ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Το πρόβλημα της αναγωγής των μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών σε μεικτές διαδικασίες Poisson και εφαρμογές

Αποστολόπουλος Παναγιώτης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιούλιος 2018

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΕΙΡΑΙΩΣ

ΣΧΟΛΗ ΧΡΗΜΑΤΟΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΤΜΗΜΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΚΑΙ ΑΣΦΑΛΙΣΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ

ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ
ΣΤΗΝ ΑΝΑΛΟΓΙΣΤΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ
ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΤΙΚΗ ΚΙΝΔΥΝΟΥ

Το πρόβλημα της αναγωγής των μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών σε μεικτές διαδικασίες Poisson και εφαρμογές

Αποστολόπουλος Παναγιώτης

Διπλωματική Εργασία

που υποβλήθηκε στο Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς ως μέρος των απαιτήσεων για την απόκτηση του Μεταπτυχιακού Διπλώματος Ειδίκευσης στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Πειραιάς
Ιούλιος 2018

Η παρούσα Διπλωματική Εργασία εγκρίθηκε ομόφωνα από την Τριμελή Εξεταστική Επιτροπή που ορίσθηκε από τη ΓΣΕΣ του Τμήματος Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς στην υπ'αριθμ 12η, 03/07/17 συνεδρίασή του σύμφωνα με τον Εσωτερικό Κανονισμό Λειτουργίας του Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών στην Αναλογιστική Επιστήμη και Διοικητική Κινδύνου.

Τα μέλη της Επιτροπής ήταν:

- Καθηγητής Νικόλαος Μαχαιράς (Επιβλέπων)
- Αναπληρωτής Καθηγητής Κωνσταντίνος Πολίτης
- Επίκουρος Καθηγητής Γεώργιος Τζαβελάς

Η έγκριση της Διπλωματικής Εργασίας από το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης του Πανεπιστημίου Πειραιώς δεν υποδηλώνει αποδοχή των γνωμών του συγγραφέα.

UNIVERSITY OF PIRAEUS

SCHOOL OF FINANCE
AND STATISTICS

DEPARTMENT OF STATISTICS
AND INSURANCE SCIENCE

POSTGRADUATE PROGRAM IN ACTUARIAL SCIENCE AND RISK MANAGEMENT

The problem of the reduction of mixed renewal processes to mixed Poisson process and applications

Apostolopoulos Panagiotis

MSc Dissertation

submitted to the Department of Statistics and Insurance Science of the University of Piraeus in partial fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science in Actuarial Science and Risk Management.

Piraeus, Greece
July 2018

Στους γονείς μου,
Ελένη και Γιώργο.
Στον αδερφό μου, Νεοκλή.

Ευχαριστίες

Κατ' αρχάς θα ήθελα να ευχαριστήσω ιδιαίτερα τον επιβλέποντα κύριο Νικόλαο Μαχαιρά για την αμέριστη συμπαράσταση του και την πολύτιμη καθοδήγηση, που μου προσέφερε κατά την διάρκεια εκπόνησης της εργασίας. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω και τα άλλα δύο μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής, κύριο Κωνσταντίνο Πολίτη και κύριο Γεώργιο Τζαβελά για την επίβλεψή τους. Επίσης θα ήθελα να ευχαριστήσω τον διδακτορικό φοιτητή Σπύρο Τζανίνη για την βοήθεια που μου προσέφερε. Ακόμη θα ήθελα να ευχαριστήσω το Τμήμα Στατιστικής και Ασφαλιστικής Επιστήμης που μου έδωσε την δυνατότητα να ασχοληθώ με την εν λόγω εργασία.

Περίληψη

Στην εργασία αυτή αρχικά παρουσιάζεται ένας χαρακτηρισμός των διαδικασιών Markov ως μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών. Η κλάση των μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών(MRPs για συντομία) με παράμετρο μείξης ένα τυχαίο διάνυσμα, όπως ορίστηκε από τους Λυμπερόπουλο και Μαχαιρά (διευρύνοντας την αρχική κλάση του Huang), αντικαθίσταται από την αυστηρά ευρύτερη κλάση όλων των επεκταμένων MRPs προσθέτοντας μία δεύτερη παράμετρο μείξης. Αποδεικνύεται κάτω από μία ασθενή συνθήκη, ότι μέσα σε αυτή την μεγαλύτερη κλάση το βασικό πρόβλημα, πότε κάθε διαδικασία Markov είναι μία μεικτή διαδικασία Poisson με μία τ.μ. ως παράμετρο μείξης, έχει μία θετική απάντηση. Αυτό συναπάγεται την ισοδυναμία των διαδικασιών Markov, των μεικτών διαδικασιών Poisson και των διαδικασιών με την πολυωνυμική ιδιότητα εντός αυτής της κλάσης. Σε συγκεκριμένα παραδείγματα, καταδεικνύεται πως να προσδιοριστεί η ιδιότητα Markov με την βοήθεια των παραπάνω αποτελεσμάτων. Μία άλλη συνέπεια είναι η διατήρηση της ιδιότητας Markov κάτω από ορισμένες αλλαγές μέτρων.

Μία δεύτερη σημαντική εφαρμογή του παραπάνω αποτελέσματος είναι η ισοδυναμία των μεικτών διαδικασιών Poisson με παράμετρο μείξης μία πραγματική τ.μ. με εκείνες με παράμετρο μείξης μία κατανομή πιθανότητας όπως επίσης με τις μεικτές διαδικασίες Poisson κατά Huang.

Επιπλέον, δίνονται κάποια παραδείγματα *κανονικών* χώρων πιθανότητας που δέχονται απαριθμήτριες διαδικασίες, τέτοιες ώστε να ισχύει η ισοδυναμία των παραπάνω ορισμών. Τελικά, δίνεται ένας χαρακτηρισμός μεικτών διαδικασιών Poisson μέσω φ.δ.π. και αποδεικνύεται ότι οι υποθέσεις του χαρακτηρισμού αυτού δεν μπορούν να παραλειφθούν.

Abstract

In this paper initially a characterization of Markov processes is presented as mixed renewal processes. The class of mixed renewal (MRPs for short) with a random vector mixing parameter, as defined by Lyberopoulos and Macheras (enlarging the original Huang's class), is replaced by the strictly more comprising class of all extended MRPs by adding a second mixing parameter. It is proven under a mild assumption that within this larger class the basic problem, whether every Markov process is a mixed Poisson process with a random variable as a mixing parameter, has a solution to a positive. This implies the equivalence of Markov processes, mixed Poisson processes and processes with the multinomial property within this class. In concrete examples, Markov's property is identified by means of the above results. Another consequence is the invariance of the Markov property under certain changes of measures.

A second important implementation of the above result is the equivalence of mixed Poisson processes with mixing parameter of a real-valued random with mixing probability distribution as well as to the Poisson process in the sense Huang mixed processes.

In addition, there are some examples of "canonical" probability spaces admiting counting processes, such that the equivalence of the above definitions is true. Finally, a Poisson mixed process characterization is given through regular conditional probability and it is shown that the assumptions of this characterization can not be omitted.

Περιεχόμενα

Κατάλογος Συντομογραφιών

τ.μ.	: Τυχαία μεταβλητή
σ.(π).π.	: Συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας
σ.κ.	: Συνάρτηση κατανομής πιθανότητας
σ.δ.	: Στοχαστική διαδικασία
μ.χ.	: Μετρήσιμος χώρος
χ.π.	: Χώρος Πιθανότητας
χ.σ.	: Χαρακτηριστική συνάρτηση
σ.β.	: Σχεδόν βέβαια
σ.ο.	: Σχεδόν όλα
κ.δ.π	: Κανονική δεσμευμένη πιθανότητα
i.i.d	: Ισοκατανεμημένες και ανεξάρτητες
πρβλ.	: Παράβαλε
MPP	: Μεικτή διαδικασία Poisson
BMPP	: Μεικτή διαδικασία κατά Bühlmann
LMPP	: Μεικτή διαδικασία κατά Lundberg
CMPP	: Σύνθετη μεικτής διαδικασία Poisson
eMRP	: Επεκταμένη μεικτή ανανεωτική διαδικασία
MRP	: Μεικτή ανανεωτική διαδικασία

Εισαγωγή

Για δοσμένο χώρο πιθανότητας (Ω,Σ,P) σύμφωνα με τον Huang [11], Definition 3, μία μεικτή ανανεωτική διαδικασία με παραμέτρους $\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}$ και ν (P-MPP($\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu$) για συντομία), όπου $\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}$ είναι μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στη Σ και ν είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\sigma(\{P_{\bullet}(E) : E \in \Sigma\})$, είναι μία απαριθμήτρια διαδικασία $:= \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ που ικανοποιεί την σχέση

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k \leqslant w_k\}\Big) = \int\prod_{k=1}^{r} P_{\tilde{y}}(\{W_k \leqslant w_k\}\nu(d\tilde{y}).$$

αν η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μία διαδικασία των ενδιάμεσων χρόνων που επάγεται από την N. Αν $(P_{\tilde{y}})_{W_n} = Exp(\alpha(\breve{y}))$ για κάποια θετική μετρήσιμη απεικόνιση α πραγματικής μεταβλητής, μία P-MRP($\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu$) ονομάζεται μία μεικτή διαδικασία Poisson με παραμέτρους $\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}$ και ν (P-MPP($\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu$) για συντομία). Κάτω από την υπόθεση

($*$) Για ν-σχεδόν όλα $\widetilde{y} \in \widetilde{\varUpsilon}$ η συνάρτηση $F_{\widetilde{y}} : \mathbb{R}_+ \longmapsto [0,1]$ ορίζεται με τη βοήθεια του $F_{\widetilde{y}}(t) := P_{\widetilde{y}}(\{W_n \leqslant t\})$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη $(0,\infty)$ με $0 < F'_{\widetilde{y}}(t) < C$ για κάθε $t > 0$, όπου C είναι μια θετική σταθερά, και η συνάρτηση $\alpha : \widetilde{\varUpsilon} \longmapsto (0,\infty)$ ορίζεται με τη βοήθεια του $\alpha(\widetilde{y}) := \lim_{t\to 0} F'_{\widetilde{y}}(t)$ είναι μετρήσιμη,

Huang ([11], Theorem 3) απέδειξε στο βασικό του αποτέλεσμα, ότι μία P-MRP($\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\widetilde{\varUpsilon}}, \nu$) έχει την ιδιότητα Markov αν και μόνο αν είναι μία P-MPP($\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\widetilde{\varUpsilon}}, \nu$).

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να μοντελοποιήσουμε MRPs επάνω στον (Ω,Σ,P) μέσα στην κλάση απαριθμητριών διαδικασιών είναι να υποθέσουμε την ύπαρξη ενός τυχαίου διανύσματος επάνω στον (Ω,Σ,P) έτσι ώστε δοσμένου αυτού του τυχαίου διανύσματος η απαριθμήτρια διαδικασία να συμπεριφέρεται ως μία κανονική ανανεωτική διαδικασία (βλ. Ορισμός **??** (b)). Μία P-MRP($\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu$) είναι πάντα μία MRP του Ορισμού **??** (b), ενώ το αντίστροφο ισχύεο μόνο κάτω από επιπλέον υποθέσεις (βλ. [12], Theorem 4.9).

Μία ειδική περίπτωση μίας MRP με παράμετρο μείξης ένα τυχαίο διάνυσμα είναι μία μεικτή διαδικασία Poisson (MPP για συντομία) με παράμετρο μείξης μία τυχαία μεταβλητή (P-MPP(θ) για συντομία (βλ. Ορισμός 3.2.1). Φαίνεται ότι γενικά δεν υπάρχει σχέση μεταξύ P-MPP($\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu$).

Όμως κάτω από ασθενή υπόθεση της ύπαρξης μίας κατάλληλης φυσιολογικής δεσμευμένης πιθανότητας (φ.δ.π.) μπορεί να αποδειχθεί ότι κάθε (P-MPP(θ) είναι μία P-MPP($\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu$) (βλ. Πρόταση 4.2.1). Η αντίστροφη συνεπαγώγη δεν φαίνεται να ισχύει χωρίς επιλέον υποθέσεις, καθώς δεν είναι γενικά δυνατόν ν βρούμε, για δοσμένη P-MPP($\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu$), μία πραγματικής τ.μ. Θ με $P_\Theta = \nu$. Αλλά ακόμη και αν υπάρχει μία τέτοια Θ, δεν είναι γενικά δυνατόν να κατασκευάσουμε δεσμευμένες πιθανότητες $Q_{\tilde{y}} := Q(\bullet \mid \Theta = \tilde{y})$ για να δείξουμε ότι τα $\tilde{y} \in \tilde{\Upsilon}$ με $\tilde{\Upsilon} = R_\Theta$ όπου R_Θ είναι ένα σύνολο τιμών Θ. Τα παραπάνω εγείρουν το ερώτημα, πότε το αποτέλεσμα του Huang μπορεί να αποδειχθεί για MRPs και MPPs με παραμέτρους μείξης ένα τυχαίο διάνυσμα και μία τ.μ. αντίστοιχα.

Προς αυτή τη κατεύθυνση αποδεικνύεται στο Κεφάλαιο 4, ότι κάτω από μία ασθενής συνθήκη μία MRP με παράμετρο μείξης ένα τυχαίο διάνυσμα είναι διαδικασία Markov, αν και μόνο αν είναι μία P-MPP(Θ), αν και μόνο αν έχει την πολυωνυμική ιδιότητα (βλ. Πρόταση 4.2.7). Στο Θεώρημα 4.2.10, το κύριο αποτέλεσμα του Κεφαλαίου 4, η παραπάνω πρόταση γενικεύεται για την ευρύτερη κλάση των επεκταμένων MRPs (βλ. Ορισμός (α)). Η Πρόταση 4.2.7 και το Θεώρημα 4.2.10 αποδεικνύονται κάτω από την υπόθεση 4.2.6, η οποία είναι ουσιώδης για την ισχύ και των δύο αποτελεσμάτων (βλ. Παρατήρηση 4.2.12 (a)).

Μία συνέπεια του Θεωρήματος 4.2.10 είναι η διατήρηση της ιδιότητας Markov και της πολυωνυμικής ιδιότητας κάτω από την αλλαγή του μέτρου P με τις φ.δ.π. P_θ (βλ. Πόρισμα 4.2.11).

Επιπλέον ενδιαφέρουσες εφαρμογές των παραπάνω αποτελεσμάτων περιέχονται στο Κεφάλαιο 5, όπου κάτω από ασθενείς συνθήκες αποδεικνύεται η ισοδυναμία γνωστών ορισμών των MPPs.

Πιο συγκεκριμένα αποδεικνύεται, ότι κάθε MPP κατά Bühlmann είναι ισοδύναμη με μία MPP(U) (βλ. Πρόταση 5.1.3). Στο Θεώρημα αποδεικνύεται η ισοδυναμία των $MPP(\Theta)$ MPP($\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu$) και MPP(U) κάτω από μία ασθενή υπόθεση, ενώ το Θεώρημα 5.1.7 γενικεύει το Θεώρημα 5.1.6 για επεκταμένες MRPs. Στην Ενότητα 5.2 παρουσιάζονται *κανονικοί* χώροι πιθανότητας όπου ισχύουν τα αποτελέσματα της 5.1 (βλ. Παραδείγματα 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3).

Κεφάλαιο 1

Βασικές Έννοιες και Ορισμοί

Στο συγκεκριμένο κεφάλαιο παρουσιάζονται εισαγωγικές έννοιες και ορισμοί που θα χρησιμοποιηθούν στην παρούσα εργασία. Συμβολίζουμε με: $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, ...\}$ το σύνολο των φυσικών αριθμών, με $\mathbb{Z}$ το σύνολο των ακεραίων αριθμών, με $\mathbb{Q}$ το σύνολο των ρητών αριθμών και με $\mathbb{R}$ το σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Χρησιμοποιούνται επίσης τα εξής σύμβολα: $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Z}^* := \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant 0\}$ και $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\ , +\infty\}$. Όμοια ορίζονται και τα σύνολα: $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{Z}_+^*$ και $\mathbb{Q}_+$, $\mathbb{Q}_+^*$. Ακόμη, με $\mathbb{N}_n$ συμβολίζουμε το σύνολο $\{0, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ και τέλος με $\mathbb{N}_n^*$ το σύνολο $\{1, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$. Με $\mathbb{R}^d$ συμβολίζουμε τον Ευκλείδειο χώρο διάστασης $d \in \mathbb{N}$.

Έστω Ω ένα σύνολο και $A, B \subseteq \Omega$. Τότε με A^c ή $\Omega\backslash A := \{x \in \Omega : x \notin A\}$ συμβολίζεται το **συμπλήρωμα** του A (σε σχέση με το Ω), με $A \uplus B$ συμβολίζεται η **ένωση δύο ξένων μεταξύ τους συνόλων** και με $\biguplus_{i\in I} A_i$ συμβολίζεται η **ένωση μιας οικογένειας** $\{\mathbf{A_i}\}_{\mathbf{i\in I}}(\mathbf{I} \neq \emptyset)$ **ξένων ανά δύο υποσυνόλων του** Ω.

Για κάθε $\mathrm{A} \subseteq \Omega$ με χ_A συμβολίζουμε τη **δείκτρια συνάρτησή** του . Η ταυτοτική συνάρτηση από το Ω στον εαυτό του συμβολίζεται με id_Ω. Για μία απεικόνιση $f : D \longmapsto E$ με R_f ή με $f(D)$ συμβολίζεται το **σύνολο τιμών** της f, δηλ. το σύνολο $\{f(x) : x \in D\}$, και για ένα σύνολο $A \subseteq D$ με $f \restriction A$ συμβολίζεται ο **περιορισμός** της f στο A, ενώ με $f(A)$ συμβολίζεται το σύνολο $\{f(x) : x \in A\}$. Αν $\mathcal{G}$ είναι κάποιο σύστημα υποσυνόλων του Ω, τότε η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του Ω που περιέχει το $\mathcal{G}$, συμβολίζεται με $\sigma(\mathcal{G})$ και ονομάζεται η **σ-άλγεβρα η παραγόμενη από το** $\mathcal{G}$, ενώ το $\mathcal{G}$ ονομάζεται **ένας γεννήτορας της** $\sigma(\mathcal{G})$. Μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ υποσυνόλων του Ω είναι **αριθμήσιμα παραγόμενη**, εάν υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{G}$ υποσυνόλων του Ω για την οποία ισχύει $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{G})$. Τέλος, η ελάχιστη σ-άλγεβρα υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$) που παράγεται από όλα τα ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$ (ή του $\mathbb{R}^n$), ονομάζεται η **Borel σ-άλγεβρα** στο

$\mathbb{R}$ (ή στο $\mathbb{R}^n$) και συμβολίζεται με $\mathfrak{B} := \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (ή $\mathfrak{B}_n := \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$). Τα στοιχεία μιας Borel σ-άλγεβρας, ονομάζονται **σύνολα Borel**. Γενικότερα,αν $\mathfrak{T}$ είναι μία τοπολογία επάνω στο Ω με $\mathfrak{B}(\Omega)$ συμβολίζεται η **σ-άλγεβρα Borel** του Ω, δηλαδή η σ-άλγεβρα στο Ω που παράγεται από την $\mathfrak{T}$.

Στη συνέχεια, και εφόσον δε δηλώνεται διαφορετικά, η τριάδα (Ω, Σ, P) είναι ένας **χώρος πιθανότητας** *(χ.π. για συντομία) και το ζευγάρι (Υ, H) είναι ένας μετρήσιμος χώρος (μ.χ. για συντομία).* Κάθε απεικόνιση $X : \Omega \to \Upsilon$ που είναι Σ-H-μετρήσιμη ονομάζεται **τυχαία μεταβλητή** (τ.μ. για συντομία). Με Σ_0 συμβολίζουμε το σύνολο όλων των στοιχείων $N \in \Sigma$ ώστε $P(N) = 0$. Για τ.μ. $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ γράφουμε $X = Y$ $P-$σχεδόν βέβαια ($P-\sigma$.β. για συντομία), ή $X =_P Y$, αν $\{X \neq Y\} \in \Sigma_0$. Ομοίως , για οποιαδήποτε σύνολα A,B $\in \Sigma$ γράφουμε $A =_P B$ ή $A = B$ ($P-\sigma$.β.), αν $P(A \triangle$B$)=0$.

Μία τ.μ. $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ονομάζεται **ολοκληρώσιμη** ως προς το μέτρο P αν και μόνο αν $\int |f| dP < \infty$. Με $\mathcal{L}^1(P)$ ($\mathcal{L}^1_+(P)$ αντίστοιχα) συμβολίζεται το σύνολο όλων των ολοκληρώσιμων (αντίστοιχα μη αρνητικών ολοκληρώσιμων) συναρτήσεων $f : \Omega \to \mathbb{R}$. Ακόμη με $\mathcal{L}^2(P)$ συμβολίζεται το σύνολο όλων των **τετραγωνικά ολοκληρώσιμων** (δηλαδή όλων των $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε $\int |f|^2 dP < \infty$ − συναρτήσεων).

Έστω $X \in \mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{F}$ μία $\sigma-$υποάλγεβρα του Σ. Κάθε συνάρτηση $Y \in \mathcal{L}^1(P \upharpoonright \mathcal{F})$ που ικανοποιεί για κάθε $A \in \mathcal{F}$ την ισότητα $\int_A X dP = \int_A Y dP$, ονομάζεται **μία εκδοχή της δεσμευμένης μέσης τιμής της** X **δοσμένης της** $\mathcal{F}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{E}_P[X|\mathcal{F}]$. Για $X := \chi_E \in \mathcal{L}^1(P)$ με $E \in \Sigma$ θέτουμε $P(E|\mathcal{F}) := \mathbb{E}_P[\chi_E|\mathcal{F}]$.

Για κάθε απεικόνιση $X : \Omega \to \Upsilon$ θέτουμε

$$\sigma(X) := X^{-1}(H) := \{X^{-1}(B) : B \in H\}.$$

Τότε, η $\sigma(X)$ είναι μια σ-άλγεβρα στο Ω που ονομάζεται η **σ-άλγεβρα στο** Ω **η παραγόμενη από την** X. Αν επιπλέον η X είναι τ.μ. τότε ισχύει $\sigma(X) \subseteq \Sigma$. Μια οικογένεια $\{X_j\}_{j \in I}$ με $I \neq \varnothing$, τ.μ. $X_j : \Omega \to \Upsilon$ ονομάζεται **στοχαστική διαδικασία** ($\sigma.\delta.$ για συντομία) ή **στοχαστική ανέλιξη** από τον μ.χ. (Ω, Σ) στον (Υ, H).

Γενικότερα, για μία $\sigma.\delta.$ $\{X_j\}_{j \in I}$, τ.μ. $X_j : \Omega \to \Upsilon$ ορίζουμε

$$\sigma\left(\{X_j\}_{j \in I}\right) := \sigma\left(\bigcup_{j \in I} \sigma(X_j)\right).$$

Η $\sigma\left(\{X_j\}_{j \in I}\right)$ ονομάζεται η **σ-άλγεβρα η παραγόμενη από την οικογένεια** $\{X_j\}_{j \in I}$.

Μία $\sigma.\delta.$ $\{X_t\}_{t \in J}$ από τον (Ω, Σ) στον (Υ, H) ονομάζεται **ανεξάρτητη** μιας οικογένειας $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$ σ-υποαλγεβρών της Σ, όπου J, $I \neq \varnothing$ σύνολα δεικτών, αν για κάθε πεπερασμένο αριθμό τ.μ. $X_{t_1}, \ldots, X_{t_m}$ και σ-υποαλγεβρών $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ της Σ $(m, n \in \mathbb{N})$, οι σ-(υπο)άλγεβρες $\sigma(X_{t_1}), \ldots, \sigma(X_{t_m}), \Sigma_1, \ldots, \Sigma_n$ είναι ανεξάρτητες.

Έστω $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ μια $\sigma.\delta.$ από τον (Ω, Σ) στον $(\overline{\mathbb{R}}, \mathfrak{B})$ με ολικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών I έτσι ώστε για κάθε $t \in I$ το σύνολο τιμών R_{X_t} της X_t να είναι αριθμήσιμο σύνολο. Η $\{\mathrm{X}_t\}_{t\in I}$ ονομάζεται **Μαρκοβιανή *σ.δ.*** ή ***σ.δ.* Markov** ή θα λέμε ότι ικανοποιεί την **Μαρκοβιανή ιδιότητα**, εάν ισχύει

$$P\left(\{X_{t_{n+1}} = x_{n+1}\} \middle| \bigcap_{j=1}^{n}\{X_{t_j} = x_j\}\right) = P(\{X_{t_{n+1}} = x_{n+1} | X_{t_n} = x_n\})$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \cdots, t_{n+1} \in I$ με $t_1 < \cdots < t_{n+1}$ και $x_j \in R_{X_{t_j}}$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n+1\}$ ώστε $P\left[\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{t_j} = x_j\}\right] > 0$.

Για κάθε ενδεχόμενο $B \in \Sigma$ τέτοιο ώστε $P(B) \neq 0$ και τ.μ. $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, το ολοκλήρωμα της τυχαίας μεταβλητής X ως προς τη δεσμευμένη πιθανότητα P_B συμβολίζεται με

$$\mathbb{E}_B[X] := \mathbb{E}[X|B] := \int_B X dP_B$$

και ονομάζεται η **δεσμευμένη μέση τιμή της τ.μ. X δοθέντος του ενδεχομένου B**.

Έστω I ένα μη κενό, μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μια οικογένεια $\{\Sigma_j\}_{j\in I}\sigma$-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **διύλιση (filtration)** αν και μόνο αν για κάθε $j, k \in I$ με $j < k$ ισχύει $\Sigma_j \subseteq \Sigma_k$.

Μία $\sigma.\delta.$ $X := \{X_j\}_{j\in I}$ από τον (Ω, Σ) στον (Υ, T) λέμε ότι είναι **προσαρμοσμένη σε μία διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ αν για κάθε $j \in I$ η τ.μ. X_j είναι Σ_j -μετρήσιμη.

Η $\{\mathfrak{F}_j^X\}_{j\in I}$ με $\mathfrak{F}_j^X = \sigma(\{X_k : k \leqslant j\})$ για κάθε $j \in I$, ονομάζεται η **κανονική διύλιση** για την $\{X_j\}_{j\in I}$. Προφανώς, κάθε $\sigma.\delta.$ $X := \{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη κανονική της διύλιση.

Έστω I ένα μη κενό μερικά διατεταγμένο σύνολο δεικτών. Μία $\sigma.\delta.$ $\{X_j\}_{j\in I}$ από τον (Ω, Σ) στον (Υ, H) ονομάζεται ένα **martingale ως προς τη διύλιση** $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$ ή ένα $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$- **martingale** αν ισχύουν τα εξής:

$(m1)$ Η $\{X_j\}_{j\in I}$ είναι προσαρμοσμένη στη διύλιση $\{\Sigma_j\}_{j\in I}$,

$(m2)$ για κάθε $j \in I$, η $X_j \in \mathcal{L}^1(P)$,

$(m3)$ για κάθε $j, k \in I$ με $j \leqslant k$ ισχύει $\mathbb{E}[X_k|\Sigma_j] = X_j \quad P\restriction\Sigma_j - \sigma.\beta.$.

Για τις βασικές έννοιες της Θεωρίας Μέτρου, που χρησιμοποιούμε σε αυτή την εργασία χωρίς επεξήγηση, παραπέμπουμε στα [6] και [3].

Για κάθε d-διάστατο τυχαίο διάνυσμα X στον Ω εφαρμόζουμε $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ με την έννοια ότι X κατανέμεται σύμφωνα με το νόμο $\mathbf{K}(\theta)$, όπου $\theta \in \mathbb{R}^d$. Συγκεκριμένα, $\mathbf{P}(\theta)$ και $\mathbf{Exp}(\theta)$, όπου θ είναι θετική παράμετρος, αντιπροσωπεύει τον νόμο του Poisson και της εκθετικής κατανομής , αντίστοιχα (βλ. π.χ. [20], pages 178 και 180, αντίστοιχα).

Συμβολίζουμε $\mathbb{E}_P[X|F]$ για τους δεσμευμένους χώρους X δίνεται ότι σ-υποάλγεβρα F στο Σ κάτω από το P (βλέπε [6], page 342 για τον ορισμό). Για $X := \chi_E \in \mathcal{L}^1(P)$ με $E \in \Sigma$ θέτουμε $P(E \mid \mathcal{F}) := \mathbb{E}_P[\chi_E \mid \mathcal{F}]$.

Δίνονται δύο μετρήσιμοι χώροι (Ω, Σ) και (Υ, H),η συνάρτηση k για $\Omega \times H$ μέσα από το $[0,1]$ είναι μία **Σ-H-Markov kernel** εάν ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

(k1) Το σύνολο-συναρτήσεων $B \longmapsto k(\omega, B)$ έιναιένα μέτρο πιθανότητας για κάθε σταθερό $\omega \in \Omega$.

(k2) Η συνάρτηση $\omega \longmapsto k(\omega, B)$ είναι Σ-μετρήσιμη για κάθε σταθερό $B \in H$.

Συγκεκριμένα, λαμβάνοντας υπόψη μια πραγματική τυχαία μεταβλητή X στο Ω και ένα d-διάστατο τυχαίο διάνυσμα Θ στο Ω, μία **δεσμευμένη κατανομή του X πάνω στο Θ** είναι μία $\sigma(\Theta)$--Markov kernel συμβολίζεται ως $P_{X|\Theta} := P_{X|\sigma(\Theta)}$ και ικανοποιείται για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ την συνθήκη

$$P_{X|\Theta}(B, \bullet) = P(X^{-1}(B)|\sigma(\Theta)) \quad P\restriction\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

Προφανώς, για κάθε d--Markov kernel k, η συνάρτηση $K(\Theta)$ από $\Omega \times$ στο $[0,1]$ ορίζεται με την βοήθεια του

$$K(\Theta)(B, \omega) := k(B, \bullet) \circ \Theta(\omega) \qquad (\omega, B) \in \Omega \times \mathfrak{B}.$$

είναι $\sigma(\Theta)$-B-Markov kernel. Τότε για $\theta = \Theta(\omega)$ με $\omega \in \Omega$ μέτρα πιθανότητας $k(\theta, \bullet)$ είναι κατανομές στο B και έτσι μπορούμε να γράφουμε $\mathbf{K}(\theta)(\bullet)$ αντί $k(\theta, \bullet)$. Συνεπώς, σε αυτήν την περίπτωση $K(\Theta)$ θα χρησιμοποιείται αντι για $\mathbf{K}(\Theta)$.

