήριο επιτρέπει να ελέγχουμε την υπόθεση ότι η απαριθμήτρια *σ.δ.* είναι μία μεικτή *σ.δ.* Poisson και είναι χρήσιμο στον υπολογισμό των πεπερασμένης διάστασης κατανομών μιας μεικτής διαδικασίας Poisson.

Μία πρώτη συνέπεια του πολυωνυμικού κριτηρίου, είναι το παρακάτω αποτέλεσμα :

Θεώρημα 4.2.4. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. είναι μια μεικτή σ.δ. Poisson, τότε είναι και διαδικασία Markov.*

Απόδειξη . Έστω $m \in \mathbb{N}$, $t_1, ..., t_m, t_{m+1} \in (0, \infty)$ και $n_1, ..., n_m, n_{m+1} \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $t_1 < ... < t_m < t_{m+1}$ και $P[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}] > 0$. Ορίζουμε $t_0 := 0$ και $n_0 := 0$. Από το πολυωνυμικό κριτήριο έχουμε

$$
\begin{aligned}
&P\left[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\}\middle|\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right] \\
&= \frac{P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{N_{t_j} = n_j\}\right]}{P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right]} \\
&= \frac{P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\right]}{P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\right]} \\
&= \frac{P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\middle|\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\}\right] \cdot P[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\}]}{P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j - n_{j-1}\}\middle|\{N_{t_m} = n_m\}\right] \cdot P[\{N_{t_m} = n_m\}]} \\
&= \frac{\frac{n_{m+1}!}{\prod_{j=1}^{m+1}(n_j-n_{j-1})!}\prod_{j=1}^{m+1}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_{m+1}}\right)^{n_j-n_{j-1}} \cdot P[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\}]}{\frac{n_m!}{\prod_{j=1}^{m}(n_j-n_{j-1})!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_m}\right)^{n_j-n_{j-1}} \cdot P[\{N_{t_m} = n_m\}]} \\
&= \binom{n_{m+1}}{n_m}\left(\frac{t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_m}\left(\frac{t_{m+1}-t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_{m+1}-n_m} \cdot \frac{P[\{N_{m+1} = n_{m+1}\}]}{P[\{N_m = n_m\}]},
\end{aligned}
$$

καθώς

$$
\begin{aligned}
&P[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\}|\{N_{t_m} = n_m\}] \\
&= P[\{N_{t_m} = n_m\}|\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\}] \cdot \frac{P[\{N_{m+1} = n_{m+1}\}]}{P[\{N_m = n_m\}]} \\
&= \binom{n_{m+1}}{n_m}\left(\frac{t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_m}\left(\frac{t_{m+1}-t_m}{t_{m+1}}\right)^{n_{m+1}-n_m} \cdot \frac{P[\{N_{m+1} = n_{m+1}\}]}{P[\{N_m = n_m\}]},
\end{aligned}
$$

και έτσι

$$P\left[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\} \Bigg| \bigcap_{j=1}^{m} \{N_{t_j} = n_j\}\right] = P[\{N_{t_{m+1}} = n_{m+1}\}|\{N_{t_m} = n_m\}].$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Θεώρημα 4.2.5. *Αν η απαριθμήτρια διαδικασία είναι μία μεικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο Θ, έτσι ώστε η Θ να έχει πεπερασμένες ροπές οποιασδήποτε τάξης, τότε η απαριθμήτρια σ.δ. είναι φυσιολογική και ικανοποιεί*

$$p_{n,n+k}(t, t+h) = \frac{h^k}{k!} \cdot \frac{\mathbb{E}[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^{n+k}]}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]}$$

για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n, t) και όλα τα $k \in \mathbb{N}_0$ και $h \in (0, \infty)$ και με εντάσεις $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ για τις οποίες ισχύει

$$\lambda_n(t) = \frac{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^{n-1}]}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$.

Απόδειξη . Έστω (n, t) ένα αποδεκτό ζευγάρι $k \in \mathbb{N}_0$ και $h \in (0, \infty)$.Από το πολυωνυμικό κριτήριο έχουμε

$$\begin{aligned}
p_{n,n+k}(t, t+h) &= P[\{N_{t+h} = n+k\}|\{N_t = n\}] \\
&= P[\{N_t = n\}|\{N_{t+h} = n+k\}] \cdot \frac{P[\{N_{t+h}] = n+k\}]}{P[\{N_t = n\}} \\
&= \begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{t+h}\right)^k \cdot \frac{\int_\Omega e^{-(t+h)\Theta} \frac{((t+h)\Theta)^{n+k}}{(n+k)!}}{\int_\Omega e^{-t\Theta} \frac{(t\Theta)^n}{n!}} \\
&= \begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{t+h}\right)^k \cdot \frac{(1+h)^{n+k} \cdot n!}{(n+k)! \cdot t^n} \cdot \frac{\mathbb{E}[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^{n+k}]}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]} \\
&= \begin{pmatrix} n+k \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{t}{t+h}\right)^n \left(\frac{h}{t+h}\right)^k \cdot \left(\frac{(t+h)}{t}\right)^n \cdot \frac{1}{k!} \cdot (t+h)^k \cdot \frac{\mathbb{E}[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^{n+k}]}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]} \\
&= \frac{(n+k)!}{k!n!k!} \cdot h^k \cdot \frac{\mathbb{E}[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^{n+k}]}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]} \\
&= \frac{n!}{n!k!} \cdot h^k \cdot \frac{\mathbb{E}[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^{n+k}]}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]} \\
&= \frac{h^k}{k!} \cdot \frac{\mathbb{E}[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^{n+k}]}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]}.
\end{aligned}$$

Για να έχει έννοια το τελευταίο κλάσμα πρέπει να ισχύει

$$\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n] < \infty$$

και το ίδιο να ισχύει και για τον αριθμητή. Αυτό ισχύει διότι

$$\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n] \leq \mathbb{E}[\Theta^n] < \infty.$$

Πάμε τώρα να αποδείξουμε τη φυσιολογικότητα της απαριθμήτριας *σ.δ.* . Πρώτον έστω $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Από το Λημμα 4.2.2 έχουμε ότι $P[\{N_t = n\}] > 0$, το οποίο αποδεικνύει τη συνθήκη (i) του Ορισμού 3.1.12.
Δεύτερον εφόσον

$$p_{n,n}(t, t+h) = \frac{\mathbb{E}[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^{n+k}]}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]},$$

η συνάρτηση $h \longmapsto p_{n,n}(t, t+h)$ είναι συνεχής, το οποίο αποδεικνύει τη συνθήκη (ii) του Ορισμού 3.1.12.
Τέλος έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(1 - p_{n,n}(t,t+h)) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(1 - \frac{\mathbb{E}[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^n]}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]}\right) \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]}\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n] - \mathbb{E}[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^n]) \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]}\lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n - e^{-(t+h)\Theta}\Theta^n]}{h} \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]}\lim_{h\to 0}\mathbb{E}\left[\frac{e^{-t\Theta}\Theta^n - e^{-(t+h)\Theta}\Theta^n}{h}\right] \\
&= \frac{1}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]}\mathbb{E}\left[\lim_{h\to 0} e^{-(t+h)\Theta}\Theta^{n+1}\right] \\
&= \frac{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^{n+1}]}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]}
\end{aligned}$$

καθώς και

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}p_{n,n+1}(t,t+h) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}h\frac{\mathbb{E}[e^{-(t+h)\Theta}\Theta^{n+1}]}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]} \\
&= \frac{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^{n+1}]}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]}.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει τη συνθήκη (iii) του Ορισμού 3.1.12. Έτσι έχουμε δείξει ότι η *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι φυσιολογική με εντάσεις $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ οι οποίες ικανοποιούν την συνάρτηση

$$\lambda_n(t) = \frac{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^n]}{\mathbb{E}[e^{-t\Theta}\Theta^{n-1}]}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $t \in \mathbb{R}_+$. $\square$

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μας παρέχει ακόμη μία δυνάτοτητα να ελεχθεί η υπόθεση ότι η απαριθμήτρια διαδικασία είναι μία μεικτή διαδικασία Poisson, και μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκτιμηθεί η διακύμανση και η αναμενόμενη τιμή της δομικής κατανομής μιας μεικτής διαδικασίας Poisson:

Λήμμα 4.2.6. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια μεικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο Θ, τέτοια ώστε η $\mathbb{E}[\Theta] < \infty$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει*

$$\mathbb{E}[N_t] = t\mathbb{E}[\Theta]$$

και

$$\mathbb{V}ar(N_t) = t\mathbb{E}[\Theta] + t^2\mathbb{V}ar(\Theta).$$

Ιδιαιτέρως η πιθανότητα έκρηξης ισούται με μηδέν.

Απόδειξη . Από το Λήμμα 4.1.2 έχουμε

$$\mathbb{E}[N_t] \;=\; \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_t|\Theta]] = \mathbb{E}[t\Theta] = t\mathbb{E}[\Theta].$$

και

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}ar(N_t) &= \mathbb{E}[\mathbb{V}ar(N_t|\Theta)] + \mathbb{V}ar(\mathbb{E}[N_t|\Theta]) \\
&= \mathbb{E}[t\Theta] + \mathbb{V}ar(t|\Theta) \\
&= t\mathbb{E}[\Theta] + t^2\mathbb{V}ar(\Theta)
\end{aligned}$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.

Επίσης από την υπόθεση έχουμε ότι $\mathbb{E}[\Theta] < \infty$, άρα

$$\mathbb{E}[N_t] = t\mathbb{E}[\Theta] < \infty.$$

Επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 2.2.7 για να διαπιστώσουμε ότι η πιθανότητα έκρηξης είναι 0. □

Παρατήρηση 4.2.7. Από το Λήμμα 4.2.6 προκύπτει ότι αν η απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μεικτή *σ.δ.* Poisson με μη εκφυλισμένη δομική τ.μ. Θ με πεπερασμένη μέση τιμή, τότε για όλα τα $t \in (0,\infty)$ ισχύει ότι $\mathbb{V}ar(N_t) > \mathbb{E}[N_t]$.

Θεώρημα 4.2.8. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι μια μεικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο* Θ*, έτσι ώστε το* Θ *να έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(*a*) *Η κατανομή του* Θ*, είναι εκφυλισμένη.*

(*b*) *Η σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*

(*c*) *Η σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι μία μή ομογενής σ.δ. Poisson.*

(*d*) *Η σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι μία (ομογενής) σ.δ. Poisson.*

Απόδειξη . Εύκολα συμπεραίνουμε από ότι έχουμε δει μέχρι τώρα, ότι από το (a) συνεπάγεται το (d) ,από το (d) συνεπάγεται το (c) και το (c) έχει ως επακόλουθο το (b).
Από το Λήμμα 4.2.6 και το Θεώρημα 2.3.5, από το (b) συνεπάγεται το (d).
Έστω τώρα ότι $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία Poisson δηλαδή ότι ισχύει το (d). Τότε έχουμε

$$E[N_t] = \mathbb{V}ar(N_t)$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και από το Λήμμα 4.2.6 προκύπτει ότι $\mathbb{V}ar(\Theta) = 0$, το οποίο σημαίνει ότι η δομική κατανομή είναι εκφυλισμένη. Επομένως, το (d) συνεπάγεται το (a). □

4.3 Παρατηρήσεις

Το υπόβαθρο του μοντέλου που συζητήθηκε σε αυτό το κεφάλαιο μπορεί να γίνει πιο σαφές αν συμφωνήσουμε να κάνουμε μία διάκριση μεταξύ των χαρτοφυλακίων του ασφαλιστή και του γενικού χαρτοφυλακίου (abstract portfolios).Ενα χαρτοφυλάκιο ασφάλισης είναι φυσικά, ένα σύνολο κινδύνων, οι οποίοι είναι ασφαλισμένοι από την ίδια ασφαλιστική εταιρία, σε αντίθεση, ένα γενικό χαρτοφυλάκιο (abstract portfolio) είναι ένα σύνολο κινδύνων, οι οποίοι κατανέμονται μεταξύ μιας ή περισσοτέρων ασφαλιστικών εταιριών. Ομοιογενή χαρτοφυλάκια ασφαλίσεων τείνουν να είναι μικρά, ενώ τα ομοιογενή γενικά χαρτοφυλάκια(abstract portfolios) μπορεί να είναι μεγάλα. Ως εκ τούτου, φαίνεται να είναι λογικό να συνδυάζουμε στοιχεία από όλες τις ασφαλιστικές εταιρείες που ασχολούνται με τον ίδιο ασφαλιστικό κλάδο προκειμένου να μοντελοποιήσουμε την απαριθμήτρια *σ.δ.* των ομοιογενών γενικών χαρτοφυλακίων. Αυτό δίνει αξιόπιστες πληροφορίες για την υπό συνθήκη κατανομή της απαριθμήτριας *σ.δ.* για κάθε χαρτοφυλάκιο ασφαλιστή. Κάθε ασφαλιστική εταιρία επιλέγει, στη συνέχεια, την κατάλληλη δομική κατανομή του δικού της χαρτοφυλακίου.

Η ερμηνεία της μεικτής απαριθμήτριας *σ.δ.* μπορεί να επεκταθεί ως εξής:
Μέχρι τώρα, έχουμε υποθέσει ότι ένα ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο ασφαλιστή είναι μία μείξη γενικών χαρτοφυλακίων που είναι ομοιογενή. Ωστόσο σε ορισμένους κλάδους nonlife ασφαλίσεων όπως εταιρικές ασφάλειες πυρός, είναι δύσκολο να φανταστεί κανείς χαρτοφυλάκια που είναι ομοιογενή και αρκετά μεγάλα ώστε να παρέχουν αξιόπιστες στατιστικές πληροφορίες. Είναι επομένως σκόπιμο να τροποποιηθεί το μοντέλο με την παραδοχή ότι ένα μάλλον ανομοιογενές ασφαλιστικό χαρτοφυλάκιο είναι μία μείξη από ομοιογενή γενικά χαρτοφυλάκια. Τα μαθηματικά της μείξης δεν αλλάζουν καθόλου. Μόλις αυτή η γενίκευση γίνει αποδεκτή, μπορούμε επίσης να δεχθούμε περισσότερα από δύο επίπεδα της ανομοιογένειας και να κάνουμε μείξη ομοιογενών χαρτοφυλακίων για να περιγράψουμε όλο και περισσότερα ανομοιογενή χαρτοφυλάκια. Σε κάθε περίπτωση, το επίπεδο της ανομοιογένειας του χαρτοφυλακίου ανταναγκλάται από τη διακύμανση της δομικής κατανομής, η οποία είναι ίση με το μηδέν αν και μόνο αν, το χαρτοφυλάκιο είναι ομοιογενές.

