



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ
UNIVERSITY OF PIRAEUS

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ PARETO ΑΠΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΥΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ,
ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΚΙΝΔΥΝΩΝ

ΜΑΓΔΑΛΗΝΗ Ν. ΤΣΙΠΑ

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιά ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς ,

Ιούλιος 2018

Η παρούσα διπλωματική εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίστηκε από την ΓΣΕΣ του τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ' αριθμόν συνεδρίαση του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της επιτροπής ήταν :

- Αναπληρωτής Καθηγητής: Πολίτης Κωνσταντίνος (Επιβλέπων μέλος)
- Επίκουρος Καθηγητής: Πιτσέλης Γεώργιος
- Επίκουρος Καθηγητής: Ευαγγελάρας Χαράλαμπος



UNIVERSITY OF PIRAEUS

DEPARTMENT OF STATISTICS AND INSURANCE SCIENCE

POST GRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

**APPROXIMATIONS OF PARETO DISTRIBUTIONS BY COMBINATIONS OF
EXPONENTIAL DISTRIBUTIONS, WITH APPLICATIONS IN RISK THEORY**

By

MAGDALINI N. TSIPA

MSc DISSERTATION

Submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus as part of the requirements for obtaining the Postgraduate Diploma of Specialization in Actuarial Science and Risk Management.

**Piraeus,
July 2018**

Αρχικά θα ήθελα να ευχαριστήσω από καρδιάς τον επιβλέποντα καθηγητή μου κ. Κωνσταντίνο Πολίτη για την πολύτιμη βοήθεια και καθοδήγηση που μου παρείχε καθ' όλη την διάρκεια συγγραφής της διπλωματικής μου εργασίας καθώς επίσης και τα μέλη της επιτροπής κ. Πιτσέλη Γεώργιο και κ. Ευαγγελάρα Χαράλαμπο .

Επιπλέον ευχαριστώ την οικογένεια μου για την ανιδιοτελή αγάπη και συμπαράσταση που μου προσέφεραν και προσφέρουν σε κάθε βήμα της ζωής μου.

Τέλος αφιερώνω την παρούσα διπλωματική στον πολυαγαπημένο μου παππού ο οποίος δεν βρίσκεται στην ζωή και ο ρόλος του υπήρξε καθοριστικός στην μέχρι σήμερα πορεία μου .

Στην μητέρα μου Αγγελική,

Στην αδερφή μου Παναγιώτα-Άννα,

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Η κατανομή Pareto (Pareto distribution)

1.1 Εισαγωγή στην κατανομή Pareto.....	11
1.2 Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας –Συνάρτηση Κατανομής –Δεξιάς Ουράς.....	12
1.3 Μέση τιμή – Διακύμανση –Ροπές.....	13
1.4 Συντελεστής ασυμμετρίας και κύρτωσης	14
1.5 Παράδειγμα κάνοντας χρήση του πακέτου Mathematica.....	15
1.6 Γραφικές Παραστάσεις	17

Κεφάλαιο 2

Η βαθμίδα αποτυχίας –(Failure rate/Hazard rate)

2.1 Η βαθμίδα αποτυχίας	19
2.2 Υπολογισμός της βαθμίδας αποτυχίας για διάφορες κατανομές.....	22
2.3 Η βαθμίδα αποτυχίας για τις διακριτή μείξη εκθετικών κατανομών.....	26

Κεφάλαιο 3

Προσέγγιση της κατανομής Pareto από μια μείξη εκθετικών κατανομών

3.1 Μείξεις εκθετικών κατανομών.....	28
3.2 Ιδιότητες για τις μείξεις εκθετικών κατανομών	29
3.3 Παράδειγμα	29
3.4 Προσέγγιση της κατανομής Pareto από μία μείξη εκθετικών κατανομών.....	29
3.5 Μέθοδοι αξιολόγησης	34
3.6 Ολοκλήρωμα της απόλυτης διαφοράς.....	35
3.7 Μέγιστη διαφορά συναρτήσεων πυκνότητας.....	36
3.8 Μέγιστη διαφορά συναρτήσεων κατανομής.....	37
3.9 Μέθοδος των άνω ποσοστημορίων.....	38
3.10 Κριτήριο της βαθμίδας αποτυχίας.....	40

Κεφάλαιο 4

Η κατανομή ισορροπίας

4.1 Η κατανομή ισορροπίας.....	43
4.2 Υπολογισμός της κατανομής ισορροπίας	45
4.3 Συναρτήσεις πυκνότητας των κατανομών ισορροπίας	49

4.4 Μέθοδοι αξιολόγησης	49
4.5 Ολοκλήρωμα της απόλυτης διαφοράς.....	51
4.6 Μέγιστη διαφορά συναρτήσεων πυκνότητας.....	52
4.7 Μέγιστη διαφορά συναρτήσεων κατανομής.....	52
4.8 Μέθοδος των άνω ποσοστημορίων	55
4.9 Μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ζωής.....	57
4.10 Σύνδεση συναρτήσεων.....	64

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές στην Θεωρία χρεοκοπίας

5.1 Μείξεις εκθετικών κατανομών με εφαρμογή στην θεωρία χρεοκοπίας	66
5.2 Ειδική περίπτωση μείξης δυο εκθετικών κατανομών.....	68
5.3 Παραδείγματα.....	68
5.4 Η κατανομή ισορροπίας στην θεωρία χρεοκοπίας.....	71
5.5 Μέγιστη σωρευτική απώλεια.....	72
Συμπεράσματα	74
Παράρτημα mathematica	75
Βιβλιογραφία.....	77

Πίνακες

Πίνακας 3.9.....	39
Πίνακας 3.10.....	40
Πίνακας 4.4.....	50
Πίνακας 4.8.....	56
Πίνακας 4.8.....	56
Πίνακας 4.9.....	60

Περίληψη

Στην Αναλογιστική επιστήμη για την εκτίμηση των κινδύνων σε ασφαλιστικούς και χρηματοοικονομικούς τομείς ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι κατανομές με βαριά ουρά. Μια από τις ευρέως γνωστές κατανομές που διαθέτουν βαριά ουρά αποτελεί η κατανομή Pareto την οποία παρουσιάζουμε στο πρώτο κεφάλαιο και κατέχει πρωτεύουσα θέση στην παρούσα διπλωματική εργασία.

Επιπρόσθετα στο δεύτερο κεφάλαιο, θα περιγράψουμε και θα αναλύσουμε ένα πολύ βασικό μέτρο ονόματι βαθμίδα αποτυχίας ή ποσοστό σφάλματος. Το μέτρο αυτό εκφράζει τον στιγμιαίο αριθμό των αποτυχιών ενός συστήματος ή τον στιγμιαίο αριθμό θανάτων στην περίπτωση της ανάλυσης επιβίωσης και αποτελεί βασικό πυλώνα για τον σχεδιασμό ασφαλών συστημάτων στους χρηματοοικονομικούς, εμπορικούς και ρυθμιστικούς κλάδους .

Στο τρίτο κεφάλαιο μέσω διαφόρων μεθόδων θα προσπαθήσουμε να προσεγγίσουμε την κατανομή Pareto μέσω της μείξης εκθετικών κατανομών και με την βοήθεια πολλών κριτηρίων θα αξιολογήσουμε το πόσο καλή η όχι είναι η προσέγγισή της .Η προσέγγιση της κατανομής Pareto μέσω της μείξης των εκθετικών κατανομών αποτελεί μια χρήσιμη μέθοδο στην θεωρία κινδύνων καθώς υπάρχουν περιπτώσεις όπως κατά τον υπολογισμό της πιθανότητας χρεοκοπίας όπου δεν καθίσταται δυνατό να την υπολογίσουμε για την κατανομή Pareto και με αυτόν τον τρόπο την υπολογίζουμε μέσω της προσέγγισής της.

Στο τέταρτο κεφάλαιο θα ορίσουμε την έννοια της κατανομής ισορροπίας και θα την υπολογίσουμε για την αρχική κατανομή Pareto και την μείξη εκθετικών. Ακόμη θα υπολογίσουμε το ποσοστό σφάλματος χρησιμοποιώντας κατανομές ισορροπίας και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με την αρχική μας κατανομή. Επίσης θα διατυπώσουμε και θα εξετάσουμε την έννοια του υπολοιπούμενου χρόνου ζωής υπολογίζοντας την μέση τιμή και την διακύμανση του.

Κλείνοντας στο πέμπτο κεφάλαιο θα εισαγάγουμε την έννοια της χρεοκοπίας σε θεωρητικό επίπεδο αλλά υπολογίζοντάς την και μαθηματικά ενώ παράλληλα θα δούμε την βασική σύνδεση της κατανομής ισορροπίας με την θεωρία χρεοκοπίας αποδεικνύοντας πως πρόκειται για την κατανομή των κλιμακωτών υψών.

Abstract

In actuarial science in order to assess risks in insurance and financial sectors, distributions with heavy tail are of particular interest. One of the widely known distributions with a heavy tail is the Pareto distribution that we will analyze in the first chapter and occupies a leading position in this diploma thesis.

In addition in the second chapter we will describe and analyze a very basic measure called failure rate or hazard rate that expresses the instantaneous number of system failures or the instantaneous number of deaths in the case of survival analysis and is a key pillar for designing secure systems in financial, trade and regulatory sectors. In the third chapter, through various methods, we will try to approach the Pareto distribution by bexponential distributions and through many criteria we will evaluate how good or not it is.

Approximating the Pareto distribution by mixed exponential distributions is a very useful tool because there are instances such as calculating the probability of ruin where it is not possible to calculate it for the Pareto distribution and in this way we may approach it through its approximation.

In the fourth chapter we will define the concept of equilibrium distribution and we will calculate it for the initial distribution of Pareto and the mixture of exponentials. We will also calculate the error rate using equilibrium distributions and compare the results with our initial distribution. We will also formulate and look at the concept of residual lifetime by calculating its mean value and its variance.

Last but not least in the fifth chapter we will introduce the notion of ruin for the collective model of risk theory. We study it both from a theoretical perspective, but also compute the key quantities in mathematical terms and we discuss the basic link of the equilibrium distribution with ruin theory, showing that it is the distribution of the ladder heights.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Η κατανομή Pareto-(Pareto Distribution)

Μια από τις κατανομές που χρησιμοποιούνται συχνότερα στα Αναλογιστικά μαθηματικά είναι η κατανομή Pareto.

Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό της κατανομής Pareto προκειμένου να κατανοήσουμε την χρησιμότητα της εφαρμογής της. Έπειτα μέσω του στατιστικού πακέτου mathematica θα παρουσιάσουμε το πως προσεγγίζεται μαθηματικά διατυπώνοντας τους τύπους της συνάρτησης κατανομής, πυκνότητας πιθανότητας και δεξιάς ουράς. Εν συνεχεία θα υπολογίσουμε τις ροπές αλλά και τα μέτρα ασυμμετρίας και κύρτωσης.

Τέλος θα αναπαραστήσουμε γραφικά την κατανομή Pareto, για διάφορες τιμές των παραμέτρων της .

1.1 Εισαγωγή στην κατανομή Pareto

Η κατανομή Pareto πήρε το όνομά της από τον Ιταλό πολιτικό μηχανικό , οικονομολόγο και κοινωνιολόγο **Vilfredo Pareto** και χρησιμοποιείται για την περιγραφή κοινωνικών, επιστημονικών, γεωφυσικών, αναλογιστικών και διαφόρων άλλων ειδών παρατηρήσιμων φαινομένων.

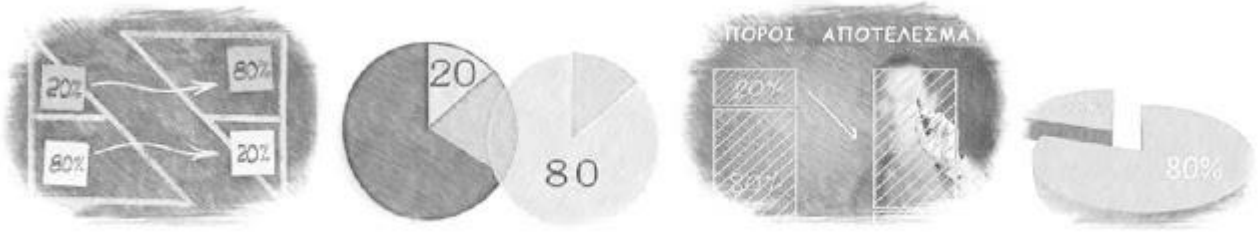
Η κατανομή Pareto ανήκει στην κατηγορία των κατανομών με βαριά ουρά.

Μια κατανομή με βαριά ουρά είναι η κατανομή της οποίας η ουρά(δηλαδή η συνάρτηση επιβίωσης) συγκλίνει πολύ αργά στο μηδέν όταν το x τείνει στο άπειρο.

Εφαρμογές της κατανομής Pareto συναντούμε σε πολλούς τομείς όπως για να περιγράψουμε τα μεγέθη των ανθρώπινων οικισμών (λίγες πόλεις ,πολλά χωριουδάκια), τα μεγέθη των μετεωριτών και σωματιδίων άμμου αλλά και για την περιγραφή ακραίων εκδηλώσεων όπως είναι ετήσιες μέγιστες βροχοπτώσεις μιας ημέρας.(Wikipedia.org).

Από τις πιο σημαντικές εφαρμογές της ωστόσο αποτελεί η μελέτη της κατανομής του πλούτου αλλά και του εισοδήματος. Συγκεκριμένα ο Vilfredo Pareto χρησιμοποίησε την κατανομή Pareto για να περιγράψει την κατανομή του πλούτου μεταξύ των ατόμων, φάνηκε να δείχνει αρκετά καλά τον τρόπο με τον οποίο μεγαλύτερο μέρος του πλούτου σε κάθε κοινωνία ανήκει σε μικρότερο ποσοστό ανθρώπων της κοινωνίας αυτής.

Η άνωθι ιδέα εκφράζεται καλύτερα από την ευρέως γνωστή “Αρχή του Pareto “ ή κανόνας 80-20“ σύμφωνα με τον οποίο το 20% του πληθυσμού ελέγχει το 80% του πλούτου.(Wikipedia).



Ο νόμος των σημαντικών ολίγων και των ασήμαντων πολλών

(Wikipedia).

1.2 Συνάρτηση Πυκνότητας Πιθανότητας –Συνάρτηση Κατανομής –Δεξιάς Ουράς

Κατανομή Pareto

Η συνεχής τυχαία μεταβλητή X ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους α, λ και γράφουμε $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$ όταν η συνάρτηση πυκνότητας είναι:

$$f_X(x) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}} \quad \alpha, \lambda > 0, \quad x > 0, \quad (1.2.1)$$

όπου λ είναι η παράμετρος κλίμακας και α η παράμετρος σχήματος.

Αντίστοιχα η συνάρτηση κατανομής της και η συνάρτηση δεξιάς ουράς της Pareto είναι οι ακόλουθες :

$$F(x) = 1 - \left[\frac{\lambda}{\lambda+x} \right]^\alpha \quad (1.2.2)$$

$$\bar{F}(x) = 1 - F(x) = \left[\frac{\lambda}{\lambda+x} \right]^\alpha \quad \alpha, \lambda > 0, \quad x > 0. \quad (1.2.3)$$

Σύμφωνα με το βιβλίο του Bean(2001) η κατανομή Pareto έχει παρόμοιο χαρακτήρα με την εκθετική κατανομή και αυτό γιατί στην πραγματικότητα πρόκειται για μια συνεχή μείξη εκθετικών κατανομών με βάρη μείξης από την γάμμα κατανομή.

Ωστόσο μια βασική διαφορά ανάμεσα στις δύο κατανομές είναι το μέγεθος της ουράς τους όπου στην περίπτωση της κατανομής Pareto είναι παχύτερη.

1.3 Μέση τιμή – Διακύμανση -Ροπές

Έστω $X \sim Pa(\alpha, \lambda)$.

Από το βιβλίο του Bean (2001) βλέπουμε πως οι ροπές κ-τάξης υπολογίζονται από την σχέση:

$$E(X^k) = \frac{\lambda^k k!}{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k)} \quad (1.3.1)$$

Είναι απαραίτητο να αναφερθεί ότι η ροπή κ-τάξης ορίζεται ($E(X^k) < \infty$) όταν και μόνο όταν $\alpha > k$.

Για $k=1$ έχουμε ότι:

$$E(X) = \frac{\lambda}{\alpha-1}, \quad (1.3.2)$$

$$[E(X)]^2 = \frac{\lambda^2}{(\alpha-1)^2}. \quad (1.3.3)$$

Για $k=2$:

$$E(X^2) = \frac{\lambda^2 2!}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{\lambda^2 2}{(\alpha-1)(\alpha-2)}. \quad (1.3.4)$$

Για τον υπολογισμό της **διακύμανσης** θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή σχέση

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 \quad (1.3.5)$$

και αντικαθιστώντας τα $E(X^2)$ και $[E(X)]^2$ παίρνουμε ότι :

$$V(X) = \frac{\alpha \lambda^2}{(\alpha-1)^2 (\alpha-2)}. \quad (1.3.6)$$

Για την ύπαρξη της μέσης τιμής αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι η μέση τιμή της παραμέτρου α να είναι $\alpha > 1$, ενώ η διακύμανση είναι πεπερασμένη αν και μόνο αν $\alpha > 2$.

Η ροπογεννήτρια της κατανομής Pareto $M_X(t) = E[e^{tX}]$ δεν υπάρχει καθώς απειρίζεται για $t > 0$.

1.4 Συντελεστής ασυμμετρίας και κύρτωσης

1.4.1 Συντελεστής ασυμμετρίας

Ασυμμετρία ή λοξότητα(skewness)

Ο συντελεστής ασυμμετρίας αποτελεί το μέτρο το οποίο μας δείχνει κατά πόσο και προς ποια κατεύθυνση αποκλίνει η κατανομή από την πλήρη συμμετρία όπου (skewness=0).

Υπάρχουν δύο είδη συμμετρίας, η θετική συμμετρία και η αρνητική συμμετρία.

Στην θετική συμμετρία παρατηρείται στην κατανομή εξόγκωση προς τα αριστερά και μεγάλη ουρά προς τα δεξιά(skewness>0) σε αντιδιαστολή με την αρνητική συμμετρία που παρατηρείται εξόγκωση προς τα δεξιά και μεγάλη ουρά προς τα αριστερά.

Ο τύπος βάσει του οποίου υπολογίζουμε την συμμετρία είναι ο ακόλουθος:

$$\gamma_1 = E \left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^3 \right] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} . \quad (1.4.1)$$

Χρησιμοποιώντας τον άνωτι τύπο και έπειτα από πράξεις υπολογίζουμε τον συντελεστή ασυμμετρίας για την κατανομή Pareto:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= E \left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^3 \right] \\ &= \frac{E[X^3] - 3\mu E[X^2] + 3\mu^2 E[X] - \mu^3}{\sigma^3} \\ &= \frac{E[X^3] - 3\mu(E[X^2] - \mu E[X]) - \mu^3}{\sigma^3} \\ &= \frac{E[X^3] - 3\mu\sigma^2 - \mu^3}{\sigma^3} . \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε στην άνωτι σχέση όπου :

$$E[X^3] = \frac{6\lambda^3}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)}, \mu = \frac{\lambda}{\alpha-1}, \sigma^2 = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$

και υπολογίζουμε την ασυμμετρία (skewness) για την κατανομή Pareto:

$$\text{Για } \alpha > 3 \quad \text{Ασυμμετρία} = \frac{2(1+\alpha)}{\alpha-3} * \sqrt{\frac{\alpha-2}{\alpha}} .$$

Ο συντελεστής ασυμμετρίας παραπάνω υπάρχει αν και μόνο αν $\alpha > 3$. Στην περίπτωση αυτή, όπως προκύπτει από παραπάνω, η ασυμμετρία είναι πάντα θετική και δεν εξαρτάται από την τιμή του λ .

1.4.2 Συντελεστής κύρτωσης

Ο συντελεστής κύρτωσης αποτελεί το μέτρο το οποίο μας δείχνει τον βαθμό συγκέντρωσης των δεδομένων γύρω από το μέσο και τα άκρα της κατανομής.

Μια κατανομή η οποία έχει σχετικά μεγάλη μέγιστη συχνότητα (κορυφή) και επομένως μεγάλη συγκέντρωση τιμών γύρω από τον μέσο λέγεται λεπτόκυρτη (leptokurtic) και στην περίπτωση αυτή η κύρτωση παίρνει τιμές μεγαλύτερες του 3 (kurtosis>3) ενώ αν η μέγιστη συχνότητα της είναι σχετικά μικρή λέγεται πλατύκυρτη (platykurtic) και η κύρτωση παίρνει τιμές μικρότερες του 3 (kurtosis<3).

Κατανομές που προσεγγίζονται από την κανονική κατανομή λέγονται μεσόκυρτες (mesokurtic) και στην περίπτωση αυτή η τιμή του συντελεστή κύρτωσης είναι ίση με 3.

Ένα μέτρο το οποίο εκφράζει τον βαθμό κυρτότητας μιας κατανομής είναι ο συντελεστής κύρτωσης του Pearson ο οποίος ορίζεται από τον ακόλουθο τύπο :

$$\gamma_2 = E \left[\left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^4 \right] = \frac{\mu_4}{\sigma^4}, \quad (1.4.2)$$

όπου μ_4 είναι η τέταρτη κεντρική ροπή και σ είναι η τυπική απόκλιση.

Έπειτα από πράξεις ο τύπος βάσει του οποίου υπολογίζουμε την κύρτωση για την κατανομή Pareto είναι ο ακόλουθος :

$$\text{Για } \alpha > 4 \quad \text{Κύρτωση} = \frac{6(\alpha^3 + \alpha^2 - 6\alpha - 2)}{\alpha(\alpha-3)(\alpha-4)} .$$

1.5 Παράδειγμα κάνοντας χρήση του πακέτου Mathematica

Έστω η τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Pareto}(\alpha=3, \lambda=2)$ τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της Y θα είναι :

$$f(x) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda+x)^{\alpha+1}} = \frac{24}{(2+x)^4} .$$

- Για τον υπολογισμό της μέσης τιμής $E(X)$:

Μέσω του mathematica και χρησιμοποιώντας τον τύπο (1) του παραρτήματος υπολογίζουμε την μέση τιμή $E(X)$ η οποία ισούται με την μονάδα πράγμα το οποίο επαληθεύεται και έπειτα από την εφαρμογή του τύπου της $E(X) = \frac{\lambda}{\alpha-1} = \frac{2}{2} = 1$.

- Για τον υπολογισμό της διακύμανσης $\text{Var}(X)$

Αρχικά υπολογίζουμε την δεύτερη ροπή $E(X^2)$ χρησιμοποιώντας τον τύπο (2) του παραρτήματος και έπειτα την διακύμανση σύμφωνα με την εξής σχέση :

$\text{Var} = \mu_2 - \mu^2$ η οποία μας δίνει αποτέλεσμα $\text{Var} = 3$ το οποίο αντίστοιχα επαληθεύεται από τον τύπο της διακύμανσης όπου :

$$V(X) = \frac{\alpha\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)} = \frac{12}{4} = 3 .$$

- Για τον υπολογισμό της δεξιάς ουράς της Pareto θα έχουμε :

Υπολογίζουμε πρώτα την συνάρτηση κατανομής $F(X)$ μέσω του τύπου 3 του παραρτήματος και παίρνουμε :

$$F(x) = 1 - \frac{8}{(2+x)^3}$$

και έπειτα την ουρά της κατανομής η οποία δίνεται μέσω της σχέσης $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$.