Για κάθε πραγματική τυχαία μεταβλητή X, Y επάνω στον Ω λέμε ότι $P_{X|\Theta}$ και $P_{Y|\Theta}$ είναι $P \restriction \sigma(\Theta)$-ισοδύναμα και γράφουμε $P_{X|\Theta} = P_{Y|\Theta}$ $P \restriction \sigma(\Theta)$-σ.π., αν υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $M \in \sigma(\Theta)$ έτσι ώστε για κάθε $\omega \notin M$ και $B \in$ η ισότητα να ισχύει $P_{X|\Theta}(\omega, B) = P_{Y|\Theta}(\omega, B)$.

Κεφάλαιο 2

Επισκόπηση Στοιχείων της Κλασσικής Θεωρίας Κινδύνου

Το κεφάλαιο που ακολουθεί αναφέρεται σε βασικές έννοιες και αποτελέσματα της Θεωρίας Κινδύνου. Θα παρουσιαστούν ιδιότητες των *σ.δ.* άφιξης των απαιτήσεων και του αριθμού των απαιτήσεων καθώς και κάποια βασικά αποτελέσματα σχετικά με τη διαδικασία Poisson, που αποτελεί τη βάση για τη κατανόηση της μεικτής διαδικασίας Poisson.

2.1 Η Σ.Δ. Άφιξης των Απαιτήσεων

Στην παρακάτω ενότητα αναφέρονται ορισμοί και λήμματα που αφορούν τη *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων και τη *σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων.

[211]

Ορισμός 2.1.1. Η ακολουθία τ.μ. $T := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ονομάζεται ***σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων** ή ***σ.δ.* άφιξης**, εάν υπάρχει σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\varOmega_T \in \varSigma$ τέτοιο ώστε, για όλα τα $\omega \in \varOmega\setminus\varOmega_T$ να ισχύουν τα εξής:

- $T_0(\omega) = 0$, και
- $T_{n-1}(\omega) < T_n(\omega)$, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Άμεσα προκύπτει πως για όλα τα $\omega \in \varOmega\setminus\varOmega_T$ και $n \in \mathbb{N}$, η $T_n(\omega) > 0$. Το P-μηδενικό σύνολο $\varOmega_T$ ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης** της *σ.δ.* $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ άφιξης των απαιτήσεων.

[212]

Ορισμός 2.1.2. Έστω T *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων. Με $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συμβολίζουμε τη ***σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης απαιτήσεων** ή ***σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης**. Ισχύει $W_n := T_n - T_{n-1}$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Από τους δύο παραπάνω ορισμούς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, προκύπτουν τα εξής:

- $W_n(\omega) > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$,
- $E[W_n] > 0$

καθώς και η σχέση

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k.$$

Εφόσον $W_n := T_n - T_{n-1}$ και $T_n = \sum_{k=1}^{n} W_k$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ είναι εμφανές πως η *σ.δ.* άφιξης, και η *σ.δ.* ενδιάμεσων χρόνων άφιξης, αλληλοκαθορίζονται. Αυτό γίνεται εμφανέστερο και από τα ακόλουθα αποτελέσματα βλ. π.χ. [20] Lemma 1.1.1.

[213] **Λήμμα 2.1.3.** *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει*

$$\sigma(\{T_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}) = \sigma(\{W_k\}_{k \in \mathbb{N}_n^*}).$$

Γίνεται φανερό ότι η γνώση που έχουμε για τους χρόνους άφιξης των απαιτήσεων από τη T_n, είναι ίδια με τη πληροφορία που είναι διαθέσιμη από τη γνώση των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης των απαιτήσεων, δηλαδή τη W_n.

[214] **Ορισμός 2.1.4.** Το ενδεχόμενο $\{\sup_{n \in \mathbb{N}} T_n < \infty\}$ ονομάζεται **έκρηξη**.

[215] **Λήμμα 2.1.5.** *Αν $\sup_{n \in \mathbb{N}} E[T_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

[216] **Πόρισμα 2.1.6.** *Αν $\sum_{n=1}^{\infty} E[W_n] < \infty$, τότε η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με ένα.*

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [2], Λήμμα 3.2.6 και Πόρισμα 3.2.7.

Το λήμμα που ακολουθεί βοηθάει για την καλύτερη κατανόηση της σχέσης που υπάρχει μεταξύ των *σ.δ.* T και W.

[217] **Λήμμα 2.1.7.** *Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Αν η σ.δ. W είναι ανεξάρτητη, τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta)$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$ *και*

(ii) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \theta)$ *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$.

Στην περίπτωση αυτή, $E[W_n] = 1/\theta$ και $E[T_n] = n/\theta$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$, και επιπρόσθετα, η πιθανότητα της έκρηξης ισούται με μηδέν.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [20], Lemma 1.2.2.

2.2 Η Σ.Δ. Αριθμού των Απαιτήσεων

Αρχικά θα παρουσιαστεί η διαδικασία απαιτήσεων και πώς η *σ.δ.* απαιτήσεων και *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων ορίζει η μία την άλλη. Στη συνέχεια θα δειχθεί μια σύνδεση μεταξύ τών βασικών υποθέσεων που σχετίζονται με την κατανομή του αριθμού των απαιτήσεων και την κατανομή των χρόνων άφιξης. Τέλος, θα αποδείξουμε το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας που χαρακτηρίζει την (ομογενή) *σ.δ.* Poisson μέσω της *σ.δ.* των ενδιάμεσων χρόνων και μιας ιδιότητας των martingales.

[221]

Ορισμός 2.2.1. Μια οικογένεια $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ τ.μ. $N_t : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ ονομάζεται ***σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων** ή **απαριθμήτρια *σ.δ.*** , αν υπάρχει ένα σύνολο μηδενικής πιθανότητας $\Omega_N \in \Sigma$, τέτοιο ώστε για όλα τα $\omega \in \Omega\backslash\Omega_N$ να ισχύουν τα εξής:

(*n*1) $N_0(\omega) = 0$,

(*n*2) $N_t(\omega) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, για όλα τα $t \in (0, \infty)$,

(*n*3) $N_t(\omega) = \inf_{s\in(t,\infty)} N_s(\omega)$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$,

(*n*4) $\sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) \leqslant N_t(\omega) \leqslant \sup_{s\in[0,t)} N_s(\omega) + 1$, για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και

(*n*5) $\sup_{t\in\mathbb{R}_+} N_t(\omega) = \infty$.

Το P-μηδενικό σύνολο Ω_N, ονομάζεται **P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της *σ.δ.* N του αριθμού των απαιτήσεων**.

Ερμηνεύοντας τον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να θεωρήσουμε πως

- Η τ.μ. N_t δηλώνει το πλήθος των απαιτήσεων που εμφανίζονται στο διάστημα $(0, t]$,
- Όλες οι τροχιές της N, ξεκινούν από το μηδέν και είναι δεξιά συνεχείς, στα σημεία ασυνέχειας, το άλμα είναι ύψους ένα, και τέλος τείνουν στο άπειρο.

Το ακόλουθο θεώρημα δείχνει πως κάθε *σ.δ.* άφιξης απαιτήσεων παράγει μία απαριθμήτρια *σ.δ.* και αντίστροφα.

[222]

Θεώρημα 2.2.2. *Αν T είναι μια σ.δ. άφιξης απαιτήσεων και για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $\omega \in \Omega$ και θέσουμε*

$$N_t(\omega) := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leqslant t\}}(\omega)$$

τότε για την $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ ισχύουν τα εξής:

(i) Η $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια απαριθμήτρια σ.δ. τέτοια ώστε $\Omega_N = \Omega_T$, και

(ii) *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}_0$ *και* $\omega \in \Omega \backslash \Omega_T$ *ισχύει*

$$T_n(\omega) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t(\omega) = n\}.$$

[223]

Θεώρημα 2.2.3. *Αν* N *είναι μία απαριθμήτρια σ.δ. και για κάθε* $n \in \mathbb{N}_0$ *και* $\omega \in \Omega$ *και θέσουμε*

$$T_n(\omega) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | N_t(\omega) = n\}$$

τότε για την $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ *ισχύουν τα εξής:*

(i) *Η* $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ *είναι μία σ.δ. άφιξης απαιτήσεων τέτοια ώστε* $\Omega_T = \Omega_N$, *και*

(ii) *Για κάθε* $t \in \mathbb{R}_+$ *και* $\omega \in \Omega \backslash \Omega_N$ *ισχύει*

$$N_t(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leqslant t\}}(\omega).$$

Για την απόδειξη των δύο παραπάνω θεωρημάτων βλ. π.χ. [2], Θεώρημα 3.3.2, Θεώρημα 3.2.3 αντίστοιχα.

Για το υπόλοιπο του παρόντος κεφαλαίου θεωρούμε:

- *την* $N := \{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$, *ως μια απαριθμήτρια σ.δ. ,*
- *την* $T := \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, *ως μια σ.δ. άφιξης η οποία παράγεται από την απαριθμήτρι σ.δ.*
- *την* $W := \{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, *μια σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης η οποία παράγεται από την απαριθμήτρια σ.δ.*
- *το* P*-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης* Ω_N *της απαριθμήτριας σ.δ. ότι είναι το κενό σύνολο, δηλαδή ισχύει* $\Omega_N = \varnothing$.

[224]

Λήμμα 2.2.4. *Για κάθε* $n \in \mathbb{N}_0$ *και* $t \in \mathbb{R}_+$ *ισχύουν:*

(a) $\{N_t \geqslant n\} = \{T_n \leqslant t\}$ *και*

(b) $\{N_t = n\} = \{T_n \leqslant t\} \backslash \{T_{n+1} \leqslant t\} = \{T_n \leqslant t < T_{n+1}\}$.

Το ακόλουθο λήμμα εκφράζει με ένα ιδιαίτερα περιεκτικό τρόπο, το γεγονός πως η απαριθμήτρια σ.δ. και η σ.δ. άφιξης απαιτήσεων παρέχουν την ίδια πληροφορία.

[225]

Λήμμα 2.2.5. *Ισχύει ότι*

$$\sigma(\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}) = \sigma(\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}).$$

Στο σημείο αυτό θα γίνει σύνδεση της πιθανότητας έκρηξης με τη *σ.δ.* του αριθμού
[226] απαιτήσεων ως εξής:

Λήμμα 2.2.6. *Ισχύει ότι*

$$P[\{\sup_{n\in\mathbb{N}} T_n < \infty\}] = P\left[\bigcup_{t\in\mathbb{N}}\{N_t = \infty\}\right] = P\left[\bigcup_{t\in(0,\infty)}\{N_t = \infty\}\right].$$

Για μία αναλυτική απόδειξη των παραπάνω λημμάτων βλ. [2], Λήμμα 3.3.6 , Λήμμα 3.3.4.

Στο σημείο αυτό θα οριστούν οι έννοιες της προσαύξησης του αριθμού των απαιτήσεων σε διάστημα $(s,t]$ καθώς και των ανεξάρτητων προσαυξήσεών της, που συμβάλλουν στην περαιτέρω κατανόηση της *σ.δ.* του αριθμού των απαιτήσεων.

- Για $s,t \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $s \leqslant t$, η **προσαύξηση** της απαριθμήτριας *σ.δ.* $\{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ στο διάστημα $(s,t]$, ορίζεται από τη σχέση
$$N_t - N_s := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{s<T_n\leqslant t\}}.$$

2.3 Η Διαδικασία Poisson [231]

Ορισμός 2.3.1. Η απαριθμήτρια *σ.δ.* N, ονομάζεται **(ομογενής) διαδικασία Poisson με παράμετρο** $\theta \in (0,\infty)$, όταν έχει ανεξάρτητες και ισόνομες προσαυξήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $t \in (0,\infty)$ να ισχύει $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$.

Ένα συμπέρασμα που προκύπτει είναι πως μία *σ.δ.* απαριθμήτρια με ανεξάρτητες προσαυξήσεις, έχει και στάσιμες προσαυξήσεις, αν και μόνο αν για κάθε $t,h \in \mathbb{R}_+$ ισχύει $P_{N_{t+h}-N_t} = P_{N_h}$ βλ. π.χ. [2], Λήμμα Α'1.3.

Ορισμός 2.3.2. Μια απαριθμήτρια *σ.δ.* $\{\widetilde{N}_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ είναι μια **τυπική διαδικασία Poisson**, αν για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, η $\widetilde{N}_t$ ακολουθεί την Poisson με παράμετρο ένα.

[233]

Λήμμα (Πολυωνιμικό Κριτήριο) 2.3.3. *Έστω* $\alpha \in (0,\infty)$. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(*a*) *Για κάθε* $t \in (0,\infty)$ *η απαριθμήτρια σ.δ.* N *ικανοποιεί τη σχέση*
$$P_{N_t} = \mathbf{P}(\alpha t),$$
και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ *και* $t_0, t_1, ..., t_m \in \mathbb{R}_+$ *τέτοια ώστε* $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, *και για κάθε* $n \in \mathbb{N}_0$ *και* $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}_0$ *τέτοια ώστε το* $\sum_{j=1}^m k_j = n$ *ισχύει*
$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\middle|\{N_{t_m} = n\}\right] = \frac{n!}{\prod_{j=1}^m k_j!}\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}.$$

(b) *Η απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μια σ.δ. Poisson με παράμετρο α.*

Για μια αναλυτική απόδειξη του λήμματος βλ. [4], Λήμμα 2.3.3.

[234]

Λήμμα 2.3.4. *Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) $P_{T_n} = \mathbf{Ga}(n, \theta)$, *για όλα τα* $n \in \mathbb{N}$

(ii) $P_{N_t} = \mathbf{P}(\theta t)$, *για όλα τα* $t \in (0, \infty)$.

Στη περίπτωση αυτή, για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $E[T_n] = n/\theta$ και για όλα τα $t \in (0, \infty)$ ισχύει $E[N_t] = \theta t$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [20], Lemma 2.2.1.

[235]

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω $\theta \in (0, \infty)$. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης W είναι ανεξάρτητη και ικανοποιεί τη συνθήκη $P_{W_n} = \mathbf{Exp}(a)$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$.*

(ii) *Η απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μια διαδικασία Poisson με παράμετρο θ.*

(iii) *Η απαριθμήτρια σ.δ. N έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις, και ικανοποιεί τη συνθήκη $E[N_t] = \theta t$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$.*

(iv) *Η σ.δ. $\{N_t - \theta t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ είναι ένα martingale.*

Για μια αναλυτική απόδειξη του θεωρήματος βλ. π.χ. [2], Θεώρημα 4.2.4.

Από εδώ και κάτω και αν δε δηλώνεται διαφορετικά, η $N := \{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ μία απαριθμήτρια διαδικασία, η $T := \{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ είναι η επαγόμενη από την N σ.δ. άφιξης, και η $W := \{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ η επαγόμενη από την T σ.δ. ενδιάμεσων χρόνων άφιξης. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε επίσης πως το P-μηδενικό σύνολο εξαίρεσης της απαριθμήτριας διαδικασίας είναι το κενό σύνολο δηλαδή $\Omega_N := \emptyset \in \Sigma$. Επιπλέον, θα γράφουμε απλώς " υπό συνθήκη" αντί για " υπό συνθήκη δοσμένης της Θ " όταν είναι σαφές ποιό είναι το Θ.

Κεφάλαιο 3

Μεικτές $\sigma.\delta.$ Poisson

Στο κεφάλαιο που ακολουθεί θα μας απασχολήσει η επιλογή κατάλληλων υποθέσεων για την απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ που περιγράφει ένα χαρτοφυλάκιο. Πρώτα θα καθοριστεί το γενικό μοντέλο, και στη συνέχεια θα μελετηθεί η μεικτή $\sigma.\delta.$ Poisson και μια ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση, η διαδικασία Pólya-Lundberg.

Τα αποτελέσματα των Ενοτήτων 3.1 και 3.2 υπάρχουν στο [20]. Εδώ παρουσιάζονται με παραπομπές για τις αποδείξεις.

3.1 Το υπόδειγμα

Θεωρούμε στο εξής μία απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ N και μια τυχαία μεταβλητή Θ. Υποθέτουμε, όπως προαναφέρθηκε, πως το ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο κινδύνων, είναι ένα μείγμα από ομοιογενή χαρτοφυλάκια ίδιου μεγέθους, τα οποία είναι παρόμοια, αλλά διαφορετικά μεταξύ τους. Υποθέτουμε επίσης, ότι κάθε ανομοιογενές χαρτοφυλάκιο, μπορεί να προσδιοριστεί με την πραγματοποίηση της τ.μ. Θ. Αυτό σημαίνει πως η κατανομή της Θ αντιπροσωπεύει τη δομή του ανομοιογενούς χαρτοφυλακίου υπό όρους. Οπότε οι ιδιότητες της κατανομής της απαριθμήτριας $\sigma.\delta.$ N, καθορίζονται από τις ιδιότητες της δεσμευμένης κατανομής ως προς την Θ, και από τις ιδιότητες της κατανομής της Θ. Για το λόγο αυτό, η τυχαία μεταβλητή Θ ονομάζεται **δομική παράμετρος** (structure parameter), η κατανομή της P_Θ ονομάζεται **δομική κατανομή** (structure distribution), ενώ η απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ N ονομάζεται **μεικτή $\sigma.\delta.$ του αριθμού απαιτήσεων** (mixed claim number process) ή **μεικτή απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$** (mixed counting process).

Η απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ N έχει:

- **υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις** ως προς τη Θ αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι προσαυξήσεις

$\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j\in\{1,\dots,m\}}$ είναι υπό συνθήκη ανεξάρτητες ως προς τη Θ, και έχει

- **υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς τη** Θ αν, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, t_1, \dots, t_m, h \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$, οι προσαυξήσεις $\{N_{t_{j+h}} - N_{t_{j-1+h}}\}_{j\in\{1,\dots,m\}}$ έχουν την ίδια υπό συνθήκη κατανομή ως προς τη Θ με τις $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}\}_{j\in\{1,\dots,m\}}$.

Άμεσα προκύπτει πως, μια $\sigma.\delta.$ αριθμού απαιτήσεων με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς Θ, έχει και υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς Θ αν και μόνο αν η $P_{N_{t+h}-N_t|\Theta} = P_{h|\Theta} \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$ για όλα τα $t, h \in \mathbb{R}_+$.

Για την απόδειξη χρησιμοποιούνται παρόμοια επιχειρήματα με εκείνα της απόδειξης του Λήμματος Α'1.3 του [2].

Λήμμα 3.1.1. *Αν μία απαριθμήτρια σ.δ. έχει υπό συνθήκη στάσιμες προσαυξήσεις ως προς* Θ*, τότε έχει και στάσιμες προσαυξήσεις.*

Για την απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. π.χ. [20], Lemma 4.1.1

Αντίθετα, για μία απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ με υπό συνθήκη ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς Θ, συνεπάγεται ότι δεν έχει γενικά ανεξάρτητες προσαυξήσεις όπως θα δούμε και από το Θεώρημα 3.2.5 στη συνέχεια αυτού του κεφαλαίου.

Το λήμμα που ακολουθεί προκύπτει άμεσα από τις ιδιότητες της υπό συνθήκη αναμενόμενης τιμής.

Λήμμα 3.1.2. *Αν η απαρίθμητρια σ.δ. N έχει πεπερασμένες μέσες τιμές, τότε*

$$\mathbb{E}[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}(N_t|\Theta)]$$

και

$$\mathbb{V}ar[N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{V}ar[N_t|\Theta]] + \mathbb{V}ar[\mathbb{E}[N_t|\Theta]]$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$.

Ορισμοί 3.1.3. Μια απαριθμήτρια $\sigma.\delta.$ N έχει την **πολυωνυμική ιδιότητα**, αν η σχέση

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right] = \frac{n_m!}{\prod_{j=1}^{m} k_j!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j} P[\{N_{t_m} = n_m\}]$$

ισχύει για όλα τα $m \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < \cdots < t_m, k_1, \dots, k_m \in \mathbb{N}_0$ και $n_m = \sum_{j=1}^{m} k_j$.

Αν $P[\{N_{t_m} = n_m\}] > 0$, τότε η προηγούμενη σχέση μπορεί να γραφτεί

$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\middle|\{N_{t_m} = n_m\}\right] = \frac{n_m!}{\prod_{j=1}^{m} k_j!}\prod_{j=1}^{m}\left(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_m}\right)^{k_j}$$

το οποίο εξηγεί και το όνομα της πολυωνυμικής ιδιότητας.

Ορισμοί 3.1.4. Μια απαριθμήτρια *σ.δ.* N έχει την **διωνυμική ιδιότητα** αν η σχέση

$$P[\{N_s = k\} \cap \{N_t - N_s = n-k\}] = \binom{n}{k}\left(\frac{s}{t}\right)^k \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-k} \cdot P[\{N_t = n\}]$$

ισχύει για όλα τα $0 < s < t$ και $k, n \in \mathbb{N}_0$ τέτοια ώστε $k \leqslant n$.

Λήμμα 3.1.5. ([23], Lemma 2.1.2.) *Έστω μια απαριθμήτρια σ.δ. N. Τότε ισχύει η σχέση*

$$\lim_{t\to\infty} P[\{N_t \geqslant n\}] = 1$$

για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$.

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [1], Λήμμα 4.1.5.

Λήμμα 3.1.6. ([23], Lemma 2.1.3.) *Έστω μια απαριθμήτρια σ.δ. N. Αν η N έχει την διωνυμική ιδιότητα τότε ισχύει ότι*

$$P[\{N_t = n\}] > 0$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ και όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$.

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [1], Λήμμα 4.1.6.

Παρατήρηση 3.1.7. Μια απαριθμήτρια *σ.δ.* N έχει την **ιδιότητα Markov** αν και μόνο αν ισχύει η ισότητα

$$\begin{aligned} & P\left[\bigcap_{j=1}^{m+1}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right] \cdot P[\{N_{t_m} = n_m\}] \\ = \; & P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right] \cdot P[\{N_{t_m} = n_m\} \cap \{N_{t_{m+1}} - N_{t_m} = k_{m+1}\}] \end{aligned} \tag{3.1}$$

για όλα τα $m \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < \cdots < t_{m+1}, k1, \ldots, k_{m+1} \in \mathbb{N}_0$ και $n_m = \sum_{j=1}^m k_j$.

Για μία αναλυτική απόδειξη της παραπάνω παρατήρησης βλ. [1], Παρατήρηση 4.1.8.

Λήμμα 3.1.8. ([23], Lemma 2.2.7.) *Έστω N μια απαριθμήτρια σ.δ. . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) Η N έχει την πολυωνυμική ιδιότητα.

(β) Η N έχει την διωνυμική ιδιότητα και την ιδιότητα Markov.

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [1], Λήμμα 4.1.9.

Λήμμα 3.1.9. ([23], Lemma 2.2.5.) *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. N έχει την πολυωνυμική ιδιότητα τότε θα έχει στάσιμες προσαυξήσεις.*

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [1], Λήμμα 4.1.10.

Λήμμα 3.1.10. *(Πολυωνυμικό Κριτήριο) Αν η N είναι μία P-$MPP(\Theta)$ τότε ικανοποιεί την πολυωνυμική ιδιότητα.*

Για μία αναλυτική απόδειξη του παραπάνω λήμματος βλ. [4], Λήμμα 4.2.1.

3.2 Η μεικτή *σ.δ.* Poisson με παράμετρο μείξης

Για τον παρακάτω ορισμό βλ. π.χ. [20], Section 4.

Ορισμοί 3.2.1. Η απαριθμήτρια *σ.δ.* N ονομάζεται **μεικτή *σ.δ.* Poisson με παράμετρο Θ (**P**-**$MPP(\Theta)$ για συντομία), εάν

- η Θ είναι μία πραγματική τ.μ. για την οποία ισχύει $P_\Theta[(0,\infty)] = 1$, και
- η N έχει υπό συνθήκη στάσιμες και ανεξάρτητες προσαυξήσεις ως προς το Θ, έτσι ώστε για κάθε $t \in (0,\infty)$ να ισχύει η σχέση $\mathrm{P}_{N_t|\Theta} = \mathbf{P}(t\Theta), \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$

Ιδιαιτέρως, αν η κατανομή της Θ είναι εκφυλισμένη στο $\theta_0 > 0$ (δηλαδή $P_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$), τότε η N είναι μία **P-*σ.δ.* Poisson με παράμετρο** θ_0.

Στην συνέχεια παρατίθεται μία βασική ιδιότητα της μεικτής *σ.δ.* Poisson με παράμετρο μείξης.

Λήμμα 3.2.2. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μία μεικτή σ.δ. Poisson με παράμετρο μείξης, τότε έχει στάσιμες προσαυξήσεις και ικανοποιεί την σχέση*

$$P[\{N_t = n\}] > 0$$

για όλα τα $t \in (0,\infty)$ και $n \in \mathbb{N}_0$.

Θεώρημα 3.2.3. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μια P-$MPP(\Theta)$, τότε είναι και διαδικασία Markov.*

Για τις αποδείξεις του Λήμματος 3.2.2 και του Θεωρήματος 3.2.3 βλ. π.χ. [20], Lemma 4.2.2 και Theorem 4.2.3.

Λήμμα 3.2.4. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μια $P - MPP(\Theta)$, τέτοια ώστε $\mathbb{E}[\Theta] < \infty$, τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ ισχύει*

$$\mathbb{E}[N_t] = t\mathbb{E}[\Theta]$$

και

$$\mathbb{V}ar[N_t] = t\mathbb{E}[\Theta] + t^2\mathbb{V}ar[\Theta].$$

Ιδιαιτέρως η πιθανότητα έκρηξης ισούται με μηδέν.

Για μια αναλυτική απόδειξη βλ. π.χ. [20], Lemma 4.2.5.

Έτσι, αν η απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μια $P - MPP(\Theta)$ έτσι ώστε η κατανομή να είναι μη εκφυλισμένη και να έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε, για όλα τα $t \in (0, \infty)$, ισχύει ότι $\mathbb{V}ar(N_t) > \mathbb{E}[N_t]$.

Τώρα μπορούμε να δώσουμε απάντηση στο ερώτημα, για το αν μια $P - MPP(\Theta)$ μπορεί να έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.

Θεώρημα 3.2.5. *Αν η απαριθμήτρια σ.δ. N είναι μια $P - MPP(\Theta)$, έτσι ώστε το Θ να έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(*a*) *Η κατανομή της Θ, είναι εκφυλισμένη.*

(*b*) *Η N έχει ανεξάρτητες προσαυξήσεις.*

(*c*) *Η N είναι μία μή ομογενής σ.δ. Poisson.*

(*d*) *Η N είναι μία (ομογενής) σ.δ. Poisson.*

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [20], Theorem 4.2.6.

Θεώρημα 3.2.6. *Έστω N μια απαριθμήτρια σ.δ. και Θ μια τ.μ.. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

- *Η N είναι μια $P - MPP(\Theta)$.*
- *Το $P_\Theta[(0, \infty)] = 1$ και ισχύει η σχέση*
$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\middle|\Theta\right] = \prod_{j=1}^{m} e^{-\Theta(t_j - t_{j-1})}\frac{(\Theta(t_j - t_{j-1}))^{k_j}}{k_j!} \quad P|\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$
για όλα τα $m \in \mathbb{N}$ και $0 = t_0 < \cdots < t_m \in \mathbb{R}_+$ και για όλα τα $k_j \in \mathbb{N}_0$ με $j \in \mathbb{N}_m$.

Για την απόδειξη βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 4.3.7.

3.3 Η μεικτή σ.δ. Poisson με κατανομή μείξης

Για τον παρακάτω ορισμό της μεικτής σ.δ. Poisson με κατανομή μείξης βλ. π.χ. [23], page 83.

Ορισμοί 3.3.1. Μια απαριθμήτρια σ.δ. N ονομάζεται **μεικτή σ.δ. Poisson με κατανομή μείξης** $U : \mathfrak{B} \longrightarrow [0, 1]$ ($P - MPP(U)$ για συντομία) αν $U[(0, \infty)] = 1$ και αν ισχύει η σχέση
$$P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right] = \int_{\mathbb{R}_+}\prod_{j=1}^{m} e^{-\lambda(t_j - t_{j-1})}\frac{(\lambda(t_j - t_{j-1}))^{k_j}}{k_j!}U(d\lambda)$$
για όλα τα $m \in \mathbb{N}$ και $t_0, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ με $0 = t_0 < \cdots < t_m$ και όλα τα $k_j \in \mathbb{N}_0$, $j \in \mathbb{N}_m$.

Παρατήρηση 3.3.2. Είναι εύκολο να δείξουμε ότι κάθε $P-MPP(\Theta)$ είναι $P-MPP(U)$.

Πράγματι, έστω ότι μία απαριθμήτρια σ.δ. N είμαι $P-MPP(\Theta)$.Τότε για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $0 = t_0 < \cdots < t_m \in \mathbb{R}_+$ και για όλα τα $k_j \in \mathbb{N}_0$ με $j \in \mathbb{N}_m$ ισχύει

$$\begin{aligned} P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\right] &= \int_\Omega P\left[\bigcap_{j=1}^{m}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = k_j\}\middle|\Theta\right] \mathrm{d}P \\ &= \int_\Omega \prod_{j=1}^{m} e^{-\theta(t_j - t_{j-1})}\frac{(\theta(t_j - t_{j-1}))^{k_j}}{k_j!}\mathrm{d}P \\ &= \int_{\mathbb{R}_+} \prod_{j=1}^{m} e^{-\theta(t_j - t_{j-1})}\frac{(\theta(t_j - t_{j-1}))^{k_j}}{k_j!}P_\Theta(d\theta), \end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα προκύπτει από το Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας η δεύτερη ισότητα από Θεώρημα 3.2.6.. Άρα η N είναι $P-MPP(P_\Theta)$. □

Λήμμα 3.3.3. *Έστω N μια απαριθμήτρια σ.δ. . Επιπλέον έστω* $U : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow [0,1]$ *μια κατανομή με* $U[(0,\infty)] = 1$. *Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) Η N είναι μία P-MPP(U).

(ii) Η N έχει την πολυωνυμική ιδιότητα και ισχύει η σχέση

$$P[\{N_t = n\}] = \int_{\mathbb{R}} e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}U(d\lambda)$$

για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$ *και* $n \in \mathbb{N}_0$.

Για μια πιο αναλυτική απόδειξη βλ. [1], Λήμμα 4.2.2.

Πόρισμα 3.3.4. *Έστω N μια P-MPP(U). Τότε*

(i) η ανισότητα $P[\{N_t = n\}] > 0$ *ισχύει για κάθε* $t > 0$ *και* $n \in \mathbb{N}_0$,

(ii) η N έχει στάσιμες προσαυξήσεις, και

(iii) η N είναι μια διαδικασία Markov.

Για την απόδειξη βλ. [1], Πόρισμα 4.2.3.

Θεώρημα 3.3.5. *Έστω N μια απαριθμήτρια σ.δ. . Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

(α) Η N είναι μια P-MPP(U).