Υπάρχει ακόμα μια άλλη παραλλαγή των ερμηνειών που δίνεται μέχρι τώρα: Η μεικτή απαριθμήτρια *σ.δ.* μπορεί να ερμηνευθεί ως η απαριθμήτρια *σ.δ.* ενός κινδύνου, επιλεγμένου τυχαία από ένα ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνων που είναι παρόμοιοι αλλά διαφορετικοί και μπορούν να χαρακτηριστούν από την πραγματοποίηση της δομικής παραμέτρου, η οποία δεν είναι παρατηρήσιμη. Αυτή η επεξήγηση παρέχει ένα σύνδεσμο μεταξύ των απαριθμητριών *σ.δ.* ή *σ.δ.* συνολικών απαιτήσεων εμπειρικής διαβάθμισης μιας θεωρίας υπολογισμού ασφαλίστρων, η οποία, στον πυρήνα της, ασχολείται με τη βέλτιστη πρόβλεψη του μελλοντικού αριθμού απαιτήσεων ή των σοβαρών απαιτήσεων των μεμονομένων κινδύνων, δεδομένης της προσωπικής εμπειρίας απόσβεσης στο παρελθόν. Για μια εισαγωγή στην εμπειρική αξιολόγηση, βλ. Sundt [1984, 1991, 1993] και Schmidt[1992].

Σύμφωνα με τον Seal [1983], η ιστορία της μεικτής *σ.δ.* Poisson προέρχεται από μία δημοσίευση του Dubourdieu [1938], ο οποίος την παρομοίωσε ως ένα μοντέλο σε μια ασφάλεια αυτοκινήτου, αλλά δεν την συνέκρινε με στατιστικά δεδομένα. Ύστερα από δύο χρόνια, οι μεικτές *σ.δ.* Poisson έγιναν κεντρικό θέμα στη γνωστή διδακτορική διατριβή του Lundberg [1940] που αναπτύχθηκε η μαθηματική θεωρία τους και μελετήθηκαν οι εφαρμογές τους στις ασφάλειες για αρρώστιες και ατυχήματα. Ακόμη μία εφαρμογή προτάθηκε από τον Hofmann [1955], ο οποίος μελέτησε τις μεικτές *σ.δ.* Poisson σαν ένα μοντέλο για ασφαλίσεις εργατικών αποζημειώσεων.

Για περισσότερες λεπτομέρειες στις μεικτές *σ.δ.* Poisson, αξίζει να διαβαστεί η εργασία του Lundberg [1940], όπως και του Albrecht [1981], οι έρευνες των Albrecht [1985] and Pfeifer [1986], και το πρόσφατο βιβλίο του Grandell [1995].

Προκειμένου να επιλεγεί μια απαριθμήτρια διαδικασία ως μοντέλο για τα δεδομένα, είναι χρήσιμο να υπενθυμίσουμε ορισμένα κριτήρια που πληρούνται για ορισμένες απαριθμήτριες *σ.δ.* , αλλά αποτυγχάνουν για άλλες. Τα ακόλουθα κριτήρια αναφέρονται στην μη ομογενή διαδικασία Poisson και στη μεικτή διαδικασία Poisson, κάθεμία από τις οποίες περιλαμβάνει την ομογενή διαδικασία Poisson ως ειδική περίπτωση.

- **Ανεξάρτητες προσαυξήσεις**: Η μη ομογενής διαδικασία Poisson έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, αλλά η μεικτή διαδικασία Poisson με μη εκφυλισμένη δομική κατανομή δεν έχει.

- **Στάσιμες προσαυξήσεις**: Η μεικτή διαδικασία Poisson έχει στάσιμες προσαυξήσεις, αλλά η μη ομογενής διαδικασία Poisson με μια μη σταθερή ένταση δεν έχει.

-**Πολυωνυμικό κριτήριο**: Το Πολυωνυμικό κριτήριο ισχύει για την μεικτή διαδικασία Poisson, αλλά όχι για την μη ομογενή διαδικασία Poisson με μια μη σταθερή ένταση.

-**Ανισότητα ροπών**: Η ανισότητα ροπών,

$$\mathbb{E}[N_t] \leq \mathbb{V}ar[N_t]$$

για όλα τα $t \in (0, \infty)$, είναι μια αυστηρή ανισότητα για την μεικτή διαδικασία Poisson μη εκφυλισμένη δομική κατανομή, αλλά είναι μια ισότητα για την μη ομογενή διαδικασία Poisson.

Αφού ο τύπος της απαριθμήτριας *σ.δ.* έχει επιλεγεί σύμφωνα με τα προηγούμενα κριτήρια, το επόμενο βήμα θα πρέπει να είναι η επιλογή παραμέτρων και η εξέταση της καλής προσαρμογής των θεωρητικών κατανομών στις πεπερασμένης διάστασης κατανομές.

Η ασφάλιση αυτοκινήτων δεν ήταν μόνο ο νονός της μεικτής διαδικασίας Poisson, όταν εισήχθη στη θεωρία των κινδύνων από τον Dubourdieu [1938] χωρίς αναφορά σε στατιστικά δεδομένα. Αλλα εξακολουθεί να είναι η πιο σημαντική κλάση ασφάλισης στην οποία η μικτή *σ.δ.* Poisson φαίνεται να είναι ένα καλό μοντέλο για τη εμπειρική απαριθμήτρια *σ.δ.* . Αυτό υποδεικνύεται στις εργασίες των Thyrion [1960], Delaporte [1960, 1965], Tricklinger [1961], Derron [1962], Bichsel [1964] kai Ruohonen [1988]]και στο βιβλίο του Lemaire [1985]. Κατά κανόνα, ωστόσο, αυτοί οι συγγραφείς εξέτασαν δεδομένα από μια μόνο περίοδο και έτσι συνέκριναν τις θεωρητικές μονοδιάστατες κατανομές με τις εμπειρικές. Για να μοντελοποιηθεί η εξέλιξη του αριθμού των απαιτήσεων στο χρόνο, θα ήταν απαραίτητο να συγκρίνουμε τις πεπερασμένης διάστασης κατανομές επιλεγμένων απαριθμητριών *σ.δ.* με αυτές των εμπειρικών διαδικασιών.

Κεφάλαιο 5

Παραδείγματα δομικών κατανομών

Εδώ παρουσιάζουμε ορισμένα παραδείγματα δομικών κατανομών για μία μεικτή $\sigma.\delta.$ Poisson .

5.1 Ομογενής διαδικασία Poisson

Στην ομογενή $\sigma.\delta.$ **Poisson**, η τυχαία μεταβλητή Θ είναι εκφυλισμένη στο $\theta_0(>0)$ δηλαδή $P_\Theta = \delta_{\theta_0}$.
Αυτή είναι η μόνη MPP η οποία είναι ταυτόχρονα και ανανεωτική διαδικασία. Οι χρόνοι ανάμεσα στις απαιτήσεις είναι ανεξάρτητοι και εκθετικά κατανεμημένοι.

$$P(\{\Theta = \theta_0\}) = 1 \quad \text{και} \quad F_\Theta(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \theta \geq \theta_0 \\ 0 & \text{αν } \theta < \theta_0 \end{cases}$$

5.2 Μείξη ακολουθίας ομογενών διαδικασίων Poisson

Έστω $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών με $\theta_n < \theta_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με $\sum_{n=1}^\infty p_n = 1$. Θεωρούμε την τ.μ. $\Theta : \Omega \longmapsto (0,\infty)$, ώστε

$$P(\{\Theta = \theta_n\}) = p_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Τότε προκύπτει ότι

$$F_\Theta(\theta) = \sum_{n=1}^\infty \chi_{\{\theta_n \leq \theta\}} p_n$$

και

$$p_k(t) := P(\{N_t = k\}) = \sum_{n=1}^\infty p_n e^{-\theta_n t} \frac{(\theta_n t)^k}{k!}.$$

Αυτή η κατανομή μπορεί να χρησιμοποιηθεί αν ο πληθυσμός διαχωριστεί σε ένα αριθμήσιμο πλήθος κατηγοριών. Για $n = 2$ προκύπτει η λεγόμενη **διπλή διαδικασία Poisson**. Η $sigma$.π. της N_t είναι

$$p_n(t) = P(\{N_t = n\}) = p_1 \frac{e^{-\theta_1 t}(\theta_1 t)^n}{n!} + p_2 \frac{e^{-\theta_2 t}(\theta_2 t)^n}{n!} \quad \text{για κάθε} \quad t > 0. \tag{5.1}$$

Αυτό το είδος της διαδικασίας θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί, αν ένας πληθυσμός χωριζόταν σε αρσενικά και θυληκά μέλη.

5.3 Η διαδικασία Pólya-Lundberg

Η πιό κοινή επιλογή της κατανομής P_Θ για την δομική παράμετρο Θ ειναι κατανομή γάμμα. Τότε προκύπτει ή $\sigma.\delta.$ Pólya-Lundberg , που θα μελετηθεί παρακάτω .

Ορισμός 5.3.1. Η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **σ.δ. Pólya-Lundberg** με παραμέτρους α και γ, εάν είναι μεικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο Θ ώστε να ισχύει $P_\Theta = \mathbf{Ga}(\alpha, \gamma)$.

Θεώρημα 5.3.2. Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία σ.δ. Pólya-Lundberg με παραμέτρους α και γ, τότε ισχύει:

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} = n_j\}\right] = \frac{\Gamma(\gamma + n_m)}{\Gamma(\gamma)\prod_{j=1}^{m}(n_j - n_{j-1})!} \left(\frac{\alpha}{\alpha + t_m}\right)^{\gamma} \prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{\alpha + t_m}\right)^{n_j - n_{j-1}}$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, και για κάθε $n_0, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$ ώστε $0 = n_0 \le n_1 \le \cdots \le n_m$.
Ιδιαιτέρως, η σ.δ. του αριθμού των απαιτήσεων $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες και εξαρτημένες προσαυξήσεις και ικανοποιεί τα εξής:

$$P_{N_t} = \mathbf{NB}\left(\gamma, \frac{\alpha}{\alpha + t}\right) \quad \text{για κάθε} \quad t \in (0, \infty)$$

και

$$P_{N_{t+h} - N_t | N_t} = \mathbf{NB}\left(\gamma + N_t, \frac{\alpha + t}{\alpha + t + h}\right) \quad \text{για κάθε} \quad t, h \in (0, \infty).$$

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος βλ.[8, Θεώρημα 4.2.9]. □

Οι δύο παράμετροι α, β επιτρέπουν μεγάλη ευελιξία κατά τη διαρκεια της σύγκρισης των πειραματικών δεδομένων με τη θεωρητική καμπύλη.

Για $\gamma = 1$ η τ.μ. Θ ακολουθεί την **εκθετική κατανομή** . Ακόμη, όταν η γ είναι ακέραιος αριθμός, η Θ είναι ισόνομη με το άθροισμα των γ, οι οποίες είναι ανεξάρτητες τ.μ. και ακολουθούν την εκθετική κατανομή . Αυτές οι κατανομές Γάμμα συχνά αναφέρονται ως **κατανομές Erlang**.

Από το Θεώρημα 5.3.2, προκύπτει ότι κάθε ακολουθεί την **αρνητική διωνυμική** κατανομή $\mathbf{NB}(\gamma, \frac{\alpha}{\alpha+\mathbf{t}})$. Για β=1 προκύπτει η **γεωμετρική κατανομή**.
Από το Θεώρημα 5.3.2, ο χειρισμός της **σ.δ. Pólya-Lundberg** δεν είναι πολύ δύσκολος, αφού οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές της είναι γνωστές παρά το ότι οι προσαυξήσεις της δεν είναι ανεξάρτητες. Ως άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.3.2, παρατηρούμε πως η **σ.δ. Pólya-Lundberg** έχει θετική τάση (contagion):

Πόρισμα 5.3.3. (**Θετική Μετάδοση**).
Αν η απαριθμήτρια σ.δ. $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία διαδικασία Pólya-Lundberg, τότε, για όλα τα $t, h \in (0,\infty)$, η συνάρτηση

$$n \longmapsto P[\{N_{t+h} \geq n+1\}|\{N_t = n\}]$$

είναι γνησίως αύξουσα.

Απόδειξη . Έχουμε,

$$\begin{aligned} P(\{N_{t+h} \geq n+1\}|N_t = n) &= \sum_{k=1}^{\infty} P(N_{t+h} = n+k|N_t = n) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(N_{t+h} = n+k, N_t = n)}{P(N_t = n)}. \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 5.3.2 για το παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(N_{t+h} = n+k, N_t = n)}{P(N_t = n)} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma)n!k!}\right]\left(\frac{\alpha}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\alpha+t+h}\right)^{n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k}}{\frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)n!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^{n}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\frac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma)n!k!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\alpha+t+h}\right)^{n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k}}{\frac{\Gamma(\gamma+n)}{\Gamma(\gamma)n!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^{\gamma}\left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^{n}}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma+n)k!}\left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma}\left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{n}\left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k} \end{aligned}$$

Στην δεύτερη ισότητα ο παρονομαστής είναι σταθερός και δεν επηρεάζεται απο το k αρα τον βάζουμε μέσα στο άθροισμα, έπειτα απλοποιούμε και φτάνουμε να παρατηρήσουμε την συνάρτηση πιθανότητας μίας αρνητικής δυωνυμικής

$$\mathbf{NB}\left(\gamma+n, \frac{\alpha+t}{\alpha+t+n}\right).$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα της συνάρτησης στο στήριγμα της $\{0, 1, 2, ...\}$ είναι ίσο με 1. Παίρνουμε το άθροισμα απο $k = 0$ αφαιρώντας τον πρώτο όρο για $k = 0$ και τότε έχουμε σε συνέχεια το προηγούμενου

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma+n)k!} \left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma} \left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{n} \left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma+n+k)}{\Gamma(\gamma+n)k!} \left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n} \left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k} - \left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n} \\
&= 1 - \left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n}.
\end{aligned}$$

Επειδή ισχύει

$$0 < \frac{\alpha+t}{\alpha+t+h} < 1$$

άμεσα έπεται το αποτέλεσμα του πορίσματος. □

Έτσι, για την *σ.δ.* Pólya-Lundberg, η υπό συνθήκη πιθανότητα να προκύψει τουλάχιστον μία απαίτηση στο διάστημα $(t, t+h]$ αυξάνεται με τον αριθμό των απαιτήσεων που έχουν ήδη συμβεί μέχρι το χρόνο t.