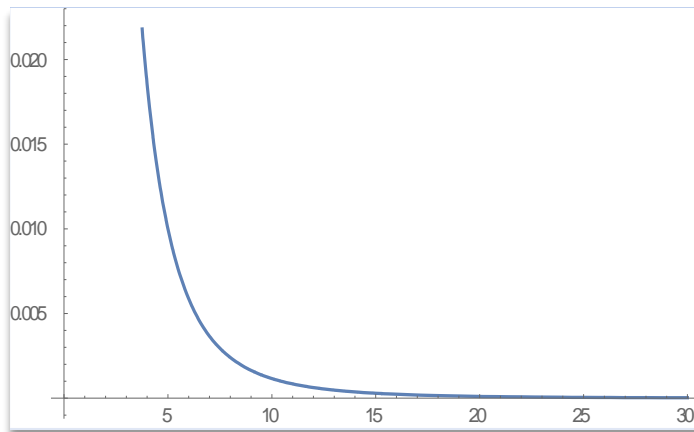
Από την εφαρμογή της άνωθι σχέσης προκύπτει ότι $\bar{F}(x) = \frac{8}{(2+x)^3}$.

- Λόγω του ότι η τυχαία μεταβλητή $X \sim \text{Pareto}(\alpha=3, \lambda=2)$ τόσο ο συντελεστής κύρτωσης όσο και ο συντελεστής ασυμμετρίας απειρίζονται.

1.6 Γραφικές Παραστάσεις

Διάγραμμα 1.1

Για την δεξιά ουρά της κατανομής $\bar{F}(x) = \frac{8}{(2+x)^3}$ στο διάστημα $x \in [0,30]$, παραθέτουμε το παρακάτω διάγραμμα.



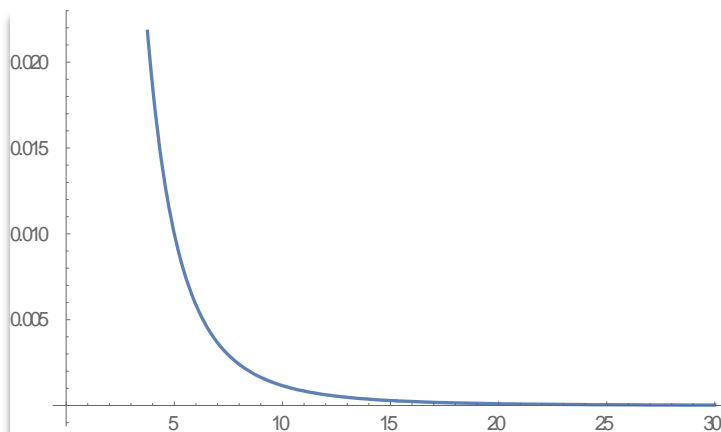
Παρατηρήσεις

Στο άνωθι διάγραμμα παρουσιάζεται η συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής Pareto(3,2) στο διάστημα $x \in [0,30]$.

Στο διάγραμμα παρατηρούμε πως η δεξιά ουρά της κατανομής συγκλίνει στο μηδέν όσο μεγαλύτερες είναι οι τιμές των x . Συγκεκριμένα θα λέγαμε για $x \in [0,15]$ η κατανομή ακολουθεί φθίνουσα πορεία. Στο διάστημα $x \in [15,18]$ η κατανομή φθίνει με πιο αργό ρυθμό προς το μηδέν ενώ για τιμές των $x \in [18,30]$ όπως εύλογα μπορεί κανείς να παρατηρήσει η ουρά της κατανομής βρίσκεται πολύ κοντά στο μηδέν.

Διάγραμμα 1.2

Για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{24}{(2+x)^4}$ στο διάστημα $x \in [0,30]$.



Παρατηρήσεις

Στο άνωθι διάγραμμα παρουσιάζεται η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Pareto [3,2] στο διάστημα $x \in [0,30]$.

Στο διάγραμμα αυτό παρατηρούμε πως στο διάστημα $x \in [0,10]$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας φθίνει με γρηγορότερο ρυθμό από την συνάρτηση δεξιάς ουράς.

Επίσης στο διάστημα $x \in [10,15]$ η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας παρουσιάζει μικρότερη καμπυλότητα εν συγκρίσει με την συνάρτηση δεξιάς ουράς πράγμα το οποίο οφείλεται στο γεγονός ότι συγκλίνει γρηγορότερα στο μηδέν.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Βαθμίδα αποτυχίας (Failure rate /hazard rate)

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με ένα μέτρο πολύ σημαντικό για τον ασφαλιστικό κλάδο αλλά και σε άλλους τομείς της εφαρμοσμένης έρευνας το οποίο ονομάζεται βαθμίδα αποτυχίας.

Αρχικά θα δώσουμε τον ορισμό της βαθμίδας αποτυχίας αλλά και θα παρουσιάσουμε τον καθοριστικό ρόλο που έχει ο υπολογισμός αυτού του μέτρου σε πολλούς κλάδους της οικονομίας.

Εν συνεχεία θα προσεγγίσουμε το μέτρο αυτό μαθηματικά υπολογίζοντας την βαθμίδα αποτυχίας για διάφορες κατανομές όπως η εκθετική και η γάμμα κατανομή.

Τέλος θα εξετάσουμε την σύνδεση της συνάρτησης κατανομής με την βαθμίδα αποτυχίας από άποψη μονοτονίας αναλύοντας περιπτώσεις σύμφωνα με τις οποίες ανάλογα με το αποτέλεσμα της βαθμίδας αποτυχίας μπορεί να είναι είτε αύξουσα είτε φθίνουσα.

2.1 Ορισμός

Η βαθμίδα αποτυχίας – ποσοστό αποτυχίας αποτελεί σημαντικό παράγοντα στους ασφαλιστικούς, χρηματοοικονομικούς, εμπορικούς, ρυθμιστικούς κλάδους και τον βασικό πυλώνα για τον σχεδιασμό ασφαλών συστημάτων σε μια ευρεία ποικιλία εφαρμογών.

Γενικά, ως βαθμίδα αποτυχίας ορίζεται ο συνολικός αριθμός αποτυχιών εντός ενός πληθυσμού αντικειμένων διαιρούμενο με τον συνολικό χρόνο που δαπανήθηκε από αυτόν τον πληθυσμό, κατά την διάρκεια ενός συγκεκριμένου χρονικού διαστήματος μετρήσεων. (MacDiarmid 2009).

Η βαθμίδα αποτυχίας συναρτήσει του χρόνου συμβολίζεται συνήθως με $\lambda(t)$ και παρόλο που συχνά θεωρείται ως η πιθανότητα ότι μια αποτυχία εμφανίζεται σε συγκεκριμένο χρόνο δεδομένου ότι έχει υπάρξει αποτυχία πριν το χρονικό διάστημα t , στην πραγματικότητα δεν είναι πιθανότητα καθώς μπορεί να ξεπεράσει την μονάδα.

Επιπρόσθετα μπορεί να ορισθεί με την βοήθεια της συνάρτησης αξιοπιστίας η οποία καλείται και συνάρτηση επιβίωσης $\bar{F}(y)$ και η οποία εκφράζει την πιθανότητα μη αποτυχίας μέχρι τον χρόνο t .

Σε αυτήν την περίπτωση η βαθμίδα αποτυχίας καλείται και ένταση θνησιμότητας την οποία θα συμβολίζουμε με $\mu(y)$.

Στις ασφαλίσεις ζωής η ένταση θνησιμότητας $\mu(y)$ εκφράζει τον στιγμιαίο ρυθμό θανάτου που σχετίζεται με την ηλικία που επέρχεται ο θάνατος του ατόμου.

Η $\mu(y)$ δεν είναι πιθανότητα, είναι απλά ένας μη αρνητικός αριθμός. Το $\mu(y)dy$ εκφράζει την πιθανότητα το άτομο ηλικίας y να πεθάνει σε ένα μικρό διάστημα $(y, y + dy)$.

Θεωρούμε την θετική τυχαία μεταβλητή Y με συνάρτηση κατανομής $F(y) = \Pr(Y \leq y)$, $y \geq 0$.

Η τυχαία μεταβλητή Y αντιπροσωπεύει ενδεχομένως το χρόνο μέχρι το θάνατο ενός ατόμου ή το μέγεθος μιας ασφαλιστικής ζημιάς.

Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ είναι απόλυτα συνεχής και ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι η $f(y) = F'(y)$, τότε η ένταση θνησιμότητας ορίζεται σύμφωνα με τον κάτωθι τύπο :

$$\mu(y) = \frac{f(y)}{F'(y)} = -\frac{d}{dy} \ln \bar{F}(y) \quad (2.1.1)$$

όπου $\bar{F}(y) = 1 - F(y)$ είναι η συνάρτηση επιβίωσης.

Επισημαίνουμε ότι εφεξής θα υιοθετήσουμε τα ακόλουθα σύμβολα: για μια δεδομένη συνάρτηση κατανομής, ας πούμε $F(y)$, η συνάρτηση επιβίωσης αναφέρεται ως $\bar{F}(y)$.

Από την σχέση :

$$\begin{aligned} \mu(y) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(y+h) - F(y)}{hF'(y)} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ 1 - \frac{\bar{F}(y+h)}{\bar{F}(y)} \right\} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \{ 1 - \Pr(Y > y + h | Y > y) \}, y \geq 0 \quad (2.1.2) \end{aligned}$$

Βλέπουμε ότι οι μικρές τιμές της $\mu(y)$ αποτελούν μια ένδειξη βαριάς δεξιάς ουράς εν αντιθέσει με τις μεγάλες τιμές της $\mu(y)$ οι οποίες υποδηλώνουν πιο ελαφριά δεξιά ουρά.

Από την σχέση (2.1.1) προκύπτει ότι : $\int_0^y \mu(x) dx = -\ln \bar{F}(y)$

Με άλλα λόγια $\bar{F}(y) = e^{-\int_0^y \mu(x) dx}$ και επομένως το $\mu(y)$ καθορίζει μοναδικά την κατανομή του Y .

Στο σημείο αυτό υποθέτουμε ότι η μέση τιμή $E(Y)$ του Y υπάρχει ,

$$E(Y) = \int_0^{\infty} yF'(y) < \infty.$$

Επομένως με ολοκλήρωση κατά μέλη παίρνουμε ότι :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} yF'(y) &= -y\bar{F}(y) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} y\bar{F}(y) dy \\ &= -\lim_{y \rightarrow \infty} y\bar{F}(y) + \int_0^{\infty} y\bar{F}(y) dy. \end{aligned}$$

Όμως ,

$$0 \leq y\bar{F}(y) \leq y \int_y^{\infty} dF(x) \leq y \int_y^{\infty} x dF(x),$$

και από το ότι $E(Y) < \infty$ θα έχουμε

$$0 \leq \lim_{y \rightarrow \infty} y \bar{F}(y) \leq \lim_{y \rightarrow \infty} \int_y^{\infty} x dF(x) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y \bar{F}(y) = 0.$$

Συνεπώς,

$$E(Y) = \int_0^{\infty} \bar{F}(y) dy. \quad (2.1.3)$$

Από τις σχέσεις (2.1.1) και (2.1.3) βλέπουμε ότι :

$$E(Y) = \int_0^{\infty} \bar{F}(y) dy = \int_0^{\infty} \frac{f(y)}{\mu(y)} dy,$$

το οποίο γράφεται επίσης :

$$E(Y) = E\{1/\mu(y)\}. \quad (2.1.4)$$

Η εξίσωση (2.1.5) είναι σύμφωνη με την διαίσθησή μας ότι μικρές τιμές του $\mu(y)$ συνδέονται με μεγάλες τιμές του Y . Επιπρόσθετα η εξίσωση (2.1.5) γενικεύει την γνωστή περίπτωση της εκθετικής κατανομής όπου η $\mu(y)$ είναι σταθερή.

Σε πολλές περιπτώσεις πρακτικού ενδιαφέροντος, η ένταση θνησιμότητας είναι αυστηρά μη αύξουσα (μη φθίνουσα) από άποψη μονοτονίας ως προς y και αυτό σχετίζεται με την κατάσταση όπου η κατανομή έχει παχιά (λεπτή) δεξιά ουρά.

Η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ λέγεται ότι έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας (DFR) εάν ο λόγος $\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)}$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση ως προς y για σταθερό $x \geq 0$, δηλαδή εάν ο λογάριθμος της $\bar{F}(y)$ είναι κυρτή συνάρτηση. Αντίθετα η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ λέγεται ότι έχει αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας (IFR) εάν ο λόγος $\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)}$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση ως προς y για σταθερό $x \geq 0$, δηλαδή εάν ο λογάριθμος της $\bar{F}(y)$ είναι κοίλη συνάρτηση.

Από την σχέση (2.1.2) είναι προφανές ότι εάν η $F(y)$ είναι απόλυτα συνεχής τότε η φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας είναι ισοδύναμη της $\mu(y)$ η οποία είναι φθίνουσα ως προς y ενώ από την άλλη πλευρά η αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας είναι ισοδύναμη της $\mu(y)$ η οποία είναι αύξουσα ως προς y .

2.2 Υπολογισμός της βαθμίδας αποτυχίας για διάφορες κατανομές

Σε πολλές περιπτώσεις είναι πολύ δύσκολο να αναλύσουμε την συμπεριφορά της βαθμίδας αποτυχίας από άποψη μονοτονίας λόγω της πολυπλοκότητας του τύπου της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f(y)$ ή της συνάρτησης δεξιάς ουράς $\bar{F}(y)$.

Για την εκθετική κατανομή

Έστω $Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ τότε $f(y) = \lambda e^{-\lambda y}$, $F(y) = 1 - e^{-\lambda y}$ και $\bar{F}(y) = e^{-\lambda y}$

Επομένως η ένταση θνησιμότητας θα είναι $\mu(y) = \frac{\lambda e^{-\lambda y}}{e^{-\lambda y}} = \lambda$, δηλαδή σταθερή.

Στην περίπτωση αυτή η εκθετική συνάρτηση κατανομής $F(y) = 1 - e^{-\lambda y}$, $y > 0$ έχει ταυτόχρονα φθίνουσα και αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας καθώς $\mu(y) = \lambda$ για όλα τα y .

Ωστόσο είναι δύσκολο να αναλύσουμε την συμπεριφορά της $\mu(y)$ επειδή συχνά η δεξιά ουρά της Y ή ακόμα και η $f(y)$ είναι πολύπλοκης μορφής.

Για την κατανομή Pareto

Σύμφωνα με τον Finkelstein(2008) η κατανομή Pareto μπορεί να θεωρηθεί ως μια ενδιαφέρουσα μείξη της εκθετικής κατανομής με παράμετρο β όπου το β δεν είναι γνωστό αλλά μπορεί να θεωρηθεί τυχαία μεταβλητή Z η οποία ακολουθεί την γράμμα κατανομή με παραμέτρους α (σχήμα) και λ (κλίμακα). Τότε εάν $Z=z$ τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής Y θα δίνεται από την σχέση :

$$f(y|Z = z) = f(y, z) = z e^{-zt}$$

Δηλώνουμε ότι η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του Z είναι η $\pi(z)$. Επίσης η περιθωριακή συνάρτηση πυκνότητας της Y προκύπτει ως εξής :

$$f(y) = \int_0^{\infty} f(t, z) \pi(z) dz = \frac{\alpha \lambda^{\alpha}}{(\lambda + y)^{\alpha + 1}}$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση δεξιάς ουράς είναι:

$$\bar{F}(y) = \left(1 + \frac{y}{\lambda}\right)^{-\alpha}, \alpha, \lambda > 0. \quad (2.2.1)$$

Η εξίσωση (2.2.1) ορίζει την κατανομή Pareto δευτέρου είδους (κατανομή Lomax) για $y \geq 0$.

Η βαθμίδα αποτυχίας θα δίνεται από την σχέση :

$$\mu(y) = \frac{f(y)}{F(y)} = \frac{\alpha}{(\lambda + t)}, \quad (2.2.2)$$

που πρόκειται για μια φθίνουσα συνάρτηση .

Για την γάμμα κατανομή

Έστω $Y \sim \text{Γάμμα}(\alpha, \lambda)$ τότε η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι :

$$f(y) = \frac{\lambda^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha)}, \quad y > 0 .$$

Αν $\alpha \in \mathbb{Z}^+$ δηλαδή αν $\alpha \in \{1, 2, 3, \dots\}$ τότε η κατανομή Γάμμα αναφέρεται ως κατανομή Erlang και συμβολικά γράφουμε ότι $Y \sim \text{Erl}(\alpha, \lambda)$ τότε η συνάρτηση κατανομής και η συνάρτηση δεξιάς ουράς της Y θα είναι :

$$F(y) = 1 - e^{-\lambda y} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda y)^j}{j!}$$

και

$$\bar{F}(y) = e^{-\lambda y} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda y)^j}{j!} .$$

Επομένως η ένταση θνησιμότητας $\mu(y)$ δεν μπορεί εύκολα να εκφραστεί σε εύκολη αναλυτική μορφή εάν το α δεν παίρνει τις τιμές $\{1, 2, 3, \dots\}$.

Για να δούμε πώς συμπεριφέρεται η ένταση θνησιμότητας από άποψη μονοτονίας θα χρησιμοποιήσουμε την κάτωθι σχέση :

$$\mu(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \mu(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(y)}{\bar{F}(y)} \quad (2.2.3)$$

Και εφαρμόζοντας τον κανόνα Del' Hospital παραγωγίζοντας αριθμητή και παρονομαστή θα έχουμε :

$$\mu(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f'(y)}{[1-F(y)]'} = - \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f'(y)}{f(y)}, \quad (2.2.4)$$

Η παράγωγος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της Γάμμα κατανομής δίνεται από τον ακόλουθο τύπο :

$$f'(y) = \left[\frac{\lambda^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha)} \right]' = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \{(\alpha - 1)y^{\alpha-2} - \lambda y^{\alpha-1}\} e^{-\lambda y}. \quad (2.2.5)$$

Επομένως :

$$\mu(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f'(y)}{f(y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \{(\alpha-1)y^{\alpha-2} - \lambda y^{\alpha-1}\} e^{-\lambda y}}{\frac{\lambda^\alpha y^{\alpha-1} e^{-\lambda y}}{\Gamma(\alpha)}} = \lambda - \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\alpha-1}{y} = \lambda \quad (2.2.6)$$

Ακόμη για να εξετάσουμε την συμπεριφορά του $\mu(y)$ από άποψη μονοτονίας είναι χρήσιμη η ακόλουθη σχέση :

$$\frac{\bar{F}(x+y)}{\bar{F}(y)} = \frac{e^{-\lambda(x+y)} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda(x+y))^j}{j!}}{e^{-\lambda y} \sum_{j=0}^{\alpha-1} \frac{(\lambda y)^j}{j!}}, \quad (2.2.7)$$

όπου για σταθερό $x \geq 0$ εάν $\alpha \geq 1$ η άνωθι ποσότητα είναι μη αύξουσα ως προς y ενώ για $x \geq 0$ και $\alpha \leq 1$ είναι μη φθίνουσα ως προς y .

Για την μείξη εκθετικών κατανομών

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ της μείξης εκθετικών κατανομών μπορεί να εκφραστεί ως εξής :

$$F(y) = \int_0^\infty (1 - e^{-\theta y}) dH(\theta) \quad y \geq 0, \quad (2.2.8)$$

όπου $H(\theta)$ είναι η συνάρτηση κατανομής της θετικής τυχαίας μεταβλητής που χρησιμοποιείται για την μείξη.

Στην περίπτωση αυτή η βαθμίδα αποτυχίας θα δίνεται από την εξής σχέση :
(Willmot & Lin, 1994):

$$\mu(y) = -\frac{d}{dy} \ln \bar{F}(y) = \frac{\int_0^\infty \theta e^{-\theta y} dH(\theta)}{\int_0^\infty e^{-\theta y} dH(\theta)}, \quad (2.2.9)$$

Προκειμένου να εξετάσουμε την βαθμίδα αποτυχίας $\mu(y)$, λαμβάνουμε υπόψιν ότι η συνάρτηση κατανομής είναι η $H_y(\theta) = P_r(\theta_y \leq \theta)$ ικανοποιώντας :

$$dH_y(\theta) = \frac{e^{-\theta y} dH(\theta)}{\int_0^\infty e^{-\theta y} dH(\theta)}.$$

Προφανώς ,

$$E(\theta_y^k) = \frac{\int_0^\infty \theta^k e^{-\theta y} dH(\theta)}{\int_0^\infty e^{-\theta y} dH(\theta)}.$$

Η παράγωγος της βαθμίδας αποτυχίας θα είναι η εξής :

$$\begin{aligned}\mu'(y) &= -\frac{\int_0^\infty \theta^2 e^{-\theta y} dH(\theta)}{\int_0^\infty e^{-\theta y} dH(\theta)} + \left\{ \frac{\int_0^\infty \theta e^{-\theta y} dH(\theta)}{\int_0^\infty e^{-\theta y} dH(\theta)} \right\}^2 \\ &= -E(\theta_y^2) + \{E(\theta_y)\}^2 = -\text{Var}(\theta_y)\end{aligned}$$

Επομένως $\mu'(y) \leq 0$ και επομένως η συνάρτηση κατανομής έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας δηλαδή η κατανομή είναι DFR.

Το παραπάνω αποτέλεσμα είναι μια ειδική περίπτωση είναι μια ειδική περίπτωση ενός περισσότερο γενικού αποτελέσματος. Επαναφέροντας στην μνήμη μας ότι η συνάρτηση κατανομής της εκθετικής κατανομής $F(y|\theta) = 1 - e^{-\theta y}$ έχει φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας. Μπορεί να δειχθεί χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz εάν :

$$F(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(y|\theta) dH(\theta),$$

όπου $F(y|\theta)$ είναι μια κατανομή φθίνουσας βαθμίδας αποτυχίας και $H(\theta)$ είναι συνάρτηση κατανομής τότε η $F(y)$ είναι φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας .

Η μείξη διατηρεί την ιδιότητα της φθίνουσας βαθμίδας αποτυχίας και επομένως η μείξη μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαδικασία που παράγει κατανομές με παχιές ουρές.

Αντίθετα εάν η X και η Y είναι ανεξάρτητες με κατανομές οι οποίες είναι αύξουσες βαθμίδες αποτυχίας τότε η $X+Y$ έχει κατανομή φθίνουσας βαθμίδας αποτυχίας και η συνέλιξη διατηρεί την ιδιότητα της αύξουσας βαθμίδας αποτυχίας και επομένως μπορεί να θεωρηθεί ως μια διαδικασία η οποία παράγει λεπτότερες ουρές . (Willmot & Lin, 1994).