(β) Η N έχει την πολυωνυμική ιδιότητα.

(γ) Η N έχει την διωνυμική ιδιότητα και την ιδιότητα Markov.

Το παραπάνω θεώρημα έχει αποδειχθεί από τον Zocher [23], Theorem 3.2.3. για τη γενικότερη περίπτωση των πολυμεταβλητών μεικτών *σ.δ.* Poisson. Για μια αναλυτική απόδειξη στα πλαίσια των μονομεταβλητών μεικτών *σ.δ.* Poisson βλ. π.χ. [1], Θεώρημα 4.2.8.

Παρατήρηση 3.3.6. Σύμφωνα με την Παρατήρηση 3.3.2 κάθε μεικτή *σ.δ.* Poisson με παράμετρο μείξης έχει όλες τις ιδιότητες τις οποίες έχει μια μεικτή *σ.δ.* Poisson με κατανομή μείξης. Το αντίστροφο φαίνεται να μην ισχύει γενικά, διότι ερχόμαστε αντιμέτωποι με δύο δύσκολα προβλήματα:

(a) Δοσμένης της κατανομής μείξης U υπάρχει μία τ.μ. Θ ώστε $P_\Theta = U$

(b) Αν θεωρήσουμε ότι το Πρόβλημα (α) έχει μία θετική λύση, υπάρχει μία φυσιολογική δεσμευμένη πιθανότητα του P επάνω στο Q συνεπής με την Θ; (βλ. 4.1.1 για τον ορισμό). Επομένως παραμένει ένα ανοικτό πρόβλημα, αν ισχύει ο χαρακτηρισμός της μεικτής *σ.δ.* Poisson με παράμετρο μείξης μέσω της πολυωνυμικής ιδιότητας ή της ιδιότητας Markov (δηλ. αν στο Λήμμα 3.1.10 και στο Θεώρημα 3.2.3 ισχύει και το αντίστροφο), όπως ισχύει για την μεικτή *σ.δ.* Poisson με κατανομή μείξης (βλ.Θεώρημα 3.3.5).

Κάτω από κάποιες ασθενείς προϋποθέσεις, που ισχύουν για τους περισσότερους χ.π. των εφαρμογών, μπορούν να αποδειχθούν τέτοιου είδους χαρακτηρισμοί και για μεικτές *σ.δ.* Poisson με παράμετρο μείξης (βλ. Πρόταση 4.2.7 και Θεώρημα 4.2.10 ή [16], Proposition 3.2 και Theorem 3.1).

Κεφάλαιο 4

Μεικτές ανανεωτικές σ.δ.

Στο Κεφάλαιο που ακολουθεί η κλάση των μεικτών ανανεωτικών διαδικασιών (MRPs για συντομία) με παράμετρο μείξης ένα τυχαίο διάνυσμα, όπως ορίστηκε από τους Λυμπερόπουλο και Μαχαιρά (διευρύνοντας την αρχική κλάση του Huang), αντικαθίσταται από την αυστηρά ευρύτερη κλάση όλων των επεκταμένων MRPs προσθέτοντας μία δεύτερη παράμετρο μείξης. Αποδεικνύεται κάτω από μία ασθενή συνθήκη, ότι μέσα σε αυτή την μεγαλύτερη κλάση το βασικό πρόβλημα, πότε κάθε διαδικασία Markov είναι μία μεικτή διαδικασία Poisson με μία τ.μ. ως παράμετρο μείξης, έχει μία θετική απάντηση. Αυτό συναπάγεται την ισοδυναμία των διαδικασιών Markov, των μεικτών διαδικασιών Poisson και των διαδικασιών με την πολυωνυμική ιδιότητα εντός αυτής της κλάσης. Σε συγκεκριμένα παραδείγματα, καταδεικνύεται πως να προσδιοριστεί η ιδιότητα Markov με την βοήθεια των παραπάνω αποτελεσμάτων. Μία άλλη συνέπεια είναι η διατήρηση της ιδιότητας Markov κάτω από ορισμένες αλλαγές μέτρων.

4.1 Προαπαιτούμενες έννοιες

Για κάθε d-διάστατο τυχαίο διάνυσμα $X : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^d$ εφαρμόζουμε το συμβολισμό $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ εννοώντας ότι το X είναι κατανεμημένο σύμφωνα με τον $\mathbf{K}(\theta)$, όπου $\theta \in \mathbb{R}^d$. Ιδιαιτέρως, $\mathbf{Exp}(\theta)$, όπου θ είναι θετική παράμετρος, αντιπροσωπεύει τον νόμο της εκθετικής κατανομής βλ. π.χ. [20], page 180.

Δοσμένης μίας πραγματικής τ.μ. X επάνω στο Ω και ενός τυχαίου διανύσματος Θ : $\varOmega \longmapsto \mathbb{R}^d$, η **δεσμευμένη κατανομή** της X επάνω στην Θ είναι μία απεικόνιση $P_{X|\Theta}$ από το $\mathfrak{B} \times \varOmega$ μέσα στο [0,1] έτσι, ώστε

(cd1) για κάθε $\omega \in \varOmega$ η συνολοσυνάρτηση $P_{X|\Theta}(\bullet, \omega)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}$, (**cd2**) για οποιοδήποτε $B \in \mathfrak{B}$ έχουμε

$$P_{X|\Theta}(B, \bullet) = P(X^{-1}(B)|\sigma(\Theta)) \quad P{\restriction}\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$$

όπου $P_{X|\Theta}(B, \bullet)$ είναι $\sigma(\Theta)$-μετρήσιμη για οποιοδήποτε σταθερό $B \in \mathfrak{B}$.

Για απλοποίηση γράφουμε $k := P_{X|\Theta}$ και ορίζουμε την συνάρτηση $K(\Theta)$ από $\mathfrak{B} \times \Omega$ μέσα στο [0,1] ως εξής

$$K(\Theta)(B, \omega) := k(B, \bullet) \circ \Theta(\omega) \quad \forall B \in \mathfrak{B} \quad \text{και} \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Τότε για $\theta = \Theta(\omega)$ με $\omega \in \Omega$ το μέτρο πιθανότητας $k(\bullet, \theta)$ είναι μία κατανομή επάνω στη $\mathfrak{B}$ και έτσι μπορούμε να γράφουμε με $\mathbf{K}(\theta)(\bullet)$ αντί για $k(\bullet, \theta)$. Αντίστοιχα, την $K(\Theta)$ την συμβολίζουμε με $\mathbf{K}(\Theta)$.

Για οποιεσδήποτε πραγματικές τυχαίες μεταβλητές X, Y επάνω στον Ω θα λέμε ότι οι $P_{X|\Theta}$ και $P_{Y|\Theta}$ είναι $P{\restriction}\sigma(\Theta)$-ισοδύναμες και θα γράφουμε $P_{X|\Theta} = P_{Y|\Theta}$ $P{\restriction}\sigma(\Theta) - \sigma.\beta.$, αν υπάρχει ένα P-μηδενικό σύνολο $N \in \sigma(\Theta)$ τέτοιο ώστε για κάθε $\omega \notin N$ και $B \in \mathfrak{B}$ να ισχύει η ισότητα $P_{X|\Theta}(B, \omega) = P_{Y|\Theta}(B, \omega)$.

Από εδώ και κάτω και αν δε δηλώνεται διαφορετικά, το $\Theta : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^d$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα.

Μία οικογένεια $\{X_i\}_{i \in I}$ από πραγματικές τ.μ. X_i επάνω στον Ω είναι:

- ***P*-υπο συνθήκη (στοχαστικά) ανεξάρτητη** δοσμένου του Θ, εάν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geqslant 2$ έχουμε

$$P(\bigcap_{j=1}^{n}\{X_{i_j} \leqslant x_{i_j}\}|\sigma(\Theta)) = \prod_{j=1}^{n} P(\{X_{i_j} \leqslant x_{i_j}\}|\sigma(\Theta)) \quad P{\restriction}\sigma(\Theta) \quad - \sigma.\beta.$$

όπου τα $i_1, \ldots, i_n$ είναι διάφορα μεταξύ τους στοιχεία του I και $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in \mathbb{R}^n$,

- ***P*-υπο συνθήκη ισόνομη** δοσμένου του Θ, αν

$$P(F \cap X_i^{-1}(B)) = P((F \cap X_j^{-1}(B)),$$

για όλα τα $\quad i, j \in I, F \in \sigma(\Theta) \quad$ και $\mathrm{B} \in \mathfrak{B}$.

Για το υπόλοιπο της εργασίας θα γράφουμε δεσμευμένη αντί για δεσμευμένη δοθέντος Θ οπουδήποτε το Θ είναι σαφές.

Ορισμός 4.1.1. Έστω Q ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην σ-άλγεβρα H. Μία οικογένεια $\{P_y\}_{y \in \Upsilon}$ μέτρων πιθανότητας επάνω στη Σ καλείται μία **φυσιολογική δεσμευμένη πιθανότητα**, (regular conditional probability) (φ.δ.π. για συντομία) του P επάνω στο Q, εάν (**d1**) για οποιοδήποτε σταθερό $D \in \Sigma$ η συνάρτηση $y \longmapsto P_y(D)$ να είναι H-μετρήσιμη,

(**d2**) $\int P_y(D)Q(dy) = P(D)$ για κάθε $D \in \Sigma$.

Αν η $f : \Omega \longmapsto \Upsilon$ είναι μία συνάρτηση που διατηρεί τα μέτρα πιθανότητας (inverse-measure-preserving function) (δηλαδή $P_f(B) := P(f^{-1}(B) = Q(B)$ για κάθε $B \in H$), μία φ.δ.π. $\{P_y\}_{y\in Y}$ του P επάνω στο Q ονομάζεται **συνεπής** (consistent) με την f αν για κάθε $B \in H$, ισχύει η σχέση $P_y(f^{-1}(B)) = 1$ για Q-σ.ό. τα $y \in B$.

Στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε ιδιαιτέρως με φ.δ.π. $\{P_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}^d}$ *του P επάνω στο Q που είναι συνεπείς με ένα τυχαίο διάνυσμα* $\Theta : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^d$*, δηλ. εδώ θα έχουμε* $(\Upsilon, H) = (\mathbb{R}^d, \mathbb{B}_d)$ *και το Q θα είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη* $\mathfrak{B}_d$.

Παρατηρήσεις 4.1.2. (**a**) Αν η Σ είνα αριθμήσιμα παραγόμενη και το P είναι τέλειο (βλ. πχ. Παράρτημα A.1.7 για τον ορισμό), τότε υπάρχει πάντα μία φ.δ.π. $\{P_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}^d}$ του P επάνω στο Q συνεπής με οποιαδήποτε συνάρτηση $\Theta : \Omega \longmapsto \mathbb{R}^d$ που διατηρεί τα μέτρα πιθανότητας (βλ. [7], Theorems 6 and 3). Επίσης, στις περισσότερες περιπτώσεις που εμφανίζονται στις εφαρμογές (π.χ. Πολωνικοί χώροι) οι φ.δ.π όπως παραπάνω υπάρχουν πάντα.
(**b**) Αντί της ονομασίας φ.δ.π. θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το όνομα *φ.δ.π.*, αλλά φαίνεται να είναι καλύτερο να διατηρήσουμε αυτόν τον όρο για την γενική περίπτωση, όπου η Σ δεν είναι απαραίτητα αριθμήσιμα παραγόμενη και τα μέτρα πιθανότητας P_θ μπορεί να ορίζονται επάνω σε διαφορετικές σ-άλγεβρες Σ_θ αντί της Σ (βλ. Pachl [9] (1978).

Ορισμός 4.1.3. ([11], Definition 3) Μία **MRP συνδεόμενη με μία οικογένεια** $\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}$ **μέτρων πιθανότητας επάνω στη** Σ **και με ένα μετρο πιθανότητας ν επάνω στη** σ**-άλγεβρα** $\sigma(\{P_\bullet(E) : E \in \Sigma\})$ είναι μία απαριθμήτρια διαδικασία N που ικανοποιεί την συνθήκη

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k \leqslant w_k\}\Big) = \int \prod_{k=1}^{r} P_{\tilde{y}}(\{W_k \leqslant w_k\}\nu(d\tilde{y}).$$

H N ονομάζεται και **MRP κατά Huang** και συμβολίζεται με P-MRP$(\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu)$. Αν $(P_{\tilde{y}})_{W_N} = Exp(\alpha(\tilde{y}))$ για κάποια μετρήσιμη θετική συνάρτηση α επάνω στον $\mathbb{R}$, μία P-MRP$(\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu)$ θα λέγεται **μεικτή** $\boldsymbol{\sigma.\delta.}$ **Poisson κατά Huang** συνδεόμενη με την οικογένεια $\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}$ και με το ν και θα συμβολίζουμε με P-MPP$(\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu)$.

4.2 Αναγωγή των μεικτών ανανεωτικών $\sigma.\delta.$ σε μεικτές $\sigma.\delta.$ Poisson

Μία διαδικασία Poisson N κάτω από το μέτρο πιθανότητας P με παράμετρο $\theta > 0$ συμβολίζεται με P-PP(θ). Το παρακάτω αποτέλεσμα μας δείχνει ότι κάτω από ασθενείς συνθήκες κάθε

$(P - MPP(\Theta)$ είναι μία P-MPP($\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}}, \nu$). Όμως η αντίστροφη συνεπαγωγή δεν είναι γενικά δυνατή (βλ. [14] Theorem 4.9).

Πρόταση 4.2.1. *Έστω Θ είναι μία πραγματική τ.μ. έτσι ώστε η N να είναι μία $(P-MPP(\Theta)$, και υποθέτουμε ότι η $\{R_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με τον Θ. Τότε η N είναι μία P-MPP($\{R_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}, P_\Theta$).*

Απόδειξη. Για κάθε $r \in \mathbb{N}$ και για όλα τα $w_1, \ldots, w_r \in (0,\infty)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} P\Big(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k \leqslant w_k\}\Big) &= \int_\Omega P\Big(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k \leqslant w_k\}|\Theta\Big)dP \\ &= \int_{(0,\infty)} R_\theta\Big(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k \leqslant w_k\}\Big)P_\Theta(d\theta) \\ &= \int_{(0,\infty)} \prod_{k=1}^{r}(1 - e^{-\theta w_k})P_\Theta(d\theta), \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προέρχεται από την [12], Lemma 3.5, και η τρίτη ισότητα από την [12], Proposition 4.4, μαζί με το [20], Theorem 2.3.4. □

Φαίνεται φυσικό να γενικεύσουμε την έννοια μιας $MPP(\Theta)$ μέσω του επόμενου ορισμού (**a**), προσθέτοντας στην δομική παράμετρο Θ μία άλλη παράμετρο μείξης h. Στη συνέχεια τα αποτελέσματα των επεκταμένων MRPs επίσης περιλαμβάνουν τις *σ.δ.* που μελετήθηκαν στη [12]. Για τους παρακάτω ορισμούς βλ. [17].

Ορισμοί 4.2.2. (**a**) Έστω $m \in \mathbb{N}, D \in \mathfrak{B}_d$ με $R_\Theta \subseteq D$, και έστω $h : D \longmapsto \mathbb{R}^m$ μία $\mathfrak{B}(D)-\mathfrak{B}_m$-μετρήσιμη απεικόνιση. Μία απαριθμήτρια διαδικασία N ονομάζεται **επεκταμένη MRP με παράμετρους μείξης Θ και h και υπό συνθήκη κατανομή άφιξης $\mathbf{K}(h(\Theta))$** (γράφουμε $P - eMRP(\mathbf{K}(h(\Theta)))$ για συντομία) εάν η διαδικασία των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης W είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη και

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad [P_{W_{n|\Theta}} = \mathbf{K}(h(\Theta)) \quad P\!\upharpoonright\!\sigma(\Theta) \quad -\sigma.\beta.].$$

(**b**) Μία επεκταμένη MRP με παραμέτρους μείξης Θ και $id_{\mathbb{R}^d}$ καλείται μία **MRP με παράμετρο μείξης** Θ (για συντομία γράφουμε P-$MRP(\mathbf{K}(\Theta))$).

Ιδιαιτέρως, εάν υπάρχει ένα $\theta_0 \in \mathbb{R}^d$ με $P(\{\Theta = \theta_0\}) = 1$, τότε η N είναι μία *ανανεωτική διαδικασία* με κατανομή των ενδιάμεσων χρόνων άφιξης $\mathbf{K}(\theta_0)$ (για συντομία P-$RP(\mathbf{K}(\theta_0))$).

Ο ορισμός 3 του Huang [11] εκείνη την εποχή δεν περιελάμβανε μία δομική παράμετρο Θ και σαν αποτέλεσμα είναι αυστηρά λιγότερο γενικός από εκείνον μίας $P - MRP(\mathbf{K}(\Theta))$, όπως διαπιστώθηκε στο Θεώρημα 4.9 της εργασίας [14].

Εάν δεν προκύψει σύγχηση, το μέτρο πιθανότητας P μπορεί να παραληφθεί από τις ακόλουθες συντομογραφίες: P-$eMRP(\mathbf{K}(h(\Theta)))$, P-$MRP(\mathbf{K}(\Theta)))$, P-$RP(\mathbf{K}(h(\theta_0)))$, P-$MRP(\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}},\nu)$, P-$MPP(\Theta)$, P-$PP(\theta)$ *και* P-$MPP(\{P_{\tilde{y}}\}_{\tilde{y}\in\tilde{\Upsilon}},\nu)$.

Από τώρα και για το υπόλοιπο του κειμένου η $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι μια φυσιολογική δεσμευμένη πιθανότητα του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ, όπου $D \in \mathfrak{B}$.

Πρίν παρουσιάσουμε το βασικό αποτέλεσμα σε αυτό το κεφάλαιο χρειάζεται να παρουσιάσουμε ένα βοηθητικό λήμμα.

Λήμμα 4.2.3. *Έστω D και h όπως στον Ορισμό 4.2.2 (a). Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ−μηδενικό σύνολο $L_0 \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε ο περιορισμός $h\upharpoonright D\backslash L_0$ να είναι 1-1. Θέτουμε $\widetilde{\Theta} := h\circ\Theta$, $g := (h\upharpoonright D\backslash L_0)^{-1} : h(D\backslash L_0) \longmapsto D\backslash L_0$ και $M := h(D\backslash L_0)$. Για οποιοδήποτε $\widetilde{\theta} \in \mathbb{R}^m$ και $A \in \Sigma$ ορίζουμε*

$$Q_{\tilde{\theta}}(A) := \begin{cases} (P_{\bullet}(A)\circ g)(\tilde{\theta}) & \alpha\nu\ \tilde{\theta}\in M; \\ P(A) & \alpha\nu\ \tilde{\theta}\in\mathbb{R}^m\backslash M. \end{cases}$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) η οικογένεια $\{Q_{\tilde{\theta}}\}_{\tilde{\theta}\in\mathbb{R}^m}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widetilde{\Theta}}$ συνεπής με το $\widetilde{\Theta}$;

(ii) για οποιαδήποτε $n\in\mathbb{N}$ ισχύει η ισοδυναμία

$$\forall\ \ \theta\in D\backslash L_0 \quad [(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}\left(h(\theta)\right)] \Longleftrightarrow \forall\ \ \widetilde{\theta}\in M \quad [\left(Q_{\tilde{\theta}}\right)_{W_n} = \mathbf{K}(\widetilde{\theta})],$$

(iii) για κάθε $\theta\in D\backslash L_0$ η διαδικασία W είναι P_θ-ανεξάρτητη αν και μόνο αν για κάθε $\widetilde{\theta}\in M$ η W είναι $Q_{\tilde{\theta}}$-ανεξάρτητη.

Απόδειξη. Πρώτα σημειώνουμε ότι $M \in \mathfrak{B}_m$ (βλ. π.χ. [6] Theorem 8.3.7), η συνάρτηση g είναι $\mathfrak{B}(M)$-$\mathfrak{B}(D\backslash L_0)$-μετρήσιμη (βλ. π.χ. [6] Proposition 8.3.5), και $P_{\widetilde{\Theta}}(M) = 1$.

(i): Προφανώς η $\{Q_{\tilde{\theta}}\}_{\tilde{\theta}\in\mathbb{R}^m}$ είναι μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας επάνω στη Σ που ικανοποιεί τη συνθήκη (d1). Η συνθήκη (d2) προκύπτει από την (d2) για την $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$.

Για να το δείξουμε ότι η $\{Q_{\tilde{\theta}}\}_{\tilde{\theta}\in\mathbb{R}^m}$ είναι συνεπής με το τυχαίο διάνυσμα $\widetilde{\Theta}$, έστω $A\in\Sigma$ και $B\in\mathfrak{B}_m$ αυθαίρετα. Θέτοντας $E := h^{-1}(B)$ έχουμε

$$B\cap M = g^{-1}(E\cap(D\backslash L_0)) \quad P_{\widetilde{\Theta}} - \sigma.\beta. \tag{4.1}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
\int_B Q_{\tilde\theta}(A)P_{\tilde\Theta}(d\tilde\theta) &= \int_{B\cap M} Q_{\tilde\theta}(A)P_{\tilde\Theta}(d\tilde\theta) + \int_{B\cap(R^m\setminus M)} Q_{\tilde\theta}(A)P_{\tilde\Theta}(d\tilde\theta)\\
&\overset{(4.1)}{=} \int_{g^{-1}(E\cap(D\setminus L_0))} Q_{\tilde\theta}(A)P_{\tilde\Theta}(d\tilde\theta) = \int_{E\cap(D\setminus L_0)} P_\theta(A)P_\Theta\,(d\theta)\\
&= P\left(A\cap\Theta^{-1}\left(E\cap(D\setminus L_0)\right)\right) = P\left(A\cap(\tilde\Theta)^{-1}(B)\right),
\end{aligned}$$

όπου η τέταρτη ισότητα προκύπτει από την συνέπεια του $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ με το Θ. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του *(i)*.

(ii): Ας υποθέσουμε αυθαίρετα ότι $n\in N$ και $A\in\Sigma$ έτσι ώστε $A := W_n^{-1}(B)$ για $B\in\mathfrak{B}$. Υποθέτουμε ότι για όλα $\theta\in D\setminus L_0$ έχουμε $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}\,(h(\theta))$. Τότε για οποιοδήποτε $\widetilde\theta\in M$ παίρνουμε $\theta := g(\widetilde\theta)\in D\setminus L_0$, συνεπώς

$$\left(Q_{\tilde\theta}\right)_{W_n}(B) = Q_{\tilde\theta}(A) = P_{g(\tilde\theta)}(A) = \mathbf{K}\left(h(g(\tilde\theta))\right)(B) = \mathbf{K}(\widetilde\theta)(B).$$

Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, υποθέτουμε ότι για οποιοδήποτε $\widetilde\theta\in M$ έχουμε $Q_{\tilde\theta}(A) = \mathbf{K}(\tilde\theta)$. Τότε για οποιαδήποτε $\theta\in D\setminus L_0$ έχουμε $\tilde\theta := g^{-1}(\theta)\in M$, ως εκ τούτου

$$(P_\theta)_{W_n}(B) = P_\bullet(A)\circ g)(g^{-1}(\theta)) = Q_{g^{-1}(\theta)}(A) = \mathbf{K}(g^{-1}(\theta))(B) = \mathbf{K}(h(\theta))(B).$$

Ο ισχυρισμός *(iii)* αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. □

Ορισμοί 4.2.4. Μία απαρηθμήτρια διαδικασία N έχει την

(a) P-**πολυωνυμική ιδιότητα**, αν ισχύει η ισότητα

$$P\Big(\bigcap_{j=1}^r\{N_{t_j}-N_{t_{j-1}}=\kappa_j\}\Big) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^r\kappa_j!}\prod_{j=1}^r\big(\frac{t_j-t_{j-1}}{t_r}\big)^{\kappa_j}\cdot P(\{N_{t_r}=n\})$$

για όλα τα $r\in\mathbb{N}$, $t_0,t_1,\ldots,t_r\in\mathbb{R}_+$ έτσι ώστε $0=t_0<t_1<\ldots<t_r$ και για όλα τα $\kappa_1,\cdots,\kappa_r\in\mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $n=\sum_{j=1}^r\kappa_j$ (βλ. π.χ. [20], page 2);

(b) την ιδιότητα P-**Markov**, ή λέμε ότι είναι μία διαδικασία P-**Markov**, αν ισχύει η ισότητα

$$P\Big(\{N_{t_{r+1}}=n_{r+1}\}\mid\bigcap_{j=1}^r\{N_{t_j}=n_j\}\Big) = P\left(\{N_{t_{r+1}}=n_{r+1}\}\mid\{N_{t_r}=n_r\}\right)$$

για όλα τα $r\in\mathbb{N}$, $t_1,\ldots,t_r,t_{r+1}\in(0,\infty)$, και $n_1,\ldots,n_r,n_{r+1}\in\mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $t_1<\cdots<t_r<t_{r+1}$ και $P\big(\bigcap_{j=1}^r\{N_{t_j}=n_j\}\big)>0$ (βλ. π.χ. [20], page 44).

Αν δεν προκύψει σύγχυση, μπορούμε να γράψουμε "πολυωνυμική ιδιότητα", "ιδιότητα Markov" και "διαδικασία Markov" αντί για"P-πολυωνυμική ιδιότητα", "ιδιότητα P-Markov" and "διαδικασία P-Markov" αντίστοιχα.

Παρατήρηση 4.2.5. Το παρακάτω αποτέλεσμα είναι πολύ γνωστό (βλ. π.χ. [11], Theorem 2) αλλά το γράφουμε ακριβώς στη μορφή που χρειαζόμαστε και το αποδεικνύουμε αφού δεν έχουμε βρεί απόδειξη κάπου αλλού.

Έστω $\theta \in \mathbb{R}^d$ σταθερό και έστω N να είναι μία $RP(\mathbf{K}(\theta))$. Για οποιαδήποτε $t \in \mathbb{R}_+$ θέτουμε $F_\theta(t) := P(\{W_n \leqslant t\})$ για όλα $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση F_θ είναι συνεχώς διαφοροποιήσιμη στο $(0, \infty)$, $0 < F'_\theta(t) < C$ για κάθε $t > 0$, όπου C είναι μια θετική σταθερά, η οποία μπορεί να εξαρτάται από θ, και ότι $p_d(\theta) := \lim_{t\to 0} F'_\theta(t)$ είναι θετικό. Τότε οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι ισοδύναμοι:

(i) η N έχει την ιδιότητα Markov;

(ii) η N είναι μία $PP(p_d(\theta))$.

Απόδειξη της Παρατήρησης 4.2.5. Πράγματι, η μετάβαση από την $(ii) \Longrightarrow (i)$ είναι γνωστή (βλ. π.χ. [20] Corollary 3.1.2).

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Υποθέτουμε ότι η N έχει την ιδιότητα Markov.

(a) Για κάθε $t > 0$ και $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει η $P(\{N_t = n\}) > 0$.

Η απόδειξη λειτουργεί με επαγωγή n. Πράγματι, ορίζουμε αυθαίρετα την σταθερά $t > 0$.

• Υποθέτουμε πρώτα ότι $n = 0$. Τότε έχουμε

$$P(\{N_t = 0\}) = P(\{0 = T_0 \leqslant t < T_1\}) = P(\{t < W_1\}) = 1 - F_\theta(t) > 0,$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι $t > 0$.

•Ας υποθέσουμε τώρα ότι για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει $P(\{N_t = n\}) > 0$. Θυμίζουμε ότι για δύο συναρτήσεις κατανομών F_{X_1} και F_{X_2} των τυχαίων μεταβλητών X_1 και X_2, αντίστοιχα, η συνέλιξη $F_{X_1} * F_{X_2}$ των F_{X_1} και F_{X_2} δίνεται από τον τύπο

$$(F_{X_1} * F_{X_2})(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_1}(x-y)\, dF_{X_2}(y).$$

Η n-οστή συνέλιξη της F_{X_1} σημειώνεται με $F_{X_1}^{n*} := F_{X_1}^{(n-1)*} * F_{X_1}$ για κάθε $n \geqslant 2$.Ορίζουμε μία σταθερά $t > 0$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned} P(\{N_t = n+1\}) &= P(\{T_{n+1} \leqslant t < T_{n+2}\}) = P(\{T_{n+1} \leqslant t\}) - P(\{T_{n+2} \leqslant t\}) \\ &= F_\theta^{(n+1)*}(t) - F_\theta^{(n+2)*}(t) \\ &= \int_0^t F_\theta^{n*}(t-x) f_\theta(x)\, dx - \int_0^t F_\theta^{(n+1)*}(t-x) f_\theta(x)\, dx \end{aligned}$$

όπου $f_\theta(t) := F'_\theta(t)$ και η τρίτη ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η $\{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι P-i.i.d. από N είναι μία $(P, K(\theta))$-RP. Ως εκ τούτου

$$P(\{N_t = n+1\}) = \int_0^t \left[F_\theta^{n*}(t-x) - F_\theta^{(n+1)*}(t-x)\right] f_\theta(x)dx. \tag{4.2}$$

Επιπλέον, έχουμε

$$\begin{aligned} P(\{N_t = n\}) > 0 &\iff P(\{T_n \leqslant t < T_{n+1}\}) > 0 \\ &\iff P(\{T_n \leqslant t\}) > P(\{T_{n+1} \leqslant t\}) \\ &\iff F_\theta^{n*}(t) > F_\theta^{(n+1)*}(t), \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισοδυναμία είναι συνέπεια του ότι η N είναι μία $(P, K(\theta))$-RP. Άρα χρησιμοποιώντας την σχέση $0 < f_\theta(t)$ για κάθε $t > 0$, παίρνουμε ότι $\left[F_\theta^{n*}(t-x) - F_\theta^{(n+1)*}(t-x)\right] f_\theta(x) > 0$ για όλα τα $x \in (0,t)$. Επομένως παίρνοντας υπόψην την (4.2) έχουμε ότι $P(\{N_t = n+1\}) > 0$. Αυτό ολοκληρώνει τν απόδειξη του (a).

(b) Για κάθε $s, t \in (0, \infty)$ με $s < t$ ισχύει ότι

$$P\left(\{N_s = N_t = 1\}\right) = -\int_0^s G_\theta(t-x)G'_\theta(x)\,dx > 0,$$

όπου $G_\theta(t) := 1 - F_\theta(t)$.