Ολοκληρώνουμε την μελέτη της *σ.δ.* Pólya-Lundberg δείχνοντας ότι είναι μία φυσιολογική διαδικασία Markov η οποία δεν είναι ομογενής:

Πόρισμα 5.3.4. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *είναι μία διαδικασία Pólya-Lundberg με παραμέτρους* α *και* γ*, τότε αυτή είναι μία φυσιολογική διαδικασία Markov που ικανοποιει την σχέση*

$$p_{n,n+k}(t, t+h) = \binom{\gamma+n+k-1}{k} \left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n} \left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k}$$

για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n, t) *για όλα τα* $k \in \mathbb{N}_0$ *και για* $h \in \mathbb{R}_+$ *με εντάσεις* $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *που ικανοποιουν την σχέση*

$$\lambda_n(t) = \frac{\gamma+n-1}{\alpha+t}$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ *και* $t \in \mathbb{R}_+$ *ιδιαιτέρως, η απαριθμήτρια σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ *δεν είναι ομογενής.*

Απόδειξη. Από τα Θεωρήματα 4.2.4 και 4.2.5, η Pólya-Lundberg είναι μια φυσιολογική διαδικασία Markov.
Απο το Θεώρημα 5.3.2, έχουμε

$$\begin{aligned}
p_{n,n+k}(t, t+h) &= P[\{N_{t+h} = n+k\}|\{N_t = n\}] \\
&= P[\{N_{t+h} - N_t = k\}|\{N_t = n\}] \\
&= \binom{\gamma+n+k-1}{k} \left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n} \left(\frac{h}{\alpha+t+h}\right)^{k}
\end{aligned}$$

έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda_{n+1}(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}p_{n,n+1}(t,t+h)\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(\gamma+n)\left(\frac{\alpha+t}{\alpha+t+h}\right)^{\gamma+n}\frac{h}{\alpha+t+h}\\ &= \frac{\gamma+n}{\alpha+t},\end{aligned}$$

και έτσι

$$\lambda_n(t)=\frac{\gamma+n-1}{\alpha+t}.$$

Δεδομένου ότι οι εντάσεις δεν είναι σταθερές, προκύπτει από το Λήμμα 3.4.1 ότι η απαριθμήτρια *σ.δ.* δεν είναι ομογενής. □

Εν κατακλείδι, η διαδικασία Pólya-Lundberg είναι μια φυσιολογική διαδικασία Markov η οποία είναι μη ομογενής και έχει σταθερές εξαρτημένες προσαυξήσεις. Έτσι ολοκληρώνεται η μελέτη για την διαδικασίαPólya-Lundberg ολοκληρώνοντας έτσι και την διερεύνυση για τον αριθμό των φυσιολογικών διαδικασιών που ικανοποιούν τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov. O Pfeifer [1982a, 1982b] και ο Gerber [1983] μελέτησαν τις ασυμπτωτικές ιδιότητες των απαριθμητριών *σ.δ.* που επάγονται απο τις *σ.δ.* Pólya-Lundberg.

5.4 Μετατοπισμένη κατανομή γάμμα

Η μεικτή *σ.δ.* Poisson με δομική κατανομή μία μετατοπισμένη γάμμα κατανομή ή μία κατανομή γάμμα με τρεις παραμέτρους **ονομάζεται μεικτή** *σ.δ.* **Delaporte**, η οποία έχει μελετηθεί αρχικά από τον Delaporte [16] (1960),[17] (1965) .

Ισχύει $P_\Theta=\mathbf{Ga}(\alpha,\beta,\gamma)$ με $\alpha,\beta,\gamma>0$,

δηλαδή η *σ.π.π.* της Θ δίνεται απο τον τύπο

$$f_\Theta(\theta):=\frac{\alpha^\beta(\theta-\gamma)^{\beta-1}e^{-\alpha(\theta-\gamma)}}{\Gamma(\beta)}\qquad\forall\ \theta\geq\gamma.$$

Επομένως ισχύει

$$p_k(t)=\int_\gamma^\infty e^{-\theta t}\frac{(\theta t)^k}{k!}\cdot\frac{\alpha^\beta(\theta-\gamma)^{\beta-1}e^{-\alpha(\theta-\gamma)}}{\Gamma(\beta)}d\theta\qquad\forall\ t\in\mathbb{R}_+,\ \forall\ k\in\mathbb{N}_0.$$

Τότε αποδεικνύεται ότι

$$p_0(t)=e^{-\gamma t}\left(\frac{1}{\alpha+t}\right)^\beta \tag{5.2}$$

και

$$m_{N_t}(s) = e^{-(1-s)t\gamma}\left(\frac{\alpha}{\alpha+(1-s)t}\right)^{\beta} \qquad \forall\ s \in (-1,1). \tag{5.3}$$

Για μία αναλυτική απόδειξη των τύπων (5.1) και (5.2) βλ.[2, 5.3.11]

Θεώρημα 5.4.1. *Μια διαδικασία Delaporte $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με δομική κατανομή $\mathbf{Ga}(\alpha,\beta,\gamma)$ είναι ισοδύναμη με το άθροισμα δύο ανεξάρτητων απαριθμητριών διαδικασιών, δηλαδή*

$$N_t \stackrel{d}{=} N_{1,t} + N_{2,t} \qquad \forall\ \ t \in \mathbb{R}_+,$$

όπου η $\{N_{1,t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία ομογενής διαδικασία Poisson με $P_{N_{1,t}} = \mathbf{P}(\gamma t)$ και η $\{N_{2,t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία σ.δ. Pólya-Lundberg με $P_{N_{2,t}} = \mathbf{NB}(\beta, \frac{a}{a+t})$ για κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. Όπως γνωρίζουμε η πιθανογεννήτρια συνάρτηση ορίζει την κατανομή μίας τ.μ. Από τη σχέση (5.1) προκύπτει, ότι

$$m_{N_t}(s) = m_{N_{1,t}}(s)\cdot m_{N_{2,t}}(s) \qquad \forall\ s \in (-1,1) \tag{5.4}$$

όπου η

$$m_{N_{1,t}}(s) = e^{-(1-s)t\gamma}$$

είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση μίας ομογενούς σ.δ. Poisson $\{N_{1,t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με παράμετρο γ . Επιπλέον η πιθανογεννήτρια $m_{N_{2,t}}$ της σ.δ. Pólya-Lundberg δίνεται απο τον τύπο

$$m_{N_{2,t}} = \left(\frac{\alpha}{(\alpha+(1-s)t}\right)^{\beta}$$

Επομένως, έχουμε ότι

$$N_t \stackrel{d}{=} N_{1,t} + N_{2,t} \quad \text{για κάθε} \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος μπορεί να να βρεθεί αναλυτικά στον Spodanev [40]. □

Πόρισμα 5.4.2. *Έστω $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία σ.δ. Delaporte. Τότε ισχύει*

$$p_k(t) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(\gamma t)^{k-n}}{(k-n)!} e^{-\gamma t} \begin{pmatrix} \beta+n-1 \\ n \end{pmatrix} \left(\frac{\alpha}{\alpha+t}\right)^{\beta} \left(\frac{t}{\alpha+t}\right)^{n},$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $k \in \mathbb{N}_0$.

Η απόδειξη του παραπάνω πορίσματος είναι αμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.4.1.

Παρατήρηση 5.4.3. Από το Θεώρημα 5.4.1 προκύπτει, ότι αν N, N_1, N_2 είναι τ.μ., ώστε $P_{N_1} = \mathbf{P}(\gamma)$ και $P_{N_2} = \mathbf{NB}(\beta, p)$ οι N_1 και N_2 να έιναι ανεξάρτητες και $N \stackrel{d}{=} N_1 + N_2$ τότε

$$\mathbf{Del}(\gamma, \beta, p) = \mathbf{P}(\gamma) * \mathbf{NB}(\beta, p).$$

Η κατανομή $\mathbf{Del}(\gamma, \beta, p)$ ονομάζεται κατανομή Delaporte και αντιστοιχεί στην κατανομή $\{P_{N_t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μίας σ.δ. Delaporte με $t = 1$ και $\alpha := \frac{1-p}{p} > 0$.

Παρατήρηση 5.4.4. Πολλές φορές είναι ενδιαφέρον, να προσπαθήσουμε να προσδιορίσουμε την κατανομή Delaporte μέσω ενός αναδρομικού τύπου. Έχουμε

$$L_\Theta(v) = e^{-\gamma v}(1 + \frac{v}{\alpha})^{-\beta}$$

και έτσι

$$m_{N_t}(s) = e^{-\gamma t(1-s)}\left(1 + \frac{t(1-s)}{\alpha}\right)^{-\beta}$$

Μετά από απλούς υπολογισμούς η παραγώγιση των παραπάνω μας οδηγεί στον τύπο,

$$(\alpha + t - ts)m'_N(s) = (\beta t + \gamma t(\alpha + t) - \gamma t^2 s)m_{N_t}(s)$$

για κάθε $s \in (-1, 1)$ χρησιμοποιώντας τις

$$m_N(s) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(t)s^m \quad \text{και} \quad m'_N(s) = \sum_{m=0}^{\infty}(m+1)p_{n+1}(t)s^m$$

και εξισώνοντας τους συντελεστες του s^m προκύπτει με $p_{-1}(t) := 0$ ο αναδρομικός τύπος

$$(\alpha + t)(m + 1)p_{m+1}(t) = (\beta + \gamma(\alpha + t) + m) + p_m(t) - \gamma p_{m-1}(t),$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$.
Εφόσον

$$p_0(t) = m_{N_t}(0) = e^{-\gamma t}\left(\frac{\alpha}{\alpha + t}\right)^{\beta},$$

μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την $p_m(t)$ για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$ και $t \in \mathbb{R}_+$.
Οι μεικτές σ.δ. Poisson με τη δομική παράμετρο που ακολουθεί την κατανομή γαμμα με τρεις παραμέτρους μελετήθηκαν πρώτα από τον Delaporte [1960, 1965] και αργότερα από τους Troo-blinger [1961], Kupper [1962], Albrecht [1981], και Gerber [1991]. Οι συγγραφείς αυτοί, όμως μελέτησαν μόνο τις μονοδιάστατες κατανομές των επαγόμενων απαριθμητριών σ.δ. .

5.5 Γενικευμένη βήτα κατανομή

Η τ.μ. Θ ακολουθεί τη **γενικευμένη βήτα κατανομή**, αν ισχύει

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(\theta_1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)\theta_1^{\alpha+\beta-1}}, \quad \text{για κάθε } \theta \in (0,\theta_1), \text{ όπου } \alpha, \beta > 0. \tag{5.5}$$

Στην περίπτωση στην οποία ισχύει $\theta_1 = 1$ η κατανομή της Θ ονομάζεται **Βήτα κατανομή**.

Έτσι η σ.π. της N_t για $t = 1$ δίνεται απο τον τύπο

$$p_n = \frac{\theta_1^n}{n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\theta_1)^k}{k!}\frac{\Gamma(n+\alpha+k)}{\Gamma(n+\alpha+k+\beta)}. \tag{5.6}$$

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω τύπου βλ.([2],σελ 41).
Στην ειδική περίπτωση στην οποία το $\alpha = 1$ έχουμε

$$p_n = \frac{\theta_1^n}{n!}\Gamma(1+\beta)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\theta_1)^k}{k!}\frac{\Gamma(n+1+k)}{\Gamma(n+1+k+\beta)},$$

δηλαδή τον τύπο που προκύπτει από τον ορισμό τον οποίο έδωσε ο Willmot για την

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\beta(\theta_1-\theta)^{\beta-1}}{\theta^\beta} \text{ με } \theta \in (0,\theta_1).$$

Η κατανομή Poisson-βήτα μελετήθηκε αναλυτικά από τους Johnson and Kotz ([25], p. 227) και Beall and Rescia ([13]). Μία πιο γενική μείξη βήτα απο την άλλη μελετήθηκε από τους Willmot and Panjer ([48]). Παρόλα αυτά, η αναδρομική σχέση που λαμβάνεται δεν είναι πολύ βολική και εύχρηστη για κάποιες αρκέτα ενδιαφέρουσες κατανομές. Η παραπάνω μείξη είναι χρήσιμη κυρίως στη λήψη αποτελεσμάτων για πιο γενικής σοβαρότητας κατανομές για κάποιες απο τις τιμές του β.

Χρησιμοποιώντας λοιπον την (5.5) μπορούμε να αποδείξουμε ότι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της N_t δίνεται από τον τύπο

$$m_N(z) = M[1, \beta+1, \theta_1(z-1)], \text{ για κάθε } z \in [-1,1] \tag{5.7}$$

όπου $M(\bullet)$ είναι η **συρρέουσα (confluent) υπεργεωμετρική συνάρτηση** (βλ. Johnson and Kotz [25], (1969), p. 8), που ορίζεται ως εξής:

$$M(a,b,z) := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{(n)}z^n}{b^{(n)}n!} :=_1 F_1(a,b;z)$$

όπου $a^{(0)} := 1$ και $a^{(n)} := a(a+1)\ldots(a+n-1)$, $a, z \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-$. Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω τύπου βλ.([2],σελ 42).

5.6 Η περικομμένη κανονική κατανομή

Έστω X είναι μία κανονικά κατανεμειμένη τ.μ. με μέσο $\mu \in \mathbb{R}$ και διακύμανση $\sigma^2 \in \mathbb{R}_+^*$.

Έστω οτι η Θ ακολουθεί μία **περικομμένη κανονική κατανομή** ,δηλαδή η F_Θ δίνεται από τον τύπο,

$$F_\Theta(\theta) := P(\{X \leq \theta\}|\{X \geq 0\}) = \frac{\Phi(\frac{\theta-\mu}{\sigma}) - \Phi(\frac{-\mu}{\sigma})}{1 - \Phi(\frac{-\mu}{\sigma})}.$$

Επομένως η σ.π.π f_Θ της ϑ δίνεται απο τον τύπο

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\frac{1}{\sigma}\varphi(\frac{\theta-\mu}{\sigma})}{\Phi(\frac{\mu}{\sigma})}$$

όπου, ως συνήθως,
$\varphi(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\omega^2}{2}}$ και $\Phi(\omega) := \int_{-\infty}^{\omega} \varphi(z)dz$

Ως γνωστόν ισχύει $\Phi(-\omega) = 1 - \Phi(\omega)$ Από τον Kupper ([31],σελ 126) έχουμε

$$\mu_\theta = \mu + f_\Theta(0)\sigma^2$$

$$\begin{aligned} {\sigma_\Theta}^2 &= \sigma^2(1 - f_\Theta(0)\mu - f_\Theta(0)^2\sigma^2) \\ &= \sigma^2(1 - f_\Theta(0)\mu_\Theta) \end{aligned}$$

και έχουμε

$$L_\Theta(\upsilon) = \Phi(\frac{\mu - \sigma^2\upsilon}{\sigma})\Phi(\frac{\mu}{\sigma}) exp\{-\mu + \frac{1}{2}\sigma^2\upsilon^2\}$$

Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ η κατανομή της N_t ονομάζεται **περικομμένη κανονικη-Poisson** κατανομή.

Αυτή η κατανομή έχει εισαχθει και μελετηθεί ανεξάρτητα απο της Berljand et al. [14], το 1962 και τον Kupper [30, 31] το 1962 και τον Patil [34] το 1964.

Παρά το ότι οι Kupper και Patil έχουν υπολογίσει την σ.π. $p_n(t)$ της N_t ακριβώς μέσω μίας σειράς, ο αναδρομικός προσδιορισμός είναι πιο ελκυστικός.