Παρακάτω θα παρουσιάσουμε μια χρήσιμη προσέγγιση για την ανάλυση της $\mu(y)$:

$$\frac{1}{\mu(y)} = \frac{\bar{F}(y)}{f(y)} = \int_y^\infty \frac{f(x)}{f(x)} dx = \int_0^\infty \frac{f(x+y)}{f(y)} dx.$$

Συνεπώς η συμπεριφορά της $\mu(y)$ μπορεί συχνά να εξακριβωθεί μέσω της εξέτασης της ποσότητας $\frac{f(x+y)}{f(y)}$. Πιο συγκεκριμένα ο λογάριθμος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της $f(y)$ είναι κυρτή συνάρτηση εάν η ποσότητα $\frac{f(x+y)}{f(y)}$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση ως προς y για σταθερό $x \geq 0$ ενώ αντίθετα αν ο λογάριθμος της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της $f(y)$ είναι κοίλη συνάρτηση εάν η ποσότητα $\frac{f(x+y)}{f(y)}$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση ως προς y για σταθερό $x \geq 0$.

Από την άνωθεν σχέση είναι ξεκάθαρο ότι εάν η $f(y)$ είναι κοίλη τότε η $\mu(y)$ είναι φθίνουσα ως προς y και η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ είναι φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας ενώ αντίθετα αν η $f(y)$ είναι κυρτή τότε η $\mu(y)$ είναι αύξουσα ως προς y και η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ είναι αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας.

Η συμπεριφορά των ορίων της κατανομής χρησιμοποιώντας τον κανόνα L' Hospital παρουσιάζεται κάτωθι :

$$\mu(\infty) = \lim_{y \rightarrow \infty} \mu(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f(y)}{F(y)} = - \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{f'(y)}{f(y)}$$

με την προϋπόθεση ότι το όριο είναι καλά ορισμένο και η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι διαφορίσιμη.

2.3 Η βαθμίδα αποτυχίας για την διακριτή μείξη εκθετικών κατανομών

Αριθμητικό παράδειγμα για την μείξη εκθετικών κατανομών:

Δίνεται η ακόλουθη μείξη εκθετικών κατανομών :

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας είναι:

$$f(y) = \frac{1}{2} 3e^{-3y} + \frac{1}{2} 4e^{-4y}$$

όπου εύκολα κανείς μπορεί να διαπιστώσει πως έχουμε δυο εκθετικές κατανομές Exp(3) και Exp(4) με βάρη μείξης $\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}$.

Η συνάρτηση κατανομής της $f(y)$ θα είναι:

$$F(y) = \frac{1}{2} (1 - e^{-3y}) + \frac{1}{2} (1 - e^{-4y})$$

και αντίστοιχα η συνάρτηση δεξιάς ουράς θα είναι :

$$\bar{F}(y) = \frac{1}{2} e^{-3y} + \frac{1}{2} e^{-4y}, \quad y \geq 0$$

Η ένταση θνησιμότητας δίνεται από τον τύπο:

$$\mu(y) = \frac{\frac{1}{2}(3e^{-3y} + 4e^{-4y})}{\frac{1}{2}(e^{-3y} + e^{-4y})}, \quad y > 0,$$

Παραγωγίζοντας την ένταση θνησιμότητας υπολογίζουμε την κάτωθι σχέση:

$$\mu'(y) = \frac{(3e^{-3y} + 4e^{-4y})'(e^{-3y} + e^{-4y}) - (3e^{-3y} + 4e^{-4y})(e^{-3y} + e^{-4y})'}{(e^{-3y} + e^{-4y})^2},$$

$$\mu'(y) = \frac{(-9e^{-3y} - 16e^{-4y})(e^{-3y} + e^{-4y}) - (3e^{-3y} + 4e^{-4y})(-3e^{-3y} - 4e^{-4y})}{(e^{-3y} + e^{-4y})^2},$$

$$\mu'(y) = \frac{-9e^{-6y} - 9e^{-7y} - 16e^{-7y} - 16e^{-8y} + 9e^{-6y} + 12e^{-7y} + 9e^{-7y} + 16e^{-8y}}{(e^{-3y} + e^{-4y})^2},$$

$$\mu'(y) = \frac{-16e^{-7y} + 12e^{-7y}}{(e^{-3y} + e^{-4y})^2},$$

$$\mu'(y) = \frac{-4e^{-7y}}{(e^{-3y} + e^{-4y})^2} < 0.$$

Εφόσον η ποσότητα αυτή είναι αρνητική καταλήγουμε στο ότι $\mu'(y) \leq 0$, $y > 0$.

Επομένως, η συνάρτηση κατανομής της μείξης εκθετικών ανήκει στην κλάση κατανομών DFR (φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Προσέγγιση της κατανομής Pareto από μία μείξη εκθετικών κατανομών

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να προσεγγίσουμε την κατανομή Pareto από μια μείξη εκθετικών κατανομών .

Ένας από τους τρόπους μέσω του οποίου θα προσεγγίσουμε την κατανομή Pareto από μια μείξη εκθετικών την οποία και θα παρουσιάσουμε κάτωθι αποτελεί η μέθοδος των ροπών. Μέσω της εφαρμογής αυτής της μεθόδου θα καταλήξουμε σε μια νέα συνάρτηση μείξης εκθετικών κατανομών όπου θα εξετάσουμε κατά πόσο προσεγγίζει την αρχική μας συνάρτηση της κατανομής Pareto .

Προκειμένου να αξιολογήσουμε το πόσο καλά προσεγγίζεται η κατανομή Pareto από την μείξη εκθετικών θα χρησιμοποιήσουμε πολλά κριτήρια όπως το να συγκρίνουμε τις μεταξύ τους ροπές , το να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της απόλυτης διαφοράς των συναρτήσεων πυκνότητας, κατανομής και δεξιάς ουράς , να εξετάσουμε τις συναρτήσεις πυκνότητας από άποψη μονοτονίας απεικονίζοντάς τις και γραφικά ενώ δυο ακόμη πολύ σημαντικές μέθοδοι αξιολόγησης της προσέγγισης αυτής θα αποτελέσουν η μέθοδος των άνω ποσοστημορίων και της βαθμίδας αποτυχίας.

3.1 ΜΕΙΞΕΙΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

Ορισμός

Η κατανομή μιας μεταβλητής X που ακολουθεί διακριτή μείξη εκθετικών έχει συνάρτηση πυκνότητας η οποία μπορεί να γραφεί :

$$X \sim f_X(x) = \alpha_1 \beta_1 e^{-\beta_1 x} + \alpha_2 \beta_2 e^{-\beta_2 x} + \dots + \alpha_k \beta_k e^{-\beta_k x}$$

και ισχύει : $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, $\beta_i > 0$

- Αν $\alpha_i > 0$ για κάθε i τότε έχουμε μείξη εκθετικών κατανομών.
- Αν $\alpha_i < 0$ για κάποιο i τότε έχουμε συνδυασμό εκθετικών κατανομών.

3.2 Ιδιότητες για τις μείξεις εκθετικών κατανομών

Για τις ροπές :

$$E(X^r) = \alpha_1 E(X_1^r) + \dots + \alpha_k E(X_k^r), \quad r=1,2,\dots$$

Για την ροπογεννήτρια :

$$M_X(t) = \alpha_1 M_{X_1}(t) + \dots + \alpha_k M_{X_k}(t), \quad t < \min\{\beta_1, \dots, \beta_k\}$$

όπου $X_i \sim \text{Exp}(\beta_i)$ για $i = 1, 2, \dots, k$

3.3 Ένα απλό παράδειγμα

Εάν $X \sim f_X(x) = \frac{3}{2}e^{-3x} + \frac{7}{2}e^{-7x}$ τότε για τον υπολογισμό της μέσης τιμής, διακύμανσης και ροπογεννήτριας έχουμε τα εξής :

Αρχικά πρόκειται για μία μείξη δυο εκθετικών κατανομών των:

$$X_1 \sim \text{Exp}(3) \text{ και } X_2 \sim \text{Exp}(7) \text{ με βάρη μείξης } \frac{1}{2} \text{ και } \frac{1}{2}.$$

Για την μέση τιμή: $E(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{6} + \frac{1}{14} = \frac{10}{42} = 0.2380$

Για την διακύμανση: $\text{Var}(X) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{49} = \frac{29}{441} = 0.06576$

Για την ροπογεννήτρια: $M_X(t) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3-t} + \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{7-t}$

3.4 Προσέγγιση της κατανομής Pareto από μία μείξη εκθετικών κατανομών

Προκειμένου να προσεγγίσουμε την κατανομή Pareto από μια μείξη εκθετικών κατανομών θα ακολουθήσουμε μια διαδικασία σύμφωνα με την οποία θα ορίσουμε μια συνεχή μεταβλητή Y η οποία ακολουθεί την κατανομή Pareto με συγκεκριμένες παραμέτρους α και λ . Έπειτα θα ορίσουμε μια άλλη συνεχή μεταβλητή X η οποία ακολουθεί μια μείξη εκθετικών με άγνωστες παραμέτρους.

Εφαρμόζοντας την μέθοδο των ροπών που θα αναλύσουμε παρακάτω θα υπολογίσουμε τις άγνωστες παραμέτρους της μείξης εκθετικών και έπειτα θα εξετάσουμε μέσω διαφόρων κριτηρίων κατά πόσο μέσω της μείξης εκθετικών κατανομών που υπολογίσαμε μπορούμε να προσεγγίσουμε ικανοποιητικά την αρχική κατανομή Pareto.

3.4.1 Μέθοδος Ροπών

Η προσέγγιση της κατανομής Pareto θα επιτευχθεί χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ροπών. Σύμφωνα με αυτή τη μέθοδο θεωρούμε ότι για να είναι δύο κατανομές είναι προσεγγιστικά ίσες είναι λογικό να είναι προσεγγιστικά ίσες και οι ροπές τους.

Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε μια συνεχή τυχαία μεταβλητή Y η οποία ακολουθεί την κατανομή Pareto (α, λ) όπου α, λ σταθερές και γνωστές σε εμάς παράμετροι.

Η συνάρτηση πυκνότητας της Y είναι η εξής :

$$f_Y(y) = \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\lambda+y)^{\alpha+1}} \quad \alpha, \lambda > 0, y > 0.$$

Χρησιμοποιώντας την μέθοδο των ροπών θα προσεγγίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας της Y $f_Y(y)$ από μια μείξη δυο εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας η οποία είναι η εξής :

$$f_X(x) = A\beta_1 e^{-\beta_1 x} + (1-A)\beta_2 e^{-\beta_2 x}.$$

Ο τύπος σύμφωνα με τον οποίο υπολογίζονται οι ροπές κ-τάξης της $Y \sim Pa(\alpha, \lambda)$ είναι ο ακόλουθος : (σχέση 1.3.1)

$$E(Y^k) = \frac{\lambda^k k!}{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k)},$$

όσον αφορά τις ροπές της εκθετικής κατανομής αναφέρουμε τα εξής:

$$E(X) = \frac{1}{\beta}, \quad E(X^2) = \frac{2}{\beta^2}, \quad E(X^3) = \frac{6}{\beta^3}.$$

Λόγω του ότι οι άγνωστες παράμετροι της μείξης εκθετικών κατανομών A, β_1, β_2 είναι τρεις χρειαζόμαστε ένα σύστημα τριών εξισώσεων μέσω του οποίου θα τις υπολογίσουμε. Εξισώνοντας τις ροπές της κατανομής Pareto με τις αντίστοιχες ροπές της εκθετικής κατανομής καταλήγουμε στο εξής σύστημα εξισώσεων.

$$E(Y) = E(X) \Leftrightarrow \frac{\lambda}{\alpha-1} = \frac{A}{\beta_1} + \frac{1-A}{\beta_2},$$

$$E(Y^2) = E(X^2) \Leftrightarrow \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{2A}{\beta_1^2} + \frac{2A}{\beta_2^2},$$

$$E(Y^3) = E(X^3) \Leftrightarrow \frac{6\lambda^3}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)} = \frac{6A}{\beta_1^3} + \frac{6(1-A)}{\beta_2^3}.$$

3.4.2 Παράδειγμα

Θέλουμε να προσεγγίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Pareto από μια μείξη εκθετικών κατανομών.

Έστω ότι έχουμε μια μείξη δύο εκθετικών κατανομών με παραμέτρους $\beta_1, \beta_2 > 0$ και βάρη μείξης τα A και $1 - A$ αντίστοιχα θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή Y ακολουθεί την κατανομή Pareto με παραμέτρους $\alpha=7, \lambda=2$ και γράφουμε $Y \sim \text{Pa}(7,2)$.

Η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y \sim \text{Pa}(7,2)$ είναι η εξής :

$$f_Y(y) = \frac{896}{(2+y)^8}$$

και αντίστοιχα οι ροπές της Y θα είναι :

$$\begin{aligned} E(Y) &= \frac{\lambda}{\alpha-1} = \frac{1}{3}, \\ E(Y^2) &= \frac{2\lambda^2}{(\alpha-1)(\alpha-2)} = \frac{4}{15}, \\ E(Y^3) &= \frac{6\lambda^3}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε την μέθοδο των ροπών και λύνουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων με την βοήθεια του mathematica.

$$\begin{aligned} E(Y) = E(X) &\Leftrightarrow \frac{1}{3} = \frac{A}{\beta_1} + \frac{1-A}{\beta_2}, \\ E(Y^2) = E(X^2) &\Leftrightarrow \frac{4}{15} = \frac{2A}{\beta_1^2} + \frac{2(1-A)}{\beta_2^2}, \\ E(Y^3) = E(X^3) &\Leftrightarrow \frac{2}{5} = \frac{6A}{\beta_1^3} + \frac{6(1-A)}{\beta_2^3}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την σχέση (5) που αναφέρεται στο παράρτημα του mathematica λύνουμε το σύστημα των τριών εξισώσεων σύμφωνα με το οποίο θα έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα :

Οι αποδεκτές λύσεις του παραπάνω συστήματος εξισώσεων είναι οι εξής:

$$x \rightarrow 0.9657424080553996, y \rightarrow 3.132509744559746, z \rightarrow 0.9905422540897492$$

και θέτουμε $A = x, \beta_1 = y, \beta_2 = z$.

Επομένως, $A = 0.97, 1-A = 0.03, \beta_1 = 3.13, \beta_2 = 0.99$

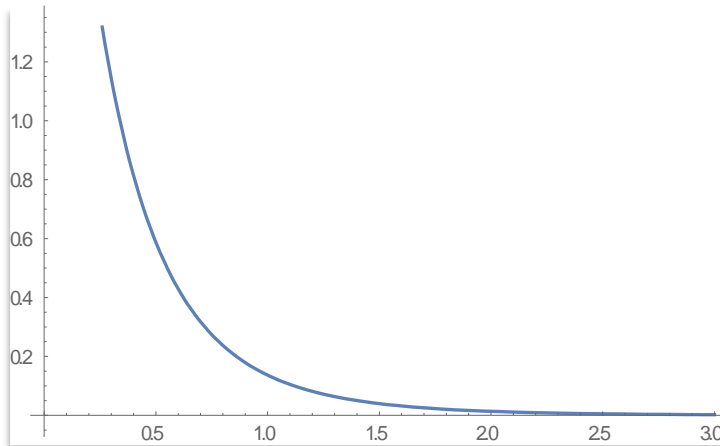
Άρα η συνάρτηση κατανομής για την μείξη εκθετικών θα είναι η εξής :

$$f_X(x) \approx 0.97 * 3.13e^{-3.13x} + 0.03 * 0.99e^{-0.99x} \approx 3.0361e^{-3.13x} + 0.0297e^{-0.99x}, x \geq 0.$$

Γραφικές Παραστάσεις

Διάγραμμα 3.1

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής $\text{Pa}(7,2)$ η οποία είναι η $f_Y(x) = \frac{896}{(2+x)^8}$ στο διάστημα $x \in [0,3]$ παρουσιάζεται κάτωθι:



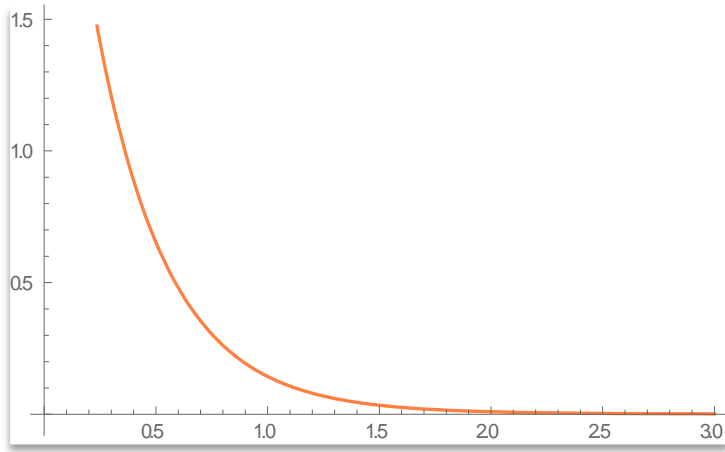
Παρατηρήσεις

Στο διάγραμμα παρατηρείται πως η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Pareto φθίνει με γρήγορο ρυθμό στο διάστημα $x \in [0,1]$.

Στο διάστημα $x \in [1,2]$ η συνάρτηση εξακολουθεί να φθίνει με αργό πλέον ρυθμό τείνοντας στο μηδέν ενώ στο διάστημα $x \in [2,3]$ αγγίζει το μηδέν.

Διάγραμμα 3.2

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας για την μείξη εκθετικών κατανομών $f_X(x) = 3.0361e^{-3.13x} + 0.0297e^{-0.99x}$ στο διάστημα $x \in [0,3]$ παρουσιάζεται κάτωθι:

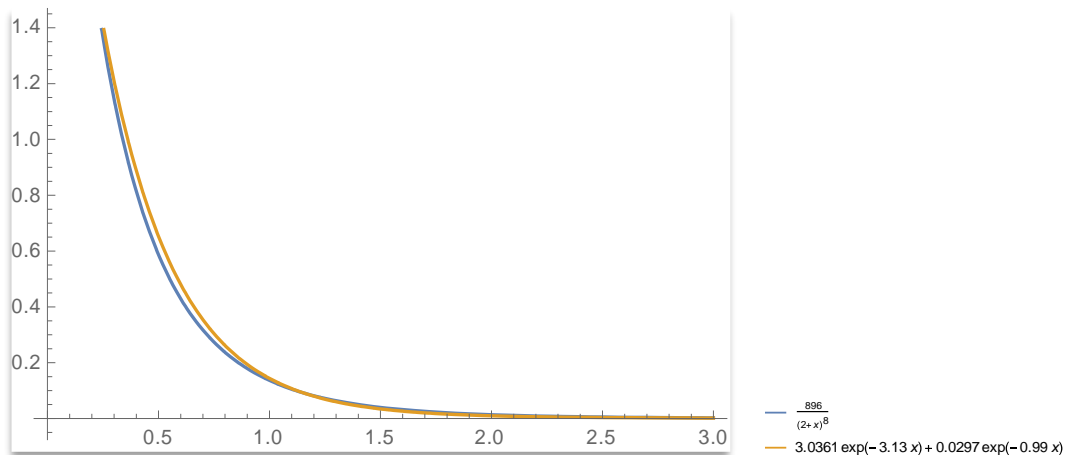


Παρατηρήσεις

Αντίστοιχα αποτελέσματα με την κατανομή Pareto παρατηρούνται για την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της μείξης εκθετικών πράγμα το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι πρόκειται για δυο παρόμοιες κατανομές.

Διάγραμμα 3.3

Οι γραφικές παραστάσεις και των δυο συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας παρουσιάζονται κάτωθι:



Παρατηρήσεις

Με μπλε χρώμα απεικονίζεται η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής Pareto ενώ με πορτοκαλί η συνάρτηση πυκνότητας της μείξης εκθετικών κατανομών.

Εύλογα παρατηρεί κανείς πως πρόκειται για παρόμοιες συναρτήσεις επομένως επαληθεύεται και μέσω των γραφημάτων το ότι μπορούμε να προσεγγίσουμε την κατανομή Pareto με παραμέτρους $\alpha=7$ και $\lambda=2$ μέσω της μείξης εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας $f_X(x) = 3.0361e^{-3.13x} + 0.0297e^{-0.99x}$.

3.5 Μέθοδοι αξιολόγησης της προσέγγισης

Μια καλή μέθοδος αξιολόγησης της προσέγγισης της κατανομής Pareto από μία μείξη εκθετικών προκύπτει εξετάζοντας τις ροπές αντίστοιχα για την κάθε κατανομή.

Επομένως στην ενότητα θα υπολογίσουμε την τέταρτη, πέμπτη και έκτη ροπή για την κατανομή Pareto αλλά και την μείξη εκθετικών και θα τις συγκρίνουμε μεταξύ τους.

Για την τέταρτη ροπή

Για την κατανομή Pareto θα έχω:

$$E(Y^4) = \frac{24\lambda^4}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)} = \frac{384}{360} = 1.066.$$

Ενώ για την μείξη εκθετικών:

$$E(X^4) = 4! \left[0.97 \left(\frac{1}{3.13} \right)^4 + 0.03 \left(\frac{1}{0.99} \right)^4 \right] = 0.992.$$

Για την πέμπτη ροπή

Για την κατανομή Pareto θα έχω:

$$E(Y^5) = \frac{120\lambda^5}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)(\alpha-5)} = \frac{3840}{720} = 5.33.$$

Ενώ για την μείξη εκθετικών:

$$E(X^5) = 5! \left[0.97 \left(\frac{1}{3.13} \right)^5 + 0.03 \left(\frac{1}{0.99} \right)^5 \right] = 4.17.$$

Για την έκτη ροπή

Για την κατανομή Pareto θα έχω:

$$E(Y^6) = \frac{720\lambda^6}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)(\alpha-5)(\alpha-6)} = 64.$$

Ενώ για την μείξη εκθετικών:

$$E(X^6) = 6! \left[0.97 \left(\frac{1}{3.13} \right)^6 + 0.03 \left(\frac{1}{0.99} \right)^6 \right] = 23.69.$$

Παρατηρούμε πως τα αποτελέσματα των ροπών της κατανομής Pareto και της μείξης εκθετικών είναι παρόμοια για την τέταρτη ροπή . Όσον αφορά την πέμπτη παρατηρούμε πως υπάρχει μια πολύ μικρή απόκλιση η οποία όμως μεγαλώνει αρκετά κατά τον υπολογισμό της έκτης ροπής όπου η μέση τιμή για την κατανομή Pareto είναι σχεδόν τριπλάσια από την μέση τιμή της εκθετικής κατανομής. Επομένως μέσω της αξιολόγησης των ροπών καταλήγουμε πως μέχρι και το υπολογισμό της πέμπτης ροπής η κατανομή Pareto (7,2) προσεγγίζεται πολύ καλά από την μείξη εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_X(x) = 3.0361e^{-3.13x} + 0.0297e^{-0.99x}$ σε αντιδιαστολή με τον υπολογισμό της έκτης ροπής όπου εκεί φαίνεται ότι η προσέγγιση δεν είναι καλή.

3.6 Ολοκλήρωμα της απόλυτης διαφοράς

Μια εξίσου σημαντική μέθοδος αξιολόγησης της προσέγγισης μια κατανομής από μια άλλη είναι ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της απόλυτης διαφοράς των συναρτήσεων πυκνότητας τους.