Πράγματι για κάθε $s, t \in (0, \infty)$ με $s < t$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} P(\{N_s = N_t = 1\}) &= P(\{T_1 \leqslant s < t < T_2\}) \\ &= P(\{T_1 \leqslant s\}) - P(\{T_1 \leqslant s, T_2 \leqslant t\}) \\ &= P(\{W_1 \leqslant s\}) - P(\{W_1 \leqslant s, W_2 \leqslant t - W_1\}) \\ &= \int_0^s f_\theta(x)\,dx - \int_0^s \int_0^{t-x} f_\theta(y) f_\theta(x)\,dy\,dx \\ &= -\int_0^s G_\theta(t-x)G'_\theta(x)\,dx. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε τώρα, εάν είναι δυνατόν, ότι $P(\{N_s = N_t = 1\}) = 0$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι ισχύει

$$\int_0^s G_\theta(t-x) f_\theta(x)\,dx = 0.$$

Αλλά από τις παραδοχές μας η συνάρτηση $G_\theta(t-\bullet)f_\theta(\bullet)$ είναι συνεχής στο $(0,s]$, παίρνουμε ότι $G_\theta(t-x)f_\theta(x)=0$ για κάθε $x\in(0,s]$, άρα ότι $G_\theta(t-x)=0$. Ως εκ τούτου $f_\theta(t-x)=0$ για κάθε $x\in(0,s]$, που είναι μια αντίφαση.

Σημειώνουμε ότι, λόγω των (α) και (b), όλες οι δεσμευμένες πιθανότητες που εξετάζονται στο βήμα (c) είναι καλά ορισμένες.

(c) Για κάθε $0<t$ ισχύει

$$-G_\theta(t)p_d(\theta)=G'_\theta(t), \tag{4.3}$$

.

Για την απόδειξη του (c) ακολουθούμε τα επιχειρήματα του Huang [11], Theorem 3, Απόδειξη της ισότητας(14).

Πράγματι, για κάθε $0<u<t$ και $v>0$ εξετάζουμε την πιθανότητα

$$P(\{N_{t-u}=N_t=N_{t+v}=1\}).$$

Από την ιδιότητα Markov έχουμε

$$P(\{N_{t-u}=N_t=N_{t+v}=1\})=P(\{N_{t+v}=1\}\mid\{N_t=1\})P(\{N_{t-u}=N_t=1\})$$

$$\iff \quad \frac{P(\{N_{t-u}=N_t=N_{t+v}=1\})}{P(\{N_{t-u}=N_t=1\})}=P(\{N_{t+v}=1\}\mid\{N_t=1\})$$

$$\iff \quad \frac{P(\{N_{t-u}=N_{t+v}=1\})}{P(\{N_{t-u}=N_t=1\})}=\frac{A_0(t,v)}{B_0(t)}$$

όπου $A_0(t,v)=P(\{N_t=N_{t+v}=1\})$ και $B_0(t)=P(\{N_t=1\})$. Επιπλέον από το (b) παίρνουμε ότι

$$P(\{N_{t-u}=N_{t+v}=1\})=-\int_0^{t-u}G_\theta(t+v-x)G'_\theta(x)\,dx$$

και

$$P(\{N_{t-u}=N_t=1\})=-\int_0^{t-u}G_\theta(t-x)G'_\theta(x)\,dx.$$

Έτσι,

$$\frac{\int_0^{t-u}G_\theta(t+v-x)G'_\theta(x)\,dx}{\int_0^{t-u}G_\theta(t-x)G'_\theta(x)\,dx}=\frac{A_0(t,v)}{B_0(t)}.$$

Είναι προφανές ότι η δεξιά πλευρά της τελευταίας εξίσωσης είναι ανεξάρτητη από το u. Έτσι η παράγωγος ως προς u είναι ίση με μηδέν. Επιπλέον, εξισώνοντας την παράγωγο της αριστερής πλευράς με το μηδέν έχουμε,

$$\Big(G_\theta(u+v)G'_\theta(t-u)\Big)\cdot\Big(\int_0^{t-u}G_\theta(t-x)G'_\theta(x)dx\Big)$$

$$=\Big(\int_0^{t-u}G_\theta(t+v-x)G'_\theta(x)dx\Big)\cdot\Big(G_\theta(u)G'_\theta(t-u)\Big)$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{\int_0^{t-u}G_\theta(t+v-x)G'_\theta(x)dx}{\int_0^{t-u}G_\theta(t-x)G'_\theta(x)dx}=\frac{G_\theta(u+v)G'_\theta(t-u)}{G_\theta(u)G'_\theta(t-u)}.$$

Δεδομένου ότι η αριστερή πλευρά της τελευταίας ισότητας είναι ανεξάρτητη από το u το ίδιο πρέπει να ισχύει για την δεξιά, άρα αφήνοντας στη δεξιά πλευρά $u \to 0$ και $u \to t$ παίρνουμε

$$\frac{-G_\theta(t+v)p_d(\theta)}{-G_\theta(t)p_d(\theta)}=\frac{G_\theta(v)G'_\theta(t)}{G_\theta(0)G'_\theta(t)}$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{-G_\theta(t+v)p_d(\theta)}{G_\theta(v)G'_\theta(t)}=\frac{-G_\theta(t)p_d(\theta)}{G'_\theta(t)}. \tag{4.4}$$

Επιπλέον, δεδομένου ότι η δεξιά πλευρά του (4.4) είναι ανεξάρτητη από το v η παράγωγος ως προς v πρέπει να είναι ίση με μηδέν. Έτσι, εξισώνοντας την παράγωγο της αριστερής πλευράς με το μηδέν παίρνουμε

$$(-G'_\theta(t+v)p_d(\theta))\cdot(G_\theta(v)G'_\theta(t))=(-G_\theta(t+v)p_d(\theta))\cdot(G'_\theta(v)G'_\theta(t))$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{-G_\theta(t+v)p_d(\theta)}{G_\theta(v)G'_\theta(t)}=\frac{-G'_\theta(t+v)p_d(\theta)}{G'_\theta(v)G'_\theta(t)}.$$

Έτσι, για $v \to 0$ παίρνουμε ότι

$$\frac{-G_\theta(t)p_d(\theta)}{G'_\theta(t)}=\frac{-G'_\theta(t)p_d(\theta)}{-h(\theta)G'_\theta(t)}=1;$$

ως εκ τούτου από την ισότητα (4.4) ακολουθεί ότι

$$-G_\theta(t)p_d(\theta)=G'_\theta(t),$$

που καταλήγει στην απόδειξη του (c).

(d)Η N είναι μία P-PP με παράμετρο $p_d(\theta)$.

Πράγματι, από την (c) προκύπτει ότι

$$-G_\theta(t)p_d(\theta)=G'_\theta(t)$$

. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι $G_\theta(t)=e^{-p_d(\theta)t}$, άρα ότι $P_{W_n}=\mathbf{Exp}\,(p_d(\theta))$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Εφαρμόζοντας τώρα [20], Theorem 2.3.4, παίρνουμε ότι η N είναι μία P-PP με παράμετρο $p_d(\theta)$.

Είναι γνωστό ότι αν N είναι μία MPP(Θ) τότε ικανοποιεί την ιδιότητα Markov (βλ. π.χ. [20], Theorem 4.2.3). Ωστόσο, η τετριμμένη απαριθμήτρια N που ορίζονται με τη σχέση του $N_t := [t]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$, όπου με $[t]$ συμβολίζεται το ακέραιο μέρος του t, είναι μία Markov RP($\mathbf{K}(\theta_0)$) αλλά όχι διαδικασία Poisson. Αυτό εγείρει το ερώτημα, κάτω από ποιές συνθήκες μία Markov MRP($\mathbf{K}(\Theta)$) είναι μία MPP(Θ)?

Σύμφωνα με την ακόλουθη ασθενή υπόθεση, αυτό το ερώτημα απαντάται θετικά στην Πρόταση 4.2.7.

Υπόθεση 4.2.6. Έστω D και h όπως στον Ορισμό 4.2.2 (a), έστω N μία eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$) και έστω $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ μία φ.δ.π. της P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ. Σύμφωνα με την [12], Lemma 3.5, υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο με $H_h \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε rd2

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, \theta \in D \backslash H_h \qquad [(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}\,(h(\theta))]. \tag{4.5}$$

Σταθεροποιούμε ένα αυθαίρετο $\theta \in D$, και ορίζουμε την συνάρτηση $F_{h(\theta)} : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ μέσω του τύπου

$$F_{h(\theta)}(t) := \begin{cases} P_\theta(\{W_n \leqslant t\}) & \text{αν } \theta \in D \backslash H_h, \\ \alpha & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για οποιοδήποτε $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}$, όπου α είναι μια σταθερά στο $(0,1)$.

Ξεκάθαρα, για οποιαδήποτε $\theta \in D \backslash H_h$ η συνάρτηση $F_{h(\theta)}$ εξαρτάται από την κατανομή της W_n κάτω από το P_θ και, λόγω της συνθήκης (5.2), από την h. Λέμε ότι N, h και $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ ικανοποιούν την Υπόθεση 4.2.6, αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_h := L_{h,N,\{P_\theta\}_{\theta \in D}}$ στη $\mathfrak{B}(D)$, που περιέχει το H_h, έτσι ώστε για οποιονδήποτε $\theta \notin L_h$ η συνάρτηση $F_{h(\theta)}$ να είναι συνεχής διαφορίσιμη στο $(0, \infty)$, να υπάρχει μία συνάρτηση $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\Theta)})$ με $0 < F'_{h(\theta)}(t) < C(h(\theta))$ για κάθε $t > 0$, και η συνάρτηση $p_h : D \backslash L_h \longmapsto R$ που ορίζονται με τον τύπο $p_h(\theta) := p_{h,d}(\theta) := \lim_{t \to 0} F'_{h(\theta)}(t)$ να είναι θετική και 1-1.

Για ειδικές περιπτώσεις $D = R^d$ και $h := id_{R^d}$ γράφουμε για απλοποίηση L, F_θ και p_d στη θέση του L_h, $F_{h(\theta)}$ και p_h, αντίστοιχα, και λέμε ότι οι N και $\{P_\theta\}_{\theta \in R^d}$ ικανοποιούν την Υπόθεση 4.2.6.

Το παρακάτω αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί στην [18], Proposition 3.2.

Πρόταση 4.2.7. *Θεωρούμε τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) η N έχει την πολυωνυμική ιδιότητα;

(ii) η N έχει την ιδιότητα Markov;

(iii) η N είναι μία MPP($\breve{\Theta}$).

Τότε (iii) $\Rightarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii). Εάν η N είναι μία MRP($\mathbf{K}(\Theta)$) και η $\{P_\theta\}_{\theta\in R^d}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο P_Θ συνεπής με το Θ ικανοποιώντας την Υπόθεση 4.2.6, με $\breve{\Theta}(\omega) := (p_d \circ \Theta)(\omega)$ για $\omega \in \Theta^{-1}(L^c)$, και αν συμβολιζουμε πάλι με $\breve{\Theta}$ κάθε μετρήσιμη επέκταση του Θ από το $\Theta^{-1}(L^c)$ στο Ω, τότε οι (i), (ii), (iii) είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη. Η συνεπαγωγή $(i) \Longrightarrow (ii)$ προκύπτει από έναν εύκολο υπολογισμό, ενώ η συνεπαγωγή $(iii) \Longrightarrow (i)$ είναι γνωστή για κάθε πραγματική τυχαία μεταβλητή Ω στη θέση της $\breve{\Theta}$ (βλ. π.χ. [20], Lemma 4.2.2).

Από το $(ii) \Longrightarrow (iii)$: Έστω N μία MRP($\mathbf{K}(\Theta)$) που έχει την ιδιότητα Markov, έτσι ώστε οι N και $\{P_\theta\}_{\theta\in R^d}$ να ικανοποιούν την Υπόθεση 4.2.6, και έστω Θ να είναι όπως παραπάνω.

(a) Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_1 \in \mathfrak{B}_d$ έτσι ώστε η N να είναι μία P_θ-RP($\mathbf{K}(\theta)$) για κάθε $\theta \notin L_1$.

Πράγματι, αφού η N είναι μία MRP($\mathbf{K}(\Theta)$) μπορούμε να εφαρμόσουμε την [12], Proposition 3.8, για να πάρουμε το (a).

(b) Για κάθε $t > 0$ και $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει η συνθήκη $P(\{N_t = n\}) > 0$.

Πράγματι, πρώτα παρατηρούμε ότι εφαρμόζοντας [12], Lemma 3.5, για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και για $t > 0$ παίρνουμε τη σχέση

$$P(\{N_t = n\}) = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[P_\bullet(\{N_t = n\})\right].$$

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t > 0$ και $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει η συνθήκη $P_\theta(\{N_t = n\}) > 0$ για P_Θ-σ.ο. $\theta \in R^d$. Αλλά αυτό μπορεί εύκολα να αποδειχθεί με επαγωγή στο n.

(c) Για κάθε $s, t \in (0, \infty)$ με $s < t$ ισχύει η συνθήκη

$$P(\{N_s = N_t = 1\}) = -\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^s G_\bullet(t-x)G'_\bullet(x)dx\right] > 0,$$

όπου $G_\theta(t) := 1 - F_\theta(t)$ για κάθε $\theta \in R^d$.

Πράγματι, για κάθε $s, t \in (0, \infty)$ με $s < t$ έχουμε

$$\begin{aligned}
P(\{N_s = N_t = 1\}) &= P(\{T_1 \leqslant s < t < T_2\}) \\
&= P(\{W_1 \leqslant s\}) - P(\{W_1 \leqslant s, W_2 \leqslant t - W_1\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d \cap (L \cup L_1)^c} \left[\int_0^s f_\theta(x)dx - \int_0^s \int_0^{t-x} f_\theta(y) f_\theta(x) dy dx\right] P_\Theta(d\theta) \\
&= -\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^s G_\bullet(t-x)G'_\bullet(x)dx\right],
\end{aligned}$$

όπου η τρίτη ισότητα προκύπτει από την [12], Lemma 3.5, και το βήμα (a), και $f_\theta := F'_\theta$. Υποθέτουμε τώρα, αν είναι δυνατόνν, ότι $P(\{N_s = N_t = 1\}) = 0$. Λόγω της Υπόθεσης **??**, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι για όλα τα $\theta \notin L \cup L_1$ και $x \in (0,s]$ ισχύει η συνθήκη ότι $G_\theta(t-x) = 0$. Ως εκ τούτου $f_\theta(t-x) = 0$ για κάθε $x \in (0,s]$, μια αντίφαση σύμφωνα με την Υπόθεση 4.2.6.

Σημειώνουμε ότι, λόγω των (b) και (c), όλες οι πιθανότητες υπό όρους που εξετάζονται στα επόμενα τρία βήματα είναι καλά ορισμένες.

Οι αποδείξεις των ακόλουθων βημάτων (d), (e) και (g) είναι κάποιες τροποποιήσεις των αντίστοιχων επιχειρημάτων του Huang στην απόδειξη του Theorem 3 από [11].
Περιλαμβάνουμε τις λεπτομερείς αποδείξεις για λόγους πληρότητας.

(d) Για κάθε $0 < t, v$ ισχύουν οι ισότητες

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t+v)p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(v)G'_\bullet(t)\right]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t)p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'_\bullet(t)\right]} = 1 \tag{4.6}$$

Πράγματι, για οποιονδήποτε $0 < u < t$ και $v > 0$ εφαρμόζοντας την ιδιότητα Markov έχουμε,

$$P(\{N_{t-u} = N_t = N_{t+v} = 1\}) = P(\{N_{t+v} = 1\}|\{N_t = 1\})P(\{N_{t-u} = N_t = 1\})$$

ή ισοδύναμα

$$\frac{P(\{N_{t-u} = N_{t+v} = 1\})}{P(\{N_{t-u} = N_t = 1\})} = \frac{A_1(t,v)}{B_1(t)},$$

όπου $A_1(t,v) := P(\{N_t = N_{t+v} = 1\})$ και $B_1(t) := P(\{N_t = 1\})$. Τότε, από το (c) παίρνουμε την ισότητα

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} G_\bullet(t+v-x)G'_\bullet(x)dx\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} G_\bullet(t-x)G'_\bullet(x)dx\right]} = \frac{A_1(t,v)}{B_1(t)}. \tag{4.7}$$

Είναι προφανές ότι η δεξιά πλευρά της τελευταίας ισότητας είναι ανεξάρτητη από u. Επομένως η παράγωγος της ως προς τη u πρέπει να είναι ίση με το μηδέν. Εξισώνοντας έτσι την παράγωγο της αριστερής πλευράς με το μηδέν και εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[\int_0^{t-u} G_\bullet(t+v-x)G'_\bullet(x)dx\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[\int_0^{t-u} G_\bullet(t-x)G'_\bullet(x)dx\Big]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G_\bullet(u+v)G'_\bullet(t-u)\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G_\bullet(u)G'_\bullet(t-u)\Big]}.$$

Αφού η αριστερή πλευρά της ισότητας (4.6) είναι ανεξάρτητη από το u το ίδιο πρέπει να ισχύει για την δεξιά πλευρά. Έτσι, αφήνοντας στη δεξιά πλευρά $u \to 0$ και $u \to t$ από το Θεώρημα της Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε ότι

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[-G_\bullet(t+v)p_d(\bullet)\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G_\bullet(v)G'_\bullet(t)\Big]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[-G_\bullet(t)p_d(\bullet)\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G'_\bullet(t)\Big]}. \tag{4.8}$$

Επιπλέον, επειδή η δεξιά πλευρά της (4.8)είναι ανεξάρτητη από το v η παράγωγος της v πρέπει να είναι ίση με μηδέν. Έτσι, εξισώνοντας την παράγωγο της αριστερής πλευράς με το μηδέν και εφαρμόζοντας το Θεώρημα της Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t+v)p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(v)G'_\bullet(t)\right]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(t+v)p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'_\bullet(v)G'_\bullet(t)\right]}.$$

Έτσι, για $v \to 0$ και από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t)p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'_\bullet(t)\right]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(t)p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-p_d(\bullet)G'_\bullet(t)\right]} = 1;$$

από το οποίο μαζί με την (4.10) προκύπτει ότι

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[-G_\bullet(t+v)p_d(\bullet)\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G_\bullet(v)G'_\bullet(t)\Big]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[-G_\bullet(t)p_d(\bullet)\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G'_\bullet(t)\Big]} = 1.$$

(e) Για κάθε $0 < t, v$ ισχύει η συνθήκη

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(t+v)\left(p_d(\bullet)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(v)G'_\bullet(t)p_d(\bullet)\right]. \tag{4.9}$$

Πράγματι, για οποιοδήποτε $0 < u < t$, $v > 0$ και $w > 0$ εφαρμόζοντας την ιδιότητα Markov έχουμε

$$\frac{P(\{N_{t-u} = N_t = 1, N_{t+v} = N_{t+v+w} = 2)\}}{P(\{N_{t-u} = N_t = 1)\}} = \frac{A_2(t,v,w)}{B_2(t,v)},$$

όπου $A_2(t,v,w) := P(\{N_{t+v+w} = 2, N_{t+v} = 2\}) \cdot P(\{N_{t+v} = 2, N_t = 1\})$ και $B_2(t,v) := P(\{N_{t+v} = 2\}) \cdot P(\{N_t = 1\})$.

Επιπλέον, εργαζόμενοι όπως στην απόδειξη του (c) παίρνουμε

$$\begin{aligned} &P(\{N_{t-u} = N_t = 1, N_{t+v} = N_{t+v+w} = 2\}) \\ &\quad = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u}\int_{t-x}^{t+v-x} G_\bullet(t+v+w-x-y)G'_\bullet(y)G'_\bullet(x)dydx\right], \end{aligned}$$

από το οποίο μαζί με το (c) έχουμε ότι

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u}\int_{t-x}^{t+v-x} G_\bullet(t+v+w-x-y)G'_\bullet(y)G'_\bullet(x)dydx\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} G_\bullet(t-x)G'_\bullet(x)dx\right]} = -\frac{A_2(t,v,w)}{B_2(t,v)}.$$

Είναι προφανές ότι η δεξιά πλευρά της τελευταίας εξίσωσης είναι ανεξάρτητη από το u. Επομένως η παράγωγός της ως προς το u πρέπει να είναι ίση με το μηδέν. Επιπλέον, εξισώνοντας την παράγωγο του αριστερού μέρους με το μηδέν και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u}\int_{t-x}^{t+v-x} G_\bullet(t+v+w-x-y)G'_\bullet(y)G'_\bullet(x)dydx\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} G_\bullet(t-x)G'_\bullet(x)dx\right]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_u^{u+v} G_\bullet(u+v+w-y)G'_\bullet(y)G'_\bullet(t-u)dy\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(u)G'_\bullet(t-u)\right]}.$$

Δεδομένου ότι η αριστερή πλευρά είναι ανεξάρτητη του u το ίδιο πρέπει να ισχύει και για την δεξιά. Έτσι θέτοντας στη δεξιά πλευρά $u \to 0$ και $u \to t$ από το Θεώρημα της Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[-G_\bullet(t+v)p_d(\bullet)\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G_\bullet(v)G'_\bullet(t)\Big]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[-G_\bullet(t)p_d(\bullet)\Big]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[G'_\bullet(t)\Big]}. \tag{4.10}$$

Τέλος, η ολοκλήρωση ως προς v μας δίνει

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(t+v)\left(p_d(\bullet)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(v)G'_\bullet(t)p_d(\bullet)\right].$$

(f) Για κάθε $0 < t, v$ ισχύει η σχέση

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(t)G_\bullet(v)\left(p_d(\bullet)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(v)G'_\bullet(t)p_d(\bullet)\right]. \tag{4.11}$$

Πράγματι, για κάθε $0 < u < t$, $v > 0$ και $w > 0$ απο την ιδιότητα Markov έχουμε

$$\frac{P(\{N_{t-u} = N_t = 1, N_{t+v} = 2, N_{t+v+w} = 3\})}{P(\{N_{t-u} = N_t = 1\})} = \frac{A_3(t,v,w)}{B_3(t,v)},$$

όπου $A_3(t,v,w) := P(\{N_{t+v+w} = 3, N_{t+v} = 2\}) \cdot P(\{N_{t+v} = 2, N_t = 1\})$ and $B_3(t,v) := P(\{N_{t+v} = 2\}) \cdot P(\{N_t = 1\})$.

Επιπλέον, εφαρμόζοντας το Lemma 3.5, της [12] και το βήμα (a) μετά από κατάλληλους υπολογισμούς όπως στην απόδειξη (c) του έχουμε

$$\begin{aligned} &P(\{N_{t-u} = N_t = 1, N_{t+v} = 2, N_{t+v+w} = 3\}) \\ &= \mathbb{E}_{P_\Theta}\Big[\int_0^{t-u}\int_{t-x}^{t+v-x}\int_{t+v-x-y}^{t+v+w-x-y} G_\bullet(t+v+w-x-y-z)f_\bullet(z)f_\bullet(y)f_\bullet(x)dzdydx\Big]. \end{aligned}$$

Το τελευταίο μαζί με το βήμα (c) συνεπάγεται ότι

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u}\int_{t-x}^{t+v-x}\int_{t+v-x-y}^{t+v+w-x-y} G_\bullet(t+v+w-x-y-z)G'_\bullet(z)G'_\bullet(y)G'_\bullet(x)dzdydx\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} G_\bullet(t-x)G'_\bullet(x)dx\right]} = \frac{A_3(t,v,w)}{B_3(t,v)}.$$

Είναι προφανές ότι η δεξιά πλευρά της τελευταίας εξίσωσης είναι ανεξάρτητη από το u. Επομένως η παράγωγός της u πρέπει να είναι ίσο με το μηδέν. Εξισώνοντας έτσι την παράγωγο της αριστερής πλευράς με το μηδέν και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης έχουμε

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u}\int_{t-x}^{t+v-x}\int_{t+v-x-y}^{t+v+w-x-y} G_\bullet(t+v+w-x-y-z)f_\bullet(z)f_\bullet(y)f_\bullet(x)dzdydx\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{t-u} G_\bullet(t-x)G'_\bullet(x)dx\right]}$$
$$= \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_u^{u+v}\int_{u+v-y}^{u+v+w-y} G_\bullet(u+v+w-y-z)G'_\bullet(z)G'_\bullet(y)G'_\bullet(t-u)dzdy\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(u)G'_\bullet(t-u)\right]}.$$

Δεδομένου ότι η αριστερή πλευρά της τελευταίας ισότητας είναι ανεξάρτητη από το u το ίδιο πρέπει να ισχύει και για την δεξιά πλευρα. Συνεπώς, λαμβάνοντας τη δεξιά πλευρά $u \to 0$ και $u \to t$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε ότι

$$\frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-\int_t^{t+v}\int_{t+v-y}^{t+v+w-y} G_\bullet(t+v+w-y-z)G'_\bullet(z)G'_\bullet(y)p_d(\bullet)dzdy\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{v}\int_{v-y}^{v+w-y} G_\bullet(v+w-y-z)G'_\bullet(z)G'_\bullet(y)G'_\bullet(t)dzdy\right]} = \frac{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t)p_d(\bullet)\right]}{\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'_\bullet(t)\right]}$$

Λόγω της συνθήκης (4.10), η τελευταία ισότητα μπορεί να ξαναγραφεί με την ακόλουθη μορφή

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{v}\int_{v-y}^{v+w-y} G_\bullet(v+w-y-z)G'_\bullet(z)G'_\bullet(y)G'_\bullet(t)dzdy\right]$$
$$= \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-\int_t^{t+v}\int_{t+v-y}^{t+v+w-y} G_\bullet(t+v+w-y-z)G'_\bullet(z)G'_\bullet(y)p_d(\bullet)dzdy\right].$$

Αν πάρουμε την παράγωγο ως πρός το v και εφαρμόσουμε το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{w} G_\bullet(w-z)G'_\bullet(z)G'_\bullet(v)G'_\bullet(t)dz\right]$$
$$= \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-\int_0^{w} G_\bullet(w-z)G'_\bullet(z)G'_\bullet(t+v)p_d(\bullet)dz\right],$$

ή ισοδύναμα εάν θέσουμε $s := w - z$ στο πρώτο ολοκλήρωμα παίρνουμε ότι

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\int_0^{w} G_\bullet(s)G'_\bullet(w-s)G'_\bullet(v)G'_\bullet(t)ds\right]$$
$$= \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-\int_0^{w} G_\bullet(w-z)G'_\bullet(z)G'_\bullet(t+v)p_d(\bullet)dz\right].$$

Παραγωγίζοντας ως προς το w και εφαρμόζοντας για άλλη μια φορά το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης, παίρνουμε

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(w)p_d(\bullet)G'_\bullet(v)G'_\bullet(t)\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(w)p_d(\bullet)G'_\bullet(t+v)\right].$$

Ολοκληρώνοντας ως προς t έχουμε

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t)G_\bullet(w)p_d(\bullet)G'_\bullet(v)\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t+v)G'_\bullet(w)p_d(\bullet)\right].$$

Για $v \to 0$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(t)G_\bullet(w)\left(p_d(\bullet)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(t)G'_\bullet(w)p_d(\bullet)\right].$$

Για $v \to t$, από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(v)G_\bullet(w)\left(p_d(\bullet)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(v)G'_\bullet(w)p_d(\bullet)\right].$$

Τέλος για $w \to t$ από το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(t)G_\bullet(v)\left(p_d(\bullet)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G_\bullet(v)G'_\bullet(t)p_d(\bullet)\right].$$

(g) Για κάθε $t > 0$ ισχύει η συνθήκη

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\left(G'_\bullet(t) + p_d(\bullet)G_\bullet(t)\right)^2\right] = 0. \tag{4.12}$$

Πράγματι έστω ένα οποιοδήποτε $t > 0$. Εφαρμόζοντας την (4.8) και (4.11) για $v \to t$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\left(G'_\bullet(t) + p_d(\bullet)G_\bullet(t)\right)^2\right]\\ &\quad= \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'^2_\bullet(t) - G^2_\bullet(t)p_d(\bullet)^2 - G_\bullet(2t)p_d(\bullet)^2 + p_d(\bullet)^2G^2_\bullet(t)\right].\end{aligned}$$

Ως εκ τούτου

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\left(G'_\bullet(t) + p_d(\bullet)G_\bullet(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'^2_\bullet(t) - G_\bullet(2t)p_d(\bullet)^2\right]. \tag{4.13}$$

Παραγωγίζοντας την (4.6) ως προς v και εφαρμόζοντας το Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης παίρνουμε

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(t+v)p_d(\bullet)\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'_\bullet(v)G'_\bullet(t)\right];$$

Ως εκ τούτου για $v \to t$ παράγουμε τη σχέση

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(2t)p_d(\bullet)\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G'^2_\bullet(t)\right],$$

άρα η ισότητα (4.13) μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\left(G'_\bullet(t) + p_d(\bullet)G_\bullet(t)\right)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(2t)p_d(\bullet) - G_\bullet(2t)p_d(\bullet)^2\right]. \tag{4.14}$$

Τώρα για $v \to 0$ στην ισότητα (4.8) παίρνουμε το εξής

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(t)p_d(\bullet)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(t)p_d(\bullet)\right],$$

επομένως αντικαθιστώντας το t με $2t$ παίρνουμε

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[G_\bullet(2t)p_d(\bullet)^2\right] = \mathbb{E}_{P_\Theta}\left[-G'_\bullet(2t)p_d(\bullet)\right]. \tag{4.15}$$

Έτσι, από τις εξισώσεις (4.14)και(4.15) προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}_{P_\Theta}\left[\left(G'_\bullet(t) + p_d(\bullet)G_\bullet(t)\right)^2\right] = 0 \quad \text{για κάθε } \ t > 0.$$

(h)Υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο και $L_2 \in \mathfrak{B}_d$, που περιέχει L, έτσι ώστε για κάθε $\theta \notin L_2$ η διαδικασία W να είναι P_θ-εκθετική κατανομή με παράμετρο $p_d(\theta)$.

Πράγματι από το βήμα (g) προκύπτει ότι για κάθε $s \in \mathbb{Q}_+\backslash\{0\}$ υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $M_s \in \mathfrak{B}_d$, που περιέχει L, έτσι ώστε για κάθε $\theta \notin M_s$ να ισχύει

$$G'_\theta(s) + p_d(\theta)G_\theta(s) = 0. \tag{4.16}$$

Έστω $L_2 := \bigcup_{s\in\mathbb{Q}_+\backslash\{0\}} M_s$ και έστω $t > 0$ και $\theta \notin L_2$ αυθαίρετα. Υπάρχει μια ακολουθία $\{s_n\}_{n\in N}$ στο $Q_+\backslash\{0\}$ έτσι ώστε $t = \lim_{n\to\infty} s_n$. Εφαρμόζοντας την (4.16) παίρνουμε $G'_\theta(s_n) = -p_d(\theta)G_\theta(s_n)$, που συνεπάγεται μαζί με την Υπόθεση 4.2.6 ότι $G'_\theta(t) = \lim_{n\to\infty} G'_\theta(s_n) = -p_d(\theta)G_\theta(t)$. Ως εκ τούτου $G_\theta(t) = e^{-p_d(\theta)t}$, ή $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{Exp}\left(p_d(\theta)\right)$ για όλα τα $n \in N$.