Οι αναδρομικοί τύποι, οι οποίοι αποδείχθηκαν από τους Willmot ([47],σελ 126) το 1993 και Kupper ([31],σελ 462) το 1962 είναι οι εξής :

$$p_0(t) = L_\Theta(t)$$

$$p_1(t) = (\mu - \sigma^2 t)tp_0(t) + \sigma^2 t f_\Theta(0)$$

$$(m+1)p_{m+1}(t) = (\mu - \sigma^2 t)tp_m(t) + \sigma^2 t^2 p_{m-1}(t) \text{ για } m \geq 1.$$

Αυτό συμφωνεί με την αναδρομή του Kupper ([31],σελ 462) .
Η αναδρομή είναι σταθερή για $\mu \geq s^2 t$.
Στην περίπτωση που $\mu = s^2 t$ έχουμε όπως παρατηρήθηκε απο τον Kupper [31] και τον Patil [34],

$$p_n(t) = \frac{e^{-\mu\frac{t}{2}}}{\mu t\Phi(\sqrt{\mu t})}\frac{(\frac{\mu t}{2})^{\frac{n}{2}+1}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

5.7 Γενικευμένη αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή

Έστω ότι η Θ ακολουθεί την γενικευμένη αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή (GIGD) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_\Theta(\theta) = \frac{(\psi/\chi)^{\gamma/2}}{2K_\gamma(\sqrt{\chi\psi})}\theta^{\gamma-1}e^{-(\chi\theta^{-1}+\psi\theta)/2} \quad \text{για κάθε } \theta > 0 \tag{5.8}$$

όπου K_γ είναι η τροποποιημένη συνάρτηση Bessel τρίτου είδους. Την κατανομή GIGD την εισήγαγε για πρώτη φορά ο Good [21] το 1953. Το πεδίο ορισμού των παραμέτρων έχει ως εξής:

$$\gamma \in \mathbb{R}, (\chi, \psi) \in \Theta_\gamma$$

όπου

$$\Theta_\gamma = \begin{cases} \{(\chi,\psi) : \chi \geq 0, \psi > 0, \}, & \text{αν } \gamma > 0 \\ \{(\chi,\psi) : \chi > 0, \psi > 0, \}, & \text{αν } \gamma = 0 \\ \{(\chi,\psi) : \chi > 0, \psi \geq 0, \}, & \text{αν } \gamma < 0 \end{cases}$$

Η αντίστοιχη σύνθετη διαδικασία Poisson αποτελείται απο τ.μ, που η κατανομή τους ονομάζεται **κατανομή Sichel**, αφου έχει εισαχθεί απο τον Sichel [37] το 1971. Πριν συζητήσουμε αυτήν την κατανομή, θα δώσουμε ορισμένα βασικά στοιχεία για την GIGD. Η κλάση των GIGD είναι ευρεία και περιλαμβάνει πολλές σημαντικές ειδικές περιπτώσεις. Συχνά είναι χρήσιμο να εισάγουμε τις παραμέτρους $\omega := \sqrt{\chi\psi}, \eta := \sqrt{\frac{\chi}{\psi}}$. Τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Θ γράφεται στη μορφή

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\eta^{-\gamma}}{2K_\gamma(\omega)}\theta^{\gamma-1}e^{-\omega(\eta\theta^{-1}+\eta^{-1}\theta)/2} \quad \text{για κάθε } \theta > 0 \tag{5.9}$$

όπου η παράμετρος ω (για σταθερό γ) είναι μία παράμετρος συγκέντρωσης (concentration) και η παράμετρος η είναι παράμετρος κλίμακας. Για να γίνει πιο κατανοητή η κατανομή GIGD, ας δούμε ορισμένες ιδιότητες της συνάρτησης Bessel τρίτου είδους, τις οποίες μελέτησε ο Jørgensen [27] (1982). Η συνάρτηση K_γ ορίζεται μέσω του τύπου

$$K_\gamma(\omega) := \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\gamma-1}e^{-\omega(x^{-1}+x)/2}dx \quad \text{για κάθε } \omega > 0.$$

ο οποίος είναι μια από τις πολλές ολοκληρωτικές παραστάσεις αυτής της συνάρτησης. Είναι άμεσο ότι

$$K_\gamma(\omega) = K_{-\gamma}(\omega) \tag{5.10}$$

και

$$K_{\gamma+1}(\omega) = \frac{2\gamma}{\omega}K_\gamma(\omega) + K_{\gamma-1}(\omega) \tag{5.11}$$

Πράγματι, θέτοντας $u = x^{-1}$, τότε $du = -x^{-2}dx = -u^2dx$. Επομένως

$$\begin{aligned} K_{-\gamma}(\omega) &= \frac{1}{2}\int_0^\infty (u^{-1})^{-\gamma-1}e^{-\omega(u+u^{-1})}/2\frac{du}{u^2} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty u^{\gamma+1-2}e^{-\omega(u+u^{-1})}/2du \\ &= K_\gamma(\omega). \end{aligned}$$

Για μία αναλυτική απόδειξη της (5.11) παραπέμπουμε ([2],σελ 45).

Στην ειδική περίπτωση όπου το γ είναι της μορφής $n + \frac{1}{2}$ έχουμε

$$K_{n+1/2}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2\omega}}e^{-\omega}\sum_{i=0}^{n}\frac{(n+i)!}{(n-i)!i!}(2\omega)^{-i} \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}_0. \tag{5.12}$$

Αυτή η σχέση απλοποιεί αρκετά τη συνάρτηση K_γ Από το Θ_γ είναι εφικτή η περίπτωση $\gamma, \chi > 0$. Τότε η K_γ είναι στενά συνδεδεμένη με την κατανομή Γάμμα, καθώς:

$$\lim_{\omega\to 0}\omega^\gamma K_\gamma(\omega) = \frac{1}{2}\int_0^\infty x^{\gamma-1}e^{-\omega(x^{-1}+x)/2}dx = \Gamma(\gamma)2^{\gamma-1}, \quad \text{για κάθε } \gamma > 0. \tag{5.13}$$

Γία την απόδειξη βλ. ([2],σελ 70)

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα σε συνδυασμό με την συνάρτηση πυκνότητας της Θ, βλέπουμε ότι , η Θ ακολουθεί την $\mathbf{Ga}(\gamma, \chi/2)$. Στο υπόλοιπο παράδειγμα θα υποτεθεί ότι $\chi > 0$.

Στην περίπτωση όπου $\psi = 0$ λόγω του χώρου Θ_γ συνάγουμε ότι $\gamma < 0, \chi > 0$. Χρησιμοποιώντας την (5.10) και την (5.12) καταλήγουμε στην συνάρτηση πυκνότητας

$$f_\Theta(\theta) = \frac{(\chi/2)^{-\gamma}}{\mathbf{Ga}(-\gamma)}\theta^{\gamma-1}e^{-x/(2l)}, \quad \text{για κάθε } \theta > 0.$$

Οι ροπές της τ.μ. Θ δίνονται από τον τύπο:

$$\mathbb{E}[\Theta^k] = \begin{cases} \frac{\Gamma(-\gamma+k)}{\Gamma(-\gamma)}(\chi/2), & \text{αν } k < -\gamma \\ \infty, & \text{αν } k \geq -\gamma \end{cases}$$

και ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$L_\Theta(v) = \frac{2K_\gamma(\sqrt{2\chi v})}{\Gamma(-\gamma)(\chi v/2)^{\gamma/2}}.$$

Αν $\psi > 0$ τότε όλες οι ροπές υπάρχουν (Jørgensen)[27] με

$$\mathbb{E}(\Theta^k) = \frac{K_{\gamma+k}(\omega)}{K_\gamma(\omega)}\eta^k$$

και μετασχηματισμό Laplace

$$L_\Theta(v) = \frac{K_\gamma(\omega\sqrt{1+2v\psi})}{K_\gamma(\omega)(1+2v\psi)^{\gamma/2}}.$$

5.8 Αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή

Στην ειδική περίπτωση όπου $\gamma = -\frac{1}{2}$, η κατανομή της Θ ονομάζεται **αντίστροφη Γκαουσιανή (IGD)**. Τότε χρησιμοποιώντας τη σχέση $K_\gamma(\omega) = K_{-\gamma}(\omega)$ βρίσκουμε ότι

$$\mathbb{E}(\Theta) = \eta.$$

και

$$f_\Theta(\theta) = \frac{\eta}{\sqrt{\pi\theta^3\beta}} e^{-\beta(\theta-\eta)^2/\theta} \text{ για κάθε } \theta > 0$$

Αν η Θ ακολουθεί την αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή, που πρώτα μελετήθηκε από τον Holla [24] (1967), τότε η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **αντίστροφη Γκαουσιανή-Poisson** *σ.δ.* και λέμε ότι η N_t ακολουθεί την **αντίστροφη Γκαουσιανή-Poisson κατανομή**. Η αντίστροφη Γκαουσιανή-Poisson κατανομή μελετήθηκε περαιτέρω από τον Sichel [37] (1971) και τον Willmot [46] (1987) και επεκτάθηκε για δομικές τ.μ. Θ που ακολουθούν την (GIGD). Από την (5.8) προκύπτει

$$p_m(t) = (\frac{\psi}{\psi+2t})^{\gamma/2}(\frac{\chi t^2}{\psi+2t})^{m/2}\frac{K_{\gamma+m}(\sqrt{\chi(\psi+2t)})}{m!K_\gamma(\sqrt{\chi\psi})}.$$

Παρόλο που ο παραπάνω τύπος μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά στην περίπτωση όπου η Θ ακολουθεί την αντίστροφη Γκαουσιανή κατανομή, είναι αρκετά ευκολότερο να προκύψει ο παραπάνω τύπος μέσω μιας αναδρομικής σχέσης. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (5.10), ο Sichel [37] (1974) απέδειξε ότι

$$(\psi + 2t)m(m+1)p_{m+1}(t) = 2tm(\gamma + m)p_m(t) + \chi t^2 p_{m-1}(t) \quad \text{για κάθε } m \in \mathbb{N}. \tag{5.14}$$

Είναι επίσης δυνατό να αποδειχθεί η (5.14) με τη μέθοδο του Willmot, ο οποίος κατέληξε στον αναδρομικό τύπο:

$$\chi t^2 p_{m-1}(t) = -2tm(\gamma + m)p_m(t) + (\psi + 2t)m(m+1)p_{m+1}(t).$$

5.9 Λογαριθμοκανονική

Μια ακόμη σημαντική συνθετη διαδικασία είναι να επιλέξουμε την παράμετρο Θ έτσι, ώστε να ακολουθεί την λογαριθμοκανονική κατανομή με παραμέτρους $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$, δηλαδή $P_{ln\Theta} = \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ ή $P_\Theta = \mathbf{LN}(\mu, \sigma^2)$. Η μίξη της Poisson με την lognormal προτάθηκε ως το κατάλληλο μοντέλο περιγραφής των ασφαλιστικών εισφορών. Αν με $N_t(\omega)$ συμβολιστεί το πλήθος των διαφορετικών ασφαλιστικών εισφορών μέχρι τον χρόνο t και με X_i με $i \in \{1, ..., N_t(\omega)\}$ το ύψος μιας ασφαλιστικής εισφοράς (ανεξάρτητη της τυχαίας μεταβλητής N_t) ,τότε οι συνολικές ασφαλιστικές εισφορές περιγράφονται από το άθροισμα

$$S_t(\omega) = \sum_{i=1}^{N_t(\omega)} X_i(\omega).$$

Μια εύλογη επιλογή είναι να επιλέξουμε τις X_i ανεξάρτητες και ισόνομες από την λογαριθμοκανονική κανατομή με άγνωστες παραμέτρους μ,σ^2, ενώ η τυχαία μεταβλητή N_t είναι μια Poisson με παράμετρο θ. Τότε η κατανομή της S_t είναι μια σύνθετη κατανομή Poisson η οποία είναι μείξη Poisson με λογαριθμοκανονική. Είναι γνωστό ότι η σ.π.π της Θ δίνεται από τον τύπο

$$f_\Theta(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\theta} e^{-\frac{(\ln\theta - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{για κάθε } \theta > 0. \tag{5.15}$$

Τα γινόμενα και τα πηλίκα τυχαίων μεταβλητών, που ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή, ακολουθούν πάλι την λογαριθμοκανονική κατανομή. Επίσης και οι Θ^b και $b\Theta$, για $b \neq 0$ ακολουθούν την λογαριθμοκανονική κατανομή, αν η Θ ακολουθεί τη $\mathbf{LN}(\mu, \boldsymbol{\sigma^2})$. Ωστόσο, η κατανομή του αθροίσματος ανεξάρτητων λογαριθμοκανονικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών, η οποία εμφανίζεται σε πολλά πρακτικά προβλήματα και περιγράφει την κατανομή της S_t, δεν ακολουθεί την λογαριθμοκανονική και δεν εμφανίζεται σαν κάποια γνωστή κατανομή (Slimanc [36]).

Προσεγγίσεις για την κατανομή του αθροίσματος τ.μ. με την λογαριθμοκανονική κατανομή μελετούνται από τους Levy [32] (1992) και Milevsky and Posner [44].

Για την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής N_t ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} p_k(t) &= \int_0^\infty \frac{(\theta t)^k}{k!} e^{-\theta t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\theta} e^{-\frac{(\ln\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}} d\theta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\infty e^{-\frac{(\ln\theta-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{t^k\theta^{k-1}}{(k-1)!} e^{-t\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{k\sigma\sqrt{2\pi}} \mathbb{E}[e^{-\frac{(\ln X-\mu)^2}{2\sigma^2}}] \end{aligned}$$

,

όπου η X ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{Ga}(t,k)$. Εάν αναπτύξουμε σε σειρά Taylor την συνάρτηση $e^{-\frac{(\ln X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ γύρω από το $x_0 = \mathbb{E}[X] = \frac{k}{t}$, και αγνοήσουμε τις δυνάμεις που είναι μεγαλύτερες του 2, τότε λαμβάνουμε τη σχέση

$$f(x) = f(x_0)[1 + C_1(x-x_0) + C_2(x-x_0)^2], \text{ όπου}$$

$f(x) := e^{-\frac{(lnx-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, $x_0 := \frac{k}{t}$, $C_1 := e^{-\frac{lnx_0-\mu}{x_0\sigma^2}}$ και $C_2 := \frac{1}{2\sigma^2 x_0^2}[\frac{(lnx_0-\mu)^2}{\sigma^2} - 1 + lnx_0 - \mu]$.

Για μία αναλυτική απόδειξη βλ. $[2], 45_4 - 46^{11}$.