Σύμφωνα με την συνθήκη κανονικοποίησης το ολοκλήρωμα κάθε συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ισούται με 1 . Επομένως βάσει της συνθήκης κανονικοποίησης αλλά και σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα ισχύει το εξής :

$$\int_0^{\infty} |f_Y(x) - f_X(x)| dx \leq \int_0^{\infty} |f_Y(x)| dx + \int_0^{\infty} f_Y(x) dx = 2 \quad (3.6.1)$$

Μια προσέγγιση θεωρείται επιτυχής όταν το άνωθι ολοκλήρωμα παίρνει τιμές κοντά στο 0 ενώ αντιθέτως δεν θεωρείται επιτυχής όταν παίρνει τιμές κοντά στο 2.

Το ολοκλήρωμα της απόλυτης διαφοράς για τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας στο παράδειγμα που εξετάζουμε δίνεται από την ακόλουθη σχέση :

$$\int_0^{\infty} |f_Y(x) - f_X(x)| dx = \int_0^{\infty} \left| \frac{896}{(2+x)^8} - 3.0361e^{-3.13x} - 0.0297e^{-0.99x} \right| dx .$$

Μέσω του mathematica χρησιμοποιώντας την σχέση (6) του παραστήματος υπολογίζουμε την άνωθι σχέση το αποτέλεσμα της οποίας δίνεται κάτωθι :

$$\int_0^{\infty} |f_Y(x) - f_X(x)| dx = \int_0^{\infty} \left| \frac{896}{(2+x)^8} - 3.0361e^{-3.13x} - 0.0297e^{-0.99x} \right| dx = 0.0717311 .$$

Σύμφωνα με τον άνωθι υπολογισμό το ολοκλήρωμα ισούται με 0.0717311 τιμή η οποία είναι πολύ κοντά στο 0 , επομένως η προσέγγιση θεωρείται επιτυχής.

3.7 Μέγιστη διαφορά συναρτήσεων πυκνότητας

Η μέγιστη διαφορά δυο συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας προκύπτει από τον κάτωθι υπολογισμό :

$$\sup_{x \geq 0} |f_Y(x) - f_X(x)| = \sup_{x \geq 0} \left| \frac{896}{(2+x)^8} - 3.0361e^{-3.13x} - 0.0297e^{-0.99x} \right|$$

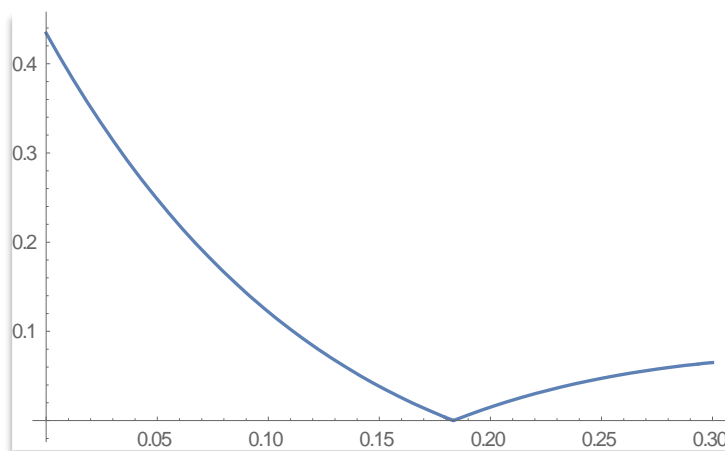
όπου στο $x_0=0$ η τιμή της διαφοράς ισούται με $\left| \frac{896}{256} - 3.0361 - 0.0297 \right| = 0.4342$

Γραφική παράσταση της απόλυτης διαφοράς $|f_Y(x) - f_X(x)|$

Προκειμένου να αναπαραστήσουμε γραφικά την απόλυτη διαφορά των συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας χρησιμοποιούμε στο mathematica την σχέση (7) του παραρτήματος:

Διάγραμμα 3.4

Γραφική αναπαράσταση της απόλυτης διαφοράς $|f_Y(x) - f_X(x)|$ στο διάστημα $x \in [0, 0.3]$.

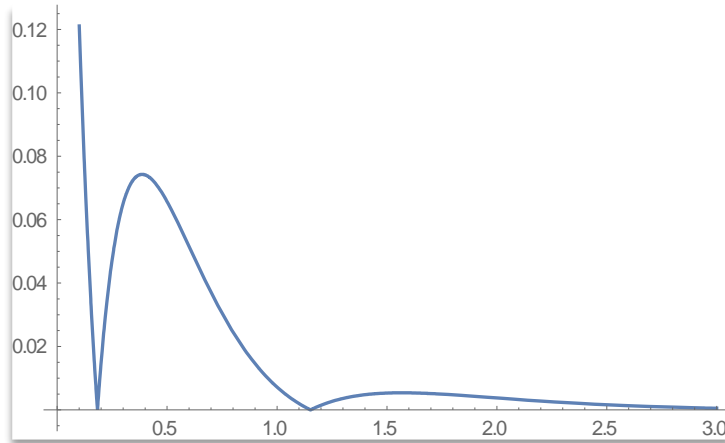


Παρατηρήσεις

Στο άνωθι διάγραμμα παρατηρούμε πως για $x = 0$ η απόλυτη διαφορά $|f_Y(x) - f_X(x)|$ ισούται με 0.4342. Έπειτα για $x \in [0.05, 0.19]$ η απόλυτη διαφορά απεικονίζεται με φθίνουσα πορεία ενώ τέλος για $x \in [0.20, 0.3]$ ακολουθεί ανοδική πορεία.

Διάγραμμα 3.5

Γραφική αναπαράσταση της $|f_Y(x) - f_X(x)|$ στο διάστημα $x \in [0, 3]$.



Παρατηρήσεις

Στο δεύτερο διάγραμμα μπορούμε εύλογα να παρατηρήσουμε και άλλα τοπικά μέγιστα στα σημεία $x_1 \approx 0.5$ και $x_2 \approx 1.5$.

3.8 Η μέγιστη διαφορά των συναρτήσεων κατανομής

Στο σημείο αυτό θα επαναλάβουμε την άνωθι διαδικασία εξετάζοντας αυτήν την φορά την απόλυτη διαφορά των συναρτήσεων κατανομής.

- Η συνάρτηση κατανομής της Pareto δίνεται από τον τύπο: $F(x) = 1 - \left[\frac{2}{2+x}\right]^7$
- Η συνάρτηση κατανομής για την μείξη εκθετικών δίνεται από τον τύπο:

$$F(x) = 1 - 0.97e^{-3.13x} - 0.03e^{-0.99x}.$$

Με βάση τα παραπάνω παίρνουμε ότι :

$$\begin{aligned} \sup_{x \geq 0} |F_Y(x) - F_X(x)| &= \sup_{x \geq 0} \left| 1 - \left[\frac{2}{2+x}\right]^7 - 1 + 0.97e^{-3.13x} + 0.03e^{-0.99x} \right| \\ &= \sup_{x \geq 0} \left| 0.97e^{-3.13x} + 0.03e^{-0.99x} - \left[\frac{2}{2+x}\right]^7 \right|. \end{aligned}$$

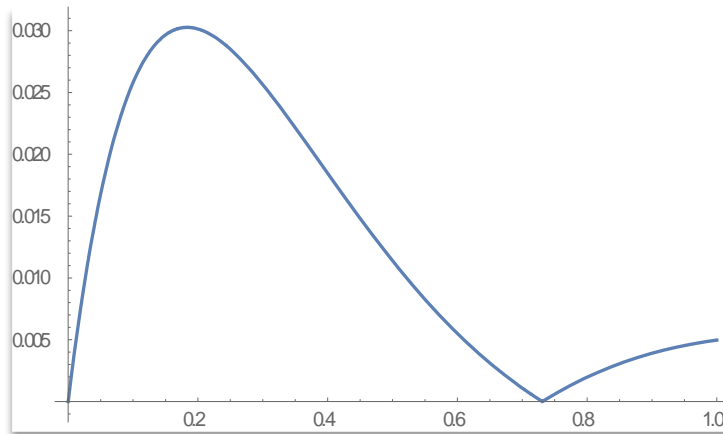
Μέσω του mathematica χρησιμοποιώντας την σχέση (8) στο παράρτημα καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα :

$$\sup_{x \geq 0} |F_Y(x) - F_X(x)| = 0.0302667 \text{ για } x_0 = 0.183333,$$

και πάλι δηλαδή η μέγιστη διαφορά μεταξύ των δυο συναρτήσεων είναι αρκετά μικρή.

Διάγραμμα 3.6

Γραφική αναπαράσταση της απόλυτης διαφοράς των συναρτήσεων κατανομής $|F_Y(x) - F_X(x)|$ στο $x \in [0, 1]$.



Παρατηρήσεις

Στο άνωθι διάγραμμα παρατηρούμε πως για $x \in [0, 0.2]$ η γραφική παράσταση της απόλυτης διαφοράς παρουσιάζει ανοδική πορεία την οποία διαδέχεται η καθοδική πορεία για $x \in [0.2, 0.7]$ ενώ για $x \in [0.7, 1]$ παρατηρείται και πάλι άνοδος. Τέλος μέγιστη τιμή παρουσιάζει στο $x \approx 0.18$ η οποία ισούται με 0.03.

3.9 Μέθοδος άνω ποσοστημορίων

Το άνω ποσοστημόριο μιας κατανομής συμβολίζεται με p_α . Πρόκειται για το σημείο της κατανομής για το οποίο το $(1-\alpha)\%$ των παρατηρήσεων είναι μικρότερες η ίσες από αυτό και το υπόλοιπο $\alpha\%$ των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες η ίσες από αυτό.

Θα εφαρμόσουμε την μέθοδο αυτή για να υπολογίσουμε τα άνω ποσοστημόρια των δύο συναρτήσεων κατανομής και εν συνεχεία το ποσοστό σφάλματος που έχει η προσέγγιση. Συγκεκριμένα, με τον παραπάνω συμβολισμό θα έχουμε :

$$P(Y > p_\alpha) = \alpha,$$

οπότε το p_α είναι το άνω α ποσοστημόριο της κατανομής της τ. μ Y .

Ο υπολογισμός των άνω ποσοστημορίων προκύπτει από την λύση των κάτωθι εξισώσεων και χρησιμοποιώντας τις εντολές (9), (10), (11), (12) που αναφέρονται στο παράρτημα.

$$P(Y > p_{Y,\alpha}) = 1 - F_{Y,p_{Y,\alpha}} \text{ και } P(X > p_{X,\alpha}) = 1 - F_{X,p_{X,\alpha}}.$$

Για $\alpha = 0.001$ έχουμε $F_{X,p_{X,\alpha}} = 0.999$ και $F_{Y,p_{Y,\alpha}} = 0.999$.

Γράφουμε για ευκολία x , y για τα ποσοστημόρια $p_{Y,\alpha}$ και $p_{X,\alpha}$ αντίστοιχα και βρίσκουμε ότι:

$$x \approx 3.45543, y=3.36539 .$$

Αντίστοιχα θα υπολογίσουμε τα y και x για $\alpha=0.005$, $\alpha=0.01$, $\alpha=0.02$ και $\alpha=0.03$.

Η μέθοδος των ποσοστημορίων είναι πολύ σημαντική καθώς έχουμε πλήρη εικόνα όσον αφορά τα άκρα της κατανομής και όσον αφορά τις κατανομές με βαριά ουρά όπως είναι η Pareto θέλουμε να έχουμε μια ικανοποιητική προσέγγιση στο δεξιό άκρο της κατανομής.

Αν θεωρήσουμε ότι τα y και x αντιπροσωπεύουν τις απαιτήσεις μιας επιχείρησης το να αποφευχθούν οι ακραίες τιμές οι οποίες ενδεχομένως θα δημιουργήσουν ζημία σε μια επιχείρηση είναι ζωτικής σημασίας.

Όπως θα δούμε και στον πίνακα εφαρμόζοντας την μέθοδο των ποσοστημορίων και στις δυο κατανομές οι τιμές των y υπερβαίνουν τις τιμές των x για $\alpha=0.001$ $\alpha=0.005$, $\alpha=0.01$, $\alpha=0.02$ και $\alpha=0.03$ με την μεταξύ τους απόκλιση να είναι ελάχιστη γεγονός το οποίο μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η κατανομή Pareto προσεγγίζεται ικανοποιητικά από την μείξη των εκθετικών κατανομών.

Έπειτα από τον υπολογισμό των x και y για τις διάφορες τιμές του α είναι εξίσου σημαντικό το να υπολογίσουμε το ποσοστό σφάλματος που προκύπτει ανάμεσα στις δύο κατανομές .

Όπως εύλογα μπορεί να κατανοήσει κανείς πως όσο μικρότερο είναι το ποσοστό σφάλματος τόσο καλύτερα προσεγγίζεται η μια κατανομή από την άλλη. Ιδανική τιμή του ποσοστού σφάλματος θεωρείται η τιμή η οποία βρίσκεται κοντά στο μηδέν και μπορεί να είναι είτε θετική είτε αρνητική πράγμα το οποίο συνεπάγεται μικρότερο κίνδυνο για μια επιχείρηση .

Το ποσοστό σφάλματος υπολογίζεται με τον εξής τρόπο:

$$\frac{y-x}{y} \% = \frac{3.36539-3.45543}{3.36539} \% = -2.67\%$$

Αντίστοιχα υπολογίζουμε το ποσοστό σφάλματος για $\alpha=0.005$, $\alpha=0.01$, $\alpha=0.02$ και $\alpha=0.03$ και παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στον κάτωθι πίνακα .

α	$F_x(x)$	$F_y(y)$	x	y	Ποσοστό σφάλματος
0.001	0.999	0.999	3.45543	3.36539	-2.67%
0.005	0.995	0.995	2.11368	2.26332	6.6%
0.01	0.99	0.99	1.71582	1.8614	7.8%
0.02	0.98	0.98	1.39188	1.49736	7.04%
0.03	0.97	0.97	1.22353	1.30053	5.9%

Υπολογίζοντας τις τετμημένες x, y των κατανομών παρατηρούμε πως οι τιμές τους διαφέρουν ελάχιστα .

Το ποσοστό σφάλματος ισούται με -2.67% για $\alpha=0.001$ η οποία αποτελεί και την ελάχιστη τιμή του ενώ για $\alpha=0.005$ αυξάνεται στο 6.6% . Εν συνεχεία για $\alpha=0.01$ παίρνει την μέγιστη τιμή του η οποία ανέρχεται σε 7.8%. Τέλος για $\alpha=0.02$ και $\alpha=0.03$ το ποσοστό σφάλματος αρχίζει να μειώνεται.

Στην πράξη και συγκεκριμένα όσον αφορά τις ασφαλιστικές εταιρίες και χρηματοοικονομικούς οργανισμούς σκοπός είναι η ελαχιστοποίηση ακόμα και ο μηδενισμός του ποσοστού σφάλματος σύμφωνα με το οποίο θα είναι σχεδόν απίθανο ένας οργανισμός η επιχείρηση να έρθουν αντιμέτωποι με κίνδυνους που δεν έχουν προβλέψει και είναι ικανοί να επηρεάσουν την βιωσιμότητά της .

3.10 Κριτήριο της βαθμίδας αποτυχίας

Ένα άλλο κριτήριο που θα χρησιμοποιήσουμε προκειμένου να αξιολογήσουμε το πόσο καλή είναι μια προσέγγιση προκύπτει από τον υπολογισμό και την σύγκριση της βαθμίδας αποτυχίας .

Χρησιμοποιώντας την σχέση (2.1.1) θα υπολογίσουμε την βαθμίδα αποτυχίας για την κατανομή Pareto αλλά και την μείξη των εκθετικών κατανομών που προκύπτει.

Για την κατανομή Pareto η βαθμίδα αποτυχίας θα είναι η εξής :

Υπολογίζουμε πρώτα την συνάρτηση δεξιάς ουράς για την κατανομή Pareto(7,2) η οποία ισούται με $\overline{F}(y) = \frac{128}{(2+y)^7}$ και επομένως $\mu_y(y) = \frac{f_y(y)}{\overline{F}_y(y)} = \frac{7}{(2+y)}$.

Αντίστοιχα υπολογίζουμε την βαθμίδα αποτυχίας για την μείξη των εκθετικών κατανομών η οποία θα είναι :

$$\mu_x(y) = \frac{f_x(y)}{\overline{F}_x(y)} = \frac{3.0361e^{-3.13y} + 0.0297e^{-0.99y}}{0.97e^{-3.13y} + 0.03e^{-0.99y}} .$$

Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας όπου υπολογίσαμε την βαθμίδα αποτυχίας $\mu(y)$ για διάφορες τιμές του y για τις δυο κατανομές .

	0	1	2	3	4
$\mu_y(y)$	3.5	2.333	1.75	1.4	1.167
$\mu_x(y)$	3.0698	2.68455	1.65167	1.09705	1.00318
Διαφορά βαθμίδας αποτυχίας	0.4302	-0.35155	0.09833	0.30295	0.16382

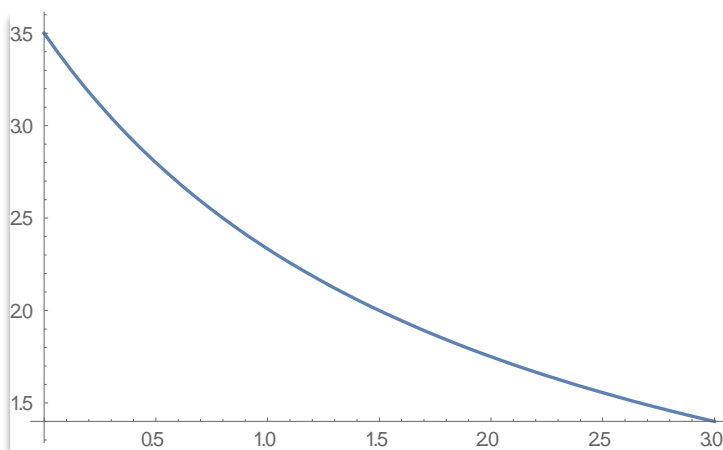
Σύμφωνα με τον άνωθι πίνακα και συγκρίνοντας τα αποτελέσματα και για τις δύο κατανομές παρατηρούμε πως για τις διάφορες τιμές του y η βαθμίδα αποτυχίας δεν διαφέρει σημαντικά.

Η βαθμίδα αποτυχίας παίρνει την μέγιστη τιμή της και στις δυο κατανομές για $y=0$ και ισούται με 3.5 στην κατανομή Pareto ενώ στην μείξη εκθετικών είναι ίση με 3.0698. Επίσης η βαθμίδα αποτυχίας παίρνει την ελάχιστη τιμή της στον πίνακα και στις δυο κατανομές για $y=4$ εφόσον είναι φθίνουσα συνάρτηση.

Γραφικές παραστάσεις

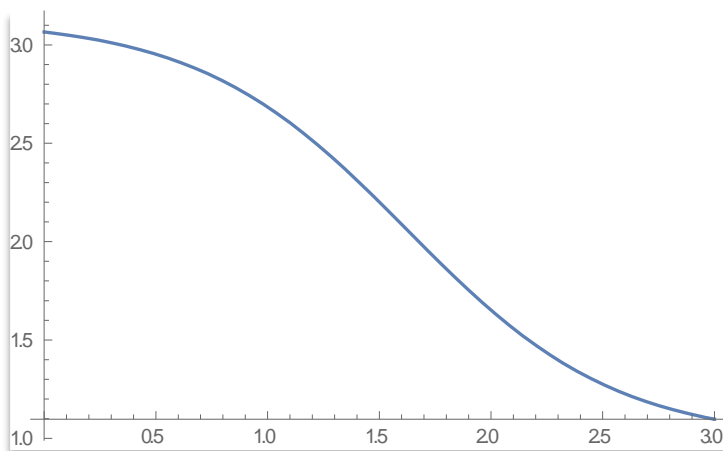
Διάγραμμα 3.7

Γραφική αναπαράσταση της βαθμίδας αποτυχίας $\mu_y(y)$ της κατανομής Pareto για $y \in [0,3]$.



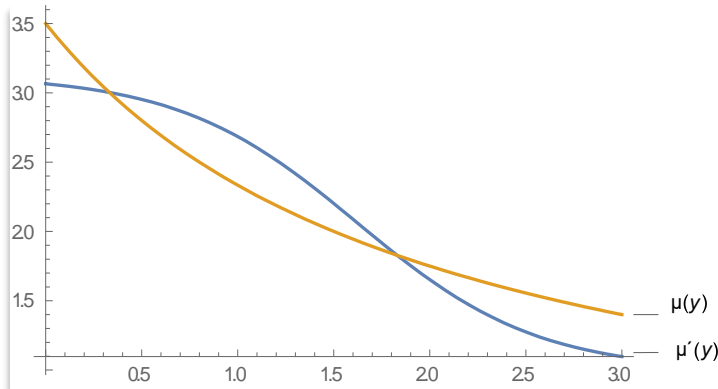
Διάγραμμα 3.8

Γραφική αναπαράσταση της βαθμίδας αποτυχίας $\mu_x(y)$ της μείξης εκθετικών για $y \in [0,3]$.



Διάγραμμα 3.9

Γραφική αναπαράσταση των βαθμίδων αποτυχίας $\mu(y)$ και $\mu'(y)$ στο διάστημα $y \in [0,3]$.



Παρατηρήσεις

Η διαγραμματική απεικόνιση των δυο βαθμίδων αποτυχίας $\mu_Y(y)$ και $\mu_X(y)$ παρουσιάζει διαφορά χωρίς όμως οι τιμές που παίρνουν και οι δυο συναρτήσεις να αποκλίνουν σημαντικά. Πιο συγκεκριμένα πρόκειται για δύο φθίνουσες συναρτήσεις καθώς όσο αυξάνεται η τιμή της παραμέτρου y παίρνουν όλο και μικρότερα αποτελέσματα με την κατανομή Pareto να τείνει στο μηδέν και την εκθετική σε μια σταθερά.

Επιπρόσθετα εύλογα μπορούμε να δούμε πως για $y \in [0,0.5]$ η $\mu_Y(y)$ βρίσκεται πάνω από την $\mu_X(y)$. Εν συνεχεία για $y \in [0.5,1.75]$ η $\mu_X(y)$ είναι μεγαλύτερη από την $\mu_Y(y)$ με αποτέλεσμα να βρίσκεται διαγραμματικά από πάνω ενώ για $y \in [2,3]$ η $\mu_Y(y)$ παίρνει μεγαλύτερες τιμές. Ακόμη παρατηρούμε πως οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται σε δύο σημεία τα οποία είναι το $y \approx 0.5$ και το $y \approx 2$. Σύμφωνα με τα άνωθι αποτελέσματα θα μπορούσαμε να πούμε ότι η βαθμίδα αποτυχίας των δύο κατανομών είναι αρκετά κοντά, τουλάχιστον για τις τιμές του $x \in [0,3]$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ (EQUILIBRIUM DISTRIBUTION)

Σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να ασχοληθούμε με μια σημαντική έννοια στην θεωρία χρεοκοπίας αλλά και σε άλλους τομείς της αναλογιστικής επιστήμης η οποία ονομάζεται κατανομή ισορροπίας, που αντιστοιχεί σε μια συγκεκριμένη κατανομή πιθανότητας.

Η έννοια της κατανομής ισορροπίας εισήχθη αρχικά από τον Cox (1962) ως η ασυμπτωτική κατανομή των χρόνων επαναλαμβανόμενης ή οπίσθιας επανάληψης σε μια διαδικασία ανανέωσης (forward and backward recurrence times).

