ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Κίνηση Brown και το Μοντέλο Black-Scholes

Στεφανίδου Ιωάννα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιούλιος 2018

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Κίνηση Brown και το μοντέλο Black-Scholes

Στεφανίδου Ιωάννα

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιούλιος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ #12/03.07.17 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Βασίλειος Σεβρόγλου
- Επίκουρος Καθηγητής Γεώργιος Τζαβελάς

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS
SCHOOL OF FINANCE
AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN
ACTUARIAL SCIENCE
AND RISK MANAGEMENT

Brown motion and the Black-Scholes model

by
Stefanidou Ioanna

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece
July 2018

Στους γονείς μου,

και στη γιαγιά μου.

Ευχαριστίες

Θα ήθελα να εκφράσω την ευγνωμωσύνη μου, καθώς και να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα Καθηγητή, κύριο Νικόλαο Μαχαιρά, έναν αξιόλογο και κατάλληλα καταρτισμένο καθηγητή ο οποίος με βοήθησε και με στήριξε σε όλη αυτή την προσπάθεια. Χωρίς την πολύτιμη βοηθειά του δεν θα είχα καταφέρει να ολοκληρώσω την διπλωματική εργασία, καθώς το χρονικό περιθώριο που ήταν διαθέσιμο ήταν περιορισμένο. Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τους φίλους μου και τους γονείς μου για την υπομονή τους, τη συμπαράστασή τους και το θάρρος που μου μετέδωσαν καθόλη τη διάρκεια αυτής της προσπάθειας.

Περίληψη

Αρχικά παρατίθεται μία συστηματική μελέτη της κίνησης Brown. Το πρώτο πρόβλημα που αντιμετωπίζει κανένας με την κίνηση Brown είναι η ύπαρξή της. Μια προσέγγιση σε αυτό το ερώτημα είναι να γράψουμε ποιες πρέπει να είναι οι πεπερασμένης διάστασης κατανομές αυτής της διαδικασίας και μετά να κατασκευάσουμε ένα μέτρο πιθανότητας και μία διαδικασία επάνω σε έναν κατάλληλο μετρήσιμο χώρο, με τέτοιο τρόπο ώστε να αποκτήσουμε τις προκαθορισμένες πεπερασμένης διάστασης κατανομές.

Μια πιο κομψή προσέγγιση για την κίνηση Brown είναι κοντά στο πνεύμα της αρχικής κατασκευής του Wiener (1923), η οποία τροποποιήθηκε από τον Levy (1948) και απλοποιήθηκε από τον Ciesielski (1961).

Τέλος αναλύεται το μοντέλο Black-Scholes ως μία εφαρμογή της κίνησης Brown.

Abstract

First of all, is presented a systematic study of Brownian motion. The first problem one encounters with Brownian motion is its existence. One approach to this question is to write down what the finite-dimensional distributions of this process must be, and then to construct a probability measure and a process on an appropriate measurable space in such a way that we obtain the prescribed finite-dimensional distributions.

A more elegant approach for Brownian motion is close in spirit to Wiener's (1923) original construction, which was modified by Levy (1948) and later further simplified by Ciesielski (1961). Finally, the Black-Scholes model is analyzed as an application of Brownian motion.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

τ.μ.	: Τυχαία μεταβλητή
σ.(π).π.	: Συνάρτηση (πυκνότητας) πιθανότητας
σ.κ.	: Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας
σ.δ	: Στοχαστική διαδικασία
μ.χ.	: Μετρήσιμος χώρος
χ.π.	: Χώρος Πιθανότητας
χ.σ.	: Χαρακτηριστική συνάρτηση
σ.β.	: Σχεδόν βέβαια
σ.ο.	: Σχεδόν όλα
πρβλ.	: Παράβαλε

Εισαγωγή

Κίνηση Brown είναι το όνομα που δόθηκε στην κίνηση της γύρης αιωρούμενης στο νερό, που παρατηρήθηκε από το βοτανολόγο Robert Brown το 1828. Αυτή η τυχαία κίνηση, που αποδίδεται τώρα στη σάρωση της γύρης από μόρια του νερού, έχει ως αποτέλεσμα τη διασπορά ή τη διάχυση της γύρης στο νερό. Το εύρος των εφαρμογών της κίνησης Brown, όπως ορίζεται εδώ πηγαίνει πολύ πιο πέρα από μία μελέτη μικροσκοπικών σωματιδίων σε αιώρηση και περιλαμβάνει τη μοντελοποίηση των τιμών των μετοχών, του θερμικού θορύβου σε ηλεκτρικά κυκλώματα, ορισμένων οριακών συμπεριφορών στα συστήματα αναμονής και απογραφής και τυχαίων διαταραχών σε μία ποικιλία φυσικών, βιολογικών, οικονομικών συστημάτων και συστημάτων διαχείρισης. Επιπλέον, η ολοκλήρωση ως προς μία κίνηση Brown μας δίνει μία ενοποιημένη αναπαράσταση για μία μεγάλη κλάση martingales και διαδικασιών διάχυσης.

Στην εργασία αυτή μελετάμε το πρόβλημα ύπαρξης της κίνησης Brown, παραθέτουμε αποδείξεις των βασικών της ιδιοτήτων και αναλύουμε το μοντέλο Black-Scholes ως μία εφαρμογή της κίνησης Brown στα Χρηματοοικονομικά.

Στο Κεφάλαιο 1 αναφέρονται βασικές έννοιες και ορισμοί, ενώ στο Κεφάλαιο 2 γίνεται μία σύντομη επισκόπηση των στοχαστικών διαδικασιών, των χρόνων διακοπής και των martingales.

Στο Κεφάλαιο 3 κατασκευάζονται τα άπειρα γινόμενα μέτρων πιθανότητας (βλέπε Θεώρημα **??**) και τα προβολικά όρια χώρων πιθανότητας (βλέπε Θεώρημα Kolmogorov 3.2.2). Το Κεφάλαιο 3 είναι προπαρασκευαστικό του επόμενου κεφαλαίου.

Στο Κεφάλαιο 4 αναλύεται η πρώτη κατασκευή της κίνησης Brown μέσω προβολικών ορίων χώρων πιθανότητας. Προς αυτόν τον σκοπό παρατίθενται στην Ενότητα 4.1 βασικά αποτελέσματα των πυρήνων και των ημιομάδων Markov. Αποδεικνύεται ότι κάθε ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρήνων επάνω σε έναν μετρήσιμο χώρο $(E, \mathcal{E})$ παράγει μία προβολική οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στον ίδιο χώρο (βλέπε Θεώρημα 4.1.6). Στην Ενότητα 4.2 μελετώνται οι διαδικασίες με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Στην Ενότητα 4.3 τονίζεται η σημασία του συνόλου τροχιών για την κατασκευή μιας διαδικασίας και αποδεικνύεται ότι για το σύνολο $C := C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^3)$ των συνεχών τροχιών μιας κίνησης Brown ισχύει $\mathfrak{B}(C) =$

$C \cap \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}$ (βλέπε Θεώρημα 4.3.7).

Στην Ενότητα 4.4 γίνεται μία μελέτη των διαδικασιών με συνεχής τροποποιήσεις. Αποδεικνύεται το Θεώρημα του Kolmogorov (βλέπε Θεώρημα 4.4.2) στο οποίο δίνεται μία ικανή συνθήκη για ύπαρξη μιας συνεχούς τροποποίησης μιας διαδικασίας. Αποδεικνύεται επίσης ότι αν ισχύει η συνθήκη του Kolmogorov του Θεωρήματος (4.4.2) και εάν μια διαδικασία έχει συνεχείς τροχιές, τότε κάθε τροχιά είναι τοπικά Hölder-συνεχής (βλέπε Θεώρημα 4.4.4). Ως πόρισμα προκύπτει το Θεώρημα των Kolmogorov-Chentsov, σύμφωνα με το οποίο μία διαδικασία που ικανοποιεί τη συνθήκη Kolmogorov έχει μία τροποποίηση της οποίας οι τροχιές είναι τοπικά Hölder συνεχείς (βλέπε Πόρισμα 4.4.5).

Στην Ενότητα 4.5 αποδεικνύεται η πρώτη κατασκευή της κίνησης Brown (βλέπε Θεώρημα 4.5.4) και η σημαντική συνέπειά της, ότι κάθε κίνηση Brown μπορεί να οριστεί επάνω στον μετρήσιμο χώρο $(C, \mathfrak{B}(C))$ (βλέπε Πόρισμα 4.5.5).

Στο Κεφάλαιο 5 αναλύεται η δεύτερη κατασκευή της κίνησης Brown. Στην Ενότητα 5.1 αποδεικνύονται βασικές ιδιότητες της κίνησης Brown (βλέπε Θεώρηματα 5.1.1 και 5.1.2), ενώ στην Ενότητα 5.2 αποδεικνύεται το κύριο αποτέλεσμα του Κεφαλαίου 5 (βλέπε Θεώρημα 5.2.8).

Στο Κεφάλαιο 6 αποδεικνύονται κάποιες αναλυτικές ιδιότητες της κίνησης Brown, ενώ στο 7 παρουσιάζονται το μοντέλο Black-Scholes ως μία εφαρμογή στα Χρηματοοικονομικά.

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία. Συμβολίζουμε με: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Χρησιμοποιούνται επίσης τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z} \backslash \{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \backslash \{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \backslash \{0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Όμοια ορίζονται και τα σύνολα: $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$. Ακόμη, με $\mathbb{N}_n$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{0, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ και τέλος με $\mathbb{N}_n^*$ το σύνολο $\{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$.
Έστω Ω σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Τότε με A^c ή με $\Omega \backslash A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα του A** (σε σχέση με το Ω), με $A \uplus B$ συμβολίζεται η **ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων A και B** και με $\biguplus_{i \in I} A_i$ συμβολίζεται η **ένωση μιας οικογένειας** $\{A_i\}_{i \in I} (I \neq \emptyset)$ **ξένων ανά δύο υποσυνόλων του** Ω.

Για κάθε $A \subseteq \Omega$ με χ_A συμβολίζουμε τη **δείκτρια συνάρτηση** του A. Η **ταυτοτική συνάρτηση** από το Ω στον εαυτό του συμβολίζεται με id_Ω. Για μία απεικόνιση $f : D \longrightarrow E$ με R_f ή με $f(D)$ συμβολίζεται το **σύνολο τιμών** της f, δηλ. το σύνολο $\{f(x) : x \in D\}$, και για ένα σύνολο $A \subseteq D$ με $f \upharpoonright A$ συμβολίζεται ο **περιορισμός** της f στο A, ενώ με $f(A)$ συμβολίζεται το σύνολο $\{f(x) : x \in A\}$.
Έστω Ω σύνολο. Μία **σ-άλγεβρα** είναι μία κλάση Σ υποσυνόλων του Ω στην οποία έχουν οριστεί οι πράξεις του συμπληρώματος και της ένωσης. Αν $\mathcal{G}$ είναι κάποιο σύστημα υποσυνόλων του Ω, τότε η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$, συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται η **σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, το δε $\mathcal{G}$ ονομάζεται **γεννήτορας της** $\sigma(\mathcal{G})$. Μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$, είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη** εάν υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω για την οποία ισχύει $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$) που παράγεται από όλα τα

ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$), ονομάζεται η **Borel σ-άλγεβρα** στον $\mathbb{R}$ (ή στον $\mathbb{R}^n$) και συμβολίζεται με $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (ή $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$). Τα στοιχεία μιας Borel σ-άλγεβρας, ονομάζονται **σύνολα Borel** . Γενικότερα, αν το Ω είναι ένας τοπολογικός χώρος με μία τοπολογία $\mathcal{T}$ η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω, που παράγεται από την $\mathcal{T}$, ονομάζεται **Borel σ-άλγεβρα στο** Ω και συμβολίζεται με $\mathfrak{B}(\Omega)$.

Στη συνέχεια, και εφόσον δε δηλώνεται διαφορετικά, η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας **χώρος πιθανότητας** (χ.π. για συντομία) και το ζευγάρι (Υ, T) είναι ένας μετρήσιμος χώρος (μ.χ. για συντομία). Ένα σύνολο $N \in \Sigma$ ονομάζεται **σύνολο μηδενικού μέτρου** P ή P-μηδενικό σύνολο , αν $P(N) = 0$. Η οικογένεια όλων των P-μηδενικών συνόλων συμβολίζεται με $\Sigma_0 := \Sigma_0(P)$. Επίσης ορίζουμε την οικογένεια

$$\mathcal{N}^P := \{A \subseteq \Omega : \exists N \in \Sigma_0, A \subseteq N\}.$$

Αν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης μπορούμε να γράφουμε $\mathcal{N} := \mathcal{N}^P$. Ισχύει $\Sigma_0 \subseteq \mathcal{N}^P$ και $\Sigma_0 = \mathcal{N}^P$ αν και μόνο αν ο χ.π. (Ω, Σ, P) είναι πλήρης . Κάθε μετρήσιμη Ω-Υ-απεικόνιση ονομάζεται και τυχαία μεταβλητή (τ.μ. για συντομία). Για τ.μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ (με $\Upsilon = \mathbb{R}$) γράφουμε $X = Y$ P-σχεδόν βέβαια (P-σ.β. για συντομία), αν $P(\{X \neq Y\}) = 0$.

Μία τ.μ. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** ως προς το μέτρο P αν $\int |f| dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων** συναρτήσεων (δηλαδή όλων των συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $\int |f|^2 dP < \infty$). Με $\mathcal{L}^1_+(P)$ συμβολίζεται η οικογένεια όλων των μη αρνητικών στοιχείων της $\mathcal{L}^1(P)$.

Έστω $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{F}$ μία σ -υποάλγεβρα της Σ . Κάθε συνάρτηση $Y \in \mathcal{L}^1(P \upharpoonright \mathcal{F})$ που ικανοποιεί για κάθε $A \in \mathcal{F}$ την ισότητα $\int_A X dP = \int_A Y dP$, ονομάζεται **μία εκδοχή της δεσμευμένης μέσης τιμής της X δοσμένης της $\mathcal{F}$** και συμβολίζεται με $\mathbb{E}_P[X|\mathcal{F}]$. Για $X := \chi_E \in \mathcal{L}^1(P)$ με $E \in \Sigma$ θέτουμε $P(E|\mathcal{F}) := \mathbb{E}_P[\chi_E|\mathcal{F}]$. Με $\mathbb{E}_P[X]$ συμβολίζεται η μέση τιμή μιας πραγματικής τ.μ. ως προς το μέτρο πιθανότητας P .

Μία συνάρτηση $k : \Omega \times T \to \mathbb{R}$ είναι ένας Σ-T- **Μαρκοβιανός πυρήνας** (**Markov kernel**) όταν ικανοποιούνται οι ακόλουθες συνθήκες:

($k1$) Η συνολοσυνάρτηση $k(\omega, \bullet) : T \longrightarrow [0, 1]$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στην T για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$.

($k2$) Η συνάρτηση $\omega \longrightarrow k(\omega, B)$ είναι Σ-μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $B \in T$.

Ένας Σ-T- **Μαρκοβιανός πυρήνας** ονομάζεται επίσης **τυχαίο μέτρο**.

Έστω Σ-T-μετρήσιμη απεικόνιση $X : \Omega \to \Upsilon$ και μία $\sigma-$υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της Σ. Η **δεσμευμένη κατανομή της X επάνω στην** $\mathcal{F}$ είναι ένας $\mathcal{F}$-T-Μαρκοβιανός πυρήνας k , ικανοποιώντας για κάθε $B \in T$ τη συνθήκη

$$k(\bullet, B) = P(X^{-1}(B)|\mathcal{F})(\bullet) \quad P|\mathcal{F} - \sigma.\beta.$$

Ένας τέτοιος Μαρκοβιανός πυρήνας k θα συμβολίζεται με $P_{X|\mathcal{F}}$. Ιδιαιτέρως, εάν $\Theta : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα και $\mathcal{F} := \sigma(\Theta)$, τότε για κάθε $\mathfrak{B}_d$-T-Μαρκοβιανό πυρήνα k, η απεικόνιση $K(\Theta) : \Omega \times T \longrightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$K(\Theta)(\omega, B) := (k(\bullet, B) \circ \Theta)(\omega) \quad \forall B \in T \quad \forall \omega \in \Omega$$

είναι ένας $\sigma(\Theta)$-T-Μαρκοβιανός πυρήνας .

Ιδιαιτέρως, για $(\varUpsilon, T) = (\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ τα σχετικά μέτρα πιθανότητας $k(\theta, \bullet)$ για $\theta = \Theta(\omega)$ με $\omega \in \varOmega$ είναι κατανομές στο $\mathfrak{B}$ και έτσι μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{K}(\theta)(\bullet)$ αντί για $k(\theta, \bullet)$. Αντίστοιχα, τη περίπτωση του $K(\Theta)$ τη συμβολίζουμε με $\mathbf{K}(\Theta)$.

Για οποιαδήποτε σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\varSigma$, θα λέμε ότι δύο $\mathcal{F}$-T-Μαρκοβιανοί πυρήνες k_i, για $i \in \{1, 2\}$, είναι $P \restriction \mathcal{F}-$**ισοδύναμοι** και γράφουμε $k_1 = k_2 \quad P \restriction \mathcal{F} - \sigma.\beta.$, αν υπάρχει $P-$μηδενικό σύνολο $N \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $k_1(B, \omega) = k_2(B, \omega)$ για κάθε $B \in T$ και $\omega \notin N$.

Μια οικογένεια $\{\varSigma_i\}_{i\in I}$ $\mathcal{F}-$υποαλγεβρών της $\varSigma$ ονομάζεται ***P*-υπό συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F} \subseteq \varSigma$, αν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq 2$ έχουμε:

$$P(E_1 \cap \cdots \cap E_n|\mathcal{F}) = \prod_{j=1}^{n} P(E_j|\mathcal{F}) \quad P \restriction \mathcal{F} \quad - \sigma.\beta.$$

για κάθε $j \leq n$ και για κάθε $E_j \in \mathcal{F}_{i_j}$ όπου τα $i_1, \ldots, i_n$ είναι διάφορα μεταξύ τους στοιχεία του I.

Μια οικογένεια $X := \{X_i\}_{i\in I}$ με $I \neq \varnothing$ $\varSigma$-T-μετρήσιμων συναρτήσεων $X_i : \varOmega \longrightarrow \Upsilon$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία** (σ.δ. για συντομία) ή **στοχαστική ανέλιξη**. Ο χώρος Υ ονομάζεται **χώρος καταστάσεων** (χ.κ. για συντομία) της X. Η X είναι:

- ***P*-υπο συνθήκη ανεξάρτητη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\varSigma$, αν η οικογένεια $\sigma(\{\mathrm{X}_i\})_{i\in I}$ είναι P-υπο συνθήκη ανεξάρτητη επάνω στην $\mathcal{F}$ και
- ***P*-υπο συνθήκη ισόνομη** επάνω στη σ-υποάλγεβρα $\mathcal{F}$ της $\varSigma$, αν

$$P(F \cap X_i^{-1}(B)) = P((F \cap X_j^{-1}(B)), \quad \text{για} \quad i, j \in I, F \in \mathcal{F} \quad \text{και } \mathrm{B} \in \mathrm{T}.$$

Επιπλέον, για κάθε πραγματική συνάρτηση $X : \varOmega \to \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(\mathfrak{B}) := \{X^{-1}(B) : B \in \mathfrak{B}\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο $\varOmega$ που ονομάζεται η ***σ*-άλγεβρα στο *Ω* η παραγόμενη από την** X . Αν επιπλέον η X είναι τ.μ., τότε ισχύει $\sigma(X) \subseteq \varSigma$.

Γενικότερα, για μια σ.δ. $\{X_i\}_{i\in I}$, ορίζουμε τη $\sigma-$άλγεβρα

$$\sigma\left(\{X_i\}_{i\in I}\right) := \sigma\left(\bigcup_{i\in I}\sigma(X_i)\right).$$

Η $\sigma\left(\{X_i\}_{i\in I}\right)$ ονομάζεται η σ-άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$.

Μία σ.δ. $\{X_i\}_{i\in I}$ ονομάζεται **ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\mathcal{F}_j\}_{j\in J}$ σ-υποαλγεβρών της Σ, όπου $I, J \neq \varnothing$ σύνολα δεικτών, αν για κάθε πεπερασμένο αριθμό τ.μ. $X_{t_1},\ldots,X_{t_m}$ και σ-υποαλγεβρών $\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_n$ της Σ $(m,n\in\mathbb{N})$, οι σ-υπο άλγεβρες $\sigma(X_{t_1}),\ldots,$ $\sigma(X_{t_m}),\mathcal{F}_1,\ldots,\mathcal{F}_n$ είναι ανεξάρτητες.

Αν οι P, Q είναι κατανομές πιθανότητας επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$, τότε η κατανομή πιθανότητας με τύπο

$$(P*Q)(B) := \int_{\mathbb{R}} P(B-y)dQ(y) \quad \text{για κάθε} \quad B\in\mathfrak{B},$$

όπου $B-y := \{z-y : z\in B\}$, ονομάζεται η **συνέλιξη** των P, Q. Επίσης για $n\in\mathbb{N}$ ορίζουμε ως την ***n*-οστη συνέλιξη** της P, την κατανομή πιθανότητας $P^{*(n+1)} := P^n * P$, όπου P^{*0} είναι η εκφυλισμένη κατανομή που ικανοποιεί την $P^{*0}(\{0\}) = 1$. Ομοίως, ορίζεται και η συνέλιξη δύο σ.κ.π. F, G ή δύο σ.(π.)π. f, g. Τέλος, σημειώνουμε ότι αν $n\in\mathbb{N}$ και η $\{X_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ. με αντίστοιχες κατανομές πιθανότητας (επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$) $\{P_{X_k}\}_{k\in\mathbb{N}_n}$, τότε από τον ορισμό της συνέλιξης άμεσα έχουμε ότι

$$P_{X_0+\cdots+X_n} = P_{X_0} * \cdots * P_{X_n} = (P_{X_0} * \cdots * P_{X_{n-1}}) * P_{X_n}.$$

Μια $\sigma.\delta.$ $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι:

• μια $\sigma.\delta.$ **ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m\in\mathbb{N}_0$, $t_0,t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{R}_+$ ώστε $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$, οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j}-X_{t_{j-1}}$ $(j\in\mathbb{N}_m\cup\{0\})$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

• μια $\sigma.\delta.$ **στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν για κάθε $m\in\mathbb{N}_0$, $h\in\mathbb{R}_+$ και $t_0,t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0=t_0<t_1<\cdots<t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\mathbb{N}_m\cup\{0\}}$ έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j}-X_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m\cup\{0\}}$.

Έστω $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ μια $\sigma.\delta.$ με ολικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών I έτσι ώστε για κάθε $t\in I$ το σύνολο τιμών R_{X_i} της X_t να είναι αριθμήσιμο σύνολο . Η $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ ονομάζεται **Μαρκοβιανή *σ.δ.*** ή ***σ.δ.* Markov** ή θα λέμε ότι ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή ιδιότητα**, εάν ισχύει

$$P\left(\{X_{t_{n+1}}=x_{n+1}\}\middle|\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{t_j}=x_j\}\right) = P(X_{t_{n+1}}=x_{n+1}|X_{t_n}=x_n)$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \ldots, t_{n+1} \in I$ με $t_1 < \ldots < t_{n+1}$ και $x_j \in R_{X_{t_j}}$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ ώστε $P\left[\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{t_j} = x_j\}\right] > 0$.

Για κάθε ενδεχόμενο $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και τ.μ. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα της τυχαίας μεταβλητής X ως προς τη δεσμευμένη πιθανότητα P_B συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}_B[X] := \mathbb{E}[X|B] := \int_B X dP_B$$

και ονομάζεται η **δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοσμένου του ενδεχομένου B**.

Έστω I ένα μη κενό, μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μια οικογένεια $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **διύλιση (filtration)** αν για κάθε $j, k \in I$ με $j < k$ ισχύει $\Sigma_j \subseteq \Sigma_k$.

Μία σ.δ. $X := \{X_j\}_{j\in I}$ λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ αν για κάθε $j \in I$ η τ.μ. X_j είναι Σ_j -μετρήσιμη.

Η οικογένεια $\mathcal{F}^X := \{\mathcal{F}_j^X\}_{j\in J}$ με $\mathcal{F}_j^X := \sigma(\{X_k : k \leq j\})$ για κάθε $j \in J$, ονομάζεται η **κανονική διύλιση** για την $X := \{X_j\}_{j\in I}$. Προφανώς, κάθε σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη κανονική της διύλιση.

Έστω I ένα μη κενό μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μία σ.δ. $\{X_j\}_{j\in I}$ τ.μ. $X_i : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται ένα **martingale ως προς τη διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ ή ένα $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$-**martingale** αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:

$(m1)$ Η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$,

$(m2)$ για κάθε $j \in I$, η $X_j \in \mathcal{L}^1(P)$,

$(m3)$ για κάθε $j, k \in I$ με $j \leq k$ ισχύει $\mathbb{E}[X_k|\Sigma_j] = X_j \quad P \upharpoonright \Sigma_j - \sigma.\beta.$.

Μια διαδικασία $\{X_t\}_{t\in I}$ ονομάζεται **συνεχής κατά πιθανότητα από δεξιά** αν για $\tau \downarrow t$ ισχύει $X_\tau \longrightarrow X_t$ κατά πιθανότητα.

Τέλος, για την υπόλοιπη εργασία, και εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, θεωρούμε ένα σταθερό χ.π. (Ω, Σ, P).

Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) δύο χ.π.. Με $\Sigma \otimes T$ συμβολίζεται η σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\Omega \times \Upsilon$ που παράγεται από όλα τα μετρήσιμα ορθογώνια $A \times B$ με $A \in \Sigma$ και $B \in T$ δηλαδή

$$\Sigma \otimes T := \sigma(\{A \times B : A \in \Sigma, B \in T\}).$$

Η $\Sigma \otimes T$ ονομάζεται **το γινόμενο** των Σ και T. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει ακριβώς μία πιθανότητα $P \otimes Q : \Sigma \otimes T \longrightarrow [0, 1]$ ώστε

$$(P \otimes Q)(A \times B) = P(A)Q(B) \quad \textit{για κάθε} \quad A \in \Sigma \quad \textit{και} \quad B \in T.$$

Η $P\otimes Q$ ονομάζεται **πιθανότητα-γινόμενο** των P και Q. Η τριάδα $(\Omega\times\Upsilon, \Sigma\otimes T, P\otimes Q)$ ονομάζεται ο **χ.π.-γινόμενο** των (Ω,Σ,T) και (Υ,T,Q). Έστω I ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο δεικτών. Αν $\{(\Omega_i,\Sigma_i,P_i)\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\emptyset\neq J\subseteq I$ συμβολίζουμε με (Ω_J,Σ_J,P_J) τον χ.π. γινόμενο

$$\bigotimes_{i\in J}(\Omega_i,\Sigma_i,P_i) := (\prod_{i\in J}\Omega_i, \bigotimes_{i\in J}\Sigma_i, \bigotimes_{i\in J}P_i).$$

Αν η τριάδα (Ω,Σ,P) είναι ένας χ.π., τότε συμβολίζουμε με P_I την πιθανότητα-γινόμενο επάνω στον Ω^I και με Σ_I το πεδίο ορισμού της P_I.

Κεφάλαιο 2

Martingales, χρόνοι διακοπής και διυλίσεις

2.1 Επισκόπηση χρήσιμων στοιχείων στοχαστικών διαδικασιών

Στο κεφάλαιο 2 ο χώρος καταστάσεων θα είναι ο n-διάστατος ευκλείδιος χώρος $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με τη σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}_n$. Έστω $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία σ.δ. τυχαίων διανυσμάτων $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Για σταθερό σημείο $\omega \in \Omega$ η συνάρτηση $t \longrightarrow X_t(\omega); t \geq 0$ ονομάζεται μία **τροχιά** της σ.δ. X που σχετίζεται με το ω. Ας θεωρήσουμε δύο στοχαστικές διαδικασίες X και Y, οι οποίες ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P). Όταν αυτές θεωρηθούν συναρτήσεις του t και του ω, θα μπορούσαμε να πούμε ότι αυτές οι σ.δ. είναι **ίσες** αν $X_t(\omega) = Y_t(\omega)$ για κάθε $t \geq 0$ και για κάθε $\omega \in \Omega$. Ωστόσο, με την παρουσία του μέτρου πιθανότητας P μπορούμε να γενικεύσουμε αυτή την απαίτηση σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις, τις οποίες απαριθμούμε παρακάτω.

[211]

Ορισμός 2.1.1. Η σ.δ. Y είναι μία **τροποποίηση** της X, εάν για κάθε $t \geq 0$, ισχύει

$$P(\{X_t = Y_t\}) = 1.$$

[212]

Ορισμός 2.1.2. Οι σ.δ. X και Y έχουν **την ίδια πεπερασμένη k-διάστατη κατανομή** εάν για κάθε $k \in \mathbb{N}$, για κάθε $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \infty$, και για κάθε $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{kn})$, έχουμε:

$$P(\{(X_{t1}, \ldots, X_{tk}) \in A\}) = P(\{(Y_{t1}, \ldots, Y_{tk}) \in A\}).$$

[213]

Ορισμός 2.1.3. Δύο σ.δ. X και Y είναι **καθολικά ισοδύναμες (indistinguishable)** αν σχεδόν όλες οι τροχιές τους επαληθεύουν τη σχέση:

$$P(\{X_t = Y_t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\}) = 1.$$

Παρακάτω δίνουμε ένα χαρακτηρισμό των καθολικά ισοδύναμων σ.δ. Για το σκοπό αυτό χρειζόμαστε τον παρακάτω ορισμό.

[214]

Ορισμός 2.1.4. Ένα τυχαίο σύνολο είναι οποιοδήποτε υποσύνολο του $\Omega \times \mathbb{R}_+$. Ένα τυχαίο σύνολο A καλείται $P-$**εξαφανιζόμενο** (P-evanescent) , αν το σύνολο $A_e := \{\omega \in \Omega : \exists\, t \in \mathbb{R}_+ \ (\omega, t) \in A\}$ είναι στοιχείο της οικογένειας $\mathcal{N}^P$. Προφανώς $A_e = \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} A^t$. Αν δεν υπάρχει πρόβλημα σύγχυσης (δηλαδή αν δεν υπάρχει άλλο μέτρο πιθανότητας εκτός του P), τότε μπορούμε να γράφουμε ”εξαφανιζόμενο” αντί ”P-εξαφανιζόμενο”.

[215]

Λήμμα 2.1.5. *Οι στοχαστικές διαδικασίες X και Y είναι καθολικά ισοδύναμες αν και μόνο αν το σύνολο $\{X \neq Y\} := \{(\omega, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+ : X_t(\omega) \neq Y_t(\omega)\}$ είναι P-εξαφανιζόμενο.*

Απόδειξη. Θέτουμε $A := \{X \neq Y\}$. Τότε έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες :

$$\begin{aligned}
X, Y \quad \text{καθολικά ισοδύναμες} &\iff P(\{X_t = Y_t \ \forall t \in \mathbb{R}_+\}) = 1 \\
&\iff \exists N \in \Sigma_{0,P} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \ \forall \omega \notin N \quad (X_t(\omega) = Y_t(\omega)) \\
&\iff \exists N \in \Sigma_{0,P} \ \forall \omega \notin N \quad (\omega \in \bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} (A^t)^c \\
&\iff \exists N \in \Sigma_{0,P} \quad N^c \subseteq \bigcap_{t \in \mathbb{R}_+} (A^t)^c \\
&\iff \exists N \in \Sigma_{0,P} \quad \bigcup_{t \in \mathbb{R}_+} A^t \subseteq N \\
&\iff \exists N \in \Sigma_{0,P} \quad A_e \subseteq N \\
&\iff A \quad P - \text{εξαφανιζόμενο}.
\end{aligned}$$

Εδώ τελειώνει η απόδειξη του λήμματος. □

Ο τρίτος ορισμός είναι ο ισχυρότερος, καθώς από αυτόν προκύπτει ο πρώτος ορισμός, από τον οποίο προκύπτει ο δεύτερος ορισμός. Από την άλλη πλευρά μπορεί δύο σ.δ. να είναι τροποποιήσεις η μία της άλλης και όμως να έχουν εντελώς διαφορετικές τροχιές. Παρακάτω παραθέτουμε ένα τυπικό παράδειγμα.

[216]

Παράδειγμα 2.1.6. Θεωρούμε μία θετική συνεχή τ.μ. Z. Θέτουμε $X_t := 0$ και

$$Y_t := \begin{cases} 0, & t \neq Z \\ 1, & t = Z \end{cases}$$

Η σ.δ. Y είναι μία τροποποίηση της X δεδομένου ότι για κάθε $t \geq 0$ έχουμε $P(\{Y_t = X_t\}) = P(\{Z \neq t\}) = 1$, δηλαδή η X είναι τροποποίηση της Y.Από την άλλη πλευρά: $\{Y_t = X_t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\} = \{Y_t = X_t = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\} = \{Z \neq t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\} = \varnothing$, η τελευταία ισότητα διότι για κάθε $\omega \in \Omega$ υπάρχει ακριβώς ένα $t > 0$ ώστε $Z(\omega) = t$. Άρα $P(\{Y_t = X_t \quad \forall t \in \mathbb{R}_+\}) = 0$.

Γνωρίζουμε ότι μία τυχαία σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία οικογένεια από Σ-μετρήσιμες συναρτήσεις (τ.μ.) $X_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Ωστόσο η X είναι πραγματικά μία συνάρτηση των μεταβλητών (t, ω), και έτσι για τεχνικούς λόγους είναι βολικό και ευκολότερο να υπάρχουν καποιες κοινές ιδιότητες που αφορούν τη μετρησιμότητα. [217]

Ορισμός 2.1.7. Η *σ*.δ. X ονομάζεται **μετρήσιμη** αν, η $\widetilde{X}$ είναι $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \Sigma$-$\mathfrak{B}_n$-μετρήσιμη, δηλαδή για κάθε $A \in \mathfrak{B}_n$,το σύνολο $\widetilde{X}^{-1}(A) := \{(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega : X_t(\omega) \in A\}$ είναι στοιχείο της σ- άλγεβρας $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \Sigma$. Υπενθυμίζουμε ότι $\widetilde{X}(t, \omega) := X_t(\omega)$.

Μία άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Fubini είναι ότι οι τροχιές μίας μετρήσιμης *σ*.δ. είναι Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις του $t \in \mathbb{R}_+$ και υπό την προυπόθεση ότι για κάθε στοιχείο X_t της X ορίζεται η μέση τιμή της, η συνάρτηση $t \longrightarrow m(t) := \mathbb{E}[X_t]$, όπου $\mathbb{E}$ δηλώνει τη μέση τιμή σε μέτρο πιθανότητας P στον (Ω, Σ),είναι $\mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$-μετρήσιμη. Επιπλέον αν η X παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}$, $I = [0, \infty)$ και $\int_I \mathbb{E}|X_t|dt < \infty$, τότε

$$\int_I |X_t|dt < \infty \;\; P - \sigma.\beta \;\; \text{και} \;\; \int_I \mathbb{E}X_t dt = \mathbb{E}\int_I X_t dt$$

Υπάρχει ένας πολύ σημαντικός και μη τεχνικός λόγος να συμπεριλάβουμε τις σ-άλγεβρες στη μελέτη των *σ*.δ. και αυτός είναι για να γνωρίζουμε και να παρακολουθούμε τις πληροφορίες για τη *σ*.δ.. Η χρονική εμφάνιση της *σ*.δ. υποδηλώνει μία ροή χρόνου, στην οποία σε κάθε στιγμή $t \geq 0$ μπορούμε να αναφερθούμε στο παρελθόν, το παρόν και στο μέλλον και κάθε χρονική στιγμή μπορούμε να ρωτήσουμε έναν παρατηρητή πόσα γνωρίζει για τη *σ*.δ. στο παρόν σε σύγκριση με το πόσα γνώριζε σε κάποια στιγμή στο παρελθόν ή με το πόσα θα είναι σε θέση να γνωρίζει για το μέλλον. Εμείς εφοδιάζουμε το δειγματικό μας χώρο (Ω, Σ) με μία **διύλιση (filtration)** , δηλαδή μία αύξουσα οικογένεια $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σ-υποαλγεβρών της Σ. Ορίζουμε $\mathcal{F}_\infty := \sigma(\bigcup_{t\in\mathbb{R}_+} \mathcal{F})$. [218]

Ορισμός 2.1.8. **(a)** Δοσμένης μιας *σ*.δ., η πιο απλή διύλιση που προκύπτει, είναι αυτή που παράγεται από την ίδια τη *σ*.δ., η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{F}_t^X := \sigma(\{X_s\}_{0\leq s\leq t})$$

και είναι η μικρότερη $\sigma-$άλγεβρα ως προς την οποία η X_s, είναι μετρήσιμη για κάθε $s \in [0, t]$. Ερμηνεύουμε ότι $A \in \mathcal{F}_t^X$ σημαίνει ότι μέχρι το χρόνο t ένας παρατηρητής είναι σε θέση να γνωρίζει εάν το A έχει συμβεί ή όχι.

(b) Έστω $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία διύλιση. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_{t^-} := \sigma(\bigcup_{s<t}\Sigma_s)$ τη $\sigma-$άλγεβρα ενδεχομένων που συνέβησαν αυστηρά πριν το $t > 0$, και με $\mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{e>0}\Sigma_{t+e}$ τη $\sigma-$άλγεβρα ενδεχομένων που συνέβησαν αμέσως μετά τη χρονική στιγμή $t \geq 0$. Εμείς συμφωνούμε ότι $\mathcal{F}_{0^-} := \mathcal{F}_0$ και λέμε ότι η διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}$ είναι **δεξιά-συνεχής** εάν $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+}$ και αντίστοιχα **αριστερά-συνεχής** εάν $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^-}$ για κάθε $t \geq 0$.

Η έννοια της μετρησιμότητας μιας σ.δ. όπως δόθηκε στον Ορισμό 2.1.7. είναι μάλλον αδύναμη. Η έννοια της διύλυσης $\{\mathcal{F}_t\}$ εισάγει πιο ενδιαφέροντες και χρήσιμους ορισμούς της μετρησιμότητας.

[219]

Ορισμός 2.1.9. Η σ.δ. $X = \{X_t\}_{t\in I}$ είναι **προσαρμοσμένη** στη διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}$, εάν για κάθε $t \geq 0$, η X_t είναι μια $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή.

[2110]

Ορισμός 2.1.10. Η σ.δ. X ονομάζεται **προοδευτικά μετρήσιμη** ως προς τη διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}$, εάν για κάθε $t \geq 0$ και $A \in \mathfrak{B}_n$, το σύνολο $\{(s,\omega), \quad 0 \leq s \leq t, \quad \omega \in \Omega, \quad X_s(\omega) \in A\}$ ανήκει στη σ- άλγεβρα γινόμενο $\mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$, ή με άλλα λόγια αν η συνάρτηση $(s,\omega) \longrightarrow X_s(\omega)$ είναι $\mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-$\mathfrak{B}_n$-μετρήσιμη, για κάθε $t \geq 0$.

Η ορολογία εδώ προέρχεται από το Chung & Doob (1965) [7] , το οποίο αποτελεί τη βασική παραπομπή για το παρόν κεφάλαιο καθώς και για το επόμενο. Προφανώς κάθε προοδευτικά μετρήσιμη σ.δ. είναι μετρήσιμη και προσαρμοσμένη. Το επόμενο θεώρημα από το Chung & Doob (1965) [7] , παρέχει την έκταση στην οποία το αντίστροφο είναι αληθές.

[2111]

Πρόταση 2.1.11. *Εάν η σ.δ. X είναι μετρήσιμη και προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}$, τότε αυτή έχει μία προοδευτικά μετρήσιμη τροποποίηση.*

Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο ([15], page 68) για τη μεγάλη και αρκετά απαιτητική απόδειξη της παραπάνω πρότασης. Σχεδόν όλες οι διαδικασίες είναι είτε δεξιά, είτε αριστερά συνεχείς και για αυτές η απόδειξη ενός ισχυρότερου αποτελέσματος είναι ευκολότερη και θα δοθεί παρακάτω.

[2112]

Πρόταση 2.1.12. *Εάν η σ.δ. X είναι προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}$ και κάθε τροχιά της είναι δεξιά συνεχής ή κάθε τροχιά της είναι αριστερά συνεχής, τότε η X είναι προοδευτικά μετρήσιμη ως προς τη διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}$.*

Απόδειξη. Χειριζόμαστε την περίπτωση της δεξιάς συνέχειας. Με $t > 0$, $n \geq 1$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, και $0 \leq s \leq t$, ορίζουμε:

$$X_s^{(n)}(\omega) = X_{(k+1)t/2^n}(\omega) \quad \frac{kt}{2^n} < s \leq \frac{k+1}{2^n}t,$$

καθώς $X_0^{(n)}(\omega) = X_0(\omega)$. Αυτή η κατασκευασμένη απεικόνιση $(s,\omega) \longrightarrow X_s^{(n)}(\omega)$ από το $[0,t] \times \Omega$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι αποδεδειγμένα $\mathfrak{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t-$ μετρήσιμη. Άλλωστε από τη δεξιά συνέχεια έχουμε $\lim_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega), \quad \forall (s,\omega) \in [0,t] \times \Omega$. Επομένως η απεικόνιση $(s,\omega) \longrightarrow X_s(\omega)$ είναι επίσης $\mathcal{F}_t-$μετρήσιμη. □

[2113]

Παρατήρηση 2.1.13. Εάν η σ.δ. X είναι δεξιά- ή αριστερά- συνεχής, αλλά όχι απαραίτητα προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}$, τότε το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι η X είναι μετρήσιμη.

[2114]

Ορισμός 2.1.14. Ένας **τυχαίος χρόνος** T, είναι μία Σ-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή με τιμές στο $[0,\infty]$.

[2115]

Ορισμός 2.1.15. Εάν X είναι μία σ.δ. και T είναι ένας τυχαίος χρόνος, ορίζουμε τη συνάρτηση X_T επάνω στο ενδεχόμενο $\{T < \infty\}$ ως εξής:

$$X_T(\omega) := X_{T(\omega)}(\omega).$$

Εάν $X_\infty(\omega)$ ορίζεται για όλα τα $\omega \in \Omega$, τότε η X_T μπορεί επίσης να οριστεί στο Ω θέτοντας $X_T(\omega) := X_\infty(\omega)$ με $\{T = \infty\}$.