Συνεπώς αν πάρουμε μέσες τιμές στη σχέση αυτή θα έχουμε:

$$\mathbb{E}(e^{-\frac{(\log X-\mu)^2}{2\sigma^2}}) \cong e^{-\frac{(\log \frac{k}{t}-\mu)^2}{2\sigma^2}} + \frac{1}{2}\mathbb{E}\left\{\frac{d}{dx^2} e^{-\frac{(\log X-\mu)^2}{2\sigma^2}} (\frac{k}{t})\right\} \mathbb{V}ar(X)$$

Τότε μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι για μεγάλες τιμές του φυσικού αριθμού κ, προσεγγιστικά θα ισχύει ότι:

$$p_k(t) \cong \frac{1}{t} f_\Theta(\theta)(\frac{k}{t}) \quad \text{και} \quad P(\{N>n\}) = \int_0^\infty P(\{N>n\}|\theta) P_\Theta(d\theta) \approx 1 - P_\Theta(\frac{n}{t}).$$

5.10 Μετασχηματισμένη εκθετική

Στα ασφαλιστικά συμβόλαια (εξαιρούνται τα ασφαλιστικά ζωής), η συνολική απώλεια S_n (από την μεριά της ασφαλιστικής) ορίζεται ως το άθροισμα των υφιστάμενων απωλειών για κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, με τύπο

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_{N_t},$$

όπου η τυχαία μεταβλητή N_t εκφράζει το πλήθος των υφιστάμεων απωλειών και X_i είναι η $i-$οστή υφιστάμενη απώλεια. Οι τυχαίες μεταβλητές X_i είναι ανεξάρτητες - ισόνομες και ανεξάρτητες από την τ.μ. N_t.

Σε αυτή την μείξη θεωρούμε την δομική παράμετρο Θ η οποία ακολουθεί την μετασχηματισμένη εκθετική κατανομή, η οποία έχει συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_\Theta(\theta) = \left[(1-a)\eta e^{-\eta\theta} + 2a\eta e^{-2\eta\theta}\right]\chi_{[0,\infty)}$$

για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$. Τότε η συνάρτηση πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής N_t μπορεί να υπολογιστεί χρησιμοποιώντας τους τύπους $\Gamma(a) = \int\limits_0^\infty x^{a-1}e^{-x}dx$ και $\Gamma(n+1) = n!$. Έτσι προκύπτει

$$p_n(t) \quad = \quad \eta\bigg(\frac{(1-a)t^n}{(t+n)^{n+1}} + \frac{2at^n}{(t+2n)^{n+1}}\bigg).$$

Η πιθανογεννήτρια της τυχαίας μεταβλητής N_t δίνεται από τον τύπο

$$m_{N_t}(z) \quad = \quad \eta\bigg(\frac{1-a}{t(1-z)+\eta} + \frac{2a}{t(1-z)+2\eta}\bigg),$$

για κάθε $z \in [-1, 1]$.

Για αναλυτικές αποδείξεις των δύο παραπάνω τύπων παραπέμπουμε στην [2], σελίδες 47-48). Παραγωγίζοντας την m_{N_t} λαμβάνουμε

$$m'_{N_t}(z) = n\bigg(\frac{(1-\alpha)t}{(t(1-z)+\eta)^2} + \frac{2\alpha t}{(t(1-z)+2\eta)^2}\bigg).$$

για κάθε $z \in [-1, 1]$.

Συνεπώς

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N_t] &= m'_{N_t}(1^-) \\
&= \eta\bigg(\frac{(1-\alpha)t}{\eta^2} + \frac{2\alpha t}{(2\eta)^2}\bigg) \\
&= \frac{(1-\alpha)t}{\eta} + \frac{2\alpha t}{4\eta} \\
&= \frac{(2-2\alpha+\alpha)t}{2\eta} \\
&= \frac{(2-\alpha)t}{2\eta},
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$\mathbb{E}[N_t] = \frac{(2-a)t}{2\eta}$$

.

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

Κεφάλαιο 6

Εκτιμήσεις της δομικής παραμέτρου μίας μεικτής διαδικασίας **Poisson**

6.1 Εισαγωγή

Ένα από τα πιο κλασσικά παραδείγματα μιας απαριθμήτριας διαδικασίας $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι η ομογενής διαδικασία Poisson.

Ωστόσο, σε πολλές εφαρμογές η $\sigma.\delta.$ Poisson είναι τόσο απλή για να είναι εφαρμόσιμη. Αποδεικνύεται ότι μία πιο χρήσιμη για τις εφαρμογές κατανομή είναι η κατανομή μίας μεικτής διαδικασίας Poisson (βλ. Εισαγωγή)

Μερικές από τις πιο δημοφιλείς επιλογές για μια δομική παράμετρο μίας MPP αναφέρονται στο Κεφάλαιο 5.

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται εκτιμήσεις της δομικής παραμέτρου μίας MPP .Εκτιμητές ροπών και εκτιμητές μέγιστης πιθανοφάνειας για την δομική κατανομή προέρχονται από τους Tucker [43] και Simar [38], που έδωσαν αποτελέσματα για διακριτές εκτιμήσεις της Θ. Επίσης, ο Albrecht[11] μελέτησε εκτιμητές για την περίπτωση της μείξης ενός γνωστού πεπερασμένου αριθμού συνιστωσών Poisson. Σε όλους αυτούς τους εκτιμητές, χρησιμοποιείται ο αριθμός των απαιτήσεων σε διαδοχικές επαναλήψεις της διαδικασίας. Μια εναλλακτική προσέγγιση οφείλεται στον Karr [29], ο οποίος εκτίμησε την δομική παράετρο Θ χρησιμοποιώντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό Laplace. Στην περίπτωση αυτή, μόνο η χρονική εποχή της πρώτης απαίτησης σε κάθε μία από τις πραγματοποιήσεις του MPP χρησιμοποιείται. Η προσέγγισή μας είναι περισσότερο στο πνεύμα του Karr.

6.2 Εκτίμηση της Θ μέσω τύπων πραγματικής αντιστροφής

Πριν αρχίσουμε την μελέτη σχέσεων αντιστροφής, θα εισάγουμε μια συντομογραφία. Για $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \infty$ γράφουμε:

$$H\{y_1, y_2\} = \frac{1}{2}H(\{y_1\}) + H(y_1, y_2) + \frac{1}{2}H(\{y_2\}), \tag{6.1}$$

όπου $H := P_\Theta$, $H(\{y\})$ είναι η σημειακή μάζα του H στο σημείο y , ενώ με το $H(y_1, y_2)$ συμβολίζουμε τη μάζα στο ανοιχτό διάστημα (y_1, y_2).

6.2.1 Εκτιμηση με τη χρήση αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace της Θ

Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην ισότητα:

$$L_\Theta(\theta) = \mathbb{E}[(1 - \frac{\theta}{t})^{N_t}] \tag{6.2}$$

όπου L_Θ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της Θ.

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathbb{E}[(1 - \frac{\theta}{t})^{N_t}] = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((1 - \frac{\theta}{t})\lambda t)^n}{n!} P_\Theta(d\lambda)$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{(1-\frac{\theta}{t})\lambda t} P_\Theta(d\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda\theta} f_\Theta(\lambda) d\lambda = L_\Theta(\theta).$$

6.2.2 Αντιστροφή με τη χρήση της Poisson

Η παρακάτω σχέση μπορεί να εξαχθεί μελετώντας μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισοκατανεμημένων μεταβλητών Poisson, Βλ. π.χ. την εργασία [41] του Teugels.
Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$d_n(u, t) := \sum_{m=0}^{[nt]} e^{-nu} \frac{(nu)^m}{m!} \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} 0, & \text{αν } t < u \\ \frac{1}{2}, & \text{αν } t = u \\ 1, & \text{αν } t > u. \end{cases} \tag{6.3}$$

Για $0 < y_1 < y_2 < \infty$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$I_n(y_1, y_2) := \sum_{m=1+[ny_1]}^{[ny_2]} \frac{(-n)^m}{m!} L_\Theta^{(m)}(n).$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του L_Θ, μπορούμε να γράψουμε

$$I_n(y_1, y_2) \;=\; \sum_{m=1+\lfloor ny_1 \rfloor}^{[ny_2]} \frac{(-n)^m}{m!} (-1)^m \int_0^\infty e^{-\lambda n} \lambda^m P_\Theta(d\lambda)$$

$$= \int_0^\infty \left(\sum_{m=1+|ny_1|}^{[ny_2]} \frac{(n\lambda)^m}{m!} e^{-\lambda n} \right) P_\Theta(d\lambda)$$
$$= \int_0^\infty [d_n(\lambda, y_2) - d_n(\lambda, y_1)] P_\Theta(d\lambda)$$

Από την άλλη μεριά η εξίσωση (6.2) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$L_\Theta^{(m)}(\theta) = (-t)^{-m} \mathbb{E}\left[\frac{N_t!}{(N_t - m)!} (1 - \frac{\theta}{t})^{N_t - m} \right].$$

Ανταλλάσσοντας το άθροισμα με την αναμενόμενη τιμή έχουμε

$$I_n(y_1, y_2) = \mathbb{E}\left[\sum_{m=1+[ny_1]}^{[ny_2]} \binom{N_t}{m} (\frac{n}{t})^m (1 - \frac{n}{t})^{N_t - m} \right].$$

Συνδιάζοντας αυτή τη σχέση με την πρώτη εξίσωση και εφαρμόζοντας το θεώρημα της κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebegue καταλήγουμε σε μια πρώτη σχέση αντιστροφής

$$H\{y_1, y_2\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{m=1+[ny_1]}^{[ny_2]} \binom{N_t}{m} (\frac{n}{t})^m (1 - \frac{n}{t})^{N_t - m} \right]. \tag{6.4}$$

Για τη μάζα σε ένα σημείο, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μια ελαφρώς διαφορετική προσέγγιση από αυτή για $n \to \infty$:

$$e^{-n(v-1-lnv)} \to \begin{cases} 1 & v = 1 \\ 0 & v \neq 1 \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα όπως προηγούμενως καταλήγουμε στη σχέση

$$H(\{y\}) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{N_t!}{(N_t - n)!} (1 - \frac{n}{ty})^{N_t - m} (\frac{e}{ty})^n \right].$$

6.2.3 Αντιστροφή με τη χρήση της κατανομής Γάμμα

Μια ανάλογη σχέση μπορεί να παραχθεί από μια ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων εκθετικών μεταβλητών. Για αυτή την περίπτωση για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε την σχέση

$$e_n(u) := \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{nu} e^{-v} v^{n-1} dv \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{αν } u < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{αν } u = 1 \\ 1 & \text{αν } u > 1. \end{cases} \tag{6.5}$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$J_n(y_1, y_2) := \int_{y_1}^{y_2} \frac{(-n)^n}{\Gamma(n)} L_\Theta^{(n)}(\frac{n}{s}) \frac{ds}{s^{n+1}}.$$

Από τον ορισμό του L_Θ έχουμε

$$J_n(y_1, y_2) = \int_0^\infty \left[e_n(\frac{\lambda}{y_1}) - e_n(\frac{\lambda}{y_2}) \right] P_\Theta(d\lambda)$$

και από την (6.2) βλέπουμε ότι

$$J_n(y_1, y_2) = \mathbb{E}\left[\frac{1}{B(n, N_t - n + 1)} \int_{\frac{n}{ty_2}}^{\frac{n}{ty_1}} z^{n-1}(1-z)^{N_t - n} dz \right].$$

Συνδυάζοντας αυτή τη σχέση με το θεώρημα του Lebegue καταλήγουμε σε ένα δεύτερο τύπο αντιστροφής

$$H\{y_1, y_2\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{B(n, N_t - n + 1)} \int_{\frac{n}{ty_2}}^{\frac{n}{ty_1}} z^{n-1}(1-z)^{N_t - n} dz \right]. \tag{6.6}$$

Ένα πλεονέκτημα αυτού του τύπου N_t είναι ότι αν η πυκνότητα f_Θ του Θ υπάρχει τότε

$$f_\Theta(\theta) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{B(n, N_t - n + 1)} (\frac{1}{y})(\frac{n}{yt})^n (1 - \frac{n}{yt})^{N_t - n} \right].$$

6.2.4 Κανονική προσέγγιση

Και στους δύο τύπους αναστροφής (6.4) και (6.6) μπορούμε να εφαρμόσουμε μία κανονική προσέγγιση. Θα παρουσιάσουμε αυτή τη μέθοδο για την (6.6).

Στην (6.6) θέτουμε $z = a_n u + b_n$, όπου a_n και b_n είναι συναρτήσεις του t οι οποίες πρέπει να προσδιοριστούν. Ξαναγράφουμε το μη πλήρες βήτα-ολοκλήρωμα στην μορφή

$$\int_{\frac{n}{ty_2}}^{\frac{n}{ty_1}} z^{n-1}(1-z)^{N_t-n} dz = a_n \int_{a_2(n)}^{a_1(n)} (a_n u + b_n)^{n-1} (\bar{b}_n - a_n u)^{N_t - n} du,$$

με $\bar{b}_n := 1 - b_n$ και

$$a_i(n) := \frac{1}{a_n}\left(\frac{n}{ty_i} - b_n \right) \quad , \quad i = 1, 2.$$

Ό,τι υπάρχει μέσα στο σύμβολο της μέσης τιμής στην (6.6) μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\frac{1}{B(n, N_t - n + 1)} \int_{\frac{n}{ty_2}}^{\frac{n}{ty_1}} z^{n-1}(1-z)^{N_t-n} dz = I_1(n) \int_{a_2(n)}^{a_1(n)} e^{I_2(n,u)} du,$$

όπου

$$I_1(n) := \frac{a_n b_n^{n-1} \bar{b}_n^{N_t - n} N_t!}{(n-1)!(N_t - n)!}$$

και

$$I_2(n, u) := (n-1) \ln\left(1 + \frac{a_n}{b_n} u \right) + (N_t - n) \ln\left(1 - \frac{a_n}{\bar{b}_n} u \right).$$

Στη συνέχεια επιλέγουμε τα a_n και b_n έτσι ώστε η $e^{I_2(n,u)}$ να συγκλίνει στην παράμετρο κλειδί της κανονικής πυκνότητας. Στη συνέχεια χρειαζόμαστε το N_t , το n αλλά και το $N_t - n$ να είναι μεγάλα. Αναπτύσσοντας σε σειρά τους λογαρίθμους παίρνουμε για την $I_2(n,u)$ την παρακάτω μορφή:

$$I_2(n,u) = ua_n \left[\frac{n-1}{b_n} - \frac{N_t - n}{\bar{b}_n}\right] - \frac{u^2}{2}a_n^2\left[\frac{n-1}{b_n^2} - \frac{N_t-n}{\bar{b}_n^2}\right] + o\left(\frac{a_n}{b_n}u\right)^3 .$$