(i) Θέτουμε $L_* := L_1 \cup L_2$ και τονίζουμε πάλι οτι p_d ο περιορισμός του p_d στο L_*^c. Ορίζοντας $M_* := p_d(L_*)$ και $r := p_d^{-1} : p_d\left(L_*^c\right) \longmapsto L_*^c$, καθώς και την οικογένεια $\{Q_{\breve{\theta}}\}_{\breve{\theta}\in R}$ όπως στο Λήμμα 4.2.3 (για $k = 1$, και p_d, r και L_* στην θέση του h, g και L_0, αντίστοιχα). Τότε η οικογένεια $\{Q_{\breve{\theta}}\}_{\breve{\theta}\in R}$ είναι μία φ.δ.π P επάνω στο $P_{\breve{\Theta}}$ συνεπής με $\breve{\Theta}$ και για κάθε $\breve{\theta} \notin M_*$ η διαδικασία W είναι $Q_{\breve{\theta}}$-ανεξάρτητη και $(Q_{\breve{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\breve{\theta})$ για κάθε $n \in N$.

Στην πραγματικότητα από το Λήμμα 4.2.3 η οικογένεια $\{Q_{\breve{\theta}}\}_{\breve{\theta}\in R}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\breve{\Theta}}$ συνεπής με $\breve{\Theta}$ και για κάθε $\breve{\theta} \notin M_*$ παίρνοντας υπόψην (a) και (h) συμπεραίνουμε ότι το W είναι $Q_{\breve{\theta}}$-ανεξάρτητη και $(Q_{\breve{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\breve{\theta})$ για κάθε $n \in N$.

(j) N είναι μία $MPP(\breve{\Theta})$.

Πράγματι, από την (i) παίρνουμε ότι για κάθε $\breve{\theta} \notin M_*$ η διαδικασία N είναι $Q_{\breve{\theta}}$-PP($\breve{\theta}$) (βλ. π.χ [20], Theorem 2.3.4). Έτσι, εφαρμόζοντας [12], Proposition 4.4, συμπεραίνουμε ότι N είναι μία MPP($\breve{\Theta}$). □

Λήμμα 4.2.8. *Έστω D και h όπως στον ορισμό 4.2.2 (a), και έστω $\{X_n\}_{n\in N}$ να είναι μια ακολουθία πραγματικών τυχαίων μεταβλητών. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) $\exists \ L_3 \in \sigma(\Theta)_0 \ \ \forall \ n \in N \ \ [P_{X_n|\Theta} \upharpoonright \times L_3^c = \mathbf{K}_n\left(h(\Theta)\right) \upharpoonright \times L_3^c]$;

(ii) $\exists\ \widetilde{L}_3 \in \mathfrak{B}(D)_0\ \forall\ n \in N\ \forall\ \theta \in D\backslash\widetilde{L}_3\ \left[(P_\theta)_{X_n} = \mathbf{K}_n\left(h(\theta)\right)\right]$,

όπου $\sigma\left(\Theta\right)_0 := \{M \in \sigma\left(\Theta\right) : P(M) = 0\}$ *και* $\mathfrak{B}(D)_0 := \{\widetilde{M} \in \mathfrak{B}(D) : P_\Theta(\widetilde{M}) = 0\}$.

Απόδειξη. *(i)⟹(ii)*: Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο $L_3 \in \sigma\left(\Theta\right)_0$ έτσι ώστε για κάθε $n \in N$ ισχύει η σχέση

$$P_{X_n|\Theta} \restriction \times L_3^c = \mathbf{K}_n\left(h(\Theta)\right) \restriction \times L_3^c.$$

Στη συνέχεια, για κάθε σταθερό $n \in N$, $F \in \mathfrak{B}_m$ και $B \in$ παίρνουμε

$$\int_{\Theta^{-1}(F)} P_{X_n|\Theta}(B, \bullet)dP = \int_{\Theta^{-1}(F)} \mathbf{K}_n\left(h(\Theta)\right)(B, \bullet)dP,$$

συνεπώς, λαμβάνοντας υπόψη την [12], Lemma 3.5,παίρνουμε

$$\int_F \left(P_\theta\right)_{X_n}(B)P_\Theta(d\theta) = \int_F \mathbf{K}_n(h(\theta))(B)P_\Theta(d\theta).$$

Συνεπώς, υπάρχει ένα σύνολο $\widetilde{L}_{n,B} \in \mathfrak{B}(D)_0$ έτσι ώστε

$$\left(P_\theta\right)_{X_n}(B) = \mathbf{K}_n(h(\theta))(B) \qquad \text{για κάθε } \theta \in D\backslash\widetilde{L}_{n,B}. \tag{4.17}$$

Έστω $\widetilde{L}_3 := \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{B\in\mathcal{G}_B}\widetilde{L}_{n,B}$, όπου $\mathcal{G}_B$ ένας αριθμήσιμος γεννήτορας $\mathfrak{B}$ ποτ είναι κλειστός κάτω από τις πεπερασμένες τομές και συμβολίζουμε με $\mathcal{D}$ την κλάση όλων των $B \in \mathfrak{B}$ ώστε να ισχύει η συνθήκη (4.17) για κάθε $\theta \in D\backslash\widetilde{L}_3$ και $n \in \mathbb{N}$. Μπορεί εύκολα να δει ότι $\mathcal{G}_{\mathfrak{B}} \subseteq \mathcal{D}$ και ότι η $\mathcal{D}$ είναι μια κλάση Dynkin, άρα $\mathcal{D} = \mathfrak{B}$. Έτσι προκύπτει ο ισχυρισμός *(ii)*.

Εφαρμόζοντας μια παρόμοια συλλογιστική παίρνουμε την αντίστροφη σχέση. □

Το παρακάτω αποτέλεσμα δείχνει πως μία eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$) ανάγεται σε μία MRP($\mathbf{K}(\widetilde{\Theta})$) υπό την αλλαγή της παραμέτρου μείξης.

Λήμμα 4.2.9. *Έστω D και h όπως στον Ορισμό 4.2.2 (a) και έστω $\widetilde{\Theta} := h \circ \Theta$. Υποθέτουμε ότι η N είναι μία eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$) στον (Ω, Σ, P). Τότε η N είναι μία MRP($\mathbf{K}(\widetilde{\Theta})$).*

Απόδειξη. Έστω $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$, g και $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta}\in R^m}$ όπως στο Λήμμα 4.2.3. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.8, υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}_3 \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε $\left(P_\theta\right)_{W_n} = \mathbf{K}\left(h(\theta)\right)$ για όλα τα $\theta \in D\backslash\widetilde{L}_3$. Υποθέτουμε ότι το $\widetilde{L}_3$ περιέχει το P_Θ-μηδενικό σύνολο L_0 του Λήμματος 4.2.3. Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 4.2.3, παίρνουμε ότι $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta}\in R^m}$ φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widetilde{\Theta}}$ συνεπής με το $\widetilde{\Theta}$, και για όλα τα $\widetilde{\theta} \in h(D\backslash\widetilde{L}_3)$ η διαδικασία W είναι $Q_{\widetilde{\theta}}$-ανεξάρτητη και $\left(Q_{\widetilde{\theta}}\right)_{W_n} = \mathbf{K}(\widetilde{\theta})$ για κάθε $n \in N$. Αλλά το τελευταίο μαζί με την [14] Proposition 3.8 δίνει το συμπέρασμα του Λήμματος. □

Το επόμενο αποτέλεσμα επεκτείνει την Πρόταση 4.2.7.

Θεώρημα 4.2.10. *(Macheras and Tzaninis [18], Theorem 3.1) Έστω D, h όπως στον Ορισμό 4.2.2 (a), έστω L_0 όπως στο Λήμμα 4.2.3, και έστω N είναι μία eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$) στο (Ω, Σ, P) ικανοποιώνταε την h και $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ Υπόθεση 4.2.6. Παίρνουμε $O_h := L_0 \cup L_h$ και $\widehat{\Theta}(\omega) := (p_h \circ \Theta)(\omega)$ αν $\omega \in \Theta^{-1}(D\backslash O_h)$, και συμβολίζουμε πάλι με $\widehat{\Theta}$ κάθε μετρήσιμη επέκταση $\widehat{\Theta}$ από $\Theta^{-1}(D\backslash O_h)$ στο Ω. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) η N έχει την πολυωνυμική ιδιότητα,

(ii) η N έχει την ιδιότητα Markov,

(iii) η N είναι μία MPP($\widehat{\Theta}$).

Απόδειξη. Έστω $\widetilde{\Theta}$ και $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta}\in\mathbb{R}^m}$ όπως στο Λήμμα 4.2.3. Από το Λήμμα 4.2.9 προκύπτει ότι η N είναι μία MRP($\mathbf{K}(\widetilde{\Theta})$). Για κάθε $\widetilde{\theta} \in \mathbb{R}^m$ και $t \in \mathbb{R}_+$ θέτουμε $F_{\widetilde{\theta}}(t) := Q_{\widetilde{\theta}}(\{W_n \leqslant t\})$ για όλα $n \in N$.

(a) Έστω $V_h := h(D\backslash O_h)$. Τότε $P_{\widetilde{\Theta}}(V_h) = 1$ και για κάθε $\widetilde{\theta} \in V_h$ η συνάρτηση $F_{\widetilde{\theta}}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη $(0, \infty)$ και $0 < F'_{\widetilde{\theta}}(t) < C(\widetilde{\theta})$ για κάθε $t > 0$.

Πράγματι, σύμφωνα με την Υπόθεση 4.2.6 υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_h \in \mathfrak{B}(D)$ έτσι ώστε για κάθε $\theta \in D\backslash L_h$ η συνάρτηση $F_{h(\theta)}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0, \infty)$ και $0 < F'_{h(\theta)}(t) < C(h(\theta))$. Άρα το ίδιο ισχύει για κάθε $\theta \in D\backslash O_h$. Από το Λήμμα 4.2.3 για κάθε $\widetilde{\theta} \in V_h$ ισχύει η συνθήκη $\left(Q_{\widetilde{\theta}}\right)_{W_n} = \mathbf{K}(\widetilde{\theta})$ για κάθε $n \in N$. Τότε για κάθε $\widetilde{\theta} \in V_h$ υπάρχει ακριβώς ένα $\theta \in D\backslash O_h$ έτσι ώστε $\widetilde{\theta} = h(\theta)$ και

$$F_{\widetilde{\theta}}(t) = \mathbf{K}(\widetilde{\theta})\left((-\infty, t]\right) = \mathbf{K}\left(h(\theta)\right)\left((-\infty, t]\right) = F_{h(\theta)}(t) \tag{4.18}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Επομένως ισχύει το (a).

(b) Η συνάρτηση $p_m : V_h \longmapsto \mathbb{R}$ που ορίζεται από τον τύπο $p_m(\widetilde{\theta}) := \lim_{t\to 0} F'_{\widetilde{\theta}}(t)$ για κάθε $\widetilde{\theta} \in V_h$ είναι θετική και 1-1.

Πράγματι, αφού οι N, h και $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ ικανοποιούν την Υπόθεση 4.2.6, λαμβάνοντας υπόψη την συνθήκη (4.18) παίρνουμε $p_m(\widetilde{\theta}) = \lim_{t\to 0} F'_{h(\theta)}(t) = p_h(\theta) > 0$.

Σαφώς,

$$\widehat{\Theta}(\omega) = (p_h \circ \Theta)(\omega) = (p_m \circ h \circ \Theta)(\omega) = (p_m \circ \widetilde{\Theta})(\omega) \quad \text{για κάθε} \quad \omega \in \Theta^{-1}(D\backslash O_h),$$

και λόγω των (a) και(b) συμπεραίνουμε ότι οι N και $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta}\in\mathbb{R}^m}$ ικανοποιούν την Υπόθεση 4.2.6. Ως εκ τούτου από την Πρόταση 4.2.7 για $\widetilde{\Theta}$ και p_m στη θέση του Θ και p_d, αντίστοιχα, παίρνουμε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος. □

Το ακόλουθο αποτέλεσμα μπορεί να έχει ανεξάρτητο ενδιαφέρον, δεδομένου ότι εξασφαλίζει την ιδιότητα Markov και την πολυωνυμική ιδιότητα του P σε σχέση με τα μέτρα $Q_{\widehat{\theta}}$.

Πόρισμα 4.2.11. *Έστω $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$, h, N, $F_{h(\theta)}$, p_h και $\widehat{\Theta}$ όπως στο Θεώρημα 4.2.10. Σταθεροποιούμε αυθαίρετο $A\in\Sigma$ και για κάθε $\widehat{\theta}\in\mathbb{R}$ θέτουμε*

$$Q_{\widehat{\theta}}(A) := \begin{cases}(P_\bullet(A)\circ p_h^{-1})(\widehat{\theta}) & \textit{if } \widehat{\theta}\in p_h(D\backslash O_h);\\ P(A) & \textit{διαφορετικά.}\end{cases}$$

Τότε η οικογένεια $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}\in\mathbb{R}}$ είναι μια φ.δ.π. P επάνω στο $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με $\widehat{\Theta}$ και τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα με:

(i) η N έχει την ιδιότητα P-Markov,

(ii) η N έχει την ιδιότητα $Q_{\widehat{\theta}}$-Markov για $P_{\widehat{\Theta}}$-a.a. $\widehat{\theta}\in\mathbb{R}$;

(iii) η N έχει την πολυωνυμική ιδιότητα $Q_{\widehat{\theta}}$ για $P_{\widehat{\Theta}}$-a.a. $\widehat{\theta}\in\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Πρώτα τονίζουμε ότι από το Λήμμα 4.2.3 η οικογένεια $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στον $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με $\widehat{\Theta}$.

$(i)\Longrightarrow(ii)$: Αφού η N είναι μία eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$), από το Θεώρημα 4.2.10 προκύπτει ότι η N είναι μία MPP($\widehat{\Theta}$). Τότε σύμφωνα με την [12] , Proposition 4.4, η N είναι μία $Q_{\widehat{\theta}}$-PP($\widehat{\theta}$) για $P_{\widehat{\Theta}}$-σ.ο. $\widehat{\theta}\in\mathbb{R}$ και έτσι έχει την ιδιότητα Markov ως προς $Q_{\widehat{\theta}}$.

$(ii)\Longrightarrow(i)$: Αφού η N είναι μία eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$), από το Λήμμα 4.2.9 προκύπτει ότι η N είναι μία MRP($\mathbf{K}(\widetilde{\Theta})$).Έστω $A\in vS$ και θέτουμε

$$Q_{\widetilde{\theta}}(A) := \begin{cases}(P_\bullet(A)\circ h^{-1})(\widetilde{\theta}) & \text{αν } \widetilde{\theta}\in V_h\\ P(A) & \text{διαφορετικά,}\end{cases}$$

όπου $\widetilde{\theta}:=h(\theta)$. Από το Λήμμα 4.2.3 οι οικογένεια $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta}\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στον $P_{\widetilde{\Theta}}$ συνεπής με $\widetilde{\Theta}$. Εφαρμόζοντας την [14], Proposition 3.8, παίρνουμε ότι υπάρχει ένα $P_{\widetilde{\Theta}}$-μηδενικό σύνολο $U\in B_m$ έτσι ώστε για κάθε $\widetilde{\theta}\notin U$ η διαδικασία N είναι μία $Q_{\widetilde{\theta}}$-RP($\mathbf{K}(\widetilde{\theta})$).Για κάθε $\widehat{\theta}\in\mathbb{R}$ θέτουμε

$$R_{\widehat{\theta}}(A) = \begin{cases}Q_{\widetilde{\theta}}(A) & \text{if } \widehat{\theta}:=p_m(\widetilde{\theta})\in U_{h,m}:=p_m(V_h\cup U^c)\\ P(A) & \text{διαφορετικά.}\end{cases}$$

Πάλι από το Λήμμα 4.2.3 η οικογένεια $\{R_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}\in\mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στον $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με $\widehat{\Theta}$, και για κάθε $\widehat{\theta}=p_m(\widetilde{\theta})\in U_{h,m}$ η διαδικασία W είναι $R_{\widehat{\theta}}$-ανεξάρτητη και $\mathbf{K}(\widehat{\theta})=(R_{\widehat{\theta}})_{W_n}=(Q_{\widetilde{\theta}})_{W_n}=\mathbf{K}(\widetilde{\theta})$. Ως συμπέρασμα παίρνουμε ότι για κάθε $\widehat{\theta}\in U_{h,m}$ η διαδικασία N είναι μία $R_{\widehat{\theta}}$-RP($\mathbf{K}(\widehat{\theta})$). Αλλά αφού το $p_h(D\backslash O_h)$ περιέχεται στο $U_{h,m}$, παίρνουμε $R_{\widehat{\theta}}(A)=Q_{\widehat{\theta}}(A)$ για κάθε $\widehat{\theta}\in p_h(D\backslash O_h)$. Έτσι, λαμβάνοντας υπόψη την [12], Proposition 4.4, παίρνουμε ότι η N είναι μία MPP($\widehat{\Theta}$). Ως εκ τούτου η N έχει την ιδιότητα P-Markov (βλ. π.χ. [20] Theorem 4.2.3).

(ii) $\Longrightarrow$ *(iii)*: Αφού ισχύει ότι *(i)*$\Longleftrightarrow$*(ii)*, από το Θεώρημα 4.2.10 προκύπτει, ότι το *(i)* είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι η N είναι μία MPP($\widehat{\Theta}$). Εφαρμόζοντας τη [12], Proposition 4.4, παίρνουμε ότι η N είναι μία $Q_{\widehat{\theta}}$-PP($\widehat{\theta}$) για $P_{\widehat{\Theta}}$-σ.π. $\widehat{\theta} \in \mathbb{R}$. Αλλά το τελευταίο συνεπάγεται το *(iii)*.

Η συνεπαγωγή του *(iii)* $\Longrightarrow$ *(ii)* έπεται με έναν εύκολο υπολογισμό. □

Παρατήρηση 4.2.12. **(a)** Η υπόθεση 4.2.6, ποιο συγκεκριμένα το μέρος που αφορά τις διαφορησιμότητα της συνάρτησης W_n σε σχέση με το P_θ, είναι ουσιώδης για την εγκυρότητα της Πρότασης 4.2.7 και του Θεωρήματος 4.2.10.

Πράγματι, θεωρούμε την απαρηθμήτρια συνάρτηση N που ορίζονται με την βοήθεια του $N_t := [t]$ για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$. Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι για $\theta_0 > 0$ η διαδικασία N είναι μία Markov RP($\mathbf{K}(\theta_0)$) με

$$\mathbf{K}(\theta_0)((-\infty, t]) := \begin{cases} 0 & \text{αν } t < 1; \\ 1 & \text{αν } t \geqslant 1, \end{cases}$$

αλλά όχι διαδικασία Poisson.

Για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$ καθορίζεται ένα σύνολο συναρτήσεων $P_\theta : \varSigma \longmapsto [0,1]$ μέσω του $P_\theta(A) := P(A)$ για κάθε $A \in \varSigma$. Στη συνέχεια μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι η οικογένεια $\{P_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ είνα μία φ.δ.π. του P επάνω στον P_Θ συνεπής με οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή. Θ έτσι ώστε $P_\Theta(\{\theta_0\}) = 1$, και ότι οι $\{P_\theta\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ και N δεν ικανοποιεί την Υπόθεση 4.2.6.

(b) Ένας χαρακτηρισμός MPPs με κατανομή μείξης U (βλ. π.χ. [22], page 9 για τον ορισμό) μέσω της πολυωνυμικής ιδιότητας έχει αποδειχθεί χωρίς καμία αλλη υπόθεση από τους Schmidt και Zocher [22], Theorem 4.2. Αλλά φαίνεται ότι ένας τέτοιος χαρακτηρισμός δεν μπορεί να μεταφερθεί σε MPP(Θ) χωρίς καμία επιπλέον υπόθεση, δεδομένου ότι, γενικά, δεν είναι δυνατόν δοσμένης μίας κατανομής U να βρεθεί μία πραγματική τ.μ. Θ επάνω στον $\varOmega$ με $P_\Theta = U$, και μία φ.δ.π P επάνω στον U συνεπής με Θ (πρβλ. με Zocher [23], page 115). Ωστόσο, μία τέτοια ισοδυναμία καθίσταται δυνατή κάτω από τις βασικές υποθέσεις της Πρότασης 4.2.7 και του Θεωρήματος 4.2.10. Ετσι, από την (b) μαζί με την (a) προκύπτει το επόμενο

Ερώτημα 4.2.13. Είναι η υπόθεση της Πρότασης 4.2.7 και του Θεωρήματος 4.2.10 σχετικά με την ύπαρξη μιας φ.δ.π. του P επάνω στον P_Θ συνεπής με Θ αναγκαία για την εγκυρότητα των συμπερασμάτων τους?

4.3 Παραδείγματα

Με $(\Omega \times \Upsilon, \Omega \otimes H, P \otimes Q)$ συμβολίζουμε το χώρο πιθανότητας- γινόμενο του (Ω, Σ, P) και (Υ, H, Q), και με π_Ω και π_Υ τις κανονικές προβολές από το $\Omega \times \Upsilon$ στο Ω και Υ, αντίστοιχα.

Σε ό,τι ακολουθεί, θέτουμε $\varUpsilon := (0, \infty)$, $H := \mathfrak{B}(\varUpsilon)$, $\varOmega := \varUpsilon^{\mathbb{N}} \times G$ *για* $G \in d$, $\varSigma := \mathfrak{B}(\varOmega) = \mathfrak{B}(\varUpsilon^{\mathbb{N}}) \otimes \mathfrak{B}(G)$ *για ευκολία.*

Πρώτον, περιγράφουμε μια μέθοδο για την κατασκευή μη τετριμμένων μέτρων πιθανότητας που επιτρέπουν τις MRPs με παραμέτρους μείξης Θ και h, γενικεύοντας με αυτόν τον τρόπο το Παράδειγμα 5.5 από την [14].

Παράδειγμα 4.3.1. Έστω μ ένα αυθαίρετο μέτρο πιθανότητας επάνω στην $\mathfrak{B}(G)$ και έστω $Q_n(\theta)$ μέτρα πιθανοτήτων επάνω στην $\mathfrak{B}(\varUpsilon)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε σταθερό $\theta \in G$, τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue λ επάνω στη $\mathfrak{B}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει μία μετρήσιμη συνάρτηση $h : G \longmapsto \mathbb{R}^m$ έτσι ώστε $Q_n(\theta) = \mathbf{K}(h(\theta))$ για κάθεy $n \in \mathbb{N}$, όπου για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\varUpsilon)$ η συνάρτηση $\mathbf{K}(h(\bullet))(B) : G \longmapsto \mathbb{R}$ is $\mathfrak{B}(G)$-μετρήσιμη και $\mathbf{K}(h(\theta))(vY) = 1$. Τότε προκύπτει ότι υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $\widetilde{P}_\theta := \otimes_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\theta)$ στο $\mathfrak{B}(\varUpsilon^{\mathbb{N}})$. Θέτουμε $P(E) := \int \widetilde{P}_\theta(E^\theta)\mu(d\theta)$, για κάθε $E \in \varSigma$, όπου E^θ είναι ένα θ-τμήμα του E, και $P_\theta := \widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta$ για κάθε $\theta \in G$, όπου δ_θ είναι ένα μέτρο Dirac στο θ. Τότε το P είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\varSigma$ και $\{\widetilde{P}_\theta\}_{\theta\in G}$ είναι μια κανονική φ.δ.π.-γινόμενο πιθανότητα επάνω στην (vY^N) (βλέπε [21], Definition 1.1 για τον οριμό και τις ιδιότητες μίας φ.δ.π.-γινόμενο). Ως εκ τούτου σύμφωνα με την [14] , Proposition 2.5, η $\{P_\theta\}_{\theta\in G}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στον μ συνεπής με π_G (πρβλ. [12], Example 5.5).

Σαφώς, βάζοντας $\Theta := \pi_G$ παίρνουμε $P_\Theta = \mu$. Έστω $W_n := \pi_n$, όπου π_n είναι η κανονική προβολή από $\varOmega$ στο $\varUpsilon$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Τότε η W είναι P_θ-ανεξάρτητη για κάθε $\theta \in G$, άρα λαμβάνοντας υπόψην και την [14], Lemma 4.1, ότι W είναι μία P-υπο συνθήκη ανεξάρτητη. Επιπλέον, έχουμε ότι

$$(P_\theta)_{W_n} = Q_n(\theta) = \mathbf{K}(h(\theta)) n \in \mathbb{N} \theta \in G,$$

από το οποίο μαζί με το Λήμμα 4.2.9 προκύπτει ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η ισότητα $P_{W_n|\Theta} = \mathbf{K}(h(vT))\ P \restriction \sigma(\Theta)$-σ.π.. Θέτουμε $T_n := \sum_{k=1}^{n} W_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $T := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, και έστω $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ μία απαριθμήτρια διαδικασία T που ορίζεται μέσω του $N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n \leq t\}}$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$. Συνεπώς, σύμφωνα με τον Ορισμό **??** (a), η απαριθμήτρια διαδικασία N είναι μία eMRP($\mathbf{K}(h(vT))$).

Στα επόμενα παραδείγματα αποδεικνύεται ότι υπάρχουν μη τετριμμένοι χώροι πιθανότητας που ικανοποιούν όλες τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.10, που μας επιτρέπει να ελέγξουμε αν eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$) είναι μία διαδικασία Markov ή έχει την πολυωνυμική ιδιότητα.

Παράδειγμα 4.3.2. Έστω $G := \Upsilon \subseteq \mathbb{R}^d$ για d=1, έστω $\mu := \mathbf{Ga}(\alpha, \beta)$, με $\alpha, \beta > 0$, είναι μέτρο πιθανότητας $\mathfrak{B}(\Upsilon)$(βλ. π.χ. [20], page 180, για τον ορισμό του μέτρου πιθανότητας), και έστω $h : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ να είναι μια συνάρτηση που ορίζεται μέσω του $h(\theta) := a\theta + b$ για κάθε $\theta > 0$, όπου $a > 0$ και $b \geqslant 0$ είναι σταθερές. Θέτουμε αυθαίρετα $\theta \in \Upsilon$ και ορίζουμε τα μέτρα πιθανότητας $Q_n(\theta)$ στον χώρο $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ μέσω του$Q_n(\theta) := \mathbf{Exp}\,(h(\theta))$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Στη συνέχεια ακολουθεί από το παράδειγμα 5.2.3, ότι υπάρχει μία συνάρτηση $\Theta := \pi_\Upsilon$,ένα μέτρο πιθανότητας P, μία φ.δ.π. $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του P επάνω στον $P_\Theta = \mu$ συνεπής με Θ, και μία απαριθμήτρια διαδικασία N που είναι μία eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$) έτσι ώστε να παράγεται μία διαδικασία W που να ικανοποιεί την συνθήκη $(P_\theta)_{W_n} = Q_n(\theta)$ για όλα τα $n \in N$.

Ορίζουμε μία συνάρτηση $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\Theta)})$ από $C(h(\theta)) := h(\theta)$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$, και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in \Upsilon$ ορίζουμε την συνάρτηση $f_{h(\theta)} := F'_{h(\theta)}$ από $f_{h(\theta)}(t) := h(\theta)\cdot e^{-h(\theta)t}$ για κάθε $t > 0$. Προφανώς, για κάθε σταθερό $\theta \in \Upsilon$, η πυκνότητα $f_{h(\theta)}$ είναι καθορισμένη από $C(h(\theta))$, και η συνάρτηση $p_h : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ ορίζεται από $p_h(\theta) := \lim_{t\to 0} f_{h(\theta)}(t) = h(\theta)$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$, είναι θετική και 1-1, ως εκ τούτου $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$, N και h ικανοποιούν όλες τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.10.

Έστω $\widehat{\Theta} := p_h \circ \Theta$ και παίρνουμε ότι $Q_{\widehat{\theta}}(E) := \left(P_\bullet(E) \circ p_h^{-1}\right)(\widehat{\theta})$για κάθε $\widehat{\theta} > b$ και $E \in \Sigma$. Από $p_h = h$, παίρνουμε $\widehat{\Theta} = \widetilde{\Theta}$ και $Q_{\widehat{\theta}} = Q_{\widetilde{\theta}}$ για κάθε $\widehat{\theta} = p_h(\theta) = h(\theta) = \widetilde{\theta}$, $\theta \in \Upsilon$.

Από το Λήμμα 4.2.3 συνεπάγεται ότι $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}>b}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με $\widehat{\Theta}$, η συνθήκη ισχύει $\left(Q_{\widehat{\theta}}\right)_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widehat{\theta})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\widehat{\theta} > b$, και η διαδικασία W είναι $Q_{\widehat{\theta}}$-ανεξάρτητη. Αλλά το τελευταίο εφαρμόζει ότι το N είναι $Q_{\widehat{\theta}}$-PP($\widehat{\theta}$) για κάθε $\widehat{\theta} > b$ (βλ. π.χ. [20], Theorem 2.3.4). Έτσι, σύμφωνα με [12], Proposition 4.4, συμπεραίνουμε ότι η N είναι μία MPP($\widehat{\Theta}$) εφαρμόζοντας μαζί με το Θεώρημα 4.2.10 ότι N ικανοποιεί καθεμία από τις ισοδύναμες συνθήκες *(i)*, *(ii)* και *(iii)* του Θεωρήματος 4.2.10.

Παράδειγμα 4.3.3. Έστω G και μ όπως στο Παράδειγμα 4.3.2 και έστω $h : \varUpsilon \longmapsto \mathbb{R}$ είναι μία συνάρτηση που ορίζεται με την βοήθεια του $h(\theta) := \frac{1}{\theta}$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$. Παίρνουμε αυθαίρετα $\theta \in \Upsilon$ καιε $Q_n(\theta) := \mathbf{Par}\,(h(\theta), 1)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, π.χ.

$$Q_n(\theta)(B) := \int_B \theta \cdot \left(\frac{1/\theta}{1/\theta + t}\right)^2 \cdot \chi_{(0,\infty)}(t)\,\lambda(dt) \quad \text{for any } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon).$$

Αυτό ακολουθεί από το παράδειγμα 4.3.4, ότι υπάρχει μία συνάρτηση $\Theta := \pi_\Upsilon$, ένα μέτρο πιθανότητας P, μία φ.δ.π. $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ του P επάνω στο $P_\Theta = \mu$ συνεπής με Θ, και μία απαριθμήτρια διαδικασία N να είναι μία eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$) έτσι ώστε να έχει την αντιμεταθετική διαδικασία W ικανοποιεί την συνθήκη $(P_\theta)_{W_n} = Q_n(\theta)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$.