2.2 Χρόνοι διακοπής

Ας θυμηθούμε την ερμηνεία του t ως χρόνου, και της σ-άλγεβρας $\mathcal{F}_t$ σαν τη συσσωρευμένη πληροφορία μέχρι και το t. Ας φανταστούμε επίσης ότι ενδιαφερόμαστε για την εμφάνιση ενός βέβαιου φαινομένου: ενός σεισμού με ένταση επάνω από ένα συγκεκριμένο επίπεδο, του αριθμού των πελατών που υπερβαίνει το όριο για τις απαιτήσεις ασφάλειας μιας εγκατάστασης κ.λ.π. Είμαστε επιπλέον αναγκασμένοι να δώσουμε προσοχή στη στιγμή $T(\omega)$ στην οποία το φαινόμενο εμφανίζεται για πρώτη φορά. Είναι πολύ διαισθητικό τότε το ενδεχόμενο $\{\omega : \ T(\omega) \leq t\}$, το οποίο συμβαίνει εάν και μόνο εάν το φαινόμενο έχει εμφανιστεί πριν ή και ακριβώς τη χρονική στιγμή t, θα πρέπει να αποτελεί μέρος της πληροφορίας που έχει συσσωρευθεί έως εκείνη τη στιγμή.

[221]

Ορισμός 2.2.1. Ας θεωρήσουμε ένα μετρήσιμο χώρο (Ω, Σ) εφοδιασμένο με μία διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}$. Ο τυχαίος χρόνος T είναι ένας **χρόνος διακοπής** της διύλισης, εάν το ενδεχόμενο $\{T \leq t\}$ ανήκει σε μία σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Ο τυχαίος χρόνος T είναι ένας **προαιρετικός χρόνος** της διύλισης εάν $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

[222]

Πρόταση 2.2.2. Έστω $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια διύλιση στον μετρικό χώρο (Ω,Σ). Κάθε τυχαίος χρόνος ίσος με μη αρνητική σταθερά είναι ένας χρόνος διακοπής. Κάθε χρόνος διακοπής είναι προαιρετικός και οι δύο έννοιες συμπίπτουν εάν η διύλιση είναι δεξιά συνεχής.

Απόδειξη. Η απόδειξη του πρώτου μέρους της πρότασης δίνεται παρακάτω. Έστω $T:\Omega\longrightarrow[0,\infty]$ Σ-μετρήσιμη και $T(\omega)=c$ για κάθε $\omega\in\Omega$ και έστω διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Έστω $\{T\le t\}=\{\omega\in\Omega:T(\omega)\le t\}$. Τότε $\{T\le t\}=\varnothing$ εάν $t<c$ και $\{T\le t\}=\Omega$ εάν $t\ge c$. Τότε $\{T\le t\}\in\mathcal{F}_0\ \ \forall t\in\mathbb{R}_+$. Επειδή $\mathcal{F}_0\subseteq\mathcal{F}_t\ \forall t\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $\mathcal{F}_0=\{\varnothing,\Omega\}\longrightarrow\{T\le t\}\in\mathcal{F}_t\ \forall t$. Η δεύτερη απόδειξη βασίζεται στην παρατήρηση ότι $\{T<t\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{T\le t-(1/n)\}\in\mathcal{F}_t$, επειδή εάν ο T είναι χρόνος διακοπής τότε $\{T\le t-(1/n)\}\in\mathcal{F}_{t-(1/n)}\subseteq\mathcal{F}_t$ για $n\ge1$. Για τον τρίτο ισχυρισμό υποθέτουμε ότι T είναι ένας προαιρετικός χρόνος μιας δεξιάς συνεχούς διύλισης $\{\mathcal{F}_t\}$. Αφού $\{T\le t\}=\bigcap_{\varepsilon>0}\{T<t+\varepsilon\}$ έχουμε $\{T\le t\}\in\mathcal{F}_{t+\varepsilon}$ για κάθε $t\ge0$ και κάθε $\varepsilon>0$. Απο οπου $\{T\le t\}\in\mathcal{F}_{t^+}=\mathcal{F}_t$. □

[223]

Πόρισμα 2.2.3. Ο T είναι προαιρετικός χρόνος της διύλισης $\{\mathcal{F}_t\}$ εάν και μόνο αν είναι χρόνος διακοπής της (δεξιάς-συνεχούς) διύλισης $\{\mathcal{F}_t^+\}$.

[224]

Λήμμα 2.2.4. Εάν T είναι προαιρετικός χρόνος και θ μια θετική σταθερά, τότε ο $T+\theta$ είναι ένας χρόνος διακοπής.

Απόδειξη. Εάν $0\le t<\theta$, τότε $\{T+\theta\le t\}=\varnothing\in\mathcal{F}_t$. Εάν $t\ge\theta$, τότε $\{T+\theta\le t\}=\{T\le t-\theta\}\in\mathcal{F}_{(t-\theta)^+}\subseteq\mathcal{F}_t$, όπου η σχέση $\{T\le t-\theta\}\in\mathcal{F}_{t-\theta^+}$ είναι συνέπεια του πορίσματος 2.2.3. □

[225]

Λήμμα 2.2.5. Εάν T,S είναι χρόνοι διακοπής, τότε χρόνοι διακοπής είναι επίσης και οι $T\vee S$, $T\wedge S$, $T+S$.

Απόδειξη. Οι πρώτοι δύο ισχυρισμοί είναι εύκολοι. Για τον τρίτο ισχύει για $t>0$ ότι:
$\{T+S>t\}=\{T=0,S>t\}\cup\{0<T<t,T+S>t\}\cup\{T>t,S=0\}\cup\{T\ge t,S>0\}$.
Το πρώτο, τρίτο και τέταρτο γεγονός ανήκουν στην $\mathcal{F}_t$, λόγω της πρότασης 2.2.2. Όσον αφορά το δεύτερο γεγονός το ξαναγράφουμε παρακάτω ως:

$$\bigcup_{r\in\mathbb{Q}^+,0<r<t}\{t>T>r,S>t-r\},$$

όπου $\mathbb{Q}^+$ αποτελεί το σύνολο των ρητών ριθμών που ανήκουν στο διάστημα $[0,\infty)$. Τώρα και το δεύτερο γεγονός ανήκει στην $\mathcal{F}_t$. □

[226]

Λήμμα 2.2.6. Έστω $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία ακολουθία προαιρετικών χρόνων. Τότε οι τυχαίοι χρόνοι $sup_{n\geq 1}T_n$, $inf_{n\geq 1}T_n$, $\overline{lim}_{n\to\infty}T_n$, $\underline{lim}_{n\to\infty}T_n$ είναι όλοι προαιρετικοί. Επιπλέον εάν οι T_n είναι χρόνοι διακοπής, τότε το ίδιο ισχύει για το $sup_{n\geq 1}T_n$.

Απόδειξη. Από το πόρισμα 2.2.3, καθώς και από τις ισότητες, παίρνουμε τα εξής:

$$\{sup_{n\geq 1}T_n \leq t\} = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{T_n \geq t\} \quad \text{και} \quad \{inf_{n\geq 1}T_n < t\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{T_n < t\}.$$

□

[227]

Ορισμός 2.2.7. Έστω T είναι χρόνος διακοπής της διύλισης $\{\mathcal{F}_t\}$. Η σ-άλγεβρα $\{\mathcal{F}_T\}$ των γεγονότων που ορίζεται πριν το χρόνο διακοπής T αποτελείται από εκείνα τα γεγονότα $A \in \Sigma$ για τα οποία ισχύει $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ για κάθε $t \geq 0$.

[228]

Λήμμα 2.2.8. Για κάθε δύο χρόνους διακοπής T και S και για κάθε $A \in \mathcal{F}_S$, έχουμε $\cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$. Πιο συγκεκριμένα εάν $S \leq T$ μέσα στο Ω έχουμε ότι $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

Απόδειξη. Δεν είναι δύσκολο να επαληθεύσουμε ότι για κάθε χρόνο διακοπής T και για θετική σταθερά t, $T \wedge t$ είναι μία $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή. Με αυτό στο μυαλό μας ο ισχυρισμός προέρχεται από την παρακάτω ισότητα

$$A \cap \{S \leq T\} \cap \{T \leq t\} = [A \cap \{S \leq t\}] \cap \{T \leq t\} \cap \{S \wedge t \leq T \wedge t\}$$

, το οποίο δείχνει ότι η αριστερή ισότητα είναι γεγονός της $\mathcal{F}_t$. □

[229]

Λήμμα 2.2.9. Έστω T και S χρόνοι διακοπής. Τότε $\mathcal{F}_{T\wedge S} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$ και καθένα από τα γεγονότα

$$\{T < S\}, \{S < T\}, \{T \leq S\}, \{S \leq T\}, \{T = S\} \tag{2.1}$$

ανήκει στη $\mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$.

Απόδειξη. Για τον πρώτο ισχυρισμό γνωρίζουμε ότι $\mathcal{F}_{T\wedge S} \subseteq \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$. Για να αποδείξουμε την αντίθετη σχέση ας θεωρήσουμε $A \in \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$ και ας παρατηρήσουμε

$$A \cap \{S \wedge T \leq t\} = A \cap [\{S \leq T\} \cup \{T \leq t\}] = [A \cap \{S \leq t\}] \cup [A \cap \{T \leq t\}] \in \mathcal{F}_t \tag{2.2}$$

και επιπλέον $A \in \mathcal{F}_{S\wedge T}$.

Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε $\{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$ και επιπλέον $\{S > T\} \in \mathcal{F}_T$. Από την άλλη πλευρά θεωρούμε χρόνο διακοπής $R = S \wedge T$ ο οποίος ξανά από το προηγούμενο λήμμα είναι $\mathcal{F}_T$-μετρήσιμος. Επιπλέον $\{S < T\} = \{R < T\} \in \mathcal{F}_T$. Εναλλάσσοντας τους ρόλους των S, T βλέπουμε ότι $\{T > S\}, \{T < S\}$ ανήκουν στην $\mathcal{F}_S$ και επιπλέον έχουμε δείξει ότι τα δύο γεγονότα ανήκουν στην $\mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$. Αλλά όταν το ίδιο ισχύει και για τα συμπληρώματά τους, συνεπώς το ίδιο ισχύει και για το $\{S = T\}$. □

[2210]

Πρόταση 2.2.10. Έστω $X = \{X_t\}$, προσαρμοσμένη στη $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία συνεχής μετρήσιμη διαδικασία και έστω T ένας χρόνος διακοπής της διύλισης $\{\mathcal{F}_t\}$. Τότε η τυχαία μεταβλητή X_t που ορίζεται στο διάστημα $\{T < \infty\} \in \mathcal{F}_T$ είναι $\mathcal{F}_t$-μετρήσιμη και η διαδικασία $\{X_{T\wedge t}, \mathcal{F}_t; \quad 0 \leq t < \infty\}$ είναι συνεχώς μετρήσιμη.

Απόδειξη. Για τον πρώτο ισχυρισμό αυτό που πρέπει να δειξουμε είναι ότι για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)$ και για κάθε $t \geq 0$, το γεγονός $\{X_T \in B\} \cap \{T \leq t\}$ ανήκει στην $\mathcal{F}_t$. Αλλά αυτό το γεγονός μπορεί επίσης να γραφτεί στη μορφή $\{X_{T\wedge t} \in B\} \cap \{T \leq t\}$ και αυτό είναι αρκετό για να αποδείξουμε τη συνεχή μετρησιμότητα της σταματημένης διαδικασίας. Τέλος παρατηρούμε ότι η αντιστοιχία $(s, \omega) \longrightarrow (T(\omega) \wedge s, \omega)$ από το $[0, t] \times \Omega$ στον εαυτό της είναι $\mathfrak{B}([0, t]) \bigotimes \mathcal{F}_t$-μετρήσιμη. Εκτός αυτού από την υπόθεση της συνεχούς μετρησιμότητας, η αντιστοιχία

$$(s, \omega) \longrightarrow X_s(\omega) : ([0, t] \times \Omega, \mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d))$$

είναι μετρήσιμη και επιπλέον το ίδιο ισχύει και για την αντιστοιχία

$$(s, \omega) \longrightarrow X_{T(\omega)\wedge s}(\omega) : ([0, t] \times \Omega, \mathfrak{B}([0, t]) \otimes \mathcal{F}_t) \longrightarrow (\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)).$$

□

[2211]

Ορισμός 2.2.11. Έστω T είναι προαιρετικός χρόνος της διύλισης $\mathcal{F}_t$. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{F}_{T+}$ των ενδεχομένων που ορίζονται αμέσως μετά τον προαιρετικό χρόνο T, περιέχει εκείνα τα ενδεχόμενα $A \in \Sigma$ για τα οποία ισχύει $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.

[2212]

Ορισμός 2.2.12. Η διύλιση $\mathcal{F}_t$ ικανοποιεί τις **συνήθεις συνθήκες** εάν είναι δεξιά-συνεχής και η $\mathcal{F}_0$ περιέχει όλα τα P-αμελητέα ενδεχόμενα της Σ.

2.3 Συνεχή martingales

Υποθέτουμε σε αυτό το κεφάλαιο ότι ο αναγνώστης είναι οικείος με την ιδέα και τις βασικές ιδιότητες των martingales σε διακριτό χρόνο. Μία άριστη παρουσίαση του θέματος μπορεί κάποιος να βρει στο βιλίο του [7] (ενότητες 9.3 και 9.4 σελίδες 319-341) και του [6] (κεφάλαιο 1). Ο σκοπός αυτού του κεφαλαίου είναι να επεκτείνει τα αποτελέσματα των διακριτών χρόνων σε συνεχή χρόνων μάρτινγκειλς. Το χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός συνεχούς μάρτινγκειλ είναι μία μονοδιάστατη κίνηση Brown . Αυτή η διαδικασία μπορεί να θεωρηθεί σαν συνεχούς χρόνου εκδοχή ενός μονοδιάστατου συμμετρικού τυχαίου περιπάτου. Σε αυτό το κεφάλαιο θεωρούμε διαδικασίες αποκλειστικά με πραγματικές τιμές της μορφής $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P), προσαρμοσμένες σε μια δοθείσα διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}$, και με την προϋπόθεση ότι $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ για κάθε $t \geq 0$.

Ορισμός 2.3.1. Αν η στοχαστική ανέλιξη $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) Η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ είναι προσαρμοσμένη στην $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$,

(ii) $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ για κάθε $t \geq 0$,

(iii) $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ για κάθε $0 \leq s < t$,

τότε λέγεται **martingale** ως προς τη διύλιση $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.
Αν αντί της (iii) έχουμε $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \geq X_s$ η ανέλιξη λέγεται **submartingale** , ενώ εάν ισχύει $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_s) \leq X_s$ η ανέλιξη λέγεται **supermartingale** .

Θεώρημα 2.3.2. *Έστω $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ συνεχές martingale και T χρόνος διακοπής . Τότε η ανέλιξη X^T είναι martingale.*

Άμεση συνέπεια του αποτελέσματος αυτού είναι το επόμενο.

Θεώρημα 2.3.3. (Επιλεκτικής διακοπής) *Έστω $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ συνεχές martingale και T φραγμένος χρόνος διακοπής. Τότε*

$$\mathbb{E}(X_T) = \mathbb{E}(X_0).$$

Απόδειξη. Αν M είναι ένα άνω φράγμα του χρόνου διακοπής T, τότε επειδή η X^T είναι martingale θα έχουμε $\mathbb{E}(X_M^T) = \mathbb{E}(X_0^T)$, το οποίο είναι η ζητούμενη ισότητα αφού $T \wedge M = T$. □

Θεώρημα 2.3.4. (Ανισότητα Doob για martingales) *Έστω $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ συνεχές submartingale και $t > 0$. Τότε για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε*

$$P(sup_{s\in[0,t]}X_s \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(X_t^+).$$

Απόδειξη. Για $n \geq 1$ έστω $I_n := (\{k/2^n : k \in \mathbb{N}\} \cap [0,t]) \cup \{t\}$. Το Θεώρημα της ανισόττας Doob για $t \in \mathbb{N}$ δίνει ότι για $r > 0$ ισχύει

$$P(sup_{s\in I_n} X_s > r) \leq P(sup_{s\in I_n} X_s \geq r) \leq \frac{1}{r}\mathbb{E}(X_t^+).$$

Η ακολουθία $A_n := sup_{s\in I_n} X_s > r\},\ n \geq 1$ είναι αύξουσα (καθώς και η $I_{n n\geq 1}$ είναι) και η ένωσή της είναι το σύνολο $\{sup_{s\in[0,t]} X_s > r\}$. Στον τελευταίο ισχυρισμό χρησιμοποιούμε ότι η X έχει συνεχή μονοπάτια και ότι η ένωση των I_n είναι ένα πυκνό υποσύνολο του $[0,t]$. Άρα

$$P(sup_{s\in[0,t]} X_s > r) \leq \frac{1}{r}\mathbb{E}(X_t^+). \tag{2.3}$$

Παίρνουμε τώρα μια γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{r_n\}_{n\leq 1}$ θετικών αριθμών που συγκλίνει στο λ. Τότε η ακολουθία $A_n := \{sup_{s\in[0,t]} X_s > r_n\}$ είναι φθίνουσα με τομή το σύνολο $\{sup_{s\in[0,t]} X_s \geq \lambda\}$. Εφαρμόζουμε την 2.3 για $r = r_n$ και παίρνουμε $n \longrightarrow \infty$ και έπειτα επικαλούμαστε ότι $\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(\cap_{n\geq 1} A_n)$. Έτσι προκύπτει το ζητούμενο. $\square$

Κεφάλαιο 3

Μέτρα πιθανότητας επάνω σε άπειρα γινόμενα σ-αλγεβρών

3.1 Άπειρα γινόμενα χώρων πιθανότητας

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται μία ακολουθία πειραμάτων $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathcal{N}}$ με τυχαίο αποτέλεσμα. Το $\mathcal{E}$ αποτελείται από την εκτέλεση των πειραμάτων $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots$, ανεξάρτητα, το ένα μετά το άλλο ή ταυτόχρονα. Για παράδειγμα, έστω ότι όλα τα $\mathcal{E}_n$ αναφέρονται στο ίδιο πείραμα. Τότε μας απασχολεί η επανάληψη αυτού του πειράματος, για παράδειγμα, πετώντας ένα νόμισμα, άπειρες φορές και ανεξάρτητα από τα αποτελέσματα που έχουν ληφθεί προηγουμένως. Αφού ήδη γνωρίζουμε την περίπτωση για πεπερασμένες το πλήθος τέτοιες επαναλήψεις λόγω της θεωρίας του γινομένου των πεπερασμένων χώρων πιθανότητας , φαίνεται τώρα ενδιαφέρον να μελετήσουμε την επέκταση αυτής της θεωρίας συμπεριλαμβάνοντας απείρως πολλούς παράγοντες. Αυτό μας δίνει την ώθηση να προχωρήσουμε παρακάτω:
Υποθέτουμε ότι το κάθε πείραμα $\mathcal{E}_n$ περιγράφεται από ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega_n, \Sigma_n, P_n)$. Εμείς ψάχνουμε ένα κατάλληλο χ.π. (Ω, Σ, P) για να περιγράψουμε το $\mathcal{E}$. Περιμένουμε να έχει τις ακόλουθες ιδιότητες : Κάθε στοιχειώδες γεγονός $\omega \in \Omega$ πρέπει να είναι μία ακολουθία (ω_n) από στοιχειώδη γεγονότα $\omega_n \in \Omega_n$. Πρέπει επομένως να επιλέξουμε : [31]

$$\Omega := \prod_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n \tag{3.1}$$

Τότε τα $A_1 \in \Sigma_1 \dots, A_n \in \Sigma_n$ είναι πιθανά ενδεχόμενα στα πρώτα n πειράματα. Το [32]

$$A := A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \times \Omega_{n+1} \times \Omega_{n+2} \times \dots \tag{3.2}$$

μπορεί να θεωρηθεί ως το ενδεχόμενο του πειράματος $\mathcal{E}$, το οποίο αποτελείται από την εμφάνιση των ενδεχομένων $A_1, \dots, A_n$ στις πρώτες n δοκιμές από τη σειρά των δοκιμών $(\mathcal{E}_i)$. Θέλουμε κάθε τέτοιο A να βρίσκεται μέσα στη Σ και να ισχύει: [33]

$$P(A) := P_1(A_1) \cdot \ldots \cdot P_n(A_n) \tag{3.3}$$

ως την πιθανότητά του. Η πιο λεπτομερής έρευνα που θα γίνει θα δείξει ότι το μέτρο πιθανότητας P είναι ήδη μονοσήμαντα ορισμένο μέσω αυτών των απαιτήσεων, καθώς και ότι έχει επιπλέον μία ιδιότητα ελαχίστου.

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα μη κενό σύνολο δεικτών I το οποίο στις εφαρμογές θα είναι αριθμήσιμο και μία οικογένεια $(\Omega_i, \Sigma_i, P_i)_{i \in I}$ χώρων πιθανότητας. Για κάθε μη κενό σύνολο
[34] $K \subseteq I$ ορίζουμε το **καρτεσιανό γινόμενο**

$$\Omega_K := \prod_{i \in K} \Omega_i \tag{3.4}$$

[35] και ιδιαιτέρως, ορίζουμε

$$\Omega := \Omega_I. \tag{3.5}$$

Θυμίζουμε τον ορισμό του καρτεσιανού γινομένου ; Το Ω_K είναι το σύνολο όλων των απεικο-
[36] νίσεων

$$\omega : K \longrightarrow \bigcup_{i \in K} \Omega_i \tag{3.6}$$

έτσι ώστε $\omega(i) \in \Omega_i$ για κάθε $i \in K$. Σημειώνουμε ότι αν το I είναι άπειρο σύνολο, δεν μπορούμε να αποδείξουμε ότι το Ω είναι μη κενό. Αυτό προκύπτει μόνο μέσω του Αξιώματος της Επιλογής . Θεωρώντας για κάθε τέτοια απεικόνιση ω τον περιορισμό της σε οποιονδήποτε
[37] μη κενό σύνολο $J \subseteq K$ παίρνουμε την **απεικόνιση της προβολής**

$$p_{JK} : \Omega_K \longrightarrow \Omega_J \tag{3.7}$$

του Ω_K στο Ω_J. Για συντομία γράφουμε $p_J := p_{JI}$, $p_{iK} := p_{\{i\}K}$ και $p_i := p_{\{i\}I}$. Προφανώς
[38] έχουμε

$$p_{JL} = p_{JK} \circ p_{KL} \quad \text{για κάθε} \quad J \subseteq K \subseteq L \tag{3.8}$$

[39] και ιδιαιτέρως

$$p_J = p_{JK} \circ p_K \quad \text{για κάθε} \quad J \subseteq K. \tag{3.9}$$

Έστω $\mathcal{F} = \mathcal{F}(I)$ το σύστημα των μη κενών πεπερασμένων υποσυνόλων του I. Για κάθε
[310] $J \in \mathcal{F}$ ορίζεται η σ-άλγεβρα και το μέτρο πιθανότητας

$$\Sigma_J := \bigotimes_{i \in J} \Sigma_i \quad P_J := \bigotimes_{i \in J} P_i. \tag{3.10}$$

Σύφωνα με τον ορισμό για πεπερασμένο I ορίζουμε:

[311]

Ορισμός 3.1.1. Το γινόμενο $\bigotimes_{i\in I}\Sigma_i$ μιας οικογένειας $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ σ-αλγεβρών είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα Σ στο Ω, ως προς την οποία οι απεικονίσεις προβολής $p_i:\Omega\longrightarrow\Omega_i$ είναι Σ-Σ_i-μετρήσιμες. Συμβολισμός

$$\Sigma := \bigotimes_{i\in I}\Sigma_i := \sigma(\{p_i\}_{i\in I}). \tag{3.11}$$

Για κάθε $J\in\mathcal{F}$ η προβολή p_J είναι επίσης Σ-Σ_J-μετρήσιμη επειδή $\Sigma_J=\sigma(\{p_{iJ}\}_{i\in J})$ και $p_i=p_{iJ}\circ p_J$ για κάθε $i\in J$ σύμφωνα με την (3.9). Επιπλέον η (3.11) μπορεί να γραφτεί ως εξής

$$\sigma(\{p_i\}_{i\in I})=\sigma(\{p_J\}_{J\in\mathcal{F}}). \tag{3.12}$$

Εμείς ψάχνουμε ένα μέτρο πιθανότητας P πάνω στη Σ που να ικανοποιεί τη σχέση

$$P(p_J^{-1}(\prod_{i\in J}A_i))=\prod_{i\in J}P_i(A_i) \tag{3.13}$$

για κάθε $J\in\mathcal{F}$ και τυχαία και αυθαίρετα ενδεχόμενα $A_i\in\Sigma_i$; $(i\in J)$. Από τον ορισμό του μέτρου-εικόνα αυτό σημαίνει ότι το $p_J(P):=P\circ p_J$ θα πρέπει να απεικονίζει κάθε καρτεσιανό γινόμενο $\prod_{i\in J}A_i$ με την τιμή $\prod_{i\in J}P_i(A_i)$. Όμως το μέτρο P_J που ορίζεται παραπάνω είναι το μοναδικό που μπορει να το κάνει αυτό. Επομένως το ερώτημα είναι: Υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας P πάνω στην Σ του οποίου η εικόνα μέσω της προβολής p_J να ισούται με το P_J για κάθε $J\in\mathcal{F}$? Η απάντηση δίνεται από το παρακάτω θεώρημα.

[312]

Θεώρημα 3.1.2. Επάνω στη σ-άλγεβρα $\Sigma:=\bigotimes_{i\in I}\Sigma_i$ υπάρχει ακριβώς ένα μέτρο P τέτοιο ώστε για κάθε $J\in\mathcal{F}(I)$ να ισχύει

$$p_J(P)=P_J. \tag{3.14}$$

Το P είναι μέτρο πιθανότητας.

Απόδειξη. Για πεπερασμένο σύνολο δεικτών I το αποτέλεσμα είναι γνωστό [βλ. Α.1.4, Θεώρημα]. Έτσι για τη συνέχεια θεωρούμε ότι το I είναι άπειρο.

(a) Για κάθε δύο σύνολα J,K με $J\subseteq K$ η απεικόνιση

$$p_{JK}:\Omega_K\longrightarrow\Omega_J \tag{3.15}$$

είναι Σ_K-Σ_J-μετρήσιμη.

Πράγματι τα σύνολα $\prod_{i\in J}A_i$ με $A_i\in\Sigma_i(i\in J)$ παράγουν την Σ_J και ισχύει

$$p_{JK}^{-1}(\prod_{i\in J}A_i)=\prod_{i\in K}A_i^{'} \tag{3.16}$$

με $A_i' := A_i$ για $i \in J$ και $A_i' := \Omega_i$ για $i \in K \setminus I$. Εφόσον έχουμε μόνο μέτρα πιθανότητας, ισχύει

$$\prod_{i \in K} P_i(A_i') = \prod_{i \in J} P_i(A_i), \tag{3.17}$$

επομένως ισχύει

$$p_{JK}(P_K) = P_J \quad \text{για κάθε } \; J \subseteq K; J, K \in \mathcal{F}. \tag{3.18}$$

Τώρα θέτουμε

$$\mathcal{Z}_J := p_J^{-1}(\Sigma_J) \; \text{ για κάθε } \; J \in \mathcal{F} \tag{3.19}$$

και ονομάζουμε την $\mathcal{Z}_J$ τη σ-άλγεβρα των J-κυλίνδρων. Από τη μετρησιμότητα των p_{JK} που αποδείχθηκε παραπάνω προκύπτει ότι $p_{KJ}^{-1}(\Sigma_J) \subseteq \Sigma_K$. Μαζί με την $p_J = p_{JK} \circ p_K$ έχουμε σα συνέπεια

$$\mathcal{Z}_J \subseteq \mathcal{Z}_K \quad \text{για κάθε } \; J, K \in \mathcal{F} \; \text{ με } \; J \subseteq K. \tag{3.20}$$

Τελικά ονομάζουμε

$$\mathcal{Z} := \bigcup_{J \in \mathcal{F}} \mathcal{Z}_J \tag{3.21}$$

το σύνολο όλων των κυλίνδρων. Δύο οποιοδήποτε κύλινδροι $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}$ βρίσκονται σε μία κοινή σ-άλγεβρα $\mathcal{Z}_J$ για κατάλληλο $J \in \mathcal{F}$. Εάν το Z_i βρίσκεται στην $\mathcal{Z}_{J_i}$ $(i = 1, 2)$, τότε για παράδειγμα $J_1 \cup J_2$ είναι ένα τέτοιο J σύμφωνα με το (3.20). Συνεπώς η $\mathcal{Z}$ είναι μία άλγεβρα (γενικά, όχι σ-άλγεβρα) στο Ω. Από (3.11) και (3.12) έχουμε ότι

$$\Sigma = \sigma(\mathcal{Z}). \tag{3.22}$$

Χωρίζουμε το ακόλουθο κύριο μέρος της απόδειξης σε τέσσερα βήματα:

(b) Εάν το πρόβλημα έχει λύση τότε σύμφωνα με το (3.14) το επιθυμητό μέτρο P πρέπει να αντιστοιχίζει με κάθε J-κύλινδρο $Z = p_J^{-1}(A)$ την τιμή $P_J(A)$ $(J \in \mathcal{F},\ A \in \Sigma_J)$. Αυτή η τιμή πρέπει να εξαρτάται μόνο από το Z, και όχι στην ειδική παράσταση $Z = p_J^{-1}(A)$. Το ακόλουθο επιχείρημα δείχνει ότι αυτό είναι πραγματικά το σωστό. Έστω

$$Z = p_J^{-1}(A) = p_K^{-1}(B) \tag{3.23}$$

είναι δύο παραστάσεις του Z μέσω των $J, K \in \mathcal{F}, A \in \Sigma_J$ και $B \in \Sigma_K$. Στην περίπτωση που $J \subseteq K$ έχουμε

$$p_J^{-1}(A) = p_K^{-1}((p_{JK})^{-1}(A)) \tag{3.24}$$

και συνεπώς

$$p_K^{-1}(B) = p_K^{-1}(B') \; \text{ με } \; B' := (p_{JK})^{-1}(A). \tag{3.25}$$

Αφού η προβολή p_K απεικονίζει το σύνολο Ω στο Ω_K, προκύπτει ότι

$$B = B' = (p_{JK})^{-1}(A) \tag{3.26}$$

και επομένως σύμφωνα με την (3.18) έχουμε ότι

$$P_K(B) = P_J(A). \tag{3.27}$$

Για αυθαίρετο J και K θέτουμε $L := J \cup K$. Αφού $J \subset L$ και $K \subset L$ από την (3.20) υπάρχει ένα $C \in \Sigma_L$, τέτοιο ώστε $p_L^{-1}(C) = p_J^{-1}(A) = p_K^{-1}(B)$. Συνεπώς σύμφωνα με αυτά που έχουμε ήδη αποδείξει παίρνουμε:

$$P_L(C) = P_J(A) \text{ και } P_L(C) = P_K(A), \tag{3.28}$$

συνεπώς

$$P_J(A) = P_K(B). \tag{3.29}$$

Έτσι αποδείξαμε ότι η ισότητα

$$P_0(p_J^{-1}(A)) := P_J(B) \quad (J \in \mathcal{F};\ A \in \Sigma_J) \tag{3.30}$$

ορίζει καλώς μία συνάρτηση P_0 επάνω στο $\mathcal{Z}$.

(c) Η συνάρτηση $P_0 : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι ένα πεπερασμένα προσθετικό μέτρο επάνω στη $\mathcal{Z}$. Πραγματικά, $P_0 \geq 0$ και $P_0(\varnothing) = 0$. Για κάθε δυο ξένους μεταξύ τους κύλινδρους $Y, Z \in \mathcal{Z}$ υπάρχει ένα σύνολο $J \in \mathcal{F}$ που ικανοποιεί $Y = p_J^{-1}(A)$ και $Z = p_J^{-1}(B)$ για κατάλληλα $A, B \in \Sigma_J$. Επειδή τα Y, Z είναι ξένα μεταξύ τους τότε τα A, B είναι επίσης ξένα μεταξύ τους και επιπλέον η ισότητα

$$Y \cup Z = p_J^{-1}(A \cup B) \tag{3.31}$$

οδηγεί στη σχέση

$$P_0(Y \cup Z) = P_J(A \cup B) = P_J(A) + P_J(B) = P_0(Y) + P_0(Z), \tag{3.32}$$

και αυτή είναι η πεπερασμένη προσθετικότητα του P_0. Η απόδειξη θα ολοκληρωθεί όταν δειχθεί ότι το P_0 είναι σ-προσθετικό. Στην πραγματικότητα η ύπαρξη και η μοναδικότητα του P ορίζεται από το βασικό Θεώρημα Επέκτασης και Μοναδικότητας της θεωρίας μέτρου: Το P είναι η μοναδική επέκταση του P_0 σε ένα μέτρο στη $\sigma(\mathcal{Z}) = \Sigma$. Το P είναι ακόμα ένα μέτρο πιθανότητας αφού $\Omega = p_J^{-1}(\Omega_J)$ είναι ένας J-κύλινδρος για κάθε $J \in \mathcal{F}$ και συνεπώς $P(\Omega) = P_0(\Omega) = P_J(\Omega_J) = 1$. Για να αποδείξουμε τη σ-προσθετικότητα του P_0 θα δείξουμε πρώτα:

(d) Έστω $Z \in \mathcal{Z}$ και $J \in \mathcal{F}$. Τότε για κάθε $\omega_J \in \Omega_J$ το σύνολο

$$Z^{\omega_J} := \{\omega \in \Omega : (\omega_J, p_{I \setminus J}(\omega)) \in \mathcal{Z}\} \tag{3.33}$$

είναι επίσης ένας κύλινδρος. Αποτελείται από όλα τα $\omega \in \Omega$ που έχουν την ακόλουθη ιδιότητα. Εάν στο ω αντικαταστήσουμε όλες τις συντεταγμένες που αντιστοιχούν στους δείκτες $i \in J$ με τις αντίστοιχες συντεταγμένες του ω_J, τότε παίρνουμε ένα σημείο από το Z. Επιπλέον αυτοί οι κύλινδροι ικανοποιούν την

$$P_0(Z) = \int (P_0(Z^{\omega_J}) P_J(d\omega_J)), \tag{3.34}$$

όπως αποδεικνύεται παρακάτω: Για $Z \in \mathcal{Z}$ υπάρχει $K \in \mathcal{F}$ και $A \in \Sigma_K$ τέτοια ώστε $Z = p_K^{-1}(A)$ και άρα $P_0(Z) = P_K(A)$. Μπορούμε να υποθέσουμε λόγω της (3.20) ότι $J \subset K$ και ότι $J \neq K$ εφόσον το I είναι άπειρο. Τότε προφανώς $Z^{\omega_J} = p_{K \setminus J}^{-1}(A_{\omega_J})$ ισχύει για το ω_J-τμήμα A_{ω_J} του A στο Ω_K, επομένως για το σύνολο όλων των $\omega' \in \Omega_{K \setminus J}$ που ικανοποιούν το εξής $(\omega_J, \omega') \in A$. Αφού $\Sigma_K = \Sigma_J \otimes \Sigma_{K \setminus J}$ έχουμε από τη θεωρία μέτρου ότι $A_{\omega_J} \in A_{K/J}$ και συνεπώς $Z^{\omega_J} = p_{K \setminus J}^{-1}(A_{\omega_J})$ είναι ένας $(K \setminus J)$-κύλινδρος. Από $P_K = P_J \otimes P_{K \setminus J}$ και από το Θεώρημα του Fubini έχουμε ότι

$$P_0(Z) = P_K(A) = \int (P_{K \setminus J}(A_{\omega_J}) P_J(d\omega_J)). \tag{3.35}$$

Αλλά αυτός είναι ο τύπος (3.34) αφού,

$$P_0(Z_{\omega_J}) = P_{K \setminus J}(A_{\omega_J}) \tag{3.36}$$

λόγω του ότι ισχύει $Z_{\omega_J} = p_{K \setminus J}^{-1}(A_{\omega_J})$.

(e) Τελικά δείχνουμε ότι το P_0 είναι συνεχές στο $\emptyset$, το οποίο αποδεικνύει τη σ-προσθετικότητά του. Έστω $\{Z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ μία φθίνουσα ακολουθία κυλίνδρων με $\alpha := inf P_0(Z_n) > 0$. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} Z_n$ είναι μη κενό σύνολο. Για κάθε Z_n ισχύει: $Z_n = p_{J_n}^{-1}(A_n)$, όπου $J_n \in \mathcal{F}$ και $A_n \in \Sigma_{J_n}$. Μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να θεωρήσουμε ότι $J_1 \subset J_2 \subset \dots$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα που δείξαμε στο (d) επάνω στο $J = J_1$ και $Z = Z_n$. Λόγω της Σ_{J_1}-μετρησιμότητας της συνάρτησης $\omega_{J_1} \longrightarrow P_0(Z_n^{\omega_{J_1}})$ το σύνολο

$$Q_n := \{\omega_{J_1} \in \Omega_{J_1} : P_0(Z_n^{\omega_{J_1}}) \geq \frac{\alpha}{2}\} \tag{3.37}$$

βρίσκεται στη Σ_{J_1}. Από το γεγονός ότι ασχολούμαστε μόνο με μέτρα πιθανότητας, παρατηρούμε ότι λόγω της (3.34) ισχύει:

$$\alpha \leq P_0(Z_n) \leq P_{J_1}(Q_n) + \frac{\alpha}{2}, \tag{3.38}$$

άρα $P_{J_1}(Q_n) \geq \frac{\alpha}{2} > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εφόσον η $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα, η ακολουθία $\{Q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι επίσης φθίνουσα και το μέτρο πιθανότητας το P_{J_1} είναι συνεχές στο $\varnothing$ άρα η τομή $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$ δεν μπορεί να είναι κενή. Με άλλα λόγια υπάρχει $\omega_{J_1} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Q_n$, έτσι ώστε

$$P_0(Z_n^{\omega_{J_1}}) \geq \frac{\alpha}{2} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.39}$$

Τώρα εάν $J_2 \neq J_1$ τότε μία άλλη εφαρμογή της (d) μας δίνει την ύπαρξη ενός $\omega_{J_2\setminus J_1}$ τέτοιου ώστε

$$P_0((Z_n^{\omega_{J_1}})^{\omega_{J_2\setminus J_1}}) \geq 2^{-2}\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.40}$$

Εάν θέσουμε $\omega_{J_2} := (\omega_{J_1}, \omega_{J_2\setminus J_1})$, τότε το ω_{J_2} βρίσκεται στην Ω_{J_2}. Έχουμε ότι $(Z_n^{\omega_{J_1}})^{\omega_{J_2\setminus J_1}} = Z_n^{\omega_{J_2}}$ και έτσι

$$P_0(Z_n^{\omega_{J_2}}) \geq 2^{-2}\alpha \ \text{ και } \ p_{J_1J_2}(\omega_{J_2}) = \omega_{J_1} \quad (n \in \mathbb{N}) \tag{3.41}$$

Όταν $J_2 = J_1$ επιλέγουμε $\omega_{J_2} := \omega_{J_1}$. Επαγωγικά τότε έχουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα $\omega_{J_k} \in \Omega_{J_k}$ με

$$P_0(Z_n^{\omega_{J_k}}) \geq 2^{-k}\alpha \ \text{ και } p_{J_kJ_{k+1}}(\omega_{J_{k+1}}) = \omega_{J_k} \ \ (k, n \in \mathbb{N}). \tag{3.42}$$

Λόγω της τελευταίας ιδιότητας υπάρχει $\omega_0 \in \Omega$ για $p_{J_k}(\omega_0) = \omega_{J_k}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Από την πρώτη ιδιότητα της (3.42) έχουμε ότι $Z_n^{\omega_{J_n}} \neq \varnothing$ έτσι ώστε να υπάρχει ένα $\tilde{\omega}_n \in \Omega$ που ικανοποιεί τη σχέση $(\omega_{J_n}, p_{I\setminus J_n}(\tilde{\omega}_n)) \in Z_n$. Αφού το Z_n είναι ένας J_n-κύλινδρος το σημείο $(\omega_{J_n}, p_{I\setminus J_n}(\omega_0)) = \omega_0$ βρίσκεται επίσης στο Z_n. Άρα το ω_0 βρίσκεται στην τομή όλων των Z_n και έτσι τελικά έχουμε ότι $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \neq \varnothing$.

□

Για ένα πεπερασμένο σύνολο δεικτών I το μέτρο P συμπίπτει σύμφωνα με την (3.14) με το P_I. Σε συμφωνία με την θεωρία πεπερασμένων γινομένων χώρων μέτρων προχωρούμε στον παρακάτω ορισμό. [313]

Ορισμός 3.1.3. Το μοναδικό μέτρο πιθανότητας P που ορίστηκε σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2 καλείται το **γινόμενο μέτρων πιθανοτητας** $\{P_i\}_{i\in I}$ και συμβολίζεται με $\bigotimes_{i\in I} P_i$. Ο χώρος πιθανότητας

$$(\prod_{i\in I} \Omega_i, \bigotimes_{i\in I} \Sigma_i, \bigotimes_{i\in I} P_i) \tag{3.43}$$

καλείται το **γινόμενο της οικογένειας $\{(\Omega_i, \Sigma_i, P_i)\}_{i\in I}$ των χώρων πιθανότητας** και το δηλώνουμε ως

$$\bigotimes_{i\in I} (\Omega_i, \Sigma_i, P_i). \tag{3.44}$$

Έστω ότι κάθε $X_i : \Omega \longrightarrow \Omega_i$, όπου (Ω, Σ, μ) είναι ένας χ.π., και P_{X_i} η κατανομή της. Ορίζουμε την εξής απεικόνιση γινόμενο

$$\bigotimes_{i\in I} X_i : \Omega \longrightarrow \prod_{i\in I} \Omega_i \tag{3.45}$$

για κάθε $\omega \in \Omega$ η $i \longrightarrow X_i(\omega)$ να απεικονίζει το I στο $\bigcup_{i\in I} \Omega_i$. Τότε η $Y = \bigotimes_{i\in I} X_i$ είναι μία $(\prod_{i\in I} \Omega_i, \bigotimes_{i\in I} \Sigma_i)$-τ.μ. από το Ω στο $\prod\limits_{i\in I} \Omega_i$, αφού κάθε $p_i \circ Y$ είναι Σ-Σ_i-μετρήσιμη. Έτσι ορίζεται η κατανομή P_Y. Η P_Y καλείται η **κοινή κατανομή** της οικογένειας $\{X_i\}_{i\in I}$.

[314] **Θεώρημα 3.1.4.** Η οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ τυχαίων μεταβλητών επάνω σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) είναι ανεξάρτητη εάν και μόνο εάν η από κοινού κατανομή είναι το γινόμενο των P_{X_i}, δηλαδή:

$$P_{\bigotimes_{i\in I} X_i} = \bigotimes_{i\in I} P_{X_i}. \tag{3.46}$$

Απόδειξη. Για κάθε μη κενό πεπερασμένο σύνολο $J \subseteq I$ συμβολίζουμε με

$$p_J : \prod_{i\in I} \Omega_i \longrightarrow \prod_{i\in J} \Omega_i \tag{3.47}$$

τη συνάρτηση προβολής και με $Y : \Omega \longrightarrow \prod_{i\in I} \Omega_i$ και $Y_J : \Omega \longrightarrow \prod_{i\in J} \Omega_i$ τις απεικονίσεις $\bigotimes_{i\in I} X_i$ και $\bigotimes_{i\in J} X_i$ αντίστοιχα. Τότε προφανώς $Y_J = p_J \circ Y$, από το οποίο προκύπτει η σχέση

$$P_{Y_J} = p_J(P_Y). \tag{3.48}$$

Η ανεξαρτησία των $\{X_i\}_{i\in I}$ ισοδυναμεί με την ανεξαρτησία των $\{X_i\}_{i\in J}$ το οποίο ισοδυναμεί με τη σχέση

$$P_{Y_J} = \bigotimes_{i\in J} P_{X_i} \tag{3.49}$$

για όλα τα πεπερασμένα μη κενά $J \subseteq I$. Από το Θεώρημα (3.1.2) η ισότητα (3.46) είναι ισοδύναμη με την $p_J(P_Y) = \bigotimes_{i\in J} P_{X_i}$ για όλα τα σύνολα J όπως παραπάνω. Οι τρεις παραπάνω ισχυρισμοί μαζί δίνουν το αποτέλεσμα του Θεωρήματος. □

Η σημαντικότητα των Θεωρημάτων (3.1.2) και (3.1.4) βρίσκεται κυρίως στο γεγονός ότι μας επιτρέπουν να δημιουργήσουμε ανεξάρτητες οικογένειες τυχαίων μεταβλητών με δοσμένες κατανομές.