Η προφανής επιλογή για το b_n θα είναι αυτή η οποία θα μηδενίσει τον πρώτο όρο. Η επόμενη επιλογή είναι για το a_n γίνεται για να αναγάγει τον συντελεστή $\frac{u^2}{2}$ στο 1. Αυτό δίνει τις επιλογές :

$$b_n = \frac{n-1}{N_t - 1}$$

$$\bar{b}_n = \frac{N_t - n}{N_t - 1}$$

$$a_n^2 = \frac{(n-1)(N_t-n)}{(N_t-1)^3}$$

Από αυτές τις σχέσεις και τον τύπο του Stirling μπορούμε εύκολα να δείξουμε ότι $I_1(n) \sim (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$. Εισάγοντας τις παραπάνω τιμές για το a_n και το b_n στο a_i παίρνουμε:

$$a_i(n) = \frac{(N_t-1)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(n-1)(N_t-n)}}\left[\frac{n}{ty_i} - \frac{n-1}{N_t-1}\right] \sim \sqrt{\frac{n}{1-\frac{n}{N_t}}}\left[\frac{N_t}{ty_i} - 1\right].$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω αποτελέσματα καταλήγουμε στην κανονική προσέγγιση:

$$H\{y_1;y_2\} \sim \Phi\left[\sqrt{\frac{n}{1-\frac{n}{N_t}}}\left(\frac{N_t}{ty_1} - 1\right)\right] - \Phi\left[\sqrt{\frac{n}{1-\frac{n}{N_t}}}\left(\frac{N_t}{ty_2} - 1\right)\right]. \tag{6.7}$$

6.2.5 Αντιστροφή που βασίζεται στους χρόνους άφιξης

Εναλλακτικά, μπορούμε να ξεκινήσουμε από την συγκεκριμένη σχέση για την κατανομή της εποχής του n-οστού γεγονότος, T_n, και να την συνδυάσουμε αυτό με την σχέση (6.5). Σύμφωνα με ένα αποτέλεσμα από τον Lundberg [33] (βλ, εναλλακτικά τον Albrecht [11])έχουμε

$$f_{T_n}(x) = \frac{n}{x}p_n(x) = \int_0^\infty e^{-\theta x}\theta^n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}P_\Theta(d\theta)$$

Για την κατανομή έχουμε ότι

$$\int_0^w f_{T_n}(u)du = \int_0^\infty P_\Theta(d\lambda)\int_0^{\lambda w} e^{-v}\frac{v^{n-1}}{(n-1)!}dv = \int_0^\infty e_n\left(\frac{\lambda w}{n}\right)P_\Theta(d\theta)$$

Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
P\{y_1 \leq \frac{n}{T_n} < y_2\} &= P\{T_n \leq \frac{n}{y_1}\} - P\{T_n \leq \frac{n}{y_2}\} \\
&= \int_0^\infty \left[e_n\left(\frac{\lambda}{y_1}\right) - e_n\left(\frac{\lambda}{y_2}\right) \right] P_\Theta(d\theta).
\end{aligned}
$$

Εφαρμόζοντας την (6.5) παίρνουμε τον τέταρτο τύπο αντιστροφής:

$$
H\{y_1, y_2\} = \lim_{n\to\infty} P\left(\{y_1 \leq \frac{n}{T_n} < y_2\} \right). \tag{6.8}
$$

6.3 Προσομοιώσεις

6.3.1 Προσομοίωση μίας μεικτής διαδικασίας Poisson

Μία άλλη σημαντική ιδιότητα μίας MPP είναι ότι οι ενδοιάμεσοι χρόνοι αναμονής $W_n = T_n - T_{n-1}$, είναι εξαρτημένες τ.μ. εκτός εάν έχουμε να κάνουμε με μία αυστηρή διαδικασία Poisson.

Ο Albrecht [11] έχει δείξει ότι οι τ.μ. W_n είναι ισοκατανεμημένες, ανταλλάξιμες αλλά θετικά συσχετισμένες. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$
Cov(W_{n-1}, W_n) = \mathbb{V}ar(\frac{1}{\Theta}).
$$

Υπάρχουν τουλάχιστον δυο διαφορετικές μεθόδοι για την προσομοίωση των χρονικών εποχών μίας MPP.

(**i**) Μία πρώτη μέθοδος προσομοίωσης των χρόνων άφιξης, που χρησιμοποιεί την παραπάνω συσχέτιση μεταξύ των χρόνων άφιξης και των ενδιάμεσων χρόνων, έχουμε από τον Albrecht [11] ότι

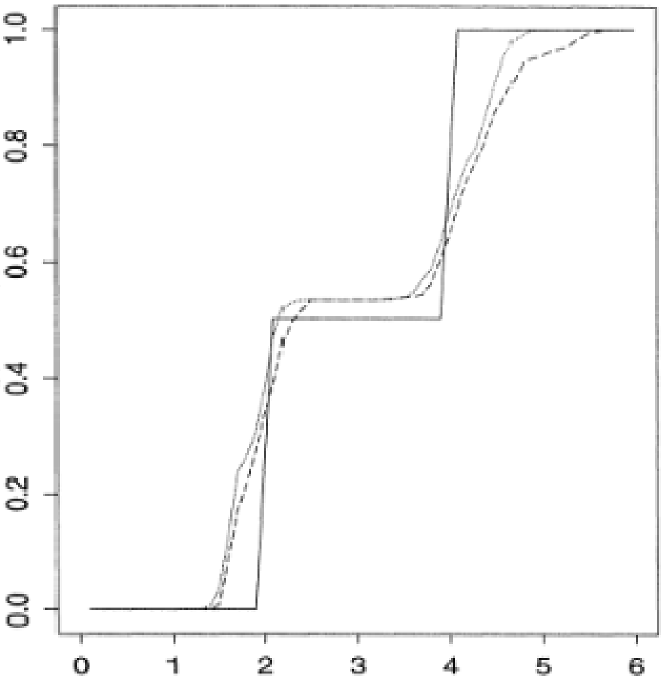
$$
P(W_n \geq t | T_{n-1} = t_{n-1}) = 1 - \left(\frac{t_{n-1}}{t + t_{n-1}} \right)^{n-1} \frac{p_{n-1}(t + t_{n-1})}{p_{n-1}(t_{n-1})}.
$$

(**ii**) Η δεύτερη μέθοδος βασίζεται στην ιδιότητα ομοιομορφίας της MPP. Δοθέντος ότι $N_t = n$, οι πρώτες n εποχές, $T_1, ...T_n$, έχουν την ίδια από κοινού κατανομή ως στατιστικά στοιχεία ενός δείγματος ομοιόμορφης κατανομής στο $(0, t)$. Ξεκινώντας με την προσομοίωση των n ως τιμή του N_t με μία δοθείσα τιμή του t, και σε συνάρτηση με την κατανομή $p_n(t)$. Τότε προσομοιώνονται n στο πλήθος τυχαίοι αριθμοί στο $(0, t)$. Μετά απο επαναπροσδιορισμό, αυτές οι τιμές δίνουν ένα δείγμα $(T_1, ...T_n)$.

6.3.2 Γραφικές παράστάσεις

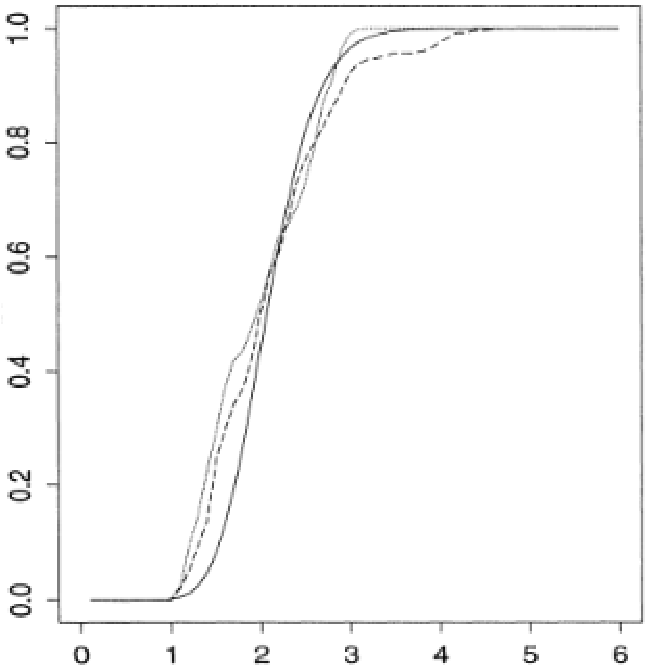
Εκτελούμε προσομοιώσεις για τις εμπειρικές εκδοχές των τύπων που δίνονται στην (6.4) ,(6.7) και (6.8) σε ομογενή διπλή διαδικασία Poisson, διαδικασία Pólya-Lundberg και μίξεις διαδικασίας Pólya-Lundberg με Poisson. Σε όλες τις περιπτώσεις , θεωρούμε την συνάρτηση κατανομής παίρνοντας το y_1 στο 0 . Από τις προσομειώσεις, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι οι εκτιμήσεις για τις αντιστροφές (6.4) και (6.7) αποδίδουν πολύ καλά ακόμα και για ένα σχετικά μικρό αριθμό υλοποιήσεων . Από την άλλη πλευρά, η κανονική προσεγγιση στην (6.7) φαίνεται να είναι αρκετά δύσκολη. Γενικά, οι συνεχείς δομικές κατανομές εκτιμώνται καλύτερα απο τους τύπους αντιστροφής απο ότι οι διακριτές κατανομες. Για την αποσαφήνιση μέσα απο ένα παράδειγμα τα αποτελέσματα των δύο προσωμοιώσεων φαίνονται στα σχήματα (1) και (2).

Σχήμα (1)



Ο άξονας των τεταγμένων αντιστοιχεί σε $H(y) + 5H(y)$ και των τετμημένων αντιστοιχεί σε y.

Σχήμα (2)



Ο άξονας των τεταγμένων αντιστοιχεί σε $H(y)$ και των τετμημένων αντιστοιχεί σε y.

Και στις δύο περιπτώσεις, οι εκτιμητές βασίζονται σε 15 προσομοιώμενες πραγματοποιήσεις με σταθερό $t = 20$. Οι συνεχείς έντονες γραμμές αντιπροσωπεύουν τον εκτιμητή για τον τύπο (6.8) ενώ οι διακεκομμένες γραμμες είναι οι εκτιμητές για τον τύπο αντιστροφής (6.4).
Για το Σχήμα (1), προσομοιώσαμε διπλές διαδικασίες Poisson με παραμέτρους $\theta_1 = 2$, $\theta_2 = 4$ και $p_1 = 0.5$.
Η τιμή που δόθηκε στο n για την (6.4) ήταν $n = 20$. Στην περίπτωση του εκτιμητή για την (6.8), θεωρήσαμε μέσους για τίς τιμές n από $n = 18$ σε $n = N_{20}$. Το Σχήμα (2) αφορά στις προσομοιώσεις των διαδικασιών Pólya-Lundberg με παραμέτρους $a = 21$ και $b = 10$. Η τιμή για το n στην (6.4) θεωρήθηκε ότι είναι 18, ενώ για την (6.8) οι μέσοι για το $n = 15$ θεωρήθηκαν ως $n = N_{20}$.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑΤΑ

Παράρτημα Α΄

Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Στο ακόλουθο παράρτημα, παραθέτουμε κάποιους βασικούς ορισμούς και αποτελέσματα της Θεωρίας Μέτρου.

Α΄.1 Χρήσιμοι Ορισμοί

Ορισμοί Α΄.1.1. Ορίζουμε ως σ-**άλγεβρα** υποσυνόλων του Ω, μια οικογένεια υποσυνόλων του Ω τέτοια ώστε:

(σ1) Το $\emptyset \in \Sigma$

(σ2) Για κάθε $E \in \Sigma$ ισχύει $E^c \in \Sigma$

(σ3) Για κάθε ακολουθία $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στο Σ ισχύει $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \Sigma$.

Τα στοιχεία της Σ ονομάζονται **μετρήσιμα σύνολα** ή **ενδεχόμενα**. Το ζευγάρι (Ω, Σ) ονομάζεται **μετρήσιμος χώρος** (μ.χ. για συντομία). Μία $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του Ω, ώστε $\mathcal{F} \subseteq \Sigma$, ονομάζεται $\sigma-$**υποάλγεβρα** της Σ.

Ορισμός Α΄.1.2. Μια οικογένεια $\{B_j\}_{j\in\mathcal{I}}$ ονομάζεται **διαμέριση** του Ω αν:

- $B_j \cap B_k = \varnothing$ για κάθε $j, k \in \mathcal{I}$ ώστε $j \neq k$ και
- $\bigcup_{j\in\mathcal{I}} B_j = \Omega$.

Θα μπορούσαμε τις δύο τελευταίες ιδιότητες να τις συμβολίζαμε ως: $\biguplus_{j\in\mathcal{I}} B_j = \Omega$. Αν επιπλέον (Ω, Σ) είναι μ.χ. και η $\{B_j\}_{j\in\mathcal{I}}$ είναι μια οικογένεια στο Σ, τότε αυτή ονομάζεται μια Σ-**μετρήσιμη διαμέριση του** Ω.

Ορισμός Α΄.1.3. Μία απεικόνιση $f : \Omega \to \Upsilon$ ονομάζεται **Σ-T-μετρήσιμη** ή απλώς **μετρήσιμη** ή **τυχαία μεταβλητή (τ.μ.)**, αν για κάθε $B \in T$ ισχύει $f^{-1}(B) \in \Sigma$. Ειδικά, για $(\Upsilon, B) = (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ η f ονομάζεται **(n-διάστατο) τυχαίο διάνυσμα**.

Ορισμός Α΄.1.4. Ένας **χώρος μέτρου** είναι μία τριάδα (Ω, Σ, μ), όπου

(a) Ω είναι ένα σύνολο

(b) Σ είναι μία σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω

(c) $\mu : \Sigma \longrightarrow [0, \infty]$ είναι μία συνολοσυνάρτηση, ώστε

- (i) $\mu(\emptyset) = 0$,
- (ii) για κάθε ακολουθία $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ στοιχείων της Σ με $E_i \cap E_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\mu(\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(E_n)$.

Αν το μ είναι τέτοιο ώστε $\mu(\Omega) = 1$ τότε αυτό ονομάζεται **μέτρο πιθανότητας ή πιθανότητα** και συμβολίζεται συνήθως με P. Επομένως, ο αντίστοιχος χ.μ. ονομάζεται **χώρος πιθανότητας** (χ.π.) και συμβολίζεται με (Ω, Σ, P).

Ορισμός Α΄.1.5. Έστω (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου. Ως σύνολο **μηδενικού μέτρου** ή **μ-μηδενικού μέτρου** ή **μ-μηδενικό σύνολο**, ορίζουμε ένα σύνολο $N \in \Sigma$ αν $\mu(N) = 0$.

Ορισμός Α΄.1.6. Ένα μέτρο πιθανότητας P ονομάζεται **τέλειο** (και ο χ.π. (Ω, Σ, P) ονομάζεται **τέλειος**), αν για κάθε τυχαία μεταβλητή X στο Ω υπάρχει ένα σύνολο Borel $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{X}(\Omega) := \{\mathrm{X}(\omega) : \omega \in \Omega\}$ τέτοιο ώστε, $P(\mathrm{X}^{-1}(B)) = 1$.