Ορίζουμε την συνάρτηση $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\Theta)})$ από $C(h(\theta)) := \theta$ για όλα τα $\theta \in \varUpsilon$, και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in \varUpsilon$ ορίζουμε την πυκνότητα $f_{h(\theta)} := F'_{h(\theta)}$ από $f_{h(\theta)}(t) := \theta \cdot \left(\frac{1/\theta}{1/\theta+t}\right)^2$ για κάθε $t > 0$. Προφανώς, για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in \Upsilon$, η πυκνότητα $f_{h(\theta)}$ είναι ορισμένη από $C(h(\theta))$, και η συνάρτηση $p_h : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ που ορίζονται με τη βοήθεια του $p_h(\theta) := \lim_{t\to 0} f_{h(\theta)}(t) = \theta$ για όλα τα $\theta \in \Upsilon$, είναι θετική και 1-1, ωε εκ τούτου τα $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$, N και h ικανοποιούν όλες τις υποθέσεις Θεωρήματος 4.2.10.

Έστω $\widehat{\Theta} := p_h \circ \Theta$ και παίρνοντας $Q_{\widehat{\theta}}(E) := \left(P_\bullet(E) \circ p_h^{-1}\right)(\widehat{\theta})$ για κάθε $\widehat{\theta} > 0$ και $E \in \Sigma$. Από $p_h = id_\Upsilon$, παίρνουμε $\widehat{\Theta} = \Theta$ και $Q_{\widehat{\theta}} = P_\theta$ για κάθε $\widehat{\theta} = \theta \in \Upsilon$.

Υποθέτουμε, αν είναι δυνατόν, ότι η N είναι μία διαδικασία Markov. Αυτό προκύπτει από το Θεώρημα 4.2.10 ότι N είναι μία MPP($\widehat{\Theta}$) η ισοδύναμα ότι $(Q_{\widehat{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widehat{\theta})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και W είναι $Q_{\widehat{\theta}}$-ανεξάρτητη για $P_{\widehat{\Theta}}$-σ.π. $\widehat{\theta} > 0$ (βλ [12], Proposition 4.5). Επιπλέον, από $P_\theta(E) = Q_{\widehat{\theta}}(E)$ για όλα τα $E \in \Sigma$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbf{Par}(h(\theta), 1) = (P_\theta)_{W_n} = (Q_{\widehat{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\theta),$$

είναι μία αντίφαση.

Παράδειγμα 4.3.4. Έστω G, μ, h και N όπως στα 4.3.2 και 4.3.3. Ακολουθεί από το Λήμμα 4.2.9 ότι η N είναι μία MRP($\mathbf{Exp}(\widetilde{\Theta})$). Το τελευταίο μαζί με [14], Theorem 4.9, προκύπτει ότι η N είναι μία MRP($\{Q_{\widetilde{\theta}}\}, P_{\widetilde{\Theta}}$).

Σύμφωνα με τα παραδείγματα 4.3.2, 4.3.3, N, h και $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ ικανοποιούν όλες τις υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.10, ως εκ τούτου είναι συμπεράσματα. Συγκεκριμένα Η N είναι μία MPP($\widehat{\Theta}$), ως εκ τούτου μία MPP($\widetilde{\Theta}$), επειδή $p_h = h$.

Υποθέτουμε ότι η N είναι μία MPP($\{Q_{\widetilde{\theta}}\}, P_{\widetilde{\Theta}}$). Τότε για $P_{\widetilde{\Theta}}$-σ.π. $\widetilde{\theta} > b$ έχουμε ότι $(Q_{\widetilde{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widetilde{\theta})$. Αλλά η N είναι μία MRP($\mathbf{Exp}(\widetilde{\Theta})$), προκύπτει από [12], Lemma 4.1, ότι η W είναι $Q_{\widetilde{\theta}}$-ανεξάρτητη για $P_{\widetilde{\Theta}}$-σ.π. $\widetilde{\theta} > b$, ως εκ τούτου η N είναι μία $Q_{\widetilde{\theta}}$-PP($\widetilde{\theta}$) (βλ. π.χ. [20], Theorem 2.3.4), προκύπτει ότι η N έχει την ιδιότητα $Q_{\widetilde{\theta}}$-Markov (βλ. π.χ. [20], Corollary 3.1.2), ισοδύναμα N έχει την ιδιότητα P-Markov, βλέπε Πόρισμα 4.2.11.

Για την αντίστροφη συνέπεια του Θεωρήματος 3 από [11], υποθέτουμε ότι η N έχει την ιδιότητα P-Markov. Αυτό προκύπτει από το Θεώρημα 4.2.10 ότι N είναι μία MPP($\widetilde{\Theta}$), εφαρμόζοντας μαζί με την Παρατήρηση 4.2.7 προκύπτει ότι η N είναι μία MPP($\{Q_{\widetilde{\theta}}\}, P_{\widetilde{\Theta}}$). Ως συμπέρασμα, παίρνουμε ότι ισχύουν τα συμπεράσματα του [**?**], Theorem 3.

Αλλά από $\widetilde{\theta} > b$ και $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $(Q_{\widetilde{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widetilde{\theta})$, it follows that there does not exist any positive constant C με $F'_{\widetilde{\theta}}(t) < C$ για όλα τα $t > 0$ και $\widetilde{\theta} > b$.

Έτσι μέρος της Υπόθεσης $(*)$ σχετικά με τα όρια του $F'_{\widetilde{y}}$ από μία σταθερά $C > 0$ δεν είναι απαραίτητα. Συγκεκριμένα, στην περίπτωση του παραπάνω παραδείγματος η Θεωρία του Huang δεν μπορεί να εφαρμοστεί.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές

Στο παρόν κεφάλαιο παρουσιάζονται οι εφαρμογές του Κεφαλαίου 4, αποτελέσματα σχετικά με την ισοδυναμία γνωστών ορισμών της MPPs και συγκεκριμένα παραδείγματα, όπου ισχύουν τα αποτελέσματα.

5.1 Ισοδυναμία διαφόρων ορισμών των *σ.δ.* Poisson

Η επόμενη σχέση (βλ. [20], pages 45-46) ότι ένα ζεύγος $(k,r) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}_+$ είναι **αποδεκτό** αν για κάθε $(k,r) = (0,0)$ ή $(k,r) \in \mathbb{N}_0 \times \Upsilon$. Συγκεκριμένα, αν $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο που αποτελείται από όλα τα $(k,n,r,t) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ έτσι ώστε (k,r) να είναι αποδεκτό, $k \leqslant n$, και $r \leqslant t$, μία συνάρτηση $p : \mathcal{A} \longmapsto [0,1]$ είναι **κανόνα μετάβασης** για N εάν ικανοποιεί $\sum_{n=k}^{\infty} p(k,n,r,t) \leqslant 1$ για κάθε αποδεκτό ζεύγος (k,r) καθώς και όλα τα $t \in [r,\infty)$

$$p(k,n,r,t) = P(\{N_t = n\} \mid \{N_r = k\})$$

για όλα $(k,n,r,t) \in \mathcal{A}$ έτσι ώστε $P(\{N_r = k\}) > 0$. Τότε $p_{k,n}(r,t) := p(k,n,r,t)$ λέγεται **πιθανότητα μετάβασης** της απαριθμήτριας διαδικασίας N ως προς τον κανόνα μετάβασης p.

Μία διαδικασία Poisson N ως προς P και παράμετρο $\theta > 0$ συμβολίζεται με P-PP(θ).

Από εδώ και κάτω και εφόσον δεν δηλώνεται διαφορετικά, $(\Upsilon, H) := ((0,\infty), \mathfrak{B}(\Upsilon))$.

Ορισμός 5.1.1. Μία απαριθμήτρια διαδικασία N είναι:

(a) μία **διαδικασία γέννησης με εντάσεις μετάβασης** $q_n(t)$, αν είναι διαδικασία Markov με πιθανότητες μετάβασης $p_{m,n}(s,t)$, για $(m,n,s,t) \in \mathcal{A}$, και ισχύει η συνθήκη για κάθε $t > 0$ και $n, m \in \mathbb{N}$.

$$p_{m,n}(t, t+h) = \begin{cases} 1 - q_m(t) \cdot h + o(h) & \text{αν } n = m; \\ q_m(t) \cdot h + o(h) & \text{αν } n = m+1; \\ o(h) & \text{αν } n > m+1, \end{cases} \tag{BP}$$

να ισχύει $h \downarrow 0$, όπου $0 \leqslant q_m(t) < \infty$, $q_m(t) := -q_{m,m}(t) = q_{m,m+1}(t)$ για κάθε $t > 0$ (συγκρίνετε με [5], page 241). Μία απαριθμήτρια διαδικασία N είναι μία **μεικτή Poisson κατά Lundberg με παράμετρο μείξης μία κατανομή πιθανότητας** U στον (Υ) (γράφουμε P-LMPP(U) για συντομία), αν N είναι μία διδικασία και συνθήκη γέννησης.

$$P(\{N_t = n\}) = \int_0^\infty e^{-t\theta} \cdot \frac{(t\theta)^n}{n!} U(d\theta) \tag{5.1}$$

ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ and $t \in \mathbb{R}_+$ (βλ. π.χ. [5], page 241),

(b) μία **μεικτή διαδικασία Poisson κατά Bühlmann με παράμετρο μείξης μία κατανομή πιθανότητας** U στον (Υ) (γράφουμε P-BMPP(U) για συντομία), εάν υπάρχει μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{P\}_{\theta>0}$ έτσι ώστε η N είναι μία P_θ-PP(θ) για κάθε $\theta > 0$ και να ισχύει η συνθήκη

$$P(B) = \int_0^\infty P_\theta(B)\, U(d\theta) \quad \text{for any} \quad B \in \Sigma$$

(βλ. π.χ. [5], page 241),

(c) μία **μεικτή διαδικασία Poisson κατά Huang με παράμετρο μείξης** $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$ **και** ν (γράφουμε P-MPP($\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}, \nu$) για συντομία), αν για κάθε $r \in \mathbb{N}$ και για όλα τα $w_1, \ldots, w_r > 0$ ισχύει η συνθήκη

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r} \{W_k \leqslant w_k\}\Big) = \int \prod_{k=1}^{r} P_{\widetilde{y}}(\{W_k \leqslant w_k\})\, \nu(d\widetilde{y})$$

, όπου $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$ είναι μία οικογένεια μέτρων πιθανότητας Σ και ν είναι μέτρο πιθανότητας στον $B(\Sigma) := B(\widetilde{\Upsilon}, \Sigma) := \sigma(\{P_\bullet(E) : E \in \Sigma\})$ έτσι ώστε W έιναι $P_{\widetilde{y}}$-ανεξάρτητη και $(P_{\widetilde{y}})_{W_n} = \mathbf{Exp}\,(\alpha(\widetilde{y}))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για ν-σ.π. $\widetilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$, όπου α είναι μία θετική μετρήσιμη συνάρτηση $\mathbb{R}$ (βλέπε [11], page 2).

Για να διατυπώσουμε την πρώτη μας πρόταση πρέπει να αποδείξουμε το ακόλουθο βοηθητικό αποτέλεσμα. Για αυτό, θυμίζουμε ότι μία απαριθμήτρια διαδικασία N είναι **κανονική**, αν υπάρχει κανόνας μετάβασης p και μία ακολουθία $\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ από συνεχής συναρτήσεις $\mathbb{R}_+ \longmapsto \Upsilon$ έτσι ώστε για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n, t) να ισχύουν οι συνθήκες

(r1) $P(\{N_t = n\}) > 0$,

(r2) η συνάρτηση $\mathbb{R}_+ \longmapsto [0,1] : h \longmapsto p_{n,n}(t,t+h)$ να είναι συνεχής,

(r3) $\lim_{h\to 0} \frac{1-p_{n,n}(t,t+h)}{h} = q_n(t) = \lim_{h\to 0} \frac{p_{n,n+1}(t,t+h)}{h}$

(βλ. [20], page 48).

Λήμμα 5.1.2. *Για μία απαριθμήτρια διαδικασία N τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) η N είναι μία διαδικασία γέννησης με συνεχής εντάσεις μετάβασης $q_n(t)$,

(ii) η N είναι μία συνεχής διαδικασία Markov.

Απόδειξη. *(i)* $\Longrightarrow$ *(ii)*: Αφού η N είναι μία διαδικασία γέννησης, αυτό έπεται ότι η N είναι Markov, και γι' αυτό $P(\{N_t = n\}) > 0$ για κάθε αποδεκτό ζευγάρι (n,t). Για κάθε $(n,n,s,t) \in \mathcal{A}$ και $u > 0$, εφαρμόζουμε Chapman-Kolmogorov εξισώσεις μαζί με τις συνθήκες (BP) παίρνουμε

$$\lim_{u\to 0^+} p_{n,n}(s,t+u) = \lim_{u\to 0^+} [p_{n,n}(s,t)\cdot p_{n,n}(t,t+u)] = p_{n,n}(s,t),$$

εφαρμόζοντας την δεξιά συνέχεια της συνάρτησης $t \longmapsto p_{n,n}(s,t)$, ενώ η αριστερή συνέχεια της συνάρτησης προκύπτει από παρόμοια επιχειρήματα. Έτσι η συνάρτηση $t \longmapsto p_{n,n}(s,t)$ είναι συνεχής, ως εκ τούτου η συνάρτηση $h \longmapsto p_{n,n}(t,t+h)$ είναι συνεχής, αφού είναι σύνθεση συνεχών συναρτήσεων $p_{n,n}(t,\bullet) : \mathbb{R}_+ \longmapsto [0,1]$ και $f : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}_+$ που ορίζονται με τη βοήθεια του $f(h) := t+h$ για κάθε $h > 0$. Απομένει να δείξουμε ότι ισχύει η (r3).

Αλλά αυτό επαληθεύεται από το γεγονός ότι η συνθήκη (BP) ισχύει για $n = m$ και για $n = m+1$ ώστε $q_m(t) = \lim_{h\to 0} \frac{1-p_{m,m}(t,t+h)}{h}$ και $q_m(t) = \lim_{h\to 0} \frac{p_{m,m+1}(t,t+h)}{h}$, αντίστοιχα. Έτσι, προκύπτει ο ισχυρισμός *(ii)*.

(ii) $\Longrightarrow$ *(i)*: Αφού η N είναι διαδικασία Markov, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει η συνθήκη (BP). Οι δύο πρώτες συνθήκες είναι άμεσες από την συνθήκη (r3). Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim_{h\to 0} p_{m,n}(t,t+h) = 0$ για κάθε $n > m+1$.

Πράγματι, αφού η N είναι μία διαδικασία Markov, για κάθε σταθερό $m \in \mathbb{N}$ ισχύει η συνθήκη
$\sum_{n\in\mathbb{N}} p_{m,n}(t,t+h) = 1$, εφαρμόζοντας

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m,m+1\}} \frac{p_{m,n}(t,t+h)}{h} = \frac{1-p_{m,m}(t,t+h)}{h} - \frac{p_{m,m+1}(t,t+h)}{h}$$

και

$$\sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{m,m+1\}} \lim_{h\to 0} \frac{p_{m,n}(t,t+h)}{h} = 0;$$

ως εκ τούτου

$$\lim_{h\to 0} \frac{p_{m,n}(t,t+h)}{h} = 0 \quad \text{for any} \quad n \in \mathbb{N}\setminus\{m,m+1\}.$$

Συνεπάγεται ότι, $p_{m,n}(t,t+h) = o(h)$ για κάθε $n > m+1$ όπως επίσης και $h \downarrow 0$. □

Πρόταση 5.1.3. *Για μία απαριθμήτρια διαδικασία N τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα*

(i) υπάρχει μια κατανομή πιθανότητας U στον (Υ) έτσι ώστε η N είναι P-LMPP(U),

(ii) υπάρχει μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{P_\theta\}_{\theta>0}$ στον Σ και μια κατανομή πιθανότητας U στο (Υ) έτσι ώστε N είναι μία P-BMPP(U),

(iii) υπάρχει μία κατανομή πιθανότητας U στον (Υ) έτσ ώστε N είναι μία P-MPP(U).

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των ισχυρισμών (i) και (ii) οφείλεται σε [5], Satz 6, ενώ η συνέπεια $(ii) \Longrightarrow (iii)$ είναι άμεση.

$(iii) \Longrightarrow (i)$: Αφού η N είναι μία P-MPP(U) από [23], Corollary 3.1.2 και Theorem 3.4.2, ότι η N είναι μία συνεχής διαδικασία Markov, ως εκ τούτου σύμφωνα με το Λήμμα 5.1.2 είναι μία διαδικασία γέννησης. Δεδομένου ότι ισχύει η συνθήκη (5.1) των Ορισμών 5.1.1 (a) είναι άμεσο από (iii), προκύπτει το ζητούμενο. □

Από εδώ και πέρα, εκτός αν ορίζεται διαφορετικά, το Θ είναι μια θετική πραγματική μεταβλητή Ω.

Η ακόλουθη Υπόθεση είναι μια ειδική περίπτωση της Υπόθεσης 3.3 από Κεφάλαιο 4.

Υπόθεση 5.1.4. Έστω $D \in \mathfrak{B}$ με $R_\Theta \subseteq D$, $h : D \longmapsto \mathbb{R}$ είναι μία $\mathfrak{B}(D)$-μετρήσιμη συνάρτηση, έστω N είναι μία P-eMRP$(\mathbf{K}(h(\Theta)))$ και έστω $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι μία φ.δ.π. P επάνω στον P_Θ συνεπής με Θ. Προκύπτει από [12], Lemma 3.5, ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $H_h \in (D)$ έτσι ώστε

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \forall\, \theta \in D \backslash H_h \qquad [(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}\,(h(\theta))]. \tag{5.2}$$

Θέτουμε μία σταθερά αυθαίρετα $\theta \in D$, και ορίζουμε μία συνάρτηση $F_{h(\theta)} : \mathbb{R}_+ \longmapsto \mathbb{R}$ με την βοήθεια του

$$F_{h(\theta)}(t) := \begin{cases} P_\theta(\{W_n \leqslant t\}) & \text{αν } \theta \in D \backslash H_h; \\ 0 & \text{διαφορετικά,} \end{cases}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}$.

Προφανώς, για κάθε $\theta \in D \backslash H_h$ η συνάρτηση $F_{h(\theta)}$ εξαρτάται από την κατανομή W_n κάτω από P_θ και, ισχύει η σχέση (5.2), στο h. Λέμε ότι N, h και $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ ικανοποιούν την Υπόθεση 5.1.4, αν υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_h := L_{h,N,\{P_\theta\}_{\theta\in D}}$ στο $\mathfrak{B}(D)$, περιέχοντας H_h, έτσι ώστε για κάθε $\theta \notin L_h$ η συνάρτηση $F_{h(\theta)}$ είναι συνεχώς διαφορήσιμη Υ, υπάρχει μία συνάρτηση $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\Theta)})$ με $0 < F'_{h(\theta)}(t) < C(h(\theta))$ για κάθε $t > 0$, και η συνάρτηση $p_h : D \backslash L_h \longmapsto \mathbb{R}$, που ορίζεται από $p_h(\theta) := p_{h,1}(\theta) := \lim_{t\to 0} F'_{h(\theta)}(t)$, είναι θετική και 1-1.

Για την ειδική περίπτωση $D = \mathbb{R}$ και $h := id_{\mathbb{R}}$ γράφουμε για ευκολία L, F_θ και p_1 στη θέση του L_h, $F_{h(\theta)}$ και p_h αντίστοιχα, και λέμε ότι N και $\{P_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ ικανοποιούν την Υπόθεση 5.1.4.

Υπόθεση 5.1.5. Δίνεται μία απαριθμήτρια διαδικασία N υπάρχει μια πραγματική τυχαία μεταβλητή Θ στο Ω και η φ.δ.π. $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ του P επάνω στον P_Θ συνεπής με Θ ικανοποιώντας μαζί με την N την Υπόθεση 5.1.4.

Το παρακάτω αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί στην [15], Theorem 3.1.

Θεώρημα 5.1.6. *Για την απαριθμήτρια διαδικασία N θεωρούμε τους ακόλουθους ισχυρισμούς:*

(i) υπάρχει μία πραγματική τ.μ. $\breve{\Theta}$ στο Ω έτσι ώστε η N είναι μία P-MPP$(\breve{\Theta})$,

(ii) υπάρχει μία οικογένεια $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}$ από μέτρα πιθανότητας στο Σ και ένα μέτρο πιθανότητας ν επάνω στον $B(\Sigma)$ έτσι ώστε N είναι μία P-MPP$(\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y}\in\widetilde{\Upsilon}}, \nu)$,

(iii) υπάρχει μια πραγματική τυχαία μεταβλητή $\breve{\Theta}$ επάνω στον Ω και η φ.δ.π. $\{Q_{\breve{\theta}}\}_{\breve{\theta}\in\mathbb{R}}$ του P επάνω στον $P_{\breve{\Theta}}$ συνεπής με $\breve{\Theta}$ έτσι ώστε N είναι μία $Q_{\breve{\theta}}$-PP$(\breve{\theta})$ για $P_{\breve{\Theta}}$-σ.π. $\breve{\theta}\in\mathbb{R}$;

(iv) υπάρχει μια κατανομή πιθανότητας U στο (Υ) έτσι ώστε N είναι μία P-MPP(U).

Τότς $(iii) \Longrightarrow (i) \Longrightarrow (iv) \Longrightarrow (ii)$.

Επιπλέον, αν το P είναι τέλειο και η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη τότε οι σχέσεις (i) και (iii) είναι ισοδύναμες.

Εάν επιπλέον, ισχύει η Υπόθεση 5.1.5, τότε όλες οι σχέσεις από (i) στο (iv) είναι ισοδύναμα.

Απόδειξη. Πρώτα επισημαίνουμε ότι το συμπέρασμα από το $(iii) \Longrightarrow (i)$ είναι άμεσο από την [12] Proposition 4.4, ενώ η σχέση $(i) \Longrightarrow (iv)$ προκύπτει εύκολα.

$(iv) \Longrightarrow (ii)$: Αν ισχύει ο ισχυρισμός (iv), προκύπτει από την Πρόταση 5.1.3 ότι N είναι μία P-BMPP(U). Ως εκ τούτου υπάρχει μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας $\{P_\theta\}_{\theta>0}$ επάνω στη Σ έτσι ώστε η N είναι μία P_θ-PP(θ) για κάθε $\theta > 0$ και έτσι ώστε η οικογένεια $\{P_\theta\}_{\theta>0}$ είναι μία φ.δ.π. του P στον P_Θ. Το τελευταίο ισχύει για όλα τα $r \in \mathbb{N}$ και για όλα τα $w_1, \ldots, w_r > 0$ ισχύει η συνθήκη

$$P\Big(\bigcap_{k=1}^{r}\{W_k \leqslant w_k\}\Big) = \int \prod_{k=1}^{r} P_\theta(\{W_k \leqslant w_k\})\, P_\Theta(d\theta)$$

(βλ. π.χ. [20], Theorem 2.3.4). Έτσι θέτοντας $\nu := P_\Theta \upharpoonright B(\Sigma)$ παίρνουμε την (ii).

Υποθέτουμε τώρα ότι P είναι τέλειο και η Σ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Για κάθε πραγματική τυχαία μεταβλητή $\breve{\Theta}$ στον Ω υπάρχει πάντα μια φ.δ.π. $\{Q_{\breve{\theta}}\}_{\breve{\theta}\in\mathbb{R}}$ του P στον $P_{\breve{\Theta}}$

συνεπής με $\breve{\Theta}$ (βλ. [7], Theorems 6 and 3). Ως εκ τούτου η ισοδυναμία $(i) \Longleftrightarrow (iii)$ προκύπτει από την [12], Proposition 4.4.

Υποθέτουμε ότι ισχύει η Υπόθεση 5.1.5.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Εάν ισχύει ο ισχυρισμός (ii), παίρνουμε ότι η N είναι μία $P_{\widetilde{y}}$-PP$(\alpha(\widetilde{y}))$ για ν-σ.ο. $\widetilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$, ως εκ τούτου από την [20], Lemma 2.3.1, συμπεραίνουμε ότι ν-σ.ο. $\widetilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$ ισχύει η ισότητα

$$P_{\widetilde{y}}(\bigcap_{j=1}^{r}\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}} = n_j\}) = \frac{n!}{\prod_{j=1}^{r} n_j!} \cdot \prod_{j=1}^{r}\Big(\frac{t_j - t_{j-1}}{t_r}\Big)^{n_j} \cdot P_{\widetilde{y}}(\{N_{t_r} = n\}) \tag{5.3}$$

για κάθε $r \in \mathbb{N}$, για κάθε $t_0, t_1, \ldots, t_r \in \mathbb{R}_+$ έτσι ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_r$ και κάθε $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $\sum_{j=1}^{r} n_j = n$. Το τελευταίο συνεπάγεται για όλα τα ν-σ.ο. $\widetilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}$ η ισότητα ισχύει

$$P_{\widetilde{y}}(\{N_s = k\} \cap \{N_t - N_s = n-k\}) = \binom{n}{k} \cdot \Big(\frac{s}{t}\Big)^k \cdot \Big(1 - \frac{s}{t}\Big)^{n-k} \cdot P_{\widetilde{y}}(\{N_t = n\}) \tag{5.4}$$

για όλα τα $s, t \in (0, \infty)$ έτσι ώστε $s < t$ και όλα τα $k, n \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $k \leqslant n$. Βάζοντας $\mathcal{F}_N := \sigma(\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+})$, $\mathcal{F}_W := \sigma(\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}})$ και $\mathcal{F}_T := \sigma(\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}_0})$ τότε παίρνουμε $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_W$ και $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_N$ (βλ. π.χ. [20], Lemmas 1.1.1 και 2.1.3 αντίστοιχα).

Ισχυρισμός. Η οικογένεια $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}}$ μέτρων πιθανότητας είναι μία φ.δ.π. $P \upharpoonright \mathcal{F}_N$ επάνω στο ν.

Απόδειξη. Από $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}_W$, αρκεί να το δείξουμε ότι $\{P_{\widetilde{y}}\}_{\widetilde{y} \in \widetilde{\Upsilon}}$ είναι μία φ.δ.π. του $P \upharpoonright \mathcal{F}_W$ επάνω στο ν.

Δεδομένου ότι ισχύει η (d1) είναι άμεσο από τους Ορισμούς 3.1 (c), είναι αρκετό να δείξουμε την (d2) για κάθε $E \in \mathcal{F}^W$. Θέτοντας $\mathcal{G} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma(W_n)$. Λόγω τον Ορισμών 5.1.1 (c) παίρνουμε ότι η (d2) ικανοποιείται για κάθε $\{W_n \leqslant w_n\}$ όπου $w_n > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Συμβολίζουμε $\mathcal{G}_{\bigcap}$ τον γεννήτορα της $\mathcal{F}_W$ που αποτελείται από την οικογένεια $\mathcal{G}$ και όλες τις πεπερασμένες τομές της $\mathcal{G}$ θέτουμε

$$\mathcal{D} := \{E \in \mathcal{F}_W : P(E) = \int P_{\widetilde{y}}(E)\, \nu(d\widetilde{y})\}.$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η οικογένεια $\mathcal{D}$ είναι Dynkin κλάση που περιέχει $\mathcal{G}_{\bigcap}$. Ως εκ τούτου από το Θεώρημα Μονοτόνης Κλάσης έχουμε $\mathcal{D} = \mathcal{F}_W$ και ακολουθεί το παραπάνω ισχυρισμό. □

Σταθεροποιούμε αυθαίρετα $r \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, \ldots, t_{r+1} \in \mathbb{R}_+$ έτσι ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{r+1}$ και $n_0, n_1, \ldots, n_{r+1} \in \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε $0 = n_0 \leqslant n_1 \leqslant \cdots \leqslant n_{r+1}$. Χρησιμοποιώντας τον παραπάνω ισχυρισμό και τις ισοτητες (5.3) και (5.4) παίρνουμε με απλούς υπολογισμούς ότι

$$\begin{aligned} P(\bigcap_{j=1}^{r}\{N_{t_j} = n_j\}) \cdot P(\{N_{t_r} = n_r\} \cap \{N_{t_{r+1}} = n_{r+1}\}) \\ = \quad P(\bigcap_{j=1}^{r+1}\{N_{t_j} = n_j\}) \cdot P(\{N_{t_r} = n_r\}), \end{aligned}$$

ή ισοδύναμα ότι η N έχει την ιδιότητα Markov P, που συνεπάγεται μαζί με την Υπόθεση 5.1.5, ότι μπορούμε να εφαρμόσουμε από την Πρόταση 4.2.7, για να πάρουμε την (i). $\square$

Το παρακάτω αποτέλεσμα έχει αποδειχθεί στην [15], Theorem 3.2.

Θεώρημα 5.1.7. *Έστω N είναι P-eMRP$(\mathbf{K}(h(\Theta)))$ και έστω $\{P_\theta\}_{\theta \in D}$ μία φ.δ.π. του P στο P_Θ συνεπής με Θ που ικανοποιεί μαζί με το N και h την Υπόθεση 5.1.4. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $L_0 \in (D)$ έτσι ώστε $h \upharpoonright D \backslash L_0$ είναι 1-1. Θέτουμε $O_h := L_0 \cup L_h$ και $\widehat{\Theta}(\omega) := (p_h \circ \Theta)(\omega)$ αν $\omega \in \Theta^{-1}(D \backslash O_h)$, όπου L_h και p_h είναι όπως στην Υπόθεση 5.1.4, και συμβολίζουμε πάλι με $\widehat{\Theta}$ κάθε μετρήσιμη επέκταση της $\widehat{\Theta}$ από το σύνολο $\Theta^{-1}(D \backslash O_h)$ στο Ω. Για κάθε σταθερό $A \in \Sigma$ βάζουμε*

$$Q_{\widehat{\theta}}(A) := \begin{cases} (P_\bullet(A) \circ p_h^{-1})(\widehat{\theta}) & \text{αν } \widehat{\theta} \in p_h(D \backslash O_h); \\ P(A) & \text{αλλίως.} \end{cases}$$

Τότε η $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta} \in \mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με την $\widehat{\Theta}$, και τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) η N είναι μία P-MPP$(\widehat{\Theta})$,

(ii) η N είναι μία P-MPP$(\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta} \in \mathbb{R}}, P_{\widehat{\Theta}})$,

(iii) η N είναι μία $Q_{\widehat{\theta}}$-PP$(\widehat{\theta})$ για $P_{\widehat{\Theta}}$-σ.π. $\widehat{\theta} \in \mathbb{R}$

(iv) η N είναι μία P-MPP$(P_{\widehat{\Theta}})$.

Απόδειξη. Το γεγονός ότι $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta} \in \mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P στο $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με $\widehat{\Theta}$ προκύπτει από το Λήμμα 4.2.3.

Η ισοδυναμία $(i) \Longleftrightarrow (iii)$ προκύπτει από την [12], Proposition 4.4.