[315] **Πόρισμα 3.1.5.** Για κάθε οικογένεια $\{(\Omega_i, \Sigma_i, P_i)\}_{i\in I}$ χώρων πιθανότητας υπάρχει ένας κατάλληλος χώρος πιθανότητας (Ω, Σ, P) και μία ανεξάρτητη οικογένεια $\{X_i\}_{i\in I}$ τ.μ. $X_i : \Omega \longrightarrow \Omega_i$ ώστε για κάθε $i \in I$ η κατανομή των X_i δίνεται από τη σχέση

$$P_{X_i} = P_i. \tag{3.50}$$

Απόδειξη. Αρκεί να επιλέξουμε το γινόμενο

$$\bigotimes_{i\in I}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) \tag{3.51}$$

για (Ω, Σ, P) και τη συνάρτηση της προβολής

$$p_i : \prod_{j\in I} \Omega_j \longrightarrow \Omega \tag{3.52}$$

για X_i. Τότε το P_i είναι η κατανομή των X_i για κάθε $i \in I$ από τον ορισμό του μέτρου γινόμενο $P = \bigotimes_{i\in I} P_i$. Η ανεξαρτησία της οικογένειας $\{X_i\}_{i\in I}$, εφόσον $\bigotimes_{i\in I} X_i$ είναι προφανώς η ταυτοτική απεικόνιση από $\Omega = \prod_{i\in I} \Omega_i$ στον εαυτό του και ως εκ τούτου

$$P_{\bigotimes_{i\in I} X_i} = P = \bigotimes_{i\in I} P_i = \bigotimes_{iI} P_{X_i}. \tag{3.53}$$

□

[316]

Παρατήρηση 3.1.6. Εάν μία οικογένεια $\{\mathcal{E}\}_{i\in I}$ από πειράματα με τυχαία έκβαση περιγράφεται από την οικογένεια $\{(\Omega_i, \Sigma_i, P_i)\}_{i\in I}$ των χώρων πιθανότητας, τότε ο χώρος γινόμενο

$$\bigotimes_{i\in I}(\Omega_i, \Sigma, P_i) \tag{3.54}$$

περιγράφει εκείνο το πείραμα που αποτελείται από τις ανεξάρτητες εμφανίσεις κάθε ανεξάρτητου πειράματος $\mathcal{E}_i$.

[317]

Θεώρημα 3.1.7. Έστω $\{X_i\}_{i\in I}$ μία ανεξάρτητη οικογένεια τυχαίων μεταβλητών X_i με τιμές στο Ω_i και έστω $\{I_j\}_{j\in J}$ μία διαμέριση του I σε ανα δύο ξένα μη κενά υποσύνολα I_i του I. Υποθέτουμε επιπλέον ότι για κάθε $j \in J$ η

$$Y_j := \prod_{i\in I_j} \Omega_i \longrightarrow \Omega'_j \tag{3.55}$$

είναι μία μετρήσιμη απεικόνιση από το μετρήσιμο χώρο $(\prod_{i\in I_j} \Omega_i, \bigotimes_{i\in I_j} \Sigma_i)$ σε ένα μετρήσιμο χώρο (Ω'_j, Σ'_j). Τότε η οικογένεια των τ.μ.

$$Z_j := Y_j \circ \bigotimes_{i\in I_j} X_i \quad (j \in J) \tag{3.56}$$

είναι ανεξάρτητη.

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την ανεξαρτησία της οικογένειας των τ.μ.

$$Z_j := \bigotimes_{i\in I_j} X_i \quad (j \in J). \tag{3.57}$$

Σε αυτή την ειδική περίπτωση είναι κάθε Y_j είναι η ταυτοτική απεικόνιση από το $\prod_{i\in I_j}\Omega_i$ στον εαυτό του. Η σ-άλγεβρα $\sigma(Z_j)$ που παράγεται από τη Z_j, είναι επίσης παραγόμενη από την οικογένεια των τυχαίων μεταβλητών

$$\pi_i \circ Z_j = X_i \quad \text{για κάθε} \quad i \in I_j, \tag{3.58}$$

όπου το $\pi := p_{iI_i} : \prod_{i\in I_j}\Omega_i \longrightarrow \Omega_i$. Από την υπόθεση έχουμε ότι η οικογένεια $\{\sigma(X_i)\}_{i\in I}$ είναι ανεξάρτητη. Έτσι ο ισχυρισμός προκύπτει από την ανεξαρτησία των σ-αλγεβρών. □

3.2 Προβολικά όρια χώρων πιθανότητας

Το ερώτημα που θα προσπαθήσουμε να μελετήσουμε είναι κάτω από ποια δεδομένα σε μια συγκεκριμένη κατάσταση, π.χ. εκείνη της κίνησης Brown, μπορούμε να προσδιορίσουμε με κατάλληλο τρόπο το χ.π. (Ω, Σ, P).

Αρχίζουμε με μία προκαταρκτική μελέτη: Έστω $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία σ.δ. με χ.κ. $(E, \mathcal{E})$. Για κάθε μη κενό υποσύνολο J του $\mathbb{R}_+$ συμβολίζουμε με E^J το γινόμενο $\prod_{t\in J} E_t$ με $E_t := E$ για κάθε $t \in J$. Με $\mathcal{E}_J$ συμβολίζουμε την σ-άλγεβρα $\bigotimes_{t\in J}\mathcal{E}_t$ με $\mathcal{E}_t := \mathcal{E}$ για κάθε $t \in J$. Τέλος θεωρούμε την απεικόνιση $X_J := \bigotimes_{t\in J} X_t : \Omega \longrightarrow E^J$ με $X_J(\omega) := \{X_t(\omega)\}_{t\in J}$. Τότε η X_J είναι Σ-$\mathcal{E}_J$-μετρήσιμη.

Η κατανομή πιθανότητας της X_J συμβολίζεται με $P_J := P \circ X_J^{-1}$. Από εδώ και κάτω υποθέτουμε ότι το E είναι ένας πολωνικός χώρος και $\mathcal{E} := \mathfrak{B}(E)$. Μεταξύ των χ.π. $(E^J, \mathcal{E}_J, P_J)$, όπου $\mathcal{E}_J := \mathfrak{B}(E^J)$, υπάρχουν απλές σχέσεις: Έστω J, H μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}_+$ με $J \subseteq H$ και $p_{JH} : E^H \longrightarrow E^J$ οι συνεχείς και συνεπώς $\mathcal{E}_H$-$\mathcal{E}_J$-μετρήσιμες κανονικές προβολές . Για $H := \mathbb{R}_+$ γράφουμε $p_J := p_{J\mathbb{R}_+}$.

Επειδή για κάθε δύο μη κενά υποσύνολα J και H του $\mathbb{R}_+$ με $J \subseteq H$ ισχύει η σχέση $X_J = p_{JH} \circ X_H$, έχουμε

$$P_J = P_H \circ p_{JH}^{-1} \tag{3.59}$$

Ιδιαιτέρως, για $H = \mathbb{R}_+$ προκύπτει

$$P_J = P \circ p_J^{-1} \tag{3.60}$$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{F} := \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$το σύνολο όλων των μη κενών, πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}_+$. Τότε είναι σαφές γιατί η $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}}$ ονομάζεται η **οικογένεια των πεπερασμένης διάστασης κατανομών της X** .

[321] **Ορισμός 3.2.1.** Μία οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}}$ μέτρων πιθανότητας P_J επάνω στον μ.χ. $(E^J, \mathcal{E}_J)$ ονομάζεται **προβολική** , αν ικανοποιεί τη σχέση (3.59) για κάθε $J, H \in \mathcal{F}$ με $J \subseteq H$.

Σημαντική για την κατασκευή σ.δ. είναι τώρα η ερώτηση, αν κάτω από κατάλληλες προυποθέσεις για τον μ.χ. $(E, \mathcal{E})$ κάθε προβολική οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}}$ μέτρων πιθανότητας P_J επάνω στον $(E^J, \mathcal{E}_J)$ είναι η οικογένεια των πεπερασμένης διάστασης κατανομών μιάς σ.δ. επάνω σε έναν κατάλληλο χ.π. με χ.κ. $(E, \mathcal{E})$. Η ερώτηση θα απαντηθεί μέσω του παρακάτω θεωρήματος και του πορίσματός του.

[322]

Θεώρημα 3.2.2. (Kolmogorov) *Έστω E ένας πολωνικός χώρος και I ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο και $\mathcal{F} := \mathcal{F}(I)$. Έστω $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}}$ μία προβολική οικογένεια μέτρων πιθανότητας P_J επάνω στον $(E^J, \mathcal{E}_J)$. Τότε υπάρχει ακριβώς ένα μέτρο πιθανότητας P_I επάνω στον $(E^I, \mathcal{E}_I)$ με*

$$P_I \circ p_J^{-1} = P_J \ \ \forall J \in \mathcal{F} \tag{3.61}$$

Το P_I ονομάζεται το **προβολικό όριο** *της οικογένειας $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}}$ και συμβολίζεται με*

$$P := \varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} P_J := \varprojlim P_J \tag{3.62}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{Z}_J := p_J^{-1}(\mathcal{E}_J)$ η σ-άλγεβρα αντίστροφη εικόνα της $\mathcal{E}_J$ μέσω της p_J για $J \in \mathcal{F}$, και $\mathcal{Z} := \bigcup_{J\in\mathcal{F}} \mathcal{Z}_{\mathcal{J}}$. Από τη σχέση $J \subseteq H$ για $J, H \in \mathcal{F}$ προκύπτει ότι $\mathcal{Z}_J \subseteq \mathcal{Z}_H$ (λόγω της $\mathcal{E}_H$-$\mathcal{E}_J$-μετρησιμότητας της p_{JH}) και άρα η $\mathcal{Z}$ είναι μία άλγεβρα υποσυνόλων του E^I. Από τον ορισμό της $\mathcal{E}_I$ η $\mathcal{Z}$ είναι ένας γεννήτορας της $\mathcal{E}_I$, δηλαδή $\mathcal{E}_I = \sigma(\mathcal{Z})$. Από τη συνθήκη (3.61) προκύπτει ότι για κάθε $Z = p_J^{-1}(B)$ με $B \in \mathcal{E}_J$ ισχύει, $P_I(Z) = P_J(B)$. Από το Θεώρημα μοναδικότητας της Θεωρίας Μέτρου (βλ. π.χ. [2]) έχουμε ότι υπάρχει το πολύ ένα μέτρο πιθανότητας με την παραπάνω ιδιότητα. Η ύπαρξη του P_I προκύπτει από το γνωστό Θεώρημα Επέκτασης (βλ. [2]) , αν αποδείξουμε, ότι μέσω της σχέσης

$$P_0(Z) := P_J(B) \ \ \forall \ \ Z = p_J^{-1}(B), \ \ B \in \mathcal{E}_J, \ J \in \mathcal{F} \tag{3.63}$$

ορίζεται ένα σ-προσθετικό μέτρο επάνω στην $\mathcal{Z}$ με την ιδιότητα $P_0(E^I) = 1$. Προφανώς $P_0(\varnothing) = 0$ και λόγω της προβολικότητας της οικογένειας $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}}$ η συνολοσυνάρτηση P_0 είναι καλά ορισμένη και πεπερασμένα προσθετική. Με παρόμοια επιχειρήματα, όπως και στο Θεώρημα ύπαρξης του άπειρου γινομένου μέτρων πιθανότητας μπορεί να αποδειχθεί, ότι λόγω της σχέσης $E^I = p_J^{-1}(E^J)$ για κάθε $J \in \mathcal{F}$ ισχύει $P_0(E^I) = P_J(E^J) = 1$.

Άρα μένει να δείξουμε την προς τα κάτω συνέχεια της P_0. Ισχυριζόμαστε λοιπόν, ότι αν η $\{Z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία φθίνουσα ακολουθία στην $\mathcal{Z}$ με $P_0(Z_n) \geq a > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \neq \varnothing$. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί ως εξής:
Κάθε Z_n είναι της μορφής $Z_n = p_{J_n}^{-1}(B_n)$ με $B_n \in \mathcal{E}_{J_n}$ και $J_n \in \mathcal{F}$. Για $H \in \mathcal{F}$ με $J \subseteq H$ κάθε J-κυλινδρικό σύνολο είναι και H-κυλινδρικό. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας

μπορούμε να υποθέσουμε ότι $J_n \subseteq J_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού κάθε χώρος E^{J_n} είναι πολωνικός, κάθε μέτρο πιθανότητας P_{J_n} επάνω στην $\mathcal{E}_{J_n}$ είναι εσωτερικά κανονικό ως προς τα συμπαγή σύνολα στον E^{J_n}. Άρα για κάθε $B_n \in \mathcal{E}_{J_n}$ υπάρχει ένα συμπαγές στον E^{J_n} υποσύνολο K_n του B_n, ώστε

$$P_{J_n}(B_n) - P_{J_n}(K_n) = P_{J_n}(B_n \setminus K_n) \leq a \cdot 2^{-n}. \tag{3.64}$$

Επομένως το σύνολο $Z'_n := p_{J_n}^{-1}(K_n)$ είναι ένα J_n-κυλινδρικό σύνολο με $Z'_n \subseteq Z_n$ και

$$P_0(Z_n \setminus Z'_n) = P_0(p_{J_n}^{-1}(B_n \setminus K_n)) = P_{J_n}(B_n \setminus K_n) \leq a \cdot 2^{-n}. \tag{3.65}$$

Για να δημιουργήσουμε μία φθίνουσα ακολουθία, θέτουμε $Y_n := Z'_1 \cap \cdots \cap Z'_n$ έτσι, ώστε να ισχύει $Y_{n+1} \subseteq Y_n$ και $Y_n \subseteq Z'_n \subseteq Z_n$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.
Ισχύει $P_0(Y_n) > 0$ και επομένως $Y_n \neq \varnothing$. Πράγματι, από την πεπερασμένη προσθετικότητα της P_0 προκύπτει

$$\begin{aligned} P_0(Z_n) - P_0(Y_n) &= P_0(Z_n \setminus Y_n) \\ &= P_0(\bigcup_{i=1}^{n}(Z_n \setminus Z'_i)) \\ &\leq P_0(\bigcup_{i=1}^{n}(Z_i \setminus Z'_i)) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} P_0(Z_i \setminus Z'_i) \\ &\leq a \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} < a. \end{aligned}$$

Συνεπώς $P_0(Y_n) > 0$, αφού $P_0(Z_n) \geq a$. Επιλέγουμε αυθαίρετα για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ένα $y_n \in Y_n$ και έτσι $y_m \in Z'_n$, συνεπώς $P_{J_n}(y_m) \in K_n$, για όλα τα $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \geq n$. Επομένως, για κάθε t σε κάποιο από τα J_n, λόγω και της σχέσης $p_{\{t\}} = p_{\{t\}J_n} \circ p_{J_n}$, τα στοιχεία της ακολουθίας $\{p_{\{t\}}(y_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ θα ανήκουν τελικά στο σύνολο $p_{\{t\}J_n}(K_n)$. Αφού οι κανονικές προβολές p_{JH} είναι συνεχείς απεικονίσεις, το σύνολο $p_{\{t\}J_n}(K_n)$ θα είναι συμπαγές.

Το σύνολο $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} J_n$ είναι αριθμήσιμο, ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων συνόλων. Συμβολίζουμε με $t_1, t_2, \ldots$ μία απαρίθμηση των στοιχείων αυτού του συνόλου. Λόγω της συμπάγειας καθενός από τα σύνολα $p_{\{t\}J_n}(K_n)$ με $t \in J_n$, θα υπάρχει μία υπακολουθία $(y'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ της $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$, για την οποία η ακολουθία $(p_{\{t_1\}}(y'_m))_{m \in \mathbb{N}}$ θα συγκλίνει (βλ. π.χ. [2], Πρόταση 14.63), μία υπακολουθία $(y''_m)_{m \in \mathbb{N}}$ της $(y'_m)_{m \in \mathbb{N}}$ για την οποία η $(p_{\{t_2\}}(y''_m))_{m \in \mathbb{N}}$ θα συγκλίνει κ.λ.π. Επομένως, για τη διαγώνια ακολουθία $(y_m^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ θα υπάρχει το

$$z_t := lim_{m \longrightarrow \infty} p_{\{t\}}(y_m^{(m)}) = lim_{m \longrightarrow \infty} y_m^{(m)}(t) \tag{3.66}$$

για κάθε $t \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n$. Επειδή για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$ με $m \geq n$ ισχύει $p_{J_n}(y_m) \in K_n$, θα έχουμε

$$p_{J_n}(y_m^{(m)}) \in K_n \subseteq E^{J_n} \quad \forall\ m, n \in \mathbb{N} \text{ με } m \geq n. \tag{3.67}$$

Αφού το K_n είναι συμπαγές, και συνεπώς κλειστό, και η ακολουθία $p_{J_n}(y_m^{(m)}) = (y_m^{(m)}(z_1), \ldots, y_m^{(m)}(z_{K_n}))$ συγκλίνει στο $(z_{\tau_1}, \ldots, z_{\tau_{K_n}})$, θα έχουμε ότι

$$(z_{\tau_1}, \ldots, z_{\tau_{K_n}}) \in K_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.68}$$

Με $\tau_1, \ldots, \tau_{K_n}$ συμβολίζουμε τα διάφορα στοιχεία του J_n. Επιλέγουμε αυθαίρετα ένα σημείο $J \in E$ και ορίζουμε συνάρτηση $z : I \longrightarrow E$ ώστε $z(t) := \begin{cases} z_t, & \text{αν } t \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} J_n \\ J, & \text{αλλιώς} \end{cases}$. Τότε $z \in E^I$ με $p_{J_n}(z) = (z_{\tau_1}, \ldots, z_{\tau_{K_n}}) \in K_n$, δηλ. $z \in Z'_n = p_{J_n}^{-1}(K_n)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς $z \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z'_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n$, άρα $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} Z_n \neq \varnothing$. □

[323]

Πόρισμα 3.2.3. *Έστω E ένας πολωνικός χώρος και I ένα οποιοδήποτε μη κενό σύνολο. Τότε για κάθε προβολική οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}}$ μέτρων πιθανότητας P_J επάνω στη $\mathcal{E}_J$ υπάρχει μία διαδικασία με χώρο καταστάσεων E και παραμετρικό χώρο I, ώστε η $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}}$ να είναι η οικογένεια των πεπερασμένης διάστασης κατανομών της.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τα $\Omega := E^I$, $\Sigma := \mathcal{E}_I$ και $P := P_I := \varprojlim P_J$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2 η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας χ.π. Για κάθε $t \in I$ η προβολή $p_{\{t\}} : \Omega \longrightarrow E$, που ορίζεται από τη σχέση $p_{\{t\}}(\omega) := \omega_t$, είναι Σ-$\mathcal{E}$-μετρήσιμη. Επομένως η συνάρτηση $X_t : \Omega \longrightarrow E$, ώστε

$$X_t(\omega) := p_{\{t\}}(\omega) = \omega_t \ \ \forall \omega \in \Omega \tag{3.69}$$

είναι μία τ.μ. και η οικογένεια $\{X_t\}_{t\in I}$ είναι μία διαδικασία με χ.κ. E και παραμετρικό χώρο I. Αυτή η διαδικασία είναι η ζητούμενη, αφού για κάθε $I \in \mathcal{F}$ και κάθε $B \in \mathcal{E}_J$ ισχύει $P(\{X_J \in B\}) = P(p_J^{-1}(B)) = P_J(B)$. □

[324]

Ορισμός 3.2.4. Ο χ.π. $(E^I, \mathcal{E}_I, P_I)$ όπως και η σ.δ. $\{X_t\}_{t\in I}$ θα χρησιμοποιούνται συχνά παρακάτω και γι' αυτό θα έχουν μία ιδιαίτερη ονομασία. Ο $(E^I, \mathcal{E}_I, P_I)$ θα ονομάζεται ο **κανονικός χ.π.** , ενώ η $\{X_t\}_{t\in I}$ θα ονομάζεται η **κανονική** **σ.δ.** που αντιστοιχεί στην προβολική οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}}$. Λόγω της (3.69) το σύνολο των τροχιών της σ.δ. είναι το E^I. Έτσι, στις κανονικές σ.δ. το σύνολο όλων των απεικονίσεων $\omega : I \longrightarrow E$ είναι το σύνολο των τροχιών τους.

[325]

Παρατήρηση 3.2.5. Σχετικά με τη σχέση του Θεωρήματος 3.2.2 και του Θεωρήματος 3.1.2 για την ύπαρξη απείρων γινομένων χ.π., σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2 υπάρχει πάντα ακριβώς ένα μέτρο πιθανότητας $P := \bigotimes_{t\in I} P_t$ επάνω στην $\mathcal{E}_I$ με $P \circ p_J^{-1} = P_J := \bigotimes_{t\in I} P_t$

για κάθε $J \in \mathcal{F}$. Εκεί δε χρειάζεται καμία επιπλέον υπόθεση για το σύνολο E, που είναι οποιοδήποτε μη κενό σύνολο. Η κανονική σ.δ. που αντιστοιχεί στην προβολική οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}}$ είναι σε αυτή την περίπτωση μία ανεξάρτητη οικογένεια $\{X_t\}_{t\in I}$ τ.μ. με $P_{X_t} = P_t$ για κάθε $t \in I$.

Για μία οποιαδήποτε όμως προβολική οικογένεια δεν μπορεί να αποδειχθεί το Θεώρημα 3.2.2 χωρίς επιπλέον προυποθέσεις για τον μ.χ. $(E, \mathcal{E})$. Αυτό έχει αποδειχθεί από τους Andersen, Jessen (1948) [13]. Για περισσότερες πληροφορίες βλέπε επίσης Hoffmann-Jorgense (1987) [14].

Κεφάλαιο 4

Πρώτη κατασκευή της Κίνησης Brown

4.1 Πυρήνες και ημιομάδες πυρήνων Markov

Αναφέρουμε κάποια χρήσιμα παραδείγματα πυρηνών Markov.

Παραδείγματα 4.1.1. **(a)** Η συνάρτηση $I : \Omega \times \Sigma \longrightarrow \{0, 1\}$, ώστε

$$I(\omega, A) := \delta_\omega(A) := \begin{cases} 1, & \alpha\nu \quad \omega \in A \\ 0, & \alpha\nu \quad \omega \notin A. \end{cases}$$

είναι ένας πυρήνας Markov επάνω στο μ.χ. (Ω, Σ), που ονομάζεται ο **μοναδιαίος πυρήνας** επάνω στο Ω.

(b) Έστω φ μία Σ-H- μετρήσιμη απεικόνιση . Η συνάρτηση $k : \Omega \times H \longrightarrow [0, 1]$ ώστε

$$k(\omega, B) := \mu(\varphi^{-1}(B)) \quad \forall (\omega, B) \in \ \Omega \times H$$

είναι ένας -H-Μαρκοβιανός πυρήνας που είναι ανεξάρτητος του $\omega \in \Omega$.

(c) Έστω $\mathcal{C}$ μία σ-υποάλγεβρα της Σ. Το ερώτημα που προκύπτει από την θεωρία δεσμευμένων πιθανοτήτων ως προς τη $\mathcal{C}$ είναι, αν υπάρχει ένας Ω-$\Sigma-$Μαρκοβιανός πυρήνας k, ώστε η συνάρτηση $k(\cdot, A) : \Omega :\longrightarrow [0, 1]$ για κάθε $A \in \Sigma$ να είναι μια εκδοχή της δεσμευμένης πιθανότητας $P(A|\mathcal{C})$, δηλαδή ώστε να ισχύει

$$\int_C k(\omega, A) P(d\omega) = P(A \cap C)$$

για όλα τα $c \in \mathcal{C}$. Κάθε τέτοιος πυρήνας ονομάζεται **Μαρκοβιανός πυρήνας αναμονής** (expectation kernel) ως προς την $\mathcal{C}$. Για $\mathcal{C} = \{\emptyset, \Omega\}$ ισχύει $k(\omega, A) =$

$P(A)$ και για $\mathcal{C} = \Sigma$ ισχύει $k(\omega, A) = I(\omega, A)$ για κάθε $(\omega, A) \in \Omega \times \mathcal{C}$. Η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα, που είναι πολύ σημαντικό για τις εφαρμογές του, π.χ. στη Μαθηματική Στατιστική, είναι θετική στην περίπτωση που ο χώρος Υ είναι ένας πολωνικός χώρος και η Η είναι η $\mathfrak{B}(\Upsilon)$. (βλ. π.χ. [8]).

Παρατήρησεις 4.1.2. Αν η συνάρτηση $k : \Omega \times H \longrightarrow [0, 1]$ είναι ένας Ω-H-Μαρκοβιανός πυρήνας, ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας $Q : H \longrightarrow [0, 1]$ ώστε

$$Q(B) := \int k(\omega, B)P(d\omega) \quad \forall B \in H.$$

Συνήθως συμβολίζουμε το Q με Pk και γράφουμε την ισότητα του ορισμού του Q ως εξής:

$$Pk(B) := \int P(d\omega)k(\omega, B) := \int k(\omega, B)P(d\omega) \tag{4.1}$$

Αν $\mathcal{M}_+^b(\Sigma)$ είναι το σύνολο όλων των μη αρνητικών Σ-μετρήσιμων πραγματικών συναρτήσεων, τότε σε κάθε $\Omega - H-$Μαρκοβιανό πυρήνα k αντιστοιχεί μια απεικόνιση από το $\mathcal{M}_+^b(H)$ στο $\mathcal{M}_+^b(\Sigma)$, που ορίζεται ως εξής: Για κάθε $g \in \mathcal{M}_+^b(H)$ η συνάρτηση $\omega \longrightarrow \int g(y)k(\omega, dy)$ είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{M}_+^b(\Sigma)$. Για να δείξουμε αυτό, αρκεί να θεωρήσουμε την g ως όριο απλών συναρτήσεων. Αυτή η αντιστοιχία μεταξύ $\mathcal{M}_+^b(H)$ και $\mathcal{M}_+^b(\Sigma)$ συμβολίζεται πάλι με k, και έτσι έχουμε

$$(kg)(\omega) := \int g(y)k(\omega, dy) \quad \forall \omega \in \Omega \tag{4.2}$$

για κάθε $g \in \mathcal{M}_+^b(H)$. Ειδικά, για τη δείκτρια συνάρτηση χ_B ενός συνόλου $B \in H$ έχουμε

$$k\chi_B(\omega) = k(\omega, B) \qquad \forall \omega \in \Omega. \tag{4.3}$$

Αν η k είναι ένας Μαρκοβιανός πυρήνας , τότε μπορεί σύμφωνα με το παραπάνω η k να θεωρηθεί ως μια θετική γραμμική απεικόνιση από τον διανυσματικό χώρο $\mathcal{M}_+^b(H)$ στο $\mathcal{M}_+^b(\Sigma)$. Η ορολογία "θετική" για θετικές γραμμικές απεικονίσεις σημαίνει ότι: αν $g \geq 0$ τότε $k(g) \geq 0$. Για κάθε Ω-H-Μαρκοβιανό πυρήνα η απεικόνιση $k : \mathcal{M}_+^b(H) \longrightarrow \mathcal{M}_+^b(\Sigma)$ προφανώς είναι προσθετική, θετική, ομογενής και **συνεχής κατά Daniell** , όπου η τελευταία ιδιότητα σημαίνει ότι

$$g_n \uparrow g \Longrightarrow k(g_n) \uparrow k(g) \tag{4.4}$$

για κάθε αύξουσα ακολουθία $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ στον $\mathcal{M}_+^b(H)$.

Λήμμα 4.1.3. *Για κάθε προσθετική, θετική, ομογενή και συνεχή κατά Daniell απεικόνιση $M : \mathcal{M}_+^b(H) \longrightarrow \mathcal{M}_+^b(\Sigma)$, υπάρχει ακριβώς ένας Ω-H- Μαρκοβιανός πυρήνας k, ώστε $M(g) = k(g)$ για κάθε $g \in \mathcal{M}_+^b(H)$.*

Απόδειξη. Λόγω της (4.3) μπορούμε να ορίσουμε την $k : \Omega \times H \longrightarrow [0,1]$ μέσω της σχέσης

$$k(\omega, B) := M(\chi_B)(\omega) \quad \forall \quad (\omega, B) \in \Omega \times H.$$

Τότε εύκολα αποδεικνύεται, ότι η k είναι ένας Ω-H-Μαρκοβιανός πυρήνας. □

Το Λήμμα 4.1.3 μας οδηγεί άμεσα να κατανοήσουμε πως μπορεί να οριστεί η σύνθεση Μαρκοβιανών πυρήνων με ένα απλό τρόπο. Για αυτό το σκοπό θεωρούμε τρεις μ.χ. (Ω_i, Σ_i) με $i = 1, 2, 3$. Για i=1,2 έστω k_i ένας Ω_i-Σ_{i+1}-Μαρκοβιανός πυρήνας. Σύμφωνα με τη σχέση (4.4) η k_i μπορεί να θεωρηθεί η αντίστοιχη προσθετική, θετικά-ομογενής, συνεχής κατά Daniell απεικόνιση $k_i : \mathcal{M}_+^b(\Sigma_{i+1}) \longrightarrow \mathcal{M}_+^b(\Sigma_i)$. Έτσι μπορεί να οριστεί η σύνθεση $k_1 \circ k_2 : \mathcal{M}_+^b(\Sigma_3) \longrightarrow \mathcal{M}_+^b(\Sigma_1)$. Η $k_1 \circ k_2$ είναι προφανώς ομοίως μια προσθετική, θετικά ομογενής και συνεχής κατά Daniell απεικόνιση, επομένως σύμφωνα με το Λήμμα 4.1.3 ένας Ω_1-Σ_3-Μαρκοβιανός πυρήνας . Ονομάζουμε την $k_3 := k_1 k_2 := k_1 \circ k_2$ σύνθεση των k_1 και k_2. Σύμφωνα με τον ορισμό για κάθε $g \in \mathcal{M}_+^b(\Sigma_3)$ ισχύει

$$\begin{aligned} (k_1 k_2 g)(\omega_1) &= [k_1(k_2 g)](\omega_1) = \int k_1(\omega_1, d\omega_2) \int k_2(\omega_2, d\omega_3) g(\omega_3) \\ &= \int \int k_1(\omega_1, d\omega_2) k_2(\omega_2, d\omega_3) g(\omega_3), \end{aligned}$$

δηλαδή

$$(k_1 k_2 g)(\omega_1) = \int \int k_1(\omega_1, d\omega_2) k_2(d\omega_3, \omega_2) g(\omega_2, d\omega_3) \tag{4.5}$$

για κάθε $\omega_1 \in \Omega_1$. Αν $g = \chi_A$ με $A \in \Sigma_3$, τότε ο Ω_1-Σ_3-Μαρκοβιανός πυρήνας $k_3 = k_1 k_2$ γράφονται ως

$$(k_1 k_2)(\omega_1, A_3) = \int k_1(\omega_1, d\omega_2) k_2(\omega_2, A) \quad \forall \omega_1 \in \Omega_1. \tag{4.6}$$

Έτσι έχει έννοια ο παρακάτω ορισμός.

Ορισμός 4.1.4. Έστω $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ μια οικογένεια Μαρκοβιανών πυρήνων επάνω στο μ.χ. $(E, \mathcal{E})$. Η $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια **ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρήνων** επάνω στο Ε, αν

$$P_{s+t} = P_s P_t \qquad \forall s, t \in \mathbb{R}_+ \tag{4.7}$$

Αν σε μια ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρήνων επάνω στο Ε ο P_0 ισούται με το μοναδιαίο Μαρκοβιανό πίνακα Ι, τότε η $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ονομάζεται **κανονική** (normal).

Οι εξισώσεις (4.7) ονομάζονται **εξισώσεις Chapman-Kolmogorov**. Λόγω της (4.6) οι (4.7) γράφονται ως

$$P_{s+t}(x, B) = \int P_s(x, dy) P_t(y, B)$$

για οποιαδήποτε $(x, B) \in E \times \mathcal{E}$ και $s, t \in \mathbb{R}_+$. Από την (4.7) προκύπτει, αφού $t + s = s + t$, ότι $P_s P_t = P_t P_s$. Έτσι κάθε ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρήνων είναι **μεταθετική**.

Τα σημαντικότερα παραδείγματα ημιομάδων Μαρκοβιανών πυρήνων είναι παραδείγματα κανονικών ημιομάδων Μαρκοβιανών πυρήνων (βλ. ωστόσο το Παράδειγμα 4.1.5(**b**)). Συχνά συναντούμε οικογένειες Μαρκοβιανών πυρήνων, όπου η ιδιότητα (4.7) ισχύει αρχικά μόνο για $s, t > 0$. Αν συμπληρώσουμε μια τέτοια οικογένεια με τον μοναδιαίο πίνακα $P_0 := I$ επάνω στο E, τότε έχουμε μια κανονική ημιομάδα.

Παραδείγματα 4.1.5. **(a)** Έστω $(E, \mathcal{E})$ οποιοσδήποτε μ.χ. και $P_t := I$ ο μοναδιαίος πυρήνας επάνω στο E για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε η $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια κανονική ημιομάδα πυρήνων Markov . Σύμφωνα με την παραπάνω ερμηνεία η $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ περιγράφει ένα σωματίδιο, το οποίο μετά το ξεκίνημα στο $x \in E$ δεν εγκαταλείπει τη θέση του.

(b) Έστω $(E, \mathcal{E}, \mu)$ ένας χ.π. και έστω P_t ο ανεξάρτητός του $x \in E$, Μαρκοβιανός πυρήνας $P_t(x, B) := \mu(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{E}$ και $t \in \mathbb{R}_+$. Τότε η $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μια ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρηνών, η οποία είναι κανονική μόνο για $\mathcal{E} = \{\emptyset, E\}$.

(c) Για οποιαδήποτε μέτρα $\mu_1, \ldots, \mu_n, \nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^d)$ ισχύει η ισότητα

$$(\mu_1 \otimes \ldots \otimes \mu_n) * (\nu_1 \otimes \ldots \otimes \nu_n) = (\mu_1 * \nu_1) \otimes \ldots \otimes (\mu_n * \nu_n). \tag{4.8}$$

Πράγματι από το [3], Satz 22.4 (c), έχουμε ότι για $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^d)$ ισχύει

$$\widehat{\mu * \nu} = \widehat{\mu} \cdot \widehat{\nu}, \tag{4.9}$$

όπου $\widehat{\mu}$ είναι ο **μετασχηματισμός Fourier** του μ, δηλαδή $\widehat{\mu}(x) := \int e^{i<x,y>} \mu(dy)$, όπου $< x, y > := x_1 y_1 + \ldots + x_d y_d$. Επίσης από το [3], Satz 22.5 έχουμε ότι για $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^d)$ και $\nu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^{d'})$ ισχύει

$$\widehat{\mu \otimes \nu}(x, y) = \widehat{\mu}(x) \cdot \widehat{\nu}(y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^{d'}. \tag{4.10}$$

Από τις (4.9) και (4.10) προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \longrightarrow \prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(x_j) \cdot \prod_{k=1}^{n} \widehat{\nu}_k(x_k)$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier του μέτρου της αριστερής πλευράς της αποδεικτέας ισότητας (4.8) και αυτό το γινόμενο ισούται με το $\prod_{j=1}^{n} \widehat{\mu}_j(x_j) \widehat{\nu}_j(x_j)$, το οποίο είναι ο μετασχηματισμός Fourier του μέτρου της δεξιάς πλευράς της (4.8). Άρα ισχύει η (4.8).

(d) Μια ιδιαίτερη περίπτωση ημιομάδας συνελίξεων $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}_d$ μπορεί να αποκτηθεί θέτοντας (με d παράγοντες)

$$\mu_t := \nu_{0,t} \otimes \ldots \otimes \nu_{0,t} \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+,$$

όπου $\nu_{0,t} := \boldsymbol{N}(0,t)$. Τότε βεβαίως ισχύει $\mu_0 = \delta_0$, όπου $\mu_0 * \mu_t = \mu_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Για $s > 0$ και $t > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mu_s * \mu_t = (\nu_{0,s} \otimes \cdots \otimes \nu_{0,s}) * (\nu_{0,t} \otimes \cdots \otimes \nu_{0,t}) &= (\nu_{0,s} * \nu_{0,t}) \otimes \cdots \otimes (\nu_{0,s} * \nu_{0,t}) \\ &= \nu_{0,s+t} \otimes \cdots \otimes \nu_{0,s+t} \\ &= \mu_{s+t},\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του προηγούμενου παραδείγματος (c).
Η οικογένεια $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ καλείται η **ημιομάδα συνελίξεων της κίνησης Brown** επάνω στη $\mathfrak{B}_d$.

(e) Έστω $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία ημιομάδα πυρήνων Markov επάνω στο μ.χ. $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$. Η $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ λέμε ότι είναι **αναλλοίωτη ως προς τις μεταθέσεις** (translation invariant), αν

$$P_t(x,B) = P_t(x+z, B+z)$$

για όλα τα $x, z \in \mathbb{R}^d$, $B \in \mathfrak{B}_d$ και $t \in \mathbb{R}_+$.
Αν θέσουμε

$$\mu_t(B) := P_t(0,B) \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \quad \forall B \in \mathfrak{B}_d,$$

παίρνουμε μία οικογένεια $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}_d$ έτσι ώστε

$$P_t(x,B) = \mu_t(B-x).$$

Μια συνέπεια της ιδιότητας της ημιομάδας για την $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, είναι ότι για κάθε $B \in \mathfrak{B}_d$ ισχύει

$$\begin{aligned}\mu_{s+t}(B) = P_{s+t}(0,B) &= \int P_s(0,dy)P_t(y,B) \\ &= \int \mu_s(dy)\mu_t(B-y) \\ &= (\mu_s * \mu_t)(B),\end{aligned}$$

δηλαδή,

$$\mu_{s+t} = \mu_s * \mu_t \ \ \forall s,t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.11}$$

Επομένως, η $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια ημιομάδα συνελίξεων μέτρων πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}_d$. Αντιστρόφως, εάν έχουμε μία ημιομάδα συνελίξεων $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, τότε η ισότητα

$$P_t(x,B) := \mu_t(B-x) \tag{4.12}$$

ορίζει μία ημιομάδα $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ πυρήνων Markov επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}^d,\mathfrak{B}_d)$ αναλλοίωτη ως προς τις μεταθέσεις.

Πράγματι, η συνολοσυνάρτηση $B \longrightarrow \mu_t(B-x)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}_d$ για κάθε σταθερό $x\in\mathbb{R}_+$ και $t\in\mathbb{R}_+$.

Επιπλέον, για κάθε $B\in\mathfrak{B}_d$ η απεικόνιση $(x,y)\longrightarrow \chi_B(x+y)$ είναι η σύνθεση της συνεχούς απεικόνισης $+ : \mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ με μία $\mathfrak{B}_d$-μετρήσιμη απεικόνιση του $\mathbb{R}^d$ στο $\{0,1\}$. Επομένως είναι $\mathfrak{B}_d\otimes\mathfrak{B}_d$-μετρήσιμη. Από το Θεώρημα Fubini επομένως, προκύπτει ότι η συνάρτηση

$$x \longrightarrow \int \chi_B(x+y)\mu_t(dy) = \int \chi_{B-x}(y)\mu_t(dy) = \mu_t(B-x)$$

είναι $\mathfrak{B}_d$-μετρήσιμη.

Έτσι κάθε P_t είναι ένας πυρήνας. Για ένα μέτρο πιθανότητας μ επάνω στη $\mathfrak{B}_d$,έστω $\widetilde{\mu} := \mu\circ S^{-1}$, όπου $S:\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}^d$ με $S(x) := -x$ είναι η απεικόνιση της αντανάκλασης στην αρχή των αξόνων. Τότε η (4.12) μας δίνει για $B\in\mathfrak{B}_d$, $x\in\mathbb{R}^d$ και $t\in\mathbb{R}_+$ τις ισότητες

$$\begin{aligned}(P_t\chi_B)(x) = P_t(x,B) &= \int \chi_B(x+y)\mu_t(dy)\\ &= \int \chi_B(x-y)\widetilde{\mu}_t(dy).\end{aligned}$$

Τότε για κάθε μη αρνητική $\mathfrak{B}_d$-μετρήσιμη συνάρτηση f υπάρχει μία αύξουσα ακολουθία απλών μη αρνητικών συναρτήσεων $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ώστε $f=\lim_{n\to\infty} f_n$. Επομένως

$$(P_tf)(x) = \int f(x+y)\mu_t(dy) = \int f(x-y)\widetilde{\mu}_t(dy),$$

δηλαδή

$$P_tf = f*\widetilde{\mu}_t \;\; \forall t\in\mathbb{R}_+. \tag{4.13}$$

Λόγω αυτής της ιδιότητας η P_t είναι επίσης πυρήνας συνέλιξης. Αφού για κάθε $\mu,\nu\in\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^d)$ ισχύει

$$(\mu*\nu)\circ S^{-1} = (\mu\circ S^{-1})*(\nu\circ S^{-1}),$$

εφαρμόζοντας τη (4.13) μπορούμε να αποδείξουμε την ιδιότητα της ημιομάδας για την οικογένεια $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Πράγματι, για $s,t\in\mathbb{R}_+$, f μη αρνητική $\mathfrak{B}_d$-μετρήσιμη απεικόνιση έχουμε

$$\begin{aligned}
P_{s+t}f = f * (\mu_{s+t} \circ S^{-1}) &= f * ((\mu_t * \mu_s) \circ S^{-1}) \\
&= f * ((\mu_t \circ S^{-1}) * (\mu_s \circ S^{-1})) \\
&= f * (\mu_t \circ S^{-1}) * (\mu_s \circ S^{-1}) \\
&= (f * (\mu_t \circ S^{-1})) * (\mu_s \circ S^{-1}) \\
&= P_t f * (\mu_s \circ S^{-1}) \\
&= P_s(P_t f).
\end{aligned}$$

Σύμφωνα με το [3], Kolloral 29.7, ισχύει $\mu_0 = \delta_0$ για κάθε ημιομάδα συνελίξεων $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$.
Επομένως η ημιομάδα πυρήνων Markov $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στον μ.χ. $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}_d)$ αναλλοίωτη ως προς τις μεταθέσεις είναι πάντοτε κανονική (δηλαδή $P_0 = I$), διότι από τη (4.12) προκύπτει ότι

$$P_0(x,B) = \delta_0(B - x) = \delta_x(B) = I(x,B) \tag{4.14}$$

για όλα τα $x \in \mathbb{R}^d$ και $B \in \mathfrak{B}_d$.
Έστω ότι κάθε μ_t έχει μία πυκνότητα $\widetilde{f_t}$ ως προς το λ_d. Γράφοντας $\widetilde{f_t}(x) := f_t(-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$, η (4.13) μας δίνει

$$P_t f = f * \widetilde{f_t}.$$

(f) Έστω $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η ημιομάδα συνελίξεων της κίνησης Brown, που ορίστηκε στο (d). Για κάθε $t > 0$ το μέτρο $\mu_t := \nu_{0,t} \otimes \ldots, \otimes \nu_{0,t}$, με d παράγοντες, είναι μια d-διάστατη κανονική κατανομή με σ.π.π.

$$f_t(x) := \prod_{j=1}^{d} (2\pi t)^{-1/2} e^{-x_j^2/2t} = (2\pi t)^{-d/2} e^{-|x|/2t} \tag{4.15}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ ως προς το μέτρο λ_d του Lebesgue. Σύμφωνα με το παράδειγμα (e) από την $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάγεται μία ημιομάδα πυρήνων Markov $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αναλλοίωτη ως προς τις μεταθέσεις. Η $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται η **ημιομάδα της κίνησης Brown** στον $\mathbb{R}^d$. Επειδή $\widetilde{f_t} = f_t$, έχουμε

$$P_t f(x) = \int f(x-y)\mu_t(dy) = (2\pi t)^{-d/2} \int f(x-y) e^{-|y|^2/2t} \lambda_d(dy) \tag{4.16}$$

για όλα τα $t > 0$ και για κάθε μη αρνητική $\mathfrak{B}_d$-μετρήσιμη συνάρτηση f.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι κάθε ημιομάδα $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ Μαρκοβιανών πυρηνών επάνω σε έναν μ.χ. $(E,\mathcal{E})$ οδηγεί με έναν φυσικό τρόπο σε μια προβολική οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στον $(E,\mathcal{E})$.