Από τότε έχουν δοθεί διάφορες ερμηνείες όπως για το ότι πρόκειται για την κατανομή προϊόντος δυο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών όπου η μια μεταβλητή είναι μεροληπτική (size biased) και η άλλη ομοιόμορφη (Cox και Lewis, 1966), όπως επίσης για το ότι είναι μια σταθμισμένη κατανομή (Jain et. Al 1989).

Οι κατανομές ισορροπίας χρησιμοποιούνται σε πολλούς τομείς και οι εφαρμογές τους ποικίλουν. Πιο συγκεκριμένα περιλαμβάνουν τους τομείς του χαρακτηρισμού των κατανομών (Gupta, 1979), κριτήρια γήρανσης (Deshpande, 1986) ανάλυση εισοδήματος (Kleiber και Kotz, (2003), μελέτες διάρκειας ζωής (Blumenthal, 1967), (Scheaffer, 1972), προβλήματα εκτίμησης σε μελέτες επιβίωσης (Zelen, 1974), ουρές και ασφάλειες (Denuit et al., 1998), εφαρμογές στην αξιοπιστία (Gupta, 2007) αλλά και ακόμη έχουν συζητηθεί εφαρμογές της κατανομής ισορροπίας σε μοντέλα ασφαλιστικών απαιτήσεων (Willmot et al., 2005).

Ορισμός 4.1

Σύμφωνα με το βιβλίο των Willmot & Lin (2001) μπορούμε να διαιρέσουμε την σχέση (2.1.4) με $E(Y)$ για να μας δώσει :

$$E(Y) = \int_0^{\infty} \{\bar{F}(y)/E(Y)\} dy = 1$$

από το οποίο συνεπάγεται ότι η $f_1(y) = \bar{F}(y)/E(Y)$ αποτελεί συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (ακόμη και αν η $F(y)$ δεν είναι απόλυτα συνεχής).

Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής :

$$F_1(y) = 1 - \bar{F}_1(y) = \int_0^y \{\bar{F}(x)/E(Y)\} dx, \quad y \geq 0 \quad (4.1.1)$$

ονομάζεται κατανομή ισορροπίας της $F(y)$.

Η νιοστή ροπή προκύπτει ολοκληρώνοντας κατά μέλη

$$\int_0^{\infty} y^n \frac{\bar{F}(y)}{E(Y)} dy = \frac{y^{n+1}\bar{F}(y)}{(n+1)E(Y)} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \frac{y^{n+1}dF(y)}{(n+1)E(Y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y^{n+1}\bar{F}(y)}{(n+1)E(Y)} + \int_0^{\infty} \frac{y^{n+1}dF(y)}{(n+1)E(Y)}.$$

Στην συνέχεια σύμφωνα με τους Willmot και Lin (2001),

$$0 \leq y^{n+1}\bar{F}(y) = y^{n+1} \int_0^y dF(x) \leq \int_y^{\infty} x^{n+1}dF(x).$$

Επομένως εάν $E(Y^{n+1}) = \int_0^{\infty} x^{n+1}dF(x) < \infty,$

προκύπτει ότι $0 \leq \lim_{y \rightarrow \infty} y^{n+1}\bar{F}(y) \leq \lim_{y \rightarrow \infty} \int_y^{\infty} x^{n+1}dF(x) = 0,$

Καθώς ισχύει ότι $\lim_{y \rightarrow \infty} y^{n+1}\bar{F}(y) = 0$ και για $n > 0$

$$\int_0^{\infty} y^n dF_1(y) = \frac{E(Y^{n+1})}{(n+1)E(Y)}. \quad (4.1.2)$$

Για $n=1$ ο μέσος της κατανομής ισορροπίας δίνεται από την κάτωθι σχέση :

$$\int_0^{\infty} y dF_1(y) = \frac{E(Y^2)}{2E(Y)}. \quad (4.1.3)$$

Τέλος υπάρχει μια χρήσιμη ταυτότητα η οποία περιλαμβάνει την συνάρτηση κατανομής $F_1(y)$ αλλά και την συνάρτηση κατανομής της δεξιάς ουράς $\bar{F}_1(y)$.

Για $y > 0$ έχουμε : $\int_y^{\infty} x dF(x) = -x\bar{F}(x) \Big|_y^{\infty} + \int_y^{\infty} \bar{F}(x) dx.$

Όπως είναι γνωστό $E(Y) < \infty$ συνεπάγεται ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} x\bar{F}(x) = 0$ επομένως

$$\int_y^{\infty} x dF(x) = y\bar{F}(y) + E(Y)\bar{F}_1(y), y \geq 0. \quad (4.1.4)$$

Πολλές φορές είναι βολικό να λύσουμε ως προς $\bar{F}_1(y)$ και επομένως θα καταλήξουμε στην εξής σχέση :

$$\bar{F}_1(y) = \int_y^{\infty} \frac{(x-y)dF(x)}{E(Y)}, \quad y \geq 0. \quad (4.1.5)$$

4.2 Υπολογισμός της κατανομής ισορροπίας

Στην ενότητα αυτή θα υπολογίσουμε την κατανομή ισορροπίας για την κατανομή Pareto και την μείξη εκθετικών κατανομών και θα τις συγκρίνουμε μεταξύ τους κάνοντας χρήση των κριτηρίων που χρησιμοποιήσαμε στο τρίτο κεφάλαιο.

Όπως αναφέραμε και άνωθεν ο τύπος σύμφωνα με τον οποίο θα υπολογίσουμε την κατανομή ισορροπίας είναι ο εξής :

$$F_1(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy.$$

Για την τυχαία μεταβλητή $Y \sim \text{Pa}(7,2)$ υπολογίζουμε την κατανομή ισορροπίας χρησιμοποιώντας το mathematica ως εξής :

Ορίζουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της $Y \sim \text{Pa}(7,2)$

$$f(y) = \frac{896}{(2+y)^8}$$

Έπειτα υπολογίζουμε την μέση τιμή μ της $Y \sim \text{Pa}(7,2)$ από τον τύπο :

$$\mu = \text{Integrate}[y * f[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}] = \frac{1}{3}$$

Εν συνεχεία βρίσκουμε την συνάρτηση κατανομής και την συνάρτηση δεξιάς ουράς της $Y \sim \text{Pa}(7,2)$. Συγκεκριμένα,

$$F(x) = 1 - \frac{128}{(2+x)^7} \text{ και } \bar{F}(x) = 1 - F(x) = \frac{128}{(2+x)^7}.$$

Τέλος υπολογίζουμε την κατανομή ισορροπίας αλλά και την δεξιά ουρά της κατανομής ισορροπίας για την $\text{Pa}(7,2)$ μέσω του mathematica χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (13), (14) του Παραρτήματος :

$$F_{1y}(x) = 3\left(\frac{1}{3} - \frac{64}{3(2+x)^6}\right) \text{ και } \bar{F}_{1y}(x) = \frac{64}{(2+x)^6}.$$

Επομένως η κατανομή ισορροπίας της Pareto είναι η εξής :

$$F_{1y}(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy = 1 - \frac{64}{(2+x)^6}. \quad (4.2.1)$$

Αντίστοιχα θα υπολογίσουμε την κατανομή ισορροπίας της μεταβλητής X η οποία ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών .

Για την τυχαία μεταβλητή X η οποία ακολουθεί μείξη εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f_X(x) = 0.97 * 3.13e^{-3.13x} + 0.03 * 0.99e^{-0.99x} = 3.0361e^{-3.13x} + 0.0297e^{-0.99x}$$

υπολογίζουμε την κατανομή ισορροπίας χρησιμοποιώντας το mathematica.

Έπειτα υπολογίζουμε την μέση τιμή μ της X και βρίσκουμε ότι :

$$\mu = 0.340207$$

Εν συνεχεία βρίσκουμε την συνάρτηση κατανομής και την συνάρτηση δεξιάς ουράς της X .

$$F(x) = 1 - 0.97e^{-3.13x} - 0.03e^{-0.99x},$$

Συνεπώς,

$$\bar{F}(x) = 0.97e^{-3.13x} + 0.03e^{-0.99x}.$$

Τέλος υπολογίζουμε την κατανομή ισορροπίας αλλά και την δεξιά ουρά της κατανομής ισορροπίας για την X :

$$F_{1x}(x) = 2.93939(0.340207 - 0.309904e^{-3.13x} - 0.030303e^{-0.99x})$$

$$\bar{F}_{1x}(x) = 2.22045 \times 10^{-16} + 0.9109286e^{-3.13x} + 0.0890723e^{-0.99x}$$

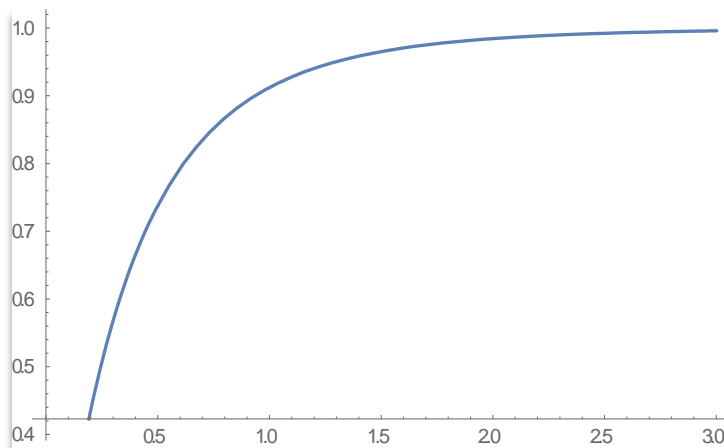
Επομένως η κατανομή ισορροπίας για την μείξη εκθετικών κατανομών είναι η εξής :

$$F_{1x}(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x \bar{F}(y) dy = 1 - 0.910928e^{-3.13x} - 0.0890723e^{-0.99x}.$$

Γραφικές Παραστάσεις

Διάγραμμα 4.1

Γραφική αναπαράσταση της κατανομής ισορροπίας για την Pareto $F_{1y}(x) = 1 - \frac{64}{(2+x)^6}$ στο διάστημα $y \in [0,3]$:

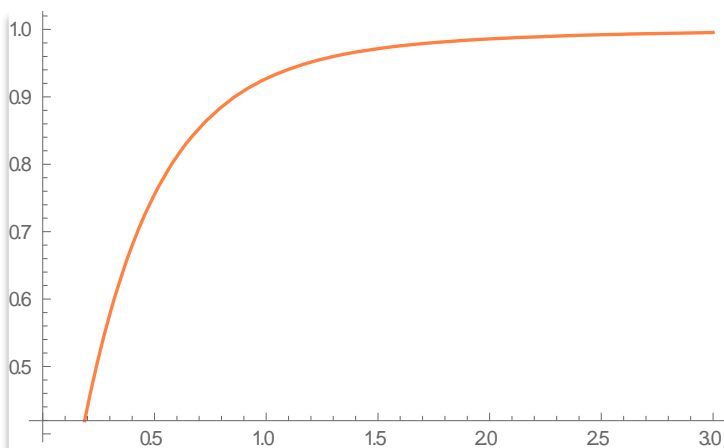


Παρατηρήσεις

Η κατανομή ισορροπίας μεταβάλλεται με γρήγορο ρυθμό στο διάστημα $y \in [0,1.5]$ ενώ έπειτα όσο αυξάνονται οι τιμές του $y \in [1.5,3]$ παραμένει σχεδόν σταθερή.

Διάγραμμα 4.2

Γραφική αναπαράσταση της κατανομής ισορροπίας για την μίξη των εκθετικών κατανομών $F_{1x}(x) = 1 - 0.910928e^{-3.13x} - 0.0890723e^{-0.99x}$ στο διάστημα $x \in [0,3]$:

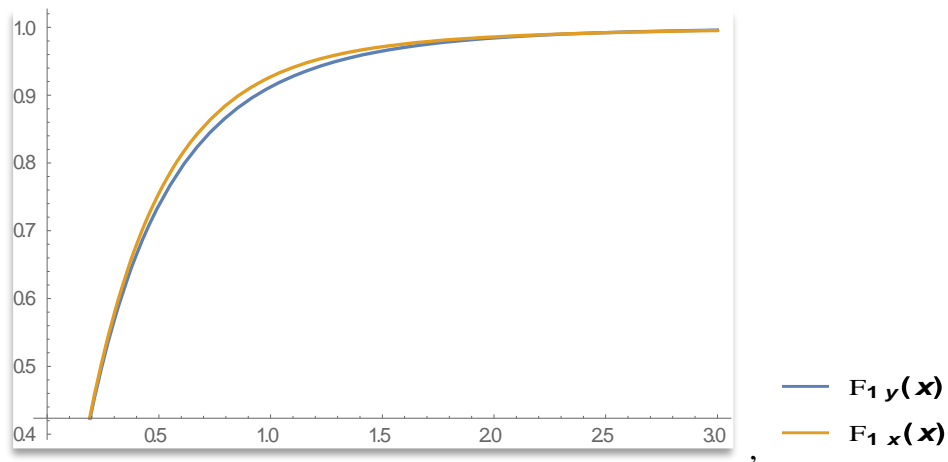


Παρατηρήσεις

Αντίστοιχα αποτελέσματα με την κατανομή ισορροπίας της Pareto παρατηρούμε και για την κατανομή ισορροπίας της μείξης εκθετικών .

Διάγραμμα 4.3

Οι γραφικές παραστάσεις και των δύο συναρτήσεων κατανομής ισορροπίας στο διάστημα $x \in [0,3]$ παρουσιάζονται κάτωθι :

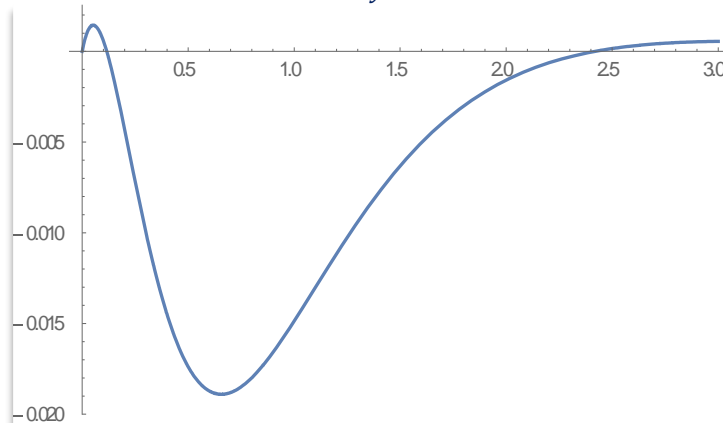


Παρατηρήσεις

Εύλογα παρατηρεί κανείς πως οι συναρτήσεις κατανομών ισορροπίας είναι παρόμοιες με την $F_{1x}(x)$ να παίρνει ελάχιστα πιο μεγάλες τιμές από την $F_{1y}(x)$ στο διάστημα $x \in [0.5, 1.5]$. Τέλος είναι φανερό πως μπορούμε να προσεγγίσουμε με επιτυχία την κατανομή ισορροπίας της Pareto $F_{1y}(x)$ μέσω τη κατανομής ισορροπίας της μείξης εκθετικών $F_{1x}(x)$.

Διάγραμμα 4.4

Γραφική αναπαράσταση της διαφοράς $F_{1y}(x) - F_{1x}(x)$ στο διάστημα $x \in [0,3]$.



Σύμφωνα με το άνωθι διάγραμμα παρατηρούμε ότι για τιμές των $x \in [0,2]$ η συνάρτηση της διαφοράς παρουσιάζει αρνητικές τιμές με ελάχιστη τιμή την -0.019 όταν το $x = 0.75$.

4.3 Συναρτήσεις πυκνότητας των κατανομών ισορροπίας

Μέσω του mathematica (βλέπε Παράρτημα, σχέση (15)) και κάνοντας χρήση της παραγώγου της συνάρτησης κατανομής της Pareto θα υπολογίσουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής ισορροπίας της Pareto.

$$F_{1y}(x) = 1 - \frac{64}{(2+x)^6} .$$

Επομένως $f_{1y}(x) = \frac{384}{(2+x)^7}$ η οποία αποτελεί την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Pareto (6,2).

Αντίστοιχα υπολογίζουμε την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής ισορροπίας για την μείξη εκθετικών :

$$F_{1x}(x) = 1 - 0.910928e^{-3.13x} - 0.0890723e^{-0.99x} .$$

Επομένως

$$f_{1x}(x) = 2.8512109e^{-3.13x} + 0.0881817936e^{-0.99x}$$

Η οποία αποτελεί την συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας δυο μίξεων εκθετικών κατανομών με βάρη μείξης τα $\alpha = 0.91093$ και $\beta = 0.08907$ όπου $\alpha + \beta = 0.91093 + 0.08907 = 1$.

4.4 Μέθοδοι αξιολόγησης

Για την πρώτη ροπή

Για την κατανομή Pareto θα έχουμε:

$$E_1(Y) = \frac{\lambda}{\alpha - 1} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

Ενώ για την μείξη εκθετικών:

$$E_1(X) = 0.91093 * \frac{1}{3.13} + 0.08907 * \frac{1}{0.99} = 0.2910 + 0.08996 = 0.38096.$$

Για την δεύτερη ροπή

Για την κατανομή Pareto θα έχουμε:

$$E_1(Y^2) = \frac{2\lambda^2}{(\alpha - 1)(\alpha - 2)} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4.$$

Ενώ για την μείξη εκθετικών:

$$E_1(X^2) = 2! \left[0.91093 \cdot \left(\frac{1}{3.13}\right)^2 + 0.08907 \cdot \left(\frac{1}{0.99}\right)^2 \right] = 0.36772.$$

Για την τρίτη ροπή

Για την κατανομή Pareto θα έχουμε:

$$E_1(Y^3) = \frac{6\lambda^3}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)} = \frac{48}{60} = 0.8.$$

Ενώ για την μείξη εκθετικών :

$$E_1(X^3) = 3! \left[0.91093 \cdot \left(\frac{1}{3.13}\right)^3 + 0.08907 \cdot \left(\frac{1}{0.99}\right)^3 \right] = 0.7290.$$

Για την τέταρτη ροπή

Για την κατανομή Pareto θα έχουμε:

$$E_1(Y^4) = \frac{24\lambda^4}{(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)} = \frac{384}{120} = 3.2.$$

Ενώ για την μείξη εκθετικών :

$$E_1(X^4) = 4! \left[0.91093 \cdot \left(\frac{1}{3.13}\right)^4 + 0.08907 \cdot \left(\frac{1}{0.99}\right)^4 \right] = 2.45316.$$

Σύμφωνα με τα άνωθι αποτελέσματα παρατηρούμε πως οι τιμές των ροπών για την κατανομή ισορροπίας της Pareto δεν διαφέρουν σημαντικά από τις αντίστοιχες τιμές των ροπών της κατανομής ισορροπίας της μείξης των εκθετικών.

Παρακάτω παρατίθεται ο πίνακας όπου παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των ροπών για την αρχική κατανομή και την κατανομή ισορροπίας .

Εδώ ο δείκτης 1 για την μέση τιμή , δηλαδή το σύμβολο E, δηλώνει ότι αναφερόμαστε στην κατανομή ισορροπίας

Ροπές	$E(Y^k)$	$E(X^k)$	$E_1(Y^k)$	$E_1(X^k)$
$\kappa=1$	0.333	0.340	0.4	0.38096
$\kappa=2$	0.266	0,259	0.4	0.36772
$\kappa=3$	0.4	0.3753	0.8	0.7290
$\kappa=4$	1.066	0.992	3.2	2.45316

Στον άνωθι πίνακα παρατηρούμε αρχικά πως οι τιμές των ροπών είναι μεγαλύτερες κάνοντας χρήση της κατανομής ισορροπίας.

Για την αρχική κατανομή όπως είδαμε και στο τρίτο κεφάλαιο και συγκεκριμένα στην ενότητα (3.4.3) οι ροπές της κατανομής Pareto είναι περίπου ίδιες με τις ροπές της μείξης εκθετικών .

Σε αντιδιαστολή με την αρχική μας κατανομή κάνοντας χρήση της κατανομής ισορροπίας παρατηρούμε πως η απόκλιση ανάμεσα στις δυο κατανομές μεγαλώνει χωρίς όμως οι τιμές να διαφέρουν σημαντικά.

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα που παρατίθενται στον πίνακα οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι η κατανομή Pareto(7,2) προσεγγίζεται καλύτερα από την μείξη των εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_X(x) = 3.0361e^{-3.13x} + 0.0297e^{-0.99x},$$

από ότι η κατανομή Pareto (6,2) η οποία προσεγγίζεται από την μείξη των εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{1x}(x) = 0.91093*3.13e^{-3.13x} + 0.08907*0.99e^{-0.99x}.$$

4.5 Ολοκλήρωμα της απόλυτης διαφοράς

Επαναλαμβάνουμε την μέθοδο που εφαρμόσαμε στο τρίτο κεφάλαιο αντίστοιχα και για τις κατανομές ισορροπίας. Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με την συνθήκη κανονικοποίησης το ολοκλήρωμα κάθε συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας ισούται με 1. Επομένως βάσει της συνθήκης κανονικοποίησης αλλά και σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα ισχύει το εξής :

$$\int_0^{\infty} |f_Y(x) - f_X(x)| dx \leq \int_0^{\infty} |f_Y(x)| dx + \int_0^{\infty} f_Y(x) dx = 2.$$

Μια προσέγγιση θεωρείται επιτυχής όταν το άνωθι ολοκλήρωμα παίρνει τιμές κοντά στο 0 ενώ αντιθέτως δεν θεωρείται επιτυχής όταν παίρνει τιμές κοντά στο 2.

Το ολοκλήρωμα της απόλυτης διαφοράς για τις συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας δίνεται από την ακόλουθη σχέση :

$$\int_0^{\infty} |f_{1y}(x) - f_{1x}(x)| dx = \int_0^{\infty} \left| \frac{384}{(2+x)^7} - 2.85121e^{-3.13x} - 0.0881793e^{-0.99x} \right| dx.$$

Μέσω του mathematica υπολογίζουμε την άνωθι σχέση και καταλήγουμε στο εξής αποτέλεσμα :

Το ολοκλήρωμα της απόλυτης διαφοράς των συναρτήσεων πυκνότητας για τις κατανομές ισορροπίας ισούται με:

$$\int_0^{\infty} |f_{1y}(x) - f_{1x}(x)| dx = \int_0^{\infty} \left| \frac{384}{(2+x)^7} - 2.85121e^{-3.13x} - 0.0881793e^{-0.99x} \right| dx = 0.04186.$$

Σύμφωνα με το συγκεκριμένο κριτήριο η προσέγγιση της κατανομής ισορροπίας της Pareto από την κατανομή ισορροπίας της μείξης των εκθετικών κατανομών θεωρείται επιτυχής καθώς η τιμή της απόλυτης διαφοράς του ολοκληρώματος πλησιάζει αρκετά στο μηδέν και μάλιστα περισσότερο από ότι η τιμή της απόλυτης διαφοράς που υπολογίσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο .

4.6 Μέγιστη διαφορά συναρτήσεων πυκνότητας

Η μέγιστη διαφορά δυο συναρτήσεων πυκνότητας πιθανότητας προκύπτει από τον κάτωθι υπολογισμό :

$$\sup_{x \geq 0} |f_{1y}(x) - f_{1x}(x)| = \sup_{x \geq 0} \left| \frac{384}{(2+x)^7} - 2.85121e^{-3.13x} - 0.881793e^{-0.99x} \right|.$$

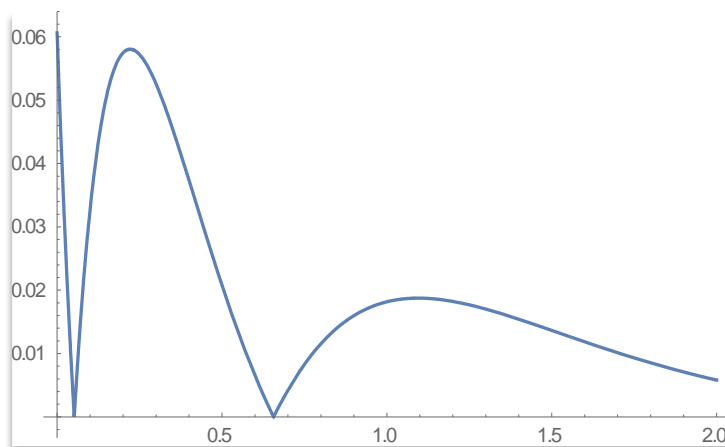
όπου στο $x_0=0$, η μέγιστη τιμή της απόλυτης διαφοράς ισούται με :

$$\left| \frac{384}{128} - 2.85121 - 0.881793 \right| = 0.733.$$

Γραφικές παραστάσεις

Διάγραμμα 4.5

Γραφική αναπαράσταση της απόλυτης διαφοράς $|f_{1y}(x) - f_{1x}(x)|$ στο διάστημα $x \in [0, 2]$



4.7 Μέγιστη διαφορά συναρτήσεων κατανομής

Σε αυτήν την ενότητα θα υπολογίσουμε την μέγιστη διαφορά ανάμεσα στην συνάρτηση κατανομής Pareto και στην μείξη εκθετικών. Αυτό θα επιτευχθεί υπολογίζοντας το supremum η αλλιώς το ελάχιστο άνω όριο της απόλυτης διαφοράς των δυο κατανομών.

Η μέγιστη διαφορά δυο συναρτήσεων κατανομής προκύπτει από τον κάτωθι υπολογισμό :

- Η συνάρτηση κατανομής της Pareto δίνεται από τον τύπο $F(x) = 1 - \left[\frac{2}{2+x}\right]^6$
- Η συνάρτηση κατανομής για την μείξη εκθετικών δίνεται από τον τύπο :

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \gamma(1 - e^{-ax}) + (1 - \gamma)(1 - e^{-\beta x}) \\
 &= 0.91093(1 - e^{-3.13x}) + 0.08907(1 - e^{-0.99x}) \\
 &= 0.91093 - 0.91093e^{-3.13x} + 0.08907 - 0.08907e^{-0.99x} \\
 &= 1 - 0.91093e^{-3.13x} - 0.08907e^{-0.99x}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sup_{x \geq 0} |F_{1Y}(x) - F_{1X}(x)| &= \sup_{x \geq 0} \left| 1 - \left[\frac{2}{2+x}\right]^6 - 1 + 0.91093e^{-3.13x} + 0.08907e^{-0.99x} \right| \\
 &= \sup_{x \geq 0} \left| 0.91093e^{-3.13x} + 0.08907e^{-0.99x} - \left[\frac{2}{2+x}\right]^6 \right|
 \end{aligned}$$

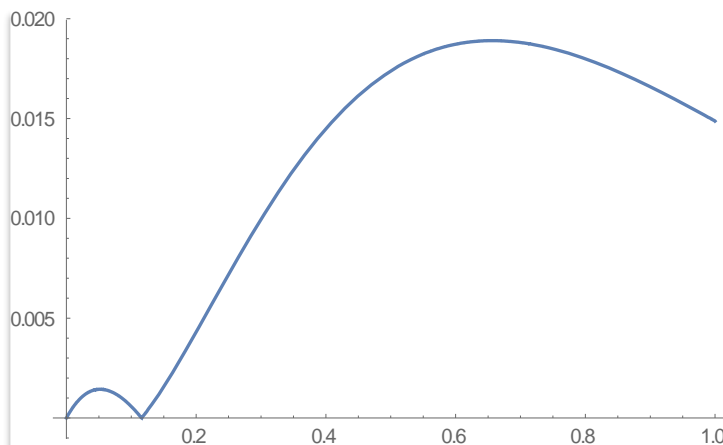
Μέσω του mathematica υπολογίζουμε :

$$\sup_{x \geq 0} |F_{1Y}(x) - F_{1X}(x)| = 0.0014381 \text{ για } x_0 = 0.0519178$$

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

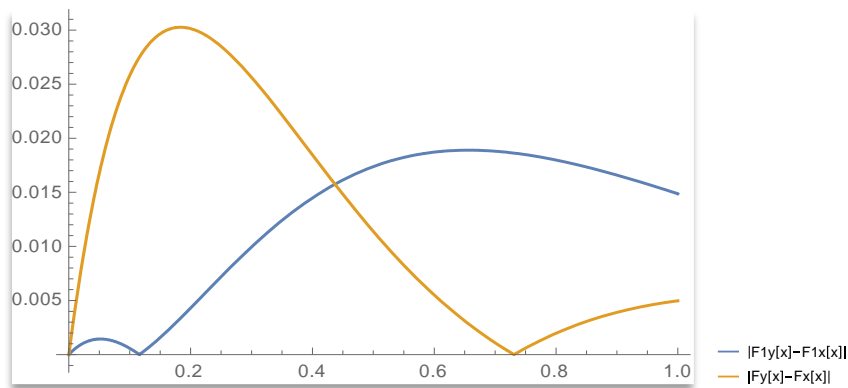
Διάγραμμα 4.7

Γραφική αναπαράσταση της απόλυτης διαφοράς $|F_{1Y}(x) - F_{1X}(x)|$ στο διάστημα $x \in [0, 1]$.



Διάγραμμα 4.8

Γραφική αναπαράσταση της απόλυτης διαφοράς των συναρτήσεων $|F_{1Y}(x) - F_{1X}(x)|$ και $|F_Y(x) - F_X(x)|$ στο διάστημα $x \in [0, 1]$.



Παρατηρήσεις

Σύμφωνα με το διάγραμμα (4.8) παρατηρείται μεγάλη διαφορά στην διαγραμματική απεικόνιση της απόλυτης διαφοράς για την αρχική κατανομή και στην απόλυτη διαφορά κάνοντας χρήση της κατανομής ισορροπίας .

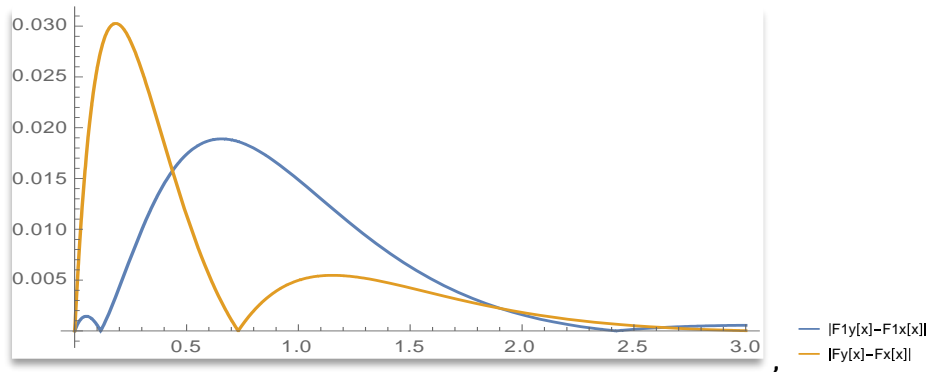
Για $x \in [0, 0.4)$ η συνάρτηση απόλυτης διαφοράς για την αρχική κατανομή παίρνει μεγαλύτερες τιμές από ότι η συνάρτηση απόλυτης διαφοράς για την κατανομή ισορροπίας .Επιπλέον η μέγιστη τιμή της απόλυτης διαφοράς για την αρχική κατανομή είναι 0.030 για $x \approx 0.2$ ενώ για την κατανομή ισορροπίας είναι περίπου ίση με 0.019 για $x \approx 0.7$.

Η συνάρτηση της απόλυτης διαφοράς της αρχικής κατανομής μεταβάλλεται αρκετά γρήγορα ενώ παρουσιάζει μεγάλες διακυμάνσεις. Συγκεκριμένα για $x \in [0, 0.2]$ μεταβάλλεται γρήγορα με αύξοντα ρυθμό ενώ για $x \in [0.2, 0.7]$ φθίνει συνεχώς παίρνοντας την τιμή 0 για $x \approx 0.7$ και εν συνεχεία ακολουθεί αύξουσα πορεία.

Σε αντιδιαστολή με την συνάρτηση διαφοράς της αρχικής κατανομής η συνάρτηση διαφοράς της κατανομής ισορροπίας παρουσιάζει μεγαλύτερη σταθερότητα και μεταβάλλεται με ήπιο και αργό ρυθμό.

Διάγραμμα 4.9

Γραφική αναπαράσταση της απόλυτης διαφοράς των συναρτήσεων $|F_{1Y}(x) - F_{1X}(x)|$ και $|F_Y(x) - F_X(x)|$ στο διάστημα $x \in [0, 3]$.



4.8 Μέθοδος των άνω ποσοστημίων

Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε τα άνω ποσοστημόρια αλλά και το ποσοστό σφάλματος για τις κατανομές ισορροπίας της Pareto και της μείξης εκθετικών επαναλαμβάνοντας την διαδικασία του τρίτου κεφαλαίου.

Σύμφωνα με όσα αναφέρθηκαν στην ενότητα 3.4.7 αν $p_{Y,\alpha}$ και $p_{X,\alpha}$ είναι τα $(1-\alpha)$ ποσοστημόρια των κατανομών για τις τυχαίες μεταβλητές X και Y αντίστοιχα τότε

$$P(Y > p_{Y,\alpha}) = \alpha \quad \text{και} \quad P(X > p_{X,\alpha}) = \alpha$$

Γράφουμε για ευκολία x, y για τα ποσοστημόρια $p_{Y,\alpha}$ και $p_{X,\alpha}$ αντίστοιχα.

Λύνοντας το άνωθι σύστημα εξισώσεων θα υπολογίσουμε στο mathematica χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (9), (10), (11), (12) του παραρτήματος τα x, y και θα βρούμε ότι :

$$\text{Για } \alpha=0.01 \quad x \approx 4.5354, \quad y=4.32456$$

Το ποσοστό σφάλματος υπολογίζεται με τον εξής τρόπο:

$$\frac{y-x}{y} \% = \frac{4.32456-4.5354}{4.32456} \% = -4.87\%$$

Αντίστοιχα υπολογίζουμε το ποσοστό σφάλματος για $\alpha=0.005$, $\alpha=0.01$, $\alpha=0.02$ και $\alpha=0.03$ και παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα στον κάτωθι πίνακα .

α	$F_X(x)$	$F_Y(y)$	x	y	Ποσοστό σφάλματος
0.001	0.999	0.999	4.5354	4.32456	-4.87%
0.005	0.995	0.995	2.9284	2.83654	-3.24%
0.01	0.99	0.99	2.2839	2.30886	1.08%
0.02	0.98	0.98	1.7342	1.83876	5.68%
0.03	0.97	0.97	1.4685	1.58792	7.52%

Υπολογίζοντας τις τετμημένες x, y των κατανομών παρατηρούμε πως οι τιμές τους διαφέρουν ελάχιστα .

Ακόμη βλέπουμε πως όσο αυξάνεται το α οι τιμές των x, y μειώνονται . Επιπρόσθετα όσον αφορά το ποσοστό σφάλματος είναι φανερό πως αυξάνεται καθώς αυξάνεται το επίπεδο σημαντικότητας α παρουσιάζοντας το μέγιστο ποσοστό του για $\alpha=0.03$.

Εν συγκρίσει με το κεφάλαιο 3 παρατηρούμε πως τα ποσοστά σφάλματος εφαρμόζοντας την κατανομή ισορροπίας είναι μικρότερα επομένως θα μπορούσαμε να πούμε και η πιθανότητα μια επιχείρηση ή οργανισμός να έρθει αντιμέτωπη με κίνδυνο είναι μικρότερη .

Συγκριτικός πίνακας ποσοστού σφαλμάτων

Στον πίνακα που ακολουθεί παρουσιάζουμε το ποσοστό σφάλματος που υπολογίσαμε στο τρίτο κεφάλαιο κάνοντας χρήση της κατανομής Pareto και της μείξης εκθετικών σε σύγκριση με το ποσοστό σφάλματος που υπολογίσαμε νωρίτερα στο κεφάλαιο αυτό κάνοντας χρήση των κατανομών ισορροπίας .

α	$F_X(x)$	$F_Y(y)$	Ποσοστό σφάλματος	Ποσοστό σφάλματος με χρήση της κατανομής ισορροπίας	Διαφορά ποσοστού σφάλματος
0.001	0.999	0.999	-2.67%	-4.87%	2.2%
0.005	0.995	0.995	6.6%	-3.24%	9.84%
0.01	0.99	0.99	7.8%	1.08%	-6.72%
0.02	0.98	0.98	7.04%	5.68%	1.36%
0.03	0.97	0.97	5.09%	7.52%	-2.43%

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πίνακα παρατηρούμε πως οι τιμές του ποσοστού σφάλματος είναι διαφορετικές χρησιμοποιώντας την κατανομή ισορροπίας.

Το ποσοστό σφάλματος όταν δεν κάνουμε χρήση της κατανομής ισορροπίας παίρνει την μέγιστη τιμή του και ισούται με 7.8% για $\alpha=0.01$ ενώ με χρήση της κατανομής ισορροπίας η μέγιστη τιμή του ισούται με 7.52% για $\alpha=0.03$.

Επιπρόσθετα η ελάχιστη τιμή του χωρίς να κάνουμε χρήση της κατανομής ισορροπίας ισούται με -2.67% για $\alpha=0.001$ ενώ με χρήση της κατανομής ισορροπίας η ελάχιστη τιμή του είναι ίση με -4.87% για $\alpha=0.001$.

Ακόμη βλέπουμε πως το ποσοστό σφάλματος όταν δεν κάνουμε χρήση της κατανομής ισορροπίας αυξάνεται μέχρι το $\alpha=0.01$ ενώ όταν κάνουμε χρήση της κατανομής ισορροπίας αυξάνεται μέχρι το $\alpha=0.03$.

Τέλος πρακτικά θα μπορούσαμε να πούμε πως μια επιχείρηση για να εξαλείψει τον κίνδυνο θα πρέπει να επιλέξει εκείνες τις ενέργειες όπου συνεπάγονται μικρό ποσοστό σφάλματος επομένως σύμφωνα με τον πίνακα για $\alpha=0.01$ θα επιλέγαμε το ποσοστό σφάλματος με χρήση της κατανομής ισορροπίας το οποίο ανέρχεται σε 1.08% και η τιμή του είναι ιδιαίτερα ικανοποιητική εν συγκρίσει με τα υπόλοιπες τιμές του πίνακα.

4.9 Μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ζωής –The residual lifetime

Ορίζουμε μια συνεχή θετική τυχαία μεταβλητή T η οποία αντιπροσωπεύει τον χρόνο ζωής μιας μονάδας .

Η μονάδα αυτή μπορεί να είναι ένας άνθρωπος, ένα ζώο, ένα φυτό η ένα εξάρτημα ενός μηχανικού ή ηλεκτρικού συστήματος. Για άψυχα αντικείμενα ο χρόνος ζωής ορίζεται ως ο συνολικός χρόνος για τον οποίο το αντικείμενο εκτελεί σωστά την λειτουργία του .

Ο χρόνος T «μετρά» από την στιγμή που ξεκινά να λειτουργεί μια καινούρια μονάδα ($t=0$) μέχρι την στιγμή που αποτυγχάνει. Αρκετές όμως φορές γνωρίζουμε ότι η μονάδα (ή το σύστημα) έχει ήδη λειτουργήσει χρόνο y (δηλ. γνωρίζουμε ότι $T > y$) και επιθυμούμε να εξετάσουμε τον υπόλοιπο χρόνο ζωής της μονάδας από τη στιγμή y μέχρι τη στιγμή αποτυχίας της. Ο χρόνος αυτός, ο οποίος συμβολίζεται με T_y , αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή $T - y | T > y$ και ονομάζεται υπολοιπόμενος χρόνος ζωής της μονάδας ηλικίας y .

Η μέση τιμή αυτής της τυχαίας μεταβλητής ονομάζεται αναμενόμενος υπολειπόμενος χρόνος ζωής και συμβολίζεται με MRL (Mean Residual Life).

Στα αναλογιστικά μαθηματικά η ειδική περίπτωση που ο χρόνος T αφορά το χρόνο ζωής ενός ανθρώπου παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Στην περίπτωση αυτή παραδείγματος χάρη μας ενδιαφέρει η μελέτη του υπολοιπόμενου χρόνου ζωής ενός ανθρώπου ηλικίας y (π.χ. y : χρόνος που συνάπτει ασφαλιστικό συμβόλαιο), δηλαδή ο χρόνος T_y .

Σύμφωνα με το βιβλίο των Willmot και Lin (2001) θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή υπολοιπόμενης διάρκειας ζωής $T_y = Y - y | Y > y$ για $Y > y$ και ότι η T_y δεν ορίζεται διαφορετικά.

Έπειτα,

$$P_r(T_y > t) = P_r(Y - y > t | Y > y) = \bar{F}(y+t) / \bar{F}(y) \text{ για } t \geq 0$$

και επομένως η T_y έχει συνάρτηση κατανομής η οποία είναι η κάτωθι :

$$P_r(T_y \leq t) = 1 - \frac{\bar{F}(y+t)}{\bar{F}(y)}, \quad t \geq 0 \quad (4.9.1)$$

Η αναμενόμενη τιμή της T_y που ορίζεται ως η μέση υπολειπόμενη διάρκεια ζωής (mean residual life MRL) δίνεται από την σχέση:

$$r_{(y)} = \int_0^{\infty} P_r(T_y > t) dt = \int_0^{\infty} \frac{\bar{F}(y+t)}{\bar{F}(y)} dt = E(T_y). \quad (4.9.2)$$

Από τις εξισώσεις (4.1.5) και (4.9.2) και χρησιμοποιώντας την σχέση (4.1.1) παίρνουμε ότι :

$$r_{(y)} = \frac{\int_y^{\infty} \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(y)} = \frac{E(Y)\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)}. \quad (4.9.3)$$

Προφανώς, $r(0) = E(Y)$. Ο μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ζωής είναι στενά συνδεδεμένος με την βαθμίδα αποτυχίας $\mu(y)$ όπου η τελευταία υπάρχει αλλά δεν απαιτείται απόλυτη συνέχεια για την ύπαρξή της. Είναι πολύ χρήσιμο για την ανάλυση του πάχους της ουράς και μεγάλες τιμές του $r_{(y)}$ είναι συσχετισμένες με την παχιά ουρά.

Ακόμη είναι πολύ στενά συνδεδεμένος με την κατανομή ισορροπίας $\bar{F}_1(y)$ που αναλύσαμε σε αυτό το κεφάλαιο.

Από την σχέση (4.1.1) έχουμε :

$$-\frac{d}{dy} \ln \bar{F}_1(y) = \frac{\bar{F}(y)/E(Y)}{\bar{F}_1(y)} = \frac{1}{r(y)}, \quad (4.9.4)$$

πράγμα που σημαίνει ότι ο αντίστροφος $\frac{1}{r(y)}$ του μέσου υπολοιπόμενου χρόνου ζωής είναι η βαθμίδα αποτυχίας συσχετισμένη με την συνάρτηση κατανομής της κατανομής ισορροπίας $F_1(y)$ και από την σχέση (2.1.3) προκύπτει το εξής :

$$\bar{F}_1(y) = e^{-\int_0^y \{r(x)\}^{-1} dx}, \quad y \geq 0. \quad (4.9.5)$$

Η εξίσωση (4.9.4) μαζί με την σχέση $F'_1(y) = \frac{\bar{F}(y)}{r(y)}$, μας δείχνει ότι η $F(y)$ καθορίζεται από τον μέσο υπολοιπόμενο χρόνο ζωής $r(y)$.

Η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ λέγεται ότι έχει αύξοντα μέσο υπολοιπόμενο χρόνο ζωής (IMRL) εάν ο $r(y)$ είναι μη φθίνουσα συνάρτηση ως προς y ενώ αντίθετα η συνάρτηση κατανομής $F(y)$ θα λέμε ότι έχει φθίνοντα υπολοιπόμενο χρόνο ζωής (DMRL) εάν ο $r(y)$ είναι μη αύξουσα συνάρτηση ως προς y .

Υπενθυμίζοντας ότι η $F(y)$ είναι φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας (αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας) το οποίο είναι ισοδύναμο με τη συνθήκη $\bar{F}(y+t)/\bar{F}(y)$ να είναι μη φθίνουσα συνάρτηση (μη αύξουσα) ως προς y για σταθερό $t \geq 0$, εύκολα από την σχέση (4.9.2) φαίνεται ότι η φθίνουσα βαθμίδα αποτυχίας (αύξουσα βαθμίδα αποτυχίας) συνεπάγεται αύξοντα υπολοιπόμενο χρόνο ζωής (φθίνοντα μέσο υπολοιπόμενο χρόνο ζωής).

Από αυτό καταλήγουμε στο ότι η κλάση της φθίνουσας (αύξουσας) βαθμίδας αποτυχίας εμπεριέχεται στην κλάση του αύξοντα υπολοιπόμενου χρόνου ζωής (φθίνοντα υπολοιπόμενου χρόνου ζωής), δηλαδή :

$$F \in DFR \Rightarrow F \in IMRL$$

και

$$F \in IFR \Rightarrow F \in DMRL.$$

Παρακάτω θα χρησιμοποιήσουμε τον μέσο υπολοιπόμενο χρόνο ζωής σαν ένα κριτήριο αξιολόγησης της προσέγγισης της κατανομής Pareto από την μείξη εκθετικών κατανομών.

Μέσω των άνωθεν σχέσεων θα υπολογίσουμε τον μέσο υπολοιπόμενο χρόνο ζωής για την κατανομή Pareto αλλά και την μείξη των εκθετικών κατανομών και θα συγκρίνουμε τα αποτελέσματα.

Ο μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ζωής για την κατανομή Pareto (7,2) είναι ο εξής :

$$r(y) = \frac{\int_y^{\infty} \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(y)} = \frac{E(Y)\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)} = \frac{\frac{1}{3} \frac{64}{(2+y)^6}}{\frac{128}{(2+y)^7}} = \frac{2+y}{6}.$$

Ο μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ζωής για την μείξη εκθετικών είναι ο εξής :

$$r_2(y) = \frac{\int_y^{\infty} \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(y)} = \frac{E(Y)\bar{F}_1(y)}{\bar{F}(y)} = \frac{0.340 \cdot (2.22045 \times 10^{-16} + 0.9109286e^{-3.13y} + 0.0890723e^{-0.99y})}{0.97e^{-3.13y} + 0.03e^{-0.99y}}.$$

Παρακάτω παραθέτουμε σε μορφή πίνακα τα αποτελέσματα του μέσου υπολοιπόμενου χρόνου ζωής για την κατανομή Pareto αλλά και την μείξη εκθετικών κατανομών για διάφορες τιμές της μεταβλητής y .