Α΄.2 Βασικά Αποτελέσματα

Θεώρημα Radon-Nikodym Α΄.2.1. Έστω μ, ν πεπερασμένα μέτρα επάνω στον μ.χ. (Ω, Σ). Αν $\nu \ll \mu$, τότε υπάρχει $f \in \mathcal{L}^1_+(\mu)$ ώστε

$$\nu(A) = \int_A f d\mu \quad \text{για κάθε} \quad A \in \Sigma.$$

Η f ονομάζεται **παράγωγος Radon-Nikodym του** ν **ως προς** μ και είναι $\mu - \sigma.\beta.$ μοναδική.

Για περισσότερες λεπτομέρειες βλ. π.χ. [3], Θεώρημα 10.12(β).

Λήμμα Α′.2.2. Έστω Ω ένα υποσύνολο και $\mathcal{D}$ μία οικογένεια υποσυνόλων του Ω. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα

(i) $(Dyn1)'$ $\Omega \in \mathcal{D}$

$(Dyn2)'$ $B \setminus A \in \mathcal{D}$, για $A, B \in \mathcal{D}$ και $A \subseteq B$

$(Dyn3)'$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων στο $\mathcal{D}$.

(ii) $(Dyn1)$ $\emptyset \in \mathcal{D}$

$(Dyn2)$ $\Omega \setminus A \in \mathcal{D}$, για κάθε $A \in \mathcal{D}$

$(Dyn3)$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ξένων ανά δύο υποσυνόλων στο $\mathcal{D}$.

Ορισμός Α′.2.3. Αν ένα σύνολο $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i) ή (ii) του Λήμματος Α′.1.2 τότε λέγεται **κλάση Dynkin** υποσυνόλων του Ω.

Θεώρημα Μονότονης Κλάσης Α′.2.4. Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μία κλάση Dynkin υποσυνόλων του Ω. Υποθέτουμε ότι το σύνολο $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{D}$ είναι τέτοιο, ώστε $I \cap J \in \mathcal{I}$ για όλα τα $I, J \in \mathcal{I}$. Τότε η $\mathcal{D}$ περιέχει την $\sigma(\mathcal{I})$.

Για την απόδειξη του Λήμματος Α′.2.2 και του Θεωρήματος Μονότονης Κλάσης βλ. π.χ. [;], Lemma 136 A και Theorem 136 B.

Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue Α′.2.5. Έστω (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου και $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ μία ακολουθία $\Sigma-$μετρησίμων συναρτήσεων $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, ώστε να υπάρχει το όριο $f(x) := \lim_{n\longrightarrow\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$ για $\mu-$σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$. Επί πλέον υποθέτουμε, ότι υπάρχει $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ ώστε $|f_n| \leq g$ μ-σχεδόν παντού για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $f_n \in \mathcal{L}^1(\mu)$, υπάρχει το $\lim_{n\longrightarrow\infty} \int f_n d\mu \in \mathbb{R}$ και ισχύει

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

Για την απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος βλ. π.χ. [7], Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue 2.3.5.

Α′.3 Μετασχηματισμοί Laplace

Ορισμός Α′.3.1. *Έστω μια συνάρτηση $m : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ή ένα μέτρο μ πάνω στην ημιευθεία $\mathbb{R}_+$. Τότε ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται να είναι η συνάρτηση,*

$$Ł(m; \lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} m(t)dt \quad ή \quad L(\mu; \lambda) := \int_{\mathbb{R}_+} e^{-\lambda t} \mu(dt). \tag{Α′.1}$$

Η συνάρτηση L ορίζεται για όλα τα λ για τα οποία το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Προφανώς $Lm = L\mu_m$ αν $\mu_m(dt)$ υποδηλώνει το μέτρο $m(t)dt$.

Το ακόλουθο λήμμα της πραγματικής ανάλυσης είναι πολύ χρήσιμο για να δειχθεί ότι ένα πεπερασμένο μέτρο είναι μοναδικά ορισμένο απο τον μετασχηματισμό Laplace.

Λήμμα Α′.3.2. *Για κάθε $t, x \geq 0$ ισχύει*

$$\lim_{\lambda\to\infty} e^{-\lambda t} \sum_{k\leq\lambda x} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = \chi_{[0,x]}(t). \tag{Α′.2}$$

Απόδειξη. Ας ξαναγράψουμε την (Α′.2) με όρους πιθανοτήτων. Έστω (Ω, Σ, P) ένας χ.π. και $X := X_t$ μια τ.μ. ώστε $P_X = \mathbf{P}(\lambda t)$. Είναι γνωστό ότι τέτοιοι χ.π. και τ.μ. υπάρχουν (βλ. π.χ. [35, Remarks 2.4, p.42]). Τότε η (Α′.2) γράφεται

$$\lim_{\lambda\to\infty} P(X \leq \lambda x) = \chi_{[0,x]}(t).$$

Το ενδεχόμενο $\{X \leq \lambda x\} \subseteq \{|X - \lambda t| \geq \lambda(t - x)\}$ διότι ισχύει

$$|X - \lambda t| \geq \lambda(t - x) \Longleftrightarrow \begin{cases} X \geq 2\lambda t - x \\ \quad \text{ή} \\ X \leq \lambda x \end{cases}$$

Επομένως, επειδή $E(X) = \lambda t$ και $Var(X) = E((X - \lambda t)^2) = \lambda t$ θα ισχύει ότι

- Για $t > x$

$$\begin{aligned} P(X \leq \lambda x) &\leq P\left(|X - \lambda t| \geq \lambda(t - x)\right) \\ &\leq \frac{E\left((X - \lambda t)^2\right)}{\lambda^2(t - x)^2} \\ &= \frac{\lambda t}{\lambda^2(t - x)^2}, \end{aligned}$$

  όπου η δεύτερη ανισότητα είναι η ανισότητα Chebyshev.
  Άρα $\lim_{\lambda\to\infty} P(X \leq \lambda x) \leq \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\lambda t}{\lambda^2(t - x)^2} = 0$. Επομένως, $\lim_{\lambda\to\infty} P(X \leq \lambda x) = 0 = \chi_{[0,x]}(t)$ για $t > x$.

- Για $t \leq x$

$$\begin{aligned} P(X \leq \lambda x) &= 1 - P\left(X - \lambda t > \lambda(x - t)\right) \\ &\geq 1 - P\left(|X - \lambda t| > \lambda(x - t)\right) \\ &\geq 1 - \frac{E\left((X - \lambda t)^2\right)}{\lambda^2(x - t)^2} \\ &= 1 - \frac{\lambda t}{\lambda^2(x - t)^2} \end{aligned}$$

  όπου η δεύτερη ανισότητα είναι η ανισότητα Chebyshev.
  Άρα $\lim_{\lambda\to\infty} P(X \leq \lambda x) \geq \lim_{\lambda\to\infty} \left[1 - \frac{\lambda t}{\lambda^2(x - t)^2}\right] = 1$. Επομένως, $\lim_{\lambda\to\infty} P(X \leq \lambda x) = 1 = \chi_{[0,x]}(t)$ για $t \leq x$.

□

Πρόταση Α΄.3.3. *Ένα μέτρο μ πάνω στο $\mathbb{R}_+$ είναι πεπερασμένο αν, και μόνο αν $L(\mu;0+)<\infty$. Το μέτρο μ είναι μοναδικά ορισμένο απο τον μετασχηματισμό Laplace του.*

Απόδειξη. Το πρώτο συμπέρασμα της Πρότασης αποδεικνύεται από το Θεώρημα της μονότονης σύγκλισης διότι ισχύει

$$\mu(\mathbb{R}_+)=\int_{\mathbb{R}_+}1d\mu=\lim_{\lambda\to 0}\int_{\mathbb{R}_+}e^{-\lambda t}\mu(dt)=L(\mu;0^+).$$

Άρα το μ είναι πεπερασμένο αν, και μόνο αν $L(\mu;0+)<\infty$.

Για την μοναδικότητα του μ, σύμφωνα με το Πόρισμα 2.3.7 του [7], ισχύει

$$(-1)^kL^{(k)}(\mu;\lambda)=\int_{\mathbb{R}_+}e^{-\lambda t}t^k\mu(dt).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\sum_{k\leq\lambda x}(-1)^kL^{(k)}(\mu;\lambda)\frac{\lambda^k}{k!} &= \sum_{k\leq\lambda x}\int_{\mathbb{R}_+}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\mu(dt)\\ &= \int_{\mathbb{R}_+}\sum_{k\leq\lambda x}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\mu(dt).\end{aligned}$$

Άρα με την βοήθεια του Λήμματος Α΄.3.2 και του Θεωρήματος της κυριαρχημένης σύγκλισης καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sum_{k\leq\lambda x}(-1)^kL^{(k)}(\mu;\lambda)\frac{\lambda^k}{k!}=\int_{\mathbb{R}_+}\chi_{[0,x]}(t)\mu(dt)=\mu[0,x] \tag{Α΄.3}$$

Αυτό σημαίνει ότι το μ ορίζεται μοναδικά από όλους τους μετασχηματισμούς Laplace του. □

Παράρτημα Β΄

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Στο παράρτημα αυτό δίνονται ορισμένοι βασικοί ορισμοί της Θεωρίας Πιθανοτήτων καθώς και οι κατανομές πιθανότητας που αναφέρθηκαν στην παρούσα εργασία.

Β΄.1 Χρήσιμοι Ορισμοί

Ορισμοί Β΄.1.1. Έστω (Ω, Σ, P) ένας χ.π. Για μια τ.μ X: $\Omega \to \mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

είναι ένα μέτρο πιθανότητας και ονομάζεται **κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X**. Μάλιστα, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$, τότε η P_X ονομάζεται **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)**(*degenerate (probability) distribution*).

Η P_X (αντίστοιχα η τ.μ. X) παράγει την **συνάρτηση κατανομής** (*σ.κ.*) $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ **της τ.μ.** X, που ορίζεται από τον τύπο:

$$F_X(x) := P_X\big((-\infty, x]\big) = P(X \leq x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Από Πρόταση 1.4.9, [7], αποδεικνύεται πως η F_X είναι πράγματι *σ.κ.* Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως η *σ.κ.* F_X μιας τ.μ. X ικανοποιεί τη σχέση:

$$P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}, B \in \mathfrak{B}.$$

όπου $\lambda_{F_X}(B)$ είναι μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την F_X (βλ. π.χ [7], Πρόταση 1.4.10).

Μια (*σ.κ.*) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται:

- **Διακριτή** αν είναι της μορφής

$$F(x) = \sum_{k \in K : k \leq x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}_+$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** (σ.π.) της F.

- **Συνεχής** αν η F είναι συνεχής συνάρτηση.
- **Απόλυτα Συνεχής** αν είναι της μορφής:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (σ.π.π.).

Προφανώς, αν η τ.μ. X είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας συνεχής τ.μ. θα εννοούμε απόλυτα συνεχής τ.μ. Επίσης θα λέμε ότι η τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$, όπου $m \in \mathbb{N}^*$ και $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X} d\nu(x) = \int_{B\cap R_X} f_X(x)d\nu(x) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

όπου f_X η αντίστοιχη σ.(π.)π., και ν το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}$ ή το μέτρο του Lebesgue λ επάνω στο $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. X είναι συνεχής ή διακριτή.
Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το R_X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Ορισμός Β΄.1.2. Για μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$\mathbb{E}[X] := \mathbb{E}[X] := \int XdP = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

ονομάζεται η **μέση τιμή** ή **αναμενόμενη τιμή** ή **μαθηματική ελπίδα** της τ.μ. X. Ειδικά αν η τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, και είναι ένας αριθμός.

Ορισμοί Β΄.1.3. Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Ένα $R \subseteq \Omega \times \Upsilon$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο του** $\Omega \times \Upsilon$ αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επιπρόσθετα, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται **σ-άλγεβρα-γινόμενο** των Σ και T και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.

Έστω επίσης ο χ.π. $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μέτρο ρ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των P και Q** και συμβολίζεται με $P \otimes Q$, αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = P(A)Q(B)$. Η τριάδα $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, P \otimes Q)$ ονομάζεται **χ.π.-γινόμενο**.

Ορισμός Β′.1.4. Εάν I είναι ένα οποιοδήποτε μή κενό σύνολο δεικτών, και $\{\Omega_i, \Sigma_i, P_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\emptyset \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον **χ.π.-γινόμενο** $\otimes_{i\in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := (\prod_{i\in J}\Omega_i \otimes_{i\in J} \Sigma_i \otimes_{i\in J} P_i)$. Αν (Ω, Σ, P) είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με P^I την **πιθανότητα γινόμενο** στον Ω^I και με Σ^I το πεδίο ορισμού του P^I.

Ορισμοί Β′.1.5. Τα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν $P\big(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\big) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$ για κάθε $1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq n$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}^*$. Ομοίως, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ πραγματικών αριθμών, τα ενδεχόμενα $\{X_k \leq \alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ στοιχείων της $\mathfrak{B}$ τα ενδεχόμενα $\{X_k \in B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n^*}$ είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ.[7], Παρατήρηση 3.2.5(b)) Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.

Οι σ-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N} : n \geq 2)$ της Σ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n^*$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων σ-υποαλγεβρών της** Σ αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε πεπερασμένες στο πλήθος από αυτές, είναι ανεξάρτητες.

Ορισμοί Β′.1.6. Μία οικογένεια $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, τυχαίων μεταβλητών $X_t : \Omega \to \Upsilon$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία (σ.δ.)** ή **στοχαστική ανέλιξη**.

Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι:

- Μια σ**.δ. ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j \in \mathbb{N}_m^*)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

- Μια σ**.δ. στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m \in \mathbb{N}^*$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}$, έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m^*}$.

Β′.2 Γενικές έννοιες στις κατανομές

Ένα μέτρο πιθανότητας $Q : \mathfrak{B}_n \longrightarrow [0, 1]$ ονομάζεται **κατανομή** (distribution).
Μια κατανομή ονομάζεται **εκφυλισμένη** (degenerate) αν υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Στην συνέχεια του παρόντος παραρτήματος θεωρούμε μόνο κατανομές με πεδίο ορισμού το $\mathfrak{B}$.

Για $y \in \mathbb{R}$, η **κατανομή Dirac** δ_y ορίζεται να είναι η (εκφυλισμένη) κατανομή Q που ικανοποιεί την

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Λόγω του ιδιαίτερου ρόλου της κατανομής Dirac, όλες οι παραμετρικές κλάσεις των κατανομών που μελετούνται παρακάτω ορίζονται ως μη-εκφυλισμένες κατανομές.

Θεωρούμε τις κατανομές $Q, R : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$.