Η ιδέα αυτού προτείνεται μέσω του "περιπλανώμενου σωματιδίου χωρίς μνήμη".

Έστω $t_1 < \cdots < t_n$ και $B_1,\ldots,B_n \in \mathcal{E}$. Αν το σωματίδιο ξεκινάει απο το x_0, τότε η πιθανότητα το σωματίδιο τις χρονικές στιγμές $t_1,...,t_n$ να βρίσκεται στα $B_1,...,B_n$, αντίστοιχα, δίνονται από τον τύπο

$$\int_{B_1}...\int_{B_{n-1}}\int_{B_n} P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},d_{x_n})P_{t_{n-1}-t_{n-2}}(x_{n-2},d_{x_{n-1}})...P_{t_1}(x_0,dx_1).$$

Αν το σημείο εκκίνησης εξαρτάται επιπλέον από μία αρχική πιθανότητα, δηλαδή από ένα μέτρο πιθανότητας μ επάνω στην $\mathcal{E}$, τότε έχουμε στο τέλος να θεωρήσουμε ακόμη μια ολοκλήρωση με μεταβλητή το x_0 ως προς το μ.

Έτσι προκύπτει

$$\int_E\int_{B_1}...\int_{B_{n-1}}\int_{B_n} P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dxn)P_{t_{n-1}-t_{n-2}}(x_{n-2},dxn-1)...P_{t_1}(x_0,dx_1)\mu(dx_0)$$

$$=\int\int...\int \chi_{B_1,...,B_n}(x_1,...,x_n)P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)...P_{t_1}(x_0,dx_1)\mu(dx_0).$$

Με $\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}_+$.

Μετά από αυτήν την προετοιμασία μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.6. *Έστω $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια ημιομάδα Μαρκοβιανών πυρηνών επάνω σε έναν μ.χ. $(E,\mathcal{E})$ και μ ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathcal{E}$. Για κάθε σύνολο $J=\{t_1,\cdots,t_n\}\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ με $t_1<...<t_n$ και για κάθε $B\in\mathcal{E}_J$ θέτουμε*

$$P_J(B) := \int\int...\int \chi_B(x_1,...,x_n)P_{t_n-t_{n-1}}(x_{n-1},dx_n)...P_{t_1}(x_0,dx_1)\mu(dx_0). \tag{4.17}$$

Τότε η $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$ είναι μια προβολική οικογένεια επάνω στο μ.χ. $(E,\mathcal{E})$.

Για την Απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος βλέπε [3], Satz 36.4.

Παρατήρηση 4.1.7. Αν το E είναι ένας πολωνικός χώρος και $\mathcal{E} := \mathfrak{B}(E)$, τότε από το Θεώρημα Συνέπειας του Kolmogorov (βλ. π.χ. [3] , Satz 35.3, Korollar 35.4) προκύπτει ότι η προβολική οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$ που κατασκευάστηκε εδώ, είναι η οικογένεια των πεπερασμένης διάστασης κατανομών μιας σ.δ. με χ.κ τον E. Για δοσμένη Μαρκοβιανή ημιομάδα $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$ εξαρτάται μόνο από την αρχική κατανομή μ επάνω στον $\mathcal{E}$. Αν επιλέξουμε τη κανονική σ.δ. που αντιστοιχει στην $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$, τότε αυτή είναι μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. (Ω,Σ,P^μ), όπου μόνο το μέτρο πιθανότητας

P^μ εξαρτάται από το μ (και ισχύει $\Omega = \mathbb{E}^{\mathbb{R}_+}, \Sigma := \mathfrak{B}_{\mathbb{R}_+}, X_t := \pi_{\{t\}} : \Omega \to E$ η κανονική προβολή). Για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $J = \{t_1, ..., t_n\}$ του $\mathbb{R}_+$ με $t_1 < ... < t_n$ ισχύει ότι η $P_J = P^\mu_{(X_1,...,X_n)}$ είναι η από κοινού κατανομή των τ.μ. $X_{t_1}, ..., X_{t_n}$ ως προς το P^μ. Έτσι σύμφωνα με την 4.17 έχουμε

$$P^\mu(\{X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n\}) = \int_E \int_{B_1} ... \int_{B_n} P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n)...P_{t_1}(x_0, dx_1) \quad (4.18)$$

για οποιαδήποτε σύνολα $B_1, ..., B_n \in \mathcal{E}$. Για την ειδική περίπτωση $\mu = \delta_x$ έχουμε

$$P^{\delta_x}(\{X_{t_1} \in B_1, \ldots, X_{t_n} \in B_n\}) = \int_{B_1} ... \int_{B_n} P_{t_n - t_{n-1}}(x_{n-1}, dx_n)...P_{t_1}(x, dx_1) \quad (4.19)$$

για κάθε $x \in E$. Μία σύγκριση των (4.18) και (4.19) μας οδηγεί για οποιαδήποτε αρχική κατανομή μ στην ισότητα

$$P^\mu(\{X_{t_1}, ..., X_{t_n} \in n\}) = \int P^{\delta_x}(\{X_{t_1} \in B_1, ..., X_{t_n} \in B_{t_n}\})\mu(dx) \quad (4.20)$$

για κάθε επιλογή των $n \in \mathbb{N}$ των αριθμών $t_1 < \cdots < t_n$ από το $\mathbb{R}_+$ και των συνόλων $B_1, ..., B_n \in \mathcal{E}$. Άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Μοναδικότητας της Θεωρίας Μέτρου έχουμε

$$P^\mu(A) = \int P^{\delta_x}(A)\mu(dx) \qquad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+) \quad (4.21)$$

ή για συντομία

$$P^\mu = \int P^{\delta_x}(\mu(dx)) \quad (4.22)$$

Από τις (4.19) και (4.20) για την ειδική περίπτωση $n = 1$ προκύπτει ότι

$$P^{\delta_x}(\{X_t \in B\}) = P_t(x, B) \qquad \forall x \in E \quad \forall B \in \mathcal{E} \quad (4.23)$$

και

$$P^\mu(\{X_t \in B\}) = P_t(x, B)\mu(dx) \qquad \forall B \in \mathcal{E} \quad (4.24)$$

αντίστοιχα. Για $t = 0$ προκύπτει

$$P^\mu(\{X_0 \in B\}) = \int P_0(x, B)\mu(dx) \qquad \forall B \in \mathcal{E}, \quad (4.25)$$

Αν η ημιομάδα είναι κανονική, τότε $P_0 = I$, άρα

$$P^\mu_{X_0} = \mu. \quad (4.26)$$

4.2 Σ.Δ. με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις

Στο παράδειγμα (4.1.5)**(e)** εμφανίστηκε η έννοια μίας ημιομάδας Markov επάνω στον $\mathbb{R}^d$ αναλλοίωτης ως προς τις μεταθέσεις. Σε κάθε τέτοια ημιομάδα $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ αντιστοιχεί με μια 1-1 αντιστοιχία μία ημιομάδα συνελίξεων $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$μέτρων πιθανότητας επάνω στον $\mathbb{R}^d$, που ορίζεται μέσω των σχέσεων

$$\mu_t(B) = P_t(0,B) \quad \forall B \in \mathbb{B}_d, \tag{4.27}$$

και

$$P_t(x,B) = \mu_t(B-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \forall B \in \mathcal{B}_d. \tag{4.28}$$

Η (4.28) γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\int \chi_B P_t(x,dy) = \int \chi_B(x+y)\mu_t(dy)$$

ή ισοδύναμα έχουμε

$$\int f(y)P_t(x,dy) = \int f(x+y)\mu_t(dy) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \tag{4.29}$$

για Borel -μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$.

Παρακάτω γενικεύουμε την (4.29) για Borel -μετρήσιμες συναρτήσεις $f : (\mathbb{R}^d)^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Επιπλέον υποθέτουμε ότι το μ είναι μια αρχική κατανομή επάνω στη $\mathfrak{B}_d$.

Για οποιοδήποτε σύνολο $J \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ με στοιχεία $t_1 < \cdots < t_n$ συμβολίζουμε $\mu \in P_J$ το μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}_{dn}$ που ορίστηκε στο Θεώρημα 3.1.7. Αν η $f : (\mathbb{R}^d)^n \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ είναι μια Borel -μετρήσιμη συνάρτηση, τότε

$$\int f(x_1,\ldots,x_n)P_J(d(x_1,\ldots,x_n)) = \int\int\int\cdots\int f(x_0+x_1,\ldots,x_0+\ldots+x_n)\mu_{t_n-t_{n-1}}(dx_n) \tag{4.30}$$

$$\ldots\mu_{t_2-t_1}(dx_2)\mu_{t_1}(dx_1)\mu(dx_0).$$

Η (4.30) προκύπτει εύκολα με διαδοχικές εφαρμογές της (4.29).

Θα εξετάσουμε παρακάτω δύο ιδιότητες των σ.δ. οι οποίες είναι σε στενή σχεση με τα παραπάνω.

Ορισμός 4.2.1. Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μια κανονική σ.δ. με χ.κ. $\mathbb{R}^d$. Η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ονομάζεται:
(a) μία σ.δ. με **στάσιμες προσαυξήσεις** , αν υπάρχει μία οικογένεια $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}_d$, ώστε

$$P_{X_t-X_s} = \mu_{t-s} \tag{4.31}$$

για οποιαδήποτε $s, t \in \mathbb{R}_+$ με $s \leq t$.
(**b**) μία σ.δ. με **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** , αν για κάθε $t_0, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n$ οι τ.μ.

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \tag{4.32}$$

είναι ανεξάρτητες.

Η απαίτηση (4.31) της στασιμότητας των προσαυξήσεων σημαίνει ότι, η κατανομή κάθε προσαύξησης $X_t - X_s$ εξαρτάται μόνο από τη διαφορά $t - s \quad (0 \leq s \leq t)$. Για $s = t$ η (4.31) γίνεται

$$\delta_0 = \mu_0. \tag{4.33}$$

Παρατήρηση 4.2.2. Η απαιτούμενη στον Ορισμό 4.2.1, **(b)**, ανεξαρτησία των τ.μ. (4.32) συνεπάγεται, ότι αυτή παραμένει σε ισχύ για κάθε επιλογή σημείων $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Πράγματι, στην περίπτωση που ισχύει $t_0 > 0$, η αλυσίδα των $n + 1$ σημείων μπορεί να συμπληρωθεί με το $t_{-1} := 0$. Τότε οι τ.μ.

$$X_{t_{-1}}, X_{t_0} - X_{t_{-1}}, ..., X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

είναι ανεξάρτητες. Επειδή $X_{t_0} = X_{t_{-1}} + (X_{t_0} - X_{t_{-1}})$, η X_{t_0} θα είναι $\sigma(X_{t_{-1}}, X_{t_0} - X_{t_{-1}})$-μετρήσιμη. Τότε η ανεξαρτησία προκύπτει από τη σχέση $\sigma(X_{t_0}) \subseteq \sigma(X_{t_{-1}}, X_{t_0} - X_{t_{-1}})$ και την ανεξαρτησία των σ-αλγεβρών $\sigma(X_{t_0}), \sigma(X_{t_1} - X_{t_0}), ..., \sigma(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})$.

Η σύνδεση των νέων εννοιών με αυτών που έχουν επαναλάβαμε στην εισαγωγή της παρούσας ενότητας θα γίνει σαφής, αν, όπως και στην Παρατήρηση (4.2.2), για δυσμενή αρχική κατανομή $\mu : \mathbb{B}_d \longrightarrow [0, 1]$ θεωρήσουμε την κανονική διαδικασία $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. $(\Omega, \Sigma, P^\mu$, η οποία αντιστοιχεί στην προβολική οικογένεια $\{P_J\}_{J \in \mathbb{F}(\mathbb{R}_+)}$, η οποία με την σειρά της προέρχεται από μια αναλλοίωτη ως προς της μεταθέσεις Μαρκοβιανή ημιομάδα $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ ή από εκείνη η οποία, μέσω της (4.27) αντιστοιχεί στην ομάδα συνελίξεων μέτρων πιθανότητας $\{\mu_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$. Τότε για κάθε οικογένεια πεπερασμένων στο πλήθος σημείων $t_1, ..., t_n$ η από κοινού κατανομή των τ.μ. $X_{t_1}, ..., X_{t_n}$ ως προς το P^μ δίνεται μέσω της σχέσης (4.17) του Θεωρήματος (4.1.6), από τον τύπο

$$(P^\mu)_{(X_{t_1}, ..., X_{t_n})} = P_J \tag{4.34}$$

για $J := \{t_1, ..., t_n\}$.

Έτσι λοιπόν, έχουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία κανονική διαδικασία επάνω στο χ.π. (Ω,Σ,P_μ), η οποία προέρχεται από μία ημιομάδα $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ συνελίξεων επάνω στη $\mathfrak{B}_d$, την αντίστοιχη αναλλοίωτη ως προς τις μεταθέσεις Μαρκοβιανή ημιομάδα $\{P_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και από μία αρχική κατανομή μ επάνω στη $\mathfrak{B}_d$. Τότε η διαδικασία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Για οποιοδήποτε $s,t\in\mathbb{R}_+$ με $s\le t$ ισχύει*

$$P^\mu_{X_t-X_s}=\mu_{t-s}. \tag{4.35}$$

Απόδειξη. Αρχικά αποδεικνύουμε τη στασιμότητα των προσαυξήσων μέσω της απόδειξης της (4.33). Για $s=t$ η (4.33) είναι προφανής, επειδή για μια ημιομάδα συνελίξεων $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ από μέτρα πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}_d$ ισχύει $\mu_0=\delta_0$ Αν $s<t$ θέτουμε $Y:=(X_s,X_t)$ και συμβολίζουμε με q τη συνεχή (άρα Borel -μετρήσιμη) απεικόνιση $(x_1,x_2)\longrightarrow x_1-x_2$ από τον $\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d$ στον $\mathbb{R}^d$. Τότε η $P^\mu_{X_t-X_s}$ είναι η κατανομή της $q\circ Y$ ως προς το P^μ. Άρα για κάθε $B\in\mathfrak{B}_d$ για $Q:=q^{-1}(B)$ ισχύει

$$P^\mu(\{X_t-X_s\in B\})=P^\mu(\{q\circ Y\in B\})=P^\mu(\{Y\in Q\}),$$

επομένως λόγο της σχέσης (βλ. 4.32)) $(P^\mu)=P_{\{s,t\}}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}P^\mu(\{X_t-X_s\in B\})&=\int\int\int\chi_Q(x_1,x_2)P_{t-s}(x_1,dx_2)P_s(x,dx_1)\mu(dx)\\&=\int\int\int\chi_{X_1+B}(x_2)P_{t-s}(x_1,dx_2)P_s(x,dx_1)\mu(dx)\\&=\int\int P_{t-s}(x_1,x_1+B)P_s(x,dx_1)\mu(dx)\\&=\mu_{t-s}(B)\int P_s(x,\mathbb{R}^d)\mu(dx)=\mu_{t-s}(B).\end{aligned}$$

Εδώ χρησιμοποιήθηκε το αναλλοίωτο των μεταθέσεων της P_{t-s} στη μορφή

$$P_{t-s}(x_1,x_1+B)=P_{t-s}(0,B)=\mu_{t-s}(B)$$

μέσω της σχέσης (4.28). Έτσι αποδείχθηκε η (4.33) στην περίπτωση $s<t$.

Έστω τώρα $t_0=0<t_1<\cdots<t_n$. Η σ.δ. έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις , όταν οι $n+1$ τ.μ.

$$Y_0:=X_{t_0},\quad Y_1:=X_{t_1}-X_{t_0},...,Y_n:=X_{t_n}-X_{t_{n-1}}$$

είναι ανεξάρτητες. Επομένως για $Z:=(Y_0,...,Y_n)$ πρέπει να δείξουμε ότι

$$P^\mu_Z=\otimes^n_{j=0}P^\mu_{Y_j}.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$P_Z^{\mu}({}_0 \times \cdots \times A_n) = \prod_{j=1}^{n} P_{Y_j}^{\mu}(A_j) \tag{4.36}$$

για οποιαδήποτε $A_0, \ldots, A_n \in \mathfrak{B}_d$. Έχουμε

$$\begin{aligned} P_Z^{\mu}({}_0 \times \cdots \times A_n) &= \int \chi_{0\times\cdots\times A_n} dP^{\mu}_{(Y_0,\ldots,Y_n)} \\ &= \int \chi_{0\times\cdots\times A_n} \cdot (Y_0, \ldots, Y_n) dP^{\mu} \\ &= \int \prod_{j=0}^{n} (\chi_{A_j} \circ Y_j) dP^{\mu} = \int \prod_{j=0}^{n} \chi_{A_j} \circ (X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) dP^{\mu}, \end{aligned}$$

όπου η τ.μ. $X_{t_{-1}} := 0$ δεν έχει ακόμη προσμετρηθεί.

Σύμφωνα με την (4.32) η $P_{\{t_0,\ldots,t_n\}}$ είναι η από κοινού κατανομή των τ.μ. $X_{t_0}, \ldots, X_{t_n}$. Χρησιμοποιώντας την (4.30) έχουμε

$$\begin{aligned} &\int \prod_{j=0}^{n} \chi_{A_j} \circ (X_{t_j} - X_{t_{j-1}}) dP^{\mu} \\ &\quad = \int \chi_{A_0}(x_0) \prod_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x_j - x_{j-1}) P_{\{t_0,\ldots,t_n\}}(d(x_0, \ldots, x_n)) \\ &\quad = \int\int\int \cdots \int \chi_{A_0}(x_{-1} + x_0) \prod_{j=1}^{n} \chi_{A_j}(x_j) \mu_{t_n - t_{n-1}}(dx_n) \ldots \mu_{t_0}(dx_0) \mu(dx_{-1}). \end{aligned}$$

5

Έτσι λαμβάνοντας υπόψιν τη σχέση $\mu_0 = \delta_0$ έχουμε

$$P_Z^{\mu}({}_0 \times \cdots \times A_n) = \mu(A_0) \prod_{j=1}^{n} \mu_{t_j - t_{j-1}}(A_j).$$

Από τη σχέση (4.35) της στασιμότητας, που έχει ήδη αποδειχθεί, προκύπτει ότι

$$\mu_{t_j - t_{j-1}}(A_j) = P_{Y_j}^{\mu}(A_j) \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

και άρα

$$P_Z^{\mu}({}_0 \times \cdots \times A_n) = \mu(A_0) \prod_{j=1}^{n} P_{Y_j}^{\mu}(A_j)$$

Επειδή ισχύει ότι $Y_0 = X_{t_0} = X_0$ και επειδή το P_0 είναι ο μοναδιαίος πυρήνας, , προκύπτει ότι

$$P_{Y_0}^{\mu}(A_0) = \int P_0(x, A_0) \mu(dx) = \mu(A_0).$$

Έτσι ισχύει η (4.36) □

Η ακόλουθη αξιοσημείωτη αντιστροφή διδάσκει, ότι έχουμε ήδη αντιμετωπίσει το τυπικό παράδειγμα μίας διαδικασίας με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις με το Θεώρημα 4.2.3.

Θεώρημα 4.2.4. *Για κάθε σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στο χ.π. (Ω,Σ,P) με χ.κ. $\mathbb{R}^d$ με στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ορίζεται μέσω της σχέσης*

$$\mu_t := P_{X_t - X_0}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ \tag{4.37}$$

μία ημιομάδα συνελίξεων $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ από μέτρα πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}_d$. Οι κατανομές πεπερασμένης διάστασης της σ.δ. είναι εκείνες της κανονικής διαδικασίας, η οποία προκύπτει από τη Μαρκοβιανή ημιομάδα που αντιστοιχεί στην παραπάνω ημιομάδα συνελίξεων μέσω της (4.28), και από την αρχική κατανομή $\mu := P_{X_0}$. Για την από κοινού κατανομή P_J των τ.μ. $X_{t_1},\dots,X_{t_n}$ (ως προς το P) ισχύει η σχέση (4.17)), όπου $J := \{t_1,\dots,t_n\}$ και $t_1 < \cdots < t_n$.

Απόδειξη. Για $t = 0$ ισχύει $\mu_0 = \delta_0$, δηλ. ισχύει η (4.37). Επίσης ισχύει $\mu_{s,t} = \mu_s * \mu_t$ πάντα, αν ένας από τους αριθμούς $s,t \in \mathbb{R}_+$ είναι 0. Θα δείξουμε ότι η (4.37) και για $s > 0$, $t > 0$, Από την ανεξαρτησία των προσαυξήσεων προκύπτει ότι οι τ.μ. $X_{s+t} - X_t$ και $X_t - X_0$ είναι ανεξάρτητες. Λόγω της στασιμότητας των προσαυξήσεων το μ_s είναι η κατανομή της $X_{s+t} - X_t$. Επομένως

$$\mu_{t+s} = P_{X_{s+t}-X_0} = P_{X_{s+t}-X_t} * P_{X_t - X_0} = \mu_s * \mu_s.$$

Άρα η $\{\mu_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια ημιομάδα συνελίξεων από μέτρα πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}_d$.

Έστω $t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$. Για τον υπολογισμό της από κοινού κατανομής Q των τ.μ. $X_{t_1},\dots,X_{t_n}$ θέτουμε $K := \{t_0,\dots,t_n\} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ και ορίζουμε τη συνάρτηση $T : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \longrightarrow (\mathbb{R}^d)^{n+1}$ μέσω του τύπου

$$T(x_0,\dots,x_n) := (x_0, x_1 - x_0, \dots, x_n - x_{n-1}). \tag{4.38}$$

Η T είναι 1-1 με αντίστροφη συνάρτηση

$$T^{-1}(y_0,\cdots,y_n) := (y_0, y_0 + y_1, \cdots, y_0 + y_1 + \cdots + y_n). \tag{4.39}$$

Για κάθε *Borel*-μετρήσιμη συνάρτηση $f : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \longrightarrow [0,\infty)$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
\int f dQ &= \int f \circ (X_{t_0},\dots,X_{t_n}) dP \\
&= \int (f \circ T^{-1} \circ T \circ (X_{t_0},\dots,X_{t_n})) dP \\
&= \int (f \circ T^{-1} \circ (X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}})) dP \\
&= \int (f \circ T^{-1}) d\tau,
\end{aligned}$$

όπου $\tau := P_{(X_{t_0}, X_{t_1}-X_{t_0}, \ldots, X_{t_n}-X_{t_{n-1}})}$ είναι η από κοινού κατανομή των τ.μ.

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}.$$

Επειδή οι προσαυξήσεις είναι στάσιμες και ανεξάρτητες, προκύπτει ότι

$$\tau = \mu \otimes \mu_{t_1} \otimes \mu_{t_2-t_1} \cdots \otimes \mu_{t_n-t_{n-1}}.$$

Από το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\int f dQ = \int \int \int \cdots \int f(x_0, x_1 + x_0, \ldots, x_0 + \cdots + x_n) \mu_{t_n-t_{n-1}}(dx_n) \ldots \mu_{t_1}(dx_1) \mu(dx_0)$$

για όλες τις συναρτήσεις f όπως παραπάνω. Εφαρμόζοντας τη σχέση (4.30) έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int f dP_k \\
&= \int \int \int \cdots \int f(x_{-1} + x_0, \ldots, x_{-1} + x_0 + \cdots + x_n) \mu_{t_n-t_{n-1}}(dx_n) \ldots \mu_{t_0}(dx_0) \mu(dx_{-1}) \\
&= \int \int \int \cdots \int f(x_{-1}, x_{-1} + x_1, \ldots, x_{-1} + x_1 + \cdots + x_n) \mu_{t_n-t_{n-1}}(dx_n) \ldots \mu_{t_1}(dx_1) \mu(dx_{-1})
\end{aligned}$$

αν προσέξουμε ότι $\mu_0 = \mu_{t_0} = \delta_0$.
Έτσι αποδείχθηκε ότι

$$\int f dQ = \int f dPk$$

για όλες τις Borel -μετρήσιμες συναρτήσεις συναρτήσεις $f : (\mathbb{R}^d)^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ συνεπώς από τον ορισμό της Q προκύπτει ότι

$$P_{(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n})} = P_K. \tag{4.40}$$

Αυτό αποδεικνύει το δεύτερο μέρος του ισχυρισμού για $J = \{t_1, \ldots, t_n\} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ με $t_0 := 0$ με $t_1 < \cdots < t_n$ και $t_1 := 0$. Για την απομένουσα περίπτωση $0 < t_1 < \cdots < t_n$ θεωρούμε το σύνολο $K := \{t_0, \cdots, t_n\} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}_+)$ με $t_0 := 0$. Από την (4.40) για κάθε $B \in (\mathfrak{B}_d)_n$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&P_{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})}(B) \\
&\quad = P_{(X_{t_0}, \ldots, X_{t_n})}(\mathbb{R}^d \times B) = Pk(\mathbb{R}^d \times B) \\
&\quad = \int \int \int \cdots \int \chi_{(\mathbb{R}^d \times B)}(x_0, x_1 + x_0, \ldots, x_0 + \cdots + x_n) \mu_{t_n-t_{n-1}}(dx_n) \ldots \mu_{t_1}(dx_1) \mu(dx_0) \\
&\quad = \int \int \int \cdots \int \chi_B(x_0, x_1 + x_0, \ldots, x_0 + \cdots + x_n) \mu_{t_n-t_{n-1}}(dx_n) \ldots \mu_{t_1}(dx_1) \mu(dx_0) \\
&\quad = P_J(B),
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την (4.30). Άρα $P_{(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})} = P_J$. □

Ορισμός 4.2.5. Στοχαστικές διαδικασίες $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στους χ.π. (Ω, Σ, P) και $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{P})$, αντίστοιχα, με το ίδιο παραμετρικό σύνολο $\mathbb{R}_+$ και με τον ίδιο χώρο καταστάσεων ονομάζονται **ισοδύναμες**, αν οδηγούν στην ίδια οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$ πεπερασμένης διάστασης κατανομών.

Παρατήρησεις 4.2.6. **(a)** Δύο στοχαστικές διαδικασίες

$$X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+} \text{ και } \widetilde{X} := \{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$$

επάνω στους χ.π (Ω, Σ, P) και $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Sigma}, \widetilde{P})$, αντίστοιχα, με $\mathbb{R}_+$ ως παραμετρικό σύνολο και $\mathbb{R}^d$ ως κοινό χώρο καταστάσεων είναι **ισοδύναμες** ακριβώς τότε όταν είναι **προσαυξητικά ισοδύναμες** (incrementaly equivalent) με την παρακάτω έννοια: Για κάθε επιλογή χρονικών στιγμών $0 = t_0 < \cdots < t_n$ με $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$P_{X_{t_0}\otimes(X_{t_1}-X_{t_0})\otimes\cdots\otimes(X_{t_n}-X_{t_{n-1}})} = \widetilde{P}_{\widetilde{X}_{t_0}\otimes(\widetilde{X}_{t_1}-\widetilde{X}_{t_0})\otimes\cdots\otimes(\widetilde{X}_{t_n}-\widetilde{X}_{t_{n-1}})}$$

ερμηνευόμενο ως

$$P_{X_{t_0}} = \widetilde{P}_{\widetilde{X}_{t_0}}$$

στην περίπτωση $n = 0$.

Για να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό, αρκεί να επαναλάβουμε μερικά από τα βήματα που έγιναν στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.4. Έστω T ο γραμμικός ενδομορφισμός του $(\mathbb{R}^d)^{n+1}$ που ορίστηκε στην (4.38). Τότε, λόγω της μεταβατικότητας των μέτρων-εικόνων, έχουμε

$$\begin{aligned} P_{X_{t_0}\otimes(X_{t_1}-X_{t_0})\otimes\cdots\otimes(X_{t_n}-X_{t_{n-1}})} &= P_{T(X_{t_0}\otimes\cdots\otimes X_{t_n})} \\ &= (P_{X_{t_0}\otimes\cdots\otimes X_{t_n}}) \circ T^{-1} \end{aligned}$$

με αντίστοιχες ισότητες για τη διαδικασία $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Αφού ο T είναι 1-1, ο αντίστροφός του δίνεται από την (4.39). Έτσι ο ισχυρισμός προκύπτει από αυτές τις ισότητες.

(b) Έστω $X := \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και $\widetilde{X} := \{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ όπως στην (a) δύο ισοδύναμες διαδικασίες. Αν η X έχει στάσιμες ή ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε το ίδιο ισχύει και για τη $\widetilde{X}$. Πράγματι αν η $q : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathfrak{B}_d$ ορίζει το μετασχηματισμό $q(x_1, x_2) := x_2 - x_1$, τότε για $0 \leq s < t$ έχουμε

$$P_{X_t - X_s} = P_{q(X_s\otimes X_t)} = (P_{X_s\otimes X_t}) \circ q^{-1},$$

με τις αντίστοιχες εξισώσεις να ισχύουν και για τη σ.δ. $\widetilde{X}$. Ο ισχυρισμός σχετικά με τη στασιμότητα προκύπτει από αυτές τις εξισώσεις, επειδή λόγω της ισοδυναμίας των X και $\widetilde{X}$ από την υπόθεση, ισχύει ότι

$$P_{X_s\otimes X_t} = \widetilde{P}_{\widetilde{X}_s\otimes\widetilde{X}_t}.$$

Εάν για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $0 = t_0 < \ldots < t_n$ $(n \geq 0)$ οι προσαυξήσεις $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες, τότε έχουμε

$$\begin{aligned} P_{X_{t_0} \otimes (X_{t_1} - X_{t_0}) \otimes \cdots \otimes (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})} &= P_{X_{t_0}} \otimes P_{X_{t_1} - X_{t_0}} \otimes \ldots \otimes P_{X_{t_n} - X_{t_{n-1}}} \\ &= P_{X_{t_0}} \otimes (P_{X_{t_0} \otimes X_{t_1}} \circ q^{-1}) \otimes \ldots \otimes (P_{X_{t_{n-1}} \otimes X_{t_n}} \circ q^{-1}), \end{aligned}$$

δηλ.

$$P_{X_{t_0} \otimes (X_{t_1} - X_{t_0}) \otimes \cdots \otimes (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})} = P_{X_{t_0}} \otimes (P_{X_{t_0} \otimes X_{t_1}} \circ q^{-1}) \otimes \ldots \otimes (P_{X_{t_{n-1}} \otimes X_{t_n}} \circ q^{-1}). \quad (4.41)$$

Η κατανομή του πρώτου (αντίστοιχα του δεύτερου μέλους) της (4.41) δεν αλλάζει, αν αντικαταστήσουμε την X με την $\widetilde{X}$, καθώς από την υπόθεση είναι ισοδύναμες. Τελικά προκύπτει ότι και οι αντίστοιχες προσαυξήσεις της $\widetilde{X}$ είναι ανεξάρτητες.

(c) Αν οι διαδικασίες X και $\widetilde{X}$ της (a), έχουν καθεμία ανεξάρτητες προσαυξήσεις, τότε είναι ισοδύναμες ακριβώς τότε, όταν

$$P_{X_0} = \widetilde{P}_{\widetilde{X}_0}$$

και

$$P_{X_t - X_s} = \widetilde{P}_{\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_s}$$

για κάθε επιλογή $0 \leq s < t$. Εάν επιπλέον κάθε διαδικασία έχει στάσιμες προσαυξήσεις τότε η τελευταία σχέση μπορεί να αποδυναμωθεί στην

$$P_{X_t - X_0} = \widetilde{P}_{\widetilde{X}_t - \widetilde{X}_0}$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$. Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν και για την $\widetilde{X}$.

4.3 Διαδικασίες με δοσμένα σύνολα τροχιών

Το φυσικό φαινόμενο της κίνησης Brown μας αναγκάζει να προσπαθήσουμε να εμβαθύνουμε στη μελέτη της κατασκευής των στοχαστικών διαδικασιών. Η σημασία της έννοιας της ισοδυναμίας θα παίξει έναν παραπέρα σημαντικό ρόλο.

Μέχρι τώρα είμαστε σε θέση να κατασκευάσουμε κανονικές στοχαστικές διαδικασίες για μία δοθείσα προβολική οικογένεια μέτρων πιθανότητας. Σε μία κανονική διαδικασία με χώρο καταστάσεων E και με παραμετρικό σύνολο I ο φορέας Ω του μέτρου πιθανοτήτων είναι το σύνολο E^I. Κάθε απεικόνιση $\omega : I \longrightarrow E$ λειτουργεί σαν τροχιά. Η κίνηση Brown έχει μόνο συνεχείς τροχιές. Για το λόγο αυτό κάποιος μπορεί να αναρωτηθεί, αν κατά την περιγραφή του φυσικού φαινομένου μέσω μιας σ.δ. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, η σ.δ. μπορεί να κατασκευαστεί μέσω των πεπερασμένης διάστασης κατανομών της μόνο ως μία κανονική διαδικασία, ή (στην περίπτωση ίδιων κατανομών πεπερασμένης διάστασης) ή εάν μπορεί να κατασκευαστεί ως μία διαδικασία και με τη βοήθεια των συνεχών τροχιών. Το σύνολο $E^{\mathbb{R}^+}$ (με $E := \mathbb{R}^3$) πάνω στο οποίο ορίστηκε μέχρι τώρα η πιθανοθεωρητική δομή θα έπρεπε τώρα να αντικατασταθεί από το υποσύνολό του $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^3)$, το οποίο αποτελείται από όλες τις συνεχείς τροχιές μέσα στο $\mathbb{R}^3$. Το πιο σημαντικό βήμα για τη λύση του παραπάνω προβλήματος θα μελετηθεί σε αυτή την ενότητα.

Η τελική λύση του προβλήματος θα δοθεί στην Ενότητα 4.4.. Μέχρι τώρα ένας πολωνικός χώρος E θεωρείται πάντα μαζί με τη σ-άλγεβρα $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(E)$ των Borel-συνόλων της σαν ένας μετρήσιμος χώρος. Πρόκειται λοιπόν για εμβάθυνση του Ερωτήματος της Ενότητας 3.2.. Αντιμετωπίζουμε το ερώτημα της κατασκευής όχι μόνο μιας διαδικασίας με δοσμένες κατανομές πεπερασμένης διάστασης αλλά και με δοσμένο σύνολο τροχιών. Για την ακριβή διατύπωση αυτού του ερωτήματος και την απάντησή του βοηθάει ο παρακάτω ορισμός. Όπως μέχρι τώρα, θεωρούμε το ζεύγος $(E, \mathcal{E})$, όπου E είναι ένας πολωνικός χ.κ. και $\mathcal{E} := \mathfrak{B}(E)$.

[431] **Ορισμός 4.3.1.** Έστω E ένας πολωνικός χώρος και $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(I)}$ μία προβολική οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στο E. Ένα σύνολο $\widetilde{\Omega} \subset E^I$ καλείται **ουσιώδες** (σε σχέση με τη δοθείσα οικογένεια) αν υπάρχει μία σ.δ. επάνω σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) με χώρο καταστάσεων E, παραμετρικό σύνολο I και πεπερασμένης-διάστασης κατανομές P_J έτσι ώστε το $\widetilde{\Omega}$ να είναι το σύνολο των τροχιών της.

Από τον Ορισμό 3.2.4 μιας κανονικής διαδικασίας προκύπτει ότι το καρτεσιανό γινόμενο E^I είναι πάντα ένα ουσιώδες σύνολο. Το επόμενο θεώρημα χαρακτηρίζει τα ουσιώδη σύνολα.

[432] **Θεώρημα 4.3.2. (Doob)** *Έστω E ένας πολωνικός χώρος και $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(I)}$ μία προβολική οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω σε αυτόν, $P_I := \varprojlim P_J$ το προβολικό όριο αυτής της οικογένειας και P_I^* το αντίστοιχο εξωτερικό μέτρο. Τότε το σύνολο $\widetilde{\Omega} \subset E^I$ είναι ουσιώδες σε σχεση με την οικογένεια $\{P_J\}$ εάν και μόνο εάν*

$$P_I^*(\widetilde{\Omega}) = 1. \tag{4.42}$$

Απόδειξη . Πρώτα ας υποθέσουμε ότι το $\widetilde{\Omega}$ είναι ουσιώδες. Ως εκ τούτου υπάρχει μία διαδικασία $\{X_t\}_{t\in I}$ επάνω στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) με χώρο καταστάσεων E, πεπερασμένης διάστασης κατανομές P_J, και σύνολο τροχιών $\widetilde{\Omega}$. Σύμφωνα με την Ενότητα 3.2 έχουμε

$$\widetilde{\Omega} := X_I(\Omega) \;\text{ και }\; P_I = X_I(P), \tag{4.43}$$

όπου το τελευταίο ισχύει λόγω του Θεωρήματος 3.2.2 του Kolmogorov. Η απεικόνιση $X_I : \Omega \longrightarrow E^I$ είναι Σ-$\mathcal{E}_I$-μετρήσιμη. Αφού το $\mathcal{E}_I$ είναι μία σ-άλγεβρα, τότε

$$P_I^*(\widetilde{\Omega}) = inf\{P_I(Q) : \widetilde{\Omega} \subseteq Q, Q \in \mathcal{E}_I\}, \tag{4.44}$$

έτσι αυτό που πρέπει να δείξουμε είναι ότι ισχύει $P_I(Q) = 1$ για κάθε τέτοιο Q. Αλλά από $\widetilde{\Omega} \subseteq Q$ συνεπάγεται ότι $\Omega = X_I^{-1}(\widetilde{\Omega}) \subseteq X_I^{-1}(Q) \subseteq \Omega$ από όπου προκύπτει $\Omega = X_I^{-1}(Q)$ και συνεπώς έχουμε

$$P_I(Q) = X_I(P)(Q) = P(X_I^{-1}(Q)) = P(\Omega) = 1, \tag{4.45}$$

αυτό που θέλαμε.

Υποθέτουμε αντιστρόφως ότι $P_I^*(\widetilde{\Omega}) = 1$. Για κάθε $t \in I$ συμβολίζουμε τον περιορισμό στο $\widetilde{\Omega}$ της προβολής p_t μέσω της $\widetilde{X}_t$, δηλαδή

$$\widetilde{X}_t(\omega) := p_{\{t\}}(\omega) = \omega(t) \quad \forall \omega \in \widetilde{\Omega}. \tag{4.46}$$

Για κάθε σύνολο $\widetilde{\Omega} \cap Q \in \widetilde{\Omega} \cap \mathcal{E}_I$ ορίζουμε:

$$\widetilde{P}(\widetilde{\Omega} \cap Q) := P_I(Q) \quad \text{με } \; Q \in \mathcal{E}_I. \tag{4.47}$$

Θα δείξουμε ότι το $\widetilde{P}$ είναι καλά ορισμένο και ότι η διαδικασία

$$\{\widetilde{X}\}_{t\in I} \tag{4.48}$$

επάνω στο χώρο πιθανότητας $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Omega} \cap \mathcal{E}_I, \widetilde{P})$ λύνει το πρόβλημά μας. Πρώτα από όλα είναι ξεκάθαρο ότι $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Omega} \cap \mathcal{E}_I)$ είναι μετρήσιμος χώρος και ότι $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in I}$ είναι μία οικογένεια μετρήσιμων απεικονίσεων στο $(E, \mathcal{E})$. Επιπλέον το σύνολο των απεικονίσεων $t \longrightarrow \widetilde{X}_t(\omega)$ από το I στο E καθώς το ω διατρέχει το $\widetilde{\Omega}$ είναι από την (4.46) ακριβώς το σύνολο των απεικονίσεων $\widetilde{\Omega}$ αυτό καθαυτό. Αν το $\widetilde{P}$ είναι καλά ορισμένο, τότε η $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in I}$ είναι μία σ.δ. με χώρο καταστάσεων E, παραμετρικό σύνολο I και σύνολο τροχιών $\widetilde{\Omega}$. Τώρα υποθέτουμε ότι τα $Q_1, Q_2 \in \mathcal{E}_I$ ικανοποιούν την $\widetilde{\Omega} \cap Q_1 = \widetilde{\Omega} \cap Q_2$. Πρέπει να δείξουμε ότι τότε $P_I(Q_1) = P_I(Q_2)$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $Q_1 \subseteq Q_2$. (Διαφορετικά ας λάβουμε υπόψιν τις σχέσεις $Q_1 \subseteq Q_1 \cup Q_2, Q_2 \subseteq Q_1 \cup Q_2$ και $\widetilde{\Omega} \cap (Q_1 \cup Q_2) = \widetilde{\Omega} \cap Q_1 = \widetilde{\Omega} \cap Q_2$). Από τις σχέσεις $Q_1 \subseteq Q_2$ και $\widetilde{\Omega} \cap Q_1 = \widetilde{\Omega} \cap Q_2$ προκύπτει ότι $\widetilde{\Omega} \cap (Q_1 \setminus Q_2) = \varnothing$, συνεπώς $\widetilde{\Omega} \subseteq (Q_2 \setminus Q_1)^c$ και λόγω και της (4.42) έχουμε το εξής

$$1 = P_I(Q_2 \setminus Q_1)^c = 1 - P_I(Q_2 \setminus Q_1) = 1 - (P_I(Q_1) - P_I(Q_2)), \tag{4.49}$$

δίνοντας την επιθυμητή ισότητα $P_I(Q_1) = P_I(Q_2)$.