$(i) \Longrightarrow (ii)$: Αφού ισχύει ο ισχυρισμός (i) και η $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta} \in \mathbb{R}}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με τη $\widehat{\Theta}$, από την Πρόταση 4.2.1 προκύπτει ότι ισχύει το (ii).

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Εάν ισχύει το (ii), παίρνουμε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος A.1.6, $(ii) \Longrightarrow (i)$, ότι η N έχει την ιδιότητα P-Markov. Ως εκ τούτου από Κεφάλαιο 4, Θεώρημα 4.2.10, παίρνουμε το (i).

Η συνεπαγωγή *(i)*$\Longrightarrow$*(iv)* προκύπτει εύκολα.

$(iv) \Longrightarrow (i)$: Αν ισχύει το (iv) τότε η N έχει την ιδιότητα P-Markov (βλ. [22], Theorem 4.2). Έτσι, από το 4.2.10, προκύπτει ο ισχυρισμός (i). $\square$

Παρατηρήσεις 5.1.8. **(a)** Αν οι υποθέσεις του Θεωρήματος 5.1.7 ικανοποιούνται και αν ένας από αυτούς τους ισχυρισμούς από (i) στο (iv) ισχύει, τότε υπάρχει ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{M}_3$ που περιέχει O_h έτσι ώστε p_h και h να συμπίπτουν $\widetilde{M}_3$.

Πράγματι, έστω $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}\in\mathbb{R}}$ όπως στο Θεώρημα 5.1.7 και υποθέτουμε ότι ισχύει η (iii). Τότε $(Q_{\widehat{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widehat{\theta})$ και η W είναι $Q_{\widehat{\theta}}$-ανεξάρτητη για κάθε $\widehat{\theta} \in p_h(D \backslash O_h)$ (βλ. π.χ. [20], Theorem 2.3.4). Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 4.2.3, για $p_h(O_h)$ και p_h αντί για L_0 και h αντίστοιχα, παίρνουμε ότι $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{Exp}(p_h(\theta))$ και ότι η W είναι P_θ-ανεξάρτητη για κάθε $\theta \in D\backslash O_h$. Αφού η N είναι P-eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$), από το Λήμμα 4.2.8, μπορούμε να βρούμε ένα P_Θ-μηδενικό σύνολο $\widetilde{L}_3 \in (D)$ έτσι ώστε $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(h(\theta))$ για κάθε $\theta \in D\backslash\widetilde{L}_3$ και $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $\widetilde{M}_3 := \widetilde{L}_3 \cup O_h$.

Συνεπώς για οποιοδήποτε $\theta \in D\backslash\widetilde{M}_3$ και $\widehat{\theta} = p_h(\theta)$ ισχύουν οι συνθήκες

$$\mathbf{Exp}(\widehat{\theta}) = (Q_{\widehat{\theta}})_{W_n} = (P_\theta)_{W_n} = \mathbf{K}(h(\theta))$$

, άρα $p_h(\theta) = h(\theta)$ για κάθε $\theta \in D\backslash\widetilde{M}_3$.

(b) Αξίζει να σημειωθεί ότι αν όλοι οι ισχυρισμοί από τον (i) μέχρι τον (iv) του Θεωρήματος 5.1.7 είναι ισοδύναμοι και αν ένας από αυτούς ισχύει, τότε οι υποθέσεις του θεωρήματος είναι απαραίτητες. Ακριβέστερα, έστω h και L_0 όπως στο Θεώρημα 5.1.7 έτσι ώστε $\mathbb{E}_P[h(\Theta)] < \infty$, έστω N μια απαριθμήτρια διαδικασία και $\widetilde{\Theta} := h\circ\Theta$. Λόγω του (a) μπορούμε να πάρουμε h και $\widetilde{\Theta}$ αντί για p_h και $\widehat{\Theta}$ αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε ότι οι ισχυρισμοί (i)-(iv) του Θεωρήματος 5.1.7 είναι όλοι ισοδύναμοι και καθένας απο αυτούς ισχύει με $\widetilde{\Theta}$, h και L_0 αντί για $\widehat{\Theta}$, p_h και O_h, αντίστοιχα. Τότε η N είναι μία P-eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$), και υπάρχει μία φ.δ.π. $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ του P επάνω στο P_Θ συνεπής με την Θ ικανοποιώντας μαζί με την N και h την Υπόθεση 5.1.4.

Πράγματι, αφού ισχύει η (iii), υπάρχει μία φ.δ.π. $\{Q_{\widetilde{\theta}}\}_{\widetilde{\theta}\in\mathbb{R}}$ του P επάνω στον $P_{\widetilde{\Theta}}$ συνεπής με τη $\widetilde{\Theta}$ έτσι ώστε η απαριθμήτρια διαδικασία N να είναι μία PP($\widetilde{\theta}$) ως προς $Q_{\widetilde{\theta}}$ για κάθε $\widetilde{\theta} \in h(D\backslash L_0)$. Το τελευταίο είναι ισοδύναμο με το γεγονός, ότι $(Q_{\widetilde{\theta}})_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widetilde{\theta})$ και ότι η W είναι $Q_{\widetilde{\theta}}$-ανεξάρτητη για κάθε $\widetilde{\theta} \in h(D\backslash L_0)$ (βλ. π.χ. [20], Theorem 2.3.4). Για κάθε $\theta \in D$ και $A \in \Sigma$ ορίζουμε

$$P_\theta(A) := \begin{cases} (Q_\bullet(A) \circ h)(\theta) & \text{αν } \theta \in D\backslash L_0; \\ P(A) & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.2.3, παίρνουμε ότι $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$ είναι μία φ.δ.π. P επάνω στον P_Θ συνεπής με τη Θ και ότι $(P_\theta)_{W_n} = \mathbf{Exp}(h(\theta))$ και η W είναι P_θ-ανεξάρτητη για κάθε $\theta \in$

$D \backslash L_0$. Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 4.2.8, μαζί με την [12], Lemma 3.6, παίρνουμε ότι $P_{W_n|\Theta} = \mathbf{Exp}(h(\Theta))\ P \upharpoonright \sigma(\Theta)$-σ.π. και ότι η W είναι P-υπό συνθήκη ανεξάρτητη. Ως εκ τούτου η N είναι μία P-eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$).

Μένει να δείξουμε ότι $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$, N και h ικανοποιούν τις υποθέσεις της 5.1.4.

Πράγματι, για κάθε $\theta \in D\backslash L_0$, $t \in \mathbb{R}_+$ και $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $F_{h(\theta)}(t) := P_\theta(\{W_n \leqslant t\}) := 1 - e^{-h(\theta)t}$. Σαφώς η $F_{h(\theta)}$ είναι συνεχώς διαφορίσιμη επάνω στο Υ. Ορίζουμε τη συνάρτηση $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\Theta)})$ με $C(h(\theta)) := h(\theta)$ για κάθε $\theta \in D\backslash L_0$, και για κάθε σταθερό $\theta \in D\backslash L_0$ ορίζουμε την πυκνότητα $f_{h(\theta)} := F'_{h(\theta)}$ με $f_{h(\theta)}(t) := h(\theta)\cdot e^{-h(\theta)t}$ για κάθε $t > 0$. Προφανώς, για κάθε σταθερό $\theta \in D\backslash L_0$, η πυκνότητα $f_{h(\theta)}$ είναι μικρότερη ή ίση με την $C(h(\theta))$, και η συνάρτηση $\lim_{t\to 0} f_{h(\theta)}(t) = h(\theta)$ είναι θετική και 1-1. Ως εκ τούτου οι $\{P_\theta\}_{\theta\in D}$, N και h ικανοποιούν τις υποθέσεις της 5.1.4.

5.2 Παραδείγματα

Με $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes H, P \otimes Q)$ συμβολίζεται ο χώρος πιθανότητας-γινόμενο των (Ω, Σ, P) και (Υ, H, Q), και με π_Ω και π_Υ οι κανονικές προβολές από $\Omega\times\Upsilon$ επάνω στο Ω και Υ, αντίστοιχα.

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα "κανονικού" χώρου πιθανότητας επάνω στον οποίο ορίζεται μία επεκταμένη MRP. Έπειτα παρουσιάζουμε, ως είδικές περιπτώσεις, δύο παραδείγματα χώρων πιθανότητας που ικανοποιούν όλες τις υποθέσεις των Θεωρημάτων 5.1.6 και 5.1.7.
Ιδιαιτέρως,ισχύει και στα δύο παραδείγματα κάθε ένας από τους ισχυρισμούς των Θεωρημάτων 5.1.6 και 5.1.7.

Σε ότι ακολουθεί, θέτουμε: $\widetilde{\Omega} := \Upsilon^{\mathbb{N}}$, $\Omega := \widetilde{\Omega}\times G$ για $G \in$, $\widetilde{\Sigma} := \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega})$ και $\Sigma := \mathfrak{B}(\Omega) = \mathfrak{B}(\widetilde{\Omega})\otimes\mathfrak{B}(G)$ για ευκολία.

Το επόμενο παράδειγμα βασίζεται σε κατάλληλες τροποποιήσεις των επιχειρημάτων που χρησιμοποιούνται στο Θεώρημα 3.1 της [13], είναι μια ειδική περίπτωση του Παραδείγματος 4.3.1.

Παράδειγμα 5.2.1. Έστω μ είναι ένα αυθαίρετο μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}(G)$ και έστω $Q_n(\theta)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}(\Upsilon)$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και για οποιοδήποτε σταθερό $\theta \in G$, που είναι απολύτως συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue λ επάνω στη $\mathfrak{B}$. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μία $\mathfrak{B}(G)$-μετρήσιμη συνάρτηση $h : G \longmapsto \mathbb{R}$ έτσι, ώστε $Q_n(\theta) = \mathbf{K}(h(\theta))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\theta \in G$, όπου για κάθε $B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$ η συνάρτηση $\mathbf{K}(h(\bullet))(B) : G \longmapsto \mathbb{R}$ είναι (G)-μετρήσιμη. Θέτουμε $\widetilde{P}_\theta := \otimes_{n\in\mathbb{N}} Q_n(\theta)$ για κάθε $\theta \in G$. Ορίζουμε την συνολοσυνάρτηση $P(E) := \int \widetilde{P}_\theta(E^\theta)\mu(d\theta)$, για κάθε $E \in \Sigma$, όπου $E^\theta := \{\omega \in \Omega : (\omega, \theta) \in E\}$ είναι θ-τμήμα του E, και θέτουμε $P_\theta := \widetilde{P}_\theta \otimes \delta_\theta$ για κάθε $\theta \in G$, όπου δ_θ είναι μέτρο Dirac στο θ. Τότε το P είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη Σ και η $\{P_\theta\}_{\theta\in G}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στη μ συνεπής με την κανονική προβολή π_G από το Ω στο G (πρβλ. Κεφάλαιο 4, Παράδειγμα 4.3.1).

Προφανώς, βάζοντας $\Theta := \pi_G$ παίρνουμε $P_\Theta = \mu$. Έστω $W_n := \pi_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου $\pi_n : \Omega \longmapsto \Upsilon$ είναι η κανονική προβολή, και $W := \{W_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Θέτουμε $T_n := \sum_{k=1}^{n} W_k$ για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ και $T := \{T_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$, και έστω $N := \{N_t\}_{t\in\mathbb{R}_+}$ η απαριθμήτρια διαδικασία που προκύπτει από την T μέσω του τύπου $N_t := \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{\{T_n\leqslant t\}}$ για όλα τα $t \in \mathbb{R}_+$. Εφαρμόζοντας τα ίδια επιχειρήματα όπως στο Παράδειγμα 4.3.1, παίρνουμε ότι η N είναι μία P-eMRP($\mathbf{K}(h(\Theta))$).

Στο επόμενο παράδειγμα η πραγματική τυχαία μεταβλητή $\widehat{\Theta}$ κατανέμεται σύμφωνα με τον νόμο της Γάμμα κατανομής, μια συχνή επιλογή στη Θεωρία Κινδύνου.

Παράδειγμα 5.2.2. Έστω $G := \Upsilon$, έστω $\xi = \mathbf{IGa}(\alpha, \beta)$ με $\alpha, \beta > 0$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}(\Upsilon)$, δηλαδή

$$\xi(B) := \int_B \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot t^{-\alpha-1} \cdot e^{-\frac{\beta}{t}} \cdot \chi_\Upsilon(t)\, \lambda(dt) \quad \text{για κάθε } B \in \mathfrak{B}(\Upsilon)$$

και έστω $h : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ συνάρτηση ορισμένη από το τύπο $h(\theta) := \frac{1}{\theta}$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$. Σταθεροποιούμε αυθαίρετα $\theta \in \Upsilon$ και ορίζουμε τα μέτρα πιθανότητας $Q_n(\theta)$ μέσω του τύπου $Q_n(\theta) := \mathbf{Exp}(h(\theta))$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$. Έστω (Ω, Σ, P), Θ, N, W και $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$ όπως στο Παράδειγμα 5.2.1 με $G = \Upsilon$ και ξ στη θέση του μ.

Ορίζουμε την συνάρτηση $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\Theta)})$ μέσω του τύπου $C(h(\theta)) := h(\theta)$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$, και για οποιδήποτε σταθερό $\theta \in \Upsilon$ ορίζουμε την πυκνότητα $f_{h(\theta)} := F'_{h(\theta)}$ με $f_{h(\theta)}(t) := h(\theta) \cdot e^{-h(\theta)t}$ για κάθε $t > 0$. Προφανώς, για οποιδήποτε σταθερό $\theta \in \Upsilon$, η πυκνότητα $f_{h(\theta)}$ είναι μικρότερη ή ίση με $C(h(\theta))$, και η συνάρτηση $p_h : \Upsilon \longmapsto \Upsilon$ που ορίζεται μέσω του τύπου $p_h(\theta) := \lim_{t\to 0} f_{h(\theta)}(t) = h(\theta)$ για κάθε $\theta \in \Upsilon$, είναι θετική και 1-1. Ως εκ τούτου $\{P_\theta\}_{\theta\in\Upsilon}$, N και h ικανοποιούν την Υπόθεση 5.1.4.

Έστω $\widehat{\Theta} := h \circ \Theta$ και $Q_{\widehat{\theta}}(E) := \left(P_\bullet(E) \circ h^{-1}\right)(\widehat{\theta})$ για κάθε $\widehat{\theta} > 0$ και $E \in \Sigma$. Τότε η $\{Q_{\widehat{\theta}}\}_{\widehat{\theta}>0}$ είναι μία φ.δ.π. του P επάνω στο $P_{\widehat{\Theta}}$ συνεπής με $\widehat{\Theta}$, ισχύει η συνθήκη $\left(Q_{\widehat{\theta}}\right)_{W_n} = \mathbf{Exp}(\widehat{\theta})$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\widehat{\theta} > 0$, και η διαδικασία W είναι $Q_{\widehat{\theta}}$-ανεξάρτητη (βλ. Λήμμα 4.2.3). Έτσι λόγω του [12], Proposition 4.4, παίρνουμε ότι η N είναι μία P-MPP($\widehat{\Theta}$).

Προφανώς, όλες οι υποθέσεις των Θεωρημάτων 5.1.6 και 5.1.7 ικανοποιούνται και άρα και τα συμπεράσματά τους. Συγκεκριμένα, ισχύει κάθε ένας από τους ισχυρισμούς από το (i) στο (iv).

Στο επόμενο παράδειγμά μας, η πραγματική τυχαία μεταβλητή $\widehat{\Theta}$ είναι κατανεμημένη σύμφωνα με τον νόμο της Λογαριθμοκανονικής κατανομής, συχνή επιλογή στην Θεωρία Αξιοπιστίας.

Παράδειγμα 5.2.3. Έστω $G := \mathbb{R}$, έστω $\rho = \mathbf{N}(\mu, \sigma^2)$ με $(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R} \times \Upsilon$ ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στη $\mathfrak{B}$, δηλαδή

$$\rho(B) := \int_B \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \cdot \chi_{\mathbb{R}}(t)\ \lambda(dt) \quad \text{για κάθε } \ B \in \mathfrak{B}$$

και έστω $h : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο $h(\theta) := e^\theta$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$. Σταθεροποιούμε αυθαίρετα $\theta \in \mathbb{R}$ και ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας $Q_n(\theta)$ μέσω του τύπου $Q_n(\theta) := \mathbf{Exp}(h(\theta))$ για όλα $n \in \mathbb{N}$. Έστω (Ω, Σ, P), Θ, N, W και $\{P_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$ όπως στο Παράδειγμα 5.2.1 με $G = \mathbb{R}$ και ρ στη θέση του μ.

Ορίζουμε την συνάρτηση $C \in \mathcal{L}^1(P_{h(\Theta)})$ μέσω του τύπου $C(h(\theta)) := h(\theta)$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, και για κάθε σταθερό $\theta \in \mathbb{R}$ ορίζουμε την πυκνότητα $f_{h(\theta)} := F'_{h(\theta)}$ με $f_{h(\theta)}(t) := h(\theta) \cdot e^{-h(\theta)t}$ για κάθε $t > 0$. Προφανώς, για κάθε σταθερό $\theta \in \mathbb{R}$, η πυκνότητα $f_{h(\theta)}$ είναι μικρότερη ή ίση της $C(h(\theta))$, και η συνάρτηση $p_h : \mathbb{R} \longmapsto \Upsilon$ που ορίζεται μέσω του τύπου $p_h(\theta) := \lim_{t\to 0} f_{h(\theta)}(t) = h(\theta)$ για κάθε $\theta \in \mathbb{R}$, είναι θετική και 1-1. Ως εκ τούτου οι $\{P_\theta\}_{\theta\in\mathbb{R}}$, N και h ικανοποιούν την Υπόθεση 5.1.5.

Έστω $\widehat{\Theta} := h \circ \Theta$ και $Q_{\widehat{\theta}}(E) := \left(P_\bullet(E) \circ h^{-1}\right)(\widehat{\theta})$ για κάθε $\widehat{\theta} > 0$ και $E \in \Sigma$. Τότε όπως στο Παράδειγμα 5.2.2 υπάρχει μία MPP($\widehat{\Theta}$) με λογαριθμοκανονικά κατανεμημένη πραγματική τυχαία μεταβλητή $\widehat{\Theta}$ και όλες οι υποθέσεις Θεωρήματος 5.1.7 ικανοποιούνται και έτσι και τα συμεράσματά του. Συγκεκριμένα, ισχύει κάθε ένας από τους ισχυρισμούς από (i) έως (iv).

Παραρτήματα

Παράρτημα Α

Στοιχεία Θεωρίας Μέτρου

Στο παράρτημα αυτό αναφέρονται βασικές έννοιες της θεωρίας μέτρου που χρειαζόμαστε στην μελέτη των κατανομών Hofmann. Για τις έννοιες που δεν αναφέρονται εδώ, παραπέμπουμε στο [3], Κεφάλαιο 1 και 2.

A.1 Χρήσιμες έννοιες και ορισμοί

Ορισμός A.1.1. Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) δύο χ.π. και $\mathcal{G} := \{A \times B : \ A \in \Sigma, \ B \in T\}$.

(a) Η οικογένεια $\Sigma \otimes T := \sigma(\mathcal{G})$ ονομάζεται η **σ-άλγεβρα γινόμενο** της Σ και T.

(b) Για κάθε $E \subseteq \Omega \times \Upsilon$, και $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ αυθαίρετα αλλά σταθερά, τα σύνολα

$$E_x := \{\bar{y} \in \Upsilon : (x, \bar{y}) \in E\}$$

και

$$E^y := \{\bar{x} \in \Omega : (\bar{x}, y) \in E\}$$

ονομάζονται η **x-τομή** και η **y-τομή** (x-section and y-section) του E, αντίστοιχα.

(c) Αν η $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση και τα $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ είναι αυθαίρετα αλλά σταθερά, τότε οι συναρτήσεις

$$f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R} : \bar{y} \longmapsto f_x(\bar{y}) := f(x, \bar{y})$$

και

$$f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R} : \bar{x} \longmapsto f^y(\bar{x}) := f(\bar{x}, y)$$

ονομάζονται η **x-τομή** της f και η **y-τομή** της f, αντίστοιχα.

Λήμμα A.1.2. *Έστω (Ω, Σ) και (Υ, T) μετρήσιμοι χώροι. Τότε ισχύει:*

(i) Για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ και για κάθε $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ έχουμε $E_x \in T$ και $E^y \in \Sigma$.

(ii) Για κάθε $\Sigma \otimes T$- μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \Omega$ και $y \in \Upsilon$ οι συναρτήσεις $f_x : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ και $f^y : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ είναι T- και Σ- μετρήσιμες, αντίστοιχα.

Θεώρημα A.1.3. *(Fubini για δείκτριες συναρτήσεις) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π., και $E \in \Sigma \otimes T$ αυθαίρετο αλλά σταθερό. Τότε η συνάρτηση $Q(E_\bullet) : \Omega \longmapsto \mathbb{R}$ με $x \longmapsto Q(E_x)$ είναι Σ-μετρήσιμη και η συνάρτηση $P(E^\bullet) : \Upsilon \longmapsto \mathbb{R}$ με $y \longmapsto P(E^y)$ είναι T-μετρήσιμη και ισχύει*

$$\int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy). \tag{A.1}$$

Θεώρημα A.1.4. *(Ύπαρξη και μοναδικότητα του μέτρου γινόμενο) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας $P \otimes Q : \ \Sigma \otimes T \longmapsto [0, 1]$ ώστε*

$$(P \otimes Q)(A \times B) = P(A)Q(B)$$

για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Το μέτρο $P \otimes Q$ ονομάζεται το **μέτρο γινόμενο** *των P και Q, Επιπλέον, για κάθε $E \in \Sigma \otimes T$ ισχύει*

$$(P \otimes Q)(E) = \int_\Omega Q(E_x)P(dx) = \int_\Upsilon P(E^y)Q(dy).$$

Για τις αποδείξεις των τριών τελευταίων αποτελεσμάτων βλ. π.χ. [6], Θεώρημα 5.1.3

Θεώρημα A.1.5. *(Fubini για μη αρνητικές συναρτήσεις) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π.. Για κάθε $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto [0, \infty]$ $\quad \Sigma \otimes T - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη συνάρτηση θέτουμε*

$$\varphi_f : \Omega \longmapsto [0, \infty] \quad \mu\varepsilon \quad \varphi_f(x) := \int_\Upsilon f_x(y)Q(dy)$$

και

$$\psi_f : \Upsilon \longmapsto [0, \infty] \quad \mu\varepsilon \quad \psi_f(y) := \int_\Omega f^y(x)Q(dx).$$

Τότε η φ_f είναι $\Sigma - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη, η η ψ_f είναι $T - \mathfrak{B}([0, \infty])$-μετρήσιμη και ισχύει

$$\int_{\Omega\times\Upsilon} f dP \otimes Q = \int_\Omega \varphi_f dP = \int_\Upsilon \psi_f dQ$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\times\Upsilon} f d(P \otimes Q) &= \int_\Omega \int_\Upsilon f(x, y)Q(dy)P(dx) \\ &= \int_\Upsilon \int_\Omega f(x, y)P(dx)Q(dy) \end{aligned}$$

Για την απόδειξη βλ. [6], Proposition 5.2.1.

Θεώρημα A.1.6. *(Fubini) Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. και $f : \Omega \times \Upsilon \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ me $f \in \mathcal{L}^1(P \otimes Q)$. Τότε*

(i)

$$f_x \in \mathcal{L}^1(Q), \quad \text{για} \quad P - \sigma.o \quad \text{τα} \quad x \in \Omega$$

και

$$f^y \in \mathcal{L}^1(P), \quad \text{για} \quad Q - \sigma.o \quad \text{τα} \quad y \in \Upsilon,$$

(ii) οι συναρτήσεις $\varphi_f : \Omega \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ με $\varphi_f(x) := \begin{cases} \int_\Upsilon f_x(y)Q(dy), & \text{αν} \quad f_x \in \mathcal{L}^1(Q) \\ 0, \quad \text{αλλιώς}, \end{cases}$ kai

$\psi_f : \Upsilon \longmapsto \overline{\mathbb{R}}$ με $\psi_f(y) := \begin{cases} \int_\Omega f^y(x)P(dx), & \text{αν} \quad f^y \in \mathcal{L}^1(P) \\ 0, \quad \text{αλλιώς} \end{cases}$ ανήκουν στον $\mathcal{L}^1(P)$ και $\mathcal{L}^1(Q)$, αντίστοιχα,

(iii) ισχύει

$$\int_{\Omega\times\Upsilon} fd(P \otimes Q) = \int_\Omega \varphi_f dP = \int_\Upsilon \psi_f dQ$$

δηλαδή

$$\begin{aligned} \int_{\Omega\times\Upsilon} fd(P \otimes Q) &= \int_\Omega \int_\Upsilon f(x,y)Q(dy)P(dx) \\ &= \int_\Upsilon \int_\Omega f(x,y)P(dx)Q(dy) \end{aligned}$$

όπου θέτουμε

$$\int_\Upsilon f(x,y)Q(dy) = 0, \quad \text{αν} \quad f_x \notin \mathcal{L}^1(Q)$$

και

$$\int_\Omega f(x,y)P(dx) = 0, \quad \text{αν} \quad f^y \notin \mathcal{L}^1(P).$$

Για την απόδειξη βλ. [6], Θεώρημα 5.2.2.

Ορισμός A.1.7. Αν (Ω, Σ, μ) είναι ένας χώρος μέτρου, τότε το μ ονομάζεται **τέλειο** (perfect), αν για κάθε Σ-μετρήσιμη πραγματική συνάρτηση f υπάρχει ένα σύνολο $E \in \mathfrak{B}$ με $E \subseteq f(\Omega)$ ώστε $\mu(f^{-1}(E)) = 1$. Πολλές συνθήκες ισοδύναμες με την τελειότητα μέτρων είναι γνωστές από τους Ryll-Nardezewski [18] (1953), Sazonov [19] (1965) και Ramachandran [17] (1979). Μία συστηματική μελέτη των τέλειων μέτρων υπάρχει στον Fremlin [8] (2003). Η έννοια των τέλειων μέτρων έχει εισαχθεί από τους Gnedenko και Kolmogorov [10] (1949).

Παράρτημα Β

Στοιχεία Θεωρίας Πιθανοτήτων

Στο παράρτημα αυτό δίνονται ορισμένοι βασικοί ορισμοί της Θεωρίας Πιθανοτήτων καθώς και οι κατανομές πιθανότητας που αναφέρθηκαν στην παρούσα εργασία.

Β.1 Χρήσιμοι Ορισμοί

Ορισμός Β.1.1. Η συνάρτηση $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ που δίνεται από την

$$\Gamma(\gamma) := \int_0^\infty e^{-x} x^{\gamma-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Γάμμα**.

Η συνάρτηση Γάμμα έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma(1) &= 1 \\ \Gamma(\gamma+1) &= \gamma\Gamma(\gamma) \end{aligned}$$

Επιπλέον για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{B.1}$$

Δηλαδή, οι τιμές της Γάμμα για $n \in \mathbb{N}_0$, αντιστοιχούν σε παραγωντικά.

Ορισμός Β.1.2. Η συνάρτηση $B : (0, \infty) \times (0, \infty)$ που δίνεται από την

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} dx$$

ονομάζεται **συνάρτηση Βήτα**.

Η θεμελιώδης ταυτότηα για την συνάρτηση Βήτα είναι

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

από την οποία συμπεραίνουμε ότι όλες οι ιδιότητες της συνάρτησης Βήτα εξαρτώνται απο την συνάρτηση Γαμμα.

Ορισμός B.1.3. Για $\alpha \in \mathbb{R}$ και $m \in \mathbb{N}_0$ ο γενικευμένος διωνυμικός συντελεστής ορίζεται να είναι

$$\binom{\alpha}{m} := \prod_{j=0}^{m-1} \frac{a-j}{m-j}. \tag{B.2}$$

Ορισμός B.1.4. Για $\alpha \in (0,\infty)$ και $m \in \mathbb{N}_0$, από τις ιδιότητες της συνάρτησης Γάμμα ισχύει

$$\binom{a+m-1}{m} = \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!} \tag{B.3}$$

Απόδειξη. Για $\alpha \in (0,\infty)$ και $m \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\binom{a+m-1}{m} &= \prod_{j=0}^{m-1} \frac{a+m-1-j}{m-j} = \frac{a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots m} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot a\cdot(a+1)\dots(a+m-1)}{1\cdot 2\cdots(a-1)\cdot m!} = \frac{(a+m-1)!}{(a-1)!\cdot m!} \\ &= \frac{\Gamma(a+m)}{\Gamma(a)m!}.\end{aligned}$$

όπου η πρώτη ισότητα είναι συνέπεια του ορισμού του διωνυμικου συντελεστή και η τελευταία απο την ιδιότητα (B.1) της συνάρτησης Γάμμα. □

Ορισμός B.1.5. Έστω (Ω, Σ, P) ένας χ.π. Για μια τ.μ Χ: $\Omega \to \mathbb{R}$ η συνολοσυνάρτηση $P_X : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}$ με τύπο

$$P_X(B) := P(X^{-1}(B)) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

είναι ένα μέτρο πιθανότητας και ονομάζεται **κατανομή πιθανότητας της τ.μ. X**. Μάλιστα, αν υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $P_X(\{x\}) = 1$, τότε η P_X ονομάζεται **εκφυλισμένη κατανομή (πιθανότητας)** (degenerate (probability) distribution).

Η P_X (αντίστοιχα η τ.μ. X) παράγει την **συνάρτηση κατανομής** (*σ.κ.*) $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ **της τ.μ.** X, που ορίζεται από τον τύπο:

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) = P(X \leqslant x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Από Πρόταση 1.4.9, [3], αποδεικνύεται πως η F_X είναι πράγματι *σ.κ.* Αξίζει να σημειωθεί επίσης πως η *σ.κ.* F_X μιας τ.μ. Χ ικανοποιεί τη σχέση:

$$P_X(B) = P(X \in B) = \lambda_{F_X}(B) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}, B \in \mathfrak{B}.$$

όπου $\lambda_{F_X}(B)$ είναι μέτρο Lebesgue-Stieltjes που επάγεται από την F_X (βλ. π.χ [3], Πρόταση 1.4.10).

Μια (σ.κ.) $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται:

- **Διακριτή** αν και μόνο αν είναι της μορφής

$$F(x) = \sum_{k \in K : k \leqslant x} f(k) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R}$$

  για κάποιο αριθμήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}$ και για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}_+$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πιθανότητας** (σ.π.) της F.

- **Συνεχής** αν η F είναι συνεχής συνάρτηση.

- **Απόλυτα Συνεχής** αν είναι της μορφής:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R},$$

  για κάποια Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ με την ιδιότητα $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$. Η f ονομάζεται με τη σειρά της **συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας** (σ.π.π.).