Μέση Τιμή και Ροπές ανώτερης τάξης

Ορισμός Β′.2.1. *Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty,$$

τότε λέμε ότι η Q έχει **πεπερασμένη ροπή τάξης n** *ή έχει* **n−οστή ροπή** *που ορίζεται από την σχέση*

$$E[Q^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx).$$

Η κατανομή Q λέμε ότι έχει πεπερασμένες ροπές τάξης k αν η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty$$

ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.
Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν η Q έχει πεπερασμένη ροπή τάξης n, τότε έχει πεπερασμένη ροπή τάξης k για όλα τα $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Χαρακτηριστική συνάρτηση

Ορισμός Β′.2.2. Η χαρακτηριστική συνάρτηση *ή* **ο μετασχηματισμός Fourier** *της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $\varphi_Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ που δίνεται από την*

$$\varphi_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izx} Q(dx)$$

με $\varphi_Q(0) = 1$.

Ένα αποτέλεσμα των μετασχηματισμών Fourier είναι ότι η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την χαρακτηριστική της συνάρτηση φ_Q.

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Β′.2.3. **Η ροπογεννήτρια συνάρτηση** *της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $M_Q : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ που δίνεται από την*

$$M_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{zx} Q(dx)$$

με $M_Q(0) = 1$.

Αν η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Q είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή γύρω από το μηδέν, τότε η Q έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\frac{d^n M_Q}{dz^n}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx).oroi \tag{B′.1}$$

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Β′.2.4. *Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$ τότε* **η πιθανογεννήτρια συνάρτηση** *της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $m_Q : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται από την*

$$\begin{aligned} m_Q(z) &:= \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n Q[\{n\}]. \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n m_Q}{dz^n}(0) = Q[\{n\}], \tag{B′.2}$$

η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την πιθανογεννήτρια συνάρτησή της m_Q.

Πρόταση Β′.2.5. *Έστω ότι $Q[\mathbb{N}_0] = 1$. Τότε οι δύο πρώτες ροπές της κατανομής Q υπολογίζονται άμεσα από την πιθανογεννήτρια συνάρτηση σύμφωνα με τις σχέσεις*

$$E[Q] = \frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} \tag{B′.3}$$

$$E[Q^2] = \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\bigg|_{z=1} + \frac{d}{dz} m_Q(z)\bigg|_{z=1} \tag{B′.4}$$

Για μία αναλυτική απόδειξη της πρότασης Β′.2.5, (βλ. [1] σελίδες 147-148).

Συνέλιξη

Ορισμός Β′.2.6. *Αν η $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια απεικόνιση με $+(x, y) := x + y$, τότε η*

$$Q * R := (Q \otimes R)_+$$

είναι μια κατανομή, η οποία ονομάζεται **συνέλιξη** *των Q και R.*

Οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι άμεσες συνέπειες του Ορισμού **;;** και του Θεωρήματος Fubini για μέτρα (βλ. Θεώρημα **;;**!!Fubini).

Πρόταση Β′.2.7. *Η ισότητα*

$$(Q * R)(B) = \int_{\mathbb{R}} Q(B-y)R(dy)$$

ισχύει για κάθε $B \in \mathfrak{B}$. Ιδιαιτέρως ισχύει

$$(Q * \delta_y)(B) = (\delta_y * Q)(B) = Q(B-y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathfrak{B}$.

Πρόταση Β′.2.8. *Η συνέλιξη ικανοποιεί τις ισότητες*

$$\begin{aligned} Q * R &= R * Q \\ \varphi_{Q*R} &= \varphi_Q \cdot \varphi_R \\ M_{Q*R} &= M_Q \cdot M_R \end{aligned}$$

Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1 = R[\mathbb{N}_0]$, τότε ισχύει

$$m_{Q*R} = m_Q \cdot m_R.$$

Πρόταση Β′.2.9. *Αν οι κατανομές Q και R έχουν πεπερασμένη μέση τιμή τότε ισχύει*

$$E[Q * R] = E[Q] + E[R]$$

και αν επιπλέον έχουν και πεπερασμένες δεύτερες ροπές τότε

$$Var[Q * R] = Var[Q] + Var[R].$$

Πρόταση Β′.2.10. *Αν $Q = \int f \, d\nu$ και $R = \int g \, d\nu$ για $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, τότε $Q * R = \int f * g \, d\nu$, όπου η απεικόνιση $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ορίζεται*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\nu(dy).$$

Ορισμός Β′.2.11. *Για $n \in \mathbb{N}_0$, η n-οστή συνέλιξη της Q ορίζεται από την σχέση*

$$Q^{*n} := \begin{cases} \delta_0, & \text{αν } n = 0 \\ Q * Q^{*(n-1)}, & \text{αν } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Αν η $Q = \int f \, d\nu$, για $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, τότε η συνάρτηση πιθανότητας της Q^{*n} ως προς το μέτρο ν συμβολίζεται f^{*n}.

Β′.3 Χρήσιμες Κατανομές Πιθανότητας

Β′.3.1 Διακριτές κατανομές

(i) **Αρνητική Διωνυμική Κατανομή (τύπου Ι)** ($P_X = \mathbf{NB}(r, p)$)

- $f_X(x) = \binom{x+r}{r} p^r (1-p)^x$ για κάθε $x \in \mathbb{N}$, $r \in (0, \infty)$, $p \in (0,1)$.
- $\varphi_X(u) = \left(p/[(1-(1-p)e^{\mathrm{i}u}]\right)^r$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$, όπου i η φανταστική μονάδα.
- $\mathbb{E}[X] = r/p$, $\mathbb{V}(X) = r(1-p)/p^2$.

Σημειώνουμε ότι $\binom{x+r}{r} := \Gamma(x+r)/[x!\Gamma(r)]$ για κάθε $x, r \in (0, \infty)$.

(ii) **Κατανομή Poisson** ($P_X = \mathbf{P}(\lambda)$)

- $f_X(x) = e^{-\lambda}(\lambda^x/x!)$ για κάθε $x \in \mathbb{N}$, με $\lambda > 0$.
- $\varphi_X(u) = e^{\lambda(e^{\mathrm{i}u}-1)}$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{V}(X) = \lambda$.

Β′.3.2 Συνεχείς κατανομές

(i) **Εκθετική Κατανομή** ($P_X = \mathbf{Exp}(\lambda)$)

- $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$, με $\lambda > 0$.
- $\varphi_X(u) = \lambda/(\lambda - \mathrm{i}u)$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{E}[X] = 1/\lambda$, $\mathbb{V}(X) = 1/\lambda^2$.

(ii) **Κατανομή Γάμμα** ($P_X = \mathbf{Ga}(\alpha, \beta)$)

- $f_X(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$, με $\alpha, \beta > 0$.
- $\varphi_X(u) = [\beta/(\beta - \mathrm{i}u)]^\alpha$ για κάθε $u \in \mathbb{R}$.
- $\mathbb{E}[X] = \alpha/\beta$, $\mathbb{V}(X) = \alpha/\beta^2$.

Σημειώνουμε ότι $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$ για κάθε $\alpha > 0$.

(iii) **Γενικευμένη Κατανομή Γάμμα** ($P_X = \mathbf{Ga}(a, b, c)$)

- $f_X(x) = \frac{\left(c/a^b\right) x^{(b-1)} e^{-(x/a)^c}}{\Gamma(d/c)}$ για κάθε $x \in (0, \infty)$, με $a, b, c > 0$.
- $\mathbb{E}[X] = a\frac{\Gamma((b+1)/c)}{\Gamma(b/c)}$, $\mathbb{V}(X) = a^2 \left(\frac{\Gamma((b+2)/c)}{\Gamma(b/c)} - \left(\frac{\Gamma((b+1)/c)}{\Gamma(b/c)} \right)^2 \right)$.

(iv) **Αντίστροφη Γκαουσιανή Κατανομή** ($P_X = \mathbf{IG}(\alpha)$)

- $f_X(x) = \frac{(2/\alpha)^{1/2}}{\pi^{1/2}} x^{-3/2} \cdot e^{-\alpha/2x}$ για κάθε $x > 0$, με $\alpha > 0$.

Βιβλιογραφία

[1] Ερμίδης, Ι. (2016), *Μεικτές κατανομές Hofmann με εφαρμογές,* Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ΜΑΕ.

[2] Θάνος , Ι. (2018),*Μεικτές σύνθετες κατανομές Poisson*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ΜΑΕ.

[3] Κουμμουλής, Γ.-Νεγρεπόντης, Σ. (1991), *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία.

[4] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2006), *Martingales στη Θεωρία Κινδύνου με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία,Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ΜΕΣ

[5] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2013), *Martingale-Ισοδύναμες κατανομές πιθανότητας με εφαρμογές στις αρχές υπολογισμού ασφαλίστρου*, Διδακτορική Διατριβή, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης.

[6] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2005), *Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[7] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2006), *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[8] Μπότση, Α. (2013), *Μελέτη Στοχαστικών Διαδικασιών με Υποσυνθήκη Στάσιμες και Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης, ΜΕΣ.

[9] Albrecht, P. (1981), *Über einige Eigenschaften des gemischten Poisson prozesses*, Bull. of the Assoc. of Swiss Actuaries (1981), 241-249.

[10] Albrecht, P. (1982) , *Zur statistischen analyse des gemischten Poisson-prozesses, gestiitzt auf Schadeneintrittzeitpunkte*, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsrnathematik 15 (1982), 249-257.

[11] Albrecht, P. (1982), *On some statistical methods connected with the mixed Poisson process*, Scan & Actuarial Journal (1982), 1-14.

[12] Ammeter, H.(1948), *A generalization of the collective theory of risk in regard to fluctuating basic probabilities*, Skand. Akt. 31 (1948), 171-198.

[13] Beall, G. and Rescia, R. (1953) *A Generahzatlon of Neyman's Contagious Distributions. Biometrics 9, 354-386*

[14] Berljand,, 0. S., Nazarov, I. M. and Pressman, A. Ja. (1962) CCCP 147, 1005-1007

[15] Bühlmann, H., *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer-Verlag, Heidelberg 1970.

[16] Delaporte,P.J (1960),Un probleme de tarification de l'Aassurance accidents d'Aautomobiles
examine par la statistique mathematique. In: Transactions of the International Congress of Actuaries; Vol. 2, pp. 121-135.

[17] Delaporte,P.J (1965),Tarification du risque individuel d accidents d automobiles par la prime modelee sur le risque. ASTIN Bull. 3, 251?271.

[18] Fremlin,D.h.(2001),Measury Theory, Vol.1 Torres Fremlin(Ed.)

[19] Gerber, H.U. (1979), *An Introduction to Mathematical Risk Theory*, Hübner Foundation, University of Pennsylvania, Philadelphia 1979.

[20] Gerber, H.(1983) , *On the asymptotic behavior of the mixed Poisson process*, Scan& Actuarial J. , 256.

[21] Good, I. J. (1953), *The population frequencies of species and the estimation of population parameters. Biometrika 40, 237-260.*

[22] Grandell, J. (1991), *Aspects of Risk Theory, Springer-Verlag*, New York 1991.

[23] Grandell, J. (1997), *Mixed Poisson Processes ,Springer-Science+ Business Media,B.V.*.

[24] Holla, M. S (1967), *On A Polsson-lnverse Gausslan Distribution Metrlka —1, 115-121 Johnson, N L and Kotz, S (1969) Distributions m Statistics Discrete Distributions. John Wiley New York.*

[25] Johnson, N L and Kotz, S (1969), *Distributions m Statistics Discrete Distributions. John Wiley New York.*

[26] Johnson, N.I. and Kotz, S (1985)., *Mixed Poisson process*, Encyclopedia of Statistical Sciences 5(1985), 556-559.

[27] Jørgensen, B (1982),*Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution, Lecture Notes in Statistics 9, Sprmger-Verlag, New York.*

[28] Kallenberg, O. (2005), *Probability Symmetries and Invariance Principles*, Springer.

[29] Karr, A.F. (1984), *Combined nonparametric inference and state estimation for mixed Poisson pro-cesses*, Zeitschrift fiir Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete 66 (1984), 81-96.

[30] Kupper, J. (1962a) Wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle in der Schadenversicherung, Teil 1: Die SchadenzahL Bl?tter der deutschen Gesellschaft f?r Versicherungsmathematik 5, 451-503.

[31] Kupper, J. (1962b) Wahrscheinlichkeitstheoretische Modelle in der Schadenversicherung, Teil II: Schadenh?he und Totalschaden. Bl?tter der deutschen Gesellschaft f?r Versicherungsmathematik 6, 95-130.

[32] Levy, E. (1992), *Pricing European average rate currency options, Journal of International Money and Finance, 14, 474-491*

[33] Lundberg, O. (1940), *On Random Processes and their Application to Sickness and Accident Statistics*, Almquist and Wicksells, Uppsala .

[34] Patil, G. P. (1964) On certain compound Poisson and compound binomial distributions. Sankhy? A, 26, 293-294

[35] Schmidt, K.D. (1996), *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart.

[36] Slimanc, S.B. (2001), *Bounds to the distribution of a sum of independent lognormal random variables, IEEE Transations on Communications, 20, 6.*

[37] Sichel, H. (1971), *On a family of discrete distributions particularly suited to represent long tailed frequency data*, Proc. 3rd Syrup. Math. Statistics (1971), Pretoria, CSIR.

[38] Simar, L. (1976), *Maximum likelihood estimation of a compound Poisson process*, The Annals of Statistics 4 (1976), 1200-1209.

[39] Stoyanov, Jordan.M (1987), *Counterexamples in propability.*

[40] Spodanev,E.,(2008),Stochastische Risikotheorie, Vorlesungsskript, Universitat Ulm, Germany.

[41] Teugels, J.L. (1990), *Probabilistic proofs of some real inversion formulas*, Math. Nachrichten 146 (1990), 149-157.

[42] Thyrion, P. (1959), *Sur une propriété des processus de Poisson Généralisés*, Bull. Assoc. Royale Actuaire Belges 59 (1959), 35-46.

[43] Tucker, H.G. (1963) , *An estimate of the compounding distribution of a compound Poisson distribution*, Th. Prob. Appl. 8 (1963), 195-200.

[44] Milevsky, M.A. and Posner, S.E. (1998), *Asian Options, the sum of lognormal, and the Reciprocal Gamma dstribution, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 33, 3.*

[45] Widder, D. V. (1931), *Necessary and sufficient conditions for the representation of a function as a Laplace integral*, Trans. Am. Math. Soc. 33.

[46] Willmot, G.E. (1987), *The Poisson-Inverse Gaussian Distribution as an Alternative to the Negative Binomial. Scand. Actuarial J., 113-127.*

[47] Willmot, G. (1993) On recursive evaluation of mixed Poisson probabilities and related quantities. Scand. Actuarial J., 114-133. [34, 35, 37, 47, 49, 192, 195, 201]

[48] Willmot, G. E. and Panjer, H. H. (1985) *Difference Equanon Approaches m Evaluanon of Compound Distributions, to appear.*

Ευρετήριο Όρων

Ευρετήριο Συμβόλων