Μένει μόνο να ελέγξουμε ότι η $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(I)}$ είναι πραγματικά η οικογένεια των πεπερασμένης διάστασης κατανομών αυτής της νέας διαδικασίας, δηλαδή ότι ισχύει $P_J = \widetilde{X}_J(\widetilde{P})$ για κάθε $J \in \mathcal{F}(I)$. Πράγματι, έστω οποιοδήποτε $B \in \mathcal{E}_J$ τότε

$$\widetilde{P}(\widetilde{X}_J^{-1}(B)) = \widetilde{P}(\widetilde{\Omega} \cap p_J^{-1}(B)) = P_I(p_J^{-1}(B)) = p_J(P_I)(B) = P_J(B). \tag{4.50}$$

Από την τελευταία σχέση και τη σχέση (3.61) του 3.2.2, Kolmogorov προκύπτει το ζητούμενο
□

Παράδειγμα 4.3.3. Έστω E ένας πολωνικός χώρος και I ένα μη κενό σύνολο. Διαλέγουμε $\omega_0 \in E^I$ και για κάθε $t \in I$ θεωρούμε τα μέτρα Dirac δ_{ω_0} στο ω_0 επάνω στη $\mathcal{E}_I$ και το $\delta_{\omega_0(t)}$ στο $\omega_0(t)$ πάνω στην $\mathcal{E}$. Αυτά ικανοποιούν τις:

$$\delta_{\omega_0} = \bigotimes_{t\in I} \delta_{\omega_0(t)} = \varprojlim_{J\in\mathcal{F}(I)} \bigotimes_{t\in J} \delta_{\omega_0(t)}. \tag{4.51}$$

Επομένως το σύνολο $\widetilde{\Omega} \subseteq E^I$ είναι ουσιώδες σε σχέση με την προβολική οικογένεια $\{\bigotimes_{t\in J} \delta_{\omega_0(t)}\}_{J\in\mathcal{F}(I)}$ εάν και μόνο εάν το $\omega_0(t)$ βρίσκεται στο $\widetilde{\Omega}$.
Εάν το σύνολο $\widetilde{\Omega} \subset E^I$ είναι ουσιώδες σε σχέση με την προβολική οικογένεια των μέτρων πιθανότητας $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(I)}$ πάνω σε έναν πολωνικό χώρο E, τότε η απόδειξη του Θεωρήματος Doob δείχνει ότι από την κανονική διαδικασία

$$\{X_t\}_{t\in I}, \tag{4.52}$$

επάνω στο χώρο πιθανότητας $(E^I, \mathcal{E}_I, P)$, (όπου $X_t(\omega) = \omega(t)$ για όλα τα $\omega \in E^I$ και $t \in I$) η διαδικασία (4.48) με τις ίδιες πεπερασμένης διάστασης κατανομές μπορεί να κατασκευαστεί. Επομένως πρόκειται για ισοδύναμες διαδικασίες.

Από τώρα και στο εξής η διαδικασία (4.48) θα καλείται η **$\widetilde{\Omega}$-κανονική διαδικασία** που ορίζεται από την οικογένεια $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(I)}$. Παίρνουμε το $\widetilde{P}$ περιορίζοντας το εξωτερικό μέτρο P_I^* επάνω στην $\widetilde{\Omega} \cap \mathcal{E}_I$ και κάθε $\widetilde{X}_t$ περιορίζοντάς την X_t στο $\widetilde{\Omega}$. Το μέτρο πιθανότητας $\widetilde{P}$ μπορεί να χαρακτηριστεί με έναν απλό τρόπο:

Θεώρημα 4.3.4. *Κάτω από τις μέχρι τώρα προϋποθέσεις, το μέτρο πιθανότητας $\widetilde{P}$ που αντιστοιχεί στην $\widetilde{\Omega}$-κανονική διαδικασία (4.48) είναι το μοναδικό μέτρο πιθανότητας P_0 επάνω στη σ-άλγεβρα $\widetilde{\Omega} \cap \mathcal{E}_I$ για το οποίο η διαδικασία*

$$\{\widetilde{X}_t\}_{t\in I} \tag{4.53}$$

επάνω στον χ.π. $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{\Omega} \cap \mathcal{E}_I, P_0)$ είναι ισοδύναμη με την κανονική διαδικασία, δηλαδή έχει την $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(I)}$ ως την οικογένεια των πεπερασμένης-διάστασης κατανομών.

Απόδειξη. Αρκεί μόνο να δείξουμε ότι το P_0 μέτρο πιθανότητας με αυτές τις ιδιότητες συμπίπτει οπωσδήποτε με το $\widetilde{P}$. Θέτουμε $\mathcal{A} := \widetilde{\Omega} \cap \mathcal{E}_I$. Τότε η σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ που παράγεται από το σύστημα $\mathcal{G}$ των συνόλων

$$\widetilde{Z}_J := \{\widetilde{X}_{t_1} \in B_1, \ldots, \widetilde{X}_{t_n} \in B_n\} \tag{4.54}$$

με $J := \{t_1, \ldots, t_n\}, t_1 < \ldots < t_n$ και $B_i \in \mathcal{E}$ για $i = 1, \ldots, n$. Από την υπόθεση ισχύει ότι

$$P_0(\widetilde{Z}_J) = P_J(B_1 \times \ldots \times B_n) \tag{4.55}$$

για κάθε σύνολο $\widetilde{Z}_J$ της παραπάνω μορφής. Επειδή $\{\widetilde{X}_t \in E\} = \widetilde{\Omega}$ για κάθε $t \in I$, έχουμε ότι $\widetilde{\Omega} \in \mathcal{G}$. Επιπλέον η οικογένεια $\mathcal{G}$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές. Πράγματι για κάθε δύο σύνολα $\widetilde{Z}_{J_1}, \widetilde{Z}_{J_2} \in \mathcal{G}$ με $J_1, J_2 \in \mathcal{F}(I)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $J_1 = J_2$, επειδή κάθε $\widetilde{Z}_J$ της μορφής (4.54) είναι πάντα ίσο με το $\widetilde{Z}'_J := \{\widetilde{X}_{t_1} \in B_1, \ldots, \widetilde{X}_{t_n} \in B_n, \widetilde{X}_{u_1} \in E, \ldots, \widetilde{X}_{u_m} \in E\}$ με $J' := J \cup \{u_1, \ldots, u_m\}$ με $u_1, \ldots, u_m \in I \setminus J$. Με ίσα σύνολα $J = J_1 = J_2$ με στοιχεία $t_1 < \ldots < t_n$ έχουμε όμως

$$\{\widetilde{X}_{t_1} \in B_1, \ldots, \widetilde{X}_{t_n} \in B_n\} \cap \{\widetilde{X}_{t_1} \in B'_1, \ldots, \widetilde{X}_{t_n} \in B'_n\} = \{\widetilde{X}_{t_1} \in B_1 \cap B'_1, \ldots, \widetilde{X}_{t_n} \in B_n \cap B'_n\}.$$

Από τη σχέση (4.55) και τον Ορισμό 4.47 του $\widetilde{P}$ μαζί με την Πρόταση 1.2.8 της [2] προκύπτει ότι $P_0 = \widetilde{P}$. □

Η μετάβαση στο εξωτερικό μέτρο P_I^* από το P_I είναι αναπόφευκτη επειδή ένα ουσιώδες σύνολο $\widetilde{\Omega} \subset E^I$ δε βρίσκεται γενικά μέσα στη σ-άλγεβρα $\mathcal{E}_I$, το πεδίο ορισμού του P_I. Για παράδειγμα για έναν πολωνικό χώρο E το σύνολο $C := C(\mathbb{R}_+, E)$ όλων των συνεχών τροχιών στον E είναι ένα ουσιώδες υποσύνολο του $E^{\mathbb{R}_+}$ σε σχέση με την προβολική οικογένεια μέτρων πιθανότητας του προηγούμενου παραδείγματος για ένα $\omega_0 \in C$. Ωστόσο μόνο σε ασήμαντη περίπτωση όπου το E αποτελείται από ένα μόνο σημείο το C βρίσκεται στη σ-άλγεβρα $\mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}$. Αυτό εξηγεί και το πόρισμα που θα ακολουθήσει. Το επόμενο λήμμα ουσιασικά αναφέρει το ενδιαφέρον γεγονός ότι κάθε σύνολο στην $\mathcal{E}_I$ καθορίζεται μέσω αριθμήσιμων στο πλήθος παραμέτρων.

[435]

Λήμμα 4.3.5. *Έστω $(E, \mathcal{E})$ ένας μετρήσιμος χώρος και I ένα μη κενό σύνολο. Τότε για κάθε $B \in \mathcal{E}_I$ υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο $I_B \subseteq I$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $x \in E^I$ και $y \in B$ ισχύει η συνεπαγωγή*

$$x(t) = y(t) \quad \forall t \in I_B \Rightarrow x \in B. \tag{4.56}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{E}^\alpha$ το σύνολο όλων των $B \subset E^I$ για τα οποία υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $S \subseteq I$ τέτοιο ώστε για κάθε δύο στοιχεία $x \in E^I$ και $y \in B$ να ισχύει η συνεπαγωγή (4.56). Τότε $\mathcal{E}^\alpha$ είναι μία σ-άλγεβρα στο E^I. Από τις ιδιότητες που χρειάζεται να ελέγξουμε για να επιβεβαιώσουμε το παραπάνω θα αποδείξουμε μόνο εκείνη του συμπληρώματος, καθώς οι άλλες είναι προφανείς. Ας θεωρήσουμε $B \in \mathcal{E}^\alpha$ και S το αντίστοιχο υποσύνολο του I. Εάν το $y \in E^I$ και το $x \in B^c$ και εάν $x(t) = y(t)$ $\forall t \in S$, τότε το y δεν μπορεί να ανήκει στο B επειδή από την (4.56) απαιτείται το $x \in B$. Επιπλέον $y \in B^c$ δείχνει ότι το S μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα αριθμήσιμο σύνολο S για το B^c. Για κάθε $J \in \mathcal{F}(I)$ και κάθε $A \in \mathcal{E}_J$ ο σχετικός J-κύλινδρος με $B := p_J^{-1}(A)$ βρίσκεται μέσα στη $\mathcal{E}^\alpha$ επειδή το $S := J$

είναι ένα πεπερασμένα ορισμένο σύνολο. Επομένως έχουμε

$$\bigcup_{J\in\mathcal{F}(I)} p_J^{-1}(\mathcal{E}_J) \subseteq \mathcal{E}^{\alpha}. \tag{4.57}$$

Αφού αυτή η ένωση είναι ένας γενήτορας της $\mathcal{E}_I$, συνεπάγεται ότι $\mathcal{E}_I \subseteq \mathcal{E}^{\alpha}$, το οποίο είναι ο ισχυρισμός του Λήμματος. □

[436]

Πόρισμα 4.3.6. *Έστω E ένας μετρικός χώρος που περιλαμβάνει τουλάχιστον δύο στοιχεία , $\mathcal{E}$ οποιαδήποτε σ-άλγεβρα στο E και $C \subset E^{\mathbb{R}_+}$ το σύνολο όλων των συνεχών απεικονίσεων από το $\mathbb{R}_+$ στο E. Τότε το C δεν είναι στοιχείο της $\mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}$.*

Απόδειξη. Έστω e_1, e_2 είναι δύο διακριτά σημεία του E και θεωρούμε οποιοδήποτε αριθμήσιμο $S \subseteq \mathbb{R}_+$. Το σύνολο $\mathbb{R}_+ \setminus S$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}_+$, έτσι οποιοδήποτε $y \in C$ ορίζεται από τις τιμές του στο $\mathbb{R}_+ \setminus S$. Επομένως η συνάρτηση $x_S : \mathbb{R}_+ \longrightarrow E$ που ορίζεται ίση με e_1 στο $\mathbb{R}_+ \setminus S$ και e_2 στο S δεν είναι συνεχής παρά το ότι είναι ίση με την x_S επάνω στο S με την σταθερή συνάρτηση $y(t) := e_2 \ \ \forall t \in \mathbb{R}_+$. Άρα δεν υπάρχει αριθμήσιμα ορισμένο σύνολο που να αντιστοιχεί στο C, όπως περιγράφεται στο Λήμμα 4.3.5. Επομένως σύμφωνα με το Λήμμα 4.3.5 $C \notin \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}$.
Εάν και το $C = C(\mathbb{R}_+, E)$ δεν είναι στην $\mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}$, η σ-άλγεβρα $C \cap \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}$ η οποία επάγεται από τη C στην $\mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}$ είναι η πιο φυσική. Εφοδιασμένο με την τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης επάνω σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}_+$, το σύνολο C είναι ένας πολωνικός χώρος ακριβώς όπως και το E. Πιο συγκεκριμένα το C έχει τη δική του Borel σ-άλγεβρα, την $\mathfrak{B}(C)$. Και έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

[437]

Θεώρημα 4.3.7. *Για κάθε πολωνικό χώρο E και για τη Borel σ-άλγεβρά του $\mathcal{E} := \mathfrak{B}(E)$ το ίχνος της $\mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}$ στη C συμπίπτει με την Borel σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}(C)$ του πολωνικού χώρου C. Επιπροσθέτως η $\mathfrak{B}(C) = C \cap \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}$ ισούται με τη σ-άλγεβρα στη C που παράγεται από την τοπολογία της σημειακής σύγκλισης στο $\mathbb{R}_+$.*

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{T}_p$ η τοπολογία στη C της σημειακής σύγκλισης στο $\mathbb{R}_+$, έστω $\mathcal{T}_c$ η τοπολογία της ομοιόμορφης σύγκλισης επάνω σε συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}_+$ και έστω $\mathcal{A} = C \cap \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}$. Για κάθε ανοιχτό $V \subseteq C$ και για $t \in \mathbb{R}_+$ το σύνολο

$$V_t := \{\omega \in C : \omega(t) \in V\} = C \cap p_{\{t\}}^{-1}(V) \tag{4.58}$$

είναι $\mathcal{T}_p$-ανοιχτό, συνεπώς $\mathcal{T}_c$ ανοιχτό, και για αυτό το λόγο βρίσκεται στη $\mathfrak{B}(C)$. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ παράγεται από τέτοια σύνολα. Επομένως

$$\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{B}(C). \tag{4.59}$$

Τώρα έστω ρ οποιαδήποτε μετρική που δίνει την τοπολογία του E. Για $\omega_0 \in C$, K συμπαγές $\subseteq \mathbb{R}_+$ και $\varepsilon > 0$ ορίζουμε

$$U(\omega_0; K, \varepsilon) := \{\omega \in C : \rho(\omega(t), \omega_0(t)) < \varepsilon \;\; \forall t \in K\}. \tag{4.60}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, το $U(\omega_0; \{t\}, \varepsilon)$ είναι V_t για κάθε ανοιχτό υποσύνολο $V := \{x \in E : \rho(x, \omega_0(t)) < \varepsilon\}$ του E. Ως εκ τούτου αυτό το σύνολο ανήκει στη $\mathcal{A}$. Εάν $K = \widetilde{O}$ για κάποιο ανοιχτό σύνολο $O \subseteq \mathbb{R}_+$, τότε

$$U(\omega_0; K, \varepsilon) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}, k > 1/\varepsilon} \bigcap_{t \in O \cap \mathbb{Q}} U(\omega_0; \{t\}, \varepsilon - 1/k) \tag{4.61}$$

και συνεπώς το $U(\omega_0, K, \varepsilon)$ βρίσκεται στη $\mathcal{A}$. Αλλά υπάρχει μία μετρήσιμη βάση για την τοπολογία $\mathcal{T}_c$ που αποτελείται από σύνολα σαν αυτά: Χρειάζεται μόνο να αφήσουμε το ω_0 να διατρέχει ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του πολωνικού χώρου C, το K διατρέχει το $\{[0, k] : k \in \mathbb{N}\}$ και το ε διατρέχει το $\{1/n : n \in \mathbb{N}\}$. Συνεπάγεται ότι κάθε $\mathcal{T}_c$-ανοιχτό σύνολο βρίσκεται στη $\mathcal{A}$, για αυτό το λόγο,

$$\mathfrak{B}(C) \subseteq \mathcal{A}. \tag{4.62}$$

Έτσι έχουμε την επιθυμητή ισότητα $\mathfrak{B}(C) \subseteq \mathcal{A}$. Αφού αυτή η σ-άλγεβρα περιέχει κάθε $\mathcal{T}_c$-ανοιχτό σύνολο, περιέχει και κάθε $\mathcal{T}_p$-ανοιχτό σύνολο. Αφού από τον ορισμό η $\mathcal{A}$ παράγεται από τα ειδικά $\mathcal{T}_p$-ανοιχτά σύνολα V_t, ο τελευταίος ισχυρισμός του θεωρήματος αποδείχθηκε. □

Τα Θεωρήματα 4.3.7 και 4.3.4 κάνουν ξεκάθαρο ότι οι $\widetilde{\Omega}$-κανονικές διαδικασίες που προκύπτουν από ουσιώδη υποσύνολα του $\widetilde{\Omega}$ είναι πολύ φυσικά αντικείμενα.

4.4 Συνεχείς Τροποποιήσεις

Τώρα αναρωτιόμαστε σχετικά με τις συνθήκες μίας προβολικής οικογένειας $\{P_J\}_{J \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_+}$ μέτρων πιθανότητας επάνω σε έναν πολωνικό χώρο E οι οποίες μας εξασφαλίζουν την ύπαρξη μιας στοχαστικής διαδικασίας $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ με συνεχείς τροχιές και $\{P_J\}_{J \in \mathcal{K}(\mathbb{R}_+}$ σαν την οικογένεια των πεπερασμένων-διαστάσεων κατανομών.

[441]

Λήμμα 4.4.1. *Έστω ότι η σ.δ. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ με χ.κ. έναν πολωνικό χώρο E έχει μία συνεχή τροποποίηση. Τότε το σύνολο $C := C(\mathbb{R}_+, E)$ είναι ουσιώδες σε σχέση με την οικογένεια των πεπερασμένης-διάστασης κατανομών της δοθείσας διαδικασίας $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ και επιπλέον αυτή η διαδικασία είναι ισοδύναμη με τη C-κανονική διαδικασία την οποία ορίζει.*

Απόδειξη . Έστω $\{P_J\}_{J\in\mathcal{K}(\mathbb{R}_+)}$ μία οικογένεια των πεπερασμένης-διάστασης κατανομών της διαδικασίας $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και της συνεχούς τροποποίησής της $\{X'_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η οποία υποθέσαμε ότι υπάρχει. Και οι δύο διαδικασίες ορίζονται επάνω στον ίδιο χώρο πιθανότητας (Ω,Σ,P). Σύμφωνα με τον Ορισμό 4.3.1. το σύνολο $\widetilde{\Omega}$ όλων των τροχιών $t \longrightarrow X'_t(\omega)$ της δεύτερης διαδικασίας είναι ουσιώδες σε σχέση με την προβολική οικογένεια $\{P_J\}$ επάνω στο E. Αφού η $\{X'_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει μόνο συνεχείς τροχιές, έχουμε $\widetilde{\Omega}\subseteq C$. Έστω $P_{\mathbb{R}_+}$ το προβολικό όριο $\varprojlim P_J$. Τότε $P_{\mathbb{R}_+^*}(\widetilde{\Omega})=1$ από το Θεώρημα του Doob, και συνεπώς το υπερσύνολο $C\supseteq\widetilde{\Omega}$ επίσης ικανοποιεί την $P_{\mathbb{R}_+^*}(C)=1$ και μέσω του δεύτερου μισού του Θεωρήματος Doob βεβαιωνόμαστε ότι το C είναι επίσης ουσιώδες. Η διαδικασία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ισοδύναμη με την κανονική διαδικασία την οποία ορίζει και τέλος είναι ισοδύναμη με κάθε $\widetilde{\Omega}$-κανονική διαδικασία και ειδικά στην περίπτωσή μας με τη C-κανονική διαδικασία. □

Αν για μία διαδικασία $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επιτύχουμε να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας συνεχούς τροποποίησής της, τότε θα έχουμε επίσης επιτύχει στην εύρεση μίας C-κανονικής διαδικασίας ισοδύναμης με αυτή. Ως εκ τούτου τώρα προσανατολιζόμαστε στο πρόβλημα ύπαρξης συνεχών τροποποιήσεων κάτω από κατάλληλες υποθέσεις. Θα περιορίσουμε την έρευνά μας σε μία συνθήκη της οποίας η σημασία αναδείχθηκε από τον Kolmogorov και θα μας οδηγήσει σε βαθύτερα αποτελέσματα.

[442]

Θεώρημα 4.4.2. (Kolmogorov). *Η ακόλουθη συνθήκη είναι ικανή για την ύπαρξη συνεχούς τροποποίησης μιας διαδικασίας $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στο χώρο πιθανότητας (Ω,Σ,P) με χώρο καταστάσεων $\mathbb{R}^d$. Για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $\alpha>0,\beta>0$ και $\gamma>0$ ισχύει η ανισότητα*

$$E(|X_s-X_t|^{\alpha})\leq\gamma|t-s|^{1+\beta} \tag{4.63}$$

ισχύει για όλα τα $s,t\in\mathbb{R}_+$.

Απόδειξη. Για δοσμένους αριθμούς $\alpha>0,\beta>0$ διαλέγουμε οποιοδήποτε $\gamma\in(0,\beta/\alpha)$ και θέτουμε

$$\delta=:\beta-\alpha\gamma>0.$$

Πρώτα από όλα ερευνούμε το πρόβλημα στο διάστημα [0,1] και για αυτό το σκοπό για κάθε $m\in\mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο S_m που αποτελείται από όλα τα ζεύγη (s,t) των δυαδικών ρητών $\{j2^{-m}:j=0,1,\dots,2^m\}$ τα οποία ικανοποιούν την $|s-t|=2^{-m}$. Προφανώς υπάρχουν $2\cdot2^m=2^{m+1}$ τέτοια ζεύγη. Θεωρούμε το ενδεχόμενο

$$A_m:=\bigcup_{(s,t)\in S_m}\{|X_s-X_t|\geq2^{-\gamma m}\}. \tag{4.64}$$

Με τη βοήθεια της (4.63) και της ανισότητας Chebyshev-Markov, βλέπουμε ότι για κάθε ζεύγος $(s,t) \in S_m$

$$P\{|X_s - X_t| \geq 2^{-\gamma m}\} \leq 2^{\alpha\gamma m} E(|X_s - X_t|^{\alpha}) \leq 2\gamma^{\alpha\gamma m}|s-t|^{1+\beta} = \gamma 2^{-m} 2^{-\delta m}$$

και άρα, με $c_1 := 2\gamma$,

$$P(A_m) \leq \sum_{(s,t)\in S_m} P\{|X_s - X_t| \geq 2^{-\gamma m}\} \leq c_1 2^{-\delta m} \quad m \in \mathbb{N}.$$

Συνεπώς η σειρά $\sum P(A_m)$ συγκλίνει ομοιόμορφα και επιπλέον το Λήμμα των Borel-Cantelli μας λέει ότι

$$P\{A_m \text{ για απείρως πολλά } m\} = 0.$$

Αυτό σημαίνει, ότι υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $N_0 \in \Sigma$ και για κάθε $\omega \in \Omega \setminus N_0$ ένας φυσικός αριθμός $m_0(\omega)$ με

$$|X_s(\omega) - X_t(\omega)| < 2^{-\gamma m} \text{ για } m \geq m_0(\omega) \text{ και } \ (s,t) \in S_m. \tag{4.65}$$

Τώρα έστω $s, t \in [0,1]$ δυαδικοί ρητοί με

$$0 < |s-t| \leq 2^{-m_0(\omega)}.$$

Διαλέγουμε από τους ακέραιους $m \geq m_0(\omega)$ το μεγαλύτερο που ικανοποιεί την $|s-t| \leq 2^{-m}$, δηλαδή αυτόν που ικανοποιεί την

$$2^{-m-1} < |s-t| \leq 2^{-m}. \tag{4.66}$$

Τα δυαδικά αναπτύγματα των s και t μπορούν να εκφραστούν στη μορφή

$$s = s_0 + \sum_{j>m} \sigma_j 2^{-j} \text{ και } \ t = t_0 + \sum_{j>m} r_j 2^{-j} \quad (\sigma_j, r_j \in \{0,1\}) \tag{4.67}$$

με $s_0 = i_0 2^{-m}$ και $t_0 = j_0 2^{-m}$ για κατάλληλα $i_0, j_0 \in \{0, 1, \ldots, 2^m\}$. Ένας άλλος τρόπος να το εξηγήσουμε είναι ο εξής

$$s_0 = i_0 2^{-m} \leq s < (i_0+1)2^{-m} \text{ και } t_0 = j_0 2^{-m} \leq t < (j_0+1)2,$$

από τα οποία προκύπτει το $|s_0 - t_0| \in \{0, 2^{-m}\}$. Πράγματι, τα $0 \leq s - s_0 < 2^{-m}$ και $0 \leq t - t_0 < 2^{-m}$ συνεπάγονται το

$$|s_0 - t_0| - |s-t| \leq |s - t - (s_0 - t_0)| < 2^{-m}$$

και έτσι λόγω της (4.66), $|s_0 - t_0| < 2 \cdot 2^{-m}$, για παράδειγμα όταν $|i_0 - j_0| < 2$ έχουμε ότι $|i_0 - j_0|$ είναι 1 ή 0. Έχουμε δείξει ότι είτε $s_0 = t_0$ είτε $(s_0, t_0) \in S_m$ έτσι από την (4.65) έχουμε

$$|X_{s_0}(\omega) - X_{t_0}\omega| < 2^{-\gamma m}. \tag{4.68}$$

Μέσω της (4.67) ξεκινώντας με s_0 αναδρομικά ορίζουμε την ακολουθία $(s_n)_{n\leq 0}$, η οποία είναι τελικά ίση με τη σταθερά s,

$$s_n := s_{n-1} + \sigma_{m+n}2^{-(m+n)} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Επειδή έχουμε

$$s_n - s_{n-1} = \sigma_{m+n}2^{-(m+n)} \in \{0, 2^{-(m+n)}\}$$

είτε ισχύει το $s_n - s_{n-1}$ είτε (s_{n-1}, s_n) είναι ζεύγος στη S_{m+n} και τότε καθώς $m + n \geq m + 1 > m_0(\omega)$ πάντα ικανοποιεί την

$$|X_{s_n}(\omega) - X_{s_{n-1}}(\omega)| < 2^{-\gamma(m+n)}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι η τελική σταθερότητα της ακολουθίας $\{s_n\}$ συνεπάγεται ότι

$$|X_{s_0}(\omega) - X_s(\omega)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |X_{s_n}(\omega) - X_{s_{n-1}}(\omega)| < \sum_{k=m+1}^{\infty} 2^{-\gamma k} = \frac{2^{-\gamma(m+1)}}{1 - 2^{-\gamma}}. \tag{4.69}$$

Παίρνουμε την ίδια ανισότητα και για $|X_{t_0}(\omega) - X_t(\omega)|$. Μαζί αυτές οι δύο ανισότητες και η (4.68) μας δίνουν

$$|X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leq |X_s(\omega) - X_{s_0}(\omega)| + |X_{s_0}(\omega) - X_{t_0}(\omega)| + |X_{t_0}(\omega) - X_t(\omega)| \tag{4.70}$$

$$< 2^{-\gamma m} + 2 \cdot \frac{2^{-\gamma(m+1)}}{1 - 2^{-\gamma}} \tag{4.71}$$

$$= C \cdot 2^{-\gamma(m+1)}, \tag{4.72}$$

όπου η νέα σταθερά C είναι η $2^\gamma + \frac{2}{1-2^\gamma}$. Υπενθυμίζουμε την ντετερμινιστική ιδιότητα του m την (4.66) και έτσι έχουμε την ανισότητα

$$|X_s(\omega) - X_t(\omega)| < C|s - t|^\gamma, \tag{4.73}$$

για όλους τους δυαδικούς ρητούς $s, t \in [0, 1]$ που έχουν την ιδιότητα $|s - t| \leq 2^{-m_0(\omega)}$ (εξαιρείται η περίπτωση που s=t καθώς ισχύει πάντα) και με μία σταθερά C η οποία εξαρτάται μόνο από το γ.

Για την υπόλοιπη απόδειξη συμβολίζουμε με D το σύνολο των δυαδικών ρητών μέσα στο $\mathbb{R}_+$. Η διαδικασία $\{X_{t+1}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επίσης ικανοποιεί την (4.63) με τις ίδιες σταθερές α, β. Άρα σύμφωνα με όσα έχουμε ήδη αποδείξει υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $N_1 \in \Sigma$ και για κάθε $\omega \in \Omega \setminus N_1$ ένας φυσικός αριθμός $m_1(\omega)$ τέτοιος ώστε να ικανοποιείται η (4.73),(με την ίδια σταθερά C που εμφανίζεται εκεί), για όλα τα $s, t \in D \cap [1,2]$ που ικανοποιούν την $|s-t| \leq 2^{-m_1(\omega)}$. Μπορούμε φυσικά να υποθέσουμε ότι $N_0 \subseteq N_1$ και $m_1(\omega) \geq m_0(\omega)$ για όλα τα $\omega \in \Omega \setminus N_1$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο παράγουμε μία ακολουθία $\{N_k\}$ P-μηδενικών συνόλων και για κάθε $\omega \in \Omega$ εκτός του P-μηδενικού συνόλου $N := \cup_{k \in \mathbb{N}} N_k$ μία αύξουσα ακολουθία $\{m_k(\omega)\}$ φυσικών πραγματικών αριθμών έτσι ώστε η (4.73) να ισχύει για όλα τα $s, t \in D \cap [j, j+1]$ με $j \in \{0, \ldots, k\}$ και $|s-t| \leq 2^{-m_k(\omega)}$. Οποιοιδήποτε δύο αριθμοί $s, t \in D \cap [0, k+1]$ οι οποίοι ικανοποιούν την $|s-t| \leq 2^{-m_k(\omega)}$ βρίσκονται στα ίδια ή σε γειτονικά διαστήματα της αλυσίδας $[0,1], [1,2], \ldots, [k, k+1]$. Στην πρώτη περίπτωση η (4.73) ισχύει. Τότε $max\{j-s, t-j\} < t-s \leq 2^{-m_k(\omega)}$, έτσι από την τριγωνική ανισότητα και από τις ανισότητες που ήδη έχουμε, προκύπτει ότι

$$|X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leq |X_s(\omega) - X_j(\omega)| + |X_j(\omega) - X_t(\omega)| < C|s-j|^\gamma + C|j-t|^\gamma.$$

Συνοψίζοντας έχουμε

$$|X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leq 2C|s-t|^\gamma \tag{4.74}$$

για όλα τα $\omega \in \Omega \setminus N$ και αυθαίρετα $s, t \in D \cap [0, k+1]$ που ικανοποιούν την $|s-t| \leq 2^{-m_k(\omega)}$. Η απεικόνιση $s \longrightarrow X_s(\omega)$ είναι ως εκ τούτου ομοιόμορφα συνεχής στο πυκνό υποσύνολο $D \cap [0, k+1]$ του $[0, k+1]$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega \setminus N$, το όριο

$$X'_t(\omega) := \lim_{s \to t, s \in D} X_s(\omega) \tag{4.75}$$

κατά συνέπεια υπάρχει. Επιλέγουμε και σταθεροποιούμε ένα $\alpha \in \mathbb{R}^d$ και για όλα τα άλλα ω, αυτά κυρίως στο N, ορίζουμε

$$X'_t(\omega) := \alpha \qquad t \in \mathbb{R}_+. \tag{4.76}$$

Τότε η $\{X'_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι αυτό που θέλουμε. Κάθε απεικόνιση $X'_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d$ είναι το σημειακό όριο μιας ακολουθίας από $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$-τ.μ. και έτσι είναι ένα $(\mathbb{R}^d, \mathfrak{B}^d)$-τυχαίο διάνυσμα. Συνεπώς η $\{X'_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι μία σ.δ. της οποίας οι τροχιές είναι συνεχείς σύμφωνα με τις (4.74)-(4.76). Το μόνο που μένει να δείξουμε είναι η P-σ.β. ισότητα των X_t και X'_t για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Αυτό είναι προφανές για $t \in D$ από τις (4.74), (4.75), οι οποίες ισχύουν για όλα τα ω εκτός ενός P- μηδενικού συνόλου N. Για αυθαίρετο $t \in \mathbb{R}_+$ διαλέγουμε μία ακολουθία $\{s_n\} \subseteq D$ με $\lim s_n = t$. Τότε σύμφωνα με την (4.75) ισχύει $\lim X_{s_n} = X'_t$ σχεδόν βέβαια (συγκεκριμένα στο $\Omega \setminus N$) και ως εκ τούτου στοχαστικά. Από την (4.61) και από το Θεώρημα Chebyshev-Markov παίρνουμε την παρακάτω ανισότητα για κάθε $\eta > 0$

$$P\{|X_{s_n} - X_t| \geq \eta\} \leq \eta^{-\alpha} E(|X_{s_n} - X_t|^\alpha) \leq c\eta^{-\alpha}|s_n - t|^{1+\beta}$$

και με αυτόν τον τρόπο την στοχαστική σύγκλιση της $\{X_{s_n}\}$ στη X_t. Τώρα έχοντας ότι και οι δύο X'_t και X_t είναι στοχαστικά όρια της $\{X_{s_n}\}$ προκύπτει ότι (αφού μεταβούμε στην ακολουθία των συντεταγμένων) $X_t = X'_t$ σχεδόν βέβαια. Έχουμε τελικά δείξει ότι η διαδικασία $\{X'_t\}$ είναι συνεχής τροποποίηση της $\{X_t\}$. $\square$

Θα παραθέσουμε πρώτα έναν ορισμό, ο οποίος χρησιμοποιείται αρκετές φορές κατά τη συνέχεια, και έπειτα θα συμπληρώσουμε το προηγούμενο θεώρημα παραθέτοντας ένα ακόμα θεώρημα.

Ορισμός 4.4.3. Θυμίζουμε ότι μία συνάρτηση $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^d$ επάνω σε ένα διάστημα I (π.χ. $I = \mathbb{R}_+$) καλείται τοπικά Hölder συνεχής τάξης $\gamma > 0$, αν κάθε σημείο του I έχει μία περιοχή $U \subseteq \mathbb{R}$ έτσι ώστε το πηλίκο

$$\frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|^\gamma}$$

να είναι φραγμένο για τα $s, t \in I \cap U$ με $s \neq t$. Εφόσον αυτό ισχύει για κάποιο $\gamma > 0$, θα ισχύει και για κάθε $\gamma' \in (0, \gamma)$.

Συμπληρώνοντας λοιπόν τώρα το προηγούμενο θεώρημα, έχουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

[443] **Θεώρημα 4.4.4.** *Θεωρούμε τη σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με χώρο κατατάσεων $\mathbb{R}^d$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (4.63) με θετικές πραγματικές σταθερές α, β, γ. Υποθέτουμε επιπλέον ότι P-σχεδόν βέβαια κάθε τροχιά της διαδικασίας είναι συνεχής. Τότε P-σχεδόν βέβαια κάθε τροχιά είναι τοπικά Hölder συνεχής για κάθε $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $N^* \in \Sigma$ έτσι ώστε όλες οι τροχιές $t \longrightarrow X_t(\omega)$ με $\omega \in \Omega \setminus N^*$ να είναι συνεχείς. Στην προηγούμενη απόδειξη δείχθηκε ότι για κάθε $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$ ορίζεται ένα P-μηδενικό σύνολο N_γ με τις ακόλουθες ιδιότητες. Υπάρχει μία πεπερασμένη σταθερά C_γ (που εξαρτάται μόνο από το γ) και για κάθε $k \in \mathbb{N}, \omega \in \Omega \setminus N_\gamma$ ένας θετικός πραγματικός αριθμός $\delta(k, \omega)$ (εξαρτάται μόνο από το k και το ω- στην απόδειξη της (4.63) ο αριθμός αυτός ήταν ο $2^{-m_k(\omega)}$) έτσι ώστε

$$|X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leq C_\gamma |s - t|^\gamma \tag{4.77}$$

για όλους τους δυαδικούς ρητούς $s, t \in [0, k + 1]$ οι οποίοι ικανοποιούν την $|s - t| \leq \delta(k, \omega)$. Βέβαια μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε N_γ περιέχει το N^*. Τότε κάθε $\omega \in \Omega \setminus N_\gamma$ ορίζει μία συνεχή τροχιά. Επιπλέον για τέτοιο ω η ανισότητα (4.77) ισχύει για όλους τους αριθμούς $s, t \in [0, k + 1]$ οι οποίοι ικανοποιούν την $|s - t| \leq \delta(k, \omega)$, απλά προσεγγίζοντας τέτοια s, t μέσω δυαδικών ρητών με αυτές τις ιδιότητες. Συνεπώς, για κάθε $\omega \in \Omega \setminus N_\gamma$ η τροχιά $t \longrightarrow X_t(\omega)$ είναι τοπικά Hölder-συνεχής στο $\mathbb{R}_+$ τάξης γ. Διαλέγουμε μία ακολουθία $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ θετικών αριθμών αυστηρά αύξουσα στο β/α. Εάν θέσουμε

$$\widetilde{N} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} N_{\gamma_n},$$

τότε το $\widetilde{N} \in \Sigma$ είναι ένα P-μηδενικό σύνολο, για κάθε ω στο συμπλήρωμα του οποίου η τροχιά $t \longrightarrow X_t(\omega)$ είναι τοπικά Hölder-συνεχής της τάξεως γ_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ως εκ τούτου για κάθε $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$, σύμφωνα με τις παρατηρήσεις που προηγούνται του Θεωρήματος 4.4.4.□

Ως πόρισμα παίρνουμε μία βελτίωση του Θεωρήματος 4.4.2. [444]

Πόρισμα 4.4.5. (Kolmogorov - Chentsov). *Θεωρούμε τη σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με χώρο κατατάσεων $\mathbb{R}^d$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (4.63) με θετικές πραγματικές σταθερές α, β, γ. Τότε η διαδικασία έχει μία τροποποίηση $\{X'_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ κάθε τροχιά της οποίας είναι τοπικά Hölder-συνεχής για κάθε $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$.*

Απόδειξη. Αρχικά, το Θεώρημα Kolmogorov 4.4.2 μας δίνει μια συνεχή τροποποίηση $\{X''_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η οποία για προφανείς λόγους ικανοποιεί την (4.63). Τότε το θεώρημα 4.4.5 δίνει ένα P-μηδενικό σύνολο $N \in \Sigma$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \in \Omega \setminus N$ η τροχιά $t \longrightarrow X''_t(\omega)$ είναι τοπικά Hölder-συνεχής για κάθε $\gamma \in (0, \beta/\alpha)$. Παίρνουμε ένα τυχαίο σημείο $\alpha \in \mathbb{R}^d$ και ορίζουμε τη συνάρτηση X'_t μέσω του τύπου

$$X'_t(\omega) := \begin{cases} X''_t(\omega), & \omega \in \Omega \setminus N \\ \alpha, & \omega \in N \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Προφανώς η διαδικασία $\{X'_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι αυτό που θέλαμε. □

Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή όλων των παραπάνω μας περιμένει στην επόμενη ενότητα.

4.5 Η κατασκευή της Κίνησης Brown

Η μαθηματική ιδέα της κίνησης Brown θα παρουσιαστεί και θα αναπτυχθεί σε αυτό το κεφάλαιο.

Το φυσικό φαινόμενο περιγράφηκε για πρώτη φορά το 1828 από το Σκωτσέζο βοτανολόγο R.Brown (1773-1858) από όπου και πήρε το όνομά του. Χωρίς λεπτομερείς γνώσεις από τα αποτελέσματα του Brown, ο A.Einstein (1879-1955) ανέπτυξε τη φυσική θεωρία σε μια εργασία του το 1905. Ένα χρόνο αργότερα, αναφερόμενος σε αυτό, ο M.von Smoluckowski (1872-1917) δημοσίευσε τα δικά του ανάλογα αποτελέσματα τα οποία τα απέδειξε περίπου τον ίδιο χρόνο. Τα αποτελέσματα του Einstein ήταν θεμελιώδους σημασίας για την ανάπτυξη της φυσικής επιστήμης εκείνον τον αιώνα. Περιέγραψε την κίνηση ενός σωματιδίου (μορίου) καθώς συγκρούεται με άλλα σωματίδια. Υπό την προυπόθεση ότι οι προσαυξήσεις είναι ανεξάρτητες και χρονικά στάσιμες, η κατανομή των προσαυξήσεων στο χρονικό διάστημα [0,t] καθορίζεται ως εξής:

Σε κάθε κατεύθυνση συντεταγμένης ταυτίζεται με μία κανονική κατανομή $\boldsymbol{N}(0,\sigma^2)$ με διακύμανση $\sigma^2 = 2Dt$, όπου D η σταθερά διάχυσης. Ο Einstein όρισε τη σταθερά ως $D = kT/f$, όπου k η σταθερά του Boltzmann, T η απόλυτη θερμοκρασία και f ο συντελεστής τριβής. Για σφαιρικά μόρια με ακτίνα α αιωρούμενα σε υγρό, ισχύει $f = 6\pi\alpha\eta$, με η το ιξώδες του υγρού. Ο Einstein επίσης βρήκε ότι το $2Dt$, δηλαδή, η διακύμανση σ^2 είναι η αριθμητική μέση τιμή των τετραγώνων των μετατοπίσεων του μορίου (σε χρόνο t και συγκεκριμένη κατεύθυνση). Όλα αυτά άνοιξαν το δρόμο για πολλά πειράματα έτσι ώστε να επαληθευτούν τα αποτελέσματα, καθώς και στον προσδιορισμό του τότε ασαφούς αριθμού Avogadro (και μέσω αυτού της σταθεράς k του Boltzmann), τέσσερα χρόνια αργότερα από τον J.Perrin (1870-1946).

Πέντε χρόνια πριν τον Einstein, ο Γάλλος Μαθηματικός L.Bachelier στη διατριβή του υπό τον H.Poincaré (1854-1912) απέδειξε παρόμοια αποτελέσματα μελετώντας μια φυσική κατάσταση: Τα "σωματίδιά" του ήταν οικονομικά παράγωγα. Ο Bachelier προσπάθησε να περιγράψει διακυμάνσεις παραγώγων στο Χρηματιστήριο του Παρισιού. Το έκανε αυτό χρησιμοποιώντας την κανονική κατανομή $\boldsymbol{N}(0, 2Dt)$ η οποία εξαρτάται από το χρόνο t και συμπεριλαμβάνει τη θετική σταθερά D.

Τελικά η μαθηματική ιδέα της κίνησης Brown διαμορφώθηκε οριστικά από την έρευνα του N.Wiener (1894-1964) κατά τη διάρκεια των χρόνων 1920-23. Όσον αφορά το μαθηματικό σύμβολο D ορίστηκε $1/2$ επιλέγοντας την κατάλληλη κλίμακα. Ο Wiener παρουσίασε αρκετά πειστικά τη δύναμη της μετρο-θεωρητικής μεθόδου για τη λύση διαφόρων πιθανοθεωρητικών προβλημάτων, μία δεκαετία πριν τη διάσημη διατριβή του Kolmogorov το 1933.