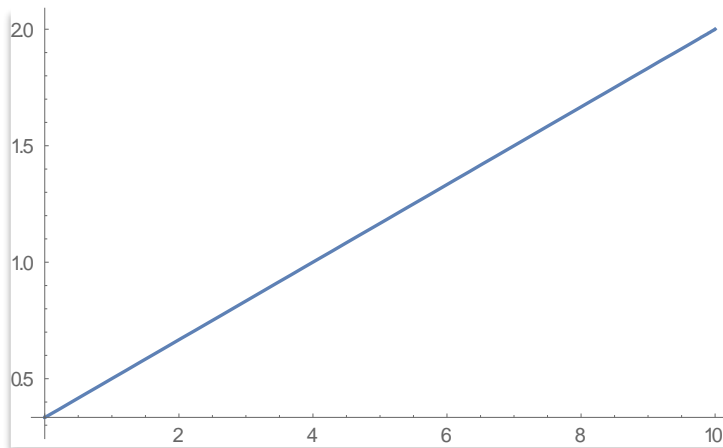
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(y)$	0.33	0.5	0.67	0.83	1	1.167	1.33	1.5	1.67	1.83	2
$r_2(y)$	0.34	0.46296	0.796	0.974	1.005	1.008	1.009	1.009	1.009	1.009	1.009

Σύμφωνα με τα αποτελέσματα του πίνακα παρατηρούμε πως αρχικά για $y=0$ και $y=1$ ο μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ζωής για τις δυο κατανομές είναι σχεδόν ίδιος ενώ όσο αυξάνεται η τιμή του y είναι εμφανής η απόκλιση της τιμής του με τον υπολοιπόμενο χρόνο ζωής της μείξης εκθετικών να παραμένει σταθερός στην τιμή ≈ 1.009 για $y \in [4,10]$ σε αντιδιαστολή με τον μέσο υπολοιπόμενο χρόνο ζωής της Pareto οπού αυξάνεται για τις αντίστοιχες τιμές της μεταβλητής y . Επομένως σύμφωνα με τα άνωθι αποτελέσματα θα μπορούσαμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα πως οι δυο κατανομές δεν παρουσιάζουν παρόμοια συμπεριφορά ως προς τον μέσο υπολοιπόμενο χρόνο ζωής.

Γραφικές παραστάσεις

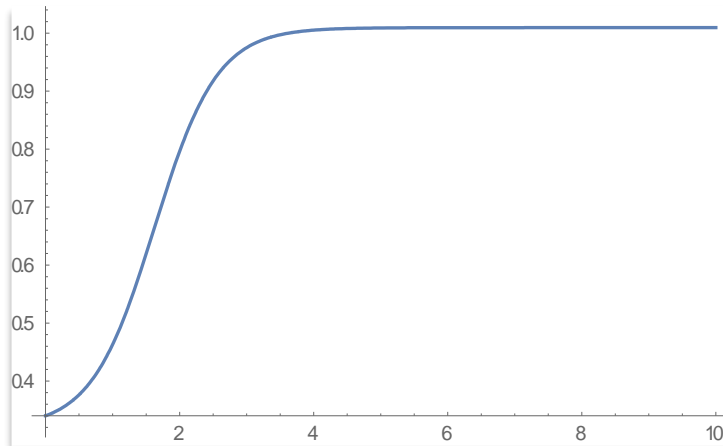
Διάγραμμα 4.9

Γραφική παράσταση του μέσου υπολοιπόμενου χρόνου ζωής $r(y)$ για την κατανομή Pareto στο διάστημα $y \in [0, 10]$.



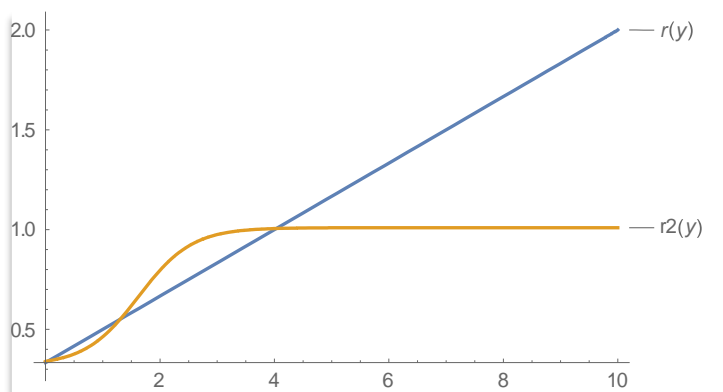
Διάγραμμα 4.10

Γραφική παράσταση του μέσου υπολοιπούμενου χρόνου ζωής $r_2(y)$ για την μείξη εκθετικών στο διάστημα $y \in [0, 10]$.



Διάγραμμα 4.11

Γραφική παράσταση του μέσων υπολοιπούμενων χρόνων ζωής $r(y)$ και $r_2(y)$ εκθετικών στο διάστημα $y \in [0, 10]$.



Παρατηρήσεις

Διαγραμματικά παρατηρούμε μεγάλη διαφορά ανάμεσα στους υπολοιπούμενους χρόνους της κατανομής Pareto και της μείξης εκθετικών. Πιο συγκεκριμένα για τιμές της παραμέτρου y κοντά στο μηδέν φαίνεται να μην υπάρχει απόκλιση στην τιμή τους. Η συνάρτηση $r_2(y)$ αρχικά

παρουσιάζει αύξοντα ρυθμό για $y \in [0,3]$ ενώ εν συνεχεία για $y \in [3,10]$ παραμένει σταθερή με $r_2(y) = 1.009$ όπως είδαμε και στον πίνακα. Εν αντιθέσει με την $r_2(y)$ η $r(y)$ αυξάνεται συνεχώς όσο αυξάνονται οι τιμές της μεταβλητής y . Για πολύ μεγάλες τιμές της y η συνάρτηση $r(y)$ τείνει στο άπειρο.

Τέλος και διαγραμματικά επιβεβαιώνεται πως αν και οι δυο κατανομές προσεγγίζουν πολύ ικανοποιητικά η μια την άλλη, η συμπεριφορά τους όσον αφορά τον μέσο υπολοιπόμενο χρόνο ζωής είναι πολύ διαφορετική. Αυτό, ωστόσο, είναι αναμενόμενο από την θεωρία, εφόσον για την κατανομή Pareto γνωρίζουμε ότι ισχύει πάντα

$\lim_{y \rightarrow \infty} r(y) = \infty$, ενώ για την μείξη εκθετικών η συνάρτηση $r_2(y)$ συγκλίνει σε μια σταθερά.

Συνάρτηση Διακύμανσης του υπολοιπόμενου χρόνου ζωής-

Variance residual life function

Μια ακόμη πολύ ενδιαφέρουσα συνάρτηση αποτελεί η συνάρτηση διακύμανσης του υπολοιπόμενου χρόνου ζωής.

Η συνάρτηση ορίζεται ως εξής :

$$\begin{aligned} Var(T_y) &= E[(Y - y)^2 | Y > y] - r^2(y) \\ &= \frac{1}{\bar{F}(y)} \int_y^\infty (u - y)^2 f(u) du - r^2(y) \\ &= \frac{2}{\bar{F}(y)} \int_y^\infty (u - y) \bar{F}(u) du - r^2(y) \\ &= \frac{2}{\bar{F}(y)} \int_y^\infty \int_t^\infty \bar{F}(u) du dt - r^2(y), t \geq 0, \end{aligned}$$

το οποίο επιτυγχάνεται ολοκληρώνοντας κατά μέλη. (4.9.6)

Ο Abouammoh et al. (1990) έδειξε ότι η διακύμανση του υπολοιπόμενου χρόνου ζωής μαζί με τον μέσο υπολοιπόμενο χρόνο ζωής χαρακτηρίζουν την κατανομή του Y μέσω της σχέσης:

$$\bar{F}(y) = \exp \left\{ - \int_0^y \frac{d \sigma^2 u}{\sigma^2(u) - r^2(u)} du \right\}. \quad (4.9.7)$$

Στο σημείο αυτό θα υπολογίσουμε την διακύμανση του μέσου υπολοιπόμενου χρόνου ζωής για την κατανομή Pareto και την εκθετική κατανομή :

Αντικαθιστώντας στον άνωτι τύπο (4.9.6) την συνάρτηση δεξιάς ουράς της κατανομής Pareto αλλά και τον μέσο υπολοιπόμενο χρόνο ζωής που υπολογίσαμε νωρίτερα καταλήγουμε στα εξής :

Για την κατανομή Pareto : $Var_1(T_y) = \frac{7}{180} (2 + y)^2$.

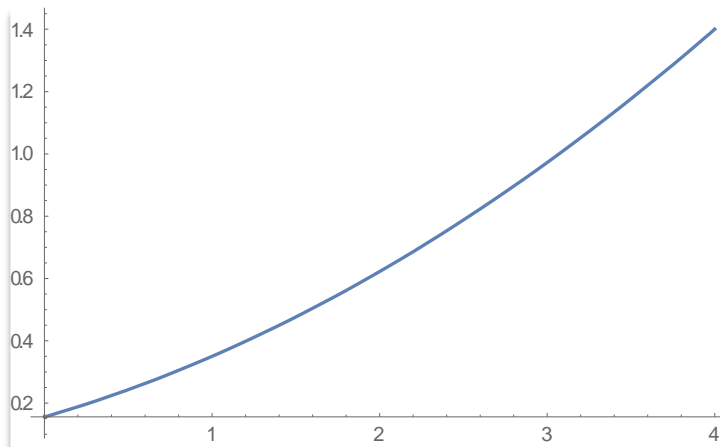
Για την μείξη εκθετικών κατανομών :

$$Var_2(T_y) = -\frac{0.11560(0.9109286e^{-3.13y} + 0.0890723e^{-0.99y})^2}{(0.97e^{-3.13y} + 0.03e^{-0.998y})^2} + \frac{2(0.0990109e^{-3.13y} + e^{-0.99000000000000002y}(0.030609))}{0.97e^{-3.13y} + 0.03e^{-0.99y}}$$

Γραφικές παραστάσεις

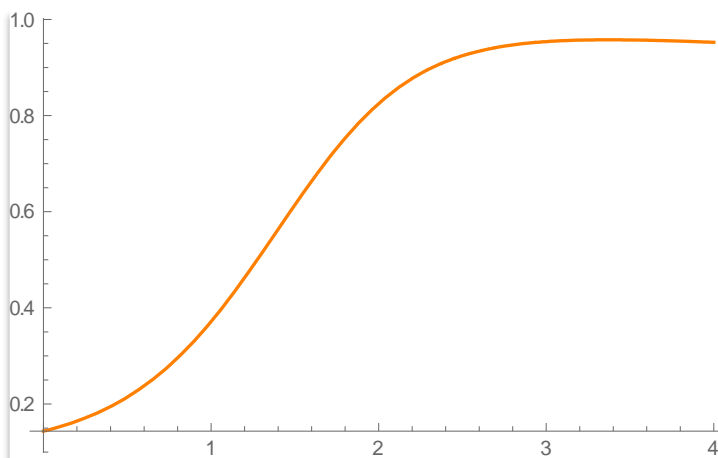
Διάγραμμα 4.12

Γραφική αναπαράσταση της διακύμανσης $Var_1(T_y)$ για την κατανομή Pareto στο διάστημα $y \in [0, 4]$.



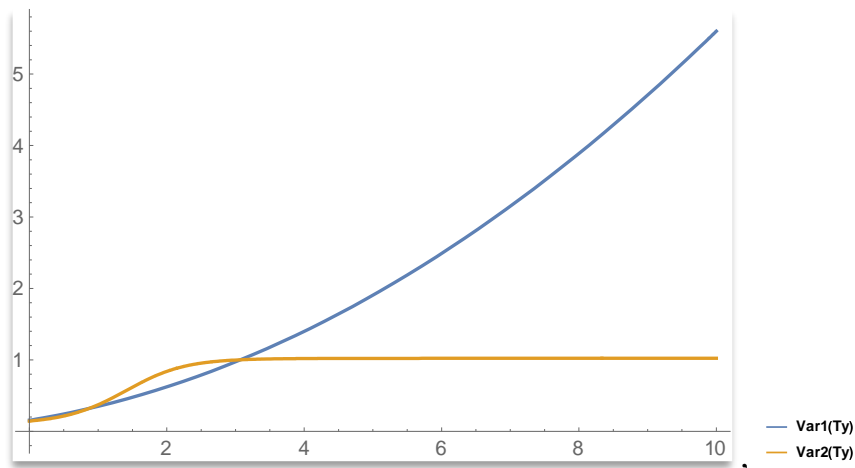
Διάγραμμα 4.13

Γραφική αναπαράσταση της διακύμανσης $Var_2(T_y)$ για την μείξη εκθετικών στο διάστημα $y \in [0, 4]$.



Διάγραμμα 4.14

Γραφική αναπαράσταση της διακύμανσης $Var_1(T_y)$ και $Var_2(T_y)$ στο διάστημα $y \in [0, 10]$.



Παρατηρήσεις

Στο διάγραμμα 4.14 όπου απεικονίζονται μαζί οι γραφικές παραστάσεις των $Var_1(T_y)$ και $Var_2(T_y)$ παρατηρούμε πως για $y \in [0,1]$ οι συναρτήσεις παίρνουν σχεδόν ίδιες τιμές .

Στο διάστημα $y \in [1,3]$ η συνάρτηση διακύμανσης της μείξης των εκθετικών βρίσκεται πάνω από την συνάρτηση διακύμανσης της κατανομής Pareto παίρνοντας επομένως μεγαλύτερες τιμές. Τέλος για $y \in [3,10]$ βλέπουμε πως η συνάρτηση διακύμανσης της κατανομής Pareto αυξάνεται σταδιακά και συνεχώς σε αντιδιαστολή με την συνάρτηση διακύμανσης της μείξης των εκθετικών η οποία παραμένει σταθερή.

4.10 Σύνδεση συναρτήσεων

Οι συναρτήσεις που ορίσαμε άνωθι (μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ζωής και διακύμανση του μέσου υπολοιπόμενου χρόνου ζωής) αλλά και η συνάρτηση της βαθμίδας αποτυχίας που ορίσαμε στο δεύτερο κεφάλαιο δίνουν έμφαση σε διαφορετικούς τομείς των κατανομών επιβίωσης και υπολοιπόμενου χρόνου ζωής .

Ωστόσο συνδέονται στενά μεταξύ τους μέσω κάποιων σχέσεων όπου θα παρουσιάσουμε εν συνεχεία .

Η σχέση που συνδέει τον μέσο υπολοιπόμενο χρόνο ζωής με την βαθμίδα αποτυχίας είναι η εξής:

$$\mu(y) = \frac{1+r'(y)}{r(y)}, \quad (4.10.1)$$

ενώ η σχέση που συνδέει και τις τρεις συναρτήσεις (βαθμίδα αποτυχίας, μέσος υπολοιπόμενος χρόνο ζωής και διακύμανση του μέσου υπολοιπόμενου χρόνου ζωής) είναι η ακόλουθη (Gurta, 1987):

$$\frac{d}{dy} Var(y) \{ \mu(y) \{ Var(y) - r^2(y) \} \}. \quad (4.10.2)$$

Είναι γνωστό ότι η βαθμίδα αποτυχίας $\mu(y)$ καθορίζει μοναδικά την συνάρτηση κατανομής και ως εκ τούτου η συνάρτηση του μέσου υπολοιπόμενου χρόνου ζωής $r(y)$ την καθορίζει επίσης. Η συνάρτηση δεξιάς ουράς $\bar{F}(y)$ και ο μέσος υπολοιπόμενος χρόνος ζωής συνδέονται μέσω της σχέσης :

$$\bar{F}(y) = \frac{\mu(0)}{\mu(y)} \exp \left\{ - \int_0^y \frac{dx}{\mu(x)} \right\}. \quad (4.10.3)$$

Επομένως οι συναρτήσεις της βαθμίδα αποτυχίας, του μέσου υπολοιπόμενου χρόνου ζωής και της διακύμανσης του μέσου υπολοιπόμενου χρόνου ζωής είναι ισοδύναμες πράγμα που σημαίνει πως εάν έχουμε δύο από τις συναρτήσεις μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα και την τρίτη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εφαρμογές στην Θεωρία Χρεοκοπίας

Όπως όλοι γνωρίζουμε μια ασφαλιστική εταιρία από την ίδρυσή της θα πρέπει να ενεργεί σωστά προκειμένου να είναι φερέγγυα. Η αξιοπιστία μιας εταιρίας ωστόσο μπορεί να επηρεαστεί από διάφορους εξωγενείς και ενδογενείς παράγοντες όπου αν δεν διαθέτει τους απαραίτητους μηχανισμούς και κεφάλαια θα την οδηγήσουν στην πτώχευσή της και συνάμα στην χρεοκοπία της. Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την έννοια της χρεοκοπίας και χρησιμοποιώντας ένα συγκεκριμένο μοντέλο που ονομάζεται κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων, θα την υπολογίσουμε για κάποιες κατανομές και επιπρόσθετα και θα αναφερθούμε στην σύνδεση της κατανομής ισορροπίας με την θεωρία χρεοκοπίας.

ΜΕΙΞΕΙΣ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΜΕ ΕΦΑΡΜΟΓΗ ΣΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΧΡΕΟΚΟΠΙΑΣ

5.1 Ορισμός

Στην θεωρία χρεοκοπίας παρακολουθούμε τα έξοδα της εταιρίας καθώς αυτά εξελίσσονται διαρκώς ενώ μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα αν το πλεόνασμα δηλαδή η διαφορά (έσοδα- έξοδα) γίνει κάποια στιγμή αρνητικό.

Προκειμένου να αποφευχθεί το πλεόνασμα να γίνει αρνητικό η εταιρία χρησιμοποιεί ένα αρχικό αποθεματικό u το οποίο δηλώνει το αρχικό κεφάλαιο το οποίο διαθέτει η εταιρία κατά την έναρξη των εργασιών της και αποτελεί το πλεόνασμα την χρονική στιγμή $t=0$.

Εάν η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος ενός χαρτοφυλακίου συμβολίζεται με $\{U(t), t > 0\}$ και με u το αρχικό αποθεματικό θα ισχύει η παρακάτω ισότητα για το πλεόνασμα του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή t :

$$U(t) = u + P(t) - S(t) = u + P(t) - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, \quad (5.1.1)$$

$$\text{όπου } S(t) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{N(t)} X_i, & \text{αν } N(t) \geq 1 \\ 0, & \text{αν } N(t) = 0 \end{cases} \quad \text{τα συνολικά έξοδα στο διάστημα } [0, t]$$

ενώ μέσω της μαθηματικής συνάρτησης $P(t)$ παριστάνονται τα συνολικά έσοδα στο διάστημα $[0, t]$ τα οποία προέρχονται μόνο από ασφάλιστρα.

Αξίζει να σημειωθεί πως λόγω του ότι το αρχικό αποθεματικό u δηλώνει το αρχικό κεφάλαιο το οποίο διαθέτει η εταιρία την χρονική στιγμή $t=0$ θα ισχύει ότι $u = U(0)$.

Αν

- $P(t)=ct$ για κάποιο $c>0$ δηλαδή η $P(t)$ είναι μια γραμμική συνάρτηση
- Οι μεταβλητές X_i δηλώνουν το μέγεθος των αποζημιώσεων και είναι ανεξάρτητες και ισόνομες και ακόμη δεν εξαρτώνται από τον αριθμό των αποζημιώσεων $N(t)$ σε ένα διάστημα $[0, t]$.
- Η $\{N(t): t \geq 0\}$ είναι μια ανέλιξη Poisson , έτσι ώστε η ανέλιξη $\{S(t): t \geq 0\}$ των συνολικών απαιτήσεων είναι μια σύνθετη ανέλιξη Poisson ,

Τότε έχουμε το κλασικό μοντέλο της θεωρίας κινδύνων (Lunberg 1903) και η ανέλιξη πλεονάσματος θα δίνεται από την εξής σχέση :

$$U(t)=u+ ct- \sum_{i=1}^{N(t)} X_i \quad (5.1.2)$$

όπου $c=\frac{P(t)}{t}$ δηλαδή πρόκειται για το ασφάλιστρο που πληρώνεται στην μονάδα του χρόνου (το οποίο δεν μεταβάλλεται στον χρόνο) και ονομάζεται ένταση του ασφαλίστρου .

Η χρονική στιγμή που το πλεόνασμα παίρνει αρνητική τιμή ονομάζεται χρόνος χρεοκοπίας και συμβολίζεται με :

$$T=\inf(t: U(t) < 0),$$

και η πιθανότητα χρεοκοπίας είναι η πιθανότητα η στοχαστική ανέλιξη του πλεονάσματος να γίνει αρνητική. Επομένως θα ισχύει ότι :

$$\psi(u) =P[U(t) < 0 \text{ για κάποιο } t \geq 0 / U(0) = u], \quad (5.1.3)$$

η οποία είναι φθίνουσα συνάρτηση ως προς u δηλαδή ισχύει ότι :

$$u_1 < u_2 \Leftrightarrow \psi(u_1) > \psi(u_2) \text{ και } \lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) = 0 .$$

Αντίστοιχα για το κλασικό μοντέλο η πιθανότητα μη χρεοκοπίας με αρχικό αποθεματικό u συμβολίζεται με $\delta(u)$ και δίνεται από την σχέση:

$$\delta(u) = 1- \psi(u) , \quad u \geq 0 , \quad (5.1.4)$$

η οποία είναι αύξουσα συνάρτηση ως προς u δηλαδή ισχύει ότι :

$$u_1 < u_2 \Leftrightarrow \delta(u_1) < \delta(u_2) \text{ και } \lim_{u \rightarrow \infty} \delta(u) = 1 .$$

Το περιθώριο ασφαλείας (premium loading factor) ή ο συντελεστής ασφαλείας θ στο κλασικό μοντέλο ορίζεται από την σχέση :

$$\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1 . \quad (5.1.5)$$

Αξίζει να σημειωθεί πως το περιθώριο ασφαλείας όταν εκφραστεί σαν ποσοστό % μας δίνει το αναμενόμενο ποσοστό κέρδους της ασφαλιστικής εταιρίας .

Η βασική υπόθεση που κάνουμε στο κλασικό μοντέλο χρεοκοπίας είναι η ακόλουθη :

$$c > \lambda \mu_1$$

μέσω της οποίας εξασφαλίζεται ότι τα έσοδα της εταιρίας είναι περισσότερα από τα αναμενόμενα έξοδα. Η σχέση αυτή ονομάζεται συνθήκη καθαρού κέρδους .

- Αν $c < \lambda \mu_1$ τότε $\psi(u) = 1$ επομένως η χρεοκοπία είναι βέβαιη.
- Αν $c = \lambda \mu_1$ κατά μέσο όρο τα έσοδα είναι ίσα με τα έξοδα και τότε η χρεοκοπία είναι βέβαιη.