Προφανώς, αν η τ.μ. X είναι απόλυτα συνεχής, τότε θα είναι και συνεχής. Επειδή στην παρούσα εργασία θα ασχοληθούμε μόνο με (διακριτές και) απόλυτα συνεχείς τ.μ., στο εξής γράφοντας συνεχής τ.μ. θα εννοούμε απόλυτα συνεχής τ.μ. Επίσης θα λέμε ότι η τ.μ. X με σύνολο τιμών R_X ακολουθεί την κατανομή $\mathbf{K}(\theta)$ με παραμετρικό διάνυσμα $\theta := (\theta_1, \ldots, \theta_m) \in \Theta$, όπου $m \in \mathbb{N}$ και $\Theta \subseteq \mathbb{R}^m$, και θα συμβολίζουμε για το αντίστοιχο μέτρο πιθανότητας $P_X = \mathbf{K}(\theta)$ αν και μόνο αν

$$P_X(B) = \int_B f_X(x)\chi_{R_X} d\nu(x) = \int_{B \cap R_X} f_X(x) d\nu(x) \quad \text{για κάθε} \quad B \in \mathfrak{B}$$

όπου f_X η αντίστοιχη σ.(π.)π., και ν το αριθμητικό μέτρο επάνω στο $\mathbb{N}_0$ ή το μέτρο του Lebesgue λ επάνω στο $\mathbb{R}$ ανάλογα με το αν η τ.μ. X είναι συνεχής ή διακριτή.
Αν η τ.μ. X είναι διακριτή, τότε το ολοκλήρωμα γίνεται άθροισμα ή σειρά, ανάλογα με το αν το R_X είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, αντίστοιχα.

Ορισμός Β.1.6. Για μια τ.μ. $X : \Omega \to \mathbb{R}$ το ολοκλήρωμα

$$\mathbb{E}_P[X] := \int X dP = \int_\Omega X(\omega) P(d\omega) = \int_\Omega X(\omega) dP(\omega)$$

ονομάζεται η **μέση τιμή** ή **αναμενόμενη τιμή** ή **μαθηματική ελπίδα** της τ.μ. X. Για λόγους απλοποίησης μπορούμε να γράψουμε $\mathbb{E}[X]$ αντί $\mathbb{E}_P[X]$. Ειδικά αν η τ.μ. $X \in \mathcal{L}^1(P)$ τότε η $\mathbb{E}[X] \in \mathbb{R}$, και είναι ένας αριθμός.

Ορισμός B.1.7. Έστω (Ω, Σ, P) και (Υ, T, Q) χ.π. Ένα $R \subseteq \Omega \times \Upsilon$ ονομάζεται **μετρήσιμο ορθογώνιο του** $\Omega \times \Upsilon$ αν γράφεται $R = A \times B$, όπου $A \in \Sigma$ και $B \in T$. Επιπρόσθετα, η σ-άλγεβρα που παράγεται από την οικογένεια των μετρήσιμων ορθογωνίων λέγεται **σ-άλγεβρα γινόμενο** των Σ και T και συμβολίζεται με $\Sigma \otimes T$.

Έστω επίσης ο χ.π. $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, \rho)$. Το μέτρο ρ ονομάζεται **μέτρο γινόμενο των P και Q** και συμβολίζεται με $P \otimes Q$, αν και μόνο αν για κάθε $A \in \Sigma$ και $B \in T$ ικανοποιεί την ιδιότητα $\rho(A \times B) = P(A)Q(B)$. Η τριάδα $(\Omega \times \Upsilon, \Sigma \otimes T, P \otimes Q)$ ονομάζεται **χ.π. γινόμενο**.

Ορισμός B.1.8. Εάν I είναι ένα οποιοδήποτε μή κενό σύνολο δεικτών, και $\{\Omega_i, \Sigma_i, P_i\}_{i \in I}$ είναι μια οικογένεια χ.π., τότε για κάθε $\varnothing \neq J \subseteq I$ συμβολίζουμε με $(\Omega_J, \Sigma_J, P_J)$ τον χ.π. γινόμενο $\otimes_{i \in J}(\Omega_i, \Sigma_i, P_i) := (\prod_{i \in J} \Omega_i \otimes_{i \in J} \Sigma_i \otimes_{i \in J} P_i)$. Αν (Ω, Σ, P) είναι ένας χ.π. συμβολίζουμε με P^I την **πιθανότητα γινόμενο** στον Ω^I και με Σ^I το πεδίο ορισμού του P^I.

Ορισμοί B.1.9. Τα ενδεχόμενα $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma \quad (n \in \mathbb{N}_0 : n \geqslant 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητα** αν και μόνο αν $P\left(\bigcap_{j=1}^{k} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} P(A_{i_j})$ για κάθε $1 \leqslant i_1 \leqslant \cdots \leqslant i_k \leqslant n$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ομοίως, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n : \Omega \to \mathbb{R} \quad (n \in \mathbb{N}_0 : n \geqslant 2)$ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ πραγματικών αριθμών, τα ενδεχόμενα $\{X_k \leqslant \alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα. Ισοδύναμα, οι τ.μ. $X_1, \ldots, X_n$ είναι ανεξάρτητες αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ στοιχείων της $\mathfrak{B}$ τα ενδεχόμενα $\{X_k \in B_k\}_{k \in \mathbb{N}_n}$ είναι ανεξάρτητα (βλ. π.χ.[3, Παρατήρηση 3.2.5], (b)). Ακόμη πιο γενικά, μια άπειρη οικογένεια τ.μ. ονομάζεται **ανεξάρτητη** αν και μόνο αν κάθε πεπερασμένη υποοικογένειά της είναι ανεξάρτητη.

Οι σ-υποάλγεβρες $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n \quad (n \in \mathbb{N}_0 : n \geqslant 2)$ της Σ ονομάζονται **ανεξάρτητες** αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}_n$ και για κάθε $A_k \in \Sigma_k$ τα $A_1, \ldots, A_n$ είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Γενικότερα, μια άπειρη οικογένεια σ-υποαλγεβρών της Σ ονομάζεται **οικογένεια ανεξάρτητων σ-υποαλγεβρών της** Σ αν και μόνο αν οποιεσδήποτε και οσεσδήποτε πεπερασμένες στο πλήθος από αυτές, είναι ανεξάρτητες.

Ορισμός B.1.10. Μια σ.δ. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ τ.μ. $X_t : \Omega \longmapsto \Upsilon$:

- Είναι μια ***σ.δ.* ανεξάρτητων προσαυξήσεων** ή έχει **ανεξάρτητες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ ώστε $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_m$ οι **προσαυξήσεις** $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ $(j \in \mathbb{N}_m)$ είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες.

- Είναι μια ***σ.δ.* στάσιμων προσαυξήσεων** ή έχει **στάσιμες προσαυξήσεις** αν και μόνο αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}_+$ και $t_0, t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}_+$ τέτοια ώστε $0 = t_0 <$

$t_1 < \cdots < t_m$ η οικογένεια των προσαυξήσεων $\{X_{t_j+h} - X_{t_{j-1}+h}\}_{j\in\mathbb{N}_m}$, έχει την ίδια κατανομή με την $\{X_{t_j} - X_{t_{j-1}}\}_{j\in\mathbb{N}_m}$.

Συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\xi} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **το μέτρο απαρίθμησης** που συγκεντρώνεται στο $\mathbb{N}_0$, και με $\boldsymbol{\lambda} : \mathfrak{B} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ **το μέτρο Lebesgue**. Τα μέτρα αυτά είναι σ-πεπερασμένα, και τα πιο σημαντικά μέτρα πιθανότητας με πεδίο ορισμού την $\mathfrak{B}$ είναι απόλυτα συνεχή με τα $\boldsymbol{\xi}$ και $\boldsymbol{\lambda}$.

Για $n \in \mathbb{N}_0$, συμβολίζουμε με $\boldsymbol{\lambda}^n : \mathfrak{B}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ το n-διάστατο μέτρο Lebesgue.

B.2 Γενικές έννοιες στις κατανομές

Ένα μέτρο πιθανότητας $Q : \mathfrak{B}_n \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **κατανομή** (distribution).

Μια κατανομή ονομάζεται **εκφυλισμένη** (degenerate) αν υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Στην συνέχεια του παρόντος παραρτήματος θεωρούμε μόνο κατανομές με πεδίο ορισμού το $\mathfrak{B}$.

Για $y \in \mathbb{R}$, η **κατανομή Dirac** δ_y ορίζεται να είναι η (εκφυλισμένη) κατανομή Q που ικανοποιεί την

$$Q(\{y\}) = 1.$$

Λόγω του ιδιαίτερου ρόλου της κατανομής Dirac, όλες οι παραμετρικές κλάσεις των κατανομών που μελετούνται παρακάτω ορίζονται ως μη-εκφυλισμένες κατανομές.

Θεωρούμε τις κατανομές $Q, R : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$.

Μέση Τιμή και Ροπές ανώτερης τάξης

Ορισμός B.2.1. Αν

$$\min\left\{\int_{(-\infty,0]} (-x)Q(dx), \int_{\mathbb{R}_+} xQ(dx)\right\} < \infty,$$

τότε **η μέση τιμή** της Q υπάρχει και ορίζεται από την σχέση

$$E[Q] := \int_{\mathbb{R}} xQ(dx).$$

Αν

$$\max\left\{\int_{(-\infty,0]} (-x)Q(dx), \int_{\mathbb{R}_+} xQ(dx)\right\} < \infty,$$

ή ισοδύναμα

$$\int_{\mathbb{R}} |x|Q(dx) < \infty$$

τότε η μέση τιμή της Q υπάρχει και ονομάζεται **πεπερασμένη μέση τιμή**.

Ορισμός Β.2.2. Αν για κάποιο $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty,$$

τότε λέμε ότι η Q έχει **πεπερασμένη ροπή τάξης n** ή έχει **n−οστή ροπή** που ορίζεται από την σχέση

$$E[Q^n] = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx).$$

Η κατανομή Q λέμε ότι έχει πεπερασμένες ροπές τάξης k αν η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^n Q(dx) < \infty$$

ισχύει για όλα τα $n \in \mathbb{N}_0$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι αν η Q έχει πεπερασμένη ροπή τάξης n, τότε έχει πεπερασμένη ροπή τάξης k για όλα τα $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Διακύμανση και Συντελεστής μεταβλητότητας

Ορισμός Β.2.3. Αν η Q έχει πεπερασμένη μέση τιμή, τότε **η διακύμανση** της Q ορίζεται να είναι

$$Var[Q] := \int_{\mathbb{R}} (x - E[Q])^2 Q(dx).$$

Προφανώς ισχύει

$$Var[Q] = E[Q^2] - E[Q]^2.$$

Ορισμός Β.2.4. Αν για την Q ισχύει ότι $Q[\mathbb{R}_+ = 1$ και $E[Q] \in (0, \infty)$,τότε **ο συντελεστής μεταβλητότητας** της Q ορίζεται από την σχέση

$$v[Q] := \frac{\sqrt{Var[Q]}}{E[Q]}.$$

Χαρακτηριστική συνάρτηση

Ορισμός Β.2.5. Η χαρακτηριστική συνάρτηση ή **ο μετασχηματισμός Fourier** της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $\varphi_Q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ που δίνεται από την

$$\varphi_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{izx} Q(dx)$$

με $\varphi_Q(0) = 1$.

Ένα αποτέλεσμα των μετασχηματισμών Fourier είναι ότι η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την χαρακτηριστική της συνάρτηση φ_Q.

Ροπογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός B.2.6. Η ροπογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $M_Q : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty]$ που δίνεται από την

$$M_Q(z) := \int_{\mathbb{R}} e^{zx} Q(dx)$$

με $M_Q(0) = 1$.

Αν η ροπογεννήτρια συνάρτηση της Q είναι πεπερασμένη σε μια περιοχή γύρω από το μηδέν, τότε η Q έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης και για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\frac{d^n M_Q}{dz^n}(0) = \int_{\mathbb{R}} x^n Q(dx). \tag{B.4}$$

Πιθανογεννήτρια συνάρτηση

Ορισμός B.2.7. Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$ τότε **η πιθανογεννήτρια συνάρτηση** της κατανομής Q ορίζεται ως η συνάρτηση $m_Q : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ που δίνεται από την

$$\begin{aligned} m_Q(z) \;&:=\; \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx) \\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty} z^n Q[\{n\}]. \end{aligned}$$

Επειδή για κάθε $n \in \mathbb{N}_0$ ισχύει

$$\frac{1}{n!} \frac{d^n m_Q}{dz^n}(0) = Q[\{n\}], \tag{B.5}$$

η κατανομή Q είναι μονοσήμαντα ορισμένη απο την πιθανογεννήτρια συνάρτησή της m_Q.

Πρόταση B.2.8. *Έστω ότι $Q[\mathbb{N}_0] = 1$. Τότε οι δύο πρώτες ροπές της κατανομής Q υπολογίζονται άμεσα από την πιθανογεννήτρια συνάρτηση σύμφωνα με τις σχέσεις*

$$E[Q] = \frac{d}{dz} m_Q(z) \Big|_{z=1} \tag{B.6}$$

$$E[Q^2] = \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z) \Big|_{z=1} + \frac{d}{dz} m_Q(z) \Big|_{z=1} \tag{B.7}$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με τον Ορισμό B.2.7 ισχύει

$$m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} z^x Q(dx)$$

επομένως αν παραγωγίσουμε ως προς z θα ισχύει

$$\frac{d}{dz} m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} x z^{x-1} Q(dx)$$

άρα για $z = 1$ θα έχουμε ότι

$$\frac{d}{dz} m_Q(z)\Big|_{z=1} = \int_{\mathbb{R}} xQ(dx) = E[Q].$$

Αν βρούμε και την δεύτερη παράγωγο της πιθανογεννήτριας συνάρτησης ως προς z θα ισχύει

$$\frac{d^2}{dz^2} m_Q(z) = \int_{\mathbb{R}} x(x-1)z^{x-2}Q(dx)$$

άρα για $z = 1$ θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\Big|_{z=1} &= \int_{\mathbb{R}} x(x-1)Q(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} x^2 Q(dx) - \int_{\mathbb{R}} xQ(dx) \\ &= E[Q^2] - E[Q] \end{aligned}$$

επομένως για την δεύτερη ροπή θα ισχύει

$$\begin{aligned} E[Q^2] &= \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\Big|_{z=1} + E[Q] \\ &= \frac{d^2}{dz^2} m_Q(z)\Big|_{z=1} + \frac{d}{dz} m_Q(z)\Big|_{z=1} \end{aligned}$$

□

Συνέλιξη

Ορισμός B.2.9. Αν η $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ είναι μια απεικόνιση με $+(x, y) := x + y$, τότε η

$$Q * R := (Q \otimes R)_+$$

είναι μια κατανομή, η οποία ονομάζεται **συνέλιξη** των Q και R. Ομοίως, ορίζεται και η συνέλιξη δύο σ.κ.π. F, G ή δύο σ.(π.)π. f, g.

Οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι άμεσες συνέπειες του Ορισμού B.2.9 και του Θεωρήματος Fubini για μέτρα βλ. Θεώρημα A.1.4.

Πρόταση B.2.10. *Η ισότητα*

$$(Q * R)(B) = \int_{\mathbb{R}} Q(B - y)R(dy)$$

ισχύει για κάθε $B \in \mathfrak{B}$. Ιδιαιτέρως ισχύει

$$(Q * \delta_y)(B) = (\delta_y * Q)(B) = Q(B - y)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και $b \in \mathfrak{B}$.

Απόδειξη. Έστω $B \in \mathfrak{B}$. Τότε

$$\begin{aligned}
(Q * R)(B) &= (Q \otimes R)_+(B) \\
&= (Q \otimes R)(\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \in B\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} Q(\{x \in \mathbb{R} : x \in B - y\}) R(dy) \\
&= \int_{\mathbb{R}} Q(B - y) R(dy),
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος A.1.4.

Ιδιαιτέρως για οποιαδήποτε $y \in \mathbb{R}$ και $B \in \mathfrak{B}$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
(Q * \delta_y)(B) &= (\delta_y * Q)(B) \\
&= (Q \otimes \delta_y)_+(B) \\
&= Q \otimes \delta_y(\{(x, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2 : x + \bar{y} \in B\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}} Q(B - \bar{y}) \delta_y(d\bar{y}) \\
&= Q(B - y),
\end{aligned}$$

όπου η πρώτη και η τέταρτη ισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος A.1.4. □

Πρόταση B.2.11. *Η συνέλιξη ικανοποιεί τις ισότητες*

$$Q * R = R * Q$$

$$\varphi_{Q*R} = \varphi_Q \cdot \varphi_R$$

$$M_{Q*R} = M_Q \cdot M_R$$

Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1 = R[\mathbb{N}_0]$, *τότε ισχύει*

$$m_{Q*R} = m_Q \cdot m_R.$$

Πρόταση B.2.12. *Αν οι κατανομές* Q *και* R *έχουν πεπερασμένη μέση τιμή τότε ισχύει*

$$E[Q * R] = E[Q] + E[R]$$

και αν επιπλέον έχουν και πεπερασμένες δεύτερες ροπές τότε

$$Var[Q * R] = Var[Q] + Var[R].$$

Απόδειξη. Σύμφωνα με την Πρόταση B.2.12 για την ροπογεννήτρια της $Q * R$ ισχύει $M_{Q*R} = M_Q \cdot M_R$. Επιπλέον από την B.4 ισχύει ότι

$$E[Q * R] = \frac{dM_{Q*R}}{dz}(0), \quad \mathbb{E}[(Q * R)^2] = \frac{d^2 M_{Q*R}}{dz^2}(0).$$

Επομένως θα ισχύει

$$M'_{Q*R}(z) = \Big(M_Q(z) \cdot M_R(z)\Big)' = M'_Q(z)M_R(z) + M_Q(z)M'_R(z)$$
$$M''_{Q*R}(z) = \Big(M_Q(z) \cdot M_R(z)\Big)'' = M''_Q(z)M_R(z) + 2M'_Q(z)M'_R(z) + M_Q(z)M''_R(z)$$

και άρα θα ισχύει

$$E[Q*R] = M'_{Q*R}(0) \overset{(??)}{=} E[Q] + E[R]$$
$$\mathbb{E}[(Q*R)^2] = M''_{Q*R}(0) \overset{(??)}{=} E[Q^2] + 2E[Q]E[R] + E[R^2].$$

Επομένως για την διακύμανση θα ισχύει

$$\begin{aligned} Var[Q*R] &= \mathbb{E}[(Q*R)^2] - E[Q*R]^2 \\ &= E[Q^2] + 2E[Q]E[R] + E[R^2] - E[Q]^2 - 2E[Q]E[R] - E[R]^2 \\ &= E[Q^2] - E[Q]^2 + E[R^2] - E[R]^2 \\ &= Var[Q] + Var[R] \end{aligned}$$

□

Πρόταση B.2.13. *Αν $Q = \int f\, d\nu$ και $R = \int g\, d\nu$ για $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, τότε $Q * R = \int f * g\, d\nu$, όπου η απεικόνιση $f * g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ορίζεται*

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\nu(dy).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση B.2.10, για κάθε $B \in \mathfrak{B}$ θα ισχύει

$$\begin{aligned} [Q*R](B) &= \int_{\mathbb{R}} Q[B-y]R(dy) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{B-y} f(x)\nu(dx)\ g(y)\nu(dy) \end{aligned}$$

□

Ορισμός B.2.14. Για $n \in \mathbb{N}_0$, η n-οστή συνέλιξη της Q όριζεται από την σχέση

$$Q^{*n} := \begin{cases} \delta_0, & \text{αν } n = 0 \\ Q * Q^{*(n-1)}, & \text{αν } n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Αν η $Q = \int f\, d\nu$, για $\nu \in \{\xi, \lambda\}$, τότε η συνάρτηση πιθανότητας της Q^{*n} ως προς το μέτρο ν συμβολίζεται f^{*n}.

B.3 Διακριτές κατανομές

Ορισμός B.3.1. Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **διακριτή**, αν υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $S \in \mathfrak{B}$ που ικανιποιεί την $Q[S] = 1$. Αν $Q[\mathbb{N}_0] = 1$, τότε η Q είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο απαρίθμισης $\boldsymbol{\xi}$.

Η διωνυμική κατανομή

Ορισμός B.3.2. Για $m \in \mathbb{N}_0$ και $\theta \in (0,1)$, η **διωνυμική κατανομή** $\mathbf{B}(m,\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \{0,1,\ldots,m\}$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \binom{m}{x}\theta^x(1-\theta)^{m-x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = m\theta$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = m\theta(1-\theta)$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \big((1-\theta)+\theta e^{iz}\big)^m$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = ((1-\theta)+\theta e^z)^m$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = ((1-\theta)+\theta z)^m$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Bernoulli** με $\mathbf{B}(\theta) := \mathbf{B}(1,\theta)$

Η αρνητική διωνυμική κατανομή

Ορισμός B.3.3. Για $\alpha \in (0,\infty)$ και $\theta \in (0,1)$, **η αρνητική διωνυμική κατανομή** $\mathbf{NB}(\alpha,\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση

$$Q[\{x\}] = \binom{\alpha+x-1}{x}\theta^\alpha(1-\theta)^x.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \alpha\frac{1-\theta}{\theta}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \alpha\frac{1-\theta}{\theta^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^{iz}}\right)^{\alpha}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)e^{z}}\right)^{\alpha} \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(1-\theta))$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = \left(\frac{\theta}{1-(1-\theta)z}\right)^{\alpha}$$

Ειδική περίπτωση: **Η κατανομή Pascal** με $\mathbf{NB}(m,\theta)$ για $m \in \mathbb{N}_0$.

Η κατανομή Poisson

Ορισμός B.3.4. Για $\alpha \in (0,\infty)$, **η κατανομή Poisson** $\mathbf{P}(\alpha)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση
$$Q[\{x\}] = e^{-\alpha}\frac{\alpha^x}{x!}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \alpha$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \alpha$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = e^{\alpha(e^{iz}-1)}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = e^{\alpha(e^{z}-1)}$$

- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = e^{\alpha(z-1)}$$

Η κατανομή Delaporte

Ορισμός B.3.5. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ και $\theta \in (0, 1)$, **η κατανομή Delaporte** $\mathbf{Del}(\alpha, \beta, \theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή
$$Q := \mathbf{P}(\alpha) * \mathbf{NB}(\beta, \theta).$$

Η γεωμετρική κατανομή

Ορισμός B.3.6. Για $m \in \mathbb{N}_0$ και $\theta \in (0, 1)$, **η γεωμετρική κατανομή** $\mathbf{Geo}(m, \theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή
$$Q := \boldsymbol{\delta}_m * \mathbf{NB}(m, \theta).$$

Ειδική περίπτωση: **Η μονο-παραμετρική γεωμετρική κατανομή** με $\mathbf{Geo}(\theta) := \mathbf{Geo}(1, \theta)$

Η λογαριθμική κατανομή

Ορισμός B.3.7. Για $\theta \in (0, 1)$, **η λογαριθμική κατανομή** $\mathbf{Log}(\theta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή Q που για κάθε $x \in \mathbb{N}_0$ ικανοποιεί την σχέση
$$Q[\{x\}] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta^x}{x}.$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \frac{1}{|\ln(1-\theta)|}\frac{\theta}{1-\theta}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{|\ln(1-\theta)| - \theta}{|\ln(1-\theta)|^2}\frac{\theta}{(1-\theta)^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{iz})}{\ln(1-\theta)}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta e^{z})}{\ln(1-\theta)}, \quad \forall z \in (-\infty, -\ln(\theta))$$
- Πιθανογεννήτρια συνάρτηση:
$$m_Q(z) = \frac{\ln(1-\theta z)}{\ln(1-\theta)}$$

B.4 Συνεχείς κατανομές

Ορισμός B.4.1. Μια κατανομή $Q : \mathfrak{B} \longrightarrow [0,1]$ ονομάζεται **συνεχής**, αν είναι απόλυτα συνεχής ως προς το μέτρο Lebesgue $\boldsymbol{\lambda}$.

Η κατανομή Βήτα

Ορισμός B.4.2. *Για* $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, **η κατανομή Βήτα** $\mathbf{Be}(\alpha, \beta)$ *ορίζεται να είναι η κατανομή*

$$Q := \int \frac{1}{B(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\chi_{(0,1)}(x)\boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}$$

Ειδική περίπτωση: **Η ομοιόμορφη κατανομή** $\mathbf{U}(0,1) := \mathbf{Be}(1,1)$.

Η κατανομή Γάμμα (Δύο παραμέτρων)

Ορισμός B.4.3. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, **η κατανομή Γάμμα** $\mathbf{Ga}(\alpha, \beta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή

$$Q := \int \frac{\alpha^{\beta}}{\Gamma(\beta)} e^{-\alpha x} x^{\beta-1}\chi_{(0,\infty)}(x)\boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βασικά μεγέθη κατανομής:

- Μέση τιμή:
$$E[Q] = \frac{\beta}{\alpha}$$
- Διακύμανση:
$$Var[Q] = \frac{\beta}{\alpha^2}$$
- Χαρακτηριστική συνάρτηση:
$$\varphi_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - iz}\right)^{\beta}$$
- Ροπογεννήτρια συνάρτηση:
$$M_Q(z) = \left(\frac{\alpha}{\alpha - z}\right)^{\beta} \quad \forall z \in (-\infty, \alpha)$$

Ειδικές περιπτώσεις:

- **Η κατανομή Erlang** $\mathbf{Ga}(\alpha, m)$, με $m \in \mathbb{N}_0$.
- **Η εκθετική κατανομή** $\mathbf{Exp}(\alpha) := \mathbf{Ga}(\alpha, 1)$.
- **Η $\boldsymbol{\chi^2}$ κατανομή** $\chi^2_m := \mathbf{Ga}(\frac{1}{2}, \frac{m}{2})$, με $m \in \mathbb{N}_0$.

Η κατανομή Γάμμα (Τριών παραμέτρων)

Ορισμός B.4.4. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$ και $\gamma \in \mathbb{R}$, **η κατανομή Γάμμα** $\mathbf{Ga}(\alpha, \beta, \gamma)$ ορίζεται να είναι η κατανομή
$$Q := \boldsymbol{\delta}_\gamma * \mathbf{Ga}(\alpha, \beta).$$

Ειδική περίπτωση: Η κατανομή Γάμμα με δυο παραμέτρους $\mathbf{Ga}(\alpha, \beta) = \mathbf{Ga}(\alpha, \beta, 0)$.

Η κατανομή Pareto

Ορισμός B.4.5. Για $\alpha, \beta \in (0, \infty)$, **η κατανομή Pareto** $\mathbf{Par}(\alpha, \beta)$ ορίζεται να είναι η κατανομή
$$Q := \int \frac{\beta}{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha + x} \right)^{\beta+1} \chi_{0,\infty}(x) \boldsymbol{\lambda}(dx).$$

Βιβλιογραφία

[1] Ερμίδης,Ι. (2016), *Μεικτές κατανομές Hoffmann και Εφαρμογές στον Αναλογισμό*, Διπλωματική Εργασία,Πανεπιστήμιο Πειραιώς, ΜΑΕ.

[2] Λυμπερόπουλος, Δ.Π. (2006), *Martingales στη Θεωρία Κινδύνου με Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία, Πανεπιστήμιο Πειραιώς,Τμήμα ΣΑΕ, ΜΕΣ.

[3] Μαχαιράς, Ν.Δ. (2006), *Σημειώσεις Στοχαστικής Ανάλυσης*, Πανεπιστήμιο Πειραιώς.

[4] Μπότση, Α. (2013), *Μελέτη Στοχαστικών Διαδικασιών με Υποσηνθήκη Στάσιμες και Ανεξάρτητες Προσαυξήσεις και Εφαρμογές στα Χρηματοοικονομικά*, Διπλωματική Εργασία,Πανεπιστήμιο Πειραιώς, Τμήμα ΣΑΕ, ΜΕΣ.

[5] Albrecht, P. (1981) *Über einige Eigenshaften des gemischten Poissonprozesses*, Mitt. Ver. Schweiz. Vers. Math. 81, 241–250.

[6] Cohn, D.L., (2013), *Measure Theory, 2nd edition*, Birkhäuser Advanced Texts.

[7] Faden, A.M. (1985), *The existence of regular conditional probabilities: Necessary and sufficient conditions*, Ann. Probab. 13, 288-298.

[8] Fremlin, D.H. (2003), *Measure Theory, Volume 4*, Edit. T.Fremlin.

[9] Pachl, J.K. (1978), *Disintegration and compact measures*, Math. Scand. 43, 157-168.

[10] Gnedenko, B.V. and Kolmogorov, A.N (1949), *Limit Distribution for Sums of Indepedent Random Variables*, Addison-Wesley, Cambridge, 1954, originally published 1949.

[11] Huang, W.J. (1990), *On the Characterization of Point Processes with Exchangeable and Markov Properties*, Sankhya 52A, 16-27.

[12] Lyberopoulos, D.P. and Macheras, N.D. (2012), *Some characterizations of mixed Poisson processes*, Sankhya, 74A, 57-79.

[13] Lyberopoulos, D.P. and Macheras, N.D. (2013), *A construction of mixed Poisson Processes via Disintegrations*, Math. Slovaca 63, 167-182.

[14] Lyberopoulos, D.P. and Macheras, N.D. (2014), *Some characterizations of mixed renewall processes*, arXiv, http://arxiv.org/pdf/1205.4441v4.pdf

[15] Lyberopoulos, D.P. Macheras, N.D. and Tzaninis, S.M., H. (2017), *On the equivalence of various definitions of mixed Poisson processes*, 20 pages to appear in Math. Slovaca.

[16] Macheras N.D. and Tzaninis S.M., H. (2017), *Some characterizations for Markov processes as mixed renewall processes*, to appear in Math. Slovaca.

[17] Ramachandran, D. (1979), *Perfect Measures, Part I. and II.*, MacMillan, Delhi.

[18] Ryll-Nardzewski, C. (1953), *On quasi-compact measures. Fund. Math.*, 40 125-130.

[19] Sazonov, V.V. (1965), *On perfect measures*, Amer. Math. Soc. Transl. Series 2 48 229-254.

[20] Schmidt, K.D. (1996), *Lectures on Risk Theory*, B.G. Teubner, Stuttgart.

[21] Strauss, W., Macheras, N.D. and Musial, K. : *Splitting of liftings in products of probability spaces*, Ann. Probab. **32** (No. 3B), pp. 2389-2408 (2004).

[22] Schmidt, K.D. and Zocher, M. : *Claim Number Processes having the Multinomial Property* (2011).

[23] Zocher, M., (2005), *Multivariate Mixed Poisson Processes*, Doctorand Thesis, Technische Universität Dresden.

Ευρετήριο Όρων

Ευρετήριο Συμβόλων