Μετά από αυτές τις ιστορικές παρατηρήσεις και την προετοιμασία από τα προηγούμενα κεφάλαια και ενότητες, ο παρακάτω ορισμός θα πρέπει να μας είναι περισσότερο οικείος.

[451] **Ορισμός 4.5.1.** Μία σ.δ. με χώρο καταστάσεων $\mathbb{R}^d$ ονομάζεται ***d*-διάστατη κίνηση Brown** (ή κίνηση Brown στον $\mathbb{R}^d$), εάν έχει τις παρακάτω δύο ιδιότητες.

(i) Οι προσαυξήσεις της είναι στάσιμες και ανεξάρτητες και καθεμία είναι κανονικά κατανεμημένη. Πιο συγκεκριμένα για κάθε $0 \leq s < t$ ισχύει

$$P_{X_t - X_s} = \boldsymbol{N}(0, t-s) \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{N}(0, t-s) \tag{4.78}$$

(ii) Σχεδόν κάθε τροχιά $t \longrightarrow X_t(\omega)$ είναι συνεχής.

Εάν πρόσθετα η διαδικασία ικανοποιεί την

$$X_0 = 0 \quad \text{σχεδόν βέβαια,} \tag{4.79}$$

τότε καλείται **κίνηση Brown με αρχικό σημείο 0**, ή **τυποποιημένη ή τυπική κίνηση Brown** (μέσα στο $\mathbb{R}^d$). Γενικά λέμε ότι μια κίνηση Brown αρχίζει από το $x \in \mathbb{R}^d$ εάν $X_0 = x$ σ.β.. Μία μονοδιάστατη κίνηση Brown καλείται επίσης και **πραγματική κίνηση Brown**.

Εάν (Ω, Σ, P) ο χώρος πιθανότητας της διαδικασίας $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$, τότε η (ii) μας λέει ότι:

Υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $N \in \Sigma$ τέτοιο ώστε η τροχιά $t \longrightarrow X_t(\omega)$ που ορίζεται για κάθε $\omega \in \Omega \setminus N$ να είναι συνεχής. Επιπλέον μπορούμε εάν θέλουμε με μία τροποποίηση του υποκείμενου αυτού χώρου, να μετασχηματίσουμε το (ii) στο : Κάθε τροχιά είναι συνεχής. Μέσω του ίδιου τεχνάσματος μπορούμε να ανυψώσουμε την (4.79) στην:

$$X_0(\omega) = 0 \text{ για κάθε } \omega \in \Omega.$$

[425]

Λήμμα 4.5.2. *Έστω ότι για την $\mathbb{R}^d$-τ.μ. Z ισχύει $P_Z = \boldsymbol{N}(0,\tau) \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{N}(0,\tau)$ (με $\tau > 0$ και d παράγοντες). Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μία πεπερασμένη σταθερά $C_n > 0$ (η οποία εξαρτάται μόνο από το n και τη διάσταση d), έτσι ώστε*

$$\mathbb{E}(|Z|^{2n}) = C_n \tau^n \quad \text{για } n \in \mathbb{N} \tag{4.80}$$

Απόδειξη. Έστω $Z_1, \ldots, Z_d$ είναι συνιστώσες της Z. Από την υπόθεση είναι ανεξάρτητες και καθεμία από αυτές είναι $\boldsymbol{N}(0,\tau)$-κατανεμημένη. Εάν θέσουμε $U_j := \tau^{-1/2} Z_j$ με $j = 1, \ldots, d$, τότε οι $U_1, \ldots, U_d$ είναι ανεξάρτητες, $\boldsymbol{N}(0,1)$-κατανεμημένες τ.μ. και έχουμε ότι

$$\mathbb{E}(|Z|^{2n}) = \mathbb{E}([Z_1^2 + \ldots + Z_d^2]^n) = \mathbb{E}([U_1^2 + \ldots + U_d^2]^n)\tau^n. \tag{4.81}$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας, για $C_n := \mathbb{E}([U_1^n + \ldots + U_d^n]^n)$. Πράγματι εάν πολλαπλασιάσουμε με τη n-οστή δύναμη (πολλαπλασιαστική επέκταση) και χρησιμοποιήσουμε το Πολλαπλασιαστικό Θεώρημα 8.1 [3] και το γνωστό τύπο της μέσης τιμής

$$M_n := \mathbb{E}(X^n) = \int x^n N(0,1)dx$$

βλέπουμε ότι αυτός ο αριθμός είναι το άθροισμα των παραγόντων $n!\prod_{j=1}^{d} M_{2k_j}/(k_j)!$ για όλα τα $(k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ που ικανοποιούν την $k_1 + \ldots + k_d = 1$, αποδεικνύοντας ότι είναι πραγματικός θετικός και εξαρτάται μόνο από το n και το d.

Παράδειγμα 4.5.3. *Εάν πραγματώσουμε τις λεπτομέρειες υπολογισμού που περιγράφονται στην προηγούμενη απόδειξη για $n = 1$ και για $n = 2$, βρίσκουμε χρησιμοποιώντας την $M_{2k} = 1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k-1)$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots$ τα παρακάτω:*

$$\mathbb{E}(|Z|^2) = d_\tau \tag{4.82}$$

$$\mathbb{E}(|Z|^4) = d(d+2)\tau^2. \tag{4.83}$$

Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε το παρακάτω καθοριστικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.5.4. *Για κάθε $d \in \mathbb{N}$ υπάρχει μία d-διάστατη κίνηση Brown η οποία έχει δοσμένη αρχική κατανομή. Οποιεσδήποτε δύο d-διάστατες κινήσεις Brown $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στον χ.π. (Ω, Σ, P) και $\{X'_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στον χ.π. (Ω', Σ', P') που έχουν την ίδια αρχική κατανομή, δηλαδή*

$$P_{X_0} = P'_{X'_0},$$

είναι ισοδύναμες.

Αντίστροφα, αν οποιαδήποτε d-διάστατη κίνηση Brown είναι ισοδύναμη με μία διαδικασία με χώρο καταστάσεων $\mathbb{R}^d$ και σ.β. συνεχείς τροχιές, τότε η δεύτερη διαδικασία είναι και αυτή κίνηση Brown με ίδια αρχική κατανομή. Ιδιαιτέρως υπάρχουν οι d-διάστατες τυπικές κινήσεις Brown και κάθε δύο τέτοιες κινήσεις Brown είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Από τη δοθείσα αρχική κατανομή $\mu \in \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}_+)$ και από την ιδιότητα του αναλλοίωτου ως προς τις μεταθέσεις της ημιομάδας Brown και της αντίστοιχης ημιομάδας συνελίξεων (βλέπε Παράδειγμα 4.1.5 (f)) μπορεί μέσω του Θεωρήματος 4.1.6 να κατασκευαστεί μία προβολική ομάδα $\{P_J\}_{J\in\mathcal{F}(\mathbb{R}_+)}$ μέτρων πιθανότητας $P_J : \mathcal{E}_J \longrightarrow [0,1]$ και μέσω του Θεωρήματος 3.2.2 και του Πορίσματος 3.2.3 και της απόδειξής του μία κανονική κίνηση Brown $X = \{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ επάνω στον κανονικό χ.π. $(\Omega, \Sigma, P) = (E^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{E}_{\mathbb{R}_+}, P_{\mathbb{R}_+})$. Μέσω του Θεωρήματος 4.2.3 αυτή η διαδικασία έχει στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις. Από την (4.35) ικανοποιείται η

$$P_{X_t - X_s} = \boldsymbol{N}(0, t-s) \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{N}(0, t-s) \text{ για } \ 0 \le s < t, \tag{4.84}$$

με d παράγοντες και από την $P^{\mu}_{X_0} = \mu$ (4.26) έχουμε ότι

$$P_{X_0} = \mu \tag{4.85}$$

Η ισότητα 4.83 εφαρμόζεται στο $Z := X_t - X_s$ και μαζί με το $\tau := t - s > 0$ οδηγούν στη σχέση:

$$\mathbb{E}(|X_s - X_t|^4) = d(d+2)|s-t|^2$$

όπου τα s, t είναι τυχαία μέσα από το $\mathbb{R}_+$. Εν όψει αυτών των ισοτήτων το Θεώρημα 4.4.2 επιβεβαιώνει την ύπαρξη συνεχούς τροποποίησης $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ της κανονικής διαδικασίας $\{X_t\}$. Ας σημειώσουμε ότι αυτές οι δύο διαδικασίες είναι ισοδύναμες. Ανακαλώντας στη μνήμη μας την Παρατήρηση 4.2.5 (b), βλέπουμε ότι η διαδικασία $\{\widetilde{X}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία κίνηση Brown με αρχική κατανομή μ (με συνεχείς τροχιές μόνο). Οι ισοδύναμοι ισχυρισμοί προέρχονται από τις παρατηρήσεις 4.2.5 (b) και 4.2.5 (c). Ο τελευταίος ισχυρισμός περιλαμβάνεται σε όλα τα προηγούμενα σαν την ειδική περίπτωση όπου $\mu := \delta_0$. $\square$

Πόρισμα 4.5.5. *Κάθε d-διάστατη κίνηση Brown είναι ισοδύναμη με μία $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$-κανονική διαδικασία. Αυτό επομένως μπορεί να συμπληρωθεί μέσω ενός κατάλληλου μέτρου πιθανότητας επάνω στη Borel σ-άλγεβρα $\mathfrak{B}(C)$ του πολωνικού χώρου $C := C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$.*

Απόδειξη. Προκύπτει απευθείαν μέσω του προηγούμενου Θεωρήματος και του Λήμματος 4.4.1.

Παρατηρήσεις 4.5.6. **(a)** Σα συνέπεια του προηγούμενου, κάθε $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^d)$ σχετίζεται με ένα μοναδικά ορισμένο μέτρο πιθανότητας P^μ, για το οποίο ο συμβολισμός του έως τώρα ήταν $\widetilde{P}$, επάνω στη $\mathfrak{B}(C)$, τέτοιο ώστε η διαδικασία που ορίζεται από τη

$$X_t(\omega) := \omega(t) \qquad \omega \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) \tag{4.86}$$

είναι κίνηση Brown με αρχική κατανομή μ. Σε περίπτωση που $\mu = \varepsilon_0$, καλείται τυπική κίνηση Brown. Με άλλα λόγια η ισοδύναμη κλάση κάθε κίνησης Brown αποτελείται από αναπαραστάσεις της μορφής

$$\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}, \ \text{επάνω στο χ.π.} \ (C, \mathfrak{B}(C), P^\mu) \tag{4.87}$$

όπου $\{X_t\}$ δίνεται από την (4.86). Εδώ βρίσκεται η σημαντικότητα αυτής της κατασκευής. Για $\mu = \varepsilon_x, \quad x \in \mathbb{R}^d$, παίρνουμε το μέτρο πιθανότητας P^{ε_x} επάνω στη $\mathfrak{B}(C)$. Από εδώ και έπειτα θα το συμβολίζουμε πιο απλά ως

$$P^x := P^{\varepsilon_x}.$$

Για αυτό το μ η διαδικασία $\{X_t\}$ που ορίζεται στη (4.86) είναι μία κίνηση Brown με κατανομή $P_{X_0} = \varepsilon_x$ και με

$$X_0 = x \qquad P^x \ \sigma.\beta.$$

Το ειδικό μέτρο P^0 που αντιστοιχεί σε $x = 0$ καλείται **d-διάστατο μέτρο Wiener**.

(b) Εάν σταθεροποιήσουμε το $x \in \mathbb{R}^d$, τότε από κάθε τροχιά $\omega \in C$ μπορούμε να δημιουργήσουμε μία νέα σαν την παρακάτω

$$\omega_x(t) := x + \omega(t) = x + X_t(\omega) \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

Θέτοντας $\tau_x(\omega) := \omega_x$ ορίζουμε την

$$\tau_x : C \longrightarrow C \tag{4.88}$$

της οποίας η αντίστροφη συνάρτηση τ_x^{-1} είναι προφανώς η τ_x. Είναι συνεχής και έτσι από το 4.3.4 $\mathfrak{B}(C)$-$\mathfrak{B}(C)$-μετρήσιμη. Συνεπώς προκύπτει το εξής

$$P^x := \tau_x(P^0) \qquad x \in \mathbb{R}^d. \tag{4.89}$$

Αποδείξαμε τη (4.89) ανακαλώντας το μοναδικό μέρος της (4.80), το οποίο σημαίνει ότι πρέπει να δείξουμε ότι το μέτρο πιθανότητας $\widetilde{P}^x := \tau_x(P^0)$ επάνω στη $\mathfrak{B}(C)$ ικανοποιεί τις (i) και (ii) του Ορισμού 4.5.1 και έχει αρχική κατανομή ε_x. Το κλειδί είναι η μεταφορά του μέτρου εικόνα και το γεγονός ότι ισχύει $X_t \circ \tau_x = x + X_t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Έτσι έχουμε τα παρακάτω

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}^x_{X_t} &= X_t(\widetilde{P}^x) \\
&= X_t(\tau_x(P^0)) = (X_t \circ \tau_x)(P^0) \\
&= (x + X_t)(P^0) = X_t(P^{\varepsilon_x}) \\
&= P^x_{X_t}
\end{aligned}$$

και εάν $0 \leq s < t$ προκύπτει από την $(X_t - X_s) \circ \tau_x = X_t - X_s$ ότι

$$\widetilde{P}^x_{X_t - X_s} = (X_t - X_s)(\tau_x(P^0)) = (X_t - X_s)(P^0) = P^0_{X_t - X_s}.$$

Αυτό μας δείχνει ότι η $\widetilde{P}^x - P_{X_t - X_s}$ ικανοποιεί την (4.78). Τελικά θεωρούμε $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$. Αφού $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ είναι P^0-ανεξάρτητες, το ίδιο ισχύει και για τις τυχαίες μεταβλητές $x + X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$. Αυτό είναι προφανές α'λλά είναι επίσης και μία ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 7.4 του [3]. Προκύπτουν τα ακόλουθα

$$\begin{aligned}
\widetilde{P}^x - P_{(X_{t_0}) \otimes (X_{t_1} - X_{t_0}) \otimes \ldots \otimes (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})} &= \\
(X_{t_0} \circ \tau_x \otimes (X_{t_1} - X_{t_0}) \circ \tau_x \otimes \ldots \otimes (X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \circ \tau_x)(P^0) &= \\
X_{t_0} \circ \tau_x(P^0) \otimes (X_{t_1} - X_{t_0})\tau_x(P^0) \otimes \ldots \otimes (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\tau_x(P^0) &= \\
X_{t_0}(\widetilde{P}^x) \otimes (X_{t_1} - X_{t_0})(\widetilde{P}^x) \otimes \ldots \otimes (X_{t_n} - X_{t_{n-1}})(\widetilde{P}^x)&,
\end{aligned}$$

τα οποία αποδεικνύουν την $\widetilde{P}^x$-ανεξαρτησία των προσαυξήσεων.

(c) Η αρκετά λογική μας επιθυμία να έχουμε και το αντίστροφο του θεωρήματος 4.5.4 έγκυρα μας εισάγει την (4.79) στον Ορισμό 4.5.1. σαν μια πιο περιοριστική απαίτηση της "βέβαιης" ισότητας. Για μια $(\Omega', \Sigma', P', \{X'_t\})$ ισοδύναμη με μία κανονικοποιημένη κίνηση Brown χρειάζεται να ισχύει μόνο $P' - P_{X'_0} = \varepsilon_0$ για $X'_0 = 0 \quad P$ $\sigma.\beta.$. Επιπροσθέτως σύμφωνα με τον πιο περιοριστικό ορισμό της κανονικοποιημένης κίνησης Brown θα ήταν η μοναδική εξαίρεση στη δεύτερη απαίτηση στο Πόρισμα 4.5.5 (για τυπική κίνηση Brown, to C θα χρειαζόταν να αντικατασταθεί από το υποσύνολο $\omega \in C$ ικανοποιώντας την $\omega(0) = 0$) με τη σειρά του αυτό θα έθετε σε κίνδυνο τη 4.89. Πιο συγκεκριμένα, αυτό θα μπορούσε να ακυρώσει και να περιπλέξει άλλες ιδιότητες της κίνησης Brown τις οποίες θέλουμε να καθιερώσουμε παρακάτω, κυρίως για το ότι κάθε αρχική κατανομή μ και κάθε $A \in \mathfrak{B}(C), P^\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^d} P^x(A)\mu(dx)$.

(d) Σύμφωνα με το παράδειγμα αυτής της ενότητας κάθε d-διάστατη κίνηση Brown $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ικανοποιεί

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^2) = d(t-s) \qquad 0 \le s \le t \tag{4.90}$$

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^4) = d(d+2)(t-s)^2 \qquad s,t \in \mathbb{R}_+ \tag{4.91}$$

και με αυτό τον τρόπο έχουμε επίσης

$$V(|X_t - X_s|^2) = 2d(t-s)^2 \qquad s,t \in \mathbb{R}_+ \tag{4.92}$$

Θεώρημα 4.5.7. *Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία d-διάστατη κίνηση Brown. Τότε σχεδόν βέβαια κάθε τροχιά $t \longrightarrow X_t(\omega)$ είναι τοπικά Hölder συνεχής για κάθε γ για το οποίο ισχύει $0 < \gamma < 1/2$.*
Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.5.2 και την 4.5.1

$$\mathbb{E}(|X_t - X_s|^{2n}) = C_n |t-s|^n \qquad n \in \mathbb{N} \;\; s,t \in \mathbb{R}_+ \tag{4.93}$$

για κατάλληλες πραγματικές θετικές σταθερές C_n που εξαρτώνται μόνο από το n και το d. Για $n \ge 2$ οι συνθήκες του Θεωρήματος 4.4.4 ικανοποιούνται για $\alpha := 2n$ και $\beta := n-1$. Επειδή

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \;\; \text{και} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2},$$

ο παρών ισχυρισμός προκύπτει από αυτό το Θεώρημα.

Εάν και κάθε δύο τυπικές κινήσεις Brown στο $\mathbb{R}^d$ είναι ισοδύναμες, μπορούνε παρόλα αυτά να ορίζονται αρκετά διαφορετικά. Πιο ειδικά για μία δοθείσα κίνηση Brown υπάρχουν πολλές άλλες κινήσεις Brown πάνω στον ίδιο χώρο πιθανότητας. Αυτό θα γίνει κατανοητό μέσω των ιδιοτήτων που θα αναλυθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Κεφάλαιο 5

Δεύτερη κατασκευή της Κίνησης Brown και βασικές ιδιότητες

5.1 Βασικές Ιδιότητες

Θεώρημα 5.1.1. Ιδιότητες της κίνησης Brown.

1. (**Homogeneity/Μετατόπιση**) Άν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία κίνηση Brown στο $\mathbb{R}^d$ και $s \geq 0$, τότε η $\{X_{s+t} - X_s\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία τυπική κίνηση Brown.

2. (**Temporal translation/Χρονική μεταφορά**) Άν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία κίνηση Brown, τότε η διαδικασία $\{X_{s+t}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι επίσης μία κίνηση Brown στο $\mathbb{R}^d$ για κάθε $s \in \mathbb{R}_+$.

3. (**Symmetry/Συμμετρία**) Αν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία τυπική κίνηση Brown, τότε η διαδικασία $\{-X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι επίσης μία τυπική κίνηση Brown στο $\mathbb{R}^d$.

4. (**Scale change/Αλλαγή Κλίμακας**) Αν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία κίνηση Brown, τότε η διαδικασία $\{\tau X_{\frac{t}{\tau^2}}\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι επίσης μία τυπική κίνηση Brown στο $\mathbb{R}^d$ για κάθε μη μηδενικό αριθμό τ.

5. (**Coordinate processes/Διαδικασία συντεταγμένων**) Αν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια τυπική κίνηση Brown στο $\mathbb{R}^d$ και με $X_t^1, \ldots, X_t^d$ συμβολίζουμε τις συνιστώσες της X_t, τότε κάθε μία από τις διαδικασίες αυτές $\{X_t^j\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ με $j = 1, \ldots, d$ είναι μία τυπική πραγματική κίνηση Brown. Στην τυπική περίπτωση οι τ.μ. $X_t^1, \ldots, X_t^d$ είναι ανεξάρτητες για κάθε $t \geq 0$.

6. (**Covariance matrix/Πίνακας συνδιακυμάνσεων**) Αν η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι τυπική κίνηση Brown στο $\mathbb{R}_d$ τότε για κάθε επιλογή πεπερασμένων στο πλήθος στιγμών $0 \leq$

$t_1 < \ldots < t_n$ η $X_{t_1} \otimes \ldots \otimes X_{t_n}$ είναι μία n-διάστατη Γκαουσιανή τ.μ. η οποία έχει το μηδενικό διάνυσμα σαν μέση τιμή και πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$Cov(X_{t_1} \otimes \ldots \otimes X_{t_n}) = (t_i \wedge t_j)_{i,j=1,\ldots,n}) \tag{5.1}$$

Απόδειξη. Η ιδιότητα 1 προκύπτει άμεσα από τον Ορισμό 4.5.1 επειδή κάθε προσαύξηση $\{X_{s+t_2} - X_s\} - \{X_{s+t_1} - X_s\}$ της νέας διαδικασίας είναι πραγματικά μία προσαύξηση $X_{s+t_2} - X_{s+t_1}$ της αρχικής διαδικασίας και επιπροσθέτως έχουμε $X_{s+0} - X_s = 0$. Οι ιδιότητες 2 μέχρι 4 επιβεβαιώνονται με την ίδια ευκολία. Αλλά ας έχουμε στο μυαλό μας την Παρατήρηση 4.2.2 σχετικά με τις ανεξάρτητες προσαυξήσεις και το γνωστό τρόπο με τον οποίο η κανονική κατανομή $\boldsymbol{N}(0, \sigma^2)$ μετασχηματίζεται μέσω μιας αλλαγής κλίμακας.

Η ιδιότητα 5 προκύπτει ουσιαστικά από την (4.78). Πρώτα από όλα η εξίσωση αυτή μας δείχνει ότι η $\boldsymbol{N}(0, t-s)$ είναι η κατανομή για κάθε $X_t^j - X_s^j$ για $0 \leq s < t$. Δηλαδή κάθε μία από τις διαδικασίες συνιστώσες $\{X_t^j\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ με $j = 1, \ldots, d$ έχει στάσιμες προσαυξήσεις και τη σωστή κατανομή. Φυσικά η ανεξαρτησία των τ.μ. $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ με $0 \leq t_0 < \cdots < t_n$ δε χάθηκε στις συνιστώσες. Στην τυπική περίπτωση η ανεξαρτησία των $X_t^1, \ldots, X_t^d$ για $t > 0$ επίσης προκύπτει από την (4.78) παίρνοντας $s = 0$.

Για την απόδειξη της 6 θέτουμε

$$X := X_{t_1} \otimes \ldots \otimes X_{t_n} = (X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}).$$

Η ανεξαρτησία των προσαυξήσεων στην $\{X_t\}$ σημαίνει ότι οι τ.μ.

$$X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \tag{5.2}$$

είναι ανεξάρτητες. Εξαιτίας αυτού και της (4.84) η κοινή κατανομή είναι το μέτρο Gauss

$$N := \boldsymbol{N}(0, t_1) \otimes \boldsymbol{N}(0, t_2 - t_1) \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{N}(0, t_n - t_{n-1})$$

(όπου $N(0, t_1) = \varepsilon_0$ στην περίπτωση που $t_1 = 0$). Το πραγματικό γραμμικό διάνυσμα $\{X_{t_1}, \ldots, X_{t_n}\}$ συμπίπτει με αυτό στην (5.2). Από την ιδιότητα μιας Γκαουσιανής τ.μ. προκύπτει από την $\{X_{t_1}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}\}$ ότι η X είναι επίσης Γκαουσιανή τ.μ.. Εφόσον η X_t είναι κεντραρισμένη το $m := \{\mathbb{E}(X_{t_1}), \ldots, \mathbb{E}(X_{t_n})\}$ είναι μηδενικό διάνυσμα. Για να υπολογίσουμε τον πίνακα συνδιακυμάνσεων, έστω $i, j \in \mathbb{N}$ με $1 \geq i \geq j \geq n$ να δίνονται. Λαμβάνοντας υπόψιν την ανεξαρτησία των X_{t_i} και $X_{t_j} - X_{t_i}$ και το Πολλαπλασιαστικό Θεώρημα έχουμε

$$Cov(X_{t_i}, X_{t_j}) = \mathbb{E}(X_{t_i}, X_{t_j}) = \mathbb{E}([X_{t_j} - X_{t_i}]X_{t_i} + X_{t_i}^2) =$$
$$\mathbb{E}([X_{t_j} - X_{t_i}]X_{t_i}) + \mathbb{E}(X_{t_i}^2) = V(X_{t_i}) = t_i = t_i \wedge t_j.$$

□

Η ακόλουθη ιδιότητα της μονοδιάστατης τυπικής κίνησης Brown είναι εντυπωσιακή, γιατί επιτρέπει το χρόνο t να γυρίζει προς τα πίσω.

Θεώρημα 5.1.2. *Έστω $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία τυπική πραγματική κίνηση Brown, τότε το ίδιο ισχύει και για τη στοχαστική διαδικασία $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που ορίζεται επάνω στον ίδιο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P) ως*

$$Y_t(\omega) := \begin{cases} tX_{1/t}(\omega), & \text{εάν } t > 0 \\ 0, & \text{εάν } t = 0. \end{cases}$$

Απόδειξη. $Y_0 = 0$, έτσι η αρχική κατανομή είναι δ_0. Για κάθε πεπερασμένο αριθμό σταθερών $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_n$ το πραγματικό γραμμικό διάνυσμα τυχαίων μεταβλητών $Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n}$ συμπίπτει με αυτό των τ.μ. $X_{\tau_1}, \ldots, X_{\tau_n}$, όπου $\tau_j := t_j^{-1}$ για κάθε j. Αφού $X_{\tau_1}, \otimes, \ldots, \otimes, X_{\tau_n}$ είναι μία Γκαουσιανή τ.μ. (ισχύει από τις ιδιότητες της κίνησης Brown), το ίδιο ισχύει και για την η $Y_{\tau_1}, \otimes, \ldots, \otimes, Y_{\tau_n}$ οποία έχει n-διάσταστη κατανομή $P_{Y_{\tau_1},\otimes,\ldots,\otimes,Y_{\tau_n}}$ η οποία είναι μέτρο Gauss. Από το Θεώρημα 5.1.1 έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[(Y_{t_1}, \ldots, Y_{t_n})] = (\mathbb{E}(Y_{t_1}), \ldots, \mathbb{E}(Y_{t_n})) = 0 = \mathbb{E}[(X_{\tau_1}, \ldots, X_{\tau_n})]$$

και

$$Cov(Y_{t_i}, Y_{t_j}) = \mathbb{E}[Y_{t_i}, Y_{t_j}] = t_i t_j Cov(X_{1/t_i}, X_{1/t_j}) = t_i t_j (\frac{1}{t_i} \wedge \frac{1}{t_j}) = t_i \wedge t_j = Cov(X_{t_i}, X_{t_j}).$$

Αυτές οι ισότητες και το [3], Satz 30.2, δείχνουν ότι τα δύο Γκαουσιανά μέτρα $P_{Y_{\tau_1},\otimes,\ldots,\otimes,Y_{\tau_n}}$ και $P_{X_{\tau_1},\otimes,\ldots,\otimes,X_{\tau_n}}$ είναι ίδια. Εάν επεκτείνουμε την αλυσίδα $Y_{\tau_1}, \ldots, Y_{\tau_n}$ προσθέτοντας την τ.μ. Y_{t_0}, η οποία από την υπόθεση της κανονικότητας και το γεγονός ότι $t_0 = 0$ ικανοποιεί την $Y_{t_0} = 0 = X_{t_0}$ σχεδόν βέβαια και παίρνουμε

$$P_{Y_{t_0}\otimes\ldots\otimes Y_{t_n}} = \delta_0 \otimes P_{Y_{t_1}\otimes\ldots\otimes Y_{t_n}} = \delta_0 \otimes P_{X_{t_1}\otimes\ldots\otimes X_{t_n}} = P_{X_{t_0}\otimes\ldots\otimes X_{t_n}}.$$

Τελικά έχουμε αποδείξει ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ και η $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι ισοδύναμες διαδικασίες και σύμφωνα με το [3], Satz 40.3, μένει μόνο να δείξουμε τη συνέχεια σχεδόν για κάθε τροχιά της Y_t με στόχο να αναγνωρίσουμε αυτή τη διαδικασία ως κίνηση Brown. Από τον ορισμό γίνεται κατανοητό ότι σχεδόν όλες οι τροχιές είναι συνεχείς στο $(0, +\infty)$ για $\omega \in \Omega \setminus N_0^*$ με $P(N_0^*) = 0$. Όσαν αφορά τη συνέχεια στο $t = 0$ λύνεται ως εξής:

Σύμφωνα με την

$$\mathbb{E}([X_t - X_s]^4) = 3(t-s)^2$$

καθώς και με τις προηγούμενες σχέσεις έχουμε ότι :

$$\mathbb{E}([Y_t - Y_s]^4) = 3(t-s)^2.$$

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα του Kolmogorov. Αυτό επιβεβαιώνει ότι η διαδικασία $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ έχει συνεχή τροποποίηση $\{\widetilde{Y}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Επιπλέον για κάθε πραγματικό $t \leq 0$ υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $N_t \in \Sigma$ για το οποίο έχουμε

$$Y_t(\omega) = \widetilde{Y}_t(\omega) \qquad\qquad (\omega \in N_t^c).$$

Εάν συμβολίσουμε με N την ένωση των N_0^* και όλων των συνόλων N_ρ με $\rho \leq 0$, τότε για κάθε $\omega \in N^c$ η αντιστοιχίες $t \longrightarrow Y_t(\omega)$ και $t \longrightarrow \widetilde{Y}_t(\omega)$ είναι συνεχείς επάνω στο $(0, +\infty)$ και για όλους τους ρητούς αριθμούς $\rho > 0$

$$Y_\rho(\omega) = \widetilde{Y}_\rho(\omega).$$

Από το παραπάνω ακολουθεί το επόμενο:

$$Y_t(\omega) = \widetilde{Y}_t(\omega) \qquad (t > 0, \omega \in N^c).$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι

$$Y_0(\omega) = \widetilde{Y}_0(\omega) \;\; \text{ισχύει για όλα τα} \;\; \omega \in N_0^c \supseteq N^c.$$

Από τις δύο αυτές τελευταίες σχέσεις και το γεγονός ότι όλες οι τροχιές $\{\widetilde{Y}_t\}$ είναι συνεχείς έχουμε ότι για κάθε $\omega \in N^c$ η τροχιά $t \longrightarrow Y_t(\omega)$ είναι συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}_+$. Τώρα αναγνωρίζουμε τη $\{Y_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ως μία κίνηση Brown. □

5.2 Δεύτερη κατασκευή της Κίνησης Brown

Αρχικά παραθέτουμε μερικές έννοιες και αποτελέσματα που είναι απαραίτητα για τη δεύτερη κατασκευή της κίνησης Brown.

Ενδιαφερόμαστε για κάποιες τυχαίες μεταβλητές που προκύπτουν, αν θεωρήσουμε τα δυαδικά αναπτύγματα των τιμών συγκεκριμένων ομοιόμορφα κατανεμημένων τ.μ. Οι τεχνικές που θα μελετήσουμε θα μας δώσουν μία μέθοδο κατασκευής οποιονδήποτε ακολουθιών ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

Έστω X μία τ.μ. ώστε $P_X = \boldsymbol{U}([0,1])$. Τροποποιώντας την X επάνω σε ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας, αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $R_X = [0, 1)$. Ορίζουμε μία ακολουθία $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ επάνω στον χ.π. (Ω, Σ, P) αφήνοντας την τιμή $Y_n(\omega)$ να είναι ο n-οστός όρος του δυαδικού αναπτύγματος της $X(\omega)$ (βλέπε A.2.2). Τότε $Y_1(\omega) = 0$ αν $X(\omega) \in [0, 1/2)$ και $Y_1(\omega) = 1$ αν $X(\omega) \in [1/2, 1)$. Ομοίως $Y_2(\omega) = 0$ αν $X(\omega) \in [0, 1/4) \cup [1/2, 3/4)$ και $Y_2(\omega) = 1$ αν $X(\omega) \in [1/4, 1/2) \cup [3/4, 1)$. Γενικά, $Y_n(\omega) = 0$ αν $\frac{2i}{2^n} \leq X(\omega) < \frac{(2i+1)}{2^n}$ για κάποιο i και 1 αλλιώς. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε ότι η ακολουθία $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη και κάθε Y_n είναι μετρήσιμη, ώστε $P_{Y_n} = \boldsymbol{B}(\frac{1}{2})$.

Λήμμα 5.2.1. *Κάθε ανοιχτό υποσύνολο στο $\mathbb{R}^d$ είναι η ένωση μιας* **αριθμήσιμης οικογένειας** *ανά δύο ξένων μετρήσιμων ημι-ανοιχτών κύβων, καθένας από τους οποίους δίνεται στην παρακάτω μορφή:*

$$\{(x_1, \ldots, x_d) : j_i 2^{-k} \le x_j < (j_i + 1)2^{-k} \text{ για } \quad i = 1, \ldots, d\} \tag{5.3}$$

για ακέραιους $j_1, \ldots, j_d$ και θετικό ακέραιο k.

Απόδειξη. Για κάθε θετικό ακέραιο k έστω $\mathcal{C}_k$ η οικογένεια όλων των κύβων της παραπάνω μορφής, όπου $j_1, \ldots, j_d$ είναι οποιοιδήποτε ακέραιοι. Είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι :

(a) Κάθε $\mathcal{C}_k$ αποτελεί μία μετρήσιμη διαμέριση του $\mathbb{R}^d$ και

(b) Εάν $k_1 < k_2$, τότε κάθε κύβος του $\mathcal{C}_{k_2}$ βρίσκεται μέσα στο $\mathcal{C}_{k_1}$.

Οι παραπάνω ιδιότητες για την οικογένεια $\{\mathcal{C}_k\}$ πρέπει να ληφθούν υπόψιν κατά τον έλεγχο ότι η κλάση $\mathcal{D}$ που ορίζεται παρακάτω έχει τις ιδιότητες που απαιτούνται γι 'αυτήν. Υποθέτουμε ότι U είναι ένα ανοιχτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^d$. Κατασκευάζουμε μία οικογένεια $\mathcal{D}$ από κύβους επαγωγικά αφήνοντας το $\mathcal{D}$ να είναι κενό στην αρχή, και στο βήμα k για $k \in \mathbb{N}$ προστίθενται εκείνοι οι κύβοι του $\mathcal{C}_k$ που περιέχονται στο U αλλά είναι ξένοι προς όλους τους κύβους που έχουν προστεθεί στην κλάση $\mathcal{D}$ σε προηγούμενα βήματα. Γίνεται ξεκάθαρο ότι η κλάση $\mathcal{D}$ είναι μία αριθμήσιμη οικογένεια ανα δύο ξένων μεταξύ τους κύβων των οποίων η ένωση βρίσκεται στο U. Απομένει μόνο να ελέγξουμε ότι η ένωση περιέχει το U. Έστω $x \in U$. Επειδή το U είναι ανοιχτό, ο κύβος του $\mathcal{C}_k$ που περιέχει το x περιέχεται στο U εφόσον το k είναι επαρκώς μεγάλο. Έστω k_0 να είναι το μικρότερο τέτοιο k. Τότε ο κύβος στην $\mathcal{C}_{k_0}$ ο οποίος περιέχει το x ανήκει στη $\mathcal{D}$ και συνεπώς το x ανήκει στην ένωση των κύβων στη $\mathcal{D}$. □

Πρόταση 5.2.2. *Έστω (Ω, Σ, P) ένας χώρος πιθανότητας.*

(a) *Έστω X μία τ.μ. επάνω στον (Ω, Σ, P) η οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο [0,1] και έστω $\{Y_n\}$ μία ακολουθία επάνω στον (Ω, Σ, P) με τα $\{Y_n(\omega)\}$ να αποτελούν την ακολουθία του 0 και του 1 στο δυαδικό ανάπτυγμα της $X(\omega)$. Τότε η $\{Y_n\}$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, καθεμία από αυτές ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παράμετρο 1/2.*

(b) *. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι η $\{Y_n\}$ είναι μία ακολουθία από ανεξάρτητες τ.μ., επάνω στον (Ω, Σ, P) καθεμία από τις οποίες ακολουθεί την κατανομή Bernoulli με παράμετρο 1/2. Τότε η τ.μ. X που ορίζεται από τον τύπο $X = \sum_n Y_n/2^n$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα [0,1].*

Απόδειξη. Η απόδειξη του (a) μέρους της πρότασης έχει ήδη δοθεί ακριβώς πριν την πρόταση. Ας συνεχίσουμε με την απόδειξη του μέρους (b). Τροποποιώντας τις μεταβλητές Y_n επάνω σε ένα μηδενικό σύνολο εά είναι απαραίτητο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι για κάθε ω η ακολουθία $\{Y_n(\omega)\}$ περιέχει μόνο 0 και 1 και δεν τελειώνει με μία άπειρη σειρά από 1. Θεωρούμε τους δυαδικούς ρητούς $\frac{i}{2^n}$ όπου το i ικανοποιεί την $0 \leq i < 2^n$. Τότε το $\frac{i}{2^n}$ έχει ένα δυαδικό ανάπτυγμα n-όρων, δηλαδή $0.b_1b_2\ldots b_n$, και το $X(\omega)$ ανήκει στο διάστημα $[\frac{i}{2^n}, \frac{(i+1)}{2^n})$ εάν και μόνο εάν ισχύει η σχέση $Y_j(\omega) = b_j$ για $j = 1, \ldots, n$. Έτσι η σχέση $P_X(I) = \lambda(I)$ ισχύει για διαστήματα I της μορφής $[\frac{i}{2^n}, \frac{(i+1)}{2^n})$ και άρα σύμφωνα με το Λήμμα 5.2.1 για όλα τα ανοιχτά υποσύνολα I στο (0,1). Λόγω της κανονικότητας των P_X και λ (βλέποντας [4], Proposition 1.5.6) η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Πρόταση 5.2.3. *Έστω (Ω, Σ, P) ένας χώρος πιθανότητας, έστω $\{\Sigma_i\}_{i\in I}$ μία οικογένεια από ανεξάρτητες σ-υποάλγεβρες του Σ, έστω $\{S_j\}_{j\in J}$ μία διαμέριση του I, και για κάθε $j \in J$ έστω $\mathcal{B}_j = \sigma(\cup_{i\in S_j}\Sigma_i)$. Τότε οι σ-άλγεβρες $\mathcal{B}_j$ είναι ανεξάρτητες.*

Απόδειξη. Για κάθε $j \in J$ έστω $\mathcal{P}_j$ η οικογένεια όλων των πεπερασμένων τομών, συνόλων μέσα στη $\cup_{i\in S_j}\Sigma_i$. Σημειώνουμε ότι κάθε οικογένεια $\mathcal{P}_j$ είναι κλειστή ως προς τις πεπερασμένες τομές και $\mathcal{B}_j = \sigma(\mathcal{P}_j)$. Έστω J_0 ένα μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του J και για κάθε $j \in J_0$ έστω A_j ένα μέλος της $\mathcal{P}_j$. Η παρακάτω σχέση

$$P(\cap_{j\in J_0}A_j) = \prod_{j\in J_0} P(A_j) \tag{5.4}$$

προκύπτει από την ανεξαρτησία των Σ_i. Τώρα υποθέτουμε ότι τα στοιχεία του J_0 είναι τα $j_1, j_2, \ldots, j_n$, και έστω $\mathcal{D}$ η κλάση όλων των $A \in \mathcal{B}_{j_n}$, έτσι ώστε να ισχύει η σχέση

$$P(A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_{n-1}} \cap A) = P(A_{j_1}) \ldots P(A_{j_{n-1}})P(A) \tag{5.5}$$

για όλα τα $A_{j_i} \in \mathcal{P}_{j_i}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Τότε η $\mathcal{D}$ είναι μία κλάση Dynkin η οποία περιλαμβάνει τα $\mathcal{P}_{j_n}$. Παρόμοια επιχειρήματα, n-1 από αυτά αποδεικνύουν ότι η (5.4) ισχύει για όλα τα $A_j \in \mathcal{B}_j$, $j \in J_0$. Αφού η ανεξαρτησία των $\mathcal{B}_j$, $j \in J$ εξαρτάται μόνο από την ανεξαρτησία των πεπερασμένων υποοικογενειών, η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Πόρισμα 5.2.4. *Υπάρχει μία άπειρη ακολουθία ανεξάρτητων τ.μ., κάθε μία από τις οποίες είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο [0,1]. Τέτοια ακολουθία μπορεί να κατασκευαστεί στο χώρο πιθανότητας $([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \lambda)$.*

Απόδειξη. Έστω X μία τ.μ. η οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο [0,1]. Μία τέτοια τ.μ. μπορεί να οριστεί στο χώρο πιθανότητας $([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \lambda)$. Έστω $\{Y_n\}$ η ακολουθία έτσι όπως έχει κατασκευαστεί στο πρώτο μέρος της πρότασης 5.2.2 . Αφού το σύνολο $\mathbb{N}$ των θετικών ακεραίων έχει την ίδια πληθικότητα με το σύνολο $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ των ζευγών θετικών ακεραίων μπορούμε να ανα-απαριθμήσουμε την ακολουθία $\{Y_n\}$, και να πάρουμε τώρα μία διπλή ακολουθία $\{Y'_{m,n}\}$. Για κάθε n ορίζουμε μία τ.μ. Z_n με τον τύπο $Z_n := \sum_m Y'_{m,n}/2^m$. Τότε το δεύτερο μέρος της πρότασης 5.2.2 συνεπάγεται ότι κάθε Z_n είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο [0,1], ενώ η πρόταση 5.2.3 συνεπάγεται ότι οι μεταβλητές $\{Z_n\}$ είναι ανεξάρτητες. □

Είναι δυνατό να χρησιμοποιήσουμε ομοιόμορφα κατανεμημένες τ.μ. για να κατασκευάσουμε τ.μ. που να έχουν οποιεσδήποτε κατανομές στο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Αυτό μπορεί να συμβεί ως ακολούθως.

Πρόταση 5.2.5. *Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στον $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ και F_n συνάρτηση κατανομής που επάγεται από το μ, και έστω X τ.μ. η οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα (0,1). Τότε η συνάρτηση $F^{-1} : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:*

$$F^{-1}(t) = inf\{x \in \mathbb{R} : t \leq F(x)\} \tag{5.6}$$

είναι Borel μετρήσιμη και η $F^{-1} \circ X$ έχει κατανομή μ.

Απόδειξη. Η συνάρτηση F ικανοποιεί τις σχέσεις $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ από τις οποίες συνεπάγεται ότι για κάθε $t \in (0,1)$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : t \leq F(x)\}$ είναι μη κενό και κάτω φραγμένο, και επιπλέον ότι κάθε $F^{-1}(t)$ είναι πεπερασμένο. Εάν $t_1 < t_2$, τότε:

$$\{x \in \mathbb{R} : t_2 \leq F(x)\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : t_1 \leq F(x)\}, \tag{5.7}$$

και παίρνοντας το infima αυτών των σύνολων έχουμε ότι $F^{-1}(t_1) \leq F^{-1}(t_2)$. Με άλλα λόγια η F^{-1} είναι αύξουσα και έτσι είναι Borel μετρήσιμη.
Ας ελέγξουμε ότι το

$$F^{-1}(t) \leq x \tag{5.8}$$

ισχύει εάν και μόνο εάν

$$t \leq F(x). \tag{5.9}$$

Από τον ορισμό της F^{-1} η (5.9) συνεπάγεται την (5.8). Από την άλλη πλευρά εάν ισχύει η (5.8) τότε υπάρχει μία ακολουθία $\{x_n\}$ η οποία φθίνει στο x και είναι τέτοια ώστε $t \leq F(x_n)$ να ισχύει για κάθε n. Εφόσον η F είναι δεξιά συνεχής, ισχύει η (5.9). Έτσι αποδεικνύεται η ισότητα των (5.8) και (5.9).
Τελικά η ισοδυναμία αυτή συνεπάγεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα έχουμε

$$P(F^{-1} \circ X \leq x) = P(X \leq F(x)) = F(x) \tag{5.10}$$

. Επιπλέον η $F^{-1} \circ X$ έχει συνάρτηση κατανομής F και κατανομή μ. □

Πόρισμα 5.2.6. *Έστω μ μία κατανομή πιθανότητας επάνω στο $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$. Τότε υπάρχει μία άπειρη ακολουθία από ανεξάρτητες τ.μ., καθεμία από τις οποίες έχει κατανομή μ. Τέτοια ακολουθία από τ.μ. μπορεί να κατασκευαστεί επάνω στο χώρο πιθανότητας $([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \lambda)$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη αυτή είναι άμεση συνέπεια του πορίσματος 5.2.4 και της πρότασης 5.2.5. □

Λήμμα 5.2.7. *Έστω Z μία κανονική τ.μ. με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Τότε*

$$P(Z \geq A) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}A} e^{-A^2/2}$$

ισχύει για κάθε θετικό πραγματικό αριθμό A.

Απόδειξη. Έχουμε

$$P(Z \geq A) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^\infty e^{-x^2/2} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A^\infty \frac{x}{A} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}A} e^{-A^2/2}.$$

[438] **Θεώρημα 5.2.8.** *Έστω T=[0,1]. Τότε, υπάρχει μια μονοδιάστατη κίνηση Brown με παραμετρικό σύνολο T. Δηλαδή, υπάρχει ένας χώρος πιθανότητας (Ω, Σ, P) και τυχαίες μεταβλητές X_t, $t \in T$, επάνω στο Ω, έτσι ώστε η στοχαστική διαδικασία $\{X_t\}_{t \in T}$ να είναι κίνηση Brown.*

Απόδειξη. Έστω (Ω, Σ, P) ένας χώρος πιθανότητας επάνω στον οποίο υπάρχει μία ακολουθία $\{Z_n\}_{n=0}^\infty$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, καθεμία από τις οποίες ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή μηδέν και διακύμανση 1. (Σύμφωνα με το Πόρισμα (5.2.6) τέτοια ακολουθία μπορεί να κατασκευαστεί επάνω στο χώρο πιθανότητας $([0,1], \mathfrak{B}([0,1]), \lambda)$). Θα χρησιμοποιήσουμε μία τέτοια ακολουθία $\{Z_n\}$ για να δημιουργήσουμε μία ακολουθία τμηματικά γραμμικών προσεγγίσεων, μιας κίνησης Brown. Πιο συγκεκριμένα θα δημιουργήσουμε διαδικασίες $\{X_t^n\}_{t \in T}$, $n = 0, 1, \cdots$ τέτοιες ώστε:

(a) Για κάθε n οι τροχιές της $\{X_t^n\}_{t \in T}$ να ικανοποιούν την $X_0^n(\omega) = 0$ για όλα τα ω και να είναι τμηματικά γραμμικές στα διαστήματα της μορφής $[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}]$,

(b) για κάθε n η διαδικασία $\{X_t^n\}_{t \in T}$, όταν περιορίζεται στα σημεία $t_{\frac{i}{2^n}}$, $i = 0, \cdots, 2^n$, να μοιάζει με μία κίνηση Brown, (δηλαδή να έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις των οποίων η κατανομή είναι κανονική και έχει τις απαιτούμενες μέσες τιμές και διακυμάνσεις),

(c) για σχεδόν κάθε ω η ακολουθία συναρτήσεων $\{t \longrightarrow X_t^n(\omega)\}_{n=1}^\infty$ συγκλίνει ομοιόμορφα επάνω στο [0,1], καθώς το n τείνει στο άπειρο, και τέλος

(d) οι διαδικασίες να ικανοποιούν τις $X_t^n(\omega) = X_t^{n+1}(\omega) = X_t^{n+2}(\omega) = \cdots$ για κάθε n και ω και κάθε t της μορφής $\frac{i}{2^n}$.

Τώρα υποθέστε ότι έχουμε κατασκευάσει μια τέτοια ακολουθία διαδικασιών $\{X_t^n\}_{t\in T}$ και έστω A ένα ενδεχόμενο με πιθανότητα 1 ώστε εάν $\omega \in A$, τότε η ακολουθία $\{t \longrightarrow X_t^n(\omega)\}_n$ να συγκλίνει ομοιόμορφα επάνω στο T. Ορίζουμε τη διαδικασία $\{X_t\}_{t\in T}$ ώστε:

$$X_t(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} X_t^n(\omega), & \text{εάν } t \in T \text{ και } \omega \in A \\ 0, & \text{εάν } t \in T \text{ και } \omega \notin A. \end{cases}$$

Τότε λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης των τροχιών, η προϋπόθεση (a) συνεπάγεται ότι $X_0 = 0$ και ότι όλες οι τροχιές της $\{X_t\}_{t\in T}$ είναι συνεχείς. Οι προϋποθέσεις (b) και (d) συνεπάγονται ότι εάν τα $t_0, t_1, \cdots, t_k$ είναι δυαδικοί ρητοί, τέτοια ώστε $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$, τότε οι προσαυξήσεις $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$, $i = 1, \cdots, k$, είναι ανεξάρτητες με τις $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ να έχουν κατανομή $\mathbf{N}(0, t_i - t_{i-1})$. Πρέπει να επεκτείνουμε το θεώρημα στην περίπτωση που τα t_i δεν είναι κατ΄ανάγκη δυαδικοί ρητοί.

Έτσι υποθέτουμε ότι t_i, $i = 0, \cdots, k$, είναι στοιχεία του [0,1] τέτοια ώστε $t_0 < t_1 < \cdots < t_k$. Ας προσεγγίσουμε λοιπόν αυτές τις τιμές επιλέγοντας ακολουθίες $\{t_{i,n}\}_n$, $i = 0, \ldots, k$ δυαδικών ρητών μέσα στο [0,1], τέτοιες ώστε $t_i = \lim_{n\to\infty} t_{i,n}$ να ισχύει για όλα τα i και $t_{i-1,n} < t_{i,n}$ να ισχύει για όλα τα i και τα n. Τότε για κάθε n οι προσαυξήσεις $X_{t_{i,n}} - X_{t_{i-1,n}}$, $i = 1, \cdots, k$ είναι ανεξάρτητες, με $X_{t_{i,n}} - X_{t_{i-1,n}}$ να έχουν την κανονική κατανομή $\mathbf{N}(0, t_{i,n} - t_{i-1,n})$. Οι προσαυξήσεις $X_{t_{i,n}} - X_{t_{i-1,n}}$ συγκλίνουν σημειακά στις προσαυξήσεις $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ και έτσι προκύπτει ότι οι προσαυξήσεις $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$, $i = 1, \cdots, k$, είναι ανεξάρτητες, με τις $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$ να ακολουθούν την $\mathbf{N}(0, t_i - t_{i-1})$. Αυτό θα ολοκληρώσει την απόδειξή μας, εφόσον κατασκευάσουμε τη διαδικασία $\{X_t^n\}_{t\in T}$, $n = 0, \ldots$.

Στρεφόμαστε προς την κατασκευή της $\{X_t^n\}_{t\in T}$, $n = 0, \cdots$, που να ικανοποιεί τις συνθήκες (a)-(d). Υπενθυμίζουμε ότι έχουμε μία ακολουθία $\{Z_n\}_{n=0}^{\infty}$ ανεξάρτητων κανονικά κατανεμημένων τ.μ., καθεμία με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Ορίζουμε τη διαδικασία $\{X_t^0(\omega)\}_{t\in T}$ αφήνοντας να ισχύει για κάθε ω και για κάθε t το $X_t^0(\omega) := tZ_0(\omega)$. Αυτή η διαδικασία ικανοποιεί τις συνθήκες (a) και (b).

Δοσμένης της διαδικασίας $\{X_t^{n-1}\}_{t\in T}$, κατασκευάζουμε τη διαδικασία $\{X_t^n\}_{t\in T}$ ως ακολούθως. Για κάθε t της μορφής $\frac{i}{2^{n-1}}$, έστω $X_t^n := X_t^{n-1}$. Για κάθε t της μορφής $\frac{2i+1}{2^n}$, $i = 0, \cdots, 2^{n-1} - 1$, έστω:

$$X_t^n := X_t^{n-1} + 2^{-\frac{(n+1)}{2}} Z_{2^{n-1}+i}. \tag{5.11}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιούμε ευθύγραμμα τμήματα για να παρεμβάλουμε μεταξύ των σημείων $(t, X_t^n(\omega))$ για τα οποία τα t έχουν τη μορφή $\frac{i}{2^n}$ για κάποιο i.(Η επιλογή των $Z_{2^{n-1}+i}$ από την ακολουθία των Z έγινε έτσι ώστε τα νέα Z που χρησιμοποιήθηκαν στην κατασκευή της $\{X_t^n\}_{t\in T}$ να είναι όλα διακριτά από εκείνα που χρησιμοποιήθηκαν νωρίτερα, δηλαδή από εκείνα που χρησιμοποιήθηκαν στην κατασκευή των $\{X_t^k\}_{t\in T}$ με $k < n$. Ο συντελεστής των $Z_{2^{n-1}+i}$ θα αποδειχθεί ότι είναι αυτό που χρειαζόμαστε ώστε να κάνουμε τις προσαυξήσεις των

$\{X_t^n\}_{t\in T}$ να είναι ανεξάρτητες και να έχουν τις απαιτούμενες κατανομές). Για να απλοποιήσουμε τους συμβολισμούς θέτουμε $\frac{i}{2^n} := t_i$ για $i = 0, \cdots, 2^n$. Τότε η προσαύξηση $X_{t_{2i+1}}^n - X_{t_{2i}}^n$ δίνεται από τον τύπο $\frac{i}{2^n} := t_i$

$$\begin{aligned}
X_{t_{2i+1}}^n - X_{t_{2i}}^n &= X_{t_{2i+1}}^{n-1} + 2^{\frac{-(n+1)}{2}} Z_{2^{n-1}+i} - X_{t_{2i}}^{n-1} \\
&= (\frac{1}{2})(X_{t_{2i}}^{n-1} + X_{t_{2i+2}}^{n-1}) + 2^{\frac{-(n+1)}{2}} Z_{2^{n-1}+i} - X_{t_{2i}}^{n-1} \\
&= (\frac{1}{2})(X_{t_{2i+2}}^{n-1} - X_{t_{2i}}^{n-1}) + 2^{\frac{-(n+1)}{2}} Z_{2^{n-1}+i}
\end{aligned}$$

Ένας παρόμοιος υπολογισμός δείχνει ότι

$$X_{t_{2i+2}}^n - X_{t_{2i+1}}^n = (\frac{1}{2})(X_{t_{2i+2}}^{n-1} - X_{t_{2i}}^{n-1}) - 2^{\frac{-(n+1)}{2}} Z_{2^{n-1}+i}. \tag{5.12}$$

Οι μεταβλητές $(\frac{1}{2})(X_{t_{2i+2}}^{n-1} - X_{t_{2i}}^{n-1})$ και $2^{\frac{-(n+1)}{2}} Z_{2^{n-1}+i}$ είναι ανεξάρτητες και η καθεμία ακολουθεί την $\boldsymbol{N}(0, \frac{1}{2^{n+1}})$ από το οποίο έπεται ότι οι προσαυξήσεις $X_{t_{2i+1}}^n - X_{t_{2i}}^n$ και $X_{t_{2i+2}}^n - X_{t_{2i+1}}^n$ ακολουθούν και οι δύο την κατανομή $\boldsymbol{N}(0, \frac{1}{2^n})$. Τελικά εάν κάποιος υπολογίσει τη χαρακτηριστική συνάρτηση της κοινής κατανομής των προσαυξήσεων $X_{t_{i+1}}^n - X_{t_i}^n$, θα πάρει το γινόμενο των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των κανονικών κατανομών με μέση τιμή 0 και διακύμανση $\frac{1}{2^n}$, καθώς και την ανεξαρτησία των προαυξήσεων. Μέσω αυτού έχουμε αποδείξει τις συνθήκες (a),(b) και (d). Επιστρέφουμε στη συνθήκη (c) και στη σχεδόν βέβαιη ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας $\{X_t^n(\omega)\}$. Υποθέτουμε ότι μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{\varepsilon_n\}$, θετικών αριθμών, τέτοια ώστε να ισχύουν $\sum_n \varepsilon_n < +\infty$ και $\sum_n P(A_n) < +\infty$, όπου A_n ορίζεται από τη σχέση

$$A_n = \{sup_t|X_t^n - X_t^{n-1}| > \varepsilon_n\}. \tag{5.13}$$

Έστω $A := \cap_{m\in\mathbb{N}} \cup_{n=m}^{\infty} A_n := \{\omega \in \Omega : \omega \in A_n$ για άπειρα $n\}$. Για λόγους συντομίας συμβολίζουμε το A με $\{A_n\ i.o.\}$, (i.o.:= infinitely often). Τότε από το Λήμμα των Borel-Cantelli έχουμε ότι $P(\{A_n\ i.o.\}) = 0$ (βλέπε [4], Proposition 10.2.2). Αφού $\omega \notin A$, ισχύει ότι $sup_t|X_t^n(\omega) - X_t^{n-1}(\omega)| \leq \varepsilon_n$ που ισχύει για όλα τα μεγάλα n. Η ομοιόμορφη σύγκλιση της ακολουθίας $\{t \longrightarrow X_t^n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ προκύπτει από τη συνθήκη $\sum_n \varepsilon_n < +\infty$. Ακόμα χρειάζεται να κατασκευάσουμε την ακολουθία $\{\varepsilon_n\}$. Με τον τρόπο που κατασκευάστηκε το $\{X_t^n\}_{t\in T}$ από το $\{X_t^{n-1}\}_{t\in T}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
P(A_n) &= P(\{sup_t|X_t^n - X_t^{n-1}| > \varepsilon_n\}) \\
&= P(max_{0\leq i<2^{(n-1)/2}}|2^{-(n+1)/2} Z_{2^{n-1}+i}| > \varepsilon_n) \\
&\leq \sum_{i=0}^{2^{n-1}-1} P(|2^{-(n+1)/2} Z_{2^{n-1}+i}| > \varepsilon_n) \\
&= 2^{n-1} P(|Z_{2^{n-1}}| > 2^{(n+1)/2}\varepsilon_n).
\end{aligned}$$

Εφόσον το $Z_{2^{n-1}}$ ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1, τότε

$$P(A_n) \leq 2^{n-1} \frac{2}{\sqrt{2\pi} 2^{(n+1)/2} \varepsilon_n \exp^{-(1/2) 2^{n+1} \varepsilon_n^2}} = \frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{\sqrt{\pi} \epsilon_n} \exp^{-2^n \varepsilon_n^2} . \tag{5.14}$$

Εάν για παράδειγμα αφήσουμε το ε_n να είναι $2^{-n/4}$, τότε $\sum_n \varepsilon_n < +\infty$ και $\sum_n P(A_n) < +\infty$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Κεφάλαιο 6

Αναλυτικές Ιδιότητες της Κίνησης Brown

6.1 Βαθμός συνέχειας

Το ερώτημα που γεννάται είναι πόσο ομαλή είναι η κίνηση Brown; Ο βαθμός συνέχειας των τροχιών της κίνησης Brown έχει αναλυθεί στην Ενότητα 4.5.

6.2 Πουθενά διαφορισιμότητα

Το παρακάτω Θεώρημα μας δίνει ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα σχετικό με τη διαφορισιμότητα των τροχιών της κίνησης Brown.

Θεώρημα 6.2.1. *Σχεδόν όλες οι τροχιές μιας μονοδιάστατης κίνησης Brown είναι πουθενά διαφορίσιμες. Πιο συγκεκριμένα έστω $T = [0,1]$ και έστω μια μονοδιάστατη κίνηση Brown $\{X_t\}_{t\in T}$ επάνω στο χώρο πιθανότητας (Ω, Σ, P). Τότε υπάρχει ένα σύνολο A στο Σ τέτοιο ώστε να ισχύει $P(A) = 0$ και επιπλέον για κάθε ω εκτός του A η τροχιά $t \longrightarrow X_t(\omega)$ είναι πουθενά διαφορίσιμη.*

Απόδειξη. Έστω K θετικός ακέραιος τον οποίο κρατάμε σταθερό προς το παρόν. Θα κατασκευάσουμε μία ακολουθία $\{B_n\}$ από Σ-μετρήσιμα υποσύνολα του Ω τέτοια ώστε να ισχύουν τα παρακάτω

(a) $\lim_n P(B_n) = 0$,

(b) εάν ω είναι στοιχείο του Ω τέτοιο ώστε η τροχιά $t \longmapsto X_t(\omega)$ είναι διαφορίσιμη σε κάποιο $t_0 \in [0,1]$, με $|X'_{t_0}(\omega)| < K$, τότε το ω ανήκει στο B_n για όλα τα μεγάλα n.

Υποθέτουμε ότι κατασκευάσαμε μία τέτοια ακολουθία $\{B_n\}$. Έστω

$$A_K = \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} B_n$$

το σύνολο των σημείων ω, έτσι ώστε $\omega \in B_n$ να ισχύει για όλα τα μεγάλα n. Τότε ισχ ύει

$$P(\bigcap_{n \geq m} B_n) \leq \lim_n P(B_n) = 0$$

για όλα τα m και έτσι $P(A_K) = 0$. Τώρα θεωρούμε τον ακέραιο K να μεταβάλλεται και ορίζουμε το $A := \bigcup_{K=1}^{\infty} A_K$. Τότε το A έχει P μέτρο 0 και προκύπτει από τη συνθήκη (b) ότι περιέχει κάθε ω για το οποίο η τροχιά $t \longrightarrow X_t(\omega)$ είναι διαφορίσιμη σε ένα ή περισσότερα σημεία.

Τώρα στρεφόμαστε προς την κατασκευή της ακολουθίας $\{B_n\}$ των συνόλων που ικανοποιούν τις δύο συνθήκες (a) και (b). Θεωρούμε το K σταθερό. Για κάθε n όπου $n \geq 3$ ορίζουμε τα σύνολα $C_{n,k}, k = 1, \ldots, n$ ως εξής

$$C_{n,k} = \{\omega : |X_{k/n}(\omega) - X_{(k-1)/n}(\omega)| < \frac{3K}{n}\},$$

και ορίζουμε τα σύνολα $D_{n,k}, k = 1, \ldots, n-1$ όπως παρακάτω:

$$D_{n,k} = C_{n,k-1} \cap C_{n,k} \cap C_{n,k+1}.$$

Τελικά ορίζουμε τα σύνολα B_n ως $B_n = C_{n,1} \cup C_{n,n} \cup (\cup_{k=2}^{n-1} D_{n,k})$. Θα δείξουμε ότι αυτά τα σύνολα B_n ικανοποιούν τις συνθήκες (a),(b). Ξεκινάμε από την πρώτη συνθήκη υπολογίζοντας τις πιθανότητες των συνόλων $C_{n,k}$. Εφόσον η προσαύξηση $X_{k/n} - X_{(k-1)/n}$ είναι κανονική με μέση τιμή 0 και διακύμανση $1/n$, έχει την ίδια κατανομή με τη μεταβλητή $Z/\sqrt{n}$, όπου Z είναι μία κανονική τ.μ. με μέση τιμή 0 και διακύμανση 1. Έτσι

$$\begin{aligned} P(C_{n,k}) &= P(|X_{k/n} - X_{(k-1)/n}| < \frac{3K}{n}) = P(|Z| < \frac{3K}{n}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{3K}{n}}^{\frac{3K}{n}} e^{-x^2/2} dx < \frac{K_1}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

όπου K_1 είαι η σταθερά $6K/\sqrt{2\pi}$. Η ανεξαρτησία των ενδεχομένων $C_{n,k}, k = 1, \ldots, n$ συνεπάγεται ότι

$$P(D_{n,k}) = P(C_{n,k-1})P(C_{n,k})P(C_{n,k+1}) < K_1^3/n^{3/2}.$$

Αφού $B_n = C_{n,1} \cup C_{n,n} \cup (\cup_{k=2}^{n-1} D_{n,k})$, έχουμε $P(B_n) < 2K_1/\sqrt{n} + (n-2)K_1^3/n^{3/2}$, και προκύπτει ότι $\lim_n P(B_n) = 0$. Άρα ισχύει η συνθήκη (a). Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι η η τροχιά $t \longmapsto X_t(\omega)$ είναι διαφορίσιμη στο σημείο t_0 και ότι $|X'_{t_0}(\omega)| < K$. Έστω n αρκετά μεγάλο ώστε να ισχύει

$$|X_t(\omega) - X_{t_0}(\omega)| < K|t - t_0|$$

όταν $|t - t_0| \leq 2/n$. Έχουμε ότι αν $t_0 \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, τότε

$$|X_{k/n}(\omega) - X_{(k-1)/n}(\omega)| < K/n,$$

ενώ αν το t_0 βρίσκεται στο διάστημα μήκους $1/n$ με άκρα $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$, τότε

$$\begin{aligned} |X_{k/n}(\omega) - X_{(k-1)/n}(\omega)| &\leq |X_{k/n}(\omega) - X_{t_0}(\omega)| + |X_{t_0}(\omega) - X_{(k-1)/n}(\omega)| \\ &< K/n + 2K/n = 3K/n. \end{aligned}$$

Τώρα υποθέτουμε ότι k είναι τέτοιο ώστε $t_0 \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. Οι υπολογισμοί μας δείξανε ότι $\omega \in C_{n,1} \cup C_{n,n}$ εάν το k είναι 1 ή n ή ότι $\omega \in D_{n,k}$. Σε οποιαδήποτε περίπτωση $\omega \in B_n$ και η απόδειξη της δεύτερης συνθήκης ολοκληρώθηκε. □

Πόρισμα 6.2.2. *Η κίνηση Brown δεν είναι διαφορίσιμη σε κανένα σημείο στο* $[0, \infty)$ *με πιθανότητα 1.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 6.2.1 προκύπτει ότι η $\{B_t\}_{t\in[0,1]}$ έχει πουθενά διαφορίσιμες τροχιές. Το αποτέλεσμα για το $[0, \infty)$ προκύπτει από το αποτέλεσμα στο [0,1]. □

Κεφάλαιο 7

Εφαρμογές του στοχαστικού λογισμού στα χρηματοοικονομικά

Από τότε που δημοσιεύτηκαν οι περίφημες εργασίες των Black and Scholes και Merton, η ιδέα της χρήσης του Στοχαστικού Λογισμού για τη μοντελοποίηση των τιμών επισφαλών περιουσιακών στοιχείων (τιμές μετοχών, χρηματιστηριακών δεικτών, όπως οι δείκτες Dow Jones, Nikei ή Dax, συναλλαγματικές ισοτιμίες κ.λ.π.) έχει γίνει γενικά αποδεκτή. Αυτό οδήγησε σε ένα νέο κλάδο της Εφαρμοσμένης Θεωρίας Πιθανοτήτων, το πεδίο των Μαθηματι κών Χρηματοοικονομικών. Πρόκειται για μία συμβίωση των στοχαστικών μοντέλων και πρακτικών χρηματοοικονομικών τεχνικών. Στο κεφάλαιο αυτό θεωρούμε το μοντέλο Black-Scholes για την αποτίμηση ενός ευρωπαϊκού δικαιώματος προαίρεσης . Δεν χρειαζόμαστε τη γνώση πολλών χρηματοοικονομικών όρων. Ως ελάχιστο θα χρειαστούμε κάποιους όρους της χρηματοοικονομικής γλώσσας, και ως μέγιστο τον τύπο του Itô. Στις Ενότητες 7.1 και 7.2 θα εξηγηθεί η βασική ορολογία των Χρηματοοικονομικών που χρειαζόμαστε. Στην Ενότητα 7.3 θα δοθεί μία μαθηματική διατύπωση του προβλήματος αποτίμησης ευρωπαϊκών δικαιωμάτων και η εξίσωση των Black-Scholes , ενώ στην Ενότητα 7.4 δίνεται ο τύπος των Black-Scholes. Τέλος στην Ενότητα 7.5 θα αποδειχθεί ο τύπος των Black-Scholes, ως η λύση μιάς διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους. Σε όλο το παρόν κεφάλαιο η τριάδα $(\varOmega, \varSigma, P)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας, η οικογένεια $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μία στοχαστική διαδικασία του **Wiener** [2] (Ενότητα 6.1) και η οικογένεια $\{\varSigma_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι η κανονική διύλισή της .

7.1 Μία σύνδεση με τα Χρηματοοικονομικά

Έστω ότι μελετούμε μία χρηματοοικονομική αγορά στο χρονικό διάστημα $[0, T]$ για δοσμένο $T > 0$. Το Ω παριστάνει το σύνολο των δυνατών καταστάσεων της αγοράς στο χρονικό διάστημα $[0,T]$. Υποθέτουμε, ότι η τιμή X_t μιάς μετοχής (risky asset ή stock) στο χρόνο t δίνεται από μία Γεωμετρική Κίνηση Brown $\{X_t\}_{t\in[0,T]}$ της μορφής

$$X_t = F(t, W_t) = X_0 e^{\left(c-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t} \quad \text{για κάθε} \quad t \in [0,T],$$

όπου η X_0 είναι ανεξάρτητη της $\{W_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$. Η αφορμή για αυτήν την υπόθεση προέρχεται από το γεγονός, ότι η $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι η μοναδική λύση της Σ.Δ.Ε

$$dX_t = cX_t dt + \sigma X_t dW_t \tag{7.1}$$

με αρχική συνθήκη $X_0 = \eta_0$, η οποία ισοδύναμα γράφεται ως

$$X_t = X_0 + c\int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dW_s \quad P-\sigma.\beta. \quad \text{για κάθε} \quad t\in[0,T] \tag{7.2}$$

με αρχική συνθήκη $X_0 = \eta_0$. Πάραθέτουμε το Θεώρημα για τον τύπο του Ito που χρησιμοποιείται για τη λύση της 7.1 και προχωράμε ευθύς στην απόδειξη.

Θεώρημα 7.1.1. *Έστω $f \in C^2(\mathbb{R}^d)$ και X μια d-διάστατη ανέλιξη Ito. Τότε με πιθανότητα 1, ισχύει*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \nabla f(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \sum_{i,j=1}^d \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) dX_s^{(i)} dX_s^{(j)}$$

για κάθε $t > 0$.

Περισσότερες πληροφορίες υπάρχουν στο [5].

Θέτουμε $Y_t := \log X_t$. Από τον τύπο του Ito (συγκεκριμένα την έκδοση IV, που παραθέσαμε παραπάνω) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} dY_t = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}(dX_t)^2 = \\ cdt + \sigma dW_t - \frac{1}{2X_t^2} X_t^2 \sigma^2 dt = \\ (c - \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \sigma dW_t. \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$Y_t - Y_0 = (c - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t,$$

και άρα

$$X_t = X_0 e^{\left(c-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t}$$

για κάθε $t > 0$.

Η (7.1) γράφεται ισοδύναμα ως

$$dX_t = X_t(cdt + \sigma dW_t).$$

Συνεπάγεται ότι

$$\frac{dX_t}{X_t} = cdt + \sigma dW_t$$

Η σχετική αλλαγή της τιμής X_t σε ένα μικρό χρονικό διάστημα $[t, t+dt]$ προέρχεται από μία ντετερμινισική αύξηση κατά cdt στην οποία προστίθεται μία τυχαία μεταβολή την οποία δε γνωρίζουμε τη χρονική στιγμή t. Γνωρίζουμε μόνο ότι η κατανομή της είναι $N(0, \sigma^2)$. Από τη μορφή της λύσης της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης 7.1 προκύπτει ότι η X_t είναι θετική για όλους τους χρόνους t ($X_0 > 0$), κάτι που δε γίνεται κατανοητό από από τη ΣΔΕ γιατί εμπλέκεται και ο στοχαστικός παράγοντας dW_t, ο οποίος μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές. Αυτό είναι κάτι λογικό αφού μία μετοχή το πολύ να μηδενιστεί, ποτέ όμως να πάρει αρνητική τιμή.

Ο όρος cdt αντιστοιχεί στη **γενική μέση μακροπρόθεσμη συστηματική άνοδο τιμής της μετοχής**, ενώ ο σdW_t στις **τυχαίες συνεχείς διακυμάνσεις της** . Στα Χρηματοοικονομικά το σ ονομάζεται **πτητικίτητα** (**volatility**). Το c είναι ο **συντελεστης ολίσθησης** και το σ ο **συντελεστής διακύμανσης** . Υποθέτουμε, ότι έχουμε και ένα χωρίς κίνδυνο τίτλο (non-risky asset) π.χ. ένα ομόλογο (bond). Έστω ότι ένα αρχικό κεφάλαιο β_0 (π.χ. σε έναν τραπεζικό λογαριασμό) δίνει σε χρόνο t ένα ποσόν

$$\beta_t = \beta_0 e^{rt} \quad \text{για κάθε} \quad t \in [0, T] \quad (r > 0 \quad \text{σταθερό επιτόκιο}).$$

Τότε

$$\beta_t = \beta_0 + r \int_0^t \beta_s ds \quad \text{για κάθε} \quad t \in [0, T] \tag{7.3}$$

Γενικά θέλουμε να κατέχουμε κάποιες ποσότητες μεριδίων: a_t σε μετοχές και b_t σε (π.χ.) ομόλογα. Αυτά αποτελούν το **χαρτοφυλάκιό** μας (portfolio). Υποθέτουμε ότι οι στοχαστι κές διαδικασίες $\{a_t\}_{t\in[0,T]}$ και $\{b_t\}_{t\in[0,T]}$ είναι προσαρμοσμένες στη διύλιση $\{\Sigma_t\}_{t\in[0,T]}$ και ονομάζουμε το ζευγάρι $(a_t, b_t), t \in [0, T]$ μία **επενδυτική στρατηγική** (trading strategy). Σαφώς θέλουμε να επιλέξουμε μία τέτοια στρατηγική, ώστε να μη χάσουμε. Η τιμή του χαρτοφυλακίου σε χρόνο t δίνεται από τη σχέση

$$V_t = a_t X_t + b_t \beta_t.$$

Υποθέτουμε, ότι η επενδυτική στρατηγική είναι **αυτοχρηματοδοτούμενη** (self-financing). Αυτό σημαίνει, ότι οι προσαυξήσεις της $\{V_t\}_{t\in[0,T]}$ δηλαδή του χαρτοφυλακίου εξαρτώνται μόνο από τις αλλαγές των τιμών X_t και β_t, δηλαδή δε γίνεται σε αυτό ουτε εκροή ούτε εισροή χρήματος.

$$dV_t = a_t dX_t + b_t d\beta_t$$

ή ισοδύναμα

$$V_t - V_0 = \int_0^t a_s dX_s + \int_0^t b_s d\beta_s \quad P - \sigma.\beta. \quad \text{για κάθε} \quad t \in [0, T].$$

7.2 Τι είναι το δικαίωμα προαίρεσης

Ευρωπαϊκό δικαίωμα αγοράς μετοχής: Τη χρονική στιγμή 0 πουλάμε σε έναν πελάτη ένα **ευρωπαϊκό δικαίωμα** το δικαίωμα να αγοράσει από μας μία μετοχή την προκαθορισμένη χρονική στιγμή T πληρώνοντάς μας τότε K ευρώ. Ποιά είναι η αξία του δικαιώματος αυτού; Δηλαδή πόσο πρέπει να πληρώσει ο αγοραστής κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$ για το δικαίωμα αυτό; Με άλλα λόγια, πόσο πρέπει να αποτιμηθεί σε χρόνο t=0 ένα δικαίωμα αξίας

$$(X_T - K)^+ = \begin{cases} X_T - K, & \text{αν } X_T > K, \\ 0, & \text{αν } X_T \leq K. \end{cases}$$

σε χρόνο T; Αυτό είναι το **πρόβλημα αποτίμησης ενός δικαιώματος**. Ποιά επενδυτική στρατηγική πρέπει να ακολουθήσει ο πωλητής, ώστε με αρχικό καφάλαιο K να σχηματίσει ένα χαρτοφυλάκιο με αξία επαρκή να καλύψει τις αξιώσεις του αγοραστή σε χρόνο T; Αν το χρόνο T η τιμή X_T της μετοχής στην αγορά είναι γνήσια μεγαλύτερη από K, τότε ο κάτοχος του δικαιώματος το ασκεί και αγοράζει μετοχή με τιμή K. Αμέσως την πουλάει σε τιμή X_T και έτσι έχει κέρδος $X_T - K$. Αν ισχύει το αντίθετο $X_T \leq K$ δεν ασκεί το δικαίωμα. Γιατί να αγοράσει πιο ακριβά τη μετοχή σε τιμή K ενώ μπορεί να βρει στην αγορά τη μετοχή σε πιο φθηνή τιμή;

7.3 Μία Μαθηματική Διατύπωση του Προβλήματος Αποτίμησης Ευρωπαϊκών Δικαιωμάτων

Υποθέτουμε ότι θέλουμε να βρούμε μία αυτοχρηματοδοτούμενη επενδυτική στρατηγική (a_t, b_t) και μία αντίστοιχη στοχαστική διαδικασία τιμών $\{V_t\}_{t\in[0,T]}$, ώστε

$$V_t = a_t X_t + b_t \beta_t = u(T - t, X_t) \qquad t \in [0, T],$$

όπου η $u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι μία ντετερμινιστική συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους 2ης τάξης. Αφού η τιμή V_T του χαρτοφυλακίου μας στο χρόνο T θα είναι $(X_T - K)^+$ παίρνουμε την τελική συνθήκη

$$V_T = u(0, X_T) = (X_T - K)^+. \tag{7.4}$$

Στη χρηματοοικονομική βιβλιογραφία η διαδικασία της εύρεσης μιάς αυτοχρηματοδοτούμενης στρατηγικής, ώστε να ισχύει η συνθήκη (7.4), ονομάζεται **αντιστάθμιση στην ενδεχόμενη απαίτηση** (hedging against the contigent claim) $(X_T - K)^+$. Έστω $F(t,x) := u(T-t,x)$ για κάθε $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}$. Τότε

$$\frac{\partial F}{\partial t}(t,x) = -\frac{\partial u}{\partial t}(T-t,x), \tag{7.5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t,x) = \frac{\partial u}{\partial x}(T-t,x), \tag{7.6}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(T-t,x). \tag{7.7}$$

Με εφαρμογή του τύπου του Θεωρήματος της γενίκευσης II του τύπου του Itô για $a_t := cX_t$ και $b_t := \sigma X_t$ για κάθε $t \in [0,T]$ προκύπτει

$$\begin{aligned}
V_t - V_0 &= F(t,X_t) - F(0,X_0) \\
&= \int_0^t \big[\frac{\partial F}{\partial s}(s,X_s) + cX_s\frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s,X_s)\big]ds \\
&\quad + \int_0^t \big[\sigma X_s \frac{\partial F}{\partial x}(s,X_s)\big]dW_s \\
&\overset{(7.5)-(7.7)}{=} \int_0^t \big[-\frac{\partial u}{\partial s}(T-s,X_s) + cX_s\frac{\partial u}{\partial x}(T-s,X_s) + \frac{1}{2}\sigma^2 X_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(T-s,X_s)\big]ds \\
&\quad + \int_0^t \big[\sigma X_s \frac{\partial u}{\partial x}(T-s,X_s)\big]dW_s \quad P-\sigma.\beta. \quad \text{για κάθε} \quad t \in [0,T].
\end{aligned} \tag{7.8}$$

Αφού η επενδυτική στρατηγική (a_t, b_t) είναι αυτοχρηματοδοτούμενη, έχουμε

$$V_t - V_0 = \int_0^t a_s dX_s + \int_0^t b_s d\beta_s \quad P-\sigma.\beta \quad \text{για κάθε} \quad t \in [0,T]. \tag{7.9}$$

Από την $\beta_t = \beta_0 e^{rt}$ προκύπτει

$$d\beta_t = r\beta_0 e^{rt} dt = r\beta_t dt. \tag{7.10}$$

Επί πλέον, από την $V_t = a_t X_t + b_t \beta_t$ έχουμε

$$b_t = \frac{V_t - a_t X_t}{\beta_t}. \tag{7.11}$$

Από τις σχέσεις (7.9)-(7.11) και (7.2) προκύπτει

$$\begin{aligned} V_t - V_0 &\overset{(7.9)-(7.11)}{=} \int_0^t a_s dX_s + \int_0^t \frac{V_s - a_s X_s}{\beta_s} r\beta_s ds \\ &= \int_0^t a_s dX_s + \int_0^t r(V_s - a_s X_s) ds \\ &\overset{(7.2)}{=} \int_0^t c a_s X_s ds + \int_0^t \sigma a_s X_s dW_s + \int_0^t r(V_s - a_s X_s) ds \\ &= \int_0^t \big[(c-r) a_s X_s + rV_s\big] ds + \int_0^t \sigma a_s X_s dW_s, \end{aligned} \tag{7.12}$$

όπου όλες οι ισότητες ισχύουν $P - \sigma.\beta.$ για κάθε $t \in [0,T]$. Συγκρίνουμε τις σχέσεις (7.8) και (7.12): Επειδή οι συντελεστές μιάς στοχαστικής διαδικασίας του Itô συμπίπτουν, έχουμε

$$a_t = \frac{\partial u}{\partial x}(T-t, X_t) \tag{7.13}$$

και

$$\begin{aligned} &(c-r)a_t X_t + ru(T-t, X_t) \\ &\overset{(7.13)}{=} (c-r)\frac{\partial u}{\partial x}(T-t,X_t)X_t + ru(T-t,X_t) \\ &= -\frac{\partial u}{\partial t}(T-t,X_t) + cX_t\frac{\partial u}{\partial x}(T-t,X_t)X_t + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(T-t,X_t). \end{aligned}$$

Αφού η X_t επιτρέπεται να πάρει κάθε θετική τιμή, από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) + rx\frac{\partial u}{\partial x}(t,x) - ru(t,x) \quad \text{για κάθε} \quad x > 0 \quad \text{και} \quad t \in [0,T]. \tag{7.14}$$

Από τη σχέση (7.4) προκύπτει η τελική συνθήκη

$$u(0,x) = (x-K)^+ \quad \text{για κάθε} \quad x > 0. \tag{7.15}$$

Η εξίσωση (7.14) ονομάζεται η **εξίσωση Black-Scholes**. Έτσι το πρόβλημα της αποτίμησης ανάγεται στην επίλυση της διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους (7.14) με τελική συνθήκη (7.15).

Θεώρημα 7.3.1. *Έστω $g : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση για την οποία υπάρχουν θετικές σταθερές c_1, c_2 και $\rho < 2$ ώστε*

$$|g(x)| \leq c_1 \exp^{c_2 |\log x|^\rho} \tag{7.16}$$

για κάθε $x > 0$. Τότε η σωστή τιμή του Ευρωπαικού συμβολαίου $g(X_T)$ με ημερομηνία λήξης T για $t \in [0,T]$ ισούται με $V(X_t,t)$ όπου $V : [0,\infty) \times [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι η μοναδική λύση του προβλήματος

$$\frac{\partial V}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(t,x) + rx\frac{\partial V}{\partial x}(t,x) - rV(t,x) \quad \text{για κάθε} \quad x > 0 \quad \text{και} \quad t \in [0,T].$$

με $V(T,x) = g(x)$ *στο* $[0,\infty)$, *και επιπλέον ικανοποιεί τη συνθήκη ότι υπάρχουν* $C_1, C_2 > 0$ *ώστε* $|V(t,x)| \leq C_1 \exp^{C_2(\log x)^2}$ *για κάθε* $(t,x) \in [0,\infty) \times [0,T]$.

Η Απόδειξη βρίσκεται στο Κεφάλαιο 18 του [5].

Θα δείξουμε μία λύση της εξίσωσης του Black Scholes.

Θεώρημα 7.3.2. *Έστω* g *όπως στο προηγούμενο Θεώρημα. Υπάρχει μοναδική λύση του παραπάνω προβλήματος και ικανοποιεί και τις προαναφερθείσες συνθήκες, η οποία δίνεται από τη σχέση*

$$V(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp^{-r(T-t)} \int_{\mathbb{R}} g(x \exp^{(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})+z\sigma\sqrt{T-t}}) \exp^{-z^2/2} dz \tag{7.17}$$

για κάθε $(t,x) \in \mathbb{R} \times [0,T]$.

Απόδειξη. Με κατάλληλους μετασχηματισμούς θα ανάγουμε την εξίσωση Black-Scholes στην εξίσωση θερμότητας εισάγοντας νέες μεταβλητές ως εξής:

$$\tau := (T-t)\frac{\sigma^2}{2}, \;\; y := \log x, \tag{7.18}$$

και λύνοντας ως προς τις παλιές μεταβλητές μας έχουμε:

$$t = T - \frac{\tau}{\sigma^2/2}, \;\; x = \exp^y, \tag{7.19}$$

και παίρνουμε τη συνάρτηση

$$v(y,\tau) = V(x,t) = V(\exp^y, T - \frac{\tau}{\sigma^2/2}) \tag{7.20}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και $\tau \in [0, T\sigma^2/2]$. Ένας υπολογισμός δίνει

$$v_\tau = v_{yy} + (\lambda - 1)v_y - \lambda v \;\; \text{στο} \;\; \mathbb{R} \times (0, T\sigma^2/2),$$

$$v(y,0) = g(\exp^y) \;\; \text{στο} \;\; \mathbb{R}.$$

με $\lambda := r/(\sigma^2/2)$. Τώρα εισάγουμε τη συνάρτηση $u : \mathbb{R} \times [0, T\sigma^2/2] \longrightarrow \mathbb{R}$ με

$$v(y,\tau) = \exp^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)y - \frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau} u(y,\tau).$$

Τότε η u ικανοποιεί τις

$$u_\tau = u_{yy} \;\; \text{στο} \;\; \mathbb{R} \times (0, T\sigma^2/2),$$

$$u(y,0) = \exp^{\frac{1}{2}(\lambda-1)y} g(\exp^y) \;\; \text{στο} \;\; \mathbb{R}.$$

Η συνθήκη (7.16) συνδιαστικά με τα Θεωρήματα 18.2 και 18.3 του Κεφαλαίου 18 του [5] που αφορούν την απόδειξη της εξίσωσης θερμότητας δίνουν τη μοναδική λύση του προβλήματος και δίνεται από τη σχέση

$$u(y,\tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\mathbb{R}} u(w,0) \exp^{-\frac{(y-w)^2}{4\tau}} dw.$$

Άρα

$$V(x,t) = \exp^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)y-\frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau} \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{\mathbb{R}} u(w,0) \exp^{-\frac{(y-w)^2}{4\tau}} dw = \tag{7.21}$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \exp^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)y-\frac{1}{4}(\lambda+1)^2\tau} \int_{\mathbb{R}} g(\exp^w) \exp^{-\frac{1}{2}(\lambda-1)w} \exp^{-\frac{(y-w)^2}{4\tau}} dw. \tag{7.22}$$

Ο εκθέτης μέσα στο τελευταίο ολοκλήρωμα είναι

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\lambda-1)w - \frac{(y-w)^2}{4\tau} &= -\frac{1}{4\tau}\{w^2 - 2wy - 2\tau(\lambda-1)w + y^2\} = \\ -\frac{1}{4\tau}\{w-(y+\tau(\lambda-1))\}^2 &- \frac{1}{4\tau}y^2 + \frac{1}{4\tau}\{y+\tau(\lambda-1)\}^2 = \\ -\frac{1}{4\tau}\{w-(y+\tau(\lambda-1))\}^2 &+ \frac{1}{4\tau}\{\tau^2(\lambda-1)^2 + 2y\tau(\lambda-1)\}. \end{aligned}$$

Προσθέτοντας σε αυτή την ποσότητα τον εκθέτη έξω από το ολοκλήρωμα, παίρνουμε

$$-\frac{1}{4\tau}\{w-(y+\tau(\lambda-1))\}^2 + \frac{1}{4}\tau(\lambda-1)^2 - \frac{1}{4}\tau(\lambda+1)^2 = -\frac{1}{4\tau}\{w-(y+\tau(\lambda-1))\}^2 + -\lambda\tau.$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda\tau = r(T-t)$. Κάνουμε στο ολοκλήρωμα την αλλαγή μεταβλητής

$$z := \frac{w-(y+\tau(\lambda-1))}{\sqrt{2\tau}}.$$

Τότε έχουμε

$$\exp^w = \exp^y \exp^{(\lambda-1)\tau+z\sqrt{2\tau}} = x\exp^{(T-t)(r-\frac{\sigma^2}{2})+z\sigma\sqrt{T-t}}$$

και συνεπώς ο τύπος 7.3 για τη V συμπίπτει με αυτόν στη διατύπωση του Θεωρήματος και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Εφαρμόζουμε τον παραπάνω τύπο του προηγούμενου Θεωρήματος στην περίπτωση που έχω $g(x) = (x-K)^+$ με $K > 0$. Θέλω να πάρω δηλαδή την τιμή ενός δικαιώματος αγοράς με τιμή άσκησης K.

Πρόταση 7.3.3. *Η τιμή ενός Ευρωπαϊκού δικαιώματος αγοράς με τιμή άσκησης K για τη μετοχή X της αγοράς είναι ίση με $C(X_t,t)$, όπου για $x > 0$ και $t \in [0,T)$ ισχύει*

$$C(x,t) := x\Phi(d_1(x,t)) - K\exp^{-r(T-t)}\Phi(d_2(x,t)),$$

με τη συνάρτηση κατανομής της $N(0,1)$ *και*

$$d_1(x,t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\{\log\frac{x}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\},$$

$$d_2(x,t) := \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\{\log\frac{x}{K} + (r - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\},$$

Απόδειξη. Η $g(x) = (x-K)^+$ ικανοποιεί την (7.16). Θέτουμε

$$A := (T-t)(r - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$B := \sigma\sqrt{T-t}$$

$$L := \frac{1}{B}(\log\frac{K}{x} - A) = -d_2(x,t).$$

Έτσι από τον τύπο του Θεωρήματος παίρνουμε

$$\begin{aligned} C(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp^{-r(T-t)}\int_{\mathbb{R}}(x\exp^{A+zB} - K)^+\exp^{z^2/2}dz = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp^{-r(T-t)}\int_L^\infty(x\exp^{A+zB} - K)\exp^{-z^2/2}dz = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\exp^{-r(T-t)+A}\int_L^\infty\exp^{zB-z^2/2}dz - K\exp^{-r(T-t)}(1-\Phi(L)) = \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x\exp^{-r(T-t)+A+B^2/2}\int_L^\infty\exp^{-(z-B)^2/2}dz - Kexp^{-r(T-t)}\Phi(-L). \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα στην τελευταία γραμμή ισούται με $\sqrt{2\pi}\{1-\Phi(L_B)\} = \sqrt{2\pi}\Phi(B-L)$. Όμως $B-L = d_1(x,t), -L = d_2(x,t)$ και $-r(T_t) + A + B^2/2 = 0$. Έτσι έχουμε τη ζητούμενη σχέση.

Παραρτήματα

Παράρτημα A

Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Στο παράρτημα αυτό αναφέρονται βασικές έννοιες της θεωρίας μέτρου που χρειαζόμαστε στην μελέτη της Κίνησης Brown. Για τις έννοιες που δεν αναφέρονται εδώ, παραπέμπουμε στο [2, Κεφάλαιο 1 και 2].

A.1 Χρήσιμες έννοιες και ορισμοί

Ορισμός A.1.1. *Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) δύο χ.π. και $\mathcal{G} := \{A \times B : \ A \in \Sigma, \ B \in T\}$.*

(a) *Η οικογένεια $\Sigma \otimes T := \sigma(\mathcal{G})$ ονομάζεται η* **σ-άλγεβρα γινόμενο** *της Σ και T.*

(b) *Για κάθε $E \subseteq \Omega \times \Upsilon$, και $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ αυθαίρετα αλλά σταθερά, τα σύνολα*

$$E_x := \{\bar{y} \in \Upsilon : (x, \bar{y}) \in E\}$$

και

$$E^y := \{\bar{x} \in \Omega : (\bar{x}, y) \in E\}$$

ονομάζονται η **x-τομή** *και η* **y-τομή** *(x-section and y-section) του E, αντίστοιχα.*

(c) *Αν η $f : \Omega \times \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση και τα $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ είναι αυθαίρετα αλλά σταθερά, τότε οι συναρτήσεις*

$$f_x : \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R} : \bar{y} \longrightarrow f_x(\bar{y}) := f(x, \bar{y})$$

και

$$f^y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : \bar{x} \longrightarrow f^y(\bar{x}) := f(\bar{x}, y)$$

ονομάζονται η **x-τομή** *της f και η* **y-τομή** *της f, αντίστοιχα.*

Λήμμα Α.1.2. *Έστω (Ω, Σ) και (Υ, T) μετρήσιμοι χώροι. Τότε ισχύει:*

(i) Για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ και για κάθε $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ έχουμε $E_x \in T$ και $E^y \in \Sigma$.

(ii) Για κάθε $\Sigma \otimes T$- μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \times \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ οι συναρτήσεις $f_x : \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ και $f^y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι T- και Σ- μετρήσιμες, αντίστοιχα.

Θεώρημα Α.1.3. *(Fubini για δείκτριες συναρτήσεις) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π., και $E \in \Sigma \otimes T$ αυθαίρετο αλλά σταθερό. Τότε η συνάρτηση $Q(E_\bullet) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ με $x \longrightarrow Q(E_x)$ είναι Σ-μετρήσιμη και η συνάρτηση $P(E^\bullet) : \Upsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ με $y \longrightarrow P(E^y)$ είναι T-μετρήσιμη και ισχύει*

$$\int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy). \tag{A.1}$$

Θεώρημα Α.1.4. *(Ύπαρξη και μοναδικότητα του μέτρου γινόμενο) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $P \otimes Q : \ \Sigma \otimes T \longrightarrow [0, 1]$ ώστε*

$$(P \otimes Q)(A \times B) = P(A)Q(B)$$

για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Το μέτρο $P \otimes Q$ ονομάζεται το **μέτρο γινόμενο** *των P και Q, Επιπλέον, για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ ισχύει*

$$(P \otimes Q)(E) = \int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy).$$

Για τις αποδείξεις των τριών τελευταίων αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [4, Theorem 5.1.3]

Θεώρημα Α.1.5. *(Fubini για μη αρνητικές συναρτήσεις) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π.. Για κάθε $f : \Omega \times \Upsilon \longrightarrow [0, \infty] \quad \Sigma \otimes T - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη συνάρτηση θέτουμε*

$$\varphi_f : \Omega \longrightarrow [0, \infty] \quad \text{με} \quad \varphi_f(x) := \int_\Upsilon f_x(y)Q(dy)$$

και

$$\psi_f : \Upsilon \longrightarrow [0, \infty] \quad \text{με} \quad \psi_f(y) := \int_\Omega f^y(x)Q(dx).$$

Τότε η φ_f είναι $\Sigma - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη, η η ψ_f είναι $T - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη και ισχύει

$$\int_{\Omega \times \Upsilon} f dP \otimes Q = \int_\Omega \varphi_f dP = \int_\Upsilon \psi_f dQ$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \times \Upsilon} f d(P \otimes Q) &= \int_\Omega \int_\Upsilon f(x, y)Q(dy)P(dx) \\ &= \int_\Upsilon \int_\Omega f(x, y)P(dx)Q(dy) \end{aligned}$$

Για την απόδειξη βλ. [4, Proposition 5.2.1]

Θεώρημα A.1.6. *(Fubini) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. και $f : \Omega \times \Upsilon \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ me $f \in \mathcal{L}^1(P \otimes Q)$. Τότε*

(i)

$$f_x \in \mathcal{L}^1(Q), \quad \text{για} \quad P - \sigma.o \quad \text{τα} \quad x \in \Omega$$

και

$$f^y \in \mathcal{L}^1(P), \quad \text{για} \quad Q - \sigma.o \quad \text{τα} \quad y \in \Upsilon,$$

(ii) οι συναρτήσεις $\varphi_f : \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *με* $\varphi_f(x) := \begin{cases} \int_\Upsilon f_x(y)Q(dy), & \text{αν} \quad f_x \in \mathcal{L}^1(Q) \\ 0, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$ *kai*

$\psi_f : \Upsilon \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ *με* $\psi_f(y) := \begin{cases} \int_\Omega f^y(x)P(dx), & \text{αν} \quad f^y \in \mathcal{L}^1(P) \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$ *ανήκουν στον* $\mathcal{L}^1(P)$ *και* $\mathcal{L}^1(Q)$, *αντίστοιχα,*

(iii) ισχύει

$$\int_{\Omega\times\Upsilon} f d(P \otimes Q) = \int_\Omega \varphi_f dP = \int_\Upsilon \psi_f dQ$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\times\Upsilon} f d(P \otimes Q) &= \int_\Omega \int_\Upsilon f(x, y)Q(dy)P(dx) \\ &= \int_\Upsilon \int_\Omega f(x, y)P(dx)Q(dy) \end{aligned}$$

όπου θέτουμε

$$\int_\Upsilon f(x, y)Q(dy) = 0, \quad \text{αν} \quad f_x \notin \mathcal{L}^1(Q)$$

και

$$\int_\Omega f(x, y)P(dx) = 0, \quad \text{αν} \quad f^y \notin \mathcal{L}^1(P).$$

Για την απόδειξη βλ. [4, Theorem 5.2.2].

A.2 Θεώρημα της μονότονης κλάσης για σύνολα

Λήμμα A.2.1. *Έστω Ω ένα σύνολο και $\mathcal{D}$ μια οικογένεια στοιχείων του Ω. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα*

(i) **(Dyn1')** $\Omega \in \mathcal{D}$

(Dyn2') $B \setminus A \in \mathcal{D}$, *για* $A, B \in \mathcal{D}$ *και* $A \subseteq B$

(Dyn3') $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, *για κάθε αύξουσα ακολουθία* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *υποσυνόλων στο* $\mathcal{D}$.

(ii) **(Dyn1)** $\emptyset \in \mathcal{D}$

(Dyn2) $\Omega \setminus A \in \mathcal{D}$, *για κάθε* $A \in \mathcal{D}$

(Dyn3) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$, *για κάθε ακολουθία* $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *ξένων ανα δύο υποσυνόλων στο* $\mathcal{D}$.

Ορισμός Α.2.2. Ένας δυαδικός ρητός είναι ένας αριθμός ο οποίος μπορεί να γραφεί στη μορφή $i/2^n$ για ακέραιο i και μη αρνητικό ακέραιο n. Εάν ο x είναι δυαδικός ρητός που ανήκει στο διάστημα (0,1), τότε ο x μπορεί να γραφεί στη μορφή $i/2^n$ όπου n ένας θετικός ακέραιος και i ένας περιττός ακέραιος τέτοιος ώστε $0 < i < 2^n$. Ένας τέτοιος x έχει μία δυαδική επέκταση $0.b_1b_2\ldots b_n$ όπου υπάρχουν ακριβώς n ψηφία (δυαδικά) και το b_n το δεξιότερο των οποίων ισούται με 1. Ένα τέτοιο x έχει μία ατελείωτη δυαδική επέκταση όταν b_n ισούται με 0 και όλα τα επόμενα ψηφία $(b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots)$ είναι ίσα με 1. Αυτοί οι δυαδικοί ρητοί είναι οι μόνοι στο (0,1) οι οποίοι έχουν παραπάνω από μία δυαδική επέκταση. Για να γίνει πιο κατανοητό έστω ο x έχει τις δυαδικές επεκτάσεις $0.b_1b_2\ldots$ και $0.c_1c_2\cdots$ και έστω n_0 ο μικρότερος n για τον οποίο ισχύει $b_n \neq c_n$ (έστω $b_{n_0} = 0$ και $c_{n_0} = 1$). Αυτό μπορεί να συμβεί μόνο στην περίπτωση που $b_{n_0+1} = b_{n_0+2} = \ldots = 1$ και $c_{n_0+1} = c_{n_0+2} = \ldots = 0$.

Παράρτημα B

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Στο παράρτημα αυτό δίνονται ορισμένοι βασικοί ορισμοί της Θεωρίας Πιθανοτήτων καθώς και οι κατανομές πιθανότητας που αναφέρθηκαν στην παρούσα εργασία.

B.1 Χρήσιμοι Ορισμοί

Ορισμός B.1.1. *Η συνάρτηση* $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ *που δίνεται από την*

$$\Gamma(\gamma) := \int_0^\infty e^{-x} x^{\gamma-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Γάμμα**.

Η συνάρτηση Γάμμα έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(\gamma+1) &= \gamma\Gamma(\gamma) \end{aligned}$$

Επιπλέον για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{B.1}$$

Δηλαδή, οι τιμές της Γάμμα για $n \in \mathbb{N}_0$, αντιστοιχούν σε παραγωντικά.

Ορισμός B.1.2. *Η συνάρτηση* $B : (0, \infty) \times (0, \infty)$ *που δίνεται από την*

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Βήτα**.

Η θεμελιώδης ταυτότηα για την συνάρτηση Βήτα είναι

$$B(\alpha,\beta)=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιότητες της συνάρτησης Βήτα εξαρτώνται απο την συνάρτηση Γαμμα.

Ορισμός B.1.3. *Για $\alpha\in\mathbb{R}$ και $m\in\mathbb{N}_0$ ο γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής ορίζεται να είναι*

$$\binom{\alpha}{m}:=\prod_{j=0}^{m-1}\frac{a-j}{m-j}. \tag{B.2}$$

Πόρισμα B.1.4. *Για $\alpha\in(0,\infty)$ και $m\in\mathbb{N}_0$, από τις ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα ισχύει*

$$\binom{a+m-1}{m}=\frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!} \tag{B.3}$$

Απόδειξη. Για $\alpha\in(0,\infty)$ και $m\in\mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\binom{a+m-1}{m} &= \prod_{j=0}^{m-1}\frac{a+m-1-j}{m-j}=\frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots m}\\ &= \frac{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\dots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot m!}=\frac{(a+m-1)!}{(a-1)!\cdot m!}\\ &= \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!}.\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του ορισμού του διωνυμικου συντελεστή και η τελευταία απο την ιδιότητα (B.1) της συνάρτησης Γάμμα. □

Ορισμός B.1.5. *Έστω (Ω,Σ,P) ένας χ.π. Μία συνάρτηση $X:\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ ονομάζεται* **τυχαία μεταβλητή** *(τ.μ. για συντομία), αν για κάθε $B\in\mathcal{B}$ ισχύει $X^{-1}(B)\in\Sigma$. Για μια τ.μ X: $\Omega\to\mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X:\mathfrak{B}\to\mathbb{R}$ με τύπο*

$$P_X(B):=P(X^{-1}(B))\quad \textit{για κάθε}\quad B\in\mathfrak{B}$$

είναι ένα μέτρο πιθανότητας και ονομάζεται **κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X**. *Μάλιστα, αν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\})=1$, τότε η P_X ονομάζεται* **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)** *(degenerate (probability) distribution).*

Η P_X (αντίστοιχα η τ.μ. X) παράγει την **συνάρτηση κατανομής** *(σ.κ.) $F_X:\mathbb{R}\to[0,1]$* **της τ.μ.** *X, που ορίζεται από τον τύπο:*

$$F_X(x):=P_X\left((-\infty,x]\right)=P(X\le x)\quad \textit{για κάθε}\quad x\in\mathbb{R}.$$

Από Πρόταση 1.4.9, [2], αποδεικνύεται πως η F_X είναι πράγματι σ.κ. Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως η σ.κ. F_X μιας τ.μ. X ικανοποιεί τη σχέση:

$$P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}, B \in \mathfrak{B}.$$

όπου $\lambda_{F_X}(B)$ είναι μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την F_X (βλ. π.χ [2], Πρόταση 1.4.10).

Μια (σ.κ.) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται:

- **Διακριτή** *αν και μόνο αν είναι της μορφής*

$$F(x) = \sum_{k \in K : k \leq x} f(k) \quad \textit{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}_+$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** *(σ.π.) της F.*

- **Συνεχής** *αν η F είναι συνεχής συνάρτηση.*

- **Απόλυτα Συνεχής** *αν είναι της μορφής:*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \textit{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (*σ.π.π.*).

Προφανώς, αν η τ.μ. X είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας συνεχής τ.μ. θα εννοούμε απόλυτα συνεχής τ.μ. Επίσης θα λέμε ότι η τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$, όπου $m \in \mathbb{N}$ και $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν και μόνο αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x) \chi_{R_X} d\nu(x) = \int_{B \cap R_X} f_X(x) d\nu(x) \quad \textit{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

όπου f_X η αντίστοιχη σ.(π.)π., και ν το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}_0$ ή το μέτρο του Lebesgue λ επάνω στο $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. X είναι συνεχής ή διακριτή.
Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το R_X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Ορισμός Β.1.6. *Για μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα*

$$\mathbb{E}_P[X] := \int X dP = \int_\Omega X(\omega)P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega)dP(\omega)$$

ονομάζεται η **μέση τιμή** *ή* **αναμενόμενη τιμή** *ή* **μαθηματική ελπίδα** *της τ.μ. X. Για λόγους απλοποίησης μπορούμε να γράψουμε $\mathbb{E}[X]$ αντί $\mathbb{E}_P[X]$. Ειδικά αν η τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, και είναι ένας αριθμός.*

Ορισμός Β.1.7. *Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Ένα $R \subseteq \Omega\times\Upsilon$ ονομάζεται* **μετρήσιμο ορθογώνιο του** *$\Omega \times \Upsilon$ αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επιπρόσθετα, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται* **σ-άλγεβρα γινόμενο** *των Σ και T και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.*

Έστω επίσης ο χ.π. $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μέτρο ρ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των** *P* **και** *Q και συμβολίζεται με $P \otimes Q$, αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = P(A)Q(B)$. Η τριάδα $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, P \otimes Q)$ ονομάζεται* **χ.π. γινόμενο**.

Ορισμός Β.1.8. *Εάν I είναι ένα οποιοδήποτε μή κενό σύνολο δεικτών, και $\{\Omega_i, \Sigma_i, P_i\}_{i\in I}$ είναι μια οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\varnothing \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον χ.π. γινόμενο $\otimes_{i\in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := (\prod_{i\in J} \Omega_i \otimes_{i\in J} \Sigma_i \otimes_{i\in J} P_i)$. Αν (Ω, Σ, P) είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με P^I την* **πιθανότητα γινόμενο** *στον Ω^I και με Σ^I το πεδίο ορισμού του P^I.*

Ορισμοί Β.1.9. *Τα ενδεχόμενα $A_1, \dots, A_n \in \Sigma$ $(n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 2)$ ονομάζονται* **ανεξάρτητα** *αν και μόνο αν $P\left(\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^k P(A_{i_j})$ για κάθε $1 \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ομοίως, οι τ.μ. $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 2)$ ονομάζονται* **ανεξάρτητες** *αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ πραγματικών αριθμών, τα ενδεχόμενα $\{X_k \leq \alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ. $X_1, \dots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ στοιχείων της $\mathfrak{B}$ τα ενδεχόμενα $\{X_k \in B_k\}_{k\in\mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ.[2, Παρατήρηση 3.2.5], (b)). Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται* **ανεξάρτητη** *αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.*

Οι σ-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \dots, \Sigma_n$ $(n \in \mathbb{N}_0 : n \geq 2)$ της Σ ονομάζονται **ανεξάρτητες** *αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \dots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται* **οικογένεια ανεξάρτητων σ-υποαλγεβρών της** *Σ αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε πεπερασμένες στο πλήθος από αυτές, είναι ανεξάρτητες.*

Ορισμοί Β.1.10. *Μία οικογένεια $\{X_j\}_{j\in I}$, όπου I ένα μερικώς διατεταγμένο σύνολο (βλ. π.χ. [1, Ορισμός 1.19]), μετρήσιμων συναρτήσεων $X_j : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ $(j \in I)$ ονομάζεται* **στοχαστική**

διαδικασία (σ.δ.) ή στοχαστική ανέλιξη. *Επιπλέον, αν το I είναι ένα υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\overline{\mathbb{R}}$ τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια* **σ.δ. συνεχούς χρόνου**, *ενώ αν το $I \subseteq \mathbb{Z}$, τότε λέμε ότι η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι μια* **σ.δ. διακριτού χρόνου**.

Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$:

- *Είναι μια* **σ.δ. ανεξάρτητων προσαυξήσεων** *ή έχει* **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** *αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ οι* **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ *($j \in \mathbb{N}_m$) είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.*

- *Είναι μια* **σ.δ. στάσιμων προσαυξήσεων** *ή έχει* **στάσιμες προσαυξήσεις** *αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\mathbb{N}_m}$, έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m}$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}_0$ και για κάθε $h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{(X_{t_j+h}-X_{t_{j-1}+h})_{j\in\mathbb{N}_m}} = P_{(X_{t_j}-X_{t_{j-1}})_{j\in\mathbb{N}_m}}$.*

Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\xi} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **το μέτρο απαρίθμησης** που συγκεντρώνεται στο $\mathbb{N}_0$, και με $\boldsymbol{\lambda} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **το μέτρο Lebesgue**. Τα μέτρα αυτά είναι σ-πεπερασμένα, και τα πιο σημαντικά μέτρα πιθανότητας με πεδίο ορισμού την $\mathfrak{B}$ είναι απόλυτα συνεχή με τα $\boldsymbol{\xi}$ και $\boldsymbol{\lambda}$.

Για $n \in \mathbb{N}_0$, συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\lambda}^n : \mathfrak{B}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ το n-διάστατο μέτρο Lebesgue.

B.2 Γενικές έννοιες στις κατανομές

Ένα μέτρο πιθανότητας $Q : \mathfrak{B}_n \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **κατανομή** (distribution).

Μια κατανομή ονομάζεται **εκφυλισμένη** (degenerate) αν υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Στην συνέχεια του παρόντος παραρτήματος θεωρούμε μόνο κατανομές με πεδίο ορισμού το $\mathfrak{B}$.

Για $y \in \mathbb{R}$, η **κατανομή Dirac** δ_y ορίζεται να είναι η (εκφυλισμένη) κατανομή Q που ικανοποιεί την

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Λόγω του ιδιαίτερου ρόλου της κατανομής Dirac, όλες οι παραμετρικές κλάσεις των κατανομών που μελετούνται παρακάτω ορίζονται ως μη-εκφυλισμένες κατανομές.

Θεωρούμε τις κατανομές $Q, R : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$.

Μέση Τιμή και Ροπές ανώτερης τάξης

Ορισμός Β.2.1. *Αν*

$$\min\left\{\int_{(-\infty,0]}(-x)Q(dx), \int_{\mathbb{R}_+} xQ(dx)\right\} < \infty,$$

τότε **η μέση τιμή** *της Q υπάρχει και ορίζεται από την σχέση*

$$E[Q] := \int_{\mathbb{R}} xQ(dx).$$

Αν

$$\max\left\{\int_{(-\infty,0]}(-x)Q(dx), \int_{\mathbb{R}_+} xQ(dx)\right\} < \infty,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}} |x|Q(dx) < \infty$$

τότε η μέση τιμή της Q υπάρχει και ονομάζεται **πεπερασμένη μέση τιμή**.

Ορισμός Β.2.2. *Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty,$$

τότε λέμε ότι η Q έχει **πεπερασμένη ροπή τάξης n** *ή έχει* **n−οστή ροπή** *που ορίζεται από την σχέση*

$$E[Q^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx).$$

Η κατανομή Q λέμε ότι έχει πεπερασμένες ροπές τάξης k αν η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty$$

ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$.
Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν η Q έχει πεπερασμένη ροπή τάξης n, τότε έχει πεπερασμένη ροπή τάξης k για όλα τα $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Διακύμανση και Συντελεστής μεταβλητότητας

Ορισμός Β.2.3. *Αν η Q έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε* **η διακύμανση** *της Q ορίζεται να είναι*

$$Var[Q] := \int_{\mathbb{R}} (x - E[Q])^2 Q(dx).$$

Προφανώς ισχύει

$$Var[Q] = E[Q^2] - E[Q]^2.$$

Ορισμός Β.2.4. *Αν για την Q ισχύει ότι $Q[\mathbb{R}_+ = 1$ και $E[Q] \in (0,\infty)$, τότε* **ο συντελεστής μεταβλητότητας** *της Q ορίζεται από την σχέση*

$$v[Q] := \frac{\sqrt{Var[Q]}}{E[Q]}.$$

Χαρακτηριστική συνάρτηση

Ορισμός Β.2.5. Η χαρακτηριστική συνάρτηση *ή* **ο μετασχηματισμός Fourier** *της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $\varphi_Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ που δίνεται από την*

$$\varphi_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izx} Q(dx)$$

με $\varphi_Q(0) = 1$.

Ένα αποτέλεσμα των μετασχηματισμών Fourier είναι ότι η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την χαρακτηριστική της συνάρτηση φ_Q.

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Β.2.6. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση *της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $M_Q : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty]$ που δίνεται από την*

$$M_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{zx} Q(dx)$$

με $M_Q(0) = 1$.

Αν η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Q είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή γύρω από το μηδέν, τότε η Q έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\frac{d^n M_Q}{dz^n}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx). \tag{B.4}$$

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός Β.2.7. *Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$ τότε* **η πιθανογεννήτρια συνάρτηση** *της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $m_Q : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται από την*

$$\begin{aligned} m_Q(z) &:= \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n Q[\{n\}]. \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n m_Q}{dz^n}(0) = Q[\{n\}], \tag{B.5}$$

η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την πιθανογεννήτρια συνάρτησή της m_Q.

Πρόταση Β.2.8. *Έστω ότι $Q[\mathbb{N}_0] = 1$. Τότε οι δύο πρώτες ροπές της κατανομής Q υπολογίζονται άμεσα από την πιθανογεννήτρια συνάρτηση σύμφωνα με τις σχέσεις*

$$E[Q] = \frac{d}{dz}m_Q(z)\Big|_{z=1} \tag{B.6}$$

$$E[Q^2] = \frac{d^2}{dz^2}m_Q(z)\Big|_{z=1} + \frac{d}{dz}m_Q(z)\Big|_{z=1} \tag{B.7}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον Ορισμό Β.2.7 ισχύει

$$m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx)$$

επομένως αν παραγωγίσουμε ως προς z θα ισχύει

$$\frac{d}{dz}m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} x z^{x-1} Q(dx)$$

άρα για $z = 1$ θα έχουμε ότι

$$\frac{d}{dz}m_Q(z)\Big|_{z=1} = \int_{\mathbb{R}} xQ(dx) = E[Q].$$

Αν βρούμε και την δεύτερη παράγωγο της πιθανογεννήτριας συνάρτησης ως προς z θα ισχύει

$$\frac{d^2}{dz^2}m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} x(x-1)z^{x-2}Q(dx)$$

άρα για $z = 1$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dz^2}m_Q(z)\Big|_{z=1} &= \int_{\mathbb{R}} x(x-1)Q(dx)\\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2Q(dx) - \int_{\mathbb{R}} xQ(dx)\\ &= E[Q^2] - E[Q]\end{aligned}$$

επομένως για την δεύτερη ροπή θα ισχύει

$$\begin{aligned}E[Q^2] &= \frac{d^2}{dz^2}m_Q(z)\Big|_{z=1} + E[Q]\\ &= \frac{d^2}{dz^2}m_Q(z)\Big|_{z=1} + \frac{d}{dz}m_Q(z)\Big|_{z=1}\end{aligned}$$

□

Συνέλιξη

Ορισμός Β.2.9. *Αν η* $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *είναι μια απεικόνιση με* $+(x,y) := x+y$, *τότε η είναι μια κατανομή, η οποία ονομάζεται* **συνέλιξη** *των* Q *και* R.

Οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι άμεσες συνέπειες του Ορισμού Β.2.9 και του Θεωρήματος Fubini για μέτρα (βλ. Θεώρημα Α.1.4).

Πρόταση Β.2.10. *Η ισότητα*

$$(Q * R)(B) = \int_{\mathbb{R}} Q(B-y)R(dy)$$

ισχύει για κάθε $B \in \mathfrak{B}$. *Ιδιαιτέρως ισχύει*

$$(Q * \delta_y)(B) = (\delta_y * Q)(B) = Q(B-y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$ *και* $b \in \mathfrak{B}$.

Απόδειξη. Έστω $B \in \mathfrak{B}$. Τότε

$$\begin{aligned} (Q * R)(B) &= (Q \otimes R)_+(B) \\ &:= (Q \otimes R)(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \in B\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q(\{x \in \mathbb{R} : x \in B-y\})R(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q(B-y)R(dy), \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος Α.1.4.

Ιδιαιτέρώς για οποιαδήποτε $y \in \mathbb{R}$ και $B \in \mathfrak{B}$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (Q * \delta_y)(B) &= (\delta_y * Q)(B) \\ &= (Q \otimes \delta_y)_+(B) \\ &= Q \otimes \delta_y(\{(x,\bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : x+\bar{y} \in B\}) \\ &= \int_{\mathbb{R}} Q(B-\bar{y})\delta_y(d\bar{y}) \\ &= Q(B-y), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος Α.1.4. □

Πρόταση Β.2.11. *Η συνέλιξη ικανοποιεί τις ισότητες*

$$Q * R = R * Q$$

$$\varphi_{Q*R} = \varphi_Q \cdot \varphi_R$$

$$M_{Q*R} = M_Q \cdot M_R$$

Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1 = R[\mathbb{N}_0]$, *τότε ισχύει*

$$m_{Q*R} = m_Q \cdot m_R.$$

Πρόταση B.2.12. *Αν οι κατανομές* Q *και* R *έχουν πεπερασμένη μέση τιμή τότε ισχύει*

$$E[Q * R] = E[Q] + E[R]$$

και αν επιπλέον έχουν και πεπερασμένες δεύτερες ροπές τότε

$$Var[Q * R] = Var[Q] + Var[R].$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση B.2.12 για την ροπογεννήτρια της $Q * R$ ισχύει $M_{Q*R} = M_Q \cdot M_R$. Επιπλέον από την B.4 ισχύει ότι

$$E[Q * R] = \frac{dM_{Q*R}}{dz}(0), \quad \mathbb{E}[(Q * R)^2] = \frac{d^2 M_{Q*R}}{dz^2}(0).$$

Επομένως θα ισχύει

$$\begin{aligned} M'_{Q*R}(z) &= \Big(M_Q(z) \cdot M_R(z)\Big)' = M'_Q(z)M_R(z) + M_Q(z)M'_R(z) \\ M''_{Q*R}(z) &= \Big(M_Q(z) \cdot M_R(z)\Big)'' = M''_Q(z)M_R(z) + 2M'_Q(z)M'_R(z) + M_Q(z)M''_R(z) \end{aligned}$$

και άρα θα ισχύει

$$\begin{aligned} E[Q * R] &= M'_{Q*R}(0) \overset{(B.4)}{=} E[Q] + E[R] \\ \mathbb{E}[(Q * R)^2] &= M''_{Q*R}(0) \overset{(B.4)}{=} E[Q^2] + 2E[Q]E[R] + E[R^2]. \end{aligned}$$

Επομένως για την διακύμανση θα ισχύει

$$\begin{aligned} Var[Q * R] &= \mathbb{E}[(Q * R)^2] - E[Q * R]^2 \\ &= E[Q^2] + 2E[Q]E[R] + E[R^2] - E[Q]^2 - 2E[Q]E[R] - E[R]^2 \\ &= E[Q^2] - E[Q]^2 + E[R^2] - E[R]^2 \\ &= Var[Q] + Var[R] \end{aligned}$$

□

Πρόταση B.2.13. *Αν* $Q = \int f\, d\nu$ *και* $R = \int g\, d\nu$ *για* $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, *τότε* $Q * R = \int f * g\, d\nu$, *όπου η απεικόνιση* $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ *ορίζεται*

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)\nu(dy).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση Β.2.10, για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ θα ισχύει

$$\begin{aligned}[Q * R](B) &= \int_{\mathbb{R}} Q[B-y]R(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{B-y} f(x)\nu(dx)\; g(y)\nu(dy)\end{aligned}$$

□

Ορισμός Β.2.14. *Για $n \in \mathbb{N}_0$, η n-οστή συνέλιξη της Q όριζεται από την σχέση*

$$Q^{*n} := \begin{cases} \delta_0, & \text{αν } n = 0 \\ Q * Q^{*(n-1)}, & \text{αν } n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Αν η $Q = \int f\, d\nu$, για $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, τότε η συνάρτηση πιθανότητας της Q^{*n} ως προς το μέτρο ν συμβολίζεται f^{*n}.

Β.3 Διακριτές κατανομές

Ορισμός Β.3.1. *Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται* **διακριτή**, *αν υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $S \in \mathfrak{B}$ που ικανιποιεί την $Q[S] = 1$. Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$, τότε η Q είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο απαρίθμισης $\boldsymbol{\xi}$.*

Η διωνυμική κατανομή

Ορισμός Β.3.2. *Για $m \in \mathbb{N}_0$ και $\theta \in (0,1)$, η* **διωνυμική κατανομή** $\mathbf{B}(m, \theta)$ *ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \{0, 1, \ldots, m\}$ ικανοποιεί την σχέση*

$$Q[\{x\}] = \binom{m}{x} \theta^x (1-\theta)^{m-x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:

$$E[Q] = m\theta$$

- Διακύμανση:

$$Var[Q] = m\theta(1-\theta)$$

- Χαρακτηριστική συνάρτηση:

$$\varphi_Q(z) = \big((1-\theta) + \theta e^{iz}\big)^m$$

- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_Q(z) = ((1-\theta) + \theta e^z)^m$$

- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:

$$m_Q(z) = ((1-\theta) + \theta z)^m$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Bernoulli** με $\mathbf{B}(\theta) := \mathbf{B}(1, \theta)$

Η αρνητική διωνυμική κατανομή

Ορισμός B.3.3. *Για $\alpha \in (0, \infty)$ και $\theta \in (0, 1)$,* **η αρνητική διωνυμική κατανομή** $\mathbf{NB}(\alpha, \theta)$ *ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση*

$$Q[\{x\}] = \binom{\alpha + x - 1}{x} \theta^\alpha (1-\theta)^x.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:

$$E[Q] = \alpha \frac{1-\theta}{\theta}$$

- Διακύμανση:

$$Var[Q] = \alpha \frac{1-\theta}{\theta^2}$$

- Χαρακτηριστική συνάρτηση:

$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1 - (1-\theta)e^{iz}} \right)^\alpha$$

- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:

$$M_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1 - (1-\theta)e^{z}} \right)^\alpha \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(1-\theta))$$

- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:

$$m_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1 - (1-\theta)z} \right)^\alpha$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Pascal** με $\mathbf{NB}(m, \theta)$ για $m \in \mathbb{N}_0$.

Η κατανομή Poisson

Ορισμός B.3.4. *Για $\alpha \in (0, \infty)$,* **η κατανομή Poisson $\mathbf{P}(\alpha)$** *ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση*

$$Q[\{x\}] = e^{-\alpha}\frac{\alpha^x}{x!}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \alpha$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \alpha$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = e^{\alpha(e^{iz}-1)}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = e^{\alpha(e^{z}-1)}$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = e^{\alpha(z-1)}$$

Η κατανομή Delaporte

Ορισμός B.3.5. *Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ και $\theta \in (0, 1)$,* **η κατανομή Delaporte $\mathbf{Del}(\alpha, \beta, \theta)$** *ορίζεται να είναι η κατανομή*

$$Q := \mathbf{P}(\alpha) * \mathbf{NB}(\beta, \theta).$$

Η γεωμετρική κατανομή

Ορισμός B.3.6. *Για $m \in \mathbb{N}_0$ και $\theta \in (0, 1)$,* **η γεωμετρική κατανομή $\mathbf{Geo}(m, \theta)$** *ορίζεται να είναι η κατανομή*

$$Q := \boldsymbol{\delta}_m * \mathbf{NB}(m, \theta).$$

Ειδική περίπτωση: **Η μονο-παραμετρική γεωμετρική κατανομή** με $\mathbf{Geo}(\theta) := \mathbf{Geo}(1, \theta)$

Η λογαριθμική κατανομή

Ορισμός Β.3.7. *Για $\theta \in (0,1)$,* **η λογαριθμική κατανομή Log**(θ) *ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση*

$$Q[\{x\}] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta^x}{x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta}{1-\theta}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{|\ln(1-\theta)|-\theta}{|\ln(1-\theta)|^2}\frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{iz})}{\ln(1-\theta)}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{z})}{\ln(1-\theta)}, \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(\theta))$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta z)}{\ln(1-\theta)}$$

Β.4 Συνεχείς κατανομές

Ορισμός Β.4.1. *Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται* **συνεχής**, *αν είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue* $\boldsymbol{\lambda}$.

Η κατανομή Βήτα

Ορισμός Β.4.2. *Για $\alpha, \beta \in (0,\infty)$,* **η κατανομή Βήτα Be**(α,β) *ορίζεται να είναι η κατανομή*

$$Q := \int \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\chi_{(0,1)}(x)\boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$

- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Ειδική περίπτωση: **Η ομοιόμορφη κατανομή** $\mathbf{U}(0,1) := \mathbf{Be}(1,1)$.

Η κατανομή Γάμμα (Δύο παραμέτρων)

Ορισμός Β.4.3. *Για* $\alpha, \beta \in (0,\infty)$, **η κατανομή Γάμμα** $\mathbf{Ga}(\alpha,\beta)$ *ορίζεται να είναι η κατανομή*
$$Q := \int \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x} x^{\beta-1} \chi_{(0,\infty)}(x) \boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \frac{\beta}{\alpha}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\beta}{\alpha^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - iz}\right)^\beta$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - z}\right)^\beta \quad \forall z \in (-\infty, \alpha)$$

Ειδικές περιπτώσεις:

- **Η κατανομή Erlang** $\mathbf{Ga}(\alpha, m)$, με $m \in \mathbb{N}_0$.
- **Η εκθετική κατανομή** $\mathbf{Exp}(\alpha) := \mathbf{Ga}(\alpha, 1)$.
- **Η** $\boldsymbol{\chi^2}$ **κατανομή** $\boldsymbol{\chi}^2_m := \mathbf{Ga}(\frac{1}{2}, \frac{m}{2})$, με $m \in \mathbb{N}_0$.

Η κατανομή Γάμμα (Τριών παραμέτρων)

Ορισμός Β.4.4. *Για* $\alpha, \beta \in (0,\infty)$ *και* $\gamma \in \mathbb{R}$, **η κατανομή Γάμμα** $\mathbf{Ga}(\alpha,\beta,\gamma)$ *ορίζεται να είναι η κατανομή*
$$Q := \boldsymbol{\delta}_\gamma * \mathbf{Ga}(\alpha,\beta).$$

Ειδική περίπτωση: Η κατανομή Γάμμα με δυο παραμέτρους $\mathbf{Ga}(\alpha,\beta) = \mathbf{Ga}(\alpha,\beta,0)$.

Η κατανομή Pareto

Ορισμός Β.4.5. *Για* $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, **η κατανομή Pareto Par**(α, β) *ορίζεται να είναι η κατανομή*

$$Q := \int \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha + x} \right)^{\beta+1} \chi_{0,\infty}(x) \boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βιβλιογραφία

[1] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2005), *Σημειώσεις Πραγματικής Ανάλυσης*, Πειραιάς.

[2] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2006), *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πειραιάς.

[3] Bauer, H. (2001), *Wahrscheinlichkeitstheorie*, de Gruyter, Lehrbuch

[4] Donald L. Cohn (2013), *Measure Theory*, Second Edition, Birkhäuser

[5] Χελιώτης *Εισαγωγή στον Στοχαστικό Λογισμό*

[6] Ioannis Karatzas , Second Edition *Brownian Motion and Stochastic Calculus*

[7] Chung, K. L. (1974), *A course in Probability Theory*

[8] R.M.DUDLEY (1989), *Real Analysis and Probability*, Wadsworth and Brooks/Cole, Pacific Grove, California.

[9] Lévy, P. (1948), Processus Stochastiques et Mouvement Brownien, Gauthier-Villars, Paris.

[10] Wiener, N.(1923), Differential space, J.Math Phys.2, 131-174

[11] Ciesielski, Z (1961), Hölder condition for realizations of Gaussian processes, Trans.Amer. Math. Soc. 99, 403-413

[12] Black, F and Scholes, M. (1973) The pricing of options and corporate liabilities, J.Polt.Aconomy 81, 637-659

[13] E.S.Andersen and B.Jensen (1948) *On the introduction of measures in infinite product sets*, Danske Vid.Selsk.Mat.-Fys.Medd 25, no.4.

[14] Hoffmann-Jorgensen (1987) *The general marginal problem*, Lecture Notes in Math. 1242, 77-367, Springe- Verlag, Berlin-Heidelberg-New York

[15] Meyer, P. A. (1966) Probability and Potentials. Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass.

Ευρετήριο Όρων

Ευρετήριο Συμβόλων