Συντελεστής προσαρμογής R

Πρόκειται για την θετική λύση της κάτωθι εξίσωσης ως προς r

$$M(r) = 1 + (1 + \theta) \mu_1 r \quad (5.1.6)$$

ενώ θέτοντας όπου $\theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1$ παίρνουμε την ισοδύναμη εξίσωση :

$$M(r) = 1 + \frac{cr}{\lambda} \quad (5.1.7)$$

όπου $M(r)$ είναι η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής των αποζημιώσεων.

Η άνωθι εξίσωση

- δεν μπορεί να έχει αρνητικές ρίζες .
- δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μια θετικές ρίζες .

Υπάρχει όμως περίπτωση η εξίσωση αυτή να μην έχει καμία ρίζα.

Αυτό συμβαίνει ιδιαίτερα όταν η κατανομή των αποζημιώσεων έχει βαριά ουρά , όπου η ροπογεννήτρια απειρίζεται σε όλον τον θετικό ημίαξονα. Παράδειγμα τέτοιας κατανομής αποτελεί η κατανομή Pareto.

5.2 Ειδική περίπτωση μείξης 2 εκθετικών κατανομών

Στην ειδική περίπτωση 2- $Exp(\beta_1)$, $Exp(\beta_2)$ ισχύουν τα εξής :

$$\frac{1}{1+\theta} = c_1 + c_2$$

$$\frac{\theta}{(1+\theta)^2 E(x)} = c_1 r_1 + c_2 r_2$$

$$r: -\frac{1}{r} + \frac{1}{r} M_X(r) = \frac{c}{\lambda} \quad (5.2.1)$$

και η πιθανότητα χρεοκοπίας δίνεται από την σχέση :

$$\psi(u) = c_1 e^{-r_1 u} + c_2 e^{-r_2 u} \quad (5.2.2)$$

5.3 Παραδείγματα

Εάν $X \sim f_x(x) = \frac{4}{2} e^{-4x} + \frac{6}{2} e^{-6x}$ και το περιθώριο ασφαλείας $\theta = \frac{1}{5}$ θα υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας .

Λύση

Πρόκειται για μείξη των δυο κατανομών- $Exp(4), Exp(6)$ με βάρη μείξης $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

Η μέση τιμή των αποζημιώσεων είναι :

$$\mu_1 = \frac{5}{24}$$

Για την ροπογεννήτρια κάνοντας χρήση της σχέσης (16) του παραρτήματος βρίσκουμε ότι :

$$M_X(r) = \frac{1}{2} \frac{4}{4-r} + \frac{1}{2} \frac{6}{6-r} = \frac{2}{4-r} + \frac{2}{6-r}$$

$$\text{Από την σχέση : } \theta = \frac{c}{\lambda \mu_1} - 1 \Leftrightarrow \theta + 1 = \frac{c}{\lambda \mu_1} \Leftrightarrow (\theta + 1) E(x) = \frac{c}{\lambda}$$

$$\left(\frac{1}{5} + 1\right) \frac{5}{24} = \frac{c}{\lambda} \Leftrightarrow \frac{c}{\lambda} = \frac{1}{4}$$

Λύνοντας την εξίσωση $-\frac{1}{r} + \frac{1}{r} M_X(r) = \frac{c}{\lambda}$ ως προς r

$$-\frac{1}{r} + \frac{1}{r} M_X(r) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow -4 + M_X(r) 4 = r \Leftrightarrow$$

$$4 M_X(r) = r + 4$$

Λύνοντας την εξίσωση προκύπτει ότι η μία ρίζα είναι το μηδέν που απορρίπτεται , ενώ οι άλλες δυο ρίζες είναι : $r_1 = 3 + \sqrt{5}$, $r_2 = 3 - \sqrt{5}$.

Επομένως σύμφωνα με τις κάτωθι σχέσεις :

$$\frac{1}{1+\theta} = c_1 + c_2$$

$$\frac{\theta}{(1+\theta)^2 E(x)} = c_1 r_1 + c_2 r_2$$

Θα έχουμε:

$$c_1 + c_2 = \frac{5}{6}$$

$$c_1(3 + \sqrt{5}) + c_2(3 - \sqrt{5}) = \frac{2}{3}$$

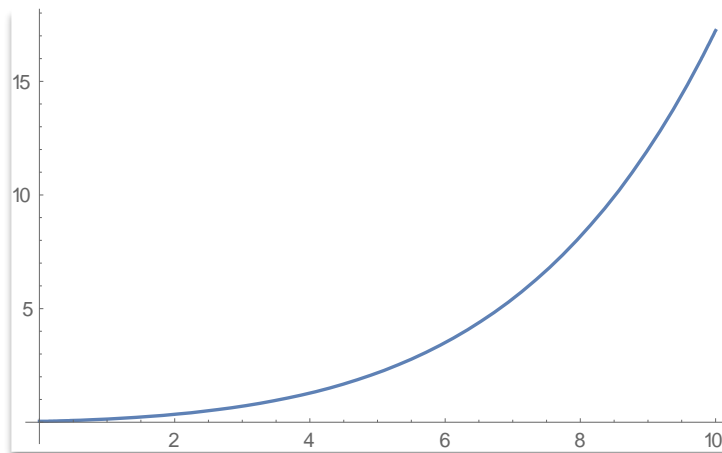
Λύνοντας το σύστημα προκύπτει ότι $c_1 = \frac{4 - \sqrt{5}}{6}$ και $c_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{6}$.

Επομένως η πιθανότητα χρεοκοπίας θα είναι :

$$\psi(u) = \frac{4 - \sqrt{5}}{6} e^{-3 + \sqrt{5}u} + \frac{1 + \sqrt{5}}{6} e^{-3 - \sqrt{5}u}$$

Γραφική αναπαράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi(u)$ στο διάστημα $u \in [0, 10]$.

Διάγραμμα 5.1



Αντίστοιχα με το άνωθι παράδειγμα μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας για την μείξη των εκθετικών κατανομών που υπολογίσαμε στο τρίτο κεφάλαιο .

Για την μείξη εκθετικών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$f_X(x) \approx 0.97 * 3.13e^{-3.13x} + 0.03 * 0.99e^{-0.99x} \approx 3.0361e^{-3.13x} + 0.0297e^{-0.99x}$, $x \geq 0$ και περιθώριο ασφαλείας $\theta = \frac{1}{5}$ θα υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας .

Η μέση τιμή των αποζημιώσεων είναι :

$$\mu=0.340207 .$$

Για την ροπογεννήτρια κάνοντας χρήση της σχέσης (17) του παραρτήματος βρίσκουμε ότι :

$$M(t)= -\frac{3.0361}{-3.13+t} - \frac{0.0297}{-0.99+t} .$$

Λύνοντας την εξίσωση :

$$M(t)=1+(1 + \theta) * \mu * t,$$

προκύπτει οτι η μία ρίζα είναι το μηδέν που απορρίπτεται και οι άλλες δυο : $t_1=0.409577$ και $t_2=1.26094$

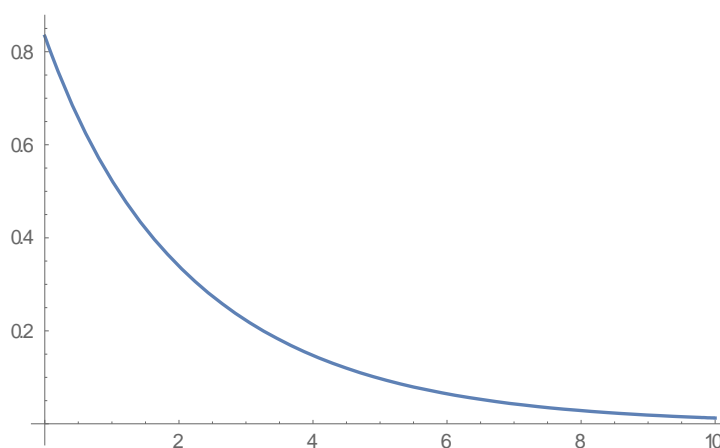
Τέλος χρησιμοποιώντας τις σχέσεις του παραρτήματος (18,19,...,23) υπολογίζουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας η οποία είναι η ακόλουθη :

$$\psi_1(u)=0.0786201e^{-1.26094u} + 0.754713e^{-0.409577u} .$$

Υπολογίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας για την μείξη εκθετικών και έχοντας αποδείξει ότι η συγκεκριμένη μείξη εκθετικών προσεγγίζει πολύ ικανοποιητικά την αρχική μας κατανομή μπορούμε να καταλήξουμε στο συμπέρασμα πως για την κατανομη Pareto θα προέκυπτε μια πιθανότητα χρεοκοπίας με χαρακτηριστικά παρόμοια με την πιθανότητα χρεοκοπίας της μείξης εκθετικών κατανομών .

Γραφική αναπαράσταση της πιθανότητας χρεοκοπίας $\psi_1(u)$ στο διάστημα $u \in [0, 10]$.

Διάγραμμα 5.2



5.4 Η κατανομή ισορροπίας στην θεωρία χρεοκοπίας

Όπως είδαμε στο τέταρτο κεφάλαιο η έννοια της κατανομής ισορροπίας συναντάται σε πολλούς τομείς αλλά και οι εφαρμογές της ποικίλουν. Ένας από τους πολύ σημαντικούς τομείς όπου και μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα να εξετάσουμε στην παρούσα διπλωματική αποτελεί ο ασφαλιστικός -αναλογιστικός τομέας και συγκεκριμένα στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε την περίπτωση της χρεοκοπίας .

Μια άλλη μεταβλητή η οποία παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον σε αυτό το μοντέλο αποτελεί το μέγεθος της πτώσης του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u .

Η μεταβλητή αυτή συμβολίζεται με L_1 και παίρνει θετικές τιμές εφόσον εξετάζουμε την πτώση του πλεονάσματος κατά απόλυτη τιμή. Αν το αρχικό αποθεματικό είναι u , η πιθανότητα το πλεόνασμα να πέσει κάποια στιγμή κάτω από το u ισούται με $\psi(0)$ και δεν εξαρτάται από το u .

Ας υποθέσουμε ότι η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u συμβαίνει την χρονική στιγμή t_1 και το πλεόνασμα την στιγμή αυτή είναι $u_1=U(t_1)$. Τότε η πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό δηλώνεται με την τυχαία μεταβλητή:

$$L_1=u- u_1 .$$

Αντίστοιχα με την L_1 η τυχαία μεταβλητή η οποία μας δίνει την πρώτη πτώση του πλεονάσματος κάτω από την τιμή u_1 θα είναι η L_2 . Η πιθανότητα να υπάρξει πτώση του πλεονάσματος κάτω από το u_1 ισούται και πάλι με $\psi(0)$, ενώ όταν το πλεόνασμα για πρώτη φορά πέσει κάτω από το u_1 πάρει τιμή u_2 τότε η τυχαία μεταβλητή θα είναι $L_2 = u_1- u_2$.

Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε επαγωγικά μια ακολουθία L_1, L_2, L_3, \dots

Η ακολουθία αυτή θεωρούμε ότι είναι πεπερασμένη όταν οι τιμές της είναι μηδενικές από κάποιο σημείο και μετά, δηλαδή όταν ισχύει $L_j=0$ για $j=i, i+1, \dots$

Μια άλλη ονομασία που χρησιμοποιείται για τις (αυστηρά θετικές) τυχαίες μεταβλητές L_1, L_2, L_3, \dots είναι τα κλιμακωτά ύψη (ladder heights) που συνδέονται με την ανέλιξη $\{U(t):t \geq 0\}$.

Οι μεταβλητές αυτές παρουσιάζουν την σταδιακή πτώση του πλεονάσματος από την αρχική τιμή u έως την στιγμή της χρεοκοπίας ή αν δεν συμβεί χρεοκοπία , έως την ελάχιστη τιμή που παίρνει η ανέλιξη $\{U(t):t \geq 0\}$.

Εφόσον η συνθήκη του καθαρού κέρδους εξασφαλίζει ότι το πλήθος των κλιμακωτών υψών είναι πεπερασμένο με πιθανότητα 1, ορίζουμε μια τυχαία μεταβλητή η οποία συμβολίζεται με K και δηλώνει το πλήθος των κλιμακωτών υψών.

Εύκολα βλέπουμε ότι :

$$P(K=0) = \delta(0) = \frac{\theta}{1+\theta}$$

$$P(K=1) = \psi(0)\delta(0) = \frac{1}{1+\theta} \frac{\theta}{1+\theta}$$

και γενικότερα $P(K = k) = ((\psi(0))^k \delta(0) = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)^k \frac{\theta}{1+\theta} \quad k = 0,1,2,$
 δηλαδή η K ακολουθεί την γεωμετρική κατανομή.

5.5 Μέγιστη σωρευτική απώλεια

Στο κλασικό μοντέλο αν θεωρήσουμε την σύνθετη τυχαία μεταβλητή

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_K = \sum_{i=1}^K L_i \quad (L=0 \text{ όταν } K=0)$$

Τότε βλέπουμε ότι η L παριστάνει την συνολική πτώση του πλεονάσματος κάτω από το αρχικό αποθεματικό u . Η L ονομάζεται μέγιστη σωρευτική απώλεια και η κατανομή της συνδέεται με την πιθανότητα χρεοκοπίας .

Η κατανομή της L είναι μικτή. Συγκεκριμένα η L μπορεί να πάρει την τιμή μηδέν με θετική πιθανότητα, ενώ η κατανομή της στο $(0, \infty)$ είναι συνεχής και εφόσον η μεταβλητή K ακολουθεί γεωμετρική κατανομή, η κατανομή της L θα είναι σύνθετη γεωμετρική.

Η πιθανότητα η L να πάρει την τιμή μηδέν είναι :

$$P(L=0) = P(K = 0) = \delta(0).$$

Έστω τώρα ότι $u > 0$. Παρατηρούμε ότι η ποσότητα $P(L > u)$ εκφράζει την πιθανότητα η συνολική πτώση του πλεονάσματος να υπερβαίνει μια σταθερή τιμή u . Αλλά αυτή είναι ίδια με την πιθανότητα χρεοκοπίας όταν το αρχικό αποθεματικό είναι u , δηλαδή ισχύει

$$P(L > u) = \psi(u) ,$$

$$P(L \leq u) = \delta(u) .$$

Όταν υπάρχει η πτώση του πλεονάσματος η τυχαία μεταβλητή L_1 ακολουθεί μια συνεχή κατανομή με πυκνότητα $\frac{1}{\mu_1} [1 - F(y)]$ δηλαδή :

$$P(L_1 \leq y) = \int_0^y \frac{1}{\mu_1} [1 - F(t)] dt , \quad (5.5.1)$$

όπου εύλογα παρατηρούμε πως πρόκειται για την κατανομή ισορροπίας (4.1.1) επομένως η κατανομή ισορροπίας ορίζεται ως η κατανομή των κλιμακωτών υψών στην θεωρία χρεοκοπίας .

Συμπεράσματα

Σκοπός την παρούσας διπλωματικής ήταν η παρουσίαση, ανάλυση της κατανομής Pareto και ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας με χρήση αυτής της κατανομής.

Η κατανομή Pareto όπως αναφέραμε και νωρίτερα αποτελεί μια από τις ευρέως γνωστές κατανομές με βαριά ουρά η χρήση της οποίας είναι πολύ σημαντική σε πολλούς τομείς και κυρίως στο αναλογισμό. Στην Αναλογιστική επιστήμη ο υπολογισμός της πιθανότητας χρεοκοπίας παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον ωστόσο για την κατανομή Pareto δεν καθίσταται δυνατό να την υπολογίσουμε. Για αυτόν τον λόγο προσπαθήσαμε να την προσεγγίσουμε μέσω άλλης κατανομής και συγκεκριμένα μέσω της μείξης των εκθετικών κατανομών.

Στο πρώτο κεφάλαιο δώσαμε τον ορισμό της κατανομής Pareto και ορίσαμε την συνάρτηση κατανομής, πυκνότητας πιθανότητας και δεξιάς ουράς. Επίσης υπολογίσαμε τα μέτρα ασυμμετρίας και κύρτωσης και τέλος την αναπαραστήσαμε γραφικά.

Στο δεύτερο κεφάλαιο περιγράψαμε και αναλύσαμε ένα πολύ βασικό μέτρο ονόματι βαθμίδα αποτυχίας ή ποσοστό σφάλματος το οποίο αποτελεί και ένα από τα βασικά κριτήρια αξιολόγησης της προσέγγισης της αρχικής μας κατανομής από την μείξη των εκθετικών.

Στο τρίτο κεφάλαιο ορίσαμε την τυχαία μεταβλητή Y η οποία ακολουθεί την κατανομή Pareto και συμβολικά $Y \sim Pa(7,2)$ με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_Y(y) = \frac{896}{(2+y)^8}$ και μέσω της μεθόδου των ροπών υπολογίσαμε την μείξη εκθετικών κατανομών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας :

$$f_x(x) = 3.0361e^{-3.13x} + 0.0297e^{-0.99x},$$

η οποία σύμφωνα με τα κριτήρια αξιολόγησης που ορίσαμε είδαμε πως αποτελεί μια πολύ καλή προσέγγιση για την κατανομή μας.

Στο τέταρτο κεφάλαιο υπολογίσαμε την κατανομή ισορροπίας όπου είναι και η κατανομή των κλιμακωτών υψών με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας για την κατανομή Pareto:

$$f_{1y}(x) = \frac{384}{(2+x)^7}$$

και για την μείξη εκθετικών κατανομών:

$$f_{1x}(x) = 2.8512e^{-3.13x} + 0.0881e^{-0.99x}$$

και αποδείξαμε πως η αρχική μας κατανομή προσεγγίζεται επίσης πολύ καλά από την μείξη των εκθετικών κατανομών.

Κλείνοντας στο τελευταίο κεφάλαιο ορίσαμε την έννοια της χρεοκοπίας με βασικό στόχο να υπολογίσουμε την πιθανότητα χρεοκοπίας. Όπως αναφέραμε άνωθι για την περίπτωση της κατανομής Pareto αυτό δεν καθίσταται δυνατό επομένως ήταν αναγκαίο να βρούμε μια κατανομή η οποία θα την προσεγγίζει πολύ καλά. Αυτό επιτεύχθηκε μέσω της μείξης εκθετικών και επομένως υπολογίζοντας την πιθανότητα χρεοκοπίας για την μείξη εκθετικών κατανοούμε πως παρόμοια αποτελέσματα θα προέκυπταν και για την πιθανότητα χρεοκοπίας της κατανομής Pareto.

Παράρτημα mathematica

1. $E(Y) = \text{Integrate}[y * f[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}]$.
2. $\mu_2 = E(Y^2) = \text{Integrate}[(y^2) * f[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}]$.
3. $F[x_] := \text{Integrate}[f[y], \{y, 0, x\}]$.
4. $\text{TailOfF}[x_] := 1 - F[x]$.
5. $\text{NSolve} \left[\left\{ \frac{x}{y} + \frac{1-x}{z} == \frac{1}{3}, \frac{2x}{y^2} + \frac{2(1-x)}{z^2} == \frac{4}{15}, \frac{6x}{y^3} + \frac{6(1-x)}{z^3} == \frac{2}{5} \right\}, \{x, y, z\}, \text{Reals} \right]$.
6. $b := \text{NIntegrate}[\text{Abs}[g[x]], \{x, 0, \text{Infinity}\}]$.
7. $\text{Plot} [\text{Abs}[f[x] - 3.0361 * \text{Exp}[-3.13 * x] - 0.0297 * \text{Exp}[-0.99 * x]], \{x, 0, 0.3\}]$.
8. $c := \text{FindMaximum}[\text{Abs}[g[x]], \{x, 0, 1\}]$.
9. $g[x_] := 3.0361 * \text{Exp}[-3.13 * x] + 0.0297 * \text{Exp}[-0.99 * x]$.
10. $b := \text{Solve}[G[x] == 0.999, x, \text{Reals}]$.
11. $F[y_] := \text{Integrate}[f[z], \{z, 0, y\}, \text{Assumptions} \rightarrow y > 0]$.
12. $b := \text{Solve}[F[y] == 0.999, y]$.
13. $F_{1y}[x_] := \text{Integrate}[\text{TailOfF}[y], \{y, 0, x\}, \text{Assumptions} \rightarrow x > 0] / \mu$.
14. $\text{TailOf } F_{1y}[x_] := \text{FullSimplify}[1 - F_{1y}[x]] = \frac{64}{(2+x)^6}$.
15. $D \left[1 - \frac{64}{(2+x)^6}, x \right] = \frac{384}{(2+x)^7}$.
16. $M[x_r] := \text{Integrate}[\text{Exp}[y * r] * f[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}, \text{Assumptions} \rightarrow r < 4]$.
17. $M[t_] := \text{Integrate}[\text{Exp}[y * t] * f[y], \{y, 0, \text{Infinity}\}, \text{Assumptions} \rightarrow t < 0.99]$.
18. $Fe[x_] := \text{Integrate}[\text{TailOfF}[y], \{y, 0, x\}, \text{Assumptions} \rightarrow x > 0] / \mu$.
19. $fe[x_] := D[Fe[x], x]$
20. $\text{LaplaceH1}[s_] := \text{LaplaceTransform}[1 - Fe[t], t, s]$.
21. $\text{Laplacefe}[s_] := \text{LaplaceTransform}[fe[t], t, s]$.
22. $\text{LaplaceTransformPsi}[s] = \text{LaplaceH1}[s] / (1 + \text{theta} - \text{Laplacefe}[s])$.

23. $\text{psi}[u] := \text{InverseLaplaceTransform}[\text{LaplaceTransformPsi}[s], s, u]$

Βιβλιογραφία

Ξένη

- Bean, M.A.,(2001). The Science of Uncertainty: With applications to Investments, Insurance and Engineering, Ed.Brooks Cole.
- Bluementhal, S. (1967). Proportional sampling in life length studies, Technometrics, 9, 205 - 218.
- Cox, D. R. (1962). Renewal Theory, Methuen and Co, London.
- Cox, D. R., Lewis, P.A.W. (1966). The Statistical Analysis of Series of Events, New York: Wiley.
- Deshpande, J. V., Kochar, S. C., Singh, H. (1986). Aspects of Positive Ageing, Journal of Applied Probability, 23, 748 - 758.
- Denuit, M., Lefevre, C., Shaked, M. (1998). The s-convex orders among real random variables, Mathematical Inequalities and Applications, 1, 585 – 613.
- Finkelstein M. (2008). Failure Rate Modeling for Reliability and Risk,XII,290p.,Hardcover.
- Gordon E. Willmot x. Sheldon Lin (2004).Lundberg Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications .
- Kleiber, C., Kotz, S. (2003). Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences, Hoboken, NJ: Wiley Interscience.
- Preeth M. (2014), Properties of equilibrium distributions of order n, Thesis Submitted to the Cochin University of Science and Technology, 682022 India.
- Ramesh C. Gupta (2006). Variance residual life function in reliability studies, Metron, 343-355.
- Zelen, M. (1974). Problems in cell kinetics and early detection of disease, Reliability and Biometry, SIAM, Philadelphia, 701 - 726.

Ελληνική

- Πολίτης Κωνσταντίνος (2012). Εισαγωγή στη θεωρία συλλογικού κινδύνου, Εκδόσεις Σταμούλη Α.Ε.
- Πολίτης Κωνσταντίνος (2016). Πανεπιστημιακές σημειώσεις στο μάθημα “Θεωρία Κινδύνου 2” του ΠΜΣ στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου .